COMPENDIUM REOIM

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

Gerard Romo Garrido

Toomates Coolección vol. 61

Toomates Coolección

Los libros de **Toomates** son materiales digitales y gratuitos. Son digitales porque están pensados para ser consultados mediante un ordenador, tablet o móvil. Son gratuitos porque se ofrecen a la comunidad educativa sin coste alguno. Los libros de texto pueden ser digitales o en papel, gratuitos o en venta, y ninguna de estas opciones es necesariamente mejor o peor que las otras. Es más: Suele suceder que los mejores docentes son los que piden a sus alumnos la compra de un libro de texto en papel, esto es un hecho. Lo que no es aceptable, por inmoral y mezquino, es el modelo de las llamadas "**licencias digitales**" con las que las editoriales pretenden cobrar a los estudiantes, una y otra vez, por acceder a los mismos contenidos (unos contenidos que, además, son de una bajísima calidad). Este modelo de negocio es miserable, pues impide el compartir un mismo libro, incluso entre dos hermanos, pretende convertir a los estudiantes en un mercado cautivo, exige a los estudiantes y a las escuelas costosísimas líneas de Internet, pretende pervertir el conocimiento, que es algo social, público, convirtiéndolo en un producto de propiedad privada, accesible solo a aquellos que se lo puedan permitir, y solo de una manera encapsulada, fragmentada, impidiendo el derecho del alumno de poseer todo el libro, de acceder a todo el libro, de moverse libremente por todo el libro.
Nadie puede pretender ser neutral ante esto: Mirar para otro lado y aceptar el modelo de licencias digitales es admitir un mundo más injusto, es participar en la denegación del acceso al conocimiento a aquellos que no disponen de medios económicos, y esto en un mundo en el que las modernas tecnologías actuales permiten, por primera vez en la historia de la Humanidad, poder compartir el conocimiento sin coste alguno, con algo tan simple como es un archivo "pdf". **El conocimiento no es una mercancía**.
El proyecto Toomates tiene como objetivo la promoción y difusión entre el profesorado y el colectivo de estudiantes de unos materiales didácticos libres, gratuitos y de calidad, que fuerce a las editoriales a competir ofreciendo alternativas de pago atractivas aumentando la calidad de unos libros de texto que actualmente son muy mediocres, y no mediante retorcidas técnicas comerciales.
 Todos los libros se ofrecen en dos versiones: En formato "**pdf**" para una cómoda lectura y en el formato "**doc**" de MSWord para permitir y facilitar su edición y generar versiones parcial o totalmente modificadas.

¡Libérate de la tiranía y mediocridad de las editoriales! Crea, utiliza y comparte tus propios materiales didácticos

Toomates Coolección **Problem Solving** (en español):
Geometría Axiomática , Problemas de Geometría 1 , Problemas de Geometría 2
Introducción a la Geometría , Álgebra , Teoría de números , Combinatoria , Probabilidad
Trigonometría , Desigualdades , Números complejos , Funciones

Toomates Coolección **Llibres de Text** (en catalán):
Nombres (Preàlgebra) , Àlgebra , Proporcionalitat , Mesures geomètriques , Geometria analítica
Combinatòria i Probabilitat , Estadística , Trigonometria , Funcions , Nombres Complexos ,
Àlgebra Lineal , Geometria Lineal , Càlcul Infinitesimal , Programació Lineal , Mates amb Excel

Toomates Coolección **Compendiums**:
Ámbito PAU: Catalunya TEC Cat CCSS Valencia Galicia País Vasco Portugal A B Italia UK
Ámbito Canguro: ESP CAT FR USA UK AUS
Ámbito USA: Mathcounts AMC 8 10 12 AIME USAJMO USAMO TSTST TST Putnam
Ámbito español: OME OMEFL OMEC OMEA OMEM CDP
Ámbito internacional: IMO OMI IGO SMT INMO CMO REOIM Arquimede HMMT BMO
Ámbito Pruebas acceso: ACM4 , CFGS , PAP
Recopilatorios Pizzazz!: Book A Book B Book C Book D Book E Pre-Algebra Algebra
Recopilatorios AHSME: Book 1 Book 2 Book 3 Book 4 Book 5 Book 6 Book 7 Book 8 Book 9

¡Genera tus propias versiones de este documento! Siempre que es posible se ofrecen las versiones editables "MS Word" de todos los materiales, para facilitar su edición.

¡Ayuda a mejorar! Envía cualquier duda, observación, comentario o sugerencia a **toomates@gmail.com**

¡No utilices una versión anticuada! Todos estos libros se revisan y amplían constantemente. Descarga totalmente gratis la última versión de estos documentos en los correspondientes enlaces superiores, en los que siempre encontrarás la versión más actualizada.

Consulta el **Catálogo de libros** de la biblioteca Toomates Coolección en http://www.toomates.net/biblioteca.htm

Encontrarás muchos más materiales para el aprendizaje de las matemáticas en **www.toomates.net**

Visita mi **Canal de Youtube**: **https://www.youtube.com/c/GerardRomo**

Versión de este documento: **30/11/2023**

Índice.

La Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática ha sido una iniciativa impulsada y desarrollada por el profesor de matemáticas **Francisco Bellot Rosado**, catedrático del I.E.S. "Emilio Ferrari" de Valladolid, una de las figuras más importantes de todo Hispanoamérica en el ámbito de la enseñanza de las matemáticas.

Número

1

LOS TEOREMAS DE PTOLOMEO Y SU GENERALIZACIÓN POR CASEY. **APLICACIONES**

Lección de preparación olímpica

Francisco Bellot Rosado

En las revistas *Gazeta matematica* de Rumania y *Matematika & Informatika*, de Bulgaria, así como en la canadiense *Crux mathematicorum* ([1], [2], [3], [4]), se han publicado, separadamente, artículos muy interesantes en relación con los teoremas de Ptolomeo y sus generalizaciones, con abundantes ejemplos en los que estos resultados se utilizan hábilmente para resolver con patente simplicidad problemas geométricos complicados . El objetivo de esta lección de preparación es divulgarlos , de una manera conjunta .

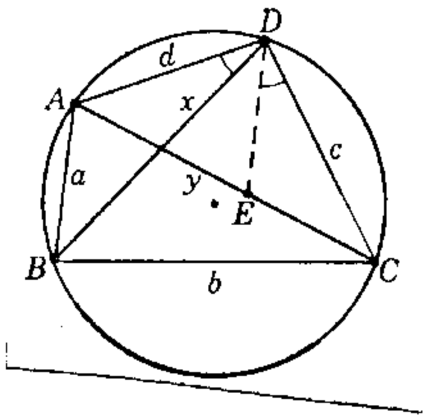
1. El primer teorema de Ptolomeo

Éste es un resultado clásico de geometría de cuadriláteros ; proporciona condiciones necesarias y suficientes para que un cuadrilátero sea cíclico, es decir, se pueda inscribir en una circunferencia; y dice lo siguiente :

En un cuadrilátero cíclico, **el producto de las diagonales es igual a la suma de los productos de pares de lados opuestos**, **y recíprocamente**.

De las diversas demostraciones de este teorema existentes en la bibliografía, damos la siguiente, incluida en el libro *Modern College Geometry*, *de* David R. Davis, Addison-Wesley, 1949 :

Designaremos, como es habitual, $a = AB, b = BC, c = CD, d = DA$ y $x = BD, y = AC$.



Supongamos primero que los puntos A,B,C y D están en una circunferencia. Se construye $\widehat{CDE} = \widehat{ADB}$, con $E \in AC$. Entonces los triángulos CDE y BCD son semejantes, de donde $\frac{a}{EC} = \frac{x}{c}$.

Pero también ADE y BCD son semejantes, así que $\frac{b}{AE} = \frac{x}{d}$.

Como $AE + EC = AC = y$, sustituyendo tenemos

$$\frac{bd}{x} + \frac{ac}{x} = y \Leftrightarrow ac + bd = xy.$$

Recíprocamente, vamos a probar que si $ac + bd = xy$, entonces el cuadrilátero ABCD es cíclico. Se construye $\widehat{CDE} = \widehat{ADB}$ y se determina DE tal que $\frac{x}{c} = \frac{d}{DE}$. Se une el punto E con A y con C. Entonces los triángulos EDC y ADB son semejantes, porque tienen lados proporcionales que comprenden ángulos iguales, y BDC es semejante a ADE.

Entonces

$$\frac{a}{EC} = \frac{x}{c} \Rightarrow \widehat{CED} = A$$
$$\frac{b}{AE} = \frac{x}{d} \Rightarrow \widehat{DEA} = C$$

Sumando, $(AE+EC)x = ac+bd,\ \ \widehat{CED}+\widehat{DEA} = A+C.$

Como $xy = ac+bd,\ xy = (AE+EC)x \Rightarrow y = AC = AE+EC,$ lo cual indica que AEC es una línea recta, lo que implica

$A+C = \widehat{CED}+\widehat{DEA} = 180^{\circ}$ y el cuadrilátero es cíclico.■

Para cuadriláteros no cíclicos la desigualdad se escribe

$$xy < ac+bd$$

de la que hay una demostración muy sencilla usando números complejos.

2.El segundo teorema de Ptolomeo

En las condiciones del teorema anterior, se verifica

$$\frac{y}{x} = \frac{ad+bc}{ab+cd}$$

Demostración : Como $\widehat{ADC}$ y $\widehat{ABC}$ son suplementarios, se verifica

$$\cos\widehat{ABC}+\cos\widehat{ADC} = 0,$$

así que utilizando el teorema del coseno en los respectivos triángulos ABC y ADC , y multiplicando por $2abcd$ para eliminar los denominadores resulta

$$ab(c^2+d^2-y^2)+cd(a^2+b^2-y^2) = 0$$

es decir $ac(bc+ad)+bd(bc+ad) = y^2(ab+cd)$

o bien $y^2(ab+cd) = (ac+bd)(ad+bc)$ (1)

Procediendo de la misma manera en los triángulos DAB y BCD resulta

$$x^2(ad+bc) = (ab+cd)(ac+bd) \quad (2)$$

Multiplicando miembro a miembro (1) y (2) se obtiene el teorema directo de Ptolomeo, mientras que dividiendo miembro a miembro resulta

$$y^2(ab+cd)^2 = x^2(ad+bc)^2$$

que es lo que queríamos probar.■

3.Preparativos para la generalización : longitudes de tangentes comunes a dos circunferencias

a) Si dos circunferencias de radios r_1 y r_2 son tangentes exteriores, la longitud del segmento de tangente exterior común vale $2\sqrt{r_1 r_2}$.

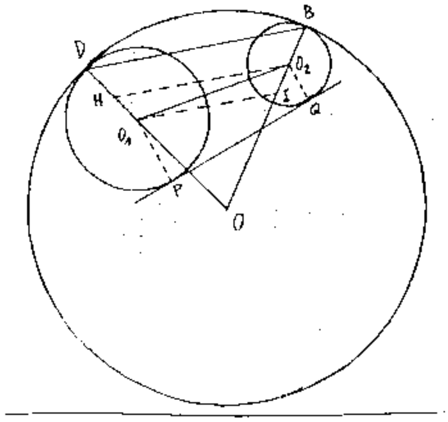
En efecto, si t es dicha tangente, se tiene (teor. de Pitágoras):

$$t^2 + (r_1 - r_2)^2 = (r_1 + r_2)^2 \iff t^2 = 4r_1 r_2$$

b) Si las circunferencias son exteriores, de centros respectivos O_1 y O_2, entonces la longitud del segmento de tangente exterior común t verifica

$$t^2 = \overline{O_1O_2}^2 - (r_1 - r_2)^2,$$

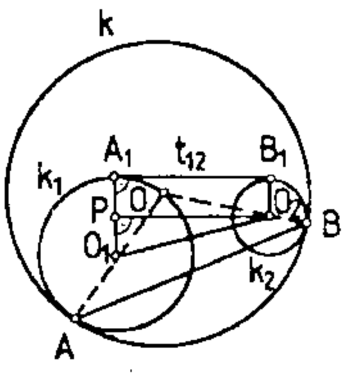
pues basta aplicar el teorema de Pitágoras cuando se traza por O_2 una paralela a $t = PQ$ hasta que corte a O_1P :



c) Supongamos que las circunferencias $k_1(O_1; r_1)$ y $k_2(O_2; r_2)$ son tangentes interiores en A y B, respectivamente, a la circunferencia $k(O; R)$. Entonces la longitud t_{12} de la tangente común exterior a k_1 y k_2 es

$$t_{12} = \frac{AB}{R}\sqrt{(R - r_1)(R - r_2)}.$$

Demostración : No hay pérdida de la generalidad en suponer $r_1 \geq r_2$, y además suponemos que O_1 y O_2 son exteriores:



Sea $t_{12} = A_1B_1$, con $A_1 \in k_1, B_1 \in k_2$; y sea P la proyección de O_2 sobre O_1A_1.

El teorema de Pitágoras en O_1O_2P da

$$t_{12}^2 = \overline{O_1O_2}^2 - (r_1 - r_2)^2;$$

y el del coseno en OO_1O_2 :

$$\overline{O_1O_2}^2 = (R - r_1)^2 + (R - r_2)^2 - 2(R - r_1)(R - r_2)\cos\phi,$$

siendo $\phi = \widehat{O_1OO_2};$ por su parte, el teorema del coseno en ABO da

$$\overline{AB}^2 = 2R^2(1 - \cos\phi).$$

Eliminando O_1O_2 y $\cos\phi$ entre estas tres últimas igualdades obtenemos

$$t_{12}^2 = (R - r_1)^2 + (R - r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2 - 2(R - r_1)(R - r_2)\left(1 - \frac{AB^2}{2R^2}\right)$$

que se simplifica hasta llegar a

$$t_{12} = \frac{AB}{R}\sqrt{(R - r_1)(R - r_2)} \qquad (3).$$

De una forma análoga, si k_1 y k_2 son tangentes exteriores a k se obtendría

$$t_{12} = \frac{AB}{R}\sqrt{(R + r_1)(R + r_2)};$$

Si k_1 es tangente exteriormente a k y k_2 lo es interiormente, entonces la longitud de una tangente común *interior* es

$$t' = \frac{AB}{R}\sqrt{(R + r_1)(R - r_2)}.$$

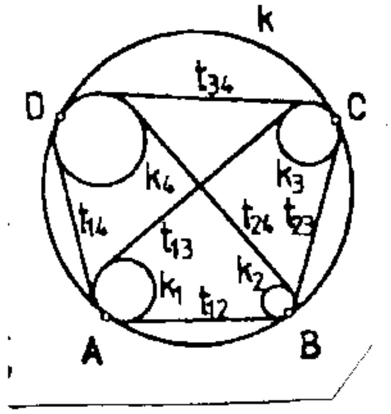
Nota : Estos resultados se pueden encontrar en [5]y[6].

4.El teorema generalizado de Ptolomeo, o teorema de Casey.

El geómetra irlandés John Casey publicó en Dublin en 1881 un famoso libro, titulado *A Sequel to the first six Books of the Elements of Euclid*, (abreviado su título posteriormente hasta *A Sequel to Euclid*) en el que incluye la generalización del primer teorema de Ptolomeo, y en una nota al pie en su página 104 dice textualmente : *Esta extensión del teorema de Ptolomeo apareció por primera vez en un artículo mío en los Proceedings of the Royal Irish Academy*, 1866. El enunciado es el siguiente :

Si las circunferencias k_1, k_2, k_3 y k_4 son tangentes a una misma circunferencia (o recta), y t_{ij} son las longitudes de las tangentes comunes exteriores a k_i y k_j entonces se verifica la relación

$$t_{12}t_{34} + t_{23}t_{14} = t_{13}t_{24}$$



Con ayuda de los resultados del párrafo anterior, la demostración es inmediata, como veremos. Conviene notar antes que el resultado sigue siendo válido cuando algunos de los radios de k_i son cero, lo que producirá interesantes demostraciones sencillas de resultados geométricos complicados, como anunciábamos al comienzo. Si todos los k_i son cero, se obtiene el primer teorema de Ptolomeo. Casey estableció además que la relación anterior es una condición suficiente para que los círculos k_i sean tangentes a un círculo dado, y una demostración de la suficiencia se puede encontrar en el ejercicio II. 240 (páginas 330-334) del excelente libro de Igor Shariguin *Problemas de geometría*. *Planimetría*, Ed. Mir, Moscú 1989. Es realmente notable disponer de una demostración del recíproco del teorema de Casey en un libro tan popular como el de Shariguin, dado que anteriormente había sido probado con restricciones (v. [7]).

Demostración del teorema de Casey:

$$\begin{aligned} t_{12}t_{34} + t_{14}t_{23} &= \left(\frac{AB \bullet CD + AD \bullet BC}{R^2} \right) \sqrt{(R-r_1)(R-r_2)(R-r_3)(R-r_4)} \\ &= \frac{AC \bullet BD}{R^2} \sqrt{(R-r_1)(R-r_3)} \sqrt{(R-r_2)(R-r_4)} \\ &= t_{13}t_{24}. \blacksquare \end{aligned}$$

5.Generalización del segundo teorema de Ptolomeo

Escribiendo el segundo teorema de Ptolomeo en la forma

$$\frac{AB \bullet AD + CB \bullet CD}{BA \bullet BC + DA \bullet DC} = \frac{AC}{BD}$$

se demuestra que

$$\frac{t_{12}t_{14}(R-r_3) + t_{23}t_{34}(R-r_1)}{t_{12}t_{23}(R-r_4) + t_{14}t_{34}(R-r_2)} = \frac{t_{13}}{t_{24}}.$$

En efecto, basta sustituir y hacer operaciones para obtener el resultado.■

6.Ejemplos resueltos

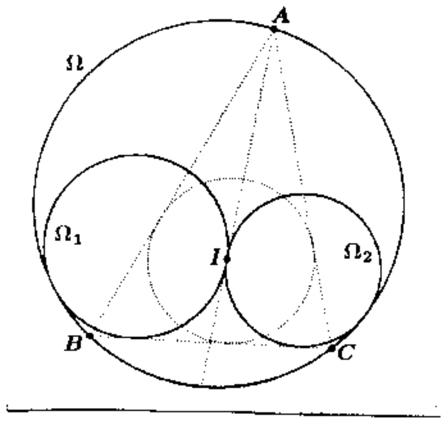
En los artículos rumanos y búlgaro mencionados se ofrecen 18 aplicaciones del primer teorema generalizado de Ptolomeo y 4 del segundo. No las expondremos todas resueltas, dejando algunas de ellas como ejercicios.

Shailesh Shirali ofrece en [4] dos aplicaciones del teorema directo y del recíproco del teorema de Casey. La primera es el más bello problema de Geometría propuesto por la India en la I.M.O. de Moscú de 1992 :

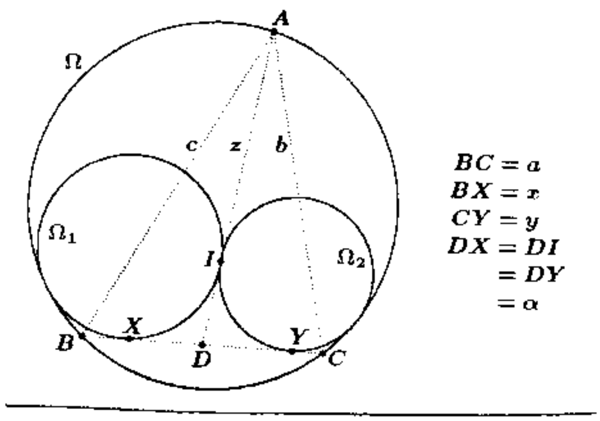
Ejemplo 1

Las circunferencias Ω_1 *y* Ω_2 *son exteriormente tangentes en el punto I, y ambas son tangentes interiormente a una tercera,* Ω*. Una tangente común a las dos primeras corta a la tercera en B y C, mientras que la tangente común en I corta a la tercera en A, del mismo lado de BC que I.*

Demostrar que I es el incentro de ABC.



Considerando la configuración de la figura siguiente, donde x e y son, respectivamente, las longitudes de las tangentes desde B y C a Ω_1 y a Ω_2, D es $AI \cap BC$; $z = |AI|, u = |ID|$ y a, b, c son los lados de ABC,



Aplicando el teorema de Casey a las dos cuaternas de círculos (A, Ω_1, B, C) y (A, Ω_2, C, B) obtenemos

$$az + bx = c(2u + y) \quad (1)$$
$$az + cy = b(2u + x) \quad (2).$$

Restando (2) de (1) resulta

$$bx - cy = u(c - b) \Rightarrow \frac{x + u}{y + u} = \frac{c}{b} \Rightarrow$$
$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \Leftrightarrow \text{AI es bisectriz de } \widehat{BAC} \Rightarrow$$
$$BD = \frac{ac}{b + c}$$

Sumando (1) y (2) resulta

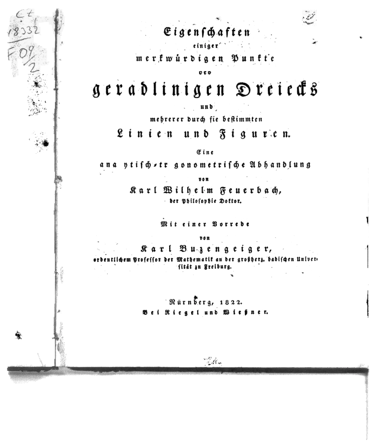
$$az = u(b+c) \Rightarrow \frac{z}{u} = \frac{b+c}{a} \Rightarrow$$
$$\frac{AI}{ID} = \frac{AB}{BD} \Rightarrow BI \text{ es bisectriz de } \widehat{ABC}.$$

Esto prueba el resultado.■

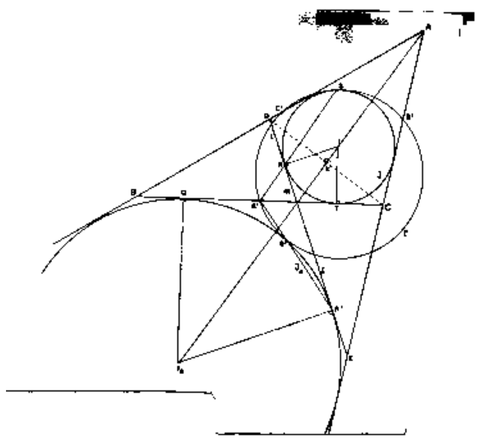
Cuando este problema fué rechazado por el Jurado de la I.M.O. 92, la representante de Colombia comentó en voz alta : *Se acaba de rechazar el más bello problema de Geometría de este año*. Suscribo plenamente su opinión.

Ejemplo 2 (**El teorema de Feuerbach**, **1822**)

A continuación, y como curiosidad bibliográfica, reproduzco la primera página del libro donde Feuerbach demostró el teorema que lleva su nombre. La edición es de 1822. La ilustración sobre su teorema, que aparece después del enunciado, no es de esta edición, porque la existente, en papel azulado y líneas con tinta muy finas, se resistía a ser reproducida en una calidad mínimamente visible.


Eigenschaften einiger merkwürdigen Punkte des geradlinigen Dreiecks und mehrerer durch sie bestimmten Linien und Figuren. Eine analytisch-trigonometrische Abhandlung von Karl Wilhelm Feuerbach, der Philosophie Doctor. Mit einer Vorrede von Karl Buzengeiger, ordentlichem Professor der Mathematik an der großherzog. badischen Universität zu Freiburg. Nürnberg, 1822. Bei Riegel und Wießner.

El círculo inscrito en un triángulo es tangente al círculo de los nueve puntos (**que pasa por los puntos medios de los lados del triángulo**)



Supongamos que los lados BC, CA y AB del triángulo tienen como puntos medios a D,E,F respectivamente, y sea Ω el círculo inscrito. Consideramos la cuaterna de círculos (D,E,F,Ω). Obtenemos las siguientes longitudes para los segmentos de tangentes que se indican :

$$t_{DE} = \frac{c}{2}, t_{DF} = \frac{b}{2}, t_{EF} = \frac{a}{2}$$
$$t_{D\Omega} = \left|\frac{a}{2} - (s-b)\right| = \left|\frac{b-c}{2}\right|$$
$$t_{E\Omega} = \left|\frac{b}{2} - (s-c)\right| = \left|\frac{a-c}{2}\right|$$
$$t_{F\Omega} = \left|\frac{c}{2} - (s-a)\right| = \left|\frac{b-a}{2}\right|$$

donde $s = \frac{a+b+c}{2}$.

Con objeto de aplicar el recíproco del teorema de Casey necesitamos comprobar si, para alguna combinación de signos + y –, se tiene

$$\pm c(b-a) \pm a(b-c) \pm b(a-c) = 0,$$

lo cual es inmediato. Por lo tanto, existe un círculo que es tangente a los círculos D,E,F (de radio 0) y Ω. Como el círculo que pasa por D,E y F es el de los nueve puntos, el teorema de Feuerbach queda demostrado.■

El mismo procedimiento permite demostrar que el círculo de los 9 puntos es tangente a los círculos exinscritos, *mutatis mutandis*.

Ejemplo 3 : **El problema de Victor Thébault (1938)**

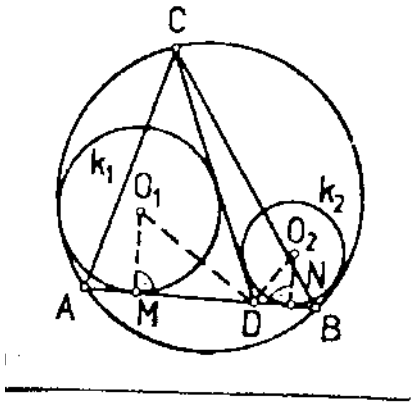
En 1938, el famoso problemista francés Víctor Thébault propuso en el *American Mathematical Monthly* el siguiente problema:

Sea D un punto del lado AB del triángulo ABC. El círculo $k_1(O_1, r_1)$ es tangente interiormente al círculo circunscrito k de ABC, es tangente a AB en M y tangente a CD ; por su parte, el círculo $k_2(O_2, r_2)$ es tangente interiormente a k, tangente a DB en N y tangente a CD. Si r es el inradio de ABC, demostrar que

$$r = r_1 \bullet \cos^2\frac{\alpha}{2} + r_2 \bullet \sin^2\frac{\alpha}{2}$$

donde $\alpha = \widehat{ADC}$.

Este problema no fué resuelto en el *Monthly* hasta 1983, pero la solución completa no fué publicada porque la única recibida, del aficionado inglés a la Geometría (pero no matemático profesional) K.B. Taylor, ocupa 24 páginas de cálculos (tengo un ejemplar que me envió el autor). Más tarde, en 1986, Gerhard Turwald publicó una solución sensiblemente más corta en la revista suiza *Elemente der Mathematik*.En 1989, el holandés G.R.Veldkamp envió a *Crux Mathematicorum* una solución suya del problema, publicada en 1973 en una revista holandesa de no muy extendida circulación, el *Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde*, y que debió pasar inadvertida a los redactores del *Monthly*. Para completar la historia, a finales de 1989 *Elemente der Mathematik* publicó otra solución del problema, sin usar trigonometría, completamente sintética, probando resultados más generales que incluyen el problema de Thébault como caso particular. Debe añadirse que en el enunciado original de Thébault la relación pedida entre r, r_1, r_2 y α era errónea, y además pedía demostrar que O_1 y O_2 están alineados con el incentro de ABC (lo cual es verdad).



Sean $x = DM, y = DN$. Aplicando el teorema de Casey a (A, B, C, k_1) obtenemos:

$$c(CD - x) + (AD - x)a = b(BD + x)$$
$$\Rightarrow x(a + b + c) = a \bullet AD + c \bullet CD - b \bullet BD$$

Aplicándolo otra vez a (A, B, k_2, C) nos da:

$$y(a + b + c) = c \bullet CD + b \bullet BD - a \bullet AD$$

Sumando miembro a miembro,

$$x + y = \frac{2c \bullet CD}{a + b + c}.$$

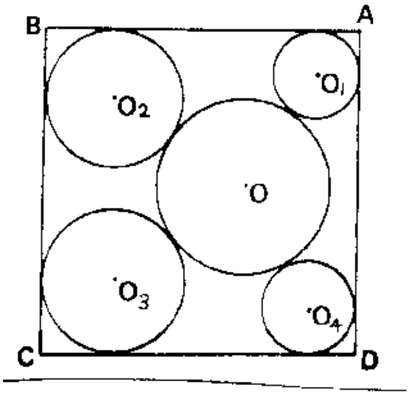
Pero, en O_1MD, $x = r_1 \cot(\alpha/2)$, y en $O_2ND, y = r_2 \tan(\alpha/2)$, luego

$$r_1 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + r_2 \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{c \bullet CD \bullet \sin\alpha}{a + b + c} = \frac{c \bullet h_c}{2s} = \frac{S}{s} = r.\blacksquare$$

Ejemplo 4 : **Un problema japonés de 1874**

Durante la Restauración *Meiji* en Japón, el país estuvo aislado de Occidente y los matemáticos japoneses descubrieron por sí mismos muchos resultados geométricos, cuyas aplicaciones, dibujadas en tabletas de madera (*Sangaku*) se colgaban en las entradas de los templos *en honor de los dioses y para gloria de sus autores*. Presentamos aquí un ejemplo de 1874 :

Un círculo $O(r)$ **es interior a un cuadrado ABCD**, **de lado** a; **los círculos** $O_i(r_i), i = 1, 2, 3, 4$ **son tangentes a lados adyacentes del cuadrado**, **y tangentes exteriores a** $O(r)$. **Hallar la relación entre** r_i **y** a.



Necesitamos las longitudes de la tangentes exteriores comunes a cada par de círculos, lo que se escribe inmediatamente. Así se llega a la ecuación

$$(a-r_1-r_2)(a-r_3-r_4)+(a-r_1-r_4)(a-r_2-r_3)$$
$$=\sqrt{2(a-r_1-r_3)^2-(r_1-r_3)^2}\,\sqrt{2(a-r_2-r_4)^2-(r_2-r_4)^2}$$

que conduce a una ecuación cuadrática en $a,$ y finalmente

$$a=\frac{2(r_1r_3-r_2r_4)+\sqrt{2(r_1-r_2)(r_1-r_4)(r_3-r_2)(r_3-r_4)}}{r_1-r_2+r_3-r_4}.\blacksquare$$

7.Problemas propuestos

1.Sea el triángulo isósceles ABC, con AC = BC) y k su círculo circunscrito. El círculo k_1 es tangente interiormente al triángulo en $M\in AB$ y tangente interiormente a k. Demostrar que la longitud t de la tangente desde C a k_1 no depende de la elección de k_1. Calcular t.

2.Sea C un punto del diámetro AB del círculo k. Sea k_1 el círculo de diámetro AC y k_2 el de diámetro CB. La perpendicular a AB en C corta a k en M y N. Hallar la longitud de la tangente común a k_1 y k_2.

3.Tres círculos de radios iguales son tangentes exteriores entre sí dos a dos y tangentes interiores al círculo k. Desde un punto cualquiera M situado en la circunferencia k se trazan las tangentes a los tres círculos. Demostrar que una de ellas es igual a la suma de las otras dos (teorema de Pompeiu), y menor o igual que $2R\left(\sqrt{3}-1\right)$. ¿Cuándo se verifica la igualdad?

Si r es el radio común a los tres círculos, y R el de k, probar que $r=R\sqrt{3}\left(2-\sqrt{3}\right)$

4.El círculo inscrito en ABC tiene radio r. Desde C se traza la altura CH sobre AB. Los círculos $k_1(r_1)$ y $k_2(r_2)$ son tangentes interiores a k, y tangentes a AB y a AH y BH, respectivamente. Probar que $r_1+r_2=2r$.

5.Sea R el radio del círculo circunscrito a un triángulo y r el del inscrito. Sean r_1,r_2,r_3 los radios de tres círculos, tangentes a dos de los lados del triángulo y al círculo circunscrito. Probar que

$$4r\le r_1+r_2+r_3\le 2R.$$

6. (Olimpiada Británica 1986) Las rectas paralelas t_1,t_2 son tangentes al círculo $k,$ de radio R. El círculo $k_1(r_1)$ es tangente a t_1 y a $k,$ mientras que el círculo $k_2(r_2)$ es tangente a $t_2,$ a k y a k_1. Se supone que todas las tangencias son exteriores; t_1,k y k_1 no tienen puntos comunes. Expresar R mediante r_1 y r_2.

7.En el círculo $k(O,R)$ se inscribe un triángulo ABC cualquiera. Demostrar que cualquiera que sea el punto $M \in BC$ se puede construir un círculo que sea tangente interiormente a k y tangente a BC en M. Determinar el lugar geométrico de los centros de estos círculos.

8.Sea $k(O,R)$ el círculo circunscrito al triángulo arbitrario ABC. $k_i(O_i,r_i)$ son tres círculos tangentes interiores a k y tangentes a los lados AC,AB y BC del triángulo. Demostrar que

$$r_1+r_2+r_3 \leq R-\frac{r}{2}$$
$$r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1 \leq \frac{R\sqrt{3}}{8}\left(s-2r\sqrt{3}\right)$$
$$r_1r_2r_3 \leq \left(\frac{R}{4}\right)^3$$

¿Cuándo se verifican las igualdades?

9. Cuatro círculos $k_i(O_i,r_i)$ son tangentes dos a dos y tangentes interiores al círculo $k(O,R)$ en los puntos A, B,C y D (el cuadrilátero ABCD es convexo). Demostrar que

$$(R-r_1)(R-r_2)(R-r_3)(R-r_4) \geq 4r_1r_2r_3r_4$$

y que el signo igual se verifica si y sólo si

$$r_1 = r_3 \text{ (sea } r \text{ este valor común) y } r_2 = r_4 = \frac{R(R-r)}{R+r}.$$

8.Bibliografía

[1] T.Petrov : El teorema de Casey y sus aplicaciones (en búlgaro), *Matematika & Informatika*, 5/1994.

[2] M.Dragusin : Aplicaciones del teorema de Casey (en rumano), *Gazeta Matematica*, 12/1995.

[3] S. Shirali : On the generalized Ptolemy theorem, *Crux mathematicorum*, 1996, *pp*.49-53.

[4] A.Bulacu : Generalización del segundo teorema de Ptolomeo (en rumano), *Gazeta matematica*, 12/2000.

[5] I. Shariguin : *Problemas de Geometría* (*Planimetría*), Ed. Mir, Moscú, 1989.

[6] Michiwaki, Oyama, Hamada : *An invariant relation in Chains of tangent circles*, *Mathematics magazine*, 48(1975),*p*.80.

[7] R.A.Johnson : *Advanced Euclidean Geometry*, Dover Pub.,1960.

[8] Fukagawa & Pedoe : *Japanese Temple Geometry Problems* (*Sangaku*), Winnipeg, Canada, 1989.

[9] D.Branzei, S.Anitsa, A. Anitsa : *Competentza si performantza in Geometrie* (en rumano), Ed. Minied, Iasi, Rumania, 1992.

[10] D.R.Davis : *Modern College Geometry*. Addison-Wesley Press, 1949.

[11] J. Casey : *A Sequel to the First six boks of the Elements of Euclid*. Dublin U.P., 1892.

IX CONCURSO
CANGURO MATEMÁTICO 2002

Nivel 1 (1º de E.S.0.)

Día 21 de marzo de 2002. Tiempo : 1 hora y 15 minutos

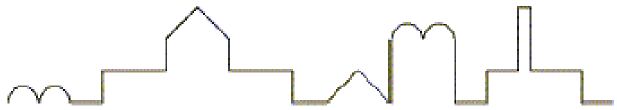
No se permite el uso de calculadoras. Hay una única respuesta correcta para cada pregunta. Cada pregunta mal contestada se penaliza con 1/4 de los puntos que le corresponderían si fuera correcta. Las preguntas no contestadas no se puntúan ni se penalizan. Inicialmente tienes 30 puntos.

Las preguntas 1 a 10 valen 3 puntos cada uno.

1 El número 2002 es capicúa, es decir, se lee lo mismo de izquierda a derecha que de derecha a izquierda. ¿Cuál de los siguientes números NO tiene esta propiedad?

A) 1991 B) 2323 C) 2112 D) 2222 E) 1001

2 A lo lejos se ve la línea del horizonte :



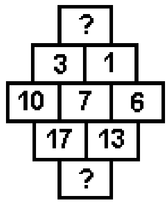
¿Cuál de los siguientes trozos no pertenece a esta línea del horizonte?

A) B) C) D) E)

3 Papá Canguro y mamá Canguro tienen tres hijas, cada una de las cuales tiene dos hermanos machos. ¿Cuántos miembros tiene la familia canguro?

A) 11 B) 9 C) 8 D) 7 E) 5

4 ¿Por qué números se deben sustituir los signos de interrogación?



A) 2 y 14 B) 2 y 30 C) 3 y 221 D) 4 y 14 E) 4 y 30

5 El día después de mi cumpleaños, este año, sería correcto decir : “Pasado mañana es Jueves”. ¿Qué día de la semana fue mi cumpleaños ?

A) Lunes B) Martes C)Miércoles D) Jueves E) Domingo

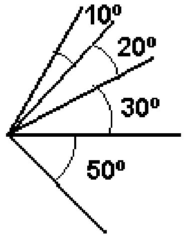
6 ¿En cuál de los siguientes collares los dos tercios de las cuentas son negras?

A B C D E

7 ¿Cuál de las siguientes expresiones tiene mayor valor :

A) $10 \times 0{,}001 \times 100$ B) $0{,}01 : 100$ C) $100 : 0{,}01$ D) $10000 \times 100 : 10$ E) $0{,}1 \times 0{,}01 \times 10000$

8 ¿Cuántos ángulos de medidas diferentes se pueden ver en la figura?



A) 4 B) 6 C) 8 D) 10 E) 11

9 El área de un rectángulo vale 1. ¿Cuál es el área del triángulo obtenido cortando el rectángulo por la recta que une los puntos medios de dos lados adyacentes?

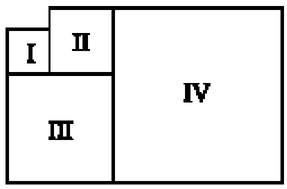
A) 1/3 B) 1/4 C) 2/5 D) 3/8 E) 1/8

10 Calcular la diferencia entre el mayor y el menor número formado por tres cifras, todas diferentes .

A) 899 B) 885 C) 800 D) 100 E) otra respuesta

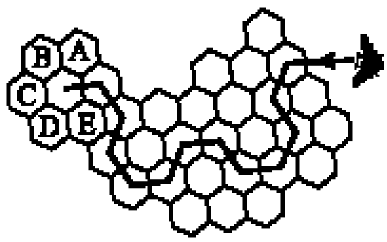
Las preguntas 11 a 20 valen CUATRO puntos cada una.

11 Los polígonos I, II, III y IV de la figura son cuadrados.
El perímetro del cuadrado I es 16m y el del cuadrado II es 24 m.
El perímetro del cuadrado IV vale:



A) 56m B) 60 m C) 64 m D) 72 m E) 80 m

12 Una abeja se mueve de una celda a otra, siguiendo la línea marcada en la figura. ¿A qué celda irá la abeja en su próximo movimiento?

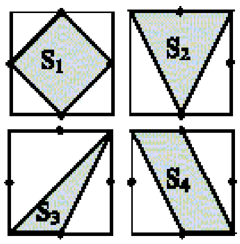


A) A B) B C) C D) D E) E

13 Una sala mide $4\text{m} \times 5\text{m}$ y tiene 3 m de altura. Se quiere aumentar su volumen en 60 m^3 . ¿Cuánto hay que elevar el techo?

A) 3m B) 4m C) 5m D) 12 m E) 20 m

14 En la figura hay cuatro cuadrados iguales, en los que están marcados los puntos medios de sus lados. Las áreas señaladas son, respectivamente, S_1 , S_2 , S_3 y S_4 . ¿Cuál de las siguientes relaciones es cierta?



A) $S_3 < S_4 < S_1 = S_2$ B) $S_3 < S_1 = S_2 = S_4$ C) $S_3 < S_1 = S_4 < S_2$
D) $S_3 < S_4 < S_1 < S_2$ E) $S_4 < S_3 < S_1 < S_2$

15 Julián, María, Nicolás y Luisa tienen cada uno un animal, de entre los siguientes: un gato, un perro, un pez rojo y un canario. María tiene un animal de pelo ; Luisa, uno de cuatro patas; Nicolás un pájaro y se sabe que a Julián y a María no les gustan los gatos.
¿Cuál de las siguientes frases NO es cierta?

A) Luisa tiene un perro B) Nicolás tiene un canario C) Julián tiene un pez
D) Luisa tiene un gato E) María tiene un perro

16 Cristina añade 3g de sal a 17 g de agua. ¿Cuál es el porcentaje de sal en la solución obtenida?

A) 20% B) 17% C) 16 % D) 15 % E) 6%

17 Las tres bandejas A, B y C están en orden creciente de peso.

Para mantener este orden, la bandeja D debe colocarse :

A) entre A y B B) entre B y C C) delante de A
D) después de C E) D y C pesan lo mismo.

18 Un virus informático está borrando el disco duro. Durante el primer día borra 1/2 de la memoria del disco duro. Durante el segundo día borra 1/3 de la memoria restante. El tercer día, 1/4 de la memoria restante, y el cuarto, 1/5 de la memoria restante.
¿Qué fracción de la memoria inicial queda sin borrar al final del cuarto día?

A) 1/5 B) 1/6 C) 1/10 D) 1/12 E) 1/24

19 ¿Cuál es el máximo valor de la suma de las cifras del número suma de las cifras de un número de tres cifras?

A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 18

20 Cinco chicos se pesan conjuntamente de dos en dos, de todas las maneras posibles. Los pesos de las parejas son :
90 kg, 92kg , 93kg, 94kg, 95kg, 96kg, 97kg, 98kg, 100kg y 101kg.
El peso conjunto de los cinco chicos es :

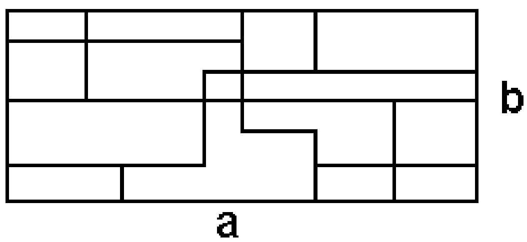
A) 225kg B) 230kg C) 239kg D) 240kg E) 250kg

Las preguntas 21 a 30 valen CINCO puntos cada una.

21 En un juego infantil se va contando de 1 a 100 y se aplaude cada vez que se dice un múltiplo de 3 o un número que termina en 3. ¿Cuántas veces se ha aplaudido al terminar el juego?

A) 30 B) 33 C) 36 D) 39 E) 43

22 Las longitudes de los lados de un rectángulo son *a* y *b*. Hallar la suma de las longitudes de los segmentos dibujados dentro del rectángulo, que son paralelos a los lados del rectángulo.



A) 3(a+b) B) a+a+a+b C) a+a+a+b+b D)a+a+b+b+b E) Imposible calcularlo

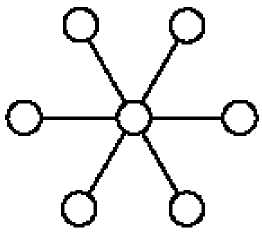
23 Un ciclista sube un puerto la la velocidad de 12 km/h y lo baja a 20 km/h. La diferencia entre los tiempos de subida y bajada es de 16 minutos. ¿Cuál es la longitud del trayecto?

A) 8km B) 10km C) 12km D) 14km E) Falta un dato

24 El Mago Antonio tiene en su chistera 14 ratones grises, 8 blancos y 6 negros. ¿Cuál es el número mínimo de ratones que ha de sacar, sin mirar, para estar absolutamente seguro de que saca al menos un ratón de cada color?

A) 23 B) 22 C) 21 D) 15 E) 9

25 Se trata de colocar los enteros del 1 al 7 en los círculos de la figura de tal manera que se obtenga la misma suma en cada hilera de tres redondeles.



A) es imposible B) la solución es única
C) hay 2 números distintos que pueden ocupar el redondel central
D) Hay 3 números diferentes que pueden ocupar el redondel central
E) hay 7 números distintos que pueden ocupar el redondel central

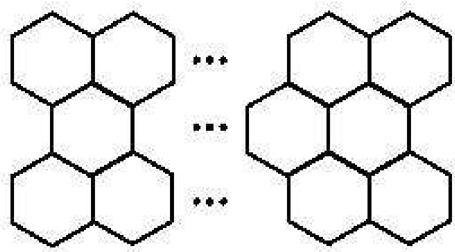
26 Cada cara de un cubo se pinta de un color distinto. Pablo, Sara e Isabel cogen el cubo, y sin girarlo, dicen los colores de las caras que ven:
Pablo : "Azul, blanco, amarillo" ; Sara : "Negro, azul, rojo" ; Isabel : "Verde, blanco, negro".
¿Cuál es el color de la cara opuesta a la que está pintada de blanco?

A) rojo B) azul C) negro D) verde E) amarillo

27 Un círculo, un cuadrado y un triángulo se dibujan en el plano superponiéndose entre sí. ¿Cuál es el número máximo de puntos de intersección determinados por las tres figuras?

A) 14 B) 16 C) 18 D) 20 E) 22

28 Con barras de 200g se construye una malla de 32 hexágonos dispuestos en tres filas, como se muestra en la figura.



¿Cuál es la masa de la malla?

A) 24,6 kg B) 24,4 kg C) 26,4 kg D) 30,4 kg E) 28,6 kg

29 En un torneo de baloncesto compiten 32 equipos. En cada ronda, los equipos se dividen en grupos de 4. En cada grupo, cada equipo juega exactamente una vez contra los demás. Los dos mejores equipos de cada grupo pasan a la ronda siguiente y los demás son eliminados. Después de la última ronda, los dos equipos que quedan juegan la final para determinar el ganador. ¿Cuántos partidos se han jugado en todo el torneo?

A) 49 B) 89 C) 91 D) 97 E) 181

30 Un gato y medio se comen un ratón y medio en hora y media. ¿Cuántos ratones se comen 15 gatos en 10 horas?

A) 15 B) 45 C) 60 D) 100 E) 150

PROBLEMAS DE NIVEL MEDIO Y DE OLIMPIADAS

Problemas de la Olimpiada Pan Africana 2000

1.Resolver la ecuación trigonométrica

$$\sin^3 x(1+\cot x)+\cos^3 x(1+\tan x) = \cos 2x$$

2.Los polinomios $P_0, P_1, P_2, \cdots$ se definen mediante

$$P_0(x) = x^3+213x^2-67x-2000,$$
$$P_n(x) = P_{n-1}(x-n) \text{ , para } n = 1,2,3,\cdots.$$

¿Cuál es el coeficiente de x en $P_{21}(x)$?

3.Probar que si

$$\frac{p}{q} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{1334}+\frac{1}{1335},$$

siendo p y q números naturales, entonces 2003 divide a p.

4. Sean a, b, c números reales tales que

$$a^2+b^2 = c^2.$$

Resolver el sistema

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2 &= z^2 \\ (x+a)^2+(y+b)^2 &= (z+c)^2 \end{aligned}\right\}$$

5. Desde un punto P, exterior a un círculo, se trazan las tangentes PA y PB. PQR es cualquier secante, estando Q y R sobre la circunferencia. La cuerda BS es paralela a PQR. Demostrar que SA pasa por el punto medio de QR.

6.Una compañía tiene 5 directivos. Las reglas de la compañía requieren que cualquier mayoría (tres o más) de directivos pueda abrir la caja fuerte, pero que ninguna minoría (dos o menos) de directivos la pueda abrir. Se propone equipar a la caja fuerte con 10 cerraduras, de manera que solo se pueda abrir cuando estén disponibles las llaves de todas las cerraduras, y dar a cada directivo un conjunto de llaves de n cerraduras distintas. Encontrar todos los valores de n para los que existe una forma de repartir las llaves de acuerdo con las reglas de la compañía.

Problemas propuestos

Ningún problema se considerará definitivamente cerrado. Nuevos puntos de vista sobre problemas anteriores siempre son bienvenidos.

Las soluciones deben enviarse por correo electrónico a la dirección revistaoim@oei.es, en ficheros de formato tex, ps o doc, adjuntos al mensaje. Si hubiera figuras, se incluirán en formato gif.

En todas las soluciones se incluirá nombre y dirección del remitente, así como la institución a la que pertenezca. Las soluciones de los estudiantes serán particularmente apreciadas.

Problema 1

Resolver la ecuación en la incógnita x :

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a+x & a+x^2 \\ a & 1 & a+x^2 & a+x \\ a+x & a+x^2 & 1 & a \\ a+x^2 & a+x & a & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(Absolutorial Aufgabe, Baviera, 1874)

Problema 2

Calcular el límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos\frac{\pi}{2n} + \cos\frac{2\pi}{2n} + \cos\frac{3\pi}{2n} + \cdots + \cos\frac{n\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n} + \frac{2\pi}{2n} + \frac{3\pi}{2n} + \cdots + \frac{n\pi}{2n}}$$

(Absolutorial Aufgabe, Baviera 1874)

Problema 3

Por un punto P_0 de la curva de ecuación $y = x^3 + Ax^2 + Bx + C$, se traza una recta, que es tangente a la curva en otro punto P_1.

Por P^1 se traza una recta, que es tangente a la recta en un nuevo punto P^2, y así sucesiva e indefinidamente. Demostrar que la sucesión de puntos P^0,P^1,P^2,... tiende hacia el punto de inflexión de la curva.

(Prueba de Bachillerato, Suecia 1964)

Problema 4

En los lados AB y AC del triángulo ABC se consideran puntos variables F y E, respectivamente, tales que

$$b \cdot \frac{FA}{FB} + c \cdot \frac{EA}{EC} = a$$

Si M es el punto de intersección de BE y CF, hallar el lugar geométrico del punto M.

(Revista rumana Gazeta Matematica, 1991)

Problema 5

Se considera el triángulo ABC y sea M un punto del segmento BC.
Sean r_1, r_2, r los inradios de los triángulos AMB, AMC y ABC ;
y sean ρ_1, ρ_2, ρ los radios de los círculos situados en el interior del ángulo A y exinscritos a AMB.AMC y ABC, respectivamente.
Demostrar que se verifican las relaciones siguientes:

$$p(r - r_1)(r - r_2) = (p - a) r_1 r_2$$
$$r(\rho_2 - \rho_1) = \rho(r_2 - r_1)$$

(Este resultado puede considerarse clásico)

Iniciamos la sección de Divertimentos matemáticos con el Poema de Sir Frederic Soddy *El beso preciso*, publicado en la revista inglesa *Nature* en 1937. Soddy (Premio Nobel de Química por el descubrimiento de los isótopos) rescató del olvido el teorema de Descartes de los 4 círculos y lo celebró con el poema que sigue (la versión española es la que aparece en la edición en español de *Circo Matemático*, de Martin Gardner)

EL BESO PRECISO (**Sir Frederic Soddy**, **1937**)

Pueden besarse los labios, dos a dos,
sin mucho calcular, sin trigonometría;
mas ¡ay! no sucede igual en Geometría,
pues si cuatro círculos tangentes quieren ser
y besar cada uno a los otros tres,
para lograrlo habrán de estar los cuatro
o tres dentro de uno, o alguno
por otros tres a coro rodeado.
De estar uno entre tres, el caso es evidente
pues son todos besados desde afuera.
Y el caso tres en uno no es quimera,
al ser éste uno por tres veces besado internamente.

Cuatro círculos llegaron a besarse,
cuanto menores tanto más curvados,
y es su curvatura tan sólo la inversa
de la distancia desde el centro.
Aunque este enigma a Euclides asombrara,
ninguna regla empírica es necesaria:
al ser las rectas de nula curvatura
y ser las curvas cóncavas tomadas negativas,
la suma de cuadrados de las cuatro curvaturas
es igual a un medio del cuadrado de su suma.

Espiar de las esferas
los enredos amorosos
pudiérale al inquisidor
requerir cálculos tediosos,
pues siendo las esferas más *corridas*,
a más de un par de pares
una quinta entra en la *movida*.
Empero, siendo signos y ceros como antes
para besar cada una a las otras cuatro,
El cuadrado de la suma de las cinco curvaturas
ha de ser triple de la suma de sus cuadrados.

En enero de 1937, la revista inglesa *Nature*,que había publicado el poema de Soddy, publicó una cuarta estrofa que generalizaba la fórmula a espacios de *n* dimensiones, original de Thorold Gosset :

No debemos empero confinar nuestros cuidados
a los simples círculos, esferas y planos,

sino elevarnos a n –espacios e hipercurvaturas
donde también las múltiples tangencias son seguras.
En n –espacios, los pares de tangentes
son hiperesferas, y es verdad
_ más no evidente _
cuando $n+2$ de ellas se oculéan
cada una con $n+1$ compañeras
Que el cuadrado de la suma de todas las curvaturas
es n veces la suma de sus cuadrados.

Número

2

CUATRO SUCESIONES INUSUALES TRATADAS ELEMENTALMENTE

LAURENȚIU MODAN
Department of Mathematics, Faculty of Computer Science
Academy of Economic Studies, Bucharest
E-mail: modanl@inforec.ase.ro

Abstract*. This note develops the solutions of 4 difficult sequence problems, through an elementary level.*
MR classification*:40A05.*

En [1], aparecen 3 sucesiones complicadas para las que se pide estudiar su convergencia. Les he añadido otra, la cuarta, inspirada por las tres primeras, cuyas soluciones se encuentran en [2]. Pero esas soluciones, por otra parte muy elegantes, utilizan nociones del nivel del Análisis Real avanzado. Esta es la razón que me ha llevado a buscar algunas justificaciones elementales para esas soluciones, para que puedan quedar al alcance de un público más amplio.

Los 4 problemas están basados en dos constante de Euler:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \cong 2{,}71 \in R\setminus Q \qquad (1),$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\right) = \gamma \cong 0{,}57 \in R\setminus Q \qquad (2),$$

en el siguiente límite conocido:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n}\right) = \ln 2 \qquad (3),$$

y en la *formula de* Stirling para el factorial:

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta}{12n}}, \quad \theta \in (0,1) \qquad (4).$$

Problema 1. Estudiar la convergencia de la sucesión $(x_n)_{n\in N^*}$, definida recurrentemente por las relaciones:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+x_{2n+1}} = e, \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1+x_{2n}} = e, \quad n \in N^* \qquad (5).$$

De (5), encontramos inmediatamente:

$n + x_{2n+1} = n + 1 + x_{2n}$, $n \in N^*$, o lo que es lo mismo:

$$x_{2n+1} = 1 + x_{2n}\ ,\quad n \in N^* \qquad (6).$$

Iterando (6), tenemos:

$$x_{2n+1} = 2n + 1 + x_0\ ,\ n \in N^*, x_0 \in R,$$

de donde:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty\ ,\quad x_0 \in R$$

y por lo tanto, $(x_n)_{n\in N^*}$ es divergente.■

Problema 2. Estudiar la convergencia de la sucesión $(y_n)_{n\in N^*}$, definida por la recurrencia:

$$\left[\frac{n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\right]^{n+y_n} = n\,!,\quad n \in N^* \qquad (7).$$

Con (1) y (4), en (7), tomando límites, obtenemos:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{e}\right)^{n+y_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{2\,\pi\,n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta}{12n}} \qquad (8).$$

Pero como:

$$\lim_{n\to\infty} e^{\frac{\theta}{12n}} = 1,$$

la relación (8) se convierte en:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{e}\right)^{y_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{2\,\pi\,n} \qquad (9).$$

Tomando logaritmos en (9), se tiene:

$$\lim_{n\to\infty} y_n \cdot \lim_{n\to\infty}(\ln n - 1) = \lim_{n\to\infty}\left(\ln\sqrt{2\,\pi} + \frac{1}{2}\ln n\right),$$

o, lo que es equivalente:

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\sqrt{2\,\pi} + \frac{1}{2}\ln n}{\ln\ n - 1} = \frac{1}{2}\,.$$

Por lo tanto, concluímos que la sucesión $(y_n)_{n\in N^*}$ converge hacia 1/2 .■

Problema 3. Consideramos la sucesión $(u_n)_{n\in N^*}$, definida mediante la recurrencia:

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n}=\log_{u_n}\left(\frac{2n+1}{n}\right),\quad n\in N^* \qquad (10).$$

Nos proponemos estudiar su convergencia.

De (10), consecutivamente, encontramos:

$$(u_n)^{\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n}}=\frac{2n+1}{n},\quad n\in N^*,$$

$$\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)\ln u_n=\ln\left(\frac{2n+1}{n}\right),\quad n\in N^* \qquad (11).$$

Con (3), la relación (11) se convierte en:

$$\ln 2\ \lim_{n\to\infty}\ln u_n=\ln 2\,.$$

Por lo tanto:

$$\lim_{n\to\infty}u_n=e$$

y concluímos la convergencia de $(u_n)_{n\in N^*}$ hacia ***e***. ■

Problema 4. Consideramos la sucesión $(v_n)_{n\in N^*}$, definida por la recurrencia:

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln(n+v_n)=\gamma,\quad n\in N^* \qquad (12).$$

Estudiaremos la convergencia de $(v_n/n)_{n\in N^*}$.

En el límite, con (2), la relación (12) nos da:

$$\lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{n+v_n}{n}\right)=0,$$

o lo que es lo mismo:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+v_n}{n}\right)=1,$$

de donde:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{v_n}{n}=0\,.$$

En consecuencia, la sucesión $(v_n/n)_{n\in N^*}$ es convergente hacia 0. Como observación, añadamos que en [2], se estudia la convergencia de $(v_n)_{n\in N^*}$, utilizando nociones de la teoría de series y sus desarrollos asintóticos.

BIBLIOGRAFÍA

[1] **Bencze M.** “ *OQ*: *784*, *803*, *804*, *805*”, *Octogon*, *Mathematical Magazine*, v.9, nr.2, 2001, Braşov;

[2] **Sándor J.** “ *On the open problems OQ*: *784*, *803*, *804*, *805*”, pg.410–1,413-6, *Octogon*, *Mathematical Magazine*, v.10, nr.1, 2002, Braşov.

Problemas propuestos

Ningún problema se considerará definitivamente cerrado. Nuevos puntos de vista sobre problemas anteriores siempre son bienvenidos. Las soluciones deben enviarse por correo electrónico a la dirección revistaoim@oei.es, en ficheros de formato tex, ps o doc, adjuntos al mensaje. Si hubiera figuras, se incluirán en formato gif.

Durante muchos años, los problemas de geometría de los exámenes de ingreso en las Escuelas de Ingenieros eran legendarios. Presentamos a continuación, como muestra, los enunciados de algunos de los propuestos en la Escuela de Ingenieros Industriales de Madrid.

Problema 6

Construir un triángulo, conociendo A, a, $b + 3c$.

(1941)

Problema 7

Se dan cuatro rectas, tangentes a una parábola no trazada. Determinar el punto de tangencia de la cuarta tangente.

(1941)

Problema 8

Un cuadrilátero variable ABCD tiene el lado AB fijo, el lado CD, de longitud constante, gira alrededor del punto de intersección de CD y AB. Hallar el lugar geométrico del punto P de intersección de AC y BD.

(1942)

Problema 9

Dados cuatro puntos, A,B,C,M, ¿es posible determinar una cónica que pase por M y respecto de la cual el triángulo ABC sea autopolar?

(1943)

Problema 10

Los vértices opuestos A y B de un cubo de arista a = 2 son al mismo tiempo los vértices de dos conos de revolución que tienen por eje común la diagonal AB, admitiendo cada uno de ellos por generatrices las tres aristas del cubo que parten de su vértice.

Determinar:

1) el volumen del sólido formado por los dos conos, cuya base común sea el círculo de intersección, y los vértices los puntos A y B.
2) el radio de la esfera que tiene el mismo volumen que el sólido.
3) la porción del volumen del doble cono considerado, que es exterior a la esfera.

(1943)

PROBLEMAS DE NIVEL MEDIO Y DE OLIMPIADAS (2)

Presentamos una selección de problemas propuestos en la Competición Matemática Mediterránea (Memorial Peter O'Halloran), entre 1998 y 2001.

1998,#**3**(**España**)

En el triángulo ABC, I es el incentro y $D \in (BC)$, $E \in (CA)$, $F \in (AB)$ son los puntos de tangencia del círculo inscrito con los lados.

Sea $M \in (BC)$ el pie de la bisectriz interior del ángulo $\widehat{BIC}$, y sea $P = FE \cap AM$.

Demostrar que DP es la bisectriz interior del ángulo $\widehat{FDE}$.

1999,#**3**(**Austria**)

Sean a, b, c números reales no nulos y x, y, z números reales positivos tales que $x + y + z = 3$. Demostrar que

$$\frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} \geq \frac{x}{1+a^2} + \frac{y}{1+b^2} + \frac{z}{1+c^2}.$$

1999,#**4**(**Bulgaria**)

Sea ABC un triángulo con lados $BC = a, CA = b, AB = c$ y tal que $\widehat{B} = 4.\widehat{A}$

Demostrar que

$$ab^2c^3 = (b^2 - a^2 + ac)(a^2 - b^2 + ac)^2.$$

2000,#**2**(**Turquía**)

Se dan n números reales positivos $a_1, \cdots, a_n$, distintos dos a dos. Demostrar que, para cada n –upla ordenada $(\sigma_1, \cdots, \sigma_n)$, donde σ_i es +1 ó - 1, existen : una permutación $b_1, \cdots, b_n$ de los números $a_1, \cdots, a_n$; y una n – upla ordenada $(\beta_1, \cdots, \beta_n)$, donde cada β_i es +1 ó -1, de tal manera que el signo de la expresión

$$\sum_{j=1}^{i} \beta_j b_j$$

coincide con σ_i para todo $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$

2000,#**4**(**España**)

P, Q, R, S son los puntos medios respectivos de los lados BC, CD, DA, AB del cuadrilátero convexo $ABCD$. Demostrar que

$$4(AP^2 + BQ^2 + CR^2 + DS^2) \leq 5(AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2).$$

2001,#**1**(**Austria**)

Sea k una circunferencia de centro O, y sean P y Q dos puntos sobre k. Sea M el punto medio de PQ , y A y C dos puntos variables sobre k, de tal manera que AC pasa por M. El trapecio ABCD está inscrito en k, de modo que AB es paralela a CD y ambas son paralelas a PQ.

Demostrar que AD y BC se cortan en un punto X que es independiente de la posición de A sobre la circunferencia.

2001,#**2**(**Bulgaria**)

Hallar todos los enteros n tales que el polinomio $p(x) = x^5 - nx - n - 2$ puede descomponerse en producto de dos polinomios no constantes, con coeficientes enteros.

2001,#**4**(**Bulgaria**)

Se da un triángulo equilátero ABC, de lado 1. Designamos con Δ el conjunto de los puntos interiores o sobre los lados de ABC. Para cada punto $M \in \Delta$, a_M, b_M, c_M son las distancias de M a los lados BC, CA, AB respectivamente. Definimos

$$f(M) = a_M^3(b_M - c_M) + b_M^3(c_M - a_M) + c_M^3(a_M - b_M).$$

a) Describir geométricamente el conjunto $\{M \in \Delta : f(M) \geq 0\}$.

b) Hallar los valores máximo y mínimo de $f(M)$ cuando $M \in \Delta$, y los puntos donde son alcanzados.

PROBLEMAS RESUELTOS

Presentamos a continuación las soluciones a los problemas 1, 2, 3 del número 1 de la Revista, que envía Carlos Marcelino Casas Cuadrado.

Problema 1

Resolver la ecuación en la incógnita x:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a+x & a+x^2 \\ a & 1 & a+x^2 & a+x \\ a+x & a+x^2 & 1 & a \\ a+x^2 & a+x & a & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(Absolutorial Aufgabe, Baviera, 1874)

Solución al problema 1

El término mayor grado del polinomio que resulta al desarrollar el determinante es x^8, por lo que voy a intentar descomponerlo en el producto de cuatro polinomios de segundo grado (eso siempre es posible ya que si z (complejo) es raíz del polinomio, z también lo es, y (x-z)·(x-z) tiene coeficientes reales). Para hacer esto, aplicamos las propiedades del determinante:

- Si se intercambian dos filas ó columnas, el determinante no varía (cambia de signo, pero al ser igual a cero no varía).
- Si se suma a una fila o columna una combinación lineal de las otras filas o columnas, el determinante no varía.
- Si se multiplica un número por un determinante, toda una fila (o una columna) queda multiplicada por ese número.

Aplicando eso vamos a operar el determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a+x & a+x^2 \\ a & 1 & a+x^2 & a+x \\ a+x & a+x^2 & 1 & a \\ a+x^2 & a+x & a & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Sumando a la cuarta columna las otras tres queda:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a+x & x^2+x+3\cdot a+1 \\ a & 1 & a+x^2 & x^2+x+3\cdot a+1 \\ a+x & a+x^2 & 1 & x^2+x+3\cdot a+1 \\ a+x^2 & a+x & a & x^2+x+3\cdot a+1 \end{vmatrix} = 0$$

y como la cuarta columna está toda multiplicada por $x^2+x+3\cdot a+1$, sale fuera del determinante:

$$(x^2+x+3\cdot a+1)\cdot \begin{vmatrix} 1 & a & a+x & 1 \\ a & 1 & a+x^2 & 1 \\ a+x & a+x^2 & 1 & 1 \\ a+x^2 & a+x & a & 1 \end{vmatrix} = 0$$

y restando a todas las filas la primera:

$$(x^2+x+3\cdot a+1)\cdot \begin{vmatrix} 1 & a & a+x & 1 \\ a-1 & 1-a & x^2-x & 0 \\ x+a-1 & x^2 & 1-a-x & 0 \\ x^2+a-1 & x & -x & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando por la cuarta columna:

$$(x^2+x+3\cdot a+1)\cdot \begin{vmatrix} a-1 & 1-a & x^2-x \\ x+a-1 & x^2 & 1-a-x \\ x^2+a-1 & x & -x \end{vmatrix} = 0$$

Sumando a la tercera fila la segunda menos la primera:

$$(x^2+x+3\cdot a+1)\cdot \begin{vmatrix} a-1 & 1-a & x^2-x \\ x+a-1 & x^2 & 1-a-x \\ x^2+x+a-1 & x^2+x+a-1 & -x^2-x-a+1 \end{vmatrix} = 0$$

y cambiando el signo a la tercera columna:

$$(x^2+x+3\cdot a+1)\cdot \begin{vmatrix} a-1 & 1-a & -x^2+x \\ x+a-1 & x^2 & a+x-1 \\ x^2+x+a-1 & x^2+x+a-1 & x^2+x+a-1 \end{vmatrix} = 0$$

sacando el factor $x^2+x+a-1$ fuera del determinante:

$$(x^2+x+3\cdot a+1)\cdot(x^2+x+a-1)\cdot\begin{vmatrix} a-1 & 1-a & -x^2+x \\ x+a-1 & x^2 & a+x-1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$$

Restando a todas las columnas la primera:

$$(x^2+x+3\cdot a+1)\cdot(x^2+x+a-1)\cdot\begin{vmatrix} a-1 & 2-2\cdot a & -x^2+x-a+1 \\ x+a-1 & x^2-x-a+1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0$$

El valor del determinante es el producto de los elementos de la diagonal secundaria cambiado de signo, al ser cero todos los elementos por debajo de ella. Así, la descomposición final queda:

$$(x^2+x+3\cdot a+1)\cdot(x^2+x+a-1)\cdot(x^2-x+a-1)\cdot(x^2-x-a+1)=0$$

La única posibilidad de que esa ecuación se cumpla es que al menos uno de los factores sea igual a cero. Vamos a analizarlos por separado:

$x^2+x+3\cdot a+1=0$:

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1-4\cdot(3\cdot a+1)}}{2}$$

$$\boxed{x=\frac{-1\pm\sqrt{-3\cdot(1+4\cdot a)}}{2}}$$

que toma valores reales si $1+4\cdot a\le 0$, ó $\boxed{a\le -\frac{1}{4}}$.

$x^2+x+a-1=0$:

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1-4\cdot(a-1)}}{2}$$

$$\boxed{x=\frac{-1\pm\sqrt{5-4\cdot a}}{2}}$$

que toma valores reales si $5-4\cdot a\ge 0$, ó $\boxed{a\le\frac{5}{4}}$.

$x^2-x+a-1=0$:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (a - 1)}}{2}$$

$$\boxed{x = \frac{1 \pm \sqrt{5 - 4 \cdot a}}{2}}$$

que toma valores reales si $5 - 4 \cdot a \geq 0$, ó $\boxed{a \leq \frac{5}{4}}$.

x^2-x-a+1=0:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (-a + 1)}}{2}$$

$$\boxed{x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3 + 4 \cdot a}}{2}}$$

que toma valores reales si $4 \cdot a - 3 \geq 0$, ó $\boxed{a \geq \frac{3}{4}}$.

Soluciones reales:

Dependiendo del valor de a, la ecuación tiene diferente número de soluciones reales:

$a < -\frac{1}{4}$, 6 soluciones reales (y 2 complejas):

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3 \cdot (1 + 4 \cdot a)}}{2}$$
$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5 - 4 \cdot a}}{2}$$
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5 - 4 \cdot a}}{2}$$

$a = -\frac{1}{4}$, 5 soluciones reales, una de ellas doble (y 2 complejas):

$$x = -\frac{1}{2}, \text{ doble}$$
$$x = \frac{1 \pm \sqrt{6}}{2}$$
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{6}}{2}$$

$-\frac{1}{4} < a < \frac{3}{4}$, 4 soluciones reales (y 4 complejas):

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5 - 4 \cdot a}}{2}$$
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5 - 4 \cdot a}}{2}$$

$a = \frac{3}{4}$, 5 soluciones reales, una de ellas doble (y 2 complejas):

$$x = -\frac{1}{2}, \text{ doble}$$
$$x = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}$$
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{2}}{2}$$

$\frac{3}{4} < a < \frac{5}{4}$, 6 soluciones reales (y 2 complejas):

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3 + 4 \cdot a}}{2}$$
$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5 - 4 \cdot a}}{2}$$
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5 - 4 \cdot a}}{2}$$

$a = \frac{5}{4}$, 4 soluciones reales, dos de ellas dobles (y 2 complejas):

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{2}}{2}$$
$$x = \frac{1}{2}, \text{ doble}$$
$$x = -\frac{1}{2}, \text{ doble}$$

$a > \frac{5}{4}$, 2 soluciones reales (y 6 complejas):

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3 + 4 \cdot a}}{2}$$

Problema 2

Calcular el límite:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\cos\frac{\pi}{2\cdot n}+\cos\frac{2\cdot\pi}{2\cdot n}+\cos\frac{3\cdot\pi}{2\cdot n}+...+\cos\frac{n\cdot\pi}{2\cdot n}}{\frac{\pi}{2\cdot n}+\frac{2\cdot\pi}{2\cdot n}+\frac{3\cdot\pi}{2\cdot n}+...+\frac{n\cdot\pi}{2\cdot n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{N}{D}$$

(Absolutorial Aufgabe, Baviera 1874)

Solución al problema 2

Vamos a ver cómo se comportan el numerador y el denominador del límite cuando n tiene a infinito.

Denominador: Sacando factor común a $\frac{\pi}{2\cdot n}$ queda:

$$D=\frac{\pi}{2\cdot n}\cdot(1+2+3+...+n)$$

El interior del paréntesis es la suma de una progresión aritmética, con lo que queda:

$$D=\frac{\pi}{2\cdot n}\cdot\frac{(1+n)}{2}\cdot n$$

y simplificando:

$$D=\frac{\pi\cdot(1+n)}{4}$$

con lo que D se comporta como $\frac{\pi\cdot n}{4}$ cuando n tiende a infinito.

Numerador: Llamo N al numerador. La fórmula de integración del trapecio dice que:

$$\int_a^b f(x)\cdot dx=\lim_{h\to 0}\left[h\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot f(a)+f(a+h)+f(a+2\cdot h)+...+f(a+(n-1)\cdot h)+\frac{1}{2}\cdot f(a+n\cdot h)\right)\right]$$

siendo n el número de subintervalos equiespaciados y h el diámetro de cada intervalo ($h=\frac{b-a}{n}$). Si tomamos f(x)=cos(x), a=0 y b=$\frac{\pi}{2}$, la expresión queda:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\cdot dx = \lim_{h\to 0}\left[h\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\cos(0)+\cos\left(\frac{\pi}{2\cdot n}\right)+\cos\left(\frac{2\cdot\pi}{2\cdot n}\right)+...+\cos\left(\frac{(n-1)\cdot\pi}{2\cdot n}\right)+\frac{1}{2}\cdot\cos\left(\frac{n\cdot\pi}{2\cdot n}\right)\right)\right]$$

y operando:

$$1 = \lim_{n\to 0}\left[\frac{\frac{\pi}{2}-0}{n}\cdot\left(\frac{1}{2}+\cos\left(\frac{\pi}{2\cdot n}\right)+\cos\left(\frac{2\cdot\pi}{2\cdot n}\right)+...+\cos\left(\frac{(n-1)\cdot\pi}{2\cdot n}\right)+\cos\left(\frac{n\cdot\pi}{2\cdot n}\right)-\frac{1}{2}\cdot\cos\left(\frac{n\cdot\pi}{2\cdot n}\right)\right)\right]$$

$$1 = \lim_{n\to 0}\left[\frac{\frac{\pi}{2}}{n}\cdot\left(\frac{1}{2}+N-0\right)\right] = \lim_{n\to 0}\left[\frac{\frac{\pi}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}+N\right)}{n}\right]$$

Entonces, cuando n tiende a infinito, $\frac{\pi}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}+\mathrm{N}\right)$ se comporta como n, por lo que N se comporta como $\frac{2\cdot n}{\pi}-\frac{1}{2}\approx\frac{2\cdot n}{\pi}$.

Volviendo al límite inicial, y utilizando las aproximaciones de N y D obtenidas, queda:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\cos\frac{\pi}{2\cdot n}+\cos\frac{2\cdot\pi}{2\cdot n}+\cos\frac{3\cdot\pi}{2\cdot n}+...+\cos\frac{n\cdot\pi}{2\cdot n}}{\frac{\pi}{2\cdot n}+\frac{2\cdot\pi}{2\cdot n}+\frac{3\cdot\pi}{2\cdot n}+...+\frac{n\cdot\pi}{2\cdot n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2\cdot n}{\pi}}{\frac{\pi\cdot n}{4}}$$

y simplificando:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{\cos\frac{\pi}{2\cdot n}+\cos\frac{2\cdot\pi}{2\cdot n}+\cos\frac{3\cdot\pi}{2\cdot n}+...+\cos\frac{n\cdot\pi}{2\cdot n}}{\frac{\pi}{2\cdot n}+\frac{2\cdot\pi}{2\cdot n}+\frac{3\cdot\pi}{2\cdot n}+...+\frac{n\cdot\pi}{2\cdot n}} = \frac{8}{\pi^2}}$$

Nota:

Para comprobar este resultado he hecho un programa, “limite.exe” que calcula la expresión del límite desde 1 hasta un n que hay que fijar, y da la salida en “serie.txt”, y otro, “limite2.exe”, que halla el valor de la expresión para un solo n, y da la salida en “serie2.txt” (este último admite n’s más grandes). Para n=1.000.000, la expresión del límite es 0.81056802195074, cercano a la solución, $\frac{8}{\pi^2} \approx 0.81056916913870$.

Problema 3

Por un punto P_0 de la curva de ecuación $y = x^3 + A \cdot x^2 + B \cdot x + C$ se traza una recta, que es tangente a la curva en otro punto P_1.

Por P_1 se traza una recta, que es tangente a la recta en un nuevo punto P_2, y así sucesiva e indefinidamente.
Demostrar que la sucesión de puntos P_0, P_1, P_2,... tiende hacia el punto de inflexión de la curva.

(Prueba de Bachillerato, Suecia 1964)

Solución al problema 3

Dado un punto $P_n(x_n,y_n)$ de esa sucesión vamos a ver qué expresión tiene el punto $P_{n+1}(x_{n+1},y_{n+1})$. Para ello empezamos hallando la ecuación de la recta que pasa por P_n y P_{n+1}:

$$y - y_n = m \cdot (x - x_n)$$

Hallamos la intersección de esa recta con la curva:

$$y = m \cdot (x - x_n) + y_n = x^3 + A \cdot x^2 + B \cdot x + C$$

$$P(x) = x^3 + A \cdot x^2 + (B - m) \cdot x + (C + m \cdot x_n - y_n) = 0$$

Las raíces de P(x) serán los puntos de intersección de la recta con la curva. Debe tener una raíz simple, x_n, que por suposición está en las dos, y una raíz, x_{n+1}, doble, por ser la curva y la recta tangentes (ésta última es la que buscamos).

Como x_n es raíz, dividimos P(x) por $(x-x_n)$ por ruffini:

	1	A	B-m	$C+m \cdot x_n-y_n$
x_n		x_n	Q_1	Q_3
	1	$A+x_n$	Q_2	0

Las expresiones Q_1, Q_2 y Q_3 son datos que no necesitamos para la resolución del problema (con ellos se podría hallar m, la pendiente de la recta).
La división ha dado como resultado:

$$R(x) = \frac{P(x)}{x - x_n} = x^2 + (A + x_n) \cdot x + Q_2$$

R(x) debe tener una raíz doble por lo dicho anteriormente, y esa es:

$$x = \frac{-A - x_n \pm 0}{2} = \frac{-A - x_n}{2}$$

por lo que tenemos la relación entre la coordenada 'x' de un punto y el siguiente:

$$x_{n+1} = \frac{-A - x_n}{2}$$

Hay que demostrar que x_n tiende a x_i cuando n tiende a infinito, siendo x_i la coordenada 'x' del punto de inflexión de la curva:

$$y(x_i) = x_i^3 + A \cdot x_i^2 + B \cdot x_i + C$$

$$y'(x_i) = 3 \cdot x_i^2 + 2 \cdot A \cdot x_i + B$$

$$y''(x_i) = 6 \cdot x_i + 2 \cdot A = 0$$

$$x_i = -\frac{A}{3}$$

$$y'''(x_i) = 6 \neq 0$$

con lo que hay un punto de inflexión en $x_i = -\frac{A}{3}$.
Para demostrar que x_n converge a x_i, voy a hallar la distancia que hay desde x_{n+1} a x_i en función de x_n:

$$D_{n+1} = |x_{n+1} - x_i| = \left| \frac{-A - x_n}{2} - \left(-\frac{A}{3}\right) \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| x_n - \left(-\frac{A}{3}\right) \right| = \frac{1}{2} \cdot |x_n - x_i| = \frac{1}{2} \cdot D_n$$

por lo que la distancia de x_{n+1} a x_i es la mitad de la distancia de x_n a x_i. Si llamamos D_0 la distancia de x_0 a x_i, se tiene que:

$$\left|x_n - x_i\right| = \frac{D_0}{2^n}$$

x_n tiende a x_i si el límite cuando n tiende a infinito de la distancia entre x_n y x_i es cero:

$$\lim_{n\to\infty}\left|x_n - x_i\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{D_0}{2^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{D_0}{2^n} = 0$$

por lo que:

$$\lim_{n\to\infty}\left|x_n\right| = x_i$$

y como para cada valor de 'x' en la curva inicial sólo hay un valor de 'y', y por lo tanto un punto:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} P_n = P_i}$$

Un soneto de Rafael Alberti a la divina proporción

La edición de 1946 de la Editorial Losada, de Buenos Aires, de la obra **La Divina Proporción**, de LUCA PACIOLI, finalizaba su Proemio con el siguiente soneto:

A LA DIVINA PROPORCIÓN

A ti, maravillosa disciplina,
media, extrema razón de la hermosura
que claramente acata la clausura
viva en la malla de tu ley divina.

A ti, cárcel feliz de la retina,
áurea sección, celeste cuadratura,
misteriosa fontana de mesura
que el universo armónico origina.

A ti, mar de los sueños angulares,
flor de las cinco formas regulares,
dodecaedro azul, arco sonoro.

Luces por alas un compás ardiente.
Tu canto es una esfera transparente.
A ti, divina proporción de oro.

Problemas difíciles, creados por estudiantes de alto rendimiento

Emilia Angelova Velikova,
Svetoslav Jordanov Bilchev
Centre of Applied Mathematics and Informatics,
Pedagogical Faculty, University of Rousse,
Bulgaria

Panayiotis Vlamos
Technical University of Athens, Greece

Abstract. The paper examines new hard problems created by gifted students as a results of experiment held in Bulgaria and Greece (2001, 2002). Corresponding to the aim of the experiment to stimulate the mathematical creativity of gifted students there was applied special methodology of education in the area of transformations.

El experimento realizado en Bulgaria y Grecia (2001, 2002) para estimular la creatividad matemática de estudiantes de alto rendimiento de los grados 9 a 12 (15 a 18 años de edad), ha sido llevado a efecto por medio de un rico arsenal metodológico. Los resultados muestran que el carácter creativo del estudiante como generador de problemas, el desarrollo de la creatividad, la realización de tareas, hábitos de investigación y aplicación de los conocimientos del estudiante están determinados en gran medida por los métodos de enseñanza aplicados, y en menor medida por los niveles de las características incluidas en la tecnología del diagnóstico aplicada para el descubrimiento de estudiantes creativos.

La metodología de la educación de estudiantes de talento para crear problemas por medio de transformaciones incluía :

1. El examen de muchas clases de problemas de competiciones que se podían resolver más fácilmente por transformaciones. Entre otras técnicas :
   - ♦ Cotas superiores e inferiores óptimas para funciones;
   - ♦ Ecuaciones, igualdades, desigualdades, sistemas.
2. El examen de transformaciones de tipo empírico, cuyas formulas son conocidas por los estudiantes; y la aplicación de esas transformaciones para resolver problemas de competiciones y crear otros nuevos.
3. El estudio de los métodos de actividad creativa –los procesos de creación de transformaciones T_ℓ, T_ℓ^{-1}, Transformación del Paralelogramo

(PT), Transformación Dual de la mediana (MDT), sus combinaciones y aplicaciones científicas [1, 5], para la creación de nuevos problemas en el campo de las "Desigualdades geométricas y mixtas para los triángulos". Presentamos algunos problemas difíciles creados por los estudiantes.

Problema 1 (A. Velikov). Probar la desigualdad asimétrica:

(1) $$5\sum ab \geq 4 + 9abc \ ,$$

donde *a, b, c* son los lados de un triángulo de perímetro 2.

Solución. Primero aplicamos la desigualdad de Schur:

(2) $$\sum \left[x^{\lambda}(x-y)(x-z)\right] \geq 0,\ \lambda \geq 0,\ x,y,z > 0\ .$$

La igualdad se produce cuando $x = y = z$.

Segundo, si $\lambda = 1$, de (2) se sigue

(3) $$\sum [x(x-y)(x-z)] \geq 0,\ x,y,z > 0 \quad \Leftrightarrow$$

(4) $$\sum x^3 + 3xyz \geq \sum x^2(y+z), \quad x,y,z > 0\,.$$

Por otra parte

(5) $$\sum x^3 = (x+y+z)^3 - 6xyz - 3\sum x^2 y$$

(6) $$\sum x^2 y = (x+y+z)\sum xy - 3xyz\,.$$

Sustituyendo (5) y (6) y usando la condición $x + y + z = 1$ en (4) obtenemos

(7) $$1 + 9xyz \geq 4\sum xy\,,\ x + y + z = 1\,.$$

Aplicamos a (7) la transformación

(8) $$T_{xa}(1):\ y+z=a,\ z+x=b,\ x+y=c\,,\ x+y+z=1,$$

donde *a, b, c* son los lados del triángulo, es decir,

$$x = 1-a,\ y = 1-b,\ z = 1-c,\ a+b+c = 2\,.$$

Resulta (1).

Observación. Si aplicamos a (7) la transformación:

(9) $$x+y=\frac{c}{s},\ y+z=\frac{a}{s},\ z+x=\frac{b}{s}$$

entonces resulta la cota inferior optima para s^2 como una función cuadrática en *R, r*: GI5.8: $s^2 \geq 16Rr - 5r^2$ [2].

Problema 2 (A.Velikov). Probar la desigualdad:

(10) $$8m_a^2 m_b^2 m_c^2 \geq \prod (m_a + m_b)(m_a + m_b - m_c),$$

donde m_a, m_b, m_c son las medianas del triángulo de lados *a, b, c*.

Solución. Primero probaremos la desigualdad

(11) $$8a^2b^2c^2 \geq \prod (a+b)(a+b-c),$$

donde *a, b, c* son los lados de un triángulo arbitrario [3].

Aplicando a (11) las siguientes fórmulas

$\prod (a+b) = 2s\left(s^2 + r^2 + 2Rr\right)$ [4], $abc = 4RF$, $2s.\prod (a+b-c) = 16F^2$

se obtiene

(12) $$8R^2 \geq s^2 + r^2 + 2Rr.$$

Con esta desigualdad es fácil encontrar la cota superior optima para s^2 como una función cuadrática en *R, r*:

(13) GI5.8: $s^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2$ y

(14) GI5.1 $R \geq 2r$ (Desigualdad de Euler).

Si la desigualdad (12) es cierta, entonces la desigualdad (11) es cierta también. La igualdad en (11) ocurre cuando $a = b = c$.

Ahora aplicamos a (11) la transformación $a = m_a,\ b = m_b,\ c = m_c$ y se demuestra (10).

Observación. Si aplicamos a (11) la transformación

(15) $$T_{ax} : a = y + z,\ b = z + x,\ c = x + y,\quad x, y, z > 0$$

entonces demostramos la desigualdad (que es un problema Nuevo):

(16) $$8\prod (x+y)^2 \geq xyz \prod (2x + y + z),$$

donde $x, y, z > 0$.

Problema 3 (A.Velikov). Sean *a, b, c, s, F* los elementos usuales del triángulo, con $\mathrm{F} = \sqrt{\mathrm{s}}$. Probar que

(17) $$\sum \frac{1}{(\mathrm{s}-\mathrm{a})^3 \mathrm{a}} \geq \frac{3}{2}.$$

Solución. Aplicamos T_{ax} a (17) y obtenemos

(18) $$\sum \frac{1}{x^3 (y+z)} \geq \frac{3}{2},\quad xyz = 1$$

(de la condición $F = \sqrt{s}$ y $F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ se deduce que $\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)} = 1$ y $xyz = 1$). Este es un problema conocido [1] y puede probarse por la transformación

(19) $\qquad u=\dfrac{1}{x},\ v=\dfrac{1}{y},\ t=\dfrac{1}{z},\ uvw=1$

y la desigualdad de Cauchy-Bunyakovski-Schwarz.
Probaremos (16) a partir de la desigualdad (18), que es cierta, aplicando la transformación inversa de T_{ax}

(20) $\qquad T_{xa}: y+z=a,\ z+x=b,\ x+y=c$ con $F=\sqrt{s}$.

Las igualdades se verifican en (18) si $x=y=z=1$ y en (16) si $a=b=c=2$.

Problema 4 (D.Stoyanov). Probar la desigualdad

(21) $\qquad 4\sum\dfrac{1}{a}-\sum\dfrac{a}{bc}\le\dfrac{\sqrt{3}}{3}\left(\dfrac{2}{r}+\dfrac{5}{R}\right),$

donde *a, b, c, r, R* son los elementos habituales de un triángulo arbitrario.
Solución. De las desigualdades bien conocidas GI 5.11 y GI 7.2 obtenemos

(22) $\qquad 3\sqrt{3}r\le s\le\dfrac{\sqrt{3}}{3}(4R+r),$

de la que se deduce

(23) $\qquad s^2-\left(\dfrac{4\sqrt{3}}{3}R+\dfrac{10\sqrt{3}}{3}r\right)s+3r(4R+r)\le 0\ \Leftrightarrow$

(24) $\qquad s^2+12Rr+3r^2\le\dfrac{2\sqrt{3}}{3}(2R+5r)s.$

Aplicando las fórmulas $s^2+4Rr+r^2=\sum bc$ [4], $2s^2=\sum a^2+2\sum bc$ transformamos (24) en la desigualdad

(25) $\qquad 4\sum bc-\sum a^2\le\dfrac{4\sqrt{3}}{3}(2R+5r)s\ \Leftrightarrow$

(26) $\qquad 4\sum bc-\sum a^2\le\dfrac{4\sqrt{3}}{3}(2R+5r).\dfrac{abc}{4R}.\dfrac{1}{r}\ \Leftrightarrow$ (21).

Observación. Lo anterior es la base para resolver los dos problemas siguientes.

Problema 5 (D.Stoyanov). Probar la desigualdad

(27) $\qquad 4\sqrt{3}.\dfrac{xy+yz+zx-x^2-y^2-z^2}{2(x+y)(y+z)(z+x)+5xyz}\le\sqrt{\dfrac{x+y+z}{xyz}},\quad x,y,z>0.$

Solución. Aplicando la transformación

(28) $T_{ax} : a = y + z,\ b + z + x,\ c = x + y,\ s = \frac{1}{2}\sum a = \sum x$,

$$F = \sqrt{s\prod(s-a)} = \sqrt{xyz.\sum x},\quad R = \frac{abc}{4F} = \frac{\prod(x+y)}{4.\sqrt{xyz\sum x}},$$

$$r = \frac{F}{s} = \sqrt{\frac{xyz}{\sum x}},\quad r_a = \frac{F}{s-a} = \frac{\sqrt{xyz\sum x}}{x},\quad x, y, z > 0,$$

a (21) obtenemos la desigualdad

(29) $$4\sum\frac{1}{y+z} - \sum\frac{y+z}{(z+x)(x+y)} \le \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{2\sqrt{x+y+z}}{\sqrt{xyz}} + \frac{5\sqrt{xyz(x+y+z)}}{\prod(x+y)}\right).$$

La desigualdad (27) se sigue de (29) por medio de cálculos complicados.

Problema 6 (D.Stoyanov). Probar la desigualdad

(30) $$\frac{8m_c(a+b) - 2(a-b)^2 - a^2 - b^2 + c^2}{(a+b+2m_c)abm_c + 10F^2}.F \le 2\frac{\sqrt{3}}{3},$$

donde *a, b, c,* m_a, m_b, m_c, *F* son los elementos usuales de un triángulo.

Solución. Aplicando la MDT [1]

(31) $$a = a,\ b = b,\ c = 2m_c,\ F = F,\ r = \frac{F}{\frac{1}{2}(a+b+2m_c)},\ R = \frac{ab2m_c}{4F}$$

a (21) obtenemos la desigualdad (32):

$$4\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{2m_c}\right) - \left(\frac{a}{b2m_c} + \frac{b}{2m_c a} + \frac{2m_c}{ab}\right) \le \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{2.\frac{1}{2}(a+b+2m_c)}{F} + \frac{5.4F}{ab2m_c}\right)$$

que transformamos en (30) por cálculos difíciles.

Problema 7 (D.Peev). Probar que

(33) $$73s^4 + 81r^4 + 234s^2r^2 - 1224s^2rR + 648r^3R + 1296r^2R^2 \ge 0,$$

donde *s, r, R* son los elementos habituales del triángulo.
Solución. aplicamos a la desigualdad conocida (de "Kvant")

$$(34)\ \sum x^4 + 2xyzt \geq x^2y^2 + x^2z^2 + x^2t^2 + y^2z^2 + y^2t^2 + z^2t^2, x,y,z,t > 0$$

la transformación

$$(35)\qquad T : x = s-a,\ y = s-b,\ z = s-c,\ t = \frac{s}{3},$$

donde *a, b, c, s* son los elementos usuales del triángulo y obtenemos una nueva desigualdad (36):

$$\sum (s-a)^4 + \left(\frac{s}{3}\right)^4 + 2.\frac{s}{3}.\prod (s-a) \geq \sum (s-a)^2(s-b)^2 + \frac{s^2}{9}.\sum (s-a)^2 .$$

Calculamos:

$$(37)\quad \begin{aligned} &\sum (s-a)^4 = 3s^4 - 4s^3\sum a + 6s^2\sum a^2 - 4s\sum a^3 + \sum a^4 = \\ &s^4 - 16s^2Rr + 2r^2(4R+r)^2; \end{aligned}$$

$$(38)\quad \sum (s-a)^2(s-b)^2 = r^2\left[(4R+r)^2 - 2s^2\right];$$

$$(39)\quad \sum (s-a)^2 = s^2 - 2r(4R+r)$$

con ayuda de las fórmulas [4]: $\sum a^2 = 2\left(s^2 - r^2 - 4Rr\right)$,

$\sum a^3 = 2s\left(s^2 - 3r^2 - 6Rr\right)$, $\sum a^4 = 2s^4 - 4r(4R+3r)s^2 + 2r^2(4R+r)^2$.

Aplicando (37), (38) y (39) a (36) obtenemos (33).

Creemos que estos problemas son suficientes para mostrar el alto nivel de creatividad de los estudiantes, desarrollado al aplicar la especial metodología de este experimento.

Referencias bibliográficas

[1] Bilchev, S.J. & E.A.Velikova, Transformations for a Triangle and Some Applications, Mathematics and Education in Mathematics, Proceedings of the Seventeenth Spring Conference of the Union of Bulgarian Mathematicians, Sunny Beach, April 6-9, 1988, Sofia, Bulgarian Academy of Sciences, 1988. pp.9-19.
[2] Bottema, O. & others Geometric Inequalities. The Wolthers-Noordhoff, Groningen, The Netherlands, 1969.
[3] Hitov, H Geometry of the Triangle, Narodna prosveta, Sofia, Bulgaria, 1991.
[4] Soltan, V.P. & S.I.Mademan Equalities and Inequalities in the triangle, Kishinev, Stiintca, 1982.
[5] Velikova, E.A. & S.J.Bilchev The Method of Transformations for Solving Trigonometric and Mixed Inequalities, Geometry & Mathematics Competitions, Isfahan, Iran, 1998. pp.106-117.

Emilia Angelova Velikova e-mail: emily@ami.ru.acad.bg
Svetoslav Jordanov Bilchev e-mail: slavy@ami.ru.acad.bg
Panayiotis Vlamos e-mail: vlamos@vlamos.com

PROBLEMAS PARA LOS MÁS JÓVENES

Presentamos a continuación los problemas propuestos en la Fase final provincial de la X Olimpiada Provincial de Matemáticas, celebrada en Olmedo (Valladolid) el 18 de mayo de 2002, organizada por la Sociedad Castellano-Leonesa de Profesorado de Matemáticas.

2º de Educación Secundaria Obligatoria (12-13 años de edad)

1.Las abejas macho nacen de huevos sin fecundar, y por tanto tienen madre, pero no padre. Las abejas hembra nacen de huevos fecundados. ¿Cuántos antepasados tendrá una abeja macho en la duodécima generación? ¿Cuántos de ellos serán machos?

2. Un tren sale de Valladolid con 134 pasajeros entre hombres, mujeres y niños. Se detiene en varias estaciones; cada vez que para, bajan 2 hombres y 1 mujer y suben 4 niños. Al llegar al final del recorrido hay en total 143 pasajeros, siendo el número de niños una vez y media el número de hombres, y el número de mujeres la mitad del número de niños.

¿Cuántos hombres, mujeres y niños había en el tren cuando salió de Valladolid?

3.Una plaza tiene forma de trapecio rectángulo. Sus bases miden 20 y 25 metros; la altura del trapecio mide 12 m ,y el lado oblicuo, 13 m.

En sus cuatro esquinas hay cuatro parterres que son sectores circulares de radio 3 metros. El Ayuntamiento ha decidido plantar césped en el resto de la plaza. Sabiendo que el precio de 12 euros el metro cuadrado, ¿cuánto dinero tendrá que gastarse?

4º de Educación Secundaria Obligatoria (14-15 años de edad)

1. Encontrar un número de cuatro cifras que verifique las siguientes condiciones :

a) la suma de los cuadrados de las cifras de las centenas y de las unidades es igual a 53.

b) la suma de los cuadrados de las otras dos cifras es igual a 45.

c) Si del número pedido restamos el que se obtiene al invertir sus cifras, resulta un múltiplo de 99 comprendido entre 1000 y 1200.

2. Dado un triángulo rectángulo de vértices A, B y C, se consideran los puntos A',B' y C', simétricos de A,B y C respecto de sus lados opuestos. ¿Qué relación existe entre el área del triángulo A'B'C' y la del triángulo ABC?

3. En cada estación de una red ferroviaria se venden tantos billetes distintos como estaciones a las que se puede acceder desde ella (el billete de la estación A a la B es distinto del de B a A). Desde cada estación se puede ir a todas las demás de la red.

Se inauguran varias estaciones y esto obliga a imprimir 34 nuevos billetes distintos. ¿Cuántas estaciones había y cuántas se han inaugurado?

Número

3

PROBLEMAS PROPUESTOS

Presentamos cuatro problemas propuestos en la Fase Regional de la X Olimpiada Castellano Leonesa de Matemáticas, de 2º y 4º de E.S.O., celebrada en Zamora (España)

2º de E.S.O.

1. Un obrero fabrica cierto lote de piezas en 12 días, trabajando 7 horas diarias, de las que ha de dedicar cada día 1 hora para la preparación de herramientas. Un empresario quiere que el lote de piezas esté listo en 10 días. ¿Cuántos minutos más deberá trabajar cada día el obrero para cumplir su objetivo?

2. En una tribu india del Amazonas, donde todavía subsiste el trueque, se tienen las siguientes equivalencias de cambio:

Un collar y una lanza se cambian por un escudo.

Una lanza se cambia por un collar y un cuchillo.

Dos escudos se cambian por tres cuchillos.

¿A cuántos collares equivale una lanza?

4º de E.S.O.

3.Ana y María se disponen a hacer footing en un circuito circular. Las dos salen a las 8 de la mañana del mismo punto del circuito, pero Ana corre en el sentido de las agujas del reloj y María en sentido contrario.

A las 10 de la mañana las dos acaban a la vez en el mismo punto del que habían salido, después de que Ana haya dado 10 vueltas al circuito y María 14. ¿Cuántas veces se cruzaron durante el recorrido?

4. Juan y Sofía apuestan una cena. Para ello un amigo de ambos ha preparado 6 sobres, uno de los cuales contiene una tarjeta negra y los otros cinco, una tarjeta verde cada uno. Empieza Juan eligiendo un sobre; si dentro está la tarjeta negra, pagará la cena. En caso contrario, el sobre elegido por Juan se retira y ahora es Sofía la que elige uno de los 5 sobres restantes. Si el elegido tiene la tarjeta negra, Sofía paga la cena. En caso contrario, se retira el sobre y continúa el juego en las mismas condiciones, hasta que uno de los dos elija el sobre con la tarjeta negra y sea el perdedor. ¿Quién de los dos tiene más probabilidad de ganar? ¿Ocurriría lo mismo si se jugara con 5 sobres y 1 tarjeta negra?

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI

PROBLEMAS PARA LOS MÁS JÓVENES

PROBLEMAS RESUELTOS

Presentamos a continuación soluciones de algunos participantes en la X Olimpiada Provincial de E.S.O. (Enseñanza Secundaria Obligatoria) a 4 de los problemas propuestos en nuestro número anterior. Como el concurso es anónimo, no es posible atribuir nombres a las soluciones.

Problema 2 de 2º ESO

Un tren parte de valladolid con 134 pasajeros entre hombres, mujeres y niños. Se detiene en varias estaciones; cada vez que para, bajan 2 hombres y una mujer y suben 4 niños. Al llegar al final del recorrido hay en total 143 pasajeros, siendo el número de niños una vez y media el número de hombres y el número de mujeres la mitad del número de niños.

¿Cuántos hombres, mujeres y niños había en el tren cuando partió de Valladolid?

Solución

Primero averiguaremos en cuántas paradas para el tren. Si bajan 3 personas (2 hombres y una mujer) y suben 4 (niños), la cantidad de pasajeros aumentará en 1 en cada parada. Se detiene en 9 paradas, ya que 143-134=9. La cantidad total de pasajeros aumenta en 9 al final del trayecto.

Bajarán entonces 18 hombres (2×9), 9 mujeres (1×9) y subirán 36 niños (4×9).

Si le damos a la cantidad de hombres que hay al final del trayecto el valor de x, los niños tendrán el valor de $1,5x$ y las mujeres $0,75x$.

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} 0,75x + x + 1,5x &= 143 \\ 3,5x &= 143 \\ x &= 44 \quad \text{- cantidad de hombres} \end{aligned}$$

Los niños $= 1,5x = 66$

Las mujeres $= 0,75x = 33$

Halladas las cantidades al final del trayecto se pueden calcular las cantidades iniciales:

$$\begin{aligned} \text{Hombres} &= 44 + 18 = 62 \\ Mujeres &= 33 + 9 = 42 \\ Niños &= 66 - 36 = 30 \end{aligned}$$

Problema 3 de 2º de E.S.O.

Una plaza tiene la forma de trapecio rectángulo. Las bases miden 20 y 25 m, el lado oblicuo 13m y el lado perpendicular a las bases 12 m. En las esquinas hay cuatro parterres que son sectores circulares de radio 3 metros. El Ayuntamiento ha decidido plantar césped en el resto de la plaza Sabiendo que el precio es 12 euros el metro cuadrado, ¿cuánto tendrá que gastarse?

Solución

Primero se calcula el área de los parterres. Como son los cuatro ángulos de un cuadrilátero, miden entre todos 360º, y como tienen el mismo radio, podemos formar con ellos un círculo, y así se calcula:

$$A = \pi r^2 = 3,14 \times 3^2 = 28,26m^2.$$

Después calculamos el área total de la plaza :

$$A = \frac{B+b}{2}h = \frac{20+25}{2}12 = 22,25 \times 12 = 270 \text{ m}^2.$$

Ahora le restamos el área de los parterres:

$$270 - 28,26 = 241,74 \text{ m}^2.$$

Finalmente, multiplicamos este resultado por el precio de cada metro cuadrado:

$$241,74 \text{ m}^2 \times 12 \ \in /m^2 = 2900,88 \text{ euros}.$$

Problema 2 para 4º de E.S.O.

dado un triángulo rectángulo de vértices A,B y C, se consideran los puntos A',B' y C', simétricos de A,B y C respecto de sus lados opuestos. ¿Qué relación hay entre el área del triángulo ABC y la del triángulo A'B'C'?

Solución

Supongamos el ángulo recto en B. Consideramos como base para hallar el área del triángulo ABC el lado BC ; entonces el área será

$$S_{ABC} = \frac{AC \times h}{2}.$$

Sea P el pie de la altura desde B. El simétrico de B respecto de AC es B', y se tiene BP = PB'.

El triángulo C'BA' es simétrico de ABC respecto de B ; entonces AC = A'C' ; la altura desde B de este triángulo es BQ, y BQ = BP = PB'= h.

Ahora bien, B'Q es la altura desde B' del triángulo A'B'C', así que

se tiene B'Q = 3h.

Entonces, como las bases de los dos triángulos, AC y A'C' son iguales, el área de A'B'C' es 3 veces el área del triángulo ABC.

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI

MÁXIMOS Y MÍNIMOS SIN DERIVACIÓN :
TRES EJEMPLOS

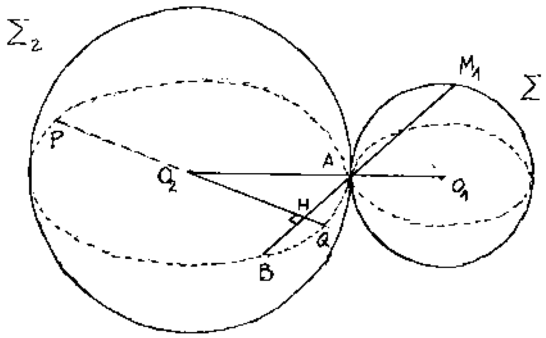
Abderrahim Ouardini
(versión española de F.Bellot)

Ejemplo 1

En el espacio, dos esferas distintas Σ_1 y Σ_2 son tangentes exteriores en el punto A. ¿Cuál es el máximo valor del área del triángulo AM_1M_2 cuando los puntos M_1 y M_2 describen, respectivamente, $\Sigma_1 - \{A\}$ y $\Sigma_2 - \{A\}$?

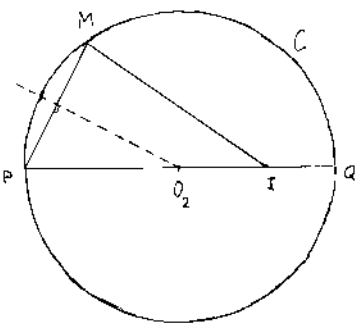
Solución

Fijemos primero el punto M_1. El área del triángulo AM_1M_2 será máxima cuando la distancia del punto M_2 a la recta AM_1 sea máxima. Como M_2 es distinto de A, la recta AM_1 corta a la esfera Σ_2 en un segundo punto B.



En el plano AO_2B (O_1 y O_2 son los respectivos centros de las dos esferas), la mediatriz del segmento AB corta a la esfera Σ_2 en dos puntos distintos P y Q, con $I \in [O_2Q]$, siendo I el punto medio de AB. Si M es un punto cualquiera de Σ_2 se verifica

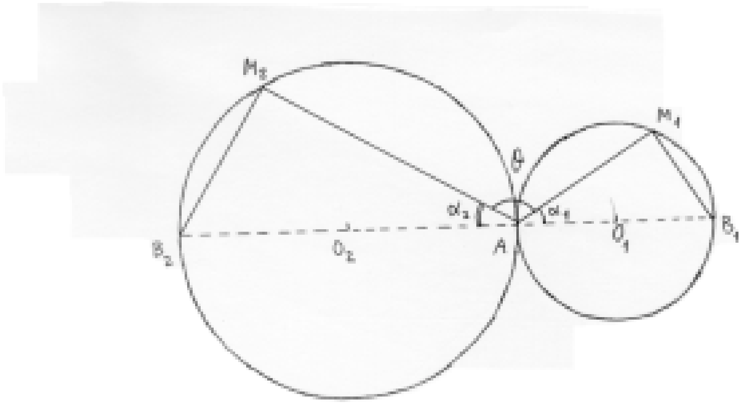
$$IP \geq IM.$$



(En la figura, C es el círculo máximo de Σ_2, intersección del plano PQM con Σ_2).

La desigualdad se justifica porque los puntos I y M están situados en el mismo semiplano limitado por la mediatriz del segmento PM.

Por lo tanto, nuestro problema se convierte en la búsqueda del máximo del área del triángulo AM_1M_2 en el caso en que los cuatro puntos O_1, M_1, M_2 y O_2 son coplanarios (es un plano que pasa por la línea de los centros O_1O_2).



Sea R_i el radio de Σ_i.
Se tiene :

$$Area(AM_1M_2) = \frac{AM_1 \bullet AM_2 . sen\theta}{2}.$$

Como

$$AM_1 = 2R_1 \bullet \cos\alpha_1, \quad AM_2 = 2R_2 \bullet \cos\alpha_2,$$

entonces:

$$\begin{aligned} Area(AM_1M_2) &= 2R_1R_2 \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 sen(\alpha_1 + \alpha_2) \\ &= R_1R_2[sen(2\alpha_1 + \alpha_2) + sen\alpha_2] \cos\alpha_2 \end{aligned}$$

Aquí se ha utilizado la identidad trigonométrica

$$sen(\alpha_1 + \alpha_2) \cos\alpha_1 = \frac{1}{2}(sen(2\alpha_1 + \alpha_2) + sen\alpha_2).$$

Por lo tanto, podemos deducir que

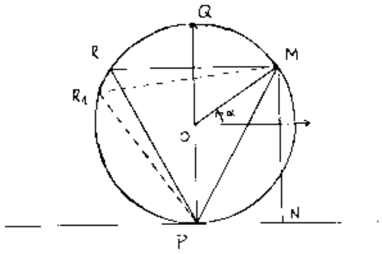
$$Area(AM_1M_2) \leq R_1R_2 \cos\alpha_2(1 + sen\alpha_2),$$

puesto que $sen(2\alpha_1 + \alpha_2) \leq 1$.
Para terminar el problema debemos determinar el máximo de

$$\cos\alpha(1 + sen\alpha)$$

cuando α describe el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}[$.
Consideremos los puntos

$$M(\cos\alpha, sen\alpha), \quad N(\cos\alpha, -1).$$



(En la figura, Q es el punto medio de RM)
Entonces se tiene :

$$Area(MNPQ) = QM \bullet QP = \cos\alpha \bullet (1 + sen\alpha).$$

Observamos que el área del rectángulo MNPQ es igual al área del triángulo MPR ; luego $\cos\alpha \bullet (1 + sen\alpha)$ es máxima cuando sea máxima el área de este triángulo. Veamos que si este triángulo tiene área máxima, entonces es equilátero. En efecto, ese triángulo es isósceles (con P el ángulo ”desigual”). Bastará probar que es isósceles con R el ángulo ”desigual”; en efecto, si no fuera así la mediatriz del segmento PM cortaría al arco PM que contiene a R en un punto $R_1 \neq R$, y en ese caso el área de PMR sería menos que el área de PMR$_1$, lo cual es imposible.

Por consiguiente,

$$\alpha = \frac{\pi}{6}$$

y el área de AM_1M_2 es menor o igual que $R_1R_2\frac{3\sqrt{3}}{4}$.
El caso de igualdad se verifica si y solamente si

$$\alpha_2 = \frac{\pi}{6} \text{ y } sen(2\alpha_1 + \alpha_2) = 1,$$

luego $2\alpha_1 + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$, es decir $\alpha_1 = \frac{\pi}{6}$.■

Ejemplo 2
a) Demostrar que para todo número natural n se verifica

$$(1^5 + 2^5 + \cdots + n^5) + (1^7 + 2^7 + \cdots + n^7) = 2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^4$$

b) Utilizando la desigualdad de las medias, determinar el valor mínimo de la expresión

$$\frac{n^3(n+1)^4}{\sqrt[n]{(n!)^6}}$$

cuando $n \in \mathbb{N}^*$.
Solución
a) Lo probaremos por inducción. Para $n = 1$, la igualdad es cierta.
Supongámosla cierta para n. Pongamos

$$A = \sum_{k=1}^{n} k^5 + (n+1)^5 + \sum_{k=1}^{n} k^7 + (n+1)^7,$$

se tiene entonces, por la hipótesis de inducción,

$$
\begin{aligned}
A &= 2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^4 + (n+1)^5 + (n+1)^7 \\
&= 2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^4 + (n+1)^5\left(1+(n+1)^2\right) \\
&= 2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^4 + (n+1)^5(n^2+2n+2) \\
&= (n+1)^4\left(\frac{n^4}{8} + (n+1)(n^2+2n+2)\right) \\
&= \frac{(n+1)^4}{8}(n^4+8n^3+24n^2+32n+16) \\
&= \frac{(n+1)^4}{8}(n+2)^4 \\
&= 2\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^4,
\end{aligned}
$$

que es lo que había que probar.
b) La desigualdad entre las medias aritmética y geométrica da

$$
\begin{aligned}
2\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^4 &\geq 2n\sqrt[2n]{(1^5\times 2^5\times\cdots\times n^5)\times(1^7\times 2^7\times\cdots\times n^7)} = \\
&= 2n\sqrt[2n]{(n!)^{12}} = 2n\sqrt[n]{(n!)^6},
\end{aligned}
$$

luego

$$
\frac{n^3(n+1)^4}{\sqrt[n]{(n!)^6}} \geq 2^4 = 16.
$$

Por lo tanto, el mínimo buscado es 16, que se alcanza para $n = 1$.■

Ejemplo 3
Sea n un entero mayor o igual que 2; sin utilizar la derivación, hallar el máximo de

$$
\sum_{1\leq i<j\leq n} sen^2(x_i - x_j),
$$

cuando los números $x_1, \cdots, x_n$ varían en $\mathbb{R}$.
Solución
Se tiene :

$$
\begin{aligned}
\sum_{1\leq i<j\leq n} sen^2(x_i - x_j) &= \sum_{1\leq i<j\leq n} (1-\cos^2(x_i - x_j)) = \\
&= \frac{n(n-1)}{2} - \sum_{1\leq i<j\leq n} \cos^2(x_i - x_j) \qquad (1)
\end{aligned}
$$

y, por otra parte,

$$\sum_{1\le i<j\le n} \cos^2(x_i - x_j) = \frac{1}{2}\left(\sum_{1\le i<j\le n} (1+\cos 2(x_i - x_j))\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{n(n-1)}{2} + 2\sum_{1\le i<j\le n} \cos 2(x_i - x_j)\right) \qquad (2)$$

Puesto que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \cos 2x_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} sen 2x_i\right)^2 = n + 2\sum_{1\le i<j\le n} \cos 2(x_i - x_j) \ge 0,$$

entonces

$$\sum_{1\le i<j\le n} \cos 2(x_i - x_j) \ge -\frac{n}{2} \qquad (3).$$

Como consecuencia de (2), (3) se transforma en

$$\sum_{1\le i<j\le n} \cos^2(x_i - x_j) \ge \frac{1}{2}\left(\frac{n(n-1)}{2} - \frac{n}{2}\right) = \frac{n(n-2)}{4} \qquad (4).$$

Y de (1) y (4) se deduce

$$\sum_{1\le i<j\le n} sen^2(x_i - x_j) \le \frac{n(n-1)}{2} - \frac{n(n-2)}{4}.$$

Así tenemos que

$$\sum_{1\le i<j\le n} sen^2(x_i - x_j) \le \frac{n^2}{4} \qquad (5).$$

Probemos que $\frac{n^2}{4}$ es el máximo buscado.
Observemos que hay igualdad en (5) si y solamente si (3) es una igualdad, lo que equivale a

$$\sum_{i=1}^{n} \cos 2x_i = \sum_{i=1}^{n} sen 2x_i = 0.$$

Si n es par (= 2k), basta tomar

$$\begin{cases} x_1 = x_2 = \cdots = x_k = \frac{\pi}{4} \\ x_{k+1} = x_{k+2} = \cdots = x_{2k} = -\frac{\pi}{4} \end{cases}$$

Si $n = 2k+1$, escogemos los números reales $x_1, \cdots, x_n$ tales que

$$\begin{cases} x_{2i+1} = -x_{2i+2}, \quad 0 \le i \le k-1 \\ x_{2k+1} = 0 \end{cases}$$

con lo que se tiene

$$\sum_{i=1}^{n} sen 2x_i = 0,$$

y

$$\sum_{i=1}^{n} \cos 2x_i = 2\sum_{i=0}^{k-1} \cos 2x_{2i+1} + 1 = 2k\cos 2x_1 + 1.$$

Entonces, para que sea

$$\sum_{i=1}^{n} \cos 2x_i = 0,$$

es suficiente tomar

$$x_1 = \frac{1}{2} Arc\cos\left(-\frac{1}{2k}\right).$$

Luego, en efecto, $\frac{n^2}{4}$ es el máximo buscado.■

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

Problemas propuestos

Ningún problema se considerará definitivamente cerrado. Nuevos puntos de vista sobre problemas anteriores siempre son bienvenidos. Las soluciones deben enviarse por correo electrónico a la dirección revistaoim@oei.es, en ficheros de formato tex, ps o doc, adjuntos al mensaje. Si hubiera figuras, se incluirán en formato gif.

Los cinco problemas que presentamos a continuación son del Rev. E. M. Radford, y fueron publicados en abril de 1907 en *The Mathematical Gazette*.

Problema 11

Sobre los lados de un triangulo ABC como bases se trazan, interiormente, tres triangulos isosceles, cuyos angulos iguales miden θ radianes. Si el triangulo formado por los terceros vertices de esos tres triangulos es semejante al ABC, demostrar que

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}{1 + \cos A \cos B \cos C}$$

Problema 12

Si a + b + c + d = 0, $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 0$, probar que

$$\left(a^8 + b^8 + c^8 + d^8\right) = \frac{1}{4}\left(a^4 + b^4 + c^4 + d^4\right)$$

Problema 13

Si x_1, x_2, x_3 son tres soluciones distintas de la ecuacion

$$\tan(\alpha + \beta - x)\tan(x + \beta - \alpha)\tan(x + \alpha - \beta) = 1$$

demostrar que $x_1 + x_2 + x_3 = n\pi + \left(\alpha + \alpha + \frac{\pi}{4}\right)$

Problema 14

Los lados BC, CA, AB del triángulo ABC cortan a una recta arbitraria en D, E, F respectivamente. Demostrar que existe un punto P en esa recta tal que las áreas de los triángulos PAD, PBE y PCF son iguales.

Problema 15

Demostrar que

$$\sec^4\frac{\pi}{7} + \sec^4\frac{2\pi}{7} + \sec^4\frac{3\pi}{7} = 416$$

PROBLEMAS DE NIVEL MEDIO Y DE OLIMPIADAS (3)

Presentamos en esta ocasión los problemas de la Fase nacional de la Olimpiada de Croacia 2002, correspondientes a los grados 3 y 4. Agradecemos al Prof. Zeljko Hanjs su amabilidad al enviar el folleto *Mathematical Competitions in Croatia* 2002, en donde figuran los enunciados y las soluciones.

Grado 3

3.1. Se supone dado el triángulo ABC, con ángulos $\alpha = \widehat{BAC}$ y $\beta = \widehat{CBA}$ agudos. Externamente se construyen triángulos isósceles ACD y BCE, con bases AC y BC, y ángulos $\widehat{ADC} = \beta, \widehat{BEC} = \alpha$. Sea O el circuncentro de ABC. Probar que DO + EO es igual al perímetro de ABC si y sólo si $\widehat{ACB}$ es un ángulo recto.

3.2.Probar que un entero positivo se puede escribir como suma de enteros positivos consecutivos si y sólo si no es una potencia de 2.

3.3.En las diagonales AB_1 y CA_1 de las caras laterales ABB_1A_1 y CAA_1C_1 del prisma triangular $ABCA_1B_1C_1$ se toman los puntos E y F, respectivamente, de manera que EF es paralelo a BC_1. Determinar la razón entre las longitudes de los segmentos EF y BC_1.

3.4. La población de una isla es de n nativos. Dos cualesquiera de ellos son, o bien amigos, o bien enemigos. Un día, su jefe ordena a todos los habitantes (incluído él mismo) que hagan collares de piedras, obedeciendo la siguiente regla: dos amigos cualesquiera deben tener al menos una piedra de la misma clase en sus collares ; y ningún par de enenmigos deben tener piedras de la misma clase en sus collares. (Un collar puede ser vacío también). Probar que la orden del jefe se puede cumplir usando $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ clases de piedras, y que no puede cumplirse , en general, si se utiliza un número menor.

Grado 4

4.1. Determinar la suma de la serie

$$s = 1 + 4x + 9x^2 + \cdots + n^2x^{n-1} + \cdots$$

si $|x| < 1$.

4.2. Los vértices de un cubo en el sistema tridimensional cartesiano de origen O son : $A(1,1,1), A'(-1,-1,-1), B(-1,1,1), B'(1,-1,-1)$,

$C(-1,-1,1), C'(1,1,-1), D(1,-1,1), D'(-1,1,-1)$.

El punto O es el centro de la esfera circunscrita al cubo. El punto T no pertence a esta esfera y $d = OT$. Denotamos

$$\alpha = \widehat{ATA'}, \beta = \widehat{BTB'}, \gamma = \widehat{CTC'}, \delta = \widehat{DTD'}.$$

Probar que

$$\tan^2\alpha + \tan^2\beta + \tan^2\gamma + \tan^2\delta = \frac{32d^2}{(d^2-3)^2}.$$

4.3. Sea

$$f(x) = x^{2002} - x^{2001} + 1.$$

Probar que, para todo entero positivo m, los números

$$f(m), f(f(m)), f(f(f(m))), \cdots$$

son primos entre sí dos a dos.

4.4. Sea $(a_n), n \in \mathbb{N}$. Un término a_k de esta sucesión se llamará *bueno* si puede escribirse como suma de otros términos (no necesariamente distintos) de esta sucesión. Probar que todos los términos de la sucesión , salvo un número finito de ellos, son *buenos*.

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI

Número

4

PROBLEMAS PARA LOS MÁS JÓVENES (4)

4.1: Un capicúa es un número que se lee igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda. Por ejemplo, 2882 es un capicúa de 4 cifras y 49194 es un capicúa de 5 cifras.

Hay pares de capicúas de 4 cifras cuya suma es un capicúa de 5 cifras. ¿Cuántos pares de capicúas en estas condiciones hay? (*Del Concurso canadiense Pascal*, 2001)

4.2: Demostrar que no existen números enteros x, y, z tales que

$$x^4 + y^4 + z^4 = x^3 + y^3 + z^3 + 5.$$

(*De la revista rumana Gazeta matematica*)

4.3 : *Los cuatro soldados heridos*

Cuatro soldados heridos tienen que cruzar un puente dañado , de noche, para escapar del fuego enemigo. El puente sólo soporta el paso de 2 soldados al mismo tiempo; cuando lo cruzan, lo hacen a la velocidad del más lento. Los cuatro soldados sólo tienen una linterna, que deben llevar siempre para cruzar el puente. Si los cuatro soldados tardan, individualmente, 1, 2, 4 y 6 minutos en cruzar el puente, ¿cuál es el mínimo tiempo necesario para que los cuatro crucen el puente?

(*De la Olimpiada Británica Junior*)

4.4 : La tabla representa parcialmente el desarrollo de un torneo entre cuatro equipos, A,B,C y D, que juegan todos contra todos a una vuelta :

	Jugados	*Ganados*	*Perdidos*	*Empatados*	*Goles a* favor	*Goles* en contra
A		2			2	
B			0	0	4	3
C					5	3
D	3					

¿Qué resultados se dieron en todos los partidos?

(*De una competición inglesa*)

4.5 : Subes con un amigo la escalera mecánica de unos grandes almacenes. Tú vas tres veces más deprisa que tu amigo. Los dos contáis los escalones que subís. Tú cuentas 45 escalones y tu amigo 30.

¿Cuántos escalones son visibles si se detiene la escalera?

(*Rallye matemático de Alsacia*, 1983-84)

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI

DEMOSTRACIÓN DE DOS IDENTIDADES MEDIANTE COMBINATORIA Y PROBABILIDAD

LAURENȚIU MODAN

Department of Mathematics, Faculty of Computer Science
Academy of Economic Studies, Bucharest
E-mail: modanl@inforec.ase.ro

Abstract. We expose a ***Probabilistic method***, based on the ***hypergeometric scheme***, proving two very usual Combinatorics identities.
MR classification: 05A05, 60A99.

El propósito de esta Nota es presentar demostraciones inusuales de dos identidades bien conocidas :

$$\sum_{k=0}^{n} C_a^k C_b^{n-k} = C_{a+b}^n, a,b,n \in \boldsymbol{N}, a \geq k, b \geq n-k, a+b \geq n \quad (1),$$

$$\sum_{k=0}^{n} \left(C_n^k\right)^2 = C_{2n}^n, n \in \boldsymbol{N}, n \geq k \quad (2).$$

La demostración clásica de (1) se basa en la relación:

$$(1+x)^a (1+x)^b = (1+x)^{a+b}, a,b \in \boldsymbol{N} \quad (3),$$

de donde se calcula el coeficiente de x^n de dos maneras. Igualmente, la demostración clásica de(2), utiliza (3), haciendo $a=b=n$ y calculando de dos manerasel coeficiente de x^n .

El ***Método Probabilístico*** anunciado para probar (1) y (2) tiene como punto de partida el ***esquema hipergeométrico*** (ver [1]), que presentamos a continuación.

Consideremos una urna con a bolas blancas y b bolas negras. Simultáneamente extraemos n bolas, $n \leq a+b$, y de ellas queremos tener α blancas y β negras, con $\alpha+\beta=n$. Por lo tanto, la probabilidad del anterior suceso es:

$$P = \frac{C_a^\alpha C_b^\beta}{C_{a+b}^{\alpha+\beta}} \quad (4).$$

Ahora probaremos (1) . Supongamos la misma urna, con a bolas blancas y b bolas negras. Sacamos n de esas $a+b$ bolas, con $n \leq a+b$. Calcularemos la probabilidad de que a lo sumo $n-1$ bolas, de las n, sean blancas. Pero esto significa que tenemos un suceso A, que consiste en tener 0, o 1, o 2, ..., o $n-1$ bolas blancas, de las n, ya extraídas. Por tanto, con el ***esquema hipergeométrico*** se verifica:

$$P(A) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n} \quad (5).$$

Obsérvese que el suceso contrario a A es $\overline{A}$, que se expresa como:

„ las n bolas extraídas son blancas",

y así, la probabilidad $P(A)$ puede calcularse mediante:

$$P(A) = 1 - \frac{C_a^n C_b^0}{C_{a+b}^n} \quad (6).$$

De (5) y (6), se obtiene inmediatamente (1).

Una generalización de (1), surge directamente:

$$\sum_{0=k_1\neq k_2\neq\ldots\neq k_n=n} C_{a_1}^{k_1} C_{a_2}^{k_2} \ldots C_{a_n}^{n-(k_1+\ldots+k_n)} = C_{a_1+\ldots+a_n}^{n} \quad (7),$$

con $a_i, k_i, n \in \boldsymbol{N}, a_i \geq k_i (\forall) i \in \{1,\ldots,n\}, a_1 + \ldots + a_n \geq n.$

Procedamos a la segunda demostración de (2). Esta vez consideraremos una urna con n bolas blancas y n bolas negras. Simultáneamente sacamos n bolas. Consideremos los sucesos A_k, consistentes en la aparición de k bolas blancas y $n-k$ bolas negras con $k \in \{0,\ldots,n\}$. Tenemos las probabilidades:

$$P(A_k) = \frac{C_n^k C_n^{n-k}}{C_{2n}^n} = \frac{\left(C_n^k\right)^2}{C_{2n}^n}, (\forall) k \in \{0,\ldots,n\} \quad (8),$$

usando la relación combinatoria:

$$C_n^k = C_n^{n-k}, (\forall) k \in \{0,\ldots,n\}.$$

Como $A_1,\ldots,A_n$ es un sistema completo de sucesos (ver [2]), :

i) $A_i \bigcap A_j = \varnothing, (\forall) i \neq j \in \{1,\ldots,n\}$;

ii) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$, donde Ω es el espacio total, o ***suceso seguro,***.

resulta:

$$\sum_{k=1}^{n} P(A_k) = 1,$$

o lo que es equivalen (8):

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\left(C_n^k\right)^2}{C_{2n}^n} = 1,$$

de donde:

$$\sum_{k=1}^{n} \left(C_n^k\right)^2 = C_{2n}^n .$$

Esto prueba (2) .

REFERENCIAS

[**1**] **Modan L.** *„Sur un problème de numération" (to oppear), St. Bull., Baia Mare Univ., 2002;*

[**2**] **Neveu J.** *„Bases mathématiques du calcul des probabilités", Masson, Paris, 1964.*

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

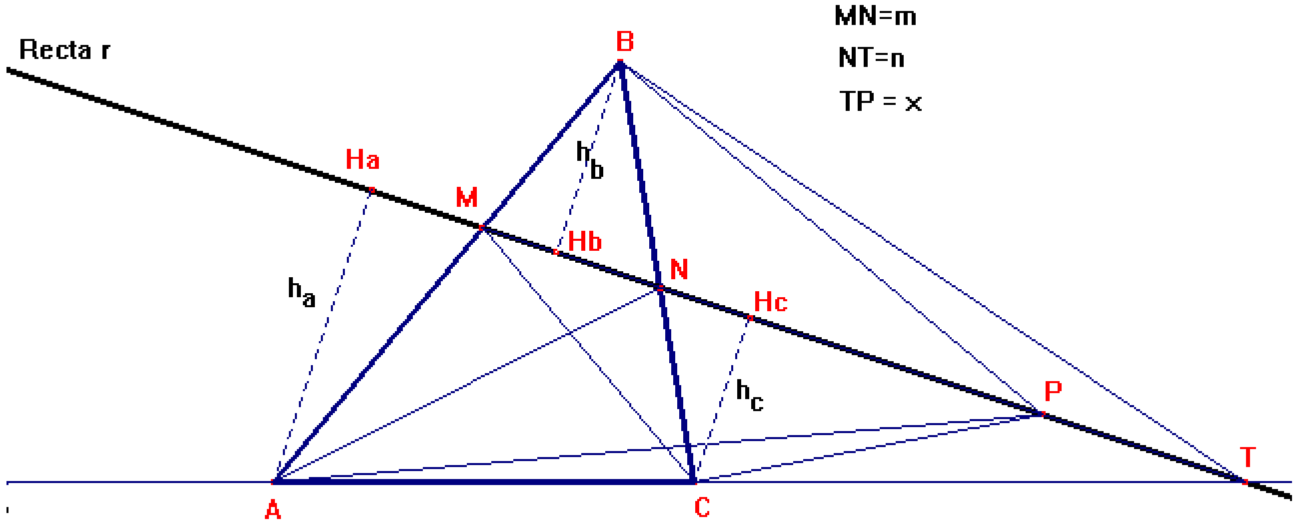
OEI

Revista Escolar de la OIM

Problema 14.-

Sea ABC un triángulo y r una recta que corta a AB en M a BC en N y a la prolongación de AC en T.
Demostrar que existe un punto P en r tal que las áreas de los triángulos PAN,PBT, y PCM coinciden.

Sol.:



Sea P el punto que verifica la propiedad solicitada en el problema y designemos por x = TP . Nuestro propósito será, pues, determinar el valor de x.

Dada la situación enunciada y reflejada en el dibujo, trazamos los segmentos comprendidos entre los puntos M, N y T y los pies de las perpendiculares a la recta r desde los puntos vértices del triángulo inicial A, B y C. Así obtenemos las parejas de triángulos rectángulos semejantes siguientes:

H_cNC y NH_bB

H_bMB y MH_aA

H_aTA y TH_cC

De estas semejanzas obtenemos las siguientes proporciones entre los segmentos h_a , h_b y h_c .

$$\frac{h_c}{h_b}=\frac{H_cN}{NH_b};\ \frac{h_b}{h_a}=\frac{H_bM}{MH_a};\ \frac{h_a}{h_c}=\frac{TH_a}{TH_c}$$

Esto es,

$$\frac{h_c}{h_b}\frac{h_b}{h_a}\frac{h_a}{h_c}=1=\frac{H_cN}{NH_b}\frac{H_bM}{MH_a}\frac{TH_a}{TH_c};$$

$H_cN*H_bM*TH_a = NH_b*MH_a*TH_c$ (1)

Relación esta última que va a tener al final una importancia definitiva.

Por otro lado si P es el punto a construir se ha de verificar la igualdad de áreas (S) en los triángulos PAN, PBT y PCM.

Esto quiere decir que: S(PAN)= S(PBT)= S(PCM)

$S(PAN) = 1/2\cdot h_a\cdot PN = 1/2\cdot h_a\cdot (TN - x)= 1/2\cdot h_a\cdot (TH_c+H_cN - x)$

$S(PBT) = 1/2\cdot h_b\cdot PT = 1/2\cdot h_b\cdot x$

$S(PCM) = 1/2\cdot h_c\cdot PM = 1/2\cdot h_c\cdot (TM- x) =1/2\cdot h_c\cdot (TH_c + H_cN + NH_b + H_bM - x)$

Luego de la igualdad de áreas se tendrá que:

$h_a\cdot (TH_c+H_cN - x) = h_b\cdot x = h_c\cdot (TH_c + H_cN + NH_b + H_bM - x)$

De estas relaciones podemos despejar el valor de x:

$$x = \frac{h_a.(TH_c + H_cN)}{h_a + h_b} = \frac{h_a.TN}{h_a + h_b} = \frac{h_a.n}{h_a + h_b}$$

$$x = \frac{h_c.(TH_c + H_cN + NH_b + H_bM)}{h_b + h_c} = \frac{h_c.(TN + NM)}{h_b + h_c} = \frac{h_c.(n + m)}{h_b + h_c}$$

Para que el aserto del problema sea cierto han de ser idénticas ambas expresiones de x. Y eso es lo que vamos a probar. Para ello usemos las expresiones primeras de ambas.

$$x = \frac{h_a.(TH_c + H_cN)}{h_a + h_b} = \frac{h_c.(TH_c + H_cN + NH_b + H_bM)}{h_b + h_c}$$

Para ello, tengamos en cuenta las relaciones antes dadas con las alturas h_a , h_b y h_c.

$$\frac{(TH_c + H_cN)}{1 + \dfrac{h_b}{h_a}} = \frac{(TH_c + H_cN + NH_b + H_bM)}{\dfrac{h_b}{h_c} + 1}$$

$$\frac{h_c}{h_b} = \frac{H_cN}{NH_b};\quad \frac{h_b}{h_a} = \frac{H_bM}{MH_a};\quad \frac{h_a}{h_c} = \frac{TH_a}{TH_c} \qquad\qquad \frac{(TH_c + H_cN)}{1 + \dfrac{H_bM}{MH_a}} = \frac{(TH_c + H_cN + NH_b + H_bM)}{\dfrac{NH_b}{H_cN} + 1}$$

Multiplicando y simplificando los términos equivalentes en esta igualdad obtenemos:

$$(TH_c + H_cN)\cdot (\frac{NH_b}{H_cN} + 1)= (1 + \frac{H_bM}{MH_a})\cdot (TH_c + H_cN + NH_b + H_bM)$$

$$(TH_c + H_cN) *(NH_b + H_cN) * MH_a = H_cN * (MH_a + H_bM) * (TH_c + H_cN + NH_b + H_bM)$$

$\mathbf{TH_c*NH_b*MH_a} + TH_c*H_cN*MH_a + H_cN*NH_b*MH_a + H_cN*H_cN*MH_a =$
$= H_cN*MH_a*TH_c + H_cN*MH_a*H_cN + H_cN*MH_a*NH_b + H_cN*MH_a*H_bM + H_cN*H_bM*TH_c +$
$+ H_cN*H_bM*H_cN + H_cN*H_bM*NH_b + H_cN*H_bM*H_bM$;

$\mathbf{TH_c*NH_b*MH_a} + \cancel{TH_c*H_cN*MH_a} + \cancel{H_cN*NH_b*MH_a} + \cancel{H_cN*H_cN*MH_a} =$
$= \cancel{H_cN*MH_a*TH_c} + \cancel{H_cN*MH_a*H_cN} + \cancel{H_cN*MH_a*NH_b} + H_cN*MH_a*H_bM + H_cN*H_bM*TH_c +$
$+ H_cN*H_bM*H_cN + H_cN*H_bM*NH_b + H_cN*H_bM*H_bM$;

$\mathbf{TH_c*NH_b*MH_a =} H_cN*H_bM* (MH_a + TH_c + H_cN + NH_b + H_bM) = H_cN*H_bM* (TH_c + H_cN + NH_b +$
$+H_bM +MH_a) = \mathbf{H_cN*H_bM*TH_a}$

$\mathbf{TH_c*NH_b*MH_a = H_cN*H_bM*TH_a}$

identidad esta última igual a la relación dada por (1) que ya habíamos visto anteriormente y que se verificaba de un modo natural a partir de la semejanza de triángulos. (= base del Teorema de Menelao).

En definitiva, sí es cierto que se verifica la igualdad en las dos expresiones de x.

Por tanto, $x = \frac{h_a . n}{h_a + h_b} = \frac{h_c .(m+n)}{h_b + h_c}$, cuya construcción se sigue de la misma proporción dada.

Saludos.

F. Damián Aranda Ballesteros.

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI

Problemas propuestos

Ningún problema se considerará definitivamente cerrado. Nuevos puntos de vista sobre problemas anteriores siempre son bienvenidos.

Las soluciones deben enviarse por correo electrónico a la dirección revistaoim@oei.es, en ficheros de formato tex, ps o doc, adjuntos al mensaje. Si hubiera figuras, se incluirán en formato gif.

Problema 16 (propuesto por Laurentiu Modan, Bucarest, Rumania)

i) Describir por extensión (es decir, enumerando todos sus elementos) el conjunto

$$A = \left\{ n \in \mathbb{N}^* \mid \frac{n}{n-2001} \in \mathbb{N} \right\}$$

ii) ¿Cuántas funciones $f : B \to B$ hay, siendo B el conjunto

$$B = \left\{ n \in \mathbb{N} \mid \frac{n^{2001}}{n-2001} \in \mathbb{N} \right\}?$$

Problema 17 (propuesto por Laurentiu Modan, Bucarest, Rumania)

Sean (x_n) e (y_n) las sucesiones definidas recurrentemente por

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_{n+1} = x_n + y_n \end{cases} , \quad \begin{cases} y_1 = 2 \\ y_n = x_n + 2^{n-1} \end{cases} , \quad \forall n \geq 2$$

i) Calcular

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x_n}{y_n}$$

ii) Probar que hay terminos de las dos sucesiones que son divisibles por tres numeros primos consecutivos.

iii) Si $p_1, p_2, \ldots, p_k$ son numeros primos, demostrar que hay un numero infinito de terminos en (x_n) o en (y_n) que son divisibles por el producto $p_1 \cdot p_2 \ldots p_k$.

Problema 18 (original de V. V. Kisil, publicado en la revista rusa Kvant)

Probar que, para cualquier entero positivo n,

$$\sum_{k=2}^{n} \left[\sqrt[k]{n} \right] = \sum_{k=2}^{n} \left[\log_k n \right]$$

Problema 19 (presentado por Fernanda Cannon en la IV Conferencia de la World Federation of National Mathematics Competitions, Melbourne, Agosto 2002)

Hallar el mínimo valor de la expresión

$$\sqrt{x^2+1}+\sqrt{(y-x)^2+1}+\sqrt{(z-y)^2+1}+\sqrt{(10-z)^2+9}$$

donde *x, y, z* son números reales arbitrarios.

Problema 20 (presentado por John Conway en la IV Conferencia de la World Federation of National Mathematics Competitions, Melbourne, Agosto 2002)

La otra noche me senté en el autobús detrás de dos magos. Esta fué su conversación :
A : Tengo un número entero de hijos, cuyas edades son enteras, su producto es mi edad, y su suma, el número del autobús.
B : Quizá si me dijeras tu edad y el número de hijos yo podría averiguar las edades de tus hijos.
A :No.
B : ¡AH! ¡Entonces ya sé tu edad!
¿Cuál es el número del autobús?

Una propuesta metodológica de introducción temprana del concepto de aproximación local en su manifestación de recta tangente vía el asistente matemático

Pedro Vicente Esteban Duarte (pesteban@eafit.edu.co)
Pedro Pérez Carreras (pperezc@mat.upv.es)

Universidad EAFIT, Medellín, Colombia
Universidad Politécnica de Valencia, Valencia, España

Resumen

El propósito de este artículo es exponer una metodología para enseñar el concepto de aproximación local en su manifestación de recta tangente a una curva plana en un punto, a partir de la visualización que se obtiene del haz de secantes, entendiéndolo como el conjunto de rectas que pasan todas por un punto fijo de la curva y por otros sobre la curva cada vez más cercanos al punto dado. El concepto de aproximación local es un tema central en el análisis matemático y su enseñanza en una edad temprana ayudará a que los alumnos adquieran un avanzado nivel de razonamiento. La visualización que se propone, se obtiene con la ayuda del asistente matemático *DERIVE*® y no requiere de manipulaciones algebraicas que entorpezcan el razonamiento que los alumnos deben desarrollar y exhibir a lo largo del proceso. El material que se expone, está diseñado para ser cubierto en una clase, en la cual el profesor sirva de orientador, formulando preguntas y respondiendo inquietudes en el momento oportuno.

Palabras y frases claves: Haz de secantes, proceso de aproximación local, visualización, niveles de razonamiento, pendiente, derivada.

Abstract

The proposal of this paper is the exposition of methodology for teaching local approximation concept by the existence of a tangent line to a curve at a point from visualization gotten of the secant rays, to be understood as the set of lines which pass through a fixed point of the curve and for another points close enough this one. The local approximation is a main topic in the mathematical analysis and its teaching in an early age will help the students to acquire an advanced mathematical thinking. About this concept, the visualization proposed is gotten from the mathematical assistance *DERIVE*® and it is not required of algebraically manipulations that may obstruct the reasoning which the student must develop and show through the process. The material exposed is designed to be covered through a class in which the teacher is a guide, making and answering questions opportunely.

Keywords: Secant rays, local approximation process, visualization, levels of reasoning, slope, derivative.

1. Introducción

El concepto de aproximación local es el tema central del Análisis Matemático y una de sus manifestaciones más primitivas en el contexto geométrico es el concepto de recta tangente a una curva plana en un punto.

La idea de qué es una recta tangente se aborda en la escuela elemental en relación a la circunferencia interpretada de forma estática y no como el producto final de un proceso indefinido de aproximaciones locales cada vez más ajustadas. Al finalizar la educación secundaria, y en relación al concepto de derivada de una función en un punto, vuelve a considerarse la recta tangente como una interpretación, por un lado, de su utilidad a la hora de computar la pendiente de esa recta tangente y, por otro, de ilustrar la definición abstracta de derivada, pero sin definir qué es la recta tangente, utilizando la idea intuitiva que el alumno tiene de ella (pero en relación a pedazos de curva que son esencialmente arcos de circunferencia).

Nuestro objetivo es discutir el concepto de recta tangente sin relación al concepto de derivada, evitando así la madurez algebraica necesaria y permitiendo una introducción temprana a la idea de aproximación local. Naturalmente, en este proceso el alumno acabará pidiendo una "definición" de recta tangente, al confrontarse con situaciones en donde la recta producto final de aproximaciones sucesivas ya no conforma con su idea estática previa de lo que debe ser, permitiendo así asignar rectas tangentes a curvas más complejas que las habituales. Utilizando el Asistente Matemático *DERIVE*®, la visualización propuesta se obtiene a partir de la construcción de un haz de secantes [1], que pasa por un punto fijo de una curva plana y por otros puntos sobre ella cada vez más cercanos al punto. Las preguntas y respuestas de alumnos que aparecen en la propuesta que sigue están sacadas de las que aparecieron habitualmente entrevistando a más de doscientos alumnos de Bachillerato y Universidad.

2. Elementos básicos de estudio

Antes de iniciar la construcción del haz de secantes, se requiere que el alumno reconozca los objetos básicos de estudio: punto, recta y curva visualmente [3], pero desde el punto de vista de cómo los matemáticos y físicos idealizan la realidad: el punto y la recta no tienen ningún grosor, la línea recta sólo tiene la dimensión de la longitud y que las curvas, unas pueden ser cerradas, otras abiertas y que la línea recta es un tipo especial de curva que se extiende indefinidamente en una sola dirección. Para sentar las bases de razonamientos posteriores, el profesor preguntará al alumno por la idea intuitiva que tiene acerca de los objetos de estudio. Al alumno que piense que el punto y la recta tienen algún grosor, el profesor le precisará el carácter ideal de estos objetos.

3. Relaciones entre los elementos básicos de estudio

Como en la propuesta metodológica que proponemos no se requieren los aspectos métricos del problema, no se requiere que las gráficas se dibujen con cuadrículas o con ejes coordenados y, así, desactivamos estas opciones en la ventana gráfica de *DERIVE.*

3.1 Relación punto–recta

Recordaremos al alumno que por dos puntos en el plano pasa una sola recta: en el editor de ecuaciones de *DERIVE*® introduciremos la expresión **[2, [-1, 2], [1, 2]]** y al representar, se obtiene en la pantalla la recta $y = 2$ y los puntos (-1, 2) y (1,2) resaltados. En este momento, preguntamos al alumno si es posible trazar otra línea recta que sea distinta de la que está dibujada y que pase por esos mismos dos puntos. La respuesta deseada es que no es posible. A aquellos alumnos que respondan afirmativamente se hace necesario recalcarles nuevamente las propiedades ideales de punto, recta y curva.

3.2 Relación punto-curva

Para una curva plana particular y un punto fijo sobre ella, el alumno debe percatarse que existen puntos sobre la curva cada vez más cercanos a éste, bien sea desde la derecha o desde la izquierda. Esta visualización se puede obtener mediante las siguientes ordenes en el editor de ecuaciones de *DERIVE®*:

F(x):=
PUNTOS(h, n):= VECTOR([b, F(b)], b, VECTOR(a + h/(1.2^m), m, VECTOR(i, i, 0, n-1)))
a:= a0
[a, F(a)]

F(x):= es la expresión analítica de la curva que se quiere representar. La función de *DERIVE®* **PUNTOS(h, n)** permite encontrar y representar puntos sobre la curva de expresión F(x), una vez elegida una F(x) concreta. El parámetro **h**, cuando **h** es positivo, define el valor x = a + h desde el cual se comienza el acercamiento al valor x = a desde la derecha. El parámetro **n** es el número de puntos (b, f(b)) que se quieren dibujar sobre la curva. El valor a = a0 define el punto (a0, f(a0)), el cual es el punto fijo de referencia sobre la curva.

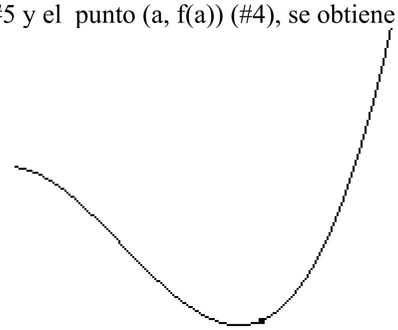
La función F(x): = 0.3(x –1)(x + 2)(x + 3) y para valores de x > -2.5 será escrita en el editor de ecuaciones como

F(x):= IF(x > -2.5, 0.3(x - 1)(x + 2)(x + 3))

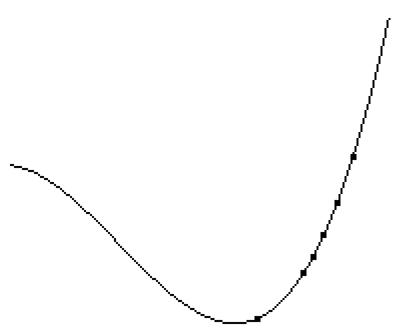
Al tomar un valor particular para **a**, digamos 0.1 y un **h** positivo igual a 1 y un **n** igual a 5, escribimos en el editor de *DERIVE®* las siguientes instrucciones:

#1 F(x):=
#2 PUNTOS(h, n):= VECTOR([b, F(b)], b, VECTOR(a + h/(1.2 ^ m), m, VECTOR(i, i, 0, n – 1)))
#3 a:= 0.1
#4 [a, F(a)]
#5 F(x):= IF(x > -2.5, 0.3(x - 1)(x + 2)(x + 3))
#6 PUNTOS(1, 5)

Al representar la ecuación #5 y el punto (a, f(a)) (#4), se obtiene la ilustración siguiente:



Al simplificar la expresión # 6 y representarla, se obtiene la siguiente ilustración:



En este momento, se le pregunta al alumno: *¿Cuántos puntos más se podrán trazar sobre la curva, de tal forma que se acerquen cada vez más al punto fijo dado?.* Se le motiva para que él mismo, con la instrucción **PUNTOS(h, n**) represente otros puntos sobre la curva, cada vez más cercanos al punto fijo. Para ello, debe mantener la **h** fija en 1 y la **n** variando de acuerdo con el número de puntos que quiere dibujar. Por ejemplo: Ejecutar las ordenes **PUNTOS(1, 10), PUNTOS(1, 20)**, etc., simplificando y representando en cada caso o bien viendo la progresión de más y más puntos con la instrucción

VECTOR(PUNTOS(1,n),n,[10,20,30,40])
Simplificar

El profesor, después de que el alumno haya hecho algunos ensayos, debe de repetir la pregunta anterior. Teniendo en cuenta el carácter ideal de los objetos geométricos, la respuesta deseada de los alumnos es: *"Se pueden trazar tantos puntos como se quiera cada vez más cercanos al punto fijo dado"*. Cabe anotar, que si el alumno manifiesta que solamente se puede dibujar un número finito de puntos, indica que su razonamiento está guiado más por el aspecto visual que por la abstracción. Es necesario insistirle que dibuje un número de puntos cada vez mayor con el propósito de que perciba el aspecto indefinido subyacente en este proceso.

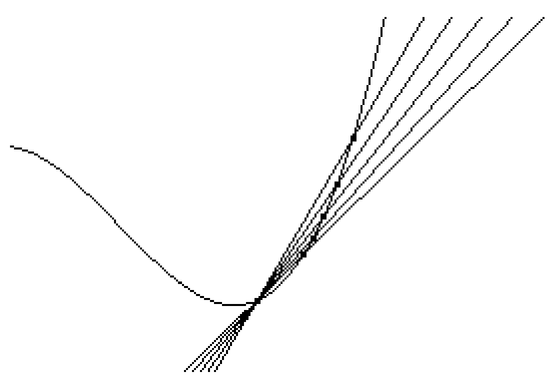
El proceso anterior, debe también ilustrarse partiendo desde la izquierda del punto mismo punto fijo dado. Para ello le damos un valor negativo a **h**, digamos –1, y si el número de puntos que queremos trazar es 10, ejecutamos la siguiente instrucción: **PUNTOS(-1, 10)**. Es importante hacerle notar a los alumnos que, para esta gráfica y para ese punto fijo, las conclusiones que se obtienen al efectuar el proceso de acercamiento por un lado o por el otro son las mismas. Luego, le pedimos que conjeture si sucede lo mismo para cualquier curva y cualquier punto sobre ella.

3.3 Relación recta-curva

La relación que interesa establecer entre las rectas y la curva es la de secante [4], para ello definimos la siguiente función de *DERIVE*®:

SECANTE(h, n):= VECTOR((F(a)-F(b))/(a-b)(x-a) + F(a), b, VECTOR(a + h/(1.2^m), m, VECTOR(i, i, 0, n –1)))

Los parámetros **a**, **h**, y **n** tienen el mismo sentido que los dados para la instrucción **PUNTOS(h, n)**, sólo que en este caso, la **n** significa el número de secantes que se quieren trazar. Todas estas secantes pasan por el punto (a, f(a)) y por los puntos móviles (b, f(b)), que se acercan cada vez más al punto fijo (a, f(a)). El valor **b** depende de **h** y **n**. Por ejemplo, si se quieren trazar cinco secantes que pasen todas por el punto fijo (0.1, f(0.1)) y por puntos (b, f(b)) cada vez más próximos al punto fijo, se da orden **SECANTE(1, 5)**, se simplifica y representa, obteniendo la siguiente ilustración:



Se le propone que trace otras secantes sobre la misma gráfica**: SECANTE(1, 20), SECANTE(1, 30)** y se le pregunta*: "Si continuamos con este proceso, ¿cuántas rectas secantes más se podrán trazar, de tal forma que pasen por el punto fijo y por puntos sobre la curva cada vez más cercanos a él?*. La respuesta deseada es que*: "De esta forma se pueden trazar un número indefinido (infinito) de secantes"*. De nuevo, el alumno que responda que sólo se pueden trazar un número finito de secantes, nos está indicando que su razonamiento está motivando únicamente por lo que ve y no está haciendo abstracción alguna. Se le motiva a que represente más secantes para conducirlo a admitir la infinitud del proceso.

Con esta última ilustración en la pantalla del ordenador, se le formula la siguiente pregunta: Si continuamos este proceso*, ¿qué tendencia se puede atribuir al haz de secantes?*. La respuesta deseada es que al continuar con el proceso, el haz de secantes tiene vocación de estabilizarse en una línea recta, que no es sobrepasada por ninguna de las secantes o respuestas equivalentes, entendiendo la estabilización como un "tope" no sobrepasable. También es posible que incorporen al haz (proceso) su estabilización, implícitamente aceptando que, aunque el proceso es indefinido, tiene un producto final, llegando incluso a identificar este producto final como la recta tangente a la curva en ese punto. Habrá que insistir en la infinitud del proceso a aquellos alumnos que perciben que la estabilización se puede alcanzar después de haber trazado un número finito de secantes, dando a entender claramente que su razonamiento está influenciado por lo que están viendo en la pantalla del ordenador (a no ser que partamos inicialmente de una recta).

Cabe resaltar que el alumno puede obtener las mismas conclusiones (estabilización en un mismo producto final) trazando secantes desde la izquierda del punto fijo. Se recomienda cambiar el color de las secantes, para poder estudiar la zona en la cual los dos haces *parecen* juntarse. El alumno debe inferir que la *supuesta* recta de estabilización separa los haces de secantes y es única.

4. Concepto-imagen de tangente

Independientemente de nuestro tratamiento anterior, es importante explorar lo que el alumno piensa acerca de qué es una recta tangente y en qué situaciones visualmente la identifica [5].

Pretendemos explorar, en la nomenclatura de Tall, cuál es su concepto-imagen: la estructura cognitiva asociada con un determinado concepto matemático incluye todas las imágenes mentales, representaciones visuales, experiencias e impresiones, así como propiedades y procesos asociados y ha ido emergiendo con el tiempo mediante experiencias de todos los tipos, cambiando a medida que el individuo recibe nuevos estímulos y madura e influyéndose por desviaciones, aparentemente triviales, de un entendimiento válido. A medida que este concepto-imagen se desarrolla, no resulta necesario que sea coherente en cada momento. Así, resulta posible que visiones conflictivas sean evocadas en tiempos diferentes, sin que el individuo sea consciente del conflicto, hasta que son evocadas simultáneamente. En lo que nos ocupa, el concepto-imagen que traiga el alumno a la experiencia educativa será previsiblemente con la situación estática de recta tangente a una circunferencia. Comenzamos nuestra exploración representando las gráficas de las siguientes funciones:

G(x):= IF(x<-0.5, 0.3·(x - 1)·(x + 2)·(x + 3))
F(x):= 0.5·x – 2

La pregunta sobre cuál es la relación existente entre curva y recta producirá como respuesta previsible que la recta corta a la curva, o alguna otra expresión equivalente. Algunos alumnos responderán que la recta es tangente a la curva, y al pedirles matización, darán como respuesta que recta y curva tienen un solo punto de contacto. El profesor debe continuar la exposición, sin hacer ningún comentario al respecto, pues el objetivo que se persigue es que los alumnos, por si mismos, encuentren una manera de justificar sus respuestas.

Presentamos la siguiente gráfica:

G(x):= IF(-3.8<x<1.5, 0.3·(x - 1)·(x + 2)·(x + 3))

F(x):= 0.5·x – 2.5

Y nuevamente se pregunta la relación entre curva y recta. La respuesta deseada es que entre curva y recta no existe ninguna relación, pero si la curva se prolonga, podrían cortarse en algún punto. Algunos alumnos dirán simplemente que curva y recta no tienen relación alguna y se negarán a admitir que la curva se pueda prolongar. A estos alumnos se les sugiere que representen el polinomio en un intervalo más amplio y se aseguren de esa posibilidad. Se les sugiere el intervalo (-5, 5).

Ahora, se le pide que represente

G(x):= 0.3·(x - 1)·(x + 2)·(x + 3)
F(x):= 25x/82-73/41

para proceder con la pregunta de si piensa que la recta es tangente a la curva. La respuesta deseada es*: "En una parte de la curva seguro que no y en la otra puede que sea tangente*". Pero, la mayoría de los alumnos responderán que la recta es tangente a la curva en la parte derecha. Al pedirles una explicación, dirán "*la recta toca a la curva en un solo punto*" [5], por lo tanto, están respondiendo desde su concepto-imagen de tangente a una circunferencia. Estos alumnos todavía no perciben que la relación de tangencia es una propiedad local. Pero nuestro objetivo es que comprendan esta peculiaridad y logren reformular su concepto-imagen. Por lo tanto, se les pide que dibujen la curva por trozos, con las siguientes instrucciones:

G(x):= IF(-5 < x < -1, 0.3·(x - 1)·(x + 2)·(x + 3))
F(x):= 25x/82-73/41
G(x):= IF(-1 < x < 5, 0.3·(x - 1)·(x + 2)·(x + 3))
F(x):= 25x/82-73/41

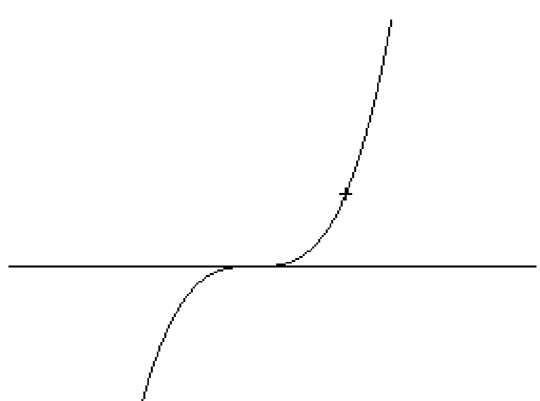
Y para cada caso se pregunta: ¿La recta es tangente a la curva?. La respuesta generalizada es: "La recta corta la curva en la primera situación y es tangente en la segunda". Es necesario señalarles que en cada caso, se están viendo trozos de la misma curva y la misma recta. Luego, el profesor preguntará: ¿Si la *recta fuera tangente* a la curva en alguno de sus puntos, se podría dar el caso que a la vez fuera tangente en algunos puntos y en otros secante?. Se finaliza la exploración del concepto-imagen con la siguiente pregunta: *¿Cómo podríamos estar siempre seguros de que una recta es tangente a una curva?*. El propósito de las preguntas anteriores es que el alumno comprenda el aspecto de la *localidad* de la tangencia.

5. Relación haz de secantes – tangente

Los objetivos que perseguimos son que el alumno:

a. Perciba que el concepto de recta tangente a una curva es más amplio que el de tangente a una circunferencia.
b. Entienda la necesidad del *proceso de aproximación* para asegurarse cuándo una recta es o no tangente a una curva en un punto dado.
c. Verbalice una definición adecuada (es decir, coincidente con lo que postula la teoría de la diferenciabilidad) de recta tangente, partiendo del mecanismo del haz de secantes.

Para que el alumno comience a reevaluar el concepto-imagen de tangente a una circunferencia se usa la gráfica que se obtiene con la instrucción **[x^3, 0, 0]**. El profesor comentará: *"Se observa una curva y una recta que tienen solamente un punto de corte"* [2].



y formula la siguiente pregunta: *¿Crees que la recta es tangente a la curva en el punto de corte?*. La respuesta deseada es afirmativa. Al ver la gráfica, el alumno que razona desde la parte visual, argumentará que la curva y la recta "coinciden" en un segmento (se les pediré que activen la instrucción **Zoom** centrada en el origen y se les volverá a preguntar), y por lo tanto, tienen más de un punto en común y la recta no puede ser tangente. Otros alumnos ven la curva dividida en dos partes, una por debajo de la recta y la otra por encima, manifestando que la recta es tangente a cada una de estas dos partes por separado, pero no a la curva en el punto señalado. Aquí, el profesor escucha los comentarios sin emitir ningún juicio. Antes de presentar la próxima gráfica, se le pregunta al alumno si puede describir un método que permita *determinar*, si una recta dada es o no tangente a una curva en un punto dado.

Las siguientes gráficas tienen como objetivo hacer que el alumno comience a relacionar el mecanismo del haz de secantes con la tangente. Se le pide que grafique las siguientes ecuaciones:

F(x):= IF(x > -2.5, 0.3·(x - 1)·(x + 2)·(x + 3))
T(x):= (F(0.1) – F(0.25))/(0.1 – 0.25)(x – 0.1) + F(0.1)

El profesor hace la siguiente afirmación: *"La recta pasa por un punto de la curva"*. En lo que respecta al **concepto-definición** (la formulación convencional lingüistica que demarca precisamente las fronteras de aplicación del concepto [7]), esta afirmación es importante, como se comprobará cuando se dibujen haces de secantes que pasen por ese punto. El hecho de que una recta pase por un punto de una curva y tenga la "apariencia" de ser tangente, no garantiza la tangencia. Con estas gráficas en la pantalla del ordenador, se pregunta al alumno: *¿Crees que la recta es tangente a la curva?*. *¿Por qué?*. La respuesta deseada es que: "*Partiendo solamente de lo que se ve en la gráfica no es posible determinarlo*", pero la mayoría de los alumnos responden afirmativamente dando como argumento que la recta pasa por un punto de la curva.

Independiente de las respuestas que se obtengan, se les pide que ejecuten las siguientes instrucciones: **SECANTE(1, 5), SECANTE(1, 10), SECANTE(1, 30),** etc... Para una mejor distinción entre la curva, la recta dada y las secantes, se utiliza el comando **Opciones** en la ventana gráfica que permite fijarle un color distinto a las secantes.

El hecho de dibujar los haces de secantes de forma progresiva le ayudará al alumno a entender que el proceso es indefinido y secuencial. Al ejecutar la última orden dada, se le pide que describa lo que observa, para luego preguntar *¿Qué significa el hecho de que la primera recta trazada esté dentro del haz de secantes?*. Es importante que al alumno le quede la *sensación* de que no se puede fiar de lo que ve, y que para poder emitir un juicio al respecto debe acudir al proceso del haz de secantes.

Con las siguientes expresiones, se obtiene la misma curva y dos rectas distintas que pasan por el mismo punto de ella.

F(x):= IF(x > -2.5, 0.3·(x - 1)·(x + 2)·(x + 3))
T(x):= ((F(0.1) – F(0.18))/(0.1 – 0.18)(x – 0.1) + F(0.1)
N(x):= 9·(305·x - 1007)/5000

Luego se formulan las siguientes preguntas: *¿Es posible que las dos rectas sean tangentes a la curva en el punto en cuestión?*. *¿Es posible que ninguna lo sea?*. *En todo caso, ¿cómo se podrá salir de dudas?*. Tras esta bateria de las preguntas, muchos alumnos manifestarán que la forma de saber si las rectas son o no tangentes, es trazando un haz de secantes que pase por el punto en cuestión y por otros puntos sobre la curva cada vez más cercanos al punto dado y observando su evolución. Se les sugiere dar la orden **SECANTE(1, 20)** y que describan lo que ven en la pantalla. Las secantes dibujadas con esta orden superan la primera recta, pero no la segunda. Con esta ilustración, y a partir de la experiencia anterior, dirán que la primera recta es secante y se les pregunta *¿Cómo será posible salir de dudas acerca de la tangencia, o no, de la segunda recta?*. Se les sugiere que ejecuten las siguientes instrucciones: **SECANTE(1, 30), SECANTE(1, 50), SECANTE(1, 100)**, etc...

Para cada caso, se le solicita al alumno que describa el proceso que está haciendo y se le pregunta *¿Qué te sugiere el hecho que el haz de secantes parezca estabilizarse sobre la segunda recta?*. En este momento, el alumno debe de comprender que lo que realmente garantiza que una recta sea tangente a una curva en un punto es, además de tocar o cortar, ser el producto final del proceso indefinido del haz de secantes.

Es importante señalar que se pueden diferenciar dos tipos de razonamientos relacionados con la estabilización del haz de secantes: Los alumnos que razonan desde la parte visual, afirmarán que ese producto *final* se obtiene después de trazar un número finito de secantes, mientras que otros alumnos con un razonamiento más avanzado comprenderán el procucto *final* (la tangente) como la *estabilización* de un proceso indefinido (infinito).

La siguiente pregunta explora el progreso del lenguaje en el alumno a lo largo de la experiencia: *¿Es posible que en algún caso especial la tangente atraviese la curva en el punto de tangencia?*. La respuesta deseada es *afirmativa.* Además, algunos alumnos darán como ejemplo la gráfica **[x^3, 0, 0]**, estudiada anteriormente. Para confirmar este caso especial, se definen las siguientes fórmulas en el editor de *DERIVE®*:

a:= 0
F(x):= x^3
G(x):= 0

Y se comienza a efectuar el proceso de aproximación con las siguientes instrucciones: **SECANTE(1, 5), SECANTE(1, 20), SECANTE(1, 50)**, etc.

Al finalizar cada instrucción, se pregunta: *¿Cuál será la dirección de la recta en la cual se estabilizarán las secantes?*. El alumno que comprenda que la tangente es una recta de estabilización, aceptará sin mayor dificultad que ésta puede atravesar la curva en el punto de tangencia. Aquí, es necesario que el profesor haga un aporte de información confirmándole al alumno que la recta señalada es tangente a la curva en el punto dado. Es posible que la mayoría de alumnos, en este momento, puedan encontrar la dirección de la tangente, cuando esta exista, a una curva cualquiera en uno de sus puntos. Para confirmar esto, se propone que representen la siguiente función: **F(x):= x^2** y se pregunta: *Distinguiendo entre vertical, horizontal u oblicua, ¿cuál será la dirección de la tangente a la curva en el punto más bajo?*. La mayoría de los alumnos dirán que es horizontal. Luego, se les solicita justificación a su respuesta. Si han entendido el proceso, responderán: *"Porque al ubicarnos en el punto más bajo, tomar otro punto sobre la curva y efectuar el proceso del haz de secantes por puntos cada vez más próximos al punto elegido, el proceso indefinido (infinito) del haz de secantes se estabilizará en una recta horizontal"*. El alumno que no ha entendido el proceso y razona desde lo visual dirá: *"Que la tangente en el punto más bajo es horizontal, puesto que por ese punto es fácil trazar una recta que toque la curva en ese punto*". Esto significa que el alumno no ha superado el concepto-imagen de tangente a una circunferencia. Y menos aún, no ha comprendido que el mecanismo del haz de secantes es el proceso que permite saber con *certeza* (en este estadio de la propuesta metodológica) la dirección de la tangente a la curva en el punto señalado.

Mediante la instrucción **F(x):= If(x < 0, -(-x)^(1/3), x^(1/3))**, y la pregunta *¿Existe la recta tangente en el punto central de la curva?* y si la respuesta es afirmativa, el alumno debe determinar si la dirección es vertical, horizontal u oblicua. En todos los casos el alumno puede verificar su respuesta, ejecutando las instrucciones habituales: **SECANTE(1, 5), SECANTE(1, 20), SECANTE(1, 50)**, etc. Esto permitirá que el alumno observe nuevamente la tangente como el proceso de estabilización del haz de secantes. Esta es otra situación especial en la cual la tangente corta a la curva y su dirección es vertical. El alumno que continúe razonando desde su concepto-imagen de tangente a una circunferencia, manifiesta que la curva no tiene tangente en ese punto, argumentando que cualquier recta que pase por ese punto cortará la curva.

6. Definición de tangente

El lenguaje empleado por un alumno para referirse a un concepto matemático específico es uno de los indicadores del nivel de razonamiento en el cual se encuentra respecto del concepto estudiado (tal como postula, por ejemplo, el modelo educativo de los van Hiele). Es por ello, que la siguiente pregunta la formulamos sin referencia a ninguna gráfica en particular*: Supongamos que disponemos de un instrumento adecuado para trazar sucesivas secantes que pasen por un punto de una curva y* ***por puntos sobre la curva cada vez más cercanos a éste,*** *¿cuál será un método adecuado para trazar la tangente a la curva en ese punto?.* Algunos tipos de respuestas habituales se comentan a continuación.

6.1 Respuestas adecuadas

"Trazar secantes que pasen por el punto dado y por otros puntos sobre la curva cada vez más cercanos a él. La tangente es aquella recta a la cual se aproxima el haz de secantes cuando se estabiliza". Con esta respuesta, u otras equivalentes, el alumno manifiesta claramente que hace un uso riguroso del lenguaje y entiende que la tangente a una curva en un punto es el *final* de un proceso de aproximación indefinido (infinito). Con está respuesta, está manifestando que su razonamiento es avanzado respecto del concepto de tangente a una curva en un punto. El alumno ha hecho una cadena de elaboraciones mentales que le permite percibir este concepto como un proceso dinámico (paso al límite). Por lo tanto, es posible asegurar que el alumno comprenderá la formalización del concepto en el momento que se exponga a esa nueva situación. Es importante resaltar que el lenguaje utilizado en la respuesta es una manifestación de la integración del concepto-imagen y el concepto definición de tangente que el alumno ha asimilado hasta el momento [1].

6.2 Respuestas de alumnos que no han superado el concepto-imagen de tangente a una circunferencia

a. *"Dibujar una recta por el punto dado y luego trazar secantes para ver si se estabilizan en la recta inicialmente dibujada".* Esta respuesta no es adecuada porque el alumno no ha entendido que la tangente es el final del proceso de estabilización del haz de secantes. Sin embargo, sí ha entendiendo que el proceso del haz de secantes sirve como un mecanismo para confirmar si una recta dibujada es ó no tangente a una curva en un punto.
b. *"Trazar secantes hasta que una de ellas toque la curva en el punto dado".* Los alumnos que responden de esta manera no comprenden que el proceso del haz de secantes se efectúa partiendo del punto fijo dado y por otros sobre la curva cada vez más cercanos a este. Tampoco comprenden que el mecanismo del haz de secantes es un proceso de aproximación y continúan razonando desde su concepto-imagen de tangente a una circunferencia. Es decir, no perciben la noción de límite subyacente e inherente al concepto de tangente.

7. Ejercicios de confrontación

Los siguientes ejercicios tienen como objetivo detectar si los alumnos aplican la definición dada por ellos mismos. También, forzarlos para que exhiban su capacidad de razonamiento en el momento de determinar la existencia ó no de la tangente, en algunos puntos particulares de curvas especiales.

Inicialmente, se considera la siguiente curva F(x):= 2|x|^(1/2) que se obtiene con la orden **F(x):= 2SQRT(ABS(X)).** Luego se formula la pregunta *¿Cuál es la dirección de la recta tangente en el punto más bajo?.* La respuesta deseada es *"La dirección es vertical*". Se le pide que confirme sus respuestas dando alternadamente las instrucciones **SECANTE(1, n), SECANTE(-1, n**), sugiriendo valores grandes de n (dependiendo de la capacidad del ordenador).

El siguiente caso a considerar es la tangente a la curva **F(x):= x** en uno de sus puntos. Aquí se presenta una dificultad, pues la mayoría de las veces el alumno no considera una línea recta como un caso especial de una curva. Al pedirle que implemente el mecanismo de haz de secantes y pidiéndole que sea coherente con su concepto-imagen desarrollado hasta ahora, tendrá que admitir que ***la recta es tangente a sí misma en cada uno de sus puntos.***

Ahora, se considera el vértice de la función valor absoluto que se obtiene con la orden **F(x):= abs(x)**. *Si existe la tangente en el punto más bajo, ¿cuál será su dirección?*. Los alumnos que continúen razonando desde el concepto-imagen de tangente a una circunferencia, responderán *"Es cualquier recta que pase por ese punto*". Quienes hayan interiorizado el mecanismo y lo apliquen manifestarán: *"Que hay dos posibles candidatos a rectas tangentes, una para cada lado de la curva*" y si el profesor negocia con el alumno que conviene admitir que si la recta tangente existe, entonces debe ser única, afirmará que cómo no se obtiene una única recta de estabilización, entonces no hay recta tangente en dicho punto.

La facilidad con la cual el alumno encuentra la dirección de la tangente a las gráficas propuestas anteriormente y el lenguaje utilizado al dar sus repuestas, son indicadores de si se ha adquirido o no un nivel avanzado de razonamiento con respecto al concepto de aproximación local, en su manifestación de recta tangente a una curva plana en uno de sus puntos y su percepción de que está en fase de proporcionar una definición nueva de qué significa ser tangente a una curva.

8. Limitaciones del método

Estudiar las limitaciones del mecanismo del haz de secantes es importante porque a partir de ellas, se evidenciará la necesidad de una definición más allá de lo que una mera visualización pueda proporcionar. Esto posibilitará que el alumno pueda comprender y formalizar el concepto de derivada de una función en este punto como instrumento para determinar la pendiente de la recta tangente, excluyendo pendientes no finitas.

En la representación gráfica que produce la siguiente función, el aspecto visual del proceso del haz de secantes no es de gran ayuda ya que al dibujar haces de secantes cerca al origen, éstos *parecen* tener varias zonas de estabilización. Aquí se define la constante **a: = 0.1** y la función **F(x):= x^2SIN(20/(x^2))**.

Dado lo anterior, se le indica que realice en forma consecutiva las instrucciones **SECANTE(1, 20), SECANTE(1, 30), SECANTE(1, 50), SECANTE(1, 75), SECANTE(1, 100)** y en cada caso se pregunta: *¿La curva tiene tangente en el punto dado?, ¿Cuál será su dirección?*. El hecho de que visualmente parezca existir varias zonas de estabilización motiva a algunos alumnos a dudar de la unicidad de la tangente por lo tanto manifiesten *"que la curva, en el punto estudiado, tiene varias tangentes*" o, si han aceptado la unicidad, que no hay. Los estudiantes que tienen un nivel avanzado de razonamiento manifiestan *"Que se han trazado muy pocas secantes, y que debido a las oscilaciones alrededor del punto, las secantes cambian constantemente de dirección y que para determinar la dirección de la tangente, se tendrían que trazar un número mayor de secantes"*. Para salir de dudas, insistirán en trazar más secantes, pero en este caso no es posible obtener visualmente la respuesta, lo que les llevará a admitir que no pueden deducir su existencia.

El propósito de la pregunta es propiciar en el alumno una situación de incomodidad y conducirlo a evocar la necesidad de hallar un método alternativo (que no dependa de la visualización) que le permita determinar la existencia de la recta tangente a una curva en un punto dado y su dirección poniendo en evidencia que el mecanismo del haz de secantes no es suficiente para conjeturar este hecho en curvas como la anterior. Es así como se hace necesario plantear un nuevo proceso que tiene que ver con el cálculo computacional de hacer aproximaciones sucesivas del valor de las pendientes de las rectas secantes obtenidas con las instrucciones dadas anteriormente. Esto es posible hacerlo fácilmente con DERIVE®, el cual permite obtener un listado del valor de las pendientes de las rectas secantes que pasan por un punto fijo (a, f(a)) y por otros puntos (b, f(b)) sobre la curva cada vez más cercanos a él. Para ello se digita la orden:

PENDIENTE(h, n):= VECTOR((F(a)-F(b))/(a-b), b, VECTOR(a + h/(1.2^m), m, VECTOR(i, i, 0, n-1)))

9. Conclusiones

Para la asimilación efectiva de un concepto matemático se deben de tener en cuenta dos fases, una primera de proporcionar una visualización adecuada del concepto a estudiar, en la que los alumnos tienen un primer acercamiento al concepto sin manipulaciones algebraicas. La segunda es la formalización del concepto, en la cual la docencia tradicional centra todos sus esfuerzos. La enseñanza centrada en esta segunda fase hace más difícil que los alumnos progresen en su razonamiento y logren integrar y desarrollar relaciones con los demás conceptos estudiados. La presente propuesta metodológica está dirigida a la primera fase, es decir, a la construcción de un concepto-imagen adecuado que permita saltar al concepto-definición cuando se disponga de la madurez algebraica y lógico-deductiva necesarias.

Nuestra experiencia educativa siguiendo las pautas del modelo de van Hiele aplicado al concepto de aproximación local, del cual esta propuesta metodologíca es su fruto, nos permite asegurar que el 90% de los alumnos sometidos al proceso descrito pueden verbalizar una definición correcta de recta tangente a una curva en uno de sus puntos partiendo del haz de secantes, y sólo el 5% de los alumnos que siguen el curso de análisis con la metodología tradicional dan una definición de tangente a una curva en un punto a partir del concepto de derivada.

Bibliografía

[1] ESTEBAN, P. *Estudio Comparativo del Concepto de Aproximación Local Vía el Modelo de van Hiele*, Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Valencia, 2000.

[2] ESTEBAN, P., LLORENS, J. L. *Aplicación del Modelo de van Hiele al Concepto de Recta Tangente a Través del "Haz de Secantes"*, Matemática & Educación, v. 3, n. 1 y 2, p. 49-60, 1999.

[3] LLORENS, J. L., PÉREZ CARRERAS, P. *An Extension of van Hiele's Model to the Study of Local Approximation*, Int. J. Math. Educ. Sci. Technol. 28 No. 5, 713-726, 1997.

[4] PÉREZ CARRERAS, P. *Matemática Asistida por Ordenador*, *Cálculo Infinitesimal* SPUPV 416, Valencia, 2000.

[5] VINNER, S. *The Role of Definition in the Teaching and Learning of Mathematics*, Advanced Mathematical Thinking, Cap. 5, p. 65 – 81. Kluiwer Ac. Pub., 1991.

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI

Problemas
XVII Olimpíada Iberoamericana de Matemática

San Salvador, El Salvador
28 de septiembre al 6 de octubre de 2002

Problema 1

Los números enteros del 1 al 2002, ambos inclusive, se escriben en una pizarra en orden creciente 1, 2, . . . , 2001, 2002. Luego, se borran los que ocupan el primer lugar, cuarto lugar, séptimo lugar, etc., es decir, los que ocupan los lugares de la forma 3k + 1.
En la nueva lista se borran los números que están en los lugares de la forma 3k +1.

Se repite este proceso hasta que se borran todos los números de la lista. ¿Cuál fue el último número que se borró?

Problema 2

Dado cualquier conjunto de 9 puntos en el plano de los cuales no hay tres colineales, demuestre que para cada punto P del conjunto, el número de triángulos que tienen como vértices a tres de los ocho puntos restantes y a P en su interior, es par.

Problema 3

Un punto P es interior al triángulo equilátero ABC y cumple que $A\hat{P}C = 120°$.
Sean M la intersección de CP con AB y N la intersección de AP con BC. Hallar el lugar geométrico del circuncentro del triángulo MBN al variar P.

Problema 4

En un triángulo escaleno ABC se traza la bisectriz interior BD, con D sobre AC.
Sean E y F, respectivamente, los pies de las perpendiculares trazadas desde A y C hacia la recta BD, y sea M el punto sobre el lado BC tal que DM es perpendicular a BC. Demuestre que $E\widehat{M}D = D\widehat{M}F$.

Problema 5

La sucesión de números reales $a_1, a_2, \ldots$ se define como: $a_1 = 56$, $a_{n+1} = a_n - \dfrac{1}{a_n}$ para cada entero n $\geq$ 1.

Demuestre que existe un entero k, $1 \leq k \leq 2002$, tal que $a_k < 0$.

Problema 6

Un policía intenta capturar a un ladrón en un tablero de 2001 × 2001. Ellos juegan alternadamente. Cada jugador, en su turno, debe moverse una casilla en uno de los tres siguientes sentidos:

↓(abajo); →(derecha); ↖(diagonal superior izquierda).

Si el policía se encuentra en la casilla de la esquina inferior derecha, puede usar su jugada para pasar directamente a la casilla de la esquina superior izquierda (el ladrón no puede hacer esta jugada). Inicialmente el policía está en la casilla central y el ladrón está en la casilla vecina diagonal superior derecha al policía. El policía comienza el juego. Demuestre que:

a) El ladrón consigue moverse por lo menos 10000 veces sin ser capturado.
(b) El policía posee una estrategia para capturar al ladrón.

Nota: El policía captura al ladrón cuando entra en la casilla en la que está el ladrón. Si el ladrón entra en la casilla del policía, no se produce captura.

Número

5

LA DESIGUALDAD DE EULER
A PARTIR DE OTRAS DESIGUALDADES ENTRE ELEMENTOS DE UN TRIÁNGULO.

De la identidad $\overline{OI}^2 = R(R-2r)$ en la que I y O designan, respectivamente, el incentro y el circuncentro de un triángulo, R el radio de su circunferencia circunscrita y r el de su circunferencia inscrita, atribuída a Euler (1765) toda vez que fue obtenida por W. Chapple (1746), se deduce inmediatamente la muy conocida *desigualdad de Euler*

$$R \geq 2r$$

verificándose la igualdad si y sólo si el triángulo es equilátero.

Esta ubícua desigualdad conserva su carácter emblemático en el campo de las desigualdades geométricas porque es simple pero no por ello trivial. Indica su prevalencia el hecho de que es equivalente a una larga lista de desigualdades entre elementos de un triángulo, entre otras, las siguientes (aquí y en todo lo que sigue las notaciones son las habituales para un triángulo ABC):

$$\frac{a}{-a+b+c} + \frac{b}{a-b+c} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3$$

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq \frac{1}{R^2}$$

$$\frac{1}{\sin A \sin B} + \frac{1}{\sin B \sin C} + \frac{1}{\sin C \sin A} \geq 4$$

$$\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$$

$$\sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} \geq \frac{3}{4}$$

$$\sin\frac{\mathrm{A}}{2} \sin\frac{\mathrm{B}}{2} \sin\frac{\mathrm{C}}{2} \leq \frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-b} + \frac{1}{s-c} \geq \frac{9}{s}$$

$$\frac{a^2}{r_b r_c} + \frac{b^2}{r_c r_a} + \frac{c^2}{r_a r_b} \geq 4$$

$$r_b r_c + r_c r_a + r_a r_b \geq h_b h_c + h_c h_a + h_a h_b$$

$$\frac{1}{h_a - 2r} + \frac{1}{h_b - 2r} + \frac{1}{h_c - 2r} \geq \frac{3}{r}$$

donde r_a, r_b, r_c y h_a, h_b, h_c son los respectivos radios de las circunferencias excritas y las alturas de ΔABC.

El propósito de este artículo es establecer determinadas desigualdades geométricas y deducir de ellas la desigualdad de Euler.

1. $\frac{R}{r} \geq \frac{b}{c} + \frac{c}{b}$

Sustituimos R y r en función de las longitudes de los lados del triángulo y obtenemos equivalentemente:

$$\frac{\dfrac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}}{\sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}} \geq \frac{b}{c} + \frac{c}{b}$$

o sea,

$$\frac{abc}{4(s-a)(s-b)(s-c)} \geq \frac{b^2+c^2}{bc}$$

es decir,

$$ab^2c^2 \geq 4(b^2+c^2)(s-a)(s-b)(s-c).$$

Si ponemos $x = s-a \geq 0$, $y = s-b \geq 0$ i $z = s-c \geq 0$, (geométricamente, éstos son los segmentos en que los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita dividen los lados del triángulo) esta última desigualdad se convierte en

$$\begin{aligned}
& (y+z)(x+z)^2(x+y)^2 \geq 4\left[(x+z)^2+(x+y)^2\right]xyz \\
\Leftrightarrow\quad & (y+z)(x+z)^2(x+y)^2 - 4\left[(x+z)^2+(x+y)^2\right]xyz \geq 0 \\
\Leftrightarrow\quad & y(x+z)^2(x+y)^2 + z(x+z)^2(x+y)^2 - 4xyz(x+z)^2 - 4xyz(x+y)^2 \geq 0 \\
\Leftrightarrow\quad & y(x+y)^2\left[(x+z)^2 - 4xz\right] + z(x+z)^2\left[(x+y)^2 - 4xy\right] \geq 0 \\
\Leftrightarrow\quad & y(x+y)^2(x-z)^2 + z(x+z)^2(x-y)^2 \geq 0 .
\end{aligned}$$

Se verifica la igualdad si y sólo si $x-z=0$ y $x-y=0$, si y sólo si $x=y=z$, si y sólo si $a=b=c$, si y sólo si el triángulo es equilátero.

Para obtener la desigualdad de Euler sólo resta aplicar un resultado elemental: si a y b son números reales positivos, entonces $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2$, verificándose la igualdad si y sólo si $a=b$. Esto es inmediato, pero constituye un teorema fundamental para las desigualdades.

2. $\dfrac{R}{2r} \geq \dfrac{m_a}{h_a}$ (m_a es la longitud de la mediana relativa al lado a)

Tenemos en cuenta que $m_a{}^2 = \dfrac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}$ y sucesivamente obtenemos:

$$\frac{R}{2r} \geq \frac{m_a}{h_a} \Leftrightarrow \frac{R}{2r} \geq \frac{m_a}{\frac{2rs}{a}} \Leftrightarrow Rs \geq a \cdot m_a$$

$$\Leftrightarrow \frac{abc}{4r} \geq a \cdot m_a \Leftrightarrow \frac{bc}{4r} \geq m_a$$

$$\Leftrightarrow \frac{b^2c^2}{16r^2} \geq m_a{}^2$$

$$\Leftrightarrow b^2c^2 \geq 4r^2\left[2(b^2+c^2)-a^2\right]$$

$$\Leftrightarrow b^2c^2 \geq 4\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}\left[2(b^2+c^2)-a^2\right]$$

$$\Leftrightarrow b^2c^2s - 4(s-a)(s-b)(s-c)\left[2(b^2+c^2)-a^2\right] \geq 0$$

Ponemos de nuevo $x = s-a$, $y = s-b$, $z = s-c$ y la última desigualdad se convierte en:

$$(x+z)^2(x+y)^2(x+y+z) - 4xyz\left[2(x+z)^2 + 2(x+y)^2 - (y+z)^2\right] \geq 0 \ .$$

Escribimos el primer miembro de la manera siguiente:

$$x(x+z)^2(x+y)^2 + y(x+z)^2(x+y)^2 + z(x+z)^2(x+y)^2$$
$$-4xyz(x+z)^2 - 4xyz(x+z)^2 - 4xyz(x+y)^2 - 4xyz(x+y)^2 + 4xyz(y+z)^2$$

y reagrupamos así:

$$y(x+y)^2\left[(x+z)^2 - 4xz\right] + z(x+z)^2\left[(x+y)^2 - 4xy\right] +$$
$$+ x\left[(x+z)^2(x+y)^2 - 4yz(x+z)^2 - 4yz(x+y)^2 + 4yz(y+z)^2\right]$$

esto es,

$$y(x+y)^2(x-z)^2 + z(x+z)^2(x-y)^2 +$$
$$+ x\left(x^4 + 2x^3y + 2x^3z + x^2y^2 + x^2z^2 - 4x^2yz - 6xy^2z - 6xyz^2 + 9y^2z^2\right)$$

y finalmente,

$$y(x+y)^2(x-z)^2 + z(x+z)^2(x-y)^2 + x\left(x^2 + xy + xz - 3yz\right)^2$$

que es ≥ 0.

Hay igualdad si y sólo si $x = y = z$, es decir, si y sólo si el triángulo es equilátero.

Está claro que $m_a \geq h_a$ y, por tanto, $\frac{m_a}{h_a} \geq 1$. Se concluye pues que $R \geq 2r$.

3. $R-2r \geq w_a - h_a$ (w_a es la longitud de la bisectriz interior del ángulo A)

Quedará demostrada si probamos que

$$R-2r \geq \sqrt{s(s-a)} - h_a$$

ya que $w_a = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcs(s-a)} \leq \sqrt{s(s-a)}$.

Expresamos las longitudes que figuran en (1) en función de R, $\frac{A}{2}$ i $\frac{B-C}{2}$. Tenemos:

$$\begin{aligned} h_a = b\cdot\sin C = 2R\sin B\sin C &\\ &= R(\cos(B-C)-\cos(B+C)) \\ &= R(\cos(B-C)+\cos A) \\ &= R\left[\left(2\cos^2\frac{B-C}{2}-1\right)+\left(1-2\sin^2\frac{A}{2}\right)\right] \\ &= 2R\left(\cos^2\frac{B-C}{2}-\sin^2\frac{A}{2}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R-2r &= R-8R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \\ &= R\left(1-4\sin\frac{A}{2}\cdot 2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right) \\ &= R\left[1-4\sin\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B-C}{2}-\cos\frac{B+C}{2}\right)\right] \\ &= R\left[1-4\sin\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B-C}{2}-\sin\frac{A}{2}\right)\right] \\ &= R\left(1-4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}+4\sin^2\frac{A}{2}\right) \end{aligned}$$

i

$$\sqrt{s(s-a)} = \sqrt{bc}\cos\frac{A}{2} = 2R\sqrt{\sin B\sin C}\cos\frac{A}{2} = 2R\cos\frac{A}{2}\sqrt{\cos^2\frac{B-C}{2}-\sin^2\frac{A}{2}}.$$

Si ponemos $\cos\frac{B-C}{2} = x$ y $\sin\frac{A}{2} = y$, resulta $1 \geq x > y > 0$ (x es mayor que y ya que $x-y = \cos\frac{B-C}{2} - \sin\frac{A}{2} = 2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} > 0$) y la desigualdad (1) se escribe

$$2R\sqrt{1-y^2}\sqrt{x^2-y^2} \leq R(1-4xy+4y^2)+2R(x^2-y^2)$$

$$\Updownarrow$$
$$2\sqrt{1-y^2}\sqrt{x^2-y^2} \leq 1+2(x-y)^2$$

Ponemos $x-y=z$, observamos que $z>0$ y después de elevar al cuadrado obtenemos

$$4\left(1-y^2\right)(2y+z)z \leq 1+4z^2+4z^4$$
$$\Leftrightarrow \quad 8zy^3+4z^2y^2-8zy+4z^4+1 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow \quad 4y^2(y-z)^2+8yz(y-z)^2+(4yz-1)^2 \geq 0,$$

evidentemente cierta.

Hay igualdad si y sólo si $y=z=\dfrac{1}{2}$, si y sólo si el triángulo es equilátero.

Al ser, obviamente, $w_a \geq h_a$, tenemos $w_a - h_a \geq 0$ y concluímos que $R \geq 2r$.

4. $\dfrac{1}{R^2} \le \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2} \le \dfrac{1}{(2r)^2}$

A partir de la expresión $S = \dfrac{abc}{4R}$ para el área del triángulo y de la fórmula de Herón, tenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{R^2} &= \frac{16S^2}{a^2b^2c^2} = \frac{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}{a^2b^2c^2} \\
&= \frac{\left[(a+b)^2 - c^2\right]\left[c^2 - (a-b)^2\right]}{a^2b^2c^2} = \frac{\left(a^2+b^2-c^2+2ab\right)\left(c^2-a^2-b^2+2ab\right)}{a^2b^2c^2} \\
&= \frac{2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - \left(a^4 - 2a^2b^2 + b^4 + b^4 - 2b^2c^2 + c^4 + c^4 - 2c^2a^2 + a^4\right)}{2a^2b^2c^2} \\
&= \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} - \frac{\left(a^2-b^2\right)^2 + \left(b^2-c^2\right)^2 + \left(c^2-a^2\right)^2}{2a^2b^2c^2} \\
&\le \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\ ,
\end{aligned}$$

lo cual prueba la primera desigualdad.

Para la segunda, usamos la fórmula $S = \dfrac{a+b+c}{2} \cdot r$ junto con la de Herón y obtenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(2r)^2} &= \frac{(a+b+c)^2}{16S^2} = \frac{a+b+c}{(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)} \\
&= \frac{(a+b-c)+(a-b+c)+(-a+b+c)}{(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)} \\
&= \frac{1}{(a-b+c)(-a+b+c)} + \frac{1}{(a+b-c)(-a+b+c)} + \frac{1}{(a+b-c)(a-b+c)} \\
&= \frac{1}{c^2-(a-b)^2} + \frac{1}{b^2-(a-c)^2} + \frac{1}{c^2-\left(b-c^2\right)} \\
&\ge \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\ .
\end{aligned}$$

La desigualdad de Euler se deduce inmediatamente.

5. Si AA_1, BB_1 i CC_1 son las bisectrices interiores de un triángulo ABC $\left(A_1 \in \overline{BC}, B_1 \in \overline{CA}, C_1 \in \overline{AB}\right)$ y I es el incentro, entonces

$$8 \leq \frac{AI}{IA_1} \cdot \frac{BI}{IB_1} \cdot \frac{CI}{IC_1} \leq \frac{4R}{r}$$

El teorema de la bisectriz aplicado al triángulo ABA_1 en el cual $BA_1 = \frac{ac}{b+c}$ da

$$\frac{AI}{IA_1} = \frac{BA}{BA_1} = \frac{c}{\frac{ac}{b+c}} = \frac{b+c}{a}$$

y de la misma manera,

$$\frac{BI}{IB_1} = \frac{c+a}{b} \quad \text{i} \quad \frac{CI}{IC_1} = \frac{a+b}{c}\ .$$

La desigualtad propuesta equivale pues a la siguiente:

$$8 \leq \frac{b+c}{a} \cdot \frac{c+a}{b} \cdot \frac{a+b}{c} \leq \frac{4R}{r}$$

La desigualdad de la izquierda, equivalente a $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$ se cumple para tres números positivos cualesquiera (no necesariamente han de ser las longitudes de los lados de un triángulo).

Para la desigualdad de la derecha, sustituímos

$$\frac{4R}{r} = \frac{1}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} = \frac{abc}{(s-a)(s-b)(s-c)}$$

y resulta equivalente a

$$(a+b)(b+c)(c+a)(s-a)(s-b)(s-c) \leq a^2b^2c^2$$

$$\Updownarrow$$

$$a^2b^2c^2 - (a+b)(b+c)(c+a)(s-a)(s-b)(s-c) \geq 0$$

Si ponemos $x = s-a$, $y = s-b$, $z = s-c$ esta última se escribe

$$(y+z)^2(z+x)^2(x+y)^2 - xyz(2x+y+z)(x+2y+z)(x+y+2z) \geq 0$$

$\Leftrightarrow$

$$(x+y+z)\left[x^2y^2(x+y) + y^2z^2(y+z) + z^2x^2(z+x) - 2xyz(xy+yz+zx)\right] \geq 0$$

$\Leftrightarrow$

$$x^2y^2(x+y) + y^2z^2(y+z) + z^2x^2(z+x) - 2xyz(xy+yz+zx) \geq 0$$

cuyo primer miembro escribimos de la siguiente manera:

$$x\left(x^2y^2+z^2x^2\right)+y\left(y^2z^2+x^2y^2\right)+z\left(z^2x^2+y^2z^2\right)-2xyz(xy+yz+zx)$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned}
x(xy-zx)^2 &+2x^3yz+y(yz-xy)^2+2xy^3z+z(zx-yz)^2+2xyz^3-2xyz(xy+yz+zx) \\
&= x(xy-zx)^2+y(yz-xy)^2+z(zx-yz)^2+2xyz\left(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\right) \\
&= x^3(y-z)^2+y^3(z-x)^2+z^3(x-y)^2+xyz\left[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right] \\
&= \sum x\left(x^2+yz\right)(y-z)^2 \geq 0
\end{aligned}$$

Hay igualdad si y sólo si $x=y=z$, es decir, si y sólo si el triángulo es equilátero.

Tenemos pues la desigualdad $8 \leq \frac{4R}{r}$, equivalente a la de Euler.

6. $\cos^2\dfrac{B-C}{2} \geq \dfrac{2r}{R}$.

$$\begin{aligned}
\cos\frac{B-C}{2} &= \cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \\
&= \sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}}\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}+\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}}\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}} \\
&= \left(\frac{s}{a}+\frac{s-a}{a}\right)\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}} \\
&= \frac{b+c}{a}\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}
\end{aligned}$$

por tanto, si designamos por S el área de ΔABC ,

$$\begin{aligned}
\cos^2\frac{B-C}{2} &= \left(\frac{b+c}{a}\right)^2\frac{(s-b)(s-c)}{bc} = \frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{sabc}\cdot\frac{(b+c)^2}{a(s-a)} \\
&= \frac{S^2}{sabc}\cdot\frac{(b+c)^2}{a(s-a)} = \frac{S}{s}\cdot\frac{4S}{abc}\cdot\frac{(b+c)^2}{4a(s-a)} \\
&= \frac{r}{R}\cdot\frac{(b+c)^2}{4a(s-a)}
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\cos^2\frac{B-C}{2}-\frac{2r}{R} &= \frac{r}{R}\cdot\frac{(b+c)^2}{4a(s-a)}-\frac{2r}{R} \\
&= \frac{r}{R}\cdot\left(\frac{(b+c)^2}{4a(s-a)}-2\right) \\
&= \frac{r}{R}\cdot\frac{(b+c)^2-8a(s-a)}{4a(s-a)} \\
&= \frac{r}{R}\cdot\frac{(b+c)^2-4a(-a+b+c)}{4a(s-a)} \\
&= \frac{r}{R}\cdot\frac{4a^2+b^2+c^2-4ab+2bc-4ca}{4a(s-a)} \\
&= \frac{r(2a-b-c)^2}{4aR(s-a)} \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

Se verifica la igualdad $\cos^2\dfrac{B-C}{2} = \dfrac{2r}{R}$ si y sólo si $2a = b+c$, si y sólo si las longitudes de los lados del triángulo están en progresión aritmética.

Siendo $1 \geq \cos^2 \frac{B-C}{2}$, resulta $1 \geq \frac{2r}{R}$ equivalente a la desigualdad de Euler.

Bibliografía

O. Bottema et al., Geometric Inequalities, Groningen, 1969.
DS Mitrinovic et al., Recent Advances in Geometric Inequalities, Kluwer Ac. Publishers, The Netherlands, 1989.
L. Panaitopol, O inegalitate in triunghi, Gazeta Matematica (Bucarest), 106, (2001), 146-148.

Miguel Amengual Covas
miguel.amengual@correo.cop.es

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

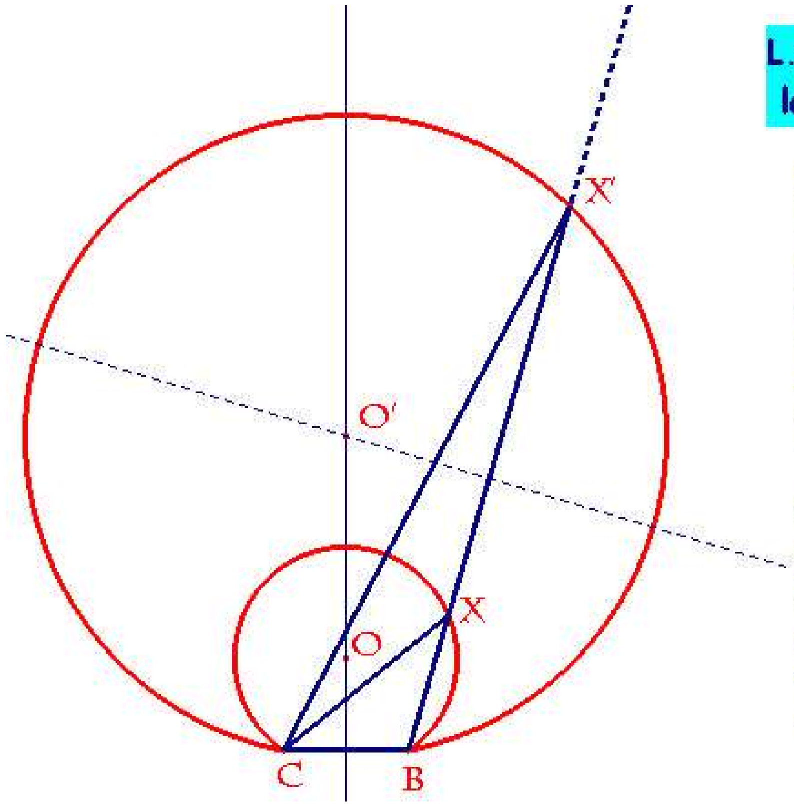
Problema 6

Construir un triángulo, conociendo Â, a, b + 3c.
(1941)

Lema Sean dadas una circunferencia y una cuerda BC de la misma. Sea X (X≠B, X≠C) un punto situado sobre la circunferencia en uno de los dos semiplanos que determina la cuerda dada.
Si sobre la semirrecta BX y, a partir del punto X, trasladamos el segmento n·XC (= n es un número dado) determinamos así el punto X'.

El lugar geométrico de los puntos X' es otro arco-capaz de la cuerda BC situado en el mismo semiplano que el primer arco-capaz.

Sol:



L.G. de los puntos X' que verifican la propiedad XX'=n*XC

El ángulo en X es cte por pertenecer X a la circunferencia de centro O, entonces su suplementario es también cte.
La razón entre los lados XC y XX'que forman dicho ángulo es también constante por el modo de construir el punto X'; XX'/XC = n
Entonces todos los triángulos X'BC así construidos son semejantes, y esto es válido para cualquier posición de X.
En particular el ángulo en X' es cte y, por tanto, pertenecerá a la circunferencia cuya construcción se adivina en el dibujo.

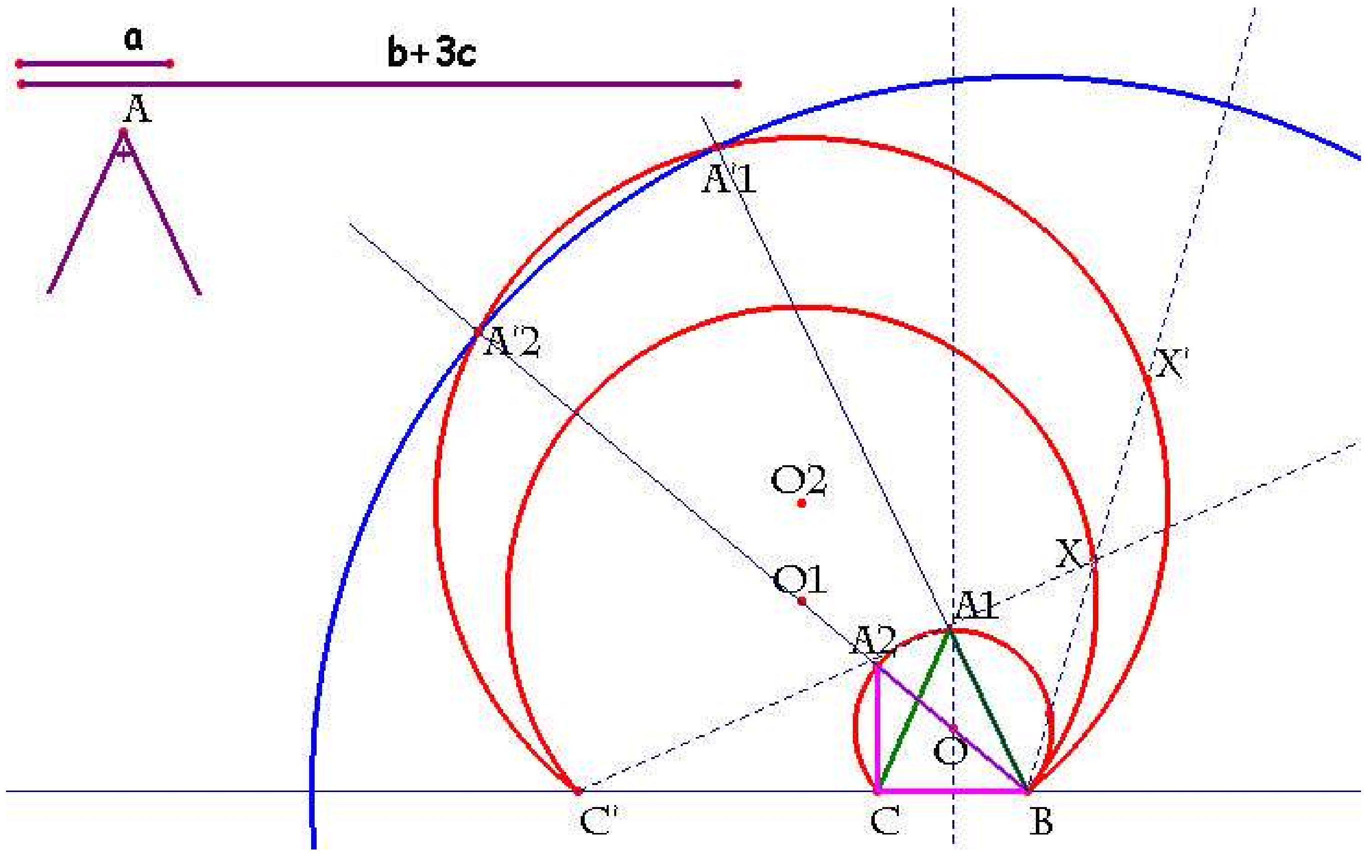
Construir un triángulo, conociendo Â, a, b + 3c.
Basándonos en el anterior lema vamos a construir el triángulo solicitado. Para ello, en primer lugar, construimos el arco-capaz del segmento **a** y ángulo **Â** dados. Sobre este segmento de extremos BC construimos seguidamente la imagen nomotética de este arco-capaz respecto del punto B y de valor k=3. Para ello bastará construir el centro, O_1, de la nueva circunferencia, imagen del centro O de la primera. Esto significará que $BO_1 = 3 \cdot BO$ y de este modo obtenemos el arco-capaz del segmento BC' ($BC' = 3 \cdot BC$) y de ángulo Â.

Sea X cualquier punto situado en este segundo arco-capaz y, sobre la semirrecta BX a partir del punto X, trasladamos el segmento $1/3 \cdot XC'$ determinando así el punto X'. Sabemos entonces que, por el lema anterior, el lugar geométrico de los puntos X' será otro arco-capaz de la cuerda BC'. Observemos que, en este caso concreto n=1/3. Llamemos O_2 al centro de esta nueva circunferencia.

Resulta pues que, para cualquier punto A situado en la primera circunferencia tenemos un único punto X' situado en la última circunferencia tal que $X'B = AC + 3 \cdot BC$.

Por tanto si ahora trazamos la circunferencia de centro B y cuyo radio es la longitud del segmento dado **b + 3·c** obtendremos 2, 1 o 0 puntos de corte con la circunferencia última de centro O_2. Estos puntos de corte determinarán sobre la primera circunferencia 2, 1 o 0 soluciones a nuestro problema.

En el dibujo se observan dos soluciones al caso planteado. Son los triángulos A_1BC y A_2BC.



Posdata:
Este problema admite una generalización muy sencilla del siguiente modo:
Construir un triángulo, conociendo Â, a y m·b + n·c, donde m y n son números reales dados.

Saludos de F. Damián Aranda Ballesteros.
Profesor de Matemáticas del IES Blas Infante en Córdoba (España)

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI

Problemas propuestos

Ningún problema se considerará definitivamente cerrado. Nuevos puntos de vista sobre problemas anteriores siempre son bienvenidos. Las soluciones deben enviarse por correo electrónico a la dirección revistaoim@oei.es, en ficheros de formato tex, ps o doc, adjuntos al mensaje. Si hubiera figuras, se incluirán en formato gif.

Los cinco problemas de este número fueron propuestos en el examen práctico del Concurso-Oposición al Cuerpo de Profesores de Educación Secundaria en Baleares, en el año 2002. Agradecemos al Prof. Miguel Amengual su amabilidad al proporcionárnoslos.

Problema 21

Encontrar las soluciones del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 3(x^2+y^2+z^2) = 1 \\ x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2 = xyz(x+y+z)^3 \end{cases}$$

Problema 22

La bisectriz interior del ángulo A de un triángulo dado ABC corta a BC en el punto D. Sea *G* la circunferencia que pasa por A y es tangente a BCen el punto D. Si M es el otro punto de intersección de *G* con AC, y BM corta a *G* en el punto P, demostrar que AP es una mediana del triángulo ABC.

Problema 23

Se considera la ecuación
$x^2 + (a + b + c)x + m(ab + bc + ca) = 0$,
en la que *a, b, c* son números reales estrictamente positivos y *m* es un parámetro real. Demostrar que

a) si $m \leq 3/4$, entonces las raíces de la ecuación son reales.

b) si *a, b, c* son las longitudes de los lados de un triángulo, y $m \geq 1$, entonces la ecuación no tiene raíces reales.

Problema 24

Hallar el lugar geométrico de los vértices de los conos circunscritos a una esfera dada en R^3, tales que su traza sobre un plano ecuatorial dado de la esfera es una parábola.

Problema 25

Un avión de la compañía **Air Disaster** debe realizar un viaje entre dos ciudades con un total de *m* + *n* escalas. En cada escala, el avión ha de cargar o descargar una tonelada de una cierta mercancía ; realiza cargas en *m* de las escalas y descargas en las *n* restantes.
En la compañía, nadie ha reparado en que el avión no soporta una carga mayor que *k* toneladas $(n<k<m+n)$ y las escalas de carga y descarga están distribuídas al azar.
Si el avión sale con *n* toneladas de la mercancía, calcular la probabilidad de que llegue a su destino.

PROBLEMAS DE NIVEL MEDIO Y DE OLIMPIADAS (5)

Presentamos una selección de problemas de las Olimpiadas de Eslovenia y de la República Checa y de la Eslovaca, de 2002.

Problema 5.1 (*Chequia y Eslovaquia*)

Demostrar que para cualesquiera números $\alpha, \beta \in (0, \frac{\pi}{2})$ se verifica la desigualdad

$$\frac{1}{\cos\alpha} + \frac{1}{\cos\beta} \geq 2\sqrt{\tan\alpha + \tan\beta}.$$

¿Cuándo se verifica la igualdad?

Problema 5.2 (*Chequia y Eslovaquia*)

Se da una circunferencia k y un cuadrilátero ABCD inscrito en ella de manera que su diagonal BD no es un diámetro. Demostrar que el punto de intersección de las tangentes a k en los puntos B y D pertenece a la recta AC si, y sólo si,

$$|AB| \bullet |CD| = |AD| \bullet |BC|$$

Problema 5.3 (*Chequia y Eslovaquia*)

Resolver en el conjunto de los números reales el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x^2 - 1 = p(y+z) \\ y^2 - 1 = p(z+x) \\ z^2 - 1 = p(x+y) \end{cases}$$

Discutir el número de soluciones.

Problema 5.4 (*Chequia y Eslovaquia*)

Hallar todos los pares de números reales a, b para los cuales la ecuación (con x real)

$$\frac{ax^2 - 24x + b}{x^2 - 1} = x$$

tiene dos soluciones cuya suma es 12.

Problema 5.5 (*Eslovenia*)

¿Existe una función $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que

$$f(f(2002)) = 17, \quad f(mn) = f(m)f(n) \quad \text{y} \quad f(n) \leq n$$

para cualesquiera $m, n \in \mathbb{N}$?

Problema 5.6 (*Eslovenia*)

En el sótano de un castillo 7 gnomos guardan un tesoro. El tesoro está detrás de 10 puertas y cada puerta tiene 3 cerraduras. Todas las cerraduras son diferentes. Cada gnomo tiene llaves de algunas cerraduras. Cualquier grupo de 4 gnomos tiene llaves de todas las cerraduras. Probar que hay un grupo de tres gnomos que tiene llaves de todas las cerraduras.

Problema 5.7 (*Eslovenia*)

Sea $S = \{a_1, \cdots, a_n\}$, donde los a_i son enteros positivos distintos. La suma de todos los números de cualquier subconjunto propio del conjunto S no es divisible por n. Demostrar que la suma de todos los números de S es divisible por n.

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

Número

6

LA CUCHILLA DEL ZAPATERO ($\alpha\rho\beta\varepsilon\lambda\omega\sigma$)

Lección de preparación olímpica

Francisco Bellot Rosado

El triángulo curvilíneo formado por tres semicircunferencias mutuamente tangentes, con sus centros alineados sobre la misma recta era conocida entre los antiguos griegos como ”árbelos”, que significa ”cuchilla de zapatero”, por su similitud con la que utilizan esos profesionales para cortar cuero. Según parece, fué Arquímedes el que primero la estudió, y posteriormente, fué también tratada por Pappus, Vieta, Descartes, Fermat, Newton , Steiner y McKay, y ya en el siglo XX, por (¡cómo no!) Victor Thébault, Leon Bankoff (el dentista de California), Clayton W. Dodge, Thomas Schoch, Peter Y. Woo y Paul Yiu (estos dos últimos son los editores de una excelente revista virtual de Geometría, *Forum Geometricorum*).

Consideremos un segmento AB, y sea C un punto cualquiera de su interior. Trazando, en un mismo semiplano, los semicírculos de diámetros AB, AC y CB se obtiene el árbelos :

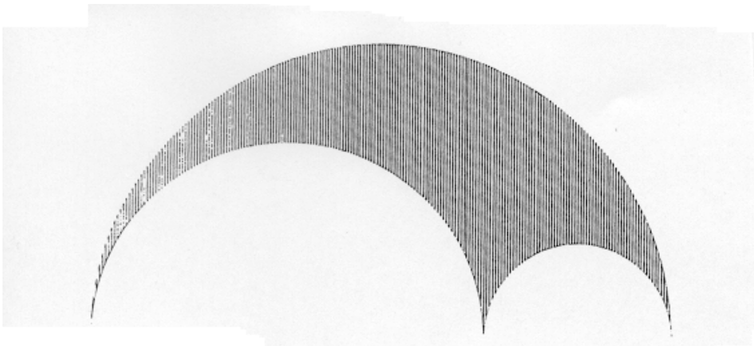


FIGURE 1
The arbelos.

Nos proponemos enumerar y demostrar algunas de las numerosísimas propiedades relacionadas con esta configuración ; se procurará utilizar únicamente herramientas matemáticas al alcance de los estudiantes de Bachillerato o de Olimpiadas; para mayor profundización se puede consultar la Bibliografía.

Se pueden encontrar en Internet páginas dedicadas al árbelos :

http://www.biola.edu/academics/undergrad/math/woopy/arbelos.htm

aunque las bellas imágenes animadas que en ella se incluyen no pueden imprimirse, lamentablemente.

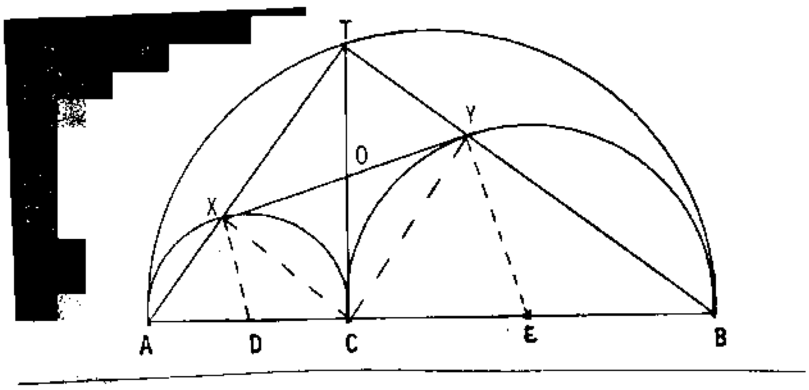
Quien no tema visitar una página en holandés puede ver

http://www.pandd.demon.nl/arbelos.htm,

donde están demostradas muchas propiedades de esta configuración.

Primeras propiedades del árbelos

Levantemos por C una perpendicular a AB hasta que corte a la circunferencia mayor en T. Unamos C con A y con B. Sean X e Y las intersecciones con las dos circunferencias pequeñas. Unamos X con Y, y sea $O = CT \cap XY$.



Entonces se verifica :

1)El cuadrilátero XCYT es un rectángulo.

2) XY es tangente a los círculos de diámetros AC y BC

3) El área del árbelos es igual a la del círculo de diámetro CT

Probaremos sucesivamente estas tres propiedades.

1) Como $\widehat{AXC} = \widehat{ATB} = \widehat{CYB} = 90^o,$ por tratarse de ángulos inscritos que abarcan una semicircunferencia, está claro que XCYT es un rectángulo. Esto tiene una consecuencia que nos será útil más adelante :

$1bis)$ XY y CT se cortan en su punto medio O

Para probar 2) necesitamos considerar los centros D y E de los círculos de diámetros AC y CB.

Para demostrar que XY es tangente a los dos círculos, es suficiente que probemos que XY es perpendicular a XD e YE (el radio es perpendicular a la tangente en el punto de tangencia). Para ello razonamos de la siguiente manera :

XDC es isósceles, porque DX = DC (ambos son radios); y OXC es isósceles también, porque OX y OC son semidiagonales de un rectángulo. Entonces se tiene :

$$\widehat{DXC} = \widehat{DCX}, \text{ y } \widehat{CXO} = \widehat{OCX}. \quad \text{Sumando,}$$

$$\widehat{DXY} = \widehat{DXC} + \widehat{CXO} = \widehat{DCX} + \widehat{OCX} = \widehat{DCT} = 90^o, \text{ pues } CT \perp AB.$$

Así se demuestra que XY es tangente al círculo de diámetro AC. Análogamente se probaría que es tangente al de diámetro CB.

Demostremos 3) : sean $DA = r_1, EC = r_2;$ sea O’ el punto medio de AB, y sea $O'A = r.$ Entonces se tiene :

$$AC + CB = AB \Leftrightarrow r_1 + r_2 = r.$$

Consideremos en primer lugar el área del árbelos :

$$Area_{arbelos} = \frac{\pi}{2}(r^2 - r_1^2 - r_2^2) = \frac{\pi}{2}\left((r_1 + r_2)^2 - r_1^2 - r_2^2\right) = \pi r_1 r_2.$$

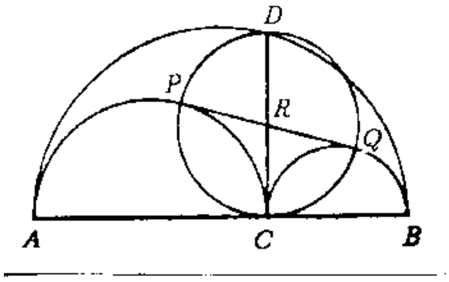
Por otra parte, el teorema de la altura (es decir, la semejanza entre los triángulos rectángulos ACT y BCT) permite escribir

$$\frac{CT}{AC} = \frac{CB}{CT} \Leftrightarrow CT^2 = AC \times CB,$$

luego el área del círculo de diámetro CT vale

$$\pi\left(\frac{CT}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4}CT^2 = \frac{\pi}{4}AC \times CB = \frac{\pi}{4}2r_1 2r_2 = \pi r_1 r_2,$$

que es lo que queríamos demostrar.

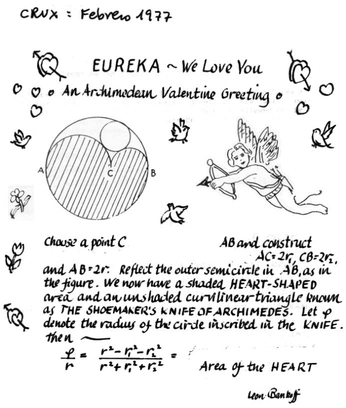


El problema de San Valentín

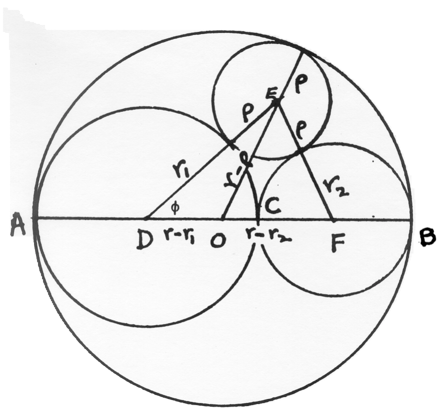
En febrero de 1977, Leon Bankoff envió ”por San Valentín” a la revista canadiense CRUX MATHEMATICORUM (entonces llamada EUREKA), el problema que mostramos en la siguiente transparencia :

Si ρ es el radio de la circunferencia inscrita en el árbelos, entonces

$$\frac{\rho}{r} = \frac{r^2 - r_1^2 - r_2^2}{r^2 + r_1^2 + r_2^2} = \frac{Area_{arbelos}}{Area_{corazon}}$$



Posteriormente se publicaron en la revista hasta 10 soluciones del mismo autor, Charles W. Trigg. Daremos una de ellas. Cambiaremos, por conveniencia, un poco las notaciones.



Consideremos el triángulo DOE.

Su perímetro es $r - r_1 + r - \rho + r_1 + \rho = 2r$; usaremos la fórmula de Herón para calcular su área, lo que nos da

$$[DOE] = \sqrt{r(r - r_1 - \rho)\rho r_1} = \sqrt{r(r_2 - \rho)\rho r_1}\,.$$

Ahora consideramos el triángulo FOE. Su perímetro es, de nuevo, $r - \rho + r_2 + \rho + r - r_2 = 2r,$ y su área

$$[FOE] = \sqrt{r(r - r_2 - \rho)\rho r_2} = \sqrt{r(r_1 - \rho)\rho r_2}\,.$$

Pero como ambos triángulos tienen la misma altura, sus áreas están en la misma proporción que sus bases, es decir

$$\frac{\sqrt{r(r_2 - \rho)\rho r_1}}{\sqrt{r(r_1 - \rho)\rho r_2}} = \frac{r - r_1}{r - r_2} = \frac{r_2}{r_1}.$$

Elevando al cuadrado tenemos

$$\frac{r(r_2 - \rho)\rho r_1}{r(r_1 - \rho)\rho r_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2} \Leftrightarrow (r_2 - \rho)r_1^3 = (r_1 - \rho)r_2^3$$

Como nuestro objetivo es despejar $\rho,$ agrupemos convenientemente los términos :

$$r_2 r_1^3 - r_1 r_2^3 = \rho(r_1^3 - r_2^3) \Leftrightarrow r_1 r_2(r_1^2 - r_2^2) = \rho(r_1^3 - r_2^3)$$

y simplificando por $r_1 - r_2$ resulta

$$\rho = \frac{r_1 r_2(r_1 + r_2)}{r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2},$$

que es lo que queríamos probar pues $r = r_1 + r_2$.

La segunda igualdad propuesta por Bankoff es un simple ejercicio, que dejamos a cargo del lector.

Un procedimiento alternativo para demostrar la igualdad propuesta se basa en el teorema de Stewart aplicado al triángulo DEF con la ceviana EO.

Cuando $r_1 = r_2 = \frac{r}{2}$, el método que hemos expuesto no sirve, porque no se puede simplificar por $r_1 - r_2 = 0$; pero en este caso el triángulo DFE es isósceles, de lados

$$\frac{r}{2} + \rho, \frac{r}{2} + \rho \text{ y } r$$

y altura desde E, $r - \rho$. Entonces, calculando su área de dos maneras distintas, obtenemos

$$\frac{r}{2}(r - \rho) = \sqrt{(r + \rho)\frac{r}{2} \cdot \frac{r}{2} \cdot \rho}\,,$$

y elevando al cuadrado y simplificando resulta

$$r^2 - 3r\rho = 0 \Rightarrow \rho = \frac{r}{3},$$

que además es el máximo valor que alcanza ρ.

Bankoff también encontró un procedimiento muy ingenioso para encontrar (con el compás) los puntos de tangencia del círculo inscrito en el árbelos con los arcos que lo forman :

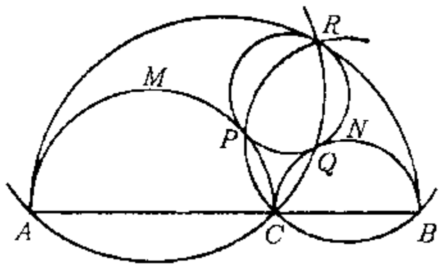
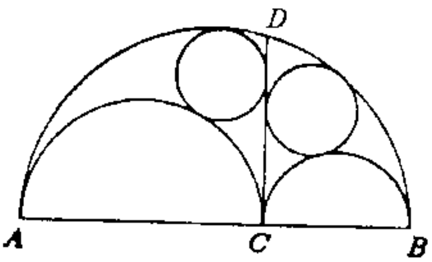


Figure 9: Circles *ACQR, BCPR*

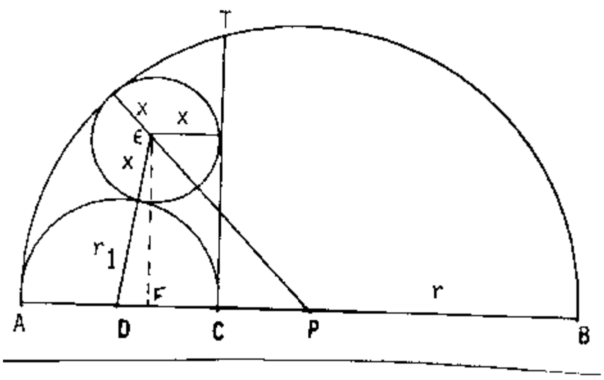
Si M y N son los puntos medios de los arcos AC y CB, con centro en M y radio MA se traza una circunferencia que pasa por A,C,Q y R; con centro en N y radio NB se traza otra circunferencia que pasa por B,C,P y R. Los tres puntos de tangencia buscados son P,Q y R. El círculo inscrito en el árbelos es el circunscrito a PQR.

Los círculos mellizos de Arquímedes : **el inicio de una familia numerosa**.

Consideremos los dos círculos inscritos en las dos porciones del árbelos separadas por la perpendicular desde C sobre AB :



Arquímedes descubrió que esos dos círculos tienen el mismo radio. Les llamaremos *círculos mellizos de Arquímedes*. Vamos a demostrar que sus radios son iguales . Utilizaremos Trigonometría, así que la demostración que demos es relativamente moderna.



Consideremos el círculo de la izquierda, de radio desconocido, *x*. En el triángulo rectángulo EFD, se tiene, por una parte

$$\cos\widehat{EDF} = \frac{DF}{DE} = \frac{r_1 - x}{r_1 + x}.$$

Si P es el punto medio de AB y consideramos el triángulo EPD, el teorema del coseno en este triángulo nos dará :

$$\begin{aligned}(r-x)^2 &= (r_1+x)^2 + (r-r_1)^2 - 2(r_1+x)(r-r_1)\cos\widehat{EDF}\\ &= (r_1+x)^2 + (r-r_1)^2 - 2(r_1+x)(r-r_1)\frac{r_1-x}{r_1+x}\\ &= (r_1+x)^2 + (r-r_1)^2 - 2(r-r_1)(r_1-x).\end{aligned}$$

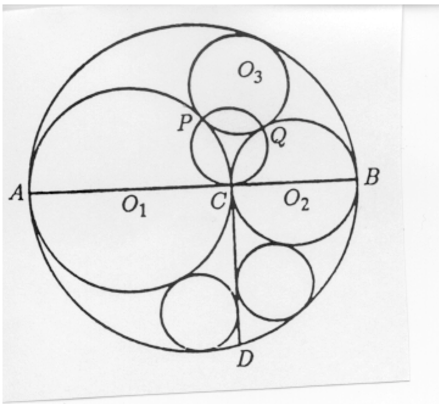
Aunque esta ecuación en x parece complicada, se simplifica para dar

$$0 = 4rx + 4r_1^2 - 4rr_1 \Leftrightarrow r_1(r-r_1) = rx \Leftrightarrow x = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}.$$

Como, para obtener el radio del otro círculo, sólo hay que cambiar los papeles de r_1 y r_2, es evidente que ambos son iguales.

En 1974, Leon Bankoff publicó en el *Mathematics Magazine* un artículo titulado ”*¿Son realmente mellizos los círculos de Arquímedes*?”. El título estaba justificado : Bankoff encontró un tercer círculo relacionado con el árbelos que tenía el mismo radio que los dos primeros.

He aquí la figura :



Mi colección del *Magazine* comienza, desafortunadamente, en 1975; pero en la misma revista, en 1999, se publicó un extenso artículo titulado *Esos ubicuos círculos arquimedianos*, por cuatro autores (Dodge, Schoch, Woo y Yiu) en el que se incluye una demostración de que el radio de ese tercer círculo coincide con los de los dos primeros, con lo cual ya tendríamos *trillizos*. He modificado ligeramente la demostración, creo que simplificándola (modestia aparte).

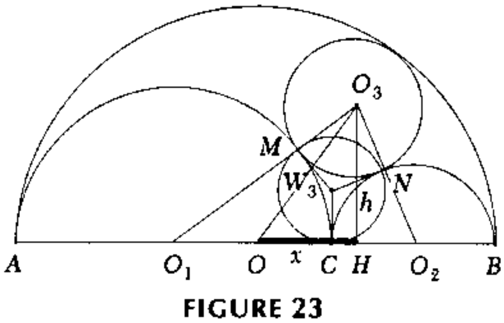


FIGURE 23

Sabemos que el radio ρ del círculo de centro O_3, inscrito en el árbelos , es

$$\rho = \frac{r_1 r_2 (r_1 + r_2)}{r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2}.$$

Los lados del triángulo $O_1 O_2 O_3$ son $r_1 + r_2, r_1 + \rho$ y $r_2 + \rho$, con lo que su semiperímetro vale $r_1 + r_2 + \rho$; y su área, por la fórmula de Herón, es

$$\sqrt{(r_1 + r_2 + \rho)\rho r_1 r_2}\,.$$

Pero el círculo cuyo radio , y, estamos buscando es el círculo inscrito en $O_1 O_2 O_3$, así que su área(la del triángulo) será igual al semiperímetro por el radio del círculo inscrito :

$$\sqrt{(r_1 + r_2 + \rho)\rho r_1 r_2} = (r_1 + r_2 + \rho) y\,;$$

elevando al cuadrado, simplificando y sustituyendo el valor de ρ obtenemos

$$\begin{aligned} y^2 &= \frac{\rho r_1 r_2}{r_1 + r_2 + \rho} = \frac{\frac{r_1 r_2 (r_1 + r_2)}{r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2} r_1 r_2}{r_1 + r_2 + \frac{r_1 r_2 (r_1 + r_2)}{r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2}} = \\ &= \frac{r_1^2 r_2^2 (r_1 + r_2)}{(r_1 + r_2)(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) + r_1 r_2 (r_1 + r_2)} = \\ &= \frac{r_1^2 r_2^2}{(r_1 + r_2)^2} \Rightarrow y = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}. \end{aligned}$$

La familia de círculos de Arquímedes ha aumentado espectacularmente. Bankoff encontró pronto un *cuatrillizo* :

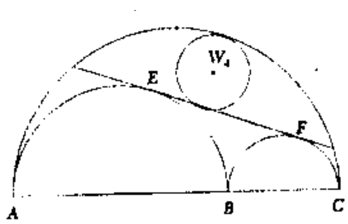
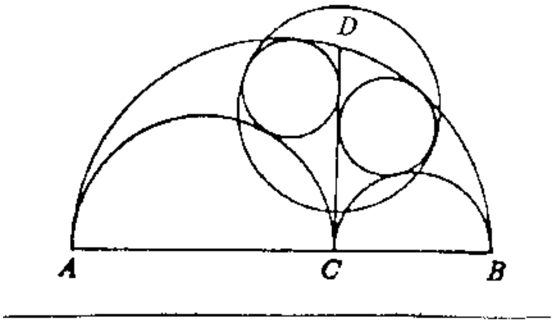


FIGURE 4
The Bankoff circle 4.

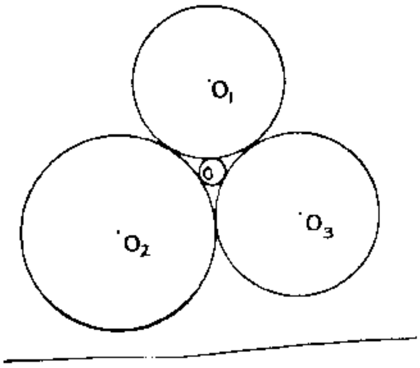
Y, dicho sea de paso, y sin entrar en más detalles, el círculo de diámetro CD también tiene su propio *mellizo* :



A partir del cuatrillizo, han seguido apareciendo nuevos círculos notables, hasta formar una familia infinita. En el artículo del *Mathematics Magazine* de 1999 citado en la Bibliografía se encuentran descritos muchos de ellos.

El teorema de los cuatro círculos, de Descartes

Descartes, en el siglo XVII, consideró un problema ligeramente distinto. En su correspondencia con la princesa Isabel, esposa del rey de Bohemia, estudia el caso de tres circunferencias tangentes exteriores entre sí dos a dos, y una cuarta circunferencia, tangente exterior a las tres primeras.



Su teorema de los círculos establece que, en estas condiciones, si r_i es el radio del círculo de centro O_i, se verifica la relación

$$2\left(\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}+\frac{1}{r_3^2}+\frac{1}{r_4^2}\right)=\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_4}\right)^2.$$

Este resultado, que se había perdido, fué redescubierto en 1937 por el premio Nobel de Química Sir Frederic Soddy, quien lo extendió al caso de esferas en el espacio, e incluso publicó en la revista *Nature* un poema alusivo, titulado *The kiss precise*[1].

Más modernamente, en el libro de Hidetosi Fukagawa *Japanese Temple Geometry* : *San Gaku*, se publica cómo calcular el radio del cuarto círculo de Descartes, tangente exteriormente a los tres primeros, en función de los radios de éstos :

$$r=\frac{r_1r_2r_3}{r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1+2\sqrt{r_1r_2r_3(r_1+r_2+r_3)}}.$$

La demostración está tomada de un libro japonés del siglo XIX, y utiliza la distancia entre los puntos de tangencia dos a dos de los tres primeros círculos, y una astuta semejanza de triángulos rectángulos convenientemente elegidos. Empleando esta fórmula es posible deducir el teorema de Descartes sin demasiada dificultad:

$$\frac{1}{r} = \frac{r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1 + 2\sqrt{r_1r_2r_3(r_1+r_2+r_3)}}{r_1r_2r_3} =$$
$$= \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{2\sqrt{r_1r_2r_3(r_1+r_2+r_3)}}{r_1r_2r_3}$$

y reagrupando y elevando al cuadrado, obtenemos

$$\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)^2 = 4\left(\frac{1}{r_2r_3} + \frac{1}{r_3r_1} + \frac{1}{r_1r_2}\right);$$

desarrollando el primer miembro resulta

$$\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_3^2} - 2\left(\frac{1}{rr_3} + \frac{1}{rr_1} + \frac{1}{rr_2} - \frac{1}{r_1r_2} - \frac{1}{r_2r_3} - \frac{1}{r_3r_1}\right),$$

así que, al pasar al segundo miembro todo el sustraendo se obtiene, tras simplificar

$$\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_3^2} = 2\left(\frac{1}{rr_3} + \frac{1}{rr_1} + \frac{1}{rr_2} + \frac{1}{r_1r_2} + \frac{1}{r_2r_3} + \frac{1}{r_3r_1}\right)$$

de donde, sumando a ambos miembros el primer miembro, resulta

$$2\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_3^2}\right) = \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}\right)^2, \text{ c.q.d.}$$

Una demostración alternativa, también elemental, del teorema de Descartes aparece en la excelente colección de problemas de Geometría plana (en ruso) *Zadachi po planimetrii*(*vol.*1), de Victor Prasolov (problema 3.23b):

Sean $(O_1, r_1), (O_2, r_2), (O_3, r_3)$ los centros y radios de las circunferencias "de fuera", y (O, r) de la "de dentro". El semiperímetro del triángulo O_2OO_3 es $r_2 + r_3 + r$; y por las fórmulas del coseno del ángulo mitad en un triángulo,

$$\cos^2\left(\frac{\widehat{O_2OO_3}}{2}\right) = \frac{r(r_2+r_3+r)}{(r_2+r)(r_3+r)} \text{ ; } \sin^2\left(\frac{\widehat{O_2OO_3}}{2}\right) = \frac{r_2r_3}{(r_2+r)(r_3+r)}$$

Por otro lado, si $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, se verifica

$$\sin^2\alpha - \sin^2\beta - \sin^2\gamma + 2\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha = 0$$

(es una consecuencia directa del teorema del coseno; basta sustituir los lados por sus expresiones en función de R y los senos de los ángulos, y simplificar por el factor común $4R^2$). Tal vez la más completa colección de fórmulas de un triángulo se encuentre en el libro de Lalescu *La géométrie du triangle*. Poniendo ahora

$$\alpha = \frac{\widehat{O_2OO_3}}{2}, \beta = \frac{\widehat{O_1OO_3}}{2}, \gamma = \frac{\widehat{O_1OO_2}}{2}$$

se obtiene

$$\frac{r_2r_3}{(r_2+r)(r_3+r)} - \frac{r_1r_3}{(r_1+r)(r_3+r)} - \frac{r_1r_2}{(r_1+r)(r_2+r)} + 2\frac{r_1\sqrt{r\ \ r_2r_3(r_2+r_3+r)}}{(r_1+r)(r_2+r)(r_3+r)} = 0$$

que es lo mismo que

$$r_2r_3(r_1+r) - r_1r_3(r_2+r) - r_1r_2(r_3+r) + 2r_1\sqrt{r_2r_3r(r_2+r_3+r)} = 0$$

dividiendo por $r_1r_2r_3$ obtenemos

$$\frac{r_1+r}{r_1} - \frac{r_2+r}{r_2} - \frac{r_3+r}{r_3} + 2\sqrt{\frac{r(r_2+r_3+r)}{r_2r_3}} = 0$$

y dividiendo ahora por r resulta

$$\frac{r_1+r}{r_1r} - \frac{r_2+r}{r_2r} - \frac{r_3+r}{r_3r} + 2\sqrt{\frac{(r_2+r_3+r)}{rr_2r_3}} = 0,$$

es decir

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} - \frac{1}{r} + 2\sqrt{\frac{1}{rr_3} + \frac{1}{rr_2} + \frac{1}{r_2r_3}} = 0$$

Si, por conveniencia, ponemos $k_i = \frac{1}{r_i}, k = \frac{1}{r},$ la última igualdad se escribe en la forma

$$k_1 - k_2 - k_3 - k + 2\sqrt{kk_2 + kk_3 + k_2k_3} = 0,$$

de donde, elevando al cuadrado,

$$(k_1 - k_2 - k_3 - k)^2 = 4(kk_2 + kk_3 + k_2k_3). \qquad (*)$$

Partiendo de la identidad algebraica

$$\begin{aligned}(k_1+k_2+k_3+k)^2 &= (k_1-k_2-k_3-k)^2 + 4(k_1k_2 + k_1k_3 + k_1k) = \\ &= (*) \ = 4(kk_2 + kk_3 + k_2k_3) + 4(k_1k_2 + k_1k_3 + k_1k) = \\ &= 2(k_1+k_2+k_3+k)^2 - 2(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k^2),\end{aligned}$$

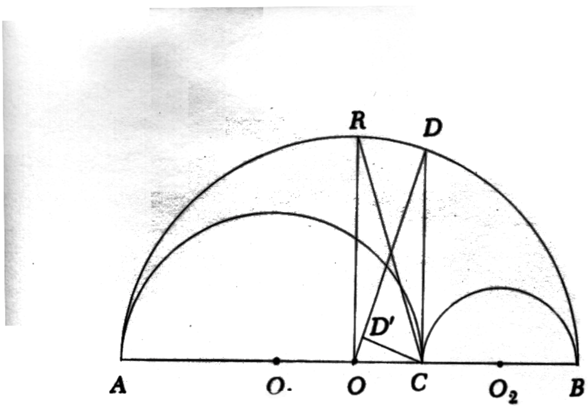
es decir

$$2(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k^2) = (k_1+k_2+k_3+k)^2,$$

que es el teorema de Descartes.[2]

El árbelos y la desigualdad de las medias

¿Quién podría pensar que la desigualdad de las medias, una herramienta del Análisis Matemático, pudiera probarse mediante el árbelos? Pues es así :



Si $AC = a, CB = b,$ con $a \geq b,$ entonces:

i) OR = OD es la media aritmética $M_1 = \frac{a+b}{2}$.

ii) CD es la media geométrica $M_0 = \sqrt{ab}$

iii) CR es la raíz media cuadrática, $M_2 = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

iv) Si D' es el pie de la perpendicular desde C a OD, entonces DD' es la media armónica de a y b : $M_{-1} = \frac{2ab}{a+b}$;

y se verifica

$$a \geq M_2 \geq M_1 \geq M_0 \geq M_{-1} \geq b$$

porque cada término, a excepción de a y b, es la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyo cateto es el término siguiente :

ΔCOR $\Rightarrow M_2 \geq M_1; \Delta OCD \Rightarrow M_1 \geq M_0; \Delta CDD' \Rightarrow M_0 \geq M_{-1}$.

Y, por último,

$$a = AC = AO + OC = RO + OC \geq RC = M_2$$
$$M_{-1} = DD' = OD - OD' = OB - OD' \geq OB - OC = CB = b.$$

Bibliografía

1. ARBELOS, Special Geometry issue, vol. 6, MAA,1988

2. Charles W.Trigg, *How do I love thee*?*Let me count the ways*. *Eureka* (*hoy CRUX MATHEMATICORUM*), 1977, *p*.217-223.

3.Leon Bankoff : *The marvelous Arbelos*, en *The Lighter side of mathematics*, *MAA*.

4.Dodge, Schoch, Woo, Yiu : *Those ubiquitous Archimedean circles*, en *Mathematics Magazine* 1999, *pp*.202-213.

5.H.Fukagawa y D.Pedoe : *Japanese Temple Geometry* : *SanGaku*. The Charles Babbage Research Centre. Winnipeg, Canada 1989.

6.V.Prasolov: *Zadachi po planimetrii*. Nauka, Moscú, 1991.

Notas

[1] Reproduzco aquí la versión en español del poema de Soddy, tal como viene en el libro de Martin Gardner *Circo Matemático*:

Pueden besarse los labios, dos a dos,
sin mucho calcular, sin trigonometría;
mas ¡ay! no sucede igual en Geometría,
pues si cuatro círculos tangentes quieren ser
y besar cada uno a los otros tres,
para lograrlo habrán de estar los cuatro
o tres dentro de uno, o alguno
por otros tres a coro rodeado.
De estar uno entre tres, el caso es evidente
pues son todos besados desde afuera.
Y el caso tres en uno no es quimera,
al ser éste uno por tres veces besado internamente.

Cuatro círculos llegaron a besarse,
cuanto menores tanto más curvados,
y es su curvatura tan sólo la inversa

de la distancia desde el centro.
Aunque este enigma a Euclides asombrara,
ninguna regla empírica es necesaria:
al ser las rectas de nula curvatura
y ser las curvas cóncavas tomadas negativas,
la suma de cuadrados de las cuatro curvaturas
es igual a un medio del cuadrado de su suma.

Espiar de las esferas
los enredos amorosos
pudiérale al inquisidor
requerir cálculos tediosos,
pues siendo las esferas más *corridas*,
a más de un par de pares
una quinta entra en la *movida*.
Empero, siendo signos y ceros como antes
para besar cada una a las otras cuatro,
El cuadrado de la suma de las cinco curvaturas
ha de ser triple de la suma de sus cuadrados.

En enero de 1937, la revista inglesa *Nature*,que había publicado el poema de Soddy, publicó una cuarta estrofa que generalizaba la fórmula a espacios de n dimensiones, original de Thorold Gosset :

No debemos empero confinar nuestros cuidados
a los simples círculos, esferas y planos,
sino elevarnos a n –espacios e hipercurvaturas
donde también las múltiples tangencias son seguras.
En n –espacios, los pares de tangentes
son hiperesferas, y es verdad
_ más no evidente _
cuando $n+2$ de ellas se osculéan
cada una con $n+1$ compañeras
Que el cuadrado de la suma de todas las curvaturas
es n veces la suma de sus cuadrados.

[2]Una demostración similar a la de Prasolov, pero más general porque comprende también el caso de los dos tipos de tangencia (externa e interna) de la cuarta circunferencia con las otras tres, está publicada en el libro de Dimitrios Kontogiannis *Geometria*, Atenas 1987 (en griego moderno y manuscrito).

Valladolid, 21 de abril de 2002
Francisco Bellot Rosado

Soluciones oficiales de los problemas de la Olimpiada PanAfricana del año 2000.

Problema 3

Sean a,b,c números reales tales que

$$a^2+b^2=c^2 \qquad (1).$$

Resolver el sistema (incógnitas x,y,z) :

$$\begin{cases} x^2+y^2=z^2 & (2) \\ (x+a)^2+(y+b)^2=(z+c)^2 & (3) \end{cases}$$

Solución

Si $c=0,$ entonces también $a=b=0$. En ese caso las dos ecuaciones son iguales, y la solución es x,y arbitrarias, y $z=\pm\sqrt{x^2+y^2}$.

Consideremos el caso $c\neq 0$. Restando (1) y (2) de (3), obtenemos

$$ax+by=cz \qquad (4).$$

Multiplicando (1) por (2) y restando el cuadrado de (4) obtenemos

$$b^2x^2-2abxy+a^2y^2=(bx-ay)^2=0.$$

Por lo tanto, $bx-ay=0$. En función de un parámetro real arbitrario $t,$ se tiene

$$x=at, y=bt$$

y por (4),

$$z=\frac{a^2t+b^2t}{c}=ct.$$

Se comprueba sin dificultad que (at,bt,ct) verifica ambas ecuaciones.

Notas : *Este problema fué propuesto por Burkina Fasso*. *Los criterios de puntuación aplicados fueron* :

Obtener cualquier solución correcta uniparamétrica en el caso general, 4 puntos.

Encontrar la forma más simple, 1 punto.

Comprobar que las soluciones obtenidas verifican las ecuaciones, 1 punto.

Tratar el caso $c=0,$ 1 punto.

Problema 2

Los polinomios $P_0,P_1,P_2,\cdots$ se definen mediante

$$P_0(x)=x^3+213x^2-67x-2000,$$
$$P_n(x)=P_{n-1}(x-n), n=1,2,3,\cdots$$

¿Cuál es el coeficiente de x en $P_{21}(x)$?

Solución

Se tiene, sucesivamente,

$$
\begin{aligned}
P_1(x) &= P_0(x-1)\\
P_2(x) &= P_1(x-2) = P_0(x-(2+1)),\\
P_3(x) &= P_2(x-3) = P_0(x-(3+2+1)),\\
&\dots\\
P_n(x) &= P_0(x-(n+(n-1)+\cdots+2+1)) = P_0\left(x-\frac{1}{2}n(n+1)\right),\\
P_{21}(x) &= P_0(x-231) = (x-231)^3-213(x-231)^2-67(x-231)-2000
\end{aligned}
$$

Por lo tanto el coeficiente buscado es

$$3\bullet 231^2-2\bullet 213\bullet 231-67 = 231(693-426)-67 = 231\bullet 267-67 = 61610.$$

Nota : *también propuesto por Burkina Fasso, los criterios de puntuación fueron*:
Obtener la expresión $P_n(x) = P_0\left(x-\frac{1}{2}n(n+1)\right)$, 4 puntos.
Hallar una expresión correcta para el coeficiente de x, 2 puntos.
Evaluar el resultado, 1 punto.

Problema 6

Una compañía tiene cinco directores. Las reglas de la compañía requieren que cualquier mayoría (tres o más) de directores sea capaz de abrir su caja fuerte, pero cualquier minoría (dos o menos) de directores no pueda hacerlo.Se propone equipar la caja fuerte con 10 cerraduras, de manera que solamente pueda ser abierta con las llaves de las diez cerraduras, y dar a cada director un conjunto de *n* llaves distintas. Hallar todos los valores de *n* para los que hay una forma de distribuir las llaves de acuerdo con las reglas de la compañía.

Solución

Llamemos a los directores A,B,C,D y E , y numeremos las llaves de 1 a 10. Ya que $\{A,B\}$ no puede abrir la caja por ellos mismos, existe una llave que ninguno de esos dos directores tiene. Cada uno de los directores C,D y E debe tener esa llave, porque $\{A,B,C\},\{A,B,D\}y\{A,B,E\}$ sí pueden abrir la caja fuerte. Por simetría, cada subconjunto de tres directores tiene una llave crítica en común que los otros dos no tienen. Esas llaves críticas son todas distintas, y hay exactamente tres copias de cada llave crítica.

Hay $\frac{5\times4\times3}{1\times2\times3} = 10$ subconjuntos de tres directores. Demos a cada llave una etiqueta con los nombres de una combinación diferente de tres directores, y demos una copia de la llave a cada director cuyo nombre aparece en la etiqueta. Todas las llaves han sido contadas, y no hay llaves extra excepto por lo que se refiere a las llaves críticas. Hay $10\times3 = 30$ llaves en total, así que $n = 6$.

Falta por comprobar que cualquier subconjunto $\{A,B,C\}$ tiene en efecto las 10 llaves. Esto es así, porque hay tres copias de cada llave y D y E no pueden tener más de dos copias.

Por lo tanto las llaves pueden ser distribuidas según las reglas de la compañía si y sólo si $n = 6$.

Nota: *Problema propuesto por Uganda*; *los criterios de puntuación fueron*:
Encontrar la distribución de las llaves cuando $n = 6$, 3 puntos.
Verificar que la distribución funciona, 1 punto.
Demostrar que si $n \neq 6$ no hay solución, 3 puntos.

Problema 3

Demostrar que si

$$\frac{p}{q} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{1334}+\frac{1}{1335},$$

donde p y q son números naturales, entonces 2003 divide a p.

Solución

$$\begin{aligned}\frac{p}{q} &= 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{1334}+\frac{1}{1335}\\ &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{1334}+\frac{1}{1335}-2\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{1334}+\frac{1}{1335}\right)\\ &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{1334}+\frac{1}{1335}-\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{667}\right)\\ &= \frac{1}{668}+\frac{1}{669}+\frac{1}{670}+\cdots+\frac{1}{1334}+\frac{1}{1335}\\ &= \left(\frac{1}{668}+\frac{1}{1335}\right)+\left(\frac{1}{669}+\frac{1}{1334}\right)+\left(\frac{1}{670}+\frac{1}{1333}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{1001}+\frac{1}{1002}\right)\\ &= \frac{2003}{668\times 1335}+\frac{2003}{669\times 1334}+\frac{2003}{670\times 1333}+\cdots+\frac{2003}{1001\times 1002}\\ &= 2003\bullet\frac{p'}{q'},\end{aligned}$$

siendo

$$\frac{p'}{q'} = \frac{1}{668\times 1335}+\cdots+\frac{1}{1001\times 1002}.$$

Por lo tanto, es suficiente demostrar que 2003 es primo, ya que cuando la fracción p'/q' se escribe en su forma más simplificada, los factores primos de q' son todos menores que 2003. Esto puede hacerse comprobando todos los posibles factores primos hasta 43, ya que $2003 < 2025 = 45^2$. Resulta

$$\begin{aligned}2003 &= 2\bullet 7\bullet 11\bullet 13+1 = 3\bullet 23\bullet 29+2\\ &= 5\bullet 400+3 = 17\bullet 117+14 = 19\bullet 105+8\\ &= 31\bullet 64+19 = 37\bullet 54+5 = 41\bullet 48+35 = 43\bullet 46+25,\end{aligned}$$

así que 2003 es primo.

Nota: *Este problema fué propuesto por Sudáfrica, y los criterios de puntuación fueron*:

Obtener $\frac{p}{q} = \frac{1}{668}+\frac{1}{669}+\frac{1}{670}+\cdots+\frac{1}{1334}+\frac{1}{1335}$, 2 puntos.

Obtener $\frac{p}{q} = \frac{2003p'}{q'}$, 2 puntos.

Demostrar que es suficiente demostrar que 2003 es primo, 1 punto.

Demostrar que 2003 es primo, 2 puntos.

Problema 5

Desde un punto P exterior a una circunferencia, se trazan las tangentes PA y PB. PQR es cualquier secante, estando Q y R sobre la circunferencia.La cuerda BS es paralela a PQR. Probar que SA biseca QR.

Solución

Sea O el centro de la circunferencia. Consideraremos dos casos, según que O y A estén a distinto lado de QR o estén en el mismo lado de QR. La demostración que sigue vale en ambos casos.

Supongamos que SA y QR se cortan en T; trazamos los segmentos OA,OB y OP. Entonces $\widehat{ATP} = \widehat{ASB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}$. Por simetría, los triángulos OAP y OBP son iguales y de aquí que $\widehat{AOP} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}$.

Por lo tanto OTAP es un cuadrilátero cíclico (la cuerda AP subtiende ángulos iguales) y $\widehat{OTP} = \widehat{OBP} = 90^{\circ}$ ya que AP es una tangente. Pero $\widehat{OTQ} = 90^{\circ}$ implica que T es el punto medio de la cuerda QR.

Nota : *este problema fué propuesto por Sudáfrica* ; *admite una solución con números complejos*; *los criterios de puntuación de la solución expuesta fueron*:

Observar que hay que distinguir dos casos, 1 punto.

Identificar el cuadrilátero cíclico, 4 puntos.

Deducir que $\widehat{OTQ} = 90^{o}$, 1 punto.

Observar que $\widehat{OTQ} = 90^{o}$ resuelve el problema, 1 punto.

El problema 1 es un ejercicio muy sencillo, cuya solución se deja a los lectores de la Revista Escolar de la O.I.M.

Problema 17

Sean (x_n) e (y_n) las sucesiones definidas recurrentemente por:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_{n+1} = x_n + y_n \end{cases}, \begin{cases} y_1 = 2 \\ y_n = x_n + 2^{n-1} \end{cases}, \ \forall n \geq 2 .$$

i) Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$

ii) Probar que hay términos de las dos sucesiones que son divisibles por tres números primos consecutivos.

iii) Si p_1, p_2, …, p_k son numeros primos, demostrar que hay un número infinito de términos en (x_n) o en (y_n) que son divisibles por el producto $p_1p_2\ldots p_k$.

Normalmente, estos problemas se pueden resolver sin dar una expresión explícita de (x_n) o (y_n). Sin embargo, es bastante trivial en este caso encontrar que:

$$x_{n+1} = x_n + y_n = 2x_n + 2^{n-1} .$$

Podemos entonces buscar soluciones de la forma:

$$x_n = 2^{n-2} z_n ,$$

siendo (z_n) una sucesión de números reales a encontrar. Es obvio que:

$$2^{n-1} z_{n+1} = x_{n+1} = 2x_n + 2^{n-1} = 2^{n-1} z_n + 2^{n-1} ,$$

de donde se establece que $z_{n+1}=z_n+1$. Al mismo tiempo, $x_2=z_2=x_1+y_1=3$, luego $z_n=n+1$ es válido para $n=2$, y si es válido para n, entonces para $n+1$ se tiene que $z_{n+1}=z_n+1=(n+1)+1$. Luego por inducción hemos probado que, para todo $n\geq 2$, $z_n=n+1$, y se tiene:

$$x_n = 2^{n-2}(n+1) .$$

Por lo tanto, se tiene también, para todo $n\geq 2$, que:

$$y_n = x_n + 2^{n-1} = 2^{n-2}(n+1) + 2^{n-1} = 2^{n-2}(n+3) .$$

i) El límite pedido es obviamente 1, ya que $x_n/y_n=(n+1)/(n+3)$.

ii y iii) Dado cualquier número entero positivo m, se tiene que x_{m-1}, x_{2m-1}, x_{3m-1}, … son divisibles por m, como también lo son y_{m-3}, y_{2m-3}, y_{3m-3}, …. Esto es cierto también para los casos particulares donde m es el producto de tres primos consecutivos, o el producto de k primos cualesquiera.

Problema 19

Hallar el mínimo valor de la expresión

$$\sqrt{x^2+1}+\sqrt{(y-x)^2+1}+\sqrt{(z-y)^2+1}+\sqrt{(10-z)^2+9}$$

donde x, y, z son números reales arbitrarios.

Sean los puntos de coordenadas:

$O\equiv(0,0)$, $A\equiv(x,1)$, $B\equiv(y,2)$, $C\equiv(z,3)$, $D\equiv(10,6)$.

Obviamente, la expresión de la que se pide hallar el mínimo es equivalente a la suma de las distancias $OA+AB+BC+CD$. Este valor es mínimo cuando los puntos O, A, B, C, D están alineados, con C en el segmento OD, B en el segmento OC y A en el segmento OB. Esto es posible cuando $x=5/3$, $y=10/3$, $z=5$. El valor a minimizar es entonces igual a la distancia OD, es decir:

$$\sqrt{10^2+6^2}=\sqrt{136}=2\sqrt{34}\,.$$

Problema 21

Encontrar las soluciones del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 3\left(x^2+y^2+z^2\right)=1 \\ x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2=xyz\left(x+y+z\right)^3 \end{cases}$$

Supongamos que x, sin pérdida de generalidad por simetría entre las variables, es cero. Entonces, la segunda ecuación se transforma en $y^2z^2=0$, con lo que o y o z valen también cero. Siendo, sin pérdida de generalidad nuevamente, $y=0$, se tiene que $3z^2=1$. Restaurando nuevamente la generalidad, se tienen las siguientes soluciones:

$$(x,y,z)=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},0,0\right); \qquad (x,y,z)=\left(0,\frac{1}{\sqrt{3}},0\right); \qquad (x,y,z)=\left(0,0,\frac{1}{\sqrt{3}}\right);$$

$$(x,y,z)=\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},0,0\right); \qquad (x,y,z)=\left(0,-\frac{1}{\sqrt{3}},0\right); \qquad (x,y,z)=\left(0,0,-\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Supongamos entonces que ninguno de los (x,y,z) es cero. Es obvio que si (x,y,z) es una solución, también lo es $(-x,-y,-z)$. Podemos entonces elegir (x,y,z) de forma que su producto sea positivo, y restaurar más tarde la generalidad. Se tiene entonces, por la segunda ecuación, que su suma también es positiva.

Definamos ahora las siguientes variables auxiliares:

$$a=\frac{xyz}{x^2}=\frac{yz}{x}; \qquad b=\frac{xyz}{y^2}=\frac{xz}{y}; \qquad c=\frac{xyz}{z^2}=\frac{xy}{z}.$$

Por su definición, a, b y c son positivos. Podemos ahora transformar las ecuaciones que componen el sistema como:

$$bc+ac+ab=x^2+y^2+z^2=\frac{1}{3};$$

$$a+b+c=\frac{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2}{xyz}=\left(x+y+z\right)^3.$$

Ahora bien, utilizando la desigualdad entre las medias aritmética y cuadrática, se tiene:

$$a^2+b^2+c^2=3\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}\right)^2\geq\frac{\left(a+b+c\right)^3}{3};$$

$$\frac{1}{3} = bc + ac + ab = \frac{(a+b+c)^2 - (a^2+b^2+c^2)}{2} \leq \frac{(a+b+c)^2}{3} = \frac{(x+y+z)^6}{3};$$

$$x + y + z \geq 1.$$

Se tiene entonces finalmente, utilizando nuevamente la desigualdad entre las medias aritmética y cuadrática, que:

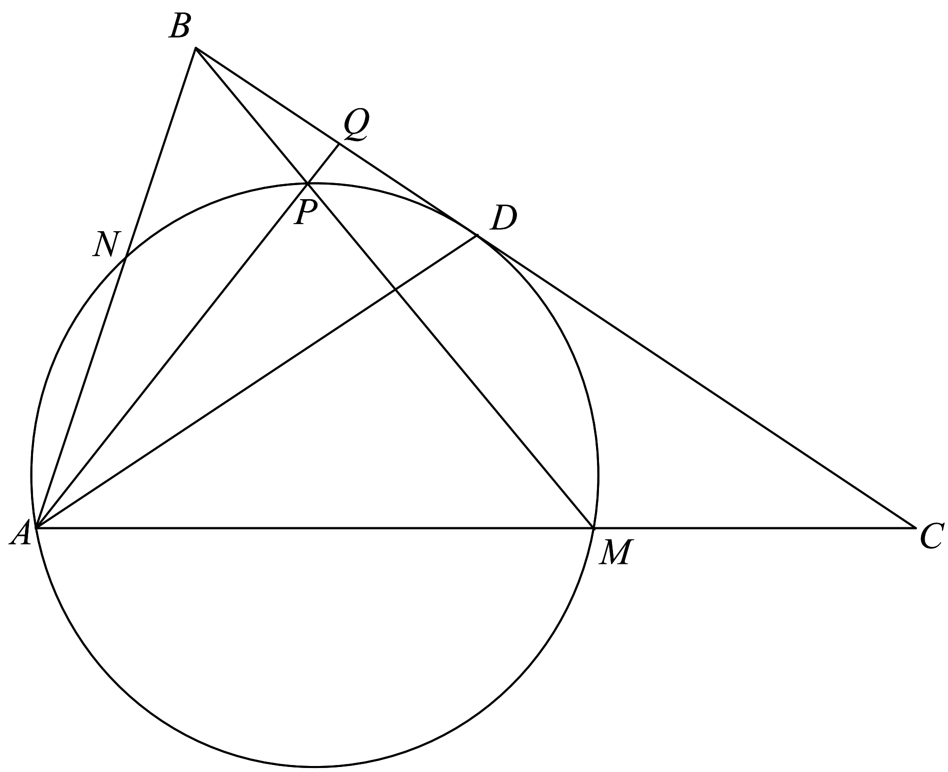
$$\frac{1}{3} = \sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}} \geq \frac{|x|+|y|+|z|}{3} \geq \frac{x+y+z}{3} \geq \frac{1}{3}.$$

Todas las desigualdades deben ser igualdades, lo cual es possible sólo si *x, y*, *z* son positivos e iguales entre sí, y por lo tanto iguales a 1/3. Restaurando la generalidad se tienen las dos nuevas soluciones, que son además únicas en el caso de que ninguno de los *x*, *y*, *z* sea cero:

$$(x,y,z) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right); \qquad (x,y,z) = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right).$$

Problema 22

La bisectriz interior del ángulo *A* de un triángulo dado *ABC* corta a *BC* en el punto *D*. Sea *G* la circunferencia que pasa por *A* y es tangente a *BC* en el punto *D*. Si *M* es el otro punto de intersección de *G* con *AC*, y *BM* corta a *G* en el punto *P*, demostrar que *AP* es una mediana del triángulo *ABD*. (Nótese que el enunciado original en la página de red decía "mediana del triángulo *ABC*", pero esto es obviamente incorrecto, ya que como se demuestra a continuación, *AP* es mediana de *ABD*, y *D* es un punto de *BC* distinto de *C*.)



Llamaremos $a=BC$, $b=AC$, $c=AB$. Por ser *AD* la bisectriz la bisectriz de *A*, se tiene que $\angle BAD=\angle CAD=A/2$. Al mismo tiempo, se tiene que $\angle ADB=\pi-\angle ADC$, luego $\sin(\angle ADB)=\sin(\angle ADC)$. Por lo tanto, aplicando el teorema del seno a los triángulos *ABD* y *ACD* se tiene que:

$$\frac{BD}{AB}=\frac{\sin(BAD)}{\sin(ADB)}=\frac{\sin(CAD)}{\sin(ADC)}=\frac{CD}{AC}.$$

Luego como $BD+CD=a$, es fácil deducir que:

$$CD = \frac{ab}{b+c}; \qquad BD = \frac{ac}{b+c}.$$

Por ser D el punto de tangencia de BC con G, se tiene que las potencias de B y C con respecto a G son, respectivamente:

$$\left(\frac{ac}{b+c}\right)^2 = BD^2 = BN \cdot BA = c \cdot BN;$$

$$\left(\frac{ab}{b+c}\right)^2 = CD^2 = CM \cdot CA = b \cdot CM.$$

Se ha definido N como el segundo punto donde G corta a AB. Se tiene entonces que:

$$\frac{CM}{AC} = \frac{CM}{b} = \left(\frac{a}{b+c}\right)^2 = \frac{BN}{c} = \frac{BN}{AB}.$$

Luego MN es paralela a BC, y los triángulos ABC y ANM son semejantes.

Sea ahora Q el punto en el que AP corta a BC. Se tiene entonces que $\angle BPQ=\angle APM$, y por ser P y N puntos del mismo arco de G definido por la cuerda AM, $\angle APM=\angle ANM=\angle ABC$. Luego $\angle BPQ=\angle ABC=\angle ABQ$. Al mismo tiempo, es obvio que $\angle BQP=\angle AQB$, por estar A, P y Q alineados. Luego los triángulos AQB y BQP son semejantes, con lo que:

$$\frac{QP}{QB} = \frac{BQ}{AQ}.$$

Se tiene entonces que la potencia de Q con respecto a G se puede escribir como:

$$QD^2 = QP \cdot QA = QB^2.$$

Por lo tanto, $QB=QD$, y Q es el punto medio de BD. Luego AP es una mediana de ABD, q.e.d..

Problema 23

Se considera la ecuación

$x^2+(a+b+c)x+m(ab+bc+ac)=0$

en la que a, b, c son números reales estrictamente positivos, y m es un parámetro real. Demostrar que:

a) Si $m\leq 3/4$, entonces las raíces de la ecuación son reales.
b) Si a, b, c son las longitudes de los lados de un triángulo y $m\geq 1$, entonces la ecuación no tiene raíces reales.

El discriminante Δ de la ecuación viene dado por:

$$\Delta=(a+b+c)^2-4m(ab+bc+ac)=a^2+b^2+c^2-2(2m-1)(ab+bc+ac).$$

a) Supongamos que las raíces de la ecuación no son reales. Entonces, el discriminante es negativo, es decir:

$$a^2+b^2+c^2<2(2m-1)(ab+bc+ac).$$

Pero la desigualdad del producto escalar aplicada a los vectores (a,b,c) y (b,c,a) nos garantiza que $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$, luego:

$$2(2m-1)(ab+bc+ac)>ab+bc+ac.$$

Por ser a, b, c positivos, se tiene que $ab+bc+ca$ también es positivo, con lo que:

$$2(2m-1)>1;$$

$$m>\frac{3}{4}.$$

Por lo tanto, para que las raíces sean imaginarias, es decir, para que el discriminante sea negativo, debe darse que $m>3/4$. Luego si $m\leq 3/4$, las raíces deben ser reales, q.e.d..

b) Al ser a, b, c las longitudes de los lados de un triángulo, se verifican las siguientes desigualdades:

$$a+b-c>0; \qquad c+a-b>0; \qquad b+c-a>0.$$

Multiplicándolas dos a dos se obtiene:

$$b^2+c^2-a^2<2bc; \qquad c^2+a^2-b^2<2ca \qquad a^2+b^2-c^2<2ab.$$

Finalmente, sumando estas tres nuevas desigualdades se obtiene que:

$$a^2+b^2+c^2<2(ab+bc+ca).$$

Por lo tanto, el discriminante cumple:

$$\Delta<4(1-m)(ab+bc+ac).$$

Luego para que las raíces sean reales, es decir, para que el discriminante sea no negativo, y al ser $ab+bc+ac$ positivo, debe cumplirse que $m<1$. Luego si $m\geq 1$ la ecuación no tiene raíces reales, q.e.d..

Problemas propuestos

Ningún problema se considerará definitivamente cerrado. Nuevos puntos de vista sobre problemas anteriores siempre son bienvenidos.

Las soluciones deben enviarse por correo electrónico a la dirección revistaoim@oei.es, en ficheros de formato tex, ps o doc, adjuntos al mensaje. Si hubiera figuras, se incluirán en formato gif.

Problema 26

(Propuesto por el Prof. Adrian Muntean, Universidad de Bremen)

Estudiar la convergencia de la sucesión $(x_n), n \in \mathbb{N}^-, (x_n) \subset \mathbb{R}$, dada por

$$x_{n+l} = \frac{1}{1 - x_{n-m}}$$

$$x_0 \notin \{0,1\}, l, m \in \mathbb{N}, n \geq m$$

Problema 27

(propuesto por el Prof.Laurentiu Modan, Universidad de Bucarest)

En el triángulo ABC, consideremos A', el punto medio de BC; el ortocentro H y el punto D, diametralmente opuesto a A en la circunferencia circunscrita a ABC. Si J es el punto medio de HD, demostrar que H, J, A' y D están alineados.

Problema 28

(Propuesto por el Prof. Laurentiu Modan, Universidad de Bucarest)

Sea f : N -> N una función que verifica las siguientes propiedades:

i) f(2)=2
ii) f(m · n) = f(m) · (f(n)
ii) Si m < n, entonces f(m)<f(n)

Resolver la desigualdad

$$\frac{f\left(n^3-1\right) - f^{-1}(n-1)}{\log\left(f^{n-1}(n+1)\right)} > 0$$

Problema 29

(Propuesto, sin solución, en Norte de problemas, de Rey Pastor y Gallego Díaz)

Si $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$) son las proyecciones de un segmento rectilíneo de longitud *l* sobre los *n* lados de un polígono regular, demostrar que

$$\alpha_1^2 + \cdots + \alpha_1^2 = \frac{1}{2} n l^2$$

$$\alpha_1^4 + \cdots + \alpha_1^4 = \frac{3}{8} n l^4$$

Problema 30 (original del Prof. Carlos Matrán Bea, Univ. de Valladolid)
(Propuesto, sin solución, en Norte de Problemas, de Rey Pastor y Gallego Díaz)

Discutir según los valores del parámetro m, y en su caso, resolver la ecuación

$$\operatorname{sen} x + \cos x + \tan x + \operatorname{cotg} x + \sec x + \operatorname{cosec} x = m$$

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

Los dos primeros problemas que presentamos fueron propuestos en el distrito Universitario de Valladolid durante la 1ª fase de la XXXIX Olimpiada Matemática Española, celebrada en enero de 2003.

Problema 0.6.1: En un lejano planeta de otra galaxia hay dos formas de vida mutuamente hostiles: los Septicapita, que tienen 7 cabezas y dos patas, y los Pentápodos, que tienen 2 cabezas y 5 patas. Un día, un número impar de Septicapita se encuentra con un número impar de Pentápodos y se organiza un gran tumulto; un observador contó 180, entre cabezas y patas. ¿Cuántos ejemplares de cada clase intervinieron en la pelea?

Problema 0.6.2: Las bases de un trapecio miden a y b ($a > b$) y su altura es h. Las diagonales del trapecio son perpendiculares, y el ángulo entre los lados no paralelos del trapecio es α .

Demostrar que se verifica $\frac{1}{h} = \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)\cot \alpha$

Problema 0.6.3: (Olimpiada de Austria 2002)
El perímetro de un hexágono convexo ABCDEF es s, y los perímetros de los triángulos ACE y BDF son u y v, respectivamente.

1) Probar que $\frac{1}{2} < \frac{s}{u+v} < 1$
2) Determinar si 1 puede reemplazarse por un número más pequeño, o ½ por un número más grande, de modo que las correspondientes desigualdades sigan valiendo para cualesquiera hexágonos convexos.

Problema 0.6.4: (Olimpiada de Austria 2002)

Sea b > 800 un entero positivo. Determinar todas las 2002 - *uplas* de enteros no negativos ($a_1 . a_2, \ldots, a_{2002}$) tales que

$$\sum_{j=1}^{2002} a_j^{\;a_j} = 2002 \bullet b^b$$

Problema 0.6.5: (Olimpiada de Austria 2002)
Sean ABCD y AEFG cuadriláteros inscritos semejantes, cuyos vértices se nombran en sentido antihorario. Sea P el segundo punto común a las circunferencias circunscritas a ambos cuadriláteros. Demostrar que P pertenece a la recta BE.

PROBLEMAS PARA LOS MÁS JÓVENES (6)

Continuamos ofreciendo problemas propuestos en la Olimpiada Matemática Costarricense para la Educación Primaria (OMCEP), de 2002. Agradecemos al Dr. Víctor Buján su amabilidad al proporcionárnoslos.

6.1: Ricardo tenía en su cuenta corriente 1,75 millones de colones el lunes, cuando descubrió que había ganado un premio de cinco millones de colones en la lotería nacional. El martes, cuando le entregaron el premio, canceló una deuda, entregando 7/20 de la suma que había ganado en la lotería. El miércoles por la mañana le dió a su hermano, que debía doscientos mil colones al banco, una tercera parte del dinero que le quedaba del premio. ¿Cuánto dinero del premio le quedaba a Ricardo el miércoles a medio día?

6.2: Damián, Eulalia y Milena decidieron vender refrescos de mora a la salida del estadio. Compraron moras y azúcar y pagaron doce mil colones. Además pagaron 9500 colones por el alquiler de mesas, sillas, vasos cucharillas y recipientes grandes para el refresco. Ellos calculan que podrán vender 250 vasos de refresco. ¿A qué precio deben vender cada uno para obtener una ganancia del 22%?

6.3: (Para este problema se puede disponer de una tabla de números primos menores que 200)

Olga sumó todos los números primos (menores que 200) cuyo dígito de las decenas es 9. A continuación sumó los dos números primos más grandes, menores que 200. Finalmente, escribió en la pizarra la suma de los dos números obtenidos.

Luego, su amiga María Teresa multiplicó el mayor número primo menor que 100 por el menor número primo mayor que 100, y escribió en la pizarra el producto obtenido.

Finalmente, Federico sumó los números que Olga y maría Teresa habían anotado en la pizarra. ¿Cuál fué la suma que obtuvo Federico?

6.4 : Sofía dibujó un rectángulo de 6 cm de ancho. Su largo es 7 cm menos que cinco veces su ancho. ¿Cuál es el área del rectángulo?

6.5: Magda estudió cuidadosamente un cubo. Multiplicó el número de caras por el de vértices y por el de aristas. ¿Qué producto obtuvo?

Número

7

Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática
Número 7 (Mayo - Junio de 2003)
ISSN 1698-677X

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática
Número 7 (Mayo - Junio 2003)
ISSN – 1698-277X

ÍNDICE

Generalización de un problema de la Olimpiada Matemática Pan-africana, 2000.

Una compañía tiene $2n+1$ directivos. Las reglas de la compañía requieren que cualquier mayoría ($n+1$ o más) de directivos pueda abrir la caja fuerte, pero que ninguna minoría (n o menos) de directivos la pueda abrir. Se propone equipar la caja fuerte con c cerrraduras, de tal manera que la caja fuerte sólo se pueda abrir cuando estén disponibles las llaves de todas las cerraduras, y dar a cada directivo un conjunto de llaves distintas. Cada directivo debe tener el mismo número de llaves.

¿Cuál es el mínimo número de cerraduras c con el que hay que equipar a la caja fuerte para que la anterior distribución sea posible?

¿Cuál es el número l de llaves se darían a cada directivo en caso de utilizar dicho número mínimo de cerraduras?

Sea A el conjunto formado por los conjuntos de exactamente n directivos distintos de la compañía. El número de elementos de A es, obviamente:

$$\operatorname{card}(A) = \binom{2n+1}{n}.$$

Sean ahora a_1, a_2 dos elementos distintos cualesquiera de A. Llamaremos B_1, B_2 a los conjuntos de cerraduras que no pueden ser abiertas juntando todas las llaves de los directivos que pertenecen a a_1 y a_2, respectivamente. Como a_1 y a_2 son distintos, su unión tiene por lo menos $n+1$ directivos, y constituye una mayoría, con lo que juntando todas sus llaves se pueden abrir todas las cerraduras. Ahora bien, juntando todas sus llaves, se pueden abrir todas las cerraduras excepto la intersección de B_1 y B_2. Luego B_1 y B_2 son disjuntos. Luego para cada elemento de A, existe al menos una cerradura que no puede ser abierta por los directivos que lo componen, y que además puede ser abierta por los directivos (pero no necesariamente todos) que componen cualquier otro elemento de A. Debe haber por lo tanto un número de cerraduras mayor o igual al cardinal de A:

$$c \geq \binom{2n+1}{n}.$$

Nótese que la igualdad se da si y solamente si existe exactamente una cerradura que no puede ser abierta juntando las llaves de todos los directivos de cada elemento de A.

Supongamos que se da la igualdad, y sea a un elemento cualquiera de A. Para la cerradura que no puede ser abierta por los directivos que conforman a, todos los demás directivos deben tener copia de la llave que la abre. En caso de existir otro directivo, no de a, que no tuviera copia de dicha llave, uniéndolo a los directivos de a se tendría un conjunto de n+1 directivos, es decir, una mayoría, que no podría abrir dicha cerradura, que es absurdo. Luego para cada cerradura existen exactamente n+1 copias de la llave que la abre. El número de llaves que deben ser dadas a cada directivo es entonces:

$$l = \frac{\text{cerraduras} \cdot \text{copias de cada llave}}{\text{directivos}} = \frac{\frac{(2n+1)!}{n!(n+1)!} \cdot (n+1)}{2n+1} = \frac{(2n)!}{n!n!} = \binom{2n}{n}.$$

La distribución se puede hacer trivialmente como sigue: numeraremos $a_1,a_2,\ldots,a_c$ a los elementos de A, y $b_1,b_2,\ldots,b_c$ a las cerraduras. Daremos copias de la llave b_i a un directivo si y sólo si no pertenece a a_i, es decir, hay exactamente n+1 copias de cada llave que se han entregado a n+1 directivos distintos. Demostraremos ahora que en dicho caso las condiciones del problema se cumplen.

Supongamos que una mayoría no puede abrir la caja fuerte, pues no tiene llave para una cerradura b. Entonces, se tiene que el número de directivos en dicha mayoría, que es mayor o igual que n+1, más el número de directivos que tiene copia de la llave que abre b, que es exactamente n+1, sumarían al menos 2n+2, que es mayor que el número total de directivos, que es absurdo. Luego cada mayoría puede abrir la caja fuerte.

Sea una minoría cualquiera. Obviamente, al tener como máximo n directivos, es subconjunto de al menos un elemento a_i de A. Pero los directivos de a_i no pueden abrir b_i ni aún juntando todas sus llaves, luego ninguna minoría puede abrir la caja fuerte.

Nótese finalmente que, por la forma en la que se han repartido las llaves, y al pertenecer cada directivo al mismo número de elementos de A, que por simetría todos los directivos poseen el mismo número de llaves.

Luego todas las reglas de la compañía se cumplen, y el número mínimo de cerraduras a instalar en la caja fuerte, c, y el número de llaves que cada directivo tiene en ese caso, l, son:

$$c = \binom{2n+1}{n}; \qquad l = \binom{2n}{n}.$$

OBSERVACIONES DIDÁCTICAS SOBRE EL NÚMERO e

Francisco Bellot Rosado

El nuevo currículo de 1º de Bachillerato en España vuelve a incluir (a mi entender acertadamente) el estudio de las sucesiones de números reales, y en particular el de la que permite definir el número e.

A continuación presento algunas observaciones para desarrollar ese estudio, dependiendo del "bagaje de conocimientos previos" de los estudiantes.

Tratamiento tradicional

Después de haber introducido los conceptos básicos, y admitido (usualmente sin demostración) que toda sucesión creciente y acotada tiene límite, se considera

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

y se desarrolla utilizando el binomio de Newton :

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \cdots + \binom{n}{n-1}\frac{1}{n^{n-1}} + \frac{1}{n^n} \\ &= 1 + \frac{n}{n} + \frac{1}{2!} \bullet \frac{n(n-1)}{n^2} + \frac{1}{3!} \bullet \frac{n(n-1)(n-2)}{n^3} + \cdots + \frac{1}{n!} \bullet \frac{n!}{n^n} \\ &= 2 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \end{aligned}$$

El término siguiente, a_{n+1}, tiene un sumando más que a_n, y estos sumandos son mayores. Por lo tanto la sucesión es creciente.

Además está acotada :

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 2 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots < \\ &< 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots = 2 + \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 3 \end{aligned}$$

Por lo tanto (a_n) es convergente y su límite es

$$e = 2,718281828459045\cdots$$

La experiencia en el aula de tener que introducir el número e a alumnos que no conocen el desarrollo del binomio de Newton o los números combinatorios (situación no deseable, pero perfectamente posible), me ha llevado a rastrear en la literatura existente algunos métodos alternativos. Recomiendo con énfasis estos dos libros :

a) Gabriel Klambauer :*Aspects of Calculus*,Springer 1986, ISBN 0-387-96274-3;

b) Ivan Niven : *Maxima and Minima without Calculus*, Mathematical Association of America (The Dolciani Math.Expositions 6), 1981;

sin olvidar, desde luego, el libro de Karl R.Stromberg, *An Introduction to Classical Real Analysis, Wadsworth Intl.Group*, 1981.

Tratamientos alternativos

Ivan Niven no utiliza el binomio de Newton, aunque sí la desigualdad de las medias aritmética y geométrica :

Si

$$f(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

se aplica la desigualdad de las medias aritmética y geométrica a los $n + 1$ números

$$1, 1 + \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}, \cdots, 1 + \frac{1}{n},$$

cuya suma es $n + 2$ y su producto $f(n)$. Entonces

$$\frac{n+2}{n+1} > (f(n))^{\frac{1}{n+1}} \iff \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} > f(n),$$

pero el primer miembro es precisamente

$$f(n+1) = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1},$$

así que la sucesión es creciente.

Por su parte, Klambauer utiliza un procedimiento muy ingenioso, pero fácil de entender, para probar que la sucesión es creciente y acotada. Comienza por un resultado previo :

Si $0 \leq a < x,$ entonces

$$(n+1)a^n < \frac{x^{n+1} - a^{n+1}}{x - a} < (n+1)x^n. \quad (*)$$

En efecto,

$$\frac{x^{n+1} - a^{n+1}}{x - a} = x^n + ax^{n-1} + a^2x^{n-2} + \cdots + a^{n-1}x + a^n,$$

y las dos cotas anunciadas se obtienen inmediatamente, la superior sustituyendo la a por x, y la inferior sustituyendo la x por a.

Para demostrar que la sucesión $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ es creciente se escribe la desigualdad (*) de la derecha en la forma

$$x^n[x - (n+1)(x - a)] < a^{n+1},$$

y se eligen astutamente

$$x = 1 + \frac{1}{n}, \;\; a = 1 + \frac{1}{n+1}.$$

De esta forma el término entre paréntesis se convierte en 1, y lo que queda es

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1},$$

que es lo que queríamos. Para ver que está acotada, se elige (no menos astutamente)

$$a = 1, x = 1 + \frac{1}{2n},$$

con lo que ahora la expresión entre corchetes se reduce a $\frac{1}{2}$ y resulta la desigualdad

$$\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n < 2 \iff \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n} < 4;$$

como $a_n < a_{n+1},$ resulta

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n} < 4$$

para todo natural n. Vemos así que

$$2 = a_1 \leq a_n < 4.$$

Es también posible, como hace Stromberg, utilizar la desigualdad de Bernouilli,

$$\text{Si } x > -1, \text{ entonces } (1+x)^n > 1+nx$$

que se puede demostrar por inducción sobre $n \geq 2$:
Para $n = 2,\ (1+x)^2 = 1+2x+x^2 > 1+2x$;
si se cumple para cualquier $n \geq 2,$ veamos que se cumple para $n+1$:
En efecto, como $1+x > 0$,

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)(1+x)^n > (1+x)(1+nx)\\ &= 1+(n+1)x+nx^2 > 1+(n+1)x\end{aligned}$$

y eso termina la etapa inductiva. Mediante esta desigualdad, Stromberg demuestra que si

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n; \text{ y } b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

entonces (a_n) es creciente,(b_n) es decreciente, y ambas tienen el mismo límite.

UN PROBLEMA DE LA OLIMPIADA URSS

En la ciudad de "Camorra" hay 10000 habitantes. Dos cualesquiera de ellos o son amigos , o son enemigos.

Cada día, a lo sumo uno de sus habitantes se pelea con todos sus amigos y, simultáneamente, se hace amigo de todos sus enemigos; además de esto, en cualquier conjunto de tres habitantes , los tres se hacen amigos entre sí.
Demostrar que en un cierto número de días, todos los habitantes son amigos .
¿Cuál es el menor número de días suficiente para ello?

SOLUCIÓN

Sean A, B y C tres habitantes cualesquiera de la ciudad. Es evidente que puede suceder que los tres sean amigos; también es posible que uno de ellos (pongamos A) no sea amigo de B ni de C, pero B y C sean amigos.
Entonces, para que A, B y C sean amigos, es suficiente que A se pelee con todos sus amigos y luego se haga amigo de todos sus enemigos.
También es fácil ver que los otros dos casos posibles,

- los tres habitantes, A, B y C son enemigos;
- uno de los habitantes (A) es amigo de B y C, pero B y C son enemigos;

son imposibles. En efecto, en ambos casos, entre los tres pares (A,B),(A,C),(B,C) de los habitantes de la ciudad, existe un número impar *c* (igual a 3 ó a 1) de parejas de enemigos, y un número par *e* (igual a 0 ó a 2) de pares de amigos. En todos los casos en que A,B ó C se pelean con todos sus amigos y se hacen amigos de sus enemigos, el número impar *c* y el número par *e* o no cambian o son reemplazados por un número impar *c'* y un número par *e'*, respectivamente. Luego de aquí se deduce que las tres personas A,B y C no pueden hacerse amigos, porque *c* no puede ser igual a 0.

La descripción de las *relaciones de amistad* entre tres personas A,B,C muestra que para la población entera esas relaciones pueden describirse de la manera siguiente:

Hay dos grupos de habitantes, M,N tales que cada uno de los habitantes de la ciudad pertenecen a M o a N (pero no a los dos), tales que dos elementos cualesquiera de una de ellas son amigos, y dos habitantes pertenecientes uno a M y otro a N son enemigos.

Probemos esta afirmación. En efecto, añadamos a los tres habitantes A,B,C otro habitante D. Si A y B son amigos, y D es amigo de, al menos, uno de ellos, entonces D también es amigo de ambos, y uno de los grupos está formado por A,B,D.

Si A y B son enemigos, entonces D es amigo solamente de uno de ellos. Este argumento demuestra que es posible dividir (A,B,C,D) en las dos partes, M y N (alguna de ellas puede ser vacía, por ejemplo cuando todos son amigos). Procediendo de esta forma, añadiendo consecutivamente nuevas personas al grupo, se prueba la posibilidad de dividir los 10000 habitantes en los dos grupos M y N.

Ahora estamos en condiciones de probar la afirmación del problema. Si todos los habitantes son amigos, no hay nada que demostrar. Si ninguna de las dos partes M y N es vacía, entonces es suficiente que cada día uno de los miembros de M deje el grupo y se una al otro grupo, N. Si el número de elementos de M es *k,* entonces todos los habitantes de la ciudad se pueden convertir en amigos en *k* días. Se sigue entonces que el período de 5000 días (aproximadamente 14 años) es suficiente para que todos los habitantes de la ciudad sean amigos, pues al menos una de las partes M ó N no puede tener más de 5000 personas.

PROBLEMAS DE NIVEL MEDIO Y DE OLIMPIADAS (**7**)

Presentamos a continuación algunos problemas propuestos en la Fase local de Cataluña de la XXXIX Olimpiada Matemática Española, en diciembre de 2002.

O7.1: En el plano se considera una recta r, un punto $P \in r$ y un punto $Q \notin r$.

Para cada punto $R \in r$ se considera el número

$$\lambda = \frac{PR + PQ}{QR}.$$

a) Búsquense los valores máximo y mínimo del número λ y dígase donde debe estar situado el punto R para obtener este máximo y este mínimo.

b) ¿A qué valor tiende λ cuando el punto R tiende a infifnito?

O7.2 : Un jugador de tenis quiere enfrentarse a dos rivales, A y B, para adquirir prestigio con buenos resultados. La probabilidad que tiene de ganar al jugador A es más pequeña que la de ganar a B, porque el primero es de más categoría en el ranking. Se le ofrecen tres partidos, de los cuales ha de ganar al menos dos seguidos, y puede elegir la secuencia de partidos: o bien A-B-A, o bien B-A-B.

¿Qué secuencia de partidos le es más favorable?

O7.3 : Sea ABC un triángulo.

a) Determinar los puntos P del plano del triángulo que cumplen la condición

$$Area(PAB) = Area(PBC) = Area(PCA).$$

b) Sea P un punto interior del triángulo que verifica la condición anterior, y sean P_1, P_2, P_3 los puntos interiores a los triángulos PBC,PCA y PAB en las mismas condiciones. Determinar el área del triángulo $P_1P_2P_3$ en función del área del triángulo ABC.

O7.4 : Con dos letras, a, b, se forman las infinitas palabras que tienen un número finito de letras y se ordenan alfabéticamente.

a) ¿Qué palabras tienen una palabra inmediatamente posterior?

b)¿Qué palabras tienen una palabra inmediatamente anterior?

c) Demostrar que si una palabra p_1 es anterior a una palabra p_2, y p_2 acaba en b, entonces entre p_1 y p_2 hay palabras que terminan en a y palabras que terminan en b.

PROBLEMAS PARA LOS MÁS JÓVENES (7)

Presentamos a continuación los problemas propuestos en la Fase local de la XI Olimpiada Matemática Provincial de Valladolid, celebrada el 29 de abril de 2003 y organizada por la Sociedad Castellano-Leonesa del Profesorado de Matemáticas. Agradecemos muy sinceramente a su Presidenta, Prof. Inmaculada Fernández Benito, su amabilidad al proporcionárnoslos.

XI Olimpiada Matemática Provincial (Valladolid)
Nivel : 2º E.S.O. (13 años de edad)

1. Según afirma una noticia periodística, el 20% de la humanidad dispone del 80% de la riqueza mundial.
Suponiendo que tal afirmación sea cierta, ¿cuántas veces es más rica una persona incluida en este 20% que otra del resto de la humanidad?

2. Tres amigos tienen 21 botes de su refresco preferido. 7 de ellos están llenos, 7 vacíos y 7 llenos hasta la mitad. ¿Cómo deben repartirse los botes para que los tres se lleven el mismo número de botes y la misma cantidad de refresco? (No se puede trasvasar refresco de un bote a otro).

3. Inicialmente hay un 1 en la pantalla de la calculadora. Al apretar la tecla A se multiplica por 3, y al apretar la tecla B se resta 1 del número de la pantalla. Utilizando varias veces las teclas A y B hay que obtener el número 97. ¿Cuál es el número mínimo de veces que se deben pulsar cada una de las teclas? ¿En qué orden?

4. Si tomas un cuadrado de papel, ¿cómo se puede doblar para obtener otro cuadrado cuya área sea la mitad del de partida? Explícalo detenidamente.

Nivel : 4º de E.S.O. (15 años de edad)

1. Cora, Berta, Sara, Diego, Ezequiel y Federica son coleccionistas de cuadros y dos de ellos son hermanos. Un día fueron a una exposición y compraron de la siguiente manera:

. Cora compró 1 cuadro, Berta 2, Sara 3, Diego 4, Ezequiel 5 y Federica 6.
. Los dos hermanos pagaron la misma cantidad por cada uno de los cuadros que compraron.
. Los demás del grupo pagaron por cada cuadro el doble de lo que pagaron los hermanos por cada uno de los suyos.
. En total pagaron 100000 euros.
. El precio de cada cuadro era un número entero de euros.
¿Quiénes son hermanos?

2. ABC es un triángulo equilátero; BCDE es un cuadrado de lado 2 construido exteriormente al triángulo. Los vértices A, D y E pertenecen a la misma circunferencia. Halla el valor del radio de la circunferencia.
3. Hallar cinco enteros consecutivos tales que la suma de los cuadrados de los tres primeros coincida con la suma de los cuadrados de los dos últimos.
4. Estás dentro de un círculo de siete velas encendidas. Pero las velas son mágicas, porque, cuando actúas sobre una de ellas también cambia es estado de las dos adyacentes. ¿Cómo se puede conseguir que todas las velas estén apagadas?

Problema 5.-

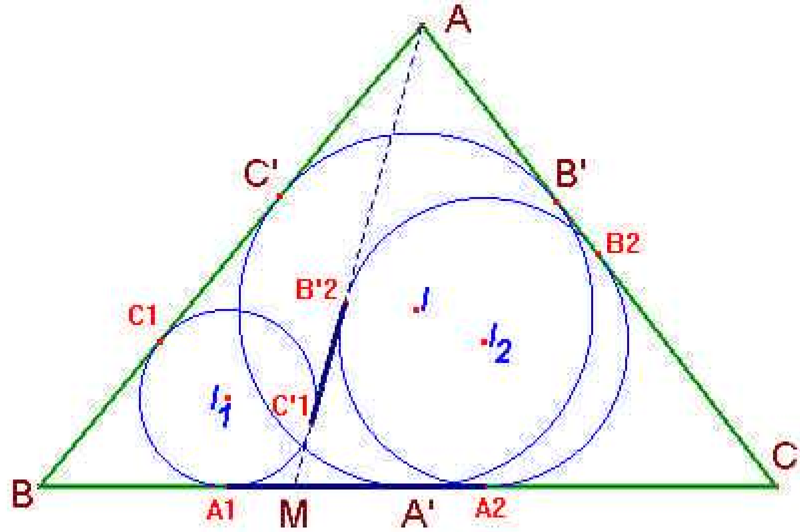
Se considera el triángulo ABC y sea M un punto del segmento BC.
Sean r_1, r_2, r, los inradios de los triángulos AMB, AMC y ABC ; y sean s_1, s_2, s, los radios de los círculos situados en el interior del ángulo A y exinscritos a AMB.AMC yABC, respectivamente.
Demostrar que se verifican las relaciones siguientes:

a) $p\cdot(r-r_1)\cdot(r-r_2)=(p-a)\cdot r_1\cdot r_2$
b) $r\cdot(s_2-s_1)=s\cdot(r_2-r_1)$

donde: $2p = a+ b+ c$
(Este resultado puede considerarse clásico)

Solución:

Cuestión a)
Para clarificar la situación, consideremos la siguiente situación gráfica:



donde se señalan los segmentos $C'_1B'_2$ y A_1A_2 que son los segmentos de tangencia comunes, interior y exterior, a las circunferencias inscritas en los triángulos AMB y AMC, respectivamente. Según esto, podemos establecer las siguientes relaciones entre sus longitudes:

-Para la tangente interior $C'_1B'_2$; $C'_1B'_2= AC'_1-AB'_2 = AC_1-AB_2 = (c-BC_1) - (b-CB_2)$
Ahora bien, $BC'= p-b$ y $CB'= p-c$; y según las relaciones de semejanza existentes entre los siguientes pares de triángulos: BI_1C_1 y BIC'; y CI_2B_2 y CIB', podemos entonces expresar que $BC_1= x_1=\frac{r_1}{r}.(p-b)$ y que $CB_2= x_2= \frac{r_2}{r}.(p-c)$.
Por tanto, obtenemos la siguiente relación entre longitudes:
$I_1I_2^{\,2} = (r_1+ r_2)^2 + C'_1B'_2{}^2$;
$I_1I_2^{\,2} = (r_1+ r_2)^2 + (c-x_1-b + x_2)^2$; (1)

-Para la tangente exterior A_1A_2; $A_1A_2 = a-x_1-x_2$
Y así, obtenemos ahora la siguiente relación entre longitudes:
$I_1I_2^{\,2} = (r_2- r_1)^2 + A_1A_2{}^2$;
$I_1I_2^{\,2} = (r_2- r_1)^2 + (a-x_1-x_2)^2$; (2)

- De las anteriores relaciones (1) y (2), deducimos la relación (3)
$(r_1+r_2)^2+(c-x_1-b+x_2)^2=(r_2-r_1)^2+(a-x_1-x_2)^2$ (3);
Tras un poco de álgebra llegamos a esta otra relación más simple:
$a^2-b^2-c^2+2bc-2\cdot(a+b-c)x_1-2\cdot(a-b+c)x_2+4x_1x_2=4\cdot r_1r_2$
$a^2-(b-c)^2-4(p-c)x_1-4(p-b)x_2+4x_1x_2=4\cdot r_1r_2$
$(a-b+c)\cdot(a+b-c)-4(p-c)x_1-4(p-b)x_2+4x_1x_2=4\cdot r_1r_2$
$4\cdot(p-b)(p-c)-4(p-c)x_1-4(p-b)x_2+4x_1x_2=4\cdot r_1r_2$

Sustituyendo $x_1=\frac{r_1}{r}.(p-b)$ y $x_2=\frac{r_2}{r}.(p-c)$, obtenemos:

$$(p-b)(p-c)-\frac{r_1}{r}.(p-b)(p-c)-\frac{r_2}{r}.(p-c)(p-b)+\left(\frac{r_1}{r}.(p-b)\right)\cdot\left(\frac{r_2}{r}.(p-c)\right)=r_1r_2$$

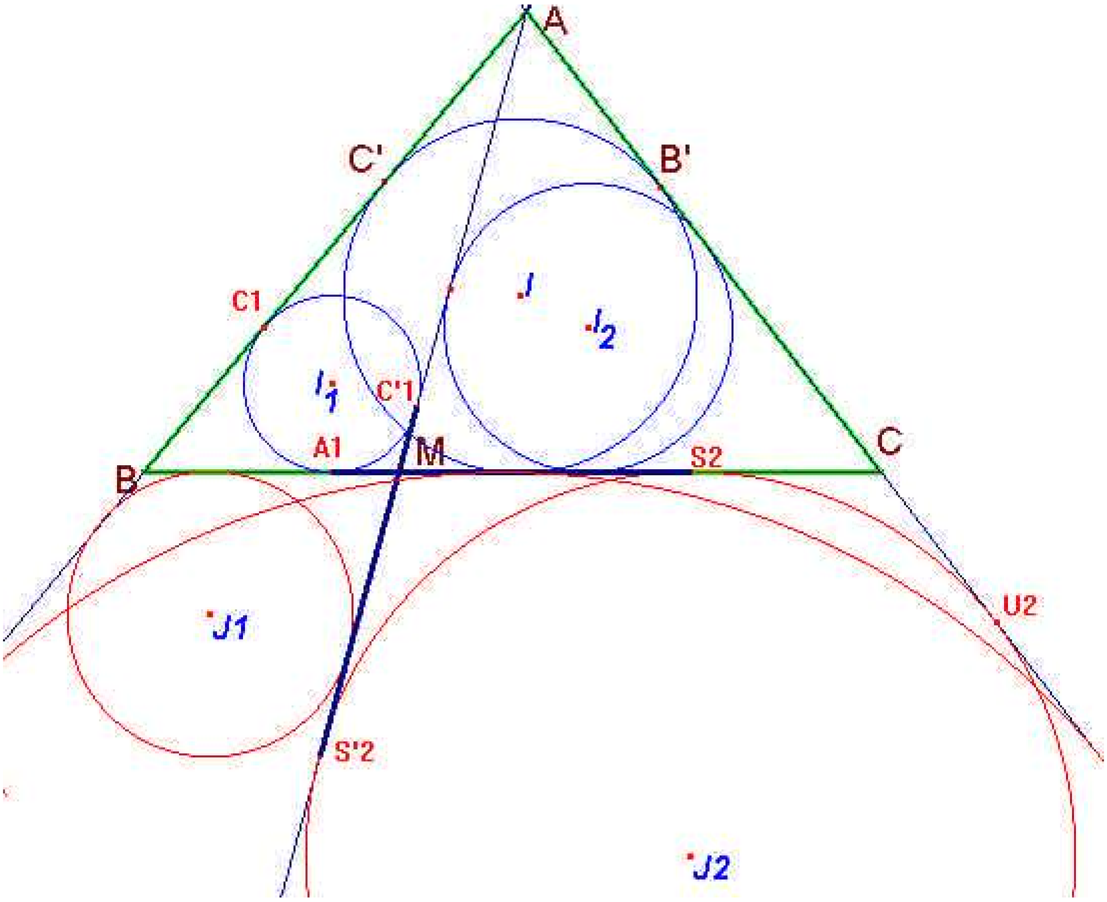
Sea Δ=Area del triángulo ABC; entonces $\Delta^2=p(p-a)(p-b)(p-c)=p^2\cdot r^2$, tenemos que: $(p-b)(p-c)=p\cdot r^2/(p-a)$ y entonces sustituyendo esta expresión en la última relación conseguimos:
$p\cdot r^2/(p-a)-p\cdot r\cdot r_1/(p-a)-p\cdot r\cdot r_2/(p-a)+p\cdot r_1\cdot r_2/(p-a)=r_1r_2$

$p\cdot r^2-p\cdot r\cdot r_1-p\cdot r\cdot r_2+p\cdot r_1\cdot r_2=(p-a)\cdot r_1r_2$;

y, finalmente:

$$\mathbf{p\times(r-r_1)\times(r-r_2)=(p-a)\times r_1r_2}$$

Cuestión b)



En este segundo caso, vamos a tener en cuenta los segmentos A_1S_2 y $C'_1S'_2$ que son los segmentos de tangencia comunes, interiores ambos, a las circunferencias, la una inscrita al triángulo AMB y la otra exinscrita al triángulo AMC. Según esto, podemos establecer las siguientes relaciones entre sus longitudes:

-Para la tangente interior A_1S_2; $A_1S_2= a- x_1- y_2$

donde $x_1=\frac{r_1}{r}.(p-b)$ e $y_2=\frac{s_2}{s}.(p-b)$.

Por tanto, obtenemos la siguiente relación entre longitudes:

$I_1J_2^2 = (r_1+ s_2)^2 + A_1S_2^{\ 2}$;

$I_1J_2^2 = (r_1+ s_2)^2 + (a-x_1-y_2)^2$; (4)

-Para la otra tangente interior $C'_1S'_2$; $C'_1S'_2 = AS'_2 - AC'_1= AU_2 - AC_1= (b+y_2)-(c-x_1)$

Y así, obtenemos ahora la siguiente relación entre longitudes:

$I_1J_2^2 = (r_1+ s_2)^2 + C'_1S'_2{}^2$;

$I_1J_2^2 = (r_1+ s_2)^2 + (b+ y_2 - c + x_1)^2$; (5)

- De las anteriores relaciones (4) y (5), deducimos la relación (6)
$(r_1+ s_2)^2 + (a-x_1-y_2)^2 = (r_1+ s_2)^2 + (b+ y_2 -c + x_1)^2$ (6);
Con un poco de álgebra vamos obteniendo las siguientes identidades:
$\cancel{(r_1+ s_2)^2} + (a-x_1-y_2)^2 = \cancel{(r_1+ s_2)^2} + (b+ y_2 -c + x_1)^2$;
$(a-x_1-y_2)^2-(b+ y_2 -c + x_1)^2 = 0$;
$[(a-x_1-y_2)+(b+ y_2 -c + x_1)]\cdot[(a-x_1-y_2)-(b+ y_2 -c + x_1)] = 0$;
$[a + b -c]\cdot[a - b + c -2\cdot(x_1+y_2)] = 0$;
$(p- b)-(x_1+ y_2) = 0$;
Sustituyendo $x_1=\frac{r_1}{r}.(p-b)$ y $y_2=\frac{s_2}{s}.(p-b)$, obtenemos:
$(p-b) -[\frac{r_1}{r}.(p-b)+\frac{s_2}{s}.(p-b)]= 0$
$r\cdot s - s\cdot r_1 - r\cdot s_2 = 0$ (7)

Si ahora actuamos de igual manera pero con los triángulos de radios r_2 y s_1 conseguiríamos la siguiente relación
$r\cdot s - s\cdot r_2 - r\cdot s_1 = 0$ (7')

De ambas expresiones, (7) y (7') resulta finalmente:

$$\mathbf{r\times(s_2-s_1) = s\times(r_2-r_1)}$$

Probar que

$$\sec^4\frac{\pi}{7}+\sec^4\frac{2\pi}{7}+\sec^4\frac{3\pi}{7}=416$$

Mathematical Gazette 1907, vol.4, no.63.
Propuesto en la Revista Escolar de la OIM con el número 15.

Solución

En primer lugar utilizamos la siguiente identidad trigonométrica :

$$\sec^4\theta=1+2\tan^2\theta+\tan^4\theta,$$

lo cual nos conduce a considerar la ecuación cuyas raíces sean

$$\tan^2\frac{r\pi}{7},r=1,2,3.$$

Para encontrar esta ecuación, primero buscaremos la ecuación cuyas raíces sean

$$\tan\frac{r\pi}{7},r=1,2,3,4,5,6.$$

Para ello, razonamos de la siguiente manera: Si

$$\tan 7\theta=0, entonces\ 7\theta=r\pi\Rightarrow\theta=\frac{r\pi}{7}.$$

En este caso, se tiene:

$$7\tan\theta-35\tan^3\theta+21\tan^5\theta-\tan^7\theta=0.$$

Así que, dividiendo por $\tan\theta$ llamando $y=\tan\theta$, resulta que las raíces de

$$y^6-21y^4+35y^2-7=0$$

son

$$\tan\frac{r\pi}{7},r=1,2,3,4,5,6.$$

Estas raíces son iguales y opuestas a pares;entonces, poniendo

$$y^2=x,$$

las raíces de

$$x^3-21x^2+35x-7=0$$

son

$$\tan^2\frac{r\pi}{7},r=1,2,3.$$

Entonces, utilizando la identidad trigonométrica del principio de la solución, resulta que

$$\sum_{r=1,2,3}\sec^4\frac{r\pi}{7}=3+2\sum\tan^2\frac{r\pi}{7}+\sum\tan^4\frac{r\pi}{7}$$
$$=3+2\times 21+(21^2-2\times 35)=416.$$

UN PROBLEMA DE KVANT

En la revista rusa Kvant se propuso, hace algunos años, el siguiente problema:
Demostrar que

$$\sum_{k=2}^{n}[\log_k n] = \sum_{k=2}^{n}\left[\sqrt[k]{n}\,\right].$$

Solución 1(*Mª A.López Chamorro*)
Sea $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$2^{k_0-1} \leq n < 2^{k_0}.$$

Entonces se tiene :

$$k_0 - 1 = [\log_2 n].$$

Además,

$$\left[\sqrt[k]{n}\,\right] = 1 \quad \text{si } k \geq k_0.$$

Entonces la suma del segundo miembro de la igualdad propuesta, que llamaremos S_2, se puede escribir como

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{k=2}^{n}\left[\sqrt[k]{n}\,\right] = \sum_{k=2}^{k_0-1}\left[\sqrt[k]{n}\,\right] + \sum_{k=k_0}^{n}\left[\sqrt[k]{n}\,\right] \\ &= \sum_{k=2}^{k_0-1}\left[\sqrt[k]{n}\,\right] + (n - k_0 + 1). \end{aligned}$$

Por otra parte, se tiene :

$$[\log_k n] = p \Rightarrow p \leq \log_k n < p+1 \Rightarrow \frac{1}{p+1} < \log_n k \leq \frac{1}{p}$$

Y esto implica que

$$\sqrt[p+1]{n} < k \leq \sqrt[p]{n} \Rightarrow \left[\sqrt[p+1]{n}\,\right] < k \leq \left[\sqrt[p]{n}\,\right],$$

luego el número de valores de k tales que $[\log_k n] = p$ es

$$\left[\sqrt[p]{n}\,\right] - \left[\sqrt[p+1]{n}\,\right].$$

El mayor valor de $[\log_k n]$ es $k_0 - 1 = [\log_2 n]$.

Ahora estamos en condiciones de calcular la suma del primer miembro de la desigualdad propuesta, que es

$$
\begin{aligned}
S_1 &= \sum_{k=2}^{n}[\log_k n] \\
&= (k_0-1)\left(\left[\sqrt[k_0-1]{n}\right]-\left[\sqrt[k_0]{n}\right]\right) \\
&\quad + (k_0-2)\left(\left[\sqrt[k_0-2]{n}\right]-\left[\sqrt[k_0-1]{n}\right]\right) \\
&\quad + \cdots + \\
&\quad + 2\left(\left[\sqrt{n}\right]-\left[\sqrt[3]{n}\right]\right) + \\
&\quad + 1\left(n-\left[\sqrt[3]{n}\right]\right) \\
&= -(k_0-1)\left[\sqrt[k_0]{n}\right] + \sum_{k=2}^{k_0-1}\left[\sqrt[k]{n}\right] + n \\
&= \sum_{k=2}^{k_0-1}\left[\sqrt[k]{n}\right] + n - k_0 + 1 = S_2,
\end{aligned}
$$

como queríamos demostrar.

Solución 2 (*M.Ladra*)

Procederemos por inducción. Para $n = 2,$ la igualdad se cumple.

Para probar el paso de inducción $n \to n+1$ basta observar que los nuevos sumandos $\sqrt[n+1]{n+1}$ y $\log_{n+1}(n+1)$ tienen parte entera 1. Es suficiente estudiar el comportamiento de los viejos sumandos.

¿Cómo cambian después de incrementarse el valor de n en una unidad?

Claramente, si $n+1$ no es una potencia exacta de algún entero con exponente mayor que 1, entonces los dos miembros no cambian en absoluto.

Si $n+1 = a_1^{r_1} = a_2^{r_2} = \cdots = a_k^{r_k},$ entonces cada miembro de la relación se incrementa por k y la igualdad se sigue cumpliendo.

Observación

En relación con este problema, M.Bencze propuso en la revista rumana Gazeta Matematica el siguiente problema:

Sea $p \in \mathbb{N} /\!/ p \neq 0, p \neq 1$. Probar que

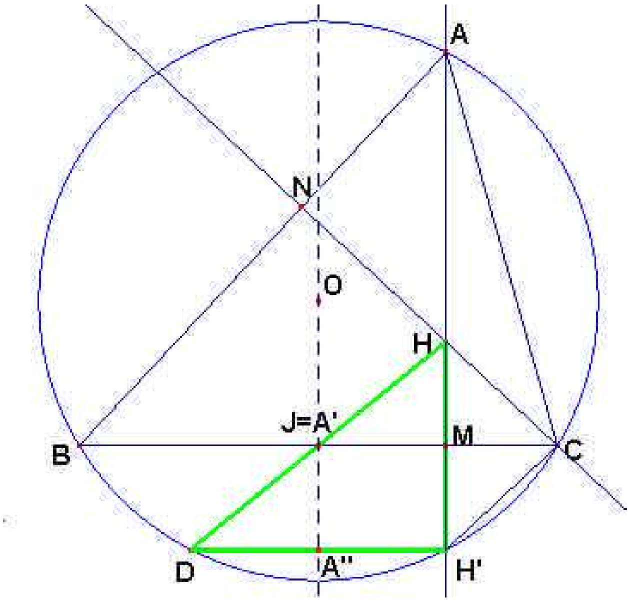
$$\sum_{k=1}^{p^n}\left[\log_p k\right] = \frac{(n-1)p^{n+1} - np^n + (n+1)p - n}{p-1}.$$

Solución

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{p^n}\left[\log_p k\right] &= \left(\left[\log_p p\right] + \cdots + \left[\log_p (p^2-1)\right]\right) + \\
&\quad + \left(\left[\log_p p^2\right] + \cdots + \left[\log_p (p^3-1)\right]\right) + \\
&\quad + \cdots + \left(\left[\log_p p^{n-1}\right] + \cdots + \left[\log_p (p^n-1)\right]\right) + \left[\log_p p^n\right] \\
&= 1 \bullet (p^2-p) + 2(p^3-p^2) + \cdots + (n-1)(p^n - p^{n-1}) + n \\
&= (n-1)p^n - p(1+p+p^2+\cdots+p^{n-2}) + n \\
&= \frac{(n-1)p^{n+1} - np^n + (n+1)p - n}{p-1}.
\end{aligned}
$$

Problema 27 .-
(propuesto por el Prof. Laurentiu Modan, Universidad de Bucarest)
En el triángulo ABC, consideremos A', el punto medio de BC; el ortocentro H y el punto D, diametralmente opuesto a A en la circunferencia circunscrita a ABC.
Si J es el punto medio de HD, demostrar que H, J, A' y D están alineados.

Dem.-
Si AH corta al lado BC en M, y a la circunferencia en H', entonces HM = MH'.



Esto es debido a la congruencia de los triángulos rectángulos en M, HMC y H'MC ya que tienen el lado común MC, y además son iguales los ángulos HCM y MCH', por ser ambos iguales al ángulo BAH'.
Como el triángulo HH'D es rectángulo en H' ya que AD es un diámetro de la circunferencia de centro O, resultará que el lado MJ es la paralela media del lado DH'. Si trazamos ahora la paralela media por J respecto al lado HH', esta línea al ser perpendicular al lado DH', cuerda de la circunferencia de centro O, pasará por este punto y también por el punto medio de la cuerda BC, por ser ésta también paralela al lado DH'. En definitiva, el punto J y el punto A', punto medio del lado AB, son el mismo.
Así se verifica que, en efecto, los puntos H, J= A' y D son colineales, siendo además J=A', el punto medio entre D y H.

Saludos de F. Damián Aranda Ballesteros.

PROBLEMAS PROPUESTOS (7)

Problema 31 (propuesto por Laurentiu Modan, Bucarest, Rumania)
Se considera el conjunto

$$F = \{f \mid f : \{a_1, \cdots, a_m\} \to \{b_1, \cdots, b_m\}\}.$$

Se sabe que, si $m < n,$ el número de todas las aplicaciones inyectivas $f \in F$ es 12; y que, si $m = n,$ el número de todas las biyecciones $f \in F$ es 24.

Se pide:

a) Calcular $|F|$ cuando $m \neq n$.

b) ¿Cuántas aplicaciones sobreyectivas hay en F si $m \neq n$?

Problema 32 (propuesto por Laurentiu Modan, Bucarest, Rumania)
Sea $V_{p,q}$ el número de variaciones sin repetición de p elementos tomados de q en q.
Se supone que m es un número primo impar.
Resolver la ecuación

$$V_{2^m,m} = 2.$$

***Problema 33** (I.Sharygin; comunicado al editor por el Prof. Jean-Louis Ayme, St.Denis, isla de la Reunión, Francia)
Sean Γ_1 y Γ_2 dos circunferencias secantes en P y Q. Sea t una tangente común a las dos circunferencias. Sean R y S los puntos de contacto respectivos de t con Γ_1 y Γ_2.
Sean :
A, un punto de Γ_1;
B, el segundo punto de intersección de AP con Γ_2;
C, el segundo punto de intersección de Γ_1 con la paralela a BS que pasa por R;
D, el segundo punto de intersección de CQ con Γ_2.
Demostrar que RA y SD son paralelas.

Problema 34 (propuesto en la Escuela de Ingenieros Agrónomos, Madrid , 1941)
Dos jugadores, juegan de la siguiente manera: Dado un número N de objetos $(N > 1),$ los dos jugadores tienen la facultad de tomar alternativamente 1, 2 ó 3 objetos. El jugador que toma el último objeto pierde. ¿Cuál de los dos jugadores, y en qué casos, tiene una estartegia ganadora?

***Problema 35** (propuesto por el Editor)
Se aplican a los vértices A,B,C,D de un tetraedro cuatro masas cualesquiera a, b, c, d y se buscan los centros de gravedad de estas masas combinados dos a dos, lo cual da seis puntos sobre las aristas. Demostrar que el volumen del sólido cuyos vértices son estos seis puntos se halla con el volumen del tetraedro ABCD en la relación siguiente:

$$\frac{2abcd(a+b+c+d)^2}{(a+b)(a+c)(a+d)(b+c)(b+d)(c+d)}.$$

DIVERTIMENTOS MATEMÁTICOS (**7**)

Algunas curiosidades sobre las cifras de los números e y π

Hay algunas reglas mnemotécnicas para recordar las primeras cifras decimales de e (contar las letras de las palabras de la frase siguiente):

Yo estudio y traduzco el holandés (2;71828)

En inglés:

He studied a treatise on calculus

Son más conocidas las estrofas para recordar las primeras cifras decimales de π. Como la cifra número 32 de π es un 0, la mayor parte de los versos o poemas terminan antes de esa cifra.

Los versos que siguen dan 20 cifras:

Soy y seré a todos definible;
mi nombre tengo que daros,
cociente diametral siempre inmedible
soy de los redondos aros.

En inglés :

How I want a drink,
alcoholic of course,
after the heavy lectures
involving quantum mechanics!

En latín:(falta el 3 inicial; dedicado a Bailey) da 31 cifras.

I nunc, O Baili, Parnassum et dessere rupem;
Dic sacra Pieridum deteriora quadris!
Subsidium hoc ad vos, quamquam leve, fertur ab hymnis
Quos dat vox Sophocli (non in utroque probrumst?)

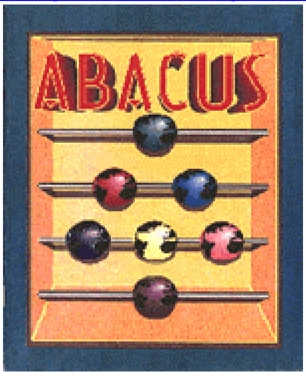
En francés (31 cifras)

Que j'aime à faire apprendre un nombre utile aux sages!
Immortel Archimède, artiste ingénieur,
qui de ton jugement peu priser la valeur?
Pour moi, ton problème eut de pareils avantages.

COMENTARIO DE PÁGINAS WEB

ABACUS International Math Challenge

http://www.gcschool.org/abacus.html



La página web del Concurso Internacional de matemáticas ABACUS está compuesta, casi exclusivamente, por los enunciados de los problemas propuestos en esta competición por Internet, organizada por el Prof. Tivadar Diveki para estudiantes muy jóvenes, de 9 a 14 años. Hay tres niveles:

A) 9-10 años (Grados 3-4)
B) 11-12 años (Grados 5-6)
C) 13-14 años (Grados 7-8)

Mensualmente, desde septiembre hasta mayo, se proponen 8 problemas por cada nivel. Los estudiantes interesados deben enviar sus soluciones a la dirección electrónica que se indica en la propia página.
Están disponibles los problemas desde 1997 hasta 2003. No se incluyen las soluciones, y algunos problemas son realmente difíciles. Pero no es nada sencillo encontrar buenos problemas para los alumnos más jóvenes, así que aquí se pueden buscar ideas para proponer problemas en estos niveles educativos tempranos.
La estructura de la página es muy simple, y forma parte de las páginas web de la Grace Church School de Nueva York.

Francisco Bellot Rosado

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI

Número

8

Revista Escolar
de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática
ISSN 1698-677X

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

Número 8 (Julio - Agosto 2003)

ISSN – 1698-277X

ÍNDICE

Teorema de Harcourt

Por Juan Carlos Salazar

1. Introducción:

Este teorema establece una relación interesante para el cálculo del área (S) de un triángulo (ABC), que involucra a los lados del triángulo (a, b, c) y las distancias (a_1, b_1, c_1) desde los vértices (A, B, C) respectivos hacia una tangente cualesquiera sobre el incírculo o excírculo, según sea el caso. La única referencia escrita de este teorema, facilitada por el Prof. Francisco Bellot Rosado [1], que se encontró sin demostración por métodos geométricos, establece la relación para el caso del incírculo, esto motivó al autor para tratar de encontrar un método de demostración apropiado y como resultado del método de demostración desarrollado, se interpretó que también es aplicable para el caso del excírculo [2]. Se incluyen además dos problemas de aplicación de este teorema.

2. Teorema de Harcourt para el Incírculo:

Sea el triángulo ABC con lados a, b y c. Si las distancias desde los vértices A, B y C hacia una tangente al incírculo por el menor arco cercano al vértice A, son a_1, b_1, c_1 respectivamente, luego el área (S) del triángulo ABC es igual a $\dfrac{(-a.a_1 + b.b_1 + c.c_1)}{2}$.(Ver Fig.1)

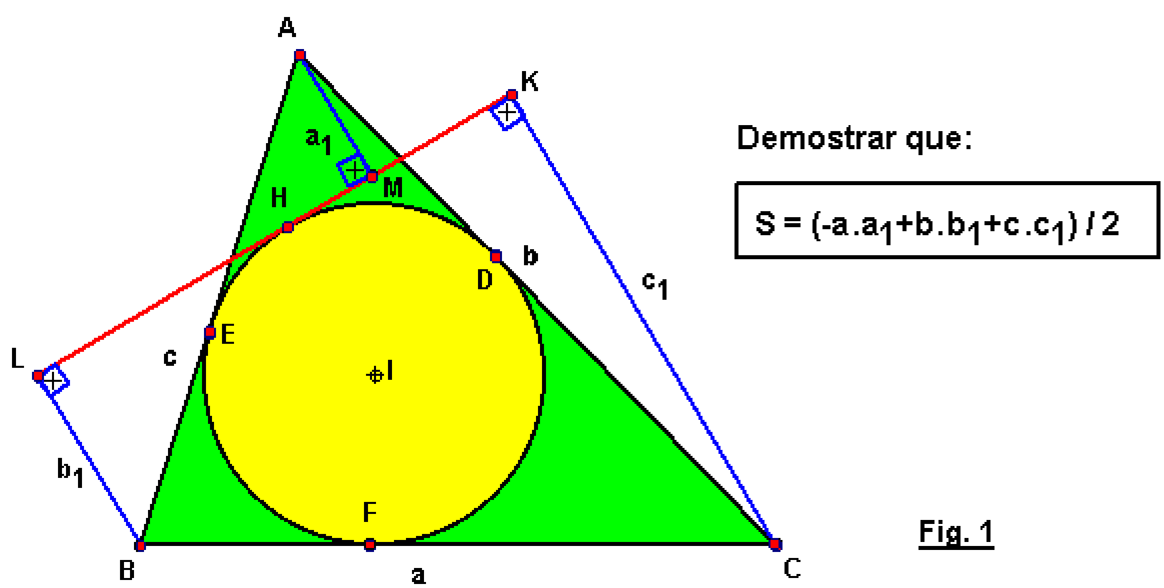
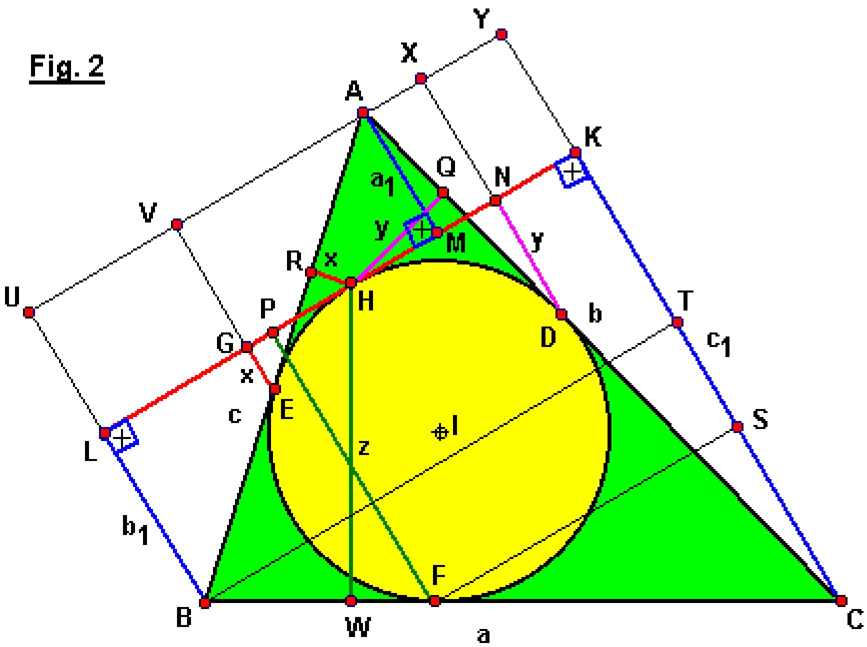


Fig. 1

Demostración:
Considerando el punto de tangencia H con sus respectivas distancias HR = x, HW = z y HQ = y hacia los lados AB = c, BC = a y AC = b respectivamente, tenemos además que las distancias desde los otros puntos de tangencia D, E y F hacia la tangente LK cumplen con las siguientes relaciones EG = x, DN = y y FP = z. (Ver Fig.2)

Fig. 2



Trazamos por el vértice A, UY // LK también BT // LK // FS, además UB // VE // PF // AM // XD // YC. Sabemos que $p = \dfrac{(a+b+c)}{2}$ (semiperímetro).

Luego tenemos que: AM = UL = VG = XN = YK = a_1, también CT = $c_1 - b_1$ y CS = $c_1 - z$.

Entonces:

AreaABC = S = AreaAHB + AreaAHC + AreaBHC

$S = \frac{1}{2}.AB.HR + \frac{1}{2}.AC.HQ + \frac{1}{2}.BC.HW$

$S = \frac{1}{2}.c.x + \frac{1}{2}.b.y + \frac{1}{2}.a.z$………(1)

Por semejanza de triángulos:

AEV-ABU: $\dfrac{EV}{BU} = \dfrac{AE}{AB} \rightarrow \dfrac{(x + a_1)}{(a_1 + b_1)} = \dfrac{(p - a)}{c}$

$\rightarrow\ x = \dfrac{(p - a)(a_1 + b_1)}{c} - a_1$.............(2)

ADX-ACY: $\dfrac{DX}{CY} = \dfrac{AD}{AC} \rightarrow \dfrac{(y + a_1)}{(a_1 + c_1)} = \dfrac{(p - a)}{b}$

$\rightarrow\ y = \dfrac{(p - a)(a_1 + c_1)}{b} - a_1$.............(3)

CFS-CBT: $\dfrac{CS}{CT} = \dfrac{FC}{BC} \rightarrow \dfrac{(c_1 - z)}{(c_1 - b_1)} = \dfrac{(p - c)}{a}$

$\rightarrow\ z = c_1 - \dfrac{(p - c)(c_1 - a_1)}{a}$..............(4)

Reemplazando (2),(3) y (4) en (1):

$$S=\frac{1}{2}.c.[\frac{(p-a)(a_1+b_1)}{c}-a_1]+\frac{1}{2}.b.[\frac{(p-a)(a_1+c_1)}{b}-a_1]+\frac{1}{2}.a.[c_1-\frac{(p-c)(c_1-a_1)}{a}]$$

Simplificando obtenemos:

$$S=\frac{(-a.a_1+b.b_1+c.c_1)}{2} \qquad \text{LQQD.}$$

3. Teorema de Harcourt para el Excírculo:

Sea el triángulo ABC con lados a, b y c. Si las distancias desde los vértices A, B y C hacia una tangente al excírculo relativo al vértice A, son a_1, b_1, c_1 respectivamente, luego el área (S) del triángulo ABC es igual a $\frac{(-a.a_1+b.b_1+c.c_1)}{2}$.(Ver Fig.3)

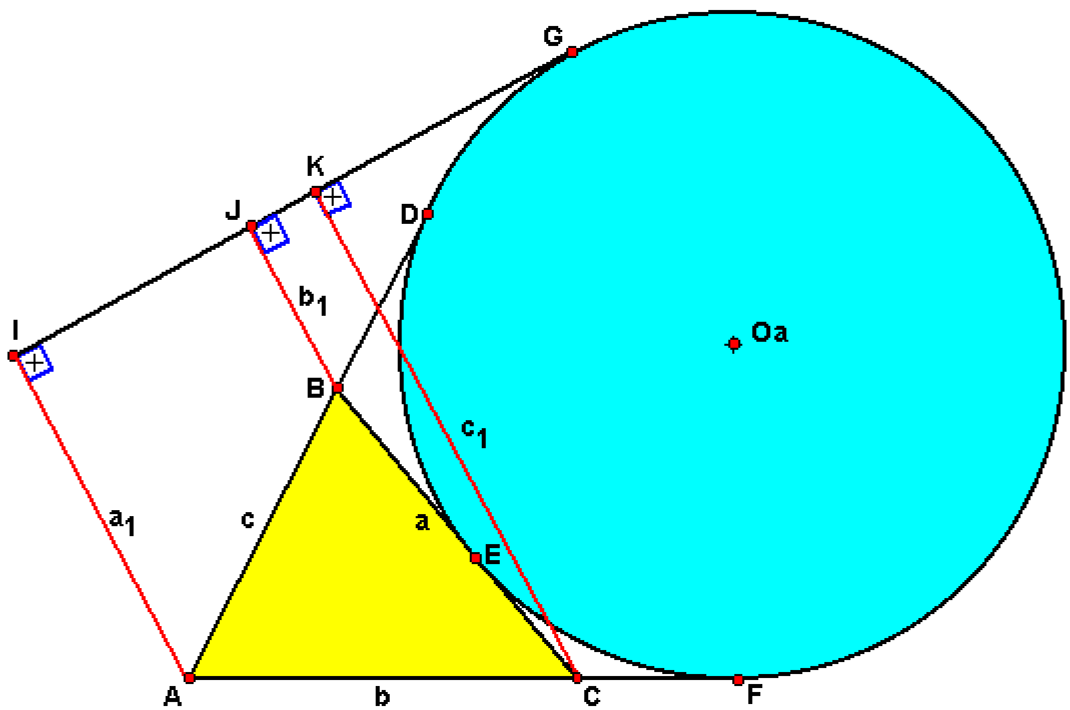


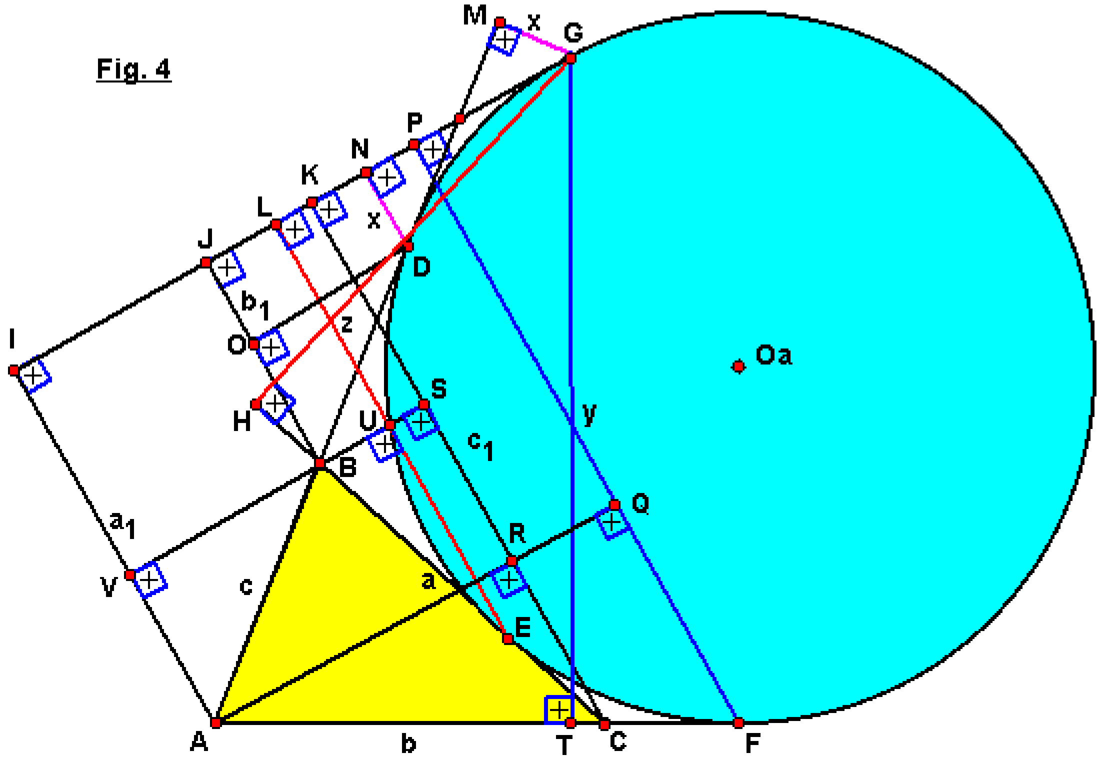
Fig. 3

$\boxed{S = (-a.a_1 + b.b_1 + c.c_1) / 2}$

Demostración:

De manera similar al método desarrollado para el caso del incírculo, tomamos como referencia al punto de contacto G de la tangente con el excírculo. Las distancias hacia los lados o prolongaciones del triángulo ABC, son GM = x, GT = y y GH = z . Para los puntos de tangencia D, E y F, sus distancias a la tangente IG cumplen las siguientes relaciones: DN = x , FP = y , y EL = z. (Ver Fig. 4). Además trazamos EL//FP//AI//BJ//CK, por el vértice B VS//IG, también OD//IG y AQ//IG.

Fig. 4



También: $OB = b_1 - x$, $AV = a_1 - b_1$, $FQ = y - a_1$, $CR = c_1 - a_1$, $UE = z - b_1$ y $CS = c_1 - b_1$.

Entonces:

AreaABC = S = AreaAGB + AreaAGC – AreaBGC

$$S = \frac{1}{2}.AB.GM + \frac{1}{2}.AC.GT - \frac{1}{2}.BC.GH$$

$$S = \frac{1}{2}.c.x + \frac{1}{2}.\ b.y - \frac{1}{2}.a.z........(1)$$

Por semejanza de triángulos:

BOD-AVB: $\frac{OB}{BD} = \frac{AV}{AB}$ → $\frac{(b_1 - x)}{(p-c)} = \frac{(a_1 - b_1)}{c}$

→ $x = b_1 - \frac{(a_1 - b_1)(p-c)}{c}$ ....(2)

AQF-ARC: $\frac{FQ}{AF} = \frac{CR}{AC}$ → $\frac{(y - a_1)}{p} = \frac{(c_1 - a_1)}{b}$

→ $y = \frac{p(c_1 - a_1)}{b} + a_1$ ....(3)

BUE-BSC: $\frac{UE}{BE} = \frac{CS}{BC}$ → $\frac{(z - b_1)}{(p-c)} = \frac{(c_1 - b_1)}{a}$

→ $z = \frac{(p-c)(c_1 - b_1)}{a} + b_1$ ....(4)

Reemplazando (2), (3) y (4) en (1):

$$S = \frac{1}{2}.c.[b_1 - \frac{(a_1 - b_1)(p-c)}{c}] + \frac{1}{2}.b.[\frac{p(c_1 - a_1)}{b} + a_1] - \frac{1}{2}.a.[\frac{(p-c)(c_1 - b_1)}{a} + b_1]$$

Simplificando obtenemos:

$$S = \frac{(-a.a_1 + b.b_1 + c.c_1)}{2} \qquad \text{LQQD.}$$

4. Problemas de Aplicación:

Problema 1:

Sea el triángulo ABC cuyos excírculos son (Oa), (Ob) y (Oc). Si trazamos AH y CG perpendiculares a la tangente común de los excírculos (Oa) y (Oc) , de manera similar trazamos BF y AE perpendiculares a la tangente común de (Oa) y (Ob) además BI y CJ perpendiculares a la tangente común de (Ob) y (Oc). Demostrar que : AH.BF.CJ = AE.BI.CG. [2] (Ver Fig.1a).

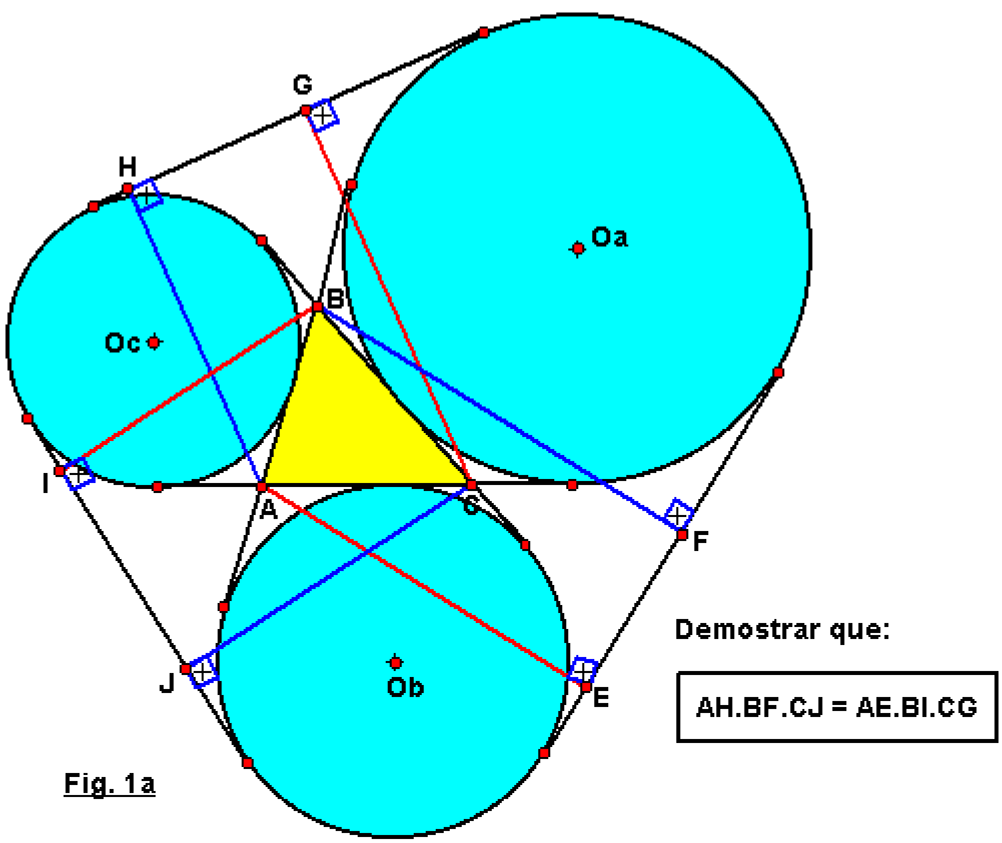


Fig. 1a

Demostración:

Aplicaremos el teorema de Harcourt para el caso del excírculo, por tal motivo trazamos las perpendiculares "que faltan" desde los vértices hacia las tangentes AP, BQ y CT.(Ver Fig. 1b). Por lo tanto tenemos que estas perpendiculares son iguales a las alturas del triángulo es decir: AP = ha, BQ = hb y CT = hc.

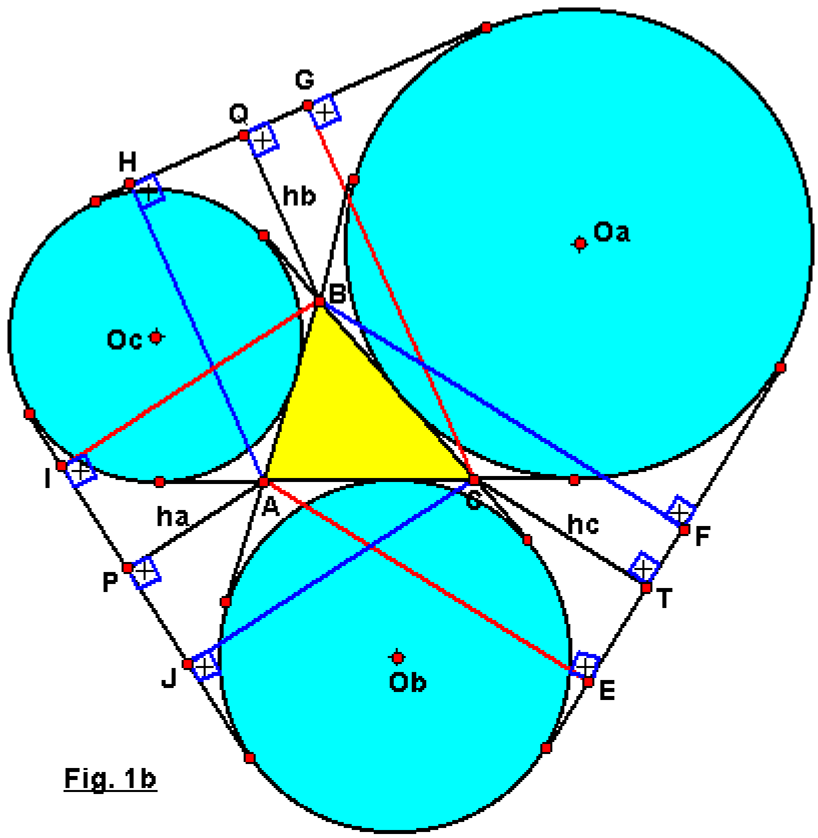


Fig. 1b

Aplicamos Harcourt con la tangente común a (Oa) y (Oc):

$$S = \frac{(-BC.AH + AC.BQ + AB.CG)}{2}$$

$$S = \frac{(-a.AH + b.BQ + c.CG)}{2}$$

$$S = \frac{(-a.AH + b.hb + c.CG)}{2}$$

Por lo tanto:

a.AH = c.CG...............(1)

De manera similar, tenemos:

Para la tangente común a (Ob) y (Oc):

c.CJ = b.BI…………..(2)

Para la tangente común a (Oa) y (Ob):

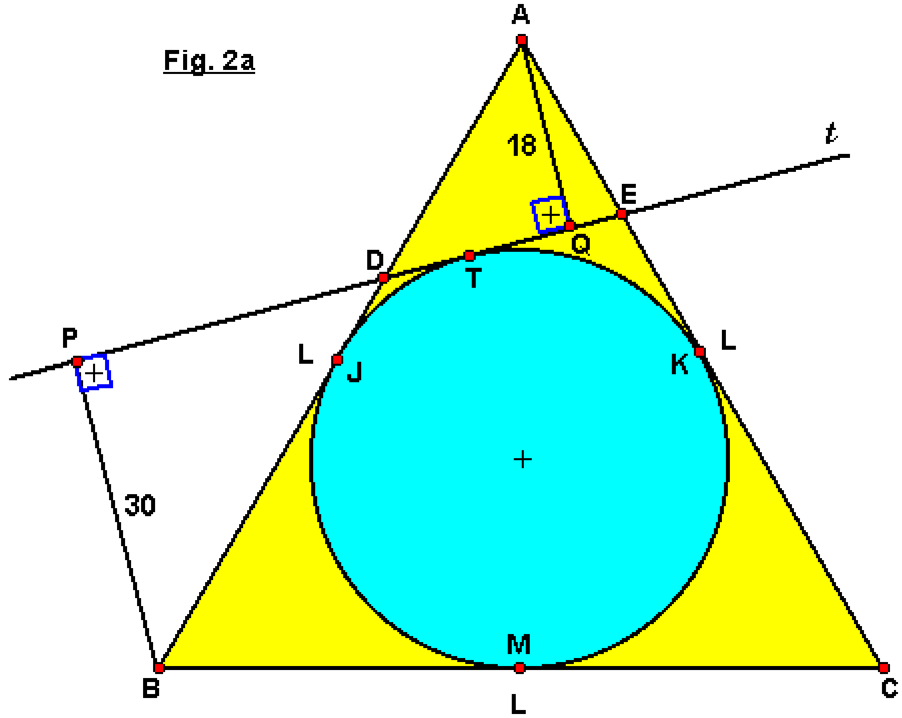
b.BF = a.AE................(3)

Combinando (1), (2) y (3) tenemos:

AH.BF.CJ = AE.BI.CG   LQQD.

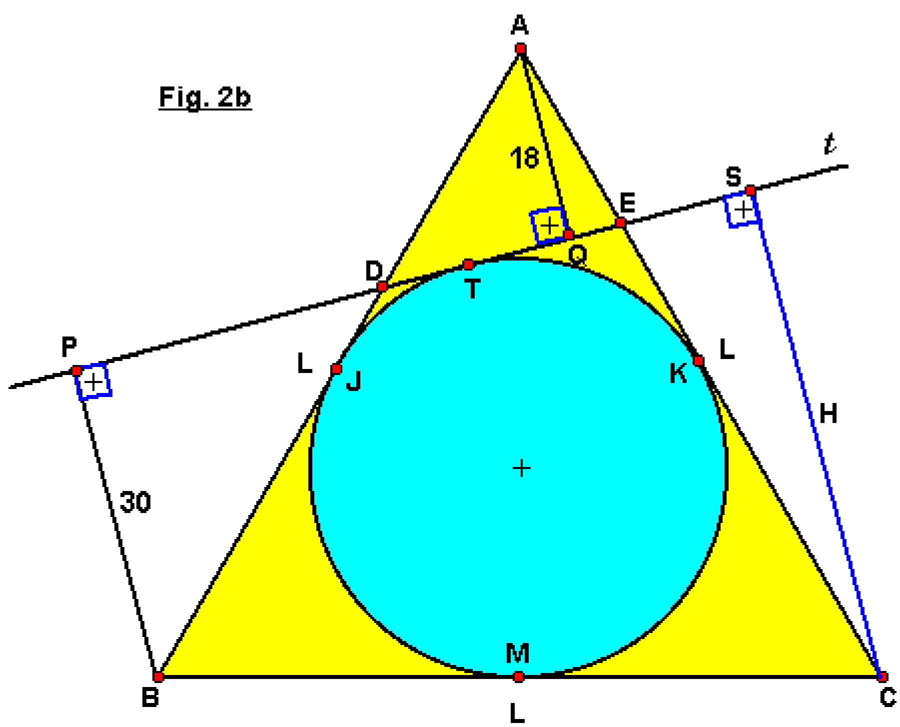
Problema 2:

Sea el triángulo equilátero ABC, de lado L. Por un punto del menor arco de su incírculo cercano al vértice A, se traza una tangente al mismo, de tal forma que las distancias desde los vértices A y B son 18 y 30 respectivamente. Calcular L.(Ver Fig. 2a).



Solución:

Trazamos la perpendicular CS = H, hacia la tangente t .(Ver Fig. 2b)



Aplicamos Harcourt caso del incírculo en el triángulo ABC:

$$AreaABC = S = \frac{(-BC.AQ + AC.BP + AB.CS)}{2} = \frac{(-L(18) + L(30) + LH)}{2}$$

$$S = \frac{L(12+H)}{2} \ldots\ldots\ldots(1)$$

También:

$$S = \frac{L^2\sqrt{3}}{4} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

Por semejanza de triángulos:

$$AQE\text{-}ESC: \frac{AQ}{AE} = \frac{CS}{CE} \rightarrow \frac{18}{AE} = \frac{H}{CE} \rightarrow \frac{(18+H)}{L} = \frac{18}{AE} = \frac{H}{CE}$$

$$\text{Luego: } AE = \frac{18L}{(H+18)} \quad y \quad CE = \frac{LH}{(H+18)}$$

$$AQD\text{-}BPD: \frac{AQ}{AD} = \frac{BP}{BD} \rightarrow \frac{18}{AD} = \frac{30}{BD} \rightarrow \frac{48}{L} = \frac{18}{AD} = \frac{30}{BD}$$

$$\text{Luego: } AD = \frac{18L}{48} = \frac{3L}{8} \quad y \quad BD = \frac{30L}{48} = \frac{5L}{8}$$

Además para el triángulo ADE:

$$AJ = AK = \frac{L}{2} = \frac{1}{2}.\ (AD + AE + DE) \text{ de donde: } \frac{L}{2} = \frac{1}{2}.\ (\frac{3L}{8} + \frac{18L}{(18+H)} + DE)$$

$$\text{Luego: } DE = \frac{L(5H-54)}{8(H+18)}$$

Entonces:

$$AreaADE = \frac{DE.AQ}{2} = \frac{9L(5H-54)}{8(18+H)} \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

Aplicando relación de áreas:

$$\frac{AreaADE}{AreaABC} = \frac{AD.AE}{AB.AC}$$

$$\frac{AreaADE}{AreaABC} = \frac{(\frac{3L}{8})(\frac{18L}{H+18})}{L^2}$$

$$\frac{AreaADE}{AreaABC} = \frac{54}{8(H+18)} \ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

Combinando (1), (3) y (4) obtenemos:

$$AreaADE = \frac{9L(5H-54)}{8(H+18)} = \frac{27L(H+12)}{8(H+18)}$$

Luego: $5H - 54 = 36 + 3H$ de donde $H = 45$.

De (1) y (2):

$$S = \frac{L(12+H)}{2} = \frac{L^2\sqrt{3}}{4}$$ reemplazando H, finalmente tenemos que $L = 38\sqrt{3}$.

5. Comentarios:

Si observamos en la Fig.1a, correspondiente al Problema 1 y denotamos por A', B' y C' a los puntos de intersección de los pares de perpendiculares BF y CG, AE y CJ, AH y BI respectivamente, podemos demostrar que el hexágono AC'BA'CB' es equilátero con lado igual al circunradio del triángulo ABC y el triángulo A'B'C' es homotético y congruente con el triángulo ABC, teniendo como centro de homotecia al centro del círculo de los nueve puntos del triángulo ABC.

No se descarta que las relaciones obtenidas por medio de la aplicación del teorema de Harcourt se puedan obtener por la aplicación de otras relaciones métricas ya conocidas, sin embargo creemos que el conocimiento de este teorema facilitará establecer las relaciones correspondientes por su aplicación de una forma directa, como conclusión podemos afirmar que tenemos una nueva herramienta para aprovecharla.

Finalmente no podemos dejar de mencionar que este teorema puede ser generalizado en una forma analítica, cuya relación se puede establecer haciendo uso de coordenadas baricéntricas homogéneas.[2]

6. Agradecimientos:

Aprovecho la oportunidad por medio de esta tribuna, de agradecer el inestimable apoyo que he recibido del Profesor Francisco Bellot Rosado, editor de la Revista Escolar de las Olimpiadas Iberoamericanas de Matemáticas. Ha sido muy importante su preocupación y constante comunicación para lograr este cometido: el "rescate" de este teorema olvidado por muchos.

Referencias:

[1] F.G.-M., Exercises de Géométrie, Pag. 750, Sexta Edición, 1920, Editorial Jacques Gabay, París, Reimpresión 1991.

[2] Harcourt's Theorem By Nikolaos Dergiades and Juan Carlos Salazar, Forum Geometricorum, FG200313, 117-124. http://forumgeom.fau.edu/FG2003volume3

Nota:

Juan Carlos Salazar colabora con la Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas (IMO Venezuela) que preside el Prof. Rafael Sánchez Lamoneda.

Email: caisersal@yahoo.com.

SOBRE UN PROBLEMA DE DISTANCIA MAXIMAL, DE TUDOR ZAMFIRESCU

LAURENTIU MODAN
Department of Mathematics, Faculty of Computer Science,
Academy of Economic Studies, Bucharest,
E-mail: modanl@inforec.ase.ro

Abstract. *This paper looks for answering to a question proposed in May 2002, by the professor T. Zamfirescu from Dortmund University and relative to a maximal distance between two points belonging to a given curve (?).*

MS classification*: 05C12, 51K05.*

En el 6º Encuentro Anual de la Sociedad Rumana de Matemáticas, celebrado en la Universidad de Sibiu en Mayo de 2002, el Profesor T. Zamfirescu propuso como problema abierto hallar los dos puntos más lejanos, situados en la frontera de la sección de una patata.

Intenté dar una solución usando únicamente nociones de *Teoría de Grafos*. Pero, como veremos en lo que sigue, las dificultades que surgen son considerables.

En primer lugar, independientemente de si la curva frontera (?) de la sección es convexa o cóncava, debemos fijar sobre ella n puntos. Uniéndolos obtenemos un grafo, que es un circuito $C_n=(V,E)$ con n aristas. Además, este grafo es 2-regular, con un valor propio $?_1=1$, y los demás cumpliendo la propiedad $??_k ?? 1$ (ver ???). Debemos observar que ni $?_k$ (?), $k ? N^*$, ni la matriz de adyacencia de C_n puede dar información sobre la distancia entre vértices de C_n.

Por otra parte, desearíamos usar en nuestro análisis, las nociones de *diámetro*, o *excentricidad* in grafos (ver ?2?). Pero tampoco van a ser muy útiles para nuestro objetivo, porque la excentricidad de un vértice es:

$$e?x? ? \max_{y ? V} d?x, y?,$$

el diámetro es:

$$diam?G? ? \max_{x, y ? V} d?x, y?,$$

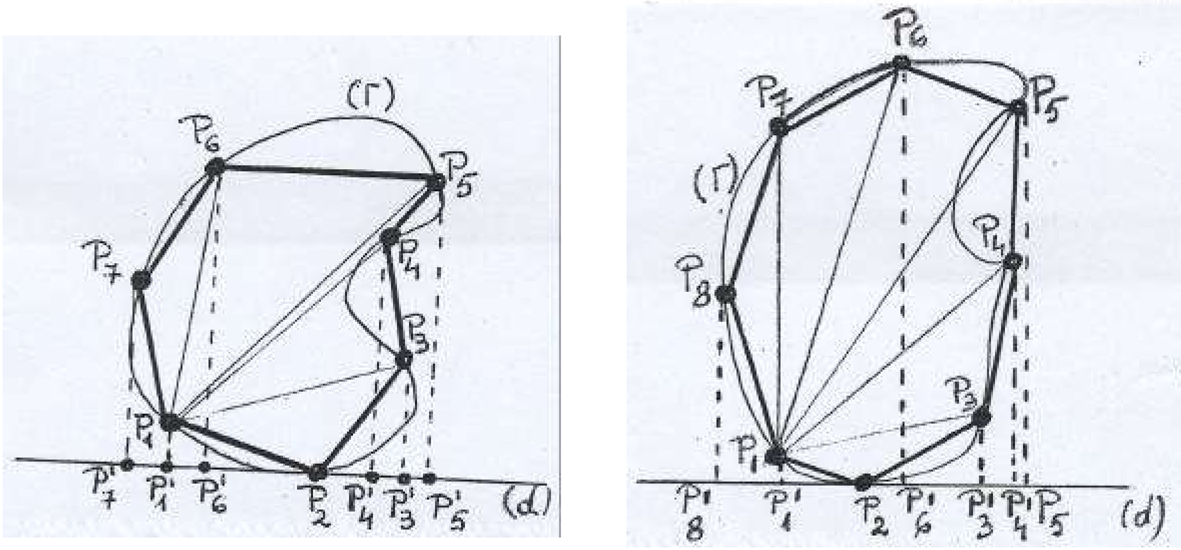
donde:

$d(x,y)$ = mínimo número de aristas entre $x,y ? V$,

y actúan sólo a lo largo del conjunto de aristas, como nociones cualitativas, sin dar información sobre los vértices.

En lo que sigue, combinaremos técnicas de *Teoría de Grafos* y de *Geometría* para resolver el problema expuesto. Fijaremos P_1, uno de los n puntos. Luego uniremos P_1 con todos los demás $n-1$ puntos situados en la frontera. Obtenemos así $n-2$ triángulos. Las mayores distancias aparecen, intuitivamente, en los lados del triángulo situado en medio, cuando $n=2k$, o en los lados de los dos triángulos situados en medio, cuando $n=2k+1$, como podemos ver en los dos casos de la **Figura**.

Continuaremos nuestro procedimiento eligiendo un vértice P_2, adyacente a P_1, en el ciclo C_n. Trazando entonces por P_2 una cierta dirección *(d)*, proyectaremos sobre ella todos los demás vértices $P_1, P_3, \ldots, P_n$. Sean $P_1', P_3', \ldots, P_n'$ las proyecciones sobre *(d)*. Nos fijamos en la proyección más lejana desde P_1'. Sea esa P_k'. Entonces, la mayor distancia entre dos puntos de la curva (?), una vez que P_1 ha sido elegido, es P_1P_k. Si queremos investigar todos los puntos de la curva (?), como frontera de la sección, hemos de considerar $\sup_{P ? ? ?} PP_k$, que nos dará la máxima distancia buscada.



Figura

Observación. i) Si conocemos las ecuaciones paramétricas de la curva (Γ), a saber:

$$(\Gamma):\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad t \in I \subseteq \mathbf{R},$$

podremos encontrar la distancia maximal entre dos de sus puntos usando la teoría de extremos condicionados (ver[3]). Por lo tanto, sea el punto fijo $P_1(x_0, y_0) \in (\Gamma)$, el punto variable $P(x, y) \in (\Gamma)$, y la distancia euclídea:

$$d(x, y) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}\ .$$

Para esta distancia *d*, con las condiciones dadas por:

$$P_1(x_0, y_0) \in (\Gamma),\ P(x, y) \in (\Gamma),$$

podemos aplicar el método de los multiplicadores de Lagrange . Como antes, al final, hay que considerar $\sup\limits_{P \in (\Gamma)} PP_1$.

ii) Se podría plantear este tipo de problema preguntando la distancia máxima entre los puntos de una curva (Γ), descrita por los participantes de una competición de patinaje de velocidad o pidiendo encontrar los puntos de óptima iluminación en un área grande de frontera (Γ), con sólo dos reflectores.

REFERENCIAS

[1] Biggs N. „*Algebraic graph theory*” Cambridge University Press, 1974;
[2] Bollobás B. „*Extremal graph theory*”, Academic Press, 1978;
[3] Modan L. „*Real differential calculus*” (in Romanian), Cison, Bucharest, 2002.

Problema 6 OME'03 Islas Canarias

Ensartamos 2n bolas blancas y 2n bolas negras formando una cadena. Demostrar que, se haga en el orden que se haga, siempre es posible cortar un segmento de cadena exactamente con n bolas blancas y n bolas negras.

Intentemos construir una cadena de modo que no se pueda cortar un segmento con n bolas de cada color. Consideremos ahora el conjunto de los segmentos de cadena obtenidos sucesivamente al tomar 2n bolas seguidas de la cadena.

Llamaremos b' al nº de bolas blancas en el primer segmento de la cadena y b'' en el último y colocaremos la cadena de tal modo que b'<b'' (si son iguales, ambos segmentos tienen n bolas de cada color).

Además, b'<n porque si $b' \geq n$, $b'' \geq n$ y sumando miembro a miembro $b''+b' \geq 2n$ lo cual no es posible ya que la igualdad sólo se cumple si $b''=b'$ y b''+ b' es la totalidad de bolas blancas, que es exactamente 2n.

Al ir considerando los sucesivos segmentos de 2n bolas consecutivas, tenemos que cada uno de los segmentos comparten con el anterior todas las bolas menos una, que es sustituida por otra que entra a formar parte del nuevo segmento. Si la bola entrante y la saliente son del mismo color, el valor de b (considerado como un número que varía según al segmento que se refiera), no cambia. Sí lo hace sin embargo cuando son de diferente color; si la que entra es negra y blanca la que sale, b disminuye una unidad y si es una blanca la que entra y una bola negra la que se elimina, b aumenta una unidad.

Entonces, a medida que b va variando, lo hace aumentando o disminuyendo una unidad y como b en el primer segmento debe valer b' y en el último b'', todos los números comprendidos entre b' y b'' son alguna vez valores de b.

$$b' < n \text{ y } b'+b'' = 2n$$

Si sustituimos en la segunda ecuación b' por n, cambiando el signo de igualdad de la ecuación se obtiene: $b'+n > 2n \Rightarrow b' > n$ descubriendo así que n está comprendido entre b' y b'', es necesariamente valor de b en al menos un segmento. En ese segmento, el número de bolas blancas es n, y el de bolas negras también.

COMPETICIÓN MATEMÁTICA MEDITERRÁNEA 2003
Memorial Peter O'Halloran
Requena, 3 de mayo de 2003

Nombre y apellidos

1.Probar que la ecuación

$$x^2 + y^2 + z^2 = x + y + z + 1$$

no tiene soluciones racionales.

2.Un triángulo ABC es tal que

$$BC = CA + \frac{1}{2}AB.$$

P es el punto del lado AB tal que

$$\frac{BP}{PA} = \frac{1}{3}.$$

Demostrar que $\widehat{CAP} = 2 \bullet \widehat{CPA}$.

3.Sean $a, b, c \geq 0, a + b + c = 3$. Demostrar que

$$\frac{a}{b^2+1} + \frac{b}{c^2+1} + \frac{c}{a^2+1} \geq \frac{3}{2}.$$

¿Cuándo es válido el signo = ?

4.Se considera un sistema formado por infinitas esferas de metal, con centros en todos los puntos $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$. Se dice que este sistema es estable si la temperatura de cada esfera es la media aritmética de las temperaturas de las seis esferas más cercanas. Supongamos que la temperatura de cada esfera está comprendida entre 0 grados y 1 grado centígrado. Demostrar que si el sistema es estable, entonces todas las esferas están a la misma temperatura.

Cada problema vale 7 *puntos*.
Tiempo: 4 *horas*.

PROBLEMAS PARA LOS MÁS JÓVENES (8)

Presentamos a continuación una selección de los problemas propuestos en la XI Olimpiada Regional de Matemáticas de Castilla y León, celebrada en Soria, del 6 al 8 de junio de 2003. Agradecemos a la Prof. Inmaculada Fernández, Presidenta Provincial de Valladolid de la Sociedad Castellano – Leonesa de Profesorado de Matemáticas, su amabilidad al habernos facilitado los problemas.

2º E.S.O. (12-13 años de edad)

1. Una señora distribuye entre sus hijos cierto número de avellanas. Al primero le da 5 avellanas y 1/5 del resto; al segundo, 10 avellanas más 1/5 del resto; al tercero, 15 avellanas más 1/5 del resto, y así sucesivamente.
   ¿Cuál era el número de hijos y cuántas avellanas tocaron a cada uno, si todos recibieron el mismo número de avellanas?

2. En casa tengo un reloj despertador que atrasa 2 minutos cada hora; mi reloj de muñeca adelanta 1 minuto cada hora. Un cierto día salí de mi casa y al volver, en mi reloj de muñeca eran las 12 de la noche; en cambio, en el despertador eran las 11 de la noche.
   ¿Cuántas horas estuve fuera de casa?

3. En la cocina había un pastel para el cumpleaños de papá, pero al llegar éste, ha desaparecido. En la casa hay 5 hijos: Ataúlfo, Basilia, Calepodio, Desdémona y Efialtes. Mamá sabe que alguno de ellos, o varios, son autores de la desaparición, y los interroga.
   Las respuestas son:
   Ataúlfo: *Esto es obra de uno solo de nosotros.*
   Basilia : *No, de dos de nosotros.*
   Calepodio: *No, de tres de nosotros.*
   Desdémona : *No, de cuatro de nosotros.*
   Efialtes : *Entre todos nos lo comimos.*
   Mamá sabe que los inocentes dicen la verdad, mientras los culpables mienten.
   ¿Quién o quienes se comieron el pastel?

4º de E.S.O. (15 años de edad)

4. Tomamos un dado y lo lanzamos al aire. ¿De cuántas formas distintas lo podemos ver encima de la mesa en la que cae?

5. Tenemos círculos de radio 1, que disponemos en el interior de otro círculo, tangentes entre sí y tangentes al más grande. ¿Cuál es el mínimo valor del radio de este círculo, en los siguientes casos:
    a) 3 círculos de radio 1
    b) 4 círculos de radio 1
    c) 5 círculos de radio 1

6. Al salir de compras, llevaba en el monedero unos 15 euros, en monedas de 1 euro y de 20 céntimos. Al regresar a casa, traía tantos euros como monedas de 20 céntimos tenía al comienzo; y tantas monedas de 20 céntimos como monedas de 1 euro tenía antes. En el monedero me quedaba un tercio del dinero que llevaba al salir de compras.
   ¿Cuánto dinero gasté en las compras?

PROBLEMAS PROPUESTOS (8)
36-40

Problema 36 (Propuesto por el Prof. José Luis Díaz Barrero, Universidad Politécnica de Cataluña, Barcelona, España).

Sea $\{F_n\}_{n\geq 0}$ la sucesión de Fibonacci definida por $F_0 = 0, F_1 = 1$ y para $n \geq 2$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Probar que el número

$$\sqrt{4(2F_{n+1}^2 - F_{2n})^2 + F_{2n}(F_n^2 + 4F_{n+1}^2 - 2F_{2n}) + 6F_nF_{n+1}(4F_{n+1}^2 - F_{2n})}$$

es entero y expresarlo como una suma de dos cuadrados.

Problema 37 (Propuesto por el Prof. Laurentiu Modan, Universidad de Bucarest, Rumania)

Sea $f(x)$ un polinomio con coeficientes enteros, de grado 7 y coeficiente principal 1, que verifica las dos propiedades siguientes:

i) Existe un entero a que es una raíz cuádruple de $f(x) - 4$.

ii)Existen tres enteros consecutivos, distintos de $a,$ que son raíces de $f(x) - 4$.

Estudiar si

a) existe el entero k tal que $f(k) = 9$.

b) existen enteros k tales que $f(k) \equiv k (\operatorname{mod} k)$

Problema 38 (Propuesto por el Prof. Laurentiu Modan, Universidad de Bucarest, Rumania)

Una baraja contiene 53 cartas, de las que 13 son comodines. Seis jugadores toman parte en un juego, en el que hay un comodín descubierto, sobre la mesa. Cada jugador recibe una carta. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos un jugador reciba un comodín?

Problema 39 (Propuesto por el Editor. Se darán referencias del origen del problema cuando se publique la solución)

Una circunferencia concéntrica con la circunscrita al triángulo ABC corta a AC en E y E'; a AB en F y F'. Las rectas EF y E'F' cortan a BC en D y D'. Demostrar que D y D' equidistan del centro de la circunferencia.

Problema 40 (Propuesto por el Editor. Se darán referencias del origen del problema cuando se publique la solución)

Una circunferencia de radio ρ es tangente a los lados AB y AC del triángulo ABC, y su centro está a una distancia p del lado BC.

Probar que

$$a(p - \rho) = 2s(r - \rho),$$

donde r es el radio de la circunferencia inscrita y $2s$ es el perímetro del triángulo.

Demostrar también que si la circunferencia de radio ρ corta a BC en los puntos D y E, entonces

$$DE = \frac{4\sqrt{rr_a(\rho - r)(r_a - \rho)}}{r_a - r},$$

donde r_a es el radio de la circunferencia exinscrita correspondiente a A.

Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática
ISSN 1698-677X
Número 8--Divertimentos

Una parodia del estilo bourbakista
La esquela apócrifa de Bourbaki

En septiembre de 1997, la revista SIPROMA publicó la esquela apócrifa de Bourbaki, que ahora reproducimos, dada la reducida difusión de aquélla.

UNA PARODIA DEL ESTILO BOURBAKISTA
LA ESQUELA APÓCRIFA DE BOURBAKI
(panfleto repartido en 1968, en París, por un matemático contestatario, a la salida de algunas clases)

Las familias Cantor, Hilbert, Noether;
Las familias Cartan, Chevalley, Dieudonné, Weyl;
Las familas Bruhat, Dixmier, Godement, Samuel, Schwartz;
Las familias Cartier, Grothendieck, Malgrange, Serre;
Las familias Demazure, Douady, Giraud, Verdier;
Las Familias Filtrantes a la derecha y los Epimorfismos estrictos;
Las señoritas Adèle e Idèle,
(padres, hermanos, hijos, nietos, biznietos y tataraprimos, respectivamente)
tienen el profundo dolor de comunicar el fallecimiento del señor

NICOLÁS BOURBAKI

Piadosamente desaparecido el 11 de noviembre de 1968 (aniversario de la Victoria), en su domicilio de Nancago.
El sepelio tendrá lugar el sábado 23 de noviembre de 1968, a las 15 horas, en el Cementerio de las Funciones Aleatorias (Metro: Markov y Gödel)
El duelo se despedirá ante el bar Aux Produits Directs, esquina a las Resoluciones Proyectivas (antes plaza Koszul).
Según el deseo del finado, se celebrará una misa en la Iglesia Notre-Dame-des-Problèmes-Universels, oficiada por Su Eminencia el Cardenal Aleph1, con asistencia de los representantes de todas las clases de equivalencia y los cuerpos (algebraicamente cerrados) constituidos. Se guardará un minuto de silencio por parte de los alumnos de las Ecoles Normales Superieures y las clases de Chern.
Ni flores ni productos wreath.

Pues Dios es el compactificado de Alexandrov del Universo
Groth.IV.22

Revista Escolar
de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática
OEI
ISSN 1698-677X
Número 8-Páginas web

Laboratorio virtual de triángulos con CABRI II

La página web cuya dirección es
http://www.personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/

está dirigida por el Prof. Ricardo Barroso Campos, de la Universidad de Sevilla, y cuenta con una nómina importante de colaboradores, a ambos lados del Atlántico.

A excepción de los meses de verano, cada quince días se proponen una serie de problemas, casi siempre geométricos, y se publican las soluciones de los lectores (en general, más de una para cada problema). Se ofrece una versión "demo" de CABRI II, y su sintonía (para quienes tengan sonido en su PC) es la Fuga de Bach, BWV 1000.

Comenzó a publicarse en el año 2000, y hasta el presente momento se han publicado 110 problemas.

El correo electrónico del mantenedor es rbarroso@us.es

La página es un excelente ejemplo de lo que se puede hacer cuando se ama la Geometría.

Francisco Bellot Rosado

Francisco Bellot Rosado

Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática
OEI
ISSN 1698-677X
Número 8-Libros

Está en:
OEI - Programación - Olimpíada de Matemática - Revista Escolar de la OIM - Número 8

Último número
Presentación
Números anteriores
Contactar
Suscripción gratuita

Libro Comentado
Cien Problemas de Olimpíadas Matemáticas

Lydua Burgoa y Pedro Marrone. Grupo Santillana y Olimpíada Panameña de Matemática. Panamá, 2003.
ISBN 9962-630-77-0

Con motivo de rendir un homenaje a los cien años de la Republica de Panamá se ha editado esta obra por parte de los miembros del Comité de Olimpíadas de Panamá.

En todos los casos se tratan de problemas que han tenido que ser resueltos por estudiantes panameños en las siguientes competiciones: Olimpíada Panameña de Matemática, Olimpíada Nacional de Panamá, Olimpíada Iberoamericana de Matemática, Olimpíada Matemática de Centroamérica y el Caribe y Olimpíada de Mayo.

Los problemas están divididos en cuatro secciones: Álgebra, Aritmética, Geometría y Misceláneos.

Separados de los enunciados están las soluciones, algunas de las cuales corresponden a las realizadas por los propios estudiantes, en cuyo caso están mencionados los propios autores de las respuestas.

| Número 8|
| Principal Olimpiada |
Programación OEI | Principal OEI | Contactar

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI

Número

9

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática
Número 9 (Septiembre-Octubre 2003)
ISSN – 1698-277X

ÍNDICE

Miguel Amengual Covas

La desigualdad de Euler a partir de otras desigualdades entre elementos de un triángulo.

Este artículo es continuación del publicado en el número 5 (enero-febrero 2003). En esta segunda parte se establecen seis desigualdades geométricas y dos trigonométricas, elementales las ocho, de las que se deduce inmediatamente la desigualdad de Euler.

Las notaciones que se hacen servir son las habituales para un triángulo ABC.

8. $$\frac{1}{r}=\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\geq\frac{2}{R}$$

Multiplicando miembro a miembro las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned}
a&=(s-b)+(s-c)\geq 2\sqrt{(s-b)(s-c)}\\
b&=(s-c)+(s-a)\geq 2\sqrt{(s-c)(s-a)}\\
c&=(s-a)+(s-b)\geq 2\sqrt{(s-a)(s-b)}
\end{aligned}$$

resulta

$$abc\geq 8(s-a)(s-b)(s-c)$$

que, habida cuenta de la fórmula

$$r^2s=(s-a)(s-b)(s-c), \qquad (1)$$

obtenida a partir de la Herón y de la expresión rs para el área del triángulo, escribimos equivalentemente en la forma

$$\frac{1}{2rs}\geq\frac{4r}{abc}\ .$$

Multiplicando ambos miembros de esta última por

$$a+b+c=2s \qquad (2)$$

obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{a+b+c}{2rs}&\geq 2\cdot\frac{4rs}{abc}\\
&=\frac{2}{R} \qquad (\text{pues } abc=4Rrs \quad (3)\,)
\end{aligned}$$

Resta tan sólo observar que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r}&=\frac{a}{2rs}+\frac{b}{2rs}+\frac{c}{2rs} && (\text{por } (2)\,)\\
&=\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c} && (rs=\tfrac{1}{2}ah_a,\ \text{etc})
\end{aligned}$$

para obtener la desigualdad enunciada.

Tal desigualdad es equivalente a

9. $$\frac{1}{r}=\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}\geq\frac{2}{R}$$

donde r_a, r_b, r_c son los radios de las circunferencias excritas al triángulo ABC.

En efecto, a partir de las conocidas relaciones

$$r_a\left(s-a\right)=r_b\left(s-b\right)=r_c\left(s-c\right)=rs$$

resulta inmediatamente

$$\begin{aligned}\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}&=\frac{s-a}{rs}+\frac{s-b}{rs}+\frac{s-c}{rs}\\&=\frac{1}{r}\end{aligned}$$

10. $$6\leq\frac{r_a+r_b}{r_c}+\frac{r_b+r_c}{r_a}+\frac{r_c+r_a}{r_b}=\frac{4R-2r}{r}$$

Tenemos

$$\begin{aligned}\frac{r_a+r_b}{r_c}+\frac{r_b+r_c}{r_a}+\frac{r_c+r_a}{r_b}&=\left(\frac{r_a}{r_b}+\frac{r_b}{r_a}\right)+\left(\frac{r_b}{r_c}+\frac{r_c}{r_b}\right)+\left(\frac{r_c}{r_a}+\frac{r_a}{r_c}\right)\\&\geq 2+2+2\\&=6\end{aligned}$$

Por otra parte, a partir de las relaciones (2), (3) y $ab+bc+ca=r^2+s^2+4Rr$ y siendo

$$\frac{r_a+r_b}{r_c}=\frac{\dfrac{s-a}{rs}+\dfrac{s-b}{rs}}{\dfrac{s-c}{rs}}=\frac{c}{s-c}$$

y cíclicamente, resulta

$$\frac{r_a+r_b}{r_c}+\frac{r_b+r_c}{r_a}+\frac{r_c+r_a}{r_b}=\frac{c}{s-c}+\frac{a}{s-a}+\frac{b}{s-b}$$
$$=\frac{(a+b+c)s^2-2(ab+bc+ca)s+3abc}{(s-a)(s-b)(s-c)}$$
$$=\frac{2s\cdot s^2-2s(r^2+s^2+4Rr)+12Rrs}{r^2s}$$
$$=\frac{4R-2r}{r}$$

11. $$9r\le r_a+r_b+r_c\le\frac{9R}{2}$$

Tenemos

$$r_a+r_b+r_c=\frac{rs}{s-a}+\frac{rs}{s-b}+\frac{rs}{s-c}$$
$$=r\cdot[(s-a)+(s-b)+(s-c)]\left(\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s-b}+\frac{1}{s-c}\right)$$
$$\ge r\cdot 9\ ,$$

que es la primera desigualdad.

La segunda puede escribirse en la forma

$$\frac{rs}{s-a}+\frac{rs}{s-b}+\frac{rs}{s-c}\le\frac{9abc}{8rs}$$

que es equivalente a

$$9abc-8r^2s^2\left(\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s-b}+\frac{1}{s-c}\right)\ge 0$$

la cual, en función de $x=s-a>0$, $y=s-b>0$, $z=s-c>0$ se escribe

$$9(x+y)(y+z)(z+x)-8xyz(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\ge 0$$

reduciéndose a

$$x^2y+x^2z+xy^2+xz^2+y^2z+yz^2-6xyz\ge 0\,.$$

La validez de esta última se establece inmediatamente a partir de la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica: en efecto,

$$x^2y + x^2z + xy^2 + xz^2 + y^2z + yz^2 \geq 6\sqrt[6]{(x^2y)(x^2z)(xy^2)(xz^2)(y^2z)(yz^2)}$$
$$= 6xyz$$

12. $3R \leq a \cdot \tan\frac{A}{2} + b \cdot \tan\frac{B}{2} + c \cdot \tan\frac{C}{2} \leq 5R - 4r$

Si expresamos en función $x = s - a > 0$, $y = s - b > 0$, $z = s - c > 0$ las tangentes de los semiángulos así como las longitudes que aparecen, obtenemos

$$3\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{4\sqrt{(x+y+z)xyz}} \leq \sum (y+z)\sqrt{\frac{yz}{(x+y+z)x}} \leq 5\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{4\sqrt{(x+y+z)xyz}} - 4\sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}}$$

que se reduce a

$$3(x+y)(y+z)(z+x) \leq \sum 4yz(y+z) \leq 5(x+y)(y+z)(z+x) - 16xyz$$

Una y otra desigualdades son equivalentes a la desigualdad

$$x^2y + x^2z + xy^2 + xz^2 + y^2z + yz^2 - 6xyz \geq 0$$

que hemos visto anteriormente.

13. $9r \leq m_a + m_b + m_c \leq \frac{9R}{2}$

Si aplicamos la desigualdad de Cauchy
$$(ux + vy + wz)^2 \leq (u^2 + v^2 + w^2)(x^2 + y^2 + z^2)$$
con $u = m_a$, $v = m_b$, $w = m_c$, $x = y = z = 1$ y tenemos en cuenta la relación $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$ así como la desigualdad $a^2 + b^2 + c^2 \leq 9R^2$, la cual resulta inmediatamente de la fórmula $OG^2 = R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9}$ que expresa el cuadrado de la distancia entre el circuncentro y el baricentro del triángulo, obtenemos
$$m_a + m_b + m_c \leq \sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)} = \sqrt{\frac{9(a^2 + b^2 + c^2)}{4}} \leq \frac{9R}{2}$$
verificándose la igualdad si y sólo si el triángulo es equilátero.

Por otra parte, multiplicando miembro a miembro las desigualdades

$$s(s-a)=\frac{(b+c)^2-a^2}{4}\geq\frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}=m_a^2\ ,$$

etc., resulta, habida cuenta de (1),

$$m_a m_b m_c \geq rs^2$$

y, toda vez que

$$s=(s-a)+(s-b)+(s-c)\geq 3\sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)}\underset{\substack{\uparrow\\ \text{por}(1)}}{=}3\sqrt[3]{r^2 s}$$

o, equivalentemente,

$$s^2\geq 27r^2$$

obtenemos

$$m_a+m_b+m_c\geq 3\sqrt[3]{m_a m_b m_c}\geq 3\sqrt[3]{rs^2}\geq 3\sqrt[3]{27r^3}=9r$$

verificándose la igualdad si y sólo si el triángulo es equilátero.

14. $\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{C-A}{2}\geq\frac{2r}{R}$

Sustituyendo $\frac{2r}{R}$ por su igual $8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$, obtenemos

$$8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leq\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{C-A}{2}\qquad(4)$$

equivalente a la propuesta.

Siendo $\sin\frac{A}{2}=\frac{\sin A}{2\cos\frac{A}{2}}$, etc. y positivos los números $\cos\frac{A}{2}$, $\cos\frac{B}{2}$ y $\cos\frac{C}{2}$, la desigualdad (4) se escribe equivalentemente

$$\sin A\sin B\sin C\leq\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{C}{2}+\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{C-A}{2}\cos\frac{B}{2}\qquad(5)\ .$$

Tenemos

$$\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{C}{2}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{A-B+C}{2}+\cos\frac{A-B-C}{2}\right),$$

$$\cos\frac{A-B+C}{2}=\cos\frac{\pi-2B}{2}=\sin B$$

y

$$\cos\frac{A-B-C}{2}=\cos\frac{-A+B+C}{2}=\cos\frac{\pi-2A}{2}=\sin A$$

de donde se sigue

$$\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{C}{2}=\frac{\sin A+\sin B}{2}$$

y cíclicamente.

Para establecer la validez de (5), hacemos servir la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica en la siguiente:

$$\begin{aligned}\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{C}{2}+\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{C-A}{2}\cos\frac{B}{2}&=\\ &=\frac{\sin A+\sin B}{2}+\frac{\sin B+\sin C}{2}+\frac{\sin C+\sin A}{2}\\ &\geq\sqrt{\sin A\cdot\sin B}\cdot\sqrt{\sin B\cdot\sin C}\cdot\sqrt{\sin C\cdot\sin A}\\ &=\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C\end{aligned}$$

15. $9r\leq h_a+h_b+h_c\leq\frac{9R}{2}$

Tenemos

$$(h_a+h_b+h_c)\cdot\frac{1}{r}=(h_a+h_b+h_c)\cdot\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\geq 9\ ,$$

de donde

$$(h_a+h_b+h_c)\geq 9r\ .$$

Por otra parte, la siguiente desigualdad

$$a=(s-b)+(s-c)\geq 2\sqrt{(s-b)\cdot(s-c)}$$

es equivalente a

$$a^2\geq 4(s-b)\cdot(s-c)$$

y la escribimos en la forma

$$\frac{1}{s-b}+\frac{1}{s-c}\geq\frac{4}{a}\ .$$

Análogamente,

$$\frac{1}{s-c}+\frac{1}{s-a}\geq\frac{4}{b}\qquad\text{y}\qquad\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s-b}\geq\frac{4}{c}\ .$$

La suma de estas tres últimas desigualdades es

$$\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s-b}+\frac{1}{s-c}\geq 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

la cual, después de multiplicar por el valor S del área del triángulo se reduce a

$$r_a + r_b + r_c \geq h_a + h_b + h_c \quad ,$$

de la que resulta (ver la desigualdad número 11)

$$h_a + h_b + h_c \leq \frac{9R}{2}$$

Bibliografía.

O. Bottema et al., Geometric Inequalities, Groningen, 1969.

DS Mitrinovic et al., Recent Advances in Geometric Inequalities, Kluver Ac. Publishers, The Netherlands, 1989.

Mihály Bencze, 'Problem 2717', Crux Mathematicorum, 29, 2 (2003), 119-120.

I.V. Maftei y M. A. Nicolae, 'Asupra unor relatii de evaluare într-un triunghi', Gazeta Matematica, nr. 10/2002, 379-387.

Post Scriptum. Mi interés por las desigualdades geométricas empezó con la invitación del profesor Josep Grané i Manlleu de la Universitat Politècnica de Catalunya a que colaborara en la edición de 1999 del libro "Sessions de preparació per a l'olimpíada matemàtica" que edita la Societat Catalana de Matemàtiques.

La aceptación me llevó a intentar una tarea que, a la hora de la verdad, ha resultado bastante fructífera.

Mi reconocimiento y afecto al profesor Grané y a Francisco Bellot Rosado, de Valladolid, catedrático y editor de esta Revista Escolar de la OIM, como impulsores del olimpismo matemático en España, así como mi agradecimiento a ambos por haberme dado siempre, con creces, toda la ayuda que les he pedido.

Cala Figuera, Mallorca, junio 2003

XVIII Olimpíada Iberoamericana de Matemática
Primer Día
16 de septiembre de 2003

1. *a*) Se tienen dos sucesiones, cada una de 2003 enteros consecutivos, y un tablero de 2 filas y 2003 columnas

			………		
			………		

Decida si siempre es posible distribuir los números de la primera sucesión en la primera fila y los de la segunda sucesión en la segunda fila, de tal manera que los resultados obtenidos al sumar los dos números de cada columna formen una nueva sucesión de 2003 números consecutivos.

b) ¿Y si se reemplaza 2003 por 2004?

Tanto en *a*) como en *b*), si la respuesta es afirmativa, explique cómo distribuiría los números, y si es negativa, justifique el porqué.

2. Sean C y D dos puntos de la semicircunferencia de diámetro AB tales que B y C están en semiplanos distintos respecto de la recta AD. Denotemos M, N y P los puntos medios de AC, DB y CD, respectivamente. Sean O_A y O_B los circuncentros de los triángulos ACP y BDP. Demuestre que las rectas O_AO_B y MN son paralelas.

3. Pablo estaba copiando el siguiente problema:

Considere todas las sucesiones de 2004 números reales $(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{2003})$, *tales que*

$$x_0 = 1,$$
$$0 \le x_1 \le 2x_0,$$
$$0 \le x_2 \le 2x_1,$$
$$\vdots$$
$$0 \le x_{2003} \le 2x_{2002}.$$

Entre todas estas sucesiones, determine aquella para la cual la siguiente expresión toma su mayor valor: $S = \cdots$.

Cuando Pablo iba a copiar la expresión de S le borraron la pizarra. Lo único que pudo recordar es que S era de la forma

$$S = \pm x_1 \pm x_2 \pm \cdots \pm x_{2002} + x_{2003},$$

donde el último término, x_{2003}, tenía coeficiente +1, y los anteriores tenían coeficiente +1 ó –1. Demuestre que Pablo, a pesar de no tener el enunciado completo, puede determinar con certeza la solución del problema.

Duración: 4½ horas
Cada problema vale siete puntos **Versión en español**

XVIII Olimpíada Iberoamericana de Matemática
Segundo Día
17 de septiembre de 2003

4. Sea $M = \{1, 2, \ldots, 49\}$ el conjunto de los primeros 49 enteros positivos. Determine el máximo entero *k* tal que el conjunto *M* tiene un subconjunto de *k* elementos en el que no hay 6 números consecutivos. Para ese valor máximo de *k*, halle la cantidad de subconjuntos de *M*, de *k* elementos, que tienen la propiedad mencionada.

5. En el cuadrado *ABCD*, sean *P* y *Q* puntos pertenecientes a los lados *BC* y *CD* respectivamente, distintos de los extremos, tales que *BP*=*CQ*. Se consideran puntos *X* e *Y*, $X \neq Y$, pertenecientes a los segmentos *AP* y *AQ* respectivamente. Demuestre que, cualesquiera sean *X* e *Y*, existe un triángulo cuyos lados tienen las longitudes de los segmentos *BX*, *XY* y *DY*.

6. Se definen las sucesiones $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ por:

$$a_0 = 1, \quad b_0 = 4 \quad \text{y}$$

$$a_{n+1} = a_n^{2001} + b_n, \quad b_{n+1} = b_n^{2001} + a_n \quad \text{para } n \geq 0.$$

Demuestre que 2003 no divide a ninguno de los términos de estas sucesiones.

Duración: 4½ horas
Cada problema vale siete puntos **Versión en español**

XVIII Olimpíada Ibero-americana de Matemática
Primeiro Dia
16 de Setembro de 2003

1. *a*) Têm-se duas sucessões, cada uma de 2003 inteiros consecutivos, e um tabuleiro de 2 linhas e 2003 colunas

			………		
			………		

Decida se é sempre possível distribuir os números da primeira sucessão na primeira linha e os da segunda sucessão na segunda linha, de modo que os resultados obtidos ao somar os dois números de cada coluna formem uma nova sucessão de 2003 números consecutivos.
b) E se trocássemos 2003 por 2004?

Tanto em *a*) como em *b*), se a resposta for afirmativa, explique como distribuiria os números, e se for negativa, justifique o porquê.

2. Sejam C e D dois pontos da semicircunferência de diâmetro AB tais que B e C estão em semiplanos distintos em relação à recta AD. Denotemos por M, N e P os pontos médios de AC, DB e CD, respectivamente. Sejam O_A e O_B os circuncentros dos triângulos ACP e BDP. Demonstre que as rectas O_AO_B e MN são paralelas.

3. Pablo copiava o seguinte problema:

Considere todas as sucessões de 2004 números reais $(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{2003})$, *tais que*

$$x_0 = 1,$$
$$0 \le x_1 \le 2x_0,$$
$$0 \le x_2 \le 2x_1,$$
$$\vdots$$
$$0 \le x_{2003} \le 2x_{2002}.$$

Entre todas estas sucessões, determine aquela para a qual a expressão seguinte assume o seu maior valor: $S = \cdots$.

Quando Pablo ia copiar a expressão S, apagaram o quadro. Só conseguia lembrar-se de que S era da forma

$$S = \pm x_1 \pm x_2 \pm \cdots \pm x_{2002} + x_{2003},$$

onde o último termo, x_{2003}, tinha coeficiente +1, e os anteriores tinham coeficiente +1 ou –1. Demonstre que Pablo, apesar de não ter o enunciado completo, pode determinar com certeza a solução do problema.

Duração: 4 ½ horas
Cada problema vale sete pontos **Versão em português**

XVIII Olimpíada Ibero-americana de Matemática
Segundo Dia
17 de Setembro de 2003

4. Seja $M = \{1, 2, \ldots, 49\}$ o conjunto dos primeiros 49 inteiros positivos. Determine o maior inteiro k tal que o conjunto M tenha um subconjunto de k elementos em que não haja 6 números consecutivos. Para esse valor máximo de k, encontre a quantidade de subconjuntos de M, de k elementos, que tenham a propriedade mencionada.

5. No quadrado $ABCD$, sejam P e Q pontos pertencentes aos lados BC e CD respectivamente, distintos dos extremos, tais que $BP=CQ$. Consideram-se pontos X e Y, $X \neq Y$, pertencentes aos segmentos AP e AQ respectivamente. Demonstre que, quaisquer que sejam X e Y, existe um triângulo cujos lados têm os comprimentos dos segmentos BX, XY e DY.

6. Definem-se as sucessões $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ por:

$$a_0 = 1, \quad b_0 = 4 \quad \text{e}$$

$$a_{n+1} = a_n^{2001} + b_n, \quad b_{n+1} = b_n^{2001} + a_n \quad \text{para } n \geq 0.$$

Demonstre que 2003 não divide nenhum dos termos destas sucessões.

Duração: 4 ½ horas
Cada problema vale sete pontos **Versão em português**

V Olimpíada Matemática Centroamericana y del Caribe.

Costa Rica, 26 de Agosto de 2003.
Primer día

Problema 1. Dos jugadores A y B, juegan por turnos el siguiente juego: Se tiene un montón de 2003 piedras. En su primer turno, A escoge un divisor de 2003, y retira ese número de piedras del montón inicial. Posteriormente, B escoge un divisor del número de piedras restantes, y retira ese número de piedras del nuevo montón, y siguen así sucesivamente. Pierde el jugador que retire la última piedra. Demostrar que uno de los dos jugadores tiene una *estrategia ganadora* y describir dicha estrategia.

Nota: Se entiende por *estrategia ganadora* un método de juego que le garantiza la victoria al que lo aplica sin importar lo que haga su oponente.

Problema 2. Sea S una circunferencia y AB un diámetro de ella. Sea t la recta tangente a S en B y considere dos puntos C, D en t tales que B esté entre C y D. Sean E y F las intersecciones de S con AC y AD y sean G y H las intersecciones de S con CF y DE. Demostrar que $AH = AG$.

Problema 3. Sean a, b enteros positivos, con $a > 1$ y $b > 2$. Demostrar que $a^b + 1 \geq b(a + 1)$ y determinar cuándo se tiene la igualdad.

Tiempo: 4 horas 30 minutos.
Cada Problema vale 7 puntos.

V Olimpíada Matemática Centroamericana y del Caribe.

Costa Rica, 27 de Agosto de 2003.
Segundo día

Problema 4. Sean S_1 y S_2 dos circunferencias que se intersectan en dos puntos distintos P y Q. Sean ℓ_1 y ℓ_2 dos rectas paralelas, tales que:

i. ℓ_1 pasa por el punto P e intersecta a S_1 en un punto A_1 distinto de P y a S_2 en un punto A_2 distinto de P.

ii. ℓ_2 pasa por el punto Q e intersecta a S_1 en un punto B_1 distinto de Q y a S_2 en un punto B_2 distinto de Q.

Demostrar que los triángulos A_1QA_2 y B_1PB_2 tienen igual perímetro.

Problema 5. Un tablero cuadrado de 8cm de lado se divide en 64 casillas cuadradas de 1cm de lado cada una. Cada casilla se puede pintar de blanco o de negro. Encontrar el número total de maneras de colorear el tablero de modo tal que cada cuadrado de 2cm de lado formado por cuatro casillas con un vértice común, contenga dos casillas blancas y dos negras.

Problema 6. Digamos que un entero positivo es *tico* si la suma de sus dígitos (en base 10) es múltiplo de 2003.

i. Demostrar que existe un entero positivo N tal que sus primeros 2003 múltiplos, $N, 2N, 3N, \cdots, 2003N$, son todos *ticos*.

ii. ¿Existe algún entero positivo N tal que todos sus múltiplos sean *ticos*?

Tiempo: 4 horas 30 minutos.
Cada Problema vale 7 puntos.

V Olimpíada Matemática Centroamericana y del Caribe.

Costa Rica, 25 al 30 de Agosto de 2003.
Soluciones Prueba 1 y Prueba 2

Problema 1.

Solución oficial: Mostraremos que el jugador B tiene estrategia ganadora. Nótese que en cada jugada se retira al menos 1 piedra, por lo que siempre debe existir un perdedor.

Al inicio, A en su turno recibe un montón impar de piedras (2003). Como todos los divisores de un impar son impares, A dejará a B un número par de piedras (impar-impar = par) .

- Si le deja 0 piedras, que es par, B gana.

- Si le deja un número par de piedras mayor a 0, B retira cualquier divisor impar del número de piedras restantes (por ejemplo 1) y de este modo le deja de nuevo a A un montón impar de piedras. Si B repite sucesivamente este método nunca perderá ya que siempre deja al menos 1 piedra. Entonces A será el perdedor y B se asegura la victoria.

Problema 2.

Solución oficial: Como $\angle AGB = \angle AHB = 90°$ y los triángulos AGB y AHB tienen el lado común AB, serán suficiente con demostrar que $\angle ABH = \angle ABG$ pues entonces los triángulos AGB y AHB son congruentes y por tanto $AG = AH$.

Como $AEBH$ y $AGBF$ son cuadriláteros cíclicos, entonces $\angle AEH = \angle ABH$ y $\angle GBA = \angle GFA$.

Ahora, como $\angle AEH + \angle CED = 180° = \angle GFA + \angle CFD$, si $\angle CED = \angle CFD$, entonces $\angle AEH = \angle GFA$.

Para demostrar que $\angle CED = \angle CFD$ basta demostrar que $CEFD$ es cíclico. Esto se sigue de ver que el triángulo ABE es semejante al triángulo ABC y que el triángulo AFB es semejante al triángulo ABD.

Entonces de la primera semejanza, $AB^2 = AE \cdot AC$ y de la segunda semejanza, $AB^2 = AD \cdot AF$. En consecuencia, $AE \cdot AC = AD \cdot AF$ y $CEFD$ es cíclico.

Otra manera de probar que $CEFD$ es cíclico es observando que los triángulos AEB y ABC son semejantes ya que son rectángulos y comparten el ángulo $\angle EAB = \angle CAB$. Por lo tanto $\angle ABE = \angle BCA$.

Además $\angle ABE = \angle AFE$ ya que $ABEF$ es cíclico y ambos ángulos subtienden el mismo arco. Luego

$$\angle EFD = 180^\circ - \angle AFE = 180^\circ - \angle ABE = 180^\circ - \angle ACB = 180^\circ - \angle ECD.$$

Por lo tanto, $\angle EFD + \angle ECD = 180^\circ$ y $CEFD$ es cíclico.

Problema 3.

Solución oficial: Se procederá por inducción sobre b.

Para $b = 3$, se tiene que $a^3 + 1 = (a+1)(a^2 - a + 1)$. Para mostrar que esta expresión es mayor que $3(a+1)$ es suficiente demostrar que $(a^2 - a + 1) \geq 3$, lo cual es cierto pues $a^2 - a + 1 > a(a-1) \geq 2$.

Ahora supóngase que la expresión es cierta para algún valor de b, es decir, se cumple que $a^b + 1 \geq b(a+1)$. Se demostrará ahora para $b + 1$.

Nótese que

$$a^{b+1} + 1 = a(a^b + 1) - (a+1) + 2 \geq ab(a+1) - (a+1) + 2,$$

donde la última desigualdad se tiene por la hipótesis de inducción. La última expresión se puede reescribir como

$$ab(a+1) - (a+1) + 2 = (a+1)(ab-1) + 2 > (ab-1)(a+1).$$

Finalmente, $ab - 1 \geq 2b - 1 = (b+1) + (b-2) > b + 1$, lo cual es cierto.

Por tanto, la desigualdad se vuelve estricta después de $b = 3$. Retomando el caso $b = 3$, se observa que $a(a-1) = 2$ únicamente cuando $a = 2$. Por tanto, se ha demostrado por inducción que la desigualdad siempre se tiene, y que la igualdad se da únicamente en el caso $a = 2$, $b = 3$. Esto concluye la solución.

Solución alternativa 1: $a \geq 2$, $b \geq 3$, dividimos en dos casos:

1. b impar.

$$a^b + 1 = (a+1)(a^{b-1} - a^{b-2} + a^{b-3} - a^{b-4} + \cdots + a^2 - a + 1)$$

como $a+1>0$, basta demostrar que

$$(a^{b-1}-a^{b-2})+(a^{b-3}-a^{b-4})+\cdots+(a^2-a)+1\geq b \quad (*).$$

Del lado izquierdo tenemos $\frac{b-1}{2}$ sumandos entre paréntesis, cada uno de ellos mayor o igual a $a^2-a=a(a-1)\geq 2\cdot 1=2$. Por tanto el lado izquierdo es mayor o igual a $\frac{b-1}{2}$ veces 2 mas 1, es decir, mayor o igual a b. Con ello se prueba la desigualdad requerida $(*)$.

Obsérvese que si $a>2$ entonces $a^2-a>2$ y la desigualdad es estricta.

Además, todos los sumandos entre paréntesis en $(*)$ son de la forma $a^n(a^2-a)$ con $n\geq 0$ par.

Luego, si $n\geq 2$, $a^n(a^2-a)\geq a^2(a^2-1)\geq 4\cdot 2=8>2$. Entonces, si $b>3$ en $(*)$ hay más de un sumando entre paréntesis y por tanto alguno mayor a 2. Así, la desisgualdad es estricta para $b>3$.

2. b par. Utilizaremos el caso anterior.

$$\begin{aligned} a^b+1 &= a^{b-1}+1+a^{b-1}(a-1)\geq(b-1)(a+1)+a^{b-1}(a-1)\\ &\geq (b-1)(a+1)+a^{b-1}=b(a+1)+a^{b-1}-a-1. \end{aligned}$$

Para concluir, nótese que como $b-1\geq 3$, $a^{b-1}-a-1>0$. Así que

$$a^b+1\geq b(a+1)+a^{b-1}-a-1>b(a+1).$$

La igualdad ocurre sólo si $a=2$ y $b=3$.

Solución alternativa 2: Se procederá por inducción sobre a.
Para $a=2$ se tiene que mostrar que

$$2^b+1\geq 3b.$$

Esta desigualdad se probará, a su vez por inducción sobre b.

Para $b=3$, $2^3+1=3\cdot 3$ y se cumple la igualdad para $a=2, b=3$. Supóngase que $2^b+1\geq 3b$ para un valor de $b\geq 3$. Como se cumple que $2^b>3$, sumando ambas desigualdades se tiene que $2^{b+1}+1\geq 3(b+1)$ con lo cual además vemos que si $a=2$ sólo hay igualdad para $b=3$.

Ahora concluiremos la inducción. Supongamos que

$$a^b+1\geq b(a+1),$$

para algún valor de $a \geq 2$ y $b \geq 3$. Luego

$$(a+1)^b + 1 = a^b + \binom{b}{1} a^{b-1} + \cdots + 1^b + 1 \geq b(a+2).$$

Esto completa la inducción y además muestra que si $a > 2$, no se cumple la igualdad. Por tanto, la desigualdad siempre se tiene, con igualdad solamente si $a = 2$ y $b = 3$.

Solución alternativa 3:
Notemos que $2^n \geq n+1$ para $n \geq 0$. Entonces, si $a = 2$ tenemos

$$a^b = 2^b = 4 \cdot 2^{b-2} \geq 4(b-1),$$

y claramente $4(b-1) > 3b-1$ pra $b > 3$. Para $b = 3$ se da la igualdad.
Ahora, si $a > 2$ tenemos

$$\begin{aligned} a^b &= (1+(a-1))^b \geq (a-1)^b + b(a-1) + 1 \geq 2^b + b(a-1) + 1 \\ &= 2 \cdot 2^{b-1} + b(a-1) + 1 > 2(b-1) + b(a-1) + 1 = b(a+1) - 1. \end{aligned}$$

Solución alternativa 4: Consideramos las sucesdion es de números entre 1 y a de longitud b. En total, hay a^b sucesiones de éstas. Veremos que si $a \geq 3$ ó $a = 2$ y $b \geq 4$ hay al menos $(a+1)b$ sucesiones distintas.
Caso $a \geq 3$:

$$\underbrace{11\ldots 1k1\cdots 1}_{b} \,\text{con}\, k > 1 \rightarrow (a-1)b \,\text{sucesiones}$$

$$\underbrace{11\ldots 122\cdots 1}_{b} \rightarrow b \,\text{sucesiones}$$

$$\underbrace{11\ldots 133\cdots 1}_{b} \rightarrow b \,\text{sucesiones}$$

en estos últimos casos consideramos también $21\cdots 12$ y $31\cdots 13$
Luego, $(a-1)b + b + b = (a+1)b$
Caso $a = 2, b > 3$:

$$\underbrace{11\ldots 121\cdots 1}_{b} \rightarrow b \,\text{sucesiones}$$

$$\underbrace{11\ldots1221\cdots1}_{b} \to b\,\text{sucesiones}$$

$$\underbrace{11\ldots12221\cdots1}_{b} \to b\,\text{sucesiones}$$

en estos últimos casos consideramos también $21\cdots12$ y $2211\cdots12$ y $21\cdots122$. Nótese que las sucesiones el último caso son distintas pues $b > 3$.

Luego si $a > 2 ó b > 3$

$$a^b \geq b(a+1) > b(a+1) - 1.$$

Si $a = 2 y b = 3$ se da la igualdad.

Problema 4.

Solución oficial: Se demostrará que los triángulos A_1QA_2 y B_1PB_2 son congruentes, de donde el resultado se sigue de forma inmediata.

Nótese inicialmente que como $A_1P \parallel B_1Q$, entonces A_1PQB_1 es un trapecio isósceles y sus diagonales son iguales, de donde $A_1Q = B_1P$. Ahora bien, como $\angle PA_1Q = \angle PB_1Q$ por estar inscritos en el mismo arco, y $\angle PA_2Q = PB_2Q$ por la misma razón, entonces $\triangle A_1QA_2$ y $\triangle B_1PB_2$ son semejantes. Como ya se demostró la igualdad entre un par de lados adyacentes, la congruencia de los triángulos se sigue, y el resultado es ahora inmediato.

Solución alternativa 1:

$\angle PA_1Q = \angle PB_1Q$, por estar inscritos en el mismo arco en S_1.

$\angle PA_2Q = \angle PB_2Q$, por estar inscritos en el mismo arco en S_2.

A_2B_2QP es cíclico, por lo que:

$$\angle A_2B_2Q = \angle A_1PQ(1)$$

A_1PQB_1 es cíclico, por lo que:

$$\angle A_1PQ = 180° - \angle QB_1A_1(2)$$

De (1) y (2) se sigue que $\angle A_2B_2Q + QB_1A_1 = 180°$, por lo que $A_1B_1 \parallel A_2B_2$.

Así, $A_1A_2B_2B_1$ es un paralelogramo y sus lados opuestos son iguales y ello implica que $A_1A_2 = B_1B_2$.

Finalmente, por el criterio de congruencia ángulo-lado-ángulo, los triángulos A_1QA_2 y B_1PB_2 son congruentes, y el resultado se sigue.

Nota: De hecho, se puede demostrar que los triángulos A_1QA_2 y B_1PB_2 son congruentes si y sólo si $A_1A_2 \parallel B_1B_2$ o $A_1B_1 \parallel PQ \parallel A_2B_2$. Se ha utilizado la formulación propuesta para no mostrar tan claramente, desde el enunciado, lo que se debe hacer.

Solución alternativa 2:
$\angle PA_1Q = \angle PB_1Q$,y $\angle PA_2Q = \angle PB_2Q$ por estar inscritos en un mismo arco. Luego A_1A_2Q y B_1B_2P son triágulos semejantes. La altura correspondiente aQ y a P en dichos triágulos es la distancia entre las rectas paralelas ℓ_1 y ℓ_2. Por tanto, por tener una altura correspondiente igual y ser semejantes, A_1A_2Q y B_1B_2P son congruentes y el resultado se sigue.

Problema 5.
Solución oficial: Coloreemos la primera fila de casillas de cualquier manera y tratemos de extender la coloración a todo el tablero. Si dos casillas consecutivas de la primera fila tienen el mismo color, las dos que están debajo de ellas en la segunda fila deben recibir el color opuesto, y es fácil ver que hay una única manera admisible de colorear las casillas restantes de la segunda fila, a saber, con el color opuesto al de la casilla correspondiente en la primera fila. Este razonamiento se repite para la tercera, la cuarta... hasta la última fila. En cambio si en la primera fila no hay casillas consecutivas del mismo color, es decir si se colorea BNBNBNBN o NBNBNBNB, entonces la segunda fila admite cualquiera de esas dos coloraciones alternadas, y lo mismo la tercera y las filas restantes. En resumen, cada una de las dos coloraciones alternadas de la primera fila se puede extender de 2^7 maneras, mientras que cada una de las 2^8-2 coloraciones no alternadas se extiende de manera única. En total se obtienen entonces $2 \cdot 2^7 + 2^8 - 2 = 2^9 - 2 = 510$ coloraciones.

Solución alternativa:
Cada fila del tablero admite dos çoloraciones alternadas", a saber BNBNBNBN y NBNBNBNB. Si cada fila se colorea de alguna de estas dos maneras se obtiene $2^8 = 256$ coloraciones válidas.

Hay sólo 2 coloraciones que pueden obtenerse de ambas maneras, es decir que tienen cada fila y cada columna alternada: son las coloraciones del tablero de ajedrez (con la casilla inferior dereche blanca) y su opuesta. Por lo tanto hay $2^8 + 2^8 - 2 = 256 + 256 - 2 = 510$ coloraciones válidas que tienen todas las filas alternadas ó todas las columnas alternadas.

Ahora veamos veamos que no hay más coloraciones válidas que éstas 510. Si hubiese otra, tendría alguna fila i con dos casillas contiguas $(i,j),(i,j+1)$ del mismo color. Es fácil ver que para cualquier fila i' las casillas $(i,j),(i,j+1)$ son del mismo color. Análogamente, existe una columna h con dos casillas contiguas $(k,h),(k+1,h)$ del mismo color, y para cualquier h' se debe cumplir que $(k,h'),(k+1,h')$ son del mismo color. Pero entonces las cuatro casillas $(k,h),(k+1,h),(k,h'),(k+1,h')$serían del mismo color y por tanto la coloración del tablero no sería válida.

Problema 6.
Solución oficial:

1. i. Se construye N con 2003 unos (1's) separados por grupos de tres (3) ceros. Así:

$$N = 1000100010001\cdots100010001.$$

Si $s(n)$ denota la suma de los dígitos de n, entonces $s(N) = 2003$. Si k es un entero entre 1 y 2003, $N \cdot k$ es igual a 2003 k's separados por grupo de 3,2,1 ó 0 ceros, de acuerdo a si k tiene 1,2,3 ó 4 cifras. En cualquier caso, $s(N \cdot k) = 2003k$ y $N \cdot k$ es *tico*.

ii. Supongamos que existe un tal número N. Escribimos $N = 2^\alpha 5^\beta N_1$ donde N_1 es coprimo con 10. Sea $\gamma := \max\{\alpha, \beta\}$. Para cada entero positivo m, tenemos que $m \cdot 2^{\gamma-\alpha} \cdot 5^{\gamma-\beta} = m \cdot N_1 \cdot 10^\gamma$ y $s(mN_1 10^\gamma) = s(mN_1)$. Por lo tanto, podemos suponer que N es coprimo con 10 (si no, cambiamos N por N_1).

Como N_1 es coprimo con 10, es bien conocido que existe un múltiplo suyo A de la forma

$$A := \underbrace{11\ldots1}_{\ell \text{ veces}}$$

(de hecho, tomando $M = 9N$ y poniendo $\ell := \phi(M)$ por el Teorema de Euler tenemos que $10^{\phi(M)} - 1 \equiv 0 \pmod{9N}$, y por lo tanto,

$$\underbrace{11\ldots1}_{\phi(M) \text{ veces}} = \frac{10^{\phi(M)} - 1}{9}$$

se divide por N).

Entonces A es un múltiplo de N y $s(A) = \ell$. Por lo tanto ℓ es un múltiplo de 2003. De acá se puede concluir de dos maneras:

1. Entonces $6A$ y $4 \cdot 10^{\ell-1}A$ son múltiplos de N y la suma de ellos también, y es

$$\underbrace{44\ldots4}_{\ell-2 \text{ veces}}50\underbrace{66\ldots6}_{\ell-1 \text{ veces}}$$

cuya suma de digitos es $4(\ell-2)+5+6(\ell-1) = 10\ell-9$. Como ℓ se divide por 2003, $10\ell-9$ no se puede dividir por 2003, y hemos obtenido la contradicción deseada.

2. Tenemos

$$A := \underbrace{11\ldots1}_{\ell \text{ veces}}$$

entonces $A \cdot 19$ es

$$\underbrace{99\ldots9}_{\ell \text{ veces}} + \underbrace{11\ldots1}_{\ell \text{ veces}}0 = 2\underbrace{11\ldots1}_{\ell-2 \text{ veces}}09$$

y por tantro $s(A \cdot 19) = \ell + 9$. Pero ℓ y $\ell + 9$ no pueden ser simultáneamente múltiplos de 2003.

Solución alternativa para ii.:

ii. La respuesta es no. Se procederá por reducción al absurdo. Supongamos que existe $N = a_1a_2\cdots a_n$ con la propiedad que $k \cdot A$ es *tico* para todo k entero positivo. Se puede suponer sin pérdida de generalidad que $a_n \neq 0$, ya que si $N = 10^t \cdot x$, entonces x también tiene la propiedad porque $s(k\cdot 10^t \cdot x) = s(k\cdot x)$. Entonces, calcularemos $s((10^n-1)N)$ y $s((10^{n+1}-1)N)$:

- Si N, en base 10, es $a_1a_2\cdots a_n$, entonces $(10^n-1)N$, en base 10, es

$$a_1a_2\cdots a_{n-1}(a_n-1)(9-a_1)(9-a_2)\cdots(9-a_{n-1})(10-a_n)$$

y así $s((10^n-1)N) = 9n$.

- $(10^{n+1}-1)N$, en base 10, es

$$a_1a_2\cdots a_{n-1}(a_n-1)9(9-a_1)(9-a_2)\cdots(9-a_{n-1})(10-a_n)$$

y así $s((10^{n+1}-1)N)=9n+9$.

Pero como $9n$ y $9n+9$ no pueden ser ambos múltiplos de 2003, N no cumple la propiedad deseada.

2. Un argumento alternativo al dado en la parte final de ii. es el siguente:

   Se probó que $s((10^n-1)N)=9n$. Entonces, como (2003,3)=1, n es múltiplo de 2003. Pero se observa que $11N$ tiene $n+1$ ó $n+2$ cifras, y su última cifra es $a_n \neq 0$. Así, por por el razonamiento anterior $n+1$ ó $n+2$ debe ser también múltiplo de 2003, lo cual es una contradicción.

Revista Escolar
de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática
ISSN 1698-677X
Número 9-Cono Sur

XIV Olimpíada Matemática de Países del Cono Sur

24 al 30 de mayo de 2003
Ica - Perú

Pruebas

Primer día

Problema 1

En un torneo de fútbol entre cuatro equipos A, B, C y D, cada equipo juega con cada uno de los otros una sola vez.

a) Decidir si es posible que al finalizar el torneo, las cantidades de goles anotados y recibidos por los equipos sean:

Equipo	A	B	C	D
Goles anotados	1	3	6	7
Goles recibidos	4	4	4	5

Si la respuesta es afirmativa, dar un ejemplo para los resultados de los seis partidos; en caso contrario, justificar por qué.

b) Decidir si es posible que, al finalizar el torneo, las cantidades de goles anotados y recibidos por los equipos sean:

Equipo	A	B	C	D
Goles anotados	1	3	6	13
Goles recibidos	4	4	4	11

Si la respuesta es afirmativa, dar un ejemplo para los resultados de los seis partidos; en caso contrario, justificar por qué.

Problema 2.

Sea la sucesión *{an}* definida de la siguiente forma:

$a_1=1$
$a_2=3$
$a_{n+2}=2a_{n+1}\ a_{n+1}$; para todo *n mayor o igual que 1.*

Probar que la máxima potencia de 2 que divide $a_{4006} - a_{4005}$ es 2^{2003}

Problema 3

Sea ABC un triángulo acutángulo tal que el ángulo B mide 60º. La circunferencia de diámetro AC corta a las bisectrices interiores de los ángulos A y C en los puntos M y N, respectivamente (M distinto de A y N distinto de C). La bisectriz interior del ángulo B corta a MN y AC en los puntos R y S, respectivamente. Demostrar que BR es menor o igual a RS.

Duración 4 horas.

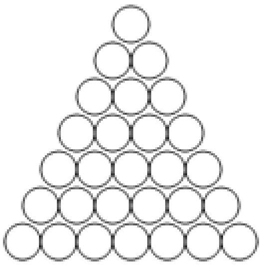
Segundo Día

Problema 4

En un triángulo acutángulo ABC, los puntos H, G y M se encuentran sobre el lado BC, de modo que AH, AG y AM son altura, bisectriz y mediana del triángulo, respectivamente. Se Sabe que HG=GM, AB=10 y AC=14. Determinar el área del triángulo ABC.

Problema 5

Sea $n=3k+1$, donde k es un entero mayor o igual que 1. Se construye un arreglo triangular de lado n formado por círculos del mismo radio como el mostrado en la figura cuando $n=7$.



Determinar, para cada k, el mayor número de círculo que pueden colerearse de rojo de tal modo que no haya dos círculos de color rojo tangentes entre sí.

Problema 6.

Demostrar que existe una sucesión de enteros positivos *x1, x2, x3, .. xn, ...* que satisface las dos condiciones siguiente:

i. contiene exactamente una vez cada uno de los enteros positivos
ii. para cada n=1,2, ... la suma parcial x1 + x2 + ... + xn es divisible por nn

Duración: 4 horas

Versión en portugués (sitio OBM en PDF)

Problema 33

(I.Sharygin; comunicado al editor por el Prof. Jean-Louis Ayme, St.Denis, isla de la Reunión, Francia)

Sean $\mathbf{C}_1$ y $\mathbf{C}_2$ dos circunferencias secantes en P y Q. Sea t una tangente común a las dos circunferencias. Sean R y S los puntos de contacto respectivos de t con $\mathbf{C}_1$ y $\mathbf{C}_2$.

Sean :
A, un punto de $\mathbf{C}_1$;
B, el segundo punto de intersección de AP con $\mathbf{C}_2$;
C, el segundo punto de intersección de $\mathbf{C}_1$ con la paralela a BS que pasa por R;
D, el segundo punto de intersección de CQ con $\mathbf{C}_2$.

Demostrar que RA y SD son paralelas.

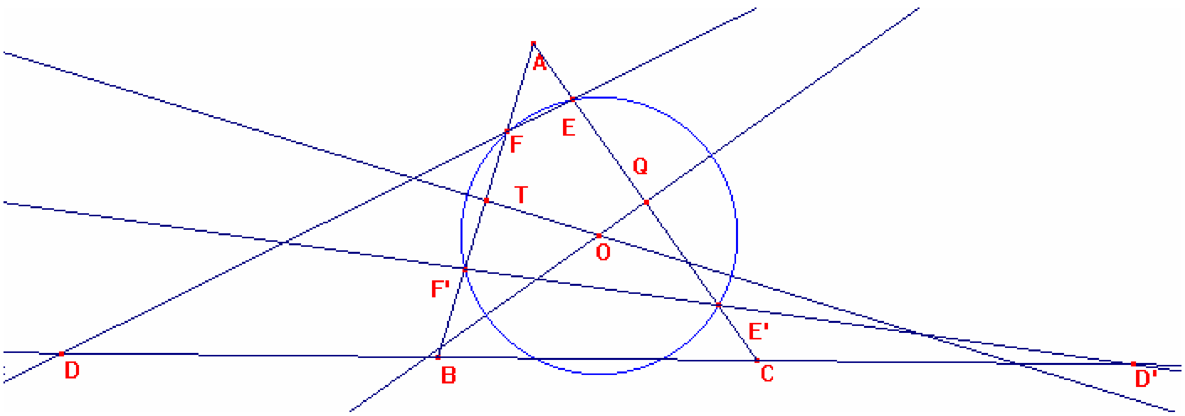
Sea T un punto sobre la recta RS en la dirección RS. Como $RC \| BS$, entonces $\angle CRT = \angle BST$. Por ser t tangente a ambos círculos obtenemos $\angle RAC = \angle SDB = \theta$. Esto quiere decir que una rotación del plano en θ lleva la recta AC a la recta AR, y la recta DB a la recta DS, por tanto basta probar que $AC \| DB$. Para ver esto, notemos que $\angle DBP = \angle DQP = \angle CQP = \angle PAC$, y terminamos.

Problema 39.-

Una circunferencia concéntrica con la circunscrita al triángulo ABC corta a AC en E y E'; a AB en F y F'. Las rectas EF y E'F' cortan a BC en D y D'. Demostrar que D y D' equidistan del centro de la circunferencia.

Solución de Ricardo Barroso Campos Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Sevilla.

Tengamos la figura correspondiente.



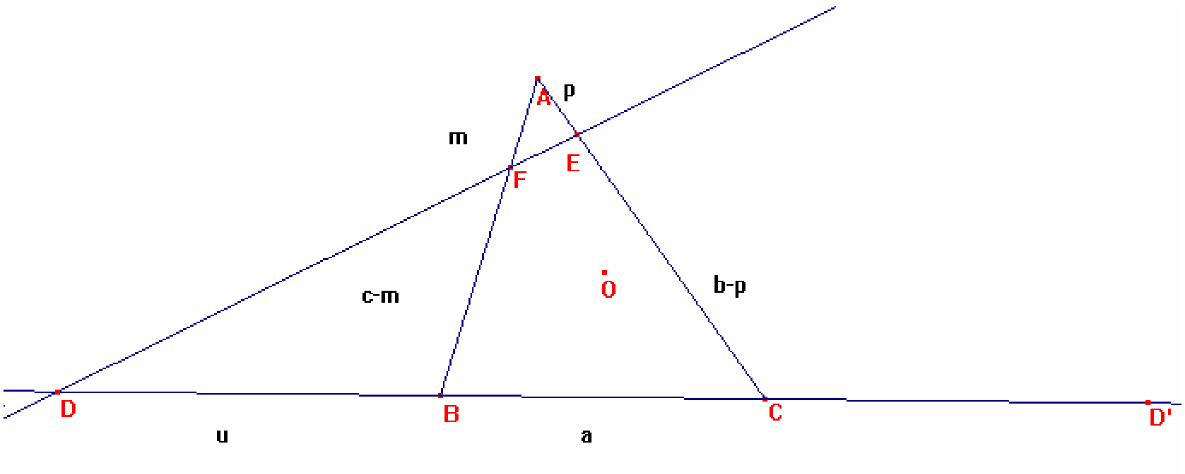
Sea AB = c, AC = b, BC = a.

Por ser circunferencia concéntrica con la circunscrita, tenemos que:

A F = AT – TF = BT- TF' = F'B =m, A E = AQ –QE = CQ- QE'= E'C = p.

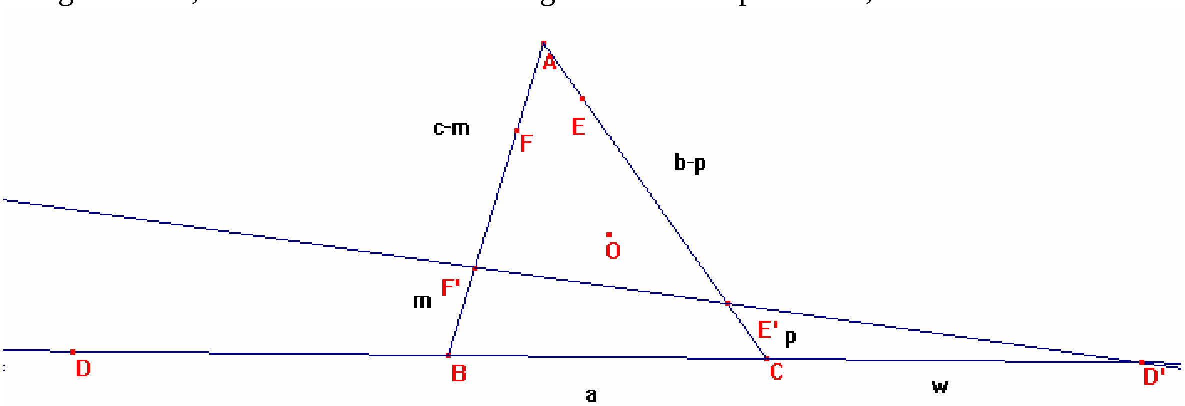
Sea DB=u.

Es, aplicando el teorema de Menalao (considerando longitudes absolutas sin tener en cuenta los sentidos de los segmentos) al triángulo ABC con la transversal FED:



u (b-p) m = (u+a) p (c-m).

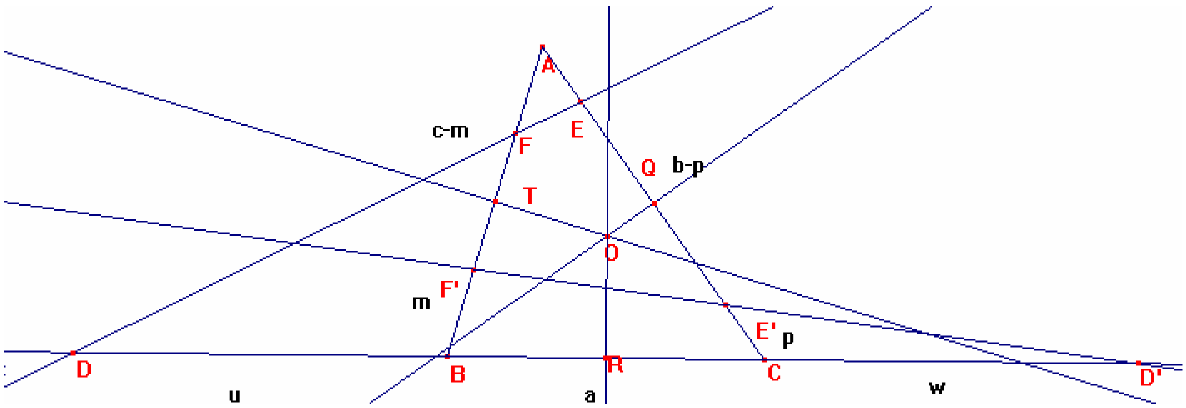
De igual modo, al tener en cuenta la configuración correspondiente, es:



w (b-p) (m) = (w+a) p (c-m).

Dividiendo ambas expresiones, nos queda:

u/w= (u+a)/(w+a), de donde u=w.



Así, cqd, es DR = RD` y por ello, OD=OD’

Problema 40

Una circunferencia de radio ρ es tangente a los lados AB y AC del triángulo ABC, y su centro está a una distancia p del lado BC.

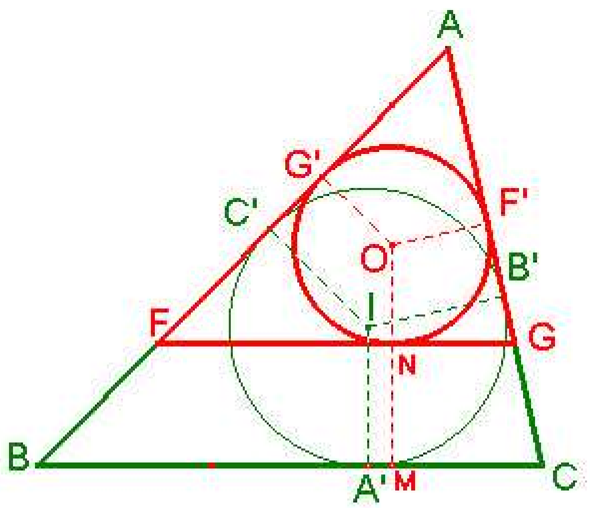
i) Probar que: $a.(p-\rho) = 2s.(r-\rho)$,

donde *r* es el radio de la circunferencia inscrita y 2*s* es el perímetro del triángulo.

ii) Demostrar también que si la circunferencia de radio corta a BC en los puntos D y E, entonces $DE = \dfrac{4\sqrt{r.r_a.(\rho - r).(r_a - \rho)}}{r_a - r}$, donde r_a es el radio de la circunferencia exinscrita correspondiente a A.

Sol:

i) Para una mayor comprensión del enunciado, sea considerada la siguiente ilustración:



Sea el triángulo ABC y su circunferencia inscrita de centro I y radio r.
Sea también la circunferencia tangente a los lados AB y AC en los puntos G' y F', respectivamente.
Su centro es el punto O y el radio ρ, siendo la distancia de O hasta el lado BC igual a p.

La semejanza existente entre los triángulos ABC y AFG permite establecer la siguiente relación:

$\dfrac{AC'}{AG'} = \dfrac{s-a}{AG'} = \dfrac{r}{\rho}$ de donde

AG'= (s–a).ρ / r.

También tendremos que: FG= a.ρ / r.

Por tanto, el semiperímetro del triángulo AFG es igual a AG' + FG. Así su área S' es igual a:

$$S' = [(s-a).\rho / r + a.\rho / r].\ \rho$$

Por otro lado, el trapecio BFGC cuyas bases son FG y BC tiene como área T el valor:

$$T = 1/2.[\ a.\rho/r + a].\ (p-\rho)$$

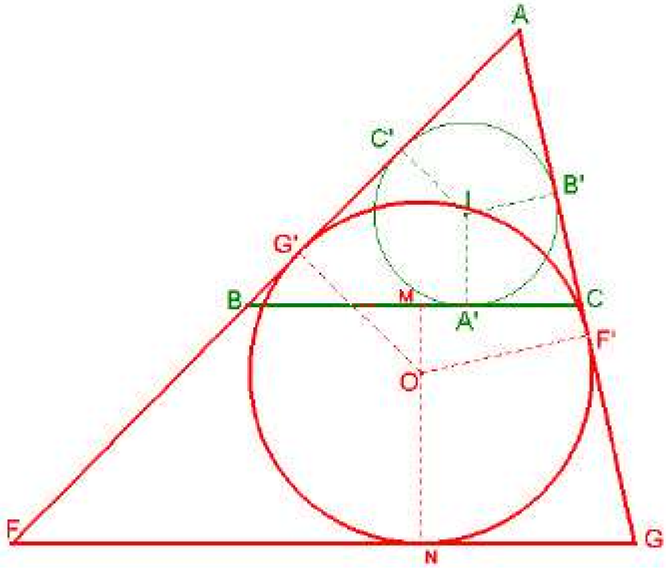
Por fin, el área S del triángulo ABC es igual a S= s.r

Veamos que de la relación entre áreas S' + T = S, obtenemos la identidad deseada.

$[(s-a).\rho / r + a.\rho / r].\ \rho + 1/2.[\ a.\rho/r + a].\ (p-\rho) = s.r$;
$[(s-a).\rho^2 + a.\rho^2\ ] + 1/2.[\ a.\rho + a.r].\ (p-\rho) = s.r^2$;
$1/2.a.(\rho + r).\ (p-\rho) = s.r^2 - s.\rho^2$;
$a.(\rho + r).\ (p-\rho) = 2.s.(r-\rho).(r+\rho)$; $\boxed{a.(p-\rho) = 2.s.(r-\rho)}$

Nota: Para otra configuración diferente del triángulo tangente a los lados AB y AC del triángulo dado, el procedimiento es similar a efectos de cómputo, pero la relación antes demostrada ya no seguiría siendo válida. Busquemos la relación existente en otra situación.

Relación que sería deducida de los siguientes datos:



S’= [(s–a).ρ / r + a.ρ / r]. ρ

T= 1/2.[a.ρ/r + a]. (p + ρ)

S= s. r

Entonces: S + T = S’ y la relación que ahora sí sería válida sería la siguiente:

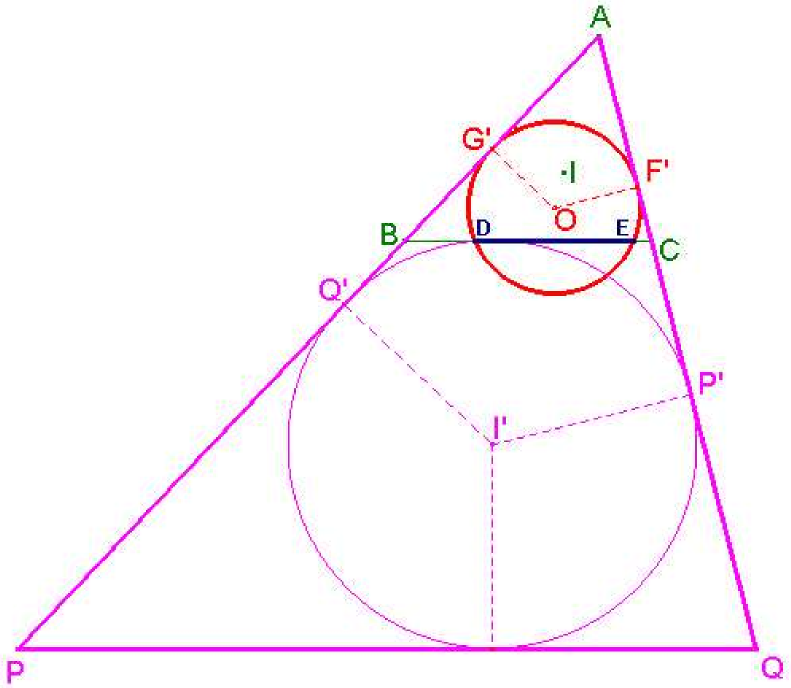
$$\boxed{a\,.(p + \rho) = 2.s.(\rho - r)}$$

ii) Demostrar también que si la circunferencia de radio corta a BC en los puntos D y E, entonces $DE = \frac{4\sqrt{r.r_a.(\rho - r).(r_a - \rho)}}{r_a - r}$, donde r_a es el radio de la circunferencia exinscrita correspondiente a A.

Sol:

Esta "nueva" situación recuerda sobremanera a la situación del apartado anterior, siempre que entendamos los siguientes acuerdos:

La circunferencia exinscrita al triángulo ABC correspondiente al vértice A no es otra que la circunferencia inscrita al triángulo APQ. Por tanto, el radio r' de esta última será igual a r_a.



La circunferencia tangente a los lados AB y AC del triángulo ABC no es otra que la circunferencia tangente a los lados AP y AQ del triángulo APQ.

Su radio es igual a ρ y la distancia del centro hasta el lado PQ es igual a

$p' = \sqrt{\rho^2 - \frac{1}{4}DE^2} + 2.r_a$.

Por otro lado, $PQ = a' = a.r_a / r$ y el perímetro del triángulo APQ será igual a $2s' = 2s.\ r_a / r$.

En definitiva, aplicando el resultado del apartado anterior antes visto, tenemos que: $a'(p' - \rho) = 2s'.(r' - \rho)$.

Sustituyendo y operando convenientemente llegamos a las siguientes expresiones:

$a.r_a / r .[\sqrt{\rho^2 - \frac{1}{4}DE^2} + 2.r_a - \rho] = 2s.\ r_a / r.(r_a - \rho)$;

$a.[\sqrt{\rho^2 - \frac{1}{4}DE^2} + 2.r_a - \rho] = 2s.(r_a - \rho)$;

$[\sqrt{\rho^2 - \frac{1}{4}DE^2} + 2.r_a - \rho] = 2.s/a.(r_a - \rho)$;

Teniendo en cuenta la relación de semejanza existente entre las circunferencias inscrita y exinscrita a un mismo triángulo ABC, obtenemos que $r / r_a = (s-a)/ s$. De donde $s/a = r_a / (r_a - r)$.

Sustituyendo ahora esta expresión en la última identidad llegamos a los siguientes resultados:

$[\sqrt{\rho^2 - \frac{1}{4}DE^2} + 2.r_a - \rho] = 2.\ (r_a - \rho).\ r_a / (r_a - r)$;

$\sqrt{\rho^2 - \frac{1}{4}DE^2} = [2.\ (r_a - \rho).\ r_a - (2.r_a - \rho).(r_a - r)] / (r_a - r)$;

$$\sqrt{\rho^2 - \frac{1}{4}DE^2} = [(2.r_a - 2.\rho - 2.r_a + \rho).\ r_a + (2.r_a - \rho).r] / (r_a - r);$$

$$\sqrt{\rho^2 - \frac{1}{4}DE^2} = [-\rho.r_a + (2.r_a - \rho).r] / (r_a - r);$$

$$\tfrac{1}{4}\ DE^2 = \rho^2 - [-\rho.r_a + (2.r_a - \rho).r]^2 / (r_a - r)^2;$$

$$\tfrac{1}{4}\ DE^2 = [(\rho.(r_a - r) - \rho.r_a + (2.r_a - \rho).r) / (r_a - r)].\ [(\rho.(r_a - r) + \rho.r_a - (2.r_a - \rho).r) / (r_a - r)]$$

$$\tfrac{1}{4}\ DE^2 = [2.(r_a - \rho).r / (r_a - r)].\ [2.r_a\,.(\rho - r) / (r_a - r)]$$

$$DE^2 = [16.r_a\,.r\ (r_a - \rho).(\rho - r)] / (r_a - r)^2$$

Es decir,

$$DE = \frac{4\sqrt{r.r_a.(\rho - r).(r_a - \rho)}}{r_a - r}\ \text{, c.q.d.}$$

Saludos de F. Damián Aranda Ballesteros. Córdoba (España)

Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática

OEI

ISSN 1698-677X

Número 9-Problemas

Está en:
OEI - Programación - Olimpíada de Matemática - Revista Escolar de la OIM - Número 9

Último número
Presentación
Números anteriores
Contactar
Suscripción gratuita

Problemas propuestos

Ningún problema se considerará definitivamente cerrado. Nuevos puntos de vista sobre problemas anteriores siempre son bienvenidos.

Las soluciones deben enviarse por correo electrónico a la dirección revistaoim@oei.es, en ficheros de formato tex, ps o doc, adjuntos al mensaje. Si hubiera figuras, se incluirán en formato gif.

Problema 41

(Propuesto por José Luis Díaz Barrero, Barcelona, España).

Para todo n ≥ 1,

probar que

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{C(n,k)}\right)^{n} \geq e^{(n-1)-2^{n}}$$

Problema 42

(Propuesto por José Luis Díaz Barrero, Barcelona, España).
Para toda terna a, b, c de números reales no nulos, demostrar que la ecuación

$$abcx^2 + 2(ab + bc + ca)x + 3(a + b + c) = 0$$

tiene todas sus raíces reales.

Problema 43

(Propuesto por Ariel Tapia Villegas, Caracas, Venezuela).
Se tiene un triángulo de lados a, b, c, y un punto P cualquiera en su interior. Se trazan por P paralelas a los lados del triángulo, que cortan a éste en los puntos A1, A2 (A1A2 es paralela a BC), B1, B2 (B1B2 es paralela a CA) y C1, C2 (C1C2 es paralela a AB). Sean

$$x_a = A_1A_2, x_b = B_1B_2, x_c = C_1C_2.$$

Demostrar que

$$\frac{x_a}{a} + \frac{x_b}{b} + \frac{x_c}{c} = 2.$$

Problema 44
(Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, Ávila, España)- enunciado ligeramente modificado por el editor.
Sean b, c números reales positivos. Demostrar las desigualdades

$$1)\ \sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}}-\sqrt{bc}\leq\frac{|b-c|}{\sqrt{2}}$$

$$2)\ \sqrt[4]{b^2+c^2}<\sqrt{b}+\sqrt{c}$$

Problema 45
(Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, Ávila, España)
Calcular la integral indefinida

$$\int\sqrt{\frac{1+\tan x\tan(x-a)}{1+\tan x\tan a}}\,dx,$$

siendo $0\leq a\leq x\leq\frac{\pi}{2}$

| Número 9|
| Principal Olimpiada |
Programación OEI | Principal OEI | Contactar

Revista Escolar
de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática
OEI
ISSN 1698-677X
Número 9--Divertimentos

El supuesto anuncio de la boda de una hija de Nicolás Bourbaki

(Leído en la emisora de radio France Culture, en octubre de 1988, durante la emisión titulada "Profil perdue de Nicolas Bourbaki")

El señor Nicolás Bourbaki, Miembro Canónico de la Academia Real de Poldavia, Gran Maestre de la Orden de los Compactos, Conservador de los Uniformes, Lord Protector de los Filtros, y su esposa (de soltera Biunívoca), tienen el honor de comunicarles el matrimonio de su hija Betti con el Sr. Héctor Pétard, Consejero-Delegado de la Sociedad de las Estructuras Inducidas, Miembro Diplomado del Instituto de Arqueólogos de Cuerpos de Clases, Secretario de la Obra del Sou du Lion.

El señor Ersatz Pondiczery, Complejo de Recubrimiento de Primera Clase (en situación de retiro), Presidente de la Casa de Reeducación de los Débilmente Convergentes, Caballero de las Cuatro U, Gran Operador del Grupo Hiperbólico, Caballero de la Orden Total de la Media Áurea, L.U.B., C.C., H.L.C. y señora (de soltera Compacta en sí), tienen el honor de anunciarles el matrimonio de su pupilo Héctor Pétard, con la señorita Betti Bourbaki, antigua alumna de las Bienordenadas de Besse.

El isomorfismo trivial les será dado por el P.Ádico, de la Orden de los Diofánticos, en la Cohomología principal de la Variedad Universal, el día 3 de Cartiembre, año VI, a la hora habitual.

El órgano será interpretado por el Sr. Módulo, Asistente Simplex de la Grassmaniana (lemas cantados por la Escolanía Cartanorum). El importe de la colecta será entregado íntegramente a la casa de Retiro de los Abstractos Pobres. Está garantizada la Convergencia.

Tras la congruencia, el Sr. Bourbaki y señora celebrarán una recepción en sus Dominios Fundamentales.

La recepción estará amenizada por la Fanfarria del 7º Cuerpo de Fracciones.

Traje Canónico (Ideales con abotonadura a la izquierda). C.Q.D.

Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática
ISSN 1698-677X
Número 9-Páginas web

NRICH, de la Universidad de Cambridge

http://www.nrich.maths.org.uk

Aunque siempre es aventurado hacer juicios de valor, probablemente esta página de la Universidad de Cambridge sea una de las mejor estructuradas y con una mayor variedad de problemas, proyectos y actividades. Debería ser el modelo en que las facultades de Educación de nuestros países deberían basarse para "colgar" en la red páginas dedicadas a la enseñanza primaria y secundaria, por lo que a las Matemáticas se refiere. Funciona desde 1997, en que fue fundada por Toni Beardon, una Profesora de la Universidad con un gran interés en mejorar la educación matemática de los más pequeños. A su alrededor se ha formado un magnífico grupo de matemáticos e informáticos que, cada mes, ponen a disposición de los internautas una cantidad ingente de problemas, proyectos y lecciones.

Su sección de problemas comprende cinco niveles, según la edad de los alumnos : I, *Let me try* (5-7 años), II, *Penta problems* (7-11 años), III, *The month six* (11-14 años), IV, *15+Challenge* (14-16 años) y V, *Tough Nuts* (16-18 años). Un icono verde en un enunciado significa que se dispone de, al menos, una solución. Un icono azul quiere decir que son posibles generalizaciones y extensiones. Conviene tener en cuenta que debe pasarse a la versión compatible con la impresora, para que no se corten los enunciados.

Cada mes se publican nuevos problemas y las soluciones de los de meses anteriores, casi siempre enviadas por los alumnos, no solo de Inglaterra, si no de todo el Mundo.

Entre los Proyectos que tiene NRICH está el Euro Maths Project, en el que Profesores de tres países (Reino Unido, Dinamarca y Hungría) trabajan en sus escuelas el mismo conjunto de problemas de la página, para comparar diferentes estrategias de resolución de problemas.

La página es demasiado rica para que pueda ser condensada en un comentario...lo mejor es entrar en ella...es realmente fascinante.

Valladolid, septiembre de 2003.
Francisco Bellot Rosado

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI

Número

10

Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

Número 10 (Noviembre-Diciembre 2003)

ISSN – 1698-277X

Índice

Artículos, Notas y Lecciones de preparación Olímpica
J.L.Ayme, Algunos teoremas olvidados.

Problemas de Nivel medio y de Olimpiadas
Resueltos: solución al problema 2 de la Competición Matemática mediterránea 2003, de M. Amengual, y Comentario del Editor sobre esta solución.

Propuestos: los del campamento KSF de Labege, Francia (fichero Labege)

Problemas para los más jóvenes
Algunos problemas propuestos en Melbourne 2002.

Problemas resueltos
Presentamos una solución del problema 27, enviada por Dan Dobrovolski, Bucarest, Rumania.
Del problema 42 se han recibido soluciones de F.Damián Aranda, Córdoba, España; de Miguel Amengual, Cala Figuera, Mallorca, España, y del proponente. Presentamos la solución de Amengual.
Del problema 43 se han recibido soluciones de Miguel Perleche García, de Lima, Perú; de Miguel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca, España; de F.Damián Aranda, Córdoba, España; de Ricardo Barroso Campos, Sevilla, España, y del proponente. Presentamos la solución de Perleche.
Del problema 44 se han recibido soluciones de F. Damián Aranda, Córdoba, España, de J.L. Díaz Barrero, Barcelona, España, y del proponente. Presentamos las soluciones de J.L. Díaz Barrero y del proponente, que es de carácter geométrico, y es la que solicitaba el enunciado original del problema, que fue modificado por el editor omitiendo esta especificidad.
Del problema 45 se han recibido las soluciones de J.L. Díaz Barrero y del proponente. Presentamos la solución de Díaz Barrero.

Problemas propuestos 46-50

Divertimentos Matemáticos 10
Los Diez Mandamientos del Profesor (según Polya)

Comentario de páginas web
Maths Problem, de John Scholes (Kalva homepage)

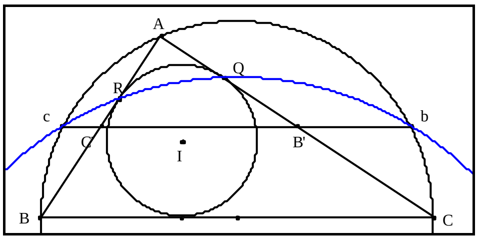
Editor: Francisco Bellot Rosado

ALGUNOS TEOREMAS OLVIDADOS

Jean-Louis AYME
Lycée Lislet Geoffroy, 97400 St-Denis, Île-de-la-Réunion, France

Resumen. "No problem is ever permanently closed" como recuerda la sección Soluciones de la revista canadiense *CruxMathematicorum*. Desde este punto de vista, presentamos una nueva solución del Problema 1671 propuesto por el geómetra T. Seimiya haciendo intervenir algunos teoremas olvidados.

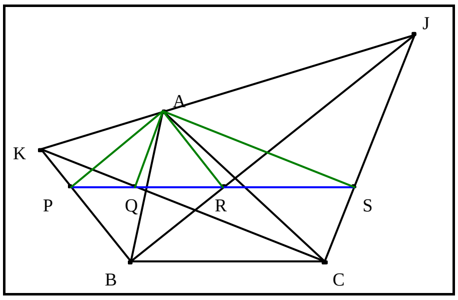
1. El problema de Toshio Seimiya. [1]



Hipótesis:	ABC	un triángulo rectángulo en A,
	B', C'	los puntos medios de los lados [AC], [AB],
	Γ	el círculo circunscrito a ABC,
	b, c	los puntos de intersección de la recta (B'C') con Γ,
	γ_I	el círculo de centro I, inscrito en ABC
y	Q, R	los puntos de contacto de γ_I cpn [AC] y [AB].

Conclusión: los puntos b, c, Q y R sont concíclicos.

2. El teorema de Arthur Lascases o Lescaze.
Discípulo de Gérono (1799-1892), el francés Lascases de Lorient publicó en los *Nouvelles Annales* de 1859, el resultado siguiente [2]:

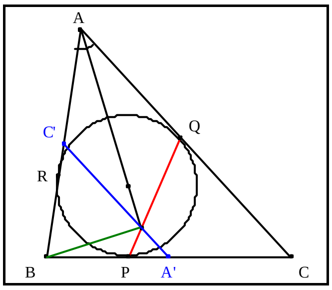


Hipótesis:	ABC	un triángulo,
	B', C'	los puntos medios de los lados [CA], [AB],
	J, K	los centros de los círculos exinscritos de ABC en B, en C
y	P, Q, R, S	los pies de las perpendiculares trazadas desde A sobre (BK), (CK), (BJ) et (CJ).

Conclusión: los puntos P, Q, R y S están alineados sobre la recta (B'C').

3. Una concurrencia inverosímil.

Este teorema, que ha sido estudiado por Ross Honsberger [3], ya había sido propuesto como ejercicio por Nathan Altshiller-Court [4] y resuelto antes por Georges Papelier [5] en el caso de un triángulo rectángulo.



Hipótesis:	ABC	un triángulo no isóceles en A,
	A', C'	los puntos medios de los lados [BC], [AB],
	γ	el círculo inscrito en ABC,
	P, Q, R	los puntos de tangencia de γ con los lados [BC], [CA], [AB],
	Δ_A	la A-bisectriz de ABC
y	D_B	la perpendicular à Δ_A , que pasa por B.

Conclusión: las rectas Δ_A , D_B y (PQ) son concurrentes sobre (A'C').

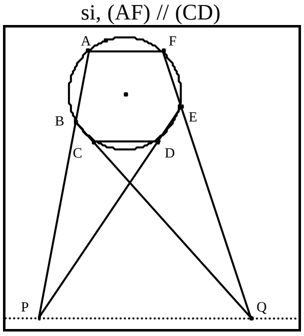
Nota: la recta (B'C') no es citada por ninguno de los autorers previamente citados.

4. El teorema deAubert.

En 1899, Paul Aubert [6] demuestra un caso particular del "hexagrama místico" de Pascal (1623-1662).

ABCDEFA es un hexágono cíclico

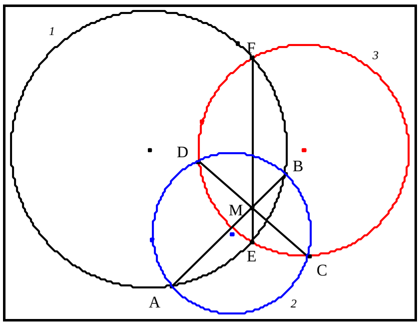
si, (AF) // (CD)



entonces, (PQ) // (AF)

5. El teorema de las tres cuerdas de Monge.

Este notable resultado ha sido attribuido a Gaspard Monge (1746-1818) por Jean Victor Poncelet [8].

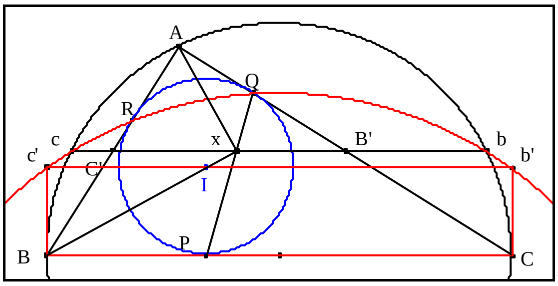


Hipótesis:	*1*, *2*, *3*	tres círculos secantes dos a dos,
	A, B	los puntos de intersección de *1 y 2*,
	C, D	los puntos de intersección de *2 y 3*
	E, F	los puntos de intersección de *3 y 1*

y M el punto de intersección de las cuerdas [AB] y [CD].

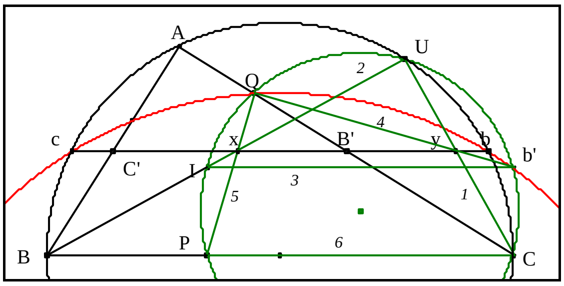
Conclusión: la cuerda [EF] pasa por M.

6. Una nueva demostración del problema de T. Seimiya.



- Llamamos x al pie de la perpendicular trazada desde A sobre la bisectriz (BI);
  según Papelier, x está sobre la recta (PQ);
  según Lascases, x está sobre (B'C').
  Por el teorema de Thales, (B'C') // (BC) i.e. (bc) // (BC).

- Llamemos b', c' a los points tales que BCb'c' sea un rectángulo cuyo lado [b'c'] pasa por I;
  el trapecio c'b'bc es isósceles, luegoes cíclico.



- Llamemos U al segundo punto de intersección de la B-bisectriz de ABC con Γ
  e y al punto de intersección de las rectas (CU) y (Qb').
  Según Thales, el triángulo UBC es inscriptible en un semi-círculo, luego es rectángulo en U.

- Tracemos el círculo verde de diámètro [CI]; que pasa por les points P, Q, U y b';
  según Aubert, la recta (xy) del hexágono cíclico CUIb'QPC es paralela a (BC);
  según el postulado de Euclides, (xy) pasa por b.

- Según el teorema de las tres cuerdas aplicado a los círculos negro, rojo y verde, el círculo rojo pasa por Q.

- Mutatis mutandis, demostraríamos que el círculo rojo pasa por R.

- Conclusión: los puntos b, c, Q y R son concíclicos.

Referencias (historicas y académicas)

[1] Toshio Seimiya (mars 1910-), Problem 1671, *Crux Mathematicorum* **8**, vol 17, (1991) 237.
P. Penning, Solution to problem 1671, *Crux Mathematicorum* **7**, vol 18 **(1992)** 216-218.
[2] Arthur Lascases, Question 477, *Nouvelles Annales* **18** (1859) 171.
F.G.M., Théorème 165, *Exercices de Géométrie*, (1920) 327, Rééditions J. Gabay.
[3] R. Honsberger, An unlikely concurrence, *Episodes in Nineteeth and Twentieth Century Euclidean Geometry*, MAA (1995) 31.
[4] N. Altshiller-Court, Exercise 43, *College Geometry*, Barnes & Noble, Inc. (1952) 118.
[5] G. Papelier G., Pôles et polaires, *Exercices de géométrie Modernes* (1927), Rééditions J. Gabay, 19.

[6] P. Aubert, Généralisation du problème de Pascal donnant neuf points en ligne droite, *Journal de mathématiques élémentaires* (1899).
P. Aubert P., Question 4604, *Journal de mathématiques élémentaires* de Vuibert (1899) 2.
F.G.M., Théorème 374 III, *Exercices de Géométrie*, (1920) 560, Eds. Gabay.
[7] J. L. M'Kensie , *Journal de Mathématiques Spéciales* de de Longchamps(1887) 201.
[8] J. V. Poncelet, tome 1, *Traité projective des figures* (1822) 40.

Agradecimientos. Agradezco al Profesor Francisco Bellot Rosado que respondiera a mi petición enviándome las soluciones métricas de P. Penning, de su esposa María Ascensión López Chamorro así como la suya. Esta ayuda haa contribuído sin ninguna duda a la aparición de este artículo y le agradezco igualmente haberlo leído con atenmción y haberlo traducido.

AYME Jean-Louis
37, rue Ste.-Marie
97400 St.-Denis
Ile-de-la-Réunion
France

tél./fax: 0262 262 41 19 64
e-mail: <jeanlouisayme@yahoo.fr>

VI Competición Matemática Mediterránea 2003
Problema 2.

Un triángulo ABC es tal que $BC = CA + \frac{1}{2}AB$.

P es el punto del lado AB tal que $\frac{BP}{PA} = \frac{1}{3}$. Demostrar que $\angle CAP = 2 \cdot \angle CPA$.

Solución de Miguel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca, España.

Ponemos $AB = 4x$, $CA = y$ con lo que $BC = y + 2x$.

El teorema del coseno aplicado al triángulo APC, con $\angle APC = \theta$, da

$$y^2 = (3x)^2 + \overline{CP}^2 - 2 \cdot 3x \cdot \overline{CP} \cdot \cos\theta \qquad (1)$$

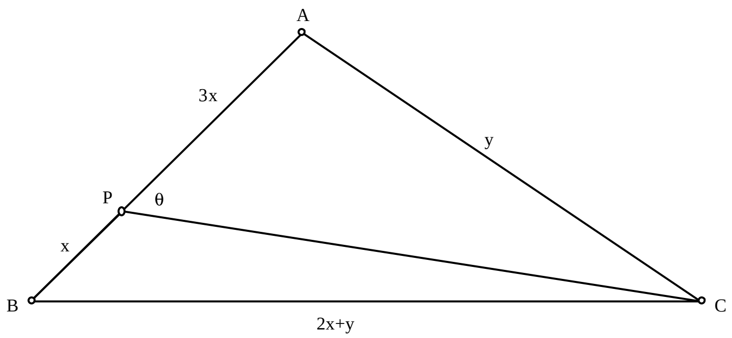
y aplicado al ΔBPC,

$$\begin{aligned}(2x+y)^2 &= x^2 + \overline{CP}^2 - 2 \cdot x \cdot \overline{CP} \cdot \cos(180^\circ - \theta) \\ &= x^2 + \overline{CP}^2 + 2 \cdot x \cdot \overline{CP} \cdot \cos\theta\end{aligned} \qquad (2)$$

Eliminamos $\cos\theta$ entre (1) y (2) y obtenemos

$$\begin{aligned}\overline{CP}^2 &= y^2 + 3xy \\ &= y(y+3x) \\ &= \overline{AC} \cdot \left(\overline{AC} + \overline{AP}\right)\end{aligned}$$

Usamos finalmente el hecho que la condición $\overline{CP}^2 = \overline{AC} \cdot \left(\overline{AC} + \overline{AP}\right)$ es equivalente a $\angle CAP = 2 \cdot \angle CPA$ (ver, por ejemplo, Crux Mathematicorum [1976:74], [1978:278], [1996:265-267]) para obtener el resultado deseado.



Comentario del Editor a la solución de M. Amengual del problema 2, VI Competición Matemática Mediterránea 2003.

La solución a este problema utiliza en su parte final una relación entre los lados de un triángulo que garantiza el que uno de sus ángulos sea doble del otro. Para dar información completa a nuestros lectores, presentamos la demostración de este resultado, original de Leo Sauvé, tal como se publica en CRUX MATEHEMATICORUM, 1976, pag. 74:

La relación entre los lados es

$$c^2 - a^2 = ab;$$

entonces

$$\sin^2 C - \sin^2 A = \sin(C+A)\sin(C-A) = \sin A \sin B.$$

Pero $\sin(C+A) = \sin B \neq 0;$ luego $\sin(C-A) = \sin A$ y $C - A = A,$ porque $C - A \neq 180 - A$. Por lo tanto, $C = 2A$.

Problemas de Nivel Medio y de Olimpiadas (10)

Problemas propuestos en el Campamento Matemático de verano Kangourou sans Frontières, Labège, Toulouse, Francia, 2003

1.Se consideran dos circunferencias, k_1, k_2 tangentes interiores en el punto A. Sea k_2 la de radio menor. Se traza una tangente cualquiera, t, a k_2, en uno de sus puntos, T, distinto de A. Esta tangente corta a k_1 en los puntos B y C. Demostrar que $\widehat{BAT} = \widehat{TAC}$.

2. Las diagonales AD, BE y CF del hexágono ABCDEF son concurrentes en M. Las áreas de los triángulos AMF, FME, EMD, CMB y BMA valen, respectivamentem 1,2,3,4 y 3. ¿Cuánto vale el área de DCM?

3. Sean $a, b, c, d \in [0, 1]$. Probar que

$$\frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ca} + \frac{c}{1+ab} \leq 2.$$

(Rallye de Alsacia 1996)

4. El cuadrilátero ABCD es cíclico. Con centros en A,C y D se trazan circunferencias que pasan por B. Esas tres circunferencias se cortan, evidentemente, en B, y por pares en los puntos X,Y,Z. Demostrar que X,Y,Z están alineados.

Problemas para los más jóvenes(10)

Presentamos algunos problemas propuestos para los alumnos de este nivel, durante la Conferencia de la World Federation of national Mathematics Competitions, celebrada en Melbourne en 2002.

1. Los cuatro soldados heridos (11-13 años), presentado por Tony Gardiner.

Cuatro soldados heridos tienen que cruzar un puente, seriamente dañado, por la noche, para escapar del fuego enemigo. El puente sólo sopota el peso de dos soldados de cada vez; cuando lo cruzan dos soldados deben hacerlo a la velocidad del más lento. Los cuatro soldados sólo tienen una linterna, que ha de ser utilizada cada vez que se cruza el puente. Individualmente, los soldados tardarían 1, 2, 4 y 6 minutos en cruzar el puente. ¿Cuál es (con demostración) el mínimo tiempo que se necesita para que los cuatro soldados lo crucen?

2.Capicúas, presentado por Ian VanderBurgh.

Hay pares de capicúas de cuatro cifras cuya suma es un capicúa de cinco cifras, como 2882 y 9339. Cuántos pares de este tipo hay?

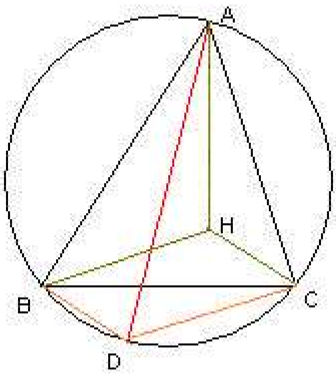
3.El mito de Sísifo, presentado por Jordan Tabov.

Sísifo tiene que llevar una piedra muy pesada a lo alto de una montaña, distante 2 km. Durante la primera hora, consigue mover la piedra 1 km, pero resbala, y la piedra rueda 1/4 km hacia abajo. Durante la segunda hora, Sísifo mueve la piedra 1/2 km hacia adelante, pero resbala de nuevo y la piedra rueda 1/5 km hacia abajo. El proceso continúa : durante la n-ésima hora Sísifo mueve la piedra 1/n km hacia adelante, pero resbala y la piedra rueda 1/(n+3) km hacia abajo.

¿Cuánto tardará Sísifo en llevar la piedra a lo alto de la montaña?

a) 4 horas b) 6 horas c) entre 6 y 7 horas d) entre 1998 y 2002 horas e) Sísifo nunca alcanzará la cima de la montaña con la piedra.

Problema 27



Solución. Las líneas DB y HC son paralelas, ambas perpendiculares a AB (DB es perpendicular a AB porque AD es un diámetro y HC es perpendicular a AB porque H es el ortocentro). De igual manera, las líneas DC y HB son paralelas, ambas perpendiculares a AC. Por consiguiente, el quadrilátero BHCD es paralelogramo. Por lo tanto, sus diagonales se parten por la mitad; entonces A´ = J y los puntos H, A´, J y D están alineados (situados sobre la línea HD) q.e.d.

Problema 42

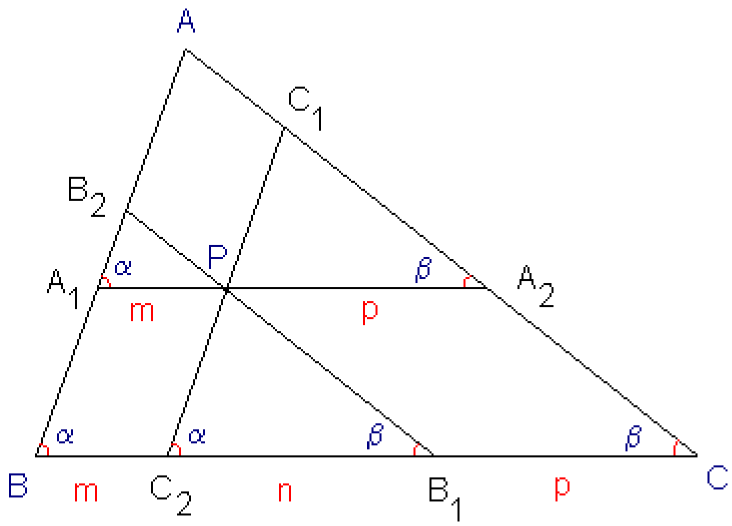
Solución de Miguel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca, España.

En efecto, si Δ es el discriminante de la ecuación, tenemos:

$$\begin{aligned}\Delta &= 4\left[(ab+bc+ca)^2 - 3abc(a+b+c)\right]\\ &= 4\left[a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 - a^2bc - ab^2c - abc^2\right]\\ &= 2\left[(ab-bc)^2 + (bc-ca)^2 + (ca-ab^2)\right]\\ &\geq 0\end{aligned}$$

La igualdad se verifica si y sólo si $a=b=c$, en cuyo caso la raíz doble de la ecuación dada es igual a $\dfrac{-3}{a}$.

Solución al problema 43:



De la semejanza de los triángulos B_2BB_1 y ABC tenemos

$$\frac{B_1B_2}{CA} = \frac{BB_1}{BC} = \frac{m+n}{m+n+p}$$

Y de la semejanza de los triángulos C_1C_2C Y ABC tenemos

$$\frac{C_1C_2}{AB} = \frac{C_2C}{BC} = \frac{n+p}{m+n+p}$$

Luego:

$$\frac{A_1A_2}{BC} + \frac{B_1B_2}{CA} + \frac{C_1C_2}{AB} = \frac{m+p}{m+n+p} + \frac{m+n}{m+n+p} + \frac{n+p}{m+n+p} = \frac{2m+2n+2p}{m+n+p}$$

Finalmente:

$$\frac{x_a}{a} + \frac{x_b}{b} + \frac{x_c}{c} = 2$$

José Luis **Díaz–Barrero**
Applied Mathematics III
Universitat Politècnica de Catalunya
Jordi Girona 1-3, C2, 08034 Barcelona. Spain
jose.luis.diaz@upc.es

Problema 44. *Propuesto por Juan Bosco Romero Maárquez. Ávila, España.*

Sean b, c números reales positivos. Demostrar las desigualdades

1. $\sqrt{\dfrac{b^2+c^2}{2}} - \sqrt{bc} \leq \dfrac{|b-c|}{\sqrt{2}}$.
2. $\sqrt[4]{b^2+c^2} < \sqrt{b} + \sqrt{c}$.

Solución por José Luis Díaz-Barrero, Barcelona, España.

(1) De $(b-c)^2 \geq 0$ se deduce inmediatamente que

$$bc \leq \sqrt{bc\frac{b^2+c^2}{2}}.$$

Multiplicando por 2, sumando $\dfrac{b^2+c^2}{2}$ a ambos miembros de la desigualdad anterior, y reagrupando sus términos convenientemente resulta

$$\frac{b^2+c^2}{2} - 2\sqrt{bc\left(\frac{b^2+c^2}{2}\right)} + bc \leq \frac{(b-c)^2}{2}.$$

Es decir,

$$\left(\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}} - \sqrt{bc}\right)^2 \leq \left(\frac{|b-c|}{\sqrt{2}}\right)^2.$$

Ahora, tomando raíces cuadradas la desigualdad queda demostrada.

(2) Sumando b^2+c^2 a ambos miembros de la desigualdad $0 < 4b\sqrt{bc} + 6bc + 4c\sqrt{bc}$ resulta $b^2+c^2 < \left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^4$, y hemos terminado.

Solución del problema 43, por J.B. Romero Márquez, Ávila, España.

Daremos una demostración por métodos geométricos.

a) Consideremos el triángulo rectángulo de lados $a > b \geq c$. Por el teorema de Pitágoras, tenemos

$$a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow a^2 - 2bc = (b-c)^2 \Leftrightarrow a^2 = (b-c)^2 + 2bc = |b-c|^2 + \left(\sqrt{2bc}\right)^2.$$

Entonces construímos el triángulo rectángulo T' de lados

$$a' = a, \;\; b' = \sqrt{2bc}, \;\; c' = |b-c|$$

y de aquí que

$$\begin{aligned} a' \leq b' + c' &\Leftrightarrow a \leq \sqrt{2bc} + |b-c| \Leftrightarrow \sqrt{b^2+c^2} \leq \sqrt{2bc} + |b-c| \\ &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{b^2+c^2}}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{bc} + \frac{|b-c|}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}} \leq \sqrt{bc} + \frac{|b-c|}{\sqrt{2}} \\ &= \sqrt{bc} + \frac{b-c}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}} - \sqrt{bc} \leq \frac{b-c}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

b) De manera similar, consideramos la proposición equivalente al teorema de Pitágoras dada por

$$a^2 + \left(\sqrt{2bc}\right)^2 = (b+c)^2,$$

lo que conduce a construir el triángulo rectángulo T" de lados

$$a'' = b + c, \quad b'' = a, \;\; c'' = \sqrt{2bc},$$

y así tenemos

$$b'' < a'' + c'' \Leftrightarrow \sqrt{b^2+c^2} < b + c + \sqrt{2bc} = \left(\sqrt{b} + \sqrt{c}\right)^2$$

y extrayendo la raíz cuadrada a los dos miembros se obtiene el resultado.

José Luis Díaz–Barrero
Applied Mathematics III
Universitat Politècnica de Catalunya
Jordi Girona 1-3, C2, 08034 Barcelona. Spain
jose.luis.diaz@upc.es

Problema 45. *Propuesto por Juan Bosco Romero Maárquez. Ávila, España.*

Calcular la integral indefinida

$$\int \sqrt{\frac{1+\tan x \tan(x-a)}{1+\tan x \tan a}}\, dx,$$

siendo $0 \leq a \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$.

Solución por José Luis Díaz-Barrero, Barcelona, España.

Dado que $\tan(x-a) = \dfrac{\tan x - \tan a}{1+\tan x \tan a}$, entonces

$$1+\tan x \tan(x-a) = 1 + \frac{\tan^2 x - \tan x \tan a}{1+\tan x \tan a} = \frac{1+\tan^2 x}{1+\tan x \tan a}.$$

Por tanto,

$$\int \sqrt{\frac{1+\tan x \tan(x-a)}{1+\tan x \tan a}}\, dx = \int \sqrt{\frac{1+\tan^2 x}{(1+\tan x \tan a)^2}}\, dx$$

$$= \int \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x(1+\tan x \tan a)^2}}\, dx = \int \frac{\cos a}{\cos x \cos a + \sin x \sin a}\, dx$$

$$= \int \frac{\cos a}{\cos(x-a)}\, dx = \cos a \ln|\sec(x-a)+\tan(x-a)| + C, \; C \in \mathbb{R}.$$

Problemas propuestos 46-50

Problema 46. Propuesto por José Luis Díaz Barrero, Barcelona, España.
Sea ABC un triángulo escaleno cualquiera. Probar que

$$\left(\frac{b+c-a}{a(a-b)(a-c)}+\frac{a+c-b}{b(b-a)(b-c)}+\frac{a+b-c}{c(c-a)(c-b)}\right)^{\frac{1}{2}}<\frac{s}{2[ABC]}$$

donde s es el semiperímetro, y $[ABC]$ el área del triángulo.

Problema 47. Propuesto por K.R.S.Sastry, Bangalore, India
Determinar la elipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

con los menores números naturales $a \neq b$ como semiejes, de tal manera que dos de sus puntos racionales en el primer cuadrante estén separados entre sí por una distancia igual a 10/3.

Problema 48. Propuesto por K.R.S. Sastry, Bangalore, India.
Determinar las soluciones naturales de la ecuación diofántica

$$x^3+x^2y+xy^2+y^3=z^2.$$

Problema 49. Propuesto por el editor (se dará información sobre su procedencia cuando se publique la solución)
Si

$$x+y+z=ax+by+cz=a^2x+b^2y+c^2z=1,$$

demostrar que

$$a^3x+b^3y+c^3z=1-(1-a)(1-b)(1-c).$$

Problema 50. Propuesto por el editor (se dará información sobre su procedencia cuando se publique la solución)
Eliminar x, y, z entre las ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{c} x+y+z=a \\ (y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2=b \\ x(y-z)^2+y(z-x)^2+z(x-y)^2=c \\ x^2(y-z)^2+y^2(z-x)^2+z^2(x-y)^2=d \end{array}\right.$$

Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática
OEI
ISSN 1698-677X
Número 10--Divertimentos

Los diez mandamientos del Profesor
(según Polya)

A diferencia de los **Divertimentos** anteriores, en los que primaban los aspectos humorísticos, la sección que hoy presentamos es perfectamente seria. **El Decálogo del Profesor** está incluido en una de las obras didácticas fundamentales de Pólya, **El descubrimiento de las matemáticas**, de la que, hasta donde alcanza nuestro conocimiento, no hay versión al español. A modo de presentación, incluímos aquí.

Unas palabras sobre George Pólya (1887-1985)

La obra de George Pólya es bien conocida por todos los matemáticos, ya sean investigadores o profesores que se limiten a su labor docente. Es uno de los nombres míticos en la historia moderna de las matemáticas y su enseñanza, sobre todo a través de los problemas. Sus tres libros sobre la enseñanza de nuestra ciencia:

- "Cómo plantear y resolver problemas", Ed. Trillas, México, 1965;
- "Matemáticas y razonamiento plausible", Ed. Tecnos, Madrid, 1966, y
- "La découverte des mathématiques", Ed. Dunod, París, 1967.

Son de lectura obligada para todo profesor que sienta mínimamente que su enseñanza de las matemáticas debe ir más allá de mantener a los alumnos "quietos y callados" en sus pupitres. Con anterioridad a estos libros se había publicado, en la famosa "colección amarilla" de Springer, primero en alemán y más tarde en inglés, una de las mejores colecciones de problemas de Análisis Matemático, "Aufgaben und Lehrsätze aus der Análisis", que escribió conjuntamente con su gran amigo Gabór Szegö, y de la que han aparecido numerosas ediciones. Entre los estudiantes de mi generación, "el Polya-Szegö", como se le conocía vulgarmente, era un libro de referencia obligada. Otra obra esencial de Pólya, con Hardy y Littlewood, es "Inequalities" (Cambridge U.P., 1934).

Polya nació en Budapest el 13 de diciembre de 1887. En un principio no se sintió especialmente atraído por las matemáticas, sino por la literatura y la filosofía. Su profesor de esta última, el Prof. Alexander, le sugirió que siguiera cursos de física y de matemáticas para mejorar su formación filosófica. Este consejo marcó para siempre su carrera. Las magníficas lecciones de Física de Loránd Eötvös, y las no menos excelentes de Matemáticas de Lipót Fejér influyeron decisivamente en la vida y obra de Pólya. Entre los discípulos de Fejér estaban Marcel Riesz, Otto Szás, Mihaly Fekete, Gábor Szegö, Tibor Radó, y más tarde Paul Erdös y Paul Turán. Además de las clases "regulares", Fejér se reunía con ellos en un café de Budapest y resolvía problemas mientras les contaba historias y anécdotas sobre los matemáticos que había conocido.

En 1940, huyendo de Hitler, Pólya y su esposa suiza (Stella V. Weber) se trasladaron a los Estados Unidos. Pólya hablaba (según él, bastante mal) además del húngaro, alemán, francés e inglés, y podía leer y entender algunos más. Se instalaron en Palo Alto, California, y obtuvo trabajo en la Universidad de Stanford. Durante su larga vida, académica y profesional, Pólya recibió numerosos premios y galardones por su excepcional trabajo sobre la enseñanza de las matemáticas y su importantísima obra investigadora.

Cuando se le preguntaba cómo había llegado a ser matemático, solía decir, medio en broma, medio en serio: **No era lo suficientemente inteligente para ser físico, y demasiado para ser filósofo, así que elegí matemáticas, que es una cosa intermedia**. Fue un viajero impenitente (aunque nunca condujo automóviles) que curiosamente descubrió a los 75 años de edad las comodidades de los viajes en avión, cruzando el Atlántico y el continente americano varias veces.

En una conversación telefónica con Paul Erdös, éste prometió a Pólya una gran fiesta con motivo de su centenario. Pólya replicó: **100 años bueno, pero no más**.

Pólya murió en Palo Alto el 7 de septiembre de 1985

Bibliografía

G.Pólya, The Pólya Picture Album. Encounters of a mathematician. Birkhäuser, 1987.
A. Arvai Wieschenberg, A conversation with George Pólya, en Mathematics Magazine,vol.60, no.5, Diciembre 1987, pp.265-268.
M.M.Schiffer, George Pólya (1887-1985), en Mathematics Magazine,vol.60, no.5, Diciembre 1987, pp.268-270 (necrológica de Pólya en la Universidad de Stanford, el 30 de octubre de 1987).

Francisco Bellot Rosado

Los diez mandamientos del Profesor
(según Polya)

1. **Demuestre interés por su materia**. Si el profesor se aburre, toda la clase se aburrirá.
2. **Domine su materia**. Si un tema no le interesa personalmente, no lo enseñe, porque no será Vd. capaz de enseñarlo adecuadamente. El interés es una condición necesaria, pero no suficiente. Cualesquiera que sean los métodos pedagógicos utilizados, no conseguiréis explicar algo claramente a vuestros estudiantes si antes no lo habéis comprendido perfectamente. De ahí este segundo mandamiento. El interés es el primero, porque, con algunos conocimientos junto con una falta de interés, se puede uno convertir en un profesor excepcionalmente malo.
3. **Sea instruído en las vías del conocimiento: el mejor medio para aprender algo es descubrirlo por sí mismo**. Se puede obtener gran provecho de la lectura de un buen libro o de la audición de una buena conferencia sobre la psicología del acto de aprender. Pero leer y escuchar no son absolutamente necesarios y en todo caso no son suficientes : hay que conocer las vías del conocimiento, estar familiarizados con el proceso que conduce de la experiencia al saber, gracias a la experiencia de vuestros propios estudios y a la observación de vuestros estudiantes.
4. **Trate de leer en el rostro de sus estudiantes, intente adivinar sus esperanzas y sus dificultades; póngase en su lugar**. Aunque uno se interese por el tema, lo conozca bien, se comprendan los procesos de adquisición de los conocimientos, se puede ser un mal profesor. Es raro, pero muchos hemos conocido profesores que, siendo perfectamente competentes, no eran capaces de establecer contacto con su clase. Ya que la enseñanza del uno debe acompañarse por el aprendizaje del otro, tiene que existir un contacto entre el Profesor y el estudiante. La reacción del estudiante a vuestra enseñanza depende de su pasado, de sus perspectivas y de sus intereses. Por lo tanto, téngase en consideración lo que saben y lo que no saben; lo que les gustaría saber y lo que no les importa; lo que deben conocer y lo que no importa que no sepan.
5. **No les deis únicamente "saber", sino "saber hacer", actitudes intelectuales, el hábito de un trabajo metódico**. El conocimiento consiste, parte en "información" y parte en "saber hacer". El saber hacer es el talento, es la habilidad en hacer uso de la información para un fin determinado; se puede describir como un conjunto de actitudes intelectuales; es la capacidad para trabajar metódicamente. En Matemáticas, el "saber hacer" se traduce en una aptitud para resolver problemas, construir demostraciones, examinar con espíritu crítico soluciones y pruebas. Por eso, en Matemáticas, la manera cómo se enseña es tan importante como lo que se enseña.
6. **Enseñadles a conjeturar**. Primero imaginar, después probar. Así es como procede el descubrimiento, en la mayor parte de los casos. El profesor de Matemáticas tiene excelentes ocasiones para mostrar el papel de la conjetura en el campo del descubrimiento y hacer así que los estudiantes adquieran una actitud intelectual fundamental. La conjetura razonable debe estar fundada en la utilización juiciosa de la evidencia inductiva y de la analogía, y encierra todos los conocimientos plausibles que pueden intervenir en el método científico.
7. **Enseñadles a demostrar**. "Las matemáticas son una buena escuela de razonamiento demostrativo". De hecho, la verdad va más allá: las matemáticas pueden extenderse al razonamiento demostrativo, que se infiltra en todas las ciencias desde que alcanzan un nivel matemático y lógico suficientemente abstracto y definido.
8. **En el problema que estéis tratando, distinguid lo que puede servir, más tarde, a resolver otros problemas - intentad revelar el modelo general que subyace en el fondo de la situación concreta que afrontáis**. Cuando presentéis la solución de un problema, subrayad sus rasgos instructivos. Una particularidad de un problema es instructiva si merece ser imitada. Un aspecto bien señalado, en un problema, y vuestra solución puede transformarse en un modelo de resolución, en un esquema tal que, imitándole, el estudiante pueda resolver otros problemas.
9. **No reveléis de pronto toda la solución; dejad que los estudiantes hagan suposiciones, dejadles descubrir por sí mismos siempre que sea posible**. He aquí una pequeña astucia fácil de aprender: cuando se empieza a discutir la solución de un problema, dejad que los estudiantes adivinen su solución. Quien tiene una idea o la ha formulado, se ha comprometido: debe seguir el desarrollo de la solución para ver si lo que ha conjeturado es exacto o no, con lo que no puede despistarse. Voltaire decía: "El secreto para ser aburrido es decirlo todo".
10. **No inculquéis por la fuerza, sugerid**. Se trata de dejar a los estudiantes tanta libertad e iniciativa como sea posible, teniendo en cuenta las condiciones existentes de la enseñanza. Dejad que los estudiantes hagan preguntas; o bien planteadles cuestiones que ellos mismos sean capaces de plantear. Dejad que los estudiantes den respuestas; o bien dad respuestas que ellos mismos sean

capaces de dar.

Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática
ISSN 1698-677X
Número 10-Páginas web

MATH PROBLEMS
Kalva homepage

http://www.kalva.demon.co.uk

Incluye los 102 problemas de la OIM desde 1985 hasta 2002 en inglés

El mantenedor de esta interesante página es John Scholes, antiguo participante en la Olimpiada Internacional. En la actualidad la página contiene unos 4000 problemas de Olimpiadas y otros 900 de otra procedencia. Los problemas están en lengua inglesa, y el propósito del mantenedor es colgar colecciones completas, en la medida de lo posible. Hay una gran cantidad de problemas resueltos, y aunque en algunos casos se han deslizado errores, esto no quita interés para los aficionados a los problemas de Olimpiadas.

De Pre-Olimpiadas, están los problemas del concurso americano AIME y los del libro de Dudeney, uno de los pioneros del siglo XX en resolución de problemas.

De Olimpiadas Internacionales y regionales, hay enlaces con la IMO, la lista corta de IMO, la Asia-Pacífico, la Austro-Polaca, la Balcánica, la Balcánica Junior, la Iberoamericana, y el Torneo de las Ciudades.

De Olimpiadas Nacionales, están los problemas de las Olimpiadas de URSS, Australia, Brasil, Reino Unido, Canadá, China, Eötvös/Kurschak, Irlanda, Rusia, Suecia, USA y Vietnam.

Para los primeros cursos universitarios, están los problemas de la Competición Putnam, del libro de Newman "A problem Seminar", de IMC y algunos de Vietnam.

La página se completa con Bibliografía, bien seleccionada.

Valladolid, noviembre 2003.
Francisco Bellot

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI

Número

11

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática
Número 11 (Enero - Febrero 2003)
ISSN – 1698-277X

Índice

Editor: Francisco Bellot Rosado

Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática
OEI
ISSN 1698-677X
Número 11-Nota

Presentación del Prof. Antonio Ledesma López

El Prof. Antonio Ledesma López es Catedrático de Matemáticas del I.E.S. nº 1 de Requena (Valencia), y organiza anualmente, con el Colectivo Frontera de Matemáticas, desde hace 16 años, el Open Matemático, una competición de problemas que describe en el artículo que publicamos a continuación. Los problemas propuestos en el Open se recogen anualmente en una publicación que siempre guarda alguna sorpresa... por ejemplo, la del año 2003 tenía como problema inicial el poder abrirla, porque tenía tres orificios hábilmente atados por una cuerda con una bola que no cabía por ninguno de ellos...

Le agradecemos muy sinceramente su colaboración en este número de la Revista Escolar de la O.I.M., que se completa con los Grafitti Matemáticos de la sección Divertimentos Matemáticos.

Francisco Bellot Rosado

Acceder al artículo

Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática
ISSN 1698-677X
Número 11-Artículo

El Open Matemático

Antonio Ledesma López

Catedrático del IES Nº UNO de Requena (Valencia)
Coordinador del Colectivo Frontera de Matemáticas

El Open Matemático es el nombre popular de un amplio certamen anual de **Popularización de las Matemáticas**, que tiene por actividad principal un **Torneo Abierto de Resolutores de Problemas**. Surgió hace quince años en el IES nº 1 de Requena con los nobles objetivos de:

1. Sacar la Matemática de las aulas y acercarlas al hombre de la calle.
2. Desarrollar la capacidad de resolver problemas; fomentar el gusto por acometerlos.
3. Como plataforma de formación y actualización del profesorado.

La organización corre a cargo del Colectivo Frontera de Matemáticas, grupo que aglutina a profesores de los centros participantes y otras personas allegadas (asociaciones de padres, antiguos alumnos, patrocinadores, editores, diseñadores, periodistas, estudiantes de Matemáticas ...)

Cada edición gira en torno a un **Tema** que sirve, por un lado, como pretexto para divulgar la propia Matemática y, por otro, para mostrar su conexión con otras disciplinas, con otros saberes: las ciencias, la tecnología, las artes, los deportes, la prensa, el humor, la magia, la sociología, la economía, la música .... La próxima edición la dedicaremos a la **Publicidad**.

El **Torneo de Resolutores de Problemas** es un concurso abierto a toda la comunidad educativa, aunque está dirigido fundamentalmente a los alumnos de enseñanza secundaria (ESO, obligatoria, y Bachilleratos y Ciclos Formativos, no obligatoria). Sus **Bases**, en extracto, son:

Consta de ocho jornadas de duración no inferior a una semana. En cada jornada se proponen de dos a cuatro problemas, con un total de 20. Los problemas se expondrán públicamente en un panel. Los participantes dispondrán de toda la semana para entregar sus soluciones en una urna o buzón destinado al efecto, o remitirlas vía fax o e-mail. El Jurado valorará los trabajos y dará una puntuación (0 ó 2 puntos) con la que establecerá una **clasificación general**. Las ideas brillantes o ingeniosas serán tenidas en cuenta para otra clasificación, la del **premio de belleza**.

Son dos meses y medio en los que se respira un sano ambiente matemático. Y no sólo en los centros de enseñanza que cuentan con participantes sino, también, entre familiares, amigos y demás simpatizantes. A ello contribuyen los medios de comunicación locales y regionales.

Entre las **Actividades de Divulgación** destacaríamos:

Fijas en todas las ediciones son:

DISEÑO DE CARTELES ANUNCIADORES.

LA HOJA MATEMÁTICA.
Periódico mural que, con carácter divulgativo, se publica cada semana coincidiendo con la correspondiente jornada. El contenido puede ser genérico (anecdotario histórico, bibliografía, contradicciones, humor, juegos y pasatiempos, poesías y canciones, trucos numéricos y topológicos ...) o monográfico alusivo al tema de la presente edición.

NOTICIAS AL CIERRE I y II.
Hojas de divulgación con recortes de prensa relacionados con las Matemáticas producidos en el tiempo que va desde que termina una edición del OPEN hasta el inicio de la siguiente (I) . Y noticias de actualidad sobre Matemáticas, Informática, Astronomía, ..., que se producen durante la jornada del OPEN que se está celebrando (II)

ACTO DE ENTREGA DE PREMIOS.
Acto académico que suele incluir una conferencia sobre el tema de la presente edición, un concierto, una representación teatral ... y la exposición de las ideas más brillantes de los ganadores.

Y otras, dependiendo del tema de cada edición se hacen:

EXPOSICIONES ITINERANTES.
Está prevista : **Dalí matemático, en el centenario de su nacimiento.**

CONFERENCIAS.
En preparación : **A la rica geometría publicitaria: anagramas, escudos y logotipos... y La Matemática en los medios de comunicación**.

FERIA COMARCAL DE LAS MATEMÁTICAS.

JORNADAS SOBRE ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS.

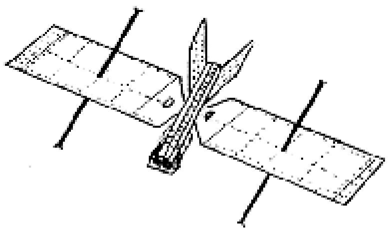
Si eres profesor y estás interesado en participar con tu centro o con tus alumnos, contacta en openmatematico@yahoo.es.

Si eres estudiante, te gusta resolver problemas asiduamente y estás interesado en participar, has de contactar en openmatematico@yahoo.es

Anímate, que empezamos a finales del próximo enero.

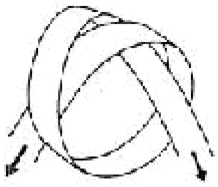
Como muestra del tipo de problemas que se proponen, he aquí una pequeña selección: uno de cada edición.

I - El Tangram. 8ª J. Problema - 19: EL REQUEOSAT ESTROPEADO



Se ha detectado un problema de interferencias en el transmisor-repetidor del REQUEOSAT-III que produce anomalías en las imágenes que emite la televisión local. Para corregirlo, los técnicos han de construir una antena que cubra toda la zona del espacio que dista dos metros del ala derecha del satélite y tres metros de la correspondiente varilla transversal, y aprovechar la próxima misión espacial para instalarla. ¿Qué forma han de dar a la antena?

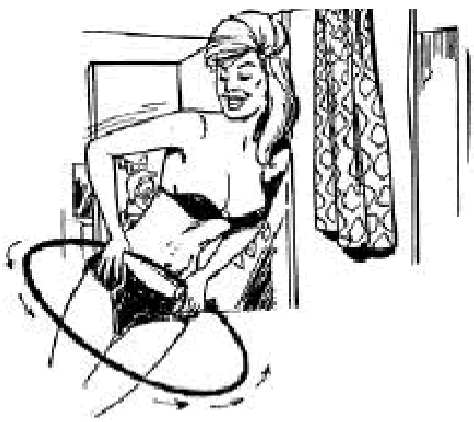
II - Figuras imposibles. 8ª J. Problema - 19: NUDO PENTAGONAL



Coge una tira de papel estrecha, y haz un nudo simple. Tira con cuidado de los extremos hasta que tengas un pentágono regular plano. ¿Por qué sale un pentágono? ¿Por qué es regular?

III - Arte Cinético. 6ª J. Problema - 15: LA CHICA DEL HULAHOP

Imaginemos una chica cuya cintura desnuda sea una circunferencia perfecta. Rodando en torno a su talle, mientras ella permanece inmóvil, tiene un aro (hula-hop) de diámetro doble. Cuando el punto del aro, ahora en contacto con el ombligo de la zagala, retorna por primera vez al mismo lugar, ¿cuánto habrá viajado?



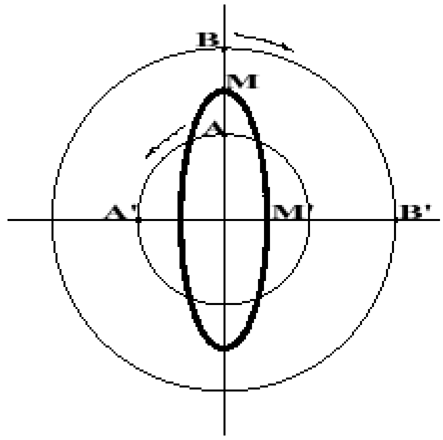
IV - Papiroflexia y Matemáticas. 4ª J. Problema - 9. EL TAHÚR

Un tahúr se fabricó tres dados de diferentes colores. El rojo tenía en sus caras, repetidos, los números 2, 4 y 9; el azul los números 3, 5 y 7 duplicados; e igualmente el amarillo, los números 1, 6 y 8.

La suma total es la misma en los tres, pero, aún así, el tahúr cree que si su contrincante es el primero en elegir y lanzar uno de los dados, él puede elegir otro que le dará mayores probabilidades de superar su puntuación. ¡Explica, razonadamente, por qué!

V - Ajedrez y Matemáticas. 3ª J. Problema - 8: LA CURVA DE ENMEDIO

Dos puntos viajan sobre un par de circunferencias concéntricas con velocidad constante. Parten en el mismo instante, uno de A y otro de B, y recorren las circunferencias en sentidos distintos, llegando al punto de partida también al mismo tiempo. Como se indica en la figura, mientras los puntos viajeros describen las circunferencias, el punto medio M del segmento que los une describe una elipse.



Dos pilotos de las fuerzas de la ONU destinadas en la antigua Yugoslavia, conocedores de estas cosas, deciden enviar un mensaje de paz al pueblo serbio. Con sus aviones describen en el cielo de Sarajevo dos circunferencias concéntricas. Parten al mismo tiempo de los puntos A y B con velocidades constantes y recorriendo las circunferencias en el mismo sentido, pero el avión que describe la circunferencia exterior llega al punto de partida en la mitad de tiempo que el otro. Hacen que, con humo rojo, aparezca en el cielo la curva descrita por el punto medio del segmento que los une en todo momento de su viaje. ¿Cuál es el mensaje enviado?

VI - Idiomas y Matemáticas. 1ª J. Problema - 4: CLASIFICANDO NÚMEROS

Utilizando cierto criterio de clasificación, los números del 0 al 14 están divididos en tres grupos del siguiente modo:

Grupo - 1	Grupo – 2	Grupo – 3
0 3 6 8 9	1 4 7 11 14	2 5 10 12 13

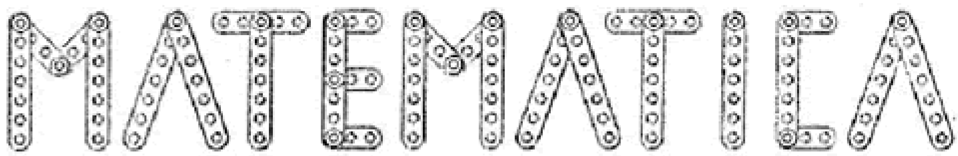
Justifica a qué grupos pertenecen el 15, el 16 y el 17.

VII - Humor y Matemáticas. 7ª J. Problema - 16: TRAPECIOS

Dibuja todos los trapecios de lados 1, 2, 3 y 5 unidades de longitud.

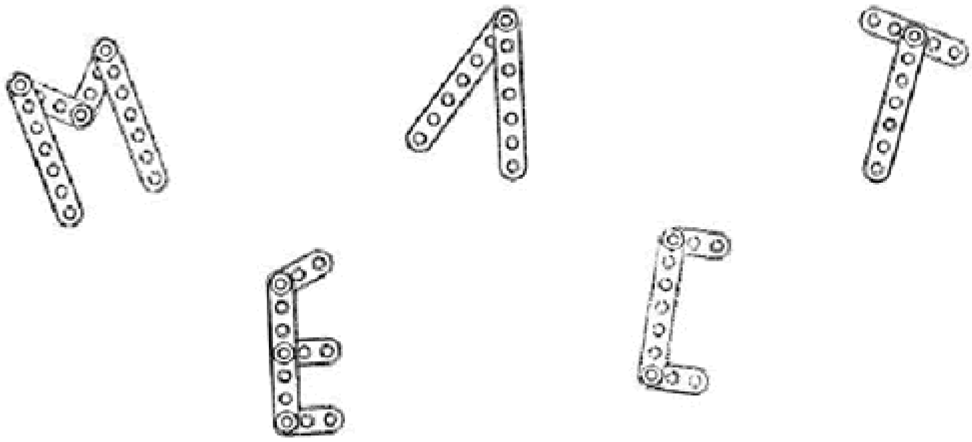
VIII - Tecnología. 6ª J. Problema - 20: DESPEDIDA

La cabecera de la Hoja Matemática de este año se confeccionó con varillas de mecano. Observa que las letras de la palabra



no son rígidas, tienen movilidad.

Se te pide que usando el mínimo número de tornillos y varillas (*como referencia asigna a cada tornillo 1 punto y a cada varilla tantos puntos como agujeros tenga: 3, 4, 5 o 7*) hagas rígidas (*no sea posible moverlas por sus articulaciones*) cada una de las letras que la componen:

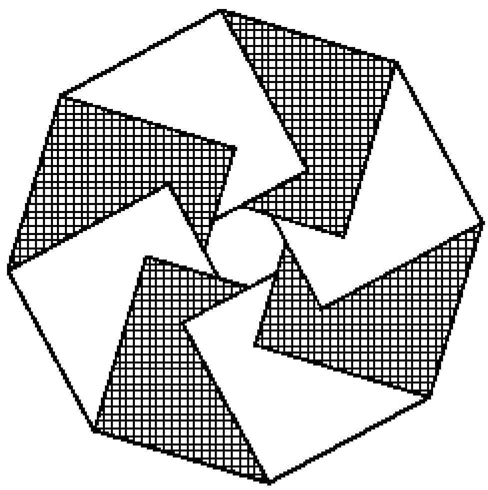


IX - Fractales. 7ª J. Problema - 18: BALANZA LOCA

En una balanza de brazos desiguales, si colocamos 15 petit-suisses de 20 gramos en el platillo de la izquierda necesitaremos, para equilibrarla, colocar 3 yogures en el platillo de la derecha. Y si ponemos 4 yogures a la izquierda se deberán colocar 5 petit-suisses a la derecha. ¿Qué pesa un yogur?

X - Astronomía. 8ª J. Problema - 20: ANAGRAMA

Los responsables de las diabluras tipo Open se denominan *Colectivo Frontera de Matemáticas* y desde el año pasado exhiben por logotipo estos ochos cuadrados entrelazados en forma octogonal. Se pide la razón de proporcionalidad entre las áreas de los octógonos mayor exterior y menor interior.



XI - Magia y Matemáticas 7ª J. Problema - 16: FUNDIENDO LA CALCULADORA

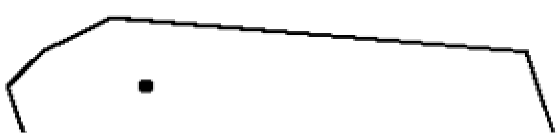
Coge tu calculadora científica y teclea:

$$1 + = 2 + + = = 3 + + + = = = 4 + + \dots \dots = = 100 + \underbrace{+ \dots \dots +}_{-100-} \underbrace{= = \dots \dots =}_{-100-}$$

Tal vez te quedes sin pilas, pierdas la paciencia o te desesperes del todo, pero con un poco de reflexión podrás determinar el resultado exacto.

XII - Año Mundial de las Matemáticas. 3ª J. Temática - Problemas - 8 y 9: CONFLICTO TESTAMENTARIO

Deseaba Bartholomew que al morir su hacienda se repartiera de forma que a cada uno de sus hijos correspondiera el terreno más próximo al árbol que había plantado de niño. Si el difunto sólo hubiera

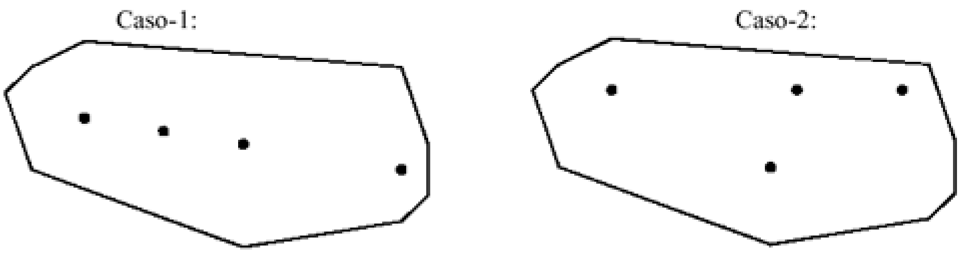


tenido dos hijos, sus últimos deseos serían fáciles de cumplir.

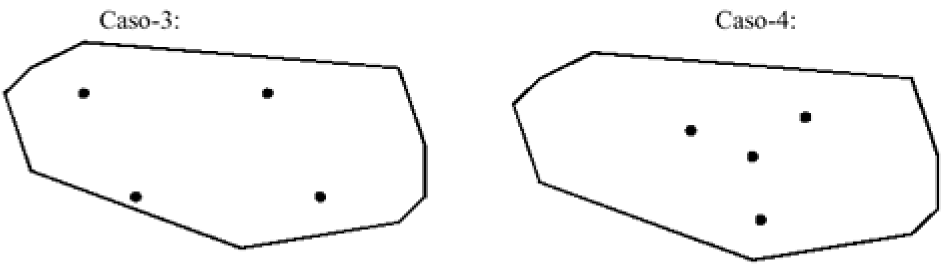
Para ello, el albacea sólo tendría que trazar la mediatriz del segmento que une los dos árboles, y esa sería la frontera entre las dos nuevas parcelas.

Pero Bartholomew dejó cuatro hijos. Cada uno plantó su propio árbol. Y el pobre albacea se las ve negras para hacer cumplir el testamento.
Si estudias el problema en los casos siguientes, podrás ayudar al albacea en el suyo.

Problema - 8.



Problema - 9.

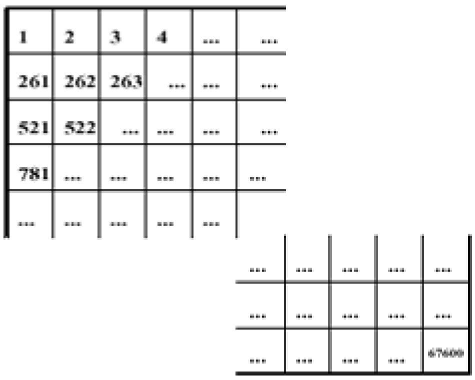


Explica claramente cómo trazas las líneas divisorias y dibújalas con la máxima precisión porque el jurado corregirá con plantilla.

XIII - Superstición y Matemáticas. 7ª J- Problema - 20: DOSCIENTOS SESENTA

Trece ediciones del Open Matemático. Veinte problemas por edición. Por tanto, este es el problema número 260.

Imagina un tablero de 260 x 260 casillas numeradas correlativamente de izquierda a derecha y de arriba a abajo, y una chapa perforada con la despedida de la presente edición y que ocupa, exactamente, 19 x 17 casillas del tablero.



La chapa se coloca sobre el tablero, y se desplaza de forma paralela a los lados de la cuadricula, dejando ver entre sus huecos algunos números del tablero.

Si el hueco de la "a" cubre la casilla 2001, ¿cuánto vale la suma de los números que deja ver la "pe"?

XIV - Economía y Matemáticas. 5ª J- Problema - 14: MERCADO DE VALORES

Las acciones de la UNITED ESOVIN se han estado vendiendo durante el último año en valores que oscilaban entre 70 y 80 puntos. Hace un año las acciones de ESOVIN valían 3/4 de las de su sempiterna competidora, VINOBACH INC., más antigua en el sector. Ahora VINOBACH se cotiza exactamente 1/8 de punto más bajo que hace un año, pero ESOVIN ha descendido hasta cotizarse a 2/3 del precio de VINOBACH.

Si la unidad mínima utilizada en el mercado de valores es 1/8 de punto, ¿a qué valor se cotizan ambas en la actualidad?

XV - Música y Matemáticas. 3ª J- Problema - 9: EL CORO DEL INSTITUTO

Para el ensayo general del concierto de final del segundo trimestre, el director Don Giuseppe Buñolieri quiere colocar a los diez componentes del coro, personas todas de diferente estatura, en dos filas de cinco. Cada corista de la fila de atrás debe ser más alto que el corista que tenga delante. Y además, las estaturas deben ir de menor a mayor de izquierda a derecha.

¿De cuántas formas diferentes puede hacerlo?

| Número 11|
| Principal Olimpiada |
Programación OEI | Principal OEI | Contactar

Problemas de Nivel medio y de Olimpiadas (11)

Una selección de problemas propuestos en la 1ª Fase de la XL Olimpiada Matemática Española (Diciembre 2003-enero 2004)

Presentamos a continuación una selección de problemas propuestos en la 1ª Fase de la XL O.M.E. en Valladolid y en Cataluña. Las versiones en catalán de los problemas propuestos en Cataluña se pueden ver en la página web ”Aquí Matemàtiques”.

1.(Cataluña)Resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 - \frac{1}{2}(x_2 + x_3 + \cdots + x_n) \\ x_2 &= a_2 - \frac{1}{2}(x_1 + x_3 + \cdots + x_n) \\ &\dots \\ x_n &= a_n - \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}) \end{aligned}$$

2. (Cataluña)Hallar el centro y el radio de la circunferencia que intercepta sobre cada lado de un triángulo dado segmentos iguales al radio.

3.(Cataluña)Efectuar la división entera (es decir, hallar el cociente y el resto) de 2003^{2003} por 2004.

4.(Cataluña) Describir los poliedros convexos de 6 vértices.

5.(Valladolid)El gato de la aldea próxima viene a la nuestra a molestar a los perros. Cada noche, cuando todos los perros están durmiendo, entra en nuestra aldea, empieza a maullar y escapa. Cuando el gato maúlla, todos los perros que están a lo sumo a 90 m de distancia del gato se ponen a ladrar. Nuestra aldea es pequeña, la máxima distancia que hay entre dos perros cualesquiera es 100 metros. ¿Puede el gato empezar a maullar en un punto tal que todos los perros de nuestra aldea empiecen a ladrar al mismo tiempo?

6.(Valladolid)Las casillas de un tablero de ajedrez están numeradas en orden ascendente de izquierda a derecha y de arriba a abajo con los números 1 al 64. En el tablero están colocadas 8 torres de tal modo que no se pueden capturar unas a otras (es decir, no hay dos torres en la misma fila ni en la misma columna. ¿Qué valores puede tomar la suma de números de las casillas en las cuales están colocadas las torres?

7.(Valladolid, propuesto por la RSME)Consideremos los polinomios

$$P(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C, \quad Q(x) = 3x^2 + 2Ax + B.$$

Supongamos que si a, b, c son las raíces de $P(x)$, las de $Q(x)$ son $\frac{a+b}{2}, \frac{b+c}{2}$. Demostrar que $a = b = c$.

8.(Valladolid, propuesto por la RSME)Demostrar que, si $-1 < x < 1, \quad -1 < y < 1,$ entonces se verifica

$$\left| \frac{x-y}{1-xy} \right| \leq \frac{|x| + |y|}{1 + |xy|}.$$

Problemas para los más jóvenes (11)

Una selección de problemas propuestos para la XIV Olimpiada Matemática para alumnos de 2º de E.S.O. (año 2003)

La Federación de Sociedades de Profesores de Matemáticas organiza desde hace 14 años esta Competición, cuya última edición se celebró en Calahorra (La Rioja), del 25 al 29 de junio de 2003. Presentamos una selección de problemas que aparecen en el interesante folleto publicado por la Sociedad Riojana de Profesores de Matemáticas "A prima".

1. **En un cuadrado de vértices A,B,C,D, cuyo lado mide 2 dm, trazamos la diagonal AC, y las circunferencias inscritas en los triángulos ACD y ABC, cuyos centros son respectivamente los puntos E y F. Clasificar el cuadrilátero AFCE y hallar su área.**
2. **Isa invita a 17 amigos a su fiesta de cumpleaños. Asignó a cada invitado un números, desde el 2 hasta el 18, reservándose el 1 para ella misma. Cuando todo el mundo estaba bailando, se dó cuenta de que la suma de los números asignados a cada pareja era cuadrado perfecto. ¿Cuál es el número de la pareja de Isa?(propuesto por Aragón)**
3. **Soy el mayor número natural de todos los que tienen 12 divisores y como únicos divisors primos al 2 y al 3. ¿Cuáles son mis doce divisores? (propuesto por Extremadura)**
4. **Víctor y Alicia intercambian bolas de colores. Una bola blanca la cambian por X bolas azules y una bola azul por X bolas rojas. Víctor tenía 2 bolas blancas, 4 azules y 3 rojas. Al cambiarlas todas a rojas obtiene un total de 73 bolas rojas. ¿Cuál es el valor de X?¿Por cuántas bolas rojas se cambia una blanca?¿Y una azul? (Propuesto por Madrid)**
5. **¿Cuál es el máximo número de puntos de intersección entre dos cuadrados y dos rectas? ¿Y entre dos triángulos y tres rectas?**

Problema 34

(propuesto en la Escuela de Ingenieros Agrónomos, Madrid , 1941)

Dos jugadores, juegan de la siguiente manera: Dado un número N de objetos (N > 1), los dos jugadores tienen la facultad de tomar alternativamente 1, 2 ó 3 objetos. El jugador que toma el último objeto pierde. ¿Cuál de los dos jugadores, y en qué casos, tiene una estrategia ganadora?

Llamamos A al jugador que coge primero, y B al que coge segundo. Suponemos que los dos jugadores juegan inteligentemente. Vamos a empezar viendo qué pasa con los números más bajos:

- Si hay una bola, A la coge, y B gana.
- Si hay 2, 3 ó 4 bolas, A coge 1, 2 ó 3 bolas respectivamente para que a B le quede una, por lo que A gana.
- Si hay 5 bolas, A puede coger 1, 2 ó 3 bolas por lo que a B le quedarían 4, 3 ó 2 bolas respectivamente, y estamos en el caso anterior, B gana.
- Si hay 6, 7 ú 8 bolas, A coge 1, 2 ó 3 bolas respectivamente para que a B le quede una, por lo que A gana.
- Si hay 9 bolas, A coge 1, 2 ó 3 bolas, quedando 8, 7 ó 6 bolas respectivamente, por lo que estamos en el caso anterior y B gana.

Parece ser que hay una estrategia ganadora:

Si en una jugada el número de bolas es múltiplo de 4 más 1 (N=4k+1), el jugador pierde. Si no es 4k+1, debe coger bolas tal que el número de bolas para el oponente sí sea de la forma 4k+1, de tal forma que el oponente pierda.

Para demostrar que dicha estrategia es válida, vamos a dividir los posibles casos en dos: si N es múltiplo de 4 más 1, o que no lo sea.

Caso 1:

Para demostrar que esta regla se cumple, vamos a ver cómo si hay N=4k+1 bolas, el jugador A pierde. En efecto, ya que el jugador puede coger 1, 2 ó 3 bolas, la situación es esta:

<table>
<tr><th>Nº de bolas antes de mover</th><th>Nº de bolas que coge A</th><th>Nº de bolas después de mover A</th><th>Nº de bolas que debe coger B</th><th>Nº de bolas después de mover B</th></tr>
<tr><td rowspan="3">4k+1</td><td>1</td><td>4k</td><td>3</td><td rowspan="3">4k-3=
4(k-1)+1=
4m+1</td></tr>
<tr><td>2</td><td>4k-1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>3</td><td>4k-1</td><td>1</td></tr>
</table>

Y volvemos a la situación inicial en la que A mueve y N es múltiplo de 4 más uno, pero con 4 bolas menos que antes. Como 1 es de la forma 4k+1 (para k=0), y cada dos turnos el número de bolas disminuye en 4, el jugador A acabará irremediablemente en la situación N=1 (después de 2*k turnos), y perderá.

EL JUGADOR B GANA

Caso 2:

Sin embargo, si el número de bolas no es múltiplo de 4 más uno, tenemos las situaciones:

Nº de bolas antes de mover	Nº de bolas que coge A	Nº de bolas después de mover
4k	3	4k-3= 4(k-1)+1= 4m+1
4k-1	2	
4k-2	1	

Según el apartado anterior, ya que B tiene un número de bolas 4m+1, múltiplo de 4 más 1, B pierde.

EL JUGADOR A GANA

Una vez comprobada la validez (y los resultados) de la estrategia en los dos casos, el juego queda:

- Si el número de bolas inicial es mútiplo de 4 más 1, B gana.
- Si no, A gana.

Problema 46.
Propuesto por José Luis Díaz Barrero, Barcelona, España.
Sea ABC un triángulo escaleno cualquiera.

Probar que: $$\left(\frac{b+c-a}{a(a-b)(a-c)}+\frac{a+c-b}{b(b-a)(b-c)}+\frac{a+b-c}{c(c-a)(c-b)}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{s}{2.[ABC]}$$

donde *s* es el semiperímetro, y [*ABC*] el área del triángulo.

Solución de F. Damián Aranda Ballesteros, Córdoba, España.

Del radicando de la primera expresión, obtenemos los siguientes desarrollos:

$$\frac{b+c-a}{a(a-b)(a-c)}+\frac{a+c-b}{b(b-a)(b-c)}+\frac{a+b-c}{c(c-a)(c-b)}=$$

$$=\frac{-bc(b+c-a)(b-c)-ac(a+c-b)(c-a)-ab(a+b-c)(a-b)}{abc(a-b)(b-c)(c-a)}=$$
$$=\frac{-bc(a+b+c-2a)(b-c)-ac(a+b+c-2b)(c-a)-ab(a+b+c-2c)(a-b)}{abc(a-b)(b-c)(c-a)}=$$
$$=\frac{2abc[b-c+c-a+a-b]-(a+b+c)[bc(b-c)+ac(c-a)+ab(a-b)]}{abc(a-b)(b-c)(c-a)}=$$
$$=\frac{-(a+b+c)[bc(b-a+a-c)+ac(c-a)+ab(a-b)]}{abc(a-b)(b-c)(c-a)}=$$
$$=\frac{-(a+b+c)[(ab-bc)(a-b)+(ac-bc)(c-a)]}{abc(a-b)(b-c)(c-a)}=\frac{-(a+b+c)[b(a-c)(a-b)+c(a-b)(c-a)]}{abc(a-b)(b-c)(c-a)}=$$
$$=\frac{-(a+b+c)(a-b)(c-a)(c-b)}{abc(a-b)(b-c)(c-a)}=\frac{(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)}{abc(a-b)(b-c)(c-a)}=\frac{a+b+c}{abc}$$

En definitiva:

$$\frac{b+c-a}{a(a-b)(a-c)}+\frac{a+c-b}{b(b-a)(b-c)}+\frac{a+b-c}{c(c-a)(c-b)}=\frac{a+b+c}{abc}$$

Por tanto, hemos de probar la siguiente desigualdad:

$\sqrt{\frac{a+b+c}{abc}}<\frac{s}{2[ABC]}$, donde $2s$ = a+b+c, y [*ABC*] es el área del triángulo.

Por la fórmula de Herón: $[ABC]=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$,

Así, de esta manera, el problema se reducirá a probar que:

$8\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c) < a\cdot b\cdot c$

Para ello, observamos que al ser:
$(s-b) + (s-c) = a$, entonces el producto $(s-b)\cdot(s-c) < a/2\cdot a/2= a^2/4$
Mutatis mutandi, para los segmentos b y c, tendremos que:
$(s-a)\cdot(s-c) < b/2\cdot b/2 = b^2/4$
$(s-a)\cdot(s-b) < c/2\cdot c/2 = c^2/4$
En definitiva:
$(s-b)\cdot(s-c)< a/2\cdot a/2= a^2/4$
$(s-a)\cdot(s-c)< b/2\cdot b/2= b^2/4$
$(s-a)\cdot(s-b)< c/2\cdot c/2= c^2/4$
Realizando el producto de todos los términos, obtenemos que:

$$(s-a)^2\cdot(s-b)^2\cdot(s-c)^2 < a^2/4\cdot b^2/4\cdot c^2/4$$

$$(s-a)^2\cdot(s-b)^2\cdot(s-c)^2 < \frac{a^2.b^2.c^2}{64}$$

$$64\cdot(s-a)^2\cdot(s-b)^2\cdot(s-c)^2< a^2\cdot b^2\cdot c^2$$

Al extraer raíces cuadradas en ambos términos, resultará que:

$8\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c) < a\cdot b\cdot c$,   **c.q.d.**

Solución del problema 49, por Álvaro Begué Aguado, Nueva York.

Consideremos la sucesión

$$C_n = xa^n + yb^n + zc^n$$

Como a, b y c son las raíces del polinomio

$$(\lambda - a)(\lambda - b)(\lambda - c) = \lambda^3 - (a+b+c)\lambda^2 + (ab+bc+ca)\lambda - abc$$

se tiene que

$$a^{n+3} = (a+b+c)a^{n+2} - (ab+bc+ca)a^{n+1} + (abc)a^n$$

$$b^{n+3} = (a+b+c)c^{n+2} - (ab+bc+ca)b^{n+1} + (abc)b^n$$

$$c^{n+3} = (a+b+c)b^{n+2} - (ab+bc+ca)c^{n+1} + (abc)c^n$$

Multiplicando estas tres ecuaciones por x, y y z respectivamente y sumando, obtenemos la relación de recurrencia

$$C_{n+3} = (a+b+c)C_{n+2} - (ab+bc+ca)C_{n+1} + (abc)C_n$$

En particular,

$$C_3 = (a+b+c)C_2 - (ab+bc+ca)C_1 + abcC_0$$

El enunciado del problema estaclece que $C_0 = C_1 = C_2 = 1$, así que ya podemos completar

$$a^3x + b^3y + c^3z = C_3 = (a+b+c) - (ab+bc+ca) + (abc) = 1 - (1-a)(1-b)(1-c)$$

José Luis **Díaz–Barrero**
Applied Mathematics III
Universitat Politècnica de Catalunya
Jordi Girona 1-3, C2, 08034 Barcelona. Spain
jose.luis.diaz@upc.es

Problema 49. *Propuesto por el editor.*

Si $x+y+z = ax+by+cz = a^2x+b^2y+c^2z = 1$, demostrar que

$$a^3x+b^3y+c^3z = 1-(1-a)(1-b)(1-c).$$

Solución por José Luis Díaz-Barrero, Barcelona, España.

Aplicando la regla de Crámer al sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x+y+z &= 1, \\ ax+by+cz &= 1, \\ a^2x+b^2y+c^2z &= 1, \end{aligned}$$

se obtiene

$$x = \frac{(1-b)(1-c)}{(c-a)(c-b)}, \quad y = \frac{(1-c)(1-a)}{(a-b)(c-b)}, \quad z = \frac{(1-a)(1-b)}{(a-c)(b-c)}.$$

Por tanto,

$$a^3x+b^3y+c^3z = a^3\frac{(1-b)(1-c)}{(c-a)(c-b)}+b^3\frac{(1-c)(1-a)}{(a-b)(c-b)}+c^3\frac{(1-a)(1-b)}{(a-c)(b-c)}$$

$$= \frac{a^3(b-c)(1-b)(1-c)-b^3(a-c)(1-a)(1-c)+c^3(a-b)(1-a)(1-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$

$$= a+b+c-(ab+bc+ca)+abc = 1-(1-a)(1-b)(1-c),$$

y hemos terminado.

Problema 50.-
Eliminar x, y, z entre las ecuaciones:

$$\begin{cases} x & +y & +z & =a \\ (y-z)^2 & +(z-x)^2 & +(x-y)^2 & =b \\ x(y-z)^2 & +y(z-x)^2 & +z(x-y)^2 & =c \\ x^2(y-z)^2 & +y^2(z-x)^2 & +z^2(x-y)^2 & =d \end{cases}$$

Solución de F. Damián Aranda Ballesteros, Córdoba, España.
Vamos a expresar x,y,z como las soluciones de una ecuación cúbica bajo ciertas condiciones.

1.- De la identidad: $0 = [(y-z)+(z-x)+(x-y)]$
obtenemos al elevarla al cuadrado
$0 = (y-z)^2 + (z-x)^2 + (x-y)^2 + 6(xy+xz+yz) - 2(x+y+z)^2$.
Esto es:
$0 = b + 6(xy+xz+yz) - 2a^2$, de donde podemos obtener la relación: $xy+xz+yz = 1/6\cdot(2a^2-b)$.

2.- De la identidad: $0 = [x(y-z)+y(z-x)+z(x-y)]$
obtenemos al elevarla al cuadrado
$0 = x^2(y-z)^2 + y^2(z-x)^2 + z^2(x-y)^2 + 6a\,xyz - 2(xy+xz+yz)^2$
Esto es:
$0 = d + 6a\,xyz - 2\cdot[1/6\cdot(2a^2-b)]^2$.
Luego entonces, tenemos que, si

$a\neq 0$; $\quad xyz = \dfrac{4a^4+b^4-4a^2b-18d}{108a}$

$a=0$; $\quad d = \dfrac{b^2}{18}$

3.- Obtengamos un último resultado a partir de la identidad:
$a\cdot b=[x+y+z]\cdot[(y-z)^2 + (z-x)^2 + (x-y)^2]$
Desarrollando este producto concluimos que
$a\cdot b = c + 2\cdot(x^3+ y^3+ z^3) - (xy^2+ xz^2+ yx^2+ yz^2+ zx^2+ zy^2)$
$a\cdot b = c + 2\cdot(x+y+z)^3 - 7\cdot(x+y+z)\cdot(xy+xz+yz) + 9xyz$
Al sustituir esta última relación por los valores anteriormente alcanzados llegamos a:

Si $a = 0$, $\quad 0 = c + 9\cdot xyz$; $xyz= -c/9$

Si $a \neq 0$, $\quad a\cdot b= c + 2\cdot a^3 - 7/6\cdot a\cdot(2a^2-b)+ 9\cdot\left(\dfrac{4a^4+b^4-4a^2b-18d}{108a}\right)$;

$2a^2\cdot b - 12a\cdot c - b^2 + 18d = 0$; $\quad d = \dfrac{b^2+12ac-2a^2b}{18}$

4.- Resumimos ambos casos en la siguiente tabla:

$a\neq 0$; $b>0$, $d>0$	$a=0$; $b>0$; $d>0$
$d=\dfrac{b^2+12ac-2a^2b}{18}$	$d=\dfrac{b^2}{18}$
$x+y+z = a$	$x+y+z = 0$
$xy + xz + yz = 1/6\cdot(2a^2-b)$.	$xy + xz + yz = -b/6$
$xyz = \dfrac{4a^4+b^4-4a^2b-18d}{108a}$	$xyz = -c/9$
x, y, z raíces de la ecuación cúbica: $x^3 - a\,x^2 + 1/6\cdot(2a^2-b)\,x - \dfrac{4a^4+b^4-4a^2b-18d}{108a} = 0$ **con las condiciones:** $a\neq 0$; $b>0$ y $d=\dfrac{b^2+12ac-2a^2b}{18}>0$	**x, y, z raíces de la ec. cúbica:** $x^3 - b/6\,x + c/9 = 0$ **con las condiciones:** $a=0$; $b>0$ y $d=\dfrac{b^2}{18}$

Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática
ISSN 1698-677X
Número 11-Problemas

Está en:
OEI - Programación - Olimpíada de Matemática - Revista Escolar de la OIM - Número 11

Último número
Presentación
Números anteriores
Contactar
Suscripción gratuita

Problemas propuestos

Ningún problema se considerará definitivamente cerrado. Nuevos puntos de vista sobre problemas anteriores siempre son bienvenidos.

Las soluciones deben enviarse por correo electrónico a la dirección revistaoim@oei.es, en ficheros de formato tex, ps o doc, adjuntos al mensaje. Si hubiera figuras, se incluirán en formato gif.

Problema 51

propuesto por José Luis Díaz Barrero, UPC, Barcelona, España.(Ligeramente modificado por el editor)

Determinar el mínimo valor de la suma

$$\frac{x}{y+\alpha z}+\frac{y}{z+\alpha x}+\frac{z}{x+\alpha y},$$

siendo x, y, z números reales positivos cualesquiera y a un parámetro real.

Problema 52

Propuesto por Adrian Muntean, Universidad de Bremen, Alemania.

Para todo $\theta \in \,]0,1[$, y $a,b,c \in \mathrm{R}^{+}$, , demostrar que

$$ab^{\theta}c^{1-\theta} \leq a^2\varepsilon_1 + \varepsilon K_{\varepsilon_1} b^2 + K_{\varepsilon} K_{\varepsilon_1} c^2,$$

donde K_{ε} y K_{ε_1} son números positivos suficientemente grandes que dependen de la elección de

$$\varepsilon > 0 \text{ y } \varepsilon_1 > 0.$$

Problema 53

(Propuesto por el Editor; se dará cuenta de su procedencia al publicar la solución)
Desde el baricentro G del triángulo ABC se trazan perpendiculares GP,GQ,GR sobre los lados BC,CA,AB respectivamente.

Calcular, en función de los elementos del triángulo ABC

a) El área del triángulo PQR.
b)El radio de la circunferencia circunscrita a PQR.
c) La suma de las áreas de los círculos PGQ, QGR y RGP.

Problema 54

Propuesto en la Escuela de Ingenieros Industriales de Madrid, 1941.

Se dibuja sobre una recta *r* un segmento AB y se trazan, en el mismo semiplano, los arcos capaces de 45º y 135º.

Determinar la envolvente de las rectas RS, siendo R y S los puntos de tangencia de las tangentes trazadas a dichos arcos capaces (R sobre el arco capaz de 45º, S sobre el de 135º) desde un punto M que se desplaza sobre la recta *r*.

Problema 55

Propuesto en la Escuela de Ingenieros Industriales de Madrid, 1942.

Un cuadrilátero variable ABCD tiene el lado AB fijo; el lado CD constante gira alrededor del punto O de intersección de los lados CD y AB. Hallar el lugar geométrico del punto P de intersección de los lados BC y AD.

Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática

ISSN 1698-677X

Número 11--Divertimentos

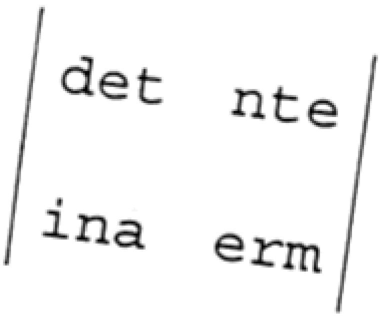
Graffiti matemático

Antonio Ledesma López
Catedrático del IES Nº UNO de Requena (Valencia)
Coordinador del Colectivo Frontera de Matemáticas

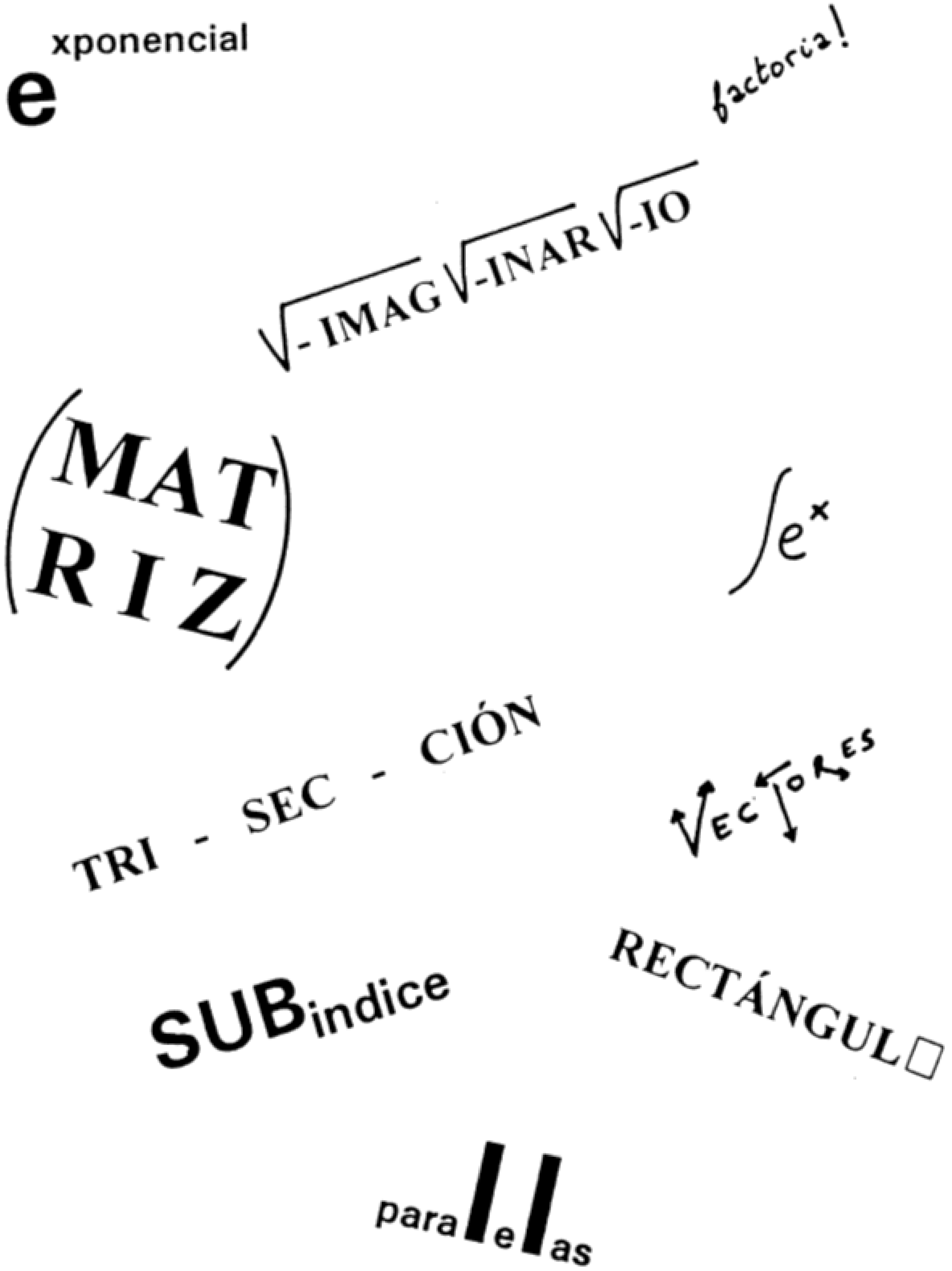
No son frecuentes ya. Los alumnos de enseñanza secundaria que siguen el moderno sistema educativo español han perdido el humor matemático. (el chiste fácil sería; "**si es que alguna vez lo tuvieron**" o "**si es que se puede dar ese tipo de humor**").

No hace muchos años, al dar un paseo por las dependencias del Instituto, aún era fácil encontrar algún graffiti matemático entre las multitemáticas, divertidas, insultantes y, cómo no, escatológicas pintadas que por allí siempre abundan; en los deshojados y orejudos cuadernos, en los folios sueltos que inundan las papeleras (¡y pasillos!), y en los márgenes (¡y portadas!) de los libros abandonados que llegaron al rincón de objetos perdidos de la conserjería.

La séptima edición del Open Matemático ya trató el tema del Humor y las Mate-máticas. Con tal motivo, escudriñamos exhaustivamente el patio, las paredes, las puertas de los retretes, las carcomidas estanterías de la biblioteca y de los viejos laboratorios, los vestuarios y las espalderas, las patas del potro y los bajos del plinto del gimnasio, y los añejos pupitres de nuestro vetusto IES nº Uno (este año cumplimos el 75 aniversario de su fundación, ¡y hay cosas que el tiempo no logra borrar!) y rescatamos estas curio-sas reliquias que, sin duda, resultarán familiares y deleitarán a más de uno.



Requena, 22 de Octubre de 2003


e
xponencial
factorial!
- IMAG
-INAR
-IO
MAT
RIZ
e
x
TRI - SEC - CIÓN
VECTORES
SUBindice
RECTÁNGUL
para
e
as

Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática
OEI
ISSN 1698-677X
Número 11-Páginas web

Mathematics Resources on the Internet
Una página de enlaces con otras de resolución de problemas

http://www.abc.se/~m9847/matre/problem.html

Se trata de una página sueca (¡en inglés!) de Bruno Kevius, donde se recogen 65 enlaces a otras páginas de interés matemático. Desde aquí se puede acceder, por ejemplo, a la página del Clay Mathematics Institute, con los Problemas del Premio del Milenio; a las Matemáticas del Último teorema de Fermat, de Charles Daney; o a los Problemas de Hilbert, de David E. Joyce.

Dentro de niveles más elementales, es accesible la página del International Mathematical Talent Search, un interesante proyecto internacional para buscar jóvenes talentos matemáticos a través de la resolución de problemas. También hay enlaces a CRUX MATHEMATICORUM o a la International Mathematical Olympiad.

La página forma parte de los clubes ABC (en sueco, con un enlace en inglés), una organización no lucrativa para usuarios del ordenador.

Valladolid, enero de 2004.
Francisco Bellot Rosado

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI

Número

12

Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática
OEI
ISSN 1698-677X

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

Número 12 (Marzo - Abril 2003)

ISSN – 1698-277X

Índice

Editor: Francisco Bellot Rosado

Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática
ISSN 1698-677X

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática
Número 12 (Marzo - Abril 2003)
ISSN – 1698-277X

Índice

Editor: Francisco Bellot Rosado

Relación del Ortocentro en un Triángulo

Juan Carlos Salazar

Introducción

Estableceremos una relación entre los cuadrados de las distancias desde el ortocentro (H) hacia los vértices (A, B, C) y los cuadrados de los lados (a, b, c) de un triángulo acutángulo (ABC) con el circunradio (R) y el inradio (r_0) de su triángulo órtico (pedal) .

Teorema:

Sea el triángulo acutángulo ABC, de ortocentro H, de circunradio (R), cuyo triángulo órtico (pedal) es H_a, H_b, H_c con inradio (r_0).

Demostrar que:

$$\frac{AH^2 + BH^2 + CH^2}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{R - r_0}{2R + r_0}$$

Demostración:

Para facilidad de nuestro análisis estableceremos primero las relaciones métricas tomando como referencia al triángulo excentral $I_aI_bI_c$, para luego utilizarlas en el triángulo ABC, aplicando las relaciones métricas para sus elementos análogos respectivos.

Consideramos el triángulo ABC, de incentro I (también ortocentro de su triángulo excentral $I_aI_bI_c$), siendo d la distancia ente su incentro (I) y circuncentro (O), denominamos O_1 al circuncentro del triángulo excentral $I_aI_bI_c$, luego tenemos que O es punto medio de IO_1, recordemos que el circuncentro O del triángulo ABC es también el centro de la circunferencia de los nueve puntos del triángulo excentral $I_aI_bI_c$.

Aplicando el teorema de Apolonio (conocido como teorema de la Mediana), para el triángulo I_aIO_1:

$$I_aI^2 + I_aO_1^2 = 2I_aO^2 + \frac{IO_1^2}{2} = 2I_aO^2 + 2d^2$$

También por el Teorema de Euler: $d^2 = R^2 - 2Rr$ y $I_aO^2 = R^2 + 2Rr_a$, donde r_a es el radio del excírculo opuesto al vértice A, además se cumple: $I_aO_1 = 2R$ (circunradio del triángulo excentral $I_aI_bI_c$). Entonces:

$$I_aI^2 + 4R^2 = 2(R^2 + 2Rr_a) + 2R^2 - 4Rr = 4R^2 + 4Rr_a - 4Rr$$
$$I_aI^2 = 4R(r_a - r)$$

De manera similar: $I_bI^2 = 4R(r_b - r)$ y $I_cI^2 = 4R(r_c - r)$

Así tenemos que: $I_aI^2 + I_bI^2 + I_cI^2 = 4R(r_a + r_b + r_c - 3r)$

Como: $r_a + r_b + r_c = 4R + r$ (Teorema de Steiner)

Luego:

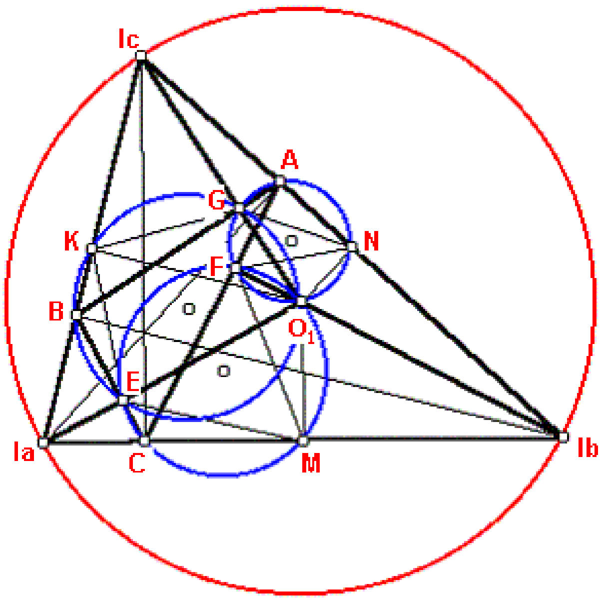
$I_aI^2 + I_bI^2 + I_cI^2 = 8R(2R - r)$

Como I es el ortocentro del triángulo excentral $I_aI_bI_c$, esta relación puede ser aplicada análogamente para el triángulo ABC de ortocentro H, de circunradio R e inradio r_0 de su triángulo órtico, considerando que el circunradio del triángulo ABC es la mitad del circunradio de su triángulo excentral $I_aI_bI_c$.

Por lo tanto para el triángulo ABC:

$AH^2 + BH^2 + CH^2 = 4R(R - r_0)$ ....(I)

Si analizamos el triángulo excentral $I_aI_bI_c$ de circuncentro O_1, donde el triángulo ABC es su triángulo órtico o pedal, donde además tenemos que M, N y K son puntos medios de los lados I_aI_b, I_bI_c e I_aI_c respectivamente. Ver la figura siguiente, que representa una configuración posible.



Tenemos que O_1I_a, O_1I_b y O_1I_c o sus prolongaciones intersecan a los lados BC, AC y AB en los puntos E, F y G, por lo tanto los cuadriláteros NAGF, EBKG y MCEF son cincunscriptibles, cuyos tres circulos se intersecan también en el circuncentro O_1.

Para el vértice I_a, I_aO_1 eje radical de los circuncirculos de los cuadriláteros MCEF y EBKG:

$I_aD.I_aM = I_aD.\frac{I_aI_b}{2} = I_aE.\ I_aO_1$

$I_aD.\frac{I_aI_b}{2} = 2R.I_aE$ ……….(1)

Para el vértice I_b, I_bO_1 eje radical de los circuncirculos de los cuadriláteros MCEF y NAGF:

$I_bD.\ I_bM = I_bD.\ \frac{I_aI_b}{2} = I_bF.\ I_b\ O_1$

$I_bD.\ \frac{I_aI_b}{2} = 2R.\ I_bF$ ……….(2)

(1)+(2):

$$\frac{I_aI_b}{2}(I_aD + I_bD) = \frac{I_aI_b^{\ 2}}{2} = 2R(I_aE + I_bF)$$

$I_aI_b^{\ 2} = 4R(I_aE + I_bF)$ ....(3)

Similarmente obtenemos:

$I_bI_c^{\ 2} = 4R(I_cG + I_bF)$ ....(4)

$I_aI_c^{\ 2} = 4R(I_cG + I_aE)$ ....(5)

A partir de (3), (4) y (5):

$$I_aI_b^{\ 2} + I_bI_c^{\ 2} + I_aI_c^{\ 2} = 8R(I_aE + I_bF + I_cG)$$

Donde: $r_a = I_aE$, $r_b = I_bF$, $r_c = I_cG$, luego:

$$I_aI_b^{\ 2} + I_bI_c^{\ 2} + I_aI_c^{\ 2} = 8R(r_a + r_b + r_c)$$

Además: $r_a + r_b + r_c = 4R + r$ (Teorema de Steiner)

Por lo tanto:

$$I_aI_b^{\ 2} + I_bI_c^{\ 2} + I_aI_c^{\ 2} = 8R(4R + r)$$

Considerando que en esta relación r es el inradio del triángulo ABC (triángulo órtico del triángulo excentral $I_aI_bI_c$), igualmente esta se puede aplicar en forma análoga para el triángulo acutángulo ABC de circunradio R e inradio r_0 de su triángulo órtico.

Luego, para el triángulo ABC:

$a^2 + b^2 + c^2 = 4R(2R + r_0)$ ....(II)

Finalmente, dividiendo (I)/(II):

$$\frac{AH^2 + BH^2 + CH^2}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{R - r_0}{2R + r_0} \qquad \text{LQQD.}$$

.

PROBLEMAS DE NIVEL MEDIO Y DE OLIMPIADAS (**12**)

Presentamos los problemas de la XX Olimpiada Balcánica de Matemáticas, celebrada a principios de mayo de 2003 en Tirana (Albania).

Problema 1.¿Existe un conjunto formado por 4004 números naturales no nulos tal que la suma de cualesquiera 2003 de sus elementos no sea divisible por 2003?

Problema 2. Sea ABC un triángulo con $AB \neq AC,$ y sea D el punto de intersección del lado BC con la tangente en A a la circunferencia circunscrita. Sea E el punto de intersección de la mediatriz de AB con la perpendicular desde B sobre BC. Sea F el punto de intersección de la mediatriz de AC con la perpendicular desde C sobre BC.

Demostrar que D, E y F están alineados.

Problema 3.Encontrar todas las funciones $f : \mathrm{Q} \rightarrow \mathrm{R}$ que satisfacen las siguientes condiciones:

a) $f(1)+1>0.$

b)$f(x+y)-xf(y)-yf(x)=f(x)f(y)-x-y+xy, \quad \forall x,y \in Q.$

c) $f(x)=2f(x+1)+x+2, \ \forall x \in Q.$

Problema 4. Sea ABCD un rectángulo de lados de longitudes $m,n,$ dividido en $m \times n$ cuadrados unidad, siendo m y n números naturales impares, primos entre sí. Los puntos de intersección de la diagonal AC con los lados de los cuadrados unidad son $A_1, A_2, \cdots, A_k,$ en este orden, con $A_1 = A, A_k = C, k \geq 2.$ Demostrar que

$$A_1A_2 - A_2A_3 + A_3A_4 - \cdots + (-1)^k A_{k-1}A_k = \frac{\sqrt{m^2+n^2}}{mn}.$$

PROBLEMAS PARA LOS MÁS JÓVENES (12)

Presentamos los problemas propuestos en la VI y VII Olimpiadas Balcánicas Junior, celebradas en Rumania en 2002 y en Turquía en 2003.

El límite superior de edad de los participantes es 15 años. El nivel de dificultad de los problemas propuestos podrá, seguramente, dar una idea de por qué, más adelante, Bulgaria y Rumania están casi siempre entre los cinco primeros países de la Olimpiada Internacional de Matemáticas.

VI Olimpiada Balcánica Junior (2002)

Problema 1.Sea ABC un triángulo isósceles, con AC = BC, y sea P un punto de su circunferencia circunscrita, situado en el arco AB que no contiene a C. Sea D el pie de la perpendicular trazada desde C a la recta PB.

Demostrar que PA + PB = 2PD.

Problema 2. Sean C_1 y C_2 dos circunferencias de radios distintos, que se cortan en los puntos A y B. Sus centros respectivos, O_1 y O_2, están separados por la recta AB. Sean B_1 y B_2 los puntos diametralmente opuestos a B en estas circunferencias. Se consideran los puntos $M_1 \in \mathsf{C}_1$ y $M_2 \in \mathsf{C}_2$ tales que $\widehat{AO_1M_1} = \widehat{AO_2M_2}$, siendo B_1 interior al ángulo $\widehat{AO_1M_1}$, y B (no B_2) interior al ángulo $\widehat{AO_2M_2}$. Sea M el punto medio del segmento B_1B_2.

Demostrar que $\widehat{MM_1B} = \widehat{MM_2B}$.

Problema 3. Encontrar el número natural N que tiene las propiedades siguientes:

i) N tiene exactamente 16 divisores:

$$1 < d_1 < d_2 < \cdots < d_{15} < d_{16} = N.$$

ii) El divisor d_{d_5} es igual a $(d_2 + d_4)d_6$.

Problema 4. Sean a, b, c números reales estrictamente positivos. Demostrar que

$$\frac{1}{b(a+b)} + \frac{1}{c(b+c)} + \frac{1}{a(c+a)} \geq \frac{27}{2(a+b+c)^2}$$

VII Olimpiada Balcánica Junior (2003)

Problema 1. El número A tiene $2n$ cifras, todas ellas iguales a 4, mientras que el número B tiene n cifras, todas iguales a 8. Demostrar que $A + 2B + 4$ es un cuadrado perfecto, cualquiera que sea $n \geq 1$.

Problema 2. En un plano hay n puntos, no alineados tres a tres, con la propiedad siguiente :

Cualquiera que sea la numeración $(1, 2, \cdots, n)$ que se dé a esos puntos, la línea quebrada que los une (en ese orden) no se corta a sí misma.

Encontrar el mayor valor de n para que exista una configuración de n puntos con la anterior propiedad.

Problema 3. El triángulo ABC está inscrito en el círculo k. Sean D, E, F los puntos medios de los arcos BC, CA, AB (que no contienen respectivamente a A,B,C). El segmento DE corta a CB y CA en G y H, respectivamente. El segmento DF corta a BC y BA en los puntos I,J, respectivamente. Sean M y N los puntos medios de GH e IJ, respectivamente.

a) Expresar los ángulos del triángulo DMN en función de los de ABC.

b) Sea Q el centro del círculo circunscrito a DMN y P la intersección de las rectas AD y EF. Demostrar que Q,P,M y N están en una circunferencia.

Problema 4. Demostrar que

$$\frac{1+x^2}{1+y+z^2} + \frac{1+y^2}{1+z+x^2} + \frac{1+z^2}{1+x+y^2} \geq 2,$$

cualesquiera que sean los números reales $x, y, z > -1$.

<u>EJERCICIO Nº 15:</u>

Demostrad que:

$$\sec^4\frac{p}{7}+\sec^4\frac{2p}{7}+\sec^4\frac{3p}{7}=416$$

<u>Solución:</u>

Para la resolución de este problema he tenido que utilizar:

Números complejos: fórmula de Moivre
Relaciones de Cardano-Vieta

Sea: $A=\sec^4\frac{p}{7}+\sec^4\frac{2p}{7}+\sec^4\frac{3p}{7}=\dfrac{1}{\cos^4\frac{p}{7}}+\dfrac{1}{\cos^4\frac{2p}{7}}+\dfrac{1}{\cos^4\frac{3p}{7}}$

$$A=\frac{\left(\cos\frac{2p}{7}\cdot\cos\frac{3p}{7}\right)^4+\left(\cos\frac{p}{7}\cdot\cos\frac{3p}{7}\right)^4+\left(\cos\frac{2p}{7}\cdot\cos\frac{p}{7}\right)^4}{\left(\cos\frac{p}{7}\cdot\cos\frac{2p}{7}\cdot\cos\frac{3p}{7}\right)^4}$$

Para facilitar operaciones realizamos los cambios:

$$x=\cos\frac{p}{7}\qquad y=\cos\frac{2p}{7}\qquad z=\cos\frac{3p}{7}$$

$$A=\frac{(xy)^4+(xz)^4+(yz)^4}{(xyz)^4}\qquad (1)$$

Utilizando la fórmula de Moivre con $a=\frac{2p}{7}$:

$$e^{ai}=\cos a+isen a\quad\rightarrow\quad e^{7ai}=e^{2pi}=1=(\cos a+isen a)^7$$

Tomando sólo la parte real de dicha fórmula nos quedará:

$$1=\binom{7}{0}\cdot\cos^7 a-\binom{7}{2}\cdot\cos^5 a\cdot sen^2 a+\binom{7}{4}\cdot\cos^3 a\cdot sen^4 a-\binom{7}{6}\cdot\cos a\cdot sen^6 a$$

Haciendo $sen^2 a=1-\cos^2 a$, obtenemos la expresión en función de cosenos:

$$1=64\cos^7 a-112\cos^5 a+56\cos^3 a-7\cos a\qquad\rightarrow\quad \cos a=t$$

$$64t^7 - 112t^5 + 56t^3 - 7t - 1 = 0$$

Las siete raíces de esta ecuación son los valores de:

$$\cos\frac{2p}{7}, \cos\frac{4p}{7}, \cos\frac{6p}{7}, \cos\frac{8p}{7}, \cos\frac{10p}{7}, \cos\frac{12p}{7}, \cos 2p$$

Si aplicamos la regla de Ruffini para $t_7 = \cos 2p = 1$

	64	0	-112	0	56	0	-7	-1
1		64	64	-48	-48	8	8	1
	64	64	-48	-48	8	8	1	0

Nos queda una ecuación de 6º grado de la forma:

$$64t^6 + 64t^5 - 48t^4 - 48t^3 + 8t^2 + 8t + 1 = 0$$

$$t^6 + t^5 - \frac{3}{4}t^4 - \frac{3}{4}4t^3 + \frac{1}{8}t^2 + \frac{1}{8}t + \frac{1}{64} = 0 \qquad (2)$$

De donde:

$$t_1 = \cos\frac{2p}{7} = y$$

$$t_2 = \cos\frac{4p}{7} = -\cos\frac{3p}{7} = -z$$

$$t_3 = \cos\frac{6p}{7} = -\cos\frac{p}{7} = -x$$

$$t_4 = \cos\frac{8p}{7} = -\cos\frac{p}{7} = -x$$

$$t_5 = \cos\frac{10p}{7} = -\cos\frac{3p}{7} = -z$$

$$t_6 = \cos\frac{12p}{7} = \cos\frac{2p}{7} = y$$

Aplicando a (2) la primera relación de Cardano-Vieta:

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + t_6 = -1 \qquad \to \qquad x - y + z = \frac{1}{2} \qquad (3)$$

Aplicando a (2) la sexta relación de Cardano-Vieta:

$$t_1 \cdot t_2 \cdot t_3 \cdot t_4 \cdot t_5 \cdot t_6 = \frac{1}{64} \quad \rightarrow \quad (xyz)^2 = \frac{1}{64} \quad \rightarrow xyz = \frac{1}{8}$$

Por tanto, el denominador de A en (1) tiene por valor: $(xyz)^4 = \frac{1}{4096}$

El problema reside en calcular el valor de :

$$(xy)^4 + (xz)^4 + (yz)^4$$

Aplicando a (2) la quinta relación de Cardano-Vieta:

$$t_1 \cdot t_2 \cdot t_3 \cdot t_4 \cdot t_5 + t_1 \cdot t_2 \cdot t_3 \cdot t_4 \cdot t_6 + t_1 \cdot t_2 \cdot t_3 \cdot t_5 \cdot t_6 + t_1 \cdot t_2 \cdot t_4 \cdot t_5 \cdot t_6 +$$
$$+ t_1 \cdot t_3 \cdot t_4 \cdot t_5 \cdot t_6 + t_2 \cdot t_3 \cdot t_4 \cdot t_5 \cdot t_6 = -\frac{1}{8}$$

$$x^2 yz^2 - x^2 y^2 z - xy^2 z^2 - xy^2 z^2 - x^2 y^2 z + x^2 yz^2 = -\frac{1}{8}$$

$$xyz \cdot (xz - xy - yz - yz - xy + xz) = -\frac{1}{8}$$

$$xy - xz + yz = \frac{1}{16xyz} = \frac{1}{16 \cdot \frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$$

Resumiendo, hemos obtenido:

$$\left.\begin{array}{l} x - y + z = \frac{1}{2} \\ \\ xy - xz + yz = \frac{1}{2} \\ \\ xyz = \frac{1}{8} \end{array}\right\} \text{ y}$$

Elevando al cuadrado la segunda de las expresiones:

$$(xy - xz + yz)^2 = (xy)^2 + (xz)^2 + (yz)^2 + 2\left(-x^2 yz + xy^2 z - xyz^2\right)$$

$$\frac{1}{4} = (xy)^2 + (xz)^2 + (yz)^2 + 2xyz \cdot (-x + y - z)$$

$$\frac{1}{4} = (xy)^2 + (xz)^2 + (yz)^2 + 2 \cdot \frac{1}{8} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$(xy)^2 + (xz)^2 + (yz)^2 = \frac{3}{8}$$

Elevando al cuadrado esta última expresión:

$$\left[(xy)^2 + (xz)^2 + (yz)^2\right]^2 = (xy)^4 + (xz)^4 + (yz)^4 + 2\left[(xyxz)^2 + (xyyz)^2 + (xzyz)^2\right]$$

$$\frac{9}{64} = (xy)^4 + (xz)^4 + (yz)^4 + 2\cdot\left(x^4y^2z^2 + x^2y^4z^2 + x^2y^2z^4\right)$$

$$\frac{9}{64} = (xy)^4 + (xz)^4 + (yz)^4 + 2\cdot(xyz)^2\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$$

$$\frac{9}{64} = (xy)^4 + (xz)^4 + (yz)^4 + \frac{1}{32}\cdot \left(x^2 + y^2 + z^2\right) \qquad (4)$$

Debemos utilizar y para hallar: $x^2 + y^2 + z^2$

$$(x - y + z)^2 = \frac{1}{4} = x^2 + y^2 + z^2 + 2\cdot(xy - xz + yz) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{5}{4}$$

Volviendo a (4):

$$\frac{9}{64} = (xy)^4 + (xz)^4 + (yz)^4 + \frac{1}{32}\cdot \frac{5}{4}$$

$$(xy)^4 + (xz)^4 + (yz)^4 = \frac{13}{128}$$

Habíamos hallado: $(xyz)^4 = \frac{1}{4096}$

Finalmente, yendo a $A = \frac{(xy)^4 + (xz)^4 + (yz)^4}{(xyz)^4}$

$$A = \frac{\frac{13}{128}}{\frac{1}{4096}} = \frac{13\cdot 4096}{128} = 416$$

Por tanto, queda demostrado: $\sec^4\frac{p}{7} + \sec^4\frac{2p}{7} + \sec^4\frac{3p}{7} = 416$

EJERCICIO Nº 49:

Si $x+y+z=ax+by+cz=a^2x+b^2y+c^2z=1$ **demuestra que:**

$$a^3x+b^3y+c^3z=1-(1-a)\cdot(1-b)\cdot(1-c)$$

Solución:

Se plantea un sistema lineal de 3 ecuaciones con 3 incógnitas:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ ax+by+cz=1 \\ a^2x+b^2y+c^2z=1 \end{array}\right\}$$

Aplicando la regla de Cramer, calculamos en primer lugar el valor del determinante del sistema.

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}=bc^2+ab^2+a^2c-a^2b-b^2c-ac^2$$

Para una correcta resolución del problema es necesario factorizar Δ:

$$\Delta=a^2\cdot(c-b)+a\cdot\left(b^2-c^2\right)+bc^2-b^2c=(c-b)\cdot\left[a^2-(b+c)\cdot a+bc\right]=(c-b)\cdot(a-b)\cdot(a-c)$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & b & c \\ 1 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-b & 1-c \\ 0 & 1-b^2 & 1-c^2 \end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{(1-b)\cdot\left(1-c^2\right)-(1-c)\cdot\left(1-b^2\right)}{\Delta}$$

$$x=\frac{(1-b)\cdot(1+c)\cdot(1-c)-(1-c)\cdot(1+b)\cdot(1-b)}{\Delta}=\frac{(1-c)\cdot(1-b)\cdot(1+c-1-b)}{(c-b)\cdot(a-b)\cdot(a-c)}$$

$$x=\frac{(1-b)\cdot(1-c)}{(a-b)\cdot(a-c)}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & c \\ a^2 & 1 & c^2 \end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1-a & 0 & 1-c \\ 1-a^2 & 0 & 1-c^2 \end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{(1-c)\cdot\left(1-a^2\right)-(1-a)\cdot\left(1-c^2\right)}{\Delta}$$

$$y=\frac{(1-c)\cdot(1+a)\cdot(1-a)-(1-a)\cdot(1+c)\cdot(1-c)}{\Delta}=\frac{(1-a)\cdot(1-c)\cdot(1+a-1-c)}{(c-b)\cdot(a-b)\cdot(a-c)}$$

$$y=\frac{(1-a)\cdot(1-c)}{(c-b)\cdot(a-b)}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & 1\\ a^2 & b^2 & 1\end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1-a & 1-b & 0\\ 1-a^2 & 1-b^2 & 0\end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{(1-a)\cdot\left(1-b^2\right)-\left(1-a^2\right)\cdot(1-b)}{\Delta}$$

$$z=\frac{(1-a)\cdot(1+b)\cdot(1-b)-(1+a)\cdot(1-a)\cdot(1-b)}{\Delta}=\frac{(1-a)\cdot(1-b)\cdot(1+b-1-a)}{(c-b)\cdot(a-b)\cdot(a-c)}$$

$$z=-\frac{(1-a)\cdot(1-b)}{(c-b)\cdot(a-c)}$$

Por tanto:

$$a^3x+b^3y+c^3z=\frac{a^3\cdot(1-b)\cdot(1-c)}{(a-b)\cdot(a-c)}+\frac{b^3\cdot(1-a)\cdot(1-c)}{(c-b)\cdot(a-b)}-\frac{c^3\cdot(1-a)\cdot(1-b)}{(c-b)\cdot(a-c)}=$$

$$=\frac{a^3\cdot(1-b)\cdot(1-c)\cdot(c-b)+b^3\cdot(1-a)\cdot(1-c)\cdot(a-c)-c^3\cdot(1-a)\cdot(1-b)\cdot(a-b)}{(a-b)\cdot(a-c)\cdot(c-b)}$$

$$A=a^3\cdot(1-b)\cdot(1-c)\cdot(c-b)+b^3\cdot(1-a)\cdot(1-c)\cdot(a-c)-c^3\cdot(1-a)\cdot(1-b)\cdot(a-b)$$

$$A=(1-b)\cdot(1-c)\cdot(c-b)\cdot a^3+\left[(c-1)\cdot a^2+\left(1-c^2\right)\cdot a+c^2-c\right]+\left[(b-1)\cdot a^2+\left(1-b^2\right)\cdot a+b^2-b\right]\cdot c^3$$

Tomando como variable ***a***:

$$A=(1-c)\cdot(1-b)\cdot(c-b)\cdot a^3+\left[b^3\cdot(c-1)-c^3\cdot(b-1)\right]\cdot a^2+$$

$$+\left[b^3\cdot\left(1-c^2\right)-c^3\cdot\left(1-b^2\right)\right]\cdot a+b^3\cdot\left(c^2-c\right)-c^3\cdot\left(b^2-b\right)$$

$$A=(1-c)\cdot(1-b)\cdot(c-b)\cdot a^3+\left(b^3c-b^3-bc^3+c^3\right)\cdot a^2+$$

$$+\left(b^3-b^3c^2-c^3+b^2c^3\right)\cdot a+b^3c^2-b^3c-b^2c^3+bc^3$$

Denotando que $c^3-b^3=(c-b)\cdot\left(c^2+bc+b^2\right)$

$$A=(1-c)\cdot(1-b)\cdot(c-b)\cdot a^3+\left[-bc\cdot(c-b)\cdot(c+b)+(c-b)\cdot\left(c^2+bc+b^2\right)\right]\cdot a^2+$$

$$+\left[(bc)^2\cdot(c-b)-(c-b)\cdot\left(c^2+bc+b^2\right)\right]\cdot a-(bc)^2\cdot(c-b)+bc\cdot(c-b)\cdot(c+b)$$

Factor común $c-b$

$$\frac{A}{c-b}=(1-c)\cdot(1-b)\cdot a^3+\left[-bc\cdot(c+b)+c^2+bc+b^2\right]\cdot a^2+$$
$$+\left[(bc)^2-c^2-bc-b^2\right]\cdot a+(bc)^2+bc\cdot(c+b)$$

Si observamos en la expresión algebraica que debemos demostrar no hay denominadores. Eso nos debe hacer pensar que el polinomio

$$P(a)=(1-c)\cdot(1-b)\cdot a^3+\left[-bc\cdot(c+b)+c^2+bc+b^2\right]\cdot a^2+\left[(bc)^2-c^2-bc-b^2\right]\cdot a+(bc)^2+bc\cdot(c+b)$$

tiene por raíces: $a_1=c$ y $a_2=b$.
Por tanto nos aventuramos a aplicar la regla de Ruffini a $P(a)$.

	1-c-b+bc	-bc^2-b^{2}c+c^2+bc+ b^2	(bc)^2- c^2-bc- b^2	-(bc)^2+bc^2+ b^{2}c
c		c- c^2-bc+ bc^2	c^2-(bc)^2+ b^{2}c	(bc)^2- bc^2- b^{2}c
	1-c-b+bc	c-b^{2}c+ b^2	b^{2}c-bc- b^2	0

Acabamos de demostrar que $a_1=c$ es solución de $P(a)$

	1-c-b+bc	c-b^{2}c+ b^2	b^{2}c-bc- b^2
b		b-bc- b^2+ b^{2}c	b^2+bc- b^{2}c
	1-c-b+bc	b+c-bc	0

También es solución $a_2=b$.
Nos queda el factor:

$$(1-c-b+bc)\cdot a+b+c-bc=$$

El cambio $t=b+c-bc$ facilita las operaciones:

$$(1-t)\cdot a+t=0 \quad\rightarrow\quad a+\frac{t}{1-t}=0 \quad\rightarrow\quad a-1+\frac{1}{1-t}=0$$

Deshaciendo el cambio: $a-1+\dfrac{1}{1-b-c+bc}=0$, que es la forma más adecuada.

Finalmente, la factorización de $P(a)$ es:

$$P(a)=(a-b)\cdot(a-c)\cdot\left(a-1+\frac{1}{1-b-c+bc}\right)$$

Así, $A=(c-b)\cdot(1-c)\cdot(1-b)\cdot(a-b)\cdot(a-c)\cdot\left(a-1+\dfrac{1}{1-b-c+bc}\right)$

De ese modo:

$$a^3x+b^3y+c^3z=\frac{(c-b)\cdot(1-c)\cdot(1-b)\cdot(a-b)\cdot(a-c)\cdot\left(a-1+\frac{1}{1-b-c+bc}\right)}{(c-b)\cdot(a-b)\cdot(a-c)}$$

$$a^3x+b^3y+c^3z=-(1-c)\cdot(1-b)\cdot\left(1-a-\frac{1}{1-b-c+bc}\right)$$

Rompiendo el paréntesis:

$$a^3x+b^3y+c^3z=-(1-a)\cdot(1-b)\cdot(1-c)+\frac{1-c-b+bc}{1-c-b+bc}$$

$$a^3x+b^3y+c^3z=1-(1-a)\cdot(1-b)\cdot(1-c)$$ ***c.q.d***

EJERCICIO Nº 50:

Eliminad x, y, z en el siguiente sistema algebraico:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=a \\ (y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2=b \\ x\cdot(y-z)^2+y\cdot(z-x)^2+z\cdot(x-y)^2=c \\ x^2\cdot(y-z)^2+y^2\cdot(z-x)^2+z^2\cdot(x-y)^2=d \end{array}\right\}$$

Solución:

Para resolver el problema he utilizado las fórmulas del cuadrado y el cubo de un polinomio. El proceso es correcto aunque puede haber errores en las operaciones algebraicas, por lo que os pido que lo reviséis.

De la 1ª ecuación:

$$(x+y+z)^2=a^2=x^2+y^2+z^2+2\cdot(xy+xz+yz) \qquad (1)$$

De la 2ª ecuación:

$$y^2-2yz+z^2+z^2-2xz+x^2+x^2-2xy+y^2=b$$
$$2\cdot\left(x^2+y^2+z^2\right)-2\cdot(xy+xz+yz)=b \qquad (2)$$

Por tanto: (1) + (2) $\quad\rightarrow\quad 3\cdot\left(x^2+y^2+z^2\right)=a^2+b$

$$x^2+y^2+z^2=\frac{a^2+b}{3}$$

Sustituyendo esta expresión en (1), por ejemplo:

$$a^2=\frac{a^2+b}{3}+2\cdot(xy+xz+yz) \quad\rightarrow\quad xy+xz+yz=\frac{2a^2-b}{6} \qquad (3)$$

Resumiendo:

$$x+y+z=a$$
$$xy+xz+yz=\frac{2a^2-b}{6}$$
$$x^2+y^2+z^2=\frac{a^2+b}{3}$$

En la 3ª ecuación que nos han dado quedará:

$$x\cdot\left(y^2-2yz+z^2\right)+y\cdot\left(z^2-2xz+x^2\right)+z\cdot\left(x^2-2xy+y^2\right)=c$$

Desarrollando y ordenando convenientemente:

$$x^2y+x^2z+xy^2+xz^2+y^2z+yz^2-6xyz=c$$

Sabemos que:

$$(x+y+z)^3=a^3=x^3+y^3+z^3+3\cdot\left(x^2y+x^2z+xy^2+xz^2+y^2z+yz^2\right)+6xyz$$

Sumando estas dos últimas expresiones y operando eficientemente:

$$a^3+c=x^3+y^3+z^3+4\cdot\left[x^2\cdot(y+z)+y^2\cdot(x+z)+z^2\cdot(x+y)\right] \qquad (4)$$

Pero, en la primera ecuación que nos han dado:

$$\begin{aligned} y+z&=a-x\\ x+z&=a-y\\ x+y&=a-z \end{aligned}$$

De ese modo en (4):

$$a^3+c=x^3+y^3+z^3+4\cdot\left[x^2\cdot(a-x)+y^2\cdot(a-y)+z^2\cdot(a-z)\right]$$

$$a^3+c=x^3+y^3+z^3+4\cdot\left(ax^2-x^3+ay^2-y^3+az^2-z^3\right)$$

$$a^3+c=-3\cdot\left(x^3+y^3+z^3\right)+4a\cdot\left(x^2+y^2+z^2\right)$$

Habíamos demostrado que:

$$x^2+y^2+z^2=\frac{a^2+b}{3}$$

Nos quedará pues:

$$a^3+c=-3\cdot\left(x^3+y^3+z^3\right)+\frac{4a\cdot\left(a^2+b\right)}{3}$$

$$3\cdot\left(x^3+y^3+z^3\right)=\frac{4a\cdot\left(a^2+b\right)}{3}-a^3-c$$

$$x^3+y^3+z^3=\frac{a^3+4ab-3c}{9} \qquad (5)$$

Necesitamos hallar el valor del triple producto xyz. Para ello nos apoyamos en una expresión obtenida anteriormente:

$$x^2y + x^2z + xy^2 + xz^2 + y^2z + yz^2 - 6xyz = c$$

$$x^2 \cdot (y+z) + y^2 \cdot (x+z) + z^2 \cdot (x+y) - 6xyz = c$$

$$x^2 \cdot (a-x) + y^2 \cdot (a-y) + z^2 \cdot (a-z) - 6xyz = c$$

$$a \cdot (x^2 + y^2 + z^2) - (x^3 + y^3 + z^3) - 6xyz = c$$

$$\frac{a \cdot (a^2 + b)}{3} - \frac{a^3 + 4ab - 3c}{9} - c = 6xyz$$

$$xyz = \frac{2a^3 - ab - 6c}{54} \qquad (6)$$

Resumiendo:

$$\left.\begin{aligned} & x + y + z = a \\ & xy + xz + yz = \frac{2a^2 - b}{6} \\ & xyz = \frac{2a^3 - ab - 6c}{54} \\ & x^2 + y^2 + z^2 = \frac{a^2 + b}{3} \\ & x^3 + y^3 + z^3 = \frac{a^3 + 4ab - 3c}{9} \end{aligned}\right\} \text{y}$$

Ya sólo nos queda operar con la cuarta ecuación del enunciado:

$$x^2 \cdot (y^2 - 2yz + z^2) + y^2 \cdot (z^2 - 2xz + x^2) + z^2 \cdot (x^2 - 2xy + y^2) = d$$

$$(xy)^2 - 2x^2yz + (xz)^2 + (yz)^2 - 2xy^2z + (xy)^2 + (xz)^2 - 2xyz^2 + (yz)^2 = d$$

Reordenando convenientemente:

$$2 \cdot \left[(xy)^2 + (xz)^2 + (yz)^2\right] - 2 \cdot \left[x^2yz + xy^2z + xyz^2\right] = d$$

$$2 \cdot \left[(xy)^2 + (xz)^2 + (yz)^2\right] - 2 \cdot xyz \cdot (x + y + z) = d \qquad (7)$$

Por tanto, debemos hallar el valor de :

$$M = (xy)^2 + (xz)^2 + (yz)^2$$

$$(xy+xz+yz)^2=\left(\frac{2a^2-b}{6}\right)^2=(xy)^2+(xz)^2+(yz)^2+2\cdot\left[x^2yz+xy^2z+xyz^2\right]$$

$$\left(\frac{2a^2-b}{6}\right)^2=(xy)^2+(xz)^2+(yz)^2+2\cdot xyz\cdot(x+y+z)$$

$$\left(\frac{2a^2-b}{6}\right)^2-2\cdot xyz\cdot(x+y+z)=(xy)^2+(xz)^2+(yz)^2 \qquad (8)$$

Sustituyendo (8) en (7) tendremos:

$$2\cdot\left(\frac{2a^2-b}{6}\right)^2-6\cdot xyz\cdot(x+y+z)=d \qquad (9)$$

Apoyándonos en y eliminamos las variables *x*, *y*, *z*:

$$\frac{(2a^2-b)^2}{18}-\frac{a\cdot(2a^3-ab-6c)}{9}=d$$

$$(2a^2-b)^2-2a\cdot(2a^3-ab-6c)-18d=0$$

$$4a^4-4a^2b+b^2-4a^4+2a^2b+12ac-18d=0$$

La relación pedida es:

$$2a^2b-b^2-12ac+18d=0$$

Problema 53

Desde el baricentro G del triángulo ABC se trazan perpendiculares GP, GQ, GR sobre los lados BC, CA, AB respectivamente.

Calcular, en función de los elementos del triángulo ABC:

a) El área del triángulo PQR.

b) El radio de la circunferencia circunscrita a PQR.

c) La suma de las áreas de los círculos PGQ, QGR y RGP.

Solución de Miguel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca, España.

Sean, en el orden usual,

a, b, c las longitudes de los lados de ΔABC,

m_a, m_b, m_c las longitudes de las correspondientes medianas

y

h_a, h_b, h_c las de las alturas

Designaremos por $[XYZ]$ el área de un triángulo XYZ.

Si D es el pie de la perpendicular trazada por A sobre BC y M el punto medio de dicho lado, los triángulos ADM y GPM son semejantes; por tanto,

$$\frac{GP}{AD} = \frac{GM}{AM}.$$

Siendo $AD = h_a$ y $\frac{GM}{AM} = \frac{1}{3}$, por la propiedad del baricentro de trisecar cada mediana, resulta

$$GP = \frac{1}{3}h_a.$$

Análogamente, $GQ = \frac{1}{3}h_b$ y $GR = \frac{1}{3}h_c$.

Pues $\angle GPC$ y $\angle GQC$ son rectos, el cuadrilátero $GPCQ$ es inscriptible en la circunferencia de diámetro GC y, por ser suplementarios los ángulos opuestos de un cuadrilátero inscriptible, tenemos $\angle PGQ = 180^\circ - C$.

Resulta entonces

$$\begin{aligned}[GPQ] &= \frac{1}{2} GP \cdot GQ \cdot \sin(\angle PGQ) \\ &= \frac{1}{18} h_a h_b \sin C \\ &= \frac{1}{18} \cdot \frac{bc \sin A}{a} \cdot \frac{ca \sin B}{b} \cdot \sin C \\ &= \frac{1}{18} c^2 \sin A \sin B \sin C\end{aligned}$$

y, por permutación circular,

$$[GQR] = \frac{1}{18} a^2 \sin A \sin B \sin C, \quad [GRP] = \frac{1}{18} b^2 \sin A \sin B \sin C$$

de donde

$$[PQR] = [GPQ] + [GQR] + [GRP] = \frac{1}{18}\left(a^2 + b^2 + c^2\right) \sin A \sin B \sin C \qquad (1)$$

Esto contesta a).

b) La circunferencia circunscrita a ΔGPQ es la que circunscribe el cuadrilátero $GPCQ$ y su diámetro, según se ha visto, es GC. El teorema del seno, aplicado al triángulo GPQ da inmediatamente

$$\begin{aligned} PQ &= GC \cdot \sin(\angle PGQ) \\ &= \frac{2}{3} m_c \sin C \end{aligned}$$

y, por permutación circular,

$$QR = \frac{2}{3} m_a \sin A, \qquad RP = \frac{2}{3} m_b \sin B$$

Sustituímos estas expresiones, así como la (1), en la fórmula $\dfrac{PQ \cdot QR \cdot RP}{4[PQR]}$ que da el valor del radio r de la circunferencia circunscrita a ΔPQR. El resultado es

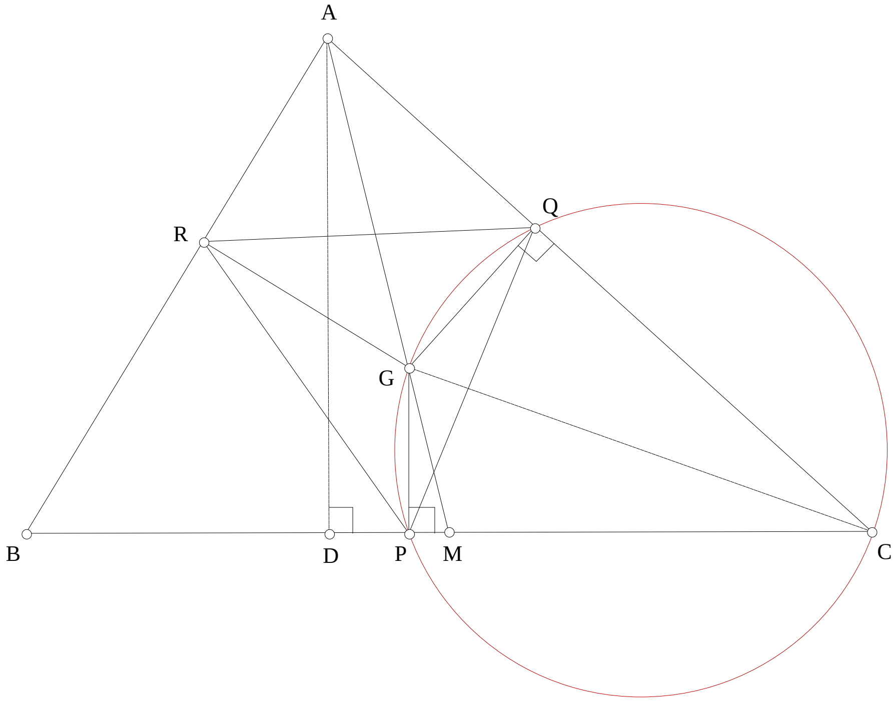
$$\begin{aligned} r &= \frac{4 m_a m_b m_c}{3\left(a^2 + b^2 + c^2\right)} \\ &= \frac{m_a m_b m_c}{m_a^2 + m_b^2 + m_c^2} \end{aligned}$$

por la conocida relación $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{4}{3}\left(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2\right)$.

c) Pues los diámetros de los círculos PGQ, QGR y RGP son, respectivamente los segmentos GC, GA y GB, la suma de las áreas que se pide es igual a

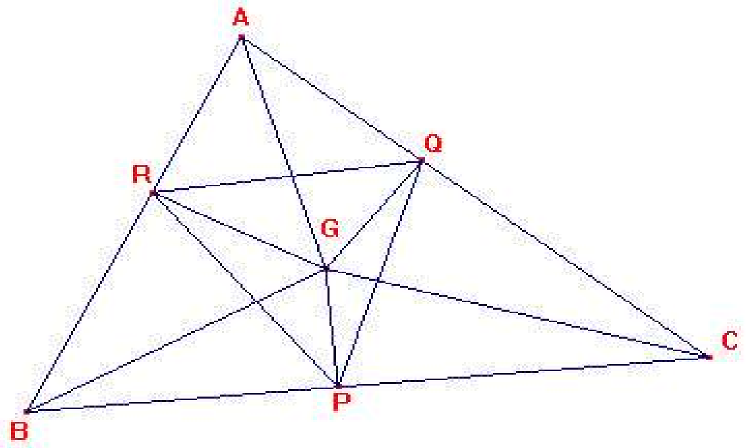
$$\frac{p}{9}\left(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2\right)$$

que, expresada en función de los lados del triángulo, se escribe $\frac{p}{12}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$.



A
Q
R
G
B
D
P
M
C

Solución de Dones Colmenárez (Barquisimeto, Venezuela); esta última da todos los resultados pedidos en función de las longitudes de las medianas del triángulo. Origen del problema : "*Mathematical Problem Papers*", reunidos por el Rev. E.M.Radford, Cambridge 1931



Demostración:

a)-. Como los ángulos $\angle$ ARG y $\angle$AQG son rectos, entonces el cuadrilátero $\square$ ARGQ es inscriptible en una circunferencia de diámetro AG (circunferencia circunscrita al $\Delta ARQG$) (*)

Aplicando la ley de los senos generalizada en los ΔARG y ΔABC se obtiene:

$\frac{RQ}{senA} = AG$ y $\frac{a}{senA} = 2R$ (aquí R es el circunradio del ΔABC)

Por lo tanto, $RQ = \frac{a \cdot AG}{2R}$

Además, por propiedad de la mediana, $AG = \frac{2}{3} m_a$; en consecuencia, $RG = \frac{a \cdot m_a}{3R}$

Similarmente, $RP = \frac{b \cdot m_b}{3R}$ y $PQ = \frac{c \cdot m_c}{3R}$

Por la formula de Heron

$[[PQR] = \sqrt{s(s-r)\cdot(s-q)\cdot(s-p)}.$, donde t = PQ, q = RP , p = QR y $s = \frac{r+q+p}{2}$

Luego,

$$[PQR] = \sqrt{\left(\frac{cm_c + bm_b + am_a}{6R}\right)\left(\frac{am_a + bm_b - cm_c}{6R}\right)\left(\frac{am_a - bm_b + cm_c}{6R}\right)\left(\frac{-am_a + bm_b + cm_c}{6R}\right)}$$

$$=\frac{1}{36R^2}\sqrt{(cm_c+bm_b+am_a)(am_a+bm_b-cm_c)(am_a-bm_b+cm_c)(-am_a+bm_b+cm_c)}$$

b) Como $[PQR]=\frac{rpq}{4R_1}$ donde R_1 es el radio de la circunferencia circunscrita al ΔPQR

entonces:

$$R_1=\frac{\left(\frac{cm_c}{3R}\right)\left(\frac{bm_b}{3R}\right)\left(\frac{am_a}{3R}\right)}{\frac{1}{36R^2}\sqrt{(cm_c+bm_b+am_a)(am_a+bm_b-cm_c)(am_a-bm_b+cm_c)(-am_a+bm_b+cm_c)}}$$

$$=\frac{4}{3R}\frac{(am_a+bm_b+cm_c)}{\sqrt{(cm_c+bm_b+am_a)(am_a+bm_b-cm_c)(am_a-bm_b+cm_c)(-am_a+bm_b+cm_c)}}$$

c) Sean $A_{1,}A_2yA_3$ las áreas de los círculos **RQG, RGP** y **PGQ** respectivamente.

En el desarrollo de la parte **a),** se probó que la circunferencia circunscrita al triángulo **RQG** tiene diámetro **AG**$=\frac{2}{3}ma$

Por lo tanto $A_1=p\left(\frac{2}{3}ma\right)^2=\frac{4}{9}pm_a^2$. Analógicamente

$$A_2=\frac{4}{9}p\cdot m_b^2$$

$$A_3=\frac{4}{9}p\cdot m_c^2$$

Luego $A_1+A_2+A_3=\frac{4}{9}p\left(m_a^2+m_b^2+m_c^2\right)$

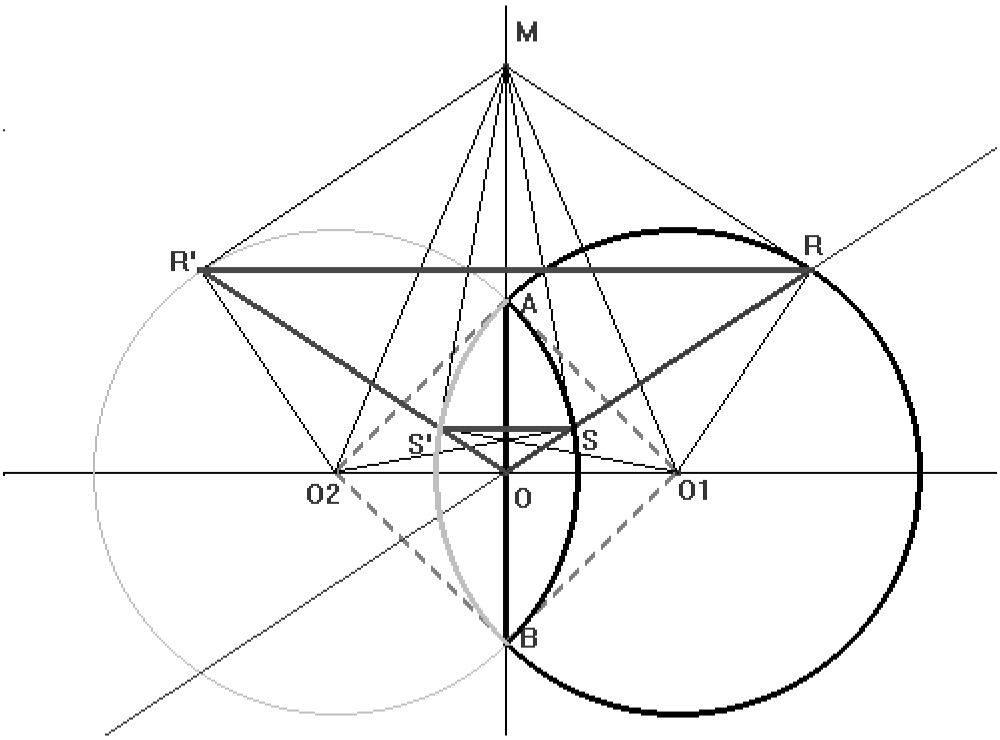
Problema 54
(Propuesto por la Escuela de Ingenieros Industriales de Madrid, 1941).
Se dibuja sobre una recta *r* un segmento AB y se trazan, en el mismo semiplano, los arcos capaces de 45º y 135º.
Determinar la envolvente de las rectas RS, siendo R y S los puntos de tangencia de las tangentes trazadas as dichos arcos capaces (R sobre el arco capaz de 45º, S sobre el de 135º) desde un punto M que se desplaza sobre la recta r.

Solución de F. Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba (España).

La construcción de los dos arcos capaces enunciados equivale a la construcción de dos circunferencias de centros situados sobre la mediatriz del segmento AB dado, en distintos semiplanos y de radios iguales a $\frac{\sqrt{2}}{2}.\overline{AB}$.

Entonces, la recta *r* dada se constituye en el eje radical de estas dos circunferencias iguales y ortogonales. Así, desde cualquier punto M de la recta *r*, excepto sobre los puntos del segmento AB, podemos trazar los segmentos de las tangentes MR = MS' en una y MR' = MS en la otra, determinando trivialmente una serie de triángulos isósceles semejantes como ORR' y OSS', lo cual nos permite asegurar que las rectas RS, independientemente de la posición variable sobre *r* del punto M, se cortan todas ellas en el punto O, punto medio del segmento dado AB.

La envolvente de las rectas RS se reduce al punto medio del segmento AB.

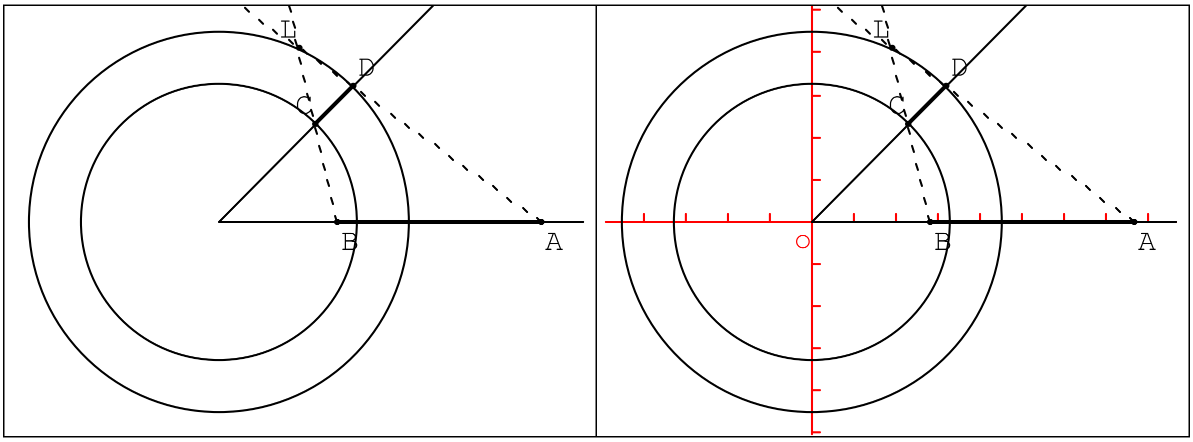


Problema 55
(Propuesto por la Escuela de Ingenieros Industriales de Madrid, 1942).
Un cuadrilátero variable ABCD tiene el lado AB fijo; el lado CD constante gira alrededor del punto O de intersección de los lados CD y AB. Hallar el lugar geométrico del punto P de intersección de los lados BC y AD.

Solución de F. Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba (España).

Del análisis del enunciado destacamos la siguiente variación al mismo. El lugar solicitado es equivalente al lugar geométrico de los puntos L del plano, intersección de las rectas AD y BC, donde el segmento AB está dado inicialmente y los puntos C y D son puntos variables sobre dos circunferencias de igual centro O y radios fijos R_1 y R_2, con la condición de que los puntos O, C y D estén siempre alineados al igual que lo están O, A y B.

En concreto, consideramos un sistema de coordenadas cartesianas propiciado por los siguientes elementos.
Eje X: Recta que pasa por el segmento AB.
EjeY: Recta perpendicular al eje X por O, punto intersección de las rectas AB y CD.



Según este sistema de referencia, podemos asignar coordenadas a los extremos del segmento AB de manera que A(a,0), B(b,0).
Sean las dos circunferencias C_1 y C_2, de centro el origen y que pasan por los puntos C y D, puntos de intersección con la semirrecta $y = k \cdot x$ $(k \neq 0)$, respectivamente. Sus ecuaciones son:
C_1 : $x^2 + y^2 = R_1^2$
C_2 : $x^2 + y^2 = R_2^2$
De este modo, las coordenadas de los puntos C y D son las siguientes:

$$C\left(\frac{R_1}{\sqrt{1+k^2}}, \frac{k.R_1}{\sqrt{1+k^2}}\right),\ D\left(\frac{R_2}{\sqrt{1+k^2}}, \frac{k.R_2}{\sqrt{1+k^2}}\right)$$

Por tanto, las ecuaciones de las rectas AD y BC serán:

AD: $k.R_2.x - (R_2 - a.\sqrt{1+k^2}).y = k.a.R_2$

BC: $k.R_1.x - (R_1 - b.\sqrt{1+k^2}).y = k.b.R_1$

Un poco de cálculo nos da las coordenadas del punto L:

$$L\left(\frac{(a-b).R_1.R_2}{(R_1a - R_2b)\sqrt{1+k^2}} + \frac{a.b.(R_1 - R_2)}{(R_1a - R_2b)}, \frac{(a-b).R_1.R_2.k}{(R_1a - R_2b)\sqrt{1+k^2}}\right)$$

Una vez halladas las coordenadas x e y del punto L nos disponemos a eliminar el parámetro k .
Para ello, señalamos la siguiente relación de interés entre dichas coordenadas:

$$x-\frac{a.b.(R_1-R_2)}{(R_1a-R_2b)}=\frac{(a-b).R_1.R_2}{(R_1a-R_2b)\sqrt{1+k^2}}$$

$$y=\frac{(a-b).R_1.R_2.k}{(R_1a-R_2b)\sqrt{1+k^2}}$$

Por tanto, el valor de *k* vendrá dado por la expresión:

$$k=\frac{y}{x-\dfrac{a.b.(R_1-R_2)}{(R_1a-R_2b)}}$$

Finalmente, sustituyendo el valor de *k* encontrado en alguna de las ecuaciones de y (o *x*), obtenemos con un poco de cálculo:

$$\left(x-\frac{a.b.(R_1-R_2)}{(R_1a-R_2b)}\right)^2=\frac{(a-b)^2.R_1{}^2.R_2{}^2}{(R_1a-R_2b)^2.\left(1+\left(\dfrac{y}{x-\dfrac{a.b.(R_1-R_2)}{(R_1a-R_2b)}}\right)^2\right)}$$

$$\left(x-\frac{a.b.(R_1-R_2)}{(R_1a-R_2b)}\right)^2=\frac{(a-b)^2.R_1{}^2.R_2{}^2.\left(x-\dfrac{a.b.(R_1-R_2)}{(R_1a-R_2b)}\right)^2}{(R_1a-R_2b)^2.\left(\left(x-\dfrac{a.b.(R_1-R_2)}{(R_1a-R_2b)}\right)^2+y^2\right)}$$

$$\left(x-\frac{a.b.(R_1-R_2)}{(R_1a-R_2b)}\right)^2+y^2=\frac{(a-b)^2.R_1{}^2.R_2{}^2}{(R_1a-R_2b)^2}$$

Lugar geométrico que representa la ecuación de la circunferencia de centro el punto $O'\left(\dfrac{a.b.(R_1-R_2)}{(R_1a-R_2b)},0\right)$ y de radio $R=\left|\dfrac{(a-b).R_1.R_2}{(R_1a-R_2b)}\right|$

PROBLEMAS PROPUESTOS (56-60)

Problema 56, propuesto por J.L. Díaz Barrero, Barcelona, España.
Los números de Lucas son $1,3,4,7,11,18,29,47,76,\cdots,$ con

$$L_1 = 1, L_2 = 3, \quad \text{y para todo } n \geq 2, L_n = L_{n-1} + L_{n-2}.$$

Calcular la suma

$$\frac{1}{1 \bullet 3} - \frac{1}{3 \bullet 4} + \frac{1}{4 \bullet 7} - \frac{1}{7 \bullet 11} + \frac{1}{11 \bullet 18} - \cdots$$

Problema 57, propuesto por J.B.Romero Márquez, Ávila, España.(Modificado por el editor)
Estudiar las propiedades del triángulo especial en el que

$$m_a(h_a - 2r) = r^2,$$

donde m_a es la longitud de la mediana desde A, h_a es la longitud de la altura desde A, y r es el radio del círculo inscrito.

Problema 58, propuesto por J.B. Romero Márquez, Ávila, España.
Si p y q son números reales positivos, demostrar que

$$1 \leq \sqrt{\frac{p^2 + 4q}{2q}} - \sqrt{\frac{p}{p + \sqrt{p^2 + 4q}}}.$$

¿En qué condiciones se verifica la igualdad?

Problema 59, propuesto por J.B. Romero Márquez, Ávila, España.
Sea $a > 0$. Calcular

$$\lim_{a \to 1} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(a + x)(1 + ax)}.$$

Problema 60, propuesto en la Escuela Especial de Ingenieros de Montes, 1942.
Resolver en los números enteros la ecuación

$$xyz = xy + yz + zx.$$

DIVERTIMENTOS MATEMÁTICOS (12)

UN MATEMÁTICO APÓCRIFO :
EUCLIDES PARACELSO BOMBASTO UMBUGIO

Francisco Bellot Rosado

Cuando se tiene la fortuna de disponer de colecciones completas de buenas revistas, en ocasiones se descubre que la comunidad matemática - que tiene fama de adusta - también da muestras de buen humor. Esto es particularmente cierto en el caso del *American Mathematical Monthly o Crux Mathematicorum*.

Agradecemos muy sinceramente al Director de Publicaciones del *Monthly*, Prof. Donald J. Albers, por habernos dado permiso para utilizar en la *Revista Escolar de la O.I.M*. los problemas referidos al Prof. Euclides Paracelso Bombasto Umbugio, publicados allí entre 1946 y 1976. En todas las citas del *Monthly*, el Copyright corresponde a The Mathematical Association of America, que tiene reservados todos los derechos.

La primera aparición pública del ”Prof. Umbugio” fué en el problema E716, *The American Mathematical Monthly*, *vol*.53 (1946), *p*.219. Figuraba propuesto por H.E.G.P. y decía así:

”El 1 de abril de 1946, el diario *Erewhon Daily Howler* incluía la siguiente noticia : El famoso numerólogo y astrólogo de Guayazuela, Prof. Euclides Paracelso Bombasto Umbugio, predice el fin del mundo para el año 2141. Su predicción está basada en profundas investigaciones matemáticas e históricas. Umbugio calcula el valor de la fórmula

$$1492^n - 1770^n - 1863^n + 2141^n$$

para $n = 0, 1, 2, 3,$ y así sucesivamente hasta 1945, y encuentra que todos esos números, obtenidos tras meses de laboriosos cálculos, son divisibles por 1946. Ahora bien, 1492, 1770 y 1863 son fechas memorables : el descubrimiento de América, la matanza de Boston y la arenga de Gettysburg. ¿Cuál puede ser la de 2141? El fin del Mundo, obviamente.

¡Apabulle al Profesor! Demuestre con pocos cálculos que la fórmula propuesta es divisible por 1946 para todo *n*...”

Un año más tarde, volvía a publicarse en *Monthly* un problema de Umbugio, también propuesto por H.E.G.P., el E766 (*The American Mathematical Monthly*, *vol*.54(1947),*p*.223) :

”El Profesor Umbugio, que fué presentado a nuestros lectores el pasado abril, ha inventado un notable procedimiento para revisar libros. Divide el tempo que se concede a sí mismo para hacerlo en tres partes, α, β, γ. Dedica la fracción α de su tiempo a un profundo estudio de la portada y la encuadernación. Dedica la fracción β a una búsqueda frenética de su propio nombre en el libro, y citas de sus trabajos. Finalmente, dedica la fracción γ a un análisis proporcionalmente penetrante del texto restante. Conociendo su característico gusto por los métodos simples y directos, no dejaremos de impresionarnos por las ecuaciones diferenciales en que basa su método:

$$(1) \quad \frac{dx}{dt} = y - z, \ \frac{dy}{dt} = z - x, \ \frac{dz}{dt} = x - y.$$

Considera un sistema de soluciones x, y, z que está determinado por las soluciones iniciales dependientes de un (pequeño) parámetro ε, independiente de t. Por lo tanto, x, y, z pueden ponerse como

$$(2)\ \ x = f(t,\varepsilon),\ y = g(t,\varepsilon),\ z = h(t,\varepsilon).$$

Las funciones (2) satisfacen (1) y las condiciones iniciales

$$(3)\ \ f(0,\varepsilon) = \frac{1}{3} - \varepsilon,\ g(0,\varepsilon) = \frac{1}{3},\ h(0,\varepsilon) = \frac{1}{3} + \varepsilon.$$

El Profesor Umbugio define sus importantes fracciones α, β, γ como

$$\lim_{\varepsilon\to 0} f(2,\varepsilon) = \alpha,\ \lim_{\varepsilon\to 0} g(5,\varepsilon) = \beta,\ \lim_{\varepsilon\to 0} h(279,\varepsilon) = \gamma.$$

¡Apabulle al Profesor! Encuentre α, β, γ sin mucho cálculo numérico."
La solución es $\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{3}$.

Surge, inevitablemente, la pregunta obvia : ¿Quién fué H.E.G.P.? Curiosamente, los demás problemas de Umbugio en el *Monthly* (11 *más*) no fueron propuestos por H.E.G.P., que verosimilmente es el creador del personaje. Algunos de los problemas de Umbugio fueron extraordinariamente populares, como por ejemplo E1111, donde se pedía reconstruir una división entera entre un dividendo de 8 cifras y un divisor de 3, de cuyo cociente sólo se conoce una cifra 8 situada en medio, y que fué resuelto por 70 lectores. Este problema fué incluído en la recopilación publicada en *Monthly* en 1957 como *The Otto Dunkel Memorial Problem Book*, una publicación para honrar la memoria del editor de problemas del *AMM* desde 1918 a 1946, siendo editor jefe desde 1933.

En varios artículos del *Monthly* fueron apareciendo, además de los problemas de Umbugio, títulos que supuestamente formaban parte de su Biblioteca. Citaremos algunos de ellos :

Los Jacobianos y su lucha por la Independencia
Una dieta de 10 *días para mejorar formas indeterminadas*
Una breve tabla de los números primos pares
Declive y caída de e^{-x}
Los postulados de Peano transcritos para violín y cello.
Primeros auxilios ante cortaduras de Dedekind
(Peter Hagis, *An analyst bookshelf*, *The American Mathematical Monthly*, *vol.*69(1962), *pp.*980-981)
Un millón de números aleatorios en orden creciente
(*AMM*, *vol.*71,1964,*p.*283)
Limpiando residuos en el plano complejo
Filtros - por una Topología más limpia
(E.S.Langford, University of Maine at Orono)
22/7 *calculado hasta el millón de cifras decimales*
(Clayton W.Dodge, University of Maine at Orono)

Umbugio también apareció en *Crux Mathematicorum*, cuando esta revista todavía se llamaba *Eureka*. En 1976 fué publicada *A direct geometrical proof of Morley's theorem* (*Eureka*, *vol.* 2, 1976, *p.*162), *por Euclides Paracelso Bombasto Umbugio, Guayazuela.*

Su demostración termina con el clásico Q.E.D., al que se añade N.F.C.

En dos notas al pie de página se lee : "Esta demostración fué comunicada por el renombrado problemista Prof. Euclides Paracelso Bombasto Umbugio al Dr. Leon Bankoff, Los Angeles, California, quien amablemente la ha traducido para nosotros. El original está escrito en esperanto, lengua que el Dr. Bankoff habla como un nativo. El Prof. Umbugio es bien conocido como numerólogo; ésta es una de sus raras excursiones en Geometría.

N.F.C. es la abreviatura de *Ne fronti Crede*, la frase latina equivalente a *No te creas todo lo* *que veas*. El Dr. Bankoff dice que, para evitar situaciones embarazosas para el Profesor, se tomó la libertad de añadir N.F.C al clásico Q.E.D. (*Quod erat demonstrandum*). Los conocedores de los artículos del Prof. Umbugio reconocerán la necesidad de este *addendum* menor."

Volvamos a la pregunta que nos hacíamos líneas atrás. ¿Quién creó a nuestro personaje?¿Quién está detrás de las siglas H.E.G.P.? La clave está en *Mathematical Circles revisited*, de Howard Eves (Prindler, Weber, Schmidt, 1971; hay reedición de la M.A.A). Eves sirvió en el Departamento de Problemas elementales del *Monthly* durante 25 años. En este libro cuenta : *En* 1946, *el Prof. George Polya y yo pensamos que valía la pena incluir en cada número de abril del Monthly una especie de inocentada en forma de problema*....(en los países anglosajones, el 1 de abril es el día de dar inocentadas)...*decidimos que fueran supuestamente originales del numerólogo de Guayazuela Euclides Paracelso Bombasto Umbugio*...*la broma alcanzó a muchos lectores del Monthly, y las cartas recibidas preguntando su dirección llenarían un pequeño panfleto. A todos los que preguntaron se les dijo que el Profesor Umbugio viajaba mucho, y que la mejor manera de hacerle llegar las cartas era a través del Departamento de Problemas Elementales del Monthly*...."

COMENTARIO DE PÁGINAS WEB (12)

Una editorial rumana de Matemáticas

www.gil.ro

Puede parecer extraño reseñar en la Revista de la OIM una página web de una empresa editorial, la Editura GIL, de Zalau, en Rumania. Sin embargo, como espero se comprobará sin tardar, el número y la calidad de los libros de Matemáticas que ha publicado en un breve espacio de tiempo justifican sobradamente, a mi juicio, esta inclusión.

La Editura GIL (iniciales de su *motto: Gandeste Inteligent si Liber*, frase rumana que se podría traducir, libremente, como *Pensamiento inteligente y libre)* fue fundada en 1993 por el Profesor de Matemáticas Mircea Lascu. En 1998 inició la publicación de algunas obras en inglés, en particular los folletos que la delegación de Rumania en la IMO repartía a los Profesores participantes, *Romanian Mathematical Competitions.* En la actualidad tiene publicadas al menos ocho obras muy importantes para la preparación de Olimpiadas y concursos de Matemáticas:

- ***360 Problems for mathematical contests (Titu Andreescu, Dorin Andrica)***
- ***Desigualdades,ideas y métodos (Mihai Onucu Drimbe)***
- ***200 Problemas de ecuaciones funcionales(Mihai Onucu Drimbe)***
- ***Introducción al estudio de las ecuaciones diofánticas (Titu Andreescu, Dorin Andrica)***
- ***Desigualdades elementales...y no tan elementales(Mircea Becheanu, Bogdan Enescu)***
- ***Geometria plana (sintética, vectorial y analítica)***

- ***Inducción matemática (Laurentiu Panaitopol, Maria Elena Panaitopol, Mircea Lascu)***

Casi todas estas obras forman parte de la Biblioteca de Olimpiadas matemáticas, pero lógicamente la editorial publica más libros. Son bien conocidos en Rumania sus excelentes manuales (libros de texto) de los diferentes cursos de su sistema educativo; las recopilaciones de problemas de sus abundantes concursos de Matemáticas, y de otras materias, como la Historia de Rumania o la Informática.

El idioma rumano es el único de origen latino que se habla en Europa Oriental. Es muy similar al español y al italiano, y no debería ofrecer dificultades serias de comprensión para un lector culto. En la página web reseñada aparece la dirección postal y el número de fax de la editorial, para quien esté interesado en ponerse en contacto con esta interesante editorial.

Valladolid, febrero 2004.

Francisco Bellot Rosado

COMENTARIO DE LIBROS

CRIATIVIDADE E JOGOS DIDÁTICOS

Diva Marília Flemming y Ana Cláudia Collaço de Mello

Editora Saint Germain, 2003. ISBN 85-88759-08-X

El pequeño libro que comentamos (128 páginas) ha sido escrito por dos Profesoras de la Universidad do Sul, en Santa Catarina (Brasil). Es, como decimos, pequeño en número de páginas, pero su utilización por los profesores irá, seguramente, mucho más allá.

El libro se inicia con un capítulo sobre creatividad, características del proceso creativo en general y sobre la creatividad en el contexto educativo, analizando brevemente las características del profesor creativo, el alumno creativo y la secuencia didáctica y el proceso creativo. El segundo capítulo se dedica a los juegos didácticos, en particular a los objetivos para el uso en el aula de los mencionados juegos. En el tercer capítulo se hace la propuesta metodológica de las autoras para dirigir la utilización en clase de los juegos didácticos, que ha sido experimentada en varios cursos de capacitación de Profesores. Por último, en el capítulo cuarto – que ocupa de la página 54 a la 128, es decir, más de la mitad del libro – se describen detalladamente 12 juegos, entre los que aparecen el juego de Nim y los cuadrados mágicos, susceptibles de ser aplicados en todas las etapas de la enseñanza, en opinión de las autoras. Además en Apéndice se describen otras 18 actividades recreativas, igualmente aplicables a situaciones didácticas concretas. La Bibliografía incluye 38 títulos relacionados con el tema.

Para quienes consideramos esencial la búsqueda y descubrimiento temprano de los alumnos con alta capacidad matemática (los alumnos creativos, por utilizar esta palabra), un libro como el que comentamos puede ser un excelente medio para identificarlos. La segunda parte (darles los materiales que necesitan y merecen para explotar todas sus capacidades) es otra historia.

Valladolid, febrero de 2004.
Francisco Bellot Rosado

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

Número

13

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática
Número 13 (Mayo - Junio 2003)
ISSN – 1698-277X

Índice

Artículos, Notas y Lecciones de preparación olímpica

Problemas para alumnos de Educación Media y de Olimpiadas

Problemas para los más jóvenes

Problemas resueltos

Damián Aranda (Córdoba, España); Oscar Ferreira (Valencia, España). Otra solución publicada pertenece a Daniel Lasaosa, ex-olímpico español.

Solución del problema nº 60, por Andrés Sánchez (La Habana, Cuba). Recibidas, además, soluciones de Floro Damián Aranda (Córdoba, España) y Oscar Ferreira (Valencia, España). Otra solución publicada pertenece a Daniel Lasaosa, ex-olímpico español.

Problemas propuestos

En este apartado se invita a los lectores a resolver cinco problemas y enviarnos sus soluciones. Las más originales serán publicadas.

Divertimentos matemáticos

Métodos matemáticos para cazar leones (recopilación de F. Bellot)

Reseñas web

La página de la Mathematical Association of America (MAA)

Editor: Francisco Bellot Rosado

Algunos Teoremas y sus Demostraciones

Juan Carlos Salazar

Introducción

En este trabajo se incluyen cuatro interesantes teoremas con sus demostraciones: Teorema de Fuss, Teorema de Gergonne-Anne, Teorema Japonés y también un teorema sobre las áreas de triángulos tangenciales, con el enunciado del Teorema de Euler para áreas [1].

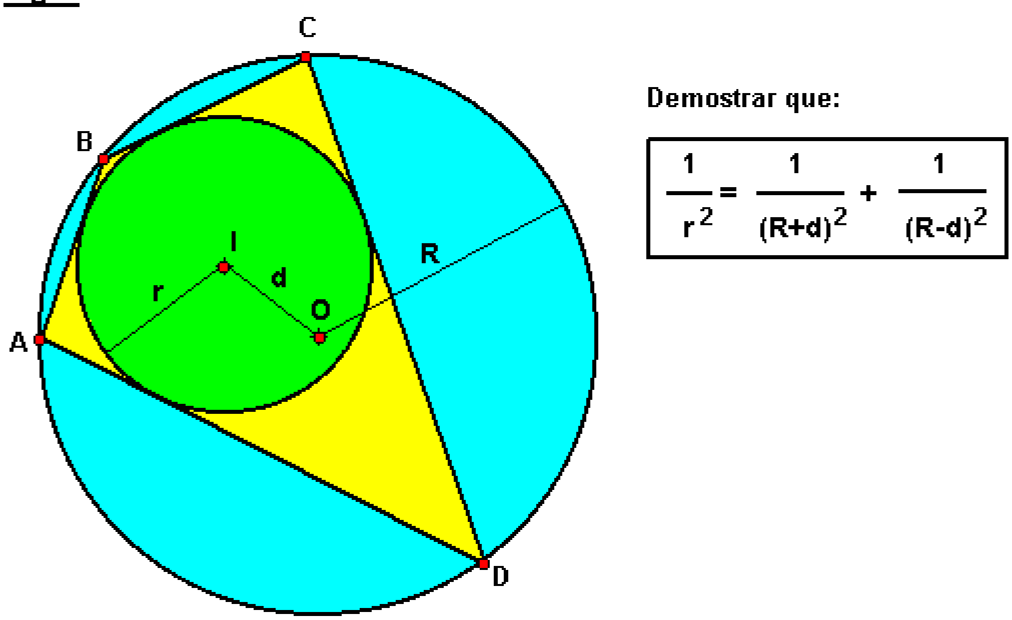
Espero que gracias a esta oportunidad que me brinda el Prof. Francisco Bellot, de presentarles este pequeño trabajo, el mismo sirva de aliciente para que nuestros estudiantes tomen interés en cultivar esta maravillosa rama de las matemáticas: la geometría.

Teorema de Fuss:

Sea ABCD un cuadrilátero bicéntrico de inradio r, circunradio R y distancia d entre incentro (I) y cicuncentro (O).

Demostrar que: $\frac{1}{r^2} = \frac{1}{(R+d)^2} + \frac{1}{(R-d)^2}$ (Ver Fig.1)

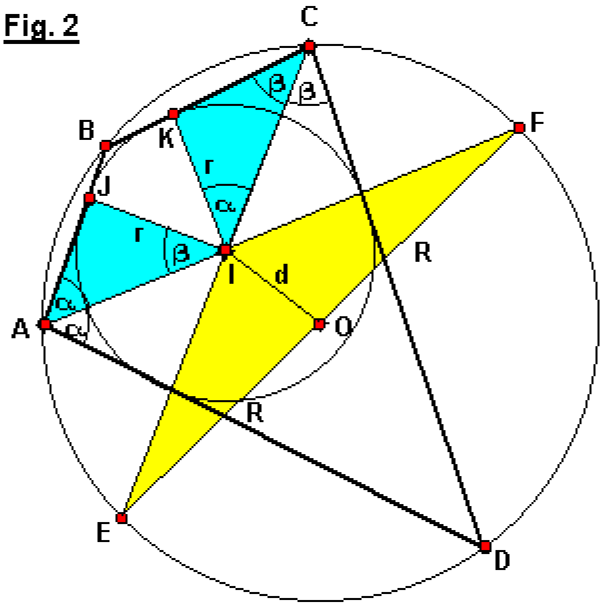
Fig. 1



[1] Las demostraciones de los teoremas que aquí les presentamos, posiblemente sean inéditas para ustedes, aunque fueron desarrolladas durante el período 1974-77 en el cual impartía clases en la Academia Pre-Universitaria César Vallejo de Lima, Perú.

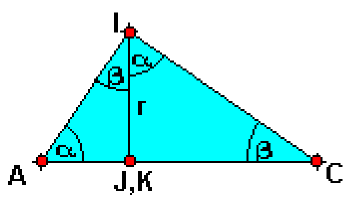
Demostración: Ver Fig. 2.

Fig. 2



Sabemos que $\hat{A}+\hat{C}=180°$ luego $\alpha+\beta=90°$. Si J y K son puntos de tangencia del incírculo con los lados AB y BC respectivamente. Luego los triángulos rectángulos AJI y KIC son semejantes con cateto común r (IJ = IK), uniendo los dos triángulos, formamos la siguiente figura:

Fig. 3



En el nuevo triángulo rectángulo AIC por propiedad geométrica:

$$\frac{1}{r^2}=\frac{1}{AI^2}+\frac{1}{CI^2} \text{ .... } (1)$$

Prolongando AI y CI que cortan en F y E al circuncírculo respectivamente, entonces EF es diámetro debido a que, en sentido contrario a las agujas del reloj, tenemos:
arco FE = arco FD + arco DE = 2α +2β = 2(α +β)= 180°.
.
En el triángulo EIF aplicamos el teorema de Apolonio (teorema de la Mediana):

$$IE^2+IF^2=2.OI^2+\frac{EF^2}{2}=2(R^2+d^2) \text{..........} (2)$$

La potencia del punto I respecto al círculo de centro O: $AI.IF = CI.IE = R^2-IO^2=R^2-d^2$

Luego: $\dfrac{1}{AI^2}+\dfrac{1}{CI^2}=\dfrac{(IE^2+IF^2)}{(R^2-d^2)^2}$ .... (3)

Finalmente, combinando (1), (2) y (3): $\dfrac{1}{r^2}=\dfrac{1}{(R+d)^2}+\dfrac{1}{(R-d)^2}$ QED.

Comentario:

Son conocidos otros métodos de demostración para este teorema, tales como por ejemplo, el que utiliza el concepto de lugar geométrico [1], otro que usa el concepto del porisma de Poncelet [2] y también el que usa el método de inversión [3], además de otros métodos analíticos [4]. Esta demostración que les he mostrado, me tomó casi tres meses obtenerla, con las herramientas propias de la época: un buen compás, una regla y un transportador, en nada parecido a cualquiera de los programas (software dinámico) que se usan hoy en día para el estudio de la geometría: Cabri II, Sketchpad, Wingeom, Cinderella, Euclidraw, etc., por mencionar algunos. Aquí tenemos: un método simple, elegante, métrico y "nuevo", que solo utiliza las herramientas de la geometría clásica euclidiana, así me lo han señalado recientemente varias personas versadas sobre este tema [5, 6, 7, 8], a quienes agradezco sus comentarios.

Teorema de Gergonne-Anne:

Sean ABC y $A_1B_1C_1$ dos triángulos con lados paralelos, uno dentro del otro, donde DEF es un triangulo inscrito y circunscrito a cada uno de ellos.
Demostrar que: $[DEF]^2 = [ABC].\ [A_1B_1C_1]$, donde: [XYZ] = Area de XYZ.
Nota: También es equivalente enunciar que [DEF] es la media geométrica entre [ABC] y $[A_1B_1C_1]$.

Demostración: Ver Fig. 4

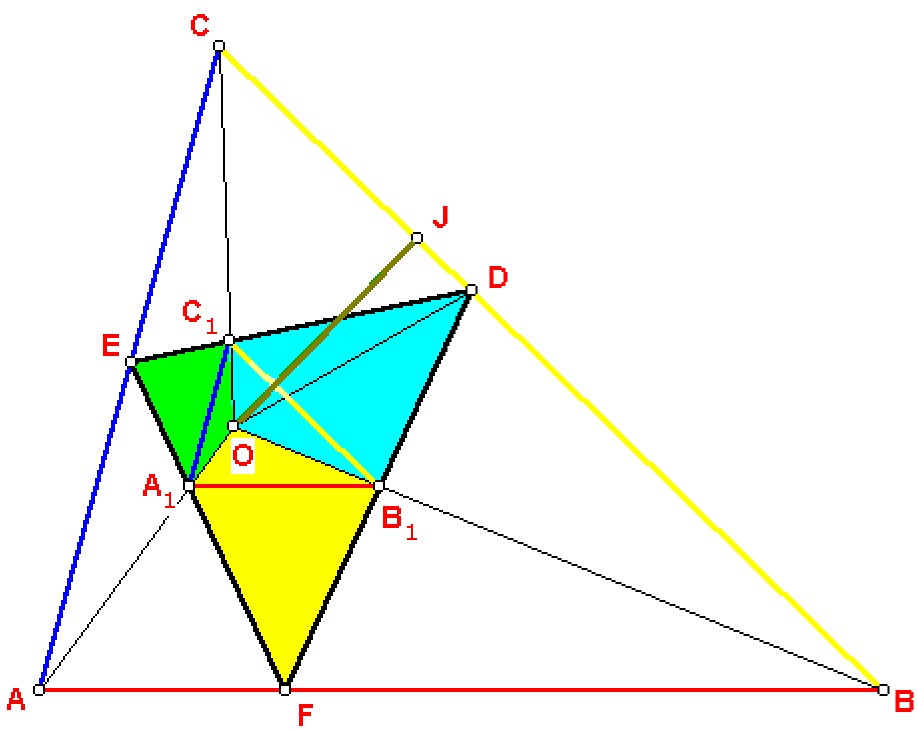


Fig. 4

Si los lados del triángulo ABC y A_1B_1 B_1 son paralelos, entonces AA_1, BB_1 y CC_1 concurren en un punto O, debido a que los triángulos son homotéticos.

Por la homotecia de centro O para ABC y A_1B_1 B_1:

$$\frac{OA_1}{OA}=\frac{OB_1}{OB}=\frac{OC_1}{OC}=\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{B_1C_1}{BC}=\frac{A_1C_1}{AC}=k$$

Trazamos OJ ortogonal a BC, entonces:

$$\left[OB_1DC_1\right]=\frac{1}{2}B_1C_1.OJ$$

Luego:

$$\frac{\left[OBC\right]}{\left[OB_1DC_1\right]}=\frac{\frac{1}{2}BC.OJ}{\frac{1}{2}B_1C_1.OJ}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{1}{k}$$

También:

$$\frac{\left[OAB\right]}{\left[OA_1FB_1\right]}=\frac{\left[OBC\right]}{\left[OB_1DC_1\right]}=\frac{\left[OAC\right]}{\left[OC_1EA_1\right]}=\frac{1}{k}$$

Por la propiedad de proporciones:

$$\frac{\left[OAB\right]+\left[OBC\right]+\left[OAC\right]}{\left[OA_1FB_1\right]+\left[OB_1DC_1\right]+\left[OC_1EA_1\right]}=\frac{\left[ABC\right]}{\left[DEF\right]}=\frac{1}{k}$$

Por lo tanto:

$$\frac{\left[ABC\right]^2}{\left[DEF\right]^2}=\frac{1}{k^2} \text{ ………. (I)}$$

Por la homotecia:

$$\frac{\left[A_1B_1C_1\right]}{\left[ABC\right]}=k^2 \text{ ……… (II)}$$

De (I) y (II):

$$\left[DEF\right]^2=\left[ABC\right].\left[A_1B_1C_1\right] \qquad \text{QED.}$$

Corolario 1:

El área de un triángulo es la media geométrica entre las áreas de su triángulo tangencial interno y su triángulo excentral. (Teorema de Weill).

Corolario 2:

El área de un cuadrilátero bicéntrico es la media geométrica entre las áreas de su cuadrilátero tangencial interno y su cuadrilátero excentral.

Comentario:

Son conocidas otras maneras de demostrar este teorema [3], pp765-766, además es interesante señalar que con el método aquí descrito, nosotros podemos fácilmente encontrar una generalización de este teorema para el polígono de “n” lados.

Teorema Japonés:

Sea el cuadrilátero ABCD inscrito en un círculo de centro O, con r_a, r_b, r_c y r_d como radios de los círculos inscritos en los triángulos ABD, ABC, BCD y ADC respectivamente.
Demostrar que: $r_a + r_c = r_b + r_d$.

Demostración: Ver Fig. 5

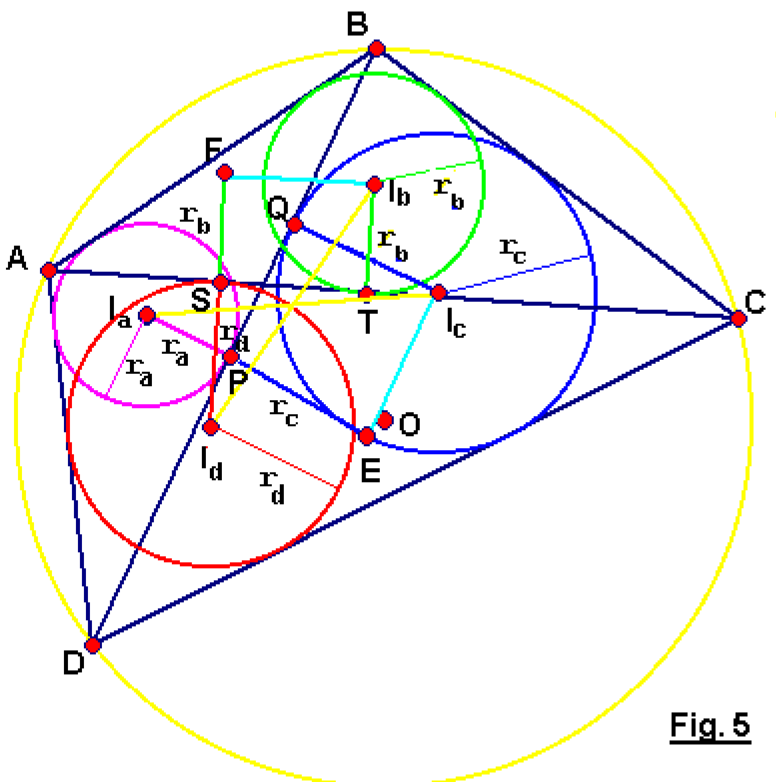


Fig. 5

Utilizaremos dos propiedades geométricas que se cumplen para todo cuadrilátero inscrito y que se mencionan a continuación:
Si denominamos a I_a, I_b, I_c e I_d incentros de los triángulos ABD, ABC, BCD y ADC respectivamente y además los puntos de tangencia S y T de los incirculos con centros I_b e I_d en la diagonal AC respectivamente y de manera similar los puntos de tangencia P y Q de los círculos con centros I_a e I_c en la diagonal BD, se cumple:
a) $I_aI_bI_cI_d$ es un rectángulo, b) los segmentos PQ y ST son congruentes.
Tenemos un rectángulo $I_aI_bI_cI_d$ cuyas diagonales son congruentes y también los segmentos formados por los puntos de tangencia PQ = ST.
Construimos los triángulos rectángulos I_aEI_c e I_bFI_d con: $I_cE = PQ = ST = I_bF$.
Ambos triángulos rectángulos tienen hipotenusas congruentes:
$I_aI_c = I_bI_d$ (diagonales del rectángulo $I_aI_bI_cI_d$),
También tienen como catetos: $I_cE = I_bF$, $I_aE = r_a + r_c$ e $I_dF = r_b + r_d$.
Como dichos triángulos rectángulos tienen una hipotenusa y un cateto congruentes, entonces ambos triángulos son congruentes. Por lo tanto: $I_aE = I_dF$, luego: $r_a + r_c = r_b + r_d$ QED.

Comentario:

También se conocen otras formas de demostración, por ejemplo podemos indicar una reciente en la que se recurre al teorema de Thebault [9], otra en la que se utiliza el teorema de Carnot [10]. Obviando los métodos que usan trigonometría y los métodos analíticos.

Teorema: Sobre las Areas de Triángulos Tangenciales de un Triángulo.

Si tenemos un triángulo ABC, con incírculo I, y excírculos I_1, I_2, I_3, y denominamos al triangulo tangencial interno que tiene como vértices a los puntos de tangencia del incírculo con sus lados cuya área es S_0, cada triángulo tangencial externo tiene como vértices a los puntos de tangencia del excírculo respectivo con un lado y las prolongaciones de los lados adyacentes, cuyas áreas son S_1, S_2 y S_3, correspondientes a los excírculos I_1, I_2 e I_3 respectivamente.

Demostrar que: $\frac{1}{S_0}=\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_3}$ Ver Fig. 6.

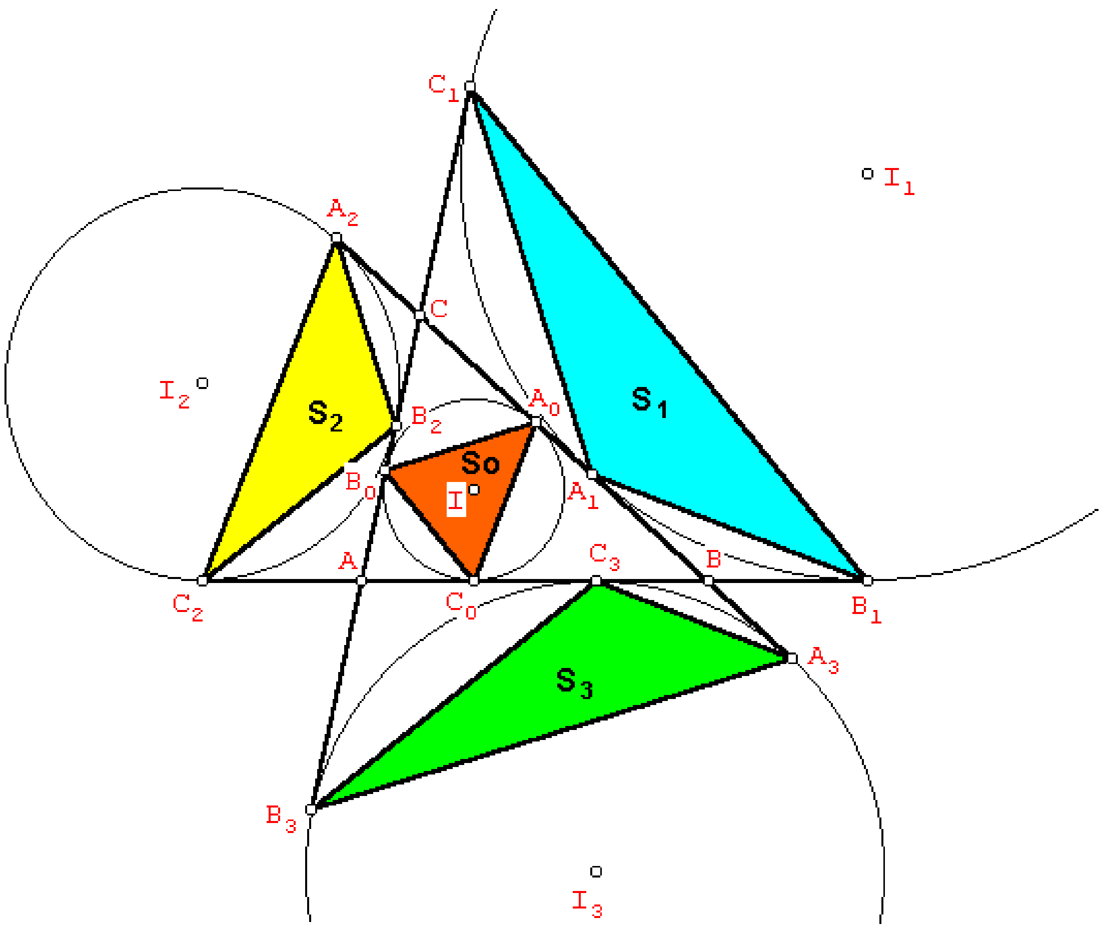


Fig. 6

Demostración: Ver Fig. 6

Considerando que las áreas de dos triángulos con ángulos suplementarios son proporcionales a los productos de los lados que conforman dichos ángulos, como $< A_0IB_0 + < C = 180º$, tenemos:

$$\frac{[IA_0B_0]}{[ABC]} = \frac{IA_0.IB_0}{BC.AC} = \frac{r^2}{a.b}$$

De forma similar:

$$\frac{[IB_0C_0]}{[ABC]} = \frac{IB_0.IC_0}{AC.AB} = \frac{r^2}{b.c}$$

$$\frac{[IA_0C_0]}{[ABC]} = \frac{IA_0.IC_0}{BC.AB} = \frac{r^2}{a.c}$$

Entonces:

$$\frac{[IA_0B_0]+[IB_0C_0]+[IA_0C_0]}{[ABC]} = \frac{r^2}{a.b}+\frac{r^2}{b.c}+\frac{r^2}{a.c} = \frac{r^2}{abc}(a+b+c)$$

Tomando en cuenta que: $S = [ABC] = \frac{abc}{4R} = \frac{r(a+b+c)}{2}$ donde R = circunradio, r = inradio y

$S_0 = [A_0B_0C_0] = [IA_0B_0] + [IB_0C_0] + [IA_0C_0]$

Entonces:

$$\frac{S_0}{S} = \frac{r}{2R} \quad ....(1)$$

Tomando el excírculo I_1, $< A_1I_1C_1 + < B = 180º$, tenemos:

$$\frac{[I_1A_1C_1]}{[ABC]} = \frac{I_1A_1.I_1C_1}{BC.AC} = \frac{r_1^2}{a.b}$$

Similarmente:

$$\frac{[I_1A_1B_1]}{[ABC]} = \frac{I_1A_1.I_1B_1}{BC.AB} = \frac{r_1^2}{a.c}$$

$$\frac{[I_1B_1C_1]}{[ABC]} = \frac{I_1B_1.I_1C_1}{AC.AB} = \frac{r_1^2}{b.c}$$

También:

$$\frac{[I_1A_1C_1]+[I_1A_1B_1]-[I_1B_1C_1]}{[ABC]} = \frac{r_1^2}{a.b}+\frac{r_1^2}{a.c}-\frac{r_1^2}{b.c} = \frac{r_1^2}{abc}(a+b-c)$$

Tomando en cuenta que: $S = [ABC] = \frac{abc}{4R} = \frac{r_1(a+b-c)}{2}$ donde: r_1 = radio del excírculo I_1 y

$S_1= [A_1B_1C_1] = [I_1A_1C_1] + [I_1A_1B_1] - [I_1B_1C_1]$

Entonces:

$$\frac{S_1}{S} = \frac{r_1}{2R} \quad ....(2)$$

De forma similar, para los triángulos tangenciales de los otros excírculos:

$$\frac{S_2}{S}=\frac{r_2}{2R} \quad .... (3)$$

$$\frac{S_3}{S}=\frac{r_3}{2R} \quad .... (4)$$

A partir de (1), (2), (3) y (4):

$$\frac{S}{S_1}+\frac{S}{S_2}+\frac{S}{S_3}=\frac{2R}{r_1}+\frac{2R}{r_2}+\frac{2R}{r_3}=2R\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}\right)=\frac{2R}{r}=\frac{S}{S_0}$$

Finalmente:

$$\frac{1}{S_0}=\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_3} \qquad \text{QED.}$$

Comentario:

Este teorema también se puede demostrar con otros métodos [11], he conocido una demostración con el uso del teorema de Gergonne-Anne [8]. También se cumple: $S_0 = [A_0B_0C_0] = [A_1B_2C_3]$. Las relaciones obtenidas mediante este método se pueden obtener también aplicando el teorema de Euler [12] que establece una relación entre las áreas de un triángulo pedal correspondiente a un punto en un triángulo, que a continuación enunciamos, su demostración la dejamos como ejercicio para el estudiante.

Teorema de Euler:

Sea el triángulo ABC, con P un punto interior desde el cual trazamos las perpendiculares PA_1, PB_1, PC_1 sobre los lados BC, CA, AB.

Demostrar que: $[A_1B_1C_1]=\dfrac{(R^2-OP^2)}{4R^2}[ABC]$

Donde: O es circuncentro de ABC y R = circunradio de ABC.

Nota: Si el punto P es exterior el factor $(R^2 - OP^2)$ cambia a $(OP^2 - R^2)$.

Referencias:

[1] *100 Great Problems of Elementary Mathematics*, $\oint$39 , pp. 188-193, H. Dörrie, Dover, 1965.

[2] *Vielecke, die einen Umkreis un einen Inkreis besitzen*, pp. 69-74, Arnulf Reuschel, Praxis der Mathematik 21, 1979.

[3] *Exercises de Géométrie*, F.G.-M., pp.837-839, 6th Edition 1920, J. Gabay reprint, Paris, 1991.

[4] http://mathworld.wolfram.com/PonceletsPorism.html

[5] Ricardo Barroso C., Universidad de Sevilla, España, mensaje personal.

[6] Francisco Bellot Rosado, entrenador IMO España, mensaje personal.

[7] Nikolaos Dergiades, miembro de Hyacinthos, mensaje personal.

[8] Darij Grinberg, miembro de Hyacinthos, mensaje personal.

[9] An Application of Thebault's theorem, FG2002, Wilfred Reyes, http://forumgeom.fau.com

[10]Geometry Step by Step, Website de Antonio Gutierrez, http://www.agutie.homestead.com

[11]On the Areas of the Intouch and Extouch Triangles, FG2004, J.C. Salazar, http://forumgeom.fau.com

[12]Problemas de Geometría-Planimetría, I. Shariguin, pp.112, Editorial MIR, 1989.

Juan Carlos Salazar

caisersal@yahoo.com

PROBLEMAS DE NIVEL MEDIO Y DE OLIMPIADAS (13)

PROBLEMAS PROPUESTOS EN LA FASE NACIONAL DE LA XL OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Ciudad Real, marzo de 2004

Primer día (26 de marzo)

Problema 1

Tenemos un conjunto de 221 números reales cuya suma es 110721. Los disponemos formando una tabla rectangular de modo que todas las filas, y la primera y última columnas, son progresiones aritméticas de más de un elemento. Probar que la suma de los elementos de las cuatro esquinas vale 2004.

Problema 2

ABCD es un cuadrilátero cualquiera, P y Q los puntos medios de las diagonales BD y AC, respectivamente. Las paralelas por P y Q a la otra diagonal se cortan en O.

Si unimos O con los cuatro puntos medios de los lados ($X \in AB,\ Y \in BC, Z \in CD, T \in DA$) se forman cuatro cuadriláteros $OXBY,\ OYCZ,\ OZDT,$ OTAX.

Demostrar que los cuatro cuadriláteros tienen la misma área.

Problema 3

Se representa por Z el conjunto de todos los enteros. Hallar todas las funciones

$$f : Z \to Z,$$

tales que para cualesquiera x, y enteros se verifica

$$f(x + f(y)) = f(x) - y.$$

Segundo día

(27 de marzo)

Problema 4

¿Existe alguna potencia de 2, que al escribirla en el sistema decimal tenga todos sus dígitos distintos de cero y sea posible reordenar los mismos para formar con ellos otra potencia de 2? Justificar la respuesta.

Problema 5

Demostrar que la condición necesaria y suficiente para que, en el triángulo ABC, la mediana desde B sea dividida en tres partes iguales por la circunferencia inscrita en el triángulo, es

$$\frac{a}{5} = \frac{b}{10} = \frac{c}{13}.$$

Problema 6

Colocamos, formando una circunferencia, 2004 fichas bicolores: blancas por una cara y negras por la otra. Un movimiento consiste en elegir una ficha con la cara **negra** hacia arriba, y dar la vuelta a tres fichas: la elegida, la de su derecha y la de su izquierda. Supongamos que inicialmente hay una sola ficha con la cara negra hacia arriba. ¿Será posible, repitiendo el movimiento descrito, conseguir que todas las fichas tengan la cara blanca hacia arriba? ¿Y si tuviéramos 2003 fichas, entre las cuales exactamente una tiene al comienzo la cara negra hacia arriba?

PROBLEMAS PARA LOS MÁS JÓVENES (13)

Presentamos los problemas propuestos en la Fase preliminar provincial de Valladolid de la XII Olimpiada Matemática 2004 para alumnos de 2º de E.S.O.(12-13 años de edad) y 4º de E.S.O. (14-15 años de edad).

2º de E.S.O.

Problema 1

En las calculadoras, relojes digitales, paneles informativos, etc...las cifras de los números están formadas por pequeños palotes (segmentos) colocados horizontal y verticalmente. Asi, por ejemplo, 90 se dibuja con doce palotes.

¿Cuáles son el menor y el mayor número que se pueden escribir con doce palotes?

Problema 2

Una ventana está formada por cuatro rectángulos iguales, colocados tres de ellos verticalmente y el cuarto horizontalmente encima de los verticales. Si el marco exterior de la ventana mide 112 cm, ¿Cuál es el área de la ventana?

Problema 3

Cuatro circunferencias iguales (del mismo radio) tienen un único punto común, O. De este punto salen cuatro ciclistas, recorriendo cada uno de ellos una circunferencia distinta, a velocidades respectivas de 6, 9, 12 y 15 km/h. ¿Cuántas vueltas habrá dado cada uno de los ciclistas la primera vez que se vuelvan a encontrar en el punto O?

Problema 4

Un número de seis cifras es de la forma **abcabc**. ¿Qué resultado se obtiene al dividirlo sucesivamente entre 7, 11 y 13?

4º de E.S.O.

Problema 1

En las calculadoras, relojes digitales, paneles informativos, etc...las cifras de los números están formadas por pequeños palotes (segmentos) colocados horizontal y verticalmente. Asi, por ejemplo, 90 se dibuja con doce palotes.

Escribe todos los números de tres cifras que pueden escribirse con doce palotes.

Problema 2

En una antigua crónica de la Universidad de Parma puede leerse el siguiente texto:

”Hace dos años, el número de alumnos inscritos era un cuadrado perfecto. El año pasado, el número aumentó 100 unidades, obteniéndose un cuadrado perfecto aumentado en una unidad. Este año, creciendo 100 unidades, se ha conseguido otra vez un número de alumnos que también es un cuadrado perfecto”.

Determina el número de alumnos inscritos en la Universidad de Parma el año que se escribió la crónica.

Problema 3

Pablo y Marta lanzan dardos sobre una diana. Cada uno va sumando las puntuaciones obtenidas en cada lanzamiento: 4 puntos si el dardo se clava en la parte exterior y 11 si lo hace en la interior. Gana una partida el primero que obtiene una puntuación predeterminada. Los jugadores se dan cuenta de que no es posible obtener cualquier puntuación, pero sis e fija un número suficientemente grande, siempre es posible su obtención. Explica por qué ocurre ésto y a partir de qué número es posible obtener cualquier puntuación fijada.

Problema 4

Un hexágono regular tiene lado 1 cm. Haciendo centro en cada vértice, y con un radio igual al lado del hexágono, se trazan seis arcos de circunferencia, formándose así una roseta de seis pétalos cuya área se pide.

Problema 16

(Propuesto por Laurentiu Modan, Bucarest, Rumania)

i) Describir por extensión (es decir, enumerando todos sus elementos) el conjunto $A = \left\{ n \in \aleph^* \middle| \frac{n}{n-2001} \in \aleph \right\}$

ii) ¿Cuántas funciones $f : B \to B$ hay, siendo B el conjunto $B = \left\{ n \in \aleph \middle| \frac{n^{2001}}{n-2001} \in \aleph \right\}$?

Solución de Andrés Sánchez Pérez, La Habana, Cuba.

Inciso i:

$\frac{n}{n-2001} \geq 0 \Leftrightarrow n \leq 0$, ó $n > 2001$ pero como $n \in \aleph^* \Rightarrow n > 2001$.

$n-2001 | n \Leftrightarrow n-2001 | n-(n-2001) \Leftrightarrow n-2001 | 2001$ entonces, como $n-2001 > 0 \Rightarrow n-2001 \in \{1,3,23,29,69,87,667,2001\}$

$\Rightarrow A = \{2002,2004,2024,2030,2070,2088,2668,4002\}$

Inciso ii:

$\frac{n^{2001}}{n-2001} \geq 0 \Leftrightarrow n \leq 0$, ó $n > 2001$ pero como $n \in \aleph \Rightarrow n > 2001, n = 0$.

$n-2001 | n^{2001} \Leftrightarrow n-2001 | n^{2001} - n^{2000}(n-2001) \Leftrightarrow n-2001 | 2001 n^{2000}$,

supongamos ahora por inducción que $n-2001 | n^{2001} \Leftrightarrow n-2001 | 2001^k n^{2001-k}$ y esto se cumple hasta cierto k.

$n-2001 | 2001^k n^{2001-k} \Leftrightarrow n-2001 | 2001^k n^{2001-k} - 2001^k n^{2001-k-1}(n-2001)$

$\Leftrightarrow n-2001 | 2001^{k+1} n^{2001-(k+1)}$

Con lo que queda demostrado $\forall k \leq 2001$, entonces, haciendo $k = 2001$ tenemos que $\Leftrightarrow n-2001 | 2001^{2001}$. Como $2001^{2001} = 3^{2001} \cdot 23^{2001} \cdot 29^{2001}$, quiere decir que tiene $(2001+1)\cdot(2001+1)\cdot(2001+1) = 2002^3$ divisores positivos. Entonces $|B| = 2002^3 + 1$ (contando $n = 0$), luego, cada $n_i \in B$ puede tomar en cada función que construya, cualquiera de los $2002^3 + 1$ valores disponibles en B, de donde se construirán un total de $(2002^3+1)^{2002^3+1}$. La generalización de este resultado es trivial.

Si B es el conjunto $B = \left\{ n \in \aleph \middle| \frac{n^m}{n-h} \in \aleph \right\}$, con $h = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ la descomposición canónica de h entonces existirán $\left[\prod_{i=1}^{k} (\alpha_i m + 1) + 1 \right]^{\prod_{i=1}^{k} (\alpha_i m + 1) + 1}$ funciones $f : B \to B$.

Problema 29:

(Propuesto, sin solución, en Norte de problemas, de Rey Pastor y Gallego Díaz)

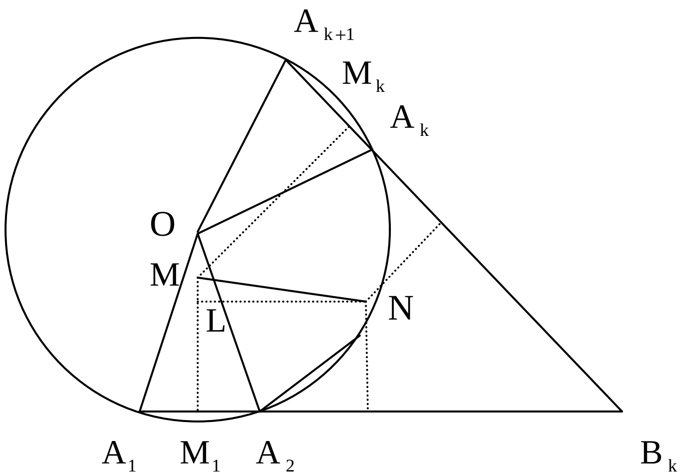
Si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ son las proyecciones de un segmento rectilíneo de longitud l sobre los n lados de un polígono regular, demostrar que

$$\alpha_1^2 + \ldots + \alpha_n^2 = \frac{1}{2} n l^2$$

$$\alpha_1^4 + \ldots + \alpha_n^4 = \frac{3}{8} n l^4$$

Solución de Andrés Sánchez Pérez, La Habana, Cuba.

Inscribamos una circunferencia al polígono regular:



Sea $MN = l$. M_1 y M_k son las respectivas proyecciones de M sobre A_1A_2 y A_kA_{k+1} ($A_{n+1} = A_1$). Por la propiedad del ángulo exterior a una circunferencia:

$$\angle A_1B_kA_{k+1} = \frac{\angle A_1OA_{k+1} - \angle A_2OA_k}{2} = \frac{\dfrac{2\pi[n-(k+1)+1]}{n} - \dfrac{2\pi(k-2)}{n}}{2}$$

$$= \frac{\pi[n-2(k-1)]}{n}$$

Supongamos que $\angle M_1MN = \alpha$. $\angle MM_kB_k = \angle MM_1B_k = \dfrac{\pi}{2}$ por ser M_1 y M_k las respectivas proyecciones de M sobre A_1A_2 y A_kA_{k+1}. Entonces, por suma de ángulos interiores de un cuadrilátero:

$\angle M_1MM_k = \pi - \dfrac{\pi[n-2(k-1)]}{n} = \dfrac{2\pi(k-1)}{n}$, restándole α, obtenemos que $\angle M_kMN = \dfrac{2\pi(k-1)}{n} - \alpha$, en consecuencia:

$$\alpha_k = l\left|\operatorname{sen}\left[\frac{2\pi(k-1)}{n} - \alpha\right]\right|$$

Inciso a:

$$\alpha_k^2 = l^2\left\{\operatorname{sen}\left[\frac{2\pi(k-1)}{n}-\alpha\right]\right\}^2 \Rightarrow \alpha_k^2 = l^2\,\frac{1-\cos\left[\dfrac{4\pi(k-1)}{n}-2\alpha\right]}{2}$$

Se trata de hallar ahora:

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2 = \sum_{k=1}^{n} l^2\,\frac{1-\cos\left[\dfrac{4\pi(k-1)}{n}-2\alpha\right]}{2} = \frac{1}{2}nl^2 - \frac{1}{2}l^2\sum_{k=1}^{n}\cos\left[\frac{4\pi(k-1)}{n}-2\alpha\right]$$

Multipliquemos la sumatoria de cosenos por $\operatorname{sen}\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)$ que será distinto de 0 pues $n\geq 3$, luego la dividimos y obtenemos el resultado.

$$\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)\sum_{k=1}^{n}\cos\left[\frac{4\pi(k-1)}{n}-2\alpha\right] = \sum_{k=1}^{n}\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)\cos\left[\frac{4\pi(k-1)}{n}-2\alpha\right]$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left\{\operatorname{sen}\left[\frac{2\pi(2k-1)}{n}-2\alpha\right]+\operatorname{sen}\left[\frac{2\pi(3-2k)}{n}+2\alpha\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left\{\operatorname{sen}\left[\frac{2\pi(2k-1)}{n}-2\alpha\right]-\operatorname{sen}\left[\frac{2\pi(2k-3)}{n}-2\alpha\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\operatorname{sen}\left[\frac{2\pi(2n-1)}{n}-2\alpha\right]-\operatorname{sen}\left[-\frac{2\pi}{n}-2\alpha\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\operatorname{sen}\left[\frac{2\pi(2n-1)}{n}-2\alpha\right]+\operatorname{sen}\left[\frac{2\pi}{n}+2\alpha\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2\operatorname{sen}\left[\frac{\dfrac{2\pi(2n-1)}{n}-2\alpha+\dfrac{2\pi}{n}+2\alpha}{2}\right]\cos\left[\frac{\dfrac{2\pi(2n-1)}{n}-2\alpha-\dfrac{2\pi}{n}-2\alpha}{2}\right]$$

$$= \operatorname{sen}(2\pi)\cos\left[\frac{2\pi(n-1)}{n}-2\alpha\right]$$

$$= 0$$

Finalmente $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2 = \frac{1}{2}nl^2$

Inciso b:

$$\alpha_k^4 = l^4\,\frac{1-2\cos\left[\dfrac{4\pi(k-1)}{n}-2\alpha\right]+\left\{\cos\left[\dfrac{4\pi(k-1)}{n}-2\alpha\right]\right\}^2}{4}$$

$$= l^4\,\frac{1-2\cos\left[\dfrac{4\pi(k-1)}{n}-2\alpha\right]+\dfrac{\cos\left[\dfrac{8\pi(k-1)}{n}-4\alpha\right]+1}{2}}{4}$$

$$= l^4 \frac{2-4\cos\left[\frac{4\pi(k-1)}{n}-2\alpha\right]+\cos\left[\frac{8\pi(k-1)}{n}-4\alpha\right]+1}{8}$$

$$= l^4 \frac{3-4\cos\left[\frac{4\pi(k-1)}{n}-2\alpha\right]+\cos\left[\frac{8\pi(k-1)}{n}-4\alpha\right]}{8}$$

Se trata de hallar ahora:

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^4 = \sum_{k=1}^{n} l^4 \frac{3-4\cos\left[\frac{4\pi(k-1)}{n}-2\alpha\right]+\cos\left[\frac{8\pi(k-1)}{n}-4\alpha\right]}{8}$$

$$= \frac{3}{8}nl^4 - \frac{1}{2}l^4\sum_{k=1}^{n}\cos\left[\frac{4\pi(k-1)}{n}-2\alpha\right]+\frac{1}{8}l^4\sum_{k=1}^{n}\cos\left[\frac{8\pi(k-1)}{n}-4\alpha\right]$$

$$= \frac{3}{8}nl^4 + \frac{1}{8}l^4\sum_{k=1}^{n}\cos\left[\frac{8\pi(k-1)}{n}-4\alpha\right]$$

pues del inciso anterior sabíamos que $\sum_{k=1}^{n}\cos\left[\frac{4\pi(k-1)}{n}-2\alpha\right]=0$.

Si $n=4 \Rightarrow$

$$\sum_{k=1}^{4}\alpha_k^4 = \frac{3}{2}l^4 + \frac{1}{8}l^4\sum_{k=1}^{4}\cos[2\pi(k-1)-4\alpha] = \frac{3}{2}l^4 + \frac{1}{8}l^4\sum_{k=1}^{4}\cos(4\alpha)$$

$$= \frac{3}{2}l^4 + \frac{1}{2}l^4\cos(4\alpha)$$

Si $n \neq 4 \Rightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{n}\right) \neq 0$, con $n \geq 3$.

Multipliquemos la sumatoria de cosenos por $\operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{n}\right)$ que será distinto de 0 pues $n \geq 3$ y $n \neq 4$, luego la dividimos y obtenemos el resultado.

$$\operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{n}\right)\sum_{k=1}^{n}\cos\left[\frac{8\pi(k-1)}{n}-4\alpha\right] = \sum_{k=1}^{n}\operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{n}\right)\cos\left[\frac{8\pi(k-1)}{n}-4\alpha\right]$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left\{\operatorname{sen}\left[\frac{4\pi(2k-1)}{n}-4\alpha\right]+\operatorname{sen}\left[\frac{4\pi(3-2k)}{n}+4\alpha\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left\{\operatorname{sen}\left[\frac{4\pi(2k-1)}{n}-4\alpha\right]-\operatorname{sen}\left[\frac{4\pi(2k-3)}{n}-4\alpha\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\operatorname{sen}\left[\frac{4\pi(2n-1)}{n}-4\alpha\right]-\operatorname{sen}\left[-\frac{4\pi}{n}-4\alpha\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\operatorname{sen}\left[\frac{4\pi(2n-1)}{n}-4\alpha\right]+\operatorname{sen}\left[\frac{4\pi}{n}+4\alpha\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2\operatorname{sen}\left[\frac{\frac{4\pi(2n-1)}{n} - 4\alpha + \frac{4\pi}{n} + 4\alpha}{2}\right]\cos\left[\frac{\frac{4\pi(2n-1)}{n} - 4\alpha - \frac{4\pi}{n} - 4\alpha}{2}\right]$$

$$= \operatorname{sen}(4\pi)\cos\left[\frac{4\pi(n-1)}{n} - 4\alpha\right]$$

$$= 0$$

Finalmente $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^4 = \frac{3}{8} nl^4$

PROBLEMA Nº 48:

Resolver la ecuación diofántica: $x^3 + x^2 y + xy^2 + y^3 = z^2$

Solución:

La ecuación la podemos escribir de la siguiente forma:

$$x^2 \cdot (x+y) + y^2 \cdot (x+y) = z^2$$

$$(x+y)\cdot(x^2+y^2) = z^2$$

Esta ecuación la podemos escribir como:

$$(x+y)\cdot(x^2+y^2) = 1 \cdot z \cdot z$$

Se distinguen los siguientes casos:

Caso 1:

$$x+y=1$$
$$x^2+y^2=z^2$$

Este sistema de ecuaciones no tiene solución en el campo de los números naturales porque

$$x+y=1 \notin \mathrm{N}$$

Es decir, la suma de dos números naturales jamás puede darnos el valor 1.

Caso 2:

$$x^2+y^2=1$$
$$x+y=z^2$$

Caso no válido por las razones ya expuestas en ***Caso 1.***

Caso 3:

$$\left.\begin{array}{l} x+y=z \\ x^2+y^2=z \end{array}\right\}$$

Despejando la variable $\underline{y}$ en la 1ª ecuación y sustituyéndola en la 2ª , nos quedará:

$$x^2+(z-x)^2=z \quad \rightarrow \quad x^2+z^2-2zx+x^2=z$$

$$2x^2-2zx+z^2-z=0$$

Utilizando como variable $\underline{x}$ resolvemos la ecuación de 2º grado.

$$x=\frac{2z\pm\sqrt{4z^2-8\cdot(z^2-z)}}{4}=\frac{2z\pm2\cdot\sqrt{z^2-2\cdot(z^2-z)}}{4}$$

$$x=\frac{z\pm\sqrt{z\cdot(2-z)}}{2}$$

Se observa fácilmente que los únicos valores naturales para $\underline{z}$ que nos dan una raíz positiva son:

CASO 3.1: $z=1$

Obtenemos:

$x_1=1,\ y=0\notin \mathrm{N}$

$x_2=0\notin \mathrm{N}$

No hay soluciones válidas en este caso.

CASO 3.2: $z=2$

Obtenemos:

$x=1$, solución doble

$y=1$

Solución única: ***x = y =1*** ***z =2***

Problema 56**, propuesto por J. L. Díaz Barrero, Barcelona, España.**
Los números de Lucas son $1,3,4,7,11,18,29,47,76,\ldots$ con $L_1=1, L_2=3$ y para todo $n\geq 2$ $L_k=L_{k-2}+L_{k-1}$.

Calcular la suma $\frac{1}{1\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}-\frac{1}{7\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 18}-\ldots$

Solución de Andrés Sánchez Pérez, La Habana, Cuba.
Queremos hallar $\frac{1}{L_1L_2}-\frac{1}{L_2L_3}+\frac{1}{L_3L_4}-\frac{1}{L_4L_5}+\ldots$. Consideremos la sucesión de Fibonacci, $1,1,2,3,5,8,\ldots$, $F_1=1, F_2=1$ y para todo $n\geq 3$ $F_n=F_{n-2}+F_{n-1}$. Comprobemos por inducción que $L_k=F_{k-1}+F_{k+1}$. Para $k=2:3=1+2$ y $k=3:4=1+3$ queda claro. A partir de ahí:
$L_{k+1}=L_k+L_{k-1}=(F_{k-1}+F_{k+1})+(F_{k-2}+F_k)=(F_{k-1}+F_{k-2})+(F_k+F_{k+1})=F_k+F_{k+2}$,
quedando demostrado.
Examinando los primeros valores, nos percatamos de que $S_n=\frac{1}{L_1L_2}-\frac{1}{L_2L_3}+\frac{1}{L_3L_4}-\frac{1}{L_4L_5}+\ldots+(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{L_nL_{n+1}}=\frac{F_n}{L_{n+1}}$, verifiquémoslo también por inducción:

$$S_1=\frac{1}{L_1L_2}=\frac{1}{1\cdot 3}=\frac{1}{3}$$

$$S_{n+1}=S_n+(-1)^{n+2}\cdot\frac{1}{L_{n+1}L_{n+2}}=\frac{F_n}{L_{n+1}}+(-1)^{n+2}\cdot\frac{1}{L_{n+1}L_{n+2}}=\frac{F_nL_{n+2}+(-1)^{n+2}}{L_{n+1}L_{n+2}}=$$

$$=\frac{F_{n+1}}{L_{n+2}}\Leftrightarrow F_nL_{n+2}+(-1)^n=F_{n+1}L_{n+1}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow F_n(F_{n+1}+F_{n+3})+(-1)^n=F_{n+1}(F_n+F_{n+2})\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow F_nF_{n+3}-F_{n+1}F_{n+2}=(-1)^{n+1}$$

Esto último probémoslo también por inducción: $F_1F_4-F_2F_3=3-2=(-1)^2$, ahora,
$F_{k+1}F_{k+4}-F_{k+2}F_{k+3}=-(F_kF_{k+3}-F_{k+1}F_{k+2})\Leftrightarrow F_{k+1}(F_{k+4}-F_{k+2})-F_{k+3}(F_{k+2}-F_k)=0\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow F_{k+1}F_{k+3}-F_{k+3}F_{k+1}=0$

Con ello podemos asegurar que $S_n=\frac{F_n}{L_{n+1}}\,\forall n\in\aleph$. Apliquemos la recurrencia para ambas sucesiones que tienen el mismo polinomio característico $p(x)=x^2-x-1$ (cumplen que $F_n=F_{n-2}+F_{n-1}$ y $L_n=L_{n-2}+L_{n-1}$) cuyas raíces son $x_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $x_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Luego

$F_n=A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$, para $n=1$ tenemos $2=(A+B)+\sqrt{5}(A-B)$ y con $n=2:4=6(A+B)+2\sqrt{5}(A-B)$. Multiplicando la primera por 2 y restando ambas llegamos a que $B=-A$, sustituyendo en una de ellas $A=\frac{1}{\sqrt{5}}$, entonces $F_n=\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^n-\left(1-\sqrt{5}\right)^n}{2^n\sqrt{5}}$.

$L_n=C\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+D\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$, para $n=1$ tenemos $2=(C+D)+\sqrt{5}(C-D)$ y con $n=2:12=6(C+D)+2\sqrt{5}(C-D)$. Multiplicando la primera por 2 y restando ambas llegamos a que $C+D=2$, sustituyendo en una de ellas concluimos que $C=D=1$, entonces $L_n=\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^n+\left(1-\sqrt{5}\right)^n}{2^n}$.

$$S_n=\frac{F_n}{L_{n+1}}=\frac{\dfrac{\left(1+\sqrt{5}\right)^n-\left(1-\sqrt{5}\right)^n}{2^n\sqrt{5}}}{\dfrac{\left(1+\sqrt{5}\right)^{n+1}+\left(1-\sqrt{5}\right)^{n+1}}{2^{n+1}}}=\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^n-\left(1-\sqrt{5}\right)^n}{\left(1+\sqrt{5}\right)^{n+1}+\left(1-\sqrt{5}\right)^{n+1}}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\dfrac{1}{1+\sqrt{5}}\cdot\dfrac{\left(1+\sqrt{5}\right)^n-\left(1-\sqrt{5}\right)^n}{\left(1+\sqrt{5}\right)^n}}{\dfrac{\left(1+\sqrt{5}\right)^{n+1}+\left(1-\sqrt{5}\right)^{n+1}}{\left(1+\sqrt{5}\right)^{n+1}}}=\frac{2}{\sqrt{5}\left(1+\sqrt{5}\right)}\cdot\frac{1-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n}{1+\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+1}}$$

Observemos que $\left|\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right|<1$, ahora

$$\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i+1}\frac{1}{L_iL_{i+1}}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{2}{\sqrt{5}\left(1+\sqrt{5}\right)}\cdot\frac{1-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n}{1+\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+1}}\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{2}{\sqrt{5}\left(1+\sqrt{5}\right)}\right]\cdot\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n}{1+\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+1}}\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{2}{\sqrt{5}\left(1+\sqrt{5}\right)}\right]\cdot\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left[1-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n\right]}{\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+1}\right]}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{2}{\sqrt{5}\left(1+\sqrt{5}\right)}\right]\cdot\frac{\lim\limits_{n\to\infty}(1)-\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n}\right]}{\lim\limits_{n\to\infty}(1)+\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+1}\right]}=\frac{2}{\sqrt{5}\left(1+\sqrt{5}\right)}\cdot\frac{1-0}{1+0}=\frac{5-\sqrt{5}}{10}$$

Problema 56

Propuesto por J.L. Díaz Barrero, Barcelona, España.

Los números de Lucas son 1,3,4,7,11,18,29,47,76,..., con

$$L_1=1,\ L_2=3,\ \text{y para todo } n\geq 2,\ L_n=L_{n-1}+L_{n-2}.$$

Calcular la suma

$$\frac{1}{1\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}-\frac{1}{7\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 18}-\ldots.$$

Es conocida la sucesión de los números de Fibonacci, definida por $F_1=F_2=1$, y para todo $n\geq 2$, $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$. Se demuestra primero el siguiente

Lema: Los números de Lucas y de Fibonacci satisfacen la siguiente relación:

$$L_{n+1}F_{n+1}-L_{n+2}F_n=(-1)^n \text{ para todo } n\geq 1.$$

Demostración: El resultado es obvio para $n=1$, pues $L_2F_2-L_3F_1=3-4=-1$. Si se cumple para $n=m$, entonces para $n=m+1$ tenemos:

$$\begin{aligned} L_{m+2}F_{m+2}-L_{m+3}F_{m+1} &= L_{m+2}\left(F_{m+1}+F_m\right)-\left(L_{m+2}+L_{m+1}\right)F_{m+1} \\ &= L_{m+2}F_m-L_{m+1}F_{m+1}=-(-1)^m=(-1)^{m+1}. \end{aligned}$$

Luego el lema queda probado por inducción.

La suma que se pide calcular, que llamaremos S, se puede expresar como:

$$S=\frac{1}{L_1L_2}-\frac{1}{L_2L_3}+\frac{1}{L_3L_4}-\frac{1}{L_4L_5}+\ldots=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{i+1}}{L_iL_{i+1}}.$$

Se define ahora la suma parcial de los n primeros sumandos S_n, la cuál se demostrará que cumple la siguiente relación:

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{i+1}}{L_iL_{i+1}}=\frac{F_n}{L_{n+1}}.$$

Obviamente, por ser $L_1=F_1=1$, $S_1=1/(1\cdot 3)$. Si la anterior relación se cumple para $n=m$, entonces para $n=m+1$ tenemos:

$$S_{m+1}=\sum_{i=1}^{m+1}\frac{(-1)^i}{L_iL_{i+1}}=S_m+\frac{(-1)^{m+2}}{L_{m+1}L_{m+2}}=\frac{F_mL_{m+2}+(-1)^m}{L_{m+1}L_{m+2}}=\frac{L_{m+1}F_{m+1}}{L_{m+1}L_{m+2}}=\frac{F_{m+1}}{L_{m+2}}.$$

Luego la expresión para S_n ha sido demostrada por inducción. Obviamente, S es el límite cuando n tiende a infinito de S_n. Para hallar este límite, se utilizará que los términos generales de las sucesiones de Lucas y Fibonacci vienen dados por:

$$L_n=Ar_1^n+Br_2^n, \qquad\qquad F_n=Cr_1^n+Dr_2^n,$$

donde A, B, C y D son constantes a determinar, siendo r_1 y r_2 las raíces de la ecuación:

$$x^2 = x + 1 .$$

En efecto, se tiene que:

$$\begin{aligned} L_{n-1} + L_{n-2} &= Ar_1^{n-1} + Br_2^{n-1} + Ar_1^{n-2} + Br_2^{n-2} = Ar_1^{n-2}(1+r_1) + Br_2^{n-2}(1+r_2) \\ &= Ar_1^n + Br_2^n = L_n, \end{aligned}$$

y de forma similar para los F_n. Las condiciones iniciales se cumplen haciendo:

$$L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, \qquad F_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

Por lo tanto, se tiene que:

$$\begin{aligned} S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{L_{n+1}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{\sqrt{5}}{5}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]}{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} + \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}} \\ &= \frac{2\sqrt{5}}{5\left(1+\sqrt{5}\right)} \lim_{n\to\infty} \frac{\left[1 - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n\right]}{\left[1 + \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+1}\right]} = \frac{5-\sqrt{5}}{10}. \end{aligned}$$

<u>Problema 57</u>, propuesto por J. B. Romero Márquez, Ávila, España.
(**Modificado por el editor**)
Estudiar las propiedades del triángulo especial en el que:

$$m_a \cdot (h_a - 2r) = r^2$$

donde m_a es la longitud de la mediana desde A, h_a es la longitud de la altura desde A, y r es el radio del círculo inscrito.

<u>Solución de F. Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba (España).</u>

Utilizaremos las expresiones relativas a la mediana, altura relativa al vértice A, m_a , h_a, y el radio r de la circunferencia inscrita en función de los lados del triángulo ABC, para poder desarrollar la condición dada en el enunciado:

$$m_a \cdot (h_a - 2r) = r^2 \text{ o, equivalentemente: } \qquad m_a^2 = \left(\frac{r^2}{h_a - 2r}\right)^2 \quad \text{(I)}$$

Para ello, sea:

$m_a^2 = 1/4 \cdot (2b^2 + 2c^2 - a^2)$

De la igualdad en las expresiones del área del triángulo ABC.

$[ABC] = \frac{1}{2}.a.h_a = p.r = \sqrt{p.(p-a).(p-b).(p-c)}$, donde 2p= a+b+c, deducimos que:

$$h_a = \frac{2}{a}.\sqrt{p.(p-a).(p-b).(p-c)}$$

$$r = \frac{\sqrt{p.(p-a).(p-b).(p-c)}}{p}.$$

Por tanto, sustituyendo estos valores en la expresión (I) y, con un poco de cálculo, obtenemos:

$$\frac{1}{4}.(2b^2 + 2c^2 - a^2) = \frac{a^2}{4}.\frac{(p-b)(p-c)}{p.(p-a)}; \qquad (2b^2 + 2c^2 - a^2) = \frac{a^2.(a-b+c)(a+b-c)}{(a+b+c).(-a+b+c)}$$

Desarrollamos los productos anteriores e igualamos:

$$a^2.(a-b+c).(a+b-c) - (2b^2 + 2c^2 - a^2).(a+b+c).(-a+b+c) = 0;$$
$$a^4 - a^2.(b-c)^2 - (a^2 - (b+c)^2).(a^2 - 2(b^2 + c^2)) = 0$$

Simplificando términos semejantes, llegamos a:

$$a^4 - a^2.(b-c)^2 - a^4 + a^2.(b+c)^2 + 2.a^2.(b^2 + c^2) - 2.(b+c)^2.(b^2 + c^2) = 0$$

$$a^2.[-(b-c)^2 + (b+c)^2 + 2.(b^2 + c^2)] - 2.(b+c)^2.(b^2 + c^2) = 0$$

$$2.a^2.(b+c)^2 - 2.(b+c)^2.(b^2+c^2) = 0$$

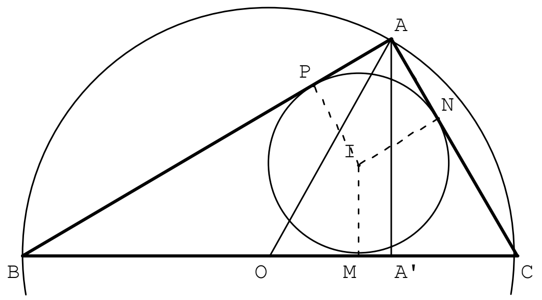
$$2.(b+c)^2[a^2-(b^2+c^2)] = 0\ .$$

Luego entonces:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Condición esta última que revela que el triángulo ABC ha de ser rectángulo en A.

Veamos ahora que esta condición es también suficiente. Es decir, si el triángulo es rectángulo en A entonces se verifica la relación dada, $m_a \cdot (h_a - 2r) = r^2$
Para ello, sea la siguiente situación general de un triángulo rectángulo en A



Según este triángulo rectángulo en A, ABC, tenemos que:

IM = IP = IN = AP = AN= p–a = r

AO= m_a = a/2

AA'= h_a

Como [ABC]= 1/2·a·h_a = p·r, tenemos que h_a = (2·p·r)/a .
En definitiva, sustituyendo m_a y h_a por los valores encontrados:
m_a = a/2 ; h_a = (2·p·r)/a
vemos que, en efecto, se verifica la relación dada:
$m_a \cdot (h_a - 2r)$ = a/2·[(2·p·r) /a – 2r] = a/2 ·[(2·p·r – 2r·a) /a] = p·r – r·a = (p – a)·r = r·r = r^2 , **c.q.d.**

Problema 57

Propuesto por J.B. Romero Márquez, Ávila, España. (Modificado por el editor)

Estudiar las propiedades del triángulo especial en el que

$$m_a\left(h_a-2r\right)=r^2,$$

donde m_a es la longitud de la mediana desde A, h_a es la longitud de la altura desde A, y r es el radio del círculo inscrito.

Utilizaremos las siguientes (conocidas) relaciones, donde S es el área del triángulo, y a, b, c las medidas de BC, CA, AB respectivamente:

$$16S^2=(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c);$$

$$ah_a=(a+b+c)r=2S;$$

$$4m_a^{\ 2}=2b^2+2c^2-a^2.$$

Podemos entonces escribir:

$$h_a=\frac{2S}{a}=r\,\frac{a+b+c}{a};\qquad\qquad \frac{r}{m_a}=\frac{h_a}{r}-2=\frac{-a+b+c}{a};$$

$$\frac{m_a}{a}=\frac{r}{(-a+b+c)}=\frac{2S}{(a+b+c)(-a+b+c)};$$

$$\frac{4m_a^{\ 2}}{a^2}=\frac{16S^2}{(a+b+c)^2(-a+b+c)^2}=\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{(a+b+c)(-a+b+c)};$$

$$a^2\left[a^2-(b-c)^2\right]=4m_a^{\ 2}\left[(b+c)^2-a^2\right]=\left[2\left(b^2+c^2\right)-a^2\right]\left[(b+c)^2-a^2\right];$$

$$a^4-a^2(b-c)^2=a^4-a^2\left[(b+c)^2+2\left(b^2+c^2\right)\right]+2\left(b^2+c^2\right)(b+c)^2;$$

$$2\left(b^2+c^2\right)(b+c)^2=a^2\left[(b+c)^2+2\left(b^2+c^2\right)-(b-c)^2\right]=2a^2(b+c)^2;$$

$$b^2+c^2=a^2.$$

Luego por lo tanto el triángulo especial debe ser rectángulo en A.

Problema 58

Propuesto por J. B. Romero Márquez, Ávila, España.

Si p y q son números reales positivos, demostrar que

$$1 \le \sqrt{\frac{p^2+4q}{2q}} - \sqrt{\frac{p}{p+\sqrt{p^2+4q}}}.$$

¿En qué condiciones se verifica la igualdad?

Solución de F. Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba, España.

a) Como $p>0$ entonces la desigualdad anterior la podemos expresar de la siguiente manera:

$$1 \le \sqrt{\frac{p^2+4q}{2q}} - \sqrt{\frac{p}{p+\sqrt{p^2+4q}}}; \qquad 1 \le \sqrt{\frac{1+4\frac{q}{p^2}}{2\frac{q}{p^2}}} - \sqrt{\frac{1}{1+\sqrt{1+4\frac{q}{p^2}}}}$$

Si llamamos a $x=\frac{q}{p^2}>0$ y $f(x)=\sqrt{\frac{1+4x}{2x}}-\sqrt{\frac{1}{1+\sqrt{1+4x}}}$, entonces probaremos que:

$$1 \le f(x)=\sqrt{\frac{1+4x}{2x}}-\sqrt{\frac{1}{1+\sqrt{1+4x}}}.$$

Para ello, como $f'(x)=\frac{-1}{4x^2}\sqrt{\frac{2x}{1+4x}}+\frac{\sqrt{1+\sqrt{1+4x}}}{\sqrt{1+4x}.\left(1+\sqrt{1+4x}\right)^2}$ (I)

$f'(x)=0$ si y solo si $\quad \frac{1}{4x^2}\sqrt{\frac{2x}{1+4x}}=\frac{\sqrt{1+\sqrt{1+4x}}}{\sqrt{1+4x}.\left(1+\sqrt{1+4x}\right)^2}$.

Si elevamos al cuadrado ambas expresiones e igualamos, obtenemos:

$$\frac{1}{8x^3.(1+4x)}=\frac{1+\sqrt{1+4x}}{(1+4x).\left(1+\sqrt{1+4x}\right)^4}; \qquad \frac{1}{8x^3}=\frac{1}{\left(1+\sqrt{1+4x}\right)^3};$$

Es decir: $\quad 2x-1=\sqrt{1+4x}$

Elevando de nuevo al cuadrado, obtenemos: $4x^2-4x+1=1+4x$;

En definitiva: $x.(x-2)=0$; Como $x>0$ entonces $x=2$.

Comprobamos al sustituir en (I) que, en efecto, $x=2$ es solución válida para $f'(x)=0$.

Como $y=f(x)$ es continua para todo $x>0$ y además se verifica que $\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ y $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\sqrt{2}$, resulta que $x=2$ es el mínimo absoluto de la función $f(x)$.

Luego: $f(2)\le f(x);\ \forall x>0$

Como quiera que $f(2)=1$, se tiene que, en efecto, $1\le f(x);\ \forall x>0$, **c.q.d.**

b) Se verifica la igualdad cuando únicamente $x=2$, es decir, si $2=\frac{q}{p^2}$.

Problema 58, propuesto por J. B. Romero Márquez, Ávila, España.
Si p y q son números reales positivos, demostrar que

$$1 \leq \sqrt{\frac{p^2+4q}{2q}} - \sqrt{\frac{p}{p+\sqrt{p^2+4q}}}$$

¿En qué condiciones se verifica la igualdad?

Solución de Andrés Sánchez Pérez, La Habana, Cuba.

Consideremos el polinomio $p(x) = x^2 - px - q$, observemos que sus raíces $(x_1; x_2)$ son ambas reales, una positiva y la otra negativa: $x_1 = \frac{p+\sqrt{p^2+4q}}{2}$, $x_2 = \frac{p-\sqrt{p^2+4q}}{2}$. $x_2 < 0$ pues p y q reales positivos $\Rightarrow p^2+4q > p^2 \Rightarrow \sqrt{p^2+4q} > p \Rightarrow 0 > p - \sqrt{p^2+4q} \Rightarrow 0 > x_2$. Debemos demostrar que $1 \leq \sqrt{\frac{p^2+4q}{2q}} - \sqrt{\frac{p}{p+\sqrt{p^2+4q}}} \Leftrightarrow 1 \leq \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{2x_1(-x_2)}} - \sqrt{\frac{x_1+x_2}{2x_1}}$. Sea $x_1 = |x_1| = a, x_2 = -|x_2| = -b$, sustituyamos:

$1 \leq \frac{a+b}{\sqrt{2ab}} - \sqrt{\frac{a-b}{2a}}$, como p es positivo $a - b > 0$.

$$\Leftrightarrow \sqrt{2ab} + \sqrt{b(a-b)} \leq a + b \Leftrightarrow \frac{a-b}{2} - \frac{2\sqrt{b(a-b)}}{2} + \frac{b}{2} + \frac{a}{2} - \frac{2\sqrt{2ab}}{2} + \frac{2b}{2} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\sqrt{a-b}-b\right)^2 + \left(\sqrt{a}-\sqrt{2b}\right)^2}{2} \geq 0$$

Lo cual se verifica para cualquiera sean los valores positivos de $a, b, a-b$. La igualdad se alcanza $\Leftrightarrow \sqrt{a-b} - b = 0$ y $\sqrt{a} - \sqrt{2b} = 0$, o sea $a = b^2 + b$ y $a = 2b$, de donde $b^2 + b = 2b \Leftrightarrow b(b-1) = 0$ pero como $b > 0 \Rightarrow b = 1, a = 2$ y $x_1 = 2, x_2 = -1$. Por Vietta, $p(x) = x^2 - x - 2 \Rightarrow p = 1, q = 2$.

Problema 58

Propuesto por J.B. Romero Márquez, Ávila, España.

Si p y q son números reales positivos, demostrar que

$$1 \leq \sqrt{\frac{p^2+4q}{2q}} - \sqrt{\frac{p}{p+\sqrt{p^2+4q}}} .$$

¿En qué condiciones se verifica la igualdad?

Realizamos primero la (relativamente astuta) sustitución $r^2=q/(2p^2)$, donde sin pérdida de generalidad tomamos r como positivo. Se tiene entonces que:

$$\sqrt{\frac{p^2+4q}{2q}} - \sqrt{\frac{p}{p+\sqrt{p^2+4q}}} = \sqrt{\frac{1+8r^2}{4r^2}} - \sqrt{\frac{1}{1+\sqrt{1+8r^2}}} = \frac{\sqrt{1+8r^2} - \sqrt{\frac{\sqrt{1+8r^2}-1}{2}}}{2r}$$

Podemos hacer ahora la (un poco más obvia) siguiente sustitución:

$$x = \frac{\sqrt{1+8r^2}-1}{2}; \qquad 2x+1 = \sqrt{1+8r^2}; \qquad 2r = \sqrt{2x(x+1)} .$$

Se tiene entonces finalmente que:

$$\sqrt{\frac{p^2+4q}{2q}} - \sqrt{\frac{p}{p+\sqrt{p^2+4q}}} = \frac{2x+1-\sqrt{x}}{\sqrt{2x(x+1)}} \geq \frac{4x+2-2\sqrt{x}}{3x+1}$$

$$= 1 + \frac{x-2\sqrt{x}+1}{3x+1} = 1 + \frac{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{3x+1} \geq 1,$$

donde se ha aplicado la desigualdad entre medias aritmética y geométrica a los números $2x$ y $x+1$, además de que, por definición, x es positivo. La igualdad se da si y sólo si $\sqrt{x}-1=0$, y simultáneamente $2x=x+1$, es decir, si y sólo si $x=1$, y por lo tanto, si y sólo si $r=1$, o sea, si y sólo si $q=2p^2$.

José Luis **Díaz–Barrero**
Applied Mathematics III
Universitat Politècnica de Catalunya
Jordi Girona 1-3, C2, 08034 Barcelona. Spain
jose.luis.diaz@upc.es

Problema 59

Propuesto por J. B. Romero Márquez, Ávila, España.

Sea $a > 0$. Calcular

$$\lim_{a\to 1}\int_0^\infty \frac{dx}{(a+x)(1+ax)}.$$

Solución por José Luis Díaz-Barrero, Barcelona, España.

Descomponiendo el integrando en fracciones simples, resulta

$$\frac{1}{(a+x)(1+ax)} = \frac{1}{1-a^2}\left(\frac{1}{a+x} - \frac{a}{1+ax}\right)$$

con lo que

$$\begin{aligned}
\lim_{a\to 1}\int_0^\infty \frac{dx}{(a+x)(1+ax)} &= \lim_{a\to 1}\left\{\frac{1}{1-a^2}\int_0^\infty \left(\frac{1}{a+x} - \frac{a}{1+ax}\right)dx\right\} \\
&= \lim_{a\to 1}\left\{\frac{1}{1-a^2}\left[\ln\left(\frac{a+x}{1+ax}\right)\right]_0^\infty\right\} \\
&= \lim_{a\to 1}\left\{\frac{1}{1-a^2}\left(\ln\frac{1}{a} - \ln a\right)\right\} \\
&= \lim_{a\to 1}\left\{\frac{2\ln a}{a^2-1}\right\} \quad \text{(Aplicando L'Hopital)} \\
&= \lim_{a\to 1}\frac{1}{a^2} = 1
\end{aligned}$$

y hemos terminado.

Problema 59

Propuesto por J.B. Romero Márquez, Ávila, España.

Sea $a>0$. Calcular

$$\lim_{a\to 1}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(a+x)(1+ax)}.$$

Se pide calcular:

$$\lim_{a\to 1} I(a),$$

donde se ha definido

$$I(a)=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(a+x)(1+ax)}=\frac{1}{1-a^2}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{x+a}-\frac{a}{ax+1}\right)dx.$$

Ahora bien, tomando $b>0$, se tiene:

$$\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{x+a}-\frac{a}{ax+1}\right)dx=\lim_{b\to\infty}\int_0^{b}\left(\frac{1}{x+a}-\frac{a}{ax+1}\right)dx=\lim_{b\to\infty}\left[\int_0^{b}\frac{dx}{x+a}dx-\int_0^{b}\frac{adx}{ax+1}\right];$$

$$\int_0^{b}\frac{dx}{x+a}dx=\ln(b+a)-\ln(a)=\ln\left(\frac{b+a}{a}\right);$$

$$\int_0^{b}\frac{adx}{ax+1}=\int_0^{ab}\frac{dy}{y+1}=\ln(ab+1)-\ln(1)=\ln(ab+1);$$

$$I(a)=\frac{1}{1-a^2}\lim_{b\to\infty}\left[\ln\left(\frac{b+a}{a}\right)-\ln(ab+1)\right]=\frac{1}{1-a^2}\lim_{b\to\infty}\left[\ln\left(\frac{1}{a^2}\frac{b+a}{b+\frac{1}{a}}\right)\right]=\frac{\ln\left(a^2\right)}{a^2-1}.$$

Por lo tanto, como haciendo el desarrollo de $\ln(a^2)$ alrededor de $a^2=1$ se tiene:

$$\ln\left(a^2\right)=\left(a^2-1\right)-\frac{\left(a^2-1\right)^2}{2}+\frac{\left(a^2-1\right)^3}{3}-\frac{\left(a^2-1\right)^4}{4}+\ldots=\left(a^2-1\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(1-a^2\right)^n}{n+1};$$

$$\lim_{a\to 1}I(a)=\lim_{a\to 1}\frac{\ln\left(a^2\right)}{a^2-1}=\lim_{a\to 1}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1-a^2\right)^n}{n+1}\right)=1.$$

Problema 60, propuesto en la Escuela Especial de Ingenieros de Montes, 1942.

Resolver en los números enteros la ecuación

$xyz = xy + yz + zx$

Solución de Andrés Sánchez Pérez, La Habana, Cuba.

Como tengo tres variables, al menos 2 tienen el mismo signo. Sean estas $y, z \Rightarrow yz \geq 0$. Despejando x en $xyz = xy + yz + zx \Rightarrow x(yz - y - z) = yz$ $\Rightarrow x = \dfrac{yz}{yz - y - z}$, si $yz - y - z \neq 0$. $x - 1 = \dfrac{y+z}{yz - (y+z)}$ también es entero.

Entonces $|y + z| \geq |yz - (y+z)| \Rightarrow (y+z)^2 \geq (yz)^2 - 2yz(y+z) + (y+z)^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow yz(2y + 2z - yz) \geq 0 \Rightarrow 2y + 2z \geq yz$ si $yz \neq 0$. Como y, z tienen el mismo signo y $2y + 2z \geq yz > 0$ entonces ambas son positivas. Sea $y \geq z \geq 1$ sin pérdida de generalidad.

Supongamos primero que $z \geq 5 \Rightarrow 2z \geq y(z-2) \geq 3y \geq 3z$ ¡contradicción! Luego $1 \leq z \leq 4$.

Si $z = 1 \Rightarrow xy = xy + y + z \Leftrightarrow y = -z$

Si $z = 2 \Rightarrow 2y - y - 2 | y + 2 \Leftrightarrow y - 2 | y + 2 \Leftrightarrow y - 2 | y + 2 - (y - 2) \Leftrightarrow y - 2 | 4 \Leftrightarrow$ $y - 2 \in \{-4; -2; -1; 0; 1; 2; 4\} \Leftrightarrow y \in \{-2; 0; 1; 2; 3; 4; 6\}$ pero como $y \geq z = 2$, cuando sustituimos cada valor, para $y = 2 \Rightarrow yz = y + z$;

$x_1 = \dfrac{2 \cdot 3}{2 \cdot 3 - 3 - 2} = 6; x_2 = \dfrac{2 \cdot 4}{2 \cdot 4 - 4 - 2} = 4; x_3 = \dfrac{2 \cdot 6}{2 \cdot 6 - 6 - 2} = 3$

Si $z = 3 \Rightarrow 2y + 6 \geq 3y \Rightarrow 6 \geq y \geq 3 \Rightarrow y \in \{3; 4; 5; 6\}$ probando todos los valores $x_4 = \dfrac{3 \cdot 3}{3 \cdot 3 - 3 - 3} = 3; x_5 = \dfrac{3 \cdot 4}{3 \cdot 4 - 4 - 3} \notin Z; x_6 = \dfrac{3 \cdot 5}{3 \cdot 5 - 5 - 3} \notin Z; x_7 = \dfrac{3 \cdot 6}{3 \cdot 6 - 6 - 3} = 2$

Si $z = 4 \Rightarrow 2y + 8 \geq 4y \Rightarrow 4 \geq y \geq 4$. Cuando $y = z = 4 \Rightarrow x_8 = \dfrac{4 \cdot 4}{4 \cdot 4 - 4 - 4} = 2$

Faltaría analizar qué sucede, primero si $z = 0$ (lo asumimos como mínimo entre y, z): $\Rightarrow 0 = xy$ y segundo si $yz = y + z \Rightarrow yz = 0 \Rightarrow z = y = 0$. Finalmente las soluciones son $(1; y; -y)$ con $y \in Z$, $(6; 3; 2); (4; 4; 2); (3; 3; 3)$ y $(0; 0; y)$ con $y \in Z$ y todas sus reordenaciones.

Problema 60

Propuesto en la Escuela Especial de Ingenieros de Montes, 1942.

Resolver en los números enteros la ecuación

$$xyz = xy + yz + zx \; .$$

Supongamos que uno de los enteros (x sin pérdida de generalidad) es nulo. Se tiene entonces que yz=0, es decir, no puede haber exactamente uno de los tres números que sea nulo. Admitimos entonces las soluciones $(0,0,l)$, donde l es un entero cualquiera, además de todas sus permutaciones cíclicas. Nos queda entonces por encontrar las soluciones donde ninguno de los tres enteros sea nulo.

Los tres enteros no pueden ser negativos simultáneamente, pues en caso contrario los miembros de la derecha y de la izquierda tendrían signos opuestos. Supongamos que dos de los enteros (x e y sin pérdida de generalidad) son negativos, y el tercero positivo. Se tiene entonces que:

$$0 < z = \frac{xy}{xy - x - y} = \frac{|xy|}{|xy| + |x| + |y|} < 1.$$

Por lo tanto, si ninguno de los enteros es nulo, a lo sumo uno puede ser negativo. Sea entonces x negativo, e y, z positivos, asumiendo sin pérdida de generalidad que y>z. Escribimos entonces:

$$|x|\, yz < yz\left(1 + |x|\right) = \left(z + y\right)|x| \; ; \qquad\qquad yz < z + y < 2y \; .$$

Por lo tanto, z=1, con lo que x=–y, y se tienen las soluciones $(l,-l,1)$ y todas sus permutaciones cíclicas, donde l es un entero cualquiera. Nótese que z=1 implica directamente x=–y, con lo que si uno cualquiera de los enteros es igual a 1, entonces uno de los otros dos es negativo.

Supongamos entonces que los tres enteros son positivos, siendo sin pérdida de generalidad 1<x≤y≤z. Aplicando entonces la desigualdad entre el mínimo y la media armónica, se tiene:

$$x \le \frac{3}{\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}} = 3 ,$$

dándose la igualdad si y solamente si x=y=z=3, que se puede comprobar que es una solución de la ecuación. Nos queda entonces probar únicamente el caso en el que x=2 con 2<y≤z positivos. En este caso, se tiene que:

$$yz = 2(y+z); \qquad z = \frac{2y}{y-2} \geq y; \qquad 4y \geq y^2; \qquad 4 \geq y.$$

Tenemos entonces los casos y=3, z=6, y y=z=4. Por lo tanto, (x,y,z) es solución si y solamente si es una permutación cíclica de una de las siguientes:

$$(3,3,3), \qquad (2,3,6), \qquad (2,4,4), \qquad (l,-l,1), \qquad (0,0,l),$$

donde l puede tomar cualquier valor entero.

PROBLEMAS PROPUESTOS 61-65 (13)

Problema 61, propuesto por el Prof. Laurentiu Modan, Univ. de Bucarest.

Sea

$$S_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k^2}.$$

Demostrar que :

i)

$$\frac{4007}{2004} \leq S_{2004} \leq \frac{8015}{4008}.$$

ii)

$$\lim_{n\to\infty} S_n \in [2,4].$$

Problema 62, propuesto por el Prof. José Luis Díaz Barrero, Univ. Politécnica de Cataluña, Barcelona, España.

Calcular la integral

$$\int_{2003}^{2004} \frac{\sqrt[3]{2004-x}}{\sqrt[3]{2004-x} + \sqrt[3]{x-2003}} dx.$$

Problema 63, propuesto por el Prof. José Luis Díaz Barrero, Univ. Politécnica de Cataluña, Barcelona, España.

Calcular la suma

$$\sum_{k=0}^{n} \arctan\left(\frac{2k+1}{(k^2+1) + k^2(2k-1)} \right).$$

Problema 64, propuesto por el Prof. Juan Bosco Romero Márquez, Ávila, España.

El triángulo ABC es rectángulo en A, y sus lados verifican $a > b > c$.

Sea A’ el punto medio de BC y H_a el pie de la altura desde A.

Si el triángulo AH_aA' es isósceles, determinar los ángulos B y C.

Problema 65, propuesto por Juan Carlos Salazar, Puerto Ordaz (Venezuela).

El cuadrilátero ABCD es bicéntrico (es decir, tiene círculo inscrito y circunscrito); el círculo inscrito tiene centro I y radio r; los círculos exinscritos correspondientes a los lados AB y CD tienen centros y radios (I_1, r_1) e (I_2, r_2), respectivamente. Los puntos de tangencia del círculo inscrito con los lados AB, BC, CD y DA son, respectivamente, W, X, Y y Z. Los puntos de tangencia de los círculos exinscritos (I_1, r_1) e (I_2, r_2) con un lado del cuadrilátero y la prolongación de otros dos, determinan los triángulos ”tangenciales exteriores” de áreas S_1 y S_2, respectivamente. Demostrar que

$$i)\ [WXYZ] = S_1 \cdot \sqrt{\frac{r_2}{r_1}} + S_2 \cdot \sqrt{\frac{r_1}{r_2}},$$

$$ii)\ \frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{3/2},$$

donde [ ] representa el área.

DIVERTIMENTOS MATEMÁTICOS (13)

ALGUNOS MÉTODOS MATEMÁTICOS PARA CAZAR LEONES

En 1938, se publicó en la revista American Mathematical Monthly un memorable artículo, titulado *A contribution to the mathematical theory of big game hunting,* bajo el nombre de H. Pétard. La referencia completa es H. Pétard, *A contribution to the mathematical theory of big game hunting*, A.M.Monthly 45 (1938), pp.446-447. En este artículo se formulaba el problema en la forma siguiente :

En el desierto del Sahara hay leones. Descríbanse métodos para cazarlos, y se daban 10 soluciones matemáticas y algunas otras físicas.

En 1995, la Mathematical Association of America, editora del Monthly, publicó en su colección ”Dolciani Mathematical Expositions”, nº 15, el libro dedicado a la memoria de Ralph P. Boas, Jr. *Lion Hunting* & *other mathematical pursuits,* con Gerald L.Alexanderson y Dale H. Mugler como editores (Boas había muerto en 1992). De esta fuente tomamos los métodos que más adelante citaremos.

H. Pétard es un matemático apócrifo. Fue creado por Ralph P. Boas y Frank Smithies durante el curso académico 1937-38 en Princeton, donde ambos habían coincidido, Boas en la Universidad y Smithies en el Instituto de Estudios Avanzados. El artículo fue enviado al Monthly bajo el nombre de E. S. Pondiczery, un supuesto matemático polaco que indicaba prefería se publicase bajo el seudónimo de H. Pétard. Una vez publicado, tuvo un enorme éxito y gran difusión, y posteriormente se publicaron nuevos métodos de varios otros autores. Parece que las primeras versiones de los ”métodos matemáticos para la caza mayor” aparecieron de forma anónima en la Universidad de Göttingen (Alemania). El artículo de H. Pétard comienza así :

”*Esta disciplina matemática poco conocida no ha recibido, en los últimos años, la atención de la bibliografía que, creemos, se merece. En este artículo presentamos algunos algoritmos que, esperamos, puedan resultar interesantes a otros investigadores en este campo. Dejando aparte los métodos más obviamente triviales, limitaremos nuestra atención a los que suponen aplicaciones significativas de ideas familiares a matemáticos y físicos.*”

Método 1 (de Hilbert, o axiomático)

Colocamos una jaula cerrada en un punto dado del desierto de Sahara. Introducimos el siguiente sistema lógico :

AXIOMA 1: El conjunto de los leones del desierto de Sahara no es vacío.

AXIOMA 2: Si hay un león en el desierto de Sahara, el león está en la jaula.

REGLA DE PROCEDIMIENTO: Si p es un teorema, y ”p implica q” es un teorema, entonces q es un teorema.

TEOREMA 1: Hay un león en la jaula.

Método 2 (por inversión)

Colocamos una jaula esférica en el desierto, entramos en ella, y la cerramos. A continuación, realizamos una inversión con respecto a la jaula. El león queda dentro de la jaula, y nosotros, fuera.

Método 3 (de Bolzano-Weierstrass)

Bisecamos el desierto por una recta en la dirección Norte-Sur. El león estará en la porción Este o en la porción Oeste; supongamos que está en esta última. Bisecamos esta porción por medio de una recta en la dirección Este-Oeste. El león estará en la porción Norte o en la Sur; supongamos que está en la Norte. Continuamos el proceso indefinidamente, construyendo en cada etapa una verja suficientemente fuerte alrededor de cada porción elegida. El diámetro de las porciones elegidas tiende a cero, y así el león quedará, finalmente, rodeado por una verja de perímetro arbitrariamente pequeño.

Método 4 (de Cauchy)

Consideremos una función analítica $f(z)$ cuyo rango de valores es el conjunto de los leones del Sahara. Sea ζ la jaula. Consideramos la integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-\zeta}dz,$$

donde C es la frontera del desierto. Su valor es $f(\zeta)$, es decir, un león en la jaula. Por el teorema de Picard, podemos cazar todos los leones, excepto uno.

Método 5 (de Schrödinger)

En un momento dado, existe una probabilidad positiva de que un león esté en la jaula. Siéntese y espere.

Método 6 (de Dirac)

Observamos que los leones salvajes son, *ipso facto*, no observables en el desierto del Sahara. En consecuencia, si hay leones en el Sahara, estarían domesticados. La captura de un león domesticado se deja como ejercicio para el lector.

Método 7 (termodinámico)

Construimos una membrana semi permeable, permeable a cualquier cosa excepto para los leones, y la pasamos por el desierto.

Estos 7 métodos están tomados del artículo de Pétard. Damos otros varios, mencionando la procedencia exacta.

Método 8 (quirúrgico)

Un león puede ser considerado como una variedad tridimensional orientable con frontera no vacía. Es conocido que por medio de una sucesión de operaciones quirúrgicas llamadas ”modificaciones esféricas” el león se contrae (contractible, en inglés). Entonces puede ser llevado a firmar un contrato (contract) con Barnum y Bailey. (Otto Morphy, *Amer. Math. Monthly* 75,1968, *pp*.185-187)

Método 9 (Lógico)

Un león es un continuo. Según el teorema de Cohen, es indecidible (en particular cuendo tiene que elegir). Dos hombres se le aproximan simultáneamente. El león, incapaz de decidir a qué hombre atacar, es capturado fácilmente. (Otto Morphy, *Amer. Math. Monthly* 75,1968, *pp*.185-187)

Método 10 (de Postnikov)

Un león macho es bastante peludo, y puede considerarse formado por fibras. Así, puede suponerse que el león es un espacio fibrado. Entonces podemos construir la descomposición de Postnikov del león. Una vez hecho esto, estando descompuesto el león, estará muerto, y necesitado urgentemente de entierro.(Otto Morphy, *Amer. Math. Monthly* 75,1968, *pp*.185-187).

Método 11 (de Teoría de Juegos)

Un león es un gran juego (juego de palabras intraducible; big game es caza mayor en inglés), así que, *a fortiori*, es un juego. Según Von Neumann, existe una estrategia óptima para ese juego. Sígala.

(Otto Morphy, *Amer*. *Math*. *Monthly* 75,1968, *pp*.185-187).

Método 12 (de Mittag-Leffler)

El número de leones en el desierto del Sahara es finito, así que tal conjunto no tiene puntos de acumulación. Utilice el teorema de Mittag-Leffler para construir una función meromorfa con un polo en cada león. Al ser un animal tropical, se congelará si se coloca en el polo, y entonces podrá ser fácilmente capturado.(Patricia Dudley, G.T.Evans, K.D.Hansen, I.D. Richardson; *American Mathematical Monthly*, 75, 1968, *pp*. 896-897)

Método 13 (de la mecánica Analítica)

Ya que el león tiene masa no nula, tiene momentos de inercia. Agárrelo durante uno de ellos. (Patricia Dudley, G.T.Evans, K.D.Hansen, I.D. Richardson; *American Mathematical Monthly*, 75, 1968, *pp*. 896-897)

Método 14 (de Eratóstenes)

Enumérense todos los objetos del desierto; examínense uno por uno y descártense los que no sean leones. Un refinamiento permitirá capturar sólo los leones primos. (Incluido en una versión más amplia del artículo de Pétard, publicado en la revista inglesa *Eureka*).

Método 15 (Inducción hacia atrás)

Probaremos por inducción hacia atrás la proposición

L(n): ”Es posible capturar n leones”.

Esto es cierto para n suficientemente grande, porque los leones estarán empaquetados como sardinas en una lata y no se podrán escapar. Pero, trivialmente, L(n+1) implica L(n), porque, si hemos capturado n+1 leones, podemos soltar a uno de ellos. Luego L(1) es cierto.

(John Barrington - seudónimo de Ian Stewart - 15 *New ways to catch a lion*, en *Seven Years of Manifold*, Ian Stewart y John Jaworski, eds. Cheshire, Shiva Publ. Ltd., 1981, pp.36-39)

Método 16 (de Bourbaki)

La captura de un león en el desierto es un caso especial de un problema mucho más general. Formule este problema y encuentre condiciones necesarias y suficientes para su solución. La captura de un león es ahora un corolario trivial de la teoría general, *que ni siquiera tiene que ser enunciado explícitamente*.(John Barrington - seudónimo de Ian Stewart - 15 *New ways to catch a lion*, en *Seven Years of Manifold*, Ian Stewart y John Jaworski, eds. Cheshire, Shiva Publ. Ltd., 1981, pp.36-39)

Método 17 (de las paralelas)

Seleccione un punto en el desierto y ponga un león amaestrado que no pase por ese punto. Hay tres casos a considerar:

a) la geometría es euclídea. Entonces hay un único león paralelo que pasa por el punto seleccionado. Agárrelo cuando pase.

b)la geometría es hiperbólica. El mismo método nos permite capturar un número infinito de leones.

c)la geometría es elíptica. No hay leones paralelos, así que todo león encuentra a cualquier otro. Siga a un león amaestrado y capture todos los leones que se encuentran con él : de esta forma se podrán capturar todos los leones del desierto.

(John Barrington - seudónimo de Ian Stewart - 15 *New ways to catch a lion*, en *Seven Years of Manifold*, Ian Stewart y John Jaworski, eds. Cheshire, Shiva Publ. Ltd., 1981, pp.36-39)

COMENTARIO DE PÁGINAS WEB (13)

La página web de la Mathematical Association of America
http://www.maa.org

La MAA, como habitualmente se la conoce, es una de las organizaciones más importantes del mundo en el campo matemático. No en vano publica el American Mathematical Monthly, el Mathematics Magazine y el College Mathematics Journal, tres revistas de primer orden. Además de esto, los libros que publica, algunos de los cuales se citarán más adelante, son de "lectura obligada" para cualquier profesional de las matemáticas que se precie de serlo. Una visita a su página web permitirá comprobarlo. La página contiene, como secciones fijas, las siguientes:

- **Sobre la MAA**
- **Únase a MAA**
- **Grupos especiales**
- **Secciones**
- **Programas**
- **Estudiantes**
- **Librería**
- **Publicaciones**
- **Servicios electrónicos**
- **Reuniones**

Para acceder a la compra on-line es preciso ser miembro de la MAA, pero es posible descargar el formulario de pedido y enviarlo por fax.

Algunos de los libros publicados por la MAA son los siguientes:

- **S.Greitzer, International Mathematical Olympiads 1959-1977**
- **M.Klamkin, International Mathematical Olympiads 1979-1985**
- **R.Honsberger, Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry**
- **I.Niven, Maxima and Minima without Calculus.**

La lista podría seguir...mi recomendación es que se visite la página y se elija entre las muchas opciones que están a disposición de los cibernautas.

Valladolid, abril de 2004.

Francisco Bellot Rosado

Número

14

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

Número 14 (Julio - Agosto 2004)

ISSN – 1698-277X

Índice

Raúl M. Carreras (Madrid) , Daniel Lasaosa Medarde (Berkeley, California, USA) y Antonio Ledesma López (Requena, Valencia, España). Presentamos la solución de Lasaosa.
Recibidas dos soluciones al problema 65 : de Daniel Lasaosa Medarde (Berkeley, California, USA) y Andrés Sánchez Pérez (La Habana, Cuba). Presentamos la solución de Lasaosa.

Problemas propuestos

En este apartado se invita a los lectores a resolver cinco problemas y enviarnos sus soluciones. Las más originales serán publicadas.

Divertimentos matemáticos

Los Problemas de la Isla Desierta (petición de colaboraciones)

Reseñas web
Algunas páginas web recopiladas por el Editor con ocasión del ICME 10 (Congreso Internacional de Educación Matemática), Copenhague, julio 2004.

Editor: Francisco Bellot Rosado

Prof. Juan Manuel Conde Calero

El Prof. Juan Manuel Conde Calero, de la Universidad de Alicante, ha trabajado durante muchos años como Catedrático de Instituto y forma parte de la Comisión Nacional de Olimpiadas de la Real Sociedad Matemática Española, como vocal encargado de la preparación de los olímpicos para la I.M.O. La dificultad de los problemas que propone es proverbial. Presentamos aquí una extensa recopilación de las diferentes demostraciones del teorema de Morley, que ha preparado para la Revista Escolar de la O.I.M., que le da cordialmente la bienvenida.

TEOREMA DE MORLEY

Un resultado de geometría elemental inesperado y sorprendente, descubierto en 1904 por el geómetra anglo-americano Frank Morley (1860-1937), afirma, que si se dividen en tres partes iguales los ángulos interiores de un triángulo cualquiera, por pares de semirrectas que parten de cada vértice, entonces los pares de semirrectas adyacentes a cada lado, determinan tres puntos que son los vértices de un triángulo que siempre es *equilátero.*

Este teorema, comentado de manera informal por F. Morley a sus amigos de Cambridge, no se publicó hasta 20 años más tarde de su descubrimiento. Fue en la revista japonesa de Educación Secundaria "Journal of the Mathematical Association of Japón for the Secondary Education". (Número 6, diciembre de 1924, pp.260-262).

Morley fue una persona notable. Aunque pasó los últimos 50 años de su vida en Estados Unidos (la mayoría en la universidad de Johns Hopkins) nunca renunció a su nacionalidad británica. Además de ser un matemático de primera fila era un excelente jugador de ajedrez y tuvo el honor de vencer a Emmanuel Lasker cuando era campeón del mundo.

Este teorema también fue redescubierto y presentado como un problema en la revista "Mathematical Questions and Their Solutions from the Educational Times (New Series)", 15 (1909) pp.47. (*)

Al final de este artículo se adjunta la traducción de la carta que F. Morley envío al profesor japonés T. Hayasi, para interesarle por la publicación de este teorema.
También se adjunta unos comentarios de Leon Bankoff, sobre las distintas formas en que se ha ido demostrando este teorema.

Se conjetura que posiblemente este teorema se les "escapó" a los griegos al no poder resolver en general el problema de la trisección de un ángulo con regla y compás. Una identificación errónea de no constructibilidad con no existencia.

Aquí presentamos varias demostraciones de este notable teorema, de las numerosas que se han ido incorporando a lo largo de todo este tiempo.
Es necesario además, citar otras dos demostraciones, una de geometría elemental de M.T. Naraniengar de 1909, que posteriormente redescubrió en 1622 J.M. Child ("A proof. of Morley´s theorem, Math. Gaz." (1922) 171 y otra trigonométrica de M. Satyanarayana, aparecidas a los diez años de descubrirse este teorema. La primera puede encontrarse en (*) y en el libro "Geometry Revisited" de H.S.M.Coxeter publicado por la M.A.A. (pp. 47-49) y la segunda por el mismo autor, en el libro "Fundamentos de Geometría" de Limusa Willey (pp. 47-48).

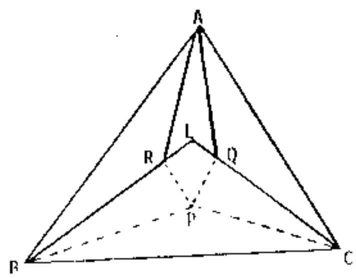
<u>Enunciado del Teorema de Morley:</u>

Los tres puntos intersección de las trisectrices adyacentes de los ángulos de un triángulo cualquiera forman un triángulo equilátero.

DEMOSTRACIÓN DE A. ROBSON.

Se reproduce la demostración de A. Robson que fue publicada en *"The Mathematical Gazette"* 11 (1922-1923), pp. 310-311.
Esta prueba de Robson es una de las demostraciones más cortas conocidas y una de las mejores.

Consideremos un triángulo ABC y las dos trisectrices de cada ángulo. Las trisectrices de B cortan a las correspondientes a C en P y L, y las trisectrices de A cortan a BL y CL respectivamente en R y Q.



Además BRL corta a AQ en U, AQ corta a BP en N, AQ corta a CP en V, CP corta a AR en M y QM corta a RN en O.
Entonces BP y BL son isogonales y por tanto también CP y CL. Se deduce así que:

i) AP y AL son isogonales.
ii) El haz $A(BRLU)$ es igual al haz $A(CVPM)$.
iii) Los siguientes tres haces son iguales:
$N(BRLU) = Q(CVPM) = Q(PMCV)$.

Y estas tres últimas proyectividades tienen un rayo común y por tanto sus correspondientes rayos tienen intersecciones colineales; es decir P, O, L son colineales.

Como R está en el incentro de $ANB, \angle ARN = 90º + \frac{1}{3}B$. Análogamente como Q está en el incentro de $AMC, \angle RMQ = 90º - \frac{1}{3}A - \frac{1}{3}C$. La diferencia entonces es $\angle ROM = 60º$. De manera similar los otros ángulos en O son $60º$. Los triángulos ORL y OQL son congruentes porque tienen una base común y ángulos iguales que forman con los otros lados. Por el mismo motivo son congruentes los triángulos ORL y OQL y también son congruentes los triángulos PRL y PQL.

Observaciones de Dan Pedoe a la prueba de Robson :

1. La demostración utiliza la idea de *rayos isogonales*. Si dos rayos (semirrectas) parten del mismo vértice de un ángulo y forman ángulos iguales con los lados se denominan rayos isogonales. Y son simétricos respecto de la bisectriz interior del ángulo.

2. El resultad que emplea Robson de isogonales es:
Si tres semirrectas trazadas cada una desde un vértice de un triángulo son concurrentes, entonces sus tres rectas isogonales son también concurrentes.

3. Robson utiliza luego la idea de haces proyectivos, haces con igual razón doble y el teorema que afirma que si dos haces proyectivos tienen un rayo común, entonces las tres intersecciones de los correspondientes rayos son colineales.

4. Y por último Robson hace uso del teorema que permite intercambiar en una razón doble un par de elementos con otro par sin que se altere el valor de la razón doble.

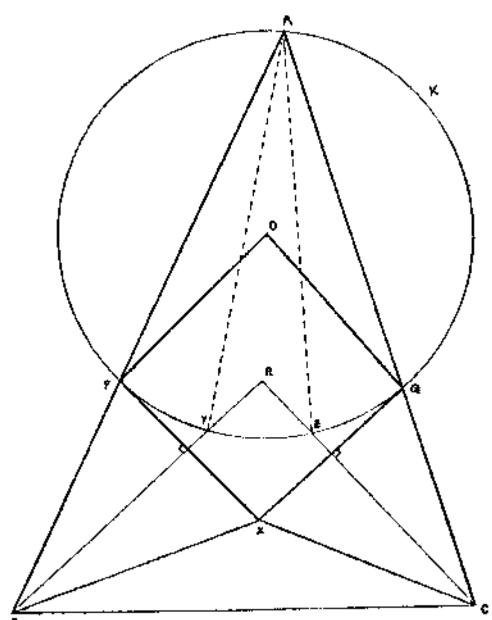
La demostración de Robson es tan corta como uno puede desear y evita elaborar construcciones iniciales, aunque quizá no todos querrían llamarla una prueba elemental.

DEMOSTRACIÓN GEOMÉTRICA ELEMENTAL DE DAN SOKOLOWSKY.

El teorema se demuestra como consecuencia de un lema sencillo que se establecerá más adelante, pero primeramente se indicará como se llega al lema pues esto demostrará al mismo tiempo como el teorema de Morley es un corolario del mismo.

En el triángulo ABC, denotamos por V_s la trisectriz del ángulo V adyacente al lado s, donde $V = A, B, C$ y $s = a, b, c$.

Las trisectrices B_a, C_a se cortan en X y las trisectrices B_c, C_b se encuentran en R. Entonces X es el incentro de del triángulo RBC, que está a una distancia r (radio inscrito) de los lados BR y CR. Sea P (que está en AB) el simétrico de X respecto de BR y Q (que está en AC) el simétrico de X respecto de CR. Entonces $XP = XQ = 2r$ y BR, CR son mediatrices de XP, XQ respectivamente. Denotemos a O el circuncentro K del triángulo APQ y sea ω el arco de K subtendido por el ángulo A. Tomando $A = 3\alpha$, $B = 3\beta$ y $C = 3\gamma$, tales que $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, tenemos que $\omega = \angle POQ = 6\alpha$.



Supongamos que:

i) BR y CR cortan a ω en Y y Z respectivamente.

ii) Y y Z trisecan el arco ω.

iii) El triángulo XYZ es equilátero.

Entonces el teorema de Morley se deduce inmediatamente.

El lema establece que esas suposiciones son ciertas. Y esto se debe al hecho de que el cuadrilátero $OPXQ$ tiene dos propiedades especiales:

a) Es simétrico respecto OX (lo que es obvio).

b) Sus ángulos en P, Q y X son iguales.

Para probar b) observemos que,

$\angle BXP = 90^\circ - \beta$, $\angle CXQ = 90^\circ - \gamma$, $\angle BXC = 180^\circ - \beta + \gamma$)
La suma de esos tres ángulos es $360^\circ - 2(\beta + \gamma)$;
por tanto $\angle PXQ = 2(\beta + \gamma) = 120^\circ - 2\alpha$. Como los ángulos en P y Q son iguales, y en O es 6α, se deduce que los ángulos en P, Q y X son todos iguales a $120^\circ - 2\alpha$.

Se establece el siguiente lema:

En el cuadrilátero $OPXQ$, suponemos que $OP = OQ$ y $XP = XQ$ y los ángulos en O y en X son 6α y $120^\circ - 2\alpha$ respectivamente. K denota la circunferencia de centro O y radio OP, y sea ω el arco de K que subtiende el ángulo en O.
Entonces las mediatrices de XP y de XQ cortan a ω en los puntos Y, Z respectivamente, tales que Y y Z trisecan ω y el triángulo XYZ es equilátero.

Demostración:
Los puntos P y Q cortan de nuevo a la circunferencia K en S y T respectivamente. De las hipótesis se tiene claramente que los triángulos OPX y OQX son semejantes y que $\angle OPX = \angle OQX = 120^\circ - 2\alpha$.
Entonces $\angle OTQ = \angle OQT = 60^\circ + 2\alpha$; por tanto PX es paralelo a OT. Análogamente QX es paralelo a OS y así $OSXT$ es un rombo y $\angle TOS = \angle PXQ = 60^\circ + 2\alpha$;por tanto $OPXT$ es un trapecio isósceles. La mediatriz de PX es entonces también la mediatriz de OT, que por tanto corta a la circunferencia K en los dos puntos Y, Y' (donde Y está situado en el mismo lado de OT como XT).
Ahora X es interior al ángulo $\angle POQ$ y entonces OX corta a ω en un punto V. Claramente OX y por tanto OV bisecan el ángulo $\angle POQ$ y también el ángulo $\angle TOS$. De este modo $\angle TOV = 60^\circ - \alpha$, mientras que $\angle POV = \angle QOV = 3\alpha$. Como Y está en la mediatriz de OT, tenemos que $OY = TY$ y de esta forma el triángulo TOY es equilátero y $\angle TOY = 60^\circ$. Debido a que V está en el mismo lado de OT que X, tenemos que $\angle YOV = \alpha$, y entonces Y está en el arco ω. Por las mismas razones $\angle POY = 2\alpha$ (así Y triseca el arco ω), e Y está en el mismo lado de OX que P, pues $\angle POV = 3\alpha < 180^\circ$.
Podemos demostrar de forma análoga que la mediatriz de QX corta a ω en un punto Z que triseca ω y está en el mismo lado de OX que Q. Así $PY = YZ = ZQ$.
Por último, $PY = XY$ y $ZQ = ZX$, de lo que se deduce que $XY = YZ = ZX$ con lo que el triángulo XYZ es equilátero. Eso completa la demostración del lema el que se deduce, como se ha visto anteriormente el teorema de Morley

DEMOSTRACIÓN TRIGONOMÉTRICA DE GINO LORIA

La demostración de Gino Loria aparece dentro del artículo "Triangles équilatéraux dérivés dún triangle quelconque" publicado por The Mathematical Gazette 23 (1939) pp.364-362. En una carta enviada al profesor Gino Loria por Frank Morley, fechada el 22 de agosto de 1934, le comenta éste que él además mencionó su teorema en *"Extensión of Clifford´s Chain Theorem"* American Journal of Mathematics, Vol51, July 1929.

Dado un triángulo cualquiera $ABC,$ las primeras trisectrices de los ángulos B y C se cortan en el punto $x;$ significado análogo tiene y respecto del lado AC y z respecto del lado $AB.$ Entonces, ¿Qué tipo de triángulo es xyz ?

Notemos que se tiene que $\angle BxC = \pi - \frac{1}{3}(B+C) = \frac{2}{3}\pi + A;$ en consecuencia el triángulo BCx nos da $\dfrac{a}{sen\left(\frac{2}{3}\pi + A\right)} = \dfrac{Bx}{sen\frac{1}{3}C}.$ Luego (R res el radio de la circunferencia circunscrita) $Bx = \dfrac{a\,sen\frac{1}{3}C}{sen\left(\frac{2}{3}\pi + A\right)} = \dfrac{2R\,senA\,sen\frac{1}{3}C}{sen\left(\frac{2}{3}\pi + A\right)}.$

Más, teniendo en general que $sen\frac{1}{3}x\,sen\frac{1}{3}(\pi + x)\,sen\frac{1}{3}(2\pi + x) = \frac{1}{4}senx,$ (i) se puede escribir $Bx = 8R\,sen\frac{1}{3}A\,sen\frac{1}{3}(\pi + A)sen\frac{1}{3}C.$ Intercambiando A por C se obtiene esta otra fórmula $Bx = 8R\,sen\frac{1}{3}C\,sen\frac{1}{3}(\pi + C)sen\frac{1}{3}A.$

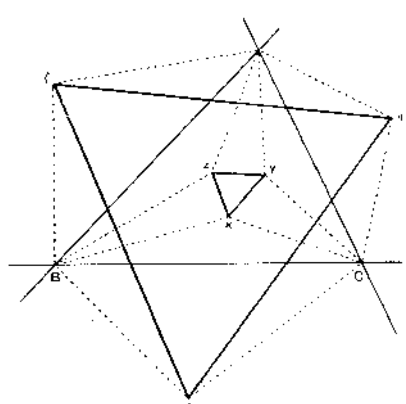
Se obtiene que

$(xz)^2 = (Bx)^2 + (Bz)^2 - 2(Bx)(Bz)\cos\frac{1}{3}B;$ (ii)

Por tanto $\dfrac{(xz)^2}{64\,sen^2\frac{1}{3}A\,sen^2\frac{1}{3}C} = sen^2\frac{1}{3}(\pi + A) + sen^2\frac{1}{3}(\pi + C) -$
$2sen\frac{1}{3}(\pi + A)sen\frac{1}{3}(\pi + C)\cos\frac{1}{3}B.$ (iii)

Para transformar el segundo miembro de esta relación se puede recurrir a la identidad siguiente: $m^2 + n^2 - 2mn\cos\phi = (m-n)^2\cos^2\frac{1}{2}\phi + (m+n)^2 sen^2\frac{1}{2}\phi.$

Suponiendo en particular $m = sen\frac{1}{3}(\pi + A),$ $m = sen\frac{1}{3}(\pi + C),$ $\phi = \frac{1}{3}B,$ se encuentra $m + n = 2\,sen\frac{1}{6}B\;sen\;\frac{1}{6}(A - C),$ $m - n = 2\cos\frac{1}{6}B\cos\;\frac{1}{6}(A - C).$



Esto prueba que el segundo miembro de la fórmula (iii) vale simplemente $sen^2\frac{1}{3}B;$

Y sustituyendo este valor en la relación (iii) y extrayendo las raíces cuadradas a los dos miembros de la misma se concluye

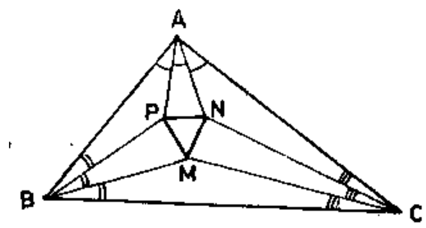
$$xz = 8R\,sen\frac{1}{3}A\;sen\frac{1}{3}B\;sen\frac{1}{3}C.$$

Como esta expresión es simétrica respecto de los ángulos $A,B,C,$ se observa que se llegará al mismo resultado calculando los otros dos lados xy e yz; luego el triángulo xyz es equilátero.

DEMOSTRACIÓN TRIGONOMÉTRICA DE CONSTANTIN COCEA

Esta demostración aparece como la solución de un problema más, en un libro notable del matemático rumano Constantin Cocea titulado ‘200 de problema din geometría triunghiului echilateral” Ed. Gh. ASACHI Iasi 1992.

Los trisectores adyacentes al lado AB se cortan en P, los adyacentes al lado BC en M y los adyacentes al lado CA en N.



Aplicando el teorema de los senos al triángulo ABP se tiene $\dfrac{AP}{sen\dfrac{B}{3}} = \dfrac{AB}{sen\dfrac{A+B}{3}}$ y entonces

$AP = \dfrac{csen\dfrac{B}{3}}{sen\dfrac{\pi - C}{3}} = \dfrac{2R\, senC\, sen\dfrac{B}{3}}{sen\dfrac{\pi - C}{3}}$, siendo R el radio circunscrito del triángulo inicial ABC. Continuando el cálculo de AP, se tiene que:

$$AP = \frac{2R\, sen(\pi - C)\, sen\dfrac{B}{3}}{sen\dfrac{\pi - C}{3}} = \frac{2R\ sen\dfrac{B}{3}\, sen\dfrac{\pi - C}{3}\left[3 - 4sen^2\dfrac{\pi - C}{3}\right]}{sen\dfrac{\pi - C}{3}} =$$

$$2R\, sen\frac{B}{3}\left[3 - 2\left[1 - \cos\frac{2\pi - 2C}{3}\right]\right] = 2R\, sen\frac{B}{3}\left[1 + 2\cos\frac{2\pi - 2C}{3}\right] =$$

$$4R\, sen\frac{B}{3}\left[\frac{1}{2} + \cos\frac{2\pi - 2C}{3}\right] = 4R\, sen\frac{B}{3}\left[\cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{2\pi - 2C}{3}\right] =$$

$$8R\, sen\frac{B}{3}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{C}{3}\right) = 8R\, sen\frac{B}{3}\ \cos\frac{C}{3}\ \cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{C}{3}\right).$$

Así $AP = 8R\, sen\dfrac{B}{3}\ \cos\dfrac{C}{3}\ \cos\left(\dfrac{\pi}{6} - \dfrac{C}{3}\right)$ (1) y análogamente,

$AN = 8R\, sen\dfrac{B}{3}\ \cos\dfrac{C}{3}\ \cos\left(\dfrac{\pi}{6} - \dfrac{B}{3}\right)$ (2).

El lado PN puede calcularse aplicando el teorema del coseno al triángulo APN.

$$PN^2 = AP^2 + AN^2 - 2AP\cdot AN\cos\frac{A}{3} =$$

$$64R^2 sen^2\frac{B}{3}sen\frac{C}{3}\left[\cos^2\left(\frac{\pi}{6}-\frac{B}{3}\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{6}-\frac{C}{3}\right)-2\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{C}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{B}{3}\right)\cos\frac{A}{3}\right]=$$

$$64R^2 sen^2\frac{B}{3}sen^2\frac{C}{3}\left[\frac{1+\cos\left(\frac{2\pi}{6}-\frac{2C}{3}\right)}{2}\,\frac{1+\cos\left(\frac{2\pi}{6}-\frac{2B}{3}\right)}{2}-\cos\frac{A}{3}\left(\cos\frac{\pi-B-C}{3}+\cos\frac{B-C}{3}\right)\right]=$$

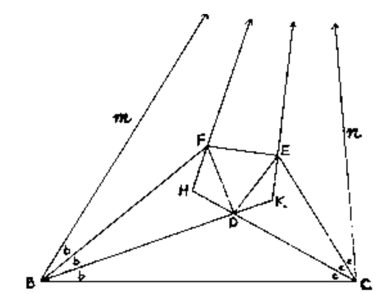
$$64R^2 sen^2\frac{B}{3}sen^2\frac{C}{3}\left[1+\cos\frac{A}{3}\cos\frac{B-C}{3}-\cos^2\frac{A}{3}-\cos\frac{A}{3}\cos\frac{B-C}{3}\right]=$$

$64R^2\, sen^2\frac{B}{3}sen^2\frac{C}{3}sen^2\frac{A}{3}$. De este modo $PN = 8R\,sen\frac{A}{3}sen\frac{B}{3}sen\frac{C}{3}$. Y por simetría en A, B, C $PN = NM = MP$ y el triángulo PNM es equilátero.

DEMOSTRACIÓN DE L. A. GRAHAM

Esta demostración aparece en "Ingenious Mathematical Problems and Methods", Dover Publications, Inc., New York, 1959, pp. 33, 184-185. de L.A. Graham.
Es una de las demostraciones más simples utilizando geometría convencional. Es muy cercana a la prueba de M.T.Naraniengar.

Inicialmente se omite el vértice A del triángulo dado ABC y se dibujan sólo los trisectores de los ángulos B y C. Se toman $B = 3b, C = 3c$ y $A = 3a$, pues cuando A se determine será el tercer vértice del triángulo dado. Entonces $a + b + c = 60º$. Sea el punto D intersección de los dos trisectores adyacentes al lado BC y los puntos E y F pertenecientes respectivamente a los otros primeros trisectores de los ángulos C y B. Se trazan a continuación DF y FH tales que el ángulo $\angle KDE$ sea igual al ángulo $\angle HDE = a + c$. Análogamente se trazan DE y EK tales que el ángulo $\angle KDE = \angle KED = a + b$.



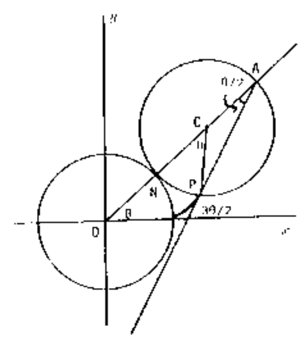
Por tanto el ángulo $\angle FDE = 360º - (a + 120º) - 2(b + c - (a + b) - (a + c) = 60º$ Por otro lado el ángulo $\angle BDF = 180º - b - (a + c) - (b + c) = a + 60º = 180º - c - (b + c) - (a + b) = \angle CED$.
D es el punto intersección de las bisectrices del triángulo uno de cuyos lados es BC y los otros dos están sobre las semirrectas BF y CE y por tanto equidista de BF y CE. Como DF y DE forman ángulos iguales respectivamente con BF y CE, entonces $DE = DF$ y el triángulo DEF es equilátero.
Resta probar que las semirrectas m y n, de vértices B y C respectivamente que forman con BC los ángulos $3b$ y $3c$ también respectivamente, junto con las rectas HF y KE, convergen a un punto donde forman tres ángulos iguales.

Debido a que los dos triángulos pequeños de base común DE son isósceles, KF es bisectriz del ángulo K, BF y KF son bisectrices interiores del triángulo de lados $m-BK-KE$ y F es el incentro de este triángulo. El ángulo
$\angle BFH = a+60º-(a+c) = a+b$ y $\angle m-KE = 180º-2b-(180º-2a-2b) = 2a$.
Entonces HF es la bisectriz de l ángulo $\angle m-KE$. Análogamente KE es l bisectriz del ángulo $\angle n-HF$.

CARTA ENVIADA POR EL PROFESOR FRANK MORLEY AL PROFESOR T. HAYASI *"SOBRE LA INTERSECCIÓN DE LOS TRISECTORES DE LOS ÁNGULOS DE UN TRIÁNGULO"*

Querido Profesor Hayashi:
No he publicado el teorema que afirma que las tres intersecciones de los trisectores de los ángulos de un triángulo forman un triángulo equilátero. Este resultado surgió de consideraciones sobre cardioides. Hice observar en *"Transactions of the American Mathematical Society"*, vol. p.115, que ciertas cadenas de teoremas eran ciertas para cualquier número de rectas del plano, cuando se reemplaza cada intersección de las rectas tomadas de dos en dos (1) por el centro de la circunferencia que es tangente a tres de las rectas dadas (2) y por el centro de una cardiode que es tangente a cuatro de las rectas dadas, y así sucesivamente.

Esto me llevó a considerar las cardioides que son tangentes a tres rectas.
La cardioide viene definida en la circunferencia unidad por la ecuación $x = 2t - t^2$, donde x es un número complejo y t es un número complejo tal que $|t| = 1$. La tangente en t es $x - 3t + 3t^2 - \overline{x}\,t^3 = 0$, siendo $\overline{x}$ el conjugado de x. Las tres tangentes desde un punto x, son entonces tales que $t_1 t_2 t_3 = \frac{x}{\overline{x}}$. Si θ_i son los ángulos que forman esas tangentes con cualquier recta fija y ϕ es el ángulo que forma x con tal recta fija, entonces $3\phi = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$ (1).



La imagen y de cualquier punto x de la tangente es dada por $y - 3t + 3t^2 - \overline{x}\,t^3 = 0$. Así la imagen del centro $x = 0$ es $y = 3(t - t^2)$. Por tanto, si $y = 2pe^{i\omega}$ e $\overline{y} = 2pe^{-i\omega}$ se tiene $4p^2 = 9(1-t)\left(1-\frac{1}{t}\right), e^{2i\omega} = -t^3, t + \frac{1}{t} = -2\cos\frac{2\omega}{3}$ y $p = 3sen\frac{\omega}{3}$ (2), que es la ecuación de la cardioide.

Si p_1, p_2 y p_3 son las rectas perpendiculares trazadas desde el centro de la cardioide a las tres rectas tangentes a la misma y ω_1, ω_2 y ω_3 son los ángulos de esas perpendiculares, ya que $\sum_3 sen\frac{\omega_1}{3} sen\frac{\omega_2 - \omega_3}{3} = 0.$

Entonces tenemos que $\sum_3 p_1\, sen\frac{\omega_2-\omega_3}{3}=0$ (3)

Reemplazando $\omega_2-\omega_3$ por el ángulo A_1 del triángulo de las tangentes y teniendo en cuenta que en (3) los ángulos deben tener una suma congruente a $0,$ obtenemos para el lugar geométrico de los centros, nueve rectas tales que:

$$p_1 sen\frac{\pi-A_1}{3}+p_2 sen\frac{\pi-A_2}{3}+p_3 sen\frac{-\pi-A_3}{3}=0,$$

$$p_1 sen\frac{2\pi-A_1}{3}+p_2 sen\frac{\pi-A_2}{3}+p_3 sen\frac{-2\pi-A_3}{3}=0.$$

Pero de (1) considerando aquellas cardioides cuyos centros están a una distancia "enorme" (tal que el triángulo se comporte como un punto), vemos que las nueve rectas sólo tienen tres direcciones dadas por $3\phi=\theta_1+\theta_2+\theta_3.$

Hay de este modo tres conjuntos de tres rectas paralelas formando triángulos equiláteros. El lugar geométrico de los centros cambia de un conjunto de rectas a otro cuando una de las rectas es una tangente doble.

Consideremos en particular las cardioides que están dentro del triángulo. Sea O_1 el centro de una cardioide con tangente doble $A_2A_3.$ De (1) tenemos que:

$\angle A_3A_2O_1=\frac{A_2}{3}$ y $\angle O_1A_3A_2=\frac{A_3}{3},$ y hemos visto que las tres rectas O_1O_2, O_2O_3 y O_3O_1 forman un triángulo equilátero.

Este ha sido el argumento. La verificación es naturalmente una labor mucho más simple. Si piensa que merece la pena publicarlo estaré muy complacido de que aparezca en una revista japonesa.

Si este resultado llega a ser de su interés estaré contento de enviarle una copia, con correcciones por el uso de "direcciones de rectas" que no lo expreso de forma clara.

Con mi más alta consideración,

Sinceramente,

(Firmado)

Profesor Frank Morley

OBSERVACIONES A LA DEMOSTRACIÓN DE MORLEY DE SU TEOREMA.

Por Dan Pedoe, Universidad de Minnesota.

Frank Morley fue un matemático notable, pero no es fácil encontrar mucha gente que pueda seguir sus razonamientos. Su obra, *Inversive Geometry*, (Frank Morley y P. V. Morley, 1954) contiene ideas profundas, pero yo, en algún momento la he encontrado casi incomprensible. Las observaciones siguientes a la demostración de su célebre teorema son tentativas iniciales para dilucidar su trabajo.

En su artículo, escrito para una revista japonesa dedicada a la educación secundaria, Morley cambia de notación un número significativo de veces. Usa primero θ para el ángulo que forma la tangente a la cardioide con el eje $x,$ luego lo cambia por $\omega,$ y después vuelve a utilizar de nuevo ω para el ángulo que forma la perpendicular a la

tangente desde el centro de la cardioide con el eje x Por mi parte usaré la notación a la que estoy habituado y posteriormente identificaré mis resultados con los de Morley.
Consideraremos el primer enunciado:

"La cardioide se transforma en la circunferencia unidad por la ecuación $x = 2t - t^2$, donde x es un número complejo y t es un número complejo tal que $|t| = 1$".

Suponemos que la curva cardioide se traza por un punto P fijo de una circunferencia de radio unidad que rueda sin resbalar sobre otra circunferencia unidad fija. Se toma el centro O de la circunferencia fija como el origen de coordenadas y es llamado el centro de la cardioide. Si N es el punto de tangencia de las dos circunferencias y ON corta de nuevo a la circunferencia que rueda en A, entonces la tangente en el punto P a la cardioide es perpendicular a NP y es por tanto PA. Si θ es el ángulo NOX (siendo OX el eje de abscisas), las coordenadas del punto P; (x_p, y_p) son $\begin{cases} x_p = 2\cos\theta - \cos 2\theta \\ y_p = 2sen\theta - sen2\theta \end{cases}$, de tal forma que:

$x = x_p + iy_p = 2(\cos\theta + isen\theta) - (\cos\theta + isen\theta)^2 = 2t - t^2$, con $t = \cos\theta + isen\theta$ y por tanto $|t| = 1$.

La tangente en P a la cardioide es la recta PA y el afijo de A es $3t$. por tanto la ecuación de la tangente es: $\begin{vmatrix} X & \overline{X} & 1 \\ 3t & 3\overline{t} & 1 \\ 2t - t^2 & 2\overline{t} - 3\overline{t}^2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$ X es cualquier punto de la recta tangente a $x = 2t - t^2$. (Morley utiliza el mismo x para ambos puntos)

Después de desarrollar el determinante y usar la ecuación $t\overline{t} = 1$, que conduce a $t(\overline{t} + 1) = 1 + t$ y a $\overline{t}(t + 1) = 1 + \overline{t}$, se obtiene la ecuación $X - 3t + 3t^2 - \overline{X}t^3 = 0$.

Las tres tangentes a la cardioide desde un punto X corresponden a los puntos t_1, t_2, t_3 que están en la circunferencia unidad y cumplen que $t_1 t_2 t_3 = \dfrac{X}{\overline{X}}$. Por tanto si $X = r(\cos 2\phi + isen2\phi)$, entonces $t_1 t_2 t_3 = \cos 2\phi + isen2\phi$, y por tanto $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 2\phi$.

Si ψ es el ángulo formado por la recta tangente en P, PA, con el eje de abscisas, como $\angle OCP = \theta$ y por tanto $\angle OAP = \dfrac{\theta}{2}$, entonces $\psi = \dfrac{3\theta}{2}$. Y los ángulos ψ_i formados por las tangentes a la cardioide que pasan por el punto, con el eje de abscisas cumplen que $\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 = \dfrac{3}{2}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) = 3\phi$. Esta es la ecuación fundamental de Morley (1).

Si ahora volvemos a la carta de Morley y consideramos el lugar geométrico de los centros de las cardioides que son tangentes a los lados de un triángulo ABC dado, entonces probaremos que *los puntos en el infinito de este lugar geométrico coinciden con los puntos el infinito de los lados de un determinado triángulo equilátero.*

Sea O el centro de una cardioide tangente a los lados de un triángulo ABC que está a una "gran distancia" del triángulo y sea X un punto "cercano" al triángulo. L as tangentes desde X a esta "enorme" cardioide deben ser casi paralelas a los lados del triángulo ABC ("tal que el triángulo se comporte como un punto"). Por tanto en la ecuación (1), el ángulo ϕ que determina la dirección de OX es una tercera parte de la suma de las ψ_i, *donde las* ψ_i *corresponden a los lados del triángulo* ABC.

Como cada ψ_i se toma módulo 2π, y se dividen por 3, se obtienen tres direcciones para ϕ que difieren en $\frac{2\pi}{3}$.

Si el lugar geométrico de los centros de las cardioides está constituido por rectas, estas deben formar conjuntos que son paralelos a los lados de un determinado triángulo equilátero.

Para demostrar que este lugar geométrico está constituido por rectas Morley obtiene la ecuación (p,ψ) de una cardioide. Si OQ es la perpendicular de O a la recta AP, entonces $p = OQ = OA sen\frac{\theta}{2} = 3sen\frac{\psi}{3}$. (2)

Morley hace notar que esta ecuación puede ser hallada directamente.¡A continuación Morley realiza una manipulación muy inteligente! Desea pasar de la ecuación (2) a la ecuación trilineal del lugar geométrico de los centros.

Fácilmente se verifica que para P,Q,R cualesquiera

$$senP\, sen(Q-R) + senQ\, sen(R-P) + senR\, sen(P-Q) = 0.$$

Y así $sen\frac{\psi_1}{3} sen\frac{\psi_2-\psi_3}{3} + ... + ... = 0.$ Usando (2), lo anterior se puede escribir del modo siguiente $p_1\, sen\frac{\psi_2-\psi_3}{3} + p_2\, sen\frac{\psi_3-\psi_1}{3} + p_3\, sen\frac{\psi_1-\psi_2}{3} = 0$ (3), donde p_1, p_2, p_3 son las perpendiculares del centro de la cardioide a las tres tangentes que forman ángulos ψ_1, ψ_2, ψ_3 con el eje de abscisas.

Esas perpendiculares p_i se denominan *coordenadas trilineales* (véase nota al final) de O respecto al triángulo ABC y los valores $\frac{\psi_i - \psi_j}{3}$ están relacionados con los ángulos del triángulo.

La ecuación fundamental que conecta las coordenadas trilineales es $ap_1 + bp_2 + cp_3 = 2\Delta$, donde a,b,c son los lados del triángulo y Δ es su área.

La ecuación (3), en coordenadas trilineales, es la de una recta. Por tanto Morley ha probado que el lugar geométrico de los centros de las cardioides que son tangentes a los lados de un triángulo dado es un conjunto de rectas.

Morley, después de establecer la ecuación (3) intercambia el ángulo que forman las tangentes con el eje de abscisas con los ángulos formados por las respectiva perpendiculares con el eje de abcisas *"...y teniendo en cuenta que en (3) los ángulos deben tener una suma congruente a* $0,...$*"* (que no es demasiado claro), Morley obtiene nueve rectas para el lugar geométrico de los centros de las cardioides.

Verificar, en coordenadas trilineales, que esas nueve rectas son paralelas en conjuntos de tres sería una tarea formidable y ardua, pues las rectas son paralelas en estas coordenadas trilineales si intersectan a la recta del infinito $ap_1 + bp_2 + cp_3 = 0$. Morley supera esta dificultad utilizando la ecuación (1) de una forma notable.

Por último ¿Cómo se encaja todo esto con los trisectores de los ángulos de un triángulo? Una vez más Morley establece una afirmación geométrica brillante: *"El lugar geométrico de los centros cambia de un conjunto de rectas a otro cuando una de las rectas es una tangente doble."*

Utilizando la ecuación (1) de nuevo Morley demuestra que los vértices de su triángulo equilátero son las intersecciones de los trisectores de los ángulos del triángulo ABC.

Al final añade: *'La verificación es naturalmente una labor mucho más simple".*

NOTA: Todo lo que se requiere decir sobre la coordenadas trilineales es que no es difícil probar que una ecuación lineal en (p_1, p_2, p_3) representa una recta. En efecto, si las ecuaciones de los lados de un triángulo vienen dadas en su forma normal $x\cos\alpha_i + y\,sen\alpha_i - q_i = 0 \quad (i = 1,2,3)$, se puede tomar $p_i = x_p \cos\alpha_i + y_p\, sen\alpha_i - q_i$ para las coordenadas trilineales (p_1, p_2, p_3) de $P = (x_p, y_p)$, y por tanto una ecuación lineal homogénea en las coordenadas trilineales (p_1, p_2, p_3) da lugar a una ecuación lineal en las coordenadas (x_p, y_p).

COMENTARIOS SOBRE LAS DIVERSAS DEMOSTRACIONES DEL TEOREMA DE MORLEY DE LEON BANKOFF

Una clasificación preliminar de las demostraciones a este teorema establece dos categorías, directa e indirecta. Aquí se usa el término indirecto no en el sentido de reducción al absurdo sino en el sentido de invertir la sucesión de pasos desde la hipótesis a la conclusión. Ejemplos de pruebas indirectas son las de Naraniengar, Dobbs y Child, por citar unas pocas. Estas pruebas empiezan con el conocimiento sobreañadido de que el triángulo interno que se forma es equilátero, y con las construcciones geométricas basadas también en saber el valor de los ángulos relacionados con el triángulo interior. Dirigen la demostración a que ciertas semirrectas convergan para formar el triángulo exterior. Este procedimiento no es esencialmente una demostración del teorema de Morley, sino de su recíproco. El establecer fácilmente el recíproco no proporciona una prueba legítima del teorema principal.
Entre las pruebas directas, la preponderancia de las publicadas son trigonométricas. La trigonometría es la herramienta ideal para manejar submúltiplos de ángulos. Teóricamente se debería ser capaz de convertir cualquier argumento trigonométrico en uno que sea de geometría sintética, pero en la práctica esto seguramente daría lugar a una demostración tediosa. Hay suficientes variaciones en las pruebas trigonométricas. Algunas directamente calculan las longitudes de los lados del triángulo interior (Loria, Cocea,...), mientras otras van al cálculo de los ángulos que están en las tres intersecciones pertinentes, que determinan el triángulo de Morley obteniendo 60º para cada uno de sus ángulos interiores (Satyanarayana, ...).
Se han construido demostraciones geométricas directas y excelentes usando la razón doble, los conjugados isogonales , el teorema de Desargues, el teorema de Menéalo y números complejos (Robson, Thébault,...). Muchos matemáticos encuentran estas pruebas particularmente atractivas porque combinan concisión y precisión.

La demostración ideal, todavía por descubrir, debería ser la que utilice la geometría sintética, la que siga un camino directo de la hipótesis a la conclusión, la que sea sencilla de entender y no sea demasiado larga.

COMPETICIÓN MATEMÁTICA MEDITERRÁNEA 2004
MEMORIAL PETER O'HALLORAN
Requena (Valencia), 1 de mayo de 2004

1. Hallar todos los números naturales m tales que

$$1! \cdot 3! \cdot 5! \cdot \cdots \cdot (2m-1)! = \left(\frac{m(m+1)}{2}\right)!$$

2. En el triángulo ABC, la altura desde A corta a la circunferencia circunscrita en T. El diámetro de la circunferencia circunscrita que pasa por A y la recta OT (O, circuncentro) cortan al lado BC en Q y M, respectivamente.

Demostrar que

$$\frac{[AQC]}{[MTC]} = \left(\frac{\sin B}{\cos C}\right)^2,$$

donde [ ] representa el área.

3.Si a, b, c son números positivos tales que

$$1 = ab + bc + ca + 2abc,$$

demostrar que

$$2(a+b+c) + 1 \geq 32abc.$$

¿Cuándo se verifica la igualdad?

4.Sean z_1, z_2, z_3 números complejos mutuamente distintos, tales que

$$|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1,$$

y supongamos que el triángulo cuyos vértices son los puntos cuyos afijos son z_1, z_2, z_3, es acutángulo.

Demostrar que si se verifica la igualdad

$$\frac{1}{2+|z_1+z_2|} + \frac{1}{2+|z_2+z_3|} + \frac{1}{2+|z_3+z_1|} = 1$$

entonces dicho triángulo es equilátero.

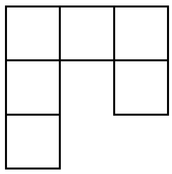
Problemas propuestos en la IMO 2004 (Atenas, Grecia)

Primera sesión:

Problema 1:
Sea ABC un triángulo acutángulo con AB distinto de AC. El círculo con diámetro BC corta a los lados AB y AC en M y N, respectivamente. Sea O el punto medio del lado BC. Las bisectrices de los ángulos BAC y MON se cortan en R. Prueba que las circunferencias circunscritas de los triángulos BMR y CNR tienen un punto común sobre el lado BC.

Problema 2:
Encuentra todos los polinomios P(x) con coeficientes reales que satisfacen la igualdad:
P(a-b)+P(b-c)+P(c-a)=2P(a+b+c),
Para cualesquiera números reales a, b, c tales que ab+bc+ca=0.

Problema 3:
Se define un *gancho* como una figura con seis cuadrados unidad como muestra el diagrama



o cualquiera de las figuras obtenidas aplicando rotaciones y reflejando la figura.
Determina todos los rectángulos mxn que pueden ser cubiertos con ganchos de manera que
El rectángulo esté cubierto sin agujeros ni superposiciones.
Ninguna parte de un gancho se queda fuera del rectángulo.

Segunda sesión:

Problema 4:
Sea n mayor o igual que 3 un entero. Sean t_1, t_2,..., t_n números reales positivos tales que
$n^2 +1>(t_1+ t_2+...+t_n)(1/t_1+...+1/t_n)$
Demostrar que t_i, t_j, t_k son las medidas de los lados de un triángulo para todos los i, j, k con 1 menor o igual que i<j<k menor o igual que n

Problema 5:
En un cuadrilátero convexo ABCD la diagonal BD no es la bisectriz ni del ángulo ABC ni del CDA. Un punto P en el interior de ABCD verifica ´
<PBC= <DBA y <PDC = <BDA.
Demostrar que los vértices del cuadrilátero ABCD pertenecen a una circunferencia si y solo si AP=CP

Problema 6:
Un entero positivo es *alternante* si, en su representación decimal, en toda pareja de dígitos consecutivos uno es par y el otro impar.
Encontrar todos los enteros positivos n tales que n tiene un múltiplo que es alternante.

VI Olimpiada Balcánica Junior (2002)

Problema 1. Sea ABC un triángulo isósceles, con $AC = BC$, y sea P un punto de su circunferencia circunscrita, situado en el arco AB que no contiene a C. Sea D el pie de la perpendicular trazada desde C a la recta PB.

Demostrar que $PA + PB = 2 \cdot PD$.

Miguel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca, España.

Solución 1

Consideremos sobre la prolongación de PB el punto E tal que $BE = PA$.

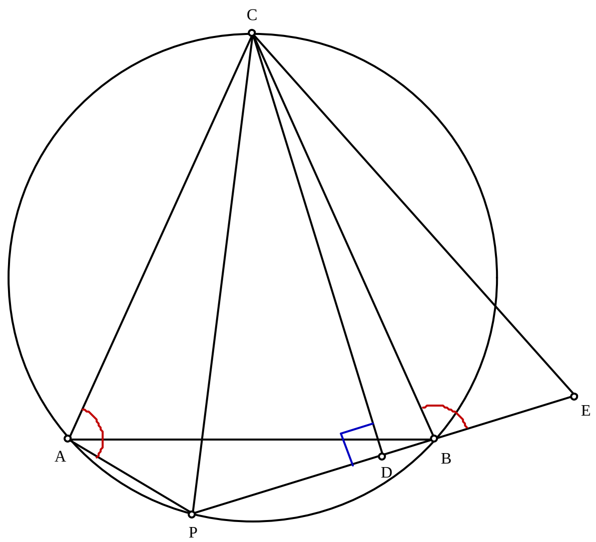
Los triángulos CAP y CBE son iguales porque $BE = PA$ (por construcción), $CA = CB$ (por hipótesis) y $\angle CAP = \angle CBE$ (pues ambos son suplementarios del $\angle PBC$).

Por tanto, $CP = CE$.

Así, pues, ΔCPE es isósceles y, en este triángulo, el punto D, como pie de la altura correspondiente al vértice C, es el punto medio de su base PE.

Por consiguiente,

$$2 \cdot PD = PE = PB + BE = PB + PA \ .$$



Solución 2

Sea M el punto medio de AB y Q el punto de intersección de CP y AB.

Pues

$$\angle APC \underset{\substack{\uparrow \\ \text{por inscritos} \\ \text{en el mismo} \\ \text{arco}}}{=} \angle ABC \underset{\substack{\uparrow \\ \Delta ABC \\ \text{isósceles}}}{=} \angle CAB \underset{\substack{\uparrow \\ \text{por inscritos} \\ \text{en el mismo} \\ \text{arco}}}{=} \angle CPQ \ ,$$

los triángulos AQC y PAC, así como los BCQ y PCB, son semejantes. Por tanto,

$$\frac{PA}{AQ}=\frac{PC}{AC} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{por} \\ \text{hipótesis}}}{=} \frac{PC}{BC}=\frac{PB}{QB} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{propiedad} \\ \text{de las} \\ \text{proporciones}}}{=} \frac{PA+PB}{AQ+QB}=\frac{PA+PB}{AB} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{definición} \\ \text{del punto} M}}{=} \frac{PA+PB}{2\cdot AM}$$

de donde

$$PA+PB=2\cdot\frac{AM\cdot PC}{AC} \qquad (1)$$

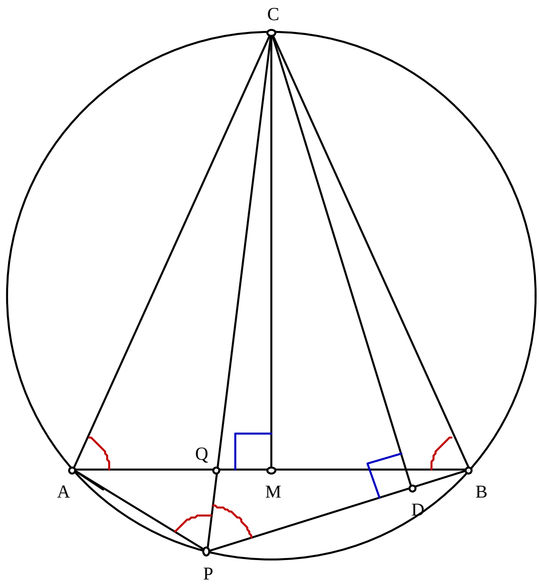
También son semejantes los triángulos rectángulos AMC y PDC; por tanto,

$$\frac{PD}{PC}=\frac{AM}{AC}$$

y

$$PD=\frac{AM\cdot PC}{AC} \ .$$

Sustituímos este último resultado en (1) y se obtiene la relación pedida.



XII Olimpiada Regional de Castilla y León 2004.

Primer ciclo de E.S.O. (13-14 años)

Problema 1
Un nadador se encuentra en la pared oeste de una piscina circular, en un punto A. Nada en línea recta 12 metros, y toca con la mano en un punto B de la pared de la piscina. Allí cambia de dirección, nada en línea recta otros 5 metros y se encuentra en el punto C, situado en la pared de la piscina y diametralmente opuesto al punto A. ¿Cuántos metros hubiera nadado si se hubiera dirigido directamente desde A hasta C?

Problema 2
En una caja hay mezclados 5 pares de calcetines blancos y 5 pares negros. En otra caja hay también 5 pares de guantes blancos y 5 pares negros. Queremos extraer un par de calcetines y un par de guantes del mismo color. ¿Cuál es el mínimo número de elementos a extraer de cada caja?

Problema 3
Cada una de las piedras de un montón piramidal reposa sobre dos de la fila inferior. La fila de la base tiene 5 piedras, la que está sobre ella 4, la que está sobre ella 3; la que está sobre ella dos y finalmente sobre ella está 1 única piedra. El número que hay escrito sobre cada piedra representa la diferencia entre los números de las piedras sobre las que se sustenta. Sólo se conocen los números de algunas de las piedras :

20
2 x
4 y 24
z t u v
w a 23 58 b

Completar los números que faltan, sabiendo que en la fila inferior los dígitos del 0 al 9 sólo aparecen una vez en el conjunto de todos los números.

Problema 4
Marta piensa en la tienda :

- Si me compro la camiseta y el chaleco, me gasto 53.75 €
- La camiseta y el pañuelo me cuestan 51.25 €
- El chaleco y el pañuelo me salen por 60 € justos.

¿Cuál es el precio de cada uno de estos tres artículos?

Segundo Ciclo de la E.S.O. (15-16 años)

Problema 1

En un triángulo equilátero de lado unidad, se divide cada lado en tres partes iguales, y sobre la parte central se construye hacia el exterior un triángulo equilátero (el segmento central se suprime). Se repite el proceso sobre cada uno de los lados del polígono resultante. Si se sigue indefinidamente este proceso se obtiene una figura "copo de nieve".

Halla el perímetro del polígono obtenido en cada paso de la construcción del "copo de nieve". ¿Qué perímetro tendrá la figura obtenida al final del proceso? ¿Crees que el área encerrada en la figura se comportará de forma semejante?

Problema 2

En una reunión de amigos, José le propuso a Enrique que escribiese en un papel un número de tres cifras.

- "Añádele ahora esas tres cifras a la derecha y conviértelo en un número de 6 cifras. Entrégale la hoja a Felipe"

Felipe cogió la hoja y, siguiendo las órdenes de José, dividió el número por 7, comprobando que la división era exacta; dividió el resultado por 11, dando también cociente exacto; y el nuevo resultado entre 13, dando igualmente cociente exacto.

- Felipe, dile a Enrique cuál es el resultado de la última división

Sorprendido, Enrique comprobó que el número obtenido era el que había escrito al principio. ¿Cómo es esto posible? ¿Fue una casualidad?

Problema 3

La sociedad *Imprescindibles, S.A.* recibe el encargo de enmoquetar de pared a pared un corredor en forma de anillo en la nueva terminal del aeropuerto. El único dato que les dan es la longitud, 100 m, de una cuerda tangente a la pared interior.

¿Cuántos metros cuadrados de moqueta necesitan?

Problema 4

En la elaboración de jabón se producen restos de material al formarse las pastillas por compresión. Con los restos de 11 pastillas puede fabricarse una nueva pastilla. ¿Cuántas pastillas de jabón se podrán fabricar si tenemos los restos de 251 pastillas?

Problemas de la Fase nacional, Olimpiada 2º ESO
Melilla 2004

Problema 1

Pau Gasol está triunfando en la NBA. En un entrenamiento su porcentaje de tiros libres acertados ha sido del 83,33333... por ciento.

a) **¿Cuántos tiros encestó de 60 lanzamientos?**
b) **¿Cuál debe ser el mínimo número de lanzamientos para poder conseguir ese porcentaje?**
c) **Para finalizar el entrenamiento, Gasol prueba 10 tiros más y encesta 6. Calcula el porcentaje de canastas de los 70 tiros que ha lanzado.**

Problema 2

Llamaremos números *"dabuten"* a aquellos enteros positivos tales que la suma de sus cifras coincida con nuestra edad. Por ejemplo, si una persona tiene 14 años, los números 167, 1094 y 12341111 son de esa clase.

a) **¿Cuántos números *dabuten* de dos cifras tendrá Alejandro, que acaba de cumplir 14 años?**
b) **Si elijo un número al azar de 2 cifras (entre 10 y 99), ¿qué edad tiene más posibilidades de que ése sea uno de sus números *dabuten*?**

Problema 3

Un terreno que tiene forma de triángulo equilátero de lado 1 está sembrado de alfalfa. En cada vértice del mismo se colocan, para que pasten, tres ovejas, amarradas de tal forma que llegan sólo a la mitad del lado del triángulo. Calcular la superficie y el perímetro de la parte que queda con hierba.

Problema 4

En el barco que hace el viaje Málaga – Melilla, el capitán, el contramaestre y el maquinista se llaman LÓPEZ, GARCÍA y CASTILLO, pero no respectivamente. También viajan en el barco tres hombres de negocios que se llaman de la misma manera, LÓPEZ, GARCÍA y CASTILLO.

a) **El señor García vive en Almería.**
b) **El contramaestre vive a mitad de camino entre Málaga y Almería.**
c) **El señor Castillo gana 20000 € al año**

d) **El vecino más próximo al contramaestre, que es uno de los tres pasajeros, gana exactamente tres veces más que él.**
e) **López le gana al capitán cuando juegan al billar.**
f) **El pasajero cuyo nombre es igual al del contramaestre vive en Málaga.**

¿Cómo se llama el maquinista?

Problema 5
Un hámster, para llegar a sus alimentos preferidos, ha de elegir entre los caminos que conducen a las cuatro salidas : A, donde están los cacahuetes; B, los pistachos; C, las semillas de girasol; y D, las semillas de maíz.
Pero antes ha de pasar por uno de los puntos X e Y, de manera que desde donde esta el hamster, un camino condice a X y otro a Y; desde X, un camino conduce a A, otro a B y otro a C; y desde Y, un camino conduce a C y otro a D. No puede cambiar de camino, una vez elegido.
Calcular las probabilidades que tiene de llegar a cada una de las cuatro salidas A,B,C y D, y a cuál llegará con más probabilidad.

Problema 6
Cien personas participan en un baile. Durante la velada una dama bailó con 7 caballeros; una segunda dama bailó con 8 caballeros; la tercera con 9 y así sucesivamente hasta la última que bailó con todos .
¿Cuántas damas había en el baile?

Problemas de la Fase nacional, Olimpiada 2º ESO
Melilla 2004

Problema 1

Pau Gasol está triunfando en la NBA. En un entrenamiento su porcentaje de tiros libres acertados ha sido del 83,33333... por ciento.

a) **¿Cuántos tiros encestó de 60 lanzamientos?**
b) **¿Cuál debe ser el mínimo número de lanzamientos para poder conseguir ese porcentaje?**
c) **Para finalizar el entrenamiento, Gasol prueba 10 tiros más y encesta 6. Calcula el porcentaje de canastas de los 70 tiros que ha lanzado.**

Problema 2

Llamaremos números *"dabuten"* a aquellos enteros positivos tales que la suma de sus cifras coincida con nuestra edad. Por ejemplo, si una persona tiene 14 años, los números 167, 1094 y 12341111 son de esa clase.

a) **¿Cuántos números *dabuten* de dos cifras tendrá Alejandro, que acaba de cumplir 14 años?**
b) **Si elijo un número al azar de 2 cifras (entre 10 y 99), ¿qué edad tiene más posibilidades de que ése sea uno de sus números *dabuten*?**

Problema 3

Un terreno que tiene forma de triángulo equilátero de lado 1 está sembrado de alfalfa. En cada vértice del mismo se colocan, para que pasten, tres ovejas, amarradas de tal forma que llegan sólo a la mitad del lado del triángulo. Calcular la superficie y el perímetro de la parte que queda con hierba.

Problema 4

En el barco que hace el viaje Málaga – Melilla, el capitán, el contramaestre y el maquinista se llaman LÓPEZ, GARCÍA y CASTILLO, pero no respectivamente. También viajan en el barco tres hombres de negocios que se llaman de la misma manera, LÓPEZ, GARCÍA y CASTILLO.

a) **El señor García vive en Almería.**
b) **El contramaestre vive a mitad de camino entre Málaga y Almería.**
c) **El señor Castillo gana 20000 € al año**

d) **El vecino más próximo al contramaestre, que es uno de los tres pasajeros, gana exactamente tres veces más que él.**
e) **López le gana al capitán cuando juegan al billar.**
f) **El pasajero cuyo nombre es igual al del contramaestre vive en Málaga.**

¿Cómo se llama el maquinista?

Problema 5
Un hámster, para llegar a sus alimentos preferidos, ha de elegir entre los caminos que conducen a las cuatro salidas : A, donde están los cacahuetes; B, los pistachos; C, las semillas de girasol; y D, las semillas de maíz.
Pero antes ha de pasar por uno de los puntos X e Y, de manera que desde donde esta el hamster, un camino condice a X y otro a Y; desde X, un camino conduce a A, otro a B y otro a C; y desde Y, un camino conduce a C y otro a D. No puede cambiar de camino, una vez elegido.
Calcular las probabilidades que tiene de llegar a cada una de las cuatro salidas A,B,C y D, y a cuál llegará con más probabilidad.

Problema 6
Cien personas participan en un baile. Durante la velada una dama bailó con 7 caballeros; una segunda dama bailó con 8 caballeros; la tercera con 9 y así sucesivamente hasta la última que bailó con todos .
¿Cuántas damas había en el baile?

Problemas de la Fase nacional, Olimpiada 2º ESO
Melilla 2004

Problema 1
Pau Gasol está triunfando en la NBA. En un entrenamiento su porcentaje de tiros libres acertados ha sido del 83,33333... por ciento.

a) **¿Cuántos tiros encestó de 60 lanzamientos?**
b) **¿Cuál debe ser el mínimo número de lanzamientos para poder conseguir ese porcentaje?**
c) **Para finalizar el entrenamiento, Gasol prueba 10 tiros más y encesta 6. Calcula el porcentaje de canastas de los 70 tiros que ha lanzado.**

Problema 2
Llamaremos números *"dabuten"* a aquellos enteros positivos tales que la suma de sus cifras coincida con nuestra edad. Por ejemplo, si una persona tiene 14 años, los números 167, 1094 y 12341111 son de esa clase.

a) **¿Cuántos números *dabuten* de dos cifras tendrá Alejandro, que acaba de cumplir 14 años?**
b) **Si elijo un número al azar de 2 cifras (entre 10 y 99), ¿qué edad tiene más posibilidades de que ése sea uno de sus números *dabuten*?**

Problema 3
Un terreno que tiene forma de triángulo equilátero de lado 1 está sembrado de alfalfa. En cada vértice del mismo se colocan, para que pasten, tres ovejas, amarradas de tal forma que llegan sólo a la mitad del lado del triángulo. Calcular la superficie y el perímetro de la parte que queda con hierba.

Problema 4
En el barco que hace el viaje Málaga – Melilla, el capitán, el contramaestre y el maquinista se llaman LÓPEZ, GARCÍA y CASTILLO, pero no respectivamente. También viajan en el barco tres hombres de negocios que se llaman de la misma manera, LÓPEZ, GARCÍA y CASTILLO.

a) **El señor García vive en Almería.**
b) **El contramaestre vive a mitad de camino entre Málaga y Almería.**
c) **El señor Castillo gana 20000 € al año**

d) **El vecino más próximo al contramaestre, que es uno de los tres pasajeros, gana exactamente tres veces más que él.**
e) **López le gana al capitán cuando juegan al billar.**
f) **El pasajero cuyo nombre es igual al del contramaestre vive en Málaga.**

¿Cómo se llama el maquinista?

Problema 5
Un hámster, para llegar a sus alimentos preferidos, ha de elegir entre los caminos que conducen a las cuatro salidas : A, donde están los cacahuetes; B, los pistachos; C, las semillas de girasol; y D, las semillas de maíz.
Pero antes ha de pasar por uno de los puntos X e Y, de manera que desde donde esta el hamster, un camino condice a X y otro a Y; desde X, un camino conduce a A, otro a B y otro a C; y desde Y, un camino conduce a C y otro a D. No puede cambiar de camino, una vez elegido.
Calcular las probabilidades que tiene de llegar a cada una de las cuatro salidas A,B,C y D, y a cuál llegará con más probabilidad.

Problema 6
Cien personas participan en un baile. Durante la velada una dama bailó con 7 caballeros; una segunda dama bailó con 8 caballeros; la tercera con 9 y así sucesivamente hasta la última que bailó con todos .
¿Cuántas damas había en el baile?

Nota del editor sobre el problema 20

Del problema 20 (los magos en el autobús, de John Conway), publicado en nuestro número 4, no se ha recibido hasta la fecha ninguna solución completa. Durante la fase nacional de la XL Olimpiada matemática Española, celebrada en Ciudad Real en marzo de 2004, el delegado del País Vasco, eminente mago él mismo (Prof. Pedro Alegría), me indicó que en Internet había, al menos, dos soluciones publicadas de este problema. Puede ser éste el motivo de la falta de soluciones recibidas, pero en todo caso señalo las direcciones web donde se puede encontrar la solución con interesantes comentarios sobre este tipo de puzzles :

http://www.mscs.mu.edu/~paulb/Puzzle/buspuzzlesolution.html

Una solución menos sofisticada se puede encontrar en la página de Harold B. Reiter, University of North Caroline Charlotte, My favorite problems, 3, que el autor solicita de los lectores de la excelente revista *Mathematics and Informatics Quarterly.* Mediante el buscador Google no habrá dificultades para encontrarlo. La dirección de correo electrónico del Prof. Reiter, incluida en dicha página, es hbreiter@mail.uncc.edu

F. Bellot

Problema 61

Propuesto por el Prof. Laurentiu Modan, Univ. De Bucarest.

Sea

$$S_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k^2}.$$

i) Demostrar que:

$$\frac{4007}{2004} \leq S_{2004} \leq \frac{8015}{4008}.$$

ii) $\lim_{n\to\infty} S_n \in [2,4]$.

Este enunciado tal y como se muestra aquí debe ser incorrecto, por la razón de que, para todo entero positivo n,

$$S_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k^2} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{p^2}{6} < \frac{4007}{2004} < 2.$$

Para calcular el límite de la suma basta con considerar la expansión de sin(x):

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots = x\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{(x^2)^2}{5!} - \frac{(x^2)^3}{7!} + \ldots\right).$$

Como sin(x)=0 si y sólo si $x=np$, para cualquier entero n, se tiene entonces que $p^2,(2p)^2,(3p)^2,\ldots$ son las raíces de

$$1 - \frac{y}{3!} + \frac{y^2}{5!} - \frac{y^3}{7!} + \ldots = 0.$$

Por Vieta-Cardano, la suma de las inversas de las raíces es igual al opuesto del cociente entre el coeficiente lineal y el término independiente, es decir:

$$\frac{1}{p^2} + \frac{1}{(2p)^2} + \frac{1}{(3p)^2} + \ldots = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}.$$

Multiplicando ambos lados de la igualdad por p^2 se obtiene el resultado anteriormente empleado para deducir que el enunciado tal y como aparece aquí debe ser incorrecto.

Problema 62

Propuesto por el Prof. José Luis Díaz Barrero, Univ. Politécnica de Cataluña, Barcelona, España.

Calcular la integral

$$\int_{2003}^{2004} \frac{\sqrt[3]{2004-x}}{\sqrt[3]{2004-x}+\sqrt[3]{x-2003}}\,dx .$$

Definiremos $I(a,b)$ como sigue y probaremos el siguiente resultado más general:

$$I(a,b)=\int_a^b \frac{(b-x)^c}{(b-x)^c+(x-a)^c}\,dx=\frac{b-a}{2},$$

donde a, b y c son reales cualesquiera. Para ello, consideraremos en la anterior integral los cambios de variable $y=x-a$, $z=b-x$, que llevan a

$$I(a,b)=\int_0^{b-a} \frac{(b-a-y)^c}{(b-a-y)^c+y^c}\,dy; \qquad I(a,b)=-\int_{b-a}^{0} \frac{z^c}{z^c+(b-a-z)^c}\,dz .$$

Se tiene entonces sumando ambas expresiones y haciendo $z=y$ que

$$2I(a,b)=\int_0^{b-a} \frac{(b-a-y)^c+y^c}{(b-a-y)^c+y^c}\,dy=\int_0^{b-a} dy=b-a,$$

de donde el resultado general propuesto es obvio. Como 2004–2003=1, se tiene que la integral propuesta vale ½

Problema 64

Propuesto por el Prof. Juan Bosco Romero Márquez, Ávila, España.

El triángulo ABC es rectángulo en A, y sus lados verifican $a>b>c$. Sea A' el punto medio de BC y H_a el pie de la altura desde A. Si el triángulo AH_aA' es isósceles, determinar los ángulos B y C.

Por ser $b>c$, A' está en el interior del segmento H_aC. Por ser AH_aA' isósceles y al mismo tiempo rectángulo en H_a, se cumple que $\angle AA'H_a=p/4$. Luego $\angle AA'C=p-\angle AA'H_a=3p/4$. Además, por ser ABC rectángulo en A, A' es el centro de su circunferencia circunscrita, y $AA'=CA'$ es su radio, luego ACA' es isósceles en A', y $\angle C=\angle ACA'=(p-\angle AA'C)/2=p/8$, $\angle B=p/2-\angle ACA'=3p/8$.

Problema 65

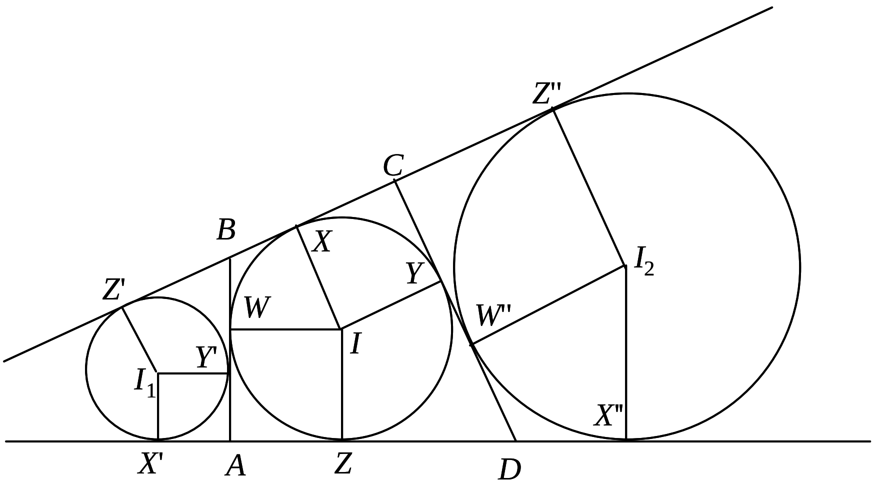
Propuesto por Juan Carlos Salazar, Puerto Ordaz (Venezuela).

El cuadrilátero *ABCD* es bicéntrico (es decir, tiene círculo inscrito y circunscrito); el círculo inscrito tiene centro *I* y radio *r*; los círculos exinscritos correspondientes a los lados *AB* y *CD* tienen centros y radios (I_1,r_1) e (I_2,r_2), respectivamente. Los puntos de tangencia del círculo inscrito con los lados *AB*, *BC*, *CD* y *DA* son, respectivamente, *W*, *X*, *Y* y *Z*. Los puntos de tangencia de los círculos exinscritos (I_1,r_1) e (I_2,r_2) con un lado del cuadrilátero y la prolongación de los otros dos, determinan los triángulos "tangenciales exteriores" de áreas S_1 y S_2, respectivamente. Demostrar que:

i) $[WXYZ]=S_1\sqrt{\dfrac{r_2}{r_1}}+S_2\sqrt{\dfrac{r_1}{r_2}}$,

ii) $\dfrac{S_1}{S_2}=\left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)^{3/2}$,

donde [ ] representa el área.



Sean *Y'*, *X'* y *Z'* los puntos de tangencia de (I_1,r_1) con el lado *AB* y las prolongaciones de los lados *AD* y *BC*, respectivamente, y sean *W''*, *X''* y *Z''* los puntos de tangencia de (I_2,r_2) con el lado *CD* y las prolongaciones de los lados *AD* y *BC*, respectivamente. Por ser *ABCD* cíclico, se tiene que:

$$\angle Z'BY'=p-\angle B=\angle D\,; \qquad \angle X'AY'=p-\angle A=\angle C\,;$$

$$\angle X''DW''=p-\angle D=\angle B\,; \qquad \angle Z''CW''=p-\angle C=\angle A\,.$$

Las bisectrices de $\angle WBX$, $\angle XCY$, $\angle YDZ$ y $\angle ZAW$ confluyen en *I*, las de $\angle X'AY'$ e $\angle Y'BZ'$ en I_1, y las de $\angle W''DX''$ y $\angle W''CZ''$ en I_2. Por lo tanto,

$$\tan\left(\frac{\angle A}{2}\right)=\frac{AY'}{r_1}=\frac{r}{AW}=\frac{CY}{r}=\frac{r_2}{CW''}; \qquad \tan\left(\frac{\angle B}{2}\right)=\frac{BY'}{r_1}=\frac{r}{BW}=\frac{DY}{r}=\frac{r_2}{DW''}.$$

$$2\sin\left(\frac{\angle A}{2}\right)=\frac{X'Y'}{r_1}=\frac{WZ}{AW}=\frac{XY}{r}=\frac{W''Z''}{CW''}; \quad 2\sin\left(\frac{\angle B}{2}\right)=\frac{Y'Z'}{r_1}=\frac{WX}{BW}=\frac{YZ}{r}=\frac{W''X''}{DW''}.$$

De las anteriores igualdades se obtiene trivialmente que $r_1r_2=r^2$, y que

$$\frac{X'Y'}{XY}=\frac{Y'Z'}{YZ}=\frac{r_1}{r}=\frac{AY'}{CY}=\frac{BY'}{DY}=\frac{AY'+BY'}{CY+DY}=\frac{AB}{CD};$$

$$\frac{X''W''}{XW}=\frac{W''Z''}{WZ}=\frac{r_2}{r}=\frac{DW''}{BW}=\frac{CW''}{AW}=\frac{DW''+CW''}{BW+AW}=\frac{CD}{AB}.$$

Además,

$$AB=AY'+BY'=\frac{r\cdot r_1}{AW}+\frac{r\cdot r_1}{BW}=\frac{(AW+BW)r\cdot r_1}{AW\cdot BW}=\frac{AB\cdot r\cdot r_1}{AW\cdot BW}; \qquad AW\cdot BW=r\cdot r_1;$$

$$\frac{XY\cdot YZ}{WX\cdot WZ}=\frac{r\cdot r}{AW\cdot BW}=\frac{r}{r_1}=\sqrt{\frac{r_2}{r_1}}.$$

Nos faltan ahora únicamente ciertas relaciones entre ángulos:

$$\angle XYZ=\angle XYI+\angle ZYI=\frac{p-\angle XIY}{2}+\frac{p-\angle YIZ}{2}=\frac{\angle C+\angle D}{2}.$$

De la misma forma se demuestra que

$$\angle X'Y'Z=\frac{\angle C+\angle D}{2}; \qquad \angle XWZ=\angle X''W''Z''=\frac{\angle A+\angle B}{2}=p-\frac{\angle C+\angle D}{2}.$$

Podemos entonces decir que

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{[X'Y'Z']}{[W''X''Z'']}=\frac{X'Y'\cdot Y'Z'\sin(\angle X'Y'Z')}{W''X''\cdot W''Y''\sin(\angle X''W''Z'')}=\frac{XY\cdot YZ}{WX\cdot WY}\frac{r_1^{\,2}}{r_2^{\,2}}=\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{3/2}, \text{ q.e.d.,}$$

y usando este resultado y los anteriores, se tiene que

$$\begin{aligned}[WXYZ]&=[WXZ]+[XYZ]=\frac{WX\cdot WZ}{2}\sin(\angle XWZ)+\frac{XY\cdot YZ}{2}\sin(\angle XYZ)\\
&=\frac{r^2}{r_2^{\,2}}\frac{W''X''\cdot W''Z''}{2}\sin(\angle X''W''Z'')+\frac{r^2}{r_1^{\,2}}\frac{X'Y'\cdot Y'Z'}{2}\sin(\angle X'Y'Z')\\
&=\frac{r^2}{r_1^{\,2}}[W''X''Z']+\frac{r^2}{r_1^{\,2}}[X'Y'Z']=\frac{r_1}{r_2}S_2+\frac{r_2}{r_1}S_1\\
&=\frac{r_1}{r_2}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{3/2}S_1+\frac{r_2}{r_1}\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{3/2}S_2=\sqrt{\frac{r_2}{r_1}}S_1+\sqrt{\frac{r_1}{r_2}}S_2,\end{aligned}$$

q.e.d..

PROBLEMAS PROPUESTOS 66-70

Problema 66, **propuesto por J.L. Díaz Barrero**, **Barcelona**, **España**:

Si a y b son números positivos tales que $a^3 + b^3 = 2,$ demostrar que

$$a^9 + b^9 + 5(a^{12} + b^{12}) \geq 8 + 2(a^{15} + b^{15}).$$

Problema 67, **propuesto por Miguel Amengual Covas**, **Cala Figuera**,**Mallorca**, **España**.

Se da en R^3 un paraboloide elíptico. Hallar el lugar geométrico de los centros de las esferas que cortan al paraboloide según dos circunferencias.

Problema 68, **propuesto por Laurentiu Modan**, **Bucarest**, **Rumania**.

Se considera la función real

$$f(x,n) = \frac{(x+1)^{n+1} + (x-1)^{n+1}}{(x+1)^{n+1} - (x-1)^{n+1}},\ \text{con } n \text{ natural.}$$

Hallar los valores del parámetro n tales que f tiene el mayor número posible de asíntotas, y en tal caso, hallar sus ecuaciones.

Problema 69, **propuesto como problema 1 en los exámenes para el acceso al Cuerpo de Profesores de Educación Secundaria en Castilla y León**, **julio 2004**.

Encontrar todos los números naturales x, y, z mayores que cero, tales que

$$1 + 2^x \bullet 3^y = z^2.$$

Problema 70, **propuesto como problema 4 en los exámenes para el acceso al Cuerpo de Profesores de Educación Secundaria en Castilla y León**, **julio 2004**.

Tres personas, A,B,C lanzan sucesivamente, en ese orden, un dado. La primera persona que saque un 6, gana.

a) ¿Cuáles son sus respectivas probabilidades de ganar?

b) Calcular la probabilidad de que el juego termine en el décimo lanzamiento y de que la persona C saque siempre la suma de lo que acaban de sacar los jugadores A y B en las tiradas inmediatamente anteriores.

COMENTARIO DE PÁGINAS WEB (14)

Algunas páginas web recopiladas durante el ICME 10, Copenhague, julio 2004.

Del 4 al 11 de julio de 2004 se ha celebrado en Copenhague el 10º ICME (Congreso Internacional de Educación Matemática). En un macro congreso como éste (3000 delegados) es difícil (por no decir imposible) hacer una recopilación exhaustiva de toda la información que produce, antes de ser publicadas las Actas. El Editor estuvo presente en el grupo de trabajo de Estudiantes de alto rendimiento y en el de discusión de Competiciones. A continuación relacionamos, con un breve comentario, algunas de las páginas web que consideramos de interés para nuestros lectores y suscriptores. En sucesivos números de la revista ampliaremos esta relación.

http://www.math.ecnu.edu.cn/earcome3
Página web de la 3ª Conferencia regional de Asia Oriental en Educación Matemática (Shanghai, China, 7-12 Agosto 2005)

www.picciotto.org/math-ed/puzzles/index.html
Problemas muy difíciles con triominos.

www.amt.edu.au/icmis16.html
Retos matemáticos, en el aula y fuera de ella (ICMI Study 16, en preparación)

www.scot-maths.co.uk
Página del concurso matemático escocés.

www.projectm3.org

Página web del Mentoring mathematics minds, USA)

www.nagc.org
Página web de propuestas para la National Association for gifted children, USA.

www.icme-10.com
La página del Congreso

www.cmeegs3.rousse.bg
Página web del Congreso de 2003 sobre creatividad matemática, celebrado en Rousse, Bulgaria.

www.cijm.org
Página sobre juegos matemáticos

www.amt.edu.au/imtot.html
Página en inglés del Torneo de las Ciudades.

DIVERTIMENTOS MATEMÁTICOS (14)

Los Problemas de la Isla Desierta
(*Petición de colaboraciones)*

Probablemente nuestros suscriptores y lectores conocen "Los libros de la Isla Desierta" : se elige a unas ciertas personalidades y se les pide que digan "qué libros llevarían consigo a una isla desierta, si pudieran hacerlo. Los lectores de la revista británica *Mathematical Gazette* conocerán, también, "Los teoremas de la isla desierta", porque durante algún tiempo se ha hecho esa pregunta a destacados matemáticos. Una buena parte del excelente libro *The Changing Shape of Geometry (Celebrating a Century of Geometry and Geometry Teaching),* cuyo editor es Chris Pritchard, publicado conjuntamente por Cambridge University Press, The Mathematical Association (Reino Unido) y The Mathematical Association of America (USA) está dedicada a estos teoremas de la isla desierta.

He pensado que sería una buena ocasión para excitar el apetito matemático de los lectores pedirles que envíen enunciados de problemas (resueltos o no por ellos mismos), hasta un máximo de 5, que llevarían consigo a una isla desierta. En caso de no disponer de la solución, se ruega lo indiquen (con un * tras el enunciado). Si está resuelto, envíen también la solución.

Con los mejores problemas (a juicio del editor) iremos formando la colección de problemas de la isla desierta. No hay limitaciones en el nivel de dificultad de los problemas. Un ejercicio sencillo, si es hermoso, puede ser perfectamente susceptible de entrar en esta sección de los Divertimentos matemáticos de la Revista Escolar de la OIM. En esto, el gusto de cada uno es perfectamente respetable.

Francisco Bellot

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI

Número

15

Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática
OEI ISSN 1698-677X

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática
Número 15 (Septiembre - Octubre 2004)
ISSN – 1698-277X

Índice

Artículos, Notas y Lecciones de preparación Olímpica
F. Bellot: Algunas aplicaciones de la noción de área: el triángulo de Routh y los triángulos cevianos**.**
.

Problemas de Nivel medio y de Olimpiadas
Problemas propuestos en la XIX Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas

Prueba por equipos de la XIX Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas

Resueltos:
Soluciones a los problemas de la IMO 2004 (v. Número 14): Recibidas soluciones a los 6 problemas, de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona (España); a los problemas 1,2,4,5,6, de Andrés Sánchez Pérez, La Habana, Cuba ; y a los problemas 1,2,3,4,5 conjuntamente de los componentes del equipo español en la IMO 2004. Publicamos las soluciones de Lasaosa.
Soluciones a los problemas de la Competición Mediterránea 2004, de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, España. Recibida además una solución al problema 2, de Miguel Amengual Covas, Santanyí, Mallorca, España. Publicamos las soluciones de Lasaosa.

Problemas para los más jóvenes
Cuatro problemas propuestos de la Olimpiada Balcánica Junior

- *Recibida una solución del problema 1 de la VI Olimpiada balcánica Junior, por Ricardo Barroso Campos (Sevilla, España).*

Problemas resueltos
Corrección al problema 48, por José J. Rodríguez, Ferrol (Coruña), España : observa que al no ser z necesariamente primo, la ecuación admite la familia infinita de soluciones x = y = n^2, z = 2n^3.
Solución al problema 41, por Henry Alexander Ramírez Bernal, Bogotá, Colombia.
Recibida otra solución al problema 62, por Alex Sierra Cárdenas, Medellín, Colombia.
Pedimos disculpas al Prof. F.Damián Aranda Ballesteros, de Córdoba, España, por no haber incluído su nombre entre quienes enviaron soluciones al problema nº 65.

Problema 66 : Recibidas soluciones de Miguel Amengual Covas (Santanyí, Mallorca, España) y Henry Alexander Ramírez Bernal (Bogotá, Colombia). Presentamos la solución de Amengual.
Problema 68 : Solución de Daniel Lasaosa Medarde (Pamplona, Navarra, España).
Problema 69 : Recibidas soluciones de M. Amengual Covas (Santanyí, Mallorca, España), Daniel Lasaosa Medarde(Pamplona, Navarra, España) y José J. Rodríguez (Ferrol, Coruña, España), ésta última con un error tipográfico corregido amablemente por el editor. Presentamos la solución de Amengual.
Problema 70 : Solución de Daniel Lasaosa Medarde (Pamplona, Navarra, España).

Problemas propuestos 71-75

Divertimentos Matemáticos
E. Gentile: Tango del Algebrista

Sobre la Prueba por equipos de la XIX Olimpiada Iberoamericana de matemáticas

F. Bellot: Las fascinantes biografías de los matemáticos iberoamericanos

Comentario de páginas web
F. Bellot: La página de la Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas

Editor: Francisco Bellot Rosado

ALGUNAS APLICACIONES DE LA NOCIÓN DE ÁREA : **EL TRIÁNGULO DE ROUTH Y LOS TRIÁNGULOS CEVIANOS**

FRANCISCO BELLOT ROSADO

Representante para Europa Occidental de la Federación Mundial de Competiciones Matemáticas Nacionales (*WFNMC*)

En 1891, Edward John Routh, en *A treatise on Analytical Statics, with numerous examples, vol.*1, *Cambridge U.Press*, *p.*82, enunció sin demostración el teorema siguiente :

Sean AA’,BB’,CC’ tres cevianas arbitrarias (no necesariamente concurrentes) del triángulo ABC, que se cortan dos a dos formando el triángulo A”B”C” (A” = BB’ ∩ CC’, etc.). Si se verifican las relaciones

$$\alpha = \frac{BA'}{A'C}, \quad \beta = \frac{CB'}{B'A}, \quad \gamma = \frac{AC'}{C'B}$$

entonces, siendo S y S” las áreas de los triángulos ABC y A”B”C”, respectivamente, se tiene

$$S'' = S\frac{(1-\alpha\beta\gamma)^2}{(1+\alpha+\alpha\beta)(1+\beta+\beta\gamma)(1+\gamma+\gamma\alpha)} \qquad (1).$$

Habitualmente, este resultado se conoce como teorema de Routh, y ha sido estudiado extensamente. La demostración que presentamos, completamente elemental, se debe al gran matemático rumano Trajan Lalescu, publicada en 1900 en la centenaria revista *Gazeta Matematica*, como generalización de un problema propuesto en el que se pedía tal área cuando una de las cevianas es la altura AA’, otra la mediana BB’ y la tercera la bisectriz interior CC’.

Con la notación $[PQR]$ para el área del triángulo PQR, se tiene primero que

$$S'' = S - [AC''B] - [BA''C] - [CB''A],$$

y por otra parte

$$S = [AC''B] + [BC''C] + [CC''A].$$

Los triángulos BC”C y AC”B tienen en común la base BC”; por lo tanto sus áreas están en la razón de las alturas desde C y A sobre BC”. Esta razón es β, por la semejanza de los triángulos rectángulos formados por las dos alturas trazadas sobre BC” por CB’ y AB’ (hipotenusas). Así se obtiene

$$S = [AC''B]\left(1+\beta+\frac{1}{\alpha}\right) \Rightarrow [AC''B] = \frac{\alpha S}{1+\alpha+\alpha\beta}.$$

Análogamente se obtienen $[BA''C]$ y $[CB''A]$. Finalmente,

$$S'' = S\left(1 - \frac{\alpha}{1+\alpha+\alpha\beta} - \frac{\beta}{1+\beta+\beta\gamma} - \frac{\gamma}{1+\gamma+\gamma\alpha}\right)$$
$$= S\frac{(1-\alpha\beta\gamma)^2}{(1+\alpha+\alpha\beta)(1+\beta+\beta\gamma)(1+\gamma+\gamma\alpha)}.$$

S” es nula si $\alpha\beta\gamma = 1,$ que es el teorema de Ceva. En el caso del problema publicado en la revista rumana, se tiene

$$\alpha = \frac{c.\cos B}{b.\cos C}, \quad \beta = 1, \quad \gamma = \frac{b}{a},$$

de manera que la condición de concurrencia de estas tres cevianas particulares se expresa mediante

$$senA = \cos B.\tan C.$$

(Éste fué, mucho más tarde, un problema de la Olimpiada Búlgara).

En la revista belga *Mathesis*, hoy desaparecida, el gran geómetra francés Victor Thébault publicó en 1958 una extensa recopilación de resultados relativos a casos especiales del teorema de Routh para el triángulo y para el tetraedro. En ella (titulada *Alturas, medianas, simedianas, bisectrices de un triángulo*), además de la fórmula de Routh, se menciona otra similar, para el área del triángulo ceviano A'B'C' (que también cita Routh en su libro):

Si ponemos

$$\alpha = \frac{l}{l_1}, \ \ \beta = \frac{m}{m_1}, \ \ \gamma = \frac{n}{n_1},$$

entonces

$$S' = [A'B'C'] = S\frac{lmn + l_1 m_1 n_1}{(l+l_1)(m+m_1)(n+n_1)},$$

y cita como fuente para ambas fórmulas dos revistas francesas : para esta última fórmula, *Nouvels Annals de Mathématiques*,1881, *p*.182, *question* 1353, propuesta por Genty y con solución de J.B.Delacourcelle, *enfant de troupe du* 53^e de ligne, en Tarbes; para la fórmula de Routh menciona una fuente inaccesible para mí: el *Journal de Vuibert*, *año* 38, *p*.96, *question* 7921.

La demostración de esta segunda fórmula es igualmente elemental:

$$\begin{aligned}[A'B'C'] &= S - [AB'C'] - [BA'C'] - [CA'B'] \\ &= S\left(1 - \frac{[AB'C']}{S} - \frac{[BA'C']}{S} - \frac{[CA'B']}{S}\right),\end{aligned}$$

y, puesto que se verifican las relaciones

$$\begin{aligned}\frac{[AB'C']}{S} &= \frac{AB'.AC'}{AC.BA} = \frac{m_1 n}{(m+m_1)(n+n_1)} \\ \frac{[BA'C']}{S} &= \frac{BA'.BC'}{BC.BA} = \frac{n_1 l}{(l+l_1)(n+n_1)} \\ \frac{[CA'B']}{S} &= \frac{CA'.CB'}{CB.CA} = \frac{l_1 m}{(l+l_1)(m+m_1)},\end{aligned}$$

se obtiene

$$\begin{aligned}[A'B'C'] &= S\left(1 - \frac{m_1 n}{(m+m_1)(n+n_1)} - \frac{n_1 l}{(l+l_1)(n+n_1)} - \frac{l_1 m}{(l+l_1)(m+m_1)}\right) \\ &= S\frac{(l+l_1)(m+m_1)(n+n_1) - m_1 n(l+l_1) - n_1 l(m+m_1) - l_1 m(n+n_1)}{(l+l_1)(m+m_1)(n+n_1)} \\ &= S\frac{lmn + l_1 m_1 n_1}{(l+l_1)(m+m_1)(n+n_1)}.\end{aligned}$$

En el caso especial en que

$$l = m = n \quad \text{y}\, l_1 = m_1 = n_1$$

los cocientes entre áreas valen

$$\frac{S'}{S} = \frac{l^2 - ll_1 + l_1^2}{(l+l_1)^2}, \quad \frac{S''}{S} = \frac{(l-l_1)^2}{l^2 + ll_1 + l_1^2}.$$

Especializando las cevianas AA’,BB’ y CC’ se pueden obtener algunos casos particulares interesantes :

1: *AA’ altura*; *BB’ bisectriz interior*; *CC’ mediana*

Entonces

$$\frac{S'}{S} = \frac{c(a\cos B + b\cos C)}{2a(c+a)}; \quad \frac{S''}{S} = \frac{c(a\cos B - b\cos C)^2}{a(2a+c)(a+b\cos C)(1+\cos B)}$$

2: *AA’ altura, BB’ bisectriz exterior, CC’ mediana*

En este caso

$$\frac{S'}{S} = \frac{c(a\cos B - b\cos C)}{2a(c-a)}, \quad \frac{S''}{S} = \frac{c(a\cos B + b\cos C)^2}{a(2a-c)(a+b\cos C)(1-\cos B)}$$

De estas cuatro expresiones, utilizando las identidades

$$2S^2(1+\cos B) = c.a.r.r_b, \quad 2S^2(1-\cos B) = c.a.r_c.r_a$$

resulta, dividiendo miembro a miembro

$$\frac{S'}{S''} = \frac{(a\cos B + b\cos C)(2a+c)(a+b\cos C)carr_b}{4S^2(c+a)(a\cos B - b\cos C)^2}$$

y análogamente en el otro caso.

3: *AA’ altura, BB’ bisectriz interior, CC’ simediana*

$$\frac{S'}{S} = \frac{bc(b\cos B + a\cos C)}{(c+a)(a^2+b^2)}, \quad \frac{S''}{S} = \frac{bc(b\cos B - a\cos C)^2}{a(b^2+ca+a^2)(b+a\cos C)(1+\cos B)}$$

4: *AA’ altura, BB’ bisectriz exterior, CC’ simediana*

$$\frac{S'}{S} = \frac{bc(b\cos B - a\cos C)}{(c-a)(a^2+b^2)}, \quad \frac{S''}{S} = \frac{bc(b\cos B + a\cos C)^2}{a(b^2-ca+a^2)(b+a\cos C)(1-\cos B)}$$

De las fórmulas anteriores se deducen las caracterizaciones siguientes para algunos triángulos especiales :

$$\begin{aligned}
a + b\cos C = 0 &\Leftrightarrow \text{ altura AA' y mediana CC' paralelas}\\
b + a\cos C = 0 &\Leftrightarrow \text{ altura AA' y simediana CC' paralelas}\\
a\cos B + b\cos C = 0 &\Leftrightarrow \text{ A',C',B' alineados}\\
a\cos B - b\cos C = 0 &\Leftrightarrow \text{ AA',BB',CC' concurrentes}\\
b\cos B - a\cos C = 0 &\Leftrightarrow A', B', C' \text{ alineados}
\end{aligned}$$

En el caso en que las tres cevianas AA’,BB’,CC’ sean concurrentes en el punto P, el teorema de Ceva en la forma $\alpha\beta\gamma = 1$ permite escribir la tercera razón en función de las otras dos.

Si ponemos

$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{z}{y}, \quad \frac{CB'}{B'A} = \frac{x}{z}, \text{ entonces } \frac{AC'}{C'B} = \frac{y}{x}.$$

Las relaciones entre P,A’,B’,C’ están dadas por la fórmula de Van Aubel:

$$\frac{AP}{PA'} = \frac{AB'}{B'C} + \frac{AC'}{C'B} = \frac{y+z}{x},$$

y análogamente en los demás casos, de donde se pueden obtener los resultados clásicos de Euler y Gergonne :

$$\frac{PA'}{AA'} + \frac{PB'}{BB'} + \frac{PC'}{CC'} = 1,$$
$$\frac{AP}{AA'} + \frac{BP}{BB'} + \frac{CP}{CC'} = 2.$$

El teorema de Stewart permite calcular las longitudes de las cevianas. Si A’ está en el lado BC, se tiene, por ejemplo,

$$\overline{AA'}^2 = \frac{BA'}{BC} \cdot \overline{AC}^2 + \frac{A'C}{BC} \cdot \overline{AB}^2 - \frac{BA'}{BC} \cdot \frac{A'C}{BC} \cdot \overline{BC}^2,$$

es decir

$$\overline{AA'}^2 = \frac{y}{y+z}b^2 + \frac{z}{y+z}c^2 - \frac{yz}{(y+z)^2}a^2,$$

y análogamente los otros casos. También se observa que

$$AP = \frac{y+z}{x+y+z}AA' = \frac{1}{x+y+z}\sqrt{z(y+z)b^2 + y(y+z)c^2 - yza^2},$$

etc. También el teorema de Stewart permite calcular los lados del triángulo ceviano : para hallar A’B’ lo aplicaremos al triángulo ACA’, con B’ en el lado AC :

$$\overline{A'B'}^2 = \frac{yz(z-x)a^2}{(z+x)(y+z)^2} + \frac{zx(x-y)b^2}{(z+x)^2(y+z)} + \frac{xyc^2}{(x+y)(y+z)},$$

etc.

La fórmula para el área del triángulo ceviano, particularizada en este caso de cevianas concurrentes, da

$$[A'B'C'] = \frac{2xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}S.$$

Se pueden estudiar algunas propiedades extremales de los triángulos cevianos. Es sabido que el de perímetro mínimo es el triángulo órtico, formado por los pies de las alturas. Por lo que se refiere a las áreas, de la fórmula anterior y la desigualdad de las medias, escrita en la forma

$$x + y \geq 2\sqrt{xy},$$

resulta

$$(x+y)(y+z)(z+x) \geq 8xyz,$$

así que

$$[A'B'C'] \leq \frac{1}{4}S,$$

y la igualdad se alcanza cuando $x = y = z,$ en cuyo caso P es el baricentro del triángulo, y el triángulo ceviano es el triángulo medial.

Para terminar, antes de concluir con una colección de problemas propuestos, resumimos algunos valores particulares del área y los perímetros de algunos triángulos cevianos. L es el punto de Lemoine (intersección de las simedianas), J el de Gergonne (intersección de las cevianas que unen cada vértice con el punto de tangencia de la circunferencia inscrita en el lado opuesto) y N el de Nagel (intersección de las cevianas que unen cada vértice con el punto de tangencia de la circunferencia exinscrita en el lado opuesto) :

Punto P	*Perímetro*	*Área*
G	s	$S/4$
H	$2S/R \leq s$	$2S\cos A\cos B\cos C$
O		$\frac{2S\cos A\cos B\cos C}{\cos(A-B)\cos(B-C)\cos(C-A)}$
I		$\frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$
L		$\frac{2a^2b^2c^2}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}$
J	$2r\left(\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\right)$	$rS/2R$
N		$rS/2R$

Bibliografía

Además de la que ha sido citada en el artículo :

Proyecciones de puntos notables del triángulo según las cevianas respectivas, artículo de Hristo Lesov en *Matematyka* & *Informatika*, 1994/5 (en búlgaro).

Selección de problemas propuestos

1. Las bisectrices del triángulo ABC cortan a los lados opuestos en P,Q,R. Demostrar que el perímetro de PQR es, a lo sumo, el semiperímetro de ABC (*Kömal*, 1994 *Hungría*)

2. ¿Existe un cuadrilátero convexo dividido por sus diagonales en cuatro triángulos de áreas 1, 2, 3 y 4, respectivamente? (*Kömal*)

3. En el triángulo ABC, se consideran

$$A_1 \in BC, B_1 \in CA, C_1 \in AB,$$

tales que

$$[AB_1C_1] = [BC_1A_1] = [CA_1B_1] = [A_1B_1C_1].$$

Probar que $A_1B_1C_1$ es el triángulo medial de ABC .(*Kömal*)

4. Dado un cuadrilátero ABCD, los puntos de trisección de AB y AD más próximos a A son K y L; los puntos de trisección de CB y CD más próximos a C son N y M. Hallar las razón de las áreas de ABCD y KLMN (*Kömal*).

5. Sean A',B',C' los puntos de tangencia del círculo inscrito con los lados de ABC y sea J el punto de Gergonne. Probar que

$$\frac{[ABC]}{[JBC]} + \frac{[ABC]}{[JAC]} + \frac{[ABC]}{[JAB]} = \frac{r_a + r_b + r_c}{r}.$$

(*Gazeta Matematica* 1963,*Rumania*)

6. Sean AA',BB',CC' tres cevianas concurrentes en P. Si

$$\frac{A'P}{PA} = x, \frac{B'P}{PB} = y, \frac{C'P}{PC} = z,$$

demostrar que

$$2xyz + yz + zx + xy = 1.$$

(*Gazeta Matematica* 1963).

7. Probar que, si L es el punto de Lemoine,

$$\frac{[GIL]}{[ABC]} = \frac{(b-c)(c-a)(a-b)}{3(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}.$$

(*Mathesis* 1925, *Bélgica*)

8. Sea ABC un triángulo, y $A_1 \in BC, B_1 \in CA, C_1 \in AB$. Las semirrectas AA_1, BB_1, CC_1 cortan al círculo circunscrito a ABC en A_2, B_2 y C_2, respectivamente. Demostrar que, si la suma

$$\frac{AA_1}{A_1A_2} + \frac{BB_1}{B_1B_2} + \frac{CC_1}{C_1C_2}$$

es mínima, entonces las rectas AA_1, BB_1, CC_1 son concurrentes.

(*Gazeta Matematica* 1990)

9. Las distancias de un punto interior P a los lados de un triángulo ABC son p_a, p_b, p_c. Demostrar que

$$h_a h_b h_c \geq 27 p_a p_b p_c.$$

(*Kömal*)

10.Sea P un punto interior al triángulo ABC, y sean $x.y,z$ sus distancias a los vértices, y p,q,r sus distancias a los lados BC,CA y AB, respectivamente. Probar que

$$xyz \geq 8pqr.$$

(*Matematyka* & *Informatika* 1990, *Bulgaria*).

11.Sea P un punto interior al triángulo ABC, y sean x,y,z sus distancias a los lados BC,CA y AB, respectivamente. Hallar las posiciones de P para las cuales

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}$$

es mínima (*Kömal*).

12. Sean A_1, B_1, C_1 puntos en los lados del triángulo ABC tales que

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{CB_1}{B_1A} = \lambda;$$

y sean A_2, B_2, C_2 puntos en los lados de $A_1B_1C_1$ tales que

$$\frac{A_1C_2}{C_2B_1} = \frac{B_1A_2}{A_2C_1} = \frac{C_1B_2}{B_2A_1} = \lambda.$$

Calcular el valor de λ para el cual

$$[A_2B_2C_2] = \frac{1}{2}[ABC].$$

(*Kömal*)

13. Las bisectrices de los ángulos del triángulo ABC cortan a los lados opuestos en P,Q,R. Demostrar que

$$[PQR] \leq \frac{[ABC]}{4}.$$

(*Kömal*)

14. Los puntos de tangencia del círculo inscrito en un triángulo con los lados definen un nuevo triángulo. Determinar su área en función de los lados del triángulo original (*Kömal*).

15. El área del triángulo formado por los puntos medios de tres cevianas (no necesariamente concurrentes) trazadas desde los tres vértices del triángulo ABC es 1/4 del área del triángulo determinado por los pies de las cevianas (Van Aubel ; *American Mathematical Monthly* 1957).

16. En los lados del triángulo ABC se toman puntos $M \in AB$, $N \in BC, P \in CA$ tales que $[AMP] = [BMN] = [NPC]$.

Si

$$\frac{MA}{MB} = k_1, \frac{NB}{NC} = k_2, \frac{PC}{PA} = k_3,$$

entonces

$$k_1(1+k_2) = k_2(1+k_3) = k_3(1+k_1).$$

17. En 1956, DeBrunner probó el siguiente resultado de Erdös :
Si los puntos $B_1 \in A_2A_3, B_2 \in A_3A_1, B_3 \in A_1A_2$ están en los lados del triángulo $A_1A_2A_3$, y S_1, S_2, S_3 son las áreas de $A_1B_2B_3$, etc, entonces se verifica

$$S = [ABC] \geq \min\{S_1, S_2, S_3\}.$$

Demostrar la siguiente extensión de la desigualdad de Erdös-DeBrunner :

$$S \geq \left(\frac{S_1^\alpha + S_2^\alpha + S_3^\alpha}{3} \right)^{1/\alpha}, \text{ con } \alpha \leq 1.$$

¿Es cierta la desigualdad cuando $\alpha > 1$? (*Matematyka* & *Informatika* 1989).
18. Sean A',B',C' los pies de las bisectrices interiores de ABC, y sean A'', B'', C'' los puntos simétricos de A',B',C' respecto de los vértices de ABC. Calcular

$$\frac{[A''B''C'']}{[ABC]}$$

en función de los lados de ABC (*Mathesis* 1894).
19. En el triángulo $A_1A_2A_3$, de perímetro 2s, se considera el punto P. Las cevianas A_iP cortan a los lados opuestos en P_i. Demostrar que

$$A_1P_1 \cdot A_2P_2 \cdot A_3P_3 \geq 4s[P_1P_2P_3].$$

(*Nieuw Archieff voor Wiskunde*, 1965, *Holanda*; *propuesto por Oene Bottema*).
20. En un triángulo ABC, sean : A_1, B_1, C_1, H los pies de las alturas y el ortocentro, respectivamente; A_2, B_2, C_2 los pies de las medianas; A_3, B_3, C_3 los puntos medios respectivos de AH,BH y CH. Si S es el área del triángulo, y S_1, S_2, S_3 las áreas de los cuadriláteros $A_2B_1A_3C_1$, $B_2C_1B_3A_1$, $C_2A_1C_3B_1$, respectivamente, demostrar que

$$S = S_1 + S_2 + S_3.$$

(*Gazeta matematica* 1963).
21. Se dividen los lados BC,CA y AB del triángulo ABC por los puntos A',B',C' en una misma razón, p/q; sean A",B",C" los segundos puntos de intersección de las rectas AA',BB',CC' con el círculo circunscrito a ABC. Hallar, en función de los elementos de ABC, de p y de q :
a) las longitudes de AA",BB" y CC"
b) las longitudes de B"C",C"A" y A"B".
(*Mathesis* 1894; *propuesto por Joseph Neuberg*)
22. En los lados AB y CD del cuadrilátero convexo ABCD se toman los puntos K y M, respectivamente. Sean

$$L = AM \cap KD, \quad N = KC \cap BM.$$

a) Demostrar que si K y M son los puntos medios de AB y CD, entonces

$$[KLMN] \leq \frac{[ABCD]}{3}.$$

b) Demostrar que, si $\frac{AK}{KB} = \frac{CM}{MD} = \frac{m}{n}$, entonces

$$[KLMN] < \frac{mn}{m^2 + mn + n^2} < [ABCD].$$

(*Olimpiada URSS* 1989; *propuesto por Dmitri Tereshin*).

23. Se da el tetraedro ABCD y su punto interior I. Las rectas AI, BI, CI, DI cortan a las caras opuestas en A',B',C',D', respectivamente. Se consideran los puntos $A_1 \in A'I, B_1 \in B'I, C_1 \in C'I, D_1 \in D'I$ tales que

$$\frac{IA_1}{A_1A'} = \frac{IB_1}{B_1B'} = \frac{IC_1}{C_1C'} = \frac{ID_1}{D_1D'} = k.$$

Demostrar que

$$\frac{AA_1}{A_1A'} + \frac{BB_1}{B_1B'} + \frac{CC_1}{C_1C'} + \frac{DD_1}{D_1D'} \geq 4(4k+3);$$
$$\frac{A_1A'}{AA_1} + \frac{B_1B'}{BB_1} + \frac{C_1C'}{CC_1} + \frac{D_1D'}{DD_1} \geq \frac{4}{4k+3}.$$

(*Gazeta Matematica*, 1966).

PRIMERA SESIÓN DE PROBLEMAS

21 septiembre de 2004

Problema 1

Se deben colorear casillas de un tablero de 1001×1001 de acuerdo a las reglas siguientes:

- Si dos casillas tienen un lado común, entonces al menos una de ellas se debe colorear.
- De cada seis casillas consecutivas de una fila o de una columna, siempre se deben colorear al menos dos de ellas que sean adyacentes.

Determinar el número mínimo de casillas que se deben colorear.

Problema 2

Se considera en el plano una circunferencia de centro O y radio r y un punto A exterior a ella. Sea M un punto de la circunferencia y N el punto diametralmente opuesto a M. Hallar el lugar geométrico de los centros de las circunferencias que pasan por A, M y N al variar M.

Problema 3

Sean n y k enteros positivos tales que o bien n es impar o bien n y k son pares. Probar que existen enteros a y b tales que

$$\text{mcd}(a, n) = \text{mcd}(b, n) = 1 \quad \text{y} \quad k = a + b.$$

Duración: 4h. 30 m.
Cada problema vale siete puntos

Versión en español

PRIMEIRA SESSÃO DE PROBLEMAS

21 de setembro de 2004

Problema 1

Deve-se colorir as casas de um tabuleiro de 1001? 1001 de acordo com as seguintes regras:

- Se duas casas têm um lado comum, então pelo menos uma delas deve ser colorida.
- De cada seis casas consecutivas de uma linha ou de uma coluna, devem colorir-se sempre pelo menos duas delas que sejam adjacentes.

Determinar o número mínimo de casas que devem ser coloridas.

Problema 2

Se considera no plano uma circunferência de centro O e raio r, e um ponto A exterior a ela. Seja M um ponto da circunferência e N o ponto diametralmente oposto a M. Determinar o lugar geométrico dos centros das circunferências que passam por A, M e N quando M varia.

Problema 3

Sejam n e k números inteiros positivos tais que n é ímpar ou n e k são pares. Provar que existem inteiros a e b tais que

$$\text{mdc}(a, n) = \text{mdc}(b, n) = 1 \quad \text{e} \quad k = a + b.$$

Duração: 4h 30m.
Cada problema vale sete pontos

Versão em português

SEGUNDA SESIÓN DE PROBLEMAS

22 septiembre de 2004

Problema 4

Determinar todas las parejas (a,b), donde a y b son enteros positivos de dos dígitos cada uno, tales que $100a + b$ y $201a + b$ son cuadrados perfectos de cuatro dígitos.

Problema 5

Dado un triángulo escaleno ABC, se llaman A', B' y C' a los puntos de intersección de las bisectrices interiores de los ángulos A, B y C con los lados opuestos, respectivamente.

Sean: A'' la intersección de BC con la mediatriz de AA',

B'' la intersección de AC con la mediatriz de BB' y

C'' la intersección de AB con la mediatriz de CC'.

Probar que A'', B'' y C'' son colineales.

Problema 6

Para un conjunto $\mathcal{H}$ de puntos en el plano, se dice que un punto P del plano es un *punto de corte* de $\mathcal{H}$ si existen cuatro puntos distintos A, B, C y D en $\mathcal{H}$ tales que las rectas AB y CD son distintas y se cortan en P.

Dado un conjunto finito $\mathcal{A}_0$ de puntos en el plano, se construye una sucesión de conjuntos $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \ldots$ de la siguiente manera: para cualquier j ? 0, $\mathcal{A}_{j+1}$ es la unión de $\mathcal{A}_j$ con el conjunto de todos los puntos de corte de $\mathcal{A}_j$.

Demostrar que si la unión de todos los conjuntos de la sucesión es un conjunto finito, entonces para cualquier j ? 1 se tiene que $\mathcal{A}_j = \mathcal{A}_1$.

Duración: 4h. 30 m.
Cada problema vale siete puntos

Versión en español

SEGUNDA SESSÃO DE PROBLEMAS

22 de setembro de 2004

Problema 4

Determinar todos os pares (a,b), onde a e b são números inteiros positivos de dois dígitos cada um, tais que $100a + b$ e $201a + b$ são quadrados perfeitos de quatro dígitos.

Problema 5

Dado um triângulo escaleno ABC, se designam por A', B' e C' os pontos de intersecção das bissectrizes interiores dos ângulos A, B e C com os lados opostos, respectivamente.

Sejam: A'' a intersecção de BC com a mediatriz de AA',

B'' a intersecção de AC com a mediatriz de BB' e

C'' a intersecção de AB com a mediatriz de CC'.

Provar que A'', B'' e C'' são colineares.

Problema 6

Para um conjunto $\mathcal{H}$ de pontos no plano, diz-se que um ponto P do plano é um *ponto de corte* de $\mathcal{H}$, se existem quatro pontos distintos A, B, C e D em $\mathcal{H}$ tais que as rectas AB e CD são distintas e se cortam em P.

Dado um conjunto finito $\mathcal{A}_0$ de pontos no plano, se constroi uma sucessão de conjuntos $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \ldots$ da seguinte forma: para qualquer j ? 0, $\mathcal{A}_{j+1}$ é a união de $\mathcal{A}_j$ com o conjunto de todos os pontos de corte de $\mathcal{A}_j$.

Demonstrar que se a união de todos os conjuntos da sucessão é um conjunto finito, então para qualquer j ? 1 tem-se $\mathcal{A}_j = \mathcal{A}_1$.

Duração: 4h 30m. Versão em português

Cada problema vale sete pontos

XIX OLIMPIADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICAS

PRUEBA POR EQUIPOS
Nivel A

<u>Instrucciones</u>

A partir de la situación matemática que se les propone, se deben obtener, con solución, resultados matemáticos relacionados con dicha situación, planteando y resolviendo cuantos problemas matemáticos sean sugeridos por ella.

Nivel A (Olimpiada Iberoamericana)

PQRS es un trapecio, con PQ paralela a RS. Las diagonales PR y QS se cortan en T; TU es paralela a las bases PQ y SR, con el punto U en el segmento QR.
Se supone que las medidas de las longitudes de los segmentos PQ = *a*, RS = *b*, TU = *c* , son números naturales, y se considera el triángulo ABC cuyos lados son esos números naturales *a*,*b*,*c*. Se representa con S el área del triángulo ABC.

XIX OLIMPIADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICAS

PRUEBA POR EQUIPOS

Instrucciones

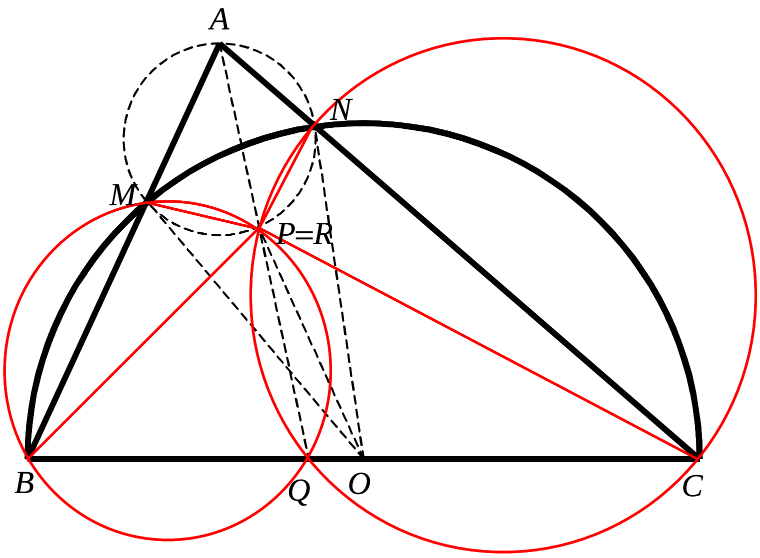
A partir de la situación matemática que se les propone, se deben obtener, con solución, resultados matemáticos relacionados con dicha situación, planteando y resolviendo cuantos problemas matemáticos sean sugeridos por ella.

Nivel B (Olímpicos Castellón)

ABCD es un cuadrado. Interiormente a él se construye el triángulo equilátero ABE, y exteriormente a él se construye el triángulo equilátero BCF.

Sea *ABC* un triángulo acutángulo con *AB* distinto de *AC*. El círculo con diámetro *BC* corta a los lados *AB* y *AC* en *M* y *N*, respectivamente. Sea *O* el punto medio del lado *BC*. Las bisectrices de los ángulos *BAC* y *MON* se cortan en *R*. Prueba que las circunferencias circunscritas de los triángulos *BMR* y *CNR* tienen un punto común sobre el lado *BC*.

Solución de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, Navarra, España.



Sea *P* el segundo punto donde la bisectriz de ∠*A* corta a la circunferencia circunscrita a *AMN*, y *Q* el punto donde dicha bisectriz corta al lado *BC*. Demostraremos que *P* y *R* coinciden, y que *BMRQ* y *CNRQ* son cíclicos.

Como ∠*MAP*=∠*NAP*=∠*A*/2, y *P* está en el arco *MN* de la circunferencia circunscrita al triángulo *MAN* que no contiene a *A*, se tiene que *MP*=*NP*, luego *P* está también el la mediatriz de *MN*. Pero la mediatriz de *MN* es también la bisectriz de ∠*MON*, al ser *OM*=*ON*=*BC*/2 igual al radio de la circunferencia de diámetro *BC*. Luego en *P* coinciden las bisectrices de ∠*MAN*, que es la bisectriz de ∠*BAC*, y la bisectriz de ∠*MON*. Por lo tanto, *P* coincide con *R*.

Por ser además *MR*=*NR*, se deduce inmediatamente del anterior resultado que ∠*MNR*=∠*NMR*=∠*MAR*=∠*NAR*=∠*A*/2. Además, es obvio que al ser *BC* un diámetro de la circunferencia que pasa por *M* y *N*, entonces ∠*BMC*=∠*BNC*=*p*/2, es decir, *M* y *N* son los pies respectivos de las alturas desde *C* y *B* a los lados *AB* y *AC* del triángulo *ABC*.

Es entonces obvio (y conocido) que el triángulo ANM es semejante al triángulo ABC, por ser $\angle MAN=\angle BAC$, siendo $AN/AB=AM/AC=\cos(\angle A)$. Por lo tanto, se tiene que $\angle ANR=\angle ANM+\angle MNR=\angle B+\angle A/2$; análogamente, $\angle AMR=\angle AMN+\angle NMR=\angle C+\angle A/2$. Por lo tanto, $\angle RMB=p-\angle AMR=\angle B+\angle A/2$, y $\angle RNC=p-\angle ANR=\angle C+\angle A/2$.

Además, $p-\angle RQC=\angle RQB=\angle AQB=p-\angle QAB-\angle ABQ=p-\angle A/2-\angle B=\angle C+\angle A/2$, con lo que $\angle RQC+\angle CNR=\angle RQB+\angle BMR=p$, y los cuadriláteros $BMRQ$ y $CNRQ$ son cíclicos. Luego las circunferencias circunscritas a los triángulos BMR y CNR tienen un punto común sobre el lado BC, que es Q.

IMO 2004 Problema 2

Encuentra todos los polinomios $P(x)$ con coeficientes reales que satisfacen la igualdad

$$P(a-b)+P(b-c)+P(c-a)=2P(a+b+c)$$

para cualesquiera números reales a, b, c tales que $ab+bc+ca=0$.

Solución de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, Navarra, España.

En primer lugar, es obvio que

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=2\left(a^2+b^2+c^2\right)$$
$$=2\left(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca\right)=2(a+b+c)^2;$$

Luego todos los polinomios de la forma vx^2, con v real, satisfacen la igualdad del enunciado. Además, podemos encontrar que

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=(ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c)=-2abc(a+b+c).$$

También se tiene

$$ab\left(a^2+b^2\right)+bc\left(b^2+c^2\right)=-(bc+ca)\left(a^2+b^2\right)-(ab+ca)\left(b^2+c^2\right)$$
$$=-abc(a+2b+c)-ac\left(c^2+a^2\right)-b^2(ab+bc+ca);$$

$$2ab\left(a^2+b^2\right)+2bc\left(b^2+c^2\right)+2ac\left(c^2+a^2\right)=-2abc(a+2b+c)=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2.$$

Finalmente, llegamos a que

$$(a-b)^4=a^4+b^4-4ab\left(a^2+b^2\right)+6a^2b^2;$$

$$(a-b)^4+(b-c)^4+(c-a)^4=2\left(a^4+b^4+c^4\right)+4\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)$$
$$=2\left(a^2+b^2+c^2\right)^2=2(a+b+c)^4.$$

Por lo tanto, es obvio que los polinomios $P(x)=ux^4+vx^2$ con u y v reales cualesquiera, satisfacen la igualdad del enunciado. Demostraremos ahora que dichos polinomios (incluida la solución trivial $P(x)=0$ para $u=v=0$) son las únicas soluciones del problema.

Sean x, y reales cualesquiera, y sean

$$a=\frac{\sqrt{x^2+y^2+xy}+2x+y}{3};\quad b=\frac{\sqrt{x^2+y^2+xy}-x+y}{3};\quad c=\frac{\sqrt{x^2+y^2+xy}-x-2y}{3}.$$

Es trivial comprobar que $a-b=x$, $b-c=y$, $c-a=-(x+y)$, siendo además a, b y c reales, pues

$$x^2+y^2+xy=\frac{x^2+y^2+(x+y)^2}{2}\geq 0.$$

Además, es fácil comprobar que:

$$a+b+c=\sqrt{x^2+y^2+xy}\ ;$$

$$ab=\frac{-x^2+2y^2+2xy+(x+2y)\sqrt{x^2+y^2+xy}}{9}\ ;$$

$$bc=\frac{2x^2-y^2+2xy-(2x+y)\sqrt{x^2+y^2+xy}}{9}\ ;$$

$$ca=\frac{-x^2-y^2-4xy+(x-y)\sqrt{x^2+y^2+xy}}{9}=-ab-bc\ .$$

Por lo tanto, al cumplirse que $ab+bc+ca=0$, se tiene que, para cualesquier x, y reales, se debe cumplir:

$$P(x)+P(y)+P(-(x+y))=2P\left(\sqrt{x^2+y^2+xy}\right).$$

Haciendo $x=y=0$, se deduce que $P(0)=0$. Haciendo $y=0$, se deduce que, para todo x real,

$$P(x)+P(-x)=2P\left(\sqrt{x^2}\right)=2P(|x|).$$

Por lo tanto, sea x positivo (es decir, $|x|=x$) o negativo (es decir, $|x|=-x$), se deduce que $P(-x)=P(x)$, con lo que $P(x)$ puede admitir únicamente términos de grado par, siendo cero el término independiente por ser $P(0)=0$. Podemos entonces escribir, sin pérdida de generalidad, que

$$P(x)=\sum_{m=1}^{n}a_m x^{2m} \qquad \text{con } a_n \text{ real no nulo.}$$

Supongamos que el grado de $P(x)$ es mayor que 4. Entonces $n>2$. Calcularemos ahora los coeficientes de $x^{2n-2}y^2$ en los polinomios que intervienen en la condición del enunciado. Obviamente, $P(x)$ y $P(y)$ no generarán un tal término. Además, como

$$P(-(x+y))=\sum_{m=1}^{n}a_m(x+y)^{2m}=\sum_{m=1}^{n}a_m\sum_{l=0}^{2m}\binom{2m}{l}x^{2m-l}y^l\ ,$$

$$2P\left(\sqrt{x^2+y^2+xy}\right)=2\sum_{m=1}^{n}a_m\left(x^2+y^2+xy\right)^m=2\sum_{m=1}^{n}a_m\sum_{l=0}^{m}\binom{m}{l}x^{2(m-l)}\left(y^2+xy\right)^l$$

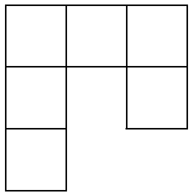
$$=2\sum_{m=1}^{n}a_m\sum_{l=0}^{m}\binom{m}{l}\sum_{k=0}^{l}\binom{l}{k}x^{2m-(2l-k)}y^{2l-k},$$

un tal término sólo puede aparecer con $m=n$, $l=1,2$, $k=2l-2$ en el segundo polinomio, y para $m=2$, $l=2$ en el primero, debiendo ser ambos coeficientes iguales pues la igualdad entre polinomios debe ser satisfecha para cualesquier valores reales x e y. Esto lleva a:

$$a_n\binom{2n}{2}=2a_nn+2a_n\binom{n}{2}; \qquad\qquad a_nn(n-2)=0\,.$$

Pero esto es falso para $n>2$. Contradicción. Luego el grado de $P(x)$ no puede ser mayor que 4, y como se ha visto anteriormente, sus únicos coeficientes no nulos corresponden a términos de grado par y su término independiente debe ser nulo, por lo que las soluciones expuestas al principio del problema son las únicas, q.e.d..

Se define un gancho como una figura con seis cuadrados unidad como muestra el diagrama

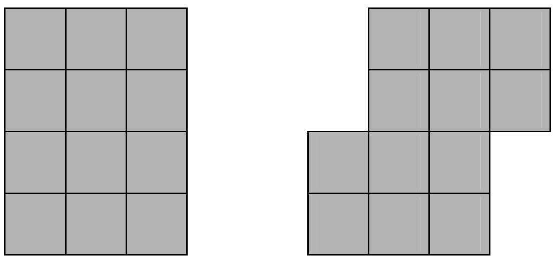


o cualquiera de las figuras obtenidas aplicando rotaciones y reflejando la figura. Determina todos los rectángulos *m*x*n* que pueden ser cubiertos con ganchos de forma que

i. el rectángulo esté cubierto sin agujeros ni superposiciones.
ii. ninguna parte de un gancho queda fuera del rectángulo.

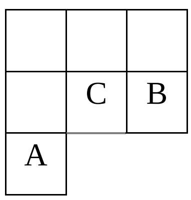
Solución de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, Navarra, España.

Lema 1: El número de ganchos debe ser par, estando además organizados por parejas de formas que se forman piezas de 12 cuadrados unidad de uno de los dos tipos que muestra el siguiente diagrama

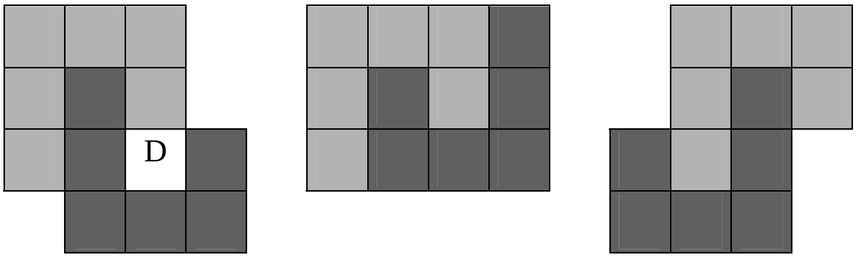


o cualquiera de las figuras obtenidas aplicando rotaciones y reflexiones a las dos figuras mostradas.

Demostración: Identificamos algunos de los cuadrados unidad del gancho y adyacentes:



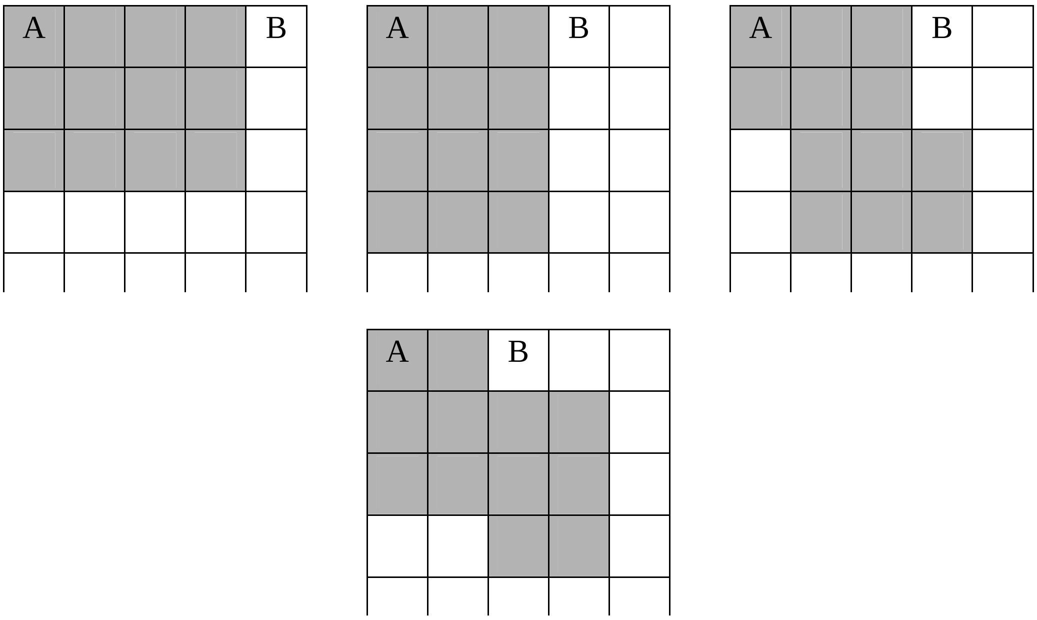
Obviamente, si el gancho dibujado se utiliza para recubrir sin salirse un rectángulo *mxn*, el cuadrado C será siempre interior a dicho rectángulo. Luego debe estar recubierto por un gancho que no se superponga con el gancho dado, lo cual se puede hacer de una de las tres siguientes maneras:



En el primer caso, el cuadrado D no se puede cubrir, luego las únicas opciones válidas son la segunda y tercera, que nos generan figuras como las mostradas en el enunciado del lema 1 (salvo reflexiones y/o rotaciones), q.e.d..

<u>Lema 2.</u> Ni *m* ni *n* pueden ser iguales a 5, siendo ambos mayores o iguales que 3 y al menos uno de ellos mayor o igual que 4.

<u>Demostración:</u> Cada una de las piezas de 12 cuadrados mostradas en el lema 1 ocupa un mínimo de 3 filas y 4 columnas o viceversa, luego *m* y *n* son mayores o iguales que 3, siendo al menos uno de ellos mayor o igual que 4, pues si no la pieza se saldría del rectángulo. Considérese ahora la siguiente figura:



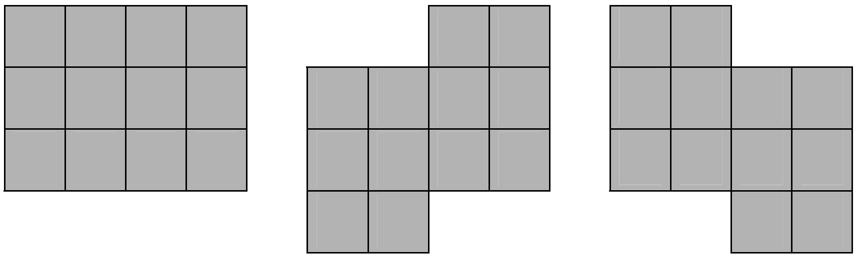
La figura muestra todas las posibles maneras de recubrir el cuadrado unidad A, situado en el vértice superior izquierdo de un rectángulo mx5, utilizando piezas descritas en el lema 1. En cada caso, el cuadrado B no puede cubrirse con ninguna pieza mostrada en el lema 1 sin superposiciones o sin salirse. Luego $n \neq 5$. De forma análoga, rotando las figuras, se demuestra que $m \neq 5$.

Lema 3: Si 4 divide a m y 3 a n (o viceversa) el rectángulo siempre se puede recubrir con ganchos sin huecos, sin superposiciones y sin salirse.
Demostración: Divídase el rectángulo mxn en $m/4$ rectángulos 4xn. Divídase a continuación cada uno de ellos en ($n/3$) rectángulos 4x3. Es entonces obvio que se puede recubrir el rectángulo, sin huecos, sin superposiciones y sin salirse mediante rectángulos 4x3, pudiendo cada rectángulo 4x3 recubrirse sin huecos, sin superposiciones y sin salirse mediante 2 ganchos por el lema 1. Luego también puede recubrirse de tal manera el rectángulo mxn, q.e.d.. La demostración es análoga si 3 divide a m y 4 a n considerando ($m/3$)($n/4$) rectángulos 3x4.

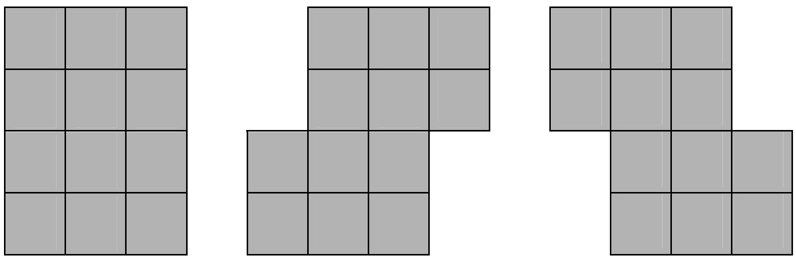
Lema 4: Si 12 divide a m, entonces el rectángulo se puede recubrir si y sólo si $n \geq 3$, $n \neq 5$ (o viceversa).
Demostración: Si 3 o 4 dividen a n, entonces por el lema 3 el rectángulo mxn puede recubrirse de acuerdo al enunciado. En caso contrario, siempre podemos escribir $n=4a+3b$ con a y b enteros positivos, pues $7=4+3$, $10=2\cdot 3+4$, $11=2\cdot 4+3$, y para todo n natural distinto de estos tres que cumpla $n \geq 3$, $n \neq 5$ sin ser múltiplo ni de 3 ni de 4, entonces $n \geq 13$, con lo que bien $n-3$, bien $n-6$, bien $n-9$ son múltiplos positivos de 4, pudiendo entonces tomarse $b=1$, 2 o 3, y $a=(n-3)/4$, $(n-6)/4$ o $(n-9)/4$, respectivamente. Divídase ahora el rectángulo mxn en un rectángulo mx$4a$ y un rectángulo mx$3b$, cada uno de los cuales puede recubrirse por el lema 3 mediante ganchos sin huecos, sin superposiciones y sin salirse. Luego también puede recubrirse así el rectángulo mxn, q.e.d..

Teorema: Los casos considerados en los lemas 3 y 4 son los únicos en los que un rectángulo mxn puede recubrirse mediante ganchos sin huecos, sin superposiciones y sin salirse.

Demostración: Por el lema 1, un rectángulo que se pueda recubrir por ganchos se puede recubrir por piezas de 12 cuadrados, luego 12 divide a mn. Supongamos ahora que existen m y n tales que el rectángulo mxn puede recubrirse mediante ganchos, pero m y n no satisfacen las hipótesis de los lemas 3 o 4. Entonces, como 12 divide a mn, 3 divide a m (sin pérdida de generalidad). Si no se satisfacen las condiciones de los lemas, 4 no divide ni a m ni a n. Pero como 4 divide a su producto, ambos deben ser pares pero no múltiplos de 4. Luego 6 divide a m y 2 a n, siendo $m/6$ y $n/2$ impares (o viceversa). De las piezas que se pueden conseguir aplicando rotaciones o reflexiones a las mostradas en el lema 1, llamaremos horizontales a las tres siguientes:



Llamaremos verticales a las tres siguientes:



Por el lema 1, si un rectángulo mxn puede recubrirse por ganchos, entonces puede recubrirse mediante piezas de estos 6 tipos sin huecos, sin superposiciones y sin salirse. Ahora bien, cada pieza horizontal recubre un número impar (3) de cuadrados de 4 columnas adyacentes, y un número par (2 o 4) de 3 o 4 filas adyacentes, mientras que cada pieza vertical recubre un número par (2 o 4) de 3 o 4 columnas adyacentes, y un número impar (3) de 4 filas adyacentes. Luego como m y n son pares, cada fila tiene intersección no vacía con un número par de piezas verticales, y cada columna con un número impar de piezas horizontales. Sea ahora el v_i número de piezas verticales que tienen intersección no vacía con las filas i, $i+1$, $i+2$ e $i+3$ (siendo por definición $v_{m-2}=v_{m-1}=v_m=0$). Entonces, la suma de cada 4 v_i consecutivos es par, siendo pares además v_1, v_1+v_2 (con lo que v_2 también es par) y $v_1+v_2+v_3$ (con lo que v_3 también es par). Por inducción, es trivial ver que todos los v_i son pares, pues para $i\geq 4$, y tomando como hipótesis de inducción que v_{i-1}, v_{i-2} y v_{i-3} son pares, al ser su suma con v_i par, también es par v_i. Como el número total de piezas verticales utilizadas en el recubrimiento es igual a la suma de los v_i, y todos ellos son pares, el número total de piezas verticales utilizadas es par. De forma enteramente análoga se demuestra que es par el número de piezas horizontales utilizadas. Luego el número total de piezas de 12 cuadrados cada una utilizadas para recubrir al rectángulo mxn es par, y 24 divide a mn. Contradicción, pues mn/12 es impar por hipótesis. Luego no se puede recubrir de la forma descrita en el enunciado ningún rectángulo que no cumpla las hipótesis de los lemas 3 o 4, q.e.d..

Luego un rectángulo mxn se puede recubrir mediante ganchos sin huecos, sin superposiciones y sin salirse si y solamente si bien m o n es múltiplo de 12 siendo el otro mayor o igual que 3 y distinto de 5, bien si uno de ellos es múltiplo de 3 y el otro de 4.

IMO 2004 Problema 4

Sea $n\geq 3$ un entero. Sean $t_1,t_2,...,t_n$ números reales positivos tales que

$$n^2+1>\left(t_1+t_2+...+t_n\right)\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+...+\frac{1}{t_n}\right).$$

Demostrar que t_i, t_j, t_k son las medidas de un triángulo para todos los i, j, k con $1\leq i<j<k\leq n$.

Solución de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, Navarra, España.

Lema: sean $t_1,t_2,...,t_n$ números reales positivos cualesquiera con $n\geq 3$. Si existen tres cualesquiera distintos de entre ellos, t_i, t_j, t_k, tales que se verifica la siguiente desigualdad:

$$\left(t_i+t_j+t_k\right)\left(\frac{1}{t_i}+\frac{1}{t_j}+\frac{1}{t_k}\right)\geq 10,$$

entonces se cumple como consecuencia que

$$\left(t_1+t_2+...+t_n\right)\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+...+\frac{1}{t_n}\right)\geq n^2+1.$$

Demostración:

Obviamente, el lema se cumple trivialmente para n=3. Supongamos ahora que para algún $n\geq 3$ el lema se cumple para todos los conjuntos de n reales positivos tales que tres cualesquiera de ellos verifican la hipótesis del lema. Sea ahora A un conjunto de n+1 reales positivos tal que tres de ellos verifican la hipótesis del lema. Entonces, la tesis del lema se cumple para cualquier subconjunto de A con n elementos que incluye a los tres que verifican la hipótesis del lema verifica la tesis del lema. Sin perdida de generalidad, sea $\{t_1,t_2,...,t_n\}$ uno de dichos subconjuntos. Entonces,

$$\begin{aligned}&\left(t_1+...+t_n+t_{n+1}\right)\left(\frac{1}{t_1}+...+\frac{1}{t_n}+\frac{1}{t_{n+1}}\right)\\ &=\left(t_1+...+t_n\right)\left(\frac{1}{t_1}+...+\frac{1}{t_n}\right)+\left(\frac{t_1}{t_{n+1}}+\frac{t_{n+1}}{t_1}\right)+...+\left(\frac{t_n}{t_{n+1}}+\frac{t_{n+1}}{t_n}\right)+1\\ &\geq n^2+1+\left(\frac{t_1}{t_{n+1}}+\frac{t_{n+1}}{t_1}\right)+...+\left(\frac{t_n}{t_{n+1}}+\frac{t_{n+1}}{t_n}\right)+1.\end{aligned}$$

Por la desigualdad de medias aritmética y geométrica aplicada a t_i/t_{n+1} y t_{n+1}/t_i, que son reales y positivos, su suma es mayor o igual que 2, por ser su producto 1, luego

$$\left(t_1+...+t_n+t_{n+1}\right)\left(\frac{1}{t_1}+...+\frac{1}{t_n}+\frac{1}{t_{n+1}}\right)\geq n^2+1+2n+1=\left(n+1\right)^2+1.$$

Luego el lema queda probado para todo $n\geq 3$ por inducción.

Sean ahora $t_1,t_2,...,t_n$ números reales positivos que satisfacen la desigualdad del enunciado del problema. Para tres cualesquiera distintos de entre ellos, t_i, t_j y t_k, se cumple que

$$\left(t_i+t_j+t_k\right)\left(\frac{1}{t_i}+\frac{1}{t_j}+\frac{1}{t_k}\right)<10,$$

pues en caso contrario, y por el lema demostrado, se llegaría a una contradicción con la hipótesis del enunciado. Supongamos ahora, sin pérdida de generalidad, que $t_k\geq t_i,t_j$, y definamos $t_k=r(t_i+t_j)$ donde r es obviamente un real positivo. Se tiene entonces que

$$10>\left(t_i+t_j+t_k\right)\left(\frac{1}{t_i}+\frac{1}{t_j}+\frac{1}{t_k}\right)=3+t_k\,\frac{t_i+t_j}{t_it_j}+\frac{t_i+t_j}{t_k}+\frac{t_i}{t_j}+\frac{t_j}{t_i}$$

$$=3+r\,\frac{\left(t_i+t_j\right)^2}{t_it_j}+\frac{1}{r}+\frac{t_i}{t_j}+\frac{t_j}{t_i}\geq 5+4r+\frac{1}{r},$$

donde se han aplicado las desigualdades de las medias aritmética y geométrica a t_i/t_j y t_j/t_i, y a t_i y t_j. Como r es positivo, podemos escribir:

$$10r>5r+4r^2+1; \qquad\qquad 0>4r^2-5r+1=\left(4r-1\right)\left(r-1\right).$$

Por ser $t_k\geq t_i,t_j$, $2r(t_i+t_j)=2t_k\geq t_i+t_j$ y $r\geq 1/2$, luego $4r-1\geq 1>0$, con lo que $r-1<0$, y $t_k<t_i+t_j$, luego t_i, t_j y t_k son los lados de un triángulo para cualesquier i, j, k distintos, q.e.d..

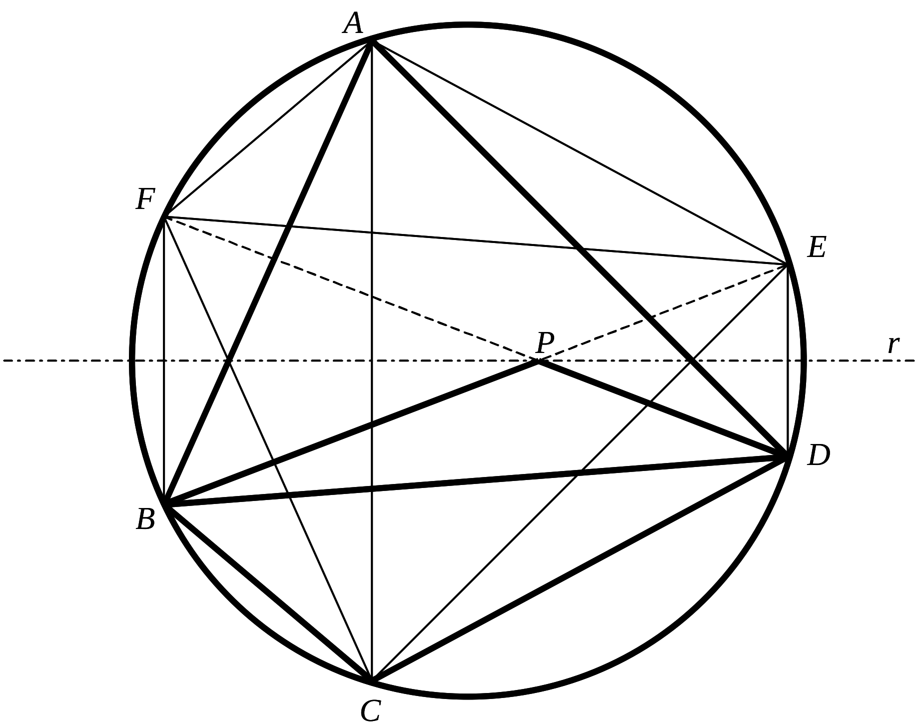
IMO 2004 Problema 5

En un cuadrilátero convexo $ABCD$ la diagonal BD no es la bisectriz ni de $\angle ABC$ ni de $\angle CDA$. Un punto P en el interior de $ABCD$ verifica $\angle PBC=\angle DBA$ y $\angle PDC=\angle BDA$. Demostrar que los vértices del cuadrilátero $ABCD$ pertenecen a una circunferencia si y sólo si $AP=CP$.

Solución de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, Navarra, España.

Antes de empezar, se considera que $\angle PBC=\angle DBA$ es equivalente a $\angle DBC=\angle PBA$, como se demuestra sumando $\angle PBD$ a ambos lados de la igualdad inicial (siendo $\angle PBD$ negativo si P está en el interior del triángulo BCD). De igual manera, se demuestra que $\angle PDC=\angle BDA$ es equivalente a $\angle BDC=\angle PDA$.

Supongamos ahora que P está sobre la diagonal BD. Entonces, $\angle DBC=\angle PBC=\angle DBA$ y $\angle BDC=\angle PDC=\angle BDA$, con lo que BD es la bisectriz de $\angle ABC$ y de $\angle CDA$, que es falso por hipótesis. Podemos entonces asumir, sin pérdida de generalidad, que P está en el interior del triángulo ABD, pues por simetría en el enunciado y en las fórmulas demostradas anteriormente, A y C pueden intercambiarse sin que varíen ni las condiciones del problema ni los resultados a demostrarse.



Supongamos entonces que $ABCD$ es cíclico. Sean E y F los puntos respectivos donde PB y PD cortan de nuevo a la circunferencia circunscrita a $ABCD$. Se tiene que, al ser $\angle EBC=\angle PBC=\angle DBA$, entonces $AD=CE$; además, al ser $\angle DBC=\angle PBA=\angle EBA$, entonces $AE=CD$. Al ser sin pérdida de generalidad P interior al triángulo ABD, E está en el arco AD que no contiene a C, por lo que $ACDE$ es un cuadrilátero cíclico tal que sus diagonales son iguales, y dos de sus lados opuestos también. Por lo tanto, $ACDE$ es un trapecio isósceles (propiedad conocida) de bases AC y DE, que tienen por lo tanto una mediatriz común. De manera análoga se demuestra que $AB=CF$ y $AF=BC$, y en consecuencia que $ACBF$ es un trapecio isósceles con bases AC y BF. Por lo tanto, las cuerdas AC, BF y DE tienen una mediatriz común r, con respecto a la cual los segmentos BE y DF son simétricos. Luego al ser P el punto común de ambos segmentos, P está en r, y concluimos que $AP=CP$, q.e.d..

Sea ahora $AP=CP$. Aplicando el teorema del seno a los triángulos APB, BPC, CPD, DPA, ABD y BCD, se obtienen las siguientes igualdades:

$$PA=\frac{AB\sin(\angle PBA)}{\sin(\angle APB)}=\frac{AD\sin(\angle PDA)}{\sin(\angle APD)};\qquad PC=\frac{BC\sin(\angle PBC)}{\sin(\angle BPC)}=\frac{CD\sin(\angle PDC)}{\sin(\angle CPD)};$$

$$\frac{BC}{CD}=\frac{\sin(\angle BDC)}{\sin(\angle CBD)};\qquad \frac{AB}{AD}=\frac{\sin(\angle BDA)}{\sin(\angle ABD)}.$$

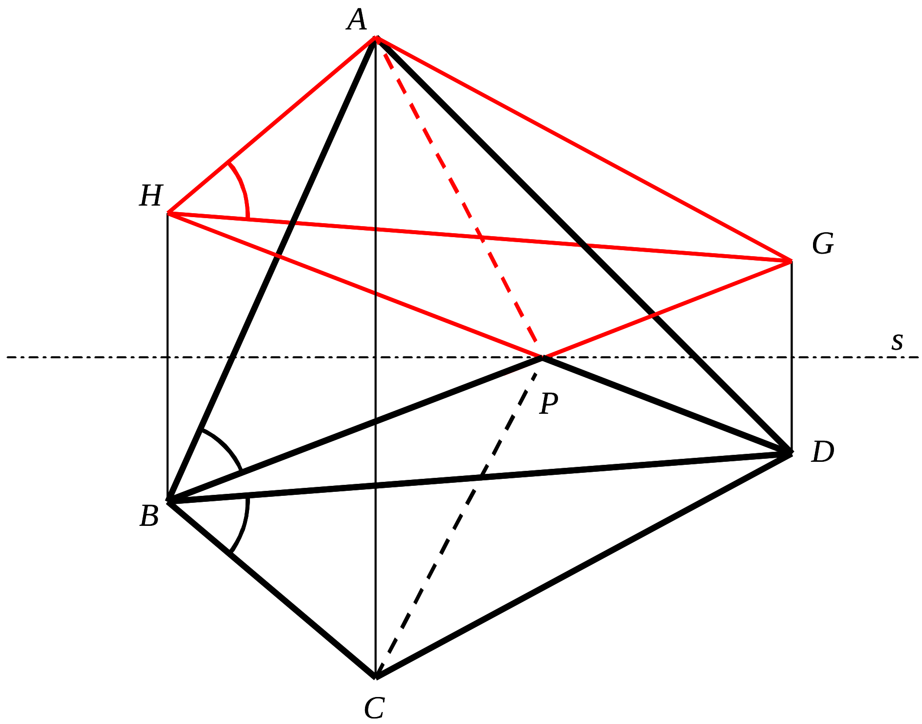
Se tiene entonces que

$$\frac{\sin(\angle APD)}{\sin(\angle APB)}=\frac{AD}{AB}\frac{\sin(\angle PDA)}{\sin(\angle PBA)}=\frac{\sin(\angle ABD)}{\sin(\angle BDA)}\frac{\sin(\angle BDC)}{\sin(\angle DBC)}$$
$$=\frac{\sin(\angle PBC)}{\sin(\angle PDC)}\frac{BC}{CD}=\frac{\sin(\angle BPC)}{\sin(\angle CPD)};$$

$$\cos(\angle APD-\angle CPD)-\cos(\angle APD+\angle CPD)=2\sin(\angle APD)\sin(\angle CPD)$$
$$=2\sin(\angle BPC)\sin(\angle APB)=\cos(\angle BPC-\angle APB)-\cos(\angle BPC+\angle APB)$$
$$=\cos(\angle BPC-\angle APB)-\cos(2p-\angle APD-\angle CPD);$$

$$\cos(\angle APD-\angle CPD)=\cos(\angle BPC-\angle APB).$$

Existen entonces dos posibilidades: bien $\angle APD-\angle CPD=\angle BPC-\angle APB$, con lo que $\angle APD+\angle APB=\angle BPC+\angle CPD=p$ que es absurdo, pues en ese caso P estaría en la diagonal BD, que ha sido ya demostrado que está en contradicción con las hipótesis del enunciado, bien $\angle APD-\angle CPD=\angle APB-\angle BPC$, de donde deducimos por lo tanto que debe cumplirse necesariamente que $\angle APD+\angle BPC=\angle APB+\angle CPD=p$.



Sea entonces ahora la siguiente construcción geométrica: definimos *G* y *H* como los puntos en las rectas *PB* y *PD*, respectivamente, y tales que *P* está en el interior de los segmentos *BG* y *DH*, con $PG=PD$ y $PH=PB$. Sea *s* la bisectriz interior de los ángulos formados por las rectas *PB* y *PD* que deja *B* y *D* en el mismo semiplano. Por construcción, *H* y *G* son los puntos simétricos de *B* y *D*, respectivamente, con respecto a *s*, y *s* es la mediatriz común de *BH* y *DG*. Por hipótesis, $AP=CP$, y por construcción, $\angle APG=p-\angle APB=\angle CPD$, con lo que los triángulos *APG* y *CPD* son simétricos con respecto a *s*, siendo además $AG=CD$. De la misma forma se demuestra que los triángulos *APH* y *CPB* son simétricos con respecto a *s*, siendo además $AH=BD$. Por construcción $GH=BD$, con lo que los triángulos *BCD* y *HAG* son simétricos con respecto a *s*. Luego *A* y *C* son simétricos con respecto a *s*. Ahora bien, *BDGH* es cíclico al ser por consctrucción un trapecio isósceles de bases *BH* y *DG*, siendo *s* un eje de simetría de su circunferencia circunscrita, al ser mediatriz común de dichas bases. Además, $\angle GHA=\angle DBC=\angle PBA=\angle GBA$, con lo que *AHBG* es cíclico, y *A* está en la circunferencia circunscrita a *BDGH*, y por ser *C* simétrico de *A* con respecto a *s*, *C* también está en dicha circunferencia. Luego *ABCD* es cíclico, q.e.d..

IMO 2004 Problema 6

Un entero positivo es *alternante* si, en su representación decimal, en toda pareja de dígitos consecutivos uno es par y el otro impar. Encontrar todos los enteros positivos n tales que n tiene un múltiplo que es alternante.

Solución de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, Navarra, España.

Obviamente, los múltiplos de 20 no pueden ser nunca alternantes, ya que en cualquier caso su última cifra es 0 y su penúltima cifra es par, luego sus dos últimas cifras son pares. Entonces, ni 20 ni sus múltiplos pueden tener múltiplos alternantes. Demostraremos sin embargo que todo entero n no múltiplo de 20 sí tiene al menos un múltiplo alternante, a través de lemas intermedios:

Lema 1: Para cada entero $a \geq 1$, todo entero positivo n primo con 2 y 5 tiene un múltiplo de la forma

$$\sum_{b=0}^{B-1} 10^{2ab} = 10^{2a(B-1)} + 10^{2a(B-2)} + \ldots + 10^{2a} + 1 = \frac{10^{2aB} - 1}{10^{2a} - 1}.$$

Demostración: Obviamente, n es primo con 10. Por lo tanto, por el teorema de Euler-Fermat, se tiene que $10^{f(n)} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ n)$, donde $f(n)$ es el indicador de n. Si $10^{2a}-1$ es múltiplo de n, entonces se tiene que, para todo entero $b \geq 1$, $10^{2ab} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ n)$, con lo que

$$\frac{10^{2an} - 1}{10^{2n} - 1} = \sum_{b=0}^{n-1} 10^{2an} \equiv \sum_{b=0}^{n-1} 1 \equiv n (\mathrm{mod}\, n)$$

es múltiplo de n. En caso contrario, considérese el siguiente número:

$$\sum_{b=0}^{f(n)-1} 10^{2ab} = \frac{10^{2af(n)} - 1}{10^{2a} - 1}.$$

Ahora bien, en la anterior fracción el denominador no es múltiplo de n por hipótesis, pero el numerador sí (ya que $10^{2af(n)} \equiv 1^{2a} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ n)$), a la vez que la fracción tiene valor entero. Por lo tanto, la fracción define un entero múltiplo de n. Entonces, sea cual sea a, hemos demostrado que se puede construir un entero de la forma

$$\sum_{b=0}^{B-1} 10^{2ab} = \frac{10^{2aB} - 1}{10^{2a} - 1}$$

que es múltiplo de n, q.e.d..

Lema 2: Toda potencia de 5 de la forma 5^{2u} ($u\geq 1$) tiene un múltiplo impar alternante de $2u$ cifras. Como corolario obvio, toda potencia de 5 tiene un múltiplo impar alternante con un número par de cifras.

Demostración: El lema es obvio para $u=1$, pues 25 es múltiplo de 5^2. Supongamos que el lema es válido para u. Entonces existe un número alternante de $2u$ cifras que podemos escribir como $5^{2u}m$. Sea ahora r el resto de dividir m por 25. Entonces, el resto de dividir $5^{2u}m$ por $5^{2(u+1)}$ es $5^{2u}r$. Considérense ahora todos los números de la forma

$$5^{2u}m+s10^{2u}=\left(m+2^{2u}s\right)5^{2u},$$

donde s es un número alternante impar de dos cifras. Como exactamente las últimas $2u$ cifras de $s10^{2u}$ son cero, y las dos restantes son, la primera par, la segunda impar, los números de la forma definida son alternantes (la primera de las $2u$ cifras de $5^{2u}m$ es par, pues es un número alternante de número par de cifras que acaba en cifra impar) y tienen $2(u+1)$ cifras. Nos basta entonces encontrar un s tal que dicho número sea también múltiplo de $5^{2(u+1)}$ (es decir, tal que 25 divida a $m+2^{2u}s$) para demostrar el lema 2 por inducción sobre u. Tenemos entonces que encontrar un número alternante impar de dos cifras tal que

$$m+2^{2u}s\equiv r+2^{2u}s\equiv 0\left(\operatorname{mod} 25\right).$$

Ahora bien, es obvio que

$$2^{2u}\equiv 4^{u}\equiv(-1)^{u}\left(\operatorname{mod} 5\right),$$

con lo que

$$2^{2u}s\equiv(-1)^{u}s\left(\operatorname{mod} 25\right).$$

Si u es par, elegimos s entre el conjunto $\{25-r,50-r,75-r,100-r\}$. Uno de ellos es alternante, pues $50-r$ y $100-r$ por un lado, y $75-r$ y $25-r$ por otro, difieren uno de otro en la paridad de las decenas, mientras que $50-r$ y $75-r$ por un lado, y $100-r$ y $25-r$ por otro, difieren en la paridad de las unidades. Luego uno de estos cuatro números tiene cifra de decenas par y cifra de unidades impar, y por lo tanto es alternante impar de dos cifras. Si u es impar, entonces elegimos s entre el conjunto $\{r,25+r,50+r,75+r\}$, siendo igualmente uno de ellos alternante impar. Luego hemos hallado un número impar alternante de $2(u+1)$ cifras que es múltiplo de $5^{2(u+1)}$, con lo que el lema 2 queda probado por inducción.

Lema 3: Toda potencia de 2 de la forma $2^{2(v+1)}$ ($v \geq 1$) tiene un múltiplo alternante (obviamente par) de $2v$ cifras que no es múltiplo de 2^{2v+3}. Como corolario obvio, toda potencia de 2 tiene un múltiplo alternante con un número par de cifras.

Demostración: El lema se cumple obviamente para v=1, pues 16 es múltiplo alternante de 2^4, pero no de 2^5. Demostraremos ahora el lema 3 para todo v por inducción. Supongamos entonces que el lema 3 se cumple para v. Entonces existe un número alternante de $2v$ cifras, que es múltiplo de $2^{2(v+1)}$ pero no de 2^{2v+3}, es decir, existe un número de $2v$ cifras que podemos escribir como $2^{2(v+1)}m$ con m impar. Consideremos el siguiente número:

$$2^{2(v+1)}m + s10^{2v} = \left(m + \frac{5^{2v}s}{4} \right) 2^{2(v+1)},$$

donde s es alternante de dos cifras y múltiplo de 4 pero no de 8. Obviamente, el número así construido tiene una expresión digital formada por un número par alternante de dos cifras, seguido por un número par alternante de $2v$ cifras cuya primera cifra es por lo tanto impar. Se tiene entonces que el número formado es un número par, alternante y de $2(v+1)$ cifras. Ahora bien, como el resto de dividir 5^2 por 4 y por 8 es 1, se tiene que

$$m + \frac{5^{2v}s}{4} \equiv m + \frac{s}{4} \pmod{4};$$

$$m + \frac{5^{2v}s}{4} \equiv m + \frac{s}{4} \pmod{8}.$$

Por lo tanto, si conseguimos elegir s tal que $m+s/4$ sea múltiplo de 4 pero no de 8, habremos probado el lema 3. Pero esto es siempre posible, ya que si $m \equiv 1 \pmod 8$, podemos tomar s=12, mientras que si $m \equiv 5 \pmod 8$, podemos tomar s=92, a la vez que si $m \equiv 3 \pmod 8$, podemos tomar s=36, mientras que si $m \equiv 7 \pmod 8$, podemos tomar s=52. Luego por inducción, y para todo $v \geq 1$, hemos demostrado como construir un número alternante de $2(v+1)$ cifras que es múltiplo de $2^{2(v+1)}$ pero no de 2^{2v+3}, q.e.d..

Teorema: Todo entero positivo n que no es múltiplo de 20 posee un múltiplo alternante.

Demostración: Caso 1: Supongamos que n es impar y no es múltiplo de 5. Entonces, por el lema 1 con a=1, n tiene un múltiplo de la forma

$$\frac{10^{2B}-1}{10^2-1} = \sum_{b=0}^{B-1} 10^{2b} = 10101...101,$$

que es obviamente alternante y además es impar.

Caso 2: Supongamos ahora que n es impar y múltiplo de 5. Lo podemos entonces escribir como

$$n = 5^u n',$$

donde 5 no divide a n' y $u \geq 1$. Sea ahora u' entero tal que $2u' \geq u$. Por el lema 2, podemos encontrar un número alternante de $2u'$ cifras que es múltiplo de $5^{2u'}$, y por lo tanto de 5^u. Al mismo tiempo, por el lema 1, podemos encontrar un múltiplo de n' de la forma

$$\sum_{b=0}^{B-1} 10^{2u'b} = \frac{10^{2u'B} - 1}{10^{2u'} - 1}.$$

El resultado del producto de estos dos números es una cadena de $2u'B$ dígitos, que se puede dividir en B grupos idénticos de $2u'$ dígitos alternantes, de forma que en cada uno de los B grupos el primer dígito es par y el último 5. Por lo tanto, el número así construido es alternante, y por su construcción es múltiplo de n, y además impar.

Caso 3: Supongamos ahora que n es par de la forma $2^v n'$, con $v \geq 1$ y donde n' es impar pero no múltiplo de 5. Sea entonces v' un entero positivo tal que $2(v'+1) \geq v$. Por el lema 3, existe un número alternante de $2v'$ cifras que es múltiplo de $2^{2(v'+1)}$, y por lo tanto de 2^v. Al mismo tiempo, por el lema 1, existe un múltiplo de n' de la forma

$$\sum_{b=0}^{B-1} 10^{2v'b} = \frac{10^{2v'B} - 1}{10^{2v'} - 1}.$$

El resultado del producto de estos dos números es una cadena de $2v'B$ dígitos, que se puede dividir en B grupos idénticos de $2v'$ dígitos de paridad alternante, de forma que en cada uno de los B grupos el primer dígito es impar y el último par. Por lo tanto, el número así construido es alternante, y por su construcción es múltiplo de n.

Caso 4: Supongamos ahora que n es par y múltiplo de 5, pero no es múltiplo de 20. Luego 4 no divide a n. Podemos entonces escribir $n=10n'$, donde n' es impar. Por lo tanto, n' pertenece al caso 1 o 2, con lo que podemos encontrar un múltiplo alternante impar de n'. Ahora bien, 10 veces ese múltiplo alternante impar sigue siendo alternante, y por construcción es múltiplo de n.

Luego siempre que n no sea múltiplo de 20, hemos demostrado que podemos encontrar un múltiplo alternante de n. Como además, si n es múltiplo de 20, es imposible que tenga un múltiplo alternante, la respuesta al problema es que tienen múltiplos alternantes todos los enteros positivos salvo los múltiplos de 20.

Hallar todos los números naturales m tales que

$$1!\cdot 3!\cdot 5!\cdot\ldots\cdot(2m-1)! = \left(\frac{m(m+1)}{2}\right)!\,.$$

Solución de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, Navarra, España.

Denotaremos por x_m al miembro de la izquierda y por y_m al de la derecha, es decir,

$$x_m = 1!\cdot 3!\cdot 5!\cdot\ldots\cdot(2m-1)!; \qquad y_m = \left(\frac{m(m+1)}{2}\right)!\,.$$

Se puede calcular fácilmente que:

$$x_1 = 1! = \left(\frac{1(1+1)}{2}\right)! = y_1; \qquad x_2 = 1!\cdot 3! = 3! = \left(\frac{2(2+1)}{2}\right)! = y_2;$$

$$x_3 = 1!\cdot 3!\cdot 5! = 6\cdot 5! = 6! = \left(\frac{3(3+1)}{2}\right)! = y_3;$$

$$x_4 = 1!\cdot 3!\cdot 5!\cdot 7! = 2^2\cdot 3^2\cdot 4\cdot 5\cdot 7! = 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7! = 10! = \left(\frac{4(4+1)}{2}\right)! = y_4\,.$$

Por lo tanto, la igualdad propuesta se cumple para m=1, 2, 3 y 4. Probaremos ahora que éstas son las únicas soluciones.

Definimos $P_2(x)$ como la máxima potencia de 2 que divide a x. Es conocido que

$$P_2(n!) = \sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{n}{2^i}\right].$$

Utilizando que $P_2(x_4)=P_2(y_4)$ por ser $x_4=y_4$, demostraremos que, para $m\geq 5$, $P_2(x_m)>P_2(y_m)$. Para ello, compararemos $P_2(x_m)$ y $P_2(x_{m+1})$ por un lado, y $P_2(y_m)$ y $P_2(y_{m+1})$ por otro:

$$P_2(x_{m+1}) = P_2((2m+1)!\cdot x_m) = P_2((2m+1)!) + P_2(x_m);$$

$$P_2((2m+1)!) = \sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{2m+1}{2^i}\right] \geq \sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{2m}{2^i}\right] = m + \sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{m}{2^i}\right] = m + P(m!);$$

$$P_2(x_{m+1}) - P_2(x_m) \geq m + P_2(m!)\,.$$

Consideremos ahora el conjunto $A_{m+1}=\{m(m+1)/2+1, m(m+1)/2+2, \ldots, (m+1)(m+2)/2\}$, que tiene obviamente m+1 elementos que son enteros consecutivos. Sea a el exponente de la mayor potencia de 2 que tiene un múltiplo contenido en A_{m+1}. Entonces, existe al menos un número de la forma $2^a c$ (con c impar) incluido en ese A_{m+1}. Ahora bien, 2^a no divide a ningún otro elemento de ese conjunto, pues por definición ningún elemento de A_{m+1} es múltiplo de 2^{a+1}, y si existe otro número que es de la forma $2^a c'$, siendo c' otro impar distinto de c, entonces existe al menos un número par entre c y c', y 2^a multiplicado por dicho número par sería múltiplo de 2^{a+1} y estaría incluido en A_{m+1}, lo cual es absurdo. Podemos entonces escribir cada elemento del conjunto como $2^a c+x$ o como $2^a c-x$, eligiendo siempre x como no negativo. Ahora bien, si x es no nulo y $2^a c+x$ o $2^a c-x$ está en A_{m+1}, entonces $P_2(2^a c+x)=P_2(2^a c-x)=P_2(x)$, que se demuestra así: si 2^b divide a x, y $b\geq a$, entonces 2^a divide a x, y por lo tanto también divide a $2^a c+x$ y a $2^a c-x$, que es absurdo si uno de los dos está en A_{m+1}; si 2^b divide a x, y $b<a$, entonces 2^b también divide a 2^a, y 2^b divide tanto a $2^a c+x$ como a $2^a c-x$. Recíprocamente, sabemos que si 2^b divide a $2^a c+x$ o a $2^a c-x$, con x no nulo y estando al menos uno de ellos en A_{m+1}, entonces $b<a$, con lo que 2^b también divide a 2^a, y 2^b debe por lo tanto dividir a x. Supongamos que podemos escribir el menor número de A_{m+1} como 2^a-y. Entonces, al haber $m+1$ elementos en A_{m+1}, el mayor elemento de A_{m+1} es 2^a+m-y, con lo que

$$\begin{aligned} P_2(y_{m+1})-P_2(y_m) &= \sum_{j=1}^{y} P_2(2^a c-j)+\sum_{j=1}^{m-y} P_2(2^a c+j)+a=\sum_{j=1}^{y} P_2(j)+\sum_{j=1}^{m-y} P_2(j)+a \\ &= P_2(y!)+P_2((m-y)!)+a. \end{aligned}$$

Ahora bien, como el número de combinaciones de m elementos tomados de y en y es un número entero, se tiene que $(m-y)!y!$ divide a $m!$, con lo que

$$P_2(m!)\geq P_2(y!)+P_2((m-y)!).$$

Se tiene entonces que

$$\begin{aligned} P_2(x_{m+1})-P_2(y_{m+1}) &\geq P_2(x_m)-P_2(y_m)+m-a+P_2(m!)-P_2(y!)-P_2((m-y)!) \\ &\geq P_2(x_m)-P_2(y_m)+m-a. \end{aligned}$$

Ahora bien, como $2^a c\leq(m+1)(m+2)/2$, y si $m\geq 4$, entonces $2^m\geq m^2$, se deduce que

$$\frac{(m+1)(m+2)}{2}=\frac{m^2+3m+2}{2}<\frac{m^2+4m}{2}\leq m^2\leq 2^m.$$

Por lo tanto, si $m\geq 4$ entonces $a<m$, y

$$P_2(x_{m+1})-P_2(y_{m+1})>P_2(x_m)-P_2(y_m).$$

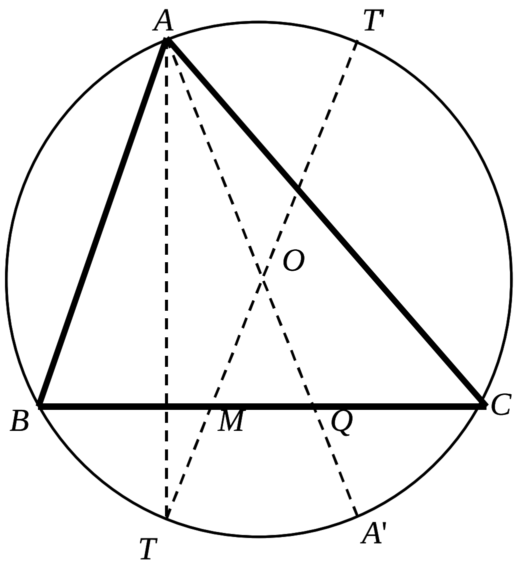
Luego si $P_2(x_m)\geq P_2(y_m)$ con $m\geq 4$, entonces $P_2(x_{m+1})>P_2(y_{m+1})$, y se ha demostrado por inducción que para $m\geq 5$, $P_2(x_m)>P_2(y_m)$, luego no puede haber soluciones con $m\geq 5$.

En el triángulo *ABC*, la altura desde *A* corta a la circunferencia circunscrita en *T*. El diámetro de la circunferencia circunscrita que pasa por *A* y la recta *OT* (*O*, circuncentro) cortan al lado *BC* en *Q* y *M*, respectivamente. Demostrar que

$$\frac{[AQC]}{[MTC]}=\left(\frac{\sin B}{\cos C}\right)^2$$

donde [ ] representa el área.

Solución de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, Navarra, España.



Obviamente, la recta *OT* contiene a un diámetro de la circunferencia circunscrita. Sean *A'*, *T'* los segundos puntos donde los diámetros por *A* y *T* respectivamente cortan a la circunferencia circunscrita. Es entonces obvio que *ATA'T'* es un rectángulo, por ser $\angle ATA'=\angle AT'A'$ y $\angle TAT'=\angle TA'T'$ rectos al ser *AA'* y *TT'* diámetros. Además, por ser *AT* perpendicular a *BC*, también lo es *A'T'*, y *AT'* y *TA'* son paralelos a *BC*. Por lo tanto, los ángulos que forman *AA'* y *TT'* con *BC* son iguales, o lo que es lo mismo, $\angle AQC=\angle TMC$. Es obvio también que *AT'* y *TA'* son simétricos con respecto a la mediatriz común de *TA'* y *AT'*, que es la perpendicular a *BC* por el punto medio del rectángulo, es decir *O*. Por lo tanto, *CT'*=*AB*, y por el teorema del seno, $\angle CTM=\angle CTT'=\angle C=\angle ACQ$. De aquí podemos concluir que los triángulos *AQC* y *CMT* son semejantes, y en consecuencia, que

$$\frac{[AQC]}{[CMT]}=\left(\frac{AC}{CT}\right)^2.$$

Ahora bien, siendo r el radio de la circunferencia circunscrita, se tiene por el teorema del seno que $AC=2r\sin B$. Por otra parte, $\angle CAT=\angle BAC-\angle BAT$, y al ser AT perpendicular a BC, $\angle BAT=p/2-\angle B$, es decir, $\angle CAT=\angle A+\angle B-p/2=p/2-\angle C$, con lo que $CT=2r\sin(\angle CAT)=2r\cos C$. Sustituyendo estos dos valores encontrados para AC y CT en la ecuación anterior para el cociente de las áreas y simplificando, se obtiene el resultado buscado.

Si *a*, *b*, *c* son números positivos tales que

$$1 = ab + bc + ca + 2abc\,,$$

demostrar que

$$2(a+b+c)+1 \geq 32abc\,.$$

¿Cuándo se verifica la igualdad?

Solución de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, Navarra, España.

De la igualdad dada, aplicando la desigualdad entre medias aritmética y geométrica a *ab*, *bc* y *ca*, que son positivos, y llamando *G* a la media geométrica de *a, b* y *c*, se tiene:

$$\frac{1-2G^3}{3} = \frac{1-2abc}{3} = \frac{ab+bc+ca}{3} \geq \sqrt[3]{a^2b^2c^2} = G^2\,;$$

$$0 \geq 2G^3 + 3G^2 - 1 = (G+1)^2(2G-1)\,.$$

Como *G* es positivo, se deduce que $G \leq 1/2$. Podemos ahora deducir también que:

$$ab+bc+ca = 1-2abc = 1-2G^3 \geq 1-\frac{1}{4} = \frac{3}{4}\,.$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwartz a los vectores (a,b,c) y (b,c,a), se tiene

$$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca \geq \frac{3}{4}\,.$$

Por lo tanto, se llega a

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) \geq \frac{3}{4}+2\frac{3}{4} = \frac{9}{4} = \left(\frac{3}{2}\right)^2.$$

Como $a+b+c$ es positivo, se demuestra finalmente que

$$2(a+b+c)+1 \geq 2\frac{3}{2}+1 = 4 \geq 32G^3 = 32abc\,,$$

q.e.d.. Como hemos aplicado la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica de *ab*, *bc* y *ca*, y la desigualdad de Cauchy-Schwartz a (a,b,c) y (b,c,a), la igualdad se da si y solamente si $a=b=c=G=1/2$.

Sean z_1, z_2, z_3 números complejos mutuamente distintos, tales que

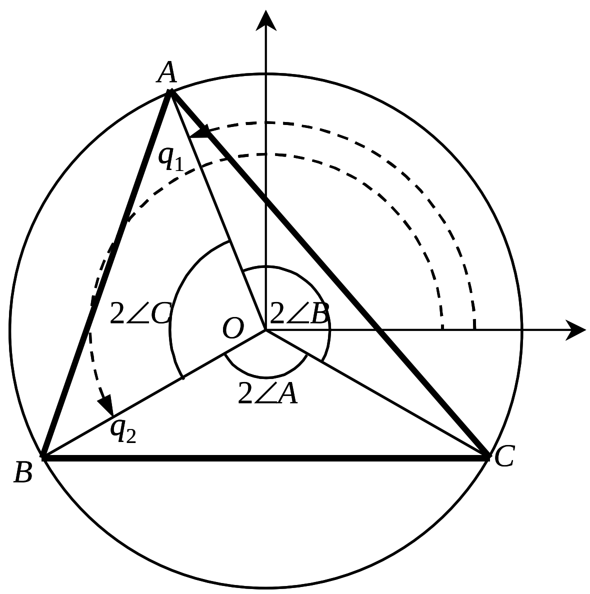
$$|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1,$$

y supongamos que el triángulo cuyos vértices son los puntos cuyos afijos son z_1, z_2, z_3, es acutángulo. Demostrar que si se verifica la igualdad

$$\frac{1}{2+|z_1+z_2|} + \frac{1}{2+|z_2+z_3|} + \frac{1}{2+|z_3+z_1|} = 1,$$

entonces el triángulo es equilátero.

Solución de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, Navarra, España.



Sean A, B y C los puntos cuyos afijos respectivos son z_1, z_2, z_3. Como O, el punto cuyo afijo es z=0, es el circuncentro de ABC, se tiene que $\angle BOC$=2$\angle A$, $\angle COA$=2$\angle B$, $\angle AOB$=2$\angle C$. Sean entonces

$$z_1 = e^{iq_1} = \cos(q_1) + i\sin(q_1);$$

$$z_2 = e^{iq_2} = \cos(q_2) + i\sin(q_2);$$

$$z_3 = e^{iq_3} = \cos(q_3) + i\sin(q_3)$$

Es entonces una propiedad conocida de los ángulos formados por dos vértices del triángulo y su circuncentro que (ver figura)

$$\angle A=\left|\frac{q_3-q_2}{2}\right|; \qquad \angle B=\left|\frac{q_3-q_1}{2}\right|; \qquad \angle C=\left|\frac{q_1-q_2}{2}\right|.$$

Ahora bien, por ser el triángulo acutángulo, cada uno de estos tres ángulos es menor que *p*/2, y se tiene:

$$\begin{aligned}|z_1+z_2| &= \sqrt{\left[\cos(q_1)+\cos(q_2)\right]^2+\left[\sin(q_1)+\sin(q_2)\right]^2}\\ &= \sqrt{2+2\cos(q_1)\cos(q_2)+2\sin(q_1)\sin(q_2)} = \sqrt{2+2\cos(q_1-q_2)}\\ &= \sqrt{2+2\cos^2\left(\frac{q_1-q_2}{2}\right)-2\sin^2\left(\frac{q_1-q_2}{2}\right)} = 2\cos\left(\frac{q_1-q_2}{2}\right) = 2\cos(C).\end{aligned}$$

De la misma forma, se demuestra que

$$|z_2+z_3| = 2\cos(A); \qquad |z_3+z_1| = 2\cos(B).$$

Por lo tanto, los ángulos del triángulo considerado satisfacen la relación:

$$\frac{1}{1+\cos(B)}+\frac{1}{1+\cos(C)}+\frac{1}{1+\cos(A)}=2.$$

Ahora bien, utilizando la desigualdad entre medias aritmética y armónica, podemos escribir:

$$\frac{3}{2}=\frac{3}{\dfrac{1}{1+\cos(B)}+\dfrac{1}{1+\cos(C)}+\dfrac{1}{1+\cos(A)}}\le\frac{3+\cos(A)+\cos(B)+\cos(C)}{3};$$

$$\cos(A)+\cos(B)+\cos(C)\ge\frac{3}{2}.$$

Podemos entonces utilizar que $\angle A+\angle B+\angle C=p$, con lo que

$$\frac{3}{2}\le\cos(A)+2\cos\left(\frac{B+C}{2}\right)\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)=1-2\sin^2\left(\frac{A}{2}\right)+2\sin\left(\frac{A}{2}\right)\cos\left(\frac{B-C}{2}\right);$$

$$0\ge\left[\sin\left(\frac{A}{2}\right)-\frac{1}{2}\right]^2+4\sin\left(\frac{A}{2}\right)\left[1-\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)\right].$$

Pero esto es imposible a menos que $\cos((B-C)/2)=1$ (es decir, a menos que $\angle B=\angle C$), y simultáneamente $\sin(A/2)=1/2$, es decir, $\angle A=p/3$. Luego $\angle B=\angle C=(p-\angle A)/2=p/3$, y el triángulo cuyos afijos son z_1, z_2 y z_3 es equilátero, q.e.d..

PROBLEMAS PARA LOS MÁS JÓVENES (15)

Algunos problemas de las primeras Olimpiadas Balcánicas junior :

1.(1997, propuesto por Yugoslavia) Nueve puntos son interiores a un cuadrado de lado unidad. Probar que tres de ellos son los vértices de un triángulo cuya área no es mayor que 1/8.

2.(1997, propuesto por Chipre). Sea

$$k = \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2} + \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

Expresar, en función de k,

$$\frac{x^8 + y^8}{x^8 - y^8} + \frac{x^8 - y^8}{x^8 + y^8}.$$

3.(1998, propuesto por Yugoslavia). Las cifras del número N son, de izquierda a derecha, las siguientes: Las primeras 1997 cifras son iguales a 1; a continuación hay 1998 doses; finalmente, la cifra de las unidades es un 5.

Demostrar que N es un cuadrado perfecto.

4.(1999, propuesto por Grecia). El triángulo ABC es isósceles, con AB = AC. Sea D un punto del lado BC tal que

$$BC > BD > DC > 0.$$

Sean k_1 y k_2 los círculos circunscritos a ABD y ADC, respectivamente. Sea M el punto medio de $B'C'$, donde los puntos B' y C' se definen de la manera siguiente: BB' es un diámetro de k_1 y CC' es un diámetro de k_2.

Demostrar que el área del triángulo MBC no depende de la posición del punto D sobre el lado BC.

PROBLEMA 41 (SOLUCION POR HENRY RAMIREZ- FUSM BOGOTA COLOMBIA)
Para todo $n \geq 1$, probar que:

$$\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{C(n,k)}\right]^{n} \geq e^{(n+1)-2^{n}} \; (1)$$

SOLUCION:
La desigualdad original (1) puede reescribirse como:

$$\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{C(n,k)}\right]^{n} \geq \frac{e^{(n+1)}}{e^{2^{n}}} \quad \text{con} \quad C(n,k) = \binom{n}{k}$$

La demostración se hará por inducción.
Para $n = 1$, se tiene:

$$\left[\frac{1}{1} * \frac{1}{\frac{1}{1}}\right]^{1} \geq \frac{e^{1+1}}{e^{2^{1}}} = \frac{e^{2}}{e^{2}} = 1$$

De donde $1 \geq 1$
Supóngase cierto el resultado para $k = 1, 2, 3, ..., n-1$
Debe probarse el resultado para $k = n$. Por la desigualdad media armónica – media aritmética tenemos que:

$$\frac{n}{\frac{1}{\binom{n}{1}}+\frac{1}{\binom{n}{2}}+\frac{1}{\binom{n}{3}}+...+\frac{1}{\binom{n}{n}}} \leq \frac{\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+...+\binom{n}{n}}{´n} = \frac{2^{n}-1}{n}$$

En donde se ha utilizado el Teorema del Binomio de Newton $(x+y)^{n} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k}y^{n-k}$ con $x = y = 1$; de donde $2^{n} = \binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{1}+...+\binom{n}{n} = 1+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+...+\binom{n}{n}$.

Es decir:

$$\frac{n}{\frac{1}{\binom{n}{1}}+\frac{1}{\binom{n}{2}}+\frac{1}{\binom{n}{3}}+...+\frac{1}{\binom{n}{n}}} \leq \frac{2^{n}-1}{n}$$

Reescribiendo:

$$\frac{n}{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\binom{n}{k}}} \leq \frac{2^{n}-1}{n}$$

Lo que implica que:

$$\frac{n}{2^n-1} \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\binom{n}{k}}$$

Y de aquí que.

$$\left[\frac{n}{2^n-1}\right]^n \le \left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\binom{n}{k}}\right]^n \qquad (2)$$

Ahora bien; para n=2 se tiene que:

$$\left[\frac{n}{2^n-1}\right]^n = \left[\frac{2}{2^2-1}\right]^2 = \frac{4}{9} \ge \frac{1}{e} = \frac{e^{2+1}}{e^{2^2}} = \frac{e^3}{e^4} = \frac{e^{n+1}}{e^{2^n}}$$

pues $4e > 4(2.5) = 10 > 9 \quad (***) \qquad (A)$

De forma similar se tiene que para n=3:

$$\left[\frac{3}{2^3-1}\right]^3 = \left[\frac{3}{2^3-1}\right]^3 = \frac{27}{343} \ge \frac{1}{e^4} = \frac{e^{3+1}}{e^{2^3}} = \frac{e^4}{e^8} = \frac{e^{n+1}}{e^{2^n}}$$

lo cual es cierto pues $27e^4 > 27 * 2^4 = 432 > 343$.

Supóngase que $n \ge 4$

Consideremos la función $f(x) = x\ln x - x - 1$ en el intervalo $[4,\infty)$.

Tenemos que $f(4) = 4\ln 4 - 4 - 1 = 4\ln 4 - 5 \approx 0.545 > 0$

Además derivando se tiene que:

$$f'(x) = \ln x + x\left[\frac{1}{x}\right] - 1 = \ln x$$

Entonces:

$$f'(x) = \ln x > 0 \ \text{ para } \ x \in [4,\infty)$$

Entonces f(x) es creciente en este intervalo, y como f(4)>0, se tiene que $f(x) > 0$ en $[0,\infty)$

Por lo tanto:

$$f(x) = x\ln x - x - 1 > 0$$

En particular para $x = n$ natural $(n \ge 4)$:

$$n\ln n - n - 1 > 0 \qquad (B)$$

Lo que implica:

$$n\ln n \ge n + 1 \qquad (3).$$

Tenemos además que:

$$2^n \ge n^2 \quad \text{para} \quad n \ge 4 \quad (4)$$

lo cual se puede probar fácilmente por inducción.

Para $n = 4$:

$$2^4 = 16 \ge 16 = 4^2$$

Supóngase que el resultado es cierto para $k = 4, 5, 6, ..., n$.

Por lo tanto:

$$2^n \ge n^2$$

Multiplicando esta desigualdad por 2, tenemos:

$$2^{n+1} \geq 2n^2 \quad (5)$$

pero $(n-1)^2 \geq 2$ para $n \geq 4$. De donde:

$$n^2 - 2n + 1 \geq 2$$
$$n^2 - 2n - 1 \geq 0$$
$$n^2 \geq 2n + 1$$
$$2n^2 \geq n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

sustituyendo esto en (5) obtenemos:

$$2^{n+1} \geq 2n^2 \geq (n+1)^2$$

Tenemos que:

$$e^n \geq 2^n \geq 2^n - 1 > 0 \quad \text{para}\, n \geq 4$$

La desigualdad se mantiene al tomar ln:

$$\ln e^n \geq \ln(2^n - 1)$$

de donde

$$n \geq \ln(2^n - 1)$$

Multiplicando por n se tiene:

$$n^2 \geq n\ln(2^n - 1) \quad (5)$$

Combinando esto con (4) resulta:

$$2^n \geq n^2 \geq n\ln(2^n - 1)$$

con lo que obtenemos la desigualdad:

$$2^n \geq n\ln(2^n - 1) \quad (6)$$

Ahora se suman miembro a miembro las desigualdades obtenidas en (3) y (6):

$$n\ln n \geq n + 1 \quad (3).$$
$$2^n \geq n\ln(2^n - 1) \quad (6)$$

Se tiene por lo tanto:

$$2^n + n\ln n \geq n\ln(2^n - 1) + n + 1 \quad (7)$$

podemos reescribir esta desigualdad como:

$$\ln e^{2^n} + n\ln n \geq n\ln(2^n - 1) + \ln e^{n+1}$$
$$\ln e^{2^n} + \ln n^n \geq \ln(2^n - 1)^n + \ln e^{n+1}$$
$$\ln\left[e^{2^n} n^n\right] \geq \ln\left[(2^n - 1)^n e^{n+1}\right]$$

lo que implica:

$$e^{2^n} n^n \geq (2^n - 1)^n e^{n+1}$$

de donde:

$$\frac{n^n}{(2^n - 1)^n} \geq \frac{e^{n+1}}{e^{2^n}}$$

Es decir.:

$$\left[\frac{n}{\left(2^{n}-1\right)}\right]^{n} \geq \frac{e^{n+1}}{e^{2^{n}}} \quad (8)$$

Combinando esto con la desigualdad (2) obtenemos:

$$\frac{e^{n+1}}{e^{2^{n}}} \leq \left[\frac{n}{2^{n}-1}\right]^{n} \leq \left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\binom{n}{k}}\right]^{n}$$

Es decir :

$$\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{C(n,k)}\right]^{n} \geq e^{(n+1)-2^{n}}$$

que es lo que se quería demostrar.

COMENTARIO.
De acuerdo a las desigualdades resaltadas (A) y (B) la desigualdad en realidad es estricta para $n > 2$. La igualdad se presenta en en el caso n=1.

Problema 66

Si a y b son números positivos tales que $a^3+b^3=2$, demostrar que

$$a^9+b^9+5\left(a^{12}+b^{12}\right)\geq 8+2\left(a^{15}+b^{15}\right)$$

Solución de Miguel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca, España.

Si ponemos $x=a^3$, $y=b^3$ entonces $x+y=2$ y, consiguientemente,

$$2^2=(x+y)^2=x^2+y^2+2xy$$

de donde

$$x^2+y^2=4-2xy, \qquad (1)$$

$$2^3=(x+y)^3=x^3+y^3+3xy(x+y)$$

de donde

$$x^3+y^3=8-6xy, \qquad (2)$$

$$\begin{aligned}2^4=(x+y)^4&=x^4+y^4+4xy\left(x^2+y^2\right)+6x^2y^2\\&=x^4+y^4+4xy(4-2xy)+6x^2y^2 \qquad \text{por (1)}\end{aligned}$$

de donde

$$x^4+y^4=16-16xy+2x^2y^2 \qquad (3)$$

y

$$\begin{aligned}2^5=(x+y)^5&=x^5+y^5+5xy\left(x^3+y^3\right)+10x^2y^2(x+y)\\&=x^5+y^5+5xy(8-6xy)+20x^2y^2 \qquad \text{por (2)}\end{aligned}$$

de donde

$$x^5+y^5=32-40xy+10x^2y^2 \qquad (4)$$

Ahora, en función de x, y, la desigualdad propuesta se escribe

$$x^3+y^3+5\left(x^4+y^4\right)\geq 8+2\left(x^5+y^5\right)$$

que, habida cuenta de (2), (3) y (4) se convierte en

$$10x^2y^2+6xy-16\leq 0$$

cuya validez se establece inmediatamente sin más que tener en cuenta que siendo x, y números positivos de suma constante e igual a 2, el producto xy es máximo cuando dichos números son iguales, esto es:

$xy\leq 1$ verificándose la igualdad cuando $x=y=1$.

Entonces, en efecto,

$$10x^2y^2+6xy-16 \;\leq\; 10\cdot 1^2+6\cdot 1-16 \;=\; 0$$

y la demostración es completa.

Se verifica la igualdad si y sólo si $x=y=1$, es decir, sólo cuando $a=b=1$.

Problema 68

Propuesto por Laurentiu Modan, Bucarest, Rumanía.

Se considera la función real

$$f\left(x,n\right)=\frac{\left(x+1\right)^{n+1}+\left(x-1\right)^{n+1}}{\left(x+1\right)^{n+1}-\left(x-1\right)^{n+1}}\text{, con } n \text{ natural.}$$

Hallar los valores del parámetro n tales que f tiene el mayor número posible de asíntotas, y en tal caso, hallar sus ecuaciones.

Solución de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, Navarra, España.

La función f puede tener tres tipos distintos de asíntotas:

1) Asíntotas horizontales si su límite al tender x a infinito (positivo o negativo) es un valor real.
2) Asíntotas oblicuas si el límite de su derivada al tender x a infinito (positivo o negativo) es un valor real.
3) Asíntotas verticales si el límite de la función para algún x real es infinito. Para ello es necesario (aunque no suficiente) que el denominador de f se anule para dicho valor real de x.

Podemos desarrollar los binomios del numerador y denominador de f para obtener:

$$f\left(x,n\right)=\frac{\sum_{\substack{m=0\\ m\text{ par}}}^{n+1}\binom{n+1}{m}x^{n+1-m}}{\sum_{\substack{m=0\\ m\text{ impar}}}^{n+1}\binom{n+1}{m}x^{n+1-m}}=\frac{x^{n+1}+\binom{n+1}{2}x^{n-1}+\binom{n+1}{4}x^{n-3}+\ldots}{\left(n+1\right)x^{n}+\binom{n+1}{3}x^{n-2}+\binom{n+1}{5}x^{n-4}+\ldots}$$

$$=\frac{x}{n+1}+\frac{\frac{n+2}{3}\binom{n}{1}x^{n-1}+\frac{n+2}{5}\binom{n}{3}x^{n-3}+\ldots}{\left(n+1\right)x^{n}+\binom{n+1}{3}x^{n-2}+\ldots}.$$

Es por lo tanto obvio que, al ser nulo el límite del segundo sumando del último miembro cuando x tiende a infinito (positivo o negativo), la recta $y=x/(n+1)$ es asíntota oblicua de $f(x,n)$ cuando x tiende a infinito (positivo o negativo) y para cualquier valor del parámetro n.

Falta comprobar si $f(x,n)$ tiene también asíntotas verticales. Obviamente, el denominador se puede anular sólo si los valores absolutos de $x+1$ y $x-1$ son iguales, lo cual puede suceder solamente si $x=0$. Adicionalmente, los signos de $(x+1)^{n+1}$ y $(x-1)^{n+1}$

deben ser iguales, para lo que n debe ser impar. El numerador de $f(x,n)$, para n impar y $x=0$, vale 2, luego el valor de n que maximiza el número de asíntotas de $f(x,n)$ es cualquier n impar, siendo entonces las asíntotas las rectas de ecuaciones $x=0$ y $y=x/(n+1)$. No hay otras asíntotas posibles para ningún valor de n.

Problema 69

Encontrar todos los números naturales x, y, z mayores que cero, tales que

$$1+2^x \cdot 3^y = z^2$$

Solución de Miguel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca, España.

Pues z es impar, porque z^2 es impar, puede escribirse en la forma $2k+1$ donde k es un número natural igual o mayor que 1 y la ecuación dada se escribe entonces en la forma

$$2^{x-2} \cdot 3^y = k(k+1).$$

Uno de los números k y $k+1$ es par, luego debe ser $x-2 \geq 1$ y, habida cuenta que k y $k+1$ son primos entre sí por ser números consecutivos, resultan, por la unicidad de la descomposición de un número en producto de factores primos, los dos siguientes casos:

1. $2^{x-2} = k$ y $3^y = k+1$, de donde $3^y - 2^{x-2} = 1$.
   Pues las únicas soluciones (n, m) en números naturales mayores que cero de la ecuación $3^n - 2^m = 1$ son $(1,1)$ y $(2,3)$ [1, problema 5/155], obtenemos
   $$(y, x-2) = (1,1),\ (2,3)$$
   de donde
   $x=3$, $y=1$ que implican $z=5$

y

   $x=5$, $y=2$ que implican $z=17$.

2. $2^{x-2} = k+1$ y $3^y = k$, de donde $2^{x-2} - 3^y = 1$.
   Pues la única solución (m, n) en números naturales mayores que cero de la ecuación $2^m - 3^n = 1$ es $(2,1)$ [1, problema 5/154], obtenemos $(x-2, y) = (2,1)$ de donde
   $x=4$, $y=1$ que implican $z=7$.

Las soluciones pedidas son, pues, las tres siguientes:

$$(x,y,z) = (3,1,5),\ (4,1,7),\ (5,2,17)$$

Referencia.

1. W. Sierpinski, *250 problèmes de théorie élémentaire des nombres,* Librairie Hachette, 1972.

Problema 70

Propuesto como problema 4 en los exámenes para el acceso al Cuerpo de Profesores de Educación Secundaria en Castilla y León, julio 2004.

Tres personas, A, B, C lanzan sucesivamente, en ese orden, un dado. La primera persona que saque un 6, gana.

a) ¿Cuáles son sus respectivas probabilidades de ganar?
b) Calcular la probabilidad de que el juego termine en el décimo lanzamiento y de que la persona C saque siempre la suma de lo que acaban de sacar los jugadores A y B en las tiradas inmediatamente anteriores.

Solución de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, Navarra, España.

a) Si A no gana en la primera tirada (probabilidad 5/6), entonces las probabilidades de ganar de B, C y A son iguales que las probabilidades de ganar de A, B y C, respectivamente, antes de la primera tirada de A. De igual forma, si ni A ni B ganan en su primera tirada (probabilidad 25/36), las probabilidades de ganar de C, A y B son iguales que las probabilidades de ganar de A, B y C, respectivamente, antes de la primera tirada de A. Por lo tanto, se tiene que la probabilidad de ganar de B es 5/6 de la probabilidad de ganar de A, y la probabilidad de ganar de C es 25/36 de la probabilidad de ganar de A. Como las tres probabilidades deben sumar 1, se tiene que $(1+5/6+25/36)P_A=1$, donde P_A es la probabilidad de que A gane. Se tiene entonces que $P_A=36/91$, y consecuentemente que $P_B=30/91$, $P_C=25/91$.

Este mismo resultado se puede también probar de otra manera alternativa, más "aburrida", que consiste en calcular que la probabilidad de que A gane en su n-ésima tirada es igual a $(1/6)(5/6)^{3(n-1)}$, es decir, la probabilidad de que A saque un 6 después de que durante $n-1$ ciclos consecutivos nadie haya sacado un 6. La suma de la progresión geométrica resultante para $n=1,2,3,...$, produce el mismo resultado que el método anterior. Las probabilidades de ganar de B y C se calculan igualmente de forma análoga, con factores adicionales respectivos 5/6 y 25/36 para tener en cuenta que para que B gane en su n-ésima tirada, A no puede haber sacado un 6 en su n-ésima tirada, y para que gane C, ni A ni B pueden haberlo hecho.

b) El décimo lanzamiento corresponde al cuarto lanzamiento de A. Debemos entonces calcular la probabilidad de que, en tres rondas consecutivas, C obtenga (sin ganar) la suma de lo que obtengan A y B, y de que en su cuarto lanzamiento A gane. Calculemos entonces primero la probabilidad de que en una ronda cualquiera C obtenga la suma de lo que obtienen A y B sin ganar, es decir, sin sacar 6. La suma de lo que obtienen A y B debe estar entonces comprendida entre 2 y 5, pudiendo obtenerse 2 de una única manera (1 y 1), 3 de dos maneras (1 y 2, 2 y 1), 4 de tres (1 y 3, 2 y 2, 3 y 1) y 5 de cuatro (1 y 4, 2 y 3, 3 y 2, 4 y 1), sobre un total de 36 posibles resultados para el lanzamiento conjunto de A y B. Por lo tanto, la probabilidad de que C, sin ganar, saque la suma de lo que han sacado A y B es igual a $(1+2+3+4)/6^3=5/108$. Como esto se debe repetir en tres rondas, seguido de que A saque un 6, la probabilidad pedida es $(5/108)^3/6=5/(2^7 3^{10})$.

PROBLEMAS PROPUESTOS 71-75

71.(Propuesto por José Luis Díaz Barrero, Barcelona, España)
Para cualesquiera números reales $x_1, x_2, \cdots, x_n$, demostrar que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \cosh x_k\right)^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} \sinh x_k\right)^2 \geq n^2.$$

72.(Propuesto por José Luis Díaz Barrero, Barcelona, España)
Resolver la ecuación

$$x^{2n} + \sum_{k=1}^{n} \binom{2n}{2k} x^{2(n-k)}(x^2-1)^k = 0.$$

73.(Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, Ávila, España)
Resolver la ecuación en diferencias

$$u_{n+2} = \frac{u_{n+1} - u_n}{1 + u_{n+1} \bullet u_n}, \quad n \geq 1$$

con las condiciones iniciales $u_1 = 1, u_2 = a,\ a \neq -1, a \in R$.
74*.(Propuesto por Abderrahim Ouardini, Burdeos, Francia)
Encontrar todas las funciones $f : R \rightarrow R$ tales que verifican las dos condiciones siguientes:

$$i) \quad f(x \bullet f(y)) = y \bullet f(x), \quad \forall x, y \in R$$

$$ii) \quad \text{El conjunto } \{f(x) \mid x \in R^*\} \text{ es finito.}$$

75*.(Propuesto por Wu Wei Chao, GuangZhou, China)
Dados dos números reales, a y c, con $a \neq 0$, encontrar todas las funciones $f : R \rightarrow R$ que verifican

$$f(x + f(y)) = f(f(y)) + 2a \bullet x \bullet f(y) + f(x) - c, \quad \forall x, y \in R.$$

Nota del editor: el problema 73 fué enviado en su momento para su publicación en septiembre de 1999 a la revista SIPROMA, pero no fué posible hacerlo al cesar la edición.

Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática
ISSN 1698-677X
Número 15--Divertimentos

Tango del Algebrista

Música del tango Mano a mano
Letra de Enzo R. Gentile

Algebrista te volviste
Refinado hasta la esencia
Oligarca de la ciencia,
Matemático bacán.
Hoy mirás a los que sudan
En las otras disciplinas
Como dama a pobres minas
Que laburan por el pan.

¿Te acordás que en otros tiempos
Sin mayores pretensiones
Mendigabas soluciones
A una mísera ecuación?
Hoy la vas de riguroso,
Revisás los postulados,
Y junás por todos lados
La más vil definición.

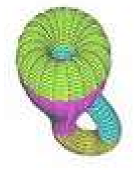
Pero no engrupís a nadie,
Y es inútil que te embales
Con anillos, con ideales
Y con Álgebras de Boole.
Todos saben que hace poco
Resolviste hasta matrices,
Y rastreabas las raíces
Con el método de Sturm.

Pero puede que algún día
Con las vueltas de la vida
Tanta cáscara aburrida
Te llegue a cansar al fin
Y añorés tal vez el día
Que sin álgebras abstractas
Y con dos cifras exactas
Te sentías tan feliz.

Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática
OEI
ISSN 1698-677X
Número 15-Páginas web

Página de la Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas (ACM)

http://ares.unimet.edu.ve/matematica/acm



Excelente página, distribuida de manera similar a la de la I.M.O.: a derecha e izquierda del centro, donde se incluyen las últimas noticias y se informa de las actividades de la Asociación, hay enlaces que conducen, por un lado. A Olimpiadas, Actividades, Delegaciones, Miembros, Reto (Problema de la semana), Canguro matemático, Taller de verano, Revista de la OIM, Problemas de Olimpiadas en el Mundo, Olimpiada Recreativa de Matemáticas, Exámenes, Temas de entrenamiento de Olimpiadas. Por la derecha, los enlaces llevan a KSF (Kangourou sans Frontières), 45 IMO, XIX OIM, 3ª Olimpiada Bolivariana de matemáticas, Olimpiada Iberoamericana de Matemática Universitaria, el Simposio Iberoamericano 2004 de Educación Matemática y la VI Olimpiada Centroamericana y del Caribe.

Francisco Bellot

Revista Escolar
de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática
OEI
ISSN 1698-677X
Número 15--Otros

Sobre la Prueba por equipos de la XIX Olimpiada Iberoamericana de matemáticas
Las fascinantes biografías de los matemáticos iberoamericanos

Francisco Bellot Rosado

Ha sido para mi un gran placer haber colaborado en la preparación y coordinación de la Prueba por equipos de la XIX Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas, junto con el Prof. Antoni Gil Trilles, a quien le deseo agradecer muy sinceramente su inestimable ayuda.

En la reunión preparatoria del mes de junio, en la que también participó nuestro querido colega el Prof. Antonio Corchero, se decidió que la Prueba consistiría en proponer a los alumnos una situación matemática abierta, a partir de la cual los participantes debían descubrir resultados y plantear y resolver problemas relacionados con la misma. Las situaciones propuestas en los dos niveles (uno para los alumnos iberoamericanos y medallas de plata y bronce en la XL O.M.E. , y otro distinto para los estudiantes de Castellón) se encuentran en otro lugar de este número de la Revista. Posteriormente se publicarán algunas de las soluciones ganadoras.

El "alma mater" de esta Olimpiada, Prof. José Vicente Aymerich, sugirió que los equipos, además de un número, llevasen el nombre de algún matemático destacado. De inmediato pensé que los nombres debían elegirse entre los de la comunidad matemática iberoamericana, y durante el verano de este año me dediqué a una búsqueda fascinante: la de las biografías de matemáticos españoles, portugueses y americanos. La OEI, por su parte, acogió con mucho entusiasmo la idea, con el fin de preparar un CD con los resúmenes biográficos. Aunque por ciertos imponderables no ha sido posible repartirlo a los participantes, tal vez sea posible hacerlo en alguna próxima ocasión.

Portugal, de forma inmediata, y más tarde México y Costa Rica, respondieron a mi petición vía e-mail y remitieron biografías de dos matemáticos cada uno, tal y como yo les había pedido. Tal vez el correo electrónico no sea tan fiable como parece, porque lo cierto es que no recibí más biografías. Cuando llegó el mes de agosto, emprendí la búsqueda en Internet, una vez agotadas las visitas a mi Biblioteca. Era claro que necesitábamos disponer del mayor número posible de biografías, ya que el número de equipos era, en aquel momento, desconocido (finalmente fueron 29; 21 de los participantes en la Olimpiada, 4 de olímpicos españoles y otros 4 de olímpicos de Castellón). Dos semanas antes de la Olimpiada había conseguido cerca del medio centenar de biografías, una cantidad suficiente para nuestros propósitos.

De una manera aleatoria, los Jefes de Delegación repartieron a los estudiantes en los 21 equipos, y Toni Gil hizo otro tanto con los demás participantes. Los nombre se asignaron también de manera aleatoria, y cada carpeta con los enunciados llevaba una etiqueta con el nombre del matemático elegido. La distribución de nombres por equipos fue la siguiente:

Equipo 1: Alberto P. Calderón (Argentina)
Equipo 2: Andrés Zavrotsky (Venezuela)
Equipo 3: Antonio A. Monteiro (Portugal)
Equipo 4: Carlos Grandjot Reins (Chile)
Equipo 5: Emiliano Aparicio Bernardo (España-URSS)
Equipo 6: Enzo R. Gentile (Argentina)
Equipo 7: Esteban Terradas Illa (España)
Equipo 8: Ferrán Sunyer Balaguer (España)
Equipo 9: Francisco Vera Fernández de Córdoba (España)
Equipo 10: Godofredo García (Perú)
Equipo 11: Jairo Charris Castañeda (Colombia)
Equipo 12: Jorge Juan y Santacilia (España)
Equipo 13: José Echegaray Eizaguirre (España)
Equipo 14: José Gallego Díaz (España)
Equipo 15: José Luis Massera (Uruguay)
Equipo 16: José Morgado (Portugal)
Equipo 17: Juan Jacobo Durán Loriga (España)
Equipo 18: Julio Garavito Armero (Colombia)
Equipo 19: Julio Rey Pastor (España- Argentina)
Equipo 20: Lelio Gama (Brasil)

Equipo 21: Leonardo Torres Quevedo (España)
Equipo 22: Leopoldo Nachbin (Brasil)
Equipo 23: Luis A. Santaló (España-Argentina)
Equipo 24: Luis Octavio de Toledo y Zulueta (España)
Equipo 25: Manuel Amoroso Costa (Brasil)
Equipo 26: Manuel Balanzat (España- Argentina)
Equipo 27: Miguel de Guzmán Ozámiz (España)
Equipo 28: Otto de Greiff Haeusler (México)
Equipo 29: Pedro Abellanas Cebollero (España)

Entre los biografiados que no tuvieron equipo están Pedro Nunes, Pedro Puig Adam, Raimundo Chela, Ramón Picarte, Ricardo Mañé Ramírez, Sotero Prieto Rodríguez, Zoel García de Galdeano y Yanguas y otros muchos.

El material trabajado con motivo de este proyecto será utilizado convenientemente en nuestra Revista. Por mi parte quiero reiterar que encontrar estas biografías ha sido realmente gratificante y estoy dispuesto a completar el trabajo con todas las aportaciones que nuestros amigos de ambos lados del Atlántico puedan hacer.

| Número 15|
| Principal Olimpiada |
Programación OEI | Principal OEI | Contactar

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI

Número

16

Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática
ISSN 1698-677X

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

Número 15 (Noviembre - Diciembre 2004)
ISSN – 1698-277X

Índice

Artículos, Notas y Lecciones de preparación Olímpica

Presentación del Prof. K.R.S. Sastry**, por F. Bellot**

K.R.S. Sastry: Pares de triángulos heronianos con el mismo perímetro y la misma área: una descripción.

F. Bellot: Mis recuerdos personales de Murray S. Klamkin (1923-2004)

Problemas de Nivel medio y de Olimpiadas

Tres soluciones para un problema de la Olimpiada Iberoamericana de 1993: de Toshio Seimiya, de Antonio Rojas y de Miguel Amengual.

Propuestos : Cinco problemas checos

Problemas para los más jóvenes

Cinco problemas de competiciones rumanas.

Problemas resueltos

Resueltos : Soluciones a los problemas 4,7,8,9,12,14,15 y 25 de la Revista, por el Prof. José Heber Nieto, de Maracaibo, Venezuela.

Soluciones a los problemas 71,72 y 73, por Walter Carballosa, La Habana, Cuba. Recibidas soluciones a los problemas 71 y 73 por Antonio Ledesma López, Requena (España), y Álvaro Begué Aguado (Nueva York, USA).

Problemas propuestos 76-80

Divertimentos Matemáticos

El Prof. Rafael Sánchez Lamoneda, de Caracas(Venezuela), nos indica que la letra del tango “El Algebrista” no es obra de Enzo R. Gentile, si no de Carlos Domingo, en honor del ingeniero Orlando Villamayor. Hacemos gustosamente la aclaración y pedimos disculpas por el error.

Anecdotario Matemático I.

Comentario de páginas web

F. Bellot: La página web de la Com-Partida de Matemática del Uruguay.

Editor: Francisco Bellot Rosado

Presentación del Prof. K.R.S. Sastry

F.Bellot

El Prof. K.R.S. Sastry es una figura muy conocida entre los lectores de revistas de Matemáticas Elementales y de resolución de problemas. Graduado en matemáticas en la Universidad de Mysore, India, comenzó enseñando en el estado de Karnataka. Durante muchos años residió en Etiopía, enseñando Matemáticas con un contrato del gobierno etíope, hasta llegar a la edad de su retiro, en 1994. El Ministerio de Educación de ese país le concedió entonces el Título de Profesor del Año. Regresó a la India y continúa trabajando en Matemáticas en la ciudad de Bangalore.

El Prof. Sastry colaboró con problemas en la revista SIPROMA, cuando todavía residía en África, y en el número 10 de nuestra revista, donde incluímos dos problemas suyos, enviados hace tiempo. Felizmente, un artículo suyo, *Analogies are interesting!,* publicado en 2004 en la revista suiza *Elemente der Mathematik*, me permitió reanudar el contacto con él, que había perdido desde su vuelta a la India. Ha accedido amablemente a escribir para nuestra Revista el artículo que publicamos en este número. Puso, naturalmente, algunas condiciones : *Yo no uso computadora ni máquina de escribir. Por lo tanto, le enviaré manuscrito en inglés el original, y Vd. lo traducirá.* Acepté sin reserva alguna, la letra del Prof. Sastry es excelente y su escritura tan clara como hace 20 años. Además me envió varios problemas, uno de los cuales fue utilizado en la Prueba por equipos de la XIX Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas: una situación mixta de Geometría y Teoría de Números (v. Número 15 de la Revista), una situación que Sastry maneja con absoluta maestría.

Los atículos y problemas del Prof. Sastry han aparecido en revistas de Estados Unidos, Canadá, Etiopía y otros muchos países. Podemos citar, a título de ejemplo, *Constellation Morley, Mathematics Magazine vol47(1974),pp.15-22;* o *Triangles in a Lattice parabola, College mathematics Journal vol 22(1991), p.301-306.*

Como Editor de la *Revista Escolar de la O.I.M.* me siento muy honrado y agradecido al Prof. Sastry por publicar aquí su artículo sobre triángulos heronianos, tema en el que es un gran especialista.

PARES DE TRIÁNGULOS HERONIANOS CON ÁREAS Y PERÍMETROS IGUALES : UNA DESCRIPCIÓN

K.R.S.SASTRY

Introducción

Sea ABC un triángulo. Designamos los lados o sus longitudes mediante $a = BC, b = CA, c = AB$. Si $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$, entonces la fórmula de Herón para su área es

$$\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}. \qquad (*)$$

Triángulos rectángulos con lados y área enteros, como $(3,4,5;6)$ fueron conocidos por muchas civilizaciones antes de la época de Herón. Sin embargo, el descubrimiento del triángulo $(13,14,15;94)$ se le atribuye a él. Este triángulo **no** es rectángulo, pero sus lados y el área son enteros. Como homenaje a su significativo descubrimiento, llamamos a un triángulo ABC un **triángulo heroniano** si a,b,c y Δ son enteros. Hay muchas fórmulas de las que podemos calcular los lados y el área de cualquier número de triángulos heronianos. Cada fórmula nos ayuda a resolver determinado tipo de problema relacionado con ellos. Las referencias situadas al final del artículo contienen diversas fuentes relativas a los triángulos heronianos. Nuestro propósito actual es obtener una familia específica de triángulos heronianos para determinar infinitos pares de esos triángulos cuyas áreas y perímetros son iguales en cada par.

Determinación de la familia de triángulos heronianos

Nombramos los vértices de un triángulo ABC de manera que $BC > AB$. Sea I_C el exincentro opuesto al vértice C. I_C es el punto de intersección de las bisectrices exteriores de los ángulos $\widehat{CAB}$ y $\widehat{ABC}$ y la bisectriz interior de $\widehat{BCA}$. El teorema de la bisectriz dice que una bisectriz interior o exterior divide al lado opuesto en la razón de los otros dos lados.Si D es el punto de intersección de la prolongación del lado AC con la bisectriz exterior del ángulo $\widehat{B}$, aplicando este teorema al triángulo DBC obtenemos

$$\frac{BI_C}{I_CD} = \frac{BC}{CD},$$

y aplicándolo al triángulo ADB obtenemos

$$\frac{BI_C}{I_CD} = \frac{AB}{AD}.$$

De aquí resulta

$$\frac{BI_C}{I_CD} = \frac{BC}{CD} = \frac{AB}{AD} = \frac{BC-AB}{CD-AD} = \frac{BC-AB}{AC} = \frac{a-c}{b}. \qquad (1)$$

En la anterior cadena de igualdades (1) hemos usado una propiedad de las razones iguales:

Si $\lambda = \frac{e}{f} = \frac{g}{h}$, entonces $\lambda = \frac{e-g}{f-h}$ porque $e = \lambda f$ y $g = \lambda h$.

Si el triángulo ABC ha de ser heroniano, entonces a,b,c deben ser enteros positivos. Por lo tanto la razón $(a-c)/b$ será un número racional positivo , digamos v/u, con $mcd(u,v) = 1, u > v$, y de tal manera que el área de ABC sea también un entero positivo. Para entender mejor el proceso de determinación vamos a asignar los valores específicos $u = 5, v = 3$. Entonces $(a-c)/b = 3/5$. Esto implica que existe un entero positivo k tal que $a-c = 3k, b = 5k$. Por lo tanto los lados de

ABC se pueden tomar como

$$a = c + 3k, \quad b = 5k, \quad c = c \qquad (2).$$

Ahora debemos determinar los valores de los parámetros c, k para que el área sea un entero. Para ello calculamos $s = c + 4k$ y usamos la fórmula de Herón :

$$\Delta = \sqrt{(c+4k)(c-k)(k)(4k)} = 2k\sqrt{(c+4k)(c-k)}\,.$$

Esto nos indica que $(c+4k)(c-k) = \mu^2,$ un cuadrado perfecto. Luego existe un número racional m/n tal que

$$c + 4k = \frac{m}{n}\mu \quad \text{y } c - k = \frac{n}{m}\mu.$$

Se invita al lector a resolver el anterior sistema de ecuaciones en c y k para obtener

$$c = \frac{m^2+4n^2}{5mn}\mu, \quad k = \frac{m^2-n^2}{5mn}\mu, \text{ es decir}$$
$$\frac{c}{m^2+4n^2} = \frac{\mu}{5mn} = \frac{k}{m^2-n^2} = \nu.$$

La constante de proporcionalidad ν multiplica los lados para dar un triángulo semejante al primero; por lo tanto la ignoramos y ponemos

$$c = m^2 + 4n^2, \ \mu = 5mn, \ k = m^2 - n^2, \ m > n.$$

Sustituyendo ahora los valores de c y k en (2) nos dan los valores parametrizados de los lados, el perímetro y el área:

$$\left.\begin{array}{c}(a,b,c) = (4m^2+n^2, 5(m^2-n^2), m^2+4n^2)\\ P = 10m^2, \quad \Delta = 10mn(m^2-n^2)\end{array}\right\} \qquad (3).$$

Las fórmulas (3) generan una familia infinita de triángulos heronianos. Si hacemos, por ejemplo, $m = 5, n = 1$ en (3) obtenemos el triángulo heroniano

$$(a,b,c) = (101, 120, 29), P = 250, \Delta = 1200.$$

El proceso anterior demuestra que si tomamos (1), la razón $(a-c)/b = v/u,$ entonces se puede determinar el conjunto completo de triángulos heronianos. Sin embargo, se deja al lector interesado la comprobación porque no es necesario para nuestros propósitos. En vez de eso, tomamos en (1) la razón

$$\frac{a-c}{b} = \frac{u^2-v^2}{u^2+v^2}$$

y procedemos exactamente igual que antes. Se obtiene la siguiente familia de triángulos heronianos, más general y más útil (los cálculos se dejan al lector) :

$$\left.\begin{array}{c}(a,b,c) = (m^2u^2+n^2v^2, (m^2-n^2)(u^2+v^2), n^2u^2+m^2v^2)\\ P = 2m^2(u^2+v^2), \Delta = mn(m^2-n^2)uv(u^2+v^2)\end{array}\right\} \qquad (4).$$

El lector comprobará que cuando $u = 2, v = 1$ las expresiones (4) dan las expresiones (3). Para obtener un triángulo heroniano particular en (4) debemos elegir m, n, u, v naturales con $m > n, u > v$. Por ejemplo, para $m = 3, n = 2, u = 2, v = 1$ resulta el triángulo $(a,b,c) = (40, 25, 25)$, con $P = 90, \Delta = 300$. Incidentalmente observamos que $mcd(a,b,c) = 5$. Usualmente se eligen los lados de manera que $mcd(a,b,c) = 1$. Luego dividiendo los lados por 5 resulta el triángulo heroniano isósceles $(8,5,5)$ con $P = 18, \Delta = 12$. Sin embargo, en la solución de ciertos problemas no dividiremos los lados por su máximo común divisor. La razón aparecerá en la preparación de las tablas 1 y 2 de la sección siguiente, que mostrará cómo deducir pares de triángulos heronianos a partir de (3), que tengan igual perímetro y área.

Solución del problema

El problema de hallar pares de triángulos isósceles heronianos con el mismo perímetro y la misma área ha sido resuelto por completo. Hay distintas soluciones en las referencias $[2,4,8]$ que se dan al final. Mencionemos un ejemplo de uno de esos pares : $(29,29,40)$ y $(37,37,24)$. Ambos tienen perímetro 98 y área 420. Por lo tanto, en esta sección determinaremos pares de triángulos no isósceles, heronianos, con el mismo perímetro y la misma área. Nuestro proceso de determinación precisa del resultado siguiente:

Sean p **y** q **dos números naturales primos entre sí**, **con** $p > q$. **Si** $a = p^2 + pq + q^2, b = 2pq + q^2, c = p^2 - q^2$, **entonces el triángulo ABC tiene su ángulo A de 120º**. (5 y 6)

El resultado anterior es muy fácil de justificar con el teorema del coseno, puesto que

$$\widehat{A} = \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 + bc.$$

Entonces, para determinar el par deseado de triángulos heronianos, primero usamos las expresiones (3) y luego (4) :

A partir de (3), un par de triángulos heronianos generales es de la forma

$$(a_1, b_1, c_1) = (4m_1^2 + n_1^2, 5(m_1^2 - n_1^2), m_1^2 + 4n_1^2)$$
$$P_1 = 10m_1^2, \Delta_1 = 10m_1n_1(m_1^2 - n_1^2)$$

y

$$(a_2, b_2, c_2) = (4m_2^2 + n_2^2, 5(m_2^2 - n_2^2), m_2^2 + 4n_2^2)$$
$$P_2 = 10m_2^2, \Delta_2 = 10m_2n_2(m_2^2 - n_2^2)$$

Esos dos triángulos tendrán el mismo perímetro si $P_1 = P_2$. Esto es,

$$10m_1^2 = 10m_2^2 \Leftrightarrow m_1 = m_2 = m, \text{ digamos.} \quad (7)$$

Los dos triángulos tendrán la misma área si $\Delta_1 = \Delta_2$, es decir

$$10m_1n_1(m_1^2 - n_1^2) = 10m_2n_2(m_2^2 - n_2^2).$$

Si aquí ponemos el valor hallado en (7) obtenemos

$$n_1(m_1^2 - n_1^2) = n_2(m_2^2 - n_2^2).$$

Multiplicando y reordenando los términos ,

$$(n_1 - n_2)m^2 = n_1^3 - n_2^3 = (n_1 - n_2)(n_1^2 + n_1n_2 + n_2^2).$$

La ecuación anterior implica que

$$i)\quad n_1 - n_2 = 0,\ \text{en cuyo caso los triángulos no son distintos;}$$

por lo tanto este caso lo descartamos y consideramos la siguiente posibilidad:

$$ii)\ m^2 = n_1^2 + n_1 n_2 + n_2^2.$$

Esta ecuación es la misma que encontramos en (6), con $m = a, n_1 = b, n_2 = c$. Luego de (5) tomamos

$$m = p^2 + pq + q^2, n_1 = 2pq + q^2, n_2 = p^2 - q^2, p > q \qquad (8).$$

Dejamos al lector la comprobación de que el triángulo heroniano generado por la pareja (m, n_1) tiene el mismo perímetro y área que el generado por (m, n_2). Por lo tanto tenemos el siguiente algoritmo (9):

Etapa I: Sustituímos en (8) p y q por números naturales para calcular los valores numéricos de m, n_1 y n_2.

Etapa II: Usamos los valores numéricos de m, n_1 para calcular los lados $a_1, b_1, c_1,$ el perímetro P_1 y el área Δ_1.

Etapa III: Ahora repetimos los cálculos con m, n_2 para obtener $a_2, b_2, c_2, P_2, \Delta_2$.

Los dos triángulos heronianos así obtenidos tienen la misma área y el mismo perímetro.

La siguiente Tabla 1 ha sido preparada usando (9) :

p	q	m	n_1	n_2	(a_1, b_1, c_1)	(a_2, b_2, c_2)	P	Δ
2	1	7	5	3	$(221, 120, 149)$	$(205, 200, 85)$	490	8400
3	1	13	7	8	$(725, 600, 365)$ $(145, 120, 73)$	$(740, 525, 425)$ $(148, 105, 85)$	338	4368
3	2	19	16	5	$(1700, 525, 1385)$	$(1469, 1680, 461)$	3610	319200
5	1	31	11	24	$(3965, 4200, 1445)$ $(793, 840, 289)$	$(4420, 1925, 3265)$ $(884, 385, 653)$	1922	114576

En la preparación de la Tabla 1, si $mcd(a_1, b_1, c_1) = mcd(a_2, b_2, c_2),$ o al menos uno de ellos divide al otro, entonces hemos dividido los lados de ambos triángulos por el común mcd (o por el más pequeño). Esto da valores menores para los lados, el perímetro y el área.

Si $mcd(a, b, c) = 1,$ el triángulo se llama **triángulo primitivo**. En este sentido, algunos pares solución están formados por triángulos primitivos.

Las expresiones contenidas en (4) pueden usarse para generar una **familia infinita** de pares de triángulos heronianos del tipo deseado. Obviamente esto es más ventajoso. Para verlo primero determinamos m, n_1, n_2 en (8). Por ejemplo, $p = 2, q = 1$ da $m = 7, n_1 = 5, n_2 = 3$. A continuación, como en las etapas II y III del algoritmo (9), encontramos la familia infinita de pares de triángulos heronianos:

$$(a_1, b_1, c_1) = (49u^2 + 25v^2, 24(u^2 + v^2), 25u^2 + 49v^2)$$
$$(a_2, b_2, c_2) = (49u^2 + 9v^2, 40(u^2 + v^2), 9u^2 + 49v^2)$$
$$P_1 = P_2 = P = 98(u^2 + v^2), \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta = 840uv(u^2 + v^2)$$

Dándole a los parámetros u, v valores naturales formamos la siguiente Tabla 2 :

u	v	(a_1,b_1,c_1)	(a_2,b_2,c_2)	P	Δ
2	1	$(221,120,149)$	$(205,200,85)$	490	8400
3	1	$(466,240,274)$ $(233,120,137)$	$(450,400,130)$ $(225,200,65)$	490	6300
3	2	$(541,312,421)$	$(477,520,277)$	1274	65520
4	1	$(809,408,449)$	$(793,680,193)$	1666	57120
4	3	$(1009,600,841)$	$(865,1000,585)$	2450	252000
5	1	$(1250,624,674)$ $(625,312,337)$	$(1234,1040,274)$ $(617,520,137)$	1274	27300
5	2	$(1325,696,821)$	$(1261,1160,421)$	2842	243600
5	3	$(1450,816,1066)$ $(725,408,533)$	$(1306,1360,666)$ $(653,680,333)$	1666	107100
5	4	$(1625,984,1409)$	$(1369,1640,1009)$	4018	688800

Análogamente, $p = 3, q = 1$ en (8) da $m = 13, n_1 = 7, n_2 = 8$ y usando esto en (4) da otra familia infinita de pares de triángulos heronianos del tipo deseado:

$$(a_1,b_1,c_1) = (169u^2 + 49v^2, 120(u^2+v^2), 49u^2 + 169v^2)$$
$$(a_2,b_2,c_2) = (169u^2 + 64v^2, 105(u^2+v^2), 64u^2 + 169v^2)$$
$$P_1 = P_2 = P = 338(u^2+v^2), \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta = 10920uv(u^2+v^2)$$

$p = 3, q = 2, m = 19, n_1 = 16, n_2 = 5$ da otra familia:

$$(a_1,b_1,c_1) = (361u^2 + 256v^2, 105(u^2+v^2), 256u^2 + 361v^2)$$
$$(a_2,b_2,c_2) = (361u^2 + 25v^2, 336(u^2+v^2), 25u^2 + 361v^2),$$

y así sucesivamente.

Conclusión

Aun cuando las expresiones (4) generan una infinidad de familias infinitas de pares de triángulos heronianos con la misma área y el mismo perímetro, eso no significa que el problema esté completamente resuelto. La solución completa del problema básico: *Determinar los pares de triángulos heronianos que tienen el mismo perímetro y la misma suma* no se ha conseguido todavía (al menos por lo que yo conozco). Por lo tanto, pedimos al lector que intente una solución más completa. Con lo expuesto en este artículo, es posible plantear y resolver un cierto número de problemas interesantes. Por ejemplo, las fórmulas (3) demuestran que el perímetro $P = 10m^2$ no depende de n. Por lo tanto nos permite encontrar **cualquier** número finito de triángulos primitivos heronianos que tienen todos el mismo perímetro (**pero no la misma área**). Sin esa fórmula, este sería un problema difícil de resolver. Invitamos al lector a resolver los siguientes problemas y a plantear algunos nuevos:

1.-Hallar a) cuatro, b) diez triángulos heronianos primitivos distintos que tengan el mismo perímetro.

2.- a) Hallar tres triángulos heronianos primitivos tales que el perímetro de uno de ellos sea la suma de los perímetros de los otros dos.

b) Hallar cuatro triángulos heronianos primitivos tales que el perímetro de uno de ellos sea la suma de los otros tres perímetros.

c) Sea k un número natural. ¿Es posible encontrar k triángulos heronianos primitivos tales que el perímetro de uno de ellos ea la suma de los otros $k-1$ perímetros?

3.- Hallar tres triángulos heronianos primitivos cuyos perímetros estén en progresión aritmética.

4.- Probar o refutar la existencia de tres triángulos heronianos primitivos con el mismo perímetro y la misma área.

Referencias

[1]. J.R.Carlson, *Determination of Heronian triangles*; *Fibonacci Quarterly*, 8 (1970), *pp*.499-506, 551.

[2]. L.E. Dickson, *History of the Theory of numbers*, *vol.II*, *Chelsea*, *New York*, *NY*(1971), *pp*.171-201.

[3]. K.R.S.Sastry, *Heron triangles*: *a new perspective*, *Aust.Math*. *Soc*. *Gazette*, 26(1999), *pp*.160-168.

[4]. K.R.S. Sastry, *Pythagorean triple problems*, *Math*. *and Comput*. *Edu*., 28(1994), *pp*.320-331.

[5]. K.R.S.Sastry, *Heron problems*, *Math*. *and Comput*. *Edu*., 29 (1995), *pp*.192-202.

[6]. K.R.S. Sastry, *A Heron Difference*, *Crux Mathematicorum with Math*. *Mayhem*, 27 (2001), *pp*.22-26.

[7]. D. Singmaster, *Some corrections to Carlson's "Detrmination of Heronian triangles*", *Fibonacci Quarterly*, 11(1973), *pp*. 157-158.

[8]. P. Yiu, *Isoscell triangles equal in perimeter and area*, *Missouri J. Math*. *Sci*., 10 (1998), *pp*.106-111.

K.R.S. Sastry

Jeevan Sandhya, Doddakalsandra Post, Raghuvana Halli, Bangalore, 560 062, India.

Mis recuerdos personales de Murray S. Klamkin (1923-2004)

Francisco Bellot Rosado

El fascinante mundo de la resolución de problemas y de las competiciones matemáticas perdió el 6 de agosto de 2004 a una figura de primer orden en este campo, Murray Seymour Klamkin, pero yo personalmente siento su pérdida como la de uno de esos amigos lejanos a los que uno siempre puede recurrir cuando se le necesita.

Como suscriptor del *American Mathematical Monthly* y del *Mathematics Magazine* desde hace más de veinte años, mi primer conocimiento de Murray fue como lector y admirador de sus artículos y soluciones, siempre brillantes, de problemas. Si la memoria no me falla, mi primer contacto epistolar con él fue en 1983. Él era universalmente conocido desde mucho antes, y en esa época dirigía el *Problem Corner* de la revista *The Mathematical Intelligencer.* Le envié la solución de un problema propuesto por él mismo, y me contestó a vuelta de correo con una de las recomendaciones que más he apreciado en toda mi vida profesional. Me dijo : "*debería usted conocer la revista CRUX MATHEMATICORUM".* Seguí, naturalmente, su consejo, y puedo decir hoy que tengo en mi biblioteca la colección completa de la mejor revista de problemas de matemáticas elementales de todo el mundo. Siempre me he sentido en deuda con Murray por eso.

La primera vez que coincidí con él en una reunión fue en 1990, en Waterloo (Ontario), en la I Conferencia de la World Federation of National Mathematics Competitions. Desde el primer momento Murray me demostró su afecto y simpatía, y ha sido para mí un privilegio escucharle en Congresos y aprender de sus libros. En algunas ocasiones, mi nombre figura junto al suyo en las soluciones de algún problema de CRUX : lo considero un honor, que, seguramente, compartirán conmigo los demás resolventes del problema. Lo más natural es que la solución publicada fuera la de Klamkin, con algún método original y propio de abordar el problema.

Editor de revistas (SIAM, de Matemáticas Aplicadas), autor de libros de problemas de Olimpiadas, de artículos donde hace gala de su *incisivo ojo clínico*, dotado además de una gran memoria, Murray se trasladó de Estados Unidos a Canadá, a la Universidad de Alberta (Edmonton) después de 1984, residiendo allí desde entonces.

La última vez que tuve el honor de coincidir con él fue en 1995, en la Olimpiada Internacional de Matemáticas de Toronto. Él formaba parte de un comité asesor del Jurado Internacional de la Olimpiada (al que yo pertenecía como Jefe de la Delegación de España), en el que figuraban otros destacados problemistas.

Esta breve nota en su memoria incluye una foto tomada durante la *Happy hour* del ICME de Quebec en 1992. En ella, de izquierda a derecha, estamos Marcin Kuczma (Polonia), yo mismo, Alexander Soifer (Estados Unidos), Murray Klamkin y Garett J. Griffiths (Gales-Canadá).

Murray, *sic tibi terra levis.*

Problema 4, **OIM 1993**

Sea ABC un triángulo equilátero, y Γ su círculo inscrito. Si D y E son puntos de AB y AC, respectivamente, tales que DE es tangente a Γ, probar que

$$\frac{AD}{DB} + \frac{AE}{EC} = 1.$$

(*Propuesto por España*, *original de Toshio Seimiya*)

Solución de Seimiya

Sea I el incentro. Tracemos por I una paralela a BC, que corte a AB en P y a AC en Q.

Ya que $\widehat{PIB} = \widehat{IBC} = \widehat{PBI}$, resulta $BP = PI$.

Análogamente, $IQ = QC$.

Como los triángulos API y AQI son iguales, $PI = IQ$ y $AP = AQ$.

Llamamos

$$a = BP = PI = IQ = QC.$$

Como $\widehat{API} = \widehat{ABC} = 60^{\text{o}}$, resulta $\widehat{PAI} = 30^{\text{o}}$, luego

$$AP = 2 \bullet PI = 2a, \text{ y } AQ = 2a.$$

Sean

$$\widehat{DPI} = \widehat{EPI} = \alpha (= 60^{\text{o}})$$
$$\widehat{PDI} = \widehat{IDE} = p$$
$$\widehat{IED} = \widehat{IEQ} = q.$$

Entonces se tiene

$$\alpha + p = \widehat{DIP} = 180^{\text{o}}$$
$$p + q = \widehat{DIE} = 180^{\text{o}}$$
$$q + \alpha = \widehat{EIQ} = 180^{\text{o}}$$
$$\widehat{DIP} + \widehat{DIE} + \widehat{EIQ} = 180^{\text{o}}$$

Sumando estas cuatro igualdades obtenemos

$$p + q + \alpha = 180^{\text{o}},$$

luego por la segunda de las igualdades anteriores resulta

$$\widehat{DIE} = \alpha.$$

Por lo tanto,los siguientes triángulos son semejantes:

$$DPI \simeq DIE \simeq IQE.$$

Llamando entonces $x = PD, y = QE$, de la sememjanza entre DPI y QEI se deduce

$$\frac{PD}{QI} = \frac{PI}{QE} \Leftrightarrow \frac{x}{a} = \frac{a}{y} \Leftrightarrow xy = a^2 \quad (1)$$

Entonces tenemos

$$\frac{AD}{DB}+\frac{AE}{EC}=\frac{2a-x}{a+x}+\frac{2a-y}{a+y}=\frac{(2a-x)(a+y)+(2a-y)(a+x)}{(a+x)(a+y)},$$

pero de (1) obtenemos que el numerador de la última fracción vale

$$\begin{aligned}(2a-x)(a+y)+(2a-y)(a+x) &= 4a^2+a(x+y)-2xy\\ &= 2a^2+a(x+y)\\ &= a^2+a(x+y)+xy\\ &= (a+x)(a+y),\end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\frac{AD}{DB}+\frac{AE}{EC}=1.\blacksquare$$

Solución obtenida durante el concurso, de Antonio Rojas León, medalla de oro en la Olimpiada.

Sean A' el punto de tangencia de DE con la circunferencia Γ; B' y C' los puntos de tangencia de AB y AC con Γ; r el radio de Γ y O su centro; a el lado de ABC; $x=C'D, y=B'E$.

Se verifican las igualdades $A'D=C'D, B'E=A'E$ por ser tangentes a la circunferencia desde un punto exterior.

Comparando áreas, se tiene:

$$[ABC]=[EOC]+[BOC]+[DOB]+[DOE]+[ADE];$$

esta igualdad se puede escribir como

$$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{1}{2}r\left(a+\frac{a}{2}+x+\frac{a}{2}+y+x+y\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}-x\right)\left(\frac{a}{2}-y\right)\sin 60^\circ$$

o, en forma equivalente,

$$\frac{a^2}{4}=\frac{1}{2}a(x+y)+3xy\Leftrightarrow\frac{a^2}{4}-2xy=xy+\frac{1}{2}a(x+y),$$

y sumando y restando $\frac{a^2}{4}+\frac{1}{2}a(x-y)$ resulta

$$\left(\frac{a}{2}+x\right)\left(\frac{a}{2}-y\right)+\left(\frac{a}{2}+y\right)\left(\frac{a}{2}-x\right)=\left(\frac{a}{2}+x\right)\left(\frac{a}{2}+y\right),$$

es decir

$$BD\cdot AE+CE\cdot AD=BD\cdot CE,$$

que es precisamente

$$\frac{AD}{BD}+\frac{AE}{CE}=1.\blacksquare$$

Sea ABC un triángulo equilátero y Γ su circunferencia inscrita. Si D y E son puntos de los lados AB y AC, respectivamente, tales que DE es tangente a Γ, probar que

$$\frac{AD}{DB}+\frac{AE}{EC}=1$$

La demostración hace servir el siguiente resultado: si el ángulo A de un triángulo ABC es de 60^o, entonces $\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}=1$ (donde la notación es la habitual).

En efecto, si $\angle A=60^o$, tenemos

$$\begin{aligned}a^2=b^2+c^2-bc &\Leftrightarrow a^2+bc=b^2+c^2\\ &\Leftrightarrow a^2+bc+a(b+c)=b^2+c^2+a(b+c)\\ &\Leftrightarrow (a+b)(a+c)=b(a+b)+c(a+c)\\ &\Leftrightarrow 1=\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\end{aligned}$$

(Obsérvese que la relación $a^2=b^2+c^2-bc$ es un resultado euclídeo) .

Sea O el centro del triángulo equilátero y M el punto medio del lado AB. Si DE es tangente a Γ en T y corta a la circunferencia circunscrita a ΔABC en D' y E' (ver figura) resultan iguales los triángulos rectángulos OMA y OTD'; por consiguiente, $AM=D'T$.

Habida cuenta de la igualdad de los segmentos de tangente DM y DT, resulta

$$AD=AM-DM=D'T-DT=DD' \ .$$

Análogamente, $AE=EE'$.

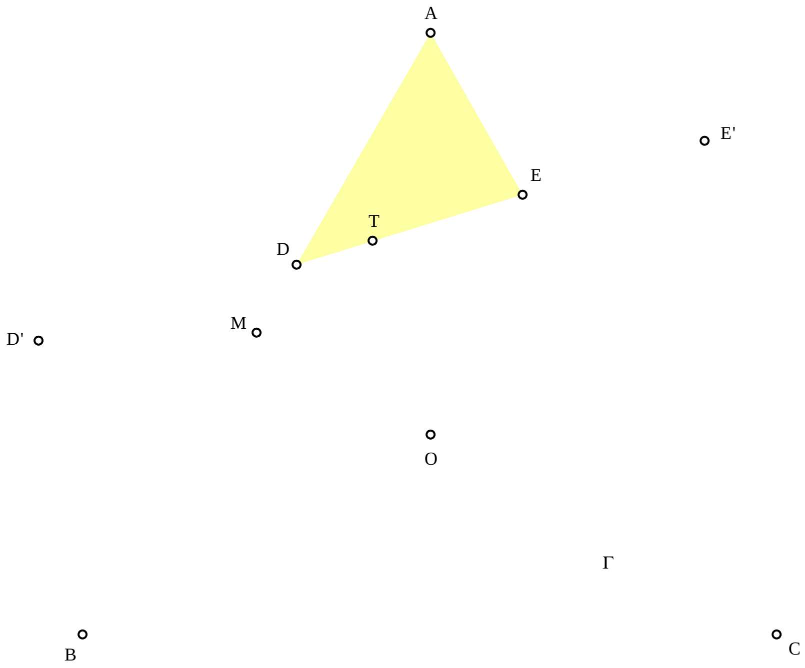
Los triángulos $D'DA$ y BDE' son semejantes y siendo isósceles el primero, lo es también el segundo con $DB=DE'$.

Análogamente, $EC=ED'$.

Finalmente,

$$\frac{AD}{DB}+\frac{AE}{EC}=\frac{AD}{DE'}+\frac{AE}{ED'}=\frac{AE}{DE+EE'}+\frac{AD}{ED+DD'}=\frac{AD}{DE+EA}+\frac{AE}{ED+DA}=1$$

por aplicación del resultado arriba citado al triángulo ADE en el que $\angle A=60^o$.


A
E'
E
T
D
M
D'
O
Γ
B
C

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

PROBLEMAS DE NIVEL MEDIO Y DE OLIMPIADAS 16

PROBLEMAS PROPUESTOS

Presentamos una selección de 5 problemas checos, de los excelentes libros (comentados en un número anterior de la Revista) de Jiri Herman, Radan Kucera y Jaromir Simsa, *Counting and configurations* , *Equations and Inequalities*,publicados por la Canadian Mathematical Society en su serie CMS Books in Mathematics, de la editorial Springer.

16.**1**.¿De cuántas maneras se pueden colocar 2k personas de diferentes estaturas en una doble fila, de tal manera que en cada fila estén ordenados por su estatura, y cada persona de la primera fila sea más alta que la que tiene inmediatamente detrás ? Las dos filas constan del mismo número de personas.

16.**2**. ¿**De cuántas maneras se pueden escribir las cifras del número 1112223456**, **de forma que no haya dos cifras iguales que sean adyacentes**?

16.3. Resolver la ecuación

$$\sqrt[3]{8+x} + \sqrt[3]{8-x} = 1.$$

16.4.Demostrar que para cada entero $n \geq 2,$ se verifica

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} > n\left(\sqrt[n]{n+1} - 1\right).$$

16.5. Resolver en el conjunto de los números naturales la ecuación

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{1988}.$$

PROBLEMAS PARA LOS MÁS JÓVENES 16

Presentamos algunos problemas rumanos, propuestos en la competición Traian Lalescu (uno de los más imprtantes matemáticos rumanos de finales del siglo XIX y comienzos del XX) y otras competiciones escolares rumanas, contenidas en la publicación *Mathematics Competitions in Romania*, de los autores Vasile Berinde, Mihai Gavrilut y Andrei Horvat-Marc, repartida por la Delegación rumana en el Congreso Internacional de Educación Matemática 2004, en Copenhague :

1. Demostrar que no existe ningún número primo p tal que el máximo común divisor de $p^2 - 2p + 1$ y $2p^2 + p + 1$ sea igual a 3. (M.Radu)

2.Hallar números naturales $a, b < 10$ tales que

$$a^n + b^{n+1} + a^{n+2} + b^{n+3}$$

sea divisible por 10 para todo número natural $n \geq 2$. (M.Radu)

3.Comparar los números $A = 2003^{2003} + 2004^{2004}, B = 2003^{2004} + 2004^{2003}$.

4.Hallar los números naturales n tales que

$$n^2 + 1, n^2 + 3, n^2 + 7, n^2 + 9, n^2 + 15$$

sean todos primos.

5.Demostrar que

$$\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} + \frac{1}{\sqrt{6+\sqrt{6}}} \geq \frac{5}{6}.$$

Problema 4 (Revista OIM No. 1)
En los lados AB y AC del triángulo ABC se consideran puntos variables F y E, respectivamente, tales que

$$b \cdot \frac{FA}{FB} + c \cdot \frac{EA}{EB} = a.$$

Si M es el punto de intersección de BE y CF, hallar el lugar geométrico del punto M.

Solución por José Heber Nieto, Maracaibo, Venezuela.

Sean P el único punto del lado AB tal que $PA/PB = a/b$ y Q el único punto del lado AC tal que $QA/QC = a/c$. Entonces el lugar geométrico de M es el segmento PQ.

Es claro que P y Q pertenecen al lugar. Si M es cualquier punto interior del segmento PQ tracemos las rectas CM y BM y sean F y E sus puntos de intersección con AB y AC, respectivamente. Si los puntos F, P, A y B se proyectan desde M y se secciona el haz resultante con la recta AC, resultan los puntos C, Q, A, E. Como la razón doble de cuatro puntos es invariante por proyecciones y secciones se tiene que $(FPAB) = (CQAE)$, es decir

$$\frac{FA/FB}{PA/PB} = \frac{CA/CE}{QA/QE.}$$

Luego de sustituir $PA/PB = a/b$, $CA = b$ resulta

$$\begin{aligned} \frac{b}{a} \cdot \frac{FA}{FB} &= \frac{b}{QA} \cdot \frac{QE}{EC} = \frac{b}{QA} \cdot \frac{QA - EA}{EC} = \frac{b}{EC} - \frac{b}{QA} \cdot \frac{EA}{EC} \\ &= \frac{EA + EC}{EC} - \frac{b}{QA} \cdot \frac{EA}{EC} = 1 + (1 - \frac{b}{QA})\frac{EA}{EC}. \end{aligned}$$

Ahora bien, de $QA/QC = a/c$ se sigue $c/a = QC/QA = (b - QA)/QA$, de donde $1 - b/QA = -c/a$. Por tanto

$$\frac{b}{a} \cdot \frac{FA}{FB} = 1 - \frac{c}{a} \cdot \frac{EA}{EC}$$

y finalmente

$$b \cdot \frac{FA}{FB} + c \cdot \frac{EA}{EC} = a.$$

Lo anterior muestra que todo el segmento PQ está contenido en el lugar.

Supongamos ahora que un punto M pertenece al lugar. Sean F y E las intersecciones de las rectas CM y BM con AB y AC, respectivamente, y sea M' la intersección de CM con PQ. Sea E' la intersección de BM' con AC. Entonces como M' pertenece también al lugar se deduce fácilmente que $E'A/E'C = EA/EC$, de donde $E' = E$ y M' debe estar en la recta BM, pero como también está en la recta CM debe ser $M' = M$. Esto prueba que no hay otros puntos en el lugar fuera de PQ.

Problema 7 (Revista OIM No. 2)

Se dan cuatro rectas, tangentes a una parábola no trazada. Determinar el punto de tangencia de la cuarta tangente.

Solución por José Heber Nieto, Maracaibo, Venezuela.

Se trata de un problema clásico de geometría proyectiva. En general, una cónica queda determinada por cinco tangentes. Aunque en este problema sólo se dan cuatro tangentes (llamémoslas a, b, c y d), como se trata de una parábola debe ser tangente a la recta impropia, y ya tenemos una quinta tangente. Sean $A = a \cdot c$ (la intersección de a y c), $A' = a \cdot d$, $B = b \cdot c$, $B' = b \cdot d$, C el punto impropio de la recta c y C' el punto impropio de la recta d. Entonces A', B' y C' son puntos correspondientes de A, B y C en una proyectividad Π. El punto de tangencia de la recta d es el punto P' correspondiente de $P = c \cdot d$ bajo Π. Para hallar P' se usa el hecho de que los puntos $AB' \cdot A'B$, $AC' \cdot A'C$ y $AP' \cdot A'P$ están alineados (notar que AC' es la paralela a d por A y que $A'C$ es la paralela a c por A'. La recta r que contiene estas intersecciones se denomina *eje* de la proyectividad Π. El punto P' de tangencia de d es simplemente la intersección de r con d.

Problema 8 (Revista OIM No. 2)
Un cuadrilátero variable $ABCD$ tiene el lado AB fijo, el lado CD, de longitud constante, gira alrededor del punto de intersección de CD y AB. Hallar el lugar geométrico del punto P de intersección de AC y BD.

Solución por José Heber Nieto, Maracaibo, Venezuela.

Sea O el punto de intersección de CD y AB. Sea Q el punto en el cual la paralela a CD por P intersecta a la recta AB. Entonces el lugar geométrico de P es la circunferencia K' de centro Q homotética de la circunferencia K de centro O en la que gira el punto C, con A como centro de homotecia. En efecto, pongamos $a = OA$, $b = OB$, $c = OC$, $d = OD$,

$$t = \frac{AP}{AC} = \frac{QP}{OC}, \quad s = \frac{BP}{BD} = \frac{QP}{OD}.$$

Entonces

$$s/t = \frac{OC}{OD} = \frac{c}{d}.$$

Anlogamente

$$1 - t = \frac{AC - AP}{AC} = \frac{PC}{AC} = \frac{OQ}{OA},$$
$$1 - s = \frac{BD - BP}{BD} = \frac{PD}{BD} = \frac{OQ}{OB},$$

de donde

$$\frac{1-t}{1-s} = \frac{OB}{OA} = \frac{b}{a}.$$

Por lo tanto

$$1 - t = \frac{b}{a}(1 - s) = \frac{b}{a}(1 - \frac{ct}{d}),$$

de donde se despeja

$$t = \frac{(b-a)d}{bc - ad}.$$

Como al girar CD la razón $t = AP/AC$ se mantiene constante (pues sólo depende de a, b, c y d), el lugar pedido es la la circunferencia K' homotética de la circunferencia K de centro O en la que gira C, con A como centro de homotecia. Puesto que la razón de esta homotecia es t y $t = QA/OA$, el punto Q permanece fijo y es el centro de K'.
Nota: Cuando CD es colineal con AB el punto P no está bien definido, pero los puntos de intersección de K' con la recta AB son los límites de P cuando $\angle AOC$ tiende a $0°$ o a $180°$.

Problema (Revista OIM No. 9)
Dados cuatro puntos A, B, C, M, ¿es posible determinar una cónica que pase por M y respecto de la cual el triángulo ABC sea autopolar?

Solución por José Heber Nieto, Maracaibo, Venezuela. Hay infinitas cónicas que pasan por M y respecto a las cuales el triángulo ABC es autopolar.

Supongamos en primer lugar que una tal cónica K exista. Tracemos las rectas AM y BM y sean $X = AM \cdot BC$ (intersección de AM con BC) y $Y = BM \cdot AC$. Tracemos la recta XY y sea $W = XY \cdot AB$. Por una conocida propiedad de los cuadrivértices completos (en este caso el $BCYW$) se tiene que $N = WC \cdot AM$ es el conjugado armónico de M respecto al par A, X. Por lo tanto, siendo BC la polar de A, N debe pertenecer a K. Sea ahora $P = WC \cdot BM$. Proyectando la cuaterna armónica $MNXA$ desde W y seccionando con la recta BM resulta que la cuaterna $MPYB$ también es armónica y por lo tanto P pertenece a K. Del mismo modo proyectando $MNXA$ desde B y seccionando con la recta CM resulta la cuaterna armónica $MQCZ$ y por lo tanto $Q = CM \cdot BN$ pertenece a K. En resumen hemos probado que cualquier cónica que pase por M y respecto a la cual el triángulo ABC sea autopolar, debe contener a los puntos N, P y Q.

Ahora bien, hay infinitas cónicas que pasan por los puntos M, N, P y Q (pues hacen falta cinco puntos para determinar una cónica). Sea K una cualquiera de ellas. Como la cuaterna que se obtiene proyectando $MPYB$ desde A y cortando con CM es armónica, se deduce que A, Q y P están alineados. Si $U = AC \cdot BN$ y $V = AP \cdot BC$ entonces es fácil ver que las cuaternas $NQUB$ y $PQVA$ también son armónicas. Además, del hecho de que $PQVA$ y $MNXA$ sean armónicas se sigue que la recta XV (que es la misma BC) es la polar del punto A respecto a K. Análogamente como $NQUB$ y $MPYB$ son armónicas se sigue que la recta AC es la polar de B respecto a K. En consecuencia también AB es la polar de C y el triángulo ABC es autopolar.

Lo anterior vale aún si M pertenece a uno de los lados del triángulo ABC (pero no si es igual a uno de los vértices). Por ejemplo si M está en la recta AB entonces ABC es autopolar respecto a cualquier cónica que pase por M y por su conjugado armónico N respecto de A, B, siendo además tangente a las rectas MC y NC en M y N, respectivamente.

Problema 12 (Revista OIM No. 3)
Si $a+b+c+d=0$, $a^2+b^2+c^2+d^2=0$, probar que

$$a^8+b^8+c^8+d^8=\frac{1}{4}(a^4+b^4+c^4+d^4)$$

Solución por José Heber Nieto, Maracaibo, Venezuela.

Lo que afirma el enunciado no es cierto. Como contraejemplo tomemos $a=1$, $b=-1$, $c=i$, $d=-i$. Entonces $a+b+c+d=1-1+i-i=0$, $a^2+b^2+c^2+d^2=1+1-1-1=0$, $a^4+b^4+c^4+d^4=1+1+1+1=4$ y $a^8+b^8+c^8+d^8=4$.

Sin embargo se cumple que

$$a^8+b^8+c^8+d^8=\frac{1}{4}(a^4+b^4+c^4+d^4)^2$$

(que tal vez era el enunciado original del problema y por error no se incluyó el último exponente). Esto se puede probar fácilmente utilizando las relaciones entre las funciones simétricas elementales y las sumas de potencias, establecidas por Newton. Específicamente, definamos

$$\begin{aligned} e_1 &= a+b+c+d, \quad e_2=ab+ac+ad+bc+bd+cd,\\ e_3 &= abc+abd+acd+bcd, \quad e_4=abcd,\\ p_k &= a^k+b^k+c^k+d^k. \end{aligned}$$

Entonces las relaciones de Newton afirman que

$$ke_k=\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}p_je_{k-j}.$$

En nuestro caso se tiene $e_1=p_1=p_2=0$. Aplicando las relaciones de Newton para $k=2$ y $k=4$ resulta

$$\begin{aligned} 2e_2 &= p_1e_1-p_2=0, \quad \text{por tanto } e_2=0,\\ 4e_4 &= p_1e_3-p_2e_2+p_3e_1-p_4=-p_4, \quad \text{por tanto } p_4=-4e_4. \end{aligned}$$

Como $e_k=0$ para $k>4$ se tiene además

$$\begin{aligned} 0 &= 5e_5=p_1e_4-p_2e_3+p_3e_2-p_4e_1+p_5=p_5, \quad \text{por tanto } p_5=0,\\ 0 &= 8e_8=p_1e_7-p_2e_6+p_3e_5-p_4e_4+p_5e_3-p_6e_2+p_7e_1-p_8=-p_4e_4-p_8, \end{aligned}$$

de donde $p_8=-p_4e_4=p_4^2/4=4e_4^2$, es decir

$$a^8+b^8+c^8+d^8=\frac{1}{4}(a^4+b^4+c^4+d^4)^2=4(abcd)^2.$$

Problema 14 (Revista OIM No. 3)
Los lados BC, CA, AB del triángulo ABC cortan a una recta arbitraria en D, E, F respectivamente. Demostrar que existe un punto P en esa recta tal que las áreas de los triángulos PAD, PBE y PCF son iguales.

Solución por José Heber Nieto, Maracaibo, Venezuela.

Tracemos la recta BE y una paralela r a AC por D. Sea M la intersección de r con BE, y tracemos una paralela s a AB por M. Sean N y P los puntos de intersección de s con las rectas AC y FD, respectivamente. Sean h, k y l las distancias desde A, B y C, respectivamente, a la recta FD. Es claro que

$$\frac{PD}{PE} = \frac{PM}{PN} = \frac{FB}{FA} = \frac{k}{h}.$$

Por lo tanto área$(PAD) = PD \cdot h/2 = PE \cdot k/2 =$ área(PBE). Análogamente

$$\frac{PE}{PF} = \frac{ME}{MB} = \frac{DC}{DB} = \frac{l}{k},$$

de donde área$(PBE) = PE \cdot k/2 = PF \cdot l/2 =$ área(PCF). Por lo tanto área$(PAD) =$ área$(PBE) =$ área(PCF) y el punto P cumple la condición pedida. Hay una segunda solución, a saber el conjugado armónico de P respecto a E, D.

Problema 15 (Revista OIM No. 3)
Demostrar que
$$\sec^4\frac{\pi}{7}+\sec^4\frac{2\pi}{7}+\sec^4\frac{2\pi}{7}=416.$$

Solución por José Heber Nieto, Maracaibo, Venezuela.
Sea k un entero impar. Entonces
$$\cos\frac{3k\pi}{7}=4\cos^3\frac{k\pi}{7}-3\cos\frac{k\pi}{7}.$$
Pero por otro lado
$$\begin{aligned}\cos\frac{3k\pi}{7} &= \cos(k\pi-\frac{4k\pi}{7})=-\cos\frac{4k\pi}{7}=1-2\cos^2\frac{2k\pi}{7}\\ &= 1-2(2\cos^2\frac{k\pi}{7}-1)^2=-8\cos^4\frac{k\pi}{7}+8\cos^2\frac{k\pi}{7}-1,\end{aligned}$$
y resulta que
$$8\cos^4\frac{k\pi}{7}+4\cos^3\frac{k\pi}{7}-8\cos^2\frac{k\pi}{7}-3\cos\frac{k\pi}{7}+1=0.$$
Por lo tanto $\cos\pi/7$, $\cos 3\pi/7$, $\cos 5\pi/7$ y $\cos 7\pi/7=-1$ son raíces del polinomio
$$8x^4+4x^3-8x^2-3x+1$$
Si lo dividimos entre $(x+1)$ resulta
$$P(x)=8x^3-4x^2-4x+1,$$
cuyas raíces son $\cos\pi/7$, $\cos 3\pi/7$ y $\cos 5\pi/7=-\cos 2\pi/7$. Los recíprocos de estas cantidades, es decir $x_1=\sec\pi/7$, $x_2=\sec 3\pi/7$ y $x_3=-\sec 2\pi/7$, son las raíces del polinomio
$$x^3P(\frac{1}{x})=x^3-4x^2-4x+8.$$
Por las fórmulas de Vieta se tiene
$$x_1+x_2+x_3=4,\quad x_1x_2+x_2x_3+x_1x_2=-4,\quad x_1x_2x_3=-8,$$
de donde
$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_2)=24,$$
y finalmente
$$\begin{aligned}&\sec^4\frac{\pi}{7}+\sec^4\frac{2\pi}{7}+\sec^4\frac{2\pi}{7}=x_1^4+x_2^4+x_3^4\\ &=(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^2-2(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_2)^2+4x_1x_2x_3(x_1+x_2+x_3)=416.\end{aligned}$$

Problema 25 (Revista OIM No. 5)
Un avión de la compañía *Air Disaster* debe realizar un viaje entre dos ciudades con un total de $m+n$ escalas. En cada escala, el avión ha de cargar o descargar una tonelada de una cierta mercancía; realiza cargas en m de las escalas y descargas en las n restantes. En la compañía, nadie ha reparado en que el avión no soporta una carga mayor que k toneladas ($n < k < m+n$) y las escalas de carga y descarga están distribuidas al azar. Si el avión sale con n toneladas de la mercancía, calcular la probabilidad de que llegue a su destino.

Solución por José Heber Nieto, Maracaibo, Venezuela.

Modelemos cada posible secuencia de cargas y descargas mediante una poligonal de vértices $(0, x_0)$, $(1, x_1)$,...,$(m+a, x_{m+n})$, donde $x_0 = n$ y $x_{i+1} = x_i + 1$ o $x_{i+1} = x_i - 1$ según que en la escala i se cargue o se descargue mercancía, respectivamente. La poligonal finaliza en $(m+n, m)$, y el avión llega a su destino si y sólo si la poligonal se mantiene estrictamente por debajo de la recta $y = k+1$. La probabilidad buscada es el cociente entre el número de poligonales que no tocan esa recta y el total de poligonales, que es $\binom{m+n}{n} = \frac{(m+n)!}{m!n!}$, ya que la poligonal queda determinada si se especifica en cuáles de las $m+n$ escalas se realizan las n descargas.

Si $m > k$ es claro que todas las poligonales de $(0, n)$ a $(m+n, m)$ tocan la recta $y = k+1$ y la probabilidad buscada es 0. Supongamos entonces que $m \leq k$. Para calcular el número de poligonales que no tocan la recta $y = k+1$ utilizamos el llamado *principio de reflexión*, que afirma que el número de poligonales que van de $(0, n)$ a $(m+n, m)$ *tocando* la recta $y = k+1$ es igual al número total de poligonales que van de $(0, n)$ al punto simétrico de $(m+n, m)$ respecto a la recta $y = k+1$, es decir $(m+n, 2(k+1)-m)$ (esto se prueba simetrizando respecto a la recta $y = k+1$, para cada poligonal de $(0, n)$ a $(m+n, m)$ que toque esa recta, la porción que va desde el primer vértice de contacto hasta el último vértice de la poligonal).

Como las poligonales que van de $(0, n)$ a $(m+n, 2(k+1)-m)$ son $\binom{m+n}{k+1}$, la probabilidad buscada es

$$\frac{\binom{m+n}{n} - \binom{m+n}{k+1}}{\binom{m+n}{n}} = 1 - \frac{\binom{m+n}{k+1}}{\binom{m+n}{n}} = 1 - \frac{m!n!}{(k+1)!(m+n-k-1)!}.$$

Nota: Más detalles sobre caminatas al azar y el principio de reflexión pueden encontrarse en el clásico libro de William Feller *Introducción a la Teoría de Probabilidades y sus Aplicaciones*, vol. I, Editorial Limusa, México.

Problema 71
Propuesto por José Luis Díaz Barrero, Barcelona, España

Para cualesquiera números reales x_1, x_2, ..., x_n, demostrar que

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\cosh(x_k)\right)^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} senh(x_k)\right)^2 \geq n^2$$

Respuesta:
Tratando el miembro izquierdo de la desigualdad como una diferencia de cuadrados que es, tenemos:

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\cosh(x_k)\right)^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} senh(x_k)\right)^2$$

$$= \left[\left(\sum_{k=1}^{n}\cosh(x_k)\right) + \left(\sum_{k=1}^{n} senh(x_k)\right)\right]\left[\left(\sum_{k=1}^{n}\cosh(x_k)\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} senh(x_k)\right)\right]$$

$$= \left[\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{x_k}+e^{-x_k}}{2}\right) + \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{x_k}-e^{-x_k}}{2}\right)\right]\left[\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{x_k}+e^{-x_k}}{2}\right) - \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{x_k}-e^{-x_k}}{2}\right)\right]$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} e^{x_k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} e^{-x_k}\right)$$

Utilizando la desigualdad de Chebyshev. Que plantea

$$Si \quad a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots \leq a_n \quad y \quad b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \ldots \geq b_n$$

$$\frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)}{n}\frac{(b_1+b_2+\ldots+b_n)}{n} \geq \frac{(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)}{n}$$

Que en el caso de nuestro problema, ordenando las x_i de menor a mayor sin pérdida de generalidad por el crecimiento de la función exponencial, queda la desigualdad de Chebyshev como sigue:

$$\frac{\left(e^{x_1}+e^{x_2}+\ldots+e^{x_n}\right)}{n}\frac{\left(e^{-x_1}+e^{-x_2}+\ldots+e^{-x_n}\right)}{n} \geq \frac{\left(e^{x_1}e^{-x_1}+e^{x_2}e^{-x_2}+\ldots+e^{x_n}e^{-x_n}\right)}{n}$$

$$\frac{\left(e^{x_1}+e^{x_2}+\ldots+e^{x_n}\right)}{n}\frac{\left(e^{-x_1}+e^{-x_2}+\ldots+e^{-x_n}\right)}{n} \geq \frac{\underbrace{1+1+\ldots+1}_{n\ veces}}{n} = \frac{n}{n} = 1$$

O lo que es lo mismo

$$\left(e^{x_1}+e^{x_2}+\ldots+e^{x_n}\right)\left(e^{-x_1}+e^{-x_2}+\ldots+e^{-x_n}\right) \geq n^2$$

Con lo que queda demostrada la desigualdad del problema 71.

Problema 72

Propuesto por José Luis Díaz Barrero, Barcelona, España

Resolver la ecuación

$$x^{2n}+\sum_{k=1}^{n}\binom{2n}{2k}x^{2(n-k)}(x^2-1)^k=0$$

Notemos que la ecuación se puede transformar en:

$$\binom{2n}{0}x^{2n}+\sum_{k=1}^{n}\binom{2n}{2k}x^{2(n-k)}(x^2-1)^k=0$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}x^{2(n-k)}\left(\sqrt{(x^2-1)}\right)^{2k}=0$$

Ahora por el binomio de Newton tenemos que:

$$\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{2n}=\sum_{j=0}^{2n}\binom{2n}{j}x^{2n-j}\left(\sqrt{x^2-1}\right)^j$$

$$\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{2n}=\sum_{j=0}^{2n}\binom{2n}{j}x^{2n-j}(-1)^j\left(\sqrt{x^2-1}\right)^j$$

Y sumando miembro a miembro tenemos:

$$\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{2n}+\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{2n}=2\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}x^{2(n-k)}\left(\sqrt{x^2-1}\right)^{2k}$$

$$\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{2n}+\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{2n}=2\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}x^{2(n-k)}\left(x^2-1\right)^{k}$$

Por tanto la ecuación se transforma en:

$$\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{2n}+\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{2n}=0$$

Dividiendo por $\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{2n}$ teniendo en cuenta que $\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)\neq 0$ para todo x número complejo

$$\frac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{2n}}{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{2n}}+1=0$$

$$\left(\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}\right)^{2n}+1=0$$

De donde se obtiene que $\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}} = w_j = e^{i\frac{p+2p\,j}{2n}}$, $j = 0,1,2,...,2n-1$ o sea una de las raíces de orden 2n de $-1 = e^{ip}$

Trabajemos entonces con la expresión $\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}} = w_j$ a la cual aplicándoles transformaciones equivalentes

$$\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}} = w_j \Leftrightarrow x(w_j-1) = (w_j+1)\sqrt{x^2-1}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{w_j+1}{w_j-1}\sqrt{x^2-1} \Rightarrow x^2 = \left(\frac{w_j+1}{w_j-1}\right)^2 (x^2-1)$$

O sea hemos llegado a que si x es solución de la ecuación entonces satisface

$$x^2 = \left(\frac{w_j+1}{w_j-1}\right)^2 (x^2-1) \quad (*)$$

Demostremos ahora que si x satisface dicha ecuación (*) entonces es solución de la ecuación del problema 72.
Si (*) entonces

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k} x^{2(n-k)}\left(\sqrt{(x^2-1)}\right)^{2k} = 0$$

Se transforma en

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}\left(\frac{w_j+1}{w_j-1}\right)^{2(n-k)}(x^2-1)^{n-k}(x^2-1)^k = 0$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}\left(\frac{w_j+1}{w_j-1}\right)^{2(n-k)}(x^2-1)^n = 0$$

$$(x^2-1)^n\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}\left(\frac{w_j+1}{w_j-1}\right)^{2(n-k)} = 0$$

Pero como x satisface (*) entonces $x^2 - 1$ 0 y utilizando nuevamente el binomio de Newton tenemos:

$$2\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}\left(\frac{w_j+1}{w_j-1}\right)^{2(n-k)}=\left(\frac{w_j+1}{w_j-1}+1\right)^{2n}+\left(\frac{w_j+1}{w_j-1}-1\right)^{2n}$$

$$=\left(\frac{w_j+1+w_j-1}{w_j-1}\right)^{2n}+\left(\frac{w_j+1-w_j+1}{w_j-1}\right)^{2n}$$

$$=\left(\frac{2w_j}{w_j-1}\right)^{2n}+\left(\frac{2}{w_j-1}\right)^{2n}=\frac{(2w_j)^{2n}}{(w_j-1)^{2n}}+\frac{2^{2n}}{(w_j-1)^{2n}}$$

$$=\frac{2^{2n}}{(w_j-1)^{2n}}\left[(w_j)^{2n}+1\right]=0$$

Lo cual es totalmente cierto pues w_j es una de las raíces de orden 2n de -1.
Por lo que queda demostrado que las soluciones de la ecuación del problema 72 son las x que satisfacen (*)

$$x^2=\left(\frac{w_j+1}{w_j-1}\right)^2(x^2-1)$$

$$x^2=\frac{(w_j+1)^2}{4w_j}$$

Donde $w_j=e^{i\frac{p+2p\,j}{2n}},\ j=0,1,\ 2,\ldots,\ 2n-1$

Por tanto

$$x=\frac{(w_j+1)\left(\sqrt{w_j}\right)^{-1}}{2}$$

$$x=\frac{\left(e^{i\left(\frac{p+2p\,j}{2n}\right)}+1\right)e^{-i\left(\frac{p+2p\,j}{4n}+kp\right)}}{2},\quad con\ k=0,1.\quad j=0,1,\ldots,2n-1.$$

$$x=\frac{\left(e^{i\left(\frac{p+2p\,j}{2n}-kp\right)}+e^{-i\left(\frac{p+2p\,j}{4n}+kp\right)}\right)}{2}$$

Pero al utilizar ángulos cotTerminal obtenemos:

$$x=\frac{\left(e^{i\left(\frac{p+2p\,j}{2n}-kp+2kp\right)}+e^{-i\left(\frac{p+2p\,j}{4n}+kp\right)}\right)}{2}$$

$$x=\frac{\left(e^{i\left(\frac{p+2p\,j}{2n}+kp\right)}+e^{-i\left(\frac{p+2p\,j}{4n}+kp\right)}\right)}{2}$$

$$x=i\cos\left(\frac{p+2p\,j}{2n}+kp\right),\quad con\quad k=0,1.\quad j=0,1,\ldots,2n-1.$$

O sea las soluciones de la ecuación 72 son:

$$x=i\cos\left(\frac{p+2p\,j}{2n}+kp\right),\quad con\quad k=0,1.\quad j=0,1,\ldots,2n-1.$$

Problema 73

Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, Ávila, España

Resolver la ecuación en diferencias

$$u_{n+2} = \frac{u_{n+1} - u_n}{1 + u_{n+1} \cdot u_n}, \quad n \geq 1$$

Con las condiciones iniciales $u_1 = 1, u_2 = a,\ a \neq -1, a \in R.$

Solución Problema 73

Utilizando la relación de recurrencia tenemos:

$$u_{n+3} = \frac{u_{n+2} - u_{n+1}}{1 + u_{n+2}u_{n+1}} = \frac{\dfrac{u_{n+1} - u_n}{1 + u_{n+1}u_n} - u_{n+1}}{1 + \dfrac{u_{n+1} - u_n}{1 + u_{n+1}u_n}u_{n+1}}$$

$$= \frac{\dfrac{u_{n+1} - u_n - u_{n+1} - (u_{n+1})^2 u_n}{1 + u_{n+1}u_n}}{\dfrac{1 + u_n u_{n+1} + (u_{n+1})^2 - u_n u_{n+1}}{1 + u_{n+1}u_n}}$$

$$= \frac{-u_n - (u_{n+1})^2 u_n}{1 + (u_{n+1})^2} = -u_n$$

O sea tenemos que $u_{n+3} = -u_n, \ \forall n \in \mathbb{N}^*$ (1)

Y como consecuencia: $u_{n+6} = -u_{n+3} = u_n, \ \forall n \in \mathbb{N}^*$ (2)

Como $u_3 = \dfrac{a-1}{1+a}$ por la recurrencia entonces decimos en virtud de (1), (2) y las condiciones iniciales que la solución de la ecuación en diferencias es:

$$u_n = \begin{cases} 1 & si\ n = 6k \\ a & si\ n = 6k+1 \\ \dfrac{a-1}{a+1} & si\ n = 6k+2 \\ -1 & si\ n = 6k+3 \\ -a & si\ n = 6k+4 \\ -\dfrac{a-1}{a+1} & si\ n = 6k+5 \end{cases}$$ cuando k es un número natural.

PROBLEMAS 76-80

Problema 76 (*propuesto por J.L. Díaz Barrero, Barcelona, España*)
Demostrar que en cualquier triángulo ABC se verifica

$$\frac{1}{2}\sum_{cíclica}(a+b)\cos C \leq \frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}.$$

Problema 77 (*propuesto por Juan Carlos Salazar, Puerto Ordaz, Venezuela*)
Sea el cuadrilátero ABCD circunscrito a un círculo (I,r). Los puntos de tangencia de este círculo con los lados AB,BC,CD,DA son W,X,Y,Z, respectivamente. Los círculos exinscritos $(I_1,r_1),(I_4,r_4)$ correspondientes a los lados AB y CD, respectivamente, y los círculos inscritos $(I_2,r_2),(I_3,r_3)$ en los triángulos WXY y WYZ determinan los triángulos tangenciales externos e internos correspondientes, de áreas S_1,S_2,S_3,S_4.
Demostrar que

$$\frac{S_1}{r_1}+\frac{S_4}{r_4}=2\left(\frac{S_2}{r_2}+\frac{S_3}{r_3}\right).$$

Problema 78 (*propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, Ávila, España*)
Resolver en enteros positivos la ecuación

$$x^y+y^x=x^z+y^z.$$

Problema 79 (*propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, Ávila, España*)
Probar que si k y n son enteros, $n \geq 2, 1 \leq k < n,$ entonces

$$\left(1+\frac{2}{n}\right)^2 \leq \frac{\binom{n}{k}^2}{\binom{n}{k+1}\binom{n}{k-1}}.$$

Problema 80 (*propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, Ávila, España*)
Caracterizar el triángulo tal que sus medianas y los inversos de sus alturas correspondientes son proporcionales.

DIVERTIMENTOS MATEMÁTICOS 16

No es muy frecuente, sobre todo en español, encontrar recopiladas anécdotas o curiosidades relacionadas con el trabajo de los matemáticos. Se puede citar, por ejemplo, el libro de C.Alsina y M. De Guzmán *Los matemáticos no son gente seria(1997),* de donde hemos tomado casi todas las que siguen. En la literatura anglosajona, sin embargo, además de ser bastante populares las poesías más o menos satíricas sobre estos aspectos de nuestra ciencia, hay al menos un par de recopilaciones que merecen citarse: la reedición por la M.A.A. del libro de Robert Edouard Moritz *Memorabilia mathematica* (1914, 1ª edición), y el de Rosemary Schmalz *Out of the mouth of mathematicians* (1993).

Anecdotario matemático I

- *Un matemático es una máquina que convierte café en teoremas.*
  (atribuída a Paul Erdös, parece ser de E.Renyi)

- Una definición de lo obvio : *Si algo es obvio en el sentido de Beckenbach, entonces es verdad y uno puede verlo inmediatamente. Si algo es obvio en el sentido de Chevalley, entonces es verdad y pueden hacer falta varias semanas para verlo. Si algo es obvio en el sentido de Bochner, entonces es falso y pueden necesitarse varias semanas para darse cuenta. Si algo es obvio en el sentido de Lefschetz, entonces es falso y uno puede verlo inmediatamente.*
- Un problema de D. José Barinaga y Mata :
  Discutir la validez de las dos proposiciones siguientes:

1.Dos más uno son ocho.
2.Todo lo dicho en el interior del rectángulo es falso

- De un referee al editor de una revista :
  El artículo contiene resultados nuevos e interesantes. Sin embargo, como los nuevos no son interesantes, y los interesantes no son nuevos, debe rechazarse su publicación.

- *Después de las corridas de toros, las oposiciones españolas son los espectáculos más crueles (* atribuida a Julio Rey Pastor)

- *X ha superado a Esopo. En las fábulas de Esopo, los animales hablan. Ahora, X los hace catedráticos.*

- El nombre de uno de los grupos de investigación en educación matemática en España durante los años setenta y ochenta era *Periódica Pura....* porque, entre otras razones, *los seis componentes del grupo eran siempre los mismos y se reunían el mismo día de la semana.*

COMENTARIO DE PÁGINAS WEB 16

Página web de la COM-PARTIDA de Matemática del Uruguay

www.reu.edu.uy/jpv/proyectos/cpm

La Com-Partida de Matemática del Uruguay es el organismo encargado de la preparación y organización de las diferentes olimpiadas y concursos matemáticos en los que toman parte los estudiantes uruguayos. Su excelente página web está auspiciada por el sitio informático del Colegio Nacional José Pedro Varela, de amplia experiencia en competiciones científicas escolares.

La página comprende una parte de últimas noticias y una serie de enlaces : éstos son : Inicio – Información – Calendario – Noticias (donde se van pasando las noticias que van apaerciendo en la página inicial, cuando son sustituídas por otras más recientes) , y una segunda parte de enlaces : Actividades, Olimpiadas, Enlaces, Contactos y Problemas.

Su sección de enlaces es particularmente rica, pudiéndose acceder a las principales páginas de Olimpiadas de todo el mundo.

El Banco de Problemas (sección Problemas) es también de gran calidad, con accesos a problemas igualmente de todo el mundo, sin descuidar, por supuesto, las competiciones nacionales uruguayas.

La sección de Actividades comprende Mataproblemas, Fotografía y Matemática, Geometría Dinámica, Seminarios y Campamentos matemáticos.

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI

Número

17

Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática
ISSN 1698-677X

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

Número 17 (Enero - Febrero 2005)

ISSN – 1698-277X

Índice

Artículos, Notas y Lecciones de preparación Olímpica

Triángulos especiales, primera parte, por Francisco Bellot Rosado

En este número se incluyen:

Terminología de la geometría del triángulo
Triángulos especiales (I)
Dedicatoria
A J.D., en su valerosa lucha contra la adversidad.

Problemas de Nivel medio y de Olimpiadas

Soluciones a los seis problemas de la Olimpiada Iberoamericana 2004, por Daniel Lasaosa Medarde (Pamplona, España)

Propuestos: 4 Problemas de Olimpiadas de diversos países y años, enviados por Bruno Salgueiro Fanego (Galicia, España)

Problemas para los más jóvenes

Presentamos las soluciones a varios problemas del número 16, enviadas por Oscar Ferreira Alfaro (Valencia, España)

Propuestos: Cinco problemas de la XI Olimpiada Regional de Castilla y León, 2003.

Problemas resueltos

Soluciones recibidas después de la aparición del número 16:
A los números 71 y 73, de Antonio Ledesma López (Requena, Valencia, España); al número 72, de Daniel Lasaosa Medarde (Pamplona, España) .

Resueltos: Presentamos soluciones a los problemas siguientes:
Número 74, de Daniel Lasaosa Medarde (Pamplona, España)
Número 75, de Daniel Lasaosa Medarde (Pamplona, España)
Número 76, de Miguel Amengual Covas (Santanyí, Mallorca, España). Recibidas además soluciones de Daniel Lasaosa, de jjrp@edu.xunta.es, y de Walter Carballosa Torres (La Habana, Cuba).
Número 77, de Daniel Lasaosa Medarde (Pamplona, España)

Número 79, de Daniel Lasaosa Medarde (Pamplona, España). Recibida otra solución de Walter Carballosa Torres (La Habana, Cuba).
Número 80, de Daniel Lasaosa Medarde (Pamplona, España). Recibidas además soluciones de Walter Carballosa Torres (La Habana, Cuba); Dones Colmenárez (Barquisimeto, Venezuela); Floro Damián Aranda Ballesteros (Córdoba, España); Miguel Amengual Covas (Santanyí, Mallorca, España) y Ricard Peiró.

Problemas propuestos 81-85

Divertimentos Matemáticos

Algunos problemas curiosos (1), seleccionados por el editor.

Comentario de páginas web

F. Bellot: **UMALCA (Unión Matemática de América Latina y el Caribe)**

Editor: Francisco Bellot Rosado

TERMINOLOGÍA Y NOTACIONES EN EL TRIÁNGULO

Salvo que se diga expresamente otra cosa, utilizaremos la siguiente terminología y notaciones en lo referente a la Geometría del triángulo:

A,B,C vértices (y medida de los ángulos) del triángulo ABC

a,b,c lados respectivamente opuestos a A,B,C

$p = \frac{a+b+c}{2}$ semiperímetro

$S = [ABC]$ área del triángulo ABC

O,I,I_a,I_b,I_c circuncentro, incentro y exincentros. El circuncentro es exterior al triángulo cuando es obtusángulo.Cada exincentro es la intersección de dos bisectrices exteriores y una interior.

R,r,r_a,r_b,r_c radios del circuncírculo y de los círculos inscrito y exinscritos (círculos tritangentes)

$(D,E,F),(D_a,E_a,F_a),...$ puntos de tangencia con los lados de los círculos tritangentes.

$O_9,\varphi,\varphi_a,\varphi_b,\varphi_c$ centro del círculo de 9 puntos (Euler, Feuerbach), y puntos de tangencia de ese círculo con los círculos tritangentes (puntos de Feuerbach)

m_a,m_b,m_c medianas AA_m,BB_m,CC_m

$G = AA_m \cap BB_m \cap CC_m$ baricentro de ABC

$A_mB_mC_m,$ triángulo medial de ABC

h_a,h_b,h_c alturas AH_a,BH_b,CH_c

$H = AH_a \cap BH_b \cap CH_c;$ es exterior al triángulo cuando es obtusángulo.

$H_aH_bH_c$ triángulo órtico de ABC. Los triángulos ABC y $H_aH_bH_c$ son homológicos, y su eje de homología, que es el eje radical de (O) y (O_9), se llama eje órtico de ABC.

w_a,w_b,w_c bisectrices interiores de ABC; $I = w_a \cap w_b \cap w_c$

w'_a,w'_b,w'_c bisectrices exteriores de ABC

s_a,s_b,s_c simedianas interiores (simétrica de la mediana respecto de la bisectriz interior. Las tangentes al círculo circunscrito en los vértices A, B, C son las simedianas exteriores.

$\Gamma = AD \cap BE \cap CF$ punto de Gergonne

$N = AD_a \cap BE_b \cap CF_c$ punto de Nagel

$K = s_a \cap s_b \cap s_c$ punto de Lemoine

Ω,Ω' primer y segundo punto de Brocard ; se definen mediante las igualdades

$\omega = \widehat{\Omega AB} = \widehat{\Omega BC} = \widehat{\Omega CA} = \widehat{AB\Omega'} = \widehat{BC\Omega'} = \widehat{CA\Omega'};$

ω es el ángulo de Brocard, que verifica

$$\cot\omega = \cot A + \cot B + \cot C = \frac{a^2+b^2+c^2}{4S}.$$

Círculo de Brocard : es el de diámetro OK; pasa por Ω y por Ω'; corta a las mediatrices de los lados en los vértices del *primer triángulo de Brocard*, y a las simedianas en los del *segundo triángulo de Brocard*.

F,F' centros isógonos del triángulo, desde los que se ven los lados bajo ángulos iguales (puntos de Fermat)

Círculos de Apolonio : tienen como diámetros los segmentos que unen los pies de las bisectrices interior y exterior sobre cada lado; cada uno pasa por el vértice correspondiente. Los tres círculos de Apolonio se cortan en dos puntos, W,W', que se llaman centros isodinámicos del triángulo.

P, punto del plano del triángulo.

$AP,BP,CP,$ cevianas concurrentes en P

$P_a = AP \cap BC, P_b = BP \cap CA, P_c = CP \cap AB$ pies de las cevianas

$P_aP_bP_c$ triángulo ceviano del punto P (*en la terminología francesa se llama triángulo pedal*)

P_1,P_2,P_3 proyecciones ortogonales del punto P sobre las rectas que contienen los lados del triángulo.

$P_1P_2P_3$ triángulo podario del punto P (*en la terminología inglesa se llama triángulo pedal*)

Cuando $P \equiv H$ los triángulos ceviano y podario de este punto coinciden: se trata del triángulo órtico.

R_1, R_2, R_3 distancias de P a los vértices del triángulo ABC

r_1, r_2, r_3 distancias de P a los lados del triángulo ABC

Ortopolo de una recta con respecto a un triángulo (Soons, 1886): Sea ABC un triángulo y *d* una recta. Sean A',B',C' las proyecciones ortogonales de los vértices de ABC sobre *d*. Las perpendiculares desde A',B' y C' sobre los lados de ABC son concurrentes en un punto, que se llama *ortopolo* de la recta *d* con respecto al triángulo ABC.

Para una terminología más completa sobre el triángulo, se pueden consultar la *Bibliographie des triangles spéciax*, de Neuberg (1924) y la *Terminologie dans la Géométrie du triangle et du tétraèdre*, de R. Goormaghtigh, publicada en *Mathesis* durante varios años. Neuberg publicó también en varios fascículos de *Mathesis* durante los años 20 una *Bibliographie du triangle et du tétraèdre*. Más modernamente, en Bottema et al., *Geometric Inequalities* (1968) *y en* Mitrinovic et al., *Recent Advances in Geometric Inequalities* (1989) aparecen repertorios de notaciones y terminología.

TRIÁNGULOS ESPECIALES

Francisco Bellot Rosado

Introducción

Joseph Neuberg, Profesor Emérito de la Universidad de Lieja, publicó en las *Memoires de la Société Royale des Sciences de Liège*, *vol*. 12 (1924), una **Bibliographie des triangles spéciaux**. En ella se recogen 50 casos de triángulos entre cuyos elementos (lados, ángulos o ambas cosas) existe una determinada relación. Estos son los llamados **triángulos especiales** en la Geometría del Triángulo, que tuvo un enorme impulso en los años finales del siglo XIX, y que en la actualidad también es motivo de investigación : basta consultar, por ejemplo, la revista digital *Forum Geometricorum* en Internet, que comenzó a aparecer en la red en 2001.

Muchas de las citas de Neuberg son notas suyas, publicadas en la revista belga *Mathesis* desde finales del siglo XIX. La coincidencia, en este caso afortunada, de tener en mi Biblioteca un número bastante considerable de ejemplares de *Mathesis* me permite ”buscar en las fuentes”, como suele decirse, para encontrar otras propiedades de algunos de estos triángulos especiales, que iremos presentando en los números de la *Revista Escolar de la OIM*. Otras buenas fuentes de información son las colecciones de problemas del *American Mathematical Monthly*, y las de *Crux Mathematicorum*, *Mathematics Magazine y College Mathematics Journal*.

Por otra parte, cuando en una desigualdad triangular se estudian los casos de igualdad, se puede obtener una condición necesaria y suficiente para que un triángulo sea, pongamos por caso, equilátero, isósceles, acutángulo, etc. Como regla general no trataremos aquí estos casos - sería demasiado prolijo - y remitimos al lector a las dos publicaciones punteras en este campo: la conocida como ”Biblia de Bottema” : Bottema - Djordjevic - Janic - Mitrinovic - Vasic, *Geometric Inequalities*, *Wolters-Noordhoof Publishing*, *Groningen* 1969 ; y su exhaustiva secuela: Mitrinovic - Pêcaric - Volenec, *Recent Advances in Geometric Inequalities*, *Kluwer Academic Publishers*, *Dordrecht* 1989.

Triángulos especiales I

I.1 Triángulos isósceles y seudo-isósceles

En 1840, C.L.Lehmus(1780-1863), profesor en Berlín, escribió a Steiner pidiéndole una demostración ”puramente geométrica” de la solución al siguiente problema :

Si un triángulo tiene dos bisectrices iguales, ¿es isósceles?

Algún tiempo después, Steiner estudió los casos de las bisectrices interiores y exteriores y demostró el que se conoce como **Teorema de Steiner-Lehmus** : *Si las bisectrices interiores de un triángulo son iguales*, *el triángulo es isósceles*.

Podemos dar una demostración directa de este resultado. Mediante el teorema de Stewart, el cuadrado de la longitud de una bisectriz interior se expresa como

$$w_b^2 = ca\left[1 - \left(\frac{b}{c+a}\right)^2\right]$$

así que igualando esta expresión a

$$w_c^2 = ab\left[1 - \left(\frac{c}{a+b}\right)^2\right]$$

se obtiene

$$a(a+b+c)[(a+b+c)(a^2+bc)+2abc](b-c) = 0,$$

así que es claro que $b = c$ y el triángulo es isósceles.■

En *Crux Mathematicorum*, 1976, *p*.19-24 se publica un excelente artículo sobre el teorema de Steiner - Lehmus, con numerosas referencias, por Léo Sauvé, entonces editor de la revista, cuando todavía tenía el título de *Eureka*.

Igualmente natural es preguntarse qué ocurrirá si dos simedianas son iguales. Ya Lemoine en *Mathesis* 2 demuestra que una condición necesaria y suficiente para que un triángulo sea isósceles es que tenga dos simedianas iguales. La relación entre la longitud de la mediana desde A y la simediana desde A está dada por

$$s_a = \frac{2bc}{b^2+c^2} m_a;$$

por su parte, la igualdad $s_b = s_c$ se traduce en la igualdad

$$\frac{c^2a^2}{(c^2+a^2)^2} \cdot [2(c^2+a^2)-b^2] = \frac{a^2b^2}{(a^2+b^2)^2} \cdot [2(a^2+b^2)-c^2]$$

que puede escribirse en la forma

$$(c^2-b^2)[2a^2(a^2+c^2)(a^2+b^2)+b^2c^2(2a^2+b^2+c^2)] = 0,$$

de donde se deduce la conclusión. ■

Enumeramos ahora, sin demostraciones, pero dando las referencias oportunas, algunas condiciones para que un triángulo sea isósceles :

Problema 1:*En el triángulo ABC, sea AD la mediana. Probar que si los radios de los círculos inscritos en ABD y ACD son iguales, entonces AB = AC.* (*Mircea Becheanu, Gazeta Matematica* 9/1996)

Problema 2: *Caracterizar los triángulos en los que dos de los centros de los círculos exinscritos están en una elipse cuyos focos son el incentro y el centro del círculo de los* 9 *puntos*. (*C.Popescu, Gazeta matematica* 2/1980)

Problema 3:*En el triángulo ABC, las bisectrices interiores de A y B cortan a los lados opuestos en D y E, respectivamente. Probar que si DE divide a los ángulos* $\widehat{CDA}$ *y* $\widehat{CEB}$ *en la misma proporción, entonces CA = CB.* (*A.M.Monthly* 1934, *p*.527)

Problema 4: *Si desde los pies de las bisectrices interiores de los ángulos de un triángulo se trazan perpendiculares a los respectivos lados, y son concurrentes, entonces el triángulo es isósceles*. (*V.Thébault*; *A.M.Monthly* 1939, *p*.513)

Si AD,BE,CF son bisectrices interiores, y es $BD \cdot CE = DC \cdot BF$, *entonces el triángulo es isósceles* (*R.Izard, Dallas*; *prob*.1132 *a*), *Mathematics Magazine*, *enero* 1983).

Problema 5: *Si la mediana y la bisectriz interior relativas a un mismo véertice son iguales, el triángulo es isósceles. ¿Qué ocurre si se sustituye la bisectriz interior por la exterior*? (*V.Thébault, Mathesis* 1958).

Problema 6: *La condición necesaria y suficiente para que en un triángulo sea b = c, es que* $h_a^2 = p(p-a)$, *donde p es el semiperímetro*. (*R.Blanchard, Mathesis* 1957).

Problema 7: *La condición necesaria y suficiente para que b = c, es que*

$$\frac{a+b}{a+c} = \frac{\sin\frac{B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}.$$

Problema 8: *Demostrar que la recta de Euler de un triángulo no pasa por el centro de uno de los círculos triangentes* (*incentro o exincentros*) *más que si ABC es isósceles*. (*Mathesis,* 1929).

Problema 9: *Demostrar que ABC es isósceles si y sólo si la recta OG es perpendicular a un lado del triángulo*. (*M.Bencze, Gazeta matematica* 2-3/1993).

En el caso de las bisectrices exteriores, la situación es algo más compleja. Si el triángulo es isósceles, las bisectrices exteriores correspondientes a los ángulos iguales son iguales. Sin embargo, Emmerich (1900) dió el siguiente ejemplo de un triángulo escaleno con bisectrices exteriores iguales: Sean BM y CN las bisectrices exteriores de B y C del triángulo de ángulos $\widehat{B} = 12º, \widehat{C} = 132º, \widehat{A} = 36º$. Ya que

$$\widehat{BCM} = 48º = \widehat{CMB},$$

y $\widehat{CBN} = 12º = \widehat{BNC},$ resulta que

$$BM = BC = CN.$$

Obsérvese que el exincentro I_a está en el segmento BM pero no en el CN.■

También es posible buscar un ejemplo de un triángulo rectángulo no isósceles donde las bisectrices exteriores sean iguales. Supongamos $\widehat{A} = 90º,$ sea P el punto en que la bisectriz exterior de B corta a CA, y Q el punto en que la bisectriz exterior de A corta a BC. En el triángulo BAP,

$$BP = \frac{c}{\sin\frac{B}{2}};$$

y en BAQ,

$$AQ = \frac{c\sin B}{\sin(B-45º)},$$

así que la igualdad BP = AQ se escribe como

$$\sin(B-45º) = \sin B \cdot \sin\frac{B}{2},$$

ecuación que NO tiene la solución $\widehat{B} = 45º,$ pero tiene una solución próxima a 75º.■

Se puede demostrar también que si dos bisectrices exteriores de un triángulo escaleno son iguales, entonces los senos de los tres semiángulos interiores del triángulo están en progresión geométrica (A.M.M. 1933, p.423).

Los triángulos no isósceles con bisectrices exteriores iguales se llaman *seudoisósceles,* nombre dado por M. Alauda en *l'Intermediaire des Mathématiques* (1849) donde pedía se demostrara para ellos la relación

$$a^2 + bc = 4Rr_a.$$

Al igualar las expresiones para los cuadrados de las longitudes de dos bisectrices exteriores en un triángulo, por ejemplo las de los ángulos $\widehat{B}$ y $\widehat{C},$ se obtiene

$$(b-c)\varphi(a) = 0, \text{ donde}$$

$$\varphi(a) = a^3 - (b+c)a^2 + 3bca - (b+c)bc.$$

Supongamos $b > c$ y consideremos la ecuación cúbica en $a, \varphi(a) = 0$. Esta ecuación no tiene raíz negativa. Por las fórmulas de Cardano-Vieta, se verificará para sus tres raíces (reales o complejas) a_1, a_2, a_3

$$\sum a_i = b+c, \sum a_i a_j = 3bc, \prod a_i = (b+c)bc,$$

así que su discriminante

$$\sum a_i \sum a_i a_j - 3a_1a_2a_3 = \sum a_i^2(a_j + a_k),$$

luego la ecuación tiene una raíz positiva a_1 y dos complejas. Además, de las desigualdades

$$\varphi(c) = bc(c-b) < 0, \varphi(b) = bc(b-c) > 0$$
$$\varphi(b-c) = -2c^3 < 0,$$

resulta $c < a_1 < b,\ \ a_1 > b-c$. Por lo tanto, a_1 forma con b y c un triángulo real. El valor de a_1 en función de b y c es

$$M + \sqrt[3]{M^3 + \sqrt{N}} + \sqrt[3]{M^3 - \sqrt{N}},$$

donde

$$M = \frac{b+c}{3}, N = \frac{bc\left(27b^2c^2 - 9bc(b+c)^2 + (b+c)^4\right)}{27}$$

Enumeramos algunas propiedades de los triángulos seudoisósceles, todas procedentes de la Bibliografía de Neuberg :

$$\begin{aligned}
AI^2 &= BI \cdot CI \\
II_a^2 &= II_b \cdot II_c = 4R \cdot II_a \\
AI &= r_a - r \\
BI_a \cdot CI_a &= AI \cdot AI_a = AI_b \cdot AI_c = bc \\
a^2 &= 2R(2r_a - h_a) \\
\frac{1}{a-b} + \frac{1}{a-c} + \frac{a}{bc} &= 0 \\
\frac{r}{R} &= 4\sin^3\frac{A}{2}
\end{aligned}$$

Es natural preguntarse qué ocurrirá si en un triángulo una bisectriz interior es igual a una exterior. Este era el objetivo del problema 1607 de *Crux Mathematicorum* (1991,*p*.15), propuesto por Peter Hurthig. En 1992 se publicaron tres de las 10 soluciones recibidas. Andy Liu dió el ejemplo del triángulo con ángulos $\widehat{A} = 24º, \widehat{B} = 84º, \widehat{C} = 72º$. Shailesh Shirali, tras dar el ejemplo 30º,30º,120º, estudió el caso general con las expresiones de las longitudes de las bisectrices y dió un modo de obtener infinitos triángulos escalenos con la propiedad requerida. Jordi Dou dió el ejemplo de Shirali (30º,30º,120º) y probó que si la bisectriz interior AD es igual a la exterior BE, entonces el ángulo A debe ser menor que un ángulo fijo φ, aproximadamente igual a 30,214335º. Yo, por mi parte, dí el ejemplo del triángulo isósceles de lados $a, a, a\sqrt{3}$.

I.2 Triángulo equilátero

Una excelente recopilación de problemas relativos al triángulo equilátero la constituye el libro de Constantin Cocea 200 *de probleme din geometria triunghiul echilateral, Editura Gh. Asachi, Iasi, Rumania*, 1992.

Vamos a enumerar resultados que implican que el triángulo sea equilátero :

Problema 10: *Demostrar que si en un triángulo se verifican las igualdades*

$$a + k \cdot m_a = b + k \cdot m_b = c + k \cdot m_c, \quad k \in \left(0, \frac{2}{3}\right],$$

entonces el triángulo es equilátero (m_a, m_b, m_c *medianas*).

Problema 12: *En el triángulo ABC, sea K el punto de Lemoine* (*intersección de las simedianas*). *Demostrar que*

$$\text{ABC equilátero} \iff card(OI, OG, OK) < 3.$$

(M.Burtea, Gazeta Matematica 5/1982)

Problema 13: *Sea ABC acutángulo con alturas* AA_1, BB_1, CC_1.

Si se representa con [ ] *el área, y se verifica la relación*

$$[HA_1B] + [HB_1C] + [HC_1A] = \frac{1}{2}[ABC],$$

entonces el triángulo es equilátero.

Problema 14: *Sea ABC un triángulo de lados a,b,c. Si se verifican las igualdades*

$$m_a = \frac{b\sqrt{3}}{2}; \quad w_c = \frac{c\sqrt{3}}{2}$$

entonces el triángulo es equilátero.

Problema 15 : *Demostrar que el triángulo ABC es equilátero si y sólo si la suma de las longitudes de las simedianas es* $\frac{9R}{2}$.

Problema 16: *Si en el triángulo ABC se verifica*

$$r_a + r_b + r_c = p\sqrt{3},$$

entonces el triángulo es equilátero.

Problema 17:*Si se verifica en un triángulo*

$$ab^2 \cos A = bc^2 \cos B = ca^2 \cos C,$$

entonces el triángulo es equilátero.

Problema 18: *En ABC, sean AD,BE,CF cevianas concurrentes en M. Si los triángulos BDM, CME y AMF tienen la misma área y el mismo perímetro, entonces ABC es equilátero*. (*F.Parvanescu, Gazeta matematica* 4/1996).

Problema 19 : *Sea el triángulo ABC, y M*$\in (AC), N \in (AB), P \in (BC)$, *tales que*

$$MN \perp AC, \;\; NP \perp AB, \;\; MP \perp BC.$$

Probar que si el punto de Lemoine de ABC coincide con el baricentro de MNP, entonces ABC es equilátero.

(C.Manolescu, Gazeta Matematica 10/1996)

Problema 20 : *Sea, en el triángulo ABC*

$$M = 2p(p^2 - 3r^2 - 4Rr).$$

Demostrar que ABC es equilátero si y sólo si

$$\frac{1}{M-a^2}+\frac{1}{M-b^2}+\frac{1}{M-c^2}=\frac{1}{4RS},$$

siendo S el área de ABC. (*M.Bencze*, *Gazeta matematica* 7-8/1987).

Problema 21 : *Sea ABC un triángulo de incentro I. Demostrar que si los triángulos AIB,BIC,CIA tienen el mismo perímetro, entonces ABC es equilátero*. (*Gazeta matematica* 3/1994).

Problema 22: *Sean I_a, I_b, I_c los exincentros de ABC. Demostrar que $[ABC]$ es la media armónica de las áreas de AI_aB, BI_bC, CI_cA si y solamente si ABC es equilátero.*

Problema 23: *Demostrar que ABC es equilátero si y solamente si*

$$(a+b+c)\left(\frac{a}{bc}+\frac{b}{ca}+\frac{c}{ab}\right)=9.$$

Problema 24: *Demostrar que ABC es equilátero si y solamente si*

$$8\cos A\cos B\cos C=1.$$

(Gazeta Matematica 3/1987)

$$(\cot A+\cot B+\cot C)\sqrt[3]{\sin A\sin B\sin C}=\frac{3}{2}$$

(College Mathematics Journal, Mayo 1986)

$$\cot\omega=3,\ \text{siendo } \omega \text{ el ángulo de Brocard.}$$

(American Mathematical Monthly, prob.4491,1953)

Problema 25: *Demostrar que ABC debe ser equilátero si dos de los cinco puntos siguientes coinciden*: *I,O,G,H,O_9*. (*Prob*.898, *Mathematics Magazine* 1975).

I.3 Triángulos rectángulos y seudorrectángulos.

Es una obviedad decir que la proposición mejor conocida sobre el triángulo rectángulo es el teorema de Pitágoras :

La condición necesaria y suficiente para que el ángulo $\widehat{BAC}$ del triángulo ABC sea recto es que $a^2=b^2+c^2$.

El erudito norteamericano Elisha Scott Loomis, profesor de Matemáticas en el Baldwin-Wallace College, publicó en 1927 la primera edición de su libro *The Pythagorean Proposition*, donde se recogen 366 demostraciones del teorema. Hay una edición de 1940, del National Council of Teachers of Mathematics, que todavía se puede adquirir.

Presentamos algunos enunciados con condiciones para que un triángulo sea rectángulo:

Problema 26: *En el triángulo ABC, su circunferencia inscrita es tangente al lado AB en D, de tal manera que*

$$AC\cdot CB=2AD\cdot DB.$$

Demostrar que ABC es rectángulo.

Problema 27: *Probar que si los lados de un triángulo verifican una de las dos relaciones*

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{\frac{a+c}{2}} + \sqrt{\frac{a-c}{2}},$$
$$\sqrt{a-b} = \sqrt{\frac{a+c}{2}} - \sqrt{\frac{a-c}{2}},$$

entonces el triángulo es rectángulo en A.

Problema 28: *Si los puntos* A_1, B_1 *dividen el lado AB del triángulo ABC en tres partes iguales y además se verifica*

$$\cot\widehat{ACA_1} + \cot\widehat{A_1CB_1} = 3 \cdot \cot\widehat{B_1CB},$$

entonces ABC es rectángulo. (*Svetolina Simeonova, Mathematyka&Informatyka* 3/1987)

Problema 29: *Los ángulos de un triángulo son proporcionales a los números x,y,z. Demostrar que es rectángulo si y solamente si*

$$x^3 + y^3 + z^3 + 2xyz = x^2(y+z) + y^2(z+x) + z^2(x+y).$$

(Gazeta Matematica 9/1994)

Problema 30: *Demostrar que si los lados de ABC verifican*

$$a^3 + b^3 + c^3 = ab(a+b) - bc(b+c) + ca(c+a),$$

entonces el triángulo es rectángulo.

(Gazeta Matematica 1/1976)

Problema 31: *Sea* $M \in BC$. *Si se verifica*

$$MA^2 \cdot BC^2 = MB^2 \cdot AC^2 + MC^2 \cdot AB^2,$$

entonces ABC es rectángulo en A. (*Gazeta matematica* 1967)

Problema 32: *Se verifican las equivalencias*

$$GO < \frac{R}{3} \Leftrightarrow ABC \text{ acutángulo}$$
$$GO = \frac{R}{3} \Leftrightarrow ABC \text{ rectángulo}$$
$$GO > \frac{R}{3} \Leftrightarrow ABC \text{ obtusángulo}$$

(Elemente der Mathematik, 1952,nr.1,p.17).

Problema 33:

$$ABC \text{ rectángulo} \Leftrightarrow OI^2 + [ABC] = r^2 + R^2$$

(American Mathematical Monthly, 1959,p.813)

Problema 34: *Si una altura es simediana, entonces el triángulo es isósceles o rectángulo*.(*Crux Mathematicorum,prob*.960, 1985,*p*.267)

Problema 35: *Si AD,BE y CF son bisectrices interiores, y se verifica* $BI \cdot FI = BF \cdot AI$, *entonces ABC es rectángulo*.(*R.Izard, Dallas, Prob*.1132*b*, *Mathematics Magazine, Enero* 1983)

Problema 36 : *Caracterizar los triángulos tales que los puntos medios de las alturas están alineados* (*Huseyin Demir, prob*.1197, *Mathematics Magazine, Septiembre* 1985).

Los triángulos seudorrectángulos verifican la condición de que la diferencia entre dos de sus ángulos es 90º. Podemos enunciar las propiedades siguientes:

Problema 37: *Si en el triángulo ABC,* $\widehat{B} - \widehat{C} = 90º$, *entonces el centro de la circunferencia de los* 9 *puntos está sobre la recta BC.*

Problema 38: *Si en el triángulo ABC, B* - *C* = 90º, *y S y T son las intersecciones de la bisectriz interior y exterior con BC, entonces*:

$$\sin A = \frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2};$$

$$ST = 2h_a$$

a^2 es la media armónica de $(b - c)^2$ y $(b + c)^2$.

(E301, American Mathematical Monthly 1937,p.598).

Otras propiedades de estos triángulos, también citadas por Neuberg en su catálogo, son

$$\cos A = \frac{2bc}{b^2 + c^2}$$

$$\tan \frac{A}{2} = \frac{b - c}{b + c}$$

$$II_a = |b - c|\sqrt{2}$$

$$I_bI_c = (b + c)\sqrt{2}$$

$$\frac{1}{II_a^2} + \frac{1}{I_bI_c^2} = \frac{1}{a^2}$$

Estas propiedades se deben a Droz-Farny y d'Avillez.

Si los puntos B y C son fijos, el lugar geométrico del vértice A es una hipérbola equilátera de vértices B y C.

(*Continuará*)

Problema 1

Se deben colorear casillas de un tablero de 1001×1001 de acuerdo a las reglas siguientes:

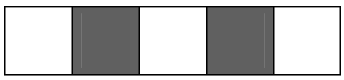
- Si dos casillas tienen un lado común, entonces al menos una de ellas se debe colorear.
- De cada seis casillas consecutivas de una fila o de una columna, siempre se deben colorear al menos dos de ellas que sean adyacentes.

Determinar el número mínimo de casillas que se deben colorear.

Solución de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, Navarra, España.

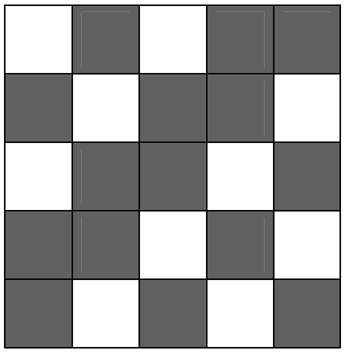
La primera condición exige que no haya dos casillas adyacentes sin colorear, pues ambas comparten un lado, y entonces al menos una de ellas debe estar coloreada.

Supongamos que en una fila o columna hay cinco casillas consecutivas tales que sólo dos están coloreadas. Por la primera condición del problema, no puede haber dos blancas consecutivas, luego la única posible configuración es la siguiente:



Pero entonces, añadamos una casilla blanca o coloreada sea a la derecha, sea a la izquierda, obtenemos un grupo de seis casillas de forma que no hay dos adyacentes coloreadas. Luego de cada cinco casillas, un mínimo de tres deben estar coloreadas para que se puedan satisfacer las condiciones del problema.

Se ahora el cuadrado 1001×1001 del enunciado. Podemos dividirlo en 1001 filas, dividiendo además cada fila en 200 grupos disjuntos de cinco casillas consecutivas, más una última casilla, que pertenece al la columna 1001 del cuadrado. En cada una de estas filas se tiene entonces que hay un mínimo de 3×200=600 casillas coloreadas, para un total de 600600 casillas coloreadas en las 1000 primeras columnas. Ahora bien, podemos dividir la última columna en 200 grupos de cinco casillas consecutivas, dejando la casilla inferior derecha del cuadrado aparte. De las 1000 casillas consideradas, al menos 600 deben estar coloreadas (3 en cada uno de los 200 grupos disjuntos de 5 casillas en los que podemos dividirlas), para un total de 601200 casillas coloreadas en todo el cuadrado. El número mínimo de casillas coloreadas debe ser entonces mayor o igual que 601200. Sea ahora la siguiente configuración de 25 casillas:

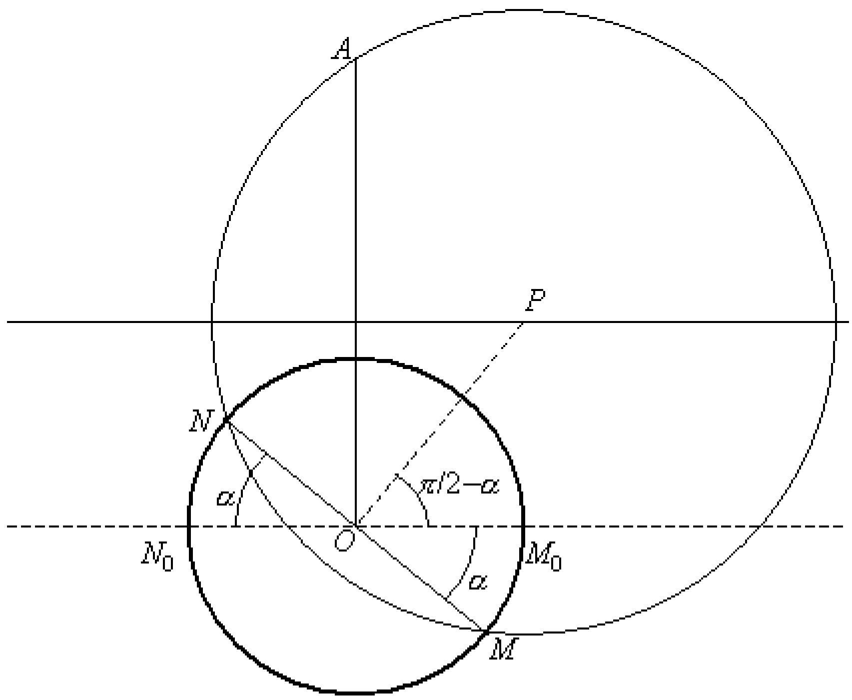


Sea ahora un cuadrado 1005×1005, que dividimos en 201^2 cuadrados disjuntos 5×5, coloreando cada uno de ellos como el de la figura. Obviamente, la primera condición se respeta en todo el cuadrado, ya que no hay dos casillas blancas adyacentes. La segunda condición también se cumple, pues cada fila o columna es la sucesión de grupos de la forma ...11010110101101011..., donde 1 representa una casilla coloreada y 0 una casilla blanca, y en los que por lo tanto para cada seis casillas consecutivas hay dos adyacentes coloreadas. Eliminemos ahora del cuadrado así coloreado las últimas cuatro filas y columnas. Se tiene entonces que hay 200^2 cuadrados como el mostrado, cada uno de ellos con 15 cuadrados coloreados, mientras que la última fila y última columna están formadas por la sucesión 01011 repetida 200 veces (para un total de 1200 cuadrados coloreados adicionales), estando la casilla de la esquina inferior derecha blanca (coincidiendo con la casilla superior izquierda de un cuadrado como el mostrado). Por lo tanto, se ha mostrado como colorear un cuadrado 1001×1001, cumpliendo las normas del enunciado, y coloreando exactamente 601200 casillas, que por lo tanto es el número mínimo de casillas que deben colorearse.

Problema 2

Se considera en el plano una circunferencia de centro O y radio r y un punto A exterior a ella. Sea M un punto de la circunferencia y N el punto diametralmente opuesto a M. Hallar el lugar geométrico de los centros de las circunferencias que pasan por A, M y N al variar M.

Solución de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, Navarra, España.



Sea $h>r$ la distancia entre O y A, sea P el centro de la circunferencia que pasa por A, M y N y sea M_0N_0 el diámetro perpendicular a OA. Obviamente, el triángulo M_0AN_0 es isósceles en A, ya que la recta OA es la perpendicular a la cuerda M_0N_0 por su punto medio, y por lo tanto su mediatriz, con lo que $AM_0=AN_0$. Supongamos ahora que $a=\angle MOM_0$. Es obvio que, por simetría en el enunciado del problema entre M y N, nos basta con considerar los casos en los que $-p/2<a<p/2$, ya que además en el caso en que $a=p/2$, A, M y N están alineados sobre la recta OA, con lo que no se puede definir el centro de una circunferencia que pase por estos tres puntos. Como P debe estar en la mediatriz de MN, que pasa por O, se tiene que OP y MN son perpendiculares, como también lo son OA y M_0N_0. Por lo tanto, el ángulo que forma OP con M_0N_0 es $p/2-a$, y

el ángulo que forma OP con OA es a. Entonces, la distancia de P a la recta M_0N_0 viene dada por $OP\cos(a)$, a la vez que, por el teorema del coseno, se tiene que

$$AP^2 = OA^2 + OP^2 - 2OA \cdot OP\cos(a).$$

Pero por ser P el centro de la circunferencia que pasa por A, M y N, se tiene que $AP=PM=PN$, y al ser OP perpendicular a ON, se tiene que $PN^2=OP^2+ON^2$, siendo $ON=r$ el radio de la circunferencia inicialmente dada. Por lo tanto,

$$OP\cos(a) = \frac{OA^2 + OP^2 - AP^2}{2OA} = \frac{h^2 + OP^2 - PN^2}{2h} = \frac{h^2 - r^2}{2h}.$$

Ahora bien, esta cantidad, que como hemos dicho antes es la distancia del punto P a la recta M_0N_0, es independiente de la elección de M, ya que depende únicamente de la distancia $h=OA$ y del radio r de la circunferencia inicial. Además, considerando que P debe estar en las mediatrices de MN, AM y AN, es obvio que A y P están en el mismo semiplano de los dos determinados por la recta M_0N_0. Luego para cualquier M elegido, P está en una recta paralela a la M_0N_0 (por ser la distancia de P a esta recta independiente de la elección de M) y en el mismo semiplano que A de los determinados por la recta M_0N_0. Obviamente, la distancia entre la recta que contiene a P y la recta M_0N_0 es igual a la distancia OP cuando la recta OP es perpendicular a M_0N_0, es decir, cuando $a=0$, y por lo tanto dicha distancia es igual a $(h^2-r^2)/(2h)$.

Sea ahora P' un punto cualquiera de dicha recta, y tracemos el diámetro $M'N'$ perpendicular a OP'. Por los resultados anteriores, el centro de la circunferencia circunscrita a $AM'N'$ está en la recta OP', y está a una distancia de la recta M_0N_0 igual a la distancia entre P' y la recta M_0N_0, y en el mismo semiplano de los dos determinados por la recta M_0N_0. Luego el centro de dicha circunferencia coincide con P', y todo punto de la recta considerada es una posición de P para algún M.

Luego el lugar geométrico de P es una recta paralela a la recta M_0N_0 situada en el mismo semiplano con respecto a A de los dos determinados por M_0N_0, y siendo $(h^2-r^2)/(2h)$ la distancia entre ambas rectas, donde h es la distancia OA.

Problema 3

Sean n y k enteros positivos tales que o bien n es impar, o bien n y k son pares. Probar que existen enteros a y b tales que

$$\operatorname{mcd}(a,n)=\operatorname{mcd}(b,n)=1 \qquad \text{y} \qquad k=a+b\,.$$

Solución de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, Navarra, España.

Sea n un entero positivo cualquiera, y sea $k=cn+k'$, con $k'\in\{0,1,...,n-1\}$. Si podemos encontrar enteros a' y b tales que mcd(a',n)=mcd(b,n)=1, $k'=a'+b$, sea $a=cn+a'$. Entonces, $k=a+b$, siendo además mcd(a,n)=mcd(a',n)=1 pues n divide a $a-a'$. Por lo tanto, basta con demostrar el resultado pedido para $k=0,1,...,n-1$, es decir, para los restos módulo n. Adicionalmente, si n es par, entonces k también debe serlo, y si n y k son pares, también lo es k', luego en el caso en que n sea par, nos basta con demostrar el resultado del enunciado para $k=0,2,...,n-2$, es decir, para los restos pares módulo n.

Sea n una potencia positiva de un primo impar p, es decir, sea $n=p^u$ para $u\geq 1$. Sea ahora el conjunto ordenado $B_v=\{(v-1)p-1,(v-1)p-1,(v-1)p+1,(v-1)p+2,...,vp-2\}$, donde $v=1,2,...,p^{u-1}$, y sea el conjunto ordenado $A=\{1,2,1,1,1,...,1\}$. La suma de los elementos de A y los de B_v genera el conjunto $\{(v-1)p,(v-1)p+1,(v-1)p+2,(v-1)p+3,...,vp-1\}$, siendo obviamente cada elemento de A y de B_v primo con p. La unión de todos estos conjuntos generados por la suma ordenada de los elementos de A y B_v para $v=1,2,...,p^{u-1}$ es entonces $\{0,1,2,...,p^u-1\}$, es decir, la suma ordenada de los elementos de A y de B_v recorre todos los posibles valores de k' al recorrer v el conjunto de valores $\{1,2,...,p^{u-1}\}$, siendo cada elemento de A y cada elemento de B_v primo con n, quedando entonces el resultado del enunciado demostrado para todo n que sea potencia de primo impar.

Sea ahora n una potencia de 2. Al ser n par, k también debe ser par. Sea entonces $a=1,1,1,1,...,1$, y $b=-1,1,3,5,...,n-3$. Obviamente, al ser todos los valores de a y b impares, son primos con n, siendo sus respectivas sumas iguales a $0,2,4,6,...,n-2$, es decir, todos los restos pares módulo n. Luego el resultado pedido queda probado también para todo n que sea potencia de 2.

Sea ahora $n=n'n''$ con n' y n'' primos entre sí, y tales que el resultado del enunciado se cumple para n' y para n''. Sea ahora $k\in\{0,1,...,n-1\}$. Sean $k'\in\{0,1,...,n'-1\}$ y $k''\in\{0,1,...,n''-1\}$ tales que $k\equiv k'$ (mod n') y $k\equiv k''$ (mod n''). Si n es par, entonces n' o n'' es par, pero no ambos (pues son primos entre sí). Supongamos sin pérdida de generalidad que n' es par. Entonces como k es par, su resto al dividir por un número par n' también es par, y k' es par. Sean entonces ahora a',b' primos con n', y sean a'',b'' primos con n'', tales que $k'=a'+b'$, $k''=a''+b''$, cuya existencia está garantizada por cumplirse el enunciado para n' y n''. Sean ahora a, b en $\{0,1,...,n-1\}$ tales que $a\equiv a'$ (mod n'), $a\equiv a''$ (mod n''), $b\equiv b'$ (mod n') y $b\equiv b''$ (mod n''}, que por el teorema chino del resto existen y son únicos. Además, es evidente que a es primo con n' y n'', al ser sus restos iguales a a' y a'' respectivamente, siendo también b primo con n' y n'', al ser sus restos respectivos iguales a b' y b''. Luego a y b son primos con $n=n'n''$, al ser primos con n' y n''. Entonces, $a+b\equiv k'$ (mod n'), siendo además $a+b\equiv k''$ (mod n''), con lo que $a+b\equiv k$ (mod n). Sumando o restando un número entero de veces n de a si fuere necesario (con lo que el resultado de la operación seguiría siendo primo con n), se demuestra que el enunciado se cumple para $n=n'n''$ siempre que se cumpla para n' y n'' primos entre sí.

Demostramos ahora que el enunciado se cumple para todo n por inducción sobre el número m de primos distintos que dividen a n. Si $m=1$, entonces n es primo o potencia de primo, en cuyo caso ya se ha demostrado que el enunciado se cumple. Supongamos ahora (hipótesis de inducción) que el enunciado se cumple para valores de n divisibles por exactamente $1,2,3,...,m$ primos distintos. Sea ahora n divisible por exactamente $m+1$ primos distintos. Podemos entonces factorizarlo en producto de $m+1$ potencias de primos distintos. Agrupando m de estas, se puede entonces escribir n como el producto de una potencia de primo n' multiplicada por otro número, n'', que es divisible por exactamente m primos distintos, cumpliendo por lo tanto n' y n'' el enunciado por hipótesis de inducción, y siendo primos entre sí. Luego por el resultado anteriormente demostrado, el enunciado también se cumple para $n=n'n''$ divisible por $m+1$ primos distintos. Luego el enunciado se cumple para todo n, q.e.d..

Problema 4

Determinar todas las parejas (a,b), donde a y b son enteros positivos de dos dígitos cada uno, tales que $100a+b$ y $201a+b$ son cuadrados perfectos de cuatro dígitos.

Solución de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, Navarra, España.

Llamemos $x^2=100a+b$, $y^2=201a+b$, donde x e y son obviamente enteros de dos dígitos, pues x^2 e y^2 son cuadrados perfectos de cuatro dígitos. Podemos elegir sin pérdida de generalidad x e y como positivos. Tenemos:

$$(y+x)(y-x)=y^2-x^2=101a\,.$$

Ahora bien, 101 es primo, pues da restos 1, 2, 1 y 3 al dividirlo por 2, 3, 5 y 7, los únicos primos menores o iguales que su raíz cuadrada. Por lo tanto, 101 divide bien a $y+x$, bien a $y-x$. Supongamos que 101 divide a $y-x$. Entonces,

$$a=\frac{(y+x)(y-x)}{101}\geq y+x\,.$$

Pero entonces $a\geq y+x>y-x\geq 101$, que es absurdo pues a tiene dos dígitos. Luego 101 divide a $y+x$. Ahora bien, como tanto y como x son números de dos dígitos (pues sus cuadrados respectivos tienen cuatro dígitos), su suma no puede ser mayor que $198=2\cdot 99<202$, luego $y+x=101$, y $a=y-x$, y tenemos entonces

$$y=\frac{101+a}{2}\,;\qquad (101+a)^2=804a+4b\,;\qquad a^2-602a+101^2-4b=0\,;$$

$$a=\frac{602\pm\sqrt{602^2-202^2+16b}}{2}=301\pm 2\sqrt{20100+b}\,.$$

Ahora bien, a es entero, con lo que el radicando debe ser un cuadrado perfecto, y al ser $141^2=19881$, $142^2=20164$, $143^2=20449$, y ser b un entero positivo de dos dígitos, se tiene que necesariamente $b=64$. Al ser a un entero positivo de 2 dígitos, podemos descartar la mayor de las dos raíces, que tendría tres dígitos, para encontrar que $a=301-2\cdot 142=17$. Luego por lo tanto (17,64) es la única solución posible.

Nótese que $100a+b=1764=42^2$, $201a+b=3481=59^2$, siendo la suma de las raíces de ambos cuadrados perfectos 101, y su diferencia $17=a$, tal y como habíamos demostrado que debía suceder.

Problema 5

Dado un triángulo escaleno *ABC*, se llaman *A*', *B*' y *C*' a los puntos de intersección de las bisectrices interiores de los ángulos *A*, *B* y *C* con los lados opuestos, respectivamente.

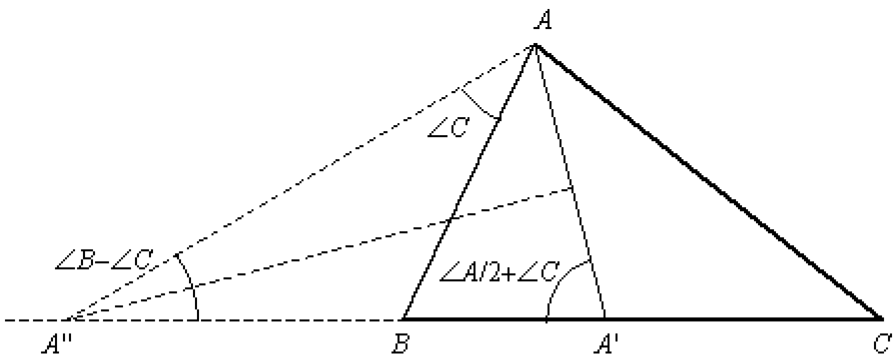
Sean: *A*'' la intersección de *BC* con la mediatriz de *AA*',

B'' la intersección de *AC* con la mediatriz de *BB*' y

C'' la intersección de *AB* con la mediatriz de *CC*'.

Probar que *A*'', *B*'' y *C*'' son colineales.

Solución de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, Navarra, España.



Cualquier punto de la mediatriz de *AA*' equidista de *A* y de *A*'. En particular, *AA*''=*A*'*A*''. Luego *AA*'*A*'' es isósceles en *A*''.

Es obvio que

$$\angle AA'B = \pi - \angle BAA' - \angle ABA' = \pi - \frac{\angle A}{2} - \angle B = \frac{\angle A}{2} + \angle C\ .$$

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $\angle B > \angle C$. Entonces, $\angle AA'B < \pi/2$, y *A*'' está en la semirrecta de origen *A*' que pasa por *B*, y al estar *A*' en el interior de *BC*, *A*'' está en la semirrecta de origen *C* que pasa por *B*. Ahora bien, al ser *AA*'*A*'' isósceles en *A*'', se tiene que

$$\angle A''AB = \angle A''AA' - \angle BAA' = \angle AA'A'' - \angle A/2 = \angle C\ ;$$

$$\angle A''AC = \angle A''AB + \angle BAC = \angle C + \angle A = \pi - \angle B\ ;$$

$$\angle AA''B = \angle AA''C = \angle AA''A' = \pi - 2\angle AA'A'' = \pi - \angle A - 2\angle C = \angle B - \angle C\ .$$

Por lo tanto, aplicando el teorema del seno, se tiene

$$\frac{A''B}{\sin(\angle C)}=\frac{A''B}{\sin(\angle A''AB)}=\frac{AB}{\sin(\angle AA''B)}=\frac{AB}{\sin(\angle B-\angle C)};$$

$$\frac{A''C}{\sin(\angle B)}=\frac{A''C}{\sin(\angle A''AC)}=\frac{AC}{\sin(\angle AA''C)}=\frac{AC}{\sin(\angle B-\angle C)};$$

$$\frac{A''C}{A''B}=\frac{AC\sin(\angle B)\sin(\angle B-\angle C)}{AB\sin(\angle C)\sin(\angle B-\angle C)}=\frac{AC^2}{AB^2}.$$

Nótese que la demostración es enteramente análoga por simetría en el caso en que $\angle C>\angle B$. Rotando cíclicamente A, B y C llegamos a que:

$$\frac{B''A}{B''C}=\frac{BA^2}{BC^2}; \qquad \frac{C''A}{C''B}=\frac{CA^2}{CB^2}.$$

Se tiene entonces finalmente que

$$\frac{AB''}{B''C}\cdot\frac{CA''}{A''B}\cdot\frac{BC''}{C''A}=\frac{BA^2}{BC^2}\cdot\frac{AC^2}{AB^2}\cdot\frac{CB^2}{CA^2}=1.$$

Ahora bien, A'' está en el exterior del segmento BC, pues $\angle AA''C<\angle ABC$, y por rotación cíclica de A, B y C, B'' y C'' están respectivamente en el exterior de los segmentos AC y AB. Luego por el recíproco del teorema de Menelao se tiene que A'', B'' y C'' son colineales, q.e.d..

Problema 6

Para un conjunto H de puntos en el plano, se dice que un punto P del plano es un punto de corte de H si existen cuatro puntos distintos A, B, C y D en H tales que las rectas AB y CD son distintas y se cortan en P.

Dado un conjunto finito A_0 de puntos en el plano, se construye una sucesión de conjuntos $A_1, A_2, A_3, \ldots$ de la siguiente manera: para cualquier $j \geq 0$, A_{j+1} es la unión de A_j con el conjunto de todos los puntos de corte de A_j.

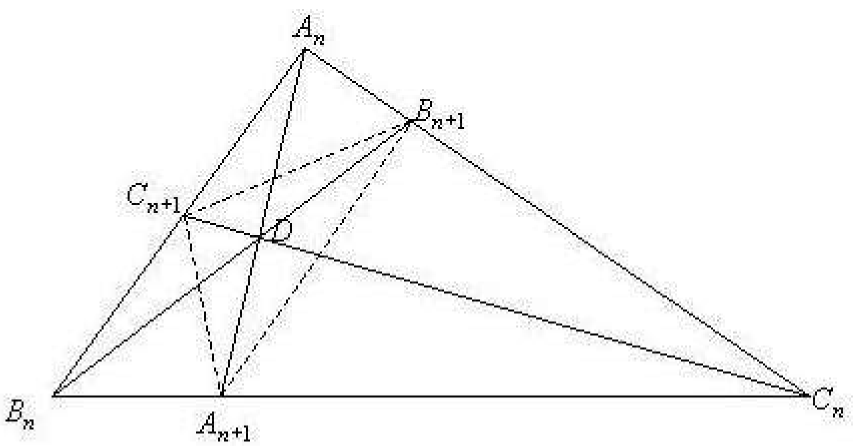
Demostrar que si la unión de todos los conjuntos de la sucesión es un conjunto finito, entonces para cualquier $j \geq 1$ se tiene que $A_j = A_1$.

Solución de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, Navarra, España.

Sea una sucesión A_j definida como en el enunciado, y tal que la unión de todos los A_j es un conjunto finito.

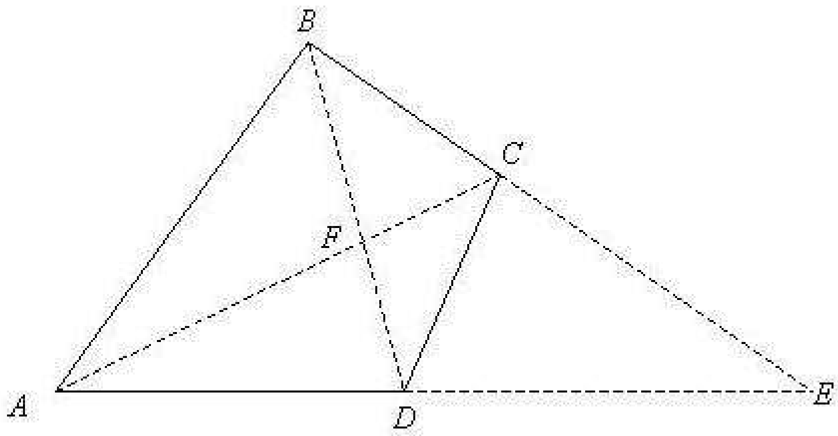
Supongamos ahora que existe algún A_j que contiene a todos sus puntos de corte. Entonces $A_{j+k} = A_j$ para todo natural k. Este resultado se prueba por inducción sobre k, cumpliéndose trivialmente para $k=0$. Supongamos ahora que $A_{j+k} = A_j$ para algún k. Entonces, $A_{j+k} = A_j$ contiene a todos sus puntos de corte, con lo que $A_{j+k+1} = A_{j+k} = A_j$, y el resultado se cumple también para $k+1$, luego se cumple para todo k natural.

Lema 1: No puede haber, en ningún A_j de la sucesión, cuatro puntos tales que uno está en el interior del triángulo formado por los otros tres.



Demostración: Supongamos que para algún A_n de la sucesión, existen cuatro puntos, que llamaremos A_n, B_n, C_n y D tales que D está en el interior del triángulo $A_nB_nC_n$. Sean entonces A_{n+1}, B_{n+1}, C_{n+1} los pies respectivos de las cevianas por D desde A_n, B_n, C_n. Obviamente, ninguno de estos tres puntos coincide con ninguno de los cuatro anteriores, y son puntos de corte de $\mathcal{A}_n$. Además, D está en el interior del triángulo $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$, por estar en el interior de los cuadriláteros $A_{n+1}B_{n+1}A_nB_n$, $B_{n+1}C_{n+1}B_nC_n$, y $C_{n+1}A_{n+1}C_nA_n$. Por lo tanto, sustituyendo n por n+1,n+2,... en el argumento anterior podemos definir sucesiones infinitas A_{n+k}, B_{n+k}, C_{n+k}, de puntos distintos entre sí, que pertenecerían a la unión de todos los $\mathcal{A}_j$. Contradicción. Luego si la unión de todos los $\mathcal{A}_j$ es finita, no puede haber cuatro puntos tales que uno esté en el interior del triángulo formado por los otros tres.

Lema 2: Si para cualquier $\mathcal{A}_j$ de la sucesión existen cuatro puntos contenidos en él que forman un cuadrilátero no degenerado, entonces dicho cuadrilátero es un paralelogramo.



Demostración: Supongamos ahora que para algún $\mathcal{A}_j$ de la sucesión, existen cuatro puntos que forman un cuadrilátero no degenerado $ABCD$ que no es un paralelogramo. Si dicho cuadrilátero es cóncavo, entonces uno de los cuatro vértices (aquel cuyo ángulo asociado sea mayor que p) está en el interior del triángulo formado por los otros tres, lo cual es imposible en virtud del lema 1. Si el cuadrilátero no degenerado es convexo, sean sin pérdida de generalidad AD y BC lados no paralelos, de forma que las rectas AD y BC se cortan en E exterior a $ABCD$, estando C, D en el interior de los segmentos BE, AE, respectivamente, como indica la figura. Sea F el punto donde se cortan las diagonales AC y BD del cuadrilátero. Obviamente, E y F son puntos de corte de $\mathcal{A}_j$, luego son puntos de $\mathcal{A}_{j+1}$. Pero F está en el interior de $ABCD$, y por lo tanto en el interior de ABE, que contiene a $ABCD$, siendo A, B, E y F puntos de $\mathcal{A}_{j+1}$, lo cual es imposible por el lema 1. Luego no puede haber en ningún A_j cuatro puntos que sean los vértices de un cuadrilátero no degenerado que no sea un paralelogramo.

Corolario: Para cada cuatro puntos distintos cualesquiera de A_j, se tienen tres posibilidades: 1) son los vértices de un paralelogramo; 2) los cuatro puntos están alineados; 3) tres de ellos están alineados.

Demostración: Es obvio tras considerar que por los lemas 1 y 2, si los cuatro puntos no son los vértices de un paralelogramo, entonces el cuadrilátero que los admite por vértices debe ser degenerado, con lo que bien los cuatro puntos están alineados, bien determinan un triángulo, estando uno de los vértices en el interior de un segmento cuyos extremos son dos de los otros tres.

Teorema 1: Si A_j no contiene cuatro puntos que sean los vértices de un paralelogramo, existe una recta que pasa al menos por todos sus puntos menos uno.

Demostración: Por el lema anterior, si A_j no contiene cuatro puntos que sean los vértices de un paralelogramo, entonces no contiene ningún cuadrilátero no degenerado. Si el número de puntos contenidos en A_j es menor o igual que 4, el teorema se cumple trivialmente por el corolario a los lemas 1 y 2. Si A_j contiene más de cuatro puntos, y no todos ellos están alineados, elíjanse cuatro de ellos que no estén todos alineados. Por el corolario a los lemas 1 y 2, existe una recta que pasa por exactamente tres de ellos (que denominaremos B, C y D), estando el cuatro (que denominaremos A) fuera de esa recta. Sea ahora cualquier otro punto E de A_j, y supongamos que no se encuentra en la misma recta que B, C y D. Considerando el cuadrilátero $ABCE$, que no es un paralelogramo por hipótesis, se tiene que al menos tres de sus vértices deben estar alineados, por el corolario a los lemas 1 y 2. Luego como E no está en la recta BC, entonces E está bien en la recta AB, bien en la recta AC, cuyo único punto común es A, al no estar A en la recta BC por hipótesis. De la misma forma, considerando $ABDE$, se tiene que E está bien en AB, bien en AD, que unido a la condición anterior resulta en que E debe estar en AB. Pero considerando $ACDE$, se tiene que E está bien en AC, bien en AD, o lo que es lo mismo, E y A coinciden, que es absurdo. Luego E no puede estar fuera de la misma recta que B, C y D, que por lo tanto pasa por todos los puntos de A_j menos por A, q.e.d..

Corolario: Si A_j no contiene cuatro puntos que sean los vértices de un paralelogramo, entonces contiene a todos sus puntos de corte.

Demostración: Por el teorema anterior, existe una recta que pasa como mínimo por todos los puntos de A_j menos por uno. Ahora bien, para cualesquiera cuatro puntos alineados de A_j, no se puede definir un punto de corte, y el corolario se cumple trivialmente. Supongamos ahora que existe un punto *A* en A_j que no está en la recta que pasa por los demás. Pero entonces, para cualesquiera puntos *B*, *C*, *D* de la recta que pasa por los demás, *B* está tanto en *AB* como en *CD*, luego *B* es el punto de corte de las rectas *AB* y *CD*, y cualquier punto de corte que se pueda definir está en A_j.

Teorema 2: Si A_j contiene a los cuatro vértices de un paralelogramo, entonces A_j contiene a lo sumo a cinco puntos, siendo el quinto el punto donde se cortan las diagonales del paralelogramo.

Demostración: Sea *ABCD* un paralelogramo cuyos vértices están contenidos en A_j, y supongamos que existe como mínimo un punto *E* adicional que pertenece a A_j. Ahora bien, el cuadrilátero *ABCE* debe ser degenerado, pues no puede ser un paralelogramo, ya que *E* es distinto de *D*. Luego *E* pertenece a una de las rectas *AB*, *AC* o *BC*. De la misma forma, considerando *ACDE*, se tiene que *E* pertenece a una de las rectas *AC*, *AD* o *CD*. Pero *BC* y *AD* no tienen puntos en común, como tampoco los tienen *AB* y *CD*, por ser paralelas, y el punto común de *AB* y *AC* es *A* distinto de *E*, y el punto común de *AB* y *AD* es *A* distinto de *E*. Luego *E* no puede estar en *AB*. Pero al cortarse *BC* y *AC* en *C* distinto de *E*, y al cortarse *BC* y *CD* en *C* distinto de *E*, *E* tampoco puede estar en *BC*. Luego *E* está en *AC*. Considerando los cuadriláteros *BCDE* y *ABDE*, se llega de forma idéntica a la conclusión de que *E* está en *BD*. Luego E es el punto donde se cortan las diagonales de *ABCD*, y no puede haber ningún punto adicional contenido en A_j.

Corolario: Si $A_j \neq A_0$ para algún *j*, entonces A_0 contiene exactamente cuatro puntos que son los vértices de un paralelogramo, en cuyo caso $A_j = A_1 \neq A_0$ para todo *j*.

Demostración: Por el corolario al teorema 1, si A_0 no contiene a un paralelogramo, entonces contiene a todos sus puntos de corte, y $A_j = A_0 = A_1$ para todo *j*, quedando demostrado el enunciado. En caso contrario, A_0 contiene a un paralelogramo *ABCD*. Si adicionalmente contiene a *E*, el punto donde se cortan sus diagonales, entonces A_0 contiene a todos sus puntos de corte, pues cualesquiera cuatro puntos elegidos para definir dos rectas, bien determinan dos rectas paralelas, bien tres de ellos están alineados, siendo el punto de corte uno de los puntos alineados, bien determinan las diagonales del paralelogramo, que definen el punto de corte E incluido en A_0, con lo que nuevamente $A_j=A_0=A_1$ para todo j. Si A_0 contiene únicamente al paralelogramo $ABCD$, entonces su único punto de corte es E, con lo que A_1 contiene a todos sus puntos de corte, y $A_j=A_1\neq A_0$ para todo j.

En cualquier caso, $A_j=A_1$ para todo j, q.e.d., siendo $A_1\neq A_0$ únicamente en el caso en el que A_0 está formado exactamente por los cuatro vértices de un paralelogramo.

PROBLEMAS DE NIVEL MEDIO Y DE OLIMPIADAS (17)

Presentamos cuatro problemas de diferentes Olimpiadas nacionales, enviados por el Prof. gallego Bruno Salgueiro Fanego.

17.1: (Inglaterra, 1970). Las medidas de los ángulos B y C de un triángulo isósceles ABC son iguales a 50º. Sean D y E puntos sobre BC y AC, respectivamente, tales que
$\widehat{BAD} = 50º, \widehat{ABE} = 30º$.

Determinar la medida del ángulo $\widehat{BED}$.

17.2:(Bielorrusia, 2000). Sea M el punto de intersección de las diagonales AC y BD del cuadrilátero convexo ABCD. Sea K el punto de intersección de la prolongación de AB más allá de A, con la bisectriz del ángulo $\widehat{ACD}$. Sabiendo que $MA \bullet MC + MA \bullet CD = MB \bullet MD$, demostrar que $\widehat{BKC} = \widehat{CDB}$.

17.3:(Inglaterra, 2000). Dos círculos k_1, k_2 se intersecan en los puntos M y N , siendo P y Q los puntos de tangencia de una tangente común con los dos círculos. Si N es el punto más próximo a PQ, y la recta NP corta a k_2 por segunda vez en R, demostrar que MQ es la bisectriz de $\widehat{PMR}$.

17.4:(Polonia 2000). Los lados AC y BC del triángulo ABC son iguales. Sean P un punto interior al triángulo tal que $\widehat{PAB} = \widehat{PBC}$, y M el punto medio de AB. Demostrar que
$\widehat{APM} + \widehat{BPC} = 180º$.

PROBLEMA 4:
Hallad todos los números naturales n tales que

$$n^2+1, n^2+3, n^2+7, n^2+9, n^2+15$$

sean todos primos.

Olimpiada de la ESO (Rumania, 2004)

Solución de Óscar Ferreira Alfaro (Colegio Sagrada Familia, P.J.O, Valencia)

$N_1 = n^2+1 \qquad N_2 = n^2+3 \qquad N_3 = n^2+7 \qquad N_4 = n^2+9 \qquad N_5 = n^2+15$

Veamos que el único natural válido es $n = 2$.

Fácilmente se observa que $n = 1$ no es solución, pues sólo sería primo N_1.

Si $n = 2$, $N_1 = 5, N_2 = 7, N_3 = 11, N_4 = 13, N_5 = 19$ que son todos primos.

Evidentemente, si los cinco números han de ser primos n ha de ser par, pues todos los primos mayores que 2 son impares.

Examinemos los números pares $n > 2$ elevados al cuadrado:

- ♦ Si n acaba en 2, n^2 acaba en 4 con lo que N_1 acaba en 5, siendo múltiplo de 5. N_1 no es primo.

- ♦ Si n acaba en 4, n^2 acaba en 6 con lo que N_4 acaba en 5, siendo múltiplo de 5. N_4 no es primo.

- ♦ Si n acaba en 6, n^2 acaba en 6 con lo que N_4 acaba en 5, siendo múltiplo de 5. N_4 no es primo.

- ♦ Si n acaba en 8, n^2 acaba en 4 con lo que N_1 acaba en 5, siendo múltiplo de 5. N_1 no es primo.

- ♦ Si n acaba en 0, n^2 acaba en 0 con lo que N_5 acaba en 5, siendo múltiplo de 5. N_5 no es primo.

Por tanto, sea cual sea el valor par de n mayor que 2 siempre encontraremos al menos uno de los 5 números múltiplo de 5.

PROBLEMA 16.5:

Encontrad en el conjunto de los números naturales valores x, y que cumplan:

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{1998}$$

Olimpiada de la ESO (Chequia, 1998)

Solución de Óscar Ferreira Alfaro (Colegio Sagrada Familia, P.J.O, Valencia)

Este ejercicio ha sido resuelto por quien suscribe, no sin esfuerzo. En la competición, el problema tenía límite de edad: 15 años.

En primer lugar, y considerando el cero como natural podemos dar dos soluciones triviales y simétricas:

$$(x, y) = (0{,}1998)$$

$$(x, y) = (1998{,}0)$$

Elevando ambas partes de la ecuación diofántica al cuadrado nos quedará:

$$\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)^2 = 1998 \quad \to \quad x + y + 2\sqrt{xy} = 1998 \quad \to \quad 2\sqrt{xy} = 1998 - x - y$$

$$\sqrt{xy} = 999 - \frac{x+y}{2} \qquad \textbf{(1)}$$

Y la clave del problema reside en analizar **(1)**:

® $x, y \in$, con lo que xy es el producto de dos números naturales y, por tanto natural.

® Pongamos $xy = P^2 \in$, con lo que $y = \dfrac{P^2}{x}$

Yendo a **(1)**, tendremos:

$$P = 999 - \frac{x + \frac{P^2}{x}}{2} = 999 - \frac{x^2 + P^2}{2x} \quad \to \quad \frac{x^2 + P^2}{2x} = 999 - P \quad \to$$

$$x^2 - 2(999 - P) + P^2 = 0 \quad \to \quad x = \frac{2(999 - P) \pm \sqrt{4(999 - P)^2 - 4P^2}}{2}$$

$$x = 999 - P \pm \sqrt{999 \cdot (999 - 2P)} = 999 - P \pm 3\sqrt{3 \cdot 37 \cdot (999 - 2P)}$$

Dado que $x \in$, el discriminante ha de ser un número natural. La única opción posible con $P \in$ es,

$$999 - 2P = 3 \cdot 37 \to P = 444 \in$$

La siguiente opción sería: $999-2P=(3\cdot 37)^3 \rightarrow P \notin$

Por consiguiente: $x=999-444\pm 3^2\cdot 37=555\pm 333$

$$x_1=888 \rightarrow y=\frac{P^2}{x}=\frac{444^2}{888}=222 \quad \rightarrow \quad (x,y)=(888,222)$$
$$x_2=222 \rightarrow y=\frac{P^2}{x}=\frac{444^2}{222}=888 \quad \rightarrow \quad (x,y)=(222,888)$$

obteniéndose dos soluciones simétricas.

Hagamos una pequeña prueba: $\sqrt{888}+\sqrt{222}=\sqrt{1998}$

Elevando ambas partes al cuadrado: $888+2\sqrt{888\cdot 222}+222=1998 \quad \rightarrow$

$$1110+2\sqrt{2^3\cdot 3\cdot 37\cdot 2\cdot 3\cdot 37}=1998 \quad \rightarrow \quad 1110+2^3\cdot 3\cdot 37=1998 \quad \rightarrow$$

$$1110+888=1998,\ \textit{sí}$$

PROBLEMA 16.3

Resuelve en el campo de los números reales la ecuación:

$$\sqrt[3]{8+x}+\sqrt[3]{8-x}=1$$

Ejercicio planteado en la Olimpiada de Matemáticas de Chequia.

Solución de Óscar Ferreira Alfaro (Colegio Sagrada Familia, P.J.O, Valencia)

$$\sqrt[3]{8+x}=1-\sqrt[3]{8-x} \quad \rightarrow \quad \left(\sqrt[3]{8+x}\right)^3=\left(1-\sqrt[3]{8-x}\right)^3$$

$$8+x=1-3\cdot\sqrt[3]{8-x}+3\cdot\sqrt[3]{(8-x)^2}-\left(\sqrt[3]{8-x}\right)^3$$

$$8\cancel{+x}=1-3\cdot\sqrt[3]{8-x}+3\cdot\sqrt[3]{(8-x)^2}-8\cancel{+x}$$

$$15=-3\cdot\sqrt[3]{8-x}+3\cdot\sqrt[3]{(8-x)^2} \quad \rightarrow \quad 5=-\sqrt[3]{8-x}+\sqrt[3]{(8-x)^2}$$

Realizamos el cambio: $\quad 8-x=t^3 \rightarrow 5=-\sqrt[3]{t^3}+\sqrt[3]{\left(t^3\right)^2} \rightarrow 5=-t+t^2$

Resolviendo la ecuación de 2º grado para la variable t:

$$t^2-t-5=0 \quad \rightarrow \quad t=\frac{1\pm\sqrt{1+20}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{21}}{2}$$

$$t_1=\frac{\sqrt{21}+1}{2} \qquad\qquad t_2=\frac{-\sqrt{21}+1}{2}$$

Por tanto, deshaciendo el cambio para $t_1=\dfrac{\sqrt{21}+1}{2}$

$$8-x=\left(\frac{\sqrt{21}+1}{2}\right)^3=\frac{\sqrt{21}^3+3\sqrt{21}^2+3\sqrt{21}+1}{8}=\frac{64+24\sqrt{21}}{8}=8+3\sqrt{21}$$

$$\boxed{x_1=-3\sqrt{21}}$$

De igual modo, deshaciendo el cambio para $t_2=\dfrac{-\sqrt{21}+1}{2}$

$$8-x=\left(\frac{-\sqrt{21}+1}{2}\right)^3=\frac{-\sqrt{21}^3+3\sqrt{21}^2-3\sqrt{21}+1}{8}=\frac{64-24\sqrt{21}}{8}=8-3\sqrt{21}$$

$$\boxed{x_1=3\sqrt{21}}$$

Solución al problema nº 3 de la VII Olimpiada Balcánica Junior celebrada (Turquía 2003).

Óscar Ferreira Alfaro

Profesor de Matemáticas en el Colegio Sagrada Familia (P.J.O) de Valencia (España)

El triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ está inscrito en el círculo k. Sean D, E, F los puntos medios de los arcos BC, CA, AB (que no contienen respectivamente a A, B, C). El segmento DE corta a CB y CA en G y H, respectivamente. El segmento DF corta a BC y BA en los puntos I y J, respectivamente. Sean M y N los puntos medios de GH e IJ respectivamente.

- **a) Expresar los ángulos del triángulo $\overset{\Delta}{DMN}$ en función de los de $\overset{\Delta}{ABC}$.**
- **b) Sea O' el centro del círculo circunscrito a $\overset{\Delta}{DMN}$ y P' la inters ección de las rectas AD y EF . Demuestra que O', P', M y N están en la misma circunferencia.**

Apartado a:

La situación geométrica que plantea el problema es la siguiente:

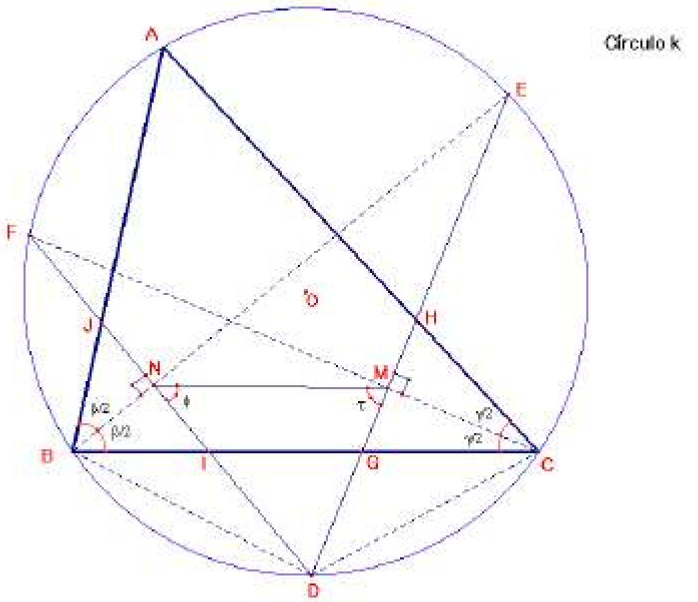


FIGURA 1

Sean $BAC = a$, $ABC = \mathbf{b}$ y $ACB = g = p - (a + b)$ los ángulos del triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$.

$BAC = a$ es ángulo inscrito a $k \Rightarrow BAC = \mathbf{a} = \frac{1}{2} BOC = \frac{1}{\cancel{2}} \cancel{2} BD = BD$.

$ABC = \mathbf{b}$ es ángulo inscrito a $k \Rightarrow ABC = b = \frac{1}{2} AOC = \frac{1}{\cancel{2}} \cancel{2} CE = CE$.

Se tiene que $AF = BF$, $BD = CD$ y $AE = CE \Rightarrow AF + BD + CE = \mathbf{p}$ **(1)**

Por otra parte, FDE es ángulo inscrito a la circunferencia que abarca el arco $AF + AE$. De ese modo:

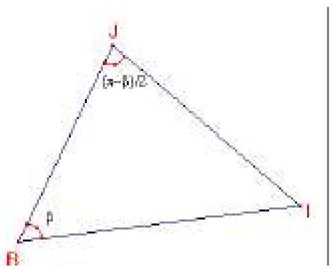
$$FDE = \frac{1}{2} FOE = \frac{1}{2}\left(FOA + AOE \right) = \frac{1}{2}\left(AF + AE \right) \underset{AE=CE}{=} \frac{1}{2}\left(AF + CE \right) =$$

$$\underset{(1)}{=} \frac{1}{2}\left(\mathbf{p} - BD \right) = \frac{\mathbf{p}}{2} - \frac{BD}{2} \quad \Rightarrow \boxed{FDE = \frac{\mathbf{p} - \mathbf{a}}{2}}$$

FJA es ángulo interior a la circunferencia:

$$FJA = \frac{1}{2}\left(AF + BD \right) \underset{(1)}{=} \frac{1}{2}\left(p - CE \right) = \frac{p - b}{2}$$

Si consideramos el triángulo $\overset{\Delta}{BIJ}$



$$JIB = p - b - \frac{p - b}{2} = \frac{p - b}{2} \Rightarrow \overset{\Delta}{BIJ} \text{ isósceles } \Rightarrow \overline{BJ} = \overline{BI}$$

con lo que N es el pie de la perpendicular trazada desde B. Además, B, N y E están alineados. Veámoslo:

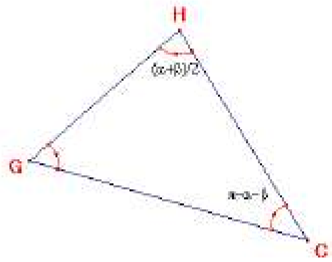
- Si N es el pie de la perpendicular trazada desde B al triángulo $\overset{\Delta}{BJJ}$, al ser éste isósceles con $\overline{BJ} = \overline{BI}$, BN biseca el ángulo $B = \mathbf{b}$. Eso implica que $NBI = \frac{b}{2}$.
- Pero EBC es ángulo inscrito que abarca el arco CE :

$$EBC = \frac{1}{2} CE = \frac{b}{2} \quad \rightarrow \quad B, N \text{ y } E \text{ están alineados}$$

Análogamente, AHE es ángulo interior a la circunferencia:

$$AHE = \frac{1}{2}\left(AE + CD\right) \underset{(1)}{=} \frac{1}{2}\left(p - AF\right) = \frac{a+b}{2}$$

Si consideramos el triángulo $\overset{\Delta}{CGH}$



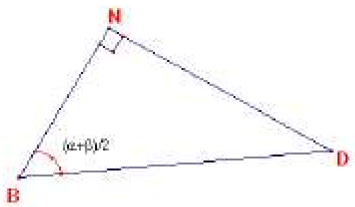
$$CGH = \cancel{p} - \frac{a+b}{2} - \cancel{p} + a + b = \frac{a+b}{2} \Rightarrow \overset{\Delta}{CGH} \text{ isósceles } \Rightarrow \overline{CH} = \overline{CG}$$

con lo que M es el pie de la perpendicular trazada desde C. Además, C, M y F están alineados. Veámoslo:

- ♦ Si M es el pie de la perpendicular trazada desde C al triángulo $\overset{\Delta}{CGH}$, al ser éste isósceles con $\overline{CH} = \overline{CG}$, CM biseca el ángulo $C = g = p - (a + b)$. Eso implica que $MCG = \frac{g}{2}$.
- ♦ Pero FCB es ángulo inscrito que abarca el arco BF:

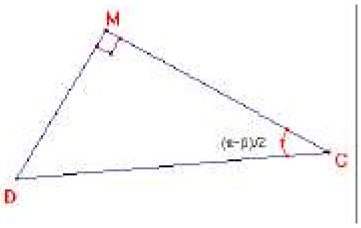
$$FCB = \frac{1}{2}BF \underset{BF=AF}{=} \frac{1}{2}AF = \frac{p-(a+b)}{2} \quad \rightarrow \quad C, M \text{ y } F \text{ están alineados}$$

Consideramos el triángulo $\overset{\Delta}{BDN}$ rectángulo en N. Se observa que EBD es un ángulo inscrito que abarca $CE+CD = CE+BD = a+b \rightarrow EBD = \frac{a+b}{2}$



$$sen\frac{a+b}{2} = \frac{\overline{DN}}{\overline{BD}} \quad \rightarrow \quad \overline{BD} = \frac{\overline{DN}}{sen\frac{a+b}{2}} \qquad \textbf{(2)}$$

Consideramos el triángulo $\overset{\Delta}{CDM}$ rectángulo en M. FCD es un ángulo inscrito que abarca $FB+BD = AF + a = p - b \rightarrow FCD = \frac{p-b}{2}$

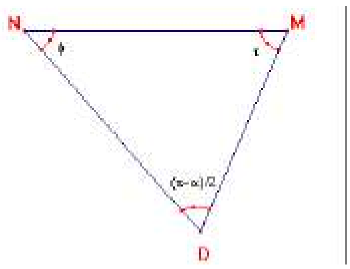


$$sen\frac{p-b}{2} = \frac{\overline{DM}}{\overline{CD}} \rightarrow \overline{CD} = \frac{\overline{DM}}{sen\frac{p-b}{2}} \qquad \textbf{(3)}$$

Dado que $BD = CD \Leftrightarrow \overline{BD} = \overline{CD}$, arcos iguales subtienden cuerdas iguales y viceversa, igualamos **(2)** y **(3)**:

$$\frac{\overline{DN}}{sen\frac{a+b}{2}} = \frac{\overline{DM}}{sen\frac{p-b}{2}} \rightarrow \frac{\overline{DN}}{\overline{DM}} = \frac{sen\frac{a+b}{2}}{sen\frac{p-b}{2}} \qquad \textbf{(4)}$$

En el triángulo $\overset{\Delta}{DMN}$, aplicando T^ma del seno:



$$\frac{\overline{DN}}{\overline{DM}} = \frac{sent}{senf} \qquad \textbf{(5)}$$

Finalmente: $\boxed{t = \frac{a+b}{2} = \frac{p-g}{2}}$ $\boxed{f = \frac{p-b}{2}}$

Se cumple $t + f + NDM = \frac{p-g}{2} + \frac{p-b}{2} + \frac{p-a}{2} = \frac{3p - (a+b+g)}{2} = p$, evidentemente.

Apartado b:

Este apartado requiere una ampliación de la situación geométrica, a fin de ver con claridad varios puntos notables.

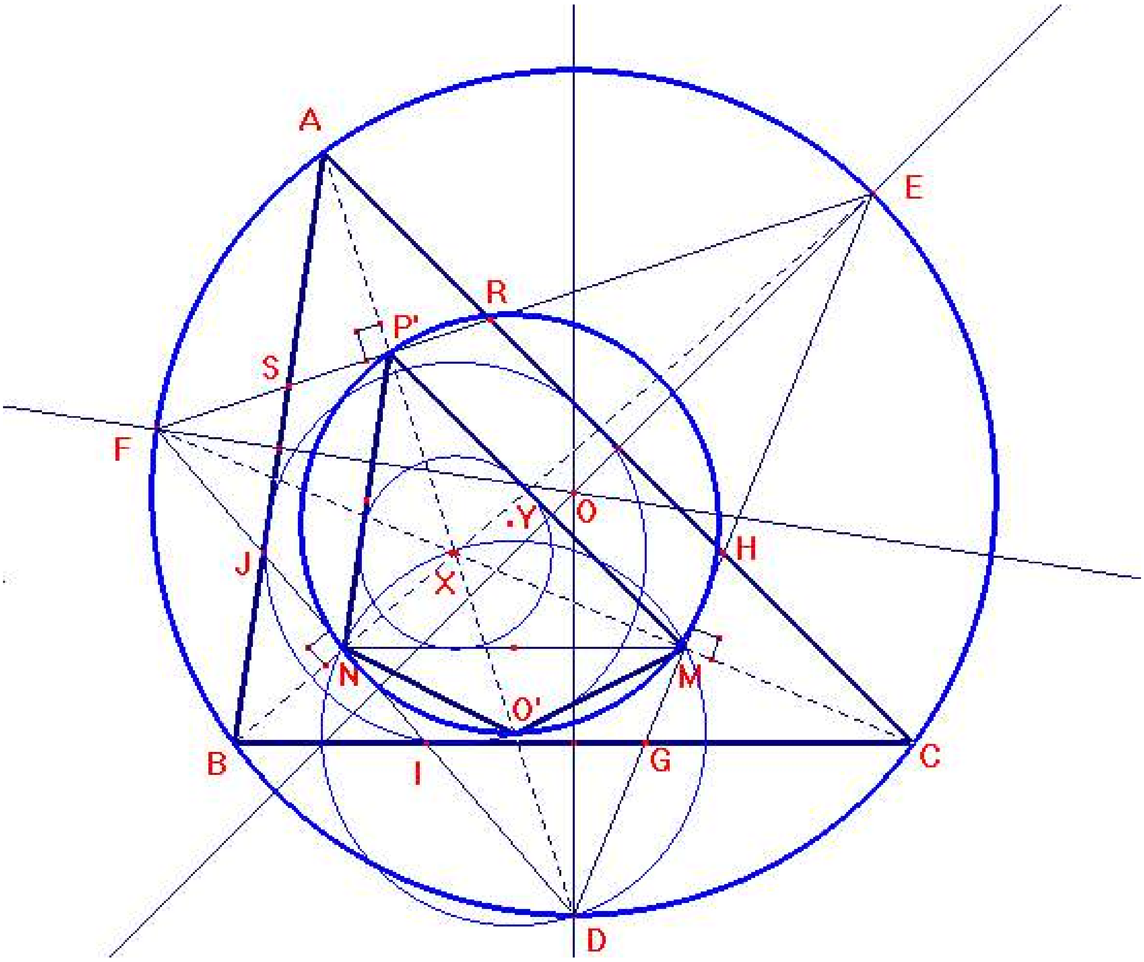


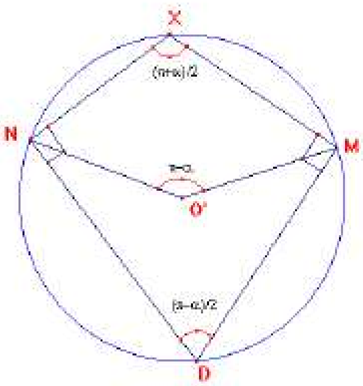
FIGURA 2

Consideramos el cuadrilátero $DMXN$ donde existen dos ángulos opuestos que son rectos: $XND = XMD = \frac{p}{2}$.

Por consiguiente, los otros dos ángulos son suplementarios. En el apartado a) hemos demostrado que $NDM = \frac{p-a}{2} \rightarrow NXM = \frac{p+a}{2}$.

El cuadrilátero es inscriptible en una circunferencia cuyo centro es $O^{/}$.

De ese modo, en la circunferencia con centro en $O^{/}$:



$NDM = \dfrac{p-a}{2}$ es ángulo inscrito $\rightarrow$ $NO^{/}M = p - a$.

Así, si $P^{/}, N, M$ y $O^{/}$ son concíclicos (el cuadrilátero $P^{/}NMO^{/}$ es inscriptible), los ángulos $NO^{/}M$ y $NP^{/}M$ han de ser suplementarios:

$NP^{/}M = p - NO^{/}M = a$, que es lo que trataremos de demostrar.

Para ello, el punto X es de vital importancia .

$AP^{/}F$ es un ángulo interior :

$$AP^{/}F = \frac{1}{2}\left(AF + ED\right) = \frac{1}{2}\left(AF + CE + CD\right) \underset{BD=CD}{=} \frac{1}{2}\left(AF + CE + BD\right) = \frac{p}{2}$$

con lo que se concluye que $AP^{/}$ corta perpendicularmente al segmento EF en $P^{/}$.
Además:

$$ASE \underset{\substack{ángulo\\ interior}}{=} \frac{1}{2}\left(AE + BF\right) \qquad\qquad ARF \underset{\substack{ángulo\\ interior}}{=} \frac{1}{2}\left(AF + CE\right)$$

Como $BF = AF$ y $AE = CE$ $\rightarrow$ $ASE = ARF \Rightarrow \overset{\Delta}{ARS}$ isósceles ,
con lo que $AP^{/}$ biseca al ángulo $ABC = ARS = a$.

Consideramos el triángulo $\overset{\Delta}{DEF}$. Basándonos en a), FM es la altura trazada desde F y EN, la trazada desde E. Como $AP^{/}$ corta perpendicularmente al lado EF del triángulo $\overset{\Delta}{DEF}$, A, $P^{/}$ y D están alineados; es decir, $DP^{/}$ es la altura trazada desde D a dicho triángulo.

La conclusión es clara: X es el ortocentro de $\overset{\Delta}{DEF}$.

Análogamente, considerando el triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ se observa que, según lo demostrado en a):

CM biseca al ángulo $ACB = g$

BN biseca al ángulo $ABC = b$

AP' biseca al ángulo $BAC = a$

La conclusión es clara: X es el incentro de $\overset{\Delta}{ABC}$.

Finalmente, si volvemos a considerar el triángulo $\overset{\Delta}{DEF}$, donde X es su incentro. P', N, M son los pies de las perpendiculares trazadas desde D, E, F respectivamente. El triángulo $\overset{\Delta}{P'NM}$, formado por dichos pies de perpendicular, tiene en X su incentro: es el llamado triángulo órtico.

Veamos por qué. Para ello, apoyándonos en la figura 1 del apartado a) tendremos la siguiente situación angular.

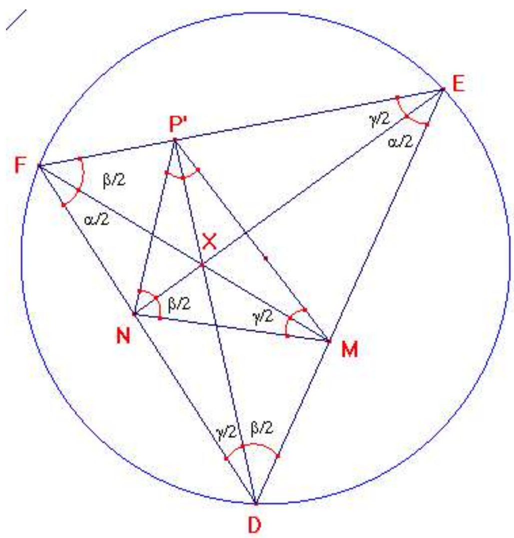


FIGURA 3

De a), en el triángulo $\overset{\Delta}{DMN}$:

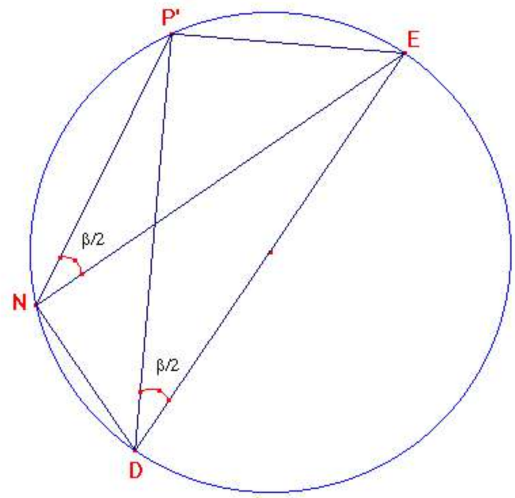
$$DNM = \frac{p - b}{2} \qquad DMN = \frac{a + b}{2} = \frac{p - g}{2} \qquad NDM = \frac{p - a}{2}$$

$$\overset{\Delta}{DEN} \text{, rectángulo en } N \rightarrow \frac{p}{2} = ENM + DNM \rightarrow ENM = \cancel{\frac{p}{2}} - \cancel{\frac{p}{2}} + \frac{b}{2} = \frac{b}{2}$$

$$\overset{\Delta}{DFN} \text{, rectángulo en } M \rightarrow \frac{p}{2} = FMN + DMN \rightarrow FMN = \frac{p - (a + b)}{2} = \frac{g}{2}$$

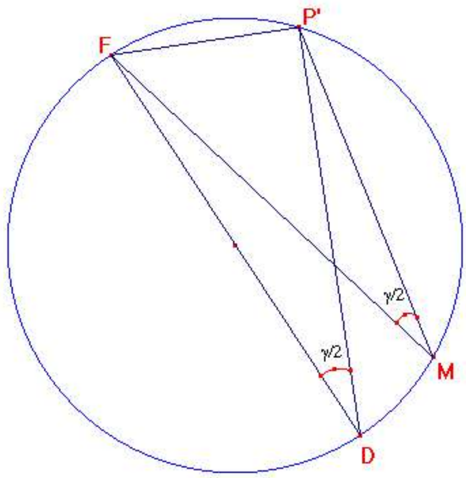
D, E, N y $P^{/}$ son concíclicos. En el cuadrilátero $D, E, N, P^{/}$ se cumple que:

$$DP^{/}E = EP^{/}N = \frac{p}{2} \quad \text{siendo } \overline{DE} \text{ el diámetro de la circunferencia.}$$



$P^{/}D\,E = P^{/}N\,E = \frac{b}{2}$, pues son ángulos inscritos que abarcan el mismo arco $P^{/}E$. Y eso nos lleva inmediatamente a la figura 3. En el triángulo $\overset{\Delta}{P^{/}NM}$ donde $P^{/}NE = ENM = \frac{b}{2} \quad \rightarrow NX$ es bisectriz del ángulo $P^{/}NM$

De modo similar, D, F, M y $P^{/}$ son concíclicos. En el cuadrilátero $D, F, M, P^{/}$ se cumple que: $FP^{/}M = F\,P^{/}D = \frac{p}{2}$ siendo $\overline{DF}$ el diámetro de la circunferencia.



$P'MF = P'DF = \frac{g}{2}$, pues son ángulos inscritos que abarcan el mismo arco $P'F$.

Yendo a la figura 3, en el triángulo $P'\overset{\Delta}{N}M \rightarrow P'MF = FMN = \frac{g}{2}$

MX es bisectriz del ángulo $P'MN$

Si NX y MX son bisectrices de $P'NM$ y $P'MN$ respectivamente, X es el incentro del triángulo $P'\overset{\Delta}{N}M$.

$NP'M = p - (b + g) = a \rightarrow NP'M$ es el suplementario de $NO'M$, con lo que P', N, M, O' son concíclicos. El cuadrilátero formado por los puntos P', N, M, O' es inscriptible en una circunferencia cuyo centro es Y.
Queda demostrado el 2º apartado del ejercicio.

PROBLEMAS PARA LOS MÁS JÓVENES (17)

Algunos problemas propuestos en la XI Olimpiada matemática Regional de E.S.O. (Soria, 2003)

1.Las dimensiones de un trapecio isósceles ABCD (con $AB \parallel CD$) son $AB = 9, CD = 7, AD = \sqrt{17}$. Hallar sobre la base mayor AB un punto P cuya distancia $x = PA$ sea tal que el área del trapecio ABCD sea cuatro veces el área del triángulo isósceles PDM, con $M \in CD$.

2. En una isla hay tres tipos de habitantes: los caballeros, que siempre dicen la verdad; los escuderos, que siempre mienten; y las personas normales, que unas veces mienten y otras dicen la verdad.

De las tres personas A,B,C, una es caballero, otra escudero y la tercra normal, pero no necesariamente en ese orden. Dicen lo siguiente

A:*Yo soy normal*.

B:*Eso que ha dicho A es verdad*.

C:*Yo no soy normal*.

¿Qué son, respectivamente, A, B y C?

3.En qué cifra termina 7^{83578}?

4.En el interior de un campo rectangular hay un punto situado a 525m de una esquina, a 150m de la esquina contigua a ésta y a 450 m de la esquina opuesta a la primera. ¿A qué distancia se encuentre el punto de la cuarta esquina?

5.Tres círculos de radio 1 son tangentes exteriores entre sí, dos a dos.

Hallar el radio de la menor circunferencia que es tangente interiormente a los tres círculos.

Problema 74

Propuesto por Abderrahim Ouardini, Burdeos, Francia

Encontrar todas las funciones f:$R\to R$ tales que verifican las dos condiciones siguientes:

i) $f\left(xf\left(y\right)\right)=yf\left(x\right)$ para cualesquier x, y reales.

ii) El conjunto $\left\{\frac{f\left(x\right)}{x} \mid x\in\mathbb{R}^*\right\}$ es finito.

Solución de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, España.

Tomando $x=0$ en la primera condición, se tiene que para todo y real $f(0)=yf(0)$, es decir, $f(0)=0$. Supongamos ahora que existe algún y no nulo tal que $f(y)=0$. Entonces, y para todo x, se tiene que

$$f\left(x\right)=\frac{f\left(xf\left(y\right)\right)}{y}=\frac{f\left(0\right)}{y}=0\,.$$

Luego o bien $f(x)=0$ para todo x, o $f(x)$ es no nulo para todo x no nulo. En el resto del problema asumiremos este segundo caso.

Haciendo $y=x$ en la condición i), se tiene que $xf(x)$ es punto fijo de f para todo x real, luego para cualesquiera x, y no nulos, se tiene

$$yf\left(x\right)=f\left(xf\left(y\right)\right)=f\left(\frac{x}{y}yf\left(y\right)\right)=f\left(\frac{x}{y}f\left(yf\left(y\right)\right)\right)=yf\left(y\right)f\left(\frac{x}{y}\right);$$

$$f\left(x\right)=f\left(y\right)f\left(\frac{x}{y}\right).$$

Tomando $x=yz$, se tiene que $f(yz)=f(y)f(z)$ para cualesquiera y, z no nulos. Definimos ahora, para todo x no nulo, $g(x)=f(x)/x$. Luego

$$g\left(yz\right)=\frac{f\left(yz\right)}{yz}=\frac{f\left(y\right)}{y}\frac{f\left(z\right)}{z}=g\left(y\right)g\left(z\right).$$

Ahora bien, el conjunto de valores que toma $|g(x)|$ es finito por hipótesis del enunciado, luego posee máximo y mínimo positivos. Tomemos ahora y tal que $|g(y)|$ es máximo. Entonces $|g(z)|\leq 1$ para todo z, pues si no $|g(yz)|>|g(y)|$, que es absurdo. De la misma forma, tomando y tal que $|g(y)|$ es mínimo, se demuestra que $|g(z)|\geq 1$ para todo z, pues si no $|g(yz)|<|g(y)|$, igualmente absurdo. Luego $|g(x)|=1$ para todo x no nulo. Además, tomando $y=z$, se tiene que para todo y^2 positivo,

$$g\left(y^2\right)=\left[g\left(y\right)\right]^2=1,$$

es decir, $f(x)=x$ para todo x positivo. Tomemos ahora $z=-1$. Entonces,

$$g(-y)=g(y)\,g(-1),$$

luego o bien $g(-1)=-1$ y $f(x)=x$ para todo x, o bien $g(-1)=1$ y $f(x)=|x|$ para todo x. Pero esta segunda opción es absurda, como se comprueba tomando y negativo en la condición i) del enunciado, y por lo tanto las únicas soluciones son $f(x)=0$ para todo x, $f(x)=x$ para todo x.

Problema 75

Propuesto por Wu Wei Chao, GuangZhou, China.

Dados dos números reales, *a* y *c*, con *a* distinto de 0, encontrar todas las funciones f:$R\to R$ que verifican

$$f(x+f(y)) = f(f(y)) + 2axf(y) + f(x) - c, \qquad \text{para cualesquier } x, y \text{ reales.}$$

Solución de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, España.

Haciendo x=0, se obtiene de forma trivial que $f(0)=c$. Luego $f(x)=0$ para todo x real sólo si $c=0$, comprobándose por sustitución directa que si $c=0$, entonces $f(x)=0$ es efectivamente una solución posible. En caso de que $f(x)$ no sea idénticamente nula (independientemente de que c sea nulo o no), existe al menos un real y para el que $f(y)$ es no nulo, pudiéndose definir para cada real z un real u mediante

$$u = \frac{c - f(f(y)) + z}{2af(y)}.$$

Luego para cualesquiera y, z reales, con $f(y)$ no nulo, existe u real tal que

$$f(u+f(y)) = f(f(y)) + 2auf(y) + f(u) - c = f(u) + z.$$

Por lo tanto, para cualesquiera x, z reales existen reales u y v tales que $f(v)-f(u)=z$, y

$$\begin{aligned} f(x+f(v)) &= f(f(v)) + 2axf(v) + f(x) - c \\ &= f(z+f(u)) + 2axz + 2axf(u) + f(x) - c \\ &= f(f(u)) + 2a(x+z)f(u) + f(x) + f(z) + 2axz - 2c; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x+f(v)) &= f(x+z+f(u)) \\ &= f(f(u)) + 2a(x+z)f(u) + f(x+z) - c; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x+z) &= f(x+f(v)) - f(f(u)) - 2a(x+z)f(u) + c \\ &= f(x) + f(z) + 2axz - c. \end{aligned}$$

La solución de esta última ecuación es sencilla tomando, sin pérdida de generalidad, $f(x)=ax^2+c+g(x)$, donde $g(x)$ es una función a hallarse. Entonces,

$$g(x+z) = f(x+z) - a(x+z)^2 - c = f(x) + f(z) - ax^2 - az^2 - 2c = g(x) + g(z).$$

Luego como este resultado se da para cualesquiera x, z reales, se tiene que $g(x)=bx$ para algún b real, y la solución general cuando $f(x)$ no es idénticamente nula es

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \ b \text{ real cualquiera,}$$

existiendo además la solución particular $f(x)=0$ para todo real x cuando $c=0$.

Problema 76

Demostrar que en cualquier triángulo ABC se verifica

$$\frac{1}{2}\sum_{\text{cíclica}}(a+b)\cos C \le \frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}$$

Solución de Miguel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca, España.

Multiplicando los dos miembros de la siguiente desigualdad [1]

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \ge \frac{3}{2} ,$$

válida para cualesquiera a, b, c números reales positivos, por $a+b+c$, resulta

$$\frac{a^2+a(b+c)}{b+c}+\frac{b^2+b(c+a)}{c+a}+\frac{c^2+c(a+b)}{a+b} \ge \frac{3}{2}(a+b+c)$$

de donde se sigue que

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b} \ge \frac{1}{2}(a+b+c) \qquad (1)$$

Si a, b, c son las longitudes de los lados de ΔABC, tenemos

$$a+b+c=(b\cos C+c\cos B)+(c\cos A+a\cos C)+(a\cos B+b\cos A)=\sum_{\text{cíclica}}(a+b)\cos C .$$

Sustituímos este valor de $a+b+c$ en el segundo miembro de (1) y hemos terminado.

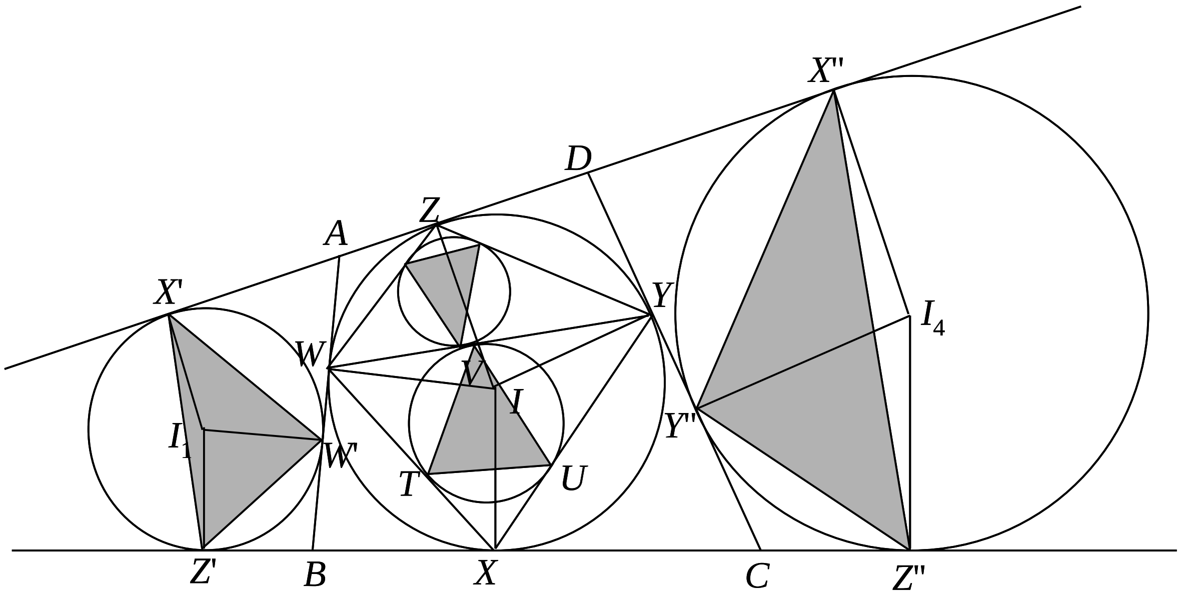
[1] Conocida como desigualdad de Nesbitt, hay cuatro demostraciones de la misma en Arthur Engel, Problem-Solving Strategies, Springer 1998.

Problema 77

Propuesto por Juan Carlos Salazar, Puerto Ordaz, Venezuela.

Sea el cuadrilátero *ABCD* circunscrito a un círculo (I,r). Los puntos de tangencia de este círculo con los lados *AB*, *BC*, *CD*, *DA* son *W*, *X*, *Y*, *Z*, respectivamente. Los círculos exinscritos (I_1,r_1), (I_4,r_4) correspondientes a los lados *AB* y *CD*, respectivamente, y los círculos inscritos (I_2,r_2), (I_3,r_3) en los triángulos *WXY* y *WYZ* determinan los triángulos tangenciales externos e internos correspondientes, de áreas S_1, S_2, S_3, S_4. Demostrar que

$$\frac{S_1}{r_1}+\frac{S_4}{r_4}=2\left(\frac{S_2}{r_2}+\frac{S_3}{r_3}\right).$$



Solución de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, España.

Sean *X'*, *W'*, *Z'* los puntos de tangencia del círculo (I_1,r_1) con las rectas *AD*, *AB* y *BC*, respectivamente. Se tiene entonces que el área de *X'W'Z'* es S_1, siendo r_1 el radio de su circunferencia circunscrita. Por lo tanto, utilizando el teorema del seno, se tiene

$$\frac{S_1}{r_1}=\frac{W'X'\cdot W'Z'\cdot X'Z'}{4r_1^2}=2r_1\sin\left(\angle X'W'Z'\right)\sin\left(\angle W'Z'X'\right)\sin\left(\angle Z'X'W'\right).$$

Ahora bien,

$$\angle X'W'Z'=p-\angle X'W'A-\angle Z'W'B=p-\frac{A}{2}-\frac{B}{2}=\frac{C+D}{2},$$

donde se ha utilizado que los triángulos *W'AX'* y *W'BZ'* son isósceles en *A* y *B*, respectivamente, siendo $\angle W'AX'=p-A$, $\angle W'BZ'=p-B$, donde los ángulos *A*, *B*, *C* y *D* son los ángulos $\angle DAB$, $\angle ABC$, $\angle BCD$ y $\angle CDA$, respectivamente. Al ser I_1 el centro de la circunferencia circunscrita a $X'W'Z'$, y ser I_1X' e I_1W' perpendiculares a las rectas AD y BC, respectivamente, se comprueba que

$$\angle X'I_1Z' = 2\angle X'W'Z' = C + D; \qquad \angle I_1X'Z' = \angle I_1Z'X' = \frac{p - \angle X'I_1Z'}{2} = \frac{A+B}{2} - \frac{p}{2};$$

$$\angle I_1X'W' = \frac{p}{2} - \angle W'X'A = \frac{p}{2} - \frac{A}{2}; \qquad \angle W'X'Z' = \angle W'X'I_1 + \angle I_1X'Z' = \frac{B}{2}.$$

$$\angle I_1Z'W' = \frac{p}{2} - \angle W'Z'B = \frac{p}{2} - \frac{B}{2}; \qquad \angle W'Z'X' = \angle W'Z'I_1 + \angle I_1Z'X' = \frac{A}{2}.$$

Por lo tanto, se llega finalmente a:

$$\frac{S_1}{r_1} = \frac{W'X' \cdot W'Z' \cdot X'Z'}{4r_1^2} = 2r_1 \sin\left(\frac{C+D}{2}\right)\sin\left(\frac{A}{2}\right)\sin\left(\frac{B}{2}\right).$$

Ahora bien, es conocido que $BW=AW'$, ya que si P es el punto donde confluyen las rectas AD y BC, se tiene que

$$PA - AW' = PX' = PZ' = PB - BW' = PB - AB + AW'; \qquad AW' = \frac{PA + AB - PB}{2};$$

$$PB + BW = PX = PZ = PA + AW = PA + AB - BW; \qquad BW = \frac{PA + AB - PB}{2}.$$

Ahora bien, llamando (I,r) a la circunferencia inscrita en $ABCD$, al ser IZ perpendicular a AD, siendo IA la bisectriz del ángulo A, se tiene

$$r = BW \tan(\angle IBW) = \tan\left(\frac{B}{2}\right); \qquad r_1 = AW' \tan(\angle I_1AW') = BW \tan\left(\frac{p-A}{2}\right);$$

$$r_1 = \frac{r}{\tan\left(\frac{A}{2}\right)\tan\left(\frac{B}{2}\right)};$$

$$\frac{S_1}{r_1} = 2r \sin\left(\frac{C+D}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{A}{2}\right)\sin\left(\frac{B}{2}\right)}{\tan\left(\frac{A}{2}\right)\tan\left(\frac{B}{2}\right)} = 2r \sin\left(\frac{C+D}{2}\right)\cos\left(\frac{A}{2}\right)\cos\left(\frac{B}{2}\right).$$

Por simetría, se tiene que

$$\frac{S_4}{r_4} = 2r \sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{C}{2}\right)\cos\left(\frac{D}{2}\right).$$

Pero al ser $2p$ la suma de los ángulos de $ABCD$, se llega finalmente a:

$$\begin{aligned}\frac{S_1}{r_1}+\frac{S_4}{r_4}&=2r\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{A}{2}\right)\cos\left(\frac{B}{2}\right)+\cos\left(\frac{C}{2}\right)\cos\left(\frac{D}{2}\right)\right]\\&=r\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)+\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)+\cos\left(\frac{C-D}{2}\right)+\cos\left(\frac{C+D}{2}\right)\right]\\&=r\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)+r\sin\left(\frac{C+D}{2}\right)\cos\left(\frac{C-D}{2}\right)\\&=\frac{r}{2}\left[\sin(A)+\sin(B)+\sin(C)+\sin(D)\right].\end{aligned}$$

Consideremos ahora el triángulo tangencial interior del triángulo *WXY*. Al ser los triángulos *ZAW*, *WBX*, *XCY*, *YDZ* isósceles en *A*, *B*, *C* y *D*, respectivamente, se tiene

$$\angle ZWX=p-\angle ZWA-\angle XWB=p-\frac{p-A}{2}-\frac{p-B}{2}=\frac{A+B}{2}.$$

De la misma forma,

$$\angle WXY=\frac{B+C}{2};\qquad \angle XYZ=\frac{C+D}{2};\qquad \angle YZW=\frac{A+D}{2}.$$

Además, por ser *WXYZ* cíclico, se tiene

$$\angle WYX=\angle WZX;\quad \angle XWY=\angle XZY;\quad \angle YWZ=\angle YXZ;\quad \angle ZXW=\angle ZYW.$$

Luego como

$$\angle WXY=\angle WXZ+\angle YXZ=\frac{B+C}{2},$$

y de forma similar para los otros tres ángulos del cuadrilátero *WXYZ*, podemos establecer un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas que produce

$$\angle XWY=\frac{A}{2};\qquad \angle WYX=\frac{D}{2}.$$

Sean ahora *T*, *U*, *V* los puntos de tangencia del círculo (I_2,r_2) sobre los lados *WX*, *XY*, *YZ*, respectivamente. Por ser los triángulos *TXU*, *UYV*, *VWT* isósceles en *X*, *Y*, *W* respectivamente, se tiene

$$\angle TUV=p-\angle TUX-\angle VUY=p-\frac{p-\angle TXU}{2}-\frac{p-\angle UYV}{2}=\frac{B+C+D}{4}=\frac{p}{2}-\frac{A}{4}.$$

De la misma forma se obtiene

$$\angle VTU=\frac{p}{2}-\frac{D}{4};\qquad \angle UVT=\frac{A+D}{4}.$$

Por lo tanto, se tiene finalmente que

$$\frac{S_2}{r_2}=\frac{TU\cdot UV\cdot VT}{4r_2^{\,2}}=2r_2\sin\left(\frac{A+D}{4}\right)\cos\left(\frac{A}{4}\right)\cos\left(\frac{D}{4}\right).$$

Ahora bien, por ser r_2 el radio de la circunferencia inscrita a *WXY*, se tiene

$$\frac{r_2}{\tan\left(\frac{A}{4}\right)}+\frac{r_2}{\tan\left(\frac{D}{4}\right)}=\frac{r_2}{\tan\left(\frac{\angle XWY}{2}\right)}+\frac{r_2}{\tan\left(\frac{\angle XYW}{2}\right)}=WY=2r\sin\left(\angle WXY\right)$$
$$=2r\sin\left(\frac{B+C}{2}\right);$$

$$\frac{r_2}{r}=2\frac{\sin\left(\frac{B+C}{2}\right)\tan\left(\frac{A}{4}\right)\tan\left(\frac{D}{4}\right)}{\tan\left(\frac{A}{4}\right)+\tan\left(\frac{D}{4}\right)}=2\frac{\sin\left(\frac{A+D}{2}\right)\tan\left(\frac{A}{4}\right)\tan\left(\frac{D}{4}\right)}{\tan\left(\frac{A+D}{4}\right)\left[1-\tan\left(\frac{A}{4}\right)\tan\left(\frac{D}{4}\right)\right]}$$
$$=4\frac{\cos^2\left(\frac{A+D}{4}\right)\sin\left(\frac{A}{4}\right)\sin\left(\frac{D}{4}\right)}{\cos\left(\frac{A}{4}\right)\cos\left(\frac{D}{4}\right)-\sin\left(\frac{A}{4}\right)\sin\left(\frac{D}{4}\right)}=4\cos\left(\frac{A+D}{4}\right)\sin\left(\frac{A}{4}\right)\sin\left(\frac{D}{4}\right).$$

Introduciendo este resultado en la anterior igualdad para S_2/r_2, se tiene finalmente:

$$\frac{S_2}{r_2}=r\sin\left(\frac{A+D}{2}\right)\sin\left(\frac{A}{2}\right)\sin\left(\frac{D}{2}\right).$$

De forma enteramente análoga, se obtiene también

$$\frac{S_3}{r_3}=r\sin\left(\frac{B+C}{2}\right)\sin\left(\frac{B}{2}\right)\sin\left(\frac{C}{2}\right),$$

y de aquí se consigue finalmente

$$2\left(\frac{S_2}{r_2}+\frac{S_3}{r_3}\right)=2r\sin\left(\frac{B+C}{2}\right)\left[\sin\left(\frac{A}{2}\right)\sin\left(\frac{D}{2}\right)+\sin\left(\frac{B}{2}\right)\sin\left(\frac{C}{2}\right)\right]$$
$$=r\sin\left(\frac{B+C}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{A-D}{2}\right)-\cos\left(\frac{A+D}{2}\right)+\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)-\cos\left(\frac{B+C}{2}\right)\right]$$
$$=r\sin\left(\frac{A+D}{2}\right)\cos\left(\frac{A-D}{2}\right)+\sin\left(\frac{B+C}{2}\right)\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)$$
$$=\frac{r}{2}\left[\sin(A)+\sin(D)+\sin(B)+\sin(C)\right]=\frac{S_1}{r_1}+\frac{S_4}{r_4},$$

q.e.d..

Problema 79

Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, Ávila, España.

Probar que si k y n son enteros $n\geq 2$, $1\leq k<n$, entonces

$$\left(1+\frac{2}{n}\right)^2 \leq \frac{\binom{n}{k}^2}{\binom{n}{k+1}\binom{n}{k-1}}.$$

Solución de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, España.

Se obtiene de forma trivial que:

$$\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k+1}} = \frac{\frac{n!}{k!(n-k)!}}{\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}} = \frac{k+1}{n-k}; \qquad \frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k-1}} = \frac{\frac{n!}{k!(n-k)!}}{\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}} = \frac{n-k+1}{k};$$

$$\frac{\binom{n}{k}^2}{\binom{n}{k+1}\binom{n}{k-1}} = \frac{n-k+1}{k}\frac{k+1}{n-k} = \frac{(n-k)k+(n-k)+k+1}{k(n-k)} = 1+\frac{n+1}{k(n-k)}.$$

Además, es trivial, por la desigualdad entre medias aritmética y geométrica, que

$$k(n-k)\leq\left(\frac{(n-k)+k}{2}\right)^2 = \frac{n^2}{4},$$

de donde se llega finalmente a que

$$\frac{\binom{n}{k}^2}{\binom{n}{k+1}\binom{n}{k-1}} = 1+\frac{n+1}{k(n-k)} \geq 1+\frac{4(n+1)}{n^2} = 1+\frac{4}{n}+\frac{4}{n^2} = \left(1+\frac{2}{n}\right)^2,$$

q.e.d., dándose la igualdad si y sólo si $k=n-k$, al haberse aplicado la desigualdad entre sus medias aritmética y geométrica, o lo que es lo mismo, dándose la igualdad si y solamente si $n=2k$.

Problema 80

Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, Ávila, España.

Caracterizar el triángulo tal que sus medianas y el inverso de sus alturas correspondientes son proporcionales.

Solución de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, España.

Si son proporcionales sus medianas y el inverso de sus alturas correspondientes, también lo serán los cuadrados de las mismas, es decir, llamando h_a, h_b, h_c a las longitudes de las alturas desde los vértices A, B y C, y m_a, m_b, m_c a las longitudes de las medianas desde A, B y C, respectivamente, se tiene que la condición del enunciado se puede escribir como

$$m_a{}^2 h_a{}^2 = m_b{}^2 h_b{}^2 = m_c{}^2 h_c{}^2 ,$$

$$\left(\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4}\right)\frac{S^2}{4a^2}=\left(\frac{c^2+a^2}{2}-\frac{b^2}{4}\right)\frac{S^2}{4b^2}=\left(\frac{a^2+b^2}{2}-\frac{c^2}{4}\right)\frac{S^2}{4c^2} ,$$

donde se ha aplicado el teorema de la mediana, y S es la superficie del triángulo. Simplificando la anterior ecuación, se tiene:

$$\frac{S^2}{8}\left(\frac{b^2+c^2}{a^2}-\frac{1}{2}\right)=\frac{S^2}{8}\left(\frac{c^2+a^2}{b^2}-\frac{1}{2}\right)=\frac{S^2}{8}\left(\frac{a^2+b^2}{c^2}-\frac{1}{2}\right);$$

$$\frac{b^2+c^2}{a^2}=\frac{c^2+a^2}{b^2}=\frac{a^2+b^2}{c^2} .$$

De la primera igualdad se deduce

$$0=a^4-b^4+a^2c^2-b^2c^2=\left(a^2-b^2\right)\left(a^2+b^2+c^2\right),$$

es decir, $a^2=b^2$, o $a=b$. De la segunda y de forma similar se deduce que $b=c$. Luego el triángulo considerado es equilátero.

PROBLEMAS 81-85

Problema 81. *Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez*, (*Ávila, España*). *Dedicado a la memoria del Prof. Miguel de Guzmán Ozámiz*.

Sea OMNP un paralelogramo y ABCD un cuadrilátero inscrito en OMNP. Sean:
$E = OM \cap BC; F = OP \cap BC; G = OA \cap MN; H = OA \cap PN;$
$I = CD \cap OM; J = AB \cap PN; K = AB \cap OP; L = CD \cap MN.$
Si $X = DA \cap BC; Y = CD \cap AB; U = IH \cap EJ; V = FL \cap KG,$
demostrar que X,Y,U,V están en línea recta y calcular la razón doble (X, Y, U, V).

Problema 82.*Propuesto por José Luis Díaz-Barrero*, *Barcelona*, *España*.

Sea n un entero positivo. Si F_n es el n-ésimo número de Fibonacci, demostrar que

$$1 + \left[\sum_{k=1}^{n} (2n-k) F_k^2 \right]^{1/2} \leq F_{n+2}.$$

Problema 83*.*Propuesto por Alex Sierra Cárdenas, Medellín, Colombia*.

Sea ABC un triángulo isósceles con AB = AC. Sea X un punto de BC distinto de los extremos, y sean m_{AX}, m_{BX}, m_{CX} las mediatrices de AX,BX y CX, respectivamente. Demostrar que la suma de las magnitudes de los dos segmentos que se determinan al cortarse m_{BX} y m_{CX} con m_{AX} y la base BC, es igual a la magnitud de la mediana de ABC relativa a la base.

Problema 84 (*enviado por Bruno Salgueiro Fanego*; *fué propuesto como problema* #1*en las Oposiciones para Profesores de Educación Secundaria de Galicia en* 2004). La parte contrincante A envía a la región de disposición de su adversario B dos bombarderos I y II; el I vuela por delante y el II lo sigue. Uno de los bombarderos - de antemano se sabe cuál - debe llevar una bomba y el otro cumple la función de escolta. En la región del enemigo los bombarderos son atacados por un caza de la parte B.

Los bombarderos están pertrechados con cañones de distinto ritmo de fuego: Si el caza ataca al bombardero posterior II, contra aquél dispararán sólo los cañones de ese bombardero, mientras que si el caza ataca al bombardero delantero I, contra el mismo hacen fuego los cañones de ambos bombarderos. La probabilidad de destrucción del caza en el primer caso es de 0.3 y en el segundo, de 0.7.

Si el caza no fue derribado por el fuego defensivo de los bombarderos, aquél destruye el objetivo escogido con probabilidad 0.6. La tarea de los bombarderos consiste en hacer llegar la bomba al blanco; la del caza, en impedirlo, es decir, abatir el bombardero portador. Se desea encontrar las estrategias óptimas de las partes:

i) Para la parte A: ¿Qué bombardero deberá ser el portador?

ii) Para la parte B: ¿A cuál de los bombarderos atacar?

Problema 85 (*Enviado por Bruno Salgueiro Fanego*; *fué propuesto con el* #8 *en la Oposiciones a Profesores de Educación Secundaria de Galicia en* 2004). En un autobús se encuentran n viajeros. En la próxima parada baja cada viajero independientemente de los otros con probabilidad p. La probabilidad de que al autobús no suba ya un ningún nuevo viajero es p_0 y la de que suba un pasajero es $1 - p_0$.

.

a) Hallar la probabilidad de que después de la salida del autobús de la parada se encuentren en él n pasajeros.

b) Hallar la probabilidad de que, después de dos paradas se encuentren nuevamente n

pasajeros en el autobús. (Nota: en los cálculos debe tenerse en cuenta que un viajero que subió en la primera parada puede bajarse en la segunda con probabilidad p).

DIVERTIMENTOS MATEMÁTICOS (17)

ALGUNOS PROBLEMAS CURIOSOS (I)

(seleccionados por el Editor)

1. **Calcular los sumandos y la suma :**

$$\begin{array}{r} S\ E\ N\ D \\ +\ M\ O\ R\ E \\ \hline M\ O\ N\ E\ Y \end{array}$$

(American Mathematical Monthly, 1933)

2. **Hallar el máximo y mínimo número de "Martes y 13" que puede haber en un año.**

(Variación sobre un problema del American Mathematical Monthly de 1963)

3. **Utilizando el calendario gregoriano, probar que ningún día 1º de año puede ser domingo, miércoles o viernes.**
4. **Hallar la edad actual de una persona sabiendo que es igual a la suma delas cifras del año de su nacimiento (*Mathesis, 1893)***
5. **¿Cuáles son los años del siglo XX tales que enero, abril y julio empezaron en domingo? (*Víctor Thébault, Mathesis 1939)*.**

COMENTARIO DE PÁGINAS WEB (17)

UMALCA (Unión Matemática de América Latina y el Caribe)

http://umalca.usach.cl/sociedad.html

Contiene enlaces a las páginas de las nueve sociedades que integran UMALCA (Argentina, Brasil, Chile, Colombia, Cuba, México, Perú, Uruguay y Venezuela), dando informaciones útiles sobre cómo acceder a ellas por los diversos medios de comunicación (dirección postal, teléfono, fax, nombre del Presidente).

Los apartados de la página son: *Acerca de UMALCA, Programas de ayuda económica, Catálogo de instituciones de postgrado en la región, Eventos (celebrados y futuros), Reunión del Comité coordinador de redes científicas de América Latina, Congresos y Escuelas (celebrados y futuros), Boletines, Asambleas, Ofertas de Empleo, Becas (OEA).*

Es una buena página "de servicios", podríamos decir, que facilita el acceso a las diferentes Sociedades Integrantes de UMALCA.

Valladolid, enero 2005.
Francisco Bellot Rosado

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

Número

18

Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática
OEI ISSN 1698-677X

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

Número 18 (Marzo - abril 2005)

ISSN – 1698-277X

Índice

Divertimentos matemáticos

El Profesor y el Antiprofesor

Comentario de páginas
Página de geometría interactiva, del Prof. William Rodríguez Chamache (Perú)

Editor: Francisco Bellot Rosado

Olimpiadas Matemáticas en Venezuela. 2000–2004

Rafael Sánchez Lamoneda*
Jorge Salazar†

Introducción

Las Olimpiadas Matemáticas se organizan por primera vez en Venezuela en el año escolar de 1975-76 como un programa para la promoción de las matemáticas entre los jóvenes de la escuela secundaria. El Centro Nacional para el Mejoramiento de la Enseñanza de la Ciencia, CENAMEC, acoge el proyecto que propone el profesor Saulo Rada del Instituto Pedagógico de Caracas y con el apoyo de esta institución, el Ministerio de Educación y el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Tecnológicas, CONICIT, se organiza la Primera Olimpiada Matemática Venezolana, OMV. Toda la logística de organización la llevaba adelante un Comité Organizador conformado por profesores de varias instituciones educativas y científicas del país. De esta manera comienza el programa de Olimpiadas Matemáticas en Venezuela, logrando en 27 años, una participación de más de un millón de jóvenes a todo lo ancho y largo del país. Este programa finalizó en el año 2003.

El éxito de la OMV como programa de promoción de las matemáticas dió origen a muchas otras olimpiadas de matemática y competencias afines en Venezuela, siendo muy exitosa la Olimpiada Recreativa de Matemáticas, ORM, una iniciativa particular, que tuvo su origen en la solicitud que hiciese una alcaldía de la Región Capital a un grupo de profesores relacionados con el Comité Organizador de la OMV. La ORM ha ido creciendo hasta convertirse en una competencia que se realiza en más de quince estados del país y que en el año 2004 llegó a su edición número 12. Más adelante volveremos a tratar sobre esta competencia.

En el año 2000, con el objetivo de promover las competencias de matemáticas en Venezuela y de llevar adelante un amplio programa de selección y entrenamiento de estudiantes para participar en olimpiadas matemáticas internacionalmente, se fundó la Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas, ACM. La ACM es una asociación civil sin fines de lucro que con el apoyo de la

*Universidad Central de Venezuela. Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Caracas–Venezuela. rsanchez@euler.ciens.ucv.ve

†Universidad Pedagógica Experimental Libertador. Caracas–Venezuela. jorsala@gmail.com

Asociación Matemática Venezolana, AMV, y el aval de la Academia Venezolana de Ciencias Físicas, Matemáticas y Naturales, lleva adelante un programa nacional de entrenamiento de estudiantes que ha producido resultados interesantes, como se verá más adelante en este trabajo.

La ACM, consciente de la importancia de un concurso nacional de matemáticas, acogió como uno de sus programas a la ORM, comenzó la organización de la Olimpiada Juvenil de Matemáticas, OJM, en el 2004 y desde el 2002 es miembro de la Organización Canguro sin Fronteras, lo cual le da el derecho de organizar en Venezuela y así lo hace desde el 2002, el Canguro Matemático, la competencia juvenil de matemáticas de mayor difusión en el mundo entero.

En las sesiones siguientes damos una explicación del programa de olimpiadas matemáticas que la ACM lleva adelante con el apoyo académico de la AMV, mostramos los resultados alcanzados a nivel internacional entre los años 2000 y 2004 y presentamos algunas estadísticas significativas sobre el crecimiento en la participación de estudiantes en nuestra Olimpiada. Finalizamos con una pequeña muestra del tipo de exámenes que se aplican en la ORM y la OJM.

Programa.

Podemos dividir nuestro programa de actividades en dos partes:

1. Organización de Olimpiadas Matemáticas

2. Entrenamiento y participación internacional.

Organización de Olimpiadas Matemáticas.

La Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas y la Asociación Matemática Venezolana organizan una olimpiada matemática dirigida a los estudiantes en edad escolar que abarca nueve niveles, desde tercer grado de Educación Básica, hasta el segundo año de Educación Media y Diversificada. Nuestro sistema escolar consta de nueve años de Educación Básica y dos de Educación Media y Diversificada, como escolaridad previa a la entrada a las universidades.

Nuestra Olimpiada Matemática está dividida en las dos competencias ya mencionadas en la introducción, la ORM de 3º a 6º grado y la OJM de 7º en adelante. Ambos eventos constan de tres pruebas, la preliminar, la final regional y la final nacional. La prueba preliminar es el Canguro Matemático. En la final regional participa el quince por ciento de los que presentaron la prueba preliminar. Los ganadores reciben premios por región, los cuales consisten en medallas de oro, plata y bronce. Finalmente los ganadores regionales de medallas de oro presentan la prueba final o final nacional y de ahí se seleccionan los ganadores nacionales de nuestra Olimpiada. Los exámenes de las finales regional y nacional son de desarrollo. A los participantes se les plantean un grupo de problemas a resolver en un tiempo determinado y se corrige todo el procedimiento de resolución. La final nacional tiene un formato similar al de la lMO (Olimpiada

Internacional de Matemáticas, por sus siglas en inglés), pero se hace en dos días consecutivos.

Los mejores estudiantes en nuestras competencias nacionales toman parte en dos eventos internacionales por correspondencia, la Olimpiada Matemática de Mayo, organizada desde Argentina por la Olimpiada Matemática Argentina, OMA,y en la cual participan estudiantes de Iberoamérica, y la Olimpiada Bolivariana de Matemáticas, competencia dirigida a jóvenes de Bolivia, Colombia, Ecuador, Panamá, Perú y Venezuela y organizada por las Olimpiadas Colombianas de Matemáticas.

Entrenamiento y participación internacional.

Participamos regularmente en las siguientes competencias internacionales

1. Olimpiada Internacional de Matemáticas. IMO
2. Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas. OIM.
3. Olimpiada Matemática de Centroamérica y El Caribe. OMCC.
4. Olimpiada Bolivariana de Matemáticas. OBM.
5. Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas Universitaria. OIMU.

Tenemos un programa de entrenamiento en cinco ciudades del país, Caracas, Valencia, Barquisimeto, Maracaibo y Mérida y con sede en las universidades más importantes de esas regiones. En el mismo participan anualmente alrededor de 250 jóvenes de 7^{o} a 9^{o} de Escuela Básica y de los dos años de la Educación Media y Diversificada. El programa es permanente y nuevos estudiantes ingresan en el mes de octubre de cada año. De Octubre a Diciembre hay clases los sábados y además en el año 2004 comenzamos a atender los estudiantes por medio de nuestro sitio en internet (http://www.acm.org.ve. En Enero un grupo de un máximo de diez estudiantes va a un entrenamiento especial de tres semanas en la Universidad Antonio Nariño, en Bogotá, este entrenamiento es organizado por las Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. Los otros estudiantes continúan con su programa de clases sabatinas y mensualmente, a partir de Febrero, los mejores estudiantes son convocados a jornadas intensivas de entrenamiento en el Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas, IVIC, o en el Instituto de Estudios Avanzados, IDEA, estas jornadas se hacen durante los fines de semana. En Junio, Julio y Septiembre, los equipos que competirán en la OMCC, la IMO y la OIM, son concentrados la semana previa a su partida, en el IVIC o IDEA, junto al jefe y el tutor de cada delegación.

El programa de entrenamiento tiene como objetivo preparar a los participantes para competir en Olimpiadas de Matemáticas. Los temas que se cubren son los clásicos de estas competencias y se hace un gran énfasis en la resolución de problemas olímpicos. Regularmente un estudiante que ingresa al programa requiere de dos años de entrenamiento para poder asistir a una IMO y al menos un año para la OMCC. Hay que tener presente que no solamente hay que enseñarles temas totalmente nuevos, también hay que entrenarlos en una forma de pensar y trabajar en matemáticas, desconocida para la mayoría de ellos, pues las exigencias tradicionales de la escuela, se basan en la repetición de conceptos y algoritmos.

Los instructores del programa de entrenamiento son profesores de universidades y jóvenes con experiencia en olimpiadas matemáticas. Cabe destacar que la participación de los estudiantes con experiencia en olimpiadas ha sido fundamental y nos ha permitido mejorar la interacción con los estuiantes en entrenamiento.

Resultados y Estadisticas: 2000-2004.

En esta sección mostramos los resultados obtenidos con nuestro programa de Olimpiadas Matemáticas. El trabajo que hacemos desde el año 2000 tiene dos objetivos:

1. Detectar jóvenes con talento para las matemáticas
2. Promocionar el estudio de las matemáticas en estudiantes y maestros

Con el primer objetivo pretendemos conseguir jóvenes con talento para estudiar matemáticas y que efectivamente elijan esa carrera al ingresar a la universidad. Desde el anño 2000 hemos reclutado para nuestras escuelas de matemáticas cinco estudiantes que ocupan en estos momentos los mejores lugares de su grupo y que además continúan con nosotros como entrenadores de nuevos estudiantes.

En relación a la promoción de las matemáticas los números que les presentamos al final de esta sección muestran el avance y consolidación de nuestro programa. La adición del Canguro Matemático le ha agregado un valor adicional a nuestra competencia, pues nos permite hacer comparaciones muy útiles con estudiantes de otros países, además las pruebas del Canguro tienen un gran valor por la diversidad de personas que colaboran en su elaboración.

Otro aspecto importante es la cantidad de medallas y premios alcanzados entre los años 2000 y 2004, en competencias internacionales: En la IMO, dos medallas de plata, dos de bronce y tres menciones honoríficas. Nunca antes, en todas las participaciones esporádicas de Venezuela en la IMO, (años 1981, 1982, 1989, 1997, 1998, 1999) habíamos obtenido algún premio. En la OIM, una medalla de oro, cuatro de plata, cinco de bronce y cuatro menciones honoríficas. En el año 2001 ganamos la Copa Puerto Rico que se otorga al país de mayor progreso en esta competencia. En la OMCC, una medalla de oro, cuatro de plata, cuatro de bronce, tres menciones honoríficas y en el 2004 la Copa El Salvador, equivalente a la Copa Puerto Rico de la OIM. Además de una cantidad importante de medallas en la OBM, la OMM y la OIMU.

Las siguientes tablas muestran el aumento de la participación en los años 2000 a 2004 y la participación en el Canguro Matemático en el año 2004. Recuérdese que el Canguro es el certamen preliminar de nuestra olimpiada.

	Ecolier	Benjamin	Cadet	Junior	Student 1	Student 2	total
ANZOATEGUI	218	229	145	96	92	49	829
ARAGUA	415	554	404	118	109	84	1684
BOLÍVAR	567	557	384	175	210	204	2097
CARABOBO	2453	2403	614	300	128	113	6011
COJEDES	42	40	65	18	31	23	219
GUÁRICO	41	33	56	25	24	33	212
LARA	153	169	86	23	27	39	497
MÉRIDA	34	43	45	12	26	25	185
MIRANDA	1649	1684	1039	416	327	267	5382
N.ESPARTA	541	630	350	186	145	63	1915
D.CAPITAL	208	534	36	0	0	0	778
SUCRE	35	49	51	25	38	28	226
TÁCHIRA	11	19	30	27	15	6	108
ZULIA	920	938	513	289	155	130	2945
TOTAL	7287	7882	3818	1710	1327	1064	23088

Tabla 1. Número de participantes por estado y grado. Canguro Matemático 2004

REGIONES	2000	2001	2002	2003	2004	TOTAL
ANZOATEGUI	700				829	1529
ARAGUA	650	1500	1800	588	1680	6218
BARUTA	1200	1200	2200	2200	2200	9000
BOLÍVAR		1500	1500	765	2097	5862
CARABOBO	2000	6500	6500	3688	6001	24689
COJEDES				119	219	338
D.CAPITAL	450	2300	4500	2004	6160	15414
GUÁRICO			4000		212	4212
LARA	12000			142	497	12639
MÉRIDA					185	185
N.ESPARTA	5000	2800	2000	732	1915	12447
POTUGUESA	250	500				750
SUCRE					226	226
TÁCHIRA	450				300	750
ZULIA		1200	3500	1615	2945	9260
TOTAL	22700	17500	26000	11853	25466	103519

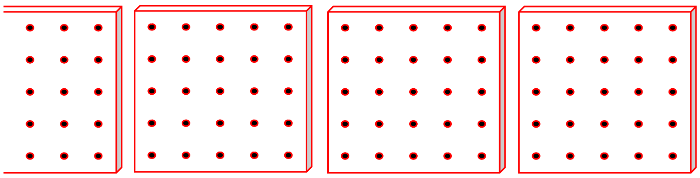
Tabla 2. Número de participantes por años y regiones

Exámenes

A continuación les presentamos algunas de las Pruebas de la ORM y OJM del año 2004.

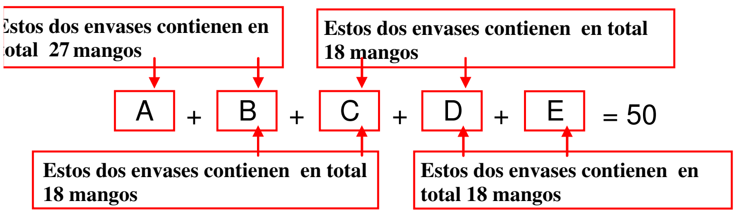
1. **Olimpiada Recreativa de Matemáticas. Prueba Nacional 2004 Tercer Grado**

Problema 1 En tu hoja de respuesta se te presentan cuatro geoplanos. Dibuja en el primer geoplano un triángulo con sólo 3 clavos en su interior, en el segundo geoplano un rectángulo con sólo 4 clavos en su interior, en el tercer geoplano un pentágono con sólo 5 clavos en su interior y en el cuarto geoplano un hexágono con sólo 6 clavos en su interior.



Problema 2 En un juego se establecen las siguientes reglas: Primer jugador gana: Bs. 3. Cualquier otro jugador gana: lo que ganó el anterior jugador más Bs. 5 ¿Cuánto gana el décimo jugador?

Problema 3 Hay 50 mangos en las cinco cajas de la figura. ¿Cuántos mangos hay en cada caja?



Explica cómo obtienes tu respuesta

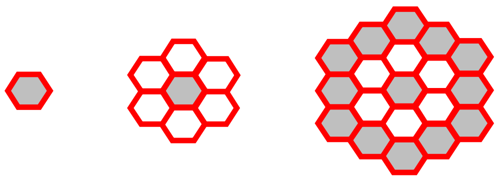
Problema 4 Un bombero, apagando un fuego, está parado en el peldaño mitad de la escalera. Sube tres peldaños, pero el fuego hace que baje 5 peldaños. Vuelve a subir 7 peldaños para extinguir el fuego y finalmente sube 6 peldaños para alcanzar el último peldaño de la escalera. ¿Cuántos peldaños en total tiene la escalera? Explica cómo obtienes tu respuesta

Problema 5 Pedro trabaja el fin de semana en una tienda de ropa para caballeros. El gana bonos especiales por vender algunos artículos: gana Bs. 4.000 por cada chaqueta, gana Bs. 3.000 por un par de pantalones y gana

Bs. 1.000 por cada camisa que venda. No recibe bonos si vende corbatas o medias. Al final del domingo, Pedro recibió de bono especial Bs. 20.000 por siete artículos que vendió. ¿Cuáles son los posibles artículos que Pedro vendió?

2. **Olimpiada Recreativa de Matemáticas. Prueba Nacional 2004 Sexto Grado**

Problema 1 Observa cómo las abejas comienzan a construir su panal: crece en capas. ¿Cuántos hexágonos hay en el borde de la quinta capa? Explica cómo obtuviste tu respuesta



Problema 2 En julio 9, Guillen y Mora tenían un promedio de bateo de 250. Guillen tenía 20 hits en 80 turnos y Mora tenía 15 hits en 60 turnos. Si mañana batean de cuatro, cuatro, ¿cuál sería el promedio de cada uno?

Problema 3 En la multiplicación de abajo, las letras representan dígitos diferentes. Calcula la suma A + B + C + D + E. Explica cómo obtuviste el dígito que representa cada letra.

$$\begin{array}{r} A\,B\,C\,D\,E \\ \times \qquad\quad 4 \\ \hline E\,D\,C\,B\,A \end{array}$$

Problema 4 Pedro, Ana y Gustavo ganan un total de Bs. 15.000 lavando carros. Cada uno de ellos ganó una cantidad diferente de dinero. Pero ellos convienen en compartir sus ganancias en partes iguales y en ese sentido, Pedro dio la mitad de su ganancia para repartirlo en partes iguales entre Ana y Gustavo. Pero entonces Ana tenía mucho dinero y por tanto le dio Bs. 1000 a cada uno de los otros dos. Finalmente, para que los tres tuvieran la misma cantidad de dinero, Gustavo le dio Bs. 200 a Pedro. ¿Cuánto dinero se ganó cada uno originalmente?

Problema 5 Un papel de forma cuadrada de 20 cm de lado tiene una cara de color gris y la otra cara de color blanco. Dividimos cada lado en cuatro partes iguales y doblamos las puntas del cuadrado por los segmentos punteados que se indican en la figura 1, con lo que obtenemos la situación de la figura 2. Calcula la superficie del cuadrado gris y la del cuadrado ABCD que lo contiene en la figura 2.

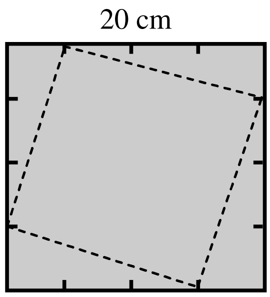


Figura 1

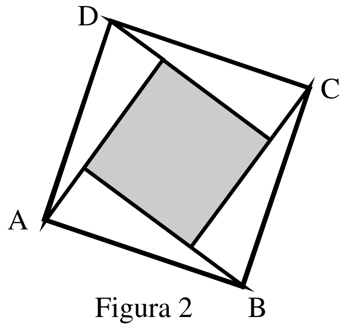
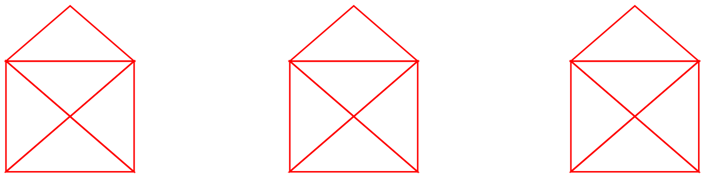


Figura 2

3. **Olimpiada Recreativa de Matemáticas. Prueba Regional 2004 Cuarto Grado**

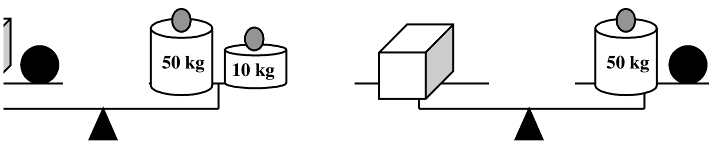
Problema 1 Se te presenta la misma figura tres veces. Se quiere pintar cada región con un solo color: de rojo (R) o de azul (A). Coloca la letra R o la letra A en cada región de tal forma que las figuras sean coloreadas en forma diferente. ¿De cuántas formas diferentes puedes colorear la figura?



Problema 2 Un Zu es igual a la mitad de un Zo. Tres Za es igual a la mitad de un Zu.¿Cuántos Za es un Zo? Explica cómo obtienes la respuesta.

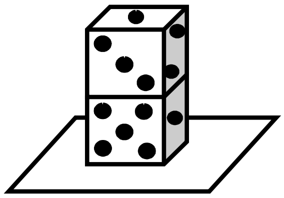
Problema 3 En una tienda venden tres artículos a Bs. 30 cada uno y dos artículos a Bs. 40 cada uno. ¿Cuántas cantidades diferentes de dinero puede obtener la tienda con la venta de esos artículos? Puedes explicar mediante una tabla tu respuesta.

Problema 4 Observa las balanzas en equilibrio:



¿Cuánto pesa la bola negra? Explica cómo obtienes la respuesta.

Problema 5 Dos dados son colocados uno sobre otro encima de una mesa, como muestra la figura. Se sabe que la suma de los puntos de las caras opuestas de un dado es 7. Si puedes caminar alrededor de la mesa, ¿cuánto es la suma de las caras visibles de los dados?



Problema 6 El cumpleaños de Inés es en octubre y es 15 días antes que el de Linda. El cumpleaños de Susana es 23 días antes que el de Dora y 24 días después que el de Linda. ¿Cuál es la fecha de cumpleaños de cada muchacha? Ah… perdón, olvidaba decir: "una de las muchachas nació en enero"

4. **Olimpiada Juvenil de Matemáticas Final Nacional. Junio de 2004. 8º Grado de Educación Básica.**

Problema 1 Un tesoro está escondido en un determinado punto de un camino recto que une las ciudades A, B, C y D, las cuales se encuentran ubicadas en ese orden. Un mapa indica la forma de hallarlo, del siguiente modo: " Partir de A y detenerse en la mitad del camino a C. " Luego, seguir y caminar un tercio de la distancia a D. "Finalmente,recorrer un cuarto del camino hacia B y encontrará el tesoro. Si la distancia de A y B es 6 km y la distancia de B a C es 8 km, estando el tesoro a mitad del camino entre A y D, ¿qué distancia separa a las ciudades C y D?

Problema 2 La base de la casa del perro Nerón tiene forma de un hexágono regular de lado 1 m. Nerón está amarrado a la casa en uno de los vértices del hexágono con una cuerda que mide 2 m. ¿Cuál es el área de la región fuera de la casa que Nerón puede alcanzar?

Problema 3 ¿Cuántos números enteros positivos menores que 2004 hay, tales que la suma de sus cifras sea 7?

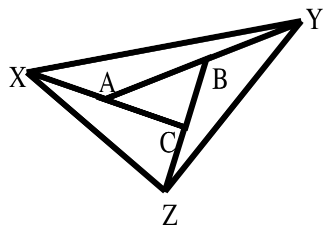
Problema 4 Demuestra que todo cuadrado se puede cortar en 6 cuadrados, en 7 cuadrados, en 8 cuadrados y en 11 cuadrados. Los cuadrados que resultarán de los cortes que realices no tienen que ser iguales entre sí. Para cada uno de los cuatro casos, dibuja un cuadrado e indica claramente con líneas por donde harías los cortes.

Problema 5 En una cuadrícula de 3×3, se colocan de alguna manera todos los números del 1 al 9. A cada segmento que sea lado común de dos cuadrados pequeños de la cuadrícula se le asigna el número que resulta de sumar los dos números de los cuadrados que tienen el segmento en común. Sea S la suma de los doce números asignados a los segmentos interiores. ¿Cuál es el valor máximo de S, de entre todas las formas de colocar los números del 1 al 9 en la cuadrícula?

5. **Olimpiada Juvenil de Matemáticas Final Nacional. Junio de 2004 Noveno grado de Educación Básica.**

Problema 1 Una fábrica de vidrio produjo 8000 vasos para cumplir los pedidos de tres distribuidores, los cuales solicitaban los artículos en cajas: el primero en cajas de 36 vasos, el segundo en cajas de 24 vasos y el tercero en cajas de 20 vasos. Sabiendo que a todos debería enviarles la misma cantidad de vasos y que, además, embarcó la mayor cantidad que pudo. ¿Con cuántos vasos se quedó el fabricante?

Problema 2 Los tres lados del triángulo ABC se prolongan una distancia igual a sus longitudes, como se observa en el dibujo. Si el área del triángulo ABC es $2cm^2$, ¿cuál es el área del triángulo XYZ?



Problema 3 Prueba que todo cuadrado se puede cortar en 6 cuadrados, en 7 cuadrados, en 8 cuadrados y en 11 cuadrados. Los cuadrados que resultarán de los cortes que realices no tienen que ser iguales entre sí. Para cada uno de los cuatro casos, dibuja un cuadrado e indica claramente con líneas por donde harías los cortes.

Problema 4 Un cubo $3 \times 3 \times 3$ se forma con 27 dados "normales" (los dados "normales" son aquellos cuya suma de puntos en caras opuestas es 7). Determina la menor suma posible de todos los puntos de los dados colocados en la superficie del cubo $3 \times 3 \times 3$.

Problema 5 En una cuadrícula de 3×3, se colocan de alguna manera todos los números del 1 al 9. A cada segmento que sea lado común de dos cuadrados pequeños de la cuadrícula se le asigna el número que resulta de sumar los dos números de los cuadrados que tienen el segmento en común. Sea S la suma de los doce números asignados a los segmentos interiores. ¿Cuál es el valor máximo de S, de entre todas las formas de colocar los números del 1 al 9 en la cuadrícula?

6. **Olimpiada Juvenil de Matemáticas Final Nacional. Junio de 2004. 2º de Diversificado.**

Problema 1 Se denota con $P(n)$ y con $S(n)$ el producto y la suma, respectivamente, de los dígitos del entero positivo n. Por ejemplo: $P(34) = 12$ y $S(34) = 7$. Si n es un número de dos dígitos y $P(n) + S(n) = n$, ¿cuál es el dígitos de las unidades de n?

Problema 2 Definimos una nueva operación en el conjunto de los números reales mediante la fórmula $a * b = \frac{a+b}{2}$. Si $x * (x * 14) = x$, halla el valor de x.

Problema 3 Un triángulo rectángulo tiene catetos de longitudes a y b. Una circunferencia de radio r es tangente a los dos catetos y tiene su centro sobre la hipotenusa del triángulo rectángulo. Demuestra que:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{r}.$$

Problema 4 Una banda musical de la Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas está marchando en formación. Al inicio, la banda forma un cuadrado con igual número de columnas que de filas, pero luego cambian a la forma de un rectángulo con cinco columnas más que el número de filas. ¿Cuántos músicos tiene la banda?

Problema 5 En cada planeta de un sistema solar hay un astrónomo observando al planeta más cercano al suyo. Las distancias entre los planetas son distintas dos a dos. Demuestre que si la cantidad de planetas es impar, entonces hay por lo menos un planeta al que nadie observa

Conclusiones

Si bien en Venezuela se comenzaron a organizar Olimpiadas Matemáticas en el año 1975, desde el año 2000 con la aparición de la Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas y la participación de la comunidad matemática del país, representada por la Asociación Matemática Venezolana, se le ha dado a estas competencias un valor agregado que se muestra en los resultados obtenidos internacionalmente. La meta a mediano plazo es lograr una mayor participación de los maestros y profesores de la Escuela Básica, así como extender nuestro programa a todos los estados del país.

TRIÁNGULOS ESPECIALES (2)
Francisco Bellot Rosado

II. Triángulos especiales definidos por relaciones entre sus ángulos

II.1 Triángulo con uno de sus ángulos doble de otro : A = 2B

Mediante el teorema del coseno se puede obtener fácilmente la siguiente relación entre sus lados

$$a^2 = b^2 + bc.$$

Si OD y OE son las distancias de O a los lados BC y CA, se verifica

$$\frac{OD}{OE} = \left|\frac{b-c}{a}\right|$$

(este resultado se encuentra en *Mathesis* 1939). *La primera parte fué un problema propuesto en Valladolid en la* 1ª *Fase de la O.M.E.* 1990.

La longitud de la bisectriz interior desde A es $\frac{bc}{a}$; AI = $a-b$; $II_a = 2b$
$c = 4b(1+2\cos A)$.

La circunferencia que pasa por A,I,B corta respectivamente a los lados CB y CA en puntos P,Q tales que

$$QA = AI = IP = PB = a-b.$$

Las rectas PI,PA son respectivamente paralelas a AB,BQ. La recta PQ pasa por el pie de la bisectriz interior del ángulo C y $|PQ| = c$.

OC corta a AB en un punto que dista b del punto A.

(*Estas propiedades son de G. de Longchamps*)

Se verifican además las relaciones

$$\cos A = \frac{c-b}{2b}, \cos B = \frac{c+b}{2a}, \frac{r}{r_a} = \frac{a-2b}{a+2b}.$$

(*Barisien*, *Mathesis* 1912)

Algunos problemas relativos a este triángulo:

Problema 39 : *Si en un triángulo* $b = 4c \cdot \cos\left(30^\circ + \frac{A}{2}\right) \cdot \cos\left(30^\circ - \frac{A}{2}\right)$, entonces $A = 2C$ y se tiene

$$a^2 = c(b+c).$$

Problema 40: *En el triángulo ABC,* $B = 40^\circ, C = 80^\circ$. Probar que

$$9a^2b^2c^2 + a^3(b^3+c^3) = (a^3+b^3+c^3)^2$$

(*Ioan Tomescu, en Gazeta Matematica*)

Problema 41: *Si en un triángulo* $a = 4, b = 5, c = 6,$ *entonces* $C = 2A$.

Problema 42: *Si en el triángulo ABC se tiene* $A = 2B = 4C,$ *entonces*

$$a^2 = c(a+b-c)$$

Si $A = \frac{\pi}{7}, B = \frac{2\pi}{7}, C = \frac{4\pi}{7}$, *entonces*:

1)*Los puntos A, B, C son vértices de un polígono regular de* 14 *lados*.

2) $OH = OI_a = R\sqrt{2}$

3) $R = 2r_a$

4) $I_aH = R$

5) $a^2 + b^2 + c^2 = 7R^2$

6) *Si B es el vértice* A_1, C *es* A_3, *y* $A = A_7$ (*vértices del polígono regular antes mencionado*), *entonces* OI_aHA_6 *es un paralelogramo cuyo centro coincide con el centro del círculo de los* 9 *puntos de ABC*.

7) *El punto medio del segmento* HA_6 *coincide con uno de los puntos de intersección del círculo circunscrito y el de los* 9 *puntos de ABC*.

8)*Los triángulos* AI_aH, HBI_a, I_aHC *son semejantes*.

9) *Las rectas BC,CA,AB cortan a la recta* HI_a *en puntos simétricos de A,B y C con respecto a las bisectrices de los ángulos C,A,B de ABC* (*para los ángulos C y B deben tomarse las bisectrices exteriores*).

10) *Los cuadrados de las longitudes de los lados del triángulo* OI_aA_6 *y los cuadrados de las longitudes de los lados del triángulo* A_6I_aH *forman una progresión geométrica de razón* 2.

(*Los* 10 *apartados forman un problema del libro de P.S.Modenov Problems in Geometry, Mir, Moscow*, 1981).

Para este triángulo, si BD y CE son las bisectrices interiores, Liénard probó en *Mathesis, vol*.3, las propiedades

$$b^2 = c \cdot AE, a^2 = b \cdot CD, ab = c \cdot CE, ac = b \cdot BD, a^2 = BD \cdot CE$$

Igualmente para este triángulo, en *Mathesis vol*.64 (1955) se demuestra que

$$\Omega\Omega' = \frac{R}{2} \text{ y que } \cot\omega = \sqrt{7}.$$

II.2 Triángulo con uno de sus ángulos triple de otro : **A = 3B**

En la Olimpiada checa y eslovaca de 1997 se propuso el siguiente problema :

Si en un triángulo, A = 3*B, entonces se verifica* $(a^2 - b^2)(a-b) = bc^2$. *¿Es cierto el recíproco*?

La primera parte se reduce a comprobar una identidad trigonométrica, una vez que se sustituyen los lados en función de los senos de los ángulos opuestos mediante el teorema de los senos.

El recíproco es en general falso: como la función seno tiene período 2π, los lados del triángulo tienen la forma

$$a = K\sin 3B, b = K\sin B, c = K\sin 4B$$

(porque $C = \pi - 4B$), también en el caso en que

$$A = 3B - 360^{\text{o}}, \text{ y } C = 540^{\text{o}} - 4B,$$

por ejemplo cuando $A = 15^{\text{o}}, B = 125^{\text{o}}, C = 40^{\text{o}}$. Para un triángulo con esos ángulos, la igualdad $(a^2 - b^2)(a-b) = bc^2$ se mantiene, pero $A \neq 3B$.■

Para triángulos cuyos ángulos verifican la proporción

$$A : B : C = 1 : 3 : 9$$

se pueden demostrar las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} HH_a + HH_b - HH_c &= \frac{R}{2}, \\ OI^2 + OH^2 &= 5R^2 \\ bc + ca + ab &= \sqrt{13}\,R^2 \\ \frac{1}{\cos\omega} &= 1 + \sqrt{13} \end{aligned}$$

(*Mathesis*, *vol*.68 (1959); así como también

$$\cos B\cos C + \cos C\cos A + \cos A\cos B = -\frac{1}{4}$$

(Victor Thébault, en *American Mathematical Monthly*, *E*1301,1958)

Observación

En *Crux Mathematicorum* 1984, *p*.36-39, *Oene Bottema y Léo Sauvé* estudiaron la existencia de un triángulo para el que se verificase la relación

$$\cos A : \cos B : \cos C = l : m : n.$$

II.3 Triángulo con uno de sus ángulos cuádruple de otro : A = 4B

En la Competición Matemática Mediterránea de 1999, Bulgaria (por medio de la Prof. Emilia Velikova) propuso el siguiente problema:

En el triángulo ABC, $A = 4B$. *Demostrar que*

$$a^2bc^3 = (a^2 - b^2 + bc)(b^2 - a^2 + bc)^2.$$

(Dejamos la demostración a los lectores, recomendándoles que utilicen los dos casos (A=2B y A = 3B) anteriores).

II.4 Triángulo con ángulos en progresión aritmética: C + A = 2B

Hayo Ahlburg (residente en Benidorm, Alicante, España) propuso en *Crux Mathematicorum* (1982,*p*.78) el problema de demostrar que para estos triángulos se verifican las propiedades siguientes:

i) $\sin(A - B) = \sin A - \sin C$

ii) $a^2 - b^2 = c(a - c)$

iii) A, C, O, I, H, I_b están en una circunferencia de radio R.

(Observación: como este triángulo tiene un ángulo de 60º, ver el siguiente tipo de triángulos)

II.5 Triángulo con un ángulo de 60º ó 120º

Para fijar ideas, supongamos A = 60º ó A = 120º.

Lemoine demostró en 1900 que, en estos casos, la recta de Euler HO es perpendicular repectivamente a la bisectriz interior o exterior del ángulo A.

En *Mathesis* 1897 *y* 1914, *Déprez*, *Goormaghtig y Barisien* probaron los 9 resultados siguientes para el caso $A = 60^o$:

1) O_9 está en la bisectriz interior desde A

2) El punto de Feuerbach φ es el punto medio de AI

3) Llevando sobre AB y AC las longitudes AC'=$b, AB' = c$, los ocho puntos B,C,B',C',O,H,I,I_a están en una circunferencia.

4) $OH = |b-c|$

5) $p = (R+r)\sqrt{3} = r_a\sqrt{3}$

6) $r = \frac{p-a}{\sqrt{3}}$

7) $R = AH$

8) AI = $2r$

9) $\cos B = \frac{2c-b}{2a}, \cos C = \frac{2b-c}{2a}$

10) La circunferencia BCO corta a la simediana AK en un centro isógono de ABC y a la mediana AG en un centro isodinámico de ABC. (Emmerich)

En la Enciclopedia de Geometría de Shiiko Iwata (vol.3, p.440 y siguientes) se recogen varios resultados de Víctor Thébault en *Mathesis*(1930) en relación con estos triángulos:

11) $AH = AO = R$

12) $O_9I \perp OH$

13) $a^2+b^2+c^2 = 6R^2+4r(R+r)$

Algunos problemas sobre estos triángulos:

Problema 43: *Probar que si en el triángulo ABC, A* = 60º, *entonces*

$$3(b^2+c^2) = 4(h_b^2+h_c^2).$$

¿Es cierto el recíproco? (*Gazeta Matematica* 1968)

Problema 44: *En ABC, A*=60º. *Probar que la distancia entre el baicentro G y el centro isógono interior* (*desde donde los lados del triángulo se ven bajo el mismo ángulo*) *es* $\frac{|b-c|}{3}$. (Ioan Tomescu, Gazeta Matematica 1964)

Problema 45:*Si BE y CF son las bisectrices interiores del triángulo ABC, con A* = 60º, *entonces las circunferencias ABE y ACF se cortan sobre el lado BC* (*Mathesis* 1935)

Problema 46:*Si, en el triángulo ABC, se verifica*

$$\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{\cos A+\cos B+\cos C} = \sqrt{3},$$

entonces al menos un ángulo del triángulo es de 60º. (*W.J.Blundon Am.Math. Monthly*, *E*1936, 1966, *p*.1122)

Problema 47: *El triángulo ADC es tal que C* = 120º. *La bisectriz interior de C corta a AD en B. Probar que* $2 \cdot CB$ es la media armónica de CA y CD. (Am. Math. Monthly, 1904, p.16)

Problema 48: *Si en el triángulo ABC se verifica*

$$\cos 3A+\cos 3B+\cos 3C = 1,$$

alguno de los ángulos del triángulo es de 120º.

Triángulos especiales definidos mediante otras condiciones sobre sus ángulos

II.6 El triángulo tal que $\tan A = \tan B + \tan C$

Se cumplen las propiedades siguientes (*Mathesis*, 1907 *y* 1922):

a) H es el punto medio de la altura desde A.

b)

$$\cos A = \cos B \cos C = \frac{1}{2} \sin B \sin C$$

$$\tan B \tan C = 2$$

c) Los puntos medios de las alturas desde B y C están situados sobre OC y OB; la recta que une esos puntos medios pasa por G.

d) $b^2 + c^2 - a^2 = h_a^2$; $3a^2 + b^2 + c^2 = 16R^2$ (Thébault)

e) $3\cos A = \cos(B - C)$

f) $3a^4 - 2(b^2 + c^2)a^2 - (b^2 - c^2)^2 = 0$

II.7 El triángulo tal que $\cot A = \cot B + \cot C$

Thébault y Goormaghtigh estudiaron este triángulo en Mathesis, 1922; se cumplen las propiedades :

a) $3a^2 = b^2 + c^2$

b) $a^2 = bc \cos A$

c) $h_a = a \tan A$

d) $\cot \omega = 2\cot A$

e) La distancia del punto de Lemoine K al lado BC es la cuarta parte de la altura desde A (Thébault)

f) G pertenece a la recta que pasa por los pies de las alturas desde B y C (Goormaghtig)

II.8 El triángulo tal que $\sin A = \sin B \sin C$

Resultados de Thébault en *Mathesis* 1922 :

a) $h_a = a,$ pues $c \sin B = h_a = b \sin C,$ así que $h_a^2 = bc \sin A = \frac{abc}{2R}$;
usando el teorema de los senos en la condición del problema, resulta
$2Ra = bc,$ es decir $a^2 = h_a^2$.

b) $\sqrt{5} - 1 < \frac{b}{2c} < \sqrt{5} + 1$

II.9 El triángulo tal que $\cos B + \cos C = 1$

En este triángulo se tiene: $OI \parallel BC$; $AI \perp IH$. En efecto: De la identidad conocida $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R}$, resulta $R\cos A = r,$ y esto quiere decir que $OA_m = ID,$ es decir, $OI \parallel BC$.

Por otra parte, de $AI = \frac{r}{\sin\frac{A}{2}}$ obtenemos $\frac{AI}{AH} = \frac{1}{2\sin\frac{A}{2}}$.

Transformando en producto $\cos B + \cos C = 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2} = 1$ y por lo tanto $\frac{AI}{AH} = \cos\frac{B-C}{2}$. esto quiere decir que $\widehat{IAH} = \frac{B-C}{2}$ y por la definición de coseno, $\widehat{AIH} = 90º$.■

En este triángulo también se verifican las relaciones

$$\sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2} = \frac{1}{2}; \quad \tan^2\frac{A}{2} = \frac{R-r}{R+r}.$$

II.10 El triángulo tal que $\cos A = \cos B + \cos C$

En este triángulo se cumplen las relaciones siguientes:

i) $4p(p - b)(p - c) = abc$

ii) $R = r_a$

iii) O pertenece a la recta que une los pies de las bisectrices interiores de B y C.

iv) $H_a \in OI$.

(V.Thébault)

i) es una consecuencia del teorema del coseno.

ii) $r_a = \frac{S}{p-a}, R = \frac{abc}{4S}$ así que la igualdad a demostrar es $4S^2 = abc(p-a)$ y usando i) resulta la fórmula de Herón.

iii) Si M_1, M_2, M_3 son los puntos medios de los lados del triángulo, la igualdad que define los triángulos es $OM_1 = OM_2 + OM_3$, de donde se deduce la conclusión.

iv) $M_1H_a = R\sin(C-B)$ si suponemos $c > b$. Entonces $\frac{OM_1}{M_1H_a} = \frac{\cos A}{\sin(C-B)}$. Si D es el punto de tangencia del incírculo con BC, se tiene $\frac{ID}{DH_a} = \frac{r}{AI\sin\frac{C-B}{2}} = \frac{\sin\frac{A}{2}}{\sin\frac{C-B}{2}} \Rightarrow \frac{OM_1}{M_1H_a} = \frac{ID}{DH_a}$, de donde se deduce que O,I, H_a están alineados.■

Otras propiedades de este triángulo:

v) Las rectas que unen los vértices A,B,C con los puntos de tangencia del excírculo (I_a) con BC,CA,AB concurren en un punto del círculo circunscrito a ABC.

vi) El círculo de diámetro AH_a pasa por el punto de Feuerbach φ del triángulo.

vii) $a^2p = b^2(p-c) + c^2(p-b)$.

Neuberg, en Mathesis 1923, demostró mediante coordenadas trilineales que si la recta H_bH_c pasa por I, entonces $\cos A = \cos B + \cos C$.

II.11 El triángulo tal que $\cos 2A + \cos 2C = \cos 2B$

Barisien probó el resultado siguiente:

Si BO es tangente a la circunferencia que pasa por O, C y H_a, entonces se verifican las relaciones

i) $a^2 - b^2 + c^2 = 2R^2$

ii) $\cos 2A + \cos 2C = \cos 2B$.

En efecto, de la condición del problema se desprende que

$$R^2 = ac\cos B, \quad *$$

que junto con el teorema del coseno ($b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$) da i).

Por otro lado, $a^2 = 4R^2\sin^2 A = 2R^2(1-\cos 2A)$ y sustituyendo en i) resulta directamente ii).■

II.12 El triángulo tal que $2\tan A = \tan B + \tan C$

Se puede probar que esta expresión es equivalente a $OH \parallel BC$.

En efecto, sea M_1 el punto medio de BC; entonces $OH \parallel BC$ se expresa mediante $OM_1 = HH_a$, pero $OM_1 = R\cos A, HH_a = 2R\cos B\cos C$ resulta que $\cos A = 2\cos B\cos C(**)$

Por otro lado, $2\tan A = \tan B + \tan C \Leftrightarrow \frac{2\sin A}{\cos A} = \frac{\sin B}{\cos B} + \frac{\sin C}{\cos C} = $
$= \frac{\sin(B+C)}{\cos B\cos C} = \frac{\sin A}{\cos B\cos C}$ y resulta claramente (**).■

II.13 El triángulo tal que $\tan^2\frac{A}{2} = \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$

Probemos que esta igualdad es equivalente a estas dos:

i) $a(b+c) = b^2 + c^2$

ii) $KI \parallel BC$

En efecto, la igualdad trigonométrica se escribe

$$\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)} = \sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{p(p-b)}} \cdot \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}} = \frac{(p-a)}{p}$$

y desarrollando se obtiene i).

Por otro lado $KI \parallel BC$ se escribe igualando r a la primera coordenada trilineal absoluta del punto de Lemoine, que es $\frac{2aS}{a^2+b^2+c^2}$,

y desarrollando y simplificando, teniendo en cuenta que $S = pr$, se obtiene i).■

Por su parte, C.W.Trigg, utilizando coordenadas trilineales demostró (A.M.Monthly 1951,E964) que $\tan^2\frac{A}{2} = \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$ es equivalente a que la recta que une el punto de Gergonne con el de Nagel sea paralela a BC.

Si Γ_a, N_a son los pies de las cevianas de Gergonne y Nagel desde A, entonces

$$\frac{A\Gamma}{\Gamma\Gamma_a} = \frac{[\Gamma CA]+[\Gamma AB]}{[\Gamma BC]} = \frac{\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}}{\frac{1}{p-a}} = \frac{a(p-a)}{(p-b)(p-c)}.$$

Análogamente,

$$\frac{AN}{NN_a} = \frac{(p-b)+(p-c)}{p-a} = \frac{a}{p-a}$$

Igualando las fracciones y desarrollando se obtiene $a(b+c) = b^2+c^2$■

II.14 El triángulo tal que $\cot^2 A = \cot B \cot C$

Thébault demostró que, para este triángulo,

i) $a^2(b^2+c^2) = b^4+c^4$

ii) H_bH_c y AK son las diagonales de un paralelogramo

iii) $OH \perp AK$

En efecto, la condición del problema se expresa en función de senos y cosenos; operando y teniendo en cuenta los teoremas del seno y el coseno se obtiene i).

Sea K_1 el pie de la simediana desde A: entonces $\frac{BK_1}{CK_1} = \frac{c^2}{b^2}$ (teor. de la simediana), de aquí que $\frac{CK_1}{CB} = \frac{b^2}{b^2+c^2}$, y por otra parte

$\frac{CH_b}{CA} = \frac{a\cos C}{b} = \frac{a^2+b^2-c^2}{2b^2}$ = utilizando i) = $\frac{\frac{2b^4}{b^2+c^2}}{2b^2} = \frac{b^2}{b^2+c^2} = \frac{CK_1}{CB}$. Esto demuestra que $K_1H_b \parallel BA$, y análogamente se demuestra que $K_1H_c \parallel CA$, de donde se deduce ii).

iii) se puede probar mediante coordenadas trilineales.■

II.15 El triángulo $\sqrt{\cot A} = \sqrt{\cot B} \pm \sqrt{\cot C}$

Thébault probó en *Mathesis* (1932) *que, en este triángulo, se verifican las relaciones*

i) $\cot\omega = 2$

ii) $\sum a^2 = 8S$

iii) $5\sum a^4 = 6\sum b^2c^2$.

Problemas sobre triángulos definidos mediante otras relaciones entre sus ángulos

Problema 49: *Si las tangentes de los ángulos de un triángulo están en progresión aritmética, la recta de Euler es paralela a un lado.* (*Am. Math. Monthly, E*259, 1937, *p.*104)

Problema 50: *Determinar la relación que existe entre los ángulos de un triángulo cuyo baricentro está en la circunferencia inscrita* (*V. Cristescu, en Gazeta Matematica* 1895)

Problema 51: *Los tres ángulos de un triángulo están en progresión aritmética; demostrar que*

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2;$$

¿qué relaciones hay entre sus lados? (*V.Thébault, en Mathesis* 1940)

Problema 52: *¿Qué relación particular debe existir entre los ángulos del triángulo ABC para que se verifique*

$$4\sin B\left(\sin A\cos^2\frac{C}{2} - \sin B\cos C\right) = \sin^2 A?$$

(Gazeta Matematica 1968)

Problema 53: *Sea ABC un triángulo con B y C agudos y cosA*=$\frac{3}{5}$.

Si D es el pie de la altura desde A, demostrar que la recta que une los centros de los círculos inscritos en ABD y ACD es perpendicular ala que une A con el punto de tangencia de BC con el círculo exinscrito (I_a). *Estudiar el caso en que B ó C son obtusos*.

(R.Blanchard en Mathesis 1952)

Problema 54: *Si los ángulos de un triángulo verifican*

$$\sin A + \sin C = 2\sin B,$$

entonces:

i) $\cot\frac{A}{2}\cdot\cot\frac{C}{2} = 3$

ii) $\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{C}{2} = 2\cot\frac{B}{2}$

iii) $2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2} = \sin\frac{B}{2}$

(Mathesis 1901)

Problema 55: *Si en el triángulo ABC*, $2A + 3B = 180^{\circ}$, entonces

$$4(a+b) \leq 5c.$$

(Gazeta Matematica 1968)

Problema 56: *Si en el triángulo ABC, se verifica*

$$\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2} = 2, \text{ entonces:}$$

i) $\tan^2\frac{A}{2} + \tan^2\frac{B}{2} + \tan^2\frac{C}{2} = 2$

ii) $r_a + r_b + r_c = 2p$

iii) $r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 = 2p^2$

iv) $\sqrt{r_a} = \sqrt{r_b} + \sqrt{r_c}$

v) $8S = 2(ab+bc+ca) - (a^2+b^2+c^2)$

vi) $1 + \cot\omega = \frac{p}{2r}$

vii) $OH^2 - OI^2 = 3S$

(Mathesis, 1945)

Problema 57: *Si en el triángulo ABC, se verifica*

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 1,$$

entonces el círculo circunscrito y el de los 9 *puntos se cortan ortogonalmente*.

(Am. Math. Monthly, E285, 1937, p.384)

Problema 58: *Si en el triángulo ABC se verifica la relación*

$$\sin A\cos B = \sin C\cos C,$$

entonces el circundiámetro por A, la bisectriz interior de B y la mediana desde C son concurrentes.

(Am. Math. Monthly, E1574, 1964, p.94)

Problema 59: *Caracterizar los triángulos* (*tal vez degenerados*) *para los que se verifica*

$$(1+\cos B)(1+\cos C)(1-\cos A) = 2\cos A\cos B\cos C$$

(Murray Klamkin, en Crux Mathematicorum, 1990, p.109)

PROBLEMAS DE NIVEL MEDIO Y DE OLIMPIADAS (18)

Cinco problemas de la Olimpiada británica :

1996, #1: Una función *f* está definida para todos los enteros positivos y satisface

$$f(1) = 1996,$$
$$f(1) + f(2) + \cdots + f(n) = n^2 \cdot f(n), \quad \forall n > 1.$$

Calcular el valor exacto de $f(1996)$.

1995, #1: Hallar todos los cuadrados perfectos que terminan en tres cuatros. Probar que ningún cuadrado perfecto puede terminar en cuatro cuatros.

1993,#3: Para cada entero positivo *c*, la sucesión de enteros $\{u_n\}$ se define mediante

$$u_1 = 1, u_2 = c$$
$$u_n = (2n+1)u_{n-1} - (n^2-1)u_{n-2}, \quad n \geq 3.$$

Determinar los valores de *c* para los que esta sucesión tiene la siguiente propiedad:

$$u_i \text{ divide a } u_j \text{ siempre y cuando } i \leq j.$$

1991,#3 : *ABCD* es un cuadrilátero inscrito en una circunferencia de radio *r*. Las diagonales *AC* y *BD* se cortan en *E*. Probar que, si *AC* es perpendicular a *BD*, entonces

$$EA^2 + EB^2 + EC^2 + ED^2 = 4r^2 \quad (*).$$

¿Es cierto que, si (*) se cumple, entonces *AC* es perpendicular a *BD*? Justifique la respuesta.

1988, #1: Hallar todos los enteros a, b, c tales que

$$(x-a)(x-10) + 1 = (x+b)(x+c) \quad \text{para todo } x.$$

PROBLEMAS PARA LOS MÁS JÓVENES (18)

Cinco problemas rumanos

Presentamos a continuación cinco problemas rumanos, de la colección de problemas de la revista *Gazeta Matematica*, correspondientes a la Clase 5 (primero de la Educación secundaria en aquel país), tomados de la recopilación *Gazeta Matematica* : *a bridge over three centuries*, cuyos editores son Vasile Berinde y Eugen Paltanea, libro publicado por la Sociedad de Ciencias matemáticas de Rumania, y presentado en el ICME 11 de Copenhague 2004.

18.1: Probar que si un número entero positivo α es múltiplo de 19 más 10, nunca puede ser cuadrado o cubo perfecto.

18.2: Hallar las cifras a y b para que el número (escrito en el sistema decimal) $\overline{543ab2}$ sea divisible por 42.

18.3:Probar que, para cualquier valor del entero positivo n, la fracción

$$\frac{65n+3}{39n+2}$$

es irreducible.

18.4:El número inmediatamente siguiente a la suma de tres números primos es un número primo. Hallar los cuatro números primos del enunciado.

18.5:Probar que existen tres enteros positivos x, y, z tales que

$$x^2+y^2+z^2 = 41^{13}.$$

Nota del editor

En el número 17 de la Revista Escolar de la OIM se deslizaron algunos errores que fueron puestos de manifiesto por algunos lectores y que fueron, en consecuencia, corregidos. Pido disculpas y al mismo tiempo doy las gracias por haberlas advertido.

En otro orden de cosas, el editor, en el ejercicio de sus funciones, ha mantenido correspondencia sobre el problema 61, del que publicamos un contraejemplo de los dos recibidos, con el autor del contraejemplo publicado y con el proponente del problema. Como resultado final de esta correspondencia, podemos enunciar de la manera siguiente el problema, que llamaremos Problema 61 (Corregido):

Problema 61 (**Corrección**)
Propuesto por Laurentiu Modan, Bucarest, Rumania
Se considera la sucesión

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

i) Demostrar que

$$\frac{4007}{4008} < S_{2004} < \frac{8015}{4008}$$

ii) Demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} S_n \in \left[\frac{3}{2}, 4\right]$$

Solución de Glauber Moreno Barbosa, Rio de Janeiro, Brasil.

Problema 78
(propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, Ávila, España)
Resolver en enteros positivos la ecuación $x^y + y^x = x^z + y^z$:

En primer lugar se aíslan las bases de las potencias del problema:

$x^y + y^x = x^z + y^z \Rightarrow x^y - x^z = y^z - y^x$, así tenemos que :

$$\begin{cases} \left|x^y - x^z\right| \in N \\ \left|y^z - y^x\right| \in N \end{cases} \quad \text{(con esto se tienen dos hipótesis) :}$$

$$\begin{cases} x^y \geq x^z \Rightarrow y \geq z\,;\; y^z \geq y^x \Rightarrow z \geq x \Rightarrow y \geq z \geq x \quad (1) \\ \qquad\qquad\text{o} \\ x^y \leq x^z \Rightarrow y \leq z\,;\; y^z \leq y^x \Rightarrow z \leq x \Rightarrow y \leq z \leq x \quad (2) \end{cases}$$

(I) Analizando el caso (1):

Tenemos que $x^y - x^z = y^z - y^x \Rightarrow x^y - x^z > 0 \Rightarrow y^z - y^x > 0 \Rightarrow \forall\, x,\ y,\ z \in N.$
Igualando $x^y - x^z = k\ \forall\, x,\ y,\ z,\ k \in N.$ (3)

Desarrollando la expresión tenemos:

$x^z = x^y - k \Rightarrow x^z = \left(\sqrt{x^y} + \sqrt{k}\right)\left(\sqrt{x^y} - \sqrt{k}\right)$, con eso se puede concluir que $\sqrt{x^y} \geq \sqrt{k}$,
a partir de que $\sqrt{x^y} + \sqrt{k},\ \sqrt{x^y} - \sqrt{k} \in N.$
La expresión $x^z = \left(\sqrt{x^y} + \sqrt{k}\right)\left(\sqrt{x^y} - \sqrt{k}\right)$ se descompone en dos factores. Para que el resultado sea x^z, estos factores deben contener la base x, se deduce que :

$$\begin{cases} x^a = \sqrt{x^y} + \sqrt{k} \qquad (4) \\ x^b = \sqrt{x^y} - \sqrt{k} \qquad (5) \end{cases}$$

Como son expresiones con los términos y posiciones respectivas y además la expresión para x^a es una suma y la expresión para x^b es una diferencia , se concluye que :
Sumando $x^a + x^b = 2\sqrt{x^y}$ (6).
También tenemos que : $x^z = \left(x^a\right)\left(x^b\right) \Rightarrow x^a \geq x^b \Rightarrow a \geq b.$
Considerando $b + c = a$, para desarrollar la expresión :

$$x^b\left(x^c + 1\right) = 2\sqrt{x^y} \Rightarrow \begin{cases} x^b = 2 \Rightarrow x^c + 1 = \sqrt{x^y} \quad (1)' \\ \qquad\qquad \text{o} \\ x^b = \sqrt{x^y} \Rightarrow x^c + 1 = 2 \quad (2)' \end{cases}$$

Analicemos el primer caso (1)’:

A partir de (6) : $x^a + x^b = 2\sqrt{x^y} \Rightarrow x^a + 2 = 2(x^c + 1) \Rightarrow x^a = 2x^c$, con eso tenemos que x^a, x^c son del tipo 2^j $\forall$ j $\in N$.

Multiplicando $x^c + 1 = \sqrt{x^y}$ tenemos que : $2x^c + 2 = 2\sqrt{x^y}$

Sustituyendo $2x^c$ por x^a tenemos : $x^a + 2 = 2\sqrt{x^y} \Rightarrow x^a = 2\sqrt{x^y} - 2$ (7)

De esta manera, a partir de (4) y (7) se obtiene el sistema :

$$\begin{cases} x^a = \sqrt{x^y} + \sqrt{k} \\ x^a = 2\sqrt{x^y} - 2 \end{cases} \Rightarrow 2\sqrt{x^y} - 2 = \sqrt{x^y} + \sqrt{k} \Rightarrow \sqrt{x^y} = \sqrt{k} + 2 \Rightarrow x^y = \left(\sqrt{k} + 2\right)^2 \quad (8)$$

Sustituyendo (8) en (3) tenemos : $k + 4\sqrt{k} + 4 - x^z = k \Rightarrow x^z = 4\left(\sqrt{k} + 1\right) \Rightarrow$

$x^z = 2^2\left(\sqrt{k} + 1\right)$ (9).

Como la expresión (9), posee el factor 2 y está compuesta solamente por números naturales, tenemos que $\sqrt{k} + 1 = 2^d$ $\forall$ $d \in N$.

A partir de (9), se consideran las expresiones que siguen a continuación para desarrollar una solución:

$$\begin{cases} x^e = 2^2 \quad (10) \\ \sqrt{k} + 1 = 2^d \text{ (Observación : } \sqrt{k} + 1 \text{ no se puede descomponer en factores)} \\ d + 2 = z \end{cases}$$

Así, $\sqrt{k} + 1 = 2^d \Rightarrow \sqrt{k} = 2^d - 1 \Rightarrow \sqrt{k} = \left(\sqrt{2^d} + 1\right)\left(\sqrt{2^d} - 1\right)$.

Como ((1)') $x^b = 2$ e (10) $x^e = 2^2 \Rightarrow x^e = x^{2b} \Rightarrow e = 2b$.

Como $x^e = 2^2$ solamente existe el factor 2, se tiene que $x = 2$ o $x = 4$.

Para x = 2:

Sustituyendo la expresión (8) $\sqrt{k} = \sqrt{x^y} - 2$, en (9) $x^z = 2^2\left(\sqrt{k} + 1\right)$ se obtiene $x^z = 2^2\left(\sqrt{x^y} - 1\right) \Rightarrow x^{z-2} = \sqrt{x^y} - 1$, como en este caso $x = 2$ y sustituyendo en la expresión : $2^{z-2} = \sqrt{2^y} - 1 \Rightarrow 2^{z-2} + 1 = \sqrt{2^y}$ (11), se sabe por el Teorema de la paridad que para $z \neq 2$ se tiene que $2^{z-2} + 1$ será impar.

Considerando $2^{z-2} + 1 = n \Rightarrow 2^{z-2} = n - 1 \Rightarrow 2^{z-2} = \left(\sqrt{n} + 1\right)\left(\sqrt{n} - 1\right)$ (12).

Ya que, $\sqrt{n} + 1$, $\sqrt{n} - 1$ son pares consecutivos, se considera el siguiente sistema :

$$\begin{cases} t = \sqrt{n} - 1 \\ t + 2 = \sqrt{n} + 1 \end{cases}$$

Considerando (12) y el sistema de arriba :

$2^{z-2} = \left(\sqrt{n} + 1\right)\left(\sqrt{n} - 1\right) \Rightarrow 2^{z-2} = t\,(t + 2)$ tenemos que t es par, de esta forma se puede considerar $2^{z-2} = 2^{a'}2^{b'}$ $\forall$ a', b' $\in N$ siendo $a' + b' = z - 2$ (13).

Tenemos un nuevo sistema:

$$\begin{cases} 2^{a'} = t \\ 2^{b'} = t+2 \end{cases} \Rightarrow 2^{b'} = t+2 \;\Rightarrow\; 2^{b'} = 2^{a'}+2 \;\Rightarrow\; 2^{b'} - 2^{a'} = 2 \qquad (14)$$

La expresión arriba indicada puede ser escrita como $2^{a'}\left(2^{c'}-1\right)=2$, cuando $a'+c'=b'$ e $\forall\, c'$ $\in N$. Observando la expresión $2^{c'}-1$ se ve que ella es impar, sin embargo eso sería un absurdo pues el producto de esta expresión por un número que sólo puede descompone rse en 2 genera un número compuesto solamente por el factor 2, de esta manera sólo se puede tener $2^{c'}-1=1$ por lo que se tiene que tener que $c'=1$, consecuent emente $2^{a'}\left(2^{1}-1\right)=2 \;\Rightarrow\; a'=1$ e

(14) $2^{b'} - 2^{a'} = 2 \;\Rightarrow\; b'=2.$

Como se afirmó en (13), $a'+b'=z-2$ sustituimo s el valor de a' e b' en la expresión $a'+b'=z-2 \;\Rightarrow\; z=5.$

Sustituyen do z en (11) $2^{z-2}+1=\sqrt{2^{y}}$ tenemos que $y \notin N$. Se debe sustituir el valor de z para hallar el valor de y.

$2^{3}+1=\sqrt{2^{y}} \;\Rightarrow\; 9=\sqrt{2^{y}} \;\Rightarrow\; 9^{2}=2^{y}.$

Utilizando las reglas de los logaritmos , se puede encontrar el valor de y :

$$9^{2}=2^{y} \Rightarrow \log 9^{2}=\log 2^{y} \;\Rightarrow\; 2\log 9 = y\log 2 \;\Rightarrow\; y=\frac{2\log 9}{\log 2} \;\Rightarrow\; y=2\log_{2} 9 \quad y\notin N.$$

Para $x=4$:

Como se indicó en (9), $x^{z}=2^{2}\left(\sqrt{k}+1\right) \Rightarrow \left(2^{2}\right)^{z}=2^{2}\left(\sqrt{k}+1\right) \Rightarrow 2^{2z}=2^{2}\left(\sqrt{k}+1\right)$

$\Rightarrow 2^{2(z-1)}=\sqrt{k}+1$ (15).

Como se indicó en (8), $\sqrt{x^{y}}=\sqrt{k}+2 \;\Rightarrow\; \sqrt{k}=\sqrt{x^{y}}-2,$ y sustituyen do en (15),

$2^{2(z-1)}=\sqrt{x^{y}}-1,$ como tenemos $x=4$ y sustituyen do en la expresión :

$2^{2(z-1)}=\sqrt{x^{y}}-1 \Rightarrow 2^{2(z-1)}=\sqrt{2^{2y}}-1 \;\Rightarrow\; 2^{2(z-1)}=2^{y}-1 \;\Rightarrow\; 2^{2(z-1)}-2^{y}=-1 \;\Rightarrow$

$2^{y}-2^{2(z-1)}=1.$

El caso de arriba es del mismo modelo de $2^{r}-2^{s}=1 \;\forall\; r, s \in N$, con $r>s.$

Analizando la igualdad $2^{r}-2^{s}=1 \;\Rightarrow\; 2^{r}=2^{s}+1,$ con eso se tiene que 2^{r} es impar y el único modo que esto puede ocurrir es si $r=0$, que haría con que $2^{s}=0$, que es un absurdo. U otro modo es con 2^{s} impar, así $s=0$ y se tiene : $2^{r}-1=1 \;\Rightarrow\; 2^{r}=2 \;\Rightarrow\; r=1$

Como en el modelo $2^{r}=2^{y} \;\Rightarrow\; r=y=1$ e $2^{s}=2^{2(z-1)} \;\Rightarrow\; 2^{0}=2^{2(z-1)} \;\Rightarrow\; 1=2^{2(z-1)} \Rightarrow z=1$

Analizando el caso (2)’:

Como ese caso es análogo al caso (1), en el que $x^{b}=\sqrt{x^{y}} \;\Rightarrow\; x^{c}+1=2$ y con (6) se obtiene el sistema :

$$\begin{cases} x^b\left(x^c+1\right)=2\sqrt{x^y} \\ x^a+x^b=2\sqrt{x^y} \end{cases}$$

Con eso se tiene que $x^c+1=2 \Rightarrow x^c=1 \;\Rightarrow\; c=0$ e $x^b=\sqrt{x^y} \Rightarrow 2b=y$ (16).
Sustituyendo (16) en $x^a+x^b=2\sqrt{x^y}$, se obtiene $x^a+\sqrt{x^y}=2\sqrt{x^y} \;\Rightarrow\; x^a=\sqrt{x^y} \;\Rightarrow$ $2a=y$, de esta manera con (16) se concluye que $a=b.$ De este modo, sustituyendo estos valores en el sistema $\left((4) \text{ e } (5)\right)$:

$$\begin{cases} x^a=\sqrt{x^y}+\sqrt{k} \\ x^b=\sqrt{x^y}-\sqrt{k} \end{cases} \Rightarrow x^a=x^b \;\Rightarrow\; \sqrt{x^y}+\sqrt{k}=\sqrt{x^y}-\sqrt{k} \;\Rightarrow\; 2\sqrt{k}=0 \;\Rightarrow\; k=0$$

Como se expuso en (3), se tiene que $x^y-x^z=k \;\Rightarrow\; x^y-x^z=0 \;\Rightarrow\; x^y=x^z$
$\Rightarrow\; y=z.$ Mas, conforme al enunciado, se tiene la igualdad $x^y+y^x=x^z+y^z \;\Rightarrow$
$y^x=y^z \Rightarrow x=z.$ Consecuentemente se tiene que $x=y=z\ \forall\, x,\ y,\ z\in N^*$ está resuelto.

Observando la solución se puede concluir que para el caso en (2) también está resuelto.
Las soluciones son: $(x;y;z)=(4;1;1)$ o $(x;y;z)=(x;x;x), \forall\, x\in\ N^*.$

Problema 81

Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, (Ávila, España). Dedicado a la memoria del Profesor Miguel de Guzmán Ozámiz.

Sea *OMNP* un paralelogramo y *ABCD* un cuadrilátero inscrito en *OMNP*. Sean:

$E = OM \cap BC$; $F = OP \cap BC$; $G = DA \cap MN$; $H = DA \cap PN$;

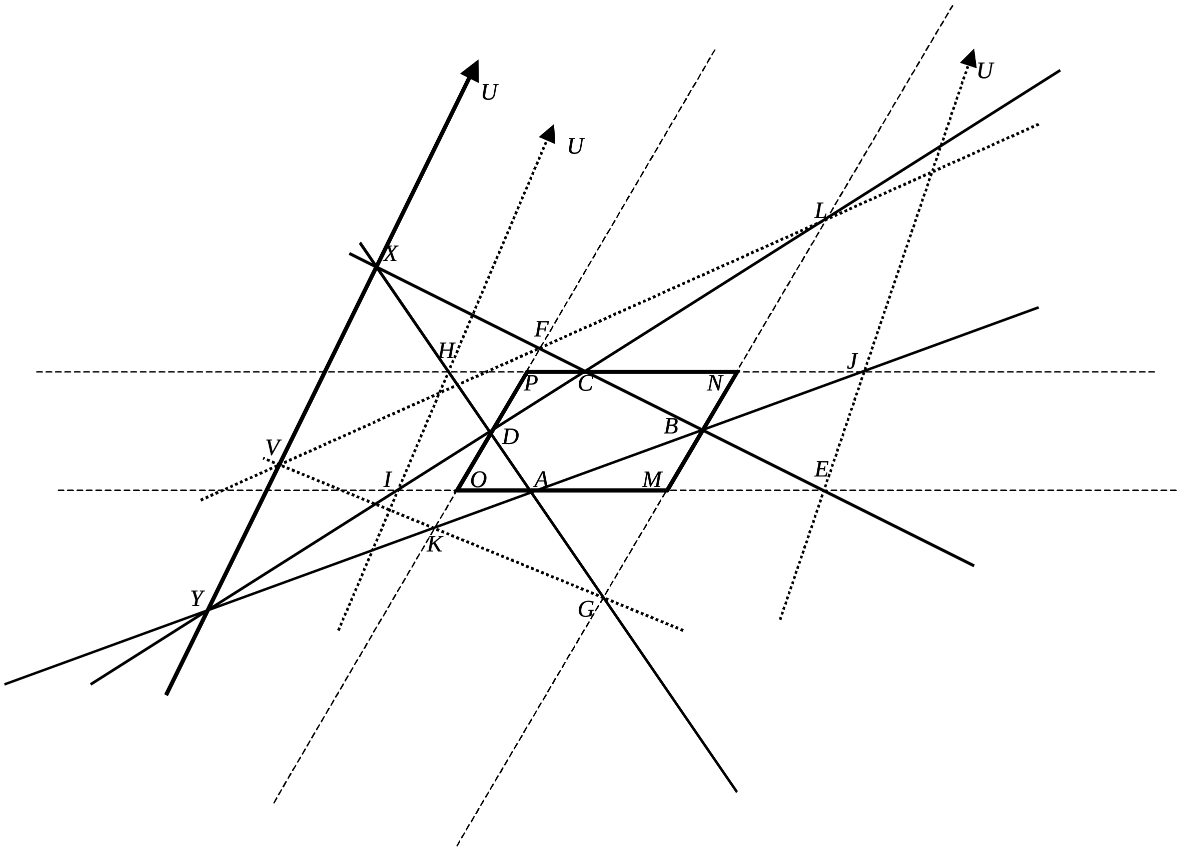
$I = CD \cap OM$; $J = AB \cap PN$; $K = AB \cap OP$; $L = CD \cap MN$.

Si

$X = DA \cap BC$; $Y = CD \cap AB$; $U = IH \cap EJ$; $V = FL \cap KG$,

demostrar que *X*, *Y*, *U*, *V* están en línea recta y calcular la razón doble (*X*,*Y*,*U*,*V*).

Solución de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, Navarra, España.



Por ser *OMNP* un paralelogramo, se tiene *OM*=*PN* y *OP*=*MN*. Además, las siguientes relaciones son obvias por semejanza entre triángulos o como consecuencia del teorema de Thales:

$$\frac{AM}{AO} = \frac{AB}{AK} = \frac{AG}{AD} = \frac{GM}{DO} = \frac{BM}{KO} = \frac{BG}{DK}; \qquad \frac{BN}{BM} = \frac{BJ}{AB} = \frac{BC}{BE} = \frac{JN}{AM} = \frac{CN}{EM} = \frac{CJ}{AE};$$

$$\frac{CP}{CN} = \frac{CF}{BC} = \frac{CD}{CL} = \frac{FP}{BN} = \frac{DP}{LN} = \frac{DF}{BL}; \qquad \frac{DO}{DP} = \frac{AD}{DH} = \frac{DI}{CD} = \frac{IO}{CP} = \frac{AO}{HP} = \frac{AI}{CH};$$

$$\frac{BX}{FX}=\frac{GX}{DX}=\frac{BG}{DF};\qquad \frac{AX}{HX}=\frac{EX}{CX}=\frac{AE}{CH};\qquad \frac{BY}{KY}=\frac{LY}{DY}=\frac{BL}{DK};\qquad \frac{AY}{JY}=\frac{IY}{CY}=\frac{AI}{CJ}.$$

$$\frac{EU}{JU}=\frac{IU}{HU}=\frac{EI}{HJ};\qquad \frac{FV}{LV}=\frac{KV}{GV}=\frac{FK}{GL}.$$

Por lo tanto, se tiene que

$$\frac{DY}{YI}=\frac{DI+IY}{IY}=\frac{\frac{CI}{IY}+\frac{CI}{DI}}{\frac{CI}{DI}}=\frac{\frac{CY}{IY}-1+\frac{CD}{DI}+1}{\frac{CD}{DI}+1}=\frac{\frac{CJ}{AI}+\frac{CH}{AI}}{\frac{CH}{AI}+1}=\frac{HJ}{AI+CH},$$

$$\frac{HX}{XD}=\frac{HX}{DH+HX}=\frac{\frac{AH}{DH}}{\frac{AH}{HX}+\frac{AH}{DH}}=\frac{\frac{AD}{DH}+1}{\frac{AX}{HX}-1+\frac{AD}{DH}+1}=\frac{\frac{AI}{CH}+1}{\frac{AE}{CH}+\frac{AI}{CH}}=\frac{AI+CH}{EI},$$

luego

$$\frac{DY}{YI}\frac{IU}{UH}\frac{HX}{XD}=\frac{HJ}{AI+CH}\frac{EI}{HJ}\frac{AI+CH}{EI}=1,$$

y por el recíproco del teorema de Menelao aplicado al triángulo *DHI*, los puntos *X*, *Y* y *U* están alineados. De la misma forma,

$$\frac{FX}{XC}=\frac{FX}{FX+CF}=\frac{\frac{BF}{CF}}{\frac{BF}{CF}+\frac{BF}{FX}}=\frac{\frac{BC}{CF}+1}{\frac{BC}{CF}+1+\frac{BX}{FX}-1}=\frac{\frac{BL}{DF}+1}{\frac{BL}{DF}+\frac{BG}{DF}}=\frac{BL+DF}{LG},$$

$$\frac{CY}{YL}=\frac{LY-CL}{LY}=\frac{\frac{DL}{CL}-\frac{DL}{LY}}{\frac{DL}{CL}}=\frac{\frac{CD}{CL}+1-1+\frac{DY}{LY}}{\frac{CD}{CL}+1}=\frac{\frac{DF}{BL}+\frac{DK}{BL}}{\frac{DF}{BL}+1}=\frac{FK}{BL+DF},$$

luego

$$\frac{LV}{VF}\frac{FX}{XC}\frac{CY}{YL}=\frac{GL}{FK}\frac{BL+DF}{GL}\frac{FK}{BL+DF}=1,$$

y por el recíproco del teorema de Menéalo aplicado al triángulo *CFL*, los puntos *X*, *Y* y *V* también están alineados, luego *X*, *Y*, *U* y *V* están en la misma recta, q.e.d..

Una vez que sabemos que *X*, *Y*, *U* y *V* están en la misma recta, podemos aplicar el teorema de Menelao a los triángulos *DXY* y *CXY*, pues están alineados *H*, *I* y *U* por un lado, y *F*, *L* y *V* por el otro. Luego como

$$\frac{HX}{DH}=\frac{HX}{AX-HX}\frac{AD+DH}{DH}=\frac{CH}{AE-CH}\frac{OP}{DP},$$

$$\frac{ID}{YI}=\frac{DI}{CD+DI}\frac{CY-IY}{IY}=\frac{OD}{OP}\frac{CJ-AI}{AI},$$

$$\frac{CF}{FX}=\frac{BX-FX}{FX}\frac{CF}{BC+CF}=\frac{BG-DF}{DF}\frac{CP}{PN},$$

$$\frac{LC}{YL}=\frac{CL}{CL+CD}\frac{LY-DY}{LY}=\frac{CN}{PN}\frac{BL-DK}{BL},$$

entonces la raíz doble pedida es

$$\begin{aligned}\frac{UX}{UY}\frac{VY}{VX}&=\frac{ID}{YI}\frac{HX}{DH}\frac{CF}{FX}\frac{YL}{LC}=\frac{DO}{OP}\frac{CJ-AI}{AI}\frac{OP}{DP}\frac{CH}{AE-CH}\frac{CP}{PN}\frac{BG-DF}{DF}\frac{PN}{CN}\frac{BL}{BL-DK}\\&=\frac{DO\cdot CH}{DP\cdot AI}\frac{CP\cdot BL}{CN\cdot DF}\frac{CJ-AI}{AE-CH}\frac{BG-DF}{BL-DK}=\frac{CJ-AI}{AE-CH}\frac{BG-DF}{BL-DK}.\end{aligned}$$

Pero,

$$\begin{aligned}\frac{CJ-AI}{BL-DK}&=\frac{PN-CP+JN-OM+AM-IO}{MN-BM+LN-OP+DP-KO}=\frac{AM\left(1+\frac{BN}{BM}\right)-CP\left(1+\frac{DO}{DP}\right)}{DP\left(1+\frac{CN}{CP}\right)-BM\left(1+\frac{AO}{AM}\right)}\\&=\frac{MN}{PN}\frac{\frac{AM}{BM}-\frac{CP}{DP}}{\frac{DP}{CP}-\frac{BM}{AM}}=\frac{MN}{PN}\frac{AM}{BM}\frac{CP}{DP},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{BG-FD}{AE-CH}&=\frac{MN-BN+GM-OP+DO-FP}{OM-AO+EM-PN+CN-HP}=\frac{DO\left(1+\frac{AM}{AO}\right)-BN\left(1+\frac{CP}{CN}\right)}{CN\left(1+\frac{BM}{BN}\right)-AO\left(1+\frac{DP}{DO}\right)}\\&=\frac{PN}{MN}\frac{\frac{DO}{AO}-\frac{BN}{CN}}{\frac{CN}{BN}-\frac{AO}{DO}}=\frac{PN}{MN}\frac{DO}{AO}\frac{BN}{CN},\end{aligned}$$

luego podemos expresar la razón doble como

$$\begin{aligned}(X,Y,U,V)&=\frac{UX}{UY}\frac{VY}{VX}=\frac{CJ-AI}{AE-CH}\frac{BG-DF}{BL-DK}=\frac{MN}{PN}\frac{AM}{BM}\frac{CP}{DP}\frac{PN}{MN}\frac{DO}{AO}\frac{BN}{CN}\\&=\frac{AM}{AO}\frac{BN}{BM}\frac{CP}{CN}\frac{DO}{DP}.\end{aligned}$$

Problema 82

Propuesto por José Luis Díaz Barrero, Barcelona, España.

Sea n un entero positivo. Probar que

$$1+\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\left(2\left(n-k\right)+1\right)F_k^{\ 2}}\leq F_{n+2}\ ,$$

siendo F_n es el n-ésimo número de Fibonacci, definido por F_1=F_2=1, F_n=F_{n-1}+F_{n-2}.

Solución de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, Navarra, España.

Se utilizarán para demostrar la desigualdad varios resultados intermedios, que a continuación se enuncian y demuestran.

Para todo n≥1, $\boxed{F_{n+1}^{\ 2}=F_{n+2}F_n+\left(-1\right)^n}$.

Se demuestra por inducción. El resultado es obviamente cierto para n=1, pues F_3=2, F_2=F_1=1, siendo entonces ambos miembros iguales a 1. Si el resultado es cierto para n=m, entonces se tiene

$$\begin{aligned}F_{m+2}^{\ 2}&=\left(F_{m+3}-F_{m+1}\right)\left(F_{m+1}+F_m\right)=F_{m+3}F_{m+1}-F_{m+1}^{\ 2}+F_{m+3}F_m-F_{m+1}F_m\\&=F_{m+3}F_{m+1}-\left(-1\right)^m-\left(F_{m+2}-F_{m+3}+F_{m+1}\right)F_m=F_{m+3}F_{m+1}+\left(-1\right)^{m+1},\end{aligned}$$

con lo que el resultado es cierto para m+1 y queda finalizada la demostración.

Para todo n≥1, $\boxed{\sum_{k=1}^{n}F_k^{\ 2}=F_nF_{n+1}}$.

Se demuestra por inducción. Este resultado es obviamente cierto para n=1, pues F_2=F_1=1, siendo ambos miembros iguales a 1. Si este resultado es cierto para n=m, entonces en virtud del resultado anterior,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m+1}F_k^{\ 2}&=F_{m+1}^{\ 2}+\sum_{k=1}^{m}F_k^{\ 2}=F_{m+2}F_m-\left(-1\right)^{m+1}+F_mF_{m+1}=\left(F_{m+2}+F_{m+1}\right)\left(F_{m+2}-F_{m+1}\right)-\left(-1\right)^{m+1}\\&=F_{m+2}^{\ 2}-F_{m+1}^{\ 2}-\left(-1\right)^{m+1}=F_{m+2}^{\ 2}-F_{m+2}F_m=F_{m+2}F_{m+1},\end{aligned}$$

con lo que el resultado es también cierto para m+1, y queda finalizada la demostración.

Para todo n≥1, $\boxed{\sum_{k=1}^{n}F_kF_{k+1}=F_{n+1}^{\ 2}-\frac{1+\left(-1\right)^n}{2}}$.

El resultado se cumple para n=1, pues entonces los dos miembros son iguales a 1. Si este resultado es cierto para n=m, entonces, en virtud de los resultados anteriores,

$$\sum_{k=1}^{m+1} F_k F_{k+1} = F_{m+2}F_{m+1} + \sum_{k=1}^{m} F_k F_{k+1} = F_{m+2}F_{m+1} + F_{m+1}{}^2 - \frac{1+(-1)^m}{2} = F_{m+3}F_{m+1} - \frac{1+(-1)^m}{2}$$
$$= F_{m+2}{}^2 - (-1)^{m+1} - \frac{1-(-1)^{m+1}}{2} = F_{m+2}{}^2 - \frac{1+(-1)^{m+1}}{2},$$

siendo por lo tanto cierto para n=m+1, lo cual concluye la demostración.

Utilizando los resultados anteriores, el sumatorio del enunciado se puede escribir como

$$\sum_{k=1}^{n} \left(2(n-k)+1\right) F_k{}^2 = 2\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{j} F_k{}^2 - \sum_{k=1}^{n} F_k{}^2 = 2\sum_{j=1}^{n} F_j F_{j+1} - F_n F_{n+1}$$
$$= 2F_{n+2}F_n + (-1)^n - 1 - F_n F_{n+1} = F_{n+2}F_n + F_n{}^2 + (-1)^n - 1$$
$$= F_{n+2}{}^2 - F_{n+2}F_{n+1} + F_{n+1}F_{n-1} - 1 = F_{n+2}{}^2 - F_{n+1}\left(F_{n+1} + F_n - F_{n-1}\right) - 1$$
$$= F_{n+2}{}^2 - 2F_{n+1}F_n - 1 = \left(F_{n+2} - 1\right)^2 - 2\left(F_{n+1}F_n - F_{n+2} + 1\right)$$
$$= \left(F_{n+2} - 1\right)^2 - 2\left(F_{n+1} - 1\right)\left(F_n - 1\right) \le \left(F_{n+2} - 1\right)^2,$$

dándose la igualdad si y sólo si F_{n+1}=1 o F_n=1, es decir, si y sólo si n=1 o 2. A partir de esta desigualdad se demuestra trivialmente la del enunciado, tomando la raíz cuadrada del primer y último miembro, y sumando 1 a ambos lados de la desigualdad resultante.

Problema 83*. *Propuesto por Alex Sierra Cárdenas, Medellín, Colombia.*
Sea ABC un triángulo isósceles con AB = AC. Sea X un punto de BC distinto de los extremos, y sean m_{AX} , m_{BX} , m_{CX} *las mediatrices de AX, BX y CX, respectivamente.*

Demostrar que la suma de las magnitudes de los dos segmentos que se determinan al cortarse m_{BX} *y* m_{CX} *con* m_{AX} *y la base BC, es igual a la magnitud de la mediana de ABC relativa a la base.*

(

En primer lugar, elegiremos un sistema de coordenadas cartesianas ortonormales, y representaremos el triángulo isósceles haciendo coincidir su base BC con el eje de abscisas y su altura relativa al vértice C con el eje de ordenadas.

Denotaremos por a la altura relativa al vértice C (que coincide con la mediana relativa a la base BC, por ser iguales los lados AB y AC) y por b la semibase BC.

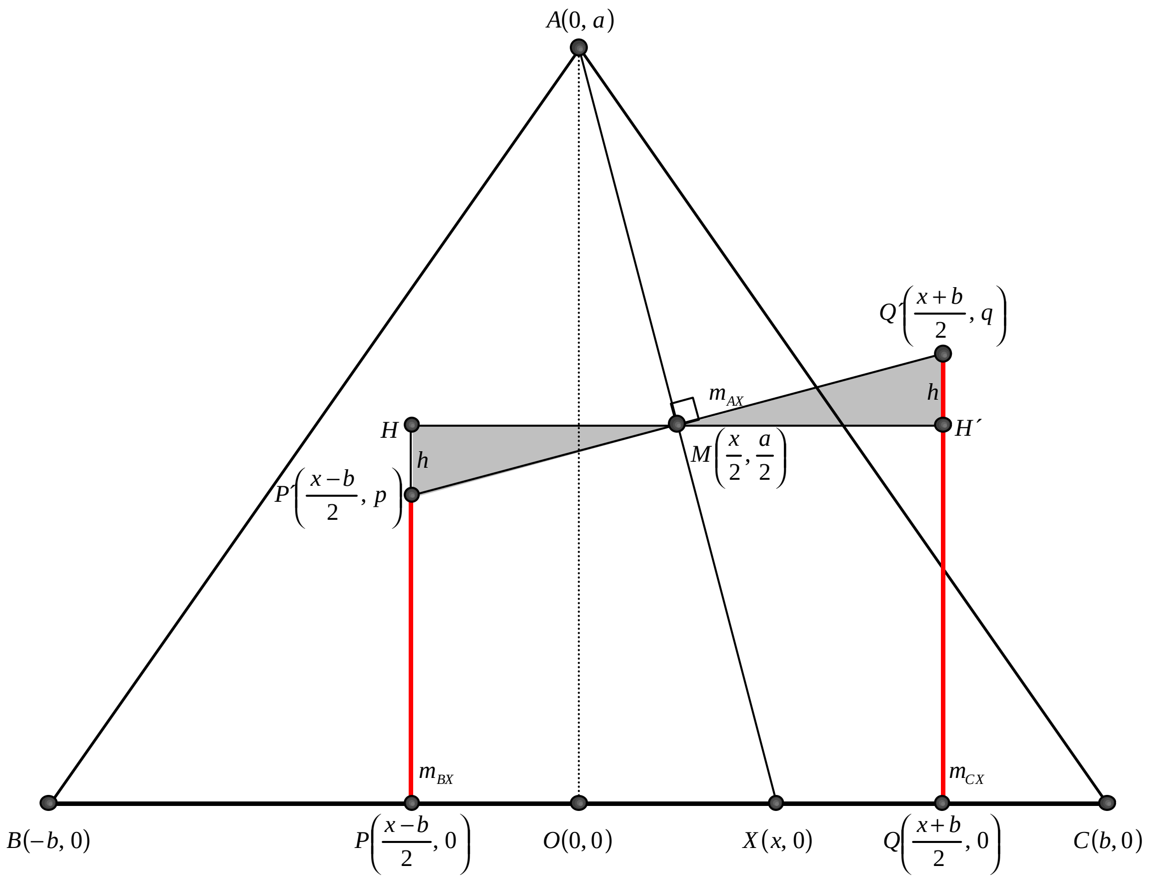
Teniendo en cuenta que las coordenadas del punto medio de un segmento son la semisuma (media aritmética) de las coordenadas de sus extremos, resulta inmediato el cálculo de las coordenadas de los puntos medios de AX, BX y CX, que hemos denotado por M, P y Q, respectivamente.

Asimismo, es inmediato comprobar que los triángulos MHP´ y $\overline{MH´Q´}$ *son iguales. En efecto, son triángulos rectángulos y tienen común el ángulo en M. Además, los catetos* $\overline{MH}$ *y* $\overline{MH´}$ *son iguales puesto que*

$$\overline{MH}=\frac{x}{2}-\frac{x-b}{2}=\frac{b}{2}=\frac{x+b}{2}-\frac{x}{2}=\overline{MH´}.$$

En consecuencia, HP´ = h = H´Q´, de donde, con referencia a la figura, se obtiene:

$$\overline{PP´}+\overline{QQ´}=p+q=(p+h)+(q-h)=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}=a=\overline{OA}.$$



Jesús Álvarez Lobo. Oviedo. Principado de Asturias. España.
Ingeniero. Profesor de Matemáticas.

Problema 83

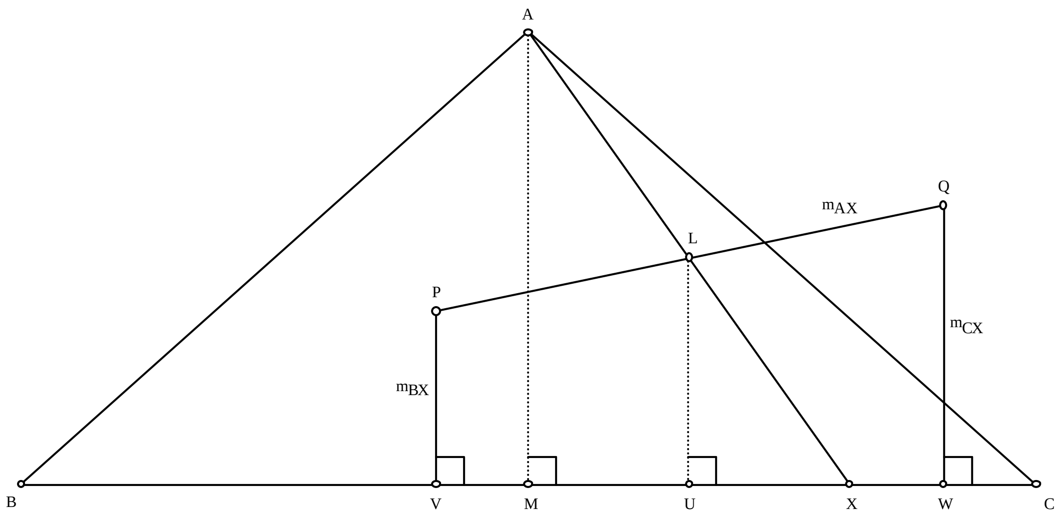
Sea ABC un triángulo isósceles con $AB = AC$. Sea X un punto de BC distinto de los extremos, y sean m_{AX}, m_{BX}, m_{CX} las mediatrices de AX, BX y CX, respectivamente. Demostrar que la suma de las magnitudes de los dos segmentos que se determinan al cortarse m_{BX} y m_{CX} con m_{AX} y la base BC, es igual a la magnitud de la mediana de ABC relativa a la base.

Solución de Miguel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca, España.

Con mayor generalidad, sea m_{AX} una recta arbitraria que biseca el segmento AX.

Sean P y Q, respectivamente, los puntos de intersección de m_{BX} y m_{CX} con m_{AX}.

Sea L el punto medio de AX y M, U, V, W los respectivos pies de las perpendiculares trazadas por A, L, P, Q sobre BC.



Al ser $AB = AC$, el punto M anteriormente definido es el punto medio de la base BC, con lo que AM es la mediana relativa a la base de ΔABC y se verifica que

$$VM = BM - BV = MC - VX = (MX + XC) - (VM + MX) = XC - VM = 2 \cdot XW - VM,$$

de donde

$$VM = XW \qquad (1)$$

El teorema de Thales, habida cuenta que $AL = LX$ y que $AM \parallel LU$, da inmediatamente

$$MU = UX \qquad (2)$$

A partir de (1) y (2),

$$VU = VM + MU = XW + UX = UW$$

de donde se sigue que LU es la paralela media del trapecio $PVWQ$ y, por consiguiente,

$$LU = \frac{PV + QW}{2} \qquad (3)$$

Por otra parte, los triángulos AMX y LUX son semejantes; por tanto,

$$AM : LU = AX : LX = 2$$

y

$$AM = 2 \cdot LU \qquad (4)$$

Finalmente, de (3) y (4),

$$\underline{AM = PV + QW}$$

y la demostración es completa.

Problema 85

(Enviado por Bruno Salgueiro Fanego; fué propuesto con el #8 en la Oposiciones a Profesores de Educación Secundaria de Galicia en 2004).

En un autobús se encuentran *n* viajeros. En la próxima parada baja cada viajero independientemente de los otros con probabilidad *p*. La probabilidad de que al autobús no suba ya un ningún nuevo viajero es p_0 y la de que suba un pasajero es 1 - p_0.

a) Hallar la probabilidad de que después de la salida del autobús de la parada se encuentren en él *n* pasajeros.
b) Hallar la probabilidad de que, después de dos paradas se encuentren nuevamente *n* pasajeros en el autobús. (Nota: en los cálculos debe tenerse en cuenta que un viajero que subió en la primera parada puede bajarse en la segunda con probabilidad *p*).

Solución

Primero vamos a ver las probabilidades que entran en juego en el problema, para después hacer una tabla con ellas, que simplificarán notablemente la resolución del problema.

<u>Pasajeros que se bajan:</u> Al ser p la probabilidad de que un pasajero se baje, y al haber n pasajeros, la probabilidad de que se bajen x pasajeros es:

$$P_{bajar}(x) = \frac{n!}{x! \cdot (n-x)!} \cdot p^x \cdot (1-p)^x$$

Para los propósitos de este problema, las probabilidades que necesitamos son:

$$P_{bajar}(0) = (1-p)^n$$

$$P_{bajar}(1) = n \cdot p \cdot (1-p)^{n-1}$$

$$P_{bajar}(2) = \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot p^2 \cdot (1-p)^{n-2}$$

<u>Pasajeros que suben:</u> Según el enunciado, es p_0 la probabilidad de que no suba nadie, y $1-p_0$ la probabilidad de que suba un pasajero.

<u>Para una parada general</u> del autobús, tenemos el siguiente cuadro resumen:

Pasajeros Antes	Pasajeros bajan	Probabilidad	Pasajeros suben	Probabilidad	Pasajeros después	Probabilidad total
n	Ninguno	$(1-p)^n$	Ninguno	p_0	n	$(1-p)^n \cdot p_0$
			1	$1-p_0$	n+1	$(1-p)^n \cdot (1-p_0)$
	1	$n \cdot p \cdot (1-p)^{n-1}$	Ninguno	p_0	n-1	$n \cdot p \cdot (1-p)^{n-1} \cdot p_0$
			1	$1-p_0$	n	$n \cdot p \cdot (1-p)^{n-1} \cdot (1-p_0)$
	2	$\frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot p^2 \cdot (1-p)^{n-2}$	Ninguno	p_0	n-2	$\frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot p^2 \cdot (1-p)^{n-2} \cdot p_0$
			1	$1-p_0$	n-1	$\frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot p^2 \cdot (1-p)^{n-2} \cdot (1-p_0)$
	3 ó más	¿?	¿?	¿?	n-2 ó menos	¿?

Ahora podemos empezar a resolver el problema.

a) Probabilidad de que después de la salida del autobús, haya n pasajeros:

Simplemente hay que sumar las probabilidades de la tabla de la página anterior, obteniendo:

$$\boxed{P_{a,n,n}=(1-p)^{n}\cdot p_{0}+n\cdot p\cdot(1-p)^{n-1}\cdot(1-p_{0})}$$

Otras resultados de interés para el segundo apartado son:

$$P_{a,n,n-1}=n\cdot p\cdot(1-p)^{n-1}\cdot p_{0}+\frac{n\cdot(n-1)}{2}\cdot p^{2}\cdot(1-p)^{n-2}\cdot(1-p_{0})$$

$$P_{a,n,n+1}=(1-p)^{n}\cdot(1-p_{0})$$

donde el primer subíndice indica que es la probabilidad del apartado a (una sola parada), el segundo subíndice indica el número de pasajeros inicial y el tercer subíndice indica el número de pasajeros final.

b) Probabilidad de que después de 2 paradas haya n pasajeros en el autobús:

Para este apartado hay que combinar astutamente los resultados de la tabla anterior. Primero vemos las posibilidades que hay. Ya que en cada parada n aumenta como mucho 1, y puede bajar hasta 0, las posibilidades son:

Antes	Después de la 1ª parada	Después de la 2ª parada
n	n+1	n
	n	
	n-1	

Por lo que habrá que sumar las probabilidades de cada una de las tres posibilidades descritas, teniendo en cuenta que para la primera y para la tercera, el número inicial de personas para la 2ª parada es n+1 y n-1 respectivamente (no n, como en el cuadro). Así, tendremos:

$$P_{b1}=P_{a,n,n+1}\cdot P_{a,n+1,n}=$$
$$=(1-p)^{n}\cdot(1-p_{0})\cdot\left[(n+1)\cdot p\cdot(1-p)^{n}\cdot p_{0}+\frac{(n+1)\cdot n}{2}\cdot p^{2}\cdot(1-p)^{n-1}\cdot(1-p_{0})\right]$$

$$P_{b2}=P_{a,n,n}\cdot P_{a,n,n}=\left[(1-p)^{n}\cdot p_0+n\cdot p\cdot(1-p)^{n-1}\cdot(1-p_0)\right]^2$$

$$P_{b3}=P_{a,n,n-1}\cdot P_{a,n-1,n}=$$

$$=\left[n\cdot p\cdot(1-p)^{n-1}\cdot p_0+\frac{n\cdot(n-1)}{2}\cdot p^2\cdot(1-p)^{n-2}\cdot(1-p_0)\right]\cdot(1-p)^{n-1}\cdot(1-p_0)$$

Con esto, la solución del apartado b) es simplemtente sumar las probabilidades de las tres opciones:

$$\boxed{P_b = P_{b1} + P_{b2} + P_{b3}}$$

PROBLEMAS 86-90

Problema 86.
Propuesto por José Luis Díaz Barrero, Barcelona, España.
Demostrar que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\sin^3 ka-\sin^3\left(\frac{\pi}{3}-ka\right)}{\sin ka+\sin\left(ka-\frac{\pi}{3}\right)}\right]$$

no depende de a y calcularlo.

Problema 87.
Propuesto por Laurentiu Modan, Bucarest, Rumania. Ligeramente modificado por el editor.
Se considera la sucesión $\{x_n\}$ definida por

$$x_n = \ln\left[\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{2^{2^{k-1}}}\right)\right].$$

i)Probar que

$$(1-2^n)\ln 2 < x_n \le 2-\frac{1}{2^{n-1}}, \quad \forall n \ge 1.$$

ii) Estudiar la convergencia de $\{x_n\}$ y, en su caso, hallar el límite.

Problema 88.
Propuesto por José Luis Díaz-Barrero, Barcelona, España.
Sea

$$f:[a,b]\to R$$

una función estrictamente positiva y continua. Probar que para cualesquiera $x_1,x_2,\cdots,x_n \in [a,b]$, existe un número $x(a \le x \le b)$ tal que

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{f^{2005}(x_k)}\right)^{1/2005} = \frac{1}{f(x)}.$$

Observación : La notación $f^{2005}(x_k)$ representa la potencia de exponente 2005 del número $f(x_k)$.

Problema 89
Propuesto por el editor; es un problema original de Lewis Carroll.
Obtener la conclusión que se deduce de las 10 premisas siguientes:
1)Los únicos animales de esta casa son gatos.
2)Todo animal al que le gusta mirar a la Luna sirve como animal de compañía.
3)Cuando aborrezco a un animal lo hago apartarse de mi camino.
4)Sólo son carnívoros los animales que merodean por la noche.
5)Todos los gatos matan ratones.
6)Los animales de esta casa son los únicos que me pueden aguantar.

7)Los canguros no sirven como animales de compañía.
8)Sólo los carnívoros matan ratones.
9)Aborrezco a los animales que no pueden aguantarme.
10)A los animales que merodean por la noche les gusta mirar a la luna.

Problema 90

Propuesto por el editor.

Por un punto P, interior a un triángulo dado ABC, se trazan paralelas a los tres lados del mismo, formándose así tres paralelogramos y tres triángulos. ¿Para qué punto P es mínima la suma de las áreas de los tres triángulos?

Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática
OEI
ISSN 1698-677X
Número 18--Divertimentos

Último número
Presentación
Números anteriores
Contactar
Suscripción gratuita

Profesor y antiprofesor

En *Twenty years before the blackboard(AMM1998),* Michael Stueben recopila anécdotas y vivencias de sus años como Profesor de Matemáticas. De este libro entresacamos las propiedades del Profesor y del que llama Antiprofesor:

El Profesor	El Antiprofesor
Preocupado	**Ambiguo**
Que Ayuda	**Ignora al estudiante**
Respetuoso	**Desdeñoso**
Comprensivo	**Sarcástico**
Amistoso	**Distante**
Premia	**Castiga**
Escucha	**Sermonea**
Provoca empatía	**Es crítico**
Tiene sentido del humor	**Enfadado**
Sabe perdonar	**Inculpa**
Motivador	**Repetitivo**

Revista Escolar
de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática
OEI
ISSN 1698-677X
Número 18-Páginas web

Página web del Profesor Rodríguez Chamache (Perú)

www.geometriainteractiva.com

Esta página, recientemente aparecida, está relacionada con el Proyecto Geometría interactiva, del Prof. William Rodríguez Chamache. Éste justifica su proyecto con el fin de contribuir a mejorar el rendimiento matemático de los estudiantes peruanos; encomiable propósito al que, creo, todos debemos colaborar. Uno de los enlaces es con la nueva *Revista Latinoamericana de Geometría,* cuyo primer número (Febrero 2005) acaba de ser colgado en la red.

La página es, como hemos dicho, muy reciente, y seguramente los enlaces irán aumentando en un próximo futuro. Como editor de la *Revista Escolar de la OIM* quiero dar la bienvenida a esta página web y nueva revista digital, ofreciéndole apoyo y colaboración.

Valladolid, marzo 2005.
Francisco Bellot Rosado

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

Número

19

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática
Número 19 (Mayo - Junio 2005)
ISSN – 1698-277X

Índice

*(1ªNota del editor)*El editor pide disculpas al Prof. Floro damián Aranda Ballesteros, de Córdoba, España, por haber omitido involuntariamente su nombre de la relación de lectores que resolvieron el problema número 83, publicado en la Revista número 17.

(2ª Nota del editor) El Prof. José Manuel Aroca, de la Universidad de Valladolid, indica que en el enunciado del problema 81 la condición de ser paralelogramo el cuadrilátero OMNP es innecesaria, y que el resultado se deduce de una aplicación del teorema de Pappus en ambos hexágonos.

Problema 86 : Recibidas soluciones de : J. Álvarez Lobo, Oviedo, España; F.D. Aranda Ballesteros, Córdoba, España; D.Lasaosa Medarde, Pamplona, España; B.Salgueiro Fanego, Vivero, Lugo, España; y V. Vicario García, Huelva, España.
Presentamos la solución de Lasaosa.

Problema 87 : Recibidas soluciones de D.Lasaosa Medarde, Pamplona, España; y B. Salgueiro Fanego, Vivero, Lugo, España.
Presentamos la solución de Lasaosa.

Problema 88 : Recibidas soluciones de : J. Álvarez Lobo, Oviedo, España; D.Lasaosa Medarde, Pamplona, España; y B. Salgueiro Fanego, Vivero, Lugo, España.
Presentamos la solución de Lasaosa.

Problema 89 : Recibidas soluciones de : D. Aranda Ballesteros, Córdoba, España; W. Roberto Rodríguez Valcarce, La Habana, Cuba; y B. Salgueiro Fanego, Vivero, Lugo, España.
Presentamos la solución de Salgueiro.

Problema 90 : Recibidas soluciones de : J. Álvarez Lobo, Oviedo, España; M. Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca, España; D. Aranda Ballesteros, Córdoba, España; F.Evelio Gotti Peña, La Habana, Cuba; D. Lasaosa Medarde, Pamplona, España; y B. Salgueiro Fanego, Vivero, Lugo, España.
Presentamos la solución de Lasaosa.

Problemas propuestos 91 – 95

Divertimentos matemáticos 19

Algunas citas

Comentario de páginas web

ICMI Study 16: Challenging mathematics in and beyond the classroom

Presentación del Prof. Julio Castiñeira Merino, por el Editor

El Profesor D. Julio Castiñeira Merino es Catedrático de Matemáticas del Instituto "Marqués de Lozoya", de Cuéllar (Segovia, España), desde hace largos años. Es, también, uno de los escasos nombres españoles que publican artículos en revistas como el *Mathematics Magazine* o, más recientemente, el *College Mathematics Journal,* ambos publicados por la prestigiosa *Mathematics Association of America.*
En esta ocasión ha accedido amablemente a escribir para la *Revista Escolar de la OIM* el trabajo que presentamos a continuación, titulado *Fórmulas de ángulo múltiple.* El lector observará en seguida que su artículo, muy extenso, es bastante más que eso. Es una versión ampliada del artículo del *College* que cita en la Bibliografía, y que, como Editor de la Revista, le agradezco muy sinceramente que lo ponga a la consideración de todos nuestros lectores.

Valladolid, Mayo de 2005.
Francisco Bellot

Formulas de Angulo Múltiple

Julio Castiñeira Merino
jcastine@boj.cnice.mecd.es

A la memoria de mis padres: Julio y Ángeles

Este trabajo explica algunas de las propiedades de las fórmulas de ángulo múltiple. En primer lugar expresaremos de forma concisa las fórmulas de ángulo múltiple de las funciones trigonométricas e hiperbólicas. Posteriormente utilizaremos estas fórmulas en algunas temas de trigonometría, álgebra y en geometría.

Para la función coseno, las fórmulas de ángulo múltiple se pueden expresar usando los polinomios de Chebyshev **[1], [6].** Estos polinomios están definidos por la relación de recurrencia

$$\begin{cases} T_0(x)=1, \qquad T_1(x)=x \\ T_n(x)=2x\cdot T_{n-1}(x)-T_{n-2}(x), \quad n\geq 2 \end{cases}.$$

Los ocho primeros polinomios con sus correspondientes fórmulas de ángulo múltiple son:

Polinomio	Fórmula
$T_0(x)=1$	$\cos 0\cdot a=1$
$T_1(x)=x$	$\cos 1\cdot a=\cos a$
$T_2(x)=2x^2-1$	$\cos 2\cdot a=2\cos^2-1$
$T_3(x)=4x^3-3x$	$\cos 3a=4\cos^3 a\cdot -3\cos a$
$T_4(x)=8x^4-8x^2+1$	$\cos 4a=8\cos^4 a-\cos^2 a+1$
$T_5(x)=16x^5-20x^3+5x$	$\cos 5a=16\cos^5 a-20\cos^3 a+5\cos a$
$T_6(x)=32x^6-48x^4+18x^2-1$	$\cos 6a=32\cos^6 a-48\cos^4 a+18\cos^2 a-1$
$T_7(x)=64x^7-112x^5+56x^3-7x$	$\cos 7a=64\cos^7 a-112\cos^5 a+56\cos^3 a-7\cos a$

Observamos que los polinomios de Chebyshev cumplen la propiedad

$$\cos na=T_n(\cos a).$$

Demostración

Por inducción sobre *n*.

Para los valores iniciales $n=0$ y $n=1$ tenemos:

$$\cos 0a=1=T_0(\cos a),$$
$$\cos 1a=\cos a=T_1(\cos a)$$

Supongamos que la fórmula es cierta para todo valor de k < n,

Aplicando la fórmula de la diferencia de cosenos

$$\cos na-\cos(n-2)a=2\cos(n-1)a\cdot\cos a$$

es decir

$$\cos na=2\cos a\cdot\cos(n-1)a-\cos(n-2)a$$

por hipótesis de inducción sabemos que

$$\cos(n-1)a=T_{n-1}(\cos a) \quad y \quad \cos(n-2)a=T_{n-2}(\cos a)$$

Luego

$$\cos na=2\cos a\cdot T_{n-1}(\cos a)-T_{n-2}(\cos a)$$

Sustituyendo $x = cos\,a$ en la fórmula de recurrencia $T_n(x) = 2x \cdot T_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$ tenemos que

$$T_n(cos\,a) = 2\,cos\,a \cdot T_{n-1}(cos\,a) - T_{n-2}(cos\,a),$$

por tanto

$$cos\,na = T_n(cos\,a).$$

Observemos que la fórmula anterior también se verifica para valores complejos del argumento, puesto que la fórmula de la diferencia de cosenos es cierta para argumento complejo. Una consecuencia de este hecho es que la fórmula de argumento múltiple para el coseno hiperbólico es

$$Ch\,na = T_n(Ch\,a)$$

En efecto

$$Ch\,na = cos\;ina = T_n(cos\,ia) = T_n(Ch\,a).$$

Una propiedad que será utilizada posteriormente es

$$T_n(sen\,a) = \begin{cases} (-1)^{(n-1)/2} \cdot sen\;na & n\;impar \\ (-1)^{n/2} \cdot cos\,na & n\;par \end{cases}$$

Demostración

En efecto

$$T_n(sen\,a) = T_n\left(cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\right) = cos\left[n \cdot \left(\frac{\pi}{2} - a\right)\right] = cos\left(\frac{n\pi}{2} - na\right),$$

como

$$cos\left(\frac{n\pi}{2} - na\right) = cos\frac{n\pi}{2}cos\,na + sen\frac{n\pi}{2}sen\,na = \begin{cases} (-1)^{(n-1)/2} \cdot sen\,na, & n\;impar \\ (-1)^{n/2} \cdot cos\,na, & n\;par \end{cases},$$

la igualdad queda demostrada.

Ejercicios

1. Demostrar que el polinomio de Chebyshev tiene grado *n* y tiene *n* raíces simples.
2. Demostrar que el polinomio de Chebyshev de grado *n* es una función par si *n* es par y es una función impar si *n* es impar.
3.-Demostrar la propiedad transitiva de los polinomios de Chebyshev

$$T_n(T_m(x)) = T_{n \cdot m}(x).$$

Fórmulas para la función seno

Derivando la formula $cos\,na = T_n(cos\,a)$ podemos obtener una fórmula de ángulo múltiple para la función seno. En efecto

$$-n \cdot sen\,na = T_n'(cos\,a) \cdot (-sen\,a)$$

Es decir

$$sen\,na = sen\,a \cdot \frac{T_n'(cos\,a)}{n}$$

Al polinomio $U_n(x) = \cdot\frac{T_{n+1}'(x)}{n+1}$, se le llama polinomio de Chebyshev de segunda clase de grado *n* **[6]**. Usando estos polinomios la fórmula de ángulo múltiple de la función seno se expresa

$$sen\,na = sen\,a \cdot U_{n-1}(cos\,a).$$

Análogamente para el seno hiperbólico tenemos la fórmula

$$Sh\,na = Sh\,a \cdot U_{n-1}(Ch\,a)$$

que se deduce derivando la fórmula de argumento múltiple para el coseno hiperbólico.

Los siete primeros polinomios de Chebyshev de segunda clase con sus correspondientes fórmulas de ángulo múltiple son:

Polinomio	Fórmula
$U_0(x)=1$	$sen\ 1a = sena$
$U_1(x)=2x$	$sen\ 2a = 2sen\,a \cdot cos\,a$
$U_2(x)=4x^2-1$	$sen\ 3a = sen\,a \cdot \left(4cos^2\,a-1\right)$
$U_3(x)=8x^3-4x$	$sen\ 4a = sen\,a \cdot \left(8cos^3\,a-4cos\,a\right)$
$U_4(x)=16x^4-12x^2+1$	$sen\ 5a = sen\,a \cdot \left(16cos^4\,a-12cos^2\,a+1\right)$
$U_5(x)=32x^5-32x^3+6x$	$sen\ 6a = sen\,a \cdot \left(32cos^5\,a-32cos^3\,a+6cos\,a\right)$
$U_6(x)=64x^6-80x^4+24x^2-1$	$sen\ 6a = sen\,a \cdot \left(64cos^6\,a-80cos^4\,a+24cos^2\,a-1\right)$

Ejercicio 4. Demostrar que el polinomio de Chebyshev de segunda clase de grado n es una función par si n es par y es una función impar si n es impar.

Una fórmula que expresa $sen\,na$ en función de $sen\,a$ es

$$sen\,na = \begin{cases} (-1)^{(n-1)/2} \cdot T_n(sen\,a), & n\ impar \\ (-1)^{n/2-1} \cdot cos\,a \cdot U_{n-1}(sen\,a), & n\ par \end{cases}$$

Demostración

Si n es impar basta despejar el seno en la formula $T_n(sen\,a) = (-1)^{(n-1)/2} \cdot sen\ na$.

Si n par es par tenemos que

$$T_n(sen\,a) = (-1)^{n/2} \cdot cos\,na\ ,$$

derivando

$$T_n'(sen\,a)\cdot cos\,a = (-1)^{n/2} \cdot (-sen\,na)\cdot n,$$

Despejando el seno del ángulo múltiple

$$sen\,na = (-1)^{n/2-1} \cdot cos\,a \cdot \frac{T_n'(sen\,a)}{n} = (-1)^{n/2-1} \cdot cos\,a \cdot U_{n-1}(sen\,a).$$

Los polinomios de Chebyshev de primera y segunda clase están relacionados por la fórmula

$$T_n(x) = U_n(x) - xU_{n-1}(x)$$

En efecto

$$sen(n+1)a = sen\,na \cdot cos\,a + cos\,na \cdot sen\,a$$

Por tanto

$$sena \cdot U_n(cos\,a) = sena \cdot U_{n-1}(cos\,a)\cdot cos\,a + T_n(cos\,a)\cdot sen\,a$$

dividiendo por $sen\,a$

$$U_n(cos\,a) = U_{n-1}(cos\,a)\cdot cos\,a + T_n(cos\,a)$$

sustituyendo $cos\,a$ por x y despejando T_n obtenemos

$$T_n(x) = U_n(x) - xU_{n-1}(x).$$

Los polinomios de Chebyshev de segunda clase satisfacen la siguiente relación

$$\begin{cases} U_0(x)=1, \quad U_1(x)=2x & , \\ U_n(x) = 2x \cdot U_{n-1}(x) - U_{n-2}(x) & n \geq 2 \end{cases}$$

Demostración

Es claro que

$$U_0(x) = \frac{1}{1} \cdot \frac{d}{dx} T_1(x) = 1$$
$$U_1(x) = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} T_2(x) = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left(2x^2 - 1\right) = 2x,$$
Veamos que satisfacen la relación de recurrencia.
Derivando la relación
$$T_n(x) = 2x \cdot T_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$$
obtenemos
$$T_n'(x) = 2 \cdot T_{n-1}(x) + 2x \cdot T_{n-1}'(x) - T_{n-2}'(x)$$

Sustituyendo
$$nU_{n-1}(x) = 2 \cdot \left(U_{n-1}(x) - xU_{n-2}(x)\right) + 2x \cdot (n-1)U_{n-2}(x) - (n-2)U_{n-3}(x)$$

Operando
$$(n-2)U_{n-1}(x) = 2 \cdot x \cdot (n-2) \cdot U_{n-2}(x) - (n-2) \cdot U_{n-3}(x)$$
Dividiendo por $n-2$ obtenemos $U_{n-1}(x) = 2 \cdot xU_{n-2}(x) - U_{n-3}(x)$
Por tanto
$$U_n(x) = 2 \cdot xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x).$$

Las fórmulas de recurrencia anteriores son interesantes desde el punto de vista teórico y permiten hallar los polinomios de Chebyshev para valores pequeños de *n*. Pero para valores moderados de n son completamente inútiles. Por fortuna disponemos de las siguientes fórmulas explicitas de los polinomios de Chebyshev de primera y de segunda clase para *n* mayor que cero.
$$T_n(x) = \frac{n}{2} \sum_{k=0}^{n/2} \frac{(-1)^k}{n-k} \binom{n-k}{k} (2x)^{n-2k}$$
y
$$U_n(x) = \sum_{k=0}^{n/2} (-1)^k \binom{n-k}{k} (2x)^{n-2k}$$

Estas fórmulas se pueden demostrar por inducción. Demostraremos la fórmula para los polinomios de Chebyshev de segunda clase y dejaremos la otra fórmula al lector.

Demostración

Para $n = 1$ y $n = 2$ se cumplen. En efecto
$$U_1(x) = (-1)^0 \cdot \binom{1}{0} (2x)^{1-0} = 2x$$
$$U_2(x) = (-1)^0 \cdot \binom{2}{0} (2x)^{2-0} + (-1)^1 \cdot \binom{1}{1} (2x)^{2-2} = 4x^2 - 1$$
Demostremos que si se cumple para $k < n$ entonces se cumple para n:
Sabemos que
$$U_n(x) = 2 \cdot xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x)$$
usando la hipótesis de inducción podemos afirmar que
$$U_n(x) = 2 \cdot x \cdot \sum_{k=0}^{(n-1)/2} (-1)^k \binom{n-1-k}{k} (2x)^{n-1-2k} - \sum_{k=0}^{(n-2)/2} (-1)^k \binom{n-2-k}{k} (2x)^{n-2-2k},$$
operando y renombrando el índice del segundo sumatorio
$$U_n(x) = \sum_{k=0}^{(n-1)/2} (-1)^k \binom{n-1-k}{k} (2x)^{n-2k} + \sum_{j=0}^{(n-2)/2} (-1)^{j+1} \binom{n-2-j}{j} (2x)^{n-2-2j},$$
haciendo el cambio de índices $k = j + 1$ en el segundo sumatorio

$$U_n(x)=\sum_{k=0}^{(n-1)/2}(-1)^k\binom{n-(k+1)}{k}(2x)^{n-2k}+\sum_{k=1}^{n/2}(-1)^k\binom{n-(k+1)}{k-1}(2x)^{n-2k}.$$

Tenemos dos casos. Si n es impar

$$U_n(x)=(2x)^n+\sum_{k=1}^{n/2}(-1)^k\left[\binom{n-(k+1)}{k}+\binom{n-(k+1)}{k-1}\right](2x)^{n-2k},$$

luego la propiedad de los números combinatorios

$$U_n(x)=(2x)^n+\sum_{k=1}^{n/2}(-1)^k\cdot\binom{n-k}{k}\cdot(2x)^{n-2k}=\sum_{k=0}^{n/2}(-1)^k\cdot\binom{n-k}{k}\cdot(2x)^{n-2k}.$$

Si n es par

$$U_n(x)=(2x)^n+\sum_{k=1}^{n/2-1}(-1)^k\left[\binom{n-(k+1)}{k}+\binom{n-(k+1)}{k-1}\right](2x)^{n-2k}+(2x)^{n/2},$$

luego también en este caso

$$U_n(x)=\sum_{k=0}^{n/2}(-1)^k\cdot\binom{n-k}{k}\cdot(2x)^{n-2k}.$$

Ejercicio 5-Demostrar las fórmulas

$$T_n(x)=\sum_{k=0}^{n/2}\binom{n}{2k}\cdot x^{n-2k}\cdot\left(x^2-1\right)^k$$

y

$$U_n(x)=\sum_{k=0}^{n/2}\binom{n+1}{2k+1}\cdot x^{n-2k}\cdot\left(x^2-1\right)^k.$$

Fórmulas para la función tangente

Es sobradamente conocida la fórmula de la tangente del ángulo doble

$$tan\,2a=\frac{2\,tan\,a}{1-tan^2\,a}$$

pero está poco difundida la fórmula de la tangente del ángulo múltiple a pesar de su simplicidad **[4].** En efecto

$$tan\,na=\frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{(n-1)/2}(-1)^k\cdot\binom{n}{2k+1}\cdot tan^{2k+1}\,a}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n/2}(-1)^k\cdot\binom{n}{2k}\cdot tan^{2k}\,a}$$

la fórmula se demuestra fácilmente por inducción usando la fórmula de la tangente de una suma de ángulos.

Ilustremos la sencillez de la fórmula con un ejemplo, la expresión de la $tan\,5x$.

En primer lugar calculamos los términos de la quinta fila del triángulo de Tartaglia. Estos términos son

1, 5, 10, 10, 5, 1

después construimos los polinomios

$$1-10t^2+5t^4 \text{ y } 5t-10t^3+t^5$$

tomando los términos de dos en dos y alternando los signos. Entonces

$$tan\,5x = \frac{5t - 10t^3 + t^5}{1 - 10t^2 + 5t^4} \text{ con } t = tan\,x\,.$$

Las funciones racionales

$$R_n(t) = \frac{\sum_{k=0}^{(n-1)/2} (-1)^k \cdot \binom{n}{2k+1} \cdot t^{2k+1}}{\sum_{k=0}^{n/2} (-1)^k \cdot \binom{n}{2k} \cdot t^{2k}}$$

no reciben un nombre especial. Gozan al igual que los polinomios de Chebyshev de primera clase de la propiedad transitiva

$$R_n(R_m(t)) = R_{n \cdot m}(t)\,.$$

Para la función tangente hiperbólica se cumple la fórmula

$$Th\,na = \frac{\sum_{k=0}^{(n-1)/2} \binom{n}{2k+1} \cdot Th^{2k+1} a}{\sum_{k=0}^{n/2} \binom{n}{2k} \cdot Th^{2k} a}\,.$$

Por ejemplo

$$Th\,6a = \frac{6 \cdot Th\,a + 20 \cdot Th^3 a + 6 \cdot Th^5 a}{1 + 15 \cdot Th^2 a + 15 \cdot Th^4 a + Th^6 a}\,.$$

Las funciones racionales

$$S_n(t) = \frac{\sum_{k=0}^{(n-1)/2} \binom{n}{2k+1} \cdot t^{2k+1}}{\sum_{k=0}^{n/2} \binom{n}{2k} \cdot t^{2k}}$$

al igual que las funciones $R_n(t)$ tampoco reciben un nombre especial, gozando al igual que ellas de la propiedad transitiva

$$S_n(S_m(t)) = S_{n \cdot m}(t)\,.$$

Cálculo algebraico de las razones trigonométricas

Las funciones de ángulo múltiple permiten calcular las razones trigonométricas de muchos ángulos de forma puramente algebraica. Veamos algunos ejemplos

1) Razones trigonométrica de $\pi / 5$

Podemos calcular el coseno de $\pi/5$ radianes usando el polinomio de Chebishev de quinto grado. Para ello resolvamos la ecuación $T_5\left(\frac{x}{2}\right)+1=0$ de dos maneras. La primera de forma algebraica y la segunda utilizando las propiedades de las funciones trigonométricas.

$$T_5\left(\frac{x}{2}\right)+1=0 \Leftrightarrow x^5-5x^3+5x+2=0$$

Factorizando el polinomio

$$x^5-5x^3+5x+2=(x+2)\left(x^4-2x^3-x^2+2x+1\right)$$

luego

$$x+2=0 \quad ó \quad x^4-2x^3-x^2+2x+1=0$$

la segunda ecuación es una ecuación recíproca. Haciendo el cambio $w=x-\frac{1}{x}$ queda

$$w^2-2w-1=0 \Rightarrow w=1$$

Por tanto

$$x-\frac{1}{x}=1 \Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

observemos que por ser $w=1$ una raíz doble también son raíces dobles $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Las raíces de la ecuación dada ordenadas de menor a mayor son

$$x_1=-2,\ x_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2},\ x_3=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Resolvamos ahora la ecuación utilizando las propiedades trigonométricas

$$T_5\left(\frac{x}{2}\right)+1=0$$

Haciendo $\frac{x}{2}=cos\,\alpha$ tenemos $cos\,5\alpha=-1 \Rightarrow \alpha=\frac{\pi}{5}+k\frac{2\pi}{5} \quad k=0,1,..,4$

Las soluciones de la ecuación son

$$2\cdot cos\frac{\pi}{5},\ 2\cdot cos\frac{3\pi}{5},\ 2\cdot cos\frac{5\pi}{5},\ 2\cdot cos\frac{7\pi}{5},\ 2\cdot cos\frac{9\pi}{5}$$

Teniendo en cuenta que

$$cos\frac{\pi}{5}=cos\frac{9\pi}{5} \quad y \quad cos\frac{3\pi}{5}=cos\frac{7\pi}{5}$$

las raíces ordenadas de la ecuación son

$$x_1=-2,\ x_2=2\cdot cos\frac{3\pi}{5},\ x_3=2\cdot cos\frac{\pi}{5}$$

Por tanto

$$cos\frac{\pi}{5}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}=\frac{\Phi}{2} \quad y \quad cos\frac{3\pi}{5}=\frac{1-\sqrt{5}}{4}=\frac{-1}{2\cdot\Phi}$$

donde Φ es la razón áurea.

Análogamente resolviendo la ecuación $T_5\left(\frac{x}{2}\right)-1=0$ obtenemos los valores

$$cos\frac{2\pi}{5}=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}=\frac{1}{2\cdot\Phi} \quad y \quad cos\frac{4\pi}{5}=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}=\frac{-\Phi}{2}.$$

Los valores del seno de $\pi/5$ radianes se pueden obtener análogamente resolviendo la ecuación :

$$T_5(x)=0 \Leftrightarrow 16x^5-20x^3+5x=0,$$

y observando que $sen\,5a=T_5(sen\,a)$.

Efectuando los cálculos obtenemos

$$x_1=sen\frac{\pi}{5}=\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}} \quad y \quad x_2=sen\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

las otras raíces son $x_3=-sen\frac{\pi}{5}$, $\quad x_4=-sen\frac{2\pi}{5}$, $y\ x_5=0$.

Observemos que la ecuación $T_5(x)=0$ y la fórmula $cos\,5a=T_5(cos\,a)$ nos proporcionan los valores

$$cos\frac{\pi}{10}=\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}} \quad y \quad cos\frac{3\pi}{10}=\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}.$$

Podemos usar la fórmula

$$tan\,5x=\frac{5\,tan\,x-10\,tan^3\,x+tan^5\,x}{1-10\,tan^2\,x+5\,tan\,x^4}$$

para calcular la tangente de $\pi/5$ radianes.

En efecto $tan\,5x=0 \Rightarrow x=\frac{k\pi}{5}$, $\quad k\in Z$; luego las raíces de la ecuación

$$5t-10t^3+t^5=0$$

ordenadas de menor a mayor son

$$tan\frac{-2\pi}{5},tan\frac{-\pi}{5},tan\,0,tan\frac{\pi}{5},tan\frac{2\pi}{5}.$$

Calculando las raíces por métodos algebraicos tenemos

$$5t-10t^3+t^5=0 \Rightarrow t=0 \quad ó \quad t^4-10t^2+5=0,$$

resolviendo la ecuación bicuadrada se obtienen las raíces

$$-\sqrt{5+2\sqrt{5}},-\sqrt{5-2\sqrt{5}},\sqrt{5-2\sqrt{5}},\sqrt{5+2\sqrt{5}},$$

Por tanto

$$tan\frac{\pi}{5}=\sqrt{5-2\sqrt{5}} \text{ y } tan\frac{2\pi}{5}=\sqrt{5+2\sqrt{5}}.$$

2) Calculo del coseno de $\frac{2\pi}{7}$ radianes

La ecuación $\frac{T_7(x)}{x}=0 \Leftrightarrow 64x^6-112x^4+56x^2-7=0$ tiene por raíces

$$x_k=sen\frac{\pi}{7}k \quad k=1,2,...,6.$$

Si en esta ecuación hacemos el cambio $y=2x^2-1$ obtenemos la ecuación $-8y^3-4y^2+4y+1=0$ cuyas raíces son

$$y_1=cos\frac{2\pi}{7},y_2=cos\frac{4\pi}{7},y_3=cos\frac{6\pi}{7},$$

cambiando el signo y haciendo el cambio de variable $z=\frac{y}{2}$ obtenemos la ecuación $z^3+z^2-2z-1=0$, cuyas raíces son

$$z_1=2cos\frac{2\pi}{7}, z_2=2cos\frac{4\pi}{7}, z_3=2cos\frac{6\pi}{7}.$$

Resolvamos esta ecuación usando las formulas de Cardano
Obtenemos

$$cos\frac{2\pi}{7}=\frac{1}{12}\left[-2+\sqrt[3]{28+84\sqrt{3}\cdot i}+\sqrt[3]{28-84\sqrt{3}\cdot i}\right]\cong 0.6234898$$

$$cos\frac{4\pi}{7}=\frac{-1}{24}\left[4+\left(1+\sqrt{3}\cdot i\right)\sqrt[3]{28+84\sqrt{3}\cdot i}+\left(1-\sqrt{3}\cdot i\right)\sqrt[3]{28-84\sqrt{3}\cdot i}\right]\cong -0.22252$$

$$cos\frac{6\pi}{7}=\frac{-1}{24}\left[-2+\left(1-\sqrt{3}\cdot i\right)\sqrt[3]{28+84\sqrt{3}\cdot i}+\left(1+\sqrt{3}\cdot i\right)\sqrt[3]{28-84\sqrt{3}\cdot i}\right]\cong -0.9001$$

Donde la raíz cúbica compleja se calcula en la rama principal

Ejercicio 6 Si p es primo impar las raíces del polinomio

$$W_p(x)=p\cdot\sum_{k=0}^{(p-1)/2}\frac{(-1)^k}{p-k}\binom{p-k}{k}x^{p-1-2k}$$

son

$$x=\pm 2\cdot sen\frac{\pi}{p}k \quad k=1,2,...,\frac{p-1}{2}$$

La Ecuación de Adriaen Van Roomen

En su obra *Ideae mathematicae* el matemático flamenco Adriaen Van Roomen, también conocido por su nombre latino Adrianus Romanus, propuso a los matemáticos del mundo el reto de resolver la ecuación de grado 45 siguiente:

$$\begin{aligned}
&x^{45}-45\cdot x^{43}+945\cdot x^{41}-12300\cdot x^{39}+111150\cdot x^{37}-740259\cdot x^{35}+\\
&+3764565\cdot x^{33}-14945040\cdot x^{31}+46955700\cdot x^{29}-117679100\cdot x^{27}+\\
&+236030652\cdot x^{25}-378658800\cdot x^{23}+483841800\cdot x^{21}-488494125\cdot x^{19}+\\
&+384942375\cdot x^{17}-232676280\cdot x^{15}+105306075\cdot x^{13}-34512075\cdot x^{11}+\\
&+7811375\cdot x^{9}-1138500\cdot x^{7}+95634\cdot x^{5}-3795\cdot x^{3}+45\cdot x=c
\end{aligned}$$

El problema fue resuelto por Vieta **[2]** dos años más tarde en su trabajo *Responsum* quien, con otro lenguaje y notación al usado por nosotros, se dió cuenta que la ecuación de Van Rooemen es en realidad la ecuación

$$2\cdot T_{45}\left(\frac{x}{2}\right)=c.$$

Resolvamos la ecuación de Van Roomen. Haciendo $x=2sen\,\phi$ tenemos

$$sen\ 45\phi=\frac{c}{2}$$

y por tanto $x=2\cdot sin\left(\theta^\circ+k\cdot 8^\circ\right)$ $k=0,1,...,44$; siendo $\theta=arc\ sin\left(\frac{c}{2}\right)$.

¿Cómo llegó Vieta a darse cuenta de este hecho? Vieta conocía perfectamente la solución de la ecuación

$$z^3 - 3z = c \Leftrightarrow 2 \cdot T_3\left(\frac{z}{2}\right) = c$$

Haciendo el cambio de variable

$$z = 2 \cdot T_3\left(\frac{y}{2}\right) \Leftrightarrow z = y^3 - 3y\,,$$

podía también resolver la ecuación

$$y^9 - 9y^7 + 27y^5 - 30y^3 + 9y = c\,,$$

que escrita en término de los polinomios de Chebyshev es

$$2 \cdot T_3\left(T_3\left(\frac{y}{2}\right)\right) = c \Leftrightarrow 2 \cdot T_9\left(\frac{y}{2}\right) = c\,.$$

Si en la ecuación anterior hacemos el cambio de variable

$$y = 2 \cdot T_5\left(\frac{x}{2}\right) \Leftrightarrow y = x^5 - 5x^3 + 5x$$

obtenemos la ecuación

$$2 \cdot T_3\left(T_3\left(T_5\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right) = c \Leftrightarrow 2 \cdot T_{45}\left(\frac{x}{2}\right) = c$$

que es la ecuación de Van Roomen.

Curvas en Polares

La ecuación polar de muchas curvas se expresa por medio de funciones trigonométricas. Los polinomios de Chebyshev de primeray de segunda clase son útiles para calcular la ecuación cartesiana de la curva.

Ilustraremos la técnica del paso de la ecuación polar a la cartesiana con dos ejemplos muy sencillos: la lemniscata de Bernoulli y la cúbica de Tschirnhausen. Posteriormente aplicaremos esta técnica a las Rosas, Curvas Botánicas, Arañas y Curvas Nodales. Las definiciones de estas curvas pueden encontrarse en **[6]** y **[5].**

La Lemniscata de Bernoulli

La lemniscata de Bernoulli tiene la ecuación polar

$$r^2 = a^2 \cdot cos\, 2\theta$$

Para obtener la ecuación implícita observemos que

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad y \quad cos\,\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Luego

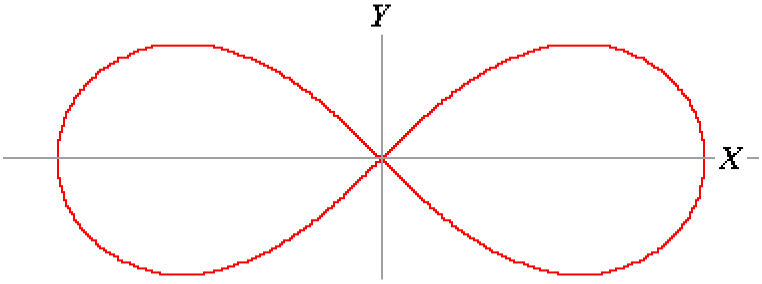
$$x^2 + y^2 = a^2 T_2\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

Es decir

$$x^2 + y^2 = a^2 \cdot \left[2 \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 - 1\right]^2$$

Operando

$$\left(x^2 + y^2\right)^2 = a^2 \cdot \left(x^2 - y^2\right).$$



Lemniscata de Bernoulli

La Cúbica de Tschirnhausen

Su ecuación polar es

$$r = a \cdot sec^3 \frac{\theta}{3}$$

Por tanto

$$cos \frac{\theta}{3} = \sqrt[3]{\frac{a}{3}}$$

Luego

$$T_3\left(cos \frac{\theta}{3}\right) = T_3\left(\sqrt[3]{\frac{a}{3}}\right)$$

es decir

$$\cos\frac{\theta}{3} = 4\frac{a}{r} - 3\cdot\sqrt[3]{\frac{a}{r}}$$

Sustituyendo

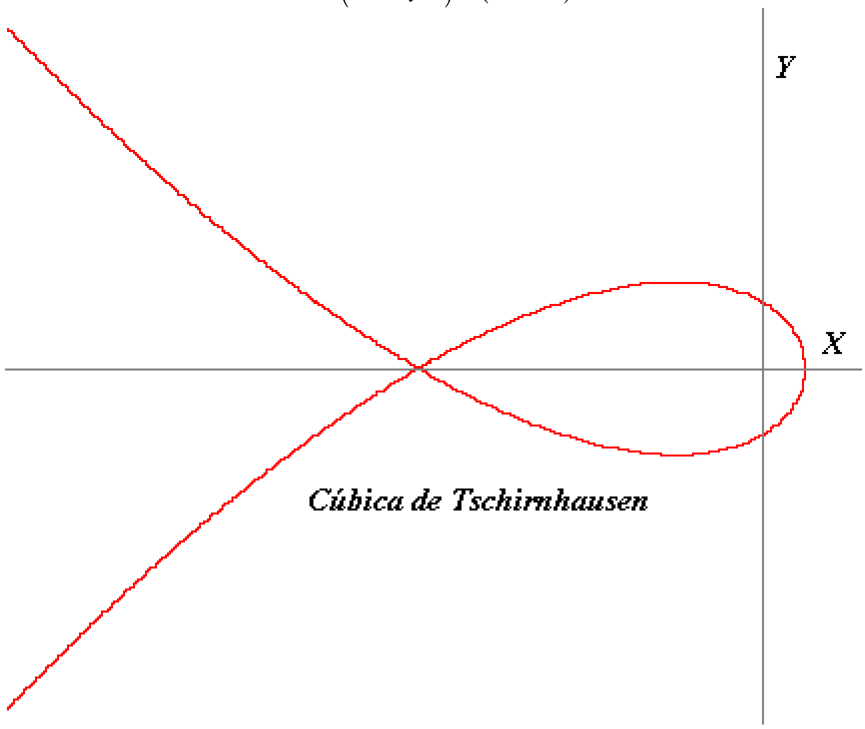
$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{4a}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{3\cdot\sqrt[3]{a}}{\sqrt[6]{x^2+y^2}}$$

Operando

$$x = 4a - 3\cdot\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{x^2+y^2}$$

Despejando las raíces y elevando al cubo

$$27a\cdot\left(x^2+y^2\right) = (4a-x)^3 .$$



Rosas

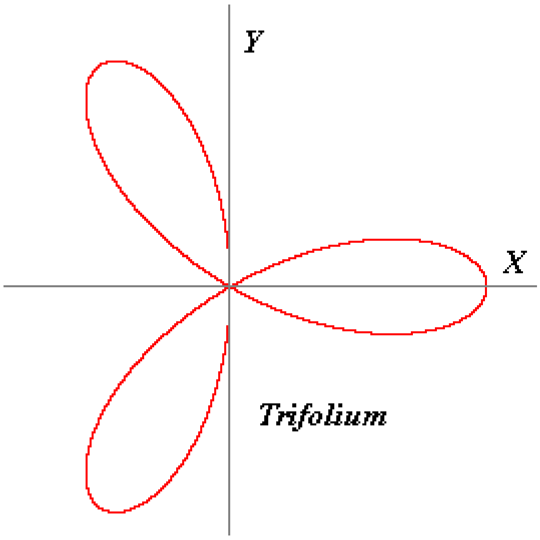
Las rosas o rhodoneas son curvas cuya ecuación polar es

$$r = a \cdot cos\, m\theta \,,$$

las ecuaciones paramétricas son por tanto

$$\begin{cases} x = a \cdot cos\, m\theta \cdot cos\,\theta \\ y = a \cdot sen\, m\theta \cdot sen\,\theta \end{cases}$$

El nombre de esta familia de curvas se debe a su forma parecida a la de una flor. El matemático italiano Grandi las llamó Rhodoneas, Rhodon significa rosa en griego, en su libro Flora Geometrica. Si m = 0 ó m = 1 la curva es una circunferencia, para m = 2 la curva se llama quadrifolium, para m = 3 se llama trifolium, para m entero impar rosa de m pétalos y para m par rosa de 2n pétalos. El nombre hace referencia al número de pétalos que tiene la curva. La curva está definida también para valores fraccionarios. Para m = ½ se llama Folium de Durero.



Aplicando el mismo procedimiento a la ecuación polar que el realizado a la ecuación de la lemniscata se observa que la ecuación cartesiana de la rosa para m entero impar es

$$x^2 + y^2 = a \cdot T_m\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \cdot \sqrt{x^2+y^2}$$

por ejemplo si m =3 , la curva se llama trifolium, tenemos

$$x^2 + y^2 = a \cdot T_3\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \cdot \sqrt{x^2+y^2}$$

Teniendo en cuenta que $T_3(z) = z \cdot \left(4z^2 - 3\right)$ la ecuación es

$$x^2 + y^2 = \frac{ax}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(4\frac{x^2}{x^2+y^2} - 3\right) \cdot \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

Operando

$$\left(x^2+y^2\right)^2 = ax \cdot \left(x^2 - 3y^2\right).$$

Si m es par la ecuación cartesiana anterior sólo corresponde a la mitad de la curva pues r puede tomar valores negativos. La curva completa corresponde a la ecuación

$$x^2+y^2=a^2\cdot T_m\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2$$

Por ejemplo el Quadrifolium $r=a\cdot cos\,2\theta$

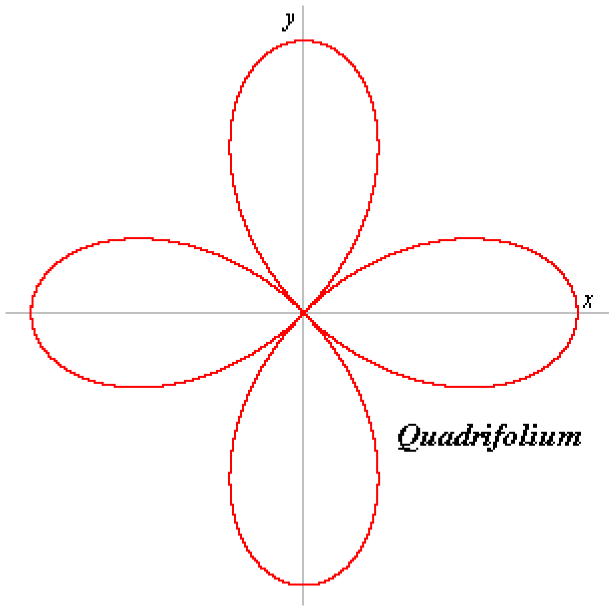
$$x^2+y^2=a^2\cdot T_2\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2$$

por tanto

$$x^2+y^2=a^2\cdot\left(2\frac{x^2}{x^2+y^2}-1\right)^2$$

operando

$$\left(x^2+y^2\right)^3=a^2\cdot\left(x^2-y^2\right)^2.$$



Para valores fraccionarios de $m=\frac{p}{q}$ el proceso necesita una modificación. Podemos realizar el proceso de la siguiente forma

$$r=a\cdot cos\frac{p}{q}\theta\Rightarrow\frac{r}{a}=cos\,p\frac{\theta}{q}$$

por tanto

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a}=T_p\left(cos\frac{\theta}{q}\right)\Rightarrow T_q\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a}\right)=T_q\left(T_p\left(cos\frac{\theta}{q}\right)\right)$$

Como $T_p\left(T_q(x)\right)=T_q\left(T_p(x)\right)=T_{p\cdot q}(x)$ tenemos que

$$T_q\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a}\right)=T_p\left(T_q\left(\cos\frac{\theta}{q}\right)\right)=T_p(\cos(\theta))$$

Luego

$$T_p\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=T_q\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a}\right)$$

Veamos algunos ejemplos

1) Para m =1/2 tenemos el Folium de Durero $r=a\cdot\cos\frac{\theta}{2}$

$$T_1\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=T_2\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a}\right)$$

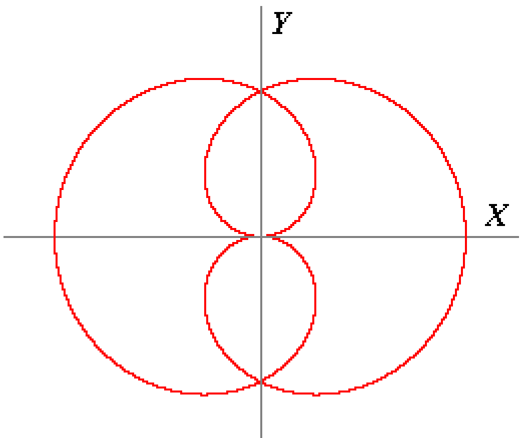
Es decir

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=2\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a}\right)^2-1$$

Simplificando y elevando al cuadrado para racionalizar

$$\left(2x^2+2y^2-a^2\right)^2\cdot\left(x^2+y^2\right)=a^4x^2$$

la curva es simétrica respecto de los ejes de coordenadas. Esta situación se cumple para los valores de $m=\frac{1}{2n}$.



Folium de Durero

2) Para $m=\frac{1}{3}$ tenemos

$$r=a\cdot\cos\frac{\theta}{3}$$

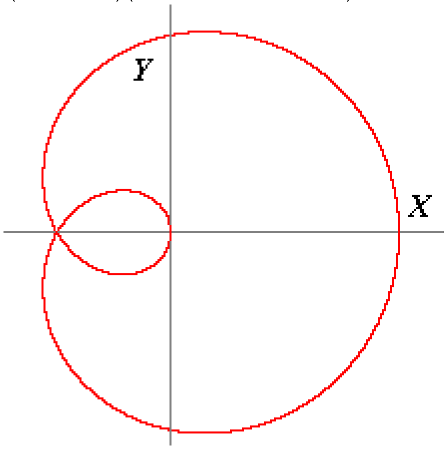
$$T_1\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=T_3\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a}\right)$$

es decir

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a}\left(4\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a}\right)^2 - 3\right)$$

Operando

$$\left(x^2+y^2\right)\left(4x^2+4y^2-3a^2\right) = a^3 x .$$



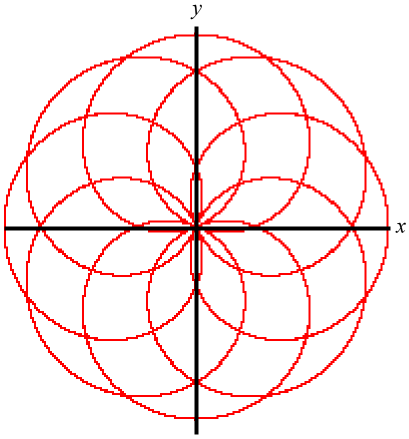
Rosa 1/3

La curva en este caso es simétrica respecto del eje OX. Observemos que no hemos tenido que elevar al cuadrado en el proceso de eliminación. Análogamente a este caso ocurre para $m = \dfrac{1}{2n+1}$.

3) Para $m = \dfrac{4}{5}$ la ecuación polar es $r = a \cdot cos\dfrac{4\theta}{5}$ y siguiendo el mismo proceso se obtiene la ecuación cartesiana

$$a^{10}\left(x^4-6x^2y^2+y^4\right)^2 = \left(x^2+y^2\right)^5\left(16x^4+32x^2y^2-20a^2x^2+16y^4-20a^2y^2+5a^4\right)^2$$

una curva de grado 18.



Rosa 4/5

Curvas Botánicas

Las curvas botánicas tienen la ecuación polar

$$r = 1 + d \cdot cos\, m\theta \quad d > 0$$

son las concoides de la rosa $r = d \cdot cos\, m\theta \quad d > 0$ respecto de su centro 0 y con distancia 1. Estas curvas engloban algunos tipos de curvas clásicas que veremos en los ejemplos. Obviamente para d = 0 la curva es la circunferencia de radio unidad. Si d >1 a la familia de curvas se la conoce con el poético nombre de Rosas de Troya.

Para *m* entero la ecuación cartesiana de la curva botánica se obtiene racionalizando la ecuación

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 1 + d \cdot T_m\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right).$$

Veamos algunos ejemplos

1) Para *m* = 1 la curva es El Caracol de Pascal. Racionalizando la ecuación

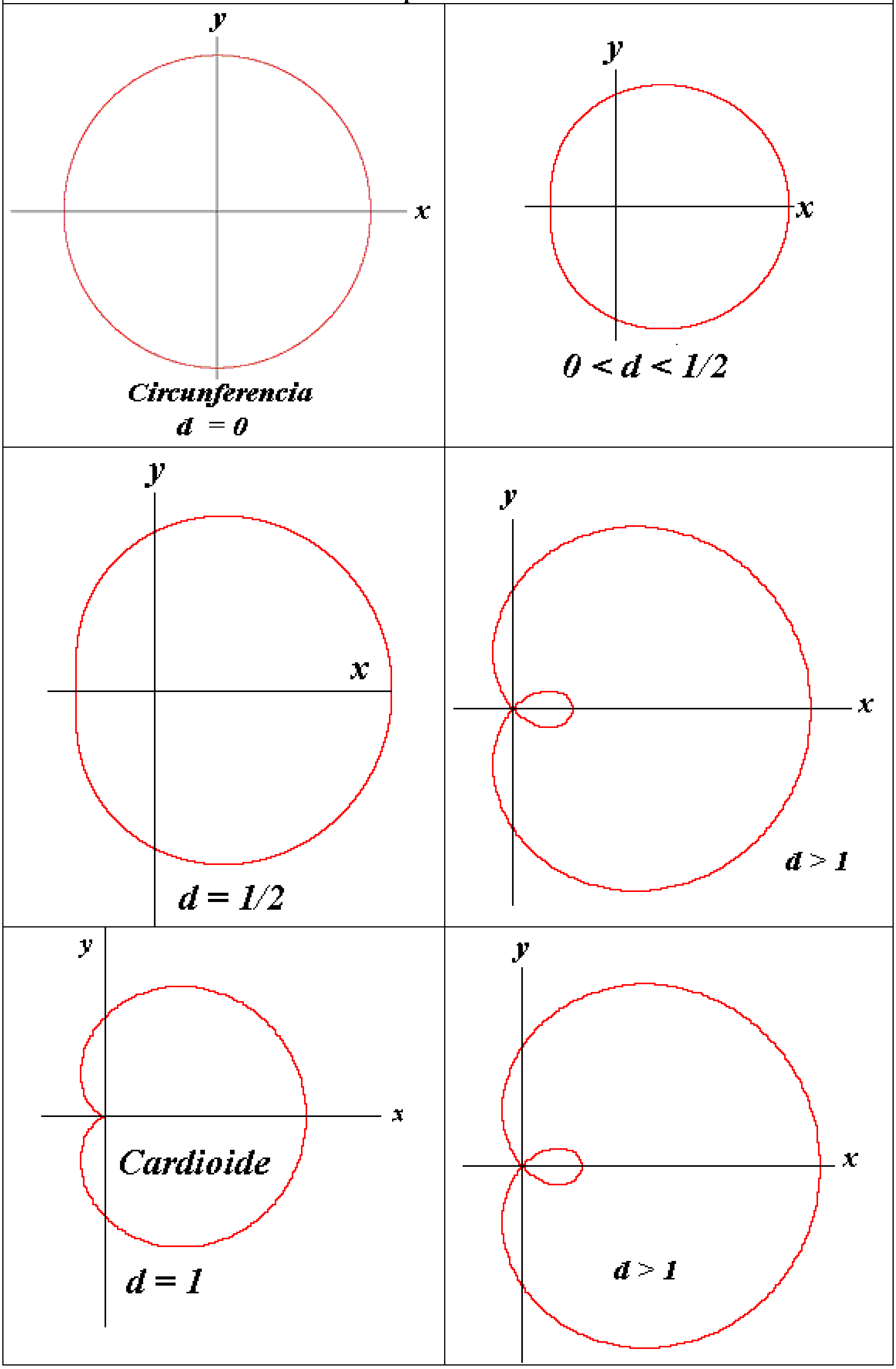
$$\sqrt{x^2 + y^2} = 1 + d \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

obtenemos

$$\left(x^2 + y^2 - dx\right)^2 = x^2 + y^2.$$

La tabla muestra los diferentes tipos de caracol de Pascal. Recordemos que para *d* = 1 la curva se llama cardioide.

Los diferentes tipos del Caracol de Pascal



2) Para $m = 2$ obtenemos

$$\sqrt{x^2+y^2} = 1 + d\cdot\left(2\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 - 1\right)$$

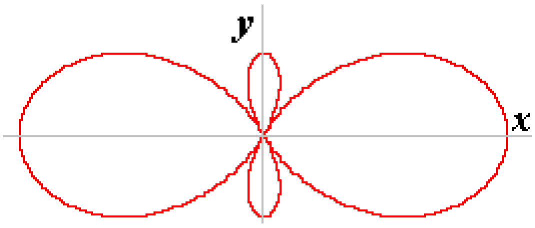
Operando

$$\left(x^2+y^2\right)^{3/2} = (d+1)\cdot x^2 - (d-1)y^2$$

y elevando al cuadrado

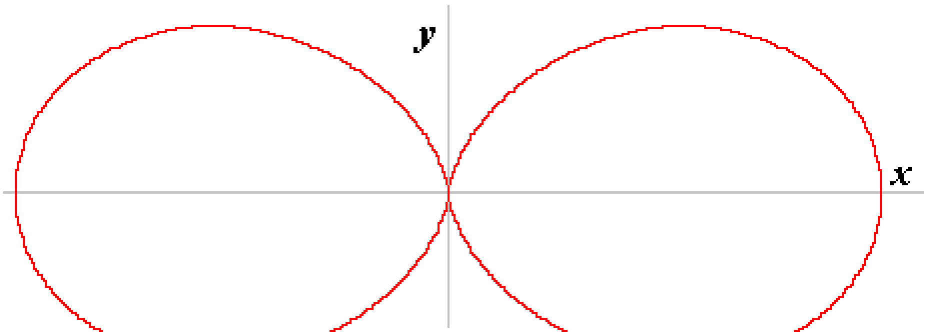
$$\left(x^2+y^2\right)^3 = \left[(d+1)\cdot x^2 - (d-1)y^2\right]^2$$

Dependiendo de los valores de d se tienen tres tipos de curva
Si d >1 la curva se llama cicloide de Ceva



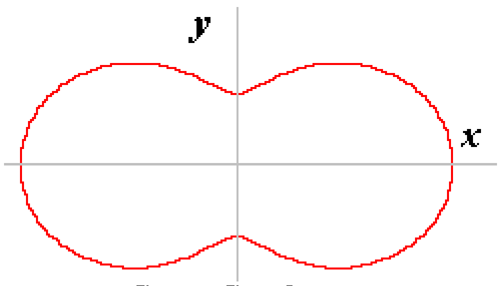
Cicloide de Ceva

si $d = 1$óvalo doble,



Ovalo Doble

y si d<1 curva cacahuete.

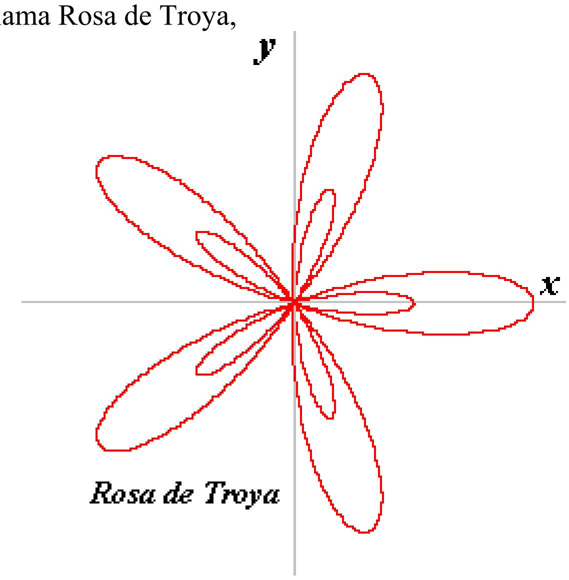


Curva Cacahuete

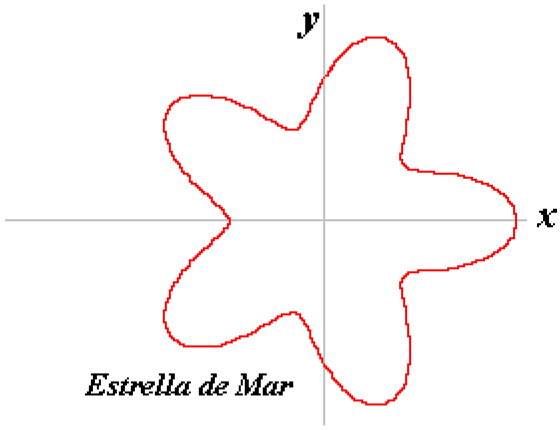
3) para $m = 5$ se obtiene la ecuación de grado 12

$$\left(x^2+y^2\right)^5 = \left[\left(x^2+y^2\right)^3 - dx\left(x^4-10x^2y^2+5y^4\right)\right]^2$$

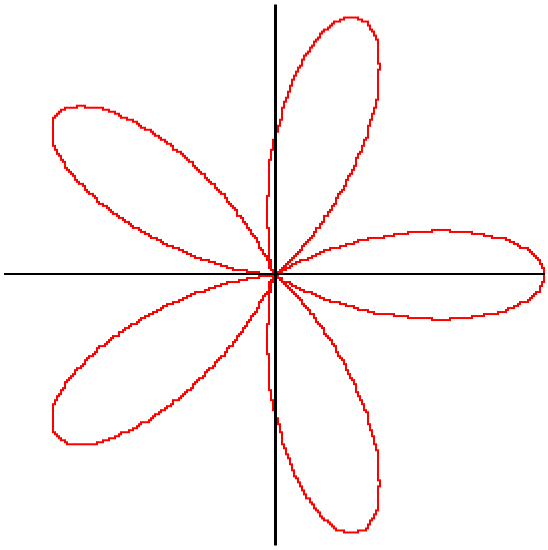
para $d > 1$ la curva se llama Rosa de Troya,



para $d < 1$ se llama Estrella de mar



y para $d = 1$ no tiene nombre especial. La forma de esta curva botánica nos recuerda la Rosa de 5 pétalos que la genera.



Curvas Botánicas con valores fraccionarios del parámetro m.

Si $m = p/q$ el proceso de reducción se basa en racionalizar la siguiente fórmula

$$T_p\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = T_q\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}-1}{d}\right).$$

La deducción de la fórmula es un proceso análogo al seguido con las rosas y se deja su verificación al lector. Veamos algunos ejemplos de curvas notables

1) Para m = 1/2 la curva se llama la Nefroide de Freeth, su ecuación polar es

$$r = 1 + d \cdot cos\frac{\theta}{2}$$

y la ecuación cartesiana se obtiene racionalizando la ecuación

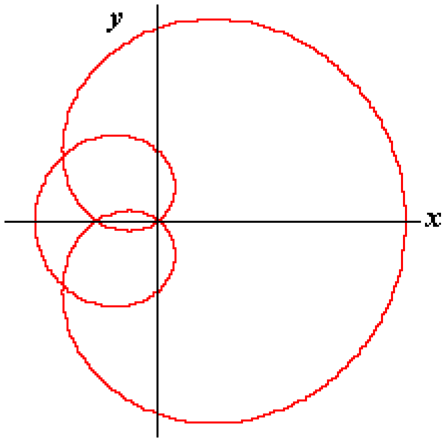
$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = 2\cdot\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}-1}{d}\right)^2 - 1$$

Operando

$$\left(2x^2+2y^2+2-d^2\right)\sqrt{x^2+y^2} = d^2\cdot x + 4\left(x^2+y^2\right)$$

Elevando al cuadrado

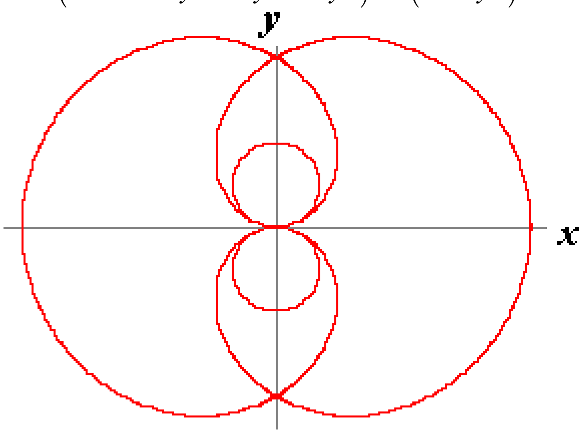
$$\left(2x^2+2y^2+2-d^2\right)^2\left(x^2+y^2\right) = \left[4x^2+4y^2+d^2\cdot x\right]^2.$$



Nefroide de Freeth

2) Para m = 2/3 la curva se llama el nudo de ocho y para el valor d = 2 la ecuación cartesiana queda una ecuación de décimo grado relativamente sencilla

$$\left(3x^4+6x^2y^2+3y^4-4y^2\right)^2 = \left(x^2+y^2\right)^5$$



Nudo de ocho

Ejercicio 7 Encontrar una formula para hallar la ecuación cartesiana de las curvas poligasteroides, tambien llamadas curvas de m vientres, de ecuación polar

$$r = \frac{1}{1 + k \cdot cos\, m\theta}, \quad m \in Q$$

Estas curvas estudiadas por Gino Loria son una generalización de la ecuación polar de las cónicas.

Arañas

Hay dos familias de curvas arañas. Las arañas envueltas de ecuación polar

$$r = a\frac{sen\, n\theta}{sen(n-1)\theta}$$

y las arañas desenvueltas de ecuación polar

$$r = a\frac{sen\, n\theta}{sen(n+1)\theta}.$$

Las ecuaciones cartesianas de ambos tipos se expresan muy bien usando los polinomios de Chebyshev de segunda clase.

Las arañas desenvueltas cumplen la ecuación

$$r \cdot sen(n-1)\theta = a \cdot sen\, n\theta$$

por tanto

$$r \cdot sen\theta \cdot U_{n-2}(\cos\theta) = a \cdot sen\theta \cdot U_{n-1}(\cos\theta)$$

simplificando

$$r \cdot U_{n-2}(\cos\theta) = a \cdot U_{n-1}(\cos\theta)$$

Por tanto

$$\sqrt{x^2+y^2} \cdot U_{n-2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = a \cdot U_{n-1}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

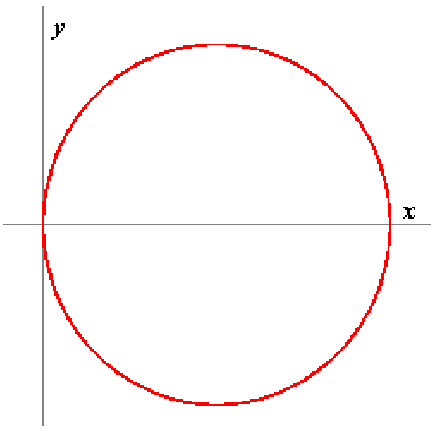
Multiplicando la ecuación por $\sqrt{x^2+y^2}^{\,n-1}$ tenemos

$$\left(x^2+y^2\right)^{n/2} \cdot U_{n-2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = a \cdot \left(x^2+y^2\right)^{(n-1)/2} U_{n-1}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

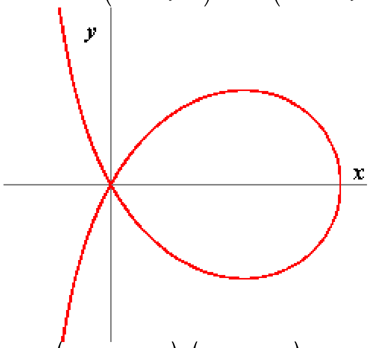
que es una ecuación de grado n.

Veamos algunos ejemplos

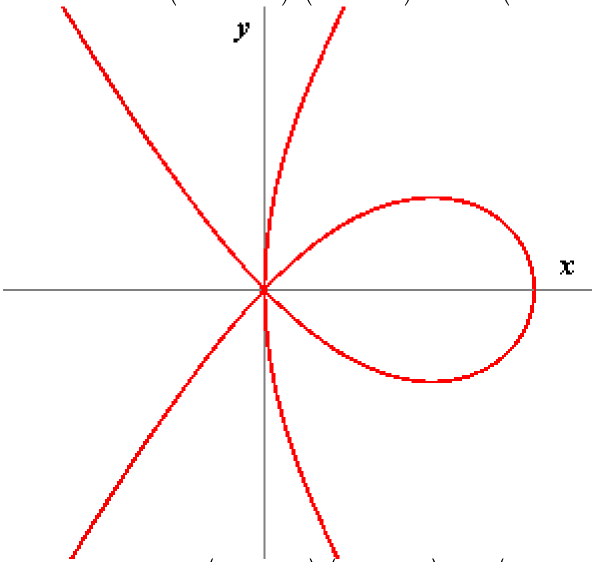
1) Para $n = 2$ obtenemos la ecuación $x^2 + y^2 = 2ax$. Circunferencia de centro $(a, 0)$ y radio a.



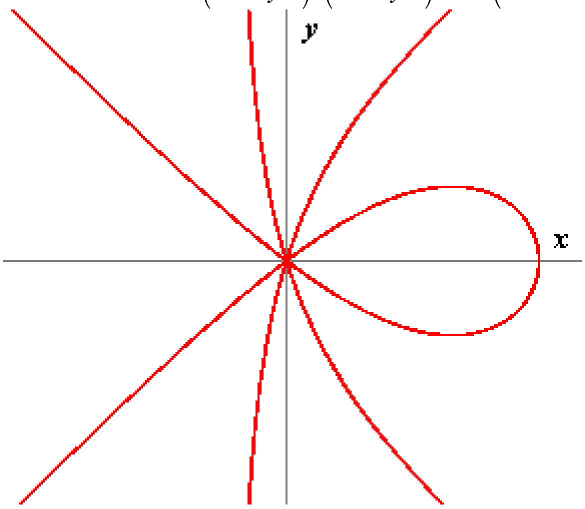
2) Para $n = 3$ obtenemos la ecuación $2x \cdot \left(x^2 + y^2\right) = a \cdot \left(3x^2 - y^2\right)$. La trisectriz de Maclaurin.



3) para $n = 4$ obtenemos la ecuación $\left(3x^2 - y^2\right) \cdot \left(x^2 + y^2\right) = 4xa \cdot \left(x^2 - y^2\right)$.



4) Para $n = 5$ Obtenemos la ecuación $4x\left(x^2 - y^2\right) \cdot \left(x^2 + y^2\right) = a \cdot \left(5x^4 - 10x^2y^2 + x^4\right)$.



Observemos que para n mayor que cuatro la araña envuelta tiene n-2 asíntotas de ecuaciones $y = x \cdot \tan k \dfrac{\pi}{n-1}$, $k = 1,..,n-2$. Si n = 3 la trisectriz tiene una asíntota vertical de ecuación $x = 1$.

Para las arañas desenvueltas se obtienen resultados análogos que se dejan como ejercicio al lector.

Nudos

Se llaman curvas nodales o nudos las de ecuación polar $r = a \cdot \cot k\theta$. Las ecuaciones cartesianas de estas curvas se obtienen usando las funciones de ángulo múltiple de la tangente.

En efecto

$$r = a \cdot \cot k\theta \Leftrightarrow R_n(\tan\theta)\cdot r = a \Leftrightarrow R_n\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\sqrt{x^2+y^2} = a$$

Elevando al cuadrado

$$\left(x^2+y^2\right)\cdot R_n\left(\frac{y}{x}\right)^2 = a^2 .$$

Usando la expresión del ángulo múltiple podemos dar una fórmula polinómica equivalente a la expresión anterior. Esta es

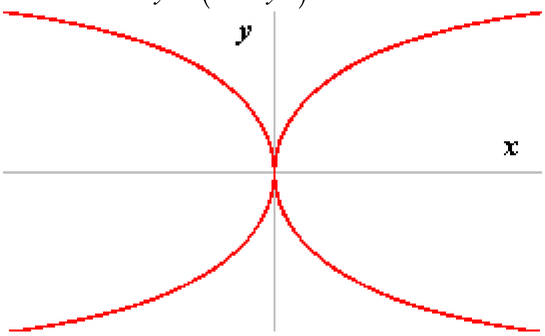
$$\left(x^2+y^2\right)\cdot\left[\sum_{k=0}^{(n-1)/2}(-1)^k\binom{n}{2k+1}x^{n-(2k+1)}\cdot y^{2k+1}\right]^2 = a^2\cdot\left[\sum_{k=0}^{n/2}(-1)^k\binom{n}{2k}x^{n-2k}\cdot y^{2k}\right]^2 .$$

Luego los nudos son curvas de orden $2n + 2$.

Veamos algunos ejemplos

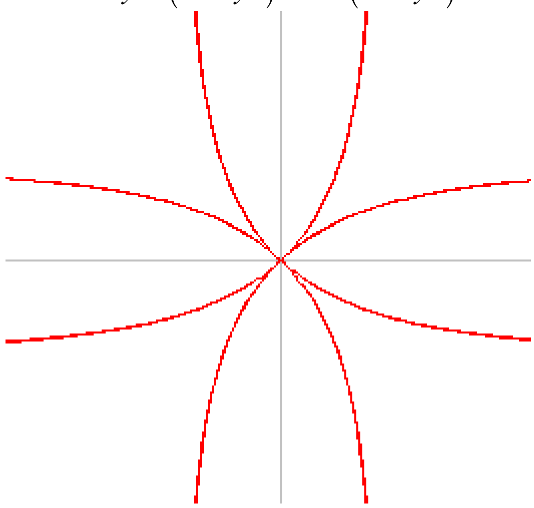
Si $n = 1$ la curva es una cuártica llamada kappa o curva de Gutschoven de ecuación

$$y^2\cdot\left(x^2+y^2\right) = a^2x^2$$



Si $n = 2$ la curva es una séxtica llamada molino de viento de ecuación

$$4x^2y^2\cdot\left(x^2+y^2\right) = a^2\cdot\left(x^2-y^2\right).$$



Si $n = 4$ la curva es de orden ocho y tiene por ecuación

$$y^2\cdot\left(x^2+y^2\right)\cdot\left(3x^2-y^2\right)^2 = a^2x^2\cdot\left(x^2-3y^2\right)^2 .$$

Ejercicio 8-Hallar las ecuaciones de los nodos si el parámetro k es racional.

Curvas de Lissajous

Las curvas de Lissajous se pueden definir por las ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = cos(m \cdot t + p) \\ y = sen(n \cdot t + q) \end{cases}.$$

Fueron descubiertas por el matemático norteamericano Nataniel Bodwitch en 1815 cuando estudiaba el movimiento del péndulo compuesto. Posteriormente el físico francés Jules Antoine las estudió en sus investigaciones sobre óptica.

El proceso de eliminación del parámetro t es, salvo en los casos triviales, más complicado que en los casos anteriores y excesivamente laborioso y complejo si se utilizan las técnicas de eliminación algebraica. Los dos teoremas explicados mas abajo resuelven fácilmente la cuestión.

Teorema 1. Dada la curva de Lissajous

$$\begin{cases} x = cos(m \cdot t + p) \\ y = sen(n \cdot t + q) \end{cases}$$

$0 \leq t \leq 2\pi$, donde p, q son números reales y m impar.

Llamemos $\delta = \begin{vmatrix} m & p \\ n & q \end{vmatrix}$. Las coordenadas x, e y de la curva de Lissajous satisfacen la ecuación

a) $T_n(x)^2 + T_m(y)^2 - 2 \cdot (-1)^{(m-1)/2} \cdot T_n(x) T_m(y) \cdot sen\delta - cos^2 \delta = 0$, cuando $cos\,\delta \neq 0$.

b) $\sin\delta \quad T_n(x) - (-1)^{(m-1)/2} T_m(y) = 0$, cuando $cos\,\delta = 0$.

Demostración.

Aplicando la propiedad característica de los polinomios de Chebyshev y la correspondiente para m impar para la función seno tenemos que

$$\begin{cases} T_n(x) = T_n(cos(mt+p)) = cos[n \cdot (mt+p)] = cos(mn \cdot t + n \cdot p) \\ T_m(y) = T_m(sen(nt+q)) = sen[m \cdot (nt+q)] = sen(mn \cdot t + m \cdot q) \end{cases}$$

Aplicando las fórmulas de la suma de dos ángulos

$$\begin{cases} cos\,mnt \cdot cos\,np - sen\,mnt \cdot sen\,np \ = T_n(x) \\ cos\,mnt \cdot sen\,mq + sen\,mnt \cdot cos\,mq = (-1)^{(m-1)/2} T_m(x) \end{cases}$$

Este es un sistema lineal en las incógnitas $cos\,mnt$ y $sen\,mnt$ con determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} cos\,np & -sen\,np \\ sen\,mq & cos\,mq \end{vmatrix} = cos\,mq \cdot cos\,np + sen\,mq \cdot sen\,np = cos(mq - np) = cos\,\delta$$

Si $\Delta = cos\,\delta \neq 0$, aplicando la regla de Cramer

$$\begin{cases} cos\,\delta \cdot cos\,mnt = cos\,mq \cdot T_n(x) - (-1)^{(m-1)/2} \cdot sen\,np \cdot T_m(y) \\ cos\,\delta \cdot sen\,mnt = -sen\,mq \cdot T_n(x) + (-1)^{(m-1)/2} \cdot cos\,np \cdot T_m(y) \end{cases}$$

elevando al cuadrado y sumando miembro a miembro

$$cos^2 \delta = T_n(x)^2 + T_m(y)^2 - 2 \cdot (-1)^{(m-1)/2} \cdot T_n(x) T_m(y) \cdot (sen\,mq \cdot cos\,np - cos\,mq \cdot sen\,np)$$

luego

$$T_n(x)^2 + T_m(y)^2 - 2 \cdot (-1)^{(m-1)/2} \cdot T_n(x) T_m(y) \cdot sen\delta - cos^2 \delta = 0$$

quedando así demostrada la primera fórmula.

Si $\Delta = cos\,\delta = 0$ el sistema anterior es compatible sólo cuando los coeficientes son proporcionales, es decir cuando

$$\frac{\cos np}{\operatorname{sen} mq} = \frac{-\operatorname{sen} np}{\cos mq} = \frac{T_n(x)}{(-1)^{(m-1)/2} T_m(y)}$$

por tanto

$$\begin{cases} \operatorname{sen} mq \cdot T_n(x) - (-1)^{(m-1)/2} \cdot \cos np \cdot T_m(y) = 0 \\ \cos mq \cdot T_n(x) - (-1)^{(m-1)/2} \cdot \operatorname{sen} np \cdot T_m(y) = 0 \end{cases}$$

Multiplicando la primera por cos np y la segunda por sen np y restando ambas ecuaciones queda

$$(\operatorname{sen} mq \cdot \cos np - \cos mq \cdot \operatorname{sen} np) \cdot T_n(x) - (-1)^{(m-1)/2} \cdot (\cos^2 np + \operatorname{sen}^2 np) \cdot T_m(x) = 0$$

por tanto

$$\operatorname{sen}\delta \cdot T_n(x) - (-1)^{(m-1)/2} \cdot T_m(x) = 0$$

c.q.d.

Es natural preguntarnos si el recíproco del teorema anterior es cierto, es decir si un punto que satisface la ecuación cartesiana satisface las ecuaciones paramétricas. La respuesta es "sí" en el primer caso y este hecho se demuestra en el teorema 2.

Teorema 2. Si un punto (a, b) satisface la ecuación cartesiana

$$T_n(x)^2 + T_m(y)^2 - 2 \cdot (-1)^{(m-1)/2} \cdot T_n(x) T_m(y) \cdot \operatorname{sen}\delta - \cos^2 \delta = 0$$

con m impar y $\cos\delta \neq 0$,

existe un t_0 tal que $\begin{cases} a = \cos\left(\dfrac{m}{d} \cdot t_0 + \dfrac{2\pi}{n} k\right) \\ b = \operatorname{sen}\left(\pm \dfrac{n}{d} \cdot t_0 + \dfrac{\delta}{m} + \dfrac{2\pi}{m} l\right) \end{cases}$ $k, l \in Z$,

donde $d = m.c.d.(m, n)$

.

Es decir la curva descrita por la ecuación dada es una unión finita de curvas de Lissajous.

Observaciones:

1) Notemos que en una curva de Lissajous siempre podemos tomar p = 0. Basta realizar el cambio de parámetro $t = u - \dfrac{p}{m}$.

2) La ecuación cartesiana nos determina n, p y $\operatorname{sen}\delta$. El ángulo δ puede tomar una infinidad de valores. Una vez elegido uno cualquiera de ellos $q = \dfrac{\delta}{m}$.

Demostración

Sabemos que

$$T_n(a)^2 + T_m(b)^2 - 2 \cdot (-1)^{(m-1)/2} \cdot T_n(a) T_m(b) \cdot \operatorname{sen}\delta - \cos^2 \delta = 0$$

Teniendo en cuenta la identidad trigonométrica $\cos^2 \delta + \operatorname{sen}^2 \delta = 1$ tenemos

$$\cos^2 \delta \cdot T_n(a)^2 + \operatorname{sen}^2 \delta \cdot T_n(a)^2 - 2 \cdot \operatorname{sen}\delta \cdot T_n(a) \cdot (-1)^{(m-1)/2} \cdot T_m(b) \cdot + T_m(b)^2 = \cos^2 \delta$$

Por tanto

$$(\cos\delta \cdot T_n(a))^2 + \left(\operatorname{sen}\delta \cdot T_n(a) - (-1)^{(m-1)/2} \cdot T_m(b)\right)^2 = \cos^2 \delta$$

Dividiendo por $\cos^2 \delta$

$$T_n(a)^2 + \left[\frac{\operatorname{sen}\delta \cdot T_n(a) - (-1)^{(m-1)/2} \cdot T_m(b)}{\cos\delta}\right]^2 = 1$$

Luego existe un valor θ tal que

$$\begin{cases} T_n(a) = cos\theta \\ \dfrac{sen\delta \cdot T_n(a) - (-1)^{(m-1)/2} \cdot T_m(b)}{cos\delta} = -sen\theta \end{cases}$$

Despejando

$$T_m(b) = (-1)^{(m-1)/2} \cdot (sen\delta \cdot cos\theta - cos\delta \cdot sen\theta) = (-1)^{(m-1)/2} \cdot sen(\delta + \theta)$$

Luego

$$\begin{cases} T_n(a) = cos\theta \\ T_m(b) = (-1)^{(m-1)/2} \cdot sen(\delta + \theta) \end{cases}$$

Por tanto podemos haciendo $a = cos\,\alpha$ y $b = sen\beta$ tenemos que

$$T_n(cos\alpha) = cos\theta \Rightarrow cosn\alpha = cos\theta \Rightarrow \alpha = \pm\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n} \cdot k \quad k \in Z$$

y

$$T_m(sen\beta a) = sen(\delta + \theta) \Rightarrow senm\beta = sen(\delta + \theta) \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{\theta}{m} + \dfrac{\delta}{m} + \dfrac{2\pi}{m} \cdot l \\ \alpha = \pi - \dfrac{\theta}{m} + \dfrac{\delta}{m} + \dfrac{2\pi}{m} \cdot l \end{cases} \quad l \in Z \,,$$

Sea $d = m.c.d.(m,n)$. Haciendo $\theta = \dfrac{m \cdot n \cdot t_0}{d}$ se deduce el resultado enunciado.

Cuando m es par se tienen resultados análogos que se enuncian en los teoremas siguientes.

Teorema. 3 Dada la curva de Lissajous

$$\begin{cases} x = cos(m \cdot t + p) \\ y = sen(n \cdot t + q) \end{cases}$$

$0 \le t \le 2\pi$, donde p, q son números reales y m par.

Llamemos $\delta = \begin{vmatrix} m & p \\ n & q \end{vmatrix}$. Entonces la ecuación cartesiana de la curva de Lissajous es

a) $T_n(x)^2 + T_m(y)^2 - 2(-1)^{m/2} T_n(x) T_m(y) \cos\delta - \sin^2\delta = 0$ cuando $\sin\delta \neq 0$,

b) $\cos\delta \;\; T_n(x) - (-1)^{m/2} T_m(y) = 0$ cuando $sin\,\delta = 0$.

Teorema 4. Si un punto (a, b) satisface la ecuación cartesiana

$$T_n(x)^2 + T_m(y)^2 - 2(-1)^{m/2} T_n(x) T_m(y) \cos\delta - \sin^2\delta = 0$$

con m par y $sen\delta \neq 0$,

existe un t_0 tal que $\begin{cases} a = cos\left(\dfrac{m}{d} \cdot t_0 + \dfrac{2\pi}{n} k\right) \\ b = sen\left(\pm\dfrac{n}{d} \cdot t_0 + \dfrac{\delta}{m} + \dfrac{2\pi}{m} l\right) \end{cases} \quad k, l \in Z$,

donde $d = m.c.d.(m,n)$

.

Es decir la curva descrita por la ecuación dada es una unión finita de curvas de Lissajous.

Las demostraciones de los teoremas 3 y 4 son análogas a las de los teoremas 1 y 2 y no las haremos. El lector interesado puede consultar el artículo **[3].** Resumiendo la curva de Lissajous definida por la ecuación paramétrica coincide con la definida por su ecuación cartesiana cuando *m* es impar y $\cos\delta$ es distinto de cero o cuando *m* es par y $sen\ \delta$ es distinto de cero Diremos entonces que la curva de Lissajous es no degenerada y en caso contrario decimos que es degenerada. Cuando la curva de Lissajous es degenerada la ecuación paramétrica es sólo un arco de la curva definida por la ecuación cartesiana. Ver los casos degenerados de los ejemplos 1 y 2.

Ejercicio 9. Demostrar los siguientes hechos en una curva de Lissajous degenerada
a) La curva queda determinada con un intervalo de longitud π.
b) La curva es un arco con un origen y un extremo.
c) Los puntos singulares son nodos
Ejercicio 10 Demostrar lo siguiente hechos en una curva de Lissajous no degenerada
a) La curva queda determinada con un intervalo de longitud 2π.
b) La curva es curva cerrada y todos los puntos singulares son nodos.

Apliquemos los teoremas a algunos ejemplos seleccionados

1. Alforja

La alforja es la curva de ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = c\cdot \cos\left(t-\dfrac{\pi}{2}\right) \\ y = -\dfrac{c}{2}\cdot sen(2t+\beta)+\dfrac{c}{2}sen\beta \end{cases}$$

En este caso *m* =1 es impar y $\delta = \begin{vmatrix} 1 & \dfrac{-\pi}{2} \\ 2 & \beta \end{vmatrix} = \beta + \pi$. Cuando $\cos(\beta+\pi)=0$, es decir cuando

$\beta = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in Z$ podemos aplicar la formula

$$sen\,\beta\cdot T_2\left(\frac{x}{c}\right) - T_1\left(\frac{-2y}{c} + sen\,\beta\right) = 0$$

es decir

$$sen\,\beta\cdot\left(2\left(\frac{x}{c}\right)^2 - 1\right) - \left(\frac{-2y}{c} + sen\,\beta\right) = 0$$

operando nos queda

$$y = \frac{sen\beta}{c}x^2$$

como $\cos\beta = 0$ tenemos que la ecuación de la curva es

$$y = \frac{x^2}{c} \quad ó \quad y = -\frac{x^2}{c}$$

que es la ecuación de una parábola.

Observemos que en este caso la curva parametrizada es un arco de parábola.

Cuando $\cos\beta \neq 0$ tenemos

$$T_1\left(\frac{x}{c}\right)^2 + T_2\left(\frac{-2y}{c} + sen\beta\right)^2 - 2\cdot T_1\left(\frac{x}{c}\right)T_2\left(\frac{-2y}{c} + sen\beta\right)\cdot sen\beta - \cos^2\beta = 0$$

Operando queda

$$\frac{4x^4}{c^4} - \frac{8sen\,\beta\cdot x^2 y}{c^3} - \frac{4\cos^2\beta\cdot x^2}{c^2} + \frac{4y^2}{c^2} = 0$$

Multiplicando por $\frac{c^4}{4}$

$$x^4 - 2c\,sen\beta \cdot x^2 y - c^2 cos^2 \beta \cdot x^2 + c^2 y^2 = 0$$

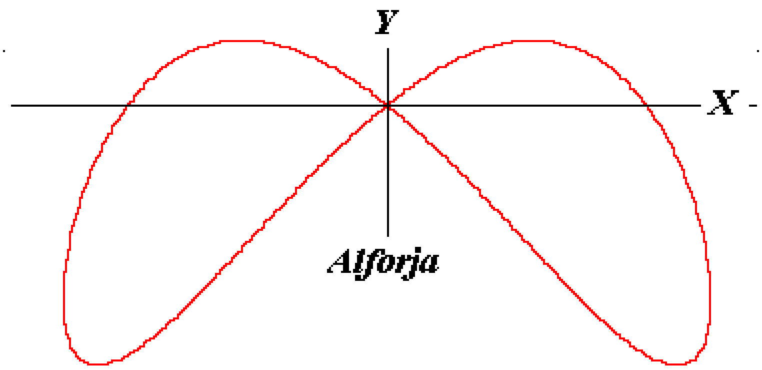
llamando $a = c \cdot cos\,\beta$ y $b = c \cdot sen\,\beta$ queda

$$x^4 - 2b \cdot x^2 y - a^2 \cdot x^2 + \left(a^2 + b^2\right)^2 y^2 = 0$$

o bien

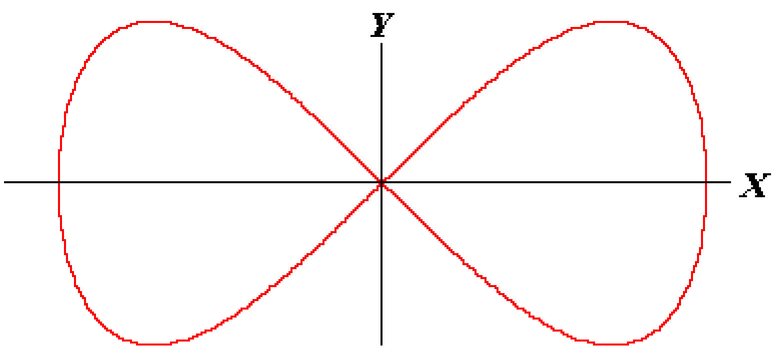
$$\left(x^2 - by\right)^2 = a^2\left(x^2 - y^2\right)$$

que es la ecuación cartesiana de la alforja



Cuando b=0 la alforja se llama Lemniscata de Gerono

$$x^4 = a^2\left(x^2 - y^2\right) \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = c \cdot cos\left(t - \dfrac{\pi}{2}\right) \\ y = \dfrac{-c}{2} sen\left(2t - \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$



Lemniscata de Gerono

2) Cúbica Crunodal

$$\begin{cases} x = cos\,2t \\ y = sen\left(3t + \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

En este caso m =2 es par y $sen\,\delta = sen\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & \dfrac{\pi}{2} \end{vmatrix} = 0$, la fórmula es por tanto

$$\cos\delta \;\; T_n(x) - (-1)^{m/2} T_m(y) = 0$$

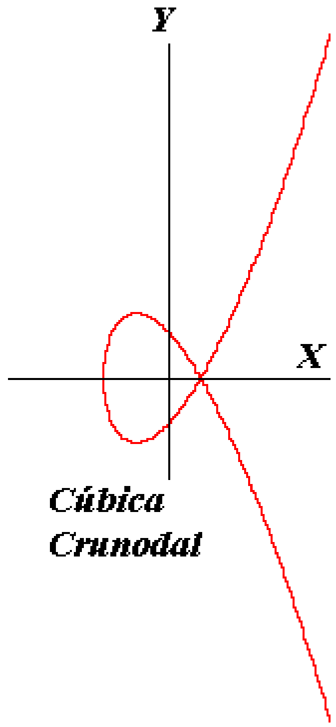
Sustituyendo

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)T_3(x)-(-1)T_2(y)=0$$

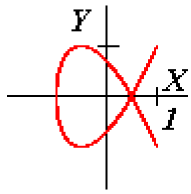
Operando

$$2y^2=4x^3-3x+1$$

Esta curva se llama cúbica con punto doble o cúbica crunodal.



Observemos que es una curva de Lissajous degenerada y que la curva parametrizada es un arco de la cúbica con forma de letra alfa.



Otro Ejemplo con m par

$$\begin{cases} x=\cos 2t \\ y=\sin\left(3t+\dfrac{\pi}{4}\right) \end{cases}$$

En este caso m =2 es par y $sen\,\delta = sen\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & \dfrac{\pi}{4} \end{vmatrix} = 1$, la fórmula es por tanto

$$T_n(x)^2+T_m(y)^2-2\cdot(-1)^{m/2}\cdot T_n(x)T_m(y)\cdot\cos\delta-\sin^2\delta=0$$

sustituyendo

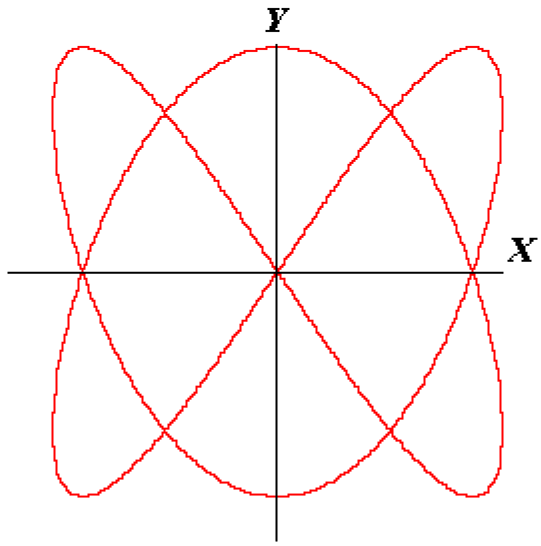
$$T_3(x)^2+T_2(y)^2-2\cdot(-1)\cdot T_n(x)T_m(y)\cdot\cos\frac{\pi}{2}-\sin^2\frac{\pi}{2}=0$$

Operando

$$\left(4x^3-3x\right)^2+\left(2y^2-1\right)=1$$

o bien

$$(4x^3 - 3x)^2 = 4(y^2 - y^4).$$



Ejemplo de curva reducible

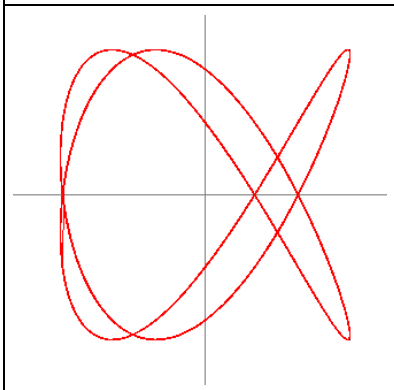
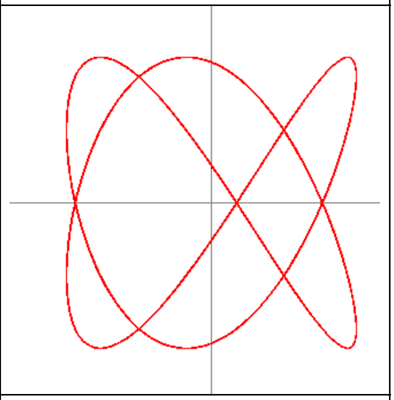
La curva definida por las ecuaciones

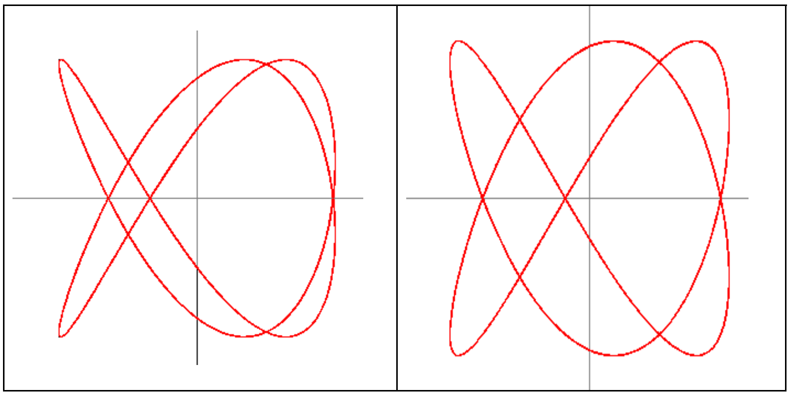
$$\begin{cases} x = cos\left(8t + \dfrac{\pi}{2}\right) \\ y = sen\left(12t + \dfrac{\pi}{3}\right) \end{cases}$$

Satisface la ecuación

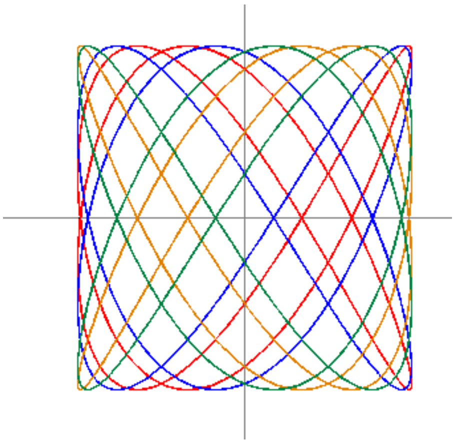
$$T_{12}(x)^2 + T_8(y)^2 + T_{12}(x) \cdot T_8(y) - \frac{3}{4} = 0.$$

Esta ecuación nos determina cuatro componentes irreducibles que corresponden a las cuatro curvas de Lissajous siguientes:

$\begin{cases} x = cos\,2t \\ y = sen\left(3t - \dfrac{5\pi}{12}\right) \end{cases}$	$\begin{cases} x = cos\left(2t + \dfrac{\pi}{6}\right) \\ y = sen\left(3t - \dfrac{5\pi}{12}\right) \end{cases}$
	
$\begin{cases} x = cos\left(2t + \dfrac{\pi}{3}\right) \\ y = sen\left(3t - \dfrac{5\pi}{12}\right) \end{cases}$	$\begin{cases} x = cos\left(2t + \dfrac{\pi}{2}\right) \\ y = sen\left(3t - \dfrac{5\pi}{12}\right) \end{cases}$



Las cuatro gráficas juntas



Observemos que la curva parametrizada inicial satisface también las ecuaciones

$$\begin{cases} x = cos\left(2t + \dfrac{\pi}{2}\right) \\ y = sen\left(3t + \dfrac{\pi}{3}\right) \end{cases}$$

o eligiendo el parámetro p =0

$$\begin{cases} x = cos\,2t \\ y = sen\left(3t - \dfrac{5\pi}{12}\right) \end{cases}.$$

Cualquiera de estas dos ecuaciones paramétricas nos generan

$$T_3(x)^2 + T_2(y)^2 - \sqrt{3}T_3(x)\cdot T_2(y) - \frac{1}{4} = 0$$

Referencias

1. R. L. Burden y J. D. Faires, *Análisis Numérico*, Grupo Editorial IberoAmericana, 1985.
2. F. Cajori, *A History of Mathematics* , Chelsea, 1999)
3. J. Castiñeira Merino, *Lissajous Figures and Chebyshev Polynomials*, The College Mathematics Journal 34 (2003) #2, 122-127.
4. Eli Maor, *Trigonometric Delights*, Princenton University Press, 1998.
5. J. W. Rutter, *Geometry of Curves*, Chapman & Hall, 2000.
6. Vinogradov y otros, *Enciclopedia de las Matemáticas*, Editorial Mir-Rubiños, 1994.

TRIÁNGULOS ESPECIALES (3)
Francisco Bellot Rosado

III Triángulos especiales definidos por relaciones entre sus lados u otros elementos del triángulo.

III.1 El triángulo cuyos lados están en progresión aritmética: $2a = b + c$.

Propiedades:

i) $OI \perp AI$. En efecto, podemos suponer $c > b$. Si D es el pie de la ceviana de Gergonne, se tiene

$$DB^2 - DC^2 = (p-b)^2 - (p-c)^2 = a(c-b).$$

Como $2a = b + c,\ \ c^2 - b^2 = 2(DB^2 - DC^2);$ pero

$$BH_a^2 - CH_a^2 = 2(DB^2 - DC^2),$$

luego $M_1H_a = 2M_1D$. Si AIcorta de nuevo al círculo circunscrito en D_1 es sabido que $D_1M_1 \parallel AH_a$; como $I \in AD_1$, $OI \perp AI$.■

ii) $AI^2 = 2Rr$. En efecto: $AI^2 = R^2 - OI^2 = R^2 - (R^2 - 2Rr) = 2Rr$.■

Las siguientes condiciones implican $2a = b + c$:

a) $GI \parallel BC$

b) $\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} = \frac{1}{3}$.

En efecto: si $GI \parallel BC,\ GM_1 = \frac{h_a}{3},$ luego $ar = \frac{a}{3}h_a = \frac{2S}{3} = \frac{2}{3}sr$ y $a = \frac{2}{3}s,$ así que $2a = b + c$.

Por otro lado, $\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{p(p-a)}} \bullet \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}} = \frac{p-a}{p} = \frac{1}{3}$

y haciendo operaciones resulta $2a = b + c$.■

Otras propiedades de este triángulo, tomadas de *Mathesis* (*varios años*):

$IG = \frac{2}{3}(b-a);$ la recta IG contiene al punto de Nagel y al centro de gravedad del perímetro del triángulo (no debe confundirse con G; es el incentro del triángulo medial de ABC); los puntos $I, O_9,$ el punto de tangencia del círculo inscrito con BC, y el punto de Feuerbach φ, están alineados. Además se verifican, entre otras, las relaciones

$$h_a = 3r = r_a;\ \ AI^2 = 3Rr = \frac{1}{3}bc;\ \ \frac{1}{r_a} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}\right)$$
$$OI^2 = 2r(R-r);\ a^2 = 4r(2R-r).$$

La recta OI corta a AB o a AC en un punto P tal que

$$\frac{1}{AP} = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

Si $a < b < c$ están en progresión aritmética de diferencia $d,$ entonces

i) $6Rr = ac$

ii) $d = \sqrt{2r(R-2r)}$

En efecto: de un lado, $2p = 3b$ (*). Como $4Rsr = abc,$ esto es lo mismo que $2Rr \times 3b = abc \Leftrightarrow 6Rr = ac,$ que es i).

Para probar la segunda parte, tenemos $2Rr = \frac{ac}{3} = \frac{1}{3}(b^2 - d^2)$ (**)

Por otra parte,

$$r^2 = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p} = \frac{\left(\frac{b}{2}+d\right)\cdot\frac{b}{2}\cdot\left(\frac{b}{2}-d\right)}{\frac{3}{2}b} = \frac{(b+2d)(b-2d)}{12}$$

de donde $4r^2 = \frac{b^2-4d^2}{3}(***)$. De (**) y (***) resulta

$$2Rr-4r^2 = d^2 \Rightarrow d = \sqrt{2r(R-2r)}.\blacksquare$$

En *Crux Mathematicorum*, 1977, *p*.166 se demuestra que

$$a,b,c \text{ en p.a. } \Leftrightarrow p^2 = 18Rr-9r^2$$

III.2 El triángulo tal que $3a = b+c$

Propiedades de este triángulo:

i) $IG \perp BC$

ii) O equidista del incentro y del punto medio de AI

iii) Si D es el punto de tangencia del círculo inscrito con BC, el punto de Nagel del triángulo es el segundo extremo del diámetro DI.

iv) Se verifican, entre otras, las relaciones

$$\begin{aligned}
&S = ar_a;\ p^2 = 2r_br_c;\ 2r^2 = (p-b)(p-c) = (c-a)(b-a);\\
&AI^2 = \frac{bc}{2} = 4Rr;\ \frac{1}{r_a} = \frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c};\ r = \frac{r_a}{2} = \frac{IB\cdot IC}{IA};\\
&\cot\frac{A}{2} = \cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2};\ \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} = \frac{1}{2};\\
&\sin\frac{A}{2} = \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \frac{1}{3}\cos\frac{B-C}{2} = \sqrt{\frac{r}{4R}}
\end{aligned}$$

Estos resultados son de V.Thébault y R. Goormaghtigh.

III.3 El triángulo cuyos lados están en progresión geométrica: $a^2 = bc$

Propiedades de este triángulo :

i) El punto medio de AB, el pie de la simediana desde B y el pie de la bisectriz exterior desde A están alineados. También lo están el pie de la simediana desde C, el punto medio de AC y el pie de la bisectriz exterior desde A. (*Demostración con el teorema de Menelao*)

ii) La bisectriz interior desde A, la paralela media de BC y la recta que une los pies de las simedianas desde B y C son concurrentes.

iii) $\frac{a^2}{a^2+c^2} = \frac{b^2}{a^2+b^2}$

(Estos resultados son de Thébault, *Mathesis* 1930, *p*.188)

iv) Los puntos de Brocard son las intersecciones de la bisectriz AI con las mediatrices de AB y AC.

v) $\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right) < \frac{b}{a} < \frac{1}{2}\left(\sqrt{5}+1\right)$.

vi) $(p^2+4Rr+r^2)^3 = 32Rrp^4$ (*Crux Mathematicorum*, 1977,*p*.166)

III.4 El triángulo medio armónico $\frac{2}{a} = \frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

Propiedades de este triángulo:

i) Si $b < c$, entonces $b < \left(1+\sqrt{2}\right)c$

ii) Las paralelas a AB y AC trazadas por el pie de la bisectriz desde A forman con esos lados un rombo de lado $\frac{a}{2}$.

iii) La perpendicular a la bisectriz interior desde A, trazada desde el pie de esta bisectriz, corta a AB y a AC en puntos que distan a del punto A.

iv) Llevemos sobre CA y AB las longitudes $CL = AL' = \frac{a}{2}$; sean N y N' los isotómicos de L y L'. Entonces las rectas BL y CL'; BN y CN' se cortan en puntos de la mediana desde A. (Laisant, 1890)

III.5 El triángulo tal que $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

Propiedades de este triángulo :

i) $h_a = h_b + h_c$ (inmediato a partir de $ah_a = bh_b = ch_c = 2S$)

ii) La recta que une los pies de las bisectrices interiores desde B y desde C pasa por G (coord. trilineales)

Estos resultados son de R. Goormaghtigh.

III.6 El triángulo automediano $2a^2 = b^2 + c^2$

Dado el triángulo ABC, consideremos sus medianas AD, BE, CF y prolonguémoslas hasta que corten de nuevo al círculo circunscrito en L, M, N respectivamente. ¿Cuándo será isósceles el triángulo LMN?

C.F. Parry, en *The Mathematical Gazette* 1991, *p*.151, estudia este bello problema de geometría clásica y encuentra que la condición sobre los lados de ABC para que LMN sea isósceles es

$$2a^2(b^2 - c^2) = (b^2 + c^2)(b^2 - c^2),$$

que se verifica en los dos casos siguientes:

1) $b = c$ (ABC es isósceles, que es el caso obvio, en el que las medianas son proporcionales a los lados en su mismo orden)

2) $2a^2 = b^2 + c^2$ y ABC no es isósceles. Los lados son proporcionales a las medianas, *pero en un orden diferente*.

Estos triángulos se llaman automedianos.

Propiedades de los triángulos automedianos :

i) Si x, y, z son los lados de un triángulo rectángulo de lados enteros, con $x > y > z$, y $\frac{x}{2} > z$, entonces el triángulo de lados $x, (y+z), (y-z)$ es automediano. Por ejemplo, la terna pitagórica 13,12,5 da la terna automediana 13,17,7 que es el menor triángulo automediano con lados enteros.

Sólo hay un triángulo rectángulo automediano, el de lados $\sqrt{2}, \sqrt{3}, 1$. Además es el único triángulo rectángulo que tiene dos medianas perpendiculares (v. Triángulos ortomedianos)

ii) G es el punto medio de AL (cuerda en el círculo circunscrito)

iii) BGCL es un paralelogramo.

iv) BGL y CLG son indirectamente semejantes a ABC

v) La recta de Euler OG es perpendicular a la mediana AG

vi) Si K es el punto de Lemoine (o punto simediano), GK es paralela a BC

vii) Si T es el punto de Fermat (punto interno isógono), entonces BT, AT y CT forman una progresión aritmética (en ese orden).

viii) $2m_a^2 = m_b^2 + m_c^2$

ix) $2AH^2 = BH^2 + CH^2$

x) $2\cot A = \cot B + \cot C$

xi) $OK \perp AK$

xii) $\Omega\Omega' \parallel AK$ (usar coord. trilineales)

xiii) La condición necesaria y suficiente para que ABC sea automediano es que las bisectrices de $\widehat{ABC}$ y $\widehat{AGC}$, $\widehat{BCA}$ y $\widehat{BGA}$, o $\widehat{CAB}$ y $\widehat{CGB}$ se corten sobre CA, AB o BC, respectivamente.(Jiro Fukuta, en *The College Mathematics Journal*, *marzo* 1993, *p*. 186-188)

III.7 El triángulo tal que $3a^2 = b^2 + c^2$

Propiedades de este triángulo:
i) $a^2 = b\cos A$
ii) $\cot A = \cot B + \cot C$
iii) $G \in H_b H_c$
iv) $K \in BC$
v) $O \in K_b K_c$
vi) $a < \sqrt{bc}$
vii) $\frac{2}{\sqrt{5}}\sqrt{bc} < w_a < \sqrt{bc}$.

III.8 El triángulo ortomediano

Una excelente exposición sobre el triángulo ortomediano (el que tiene dos medianas perpendiculares) es de Mihaly Bencze en su revista *Gamma*, 1/1986, pp. 23-25 (en rumano).

Las siguientes propiedades son equivalentes :
i) ABC es ortomediano
ii) entre sus lados se verifica una relación de la forma $a^2 + b^2 = 5c^2$.
iii) $2\cot A = \cot B + \cot C$
iv) $\sin B \sin C \cos A = \sin^2 B - 2\sin^2 C$
v) m_a, m_b, m_c son los lados de un triángulo rectángulo
vi) $1/h_a, 1/h_b, 1/h_c$ son los lados de un triángulo ortomediano

Otras propiedades de los triángulos ortomedianos:
Si ABC es ortomediano, entonces:
viii) El coseno de uno de los ángulos del triángulo es mayor o igual que 4/5.
ix) Si $m_b \perp m_c$, entonces $\cot B + \cot C \geq \frac{2}{3}$ (S.Reich, en *American Mathematical Monthly*, 10/1965)
x) Si $a^2 + b^2 = 5c^2$, entonces $3c^2 = p^2 - r^2 - 4Rr$; $3pr\cot C = p^2 + r^2 - 4Rr$.
xi) $\left(\frac{2}{h_c}\right)^2 = \frac{1}{m_b^2} + \frac{1}{m_a^2}$

III.9 El triángulo seudo-pitagórico $a^4 = b^4 + c^4$

Propiedades de este triángulo:
i) $\tan\omega = \sin 2A$
ii) $2\sin^2 A = \tan B \tan C$

III.10 El triángulo tal que $a(b+c) = b^2 + c^2$

Propiedades de este triángulo:
i) La simediana desde A pasa por el punto de tangencia del círculo inscrito con BC.
ii) Las rectas AI y CF (F, punto de tangencia del incírculo con AB) se cortan sobre la mediana BG
iii) IK y NΓ son paralelas a BC
iv) $\widehat{A} \leq 60$º
v) Se verifican, entre otras, las relaciones

$$(p-a)^2 = (p-b)(p-c);\ \frac{(p-a)}{bc} = \frac{(p-b)}{c^2} = \frac{(p-c)}{b^2}$$

$$r_a^2 = r_b r_c;\quad \tan A = \sin B + \sin C;\ \cos A = \frac{a}{b+c}$$

III.11 Los triángulos en donde un exradio es igual a un lado

Sea $r_a = a$. Propiedades de este triángulo:
i) $a + h_a = b + c$
ii) $h_a = 2(p - a)$
iii) $\frac{1}{a} = \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a}$
iv) $(r_b + r_c - r_a)(r_b + r_c) = r_b r_c$
v) $\cos\frac{A}{2} = \cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$
vi) $\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2} = 1$

Sea $r_b = a$. Propiedades de este triángulo:
i) $h_a = 2(p - b)$
ii) $p(p - a)(p - c) = a^2(p - b)$
iii) $\cot\frac{B}{2} - \tan\frac{C}{2} = 1$

III.12 El triángulo tal que $m_a^2 = bc$
Propiedades de este triángulo:
i) Si los vértices B y C son fijos, A describe una hipérbola equilátera que es tangente a la bisectriz AI; I e I$_a$ se mueven sobre perpendiculares a BC en los puntos de tangencia del incírculo y el excírculo con BC; el ortocentro describe una cuártica.
ii) Sean K' y G' los puntos donde la simediana AK y la mediana AG cortan de nuevo a la circunferencia circunscrita. Se verifican las relaciones
$m_a = AK', h_a = \frac{1}{4}a\cot\frac{A}{2}; a = |b - c|\sqrt{2}; a^2 = 8rr_a$.

III.13 El triángulo tal que $a^2(b^2 + c^2) = b^4 + c^4$
Propiedades de este triángulo:
i) $\Omega\Omega' \perp BC$
ii) Ω y Ω' están situados respectivamente sobre h_b y h_c
iii) El centro del círculo de Brocard está sobre la mediana AG
iv) La mediana desde C y la altura desde B se cortan sobre la simediana AK.
v) El ortopolo de la recta de Euler es un punto de AG
vi) K está en la paralela a BC trazada por el punto de coordenadas baricéntricas (a^4, b^4, c^4)
vii) La recta H_bH_c pasa por el punto medio de la tercera altura, h_a.
viii) $HO \perp AK$
ix) $\cot^2 A = \cot B \cot C$
x) $\cos(B - C) = \frac{bc}{a^2}; \frac{\cos B}{\cos C} = \frac{c^3}{b^3}; \frac{\cot A}{\cot B} = \frac{\cot C}{\cot A} = \frac{b^2}{c^2}$
Estos resultados son de V. Thébault.

III.14 El triángulo escaleno en el que una altura, una bisectriz y una mediana son iguales
Supongamos ABC tal que $h_a = w_b = m_c$.
i) El ángulo B es raíz de la ecuación

$$\sin(30^\circ \pm B)\left(1 - \sin\frac{B}{2}\right) = \sin\frac{B}{2}$$

ii) Poniendo $t = \frac{a}{c}$ se obtiene

$$4t^5 - 24t^4 + 49t^3 + 21t^2 - t - 1 = 0$$

(Lemoine y Delahaye, 1890 y 1906)

III.15 El triángulo en el que la altura desde A, la bisectriz desde B y la mediana desde C son concurrentes

Propiedades de este triángulo:

i) $(a+c)(b^2-c^2) = a^2(a-c)$

ii) $\cos B = \frac{a}{a+c}$

iii) $\tan B = \sin A : \cos C$

iv) $\tan C = \tan^2 B \tan\frac{B}{2}$

v) Si $\widehat{C} > 90^{\circ}$, h_a y m_c se cortan sobre la bisectriz exterior desde B.

(Déprez, 1889 y Lemoine, 1885)

III.16 El triángulo en el que el pie de la bisectriz exterior desde A, el pie de la mediana desde B y el de la altura desde C están en línea recta

Propiedades de este triángulo:

i) $c\cos A = a\cos B$

ii) $\cos A = \frac{c}{b+c}$

iii) $\cos B = \frac{c^2}{a(b+c)}$

iv) $BH_c = AH_b$

v) La perpendicular en B sobre AB corta a AC en un punto L tal que $CL = c$.

(Delahaye, *Mathesis* 1906)

III.17 El triángulo en el que la recta H_aH_b pasa por el simétrico de A con respecto a O

Propiedades de este triángulo:

i) $\cos 2C - \cos 2A - 3\cos 2B = 1$

ii) $a^2 + 3b^2 - c^2 = 8R^2$

(*Barisien*, *Mathesis* 1914)

III.18 El triángulo donde la circunferencia circunscrita y la de los nueve puntos son ortogonales

Propiedades de este triángulo:

i) $HO = R\sqrt{5}$

ii) $\cos A\cos B\cos C = -\frac{1}{2}$

iii) $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = 1$

iv) $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 1$

v) $a^2 + b^2 + c^2 = 4R^2$

vi) $\cot\omega = R^2/S = 1/(2\sin A\sin B\sin C)$

III.19 El triángulo con dos simedianas perpendiculares

Supongamos $BK \perp CK$. Entonces se tiene:

i) Uno de los ángulos, $\widehat{B}$ o $\widehat{C}$, es obtuso.

ii) $a^4 = b^4 - 4b^2c^2 + c^4$

iii) $2\sin^2 A + \tan B\tan C = 0$

iv) $\widehat{BGC} = 90^{\circ} + A$

v) La circunferencia circunscrita a BGC pasa por los puntos de intersección de AB, AC respectivamente, con las perpendiculares a AC en C, a AB en B.Tiene como centro el punto $T_a = t_b \cap t_c$, siendo t_b la tangente en B a la circunferencia circunscrita a ABC en B (análoga definición para t_c), y como radio T_aB.

Problemas sobre triángulos especiales definidos por relaciones entre sus lados u otros segmentos del triángulo

Problema 60 : *Si los lados del triángulo ABC verifican*

$$(b+c)\sqrt{2} = a+b+c,$$

probar que GI pasa por el pie de la altura desde A.(*Mathesis* 1935)

Problema 61: *Los lados de un triángulo están en progresión geométrica, y además verifican* $\frac{c-a}{a} = \frac{b}{c+a}$. Determinar los ángulos.

(Agrégation 1880)

Problema 62: *Los lados de un triángulo verifican*

$$b^2+c^2 = (b+c)a.$$

Probar que r_a, r_b, r_c *están en progresión geométrica.* (*Gazeta Matematica* 1962)

Problema 63 : *Si dos medianas (simedianas) son perpendiculares, las simedianas (medianas) correspondientes cortan al círculo circunscrito en dos puntos diametralmente opuestos, y recíprocamente. El triángulo podario de K (de G) es rectángulo.* (*Thébault, en Mathesis* 1945)

Problema 64 : *El triángulo ABC es tal que la mediana y la simediana desde A son perpendiculares. Entonces*:

i) $a^2 = -2bc\sqrt[3]{\cos A}\left(\sqrt[3]{\cos A}+1\right),\ A > 90^\circ$

ii)

$$\frac{b^2+c^2}{2bc} = \frac{m_a}{s_a}.$$

Problema 65 : *Encontrar la condición para que las simedianas BK, CK sean perpendiculares.*(*Mathesis*, 1903)

Problema 66: *En el triángulo ABC, la altura desde A, la bisectriz desde B y la mediana desde C son concurrentes o tienen sus pies en línea recta, según que los productos* $\sin A\cos B, \sin B\cos C$ sean iguales u opuestos. (Mathesis, 1958)

Problema 67: *Si en el triángulo ABC, OIH es isósceles, entonces*

$$OH = \max(a,b,c) - \min(a,b,c).$$

(Gazeta matematica 9/1995)

Problema 68: *Demostrar que si el círculo circunscrito a ABC es tangente al de los* 9 *puntos, entonces*

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2.$$

Problema 69: *Si el círculo inscrito en ABC pasa por O, calcular* $\frac{R}{r}$ *y probar que*

$$\cos A + \cos B + \cos C = \sqrt{2}.$$

Problema 70: *Demostrar que la condición necesaria y suficiente para que la mediana desde B sea dividida en tres partes iguales por el círculo inscrito, es que entre los lados del triángulo se verifique*

$$\frac{a}{5} = \frac{b}{10} = \frac{c}{13}.$$

(Kvant, revista escolar rusa)

Equivalencias observadas entre unas definiciones de triángulos especiales y otras

Los triángulos definidos por las condiciones II.7 y III.7 son los mismos, así como los definidos por las parejas $(II.13, III.10)$ y $(II.14, III.13)$.

BIBLIOGRAFÍA SOBRE GEOMETRÍA DEL TRIÁNGULO
(*de la Biblioteca particular de Francisco Bellot Rosado*)

REVISTAS
1. Colección *Mathesis* (1888-1962)
2. Colección *Nieuw Archieff voor Wiskunde* (1964-1985)
3. Colección *Gazeta Matematica* (1895-2004),*en rumano*.
4. Colección *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1852-1907)
5. Colección *Praxis der Mathematik* (1959-1995)
6. Colección *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*
7. Colección *Matematyka&Informatika* (1987-2001),*en búlgaro*.
8. Colección *The Mathematical Gazette* (1902-2004)
9. Colección *College Mathematics Journal* (1970-2004)
10.Colección *Mathematics Magazine* (1928-2004)
11.Colección *Crux Mathematicorum* (1975-2004)
12.Colección *The American Mathematical Monthly* (1894-2004)
13.Colección *Elemente der Mathematik* (1946-2004)
14.Colección *Kvant* (1987-2004)
15.Colección *Kömal* (*Közepiskolai Matematikai Lapók*) 1894-2004
16.Colección *Mathematics&Informatics Quarterly* (1991-2004)
17.Colección *Forum Geometricorum* (*digital*) 2001-2004
18.Colección *Mathematics Competitions* (1984-2004)

LIBROS
1. ALEXANDROFF: Aufgaben aus der niederer Geometrie,Leipzig 1903
2. ALTSHILLER-COURT:College Geometry, Barnes 1952
3. AREF-WERNICK:Problems and solutions in Euclidean Geometry, Dover 1968
4. ARTMANN:Euclid:The Creation of mathematics, Springer 1991
5. ASKWITH:Pure Geometry, Cambridge U.P. 1921
6. AYME:Méthodes & Techniques en Géométrie. Ellipses 2003
7. BAKER:A collection of formulae for the area of a plane triangle
8. BAPTIST:Die Entwicklung der neueren Dreiecksgeometrie, Mannheim 1992
9. BOLTYANSKI-SOIFER:Geometric etudes in Combinatorial Mathematics, Colorado Springs 1991
10.BOTTEMA:Hoofdstukken uit de Elementaire Meetkunde, Utrecht 1987 (en holandés)
11.BOTTEMA et al.:Geometric Inequalities, Groningen 1968
12.BRANZEI:Notes on Geometry, Ed.Paralel45, 1995
13.BRANZEI-ANITZA.S-ANITZA A.:Competentza si performantza in Geometrie, I,II; Ed.MINIED, Iasi, 1992
14.BRANZEI-ANITZA.S.-COCEA:Planul si spatziul euclidian, Ed. Academiei, Bucarest 1986
15.BRANZEI-MICULITZA: Analogii triunghiu-tetraedru, Ed.Paralel45, 2000
16.CASEY:A sequel to Euclid, Dublin 1892
17.CASEY: A treatise on the analytical geometry of the point, line,circle and conic sections, Dublin 1885
18.CINDREA: Geometrie (Matematica de drag), Bucarest 2003
19.COCEA:200 de probleme din geometrie triunghiul echilateral, Ed. Asachi, Iasi, 1992
20.COXETER-GREITZER: Geometry revisited, M.A.A.1967
21.CROFT-FALCONER-GUY:Unsolved problems in geometry, Springer, 1991.
22.DALLE:2000 théorèmes et problèmes de Géométrie, Namur 1912
23.DAVIS:Modern College Geometry, Addison-Wesley, 1949

24.DONATH:Die merkwürdigen Punkte und Linien des ebenen Dreiecks, DVW, Berlin 1969
25.DÖRRIE: 100 Great problems of Elementary Mathematics, Dover 1965
26.DRAGHICESCU-MASGRAS: Probleme de Geometrie, Ed.Tehnica 1987
27.DUDLEY: A budget of trisections, Springer 1987
28.DURELL-ROBSON: Advanced Trigonometry, Londres 1937
29.EFREMOV: Nueva geometria del triángulo (en ruso), Odessa 1902
30.F. G.-M.: Exercices de Géométrie, Ed.Gabay, Paris 1991
31.FERRERS: Trilinear Coordinates, Londres 1876
32.FLOREA: Abordarea globala Geometriei triunghiului cu implicatie creative, Ed. ALL, Bucarest 1996
33.FUKAGAWA-PEDOE: Japanese Temple Geometry Problems, Winnipeg 1989
34.FUKAGAWA-RIGBY: Traditional Japanese Mathematics Problems of the XVIII & XIX Century, SCT Publishers, Singapore 2002
35.GALLATLY: The modern geometry of the triangle.
36.GOORMAGHTIGH: Terminologie dans la géométrie du triangle et du tetraèdre, *Mathesis*,varios años.
37.GUGGENHEIMER: Plane Geometry and its Groups, Holden Day 1987
38.HADAMARD: Leçons de géométrie, Ed. Gabay, 1988
39.HAHN: Complex numbers and geometry, M.A.A. 1994
40.HOBSON: Plane Trigonometry, Cambridge U.P. 1921
41.HONSBERGER: Episodes in the nineteenth and twentieth century euclidean geometry, M.A.A. 1995
42.IONESCU-TZIU: Geometrie plana si in spatziu pentru admiter in Facultate, Ed. Albatros, Bucarest 1976
43.IWATA: Enciclopedia de geometría, 8 vols. (en japonés)
44.JOHNSON: Advanced Euclidean Geometry, Dover 1960
45.LALESCU: La géométrie du triangle, Ed. Gabay 1987
46.LEBOSSÉ-HÉMERY: Géométrie, Ed. Gabay, 1990
47.LEMAIRE: Problèmes de Géométrie, Vuibert, Paris 1923
48.LEMOINE: Suite des théorèmes et de résultats concernant la géométrie du triangle. Paris 1900
49.LOOMIS: The Pythagorean proposition, NCTM 1968
50.MARTIN: Geometric constructions, Springer 1997
51.MAXWELL: Geometry by transformations, Cambridge U.P. 1975
52.MIHALESCU: Geometrie elementelor remarcabile, Ed. Tehnica, Bucarest 1957
53.MITRINOVIC et al.: Recent Advances in Geometric Inequalities, Kluwer 1989
54.MODENOV: Problems in Geometry, Ed. Mir, Moscú, 1981
55.NEUBERG: Bibliographie des triangles spéciaux, Lieja 1924
56.OGILVY: Excursions in geometry, Dover, 1969
57.PAPELIER: Exercices de géométrie moderne, Ed. Gabay, 1996
58.PETERSEN: Métodos y teorías para la resolución de problemas de construcciones geométricas (traducción y apéndices de J. Gallego Díaz), Ed. Giner, Madrid 1955
59.PRASOLOV: Zadachi po planimetrii (en ruso) I,II; Moscú 1991
60.PRASOLOV-TIKHOMIROV: Geometry, AMS 2001
61.PRITCHARD, Ed.: The changing shape of geometry, Cambridge U.P., 2003
62.PUIG ADAM: Geometría métrica, Madrid 1952
63.SHARIGIN: Two articles and 200 problems, ed.privada, 2000
64.SHARIGIN: Problemas de Geometría (Planimetría), Mir 1989
65.SHARIGIN: Problems in solid geometry, Mir 1986
66.SOIFER: How does one cut a triangle?, Colorado Springs 1990
67.SORTAIS: La géométrie du triangle, Hermann, Paris 1987
68.TABOV: Homotecia en problemas (en búlgaro), Sofia 1989

69.TURTOIU: Probleme de Trigonometrie, Ed. Tehnica, Bucarest 1986
70.TZITZEICA: Probleme de Geometrie,Ed. Tehnica, Bucarest, 1961
71.VARILLY: Elementos de geometría plana, S.José, 1988
72.VELASCO: Tratado de geometría, Ed. Limusa, 1983
73.VIGARIÉ: Géométrie du triangle, 1887
74.VIRICEL: Le théorème de Morley, A.D.C.S. 1993
75.VODA: Vraja geometriei demodata, Ed. Albatros, Bucarest 1983
76.VODA: Triunghiul: ringul cu trei coltzuri, Ed. Albatros 1979
77.VODA: Surprize in matematica elementara, Ed. Albatros 1981
78.YAGLOM: Geometric transformations I,II,III; M.A.A. 1962
79.ZETELII: Nueva geometría del triángulo (en ruso), Moscú 1962

<u>Cinco problemas de la Olimpiada Británica</u>

Soluciones de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, España

1996,#1

Una función *f* está definida para todos los enteros positivos y satisface

$$f(1)=1996, \qquad f(1)+f(2)+\ldots+f(n)=n^2 f(n), \quad \forall n>1.$$

Calcular el valor exacto de *f*(1996).

Solución

Demostraremos por inducción que

$$f(n)=\frac{3992}{n(n+1)}.$$

Obviamente, la hipótesis de inducción se cumple para n=1. Supongamos que se cumple hasta n=m. Entonces, para n=m+1, se tiene:

$$f(m+1)=\frac{f(1)+f(2)+\ldots+f(m)}{(m+1)^2-1}=\frac{m^2 f(m)}{m^2+2m}=\frac{m}{m+2}\frac{3992}{m(m+1)}=\frac{3992}{(m+1)(m+2)}.$$

Luego la hipótesis de inducción se cumple para todo n. En particular,

$$f(1996)=\frac{3992}{1996\cdot 1997}=\frac{2}{1997}.$$

1995,#1

Hallar todos los cuadrados perfectos que terminan en tres cuatros. Probar que ningún cuadrado perfecto puede terminar en cuatro cuatros.

Solución

Sea x un entero positivo tal que su cuadrado termina en tres cuatros. Entonces, $x^2-144=(x+12)(x-12)$ acaba en 300, es decir, $(x+12)(x-12)$ es múltiplo de 4 pero no de 8, y es múltiplo de 25. Si x fuera impar, el producto anterior sería impar. Si x fuera múltiplo de 4, el producto anterior sería múltiplo de 16, pues tanto $x+12$ como $x-12$ sería múltiplos de 4. Luego x es par pero no múltiplo de 2. Entonces, $x+12$ y $x-12$ son pares, y como no pueden ser simultáneamente múltiplos de 5, uno u otro es divisible por 50 pero no por 100. Luego x acaba en 38 o 62. Como 62+38=100, nos basta entonces considerar cualquier entero de la forma $x=100y+38$, pudiendo ser y un entero positivo o negativo. Entonces,

$$x^2=\left(100y+38\right)^2=10^4y^2+7600y+1444.$$

Para que este número acabe en tres cuatros, $7600y$ debe acabar en tres ceros, luego y debe ser múltiplo de 5, acabando en 5 o 0. Pero entonces $7600y$ acaba en 8000 o 6000, luego x^2 acaba en 9444, 3444, 7444 o 5444, y ningún cuadrado perfecto puede acabar en cuatro cuatros. Además, los cuadrados perfectos que acaban en tres cuatros son todos los de la forma $(500z+38)^2$, con z tomando cualquier valor entero, positivo o negativo.

1993,#3

Para cada entero positivo c, la sucesión de enteros $\{u_n\}$ se define mediante

$$u_1 = 1, \qquad u_2 = c, \qquad u_n = (2n+1)u_{n-1} - (n^2-1)u_{n-2}, \quad n \geq 3.$$

Determinar los valores de c para los que esta sucesión tiene la siguiente propiedad:

u_i divide a u_j siempre y cuando $i \leq j$.

Solución

Es trivial comprobar por sustitución que

$$u_3 = 7u_2 - 8u_1 = 7c - 8; \qquad u_4 = 9u_3 - 15u_2 = 24(2c-3);$$

$$u_5 = 11u_4 - 24u_3 = 120(3c-5); \qquad u_6 = 13u_5 - 35u_4 = 120(25c-44).$$

Como $u_2 = c$ debe dividir a u_3, entonces c debe dividir a 8. Además, para $c=1$, 240 divide a u_5 pero no a u_6, mientras que para $c=8$, 16 divide a u_3 pero no a u_4. Luego sólo puede ser $c=2$ o $c=4$. Demostraremos por inducción que, en ambos casos, y para $n \geq 2$,

$$u_n = (n+c-2)u_{n-1}.$$

La hipótesis de inducción se cumple trivialmente para $n=2$. Supongamos que la hipótesis se cumple para $n=m$. Entonces, para $n=m+1$,

$$\begin{aligned} u_{m+1} &= (2m+3)u_m - (m^2+2m)u_{m-1} = \left[(2m+3)(m+c-2) - (m^2+2m)\right]u_{m-1} \\ &= (m^2+2mc-3m+3c-6)u_{m-1} = \left[(m+c-2)(m+c-1) - (c-2)(c-4)\right]u_{m-1}. \end{aligned}$$

Ahora bien, si $c=2$ o $c=4$,

$$u_{m+1} = (m+c-2)(m+c-1)u_{m-1} = (m+c-1)u_m = \left[(m+1)+c-2\right]u_m,$$

cumpliéndose entonces la hipótesis de inducción para todo n. Al ser $n+c-2>1$ para $n \geq 2$, se tiene que u_{n-1} divide a u_n con $u_n > u_{n-1}$. Es trivial entonces demostrar por inducción sobre k que, para $n \geq 2$, u_{n-k} divide a u_n pero no al revés, que es obviamente cierto para $k=1$, y como $u_{n-(k+1)}$ es menor que y divide a u_{n-k}, y éste divide a u_n, entonces $u_{n-(k+1)}$ es menor que y divide a u_n. Luego u_i divide a u_j siempre y cuando $i \leq j$, si y sólo si $c=2$ o $c=4$.

1991,#3

ABCD es un cuadrilátero inscrito en una circunferencia de radio r. Las diagonales AC y BD se cortan en E. Probar que, si AC es perpendicular a BD, entonces

$$EA^2 + EB^2 + EC^2 + ED^2 = 4r^2 .$$

¿Es cierto que, si se cumple la anterior igualdad, entonces AC es perpendicular a BD? Justifique la respuesta.

Solución

Si E coincide con el centro O de la circunferencia, $EA=EB=EC=ED=r$, cumpliéndose trivialmente la relación. Supondremos durante el resto del problema que esta situación no se da.

Supongamos que AC y BD son perpendiculares. Aplicando el teorema de Pitágoras,

$$EA^2 + EB^2 + EC^2 + ED^2 = AB^2 + CD^2 = 4r^2\left[\sin^2\left(\angle ACB\right) + \sin^2\left(\angle CBD\right)\right].$$

Ahora bien, al ser BEC rectángulo en E, se tiene que la suma de estos dos ángulos es

$$\angle ACB + \angle CBD = \angle BCE + \angle CBE = p - \angle BEC = \frac{p}{2} .$$

Luego sus senos al cuadrado suman 1, de donde se obtiene la igualdad del enunciado.

Supongamos ahora que se da la igualdad del enunciado, pero que ni E coincide con O, ni AC y BD son perpendiculares. Sean entonces B' y D' los puntos donde la perpendicular a AC por E corta a la circunferencia. Por el resultado anterior, y asumiendo que se da la relación del enunciado, se tiene que

$$EB'^2 + ED'^2 = EB^2 + ED^2 = 4r^2 - EA^2 - EC^2 .$$

Pero además, por el teorema de la potencia, $EB\cdot ED=EB'\cdot ED'$. Luego

$$\left(EB' + ED'\right)^2 = \left(EB + ED\right)^2 ; \qquad \left(EB' - ED'\right)^2 = \left(EB - ED\right)^2 ,$$

y, sin pérdida de generalidad, $EB=EB'$ y $ED=ED'$. Como además E y O no coinciden por hipótesis, B y B' son simétricos con respecto a OE, y también lo son D y D'.

De aquí se deduce que la igualdad del enunciado se da si y sólo si se cumplen una de las tres siguientes condiciones:

1) AC y BD se cortan en el centro O de la circunferencia circunscrita a $ABCD$.
2) AC y BD son perpendiculares.
3) BD y la perpendicular a AC por E son simétricas con respecto a la recta OE.

1998,#1

Hallar todos los enteros *a*,*b*,*c* tales que

$$\left(x-a\right)\left(x-10\right)+1=\left(x+b\right)\left(x+c\right) \quad \text{para todo } x.$$

Solución

La igualdad se debe cumplir en particular para x=10, luego

$$1=\left(b+10\right)\left(c+10\right).$$

Por lo tanto, como los dos factores en el miembro de la derecha son enteros, sus valores absolutos deben ser iguales a 1, ambos con el mismo signo, siendo entonces bien $b=c=-9$, bien $b=c=-11$. Tomando entonces $x=0$, se deduce que $10a+1$ debe valer, respectivamente, 81 y 121, siendo entonces $a=8$ y $a=12$. Luego (a,b,c) es igual bien a (8,–9,–9), bien a (12,–11,–11).

Problemas de nivel medio y de Olimpiadas (19)

Selección de Problemas de la Olimpiada de Australia 2004

1.Determinar todos los pares (a,b) de números reales tales que la ecuación

$$x^3 + 3x^2 + ax + b = 0$$

tiene tres raíces reales que pueden formar progresión aritmética.

2. Sea ABC un triángulo equilátero, y D un punto del lado AB, situado entre A y B. Sea E un punto sobre AC tal que DE es paralelo a BC. Sea F el punto medio de CD y G el circuncentro de ADE.

Hallar los ángulos del triángulo BFG.

3.Determinar todos los enteros no negativos m y n tales que

$$6^m + 2^n + 2$$

es un cuadrado perfecto.

4.Sea ABCD un paralelogramo. Supongamos que existe un punto P en su interior tal que

$$\widehat{ABP} = 2\widehat{ADP}, \quad \text{y} \quad \widehat{DCP} = 2\widehat{DAP}.$$

Demostrar que AP = BP = CP.

Óscar Ferreira Alfaro
Profesor de Secundaria
Colegio Sagrada Familia P.J.O (Valencia)
España

Solución a dos de los cinco problemas rumanos

Nº 18.2:

Hallad las cifras a y b para que el número (escrito en el sistema decimal) $\overline{543ab2}$ sea divisible por 42.

Solución:

Sea $P=\overline{543ab2}=42k, k\in$. Los valores mínimo y máximo en los que oscilará P se producirán, respectivamente, cuando

$$a=b=0\rightarrow 543002$$
$$a=b=9\rightarrow 543992$$
$$543002\leq 42k\leq 543992 \quad\rightarrow\quad 12929\leq k\leq 12952$$

por lo que tenemos $12952-12929+1=24$ posibles valores para k, y podemos dar una solución general para P. Si $k=12929\rightarrow P=543018$

$$P=543018+42t, t\in \quad ,0\leq t\leq 23$$

Y de esta relación debemos buscar los valores de P acabados en 2.

$$P=42\cdot(12929+t)$$

Si P acaba en 2, necesariamente la expresión $f(t)=12929+t$ ha de acabar en 1 ó 6. El siguiente cuadro de valores nos da todas las soluciones al problema:

t	***P***	***a***	***b***
2	543102	1	0
12	543522	5	2
22	543942	9	4
7	543312	3	1
17	543732	7	3

Nº 18.5:

Halla una terna de enteros positivos (x,y,z) que cumplan:

$$x^2+y^2+z^2=41^{13}$$

Solución:

A priori, la ecuación diofántica no lineal parece de difícil solución. Sin embargo, realizando los cambios siguientes

$$x=41^6a \qquad y=41^6b \qquad z=41^6c$$

el problema ofrece un resultado rápido.

$$x^2+y^2+z^2=41^{13} \;\Rightarrow\; \left(41^6a\right)^2+\left(41^6b\right)^2+\left(41^6c\right)^2=41^{13}$$
$$41^{12}\left(a^2+b^2+c^2\right)=41^{13} \;\Rightarrow\; a^2+b^2+c^2=41$$

Una terna válida es: $(a,b,c)=(1,2,6)$

La solución será: $(x,y,z)=\left(41^6, 2\cdot 41^6, 6\cdot 41^6\right)$

Puesto que no debemos olvidar la simetría de dichas soluciones, el conjunto completo de soluciones se refleja en el siguiente cuadro:

x	***y***	***z***
41^6	$2\cdot 41^6$	$6\cdot 41^6$
$6\cdot 41^6$	41^6	$2\cdot 41^6$
$2\cdot 41^6$	$6\cdot 41^6$	41^6
$2\cdot 41^6$	41^6	$6\cdot 41^6$
$6\cdot 41^6$	$2\cdot 41^6$	41^6
41^6	$6\cdot 41^6$	$2\cdot 41^6$

Una segunda terna válida es: $(a,b,c)=(4,4,3)$

La solución será: $(x,y,z)=\left(4\cdot 41^6, 4\cdot 41^6, 3\cdot 41^6\right)$

x	***y***	***z***
$4\cdot 41^6$	$4\cdot 41^6$	$3\cdot 41^6$
$4\cdot 41^6$	$3\cdot 41^6$	$4\cdot 41^6$
$3\cdot 41^6$	$4\cdot 41^6$	$4\cdot 41^6$

Problemas para los más jóvenes (19)

XIII Olimpiada Provincial de Matemáticas 2005, para alumnos de 2º y 4º de E.S.O. Valladolid, abril de 2005

Segundo de E.S.O.(alumnos de 13 años de edad)

Problema 1: Se ha diseñado un programa de ordenador para contar las cifras de los números naturales que se van introduciendo desde el 1 en adelante.

Por ejemplo, si se han introducido los números

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13$$

el programa da como resultado 17 cifras.

Después de un determinado tiempo, el programa da como resultado 1788 cifras. ¿Cuál fué el último número introducido?

Problema 2: Se quiere reconstruir un claustro de forma cuadrada, del cual sólo ha quedado un pozo P, que por la documentación existente se sabe que se encontraba a la misma distancia de dos esquinas contiguas y del lado opuesto a las mismas. Dicha distancia es de 10 metros.

¿Cuál debe ser la medida del lado del cuadrado?

¿Cuál es el área de la estrella de cuatro puntas obtenida dibujando los otros tres puntos análogos al P, es decir, cumpliendo las mismas condiciones que P?

¿Cuál es el lado del cuadrado cuyos vértices son P y los otros tres puntos de la pregunta anterior?

Problema 3: Juan quiere comprar un televisor. Si lo compra al contado le descuentan 1/10 del precio marcado. Si lo compra a plazos, le incrementan 1/5 al precio marcado. Si lo paga en seis plazos, cada uno será de 72 euros.

¿Cuánto dinero se ahorra si decide pagarlo al contado, en lugar de en los seis plazos?

Problema 4: En un congreso de Matemáticas, los asistentes, en número menor que 5000, pertenecen a delegaciones de Alemania, Francia, Italia, Portugal y España. Todas las delegaciones tienen el mismo número de miembros.

Sabiendo que hay doble número de alemanes que de alemanas, triple número de franceses que de francesas, cuatro veces más italianos que italianas, cinco veces más portugueses que portuguesas, y seis veces más españoles que españolas, ¿cuántas mujeres participan en el Congreso?

Cuarto curso de E.S.O. (alumnos de 15 años de edad)

Problema 2: Disponemos de un número de bombones comprendido entre 315 y 400. Nos dan un cierto número de cajas para empaquetarlos y en cada caja caben exactamente 7 bombones.

Cuando hemos llenado las 5/6 partes de las cajas, nos damos cuenta de que todavía nos quedan los 2/5 de bombones sin empaquetar. ¿Cuántas cajas más necesitamos para que se puedan empaquetar todos los bombones?

Problema 3: Tres semicírculos del mismo radio R tienen sus centros C_1, C_2, C_3 en línea recta, en ese orden. Los tres semicírculos están en el mismo semiplano de los dos que determina la recta $C_1C_2C_3$.

Un cuarto círculo, de radio r, es tangente a los tres semicírculos anteriores, externamente a C_1 y C_3 e internamente a C_2.

Encontrar la relación existente entre r y R.

Problema 4: Tres personas deciden jugar a tirar monedas a ver si coinciden en cara o cruz. Cada uno arroja una moneda, y el que no coincide con los otros dos, pierde.

El perdedor debe pagar a cada oponente la misma cantidad que éste tiene en ese momento. Después de tres jugadas, cada jugador ha perdido una vez y tiene 24 euros. ¿Cuánto tenía cada uno al principio?

Problema 86

Propuesto por José Luis Díaz Barrero, Barcelona, España.

Demostrar que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\sin^3(ka)-\sin^3\left(\frac{p}{3}-ka\right)}{\sin(ka)+\sin\left(ka-\frac{p}{3}\right)}\right]$$

no depende de *a* y calcularlo.

Solución de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, Navarra, España.

Utilizando la fórmula de De Moivre, se tiene

$$\sin(3a)=3\cos^2(a)\sin(a)-\sin^3(a)=3\sin(a)-4\sin^3(a);$$

$$\sin^3(ka)-\sin^3\left(\frac{p}{3}-ka\right)=\frac{3}{4}\sin(ka)-\frac{1}{4}\sin(3ka)-\frac{3}{4}\sin\left(\frac{p}{3}-ka\right)+\frac{1}{4}\sin(p-3ka)$$
$$=\frac{3}{4}\sin(ka)+\frac{3}{4}\sin\left(ka-\frac{p}{3}\right).$$

Por lo tanto, cada sumando es igual a 3/4 independientemente de *a*, salvo en los casos en los que tanto numerador como denominador sean iguales a 0. Luego si numerador y denominador no se anulan para ningún *k*, entonces el límite pedido se halla trivialmente:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\sin^3(ka)-\sin^3\left(\frac{p}{3}-ka\right)}{\sin(ka)+\sin\left(ka-\frac{p}{3}\right)}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{4}=\frac{3}{4}.$$

El denominador se anulará para algún *k* cuando:

$$\sin(ka)+\sin\left(ka-\frac{p}{3}\right)=\frac{3}{2}\sin(ka)-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(ka)=\sqrt{3}\sin\left(ka-\frac{p}{6}\right)=0;$$

$$ka-\frac{p}{6}=mp\;; \qquad\qquad a=\left(\frac{6m+1}{6k}\right)p\;.$$

Si esta condición se cumple para algún entero *m* y algún entero positivo *k*, entonces hay sumandos que son indeterminados, del tipo 0/0, y en ese caso la suma, y por lo tanto el límite, no se podrían definir.

Problema 87

Propuesto por Laurentiu Modan, Bucarest, Rumanía. Ligeramente modificado por el editor.

Se considera la sucesión $\{x_n\}$ definida por

$$x_n = \ln\left[\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{2^{2^{k-1}}}\right)\right].$$

i) Probar que

$$\left(1-2^{-n}\right)\ln 2 < x_n < 2-\frac{1}{2^{n-1}}, \quad \forall n \geq 1.$$

ii) Estudiar la convergencia de $\{x_n\}$ y, en su caso, hallar el límite.

Solución de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, Navarra, España.

ii) Demostraremos por inducción que, para todo $n\geq 1$,

$$x_n = \ln\left[2\left(1-\frac{1}{2^{2^n}}\right)\right] = \ln 2 + \ln\left(1-\frac{1}{2^{2^n}}\right).$$

La igualdad es obvia para $n=1$, pues

$$x_1 = \ln\left[1+\frac{1}{2^{2^0}}\right] = \ln\left[1+\frac{1}{2}\right] = \ln\left[2-\frac{1}{2}\right] = \ln\left[2\left(1-\frac{1}{4}\right)\right] = \ln\left[2\left(1-\frac{1}{2^{2^1}}\right)\right].$$

Si la igualdad se cumple para $n=m$, entonces para $n=m+1$, se tiene que

$$x_{m+1} = \ln\left[\prod_{k=1}^{m+1}\left(1+\frac{1}{2^{2^{k-1}}}\right)\right] = x_m + \ln\left[\left(1+\frac{1}{2^{2^m}}\right)\right] = \ln\left[2\left(1-\frac{1}{2^{2^m}}\right)\left(1+\frac{1}{2^{2^m}}\right)\right]$$
$$= \ln\left[2\left(1-\frac{1}{\left(2^{2^m}\right)^2}\right)\right] = \ln\left[2\left(1-\frac{1}{2^{2^{m+1}}}\right)\right].$$

Esto completa la demostración. Por lo tanto, es obvio que la sucesión converge, siendo

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\ln\left[2\left(1-\frac{1}{2^{2^n}}\right)\right] = \ln 2 + \lim_{n\to\infty}\ln\left(1-\frac{1}{2^{2^n}}\right) = \ln 2 + \ln\left(\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^{2^n}}\right)\right)$$
$$= \ln 2 + \ln 1 = \ln 2.$$

i) Acotaremos primero la sucesión superiormente. Al ser $\ln(1+x)<x$ para todo x positivo, y ser $2^n>n$ para todo entero positivo n, se tiene

$$x_{n+1} - x_n = \ln\left(1+\frac{1}{2^{2^n}}\right) < \frac{1}{2^{2^n}} < \frac{1}{2^n}; \qquad x_{n+1} < \frac{1}{2^n} + x_n.$$

Luego como $x_1=\ln 2<1$, es trivial por inducción que $x_n<1+1/2+\ldots+1/2^{n-1}=2-1/2^{n-1}$, q.e.d..

Nos falta entonces demostrar que

$$\left(1-2^{-n}\right)\ln 2 < x_n = \ln 2 + \ln\left(1-\frac{1}{2^{2^n}}\right),$$

o equivalentemente,

$$1-2^{-n} < 1+\frac{\ln\left(1-\frac{1}{2^{2^n}}\right)}{\ln 2} = 1+\log_2\left(1-\frac{1}{2^{2^n}}\right); \qquad \log_2\left(1-\frac{1}{2^{2^n}}\right) > -\frac{1}{2^n}; \qquad \frac{1}{\sqrt[2^n]{2}}+\frac{1}{2^{2^n}} < 1.$$

Sea entonces la siguiente función:

$$f\left(x\right) = 2^{-\frac{1}{x}} + 2^{-x}.$$

El límite de esta función cuando x tiende a infinito es 1, pues el primer sumando tiende a $2^0=1$, mientras el segundo tiende a 0. La derivada de esta función es

$$\frac{df}{dx} = \ln 2\left(\frac{2^{-\frac{1}{x}}}{x^2} - 2^{-x}\right) = \ln 2\left(\frac{1}{x^2\sqrt[x]{2}} - \frac{1}{2^x}\right) = \frac{\ln 2}{2^x x^2}\left(2^{x-\frac{1}{x}} - x^2\right).$$

Para x suficientemente grande, se tiene que $2^x>2x^2>x^2 2^{1/x}$, luego para x suficientemente grande la función es siempre creciente. Además, $f(1)=1$, siendo además su derivada nula en este punto. Luego si demostramos que la derivada se anula una única vez para $x>1$, quedará demostrado que $f(x)<1$ para $x>1$, y como conclusión quedará probada la acotación inferior propuesta. Ahora bien, para que la derivada se anule, ha de ser

$$2^{\frac{x^2-1}{x}} = x^2, \qquad \ln x = \left(\ln 2\right)\log_2 x = \frac{x^2-1}{2x}\ln 2.$$

Las derivadas de los miembros izquierdo y derecho de la última igualdad son

$$\frac{1}{x}; \qquad \left(1+\frac{1}{x^2}\right)\frac{\ln 2}{2}.$$

Igualándolas, queda una ecuación de segundo grado en x, con discriminante positivo, coeficiente de x negativo y término independiente igual a 1. Luego tiene dos soluciones positivas cuyo producto es uno, y las derivadas de los términos izquierdo y derecho de la última igualdad sólo son iguales en un único punto $x>1$. Por lo tanto, la ecuación

$$\ln x = \frac{x^2-1}{2x}\ln 2,$$

que tiene solución para $x=1$, y exactamente una solución para $x>1$ (en caso contrario la ecuación de segundo grado propuesta se cumpliría en más de un punto $x>1$). Luego $f(x)<1$ para todo $x>1$, q.e.d..

Problema 88

Propuesto por José Luis Díaz Barrero, Barcelona, España.

Sea

$$f:[a,b]\to\mathbb{R}$$

una función estrictamente positiva y continua. Probar que para cualesquiera $x_1,x_2,...,x_n\in[a,b]$, existe un número x ($a\leq x\leq b$) tal que

$$\sqrt[2005]{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{f^{2005}(x_k)}}=\frac{1}{f(x)}\,.$$

Observación: la notación $f^{2005}(x_k)$ representa la potencia de exponente 2005 del número $f(x_k)$.

Solución de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, Navarra, España.

Sean x_+, x_-, elementos distintos de $\{x_1,x_2,...,x_n\}$, tales que $f(x_+)\geq f(x_k)\geq f(x_-)$ para todo $k=1,2,...,n$. Se tiene entonces que

$$\frac{1}{f(x_-)}=\sqrt[2005]{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{f^{2005}(x_-)}}\geq\sqrt[2005]{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{f^{2005}(x_k)}}\geq\sqrt[2005]{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{f^{2005}(x_+)}}=\frac{1}{f(x_+)}\,.$$

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $x_+>x_-$. Por el teorema de los valores intermedios, al ser $f(x)$ continua en $[a,b]$, también es continua en $[x_-,x_+]\subset[a,b]$, con lo que $f(x)$ en dicho intervalo toma todos los valores comprendidos entre $f(x_+)$ y $f(x_-)$, ambos inclusive. En concreto, $f(x)$ tomará, para algún $x\in[x_-,x_+]\subset[a,b]$, el valor

$$\frac{1}{\sqrt[2005]{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{f^{2005}(x_k)}}}\text{, q.e.d..}$$

Problema propuesto 89 del número 20 de la Revista Escolar de la O. I. M.:

Obtener la conclusión que se deduce de las 10 premisas siguientes:

1) Los únicos animales de esta casa son gatos.
2) Todo animal al que le gusta mirar a la Luna sirve como animal de compañía.
3) Cuando aborrezco a un animal lo hago apartarse de mi camino.
4) Sólo son carnívoros los animales que merodean por la noche.
5) Todos los gatos matan ratones.
6) Los animales de esta casa son los únicos que me pueden aguantar.
7) Los canguros no sirven como animales de compañía.
8) Sólo los carnívoros matan ratones.
9) Aborrezco a los animales que no pueden aguantarme.
10) A los animales que merodean por la noche les gusta mirar a la Luna.

Solución:

Sean las proposiciones:

c: "ser un animal de esta casa"; g: "ser un gato"; l: "ser un animal al que le gusta mirar a la Luna"; s: "servir como animal de compañía"; a: "aborrecer al animal"; h: "hago al animal apartarse de mi camino"; k: "ser un animal carnívoro"; m: "ser un animal que merodea por la noche"; r: "ser un animal que mata ratones"; p: "ser un animal que me puede aguantar" y n: "ser un canguro".

Entonces:

1) $c ? \ g$; 2) $l ? \ s$; 3) $a ? \ h$; 4) $k ? \ m$; 5) $g ? \ r$; 6) $p ? \ c$; 7) $n ? \ ?s$;

8) $r ? \ k$; 9) $?p ? \ a$ y 10) $m ? \ l$.

Así, se tiene la siguiente cadena de implicaciones, en la que intervienen todas las proposiciones y fórmulas del enunciado del problema:

$$n ? \ ?s ? \ ?l ? \ ?m ? \ ?k ? \ ?r ? \ ?g ? \ ?c ? \ ?p ? \ a ? \ h,$$

donde se han utilizado, en este orden, las fórmulas (o las obtenidas por contrarrecíproco o como consecuencia lógica de las siguientes): 7), 2), 10), 4), 8), 5), 1), 6), 9) y 3).

De ello se deduce que $n ? \ h$, o sea, la conclusión siguiente:

?— A los canguros les hago apartarse de mi camino.

Problema propuesto 89 del número 20 de la Revista Escolar de la O. I. M.:

Obtener la conclusión que se deduce de las 10 premisas siguientes:

1) Los únicos animales de esta casa son gatos.
2) Todo animal al que le gusta mirar a la Luna sirve como animal de compañía.
3) Cuando aborrezco a un animal lo hago apartarse de mi camino.
4) Sólo son carnívoros los animales que merodean por la noche.
5) Todos los gatos matan ratones.
6) Los animales de esta casa son los únicos que me pueden aguantar.
7) Los canguros no sirven como animales de compañía.
8) Sólo los carnívoros matan ratones.
9) Aborrezco a los animales que no pueden aguantarme.
10) A los animales que merodean por la noche les gusta mirar a la Luna.

Solución:

Sean las proposiciones:

c: "ser un animal de esta casa"; g: "ser un gato"; l: "ser un animal al que le gusta mirar a la Luna"; s: "servir como animal de compañía"; a: "aborrecer al animal"; h: "hago al animal apartarse de mi camino"; k: "ser un animal carnívoro"; m: "ser un animal que merodea por la noche"; r: "ser un animal que mata ratones"; p: "ser un animal que me puede aguantar" y n: "ser un canguro".

Entonces:

1) $c \to g$; 2) $l \to s$; 3) $a \to h$; 4) $k \to m$; 5) $g \to r$; 6) $p \to c$; 7) $n \to \neg s$;

8) $r \to k$; 9) $\neg p \to a$ y 10) $m \to l$.

Así, se tiene la siguiente cadena de implicaciones, en la que intervienen todas las proposiciones y fórmulas del enunciado del problema:

$$n \to \neg s \to \neg l \to \neg m \to \neg k \to \neg r \to \neg g \to \neg c \to \neg p \to a \to h,$$

donde se han utilizado, en este orden, las fórmulas (o las obtenidas por contrarrecíproco o como consecuencia lógica de las siguientes): 7), 2), 10), 4), 8), 5), 1), 6), 9) y 3).

De ello se deduce que $n \to h$, o sea, la conclusión siguiente:

— A los canguros les hago apartarse de mi camino.

Problema 90

Propuesto por el editor.

Por un punto P, interior a un triángulo dado ABC, se trazan paralelas a los tres lados del mismo, formando así tres paralelogramos y tres triángulos. ¿Para qué punto P es mínima la suma de las áreas de los tres triángulos?

Solución de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, Navarra, España.

Llamemos d_A, d_B, d_C las distancia de P a los lados BC, CA, AB, respectivamente, y h_A, h_B y h_C las alturas trazadas respectivamente desde A, B y C a los lados opuestos. Es entonces obvio, llamando $[XYZ]$ al área del triángulo XYZ, que

$$\frac{d_C}{h_C}+\frac{d_A}{h_A}+\frac{d_B}{h_B}=\frac{d_C\cdot AB}{2[ABC]}+\frac{d_A\cdot BC}{2[ABC]}+\frac{d_B\cdot CA}{2[ABC]}=\frac{[APB]+[BPC]+[CPA]}{[ABC]}=1.$$

Los tres triángulos formados son obviamente semejantes al ABC (pues dos de los lados de cada triángulo y del ABC son paralelos dos a dos, estando los terceros en una recta común), siendo la razón entre el área de cada uno de ellos y el área de ABC igual al cuadrado de la razón entre sus respectivas alturas desde los vértices correspondientes. Es decir, la suma de las áreas de los tres triángulos viene dada por:

$$\left(\frac{d_C^2}{h_C^2}+\frac{d_A^2}{h_A^2}+\frac{d_B^2}{h_B^2}\right)[ABC].$$

Pero utilizando la desigualdad entre las medias aritmética y cuadrática, se tiene que

$$\frac{d_C^2}{h_C^2}+\frac{d_A^2}{h_A^2}+\frac{d_B^2}{h_B^2}\geq\frac{1}{3}\left(\frac{d_C}{h_C}+\frac{d_A}{h_A}+\frac{d_B}{h_B}\right)^2=\frac{1}{3},$$

dándose la igualdad si y sólo si

$$\frac{d_C}{h_C}=\frac{d_A}{h_A}=\frac{d_B}{h_B}=\frac{1}{3},$$

es decir, si y sólo si P es el baricentro G de ABC. Luego $P=G$ para que la suma de las áreas de los triángulos sea mínima, siendo entonces dicha área igual a 1/3 del área de ABC.

PROBLEMAS PROPUESTOS 91-95

Problema 91. Propuesto por José Luis Díaz Barrero, Barcelona, España.
Sean α, β, γ los ángulos del triángulo ABC y sea n un número natural impar. Probar que

$$\frac{\sin n\alpha + \sin n\beta + \sin n\gamma}{\cos\frac{n\alpha}{2}\cos\frac{n\beta}{2}\cos\frac{n\gamma}{2}}$$

es entero y determinar su valor.

Problema 92.Propuesto por José Luis Díaz Barrero, Barcelona, España.
Sean a, b, c tres números complejos distintos y no nulos. Calcular, en la forma más simplificada posible,

$$\frac{2a^2+b^2+c^2}{\left(1-\frac{a}{b}\right)\left(1-\frac{a}{c}\right)}+\frac{a^2+2b^2+c^2}{\left(1-\frac{b}{a}\right)\left(1-\frac{b}{c}\right)}+\frac{a^2+b^2+2c^2}{\left(1-\frac{c}{a}\right)\left(1-\frac{c}{b}\right)}.$$

Problema 93.Propuesto por Laurentiu Modan, Bucarest, Rumania.
Se consideran las sucesiones $(x_n), (y_n)$ definidas por las recurrencias

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_n = 2x_{n-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = 1 \\ y_n = y_{n-1} + \sqrt{y_{n-1}^2+1} \end{cases}.$$

Calcular, si existen, los límites

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x_n \cdot y_n}}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{\ln(y_n)}$$

Problema 94.Propuesto por José Luis Díaz Barrero, Barcelona, España.
Sea $f : [a,b] \to R$ una función continua y derivable en (a,b).
Probar que existe un $c \in (a,b)$ tal que

$$\frac{\sqrt{2}}{2}f'(c) = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(\frac{1}{a-c}+\frac{1}{b-c}\right).$$

Problema 95. Propuesto por José Luis Díaz Barrero, Barcelona, España.
Sea n un número entero y positivo. Probar que

$$\left\{4^n + 3\left[\sum_{k=0}^{n-1} 3^k \binom{2n}{2k+1}\right]^2\right\}^{1/2}$$

es un entero.

DIVERTIMENTOS MATEMÁTICOS (19)
ALGUNAS CITAS

<u>De un libro francés de los años 60</u>
"Una variedad diferenciable es una cosa muy complicada. Sea M una variedad diferenciable..."

<u>De un libro de resistencia de materiales</u>
Definición de ladrillo: "Ente cerámico prismático, de barro cocido, susceptible de ser manejado con una sola mano" (*citado por J.M. Aroca en su artículo "¿Por qué Juanito no sabe sumar?(1973)¿Por qué Juanito no sabe sumar aún?(2004)", publicado en el Boletín de la Sociedad Puig Adam, nº 69, Febrero 2005).*

<u>De un examen de 1º de Bachillerato 1968(enseñanza libre), en el Instituto "Marqués de la Ensenada" (hoy "Práxedes Mateo Sagasta"), de Logroño.</u>
Pregunta : *El producto de dos números primos, ¿es primo?*
Respuesta (evidentemente malhumorada) : *Pero primos ¿de quién?*

<u>De un texto de 1980</u>
"El propósito de esta nota es poner al lector al abrigo de un procedimiento aparentemente claro y simple para definir....(objetos matemáticos suficientemente complicados para que no los podamos citar, pero lo que sigue merece serlo)..."esta convincente construcción para obtenerlos ha sido descubierta independientemente por parte de varios matemáticos, incluido el autor. Ha sido presentada en Seminarios en Chicago y Princeton y se publicó en un libro en 1978. Sin embargo, esta construcción contiene un sutil pero irreparable error y es totalmente falaz".

<u>De un comentario en el Bulletin de la APMEP</u>
"Este tratado de Geometría es excelente....apenas se encuentran en él más de dos o tres teoremas falsos, lo que es muy poco en un total de 1300 páginas".

<u>De una página web</u>
"Ambos edificios se encuentran separados entre sí por algo más de 400 metros escasos".

<u>De la prensa de Quebec (1979)</u>
"¿Cuál es el mejor procedimiento para medir con un barómetro la altura de un edificio?
Respuesta de un estudiante: "Probablemente, el mejor sería llamar a la puerta del portero, y decirle: *Tengo aquí este excelente barómetro. Se lo regalo si me dice la altura del edificio."*
(Citado por Alain Bouvier en su libro *La mystification mathématique,* Hermann, 1981).

COMENTARIO DE PÁGINAS WEB (19)

ICMI Study 16: ***Challenging Mathematics in and beyond the Classroom***

www.amt.canberra.edu.au/icmis16.html

Esta página web es la de preparación del volumen 16 de los Studies del ICMI (la Comisión Internacional de Educación Matemática), que se encuentra en fase de preparación. El documento de discusión se puede descargar en español, francés e inglés, y sirve como *llamada a las colaboraciones* que se pueden presentar con vistas a tomar parte en la Conferencia sobre el tema, que tendrá lugar en Trondheim, Noruega, del 27 de junio al 3 de julio de 2006, y a la que sólo se asistirá por invitación personal. La fecha límite para enviar propuestas es el 31 de agosto de 2005.

Valladolid, mayo de 2005.
Francisco Bellot

http://www.amt.canberra.edu.au/icmis16ddspanish.html

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI

Número

20

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

Número 19 (Julio - agosto 2005)

ISSN – 1698-277X

Índice

Artículos, notas y lecciones de preparación olímpica

Problemas para alumnos de Educación Media y de Olimpiadas

Problemas para los más jóvenes

Problemas

Resueltos: Se han recibido soluciones a problemas ya publicados: al los números 71, 72, 73 y 82, por Marcos Martinelli (estudiante, IME, Brasil); y al nº 86, por Ovidiu Furdui (Rumania).

Recibidas soluciones al problema 91 por: F.D. Aranda Ballesteros (Córdoba, España); D. Lasaosa Medarde (Pamplona, España); B. Salgueiro Fanego (Vivero, Lugo, España); y del proponente. Recibidas soluciones parciales de

Besaleel Ferreira de Assunçao Júnior (Teresina, Piauí, Brasil) y Marcos Martinelli (IME, Brasil).
Presentamos la solución de Lasaosa.

Recibidas soluciones al problema 92 por : Miguel Amengual Covas (Cala Figuera, Mallorca, España); F.D. Aranda Ballesteros (Córdoba, España); Daniel Lasaosa Medarde (Pamplona, España); Marcos Martinelli (Brasil); Bruno Salgueiro Fanego (Vivero, Lugo, España); y del proponente.
Presentamos la solución de Aranda.

Recibidas soluciones al problema 93 por : Jesús Álvarez Lobo (Oviedo, España); Álvaro Begué Aguado (N. York, USA); Daniel Lasaosa Medarde (Pamplona, España); Marcos Martinelli (Brasil); Bruno Salgueiro Fanego (Vivero, Lugo, España); y el proponente.
Presentamos la solución de Lasaosa. Álvaro Begué sugiere el cálculo del límite del cociente de ambas sucesiones.

Recibidas soluciones al problema 94 por: Daniel Lasaosa Medarde (Pamplona, España); Marcos Martinelli (Brasil) y el proponente.
Presentamos la solución de Lasaosa.

Recibidas soluciones al problema 95 por: Daniel Lasaosa Medarde (Pamplona, España); Marcos Martinelli (Brasil); Bruno Salgueiro Fanego (Vivero, Lugo, España) y el proponente.
Presentamos la solución de Lasaosa.

Propuestos

Propuestos 96-100

Divertimentos matemáticos

Algunas citas II

Reseñas web

La página de Tomas Schoch sobre el Arbelos

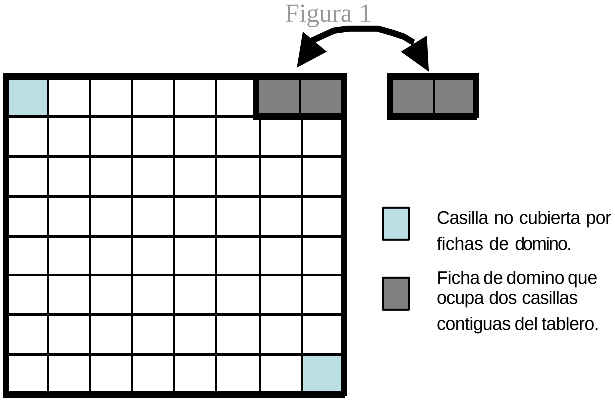
Editor: Francisco Bellot Rosado

Algunos problemas. La coloración en las matemáticas

La coloración en las matemáticas no es más que aprovechar algunas diferencias que establecemos entre los entes empleados en un problema particular, similar a la utilidad de las nemotecnias en la programación, lógica, matemática, etc. Escrito en un lenguaje coloquial, lograr una identificación con el problema que lo haga más entendible y fácil de trabajar, en fin más digerible.
Por ejemplo si necesitados diferenciar dos dados de juegos de azar, diremos que uno de ellos es azul y el otro es rojo. Sin embargo bastaría decir que uno de los dos está limpio y el otro no lo está. O lo que es lo mismo, establecer una diferencia entre ambos entes aunque esta sea poco perceptible.
Además a través de las diferencias marcadas en los entes, encontramos problemas que resultan impenetrables a priori por el desconocimiento de esta técnica y a posteriori resultan sencillos de resolver y entender. En vista a lograr un conocimiento inicial de las coloraciones en los tableros está hecho este escrito. Con el objetivo de que estudiantes concursantes en olimpiadas o aspirantes a ellas, incluyan esta arma en su arsenal para atacar y solucionar los diferentes problemas.

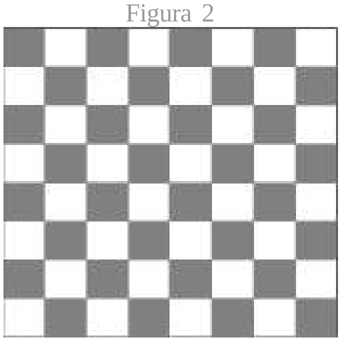
Problema inicial.
Tenemos un tablero de 8x8 y 31 fichas de domino que tienen la particularidad de que cada una de ellas puede ocupar exactamente la región de dos casillas contiguas del tablero (como se muestra en la figura 1). Se quiere colocar las 31 fichas de domino en el tablero de manera que quede el tablero cubierto por fichas de domino excepto las dos casillas de los extremos de la diagonal principal. De ser posible determine la distribución de las fichas de domino.

Figura 1



Solución:
Coloreando el tablero con casillas de dos colores al estilo del tablero de coronas (damas) como se muestra en la figura 2.

Figura 2



Tenemos que cada ficha del domino al ser colocada en el tablero de manera que ocupe dos casillas contiguas (ya sea vertical u horizontal) ocupa una casilla blanca y una casilla negra o sea al colocar las 31 fichas estas ocuparan 31 casillas negras y 31 casillas blancas por lo que resultaría imposible que al colocar las 31 fichas queden por cubrir dos casillas negras. Y por tanto resulta imposible colocar las 31 fichas del domino de manera que queden libre los extremos de la diagonal principal.
En este caso lo aprovechable de la coloración fue que dos casillas con un lado común del tablero tienen una coloración diferente. La coloración empleada fue la más común de dos colores.

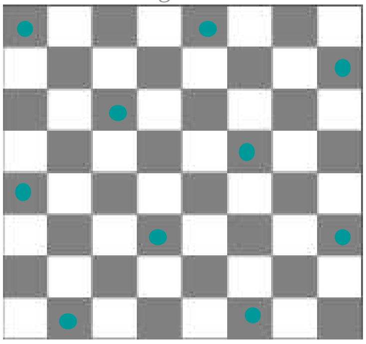
El caballo del ajedrez.
Esta misma coloración tiene la particularidad de que el caballo del ajedrez salta de una casilla del tablero a otra de color diferente. Por eso precisamente no se puede en un tablero de 5x5 comenzar un recorrido con movidas de caballo de ajedrez, iniciando en una de sus casilla, pasar por todas sin repetir ninguna y terminar en la casilla inicial con movidas de un caballo. Pues para que se pudiera realizar debemos tener una cantidad idénticas de casillas negras y casillas blancas (no puede ser impar).

Problema 3 de la 40º IMO, Bucarest, Rumania 1999.
Veamos pues otras bondades de la misma coloración a través del problema 3 de la 40º IMO, Bucarest, Rumania 1999.

Se considera un tablero cuadrado de n x n, donde n es un entero positivo par. El tablero se divide en n^2 cuadrados unitarios. Decimos que dos cuadrados distintos del tablero son *adyacentes* si tienen un lado en común.
Se marcan N cuadrados unitarios del tablero de tal manera que cada cuadrado (marcado o sin marcar) es adyacente a por lo menos un cuadrado marcado.
Determinar el menor valor posible de N.

Solución:
Si coloreamos el tablero de nxn con dos colores negro y blanco como en la figura 2, notaremos que las casillas adyacentes a las blancas son negras y a las negras son blancas. Por tanto se deduce que para que todas las casillas blancas tengan alguna casilla adyacente marcada, debemos buscar sólo en las marcadas negras y viceversa. De donde concluimos que el número mínimo de casillas blancas marcadas es igual al número mínimo de casillas negras marcadas debido a que n es par y hay simetría en el tablero coloreado.
Hasta aquí tenemos un por ciento del problema pero no sabemos cuál es la cantidad mínima de casillas marcadas sólo conocemos que es par. Si realizamos una coloración sobre las casillas negras como se muestra en la figura 3 (marcando en las diagonales negras impares las posiciones impares) tendremos entonces k casillas negras marcadas, las cuales cumplen que todas las casillas blancas son adyacente a alguna de ellas, indicando esto que el valor mínimo de casillas negras marcadas es menor o igual a k. Pero por otra parte notemos que estas k casillas negras marcadas están distribuidas de forma tal que las casillas blancas a marcar que sean adyacentes a ellas son diferentes, lo cual nos dice que el valor mínimo de casillas blancas marcadas es mayor o igual a k. Y como teníamos que el número mínimo de casillas blancas marcadas es igual al número mínimo de casillas negras marcadas entonces el menor valor posible de N es 2k, pero k coincide con la suma 1 + 2 + 3 +…+ n/2. Por lo que concluimos que el menor valor posible es N = r(r +1) donde r = n/2.

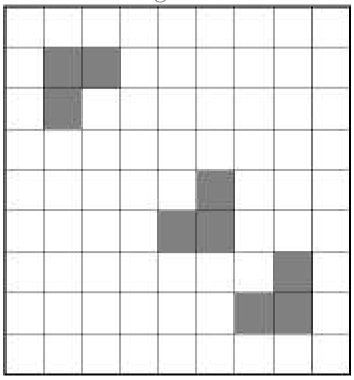
Figura 3



Problema de pepito.

Un niño (pepito) tratando de completar un puzzle ha colocado tres de sus piezas (todas de la misma forma) que ocupan las posiciones que muestra la figura 4. ¿Será posible completar el puzzle con esas tres piezas fijadas?

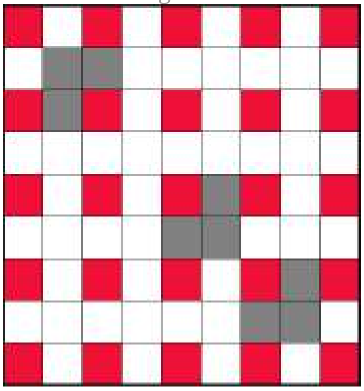
Figura 4



Solución:

Notemos que dicho tablero es de 9x9, por lo que sería 27 piezas cada una ocupando 3 casillas del tablero. Si empleamos una coloración de dos colores Blanco y Rojo como se indica en la figura 5, donde también están presentes las tres piezas colocadas por pepito. Entonces notaremos que ninguna de las tres piezas colocadas ocupa alguna de las casillas rojas y que por demás cada casilla roja será cubierta por piezas distintas, de ser posible tal cubrimiento del tablero, gracias a forma de las fichas.

Figura 5



Bajo estas condiciones la cantidad de piezas a utilizar nunca será menor que la cantidad de casillas rojas (25) más tres por las fichas ya puestas, o sea 28 lo cual entra en contradicción total con que sea realmente 27 piezas para cubrir el tablero de 9 x 9 puesto que 3 x **27** = 81. Por tanto tenemos que la operación de cubrir el tablero con las piezas del puzzle apoyados en las colocadas por pepito es imposible.

Problema 5 de la II OIMU
Veamos una coloración de 5 colores la cual fue empleada para resolver el problema 5 de la II OIMU (2 de octubre de 1999).

En el juego *tetris-5* se utilizan cuatro tipos de fichas que tienen una de sus caras pintadas de negro y otra de blanco tal como se muestran en la siguiente figura.
Las fichas pueden ser colocadas en un tablero cuadriculado de *m x n* en cualquier posición siempre y cuando no se superpongan y tengan la cara negra hacia arriba.
(a) Demostrar que se puede recubrir un tablero de 8 x 8 que no contiene sus cuatro esquinas.
(b) Demostrar que no se puede recubrir un tablero de 1999 x 2001 que no contiene a sus cuatro esquinas.

Solución
En el problema se utilizan los cuatro tipos de fichas del juego *tetris-5*, con las caras de un color fijo hacia arriba indica que sólo se pueden rotar las piezas (figura 6).
Para resolver el inciso *a* basta con dedicar un poco de nuestro tiempo, ya para el inciso b no apoyaremos en una coloración.

Figura 6

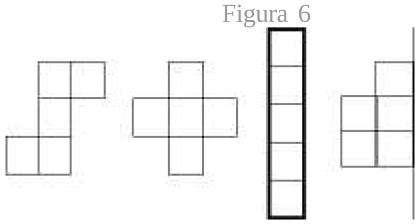
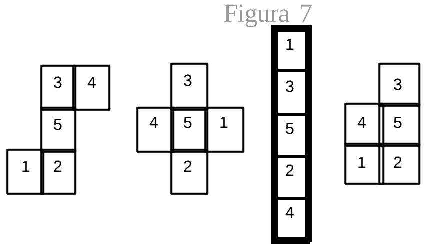


Figura 7



La coloración empleada en este problema puede ser de cinco colores c_1, c_2, c_3, c_4 y c_5 los cuales por filas aparecerán cíclicamente en ese orden y por columnas cíclicamente omitiendo uno de ellos pero manteniendo el orden. En la figura 7 se muestra una posible ubicación de las coloraciones de las casillas que ocupan las fichas. Donde todas cubren una casilla de cada color, solo faltaría analizar las rotaciones y traslaciones de las piezas que también cubrirán una casilla de cada color.
Con esta coloración notemos que nuestro tablero de 1999x2001 presenta 800 000 casillas de los colores c_1, c_2, c_3 y c_5, pero 799 999 casillas de color c_4. Y las esquinas del tablero son las superiores de color c_1 y las inferiores de color c_2. Lo cual entra en contradicción con que cada piezas cubra una casilla de cada color, pues al colocar 799 999 fichas sin superposición dejamos libres 4 casillas de colores distintos.

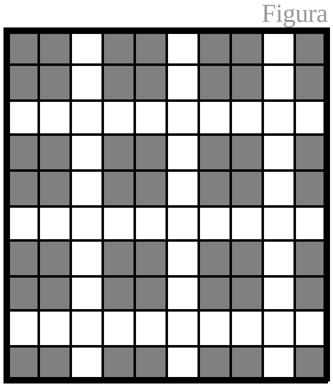
Hints para el problema 3 de la 34º IMO, Turquía 1993
Veamos dos coloraciones de dos y tres colores que nos ayudan a solucionar el problema 3 de la 34º IMO, Turquía 1993.

En un tablero de ajedrez infinito, un partido es jugado como sigue. Para comenzar, n^2 piezas son colocadas en un tablero de n x n cuadrados contiguos, una pieza en cada cuadro. Un movimiento en el juego es un salto en una dirección horizontal o vertical

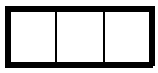
sobre un cuadrado adyacente ocupado a un cuadrado desocupado .La pieza que ha sido saltada es eliminada.
Encuentra esos valores de n para que el juego pueda acabar con sólo una pieza en el tablero.

La solución del problema es para n no divisible por 3. En una de las vías de demostración se plantean explícitamente las soluciones para n=2 y n=4, y con ayuda de un proceso inductivo se reduce de otras dimensiones mayores a estas. Luego para demostrar que para n divisible por 3 no es posible que el juego acabe con una sola pieza nos podemos apoyar en las dos coloraciones mostradas en la figura 8:
Una de tres colores a, b y c coloreando cíclicamente y manteniendo el orden por filas y por columnas. La característica de esta coloración que nos permite resolver el problema es que en cada movida del juego intervienen tres casillas adyacentes en fila o en columna y por tanto cada una de color diferente. La segunda coloración de la figura 8 es de dos colores blanco y negro donde la peculiaridad es que tres casillas adyacentes por filas o por columnas cubren en cualquiera de sus variantes una cantidad par de casillas negras o sea ninguna o dos.

Figura 8



a	b	c	a	b
b	c	a	b	c
c	a	b	c	a
a	b	c	a	b
b	c	a	b	c

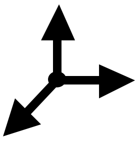


Otras coloraciones para estrategias de movimientos.
Supongamos que en cierto juego existe una ficha que se mueve por un tablero en tres direcciones posibles pero sólo avanza de una en una las casillas:

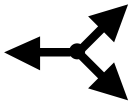
Si las tres direcciones en que se mueve la ficha son las mostradas en la figura 9, la coloración a utilizar puede ser la mostrada en la misma figura 9, o sea de tres colores *a*, *b* y *c* por filas coloreando cíclicamente manteniendo el mismo orden y por columnas de forma cíclica, omitiendo uno de los colores y manteniendo el orden. Con esta coloración aprovechamos que la ficha de una casilla de color *a* sólo puede llegar a una de color *b*, también tenemos que la ficha de una casilla de color *b* sólo puede llegar a una de color *c* y que la ficha de una casilla de color *c* sólo puede llegar a una de color *a*. Por esta razón podemos asegurar que para que en un tablero rectangular pueda ser recorrido por una de las referidas fichas pasando por todas las casillas, sin repetir la visita y culminar en la misma casilla inicial. Tiene que poseer al menos luego de la coloración la misma cantidad de casillas de color a, b y c. Lo cual conlleva a la condición necesaria de que la cantidad de casillas del tablero sea divisible por 3.

Figura 9

Figura 10



a	b	c	a
c	a	b	c
b	c	a	b
a	b	c	a



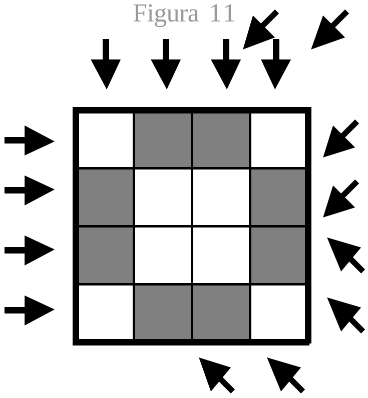
a	b	c	d	a
c	d	a	b	c
a	b	c	d	a
c	d	a	b	c
a	b	c	d	a

Si las tres direcciones en que se mueve la ficha son las mostradas en la figura 10, la coloración a utilizar puede ser la mostrada en la misma figura 10, o sea de cuatro colores *a, b, c* y *d* por filas coloreando cíclicamente manteniendo el mismo orden y por columnas de forma cíclica, omitiendo uno de los colores y manteniendo el orden. Con esta coloración aprovechamos que la ficha de una casilla de color *a* sólo puede llegar a una de color *d*, también tenemos que la ficha de una casilla de color *d* sólo puede llegar a una de color *c*, además que la ficha de una casilla de color *c* sólo puede llegar a una de color *b* y que la ficha de una casilla de color *b* sólo puede llegar a una de color *a*. Por esta razón podemos asegurar que para que en un tablero rectangular pueda ser recorrido por una de las fichas pasando por todas las casillas, sin repetir visitas y culminando en la casilla inicial. Tiene que poseer al menos, luego de la coloración la misma cantidad de casillas de color a, b, c y d. Por lo cual la cantidad de casillas del tablero tiene que ser múltiplo de 4.

Problema final (elaborado por Leonel)
En un tablero de nxn casillas, con n mayor que cinco todas las casillas son blancas excepto una negra. En el tablero se pueden realizar operaciones de cambio de coloración en todas las casillas de una misma fila, de una misma columna o una misma diagonal con la intensión de que todas lleguen a ser del mismo color. Determine las posibles posiciones de la casilla negra de modo que en un momento determinado puedan todas las casillas llegar a ser del mismo color.

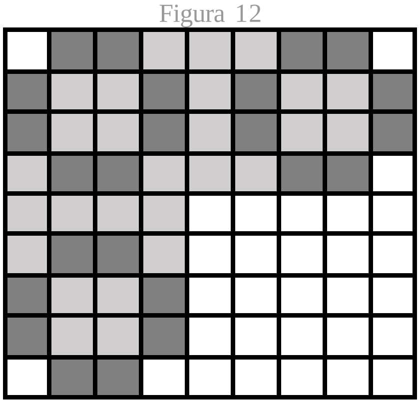
Solución:
Analicemos lo que sucede en un tablero de 4x4.
En un tablero de 4x4 notemos que la casilla negra no puede ser una de las casillas grises de la figura 11. Pues si inicialmente una de ellas es negra entonces luego de cualquier cantidad de operaciones la cantidad de casillas negras entre ellas es impar, lo cual conlleva a que nunca lleguen a ser todas del mismo color. Esto se debe a que por la distribución de las 8 casillas coloreadas, al realizar cualquier operación que cambie la coloración de una de ellas realmente cambia a exactamente dos de ellas (figura 11) y por tanto la cantidad de casillas negras entre ellas siempre sería impar.

Figura 11



Esto es para un tablero de 4x4, pero esta coloración se puede hacer en cada sub-tablero de 4x4, o sea trasladamos vertical y horizontal esta coloración como se muestra en figura 12 y llegaremos a que en los tableros de nxn con n > 5, las posibles posiciones de la casilla negra nos queda sólo en las esquinas del tablero y con una sola operación le cambiamos en color y todas las casillas del tablero pasarían a ser blancas.

Figura 12



La restricción de que n sea mayor que 5 fue buscando uniformidad en la solución, así que de este modo queda propuesto para el lector el ejercicio para los tableros de nxn con n menor o igual que cinco.

Estas mismas conclusiones obtenidas con ayuda de las coloraciones en los tableros son alcanzadas con razonamientos lógicos equivalentes a diferenciar los elementos de trabajo. Por ejemplo cuando tenemos una coloración de dos colores es como establecer dos estados diferentes (dividir los casos en dos) no tienen que ser colores por comodidad o para una mejor compresión empleamos los colores pero pueden ser 0 y 1 apoyados incluso en operaciones del algebra de Bolee o en la congruencia módulo 2.

Estaría interesado en que alguno de ustedes, los lectores, me haga llegar vía correo electrónico problemas y/o soluciones donde se pueda emplear este tipo de estrategia. Mi correo electrónico es waltercarb@yahoo.es.

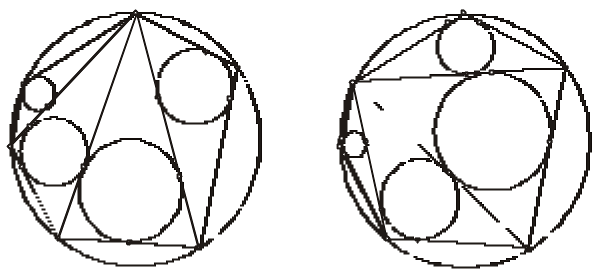
Uma soma incrivelmente invariante

Carlos A.Gomes
Natal/RN, UFRN

Um resultado altamente inesperado é encontrado no maravilhoso texto "Advanced Euclidean Geometry" de Roger Johnson's publicado pela Dover publications em 1960. É um antigo teorema japonês que pelo seu surpreendente conteúdo merece ser "ressuscitado" agora na língua portuguesa para que ele seja conhecido e apreciado com muito louvor pelos amantes da harmonia da matemática e em especial pelos geômetras.

Seja um polígono convexo, que possa ser inscrito numa circunferência. Se triangularizarmos esse polígono a partir de um de seus vértices (traçando diagonais, é claro!) e inscrevermos em cada um destes triângulos uma circunferência a soma das medidas dos raios dessas circunferências permanece constante independente da triangularização realizada com o polígono.

Veja um exemplo ilustrativo com um hexágono:



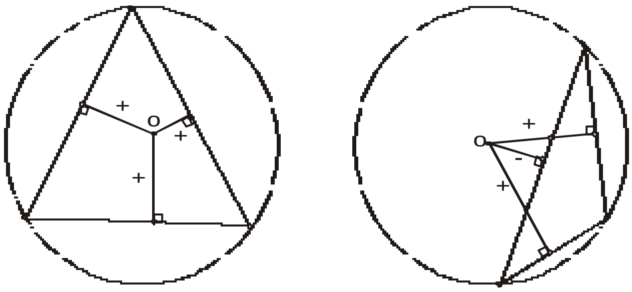
Nas duas figuras acima a soma das medidas dos raios das circunferências inscritas nos triângulos é a mesma.(apesar das medidas dos raios serem diferentes)

Para verificarmos o que foi dito acima usaremos o

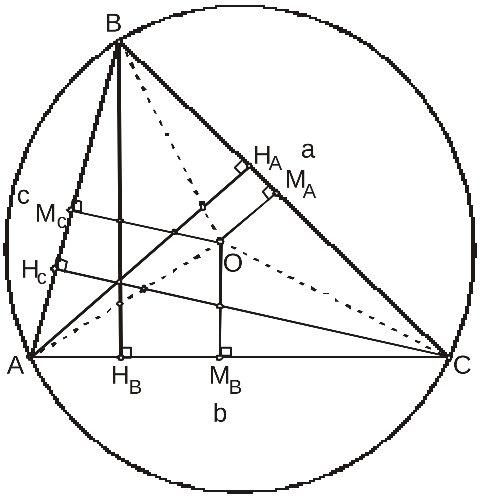
TEOREMA DE CARNOT: Num triângulo ABC a soma (algébrica) das distâncias do circuncentro do triângulo ABC aos lados AB, AC e BC desse triângulo é igual a R+r, onde R é a medida do raio da circunferência circunscrita ao triângulo ABC e r a medida do raio da circunferência inscrita no triângulo ABC.

* A convenção de sinais será:
+ $\rightarrow$ Quando pelo menos uma parte do segmento está no interior do triângulo.
- $\rightarrow$ Quando o segmento está completamente fora do triângulo.

Observe as figuras:



Vamos considerar aqui o caso do triângulo acutângulo. Os outros dois casos podem ser verificados de modo razoavelmente semelhantes.



Na figura acima , temos que:

2 . (ABC) = (a + b + c). r , ( ) = Área

2 (ABC) = $a\overline{OM}_A + b\overline{OM}_B + c\,\overline{OM}_C$ e daí

r (a + b + c) = $a\overline{OM}_A + b\overline{OM}_B + c\,\overline{OM}_C$ (0)

Agora perceba que:

$\angle$AOB = 2$\angle$C; $\angle$BOC = 2$\angle$A; $\angle$AOC = 2$\angle$B (Pelo teorema do ângulo inscrito). Assim podemos observar as seguintes semelhanças:

$$\Delta ABH_B \sim \Delta ACH_C \sim \Delta BOM_A \rightarrow \frac{\overline{AB}_B}{c} = \frac{\overline{AH}_C}{b} = \frac{\overline{OM}_A}{R} \quad (1)$$

$$\Delta BAH_A \sim \Delta BCH_C \sim \Delta COM_B \rightarrow \frac{\overline{BH}_A}{c} = \frac{\overline{BH}_C}{a} = \frac{\overline{OM}_B}{R} \quad (2)$$

$$\Delta CBH_B \sim \Delta CAH_A \sim \Delta AOM_C \rightarrow \frac{\overline{CH}_B}{a} = \frac{\overline{CH}_A}{b} = \frac{\overline{OM}_C}{R} \quad (3)$$

e daí de (1), (2) e (3) temos que

$$\frac{\overline{AB}_B}{c} = \frac{\overline{AH}_C}{b} = \frac{\overline{OM}_A}{R} \rightarrow \frac{\overline{AH}_b + \overline{AH}_c}{c+b} = \frac{\overline{OM}_A}{R} \rightarrow R\left(\overline{AH}_b + \overline{AH}_c\right) = (b+c).\overline{OM}_A \quad (4)$$

$$\frac{\overline{BH}_A}{c} = \frac{\overline{BH}_C}{a} = \frac{\overline{OM}_B}{R} \rightarrow \frac{\overline{BH}_A + \overline{BH}_c}{c+a} = \frac{\overline{OM}_B}{R} \rightarrow R\left(\overline{BH}_a + \overline{BH}_c\right) = (c+a).\overline{OM}_B \quad (5)$$

$$\frac{\overline{CH}_B}{a} = \frac{\overline{CH}_a}{b} = \frac{\overline{OM}_C}{R} \rightarrow \frac{\overline{CH}_B + \overline{CH}_a}{a+b} = \frac{\overline{OM}_c}{R} \rightarrow R\left(\overline{CH}_B + \overline{CH}_a\right) = (a+b).\overline{OM}_C \quad (6)$$

Adicionando (4), (5) e (6) temos:

$$\overline{OM}_a(b+c)+\overline{OM}_b(a+c)+\overline{OM}_c(a+b)=R(a+b+c) \quad (7)$$

finalmente fazendo (7) + (0) temos:

$$\overline{OM}_a(b+c)+\overline{OM}_b(a+c)+\overline{OM}_c(a+b)=R(a+b+c)$$

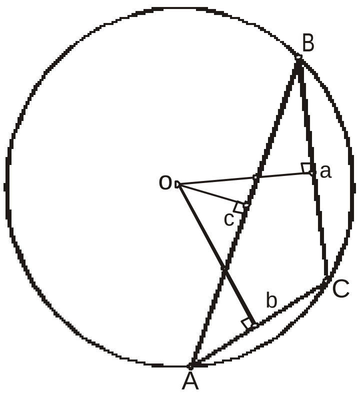
$$+$$

$$\underline{a.OM_a+b.OM_b+c.\overline{OM}_c=r\,(a+b+c)}$$

$$\left(\overline{OM}_a+\overline{OM}_b+\overline{OM}_c\right)(a+b+c)=(R+r)(a+b+c)$$

e finalmente, $\overline{OM}_a+\overline{OM}_b+\overline{OM}_c=R+r$.

Obs. Na convenção estabelecida para os sinais da medida algébrica dos segmentos o sinal (-) é justificável para garantir a igualdade que relaciona as medidas das áreas conforme ilustramos abaixo:



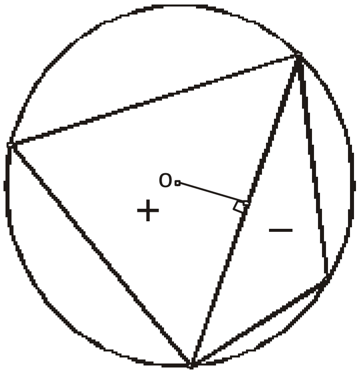
(ABC) = (OAC) + (OCB) – (OAB) e daí,

r (a + b + c) = $a\overline{OM}_a+b\overline{OM}_b-c\overline{OM}_c$

Bem, de posse do teorema de Carnot vamos agora provar a nossa jóia rara! Vejamos: Primeiro perceba que qualquer triangularização de n–ágono com diagonais desse polígono gera n–2 triângulos. Vamos assumir que os triângulos são numerados de 1 a (n – 2). Seja r_i a medida do raio da circunferência inscrita no i–ésimo triângulo e para cada triângulo seja $OO_i=a_i\overline{O_iM}_{ai}+b_i\overline{O_iM}_{bi}+c_i\overline{O_iM}_{ci}$ e daí pelo teorema de Carnot temos que $r_i+R=\overline{OM}_{ci}$. Calculando a soma desse resultado aplicado a cada triângulo temos:

$$r_1+r_2+\ldots+r_{n-2}=\overline{OO}_1+\overline{OO}_2+\ldots+\overline{OO}_{n-2}-(n-2).R$$

Perceba que a soma $\overline{OO}_1+\overline{OO}_2+\ldots+\overline{OO}_n$ consiste na soma algébrica das perpendiculares traçadas aos lados do n-ágono são contadas apenas uma vez (e com sinal positivo) já as perpendiculares às diagonais são contadas duas vezes (uma com sinal positivo e outra com sinal negativo) conforme ilustra a figura abaixo:



Assim a soma $\overline{OO}_1 + \overline{OO}_2 + ... + \overline{OO}_{n-2}$ corresponde a soma das distâncias de O aos lados do polígono (que é constante)e daí concluímos que $r_1 + r_2 + ... + r_{n-2}$ é constante pois $r_1 + r_2 + ... + r_{n-2} = \overline{OO}_1 + \overline{OO}_{2+...+}\overline{OO}_{n-2} + (n-2).R$ = constante.

Referências:

[1] Mathematical gems III , Ross Honsberger, MAA
[2] www.cut-the-knot.org/proofs/jap.shtml

ALGORITMO DE DESCARTE DE RAÍCES ENTERAS DE POLINOMIOS.

¿A quién no le ha ocurrido alguna vez, en su periplo como estudiante, encontrarse con un polinomio hostil, que se resiste a mostrar sus raíces enteras, bien porque no las tenga, bien porque el término independiente posee numerosos divisores y en los ensayos rigen las leyes de Murphy?.

Motivados por esta dificultad, desarrollaremos un procedimiento simplificador de la búsqueda de raíces enteras en ecuaciones polinómicas, estableciendo criterios de eliminación entre los candidatos a raíz entera seleccionados mediante el burdo y usual criterio de los divisores del término independiente.

Obviamente, para que el algoritmo de descarte sea interesante en la práctica, debe ser rigurosamente fiable, sencillo y rápido.

Comenzaremos enunciando y probando las propiedades subyacentes al mismo. Por pragmatismo, la sencillez y eficiencia del mismo se hará patente a través de un ejemplo.

Sea

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

un polinomio de coeficientes enteros.

FUNDAMENTACIÓN.

Propiedades de las raíces enteras de un polinomio con coeficientes enteros:

- *Si x_0 es una raíz entera de $p(x)$, $x_0 \neq 0$, entonces x_0 es un divisor de a_0:*

$$p(x_0) = a_n x_0^n + a_{n-1}x_0^{n-1} + \cdots + a_1 x_0 + a_0 = 0 \Rightarrow a_0 = -x_0(a_n x_0^{n-1} + a_{n-1}x_0^{n-2} + \cdots + a_1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a_0}{x_0} = -(a_n x_0^{n-1} + a_{n-1}x_0^{n-2} + \cdots + a_1) \in \mathbb{Z}.$$

- *Si x_0 es una raíz entera de $p(x)$, $x_0 \notin \{-1, 0, 1\}$, entonces $x_0 - 1$ es un divisor de $p(+1)$:*

$$\left.\begin{array}{l} a_0 = -a_n x_0^n - a_{n-1}x_0^{n-1} - \cdots - a_1 x_0 \\ \dfrac{p(+1)}{x_0 - 1} = \dfrac{a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0}{x_0 - 1} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{p(+1)}{x_0 - 1} = -\frac{a_n(x_0^n - 1) + a_{n-1}(x_0^{n-1} - 1) + \cdots + a_1(x_0 - 1)}{x_0 - 1}.$$

Por el teorema del resto, es inmediato que los binomios $x_0^k - 1$, considerados como polinomios en x_0, son divisibles por $x_0 - 1$. En efecto, sea $p_k(x_0) = x_0^k - 1$. Entonces, el resto de la división es $p_k(1) = 0$.

Sea

$$q_k(x_0) = \frac{x_0^k - 1}{x_0 - 1}, k = 1, 2, \cdots, n.$$

Se tiene:

$$\frac{p(+1)}{x_0 - 1} = -a_n \frac{x_0^n - 1}{x_0 - 1} - a_{n-1}\frac{x_0^{n-1} - 1}{x_0 - 1} - \cdots - a_1 \frac{x_0 - 1}{x_0 - 1} = \sum_{k=1}^{n} a_k q_k(x_0),$$

y considerando, de nuevo, la indeterminada x_0 como constante entera, resulta que

$$\frac{p(+1)}{x_0 - 1} = -\sum_{k=1}^{n} a_k q_k(x_0) \in \mathbb{Z} \sim \{-1, 0, 1\}, -$$

es decir, $x_0 - 1$ divide a $p(+1)$.

Observación: Aunque la propiedad se verifica, trivialmente, para $x_0 = 0$, no se considera esta posibilidad por carecer de interés práctico en la aplicación del algoritmo.

- *Si x_0 es una raíz entera de $p(x)$, $x_0 \in \mathbb{Z} \sim \{-1, 0, 1\}$, entonces $x_0 + 1$ es un divisor de $p(-1)$.*

La prueba de esta propiedad es análoga a la de la anterior.

Jesús Álvarez Lobo. *Oviedo. Asturias. España. lobo@matematicas.net.*

IMPLEMENTACIÓN DEL ALGORITMO.

Seleccionados los candidatos iniciales a raíces enteras por el bien conocido criterio de los divisores del término independiente, si éstos son numerosos puede resultar rentable aplicar el algoritmo de descarte a fin de reducir el número de divisiones necesarias para descubrir las raíces enteras.

Este algoritmo, fundamentado en las tres propiedades probadas en el anterior epígrafe, es un "tamiz" mucho más fino, ya que involucra dos nuevos criterios, determinando un "filtrado" mucho más selectivo; con frecuencia, los enteros que lo atraviesan son únicamente las raíces del polinomio.

Optimizaremos el diseño del algoritmo, de forma que resulte minimizado el volumen de cálculos y escritura, y que su ejecución resulte intuitiva y nemotécnica.

Si el término independiente, a_0 *, tiene* d *divisores positivos, mayores que la unidad,* a_0 *también tiene* d *divisores negativos menores que la unidad. Para aplicar las dos últimas propiedades, estos* $2d$ *divisores deben ser incrementados en* ± 1*, lo que produce otros* $4d$ *números a considerar, y el número de divisores sería* $6d$*. Así pues, la aplicación directa de las propiedades anteriores tendría el siguiente precio: sería necesario efectuar* $4d$ *pruebas "extra" de divisibilidad, y escribir el triple de divisores de valor absoluto mayor que uno, a cambio de evitar cierto número de divisiones...*

A fin de mejorar la implementación del algoritmo, observemos las siguientes propiedades:

Si x_0 *es una raíz entera positiva de* $p(x)$*, entonces:*

- $x_0 - 1$ *divide a* $p(+1)$ *, y esto implica que* $-(x_0 - 1) = -x_0 + 1$ *es un divisor de* $p(+1)$.
- $x_0 + 1$ *divide a* $p(-1)$ *, y esto implica que* $-(x_0 + 1) = -x_0 - 1$ *es un divisor de* $p(-1)$.

Estas propiedades permiten reducir drásticamente el volumen de escritura, sin más que extender las pruebas de divisibilidad de los divisores positivos:

- *Si* $x_0 - 1$ *no divide a* $p(+1)$*, se descarta como raíz* x_0.
- *Si* $x_0 + 1$ *no divide a* $p(+1)$*, se descarta como raíz* $-x_0$.
- *Si* $x_0 + 1$ *no divide a* $p(-1)$*, se descarta como raíz* x_0.
- *Si* $x_0 - 1$ *no divide a* $p(-1)$*, se descarta como raíz* $-x_0$.

En forma más compacta:

$$\frac{p(\pm 1)}{x_0 \mp 1} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow p(x_0) \neq 0, \quad \frac{p(\pm 1)}{x_0 \pm 1} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow p(-x_0) \neq 0$$

Obviamente, a efectos de divisibilidad, se pueden sustituir $p(+1)$ *por* $|p(+1)|$ *y* $p(-1)$ *por* $|p(-1)|$.

Sea

$$\{d_1, d_2, \cdots, d_{p-1}, d_p\}$$

el conjunto de los divisores positivos de a_0 *, tales que* $1 < d_1 < d_2 < \cdots < d_{p-1} < d_p$.

Dispongamos éstos, así como $|p(+1)|$ *y* $|p(-1)|$*, en la forma siguiente:*

$\lvert p(+1)\rvert$						$\lvert p(+1)\rvert$
	d_1	d_2	$\cdots$	d_{p-1}	d_p	
$\lvert p(-1)\rvert$						$\lvert p(-1)\rvert$

***Jesús Álvarez Lobo**. Oviedo. Asturias. España. lobo@matematicas.net.*

Regla de las diagonales.

Para $k = 1, 2, \cdots, p$, se prueba si es divisible $p(+1)$ y $p(-1)$ por $d_k \pm 1$. Cuando se prueba la divisibilidad por $d_k - 1$, se opera con $p(+1)$ y $p(-1)$ a la izquierda; cuando se prueba la divisibilidad por $d_k + 1$, se opera con $p(+1)$ y $p(-1)$ a la derecha.

Cada vez que resulte negativa una de estas pruebas de divisibilidad, se traza en la celda que contiene a d_k la diagonal cuya dirección está determinada por la posición relativa de $p(+1)$ y $p(-1)$ respecto de d_k, de acuerdo con el criterio anteriormente definido para el posicionamiento de $p(+1)$ y $p(-1)$.

Se presentan cuatro casos:

- *Si $d_k - 1$ no divide a $p(+1)$, se traza la diagonal principal (ascendente hacia la izquierda), puesto que $p(+1)$ se considera a la izquierda y por encima de d_k. Se descarta d_k.*

- *Si $d_k - 1$ no divide a $p(-1)$, se traza la diagonal secundaria (descendente hacia la izquierda), puesto que $p(-1)$ se considera a la izquierda y por debajo de d_k. Se descarta $-d_k$.*

- *Si $d_k + 1$ no divide a $p(+1)$, se traza la diagonal secundaria (descendente hacia la izquierda), puesto que $p(+1)$ se considera a la derecha y por encima de d_k. Se descarta $-d_k$.*

- *Si $d_k + 1$ no divide a $p(-1)$, se traza la diagonal principal (ascendente hacia la izquierda), puesto que $p(-1)$ se considera a la derecha y por debajo de d_k. Se descarta d_k.*

Criterio de descarte:

- *La **diagonal principal** descarta el **divisor positivo**.*

- *La **diagonal secundaria** descarta el **divisor negativo**.*

Obviamente, a los divisores descartados ya no es necesario someterlas a prueba alguna.

ALGORITMO.

① *Se eliminan de $p(x)$ las raíces 0, 1 y -1, así como el máximo común divisor de los coeficientes. Designaremos por $q(x)$ el polinomio resultante. El algoritmo se aplica a este polinomio reducido.*

② *Los datos necesarios para poder aplicar el algoritmo son los divisores (mayores que la unidad) del término independiente de $q(x)$, así como los valores de $q(+1)$ y $q(-1)$.*

- *$q(-1)$ se obtiene durante el ensayo de la raíz -1, y es el resto de la división de $q(x)$ entre $x + 1$.*
- *Si -1 no es raíz de $p(x)$, es decir, si $p(-1) \neq 0$, entonces $q(+1)$ se obtiene durante el ensayo de la raíz $+1$, y es el resto de la división de $q(x)$ entre $x - 1$. En caso contrario, el cálculo de $q(+1)$ se puede efectuar sin necesidad de realizar la división de $q(x)$ entre $x - 1$, ni aplicar el teorema del resto. En efecto, sea $p_1(x)$ el polinomio resultante de eliminar en $p(x)$ las raíces 0 y 1, así como el máximo común divisor de los coeficientes. Si -1 es una raíz de $p_1(x)$ de orden de multiplicidad m, se tiene:*

$$p_1(x) = (x+1)^m q(x) \Rightarrow q(x) = \frac{p_1(x)}{(x+1)^m} \Rightarrow \boxed{q(+1) = \frac{p_1(+1)}{2^m}.}$$

*Así pues, mediante esta **fórmula de corrección**, se deduce de forma inmediata el valor de $q(+1)$ a partir de $p_1(+1)$, cuyo valor se obtiene durante el ensayo de la raíz $+1$.*

③ *Se efectúan las pruebas de divisibilidad según el esquema indicado.*

Ejemplo. *Consideremos el polinomio* $p(x) = 2x^8 + 50x^7 + 48x^6 - 2x^5 - 52x^4 - 96x^3 + 2x^2 + 48x$.

Extrayendo el factor común, resulta: $p(x) = 2x(x^7 + 25x^6 + 24x^5 - x^4 - 26x^3 - 48x^2 + x + 24)$

	1	**25**	**24**	**-1**	**-26**	**-48**	**1**	**24**	
+1		1	26	50	49	23	-25	-24	
	1	**26**	**50**	**49**	**23**	**-25**	**-24**	0	
+1		1	27	77	126	149	124		
	1	**27**	**77**	**126**	**149**	**124**	100		$p_1(+1) = 100$
	1	**26**	**50**	**49**	**23**	**-25**	**-24**		
-1		-1	-25	-25	-24	1	24		
	1	**25**	**25**	**24**	**-1**	**-24**	**0**		
-1		-1	-24	-1	-23	24			
	1	**24**	**1**	**23**	**-24**	**0**			$q(x) = x^4 + 24x^3 + x^2 + 23x - 24$
-1		-1	-23	22	-45				
	1	**23**	**-22**	**45**	**-69**				$q(-1) = -69$

Los cálculos realizados hasta aquí son los habituales para la búsqueda de las raíces ± 1.

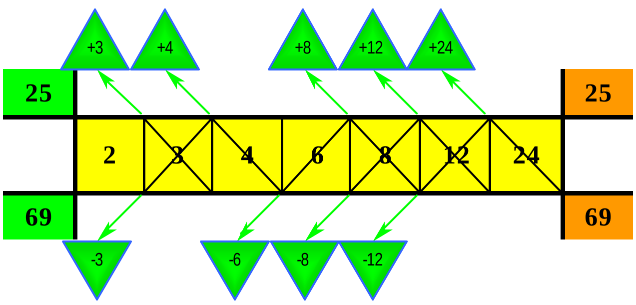
El primer resto no nulo obtenido al iterar en el algoritmo de Ruffini para la raíz -1 *es* $q(-1)$. *Si* $p(x)$ *no tiene la raíz* -1, *el valor de* $q(+1)$ *coincide con el de* $p(+1)$; *pero en este ejemplo sí existe la raíz* -1, *con orden de multiplicidad* = 2; *por tanto, aplicaremos la corrección expuesta anteriormente:*

$$q(+1) = \frac{p_1(+1)}{2^m} = \frac{100}{2^2} = 25 \quad \Rightarrow \quad q(+1) = 25$$

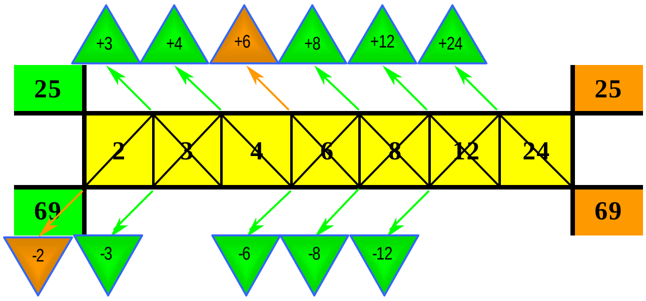
Conocidos $q(+1)$ *y* $q(-1)$, *para poder aplicar el algoritmo de descarte al polinomio* $q(x)$ *sólo necesitamos determinar el conjunto de los divisores de* 24 *mayores que* 1: {2, 3, 4, 6, 8, 12, 24}.

25								**25**
	2	**3**	**4**	**6**	**8**	**12**	**24**	
69								**69**

Los divisores de **24** *disminuidos en una unidad deben dividir a* 25 *y* 69. *Esta propiedad, asociada al criterio de las diagonales, permite descartar los siguientes valores:*



Los divisores de **24** *aumentados en una unidad deben dividir a* 25 *y* 69. *Esta propiedad, asociada al criterio de las diagonales, permite descartar los siguientes valores:*



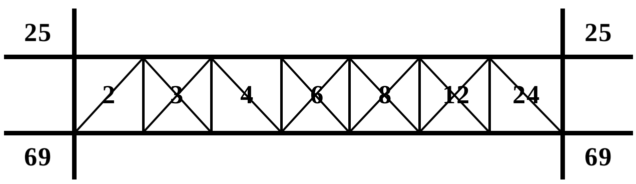
De los 14 *candidatos a raíz entera* (7 *positivos y* 7 *negativos*)*, con muy poco esfuerzo, han quedado descartados* 11. *Basta probar ahora por división si* +2, -4 *y* -24 *son raíces de* $q(x)$:

	1	**24**	**1**	**23**	**-24**
+2		2	52	106	258
	1	**26**	**53**	**129**	**234**

	1	**24**	**1**	**23**	**-24**
-4		-4	-80	316	258
	1	**20**	**-79**	**339**	**-1380**

	1	**24**	**1**	**23**	**-24**
-24		-24	0	-24	24
	1	**0**	**1**	**-1**	**0**

La aplicación del algoritmo de descarte ha supuesto en este caso una considerable economía, tanto de cálculo como de volumen de escritura (en la práctica, el procedimiento es muy sencillo, aunque pueda parecer lo contrario en su descripción pormenorizada), ya que se han evitado 11 *divisiones por el algoritmo de Ruffini, a cambio del simple esquema*



cuya construcción sólo involucra operaciones que se efectúan rápidamente y sin dificultad: restar o sumar la unidad y aplicar criterios de divisibilidad.

Así pues, -24 *es la única raíz entera de* $q(x)$: $q(x) = x^4 + 24x^3 + x^2 + 23x - 24 = (x+24)(x^3 + x - 1)$.

Las otras tres raíces de $q(x)$ *son la real* $\sqrt[3]{\frac{\sqrt{93}}{18}+\frac{1}{2}}-\sqrt[3]{\frac{\sqrt{93}}{18}-\frac{1}{2}}$ *y las dos conjugadas complejas*

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{\frac{\sqrt{93}}{18}-\frac{1}{2}}-\sqrt[3]{\frac{\sqrt{93}}{18}+\frac{1}{2}}\right) \pm\ i\left(\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{\frac{\sqrt{31}+3\sqrt{3}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{\sqrt{31}-3\sqrt{3}}{2}}\right)\right).$$

DETERMINACIÓN DE RAÍCES RACIONALES FRACCIONARIAS.

Afortunadamente, los polinomios con los que se trabaja habitualmente no suelen ser tan hostiles como el $q(x)$ del ejemplo anterior. Sin embargo, las aplicaciones del algoritmo de descarte no se limitan a la búsqueda de raíces enteras. En efecto, puesto que cualquier polinomio puede ser trasformado mediante un cambio de variable en otro polinomio cuyas raíces racionales sean todas enteras, el algoritmo de descarte es susceptible de ser aplicado para el descarte de raíces racionales fraccionarias. Además, esta transformada (como veremos en el segundo epígrafe de esta sección), aunque se aplique a polinomios con términos independientes de pocos divisores, suele tener un término independiente con muchos divisores, siendo esta la situación en la que la exclusión rápida de candidatos a raíz racional cobra mayor interés.

Raíces racionales fraccionarias: criterios de existencia.

Sea $p(x)$ una ecuación polinómica de coeficientes enteros y grado n. Si la fracción irreducible $\dfrac{a}{b}$ es una raíz de $p(x)$, se tiene:

$$p\left(\frac{a}{b}\right)=a_n\left(\frac{a}{b}\right)^n+a_{n-1}\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1}+\cdots+a_1\left(\frac{a}{b}\right)+a_0=0\Rightarrow a_n\frac{a^n}{b}=-\left(a_{n-1}a^{n-1}+\cdots+a_1b^{n-2}+a_0b^{n-1}\right)\in \mathbb{Z},$$

y siendo b primo relativo con a, también lo será con a^n; por tanto, b debe dividir al coeficiente a_n.

Por otra parte,

$$\frac{b^n}{a}p\left(\frac{a}{b}\right)=a_na^{n-1}+a_{n-1}a^{n-2}b+\cdots+a_1b^{n-1}+a_0\frac{b^n}{a}=0\Rightarrow a_0\frac{b^n}{a}=-\left(a_na^{n-1}+a_{n-1}a^{n-2}b+\cdots+a_1b^{n-1}\right)\in \mathbb{Z},$$

y un razonamiento análogo al anterior, prueba que a, no pudiendo dividir a b^n, ha de dividir a a_0.

Así pues, podemos enunciar el siguiente ***criterio de existencia de raíces racionales fraccionarias:***

"Para que un número fraccionario irreducible pueda ser raíz de una ecuación algebraica de coeficientes enteros, es necesario que el numerador de tal fracción divida al término independiente y el denominador divida al coeficiente del término de mayor grado."

Transformada de un polinomio genérico a un polinomio cuyas raíces racionales sean enteras.

De acuerdo con el criterio anteriormente establecido, una ecuación algebraica de coeficientes enteros no puede tener raíces racionales fraccionarias si el coeficiente del término de mayor grado es la unidad, es decir, si el polinomio es mónico.

Nos interesa, pues, una transformación que aplicada a un polinomio genérico, lo convierta en otro polinomio de coeficientes enteros, cuyo coeficiente del término de mayor grado sea unitario. Tal transformación es la siguiente:

$$p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\xrightarrow{y=a_n}q(y)=a_n^{n-1}p\left(\frac{y}{a_n}\right)=y^n+a_{n-1}y^{n-1}+\cdots+a_n^{n-2}a_1x+a_n^{n-1}a_0.$$

Regla para la construcción del transformado mónico y sin raíces racionales fraccionarias.

En la práctica, la trasformada de un polinomio $p(x)$ de grado n consiste en sustituirlo por el polinomio mónico $q(y)$, con el mismo coeficiente en el término de grado $n-1$, y cuyos coeficientes en los términos de grado k, $0 < k < n-1$, se obtiene multiplicando los correspondientes coeficientes de $p(x)$ por a_n^{n-k-1}, para $k = n-2, n-3, \ldots, 1, 0$.

Las raíces fraccionarias del polinomio primitivo, $p(x)$, se obtienen dividiendo las raíces enteros del polinomio transformado entre el coeficiente a_n del término de mayor grado de $p(x)$.

Ejemplo.

Consideremos el polinomio

$$p(x) = 3x^5 + x^4 - 2x^3 - 12x + 8.$$

Su transformado mónico y sin raíces racionales fraccionarias es el polinomio q(x), cuya construcción es inmediata aplicando la regla anterior:

$$y = 3x \Rightarrow q(y) = 3^4 p\left(\frac{y}{3}\right) = y^5 + y^4 - 6y^3 - 324y + 648.$$

Aplicando el método tradicional de ir ensayando los divisores de 648 en orden creciente, obtendríamos:

	1	**1**	**-6**	**0**	**-324**	**648**
+1		1	2	-4	-4	-328
	1	**2**	**-4**	**-4**	**-328**	**320**

	1	**1**	**-6**	**0**	**-324**	**648**
-1		-1	0	6	-6	330
	1	**0**	**-6**	**6**	**-330**	**978**

	1	**1**	**-6**	**0**	**-324**	**648**
+2		2	6	0	0	-648
	1	**3**	**0**	**0**	**-324**	**0**

Ciertamente, hemos sido afortunados de hallar una raíz tan pronto, ya que 648 tiene 40 divisores.

Por tanto, $x = \frac{2}{3}$ *es una raíz de* $p(x)$.

Eliminada la raíz y = 2 en q(y), nos queda el polinomio $r(y) = y^4 + 3y^3 - 324$. *Si intentásemos buscar una raíz entera en éste, ya no tendríamos tanta suerte, porque sería necesario efectuar ¡28 divisiones! para convencerse de que r(y) no tiene raíces enteras.*

Veamos que el algoritmo de descarte sólo filtra un candidato a raíz entera, lo que supone en este caso una economía de 27 divisiones:

- *Divisores positivos de 324:* $\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 27, 36, 54, 81, 108, 162, 324\}$.
- *Cálculo de r(+1) y r(-1):* $r(y) = \frac{q(y)}{x-2} \Rightarrow \begin{cases} r(+1) = \frac{q(+1)}{1-2} = \frac{320}{-1} = -320 \\ r(-1) = \frac{q(-1)}{-1-2} = \frac{978}{-3} = -326 \end{cases}$
- *Descarte de divisores:*

320															**320**
	~~**2**~~	**3**	~~**4**~~	~~**6**~~	~~**9**~~	~~**12**~~	~~**18**~~	~~**27**~~	~~**36**~~	~~**54**~~	~~**81**~~	~~**108**~~	~~**162**~~	~~**324**~~	
326															**326**

El algoritmo de descarte sólo ha filtrado uno de los 28 divisores: el -3*; basta, pues, efectuar la división de* $r(y)$ *entre* $x + 3$ *para terminar la prueba:*

	1	**3**	**0**	**0**	**-324**
-3		-3	0	0	0
	1	**0**	**0**	**0**	**-324**

En consecuencia, $p(x)$ *sólo tiene una raíz racional:* $x=\dfrac{2}{3}$.

ꙮ

Problemas de nivel medio y de olimpiadas 19 (Australia 2004)

Soluciones de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, España

1. Determinar todos los pares (*a*,*b*) de números reales tales que la ecuación

$$x^3+3x^2+ax+b=0$$

tiene tres raíces reales que pueden formar progresión aritmética.

Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que las raíces que están en progresión aritmética son $m-d$, m, $m+d$. Entonces, por las relaciones de Cardano-Vieta, la suma de las tres raíces, $3m$, es igual a -3, luego $m=-1$. Por las mismas relaciones, se tiene que

$$a=m(m-d)+m(m+d)+(m-d)(m+d)=3m^2-d^2=3-d^2\,;$$

$$-b=m(m-d)(m+d)=m\left(m^2-d^2\right)=-\left(1-d^2\right).$$

Entonces, se deduce que $a=b+2$, siendo $b\leq 1$ pues $d^2\geq 0$ (si $d=0$, $b=1$, $a=3$ entonces las tres raíces son iguales a -1, estando en progresión aritmética de diferencia 0). Siempre que $a=b+2\leq 3$, se tiene

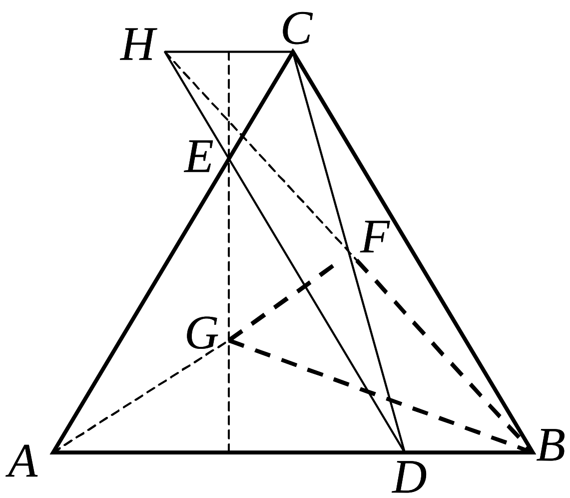
$$0=x^3+3x^2+(b+2)x+b=\left(x+1+\sqrt{1-b}\right)(x+1)\left(x+1-\sqrt{1-b}\right),$$

estando por lo tanto las tres raíces en progresión aritmética de diferencia $\sqrt{1-b}$. Luego los pares (a,b) buscados son todos los $(l+2,l)$ para todo $l\leq 1$ real.

2. Sea *ABC* un triángulo equilátero, y *D* un punto del lado *AB*, situado entre *A* y *B*. Sea *E* un punto sobre *AC* tal que *DE* es paralelo a *BC*. Sea *F* el punto medio de *CD* y *G* el circuncentro de *ADE*.
Hallar los ángulos del triángulo *BFG*.

Para la resolución de este problema se utilizará el resultado, de sobra conocido, que dice que la bisectriz del ángulo desigual de un triángulo isósceles es también la mediatriz del lado desigual. En un triángulo equilátero, este resultado es cierto para los tres vértices. Es obvio que al ser *DE* paralela a *BC*, *ADE* es equilátero, y *BD*=*CE*. Sea entonces *H* el punto donde se encuentran *DE* y la paralela a *AB* por *C*. Luego *BCHD* es un paralelogramo, y sus diagonales, *CD* y *BH*, se cortan en sus puntos medios, es decir, en

F. Por ser ∠*HCE*=∠*CBA* y *CH*=*BD* por construcción, el triángulo *HCE* es equilátero. Luego *EG* es al mismo tiempo mediatriz de *AD* y bisectriz de ∠*AED*, luego es bisectriz de ∠*CEH*, luego mediatriz de *CH*. Pero entonces *GH*=*CG*=*BG*, siendo esta última igualdad cierta por ser *ABC* equilátero y estar *G* en la bisectriz del ángulo ∠*BAC*, luego en la mediatriz de *BC*. Por lo tanto, *F* es el punto medio del lado *BH* del triángulo *BGH*, que es isósceles en *G*. Luego *FG* es perpendicular a *BH*, luego a *BF*, y ∠*BFG* es recto.



Aplicamos ahora el teorema del coseno al triángulo *BAG*, en el que el ángulo ∠*BAG* es igual a ***p***/6, por ser *AG* la bisectriz de ∠*BAC*:

$$BG^2 = AG^2 + AB^2 - 2AG \cdot AB\cos\left(\angle BAG\right) = \left(\frac{AD}{\sqrt{3}}\right)^2 + AB^2 - 2\frac{AD}{\sqrt{3}}AB\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$= \frac{AD^2}{3} + AB^2 - AD \cdot AB.$$

Se ha utilizado el hecho de que, en todo triángulo equilátero, el radio de la circunferencia circunscrita multiplicado por el doble del coseno de ***p***/6 es igual al lado.

Aplicamos ahora el teorema del coseno al triángulo *BDH*, en el que ∠*BAG* es igual a 2***p***/3, ∠*HDA*=∠*EDA*=***p***/3:

$$BH^2 = BD^2 + DH^2 - 2BD \cdot DH\cos\left(\angle BDH\right) = BD^2 + AB^2 + BD \cdot AB$$
$$= AD^2 + 3AB^2 - 3AB \cdot AD.$$

Se ha utilizado que *DH*=*BC*=*AB*, y que *AD*+*BD*=*AB*. Pero *F* es el punto medio de *BH*, luego al ser ∠*BFG* recto, se tiene que

$$\cos\left(\angle FBG\right)=\frac{BF}{BG}=\frac{BH}{2BG}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{AD^2+3AB^2-3AB\cdot AD}{\frac{AD^2}{3}+AB^2-AD\cdot AB}}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Luego $\angle FBG=p/6$, y consecuentemente $\angle BGF=p/3$.

3. Determinar todos los enteros no negativos *m* y *n* tales que

$$6^m+2^n+2$$

es un cuadrado perfecto.

Utilizaremos para la resolución de este problema el hecho conocido de que todo cuadrado perfecto da resto 0 o 1 módulo 4, según sea el cuadrado de un entero par o impar, respectivamente. Al mismo tiempo, es trivial comprobar que el cuadrado de cualquier número da resto 0, 1, 4 o 7 módulo 9, según sea el cuadrado de un múltiplo de 3, o de un número que de resto ±1, ±2 o ±4 módulo 9, respectivamente.

Supongamos que existe alguna solución con $m\geq 2$. Entonces, 4 divide a 6^m, luego 2^n debe dar resto 2 o 3 al dividir por 4, y debe ser $n=1$, con lo que debe ser cuadrado perfecto $4(9\cdot 6^{m-2}+1)$. Ahora bien, esto es imposible si $m=2$, luego el número entre paréntesis es un cuadrado perfecto impar que da resto ±1 al dividir por 9. Luego existe un entero positivo a tal que

$$9\cdot 6^{m-2}+1=\left(18a\pm 1\right)^2=324a^2\pm 36a+1\,; \qquad 2^{m-2}\cdot 3^{m-2}=4a\left(9a^2\pm 1\right).$$

Ahora bien, el último número entre paréntesis no puede tener a 3 como factor, luego 3^{m-2} divide a a, mientras que $4(9a^2\pm 1)\geq 32a$ divide a 2^{m-2}. Pero entonces

$$3^{m-2}\leq a<32a\leq 4a\left(9a^2\pm 1\right)\leq 2^{m-2},$$

que es absurdo, luego no hay soluciones con $m\geq 2$.

Supongamos ahora que $m=1$. Entonces, 2^n debe dar resto 0 o 1 al dividir por 4. En el primer caso, $n\geq 2$, y $2^n+8=4(2+2^{n-2})$ debe ser cuadrado perfecto, luego 2^{n-2} debe dar reseto 2 o 3 al dividir por 4, y debe ser $n=3$, en cuyo caso el número dado 6+8+2=16, que es de hecho un cuadrado perfecto. En el segundo caso, debe ser $n=0$, siendo el número dado 6+1+2=9, que también es cuadrado perfecto.

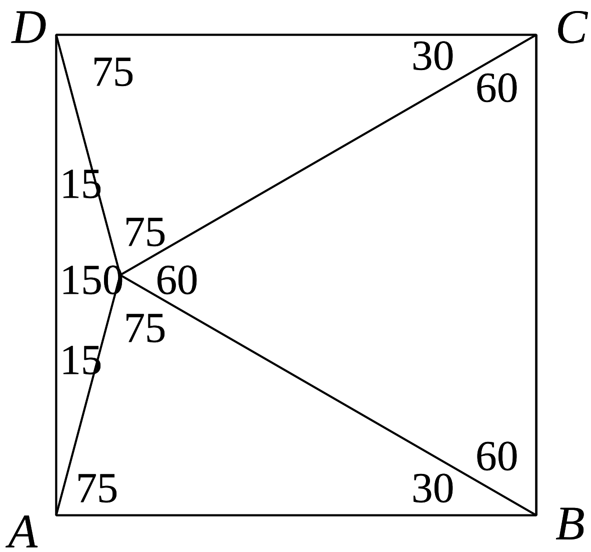
Finalmente, sea m=0. Entonces, 2^n debe dar resto 1 o 2 al dividir por 4, siendo n=0 o 1. El número dado es entonces 1+1+2=4, que también es cuadrado perfecto, o 1+2+2=5, que no lo es.
Luego todas las soluciones para (m,n) no negativos son (0,0), (1,0) y (1,3).

4. Sea *ABCD* un paralelogramo. Supongamos que existe un punto *P* en su interior tal que

$$\widehat{ABP} = 2\widehat{ADP}\ \textbf{, y}\ \widehat{DCP} = 2\widehat{DAP}\ \textbf{.}$$

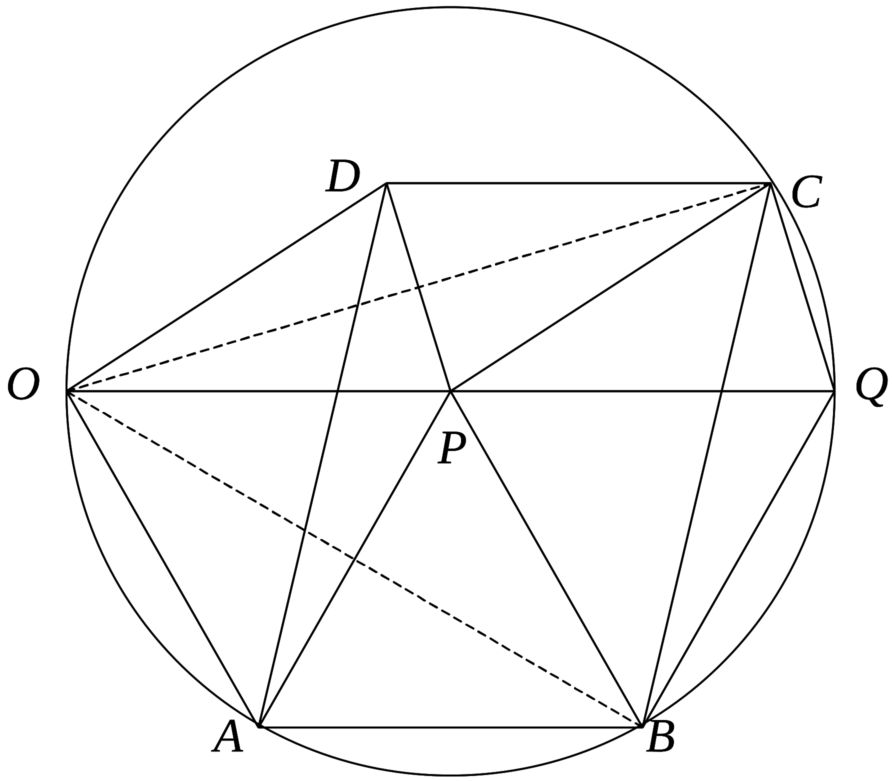
Demostrar que *AP*=*BP*=*CP*.

Nota: Entiendo que hay una errata en el problema, y el enunciado debería ser "Demostrar que *AB*=*BP*=*CP*." Véase la figura siguiente:



Es obvio que *ABCD* es un paralelogramo (cuadrado), y el punto interior *P* es tal que $\angle ABP = \angle DCP = 30°$, mientras que $\angle ADP = \angle DAP = 15°$, con lo que se cumple la hipótesis del problema. Sin embargo, *AP* no es igual a *BP*=*CP*. Luego el enunciado propuesto debe contener una errata. Sin embargo, como se demuestra a continuación, la tesis modificada que propongo sí se deduce necesariamente de la hipótesis.
Construimos exteriormente a *ABCD* sobre el lado *BC* un triángulo *BQC* igual a *APD*. Obviamente, *ABQP* y *CDPQ* son paralelogramos pues por construcción *BQ* es paralelo e igual a *AP*, y *CQ* es paralelo e igual a *PD*. Sean ahora O_1, O_2 los puntos donde las

bisectrices de $\angle ABP$ y $\angle DCP$ cortan a la recta PQ, y sea O el punto donde la circunferencia circunscrita al triángulo BCQ corta por segunda vez a la recta PQ.



Por la hipótesis del enunciado,

$$\angle BO_1Q = \angle O_1BA = \frac{1}{2}\angle PBA = \angle ADP = \angle BCQ\ ;$$

$$\angle CO_2Q = \angle O_2CD = \frac{1}{2}\angle PCD = \angle DAP = \angle CBQ\,.$$

Luego O_1 y O_2 están en la circunferencia circunscrita al triángulo BCQ, y por lo tanto coinciden con O. Pero además, OPB y OPC son isósceles en P, por ser OP, AB y CD paralelas (luego $\angle POB=\angle ABO$ y $\angle POC=\angle DCO$) y OB, OC las bisectrices de $\angle ABP$ y $\angle DCP$, respectivamente (luego $\angle PBO=\angle ABO$ y $\angle PCO=\angle DCO$). Luego $BP=OP=CP$. Entonces, P es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo OBC, y como dicha circunferencia también pasa por Q, $OP=QP=AB=CD$, estas dos últimas igualdades por construcción. Luego $AB=BP=CP$, q.e.d..

Problemas de nivel medio y de Olimpiadas (20)

Cinco problemas de las Olimpiadas de Serbia y Montenegro

1(1997) Dado un número natural k, hallar el menor número natural C tal que

$$\frac{C}{n+k+1}\binom{2n}{n+k}$$

es entero, para todo $n \geq k$.

2(1998) Más de la mitad de las caras de un poliedro convexo pueden colorearse de manera que no haya ningún par de caras coloreadas que compartan una arista. Demostrar que no es posible inscribir una esfera en ese poliedro.

3(2000) Todos los vértices de un polígono en el plano coordenado tienen coordenadas enteras, y todos sus lados tienen longitudes enteras. Demostrar que su perímetro es par.

4(2001) Sean $p_1, p_2, \cdots, p_n$ los n menores números primos ($n \geq 3$). Probar que

$$\frac{1}{p_1^2} + \frac{1}{p_2^2} + \cdots + \frac{1}{p_n^2} + \frac{1}{p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_n} < \frac{1}{2}.$$

5(2004) Sea r el inradio de un triángulo acutángulo. Probar que la suma de las distancias del ortocentro a los lados no es mayor que $3r$.

Problemas para los más jóvenes (20)

Cuatro problemas de las Olimpiadas de 8º de E.G.B. (hasta 1994)

1.Las 6 caras de un cubo se pintan de negro. Después, el cubo se corta en $4913 = 17^3$ cubitos más pequeños. ¿Cuántos de estos cubitos tienen

0 caras negras?
1 cara negra?
2 caras negras?
3 caras negras
4 caras negras
5 caras negras
6 caras negras?

2.¿Cuál ha de ser el mínimo número de lanzamientos realizados por un jugador de baloncesto en un partido si su porcentaje de aciertos ha sido exactamente el $83{,}333\cdots\%$? En este caso, cuántos intentos han sido transformados?

3.Dados tres números naturales, a, b, c tales que $a = b \cdot c$, responde razonadamente si son ciertas las dos afirmaciones siguientes:

1) Si a es par, entonces $a + b + c$ es par.
2) Si a es impar, entonces $a + b + c$ es impar

4. A una fiesta asistieron 20 personas. María bailó con 7 chicos, Luisa con 8, Carmen con 9 y así sucesivamente, hasta llegar a Olga, que bailó con todos. ¿Cuántos chicos había en la fiesta?

Primer día

21 de junio de 2005

PROBLEMA 1

¿De los números positivos que pueden ser expresados como suma de 2005 enteros consecutivos, no necesariamente positivos, cuál ocupa la posición 2005?

PROBLEMA 2

Demuestre que la ecuación $a^2b^2 + b^2c^2 + 3b^2 - a^2 - c^2 = 2005$ no tiene soluciones enteras.

PROBLEMA 3

En el triángulo ABC sean P, Q y R los puntos de tangencia del incírculo en los lados AB, BC y AC respectivamente. Sean L, M y N los pies de las alturas del triángulo PQR en PQ, QR y PR, respectivamente.

a) Demuestre que las rectas AN, BL y CM se cortan en el mismo punto.
b) Demuestre que este punto común está en la recta que pasa por el ortocentro y el circuncentro del triángulo PQR.

Tiempo: $4\frac{1}{2}$ horas.

Cada problema vale 7 puntos.

Segundo Día

22 de junio de 2005

PROBLEMA 4

Dos jugadores llamados Azul y Rojo juegan por turnos en un tablero de 10×10. Azul tiene una lata de pintura azul y Rojo una de pintura roja. Comenzando por Azul, cada jugador en su turno elige una fila o columna del tablero que no haya sido escogida anteriormente por ninguno de los dos y pinta sus 10 casillas con su propio color. Si alguna(s) de esas casillas ya estuviese pintada, el nuevo color cubre al anterior. Luego de 20 turnos, al agotarse las filas y columnas disponibles, el juego finaliza. Entonces se cuenta la cantidad de casillas de cada color y se determina el ganador de acuerdo a la siguiente regla:

Si la cantidad de casillas rojas supera en diez o más a la cantidad de casillas azules, entonces gana Rojo. De lo contrario gana Azul.

Determine si alguno de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora y explique cuál es la estrategia.

PROBLEMA 5

En un triángulo acutángulo ABC, sean H su ortocentro y M el punto medio de lado AC. Por M se traza una recta $\boldsymbol{l}$ paralela a la bisectriz del ángulo AHC. Demuestre que la recta $\boldsymbol{l}$ divide al triángulo ABC en dos partes que tienen el mismo perímetro.

PROBLEMA 6

Se tienen n cartas numeradas de 1 a n y p cajas para guardarlas, con p primo. Determine los posibles valores de n para los que se pueden guardar todas las cartas de forma que la suma de las cartas en cada caja sea la misma.

Tiempo: $4\frac{1}{2}$ horas.

Cada problema vale 7 puntos.

Problema 91

Propuesto por José Luis Díaz Barrero, Barcelona, España.

Sean a,b,g los ángulos del triángulo ABC y sea n un número natural impar. Probar que

$$\frac{\sin(na)+\sin(nb)+\sin(ng)}{\cos\left(\frac{na}{2}\right)\cos\left(\frac{nb}{2}\right)\cos\left(\frac{ng}{2}\right)}$$

es entero y determinar su valor.

Solución de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, Navarra, España.

Para cualquier n impar, podemos escribir $n=4m\pm1$ con m entero. Entonces,

$$\begin{aligned}
\sin(na)+\sin(nb) &= 2\sin\left(n\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(n\frac{a-b}{2}\right)\\
&= 2\sin\left((4m\pm1)\frac{p-g}{2}\right)\cos\left(n\frac{a-b}{2}\right)\\
&= 2\sin\left(\pm\frac{p}{2}-\frac{ng}{2}\right)\cos\left(n\frac{a-b}{2}\right)=\pm2\cos\left(\frac{ng}{2}\right)\cos\left(n\frac{a-b}{2}\right);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin(ng) = 2\sin\left(\frac{ng}{2}\right)\cos\left(\frac{ng}{2}\right) &= 2\sin\left((4m\pm1)\frac{p-a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{ng}{2}\right)\\
&= 2\sin\left(\pm\frac{p}{2}-n\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{ng}{2}\right)=\pm2\cos\left(n\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{ng}{2}\right).
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\sin(na)+\sin(nb)+\sin(ng) &= \pm2\cos\left(\frac{ng}{2}\right)\left[\cos\left(n\frac{a+b}{2}\right)+\cos\left(n\frac{a-b}{2}\right)\right]\\
&= \pm4\cos\left(\frac{na}{2}\right)\cos\left(\frac{nb}{2}\right)\cos\left(\frac{ng}{2}\right).
\end{aligned}$$

Luego la expresión del enunciado es entera, siendo igual a +4 o –4 según sea respectivamente +1 o –1 el resto de dividir n por 4.

Problema 92

Propuesto por José Luis Díaz Barrero, Barcelona, España.

Sean a, b, c tres números complejos distintos y no nulos.
Calcular, en la forma más simplificada posible,

$$\frac{2a^2+b^2+c^2}{\left(1-\frac{a}{b}\right)\left(1-\frac{a}{c}\right)}+\frac{a^2+2b^2+c^2}{\left(1-\frac{b}{a}\right)\left(1-\frac{b}{c}\right)}+\frac{a^2+b^2+2c^2}{\left(1-\frac{c}{a}\right)\left(1-\frac{c}{b}\right)}.$$

<u>Solución de F. Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba, España.</u>

Demostraremos que la expresión a simplificar es idéntica a esta otra:

$$\frac{a.b.c.\begin{vmatrix}1 & a & a\\ 1 & b & b\\ 1 & c & c\end{vmatrix}+(a^2+b^2+c^2).\begin{vmatrix}1 & a & b.c\\ 1 & b & a.c\\ 1 & c & a.b\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & b & b^2\\ 1 & c & c^2\end{vmatrix}}=a^2+b^2+c^2$$

,

donde además se sabe que:

$$\begin{vmatrix}1 & a & b.c\\ 1 & b & a.c\\ 1 & c & a.b\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & b & b^2\\ 1 & c & c^2\end{vmatrix}=(a-b).(b-c).(c-a)$$

(Determinante de Vandermonde)

Veámoslo con mayor detalle:

$$\frac{a.b.c.\begin{vmatrix}1 & a & a\\ 1 & b & b\\ 1 & c & c\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & b & b^2\\ 1 & c & c^2\end{vmatrix}}=\frac{a.b.c.\left[a.(c-b)+b.(a-c)+c.(b-a)\right]}{(a-b).(b-c).(c-a)}=$$

$$=\frac{-a^2.b.c(b-c)-b^2.a.c.(c-a)-c^2.a.b.(a-b)}{(a-b).(b-c).(c-a)}=$$

$$=\frac{a^2}{(1-\frac{a}{b}).(1-\frac{a}{c})}+\frac{b^2}{(1-\frac{b}{a}).(1-\frac{b}{c})}+\frac{c^2}{(1-\frac{c}{b}).(1-\frac{c}{a})}$$

Por otra parte, desarrollando el segundo sumando tenemos que:

$$\frac{(a^2+b^2+c^2).\begin{vmatrix}1 & a & b.c\\ 1 & b & a.c\\ 1 & c & a.b\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & b & b^2\\ 1 & c & c^2\end{vmatrix}}=\frac{(a^2+b^2+c^2).\left[b.c.(c-b)+a.c.(a-c)+a.b.(b-a)\right]}{(a-b).(b-c).(c-a)}=$$

$$=\frac{(a^2+b^2+c^2).b.c.(c-b)+(a^2+b^2+c^2).a.c.(a-c)+(a^2+b^2+c^2).a.b.(b-a)}{(a-b).(b-c).(c-a)}=$$

$$=\frac{-(a^2+b^2+c^2).b.c.}{(a-b).(c-a)}+\frac{-(a^2+b^2+c^2).a.c}{(a-b).(b-c)}+\frac{-(a^2+b^2+c^2).a.b}{(b-c).(c-a)}=$$

$$=\frac{a^2+b^2+c^2}{(1-\frac{a}{b}).(1-\frac{a}{c})}+\frac{a^2+b^2+c^2}{(1-\frac{b}{a}).(1-\frac{b}{c})}+\frac{a^2+b^2+c^2}{(1-\frac{c}{b}).(1-\frac{c}{a})}$$

Sumando ambas expresiones, tenemos que:

$$\frac{a.b.c.\begin{vmatrix}1 & a & a\\ 1 & b & b\\ 1 & c & c\end{vmatrix}+(a^2+b^2+c^2).\begin{vmatrix}1 & a & b.c\\ 1 & b & a.c\\ 1 & c & a.b\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & b & b^2\\ 1 & c & c^2\end{vmatrix}}=\frac{a^2}{(1-\frac{a}{b}).(1-\frac{a}{c})}+\frac{b^2}{(1-\frac{b}{a}).(1-\frac{b}{c})}+\frac{c^2}{(1-\frac{c}{b}).(1-\frac{c}{a})}+$$

$$+\frac{a^2+b^2+c^2}{(1-\frac{a}{b}).(1-\frac{a}{c})}+\frac{a^2+b^2+c^2}{(1-\frac{b}{a}).(1-\frac{b}{c})}+\frac{a^2+b^2+c^2}{(1-\frac{c}{b}).(1-\frac{c}{a})}=\frac{2.a^2+b^2+c^2}{(1-\frac{a}{b}).(1-\frac{a}{c})}+\frac{a^2+2.b^2+c^2}{(1-\frac{b}{a}).(1-\frac{b}{c})}+\frac{a^2+b^2+2.c^2}{(1-\frac{c}{b}).(1-\frac{c}{a})}$$

En definitiva,

$$\frac{2.a^2+b^2+c^2}{(1-\frac{a}{b}).(1-\frac{a}{c})}+\frac{a^2+2.b^2+c^2}{(1-\frac{b}{a}).(1-\frac{b}{c})}+\frac{a^2+b^2+2.c^2}{(1-\frac{c}{b}).(1-\frac{c}{a})}=a^2+b^2+c^2$$

Problema 93

Propuesto por Laurentiu Modan, Bucarest, Rumanía.

Se consideran las sucesiones (x_n),(y_n) definidas por las recurrencias

$$\begin{cases} x_1 = 2, \\ x_n = 2x_{n-1}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = 1, \\ y_n = y_{n-1} + \sqrt{{y_{n-1}}^2 + 1}. \end{cases}$$

Calcular, si existen, los límites

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x_n y_n}}\right), \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{\ln(y_n)}.$$

Solución de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, Navarra, España.

Es trivial demostrar por inducción que $x_n=2^n$. Esto es obviamente cierto para $n=1$, y si es cierto para $n=m$, entonces

$$x_{m+1} = 2x_m = 2\cdot 2^m = 2^{m+1}.$$

Se puede también demostrar fácilmente por inducción que $2^n-1 \geq y_n \geq 2^{n-1}$ para todo n. Las desigualdades se cumplen trivialmente para $n=1$, y si se cumplen para $n=m$, entonces

$$y_{m+1} = y_m + \sqrt{{y_m}^2 + 1} > y_m + |y_m| = 2y_m \geq 2\cdot 2^{m-1} = 2^m = 2^{(m+1)-1};$$

$$\begin{aligned} y_{m+1} = y_m + \sqrt{{y_m}^2+1} &\leq 2^m - 1 + \sqrt{\left(2^m-1\right)^2+1} = 2^m - 1 + \sqrt{2^{2m} - 2^{m+1} + 2} \\ &< 2^m - 1 + \sqrt{2^{2m}} = 2^{m+1} - 1. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\frac{1}{\sqrt{x_n y_n}} \leq \frac{1}{\sqrt{2^n\cdot 2^{n-1}}} = \frac{1}{2^{n-1}\sqrt{2}}; \qquad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x_n y_n}}\right) = 0.$$

$$\frac{x_n}{\ln(y_n)} > \frac{2^n}{\ln\left(2^n-1\right)} > \frac{2^n}{\ln\left(2^n\right)} = \frac{1}{\ln 2}\frac{2^n}{n}.$$

Pero 2^n diverge mucho más rápido que n, y no existe el límite de $x_n/\ln(y_n)$ (la sucesión tiende a infinito).

Problema 94

Propuesto por José Luis Díaz Barrero, Barcelona, España.

Sea f:[a,b]$\rightarrow$$\boldsymbol{R}$ una función continua y derivable en (a,b). Probar que existe un $c\in(a,b)$ tal que

$$\frac{\sqrt{2}}{2}f'(c)=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(\frac{1}{a-c}+\frac{1}{b-c}\right).$$

Solución de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, Navarra, España.

Nota preliminar: es conveniente precisar que es necesario que $f(x)$ esté definida y sea continua en el cerrado [a,b] para que se cumpla la propiedad mencionada. En caso contrario, sea f:[a,b]$\rightarrow$$\boldsymbol{R}$ definida como sigue:

$$f(a)=f(b)=0; \qquad f(x)=x-\sqrt{\frac{2}{a^2+b^2}}\ln\big((x-a)(b-x)\big) \text{ si } x\in(a,b).$$

Obviamente, $f(x)$ es continua y derivable en (a,b), aunque no es continua ni en a ni en b, estando sin embargo definida en todo el cerrado [a,b]. Es obvio que, para todo $x\in(a,b)$,

$$f'(x)=1-\sqrt{\frac{2}{a^2+b^2}}\frac{(b-x)-(x-a)}{(x-a)(b-x)}=1+\sqrt{\frac{2}{a^2+b^2}}\left(\frac{1}{a-x}+\frac{1}{b-x}\right).$$

Por lo tanto, para cada $c\in(a,b)$,

$$\frac{\sqrt{2}}{2}f'(c)=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(\frac{1}{a-c}+\frac{1}{b-c}\right),$$

con lo que la igualdad del enunciado no se daría nunca.

Tras esta nota preliminar, consideremos entonces que f:[a,b]$\rightarrow$$\boldsymbol{R}$ toma valores reales para todo punto de [a,b], siendo continua en dicho intervalo cerrado, y derivable en el abierto (a,b). Supongamos que la igualdad propuesta en el enunciado no se cumple para ningún punto de (a,b). Entonces, al ser continuos los dos lados de la igualdad dada en el enunciado, eso quiere decir que uno será siempre mayor que el otro. Supongamos entonces que, para todo punto del abierto, es

$$f'(c)>\sqrt{\frac{2}{a^2+b^2}}\left(\frac{1}{a-c}+\frac{1}{b-c}\right).$$

Entonces, para cada dos puntos c,d tales que $a<c<d<b$, se tiene

$$f(d)-f(c)=\int_c^d f'(x)\,dx>\sqrt{\frac{2}{a^2+b^2}}\int_c^d\left(\frac{1}{a-x}+\frac{1}{b-x}\right)dx$$

$$=-\sqrt{\frac{2}{a^2+b^2}}\Big[\ln\big((x-a)(b-x)\big)\Big]\Big|_c^d=\sqrt{\frac{2}{a^2+b^2}}\ln\left(\frac{(c-a)(b-c)}{(d-a)(b-d)}\right).$$

Fijado c, se tiene entonces que

$$\lim_{d\to b} f(d)>f(c)+\sqrt{\frac{2}{a^2+b^2}}\ln\left(\frac{(c-a)(b-c)}{b-a}\right)+\sqrt{\frac{2}{a^2+b^2}}\lim_{d\to b}\ln\left(\frac{1}{b-d}\right).$$

Los dos primeros sumandos del miembro de la derecha son finitos, pero no así el tercero, que diverge hacia valores positivos arbitrariamente grandes. Luego $f(x)$ no es continua en b. Contradicción.

De forma similar, si asumimos que para todo punto del abierto se cumple

$$f'(c)<\sqrt{\frac{2}{a^2+b^2}}\left(\frac{1}{a-c}+\frac{1}{b-c}\right),$$

entonces

$$f(d)-f(c)<\sqrt{\frac{2}{a^2+b^2}}\ln\left(\frac{(c-a)(b-c)}{(d-a)(b-d)}\right).$$

Luego

$$\lim_{c\to a} f(c)>f(d)-\sqrt{\frac{2}{a^2+b^2}}\ln\left(\frac{b-a}{(d-a)(b-d)}\right)+\sqrt{\frac{2}{a^2+b^2}}\lim_{c\to a}\ln\left(\frac{1}{c-a}\right).$$

Nuevamente los dos primeros sumandos son finitos, pero el tercero diverge hacia valores positivos arbitrariamente grandes. Luego $f(x)$ no es continua en a, y se llega nuevamente a una contradicción.

Luego para al menos un punto $c\in(a,b)$ se da la igualdad dada en el enunciado, q.e.d..

Problema 95

Propuesto por José Luis Díaz Barrero, Barcelona, España.

Sea n un número entero y positivo. Probar que

$$\sqrt{4^n + 3\left[\sum_{k=0}^{n-1} 3^k \binom{2n}{2k+1}\right]^2}$$

es entero.

Solución de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, Navarra, España.

Es obvio que para todo n entero positivo podemos encontrar enteros positivos a_n y b_n tales que

$$\left(\sqrt{3} \pm 1\right)^{2n} = a_n \pm b_n \sqrt{3}\ .$$

De hecho, utilizando la fórmula del binomio, y separando términos pares e impares en la suma resultante,

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{3} \pm 1\right)^{2n} &= \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \left(\sqrt{3}\right)^k (\pm 1)^{2n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} \left(\sqrt{3}\right)^{2k} (\pm 1)^{2n-2k} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} \left(\sqrt{3}\right)^{2k+1} (\pm 1)^{2n-2k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} 3^k \binom{2n}{2k} \pm \sqrt{3} \sum_{k=0}^{n-1} 3^k \binom{2n}{2k+1} = a_n \pm b_n \sqrt{3}.\end{aligned}$$

Pero

$$\begin{aligned}a_n^{\ 2} - 3b_n^{\ 2} &= \left(a_n + b_n\sqrt{3}\right)\left(a_n - b_n\sqrt{3}\right) = \left(\sqrt{3}+1\right)^{2n}\left(\sqrt{3}-1\right)^{2n} = \left[\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)\right]^{2n} \\ &= [3-1]^{2n} = 4^n.\end{aligned}$$

Luego se tiene que la expresión dada en el enunciado es

$$\sqrt{4^n + 3\left[\sum_{k=0}^{n-1} 3^k \binom{2n}{2k+1}\right]^2} = \sqrt{4^n + 3b_n^{\ 2}} = \sqrt{a_n^{\ 2}} = a_n = \sum_{k=0}^{n} 3^k \binom{2n}{2k},$$

que es entero, q.e.d..

Problemas propuestos 96-100

Problema 96 *(Propuesto por Bruno Salgueiro Fanego, Vivero, Lugo, España)

Defino como *pedazo esférico* cualquiera de las cuatro figuras resultantes de cortar una esfera por dos planos, uno de los cuales pasa por su centro (plano ecuatorial) y el otro no (plano no ecuatorial). Sea Σ el segmento que la intersección de esos dos planos determina en la esfera. Calcular, en función de la distancia del centro de la esfera a Σ, y de la inclinación del plano no ecuatorial con respecto al ecuatorial, el área y el volumen de un *pedazo esférico*.

Problema 97.(Propuesto por José Luis Díaz Barrero, Barcelona, España)

Sean x, y, z tres números complejos no nulos y n un entero.

Demostrar que

$$\frac{1}{\sqrt[3]{xyz}} \begin{vmatrix} y+n^3z & n(z-y) & n^2(y-z) \\ n^2(z-x) & z+n^3x & n(x-z) \\ n(y-x) & n^2(x-y) & x+n^3y \end{vmatrix}^{1/3}$$

es un número entero y determinar su valor.

Problema 98.(Propuesto por José Luis Díaz Barrero, Barcelona, España)

Sean a_0, a_1, a_2 tres númerso complejos no nulos tales que $a_0 = a_1a_2$.

Sabiendo que los afijos de las tres raíces de la ecuación

$$z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0 = 0$$

forman un triángulo, probar que una de sus medianas pasa por el origen de coordenadas.

Problema 99.(Propuesto por Laurentiu Modan, Bucarest, Rumania)

Estudiar la convergencia de la sucesión $(a_n), n \geq 1,$ definida por

$$a_n = n\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^3} - \frac{1}{\sqrt{n^4+k^4}}\right)\right].$$

Problema 100.(Propuesto por K.R.S.Sastry, Bangalore, India)

Un triángulo se llama heroniano si sus lados y área son enteros. Sea n un número natural dado. Demostrar que para $n = 1, 2, 3, \cdots$ existe al menos un triángulo heroniano que cumple la siguiente condición: dos de sus lados son números naturales consecutivos y su área es igual a n veces el perímetro.

Comentario de páginas web (20)

La página de Thomas Schoch

www.retas.de/thomas/arbelos/arbelos.html

El Prof. Thomas Schoch ha enviado al editor que suscribe un mensaje de correo electrónico en el que, citando el artículo sobre el Arbelos publicado en la Revista Escolar de la OIM, nos informa de su página web sobre dicho tema, cuya dirección es www.retas.de/thomas/arbelos/arbelos.html

En ella se incluyen varios applets para ilustrar las diferentes posibilidades de los círculos (entre ellos los de Schoch) relacionados con esa configuración geométrica. Es muy recomendable visitar esa página.

Agradecemos al Prof. Schoch la información facilitada.

Francisco Bellot Rosado

Divertimentos matemáticos (20)

Algunas citas (2)

Tres citas de *Twenty years before the blackboard, de M. Stueben y D.Sandford*:

1. Sólo hay dos cosas que se necesita saber en la vida:
Primera: no le digas a la gente todo lo que sabes.

2.Hay tres clases de matemáticos: los que pueden contar, y los que no pueden.
(Atribuido a Enrico Bombieri)

3. Asistente al Seminario del Prof. X: *Profesor, he encontrado DOS contraejemplos a su última proposición*.
Profesor X: *No hay problema. Tengo TRES demostraciones de que es cierta*.

Tres citas de *Mathematical Circles, de Howard Eves*:

4. Alguien preguntó a Einstein qué armas se usarían en la III Guerra Mundial. Einstein contestó: *No lo sé, pero sí sé las que se usarán en la IV: piedras y palos*.

5. Dios existe, ya que las matemáticas son consistentes, y el Diablo existe, ya que no podemos probar eso (A. Weyl).

6.En 1688 la Universidad de Cambridge designó a Isaac Newton como su representante en el Parlamento de Inglaterra. Parece que no fué una buena elección: en todo su mandato, la única intervención conocida de Newton fué para pedir que se abriera una ventana.

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI

Número

21

Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática
ISSN 1698-677X

Revista Escolar de la Olimpí ada Iberoamericana de Matemática

Número 21 (Septiembre-octubre 2005)

ISSN – 1698-277X

Í ndice

Artí culos, notas y lecciones de preparación olí mpica

Algunos problemas de Matemáticas, por Juan Bosco Romero Márquez (dedicado a la memoria del Prof. Miguel de Guzmán Ozámiz)

Juegos y probabilidades, por Laurentiu Modan

Función signo segunda derivada, por Jesús Álvarez Lobo

Problemas para alumnos de Educación Media y de Olimpiadas

Presentamos los problemas de la XX Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas (Cartagena de Indias, Colombia)

Problemas para los más jóvenes

Cinco problemas de los Círculos Matemáticos Rusos

Problemas

Debido a numerosos problemas informáticos sufridos durante el verano, es posible que algunos ficheros enviados por los lectores no se hayan recibido. Por ello se ruega se compruebe si se ha producido esta circunstancia.

El editor presenta excusas al Prof. Jesús Álvarez Lobo por haber omitido su nombre entre los lectores que han resuelto los problemas números 91 y 92, así como a los Problemas 1 y 2 de la Olimpiada de Australia, incluidos en la sección de problemas de nivel medio y de Olimpiadas.

Resueltos:

Problema 97. Recibidas soluciones de : Jesús Álvarez Lobo (Oviedo, España); Floro Damián Aranda Ballesteros (Córdoba, España); Luis Gómez Sánchez Alfaro (Callao, Perú); Daniel Lasaosa Medarde (Pamplona, España); Marcos

Martinelli (Brasil); Bruno Salgueiro Fanego (Vivero, España) y el proponente. Presentamos las soluciones de Marcos Martinelli y de Luis Gómez Sánchez Alfaro.

Problema 98: Recibidas soluciones (idénticas, dicho sea de paso) de: Floro Damián Aranda Ballesteros (Córdoba, España); Daniel Lasaosa Medarde (Pamplona, España); Marcos Martinelli (Brasil); Bruno Salgueiro Fanego (Vivero, España) y el proponente. Presentamos la solución de Aranda.

Problema 99: Recibidas soluciones de : Daniel Lasaosa Medarde (Pamplona, España); Marcos Martinelli (Brasil); Bruno Salgueiro Fanego (Vivero, España) y el proponente. Presentamos la solución de Lasaosa.

Problema 100: Recibidas soluciones de: Jesús Álvarez Lobo (Oviedo, España); Floro Damián Aranda Ballesteros (Córdoba, España); Daniel Lasaosa Medarde (Pamplona, España); Marcos Martinelli (Brasil) y el proponente. Presentamos la solución de Álvarez Lobo.

Propuestos

Propuestos 101-105

Divertimentos matemáticos

Cinco problemas de enunciado curioso

Reseñas web

Una página de competiciones en Serbia y Montenegro

Editor: Francisco Bellot Rosado

ALGUNOS PROBLEMAS DE MATEMÁTICAS

Por Juan Bosco Romero Márquez

Dedicado a la memoria del Prof. Miguel de Guzmán Ozámiz.

1 Introducción

En este trabajo, presentamos dos cuestiones matemáticas en forma de problemas como un homenaje a la memoria del admirado y querido, Profesor. Miguel de Guzmán Ozámiz, gran matemático y mejor persona que cautivaba con su entrañable personalidad a todos los que fuimos alumnos y amigos suyos.

Su gran sencillez y fácil accesibilidad, le hacía rebosar de una entrañable personalidad humana y científica que hacía que su áurea de ser humano bueno se proyectara en todo lo que hacía, con un amor sin límites, en su Fe inquebrantable, y en su entrega y ayuda a los demás de una forma desinteresada.

El primer problema que voy a proponer y resolver cae dentro del ámbito del Análisis Matemático, y más concretamente, se trata de probar una desigualdad con cota inferior y superior de la Función Gamma de Euler.

El segundo problema versa sobre un resultado elemental de la Geometría del Triangulo que se resuelve dentro de diferentes contextos : Geometría Sintética, Analítica sin DERIVE, y, con DERIVE siguiendo la línea de [1] .

Ambas partes de la Matemática, el Análisis y la Geometría, que eran las más queridas por el Prof. Miguel de Guzmán Ozámiz, a las que dedicaba sus investigaciones matemáticas de cualquier nivel.

Además, entre otras muchas cosas, una fundamental y principal para él, era enseñar y aprender la Matemática a través del juego como una aventura, y la belleza a conseguir como un premio, por eso hizo una ingente labor de investigación metodológica y didáctica, de enseñar a los futuros profesores de cómo descubrir estos dos parámetros en sus clases, que junto con la divulgación matemática en sus libros y en revistas, las aplicaba con gran entrega a la formación de los futuros profesores porque tenía una gran preocupación por la enseñanza de la matemática en todos los niveles educativos.

Estas dos cuestiones en forma de problemas que le dedico a él, como un modesto homenaje y tributo a su vida, a su obra hecha con un gran amor y desarrollada con juego y belleza, y con a su entrañable y lucida personalidad tanto humana como científica con la que siempre me sentía arropado y ayudado.

2 Resultados.

Comenzamos esta sección enunciado y resolviendo cada uno de los dos problemas que presentamos en este trabajo.

Problema 1

Sean a, b, y c números reales fijos, tales que b ≥ 0, **a** $\geq c - \frac{3}{2}$, **x** $\geq c \geq 1$, **probar que :**

$$\left(\frac{x}{e}\right)^{x-c}\left(\frac{x}{c}\right)^{-b} \leq \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(c)} \leq \left(\frac{x}{e}\right)^{x-c}\left(\frac{x}{c}\right)^{a+1}.$$

donde $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt,$ **con x >0, real es la función gamma de Euler, llamada integral euleriana de segunda especie.**

Demostración.

Es un buen ejercicio elemental de Análisis Matemático, en que estudiamos la monotonía de dos funciones continuas e infinitamente derivables f y g, que construimos al efecto utilizando una forma equivalente la desigualdad propuesta, a través de la función logaritmo, si para ello, utilizamos como resultado clave para resolver este problema la desigualdad de Minc-Sathre-Alzer, ver $[2]-[7]$.
y que dice así, en la parte que nos interesa aquí :

Lema. (Desigualdad de Minc-Sathre-Alzer)

Si $x \geq 1$, es un número real, entonces se verifica :

$$\frac{1}{2x} < Lx - \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} < \frac{1}{x}. \quad (1)$$

Definimos la función f de variable real con valores reales, para $c \geq 1$, como sigue :

f : $[c, \infty[\rightarrow \Re, \quad f(x) = L\Gamma(x) - L\Gamma(c) - (x-c)(Lx-1) + b(Lx - Lc),$

para $x \geq c \geq 1$. Esta función se obtiene de forma equivalente al tomar la función logaritmo en el miembro de la izquierda de la desigualdad propuesta.

La función f así construida, en el intervalo considerado es continua e infinitamente derivable en (c, ∞). Además, f(c) = 0

Estudiemos ahora su monotonía en el intervalo en que está definida utilizando para ello, la derivada primera.

La derivada primera de f viene dada en ese intervalo :

$$f'(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} - \left(Lx - 1 + \frac{x-c}{x} \right) + \frac{b}{x} = \left(\frac{b+c-1}{x} \right) + \left(\frac{1}{x} - Lx + \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} \right) \geq 0,$$

ya que cada sumando entre paréntesis en la expresión anterior, el primero es positivo por las hipótesis dadas sobre b y c, y el segundo es positivo por la desigualdad de Minc-Sathre-Álzer, del lema, puesta en la forma :

$$0 < \frac{1}{x} - Lx + \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}, \quad \text{para } x \geq c \geq 1.$$

De aquí , la función f monótona creciente en $[c, \infty[$, y por lo tanto,

$0 = f(c) \leq f(x)$, para $x \geq c \geq 1$.

Por consiguiente, pasando mediante la función exponencial inversa de la función logaritmo, tenemos probado la desigualdad equivalente siguiente :

$$\left(\frac{x}{e}\right)^{x-c}\left(\frac{x}{c}\right)^{-b} \le \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(c)}, \qquad b \ge 0, \quad x \ge c \ge 1. \quad (2)$$

Similarmente, definimos la función g de variable real con valores reales, para $c \ge 1$, como sigue :

g: $[c,+\infty[\to \Re$, g(x)=(a+1)(Lx-Lc)+(x-c)(Lx-1)- $(L\Gamma(x)-L\Gamma(c),)$

$x \ge c \ge 1$.

La función g es continua en el intervalo dado e infinitamente derivable en (c, ∞).

Veamos ahora su monotonía a través de la derivada primera en (c, ∞).

La derivada primera viene dada por la siguiente expresión :

$$g'(x)=\left(\frac{a+1}{x}\right)+\left(Lx-1+\frac{x-c}{x}\right)-\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}=\frac{a+1-c}{x}+\left(Lx-\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}\right).$$

Ahora acotemos g'(x), en (c, $+\infty$), utilizando para ello, las hipótesis sobre a y c, y la desigualdad de Minc-Sathre-Álzer, en el miembro de la izquierda del lema.

En efecto, llegamos a :

$$g'(x) = \frac{a+1-c}{x}+\left(Lx-\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}\right)\ge\frac{a+1-c}{x}+\frac{1}{2x}=\frac{2a-2c+3}{2x}\ge 0.$$

ya que, por hipótesis, $a \ge c-\frac{3}{2}$, $x \ge c \ge 1$, $\frac{1}{2x} < Lx-\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$.

De aquí, obtenemos que la función g es monótona creciente en el intervalo definida. Como, además, 0= g(c) $\le g(x)$, para $x \ge c \ge 1$, $a \ge c-\frac{3}{2}$.

Por todo lo anterior tenemos demostrada la desigualdad de la derecha propuesta en nuestro problema. Es decir :

$$\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(c)} \le \left(\frac{x}{e}\right)^{x-c}\left(\frac{x}{c}\right)^{a+1}, \qquad x \ge c \ge 1, \quad a \ge c-\frac{3}{2}, \quad (3).$$

Finalmente, de las desigualdades demostradas en (2) y (3), llegamos al resultado propuesto en nuestro problema.

Nuestra desigualdad probada en el problema anterior, es un caso más general de la desigualdad propuesta por mí, en el Problema 11016, publicado en la American Mathematical Monthly, Vol.110, N.5, May. 2003, cuando ponemos c = 1.

Nota.- Ya que la desigualdad demostrada en el problema 1, depende de los parámetros reales, a, b y c, un problema abierto interesante a resolver sería el siguiente :

¿ Entre qué intervalos deben tomarse a , b y c, y qué tipo de relaciones deben verificarse entre ellos, para que las cotas propuestas en nuestro problema sean las mejores posibles?

El siguiente problema que proponemos y resolveremos cae dentro del marco de la Geometría Elemental del triángulo, y, ha tenido una creación, proposición y resolución paulatina del mismo .

Problema 2

Sea ABC un triángulo rectángulo en A. Denotamos por D, E y F a los puntos de tangencia de su círculo inscrito de incentro I , a sus lados BC, AB y AC, respectivamente.

Designamos por J al centro del cuadrado IEAF, y por K,G, y H , los puntos de intersección de la recta DF con las prolongaciones si son necesarias de el lado AB, la recta DE con el lado AC, y la recta FE con el lado BC, respectivamente.

Probar que :

a) Los triángulos JBG y JKC, son ambos rectángulos e isósceles.

b) Los puntos K, G, y H son colineales.

Demostración.

a) Método Sintético.

Demostraremos que los triángulos JBG, JKC, son ambos rectángulos e isósceles, en el vértice J. Por simetría en las construcciones geométricas basta que lo probemos para JBG, siendo el razonamiento similar para el segundo.

De otra parte, construimos el punto L, obtenido como la intersección de la bisectriz BI con la recta DE.

Los triángulos rectángulos AGE y LBE son semejantes. Luego entonces el ángulo B/2 es igual al ánguloAGE.Tenemos así que los dos triángulos rectángulos BEI y GAE son iguales, de este modo AG = BE.

De lo anterior consideramos ahora la igualdad de los triángulos GAJ y BEJ, y así tenemos que BJ =GJ. Y por consiguiente el triángulo BGJ es isósceles con lados iguales BJ = GJ.

Por último, demostremos que el triángulo JBG es rectángulo en el vértice, J.

En efecto:

Consideremos el ángulo $w =< AJG$ =<EJB.

Como sabemos que < AJE = $p/2$, entonces :

<GJB =(<AJE - <AJG) + <EJB = $(p/2 - w) + w = p/2.$

Por tanto, el triángulo JBG es rectángulo e isósceles en J. q**.q.d**

b) Método Analítico o Geometría con coordenadas .

De lo demostrado en el apartado a) sabemos que se tienen las siguientes igualdades entre las longitudes de los segmentos, EB = AG y AK = FC .Este hecho nos permitirá elegir el siguiente sistema de coordenadas cartesianas :
Tomamos los catetos AB y AC como loe ejes X e Y , respectivamente de nuestro sistema de referencia cartesiano, donde los vértices del triángulo dado, tienen como coordenadas, A(0,0), B(b,0) y C(c.0), con b distinto de c. Es decir, que el triángulo rectángulo dado no es isósceles..
De otra parte si r es radio del círculo inscrito al triángulo dado, tenemos para los puntos relevantes en el problema, las siguientes coordenadas :

E(r,0) , F(0,r) , G(0,r-c) y K(r-b,0), respectivamente.

Determinemos ahora las coordenadas del punto H. Como H es el punto de intersección de las rectas BC y EF , hallemos en primer lugar las ecuaciones de cada de estas rectas :

r(E,F) : x + y = 0 ; r(B,C) : bx + cy = bc. (1).

El punto H se obtiene por construcción como intersección de las rectas r(E,F) y r(B,C), que es equivalente a resolver el sistema algebraico lineal de sus respectivas ecuaciones e incógnitas, y obtenemos que :

$$H\left(\frac{c(r-b)}{c-b}, \frac{b(c-r)}{c-b}\right) \quad (2).$$

Calculemos ahora la recta que pasa por los puntos G y K, que es :

$$r(G,K) : \quad \frac{x}{r-b} + \frac{y}{r-c} = 1. \quad (3).$$

Comprobemos que, los puntos G, K, y H están alineados o son colineales, sustituyendo las coordenadas de H , en la recta, r(G,K) . Esto es :

$$\frac{c(r-b)}{(r-b)(c-b)} + \frac{b(c-r)}{(r-c)(c-b)} = \frac{c-b}{c-b} = 1. \quad (4).$$

Hemos de concluir de(4), que los puntos G, K y H están siempre alineados.**q.q.d**

Nota. En el caso de que el triángulo rectángulo dado ABC sea isósceles, esto es b = c, el resultado sigue siendo cierto con respecto a la colineación de los puntos G, K y H, ya que este último al ser la recta FE paralela a BC, H, es el punto del infinito.

Agradecimientos.

La solución geométrica de este problema propuesto y también resuelto por mí, junto con la solución con DERIVE siguiendo la línea del libro , junto con otras consideraciones y generalizaciones, salvo pequeñas modificaciones se debe a mi amigo y colega, Floro Damián Aranda Ballesteros, por su colaboración, ya que él, también quería aportar su granito de arena, en este homenaje a la memoria del Prof. Miguel de Guzmán Ozámiz.

Bibliografía.

[1] Miguel de Guzmán Ozámiz.: La experiencia de descubrir en Geometría, Editorial Nivola, Madrid, 2002.

[2] H. Minc and L. Sathre.: Some Inequalities involving $(r!)^{\frac{1}{r}}$, Proc. Edinburgh Math.Soc.14(1965/66), . 41-46.

[3] D.S. Mitrinovic.: Analytic Inequalities, Springer, Berlín, 1970.

[4] H. Alzer.: On some gamma function inequalities, Math.Comp.60(1993), 337-346

[5] H. Alzer.: On some inequalities for the gamma and psi functions, Math.Comp.66(1997), 373-389 .

[6] Juan Bosco Romero Márquez.: Mathematics Magazine, Problem 1657, Vol. 75, N.3, June 2002, 227.

[7] Juan Bosco Romero Márquez.: America Mathematical Monthly, Problem 11016, Vol. 110, N.5, May, 2003.

JUEGOS Y PROBABILIDADES

LAURENÞIU MODAN
Department of Mathematics, Faculty of Computer Science
Academy of Economic Studies, Bucharest
modanl@inforec.ase.ro, modan_laurent@yahoo.fr

Abstract. We propose an introduction in *Combinatorial Probabilities*, using some problems based on a number of games which are more or less known, in the world of *Mathematics*.
MR classification: 05A05, 60A99.

PRELIMINARES

La *Teoría de la Probabilidad* se introduce generalmente con dificultad en los estudios universitarios y sólo en los cursos superiores, porque requiere el conocimiento de otras muchas ramas de las *Matemáticas*, especialmente las teorías de Integrabilidad y de la Medida. Esto es habitual en las Facultades de Matemáticas y no hay problema en que la Teoría de la Probabilidad aparezca en los cursos finales. Por otra parte, en todas las carreras Técnicas, el estudio de las Probabilidades debe hacerse antes, por exigencia de las disciplinas de Física, Química y otras. Por lo tanto, la forma directa de presentar la Teoría de la Probabilidad está relacionada con lo que se considera *clásica o Combinatoria*, en el caso discreto, o utilizando la integral de Stieltjes en el caso continuo. Teniendo en cuenta el hecho de que nuestra vida diaria presenta principalmente fenómenos discretos, que se encuentran en problemas técnicos, económicos o sociales, sostengo la idea de que las probabilidades pueden ser introducidas desde los cursos iniciales de los estudios universitarios, en cuanto los *métodos de recuento* sean conocidos. Por lo tanto, una lección como esta podría ser titulada *Probabilidades Combinatorias*, como el libro de referencia de los grandes matemáticos P. Erdös y A. Rényi.

IDEAS BÁSICAS

En todo lo que sigue usaremos las nociones clásicas de Combinatoria (ver [9]) y también las de Probabilidad elemental (ver [5], [8]). Para un *suceso aleatorio* A, su probabilidad es:

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \frac{\textit{númerodecasosfavorables}}{\textit{númerodecasosposibles}} \qquad (1)$$

Y la probabilidad del *suceso* complementario $\overline{A}$, es:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) \qquad (2).$$

La probabilidad de que se produzca el suceso aleatorio A, si se verifica el suceso aleatorio B, está dada por el suceso condicional A/B, siendo

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, P(B) > 0 \qquad (3).$$

Recordemos también que mediante el *esquema hipergeométrico* (ver [3]), podemos calcular la probabilidad $P(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ de la extracción, sin reemplazamiento, de $\boldsymbol{a}$ bolas blancas y $\boldsymbol{b}$ bolas negras, de una urna donde hay inicialmente a bolas blancas y b bolas negras:

$$P(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\frac{\binom{a}{\boldsymbol{a}}\binom{b}{\boldsymbol{b}}}{\binom{a+b}{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}},a\geq \boldsymbol{a},b\geq \boldsymbol{b} \qquad (4).$$

Dos sucesos aleatorios A y B son incompatibles si $A\cap B=\phi$, de donde:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B) \qquad (5).$$

Si los sucesos A y B son compatibles, es decir si $A\cap B\neq\phi$, entonces se verifica la relación:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \qquad (6).$$

En el caso de *n sucesos compatibles* , usaremos la relación de Poincaré, como consecuencia de la fórmula de Inclusión y exclusión::

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leq i<j\leq n}P(A_i\cap A_j)+\sum_{1\leq i<j<k\leq n}P(A_i\cap A_j\cap A_k)+\cdots+$$
$$+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1\cap\ldots\cap A_n) \qquad (7).$$

Recordemos la noción de *variable aleatoria discreta*. Sea un conjunto finito o numerable Ω, el correspondiente *espacio boreliano de probabilidad* $(\Omega,\aleph,P)$ (ver [8]), donde $\aleph\subseteq\Pi(\Omega)$, y $P:\aleph\to$ [0,1] es una *función de probabilidad*. Ahora definimos una *variable aleatoria discreta* como una función $X:\ \Omega\to\mathbf{R}$, donde:

$X(\Omega)=(x_i)_{i\in I}$, $x_i\neq x_j$ para $i\neq j$ cuando $I\subseteq$ **Í** .

Si los sucesos A_i están dados por:

$A_i=\{\boldsymbol{w}\in\Omega\,|\,X(\boldsymbol{w})=x_i\}$, $(\forall)i\in I$,

Entonces sus probabilidades son:

$$p_i=P(A_i)=P(\{\boldsymbol{w}\in\Omega\,|\,X(\boldsymbol{w})=x_i\}),(\forall)i\in I \qquad (8).$$

Así, la *variable aleatoria* discreta se denotará por:

$$X:\begin{pmatrix}x_i\\ p_i\end{pmatrix},\ p_i\geq 0,\ (\forall)i\in I\text{, cuando }\sum_{i\in I}p_i=1 \qquad (9).$$

Su *esperanza matemática* $E(X)$ se define como:

$$E(X)=\sum_{i\in I}x_i p_i \qquad (10).$$

LOS PRINCIPALES ARGUMENTOS, POR MEDIO DE PROBLEMAS

Los comienzos de la *Teoría de la Probabilidad* están relacionados con los juegos y datan de hace más de cuatro siglos y medio. Así, en la frontera entre la primera y segunda mitad del siglo XVI, Cardano escribió „*El libro sobre el juego de dados*” („*Liber de Ludo Aleae”*), aunque su publicación se produjo un siglo más tarde, hacia el año1663. De hecho, este es el período en el que los problemas planteados por juegos fueron presentados a matemáticos importantes de la época para ser resueltos, y que son considerados los precursores de la *Teoría de la Probabilidad*. Entre quienes analizaron los juegos mediante las matemáticas podemos citar a Pascal, Fermat, Huygens, Bernoulli, Laplace. En particular, Laplace fué el primero que observó: „Es notable que una rama de la ciencia que empezó analizando juegos se haya convertido en el método más importante del conocimiento humano.”

En lo que sigue, intentaremos probar que usando diferentes juegos (dados, cartas, Lotería, etc), que tienen un *dominio discreto*, se puede introducir la probabilidad combinatoria de una manera natural. Seguramente deberemos empezar por presentar el primer problema de probabilidad planteado a Pascal en 1654 por el caballero francés De Méré.

Problema 1. (*De Méré & Pascal*). Un jugador y la banca quieren hacer apuestas equitativas. Estudiar las probabilidades de ganar, si el jugador quiere obtener:
i) al menos un 6, en 4 lanzamientos de un dado;
ii) al menos dos seises, en 24 lanzamientos con 2 dados.
Solucion. i) Consideremos el suceso:

A_1 = {no aparición de un 6 en 4 lanzamientos}.

Debemos calcular $P(\overline{A_1})$. Observemos en primer lugar que el número de casos posibles es el cardinal del conjunto

$$M_1 = \{f \mid f : \{t_1, t_2, t_3, t_4\} \to \{1,2,3,4,5,6\}\},$$

Donde f está definida en el conjunto de los 4 lanzamientos y con valores en las caras del dado. Obviamente, $|M_1| = 6^4$.

Para el número de casos favorables, eliminando la cara 6, debemos calcular el cardinal del conjunto:

$$M_2 = \{g \mid g : \{t_1, t_2, t_3, t_4\} \to \{1,2,3,4,5\}\},$$

Que es $|M_2| = 5^4$. Por lo tanto:

$$P(\overline{A_1}) = 1 - P(A_1) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \cong 0{,}518.$$

ii) Sea el suceso:

A_2 = {no aparición de un doble 6 en 24 lanzamientos}

Debemos calcular $P(\overline{A_2})$. Para ello, cuando se lanzan 2 dados, observemos que sus valores están dados por

$$\{(1,1),\ldots,(1,6),\ldots,(6,6)\} = \{1,2,\ldots,36\}.$$

De aquí que el número de casos posibles es el cardinal del conjunto

$$M_3 = \{u \mid u : \{t_1, t_2, \ldots, t_{24}\} \to \{1,2,\ldots,36\}\},$$

Y resulta ser $|M_3| = 36^{24}$.

Para los casos favorables, eliminando el 6 doble, debemos calcular el cardinal del conjunto:

$$M_4 = \{v \mid v : \{t_1, t_2, \ldots, t_{24}\} \to \{1,2,\ldots,35\}\},$$

Es decir, $|M_4| = 35^{24}$. Entonces se tiene:

$$P(\overline{A_2}) = 1 - P(A_2) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \cong 0{,}492.$$

Observación 1. La situación *i)* del *Problema 1* es favorable al jugador, mientras que *ii)* es favorable a la banca.

Problema 2. (*De Méré & Pascal, Problema de las partidas*). Dos personas igualmente hábiles toman parte en un juego a varias partidas, en las que el ganador obtiene 1 punto si gana. El primero que consiga 3 puntos gana el juego. Por razones imprevistas han de suspender el juego cuando el marcador señala 2-1. ¿Cómo deben repartirse las apuestas entre los dos jugadores?

Solución. El reparto ha de hacerse proporcionalmente a la probabilidad de ganar de cada jugador, si el juego continuase. Para ello, observemos que el ganador se decide en a lo sumo 2 partidas. Supongamos que el primer jugador, *I*, está en ventaja por 2-1.En las dos hipotéticas partidas se tienen las siguientes situaciones 4 situaciones igualmente posibles:

$$(I,I),(I,II),(II,I)(II,II).$$

En cada una de ellas, la primera y respectivamente la segunda posiciones muestra al ganador en la primera, respectivamente la segunda partida. Por lo tanto, *I* tiene 3 situaciones favorables y *II* tiene sólo una de ser declarado ganador. Luego el reparto de las apuestas es:

$P(I)=3/4=0{,}75;\ P(II)=1/4=0{,}25$.

Observación 2. Es muy importante observer que el reparto no es proporcional al resultado, sino a la probabilidad de ganar en el supuesto de que el juego continuase normalmente.

Problema 3. (*L. Modan*, ver [2]). Una baraja tiene 53 cartas, de las que 13 son comodines(jokers). La baraja se utiliza en un juego con 6 jugadores y en el que hay un comodín a la vista sobre el tapete. Calcular la probabilidad de que al menos un jugador tenga un comodín.

Solución. Los 6 jugadores pueden tener entre sus cartas 1, 2,…, ó 6 comodines. Usando el esquema hipergeométrico (4), y teniendo en cuenta que 6 cartas, de 52, se pueden elegir de $\binom{52}{6}$ maneras, se obtiene la siguiente probabilidad:

$$P=\sum_{k=1}^{6}\frac{\binom{12}{k}\binom{40}{6-k}}{\binom{52}{6}}\cong 0{,}791.$$

Problema 4. (*L. Modan*, ver [1]). De una urna donde hay 10 bolas numeradas del 0 al 9 se extraen, con reemplazamiento, 7 bolas , para obtener un número inicial de 7 cifras. Los jugadores usan números de 7 cifras, elegidos aleatoriamente. Ganan si obtienen el número inicial, o sus últimas 6 cifras, o sus últimas 5 cifras,….,o sus últimas 3 cifras. Hallar la probabilidad de ganar de un jugador que solamente utiliza un número.

Solución. Para todo $i\in\{3,\dots,7\}$, consideremos los sucesos:

A_i = {aparición de las últimas i cifras del número extraído}.

Observemos que $A_i, (\forall) i\in\{3,\dots,7\}$ son incompatibles, porque la aparición de i cifras buenas impone una ganancia que es diferente de la de la situación con *i-1* cifras buenas. Entonces, por (5), la probabilidad de ganar de un jugador es:

$$P(A_3\cup\ldots\cup A_7)=\sum_{k=3}^{7}P(A_k) \qquad (11).$$

Pero observemos que en el sistema decimal, el cardinal del conjunto de números de i dígitos es del conjunto:

$$M=\{f\,|\,f:\{1,\dots,i\}\to\{0,\dots,9\}\}.$$

Ya que $|M|=10^i$, tenemos:

$$P(A_i)=1/10^i,\ (\forall)i\in\{3,\dots,7\},$$

Y así sucesivamente, así que, por (11), se tiene:

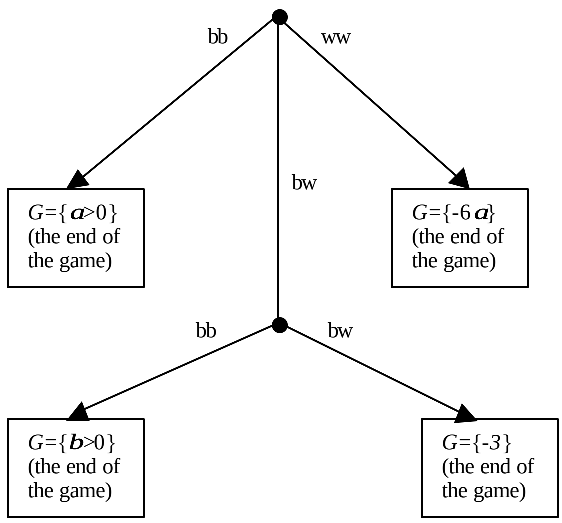
$$P(A_3\cup\ldots\cup A_7)=\frac{1}{10^3}+\cdots+\frac{1}{10^7}=\frac{1}{10^3}\cdot\frac{1-1/10^5}{1-1/10}=0{,}0011.$$

Observación 3. El *Problema 4* es el modelo matemático del juego *NOROC* (SUERTE) de la *Corporación Autónoma de Loterías Rumanas*.

Problema 5. (enunciado parcial del *Problema III*, pg. 22, de [6]). Una urna U contiene 4 bolas negras (b) y 2 bolas blancas (w). La urna pertenece a una banca que propone el siguiente juego a las personas interesadas. El jugador extrae simultáneamente y sin reemplazamiento, 2 bolas de U. Caben las siguientes situaciones:

- si las bolas son negras, el jugador gana $a>0$ euros y el juego termina;
- si las bolas son blancas, el jugador pierde $6a$ euros y el juego termina;
- si las bolas son de colores distintos, el jugador extrae, sin reemplazamiento, otras dos bolas, y:
    - si ambas son negras, gana $b>0$ euros, y el juego termina;

• si las bolas no son negras, pierde 3 euros, y el juego termina.
Sea G la variable aleatoria que describe las ganancias del jugador.
i) Describir el grafo (árbol) correspondiente a las diferentes ganancias.
ii) Calcular la probabilidad q de que se extraigan 2 bolas negras la segunda vez, suponiendo que en la primera han salido 2 bolas de distinto color.
iii) Calcular la probabilidad $P(\{G=\boldsymbol{b}\})$ de ganar $\boldsymbol{b}$ euros.
iv) Hallar la ley de probabilidad de la variable aleatoria G y calcular $\boldsymbol{b}$, para que el juego sea equitativo.
Solución. i) El grafo correspondiente a la variable aleatoria G es el siguiente:



ii) Después de la primera extracción, sin reemplazamiento, en la urna hay 4 bolas, de las que 3 son negras y una blanca. En la segunda extracción, 2 bolas negras pueden ser elegidas de $\binom{3}{2}$ maneras, mientras que dos bolas distintas, de 4, pueden ser elegidas de $\binom{4}{2}$ maneras. Luego por (1), tenemos:

$$q=\frac{\binom{3}{2}}{\binom{4}{2}}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}.$$

iii) Sean A y B los sucesos siguientes:

A = {obtener 2 bolas de colores distintos en la primera extracción},

B = {obtener 2 bolas negras en la segunda extracción}.

Entonces, la probabilidad de ganar $\boldsymbol{b}$ euros, por (3), es:

$$P(\{G=\boldsymbol{b}\})=P(A\cap B)=P(B/A)\cdot P(A)=q\cdot P(A) \qquad (12).$$

Por (1), tenemos:

$$P(A)=\frac{\binom{4}{1}\binom{2}{1}}{\binom{6}{2}}=\frac{4\cdot 2}{15}=\frac{8}{15} \qquad (13).$$

Ahora, de (12) y (13), resulta:

$$P(\{G=\boldsymbol{b}\})=\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{15}=\frac{4}{15}.$$

iv) Por (1), tenemos de nuevo:

$$P(\{G=\boldsymbol{a}\})=\frac{\binom{4}{2}}{\binom{6}{2}}=\frac{2}{5},\ P(\{G=-6\boldsymbol{a}\})=\frac{\binom{2}{2}}{\binom{6}{2}}=\frac{1}{15},$$

$$P(\{G=-3\})=1-P(\{G=\boldsymbol{a}\})-P(\{G=\boldsymbol{b}\})-P(\{G=-6\boldsymbol{a}\})=1-(2/15+8/15+1/15)=4/15.$$

Por lo tanto, la *ley de probabilidad, o distribución de* G, es la siguiente:

$$G:\begin{pmatrix}-6\boldsymbol{a} & -3 & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b}\\ 1/15 & 4/15 & 6/15 & 4/15\end{pmatrix}.$$

Recordemos que un juego es equitativo cuendo la esperanza matemática E de su variable aleatoria asociada es 0. Así, en nuestro caso, debemos imponer que $E(G)=0$. Usando (10), tenemos:

$$E(G)=\frac{1}{15}(-6\boldsymbol{a}-12+6\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b})=\frac{4(\boldsymbol{b}-3)}{15}.$$

Por lo tanto, podemos concluir que la condición de juego equitativo se obtiene para $\boldsymbol{b}=3$.

Problema 6. (*L. Modan,* ver [7]). Sea M un conjunto numerable de parejas de amigos (chico y chica) que participan en una competición de danza. Las chicas y los chicos están en 2 habitaciones separadas. En cada turno, ante el jurado bailan en pareja un chico y una chica, elegidos aleatoriamente, por lo que puede ser que no se conozcan. Calcular la probabilidad de que, al menos, una de las parejas de baile sea una de las parejas de amigos, y probar que esta probabilidad es menor que 1/2.

Solución. Para todo $i\in\mathbf{N}^*$, consideremos los sucesos siguientes:

A_i = {la pareja inicial i danza frente al jurado}.

De esta forma, la probabilidad pedida es:

$$P\left(\bigcup_{i\in\mathbf{N}^*}A_i\right) \qquad (14).$$

Primero calcularemos $P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)$ usando (7). Por(1), observemos que:

$$P(A_i)=\frac{(n-1)!}{n!}=\frac{1}{n},\ (\forall)i\in\mathbf{N}^*,$$

$$P(A_i\cap A_j)=\frac{(n-2)!}{n!}=\frac{1}{(n-1)n},\ (\forall)i\neq j,\text{ from }\mathbf{N}^*,$$

…………………………….................

$$P(A_1\cap\ldots\cap A_n)=\frac{1}{1\cdot 2\cdots\cdots n}=\frac{1}{n!}.$$

Estas relaciones nos permiten calcular:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}-\sum_{1\le i<j\le n}\frac{1}{n(n-1)}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}=$$

$$=\binom{n}{1}\cdot\frac{1}{n}-\binom{n}{2}\frac{1}{n(n-1)}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}=$$

$$=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!} \qquad (15).$$

En el límite, en (15), y usando de [4], la serie:

$$\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}=\frac{1}{e},$$

Encontramos, por (14),

$$P\left(\bigcup_{i\in\mathbf{N}^*}A_i\right)=\lim_{n\to\infty}P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}\right)=\frac{1}{e}<\frac{1}{2}.$$

BIBLIOGRAFÍA

[1] **Modan L.** „ *Proposed problem*” (in Romanian), Gazeta Matematicã pentru tineri, v. 100, nr.9, Bucharest, 1995;

[2] **Modan L.** „ *Proposed problem*” (in Spanish), Revista Escolar de la Oli. Iberoamer. de Mat., v.2, nr.8, Valladolid, 2002;

[3] **Modan L.** „*Sur un problème de numération*”, Luc. Sem. de Creat. Mat., v.11, Baia Mare, 2002, pg. 95-9;

[4] **Modan L.** „*Real Differential Calculus*” (in Romanian), Cison Printing House, Bucharest, 2002;

[5] **Modan L.** „*On the negation of the predicates with, applications in Combinatorial Probabilities*”, Proceedings of the International Conference „*The Decidable and the Undecidable in Mathematics Ed.*”, Brno, Czech Republic, Sept. 19-25, 2003, pg. 189-92;

[6] **Modan L.** **Csinta Th.** „*Mathematics Problems*” (in Romanian), Gil Printing House, Bucharest, 2003;

[7] **Modan L.** „*Proposed problem*”, Octogon, Math. Mag., v.12, nr.2, Braºov, 2004;

[8] **Neveu J.** „*Bases mathématiques du Calcul des Probabilités*”, Masson, Paris, 1964;

[9] **Tomescu I.** „*Introduction in Combinatorics*” (in Romanian), Tehnica Printing House, Bucharest, 1972.

EXTREMOS RELATIVOS DE FUNCIONES FRACCIONARIAS.

La derivada del cociente de dos funciones suele ser "expansiva", por lo que el cálculo y simplificación de la derivada segunda puede resultar tediosa y dificultosa la evaluación de valores en ésta.

Sin embargo, para determinar los extremos relativos (máximos o mínimos) de una función $f(x)$, no es necesario calcular $f''(x)$, ya que es suficiente conocer su signo en las raíces de $f'(x)$.

Función signo de la segunda derivada.

Sea

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}.$$

Por brevedad, escribiremos simplemente $f(x) = \frac{u}{v}$. Se tiene:

$$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Si $f'(x_0) = 0$, entonces $u'v - uv' = 0$ en $x = x_0$. Por tanto,

$$f''(x_0) = \frac{(u''v + u'v' - u'v' - uv'')v^2 - 2vv'(u'v - uv')}{v^4} = \frac{(u''v - uv'')v^2 - 2vv'\overbrace{(u'v - uv')}^{0}}{v^4},$$

luego,

$$f'(x_0) = 0 \Rightarrow f''(x_0) = \frac{u''v - uv''}{v^2}.$$

Ahora bien, puesto que v^2 es no negativa (positiva, para que f esté definida en x_0), no tiene influencia en el signo de $f''(x_0)$. Así pues, a efectos de signo, $f''(x_0)$ es equivalente a la función

$$\boxed{s''(x_0) = u''(x_0)v(x_0) - u(x_0)v''(x_0)}$$

Evidentemente, s'' es equivalente a cualquier función homotética a ella, con razón de homotecia positiva, es decir

$$s_1''(x_0) = ks''(x_0) \overset{k>0}{\Rightarrow} s_1''(x_0) \sim s''(x_0),$$

entendiendo que tal equivalencia es relativa al signo de éstas en las raíces de $f'(x)$. Esto permite, en ciertos casos, simplificar aún más la función signo asociada a f.

Ejemplo.

Comprobemos con un ejemplo la ventaja que puede suponer sustituir la segunda derivada de una función fraccionaria por su función signo asociada, cuando se trata simplemente de determinar extremos relativos.

Determínense los extremos relativos de la función $f(x) = \frac{(2x-5)^2}{x^2+9}$.

Después de algunas simplificaciones, se obtiene:

$$f'(x) = \frac{2(2x-5)(5x+18)}{(x^2+9)^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ x = -\frac{18}{5} \end{cases}$$

$$f''(x) = \frac{2(20x^3 + 33x^2 - 540x - 99)}{(x^2+9)^3}.$$

Jesús Álvarez Lobo. Oviedo. Asturias. España. lobo@matematicas.net.

Obtener f´´ ha supuesto un trabajo tan ingrato como innecesario; pero aún nos aguarda lo peor: evaluar f´´ en $x=\frac{5}{2}$ *y* $x=-\frac{18}{5}$. *Esta tarea resulta realmente disuasoria, incluso disponiendo de calculadora.*

Veamos qué fácil resulta todo esto mediante la función signo asociada, incluso sin calculadora, lo que resultaría realmente complicado por el método convencional, pues, por ejemplo

$$f''\left(-\tfrac{18}{5}\right)=-\frac{1250}{4941}.$$

He aquí el desarrollo completo de los cálculos necesarios para determinar si f tiene máximos relativos o mínimos relativos:

$$f'=0 \Leftrightarrow u'v-uv'=0 \Leftrightarrow 2\cdot 2(2x-5)(x^2+9)-(2x-5)^2\cdot 2x=0 \Leftrightarrow 2(2x-5)(5x+18)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{5}{2} \\ x=-\frac{18}{5} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} u=(2x-5)^2 \Rightarrow u'=4(2x-5) \Rightarrow u''=8 \\ v=x^2+9 \Rightarrow v'=2x \Rightarrow v''=2 \end{array}\right\} \Rightarrow s''(x)=8(x^2+9)-2(2x-5)^2$$

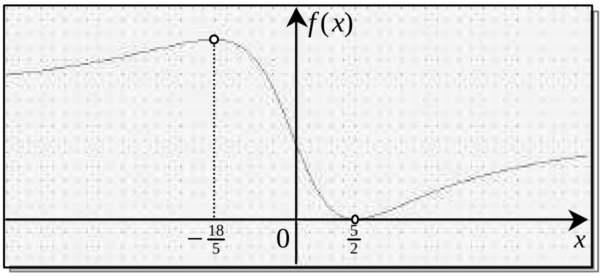
Despreciando el factor 2 en s´´ (que no influye en el signo) y simplificando, se tiene ***la función signo canónica*** *asociada a f:*

$$\boxed{s_1''(x)=20x+11}$$

La evaluación del signo de f´´ en $x=\frac{5}{2}$ *y* $x=-\frac{18}{5}$ *mediante la función signo canónica resulta inmediato:*

$$s_1''\left(\tfrac{5}{2}\right)>0 \Rightarrow f''\left(\tfrac{5}{2}\right)>0 \Rightarrow \textit{mínimo de } f \textit{ en } x=\tfrac{5}{2}$$

$$s_1''\left(-\tfrac{18}{5}\right)<0 \Rightarrow f''\left(-\tfrac{18}{5}\right)<0 \Rightarrow \textit{máximo de } f \textit{ en } x=-\tfrac{18}{5}$$



XX Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas Cartagena de Indias 2005

Primer Día

Septiembre 27 de 2005

1. Determine todas las ternas de números reales $(x,\, y,\, z)$ que satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} xyz &= 8, \\ x^2y + y^2z + z^2x &= 73, \\ x(y-z)^2 + y(z-x)^2 + z(x-y)^2 &= 98. \end{aligned}$$

2. Una pulga salta sobre puntos enteros de la recta numérica. En su primer movimiento salta desde el punto 0 y cae en el punto 1. Luego, si en un movimiento la pulga saltó desde el punto a y cayó en el punto b, en el siguiente movimiento salta desde el punto b y cae en uno de los puntos $b + (b - a) - 1$, $b + (b - a)$, $b + (b - a) + 1$.

   Demuestre que si la pulga ha caído dos veces sobre el punto n, para n entero positivo, entonces ha debido hacer al menos t movimientos, donde t es el menor entero mayor o igual que $2\sqrt{n}$.

3. Sea $p > 3$ un número primo. Si

$$\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{(p-1)^p} = \frac{n}{m}$$

   donde el máximo común divisor de n y m es 1, demuestre que p^3 divide a n.

Tiempo total: $4\frac{1}{2}$ horas. Cada problema recibe un máximo de 7 puntos.

XX Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas Cartagena de Indias 2005

Segundo Día

Septiembre 28 de 2005

4. Dados dos enteros positivos a y b, se denota por $(a \bigtriangledown b)$ el residuo que se obtiene al dividir a por b. Este residuo es uno de los números $0, 1, \ldots, b-1$. Encuentre todas las parejas de números (a, p) tales que p es primo y se cumple que

$$(a \bigtriangledown p) + (a \bigtriangledown 2p) + (a \bigtriangledown 3p) + (a \bigtriangledown 4p) = a + p.$$

5. Sea O el circuncentro de un triángulo acutángulo ABC y A_1 un punto en el arco menor BC de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC. Sean A_2 y A_3 puntos en los lados AB y AC respectivamente, tales que $\angle BA_1A_2 = \angle OAC$ y $\angle CA_1A_3 = \angle OAB$. Demuestre que la recta A_2A_3 pasa por el ortocentro del triángulo ABC.

6. Dado un entero positivo n, en un plano se consideran $2n$ puntos alineados A_1, A_2, $\ldots$, A_{2n}. Cada punto se colorea de azul o rojo mediante el siguiente procedimiento:

   En el plano dado se trazan n circunferencias con diámetros de extremos A_i y A_j, disyuntas dos a dos. Cada A_k, $1 \leq k \leq 2n$, pertenece exactamente a una circunferencia. Se colorean los puntos de modo que los dos puntos de una misma circunferencia lleven el mismo color.

   Determine cuántas coloraciones distintas de los $2n$ puntos se pueden obtener al variar las n circunferencias y la distribución de los dos colores.

Tiempo total: $4\frac{1}{2}$ horas. Cada problema recibe un máximo de 7 puntos.

PROBLEMAS PARA LOS MÁS JÓVENES (21)
Cinco problemas de los Círculos Matemáticos Rusos

1.Los números naturales a y b verifican la condición $56a = 65b$. Demostrar que $a + b$ no es primo.

2.Demostrar que un triángulo equilátero no puede ser cubierto por completo por dos triángulos equiláteros más pequeños.

3.El lado AC de un triángulo mide 3,8 y el lado AB 0,6. Se sabe que la longitud de BC es un entero. ¿cuánto mide BC?

4.Se tienen 5 monedas, de las que tres son buenas. Una de las otras dos es más pesada que una moneda buena, y la quinta es menos pesada que una moneda buena.En tres pesadas, determinar cuáles son las monedas falsas.

5.Una pieza imaginaria de ajedrez se llama *camello* y se mueve como el caballo, pero en la forma 1x3 (el caballo se mueve en la forma 1x2). ¿podría el camello pasar de la casilla donde está a una contigua?

Solução do problema 97) por Marcos Martinelli (Brasil)

Para calcular tal determinante multiplique a 3ª coluna por n e some à primeira, logo em seguinda, multiplique a 2ª coluna por n e some à terceira. Teremos então que calcular o determinante da seguinte matriz:

$$\begin{pmatrix} n^3y+y & n(z-y) & 0 \\ 0 & z+n^3x & n^4x+nx \\ n^4y+ny & n^2(x-y) & n^3x+x \end{pmatrix} = xy\begin{pmatrix} n^3+1 & n(z-y) & 0 \\ 0 & z+n^3x & n^4+n \\ n^4+n & n^2(x-y) & n^3+1 \end{pmatrix}.$$

E agora multipliquemos a 2ª linha por $\frac{-1}{n}$ e somemos a mesma à 3ª linha, logo em seguida, multipliquemos a 1ª linha por n somando-a à 3ª linha novamente, obtendo:

$$\text{xy}\begin{pmatrix} n^3+1 & n(z-y) & 0 \\ 0 & z+n^3x & n^4+n \\ 0 & -n^2z-\frac{z}{n} & 0 \end{pmatrix} = xy(-1)(n^4+n)(n^3+1)\left(-n^2z-\frac{z}{n}\right)=$$

$$= xyzn(n^3+1)(n^3+1)\frac{(n^3+1)}{n} = xyz(n^3+1)^3.$$ E assim o resultado é (n^3+1).

Problema 97 (Solución al problema propuesto por José Luis Díaz Barrero, Barcelona, España).

Sean x, y, z tres números complejos no nulos y n un entero. Demostrar que

$$(xyz)^{-(1/3)} \begin{vmatrix} y + n^3 z & n(z-y) & n^2(y-z) \\ n^2(z-x) & z + n^3 x & n(x-z) \\ n(y-x) & n^2(x-y) & x + n^3 y \end{vmatrix}^{1/3}$$

es un número entero y determinar su valor.

Solución: Notemos E la expresión dada. El cambio de variables (y/z, z/x, x/y) = (a, b, c), válido porque xyz   0, da la relación abc = 1 y convierte E en

$$\begin{vmatrix} n^3 + a & n(1-a) & -n^2(1-a) \\ -n^2(1-b) & n^3 + b & n(1-b) \\ n(1-c) & -n^2(1-c) & n^3 + c \end{vmatrix}^{1/3}$$

Además, se ve que E^3 puede ser considerado como una forma polinomial en n, de grado 9 y a coeficientes complejos $a_i = a_i(x,y,z)$, i = 0, 1, 2, ..., 9, de los cuales es evidente que $a_0 = a_9 = 1$ y suficientemente claro a la vista que $a_i = 0$ para i = 1, 2, 4, 5, 7, 8 porque no hay términos en n^i para estos últimos índices. Se tiene pues $E^3 = n^9 + a_6 n^6 + a_3 n^3 + 1$.

Un cálculo directo da $a_6 = \quad c_i c_j$ con i+j = 6 donde c_k designa al coeficiente de n^k en el determinante E^3 y similarmente $a_3 = \quad c_i c_j$ con i+j = 3. Así,

$$a_6 = b + c + a + (1-c)(1-b) - (1-a)(b-1) - b(1-a)(c-1) = 2 + abc = 3.$$

Del mismo modo se obtiene $a_3 = 2abc + 1 = 3$. Entonces, en efecto, ambos coeficientes complejos son independientes de x, y, z por lo cual se concluye que $E = n^3 + 1$.

Dos "soluciones" (las comillas indican error)

"Solución" 1.- Una vez obtenido $E^3 = n^9 + a_6 n^6 + a_3 n^3 + 1$, para que E sea un entero se debe tener $E = n^3 + a n^2 + b n + 1$, con a y b enteros y una condición necesaria y suficiente para que esta expresión de E elevada al cubo sea igual a $n^9 + a_6 n^6 + a_3 n^3 + 1$ es que $a = b = 0$ como se ve fácilmente en $[n^2(n+a) + (bn+1)]^3$ haciendo $a_8 = 0 = 3a$ y $a_1 = 0 = 3b$. Entonces $a_3 = a_6 = 3$ por lo cual $E = n^3 + 1$.

"Solución" 2.- Haciendo x = y = z arbitrarios, se tiene evidentemente $E = n^3 + 1$ sobre toda la diagonal compleja de $\mathbf{C}^3$. Como E es un polinomio y es igual a $n^3 + 1$ para una infinidad de valores de n, se tiene $E = n^3 + 1$ en general.

Luis Gómez Sánchez A.
Universidad de Oriente, Venezuela.
Correo electrónico: lagsa7@hotmail.com
Dirección postal: Jirón A. Tovar 267.
La Punta.
01 Callao. PERÚ.

Problema 98.
(Propuesto por José Luis Díaz Barrero, Barcelona, España)

Sean a_0, a_1, a_2 tres números complejos no nulos tales que $a_0=a_1\cdot a_2$.

Sabiendo que los afijos de las tres raíces de la ecuación $z^3 + a_2\cdot z^2 + a_1\cdot z + a_0 = 0$ forman un triángulo, probar que una de sus medianas pasa por el origen de coordenadas.

Solución de F. Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba, España.

Resulta inmediata la siguiente descomposición:

$$z^3 + a_2.z^2 + a_1.z + a_1.a_2 = \left(z^2 + a_1\right).\left(z + a_2\right)$$

En definitiva, las raíces de la ecuación $z^3 + a_2\cdot z^2 + a_1\cdot z + a_0 = 0$ son las siguientes:

$$z_0 = \sqrt{-a_1}\ ; \quad z_1 = -\sqrt{-a_1}\ ; \quad z_2 = -a_2$$

Resulta así evidente que la mediana correspondiente al afijo de z_2 pasa por el origen de coordenadas O, punto medio entre los afijos z_0 y z_1.

Problema 99

Propuesto por Laurentiu Modan, Bucarest, Rumanía.

Estudiar la convergencia de la sucesión (a_n),n≥1, definida por

$$a_n = n\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^3}-\frac{1}{\sqrt{n^4+k^4}}\right)\right].$$

Solución de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, España.

Es obvio que

$$a_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{\sqrt{n^4+k^4}}=\frac{n+1}{2n}-\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{\sqrt{n^4+k^4}}$$

Obviamente, el primer sumando converge a 1/2 cuando n tiende a infinito.

Sea ahora la función

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}.$$

Escribamos la suma de Riemann para la integral de dicha función en el intervalo [0,1] tomando la partición {0,1/n,2/n,...,1}, evaluada la función en el extremo mayor de cada intervalo de la forma ((k−1)/n,k/n), para k=1,2,...,n. Para cada n, llamaremos S_n a la suma de Riemann para la partición anterior. Entonces,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{n^2}{\sqrt{n^4+k^4}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{\sqrt{n^4+k^4}}.$$

Por lo tanto, es obvio que

$$a_n = \frac{n+1}{2n}-S_n.$$

Ahora bien, la función $f(x)$ es monótona (decreciente), continua y finita en el intervalo cerrado [0,1], luego es integrable en dicho intervalo, siendo el valor de dicha integral finito, y coincidente con el límite de la suma S_n. Luego

$$\lim_{n\to\infty}a_n = \frac{1}{2}-\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}dx,$$

que es finito. Luego la solución converge y éste es su límite.

Para hallar esta integral, tomemos en primer lugar y=1/x:

$$dx=-\frac{dy}{y^2}; \qquad \int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}dx=\int_{+\infty}^{1}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{y^4}}}\left(-\frac{dy}{y^2}\right)=\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{y^4+1}}dy.$$

De aquí se concluye que

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^4+1}}\,dx\,.$$

Esta integral se puede relacionar con la función beta tomando t=1/(1+x^4), pues entonces

$$x = \left(\frac{1}{t}-1\right)^{\frac{1}{4}}; \qquad dx = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{t}-1\right)^{-\frac{3}{4}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt = -\frac{1}{4}t^{-\frac{5}{4}}(1-t)^{-\frac{3}{4}}\,dt\,;$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^4+1}}\,dx = -\int_1^0 t^{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}t^{-\frac{5}{4}}(1-t)^{-\frac{3}{4}}\,dt = \frac{1}{4}\int_0^1 t^{\frac{1}{4}-1}(1-t)^{\frac{1}{4}-1}\,dt = \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{4\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{4}\mathrm{B}\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right),$$

donde Γ es la función gamma de Euler, y B es la función beta, definidas por

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t}t^{x-1}dt\,; \qquad \mathrm{B}(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}\,.$$

Ahora bien, es conocido que

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{p}\ .$$

Luego finalmente,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\,dx = \frac{1}{2} - \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{8\sqrt{p}}\,.$$

Nota: las funciones gamma y beta tienen múltiples propiedades muy estudiadas, por su interés, entre otros campos, en cálculo complejo y estadística. Algunas de sus propiedades y valores se pueden encontrar, por ejemplo, en las siguientes páginas web:

http://mathworld.wolfram.com/GammaFunction.html

http://mathworld.wolfram.com/BetaFunction.html

http://numbers.computation.free.fr/Constants/Miscellaneous/gammaFunction.html

Problema 100. *Propuesto por K.R.S. Sastry, Bangalore, India.*

Un triángulo se llama *heroniano* si sus lados y área son enteros. Sea n un número natural dado. Demostrar que para n = 1, 2, 3, …, existe al menos un triángulo heroniano que cumple la siguiente condición: dos de sus lados son números naturales consecutivos y su área es igual a n veces el perímetro.

Denotemos por H_n el triángulo heroniano que verifica que dos de sus lados son números naturales consecutivos y su área es n veces su perímetro.

Expresando en forma de terna los triángulos, donde las componentes representan las longitudes de los lados, demostraremos que una tal sucesión (H_n) de triángulos admite la siguiente **expresión general**:

$$\boxed{H_n = (4n+1, 4n(2n+1), 4n(2n+1)+1), \forall n \in \mathbb{N}^*}$$

En efecto, obviamente, para cada número natural n, sus lados son enteros, y dos de ellos son consecutivos. Además, como trivialmente se comprueba, H_n es un triangulo rectángulo (*pitagórico*):

$$\{4n(2n+1)+1\}^2 - \{4n(2n+1)\}^2 = \underbrace{\left[\{4n(2n+1)+1\} + \{4n(2n+1)\}\right]}_{8n(2n+1)+1} \cdot \underbrace{\left[\{4n(2n+1)+1\} - \{4n(2n+1)\}\right]}_{1} =$$

$$= 8n(2n+1)+1 = 16n^2 + 8n + 1 = (4n+1)^2, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Por tanto, el área de H_n es simplemente el semi-producto de sus dos lados menores (*catetos*).

Veamos cuál es la relación entre el área y el perímetro de H_n. Denotando por A_n y P_n, respectivamente, el área y el perímetro de H_n, se tiene:

$$\frac{A_n}{P_n} = \frac{\dfrac{(4n+1)\cdot 4n(2n+1)}{2}}{\{4n+1\} + \{4n(2n+1)\} + \{4n(2n+1)+1\}} = \frac{(4n+1)\cdot 2n(2n+1)}{8n(2n+1)+2(2n+1)} = \frac{2n(4n+1)(2n+1)}{2(4n+1)(2n+1)} = n, \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Para probar la **no unicidad** en la expresión de H_n, veamos el siguiente **contraejemplo**:

Los triángulos H_3 = (13, 84, 85), dado por la expresión general aquí presentada, y el (21, 20, 29), que no es generado por ésta, ambos son heronianos, verifican las condiciones del enunciado y el área de cada uno de ellos es el triple del correspondiente perímetro.

Observación: *La expresión general de H_n se deduce fácilmente de la teoría de las ternas pitagóricas desarrollada en la obra* ***TERNAS PITAGÓRICAS. Teoría de las Contracciones Diofantotriádicas.*** *Jesús Álvarez Lobo. ISBN: 84-8498-212-2. (No venal).*

Veamos una deducción directa para el término general de H_n. Denotando por c_n el cateto impar, se tiene:

$$H_n = (c_n, b_n, b_n+1) \equiv \left\{\begin{array}{l} H_n \ pitagórico \Rightarrow \quad c_n^2 = 2b_n + 1 \\ \quad A_n = nP_n \Rightarrow b_n c_n = 2n(2b_n + 1 + c_n) \end{array}\right\} \Rightarrow b_n c_n = 2n(c_n^2 + c_n) \overset{c_n \neq 0}{\Rightarrow} b_n = 2n(c_n+1)$$

$$\Rightarrow c_n^2 = 2\left[2n(c_n+1)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_n^2 - 4nc_n - (4n+1) = 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} c_n = 4n+1 \\ c_n = -1 \notin \mathbb{N}^* \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow b_n = 2n\left[(4n+1)+1\right] \Rightarrow b_n = 4n(2n+1)$$

$$\Rightarrow \boxed{H_n = (4n+1, 4n(2n+1), 4n(2n+1)+1)}$$

Problemas propuestos 101-105

Problema 101 (propuesto por Abderrahim Ouardini, Burdeos, Francia)
Se considera un triángulo ABC cuyos lados están ordenados de la manera siguiente:

$$AB \leq AC \leq BC$$

Sea I el centro de su círculo inscrito, y T el punto de tangencia del círculo inscrito con el lado AC.
El círculo circunscrito al triángulo AIC vuelve a cortar a la recta IT en J.
Demostrar la equivalencia de las dos proposiciones siguientes:
i) La altura desde B (en el triángulo ABC) es igual a TJ.
ii) AB,AC y BC están en progresión aritmética.

Problema 102 (propuesto por Doru Popescu Anastasiu y Miguel Amengual Covas, Mallorca, España)
Sea ABC un triángulo y D un punto sobre BC.
Probar que la relación

$$AD^2 = AB \cdot AC \qquad (1)$$

no puede verificarse si AD es altura o bisectriz interior.
Si AD es mediana, probar que existen infinitos triángulos que cumplen (1).
(*) ¿Para qué triángulos ABC y para qué puntos D pertenecientes a BC se verifica (1)?

Problema 103 (propuesto por José Luis Díaz Barrero, Barcelona, España)
Sean $a_1, a_2, \cdots, a_n$ $(n \geq 2)$ números reales mayores o iguales que 1. Probar que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\right) \cdot \left(\prod_{k=1}^{n} (1 + a_k)\right) \geq 2n^2$$

Problema 104 (propuesto por José Luis Díaz Barrero, Barcelona, España)
Calcular

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} e^{\frac{1}{n+2005k}} - n \right)$$

Problema 105 (propuesto por Jesús Álvarez Lobo, Oviedo, España)
Lin y Lan son dos campesinos, hermanos gemelos, que comparten al 50% un prado delimitado por los restos de una antigua construcción de forma circular.
Lin posse una vaca, "Linda", y Lan un burro, "Lanzado". Obviamente, Linda come más que Lanzado, por lo que deciden lo siguiente: primero atará Lan su asno en un punto cualquiera del cercado circular, con una cuerda cuya longitud le permita comer exactamente la mitad de la hierba del prado; luego, Lin podrá dejar a Linda en total libertad dentro del círculo para que se deleite con el pasto restante.
La estrategia para el reparto equitativo del pasto es sencilla, pero...¿qué longitud debe tener la cuerda que ate a Lanzado a la circunferencia?

Divertimentos Matematicos (21)

Cinco problemas de enunciado curioso

1. En un remoto sistema solar hay un número impar de planetas; en un cierto momento las distancias entre ellos son todas distintas. Hay un astrónomo en cada planeta, que estudia el planeta más próximo a él. Demostrar que hay un planeta que no es estudiado por ningún astrónomo.(*Procedencia:Kömal*)

2. Un caníbal aparece en la orilla del lago circular en el que se está bañando Robinson Crusoe. Robinson sabe que el caníbal corre en tierra a una velocidad 4 veces mayor que la que nada. Por otra parte, Robinson es más veloz que el caníbal, fuera del agua, luego si puede alcanzar un punto de la orilla antes que el caníbal, podrá escapar. ¿Puede huir Robinson?(*Procedencia: Kömal*)

3. Para n=1; 2; 3; ... , la sucesión finita S_n es una permutación de 1; 2; 3; ... ; n, formada según una ley que debe determinarse. De acuerdo con esta ley, se tiene:

S_1=(1)

S_2=(2; 1)

S_3=(2; 3; 1)

S_4=(4; 2; 3; 1) ...

S_9=(5; 4; 2; 9; 8; 6; 7; 3; 1)

Descubrir la ley de formación y dar S_{10}:(*Procedencia:Crux Mathematicorum*)

4. Un hombre ha viajado durante 30 días. El día de su partida ha recorrido 11 leguas; pero en los días siguientes, su marcha se ha hecho más lenta, de modo que si a partir del segundo día se compara el trayecto hecho cada día con el hecho la víspera, se obtienen sucesivamente como cocientes las razones

3/5 ; 4/6 ; 5/7 ; 6/8 ;... ¿

Cuántas leguas ha recorrido en los 30 días? (*Procedencia:Mathesis*)

5. Una isla tiene gatos, pájaros y serpientes. Cada día, cada gato desayuna un pájaro; cada serpiente come un gato y cada pájaro cena una serpiente. No hay otras muertes, ni nacimientos. A cierta hora del día n del mes, un pájaro se convierte en el único ser viviente de la isla. ¿Después de qué comida ocurrió esto? Hallar una expresión para el número de pájaros antes del desayuno, en el primer día de ese mes. (Procedencia: *The Mathematical Gazette*).

COMENTARIO DE PÁGINAS WEB (21)

Una página de competiciones en Serbia y Montenegro

www.matf.bg.ac.yu/~matic/competitions

La página que comentamos hoy tiene versiones en serbo-croata e inglés, y está mantenida por la Universidad de Belgrado. Tiene como secciones Generalidades, Problemas, IMO, BMO (la Olimpiada Balcánica), Serbia y Montenegro en IMO; Serbia y Montenegro en BMO,….y la principal razón que me ha movido a presentarla a los lectores de la Revista Escolar de la OIM: *The IMO Compendium.*

Se trata de la versión preliminar de un libro que va a ser publicado en octubre de 2005 por la editorial Springer, dentro de la serie *Problem Books of mathematics*. En él se van a incluir TODOS los problemas propuestos a los Jurados de la IMO desde 1959 hasta 2004. En la página web se irán incluyendo problemas posteriores. Sin estar todavía publicado, cabe suponer que será la versión corregida y aumentada del famoso libro rumano *Olimpiadele Internationale de matematica ale elevilor,* de Ion Cuculescu, que incluye los problemas de la IMO entre 1973 y 1982. Los autores de tan monumental obra son Dusan Djukic, Ivan Matic y Nikola Petrovic.

Auguramos un notable éxito de esta publicación.

La página web, además, contiene otros muchos problemas de olimpiadas nacionales y regionales, que la hacen de visita "casi obligatoria" para los que amamos las Olimpiadas de Matemáticas.

Valladolid, octubre 2005
Francisco Bellot Rosado

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI

Número

22

Revista Escolar
de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática
ISSN 1698-677X

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

Número 22 (Noviembre-diciembre 2005)

ISSN – 1698-277X

Índice

Artículos, notas y lecciones de preparación olímpica

F.Bellot, **Problemas cuadráticos de Olimpiadas.**

--

Problemas para alumnos de Educación Media y de Olimpiadas

Algunos problemas propuestos en las Oposiciones de P.E.S. de Cataluña, Baleares y Valencia (2005)

--

Problemas para los más jóvenes

Cinco problemas del libro Mathematical Circles (Russian experience), de Fomin, Genkin e Itenberg.

--

Problemas

Resueltos:

Problema 101. Recibidas soluciones de: F.D. Aranda Ballesteros, Córdoba, España; José Jorge Rodríguez Pérez, Oleiros(Coruña), España; y C. Sánchez-Rubio, Benicassim (Castellón), España.
Presentamos la solución de C. Sánchez Rubio.
Problema 102. Recibidas soluciones de F.D. Aranda Ballesteros, Córdoba, España; y C. Sánchez Rubio, Benicassim, Castellón, España.
Presentamos la solución de C.S ánchez Rubio.

Problema 103. Recibidas soluciones de J. Álvarez Lobo, Oviedo (Asturias), España; y de Marcos Martinelli, Brasil.
Presentamos la solución de J. Álvarez Lobo.
Problema 104. Recibida la solución de Marcos Martinelli, Brasil, que presentamos.

Propuestos

Propuestos 106-110
Problema 106, por J.L. Díaz Barrero, Barcelona, España.
Problema 107, por Jorge Enrique Espinoza Guevara, Lima, Perú
Problema 108, por Marcos Martinelli, Brasil
Problema 109, por J.B. Romero Márquez, Ávila, España
Problema 110, por J.B. Romero Márquez, Ávila, España.

--

Divertimentos matemáticos

Algunas citas del libro *Twenty years before the blackboard*, de M. Stauben y D. Sandford. *(MAA, 1998)*

--

Reseñas web

La página de Adrian Oldknow

Editor: Francisco Bellot Rosado

PROBLEMAS CUADRÁTICOS DE OLIMPIADAS
Francisco Bellot Rosado

Presentamos a continuación una serie de problemas de Olimpiadas con la característica común de hacer intervenir en ellos, en mayor o menor medida, las propiedades del trinomio de segundo grado. Aunque a primera vista podría parecer que debería tratarse de problemas o ejercicios muy sencillos (todo el mundo cree saber resolver una ecuación de segundo grado), el examen de los ejemplos que presentamos quizá haga variar semejante opinión.

Recordamos las relaciones de Cardano-Vieta para el polinomio de segundo grado :

Si α, β son las raíces (reales o complejas) del polinomio $x^2 + px + q$, la identificación de coeficientes en los dos miembros de

$$(x-\alpha)(x-\beta) = x^2 + px + q$$

proporciona las igualdades

$$\begin{aligned} -(\alpha+\beta) &= p \\ \alpha\beta &= q. \end{aligned}$$

El método de completamiento de cuadrado aplicado al polinomio

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

permite escribirlo en la forma

$$P(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a},$$

de donde se deduce la conocida fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

La expresión $\Delta = b^2 - 4ac$ es el discriminante, porque separa las raíces : Si $\Delta > 0$, $P(x)$ tiene dos raíces reales, si $\Delta = 0$ tiene una raíz real doble; si $\Delta < 0$, no tiene raíces reales.

Problema 1

Si $P(x) = x^2 + ax + b, Q(x) = x^2 + px + q$, hallar la condición para que los dos polinomios tengan una raíz común.

Solución

Si x_1, x_2 son las raíces (reales o complejas) de P, sustituyéndolas en Q y calculando $Q(x_1) \cdot Q(x_2)$, obtenemos

$$Q(x_1) \cdot Q(x_2) = x_1^2 x_2^2 + q\left(x_1^2 + x_2^2\right) + px_1x_2(x_1+x_2) + p^2 x_1 x_2 + pq(x_1+x_2) + q^2$$

De las relaciones de Cardano-Vieta para P resulta que

$$\begin{aligned} x_1+x_2 &= -a \\ x_1x_2 &= b \\ x_1^2+x_2^2 &= (x_1+x_2)^2-2x_1x_2=a^2-2b \end{aligned}$$

así que sustituyendo en la expresión anterior resultará

$$Q(x_1)\cdot Q(x_2)=(q-b)^2+(p-a)(bp-aq),$$

y como, evidentemente, la condición para que una de las raíces de P sea también raíz de Q es $Q(x_1){\cdot}Q(x_2)=0$, resulta la condición necesaria y suficiente buscada escrita como

$$(q-b)^2+(p-a)(bp-aq)=0.$$

Problema 2

Sea $f(x)=a^2x^2-\left(b^2-2ac\right)x+c^2$, con $a,b,c\in\mathbb{Q}_+^*$. Probar que si existe $n\in\mathbb{N}$ tal que $f(n)=0$, entonces n es cuadrado perfecto.

(Cr.Mortici, *Gazeta Matematică 1987, Rumania)*

Solución

Las raíces de la ecuación son

$$\frac{b^2-2ac\pm b\sqrt{b^2-4ac}}{2a^2};$$

para que alguna de ellas sea entera, debe existir k entero tal que $b^2-4ac=k^2$. Entonces se tiene

$$b^2-k^2=4ac,\quad \frac{b^2-k^2}{2}=2ac$$

así que sustituyendo en la expresión para las raíces de la ecuación se obtiene

$$\frac{b^2-\frac{b^2-k^2}{2}\pm bk}{2a^2}=\frac{b^2+k^2\pm 2bk}{4a^2}=\left(\frac{b\pm k}{2a}\right)^2,\ \text{que es un cuadrado.}$$

Problema 3

Sea a un número real dado. Calcular los números reales $x_1,\cdots,x_n$ que son soluciones del sistema

$$\left.\begin{array}{c} x_1^2+ax_1+\left(\frac{a-1}{2}\right)^2=x_2 \\ x_2^2+ax_2+\left(\frac{a-1}{2}\right)^2=x_3 \\ \cdots \\ x_{n-1}^2+ax_{n-1}+\left(\frac{a-1}{2}\right)^2=x_n \\ x_n^2+ax_n+\left(\frac{a-1}{2}\right)^2=x_1 \end{array}\right\}$$

(Torneo de las Ciudades)

Solución

Sumando miembro a miembro todas las ecuaciones :

$$\left(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\right)+(a-1)\left(x_1+\cdots+x_n\right)+n\left(\frac{a-1}{2}\right)^2=0$$

y el primer miembro se escribe como

$$x_1^2+(a-1)\,x_1+\left(\frac{a-1}{2}\right)^2+\cdots+x_n^2+(a-1)\,x_n+\left(\frac{a-1}{2}\right)^2=0,$$

es decir

$$\left(x_1+\frac{a-1}{2}\right)^2+\cdots+\left(x_n+\frac{a-1}{2}\right)^2=0,$$

luego todos los paréntesis deben ser nulos y así se obtiene

$$x_1=x_2=\cdots=x_n=\frac{1-a}{2}.$$

Inmediatamente se comprueba por sustitución directa que esta solución verifica las ecuaciones iniciales del sistema.

Problema 4

Sea $f(x)$ un polinomio con coeficientes reales tal que $f(x)\geq 0$ para todo x real. Demostrar que $f(x)$ puede escribirse en la forma

$$f(x)=\left(g_1\left(x\right)\right)^2+\left(g_2\left(x\right)\right)^2+\cdots+\left(g_n\left(x\right)\right)^2,$$

donde los g_i son polinomios con coeficientes reales.

(*Propuesto por Hungría, no usado, IMO 1973)*

Solución *(de Mª Ascensión López Chamorro)*

f tiene que ser de grado par y tendrá un mínimo absoluto mayor o igual que 0; además el coeficiente principal y el término independiente son positivos.

Si f es de segundo grado,

$$f(x)=ax^2+bx+c=\left(\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2+\left(\sqrt{c-\frac{b^2}{4a}}\right)^2$$

y esa descomposición responde a las condiciones del problema (en este caso, g_2 es un polinomio constante).

Procedemos a continuación por inducción sobre el grado del polinomio f :supongamos la proposición cierta para cualquier polinomio de grado $2\,(n-1)$; sea $gr(f)=2n$ y $\beta=f(\alpha)\geq 0$ el mínimo del polinomio f. Entonces

$$f(x)-\beta=(x-\alpha)^2\,f_{2(n-1)}\left(x\right)=(x-\alpha)^2\sum_{h=1}^{k}\left(g_h\left(x\right)\right)^2$$

así que en este caso se tiene

$$f(x) = \sum_{h=1}^{k} ((x-\alpha)^2 g_h(x))^2 + \left(\sqrt{\beta}\right)^2$$

y hemos terminado la fase inductiva, lo que prueba la proposición.

Problema 5

Sean $a, b \in \mathbb{Z}$. Resolver (¡numéricamente!) la ecuación

$$(ax-b)^2 + (bx-a)^2 = x,$$

sabiendo que admite una raíz entera.

(M. Becheanu, *Gazeta Matematică, Rumania)*

Comentario

Este es, en mi opinión, "el más bello problema sobre la ecuación de segundo grado jamás propuesto"; la solución es del proponente del problema, Mircea Becheanu, Jefe de la Delegación Rumana en la IMO.

Solución

Si $a = b = 0$, la ecuación es de primer grado, con solución única $x = 0$.

Supongamos $a \neq 0$ ó $b \neq 0$. La ecuación es

$$\left(a^2+b^2\right)x^2 - (4ab+1)\,x + a^2 + b^2 = 0,$$

de segundo grado, con raíces x_1, x_2 , siendo $x_1 \in \mathbb{Z}$. Como

$$x_1 = (ax_1-b)^2 + (bx_1-a)^2\,,$$

deducimos que x_1 es, además de entero, positivo. Como las raíces son reales, el discriminante de la ecuación será mayor o igual que cero:

$$(4ab+1)^2 - 4\left(a^2+b^2\right)^2 \geq 0 \Longleftrightarrow \left[1-2\,(a-b)^2\right]\left[1+2\,(a-b)^2\right] \geq 0$$

y esto exige que $1-2\,(a-b)^2 \geq 0$. Puesto que $(a-b)^2$ es natural, resulta necesariamente $(a-b)^2 = 0$, es decir, $a = b$.

Con esto, la ecuación se convierte en

$$2a^2 - \left(4a^2+1\right)x + 2a^2 = 0 \qquad (**)$$

y, según las fórmulas de Cardano-Vieta, se tiene

$$x_1 + x_2 = 2 + \frac{1}{2a^2}, \qquad x_1 x_2 = 1.$$

Observamos que, al ser $x_1 \in \mathbb{N}$, $x_1 = 0$ no puede ser raíz de (**), ni tampoco $x_1 = 1$ puede serlo. Por lo tanto, $x_1 \geq 2$. Ya que $x_2 = \frac{1}{x_1} > 0$, entonces $x_1 < x_1 + x_2 = 2 + \frac{1}{2a^2} < 3$. Por lo tanto $2 \leq x_1 < 3$ con x_1 entero implica $x_1 = 2, x_2 = \frac{1}{2}$. Sustituyendo los valores resulta $a^2 = 1$, así que $a \in \{-1, 1\}$.

La única posibilidad, entonces, es $a = b = \pm 1$, con raíces $2, \frac{1}{2}$.

Problema 6

Hallar una condición necesaria y suficiente para que la ecuación $ax^2+bx+c=0, a\neq 0$, tenga una de sus raíces igual al cuadrado de la otra.

(*Crux Mathematicorum 1973, Canadá)*

Solución

Sean r y r^2 las raíces; entonces

$$r^2+r=-\frac{b}{a},\quad r^3=\frac{c}{a}.$$

Puesto que se verifica

$$\left(r^2+r\right)^3=r^3\left(r+1\right)^3=r^3\left(r^3+3\left(r^2+r\right)+1\right)$$

se tiene la condición necesaria

$$\left(-\frac{b}{a}\right)^3=\frac{c}{a}\left(\frac{c}{a}-3\frac{b}{a}+1\right)\Longleftrightarrow b^3+ca\left(c+a\right)=3abc\qquad (*).$$

Esta condición es suficiente, porque si (*) se cumple, y llamamos R, r a las raíces, sustituyendo $-\frac{b}{a}=R+r, \frac{c}{a}=Rr$, en la primera de las dos expresiones (*) se obtiene

$$\left(R+r\right)^3=Rr\left[Rr+3\left(R+r\right)+1\right]\Longleftrightarrow\left(R^2-r\right)\left(R-r^2\right)=0,$$

lo que prueba que una de las raíces es el cuadrado de la otra.

Problema 7

Resolver la ecuación

$$\left[\frac{2x^2}{x^2+1}\right]=x,$$

siendo [] la parte entera.

(Gazeta Matematică, Rumania, 1990)

Solución

Como $\frac{2x^2}{x^2+1}\geq 0$, $\left[\frac{2x^2}{x^2+1}\right]$ es natural, luego x es natural.

Aplicamos la desigualdad de las medias armónica y geométrica a los números positivos 1 y x^2 : se tendrá

$$\frac{2}{1+\frac{1}{x^2}}\leq\sqrt{1\cdot x^2}=x\Longrightarrow\frac{2x^2}{x^2+1}\leq x\qquad(1).$$

Por otra parte, como

$$\left[\frac{2x^2}{x^2+1}\right]\leq\frac{2x^2}{x^2+1},$$

resulta según el enunciado

$$x\leq\frac{2x^2}{x^2+1}\qquad(2),$$

así que será

$$x = \frac{2x^2}{x^2+1},$$

de donde $x = 0$ ó $x = 1$.

Problema 8

Sean $a, b \in \mathbb{N}^*$ y la ecuación $(x-a)^2 + (x-b)^2 = 2ab - 1$.

Demostrar que :

i) la ecuación no tiene raíces racionales.

ii) Si $b = a+1$, entonces la ecuación tiene raíces reales, y en este caso hallar la parte entera de las raíces de la ecuación.

(*Gazeta Matematică, Rumania)*

Solución

i)La ecuación se puede escribir como

$$2x^2 - 2(a+b)x + (a-b)^2 + 1 = 0.$$

La siguientes condiciones son equivalentes:

$$\begin{aligned} x_1, x_2 \quad \in \quad & \mathbb{Q} \Longleftrightarrow \gneqq = 4\left[(a+b)^2 - 2(a-b)^2 - 2\right] = k^2, k \in \mathbb{Z} \\ \Longleftrightarrow \quad & (a+b)^2 - 2(a-b)^2 - 2 = l^2, l \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Sean $p = a+b, q = a-b$. Como p y q son de la misma paradad, distinguiremos dos casos:

1) $p = 2u, q = 2v, \quad$ con $u, v \in \mathbb{Z}$. Entonces

$$(a+b)^2 - 2(a-b)^2 - 2 = 4u^2 - 8v^2 - 2.$$

Puesto que 2 divide a $4u^2 - 8v^2 - 2$, pero 4 no, es imposible que $4u^2 - 8v^2 - 2$ sea un cuadrado perfecto.

2) $p = 2u+1, q = 2v+1$. En este caso,

$$(a+b)^2 - 2(a-b)^2 - 2 = 4u(u+1) - 8v(v+1) - 3 = 8t + 5, t \in \mathbb{Z}.$$

Como el resto de la división por 8 de un cuadrado perfecto puede ser 0,1 ó 4, tampoco en este caso Δ es un cuadrado perfecto.

Por lo tanto, las raíces de la ecuación no son racionales.

ii) Si $b = a+1$, la ecuación es $x^2 - (2a+1)x + 1 = 0$, cuyo discriminante es $4a^2 + 4a - 3$. Como $a \in \mathbb{N}^*$, $\Delta \geq 5$, así que las raíces son reales y distintas : $x_1 < x_2$. Sea la función

$$f(x) = x^2 - (2a+1)x + 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Se tiene : $f(0) = 1 > 0$; $f(1) = 1 - 2a < 0$; $f(2a) = 1 - 2a < 0$, $f(2a+1) > 0$. Resulta así

$$0 < x_1 < 1 < 2a < x_2 < 2a + 1$$

y $[x_1] = 0, [x_2] = 2a$.

Problema 9

Demostrar que $n^4 + 4$ nunca es primo si $n > 1$ (Sophie Germain)

Generalización : $4^n + n^4$ no es primo si $n > 1$.

(Olimpiada de Brasil)

Solución

Se tiene

$$n^4 + 4 = n^4 + 4n^2 + 4 - 4n^2 = \left(n^2 + 2\right)^2 - 4n^2 = \left(n^2 + 2 - 2n\right)\left(n^2 + 2 + 2n\right)$$

Es claro que el último factor es mayor que 1. En cuanto al otro, $n^2 + 2 - 2n = (n-1)^2 + 1$ es igualmente mayor que 1 si $n \neq 1$.

Generalización :

Si n es par, es obvio que $4^n + n^4$ es par y mayor que 2, luego no es primo.

Estudiaremos el caso impar utilizando la identidad (llamada de Sophie Germain)

$$x^4 + y^4 = \left(x^2 + y^2 + \sqrt{2}xy\right)\left(x^2 + y^2 - \sqrt{2}xy\right).$$

Entonces, si $n = 2k+1$, $4^n = 4^{2k+1} = \left(\sqrt{2} \cdot 2^k\right)^4$, así que podemos escribir

$$4^n + n^4 = \left(\sqrt{2} \cdot 2^k\right)^4 + n^4 = \left(2^n + n^2 + 2^{k+1} \cdot n\right)\left(2^n + n^2 - 2^{k+1} \cdot n\right)$$

Comprobemos finalmente que el menor de los dos factores anteriores no es igual a 1:

$2^n + n^2 - 2^{k+1} \cdot n = 2^{2k+1} + (2k+1)^2 - 2^{k+1}(2k+1) =$

$= 2 \cdot 2^{2k} - 2 \cdot 2^{2k}(2k+1) + (2k+1)^2 = \left[2^k - (2k+1)\right]^2 + 2^{2k} \geq 5$ pues $k > 0$.

Problema 10

Hallar los números reales positivos x, y sabiendo que las cuatro medias

$$a = \frac{x+y}{2},\ g = \sqrt{xy},\ h = \frac{2xy}{x+y},\ k = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$$

son números naturales cuya suma vale 66.

(Olimpiada de la República Checa, 1995)

Solución

Ya que 66 no es divisible por 4, no puede ser $a = g = h = k$, en consecuencia, por la desigualdad de las medias, será

$$h < g < a < k.$$

Sea c el máximo común divisor de a y $g.Entonces$

$$a = ca_1, \quad g = cg_1 \quad \text{donde } g_1 < a_1 \ \text{ son primos entre sí.}$$

Ya que $h = \frac{g^2}{a} = \frac{cg_1^2}{a_1}$, el número c debe ser divisible por a_1, es decir $c = da_1$ para algún número natural d. Las cuatro medias se pueden ahora expresar mediante d, a_1, g_1 :

$$h = dg_1^2, \quad g = da_1g_1, \quad a = da_1^2, \quad k = \sqrt{2a^2 - g^2} = da_1\sqrt{2a_1^2 - g_1^2}.$$

Ya que la raíz cuadrada de un número natural es natural o irracional, el número $\sqrt{2a_1^2 - g_1^2}$ debe ser natural (que es además mayor que a_1, porque $g_1 < a_1$. De aquí que el tercer y cuarto sumandos de la igualdad

$$dg_1^2 + da_1g_1 + da_1^2 + da_1\sqrt{2a_1^2 - g_1^2} = 66 \qquad (*)$$

son los dos mayores que a_1^2(ya que $d \geq 1$). De aquí se sigue que $2a_1^2 < 66$, es decir, $a_1 < 5$. Se comprueba fácilmente que de las diez raíces cuadradas

$$\sqrt{2a_1^2 - g_1^2}, \qquad 1 \leq g_1 < a_1 \leq 5$$

la única que es entera es $\sqrt{2 \cdot 5^2 - 1^2}$, con $a_1 = 5, g_1 = 1$.

Sustituyendo en (*) se obtiene $d = 1$, lo que da $(h, g, a, k) = (1, 5, 25, 35)$. Los números x, y son las soluciones de la ecuación

$$t^2 - 50t + 25 = 0,$$

es decir

$$\{x, y\} = \left\{25 + 10\sqrt{6}, 25 - 10\sqrt{6}\right\}.$$

Problema 11

Sea m un número real, tal que las raíces x_1 y x_2 de la ecuación

$$f(x) = x^2 + (m-2)\,x + m^2 - 3m + 3 = 0$$

son reales.

a) Hallar todos los valores de m para los cuales $x_1^2 + x_2^2 = 6$.

b) Probar que

$$1 < \frac{mx_1^2}{1 - x_1} + \frac{mx_2^2}{1 - x_2} + 8 \leq \frac{121}{9}$$

(*Olimpiada de Bulgaria, 1995*)

Solución

a) Ya que la ecuación tiene dos raíces reales, su discriminante

$$(m-2)^2 - 4\left(m^2 - 3m + 3\right) = -3m^2 + 4m + 4 \geq 0,$$

luego $-\frac{2}{3} \leq m \leq 2$.
Por otra parte,

$$6 = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = -m^2 - 2m + 10.$$

De aquí se obtiene $m = -1 \pm \sqrt{5}$, pero

$$-1 - \sqrt{5} < -\frac{2}{3} < -1 + \sqrt{5} < 2,$$

y por lo tanto sólo $m = -1 + \sqrt{5}$ es solución del problema.
b) Se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{mx_1^2}{1 - x_1} + \frac{mx_2^2}{1 - x_2} &= \frac{m\left[x_1^2(1 - x_2) + x_2^2(1 - x_1)\right]}{f(1)} \\
&= \frac{x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2(x_1 + x_2)}{m - 2} \\
&= \frac{m^3 - 8m^2 + 13m - 2}{m - 2} \\
&= m^2 - 6m + 1.
\end{aligned}$$

Entonces, si llamamos

$$F = \frac{mx_1^2}{1 - x_1} + \frac{mx_2^2}{1 - x_2} + 8,$$

resulta $F = (m - 3)^2$, y entonces

$$\frac{121}{9} = \left(-\frac{2}{3} - 3\right)^2 \geq F > (2 - 3)^2 = 1.$$

Problema 12

Se considera la función cuadrática $f(x) = -x^2 + 4px - p + 1$. Sea S el área del triángulo del que dos vértices son los puntos de intersección de $f(x)$ con el eje de abscisas,mientras que el tercer vértice es el vértice de la parábola. Hallar todos los racionales p tales que S es entero.

(*Olimpiada de Bulgaria 1995*)

Solución

El discriminante de $f(x)$ es $D = 4\left(4p^2 - p + 1\right) > 0$ para todo p real. En consecuencia $f(x)$ tiene dos raíces reales x_1 y x_2, y la parábola corta al eje x en dos puntos distintos, A y B. El vértice C de la parábola tiene coordenadas $2p$ y $h = f(2p) = 4p^2 - p + 1 > 0$. Se tiene

$$AB = |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = 2\sqrt{4p^2 - p + 1}$$

Ahora calculamos

$$S = S_{ABC} = \frac{AB \cdot h}{2} = \left(4p^2 - p + 1\right)^{3/2}.$$

Llamemos $q = 4p^2 - p + 1$. Ya que q es racional, y $q^3 = S^2$ es entero, entonces q es entero también.Entonces $\frac{S}{q}$ es racional, y como su cuadrado $\left(\frac{S}{q}\right)^2 = q$ es entero, entonces $\frac{S}{q}$ es igualmente entero. Por lo tanto $q = n^2$, siendo n un entero positivo :

$$4p^2 - p + 1 - n^2 = 0.$$

Esta ecuación cuadrática (respecto de p) tiene una raíz racional exactamente cuando su discriminante $16n^2 - 15$ es el cuadrado de un número racional. Por lo tanto $16n^2 - 15 = m^2$, y no hay pérdida de la generalidad en suponer m entero positivo. De la igualdad

$$(4n - m)(4n + m) = 15$$

obtenemos

$$\left.\begin{array}{r} 4n - m = 1 \\ 4n + m = 15 \end{array}\right\} \text{ o bien } \left.\begin{array}{r} 4n - m = 3 \\ 4n + m = 5 \end{array}\right\}$$

De aquí que $n = 2, m = 7$ o bien $n = 1, m = 1$.

Los números racionales que estamos buscando son $0, 1, \frac{1}{4}, -\frac{3}{4}$.

Problema 13

¿Para qué funciones cuadráticas $f(x)$existe una función cuadrática $g(x)$ tal que las raíces de la ecuación $g(f(x)) = 0$ son cuatro términos consecutivos (distintos) de una progresión aritmética y al mismo tiempo son también raíces de la ecuación $f(x) \cdot g(x) = 0$?

(Olimpiada de Chequia 2000)

Solución

Se sigue de las hipótesis que cada una de las ecuaciones $f(x) = 0$, $g(x) = 0$ tiene dos raíces reales, y esas 4 raíces son distintas. Llamemos x_1 y x_2 a las raíces de $f(x) = 0$. Entonces $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, donde a es un número real, $a \neq 0$. Por hipótesis, x_1 es también raíz de $g(f(x))$, luego $g(f(x_1)) = g(0) = 0$. Por lo tanto, $g(x) = 0$ admite la raíz 0; sea b la otra raíz de esta ecuación : se tendrá $g(x) = cx(x - b), c \neq 0$.

Los números 0 y b son también raíces de $g(f(x)) = 0$:

$$\begin{aligned} g(f(0)) &= cf(0)(f(0) - b) = 0, \\ g(f(b)) &= cf(b)(f(b) - b) = 0. \end{aligned}$$

Como los números 0 y b no pueden ser raíces de f, se sigue de ello que $f(0) = f(b) = b$.

Así, sobre el eje real, los dos puntos 0 y b, así como los puntos x_1 y x_2 son simétricos con respecto a la primera coordenada del vértice de la parábola

$y = f(x)$. Los números $0, b, x_1$ y x_2 (que forman una progresión aritmética por hipótesis) pueden ser ordenados de dos maneras:

· Los números x_1 y x_2 son interiores al intervalo $[0, b]$. Entonces, (con una elección apropiada de los subíndices), $x_1 = b/3, x_2 = 2b/3$, luego

$$b = f(0) = a\left(-\frac{b}{3}\right)\left(-\frac{2b}{3}\right) = \frac{2ab^2}{9} \Longrightarrow b = \frac{9}{2a}$$

y

$$f(x) = a\left(x - \frac{3}{2a}\right)\left(x - \frac{3}{a}\right) = ax^2 - \frac{9}{2}x + \frac{9}{2a}.$$

· Los números 0 y b son interiores al intervalo $[x_1, x_2]$. Entonces (eligiendo apropiadamente los subíndices), $x_1 = -b, x_2 = 2b$, de donde

$$b = f(0) = ab\,(-2b) = -2ab^2 \Longrightarrow b = -\frac{1}{2a}$$

y

$$f(x) = a\left(x - \frac{1}{2a}\right)\left(x + \frac{1}{a}\right) = ax^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2a}.$$

PROBLEMAS DE NIVEL MEDIO Y DE OLIMPIADAS (22)

Algunos problemas propuestos en las Oposiciones al Cuerpo de Profesores de Educación Secundaria de Baleares, Cataluña y Valencia, en 2005.

Agradecemos a los Prof. José Luis Díaz-Barrero y Miguel Amengual Covas la gentileza de habernos proporcionado los enunciados y autorizado su publicación.

22.1:Valencia 2005

Sea $\alpha = \frac{2004}{2005}$. Demostrar que para cualquier entero positivo n se verifica la desigualdad

$$\frac{1}{2005}\left[\sqrt{1-(1-\alpha)^2}+\sqrt{1-(1-\alpha^2)^2}+\cdots+\sqrt{1-(1-\alpha^n)^2}\right] < \frac{\pi}{4}.$$

22.2:Barcelona 2005

Sea la familia de elipses

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

que pasan por el punto $(1,1)$. Se pide:

a) La elipse de la familia de área mínima.

b) Las elipses de la familia que generan un volumen mínimo al girar alrededor del eje de abscisas.

22.3: Barcelona 2005

Por el baricentro del triángulo equilátero ABC (y en su mismo plano) se traza una recta r. Demostrar que la suma de los cuadrados de las distancias de los tres vértices del triángulo a la recta no depende de la elección de ésta.

22.4: Baleares 2005

Sean P,Q,R,S los respectivos puntos medios de los lados AB, BC, CD y DA del cuadrilátero convexo ABCD.

Sea O el punto de intersección de PR y QS.

Si OA = OC y OB = OD, demostrar que ABCD es un paralelogramo.

22.5: Baleares 2005

Sean x_1 y x_2 las raíces de la ecuación $x^2-px+1=0$, donde p es un número natural mayor o igual que 3.

Para cada número natural $n \geq 0$ definimos $a_n = x_1^n + x_2^n$.

Demostrar que a_n es entero para cada valor de n y que a_n y a_{n+1} son primos entre sí.

PROBLEMAS PARA LOS MÁS JÓVENES (#22)

Cinco problemas del libro *Mathematical Circles (Russian experience), por Fomin, Genkin e Itenberg. AMS 1996*

Este excelente libro puede ser utilizado con provecho en Seminarios de problemas para alumnos y profesores. He aquí cinco muestras de los problemas que incluye.

22.1: Tres números primos, p, q y r, todos ellos mayores que 3, están en progresión aritmética de diferencia d.Demostrar que d es divisible por 6.

22.2: En un cierto planeta, más de la mitad de la superficie es tierra seca. Demostrar que sus habitantes pueden perforar un túnel que pase por el centro del planeta, empezando y terminando en tierra seca.

22.3: Hallar un punto interior a un cuadrilátero convexo tal que la suma de las distancias del punto a los vértices sea mínima.

22.4: Se supone que $a+d, (b-1)\,c$, y $ab-a+c$ son divisibles por el entero positivo m. Demostrar que

$$ab^n + cn + d$$

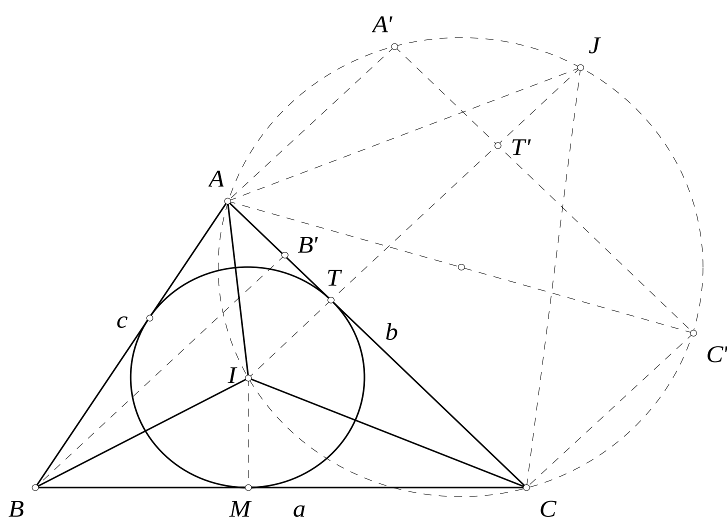
es divisible por m.

22.5: La suma de las cifras de un cuadrado perfecto, ¿puede ser igual a 1970?

Problema 101 * (propuesto por Abderrahim Ouardini, Burdeos, Francia)
Se considera un triángulo *ABC* cuyos lados están ordenados de la manera siguiente:

$$AB \leq AC \leq BC$$

Sea *I* el centro de su círculo inscrito, y *T* el punto de tangencia del círculo inscrito con el lado *AC*. El círculo circunscrito al triángulo *AIC* vuelve a cortar a la recta *IT* en *J*.
Demostrar la equivalencia de las dos proposiciones siguientes:
i) La altura desde *B* (en el triángulo *ABC*) es igual a *TJ*.
ii) *AB*, *AC* y *BC* están en progresión aritmética.
Solución:
Pongamos como es habitual *a*, *b*, *c* para los lados opuestos a *A*, *B*, y *C* respectivamente, *r* para el inradio, p para el semiperímetro y $\left[XYZ\right]$ el área del triángulo de vértices *X*, *Y*, *Z*.
Con esta notación la proposición i) puede formularse $BB' = TJ$ o bien $\left[ABC\right] = \left[ACJ\right]$ y la proposición ii) puede formularse de modo equivalente como $2p = 3b$.
Tenemos que probar $BB' = TJ \Leftrightarrow 2p = 3b$.



Primero vamos a calcular *TJ* en función de elementos del triángulo *ABC*.
Claramente se tiene $\angle ACJ = 90º - \frac{A}{2}, \angle CAJ = 90º - \frac{C}{2}$
Trazamos las perpendiculares a AC por A y C que cortan de nuevo al circuncírculo en *A*' y *C*' respectivamente determinando el rectángulo *ACA'C*' inscrito.
Entonces

$$\angle CAC' = \angle CAJ - \angle C'AJ = 90º - \frac{C}{2} - \angle C'CJ = 90º - \frac{C}{2} - \frac{A}{2} = \frac{B}{2}.$$

Como los triángulos *IBM* y *C'AC* son semejantes:

$$\frac{C'C}{AC} = \frac{r}{AM} \Leftrightarrow CC' = r\frac{AC}{p-b},$$

y de ahí que

$$TJ = TT' + T'J = CC' + r = r\frac{b}{p-b} + r = r\left(\frac{b}{p-b} + 1\right) = \frac{pr}{p-b}$$

pero $pr = \frac{1}{2} b \cdot BB'$ (ambas expresiones son el área de *ABC*) y nos queda finalmente

$$TJ = \frac{b \cdot BB'}{2(p-r)}.$$

Supongamos ahora que se cumple i), es decir $BB' = TJ$; entonces la expresión anterior queda

$$\frac{b}{2(p-b)} = 1 \Leftrightarrow 2p - 2b = b \Leftrightarrow b = \frac{2p}{3}$$

y queda probada la equivalencia de ambas proposiciones.

Nota.. Como la proposición ii) es claramente invariante por semejanza, los triángulos cuyos lados estén en progresión aritmética tienen que poder ser caracterizados en términos de sus ángulos.
En efecto,

$$\left.\begin{aligned} TJ &= AJ\cos\frac{C}{2} \\ TJ &= BB' = asenC = 2asen\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow AJ = 2asen\frac{C}{2}$$

de modo análogo $CJ = 2csen\frac{A}{2}$ y el área de *ACJ* vale

$$[ACJ] = \frac{1}{2} AJ \cdot CJ \cdot sen\left(90 - \frac{B}{2}\right) = 2acsen\frac{A}{2}sen\frac{C}{2}\cos\frac{B}{2}$$

por otra parte

$$[ABC] = \frac{1}{2}acsenB = acsen\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}$$

igualando ambas áreas obtenemos la relación buscada en función sólo de los ángulos

$$sen\frac{B}{2} = 2sen\frac{A}{2}sen\frac{C}{2}$$

Podría enunciarse como un nuevo problema:
Dado un triángulo *ABC* con $AB \le AC \le BC$ probar que las lados están en progresión aritmética si y sólo si

$$sen\frac{B}{2} = 2sen\frac{A}{2}sen\frac{C}{2}$$

Problema 102.
(propuesto por Doru Popescu Anastasiu y Miguel Amengual Covas, Mallorca, España)
Sea *ABC* un triángulo y *D* un punto sobre *BC*. Probar que la relación

$$AD^2 = AB \cdot AC \quad (1)$$

no puede verificarse si *AD* es altura o bisectriz interior.
Si *AD* es mediana, probar que existen infinitos triángulos que cumplen (1).
(*) ¿Para qué triángulos *ABC* y para qué puntos *D* pertenecientes a *BC* se verifica (1)?

Solución. (pondremos como habitual *a*, *b*, *c* para los lados opuestos a *A*, *B* y *C* respectivamente).
Si *AD* es la altura, obviamente $AD \le AB$ y $AD \le AC$ y por tanto $AD^2 \le AB \cdot AC$ excepto si fueran. válidas las dos igualdades simultáneamente y en ese caso el segundo miembro es nulo sin serlo el primero.

Si *AD* es la bisectriz interior, es sabido que $AD^2 = bc\left(1 - \left(\frac{a}{b+c}\right)^2\right)$; y siendo $a \le b + c$ resulta

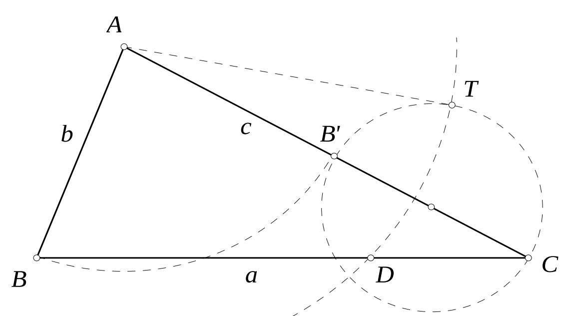
$$AD^2 \le bc\,,$$

valiendo la igualdad cuando $a = b + c$ y en ese caso $AD = 0$ mientras que $b \cdot c \ne 0$, luego nunca es válida la igualdad (1).

Si *AD* es la mediana sabemos que $AD^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$ y la igualdad (1) queda

$$\frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} = bc \Leftrightarrow \frac{a^2}{2} = (b - c)^2 \Leftrightarrow a = \sqrt{2}(b - c)$$

y esta última relación la cumple cualquier triángulos no isósceles.
Para la última cuestión vamos a construir el punto *D* con regla y compás a partir de una triángulo *ABC* dado.



Supongamos que $b < c$, entonces la circunferencia de centro *A* y radio *b* corta a *AC* en *B'*.
La tangente desde *A* a la circunferencia de diámetro *B'C* determina *T* de modo que $AT^2 = AB \cdot AC$.
Sólo queda buscar la intersección con *BC* de la circunferencia de centro *A* y radio *AT*.
Como $b < \sqrt{bc} < c$ queda garantizada la existencia de *D*.
Si $b = c$, la circunferencia de diámetro *B'C* se reduce a un punto y *T* = *C* de modo que (1) se verifica para *D* = *B* o *D* = *C* de modo trivial.
Si consideramos el lado *BC* como un segmento cerrado todos los triángulos admiten un punto *D* perteneciente a *BC* que verifica (1).
Si *BC* es un segmento abierto hay que excluir los triángulos que cumplan *b* = *c*.

Problema 103. *Propuesto por José Luis Díaz Barrero. Barcelona. España.* ***Solución de J. Álvarez Lobo.***

Sean $a_1,\ a_2, \dots a_n$ (n ≥ 2) n números reales mayores o iguales que 1. Pruébese que

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\right)\left(\prod_{k=1}^{n}(1+a_k)\right)\geq 2n^2.$$

La desigualdad se verifica para *n* = 2. En efecto, sean $x = a_1,\ y = a_2$. Definamos la función

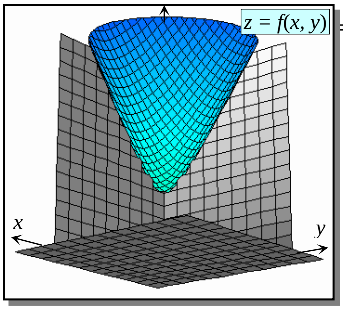
$$f(x,\ y)=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)(1+x)(1+y);\ x,\ y\in[1,\to).$$

Obviamente,

$$f(x,\ y)=\left(\sum_{k=1}^{n=2}\frac{1}{a_k}\right)\left(\prod_{k=1}^{n=2}(1+a_k)\right).$$

Veamos que $f(x,\ y)\geq 2n^2=8.$

Puesto que f es derivable en todo su dominio de definición, los únicos puntos críticos, si existen, son los puntos estacionarios (extremos locales o relativos); utilizaremos el vector gradiente de f para detectar éstos. Se tiene:



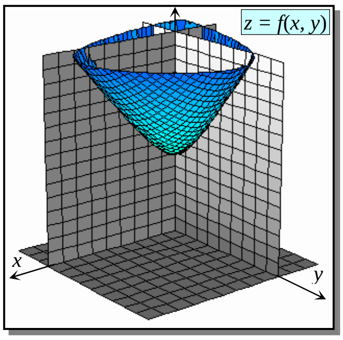
$$=\left(\frac{(x^2-y)(y+1)}{x^2y},\ \frac{(y^2-x)(x+1)}{xy^2}\right),$$

luego,

$$\nabla f(x,\ y)=(0,\ 0)\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases}$$

Además,

$$f_x(1,1)\,f_y(1,1)-f_{xy}^2(1,1)=\frac{2(y+1)}{x^3}\cdot\frac{2(x+1)}{y^3}-\left(-\frac{x^2+y^2}{x^2y^2}\right)\Bigg|_{x=1,\ y=1}=12>0,$$

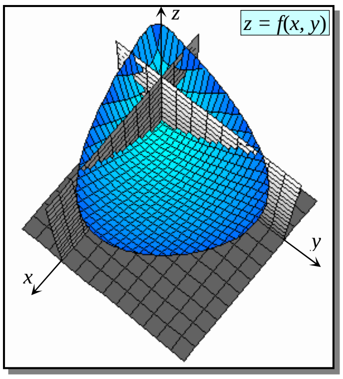


por lo que el punto (1, 1) es un mínimo local, que además es un mínimo global (absoluto) pues (1, 1) es un punto frontera, y en ésta es el único punto crítico. En efecto, la frontera de f son las trazas de la superficie $f(x, y)$ sobre los planos y = 1 y x = 1, es decir las líneas de ecuación

$$f(x,1)=\left(\frac{1}{x}+1\right)(1+x)(1+1)=2\left(x+\frac{1}{x}+2\right);\ x\in[1,\to),$$

$$f(1,\ y)=\left(1+\frac{1}{y}\right)(1+1)(1+y)=2\left(y+\frac{1}{y}+2\right);\ y\in[1,\to),$$

y se tiene:



$$f'(x,1)=2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)=0\Leftrightarrow x=1,\text{ si } x\in[1,\to),$$

$$f'(1,\ y)=2\left(1-\frac{1}{y^2}\right)=0\Leftrightarrow y=1,\text{ si } y\in[1,\to).$$

En consecuencia,

$$f(x,\ y)\geq f(1,1)=8=2n^2,\ \text{para } n=2.$$

Es decir, la desigualdad objeto de demostración se cumple para el primer valor de n para el que ha sido establecida.

Mediante **inducción completa** sobre n probaremos que la desigualdad se verifica para cualquier $n \geq 2$.

Hipótesis de inducción:

$$\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{a_k}\right)\left(\prod_{k=1}^{m}(1+a_k)\right)\geq 2m^2, \forall a_k\in \mathrm{R}: a_k\geq 1.$$

Se ha de probar, utilizando la hipótesis de inducción, que

$$\left(\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{a_k}\right)\left(\prod_{k=1}^{m+1}(1+a_k)\right)\geq 2(m+1)^2.$$

En efecto,

$$\left(\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{a_k}\right)\left(\prod_{k=1}^{m+1}(1+a_k)\right)=\left(\frac{1}{a_{m+1}}+\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{a_k}\right)\left((1+a_{m+1})\prod_{k=1}^{m}(1+a_k)\right)=$$

$$=\frac{1+a_{m+1}}{a_{m+1}}\prod_{k=1}^{m}(1+a_k)+(1+a_{m+1})\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{a_k}\right)\left(\prod_{k=1}^{m}(1+a_k)\right)\overset{①}{\geq}$$

$$\geq\prod_{k=1}^{m}(1+a_k)+2\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{a_k}\right)\left(\prod_{k=1}^{m}(1+a_k)\right)\overset{②}{\geq}$$

$$\geq\prod_{k=1}^{m}(1+a_k)+2\cdot 2m^2=2m^2+(2m)m+\prod_{k=1}^{m}(1+a_k)\overset{③}{\geq}$$

$$\geq 2m^2+4m+\prod_{k=1}^{m}(1+a_k)\overset{④}{\geq}$$

$$\geq 2m^2+4m+2=2(m^2+2m+1)=2(m+1)^2.$$

Es decir,

$$\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{a_k}\right)\left(\prod_{k=1}^{m}(1+a_k)\right)\geq 2m^2\Rightarrow\left(\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{a_k}\right)\left(\prod_{k=1}^{m+1}(1+a_k)\right)\geq 2(m+1)^2,$$

y de aquí que

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\right)\left(\prod_{k=1}^{n}(1+a_k)\right)\geq 2n^2, \forall n\in\mathrm{N}: n\geq 2, \forall a_k\in\mathrm{R}: a_k\geq 1.$$

Observaciones. En la anterior cadena de desigualdades se ha utilizado:

① $a_{m+1}\geq 1>0\Rightarrow\dfrac{1+a_{m+1}}{a_{m+1}}\geq 1, 1+a_{m+1}\geq 2.$

② $\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{a_k}\right)\left(\prod_{k=1}^{m}(1+a_k)\right)\geq 2m^2$ *(hipótesis de inducción).*

③ $m\geq 2.$

④ $a_k\geq 1\Rightarrow 1+a_k\geq 2, \forall k\in\mathrm{N}: k\geq 2.$

Generalización. La desigualdad propuesta admite la siguiente generalización (demostración análoga):

⊡ $\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\right)\left(\prod_{k=1}^{n}(\lambda+a_k)\right)\geq 2\lambda n^2, \forall\lambda, a_k\in\mathrm{R}:\lambda, a_k\geq 1, \forall n\in\mathrm{N}: n\geq 2.$

Formas equivalentes. Por simples cambios de variable en la anterior, se deducen las desigualdades:

⊡ $\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\right)\left(\prod_{k=1}^{n}(\lambda-a_k)\right)\leq -2\lambda n^2, \forall\lambda, a_k\in\mathrm{R}:\lambda\geq 1, a_k\leq -1, \forall n\in\mathrm{N}: n\geq 2.$

⊡ $\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)\left(\prod_{k=1}^{n}\left(\lambda+\frac{1}{a_k}\right)\right)\geq 2\lambda n^2, \forall\lambda, a_k\in\mathrm{R}:\lambda\geq 1, 0<a_k\leq 1, \forall n\in\mathrm{N}: n\geq 2.$

⊡ $\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)\left(\prod_{k=1}^{n}\left(\lambda-\frac{1}{a_k}\right)\right)\leq -2\lambda n^2, \forall\lambda, a_k\in\mathrm{R}:\lambda\geq 1, -1\leq a_k<0, \forall n\in\mathrm{N}: n\geq 2.$

Problema 104

(propuesto por José Luis Díaz Barrero, Barcelona, España)

Solución de Marcos Martinelli, Brasil

$$\lim_{n\to+\inf}\left(\sum_{k=1}^{n} e^{\frac{1}{n+2005k}}-n\right)=\lim_{n\to+\inf}\left[\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{+\inf}\frac{1}{(n+2005k)^{j}\ j!}-n\right]=$$

$$=\lim_{n\to+\inf}\left\{\sum_{k=1}^{n}\left[1+\sum_{j=1}^{+\inf}\frac{1}{(n+2005k)^{j}\ j!}\right]-n\right\}=\lim_{n\to+\inf}\left[\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{+\inf}\frac{1}{(n+2005k)^{j}\ j!}\right].$$

Calculemos agora o seguinte limite $\lim\limits_{n\to+\inf}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n+2005k)^{j}}$, $\forall j\in\mathbb{N}$. Para isso considere a seguinte função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $f(x)=\frac{1}{(1+2005x)^{j}}$. Podemos observar que $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(1+2005\frac{k}{n}\right)^{j}}.\frac{1}{n}\leq\int_0^1\frac{1}{(1+2005x)^{j}}dx$ e ainda notamos que $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\left(1+2005\frac{k}{n}\right)^{j}}.\frac{1}{n}-\frac{1}{\left(1+2005\frac{n}{n}\right)^{j}}.\frac{1}{n}\geq\int_0^1\frac{1}{(1+2005x)^{j}}dx$ e que, portanto:

$$\frac{1}{\left(1+2005\frac{n}{n}\right)^{j}}.\frac{1}{n}+\int_0^1\frac{1}{(1+2005x)^{j}}dx-\frac{1}{n}\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(1+2005\frac{k}{n}\right)^{j}}.\frac{1}{n}\leq\int_0^1\frac{1}{(1+2005x)^{j}}dx\to$$

$$\frac{n}{n^{j}}.\left[\frac{1}{\left(1+2005\frac{n}{n}\right)^{j}}.\frac{1}{n}+\int_0^1\frac{1}{(1+2005x)^{j}}dx-\frac{1}{n}\right]\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n+2005k)^{j}}\leq\frac{n}{n^{j}}\int_0^1\frac{1}{(1+2005x)^{j}}dx\to$$

$\lim\limits_{n\to+\inf}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n+2005k)^{j}}=\int_0^1\frac{1}{(1+2005x)^{j}}dx$ se j=1 e $\lim\limits_{n\to+\inf}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n+2005k)^{j}}=0$ se $j\geq 2$.

Logo o limite procurado vale $\int_0^1\frac{1}{(1+2005x)}dx=\frac{\ln(2006)}{2005}$.

PROBLEMAS PROPUESTOS 106-110

PROBLEMA 106 (propuesto por José Luis Díaz-Barrero, Barcelona, España)

Sean a, b, c tres números positivos. Probar que

$$\sum_{cíclica}\left(\frac{1}{a+b}\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}+\frac{c^2}{a^2}}\right) \geq \frac{3\sqrt{3}}{1+\sqrt[3]{abc}}.$$

PROBLEMA 107 * (propuesto por Jorge Enrique Espinoza Guevara, Lima, Perú, y corregido el enunciado ligeramente por el editor)

Desde un punto exterior P a una elipse se trazan dos secantes, PAB y PCD (A,B,C y D son los puntos de intersección de las secantes con la elipse. Las rectas CA y DB se cortan en Q; desde Q se trazan las tangentes a la elipse QE y QF (E,F puntos de tangencia).

Demostrar que P, E y F están alineados.

PROBLEMA 108 * (propuesto por Marcos Martinelli, Brasil)

Sean A, B y C matrices reales conmutativas de orden 2. Demostrar que se verifica la desigualdad

$$\det\left[(A+B+C)\left(A^3+B^3+C^3-3ABC\right)\right] \geq 0.$$

PROBLEMA 109 (propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, Ávila, España)

Con las notaciones habituales para el triángulo (r,inradio;R circunradio; p semiperímetro), demostrar que

$$12pr \leq 2\left(p^2+r^2+4Rr\right) \leq 3p^2.$$

PROBLEMA 110 (propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, Ávila, España)

Con las notaciones habituales para el triángulo (r,inradio;R circunradio; p semiperímetro), demostrar que

$$6\sqrt{3}r \leq 2p \leq 3\sqrt{3}R.$$

¿Cuándo se verifica la igualdad?

DIVERTIMENTOS MATEMÁTICOS 22

Algunas citas del libro *Twenty years before the balckboard,* por M.Stauben y D. Sandford (MAA 1998)

Un comentario de J.L.Kelley (autor del famoso libro de texto de Topología de los años 60) sobre su experiencia en la Universidad:

Seguí tres cursos sobre educación matemática durante mis tres primeros semestres en UCLA para preparar una credencial . Los cursos fueron bastante malos y además la calificación fué injusta : yo escribí un ensayo sobre Filosofía de la Educación y obtuve una B; mi amigo Wes Hicks, cuya escritura manuscrita es mejor que la mía, lo copió en el siguiente semestre y obtuvo una B+; y nuestro común amigo Dick Gorman lo copió a máquina el semestre siguiente y obtuvo una A.

(Fuente: J.L.Kelley, Peter Duren ed., vol. 3, *A Century of Mathematics in America,* AMS 1989, pp. 474-475)

Una respuesta de un estudiante:

Profesor: *Intentaré ayudarte a que lo comprendas*

Estudiante: *Por favor, Profesor, ¿porque no me ayuda a recordar las reglas para aprobar el examen?*

Un viejo chiste

¿Cuántos psicólogos hacen falta para cambiar una bombilla?

Uno, pero la bombilla debe realmente querer ser cambiada.

¿Cuántos matemáticos hacen falta para cambiar una bombilla?

Ninguno, lo que hará el matemático es darle la bombilla al psicólogo, reduciendo así el problema a un caso previamente resuelto.

COMENTARIO DE PÁGINAS WEB 22

La página de Adrian Oldknow
http://www.adrianoldknow.org.uk

El editor conoció al Prof. retirado Adrian Oldknow durante el verano de 2005, en el Congreso anual de la Sociedad belga de profesores de matemáticas de expresión francesa, celebrado a finales de agosto en Tournai, donde Oldknow era uno de los conferenciantes invitados. Su disertación versó sobre el programa CABRI en 3D, y su aplicación en clase. Tuvo un enorme éxito, culminado cuando dibujó en la pantalla, en cuestión de segundos, el esquema de la magnífica catedral de Tournai, que habíamos visitado el día anterior.

En su página web, lógicamente, hay muchas más cosas, y se recomienda con énfasis visitarla. Nadie quedará defraudado.

F.Bellot

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI

Número

23

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

Número 23 (Enero - febrero 2006)

ISSN – 1698-277X

Índice

Artículos, notas y lecciones de preparación de Olimpiadas

Jean-Louis Ayme :*El ortocentro del triángulo de Fuhrmann.*

Problemas para los más jóvenes

Cinco problemas de teoría de números y combinatoria

Problemas de nivel medio y de olimpiadas

Resueltos:
-Solución del problema 4.2 (REOIM nº 3), por Bruno Salgueiro Fanego
-Solución del problema 1 de la VII Olimpiada Iberoamericana y del Caribe, (REOIM nº 20), por Bruno Salgueiro Fanego.
- Solución del problema 5 de la VII Olimpiada Centroamericana y del Caribe (REOIM nº 20), por Bruno Salgueiro Fanego.
- Tres soluciones al problema 22.3 (Barcelona 2005; REOIM nº 22), por Miguel Amengual Covas.

Propuestos:
Cinco problemas de la Competición Húngaro-Israelí

Problemas resueltos:

Soluciones recibidas después de la aparición del número 22: a los problemas números 101 y 104, por Bruno Salgueiro Fanego.

Problema 105: Soluciones de Bruno Salgueiro Fanego y del proponente. Presentamos la solución de Bruno Salgueiro Fanego.

Problema 106: Nota del Editor: Un error tipográfico cometido por el editor convirtió el enunciado del problema 106 en un problema mal planteado (la desigualdad era falsa). El editor presenta sus excusas al proponente y a todos los lectores. En la sección de problemas propuestos se presenta el enunciado corregido como Problema 106 bis.

Problema 107: Recibidas soluciones de: Daniel Lasaosa Medarde (Pamplona, España); Antonio Ledesma López (Requena, España); Bruno Salgueiro Fanego (Alfoz, España); Cristóbal Sánchez-Rubio (Benicassim, España); y Toro (Las Tunas, Cuba).
Presentamos la solución de Toro y el "apunte papirofléctico" de Ledesma.

Problema 108: Recibidas soluciones de J.L. Díaz-Barrero (Barcelona, España); Daniel Lasaosa Medarde (Pamplona, España) y el proponente.
Nota del editor : Un lector ha informado al editor que el problema 108 coincide con el 2481 de la revista canadiense CRUX MATHEMETICORUM, del año 2000, que figura entre los que se pueden consultar libremente en Internet. El editor lamenta profundamente el hecho, y recuerda expresamente al proponente que no se deben enviar problemas sin mencionar su origen, para evitar problemas de copyright.

Problema 109 : Recibidas soluciones de Miguel Amengual Covas (Cala Figuera, España), José Luis Díaz Barrero (Barcelona, España), Daniel Lasaosa Medarde (Pamplona, España); Marcos Martinelli, Brasil; Cristóbal Sánchez Rubio (Benicassim, España); Bruno Salgueiro Fanego (Alfoz, España), Vicente Vicario García (Huelva, España) y el proponente.
Presentamos la solución de Cristóbal Sánchez Rubio.

Problema 110 : Recibidas soluciones de Miguel Amengual Covas (Cala Figuera, España), Floro Damián Aranda Ballesteros (Córdoba, España) José Luis Díaz Barrero (Barcelona, España), Daniel Lasaosa Medarde (Pamplona, España), Marcos Martinelli , Brasil, Bruno Salgueiro Fanego (Alfoz, España), Cristóbal Sánchez Rubio (Benicassim, España), Vicente Vicario García (Huelva, España) y el proponente.
Presentamos la solución de Miguel Amengual.

Problemas 106 bis, 111-115

Divertimentos matemáticos

Algunas citas de "Memorabilia matemática" y de "Out of the mouth of the mathematicians".

Comentario de páginas web

Una loable iniciativa de CRUX MATHEMATICORUM (versión online).

Editor: Francisco Bellot Rosado

EL ORTOCENTRO DEL TRIÁNGULO DE FUHRMANN

UNA DEMOSTRACIÓN PURAMENTE SINTÉTICA

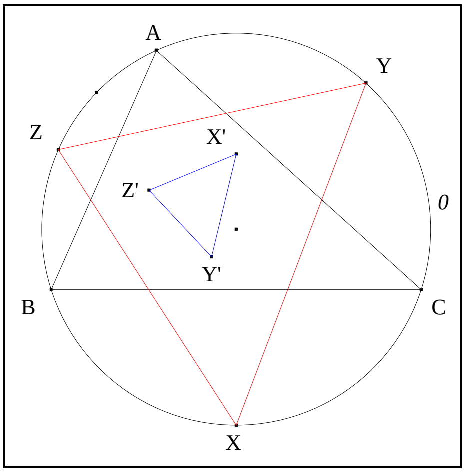
Jean-Louis AYME
Lycée Lislet Geoffroy, 97400 St Denis, Île de la Réunion, France

Resumen. Presentamos una demostración sintética del resultado de Milorad Stevanovic relativo al ortocentro del triángulo de Fuhrmann
Así como una historia de su génesis.

PRESENTACIÓN

1. El triángulo de Fuhrmann

En 1890 apareció por primera vez,, en la página 107 del tratado de Geometría titulado *Synthetische Beweise Planimetrischer Sätze* [1] escrito por el geómetra alemán Wilhelm Furhmann (1833-1904), entonces profesor en el Gymnasium de Königsberg, el célebre triángulo que hoy lleva el nombre de su autor, y que él llamaba en el texto "Das Spiegeldreieck" i.e. "el triángulo reflejado".

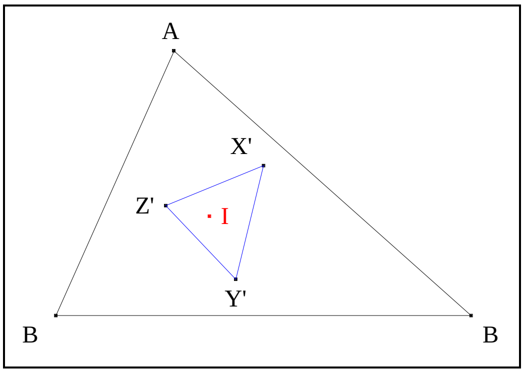


Hipótesis : ABC un triángulo,
0 la circunferencia circunscrita a ABC,
X, Y, Z los puntos medios de los arcos BC, CA, AB que no contienen respectivamente a A, B, C,
y X', Y', Z' los simétricos de X, Y, Z con respecto a (BC), (CA), (AB).

Definición : X'Y'Z' es el triángulo de Fuhrmann de ABC.

2. El resultado de Milorad Stevanovic

El 20 de septiembre de 2002, Milorad Stevanovic [2] comunicaba al grupo *Hyacinthos* [3] el resultado siguiente:



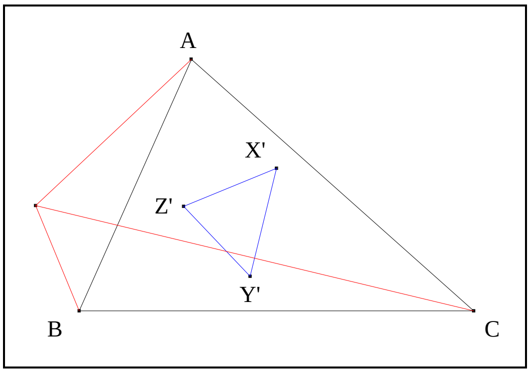
Hipótesis :		ABC	un triángulo,
		I	el incentro de ABC,
	y	X'Y'Z'	el triángulo de Fuhrmann de ABC.

Conclusión : I es el ortocentro del triángulo X'Y'Z'.

HISTORIA DE LA DEMOSTRACIÓN

1. Las tres perpendiculares de Grinberg

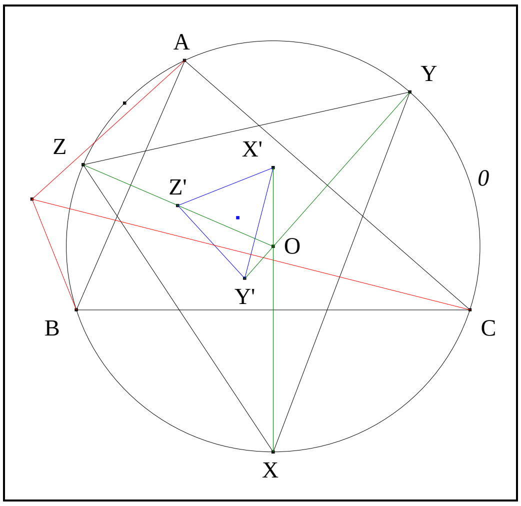
El 9 de enero de 2003, el joven geómetra alemán Darij Grinberg [4] proponía un resultado equivalente al de Stevanovic, a saber, que "los círculos de Euler de un triángulo y de su triángulo de Fuhrmann son concéntricos" y el resultado siguiente, obtenido por ortología (ver Anexo 1) :



Hipótesis :		ABC	un triángulo,
		X'Y'Z'	el triángulo de Fuhrmann de ABC,
	y	*P*a, *P*b, *P*c	las perpendiculares trazadas desde A, B, C sobre (Y'Z'), (Z'X'), (X'Y').

Conclusión : las rectas *P*a, *P*b y *P*c son concurrentes.

Esquema de la demostración :



- Llamamos *0* el círculo circunscrito a ABC,
  O el centro de *0*
  y X, Y, Z los puntos medios de los arcos BC, CA, AB que no contienen a A, B, C.

- Por construcción, (XX'), (YY'), (ZZ') son las mediatrices de los lados [BC], [CA], [AB] ;
  en consecuencia, (XX'), (YY') y (ZZ') son concurrentes en O.

- Por definición, X'Y'Z' es ortológico a ABC ;
  Como la ortología es una relación simétrica, ABC es ortológico a X'Y'Z'.

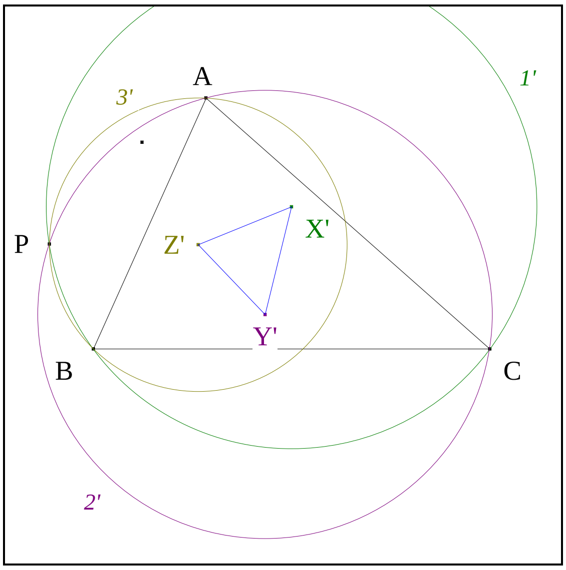
- Conclusión : las rectas *P*a, *P*b y *P*c son concurrentes.

- Llamamos P a ese punto de concurrencia.

Nota histórica : en el mismo mensaje, Darij Grinberg conjeturaba además que ese punto de concurrencia es el simétrico del incentro I con respecto al punto de Feuerbach del triángulo, que ese punto aparece como X(80) en ETC [5] y concluía de ahí diciendo "but I suppose it should be not so easy to prove that the concurrence is X(80)".
Al día siguiente, es decir, el 10 de enero de 2003, Milorad Stevanovic [6] daba una demostración métrica de su resultado. El mismo día, Stevanovic dirigía un segundo mensaje [7] en el que confirmaba la conjetura precedente de Grinberg.

3. Los tres círculos de Grinberg

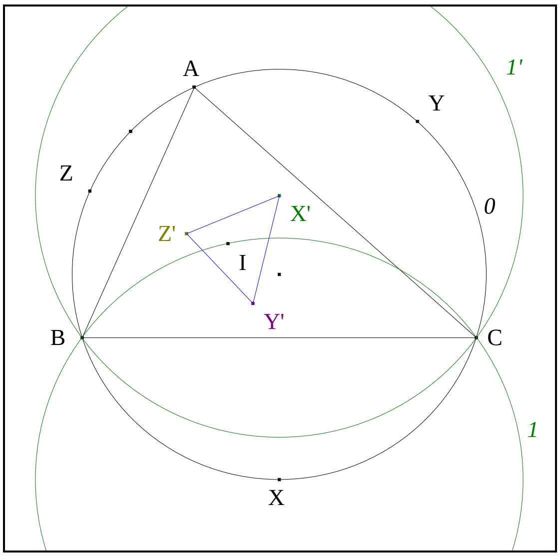
Las notaciones son las mismas que anteriormente.
El 19 de abril de 2004, Darij Grinberg proponía y demostraba la conjetura siguiente :



Hipótesis su`plementarias : *1*', *2*', *3*' los círculos de centros X', Y', Z' que pasan por B, C, A.

Conclusión : los círculos *1*', *2*' y *3*' son concurrentes en P.

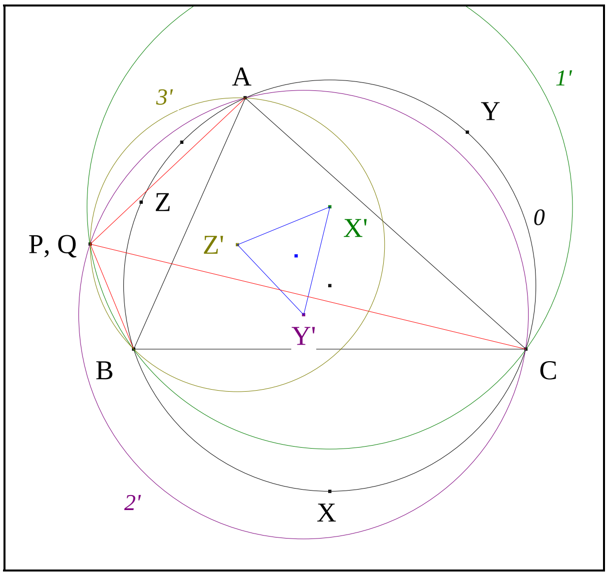
Esquema de la demostración , (Ayme) :



- Sean *1*, *2*, *3* los círculos de centros X, Y, Z que pasan por B, C, A
  e I el incentro de ABC.

- Según "Un théorème de Catalan" (ver Anexo 2), los círculos *1*, *2* y *3* pasan por I.

- Escolios : (1) *1* e *1*' son simétricos con respecto a (BC)
  (2) *2* y *2*' son simétricos con respecto a (CA)
  (3) *3* y *3*' son simétricos con respecto a (AB).



- Según el teorema de Schoute (ver Anexo 3), los círculos *1*', *2*' y *3*' son concurrentes.

- Llamamos Q a ese punto de concurrencia.

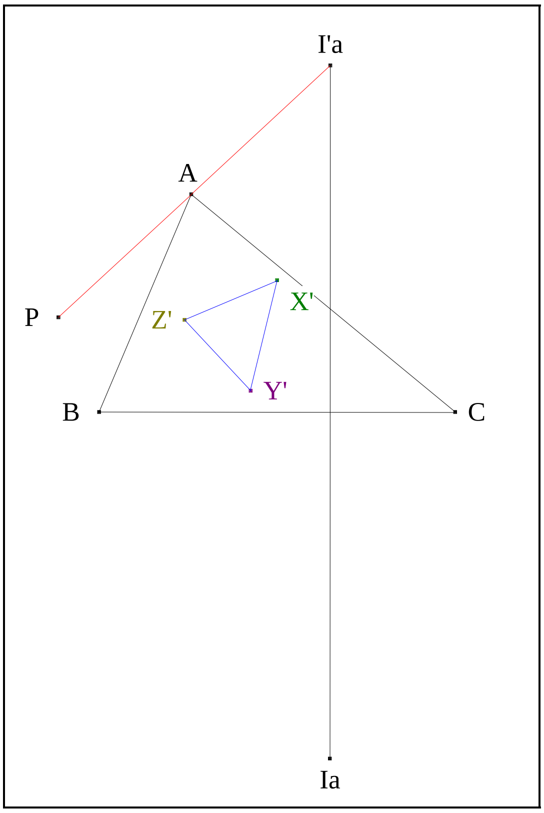
- Según el teorema de la mediatriz, (Y'Z'), (Z'X'), (X'Y') son las mediatrices de [AQ], [BQ], [CQ].
  en consecuencia, los puntos P y Q coinciden.

- Conclusión : los círculos *1*', *2*' y *3*' son concurrentes en P.

Nota histórica : la larga demostración de Darij Grinberg recurría al punto de Poncelet de un cuadrilátero para deducir la identidad entre P y Q.
El 19 de abril de 2004, Grobber [8], partiendo del resultado de Stevanovic, atraía la atención de los miembros del grupo *Hyacinthos* demostrando que "la recta (X'Y') es la mediatriz del segmento [A X(80)]". Como consecuencia de esta pertinente observación, Darij Grinberg [9] le respondía el mismo día diciendo "esta observación suya sobre mediatrices ha abierto mis ojos para ver una demostración mucho más sencilla" y daba una demostración más ligera demostrando que las tres perpendiculares concurren en el mismo punto que los tres círculos.

4. Un punto notable sobre cada perpendicular de Grinberg

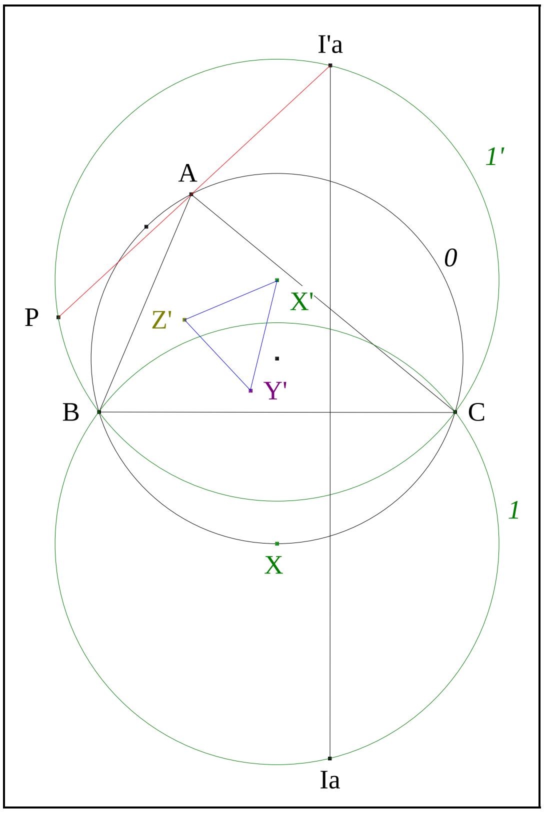
Las notaciones son las mismas que anteriormente.
Recordemos que el 5 de febrero de 2003, Darij Grinberg [10], entonces estudiante de bachillerato en Karlsruhe (Alemania) había enunciado y demostrado por cálculo baricéntrico el resultado siguiente :



Hipótesis suplementarias : Ia el A-exincentro de ABC
e I'a el simétrico de Ia con respecto a (BC).

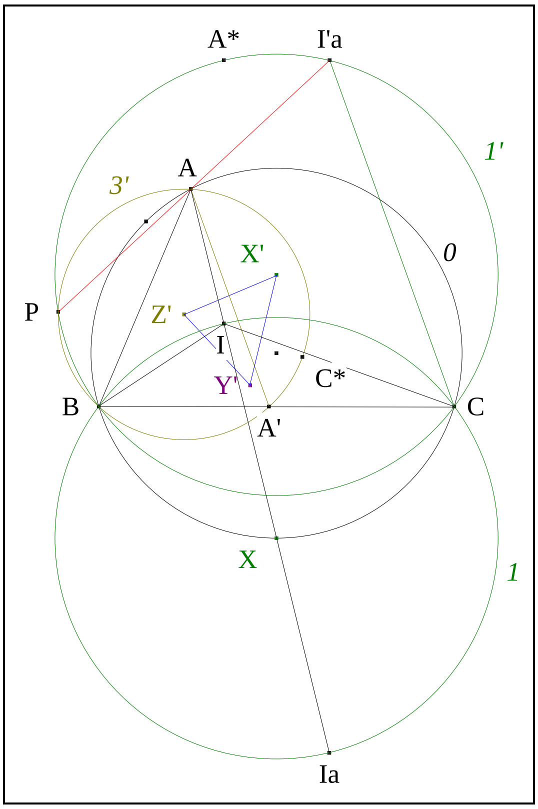
Conclusión : la recta (PA) pasa por I'a.

Esquema de la demostración (Ayme) :



- Según "Un théorème de Catalan" (ver Anexo 2), Ia está sobre sur *1*.

- Como los círculos *1* e *1*' son simétricos respecto a (BC), I'a está sobre *1*'.



- Llamamos A*, C* los ortocentros de los triángulos IBC, IAB
  y A' el segundo punto de intersección de *3*' con (BC).

- Según un resultado de Carnot (ver Anexo 4), el simétrico de A* respecto a (BC) está sobre *1* ;
  en consecuencia, A* está sobre *1*'.

- Mutatis mutandis, demostraríamos que C* está sobre *3*'.

- Según "Un théorème de Catalan" (ver Anexo 2), los puntos A, I, X e Ia están alineados.

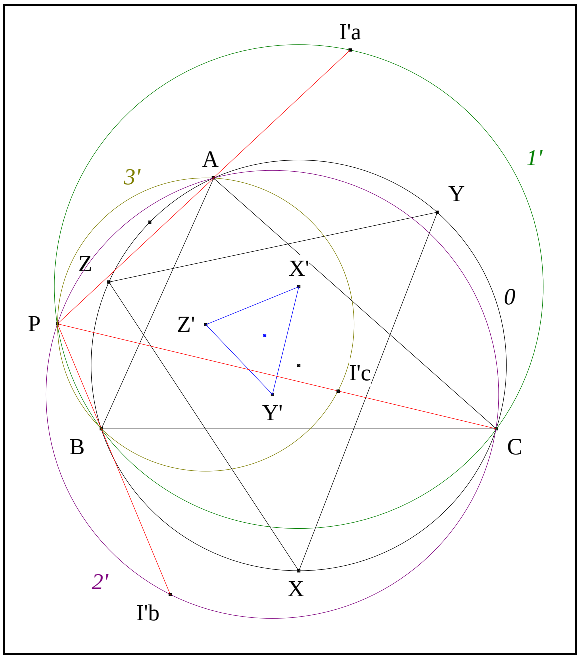
- Siendo C* el ortocentro de A*BC, I es el ortocentro del triángulo AC*B.

- Según un resultado de Carnot (ver Anexo 4), el simétrico de I con respecto a (AB) está sobre *3*'.

- Según el teorema del ángulo inscrito y congruencias de ángulos módulo Π :
  <AC*B = <AA'B ;
  <AC*B y <AIB son suplementarios;
  por simetría, <I'aCB = <BCIa ;
  según el teormea del ángulo inscrito, <BCIa = <BIIa ;
  por la transitividad de la relación de igualdad, <I'aCB = <BIIa ;
  <BIIa y <AIB son suplementarios ;
  en consecuencia, <AA'B = <I'aCB i.e. (AA') // (A"C).

- Conclusión : los círculos *3'* e *1'*, los puntos B y P, la recta (A'BC), las paralelas (AA') y (A"C), Conducen al teorema de Reim (ver Anexo 5) ;
  en consecuencia, los puntos A, P e I'a están alineados ; i.e. la recta (PA) pasa por I'a.

Escolio : los otros dos alineamientos



- Llamamos I'b, I'c a los B, C-exincentros de ABC.

- Mutatis mutandis, demostraríamos que
  (1) la recta (PB) pasa por I'b
  (2) la recta (PC) pasa por I'c.

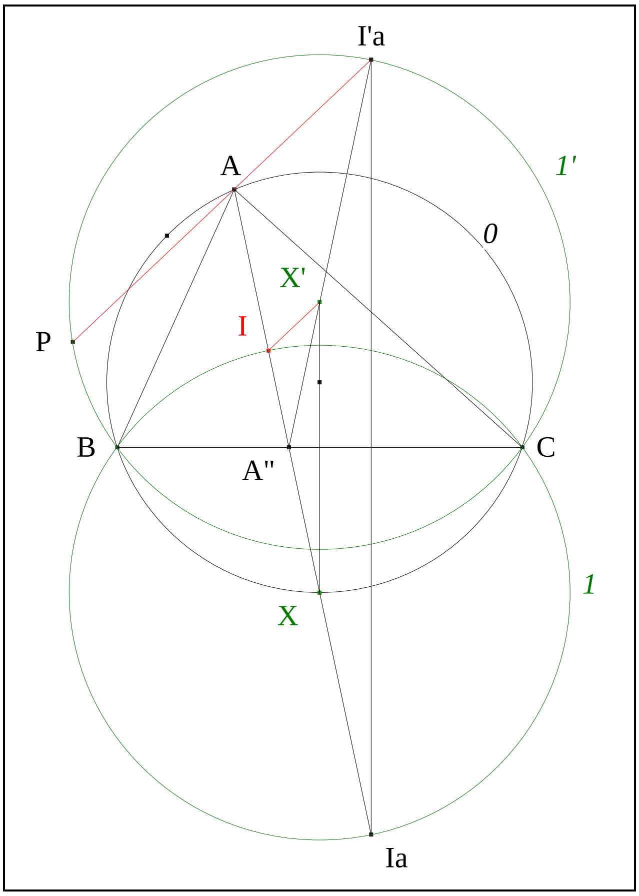
Nota histórica : en ese mismo mensaje, Darij Grinberg identificaba P con X(80) y le daba el nombre de antipunto de Gray, por analogía con el punto de Gray X(79) en ETC.

5. Dos triángulos en perspectiva y el asombroso resultado de Stevanovic [11]

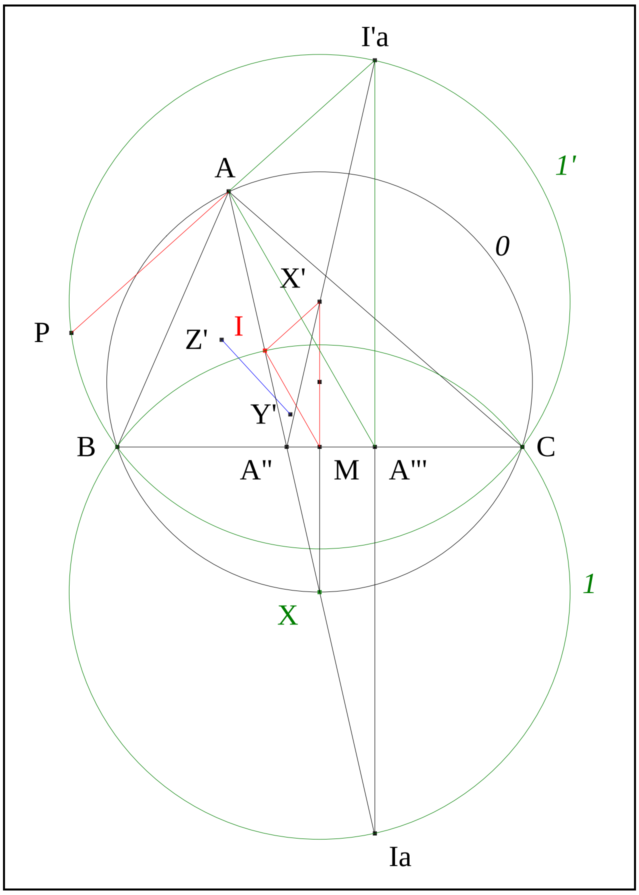
El 8 de octubre de 2005, se abría una vía : ese punto de vista iba a permitorme concluir con una demostración puramente sintética del resultado de Stevanovic.

Esquema de la demostración (Ayme) :

- Las notaciones son las mismas que anteriormente.



- Sea A" el punto de intersección de (AI) y (BC).
- Por la simetría de eje (BC), los puntos A", X' e I'a están alineados.



- Llamamos M al punto medio de [BC],
  y A''' al punto de intersección de (IaI'a) y (BC).

- Según un resultado de Poncelet (ver Anexo 6), (MI) // (A'''A) ;
  Por construcción, (MX') // (A'''I'a).

- Según el teorema « débil » de Desargues (ver Anexo 7),
  Por estar los triángulos MIX' y A'''AI'a en perspectiva de centro A', (IX') // (AI'a).

- Hemos demostrado en 3. y 4., (PAI'a) ⊥ (Y'Z') ;
  en consecuencia, (IX') ⊥ (Y'Z').

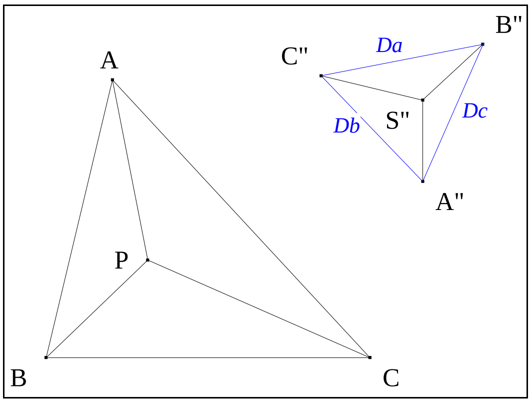
- Mutatis mutandis, demostraríamos que (IY') ⊥ (Z'X')
  (IZ') ⊥ (X'Y').

- Conclusión : I es el ortocentro del triángulo X'Y'Z'.

ANEXOS

Las notaciones son las mismas que anteriormente.

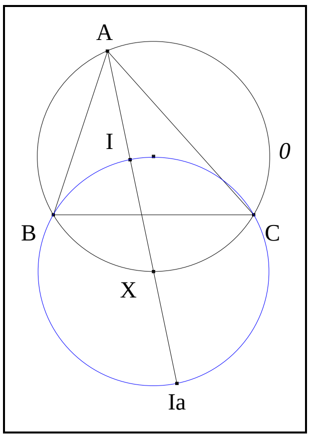
1. Triángulos ortológicos [12]



Hipótesis :	ABC	un triángulo,
	P	un punto,
	*D*a	una perpendicular a (PA),
	*D*b	una perpendicular a (PB),
	*D*c	una perpendicular a (PC),
	A", B", C"	los puntos de intersección de *D*b y *D*c, de *D*c y *D*a, de *D*a y *D*b,
	*D*a"	la perpendicular a (BC) que pasa por A",
	*D*b"	la perpendicular a (CA) que pasa por B"
y	S"	el punto de intersección de *D*a" y *D*b".

Conclusión : las rectas (C"S") y (AB) son perpendiculares.

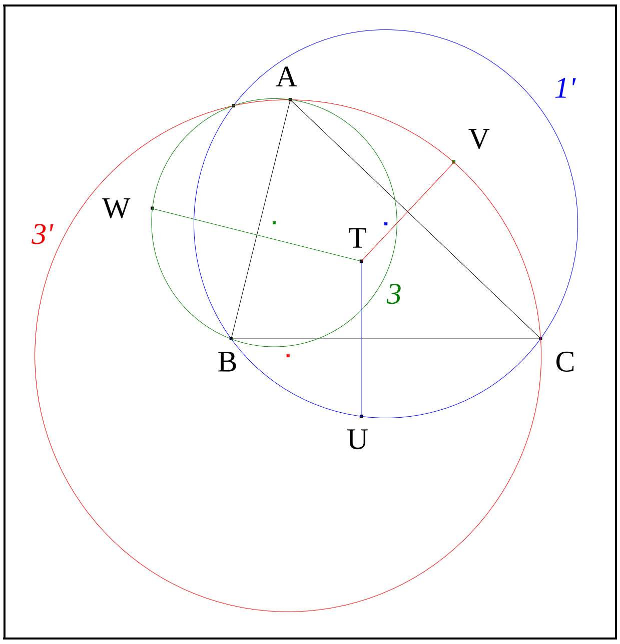
2. Un teorema de Catalan [13]



Hipótesis :	ABC	un triángulo,
	0	el círculo circunscrito a ABC,
	I	le incentro de ABC,
	X	el punto de intersección de (IA) con *0*,
	Ia	el A-exincentro de ABC
e	*1*	el círculo de diámetro [IIa].

Conclusión : *1* pasa por los vértices B y C, y tiene como centro X.

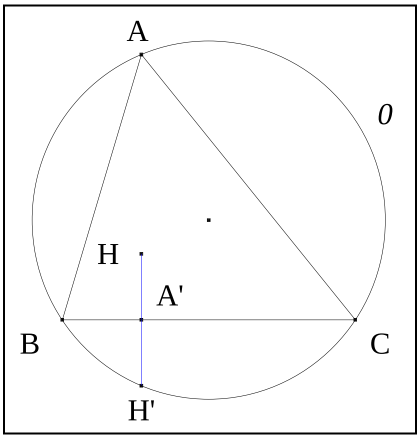
3. El teorema de Schoute [14]



Hypótesis :		ABC	un triángulo,
		T	un punto,
		U, V, W	los simétricos de T con respecto a (BC), (CA), (AB),
	y	*1*', *2*', *3*'	los círculos circunscritos a los triángulos UBC, VCA, WAB.

Conclusión : los círculos *1*', *2*' y *3*' son concurrentes.

4. Un resultado de Carnot [15]

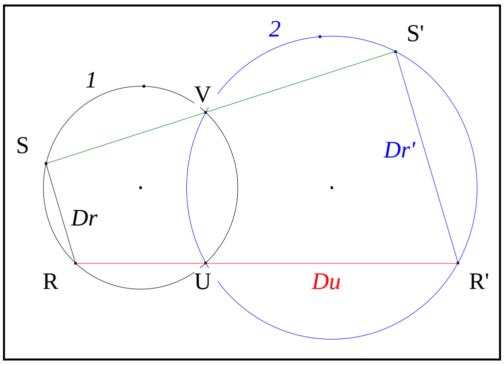


Hypótesis :		ABC	un triángulo acutángulo,
		H	su ortocentro,
		A'	el pie de la altura desde A,
		0	el círculo circunscrito a ABC
	y	H'	la intersección de la altura desde A con *0*.

Conclusión : A' es el punto medio de [HH'].

5. El teorema de Reim

A principios del siglo XX , el conocido como F.G.M.(Frère Gabriel-Marie) presenta este teorema [16] en su libro *Exercices de Géométrie*, del que presentamos un recíproco :

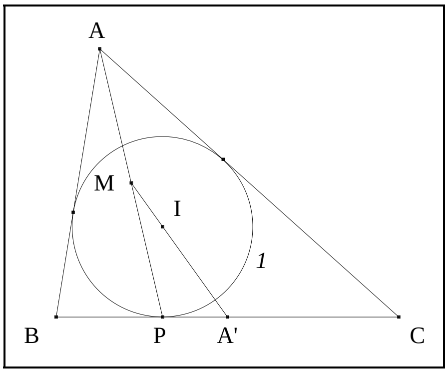


Hipótesis :	*1*, *2*	dos círculos secantes,
	U, V	sus puntos de intersección,
	*D*u	una recta que pasa por U,
	R, R'	los segundos puntos de intersección de *D*u con *1*, *2*,
	*D*r, *D*r'	dos paralelas que pasan por R, R'
y	S, S'	los segundos puntos de intersección de *D*r con *1*, y de *D*r' con *2*.

Conclusión : los puntos S, V y S' están alineados.

Escolio : si los puntos S y V coinciden, entonces la recta (SVS') es tangente a 1 en V.

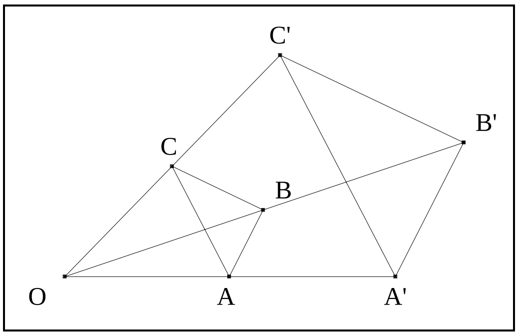
6. Un resultado de Poncelet [17]



Hipótesis :	ABC	un triángulo,
	1	el círculo inscrito en ABC,
	I	el centro de *1*,
	P	el punto de tangencia de *1* con (BC),
	A'	el punto medio de [BC]
y	M	el punto de intersección de (A'I) y (AP).

Conclusión : M es el punto medio de [AP].

7. El teorema « débil » de Desargues



Hipótesis : ABC un triángulo,
y A'B'C' un triángulo tal que (1) (AA'), (BB') y (CC') sean concurrentes en O
(2) (AB) sea paralela a (A'B')
(3) (BC) sea paralala a (B'C')

Conclusión : (AC) es paralela a (A'C').

Comentario : los siete resultados citados en el Anexo pueden ser todos demostrados sintéticamente.

REFERENCIAS

[1] Fuhrmann W., *Synthetische Beweise Planimetrischer Sätze*, Berlin (1890).
[2] Stevanovic M., Orthocenter of Fuhrmann triangle, Message *Hyacinthos* # 5897 du 20/09/2002.
[3] http:/groups.yahoo.com/group/Hyacinthos.
[4] Grinberg D., Fuhrmann triangle, Message *Hyacinthos* # 6301du 09/01/2003.
[5] *Encyclopedia of Triangle Centers*; http://www2.evansville.edu/ck6/encyclopedia/
[6] Stevanovic M., Fuhrmann triangle, Message *Hyacinthos* # 6309 du 10/01/2003.
[7] Stevanovic M., Fuhrmann triangle, Message *Hyacinthos* # 6316 du 10/01/2003.
[8] Grobber, Fuhrmann triangle, Message *Hyacinthos* # 9724 du 19/04/2004.
[9] Grinberg D., Fuhrmann triangle, Message *Hyacinthos* # 9725 du 19/04/2004.
[10] Grinberg D., Gray Point X(79) and X(80), Message *Hyacinthos* # 6491du 05/02/2003.
[11] Stevanovic M., Fuhrmann triangle, Message *Hyacinthos* # 5897 du 20/08/2002.
[12] Steiner J., Problème 54, *Journal* de Crelle vol. 2, 3.
[13] Catalan E, Théorème 20, *Théorèmes et problèmes de Géométrie Élémentaire*, Dunod, Paris (1879) 44.
[14] Schoute P. H. (1846-1913), *Journal de Mathématiques Spéciales* n° 93, p. 57.
[15] Carnot, n° 142, De la corrélation des figures géométriques, (1801) 101.
[16] F. G.-M., Théorème 124, *Exercices de Géométrie*, sixième édition (1920), Rééditions Jacques Gabay, Paris (1991) 283.
[17] Poncelet J. V., *Annales* de Gergonne 12.

Agradecimiento. Agradezco profundamente al Profesor Francisco Bellot Rosado la revisión y traducción de este artículo.

Jean-Louis Ayme jeanlouisayme@yahoo.fr

Problemas para los más jóvenes (23)

Cinco problemas de teoría de números y combinatoria

23.1: Sean los números enteros $1 \leq q \leq p$. Demostrar que el número

$$a = \left(p + \sqrt{p^2 + q}\right)^2$$

es irracional y su parte fraccionaria $\{a\} = a - \lfloor a \rfloor$ es mayor que 0,75.

23.2:Demostrar que para $n \geq 2$ se verifica

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor = \frac{n\,(n-1)\,(4n+1)}{6}.$$

23.3: Se considera el conjunto $M = \{1, 2, 3, \cdots, 1000000\}$ y el subconjunto suyo A formado por los números que pueden escribirse en la forma

$$m^2 + k^3, \text{con } m, n \text{ naturales.}$$

¿Qué conjunto tiene más elementos, A o su complementario respecto de M?

23.4: En el interior de un cuadrado de lado 1 hay 61 puntos. Demostrar que hay dos de esos puntos cuya distancia es menor o igual que $1/5$.

23.5: Se consideran $2n$ puntos en el plano. Demostrar que existe una recta con la propiedad siguiente:

"En cada uno de los semiplanos determinados por esa recta hay n de esos puntos".

Problemas de Nivel Medio y de Olimpiadas (Revista Escolar de la OIM, nº 3):

4.2. Los vértices de un cubo en el sistema tridimensional cartesiano de origen O son: $A(1,1,1)$, $A'(-1,-1,-1)$, $B(-1,1,1)$, $B'(1,-1,-1)$, $C(-1,-1,1)$, $C'(1,1,-1)$, $D(1,-1,1)$, $D'(-1,1,-1)$.
El punto O es el centro de la esfera circunscrita al cubo. El punto T no pertencece a esta esfera y $d = OT$. Denotamos $\alpha = \angle ATA'$, $\beta = \angle BTB'$, $\gamma = \angle CTC'$, $\delta = \angle DTD'$.
Probar que $\tan^2\alpha + \tan^2\beta + \tan^2\gamma + \tan^2\delta = \dfrac{32d^2}{\left(d^2-3\right)^2}$.

Solución:

Si $T(x,y,z)$, utilizando el teorema del coseno en $AA'T$ resulta, al ser $A' = S_O(A)$ y $OA = \sqrt{3}$:
$AA'^2 = TA^2 + TA'^2 - 2\cdot TA\cdot TA'\cdot\cos\alpha$, es decir,

$$12=(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2+(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2-2\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2}\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2}\cos\alpha$$

$$\Leftrightarrow\ 12 = 2d^2+6-2\sqrt{d^2-2(x+y+z)+3}\sqrt{d^2+2(x+y+z)+3}\cos\alpha$$

$$\Leftrightarrow\ 12 = 2d^2+6-2\sqrt{\left(d^2+3\right)^2-\left[2(x+y+z)\right]^2}\cos\alpha$$

$$\Rightarrow\ \cos^2\alpha = \frac{\left(d^2-3\right)^2}{\left(d^2+3\right)^2-4(x+y+z)^2}$$

$$\Rightarrow\ \tan^2\alpha = \frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{12d^2-4(x+y+z)^2}{\left(d^2-3\right)^2} \overset{(*)}{=} \frac{8d^2-8(xy+yz+zx)}{\left(d^2-3\right)^2}$$

(*) al ser $(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx) = d^2+2(xy+yz+zx)$

Análogamente se obtiene que

$$\tan^2\beta = \frac{8d^2-8(-xy+yz-zx)}{\left(d^2-3\right)^2},\ \tan^2\gamma = \frac{8d^2-8(xy-yz-zx)}{\left(d^2-3\right)^2},\ \tan^2\delta = \frac{8d^2-8(-xy-yz+zx)}{\left(d^2-3\right)^2},$$

igualdades que, sumadas, dan el resultado pedido.

Problema 1 de la VII Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe (nº 20 de la Revista Escolar de la OIM):

De los números positivos que pueden ser expresados como suma de 2005 enteros consecutivos, no necesariamente positivos, ¿cuál ocupa la posición 2005?

Solución:

Cualquier sucesión de 2005 enteros consecutivos es de la forma:

$$n-1002,\ n-1001,\ \ldots,\ n-1,\ n,\ n+1,\ \ldots,\ n+1001,\ n+1002,$$

denotando por n al entero que ocupe la posición central.
La suma de esos 2005 enteros consecutivos es $2005n$.
Por tanto, el conjunto de números expresables como suma de 2005 enteros consecutivos resulta ser $\{2005n,\ n\ \ entero\}$, con lo cual la lista ordenada de números positivos que pueden ser expresados como suma de 2005 enteros consecutivos es la de los múltiplos positivos de 2005.
Así, el número buscado es el que ocupa la posición 2005 en la misma, o sea, $2005^2 = 4020025$.

Problema 5 de la VII Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe (nº 20 de la Revista Escolar de la OIM):

En un triángulo acutángulo ABC, sean H su ortocentro y M el punto medio del lado AC. Por M se traza una recta L paralela a la bisectriz del ángulo AHC. Demuestre que la recta L divide al triángulo ABC en dos partes que tienen el mismo perímetro.

Solución:

Como ABC es acutángulo, H es interior a ABC; además, por ser $AH \perp BC$ y π la suma de los ángulos interiores de AH_aC, resulta que $H_aAC = \frac{\pi}{2} - C$ y análogamente $ACH = \frac{\pi}{2} - A$.
Y, al ser π la suma de los ángulos interiores de AHC, se tiene que $CHA = A + C$, o bien, $CHA = \pi - B$, de donde el ángulo formado por la bisectriz del ángulo AHC y la altura CH, que coincide por el formado por L y CH, es $\frac{\pi - B}{2}$.
Además, L puede cortar al segmento BC o al segmento AB.

<u>Caso 1</u>: L corta al segmento BC ($c < a$):

Si L corta al segmento BC en N y a CH en D, el ángulo $NDC = \pi - \frac{\pi - B}{2}$, con lo cual en NCD se conocen dos ángulos, siendo por lo tanto el tercero $CND = \frac{B}{2}$. Esto significa que el formado por L y BC coincide con el formado por la bisectriz interior, BB_a, de B y el lado BC, teniendo por tanto NCM y BCB_a el mismo ángulo en los vértices N y B. Pero el ángulo en el vértice C es común, con lo cual NCM y BCB_a poseen los tres ángulos respectivamente iguales, siendo por tanto semejantes.
Entonces sus lados son respectivamente proporcionales, con lo cual $\frac{NC}{BC} = \frac{CM}{CB_a}$, o sea, $NC = \frac{b/2}{CB_a} a$. Aplicando el teorema de los senos en BCB_a, resulta que $\frac{\sin\left(A + \frac{B}{2}\right)}{\sin \frac{B}{2}} = \frac{a}{CB_a}$, de donde $NC = \frac{b}{2} \frac{a}{CB_a} = \frac{b}{2} \frac{\sin\left(A + \frac{B}{2}\right)}{\sin \frac{B}{2}}$. La igualdad a demostrar es, entonces:

$$AB + BN + NM + MA = MN + NC + CM \Leftrightarrow AB + BN + MA = NC + CM \Leftrightarrow AB + BN = NC$$

$$\Leftrightarrow AB + BC = 2NC \Leftrightarrow \frac{c+a}{2} = \frac{b}{2} \frac{\sin\left(A + \frac{B}{2}\right)}{\sin \frac{B}{2}} \Leftrightarrow \frac{c+a}{b} = \frac{\sin\left(A + \frac{B}{2}\right)}{\sin \frac{B}{2}}.$$

La circunferencia de centro B y radio BA cortará a la prolongación de BC, en el sentido de C hacia B, en un punto X y al lado BC en un punto Y, siendo $XC = XB + BC = c + a$.

Por ser YXA inscrito en $C(B,BA)$, se tiene que $CXA = YXA = \frac{YBA}{2} = \frac{B}{2}$ y, al ser π la suma de los ángulos interiores de XCA, resulta que $XAC = \pi - \left(\frac{B}{2} + C\right) = A + \frac{B}{2}$. Aplicando entonces el teorema de los senos en XCA, será $\frac{XC}{CA} = \frac{\sin XAC}{\sin CXA}$, como se quería probar.

Caso 2: L corta al segmento AB ($a < c$):

La demostración es análoga, cambiando la nomenclatura:
Si L corta al segmento AB en N y a CH en D, ANM tiene los ángulos respectivamente iguales a los de ABB_b, de ahí la semejanza de ambos, con lo cual $\frac{AN}{AB} = \frac{MA}{B_b A}$, o sea, $AN = \frac{b/2}{B_b A} c$. Aplicando el teorema de los senos en $B_b AB$, resulta que , de donde $AN = \frac{b}{2} \frac{\sin\left[\pi - \left(A + \frac{B}{2}\right)\right]}{\sin \frac{B}{2}}$. La igualdad a demostrar es, entonces:

$$AB + NM + MA = NB + BC + CM + MN \Leftrightarrow AN = c - AN + a \Leftrightarrow \frac{c+a}{b} = \frac{\sin\left(A + \frac{B}{2}\right)}{\sin \frac{B}{2}}.$$

La circunferencia de centro B y radio BC cortará a la prolongación de AB, en el sentido de A hacia B, en un punto X y al lado AB en un punto Y, siendo $AX = AB + BX = c + a$.
Por ser CXY inscrito en $C(B,BC)$, se tiene que $CXA = CXY = \frac{CBY}{2} = \frac{B}{2}$ y, al ser π la suma de los ángulos interiores de XCA, resulta que $ACX = \pi - \left(A + \frac{B}{2}\right)$.Aplicando entonces el teorema de los senos en AXC, será $\frac{AX}{AC} = \frac{\sin ACX}{\sin CXA}$, como se quería probar.

Caso 3: L es la altura desde B ($a = c$):

En este caso, L coincide,por ser $AB = BC$, con la bisectriz de AHC, con lo cual de $AB = CB$ y $AM = MC$ se deduce que $AB + BM + MA = BC + CM + MB$, como se quería probar.

Nota: El problema consistía en probar la igualdad $(c+a)/b = \sin(A + B/2)/\sin(B/2)$, que forma parte de un grupo de fórmulas llamadas “analogías de Mollweide”.

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

Problema 22.3 (Barcelona 2005)

Por el baricentro del triángulo equilátero ABC (y en su mismo plano) se traza una recta r. Demostrar que la suma de los cuadrados de las distancias de los tres vértices del triángulo a la recta r no depende de la elección de ésta.

Tres soluciones de Miguel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca, España.

1. Métrica

Sea a la longitud del lado del triángulo equilátero ABC y G su baricentro.

Sea r una línea recta situada en el plano de ΔABC que pasa por G y sean AB y AC los lados de ΔABC que son cortados por r.

Sea M el punto medio del lado BC y A', B', C', M' los respectivos pies de las perpendiculares bajadas desde A, B, C, M a la recta r.

Es sabido que

$$\overline{AA'} = \overline{BB'} + \overline{CC'} \qquad (1)$$

Obsérvese (Thales) que M' es el punto medio del segmento $B'C'$ y que $GA' : GM' = AG : GM = 2$, de donde $GA' = 2 \cdot GM'$.

Se sigue que

$$GB' - GM' = B'M' = M'C' = M'G + GC' \ ,$$
$$2 \cdot GM' = GB' - GC'$$

y

$$GA' = GB' - GC' \qquad (2)$$

El teorema de Pitágoras aplicado a los triángulos AGA', BGB' y CGC', habida cuenta que $GA = GB = GC = \frac{a}{\sqrt{3}}$, da inmediatamente

$$AA' = \sqrt{\frac{a^2}{3} - \overline{GA'}^2} \ , \quad BB' = \sqrt{\frac{a^2}{3} - \overline{GB'}^2} \quad \text{y} \quad CC' = \sqrt{\frac{a^2}{3} - \overline{GC'}^2} \quad .$$

Sustituímos en (1) y, habida cuenta de (2), obtenemos

$$\sqrt{\frac{a^2}{3} - (GB' - GC')^2} = \sqrt{\frac{a^2}{3} - GB'^2} + \sqrt{\frac{a^2}{3} - GC'^2}$$

que, después de elevar al cuadrado dos veces y simplificar, se reduce a

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

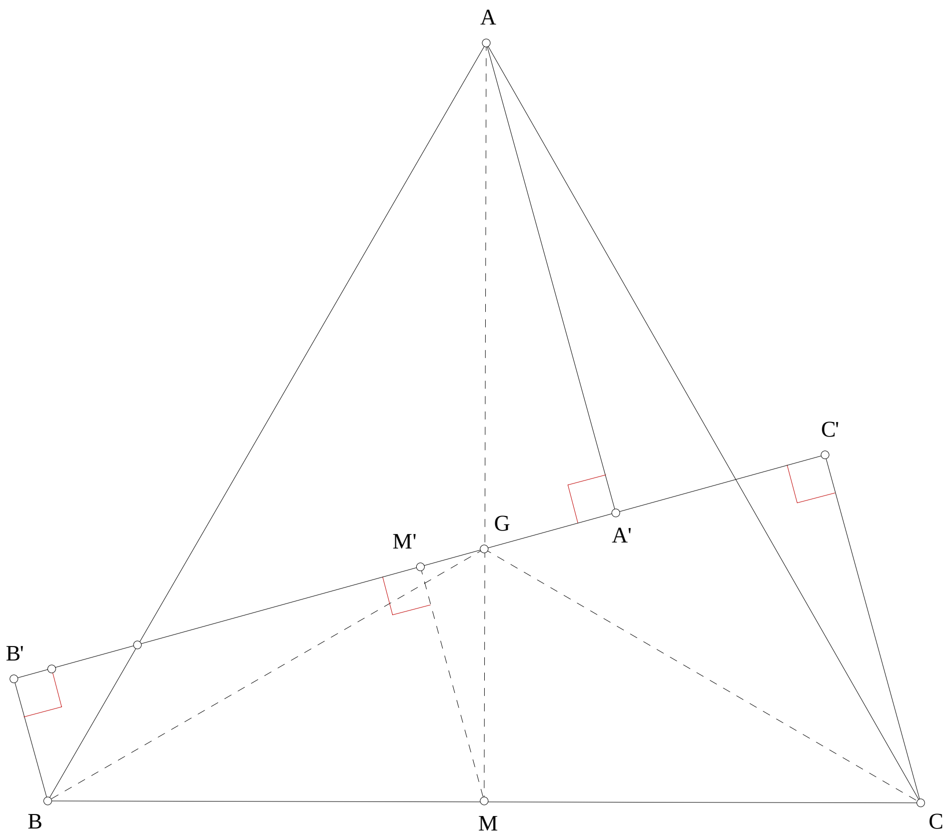
Edita:

OEI

$$GB'^2 + GC'^2 - GB' \cdot GC' = \frac{a^2}{4} \qquad (3)$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\overline{AA'}^2 + \overline{BB'}^2 + \overline{CC'}^2 &= \left(GA^2 - GA'^2\right) + \left(GB^2 - GB'^2\right) + \left(GC^2 - GC'^2\right) \\
&= \left(\frac{a^2}{3} - GA'^2\right) + \left(\frac{a^2}{3} - GB'^2\right) + \left(\frac{a^2}{3} - GC'^2\right) \\
&= a^2 - \left(GA'^2 + GB'^2 + GC'^2\right) \\
&= a^2 - \left(\left(GB' - GC'\right)^2 + GB'^2 + GC'^2\right) \\
&= a^2 - 2\left(GB'^2 + GC'^2 - GB' \cdot GC'\right) \\
&= a^2 - 2 \cdot \frac{a^2}{4} \\
&= \frac{a^2}{2}
\end{aligned}$$



2. Trigonométrica

Sea $\alpha = \angle BGB'$ y $\beta = \angle CGC'$.
Entonces

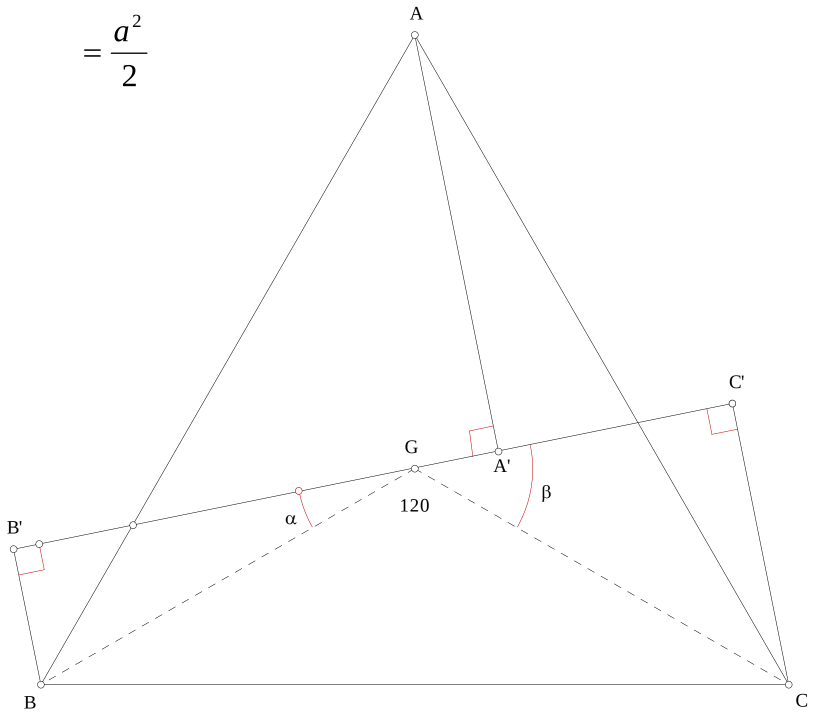
$$AA' = BB' + CC' = GB \cdot \sin\alpha + GC \cdot \sin\beta = \frac{a}{\sqrt{3}}(\sin\alpha + \sin\beta)$$

y, siendo $\angle BGC = 120^{\circ}$, tenemos

$$\alpha + \beta = 60^{\circ},$$

con lo que

$$\begin{aligned}
\overline{AA'}^2 + \overline{BB'}^2 + \overline{CC'}^2 &= \frac{a^2}{3}\left[(\sin\alpha + \sin\beta)^2 + \sin^2\alpha + \sin^2\beta\right] \\
&= \frac{a^2}{3}\left(2(\sin\alpha + \sin\beta)^2 - 2\sin\alpha\sin\beta\right) \\
&= \frac{a^2}{3}\left(2\left(2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2 - 2\sin\alpha\sin\beta\right) \\
&= \frac{a^2}{3}\left(2\left(2\sin 30^{\circ}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2 - 2\sin\alpha\sin\beta\right) \\
&= \frac{a^2}{3}\left(2\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2} - 2\sin\alpha\sin\beta\right) \\
&= \frac{a^2}{3}\left(1 + \cos(\alpha-\beta) - 2\sin\alpha\sin\beta\right) \\
&= \frac{a^2}{3}\left(1 + \cos(\alpha+\beta)\right) \\
&= \frac{a^2}{3}\left(1 + \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{a^2}{2}
\end{aligned}$$



3. Analítica

Si colocamos el origen en el baricentro de ΔABC y tomamos la mediatriz del lado BC como eje de ordenadas, las coordenadas de los vértices del triángulo resultan

$$A\left(0,\frac{a\sqrt{3}}{3}\right),\quad B\left(\frac{-a}{2},\frac{-a\sqrt{3}}{6}\right)\quad \text{y}\quad C\left(\frac{a}{2},\frac{-a\sqrt{3}}{6}\right).$$

Una recta por el baricentro es una recta que pasa por el origen y su ecuación será $y = mx$.

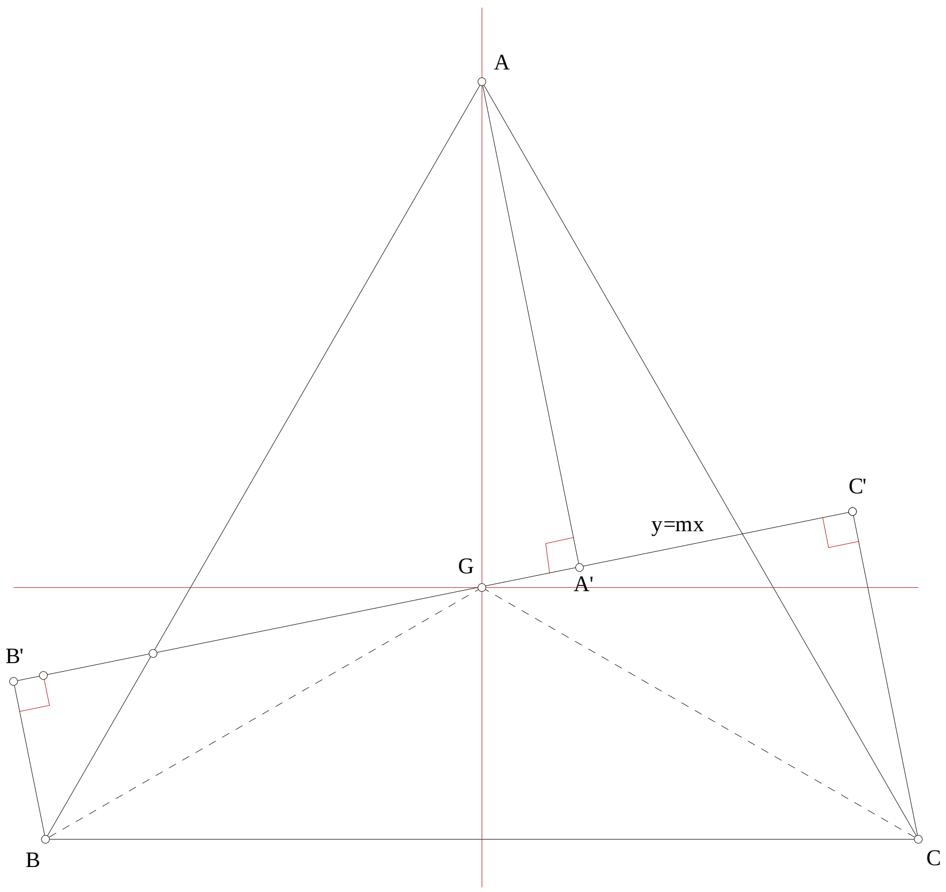
Entonces,

$$\overline{AA'}=\frac{\left|-\frac{a\sqrt{3}}{3}\right|}{\sqrt{m^2+1}},\quad \overline{BB'}=\frac{\left|\frac{-ma}{2}+\frac{a\sqrt{3}}{6}\right|}{\sqrt{m^2+1}},\quad \overline{CC'}=\frac{\left|\frac{ma}{2}+\frac{a\sqrt{3}}{6}\right|}{\sqrt{m^2+1}}$$

y

$$\overline{AA'}^2+\overline{BB'}^2+\overline{CC'}^2=\frac{\left(\frac{-a\sqrt{3}}{3}\right)^2+\left(\frac{-ma}{2}+\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2+\left(\frac{ma}{2}+\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2}{m^2+1}$$

$$=\frac{a^2}{2}$$



Problemas de nivel medio y de Olimpiadas (23)
Cinco problemas de la Competición Húngaro-Israelí

23.1(1993). Sobre una semicircunferencia de radio 1 se toman, en este orden, los puntos A, B, C, D, E. Probar que

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DE^2 + AB \cdot BC \cdot CD + BC \cdot CD \cdot DE \leq 4.$$

23.2 (1994). Tres círculos iguales que pasan por el punto P se cortan mutuamente además en los puntos A,B y C. Los tres círculos están contenidos en un triángulo A'B'C' cuyos lados son tangentes a dos de los círculos. Probar que el área del triángulo A'B'C' es al menos 9 veces el área de ABC.

23.3 (1995). Se consideran los polinomios $f(x) = ax^2+bx+c$ con coeficientes reales y que verifican $|f(x)| \leq 1$ para $0 \leq x \leq 1$. Hallar el máximo valor de $|a| + |b| + |c|$.

23.4 (1997). Sea O el circuncentro del triángulo acutángulo ABC.Las rectas AO,BO,CO intersecan a los lados opuestos del triángulo en A_1, B_1, C_1 respectivamente. Supongamos que el radio del círculo circunscrito a ABC es $2t$, donde t es un número primo, y que OA_1, OB_1 y OC_1 tienen longitudes enteras. Hallar los lados del triángulo ABC.

23.5 (1999). Si c es un entero positivo, se define la sucesión (a_n) mediante

$$a_1 = c; \quad a_{n+1} = ca_n + \sqrt{(c^2-1)(a_n^2-1)} \quad \text{para } n = 1, 2, \cdots$$

Demostrar que todos los a_n son enteros positivos.

Problema 105.
(Propuesto por Jesús Álvarez Lobo, Oviedo, España).

Lin y Lan son dos campesinos, hermanos gemelos, que comparten al 50% un prado delimitado por los restos de una antigua construcción de forma circular.
Lin posee una vaca, "Linda", y Lan un burro, "Lanzado". Obviamente, Linda come más que Lanzado, por lo que deciden lo siguiente: primero atará Lan su asno en un punto cualquiera del cercado circular, con una cuerda cuya longitud le permita comer exactamente la mitad de la hierba del prado; luego, Lin podrá dejar a Linda en total libertad dentro del círculo para que se deleite con el pasto restante.
La estrategia para el reparto equitativo del pasto es sencilla, pero … ¿qué longitud debe tener la cuerda que ate a Lanzado a la circunferencia?

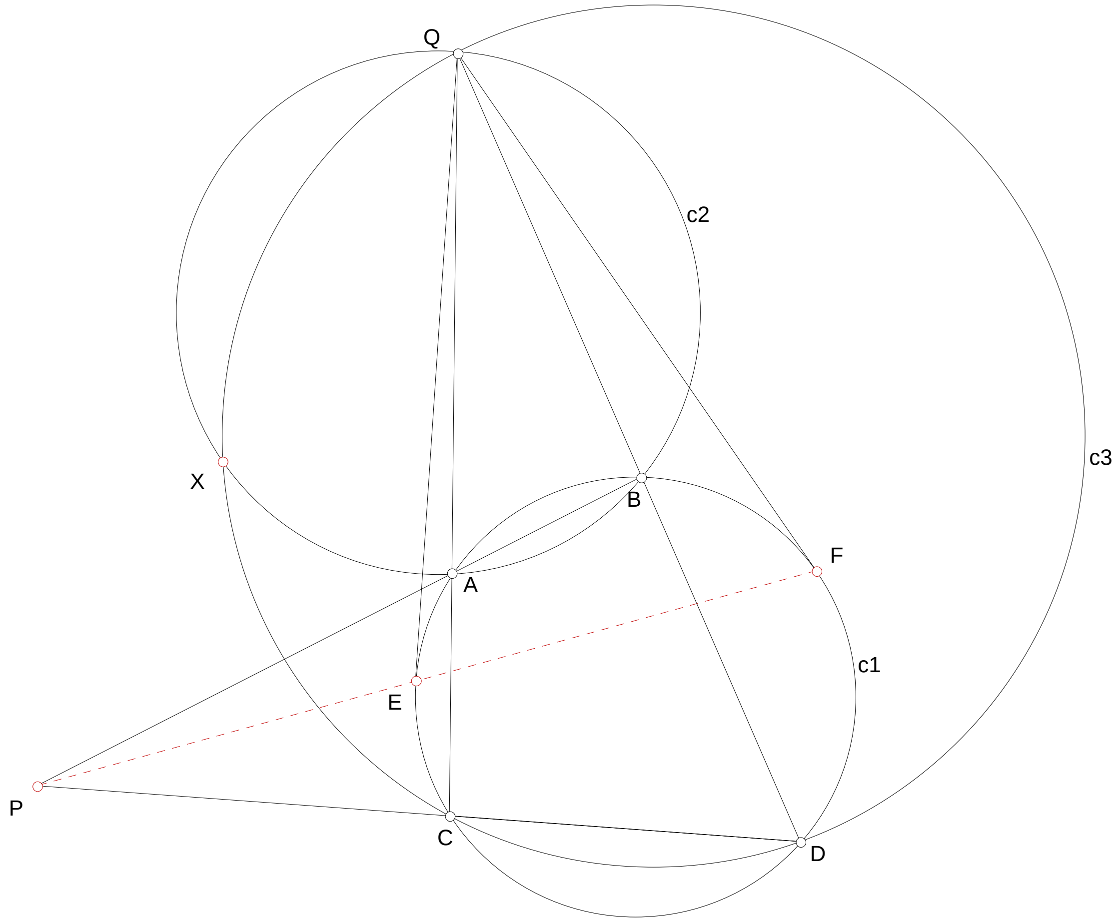
Observaciones y solución:

• En la oposición de P. E. S. de Matemáticas de Galicia del año 2001, el primer problema era: Con centro en el punto C de la circunferencia C(O,R), se trazan sucesivos círculos de radio x, con $0\leq x\leq 2R$. Se pide:
a) Área, A(β), de la intersección del círculo dado y uno de los sucesivos círculos trazados, en función del ángulo β=COP (en radianes), siendo P uno de los puntos de intersección de esos dos círculos.
b) Relación entre β y x. Ecuación del área de la intersección en función de x.
c) A(β) para R=1 y dibujo aproximado de la curva A(β).
d) Área para x=R.

Como se comprende, el apartado a) permite resolver el problema de Lin y Lan –resulta ser $A(\beta)= R^2[(1-\cos\beta)\cdot\pi+\beta\cdot\cos\beta -\operatorname{sen}\beta]$, para $0\leq\beta\leq \pi$ (*)– pues basta con determinar $\beta_0=A^{-1}(\pi R^2/2)$ –que es único por ser A(β) creciente– y, a partir de él, el $x=x_0$ asociado.
β_0 –y también x_0, expresando el área a partir de x, como se pide en el apartado b)– pueden obtenerse aproximadamente, por ejemplo, utilizando métodos de aproximación numérica de raíces; en la sección de IBM "Ponder This Challenge", que puede encontrarse en la red, concretamente en el problema del mes de febrero de 1999 –que, por otra parte, coincide con el de Álvarez Lobo–, se afirma que $x_0\approx 1{,}158728\cdot R$, que es la longitud que debe tener la cuerda que ate a Lanzado a la circunferencia –y también que $\beta_0\approx 1{,}235897$–.
Y puede encontrarse también gráficamente como la abscisa del punto de corte de la gráfica de c) y la recta horizontal a la altura $\pi R^2/2$.

(*) En efecto: el área pedida es igual a:
área del sector circular CPQ en C(C,x) – 2·área del triángulo OPC
+ área del sector circular OCPQ en C(O,R)= $x^2\cdot(2\cdot\text{ángulo OCP})/2- 2\cdot R^2\operatorname{sen}\beta/2 + R^2\cdot 2\beta/2$
y al ser el ángulo $OCP=(\pi-\beta)/2$ (pues OP=OC, con lo cual OPC es isósceles y β es su ángulo en el vértice) y $x/\operatorname{sen}\beta=R/\operatorname{sen}(\pi/2-\beta/2)$ (teorema de los senos en OPC; CP=x por ser un radio de C(C,x)), se tiene que el área pedida es
$A(\beta)= [R^2\operatorname{sen}^2\beta/\cos^2(\beta/2)]\cdot(\pi-\beta)/2-R^2\operatorname{sen}\beta+ R^2\beta$ y como $\operatorname{sen}^2\beta/\cos^2(\beta/2)= (1-\cos\beta)/2$,
$A(\beta)= [(1-\cos\beta)\cdot(\pi-\beta)-\operatorname{sen}\beta+\beta]\cdot R^2= [(1-\cos\beta)\cdot\pi+\beta\cdot\cos\beta -\operatorname{sen}\beta]\cdot R^2$.
–Además, a partir del valor $x_0\approx 1{,}158728\cdot R$ antes citado, utilizando que $x_0/\operatorname{sen}\beta_0=R/\operatorname{sen}(\pi/2-\beta_0/2)$, se obtiene que $1{,}158728^2\cdot\cos^2(\beta_0/2)\approx \operatorname{sen}^2\beta_0$, de donde
$1{,}158728^2\cdot(1+\cos\beta_0)/2\approx(1+\cos\beta_0)(1-\cos\beta_0)$ y por tanto $\cos\beta_0\approx 1-1{,}158728^2/2$, con lo cual $\beta_0\approx 1{,}235896$–.
A modo de comprobación, se obtiene que, para $\beta_0\approx 1{,}235896$, resulta
$A(\beta_0)\approx(2{,}109031+0{,}406208-0{,}944443)\cdot R^2=1{,}570796\cdot R^2\approx(\pi/2)\cdot R^2$, como se pretendía.

Problema 107 **Toro (Las Tunas, Cuba)**
Vamos a analizar el caso de la circunferencia, ya que los demás casos se reducen a este a través de la debida proyección. Considérese la figura:

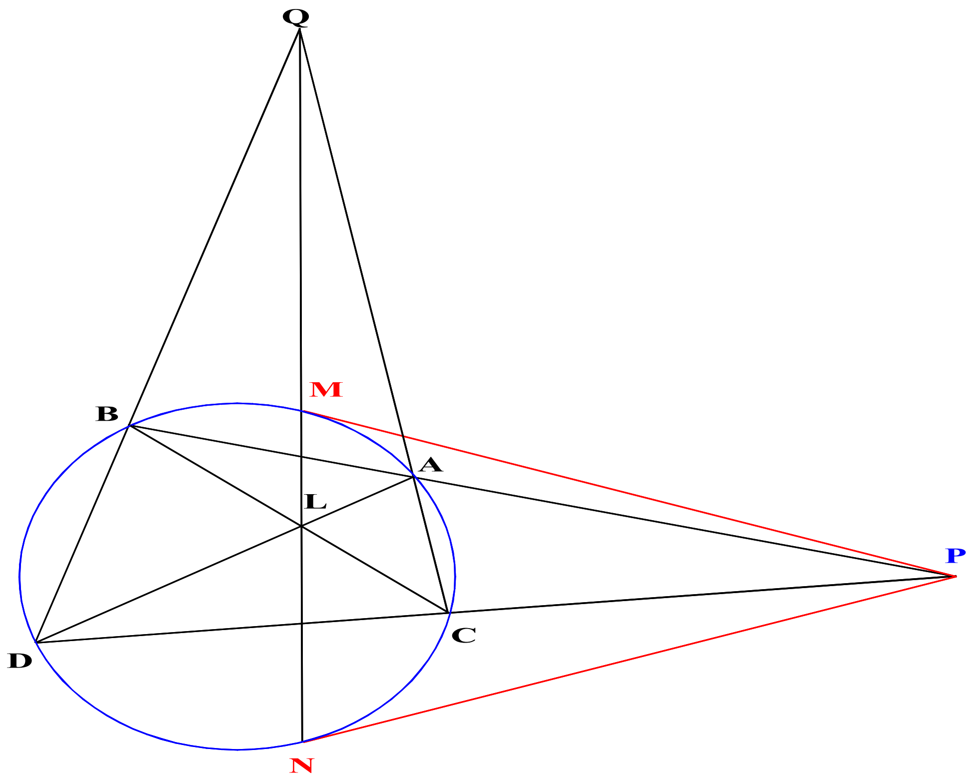


Tomemos una inversión con centro en Q y radio QE, A y C se transforman uno en el otro porque $QE^2 = QA*QC$. Análogamente con B y D. Ahora la recta AB se Transforma en la circunferencia c3 ya que contiene a Q, C y D. Análogamente la recta CD se transforma en c2 que contiene a Q, A y B. Sea X la intersección de c2 y c3; entonces X es la imagen de P en dicha inversión. Ahora $QX*QP = QE^2 = QA*QC$, esto prueba que A, C, P y X son concíclicos. Tomemos ahora una nueva inversión en el pto P y que me transforme c1 en sí misma. Como $QE^2 = QX*QP$; la circunferencia que pasa por P, X y E es tangente a QE en E y por consiguiente es tangente a c1 en E. A través de la última inversión la circunferencia circunscrita al triángulo PXE se transforma en una recta que pasa por Q es tangente a c1 (que no se mueve); esta recta es QF y por tanto F y E se transforman uno en el otro en inversión descrita, lo que completa la demostración.

<u>Nota:</u> Q es la imagen de X en la última inversión porque B es la imagen de A y $PA*PB = PX*PQ$. (Potencia del pto P.)

He aquí el método que empleo en Papiroflexia Matemática para el:

Trazado del pliegue tangente a una elipse (o una circunferencia) desde un punto **P** exterior a ella



La geometría proyectiva nos da la idea, la misma para el dibujo y el plegado.

1: *Trazar dos pliegues secantes a la elipse que pasen por **P**: se tendrán los puntos **A**, **B**, **C** y **D** de la elipse. Y hágase de forma que **CA** y **DB** no sean paralelos.*

***2**: Los pliegues secantes **CA** y **DB** se cortan en **Q**.*

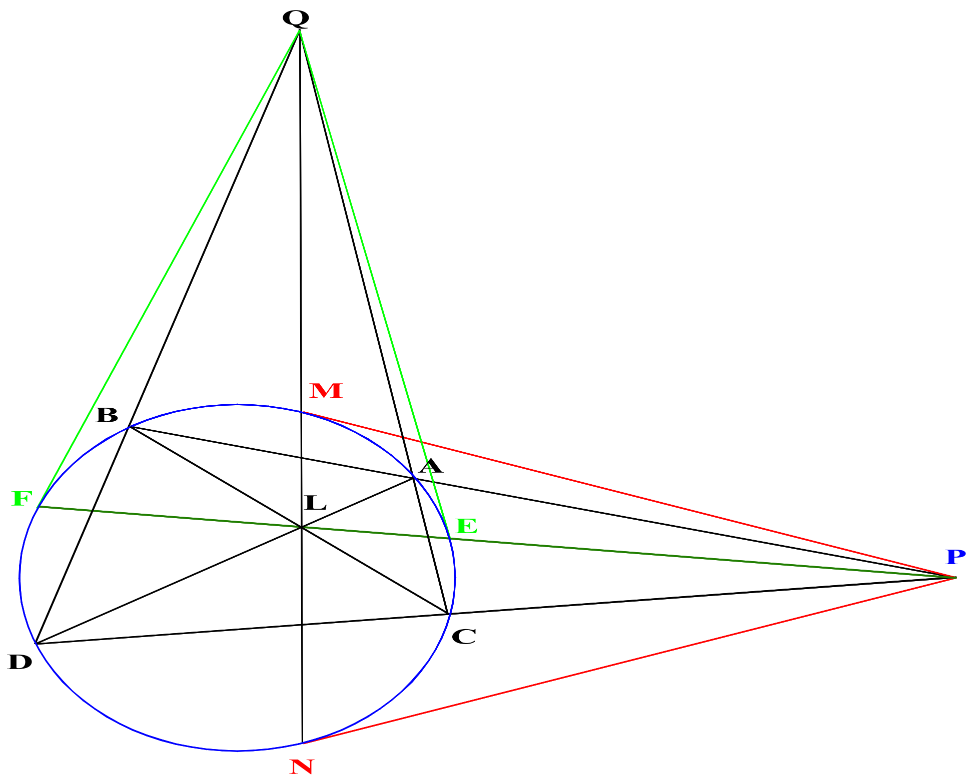
3: *Llamemos **L** a la intersección de los pliegues de las diagonales del cuadrilátero **ABCD**.*

4: *El pliegue **QL** da dos puntos en común con la elipse: **M** y **N** que son los puntos de tangencia pedidos.*

El enunciado del Problema 107 es éste:

> Desde un punto exterior **P** a una elipse se trazan dos secantes, **PAB** y **PCD** (**A**, **B**, **C** y **D** son los puntos de intersección de las secantes con la elipse). Las rectas **CA** y **DB** se cortan en **Q**; desde **Q** se trazan las tangentes a la elipse **QE** y **QF** (**E** y **F** puntos de tangencia).
>
> Demostrar que **P**, **E** y **F** están alineados.

De nuevo, trazando papiroflécticamente desde **Q** las tangentes a la elipse, obtenemos los puntos **E** y **F**.



En ambos casos, los puntos de tangencia están alineados con **L**, el centro del cuadrilátero, y con los dos **puntos de fuga**, **P** y **Q**, respectivamente.

Problema 109.
(propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, Ávila, España)
Con las notaciones habituales para el triángulo (r; inradio; R circunradio; p semiperímetro), demostrar que

$$12pr \le 2\left(p^2 + r^2 + 4Rr\right) \le 3p^2$$

Solución.
Vamos a "ajustar" ambas cotas probando

$$8\sqrt{3}pr \le 2\left(p^2 + r^2 + 4Rr\right) \le \frac{8}{3}p^2 . \quad (1)$$

Como $8\sqrt{3} > 12$ y $\frac{8}{3} < 3$, demostrando la desigualdad anterior habremos probado el enunciado y además las nuevas cotas no pueden mejorarse pues en ambas se verifica la igualdad cuando el triángulo es equilátero. Comenzaremos con la desigualdad de la izquierda que una vez simplificada puede ponerse:

$$p^2 + r^2 + 4Rr \ge 4\sqrt{3}pr \quad (2)$$

Para probar (2) usaremos dos desigualdades:
$R \ge 2r$ (la conocida desigualdad de Euler) y $p \ge 3\sqrt{3}r$ (menos conocida pero de fácil demostración aplicando la desigualdad de las medias a los tres números positivos $p-a,\ p-b,\ p-c$. Está demostrada con detalle en el problema 110).
Para nuestro propósito las pondremos en la forma

$$\frac{R}{r} \ge 2 \quad (*) \qquad \frac{p}{r} \ge 3\sqrt{3} \quad (**)$$

ambas con igualdad si y sólo si el triángulo es equilátero.
En la desigualdad (2) pasando todo al primer miembro, dividiendo por el número positivo r^2 y llamando $t = \frac{p}{r}$ toma la forma:

$$t^2 - 4\sqrt{3}t + 4\frac{R}{r} + 1 \ge 0 .$$

Por (**) basta comprobar que el trinomio toma valores positivos para $t \ge 3\sqrt{3}$.
Como el mínimo se alcanza para $t = 2\sqrt{3}$, estamos en la rama creciente y sólo hay que comprobar la validez de la desigualdad en $t = 3\sqrt{3}$. Sustituyendo queda:

$$27 - 36 + 4\frac{R}{r} + 1 = -9 + 4\frac{R}{r} + 1 \ge 0$$

desigualdad cierta por (*).
Para la desigualdad de la derecha veamos primero que $p^2 + r^2 + 4Rr = ab + ac + bc$ donde a, b y c son las medidas de los lados del triángulo como es habitual.
En efecto, si llamamos S al área y por la fórmula de Heron tenemos

$$S^2 = p^2r^2 = p(p-a)(p-b)(p-c) \Leftrightarrow pr^2 = (p-a)(p-b)(p-c)$$

operando la última resulta

$$pr^2 = p^3 - (a+b+c)\,p^2 + (ab+ac+bc)\,p - abc$$

es sabido que $a+b+c=2p$ y $abc=4Rrp$, sustituyendo y despejando el paréntesis queda

$$ab+ac+bc = p^2 + r^2 + 4Rr$$

La desigualdad de la derecha queda ahora:

$$2(ab+ac+bc) \le 3p^2$$

se demuestra teniendo en cuenta que

$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \ge 0 \Leftrightarrow 2ab \le a^2 + b^2$$

escribiendo las dos expresiones análogas permutando vértices, sumando y dividiendo por 2 queda

$$ab+ac+bc \le a^2 + b^2 + c^2$$

(con igualdad cuando $a = b = c$)
y sumando a los dos miembros $2(ab+ac+bc)$ resulta finalmente

$$3(ab+ac+bc) \le (a+b+c)^2 = 4p^2$$

sólo queda dividir por 3 y multiplicar por 2 para obtener

$$2\left(p^2 + r^2 + 4Rr\right) = 2(ab+ac+bc) \le \frac{8}{3}p^2$$

Todas las desigualdades que hemos manejado devienen en igualdades si y sólo si el triángulo es equilátero.
También puede comprobarse por simple cálculo directo que en un triángulo equilátero de lado *l*, los tres términos de (1) valen $6l^2$.

Problema 110

Con las notaciones habituales para el triángulo (r, inradio; R, circunradio, p, semiperímetro) demostrar que

$$6\sqrt{3}\,r \le 2p \le 3\sqrt{3}\,R$$

Solución de Miguel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca, España.

El área de un triángulo es pr y también $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (Herón); se sigue que

$$pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$
$$pr^2 = (p-a)(p-b)(p-c)$$

y, por la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica, resulta

$$p = (p-a)+(p-b)+(p-c) \ge 3\sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)} = 3\sqrt[3]{pr^2}$$

equivalente a

$$3\sqrt{3}\,r \le p \qquad (1)$$

Hacemos servir ahora el teorema de los senos y aplicamos la desigualdad de Jensen a la función $f(x) = \sin x$ que es estrictamente convexa en $(0, \pi)$ para obtener

$$\begin{aligned} 2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{a+b+c}{\sin A + \sin B + \sin C} &= \frac{2p}{\sin A + \sin B + \sin C} \\ &\ge \frac{2p}{3\sin\frac{A+B+C}{3}} \\ &= \frac{2p}{3\sin\frac{\pi}{3}} \\ &= \frac{2p}{\frac{3\sqrt{3}}{2}} \end{aligned}$$

de donde

$$p \le \frac{3\sqrt{3}}{2}R \qquad (2)$$

De (1) y (2) resulta $3\sqrt{3}\,r \le p \le \frac{3\sqrt{3}}{2}R$ que es equivalente a la propuesta. Se verifican las igualdades si y sólo si $a = b = c$, esto es, si y sólo si el triángulo es equilátero.

Problemas 111-115 (23)

Problema 106 bis (corrección), propuesto por José Luis Díaz Barrero, Barcelona (España).

Sean a, b, c tres números reales positivos. Demostrar que

$$\sum_{cíclica}\left(\frac{1}{1+b}\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}+\frac{c^2}{a^2}}\right)\geq\frac{3\sqrt{3}}{1+\sqrt[3]{abc}}.$$

Nota del editor: los lectores que propusieron este enunciado como alternativo al propuesto como 106 no necesitan volver a enviar soluciones; serán incluídos como resolventes cuando se publique la solución de 106 bis.

Problema 111, propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, Ávila, España.

Si $x_1, x_2, \cdots, x_m$ son números reales estrictamente positivos, m natural y $x>1$, calcular

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[x]{\frac{\left(\sum_{i=1}^{m}x_i\right)^x-\sum_{i=1}^{m}(x_i)^x}{m^x-m}}.$$

Problema 112, propuesto por José Luis Díaz Barrero, Barcelona, España.

Sean a, b, c números complejos no nulos tales que

$$a^3+b^3+c^3=0.$$

Probar que

$$\sum_{cíclica}\frac{(b-c)^2+bc}{(b-c+a)(b-c-a)+bc}=1.$$

Problema 113, propuesto por K.R.S.Sastry, Bangalore, India

En el triángulo ABC, BE y CF son alturas, con $E\in AC, F\in AB$.

Si $AE+AF=BF+CE$, calcular el ángulo A del triángulo.

Problema 114, propuesto por K.R.S.Sastry, Bangalore, India

Hallar los menores números naturales $x, y, z; \lambda, \mu, \nu$ que verifican el sistema de ecuaciones

$$x+y=\lambda z,\quad y+z=\mu x,\quad z+x=\nu y,$$

siendo $\lambda>\mu>\nu$.

Problema 115, propuesto por el editor

Un triángulo está inscrito en la elipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

y tiene su baricentro en el centro de la elipse. Determinar el lugar geométrico del circuncentro del triángulo.

DIVERTIMENTOS MATEMÁTICOS (23)

Algunas citas de *Memorabilia matemática* y de *Out of the mouths of mathematicians*

1. Un viejo geómetra francés solía decir que una teoría matemática no se podía considerar completa hasta que fuera tan clara que se pudiera explicar a la primera persona con quien se encontrase en la calle. (H.J.S.Smith, *Nature,1873)*
2. Un matemático que no sea algo poeta nunca será un matemático perfecto. (Weierstrass)
3. Los matemáticos son como los franceses: cualquier cosa que se diga lo traducen a su propia lengua, y después ya es algo completamente distinto. (Goethe)
4. ¿Por qué hacemos matemáticas? Principalmente, porque nos gusta. (M. Atiyah, 1984)
5. Lefschetz y Einstein debatieron esto durante largo tiempo. Lefschetz insistía en que hay matemáticas difíciles. Einstein sostenía que no hay matemáticas difíciles, sino matemáticos estúpidos. Pienso que la historia de las matemáticas está del lado de Einstein. (R. Bellman, 1984)
6. Hace años, después de una conferencia, alguien me dijo: "Usted consigue que las matemáticas parezcan divertidas". Yo repliqué: "Si no lo fueran, por qué hacerlas?" (R.P.Boas, 1990)
7. Individualmente, los matemáticos son muy diferentes en sus personalidades profesionales, en el tipo de matemática que les gusta, y la forma en la que trabajan en ella. Pero hay algo en lo que todos se parecen: les gusta su ciencia, son felices eligiéndola para desarrollar su carrera, y se consideran excepcionalmente afortunados por ser capaces de trabajar en algo que hacen por placer . (Constante Reid, 1990)

COMENTARIO DE PÁGINAS WEB (23)

Una loable iniciativa de la versión digital de CRUX MATHEMATICORUM

http://www.journals.cms.math.ca/CRUX

Los navegantes de Internet que entren en la página de CRUX y hagan clic en los contenidos del número de febrero de 2006 comprobarán que, aunque el número completo sólo puede obtenerse por suscripción, todo lo que se refiere a la sección de MAYHEM es visible gratuitamente. Esta parte de la revista está especialmente dedicada a los estudiantes de niveles previos a la Universidad, por lo que esta iniciativa de la Canadian Mathematical Society no puede sino alabarse como se merece. El número de problemas interesantes para los alumnos aficionados a resolver problemas es enorme, por lo que se podrán beneficiar muchos alumnos que no puedan, por razones obvias, ser suscriptores de la revista.

Por otra parte, y ya dentro de la parte reservada a suscriptores, se ha iniciado una nueva sección titulada "CRUX Contributors", donde se reconoce la labor de aquellas personas que han enviado soluciones, artículos o problemas a CRUX durante un período de tiempo largo. El primer contribuyente citado, con una breve reseña biográfica, es el Profesor K.R.S.Sastry, de quien en este número de la Revista Escolar de la O.I.M. publicamos dos problemas propuestos y del que esperamos publicar en breve un artículo sobre triángulos con lados en progresión armónica.

Valladolid, febrero 2006.
Francisco Bellot

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

Número

24

Revista Escolar
de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática
ISSN 1698-677X

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática
Número 24 (Marzo -abril 2006)
ISSN – 1698-277X

Índice

Artículos, notas y lecciones de preparación de Olimpiadas

Carlos A.Gomes (Natal, Brasil): **Polinomios simétricos**

Francisco Bellot: **Los libros de la Olimpiada Internacional de Matemáticas (IMO)**

Problemas para los más jóvenes

Resueltos: solución de 23.2, por Bruno Salgueiro Fanego (Vivero, España)
Propuestos: Tres problemas propuestos en la Olimpiada rumana 2006, fase municipal, Bucarest.

Problemas de nivel medio y de olimpiadas

Resueltos: Soluciones a los problemas propuestos en el número 23, por Bruno Salgueiro Fanego.
Propuestos: Problemas propuestos en la fase nacional de la 42 Olimpiada Matemática Española (Sevilla, marzo 2006)

Propuestos:
Cinco problemas de la Competición Húngaro-Israelí

Problemas resueltos:

Resueltos:
Soluciones recibidas después de la aparición del número 23:
Al problema 103, por Bruno Salgueiro Fanego (Vivero, España)
Al problema 109, por Glauber Moreno Barbosa (Río de Janeiro, Brasil) y por José Jorge Rodríguez Pérez (Oleiros, España)
Al problema 110, por José Jorge Rodríguez Pérez (Oleiros, España)

Prob. 106 bis: recibidas soluciones de José Carlos García Barro (Mondoñedo, España); Daniel Lasaosa Medarde (Pamplona, España); Marcos Martinelli (Brasil); Bruno Salgueiro Fanego (Vivero, España) y el proponente. Presentamos la solución de Lasaosa.

Prob. 111: recibidas soluciones de José Carlos García Barro (Mondoñedo, España); Daniel Lasaosa Medarde (Pamplona, España); Bruno Salgueiro Fanego (Vivero, España) y el proponente. Presentamos la solución de García Barro.

Prob. 112: recibidas soluciones de Miguel Amengual Covas (Cala Figuera, España); Daniel Lasaosa Medarde (Pamplona, España); Bruno Salgueiro Fanego (Vivero, España) y el proponente. Presentamos la solución de Amengual.

Prob. 113: recibidas soluciones de Miguel Amengual Covas (Cala Figuera, España); Ricardo Barroso Campos (Sevilla, España); José E. Espinoza Guevara (Lima, Perú); Oscar Ferreira Alfaro (Valencia, España); José Carlos García Barro (Mondoñedo, España); Daniel Lasaosa Medarde (Pamplona, España); Cristóbal Sánchez Rubio (Benicassim, España) y el proponente. Presentamos las soluciones de Sánchez Rubio y Amengual.

Prob. 114: Recibidas soluciones de José Carlos García Barro (Mondoñedo, España); Samuel Gómez Moreno (Jaén, España); Daniel Lasaosa Medarde (Pamplona, España) y el proponente. Presentamos la solución de García Barro.

Prob. 115: Recibidas soluciones de Daniel Lasaosa Medarde (Pamplona, España) y Bruno Salgueiro Fanego (Vivero, España). Presentamos la solución de Lasaosa.

Problemas 116-120

Divertimentos matemáticos

Algunas citas de *Mathematical Circles*, de H. Eves

Comentario de páginas web

La página web de Francisco Javier García Capitán

Editor: Francisco Bellot Rosado

POLINÔMIOS SIMÉTRICOS

Carlos A. Gomes, UFRN, Natal/RN.

*** Nível Intermediário**

Uma ferramenta bastante útil na resolução de problemas algébricos de fatoração, na resolução de sistemas de equações não lineares, na resolução de algumas equações irracionais são as funções polinomiais simétricas, que apesar de seu grande poder algébrico são pouco divulgadas entre os nossos alunos. A finalidade deste breve artigo é exibir de modo sucinto como estas ferramentas podem ser úteis na resolução de alguns problemas olímpicos.

I.Polinômios Simétricos

Um polinômio f, a duas variáveis x, y, é dito simétrico quando $f(x, y) = f(y, x)$ para todos os valores x, y.

Exemplos:

a) $\sigma_1 = x + y$ e $\sigma_2 = x \cdot y$, são evidentemente polinômios simétricos (chamados polinômios simétricos elementares).

b) Os polinômios da forma $S_n = x^n + y^n$, com $n \in N$ também são simétricos. Um fato importante a ser observado é que um polinômio simétrico f (x, y) pode ser representado como um polinômio em função de σ_1 e σ_2. Vejamos:

Se $S_n = x^n + y^n$, $n \in N$, $(n \geq 2)$, então:

$$S_n = x^n + y^n = (x + y)(x^{n-1} + y^{n-1}) - xy(x^{n-2} + y^{n-2}) = \sigma_1 \cdot S_{n-1} - \sigma_2 \cdot S_{n-2} \ (n \geq 2)$$

Mas,

$S_0 = x^0 + y^0 = 1 + 1 = 2$
$S_1 = x^1 + y^1 = x + y = \sigma_1$

Assim temos que:

$S_0 = 2$
$S_1 = \sigma_1$
$S_2 = \sigma_1 \cdot S_1 - \sigma_2 \cdot S_0 = \sigma_1 \cdot \sigma_1 - \sigma_2 \cdot 2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$
$S_3 = \sigma_1 \cdot S_2 - \sigma_2 \cdot S_1 = \sigma_1(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) - \sigma_2 \cdot \sigma_1 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1 \cdot \sigma_2$

E daí usando a lei de recorrência $S_n = \sigma_1 S_{n-1} - \sigma_2 S_{n-2}$ $(n \geq 2)$ podemos determinar S_n em função de σ_1 e σ_2 para qualquer número natural n.

Agora para garantirmos a afirmação anterior que todo polinômio simétrico f (x, y) pode ser representado como um polinômio em σ_1 e σ_2 observemos o seguinte fato:

Num polinômio simétrico f (x, y) para os termos da forma $\mathbf{a \cdot x^K \cdot y^K}$ não temos nenhum problema pois $\mathbf{a \cdot x^K \cdot y^K = a (x \cdot y)^K = a \cdot \sigma_2^K}$. Agora com os termos da forma

$b\ .\ x^i\ .\ y^K$, com i < k devemos observar o seguinte fato: Como, por hipótese, f (x, y) é simétrico se $b\ .\ x^i\ .\ y^k$, com i < k estiver presente em f (x, y) temos que $b\ .\ x^k\ .\ y^i$ também deve estar presente em f (x, y), visto que deve ser satisfeita a condição f (x, y) = f (y, x). Assim se agruparmos os termos $b\ .\ x^i\ .\ y^k + b\ .\ x^k\ .\ y^i$ (i < k) temos que:

$$\mathbf{b\ .\ x^i\ .\ y^k + b\ .\ x^k\ .\ y^i = b\ .\ x^i\ .\ y^i\ (x^{k-i} + y^{k-i}) = b.\ \sigma_2{}^i\ .\ S_{k-i}}\ ,$$

mas como já mostramos anteriormente S_{k-i} pode ser escrito como um polinômio em σ_1 e σ_2, pois $k - i \in N$, visto que i < k.

II.Exemplos Resolvidos

01.(Funções simétricas elementares a 3 variáveis)

Definido:

$\sigma_1 = x + y + z$
$\sigma_2 = xy + xz + yz$
$\sigma_3 = x\ .\ y\ .\ z$
$S_n = x^n + y^n + z^n$, com $n \in N$. $(n \geq 2)$

Mostre que:

a) $S_n = \sigma_1\ .\ S_{n-1} - \sigma_2\ .\ S_{n-2} + \sigma_3\ .\ S_{n-3}$ ($n \geq 3$, com $n \in N$)

b) $S_3 = \sigma_1{}^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3$

Resolução:

Observe inicialmente que:

$$x^n + y^n + z^n = (x + y + z)\ (x^{n-1} + y^{n-1} + z^{n-1}) - (xy + xz + yz)\ (x^{n-2} + y^{n-2} + z^{n-2}) + xyz\ (x^{n-3} + y^{n-3} + z^{n-3})$$

e daí temos que:

$$S_n = \sigma_1\ .\ S_{n-1} - \sigma_2\ .\ S_{n-2} + \sigma_3\ .\ S_{n-3}\ (n \geq 3,\ \text{com}\ n \in N)$$

Agora temos que:

$S_0 = x^0 + y^0 + z^0 = 1 + 1 + 1 = 3$
$S_1 = x + y + z = \sigma_1$
$S_2 = x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2\ (xy + xz + yz) = \sigma_1{}^2 - 2\sigma_2$

Agora fazendo n = 3 temos na lei de recorrência $S_n = \sigma_1\ .\ S_{n-1} - \sigma_2\ .\ S_{n-2} + \sigma_3\ .\ S_{n-3}$ temos que:

$$S_3 = \sigma_1\ .\ S_2 - \sigma_2\ .\ S_1 + \sigma_3\ .\ S_0 = \sigma_1\ (\sigma_1{}^2 - 2\sigma_2) - \sigma_2\ .\ \sigma_1 + \sigma_3\ .\ 3$$
$$S_3 = \sigma_1{}^3 - 3\sigma_1.\ \sigma_2 + 3\sigma_3$$

02.

a) Fatore $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

Resolução:

Essa velha e manjada questão continua ainda hoje pegando alguns bons professores e alunos. A sua solução pelos métodos tradicionais envolve uma boa dose de atenção e de paciência para aplicar velhos "truques" de fatoração, por outro lado ela é imediata usando os polinômios simétricos. Vejamos:

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = S_3 - 3 \,.\, \sigma_3$$

Mas de acordo com a questão anterior $S_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3$ e daí temos que $S_3 - 3\sigma_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2$. Assim:

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz &= S_3 - 3\sigma_3 = \\ &= \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 = \\ &= \sigma_1 (\sigma_1^2 - 3\sigma_2) = \\ &= [(x + y + z)^2 - 3 (xy + xz + yz)] \\ &= (x + y + z) (x^2 + y^2 + + z^2 - xy - xz - yz) \end{aligned}$$

Obs. (para os mais curiosos): Na RPM 41, pág.38 existe uma bela resolução desse problema usando um determinante.

b) Usando a fatoração obtida em (a), verifique a famosa desigualdade das médias aritmética e geométrica. Se a, b, c $\in$ R_+ então $\sqrt[3]{a.bc} \leq \dfrac{a+b+c}{3}$ e a igualdade ocorre, se, e somente se, a = b = c.

De fato, em (a) verificamos que

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z) (x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz).$$

Vamos mostrar inicialmente que se x, y, z são números reais positivos então:

$$(x + y + z) \,.\, (x^2 + y^2 + z^2 - xy - xy - yz) \geq 0$$

De fato,

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz + yz &= \frac{1}{2} (2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2xz - 2zy) \\ &= \frac{1}{2} (x^2 - 2xy + y^2 + x^2 - 2xz + z^2 + y^2 - 2yz + z^2) \\ &= \frac{1}{2} [(x-y)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2] \geq 0 \text{ (Soma de quadrados)} \end{aligned}$$

Ora, como estamos supondo x, y, z reais positivos temos que $x + y + z \geq 0$ e daí $(x + y + z) (x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz) \geq 0$ (pois é o produto de fatores ≥ 0). Assim temos que:

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z) (x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz) \geq 0$$

e daí

$$3xyz \leq x^3 + y^3 + z^3 \Rightarrow xyz \leq \frac{x^3+y^3+z^3}{3}$$

fazendo $x^3 = a$, $y^3 = b$ e $z^3 = c$ temos que:

$$\sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b}.\sqrt[3]{c} \leq \frac{a+b+c}{3}$$

e daí

$$\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3}$$

Com a igualdade ocorrendo se e somente se a = b = c, pois em $(x + y + z).(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz) \geq 0$ a igualdade ocorre apenas quando x = y = z, visto que x + y + z > 0, uma vez que x, y, z são números reais positivos e além disso,

$$(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz) = \frac{1}{2}[(x-y)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2] = 0 \Leftrightarrow x = y = z.$$

:**03.** Fatore $(x + y + z)^3 - (x^3 + y^3 + z^3)$

Resolução:

$(x + y + z)^3 - (x^3 + y^3 + z^3) = \sigma_1^3 - S_3$

Mas, no exemplo anterior vimos que $S_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3$ e daí

$$\begin{aligned}(x + y + z)^3 - (x^3 + y^3 + z^3) &= \sigma_1^3 - (\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3)\\ &= 3.\ (\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3)\\ &= 3.\ [(x + y + z)\ (xy + xz + yz) - xyz]\\ &= 3.(x^2y + x^2z + xyz + xy^2 + xyz + y^2z + xyz + xz^2 + yz^2 - xyz)\\ &= 3.\ [xy\ (x + y) + xz\ (x + y) + yz\ (y + z) + xz\ (y + z)]\\ &= 3.\ [(x + y)(xy + xz) + (y + z)(yz + xz)]\\ &= 3.\ [(x + y)\ .\ x\ (y + z) + (y + z)\ .\ z\ (x + y)]\\ &= 3.\ (x + y)(y + z)(x + z)\end{aligned}$$

04. Se x_1 e x_2 são as raízes da equação $x^2 - 6x + 1 = 0$ determine o valor de $x_1^5 + x_2^5$.

Resolução:

Fazendo $S_n = x_1^n + x_2^n$, $n \in N$, queremos determinar $S_5 = x_1^5 + x_2^5$

Temos que:

$\sigma_1 = x_1 + x_2 = 6$
$\sigma_2 = x_1 . x_2 = 1$
$S_0 = x_1^0 + x_2^0 = 1 + 1 = 2$
$S_1 = x_1 + x_2 = 6$
$S_n = \sigma_1 . S_{n-1} - \sigma_2 . S_{n-2} = 6 S_{n-1} - S_{n-2}$

e daí

$S_2 = 6 . S_1 – S_0 = 6 . 6 – 2 = 34$
$S_3 = 6 . S_2 – S_1 = 6 . 34 – 6 = 198$
$S_4 = 6 . S_3 – S_2 = 6 . 198 – 34 = 1.154$
$S_5 = 6 . S_4 – S_3 = 6 . 1.154 – 198 = 6.726$
Assim $x_1^5 + x_2^5 = 6.726$

04. Determine todas as soluções reais do sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^3 + y^3 + z^3 + xyz = x^4 + y^4 + z^4 + 1 \end{cases}$$

De acordo com o sistema acima temos que:

$$\begin{cases} \sigma_1 = 1 \\ S_3 + \sigma_3 = S_4 + 1 \end{cases}, \text{onde } S_n = x^n + y^n + z^n, n \in N$$

Mas, $S_3 = \sigma_1^3 – 3\sigma_2\sigma_1 + 3\sigma_3$ e $S_4 = \sigma_1^4 – 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 + 4\sigma_1. \sigma_3$ (verifique isto!) e daí

$S_3 + \sigma_3 = S_4 + 1 \Rightarrow \sigma_1^3 – 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 + \sigma_3 = \sigma_1^4 – 4\sigma_1^2 \sigma_2 + 2\sigma_2^2 + 4\sigma_1\sigma_3 + 1$

Como $\sigma_1 = 1$ temos que:

$$1 – 3 \sigma_2 + 4\sigma_3 = 1 – 4\sigma_2 + 2\sigma_2^2 + 4\sigma_3 + 1 \Rightarrow 2\sigma_2^2 – \sigma_2 + 1 = 0$$

Como, $\Delta = (-1)^2 – 4 . 2 . 1 = -7 < 0$, concluímos que existem raízes reais.

Uma outra aplicação interessante dos polinômios simétricos pode ser encontrada na resolução de algumas equações irracionais. Vejamos:

05. Determine todas as raízes reais da equação abaixo:

$$\sqrt[4]{272 - x} + \sqrt[4]{x} = 6$$

Resolução:

Fazendo $\sqrt[4]{x} = y$ e $\sqrt[4]{272 - x} = z$ temos que

$$x = y^4 \text{ e } 272 – x = z^4 \Rightarrow \begin{cases} y + z = 6 \\ y^4 + z^4 = 272 \end{cases}$$

e agora lembrando que : $\sigma_1 = y + z$ e $\sigma_2 = y. z$ e $S_n = y^n + z^n$, com $n \in N$

$$\begin{cases} \sigma_1 = 6 \\ S_4 = 272 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 6 \\ \sigma_1{}^4 - 4\sigma_1{}^2.\sigma_2 + 2\sigma_2{}^2 = 272 \end{cases}$$

Logo, $6^4 – 4 . 6^2. \sigma_2 + 2\sigma_2^2 = 272 \Rightarrow \sigma_2^2 - 72\sigma_2 + 512 = 0 \Rightarrow \sigma_2 = 64$ ou $\sigma_2 = 8$

Assim, se $\sigma_2 = 64 \Rightarrow \begin{cases} y + z = 6 \\ y.z = 64 \end{cases} \Rightarrow$ Não existem soluções reais.

Por outro lado, se $\sigma_2 = 8 \Rightarrow \begin{cases} y + z = 6 \\ y.z = 8 \end{cases} \Rightarrow$ y = 2 e z = 4 ou z = 2 e y = 4

Assim concluímos que:

$$y = 2 \Rightarrow x = 16$$
$$y = 4 \Rightarrow x = 256$$

Logo as raízes reais da equação são 16 e 256.

III. Problemas:

01. Se α, β e γ são as raízes da equação $x^3 + 3x^2 - 7x + 1 = 0$. Determine o valor de $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4$

02. Mostre que se o sistema $\begin{cases} x + y = a \\ x^2 + y^2 = b \\ x^3 + y^3 = c \end{cases}$ tem solução, então $a^3 - 3ab + 2c = 0$

03. x, y, z são números reais tais que x + y + z = 5 e yz + zx + xy = 3. Verifique que $-1 \le z \le \frac{13}{3}$.

04. Se x + y + z = 0, verifique que, para n = 0, 1, 2, ... vale a relação:

$$x^{n+3} + y^{n+3} + z^{n+3} = xyz\,(x^n + y^n + z^n) + \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)(x^{n+1} + y^{n+1} + z^{n+1})$$

05. Determine as raízes reais da equação $\sqrt[5]{33 - x} + \sqrt[5]{x} = 3$.

06. Verifique que:

$$(x + y + z)^3 - (y + z - x)^3 - (x + z - y)^3 - (x + y - z)^3 = 24xyz.$$

07. Dados a, b e c números reais positivos tais que $\log_a b + \log_b c + \log_c a = 0$, determine o valor de $(\log_a b)^3 + (\log_b c)^3 + (\log_c a)^3$.

08. Se α, β e γ são números complexos tais que $\alpha + \beta + \gamma = 1$, $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 3$ e $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 7$, determine o valor de $\alpha^{21} + \beta^{21} + \gamma^{21}$.

Referências:

[1] Barbeau, E. J., Polynomials – Problems books in Mathematics – Springer Verlag.
[2] Engel, Arthur , Problem-Solving Strategies – Springer Verlag.
[3] www.obm.org.br, Mathematical Excalibur.

LOS LIBROS DE LA OLIMPIADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICAS (IMO)

Francisco Bellot Rosado

Como es conocido, en 2008 la Olimpiada Internacional de Matemáticas (IMO en lo sucesivo) se celebrará en España, concretamente en Granada. Qu.izá sea interesante recordar a los lectores de la Revista Escolar de la OIM los libros que se han publicado hasta este momento, conteniendo los problemas propuestos en el concurso y, en algunos casos, los propuestos al Jurado Internacional (la "lista corta", en la jerga de la IMO).

Es claro que cada Comité Organizador de la IMO ha publicado el folleto con los problemas propuestos al Jurado; pero esta publicación siempre tiene una circulación restringida y no suele estar al alcance del público. En este caso nos proponemos comentar los libros que, hasta donde nosotros sabemos, se han publicado sobre esta materia.

Tal vez los dos primeros, cronológicamente hablando, sean los publicados en 1976:

D.Gerll, G.Girard:*Les Olympiades internationales de mathématiques;* Hachette, 1976; reeditado en 1994 por Ed. Jacques Gabay.

E.A.Morozova, I.S.Petrakov, V.A. Skvortzov: *Mejdunarodnie matematiceskie Olimpiadii,* Moscú, Provescenie, 1976 (en ruso).

El libro de Gerll y Girard tiene resueltos los problemas de la IMO entre 1967 y 1975; los enunciados de los propuestos entre 1959 y 1966; y un cierto número de otros problemas, tanto de la "lista corta" como de Olimpiadas de algunos paises.

Por su parte, el libro de Morozova, que se puede descargar gratuitamente de la dirección de Internet http://ilib.mccme.ru, incluye las soluciones de los problemas de la lista corta y de otras olimpiadas, entre 1959 y 1976. En los países del Este, el libro siempre se consideró un clásico.

En 1978 apareció en inglés el libro de **Samuel L. Greitzer** *International Mathematical Olympiads 1959-1977,* publicado por la Mathematical Association of America (de él se hizo una traducción al español, en *La Tortuga de Aquiles).* Tenía la ventaja de estar escrito en inglés, pero solamente incluía los problemas propuestos en la competición. Tuvo un éxito considerable, y **Murray S. Klamkin** escribió *International Mathematical Olympiads 1979-1985 and forty supplementary problems,* en 1986, publicado también por la M.A.A.

En 1981, **Dimitrios Kontogiannis** publicó en griego su primer tomo de *Matematikes Olimpiades,* comprendiendo las 19 primeras olimpiadas Internacionales. De cada problema propuesto se ofrecen casi siempre varias soluciones, y extensiones y generalizaciones extraordinariamente interesantes. A mi entender, junto con el libro rumano de **Cuculescu** (del que tengo un ejemplar, precisamente regalado por Kontogiannis en 1988), que comentaré a continuación, es uno de los libros más completos sobre las primeras IMOs.

En 1984, **Ion Cuculescu** publicó en la Editura Tehnica de Bucarest su *Olimpiadele internationale de matematica ale elevilor,* comprendiendo las IMOs de 1973 a 1982. Además de las soluciones "oficiales" comentadas, se describen en esta obra única en su género los reglamentos y costumbres de la IMO, los resultados, las discusiones sobre la elección o rechazo de los problemas, algunas soluciones destacadas de los propios alumnos participantes, y los criterios empleados por los coordinadores durante la corrección y puntuación.

En 1988, las Editions du Choix publicaron *Olympiades Internationales de mathématiques,* por **J.P.Boudine, F.LoJacomo y R. Cuculière,** que comprende los problemas propuestos entre 1988 y 1977 . En este libro no sólo se da la solución de cada problema, sino que se indica el camino que conduce a ésta. Es un excelente ejemplo de cómo se deben exponer las soluciones a los alumnos. Es lástima que no haya tenido continuación.

En 2001, Anthem Press publicó *International Mathematical Olympiad 1959-1999,* del profesor húngaro **István Reiman** (premio Paul Erdös, junto con quien esto escribe, de la World Federation of National Mathematics Competitions del año 2000). La versión previa húngara de este libro tuvo un extraordinario éxito en su país, nada extraño si se tiene en cuenta que los concursos de matemáticas son centenarios en Hungría.

En 2003, el polaco **Marcin E. Kuczma** publicó *International Mathematical Olympiads 1986-1999,* editado por la M.A.A. Este libro es más que la simple continuación de los escritos por Greitzer y Klamkin, ya comentados. En efecto, las soluciones de Marcin tienen siempre un punto de originalidad que hace que uno aprecie nuevos e interesantes puntos de vista, por conocido que pueda parecer un problema. Además, varios de los problemas propuestos en la IMO son originales suyos, lo cual añade atractivo al libro.

Hace apenas unos meses que se ha publicado, en la colección *Problem books in Mathematics*, de Springer, *The IMO Compendium. A collection of problems suggested for the IMO:1959-2004,* compilado por cuatro profesores serbios, antiguos concursantes en la Olimpiada Internacional: **Dushan Djukic, Vladimir Jankovic, Ivan Matic y Nikola Petrovic.** Incluye los problemas propuestos (con soluciones), los de la lista corta (con sluciones) y los enunciados de la "lista larga", cuando les ha sido posible conseguirlos. Es propósito de los autores publicar también las soluciones de estos últimos, quizá en una próxima edición o como publicación independiente. En total hay 1900 enunciados, de los que 864 están resueltos.

En el momento de escribir este comentario todavía no ha llegado a mis manos el libro sobre la IMO del profesor rumano **Mircea Becheanu,** pero espero conseguirlo pronto...

Valladolid, mayo 2006

Francisco Bellot Rosado

Problemas para os máis novos (23)

23.2. Demostrar que, para $n \geq 2$, se verifica

$$\sum_{k=1}^{n^2-1}\left[\sqrt{k}\right]=\frac{n(n-1)(4n+1)}{6}.$$

Solución de Bruno Salgueiro Fanego (Viveiro, España):

Agrupando os sumandos que teñen a mesma parte enteira, resulta:

$$\sum_{k=1}^{n^2-1}\left[\sqrt{k}\right]=\left(\left[\sqrt{1}\right]+\left[\sqrt{2}\right]+\left[\sqrt{3}\right]\right)+\left(\left[\sqrt{4}\right]+\left[\sqrt{5}\right]+\left[\sqrt{6}\right]+\left[\sqrt{7}\right]+\left[\sqrt{8}\right]\right)$$

$$+\left(\left[\sqrt{9}\right]+\left[\sqrt{10}\right]+\left[\sqrt{11}\right]+\left[\sqrt{12}\right]+\left[\sqrt{13}\right]+\left[\sqrt{14}\right]+\left[\sqrt{15}\right]\right)$$

$$+\left(\left[\sqrt{4^2}\right]+\left[\sqrt{17}\right]+\left[\sqrt{18}\right]+\left[\sqrt{19}\right]+\left[\sqrt{20}\right]+\left[\sqrt{21}\right]+\left[\sqrt{22}\right]+\left[\sqrt{23}\right]+\left[\sqrt{5^2-1}\right]\right)+\cdots$$

$$+\left(\left[\sqrt{(m-1)^2}\right]+\left[\sqrt{(m-1)^2+1}\right]+\left[\sqrt{(m-1)^2+2}\right]+\cdots+\left[\sqrt{(m-1)^2+2m-4}\right]+\left[\sqrt{(m-1)^2+2m-3}\right]+\left[\sqrt{m^2-1}\right]\right)+\cdots$$

$$+\left(\left[\sqrt{(n-1)^2}\right]+\left[\sqrt{(n-1)^2+1}\right]+\left[\sqrt{(n-1)^2+2}\right]+\left[\sqrt{n^2-2n+4}\right]+\left[\sqrt{n^2-2n+5}\right]+\cdots+\left[\sqrt{n^2-2n+(2n-2)}\right]+\left[\sqrt{n^2-1}\right]\right)$$

$$=(1+1+1)+(2+2+2+2+2)+(3+3+3+3+3+3+3)+(4+4+4+4+4+4+4+4+4)$$

$$+\cdots+((m-1)+(m-1)+\cdots+(m-1))+\cdots+((n-1)+(n-1)+\cdots+(n-1))$$

$$=3\cdot 1+5\cdot 2+7\cdot 3+9\cdot 4+\cdots+((m-1)+(m-1)+\cdots+(m-1))+\cdots+((n-1)+(n-1)+\cdots+(n-1))$$

$$=(2\cdot 1+1)\cdot 1+(2\cdot 2+1)\cdot 2+(2\cdot 3+1)\cdot 3+(2\cdot 4+1)\cdot 4+\cdots+(2\cdot(m-1)+1)\cdot(m-1)+\cdots+(2\cdot(n-1)+1)\cdot(n-1)$$

$$=\sum_{m=1}^{n-1}(2\cdot m+1)\cdot m=2\sum_{m=1}^{n-1}m^2+\sum_{m=1}^{n-1}m=2\frac{(n-1)((n-1)+1)(2(n-1)+1)}{6}+\frac{1+(n-1)}{2}\cdot(n-1)$$

$$=\frac{n\cdot(n-1)}{6}\cdot(2\cdot(2n-1)+3)=\frac{n(n-1)(4n+1)}{6}.$$

Problemas para los más jóvenes (24)

Presentamos tres problemas de la clase VII (12-13 años de edad) propuestos en marzo de 2006 en la fase municipal (Bucarest) de la Olimpiada rumana.

24.1. Demostrar que para todo número natural $n > 1$, el número

$$\sqrt{11\cdots144\cdots4},$$

donde la cifra 1 aparece n veces, y la cifra 4 aparece $2n$ veces, es irracional.

24.2. Un conjunto M de cuatro números naturales se dice *ligado,* si para todo elemento $x \in M$, al menos uno de los números $x-1$ y $x+1$ pertenece a M.

Sea U_n el número de subconjuntos *ligados* del conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$.

a) Calcular U_7.

b) Determinar el menor número n tal que $U_n \geq 2006$.

24.3. Se considera el triángulo isósceles ABC con $AB = AC$. Sea D el punto medio del lado BC, M el punto medio del segmento AD y N el pie de la perpendicular trazada desde D a BM. Demostrar que $\widehat{ANC} = 90^o$.

Problemas de nivel medio e de Olimpiadas (23)

23.1. Sobre unha semicircunferencia de raio 1, tómanse, nesta orde, os puntos A, B, C, D, E. Probar que

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DE^2 + AB \cdot BC \cdot CD + BC \cdot CD \cdot DE \leq 4 .$$

Solución de Bruno Salgueiro Fanego (Viveiro, España):

Sexan A', E' os puntos diametralmente opostos da semicircunferencia, nesta orde. Entón

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DE^2 + AB \cdot BC \cdot CD + BC \cdot CD \cdot DE$$
$$\overset{(1)}{\leq} \left(A'B^2 + BC^2 + A'B \cdot BC \cdot CD\right) + \left(CD^2 + DE'^2 + BC \cdot CD \cdot DE'\right)$$
$$\overset{(2)}{\leq} \left(A'B^2 + BC^2 + A'B \cdot BC \cdot CE'\right) + \left(CD^2 + DE'^2 + A'C \cdot CD \cdot DE'\right)$$
$$\overset{(3)}{=} \left(A'B^2 + BC^2 + A'B \cdot BC \cdot 2\cos\angle A'E'C\right) + \left(CD^2 + DE'^2 + 2\cos\angle CA'E' \cdot CD \cdot DE'\right)$$
$$\overset{(4)}{=} A'C^2 + CE'^2 \overset{(5)}{=} A'E'^2 = 4$$

(1) $AB \leq A'B$ e $DE \leq DE'$ (igualdades se e só se $A' \equiv A$, $E \equiv E'$).

(2) $CD \leq CE'$ (igualdade sse $D \equiv E \equiv E'$), $BC \leq A'C$ (igualdade sse $A' \equiv A \equiv B$); así, en (2) dase a igualdade se e só se $A' \equiv A \equiv B$, $D \equiv E \equiv E'$.

(3) $\angle CA'E' = \frac{\pi}{2}$, por ser un ángulo inscrito nunha semicircunferencia; $\angle A'E'C = \frac{\pi}{2} - \angle CA'E'$, por ser π a suma dos ángulos interiores de $A'CE'$; $\cos\angle A'E'C = \frac{CE'}{A'E'} = \frac{CE'}{2}$,
$\cos\angle CA'E' = \frac{A'C}{A'E'} = \frac{A'C}{2}$.

(4) $\angle A'BC = \pi - \angle A'E'C = \left(= \frac{\pi}{2} + \angle CA'E'\right)$, por ser $\angle A'BC$ inscrito e abarcar o trozo de semicircunferencia que non abarcaba $\angle A'E'C$, logo $\cos\angle A'BC = -\cos\angle A'E'C$, co cal o teorema do coseno en $A'BC$ implica que $A'C^2 = A'B^2 + BC^2 - 2A'B \cdot BC \cos\angle A'BC$
$= A'B^2 + BC^2 + 2A'B \cdot BC \cos\angle A'E'C$;
analogamente, o teorema do coseno en CDE' implica que $CE'^2 = CD^2 + DE'^2 + A'C \cdot CD \cdot DE'$
$= CD^2 + DE'^2 + 2CD \cdot DE' \cos\angle CA'E'$.

(5) Teorema de Pitágoras en $A'CE'$.

E dase a igualdade no enunciado se e só se dá en (1) e (2), é dicir, se e só se $A' \equiv A \equiv B$, $D \equiv E \equiv E'$, ou sexa, só e cando os puntos tomados son, ó sumo, tres: os extremos da semicircunferencia e C un punto calquera da mesma.
Polo tanto, se os cinco puntos tomados son distintos, dase a desigualdade estrita no enunciado.

Problemas de nivel medio e de Olimpiadas (23)

23.2. Tres círculos iguais, que pasan polo punto P, córtanse mutuamente ademais nos puntos A, B e C. Os tres círculos están contidos nun triángulo $A'B'C'$ cuxos lados son tanxentes a dous dos círculos. Probar que a área do triángulo $A'B'C'$ é ao menos 9 veces a área de ABC.

Solución de Bruno Salgueiro Fanego (Viveiro, España):

Sexan: A'', o centro do círculo que pasa por P, B e C;
B'', o centro do círculo que pasa por P, C e A;
C'', o centro do círculo que pasa por P, A e B;
r, o raio dos círculos.
$PA''=PB''=PC''(=r)$, logo P é o circuncentro de $A''B''C''$.
Ademais, $PA''=PB''(=r)$, logo P está na mediatriz de $A''B''$, $CA''=CB''=r$, e C tamén está na mediatriz de $A''B''$, co cal PC é a mediatriz de $A''B''$. Analogamente, PA é a mediatriz de $B''C''$ e PB é a mediatriz de $C''A''$. Así, $PC\perp A''B''$, $PA\perp B''C''$ e $PB\perp C''A''$.
Supoñendo que a notación elidida para designar a $A'B'C'$ é tal que $A'B'\,//\,A''B''$, $B'C'\,//\,B''C''$ e $C'A'\,//\,C''A''$, resulta que $A'B'C'$ e $A''B''C''$ teñen os lados respectivamente paralelos, tendo polo tanto os mesmos ángulos, co cal son semellantes.

<u>Lema 1</u>: $A''B''C''$ é igual a ABC, e teñen os lados respectivamente paralelos.
Proba:
Verase que $ABA''B''$ é un paralelogramo, co cal os lados opostos do mesmo serán paralelos e da mesma lonxitude; en particular, $A''B''\,//\,AB$ e $A''B''=AB$; analogamente se probaría para os outros dous pares de lados dos triángulos.
Como AB'' e BA'' teñen a mesma lonxitude (r), se se proba que son paralelos resultará que o cuadrilátero $ABA''B''$ terá dous lados opostos paralelos e da mesma lonxitude, sendo polo tanto un paralelogramo. Para ver que $AB''\,//\,BA''$, probarase que BA e $A''B''$ forman o mesmo ángulo coa recta común AB'', é dicir, que os ángulos $\angle BAB''$ e $\angle AB''A''$ son suplementarios.
Sexan $\varphi=\angle BC''A''$ e $\theta=\angle B''C''A$. Como $AB''C''$ é isóscele con $AC''=AB''(=r)$, resulta que $\angle AB''C''=\theta$ e, por ser π a suma dos ángulos interiores de $AB''C''$, que $\angle CA''B''=\pi-2\theta$. Como $C''A''\perp BP$ e $C''BP$ é isóscele, tense que $C''A''$ é a altura desde C'' e a bisectriz de $\angle BC''P$ en dito triángulo, co cal $\angle A''C''P=\angle BC''A''=\varphi$, de onde $\angle BC''P=2\varphi$.
Analogamente, $C''B''$ é a bisectriz de $\angle PC''A$ en $C''PA$, logo $\angle PC''B''=\angle B''C''A=\theta$ e, por tanto, $\angle PC''A=2\theta$. Entón $\angle BCA=\angle BC''P+\angle PC''A=2\varphi+2\theta$.
Así, $AC''B$ é un triángulo isóscele con ángulo no vértice igual a $2\varphi+2\theta$, sendo polo tanto os outros dous ángulos $(\angle ABC''=)\angle C''AB=\dfrac{\pi-(2\varphi+2\theta)}{2}$. Entón

$$\angle BAB''=\angle C''AB''-\angle C''AB=\pi-2\theta-\frac{\pi-2\varphi-2\theta}{2}=\frac{\pi}{2}+\varphi-\theta.$$

Pero $\angle AB''C''=\theta$ ($AC''B''$ é isóscele con $AC''=AB''$ e con $\angle B''C''A=\theta$) e $\angle C''B''P=\theta$; como a suma dos ángulos interiores de $PB''C''$ é igual a π, será $\angle B''PC''=\pi-2\theta$. Como $PC''A''$ é isóscele, sendo $\angle A''C''P=\ \varphi$ un dos seus ángulos iguais, o ángulo no vértice P será $\angle C''PA''=\pi-2\varphi$.
Logo $\angle A''PB''=2\pi-(\angle B''PC''+\angle C''PA'')=2\pi-(\pi-2\theta+\pi-2\varphi)=2\varphi+2\theta$, sendo así $PA''B''$ isóscele con $PA''=PB''$ e ángulo no vértice $2\varphi+2\theta$, co cal os outros dous ángulos son iguais a

$$\angle PB''A''=\frac{\pi-(2\varphi+2\theta)}{2}=\frac{\pi}{2}-\varphi+\theta.$$

En resumo, $\angle BAB'' = \frac{\pi}{2} + \varphi - \theta$ e $\angle PB''A'' = \frac{\pi}{2} - \varphi + \theta$; polo tanto, $\angle BAB'' + \angle PB''A'' = \pi$, como se quería probar.
Sexan:
A_1'': a proxección de A'' sobre $A'B'$; B_1'': a proxección de B'' sobre $A'B'$;
B_2'': a proxección de B'' sobre $B'C'$; C_2'': a proxección de C'' sobre $B'C'$;
C_3'': a proxección de C'' sobre $C'A'$; A_3'': a proxección de A'' sobre $C'A'$;
$a = BC = B''C''$; $b = CA = C''A''$; $c = AB = A''B''$; $p = \frac{a+b+c}{2}$;
$x = A'A_1'' = A'A_3'' \left(= \sqrt{Pot(A', C(A'', r))}\right)$; $y = B'B_1' = B'B_2''$;
$z = C'C_2'' = C'C_3''$; $\alpha = \angle BAC = \angle B''AC'' = \angle B'A'C'$; $\beta = \angle CBA = \angle C''B''A'' = \angle C'B'A'$ e
$\gamma = \angle CBA = \angle C''B''A'' = \angle A'C'B'$.
Hai que probar que $\frac{[A'B'C']}{[ABC]} \geq 9$, ou equivalentemente, que $\frac{[A'B'C']}{[A''B''C'']} \geq 9$. Se k é a razón de semellanza de $A''B''C''$ a $A'B'C'$, tense que $\frac{[A'B'C']}{[A''B''C'']} = k^2$ e que

$$k = \frac{A'B'}{A''B''} = \frac{B'C'}{B''C''} = \frac{C'A'}{C''A''} = \frac{A'B' + B'C' + C'A'}{A''B'' + B''C'' + C''A''}$$
$$= \frac{(A'A_1'' + A''B'' + B_1''B') + (B'B_2'' + B''C'' + C_2''C') + (C'C_3'' + C''A'' + A_3''A')}{A''B'' + B''C'' + C''A''} = \frac{x+c+y+y+a+z+z+b+x}{c+a+b}$$
$$= 2\frac{x+y+z}{a+b+c} + 1$$, co cal o resultado a demostrar é $x + y + z \geq a + b + c$.

Pero $\cot(\angle A_1''A'A'') = \frac{A'A_1''}{A''A_1''}$, é dicir, $x = r\cot\left(\frac{\alpha}{2}\right)$; analogamente, $y = r\cot\left(\frac{\beta}{2}\right)$ e $z = r\cot\left(\frac{\gamma}{2}\right)$.
Ademais, por ser r o raio do círculo circunscrito a $A''B''C''$, do teorema dos senos dedúcese que $2r = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = \frac{a+b+c}{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}$, co cal a desigualdade a verificar pasa a ser:

$$\cot\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \cot\left(\frac{\beta}{2}\right) + \cot\left(\frac{\gamma}{2}\right) \geq 2(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma).$$

<u>Lema 2</u>: $\cot\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \cot\left(\frac{\beta}{2}\right) + \cot\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \cot\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cot\left(\frac{\beta}{2}\right)\cot\left(\frac{\gamma}{2}\right)$.

Proba:
Dedúcese de que $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, pois

$$\frac{\cot\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \cot\left(\frac{\beta}{2}\right) + \cot\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{\cot\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cot\left(\frac{\beta}{2}\right)\cot\left(\frac{\gamma}{2}\right)} = \frac{1}{\cot\left(\frac{\beta}{2}\right)\cot\left(\frac{\gamma}{2}\right)} + \frac{1}{\cot\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cot\left(\frac{\gamma}{2}\right)} + \frac{1}{\cot\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cot\left(\frac{\beta}{2}\right)}$$
$$= \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)\tan\left(\frac{\beta}{2}\right) + \tan\left(\frac{\beta}{2}\right)\tan\left(\frac{\gamma}{2}\right) + \tan\left(\frac{\gamma}{2}\right)\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)\tan\left(\frac{\beta}{2}\right) + \left[\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \tan\left(\frac{\beta}{2}\right)\right]\tan\left(\frac{\gamma}{2}\right)$$
$$\overset{(1)}{=} \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)\tan\left(\frac{\beta}{2}\right) + \frac{\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \tan\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} = \frac{\tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} = 1$$

(1) $\tan\left(\frac{\gamma}{2}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\frac{1}{\tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$; $\tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\tan\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)=\frac{\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)+\tan\left(\frac{\beta}{2}\right)}{1-\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)\tan\left(\frac{\beta}{2}\right)}$.

<u>Lema 3</u>: $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)$.

Proba:
Dedúcese de que $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, pois

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=(\sin\alpha+\sin\beta)+[\sin\gamma-\sin(\alpha+\beta+\gamma)]$$

$$=2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)-2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta+2\gamma}{2}\right)$$

$$=2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\left[-2\sin\left(\frac{\frac{\alpha-\beta}{2}+\frac{\alpha+\beta+2\gamma}{2}}{2}\right)\sin\left(\frac{\frac{\alpha-\beta}{2}-\frac{\alpha+\beta+2\gamma}{2}}{2}\right)\right]$$

$$=-4\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)\sin\left(-\frac{\beta+\gamma}{2}\right)=-4\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\beta}{2}\right)\left[-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\right]=4\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right).$$

Dos lemas 2 e 3 dedúcese que a desigualdade que hai que probar é:
$\cot\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cot\left(\frac{\beta}{2}\right)\cot\left(\frac{\gamma}{2}\right)\ge 8\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)$, ou a súa equivalente: $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)\le\frac{1}{8}$.

<u>Lema 4</u>: $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$, $\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)=\sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{ca}}$ e $\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$.

Proba:

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}}=\sqrt{\frac{[(b+c)-a][(b+c)+a]}{4bc}}=\sqrt{\frac{2(p-b)2(p-c)}{4bc}}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}},$$

e similarmente para as outras dúas igualdades.

Entón $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)\le\frac{1}{8}\Leftrightarrow\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}\sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{ca}}\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}\le\frac{1}{8}$

$$\Leftrightarrow\sqrt{\frac{(p-a)^2(p-b)^2(p-c)^2}{a^2b^2c^2}}\le\frac{1}{8}\Leftrightarrow\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}\le\frac{1}{8}.$$

Aplicando a desigualdade das medias xeométrica e aritmética por parellas aos números positivos $p-a$, $p-b$ e $p-c$ (porque $a<b+c$, $b<c+a$ e $c<a+b$), obtense que

$\sqrt{(p-a)(p-b)}\le\frac{(p-a)+(p-b)}{2}=\frac{c}{2}$, con igualdade se e só se $p-a=p-b$, é dicir, se e só se $a=b$;

$\sqrt{(p-b)(p-c)}\le\frac{(p-b)+(p-c)}{2}=\frac{a}{2}$, con igualdade se e só se $b=c$;

$\sqrt{(p-c)(p-a)}\le\frac{(p-c)+(p-a)}{2}=\frac{b}{2}$, con igualdade se e só se $c=a$.

Multiplicando membro a membro estas tres desigualdades, chégase a que
$(p-a)(p-b)(p-c)\le\frac{abc}{8}$, con igualdade se e só se $a=b=c$, ou sexa, se e só se os centros dos tres círculos son equidistantes, como se quería probar.

Problemas de nivel medio e de Olimpiadas (23)

23.3. Considéranse os polinomios $f(x)=ax^2+bx+c$ con coeficientes reais e que verifican $|f(x)|\le 1$ para $0\le x\le 1$. Achar o máximo valor de $|a|+|b|+|c|$.

Solución de Bruno Salgueiro Fanego (Viveiro, España):

$f(0)=c$; $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{a}{4}+\frac{b}{2}+c$; $f(1)=a+b+c$ implican que $\begin{cases} a+b=-f(0)+f(1) \\ a+2b=-4f(0)+4f\left(\frac{1}{2}\right) \end{cases}$, de onde

$b=-3f(0)+4f\left(\frac{1}{2}\right)-1f(1)\underset{def}{=}[-3,4,-1]$, $a=[2,-4,2]$ e $c=[1,0,0]$. Sexa $s=|a|+|b|+|c|$.

Ao ser $f(x)\le 1$ e $-f(x)\le 1$ para $0\le x\le 1$, tense que:

Se $a\le 0$:
  Se $b\le 0$:
    Se $c\le 0$: $s=-a-b-c=-[2,-4,2]-[-3,4,-1]-[1,0,0]=[0,0,-1]=-f(1)\le 1$;
    Se $c\ge 0$: $s=2f(0)-f(1)\le 2\cdot 1+1=3$.
  Se $b\ge 0$:
    Se $c\le 0$: $s=[-6,8,-3]\le 6\cdot 1+8\cdot 1+3\cdot 1=17$ (igualdade se e só se $f(0)=-1$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=1$ e $f(1)=-1$);
    Se $c\ge 0$: $s\le 5+8+2=15$.

Se $a\ge 0$: aparecerán casos simétricos dos anteriores; en efecto:

Se $b\le 0$:	Se $b\ge 0$:
Se $c\le 0$: $s\le 15$;	Se $c\le 0$: $s\le 3$;
Se $c\ge 0$: $s\le 17$.	Se $c\ge 0$: $s\le 1$.

Por tanto, o máximo valor de s é 17, que aparece nun dos dous casos seguintes:

1) Cando $a\le 0$, $b\ge 0$ e $c\le 0$, acadándose se e só se $-6f(0)+8f\left(\frac{1}{2}\right)-3f(1)=-6\cdot(-1)+8\cdot 1-3\cdot(-1)$, é dicir, se e só se $f(0)=-1$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=1$ e $f(1)=-1$, condicións estas que definen un único polinomio: $f(x)=-8x^2+8x-1$.

2) Cando $a\ge 0$, $b\le 0$ e $c\ge 0$, para o polinomio $f(x)=8x^2-8x+1$.

Problemas de nivel medio e de Olimpiadas (23)

23.4. Sexa O o circuncentro do triángulo acutángulo ABC. As rectas AO, BO, CO intersecan aos lados opostos do triángulo en A_1, B_1, C_1 respectivamente. Supoñamos que o raio do círculo circunscrito a ABC é t, onde t é un número primo, e que OA_1, OB_1 e OC_1 teñen lonxitudes enteiras. Achar os lados do triángulo ABC.

Solución de Bruno Salgueiro Fanego (Viveiro, España):

Sexan $a_1 = OA_1$, $b_1 = OB_1$, $c_1 = OC_1$, C' o pé da altura que parte de C en ABC e O_c o pé da altura que parte de O en ABO.
Como OO_cC_1, $CC'C_1$ son semellantes (triángulos rectángulos co mesmo ángulo en C_1), teñen os lados respectivamente proporcionais; en particular, $\frac{OO_c}{CC'} = \frac{OC_1}{CC_1}$. Así,

$$\frac{[OAB]}{[ABC]} = \frac{\frac{AB \cdot OO_c}{2}}{\frac{AB \cdot CC'}{2}} = \frac{OO_c}{CC'} = \frac{OC_1}{CC_1} = \frac{c_1}{t+c_1}$$; analogamente, $\frac{[OBC]}{[ABC]} = \frac{a_1}{t+a_1}$ e $\frac{[OCA]}{[ABC]} = \frac{b_1}{t+b_1}$.

Entón $1 = \frac{[OBC]+[OCA]+[OAB]}{[ABC]} = \frac{a_1}{t+a_1} + \frac{b_1}{t+b_1} + \frac{c_1}{t+c_1}$, de onde

$$(a_1+t)(b_1+t)(c_1+t) = a_1\left[t^2 + (b_1+c_1)t + b_1c_1\right] + b_1\left[t^2 + (c_1+a_1)t + c_1a_1\right] + c_1\left[t^2 + (a_1+b_1)t + a_1b_1\right];$$
$$t^3 + (a_1+b_1+c_1)t^2 + (a_1b_1+b_1c_1+c_1a_1)t + a_1b_1c_1 = (a_1+b_1+c_1)t^2 + 2(a_1b_1+b_1c_1+c_1a_1)t + 3a_1b_1c_1;$$
$$t\left[t^2 - (a_1b_1+b_1c_1+c_1a_1)\right] = 2a_1b_1c_1 \Rightarrow t \text{ divide a } 2a_1b_1c_1.$$

Como ABC é acutángulo, O é interior a ABC e así $a_1 < t$, $b_1 < t$, $c_1 < t$; polo tanto, ao ser t primo maior ca a_1, b_1 e c_1 e dividir a $2a_1b_1c_1$, resulta que t divide a 2. Como t é primo, $t = 2$, co cal 2 divide a $2a_1b_1c_1$, deducíndose disto que $\frac{1}{a_1b_1c_1}$ é un número enteiro, de onde $a_1 = b_1 = c_1 = 1$, sendo polo tanto ABC equilátero. Pero $t = 2$ é o raio do círculo circunscrito ao triángulo equilátero ABC, co cal, se $a = BC = CA = AB$, do teorema dos senos en ABC resulta que $\frac{a}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)} = 2t$, por ser t o raio do círculo circunscrito a ABC, logo $a = b = c = 2\sqrt{3}$ é a medida de cada un dos lados do triángulo ABC.

Problemas de nivel medio e de Olimpiadas (23)

23.5. Se c é un enteiro positivo, defínese a sucesión (a_n) mediante

$$a_1 = c\,; \qquad a_{n+1} = ca_n + \sqrt{(c^2-1)(a_n^2-1)} \qquad \text{para } n = 1,2,\ldots$$

Demostrar que tódolos a_n son enteiros positivos.

Solución de Bruno Salgueiro Fanego (Viveiro, España):

$(a_{n+1} - ca_n)^2 = \left[\sqrt{(c^2-1)(a_n^2-1)}\right]^2$;

$a_{n+1}^2 - 2ca_{n+1}a_n + c^2a_n^2 = c^2a_n^2 - c^2 - a_n^2 + 1$;

$a_n^2 - 2ca_{n+1}a_n + (a_{n+1}^2 + c^2 - 1) = 0$; $a_n = \dfrac{-(-2ca_{n+1}) \pm \sqrt{(-2ca_{n+1})^2 - 4\cdot 1\cdot (a_{n+1}^2 + c^2 - 1)}}{2\cdot 1}$;

$a_n = \dfrac{2ca_{n+1} \pm 2\sqrt{(c^2-1)(a_{n+1}^2-1)}}{2}$; $a_n = ca_{n+1} \pm \sqrt{(c^2-1)(a_{n+1}^2-1)}$;

o signo $+$ non é válido, porque nese caso $a_n = ca_{n+1} + \sqrt{(c^2-1)(a_{n+1}^2-1)}(= a_{n+2}) \geq ca_{n+1} > a_{n+1}$, o cal é contraditorio con que $a_{n+1}(\geq ca_n) > a_n$.

Entón $a_n = ca_{n+1} - \sqrt{(c^2-1)(a_{n+1}^2-1)}$; $a_n = ca_{n+1} - (a_{n+2} - ca_{n+1})$; $a_n = 2ca_{n+1} - a_{n+2}$; $a_{n+2} = 2ca_{n+1} - a_n$.

Probarase agora o resultado, a partir destas consideracións e utilizando indución en n:

1º) $a_1 = c$ é un enteiro positivo (por hipótese); $a_2 = c^2 + \left|c^2 - 1\right| = 2c^2 - 1$ é un enteiro tamén positivo porque $a_2 = 2c^2 - 1 \geq 2\cdot 1^2 - 1 = 1 > 0$.

2º) Se $n \geq 1$ e a_n e a_{n+1} son enteiros positivos, entón $a_{n+2} = 2ca_{n+1} - a_n$ é un enteiro (diferenza de enteiros) que é positivo porque $a_{n+2} = 2ca_{n+1} - a_n \geq 2\cdot 1\cdot a_{n+1} - a_n \geq 2a_n - a_n = a_n > 0$.

XLII Olimpiada Matemática Española

Fase nacional 2006 (Sevilla)

Primera sesión (24 marzo)

Problema 1

Sea $P(x)$ un polinomio con coeficientes enteros. Demostrar que si existe un entero k tal que ninguno de los enteros $P(1), P(2), \ldots, P(k)$ es divisible por k, entonces $P(x)$ no tiene raíces enteras.

Problema 2

Las dimensiones de un paralelepípedo de madera son enteras. Pintamos toda su superficie (las seis caras), lo cortamos en cubos de una unidad de arista y observamos que exactamente la mitad de los pequeños cubos no tienen ninguna cara pintada. Probar que el número de paralelepípedos con tal propiedad es finito.

(Puede resultar útil tener en cuenta que $\sqrt[3]{\frac{1}{2}} = 0,79\ldots < 0.8$).

Problema 3

ABC es un triángulo isósceles con $AB = AC$. Sea P un punto cualquiera de la circunferencia tangente a los lados AB en B y a AC en C.
Llamamos a, b y c a las distancias desde P a los lados BC, AC y AB respectivamente. Probar que:

$$a^2 = b \cdot c$$

No está permitido el uso de calculadoras. Cada problema se puntúa sobre 7 puntos. E1 tiempo de cada sesión es de 3,5 horas.

XLII Olimpiada Matemática Española

Fase nacional 2006 (Sevilla)
Segunda sesión (25 marzo)

Problema 4
Hallar todas las funciones f : (O, ∞) -» que satisfacen la ecuación

$$f(x)f(y)+f(\frac{\lambda}{x})+f(\frac{\lambda}{y})=2f(xy)$$

para todo par de números reales *x* e *y* positivos, siendo *A* un número real positivo tal

que $f(\lambda)=1$

Problema *5*
Probar que el producto de cuatro naturales consecutivos no puede ser ni cuadrado ni cubo perfecto.

Problema 6
Las diagonales *AC* y *BD* de un cuadrilátero convexo *ABCD* se cortan en *E*. Denotamos por $S_l S_2$ y *S* a las áreas de los triángulos *ABE*, *CDE y* del cuadrilátero *ABCD* respectivamente.
Prueba que $\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}\leq\sqrt{S}$.

¿Cuándo se alcanza la igualdad?

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos. El tiempo de cada sesión es de 3,5 horas.

Problema 106

Propuesto por José Luis Díaz Barrero, Barcelona, España.

Sean a, b, c tres números positivos. Demostrar que

$$\sum_{ciclica}\left(\frac{1}{a+b}\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}+\frac{c^2}{a^2}}\right)\geq\frac{3\sqrt{3}}{1+\sqrt[3]{abc}}.$$

Solución de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, España.

El enunciado tal y como se presenta aquí contiene obviamente una errata, pues tomando a=b=c=2, se tiene que la desigualdad del enunciado se convierte en

$$\sum_{ciclica}\left(\frac{1}{4}\sqrt{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{4}\geq\frac{3\sqrt{3}}{1+\sqrt[3]{2^3}}=\frac{3\sqrt{3}}{3},$$

que es obviamente falso. Propongo y demuestro dos enunciados alternativos:

Enunciado alternativo 1:

Sean a, b, c tres números positivos. Demostrar que

$$\sum_{ciclica}\left(\frac{1}{a+1}\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}+\frac{c^2}{a^2}}\right)\geq\frac{3\sqrt{3}}{1+\sqrt[3]{abc}}.$$

Se tiene que

$$\sum_{ciclica}\left(\frac{1}{a+1}\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}+\frac{c^2}{a^2}}\right)=\sum_{ciclica}\left(\frac{1}{a(a+1)}\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right)$$
$$=\sqrt{a^2+b^2+c^2}\left(\frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{b(b+1)}+\frac{1}{c(c+1)}\right).$$

Luego como

$$\frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{b(b+1)}+\frac{1}{c(c+1)}\geq\frac{3}{\sqrt[3]{abc(a+1)(b+1)(c+1)}}=\frac{3}{\sqrt[3]{abc}\sqrt[3]{(a+1)(b+1)(c+1)}},$$

para demostrar el enunciado alternativo nos bastaría con demostrar que

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}\frac{1}{\sqrt[3]{(a+1)(b+1)(c+1)}}\geq\frac{\sqrt[3]{abc}}{1+\sqrt[3]{abc}}.$$

Enunciado alternativo 2:

Sean a, b, c tres números positivos. Demostrar que

$$\sum_{ciclica}\left(\frac{1}{1+b}\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}+\frac{c^2}{a^2}}\right)\geq\frac{3\sqrt{3}}{1+\sqrt[3]{abc}}.$$

Se tiene que

$$\sum_{ciclica}\left(\frac{1}{1+b}\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}+\frac{c^2}{a^2}}\right)=\sum_{ciclica}\left(\frac{1}{a(1+b)}\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right)$$
$$=\sqrt{a^2+b^2+c^2}\left(\frac{1}{a(b+1)}+\frac{1}{b(c+1)}+\frac{1}{c(a+1)}\right).$$

Luego como

$$\frac{1}{a(b+1)}+\frac{1}{b(c+1)}+\frac{1}{c(a+1)}\geq\frac{3}{\sqrt[3]{abc(a+1)(b+1)(c+1)}}=\frac{3}{\sqrt[3]{abc}\sqrt[3]{(a+1)(b+1)(c+1)}},$$

nos bastaría con demostrar, igual que antes, que

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}\frac{1}{\sqrt[3]{(a+1)(b+1)(c+1)}}\geq\frac{\sqrt[3]{abc}}{1+\sqrt[3]{abc}}.$$

Utilicemos ahora la siguiente notación para las medias cuadrática y geométrica de *a*,*b*,*c*:

$$Q=\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}\ ;\qquad\qquad G=\sqrt[3]{abc}\ .$$

Ahora bien,

$$(a+1)(b+1)(c+1)=abc+ab+bc+ca+a+b+c+1$$
$$\leq G^3+a^2+b^2+c^2+3Q+1\leq Q^3+3Q^2+3Q+1=(Q+1)^3,$$

donde se han utilizado la desigualdad del producto escalar, la desigualdad entre medias aritmética y cuadrática y la desigualdad entre medias geométrica y cuadrática. Luego la desigualdad que implica ambos enunciados alternativos se puede escribir como

$$\frac{Q}{\sqrt[3]{(a+1)(b+1)(c+1)}}\geq\frac{G}{G+1}.$$

Pero esto es siempre cierto por la desigualdad recién demostrada y la desigualdad entre medias geométrica y cuadrática, ya que

$$\frac{Q}{\sqrt[3]{(a+1)(b+1)(c+1)}}\geq\frac{Q}{Q+1}=\frac{1}{1+\frac{1}{Q}}\geq\frac{1}{1+\frac{1}{G}}=\frac{G}{G+1}.$$

Luego se cumplen los dos enunciados alternativos propuestos, dándose la igualdad si y sólo si *a*=*b*=*c*, ya que todas las desigualdades utilizadas en la demostración se convierten en igualdades si y sólo si *a*=*b*=*c*.

Problema 111.

Si x_1, x_2, ..., x_m son números reales estrictamente positivos, m natural y $x > 1$, calcular

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[x]{\frac{\left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)^x - \sum_{i=1}^{m}(x_i)^x}{m^x - m}} \tag{1}$$

Solución:

Denotemos por L al límite buscado.

En primer lugar, observamos que para $m = 1$ ocurre que tanto el numerador como el denominador de la fracción que interviene se anulan, por tanto supondremos $m > 1$.

Acotaremos el radicando, superior e inferiormente, por expresiones que tengan el mismo límite, y se pueda calcular de un modo sencillo, así el límite buscado existirá y coincidirá con este último.

a) Acotación superior.

Puesto que los números x_i son todos estrictamente positivos y $x > 1$, tenemos la desigualdad

$$\left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)^x - \sum_{i=1}^{m}(x_i)^x \leq \left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)^x. \tag{2}$$

Además, dado que $m > 1$ y $x > 1$, también podemos acotar el denominador de la siguiente forma,

$$m^x - m \geq m^x - m^{x-1} = m^{x-1}(m-1). \tag{3}$$

Sustituyendo estas dos últimas desigualdades, (2) y (3), en la expresión inicial (1), deducimos

$$\sqrt[x]{\frac{\left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)^x - \sum_{i=1}^{m}(x_i)^x}{m^x - m}} \leq \sqrt[x]{\frac{\left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)^x}{m^{x-1}(m-1)}} = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_i}{m^{\frac{x-1}{x}}(m-1)^{\frac{1}{x}}},$$

de donde, tomando límites, se sigue

$$L \leq \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_i. \tag{4}$$

b) Acotación inferior.

Sacando factor común y operando, llegamos a

$$\left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)^x - \sum_{i=1}^{m}(x_i)^x = \left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)^x \left[1 - \frac{\sum_{i=1}^{m}(x_i)^x}{\left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)^x}\right] = \left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)^x \left[1 - \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{x_i}{\sum_{j=1}^{m} x_j}\right)^x\right].$$

Entonces, dado que evidentemente $m^x - m \leq m^x$, podemos establecer

$$\sqrt[x]{\frac{\left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)^x - \sum_{i=1}^{m}(x_i)^x}{m^x - m}} \geq \frac{1}{m}\left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)\sqrt[x]{1 - \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{x_i}{\sum_{j=1}^{m} x_j}\right)^x}. \tag{5}$$

Ahora bien, el radicando del segundo miembro de la desigualdad anterior es un número real comprendido entre 0 y 1, que además tiende a 1 cuando x tiende a $+\infty$. Esto se debe a que, para cualquiera de los x_i, tenemos $0 < \dfrac{x_i}{\sum_{j=1}^m x_j} < 1$ y, si $x' > x > 1$,

$$0 < \sum_{i=1}^m \left(\frac{x_i}{\sum_{j=1}^m x_j}\right)^{x'} < \sum_{i=1}^m \left(\frac{x_i}{\sum_{j=1}^m x_j}\right)^{x} < \sum_{i=1}^m \frac{x_i}{\sum_{j=1}^m x_j} = 1.$$

Deducimos entonces $L \geq \dfrac{1}{m}\displaystyle\sum_{i=1}^m x_i$, desigualdad que junto con (4), nos conduce a

$$L = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m x_i,$$

es decir, el límite buscado es la media aritmética de los números x_i, $i = 1, \ldots, m$.

Problema 112

Solución de Miguel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca, España.

La condición $a^3+b^3+c^3=0$ reduce la identidad $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)$ a la igualdad

$$(a+b+c)^3=3(a+b)(b+c)(c+a)$$

la cual implica $a+b\neq 0$, $b+c\neq 0$, $c+a\neq 0$ y $a+b+c\neq 0$. (En efecto, si, p. e., $a+b=0$ resultaría $c^3=0$ o, equivalentemente, $c=0$ que es contrario a la hipótesis).

A su vez,

$$\begin{aligned} a^3+b^3+c^3=0 \Leftrightarrow -a^3 &= b^3+c^3 \\ &= (b+c)\left(b^2-bc+c^2\right) \\ &= (b+c)\left[(b-c)^2+bc\right] \end{aligned}$$

y siendo, según se ha visto, $b+c\neq 0$, obtenemos

$$(b-c)^2+bc=\frac{-a^3}{b+c} \quad ,$$

$$(b-c+a)(b-c-a)+bc=(b-c)^2-a^2+bc=\frac{-a^3}{b+c}-a^2=\frac{-a^2(a+b+c)}{b+c}$$

y, por sustitución,

$$\sum_{\text{cíclica}}\frac{(b-c)^2+bc}{(b-c+a)(b-c-a)+bc}=\sum_{\text{cíclica}}\frac{a}{a+b+c}=1 \quad .$$

Problema 113

Solución de Miguel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca, España.

Pues $AE = AB \cdot \cos A$, $AF = CA \cdot \cos A$, $BF = BC \cdot \cos B$ y $CE = BC \cdot \cos C$, la condición del enunciado, habida cuenta del teorema de los senos, se escribe

$$(\sin B + \sin C)\cos A = (\cos B + \cos C)\sin A \quad ,$$

de donde

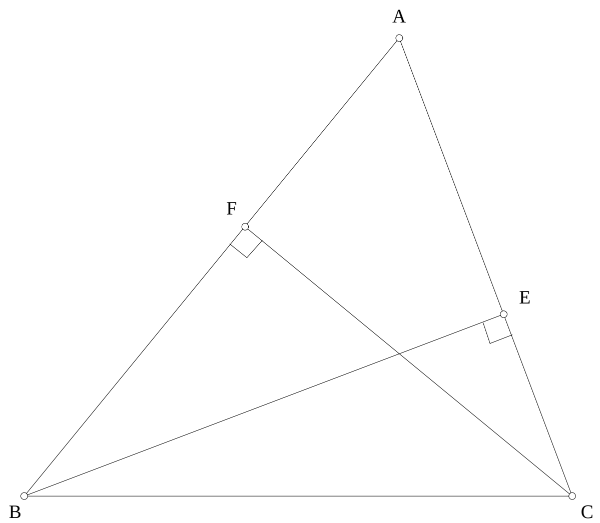
$$\begin{aligned}\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} &= \frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C} \\ &= \frac{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}{2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}} \\ &= \tan\frac{B+C}{2} \\ &= \cot\frac{A}{2}\end{aligned}$$

que implica

$$A + \frac{A}{2} = 90^{\circ}$$

y

$$A = 60^{\circ}$$

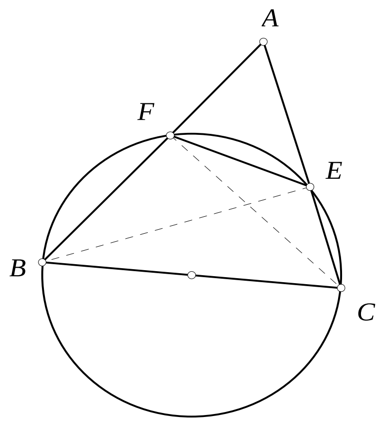


Problema 113

Propuesto por K.R.S.Sastry, Bangalore, India

En el triángulo *ABC*; *BE* y *CF* son alturas, con $E \in AC$, $F \in AB$

Si *AE* + *AF* = *BF* + *CE*; calcular el ángulo *A* del triángulo.



Solución:

Siendo *E* y *F* los pies de las alturas, los puntos *B*, *C*, *E*, *F* son concíclicos siendo *BC* el diámetro de la circunferencia que los contiene.

Trivialmente se tiene

$$AE = (AF + BF)\cos A$$
$$AF = (AE + EC)\cos A$$

sumando y teniendo en cuenta la condición del enunciado.

$$AE + AF = (AF + BF + AE + EC)\cos A = 2(AE + AF)\cos A \Rightarrow \cos A = \frac{1}{2} \Rightarrow A = 60º$$

Problema 114.

Hallar los menores números naturales x, y, z; λ, μ, ν que verifican el sistema de ecuaciones

$$x + y = \lambda z, \qquad y + z = \mu x, \qquad z + x = \nu y,$$

siendo $\lambda > \mu > \nu$.

Solución:

Sumando las tres igualdades, obtenemos

$$2(x + y + z) = \lambda z + \mu x + \nu y > \nu(x + y + z),$$

de donde deducimos $\boxed{\nu = 1}$.

Si sumamos ahora solamente las dos primeras igualdades, llegamos a

$$x + 2y + z = \lambda z + \mu x.$$

Teniendo en cuenta que $\nu = 1$, la tercera igualdad del enunciado es $z + x = y$, y sustituyendo en la igualdad anterior, deducimos

$$3(x + z) > \mu(x + z),$$

de donde concluimos $\mu < 3$, es decir, $\mu = 1$ ó $\mu = 2$, pero como μ debe ser mayor que ν, la única solución es $\boxed{\mu = 2}$.

Ahora bien, considerando estos valores de μ y ν, si sumamos las dos últimas igualdades del enunciado, tenemos

$$x + y + 2z = 2x + y,$$

siendo, pues, $2z = x$ y, por tanto, a partir de la tercera igualdad, $y = 3z$, relaciones que sustituidas en la primera igualdad nos aseguran que $\boxed{\lambda = 5}$.

Por tanto, el sistema se ha simplificado:

$$x + y = 5z, \qquad y + z = 2x, \qquad z + x = y,$$

y finalmente, como ya sabemos que $y = 3z$ y $2z = x$, la solución con los naturales más pequeños será evidentemente $\boxed{z = 1,\ y = 3 \text{ y } x = 2}$.

Problema 115

Propuesto por el editor

Un triángulo está inscrito en la elipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

y tiene su baricentro en el centro de la elipse. Determinar el lugar geométrico del circuncentro del triángulo.

Solución de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, Navarra, España.

Dada cualquier elipse de la forma

$$\frac{\left(x-x_1\right)^2}{a^2}+\frac{\left(y-y_1\right)^2}{b^2}=k\ ,$$

con k positivo, tiene 0, 1 o 2 puntos comunes con la elipse dada, pero nunca más. Esto es trivial considerando que una misma transformación de coordenadas convertiría a las dos elipses en circunferencias, preservando los puntos de tangencia o coincidencia.

Constrúyase entonces una tal elipse con k=3, y siendo (x_1,y_1) un punto cualquiera de la elipse dada. Se comprueba trivialmente que $(-x_1,-y_1)$ es exterior a la elipse construida pero está sobre la elipse dada. Sin embargo, (x_1,y_1) es obviamente interior a la elipse construida estando también sobre la dada. Luego ambas elipses deben cortarse en exactamente dos puntos.

Sean ahora (x_2,y_2) y (x_3,y_3) dos puntos tales que el triángulo formado por estos dos puntos y (x_1,y_1) está inscrito en la elipse dada y tiene su baricentro en el centro de la elipse dada. Entonces, han de ser nulas la suma de los x_i y la suma de los y_i, luego

$$\frac{\left(x_2-x_1\right)^2}{a^2}+\frac{\left(y_2-y_1\right)^2}{b^2}=\frac{2x_2{}^2+2x_1{}^2-\left(x_2+x_1\right)^2}{a^2}+\frac{2y_2{}^2+2y_1{}^2-\left(y_2+y_1\right)^2}{b^2}$$

$$=2\left(\frac{x_2{}^2}{a^2}+\frac{y_2{}^2}{b^2}\right)+2\left(\frac{x_1{}^2}{a^2}+\frac{y_1{}^2}{b^2}\right)-\left(\frac{\left(-x_3\right)^2}{a^2}+\frac{\left(-y_3\right)^2}{b^2}\right)=3.$$

Luego (x_2,y_2) es uno de los dos puntos de intersección de la elipse dada y la construida, siendo el otro obviamente (x_3,y_3), pues también debe satisfacer la anterior relación. Se concluye entonces que, dado un punto cualquiera de una elipse, existen exactamente otros dos puntos de la elipse que forman con el primero un triángulo inscrito en la elipse y cuyo baricentro es el centro de la elipse.

Hallemos ahora dichos puntos, que por lo tanto deben satisfacer las ecuaciones de la elipse dada y la construida:

$$2\left(\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}\right)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{x_1^{\ 2}}{a^2}+\frac{y_1^{\ 2}}{b^2}-3=-1; \qquad \frac{y}{b}=-\frac{b}{y_1}\left(\frac{1}{2}+\frac{x_1x}{a^2}\right);$$

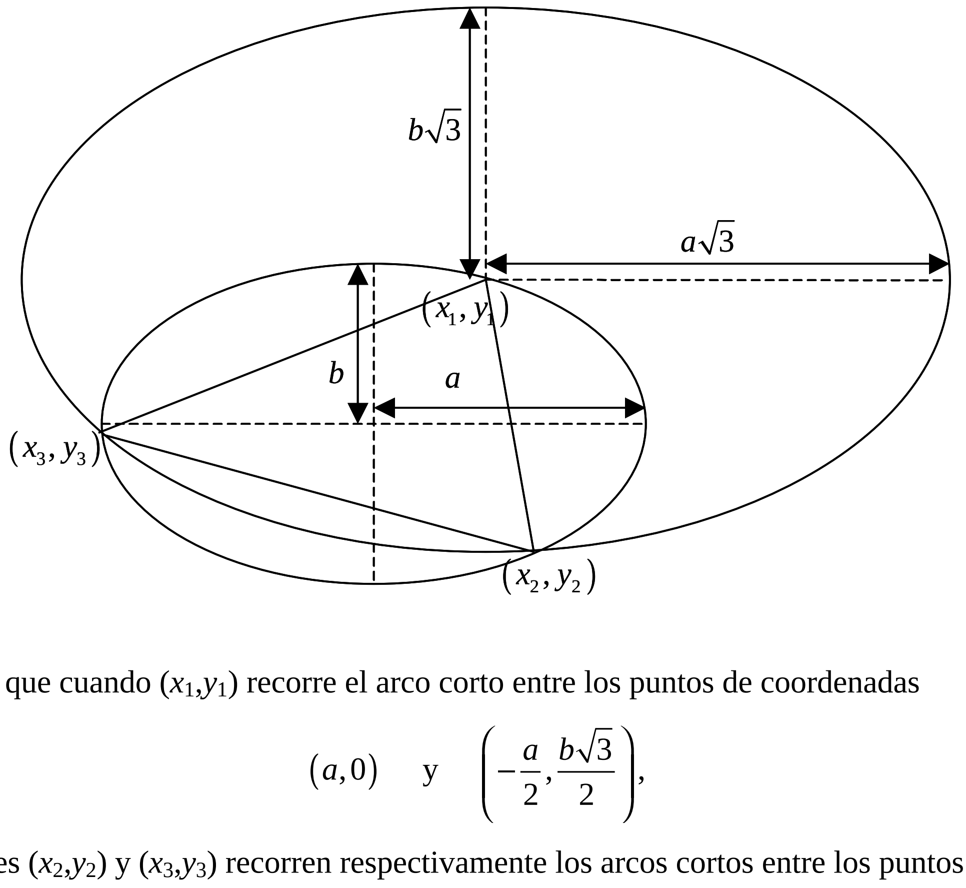
$$1=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\left(1+\frac{b^2x_1^{\ 2}}{a^2y_1^{\ 2}}\right)\frac{x^2}{a^2}+\frac{b^2x_1x}{a^2y_1^{\ 2}}+\frac{b^2}{4y_1^{\ 2}}=\frac{b^2x^2}{a^2y_1^{\ 2}}+\frac{b^2x_1x}{a^2y_1^{\ 2}}+\frac{b^2}{4y_1^{\ 2}};$$

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{x_1}{2a}\right)^2=\frac{x^2}{a^2}+\frac{x_1x}{a^2}+\frac{x_1^{\ 2}}{4a^2}=\frac{y_1^{\ 2}}{b^2}-\frac{1}{4}+\frac{x_1^{\ 2}}{4a^2}=\left(\frac{y_1\sqrt{3}}{2b}\right)^2.$$

Luego sin pérdida de generalidad, podemos tomar

$$\frac{x_2}{a}=-\frac{x_1}{2a}+\frac{y_1\sqrt{3}}{2b}; \qquad \frac{y_2}{b}=-\frac{y_1}{2b}-\frac{x_1\sqrt{3}}{2a};$$

$$\frac{x_3}{a}=-\frac{x_1}{2a}-\frac{y_1\sqrt{3}}{2b}; \qquad \frac{y_3}{b}=-\frac{y_1}{2b}+\frac{x_1\sqrt{3}}{2a}.$$



Nótese que cuando (x_1,y_1) recorre el arco corto entre los puntos de coordenadas

$$(a,0) \quad \text{y} \quad \left(-\frac{a}{2},\frac{b\sqrt{3}}{2}\right),$$

entonces (x_2,y_2) y (x_3,y_3) recorren respectivamente los arcos cortos entre los puntos

$$\left(-\frac{a}{2},-\frac{b\sqrt{3}}{2}\right) \quad \text{y} \quad (a,0); \qquad \left(-\frac{a}{2},\frac{b\sqrt{3}}{2}\right) \quad \text{y} \quad \left(-\frac{a}{2},-\frac{b\sqrt{3}}{2}\right).$$

Luego los tres puntos recorren toda la elipse. Calculamos ahora las mediatrices de los lados cuyo vértice común es (x_1,y_1). Las pendientes serán

$$-\frac{x_{2,3}-x_1}{y_{2,3}-y_1}=-\frac{abx_1\sqrt{3}\mp a^2y_1}{aby_1\sqrt{3}\pm b^2x_1}=\frac{a}{b}\frac{4abx_1y_1\mp\left(a^2y_1^{\,2}+b^2x_1^{\,2}\right)\sqrt{3}}{b^2x_1^{\,2}-3a^2y_1^{\,2}}=\frac{4a^2x_1y_1\mp a^3b\sqrt{3}}{4b^2x_1^{\,2}-3a^2b^2}\,.$$

Deberán además dichas mediatrices pasar por los puntos medios de dichos lados:

$$h=\frac{y_1+y_{2,3}}{2}-\frac{4a^2x_1y_1\mp a^3b\sqrt{3}}{4b^2x_1^{\,2}-3a^2b^2}\frac{x_1+x_{2,3}}{2}=\frac{a^2-b^2}{4ab^2}\frac{3a^3y_1-4ax_1^{\,2}y_1\pm 4bx_1^{\,3}\sqrt{3}\mp 3a^2bx_1\sqrt{3}}{\left(4x_1^{\,2}-3a^2\right)}$$

$$=-\frac{a^2-b^2}{4ab^2}\left(ay_1\mp bx_1\sqrt{3}\right).$$

Por lo tanto, el circuncentro (x_0,y_0) ha de cumplir

$$y_0=\frac{4a^2x_1y_1\mp a^3b\sqrt{3}}{4b^2x_1^{\,2}-3a^2b^2}x_0-\frac{a^2-b^2}{4ab^2}\left(ay_1\mp bx_1\sqrt{3}\right);$$

$$\frac{2a^3b\sqrt{3}}{4b^2x_1^{\,2}-3a^2b^2}x_0=\frac{a^2-b^2}{2ab}x_1\sqrt{3}\,;\qquad\qquad \frac{x_0}{b}=\frac{a^2-b^2}{4ab}\left(4\frac{x_1^{\,2}}{a^2}-3\right)\frac{x_1}{a}\,;$$

$$y_0=\frac{4a^2x_1y_1}{4b^2x_1^{\,2}-3a^2b^2}x_0-\frac{a^2-b^2}{4b^2}y_1\,;\qquad\qquad \frac{y_0}{a}=\frac{a^2-b^2}{4ab}\left(4\frac{x_1^{\,2}}{a^2}-1\right)\frac{y_1}{b}\,.$$

Ahora bien, de aquí se obtiene que

$$\frac{x_0^{\,2}}{b^2}+\frac{y_0^{\,2}}{a^2}=\left(\frac{a^2-b^2}{4ab}\right)^2\left[16\frac{x_1^{\,6}}{a^6}-24\frac{x_1^{\,4}}{a^4}+9\frac{x_1^{\,2}}{a^2}+16\frac{x_1^{\,4}y_1^{\,2}}{a^4b^2}-8\frac{x_1^{\,2}y_1^{\,2}}{a^2b^2}+\frac{y_1^{\,2}}{b^2}\right]$$

$$=\left(\frac{a^2-b^2}{4ab}\right)^2\left(-8\frac{x_1^{\,4}}{a^4}-8\frac{x_1^{\,2}y_1^{\,2}}{a^2b^2}+9\frac{x_1^{\,2}}{a^2}+\frac{y_1^{\,2}}{b^2}\right)=\left(\frac{a^2-b^2}{4ab}\right)^2\left(\frac{x_1^{\,2}}{a^2}+\frac{y_1^{\,2}}{b^2}\right)=\left(\frac{a^2-b^2}{4ab}\right)^2.$$

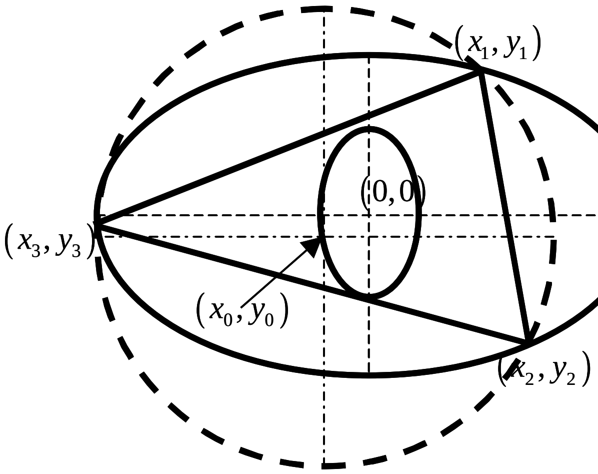
Luego el circuncentro del triángulo está sobre una elipse cuyo centro coincide con el de la elipse dada y cuyos semiejes en las direcciones x e y miden, respectivamente,

$$\frac{\left|a^2-b^2\right|}{4a},\qquad\qquad \frac{\left|a^2-b^2\right|}{4b}.$$

Es decir, es una elipse que se puede obtener a partir de la dada mediante una rotación de $p/2$ alrededor de su centro y una homotecia sobre el mismo punto de razón

$$\frac{\left|a^2-b^2\right|}{4ab}.$$

Al recorrer (x_1,y_1) el arco antes mencionado de la elipse dada, se comprueba trivialmente que (x_0,y_0) recorre toda la elipse descrita. Luego todo punto de dicha elipse es el circuncentro de un triángulo inscrito en la elipse dada en el enunciado, y cuyo baricentro es el centro de dicha elipse.



Recíprocamente, dado un punto cualquiera de la elipse que hemos hallado, podemos resolver la ecuación cúbica en x

$$\frac{x_0}{\dfrac{a^2-b^2}{4a}} = \frac{x}{a}\left(2\frac{x}{a}+\sqrt{3}\right)\left(2\frac{x}{a}-\sqrt{3}\right),$$

cuyas tres soluciones corresponden a las coordenadas x de los tres vértices de dicho triángulo.

Problemas 116-120

Problema 116. *Propuesto por Doru Popescu Anastasiu y Miguel Amengual Covas (Slatina, Rumania, y Cala Figuera, España)*

Si los números reales x, y verifican la condición

$$\sqrt{x^2-3x+3}+\sqrt{y^2-3y+3}=1,$$

demostrar que

$$x^2+y^2\leq 2\left(x+y\right).$$

Problema 117. *Propuesto por José Luis Díaz Barrero (Barcelona, España)*

Sean a, b, c los lados del triángulo ABC, y sean r, r_a, r_b, r_c los radios del círculo inscrito y de los exinscritos al triángulo. Demostrar que

$$\left(\frac{a^3}{r_a}+\frac{b^3}{r_b}+\frac{c^3}{r_c}\right)\left(\sum_{cíclica}\frac{\cos^2\left(A/2\right)}{\left(b+c\right)^3}\right)\leq\frac{1}{2r}\sqrt{\frac{1}{3}}$$

Problema 118. *Propuesto por José Luis Díaz Barrero (Barcelona, España)*

Resolver, en el conjunto de los números reales, el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{c} x+y+z=6 \\ xy+yz+zx=9 \\ x^3+y^3+z^3=63 \end{array}\right\}$$

Problema 119. *Propuesto por el editor.*

Demostrar que las ecuaciones

$$\begin{aligned} ax^3+3bx^2+d &= 0, \\ bx^3+3dx^2+e &= 0 \end{aligned}$$

tienen una raíz común si

$$\left(ae-4bd\right)^3=27\left(ad^2+b^2e\right)^2.$$

Problema 120. *Propuesto por el editor.*

Demostrar que el cuadrado del diámetro del círculo circunscrito al triángulo formado por las rectas

$$\begin{aligned} ax^2+2hxy+by^2 &= 0, \\ lx+my+1 &= 0 \end{aligned}$$

es

$$\frac{\left[\left(a-b\right)^2+4h^2\right]\left(l^2+m^2\right)}{\left(am^2-2hlm+bl^2\right)^2}.$$

DIVERTIMENTOS MATEMÁTICOS (24)

Citas de *Mathematical Circles,* de Howard W.Eves

Howard W. Eves publicó en la colección de la Mathematical Association of America una enorme cantidad de anécdotas relacionadas con las matemáticas. Recogemos algunas de ellas.

- Leo Moser comenta: “Se dice que solamente tres personas han leído los *Principia Matemática,* de Bertrand Russell y Alfred Whitehead….ellos dos y el corrector de pruebas…”
- G.Hardy (1877-1947) no solía perder tiempo repitiendo algún concepto presentado en su clase anterior, pues daba por sentado que sus estudiantes lo recordaban. En una ocasión, uno de sus cursos fue interrumpido por unas vacaciones largas. En su primera clase después de las vacaciones, subió al encerado con la tiza en la mano y comenzó la clase: “….De ahí se deduce que….”
- Helmut Hasse visitó a Hardy en 1933. En su cuarto de Trinity College vió los retratos de Lenin, Jesucristo y Hobbs (un famoso jugador de cricket, deporte al que Hardy era muy aficionado). Cuando le preguntó por qué precisamente esos tres personajes, Hardy contestó: “Porque, en mi opinión, son las tres únicas personalidades que han conseguido al 100% lo que querían”.
- Una noche, en Nueva York, Albert Einstein asistió a un banquete al que había sido especialmente invitado. Su esposa, resfriada, no pudo acompañarle. Era un banquete de gala, con los caballeros de corbata blanca y las señoras con generosos escotes bajo las capas. Cuando volvió a casa, su mujer empezó a preguntarle como había estado el festejo….Él empezó a hablarle de los importantes científicos presentes, pero ella le interrumpió en seguida: “No me importa eso. ¿Cómo iban vestidas las señoras?”
  “Realmente, no lo sé, respondió Einstein. Por encima de la mesa no llevaban nada, y no iba a mirar por debajo…”
- Una frase atribuida a Polya: “Las matemáticas consisten en probar las cosas más obvias de la manera menos evidente posible”
- Terminamos con la famosa cita en Latín de san Agustín: *Bono christiano sive mathematici sive quilibet inpie divinantium, maxime dicentes vera, cavendi sunt, ne consortio daemonicorum animam pacto quodam societatis inretiant.*
  Aquí, la palabra *mathematici* debe traducirse por *astrólogos.*

COMENTARIO DE PÁGINAS WEB (24)

La página web de Francisco Javier García Capitán

http://garciacapitan.auna.com

Francisco Javier García Capitán, profesor del I.E.S. “Álvarez Cubero”, de Priego de Córdoba, ha incluido en su interesantísima página web, desde los ejercicios propuestos a sus alumnos de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato hasta artículos sobre coordenadas baricéntricas, una herramienta muy utilizada en el siglo XIX y comienzos del XX para obtener resultados sobre geometría del triángulo, y cuya utilización en la actualidad podría resultar increíble, pero que los lectores de la revista *Forum Geometricorum* **(**es digital y también, como la nuestra, gratuita) o los miembros del grupo Hyacinthus conocen bien y emplean profusamente en sus investigaciones sobre puntos notables del triángulo. También la conocerán los lectores de *Crux Mathematicorum.*

Hay también un enlace con la página de Ricardo Barroso, Laboratorio virtual de triángulos con Cabri (comentada en un número anterior de esta revista) y una preciosa colección de problemas San Gaku, japoneses. Pero la mejor recomendación que se puede hacer al lector de esta nota es que la visite. No quedará defraudado, sin ninguna duda. La página es un excelente ejemplo de cómo combinar la Geometría clásica con las nuevas tecnologías. Los alumnos del I.E.S. “Álvarez Cubero” son afortunados por contar entre sus profesores a García Capitán.

Valladolid, mayo de 2006

Francisco Bellot Rosado

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI

Número

25

Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática
ISSN 1698-677X

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

Número 25 (Mayo - Junio 2006)
ISSN – 1698-277X

Índice

Artículos, notas y lecciones de preparación olímpica

Triángulos armónicos, por K.R.S. Sastry
Bibliografía de Olimpiadas, por F. Bellot

Problemas de nivel medio y de Olimpiadas

Presentamos los problemas propuestos en la Competición Matemática Mediterránea (Memorial Meter O'Halloran) 2006 y en la Olimpiada Internacional de matemáticas 2006, celebrada en Eslovenia.

Problemas para los más jóvenes 25

Presentamos algunos problemas de la XIV Olimpiada Provincial de Valladolid para alumnos de 13-15 años de edad. Agradecemos a la Prof. Encarna Reyes, Presidenta Provincial, por habernos facilitado los problemas.

Problemas

Resueltos:

Problema 116: Los proponentes del problema, así como otro lector, advierten que, tal como está planteado, el problema no tiene solución. Pedimos disculpas a todos los lectores y en el número 26 de la REOIM se publicará una versión corregida del problema.

Problema 117: Sigue abierto, no se han recibido soluciones (excepto del proponente).

Problema 118: Recibidas soluciones de: José Carlos García Barro, Mondoñedo, España; Luis Gómez Sánchez, La Punta, Callao, Perú; Glauber Moreno Barbosa, Río de Janeiro, Brasil; Cristóbal Sánchez Rubio, Benicassim, España; Vicente Vicario García, Huelva, España; y el proponente. Presentamos la solución de Sánchez Rubio.

Problema 119: Recibida la solución de José Luis Díaz Barrero, Barcelona, España, que presentamos.

Problema 120: Sigue abierto, no se han recibido soluciones.

Problemas propuestos 121-125

Divertimentos matemáticos 25

Algunas anécdotas, de diversas fuentes.

Comentario de páginas web

La página web de la Escuela Superior Politécnica del Litoral (ESPOL), de Guayaquil, Ecuador

Valladolid, julio de 2006
Francisco Bellot Rosado

TRIÁNGULOS ARMÓNICOS
K.R.S.SASTRY, Bangalore, India

Es bien conocido que tres números e, f, g están en progresión aritmética (AP) si $f - e = g - f$. Además, $f = \frac{e+g}{2}$ es la media aritmética de los números e, g.

Algunos triángulos pueden tener las longitudes de los lados en progresión aritmética. Tales triángulos se llaman *triángulos de Hoppe* $[1, 2]$. Ejemplos de estos triángulos son los de lados $(3, 5, 7)$, $(3, 4, 5)$ o $(13, 14, 15)$. El segundo ejemplo es un triángulo rectángulo, llamado *pitagórico,* como es bien conocido. Además, el segundo y el tercer ejemplo tienen área entera, que se puede comprobar por medio de la fórmula de Herón. Esos triángulos se llaman *heronianos.*

Tres números (l, m, n) están en progresión geométrica(GP) si $\frac{m}{l} = \frac{n}{m}$, y $m = \sqrt{\ln}$ es la media geométrica de l y n. Algunos triángulos pueden tener las longitudes de sus lados en GP; tales triángulos se llaman *auto-alturas (self-altitude)*$[3, 4]$. Un ejemplo de tales triángulos es $(4, 6, 9)$.

Tres números (x, y, z) están en progresión armónica (HP) si sus inversos están en PA, es decir, $\frac{1}{y} - \frac{1}{x} = \frac{1}{z} - \frac{1}{y}$, y entonces $y = \frac{2xz}{x+z}$ es la media armónica de x, z.

Es posible que las longitudes de los lados de un triángulo sean números naturales en HP. Por ejemplo, $(15, 12, 10)$. Por lo que el autor conoce, estos triángulos no han sido estudiados hasta ahora. Nuestro propósito es estudiar triángulos con lados en HP, que llamaremos *triángulos armónicos.* El primer y segundo teoremas que probaremos más adelante son válidos para triángulos armónicos con números reales positivos como longitudes de los lados, mientras que el tercero es aplicable sólo a triángulos cuyas longitudes de los lados son números naturales.

Representaciones paramétricas de triángulos armónicos

Es relativamente sencillo deducir expresiones paramétricas que generen el conjunto de los triángulos armónicos. Demostraremos esto en el Teorema 1. Utilizaremos la notación habitual de a, b, c para las longitudes de los lados BC,CA y AB, respectivamente, y Δ para el área del triángulo.

Teorema 1.*El triángulo ABC es armónico si y sólo si sus lados son de la forma*

$$(a, b, c) = (u(u+v), 2uv, v(u+v)),$$

donde u, v son números reales positivos tales que

$$\left(\sqrt{2}-1\right)v < u < \left(\sqrt{2}+1\right)v.$$

Demostración

Sin pérdida de generalidad se puede suponer los lados en orden a, b, c.

Entonces el triángulo será armónico si y solo si a, b, c están en progresión armónica, es decir

$$\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{1}{c}-\frac{1}{a}.$$

Despejando de aquí b en función de a y c se obtiene

$$b=\frac{2ac}{a+c} \qquad (1).$$

Luego ABC será armónico si y sólo si sus lados son

$$a,\frac{2ac}{a+c},c.$$

Para evitar la fracción, multiplicamos los tres términos por $a+c$ y obtenemos así un triángulo semejante al anterior. Para obtener expresiones paramétricas para los lados, y generar así un conjunto infinito de triángulos armónicos, reemplazamos a por u y c por v,siendo estos u,v números reales positivos, lo que daría

$$(a,b,c)=(u\left(u+v\right),2uv,v\left(u+v\right)). \qquad (2)$$

Pero (2) por sí solo no garantiza que así se obtengan triángulos armónicos cualesquiera que sean u y v. Por ejemplo, si $u=5,v=2$ da $(a,b,c)=(35,20,14)$ que no son los lados de un triángulo porque $b+c=34<35=c$.

Considerando las desigualdades triangulares $a+b>c,b+c>a,c+a>b$ obtenemos sucesivamente:

i) $a+b>c \Longleftrightarrow u\left(u+v\right)+2uv>v\left(u+v\right) \Longleftrightarrow u^2+2uv-v^2>0 \Longleftrightarrow \left(u+v\right)^2>2v^2$, es decir

$$u>\left(\sqrt{2}-1\right)v.$$

ii) $b+c>a \Longleftrightarrow 2uv+v\left(u+v\right)>u\left(u+v\right) \Longleftrightarrow u^2-2uv-v^2<0 \Longleftrightarrow \left(u-v\right)^2<2v^2$, es decir

$$u<\left(\sqrt{2}+1\right)v.$$

iii) $c+a>b \Longleftrightarrow v\left(u+v\right)+u\left(u+v\right)>2uv$, que siempre es cierto.

Combinando entonces i) y ii) tenemos las condiciones del teorema 1.

Un ejemplo numérico.

Supongamos que $v=4$. Entonces debemos encontrar un número real u tal que

$$\left(\sqrt{2}-1\right)4<u<\left(\sqrt{2}+1\right)4.$$

Puesto que hay infinitos números reales entre estas dos cotas, habrá infinidad de triángulos armónicos generados por un valor dado de v. Si elegimos el valor $u=3$ entonces obtenemos el triángulo armónico

$$(a,b,c)=(21,24,28).$$

Para ese mismo v podríamos usar $u = \sqrt{11}$, obteniendo ahora

$$(a,b,c) = (11 + 4\sqrt{11}, 8\sqrt{11}, 4\left(4 + \sqrt{11}\right)).$$

Ahora deduciremos el corolario 1, que da la caracterización de los triángulos armónicos en función de las alturas. (Es claro que el teorema 1 la daba en función de los lados).

Corolario 1: *El triángulo ABC es armónico si y sólo si sus alturas h_a, h_b, h_c están en progresión aritmética.*

Demostración

Es una consecuencia inmediata de las fórmulas

$$\begin{aligned}\Delta &= \frac{1}{2}a \cdot h_a = \frac{1}{2}b \cdot h_b = \frac{1}{2}c \cdot h_c, \text{ es decir} \\ h_a &= \frac{2\Delta}{a}, h_b = \frac{2\Delta}{b}, h_c = \frac{2\Delta}{c}.\end{aligned}$$

En efecto,

$$ABC \text{ armónico } \Longleftrightarrow \frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c} \text{ en AP} \Longleftrightarrow \frac{2\Delta}{a}, \frac{2\Delta}{b}, \frac{2\Delta}{c} \text{ en AP.}\blacksquare$$

En el teorema siguiente consideraremos otra caracterización. Recordemos el teorema de la bisectriz: *Cada bisectriz del triángulo ABC divide al lado opuesto en segmentos que son proporcionales a los lados contiguos.*

Teorema 2.*Sean AD, BE, CF las bisectrices interiores del triángulo ABC. Entonces ABC es armónico si y sólo si*

$$\frac{AF}{FB} + \frac{CD}{DB} = 2.$$

Demostración.

De acuerdo con el teorema de la bisectriz,

$$\frac{AF}{FB} = \frac{b}{a}, \frac{CD}{DB} = \frac{b}{c}.$$

Por lo tanto, $\frac{AF}{FB} + \frac{CD}{DB} = 2$ si y sólo si

$$\frac{b}{a} + \frac{b}{c} = 2 \Longleftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{2}{b} \Longleftrightarrow ABC \text{ es armónico.}\blacksquare$$

Al final proponemos al lector otra caracterización de los triángulos armónicos en términos de las áreas de los triángulos BIC,CIA,AIB, siendo I el incentro de ABC.

En lo que sigue, requeriremos que u y v sean números naturales.

Triángulos armónicos cuyos lados son números naturales

Si restringimos los parámetros u, v de los Teoremas 1 y 2 a tomar valores naturales, obtendremos triángulos armónicos cuyos lados son números naturales. Por ejemplo, si $u = 2, v = 1$, puesto que $\left(\sqrt{2}-1\right)1 < 2 < \left(\sqrt{2}+1\right)1$, las expresiones paramétricas $a = u\left(u+v\right), b = 2uv, c = v\left(u+v\right)$ conducen al triángulo armónico $(a, b, c) = (6, 4, 3)$.

Los triángulos armónicos con lados naturales tienen una propiedad intrínseca interesante, que veremos en el Teorema 3. En el ejemplo citado, será útil observar dos cosas: i) $mcd\,(6, 4, 3) = 1$, es decir, ABC es un triángulo armónico *primitivo.*

ii) $a + c = 6 + 3 = 9$, que es un cuadrado impar.

Para comprender bien el argumento que se utiliza en la demostración del teorema 3, invitamos al lector a demostrar las siguientes desigualdades:

1) *Sea w un número natural. Entonces se tiene*

$$\left(\sqrt{2}-1\right)w < w+1 < \left(\sqrt{2}+1\right)w \qquad (3).$$

2) *Sea w un número natural impar mayor que 3. Entonces*

$$\left(\sqrt{2}-1\right)(w-2) < w+2 < \left(\sqrt{2}+1\right)(w-2) \qquad (4).$$

3) *Sea $w$un número par mayor que 2. Entonces*

$$\left(\sqrt{2}-1\right)(w-1) < w+1 < \left(\sqrt{2}+1\right)(w-1) \qquad (5).$$

Teorema 3. *Un triángulo ABC es armónico primitivo si y sólo si la suma de sus lados AB y BC es, o bien un cuadrado impar mayor que uno, o bien el doble de un cuadrado.*

Demostración.

Del teorema 1 tenemos

$$a = u\left(u+v\right), b = 2uv, c = v\left(u+v\right),$$

donde u y v son primos entre sí, tales que

$$\left(\sqrt{2}-1\right)v < u < \left(\sqrt{2}+1\right)v.$$

Hay dos casos a considerar:

<u>Caso 1:</u>

u y v tienen distinta paridad, es decir, uno de ellos es par y el otro impar. En este caso $u + v$ es impar. Ahora bien, $b = 2uv$ es siempre par, pero uno de los otros lados, a o c, será par y el otro impar, dependiendo de que u o v sea par. Entonces $mcd\,(a, b, c) = 1$ y el triángulo ABC será primitivo. En este caso se tiene $a + c = u\left(u+v\right) + v\left(u+v\right) = \left(u+v\right)^2$,un cuadrado impar mayor que 1.

Para establecer el recíproco, supongamos que en el triángulo ABC, $a + c$ es un cuadrado impar mayor que 1. Demostaremos que existe un par de números naturales u, v, de paridad opuesta, que verifican las condiciones del Teorema 1.

Como $a+c=(2w+1)^2$,para algún número natural $w>1$, y necesitamos que esto sea igual a $(u+v)^2$, podemos tomar $u=w+1, v=w$. Es claro que w y $w+1$ son de paridad opuesta y además primos entre sí. Ya que esos u y v verifican (3), dan lugar aun triángulo armónico primitivo ABC.

<u>Caso 2:</u>

Supongamos que u y v tienen la misma paridad. Para que puedan ser primos entre sí, tienen que ser los dos impares. En este caso, $u+v$ es par, así que $mcd(a,b,c)=2$. (La justificación de ésto se deja al lector). Para tener un triángulo ABC primitivo, dividimos por 2 y tomamos el nuevo triángulo con

$$a=\frac{1}{2}u\left(u+v\right), b=uv, c=\frac{1}{2}v\left(u+v\right)$$

En este triángulo se verifica

$$a+c=\frac{1}{2}u\left(u+v\right)+\frac{1}{2}v\left(u+v\right)=\frac{1}{2}\left(u+v\right)^2.$$

Como $u+v=2w$, con $w\geq 1$,se tiene $a+c=2w^2$, el doble de un cuadrado.

Recíprocamente, supongamos que $a+c=2w^2$ en el triángulo ABC.

Si $w=1$,se tiene el triángulo equilátero armónico primitivo $(1,1,1)$.

Si $w>1$, entonces w puede ser par o impar. Supongamos primero que es impar.

Si $w=3$,entonces $u+v=6$.El único par posible es $u=5, v=1$, que no da lugar a ningún triángulo .

Luego $w>3$.En este caso podemos tomar $u=w+2, v=w-2$, que satisface (4) y construir un triángulo primitivo armónico ABC.

Si w es par, entonces tiene que ser mayor que 2 (*¿por qué?).* En este caso podemos tomar los números impares $u=w+1, v=w-1$, que verifican (5) para generar un triángulo armónico primitivo ABC. Esto concluye la demostración.■

Para mayor clarificación del argumento, proporcionamos una ilustración numérica:

(i) Supongamos que $(u+v)^2=121=11^2$, un cuadrado impar. Se tiene $u+v=11$.

Podemos tomar $u=6, v=5$, que dan $(a,b,c)=(66,60,55)$.

También podemos tomar $u=7, v=4$, que da un triángulo diferente, $(a,b,c)=(77,56,44)$. El lector puede comprobar que no hay más con $u+v=11$.

(ii) Supongamos $a+c=98=2\times(7)^2$, el doble de un cuadrado impar. Ahora $u+v=2\times 7=14$. Luego podemos tomar $u=7+2=9, v=7-2=5$, que genera el triángulo $(a,b,c)=(63,45,35)$.

(iii) Supongamos $a+c=288=2\times(12)^2$, el doble de un cuadrado par. Aquí, $u+v=24, u=12+1=13, v=12-1=11$, y $(a,b,c)=(156,143,132)$.

Problemas propuestos

Finalizamos nuestra disertación con problemas propuestos a los lectores.

1.*Supongamos que ABC es un triángulo de Hoppe (sus lados AB,BC,CA están en progresión aritmética), inscrito en una circunferencia. AD es la bisectriz del ángulo A, con D en el lado BC. Se prolonga la bisectriz hasta que corte de*

nuevo a la circunferencia circunscrita en D'. Demostrar que : i) $AD = \frac{1}{2}\sqrt{3bc}$*.*
ii) AD'=BD'+D'C.

2.*Sea ABC un triángulo "autoalturas" en el que los lados AB,BC,CA están en progresión geométrica. Probar que los lados son proporcionales a las alturas, en un cierto orden.*

3.*Sea I el incentro de ABC. Demostrar que ABC es armónico si y sólo si las áreas de los triángulos BIC,CIA y AIB están en progresión armónica.*

4.*Sea w un número natural dado. ¿Es posible encontrar una fórmula cerrada como función de w que proporcione el número de*

a) *triángulos armónicos con lados naturales, primitivos, en los que (i)* $a+c = (2w+1)^2$;

(ii) $a + c = 2w^2$;

b) *triángulos armónicos con lados naturales, primitivos o no, en los que (i)*$a + c = (2w+1)^2$;

(ii) $a + c = 2w^2$?

Bibliografía

1. Dickson,L.E. *History of the Theory of Numbers, vol. II, Chelsea, New York (1971), 171-201.*

2.Sastry, K.R.S. *Analogies are interesting!. Elemente der mathematik, 59(2004), 29-36.*

3. Sastry, K.R.S. *Pythagoras strikes again! .Crux Mathematicorum with Mathematical Mayhem, 24(1998),276-280.*

4.Sastry, K.R.S. *Self-Altitude triangles, Mathematical Spectrum, 22(1989-90),88-90.*

BIBLIOGRAFÍA DE OLIMPIADAS
FRANCISCO BELLOT ROSADO

En 1992, el entonces *Instituto de Ciencias de la Educación* de la Universidad de Valladolid (España), publicó *Olimpiada Matemática Española (problemas propuestos en el Distrito Universitario de Valladolid),* de F.Bellot, M^a V. Debán y F. López Fernández-Asenjo, en la que se incluía una Bibliografía sobre Olimpiadas Matemáticas, comprendiendo 254 títulos. Agotada por completo la edición de esta obra, el paso del tiempo ha hecho que su lista se haya quedado corta. Han aparecido muchos títulos interesantes, y por eso puede resultar útil a los lectores de la *Revista Escolar de la O.I.M.* actualizar, a fecha de mayo-junio de 2006, manteniendo la estructura, la lista mencionada, sin pretender ser exhaustivo.

I. GENERAL

Ayme, J.L. *Méthodes & Techniques en Géométrie (à propos de la droite de Newton),* Ellipses 2003.
Altshiller Court, N. *College Geometry,* Barnes & Noble, 1952
Altshiller Court, N. *Modern Pure Solid Geometry,* Chelsea, 1964
Anderson, I. *A first course in Combinatorial Mathematics,* Oxford U.P. 1979
Apostol, T.M. *Introducción a la Teoría Analítica de Números,* Reverté, 1980
Archbold, J.W. *Algebra,* Pitman, 1970
Argonov, B.I.-Skorniakov, L.A. *Teoremas de Configuración,* Mir,L.P.M., 1980
Armit, A.P. *Advanced Level Vectors,* Heinemann 1981
Barnard,S-Child, J.M. *Higher Algebra,* Macmillan 1936
Benjamin, A.T.- Quinn, J.J. *Proofs that really Count (the Art of the Combinatorial Proof), M.A.A. 2003*
Beskin, N.M. *División de un segmento en la razón dada,* Mir, L.P.M., 1976
Bold, B. *Famous problems of Geometry and how to solve them,* Dover, 1969
Boltjanskii,V.-Gohberg,I. *Results and problems in combinatorial geometry.* Cambridge U.P., 1985
Bouvier,A.-Richard, D. *Groupes,* Hermann, 1974
Boyer, C.B. *A history of Mathematics,* Wiley, 1968
Branzei, D.- Anitza S.- Anitza A. *Competentza si performantza in Geometrie (2 vols.)* Ed. MINIED, Iasi 1992 (en rumano)
Budden, F.J. *Números complejos,* Alhambra, 1971
Budden, F.J. *The fascination of groups,* Cambridge U.P., 1972
Burkill, J.C. *A first course in Mathematical Analysis,* Cambridge U.P., 1962
Campbell, S.K. *Equívocos y falacias en la interpretación de estadísticas,* Limusa, 1981
Carrega, J.C. *Théorie des corps: la règle et le compas,* Hermann, 1989
Chrystal, G. *Textbook of algebra* (2 vols.), Chelsea, 1964
Cilleruelo, J.-Córdoba, A. *La teoría de los números,* Mondadori 1992
Collet, M.-Griso, G. *Le cercle d'Euler,* Vuibert, 1987
Comtet, L. *Analyse combinatoire* (2 vols.), P.U.F., 1970

Cooke, Ch.-Anderson, I. *Counting and configurations,* Blackie, 1978
Coolidge, J.L. *A treatise on the circle and the sphere,* Chelsea, 1971
Coxeter, H.S.M.-Greitzer,S. *Geometry revisited,* N.M.L. 19, M.A.A. 1967
Coxeter, H.S.M. *Introduction to Geometry,* Wiley, 1969
Coxeter, H.S.M. *Projective Geometry,* Springer, 1987
Davis, D. *Modern College Geometry,* Addison-Wesley, 1949
Dickson, L.E. *History of the theory of numbers,* (3 vols.), Chelsea 1971
Donath, E. *Die merkwürdigen Punkte und Linien des ebenen Dreiecks,* VEB,1969
Dorofeiev, G.-Potapov,N.-Rozov,N. *Temas selectos de matemáticas elementales,* Mir, 1973.
Dudley, U. *A budget of trisections,* Springer 1987
Durell,C.V.- Robson, A. *Advanced Trigonometry,* Bell, 1937
Durell, C.V.-Robson,A. *Advanced Algebra* (3 vols.), Bell, 1943
Durell, C.V. *Elementary coordinate geometry,* Bell, 1960
Durell, C.V. *Homogeneous coordinates,* Bell, 1961
Eisenhart, L.P. *Coordinate geometry,* Ginn & Co., 1937
Evelyn, C.J. *Le théorème des sept cercles,* CEDIC, 1975
Feller,W. *An introduction to the theory of probability and its applications,* Wiley, 1957
Ferrar, W. *Higher Algebra,* Oxford U.P. 1962
Fetisov, A.I. *Acerca de la demostración en geometría,* Mir, L.P.M., 1980
Fleming, W. *Functions of several variables,* Springer 1977
Fraleigh, J.B. *A first course in abstract Algebra,* Addison-Wesley 1967
Garnir, H. *Teoría de Funciones* (2 vols.), Marcombo 1986
Glaeser,G. *Mathématiques pour l'élève professeur,* Hermann, 1971
Godement, R. *Cours d'algèbre,* Hermann, 1963
Golovina, L.I.-Yaglom, I.M. *La inducción en geometría,* Mir, L.P.M. 1976
Graham,R.L.-Knuth, D.E.-Patashnik, O. *Concrete mathematics,* Addison-Wesley 1994
Guelfond, A.O. *Resolución de ecuaciones en números enteros,* Mir, L.P.M. 1979
Guggenheimer, H. *Plane geometry and its groups,* Holden Day 1967
Guzmán, M. de, *Mirar y ver,* Alhambra 1976
Guzmán, M. de, *Aventuras matemáticas,* Labor, 1986
Hadamard, J. *Leçons de Géométrie* (2 vols.), J.Gabay, 1988
Hall, H.S.-Knight, S.R. *Álgebra Superior,* Uteha, 1948
Hall, H.S.-Knight, S.R. *Álgebra elemental,* Montaner y Simón 1968
Hardy, G.H. *Curso de Análisis Matemático,* Nigar, 1962
Hardy, G.H.- Littlewood, J.- Polya,G. *Inequalities,* Cambridge U.P. 1983
Hardy, G.H.- Wright, E.M. *An introduction to the theory of numbers,* Oxford U.P. 1984
Hilbert,D.- Cohn-Vossen, S. *The geometry and the imagination,* Chelsea 1952
Hobson, E.W. *Plane Trigonometry,* Cambridge U.P. 1921
Honsberger, R. *Ingenuity in mathematics,* N.M.L. 23, M.A.A. 1970
Honsberger, R. *Mathematical Gems (3 vols),*M.A.A. 1973,1976,1985

Honsberger, R. *Mathematical Plums,* M.A.A. 1979
Honsberger, R. *Mathematical Morsels,* M.A.A. 1978
Huff, D. *How to lie with statistics,* Pelican B. 1973
Johnson, R.A. *Advanced Euclidean Geometry,* Dover, 1960
Joseph, G. Gh. *La cresta del pavo real (las matemáticas y sus raíces no europeas),* Pirámide, 1996
Klambauer, G. *Aspects of calculus,* Springer, 1987
Kostovski, A.N. *Construcciones geométricas mediante un compás,* Mir, L.P.M. 1980
Kuczma, M. *Functional equations,* P.W.N. 1968
Kuiper, N. *Linear Algebra and Geometry,* North Holland, 1963
Lages Lima, E. *Curso de Análisis Matemático,* Edunsa 1991
Lalesco, T. *La géométrie du triangle,* J.Gabay, 1987
Lebesgue, H. *Leçons sur les constructions géométriques,* J.Gabay, 1987
Lebesgue,H. *Les coniques,* J. Gabay, 1988
Loomis, E.S. *The Pythagorean proposition,* N.C.T.M. 1968
Markhushevich, A.I. *Sucesiones recurrentes,* Mir, L.P.M. 1974
Maxwell, E.A. *Geometry for advanced pupils,* Oxford, U.P. 1949
Maxwell, E.A. *Coordinate geometry with vectors and tensors,* Oxford U.P. 1958
Maxwell, E.A. *Fallacies in mathematics,* Cambridge U.P., 1959
Maxwell, E.A. *Geometry by transformations,* Cambridge U.P. 1975
Miculitza, M.- Branzei, D. *Analogii Triunghi-Tetraedru (en rumano),* Ed. Paralela 45, 2000
Mihalescu, C. *Geometria elementelor remarcabile (en rumano),* Ed.Tehnica, 1957
Mitrinovic, D.S. *Analytic Inequalities,* Springer 1970
Morgado, A.C.-Pitombeira,J.B.-Carvalho, P.C.- Fernandez,P. *Análise Combinatória e Probabilidade,* S.B.M. 1991
Muir, T. *Theory of determinants,* Macmillan 1911
Nelsen, R.B. *Proofs without words (2 vols),* M.A.A. 1993,2000
Niven, I. *Numbers: rationals and irrationals,* N.M.L.1, M.A.A. 1961
Niven, I. *Mathematics of choice (how to count without count),* N.M.L.15, M.A.A. 1965
Niven, I.- Zuckerman, H.- Montgomery, H.L. *An introduction to the theory of numbers,* Wiley, 1991.
Niven, I. *Maxima and minima without calculus,* M.A.A. 1981
Olds, C.D. *Continued fractions,* N.M.L. 9, M.A.A. 1963
Pedoe, D. *Circles: a mathematical view,* Dover, 1979
Petersen, J. *Métodos y teorías para la resolución de problemas de construcciones geométricas (traducción y apéndices de J.Gallego Díaz),* Giner, 1955.
Pogorelov, A.V. *Analytical geometry,* Mir, 1980
Pottage, J. *Geometrical investigations,* Addison-Wesley, 1983
Puig Adam, P. *Geometría métrica (2 vols.),* Ed. del autor, Madrid 1952
Puig Adam, P. *Ampliación de matemáticas para el curso Preuniversitario,* Biblioteca Matemática, Madrid 1967.

Rademacher, H.- Toeplitz, O. *Números y figuras,* Alianza, 1970
Rademacher, H. *Higher mathematics from an elementary point of view,* Birkhäuser 1982.
Rey Pastor, J.- Pi Calleja, P.- Trejo, C. *Análisis Matemático (3 vols.),* Kapelusz, 1959
Rincón, G. *Un recorrido por la Geometría,* U. Antonio Nariño, 1994
Riordan, J. *Combinatorial Identities,* Krieger, 1979
Rojo, J. *Álgebra Lineal,* AC, 1982
Robson, A. *Analytical Geometry (2 vols.),* Cambridge U.P., 1949
Salmon, G. *Treatise on conic sections,* Chelsea (sin fecha)
Sierpinski, W. *Elementary theory of numbers,* North Holland-PWN, 1988
Siretchi, Gh. *Analiza matematica (en rumano),* U. Bucarest, 1978
Sloane, N.J.A.-Plouffe,S. *The Encyclopedia of integer sequences,* Academic Press, 1995
Smogorzhevski, A.S. *La regla en construcciones geométricas,* Mir, L.P.M. 1981
Sominski, I.S. *Método de inducción matemática,* Mir, L.P.M. 1975
Stoyanov, J. *Counterexamples in probability,* Wiley, 1987
Stromberg, K.R. *An introduction to classical real analysis,* Wadsworth, 1981
Tabaschnikov, S., ed. *Kvant selecta:Algebra and Analysis (2 vols),* A.M.S. 1999
Todhunter, I.- Leathem,J.G. *Spherical trigonometry,* Macmillan 1901
Uspenski, V.A. *Triángulo de Pascal,* Mir, L.P.M. 1978
van Lint, J.H.- Wilson,R.M. *A course in combinatorics,* Cambridge U.P. 1992
Velasco, G. *Tratado de geometría,* Limusa, 1983
Vinogradov, I. *Fundamentos de la teoría de los números,* Mir, 1971
Vorobiov, N.N. *Criterios de divisibilidad,* Mir, L.P.M. 1975
Wagner,E. *Construçoes geométricas,* S.B.M. 1993
Weil, A. *Number theory,* Birkhäuser, 1984
Yaglom, I.M. *Geometric transformations (3 vols.),* N.M.L. 8,21,24; M.A.A. 1962

II. LIBROS DE PROBLEMAS PARA PREPARACIÓN DE OLIMPIADAS

Aassila, M. *300 défis mathématiques,* Ellipses, Paris 2001
Aigner,M.- Ziegler, G.M. *Proofs from the Book,* Springer 2001
Andreescu,T.- Andrica, D. *O introducere in studiul ecuatiilor diofantiene (en rumano),* Ed.Gil, 2002
Andreescu,T.- Mushkarov, O.- Stoyanov, L. *Geometric Problems on Maxima and Minima,* Birkhäuser, 2006
Andreescu, T.- Savchev, S. *Mathematical miniatures,* M.A.A. 2003
Andreescu,T.- Enescu, B. *Mathematical Olympiad Treasures,* Birkhäuser, 2004
Andreescu,T.- Gelca, R. *Mathematical Olympiad Challenges,* Birkhäuser 2000

Andreescu,T.- Feng, Z. *103 Trigonometry problems (from the training of the USA IMO Team),* Birkhäuser 2005

Andreescu,T.- Andrica, D. *Complex numbers from A to...Z,* Birkhäuser, 2006

Andreescu,T.- Feng, Z. *102 Combinatorial problems (from the Training of the USA IMO Team),* Birkhäuser, 2003

Andreescu,T.- Feng,Z. *101 Problems in Algebra (from the Training of the USA IMO Team), A.M.T. Publishing, 2001.*

Andreescu, T.- Cirtoaje, V.- Dospinescu, G.- Lascu, M. *Old and new Inequalities,* Ed. Gil, 2004.

Andreescu, T.- Andrica,D. *360 problems for mathematics contests,* Ed. Gil, 2003

Aref,M.N.-Wernick,W. *Problems and solutions in Euclidean Geometry,* Dover 1968

Aroca, J.M.- Fernández Bermejo, M^a J.- Pérez Blanco, J. *Problemas de Geometría afín y geometría métrica,* Universidad de Valladolid, 2004

Aroca, J.M.- Fernández Bermejo, M^a J.- Pérez Blanco, J. *Problemas de Álgebra Lineal,* Universidad de Valladolid, 2004

Arslanagic, S. *Metodicka Zbirka Zadataka (en bosnio), Sarajevo, 2006*

Arslanagic, S. *Matematika za nadarene (en bosnio), Sarajevo 2004*

Arslanagic, S.- Zejnulahi, F.- Govedarica, V. *Zbirka zadataka (en bosnio), Sarajevo 2004*

Bachmakov, M. *Les mathématiques du club olympique Kangourou,* ACL Ed., Paris 1998

Barbeau, E.J.-Klamkin,M.S.-Moser, W.O.J. *Five Hundred Mathematical Challenges,* M.A.A. 1995

Barbeau,E.J. *Polynomials,* Springer 1989

Batinetu, D.M. *Probleme de matematica (siruri) (en rumano),* Ed.Albatros, 1979

Becheanu, M.- Ensecu, B. *Inegalitatii elementare...si mai putin elementare (en rumano),* Ed. Gil, 2002

Beiler, A.H. *Recreations in the theory of numbers,* Dover 1986

Berinde, V. *Exploring, investigating and discovering in Mathematics,* Birkhäuser, 2004

Bizam, G.- Herczeg, J. *Logik mach Spasz (en alemán),* Akademiai Kiadó, Budapest 1976

Bluman, G.W. *Problem book for first Year Calculus,* Springer 1984

Booth,P.- Shawyer, B.- McLoughlin J.G. (eds.) *Shaking hands in Corner Brook and other Math Problems (for senior high school students),* Waterloo Mathematics Foundation, 1995

Bottema, O.- Djordjevic, R.Z.-Janic, R.R.- Mitrinovic, D.S.- Vasic, P.M. *Geometric inequalities,* Wolters-Nordhoof, 1969

Bradley, C. *Challenges in Geometry,* Oxford U.P. 2005

Bulajich Manfrino, R.- Gómez Ortega, J.A. *Geometría, ejercicios y problemas,* Cuadernos de Olimpiadas, México 2004

Bulajich Manfrino, R.- Gómez Ortega, J.A. *Geometría,* Cuadernos de Olimpiadas, México 2004

Bulajich Manfrino, R.- Gómez Ortega, J.A. *Desigualdades,* Cuadernos de Olimpiadas, México 2004

Burns, J.C. *Seeking solutions,* Australian Mathematics Trust, 2000

Chen Chuang-Chong & Koh Khee-Meng, *Principles and Techniques in Combinatorics,* World Scientific, 1992

Cocea, C. *200 de probleme din geometria triunghiului echilateral (en rumano),* Ed. Gh. Asachi, 1992

Cosnita, C.- Turtoiu, F. *Probleme de algebra(en rumano),* Ed. Tehnica, 1989

Croft, H.T.-Falconer, K.J.-Guy,R.K. *Unsolved problems in geometry,* Springer 1991

Cross, T. (edit.) *Student problems from the Mathematical Gazette 1992-2001,* The mathematical Association, 2002

Davidson,L.- Reguera, R.- Frontela, R.- Castro, S. *Problemas de matemática elemental 1.* Ed. Pueblo y educación. La Habana, 1987

Dörrie, H. *Mathematische miniaturen (en alemán),* Hirt, Breslau 1943

Dörrie, H. *100 great problems in elementary mathematics,* Dover 1965

Engel, A. *Problem-solving strategies,* Springer 1998

Faisant, A. *L'équation diophantienne du second degré,* Hermann, 1991

Fernández, L.-Gooransarab, H. *Solutions Manual for Techniques of Problem Solving (with assistance from Steven G. Krantz),* A.M.S. 1997

Frère Gabriel Marie (F.G.M.), *Exercices de géométrie,* J.Gabay, 1991

Fukagawa, H.- Pedoe, D. *Japanese Temple Geometry Problems (San Gaku),*Winnipeg 1989

Fukagawa, H.- Rigby, J.F. *Traditional Japanese Mathematics Problems of the 18th & 19th Centuries,* SCT, Singapore 2002

Grozdev, S. *(ed.) Training for Olympiads (en búlgaro),* Union of Bulgarian Mathematicians, 2002-2004

Grozdev,S.- Kolev, E.- Mushkarov, O.- Nikolov, N. *Bulgarian Mathematical Competitions 1997-2002,* Union of Bulgarian Mathematicians, Sofia 2002

Hahn, L-S. *Complex numbers & Geometry,* M.A.A. 1994

Hecht, T.- Sklenarikova, Z. *Metódy riesenia matematych úloh (en eslovaco),* SPN, Bratislava 1992

Herman, J.- Kucera,R.- Simsa, J. *Counting and configurations (Problems in Combinatorics, Arithmetic and Geometry),* C.M.S. & Springer, 2003

Herman, J.- Kucera,R.- Simsa, J. *Equations and Inequalities (Elementary Problems and Theorems in Algebra and Number Theory),* C.M.S. & Springer, 2000

Honsberger, R. *Mathematical Delights,* M.A.A. 2004

Honsberger, R. *Mathematical Chestnuts from Around the World,* M.A.A. 2001

Honsberger, R. *From Erdös to Kiev (problems of Olympiad caliber),* M.A.A. 1996

Honsberger, R. *Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry,* M.A.A., N.M.L. 37, 1995

Honsberger, R. *In Pólya's Footsteps,* M.A.A. 1997

Ionescu-Tiu, C. *Geometrie plana si in spatiu (en rumano),* Ed. Albatros 1976
Klambauer, G. *Problems and propositions in analysis,* M.Dekker, 1979
Krantz, S.G. *Techniques of problem solving,* A.M.S. 1997
Krechmar, V.A.A. *Problem book in algebra,* Mir, 1974
Larson, L.C. *Problem solving through problems,* Springer 1983
Le livre du problème(6 vols), CEDIC 1973
Lefort, J. (compilador), *Mathématiques de compétition,* Bordas, 1990
Lidski, V.B.-Ovsianikov, L.V.- Tulaikov, A.N.- Shabunin, M.I. *Problemas de matemáticas elementales,* Mir, 1972
Lovasz, L. *Combinatorial problems and exercices,* North Holland 1979
Lozansky, E.- Rousseau, C. *Winning solutions,* Springer 1996
Moisotte, L. *1850 exercices de mathématiques,* Dunod 1978
Newman, D.J. *A problem Seminar,* Springer 1982
Ney de Souza, P.- Silva, J.N. *Berkeley problems in Mathematics,* Springer 1998
Onucu Drimbe, M. *200 de ecuatii functionale pe N,Z,Q(en rumano);* Ed. Gil, 2003
Onucu Drimbe, M. *200 de identitatii si inegalitati cu "partea intreaga"(en rumano),* Gil 2004
Ouardini, A. *Mathématiques de compétition (112 problèmes corrigés),* Ellipses 2000
Panaitopol, L.- Serbanescu, D. *Probleme di teoria numerelor si Combinatorica (pentru juniori) (en rumano), Ed.* Gil,2003
Pérez Seguí, M^a L. *Combinatoria,* Cuadernos de Olimpiadas, México 2000
Pérez Seguí, M^a L. *Teoría de números,* Cuadernos de Olimpiadas, México 2003
Plank, A.W.- Williams, N.H. *Mathematical Toolchest,* Australian Mathematics Trust 1992.
Polya, G. *Cómo plantear y resolver problemas,* Trillas, 1965
Polya, G. *Matemáticas y razonamiento plausible,* Tecnos 1966
Polya, G. *La découverte des mathématiques,* Dunod 1967
Polya,G.- Szegö, G. *Problems and theorems in Analysis (2 vols),* Springer 1964
Posamentier, A.S.- Salkind, C.T. *Challenging problems in Geometry,* Dale Seimour 1988
Posamentier, A.S.- Salkind, C.T. *Challenging problems in Algebra,* Dale Seimour 1988
Radford, E.M. *Mathematical problems papers (2 vols),* Cambridge, 1931
Rey Pastor,J.- Gallego Díaz, J. *Norte de problemas,* Dossat (sin fecha, c.1954)
Sharygin,I. *Problemas de geometría (Planimetría),* Mir, 1989
Sharygin, I. *Problems in Solid geometry,* Mir, 1986
Sierpinski, W. *250 problems in theory of numbers,* North Holland 1970
Smarandache, F. *Problèmes avec et sans...problèmes,* Somipress, Fez 1983
Smarandache, F. *Généralités et généralizations,* Fez 1984
Sortais, Y. et R. *La géométrie du triangle,* Hermann, 1987

Soulami, T.B. *Les Olympiades de mathématiques (Réflexes et stratégies),* Ellipses 1999.

Steele, J.M. *The Cauchy-Schwarz Master Class, M.A.A. Cambridge 2004*

Steinhaus, H. *One hundred problems in elementary mathematics,* Dover 1964

Székely, G. *Paradoxes in probability theory and mathematical statistics,* Akademiai Kiadó, Budapest 1986

Tao, Terence C.S. *Solving mathematical problems: a personal perspective,* Deakin Univ. 1992

Tabov, J.- Taylor, P.J. *Methods of problem solving (2 vols), Australian Mathematics Trust 2002*

Titeica, G. *Probleme de geometrie (en rumano),* Ed.Tehnica 1961

Tomescu,I. *Problems in Combinatorics and graph theory,* Wiley, 1985

Tonov, I.- Bankov, I.- Vitanov, T.- Rakovska, D. *Bulgarian Mathematics Competitions 11-14 years olds. Selected Problems,* Regalia, Sofia 2001

Turtoiu,F. *Probleme de trigonometrie (en rumano),* Ed. Tehnica, 1986

Vaderlind, P.- Guy,R.- Larson,L. *The inquisitive problem solver,* M.A.A. 2002

Vakil, R. *A mathematical mosaic (patterns & problem solving),* Brendan Pub., 1996

Vornicu, V. *Olimpiada de Matematica (de la provocare la experientza) (en rumano),* Ed.Gil, 2003

Yaglom, A.M.-Yaglom,I.M. *Challenging mathematical problems (2 vols),* Holden day, 1967

III. PUBLICACIONES ESPECIALES SOBRE LAS OLIMPIADAS MATEMÁTICAS NACIONALES O INTERNACIONALES, Y OTROS CONCURSOS

Agahanov, N.- Podlipsky, O. *Olimpiade matematice rusesti, Moscova 1993-2002*, Ed. Gil, 2004 (en rumano)

A.I.M.E. & A.H.S.M.E. Contests (folleto anual), Univ. of Nebraska, Lincoln

Akkar, M. *Les mathématiques par les problèmes,* Sochepress, 1985

Alexandersson, G.L.- Klosinski, L.F.- Larson, L.C. *The William Lowell Putnam Mathematical Competition. Problems and Solutions 1965-1984,* M.A.A. 1985

Andreescu, T. y otros, *Mathematical Olympiads (Problems and Solutions from around the World)* (1998-99, 1999-2000, 2000-2001), M.A.A.

Andreescu, T. y otros: *Olimpiadele de matematica 2002 (en rumano),* Ed Gil, 2002

Andreescu, T.- Feng,Z. *USA and International Mathematical Olympiads (varios años),* M.A.A.

Arrieta, E.- Berenstein, D.- Falk de Losada, M. *1981-1990 Colombia en las Olimpiadas Internacionales de matemáticas.* U. Antonio Nariño, Bogotá 1991

Baron,G.- Windischbacher, W.- Lautscham, V. *Österreichische Mathematik Olympiaden 1990-1999,* Öbv&Hpt, 1999

Barry, D.T.- Lux, J.R. *The Phillips Academy prize Examinations in Mathematics,* Dale Seymour, 1984

Batinetu-Giurgiu, D.M, y otros, *Probleme date la olimpiadele de matematica pentru licee (1950-1990), Ed. Stiintifica, 1992*

Bellot,F.- Debán, M^a V.- López, F. *Olimpiada Matemática Española (problemas propuestos en el distrito universitario de Valladolid),* I.C.E., 1992

Bellot Rosado, F.- López Chamorro, M^a A. *Cien problemas de matemáticas (Combinatoria, Álgebra, Geometría), I.C.E. Valladolid, 1994*

Boltyanski, V.- Soifer, A. *Geometric Etudes in Combinatorial Mathematics,* C.E.M.E., Colorado Springs, 1991

Boudine, J-P.- Lo Jacomo, F.- Cuculière, R. *Olympiades Internationales de Mathématiques 1988-1997,* Ed. du Choix, 1998

Branzei, D.- Serdean, I.- Serdean, V. *Junior Balkan Mathematical Olympiads,* Ed. Plus, 2003

Chinese Math. Ol. Committee, *Mathematical Olympiad in China, 1990*

Conde Calero, J.M. y otros, *Problemas de la Olimpiada Matemática Internacional 1983/84/85* I.C.E. Alicante 1986

Contest Problem book, The (varios volúmenes) (A.H.S.M.E.), M.A.A.

Cuculescu, I. *Olimpiadele Internationale de Matematica ale elevilor (en rumano),* Ed. Tehnica, Bucarest 1984

Davidson, L.- Recio, F. *Los Concursos de Matemática,* MINED, Cuba 1974

Djukic, D.- Jankovic, V.- Matic, I.- Petrovic, N. *The IMO Compendium (A collection of Problems sugested for the International Mathematical Olympiads 1959-2004)* , Springer 2006.

Doob, M. *The Canadian Mathematical Olympiad 1969-1993,* C.M.S. 1993

Edwards, J.O. *All the best from the Australian Maths. Competition,* A.M.T. 1986

Engel, W.- Pirl, U. *Aufgaben mit Lösungen aus Olympiaden Junger Matematiker der DDR (varios años),* Volk und Wissen, 1972

Falk de Losada, M. *Olimpiadas Colombianas de matemática. Problemas y soluciones 1987-1991,* U. Antonio Nariño, 1994

Fauring, P.- Gaspar, M.- Gutiérrez, F. *Olimpíada Matemática Rioplatense (1^a a 4^a),* O.M.A. 1996

Fauring, P.- Wagner, E.- Wykowski A.- Gutiérrez, F.- Pedraza J.C.- Moreira C. *Problemas de las Olimpiadas Matemáticas del Cono Sur (1^a a 4^a),* O.M.A.1994

Fauring, P.- Gutiérrez, F. *Problemas de la Olimpiada matemática Argentina (varios vols.). O.M.A.*

Ferréol, R. *Concours Général, Énoncés et corrigés detaillés 1988-1994,* Ed. du Choix, 1996

Fomin, D.- Kirichenko, A. *Leningrad Mathematical Olympiads 1987-1991,* Math Pro Press, 1994

Fysher, L.- Medigovich, W. *Brother Brousseau Problem-Solving and mathematics Competition (2 vols.),* Dale Seymour, 1984

Gardiner, A. *The Mathematical Olympiad Handbook (An introduction to problem solving),* Oxford 1997

Gerll, D.- Girard, G. *Les Olympiades Internationales de mathématiques 1959-1966,* J.Gabay 1994

Gilbert,G.T.- Krusemeyer, M.I.- Larson, L.C. *The Wohascum County Problem book,* M.A.A. 1993

Gillman, R. (ed) *A friendly Mathematics Competition (35 years of teamwork in Indiana),* M.A.A. 2003

Gleason, A.M.- Greenwood, R.E.- Kelly, L.M. *The William Lowell Putnam Mathematical Competition. Problems and Solutions 1938-1964,* M.A.A. 1980

Greitzer, S. *International Mathematical Olympiads 1959-1977,* M.A.A., N.M.L. 27, 1978

Gueron, S. *Hungary-Israeli Mathematical Competition: The first twelfe years,* A.M.T.2004

Hahn, L-S. *New Mexico Mathematics Contest Problem book,* U. New Mexico Press, 2005

Hardy, K.- Williams, K.S. *The Green Book. 100 practice problems for undergraduate Mathematics Competitions,* Integer Press, 1985

Hungarian Problem Book I,II,III, N.M.L. 11,12 y 42. M.A.A., 1963 y 2001

Illanes Mejía, A. *Principios de Olimpiada,* Cuadernos de Olimpiadas, México 2003

Lausch, H.- Bosch Giral, C. *Asian Pacific Mathematics Olympiads 1989-2000,* A.M.T. 2000.

Lazarov, B.J.- Tabov, J.B.- Taylor, P.J.- Storozhev, A.M. *Bulgarian Mathematics Competition 1992-2001,* A.M.T. 2004

Liu, A. *Chinese Mathematics Competitions and Olympiads (2 vols.),* A.M.T. 2005

Kedlaya, K.S.- Poonen, B.- Vakil, R. *The William Lowell Putnam Mathematical Competition. Problems and Solutions 1985-2000,* M.A.A. 2002

Klamkin, M.S. *International Mathematical Olympiads 1978-1985, N.M.L. 31,* M.A.A.1988

Klamkin, M.S. *USA Mathematical Olympiads 1972-1986, N.M.L.33, M.A.A. 1988*

Kontogiannis, D. *Matematikes Olimpiades (en griego), Atenas 1987*

Kuczma, M. *144 Problems of the Austrian-Polish Mathematics Competition 1978-1993*, The Academic Distribution Center, 1994

Kuczma, M.E.- Windischbacher E. *Polish and Austrian Mathematical Olympiads 1981-1995,* A.M.T. 1998

Kuczma, M.E. *International Mathematical Olympiads 1986-1999,* M.A.A. 2003

Mathematical Olympiads: The Australian Scene (folletos y libros anuales), A.M.T.

Mbili, I.S.R. *Mathematical Challenge! 100 problems for the Olympiad enthusiast,* Cape Town University, 1978

Mega,E.- Watanabe, R. *Olimpiadas brasileiras de matemática: 1ª a 8ª.* Ed. Núcleo, Sao Paulo 1988

Moreira, C.- Motta, E.- Tengan, E.- Amancio, L.- Saldanha, N.- Rodrigues, P. *Olimpíadas brasileiras de Matemática 9ª a 16ª,* S.B.M., 2003

O'Halloran, P.J. (ed.) *An Olympiad down under. A report on the 26th I.M.O. in Australia,* Australian Maths. Competitions, 1989

OLCOMA (Comisión de Olimpiadas Costarricenses de Matemática) *Problemas de preparación. Euned, 2001*

Olimpiadas Colombianas de Matemática, *Problemas de Geometría,* Bogotá 1980

Olimpiada Mexicana de Matemáticas, *140 problemas, seis años de éxitos,* México, 1993

Reiman, I. *International Mathematical Olympiad 1959-1999,* Anthem Press, 2001

Roman, T.- Sacter, O.- Simionescu, Gh.D. *Probleme date la Concursurile de matematica (en rumano),* Ed. didactica si pedagogica, 1970

Santos, A.L.- Wagner, E.- Agostino, R.F.W. *Olimpíadas de Matemática do Estado do Rio de Janeiro,* S.B.M. 1995

Saul, M.E. *The New York City Contest Problem Book 1975-1984,* Dale Seymour, 1986

Scottish Mathematical Council, *Mathematical Challenges,* Blackie, 1989

Shklyarski, D.O. *Selected problems and theorems in elementary mathematics,* Mir, 1979

Sliinko, A.M. *URSS Mathematical Olympiads 1989-1992,* A.M.T. 1997

Soifer, A. *Mathematics problem solving,* C.E.M.E., Colorado Springs, 1987

Soifer, A. *How does one cut a triangle?,* C.E.M.E., Colorado Springs, 1990

Soifer, A. *The first 10 years : Colorado mathematical Olympiad and further explorations,* C.E.M.E., Colorado Springs, 1994

Straszewicz, S. *Mathematical problems and puzzles from the Polish Math. Olympiads,* Pergamon Press, 1965

Taylor, P.J.- Storozhev, A.M. *Tournement of Towns, 1980-84, 1984-89, 1989-93, 1993-97,* A.M.T.

Tomescu, I. y otros, *Olimpiadele Balcanice de matematica, 1984-1992 (en rumano), Ed. Pan, 1993*

Wagner, E. *10 Olimpiadas Iberoamericanas de Matemática,* O.E.I., 1996

Williams, K.S.- Hardy, K. *The Red book: 100 practice problems for undergraduate mathematics competitions,* Integer Press, 1988

Windisbacher, W. *Österreichische Mathematik Olympiaden 1970-1989,* Universitätsverlag Wagner, Innsbruck, 1990

Valladolid (España), mayo de 2006
Francisco Bellot Rosado

IX Competición Matemática Mediterránea 2006
Memorial Peter O'Halloran

Requena, Valencia, 29 de abril de 2006

Problema 1
Se colorean todos los puntos del plano con dos colores: rojo y azul. Hay al menos un punto rojo y al menos un punto azul.
¿Es posible que en cada circunferencia de radio 1 cm haya, exactamente,
i) un punto azul;
ii) dos puntos azules ?

Problema 2
Sea P un punto interior del triángulo ABC y sean A_1B_2, B_1C_2, C_1A_2 paralelas trazadas por P a los lados AB, BC, CA respectivamente, donde A_1, A_2 son puntos del lado BC, B_1, B_2 puntos del lado AC, y C_1, C_2 puntos del lado AB.
Demostrar que el área del hexágono $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ es mayor o igual que dos tercios del área de ABC.

Problema 3
Los lados a, b, c del triángulo ABC son números naturales tales que el máximo común divisor de a, b y c es igual a 1.
La bisectriz interior del ángulo $\widehat{A}$ corta a BC en D.
a) Probar que si ABC es semejante a ABD, entonces c es un cuadrado perfecto.
b)Para todo cuadrado perfecto $c = n^2$, $n > 2$, demostrar que existe un triángulo ABC semejante a ABD.

Problema 4
Sean m, n enteros positivos, y sean $x_{ij} \in [0, 1]$ para todos $i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n$.
Demostrar que

$$\prod_{j=1}^{n} \left(1 - \prod_{i=1}^{m} x_{ij}\right) + \prod_{i=1}^{m} \left(1 - \prod_{j=1}^{n} (1 - x_{ij})\right) \geq 1.$$

Cada problema vale 7 puntos

12 de julio de 2006

Problema 1. Sea ABC un triángulo y sea I el centro de su circunferencia inscrita. Sea P un punto en el interior del triángulo tal que

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB.$$

Demuestre que $AP \geq AI$ y que vale la igualdad si y sólo si $P = I$.

Problema 2. Decimos que una diagonal de un polígono regular P de 2006 lados es un *segmento bueno* si sus extremos dividen al borde de P en dos partes, cada una de ellas formada por un número impar de lados. Los lados de P también se consideran *segmentos buenos*.

Supongamos que P se ha dividido en triángulos trazando 2003 diagonales de modo que ningún par de ellas se corta en el interior de P. Encuentre el máximo número de triángulos isósceles que puede haber tales que dos de sus lados son *segmentos buenos*.

Problema 3. Determine el menor número real M tal que la desigualdad

$$|ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2)| \leq M \left(a^2 + b^2 + c^2\right)^2$$

se cumple para todos los números reales a, b, c.

Tiempo permitido: 4 horas 30 minutos
Cada problema vale 7 puntos.

13 de julio de 2006

Problema 4. Determine todas las parejas de enteros (x, y) tales que

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

Problema 5. Sea $P(x)$ un polinomio de grado $n > 1$ con coeficientes enteros y sea k un entero positivo. Considere el polinomio $Q(x) = P(P(\ldots P(P(x))\ldots))$, donde P aparece k veces. Demuestre que hay a lo sumo n enteros t tales que $Q(t) = t$.

Problema 6. Asignamos a cada lado b de un polígono convexo P el área máxima que puede tener un triángulo que tiene a b como uno de sus lados y que está contenido en P. Demuestre que la suma de las áreas asignadas a los lados de P es mayor o igual que el doble del área de P.

Tiempo permitido: 4 horas 30 minutos
Cada problema vale 7 puntos.

Problema 118.
Resolver, en el conjunto de los números reales, el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=6 \\ xy+yz+xz=9 \\ x^3+y^3+z^3=63 \end{array}\right\}$$

Solución.
Elevando al cuadrado la primera y teniendo en cuanta la segunda, resulta $x^2+y^2+z^2=18$.
Multiplicando miembro a miembro las dos primeras ecuaciones, queda

$$3xyz+x^2\left(y+z\right)+y^2\left(x+z\right)+z^2\left(x+y\right)=54$$

y, por la primera, queda

$$3xyz+x^2\left(6-x\right)+y^2\left(6-y\right)+z^2\left(6-z\right)=54$$

operando

$$3xyz+6\left(x^2+y^2+z^2\right)-\left(x^3+y^3+z^3\right)=54$$

sustituyendo los paréntesis por sus valores numéricos resulta finalmente el sistema equivalente

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=6 \\ xy+yz+xz=9 \\ xyz=3 \end{array}\right\}$$

en virtud de las fórmulas de Cardano-Vieta resolver el sistema es equivalente a resolver la ecuación cúbica:

$$t^3-6t^2+9t-3=0$$

con el cambio $t=u+2$ eliminamos el termino de segundo grado y queda en la forma

$$u^3-3u-1=0 \quad (*)$$

que resolveremos con el procedimiento de Vieta.
Haciendo $u=v+\dfrac{1}{v}$ y operando resulta la ecuación $v^6-v^3+1=0$ que es de segundo grado en la incógnita v^3. Resolviendo en v^3 queda

$$v^3=\frac{1\pm\sqrt{1-4}}{2}=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i=\cos 60^{\circ}\pm i\,\mathrm{sen}\,60^{\circ}$$

cada solución tiene tres raíces cúbicas que sustituidas en $u=v+\dfrac{1}{v}$ nos dan tres parejas de valores que se repiten para cada una de ellas.
Las tres raíces de (*) sustituidas en $t=u+2$ nos proporcionan la solución final del sistema

$$\left\{\begin{array}{l} x=2\left(1+\cos 20^{\circ}\right) \\ y=2\left(1+\cos 140^{\circ}\right) \\ z=2\left(1+\cos 260^{\circ}\right) \end{array}\right.$$

y las correspondiente permutaciones al ser simétrico el sistema en las tres incógnitas.

José Luis **Díaz–Barrero**
Applied Mathematics III
Universitat Politècnica de Catalunya
Jordi Girona 1-3, C2, 08034 Barcelona. Spain
jose.luis.diaz@upc.edu

Problema 119 *Propuesto por el editor.*

Demostrar que las ecuaciones

$$\begin{aligned} ax^3 + 3bx^2 + d &= 0, \\ bx^3 + 3dx^2 + e &= 0 \end{aligned}$$

tiene una raíz común si

$$(ae - 4bd)^3 = 27(ad^2 + b^2 e)^2.$$

Solución por José Luis Díaz-Barrero (Barcelona, España)

La resultante de Bezout para las ecuaciones del enunciado es

$$B = \begin{vmatrix} ae - bd & 3eb - 3d^2 & 0 \\ 0 & ae - bd & 3eb - 3d^2 \\ 3ad - 3b^2 & 0 & ae - bd \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= a^3e^3 - 12bda^2e^2 - 6aeb^2d^2 - 64b^3d^3 - 27a^2d^4 - 27e^2b^4 \\ &= (a^3e^3 - 12bda^2e^2 + 48aeb^2d^2 - 64b^3d^3) - 27(a^2d^4 + 2aeb^2d^2 + e^2b^4) \\ &= (ae - 4bd)^3 - 27(ad^2 + eb^2)^2 \end{aligned}$$

Es bien conocido que las ecuaciones dadas tiene una raíz común si su resultante es cero. Por tanto, si $B = 0$ entonces $(ae - 4bd)^3 - 27(ad^2 + eb^2)^2 = 0$ y hemos terminado.

Comentario: En lugar de utilizar la resultante de Bezout podría haberse utilizado la resultante Sylvester:

$$R = \begin{vmatrix} a & 3b & 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & a & 3b & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & a & 3b & 0 & d \\ b & 3d & 0 & e & 0 & 0 \\ 0 & b & 3d & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & b & 3d & 0 & e \end{vmatrix}.$$

Obviamente se obtiene el mismo resultado pero hay que calcular un determinante de mayor orden.

PROBLEMAS 121-125

Problema 121 (propuesto por José Luis Díaz-Barrero, Barcelona, España) Calcular la suma

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{(-1)^{n+1}+F_{n-1}F_{n+1}}{2^{2n}}\right),$$

siendo F_n el $n-$ésimo número de Fibonacci, definido por $F_0=0, F_1=1$ y para todo $n\geq 2$, $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$.

Problema 122 (propuesto por José Luis Díaz-Barrero, Barcelona, España) Sean a,b,c los lados de un triángulo acutángulo ABC con semiperímetro s. Demostrar que

$$\left(\frac{a}{s}\right)^3\sec A+\left(\frac{b}{s}\right)^3\sec B+\left(\frac{c}{s}\right)^3\sec C\geq\frac{16}{9}.$$

Problema 123 (propuesto por Laurentiu Modan, Bucarest, Rumania)

i) Hallar el cardinal $E(n), n\in N^*$, del conjunto de los números de n cifras, que se escriben solamente con cifras pares.

ii) Hallar el cardinal $O(n)$, $n\in N^*$, de los números de n cifras, que se escriben solamente con cifras impares.

iii) Hallar $n\in N^*$ de tal manera que $E(n)+O(n)$ sea cuadrado perfecto.

iv) Sea $H(n), n\in N^*$ el cardinal del conjunto de los números de n cifras que se pueden formar con los diez dígitos 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9. Calcular el máximo común divisor de $H(n)$ y $E(n)+O(n)$.

v) Hallar los $n\in N^*$ tales que

$$\frac{H(n)}{O(n)-E(n)}\equiv 0(\bmod 144).$$

Problema 124 (propuesto por Laurentiu Modan, Bucarest, Rumania) Dos personas se mueven aleatoriamente sobre una superficie, sin situarse en direcciones paralelas. En la superficie hay un obstáculo, que, a veces, no permite que las personas se vean. ¿Con qué probabilidad las dos personas no se verán?

Problema 125 (propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, Ávila, España Si a,b,c son estrictamente positivos, demostrar que

$$abc\leq\sqrt{\frac{abc\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)}{3}}\leq\frac{1}{3}\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)$$

DIVERTIMENTOS MATEMÁTICOS (25)

Algunas anécdotas
(de diversas fuentes)

- De Henri Poincaré, el último universalista de las matemáticas, se decía que era “ambidextro”…. Porque dibujaba igual de mal con la mano derecha que con la mano izquierda. (1)

- El único Papa matemático de la historia fue el monje Gerberto de Aurillac (983-1003), que tomó el nombre de Silvestre II. En sus obras matemáticas consideró que la altura de un triángulo equilátero es 6/7 del lado. Como es bien conocido, los Papas son infalibles…interpretando la doctrina de la Iglesia Católica.

-
- “¡Dónde se habrá visto! ¡Un catedrático dando clase!” (Atribuído a J.Rey Pastor en (1)).
- Tres preguntas interrelacionadas en un curso sobre programación de computadoras:
    1) ¿Cuántas operaciones hacen falta para meter un hipopótamo en la nevera? Tres: Abrir la nevera, poner el hipopótamo dentro, y cerrar la puerta de la nevera.
    2) ¿Cuántas operaciones hacen falta para meter una girafa en la nevera? (Se puede suponer que la nevera es más alta que la girafa) Cuatro: Abrir la nevera, sacar al hipopótamo, meter la girafa y cerrar la puerta.
    3) La girafa y el hipopótamo están a una distancia de un km del río. La girafa corre a una velocidad de 10 km/h; el hipopótamo, a la mitad de velocidad más 5 km/h. ¿Cuál de los dos llega antes al río? El hipopótamo, porque la girafa todavía está encerrada en la nevera. (Incluído en (2)).

Referencias:

(1)”Los matemáticos no son gente seria”, de C. Alsina y M. de Guzmán; Rubes Ed., 1996.

(2)”Twenty years befote the blackboard”, de M. Stueben y D. Sandford; MAA, 1998.

Francisco Bellot Rosado
Valladolid, Julio 2006.

COMENTARIO DE PÁGINAS WEB (25)

La página de la Escuela Superior Politécnica del Litoral (ESPOL), de Guayaquil, Ecuador

www.icm.espol.edu.ec

ESPOL es una institución de educación superior de enorme prestigio en Ecuador y en el extranjero. En el Instituto de Ciencias Matemáticas (icm) se imparten estudios de Matemática Pura y Aplicada (con énfasis en esta última rama), y en su seno está trabajando el Comité Organizador de la XXI Olimpiada Iberoamericana de Matemática, que tendrá lugar del 23 al 30 de septiembre de 2006. Hay un enlace para acceder a la página de la Olimpiada, que por el momento comprende las secciones "Presentación", "Material académico", Reseña Histórica", "Galería", "Programación", "Sitios de interés", "Reglamentos" y "Registro", así como Países confirmados y Reglamento y Registro del II Seminario Iberoamericano de Educación Matemática, con énfasis en la resolución de problemas.

La organización del Concurso Intercolegial de Matemáticas, y de la Olimpiada de Ecuador corre a cargo del equipo de Olimpiadas matemáticas de la ESPOL. Es un hecho, cuando menos sorprendente, que la invitación para la participación de Ecuador en la I.M.O. (Olimpiada Internacional de Matemáticas) no se envíe a la ESPOL, una situación que debería ser corregida rápidamente.

Pero, al margen de esto, la página web que comentamos debería ser conocida por los suscriptores de la Revista Escolar de la O.I.M., a los que desde aquí invitamos a visitarla.

Valladolid, julio de 2006.
Francisco Bellot Rosado

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

Número

26

Revista Escolar
de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática
ISSN 1698-677X

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática
Número 26 (Julio - Agosto 2006)
ISSN – 1698-277X

Número dedicado a María José García-Sípido fallecida en Madrid el 21 de agosto de 2006

Índice

Editorial

Década para la Educación por la sostenibilidad (2005-2014)

Artículos, Notas y Lecciones de preparación olímpica

Jean-Louis Ayme: **El teorema de Feuerbach: una demostración puramente sintética.**

Problemas para alumnos de Educación Media y de Olimpiadas

Propuestos: **Problemas de la segunda ronda de la Olimpiada Británica 2005**.

Resueltos: presentamos la solución de Bruno Salgueiro Fanego al problema **2 de la IX Competición Matemática Mediterránea**, identificado por él como el problema 90 de la Revista Escolar de la OIM .

Problemas para los más jóvenes

Presentamos los problemas de la **VIII Olimpiada de Centroamérica y el Caribe, celebrada en Panamá.**

Resueltos:

Problema 24.1: Recibida una solución de Bruno Salgueiro Fanego (Vivero, España), que publicamos.

Problema 24.2: Recibidas soluciones de Bruno Salgueiro Fanego y José Carlos García Barro. Presentamos la solución de García Barro.
Problema 24.3: Recibidas soluciones de Bruno Salgueiro Fanego (analítica) y dos de José Carlos García Barro, una de ellas analítica y la otra sintética. Presentamos la solución sintética de García Barro. El problema se propuso a alumnos españoles de 2º de E.S.O. (13 años de edad), en cuyo programa no se incluye la Geometría Analítica.

Problemas resueltos

Problema 120:
Recibidas soluciones de Daniel Lasaosa Medarde (Pamplona, España) y Cristóbal Sánchez Rubio (Benicassim, España). Presentamos la solución de Lasaosa. Origen del problema: Mathematical problem papers, del Rev.E.M. Radford, Cambridge 1931.

Problema 121:
Recibidas soluciones de José Hernández Santiago (Oaxaca, México), Marcos Martinelli (Brasil), Bruno Salgueiro Fanego (Vivero, España), Cristóbal Sánchez Rubio (Benicassim, España) y el proponente. Presentamos la solución del proponente, José Luis Díaz Barrero. Recibida una solución incorrecta.

Problema 122:
Recibidas soluciones de Daniel Lasaosa Medarde (Pamplona, España) y Cristóbal Sánchez Rubio (Benicasim, España) y el proponente. Presentamos la solución de Sánchez Rubio. Recibida, además, una solución en la que se encuentra una cota inferior más pequeña que la propuesta en el original (lo cual no invalida la cota de la propuesta ni, evidentemente, la mejora).

Problema 123:
Recibidas soluciones prácticamente iguales de Daniel Lasaosa Medarde (Pamplona, España), Miquel Roig (Barcelona, España) Bruno Salgueiro Fanego (Vivero, España) y el proponente. Presentamos la solución de Lasaosa.

Problema 124:
No se ha recibido ninguna solución. El problema continúa abierto.

Problema 125:
Recibidas soluciones prácticamente iguales de José Luis Díaz Barrero (Barcelona, España), Daniel Lasaosa Medarde (Pamplona, España); Marcos Martinelli (Brasil), Glauber Moreno Barbosa (Brasil), Miquel Roig (Barcelona, España), Bruno Salgueiro Fanego (Vivero, Lugo); Cristóbal Sánchez Rubio (Benicasim, España); y el proponente. Presentamos la solución de Sánchez Rubio.

Problemas propuestos

En este apartado se invita a los lectores a resolver cinco problemas y enviarnos sus soluciones. Las más originales serán publicadas.

Divertimentos matemáticos

Sobre George Pólya (1887-1985), por Francisco Bellot

Reseñas web

La página de Peter Winkler, por Francisco Bellot

Editor: Francisco Bellot Rosado

Compromiso por una educación para la sostenibilidad

La Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática quiere manifestar su adhesión al Compromiso por una educación para la sostenibilidad.

Por ello reproducimos el Compromiso e invitamos a nuestros lectores a adherirse. Para ello basta con rellenar el **formulario enlazado**.

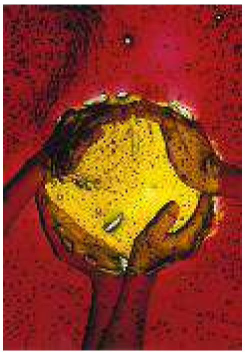
Naciones Unidas, frente a la gravedad y urgencia de los problemas a los que se enfrenta hoy la humanidad, ha instituido una Década de la Educación para un Futuro Sostenible (2005–2014), designado a UNESCO como órgano responsable de su promoción. El manifiesto que presentamos constituye un llamamiento a participar decididamente en esta importante iniciativa (Ver ***http://www.oei.es/decada/****).*

Compromiso
por una educación para la sostenibilidad

Vivimos una situación de ***auténtica emergencia planetaria***, marcada por toda una serie de graves problemas estrechamente relacionados: contaminación y degradación de los ecosistemas, agotamiento de recursos, crecimiento incontrolado de la población mundial, desequilibrios insostenibles, conflictos destructivos, pérdida de diversidad biológica y cultural …

Esta situación de emergencia planetaria aparece asociada a comportamientos individuales y colectivos orientados a la búsqueda de beneficios particulares y a corto plazo**,** sin atender a sus consecuencias para los demás o para las futuras generaciones. Un comportamiento fruto, en buena medida, de la costumbre de centrar la atención en lo más próximo, espacial y temporalmente.

Los educadores, en general, no estamos prestando suficiente atención a esta situación pese a llamamientos como los de Naciones Unidas en las Cumbres de La Tierra (Rio 1992 y Johannesburgo 2002).



Es preciso, por ello, asumir un compromiso para que toda la educación, tanto formal (desde la escuela primaria a la universidad) como informal (museos, media...), preste sistemáticamente atención a la situación del mundo, con el fin de proporcionar una percepción correcta de los problemas y de fomentar actitudes y comportamientos favorables para el logro de un futuro sostenible. Se trata, en definitiva, de contribuir a formar ciudadanas y ciudadanos conscientes de la gravedad y del carácter global de los problemas y preparados para participar en la toma de decisiones adecuadas.

Proponemos por ello el lanzamiento de la campaña ***Compromiso por una educación para la sostenibilidad***. El compromiso, en primer lugar, de incorporar a nuestras acciones educativas la atención a la situación del mundo, promoviendo entre otros:

- Un consumo responsable, que se ajuste a las tres R (Reducir, Reutilizar y Reciclar) y atienda a las demandas del “Comercio justo”;
- La reivindicación e impulso de desarrollos tecnocientíficos favorecedores de la sostenibilidad, con control social y la aplicación sistemática del principio de precaución;
- Acciones sociopolíticas en defensa de la solidaridad y la protección del medio, a escala local y planetaria, que contribuyan a poner fin a los desequilibrios insostenibles y a los conflictos asociados, con una decidida defensa de la ampliación y generalización de los derechos humanos al conjunto de la población mundial, sin discriminaciones de ningún tipo (étnicas, de género…);
- La superación, en definitiva, de la defensa de los intereses y valores particulares a corto plazo y la comprensión de que la solidaridad y la protección global de la diversidad biológica y cultural constituyen un requisito imprescindible para una auténtica solución de los problemas.

El compromiso, en segundo lugar, de multiplicar las iniciativas para implicar al conjunto de los educadores, con campañas de difusión y concienciación en los centros educativos, congresos, encuentros, publicaciones… y, finalmente, el compromiso de un seguimiento cuidadoso de las acciones realizadas, dándolas a conocer para un mejor aprovechamiento colectivo.

Llamamos así a sumarnos decididamente a las iniciativas de la ***Década de Educación para un Futuro Sostenible,*** que Naciones Unidas promueve de 2005 a 2014. (**http://www.oei.es/decada**)

Educadores por la sostenibilidad

As Nações Unidas, face à gravidade e urgência dos problemas com que a humanidade hoje se debate, instituíu uma Década por uma Educação para o Futuro Sustentável (2005-2014), tendo a UNESCO sido designada como o órgão responsável pela sua promoção. O MANIFESTO que apresentamos constitui um apelo à decidida participação nesta importante iniciativa (ver http://www.oei.es/decada/).

Compromiso
Por uma educação para a sustentabilidade

Vivemos numa situação de ***autêntica emergência planetária***, marcada por toda uma série de graves problemas estreitamente relacionados: contaminação e degradação dos ecossistemas, esgotamento de recursos, crescimento incontrolado da população mundial, desequilíbrios insustentáveis, conflitos destrutivos, perda de diversidade biológica e cultural …

Esta situação de emergência planetária aparece associada a comportamentos individuais e colectivos orientados para a ***procura de benefícios particulares e a curto prazo***, sem tomar em conta as suas consequências para com os outros ou para com as futuras gerações. Um comportamento fruto, em boa medida, da prática de centrar a atenção no mais próximo, espacial e temporalmente.

Em geral, nós, educadores, não prestamos a devida atenção a esta situação apesar de apelos como os das Nações Unidas nas Cimeiras da Terra (Rio 1992 e Johannesburgo 2002). Necessitamos, pois, de assumir um compromisso para que toda a educação, tanto formal (desde a escola primária até a universidade) como informal (museus, média...), preste sistematicamente atenção à situação do mundo, com a finalidade de proporcionar uma percepção correcta dos problemas e de fomentar atitudes e comportamentos favoráveis para construir um futuro sustentável.

Deste modo pretende-se contribuir para formar cidadãos e cidadãs conscientes da gravidade e do carácter global dos problemas e prepará-los para participar na tomada de decisões adequadas.

Propomos, por isso, o lançamento da campanha **Compromisso para uma educação para a sustentabilidade**. O compromisso, em primeiro lugar, de **incorporar às nossas acções educativas a atenção da situação do mundo,** promovendo entre outros:

- Um consumo responsável, que se ajuste aos três R (Reduzir, Reutilizar e Reciclar), e responda aos pedidos do “Comércio justo”;
- A reivindicação e impulso de desenvolvimentos técnico-científicos favorecedores da sustentabilidade, com controlo social e a aplicação sistemática do princípio da precaução;
- Acções socio-políticas em defesa da solidariedade e da protecção do meio, à escala local e planetária, que contribuam para pôr fim aos desequilíbrios insustentáveis e aos conflitos a eles associados, com uma decidida defesa da ampliação e generalização dos direitos humanos ao conjunto da população mundial, sem discriminações de nenhum tipo (étnicas, de género…);
- A superação, em definitivo, da defesa dos interesses e valores particulares a curto prazo e a compreensão de que a solidariedade e a protecção global da diversidade biológica e cultural constituem um requisito imprescindível para uma autêntica solução dos problemas.

O compromisso de multiplicar as iniciativas para implicar o conjunto dos educadores, com campanhas de difusão e consciencialização nos centros educativos, congressos, encontros, publicações… e o compromisso de garantir o acompanhamento cuidadoso das acções realizadas, divulgando-as para o seu melhor aproveitamento colectivo.

Apelamos, deste modo, a juntar-se às iniciativas da ***Década da Educação para um Futuro Sustentável***, que as Nações Unidas promovem de 2005 a 2014 (**http://www.oei.es/decada/**).

Educadores pela sustentabilidade

EL TEOREMA DE FEUERBACH

UNA NUEVA DEMOSTRACIÓN PURAMENTE SINTÉTICA

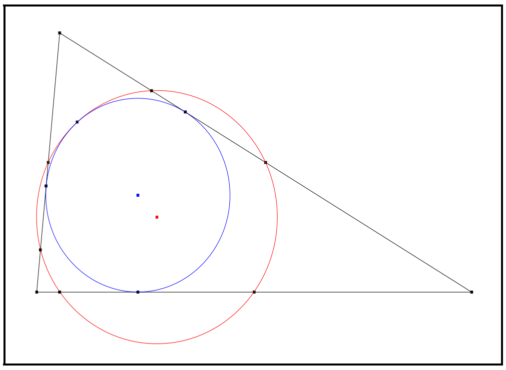
Jean-Louis AYME

Lycée Lislet Geoffroy, 97400 St.-Denis, Île de la Réunion, France

Resumen Presentamos una nueva demostración, completamente sintética, del teorema de Feuerbach que no hemos encontrado en la bibliografía geométrica, así como una breve nota biográfica de este geómetra alemán. La demostración se basa en tres lemas que se demuestran sintéticamente..

1. A propósito de Feuerbach

Karl Feuerbach, hermano del famoso filósofo Ludwig Feuerbach, nació en Jena, Alemania, el 30 de mayo de 1800, en una familia protestante. Hijo del jurista Paul Feuerbach y de Éva Troster, el brillante estudiante de la Universidad de Erlangen, y después de Friburgo, obtuvo a los 22 años su doctorado y comenzó a enseñar matemáticas en el Gymnasium de Erlangen, frecuentando un círculo de estudiantes de esta ciudad, conocido por su derroche y sus deudas. Ese mismo año publica en Nuremberg un librito de 62 páginas de título largo y difuso [**1**] en el que presenta, en la página 38 y demuestra analíticamente "el más bello teorema de geometría elemental descubierto desde la época de Euclides", según el historiador J. L. Coolidge [**2**] :

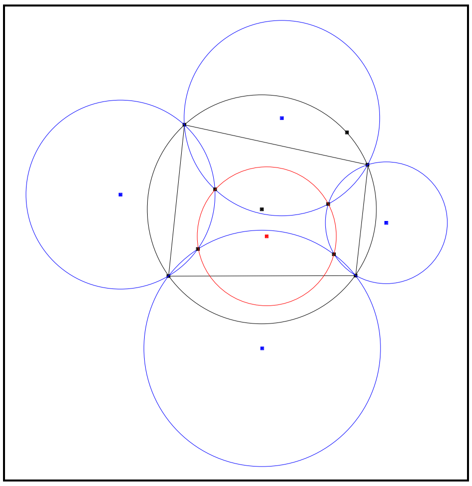


En un triángulo,el círculo inscrito es tangente al de Euler

En 1824, Feuerbach es detenido y encarcelado durante un año, junto con 19 estudiantes, en Munich, por sus posiciones políticas. Considerándose responsable de todo, sufre una depresión e intenta suicidarse en dos ocasiones, para salvar a sus compañeros, primero cortándose las venas y después tirándose por una ventana. Tras su liberación, vuelve a vivir con su familia y gracias a una intervención del rey consigue de nuevo un puesto de profesor en Hof, que deberá abandonar como consecuencia de una nueva depresión. En 1828, mejorada su salud, enseña de nuevo en Erlangen, hasta el día en que, desenvainando una espada en clase, amenaza con cortar la cabeza de los alumnos que no sepan resolver la ecuación que ha escrito en el encerado…. Abandonando la enseñanza, vivirá recluido los seis últimos años de su corta vida dejándose crecer el pelo, la barba y las uñas, contemplando las pinturas de su sobrino, el pintor Anselmo Feuerbach. Este profesor impulsivo y perturbado murió en Erlangen, el 12 de marzo de 1834.

2. Tres lemas

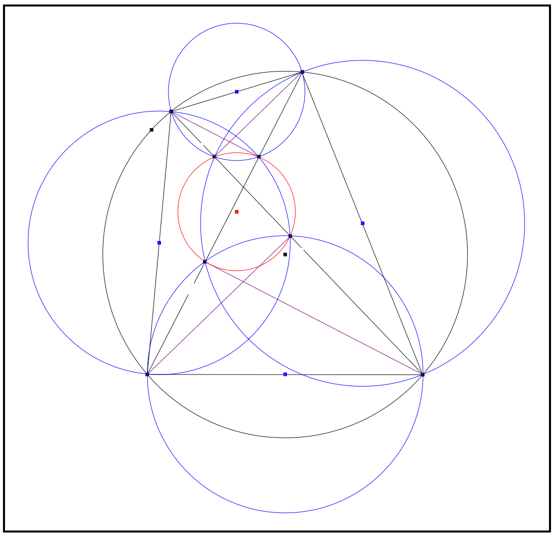
El geómetra francés Auguste Miquel ya era conocido en 1836 cuando todavía era alumno de la institución Barbet en Paris, publicando en el efímero periódico matemático *Le Géomètre*, fundado por Guillard, demostraciones de un teorema de Steiner, no probado. En 1844, publica en el *Journal de Mathématiques pures et appliquées* de Liouville, el teorema de los seis círculos [**3**] :



Lema 1 o teorema de los seis círculos : *los círculos que tienen por cuerdas los lados de un cuadrilátero cíclico se vueven a cortar en cuatro puntos concíclicos.*

Observemos que Isaac Moisevitch Yaglom [**4**] considera que este "teorema bastante elegante no parece particularmente fecundo"; no obstante, añade que "las consecuencias de este teorema sencillo, como ocurre muchas veces en geometría, pueden, sin exageración, calificarse de notables".

Del lema 1 podemos deducir el caso particular siguiente :



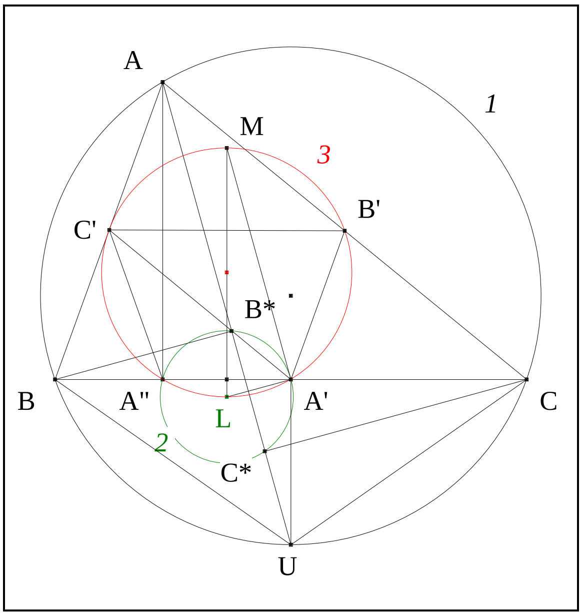
Los círculos cuyos diámetros son los lados de un cuadrilátero cíclico se vueven a cortar enlos vértices de un cuadrilátero cíclico

O bien

Las cuatro proyecciones de los vértices de un cuadrilátero cíclico sobre las diagonales son los vértices de un cuadrilátero cíclico

Vamos ahora a estudiar dos ejemplos de este caso particular en la geometría del triángulo.

Ejemplo 1.
El historiador alemán Max Simon [**5**] atribuye al teniente de Artillería Calabre y al profesor R. Malloizel [**6**] de la Escuela Sainte-Barbe en París el resultado siguiente :



En un triángulo ABC, *las proyecciones* B* y C* *de los vértices* B *y* C *sobre la bisectriz de* A, *el punto medio* A' *de* [BC] *el pie* A" *de la altura desde A, son cuatro puntos concíclicos; el centro del círculo que los contiene es el punto medio* L *del arco* A'A" *del círculo de Euler (o de los 9 puntos) que no contiene a C'.*

- Llamemos U al segundo punto de interseción de la bisectriz desde A con *1*.

- La primera parte es una aplicación directa del caso particular precedente al cuadrilátero ABUC.

- Para la segunda parte,
  Sean *1* el círculo circunscrito de ABC,
  B', C' los puntos medios de los lados [AC], [AB],
  2 el círculo que pasa por B*, C*, A' et A",
  3 el círculo de Euler de ABC ; pasa por A', B', C' y A" ;
  y L, M los puntos de intersección de la mediatriz de [A'A"] con *3*.

- La recta (B'C') que une los puntos medios de los lados [AC] y [AB] de ABC es paralela a (BC).

- El cuadrilátero cíclico A"A'B'C' tiene dos lados opuestos paralelos, así que es un trapecio isósceles;
  Como consecuencias, **(1)** (LM) es la mediatriz de [B'C']
  (2) [LM] es un diámetro de *3*.

  - al ser (LM) la mediatriz de [B'C'], M es el punto medio del arco B'C' que no contiene a A' ;
    Se deduce que (A'M) es la bisectriz de <C'A'B'.

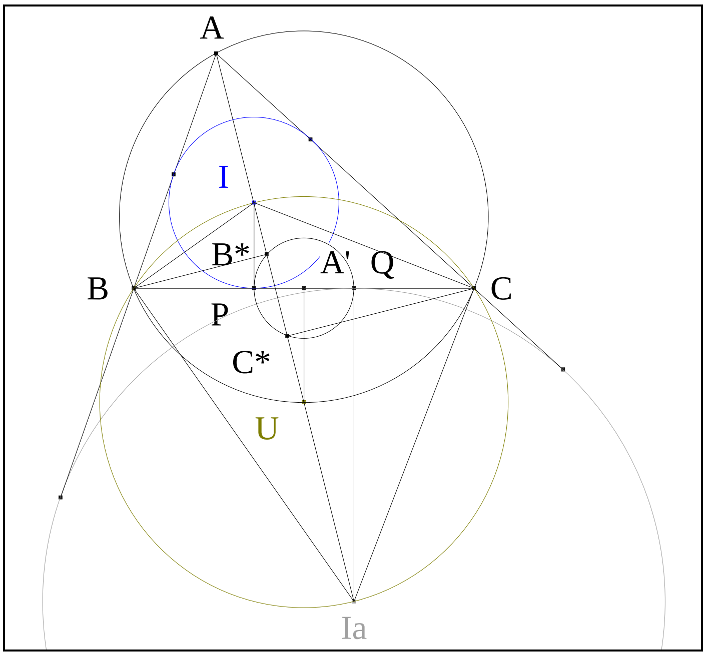
- Siendo A'B'AC' un paralelogramo las bisectrices (A'M) y (AU) de sus dos ángulos opuestos <C'A'B' y <B'AC' son parallelas.

- Siendo A'ML inscriptible en un semicírculo, (A'L) ⊥ (A'M) ;
  Por tanto, (A'L) ⊥ (AU) ;
  por hipótesis, (AU) ⊥ (BB*) y (AU) ⊥ (CC*) ;
  de ahí se deduce que (A'L), (BB*) y (CC*) son paralelas.

- Siendo A' el punto medio de [BC],y siendo paralelas las rectas (BB*) y (CC*) ,resulta que (A'L) es la mediatriz de [B*C*].

- **Conclusion :** siendo concíclicos los puntos B*, C*, A' y A" ,
L es el centro de *2* y el punto medio del arco A'A" que no contiene a C'.

Ejemplo 2.
El geómetra estadounidense Nathan Altshiller-Court [**7**] atribuye a Eugène Catalan los dos resultados siguientes :



(a) I *es el centro del círculo inscrito, e* Ia *el del círculo exinscrito respecto de* A *en el triángulo* ABC,*entonces el círculo de diámetro* [IIa] *pasa por* B *y* C,*y tiene su centro* U en el círculo circunscrito de ABC. [**8**]

(b) *los puntos de tangencia* P *y* Q *de la rectae* (BC) *con los círculos inscrito y exinscritorelativos a ese lado, son dos puntos isotómicos de ese lado.* [**9**]

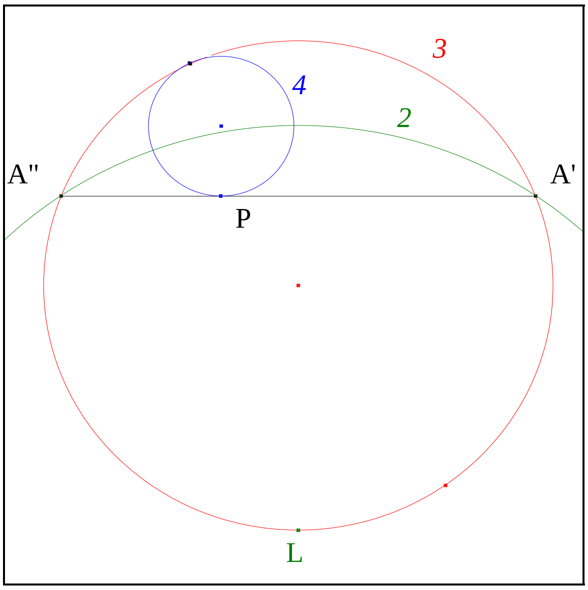
En 1813, Louis Gaultier de Tours [**10**] escribe, durante sus estudios en l'École Polytechnique, una memoria titulada "Les contacts des cercles" en el *Journal de l'École Polytechnique* en la que obtiene una notable propiedad del eje radical, es decir, de la cuerda común a dos círculos secantes :

Lema 2. **(a)** *un círculo ortogonal a dos círculos secantes tiene su centro sobre el eje radical de esos dos círculos*

(b) *Si un círculo tiene su centro sobre el eje radical de dos círculos secantes y es ortogonal a uno de ellos, entonces es ortogonal al otro.*

Al principio del siglo XX, el *Leybourn's Mathematical repository* propone un teorema [**12**] del que presentamos un recíproco.

Lema 3.

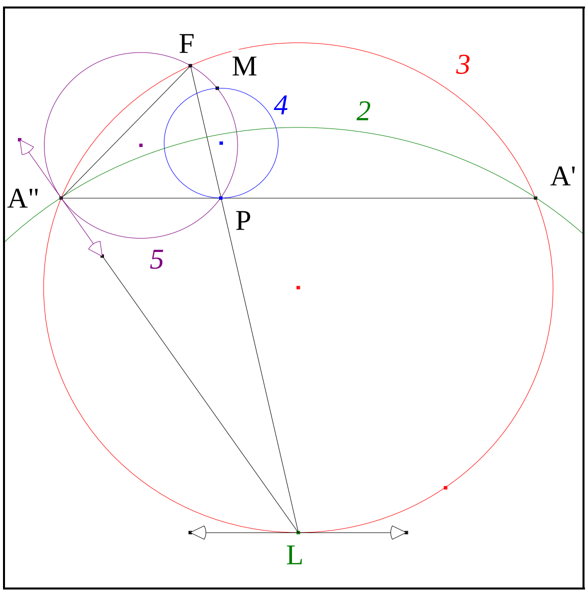


Hipótesis : *3* una circunferencia,
[A"A'] una cuerda horizontal de *3*,
L el polo sur de 3,
2 la circunferencia de centro L que pasa por A", A',
P un punto de [A"A']
y *4* una circunferencia nórdica, tangente a (A"A') en P y ortogonal a *2*.

Conclusión : *4* es tangente a *3*.

Esquema de la demostración.

- Las notaciones y los colores de las circunferencias corresponden a las introducidas previamente.



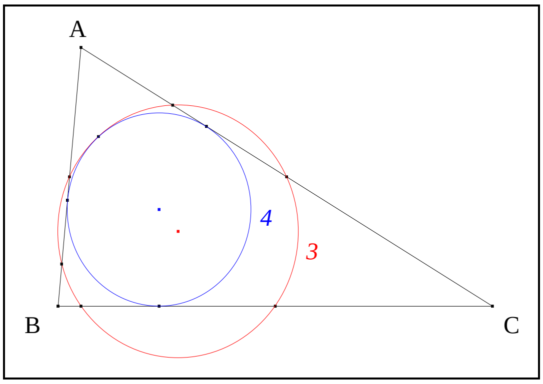
- Sean F el segundo punto de intersección de la recta (PL) con 3
5 la circunferencia que pasa por A", P y F;
y M el segundo punto de intersección de *5* y *4*.

- Según el teorema de Reim (v. Apéndice) aplicado a las circunferencias *2* y *5*, como (PA") es parallela a la tangente a *3* en L, la recta (A"L) es tangente a *5* en A" ;
en consecuencia, por ser la tangente a *2* en A" un diámetro de *5*, *2* es ortogonal a *5*.

- Según el lema 2-a, por ser *2* ortogonal a *5*, el centro L de *3* está en el eje radical (PM) de *4* y *5* ; en consecuencia, M coincide con F , es decir, *3* y *4* pasan por F.

- Conclusión : siendo paralelas las tangentes a *4* en P y a *3* en L , *4* es tangente a *3* en F.

3. La nueva demostración del teorema de Feuerbach

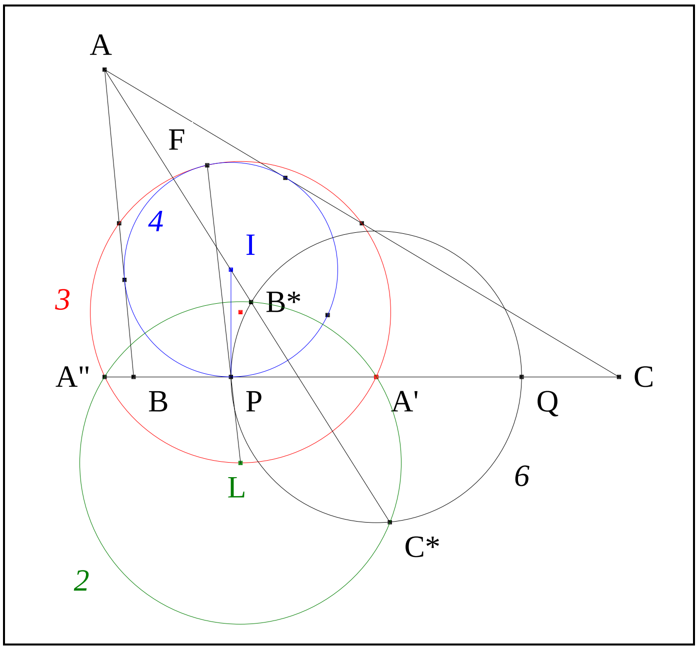


Hipótesis : ABC un triángulo
3 el círculo de Euler de ABC
y *4* el círculo inscrito en ABC.

Conclusión : *4* es tangente a *3*.

Esquema de la demostración :

- Las notaciones y colores de las circunferencias corresponden a los introducidos previamente.



- Según el lema 1-ejemplo 2, los puntos P, B*, Q y C* son concíclicos.

- Sea *6* la circunferencia que los contiene.

- Por definición, *6* es ortogonal à 3.

- Por el lema 1-ejemplo 2 y el lema 2-b, los puntos B*, C*, A' et A" son concíclicos.

- Por el lema 2-b, *4* es ortogonal a *2*.

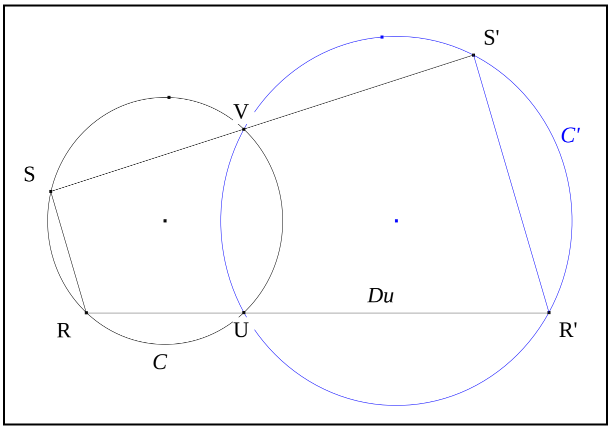
- Conclusión : Por ser P un punto de la cuerda [A"A'] del círculo *3*, y según el lema 3, *4* es tangente à *3*.

Escolios : **(1)** el punto de contacto de *4* y *3*, llamado F, es el punto de Feuerbach de ABC ; Es conocido como X_{11} en ETC [**13**].

(2) F es el segundo punto de intersección de la recta (PL) con el círculo *3* ó *4*.

4. Apéndice

A principios del siglo XX, Frère Gabriel-Marie, cuyo verdadero nombre era Edmond Brunhes, presenta en sus *Exercices de Géométrie*, el resultado de Anton Reim [**11**] del que proponemos un recíproco :



Hipótesis : *C*, *C'* dos círculos secantes,
U, V los puntos de intersección de *C* y *C'*,
Du una recta que pasa por U,
R, R' los segundos puntos de intersección de Du con *C* y *C'*,
S un punto de *C*
y S' un punto de *C'* tal que (R'S') sea paralela a (RS).

Conclusión : los puntos S, V y S' están alineados.

Escolio : si los puntos S y V coinciden, entonces la recta (SVS') es la tangente a *C* en V.

5. Referencias (históricas y académicas)

[1] Feuerbach, *Eigenschaften einiger merkwurdigen Punkte des geradlinigen Dreiecks, und mehrerer durch sie bestimmten Linien und Figuren.*
R. A. Johnson, *Advanced Euclidean Geometry*, Dover, New York (1960) 200-205.
[2] Coolidge, The Heroic Age of Geometry, *Bulletin of the American Mathematical Society* **35**, 1229.
[3] Miquel A., Mémoire de Géométrie, *Journal de Liouville*, vol. X (1844) 347.
F. G.-M., Théorème 142, *Exercices de Géométrie* 6-ième édition, Rééditions J. Gabay, Paris (1991) 298.
[4] I. M. Yaglom , *Géométrie des nombres complexes*, Éditions Mir, Moscou (1973) 35.
[5] M. Simon, *Über die Entwicklung der Elementar Geometrie im XIX-Jahrhundert*, Leipzig, Teubner (1906) 128.
[6] R. Malloizel, *Journal de Mathématiques Élémentaires* de Bourget (1878) 97.
T. Lalesco, *La Géométrie du Triangle*, Rééditions Jacques Gabay, Paris (1987) 7.

Problem #11006, *Amer. Math. Montly* **110** (2003) 340.
[7] N. Altshiller-Court, Theorem 453, *College Geometry*, Richmond (1936) 75-77.
E. Catalan, Théorème 21, *Théorèmes et problèmes de Géométrie Élémentaire*, Dunod, Paris (1879) 46.
[8] E. Catalan, Théorème 20, *Théorèmes et problèmes de Géométrie Élémentaire*, Dunod, Paris (1879) 44.
N. Altshiller-Court, Theorem 160, *College Geometry*, Richmond (1936) 88-89.
[9] L. Gaultier (de Tours), Les contacts des cercles, *Journal de l'École Polytechnique Cahier* **16** (1812) 124-214.
N. Altshiller-Court, Theorem 453, *College Geometry*, Richmond (1936) 205.
[10] Voir référence 9.
[11] F. G.-M., Théorème 124, *Exercices de Géométrie*, sixième édition (1920), Rééditions Jacques Gabay, Paris (1991) 283.
[12] *Leybourn's Mathematical repository* (New series) **6** tome I, p. 209.
Shirali Shailesh, On the generalized Ptolemy theorem, *Crux Mathematicorum*, **2**, vol. 22 (1996) 48-53.
[13] Kimberling Clark, Triangle Centers and Central Triangles, *Congressus Numerantium*, 129 (1988) 1-285.
http://faculty.evansville.edu/ck6/.

Agradecimientos. Agradezco profundamente al Profesor Francisco Bellot Rosado la lectura y traducción de este artículo.

Jean-Louis Ayme jeanlouisayme@yahoo.fr

Problemas de nivel medio y de Olimpiadas (26)

Problemas de la segunda fase de la Olimpiada Británica 2005

26-1: N es un entero positivo. Hay exactamente 2005 pares ordenados (x, y)de enteros positivos x, y tales que

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{N}.$$

Demostrar que N es un cuadrado perfecto.

26-2: En el triángulo ABC, $\widehat{BAC} = 120^o$. Las bisectrices interiores de los ángulos A,B y C cortan a los lados opuestos en D, E y F, respectivamente. Demostrar que la circunferencia de diámetro EF pasa por D.

26-3: Sean a, b, c números reales positivos. Demostrar que

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right)^2 \geq (a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

26-4: Sea $X = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ un conjunto de subconjuntos de $\{1, 2, \ldots, 36\}$, de tres elementos distintos cada uno, tal que

i) $A_i \cap A_j \neq \varnothing$ para todos i, j.

ii) la intersección de todos los elementos de X es el conjunto vacío.

Demostrar que $n \leq 100$. ¿Cuántos conjuntos X hay si $n = 100$?

Problema 2 da IX Competición Matemática Mediterránea 2006.
Memorial Peter O´Halloran.

Sexa P un punto interior do triángulo ABC e sexan A_1B_2, B_1C_2, C_1A_2 paralelas trazadas por P aos lados AB, BC, CA respectivamente, onde A_1, A_2 son puntos do lado BC, B_1, B_2 puntos do lado AC, e C_1, C_2 puntos do lado AB.

Demostrar que a área do hexágono $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ é maior ou igual ca dous terzos da área de ABC.

Solución de Bruno Salgueiro Fanego (Viveiro, Lugo; España)

Denotarase a área como $[\ldots]$.

Proposición: $[A_1A_2B_1B_2C_1C_2]=\frac{1}{2}[ABC]+\frac{1}{2}([PA_1A_2]+[PB_1B_2]+[PC_1C_2])$.

Demostración:

Ao ser a área dun paralelogramo o dobre da de calquera dos triángulos que teñen dous dos seus lados consecutivos nel (e o terceiro lado a correspondente diagonal), resulta que

$$[A_1A_2B_1B_2C_1C_2]=[ABC]-([AC_1B_2]+[BA_1C_2]+[CB_1A_2])=[ABC]-\left(\frac{1}{2}[AC_1PB_2]+\frac{1}{2}[BA_1PC_2]+\frac{1}{2}[CB_1PA_2]\right)$$

$$=[ABC]-\frac{1}{2}\{[ABC]-([PA_1A_2]+[PB_1B_2]+[PC_1C_2])\}=\frac{1}{2}[ABC]+\frac{1}{2}([PA_1A_2]+[PB_1B_2]+[PC_1C_2]).$$

Corolario: O problema dado é equivalente ao problema proposto 90 desta revista. Ademais, dase a igualdade se e só se P é o baricentro de ABC.

Demostración:

$$[A_1A_2B_1B_2C_1C_2]\geq\frac{2}{3}[ABC]\underset{\text{Proposición}}{\Leftrightarrow}\frac{1}{2}[ABC]+\frac{1}{2}([PA_1A_2]+[PB_1B_2]+[PC_1C_2])\geq\frac{2}{3}[ABC]$$

$$\Leftrightarrow [PA_1A_2]+[PB_1B_2]+[PC_1C_2]\geq\frac{1}{3}[ABC].$$

Logo ámbolos dous problemas son equivalentes. Engadindo esto ao feito de que, na solución do problema proposto 90 desta revista foi probado que a igualdade se daba se e só se P era o baricentro de ABC, resulta que o problema dado está resolto e nel tamén se dará a igualdade nese único caso.

VIII Olimpiada Matemática de Centroamérica y El Caribe

Panamá, 2006

Primer Día

1 de agosto

Problema 1

Se consideran los enteros positivos

$$S_d = 1 + d + d^2 + \cdots + d^{2006},$$

con $d = 0, 1, 2, \ldots, 9$. Halle la última cifra del número

$$S_0 + S_1 + S_2 + \cdots + S_9.$$

Problema 2

Sean Γ y Γ' dos circunferencias de igual radio con centros O y O' respectivamente. Γ y Γ' se cortan en dos puntos y A es uno de ellos. Se escoge un punto B cualquiera en Γ. Sea C el otro punto de corte de la recta $\overleftrightarrow{AB}$ con Γ' y D un punto en Γ' tal que $OBDO'$ es un paralelogramo. Demuestre que la longitud de $\overline{CD}$ es constante, es decir, no depende de la elección de B.

Problema 3

Para cada número natural n, se define $f(n) = \left[n + \sqrt{n} + \frac{1}{2}\right]$. Pruebe que para cada $k \geq 1$, la ecuación

$$f(f(n)) - f(n) = k$$

tiene exactamente $2k - 1$ soluciones.

Nota: Si x es un número real, el símbolo $[x]$ denota al mayor entero que es menor o igual a x. Por ejemplo: $\left[\frac{5}{2}\right] = 2$, $[-0{,}4] = -1$, $\left[\sqrt{2}\right] = 1$.

Duración: 4 horas y 30 minutos.

Cada problema recibe un máximo de 7 puntos.

VIII Olimpiada Matemática de Centroamérica y El Caribe

Panamá, 2006

Segundo Día

2 de agosto

Problema 4

El producto de varios números enteros mayores que 0 y distintos entre sí, es múltiplo de $(2006)^2$. Determine el menor valor que puede tomar la suma de esos números.

Problema 5

El país Olimpia está formado por n islas. La isla más poblada es Panacentro y todas las islas tienen diferente número de habitantes. Se desea construir puentes entre islas de manera que cada pareja no esté unida por más de un puente. Es necesario que se cumplan las siguientes condiciones:

- Siempre es posible llegar desde Panacentro hasta cualquiera otra isla usando los puentes.
- Si se hace un recorrido desde Panacentro hasta cualquier otra isla, el número de habitantes de las islas visitadas es cada vez menor.

Determine el número de maneras de construir los puentes.

Problema 6

Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo. Sea I el punto de intersección de las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$. Sean E, H, F y G puntos sobre los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$ respectivamente, tales que $\overline{EF}$ y $\overline{GH}$ se cortan en I. Sea M el punto de intersección de $\overline{EG}$ y $\overline{AC}$ y sea N el punto de intersección de $\overline{HF}$ y $\overline{AC}$. Demuestre que

$$\frac{AM}{IM} \cdot \frac{IN}{CN} = \frac{IA}{IC}$$

Duración: 4 horas y 30 minutos.
Cada problema recibe un máximo de 7 puntos.

Problemas para os máis novos (REOIM, nº 24)

24.1. Demostrar que para todo número natural $n>1$, o número
$$\sqrt{11\cdots144\cdots4}\,,$$
onde a cifra 1 aparece n veces, e a cifra 4 aparece $2n$ veces, é irracional.

Solución de Bruno Salgueiro Fanego (Viveiro, Lugo; España)

Denotarase como 1_n4_{2n} (que indica que primeiro aparece a cifra 1, que se repite n veces e que despois vén a cifra 4, que se repite $2n$ veces) o radicando do enunciado, e análogas notacións para outros números que aparecerán na seguinte solución:

<u>Proposición 1</u>: $1_n4_{2n}=\left(10^n+2\right)^2\cdot 1_n$.
Demostración:
Atendendo á escritura en base 10 do radicando e á fórmula da suma de varios termos dunha progresión xeométrica, a que $x^3+3x^2-4=(x+2)^2\cdot(x-1)$ e a que $10^n-1=10_n-1=9_n=9\cdot 1_n$ resulta que

$$1_n4_{2n}=4+4\cdot 10^1+4\cdot 10^2+\ldots+4\cdot 10^{2n-1}+1\cdot 10^{2n}+1\cdot 10^{2n+1}+1\cdot 10^{2n+2}+\ldots+1\cdot 10^{3n-1}$$
$$=4\cdot\frac{10^{2n-1}\cdot 10-1}{10-1}+\frac{10^{3n-1}\cdot 10-10^{2n}}{10-1}=\frac{1}{9}\cdot\left(10^{3n}+4\cdot 10^{2n}-10^{2n}-4\right)=\frac{1}{9}\cdot\left[\left(10^n\right)^3+3\cdot\left(10^n\right)^2-4\right]$$
$$=\left(10^n+2\right)^2\cdot\frac{1}{9}\cdot\left(10^n-1\right)=\left(10^n+2\right)^2\cdot 1_n.$$

<u>Corolario 1</u>: $\sqrt{1_n4_{2n}}$ é irracional se e só se $\sqrt{1_n}$ é irracional.
Demostración:
Pola proposición 1, $\sqrt{1_n4_{2n}}=\sqrt{\left(10^n+2\right)^2\cdot 1_n}=\left(10^n+2\right)\cdot\sqrt{1_n}$; como 10^n+2 é racional e o produto dun racional por outro número real é irracional se e só se dito número o é, está probado este corolario 1.

<u>Proposición 2</u>: 1_n non é un cadrado perfecto.
Demostración:
Por redución ao absurdo: Se existise m natural tal que $1_n=m^2$, dividindo m entre 4 teranse un cociente c e un resto r tales que $m=4\cdot c+r$ e $r\in\{0,1,2,3\}$. Así,

Por tanto, $1_n=\begin{cases}4c', & se \quad r=0\\ 4c'+1, & se\quad r=1\\ 4(c'+1)=4c'', & se\quad r=2\\ 4(c'+2)+1=4c'''+1, & se\quad r=3\end{cases}$, logo $1_n\equiv 0\ \left(mód\ \ 4\right)$ (se r é par) ou $1_n\equiv 1\ \left(mód\ \ 4\right)$ (se r é impar).

Pero iso contradí o feito de que $1_n=1_{n-2}08+3=4\cdot 27_{n-2}+3\equiv 3\ \left(mód\ \ 4\right)$, contradición que proba esta proposición 2.

Corolario 2: $\sqrt{1_n}$ é irracional.

Demostración:

Por redución ao absurdo: Se $\sqrt{1_n}$ fose racional, entón $\sqrt{1_n} = \frac{r}{s}$ para algúns naturais r e s, podendo supoñerse ademais que $(r,s)=1$ sen máis que factorizar r e s e simplificar o máximo de factores primos do numerador e denominador da fracción $\sqrt{1_n}$.

Así, $1_n = \frac{r^2}{s^2}$, logo $s^2 \cdot 1_n = r^2$, co cal 1_n divide a r^2.

Sexa $1_n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ a factorización de 1_n en produto de primos p_i, con α_i naturais, $\alpha_i > 0$. Pola proposición 2, non pode ocorrer que tódolos α_i sexan múltiplos de 2 (pois nese caso $1_n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k} = p_1^{2\beta_1} \cdot p_2^{2\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{2\beta_k} = \left(p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\beta_k}\right)^2$, un cadrado perfecto), logo algún dos α_i, sexa este α_{i_0}, non é múltiplo de 2.

Como 1_n divide a r^2 e $1_n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, con p_i primos, tense que tódolos $p_i^{\alpha_i}$ dividen a r^2; en particular, $p_{i_0}^{\alpha_{i_0}}$ tamén, logo p_{i_0} divide a r^2 e polo tanto p_{i_0} divide a r. Desto último e do feito de que p_{i_0} é primo, dedúcese que p_{i_0} é un dos factores na factorización de r en produto de primos, co cal existen γ_{i_0} e t naturais, sendo $\gamma_{i_0} > 0$ o expoñente que lle corresponde ao primo p_{i_0} en tal factorización, con $r = p_{i_0}^{\gamma_{i_0}} \cdot t$, cumpríndose por tanto tamén que $(t, p_{i_0}) = 1$. Ademais, $1_n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_{i_0}^{\alpha_{i_0}} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ divide a $r^2 = p_{i_0}^{2\gamma_{i_0}} \cdot t^2$, con p_i primos, logo $\alpha_{i_0} \leq 2\gamma_{i_0}$; como α_{i_0} non é múltiplo de 2, desta desigualdade dedúcese que $\alpha_{i_0} < 2\gamma_{i_0}$.

Entón $s^2 \cdot p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_{i_0}^{\alpha_{i_0}} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k} \left(= s^2 \cdot 1_n = r^2\right) = p_{i_0}^{2\gamma_{i_0}} \cdot t^2$,

co cal, dividindo entre $p_{i_0}^{\alpha_{i_0}}$ os dous membros da igualdade, obtense que

$s^2 \cdot p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_{i_0-1}^{\alpha_{i_0}-1} \cdot p_{i_0+1}^{\alpha_{i_0}+1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k} = p_{i_0}^{2\gamma_{i_0} - \alpha_{i_0}} \cdot t^2$ e como $2\gamma_{i_0} - \alpha_{i_0} > 0$, resulta que o primo p_{i_0} deberá dividir a $s^2 \cdot p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_{i_0-1}^{\alpha_{i_0}-1} \cdot p_{i_0+1}^{\alpha_{i_0}+1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$; ao ser tódolos p_i, con $i \neq i_0$, primos diferentes do p_{i_0}, só queda a posibilidade de que p_{i_0} divida ao natural s^2 do produto anterior; polo tanto, p_{i_0} debe dividir a s.

Polo tanto, p_{i_0} divide a r e p_{i_0} divide a s, co cal p_{i_0} debe dividir ao máximo común divisor de r e s, que é 1. Pero esto último é imposible, porque p_{i_0} é un número primo. Esta contradición finaliza a demostración deste corolario 2, que era o que se pedía probar.

Nota: Unha demostración similar a esta vale para probar que, dados u e v naturais tales que v non sexa unha $u-$potencia dun número natural, o número $\sqrt[u]{v}$ é irracional.

Problemas para los más jóvenes (24.2).

Un conjunto M de cuatro números naturales se dice *ligado*, si para todo elemento $x \in M$, al menos uno de los números $x-1$ y $x+1$ pertenece a M.

Sea U_n el número de subconjuntos *ligados* del conjunto {1,2,...,n}.

a) Calcular U_7.

b) Determinar el menor número n tal que $U_n \geq 2006$.

Solución:

Denotemos por K_n al subconjunto $\{1, 2, \cdots, n\}$. Entonces $K_7 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

- Calculamos en primer lugar el número de subconjuntos ligados de K_7 que contienen al número 1. Por definición de ligado, obligatoriamente cada uno de estos subconjuntos debe contener al 2.
  Si también contiene al 3, entonces el cuarto número debe ser el 4, pues si fuese uno más grande, ni el anterior ni el posterior pertenecerían al subconjunto y éste no sería ligado.
  Si no contiene al 3 y sí al 4, el cuarto número deberá ser el 5, por el mismo razonamiento anterior.

- Una vez contados todos aquellos subconjuntos ligados que contienen al 1, seguimos con todos aquellos que no contienen al 1 empezando con los que poseen al 2, y así sucesivamente (hasta que sólo nos queden cuatro números) siguiendo el mismo esquema de razonamiento.

Para K_7 se obtiene la siguiente tabla, en la que se muestran todos los subconjuntos ligados, con sus elementos ordenados de menor a mayor.

Empezando por 1	Empezando por 2	Empezando por 3	Empezando por 4
{1, 2, 3, 4}	{2, 3, 4, 5}	{3, 4, 5, 6}	{4, 5, 6, 7}
{1, 2, 4, 5}	{2, 3, 5, 6}	{3, 4, 6, 7}	
{1, 2, 5, 6}	{2, 3, 6, 7}		
{1, 2, 6, 7}			

Deducimos, pues, $U_7 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$.

Para resolver el apartado b), conjeturamos $U_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-4) + (n-3) = \dfrac{(n-3)(n-2)}{2}$.

Y, en efecto, podemos construir una tabla análoga a la anterior:

Empezando por 1	Empezando por 2	...	Empezando por $n-3$
{1, 2, 3, 4}	{2, 3, 4, 5}	...	$\{n-3,\ n-2,\ n-1,\ n\}$
{1, 2, 4, 5}	{2, 3, 5, 6}	...	
...	...	...	
$\{1,\ 2,\ n-1,\ n\}$	$\{2,\ 3,\ n-1,\ n\}$	...	
$n-3$ subconjuntos	$n-2$ subconjuntos	...	1 subconjunto

Sólo nos queda calcular n para que $U_n \geq 2006$.

$2006 \leq U_n = \dfrac{(n-3)(n-2)}{2} \Leftrightarrow (n-3)(n-2) \geq 4012 \Leftrightarrow n^2 - 5n - 4006 \geq 0.$

Resolviendo la ecuación de segundo grado, obtenemos $n \geq 66$.

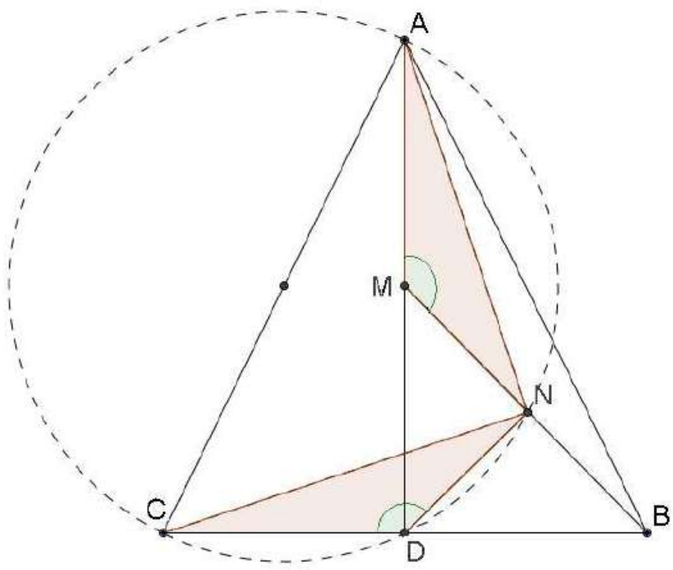
Problemas para los más jóvenes (24.3).

Se considera el triángulo isósceles ABC con $AB = AC$. Sea D el punto medio del lado BC, M el punto medio del segmento AD y N el pie de la perpendicular trazada desde D a BM. Demostrar que $\angle ANC = 90^{\circ}$.

Solución:

Demostremos en un principio que los triángulos $\triangle AMN$ y $\triangle CDN$ son semejantes.

El ángulo $\angle CDN$ coincide con el ángulo $\angle AMN$, pues una recta forma con otra un ángulo igual al que forman sus respectivas perpendiculares (observar que $CD \perp AM$, al ser AM la altura del triángulo sobre la base CB, y $DN \perp MN$, por construcción).



Además, los lados AM, MN son proporcionales a CD, DN, respectivamente.

Llamando h a la altura AD, y a a la base CB, tenemos, por un lado,

$$\frac{AM}{CD} = \frac{h/2}{a/2} = \frac{h}{a},$$

y, por otro lado, al ser $\triangle MDN$ y $\triangle MBD$ triángulos semejantes por tener sus ángulos iguales,

$$\frac{MN}{DN} = \tan \angle MDN = \tan \angle MBD = \frac{h/2}{a/2} = \frac{h}{a}.$$

Así, los triángulos $\triangle AMN$ y $\triangle CDN$ son semejantes y, por tanto, los ángulos $\angle ANM$ y $\angle CND$ son iguales. Finalmente, obtenemos

$$\angle ANC = \angle MNC + \angle ANM = \angle MNC + \angle CND = \angle DNM = 90^{\circ}.$$

Problema 120

Propuesto por el editor

Demostrar que el cuadrado del diámetro del círculo circunscrito al triángulo formado por las rectas

$$ax^2+2hxy+by^2=0,$$
$$lx+my+1=0,$$

es

$$\frac{\left[(a-b)^2+4h^2\right]\left(l^2+m^2\right)}{\left(am^2-2hlm+bl^2\right)^2}.$$

Solución de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, Navarra, España.

Sea un triángulo cualquiera de vértices A, B, C, radio de la circunferencia circunscrita R y área S. Entonces, es conocido por el teorema del seno que

$$S=\frac{BC\cdot CA\operatorname{sen}(C)}{2}=\frac{BC\cdot CA\cdot AB}{4R}; \qquad (2R)^2=\left(\frac{BC\cdot CA\cdot AB}{2S}\right)^2=\frac{BC^2\cdot CA^2\cdot AB^2}{4S^2}.$$

Si a=b=0, la primera ecuación se convierte en xy=0, con lo que x=0, y=0 son rectas que contienen a dos de los lados del triángulos. Sus vértices serían los cortes de estas dos rectas con la tercera, es decir, (0,0), (0,–1/m) y (–1/l,0). El triángulo es rectángulo en (0,0), luego el diámetro de su circunferencia circunscrita es igual a la hipotenusa:

$$(2R)^2=\frac{1}{m^2}+\frac{1}{l^2}=\frac{l^2+m^2}{l^2m^2}=\frac{4h^2\left(l^2+m^2\right)}{(2hlm)^2}=\frac{\left[(a-b)^2+4h^2\right]\left(l^2+m^2\right)}{\left(am^2-2hlm+bl^2\right)^2}.$$

En el caso en el que a y b no sean ambos nulos, siempre podemos elegir que a sea no nulo intercambiando los papeles de x e y. Además, siempre podemos elegir a positivo, multiplicando ambos miembros de la primera ecuación por –1. Tenemos entonces dos casos distintos:

i) si b tiene el mismo signo que a y $h^2<ab$, entonces podemos tomar

$$t=u=\sqrt{\frac{a}{2}}, \qquad v=\frac{h-\sqrt{ab-h^2}}{\sqrt{2a}}, \qquad w=\frac{h+\sqrt{ab-h^2}}{\sqrt{2a}},$$

en cuyo caso se tiene que

$$t^2+u^2=2\frac{a}{2}=a, \qquad tw+uv=\frac{h+\sqrt{ab-h^2}}{2}+\frac{h-\sqrt{ab-h^2}}{2}=h,$$

$$w^2+v^2=\frac{\left(h+\sqrt{ab-h^2}\right)^2+\left(h-\sqrt{ab-h^2}\right)^2}{2a}=2\frac{ab}{2a}=b,$$

$$(tx+wy)^2+(ux+vy)^2=\left(t^2+u^2\right)x^2+2(tw+uv)xy+\left(w^2+v^2\right)y^2=ax^2+2hxy+by^2.$$

Pero entonces las ecuaciones $tx+wy=0$ y $ux+vy=0$ deben satisfacerse simultáneamente para que se satisfaga la primera ecuación dada, con lo que ésta no define dos rectas, sino un punto (el origen), y no queda definido un triángulo, con lo que no tiene sentido definir el diámetro de su circunferencia circunscrita.

ii) si b tiene signo opuesto al de a (con lo que $ab<0$), o si b es nulo, o si a y b tienen el mismo signo pero $h^2\geq ab$, entonces dando a t un valor real cualquiera y definiendo

$$u=\frac{a}{t},\qquad v=\frac{h-\sqrt{h^2-ab}}{t},\qquad w=\frac{t}{a}\left(h+\sqrt{h^2-ab}\right),$$

se tiene pues que existen reales t, u, v, w tales que

$$tu=a,\qquad vw=\frac{h^2-\left(h^2-ab\right)}{a}=b,\qquad tv+uw=h-\sqrt{h^2-ab}+h+\sqrt{h^2-ab}=2h,$$

$$ax^2+2hxy+by^2=tux^2+(tv+uw)xy+vwy^2=(tx+wy)(ux+vy).$$

Se tiene pues que la primera ecuación define las rectas $tx+wy=0$, $ux+vy=0$, que confluyen en el origen, que es uno de los vértices del triángulo (C sin pérdida de generalidad). Los otros dos vértices son las soluciones de los sistemas

$$\begin{pmatrix} l & m \\ t & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix} l & m \\ u & v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Llamando Δ_1 y Δ_2 a los determinantes de las matrices respectivas de ambos sistemas, se tiene, sin pérdida de generalidad, que los otros dos vértices A y B tienen coordenadas

$$A\equiv\left(-\frac{w}{\Delta_1},\frac{t}{\Delta_1}\right),\qquad B\equiv\left(-\frac{v}{\Delta_2},\frac{u}{\Delta_2}\right).$$

Se tiene entonces que las longitudes de los lados son:

$$CA^2=\frac{t^2+w^2}{\Delta_1{}^2},\qquad BC^2=\frac{u^2+v^2}{\Delta_2{}^2},$$

$$AB^2=\left(\frac{\Delta_2 w-\Delta_1 v}{\Delta_1\Delta_2}\right)^2+\left(\frac{u\Delta_1-t\Delta_2}{\Delta_1\Delta_2}\right)^2=\frac{m^2(tv-uw)^2}{\Delta_1{}^2\Delta_2{}^2}+\frac{l^2(uw-tv)^2}{\Delta_1{}^2\Delta_2{}^2}$$
$$=\frac{\left(l^2+m^2\right)(tv-uw)^2}{\Delta_1{}^2\Delta_2{}^2}.$$

Además, el cuadrado del doble del área se puede escribir como

$$4S^2 = \left|\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB}\right|^2 = \begin{vmatrix} -\dfrac{w}{\Delta_1} & \dfrac{t}{\Delta_1} \\ -\dfrac{v}{\Delta_2} & \dfrac{u}{\Delta_2} \end{vmatrix}^2 = \frac{(tv - uw)^2}{{\Delta_1}^2 {\Delta_2}^2}.$$

Se llega entonces a

$$(2R)^2 = \left(\frac{BC \cdot CA \cdot AB}{2S}\right)^2 = \frac{\dfrac{u^2+v^2}{{\Delta_2}^2} \cdot \dfrac{t^2+w^2}{{\Delta_1}^2} \cdot \dfrac{(l^2+m^2)(tv-uw)^2}{{\Delta_1}^2{\Delta_2}^2}}{\dfrac{(tv-uw)^2}{{\Delta_1}^2{\Delta_2}^2}}$$

$$= \frac{(u^2+v^2)\cdot(t^2+w^2)\cdot(l^2+m^2)}{(\Delta_1\Delta_2)^2}.$$

Pero

$$(u^2+v^2)(t^2+w^2) = t^2u^2 + v^2w^2 + t^2v^2 + u^2w^2 = (tu)^2 + (vw)^2 - 2(tu)(vw) + (tv+uw)^2$$

$$= a^2 + b^2 - 2ab + 4h^2 = (a-b)^2 + 4h^2,$$

$$\Delta_1\Delta_2 = (lw - mt)(lv - mu) = l^2vw + m^2tu - lm(tv+uw) = l^2b + m^2a - 2lmh,$$

con lo que

$$(2R)^2 = \frac{\left[(a-b)^2 + 4h^2\right](l^2+m^2)}{(am^2 - 2hlm + bl^2)^2},$$

q.e.d..

José Luis **Díaz–Barrero**
Applied Mathematics III
Universitat Politècnica de Catalunya
Jordi Girona 1-3, C2, 08034 Barcelona. Spain
jose.luis.diaz@upc.edu

Problema xxx. *Propuesto por José Luis Díaz-Barrero (Barcelona, España)*

Calcular la suma

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{(-1)^{n+1}+F_{n-1}F_{n+1}}{2^{2n}}\right)$$

siendo F_n el $n-$ésimo número de Fibonacci definido por $F_0 = 0, F_1 = 1$ y para todo $n \geq 2, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

Solución por el autor de la propuesta

Teniendo en cuenta la identitdad de Cassini: $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$ (puede probarse fácilmente por inducción) la suma propuesta puede escribirse en la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nF_n^2}{2^{2n}} \tag{1}$$

Para sumar (1) necesitamos probar que

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n^2 x^n = \frac{x(1-x)}{1-2x-2x^2+x^3},\ |x| < \frac{3-\sqrt{5}}{2} \tag{2}$$

En efecto, supongamos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{x(1-x)}{1-2x-2x^2+x^3},$$

entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(1-2x-2x^2+x^3)x^n = x(1-x).$$

Igualando ceoficients de potencias d eigual grado, resulta $a_0 = 0, a_1 = a_2 = 1$, y $a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2} - a_{n-3}$, para $n \geq 3$. Puesto que,

$$\begin{aligned} F_n^2 &= (F_{n-1}+F_{n-2})^2 \\ &= 2F_{n-1}^2 + 2F_{n-2}^2 - (F_{n-1}-F_{n-2})^2 \\ &= 2F_{n-1}^2 + 2F_{n-2}^2 - F_{n-3}^2, \end{aligned}$$

entonces $a_n = F_n^2$ satisface la recurrencia precedente y las tres condiciones iniciales. Además las ríces de la cúbica $1-2x-2x^2+x^3 = 0$ son -1, $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ y $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ con lo que la serie (2) converge cuando $|x| < \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Ahora para obtener (1) aplicamos el operador $x\frac{d}{dx}$ a ambos lados de (2) y resulta

$$\sum_{n=0}^{\infty} nF_n^2 x^n = \frac{x(1-2x+4x^2-2x^3+x^4)}{(1+x)^2(1-3x+x^2)^2}.$$

Finalmente, haciendo $x = \frac{1}{4}$ en la expresión precedente, obtenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nF_n^2}{2^{2n}} = \frac{148}{125}$$

y hemos terminado.

Problema 122

Sean *a; b; c* los lados de un triángulo acutángulo *ABC* con semiperímetro *s*:

Demostrar que $\left(\frac{a}{s}\right)^3 \sec A + \left(\frac{b}{s}\right)^3 \sec B + \left(\frac{c}{s}\right)^3 \sec C \ge \frac{16}{9}$

Solución.

Al ser el triángulo acutángulo, cos *A*, cos *B*, cos *C* y sus inversos son positivos.

Por la desigualdad de las medias,

$$\left(\frac{a}{s}\right)^3 \sec A + \left(\frac{b}{s}\right)^3 \sec B + \left(\frac{c}{s}\right)^3 \sec C \ge \frac{abc}{s^3} \cdot \frac{3}{\sqrt[3]{\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C}} \quad (1),$$

como $\frac{a}{s} + \frac{b}{s} + \frac{c}{s} = \frac{a+b+c}{s} = \frac{2s}{s} = 2$, $\frac{abc}{s^3} = \frac{a}{s} \cdot \frac{b}{s} \cdot \frac{c}{s}$ es el producto de tres números positivos con suma constante y es sabido que alcanza su mínimo cuando son iguales; por tanto

$$\frac{abc}{s^3} \Rightarrow \ge \frac{a^3}{\frac{27}{8} a^3} = \frac{8}{27} \quad (2).$$

De otra parte desde la desigualdad clásica $\cos A + \cos B + \cos C \le \frac{3}{2}$ y de nuevo por la desigualdad de las medias aplicada a los números positivos cos *A*, cos *B*, cos *C*, resulta

$$\frac{3}{2} \ge \cos A + \cos B + \cos C \ge 3\sqrt[3]{\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C},$$

que se puede escribir

$$\sqrt[3]{\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C} \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt[3]{\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C}} \ge 6 \quad (3);$$

llevando (2) y (3) a (1)

$$\left(\frac{a}{s}\right)^3 \sec A + \left(\frac{b}{s}\right)^3 \sec B + \left(\frac{c}{s}\right)^3 \sec C \ge \frac{8}{27} \cdot 6 = \frac{16}{9}$$

y hemos terminado.

Nota. El signo "=" del enunciado es válido si y sólo si el triángulo es equilátero ya que todas las desigualdades manejadas se convierten en igualdades si y sólo si el triángulo es equilátero.

Cristóbal Sánchez-Rubio
I.E.S. Penyagolosa, Castellón.

Problema 123

Propuesto por Laurentiu Modan, Bucarest, Rumanía

i) Hallar el cardinal $E(n)$, $n\in\mathbf{N}^*$, del conjunto de los números de n cifras, que se escriben solamente con cifras pares.

ii) Hallar el cardinal $O(n)$, $n\in\mathbf{N}^*$, de los números de n cifras, que se escriben solamente con cifras impares.

iii) Hallar $n\in\mathbf{N}^*$ de tal manera que $E(n)+O(n)$, sea cuadrado perfecto.

iv) Sea $H(n)$, $n\in\mathbf{N}^*$, el cardinal del conjunto de los números de n cifras que se pueden formar con los dígitos 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9. Calcular el máximo común divisor de $H(n)$ y $E(n)+O(n)$.

v) Hallar $n\in\mathbf{N}^*$ tal que

$$\frac{H(n)}{O(n)-E(n)}\equiv 0(\bmod 144).$$

Solución de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, España.

Nota: he incluido el apartado v) ya que en el enunciado aparecía sólo la ecuación, a la que he dotado del objetivo que intuyo le quería dar originalmente el proponente.

i) De las n cifras de cualquier tal número, todas pueden tomar valores 0,2,4,6,8, salvo la primera, que sólo puede tomar valores 2,4,6,8, luego

$$E(n)=4\cdot 5^{n-1}.$$

ii) De las n cifras de cualquier tal número, todas pueden tomar valores 1,3,4,7,9, luego

$$O(n)=5^n=E(n)+5^{n-1}=9\cdot 5^{n-1}-E(n).$$

iii) Por el apartado anterior,

$$E(n)+O(n)=3^2\cdot 5^{n-1},$$

que es cuadrado perfecto si y sólo si lo es 5^{n-1}, y al ser 5 primo, si y sólo si $n-1$ es par, es decir, si y sólo si n es impar.

iv) De las n cifras de cualquier tal número, la primera no puede tomar el valor 0, luego

$$H(n)=9\cdot 10^{n-1}=2^{n-1}\left[E(n)+O(n)\right]=9\cdot 2^{n-1}\left[O(n)-E(n)\right].$$

Al ser $H(n)$ múltiplo de $E(n)+O(n)$, éste último es su máximo común divisor es, es decir,

$$\operatorname{mcd}\left\{H(n),E(n)+O(n)\right\}=E(n)+O(n)=9\cdot 5^{n-1}.$$

v) Se tiene por el apartado anterior que

$$\frac{H(n)}{O(n)-E(n)}=9\cdot 2^{n-1}=144\cdot 2^{n-5}.$$

El miembro de la derecha será múltiplo de 144 obviamente si y sólo si 2^{n-5} es entero, es decir, si y sólo si $n\geq 5$. Luego

$$\frac{H(n)}{O(n)-E(n)}\equiv 0(\bmod 144)$$

si y sólo si $n\geq 5$.

Problema 125

Si *a; b; c* son estrictamente positivos, demostrar que

$$abc \le \sqrt{\frac{\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)}{3}} \le \frac{1}{3}\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)$$

Solución.
Aplicando la desigualdad MAG a los números a^2b, b^2c, c^2a ; obtenemos

$$\frac{a^2b+b^2c+c^2a}{3} \ge \sqrt[3]{a^3b^3c^3}$$

que operada queda en la forma

$$a^2b+b^2c+c^2a \ge 3abc \quad (1)$$

multiplicando los dos miembros de (1) por abc y despejando abc resulta

$$abc \le \sqrt{\frac{abc\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)}{3}}$$

que es la desigualdad de la izquierda.
Si ahora multiplicamos los dos miembros de (1) por $a^2b+b^2c+c^2a$ y dividimos por 9 resulta

$$\frac{\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)^2}{9} \ge \frac{abc\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)}{3}$$

y extrayendo la raíz cuadrada resulta la desigualdad de la derecha:

$$\sqrt{\frac{\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)}{3}} \le \frac{1}{3}\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)$$

Problemas 116 bis, 126-130

Problema 116 bis (corrección), propuesto por Doru Popescu Anastasiu (Slatina, Rumania) y Miguel Amengual Covas (Cala Figuera, España)

Sean x e y números reales tales que

$$\sqrt{x^2 - 3x} + \sqrt{y^2 - 3y} = 1.$$

Demostrar que

$$x^2 + y^2 < 2(x + y) + 15.$$

Problema 126 (propuesto por Laurentiu Modan, Bucarest, Rumania)

Sea (x_n) la sucesión definida por

$$x_0 = -\frac{1}{2}, x_1 = 1; \quad x_{n+1} = 5x_n - 6x_{n-1} + 3 - 2n.$$

Calcular el límite

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3^n} + \frac{1}{2^{2n}}\right) \cdot x_n$$

Problema 127 (propuesto por Cristóbal Sánchez Rubio, Benicasim, España)

En un triángulo de lados a, b, c y área S, llamamos $n-$ágono medio, Q_n, a la media aritmética de las áreas de los tres $n - \acute{a}gonos$ regulares construidos sobre cada lado.

Demostrar que

$$S \leq \frac{Q_n \cdot \sqrt{3} \cdot \tan\frac{\pi}{n}}{n},$$

con igualdad si y sólo si el triángulo es equilátero.

Problema 128 (propuesto por Luis Gómez Sánchez Alfaro, El Callao, Perú)

Se considera un ángulo agudo $\alpha > 0$ dividido en n partes iguales y se toma en un lado del ángulo un punto P_0 cuya distancia al vértice O de α sea igual a 1. A partir del punto P_0 se determinan puntos $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$ en los lados sucesivos de los n ángulos formados, tales que todos los segmentos $P_{i-1}P_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, formen un ángulo agudo β con la recta OP_{i-1} y que los segmentos OP_i sean sucesivamente crecientes.

Calcular el límite de la longitud del segmento final OP_n, cuando n tiende a infinito.

Problema 129 (propuesto por Alex Sierra Cárdenas, Medellín, Colombia)

Calcular

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2nx}{\sin x}dx.$$

Problema 130 (propuesto por el editor, y dedicado a la memoria de D. José Ramón Fuentes Miras, autor del problema)

Determinar una función holomorfa que verifica las siguientes condiciones:

1) está definida y es holomorfa en el primer cuadrante compacto, salvo en el punto $1+i$, donde tiene un polo de primer orden con residuo 1.

2)sobre el eje real toma valores reales, y sobre el imaginario, imaginarios puros.

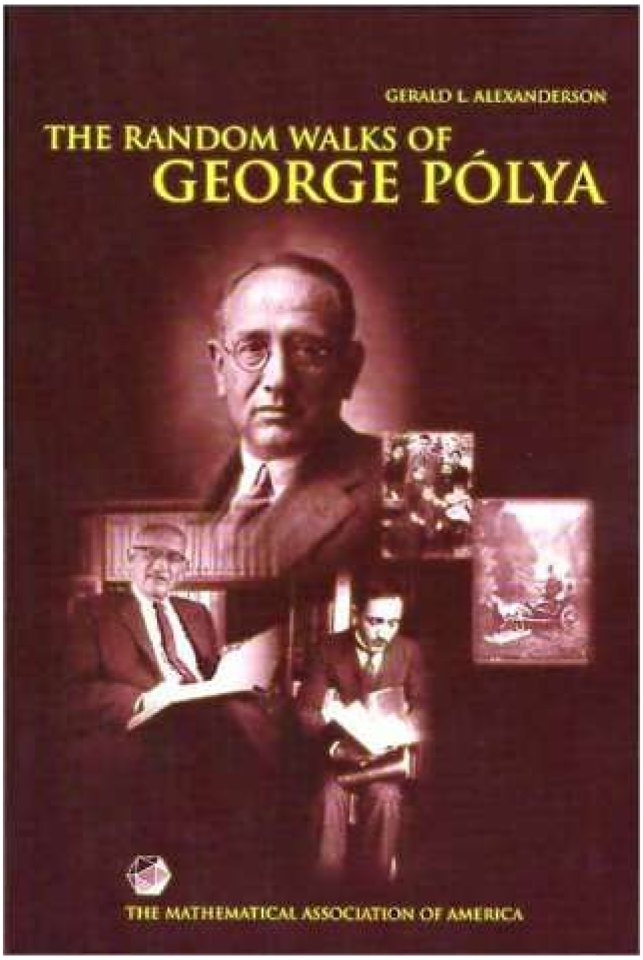
3) es regular en el punto del infinito, y $f(\infty)=0$.

(propuesto en la Cátedra de Análisis matemático IV, Facultad de Ciencias de Madrid, junio de 1965)

DIVERTIMENTOS MATEMÁTICOS 26

Sobre George Pólya (1887-1985)

(O, si se quiere, comentario al libro de Gerald L.Alexanderson "The random walks of George Pólya", M.A.A. 2000)



Del 22 al 28 de julio de 2006 se celebró en Cambridge (UK), la Conferencia de la World Federation of National Mathematics Competitions, en la que el que suscribe presentó a la audiencia (mayoritariamente no iberoamericana) la Revista Escolar de la OIM. Estar en Cambridge y no visitar la librería de la Cambridge University Press hubiera sido imperdonable, y en esa visita adquirí el libro arriba mencionado. Gerald L. Alexanderson, profesor de la Universidad de Santa Clara, en California, conoció personalmente a Pólya y ha escrito una magnífica biografía, en 12 capítulos, con una completa bibliografía de Pólya y 14 Apéndices, escritos por Kai Lay Chung, R.P. Boas, Jr., D.H. Lehmer, Doris Schattschneider, R.C. Read, M.M. Schiffer, Alan H. Schoenfeld….y el propio G. Pólya, pues se reproducen 4 de sus artículos.

Yo no conocí en persona a Pólya, pero desde mis ya lejanos tiempos de Ayudante Becario en la Escuela de Formación del Profesorado de Grado Medio (1964-65) oí a mi Profesor Tutor, mi admirado y querido D. José Ramón Pascual Ibarra, citar en muchas ocasiones a Pólya – y a D. Pedro Puig Adam – como los modelos de Profesor a seguir. Naturalmente, las obras de Pólya “How to solve it”, “Matemáticas y razonamiento plausible” y “La découverte des mathématiques” figuran en mi biblioteca desde entonces, y han sido y son siempre una fuente inagotable de ideas para utilizar en clase. También, naturalmente, el libro de problemas por antonomasia, “Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis”, de George Pólya y Gabor Szegö, al que está dedicado todo el capítulo 5 de libro que comentamos.

Pólya es un ejemplo del investigador matemático de primer orden que también fue admirado y respetado por su contribución a la enseñanza de las matemáticas a través de sus escritos sobre la resolución de problemas. Pólya irradiaba entusiasmo y alegría al descubrir cosas bellas en las matemáticas y compartirlas con otros. Para él, tanto en sus investigaciones como en su enseñanza, el “gozo del descubrimiento” lo era todo.

En una entrevista de Albers y Alexanderson (1985), Pólya dice: *“Por qué soy matemático? Yo pensé: No soy lo suficientemente bueno en Física, y muy bueno en Filosofía. Las matemáticas están en medio”.*
No obstante, es conocida otra cita suya sobre los filósofos, una variación de la descripción francesa de los egresados de las Hautes Écoles: *“Los filósofos saben de todo…pero no mucho más”.*

A lo largo de su vida, Pólya mantuvo relaciones científicas con los matemáticos más importantes de su tiempo, y disfrutaba contando historias y anécdotas sobre ellos. Cuando se le pedía que “diera un speech” después de la cena, solía empezar contando lo que había oído a Lebesgue: *“En el Coliseo de Roma, un cristiano fue conducido a la arena, donde un feroz león iba a comérselo. El cristiano susurró algo al oído del león, y éste se retiró apresuradamente. Un segundo león, más feroz incluso que el primero, salió dispuesto a comerse al cristiano, que hizo lo mismo que antes y con idéntico resultado. El Emperador hizo saber al cristiano que le perdonaría la vida si le decía lo que había susurrado a los leones. El cristiano contestó: En realidad es bastante sencillo. Sólo les dije: Después de la cena tendréis que dar un speech”.*

Pólya cuenta la siguiente anécdota de Steiner: durante una recepción en la corte de Berlín, Steiner fue interpelado por uno de los nobles presentes: *Profesor Steiner, he oído decir que usted cuidaba vacas antes de ser Profesor.* Steiner contestó: *Así es, Excelencia. Desde entonces, si veo un buey lo reconozco en seguida.*

Durante su primera estancia en Stanford, en los años cuarenta, Pólya formó parte del Tribunal de los exámenes orales de licenciatura. En una ocasión, pidió al examinando que diera la definición de la curvatura de Gauss en términos del área de una aplicación esférica mediante las normales. El examinando protestó, argumentando que él no había estudiado nada de eso….pero Pólya insistió en que lo intentase en el encerado: *¡No está prohibido aprender algo en un examen!*

Es bien conocida la relación entre Hardy, Littlewood y Pólya en Cambridge y Oxford (1924), que dio lugar al famoso libro “Inequalities”. También es conocida la afición de Hardy al cricket. En una ocasión, Hardy propuso a Pólya que escribieran sendos “equipos” de cricket, con la condición de que los “jugadores” del equipo de Hardy empezaran todos por HA, y los de Pólya por PO. Éstos son los dos “equipos”:

Hayward (T)	Poincaré (H)
Hannibal	Porsenna
Haydn	Pontius Pilate
Hakon	Poe
Hamilton (Sir WR)	Poisson
Hardy (T)	Potiphar (Sra. De)
Hafiz	Poincaré (R)
Hapsburg (R von)	Poushkin
Harmodius	Pond
Hamlet	Poinsot
Hadamard	Polycrates

En la época en la que Pólya visitó Cambridge, Hardy y Littlewood estaban intentando modificar el famoso Tripos Examination (que duraba tres días), porque se proponían problemas muy difíciles pero que no eran relevantes para las investigaciones matemáticas. Hardy convenció a Pólya para que hiciera el examen. Estaba seguro de que Pólya lo haría mal y así se demostraría que un joven y prominente matemático del Continente tendría dificultades con esos artificiales y complicados problemas. Pero Hardy se equivocó….si Pólya hubiera estado inscrito oficialmente en el Tripos, hubiera sido nombrado Senior Wrangler, es decir, ¡estaría entre los mejores!

La “caminata aleatoria” (random walk) es uno de los muchos temas descubiertos o estudiados por Pólya. Durante la Feria Mundial de Nueva York de 1965, en el pabellón de IBM se exhibía un modelo para simular en qué consiste, y aparecían de forma destacada los nombres de los 7 principales investigadores del tema: Albert Einstein, Enrico Fermi, Norbert Wiener, Andrei Kolmogorov, John von

Neumann, George Pólya y Satnislaw Ulam. Pólya, cuando lo vió, dijo: *“Me gusta estar en esa compañía”.*

En el epílogo de este excelente libro, cuya lectura recomiendo vivamente, se cita esta conversación entre Paul Erdös y George Pólya, en el 97º cumpleaños de éste último. Erdös le dijo que “*celebrarían a lo grande su centenario”.* Pólya le contestó: *“tal vez yo quiera cumplir 100 años, pero no 101, porque la vejez y la estupidez son muy desagradables”.*

Martos, Jaén, agosto de 2006
Francisco Bellot Rosado

<u>Comentario de páginas web (26)</u>

<u>La página web de Peter Winkler</u>

<u>http://www.math.dartmouth.edu/~pw/</u>

Álvaro Begué, desde Nueva York, me ha facilitado la dirección electrónica de la página web de Peter Winkler, Profesor de Matemáticas y Computer Science en Dartmouth, Hannover, New Hampshire.

Al impresionante currículo del Prof. Winkler (fue investigador Senior en el Clay Institute en 2005) se añade su interés por los problemas “elementales” que resume en “7 Puzzles que usted creía no haber oído correctamente”, ahora con soluciones, una charla dada en la Sexta reunión en homenaje a Martin Gardner. Recomiendo vivamente a los lectores de la REOIM que entren en esta página y procuren sacar de ella todo el provecho posible. Y, desde luego, que disfruten con estos 7 puzzles (yo los calificaría de problemas, y muy serios) aun antes de leer sus soluciones.

Valladolid, septiembre de 2006.
Francisco Bellot

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

Número

27

Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática
ISSN 1698-677X

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

Número 27 (Septiembre - Octubre 2006)
ISSN – 1698-277X

Índice

recibió una solución incorrecta. Presentamos la solución de Hernández Santiago.

Problema 127. Recibidas soluciones de José Carlos García Barro (Mondoñedo, España); Marcos Martinelli (Brasil); Daniel Lasaosa Medarde (Pamplona, España); Gabriel Alexander Reyes (San Salvador, El Salvador); Miquel Roig (Barcelona, España); Bruno Salgueiro Fanego (Vivero, España); Vicente Vicario García (Huelva, España), y el proponente.
Presentamos la solución de Gabriel Alexander Reyes.

Problema 128. Recibidas soluciones de Marcos Martinelli (Brasil); Cristóbal Sánchez Rubio (Benicassim, España), Daniel Lasaosa Medarde (Pamplona, España); Bruno Salgueiro Fanego (Vivero, España) y el proponente.
Presentamos la solución de Sánchez Rubio.
El editor presenta excusas por la inicial atribución de autoría del problema a quien no era proponente, así como algunas imperfecciones en el enunciado, resueltas finalmente, y que seguramente han hecho que otras dos soluciones recibidas fueran soluciones a un problema distinto del propuesto.

Problema 129. Recibidas soluciones de Daniel Lasaosa Medarde (Pamplona, España); Ovidiu Furdui (Kalamazoo, USA); Samuel Gómez Moreno (Jaén, España); Marcos Martinelli (Brasil); Miquel Roig (Barcelona, España); Vicente Vicario García (Huelva, España) y el proponente. Se recibió una solución incorrecta.
Presentamos la solución de Samuel Gómez Moreno.

Problema 130. Recibida la solución de Daniel Lasaosa Medarde (Pamplona, España);

Problemas propuestos 131-135

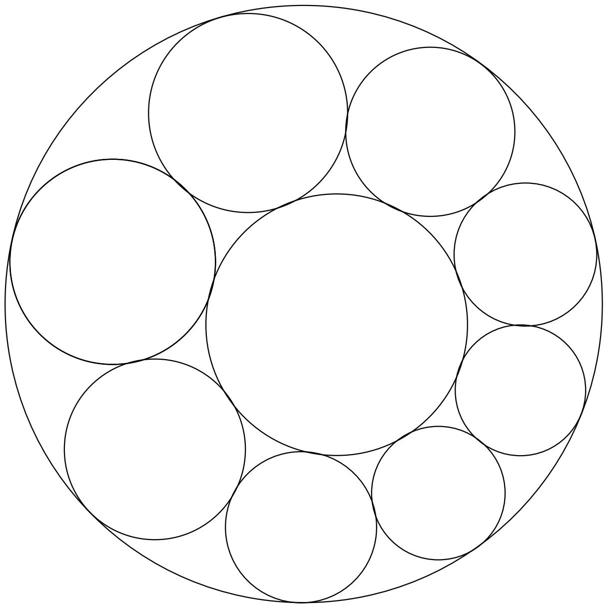
Divertimentos Matemáticos
F. Bellot: Algunas citas de Mathematics in Fun and in Earnest, de Nathan Altshiller Court.

Comentario de páginas web
F. Bellot: La revista L'Enseignement Mathématique, en la red

Editor: Francisco Bellot Rosado

Con el apoyo de la Subdirección General de Cooperación Internacional

MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA



Inversión en Olimpiadas

Aplicación de la Inversión a la Resolución de Problemas

Francisco J. García Capitán

http://garciacapitan.auna.com

Contenido

1. Definición de inversión

1.1. Introducción

Para efectuar cálculos con números grandes (por ejemplo en Astronomía) cuando no había calculadoras se usaban los logaritmos.

En efecto los logaritmos transforman los productos en sumas y las potencias en productos. Si tenemos que multiplicar dos números muy grandes, hallamos sus logaritmos, efectuamos la suma de dichos logaritmos y averiguamos a qué número corresponde ese logaritmo.

De esta manera lo que hemos hecho es transformar el problema en otro más sencillo, resolverlo, y aplicar la transformación inversa a la solución, obteniendo la solución del problema original.

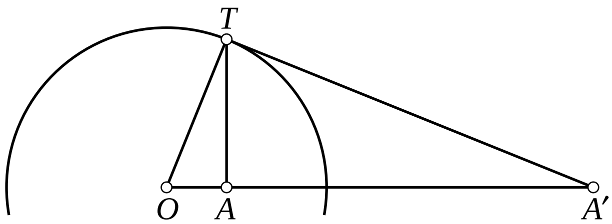
Otro ejemplo sencillo de este mismo esquema es el que usamos mentalmente para calcular el $\mathrm{MCD}(60, 90)$. Dividimos los dos números por 10, hallamos el $\mathrm{MCD}(6, 9) = 3$ y multiplicamos por 10, resultando $\mathrm{MCD}(60, 90) = 30$.

La inversión, que presentamos aquí, es una transformación que se aplica a figuras del plano o del espacio (aquí nos limitaremos al plano).

1.2. Definición de inversión

Dada una circunferencia de centro O y radio k, la inversión de centro O y radio k es una transformación del plano que a cada punto A distinto de O, le asocia otro punto A' de la semirrecta OA cumpliendo la relación $OA \cdot OA' = k^2$.

La figura siguiente muestra la manera de construir el punto inverso A' del punto A cuando éste es interior a la circunferencia.



La perpendicular a la semirrecta OA determina el punto T en la circunferencia. Por este punto trazamos una tangente que corta a la semirrecta OA en el punto A', inverso de A. En efecto, los triángulos OTA y $OA'T$ son semejantes. Entonces,

$$\frac{OA}{OT} = \frac{OT}{OA'} \Rightarrow OA \cdot OA' = OT^2 = k^2.$$

Usando el mismo dibujo, si el punto A' está fuera de la circunferencia, trazamos una tangente a la circunferencia desde A' y, siendo T el punto de tangencia, por

T trazamos una perpendicular a la recta OA' que cortará a ésta en el punto A, simétrico del punto A'.

Vemos entonces que un punto exterior a la circunferencia se transforma en un punto interior y un punto exterior a la circunferencia se transforma en un punto interior. Los puntos de la circunferencia de inversión se invierten en sí mismos, es decir, son puntos fijos de la transformación.

Es conveniente observar que hay exactamente un punto del plano, el centro de inversión O, que se queda sin imagen por la transformación. Cuando se trabaja con inversión se supone que a todos los puntos del plano se le añade un "punto ideal"o "punto del infinito"con lo que obtenemos el *plano inversivo*. Dicho punto ideal será la imagen del centro de inversión.

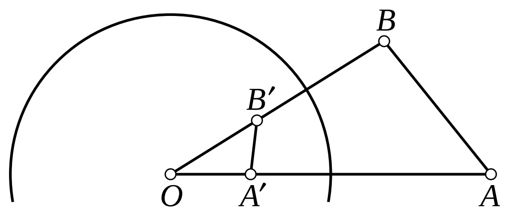
2. Propiedades de la inversión

Las propiedades de la inversión nos permiten hacer demostraciones geométricas que no son sencillas cuando se intentan con otros métodos.

2.1. La inversión y las distancias

¿Como se transforman las distancias con una inversión? Sean A y B puntos distintos y sean A' y B' los inversos respecto de una circunferencia de centro O y radio k. Entonces

$$A'B' = \frac{AB \cdot k^2}{OA \cdot OB}.$$



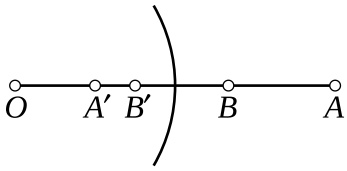
En el caso, mostrado en la figura, en que la recta AB no pase por O, si tenemos en cuenta que $OA \cdot OA' = k^2 = OB \cdot OB'$, obtenemos

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OB'}{OA'},$$

por lo que los triángulos OAB y $OB'A'$ son semejantes. Entonces,

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{OB'}{OA} = \frac{k^2}{OA \cdot OB} \Rightarrow A'B' = \frac{AB \cdot k^2}{OA \cdot OB}.$$

En el caso de que los puntos O, A y B estén alineados, A' y B' estarán en la misma recta:



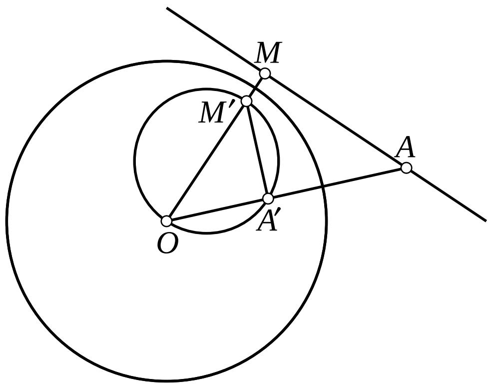
Entonces tendremos:

$$A'B' = OB' - OA' = \frac{k^2}{OA} - \frac{k^2}{OB} = \frac{k^2}{OA \cdot OB}(OB - OA) = \frac{AB \cdot k^2}{OA \cdot OB}.$$

2.2. La inversión y las rectas

Es evidente que cualquier recta que pase por el centro de inversión se va a transformar en sí misma.

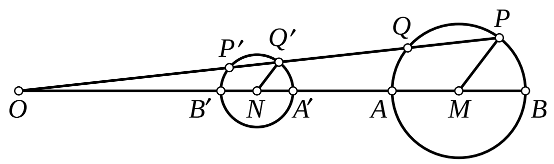
Por otro lado, si la recta l no pasa por el centro de inversión O, dicha recta se transforma en una circunferencia con diámetro OM', siendo M la proyección ortogonal de O sobre l y M' el inverso de M.



En efecto, si consideremos un punto cualquiera A de la recta l y su recíproco A', los triángulos $OA'M'$ y OMA son semejantes, y como el ángulo AMM' es recto, también lo es el ángulo $OA'M'$, resultando entonces que A' está en la circunferencia con diámetro OM'.

2.3. La inversión y las circunferencias

La figura anterior nos sirve para averiguar cuál es el resultado de invertir una circunferencia que pasa por el centro de inversión: si OM' es un diámetro, entonces esa circunferencia se transforma en la recta perpendicular a OM' por el punto M, inverso de M'.
Vamos a hallar ahora el resultado de invertir una circunferencia que no pasa por el centro de inversión.



Supongamos que una circunferencia dada tiene radio r y sean P y Q los puntos de intersección de una recta que pasa por O y dicha circunferencia. Llamemos P' y Q' a los puntos inversos de P y Q.

Por la definición de inversión, $OP \cdot OP' = OQ \cdot OQ' = k^2$ y por un teorema elemental de la circunferencia,$OP \cdot OQ = |OM^2 - r^2|$. Dividiendo estas igualdades obtenemos

$$\frac{OP'}{OQ} = \frac{OQ'}{OP} = \frac{k^2}{|OM^2 - r^2|} = \text{cte.}$$

Trazamos una paralela a PM por Q' y llamamos N a su intersección con OM. Los triángulos $OQ'N$ y OPM son semejantes, por tener dos lados paralelos. Por tanto,

$$\frac{OQ'}{OP} = \frac{Q'N}{PM} = \frac{NO}{MO}.$$

Despejando,

$$NO = MO \cdot \frac{OQ'}{OP} = \frac{MO \cdot k^2}{|OM^2 - r^2|} = \text{cte.}$$

$$Q'N = PM \cdot \frac{OQ'}{OP} = \frac{r \cdot k^2}{|OM^2 - r^2|} = \text{cte.}$$

En este razonamiento pueden intercambiarse los puntos P y Q, para concluir que los puntos P' y Q' estarán en una circunferencia de radio N y radio constante siempre que P y Q estén en la circunferencia de centro M y radio r.

Los cálculos anteriores, además nos dan el radio r' de una circunferencia inversa de una circunferencia con centro M y radio r que no pasa por el centro de inversión:

$$r' = \frac{r \cdot k^2}{|OM^2 - r^2|}. \tag{1}$$

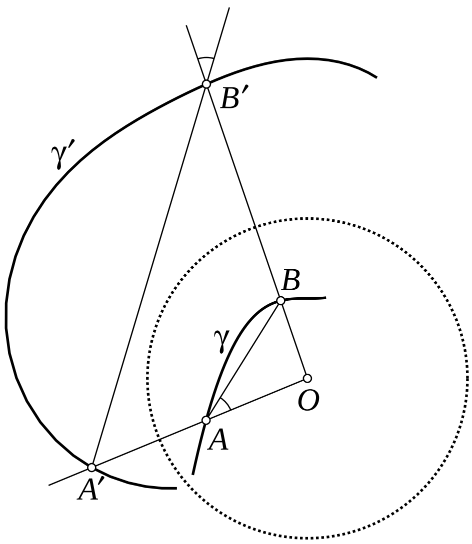
Para construir la circunferencia inversa de una circunferencia que no pasa por el centro de inversión, unimos el centro de inversión con el centro de la circunferencia dada mediante una recta que determina en ésta un diámetro AB. Hallamos los inversos A' y B' de A y B. La circunferencia construida con diámetro $A'B'$ es el resultado de aplicar la inversión a la circunferencia dada.

2.4. La inversión y los ángulos

Una de las propiedades más útiles de la inversión es que la inversión conserva los ángulos.

El ángulo de intersección de dos curvas en un punto de intersección se define como el ángulo formado por las rectas tangentes (cuando estas tangentes existen). Esto se aplica a rectas, circunferencias o a cualquier otra curva.

En primer lugar, veamos que la inversión conserva el ángulo entre una curva y una recta que pase por el centro de inversión y el punto de tangencia.



En la figura, γ es una curva, A y B son puntos sobre γ, y γ', A' y B' son los correspondientes inversos. Como los triángulos AOB y $B'OA'$ son semejantes, los ángulos marcados en la figura son iguales.

Ahora, suponiendo que B es un punto móvil sobre la curva y que B se va aproximando a A, las rectas AB y $A'B$' tienden a las tangentes en A y A' a las curvas γ y γ'. Uno de los ángulos marcados tiende al ángulo entre γ y OA, mientras que el otro tiende al ángulo inverso.

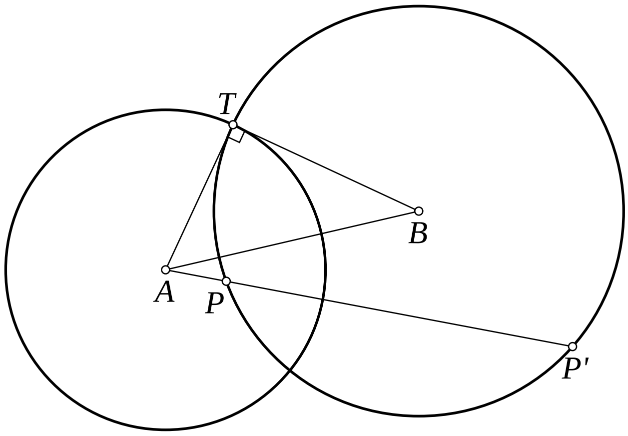
¿Qué ocurre con el ángulo formado por dos curvas? Basta considerar otra curva cortando a γ en A y aplicarle lo mismo. El ángulo formado por las dos curvas se obtendrá sumando los ángulos de cada una de ellas con la recta OA.

3. Circunferencias ortogonales

Las circunferencias ortogonales están íntimamente relacionadas con la inversión, por lo que dedicamos una sección a ellas.

3.1. Circunferencias ortogonales

Dos circunferencias secantes son ortogonales cuando se cortan formando ángulo recto, es decir cuando sus tangentes (o los radios) en uno de los puntos de intersección son perpendiculares. Así, las circunferencias con centros A y B de la figura son perpendiculares, ya que $\angle BTA = 90°$:



Si r y s son los radios de las circunferencias (A) y (B), la condición de ortogonalidad equivale a que $AB^2 = r^2 + s^2$.

3.2. Ortogonalidad e inversión

Si seguimos suponiendo que las circunferencias (A) y (B) son ortogonales, y si P y P' son dos puntos de intersección de una recta que pasa por A con la circunferencia (B), la potencia del punto A respecto de la circunferencia (B) es $AP \cdot AP' = AT^2 = r^2$, por lo que P' es el punto inverso de (P) respecto de la inversión definida por la circunferencia (A), es decir,

> *Una inversión deja fija una circunferencia ortogonal a la circunferencia de inversión.*

Recíprocamente, si una circunferencia (B) contiene a un punto P y a su inverso P' respecto de la circunferencia (A) tendremos $r^2 = AP \cdot AP' = AB - s^2$, por lo que las circunferencias serán ortogonales.

4. Problemas propuestos

1. Dados un punto y dos dos circunferencias, trazar una circunferencia que pase por el punto y que sea tangente a las dos circunferencias.

2. (Rusia, 1995). Sean una semicircunferencia con diámetro AB y centro O, y una recta que corta a la semicircunferencia en los puntos C y D, y a la recta AB en el punto M (siendo $MD < MC$ y $MB < MA$). Sea K el segundo punto de intersección de las circunferencias OAC y OBD. Demostrar que $\angle MKO = 90°$.

3. (España, 2005). Diremos que un triángulo es multiplicativo si el producto de las longitudes de dos de sus lados es igual a la longitud del tercer lado. Sea $ABC \ldots XYZ$ un polígono regular de n lados con todos sus lados de longitud 1. Las $n-3$ diagonales que salen del vértice A dividen al triángulo ZAB en $n-2$ triángulos más pequeños. Probar que cada uno de esos triángulos es multiplicativo.

4. (Porismo de Steiner). Consideremos dos circunferencias, no concéntricas y una interior a la otra. Comenzamos por inscribir una circunferencia entre ambas, y luego vamos inscribiendo circunferencias tangentes a las dos dadas y a la última. Llegará un momento en que la circunferencia que inscribimos se solape con la primera, o bien que sea tangente a ella. Demostrar que ello no depende de la posición de la primera circunferencia inscrita.

5. (Rumanía, 1997). Sea un triángulo ABC y un punto D sobre BC. Dos circunferencias son tangentes exteriormente a AD en el mismo punto M y cada una de ellas es tangente a la circunferencia circunscrita de ABC y al lado BC, la primera sobre el segmento BD y la otra sobre el segmento DC. Demostrar que AD es la bisectriz del ángulo A.

6. (Praxis der Mathematik, prob. 546). Dado un triángulo ABC y su circunferencia circunscrita γ, sea κ la κ la circunferencia tangente a γ en A y tangente a BC en un punto F. Sea E el otro punto de intersección de κ con el lado CA (aparte de A). Se pide: *a*) Demostrar que la recta AF es la bisectriz del ángulo CAB. *b*) Si U y V son los dos puntos de γ que cumplen $CF = CU = CV$, demostrar que UV es tangente a la circunferencia κ en el punto E.

7. (Irán, 2004). Sea ABC un triángulo. Sea un punto X del interior del triángulo y sea Y la intersección de AX y BC. Tracemos las perpendiculares YP, YQ, YR, YS a las rectas CA, CX, BX, BA respectivamente. Hallar la condición necesaria y suficiente que debe cumplir X para que $PQRS$ sea un cuadrilátero cíclico.

8. Sean ABC un triángulo y D, E, F los puntos de contacto de la circunferencia inscrita con los lados BC, CA y AB, respectivamente. Demostrar que la inversión respecto de la circunferencia inscrita transforma la circunferencia circunscrita a ABC en la circunferencia de los nueve puntos de DEF.

9. (Euler) Si R y r son los radios de las circunferencias circunscritas e inscritas a un triángulo y O e I son su circuncentro e incentro, entonces $OI^2 = R^2 - 2Rr$.

10. (Competición Matemática Mediterránea, 2005). k y k' son dos circunferencias concéntricas, de centro O y radios respectivos R y R'. Se supone que $R < R'$. Una semirrecta Ox corta a k en el punto A; la semirrecta opuesta Ox' corta a k' en el punto B. Una tercera semirrecta Ot, distinta de las anteriores, corta a k en E y a k' en F. Demostrar que las cuatro circunferencias siguientes se cortan en un mismo punto:

    a) La circunscrita al triángulo OAE.

    b) La circunscrita al triángulo OBF.

    c) La de diámetro EF.

    d) Y la de diámetro AB

11. (Teorema de las Siete Circunferencias). Supongamos que las circunferencias Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4, Γ_5, Γ_6 son tangentes a una circunferencia Γ en los puntos A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 respectivamente, y cada una de ellas es también tangentes a la anterior y a la siguiente (entendemos que Γ_1 es la siguiente de Γ_6 y que Γ_6 es la anterior a Γ_1). Entonces, las rectas A_1A_4, A_2A_5 y A_3A_6 son concurrentes.

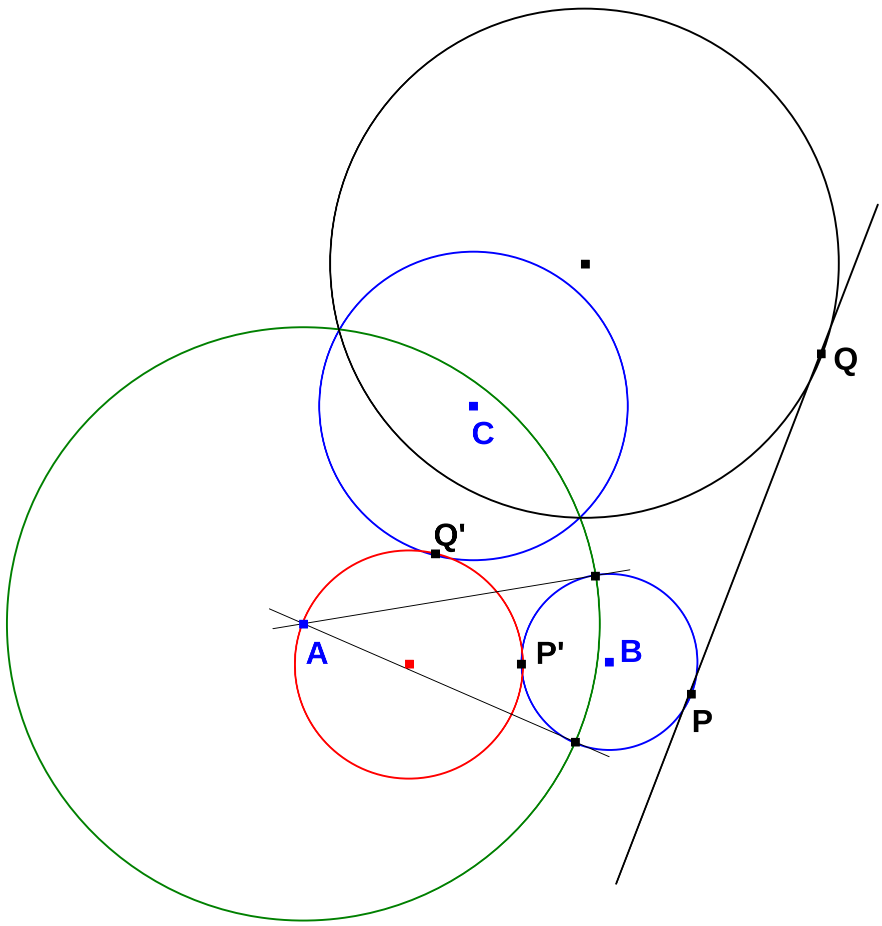
5. Soluciones a los problemas propuestos

Para resolver un problema de inversión debemos elegir adecuadamente el centro y el radio de inversión. A veces, el radio de inversión puede ser cualquiera.

Suele ser conveniente elegir como centro de inversión un punto de tangencia de dos circunferencias, ya que éstas se convertirán en dos rectas paralelas.

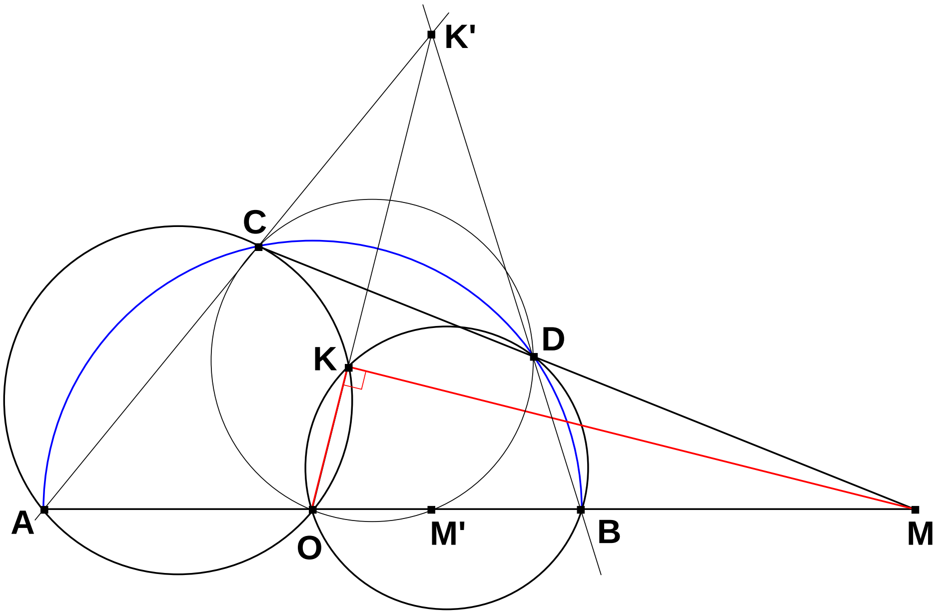
Como en otras áreas, es la práctica la que realmente nos enseña a abordar el problema.

Problema 1. *Dados un punto y dos dos circunferencias, trazar una circunferencia que pase por el punto y que sea tangente a las dos circunferencias.*



Solución. En la figura A es el punto dado y las circunferencias dadas tienen centros B y C. Consideramos como circunferencia de inversión la que está centrada en A y es ortogonal a (B). De esa manera (B) será fija. Hallamos la circunferencia inversa de (C) y una tangente común a dicha circunferencia inversa y a la circunferencia (B). Bastará invertir la recta obtenida para hallar la circunferencia buscada.

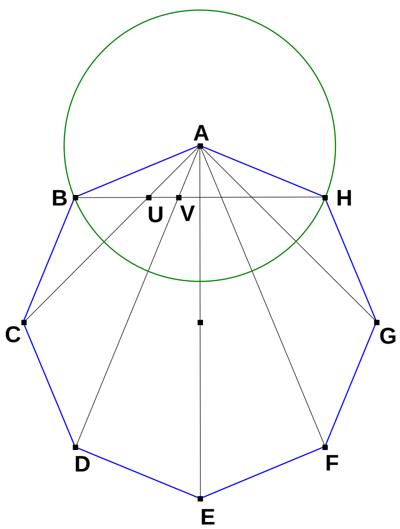
Problema 2. *(Rusia, 1995). Sean una semicircunferencia con diámetro AB y centro O, y una recta que corta a la semicircunferencia en los puntos C y D, y a la recta AB en el punto M (siendo $MD < MC$ y $MB < MA$). Sea K el segundo punto de intersección de las circunferencias OAC y OBD. Demostrar que $\angle MKO = 90°$.*



Solución. Consideramos la inversión de centro A y radio OA. La recta AB es fija. Las circunferencias OAC y OBD se transforman en las rectas AC y BD, que se cortan en K', punto inverso de K. La recta CD se transforma en una circunferencia que pasa por C, D, O, y esta circunferencia corta a la recta AB en el punto M', inverso de M.
Como AD y BC son perpendiculares a BK' y AK' respectivamente y además O es el punto medio de AB, la circunferencia CDO es la circunferencia de los nueve puntos del triángulo $AK'B$, así que también $K'M'$ es perpendicular a AB, es decir $\angle K'M'O = 90°$. En consecuencia, también es $\angle MKO = 90°$.

Problema 3. *(España, 2005). Diremos que un triángulo es multiplicativo si el producto de las longitudes de dos de sus lados es igual a la longitud del tercer lado. Sea $ABC \dots XYZ$ un polígono regular de n lados con todos sus lados de longitud 1. Las $n-3$ diagonales que salen del vértice A dividen al triángulo ZAB en $n-2$ triángulos más pequeños. Probar que cada uno de esos triángulos es multiplicativo.*

Solución. En la figura de la derecha hemos representado el caso de un octógono $ABCDEFGH$, pero el razonamiento es válido para cualquier polígono.



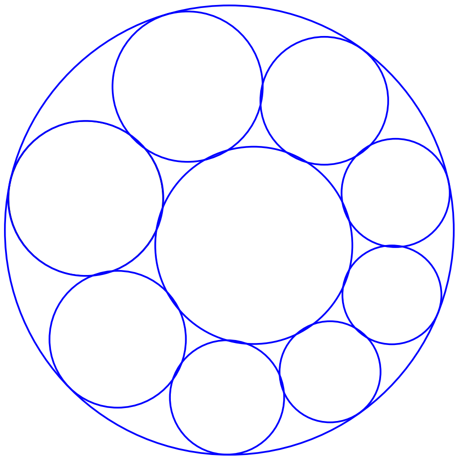
Consideremos una inversión con centro A y radio de inversión $r = 1$. La circunferencia circunscrita al polígono pasa por el centro de inversión, por lo que su imagen es una recta, la recta BH que pasa por los puntos de intersección de ambas.

Consideremos los triángulos AUV y ACD, y apliquemos la fórmula que relaciona las longitudes de segmentos transformados por una inversión,

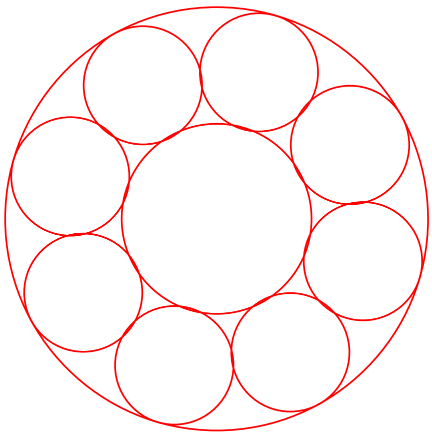
$$1 = CD = UV \cdot \frac{r^2}{AU \cdot AV} = \frac{UV}{AU \cdot AV}.$$

Entonces, $UV = AU \cdot AV$ y el triángulo AUV es multiplicativo.

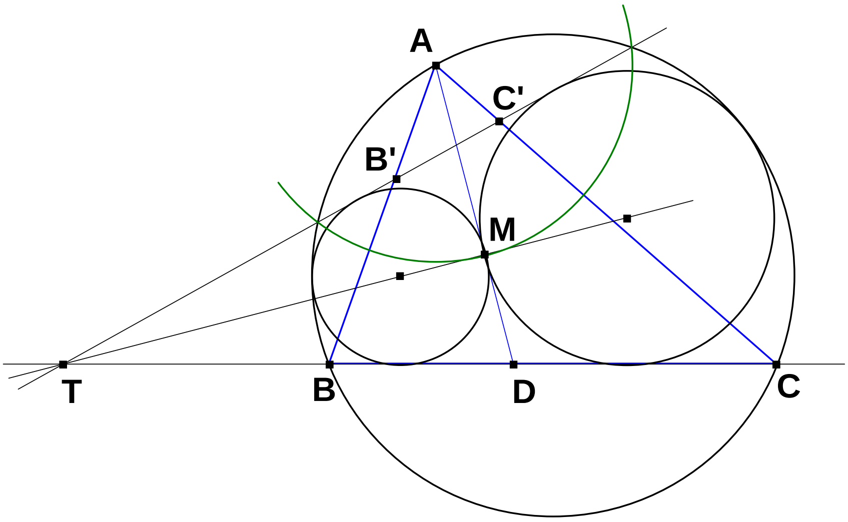
Problema 4. *(Porismo de Steiner). Consideremos dos circunferencias, no concéntricas y una interior a la otra. Comenzamos por inscribir una circunferencia entre ambas, y luego vamos inscribiendo circunferencias tangentes a las dos dadas y a la última. Llegará un momento en que la circunferencia que inscribimos se solape con la primera, o bien que sea tangente a ella. Demostrar que ello no depende de la posición de la primera circunferencia inscrita.*



Solución. El problema se resuelve de forma trivial si las circunferencias dadas son concéntricas. Por tanto, basta considerar una inversión que transforme las dos circunferencias dadas en dos circunferencias concéntricas.

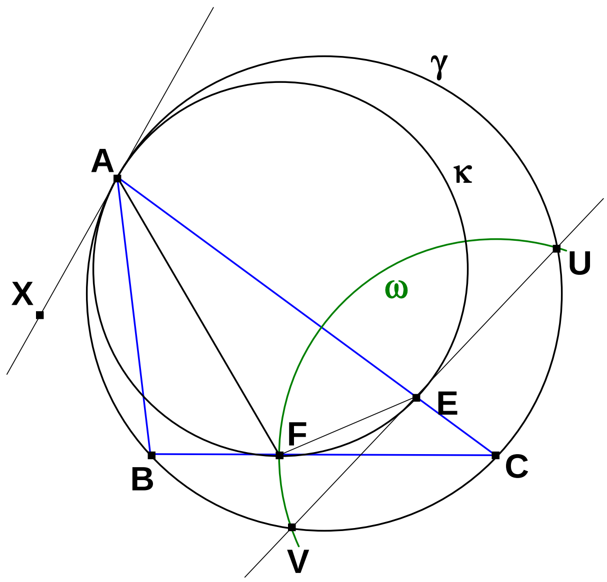


Problema 5. *(Rumanía, 1997). Sea un triángulo ABC y un punto D sobre BC. Dos circunferencias son tangentes exteriormente a AD en el mismo punto M y cada una de ellas es tangente a la circunferencia circunscrita de ABC y al lado BC, la primera sobre el segmento BD y la otra sobre el segmento DC. Demostrar que AD es la bisectriz del ángulo A.*



Solución. Supongamos que la recta que une los centros de las dos circunferencias corta a la recta BC en T. Consideremos la inversión de centro A y radio AM. Esta inversión deja fijas a las dos circunferencias y transforma la circunferencia circunscrita a ABC en la otra tangente común a las dos circunferencias. El cuadrilátero $BCC'B'$ formado por los vértices B y C y sus inversos es cíclico, y un cálculo sencillo de ángulos conduce a que las bisectrices de $\angle BTB'$ y $\angle BAC$ son perpendiculares. Pero por otro lado, TM es la bisectriz de BTB' y $AM \perp TM$. Esto implica que AM debe ser la bisectriz del ángulo A, que es lo que queríamos demostrar.

Problema 6. *(Praxis der Mathematik, prob. 546). Dado un triángulo ABC y su circunferencia circunscrita γ, sea κ la circunferencia tangente a γ en A y tangente a BC en un punto F. Sea E el otro punto de intersección de κ con el lado CA (aparte de A). Se pide: a) Demostrar que la recta AF es la bisectriz del ángulo CAB. b) Si U y V son los dos puntos de γ que cumplen $CF = CU = CV$, demostrar que UV es tangente la circunferencia κ en el punto E.*

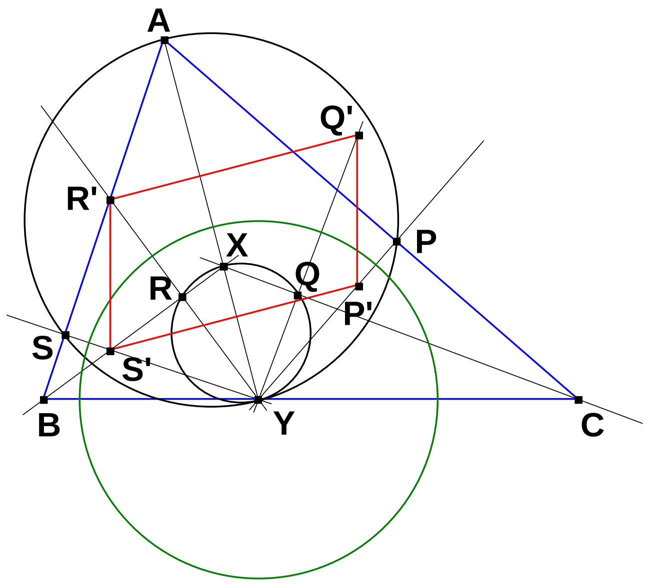


Solución. Para la parte a), calculemos ángulos. Sea X un punto de la tangente a la circunferencia circunscrita por A, de manera que la recta AB separe a C y X. Entonces tenemos

$$\begin{aligned}\angle BAF =&\angle XAF - \angle XAB = \angle AEF - \angle ACB = \\ =&\angle AEF - \angle ECF = \angle EFC = \angle FAE = \angle FAC.\end{aligned}$$

Por tanto, $\angle BAF = \angle CAF$. Para demostrar b), consideremos la inversión respecto de la circunferencia ω con centro C y radio CF. Las circunferencias ω y κ son ortogonales, por lo que κ es fija. Por otro lado, la recta UV es inversa de de γ. El punto A' inverso de A debe ser el punto de tangencia de la recta UV y la circunferencia κ, y además debe estar en la recta AC, por ser C el centro de inversión y A, A' dos puntos inversos, así que debe ser $A' = E$ y UV es tangente a κ en E.

Problema 7. *(Irán, 2004). Sea ABC un triángulo. Sea un punto X del interior del triángulo y sea Y la intersección de AX y BC. Tracemos las perpendiculares YP, YQ, YR, YS a las rectas CA, CX, BX, BA respectivamente. Hallar la condición necesaria y suficiente que debe cumplir X para que $PQRS$ sea un cuadrilátero cíclico.*

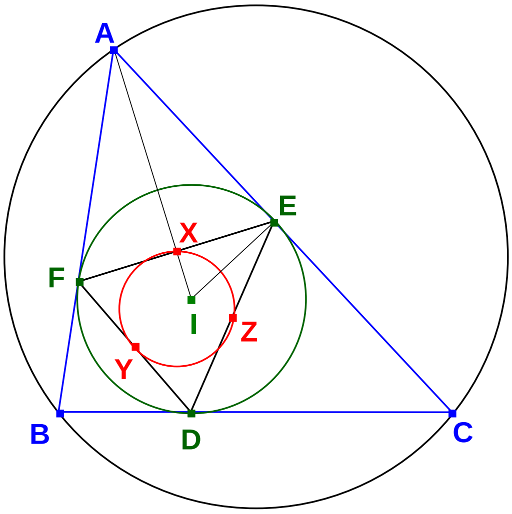


Solución. Consideremos una inversión con centro Y y radio cualquiera. Observemos que la circunferencia con diámetro BY contiene a los puntos R y S, y esta circunferencia se transformará en la recta $R'S'$, perpendicular a BC. De forma análoga, la circunferencia con diámetro YC contiene a los puntos P y Q, y la recta PQ y dicha circunferencia se transforma en la recta $P'Q'$, perpendicular a BC. Asimismo, las circunferencias YRQ e YPS se invierten en dos rectas paralelas, perpendiculares las dos a la recta AY. Deducimos por tanto que $P'Q'R'S'$ es un paralelogramo.

Ahora, el cuadrilátero $PQRS$ será cíclico si y solo si $P'Q'R'S'$ lo es, y al ser un paralelogramo, esto ocurrirá si y sólo si $P'Q'R'S'$ es un rectángulo, es decir, cuando AX sea perpendicular a BC.

Como conclusión, $PQRS$ es un cuadrilátero cíclico si y solo si AX y BC son perpendiculares.

Problema 8. *Sean ABC un triángulo y D, E, F los puntos de contacto de la circunferencia inscrita con los lados BC, CA y AB, respectivamente. Demostrar que la inversión respecto de la circunferencia inscrita transforma la circunferencia circunscrita a ABC en la circunferencia de los nueve puntos de DEF.*



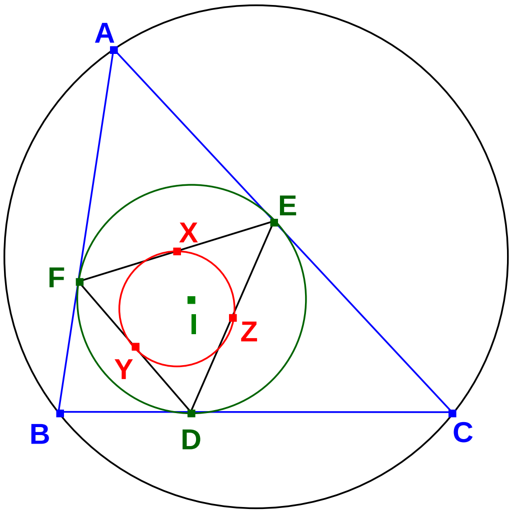
Solución. Sea I y r el centro y el radio de la circunferencia inscrita a ABC. Consideremos la inversión respecto de esta circunferencia. Sean X, Y, Z los puntos medios de los lados DE, EF, FD del triángulo DEF. Por ser E y F los puntos de tangencia de las rectas tangentes desde A a la circunferencia inscrita, ambos puntos son simétricos respecto de la bisectriz AI. De otro modo, el triángulo AEF es isósceles y la perpendicular a EF por A pasa por su punto medio X, es decir $\angle IXE = 90°$. También es $\angle IEA = 90°$, resultando evidente que los triángulos IEA e IXE son semejantes. Entonces tenemos

$$\frac{IX}{IE} = \frac{IE}{IA} \Rightarrow IX \cdot IA = IE^2 = r^2.$$

Esto quiere decir que A y X son puntos inversos. De la misma forma se comprueba que B e Y, C y Z también lo son.

Deducimos entonces que la circunferencia ABC se transforma en la circunferencia XYZ,

Problema 9. *(Euler) Si R y r son los radios de las circunferencias circunscritas e inscritas a un triángulo y O e I son su circuncentro e incentro, entonces $OI^2 = R^2 - 2Rr$.*



Solución. Consideremos la inversión con centro I y radio r. La circunferencia inscrita es fija, y la circunferencia circunscrita (con radio R) se transforma en la circunferencia de los nueve puntos del triángulo DEF, siendo D, E, F los puntos de contacto de la circunferencia inscrita con los lados AB, BC, CA del triángulo ABC. El radio de esta circunferencia es $\frac{r}{2}$.

Sabemos que el resultado de una inversión de centro P y radio k sobre una circunferencia $\mathcal{C}$ equivale al de una homotecia centrada en P con razón igual al cociente entre k^2 y la potencia de P respecto de $\mathcal{C}$. Considerando como $\mathcal{C}$ a la circunferencia circunscrita a ABC y nuestra inversión de centro I y radio r, tendremos

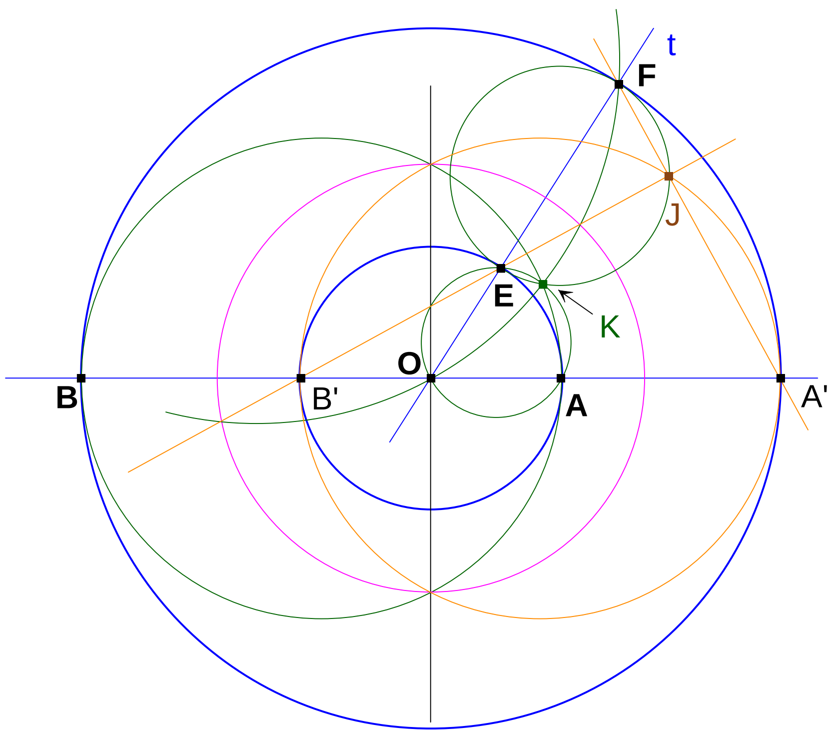
$$\frac{\frac{r}{2}}{R} = \frac{r^2}{R^2 - OI^2},$$

de donde deducimos $OI^2 = R^2 - 2Rr$.

Problema 10. *(Competición Matemática Mediterránea, 2005). k y k' son dos circunferencias concéntricas, de centro O y radios respectivos R y R'. Se supone que $R < R'$. Una semirrecta Ox corta a k en el punto A; la semirrecta opuesta Ox' corta a k' en el punto B. Una tercera semirrecta Ot, distinta de las anteriores, corta a k en E y a k' en F. Demostrar que las cuatro circunferencias siguientes se cortan en un mismo punto:*

1. *La circunscrita al triángulo OAE.*
2. *La circunscrita al triángulo OBF.*
3. *La de diámetro EF.*
4. *Y la de diámetro AB*

Solución: Consideramos la inversión de centro O, de radio $\sqrt{RR'}$ que transforma las circunferencias concéntricas una en otra. E y F resultan ser puntos inversos. Sean A' y B' los inversos de A y B respectivamente. A' estará en k' y B' estará en k:



Entonces:

1. Las circunferencias OAE y OBF pasan por el centro de inversión, así que se transforman en rectas, OAE se transforma en la recta $A'F$ y OBF se transforma en la recta $B'E$.

2. La circunferencia con diámetro EF es fija.

3. La circunferencia con diámetro AB se transforma en la circunferencia con diámetro $A'B'$.

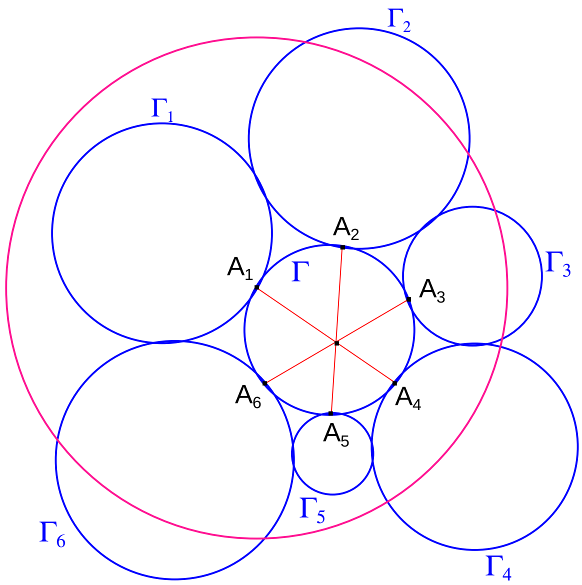
Por ser inversos E y F, A y A', los triángulos OEA y OFA' son semejantes, e isósceles, así que $A'F$ es paralela a AE. Como AE forma con $B'E$ un ángulo recto, por estar E en la circunferencia con diámetro $B'A$, la recta $A'F$ que hemos dicho que paralela a AE también formará ángulo recto con $B'E$. El punto de intersección J de $A'F$ y $B'E$ estará por tanto en la circunferencia con diámetro $B'A'$.

El ángulo EJF, opuesto a $A'JB'$ también será recto y por tanto, J también estará en la circunferencia con diámetro EF.

Entonces, el punto J es común a: la circunferencia con diámetro EF; la circunferencia con diámetro $A'B'$; la recta $A'F$; y la recta $B'E$.

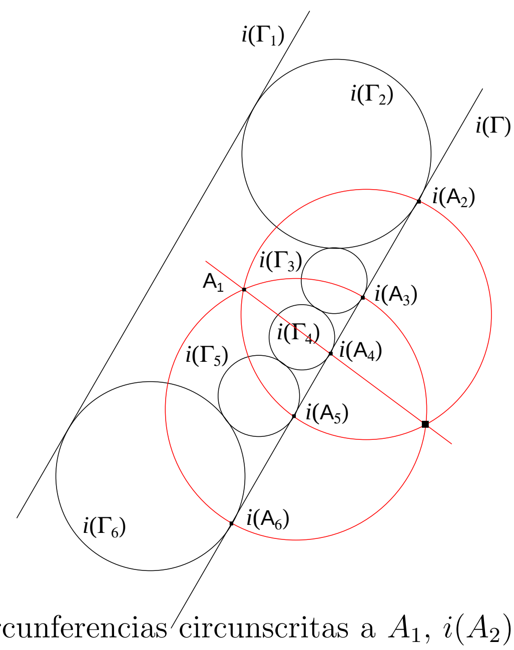
En consecuencia, el punto K, inverso K será común a: la circunferencia EF; la circunferencia con diámetro AB, la recta BF; y la recta BF, que es lo que queríamos demostrar.

Problema 11. *(Teorema de las Siete Circunferencias). Supongamos que las circunferencias Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4, Γ_5, Γ_6 son tangentes a una circunferencia Γ en los puntos A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 respectivamente, y cada una de ellas es también tangentes a la anterior y a la siguiente (entendemos que Γ_1 es la siguiente de Γ_6 y que Γ_6 es la anterior a Γ_1). Entonces, las rectas A_1A_4, A_2A_5 y A_3A_6 son concurrentes.*



Solución. Llamemos i a la inversión respecto de una circunferencia con centro A_1.

Las circunferencias Γ_1 y Γ, que pasan por A_1, se transforman en dos rectas paralelas, y las circunferencias Γ_2 y Γ_6, que son tangentes tanto a Γ_1 como Γ se transformarán en dos circunferencias con el mismo radio.



Ahora tenemos que a) La recta A_1A_4 es fija. b) La recta A_2A_5 se transforma en la circunferencia circunscrita a A_1, $i(A_2)$ e $i(A_5)$. c b) La recta A_3A_6 se transforma en la circunferencia circunscrita a A_1, $i(A_3)$ e $i(A_6)$.

Que las tres rectas A_1A_4, A_2A_5 y A_3A_6 son concurrentes equivale entonces a que sus trasformados tengan algún punto común además de A_1. Esto ocurrirá si la recta A_1A_4 sea el eje radical de las circunferencias circunscritas a A_1, $i(A_2)$ e

$i(A_5)$ y a A_1, $i(A_3)$ e $i(A_6)$. Para comprobarlo, veremos que el punto $i(A_4)$, que pertenece a la recta A_1A_4, tiene la misma potencia respecto de las dos circunferencias, es decir, veremos que

$$i(A_4)i(A_2)\cdot i(A_4)i(A_5) = i(A_4)i(A_3)\cdot i(A_4)i(A_6).$$

Usaremos que el segmento de tangente común a dos circunferencias tangentes con radios r_1 y r_2 es $2\sqrt{r_1r_2}$, que se obtiene fácilmente usando el teorema de Pitágoras.

Llamando r_i al radio de Γ_i, tenemos

$$\begin{aligned}
i(A_4)i(A_2)\cdot i(A_4)i(A_5) &= -\left(2\sqrt{r_3r_4}+2\sqrt{r_2r_3}\right)\cdot 2\sqrt{r_4r_5} = \\
&= -4\sqrt{r_2r_3r_4r_5}-4r_4\sqrt{r_3r_5}, \\
i(A_4)i(A_3)\cdot i(A_4)i(A_6) &= -2\sqrt{r_4r_3}\cdot\left(2\sqrt{r_4r_5}+2\sqrt{r_5r_6}\right) = \\
&= -4r_4\sqrt{r_3r_5}-\sqrt{r_3r_4r_5r_6}.
\end{aligned}$$

y usando que $r_2 = r_6$ vemos que las dos potencias son iguales.

6. Glosario

Ángulo inscrito. Un ángulo se llama inscrito si tiene su vértice en la circunferencia y los lados secantes a la circunferencia. El ángulo semiinscrito tiene uno de los lados secante y el otro tangente y puede considerarse como un caso límite del ángulo inscrito. Un ángulo inscrito o semiinscrito mide la mitad que el arco que comprende. En particular, *un ángulo inscrito que abarca un diámetro es recto*.

Cuadrilátero cíclico. Un cuadrilátero se llama cíclico si tiene los cuatro vértices en una misma circunferencia. En un cuadrilátero cíclico la suma de los ángulos opuestos es 180º.

Potencia de un punto respecto de una circunferencia. Sean P un punto, $\mathcal{C}$ una circunferencia y A, B los puntos de corte de cualquier recta que pasa por P con la circunferencia. Entonces el producto $PA \cdot PB$ no depende de A y B y se llama potencia de P respecto de $\mathcal{C}$.

Eje radical de dos circunferencias. Es una recta formada por los puntos que tienen la misma potencia respecto de las dos circunferencias. Si las circunferencias son secantes, es la recta que pasa por los dos puntos de intersección.

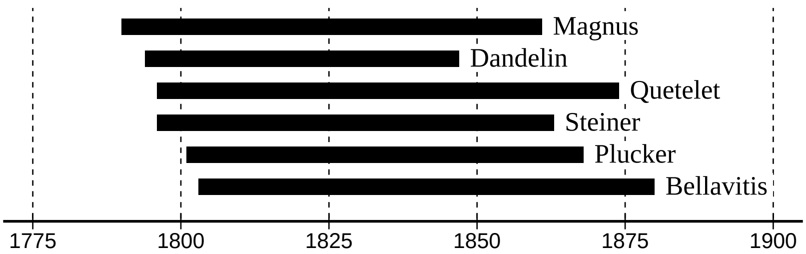
Circunferencia de los nueve puntos. En cualquier triángulo, los puntos medios de los lados, los pies de las alturas y los puntos medios de los segmentos que unen el ortocentro y los vértices, están en una misma circunferencia, llamada circunferencia de los nueve puntos o circunferencia de Euler. Tiene su centro en el punto medio entre el ortocentro y el circuncentro, y su radio es exactamente la mitad que el de la circunferencia circunscrita.

7. Nota histórica

Según dice Howard Eves [3], la historia de la inversión es compleja. François Vièta ya hablaba de puntos inversamente relacionados en el siglo XVI. Robert Simson, en su restauración de la obra perdida *Lugares planos* de Apolonio incluyó, basándose en un comentario hecho por Pappus, uno de los teoremas básicos de la teoría de inversión, el de que el inverso de una recta o una circunferencia es también una recta o una circunferencia. Simon A. J. L'Huilier (1750-1840) en sus *Eléments d'analyse géométrique et d' anlyse algebrique appliquées à la recherche des lieux géometriques* (París y Génova, 1808) dio casos especiales de este teorema.

Pero la inversión como una transformación para simplificar el estudio de figuras data de tiempos más recientes, y fue utilizada independientemente por varios autores. Bützberger remonta el uso de la inversión por parte de Jakob Steiner a 1824.

Patterson [5] apunta la siguiente cronología:



1822 Dandelin publica su Tableau Comparatif para la hipérbola y la focal.

1823 Quetelet compara caústicas secundarias y cónicas a la manera de Dandelin

1824 Steiner habla de inversión en un manuscrito no publicado hasta 1913.

1825 Dandelin deduce la relación $rr' = R^2$ correspondiente a radio vectores de lemniscatas y cónicas, dando lugar a una nueva construcción de aquellas.

1825 Quetelet define la inversa de una curva.

1831 Plücker explica sus *neues Übertragungs-Princip*, que fue publicado en 1834

1836 Bellavitis dio una exposición completa de la teoría de las figuras inversas.

1845 Lord Kelvin la aplica a sus estudios sobre elasticidad.

Referencias

[1] *Art of Problem Solving.* Foro de discusión sobre resolución de problemas. Pueden verse muchos y buenos problemas sobre una gran gama de temas y varios niveles de dificultad. `http://www.artofproblemsolving.com/`

[2] Coxeter, H. S. M., Greitzer, S. L. *Geometry Revisited.* Washington, DC: Mathematical Association of America, 1967.

[3] Eves, H. W. *A Survey of Geometry.* Boston, MA: Allyn and Bacon, 1972.

[4] Ogilvy, C. S. *Excursions in Geometry.* New York: Dover, pp. 143-153, 1990.

[5] Patterson, Boyd C.: “The Origins of the Geometric Principle of Inversion”. *Isis*, Vol. 19, No. 1. (Apr., 1933), págs. 154-180.

[6] Stankova-Frenkel, Z. *Inversion in the Plane. Part I and II.* Disponible en `http://math.berkeley.edu/~stankova/MathCircle/sessions-index.html`

PROBLEMAS DE NIVEL MEDIO Y DE OLIMPIADAS (27)

Presentamos cinco problemas propuestos en la Olimpiada Zhautykov 2006, Alma Ata, Kirguistán.

27-1. Hallar todos los enteros positivos n tales que $n = \varphi(n) + 402$, donde φ es la función de Euler (es conocido que si $p_1, \cdots, p_k$ son todos los diferentes divisores primos de n, entonces

$$\varphi(n) = n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \cdots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_k}\right), \text{ y } \varphi(1) = 1.)$$

27-2. Los puntos K y L están en los lados AB y AC, respectivamente, del triángulo ABC, de tal manera que $BK = CL$. Sea P el punto de intersección de BL y CK, y sea M un punto interior al segmento AC tal que la recta MP sea paralela a la bisectriz del ángulo A del triángulo ABC. Demostrar que $CM = AB$.

27-3. Una tabla $m \times n\,(4 \leq m \leq n)$ se llamará *buena* si los números 0 y 1 se pueden situar en los cuadrados unidad de la tabla verificando las condiciones siguientes:

1) no todos los números son ceros ni todos los números son unos.

2) El número de "unos" en cualquier cuadrado 3×3 es el mismo.

3) El número de "unos" en cualquier cuadrado 4×4 es el mismo, también.

Hallar todos los pares (m, n) $(4 \leq m \leq n)$ para los cuales existe una tabla *buena* $m \times n$.

27-4. Si la suma de los números reales a, b, c, d es cero, demostrar la desigualdad

$$(ab + ac + ad + bc + bd + cd)^2 + 12 \geq 6\,(abc + abd + acd + bcd)\,.$$

27-5. En el hexágono convexo ABCDEF se tiene

$$AD = BC + EF,\ BE = AF + CD,\ CF = DE + AB.$$

Demostrar que

$$\frac{AB}{DE} = \frac{CD}{AF} = \frac{EF}{BC}.$$

Problemas de nivel medio y de Olimpiadas (26)

Problemas de la segunda fase de la Olimpiada Británica 2005

26-2: En el triángulo ABC, $\angle BAC = 120^o$. Las bisectrices interiores de los ángulos A, B y C cortan a los lados opuestos en D, E y F, respectivamente.
Demostrar que la circunferencia de diámetro EF pasa por D.

Solución de Bruno Salgueiro Fanego (Viveiro, Lugo, Galicia, España)

Sea $\mathcal{C}$ la circunferencia de diámetro EF. Entonces D estará en $\mathcal{C}$ si y sólo si $\angle EDF$ es un ángulo inscrito en $\mathcal{C}$ que abarca un diámetro suyo, es decir, si y sólo si $\angle EDF = 90^o$, que equivale a que DEF sea un triángulo rectángulo en D o a que $DE^2 + DF^2 = EF^2$.
Aplicando el teorema del coseno en ADE y en ADF, resulta:
$DE^2 = AD^2 + AE^2 - 2 \cdot AD \cdot AE \cdot \cos 60^0$ y $DF^2 = AD^2 + AF^2 - 2 \cdot AD \cdot AF \cdot \cos 60^0$, luego
$DE^2 + DF^2 = 2 \cdot AD^2 + AE^2 + AF^2 - AD \cdot (AE + AF)$.
Aplicando el teorema del coseno en AEF, resulta:
$EF^2 = AE^2 + AF^2 - 2 \cdot AE \cdot AF \cdot \cos 120^0$, con lo cual el problema reside en probar la igualdad
$2 \cdot AD^2 - AD \cdot (AE + AF) = AE \cdot AF$. Pero
$\frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin 120^o = [ABC] = [ABD] + [CAD] = \frac{1}{2} \cdot c \cdot AD \cdot \sin 60^o + \frac{1}{2} \cdot b \cdot AD \cdot \sin 60^o \Rightarrow AD = \frac{bc}{b+c}$ y,
por el teorema de la bisectriz interior,
$\frac{AE}{b - AE} = \frac{c}{a} \Rightarrow AE = \frac{bc}{c+a}$ y $\frac{AF}{c - AF} = \frac{b}{a} \Rightarrow AF = \frac{bc}{a+b}$.
Entonces hay que probar que
$$2\frac{b^2c^2}{(b+c)^2} - \frac{bc}{b+c} bc \frac{2a+b+c}{(c+a)(a+b)} = \frac{b^2c^2}{(c+a)(a+b)}$$
o bien, dividiendo entre b^2c^2 y quitando denominadores, que
$2(a+b)(c+a) - (2a+b+c)(b+c) = (b+c)^2$, es decir, que
$2(a^2 + bc) = 2(b+c)^2$ o bien que $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos 120^o$,
lo cual es cierto por el teorema del coseno aplicado al triángulo ABC.

Problemas de nivel medio y de Olimpiadas (26)

Problemas de la segunda fase de la Olimpiada Británica 2005

26-3: Sean a, b, c números reales positivos. Demostrar que

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)^2 \geq (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

Solución de Bruno Salgueiro Fanego (Viveiro, Lugo, Galicia, España)

Hay que demostrar que

$\left(\frac{a}{b}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2+\left(\frac{c}{a}\right)^2+2\left(\frac{a}{b}\frac{b}{c}+\frac{b}{c}\frac{c}{a}+\frac{c}{a}\frac{a}{b}\right) \geq a\frac{1}{a}+b\frac{1}{b}+c\frac{1}{c}+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)$, esto es,

$\left(\frac{a}{b}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2+\left(\frac{c}{a}\right)^2+2\frac{a}{c}+2\frac{b}{a}+2\frac{c}{b} \geq 3+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)$ o bien

$\left(\frac{a}{b}\right)^2-\frac{a}{b}+\frac{1}{\frac{a}{b}}+\left(\frac{b}{c}\right)^2-\frac{b}{c}+\frac{1}{\frac{b}{c}}+\left(\frac{c}{a}\right)^2-\frac{c}{a}+\frac{1}{\frac{c}{a}} \geq 3$.

Luego bastará con demostrar que, si x es un número real positivo, se cumple que $x^2-x+\frac{1}{x} \geq 1$ y sumar las tres igualdades resultantes tomando $x=\frac{a}{b}$, $x=\frac{b}{c}$ y $x=\frac{c}{a}$.

Y ello es cierto, dándose además la igualdad sólo y cuando $x=1$ porque, si $x>0$,

$x^2-x+\frac{1}{x}-1=\frac{1}{x}\left(x^3-x^2-x+1\right)=\frac{1}{x}\left[x^2(x-1)-(x-1)\right]=\frac{1}{x}\left(x^2-1\right)(x-1)=\frac{1}{x}(x+1)(x-1)^2$ y $\frac{1}{x}>0$,

$x+1>0$ y $(x-1)^2 \geq 0$, con $(x-1)^2=0 \Leftrightarrow x=1$.

Por tanto, la desigualdad del enunciado está demostrada, y en ella se da la igualdad si y sólo si $\frac{a}{b}=1$, $\frac{b}{c}=1$ y $\frac{c}{a}=1$, es decir, si y sólo si $a=b=c$.

PROBLEMAS PARA LOS MÁS JÓVENES (27)

La Sociedad Rumana de Ciencias Matemáticas acaba de poner a la venta la colección completa (1894-2004), en edición electrónica, de la revista *Gazeta Matematica, serie B.*

Presentamos cinco problemas rumanos para los alumnos de 11 a 14 años:

Prjov 27-1: El número α es de la forma 10 + múltiplo de 19 . Demostrar que no puede ser ni cuadrado ni cubo perfecto.

Prjov 27-2: La suma de tres números primos consecutivos es también primo. Calcularlos.

Prjov27-3:En el triángulo ABC, el ángulo A es de 60^o. Sea S el punto medio de la bisectriz AP, donde P es un punto del lado BC. Se sabe que el ángulo SBA es de 30^o.

i) ¿Cuál es el centro de la circunferencia que pasa por A, B y P?

ii) ¿Es AB = AP?

iii) ¿son iguales PC y PB?

iv) ¿Es BS la mediana de ABC correspondiente al vértice B?

Prjov27-4: Resolver, en el conjunto de los números naturales, la ecuación

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n + 241 = m^2.$$

Projov27-5:Hallar todos los polígonos regulares que tienen todas sus diagonales iguales.

Solución al Problema 116 bis

Samuel Gómez Moreno,
Departamento de Matemáticas, Universidad de Jaén.
samuel@ujaen.es

PROBLEMA 116 bis

Sean x e y números reales tales que

$$\sqrt{x^2 - 3x} + \sqrt{y^2 - 3y} = 1.$$

Demostrar que

$$x^2 + y^2 < 2(x + y) + 15.$$

SOLUCIÓN

Designemos $a = \sqrt{x^2 - 3x}$. Entonces es claro que $\sqrt{y^2 - 3y} = 1 - a$, que $0 \leq a \leq 1$ y que $0 \leq 1 - a \leq 1$. Además

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 4a^2}}{2}, \qquad \text{y también} \qquad y_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{13 - 4a(2 - a)}}{2}.$$

Por tanto, como es inmediato comprobar, obtenemos que

$$x^2 + y^2 - 2(x + y) = \frac{1}{2}\left(8 - 4a(1 - a) \pm \sqrt{13 - 4a(2 - a)} \pm \sqrt{9 + 4a^2}\right). \quad (1)$$

Teniendo en cuenta que, para $0 \leq a \leq 1$, se verifican las desigualdades $0 \leq a(1 - a) \leq 1/4$, $0 \leq a(2 - a) \leq 1$ y $0 \leq a^2 \leq 1$, obtenemos de modo inmediato que

$$7 \leq 8 - 4a(1 - a) \leq 8,\ 3 \leq \sqrt{13 - 4a(2 - a)} \leq \sqrt{13},\ 3 \leq \sqrt{9 + 4a^2} \leq \sqrt{13}.$$

Haciendo uso, en la expresión (1), de las tres acotaciones anteriores, obtenemos tres cotas superiores para $x^2 + y^2 - 2(x + y)$: si consideramos los dobles signos que aparecen en (1) ambos positivos, la cota que resulta es

$4+\sqrt{13}$; si consideramos los dobles signos uno positivo y otro negativo, la cota obtenida es $(5+\sqrt{13})/2$; y si los dobles signos los consideramos ambos negativos, la cota obtenida es, entonces, 1. La mayor de las tres cotas es $4+\sqrt{13}$, que verifica $4+\sqrt{13} < 7.6056 < 15$. Por tanto hemos mejorado la desigualdad que pretendíamos probar, ya que hemos establecido que

$$x^2 + y^2 - 2(x+y) \leq 4 + \sqrt{13}.$$

SOLUCIÓN PROPUESTA

Luis Gómez Sánchez A.
Universidad de Oriente, Venezuela.
lagsa7@hotmail.com
Jirón A. Tovar # 267,
01 La Punta, Callao, PERÚ.

Problema 116 bis (corrección).
Propuesto por Doru Popescu Anastasiu (Slatina, Rumania) y Miguel Amengual Covas (Cala Figuera, España)
Sean *x* e *y* números reales tales que

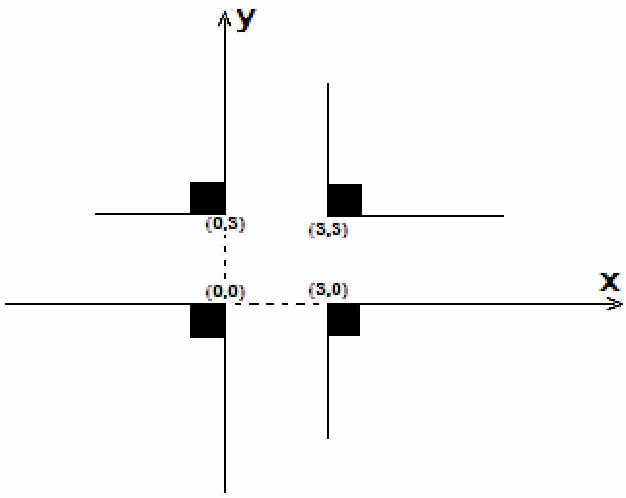
$$\sqrt{x^2-3x}+\sqrt{y^2-3y}=1.$$

Demostrar que

$$x^2+y^2<2(x+y)+15.$$

SOLUCIÓN.- Como el dominio de definición de $(x^2 - 3x)^{1/2}$ es $\{x \le 0$ ó $x \ge 3\}$, el correspondiente dominio de la función $F(x, y) = (x^2 - 3x)^{1/2} + (y^2 - 3y)^{1/2}$, de **R**x**R** en **R**, está dado por la unión de cuadrantes disjuntos $D = \{x \le 0;\ y \le 0\}$ **U** $\{x \le 0;\ y \ge 3\}$ **U** $\{x \ge 3;\ y \le 0\}$ **U** $\{x \ge 3;\ y \ge 3\}$.

Ahora, como $f(x) = x^2 - 3x$ es, respectivamente, creciente y decreciente a la derecha y a la izquierda del punto $x = 3/2$ que no está en D, los dos radicales que definen F recorren cada uno todos los valores del intervalo cerrado [0, 1]; además, las raíces de $x^2 - 3x = 1$, (que se corresponden claramente con las raíces de $y^2 - 3y = 0$ en la curva $F(x, y) = 1$) son $x_1 = 3.3027$ y $x_2 = -0.3027$, donde se ha aproximado el valor de $\sqrt{13}$. Se deduce que los puntos de **R**x**R** tales que $F(x, y) = 1$ están contenidos en los cuadrados de lado igual a 0.3027, sombreados en la figura y cuya unión notamos D_1. (Es importante aquí observar que D_1 está trivialmente contenido en D pero que la imagen inversa $F^{-1}(\{1\})$ es en rigor más pequeña que D_1; ésta corresponde en verdad a arcos de curva que podrían dibujarse en dicho dominio D_1).



Ahora, haciendo $t^2 = x^2 - 3x$; $u^2 = y^2 - 3y$, se tiene que $x^2 + y^2 = t^2 + u^2 + 3(x + y)$. Entonces el problema equivale a demostrar, simplificación evidente mediante, que $t^2 + u^2 < 15 - (x + y)$ cuando $t + u = 1$ siendo t y u no negativos.

Es obvio en tal caso que $t^2 + u^2 \leq 1$; por otro lado, para todos los puntos (x, y) de $F^{-1}(\{1\})$, el valor de $15 - (x + y)$ será siempre mayor o igual que $15 - \text{Max}(x + y)$ con (x, y) ahora sobre toda la zona sombreada D_1 de la figura, lo que está claramente dado por $15 - (3 + \sqrt{13}) = 8.3945 > 1$. Entonces se tiene $1 < 15 - (x + y)$ si $F(x, y) = 1$ de donde $t^2 + u^2 < 15 - (x + y)$ lo que se quería demostrar.

OBSERVACIÓN.- (*Un mejoramiento del enunciado*) El método empleado en la solución, asegura que la cota 15 puede ser mejorada por cualquier positivo menor X tal que $X - (3 + \sqrt{13}) > 1$, es decir tal que $X - 6.6055 > 1$. El mejor entero obtenible, (*trabajando sobre el dominio D_1 adoptado aquí;* véase NOTA debajo) resulta ser entonces el número 8.

NOTA.-Las acotaciones vistas no son lo bastante finas como podrían serlo y ciertamente existen números positivos menores que 8 y que podrían reemplazar al 15 del enunciado; averiguar, por ejemplo, si se puede poner o no el entero 7, sería un muy buen ejercicio para cualquier estudiante interesado en las olimpiadas matemáticas. Tal objetivo podría lograrse tratando de reducir el dominio D_1 (la mejor reducción posible consiste en determinar exactamente $F^{-1}(\{1\})$ y podría notarse para comenzar, que se pueden extraer vecindades adecuadas en varios de los 16 vértices de D_1, en los cuales se tenga $F(x, y) \neq 1$ por lo que, siendo F continua, se tendrá "cerca" de dichos puntos $F(x, y) \neq 1$.

Problema 116 bis

Sean x e y números reales tales que

$$\sqrt{x^2-3x}+\sqrt{y^2-3y}=1.$$

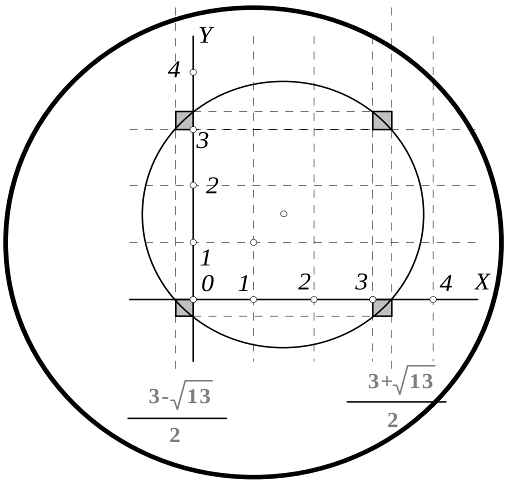
Demostrar que

$$x^2+y^2<2(x+y)+15.$$

Solución 1

La condición $\sqrt{x^2-3x}+\sqrt{y^2-3y}=1$ exige que cada radicado sea mayor o igual que 0 y menor o igual que 1 lo que nos lleva a las acotaciones: $\begin{cases} \frac{3-\sqrt{13}}{2}\le x\le 0 \\ 3\le x\le \frac{3+\sqrt{13}}{2}\end{cases}$, $\begin{cases} \frac{3-\sqrt{13}}{2}\le y\le 0 \\ 3\le y\le \frac{3+\sqrt{13}}{2}\end{cases}$

Es decir los puntos cuyas coordenadas verifiquen la condición del enunciado quedan ubicados en el interior o la frontera de los cuatro cuadrados sombreados de la figura y estos cuadrados a su vez son interiores a la región $x^2+y^2<2(x+y)+15$ que es claramente un círculo de centro (1, 1) y radio $\sqrt{17}$ (de trazo grueso en la figura).



Solución 2.

Elevando al cuadrado la condición del enunciado:

$$\sqrt{x^2-3x}+\sqrt{y^2-3y}=1 \Rightarrow x^2-3x+y^2-3y+2\sqrt{(x^2-3x)(y^2-3y)}=1$$

y siendo el radicando positivo, se deduce

$$x^2+y^2\le 3(x+y)+1$$

que es el interior de un círculo de centro $\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$ y radio $\sqrt{\frac{11}{2}}$ (de trazo fino en la figura) claramente incluido en el interior del círculo del enunciado.

Problema 125.
Si a, b, c son estrictamente positivos, demostrar que

$$abc \leq \sqrt{\frac{abc(a^2b + b^2c + c^2a)}{3}} \leq \frac{1}{3}(a^2b + b^2c + c^2a)$$

Solución: Si tomamos las dos desigualdades por separado, después de elevarlas al cuadrado y simplificar llegaremos a la misma desigualdad:

$$abc \leq \frac{1}{3}(a^2b + b^2c + c^2a)$$

Ésta es la que vamos a probar. Dado que a, b, c son estrictamente positivos, nada nos impide considerar las tres cantidades

$$\frac{a}{c}\, ,\ \frac{c}{b}\, ,\ \frac{b}{a}.$$

Aplicando la desigualdad aritmético-geométrica a estas tres cantidades, obtenemos:

$$\frac{\frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{a}{c} \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{b}{a}} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{a^2b + b^2c + c^2a}{3abc} \geq 1 \Longrightarrow abc \leq \frac{1}{3}(a^2b + b^2c + c^2a)$$

lo cual termina el problema.

Problema 126

2 de octubre de 2006

Propuesto por Laurentiu Modan, Bucarest, Rumania. Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por

$$\begin{cases} a_0 &= & -\frac{1}{2} \\ a_1 &= & 1 \\ a_{n+1} &= & 5a_n - 6a_{n-1} + 3 - 2n. \end{cases}$$

Calcular el límite siguiente:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3^n}+\frac{1}{2^{2n}}\right)a_n$$

Solución de José Hernández Santiago, Oaxaca, México. Al resolver la relación de recurrencia dada, haciendo uso de funciones generatrices por ejemplo, obtenemos que:

$$a_n = 2\cdot 3^n - 3\cdot 2^{n-1} - (n+1).$$

Así, al tenerse que:

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{3^n}+\frac{1}{2^{2n}}\right)a_n &= \frac{2\cdot 3^n - 3\cdot 2^{n-1} - (n+1)}{3^n} + \frac{2\cdot 3^n - 3\cdot 2^{n-1} - (n+1)}{2^{2n}} \\ &= \left(2-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \frac{n+1}{3^n}\right) + \left(2\left(\frac{3}{4}\right)^n - \frac{3}{2^{n+1}} - \frac{n+1}{2^{2n}}\right),\end{aligned}$$

se concluye que:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3^n}+\frac{1}{2^{2n}}\right)a_n = 2.$$

*

Problema 127

Propuesto por Cristóbal Sánchez Rubio (Benicasim, España)
Solución de Gabriel Alexander Reyes (San Salvador, El Salvador)

En un triángulo de lados a, b, c y área S, llamamos n-ágono medio, Q_n, a la media aritmética de las áreas de los tres n-ágonos regulares construidos sobre cada lado. Demostrar que

$$S \leq \frac{1}{n} \cdot Q_n \sqrt{3} \tan \frac{\pi}{n}$$

con igualdad si y sólo si el triángulo es equilátero.

Comenzamos encontrando el área del n-ágono regular construido sobre a. Sea O el centro del polígono y R su circunradio. Entonces el triángulo OBC es isósceles, de lados R, R y a, y claramente su área es una n-ésima parte del área del polígono. Sea h la altura relativa al lado a; entonces es fácil ver que $h = R\cos(\pi/n)$. Luego

$$(OBC) = \frac{a}{2} \cdot R \cos \frac{\pi}{n}$$

Y como por la ley de los senos $a = 2R \operatorname{sen}(\pi/n)$ resulta que

$$(OBC) = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2 \operatorname{sen}(\pi/n)} \cdot \cos \frac{\pi}{n} = \frac{a^2 \cos(\pi/n)}{4 \operatorname{sen}(\pi/n)} = \frac{a^2}{4 \tan(\pi/n)}$$

Por tanto el área del n-ágono regular construido sobre a viene dada por

$$\frac{a^2 n}{4 \tan(\pi/n)}$$

Con expresiones análogas para b y c. Así que

$$Q_n = \frac{1}{3} \left[\frac{a^2 n}{4 \tan(\pi/n)} + \frac{b^2 n}{4 \tan(\pi/n)} + \frac{c^2 n}{4 \tan(\pi/n)} \right] = \frac{n(a^2 + b^2 + c^2)}{12 \tan(\pi/n)}$$

De donde el miembro derecho de la desigualdad en cuestión toma la forma

$$\frac{1}{n} \cdot Q_n \sqrt{3} \tan \frac{\pi}{n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{n(a^2 + b^2 + c^2)}{12 \tan(\pi/n)} \cdot \sqrt{3} \tan \frac{\pi}{n} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4\sqrt{3}}$$

En consecuencia nuestra desigualdad se reduce a probar que

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3} S$$

Este es un resultado conocido (desigualdad de Weitzenböck); de hecho apareció como problema 2 en la IMO 1961.

Nuestra prueba se basa en la desigualdad de Mitrinović

$$r \leq \frac{s}{3\sqrt{3}} \leq \frac{R}{2}$$

Donde, como es habitual, R es el circunradio, r es el inradio y s es el semiperímetro del triángulo; y además las igualdades se tienen si y sólo si el triángulo es equilátero. Sólo haremos uso de la cota superior, de la siguiente manera:

$$\frac{s}{3\sqrt{3}} \leq \frac{R}{2} \Leftrightarrow \frac{2s}{3\sqrt{3}} = \frac{a+b+c}{3\sqrt{3}} \leq R = \frac{abc}{4S} \Leftrightarrow 4\sqrt{3}S \leq \frac{9abc}{a+b+c}$$

Así que basta con establecer que

$$\frac{9abc}{a+b+c} \leq a^2 + b^2 + c^2$$

Pero por la desigualdad media aritmética-media geométrica tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{a^2+b^2+c^2}{3} &\geq \sqrt[3]{a^2b^2c^2} \\ \frac{a+b+c}{3} &\geq \sqrt[3]{abc} \end{aligned}$$

Y multiplicando estas dos desigualdades obtenemos

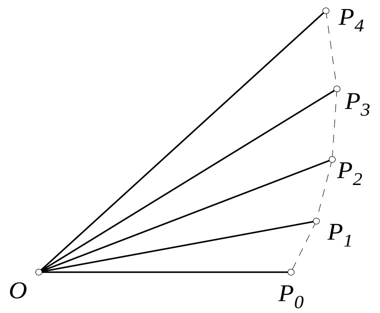
$$\frac{(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)}{9} \geq \sqrt[3]{a^3b^3c^3} = abc$$

Y tenemos el resultado. Observemos que tenemos la igualdad si y sólo si $a = b = c$, esto es, si y sólo si el triángulo es equilátero. ■

Nota. En el libro *Problem-solving strategies* de Arthur Engel (cap. 7, pp. 170 y ss.), se hace un estudio muy completo de la desigualdad de Weitzenböck, presentándose once pruebas diferentes.

Problema 128.
Se considera un ángulo agudo $\alpha > 0$ dividido en n partes iguales y se toma en un lado del ángulo un punto P_0 cuya distancia al vértice O de sea igual a 1. A partir del punto P_0 se determinan puntos $P_1; P_2; \ldots; P_n$ en los lados sucesivos de los n ángulos formados, tales que todos los segmentos $P_{i-1}P_i, i = 1, 2, \ldots, n$ formen un ángulo agudo β con la recta OP_{i-1} y los segmentos OP_i sean sucesivamente crecientes.
Calcular el límite de la longitud del segmento final OP_n, cuando n tiende a infinito.

Solución.
Todos los triángulos $OP_{i-1}P_i, (i = 1, 2, \ldots, n)$ son semejantes (tienen iguales dos ángulos) con razón de semejanza $r = \dfrac{OP_i}{OP_{i-1}}$.
Hallaremos r por el teorema de los senos en OP_0P_1:



$$\frac{OP_0}{sen\beta} = \frac{OP_1}{sen\left(180^\circ - \beta - \frac{\alpha}{n}\right)} \Rightarrow r = \frac{OP_1}{OP_0} = \frac{sen\left(\beta + \frac{\alpha}{n}\right)}{sen\beta}$$

entonces tenemos que hallar:

$$\lim_{n\to\infty} OP_n = \lim_{n\to\infty} r^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{sen\left(\beta + \frac{\alpha}{n}\right)}{sen\beta}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{\alpha}{n} + ctg\beta\, sen\left(\frac{\alpha}{n}\right)\right)^n$$

el resto es un simple ejercicio de cálculo de límites del tipo 1^∞.

$$\lim_{n\to\infty} OP_n = \lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{\alpha}{n} + ctg\beta\, sen\left(\frac{\alpha}{n}\right)\right)^n = e^{\lim_{n\to\infty} n\left(\cos\frac{\alpha}{n} + ctg\beta\, sen\left(\frac{\alpha}{n}\right) - 1\right)} = e^{\alpha ctg\beta}$$

Solución al Problema 129

Samuel Gómez Moreno,
Departamento de Matemáticas, Universidad de Jaén.
samuel@ujaen.es

PROBLEMA 129

Calcular

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2nx}{\sin x}\, dx.$$

SOLUCIÓN

Teniendo en cuenta que

$$\frac{1}{2}\frac{\sin 2nx}{\sin x} = \cos x + \cos 3x + \ldots + \cos(2n-1)x,$$

como puede probarse fácilmente usando inducción, nos queda

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2nx}{\sin x}\, dx &= 2\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2k-1)x\, dx = 2\sum_{k=1}^{n} \left.\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 2\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1}\right). \end{aligned}$$

Por tanto, usando que

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{2k-1} = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots = \arctan 1 = \frac{\pi}{4},$$

resulta finalmente

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2nx}{\sin x}\, dx = 2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{1}{2k-1} = 2\arctan 1 = \frac{\pi}{2}.$$

Problema 130

Propuesto en la Cátedra de Análisis Matemático IV, Facultad de Ciencias de Madrid, junio de 1965

Determinar una función holomorfa que verifica las siguientes condiciones:

1) está definida y es holomorfa en el primer cuadrante compacto, salvo en el punto $1+i$, donde tiene un polo de primer orden con residuo 1.
2) sobre el eje real toma valores reales, y sobre el imaginario, imaginarios puros.
3) es regular en el punto del infinito, y $f(\infty)=0$.

Solución de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, España.

Es conocido que el cociente de dos polinomios de z (donde z es la variable compleja) es holomorfo, estando definida en todo punto salvo en sus polos, es decir, en los ceros del denominador. Nos es dado que la función a buscar tiene un polo simple en $z=1+i$ con residuo 1. Podemos pues buscar la función $f(z)$ como suma de términos de la forma:

$$f(z)=\frac{1}{z-(1+i)}+\frac{A}{z-(1-i)}+\frac{B}{z-(-1+i)}+\frac{C}{z-(-1-i)},$$

Donde A, B y C son constantes reales iguales a $+1$ o -1. La razón de hacerlo de esta forma es la siguiente: los cuatro sumandos que conforman $f(z)$ son regulares en el punto del infinito, tomando los cuatro el valor 0. Luego su suma también lo será y tomará también el valor 0, con lo que nos aseguramos el cumplimiento de la condición 3). Al mismo tiempo, los cuatro sumandos son holomorfos salvo en sus polos $z=\pm1\pm i$, que son simples, y el polo en $z=1+i$ tiene residuo 1, con lo que garantizamos la condición 1). Los tres últimos sumandos se introducen para crear en $f(z)$ la simetría necesaria para conseguir que tome valores reales sobre la recta real e imaginarios sobre la recta imaginaria, a fin de cumplir la condición 2).

Para que en el eje real la función tome valores reales, debemos exigir que el conjugado de $f(z)$ sea igual a sí mismo cuando $z=x$ real, es decir, para todo real x,

$$f(x)=\frac{1}{x-(1-i)}+\frac{A}{x-(1+i)}+\frac{B}{x-(-1-i)}+\frac{C}{x-(-1+i)}.$$

De aquí se deduce necesariamente que $A=1$, $B=C$.

Al mismo tiempo, para que en el eje imaginario la función tome valores imaginarios, debemos exigir que el conjugado de $f(z)$ sea su propio opuesto cuando $z=iy$ imaginario, es decir, para todo real y,

$$f(iy) = -\frac{1}{-iy-(1-i)} - \frac{A}{-iy-(1+i)} - \frac{B}{-iy-(-1-i)} - \frac{C}{-iy-(-1+i)}.$$

De aquí se deduce necesariamente que B=1, C=A. Luego se tiene que podemos tomar

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z-(1+i)} + \frac{1}{z-(1-i)} + \frac{1}{z-(-1+i)} + \frac{1}{z-(-1-i)} \\ &= \frac{2z-2}{z^2+2-2z} + \frac{2z+2}{z^2+2+2z} = \frac{4z^3}{z^4+4}. \end{aligned}$$

Obviamente, al ser cociente de dos polinomios, la función es holomorfa en todos sus puntos salvo en sus polos, que son simples, es regular en el infinito, tomando el valor 0, y por construcción tiene un polo en z=1+i con residuo 1, siendo holomorfa en el resto del primer cuadrante compacto, pues tiene exactamente un polo simple en el interior de cada uno de los cuatro cuadrantes. Además, tanto sobre la recta real como sobre la imaginaria, el denominador toma valores siempre reales y positivos, pues i^4=1, mientras que el numerador (y por lo tanto la función) toma valores reales sobre la recta real e imaginarios sobre la recta imaginaria.

PROBLEMAS PROPUESTOS 131-135

Problema 131. Propuesto por José Luis Díaz Barrero, Barcelona, España. Calcular

$$\lim_{n\to\infty} \ln \left\{ \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{k^2+\sqrt{k^4+n^4}}{n^2} \right)^k \right\}^{1/n^2}.$$

Problema 132. Propuesto por José Luis Díaz Barrero, Barcelona, España. Sean $x_1, x_2, \cdots, x_n$ números reales dados. Para todo $n \geq 1$, demostrar que

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{T_k} \sin x_k \right) \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{T_k} \cos x_k \right) \leq \frac{(n+1)(n+2)}{12},$$

donde T_k es el $k-$ésimo número triangular, definido por

$$T_k = \frac{k(k+1)}{2}, k \geq 1.$$

Problema 133. Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, Ávila, España.

Probar que si $a \geq b > 0$, y $\lambda > 0$, entonces se verifica

$$(\lambda+1) b^2 - a^2 \leq \lambda ab \leq \lambda a^2.$$

¿Cuándo se alcanza la igualdad?

Problema 134. Propuesto por el editor.

Sean O, I, H el circuncentro, incentro y ortocentro, respectivamente, del triángulo ABC.

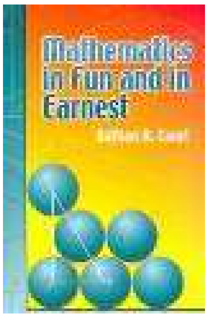
Conocidos los lados del triángulo OIH, determinar los lados del triángulo ABC.

Problema 135. Propuesto por el editor.

Demostrar que cx^2-ax+b es un divisor común de ax^3-bx^2+c y bx^3-cx+a si divide a uno de estos dos polinomios.

DIVERTIMENTOS MATEMÁTICOS 27

Algunas citas de *Mathematics in Fun and in Earnest*, de Nathan Altshiller Court



Nathan Altshiller Court fué un destacado geómetra de la Universidad de Oklahoma, autor de un célebre libro *Collage Geometry* (1ª edición 1925; 2ª, 1952), referencia obligada en muchas soluciones de problemas de CRUX MATHEMATICORUM, por ejemplo. En mi biblioteca hay un ejemplar de la primera edición, un regalo de mi querido amigo (lamentablemente desaparecido en 2000), Raimundo Reguera, en 1989. Posteriormente, y también como regalo de Kenneth Williams, antiguo manager de CRUX, conseguí un ejemplar de la segunda edición, de Barnes & Noble. Poco después del reciente ICM 2006 de Madrid he adquirido *Mathematics in Fun and in Earnest,* publicado en 1958, y es de este libro del que presentamos algunas citas.

- H.Lebesgue(1875-1941): *Las razones para declararse satisfecho por un razonamiento son de naturaleza psicológica, tanto en matemáticas como en cualquier otra ciencia.*
- Platón : *En su tiempo libre, Dios hace geometría.*
- Un comentario sobre Poincaré: *Este hombre maneja el análisis con tal destreza, que realmente se cree que todo es fácil.*
- *Los números naturales son como un autobús: todo el mundo cree que siempre hay sitio para uno más.*
- Thomas Hill (1818-1893): *Habitualmente se considera a las Matemáticas en las antípodas de la poesía. Pero las dos están realmente muy próximas, porque son obra de la imaginación.*
- Dan Pedoe: *El propósito final de los que trabajan en los fundamentos de la Geometría Algebraica es crear una estructura estéticamente placentera, sin errores lógicos, sobre la que se puedan exhibir los muchos ornamentos de la Geometría italiana.*
- N.A.Court: *El geómetra, como el poeta, sólo necesita para hacer su trabajo un montón de hojas de papel y una pluma, para ayudar a su imaginación a manifestarse, por medio de un quizá tosco y fragmentario esquema de las complejas creaciones con las que suele tratar….El geómetra, como el poeta, es un soñador, un incorregible soñador. Se puede acusar a ambos de despistados, si se quiere, pero ninguno de ellos cambiaría sus sueños por nada de lo que el mundo puede ofrecer….Sus sueños son los más preciosos momentos de su vida.*

Valladolid, octubre 2006.

Francisco Bellot Rosado

Comentario de páginas web 27

La revista *L'Enseignement Mathématique,* en la red

www.unige.ch/math/EnsMath/

Muy recientemente se ha completado la puesta en la red de la prestigiosa revista suiza *L'Enseignement Mathématique,* órgano oficial de la Comisión Internacional de Instrucción Matemática, y cuyo primer volumen se remonta a 1899. Los diferentes artículos se pueden descargar en pdf pulsando el logotipo de Adobe que aparece a la izquierda del título de cada uno de ellos. El resto de contenidos de la revista puede ser visualizado pulsando sobre ellos también, pero no están convertidos a ficheros pdf. La Universidad de Ginebra ha realizado de esta manera un trabajo encomiable, pues pone al alcance de todos los interesados, gratuitamente, los números de esta revista, con excepción de los de los últimos 6 años, que se irán incorporando cuando transcurra este tiempo desde su aparición en papel.

No es conveniente creer que *L'Enseignement Mathématique* es una revista de contenidos puramente didácticos, o de lo que hoy se conoce como Educación Matemática. Por supuesto contiene numerosos informes de las diferentes Comisiones de Estudio de la Enseñanza de las Matemáticas que ha propiciado la ICMI, desde la enseñanza Primaria a la Universitaria, en todo el mundo; pero sus artículos de fondo son de investigación, o mejor dicho, de divulgación de las teorías modernas que son objeto de investigación.

retrodigitized journals

Recomiendo la visita a este sitio web, en la seguridad de que el internauta encontrará artículos interesantes para descargar (por ejemplo, de Pólya, Halmos, Lichnerowicz o Freudenthal).

Valladolid, octubre 2006.

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI

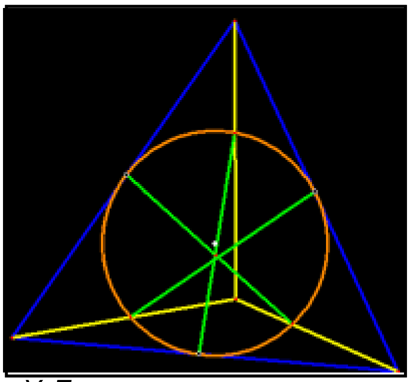
Número

28

Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática
ISSN 1698-677X

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática
Número 28 (Noviembre - diciembre 2006)
ISSN – 1698-277X

Índice



El clip de video que aparece en la página inicial del presente número es obra de Edson Laura, de Perú. Es la figura del problema original de Stanley Rabinowitz, publicado en *Mathematics Magazine en 1992 (#1364),* cuyo enunciado dice:
El incírculo de ABC es tangente a BC,CA y AB en D,E y F, respectivamente. Sea P cualquier punto interior al triángulo ABC.
PA corta al incírculo en dos puntos, de los que X es el más próximo a A. Se definen análogamente Y,Z.
Demostrar que DX, EY, FZ son concurrentes.

Resueltos:
Acusamos recibo de una solución tardía del problema 120, por Daniel Darío Góngora García, de Lima, Perú.
Problema 131.
Recibidas soluciones de: Samuel Gómez Moreno, Jaén, España; José Hernández Santiago, Oaxaca, México; Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, España; Ricard Peiró Estruch, Valencia, España; y el proponente. Presentamos la solución de Lasaosa.
Problema 132.
Recibidas soluciones de: Samuel Gómez Moreno, Jaén, España; Daniel Darío Góngora García, Lima, Perú; Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, España; Vicente Vicario García, Huelva, España; y el proponente.
Presentamos la solución de Góngora.
Problema 133.
Recibidas soluciones de: Rafael Arias, Asunción, Paraguay; Gustavo Espínola Mena, Capiatá, Paraguay; Daniel Darío Góngora García, Lima, Perú; José Hernández Santiago, Oaxaca, México; Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, España; Ricard Peiró Estruch, Valencia, España; y el proponente.
Presentamos la solución de Arias.
Problema 134.
Recibidas soluciones de: Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, España; y Vicente Vicario García, Huelva, España.
Presentamos la solución de Lasaosa.
Problema 135.
Recibidas soluciones de: Daniel Darío Góngora García, Lima, Perú; Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, España; Ricard Peiró Estruch, Valencia, España y Vicente Vicario García, Huelva, España.
Presentamos la solución de Lasaosa.

Problemas propuestos 136-140

Comentario de páginas web 28:
La nueva revista digital Mathematical Reflections, de Titu Andreescu.

Divertimentos matemáticos (28)
Una situación descrita por Andy Liu en Mathematical Mayhem,1988.
y
Plebiscito sobre la proposición matemática más bella

Editor: Francisco Bellot Rosado

Con el apoyo de la Subdirección General de Cooperación Internacional

MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA

Gymkhana Matemática.

Como todos los años, la Sección de Valladolid de la Sociedad "Miguel de Guzmán" organiza la fase final de la Olimpiada Matemática en un Centro de la provincia situado en algún pueblo próximo. Este año se ha organizado en el IES Río Duero de Tudela de Duero.

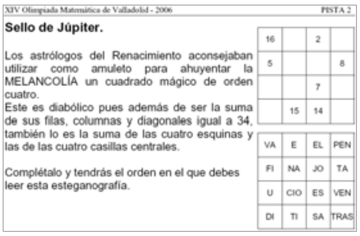
Tradicionalmente, la fase final consta de dos partes: una prueba individual que los alumnos afrontan en solitario con su capacidad, y una prueba por equipos en que prima la colaboración, el trabajo en grupo. En esta segunda prueba, por equipos, sacamos el trabajo del aula buscando ubicar las matemáticas más allá del lápiz y papel. En definitiva damos relevancia al trabajo en equipo y la presencia de las matemáticas en la vida real, en nuestro entorno.

Habitualmente hacíamos un recorrido por el pueblo realizando distintas pruebas, pero este año hemos decidido realizar la prueba por equipos sin salir del instituto. También hemos buscado un aspecto lúdico y competitivo al aire libre, compensando el esfuerzo puramente intelectual de la prueba individual. Y por último, queríamos proyectar las matemáticas hacia diferentes ámbitos de la vida.

La gymkhana es una actividad que ofrece un amplio abanico de posibilidades y generalmente es muy bien aceptada por los participantes por su variedad y movilidad.

A la hora de organizarla, ha sido fundamental la colaboración indirecta de aquellos que han mostrado su trabajo y experiencia en internet.

Así, nuestra gymkhana consiste en una batería de pruebas y problemas de contenido matemático en una mecánica competitiva y de juego que permita el trabajo en grupo. Los problemas están distribuidos en distintos puntos del recinto a los que se accede tras superar alguna prueba o seguir alguna pista.



XIV Olimpiada Matemática de Valladolid - 2006 PISTA 2

Sello de Júpiter.

Los astrólogos del Renacimiento aconsejaban utilizar como amuleto para ahuyentar la MELANCOLÍA un cuadrado mágico de orden cuatro.
Este es diabólico pues además de ser la suma de sus filas, columnas y diagonales igual a 34, también lo es la suma de las cuatro esquinas y las de las cuatro casillas centrales.

Complétalo y tendrás el orden en el que debes leer esta esteganografía.

16		2	
5			8
		7	
	15	14	

VA	E	EL	PEN
FI	NA	JO	TA
U	CIO	ES	VEN
DI	TI	SA	TRAS

Las pruebas pueden ser de habilidad, lógica, orientación, observación,… con una dificultad media-baja y son preceptivas para recibir los ejercicios de cada punto.

Los ejercicios a realizar en cada punto pueden tener distintos apartados más o menos relacionados con la ubicación del punto o una temática común, y una dificultad media aproximadamente equivalente en todos los puntos que al final ponderamos.

XIV Olimpiada Matemática de Valladolid - 2006 PROBLEMA - 4

Ajedrez.

A través del espejo, Alicia sueña con ser la reina en otro mundo reflejo del real.

a) ¿Qué explicación daríais si Alicia dice que su tablero de ajedrez tiene 204 cuadrados?

b) ¿Cuántos caminos mínimos tiene la torre para cruzar el tablero hasta la esquina opuesta con desplazamientos de una casilla?

c) El tablero se ve ¿desde arriba o desde abajo?

Procuramos siempre que el trabajo en equipo favorezca la superación de las pruebas.

Entre los dos niveles de 2º y 4º de ESO han participado 47 alumnos debido a alguna baja de última hora. Los grupos han estado formados por 5 alumnos de ambos niveles distribuidos aleatoriamente pero con la condición de que haya al menos dos de cada nivel, no coincidan alumnos del mismo centro, y procurando el equilibrio de chicos y chicas incluso por niveles. Sorprendentemente, se ha cumplido salvo cuatro excepciones insalvables.

	PISTA	Pt.	LUGAR	PROBLEMA	Pt.	Total
0	Matemáticos	5	base			5
1	Julio César	2	informática	Criptografía	10	12
2	Sello Júpiter	3	estatua	Melancolía	6	9
3	Espiral	2	base	Ajedrez	10	12
4	Puzzle	2	fuente	Cálculo	10	12
5	Atlas	3	biblioteca	Geografía	6	9
6	Anamorfosis	2	almacén	Dalí	8	10
7	Grafos	5	base	Lógica	7	12
8	Laberinto	4	estación	Paradojas	6	10
9	Rumbo	3	fotografía	Fotografías	6	9
10	Juego	2	baloncesto	Cine	10	12
11	Aritmética	2	base	Mapas	8	10
12	Caminos	2	puerta	Topografía	6	8
						130

Como tenemos 10 grupos hemos preparado 12 localizaciones P1,…, P12 con sus respectivos problemas o ejercicios, con el fin de evitar en lo posible la coincidencia en una misma prueba de dos grupos. Las localizaciones son de dos tipos, la mitad ubicados en un lugar de referencia en el edificio central, la biblioteca, y otros seis en distintos puntos externos más o menos alejados. Estos dos tipos de localización se van alternando (impares, pares). Los exteriores se distribuyen a ambos lados del edificio con dos mesas de control y entrega de pistas o pruebas. Los seis interiores centralizados en una mesa de control acogen tres puntos a localizar mediante pistas y tres en el punto base directamente.

Una vez informados de la composición de los grupos, se sientan ya agrupados en el punto base, la biblioteca, en mesas numeradas de 1 a 10.

Tras formar los grupos se les informa de la mecánica de la prueba y se les da una Hoja de Ruta en la que, además de contar con información sobre la prueba, irán reflejando los resultados de la realización de las pruebas y problemas.

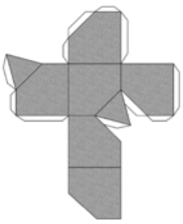
Todos los grupos realizan una primera prueba común, la pista cero: tras localizar en una sopa de letras el nombre de un matemático, se les asigna dicho nombre y deben buscar la época en que vivió. Esta prueba inicial sirve para determinar el orden de participación e ir asignando la primera pista a cada grupo. A partir de aquí las pruebas las van realizando en una secuencia circular, p.e. 3, 4,… 11, 12, 1, 2 es la secuencia para el tercer grupo.

Cada pista les lleva a un punto donde encuentran o reciben un problema. Tras realizarlo, la mesa de control próxima les muestra la siguiente pista.

Tras un tiempo razonable, diez minutos, pueden renunciar a la realización de una prueba, y se les entrega la siguiente pista. Todos los grupos disponen de un tiempo máximo de dos horas. Al finalizar la prueba, entregan la Hoja de Ruta con las respuestas.

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Total
Matemáticos	5											
Julio César	2											
Sello Júpiter	3											
Espiral	2											
Puzzle	2											
Atlas	3											
Anamorfosis	2											
Grafos	5											
Laberinto	4											
Rumbo	3											
Juego	2											
Aritmética	2											
Caminos	2											
Criptografía	10											
Melancolía	6											
Ajedrez	10											
Cálculo	10											
Geografía	6											
Dalí	8											
Lógica	7											
Paradojas	6											
Fotografías	6											
Cine	10											
Mapas	8											
Topografía	6											

Una vez terminada la prueba se valoran las pistas descubiertas y las pruebas realizadas según el baremo previamente establecido. Gana el equipo con mayor puntuación. Las puntuaciones están distribuidas de forma que a la realización de unas siete pruebas consecutivas completas le corresponda aproximadamente la misma puntuación.



En cada mesa de control se dispone de las pistas correspondientes, así como del material necesario para la realización de la prueba. Los profesores en cada mesa harán un seguimiento de la hora de paso de cada grupo que ayude a su control.

<u>Material complementario:</u>

En la resolución de las pruebas los alumnos disponen de todos los recursos próximos, biblioteca, sala de ordenadores con internet, calculadoras, tijeras, pegamento, papel,…; algún material complementario, como planos, desarrollo del poliedro, puzzle, reseña de película; y lo que encuentren en el entorno.

Cálculo de sumas infinitas de potencias pares negativas de enteros utilizando series de Fourier

por Daniel Lasaosa Medarde

Doctor en Ingeniería de Telecomunicación (obtenido UCSB, 2004 – homologado 2006)

Licenciado en Ciencias Matemáticas (2006)

1.-Introducción

El análisis de Fourier, aparte de ser una rama de las matemáticas de gran interés a la hora de tratar funciones complejas de variable real o compleja, tiene aplicaciones de gran importancia en múltiples ingenierías. Su mayor ventaja en este campo es la simplificación que permite a la hora de resolver ecuaciones diferenciales o en derivadas parciales. De hecho, Jean-Baptiste Joseph Fourier inició esta rama de las matemáticas trabajando en la resolución de la ecuación del calor. La descripción de la propagación de ondas tanto mecánicas como electromagnéticas, el cálculo de estructuras mecánicas y el efecto de las vibraciones en las mismas, el análisis de circuitos electrónicos de alta y baja frecuencia, son otras aplicaciones de esta rama de las matemáticas, con aplicaciones importantes en el área de teoría de la señal. Las propiedades de los coeficientes de la expansión en serie de Fourier proporcionan también soluciones sencillas e incluso elegantes a ciertos problemas. El análisis de Fourier no es una parte de los "temarios" de las Olimpiadas Matemáticas o competiciones similares a nivel pre-universitario. Sin embargo, estimo que sus propiedades ya mencionadas las hace por lo menos interesantes y vistosas, tanto al olímpico como al matemático "amateur".

2.-Expansión de funciones periódicas en serie exponencial de Fourier

2.1.-Periodo y frecuencia fundamentales

Sea $x(t)$ una función periódica en la variable real t (que puede o no representar al tiempo). Definiremos su periodo fundamental T_0, que asumiremos por convenio positivo, tal que, para todo t, $x(t)=x(t+T_0)$, y si existe algún otro T positivo tal que para todo t se cumple $x(t)=x(t+T)$, entonces $T\geq T_0$. Es un ejercicio trivial demostrar que entonces T/T_0 es un entero positivo. La frecuencia fundamental f_0 es el inverso del periodo fundamental, $f_0=1/T_0$.

La función constante es periódica con cualquier periodo, pero no posee periodo fundamental, ya que sus posibles periodos son el conjunto de los reales positivos, que no posee mínimo.

2.2.-Serie exponencial de Fourier

Todas y las únicas exponenciales imaginarias (es decir, exponenciales cuyo exponente es una constante imaginaria pura multiplicado por t) que tienen periodo T_0 (sea éste su periodo fundamental o no) son de la forma $\exp(i2\pi nf_0t)$, con n un entero cualquiera, siendo i la unidad imaginaria. Esto se puede comprobar observando que, para que $\exp(i\alpha t)$ sea periódica de periodo T_0, ha de ser

$$\exp\left(i\alpha t\right)=\exp\left(i\alpha\left(t+T_0\right)\right)=\exp\left(i\alpha t\right)\exp\left(i\alpha T_0\right).$$

De aquí se deduce que αT_0 ha de ser necesariamente un múltiplo entero de 2π. Así las cosas, podría ser interesante expresar cualquier función periódica de periodo fundamental T_0 como una combinación lineal de todas estas exponenciales imaginarias. A esta expresión de una función periódica como combinación lineal de exponenciales imaginarias se le denomina expansión en serie exponencial de Fourier.

2.3.-Coeficientes del desarrollo en serie de Fourier

Supongamos entonces que una función con frecuencia fundamental f_0 se puede escribir como

$$\boxed{x\left(t\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n\exp\left(i2\pi nf_0t\right)}\qquad(1)$$

Llamaremos a los c_n, coeficientes del desarrollo en serie exponencial de Fourier de $x(t)$, o simplemente coeficientes de Fourier de $x(t)$. Podemos definir, para las funciones complejas de variable t, periódicas con periodo T_0 (sea este su periodo fundamental o no), una operación que tiene las propiedades de producto escalar:

$$\boxed{x(t)\bullet y(t)=\frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\,y^*(t)\,dt} \qquad (2)$$

donde la integral se realiza sobre un intervalo de longitud igual al periodo fundamental, y el asterisco indica conjugación compleja. Las funciones $\exp(i2\pi nf_0t)$ son ortonormales con respecto a este producto escalar, es decir,

$$\boxed{\exp(i2\pi nf_0t)\bullet\exp(i2\pi mf_0t)=\frac{1}{T_0}\int_{T_0}\exp\big(i2\pi(n-m)f_0t\big)\,dt=\delta_{n,m}} \qquad (3)$$

donde $\delta_{n,m}$ es el símbolo delta de Kronecker, que es igual a 1 si $n=m$, y nulo en caso contrario. Esto garantiza, por ejemplo, que si una función se puede expresar de dos formas como serie exponencial de Fourier, los coeficientes de ambas series son idénticos uno a uno. Además, si una señal $x(t)$ se puede expresar de acuerdo a (1), entonces

$$\frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\exp(-i2\pi nf_0t)\,dt=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m\left[\exp(i2\pi mf_0t)\bullet\exp(i2\pi nf_0t)\right]=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m\delta_{n,m}\,;$$

$$\boxed{c_n=\frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\exp(-i2\pi nf_0t)\,dt} \qquad (4)$$

Es decir, los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier serían el resultado de "proyectar" la función $x(t)$ sobre los "vectores" $\exp(i2\pi nf_0t)$. Estos vectores formarían un conjunto linealmente independiente ortonormado. No podemos decir que formen una base porque todavía no sabemos si es un sistema generador…

2.4.-Teorema de Parseval

Nótese además que la interpretación física del producto escalar de una función periódica (real o incluso compleja) consigo misma, según (2), es la de potencia media, ya que

$$x(t)\bullet x(t)=\frac{1}{T_0}\int_{T_0}|x(t)|^2\,dt\,,$$

Pudiendo interpretarse $|x(t)|^2$ como la potencia instantánea (salvo una constante de proporcionalidad) de la función $x(t)$ cuando ésta es una magnitud física. Por ejemplo, la potencia eléctrica instantánea es proporcional al voltaje al cuadrado, y también a la corriente al cuadrado. El teorema de Parseval nos permite calcular la potencia media de una función, expresándola a través de sus coeficientes de Fourier. Para ello, tenemos en cuenta que, si la función es expresable de acuerdo a (1), entonces

$$x(t)\bullet x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}c_n c_m^{*}\left[\exp\left(i2\pi nf_0t\right)\bullet\exp\left(i2\pi mf_0t\right)\right]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty}c_m^{*}\delta_{n,m}\right);$$

$$\boxed{P_{media}=\frac{1}{T_0}\int_{T_0}\left|x(t)\right|^2 dt=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|c_n\right|^2} \qquad (5)$$

Es decir, como hallar la potencia media de una función es equivalente a hallar su producto escalar consigo misma de acuerdo a la definición (2), entonces si esta función es expresable como serie de Fourier, podemos hallar esta potencia media sumando los módulos al cuadrado de sus componentes respecto de las funciones ortonormadas $\exp(i2\pi nf_0t)$.

Este resultado nos permite calcular mediante una sencilla integración sumas infinitas; basta con encontrar la función $x(t)$ que tenga los coeficientes apropiados.

2.5.-Otras propiedades de los coeficientes de Fourier

Si una función real $x(t)$ es expresable de acuerdo a (1), entonces c_n y c_{-n} son complejos conjugados:

$$x^{*}(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n^{*}\exp\left(-i2\pi nf_0t\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_{-n}^{*}\exp\left(i2\pi nf_0t\right)=x(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n\exp\left(i2\pi nf_0t\right).$$

Si la función tiene simetría par (es decir, $x(t)=x(-t)$ para todo t), entonces $c_n=c_{-n}$, mientras que si tiene simetría impar (es decir, $x(t)=-x(-t)$) para todo t), entonces $c_n=-c_{-n}$:

$$x(-t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n\exp\left(-i2\pi nf_0t\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_{-n}\exp\left(i2\pi nf_0t\right)=\pm x(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\pm c_n\exp\left(i2\pi nf_0t\right).$$

Los recíprocos de los anteriores resultados también son ciertos, como el lector puede comprobar trivialmente.

La suma de todos los coeficientes de Fourier de $x(t)$ es igual a $x(0)$:

$$\boxed{x(0)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n\exp(0)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n} \qquad (6)$$

Este resultado también puede, obviamente, ser utilizado para calcular ciertas sumas infinitas, eligiendo nuevamente señales $x(t)$ que tengas los coeficientes apropiados.

Recíprocamente, el valor del coeficiente c_0 es el valor promedio de la señal en un periodo, como se comprueba haciendo n=0 en (4):

$$\boxed{c_0 = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\exp(0)\,dt = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\,dt} \qquad (7)$$

Si una función $x(t)$ con coeficientes de Fourier c_n se retarda de un tiempo τ, entonces los coeficientes de Fourier de la función retardada son $\exp(-i2\pi n f_0 \tau)c_n$ (propiedad de retardo):

$$x(t-\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \exp\left(i2\pi n f_0 (t-\tau)\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[c_n \exp\left(-i2\pi n f_0 \tau\right)\right]\exp\left(i2\pi n f_0 t\right)$$

Aplicando ésta, si una señal tiene simetría en media onda (es decir, $x(t+T_0/2)=-x(t)$ para todo t), entonces los coeficientes de Fourier de orden par son nulos:

$$x\left(t+\frac{T_0}{2}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n c_n \exp\left(i2\pi n f_0 t\right) = -x(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-c_n)\exp\left(i2\pi n f_0 t\right).$$

De aquí se deduce necesariamente que si n es par, $c_n=-c_n$, que es por lo tanto nulo. El lector puede comprobar fácilmente que el recíproco también es cierto.

Finalmente, si los coeficientes de Fourier de $x(t)$ son c_n, los coeficientes de Fourier de la derivada de $x(t)$ con respecto a t son $i2\pi n f_0 c_n$ (propiedad de derivación).

$$\frac{dx(t)}{dt} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \frac{d\exp\left(i2\pi n f_0 t\right)}{dt} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[c_n \left(i2\pi n f_0\right)\right]\exp\left(i2\pi n f_0 t\right).$$

Existen otras propiedades de los coeficientes de Fourier, pero no serán relevantes para este escrito.

2.6.-Condiciones de Dirichlet

Hasta ahora hemos asumido que existen coeficientes c_n tales que la función $x(t)$ satisface (1). La pregunta que no hemos respondido todavía es, ¿para qué funciones periódicas de periodo fundamental T_0 se cumple (1)? La respuesta es, por lo menos todas aquellas que cumplan las condiciones de Dirichlet, que son:

1) La función debe ser absolutamente integrable en un periodo, es decir, el valor absoluto de $x(t)$ (o su módulo si la función toma valores complejos) debe tener una integral igual a un real en un periodo.
2) La función tiene un número finito de máximos y mínimos en un periodo.
3) La función tiene un número finito de discontinuidades en un periodo, todas ellas con salto finito.

Cuando estas tres condiciones se cumplen, la serie de Fourier converge a la función, en el sentido de que la potencia media del error que existe entre la función y la serie truncada tiende a 0, al crecer el número de términos en la serie truncada:

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{T_0}\int_{T_0}\left|x(t)-\sum_{n=-N}^{+N}c_n\exp\left(i2\pi nf_0t\right)\right|^2 dt=0\,.$$

Además, la igualdad (1) con los coeficientes calculados de acuerdo a (4) sería exacta en todo punto t salvo en los (posibles) puntos aislados de discontinuidad de $x(t)$, en los que la serie de Fourier converge puntualmente al valor promedio de los límites laterales de $x(t)$ por derecha e izquierda. Este resultado se da sin demostración, ya que ésta es relativamente compleja (suele estudiarse en 4º o 5º curso de la licenciatura en Ciencias Matemáticas), y en mi opinión no tiene una aportación conceptual significativa para el tema de este escrito.

Podríamos también interpretar que el conjunto de las funciones $\exp(i2\pi nf_0t)$ son un sistema generador de un conjunto de funciones, al cuál pertenecen todas las que satisfacen las condiciones de Dirichlet (hay algunas otras, como veremos enseguida). Dentro de ese conjunto generado, las funciones $\exp(i2\pi nf_0t)$ serían una base ortonormada.

2.7.-El "peine de Dirac"

Existen distribuciones que no satisfacen las condiciones de Dirichlet, pero sí pueden ser expresadas como serie de Fourier. Un ejemplo es el resultado de repetir periódicamente distribuciones delta de Dirac $\delta(t)$ (también llamadas impulsos unitarios), espaciadas de T_0, de forma que una de ellas esté situada en t=0. A una tal distribución se le conoce como tren de impulsos unitarios o "peine de Dirac", y la denotaremos por $p(t)$:

$$p(t)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\delta\left(t-mT_0\right).$$

La distribución delta de Dirac o impulso unitario tiene dos propiedades que se pueden demostrar equivalentes:

1) Al derivar una función continua a trozos, su derivada posee, en cada punto de discontinuidad, una distribución delta de Dirac multiplicada por el salto de la función en la discontinuidad, es decir, por el límite por la derecha menos el límite por la izquierda de la función en el punto de discontinuidad.

2) La distribución delta de Dirac unitaria, $\delta(t)$, es nula para todo valor no nulo de t, cumpliéndose además que

$$\int_a^b \delta(t)\, x(t)\, dt = x(0)$$

para todo intervalo (a,b) que contenga a 0 en su interior.

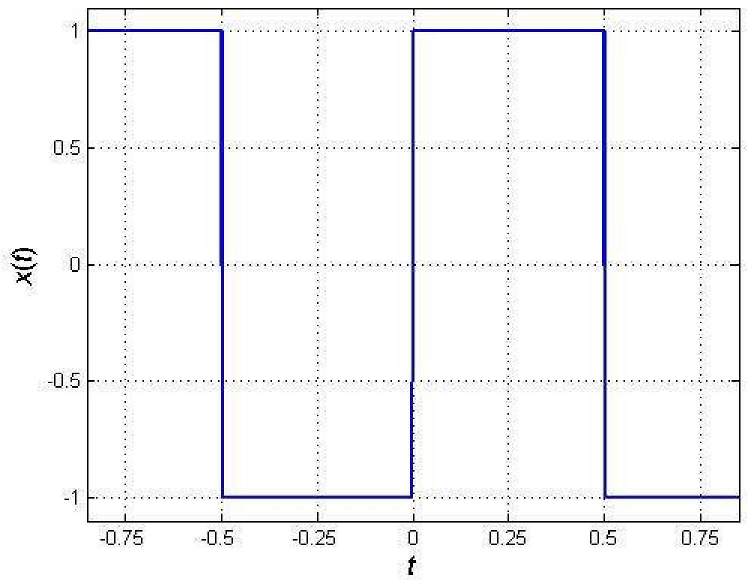
Utilizando esta segunda propiedad, es trivial comprobar que los coeficientes de Fourier del "peine de Dirac" son

$$c_n = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} \delta(t)\exp(-i2\pi n f_0 t)\, dt = \frac{\exp(0)}{T_0} = \frac{1}{T_0}.$$

3.-Aplicación de la serie de Fourier al cálculo de sumas infinitas

3.1.-Ejemplo: suma de inversos de enteros impares con signo alternante

Como ya se ha comentado, para poder aplicar las series de Fourier al cálculo de sumas infinitas, necesitamos encontrar señales cuyos coeficientes sean apropiados. Por ejemplo, podemos tomar una onda cuadrada unitaria con simetría impar y periodo fundamental 1 (es decir, f_0=T_0=1), cuya representación gráfica sería:



Es trivial comprobar, por integración directa, que sus coeficientes de Fourier serían:

$$c_n = \left.\frac{\exp(-i2\pi nt)}{i2\pi n}\right|_{-\frac{1}{2}}^{0} + \left.\frac{-\exp(-i2\pi nt)}{i2\pi n}\right|_{0}^{\frac{1}{2}} = \frac{1-(-1)^n}{i\pi n}.$$

Tras un retardo de −1/4 (es decir, un avance de 1/4), obtendríamos una onda cuadrada unitaria con simetría par, que toma el valor 1 en t=0, y cuyos coeficientes de Fourier serían

$$c_n = \frac{1-(-1)^n}{i\pi n}\exp\left(\frac{i\pi n}{2}\right) = \frac{1-(-1)^n}{i\pi n} i^n .$$

Nótese que estos coeficientes son nulos cuando n es par, y cuando n es impar positivo, toman valores de signo alternante, proporcionales a $1/n$: $c_1=2/\pi$, $c_3=-2/(3\pi)$, $c_5=2/(5\pi)$,… Obviamente, $c_n=c_{-n}$ por tener la señal simetría par. Por lo tanto, aplicando (6), se obtiene el por otra parte relativamente conocido resultado:

$$1 = x(0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n = 2\sum_{n=1}^{+\infty} c_n = 2\left(\frac{2}{\pi} - \frac{2}{3\pi} + \frac{2}{5\pi} - \dots\right); \qquad \boxed{1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}}.$$

3.2.-Sumas infinitas de potencias pares negativas de enteros: Parseval

Estamos interesados en el cálculo de sumas de la forma:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2k}},$$

siendo k un entero positivo cualquiera. En primer lugar, podemos observar que, como todo entero se puede escribir de una única manera como $2^{\alpha}m$, siendo α un entero no negativo y m un entero positivo impar, y en estas condiciones $2^{\alpha}m$ es siempre entero, entonces

$$S_k = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \sum_{\alpha=0}^{+\infty} \sum_{\substack{m=1 \\ m \text{ impar}}}^{+\infty} \frac{1}{2^{2\alpha k} m^{2k}} = \sum_{\alpha=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2\alpha k}} \cdot \sum_{\substack{m=1 \\ m \text{ impar}}}^{+\infty} \frac{1}{m^{2k}} = \frac{2^{2k}}{2^{2k}-1} s_k, \qquad s_k = \sum_{\substack{m=1 \\ m \text{ impar}}}^{+\infty} \frac{1}{m^{2k}}.$$

De esta forma, podemos intentar utilizar funciones con simetría en media onda cuyos coeficientes c_n sean inversamente proporcionales a n^k para calcular la suma deseada. Recordamos también que, si conocemos una función cuyos coeficientes son inversamente proporcionales a n^k, y ésta es la derivada de una segunda función, entonces esta última tendrá, por la propiedad de derivación, coeficientes inversamente proporcionales a n^{k+1}. La primera suma, S_1, la podemos calcular fácilmente, ya que como hemos visto, la onda cuadrada unitaria (cuya potencia instantánea es 1 en todo instante, y por lo tanto también es 1 su potencia media), tiene coeficientes inversamente proporcionales a n:

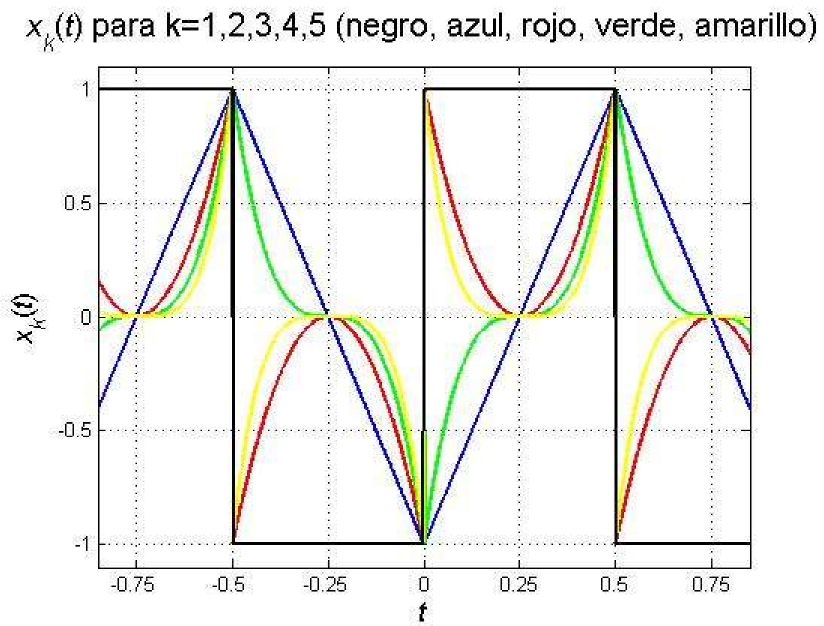
$$1=\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\ \text{impar}}}^{+\infty}\frac{4}{\pi^2 n^2}=\frac{8}{\pi^2}\sum_{\substack{n=1\\ n\ \text{impar}}}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{8}{\pi^2}s_1;$$

$$\boxed{\sum_{\substack{n=1\\ n\ \text{impar}}}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=s_1=\frac{\pi^2}{8}};\qquad \boxed{S_1=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{2^2}{2^2-1}s_1=\frac{\pi^2}{6}}.$$

Para hallar las sumas generales, tomamos la siguiente familia de funciones:

$$x_k(t)=\begin{cases}-(4t+1)^{k-1}, & -\dfrac{1}{2}\le t<0,\\[2mm] \dfrac{(-1)^{k-1}-1}{2} & t=0,\\[2mm] (4t-1)^{k-1}, & 0<t\le\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

Las funciones se consideran extendidas periódicamente con periodo 1. Se ofrece a continuación la representación gráfica de algunos miembros de esta familia:



Se comprueba trivialmente que todas estas funciones son simétricas en media onda, siendo además

$$\frac{dx_k(t)}{dt}=4(k-1)x_{k-1}(t),\ k\ \text{par},$$

$$\frac{dx_k(t)}{dt}=4(k-1)x_{k-1}(t)+2p(t)-2p\left(t-\frac{1}{2}\right),\ k\ \text{impar}.$$

La potencia media de cada una de estas señales es, aprovechando sus simetrías par o impar, según que k sea par o impar respectivamente,

$$P_k = 2\int_0^{\frac{1}{2}} (4t-1)^{2k-2}\, dt = \left.\frac{(4t-1)^{2k-1}}{2(2k-1)}\right|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2k-1}.$$

Llamaremos $c_{k,n}$ a los coeficientes de Fourier de la señal $x_k(t)$. Las anteriores relaciones entre la derivada de una función de la familia y la anterior se traducen pues en

$$c_{k,n} = -\frac{i2(k-1)}{\pi n} c_{k-1,n}\text{, } k \text{ par,}$$

$$c_{k,n} = -\frac{i2(k-1)}{\pi n} c_{k-1,n} - i\frac{\left(1-(-1)^n\right)}{\pi n}\text{, } k \text{ impar.}$$

Por ejemplo, ya que la onda triangular unitaria con simetría par y signo negativo sería $x_2(t)$, y la onda cuadrada unitaria con simetría impar sería $x_1(t)$, tenemos:

$$c_{2,n} = \frac{-i2c_{1,n}}{\pi n} = -\frac{2\left(1-(-1)^n\right)}{\pi^2 n^2}.$$

Nótese que existe, a priori, una indeterminación de la forma 0/0 para n=0, pero se resuelve comprobando que ha de ser $c_{2,0}$=0 ya que $x_2(t)$ tiene simetría en media onda. Entonces, se obtiene de forma inmediata

$$\frac{1}{3} = P_2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|c_{2,n}\right|^2 = 2\sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impar}}}^{+\infty} \frac{16}{\pi^4 n^4} = \frac{32}{\pi^4} s_2;$$

$$\boxed{\sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impar}}}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = s_2 = \frac{\pi^4}{96}}; \qquad \boxed{S_2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{2^4}{2^4-1} s_2 = \frac{\pi^4}{90}}.$$

Para hallar las sumas para valores mayores de k, se pueden establecer las siguientes ecuaciones recurrentes, fruto de las propiedades de derivación y retardo, y de los coeficientes ya hallados del "peine de Dirac" $p(t)$:

$$c_{k,n} = \frac{i2(k-1)}{\pi n} c_{k-1,n}\text{, } k \text{ par,} \qquad c_{k,n} = \frac{i2(k-1)c_{k-1,n}}{\pi n} + \frac{1-(-1)^n}{i\pi n}\text{, } k \text{ impar.}$$

Así, para k=3 y 4, respectivamente, se tiene,

$$c_{3,n} = i8\frac{1-(-1)^n}{\pi^3 n^3} - i\frac{1-(-1)^n}{\pi n}; \qquad c_{4,n} = -48\frac{1-(-1)^n}{\pi^4 n^4} + 6\frac{1-(-1)^n}{\pi^2 n^2};$$

$$\frac{1}{5} = P_3 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|c_{3,n}\right|^2 = \frac{2^9 s_3}{\pi^6} - \frac{2^7 s_2}{\pi^4} + \frac{2^3 s_1}{\pi^2} = \frac{2^9 s_3}{\pi^6} - \frac{1}{3}; \qquad \boxed{s_3 = \frac{\pi^6}{960}}.$$

$$\frac{1}{7}=P_4=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|c_{4,n}\right|^2=\frac{2^{11}\cdot 3^2 s_4}{\pi^8}-\frac{2^9\cdot 3^2 s_3}{\pi^6}+\frac{2^5\cdot 3^2 s_2}{\pi^4}=\frac{2^{11}\cdot 3^2 s_4}{\pi^8}-\frac{9}{5}; \qquad \boxed{s_4=\frac{17\pi^8}{161280}}.$$

$$\boxed{S_3=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^6}=\frac{2^6}{2^6-1}s_3=\frac{\pi^6}{3^3\cdot 5\cdot 7}=\frac{\pi^6}{945}}, \qquad \boxed{S_4=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^8}=\frac{2^8}{2^8-1}s_4=\frac{\pi^8}{2\cdot 3^3\cdot 5^2\cdot 7}=\frac{\pi^8}{9450}}.$$

Para valores mayores de k se podría utilizar el mismo procedimiento, sólo que se complicaría de forma rápida, con la aparición de cada vez más sumandos en cada $c_{k,n}$, que llevaría a multitud de términos cruzados en el cálculo de los $|c_{k,n}|^2$.

3.3-Sumas infinitas de potencias pares negativas de enteros: valor de la función en *t*=0

Si en el caso anterior nos restringimos a las funciones con valores pares de k, obtenemos $x_k(0)=-1$, sin ningún tipo de indeterminación, ya que este valor es igual tanto a ambos límites laterales como al valor directamente dado a la función en $t=0$. Podemos pues aplicar la propiedad que nos permite hallar el valor de la función en el origen en función de sus coeficientes de Fourier, utilizando además que la simetría par de la función garantiza que $c_{-n}=c_n$, y que todos los coeficientes pares son nulos por ser las $x_k(t)$ simétricas en media onda:

$$-1=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_{2k,n}=2\sum_{\substack{n=1\\ n\text{ impar}}}^{+\infty}c_{2k,n}.$$

Utilizando además las relaciones recursivas anteriormente halladas para los $c_{k,n}$, tenemos que, para n impar,

$$c_{2k,n}=-\frac{4(2k-1)(2k-2)}{\pi^2 n^2}c_{2k-2,n}-\frac{4(2k-1)}{\pi^2 n^2}, \qquad c_{2,n}=-\frac{4}{\pi^2 n^2}.$$

La solución de esta ecuación recursiva nos permitiría hallar los $c_{2k,n}$, de donde podríamos extraer los valores de las sumas deseadas. Es relativamente sencillo comprobar por inducción que, para n impar,

$$c_{2k,n}=\sum_{l=1}^{k}(-1)^l\frac{2^{2l}(2k-1)!}{\pi^{2l}n^{2l}(2k-2l)!}.$$

Efectivamente, para $k=1$, tenemos

$$(-1)^1\frac{2^2(2-1)!}{\pi^2 n^2(2-2)!}=-\frac{4}{\pi^2 n^2}=c_{2,n},$$

mientras que si el resultado es cierto para k, entonces

$$
\begin{aligned}
c_{2k+2,n} &= -\frac{4(2k+1)(2k)}{\pi^2 n^2} c_{2k,n} - \frac{4(2k+1)}{\pi^2 n^2} \\
&= \sum_{l'=2}^{k+1} (-1)^{l'} \frac{2^{2l'}(2k+2-1)!}{\pi^{2l'} n^{2l'} (2k+2-2l')!} - \frac{2^2 (2k+2-1)!}{\pi^2 n^2 (2k+2-2)!} \\
&= \sum_{l'=1}^{k+1} (-1)^{l'} \frac{2^{2l'}(2k+2-1)!}{\pi^{2l'} n^{2l'} (2k+2-2l')!},
\end{aligned}
$$

donde se ha realizado el cambio de variable $l'=l+1$. De aquí,

$$
-k = 2k \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impar}}}^{+\infty} c_{2k,n} = \sum_{l=1}^{k} (-1)^l \binom{2k}{2l} \frac{2^{2l}(2l)! s_l}{\pi^{2l}} = \sum_{l=1}^{k} (-1)^l \binom{2k}{2l} \frac{\left(2^{2l}-1\right)(2l)! S_l}{\pi^{2l}};
$$

Esto nos permitiría hallar las diferentes sumas mediante la ecuación recursiva hallada. Para simplificar estos cálculos, podemos definir

$$
S_l = \frac{\pi^{2l} 2^{2l} Q_l}{2(2l)!}, \qquad -k = \sum_{l=1}^{k} (-1)^l \binom{2k}{2l} 2^{2l-1} \left(2^{2l}-1\right) Q_l ,
$$

$$
Q_1 = \frac{2!}{2\pi^2} S_1 = \frac{1}{6}, \quad Q_2 = \frac{4!}{2^3 \pi^4} S_2 = \frac{1}{30}, \quad Q_3 = \frac{6!}{\pi^6 2^5} S_3 = \frac{1}{42}, \quad Q_4 = \frac{8!}{\pi^8 2^7} S_4 = \frac{1}{30}.
$$

Por ejemplo, podemos hallar

$$
\begin{aligned}
2^9\left(2^{10}-1\right) Q_5 = 2^9 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 31 \cdot Q_5 &= 5 + \sum_{l=1}^{4} (-1)^l \binom{10}{2l} 2^{2l-1}\left(2^{2l}-1\right) Q_l \\
&= 5 - 5\cdot 9 + 2^3 \cdot 5 \cdot 21 - 2^5 \cdot 5 \cdot 63 + 2^7 \cdot 5 \cdot 79 = 2^8 \cdot 5 \cdot 31;
\end{aligned}
$$

$$
Q_5 = \frac{5}{66}; \qquad \boxed{S_5 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{10}} = \frac{2^9 \pi^{10} Q_5}{10!} = \frac{\pi^{10}}{93555}}.
$$

$$
\begin{aligned}
2^{11}\left(2^{12}-1\right) Q_6 = 2^{11} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot Q_6 &= -6 - \sum_{l=1}^{5} (-1)^l \binom{12}{2l} 2^{2l-1}\left(2^{2l}-1\right) Q_l \\
&= -2\cdot 3 + 2\cdot 3 \cdot 11 - 2^2 \cdot 3^2 \cdot 55 + 2^6 \cdot 3^2 \cdot 77 - 2^6 \cdot 3^2 \cdot 935 + 2^9 \cdot 3 \cdot 1705 \\
&= 2^{10} \cdot 3 \cdot 691;
\end{aligned}
$$

$$
Q_6 = \frac{691}{2730}; \qquad \boxed{S_6 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{12}} = \frac{2^{11} \pi^{12} Q_6}{12!} = \frac{691\pi^{12}}{638512875}}.
$$

Algunos lectores habrán reconocido que los Q_l son en realidad los valores absolutos de los números de Bernoulli B_{2l}, definidos junto con los polinomios de Bernoulli $B_m(x)$ mediante:

$$
\frac{y e^{yx}}{e^y - 1} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_m(x) y^m}{m!}; \qquad B_m = B_m(0) = \lim_{x\to 0} \frac{d^m}{dx^m}\left(\frac{x}{e^x - 1}\right).
$$

De hecho, un resultado debido a Adolf Hurwitz, matemático de finales del siglo XIX y principios del XX, establece que para $m \geq 2$,

$$B_m(t) = -\frac{m!}{(i2\pi)^m} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{+\infty} \frac{\exp(i2\pi nt)}{n^m}.$$

Es decir, que para $m=2l$, aplicando la propiedad del valor en $t=0$ se obtiene

$$B_{2l}(0) = B_{2l} = -\frac{(-1)^l (2l)!}{(2\pi)^{2l}} 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2l}} = -\frac{(-1)^l (2l)!}{2^{2l-1}\pi^{2l}} S_l;$$

$$\boxed{S_l = \frac{(-1)^{l-1} 2^{2l-1}\pi^{2l}}{(2l)!} B_{2l}(0) = \frac{2^{2l-1}\pi^{2l}\left|B_{2l}\right|}{(2l)!}}.$$

Los números de Bernoulli están calculados para valores muy grandes de m (en Octubre de 2005 se publicó el valor de $B_{5000000}$). Observando los valores mostrados en [1], podemos entonces hallar:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{14}} = \frac{2^{13}\cdot 7\cdot \pi^{14}}{6\cdot 14!}}, \quad \boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{16}} = \frac{2^{15}\cdot 3617\cdot \pi^{16}}{510\cdot 16!}}, \quad \boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{18}} = \frac{2^{17}\cdot 43867\cdot \pi^{18}}{798\cdot 18!}}$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{20}} = \frac{2^{19}\cdot 174611\cdot \pi^{20}}{330\cdot 20!}}, \quad \boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{22}} = \frac{2^{21}\cdot 854513\cdot \pi^{22}}{138\cdot 22!}}.$$

Nótese finalmente que, debido a la relación entre los números de Bernoulli y la función zeta de Riemann (ver por ejemplo [1]),

$$B_{2l} = \frac{(-1)^{l-1}(2l)!}{2^{2l-1}\pi^{2l}} \zeta(2l),$$

podemos hallar por un segundo camino el resultado que será conocido para algunos lectores:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2l}} = \zeta(2l)}.$$

Referencias:

[1] http://mathworld.wolfram.com/BernoulliNumber.html

PROBLEMAS PARA LOS MÁS JÓVENES (28)

Presentamos algunos problemas de Olimpiadas rusas, para alumnos de la clase 9

Problema J28.1: (Ashgabad, 1990), propuesto por I.Voronovich.

Demostrar que, cualquiera que sea el número real t, se verifica la desigualdad

$$t^4 - t + \frac{1}{2} > 0.$$

Problema J28.2:(Ashgabad,1990), propuesto por V.Chinik.

Por un punto interior P al triángulo ABC se trazan tres paralelas a los lados, que dividen a éstos en tres segmentos , de longitudes respectivas a_1, a_2, a_3 (el lado BC), b_1, b_2, b_3 (el lado CA) y c_1, c_2, c_3 (el lado AB).

Demostrar que

$$a_1 b_1 c_1 = a_2 b_2 c_2 = a_3 b_3 c_3.$$

Problema J28.3 .(1996),propuesto por L.Mednikov.

Demostrar que si $0 < a < 1$ y $0 < b < 1$, entonces

$$\frac{ab\,(1-a)\,(1-b)}{(1-ab)^2} < \frac{1}{4}.$$

Problema J28.4. (Alma Ata, 1992) propuesto por D.A. Mitikin.

Resolver el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} (1+x)\left(1+x^2\right)\left(1+x^4\right) = 1+y^7 \\ (1+y)\left(1+y^2\right)\left(1+y^4\right) = 1+x^7 \end{array}\right\}$$

Problema J28.5 (Riga,1989), propuesto por D.Tereshin.

Demostrar que si a, b, c son las longitudes de los lados de un triángulo, tales que $a + b + c = 1$, entonces se verifica

$$a^2 + b^2 + c^2 + 4abc < \frac{1}{2}.$$

PROBLEMAS DE NIVEL MEDIO Y DE OLIMPIADAS (28)

LOS PROBLEMAS DE GEOMETRÍA DE LA OLIMPIADA IBEROAMERICANA 2006

Presentamos soluciones alternativas a las oficiales, de los problemas 1 y 5 de la OIM 2006, celebrada en Guayaquil, Ecuador.

Problema 1, propuesto por Ecuador.

En el triángulo ABC, rectángulo en A, se consideran las circunferencias inscrita y circunscrita. La recta AM es tangente a la circunferencia circunscrita en el punto A (M es un punto de BC). S y R son los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita con los catetos AC y AB, respectivamente. La recta RS corta a la recta BC en N. Las rectas AM y SR se cortan en U.

Demostrar que el triángulo UMN es isósceles.

Primera solución (de Patricia Fauring, Jefe de la Delegación de Argentina)

Sea $\widehat{ABC} = \beta$. Entonces $\widehat{MAC} = \beta$ (ángulo semiinscrito que abarca el mismo arco).

Como AS = AR (tangentes a una circunferencia desde un punto exterior), $\widehat{ARS} = \widehat{ASR} = 45^o$, luego $\widehat{NRB} = 135^o$.

En el triángulo BNR, $\widehat{BNR} = 180^o - \beta - 135^o = 45^o - \beta$.

En el triángulo ABM, $\widehat{AMB} = 180^o - \beta - (\beta + 90^o) = 90^o - 2\beta$.

En el triángulo MNU tenemos $\widehat{MNU} = 45^o - \beta$ y el ángulo exterior $\widehat{UMC} = 90^o - 2\beta$; entonces $\widehat{MUN} = 90^o - 2\beta - (45^o - \beta) = 45^o - \beta$ y resulta $\widehat{MNU} = \widehat{MUN}$.$\blacksquare$

Segunda solución, del estudiante cubano CUB2, galardonada por el Jurado Internacional con un premio especial, a propuesta del Tribunal de coordinación del problema 1.

Aplicando el teorema de Menelao en los triángulos AMC y ABC, cortados por RS, se tiene:

$$\frac{AU}{UM} \cdot \frac{MN}{NC} \cdot \frac{CS}{SA} = 1 \Longrightarrow \frac{MN}{UM} = \frac{NC \cdot SA}{CS \cdot AU} \quad (1)$$
$$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CS}{AS} = 1 \Longrightarrow \frac{NC}{CS} = \frac{BN}{RB} \quad (2)$$

donde en el segundo caso se utiliza AR = AS por ser tangentes a la circunferencia inscrita.

Como $\widehat{BAC} = 90^o$, se tiene $\widehat{ASR} = \widehat{ARS} = \widehat{NRB} = 45^o$.

Además, $\widehat{UAS} = 90^o + \widehat{UAB} = 90^o + \widehat{ACB}$(por ser MA tangente y el ángulo inscrito igual al semininscrito) $= \widehat{NBA}$.

Como consecuencia de lo anterior, los triángulos UAS y NBR son semejantes. Entonces, por (2),

$$\frac{MN}{UM}=\frac{BN}{RB}\cdot\frac{SA}{AU}=1,$$

y UMN es isósceles.■

Tercera solución (con coordenadas, del Tribunal de coordinación del problema 1)

Se toma un sistema de coordenadas con origen en el vértice A del triángulo rectángulo ABC y ejes los catetos; sea O el centro de la circunferencia inscrita.

Sean b, c las longitudes de los catetos del triángulo ABC; a la longitud de la hipotenusa, y p el semiperímetro.

Las coordenadas de los puntos relevantes en el problema y las ecuaciones de las rectas que importan son las siguientes:

$$A\left(0,0\right), B\left(c,0\right), C\left(0,b\right), O\left(\frac{c}{2},\frac{b}{2}\right), R\left(p-a,0\right), S\left(0,p-a\right).$$

$$\begin{aligned} AO &\equiv y=\frac{b}{c}x; \quad AM\equiv y=-\frac{c}{b}x; \\ BC &\equiv \frac{x}{c}+\frac{y}{b}=1; \quad SR\equiv x+y=p-a. \end{aligned}$$

Las coordenadas de los puntos M,N y U son:

$$\begin{aligned} M &\equiv \left(\frac{cb^2}{b^2-c^2},\frac{-c^2b}{b^2-c^2}\right) \\ N &\equiv \left(\frac{\left(p-a-b\right)c}{c-b},\frac{\left(p-a-c\right)b}{b-c}\right) \\ U &\equiv \left(\frac{\left(p-a\right)b}{b-c},\frac{\left(p-a\right)c}{b-c}\right) \end{aligned}$$

Para comprobar que UMN es isósceles, se pueden considerar los ángulos entre las rectas o ver que $UM^2=MN^2$.

En el segundo caso, la expresión final para UM^2 es

$$UM^2=\frac{\left[\left(p-a\right)\left(b+c\right)-cb\right]^2\left(b^2+c^2\right)}{\left(b-c\right)^2\left(b+c\right)^2};$$

y la de MN^2 :

$$MN^2=\frac{c^2[\left(b^2+\left(p-a-b\right)\left(b+c\right)\right)]^2+b^2\left[c^2+\left(p-a-c\right)\left(b+c\right)\right]^2}{\left(b-c\right)^2\left(b+c\right)^2}.$$

Desarrollando se comprueba que

$$b^2 + (p - a - b)(b + c),$$
$$c^2 + (p - a - c)(b + c),$$
$$(p - a)(b + c) - cb$$

son todos iguales a

$$pb + pc - ab - ac - cb$$

y el triángulo es isósceles. ■

Problemas propuestos (nivel medio y de Olimpiadas 28)

1.(Moldavia, 1997)Sea $n = 2^{13} \cdot 3^{11} \cdot 5^7$.

Determinar el número de divisores positivos de n^2 que son menores que n y que no son divisores de n.

2.(Lista corta IMO 1996)Hallar todos los enteros estrictamente positivos, a, b tales que

$$\left\lfloor \frac{a^2}{b} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{b^2}{a} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{a^2+b^2}{ab} \right\rfloor + ab$$

3.(VietNam 1996) Encontrar todas las funciones $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ tales que

$$f(n) + f(n+1) = f(n+2)f(n+3) - 1996, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}^*.$$

4.(Eslovenia 1996) Sea Q el punto medio del lado AB del cuadrilátero convexo ABCD, inscrito en una circunferencia, y sea S la intersección de sus diagonales AC y BD.

Sean P y R las proyecciones ortogonales de S sobre AD y BC, respectivamente.

Demostrar que PQ = QR.

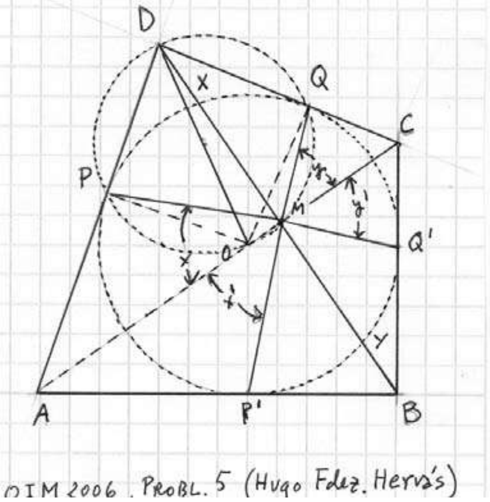
5.(Colorado 1988). Se toman 5 puntos interiores o sobre los lados de un triángulo de área 1. Demostrar que tres de ellos son vértices de un triángulo cuya área no es mayor que 1/4.

6.(URSS 1973). Una circunferencia Γ es tangente, respectivamente en A y B a dos semirrectas de origen O. La paralela a OB trazada por A vuelve a cortar a Γ en C. El segmento OC vuelve a cortar a Γ en E. Las rectas AE y OB se cortan en K.

Demostrar que K es el punto medio del segmento OB.

Problema 5(21 OIM, Guayaquil 2006)
Dada una circunferencia φ, considere un cuadrilátero ABCD con sus cuatro lados tangentes a φ, con AD tangente a φ en P y CD tangente a φ en Q. Sean X e Y los puntos donde BD corta a φ, y M el punto medio de XY. Demuestre que $\angle AMP = \angle CMQ$.

Solución de Hugo Fernández Hervás, durante el concurso:



Sea O el centro de la circunferencia, entonces el cuadrilátero POQD es cíclico, y su diámetro es OD pues $\angle DQO = \angle DPO = \pi/2$. Además, $XY \perp OM \Rightarrow BD \perp OM$; es decir, el ángulo DMO vale $\pi/2$, por lo que M también pertenece a la circunferencia circunscrita a POQD.
De esto se deduce que PMQD es cíclico y por tanto $\angle APM = \pi - \angle MQC$. Y aplicando el teorema del seno a los triángulos APM y CQM se obtiene que:
$\frac{AP}{AM} = \frac{sen(x)}{sen(\angle APM)}$ y $\frac{CQ}{CM} = \frac{sen(y)}{sen(\angle MQC)} = \frac{sen(y)}{sen(\pi - \angle APM)} = \frac{sen(y)}{sen(\angle APM)}$ siendo $x = \angle AMP$ e $y = \angle CMQ$.

Sean $P' = AB \cap \varphi$, $Q' = BC \cap \varphi$, $x' = \angle AMP'$ y $y' = \angle CMQ'$. Procediendo de igual manera que antes, se llega a:
$\frac{AP'}{AM} = \frac{sen(x')}{sen(\angle AP'M)}$ y $\frac{CQ'}{CM} = \frac{sen(y')}{sen(\angle AP'M)}$, pero AP y AP' miden lo mismo, pues P y P' son los puntos de tangencia a φ. Así mismo, CQ y CQ' miden lo mismo. De donde se deduce que:
$\frac{sen(x)}{sen(\angle APM)} = \frac{sen(x')}{sen(\angle AP'M)}$ y $\frac{sen(y)}{sen(\angle APM)} = \frac{sen(y')}{sen(\angle AP'M)}$; dividiendo ambas expresiones:
$\frac{sen(x)}{sen(y)} = \frac{sen(x')}{sen(y')}$.
Por otro lado, se puede observar que $x + x' = y + y' < \pi$ pues
$x + x' = \pi - (\angle P'MB + \angle PMD) = \pi - (\angle Q'MB + \angle QMD) = y + y'$ esto es así pues DP=DQ, y por tanto el arco que abarcan $\angle PMD$ y $\angle QMD$ en la circunferencia circunscrita a PMQD es el mismo, por lo que son iguales, lo mismo para $\angle P'MB$ y $\angle Q'MB$.
Ahora bien, el sistema de ecuaciones:

$$\frac{sen(x)}{sen(y)} = \frac{sen(x')}{sen(y')}$$

$$x + x' = y + y' < \pi$$

Sólo tiene la solución $x = y; x' = y'$. Con lo que queda demostrado el enunciado.

Problema 131

Propuesto por José Luis Díaz Barrero, Barcelona, España

Calcular

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left\{\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k^2+\sqrt{k^4+n^4}}{n^2}\right)^k\right\}^{\frac{1}{n^2}}$$

Solución de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, España.

Generalizaremos el problema para hallar el límite

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left\{\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{\rho^2k^2+\sqrt{\rho^4k^4+n^4}}{n^2}\right)^k\right\}^{\frac{\rho^2}{n^2}},$$

siendo ρ un real positivo cualquiera, y luego lo particularizaremos para el caso $\rho=1$. En primer lugar, utilizamos conocidas relaciones de logaritmos para escribir el límite como

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \ln\left\{\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{\rho^2k^2+\sqrt{\rho^4k^4+n^4}}{n^2}\right)^k\right\}^{\frac{\rho^2}{n^2}} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\rho^2}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k\ln\left(\frac{\rho^2k^2+\sqrt{\rho^4k^4+n^4}}{n^2}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\rho}{n}\left(\frac{\rho k}{n}\right)\ln\left(\left(\frac{\rho k}{n}\right)^2+\sqrt{\left(\frac{\rho k}{n}\right)^4+1}\right).\end{aligned}$$

Ahora bien, podemos identificar el último término como la suma de Riemann de la integral entre 0 y ρ de la siguiente función:

$$f(x) = x\ln\left(x^2+\sqrt{x^4+1}\right),$$

donde se ha dividido el intervalo $(0,\rho)$ en n subintervalos de longitud ρ/n, y se ha evaluado la función $f(x)$ en el extremo superior de cada subintervalo. Se tiene entonces que el límite pedido es igual a

$$\int_0^{\rho} f(x)\,dx = \int_0^{\rho} x\ln\left(x^2+\sqrt{x^4+1}\right)dx = \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{\rho}}\ln\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)dy,$$

donde se ha realizado el cambio de variable $y=x^2$. Si ahora hacemos además el cambio de variable

$$y = \operatorname{senh}(z), \qquad dy = \cosh(z)\,dz,$$

$$y+\sqrt{y^2+1} = \operatorname{senh}(z)+\sqrt{\operatorname{senh}^2(z)+1} = \operatorname{senh}(z)+\cosh(z) = e^z,$$

se tiene que el límite pedido es

$$\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{\rho}} \ln\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)dy = \frac{1}{2}\int_0^{\operatorname{arcsenh}\left(\sqrt{\rho}\right)} z\cosh(z)\,dz .$$

Al ser la función senh(z) siempre estrictamente creciente salvo para z=0, el extremo superior de la integral es un real positivo bien determinado. Podemos finalmente integrar por partes:

$$\int_0^{\kappa} z\cosh(z)\,dz = \int_0^{\kappa} z\frac{e^z+e^{-z}}{2}dz = z\frac{e^z-e^{-z}}{2}\Bigg|_0^{\kappa} - \int_0^{\kappa}\frac{e^z-e^{-z}}{2}dz$$

$$= \kappa\operatorname{senh}(\kappa) - \frac{e^z+e^{-z}}{2}\Bigg|_0^{\kappa} = \kappa\operatorname{senh}(\kappa)-\cosh(\kappa)+1;$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{\operatorname{arcsenh}\left(\sqrt{\rho}\right)} z\cosh(z)\,dz = \frac{\sqrt{\rho}\operatorname{arcsenh}\left(\sqrt{\rho}\right)-\sqrt{1+\rho}+1}{2},$$

y este es el límite general pedido. Podemos calcular el arcoseno hiperbólico como sigue:

$$\frac{e^{\kappa}-e^{-\kappa}}{2}=\sqrt{\rho}\,; \qquad e^{2\kappa}-2\sqrt{\rho}e^{\kappa}-1=0\,; \qquad e^{\kappa}=\frac{2\sqrt{\rho}\pm\sqrt{4\rho+4}}{2}=\sqrt{\rho}\pm\sqrt{\rho+1}\,.$$

Como el resultado con signo negativo no tiene sentido, ya que $e^{\kappa}>0$ con κ real, se llega a

$$\operatorname{arcsenh}\left(\sqrt{\rho}\right)=\ln\left(\sqrt{\rho}+\sqrt{\rho+1}\right),$$

de donde

$$\lim_{n\to\infty}\ln\left\{\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{\rho^2k^2+\sqrt{\rho^4k^4+n^4}}{n^2}\right)^{k}\right\}^{\frac{\rho^2}{n^2}} = \frac{\sqrt{\rho}\ln\left(\sqrt{\rho}+\sqrt{\rho+1}\right)-\sqrt{1+\rho}+1}{2}.$$

En el caso particular de que ρ=1, se tiene

$$\lim_{n\to\infty}\ln\left\{\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k^2+\sqrt{k^4+n^4}}{n^2}\right)^{k}\right\}^{\frac{1}{n^2}} = \frac{\operatorname{arcsenh}(1)+1-\sqrt{2}}{2} = \ln\left(\sqrt{1+\sqrt{2}}\right)-\frac{\sqrt{2}-1}{2}.$$

PROBLEMA 132
Propuesto por: José Luis Díaz Barrero, Barcelona, España.

Sean $x_1, x_2, ..., x_n$ números reales dados. Para todo $n \geq 1$, demostrar que:

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{T_k}\sin x_k\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{T_k}\cos x_k\right) \leq \frac{(n+1)(n+2)}{12}$$

Donde T_K es el k-esimo numero triangular, definido por $T_k = \frac{k(k+1)}{2}$. $k \geq 1$.

SOLUCION DE: DANIEL DARIO GONGORA GARCIA.
Carabayllo, Lima, PERU.
mastermath2004@hotmail.com

Se tiene la desigualdad de Cauchy:

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)$$

Y hacemos:

$$1° \quad \begin{cases} a_k = \sqrt{T_k} \\ b_k = \sin x_k \end{cases} \Rightarrow \left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{T_k}\sin x_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n}T_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\sin^2 x_k\right) \text{ .... (1)}$$

$$2° \quad \begin{cases} a_k = \sqrt{T_k} \\ b_k = \cos x_k \end{cases} \Rightarrow \left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{T_k}\cos x_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n}T_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\cos^2 x_k\right) \text{ .... (2)}$$

Sumando (1) y (2) obtenemos:

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{T_k}\sin x_k\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{T_k}\cos x_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n}T_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}1\right) = n\sum_{k=1}^{n}T_K = n\sum_{k=1}^{n}\frac{k(k+1)}{2}$$

$$= \frac{n}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}k^2 + \sum_{k=1}^{n}k\right)$$

$$= \frac{n}{2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}\right)$$

$$= \frac{n^2(n+1)(n+2)}{6}$$

Por lo tanto:

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{T_k}\sin x_k\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{T_k}\cos x\right)^2 \leq \frac{n^2(n+1)(n+2)}{6} \text{ ....} (\alpha)$$

De otro lado, aplicando M.A.$\geq$M.G.

$$\frac{\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{T_k}\sin x_k\right)^2+\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{T_k}\cos x_k\right)^2}{2}\geq\sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{T_k}\sin x_k\right)^2\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{T_k}\cos x_k\right)^2}$$

$$\Rightarrow\qquad 2\left|\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{T_k}\sin x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{T_k}\cos x_k\right)\right|\leq\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{T_k}\sin x_k\right)^2+\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{T_k}\cos x_k\right)^2\ \ldots.(\beta)$$

Relacionando $(\alpha)\ \wedge\ (\beta)$ obtenemos:

$$2\left|\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{T_k}\sin x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{T_k}\cos x_k\right)\right|\leq\frac{n^2(n+1)(n+2)}{6}$$

$$\Rightarrow\qquad -\frac{(n+1)(n+2)}{12}\leq\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{T_k}\sin x_k\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{T_k}\cos x_k\right)\leq\frac{(n+1)(n+2)}{12}$$

Tomando la parte derecha de la desigualdad obtenemos que:

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{T_k}\sin x_k\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{T_k}\cos x_k\right)\leq\frac{(n+1)(n+2)}{12}$$

Q.E.D.

PROBLEMA 133 – REVISTA DE LA O.E.I.

ENUNCIADO

Probar que si $a \geq b > 0$, y $\lambda > 0$, entonces se verifica $(\lambda+1)b^2 - a^2 \leq \lambda ab \leq \lambda a^2$. ¿Cuándo se alcanza la igualdad?

SOLUCIÓN

Es inmediato que $\lambda b^2 \leq \lambda ab \leq \lambda a^2$.

$(\lambda+1)b^2 - a^2 = \lambda b^2 + (b^2 - a^2) \leq \lambda ab + (b^2 - a^2)$. $b \leq a \Rightarrow b^2 \leq a^2$ porque $a \geq b > 0$. Por lo tanto, $b^2 - a^2 \leq 0$. Luego $\lambda ab + (b^2 - a^2) \leq \lambda ab$.

Es consecuencia entonces que $(\lambda+1)b^2 - a^2 \leq \lambda ab \leq \lambda a^2$.

$\lambda ab = \lambda a^2$ si y sólo si $a = b$.

Supóngase $(\lambda+1)b^2 - a^2 = \lambda ab$. Es sabido que $(\lambda+1)b^2 - a^2 \leq \lambda ab + (b^2 - a^2)$. Luego $\lambda ab \leq \lambda ab + (b^2 - a^2) \Rightarrow 0 \leq b^2 - a^2 \Rightarrow a^2 \leq b^2$. Como se cumplen a la vez $a^2 \geq b^2$ y $a^2 \leq b^2$, es inmediato que $a^2 = b^2$. Por ser a y b estrictamente positivos, se concluye que $a = b$.

Por lo tanto, para que se cumpla la igualdad, deben ser iguales los términos a y b .

Problema 134

Propuesto por el editor

Sean O, I, H el circuncentro, incentro y ortocentro, respectivamente, del triángulo ABC. Conocidos los lados del triángulo OIH, determinar los lados del triángulo ABC.

Solución de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, España.

Se utilizarán en la resolución del problema las siguientes relaciones:

$$p = 8R\cos\left(\frac{A}{2}\right)\cos\left(\frac{B}{2}\right)\cos\left(\frac{C}{2}\right),$$

$$\frac{r}{R} = 4\,\mathrm{sen}\left(\frac{A}{2}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{B}{2}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{C}{2}\right) = \cos(A)+\cos(B)+\cos(C)-1\,,$$

$$\cos(A)\cos(B)\cos(C) = \frac{p^2-4(2R+r)^2}{16R^2}\,,$$

donde R y r son los radios respectivos de las circunferencias circunscrita e inscrita a ABC, y p es el perímetro del triángulo. La primera se puede demostrar aplicando el teorema del seno y conocidas relaciones trigonométricas:

$$\frac{p}{2R} = \mathrm{sen}(A)+\mathrm{sen}(B)+\mathrm{sen}(C) = 2\cos\left(\frac{C}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)+\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\right].$$

La segunda requiere la anterior, y conocidas expresiones del área S de ABC:

$$\frac{r}{R} = \frac{2S}{Rp} = \frac{abc}{2R^2p} = \frac{\mathrm{sen}(A)\mathrm{sen}(B)\mathrm{sen}(C)}{2\cos\left(\frac{A}{2}\right)\cos\left(\frac{B}{2}\right)\cos\left(\frac{C}{2}\right)} = 4\,\mathrm{sen}\left(\frac{A}{2}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{B}{2}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{C}{2}\right)$$

$$= 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)-\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\right] = \cos(A)+\cos(B)+\cos(C)-1.$$

La última se puede obtener a partir de

$$\left[1+\cos(A)\right]\left[1+\cos(B)\right]\left[1+\cos(C)\right] = \frac{p^3(p-2a)(p-2b)(p-2c)}{8a^2b^2c^2} = \frac{2p^2S^2}{a^2b^2c^2} = \frac{p^2}{8R^2}$$

$$\left[1-\cos(A)\right]\left[1-\cos(B)\right]\left[1-\cos(C)\right] = \frac{(p-2a)^2(p-2b)^2(p-2c)^2}{8a^2b^2c^2} = \frac{32S^4}{a^2b^2c^2p^2}$$

$$= \frac{r^2}{2R^2},$$

donde se ha utilizado otra conocida expresión del área del triángulo. Entonces,

$$\frac{p^2}{16R^2} - \frac{r^2}{4R^2} = \left(\frac{r}{R}+1\right) + \cos(A)\cos(B)\cos(C)\,.$$

Una vez que disponemos de estas relaciones, podemos pasar a expresar las longitudes de los lados de *OIH* en función de *R*, *r* y *p*. En el caso de *OI*, es conocido que

$$OI^2 = R^2 - 2Rr,$$

que se obtiene aplicando el teorema de la potencia a *I* con respecto a la circunferencia circunscrita a *ABC*. De forma similar hallaremos *OH*. Para ello, consideremos el punto *A*' donde *AH* corta de nuevo a la circunferencia circunscrita a *ABC*. Entonces,

$$HA = \frac{c\cos(A)}{\operatorname{sen}(A+B)} = 2R\cos(A), \qquad HA' = 2BH\cos(C) = 4R\cos(B)\cos(C),$$

$$OH^2 = R^2 - HA\cdot HA' = R^2 - 8R^2\cos(A)\cos(B)\cos(C) = R^2 + 2(2R+r)^2 - \frac{p^2}{2}.$$

La primera igualdad se halla aplicando el teorema del seno, teniendo en cuenta que $\angle HBA=\pi/2-A$, $\angle AHB=A+B$, mientras que la segunda es un ejercicio de simple trigonometría una vez que se constata que $\angle CBA'=\angle CAA'=\angle HBC=\pi/2-C$.

Finalmente, para hallar *IH*, supondremos sin pérdida de generalidad que $B\geq C$. Luego

$$\angle IAH = \angle CAB - \angle CAI - \angle HAB = A - \frac{A}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - B\right) = \frac{B-C}{2}.$$

Aplicando el teorema del coseno se obtiene entonces

$$\begin{aligned}\frac{2IA\cdot HA\cos(\angle IAH)}{4R^2} &= 4\operatorname{sen}\left(\frac{B}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{C}{2}\right)\cos(A)\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)\\ &= 2\cos(A)\cos^2\left(\frac{B-C}{2}\right) - 2\cos(A)\cos\left(\frac{B+C}{2}\right)\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)\\ &= \cos(A)\left[1+\cos(B-C)\right] - \cos(A)\left[\cos(B)+\cos(C)\right]\\ &= \cos(A)\left[1-\cos(B)\right]\left[1-\cos(C)\right] + \cos(A)\operatorname{sen}(B)\operatorname{sen}(C);\end{aligned}$$

$$\frac{IA^2}{4R^2} = \left[2\operatorname{sen}\left(\frac{B}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{C}{2}\right)\right]^2 = 2\operatorname{sen}^2\left(\frac{B}{2}\right)2\operatorname{sen}^2\left(\frac{C}{2}\right) = \left[1-\cos(B)\right]\left[1-\cos(C)\right];$$

$$\begin{aligned}IH^2 &= HA^2 + IA^2 - 2IA\cdot HA\cos(\angle IAH) = 4R^2\cos^2(A) + 4R^2\left[1-\cos(B)\right]\left[1-\cos(C)\right]\\ &\quad -4R^2\cos(A)\left[1-\cos(B)\right]\left[1-\cos(C)\right] - 4R^2\cos(A)\operatorname{sen}(B)\operatorname{sen}(C)\\ &= 4R^2\left[1-\cos(A)\right]\left[1-\cos(B)\right]\left[1-\cos(C)\right] - 4R^2\cos(A)\cos(B)\cos(C)\\ &= 2r^2 + (2R+r)^2 - \frac{p^2}{4}.\end{aligned}$$

Podemos ahora despejar *R*, *r* y *p* en función de las longitudes de los lados de *OIH*:

$$OH^2 - 2IH^2 = R^2 - 4r^2 = 2R(R-2r) - (R-2r)^2 = 2OI^2 - \frac{OI^4}{R^2};$$

$$R = \frac{OI^2}{\sqrt{2OI^2 - OH^2 + 2IH^2}};$$

$$r = \frac{R^2 - OI^2}{2R} = \frac{OH^2 - OI^2 - 2IH^2}{2\sqrt{2OI^2 - OH^2 + 2IH^2}};$$

$$p^2 = 2R^2 + 4(2R+r)^2 - 2OH^2 = \frac{2OI^4 + \left(3OI^2 + OH^2 - 2IH^2\right)^2}{2OI^2 - OH^2 + 2IH^2} - 2OH^2$$
$$= \frac{27OI^4 - 10OI^2\left(2OI^2 - OH^2 + 2IH^2\right) + \left(2OI^2 - OH^2 + 2IH^2\right)^2}{2OI^2 - OH^2 + 2IH^2} - 2OH^2$$
$$= \frac{27OI^4}{2OI^2 - OH^2 + 2IH^2} - 8OI^2 - 3OH^2 + 2IH^2 = 27R^2 - 8OI^2 - 3OH^2 + 2IH^2$$

Ahora bien, los lados del triángulo son las raíces de la ecuación cúbica

$$x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc = 0.$$

Las ecuaciones de este tipo se resuelven de forma habitual mediante cambio de variable:

$$y = x - \frac{p}{3}, \qquad y^3 - 3\alpha y - 2\beta = 0,$$

$$\alpha = \frac{p^2 - 3(ab+bc+ca)}{9}, \qquad \beta = \frac{27abc + 2p^3 - 9(ab+bc+ca)p}{54}.$$

Las soluciones son entonces

$$x = \frac{p}{3} + 2\sqrt{\alpha}\cos\left(\frac{\theta}{3}\right), \quad x = \frac{p}{3} + 2\sqrt{\alpha}\cos\left(\frac{\theta+2\pi}{3}\right), \quad x = \frac{p}{3} + 2\sqrt{\alpha}\cos\left(\frac{\theta-2\pi}{3}\right),$$

donde

$$\cos(\theta) = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^3}}.$$

Ahora bien, podemos simplificar las expresiones para α y β. Para ello, observamos que

$$4(ab+bc+ca) - p^2 = 2(ab+bc+ca) - \left(a^2+b^2+c^2\right)$$
$$= 2ab(1-\cos(C)) + 2bc(1-\cos(A)) + 2ca(1-\cos(B))$$
$$= 64R^2 \operatorname{sen}\left(\frac{A}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{B}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{C}{2}\right)\left[\operatorname{sen}\left(\frac{A+B+C}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{A}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{B}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{C}{2}\right)\right]$$
$$= 16Rr + 4r^2;$$

$$9\alpha = \frac{p^2}{4} - 12Rr - 3r^2 = 4R^2 - 8Rr - IH^2 = 4OI^2 - IH^2;$$

$$\frac{54\beta}{p} = \frac{108RS}{p} + 2p^2 - 36Rr - 9r^2 - \frac{9p^2}{4} = (2R+r)^2 - \frac{p^2}{4} - 4R^2 + 14Rr - 10r^2$$
$$= 3OH^2 - 5IH^2 - 7OI^2;$$

$$\cos(\theta)=\frac{3OH^2-5IH^2-7OI^2}{\left(4OI^2-IH^2\right)\sqrt{\left(4OI^2-IH^2\right)}}\frac{p}{2}.$$

Por lo tanto, el problema está solucionado, pues podemos hallar p en función de los lados de *OIH*, quedando entonces tanto α como θ determinados por los lados de *OIH*, pudiendo entonces hallarse las longitudes de los lados de *ABC*.

Nota 1: El anterior método de resolución de la ecuación cúbica es válido y produce soluciones reales si y sólo si, bien $\alpha=\beta=0$, bien $\alpha>0$. Pero en nuestro caso siempre se da una de las dos condiciones, pues

$$9\alpha=a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca),$$

que es mayor o igual que 0 en virtud de la desigualdad del producto escalar, siendo nulo si y sólo si $a=b=c$, en cuyo caso es trivial comprobar que $\beta=0$.

Nota 2: Las relaciones halladas causan indeterminación cuando $IH=2OI$, o cuando todos *OIH* queda degenerado a un punto. En el segundo caso, no podemos hallar las longitudes de los lados del triángulo, simplemente deducir que es equilátero. En el primer caso, $\alpha=0$, que como se ha visto en la nota 1 implica que el triángulo es equilátero. Luego en todo otro caso existe una única solución (salvo permutaciones en el orden de los lados del triángulo).

Ejemplo: Sean

$$OI=\frac{\sqrt{5}}{2},\qquad OH=\frac{5}{2},\qquad IH=\sqrt{2}.$$

Entonces, la resolución del triángulo *ABC* sería como sigue:

$$\alpha=\frac{4OI^2-IH^2}{9}=\frac{5-2}{9}=\frac{1}{3},$$

$$p^2=\frac{27\frac{25}{16}}{\frac{5}{2}-\frac{25}{4}+4}-10-3\frac{25}{4}+4=\frac{675-99}{4}=144=12^2;$$

$$\frac{9\beta}{2}=\frac{54\beta}{p}=3OH^2-5IH^2-7OI^2=\frac{75}{4}-10-\frac{35}{4}=0;\qquad \theta=\arccos(0)=\frac{\pi}{2}.$$

De aquí se obtienen finalmente las longitudes de los lados:

$$4+\frac{2\sqrt{3}}{3}\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=5,\quad 4+\frac{2\sqrt{3}}{3}\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)=3,\quad 4+\frac{2\sqrt{3}}{3}\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)=4.$$

Problema 135

Propuesto por el editor

Demostrar que cx^2-ax+b es un divisor común de ax^3-bx^2+c y bx^3-cx+a si divide a uno de estos dos polinomios.

Solución de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, España.

Nota: existen ciertos casos patológicos, según que ciertas combinaciones de los coeficientes sean nulos o no, para los que el resultado a demostrar es falso; en una primera parte, asumiremos que todos los coeficientes son no nulos, y en una segunda, analizaremos los casos en los que algún coeficiente es nulo, para identificar los casos patológicos.

Sean pues todos los coeficientes no nulos. Entonces, podemos escribir:

$$ax^3-bx^2+c=\left(\frac{a}{c}x+\frac{a^2-bc}{c^2}\right)\left(cx^2-ax+b\right)+\frac{a^3-2abc}{c^2}x+\frac{c^3-a^2b+b^2c}{c^2};$$

$$bx^3-cx+a=\left(\frac{b}{c}x+\frac{ab}{c^2}\right)\left(cx^2-ax+b\right)+\frac{a^2b-b^2c-c^3}{c^2}x+\frac{a\left(c^2-b^2\right)}{c^2}.$$

Entonces, el primer polinomio divide al segundo si y sólo si

$$a^2=2bc, \qquad \text{y} \qquad a^2b=c^3+b^2c,$$

mientras que el primer polinomio divide al tercero si y sólo si

$$a^2b=b^2c+c^3, \qquad \text{y} \qquad c^2=b^2.$$

Es entonces obvio que una de las dos condiciones es común. Ahora bien, si el primer polinomio divide al segundo, entonces $a^2=2bc$, que aplicado a la condición común resulta en

$$c^3+b^2c=a^2b=2b^2c, \qquad c^2=b^2,$$

y el primer polinomio divide también al tercero. Recíprocamente, si el primer polinomio divide al tercero, entonces $b^2=c^2$, que aplicado a la condición común resulta en

$$a^2b=b^2c+c^3=2b^2c, \qquad a^2=2bc,$$

con lo que el primer polinomio divide también al segundo, q.e.d..

Analicemos ahora los casos con algún coeficiente nulo.

Si los tres coeficientes son nulos, los tres polinomios son nulos, con lo que la división tanto del segundo como del tercero entre el primero es una indeterminación.

Si c=0, y a es no nulo, el primer polinomio divide siempre al segundo con cociente $-x^2$, mientras que para $x=b/a$ (la raíz del primer polinomio), el tercer polinomio toma valor b^4/a^3+a, valor no nulo que tiene el mismo signo que a, con lo que el primero no dividiría al tercero. Si a=c=0, y b es no nulo, entonces el primer polinomio es constante y no nulo, con lo que dividiría al segundo y al tercero siempre.

Si b=0 y c es no nulo, el tercer polinomio tendría grado 1 y el primero grado 2, con lo que el tercero nunca sería divisible por el primero. Además, el primer polinomio tendría una raíz nula, pero el segundo no, con lo que el segundo nunca sería divisible por el primero, siendo en este caso la afirmación del enunciado trivialmente cierta.

Finalmente, si a=0 es el único coeficiente nulo, podemos escribir

$$-bx^2+c=-\frac{b}{c}\left(cx^2+b\right)+\frac{c^2+b^2}{c}, \qquad bx^3-cx=\frac{b}{c}x\left(cx^2+b\right)-\frac{b^2+c^2}{c}x,$$

donde se comprueba trivialmente que el resto no puede ser nulo en ninguno de los dos casos a menos que b y c sean ambos nulos, en contradicción con la hipótesis de que a es el único coeficiente nulo.

Por lo tanto, hemos encontrado el siguiente caso patológico, y hemos demostrado que es exhaustivo: si c es nulo y a no lo es, el primer polinomio divide siempre al segundo, pero nunca al tercero.

PROBLEMAS PROPUESTOS 136-140

PROBLEMA 136. Propuesto por Ovidiu Furdui, Kalamazoo, USA.

Sea $\{a\} = a - \lfloor a \rfloor$ la "parte decimal" o "mantisa" del número real a.

Calcular la integral definida, entre $1/n$ y 1, de la función

$$\cos\left(\pi\left\{nx\right\}\right),$$

donde n es un entero positivo.

PROBLEMA 137. Propuesto por Laurentiu Modan, Bucarest, Rumania.

Sea $O(n)$ el número de números impares entre los primeros $2n-1$ números naturales, y sean $S_1(n), S_2(n)$ su suma y la suma de sus cuadrados, respectivamente.

i)Comparar $O(n)$ con $S_1(n)$.

ii) Hallar todos los números naturales n que verifican la desigualdad

$$S_2(n) - 3 \cdot O(n) \geq S_1(n).$$

iii) Calcular

$$\lim_{n \to \infty} \frac{S_2(n)}{O(n) \cdot S_1(n)}.$$

PROBLEMA 138. Propuesto por José Luis Díaz Barrero, Barcelona, España.

Sea $A_1, A_2, ..., A_n$ un sistema completo de sucesos asociado a un experimento aleatorio. Es decir, los A_k son no vacíos $(1 \leq k \leq n)$, disjuntos dos a dos y tales que

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = E \text{ (suceso seguro).}$$

Demostrar que

$$\prod_{k=1}^{n} p(A_k) \leq \sum_{k=1}^{n} p^2(A_k).$$

PROBLEMA 139. Propuesto por José Luis Díaz Barrero, Barcelona, España.

Sean a, b, c los lados de un triángulo de semiperímetro p y circunradio R.

Demostrar que

$$\frac{a^3}{\sin A} + \frac{b^3}{\sin B} + \frac{c^3}{\sin C} \geq \frac{8Rp^2}{3}.$$

PROBLEMA 140. Propuesto por Doru Popescu Anastasiu, en el número 3 de la revista SIPROMA (1998); recuperado por el editor, ya que al ser el último número publicado, no se recibieron soluciones (excepto del proponente).

Sea $A_1A_2A_3$ un triángulo, de lados respectivamente opuestos a_1, a_2, a_3 y área S.

Se consideran los puntos

$$\begin{aligned} M_1, M_2 &\in (A_2A_3)\,; P_1, P_2 \in (A_3A_1)\,; Q_1, Q_2 \in (A_1A_2) \text{ tales que} \\ M_1P_2 &\parallel A_1A_2; \quad M_2Q_1 \parallel A_1A_3; \quad P_1Q_2 \parallel A_2A_3. \end{aligned}$$

Sean

$$\{B_1\} = M_2Q_1 \cap M_1P_2; \quad \{B_2\} = P_1Q_2 \cap M_1P_2; \quad \{B_3\} = M_2Q_1 \cap Q_2P_1.$$

Llamemos σ al área del triángulo $B_1B_2B_3$; y finalmente, sean $k_1, k_2.k_3$ las distancias de B_1, B_2, B_3 a A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2, respectivamente.

Demostrar que

$$\sum_{i=1}^{3} k_ik_{i+1}a_ia_{i+1} + 4\sqrt{\sigma S} \cdot \left(\sum_{i=1}^{3} k_ia_i\right) \geq 2S\,(S - 4\sigma)\,,$$

donde los subíndices se toman congruentes módulo 3.

COMENTARIO DE PÁGINAS WEB (28)

Una nueva revista digital: *Mathematical Reflections,* de Titu Andreescu

http://reflections.awesomemath.org

Este año, 2006, es el primero de funcionamiento de una nueva revista digital, *Mathematical Reflections,* cuyo editor es Titu Andreescu, ahora en la Universidad de Texas en Dallas, bien conocido en el ámbito de la Olimpiada Internacional y en las páginas de problemas de *Gazeta matematica,* por ejemplo. La revista se ofrece gratuitamente a todos los internautas interesados, y en ella, además de artículos extraordinariamente interesantes (en su 6º número aparece, por ejemplo, un artículo del Prof. Mircea Lascu sobre desigualdades entre la suma de las medianas y las simedianas de un triángulo), se proponen problemas para todos los niveles: junior, senior, undergraduate y de olimpiadas. Los artículos figuran escritos en inglés. El nivel de los problemas es, en general, alto: no se pueden esperar problemas fáciles si se quiere subir el nivel de nuestros estudiantes.

Además de la revista, la organización *Awesome Mathematics* ofrece un campamento de verano para alumnos interesados en la resolución de problemas difíciles. Hay que decir que un buen número de estudiantes iberoamericanos asistieron al mismo en 2006 y sería bueno que ese número se ampliase en años sucesivos. La información sobre formularios de inscripción, cómo pedir becas para ayudar al pago y todo lo necesario para acudir al campamento es accesible a través de un enlace desde la propia revista.
Auguramos un gran éxito a esta nueva revista digital, que facilita gracias a la tecnología problemas y artículos de extraordinario interés para los estudiantes y profesores de matemáticas, del mundo entero.

Valladolid, diciembre de 2006
Francisco Bellot
Editor de la REOIM

DIVERTIMENTOS MATEMÁTICOS (28)

Excepcionalmente, en esta ocasión presentamos dos temas dentro de los Divertimentos.

I

Una situación planteada por Andy Liu en Mathematical Mayhem, 1988

El año 1988 fue el primero en el que un grupo de estudiantes olímpicos de Canadá puso en marcha la revista *Mathematical Mayhem,* que posteriormente se refundiría con *Crux Mathematicorum.*
En su número inicial, y con un propósito perfectamente serio, Andy Liu, que en seguida apoyó la iniciativa de Ravi Vakil y sus compañeros, planteó la situación que describimos a continuación, para evitar el bien conocido "temor a las demostraciones" que hoy atenaza a muchos estudiantes (y hay que hacer constar que la culpa no es suya….). El objetivo es, partiendo de los postulados que se citan más abajo, demostrar los teoremas que siguen:

Consideramos la situación en la que algunos leones muerden a algunos corderos.
Postulado 1: Hay al menos 2 leones.
Postulado 2: Cada león muerde a, al menos, tres corderos.
Postulado 3: Para cualquier par de leones, hay exactamente un cordero que es mordido por los dos.
Postulado 4: Para cualquier par de corderos, hay al menos un león que ha mordido a ambos.

Demuestre, si puede, los 8 teoremas siguientes:

Teorema 1: Hay al menos dos corderos.
Teorema 2: Cada cordero ha sido mordido por, al menos, tres leones.
Teorema 3: Para cualquier par de corderos, hay exactamente un león que los ha mordido a los dos.
Teorema 4: Para cualquier par de leones, hay al menos un cordero que ha sido mordido por los dos.
Teorema 5: Para cualquier león del conjunto, hay al menos un cordero que no ha sido mordido por él.
Teorema 6: Para cualquier cordero del conjunto, hay al menos un león que no lo ha mordido.

Teorema 7: Para cualquier par de leones, existe al menos un cordero que no ha sido mordido por ninguno de los dos.
Teorema 8: Para cualquier par de corderos, existe al menos un león que no ha mordido a ninguno de ellos.

Invitamos a los lectores de REOIM a que demuestren estos teoremas, o elijan algunos de ellos como postulados y prueben los postulados que se habrán convertido en teoremas.

II
Plebiscito sobre la proposición matemática más bella

Asigne a cada proposición que sigue una puntuación entre 0 y 10 (valen los empates). Envíe el resultado, a ser posible por correo electrónico, al editor:
Francisco Bellot Rosado
franciscobellot@gmail.com,
acompañado de los comentarios o sugerencias que considere adecuados. En algún número de REOIM 2007 haremos público el resultado del plebiscito.

A) Hay infinitos números primos.
B) Sólo hay cinco poliedros regulares
C) El cuadrilátero de área máxima, de lados prefijados *a,b,c y d*, es el inscrito en una circunferencia.
D) No hay triángulos equiláteros cuyos vértices sean puntos con coordenadas enteras.
E) Todo mapa plano se puede colorear con 4 colores.
F) Raíz cuadrada de 2 es irracional.
G) El gran teorema de Fermat
H) Pi es trascendente.
I) Toda matriz cuadrada es raíz de su polinomio característico.
J) Un icosaedro regular inscrito en un octaedro regular divide a las aristas de éste en la razón áurea.
K) La fórmula de Euler para poliedros: Caras + Vértices = Aristas + 2.
L) Si los puntos del plano se colorean con tres colores, hay un par de puntos del mismo color cuya distancia mutua es 1.
M) Una aplicación continua del disco unidad cerrado en sí mismo tiene un punto fijo.
N) El teorema de Pitágoras
O) El conjunto de los números racionales es numerable.

Valladolid, diciembre 2006
Francisco Bellot

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

Número

29

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

Número 29 (enero - febrero 2007)
ISSN – 1698-277X

Índice

Artículos, notas y lecciones de preparación olímpica

J.L.Ayme: **El teorema de Sondat**

Problemas para los más jóvenes (29)

Soluciones a cinco problemas del número 28 y a uno del número 16, por Bruno Salgueiro Fanego, Vivero, España.
Problemas del Canguro Matemático – 15 años

Problemas de nivel medio y de olimpiadas (28)

Solución a un problema de la URSS 1973 (vol. 28), por Miguel Amengual Covas, Santanyí, España.
Problemas propuestos en la Olimpíada del Portugal 2007.

Problemas

Problema 122(Corrección): Lamentablemente, la solución publicada de este problema contiene un error insalvable, por lo que el editor presenta excusas, agradeciendo además a un lector por haberlo advertido. Presentamos una nueva solución, de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, España.
Problema 136: recibidas soluciones muy similares de: Jorge Espinoza Guevara, Lima, Perú; Daniel Góngora García, Lima, Perú; José Hernández Santiago, Oaxaca, México; Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, España; Bruno Salgueiro Fanego, Vivero, España; Vicente Vicario García, Huelva, España y del proponente.
Presentamos la solución de Vicario.
Problema 137: recibidas soluciones similares de: Daniel Góngora García, Lima, Perú; José Hernández Santiago, Oaxaca, México; Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, España; Bruno Salgueiro Fanego, Vivero, España; Vicente Vicario García, Huelva, España; y del proponente.
Presentamos la solución de José Hernández Santiago.
Problema 138: recibidas soluciones de: Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, España; Bruno Salgueiro Fanego, Vivero, España; y del proponente.
Presentamos la solución de Lasaosa.
Problema 139: recibidas soluciones de: Floro D. Aranda Ballesteros, Córdoba, España; Dones Colmenárez, Barquisimeto, Venezuela; Jorge Espinoza Guevara, Lima, Perú; Daniel Góngora García, Lima, Perú; Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, España; Ricard Peiró, Valencia, España; Gabriel A. Reyes, San Salvador, El Salvador; Bruno Salgueiro Fanego, Vivero, España; y del proponente.

Presentamos la solución y generalización de Lasaosa.

Problema 140: recibidas soluciones con corrección al enunciado, de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, España; y Vicente Vicario García, Huelva, España.

Presentamos ambas soluciones.

Problemas propuestos 141-145

Comentario de páginas web

Olimpíada Matemática de Perú

.

Divertimentos matemáticos

Cerebro de Matemático. Howard W. Eves

El stock de divertimentos que tiene el editor está prácticamente agotado, por lo que agradecerá de los lectores el envío de materiales para esta sección

Editor: Francisco Bellot Rosado

Con el apoyo de la Subdirección General de Cooperación Internacional

MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA

EL TEOREMA DE SONDAT

UNA DEMOSTRACIÓN PURAMENTE SINTÉTICA

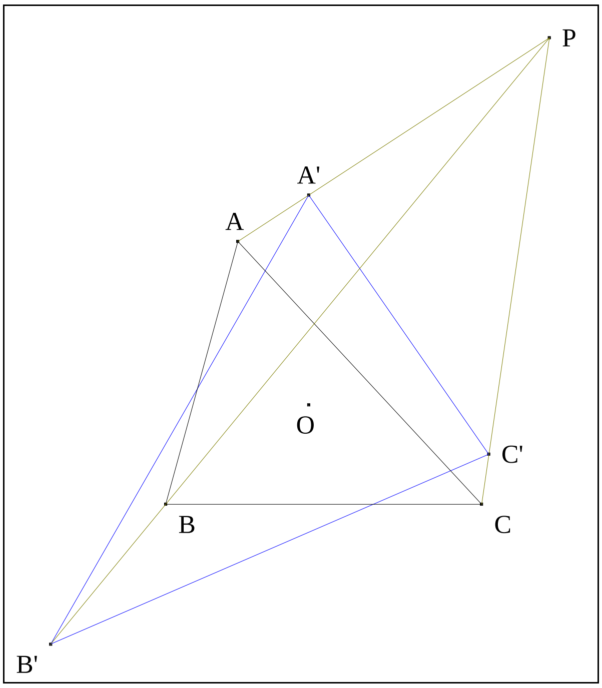
Jean - Louis AYME

Lycée Lislet Geoffroy, 97400 St Denis, Île de la Réunion, France

Resumen. Presentamos una demostración enteramente sintética del teorema de Pierre Sondat, así como una breve nota histórica. Esta prueba está basada en dos lemas que conducen, primero, al pequeño teorema de Sondat y en segundo lugar al teorema de Sondat. Todos los resultados citados pueden ser probados sintéticamente.

ESQUEMA DE LA DEMOSTRACIÓN

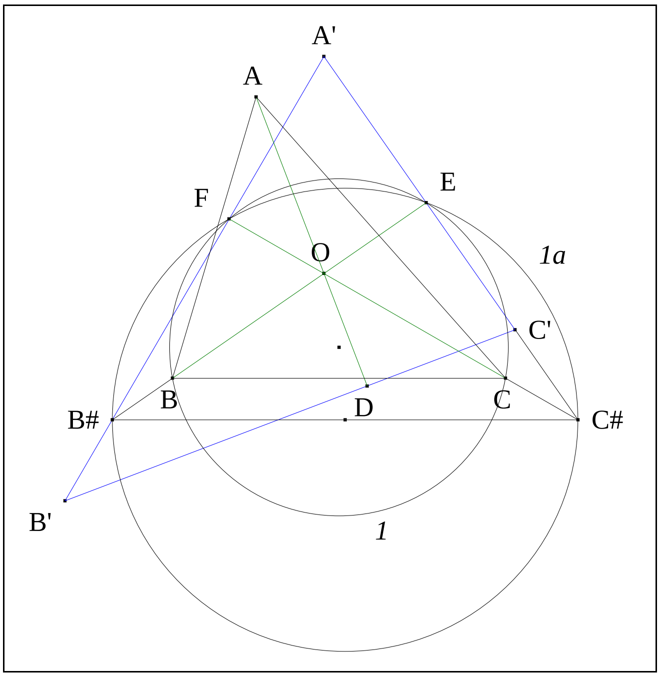
1. Lema 1



Hipótesis:	ABC, A'B'C'	dos triangulos bilogicos (cf. Anexo 6) en posicion general,
	O	el centro común de ortología de ABC y A'B'C'
y	P	el punto de intersección de las rectas (AA') y (BB').

Conclusión : la recta (CC') pasa por P.

Demostración :



- Sean D, E, F los puntos de intersección de (AO) y (B'C'), de (BO) y (C'A'), de (CO) y (A'B').

- Escolio : por hipotesis, (AOD) ⊥ (B'C') y (A'O) ⊥ (BC)
  (BOE) ⊥ (C'A') y (B'O) ⊥ (CA)
  (COF) ⊥ (A'B') y (C'O) ⊥ (AB).

- Sean B#, C# los puntos de intersección de (BE) y (A'B'), de (CF) y (A'C').

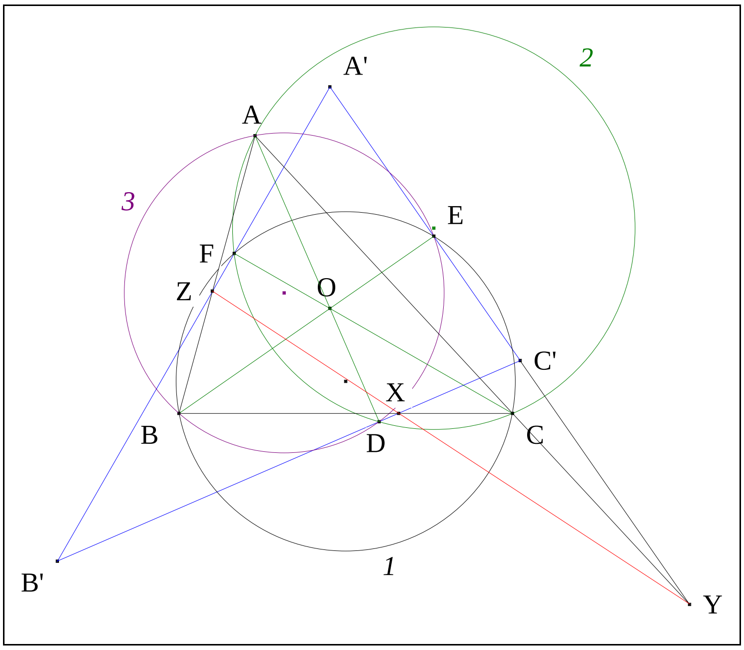
- Tenemos : O es el ortocentro del triángulo A'B#C# ;
  en consecuencia, (B#C#) ⊥ (A'O) ;
  por hipótesis, (A'O) ⊥ (BC) ;
  luego de ahí se sigue que (B#C#) // (BC).

- Escolio : la circunferencia de diámetro [B#C#] pasa por E y F.

- Llamemos *1a* a esa circunferencia.

- Conclusion parcial : por un réciproco del teorema de Reim (cf. Anexo 2) aplicado a *1*a,
  Los puntos B, C, E y F son concíclicos.

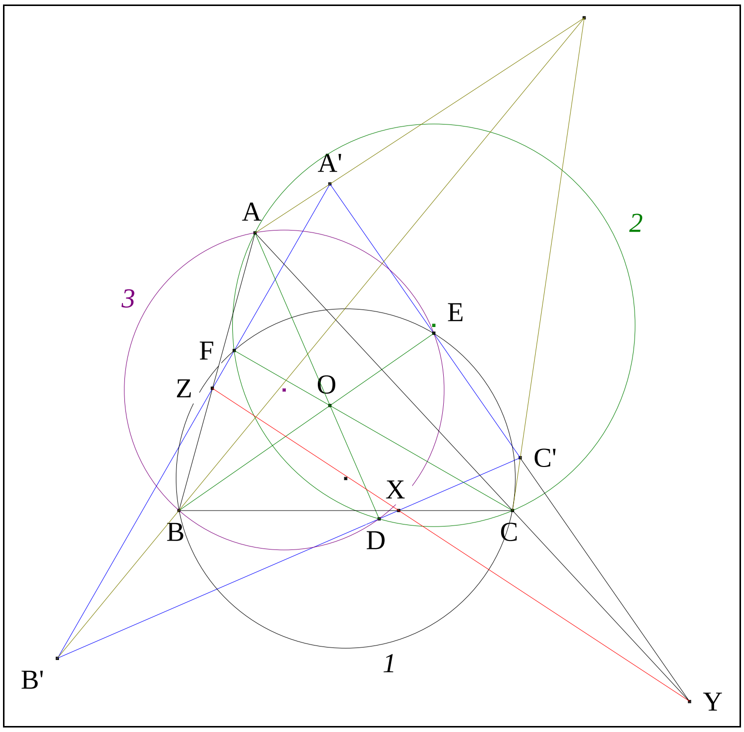
- Llamemos *1* a esa circunferencia.



- Mutatis mutandis, demostraríamos que los puntos C, A, F y D son concíclicos
  los puntos A, B, D y E son concíclicos.

- Llamemos 2, 3 a esas dos últimas circunferencias
  y X, Y, Z los puntos de intersección de (B'C') y (BC), de (C'A') y (CA), de (A'B') y (AB).

- Según un teorema de Dergiades (cf. Anexo 3), los puntoss X, Y y Z están alineados.



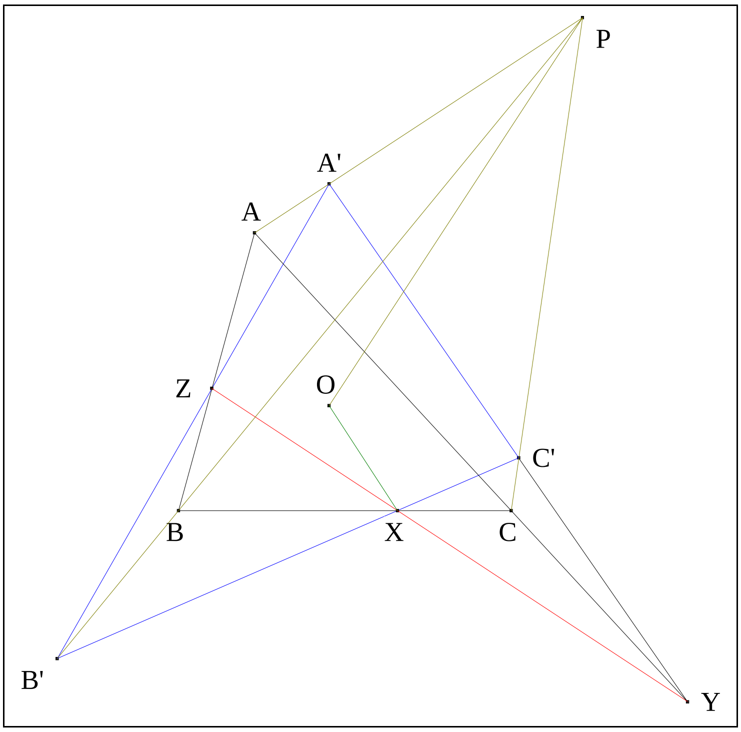
- Según el teorema de los triángulos de Desargues (cf. Anexo 4),
  Por ser (XYZ) el eje de perspectiva de ABC y A'B'C', P es el centro de perspectiva de ABC y A'B'C'.

- Conclusión : la recta (CC') pasa por P.

Enunciado tradicional : dos triángulos bilogicos son perspectivos.

El resultado a recordar : dados dos triángulos bilógicos en posición general,
dos vértices de uno y sus proyecciones sobre los lados correspondientes del otro, son concíclicos.

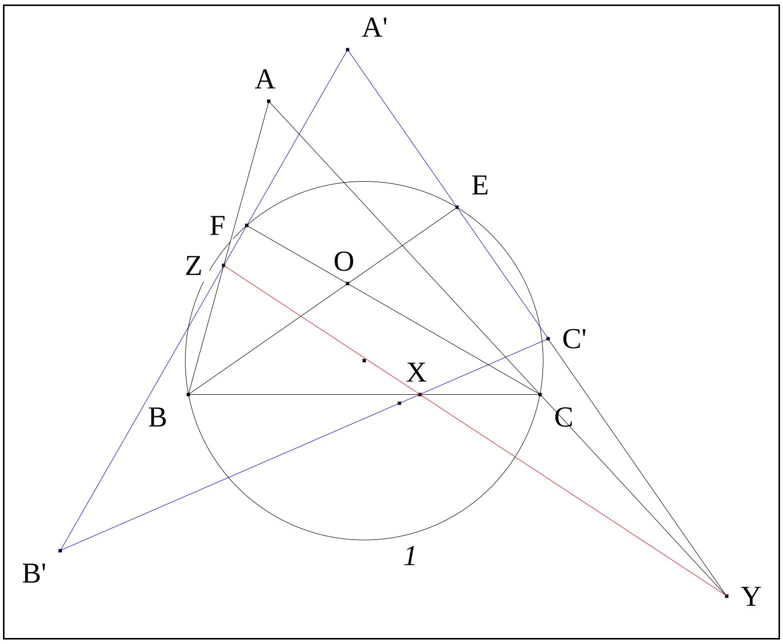
2. Lema 2



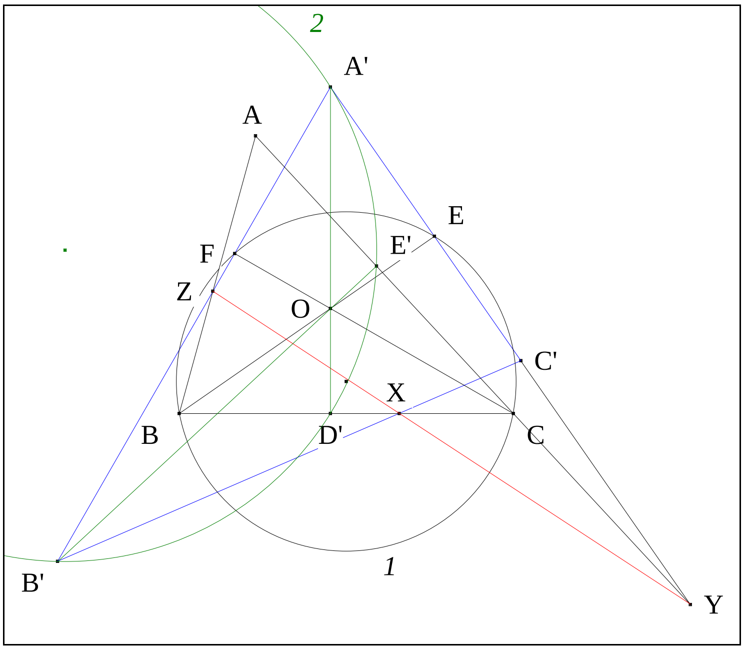
Hipótesis :	ABC, A'B'C'	dos triángulos bilógicos en posicion general,
	O	el centro común de ortología de ABC y A'B'C',
	P	el centro de perspectiva de ABC y A'B'C',
y	(XYZ)	el eje de perspectiva de ABC y A'B'C'.

Conclusión : las rectas (OX) y (AA'P) son perpendiculares.

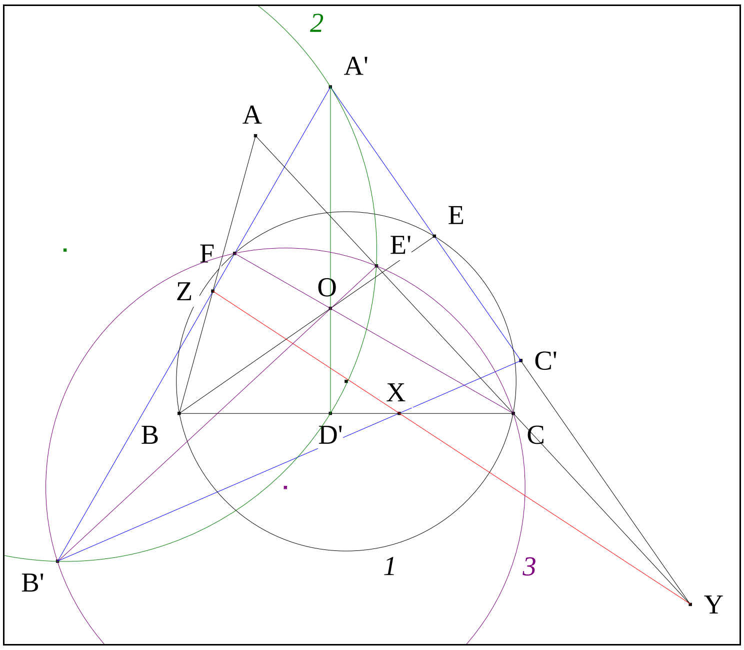
Demostración :



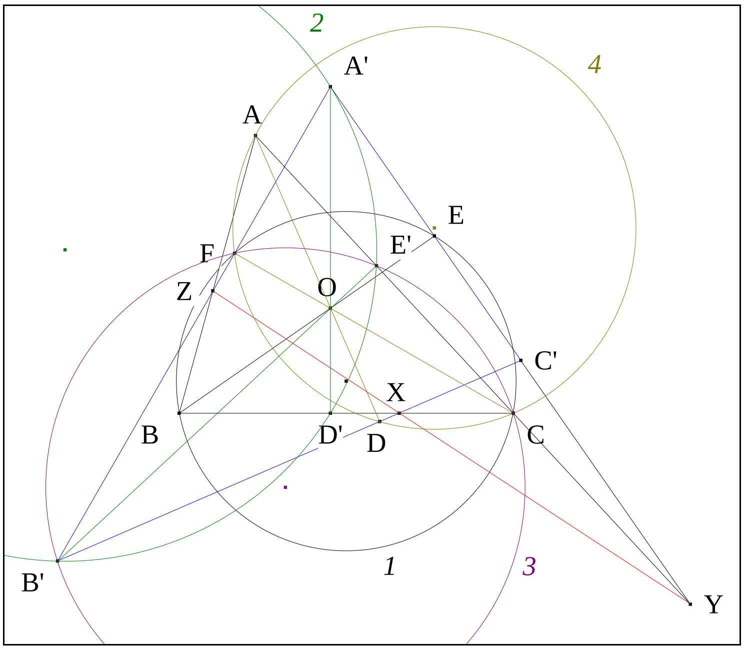
- Sean E, F los puntos de intersección de (BO) y (C'A'), de (CO) y (A'B').
- Según el lema 1, los puntos B, C, E y F son concíclicos.
- Llamemos *1* a esa circunferencia.



- Sean D', E' los puntos de intersección de (A'O) y (BC), de (B'O) y (CA).
- Según el lema 1, los puntos A', B', D' y E' son concíclicos.
- Llamamos *2* a esa circunferencia.
- Potencia del punto O respecto al círculo *2*, $\overline{OA'}.\overline{OD'} = \overline{OB'}.\overline{OE'}$.

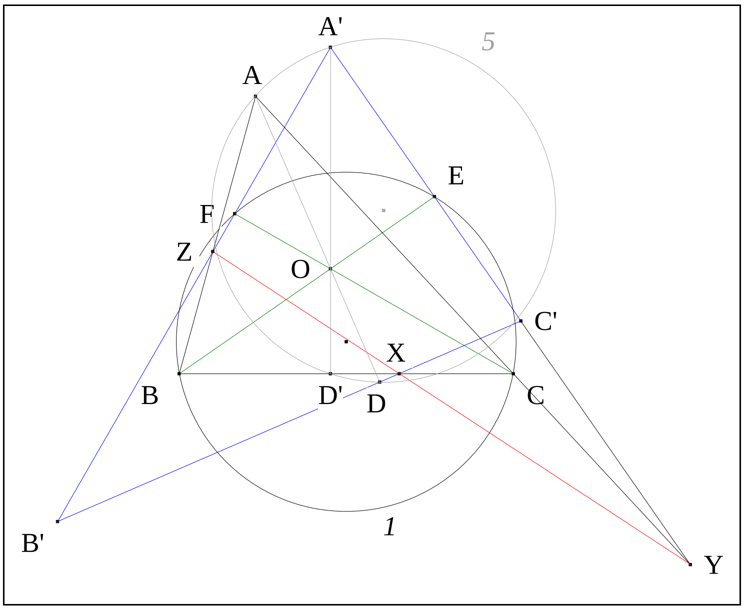


- Llamemos 3 a la circunferencia de diámetro [B'C] ; pasa por F y E'.
- Potencia del punto O respecto al círculo 3, $\overline{OB'}\,.\overline{OE'} = \overline{OC}\,.\overline{OF}$.



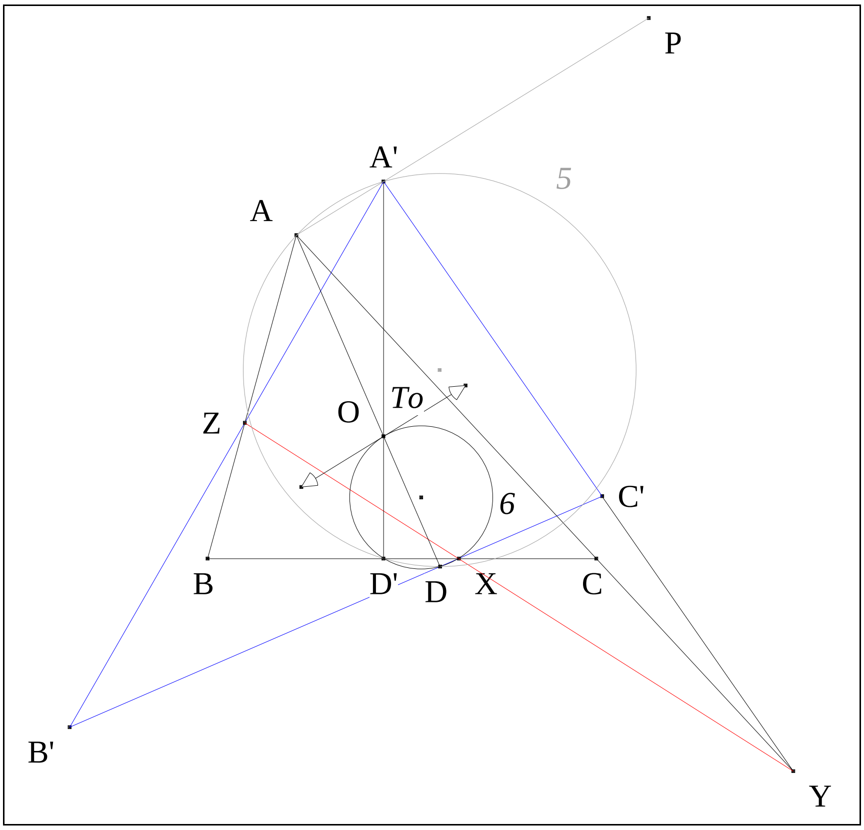
- Sea D el punto de intersección de (AO) y (B'C')
- Según el lema 1, los puntos A, C, F y D son concíclicos.
- Llamemos *4* a esa circunferencia.
- Potencia del punto O respecto al círculo *4*, $\overline{OC}\,.\overline{OF} = \overline{OA}\,.\overline{OD}$;

  Por la transitividad de la igualdad, =, $\overline{OA'}\,.\overline{OD'} = \overline{OA}\,.\overline{OD}$.



- Conclusión parcial : los puntos A, A', D y D' son concíclicos.

- Llamemos *5* a esa circunferencia.



- Escolio : la circunferencia de diámetro [OX] pasa por D y D'.

- Llamemos *6* esa circunferencia
  y To la tangente a *6* en O.

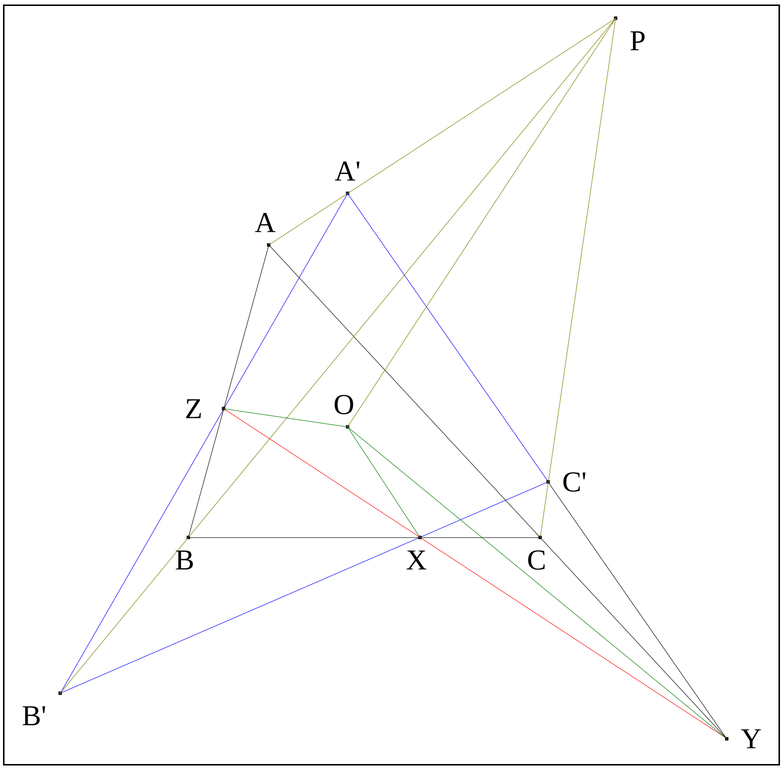
- Por definición de tangente, (OX) ⊥ To.

- En un caso particular del teorema de Reim (cf. Anexo 1) aplicado a *5* y *6*, To // (AA') ;

en consecuencia, (OX) ⊥ (AA').

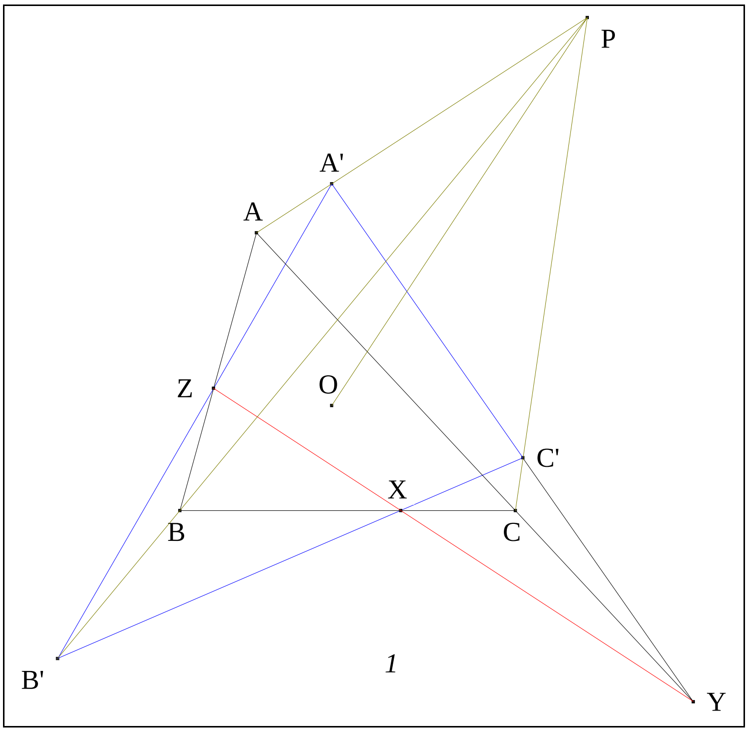
- Conclusión : las rectas (OX) y (AA'P) son perpendiculares.

Escolio : otras dos perpendicularidades



- Mutatis mutandis, probaríamos que las rectas (OY) y (BB'P) son perpendiculares
  las rectas (OZ) y (CC'P) son perpendiculares.

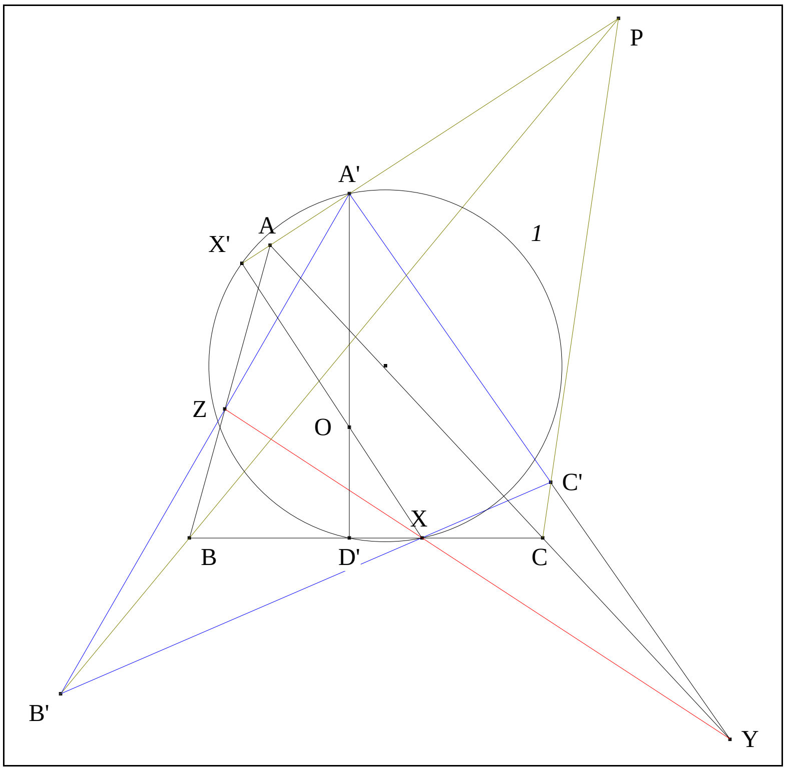
3. El pequeño teorema de Sondat



Hipótesis :	ABC, A'B'C'	dos triángulos bilógicos en posicion general,
	O	el centro común de ortología de ABC y A'B'C',
	P	el centro de perspectiva de ABC y A'B'C',
y	(XYZ)	el eje de perspectiva de ABC y A'B'C'.

Conclusión : las rectas (OP) y (XYZ) son perpendiculares.

Demostración :

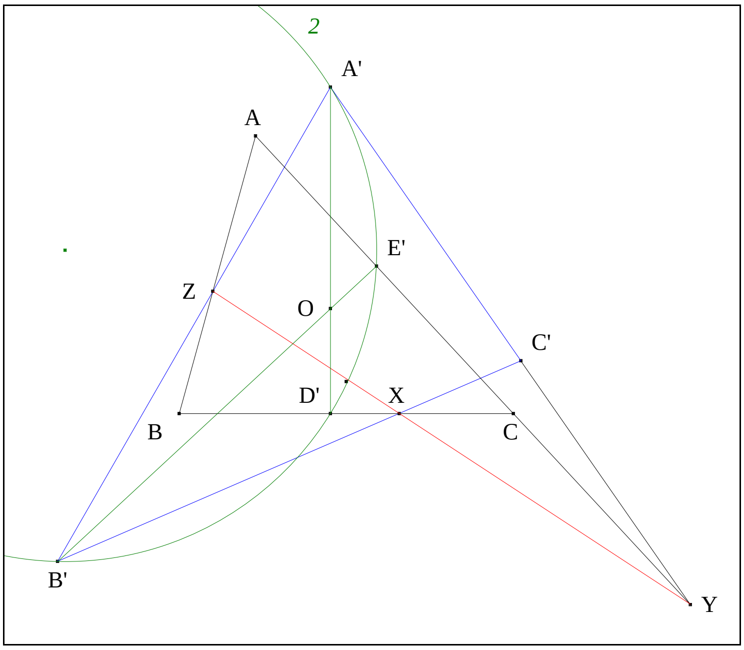


- Llamemos D' al punto de intersección de (A'O) y (BC),
  y X' al punto de intersección de (OX) y (PAA').

- Escolio : el círculo de diámetro [A'X] pasa por D' y X'.

- Llamemos *1* a esa circunferencia.

- Potencia de O respecto a *1*, $\overline{OX}\,.\overline{OX'} = \overline{OA'}\,.\overline{OD'}$.

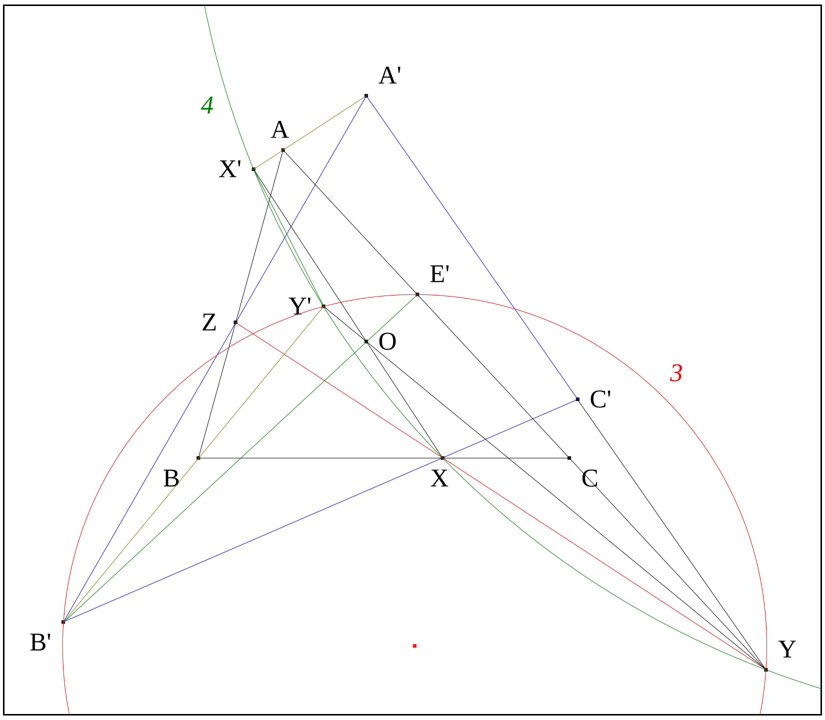


- Llamemos E' al punto de intersección de (B'O) y (CA).

- Según el lema 1, los puntos A', B', D' y E' son concíclicos.

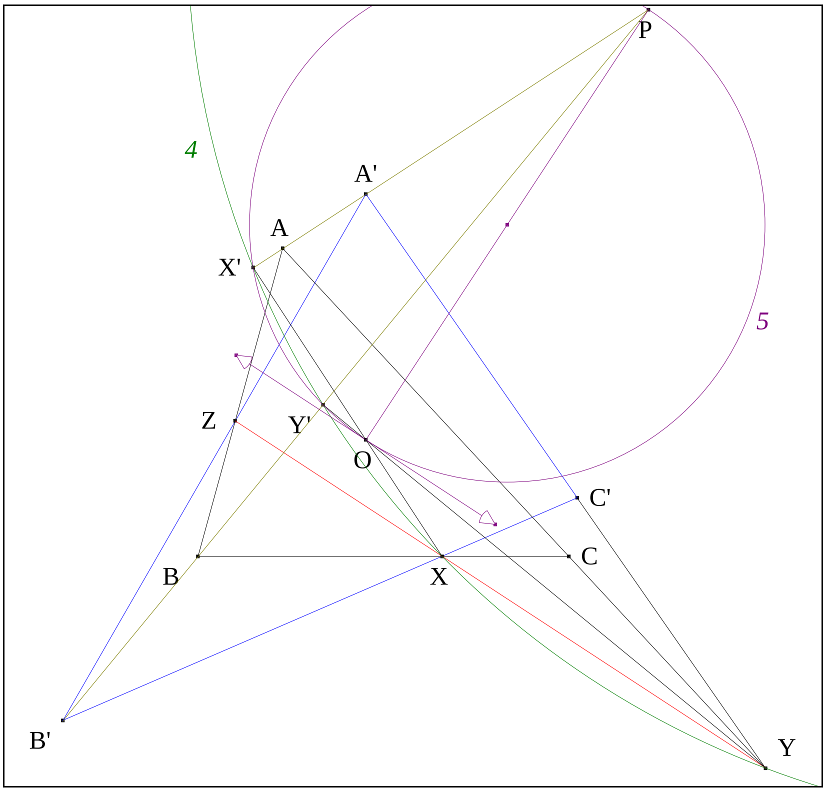
- Llamemos *2* a esa circunferencia.

- Potencia de O respecto a *2*, $\overline{OA'}\,.\overline{OD'} = \overline{OB'}\,.\overline{OE'}$.



- Sea Y' el punto de intersección de (OY) y (BB').
- Escolio : el círculo de diámetro [B'Y] pasa por E' y por Y'.
- Sea *3* esa circunferencia.
- Potencia de O respecto a *3*, $\overline{OB'}.\overline{OE'} = \overline{OY'}.\overline{OY'}$;

  Por la transitividad de la igualdad, =, $\overline{OX}.\overline{OX'} = \overline{OY}.\overline{OY'}$.
- Conclusión parcial : los puntos X, X', Y e Y' son concíclicos.
- Sea *4* esa circunferencia.



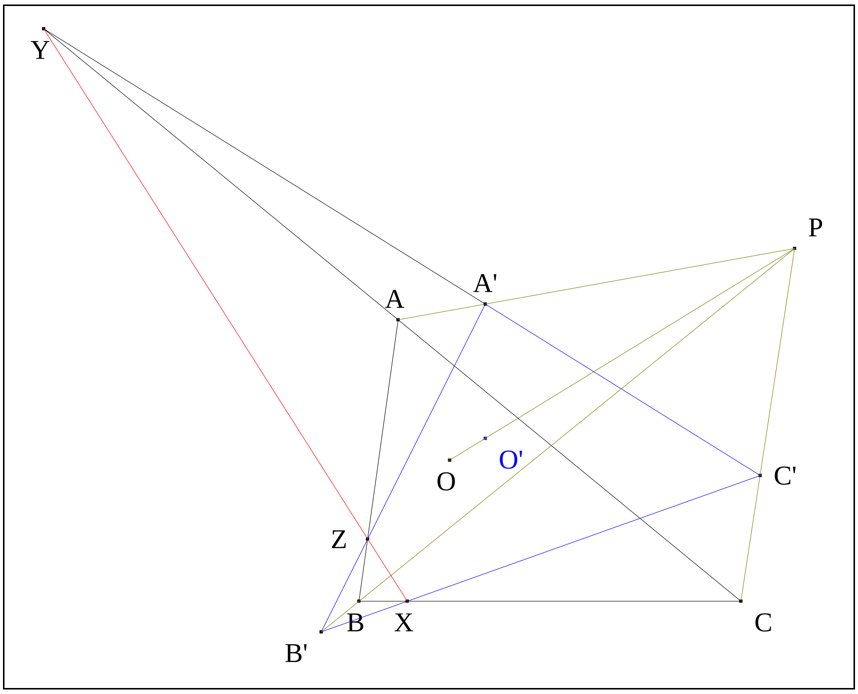
- Sea *5* la circunferencia de diámetro [OP] ; pasa por X' e Y' ;
  y To la tangente à *5* en O.

- En un caso particular del teorema de Reim (cf. Anexo 1) aplicado a *4* y *5*, (XY) // To.

- Por definición de tangente, To $\perp$ (OP) ;
  en consecuencia, (XY) $\perp$ (OP).

- Conclusión : las rectas (OP) y (XYZ) son perpendiculares.

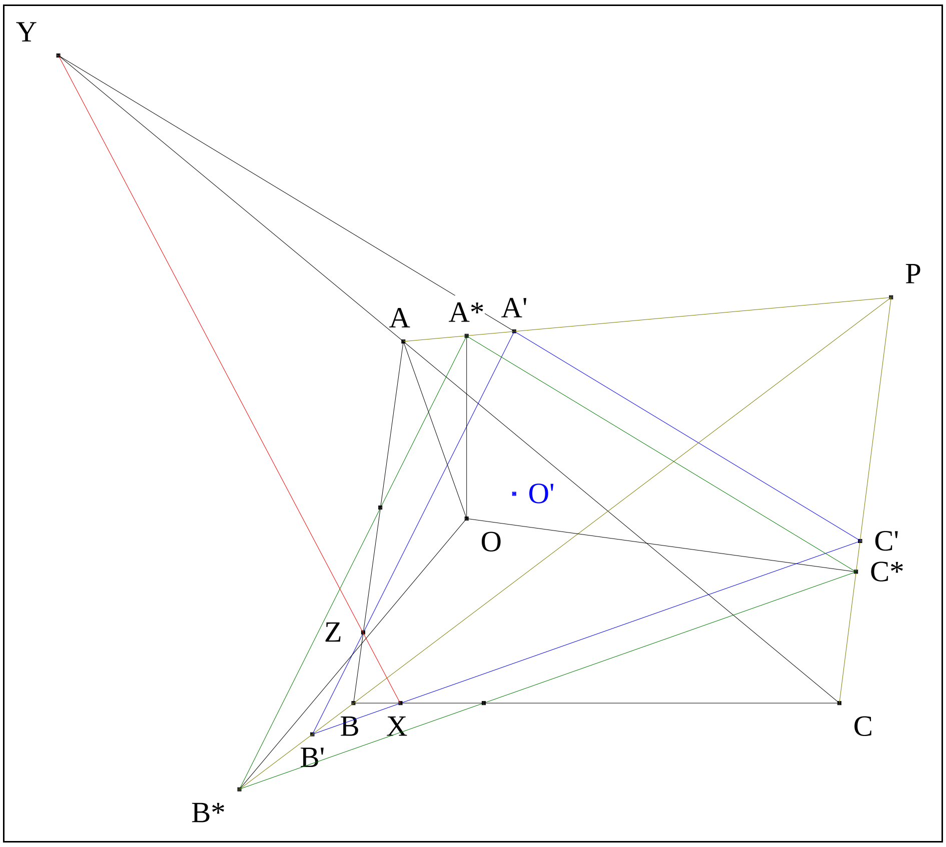
4. El teorema de Sondat [1]



Hipótesis :	ABC, A'B'C'	dos triángulos ortológicos y perspectivos en posición general,
	O	el centro de ortología de ABC respecto à A'B'C',
	O'	el centro de ortología de A'B'C' respecto a ABC,
	P	el centro de perspectiva de ABC y A'B'C',
y	(XYZ)	el eje de perspectiva de ABC y A'B'C'.

Conclusión : la recta (OO') pasa por P y es perpendicular à (XYZ).

Demostración :



- Escolio : las rectas (AA'), (BB') y (CC') son concurrentes en P.

- Partimos del triángulo ABC.

- Sean A* el punto de intersección de la perpendicular à (BC) que pasa por O con (PAA'),
  B* el punto de intersección de la paralela à (A'B') que pasa por A* con (PBB')
  y C* el punto de intersección de la paralela à (B'C') que pasa por B* con (PCC').

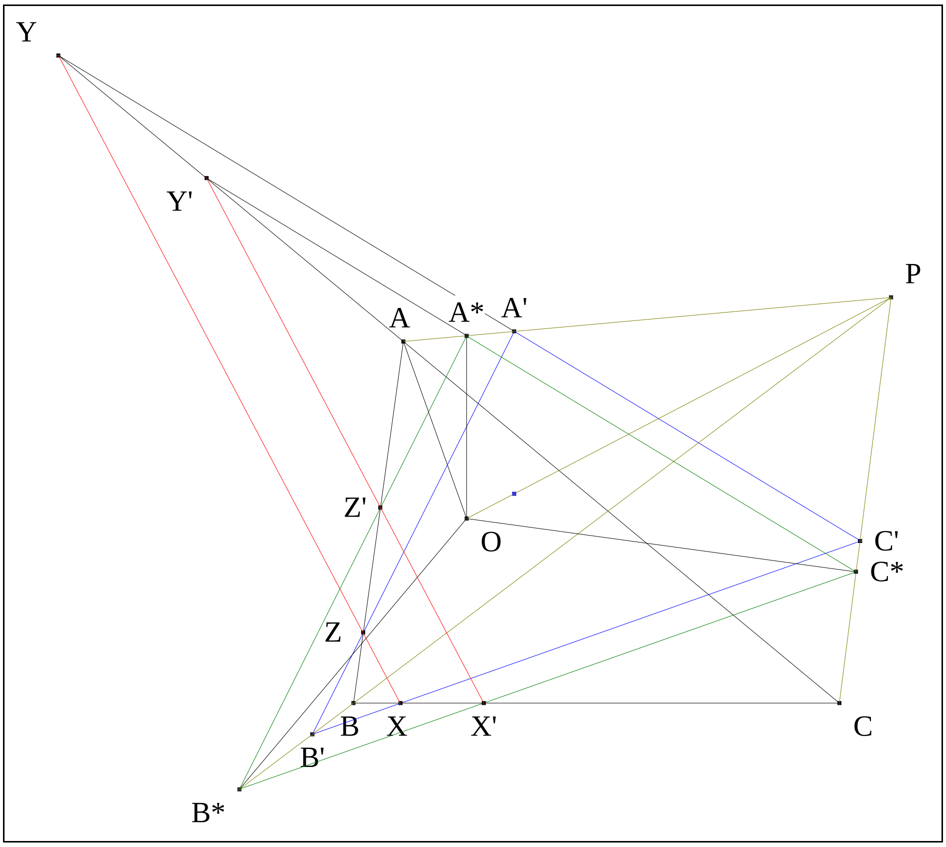
- Por el teorema débil de Desargues aplicado a los triángulos A*B*C* y A'B'C' ,en perspectiva de centro P, las rectas (A*C*) y (A'C') son paralelas. (cf Anexo 5)

- Escolio : A*B*C* y A'B'C' sont homotéticos y P es su centro de homotecia.

- Por hipótesis, (AO) ⊥ (B'C') ;
  tenemos : (B'C') // (B*C*) ;
  en consecuencia, (AO) ⊥ (B*C*).

- Mutatis mutandis, demostraríamos que (BO) ⊥ (C*A*)
  (CO) ⊥ (A*B*).

- Conclusión parcial : A*B*C* y ABC sont bilogicos y O es su centro común de ortología.

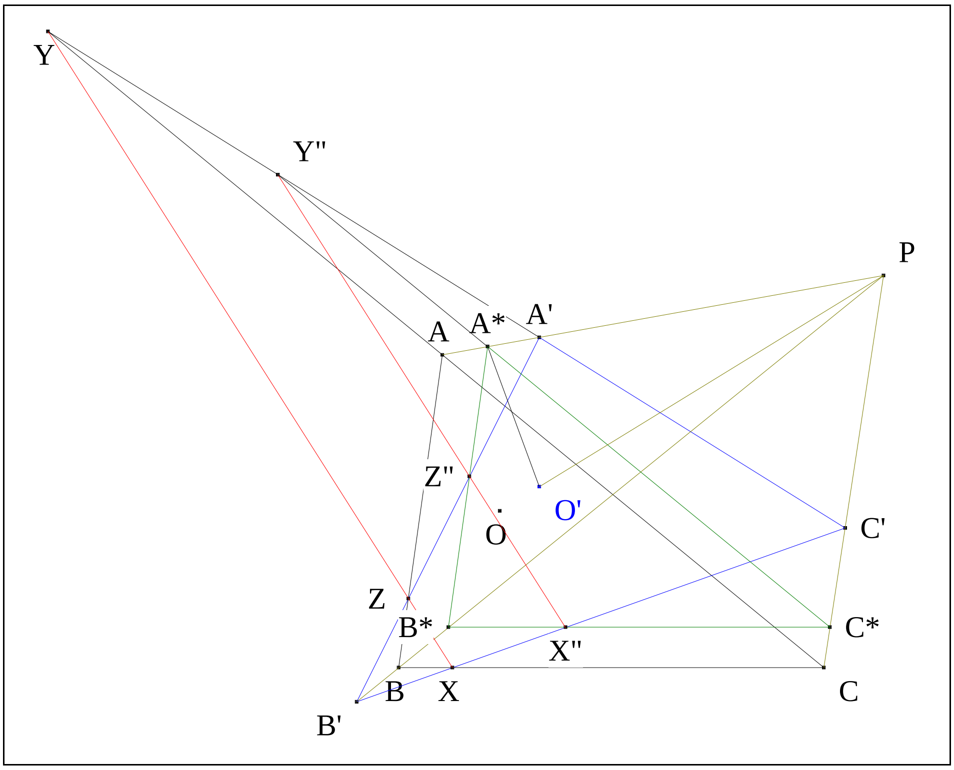


- Sean X', Y', Z' los puntos de intersección de (B*C*) y (BC), de (C*A*) y (CA), de (A*B*) y (AB).

- Según el teorema de los dos triángulos de Desargues (cf. Anexo 5), (X'Y'Z') es el eje de perspectiva de A*B*C* et ABC.

- Según el « pequeño teorema de Sondat » (OP) ⊥ (X'Y'Z') ;
  Según el resultado "Una paralela a un eje de perspectiva" (cf. Anexo 7), (XYZ) // (X'Y'Z') ;
  en consecuencia, (OP) ⊥ (XYZ).

- Conclusión parcial : las rectas (OP) y (XYZ) son perpendiculares.



- Partimos del triángulo A'B'C'.

- Sean A* el punto de intersección de la perpendicular a (B'C') que pasa por O' con (PAA'),
  B* el puntp de intersección de la paralela a (AB) que pasa por A* con (PBB')
  y C* el punto de intersección de la paralela a (BC) que pasa por B* con (PCC').

- Escolio : A*B*C* y ABC son homotéticos y P es su centro de homotecia.

- Mutatis mutandis, demostraríamos que (1) A*B*C* y ABC son bilógicos
  (2) O es su centro común de ortología.

- Sean X", Y", Z" los puntos de intersección
  de (B*C*) y (B'C'), de (C*A*) y (C'A'), de (A*B*) y (A'B').

- Según el teorema de los dos triángulos de Desargues (cf. Anexo 5),
  (X"Y"Z") es el eje de perspectiva de A*B*C* y A'B'C'.

- Según el " pequeño teorema de Sondat", (O'P) ⊥ (X"Y"Z") ;
  Según el resultado "Una paralela a un eje de perspectiva" (cf. Anexo 7), (X"Y"Z") // (XYZ) ;
  en consecuencia, (O'P) ⊥ (XYZ).

- Por ser las rectas (OP) y (O'P) perpendiculares a la recta (XYZ), (OP) // (O'P).

- Conclusión parcial : por el postulado de Euclides, los puntos O, O' y P están alineados.

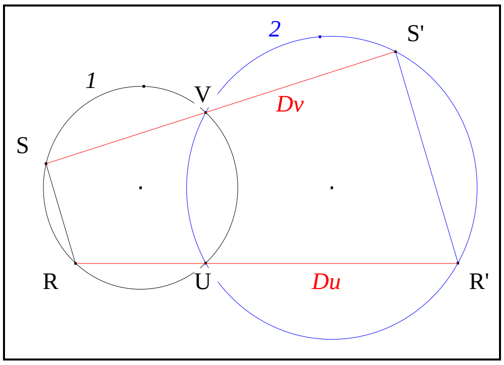
- Conclusión : la recta (OO') pasa por P y es perpendicular a (XYZ).

NOTA HISTÓRICA

Pierre Sondat fué profesor en Annecy (Francia) y es conocido por haber publicado algunos artículos notables en los *Nouvelles Annales* de 1875 a 1880.
En 1894, propone en *L'intermédiaire des mathématiciens*, una conjetura que se convertirá en el "teorema de Sondat". Al año siguiente, en la misma revista, R. Sollertinsky [2] da una demostración proyectiva difícil de comprender.
Una demostración de este resultado se encontraría también en el libro *Parmi les plus belles figures de Géométrie dans l'espace* de Victor Thébault en el que no hay ninguna figura.
En 1922, en la revista *Mathesis*, Joseph Neuberg [3] da otra referencia [4] del teorema de Sondat y presenta une prueba proyectiva que atribuye a Servais [5].
En 1924, Victor Thébault [6] generaliza el teorema a los tetraedros. En 1952, Thébault [7] presenta una demostración métrica del teorema de Sondat recurriendo a los teoremas de Menelao y Stewart, asi como una demostración de su generalización.
En 1994, Rina y Marius Mitrea [8] proponen a su vez una solución puramente vectorial, así como Alexei Zaslavsky [9].

ANEXOS

1. El teorema de Reim [10]

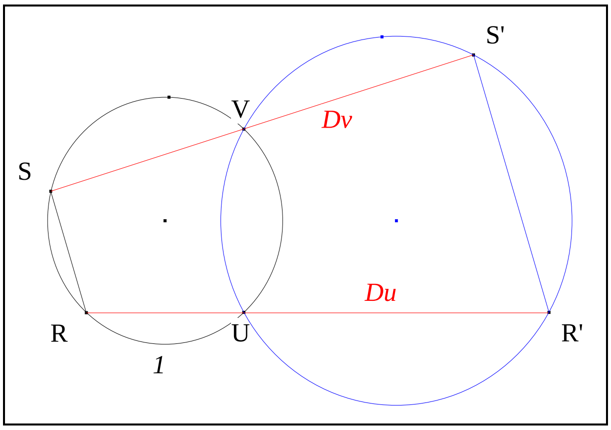


Hipótesis : *1*, *2* dos cículos secantes,
U, V los puntos de intersección de *1* y *2*,
*D*u una recta que pasa por U,
R, R' los segundos puntos de intersección de *D*u con *1*, *2*,
*D*v una recta que pasa por V
y S, S' los segundos puntos de intersección de *D*v con *1*, *2*.

Conclusión : las rectas (RS) y (R'S') son parallelas.

Escolio : si los puntos R y S coinciden, entonces la tangente a *1* en R y (R'S') son parallelas.

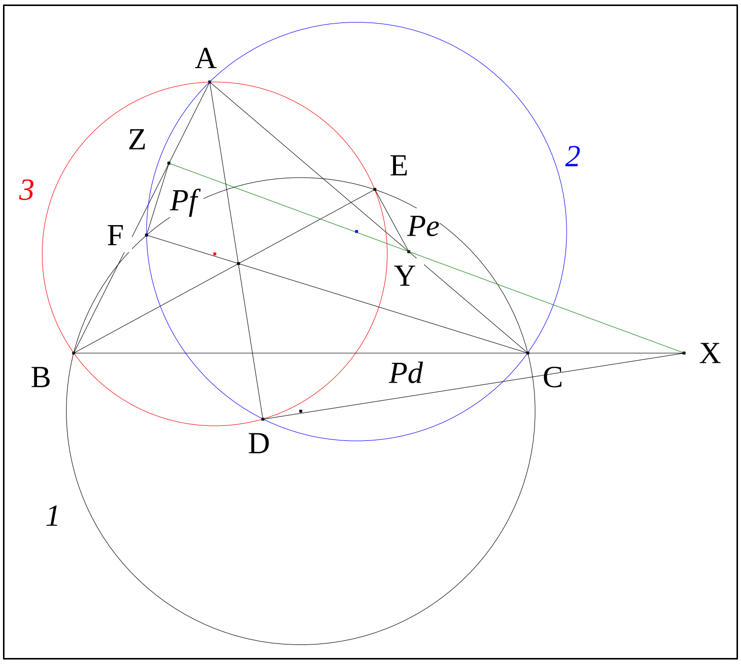
2. Un recíproco del teorema de Reim



Hipótesis :	*1*	una circunferencia,
	U, V	dos puntos de *1*,
	*D*u, *D*v	dos rectas que pasan por U, por V,
	R, S	los segundos puntos de intersección de *D*u, *D*v con *1*,
y	R', S'	dos puntos de *D*u, *D*v tales que (R'S') sea paralela à (RS)

Conclusión : los puntos U, V, R' y S' son concíclicos.

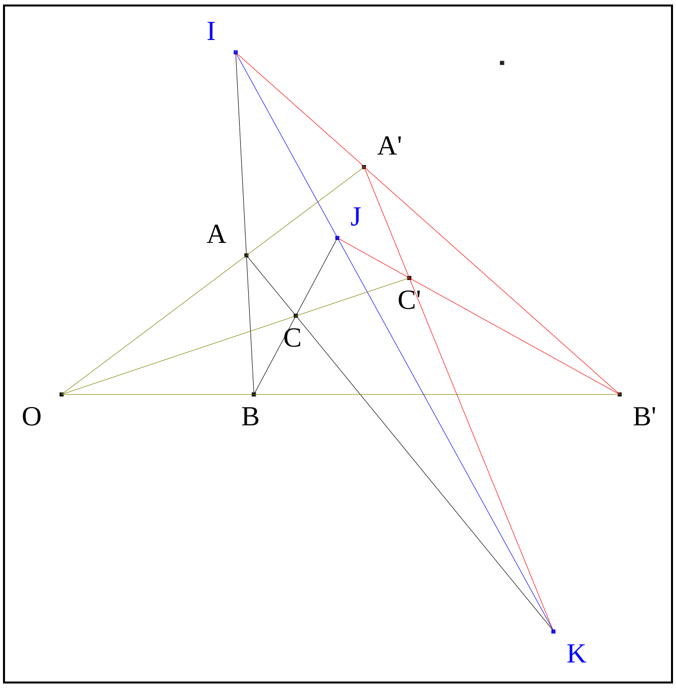
3. Un teorema de Dergiades [11] reformulado por el autor



Hipótesis :	ABC	un triángulo,
	1, *2*, *3*	tres circulos passando por B y C, por C y A, por A y B,
	D, E, F	los segundos puntos de intersección de *2* y *3*, de *3* y *1*, de *1* y *2*,
	*P*d , *P*e , *P*f	las perpendiculares a las rectas (AD), (BE), (CF) en D, E, F,
y	X, Y, Z	los puntos de intersección de *P*d y (BC), de *P*e y (CA), de *P*f y (AB).

Conclusión : los puntos X, Y y Z están alineados.

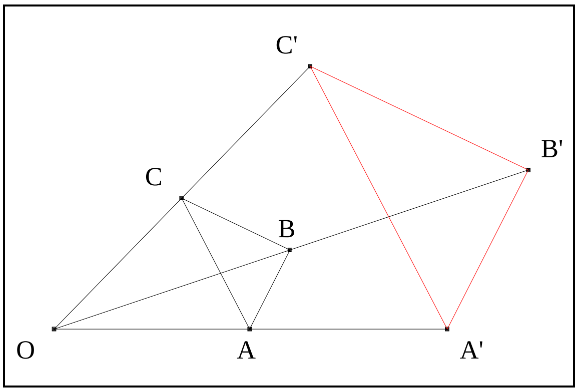
5. El teorema de los dos triángulos de Desargues



Hipótesis :	ABC	un triángulo,
	A'B'C'	un triángulo tal que les rectas (AA') y (BB') sean concurrentes,
	O	el punto de intersección de (AA') y (BB'),
e	I, J, K	los puntos de intersección de (AB) y (A'B'), de (BC) y (B'C'), de (CA) y (C'A').

Conclusión : (CC') pasa par O *si, y solamente si*, los puntos I, J y K están alineados.

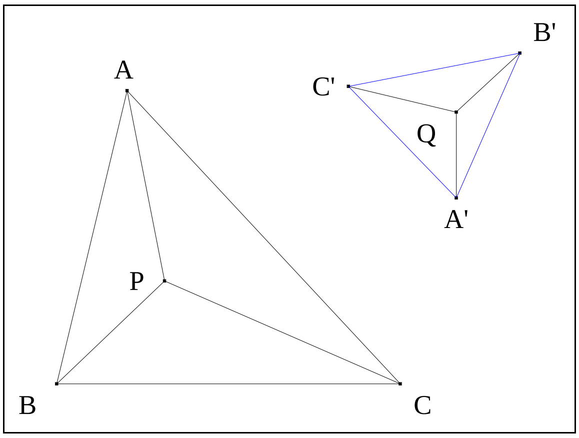
5. El teorema débil de Desargues



Hipótesis :	ABC	un triángulo,		
y	A'B'C'	un triángulo tal que	(1)	(AA') y (BB') sean concurrentes en O
			(2)	(AB) sea paralela a (A'B')
			(3)	(BC) sea paralela a (B'C')

Conclusión : (CC') pasa por O *si, y solamente si*, (AC) es paralela a (A'C').

6. Dos triángulos ortologicos



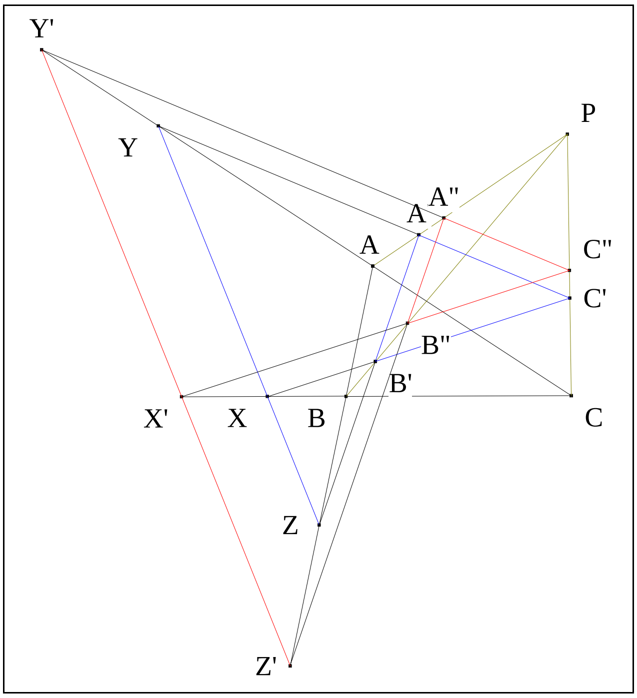
Definictiones :	el triángulo ABC es ortológico al triángulo A'B'C' si las perpendiculares trazadas por los vértices de ABC sobre los lados correspondientes de A'B'C' son concurrentes. Ese punto de concurrencia, llamado P, es el centro de ortología de ABC respecto a A'B'C'.

La relación "es ortológico à" siendo simétrica ,implica que las perpendiculares trazadas por los vértices de A'B'C' sobre los lados correspondientes de ABC son también concurrentes.
Ese punto de concurrencia, llamado Q, es el centro de ortología de A'B'C' respecto ABC.

De una manera general, diremos que ABC y A'B'C' son ortológicos.

Cuando los dos centros de ortología coincidan, diremos que los triángulos son bilógicos.

7. Una paralela a un eje de perspectiva



Hipótesis :	ABC, A'B'C'	dos triángulos perspectivos en posición general,
	P	el centro de perspectiva de A'B'C' y ABC,
	(XYZ)	el eje de perspectiva de A'B'C' y ABC,
	A"B"C"	un triángulo homotético y en perspectiva de centro P con A'B'C'
y	(X'Y'Z')	el eje de perspectiva de A"B"C" y ABC.

Conclusión : (X'Y'Z') es paralela a (XYZ).

REFERENCIAS

[1] Sondat P., Question 38, *L'intermédiaire des mathématiciens* (1894) 10.
[2] Sollertinsky R., *L'intermédiaire des mathématiciens* (1895) 94 ou 44.
[3] Neuberg J., Bibliographie du triangle et du tétraèdre, *Mathesis* (1922) 163.
[4] Fuhrmann, Dissertation, Königsberg (1902).
[5] Servais Cl., *Nouvelles Annales* (1919) 260.
[6] Thébault V., *Bulletin* de l'Académie royale de Belgique (1921) 57.
[7] Thébault V., Perspective and orthologic triangles and tetrahedrons, *Monthly*, 59, vol. 1 (1952) 24-28.
[8] Mitrea D. and M., A Generalization of a Theorem of Euler, *Monthly*, 101, vol. 1 (1994) 55-58.
[9] Zaslavsky A., http://garciacapitan/auna.com/
[10] F. G.-M., Théorème 124, *Exercices de Géométrie*, 6-ième éd. (1920), Rééd. J. Gabay, Paris (1991) 283.
[11] Dergiades N., Othogonal colinearity theorem, Message *Hyacinthos* # 6466 du 02/02/2003.

Agradecimientos. Agradezco profundamente al Profesor Francisco Bellot Rosado por haber releído, traducido y referenciado este artículo.

Jean-Louis Ayme jeanlouisayme@yahoo.fr

PROBLEMAS PARA OS MÁIS NOVOS (REOIM, nº 16)

5. Demostrar que $\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}+\frac{1}{\sqrt{6+\sqrt{6}}}>\frac{5}{6}$

Solución de Bruno Salgueiro Fanego (Viveiro; España)

$$2<4\Rightarrow\sqrt{2}<\sqrt{4}=2\Rightarrow 2+\sqrt{2}<2+2=4\Rightarrow\sqrt{2+\sqrt{2}}<\sqrt{4}=2\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}>\frac{1}{2};$$

$$6<9\Rightarrow\sqrt{6}<\sqrt{9}=3\Rightarrow 6+\sqrt{6}<6+3=9\Rightarrow\sqrt{6+\sqrt{6}}<\sqrt{9}=3\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{6+\sqrt{6}}}>\frac{1}{3}$$

Así, $\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}+\frac{1}{\sqrt{6+\sqrt{6}}}>\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$

PROBLEMAS PARA OS MÁIS NOVOS (REOIM, nº 28)

28.1. Demostrar que, calquera que sexa o número real t, se verifica a desigualdade

$$t^4 - t + \frac{1}{2} > 0$$

Solución de Bruno Salgueiro Fanego (Viveiro, Lugo; España)

Sexa, para calesquera números positivos a e real t, $f_a(t) = t^4 - t + a$. Probarase a continuación que o menor valor de a que fai que $f_a(t) \geq 0$ para calquera t é $a = 3 \cdot 2^{-\frac{8}{3}}$:

Se $t \leq 0$: $t^4 \geq 0$, $-t \geq 0$, $a > 0$ implican $f_a(t) > 0$;

Se $t \geq 1$: $t \geq 0$, $t - 1 \geq 0$, $t^2 + t + 1 > 0$ implican $f_a(t) = t(t-1)(t^2 + t + 1) + a \geq 0 + a > 0$;

Se $0 < t < 1$: $f_z(t) = 4t^3 - 1$ é negativa se $t < 2^{-\frac{2}{3}}$, nula se $t = 2^{-\frac{2}{3}}$ e positiva se $t > 2^{-\frac{2}{3}}$, logo $f_a(t)$ é decrecente
en $\left(0, 2^{-\frac{2}{3}}\right)$, crecente en $\left(2^{-\frac{2}{3}}, 1\right)$ e presenta un mínimo absoluto en $t = 2^{-\frac{2}{3}}$, de valor
$f_a\left(2^{-\frac{2}{3}}\right) = a - 3 \cdot 2^{-\frac{8}{3}}$, logo $f_a(t) \geq a - 3 \cdot 2^{-\frac{8}{3}}$, con igualdade se e só se $t = 2^{-\frac{2}{3}}$

Ademais, $f_a\left(2^{-\frac{2}{3}}\right) = 0$ se e só se $a = 3 \cdot 2^{-\frac{8}{3}}$. Por tanto, $f_a(t) \geq 0$ para calquera t se e só se $a \geq 3 \cdot 2^{-\frac{8}{3}}$, $f_a(t) > 0$ para calquera t se e só se $a > 3 \cdot 2^{-\frac{8}{3}}$ e $f_{3 \cdot 2^{-\frac{8}{3}}}(t) = 0$ se e só se $t = 2^{-\frac{2}{3}}$

Así, está probada a seguinte

Proposición: Para calquera número real t, verifícase a desigualdade $t^4 - t + 3 \cdot 2^{-\frac{8}{3}} \geq 0$, con igualdade se e só se $t = 2^{-\frac{2}{3}}$

E o problema pedido é un corolario desta proposición, pois, para calquera número real t, resulta que $t^4 - t + \frac{1}{2} > t^4 - t + 3 \cdot 2^{-\frac{8}{3}} \geq 0$

PROBLEMAS PARA OS MÁIS NOVOS (REOIM, nº 28)

28.2. Por un punto interior P ao triángulo ABC, trázanse tres paralelas aos lados, que dividen a estes en tres segmento, de lonxitudes respectivas a_1, a_2, a_3 (o lado BC), b_1, b_2, b_3 (o lado CA) e c_1, c_2, c_3 (o lado AB).

Demostrar que

$$a_1b_1c_1 = a_2b_2c_2 = a_3b_3c_3$$

Solución de Bruno Salgueiro Fanego (Viveiro, Lugo; España)

Como ABC e PA_1A_2 teñen os lados respectivamente paralelos, terán os ángulos respectivamente iguais, sendo polo tanto semellantes, do cal se deduce que os seus lados son proporcionais; $\frac{AB}{PA_1} = \frac{BC}{A_1A_2} = \frac{CA}{A_2P}$, ou sexa, $\frac{CA}{CB_1} = \frac{BC}{A_1A_2} = \frac{AB}{C_2B}$, isto é, $\frac{b_1+b_2+b_3}{b_1} = \frac{a_1+a_2+a_3}{a_2} = \frac{c_1+c_2+c_3}{c_3}$;
analogamente, ABC é semellante a B_2PB_1, de onde
$\frac{AB}{AC_1} = \frac{CA}{A_2P} = \frac{BC}{A_2C}$, isto é, $\frac{c_1+c_2+c_3}{c_1} = \frac{b_1+b_2+b_3}{b_2} = \frac{a_1+a_2+a_3}{a_3}$;
ABC é semellante a C_1C_2P, de onde $\frac{a_1+a_2+a_3}{a_1} = \frac{c_1+c_2+c_3}{c_2} = \frac{b_1+b_2+b_3}{b_3}$
Multiplicando membro a membro esas tres igualdades, resulta que

$$\frac{b_1+b_2+b_3}{b_1}\cdot\frac{c_1+c_2+c_3}{c_1}\cdot\frac{a_1+a_2+a_3}{a_1} = \frac{a_1+a_2+a_3}{a_2}\cdot\frac{b_1+b_2+b_3}{b_2}\cdot\frac{c_1+c_2+c_3}{c_2}$$

$$= \frac{a_1+a_2+a_3}{a_3}\cdot\frac{b_1+b_2+b_3}{b_3}\cdot\frac{c_1+c_2+c_3}{c_3};$$

dividindo entre o numerador común $(a_1+a_2+a_3)\cdot(b_1+b_2+b_3)\cdot(c_1+c_2+c_3)$, resultan as igualdades dos denominadores: $b_1c_1a_1 = a_2b_2c_2 = a_3b_3c_3$

PROBLEMAS PARA OS MÁIS NOVOS (REOIM, nº 28)

28.3. Demostrar que se $0 < a < 1$ **e** $0 < b < 1$**, entón**

$$\frac{ab(1-a)(1-b)}{(1-ab)^2} < \frac{1}{4}$$

Solución de Bruno Salgueiro Fanego (Viveiro, Lugo; España)

Das hipótesis dedúcese que todos os factores a, b, $1-a$, $1-b$ e $(1-ab)^2$ son estritamente positivos, logo

$$\frac{ab(1-a)(1-b)}{(1-ab)^2} < \frac{1}{4} \Leftrightarrow 4ab(1-a)(1-b) < (1-ab)^2 \Leftrightarrow 0 < 1-2ab+a^2b^2-4ab+4a^2b+4ab^2-4a^2b^2$$

$$\Leftrightarrow 0 < 1-2a(3-2a)b+a(4-3a)b^2$$

Sexa, para cada $0 < x < 1$, $f_a(x) = 1-2a(3-2a)x+a(4-3a)x^2$; hai que probar que $0 < f_a(b)$.

Probarase que, se $0 < x < 1$, entón $0 < f_a(x)$:

A gráfica de f_a é unha parábola cun mínimo absoluto no vértice $V\left(\frac{3-2a}{4-3a}, f_a\left(\frac{3-2a}{4-3a}\right)\right)$;

$f_a\left(\frac{3-2a}{4-3a}\right) = 1-\frac{2a(3-2a)^2}{4-3a}+\frac{a(3-2a)^2}{4-3a} = \frac{4-12a+12a^2-4a^3}{4-3a} = \frac{4(1-a)^3}{4-3a}$, que é estritamente positivo por selo numerador e denominador.

Así, se $0 < x < 1$, tense que $0 < \frac{4(1-a)^3}{4-3a} < f_a(x)$

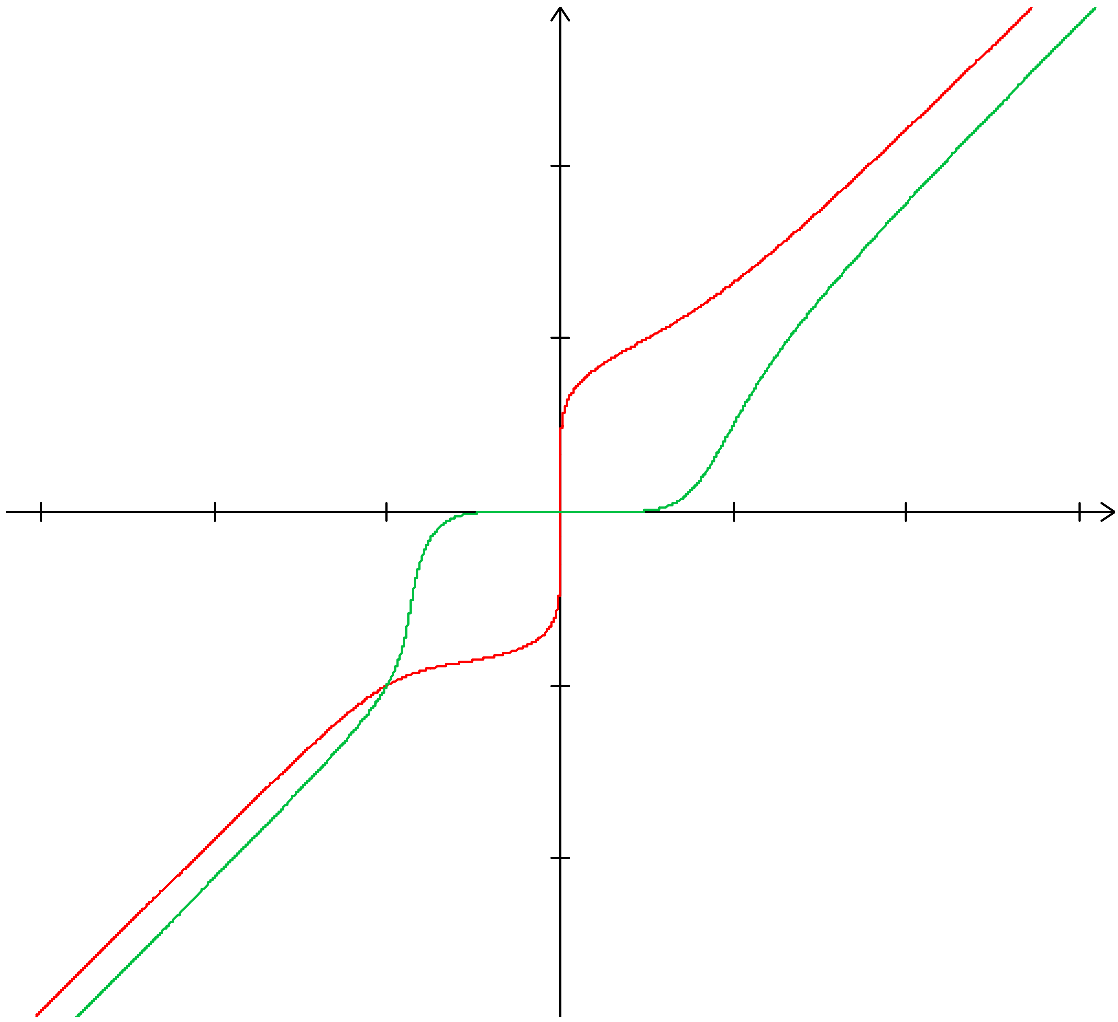
PROBLEMAS PARA OS MÁIS NOVOS (REOIM, nº 28)

28.4. Resolver o sistema de ecuacións

$$\left.\begin{array}{l}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)=1+y^7\\(1+y)(1+y^2)(1+y^4)=1+x^7\end{array}\right\}$$

Solución de Bruno Salgueiro Fanego (Viveiro, Lugo; España)

Sendo $F(x,y)=(1+x)(1+x^2)(1+x^4)-(1+y^7)=x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7-y^7$ e $G(x,y)=F(y,x)$, o sistema a resolver é $\left.\begin{array}{l}F(x,y)=0\\G(x,y)=0\end{array}\right\}$, cuxas solucións son os puntos de corte das gráficas das funcións $F(x,y)=0$ e $G(x,y)=0$, simétricas unha da outra respecto da bisectriz dos cadrantes primeiro e terceiro, que poden obterse utilizando por exemplo o método de Newton-Cramer para representación de curvas alxébricas; obtéñense así as seguintes gráficas, das que se conclúe que as únicas solucións do sistema son $x=y=-1$ ou $x=y=0$; a de vermello é a curva $F(x,y)=0$ e a de verde é a $G(x,y)=0$:



PROBLEMAS PARA OS MÁIS NOVOS (REOIM, nº 28)

28.5. Demostrar que se as lonxitudes a, b, c dos lados do triángulo son tales que $a+b+c=1$, entón

$$a^2+b^2+c^2+4abc<\frac{1}{2}$$

Solución de Bruno Salgueiro Fanego (Viveiro, Lugo; España)

Sexan p o semiperímetro, R o circunraio, r o inraio e S a área do triángulo.

Lema 1: $abc=4Rrp$

Proba: $pr=S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ab\frac{c}{2R}=\frac{abc}{4R}$

Lema 2: $a^2+b^2+c^2=2\left(p^2-r^2-4Rr\right)$

Proba:

$p^2r^2=S^2=p(p-a)(p-b)(p-c)=p\left[p^3-(a+b+c)p^2+(ab+bc+ca)p-abc\right]$

$p\left[p^3-2pp^2+(ab+bc+ca)p-4Rrp\right]=p^2\left(-p^2+ab+bc+ca-4Rr\right)$

$\Rightarrow\ r^2=-p^2+ab+bc+ca-4Rr\ \Rightarrow\ ab+bc+ca=r^2+p^2+4Rr$

$\Rightarrow\ a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=(2p)^2-2\left(r^2+p^2+4Rr\right)=2\left(p^2-r^2-4Rr\right)$

Proposición: $a^2+b^2+c^2+4abc=2p^2-2r^2-8Rr+16Rrp$

Corolario: Se $p=\frac{1}{2}$, entón $a^2+b^2+c^2+4abc=\frac{1}{2}-2r^2<\frac{1}{2}$

Proba: Pola proposición, $p=\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ a^2+b^2+c^2+4abc=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2-2r^2-8Rr+16Rr\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-2r^2$

OLIMPÍADA JUVENIL DE MATEMÁTICA 2006
CANGURO MATEMÁTICO
PRUEBA PRELIMINAR
NOVENO GRADO

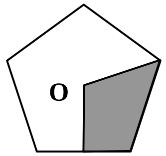
1) La competencia Canguro en Europa y en algunos países de América se ha efectuado cada año desde 1991. Así que el concurso Canguro en 2006 es el:

A 14º   B 16º   C 13º   D 15º   E 17º

2) 20·(0 + 6) – (20·0) + 6 =

A 0   B 12   C 106   D 114   E 126

3) El punto **O** es el centro del pentágono regular. ¿Qué tanto por ciento del pentágono está sombreado?



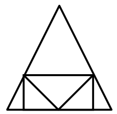
A 10%   B 20%   C 25%

D 30%   E 40%

4) La abuela le dice a sus nietos: “Si horneo 2 tortas para cada uno, tendré suficiente masa para 3 tortas más. Pero si horneo 3 tortas para cada uno, no tendré suficiente masa para los últimos 2 tortas.” ¿Cuántos nietos tiene la abuela?

A 2   B 4   C 6   D 3   E 5

5) ¿Cuántos triángulos se pueden ver en la figura?



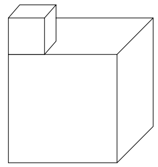
A 6   B 7   C 8

D 9   E 10

6) Una entrevista a 2006 estudiantes de una escuela reveló que 1500 de ellos participaron en la competencia Canguro y 1200 en la competencia Osezno. ¿Cuántos estudiantes entrevistados participaron en ambas competencias si 6 de los entrevistados no concursaron en ninguna de las competencias?

A 1000   B 700   C 600   D 500   E 300

7) El sólido de la figura está conformado por dos cubos. El cubo más pequeño tiene lado de 1 cm de longitud y está colocado en la parte superior del cubo grande que tiene lado de 3 cm de longitud. ¿Cuál es el área de la superficie del sólido?



A 56 cm^2 B 62 cm^2 C 58 cm^2 D 64 cm^2 E 60 cm^2

8) Una botella tiene una capacidad de 1/3 litros y está 3/4 llena de agua. ¿Cuánto quedará en la botella si se extraen 20 cl de agua?

A 24,5 cl   B 13 cl   C 7,5 cl   D 5 cl   E Quedará vacía

9) En una clase de 21 estudiantes, ningún par de niñas tiene la misma cantidad de amigos varones. ¿Cuál es el mayor número de niñas que puede haber en la clase?

A 15   B 11   C 9   D 6   E 5

10) Andrés, Horacio y Rafael ahorraron dinero para comprar una tienda de acampar para un viaje que iban a hacer. Rafael guardó el 60% del precio. Andrés ahorró el 40% de lo que faltaba y de esta forma, la parte de Horacio fue Bs. 30000. ¿Cuál era el precio, en bolívares, de la tienda de acampar?

A 50 000   B 60 000   C 125 000   D 150 000   E 200 000

11) Si es azul, es redondo. Si es cuadrado, es rojo. Es o azul o amarillo. Si es amarillo, es cuadrado. Es o cuadrado o redondo. Esto significa:

A Es rojo y redondo   B Es rojo   C Es azul y redondo

D Es un cuadrado azul   E Es amarillo y redondo

12) Varios alienígenas viajaron juntos por el espacio en la nave STAR I. Ellos son de tres colores: verde, naranja o azul. Los alienígenas verdes tienen 2 tentáculos, los naranjas tienen 3 y los azules tienen 5 tentáculos. En la nave hay tantos alienígenas verdes como naranjas y 10 alienígenas azules más que verdes. Todos juntos suman 250 tentáculos. ¿Cuántos alienígenas azules viajan en la nave?

A 40   B 25   C 30   D 15   E 20

13) Tres martes de cierto mes caen en fecha par. ¿Qué día de la semana es el día 21 de ese mes?

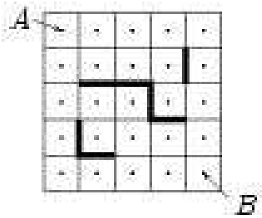
(A) Domingo (B) Sábado (C) Viernes

(D) Jueves (E) Miércoles

14) Si el canguro Saltarín se impulsa sólo con la pata izquierda logra saltar hasta 2 m; si se impulsa sólo con la pata derecha logra saltar hasta 4 m, y si se impulsa con ambas patas logra saltar hasta 7 m. ¿Cuál es el mínimo de saltos que Saltarín debe realizar para cubrir la distancia exacta de 1000 m?

(A) 176 (B) 175 (C) 150 (D) 144 (E) 140

15) Marcos y Manuel dibujaron un cuadrado de 4 x 4 y marcaron el centro de los cuadrados. Posteriormente, dibujaron obstáculos y hallaron todas las formas posibles de ir desde A hasta B usando el camino más corto evitando los obstáculos y yendo de centro en centro sólo vertical u horizontalmente. ¿Cuántos caminos encontraron los chicos bajo estas condiciones?

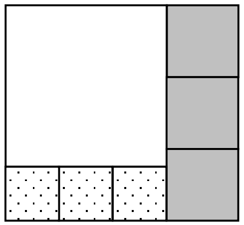


(A) 6 (B) 8 (C) 9 (D) 11 (E) 12

16) Una madre le pide a su hijo, Jorge, que haga parejas de medias para lavarlas pero él no hizo eso. Él colocó sus medias de esta manera: 5 pares negras, 10 pares marrones y 15 pares de medias grises mezcladas en una caja. Si Jorge quiere irse de viaje por 7 días, ¿cuál es el menor número de medias que necesitaría sacar de la caja para garantizar que tendrá 7 pares de medias del mismo color?

(A) 21 (B) 31 (C) 37 (D) 40 (E) 41

17) Un rectángulo se divide en 7 cuadrados. Los lados de los cuadrados sombreados miden 8. ¿Cuál es la longitud del lado del cuadrado grande?



(A) 30 (B) 24 (C) 20

(D) 18 (E) 15

18) ¿Qué numero elevado al cuadrado se aumenta en un 500%?

(A) 10 (B) 8 (C) 7 (D) 6 (E) 5

19) ¿Cuántos triángulos isósceles de área 1 tienen un lado de longitud 2?

(A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1 (E) 0

20) En el "cuadrado mágico" otros cinco números pueden ser colocados en las casillas restantes de manera que la suma de los tres números de cada columna, fila y diagonal sean la misma. ¿Cuál debe ser el valor de **a**?

30		70
100		
50		**a**

(A) 90 (B) 80 (C) 70 (D) 60 (E) 50

21) La cifra de las unidades de un número de tres dígitos es 2. Si movemos éste dígito al principio del número se reduce en 36. ¿Cuál es la suma de los dígitos del número original?

(A) 7 (B) 10 (C) 5 (D) 9 (E) 4

22) Pablo pasea en bicicleta desde un punto P hasta un punto Q con una velocidad constante. Si aumenta su velocidad en 3 m/s, llegará al punto Q 3 minutos más pronto. ¿Cuántas veces más rápido llegará Pablo al punto Q, si aumenta su velocidad en 6 m/s?

(A) 8 (B) 4,5 (C) 6 (D) 5 (E) 4

23) Una isla mágica es habitada por caballeros (los cuales siempre dicen la verdad) y mentirosos (los cuales siempre mienten). Un hombre sabio se encuentra a dos personas A y B de la isla y decide averiguar si eran caballeros o mentirosos. Cuando él le preguntó a A, "¿Ambos son caballeros?", la respuesta de A no ayudó al sabio a determinar sus identidades. Cuando él le preguntó a A, "¿Son ambos del mismo grupo?", la respuesta de A ayudó al sabio a identificarlos. ¿Cuáles eran las identidades de A y B?

(A) ambos mentirosos (B) ambos caballeros

(C) A–caballero, B–mentiroso (D) A–mentiroso, B–caballero

(E) imposible de especificar

24) ¿Cuál es el primer dígito del número natural más pequeño cuya suma de sus dígitos es igual a 2006?

(A) 5 (B) 8 (C) 1 (D) 6 (E) 3

25) La suma de tres números positivos es igual a 20,1. Luego, el producto de los dos números mayores no puede ser

(A) mayor que 99 (B) menor que 0,001 (C) igual a 75

(D) igual a 25 (E) Todos los casos anteriores son posibles

26) La familia Vidal está conformada por el padre, la madre y algunos hijos. El promedio de las edades de la familia Vidal es 18 años. El padre tiene 38 años y si se descarta la edad del padre, el promedio de la familia decrece a 14 años. ¿Cuántos niños hay en la familia Vidal?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

27) Cada cara de un cubo es pintado con un color distinto de una selección de seis colores. ¿Cuántos cubos distintos pueden obtenerse de esta manera?

(A) 30 (B) 42 (C) 36 (D) 24 (E) 48

28) La primera fila muestra 11 tarjetas, cada una con dos letras. La segunda fila muestra las tarjetas en otro orden. ¿Cuál de los siguientes arreglos podría aparecer en la parte de abajo de la segunda fila?

M	I	S	S	I	S	S	I	P	P	I
K	I	L	I	M	A	N	J	A	R	O

P	S	I	S	I	M	I	S	S	P	I

(A) ANJAMKILIOR (B) RLIIMKOJNAA (C) JANAMKILIRO

(D) RAONJMILIKA (E) ANMAIKOLIRJ

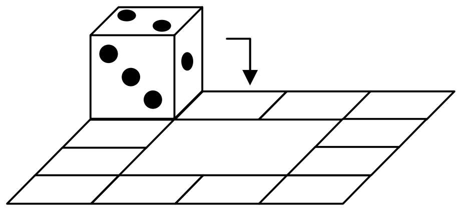
29) Si el producto de dos números enteros es igual a $2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^3$, entonces su suma podría ser:

(A) divisible por 16 (B) divisible por 8

(C) divisible por 49 (D) divisible por 5

(E) divisible por 3

30) Un dado se encuentra en la posición mostrada en la figura. Si se rueda como se indica en la figura, ¿cuántas veces deberá hacer el recorrido por el camino cuadrado de manera que retorne a la posición inicial con todas las mismas caras que tenía al empezar el recorrido?



(A) 3 (B) 1 (C) 4

(D) 2 (E) Es imposible hacerlo

Problemas de nivel medio y de Olimpiadas (28)

(URSS 1973) Una circunferencia Γ es tangente, respectivamente en A y B a dos semirrectas de origen O. La paralela a OB trazada por A vuelve a cortar a Γ en C. El segmento OC vuelve a cortar a Γ en E. Las rectas AE y OB se cortan en K.

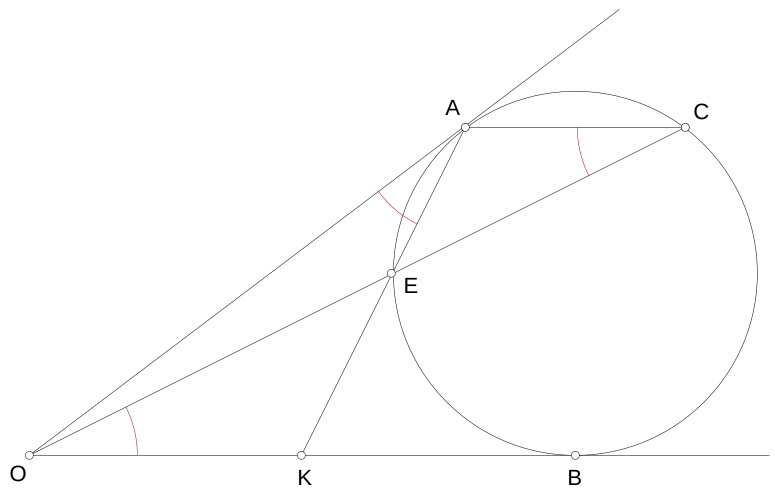
Demostrar que K es el punto medio del segmento OB.

Miguel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca, España.

Los triángulos AOK y OEK son semejantes porque tienen común el ángulo en K y, además, $\angle OAK = \angle OAE = \angle ACE = \angle ACO = \angle COK = \angle EOK$ (se sigue la penúltima igualdad al ser $AC \| OB$ y los ángulos ACO y COK alternos internos). Por consiguiente, $OK : KA = KE : OK$, esto es, $OK^2 = KE \cdot KA$.

Por otra parte, el teorema de la potencia de un punto respecto de una circunferencia aplicado a K y Γ da $KB^2 = KE \cdot KA$.

El resultado es $OK^2 = KB^2$, de donde $OK = KB$ y, al estar O, K, B alineados, concluímos que K es el punto medio del segmento OB.



Olimpíadas Portuguesas de Matemática

http://www.spm.pt/~opm

XXV OPM - 2ª Eliminatória - 17.1.2007 - Categoria B - 10º/12º

Duração: 2 horas

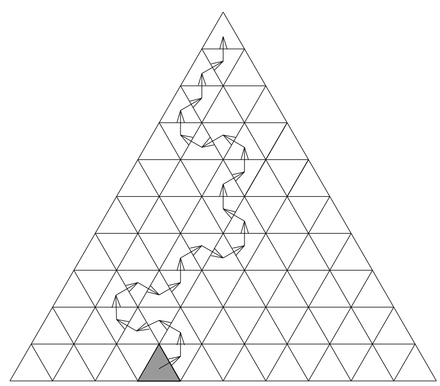
Cada questão vale 10 pontos

Justifica convenientemente as tuas respostas e indica os principais cálculos.
Não é permitido o uso de calculadoras.

1. Coloca em cada vértice de um cubo o número 1 ou o número -1 e em cada face o produto dos quatro números colocados nos seus vértices. Indica todos os valores possíveis para a soma dos 14 números assim obtidos.

2. Uma recta paralela à recta tangente em A à circunferência circunscrita ao triângulo $[ABC]$ intersecta os lados $[AB]$ e $[AC]$ nos pontos D e E, respectivamente. Sabe-se que $\overline{AD} = 6$, $\overline{AE} = 5$ e $\overline{EC} = 7$. Quanto mede $[BD]$?

3. Considera um triângulo equilátero com 10 metros de lado que está dividido em triângulos, também equiláteros, com 1 metro de lado. Uma centopeia encontra-se no triângulo da primeira linha indicado a sombreado na figura e pretende deslocar-se até ao triângulo do topo. A centopeia passa de um triângulo para outro com o qual tenha um lado em comum mas não recua nem passa para triângulos de linhas abaixo. Quantos caminhos possíveis existem?



4. Determina todos os números primos p e q, para os quais os q números

$$p,\ p+q+1,\ p+2(q+1), \ldots,\ p+(q-1)(q+1)$$

são também primos.

Problema 122

Propuesto por José Luis Díaz Barrero, Barcelona, España.

Sean a, b, c los lados de un triángulo acutángulo ABC con semiperímetro s. Demostrar que

$$\left(\frac{a}{s}\right)^3 \sec(A)+\left(\frac{b}{s}\right)^3 \sec(B)+\left(\frac{c}{s}\right)^3 \sec(C)\geq \frac{16}{9}.$$

Solución de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, España.

Podemos sustituir, utilizando el teorema del coseno:

$$a^3 \sec(A)=\frac{abc\left[\left(a^2+b^2+c^2\right)-\left(b^2+c^2-a^2\right)\right]}{2bc\cos(A)}=\frac{abc\left(a^2+b^2+c^2\right)}{b^2+c^2-a^2}-abc.$$

Rotando cíclicamente los lados y ángulos, la desigualdad a demostrar es entonces equivalente a la siguiente:

$$\frac{abc\left(a^2+b^2+c^2\right)}{s^3}\left[\frac{1}{b^2+c^2-a^2}+\frac{1}{c^2+a^2-b^2}+\frac{1}{a^2+b^2-c^2}\right]-3\frac{abc}{s^3}\geq\frac{16}{9}.$$

Podemos reescribir el corchete como

$$\frac{a^4-\left(b^2-c^2\right)^2+b^4-\left(c^2-a^2\right)^2+c^4-\left(a^2-b^2\right)^2}{\left(b^2+c^2-a^2\right)\left(c^2+a^2-b^2\right)\left(a^2+b^2-c^2\right)}=\frac{2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4}{8a^2b^2c^2\cos(A)\cos(B)\cos(C)}$$

$$=\frac{(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(b+c-a)}{8a^2b^2c^2\cos(A)\cos(B)\cos(C)}=\frac{s}{4abc}\frac{(a+b-c)(c+a-b)(b+c-a)}{abc\cos(A)\cos(B)\cos(C)}.$$

Utilizando el teorema del seno, se tiene que

$$\frac{a+b-c}{c}=\frac{\operatorname{sen}(A)+\operatorname{sen}(B)}{\operatorname{sen}(C)}-1=\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{C}{2}\right)\cos\left(\frac{C}{2}\right)}-1$$

$$=\frac{\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)-\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{C}{2}\right)}=2\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{A}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{B}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{C}{2}\right)}.$$

Se ha utilizado que al ser la semisuma de los ángulos del triángulo igual a $\pi/2$, el seno y coseno de $(A+B)/2$ son respectivamente iguales al coseno y seno de $C/2$. Entonces,

$$\frac{(a+b-c)(c+a-b)(b+c-a)}{abc}=8\operatorname{sen}\left(\frac{A}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{B}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{C}{2}\right).$$

De aquí se deduce que el miembro izquierdo de la desigualdad a demostrar es igual a

$$\frac{2\left(a^2+b^2+c^2\right)\operatorname{sen}\left(\frac{A}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{B}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{C}{2}\right)}{s^2\cos(A)\cos(B)\cos(C)}-3\frac{abc}{s^3}.$$

Utilizando la desigualdad entre medias aritmética y geométrica, y al ser ABC acutángulo, se tiene que

$$\sqrt{\cos(B)\cos(C)}\leq\frac{\cos(B)+\cos(C)}{2}=\cos\left(\frac{B+C}{2}\right)\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)\leq\operatorname{sen}\left(\frac{A}{2}\right),$$

con igualdad si y sólo si el triángulo es isósceles en A. Rotando cíclicamente los vértices y multiplicando los resultados similares, se tiene

$$\cos(A)\cos(B)\cos(C)\leq\operatorname{sen}\left(\frac{A}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{B}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{C}{2}\right),$$

con igualdad si y sólo si ABC es equilátero. Entonces, se tiene que

$$\left(\frac{a}{s}\right)^3\sec(A)+\left(\frac{b}{s}\right)^3\sec(B)+\left(\frac{c}{s}\right)^3\sec(C)\geq\frac{2\left(a^2+b^2+c^2\right)}{s^2}-3\frac{abc}{s^3},$$

con igualdad si y sólo si ABC es equilátero. Ahora bien, utilizando la desigualdad entre medias aritmética y cuadrática, y entre aritmética y geométrica, se tiene, respectivamente, que

$$a^2+b^2+c^2\geq3\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2=\frac{4}{3}s^2,\qquad abc\leq\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3=\frac{8s^3}{27},$$

con igualdad si y sólo si ABC es equilátero en ambos casos. Luego

$$\left(\frac{a}{s}\right)^3\sec(A)+\left(\frac{b}{s}\right)^3\sec(B)+\left(\frac{c}{s}\right)^3\sec(C)\geq\frac{8}{3}-\frac{8}{9}=\frac{16}{9},$$

q.e.d., dándose la igualdad si y sólo si el triángulo es equilátero.

Problema 136. (Propuesto por Ovidiu Furdui, Kalamazoo, USA).

Sea $\{a\} = a - [a]$ **la "parte decimal" o "mantisa" del número real *a*. Calcular la integral definida entre 1/*n* y 1, de la función** $\cos(\pi\{nx\})$ **donde *n* es un entero positivo.**

Resolución: (Vicente Vicario García, Universidad de Huelva, España).

Consideremos la función $\{nx\} = nx - [nx]$ que tiene como dominio de definición todos los números reales. Claramente en el intervalo $[0,1]$ presenta discontinuidades de primera especie de salto finito igual a la unidad en los puntos $x_i = i/n; i = 0,1,2,...,n$. Además es una función periódica de período $T = 1/n$ y es monótona creciente en cada intervalo de periodicidad.

Puesto que la función $\cos x$ es periódica de período 2π, entonces la función $f(x) = \cos(\pi\{nx\})$ es también periódica de período $T = 1/n$, presentando discontinuidades de primera especie de salto finito igual a 2 en los mismos puntos en los que era discontinua la función anterior $\{nx\}$.. la función $f(x)$ en cada período es continua y monótona decreciente presentando simetría impar respecto del punto medio de cada uno de los intervalos de periodicidad. Por tanto, la integral extendida a un período es nula, es decir

$$\int_{1/n}^{1} f(x)dx = \int_{1/n}^{1} \cos(\pi\{nx\})dx = \int_{0}^{1/n} \cos(\pi\{nx\})dx = 0 .$$

Nota: Ciertamente la integral, debido a la periodicidad, sigue siendo nula sobre cualquier intervalo definido de longitud 1/*n*, es decir,

$$\int_{\lambda}^{\lambda+1/n} \cos(\pi\{nx\})dx = 0, \forall \lambda \in R, n \in N^{+} .$$

---oooOooo---

Problema 137

8 de enero de 2007

Propuesto por Laurentiu Modan, Bucarest, Rumania. Sea $I(n)$ el número de números impares entre los primeros $2n-1$ números naturales, y sean $S_1(n)$, $S_2(n)$, su suma y la suma de sus cuadrados, respectivamente.

(a) Comparar $I(n)$ con $S_1(n)$.

(b) Hallar todos los números naturales que verifiquen la desigualdad

$$S_2(n) - 3 \cdot I(n) \geq S_1(n).$$

(c) Calcular

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_2(n)}{I(n) \cdot S_1(n)}.$$

Solución de José Hernández Santiago, Oaxaca, México.

(a) Los número impares son de la forma $2k-1$ donde $k \in \mathbb{N}$. Los números impares presentes en el intervalo $[1, 2n-1]$ son

$$2(1)-1, 2(2)-1, \ldots, 2(n-1)-1, 2n-1.$$

Luego, $I(n) = n$. Por otra parte,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} (2k-1) &= 2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) - n \\ &= n^2 + n - n \\ &= n^2, \end{aligned}$$

y de aquí que $S_1(n) = n^2$. Al tomar el cociente $\frac{I(n)}{S_1(n)}$ observamos que

$$\frac{I(n)}{S_1(n)} = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}.$$

Dado que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ concluimos entonces que

$$\frac{I(n)}{S_1} = o(1).$$

(b)

$$\begin{aligned} S_2(n) &= \sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 \\ &= \frac{4n^3-n}{3}, \end{aligned}$$

luego, dar con los números naturales que satisfacen $S_2(n) - 3 \cdot I(n) \geq S_1(n)$ es equivalente a dar la intersección de $\mathbb{N}$ con el conjunto solución de

$$4n^2 - 3n - 10 \geq 0.$$

Dado que $4n^2 - 3n - 10 = (4n+5)(n-2)$ procedamos a observar la tabla siguiente:

intervalo	signo $(4n+5)$	signo $(n-2)$	signo $(4n+5)(n-2)$
$(-\infty, -\frac{5}{4}]$	-	-	+
$(-\frac{5}{4}, 2)$	+	-	-
$[2, \infty)$	+	+	+

De ella se sigue, claramente, que

$$\mathcal{S} = \{n \in \mathbb{N} : S_2(n) - 3 \cdot I(n) \geq S_1(n)\} = \mathbb{N}\backslash\{1\}.$$

(c) $I(n) = n$, $S_1(n) = n^2$ y $S_2(n) = \frac{4n^3-n}{3}$. Así,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{S_2(n)}{I(n) \cdot S_1(n)} &= \lim_{n\to\infty} \frac{4n^3-n}{3 \cdot n \cdot n^2} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{4n^3-n}{3n^3} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3n^2}\right) \\ &= \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

*

Problema 138

Propuesto por José Luis Díaz Barrero, Barcelona, España

Sean $A_1,A_2,\ldots,A_n$ un sistema completo de sucesos asociado a un experimento aleatorio. Es decir, los A_k son no vacíos ($1\leq k\leq n$), disjuntos dos a dos y tales que

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = E \text{ (suceso seguro).}$$

Demostrar que

$$\prod_{k=1}^{n} p\left(A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} p^2\left(A_k\right).$$

Solución de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, España.

Nótese que si n=1, ambos lados de la ecuación son iguales a 1 (A_1=E). Por la desigualdad entre medias aritmética y geométrica (que siempre es posible usar sobre las probabilidades de un sistema completo de sucesos ya que todas ellas son no negativas),

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} p\left(A_k\right)} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p\left(A_k\right) = \frac{1}{n} p\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \frac{1}{n} p\left(E\right) = \frac{1}{n}, \qquad \prod_{k=1}^{n} p\left(A_k\right) \leq \frac{1}{n^n},$$

con igualdad si y sólo si las probabilidades de todos los sucesos A_k son iguales. De la misma forma, utilizando las desigualdades entre medias aritmética y cuadrática,

$$\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p^2\left(A_k\right)} \geq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p\left(A_k\right) = \frac{1}{n}, \qquad \sum_{k=1}^{n} p^2\left(A_k\right) \geq \frac{1}{n},$$

nuevamente con igualdad si y sólo si las probabilidades son todas iguales. Se tiene entonces de forma inmediata, no ya sólo el resultado pedido, sino los dos siguientes resultados, más fuertes:

$$\prod_{k=1}^{n} p\left(A_k\right) \leq \frac{1}{n^{n-1}}\sum_{k=1}^{n} p^2\left(A_k\right), \qquad \prod_{k=1}^{n} p\left(A_k\right) \leq \left(\sum_{k=1}^{n} p^2\left(A_k\right)\right)^n.$$

Las igualdades se dan si y sólo si los sucesos A_k son equiprobables. Es obvio que el primer resultado obtenido es más fuerte que el del enunciado, al ser n^{n-1}>1 para todo $n\geq 2$, mientras que el segundo lo es porque, al ser las $p(A_k)$ no negativas pero menores o iguales a 1, sus cuadrados son menores que ellas mismas, con lo que

$$\sum_{k=1}^{n} p^2\left(A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} p\left(A_k\right) = 1; \qquad \left(\sum_{k=1}^{n} p^2\left(A_k\right)\right)^{n-1} \leq 1.$$

Nótese finalmente que en esta última acotación se da la igualdad si y sólo si un suceso tiene probabilidad 1 y el resto tienen probabilidad 0.

Problema 139

Propuesto por José Luis Díaz Barrero, Barcelona, España

Sean a, b, c los lados de un triángulo de semiperímetro p y circunradio R.

Demostrar que

$$\frac{a^3}{\operatorname{sen} A}+\frac{b^3}{\operatorname{sen} B}+\frac{c^3}{\operatorname{sen} C}\geq\frac{8Rp^2}{3}.$$

Solución de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, España.

Por el teorema del seno, $a=2R\operatorname{sen}A$, $b=2R\operatorname{sen}B$, $c=2R\operatorname{sen}C$. Utilizando entonces la desigualdad entre medias aritmética y cuadrática aplicadas a los lados del triángulo,

$$\frac{a^3}{\operatorname{sen} A}+\frac{b^3}{\operatorname{sen} B}+\frac{c^3}{\operatorname{sen} C}=2R\left(a^2+b^2+c^2\right)\geq 2R\cdot 3\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2=2R\cdot\frac{4p^2}{3}=\frac{8Rp^2}{3},$$

q.e.d., donde se da la igualdad si y sólo si el triángulo es equilátero.

De hecho, la anterior desigualdad puede generalizarse de la siguiente forma: Si m, n son tales que $m-n\geq 1$, entonces

$$\frac{a^m}{\operatorname{sen}^n A}+\frac{b^m}{\operatorname{sen}^n B}+\frac{c^m}{\operatorname{sen}^n C}\geq\frac{2^m R^n p^{n-m}}{3^{m-n-1}}.$$

La demostración es idéntica al caso anterior:

$$\frac{a^n}{\operatorname{sen}^n A}=2^n R^n;\qquad \frac{a^m}{\operatorname{sen}^n A}+\frac{b^m}{\operatorname{sen}^n B}+\frac{c^m}{\operatorname{sen}^n C}=2^n R^n\left(a^{m-n}+b^{m-n}+c^{m-n}\right).$$

Ahora, como es conocido, con tal de que $m-n$ sea mayor o igual que 1, se cumple:

$$\sqrt[m-n]{\frac{a^{m-n}+b^{m-n}+c^{m-n}}{3}}\geq\frac{a+b+c}{3}=\frac{2p}{3},\qquad a^{m-n}+b^{m-n}+c^{m-n}\geq 3\left(\frac{2p}{3}\right)^{m-n},$$

$$\frac{a^m}{\operatorname{sen}^n A}+\frac{b^m}{\operatorname{sen}^n B}+\frac{c^m}{\operatorname{sen}^n C}\geq 3\cdot 2^n R^n\left(\frac{2p}{3}\right)^{m-n}=\frac{2^m R^n p^{m-n}}{3^{m-n-1}},$$

con igualdad si y sólo si $a=b=c$ cuando $m-n>1$, y siempre cuando $m-n=1$. Nótese que en esta generalización (1) no es necesario que ni m ni n sean ni enteros, ni positivos, sólo que cumplan $m-n\geq 1$, y (2) cuando $m=3$, $n=1$, llegamos exactamente al caso propuesto y a la desigualdad antes demostrada. Nótese finalmente que, si $m-n\leq 1$, la desigualdad sería válida pero con sentido opuesto, es decir, en este caso sería

$$\sqrt[m-n]{\frac{a^{m-n}+b^{m-n}+c^{m-n}}{3}}\leq\frac{2p}{3},\qquad \frac{a^m}{\operatorname{sen}^n A}+\frac{b^m}{\operatorname{sen}^n B}+\frac{c^m}{\operatorname{sen}^n C}\leq\frac{2^m R^n p^{m-n}}{3^{m-n-1}},$$

nuevamente con igualdad si y sólo si $a=b=c$ cuando $m-n>1$, y siempre cuando $m-n=1$.

Problema 140. (Propuesto por Doru Popescu Anastasiu).

Sea $A_1A_2A_3$ un triángulo de lados respectivamente opuestos a_1, a_2, a_3 y área S. Se consideran los puntos $M_1, M_2 \in (A_2, A_3)$; $P_1P_2 \in (A_3, A_1)$; $Q_1Q_2 \in (A_1, A_2)$ tales que $M_1P_2 \,//\, A_1A_2$; $M_2Q_1 \,//\, A_1A_3$; $P_1Q_2 \,//\, A_2A_3$. Sean $\{B_1\} = M_2Q_1 \cap M_1P_2$; $\{B_2\} = P_1Q_2 \cap M_1P_2$; $\{B_3\} = M_2Q_1 \cap Q_2P_1$. Sea σ el área del triángulo $B_1B_2B_3$ y finalmente sean k_1, k_2, k_3 las distancias de B_1, B_2, B_3 a A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 respectivamente. Demostrar que

$$\sum_{i=1}^{3} k_i k_{i+1} a_i a_{i+1} + 4\sqrt{\sigma S}\left(\sum_{i=1}^{3} k_i a_i\right) \geq 2S(S - 4\sigma)$$

Resolución: (Vicente Vicario García, Universidad de Huelva, España).

El enunciado tal y como aparece es falso, siendo cierto para los valores que especificaremos a continuación.

Es evidente que el triángulo $B_1B_2B_3$ es semejante al triángulo $A_1A_2A_3$. Denominando k a la razón de semejanza entre ambos, tendremos

$$k = \frac{M_1M_2}{A_2A_3} = \frac{P_1P_2}{A_1A_3} = \frac{Q_1Q_2}{A_1A_2} \quad ,0 < k < 1$$

Además la relación entre las áreas de estos triángulos es $\sigma = k^2 S$. También, denotando por h_{A_1} la altura trazada desde el vértice A_1 a su lado opuesto, etc, se tendrá evidentemente que

$$2S = h_{A_1} \cdot A_2A_3 = h_{A_2} \cdot A_1A_3 = h_{A_3} \cdot A_1A_2$$

Por otra parte, por semejanza de triángulos tenemos que

$$\frac{k_1}{M_1M_2} = \frac{h_{A_1}}{A_2A_3}; \quad \frac{k_2}{P_1P_2} = \frac{h_{A_2}}{A_1A_3}; \quad \frac{k_3}{Q_1Q_2} = \frac{h_{A_3}}{A_1A_2}$$

Entonces, sustituyendo en la expresión a demostrar tenemos que

$$\sum_{i=1}^{3} k_i k_{i+1} a_i a_{i+1} + 4\sqrt{\sigma S}\left(\sum_{i=1}^{3} k_i a_i\right) = h_{A_1} M_1M_2 \cdot h_{A_2} P_1P_2 + h_{A_2} P_1P_2 \cdot h_{A_3} Q_1Q_2 +$$
$$+ h_{A_3} Q_1Q_2 \cdot h_{A_1} M_1M_2 + 4kS\left(h_{A_1} M_1M_2 + h_{A_2} P_1P_2 + h_{A_3} Q_1Q_2\right) \geq 2S\left(S - 4k^2 S\right)$$

Finalmente, expresando las longitudes de los lados del triángulo $B_1B_2B_3$ en función respectiva de los lados del triángulo $A_1A_2A_3$ y la razón de semejanza k, tenemos

$$kh_{A_1}A_2A_3 \cdot kh_{A_2}A_1A_3 + kh_{A_2}A_1A_3 \cdot kh_{A_3}A_1A_2 + kh_{A_3}A_1A_2 \cdot kh_{A_1}A_2A_3 +$$
$$+ 4kS\left(kh_{A_1}A_2A_3 + kh_{A_2}A_1A_3 + kh_{A_3}A_1A_2\right) \geq 2S^2\left(1-4k^2\right)$$

y simplificando tenemos que

$$3k^2 \cdot 4S^2 + 4kS \cdot 3k \cdot 2S \geq 2S\left(1-4k^2\right) \Leftrightarrow 22k^2 \geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{22}} \leq k < 1$$

Así pues, el enunciado del problema es cierto sólo para valores de k (razón de semejanza) cumpliendo las desigualdades $\sqrt{\frac{1}{22}} \leq k < 1$.

---oooOooo---

Problema 140

Propuesto por Doru Popescu Anastasiu en el número 3 de la revista SIPROMA

Sea $A_1A_2A_3$ un triángulo, de lados respectivamente opuestos a_1, a_2, a_3 y área S. Se consideran los puntos

$$M_1, M_2 \in (A_2A_3); \qquad P_1, P_2 \in (A_3A_1); \qquad Q_1, Q_2 \in (A_1A_2);$$

tales que

$$M_1P_2 \parallel A_1A_2; \qquad M_2Q_1 \parallel A_1A_3; \qquad P_1Q_2 \parallel A_2A_3.$$

Sean

$$\{B_1\} = M_2Q_1 \cap M_1P_2; \qquad \{B_2\} = P_1Q_2 \cap M_1P_2; \qquad \{B_3\} = M_2Q_1 \cap Q_2P_1.$$

Llamemos σ al área del triángulo $B_1B_2B_3$; y finalmente, sean k_1, k_2, k_3 las distancias de B_1, B_2, B_3 a A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2, respectivamente.

Demostrar que

$$\sum_{i=1}^{3} k_i k_{i+1} a_i a_{i+1} + 4\sqrt{\sigma S} \cdot \left(\sum_{i=1}^{3} k_i a_i \right) \leq 2S(S - 4\sigma)$$

donde los subíndices se toman congruentes módulo 3.

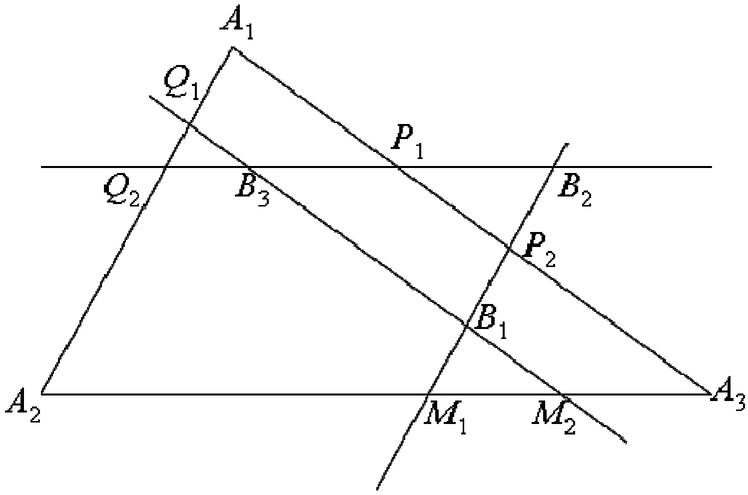
Solución de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, España.

Nótese que el sentido de la desigualdad es opuesto al originalmente publicado, pues se pueden encontrar casos en los que la desigualdad no sería cierta con el sentido originalmente publicado (ver contraejemplo 1 al final de esta solución).

Además, se considerarán las distancias k_i signadas, de forma que k_i tendrá signo positivo si B_i está en el interior del triángulo $A_1A_2A_3$, signo negativo si está en el exterior. Esto nos permite tratar todos los casos en los que los puntos M_i, P_i, Q_i estén en el interior de los lados del triángulo, tal como se especifica en el enunciado, sin distinguir los casos en los que todos los B_i estén en el interior del triángulo $A_1A_2A_3$ o sobre sus lados (únicos casos en los que la desigualdad propuesta en esta solución sería siempre correcta caso de no tomar distancias k_i signadas), de los casos en los que algunos o todos los B_i puedan estar en el exterior de dicho triángulo. El contraejemplo 2 al final de esta solución muestra un caso en el que la desigualdad propuesta en esta solución falla si no se toman distancias k_i signadas.

Sin embargo, asumiendo estos dos cambios, es decir, el cambio en el sentido de la desigualdad, y el que los k_i puedan ser signados, la desigualdad es siempre cierta, como se demuestra a continuación.

Es trivial comprobar que $B_1B_2B_3$ es semejante a $A_1A_2A_3$. Para ello, nos basta observar que B_1 y B_2 están en M_1P_2, luego B_1B_2 es paralelo a A_1A_2, y de forma similar con los otros dos lados de $B_1B_2B_3$. También es trivial comprobar que, al ser P_1Q_2 paralelo a A_2A_3, $A_1Q_2P_1$ es semejante a $A_1A_2A_3$. De la misma forma, $A_2M_2Q_1$ es semejante a $A_2A_3A_1$, y $A_3P_2M_1$ es semejante a $A_3A_1A_2$. Finalmente, $B_1M_1M_2$ es semejante a $A_1A_2A_3$, por ser B_1M_1 (sobre la recta M_1P_2) paralelo a A_1A_2, y B_1M_2 (sobre la recta Q_1M_2) paralelo a A_1A_3. De igual manera, $B_2P_1P_2$ es semejante a $A_2A_3A_1$ y $B_3Q_1Q_2$ es semejante a $A_3A_1A_2$. Sean ahora σ_1, σ_2, σ_3 las áreas respectivas de $B_1M_1M_2$, $B_2P_1P_2$, $B_3Q_1Q_2$.



Llamemos además

$$\rho_1 = \frac{A_1Q_2}{A_1A_2} = \frac{A_1P_1}{A_1A_3}, \quad \rho_2 = \frac{A_2M_2}{A_2A_3} = \frac{A_2Q_1}{A_2A_1}, \quad \rho_3 = \frac{A_3P_2}{A_3A_1} = \frac{A_3M_1}{A_3A_2}, \quad \rho = \frac{B_1B_2}{A_1A_2} = \frac{B_2B_3}{A_2A_3} = \frac{B_3B_1}{A_3A_1}.$$

Nótese que las definiciones son consistentes por las relaciones de paralelismo dadas en el enunciado y gracias al teorema de Thales. Entonces, si B_2, B_3 son interiores al triángulo $A_1A_2A_3$, como es el caso en la figura,

$$\rho = \frac{B_2B_3}{A_2A_3} = \frac{B_2Q_2}{A_2A_3} - \frac{B_3Q_2}{A_3A_2} = \frac{A_2M_1}{A_2A_3} - \frac{Q_1Q_2}{A_1A_2} = \frac{A_2A_3 - A_3M_1}{A_2A_3} - \frac{A_2Q_1 + A_1Q_2 - A_1A_2}{A_1A_2}$$
$$= (1-\rho_3) - (\rho_2 + \rho_1 - 1) = 2 - (\rho_1 + \rho_2 + \rho_3).$$

Sin embargo, si ambos fueran exteriores al triángulo $A_1A_2A_3$, entonces

$$\rho = \frac{B_2B_3}{A_2A_3} = \frac{B_2Q_2}{A_2A_3} + \frac{B_3Q_2}{A_3A_2} = \frac{A_2M_1}{A_2A_3} + \frac{Q_1Q_2}{A_1A_2} = \frac{A_2A_3 - A_3M_1}{A_2A_3} + \frac{A_1A_2 - A_2Q_1 - A_1Q_2}{A_1A_2}$$
$$= (1-\rho_3) + (1 - \rho_2 - \rho_1) = 2 - (\rho_1 + \rho_2 + \rho_3).$$

Ahora bien, como si dos triángulos semejantes tienen entre sus lados razón ρ, entonces tienen entre sus áreas razón ρ^2, es trivial comprobar que

$$\frac{\sigma}{S}=\left(\frac{B_1B_2}{A_1A_2}\right)^2=\rho^2, \qquad \frac{\sigma_3}{S}=\left(\frac{Q_1Q_2}{A_1A_2}\right)^2=\left(\rho_1+\rho_2-1\right)^2,$$

y de forma similar para los demás triángulos involucrados. Finalmente, la altura desde A_i hasta $A_{i+1}A_{i-1}$ es igual a $2S/a_i$. Entonces, por las semejanzas comprobadas,

$$\frac{\sigma_i}{S}=\left(\frac{k_ia_i}{2S}\right)^2=\left(\rho_{i+1}+\rho_{i-1}-1\right)^2.$$

Ahora bien, si B_i es exterior a $A_1A_2A_3$, entonces $\rho_{i+1}+\rho_{i-1}<1$, mientras que si B_i es interior a $A_1A_2A_3$, entonces $\rho_{i+1}+\rho_{i-1}>1$, estando B_i sobre el lado $A_{i-1}A_{i+1}$ si y sólo si $\rho_{i+1}+\rho_{i-1}=1$, con lo que los signos propuestos para k_i implican que

$$k_ia_i=2S\left(\rho_{i+1}+\rho_{i-1}-1\right).$$

Podemos entonces utilizar los anteriores resultados para expresar los diferentes términos involucrados en la desigualdad a demostrar:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{3}k_ik_{i+1}a_ia_{i+1}&=4S^2\sum_{i=1}^{3}\left(\rho_i+\rho_{i+1}-1\right)\left(\rho_{i-1}+\rho_i-1\right)\\&=2S^2\left[\sum_{i=1}^{3}\left(\rho_{i-1}+\rho_{i+1}-1\right)\right]^2-2S^2\sum_{i=1}^{3}\left(\rho_{i-1}+\rho_{i+1}-1\right)^2\leq 2S^2\left(1-2\rho\right)^2,\end{aligned}$$

con igualdad si y sólo si $\rho_{i-1}+\rho_{i+1}=1$ para todo i. Además,

$$4\sqrt{S\sigma}\cdot\sum_{i=1}^{3}k_ia_i=4\rho S\cdot 2S\sum_{i=1}^{3}\left(\rho_{i+1}+\rho_{i-1}-1\right)=8\rho S^2\left(1-2\rho\right).$$

Luego finalmente,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{3}k_ik_{i+1}a_ia_{i+1}+4\sqrt{\sigma S}\cdot\left(\sum_{i=1}^{3}k_ia_i\right)&\leq 2S^2\left(1-2\rho\right)^2+8\rho S^2\left(1-2\rho\right)=2S^2-8\rho^2S^2\\&=2S\left(S-4\sigma\right),\end{aligned}$$

con igualdad si y sólo si $\rho_{i-1}+\rho_{i+1}=1$ para todo i, con lo que $\rho_1=\rho_2=\rho_3=1/2$. Por lo tanto, se ha demostrado la desigualdad propuesta, dándose la igualdad si y sólo si cada B_i es el punto medio del lado $A_{i-1}A_{i+1}$, o lo que es lo mismo, si $B_1=M_1=M_2$, $B_2=P_1=P_2$, $B_3=Q_1=Q_2$ son los puntos medios respectivos de los lados A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2.

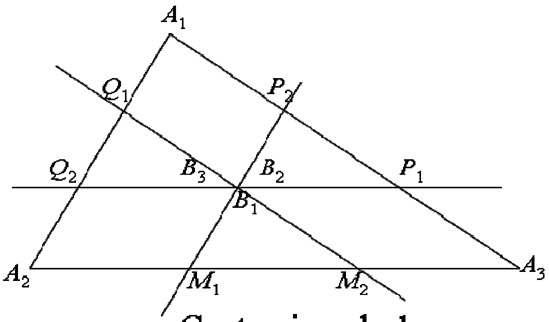
Contraejemplo 1:

Este es un contraejemplo al sentido originalmente propuesto para la desigualdad del enunciado.

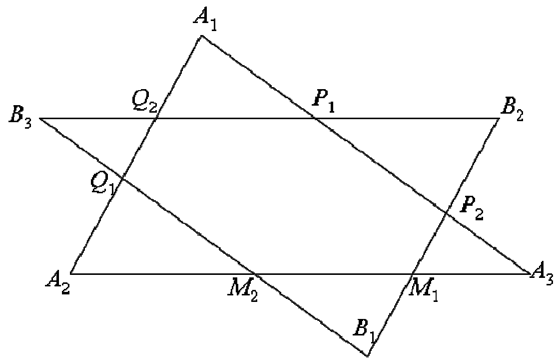
Sean $\rho_1=\rho_2=\rho_3=2/3$. Entonces, es trivial comprobar que M_1P_2, Q_1M_2, P_1Q_2 son las paralelas respectivas a A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1 por el baricentro G del triángulo $A_1A_2A_3$. Es decir, que el triángulo $B_1B_2B_3$ está degenerado a un punto, con lo que σ=0. Además, las distancias k_1, k_2, k_3 son iguales a un tercio de las alturas respectivas del triángulo $A_1A_2A_3$ desde A_1, A_2, A_3. Luego

$$a_ik_i = \frac{2S}{3}; \qquad \sum_{i=1}^{3} k_ik_{i+1}a_ia_{i+1} + 4\sqrt{\sigma S}\cdot\left(\sum_{i=1}^{3} k_ia_i\right) = 3\left(\frac{2S}{3}\right)^2 = \frac{4S^2}{3} < 2S^2 = 2S\left(S-4\sigma\right).$$

La desigualdad tiene entonces sentido opuesto al inicialmente propuesto.



Contraejemplo 1



Contraejemplo 2

Contraejemplo 2:

Este es un contraejemplo que demuestra que, si los k_i no son distancias signadas, entonces tampoco se cumple la desigualdad con el sentido propuesto en esta solución.

Sean ρ_1=ρ_2=ρ_3=1/3. Es trivial entonces comprobar que $A_1A_2A_3$ y $B_1B_2B_3$ son iguales, con lo que σ=S, siendo además la distancia desde B_i hasta $A_{i-1}A_{i+1}$, en valor absoluto, igual a un tercio de la altura del triángulo $A_1A_2A_3$ desde A_i. Si los k_i son distancias no signadas, tendríamos

$$\sum_{i=1}^{3} k_ik_{i+1}a_ia_{i+1} + 4\sqrt{\sigma S}\cdot\left(\sum_{i=1}^{3} k_ia_i\right) = \frac{4S^2}{3} + 4S\cdot 2S = \frac{28S^2}{3} > -6S^2 = 2S\left(S-4\sigma\right).$$

Nótese sin embargo que, si los k_i fueran distancias signadas, entonces todas ellas serían negativas, con lo que

$$\sum_{i=1}^{3} k_ik_{i+1}a_ia_{i+1} + 4\sqrt{\sigma S}\cdot\left(\sum_{i=1}^{3} k_ia_i\right) = \frac{4S^2}{3} - 4S\cdot 2S = -\frac{20S^2}{3} < -6S^2 = 2S\left(S-4\sigma\right),$$

y sí se cumpliría la desigualdad propuesta en esta solución.

Problemas propuestos 141-145

Problema 141, propuesto por Vicente Vicario García, Huelva, España.

Sea $\binom{n}{i}$ un número combinatorio, $n, i \in \mathbb{N}; n \geq i$.Demostrar entonces que

$$\binom{n}{1} \cdot \binom{n}{2} \cdot \cdots \cdot \binom{n}{n}$$

y $e^{\frac{1}{2}n^2}$ son dos infinitos asintóticamente equivalentes, es decir,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{2}n^2}}{\binom{n}{1} \cdot \binom{n}{2} \cdot \cdots \cdot \binom{n}{n}} = 1.$$

Problema 142, propuesto por José Luis Díaz Barrero, Barcelona, España

Sean a, b, c tres números positivos distintos de suma 1. Demostrar que

$$\frac{(a+bc)\,bc}{(a-b)\,(a-c)} + \frac{(b+ca)\,ca}{(b-a)\,(b-c)} + \frac{(c+ab)\,ab}{(c-a)\,(c-b)} < \frac{1}{3}.$$

Problema 143, propuesto por Ovidiu Furdui, Kalamazoo, USA

Sea $\ell \geq 0$ un número natural. Calcular

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n + 2\ell + 1) - \gamma\right),$$

siendo γ la constante de Euler-Mascheroni.

Problema 144, propuesto por Vicente Vicario García, Huelva, España

Dados los números α y β siguientes, probar o refutar que $\alpha = \beta$.

$$\begin{aligned}
\alpha &= \sqrt{13} + \sqrt{10 + 2\sqrt{13}} \\
\beta &= \sqrt{5 + 2\sqrt{3}} + \sqrt{18 - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{65 - 26\sqrt{3}}}.
\end{aligned}$$

***Problema 145, propuesto por José Hernández Santiago, Oaxaca, México**

Demostrar que existen $a, b \in \mathbb{N}$ tales que para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple

$$b \sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k} \leq 4^{n+1} - a.$$

Olimpíada Matemática de Perú

http://portal.huascaran.edu.pe/olimpiadas/index.htm

Las Olimpíadas de Matemáticas de Perú tienen una larga tradición. En 1998 Lima acogió la III Olimpíada Iberoamericana de Matemática y desde entonces viene realizando un importante esfuerzo que de alguna forma se ve reflejado en la página que el Ministerio de Educación y la Sociedad Matemática Peruana disponen dentro del Proyecto Huascarán.

Dentro de la página nos hemos encontrado con un texto del profesor Uldarico Malaspina, uno de los pilares sobre los que ha venido sosteniendo esta Olimpíada.

Las olimpiadas matemáticas nos permiten disfrutar de profundas satisfacciones como matemáticos y como docentes, pues una de sus características fundamentales es desafiar el talento matemático de los jóvenes participantes con problemas no rutinarios, que requieren fundamentalmente creatividad y habilidad en el uso de recursos matemáticos preuniversitarios; problemas cuya elaboración ya fue un desafío para los profesores, y que tanto en esta fase como en la de solución muestran una belleza que no se percibe con los sentidos, como ocurre al deleitarnos con una pintura o una pieza musical.

Aquella se parece más a una hermosa composición literaria, pues está en la solución elegante del problema, en la armoniosa relación lógica entre los conceptos que se usan. Es muy importante para el país --y trabajamos con ese propósito-- que nuestros estudiantes tengan desde los primeros grados una sólida formación matemática, que vaya mucho más allá de la mera manipulación de símbolos y que desarrolle su capacidad de identificar y de resolver verdaderos problemas.

Lamentablemente, la mayoría de problemas usados en las clases y que figuran en libros de texto son ejercicios rutinarios que no contribuyen a la percepción de la belleza de la matemática; por el contrario, muchas veces generan actitudes negativas de los alumnos hacia ella.

Cerebro de Matemático Howard W. Eves

En el libro “Mathematical Circles Revisited” (reeditado por MAA en 2003) Howard W. Eves cuenta que hace unos años en los congresos de Matemáticas se puso de moda el siguiente chiste.

Había una vez un cirujano que descubrió como quitar el cerebro de una persona y reemplazarlo por el tipo de cerebro que el paciente desee. Por supuesto diferentes tipos de cerebro costaban diferente cantidad de dinero.

Un día un paciente se le presentó al cirujano y le dijo que quería cambiar su cerebro. “Bien”, dijo el cirujano, “¿Qué clase de cerebro desea usted? Los hay de diferentes precios. Por ejemplo, el cerebro de un abogado sale por 60 euros los 100 gramos, o el de un juez sale por 300 euros, y así otros precios.”

“Oh! Pero yo no quiero esa clase de cerebros”, dijo el paciente, “a mí me gustaría el cerebro de un profesor universitario.”

“Veo que tiene usted un gusto exquisito y caro”, le contestó el cirujano. “Ahora bien, el cerebro de un profesor de universidad de filología le costaría 600.000 euros, los 100 gramos, o el cerebro de un profesor de universidad de historia le costaría 1.200.000 euros, los 100 gramos,…¿de qué tipo de profesor de universidad desea usted el cerebro?”

“Me gustaría tener el cerebro de un profesor universitario de matemáticas”, afirmó el paciente.

“Ya veo que su gusto es realmente caro”, le dijo el cirujano. “Esos son los cerebros más caros de todos. Cuestan 6.000.000 euros, los 100 gramos”

“Eso es increíble” replicó el paciente. “¿Por qué cuesta tanto el cerebro de un matemático? Si el precio del cerebro de un abogado es de 60 euros por cada 100 gramos y el de un juez 300 euros por cada 100 gramos, ¿por qué cuesta el cerebro de una profesor universitario de matemáticas 6.000.000 euros por cada 100 gramos?”

“Oh!, creo que usted lo puede entender perfectamente” le dijo el cirujano. “Imagine la gran cantidad de matemáticos se necesitarían para obtener 100 gramos de cerebro.”

Autor: Howard W. Eves

Tomado de Divulgamat

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

Número

30

Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática
OEI
ISSN 1698-677X

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

Número 30 (marzo - abril 2007)
ISSN – 1698-277X

Índice

El editor presenta excusas al Prof. Vicente Vicario, por haber omitido su nombre entre quienes resolvieron los problemas 138 y 139, y al mismo tiempo recuerda que las soluciones a problemas distintos deben enviarse en ficheros distintos, para evitar omisiones.

Problemas resueltos

Problema 141. Solución con corrección al enunciado, por Ovidio Furdui, Kalamazoo, USA.
Problema 142. Recibidas soluciones de Dan Dobrovolschi, Bucarest, Rumania; Francisco Javier García Capitán, Priego, España; Samuel Gómez Moreno, Jaén, España; Daniel Darío Góngora García, Carabaillo, Lima, Perú; Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, España; y el proponente. Presentamos la solución de García Capitán.

Problema 143. Recibidas soluciones de: Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, España; Paolo Perfetti, Universitá degli studi Tor Vergara, Roma, Italia; Miquel Roig, Valencia, España; y el proponente. Se ha recibido además otra solución con un pequeño error de cálculo.
Presentamos tres soluciones: la del proponente, Ovidio Furdui; la de Perfetti y la de Roig, las dos primeras excepcionalmente en inglés. Se deja a la curiosidad del lector el verificar que desarrollando los dobles factoriales o utilizando las propiedades de la función gamma se llega al mismo resultado que en la tercera solución publicada (de Roig).

Problema 144. Recibidas soluciones de: José A. Barrera Gómez, Mataró, España; Angel Mario Gallegos Baños; Francisco Javier García Capitán, Priego, España; Daniel Darío Góngora García, Carabaillo, Lima, Perú; José Hernández Santiago, Oaxaca, México; Kee-Wai Lau, HongKong, China; Daniel Lasaosa

Medarde, Pamplona, España; Antonio Ruiz Lozano, Sevilla, España; Bruno Salgueiro Fanego, Vivero, España; y el proponente.
Presentamos la solución de García Capitán.

Problema 145. Recibidas soluciones de: Miquel Roig, Valencia, España; Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, España; Vicente Vicario García, Huelva, España; y el proponente. Presentamos la solución de Lasaosa.

Problemas propuestos 146-150

Comentario de páginas web
Olimpíada Mexicana de Matemática.

Divertimentos matemáticos
Gödel, ciudadano americano - Divulgamat

Editor: Francisco Bellot Rosado

Con el apoyo de la Subdirección General de Cooperación Internacional

Algunas técnicas de resolución de ecuaciones funcionales en problemas de Olimpiada (I): Funciones reales de variable real

En esta lección de preparación olímpica se pretende presentar e ilustrar con ejemplos algunas de las técnicas básicas de resolución de ecuaciones funcionales, o de técnicas para utilizar en problemas de Olimpiada en los que una ecuación funcional juega un papel clave. En esta primera entrega, consideramos el caso de funciones real de variable real. Las funciones enteras de variable entera serán objeto de una segunda entrega.

1.- Evaluación de la ecuación en valores "simplificadores"

En multitud de casos, la ecuación funcional se simplifica mucho al evaluar una o más de las variables involucradas en ciertos valores, tales como 0 o 1, o igualando entre sí alguna de las variables en función de las cuales se expresa la ecuación funcional. Este es un método "básico", y la mayor parte de las veces se utiliza en conjunción con otros. Sin embargo, es importante no subestimar su potencia, ya que puede tener un gran impacto a la hora de simplificar una ecuación compleja, a la vez que, conociendo el comportamiento de la función a hallar en ciertos casos concretos, podemos obtener ideas que desemboquen en hipótesis sobre la forma o las propiedades de la función, que después pasaremos a demostrar formalmente. Se plantea como ejemplo el problema 4 de la XLII Olimpiada Matemática Española (2006):

Hallar todas las funciones f:$(0,\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ que satisfacen la ecuación

$$f(x)f(y)+f\left(\frac{\lambda}{x}\right)f\left(\frac{\lambda}{y}\right)=2f(xy)$$

para todo par de números reales x e y positivos, siendo λ un número real positivo tal que $f(\lambda)=1$.

Sustituyendo x=1, y=λ, se obtiene

$$2f(1) = f(1)f(\lambda) + f(\lambda)f(1) = 2f(\lambda) = 2,$$

con lo que f(1)=1. Podemos entonces tomar y=1 en la ecuación dada:

$$f(x) + f\left(\frac{\lambda}{x}\right) = 2f(x); \qquad f\left(\frac{\lambda}{x}\right) = f(x).$$

Utilizando esta última relación,

$$2f(x)f(y) = 2f(xy),$$

y tomando finalmente sobre ésta y=λ/x,

$$1 = f(\lambda) = f(x)f\left(\frac{\lambda}{x}\right) = \left(f(x)\right)^2.$$

Esto nos deja con que f(x)=1 o f(x)=−1. Pero para todo t>0, existe un z>0 real tal que t=z^2. Entonces, tomando x=y=z, se tiene que

$$f(t) = f(z^2) = \left(f(z)\right)^2 = (\pm 1)^2 = 1.$$

Luego la única solución posible es f(x)=1 para todo x.

Otro ejemplo similar puede verse en el problema 5 de la XLIII Olimpiada Matemática Internacional (2002):

Hallar todas las funciones *f*: ℝ→ℝ tales que, para cualesquiera *x*, *y*, *u*, *v* reales,

$$\left[f(x) + f(y)\right] \cdot \left[f(u) + f(v)\right] = f(xu - yv).$$

Con la sustitución x=v, y=u, se obtiene trivialmente que, para cualesquiera x, y reales,

$$\left[f(x) + f(y)\right]^2 = f(0).$$

En particular, tomando ahora x=y=0,

$$\left[4f(0) - 1\right]f(0) = 0.$$

Se tiene pues la solución trivial f(0)=0, que lleva a f(x)=0 para todo x real tras tomar y=x en la primera ecuación que hemos hallado,

$$4\left[f(x)\right]^2 = f(0) = 0,$$

o bien $f(0)=1/4$. En este segundo caso, tomamos primero $y=x$, y luego $y=0$, en la ecuación que hemos hallado, y obtenemos respectivamente, para cualquier x real,

$$4\left[f(x)\right]^2 = f(0) = \frac{1}{4}; \qquad f(x) = \pm\sqrt{\frac{1}{16}} = \pm\frac{1}{4}.$$

$$0 = \left[f(x)\right]^2 + 2f(0)f(x) + \left[f(0)\right]^2 - f(0) = \left[f(x)\right]^2 + \frac{1}{2}f(x) - \frac{3}{16}.$$

Ahora bien, por simple sustitución, comprobamos que $-1/4$ no es una raíz de la segunda ecuación, mientras que $1/4$ sí lo es. Luego en este segundo caso, $f(x)=1/4$ para todo x real. Luego las soluciones de esta ecuación son dos, $f(x)=0$ para todo x real, y $f(x)=1/4$ para todo x real, y no hay otras soluciones.

Otras veces, la simplificación se obtiene a base de realizar un cambio de variable, como en el caso del problema 1 de la II Olimpiada Iberoamericana de Matemática (1987):

Encontrar las $f(x)$ tales que

$$\left[f(x)\right]^2 f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = 64x$$

para $x\neq 0$, $x\neq 1$, $x\neq -1$.

En este caso, es fácil comprobar que la sustitución $x \to (1-x)/(1+x)$ produce

$$\frac{1-x}{1+x} \to \frac{1-\dfrac{1-x}{1+x}}{1+\dfrac{1-x}{1+x}} = \frac{\dfrac{2x}{1+x}}{\dfrac{2}{1+x}} = x,$$

donde la simplificación es posible al no ser $x=-1$. Realizando pues esta sustitución en la ecuación del enunciado, se tiene que, para todo x distinto de -1,

$$\left[f\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\right]^2 f(x) = 64\frac{1-x}{1+x}.$$

Elevando al cuadrado la ecuación dada, y dividiendo miembro a miembro por esta última, se tiene

$$\left[f(x)\right]^3 = \frac{\left[f(x)\right]^4 \left[f\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\right]^2}{\left[f\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\right]^2 f(x)} = \frac{64^2 x^2}{64\frac{1-x}{1+x}} = \frac{64x^2(1+x)}{1-x}.$$

Nótese que podemos simplificar el segundo término de la cadena de igualdades ya que, según la ecuación dada en el enunciado,

$$f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = 0 \Rightarrow x = 0 .$$

Finalmente, tomando la raíz cúbica de los miembros primero y último de la ecuación que acabamos de hallar, se llega a la solución final:

$$f(x) = 4\sqrt[3]{\frac{x^2(1+x)}{1-x}} .$$

Esta expresión es válida para $x \neq -1,0,1$. No podemos decir nada cuando x toma uno de estos últimos tres valores, ya que aparte de la ecuación inicial no tenemos más datos.

Nótese que, en este caso particular, lo único necesario para resolver el problema ha sido el cambio de variable adecuado y sencillas manipulaciones algebraicas; el paso clave es dar con el cambio de variable apropiado que produce la máxima simplificación.

2.- Inyectividad y suprayectividad

Una de las simplificaciones que nos permite utilizar el conocer que la función incógnita $f(x)$ es inyectiva, es el que, ante una igualdad de la forma $f(A)=f(B)$, se deduce directamente que $A=B$, donde A y B pueden ser expresiones que contengan tanto a la función incógnita, como a variables y a constantes, Así, si se nos pidiera calcular todas las funciones inyectivas tales que

$$f\left(x+f(y)\right) = f\left(y+f(x)\right),$$

sabríamos directamente que

$$x+f(y) = y+f(x).$$

Sustituyendo ahora $y=0$, habríamos acabado, pues tendríamos que

$$f(x) = x+k ,$$

donde $k=f(0)$ puede tomar a priori cualquier valor. Sustituyendo esta solución general en la ecuación dada, veríamos que es cierta para cualquier k, con lo que ésta sería la solución general (y única) del problema.

Si no sabemos a priori si una función incógnita $f(x)$ es inyectiva o no, puede ser un avance muy importante en la resolución del problema el demostrar que sí lo es. Las funciones inyectivas cumplen que, para cualesquiera x e y tales que $f(x)=f(y)$, entonces $x=y$. Esto nos ayuda a encontrar formas de probar la inyectividad, sobre todo si somos capaces de encontrar una relación de la forma $f(f(x))=A$, donde A es una expresión que depende de forma inyectiva de x (por ejemplo, $A=ax+b$, donde $a\neq 0$ y b son constantes). En este último caso, podemos decir que, si x e y son tales que $f(x)=f(y)$, entonces

$$ax+b=f\left(f\left(x\right)\right)=f\left(f\left(y\right)\right)=ay+b\,,$$

de donde $x=y$, y la inyectividad queda demostrada.

Otra forma de poder llegar a simplificar mucho ciertas ecuaciones funcionales es poder asignar ciertos valores a $f(x)$ o a $f(y)$ a voluntad. Por ejemplo, ciertas ecuaciones funcionales pueden resolverse sin más que hacer $f(x)=0$. Sin embargo, para eso es necesario tener garantizado que existe un x tal que $f(x)=0$. Eso se puede conseguir de dos formas: bien demostrando la suprayectividad de la función (es decir, que la función toma todos los posibles valores reales), bien llegando a una relación de la forma $f(A)=0$, donde A es una expresión cualquiera. Por muy complicada que sea la expresión A, lo que sí tenemos garantizado es que la función $f(x)$ toma el valor 0 para algún valor real de la variable λ. Realizando entonces la sustitución $x=\lambda$, y teniendo en cuenta que ahora x ya no es una variable, sino que toma un valor concreto, podemos simplificar la ecuación funcional. A partir de esa sustitución, es posible incluso que, tras la simplificación, nos quede una relación de la cuál seamos capaces de deducir el valor de λ, con lo que seguiríamos avanzando hacia la solución.

Nótese finalmente que no es necesario que sea la función la que tome todos los valores reales posibles; puede ser una expresión que depende de la función, la suma o diferencia de dos valores de la función, etc. De lo que se trata es de poder demostrar que existe una expresión que depende de la función que puede tomar cualquier valor, para poder asignárselo a voluntad.

Un ejemplo del uso de la suprayectividad lo podemos ver en el problema 6 de la XL Olimpiada Matemática Internacional (1999):

Encuentre todas las funciones *f*: ℝ→ℝ tales que

$$f\left(x-f\left(y\right)\right)=f\left(f\left(y\right)\right)+xf\left(y\right)+f\left(x\right)-1 \qquad \textbf{para cualesquiera } x,y\in\mathbb{R}.$$

Comenzamos en este caso haciendo $x=f(y)$, encontrando que

$$f\left(0\right)=2f\left(f\left(y\right)\right)+\left(f\left(y\right)\right)^2-1; \qquad \frac{1+f\left(0\right)-\left(f\left(y\right)\right)^2}{2}=f\left(f\left(y\right)\right).$$

Sustituimos ahora, en la ecuación inicial, x por $f(z)$:

$$f\left(f\left(z\right)-f\left(y\right)\right)=f\left(f\left(y\right)\right)+f\left(z\right)f\left(y\right)+f\left(f\left(z\right)\right)-1$$

$$=f\left(0\right)-\frac{\left(f\left(z\right)-f\left(y\right)\right)^2}{2},$$

donde hemos aplicado la fórmula hallada para $f(f(y))$. Ahora bien, si $f(z)-f(y)$ pudiera tomar todos los valores reales, habríamos acabado. Pero eso es cierto, ya que podemos escribir, partiendo de la ecuación dada en el enunciado,

$$f\left(x-f\left(y\right)\right)-f\left(x\right)=f\left(f\left(y\right)\right)+xf\left(y\right)-1.$$

Eligiendo ahora un y tal que $f(y)$ sea no nulo (que existe, pues haciendo $f(x)=f(y)=0$ en la ecuación dada llegaríamos a $0=-1$, que es obviamente falso), podemos tomar, para cualquier t real,

$$x=\frac{t+1-f\left(f\left(y\right)\right)}{f\left(y\right)},$$

$$f\left(\frac{z+1-f\left(f\left(y\right)\right)}{f\left(y\right)}-f\left(y\right)\right)-f\left(\frac{z+1-f\left(f\left(y\right)\right)}{f\left(y\right)}\right)=t.$$

Nótese que, por muy complicada que sea esta expresión, lo que sí nos garantiza es que cualquier real t se puede expresar como la diferencia de la función en dos puntos, es decir, existen u y v tales que $t=f(u)-f(v)$. Se tiene entonces que, para todo real t, existen u y v reales tales que

$$f\left(t\right)=f\left(f\left(u\right)-f\left(v\right)\right)=f\left(0\right)-\frac{\left(f\left(u\right)-f\left(v\right)\right)^2}{2}=f\left(0\right)-\frac{t^2}{2}.$$

Nos falta tan sólo hallar el valor de $f(0)$, para lo que podemos sustituir la expresión dada en la ecuación del enunciado, llegándose a

$$f(0)-\frac{x^2+(f(y))^2-2xf(y)}{2}=f(x-f(y))=f(f(y))+xf(y)+f(x)-1$$
$$=f(0)-\frac{(f(y))^2}{2}+xf(y)+f(0)-\frac{x^2}{2}-1;$$

Por comparación directa de los miembros primero y último, vemos que la mayor parte de los sumandos se simplifican, llegándose trivialmente a

$$f(0)=1.$$

Luego solución (que es única) es

$$f(x)=1-\frac{x^2}{2}.$$

para todo real x.

3.- Aditividad y multiplicatividad

Una función f se dice aditiva si para cualesquiera x e y se cumple que

$$f(x+y)=f(x)+f(y).$$

A partir de esta relación, se puede demostrar trivialmente que $f(0)=0$ (basta hacer $y=0$), y por inducción que, para cualquier natural n,

$$f(nx)=nf(x); \qquad f\left(\frac{x}{n}\right)=\frac{f(x)}{n}.$$

Como además, haciendo $x=-y$,

$$0=f(0)=f(x)+f(y), \qquad f(-y)=f(x)=-f(y),$$

el resultado se extiende trivialmente a n entero. De aquí se sigue que, para cualquier racional $q=m/n$ (m y n enteros).

$$f(q)=f\left(\frac{m}{n}\right)=\frac{f(m)}{n}=\frac{m}{n}f(1)=q\cdot f(1).$$

Entonces, si f es continua, definiendo cualquier irracional x mediante el límite de una sucesión de números racionales, se puede ver que $f(x)=xf(1)$. Llamando pues $f(1)=m$, hemos demostrado que la única solución posible para funciones f aditivas y continuas es

$$f(x)=mx.$$

Una relajación nada desdeñable en la condición de continuidad es que ésta puede ser sustituida por la de monotonía; esto se debe a que podemos definir todo x irracional como el límite de una sucesión de intervalos encajados de extremos racionales $(q_{n,+},q_{n,-})$; entonces, la sucesión formada por $(f(q_{n,+}),f(q_{n,-}))=(q_{n,+}\cdot f(1),q_{n,-}\cdot f(1))$ define $f(x)=xf(1)$. Es decir, si tenemos una función f, real de variable real, y es monótona (es decir, no decreciente o no creciente), y además es aditiva, entonces $f(x)=mx$ para algún m. Si además es estrictamente creciente o decreciente, entonces m es no nulo.

Una función se dice multiplicativa si para cualesquiera x, y reales,

$$f(xy)=f(x)f(y).$$

Es trivial comprobar que, si $f(x)=0$ para algún x no nulo, entonces $f(z)=f(x)f(z/x)=0$ para todo z, mientras que si $f(0)$ es no nulo, entonces haciendo $y=0$ se concluye que $f(x)=1$ para todo x. Descartaremos en lo sucesivo estos dos casos triviales (que como se puede comprobar, son las únicas funciones multiplicativas constantes).

Haciendo $y=1$, se comprueba que $f(1)=1$. Es trivial constatar, haciendo $x=y=-1$, que bien $f(-1)=1$, bien $f(-1)=-1$. Haciendo $y=-1$, se comprueba entonces que, en el primer caso, $f(-x)=f(x)$ para todo x, y en el segundo que $f(-x)=-f(x)$ para todo x. Es también trivial comprobar que si $z>0$, tomando $x=y=\sqrt{z}$, se tiene

$$f(z)=\left(f\left(\sqrt{z}\right)\right)^2,$$

es decir, f toma sólo valores positivos para valores positivos de la variable. Nos basta pues hallar la restricción de f de forma que consideremos sólo valores reales positivos de la variable y de la función. Podemos entonces definir $u=\ln(x)$, $v=\ln(y)$, $g(u)=\ln(f(e^u))$, para encontrar que g, definida para todos los reales (pues x e y recorren todos los reales positivos) cumple

$$\begin{aligned} g(u+v) &= \ln\left(f\left(e^{u+v}\right)\right)=\ln\left(f(xy)\right)=\ln\left(f(x)f(y)\right) \\ &= \ln\left(f\left(e^{u}\right)\right)+\ln\left(f\left(e^{v}\right)\right)=g(u)+g(v). \end{aligned}$$

Entonces, si f es continua (o en su defecto monótona), al ser el logaritmo natural una función continua y estrictamente creciente, también g es continua (o en su defecto monótona). De aquí se obtiene finalmente que, para todo $x>0$,

$$f(x)=\exp\left(\ln\left(f\left(e^{u}\right)\right)\right)=e^{g(u)}=e^{mu}=\left(e^{u}\right)^m=x^m.$$

Luego si f es una función multiplicativa, que además es continua, o por lo menos monótona, entonces las únicas soluciones no triviales (no constantes) son $f(x)=x^m$ y $f(x)=|x^m|$ para algún m no nulo, siendo las soluciones triviales $f(x)=0$ y $f(x)=1$.

Es muy importante la condición de continuidad, o en su defecto, de monotonía. Obviamente, esta técnica de resolución se podría aplicar a funciones de variable entera, natural o racional, pero sólo si son monótonas (la continuidad obviamente no tendría sentido en esos casos). Veremos así, en la segunda entrega de esta serie de lecciones de preparación olímpica sobre ecuaciones funcionales, el caso de una función multiplicativa, definida sobre los racionales positivos, no monótona, cuya solución está muy lejos de tener la forma $f(x)=x^m$.

Un ejemplo de la aplicación de la aditividad, junto con otras técnicas ya descritas, se puede utilizar para resolver el problema 2 de la XXXIII Olimpiada Matemática Internacional (1992):

Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de todos los números reales. Encuentre todas las funciones f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tales que

$$f\left(x^2+f(y)\right)=y+\left(f(x)\right)^2 \qquad \textbf{para cualesquiera } x,y\in\mathbb{R}.$$

Para probar la inyectividad, nos basta con hacer $x=0$:

$$f\left(f(y)\right)=y+\left(f(0)\right)^2 .$$

Como ya hemos visto, si ahora $f(x)=f(y)$, entonces

$$x+\left(f(0)\right)^2=f\left(f(x)\right)=f\left(f(y)\right)=y+\left(f(0)\right)^2, \qquad\qquad x=y .$$

Por otra parte, para cualquier valor real z, podemos tomar $y=z-(f(x))^2$:

$$f\left(x^2+f\left(z-\left(f(x)\right)^2\right)\right)=z-\left(f(x)\right)^2+\left(f(x)\right)^2=z ,$$

con lo que $f(x)$ es suprayectiva. En concreto, existe un real λ (único por ser f inyectiva) tal que $f(\lambda)=0$. Entonces, haciendo $x=y=\lambda$ en la ecuación dada,

$$f\left(\lambda^2\right)=f\left(\lambda^2+f(\lambda)\right)=\lambda+\left(f(\lambda)\right)^2=\lambda , \qquad \lambda^2+\left(f(0)\right)^2=f\left(f\left(\lambda^2\right)\right)=f(\lambda)=0 ,$$

y como λ y $f(0)$ son reales, y la suma de sus cuadrados es cero, entonces ambos son 0. Luego $f(0)=0$, y por lo tanto $f(f(y))=y$. Además, haciendo $y=0$ en la ecuación dada,

$$f\left(x^2\right)=\left(f\left(x\right)\right)^2.$$

Esto implica que la imagen de cualquier valor real positivo es positiva, ya que cualquier valor real positivo se puede escribir como x^2 con x no nulo. Por otra parte, haciendo $y=f(-x^2)$ en la ecuación dada, tenemos que

$$0=f\left(0\right)=f\left(x^2+f\left(f\left(-x^2\right)\right)\right)=f\left(-x^2\right)+\left(f\left(x\right)\right)^2=f\left(-x^2\right)+f\left(x^2\right),$$

de donde $f(-x^2)=-f(x^2)$, o lo que es lo mismo, para todo z negativo, $f(z)=-f(-z)$, y la imagen de todo valor real negativo es negativa.

Sea ahora $y=f(z)$ en la ecuación inicial. Entonces,

$$f\left(x^2+y\right)=f\left(x^2+f\left(f\left(y\right)\right)\right)=f\left(y\right)+\left(f\left(x\right)\right)^2\geq f\left(y\right),$$

Con igualdad si y sólo si $f(x)=0$, es decir, si y sólo si $x=0$. Luego para cualquier $z>y$, podemos encontrar $x>0$ tal que $z=y+x^2$, y $f(z)>f(y)$, con lo que f es estrictamente creciente. Si llegamos pues a demostrar la aditividad de f (que parece relativamente aparente a partir de la ecuación funcional dada en el enunciado), entonces habremos demostrado que la única solución es de la forma $f(x)=mx$ con $m>0$. Veamos que es así:

si al menos uno de u, v es positivo (sea u, sin pérdida de generalidad), podemos tomar $u=x^2$, $y=f(v)$ en la ecuación funcional dada, con lo que

$$f\left(u+v\right)=f\left(x^2+f\left(f\left(v\right)\right)\right)=f\left(v\right)+\left(f\left(x\right)\right)^2=f\left(v\right)+f\left(x^2\right)=f\left(v\right)+f\left(u\right).$$

Si tanto u como v son negativos, entonces $-u$ y $-v$ son positivos, con lo que

$$f\left(u+v\right)=-f\left(\left(-u\right)+\left(-v\right)\right)=-\left(f\left(-u\right)+f\left(-v\right)\right)=f\left(u\right)+f\left(v\right).$$

Luego f es aditiva, y como ya se ha visto, la única solución es de la forma $f(x)=mx$. Pero entonces $f(f(x))=m^2x=x$, con lo que $m^2=1$. Como además ha de ser $m>0$, por ser f estrictamente creciente, entonces $f(x)=x$ es la única solución.

4.- Puntos fijos

Un punto fijo de una función f se define como aquel valor p de la variable tal que $f(p)=p$. La existencia de puntos fijos nos puede ayudar mucho a resolver la ecuación funcional, usualmente porque podemos expresar el valor de dicho punto fijo a través de la propia función. Esta técnica se combina en la mayoría de los casos con una de las anteriores, a fin de llegar a la solución final.

Un ejemplo de esta técnica puede verse en una posible solución del problema 1 de la XXIV Olimpiada Matemática Internacional (1983):

Encuentre todas las funciones f definidas sobre el conjunto de los reales positivos y que toman valores reales positivos, y que satisfacen las siguientes condiciones:

(i) $f(xf(y))=yf(x)$ para x,y reales positivos cualesquiera;

(ii) $f(x)\to 0$ cuando $x\to\infty$.

Obviamente, $f(x)$ es inyectiva; nos basta tomar $x=1$ en la condición (i), con lo que $f(f(y))=yf(1)$ para todo real positivo y, con lo que si $f(x)=f(y)$, entonces $xf(1)=yf(1)$, y como la función toma valores reales positivos, $x=y$. Al mismo tiempo, también es suprayectiva, ya que nos basta con tomar $y=z/f(1)$ en la anterior igualdad para cualquier real positivo z (este valor de y existe y es real positivo, por serlo por definición $f(1)$).
Ahora bien, tomando $y=1$ en la condición (i), se tiene que $f(x)=f(xf(1))$, y por inyectividad, $x=xf(1)$ para todo x, con lo que $f(1)=1$. Entonces, tomando $x=1$ en la condición (i), se llega a que $f(f(y))=y$ para todo real positivo y. Tomando finalmente $y=f(z)$ en la condición (i), llegamos a que, para cualesquiera x,z reales positivos,

$$f(xz)=f\left(xf\left(f(z)\right)\right)=f(z)f(x),$$

es decir, f es multiplicativa.
Sin embargo, no parece sencillo demostrar que f vaya a ser continua o monótona. De ahí que elijamos un método alternativo para hallarlo, basado en que, sustituyendo $y=x$ en la condición (i), se tiene que $xf(x)$ es un punto fijo de f para cualquier real positivo x. Es decir, para cada x, existe un real positivo $k(x)$ (no necesariamente el mismo para todo x) tal que $xf(x)=k(x)$, con $f(k(x))=k(x)$. Hemos hallado ya un tal punto fijo ($f(1)=1$).

Veamos ahora que, si k es un punto fijo, entonces también es punto fijo k^2. Para ello, nos basta hacer $x=k$ en $xf(x)$, con lo que $kf(k)=k^2$ también es punto fijo. Es trivial entonces comprobar por inducción que k^{2^N} es entonces un punto fijo para todo entero positivo N. Para $N=1$ ya se ha demostrado, y si $k^{2^{N-1}}$ es un punto fijo, también lo es

$$k^{2^{N-1}} f\left(k^{2^{N-1}}\right) = \left(k^{2^{N-1}}\right)^2 = k^{2^N}.$$

Supongamos entonces que existe un punto fijo $k>1$. Entonces, existe una sucesión

$$\left\{k, k^2, k^4, k^8, \ldots, k^{2^N}, \ldots\right\},$$

que obviamente tiende a infinito, de puntos fijos. Luego $f(x)$ no tiende a 0 cuando x tiende a infinito, en contradicción con el enunciado, pues $f(x)$ tiende a infinito al tender x a infinito dentro de esta sucesión. Luego no existe ningún punto fijo mayor que 1.

Supongamos finalmente que existe un punto fijo $k<1$. Por ser $f(x)$ multiplicativa,

$$1 = f(1) = f\left(k\frac{1}{k}\right) = f(k) f\left(\frac{1}{k}\right) = kf\left(\frac{1}{k}\right), \qquad f\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k},$$

y $1/k$ sería un punto fijo mayor que 1. Luego no hay más puntos fijos que 1, y por lo tanto, para todo real positivo x, $xf(x)=1$, llegándose a la única solución $f(x)=1/x$.

Ahora bien, esta solución lo es cuando hacemos $y=x$, pero debemos comprobar que también lo es cuando $y \neq x$, lo cuál es cierto y fácilmente demostrable:

$$f(xf(y)) = f\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y}{x} = yf(x).$$

Como se ha visto en el problema anterior, podemos encontrarnos con varios potenciales puntos fijos. Es necesario, en cada uno de estos casos, saber cuáles de estos potenciales puntos fijos realmente lo son, y cuál debemos utilizar en cada caso. Ilustraremos este hecho nuevamente con ayuda del problema 5 de la XXXV Olimpiada Matemática Internacional (1994):

Sea S el conjunto de los números reales estrictamente mayores que -1. Encuentre todas las funciones $f:S \to S$ que satisfacen las dos siguientes condiciones:

1. **$f(x+f(y)+xf(y))=y+f(x)+yf(x)$ para cualesquier x,y de S;**
2. **$f(x)/x$ es estrictamente creciente en cada uno de los intervalos $-1<x<0$ y $0<x$.**

En primer lugar, vemos fácilmente que f es inyectiva, haciendo x=0 en la condición 1:

$$f\left(f\left(y\right)\right)=y\left(1+f\left(0\right)\right)+f\left(0\right).$$

Ahora bien, como $f(0)+1>0$ por hipótesis del enunciado, si $f(x)=f(y)$, entonces

$$0=f\left(f\left(x\right)\right)-f\left(f\left(y\right)\right)=\left(x-y\right)\left(1+f\left(0\right)\right),$$

concluyéndose que $x=y$. Utilizando la inyectividad, podemos hacer y=0, teniéndose entonces que

$$f\left(x+f\left(0\right)+xf\left(0\right)\right)=f\left(x\right); \qquad x+f\left(0\right)+xf\left(0\right)=x.$$

De aquí se concluye que, para todo $x>-1$, $f(0)(1+x)=0$, con lo que $f(0)=0$. Entonces, haciendo x=0, en la condición 1, obtenemos que $f(f(y))=y$ para todo y de S, con lo que la función es también suprayectiva, pues toma todos los valores de S.

Una vez establecidas estas propiedades, podemos hacer $y=x$ en la condición 1, para obtener que para todo x de S,

$$f\left(x+f\left(x\right)+xf\left(x\right)\right)=x+f\left(x\right)+xf\left(x\right).$$

Es decir, $x+f(x)+xf(x)$ es un punto fijo de f para todo x de S. Nótese sin embargo que hay, como máximo, tres puntos fijos de f. Uno es el ya hallado $0=f(0)$. En el intervalo $(-1,0)$ puede haber como máximo uno, ya que si hubiera dos, $f(x)/x=1$ en ambos casos, lo cuál es imposible por la condición 2. Finalmente, sólo puede haber otro punto fijo mayor que 0 por la misma razón. Sean entonces k_- el (posible) punto fijo negativo, y k_+ el (posible) punto fijo positivo. Para cualquier valor de x, lo que si está claro sin embargo es que

$$x+f\left(x\right)+xf\left(x\right)=k; \qquad f\left(x\right)=\frac{k-x}{1+x},$$

donde para cada x, k puede tomar a priori cualquiera de los tres valores k_-, 0, k_+. Se tiene entonces que

$$f\left(k_+\right)=\frac{k-k_+}{1+k_+}=k_+; \qquad k_+\left(k_++2\right)=k.$$

Obviamente, no puede ser $-1<k\leq 0$, pues entonces sería $k_+\leq 0$ en contra de su definición. Luego ha de ser $k=k_+$, de donde se deduce que $k_+=-1$ o $k_+=0$, que es absurdo. Luego no existe ningún punto fijo mayor que 0. De forma análoga, y sabiendo ya que los únicos posibles puntos fijos son 0 y k_-, se tiene que

$$f\left(k_-\right)=\frac{k-k_-}{1+k_-}=k_-; \qquad k_-\left(k_-+2\right)=k.$$

Pero si k=0, entonces k_{-}=0 en contra de su definición o k_{-}=−2, que no pertenece a S. Luego k=k_{-}, llegándose a que k_{-}=−1, que tampoco pertenece a S.

Luego el único punto fijo es k=0, y por lo tanto, para todo x de S,

$$f(x) = -\frac{x}{1+x}.$$

Ahora bien, esta función es la única forma que puede llegar a tomar la solución de la ecuación funcional una vez que hacemos y=x, pero nadie nos garantiza que la vaya a cumplir cuando y≠x. Por ello, debemos comprobarlo:

$$f\left(x+f(y)+xf(y)\right) = f\left(x - \frac{y(1+x)}{1+y}\right) = f\left(\frac{x-y}{1+y}\right) = -\frac{\frac{x-y}{1+y}}{1+\frac{x-y}{1+y}}$$

$$= -\frac{x-y}{1+x} = y-(1+y)\frac{x}{1+x} = y+f(x)+yf(x).$$

Nótese además que, hasta ahora, sólo hemos utilizado la condición 2 para establecer el número de puntos fijos de f. Veamos sin embargo que también se cumple:

$$\frac{f(x)}{x} = -\frac{1}{1+x}.$$

Como esta expresión existe, y es continua y derivable, en los dos intervalos considerados en la condición 2, podemos tomar su derivada,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{x}\right) = \frac{1}{(1+x)^2},$$

Que al ser siempre positiva, garantiza el crecimiento de $f(x)/x$.

5.- Acotación de la función

Otra forma de hallar la función deseada puede ser mediante acotación de la misma. La forma exacta de utilizar esta técnica dependerá de las condiciones exactas impuestas sobre la función. En muchos casos, es posible que alguna condición de las impuestas sobre la función exija que su valor sea mayor o igual que una determinada cota, mientras que alguna otra resulta en que su valor sea menor o igual que la misma cota. Entonces, es obvio que la única posibilidad es que la función tome el valor de dicha cota. Esta doble acotación se puede utilizar, por ejemplo, en la resolución del problema 5 de la XXVII Olimpiada Matemática Internacional (1986):

Encuentre todas las funciones *f*, definidas sobre el conjunto de los reales no negativos, y tomando valores reales no negativos, tales que:

(i) $f(xf(y))f(y)=f(x+y)$ **para cualesquiera** $x,y\geq 0$**,**

(ii) $f(2)=0$**,**

(iii) $f(x)\neq 0$ **para** $0\leq x<2$**.**

En primer lugar, es trivial constatar que, para todo $z>2$, podemos definir $y=2$, $x=z-2>0$, con lo que

$$f(z)=f(x+2)=f(2)f(xf(2))=0.$$

Luego $f(x)=0$ si y sólo si $x\geq 2$.

Entonces, tomando $x=2-y$ para cualquier $0\leq y<2$ (con lo que $f(y)$ es no nulo),

$$0=f(2)=f(x+y)=f(y)f((2-y)f(y)),\qquad (2-y)f(y)\geq 2,$$

$$f(y)\geq\frac{2}{2-y}.$$

Sin embargo, tomando $x=2-y-\varepsilon$, para cualquier $2>\varepsilon>0$, se tiene que

$$0\neq f(2-\varepsilon)=f(x+y)=f(y)f((2-y-\varepsilon)f(y)),\qquad (2-y-\varepsilon)f(y)<2,$$

Entonces, no puede ser

$$f(y)>\frac{2}{2-y},$$

como demostramos por reducción al absurdo; en caso de que sí lo fuera, existiría un $\delta>0$ tal que

$$f(y)=\frac{2}{2-y}+\delta.$$

Pero entonces, tomando

$$\varepsilon=\frac{(2-y)\delta}{f(y)}>0,$$

resultaría que $(2-y-\varepsilon)f(y)=2$, que es absurdo. Luego sólo puede ser, para todo $0\leq x<2$,

$$f(x)=\frac{2}{2-x}.$$

Nótese que entonces, para cualesquiera x,y cuya suma sea menor que 2,

$$f(xf(y))f(y)=\frac{2}{2-y}f\left(\frac{2x}{2-y}\right)=\frac{4}{4-2y-2x}=\frac{2}{2-y-x}=f(x+y).$$

El método utilizado para hallar esta solución ha sido el de doble acotación; comprobar que, para que se cumpla una de las condiciones, el valor de la función debe ser no inferior a un cierto valor, mientras que para que se cumpla otra, ha de ser no superior a dicho mismo valor. Este método no deja de ser útil en ciertas ocasiones, aunque no necesariamente en la mayoría de los casos.

Hay veces que el valor la función es "constante a trozos", o posee trozos en los que la función es constante. En este tipo de situaciones, puede ser interesante acotar la variable entre los dos extremos de un tal intervalo en el que la función sea constante, y sabiendo cuál es el valor en ambos extremos, sabemos cuál es el valor en cualquier punto de dicho intervalo. Esta técnica puede ser especialmente útil si todo lo que se pide es hallar el valor de la función en un punto dado, como sucede en el problema 3 de la VI Olimpiada Iberoamericana de Matemática (1991):

Sea f una función creciente definida para todo número real x, $0\leq x\leq 1$, tal que

- **a.** **$f(0)=0$,**
- **b.** **$f(x/3)=f(x)/2$,**
- **c.** **$f(1-x)=1-f(x)$.**

Encontrar $f(18/1991)$.

Es trivial comprobar que

$$1-f\left(\frac{2}{3}\right)=f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{f(1)}{2}=\frac{1-f(0)}{2}=\frac{1}{2}.$$

Luego como $f(1/3)=f(2/3)$ y f es creciente, $f(x)=1/2$ para todo $1/3\leq x\leq 2/3$. De forma análoga, se puede comprobar que $f(x)=1/4$ para todo $1/9\leq x\leq 2/9$, y que $f(x)=3/4$ para todo $7/9\leq x\leq 8/9$, y así sucesivamente. Se tiene entonces que podemos encontrar, dentro del intervalo [0,1] en una serie de subintervalos cerrados en los cuales la función es constante, y para los cuáles el valor de f en los extremos se puede hallar tomando intervalos cada vez más pequeños, de longitudes sucesivas 1/3, 1/9, 1/27, etc. Entonces, podemos intentar acotar 18/1991 para ver en cuál de estos intervalos se halla. Basándose en esta misma idea, podemos hallar el valor de f(x), multiplicando x por 3 tantas veces como sea necesario hasta llegar a o superar el valor de 1/3; si el valor y obtenido tras estas multiplicaciones no supera 2/3, sabemos que $f(y)=1/2$, y dividiendo $f(y)$ por 2 tantas veces como hayamos multiplicado x por 3 para llegar a y, obtenemos el valor de $f(x)$. En caso contrario, tomamos $1-y$ (que será menor que 3) y repetimos el proceso. Entonces,

$$f\left(\frac{18}{1991}\right)=\frac{1}{2}f\left(\frac{54}{1991}\right)=\frac{1}{4}f\left(\frac{162}{1991}\right)=\frac{1}{8}f\left(\frac{486}{1991}\right)=\frac{1}{16}f\left(\frac{1458}{1991}\right)=\frac{1}{16}\left(1-f\left(\frac{533}{1991}\right)\right);$$

$$f\left(\frac{533}{1991}\right)=\frac{1}{2}f\left(\frac{1599}{1991}\right)=\frac{1}{2}\left(1-f\left(\frac{392}{1991}\right)\right);$$

$$f\left(\frac{392}{1991}\right)=\frac{1}{2}f\left(\frac{1176}{1991}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4},$$

ya que $1/3<1176/1991<2/3$ al ser $2\cdot1991=3982>3528=3\cdot1176>1991$. Luego

$$f\left(\frac{533}{1991}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{8};$$

$$f\left(\frac{18}{1991}\right)=\frac{1}{16}\left(1-\frac{3}{8}\right)=\frac{5}{128}.$$

Y hemos acabado.

6.- Otros problemas de ecuaciones funcionales

Existen finalmente otros problemas de ecuaciones funcionales, con funciones reales de variable real, que no se ajustan completamente a ninguna de las técnicas de resolución aquí planteadas. Pasamos finalmente a considerar algunos de ellos para ampliar el rango de posibles técnicas de resolución:

Problema 5 de la X Olimpiada Matemática Internacional (1968):

Sea *f* una función real de variable real, tal que, para una constante positiva *a*, la relación

$$f(x+a)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-\left(f(x)\right)^2}$$

se cumple para todo *x*.

(a) Demuestre que la función es periódica (es decir, que existe una constante *b* tal que *f*(*x*+*b*)=*f*(*x*) para todo *x*).

(b) Para *a*=1, dé un ejemplo de una función no constante con dicha propiedad.

Podemos restar 1/2 a ambos lados de la igualdad y elevar al cuadrado, para obtener, reorganizando términos, que

$$\left[f(x+a)\right]^2-f(x+a)+\frac{1}{4}=f(x)-\left(f(x)\right)^2;$$

$$\left(f(x+a)-\frac{1}{2}\right)^2+\left(f(x)-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

Sustituyendo ahora x por $x+a$, se tiene que, para todo x real,

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(f(x+2a)-\frac{1}{2}\right)^2=\left(f(x+a)-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(f(x)-\frac{1}{2}\right)^2;$$

$$\left(f(x+2a)-\frac{1}{2}\right)^2=\left(f(x)-\frac{1}{2}\right)^2.$$

Ahora bien, para todo x real, $f(x+a)$ es obviamente mayor o igual que 1/2, por ser igual la suma de 1/2 y una raíz no negativa. Luego para todo x, tanto $f(x)$ como $f(x+2a)$ son mayores o iguales que ½, de donde tomando la raíz cuadrada positiva (la negativa no tiene sentido) en esta última igualdad, se tiene que, para todo x real,

$$f(x+2a)-\frac{1}{2}=f(x)-\frac{1}{2},$$

y tomando $b=2a$, hemos demostrado que la función es periódica de periodo b.

Para dar un ejemplo, es útil comprobar que si la función fuera periódica de periodo a, entonces sería

$$f(x)=f(x+a)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-\left(f(x)\right)^2}; \qquad \left(f(x)\right)^2-f(x)+\frac{1}{4}=f(x)-\left(f(x)\right)^2;$$

$$f(x)=\frac{1+\sqrt{1-\frac{1}{2}}}{2}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4},$$

que es constante (se ha tomado sólo la raíz mayor porque la menor lleva a $f(x)<1/2$, que como se ha visto es falso). Necesitamos pues, para $f(x)$ no constante, buscar entre las funciones periódicas de periodo 2 pero no de periodo 1. Además, ha de ser

$$\left(f(x+1)-\frac{1}{2}\right)^2+\left(f(x)-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

Es también importante darse cuenda de que, para cualquier real x, $1/2\leq f(x)\leq 1$. La primera desigualdad se debe a que $f(x+a)$ es la suma de 1/2 y un término no negativo, mientras que la segunda se debe a que, en caso contrario, $f(x+a)$ sería complejo. De ahí que podemos pensar en dos estrategias:

1) buscar entre las funciones de la forma $f(x)=1/2+|\cos(Bx+\phi)|/2$, de las cuales se puede comprobar trivialmente que, tomando $B=\pi/2$ y para cualquier fase ϕ, se tratan de soluciones de la ecuación dada, o
2) tomar soluciones "constantes a trozos", donde durante un semiperiodo sea $f(x)=A$, y en el siguiente un valor B. Se puede comprobar fácilmente que, si $A=1/2$ y $B=1$, se cumple la relación dada, ya que

$$\frac{1}{2}+\sqrt{B-B^2}=\frac{1}{2}+\sqrt{1-1^2}=\frac{1}{2}=A,$$

$$\frac{1}{2}+\sqrt{A-A^2}=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1=B.$$

Estas dos son, probablemente, dos de las soluciones más sencillas, pero puede haber muchas más…

Nótese que, al final, la resolución del problema comienza por una de las técnicas ya mencionadas antes, el cambio de variable, si bien no se utiliza ninguna de las otras comentadas hasta ahora de ahí en adelante.

Problema 5 de la XIV Olimpiada Matemática Internacional (1972):

Sean f y g funciones reales de variable real, tales que para cualesquiera valores reales x,y, se cumple la ecuación

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)g(y).$$

Demuestre que si $f(x)$ no es idénticamente nula, y $|f(x)|\leq 1$ para todo x, entonces $|g(y)|\leq 1$ para todo y.

El cambio de variable es una estrategia interesante también en este caso. La aplicaremos para demostrar el resultado pedido por reducción al absurdo. Supongamos entonces que existe un valor de y tal que $|g(y)|>1$. Se tiene entonces, en virtud de la desigualdad triangular, que

$$|f(x+y)|+|f(x-y)| \geq |f(x+y)+f(x-y)| = 2|f(x)||g(y)| > 2|f(x)|.$$

Es decir, al menos uno de los dos valores absolutos del miembro de la izquierda es mayor que el valor absoluto presente en el miembro de la derecha. Sin pérdida de generalidad, sea $|f(x+y)|=|f(x)|+\Delta$, donde $\Delta>0$, ya que siempre podemos cambiar a y de signo sin afectar a la premisa del problema o al resultado a demostrar. Entonces, sustituyendo x por $x+y$ en la relación dada en el enunciado,

$$\begin{aligned} |f(x+2y)|+|f(x)| \geq |f(x+2y)+f(x)| &= 2|f(x+y)||g(y)| > 2|f(x+y)| \\ &= 2|f(x)|+2\Delta; \end{aligned}$$

$$|f(x+2y)| > |f(x)|+2\Delta.$$

Demostraremos entonces por inducción que, para todo $n\geq 2$,

$$|f(x+ny)| > |f(x+(n-1)y)|+\Delta \geq |f(x)|+n\Delta.$$

La hipótesis de inducción ha sido ya probada para $n=2$. Si se cumple para un cierto valor n, entonces sustituyendo x por $x+ny$ en la relación dada en el enunciado,

$$\begin{aligned} |f(x+(n+1)y)|+|f(x+(n-1)y)| &\geq |f(x+(n+1)y)+f(x+(n-1)y)| \\ &= 2|f(x+ny)||g(y)| > 2|f(x+ny)|; \end{aligned}$$

Utilizando ahora la hipótesis de inducción,

$$|f(x+(n+1)y)| > 2|f(x+ny)|-|f(x+(n-1)y)| > |f(x+ny)|+\Delta > |f(x)|+(n+1)\Delta.$$

Entonces, para un entero positivo $N>1/\Delta$, que existe por ser $\Delta>0$, se tiene que

$$|f(x+Ny)| > |f(x)|+N\Delta > 0+1 = 1.$$

Hemos llegado a una contradicción, luego siempre es $|g(y)|\leq 1$. Nótese que esta es la mejor acotación posible, ya que $g(y)=1$ para todo y cuando $f(x)=k$, con k constante de valor absoluto menor o igual que 1.

Referencias: Varios de los problemas propuestos en las Olimpiadas Matemáticas Española, Iberoamericana e Internacional se pueden encontrar en http://platea.pntic.mec.es/csanchez/olimmain.htm, http://www.oei.es/oim/problemas.htm y http://imo.math.ca, respectivamente.

Problem 2

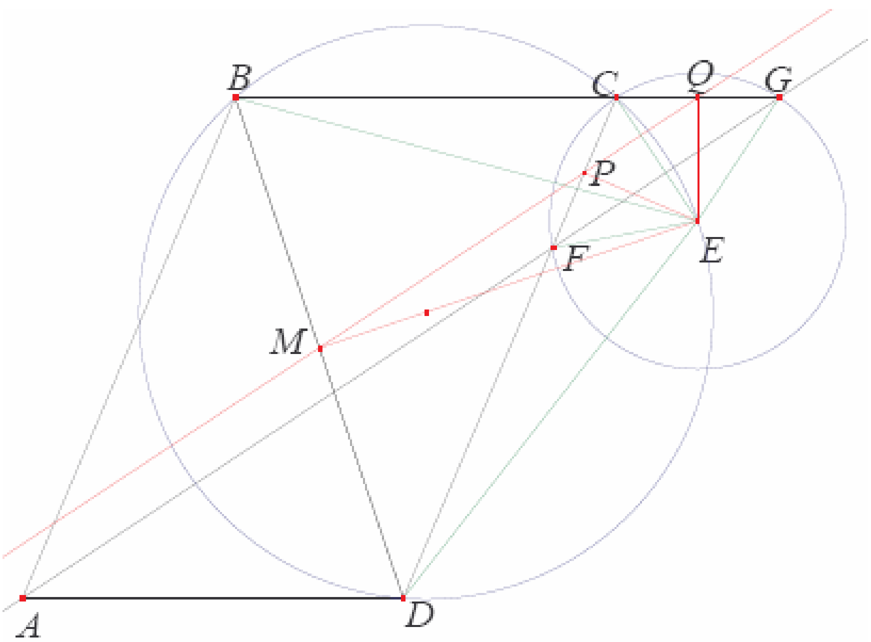
Consider five points *A*, *B*, *C*, *D* and *E* such that *ABCD* is a parallelogram and *BCED* is a cyclic quadrilateral. Let *l* be a line passing through *A*. Suppose that *l* intersects the interior of the segment *DC* at *F* and intersects line *BC* at *G*. Suppose also that *EF*=*EF*=*EC*. Prove that *l* is the bisector of angle ∠*DAB*.

Como ΔCEF y ΔCEG son isósceles por ser $EC=EF=EG$, los pies de las perpendiculares desde E sobre las rectas CD y BC son los puntos medios respectivos P y Q de CF y CG. La recta que pasa por ellos (recta de Simson de E con respecto a ΔBCD, por estar E en la circunferencia circunscrita a ΔBCD), pasa también por el pie de la perpendicular desde E sobre BD. Ahora bien, por ser $ABCD$ paralelogramo, $\angle DAF=\angle CGF$, mientras que $\angle AFD=\angle GFC$ por construcción. Luego ΔFAD y ΔFGC son semejantes, con lo que

$$\frac{DF}{BC}=\frac{DF}{AD}=\frac{CF}{CG}, \qquad \frac{DP}{CP}=\frac{DF+FP}{CP}=\frac{2DF+CF}{CF}=\frac{2BC+CG}{CG}=\frac{BC+CQ}{CQ}=\frac{BQ}{CQ},$$

$$\frac{DP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QB}\cdot\frac{BM}{MD}=1,$$

donde M es el punto medio de BD. Luego la recta que pasa por P y Q corta a BD al mismo tiempo en el pie de la perpendicular a BD desde E, y en el punto medio de BD, con lo que ambos puntos coinciden y ΔBED es isósceles en E, de donde $BE=DE$.



Por lo tanto, las potencias de *B* y *D* respecto de la circunferencia circunscrita a ΔCFG son iguales, y

$$AD \cdot CG = BC \cdot CG = DF \cdot FC \,.$$

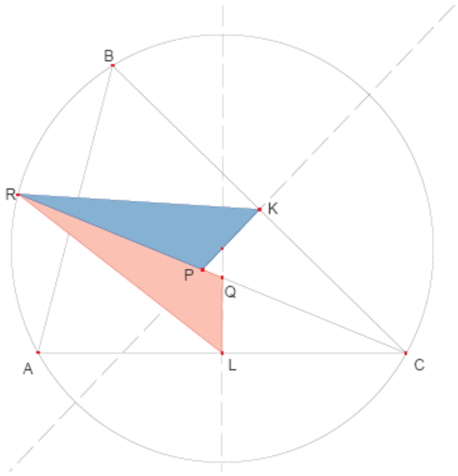
Luego unido a la relación hallada por la proporcionalidad de ΔFAD y ΔFGC, obtenemos que $AD=DF$, $CF=CG$, de donde ΔADF es isósceles en *D*, y

$$\angle DAF = \frac{\pi - \angle ADF}{2} = \frac{\pi - \angle ADC}{2} = \frac{\angle DAB}{2},$$

qed, y donde se ha utilizado nuevamente que *ABCD* es paralelogramo.

Problem 4

In triangle *ABC* the bisector of angle ∠*BCA* intersects the circumcircle again at *R*, the perpendicular bisector of *BC* at *P*, and the perpendicular bisector of *AC* at *Q*. The midpoint of *BC* is *K* and the midpoint of *AC* is *L*. Prove that the triangles *RPK* and *RQL* have the same area.



Solución de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, España

Como $\angle QLC$ es recto y $\angle QCL=C/2$, es obvio que

$$\angle RQL = \pi - \angle LQC = \angle QLC + \angle QCL = \frac{\pi}{2} + \frac{C}{2}.$$

Al mismo tiempo, nuevamente por ser $\angle QLC$ recto y $\angle QCL=C/2$, y al ser L el punto medio de AC, aplicando el teorema del seno se obtiene que

$$\tan\left(\frac{C}{2}\right) = \frac{QL}{LC} = \frac{2QL}{b},$$

luego

$$QL\,\mathrm{sen}\left(\angle RQL\right) = \frac{b}{2}\tan\left(\frac{C}{2}\right)\cos\left(\frac{C}{2}\right) = \frac{b}{2}\mathrm{sen}\left(\frac{C}{2}\right).$$

De forma completamente análoga se obtiene que

$$PK\,\mathrm{sen}\left(\angle RPK\right) = \frac{a}{2}\mathrm{sen}\left(\frac{C}{2}\right).$$

Además,

$$\angle CAR = \angle CAB + \angle BAR = A + \angle BCR = A + \frac{C}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{A-B}{2},$$

$$CR = 2r \operatorname{sen}(\angle CAR) = 2r\cos\left(\frac{A-B}{2}\right),$$

donde r es el circunradio de ABC, mientras que

$$CQ = \frac{CL}{\cos\left(\frac{C}{2}\right)} = \frac{b}{2\cos\left(\frac{C}{2}\right)}.$$

Luego

$$RQ\cos\left(\frac{C}{2}\right) = (CR - CQ)\cos\left(\frac{C}{2}\right) = 2r\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)\cos\left(\frac{C}{2}\right) - \frac{b}{2}.$$

Pero

$$\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)\cos\left(\frac{C}{2}\right) = \cos\left(\frac{A}{2}\right)\cos\left(\frac{B}{2}\right)\cos\left(\frac{C}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{A}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{B}{2}\right)\cos\left(\frac{C}{2}\right)$$
$$= \cos\left(\frac{A}{2}\right)\cos\left(\frac{B+C}{2}\right) + \cos\left(\frac{A}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{B}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{C}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{A}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{B}{2}\right)\cos\left(\frac{C}{2}\right)$$
$$= \frac{\operatorname{sen}(A)}{2} + \operatorname{sen}\left(\frac{B}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{A+C}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen}(A) + \operatorname{sen}(B)}{2} = \frac{a+b}{4r},$$

luego

$$RQ\cos\left(\frac{C}{2}\right) = \frac{a+b}{2} - \frac{b}{2} = \frac{a}{2}.$$

De forma enteramente análoga se obtiene que

$$RP\cos\left(\frac{C}{2}\right) = \frac{b}{2}.$$

Luego

$$[RPK] = \frac{1}{2} RP \cdot PK \operatorname{sen}(\angle RPK) = \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{2\cos\left(\frac{C}{2}\right)} \cdot \frac{a}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{C}{2}\right) = \frac{1}{8\cos^2\left(\frac{C}{2}\right)} \cdot \frac{ab\operatorname{sen}(C)}{2}$$
$$= \frac{[ABC]}{8\cos^2\left(\frac{C}{2}\right)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2\cos\left(\frac{C}{2}\right)} \cdot \frac{b}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{C}{2}\right) = RQ \cdot QL \operatorname{sen}(\angle RQL) = [RQL],$$

qed.

Problem 5

Let a and b be positive integers. Show that if $4ab-1$ divides $(4a^2-1)^2$, then $a=b$.

Solución de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, España

Si $4ab-1$ divide a $(4a^2-1)^2=16a^4-8a^2+1$, también dividirá a

$$2b^2\left(16a^4-8a^2+1\right)=32a^4b^2-16a^2b^2+2b^2=\left(4ab-1\right)\left(8a^3b+2a^2-4ab\right)+2\left(a-b\right)^2.$$

Como $4ab-1$ es necesariamente impar, entonces ha de dividir a $(a-b)^2$. Luego siendo ρ el cociente en cuestión (que es obviamente no negativo al ser el cociente de un cuadrado entre un número que es mayor o igual que $4-1=3$ por ser a y b positivos), se tiene que

$$a^2-2ab+b^2=\rho\left(4ab-1\right), \qquad b^2-2ab\left(2\rho+1\right)+a^2+\rho=0.$$

Para un valor dado, entero no negativo cualquiera de ρ, consideremos esta última relación como una ecuación diofántica en a y b, y supongamos que tiene al menos una solución en enteros positivos (a,b). Obviamente, si (a,b) es solución, también lo es (b,a) por simetría entre las variables. Es también trivial observar que, si tomamos la ecuación diofántica como de segundo grado en b, entonces la suma de las dos raíces es el entero positivo $2a(2\rho+1)$, mientras que el producto de las dos raíces es el entero positivo $a^2+\rho$, luego si una de las dos raíces es un entero positivo, entonces la otra también lo es. De todas las posibles soluciones, elijamos aquella que tiene un valor mínimo de a (esta solución existe ya que el conjunto de valores que toma a es un subconjunto no vacío de los enteros positivos). Entonces, $b\geq a$, pues en caso contrario, (b,a) sería una solución con un valor de a menor que el mínimo (absurdo). La ecuación cuadrática en b tiene entonces dos raíces enteras positivas no inferiores a a. Definiendo entonces $c=b-a$, se tiene que la ecuación cuadrática

$$0=\left(c+a\right)^2-2a\left(c+a\right)\left(2\rho+1\right)+a^2+\rho=c^2-4\rho ac-\rho\left(4a^2-1\right)$$

debe tener dos raíces enteras no negativas. Pero el producto de dichas raíces es $-\rho(4a^2-1)$, que no es positivo. Luego ha de ser nulo, y como $4a^2-1\geq 3$, necesariamente ha de ser $\rho=0$, con lo que la ecuación diofántica se transforma en $(a-b)^2=0$, con solución única $a=b$, qed.

Problemas para los más jóvenes 30
Problemas de competiciones croatas de 2007
Croacia 1. Simplificar todo lo posible la fracción

$$\frac{bc\left(c^2-b^2\right)+ca\left(a^2-c^2\right)+ab\left(b^2-a^2\right)}{b^2c^2\left(c-b\right)+a^2c^2\left(a-c\right)+a^2b^2\left(b-a\right)}.$$

Croacia 2. En el conjunto de los números reales, resolver la ecuación

$$||x+2|-2x|=\frac{x+3}{2}.$$

Croacia 3. Sea $p>3$ un número primo. Probar que su cuadrado da resto 1 al dividirlo por 24.

Croacia 4. ¿Existe un triángulo rectángulo cuyos catetos sean enteros y la hipotenusa valga $\sqrt{2006}$?

Croacia 5. En el triángulo ABC, las longitudes de los lados son BC =7, AC=3, y el ángulo A mide 30^o. Determinar la longitud del lado AB.

PROPOSED SOLUTION TO PROBLEMA 141

OVIDIU FURDUI

Sea $\binom{n}{i}$ un numero combinatorio, $n, i \in N$ $n \geq i$. Demostrar entonces que

$$\binom{n}{1}\binom{n}{2}\cdots\binom{n}{n}$$

y $e^{\frac{1}{2}n^2}$ son dos infinitos asintoticamente equivalentes, es decir,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{2}n^2}}{\binom{n}{1}\binom{n}{2}\cdots\binom{n}{n}} = 1.$$

Solution. In what follows we are going to prove that

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{2}n^2}}{\binom{n}{1}\binom{n}{2}\cdots\binom{n}{n}} = \infty.$$

We need the following Lemma.

Lemma 0.1. *Glaisher-Kinkelin constant. The following limit holds:*

$$A = \lim_{n\to\infty} \frac{1^1 2^2 \cdots n^n}{n^{n^2/2+n/2+1/12} e^{-n^2/4}},$$

where $A = 1.282712$ *is the Glaisher-Kinkelin constant.*

Let $x_n = \frac{e^{\frac{1}{2}n^2}}{\binom{n}{1}\binom{n}{2}\cdots\binom{n}{n}}$. We have

$$\ln x_n = \frac{n^2}{2} - \sum_{k=1}^{n} \ln \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n^2}{2} - (n+1)\ln n! + 2\sum_{k=1}^{n} \ln k!.$$

Date: May 7, 2007.

On the other hand, we note that

$$\sum_{k=1}^{n} \ln k! = n\ln 1 + (n-1)\ln 2 + \cdots + 2\ln(n-1) + \ln n = \sum_{k=1}^{n}(n+1-k)\ln k$$
$$= (n+1)\ln n! - \sum_{k=1}^{n} k\ln k.$$

Thus,

$$\begin{aligned}\ln x_n &= \frac{n^2}{2} + (n+1)\ln n! - 2\sum_{k=1}^{n} k\ln k \\ &= \frac{n^2}{2} + (n+1)\ln n! - 2\left(\sum_{k=1}^{n} k\ln k - \left(\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}+\frac{1}{12}\right)\ln n + \frac{n^2}{4}\right) \\ &- \left(n^2+n+\frac{1}{6}\right)\ln n + \frac{n^2}{2} = n^2 + (n+1)\ln n! - \left(n^2+n+\frac{1}{6}\right)\ln n - 2A_n,\end{aligned}$$

where

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} k\ln k - \left(\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}+\frac{1}{12}\right)\ln n + \frac{n^2}{4}.$$

Using *Stirling's formula* $n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$, we get that

$$n^2 + (n+1)\ln n! - \left(n^2+n+\frac{1}{6}\right)\ln n \approx (n+1)\ln\sqrt{2\pi n} - n - \frac{\ln n}{6}.$$

It follows, based on Lemma 0.1, that

$$\ln x_n \approx (n+1)\ln\sqrt{2\pi n} - n - \frac{\ln n}{6} - 2A_n \to \infty - 2\ln A = \infty,$$

and hence $x_n \to \infty$.

Western Michigan University, Kalamazoo, MI

E-mail address: ofurdui@yahoo.com, o0furdui@wmich.edu

Problema 142, propuesto por Jose Luis Díaz Barrero, Barcelona, España.

Solución de Francisco Javier García Capitán.

Sean a, b, c tres números positivos distintos de suma 1. Demostrar que

$$\frac{(a+bc)bc}{(a-b)(a-c)} + \frac{(b+ca)ca}{(b-a)(b-c)} + \frac{(c+ab)ab}{(c-a)(c-b)} < \frac{1}{3}.$$

En primer lugar, hacemos

$$\sum_{\text{cíclica}} \frac{(a+bc)bc}{(a-b)(a-c)} = \sum_{\text{cíclica}} \frac{(a+bc)bc(c-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = \frac{\sum_{\text{cíclica}} (a+bc)bc(c-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}.$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{\text{cíclica}} bc(a+bc)(c-b) \\
=&\sum_{\text{cíclica}} abc(c-b) + \sum_{\text{cíclica}} b^2c^2(c-b) \\
=&abc \underbrace{\sum_{\text{cíclica}} (c-b)}_{=0} + \left(b^2c^3 - b^3c^2 + c^2a^3 - c^3a^2 + a^2b^3 - a^3b^2\right).
\end{aligned}$$

La expresión $\lambda = b^2c^3 - b^3c^2 + c^2a^3 - c^3a^2 + a^2b^3 - a^3b^2$ se anula cuando alguna de las variables a, b, c son iguales, por lo que $(a-b)(b-c)(c-a) = ca^2 - ba^2 + ab^2 - cb^2 + bc^2 - ac^2$ debe dividir a λ. Mediante una división comprobamos que $\lambda = (a-b)(b-c)(c-a)(bc+ca+ab)$ y por tanto

$$\sum_{\text{cíclica}} \frac{(a+bc)bc}{(a-b)(a-c)} = bc + ca + ab.$$

Ahora, teniendo en cuenta la identidad

$$(1-a)(1-b)(1-c) = 1 - (a+b+c) + (bc+ca+ab) - abc,$$

resulta que, usando la desigualdad $\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x+y+z}{3}$ (desigualdad entre las medias aritmética y geométrica)

$$\begin{aligned}
bc + ca + ab =&(1-a)(1-b)(1-c) + ((a+b+c) - 1) + abc \\
&\leqslant \left(\frac{3-(a+b+c)}{3}\right)^3 + 0 + \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 = \frac{8}{27} + \frac{1}{27} = \frac{1}{3},
\end{aligned}$$

cumpliéndose la igualdad si y solo si $a = b = c = \frac{1}{3}$.

PROPOSED PROBLEM TO REVISTA ESCOLAR DE LA OLIMPIADA IBEROAMERICANA DE MATEMATICA

OVIDIU FURDUI

Let $l \geq 0$ be a natural number. Find:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln(n+2l+1)-\gamma\right),$$

where $\gamma = \sum\limits_{k=1}^{n} - \ln n,$ is the *Euler-Mascheroni's constant.*

Solution. The sum equals:

$$\frac{\gamma}{2}-\ln\frac{2^{l+1}l!}{(2l+1)!!\sqrt{\pi}}.$$

We need the following two well-known results.

Lemma 0.1. *Abel's summation by parts formula. Let $(a_n)_{n\geq 1}$ and $(b_n)_{n\geq 1}$ be two sequences of real numbers and let $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$. The following formula holds:*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} A_k\left(b_k - b_{k+1}\right).$$

Proof. The lemma can be proven by elementary calculations. $\square$

Lemma 0.2. *Walli's formula. The following limit holds:*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!\sqrt{2n+1}}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Let $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}-\ln(k+2l+1)-\gamma\right)$. An application of Lemma 0.1, with $a_k = (-1)^k$ and $b_k = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}-\ln(k+2l+1)-\gamma$, shows that

$$\begin{aligned} S_n &= \left((-1)+(-1)^2+\cdots+(-1)^n\right)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1}-\ln(n+2l+2)-\gamma\right)+ \\ &+\sum_{k=1}^{n}\left((-1)+(-1)^2+\cdots+(-1)^k\right)\left(\ln\frac{k+2l+2}{k+2l+1}-\frac{1}{k+1}\right). \end{aligned} \tag{0.1}$$

On the other hand, we have that

$$\lim_{n\to\infty}\left((-1)+(-1)^2+\cdots+(-1)^n\right)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1}-\ln(n+2l+2)-\gamma\right)=0,$$

since $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1}-\ln(n+2l+2)-\gamma\to 0$ as $n\to\infty$, and $A_n=(-1)+(-1)^2+\cdots+(-1)^n=0$, for n even and $A_n=-1$ for n odd.

Thus, letting n converge to ∞ in (0.1), we get that

$$S=\lim S_n=\sum_{k=1,k=odd}^{\infty}(-1)\left(\ln\frac{k+2l+2}{k+2l+1}-\frac{1}{k+1}\right)=-\sum_{p=0}^{\infty}\left(\ln\frac{2p+2l+3}{2p+2l+2}-\frac{1}{2p+2}\right).$$

Let T_n be the n^{th} partial sum of the preceding series, i.e.,

$$\begin{aligned}T_n&=\sum_{p=0}^{n-1}\left(\ln\frac{2p+2l+3}{2p+2l+2}-\frac{1}{2p+2}\right)\\&=\ln\frac{(2l+3)(2l+5)\cdots(2l+2n+1)}{(2l+2)\cdots(2n+2l)}-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)-\ln\sqrt{n}.\end{aligned}$$

It follows that,

$$T_n=\ln\left(\frac{(2l)!!}{(2l+1)!!}\frac{(2n+2l-1)!!\sqrt{2n+2l+1}}{(2n+2l)!!}\sqrt{\frac{2n+2l+1}{n}}\right)-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right).$$

An application of Lemma 0.2 shows that

$$\lim_{n\to\infty}T_n=\ln\frac{(2l)!!}{(2l+1)!!}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{2}-\frac{\gamma}{2}=\ln\frac{2^{l+1}l!}{(2l+1)!!\sqrt{\pi}}-\frac{\gamma}{2}.$$

The desired result follows.

Department of Mathematics, Western Michigan University, Kalamazoo, MI 49008

E-mail address: `o0furdui@wmich.edu, ofurdui@yahoo.com`

PROPOSED SOLUTION TO PROBLEMA 143, VOL 29, JANUARY-FEBRUARY 2007

Sea $l \geq 0$ un número natural. Calcular

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln(n+2l+1)-\gamma\right),$$

siendo γ la constante de *Euler-Mascheroni*.

Solution. The series equals

$$\frac{\gamma}{2}-(2l+1)\ln 2+\frac{1}{2}\ln\pi-\ln\frac{(l!)^2}{(2l+1)!}.$$

Let $H_m=\sum\limits_{n=1}^{m}\frac{1}{n}$ be the m^{th} harmonic number. The first step is to prove the convergence of the series, so we break the series as

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(H_n-\ln n-\gamma\right)+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\ln n-\ln(n+2l+1)\right),$$

and show that both series are *Leibniz* series.

The first series. We have that $H_n-\ln n-\gamma\searrow 0$ and $H_n-\ln n$ decreases with n. Indeed $H_{n+1}-\ln(n+1)<H_n-\ln n$, for all $n\geq 1$, since $\frac{1}{n+1}<\ln\frac{n+1}{n}$.

The second series. We have, based on straightforward calculations, that

$$\lim_{n\to\infty}\left(\ln n-\ln(n+2l+1)\right)=0 \quad \text{and} \quad 0>\ln(n+1)-\ln(n+2l+2)>\ln n-\ln(n+2l+1).$$

The sum of the series. Let S_{2m} be the $2m^{th}$ partial sum of the series. We have

$$S_{2m}=\sum_{n=1}^{2m}(-1)^n\left(H_n-\ln(n+1+2l)-\gamma\right)=\frac{1}{2}H_m-\sum_{n=1}^{2m}(-1)^n\ln(n+1+2l). \tag{0.1}$$

Also, if $\gamma_m=H_m-\ln m$, then $\lim\limits_{m\to\infty}\gamma_m=\gamma$. A calculation shows that

$$\sum_{n=1}^{2m}(-1)^n\ln(n+1+2l)=\ln\left(\frac{(2m+1+2l)!}{2^{2m}((m+l)!)^2}\cdot\frac{(l!)^2}{(2l+1)!}\right). \tag{0.2}$$

The Stirling's formula, $m! = \sqrt{2\pi m}\left(\frac{m}{e}\right)^m \left(1 + O(m^{-1})\right)$, and the *Taylor's* formula, $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + O(x^{-3})$, for $|x| < 1$, yield (the straightforward calculations are left to the reader):

$$\ln \frac{(2m+1+2l)!}{2^{2m}((m+l)!)^2} = \frac{1}{2}\ln m + (2l+1)\ln 2 - \frac{1}{2}\ln \pi + O(m^{-1}). \tag{0.3}$$

Combining (0.1), (0.2) and (0.3), we get that

$$S_{2m} = \frac{1}{2}\gamma_m - (2l+1)\ln 2 + \frac{1}{2}\ln \pi - \ln \frac{(l!)^2}{(2l+1)!} - O(m^{-1}),$$

whose limit, as $m \to \infty$, shows that the desired result yields.

Perfetti Paolo, Dipartimento di Matematica, Universitá degli studi "Tor Vergata" Roma, Italy

E-mail address: perfetti@mat.uniroma2.it

Problema 143: *sea $\ell \geq 0$ un número natural. Calcular*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\Big(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln(n+2\ell+1)-\gamma\Big),$$

donde γ es la constante de Euler-Mascheroni.

Solución: sumemos los términos $2k-1$ y $2k$. Así,

$$(-1)^{2k-1}\Big(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2k-1}-\ln(2k-1+2\ell+1)-\gamma\Big)+$$

$$+(-1)^{2k}\Big(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2k}-\ln(2k+2\ell+1)-\gamma\Big) =$$

$$= \frac{1}{2k}+\ln(2k+2\ell)-\ln(2k+2\ell+1)$$

De esta manera, la suma propuesta, si la llamamos S, puede escribirse como

$$S=\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{2k}+\ln(2k+2\ell)-\ln(2k+2\ell+1)\Big)$$

Para ver cuanto vale esta suma, veremos primero como expresar una suma parcial S_n de los primeros n términos e intentaremos después calcular el límite para $n\to\infty$. Así,

$$S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}+\sum_{k=1}^{n}\ln(2k+2\ell)-\sum_{k=1}^{n}\ln(2k+2\ell+1)$$

Recordemos en este punto que la constante de Euler-Mascheroni se define como

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\Big)$$

Así, sumando y restando $\frac{1}{2}\ln n$ a S_n obtenemos

$$S_n=\frac{1}{2}\Big(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\Big)+\frac{1}{2}\ln n+\sum_{k=1}^{n}\ln(2k+2\ell)-\sum_{k=1}^{n}\ln(2k+2\ell+1)$$

Vemos claramente que el primer sumando de esta nueva expresión tiende a $\frac{\gamma}{2}$, luego el problema se reduce a calcular

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\frac{1}{2}\ln n+\sum_{k=1}^{n}\ln(2k+2\ell)-\sum_{k=1}^{n}\ln(2k+2\ell+1)\Big)=\lim_{n\to\infty}\ln\sqrt{n}\prod_{k=1}^{n}\frac{(2k+2\ell)}{(2k+2\ell+1)}$$

Ahora intentaremos expresar este producto en una forma más cerrada para n. Si lo observamos, notemos que multiplicando y dividiendo por el numerador obtenemos, mediante algunas manipulaciones, expresiones que sólo dependen de factoriales:

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{(2k+2\ell)}{(2k+2\ell+1)} = \frac{[(2+2\ell)(4+2\ell)\cdots(2n+2\ell)]^2}{(2+2\ell)(2+2\ell+1)(4+2\ell)\cdots(2n+2\ell)(2n+2\ell+1)} =$$

$$= \frac{\left[2^n \frac{(\ell+n)!}{\ell!}\right]^2}{\frac{(2n+2\ell+1)!}{(2\ell+1)!}} = \frac{2^{2n}(2\ell+1)![(n+\ell)!]^2}{[\ell!]^2(2n+2\ell+1)!}$$

Si ahora volvemos al límite que teníamos, usando las propiedades del logaritmo tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \ln \sqrt{n} \prod_{k=1}^{n} \frac{(2k+2\ell)}{(2k+2\ell+1)} = \lim_{n\to\infty} \ln \left[\frac{(2\ell+1)!}{\ell!^2} \cdot \frac{2^{2n}(n+\ell)!^2\sqrt{n}}{(2n+2\ell+1)!} \right] =$$

$$= \ln \frac{(2\ell+1)!}{\ell!^2} + \lim_{n\to\infty} \ln \frac{2^{2n}(n+\ell)!^2\sqrt{n}}{(2n+2\ell+1)!}$$

Esto último podemos hacerlo porque el primer sumando no depende de n, luego puede salir fuera del límite. Ahora, observemos que en la expresión que nos ha quedado tenemos varios factoriales, una exponencial y un factor $\sqrt{n}$. Esto nos motiva a usar la fórmula de Stirling para los factoriales. Recordemos que esta fórmula nos dice que si x es entero y suficientemente grande entonces

$$\Gamma(x+1) = x! \approx \sqrt{2\pi x}x^x e^{-x},$$

donde Γ representa la *función gamma de Euler*. Por claridad en la exposición, tendremos en cuenta tan sólo el cociente para el cálculo, de manera que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}(n+\ell)!^2\sqrt{n}}{(2n+2\ell+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}[e^{-n-\ell}(n+\ell)^{n+\ell}\sqrt{2\pi(n+\ell)}]^2\sqrt{n}}{e^{-2n-2\ell-1}(2n+2\ell+1)^{2n+2\ell+1}\sqrt{2\pi(2n+2\ell+1)}} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}e^{-2n-2\ell}(n+\ell)^{2n+2\ell}2\pi(n+\ell)\sqrt{n}}{e^{-2n-2\ell-1}(2n+2\ell+1)^{2n+2\ell+1}\sqrt{2\pi(2n+2\ell+1)}}$$

Ahora, multiplicamos y dividimos por $2^{2\ell}$ y reunimos convenientemente los términos, de forma que cada uno de los límites sea fácil de resolver, y obtenemos:

$$\frac{e}{2^{2\ell}} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+2\ell}{2n+2\ell+1} \right)^{2n+2\ell} \frac{2\pi(n+\ell)\sqrt{n}}{(2n+2\ell+1)\sqrt{2\pi(2n+2\ell+1)}}$$

Es ahora trivial ver que la primera fracción tiende a $\frac{1}{e}$ y la segunda a $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, por lo cual el cociente entero tiende a $\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2\ell+1}}$. Volviendo atrás,

$$\lim_{n\to\infty} \ln \sqrt{n} \prod_{k=1}^{n} \frac{(2k+2\ell)}{(2k+2\ell+1)} = \ln \frac{(2\ell+1)!}{\ell!^2} + \lim_{n\to\infty} \ln \frac{2^{2n}(n+\ell)!^2\sqrt{n}}{(2n+2\ell+1)!} \implies$$

$$\implies \lim_{n\to\infty} \ln \sqrt{n} \prod_{k=1}^{n} \frac{(2k+2\ell)}{(2k+2\ell+1)} = \ln \frac{(2\ell+1)!}{\ell!^2} + \ln \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2\ell+1}} = \ln \frac{(2\ell+1)!\sqrt{\pi}}{\ell!^2 2^{2\ell+1}}$$

Y por fin para acabar,

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\gamma}{2} + \ln \frac{(2\ell+1)!\sqrt{\pi}}{\ell!^2 2^{2\ell+1}}$$

Problema 144, propuesto por Vicente Vicario García, Huelva, España.

Dados los números α y β siguientes, probar o refutar que $\alpha = \beta$.

$$\begin{aligned}\alpha =&\sqrt{13}+\sqrt{10+2\sqrt{13}}\\ \beta =&\sqrt{5+2\sqrt{3}}+\sqrt{18-2\sqrt{3}+2\sqrt{65-26\sqrt{3}}}\end{aligned}$$

Solución de Francisco Javier García Capitán. En primer lugar,

$$\left(\alpha-\sqrt{13}\right)^2 = 10+2\sqrt{13} \Rightarrow \alpha^2-2\sqrt{13}\alpha+13 = 10+2\sqrt{13} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{\alpha^2+3}{2+2\alpha} = \sqrt{13} \Rightarrow \frac{\alpha^4+6\alpha^2+9}{4\alpha^2+8\alpha+4} = 13 \Rightarrow \alpha^4-46\alpha^2-104\alpha-43 = 0.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}&\left(\beta-\sqrt{5+2\sqrt{3}}\right)^2 = 18-2\sqrt{3}+2\sqrt{65-26\sqrt{3}},\\ &\beta^2+5+2\sqrt{3}-2\sqrt{5+2\sqrt{3}}\beta = 18-2\sqrt{3}+2\sqrt{65-26\sqrt{3}},\\ &\beta^2+4\sqrt{3}-13 = 2\left(\sqrt{5+2\sqrt{3}}\beta+\sqrt{65-26\sqrt{3}}\right).\end{aligned}$$

Elevando al cuadrado, y tendiendo en cuenta que

$$\sqrt{65-26\sqrt{3}}\sqrt{5+2\sqrt{3}} = \sqrt{13}\sqrt{5-2\sqrt{3}}\sqrt{5+2\sqrt{3}} = 13,$$

obtenemos

$$\begin{aligned}&\beta^4+48+169-26\beta^2+8\sqrt{3}\beta^2-104\sqrt{3} = 4\left(5\beta^2+2\sqrt{3}\beta^2+65-26\sqrt{3}+26\beta\right),\\ &\beta^4+48+169-26\beta^2+8\sqrt{3}\beta^2-104\sqrt{3} = 20\beta^2+8\sqrt{3}\beta^2+260-104\sqrt{3}+104\beta,\\ &\beta^4-46\beta^2-104\beta-43 = 0.\end{aligned}$$

Por tanto, α y β son dos soluciones positivas del polinomio

$$P(x) = x^4-46x^2-104x-43.$$

Pero, según la regla de los signos de Descartes, al haber sólo un cambio de signo en los coeficientes de $P(x)$, dicho polinomio tiene a lo máximo una raíz positiva. Entonces, debe ser $\alpha = \beta$.

Problema 145
Propuesto por José Hernández Santiago, Oaxaca, México

Demostrar que existen $a, b \in \mathbb{N}$ tales que para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple

$$b\sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k} \leq 4^{n+1} - a .$$

Solución por Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, España
Hallaremos todos los pares de naturales (a,b) tales que se da la desigualdad del enunciado. Para n=0, es trivial comprobar que debe cumplirse

$$b\sum_{k=0}^{0}\binom{2k}{k} = b \leq 4^{0+1} - a = 4 - a; \qquad a + b \leq 4 .$$

Comprobaremos que con tal de que se dé esta relación entre a y b, la desigualdad se cumple, dándose la igualdad, sólo para n=0, si y sólo si a+b=4.
El que la igualdad se da para n=0, si y sólo si a+b=4, se deduce trivialmente de lo visto hasta ahora. Es trivial comprobar que, para k>0,

$$\binom{2k}{k} < \sum_{m=0}^{2k}\binom{2k}{m} = 2^{2k} = 4^{k} .$$

Por lo tanto, para n>0,

$$b\sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k} < b\sum_{k=0}^{n}4^{k} = \frac{b}{3}\left(4^{n+1} - 1\right).$$

Por lo tanto, si b=3, y a=0 o 1, se cumple para n>0 que

$$b\sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k} < 4^{n+1} - 1 \leq 4^{n+1} - a .$$

Si 0≤b≤2 y 0≤a≤4, se cumple para n>0 que

$$b\sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k} < \frac{2}{3}\left(4^{n+1} - 1\right) = 4^{n+1} - 4 - \frac{4^{n+1} - 10}{3} < 4^{n+1} - 4 \leq 4^{n+1} - a .$$

Luego siempre que a y b sean naturales tales que a+b≤4, se cumple estrictamente la desigualdad para todo n>0, y hemos terminado.

PROBLEMAS PROPUESTOS 146-150

Problema 146. Propuesto por José Luis Díaz Barrero, Barcelona, España.

Sean a, b, c los lados del triángulo ABC. Demostrar que

$$\frac{bc}{a\,(b+c-a)}+\frac{ca}{b\,(c+a-b)}+\frac{ab}{c\,(a+b-c)}\geq 3.$$

Problema 147. Propuesto por Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, España.

Sean respectivamente O y H el circuncentro y el ortocentro del triángulo ABC (no degenerado).

a)Demostrar que no existe ningún triángulo acutángulo tal que la longitud de una de sus medianas sea igual a la distancia OH.

b)Caracterizar, si existen, los triángulos tales que la longitud de dos de sus medianas sea igual a la distancia OH.

Problema 148. Propuesto por Luis Gómez Sánchez Alfaro, Universidad de Oriente, Venezuela.

Sea c un número natural mayor que 2. ¿Cuántos triángulos de lados enteros a, b, c existen tales que $a \leq b \leq c$?

Problema 149. Propuesto por Ovidiu Furdui, Kalamazoo, USA.

Sea $n \geq 1$ un número natural. Calcular

$$\int_1^\infty \frac{x^n}{e^x-1-x-\frac{x^2}{2!}-\cdots-\frac{x^n}{n!}}dx.$$

Problema 150. Propuesto por Ovidiu Furdui, Kalamazoo, USA.

Sea $\{a\}=a-[a]$ la parte fraccionaria de a. Calcular

$$\int_0^1\int_0^1\left\{\frac{x}{y}\right\}dxdy.$$

Gödel, ciudadano americano

Tras muchos años de residencia en Estados Unidos, le había llegado la hora de adquirir la nacionalidad americana. Para ello tenía que responder a una serie de preguntas muy sencillas acerca de la Constitución: de esta forma, demostraría poseer un conocimiento mínimo y general de su contenido y manifestar su consideración hacia ella. Además, necesitaba dos avalistas que respondieran de su reputación y le acompañaran al examen oral ante un juez local.

Gödel tenía unos padrinos de lujo: Albert Einsyein, que no necesita presentación alguna, y Oskar Morgenstern, economista matemático y coinventor, junto con John von Neumann, de la “teoría del juego”. Einstein cuenta que había ido aumentando su preocupación y la del propio Morgenstern ante la inestabilidad y falta de sentido común que había demostrado Gödel durante el periodo previo a esta simple entrevista.

Parece ser que Gödel llamó a Morgenstern la tarde anterior para explicarle que había encontrado un resquicio en el entramado de la Constitución que permitía la instauración de una dictadura.

Morgenstern le dijo que eso era completamente absurdo y que bajo ningún concepto debía mencionarlo en la entrevista del día siguiente.

Cuando llegó la tan esperada cita, Einstein y Morgenstern intentaron desviar la atención de Gödel para que no pensara en lo que le rondaba la cabeza y evitar así que se le escapara algún chiste inconveniente o alguna anécdota fuera de lugar: confiaban en que se limitaría a presentarse, dar las respuestas de rigor y los tópicos resabidos y marchar con la nacionalidad bajo el brazo. El siguiente relato de John Casti sobre cómo discurrió la entrevista confirma que las sospechas de los dos testigos no eran infundadas:

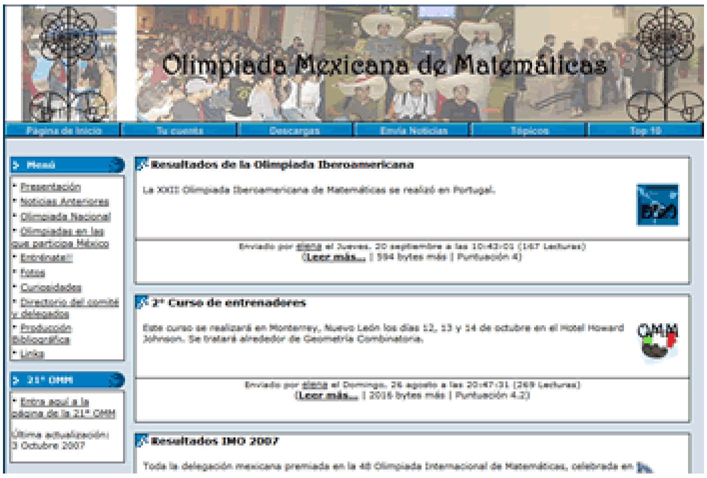
“Durante la misma, el juez quedó gratamente impresionado por la brillante personalidad y reputación pública de los testigos de Gödel, y rompió con la tradición al invitarles a sentarse el tiempo que durara la entrevista. El juez empezó por comentar a Gödel: ‘Hasta ahora, usted ha tenido nacionalidad alemana’. Gödel corrigió esta ligera ofensa, haciendo notar que era austríaco. Impertérrito, su señoría prosiguió: ‘De todos modos, su país tuvo que sufrir una dictadura horrible... pero afortunadamente eso no puede suceder en América’. Al oír la palabra mágica, ‘dictadura’ Gödel no pudo contenerse y gritó: ‘¡Todo lo contrario!, ¡yo sé cómo puede suceder eso, puedo probarlo!’. Calmarle y evitar que siguiera adelante con la explicación extensa y detallada de su ‘descubrimiento’ requirió no sólo los esfuerzos de Einstein y Morgenstern, sino también los del juez”.

Autor: Referencia: El curioso mundo de las matemáticas, David Wells, Editorial

Tomado de Divulgamat

Olimpíada Mexicana de Matemática

http://erdos.fciencias.unam.mx/omm/index.php



El Concurso Nacional de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas es la competencia anual de matemáticas para estudiantes preuniverstarios más importante en nuestro país. Su objetivo es promover el estudio de las matemáticas en forma creativa, alejándose del estudio tradicional que promueve la memorización y mecanización, y buscando desarrollar el razonamiento y la imaginación de los jóvenes.

Anualmente cada estado de la República lleva a cabo, en forma autónoma, su concurso Estatal y la preparación del equipo que lo representa en el Concurso Nacional. A este concurso asisten aproximadamente 200 alumnos de todo el país y uno o dos profesores por cada delegación estatal. Este evento se desarrolla en el mes de noviembre en algún estado de la República, mismo que patrocina fuertemente el evento. Asiste también un equipo de 24 personas que integran el Tribunal de Coordinación, encargado de la calificación de los exámenes presentados por los alumnos concursantes. Este equipo está formado por prestigiados profesores de todo el país, así como alumnos de olimpiadas pasadas que han destacado y que han continuado su preparación en matemáticas.

Los 16 alumnos con mejores calificaciones en el Concurso Nacional constituyen la preselección nacional, la cual recibe entrenamientos especiales durante varios meses. De esta preselección se eligen las delegaciones que representarán a México en las olimpiadas internacionales del año siguiente: Internacional, Iberoamericana, Centroamericana y del Caribe y de la Cuenca del Pacífico.

Toda participación de los alumnos en los concursos y entrenamientos es gratuita. Los gastos de viajes y alimentación de los alumnos para asistir a los concursos nacionales e internacionales así como los entrenamientos, son patrocinados por diversas instituciones, a través de la Sociedad Matemática Mexicana, organizadora de la Olimpiada a nivel nacional.

Para fortalecer el programa de la Olimpiada, el Comité Organizador de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas realiza un examen de práctica, cursos especiales para profesores, y la publicación de material académico y de difusión.

El esfuerzo de un gran número de personas que han trabajado para las Olimpiadas a lo largo de varios años se ha visto recompensado por el papel destacado que ha tenido nuestro país a nivel internacional. Es importante señalar, sobre todo, el impacto en el ambiente educativo de nuestro país: muchos profesores y alumnos que se han acercado en algún momento a las Olimpiadas han creado, de manera espontánea y altruista, innumerables talleres de resolución de problemas de matemáticas en los cuales han vertido sus experiencias. Asimismo, las universidades involucradas en la organización de las Olimpiadas de Matemáticas han recibido el fruto de su apoyo con el ingreso de alumnos que cuentan con una excelente formación tanto matemática como humana, la cual han obtenido gracias a sus experiencias durante los concursos, los intercambios y entrenamientos que les ha ofrecido el programa de las Olimpiadas.

La página de la Olimpíada tiene secciones de mucho interés:

Olimpiada Nacional
Olimpiadas en las que participa México
Entrénate!!
Fotos
Curiosidades
Directorio del comité y delegados
Producción Bibliográfica
Links

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI

Número

31

Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática
ISSN 1698-677X

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

Número 31 (marzo - abril 2008)
ISSN – 1698-277X

Índice

Problema 146. Recibidas soluciones de Miguel Amengual Covas, Cala Figuera, España; Roberto Bosch Cabrera, La Habana, Cuba; Carlos E. Cabrera Guevara, Lima, Perú; Dan Dobrovolschi (2 soluciones), Bucarest, Rumania; Angel M. Gallegos Baños, Oaxaca, México; Francisco Javier García Capitán, Priego, España; Luis Gómez Sánchez Alfaro, U. de Oriente, Venezuela; Daniel D. Góngora García, Lima, Perú; Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, España; Kee-Wai Lau, HongKong, China; Jojhan V. Malqui Valera, Lima, Perú; Ricard Peiró, Valencia, España; Paolo Perfetti, U. degli Studi “Tor Vergara”, Roma, Italia; Xavier Ros, Barcelona, España; Bruno Salgueiro Fanego, Vivero, España; Cristóbal Sánchez Rubio, Benicasim, España; Vicente Vicario García, Huelva, España; y el proponente. Presentamos la solución de Amengual. El editor desea hacer constar la variedad de métodos con que la

desigualdad ha sido abordada por los comunicantes de soluciones.

Problema 147. Recibidas soluciones de Bruno Salgueiro Fanego, Vivero, España; Cristóbal Sánchez Rubio, Benicasim, España; Vicente Vicario García, Huelva, España, y el proponente. Presentamos la solución de Sánchez Rubio.

Problema 148. Recibidas soluciones de Jesús Álvarez Lobo, Oviedo, España; Álvaro Begué Aguado, Nueva Cork, EEUU; Carlos E. Cabrera Guevara, Lima, Perú; Dones Colmenárez y Zinder Martínez (conjuntamente), Barquisimeto, Venezuela; Francisco Javier García Capitán, Priego, España; Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, España; Bruno Salgueiro Fanego, Vivero, España; Raúl Simón Elespuru, Santiago, Chile; y el proponente. Presentamos la solución de García Capitán.

Problema 149. Recibidas soluciones de Roberto Bosch Cabrera, La Habana, Cuba; Carlos E. Cabrera Guevara, Lima, Perú; Daniel D. Góngora García, Lima, Perú; Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, España; Kee-Wai Lau, HongKong, China; Paolo Perfetti, U. degli Studi "Tor Vergara", Roma, Italia; y el proponente. Presentamos la solución de Bosch Cabrera.

Problema 150. Recibidas soluciones de Roberto Bosch Cabrera, La Habana, Cuba; Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, España; Kee-Wai Lau, HongKong, China; Paolo Perfetti, U. degli Studi "Tor Vergara", Roma, Italia; y el proponente. Presentamos la solución de Lasaosa.

Comentario de libros 31

Presentación del libro *Sistema NUFRAC*, de Emma Blacker Bendezú y Edwin Rojas Mancha, próximo a publicarse (Presentación de F.Bellot)

Comentario de páginas web

La página web de Jean-Louis Ayme,

Divertimentos matemáticos

Algunas técnicas de resolución de ecuaciones funcionales en problemas de Olimpiada (II): Funciones enteras de variable entera

En esta lección de preparación olímpica se pretende presentar e ilustrar con ejemplos algunas de las técnicas básicas de resolución de ecuaciones funcionales, o de técnicas para utilizar en problemas de Olimpiada en los que una ecuación funcional juega un papel clave. En esta segunda entrega, consideramos el caso de funciones de variable entera que toman valores enteros, después de haber estudiado en la primera el caso de funciones reales de variable real.

1.- Técnicas comunes a las funciones reales de variable real

Las funciones enteras de variable entera suelen tener rasgos particulares que las distinguen de las funciones reales de variable real, en el sentido de que algunas técnicas que se usan en las segundas no sirven para las primeras, o de que las primeras pueden disponer de técnicas específicas que no tienen sentido en las segundas. Sin embargo, las técnicas utilizadas en la resolución de ecuaciones funcionales sobre funciones reales de variable real también pueden ser muy útiles en el caso de funciones enteras de variable entera; si bien no siempre nos van a proporcionar la solución, si pueden simplificar mucho la ecuación a tratar, o por lo menos ofrecer resultados que nos permitan caracterizar o realizar hipótesis sobre la función solución buscada.

Comenzamos pues esta segunda parte de la lección de preparación olímpica presentando algunos casos de resolución de ecuaciones funcionales con funciones objetivo enteras de variable entera, en los cuáles las técnicas presentadas para las funciones reales de variable real, bien llevan directamente a la solución, bien permiten simplificar el problema hasta el punto de hacerlo "casi trivial". Así, el problema 6 de la XXXVI Olimpiada Matemática Española (2000) se puede resolver utilizando sustituciones:

Demuestra que no existe ninguna función f:ℕ→ℕ que cumpla $f(f(n))=n+1$.

Asumimos que ℕ={1,2,3,…} (la demostración sería análoga si incluimos el 0 en el conjunto de los naturales), y suponemos que existe una tal función. Sustituyendo n por $f(m)$ para cualquier m natural, dependiendo de si lo tomamos como la función aplicada a $f(f(m))$, o como la función aplicada dos veces a $f(m)$, tenemos

$$f(m+1)=f\left(f\left(f(m)\right)\right)=f(m)+1.$$

Se puede entonces demostrar fácilmente por inducción que

$$f(n+1)=f(1)+n.$$

El resultado es trivialmente cierto para n=1 (nos basta hacer m=1 en la ecuación hallada), y si es cierto para n−1, entonces

$$f(n+1)=f(n)+1=f\left((n-1)+1\right)+1=n-1+f(1)+1=n+f(1).$$

Luego

$$n+1=f\left(f(n)\right)=f(n)-1+f(1)=n-1+f(1)-1+f(1)=n-2+2f(1).$$

Luego $f(1)=3/2$, que es absurdo porque $f(1)$ debe ser natural. Luego no existe ninguna función con la propiedad pedida.

El problema 3 de la XL Olimpiada Matemática Española (2004) se puede resolver también utilizando técnicas conocidas para las funciones reales de variable real. Se presenta una solución que utiliza fundamentalmente sustituciones de los valores de las variables, inyectividad y suprayectividad:

Se representa por ℤ el conjunto de todos los enteros. Hallar todas las funciones f:ℤ→ℤ tales que para cualesquiera x, y enteros se verifica:

$f(x+f(y))=f(x)-y$.

Haciendo x=0, se tiene que, para todo entero y,

$$f\left(f(y)\right)=f(0)-y.$$

De esta relación se deduce inmediatamente que f es inyectiva (pues si $f(x)=f(y)$, entonces $f(0)-x=f(0)-y$, luego $x=y$), y además que f es suprayectiva (nos basta tomar, para cualquier entero z, $y=f(0)-z$ en la relación hallada para comprobar que $f(f(0)-z)$ tiene por imagen z). Por lo tanto, existe un único λ tal que $f(\lambda)=0$, con lo que haciendo $y=\lambda$ en la ecuación original, se tiene que $f(x)=f(x)-\lambda$, con lo que queda probado que $\lambda=0$, y $f(0)=0$, siendo además $f(f(y))=-y$. Ahora bien, haciendo $x=f(-y)$ en el enunciado, se tiene que

$$0=y-y=f\left(f\left(-y\right)\right)-y=f\left(f\left(-y\right)+f\left(y\right)\right),$$

que por inyectividad nos lleva a que $f(-y)+f(y)=0$, es decir, $f(-y)=-f(y)$ para todo entero y. Procedemos ahora por inducción para demostrar que, para todo entero no negativo n,

$$f\left(x+nf\left(y\right)\right)=f\left(x\right)-ny\,.$$

La relación es trivialmente cierta para $n=0$, y está dada en el enunciado para $n=1$. Si se cumple para $n=m-1$, entonces se cumple para m:

$$\begin{aligned} f\left(x+mf\left(y\right)\right)&=f\left(x+\left(m-1\right)f\left(y\right)+f\left(y\right)\right)=f\left(x+\left(m-1\right)f\left(y\right)\right)-y\\ &=f\left(x\right)-\left(m-1\right)y-y=f\left(x\right)-my. \end{aligned}$$

Luego se cumple para todo entero no negativo. En particular, si x toma un valor entero positivo cualquiera m, entonces haciendo $n=m$ en la relación demostrada,

$$f\left(m+mf\left(y\right)\right)=f\left(m\left(1+f\left(y\right)\right)\right)=f\left(m\right)-my\,.$$

Ahora bien, por la suprayectividad de f, existe un entero ρ tal que $f(\rho)=-1$, con lo que

$$0=f\left(0\right)=f\left(m\left(1+f\left(\rho\right)\right)\right)=f\left(m\right)-m\rho\,;\qquad\qquad f\left(m\right)=m\rho\,.$$

Nótese que esta relación es válida para todo m no negativo, pero si m es negativo, entonces $-m$ es positivo, con lo que $f(m)=f(-(-m))=-f(-m)=m\rho$, y la relación también se cumple. Se tiene entonces que, para todo entero y,

$$-y=f\left(f\left(y\right)\right)=f\left(\rho y\right)=\rho^2 y\,,\qquad\qquad \rho^2=-1\,.$$

Pero esta última relación es imposible para ρ entero, con lo que no existe ninguna función con las características dadas en el enunciado, y hemos terminado.

Combinando las técnicas de sustitución e inyectividad, se simplifica considerablemente el problema 3 de la VIII Olimpiada Iberoamericana de Matemática (1993). Este problema se puede finalizar utilizando la acotación superior e inferior:

Sea $\mathbb{N}^*=\{1,2,3,\dots\}$. Halle todas las funciones $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ tales que:
i. Si $x>y$ entonces $f(x)>f(y)$,
ii. $f(yf(x))=x^2\cdot f(xy)$, para todos x,y en $\mathbb{N}^*$.

La función es obviamente inyectiva, pues si $f(x)=f(y)$, no puede ser ni $x>y$, ni $y>x$, luego es $x=y$. Es entonces trivial constatar que, haciendo $x=1$, ha de ser $f(yf(1))=f(y)$, luego $f(1)=1$. Sustituyendo además y, primero por 1, y luego por $f(z)$ para cualquier natural z, en la condición ii, se tiene que, para todo x y para todo z,

$$f\left(f\left(x\right)\right)=x^2 f\left(x\right),$$

$$f\left(f\left(z\right)f\left(x\right)\right)=x^2 f\left(xf\left(z\right)\right)=\left(xz\right)^2 f\left(xz\right)=f\left(f\left(xz\right)\right),$$

luego al ser f inyectiva, es $f(xz)=f(x)f(z)$.
Ahora supongamos que $f(x)>x^2$. Entonces,

$$x^2 f\left(x\right)=f\left(f\left(x\right)\right)>f\left(x^2\right)=\left(f\left(x\right)\right)^2, \qquad f\left(x\right)<x^2,$$

llegándose a una contradicción. De forma similar, supongamos que $f(x)<x^2$. Entonces,

$$x^2 f\left(x\right)=f\left(f\left(x\right)\right)<f\left(x^2\right)=\left(f\left(x\right)\right)^2, \qquad f\left(x\right)>x^2,$$

nuevamente contradictorio. Luego sólo podría ser $f(x)=x^2$ para todo x. Pero esta función es obviamente creciente estrictamente, y además hace que ambos miembros en la condición ii sean iguales a x^4y^2, luego es solución, y es la única.

Otra técnica que también se vio en la primera lección, y que puede ser muy interesante también para funciones enteras de variable entera, es la de doble acotación. En el caso de funciones enteras de variable entera, esta acotación puede ser incluso más potente, ya que al poder tomar la función sólo valores enteros, si sabemos que $f(n)>m$ para enteros n y m cualesquiera, entonces $f(n)\geq m+1$. Esta técnica se ilustra con ayuda del problema 1 de la XXIII Olimpiada Matemática Internacional (1982):

La función $f(n)$ está definida para todos los enteros positivos n y toma valores enteros no negativos. Además, para cualesquiera m,n,

$$f(m+n)-f(m)-f(n)=0 \text{ o } 1,$$

$f(2)=0$, $f(3)>0$, $f(9999)=3333$.

Determine $f(1982)$.

Se comprueba fácilmente que $f(1)=0$, $f(3)=1$:

$$0=f(2)=2f(1)+0 \text{ o } 1, \qquad 0\le f(1)\le 0, \qquad f(1)=0;$$

$$0<f(3)=f(2)+f(1)+0 \text{ o } 1=0 \text{ o } 1, \qquad f(3)=1.$$

Se puede comprobar también fácilmente por inducción que, dado cualquier entero positivo p, y para cualquier entero positivo m, es $f(mp)\ge mf(p)$, dándose la igualdad si y sólo si $f(np)=nf(p)$ para todo $n=1,2,\dots,m$. Este resultado es trivialmente cierto para $m=1$. Si es cierto para $m=n-1$, entonces

$$\begin{aligned} f(np)&=f((n-1)p+p)=f((n-1)p)+f(p)+0 \text{ o } 1\ge f((n-1)p)+f(p)\\ &\ge (n-1)f(p)+f(p)=nf(p), \end{aligned}$$

Dándose la igualdad en la última desigualdad si y sólo si $f(np)=nf(p)$ para todo $n=1,2,\dots,m-1$ por hipótesis de inducción. Por lo tanto, como $f(3)=1$, y

$$3333=3333f(3)\le f(9999)=3333,$$

entonces se tiene que $f(3m)=mf(3)=m$ para todo $m=1,2,3,\dots,3333$, de donde se deduce que $f(1983)=f(3\cdot 661)=661$, luego $f(1982)=f(1983)-f(1)-0$ o $1=660$ o 661. Ahora bien,

$$3304=f(3\cdot 3304)=f(9912)=f(9910)+f(2)+0 \text{ o } 1\ge f(9910),$$

$$3304\ge f(9910)=f(5\cdot 1982)\ge 5f(1982),$$

$$f(1982)\le\frac{3304}{5}<\frac{3305}{5}=661.$$

Luego $f(1982)=660$.

Las técnicas basadas en la acotación pueden ser extraordinariamente potentes teniendo en cuenta propiedades específicas de los números enteros. El siguiente ejemplo pone de relevancia dos de ellas: la existencia de un mínimo o máximo en todo conjunto acotado inferior o superiormente de enteros, y el hecho de que dos enteros distintos tienen diferencia como mínimo de 1. Ambas propiedades se utilizan en esta solución del problema 6 de la XIX Olimpiada Matemática Internacional (1977):

Sea $f(n)$ una función definida sobre los enteros positivos y tomando valores enteros positivos. Demuestre que si

$$f(n+1)>f(f(n))$$

para cada entero positivo n, entonces

$$f(n)=n \quad \text{para cada } n.$$

Definiremos el conjunto F_m como $\{f(m),f(m+1),f(m+2),\ldots\}$, y demostraremos por inducción que $f(m)$ es el único mínimo de F_m (el que todo F_m tiene mínimo es consecuencia trivial de ser un conjunto de enteros positivos, y por lo tanto acotado inferiormente – la unicidad de cada uno de estos mínimos se demuestra a lo largo de la solución que aquí se presenta).

El resultado es relativamente obvio para $m=1$, ya que para cualquier $n>1$, $f(n)>f(f(n-1))$, estando trivialmente $f(f(n-1))$ en F_1, pues F_1 contiene a todas las posibles imágenes de f, con lo que el mínimo no puede ser ningún $f(n)$ con $n>1$, y el único mínimo es $f(1)$.

Supongamos que el resultado es cierto hasta m. Entonces, $f(m)\geq m$, ya que al ser $f(p)$ el único mínimo de F_p para todo $p=1,2,\ldots,m$, entonces es $f(1)<f(2)<f(3)<\ldots<f(m)$, y por ser enteros, $f(1)\leq f(2)-1\leq f(3)-2\leq\ldots\leq f(m)-(m-1)$. Pero como $f(1)\geq 1$ por ser entero positivo, es $f(m)\geq m$. Supongamos que $n>m+1$, con lo que $f(n-1)$ está en F_{m+1}, al ser $n-1\geq m+1$. Pero entonces, $f(n-1)>m$, ya que si está en F_{m+1}, también está en F_m, y además es mayor que $f(m)$, que era el único mínimo de F_m. Luego $f(n-1)\geq m+1$, con lo que $f(f(n-1))$ está en F_{m+1}, y al ser $f(n)>f(f(n-1))$, $f(n)$ no puede ser mínimo de F_{m+1}. Luego el único mínimo de F_{m+1} sólo puede ser $f(m+1)$, y hemos acabado esta demostración.

De la demostración se deduce trivialmente que, si $n>m$, entonces $f(n)>f(m)$, al ser $f(m)$ el único mínimo de F_m, estando $f(n)$ incluido en este conjunto. Supongamos entonces que $f(n)>n$. Pero entonces, $f(n)\geq n+1$, con lo que $f(f(n))\geq f(n+1)>f(f(n))$, que es absurdo. Luego $f(n)\leq n$. Supongamos finalmente que $f(n)<n$. Al ser entero, entonces $f(n)\leq n-1$. Pero como $f(n)>f(n-1)>\ldots>f(1)$, y al ser enteros esto significa que $f(n)\geq f(n-1)+1\geq f(n-2)+2\geq\ldots\geq f(1)+(n-1)$, entonces $f(1)\leq f(n)-(n-1)\leq 0$. Pero $f(1)$ es entero positivo, luego llegamos nuevamente a una contradicción. Luego sólo puede ser $f(n)=n$ para cada n, que además cumple trivialmente la condición propuesta en el enunciado, al ser $f(n+1)=n+1>n=f(n)=f(f(n))$.

La técnica del punto fijo es también aplicable en ciertos casos, como por ejemplo en la resolución del problema 3 de la XXXVII Olimpiada Matemática Internacional (1996):

Sea S el conjunto de los enteros no negativos. Encuentre todas las funciones f:$S\to S$ tales que

$$f\left(m+f\left(n\right)\right)=f\left(f\left(m\right)\right)+f\left(n\right),\qquad \forall m,n\in S\,.$$

Sustituyendo $m=n=0$, se encuentra que $f(f(0))=f(f(0))+f(0)$, de donde $f(0)=0$. Haciendo entonces $n=0$ en la ecuación original, se tiene que

$$f\left(m\right)=f\left(m+f\left(0\right)\right)=f\left(f\left(m\right)\right)+f\left(0\right)=f\left(f\left(m\right)\right),$$

Es decir, $f(m)$ es punto fijo de m para cualquier entero no negativo m. Como todas las imágenes de la función son puntos fijos, si no existen puntos fijos positivos, entonces el único punto fijo, y por lo tanto el único valor que toma la función, es 0, dándonos la solución trivial $f(n)=0$ para todo n.

Si por el contrario existen puntos fijos mayores que 0, entonces existe un punto fijo positivo mínimo, que llamaremos m. Veremos en primer lugar que, para cualquier entero no negativo a, $f(am)=am$, es decir, am es punto fijo para todo entero no negativo a. Esto se demuestra fácilmente por inducción, siendo el resultado trivialmente cierto cuando $a=0$, y consecuencia directa de la definición de m cuando $a=1$. Si es cierto para $a-1$, entonces haciendo $n=(a-1)m$ en la ecuación inicial, se tiene

$$\begin{aligned}f\left(am\right)&=f\left(m+\left(a-1\right)m\right)=f\left(m+f\left(\left(a-1\right)m\right)\right)=f\left(f\left(m\right)\right)+f\left(\left(a-1\right)m\right)\\&=m+\left(a-1\right)m=am,\end{aligned}$$

donde se ha usado que m y $(a-1)m$ son puntos fijos por hipótesis de inducción. Sea ahora cualquier entero $n=am+b$, donde b es un resto módulo m ($b\in\{0,1,2,\ldots,m-1\}$). Demostraremos que si n es un punto fijo, entonces $b=0$, es decir, que no hay más puntos fijos de f que los múltiplos enteros positivos de m. Para ello, consideraremos que, al ser $f(b)$ punto fijo por ser imagen de f, y am por ser múltiplo de m, entonces sustituyendo m por b, y n por am en la ecuación dada en el enunciado,

$$n=am+b=f\left(b+am\right)=f\left(b+f\left(am\right)\right)=f\left(f\left(b\right)\right)+f\left(am\right)=f\left(b\right)+am\,,$$

$$b=f\left(b\right).$$

Ahora bien, como $b<m$ y m es el menor punto fijo positivo, entonces $b=0$. Demostraremos también que, para cualquier a no negativo y b resto módulo m,

$$f(am+b)=am+f(b),$$

ya que utilizando que $f(b)$ y am son puntos fijos de f, se tiene que

$$f(am+b)=f(b+f(am))=f(f(b))+f(am)=am+f(b).$$

Finalmente, demostraremos que, con tal de que $f(b)$ sea un entero positivo múltiplo de m (y por lo tanto un punto fijo de f), la función está bien definida y cumple con la condición del enunciado. Para ello, escribimos $u=am+b$, $v=cm+d$ para u y v enteros no negativos cualesquiera, donde b y d son restos módulo m, y a y c son enteros no negativos. Entonces, $f(b)=pm$, $f(d)=qm$, para algunos enteros no negativos p y q, y

$$\begin{aligned} f(u+f(v)) &= f(am+b+cm+qm)=f((a+c+q)m+b)=(a+c+q)m+f(b) \\ &= am+f(b)+cm+f(d)=f(am+b)+f(cm+d)=f(u)+f(v) \\ &= f(f(u))+f(v), \end{aligned}$$

y hemos demostrado que todas las funciones con la forma definida son solución del problema, y no hay otras. Es decir, las soluciones son todas las funciones tales que, para algún m (fijo para cada solución, pero pudiendo tomar en principio cualquier valor), escribimos cualquier entero no negativo como $n=am+b$, donde a es un entero no negativo y b cualquier resto módulo m $(0,1,2,\ldots,m-1)$. Entonces, $f(n)=am+f(b)$, donde $f(b)$ es un entero no negativo múltiplo de m, con la única restricción de que $f(0)=0$.

2.- Definición de funciones auxiliares

La idea principal detrás de esta técnica es la simplificación de la ecuación a través de la definición de una función auxiliar, resultado de aplicar alguna operación o transformación sobre la función a hallar, de forma que esta última satisface la ecuación funcional dada, si y sólo si la función auxiliar satisface una ecuación funcional más sencilla, resolviéndose entonces esta segunda. Si bien esta técnica no se ilustró a través de su uso con funciones reales de variable real, también sería aplicable a estas.

Se ilustra esta técnica a través de una posible solución del problema 5 de la XXXIV Olimpiada Matemática Española (1998):

Hallar todas las funciones f:ℕ→ℕ estrictamente crecientes y tales que

$$f(n+f(n))=2f(n)$$

para n=1,2,3,…

Si definimos la función auxiliar $g(n)=f(n)-n$, se tiene que, para todo entero positivo n,

$$g\left(n+f\left(n\right)\right)=f\left(n+f\left(n\right)\right)-n-f\left(n\right)=f\left(n\right)-n=g\left(n\right).$$

Ahora bien, como la función f es estrictamente creciente, $f(n)>f(n-1)$, y como ambos deben ser enteros, entonces $f(n)-f(n-1)\geq 1=n-(n-1)$, es decir, $g(n)\geq g(n-1)$, dándose la igualdad si y sólo si $f(n)$ y $f(n-1)$ son enteros consecutivos. Se demuestra fácilmente por inducción que, para todo entero positivo m, $g(n+m)\geq g(n)$, dándose la igualdad si y sólo si $g(n+p)=g(n)$ para todo $p=1,2,\ldots,m$. La hipótesis de inducción ha sido ya demostrada para $m=1$, y si es cierta para $m-1$, entonces $g(n+m)\geq g(n+m-1)\geq g(n)$, siendo cierta la segunda desigualdad si y sólo si $g(n+p)=g(n)$ para todo $p=1,2,\ldots,m-1$, es decir, siendo el primer y el tercer términos iguales si y sólo si $g(n+p)=g(n)$ para todo $p=1,2,\ldots,m$. Sea entonces la sucesión definida por $n_{m+1}=n_m+f(n_m)$ para $m\geq 1$, siendo $n_1=1$. Como $g(n)=g(n+f(n))$, es trivial que $g(n_m)=g(n_1)$ para todo entero positivo m. Como además la sucesión $\{n_i\}$ es una sucesión estrictamente creciente de enteros ($f(n)$ es un entero positivo para todo n), entonces no está acotada, y para todo N, existe un $n_i\geq N$, con lo que al ser $g(n_i)=g(n_1)$, es $g(N)=g(1)$ para todo entero positivo N, es decir, g es constante. Luego como g toma un valor entero constante k, entonces $f(n)=n+k$. Como f toma valores enteros positivos cuando n toma valores enteros positivos, k debe ser no negativo (en caso contrario $f(1)$ sería no positivo). Sustituyendo esta expresión en la ecuación dada, se obtiene que

$$f\left(n+f\left(n\right)\right)=f\left(2n+k\right)=2n+2k=2\left(n+k\right)=2f\left(n\right),$$

con lo que k puede tomar cualquier valor entero no negativo, y hemos acabado.

3.- Expresión del conjunto de imágenes como unión de subconjuntos disjuntos

En principio esta técnica no es exclusiva de funciones enteras de variable entera, pero puede resultar más sencilla de utilizar cuando el conjunto de valores que toma la imagen es discreto (caso de enteros y racionales). La idea principal es comprobar que el conjunto de imágenes (que puede ser desconocido a priori) puede dividirse, mediante alguna condición aplicada a la función, en diferentes subconjuntos disjuntos, para a través de las propiedades de dichos conjuntos, poder acotar las soluciones, o bien probar o refutar hipótesis acerca del conjunto de valores que toma la función. También puede utilizarse esta técnica de otra forma: dividiendo ciertos conjuntos de enteros (o todos ellos), en diferentes conjuntos disjuntos, según sean o no imágenes de la función, y a partir nuevamente de propiedades de estos conjuntos o de sus elementos, llegar a comprobar cuáles sí podrían ser imágenes de la función, cuáles no, o simplemente probar o refutar hipótesis acerca de dichos valores.
Un caso en el que la división del conjunto de los enteros en dos conjuntos disjuntos se presenta en la siguiente solución del problema 3 de la XX Olimpiada Matemática Internacional (1978), aunque en este caso es el propio enunciado el que impone esta división:

El conjunto de los enteros positivos es la unión de dos subconjuntos disjuntos $\{f(1),f(2),\ldots,f(n),\ldots\}$, $\{g(1),g(2),\ldots,g(n),\ldots\}$, donde

$$f(1)<f(2)<\ldots<f(n)<\ldots,$$

$$g(1)<g(2)<\ldots<g(n)<\ldots,$$

y

$$g(n)=f(f(n))+1 \quad \text{para todo } n\geq 1.$$

Determine $f(240)$.

Sean F y G los conjuntos de las imágenes de f y g, respectivamente. Obviamente, un entero pertenece a F si y sólo si no pertenece a G. Es también obvio que, si un entero positivo m pertenece a G, ni $m+1$ ni $m-1$ pertenecen a G. Para ello, es trivial comprobar que, si m pertenece a G, existe un entero positivo n tal que $m-1=g(n)-1=f(f(n))$, luego $m-1$ pertenece a F. Entonces, si $m+1$ perteneciera a G, entonces $(m+1)-1=m$ no podría pertenecer a G. Es también obvio que 1 no puede pertenecer a G, pues entonces existiría un entero positivo n tal que $0=g(n)-1=f(f(n))$, que es absurdo ya que 0 no pertenece ni a F ni a G. Luego $f(1)=1$, ya que 1 es el mínimo de F, y $g(1)=f(f(1))+1=2$. Como no puede haber dos enteros consecutivos en G, entonces 3 está en F, y es el menor elemento de F distinto de $f(1)=1$, con lo que $f(2)=3$.

Sea ahora, para cualquier entero positivo n, $f(n)=m$. Entonces, $g(n)=f(m)+1$. Ahora bien, hay n valores en G menores o iguales que $g(n)$, que son obviamente $g(1),g(2),\ldots,g(n)$, y m valores en F menores que $f(m)+1$, que son $f(1),f(2),\ldots,f(m)$, ya que $f(m+1)\geq f(m)+1$ pertenece a G, y no a F. Además, como $f(p)>f(m+1)$ para todo $p>m$, entonces hay exactamente m valores en F menores que $f(m)+1$, y como $g(p)>g(n)=f(m)+1$, hay exactamente n valores en G menores o iguales que $f(m)+1$, con lo que hay $m+n$ valores en $F\cup G$ menores o iguales que $f(m)+1$. Luego al ser $F\cup G$ igual al conjunto de los enteros positivos, y ser F y G disjuntos, entonces $f(m)+1=m+n$, y $f(m)=m+n-1$ donde $m=f(n)$. Se tiene entonces que

$$f(3)=3+2-1=4, \qquad f(4)=4+3-1=6, \qquad f(6)=6+4-1=9,$$

$$f(9)=9+6-1=14, \qquad f(14)=14+9-1=22, \qquad f(22)=22+14-1=35,$$

$$f(35)=35+22-1=56, \qquad f(56)=56+35-1=90, \qquad f(90)=90+56-1=145,$$

$$f(145)=145+90-1=234.$$

Ahora bien,

$$g(35)=f(f(35))=f(56)+1=91,$$

con lo que 92 está en F, y al ser el menor elemento de F mayor que $f(56)$, es $f(57)$, luego

$$f(57)=92, \qquad f(92)=92+57-1=148, \qquad f(148)=148+92-1=239,$$

$$f(239)=239+148-1=386, \qquad g(148)=f(f(148))+1=f(239)+1=387,$$

y al ser 388 el menor elemento de F (pues no puede estar en G) que es mayor que $f(239)$, entonces es $f(240)$, luego el resultado buscado es $f(240)=388$.

Esta técnica se aplica también en una posible solución al problema 4 de la XXVII Olimpiada Matemática Internacional (1987), tomándose las imágenes de un conjunto de valores de la variable, y razonándose sobre su paridad:

Demuestre que no existe ninguna función f del conjunto de los enteros no negativos en sí mismo tal que, para cada n, $f(f(n))=n+1987$.

Supongamos que existe una tal función f. En primer lugar, es trivial constatar que la función es inyectiva, ya que si $f(n)=f(m)$, entonces $n+1987=m+1987$. Luego dado cualquier conjunto X de enteros no negativos, X y $f(X)$ tienen mismo cardinal (número de elementos), definiéndose

$$f(X)=\{f(x)|x\in X\}.$$

Ahora bien, es también sencillo constatar que

$$f(n)+1987=f(f(f(n)))=f(n+1987),$$

donde se ha entendido el término del medio, bien como la función aplicada dos veces a $f(n)$, bien como la función aplicada a $f(f(n))=n+1987$. Sería entonces sencillo, a partir de los valores de $f(A)$, donde $A=\{0,1,2,\ldots,1986\}$ es el conjunto de restos módulo 1987, hallar $f(n)$ para cualquier n. Dividimos el conjunto A en dos subconjuntos disjuntos, B y C, tales que si n está en B, entonces n está en A y $f(n)$ está en A, y si n está en C, entonces n está en A y $f(n)$ no está en A. Definimos también el conjunto $A+1987$ como

$$A+1987=\{n+1987|n\in A\}=\{1987,1988,1989...,3973\}.$$

Se tiene entonces que $f(f(A))=A+1987$, pues si $m\in A+1987$, existe $n\in A$ tal que $m=n+1987=f(f(n))$, y si $n\in A$, entonces $f(f(n))=n+1987\in A+1987$. Ahora bien,

$$A+1987=f(f(A))=f(f(B\cup C))=f(f(B)\cup f(C))=f(f(B))\cup f(f(C)),$$

Siendo además las uniones disjuntas siempre, por ser B y C disjuntos, y f inyectiva. Además, $f(f(B))\cap A=\varnothing$ y $f(f(C))\cap A=\varnothing$, por ser $A+1987\cap A=\varnothing$.

Sea ahora $m\in B$. Entonces, $f(m)\in A$, y $f(f(m))\notin$ A, luego $f(m)\in C$, y el cardinal de C es mayor o igual que el cardinal de $f(B)$, luego por inyectividad es mayor o igual que el cardinal de B.

Sea finalmente $m\in C$. Obviamente, $f(m)\geq 1987$, pues no pertenece a A, luego existe un entero no negativo $n=f(m)-1987$ tal que $f(f(n))=n+1987=f(m)$, y por inyectividad $m=f(n)$. Supongamos que $n\geq 1987$. Entonces, existiría un entero no negativo $p=n-1987$ tal que $f(f(p))=n$. Luego $m=f(f(f(p)))=f(p)+1987$, que es absurdo pues $m\in A$ y $f(p)$ es un entero no negativo. Luego pertenece a A el entero n tal que $m=f(n)$. Pero $m=f(n)\in A$, luego $n\in B$, y el cardinal de B es mayor o igual que el cardinal de C.

Luego B y C tienen el mismo cardinal, y al ser disjuntos, y su unión igual a A, el cardinal de A es el doble que el cardinal de B. Pero el cardinal de A es impar, y hemos llegado a una contradicción. Luego no existe ninguna tal función f.

Otro problema en el que la división de la imagen en conjuntos disjuntos puede ayudar notablemente es el problema 6 de la X Olimpiada Iberoamericana de Matemática (1995). En la solución que se propone, se realiza una hipótesis sobre las propiedades de la función f, y a partir de ahí se comprueba que el conjunto de imágenes queda dividido, de forma natural, en ciertos subconjuntos, que a su vez se utilizan para probar o refutar la hipótesis inicial:

Una función f:$\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ es circular si para cada p en $\mathbb{N}$ existe n en $\mathbb{N}$ con $n\leq p$ tal que

$$f^n(p)=f(f(\ldots\ n \text{ veces } \ldots f(p)))=p.$$

La función f tiene grado de repulsión k, $0<k<1$, si para cada p en $\mathbb{N}$, $f^i(p)\neq p$ para $i=1,2,\ldots,[kp]$.

Determine el mayor grado de repulsión que puede tener una función circular.

Nota (*): $[x]$ indica el mayor entero menor o igual que x.

Es trivial comprobar que, al ser la función circular, ha de ser $f(1)=1$, pues $n=1$ es el único natural menor o igual que $p=1$. Llamaremos $C_0=\{1\}$, y en general, definiremos $C_q=\{2^q,f(2^q),f(f(2^q)),\ldots,f^{n-1}(2^q)\}$ donde $f^n(2^q)=2^q$ con $n\leq 2^q$. Obviamente, el cardinal de C_q es igual a $n\leq 2^q$, siendo además $n-1\geq[2^q k]$ por definición de grado de repulsión. Por circularidad, cualquier $f^m(2^q)$ está en C_q, como se puede demostrar trivialmente por inducción ya que, si p está en C_q, también lo está $f(p)$. Además, si p es un elemento cualquiera de C^q, entonces existe un entero no negativo m tal que $2^q=f^m(p)$.

Supongamos ahora que la función tiene grado de repulsión $k\geq 1/2$. Demostraremos que $C_0,C_1,C_2,\ldots$ y en general los C_q, para todo entero no negativo q, son conjuntos disjuntos (lema 1), siendo además (lema 2)

$$C_0\cup C_1\cup C_2\cup\ldots\cup C_q=\left\{1,2,3,\ldots,2^{q+1}-1\right\}=\left\{p\in\mathbb{N}\,\middle|\,p\leq 2^{q+1}-1\right\}.$$

El lema 1 es relativamente sencillo de demostrar: supongamos que existe un entero p que pertenece a la vez a C_q y C_r con $q\neq r$. Entonces, existen m y n tales que $2^q=f^m(p)$ por circularidad, y a la vez $p=f^n(2^r)$. Entonces $f^{m+n}(2^r)=2^q$, y $2^q \in C_r$, luego por circularidad, $2^r \in C^q$, con lo que $C_q=C_r$. Podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que $q>r$, con lo que al ser enteros, $q \geq r+1$. Ahora bien, por tener la función grado de repulsión $k \geq 1/2$, entonces el cardinal de $C_q=C_r$, que es n, cumple que $n-1 \geq [2^q k] \geq [2^{r+1}k] \geq 2^r$, mientras que por ser f circular, el cardinal de C_r debe ser $n \leq 2^r$. Contradicción, luego C_q y C_r son disjuntos para cualesquiera enteros no negativos distintos q y r.

El lema 2 se cumple trivialmente para $q=0$, pues $C_0=\{1\}$. Supongamos que se cumple para $1,2,3,\ldots,q-1$, y veamos que se cumple también para q. Sea n el cardinal de C_q. Entonces, como C_q no puede contener a ningún natural menor o igual que 2^q-1 (pues todos estos elementos pertenecen por hipótesis de inducción a conjuntos que son disjuntos con C_q), entonces el máximo M de C_q es mayor o igual que 2^q+n-1. Por tener la función grado de repulsión $k \geq 1/2$, y al ser $f^n(m)=m$ para todo m de C_q, y al ser M entero (con lo que $[M/2]=M/2$ si M es par, $[M/2]=(M-1)/2$ si M es impar), se tiene que

$$n-1 \geq [kM] > kM-1 \geq \frac{M}{2}-1 \geq \frac{2^q+n-1}{2}-1, \qquad n > 2^q-1.$$

Pero $n \leq 2^q$ por definición de función circular, con lo que $n=2^q$, y $M \geq 2^{q+1}-1$, con igualdad si y sólo si C_q está formado por $n=2^q$ enteros consecutivos. Supongamos finalmente que $M>2^{q+1}-1$. Entonces, $M \geq 2^{q+1}$, con lo que $[kM] \geq 2^q=n$, que es absurdo, pues entonces debería ser $f^n(M) \neq M$, que es falso por estar M en C_q. Luego C_q está formado por los 2^q enteros positivos consecutivos comprendidos entre 2^q y $2^{q+1}-1$, ambos inclusive, de donde trivialmente

$$C_0 \cup C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_q = \{1,2,3,\ldots,2^q-1\} \cup C_q = \{1,2,3,\ldots,2^{q+1}-1\}.$$

Una función con las características pedidas podría estar definida como sigue:

$$f(n) = \begin{cases} n+1, & \text{si } n \neq 2^q-1, \\ 2^{q-1}, & \text{si } n = 2^q-1, \end{cases}$$

siendo 2^q la menor potencia entera de 2 mayor que n. Por lo tanto, existen funciones con grado de repulsión $k \geq 1/2$, de las cuáles se ha dado un ejemplo, y todas las cuáles cumplen los dos lemas probados. Veremos ahora que ninguna de tales funciones tiene grado de repulsión $k>1/2$. Para ello, consideramos que, como M pertenece a C_q, con lo que $f^n(M)=M$ para $n=2^q$, entonces por definición del grado de repulsión,

$$2^q-1 = n-1 \geq [kM] = \left[k\left(2^{q+1}-1\right)\right] = 2^q-1+\left[\left(2^{q+1}-1\right)k-\left(2^q-1\right)\right].$$

Por lo tanto, el contenido del último corchete debe ser menor que 1, con lo que

$$k < \frac{2^q}{2^{q+1}-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\left(2^{q+1}-1\right)}.$$

Pero al tender q a infinito, el segundo sumando se hace arbitrariamente pequeño, con lo que existirán valores de q tales que el miembro de la izquierda será menor que cualquier $k>1/2$. Luego como ninguna función circular puede tener grado de repulsión $k>1/2$, pero sí puede tener grado de repulsión $k=1/2$ (como la función dada en el ejemplo), éste es el valor buscado, y hemos acabado.

Finalmente, se propone otro problema donde la división del conjunto de imágenes se realiza de acuerdo a su pertenencia a determinadas sucesiones definidas recursivamente, cuyas propiedades vienen establecidas por la propia ecuación funcional. Se trata del problema 5 de la XXXIV Olimpiada Matemática Internacional (1993):

¿Existe una función $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ tal que $f(1)=2$, $f(f(n))=f(n)+n$ para todo $n\in\mathbb{N}$, y $f(n)<f(n+1)$ para cada $n\in\mathbb{N}$?

Es trivial comprobar que $f(2)=f(1)+1=3$, $f(3)=f(2)+2=5$, $f(5)=f(3)+3=8$, etc., pudiéndose demostrar fácilmente por inducción que $f(F_m)=F_{m+1}$ para $m\geq 1$ donde F_m es el m-ésimo término de la sucesión de Fibonacci, definida como $F_0=1$, $F_1=1$, $F_{m+1}=F_m+F_{m-1}$ para todo $m\geq 1$. Para demostrar que existe una función como la pedida en el enunciado, dividiremos el conjunto de naturales en subconjuntos disjuntos, de tal forma que cada uno de ellos sea una sucesión construida mediante la relación recursiva $G_{m+1}=G_m+G_{m-1}$, pero cada uno de ellos con condiciones iniciales G_0 y G_1 distintas. Para ello, demostraremos el siguiente lema: todo entero positivo se puede expresar de una única forma como la suma de elementos distintos y no consecutivos de la sucesión de Fibonacci. Es decir, todo natural se puede escribir de una única manera como

$$\sum_{i=1}^{I} F_{n_i},$$

con la condición de que los n_i sean enteros positivos distintos, no habiendo dos de ellos consecutivos. El que todo natural se puede expresar como la suma de elementos distintos no consecutivos de la sucesión de Fibonacci es relativamente sencillo por inducción; supongamos que la hipótesis de inducción es cierta para todo entero menor o igual que F_m para algún m (la hipótesis es trivialmente cierta para m=1 pues $1=F_1$). Si $n=F_{m+1}$, la suma tiene un único sumando, que es F_{m+1}. Si $F_m<n<F_{m+1}$, entonces se tiene que $n-F_m<F_{m+1}-F_m=F_{m-1}$, luego por hipótesis de inducción $n-F_m$ se puede expresar como suma de términos distintos y no consecutivos de la sucesión de Fibonacci. Además, ninguno de ellos puede ser mayor o igual que F_{m-1}, luego ninguno de ellos puede ser consecutivo con F_m, y n se puede expresar como F_m más la suma que da lugar a $n-F_m$. Para demostrar la unicidad, demostremos en primer lugar por inducción que

$$\sum_{i=1}^{n} F_{2i-1} = F_{2n} - 1, \qquad \sum_{i=1}^{n} F_{2i} = F_{2n+1} - 1.$$

La hipótesis de inducción es trivialmente cierta para n=1, ya que $F_2-1=F_2-F_0=F_1$, y que $F_3-1=F_3-F_1=F_2$. Si la hipótesis de inducción es cierta hasta n, entonces

$$\sum_{i=1}^{n+1} F_{2i-1} = F_{2n+1} + \sum_{i=1}^{n} F_{2i-1} = F_{2n+1} + F_{2n} - 1 = F_{2n+2} - 1 = F_{2(n+1)} - 1,$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} F_{2i} = F_{2n+2} + \sum_{i=1}^{n} F_{2i} = F_{2n+2} + F_{2n+1} - 1 = F_{2n+3} - 1 = F_{2(n+1)+1} - 1.$$

Sea entonces m el menor entero que se puede escribir de dos maneras distintas como suma de elementos distintos y no consecutivos de la sucesión de Fibonacci. Si el mayor de los elementos en cada suma es el mismo (supongamos que es F_M), entonces $m-F_M$ se puede expresar de dos formas como suma de elementos distintos y no consecutivos de la sucesión de Fibonacci. Pero entonces m no sería el menor natural con esta propiedad. Luego las dos sumas tienen un elemento mayor distinto. Supongamos que el máximo de los elementos que intervienen en ambas sumas es F_M. Entonces, $m \geq F_M$, por poder ser expresado como la suma cuyo mayor elemento es F_M. Pero al mismo tiempo,

$$m \leq F_{M-1} + F_{M-3} + F_{M-5} + \ldots = F_M - 1,$$

ya que esta es la máxima suma de elementos distintos no consecutivos de la sucesión de Fibonacci tales que ninguno de ellos es mayor o igual que F_M. Hemos llegado a una contradicción, luego la suma es única para todo entero.

Sean ahora $m_{1,1}$, $m_{2,1}$, $m_{3,1}$,… los enteros tales que, en dicha suma, interviene $F_1=1$. Para cada uno de ellos, construimos el siguiente conjunto: si

$$m_{j,1} = \sum_{i=1}^{I} F_{n_i} ,$$

donde sin pérdida de generalidad los n_i están en sucesión creciente, con lo que n_1=1, entonces

$$m_{j,k}=\sum_{i=1}^{I}F_{n_i+k-1}\,.$$

Demostraremos entonces que el conjunto de naturales es la unión disjunta de los conjuntos $\{m_{j,1},m_{j,2},m_{j,3},\ldots\}$. El que todo natural pertenece a uno de estos conjuntos es relativamente trivial: si la expresión de este natural N como suma de elementos distintos de la sucesión de Fibonacci, no dos de ellos disjuntos, entonces bien F_1=1 está en la suma, bien no está. En el primer caso, N es uno de los $m_{j,1}$. En caso contrario, sea F_k el menor de los elementos de la sucesión de Fibonacci que está en la suma. Entonces, podemos expresar

$$N=\sum_{i=1}^{I}F_{n'_i}\,,$$

donde cada uno de los n'_i es mayor o igual que k, siendo todos ellos distintos y no consecutivos, y habiendo exactamente uno que es igual a k. Sea entonces el número

$$\sum_{i=1}^{I}F_{n'_i-k+1}=\sum_{i=1}^{I}F_{n_i}=m_{j,1}\,.$$

que obviamente está bien definido así porque, al ser uno de los n'_i igual a k, entonces uno de los $n_i=n'_i-k+1$ es igual a 1, y todos los n_i son distintos y no consecutivos. Entonces, $N=m_{j,k}$, y pertenece a uno de los conjuntos que hemos construido. Como además la expresión de N como suma de elementos distintos no consecutivos de la sucesión de Fibonacci es única, también lo es el $m_{j,1}$ al que se llega por la anterior manipulación, con lo que los conjuntos son disjuntos, y hemos acabado.

Finalmente, definimos f tal que $f(m_{j,k})=m_{j,k+1}$ para todo $k\geq 1$, y hemos acabado, ya que entonces, como todo n se puede escribir como $m_{j,k}$ para algún j, k, se tiene

$$f(n)+n=f(m_{j,k})+m_{j,k}=m_{j,k+1}+m_{j,k}=\left(\sum_{i=1}^{I}F_{n_i+k}\right)+\left(\sum_{i=1}^{I}F_{n_i+k-1}\right)=\sum_{i=1}^{I}\left(F_{n_i+k}+F_{n_i+k-1}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{I}F_{n_i+k+1}=m_{j,k+2}=f(m_{j,k+1})=f\left(f(m_{j,k})\right)=f\left(f(n)\right).$$

4.- Factorización en números primos

Esta técnica (exclusiva de funciones que tomen valores enteros y/o para variables que tomen valores enteros, o a lo sumo racionales) es especialmente potente cuando la función del producto de dos valores se puede relacionar con las imágenes de dichos valores. Por ejemplo, cuando la función satisface $f(mn)=f(m)f(n)$, o $f(mn)=f(m)+f(n)$, para cualesquiera m y n, aunque ante otras posibles expresiones similares también se podría utilizar esta técnica. En este contexto, hay que tener cuidado con la definición de "función multiplicativa", pues si bien para las funciones reales de variable real se definían como aquellas para las que, para cualesquiera x, y reales, $f(xy)=f(x)f(y)$, en el contexto de los números enteros se definen como aquellas para las que, para cualesquiera m y n primos entre sí, $f(mn)=f(m)f(n)$. Las funciones para las que $f(mn)=f(m)f(n)$ para cualesquiera m y n sin restricciones, se suelen denominar completamente multiplicativas. En el contexto de funciones de variable entera se suelen definir también las funciones aditivas como aquellas para las que, para cualesquiera m y n primos entre sí, $f(mn)=f(m)+f(n)$, a diferencia de la definición que se suele dar en el contexto de funciones reales de variable real.

Una primera forma de aplicar esta técnica sería, caso de que f satisfaga alguna de las relaciones anteriores o una similar, hallar el valor de f en todos los números primos, y a partir de ahí, utilizando probablemente inducción, llegar a hallar el valor de f para todo natural. Esto se ilustra con una posible solución del problema 5 de la I Olimpiada Iberoamericana de Matemática (1987):

A cada entero positivo n se le asigna un entero no negativo $f(n)$ de tal manera que se satisfagan las siguientes condiciones:

- **i.** $f(rs)=f(r)+f(s)$,
- **ii.** $f(n)=0$ **siempre que la cifra en las unidades de n sea 3,**
- **iii.** $f(10)=0$.

Halle $f(1985)$. Justifique su respuesta.

Haciendo $s=1$ en la condición i se comprueba trivialmente que $f(1)=0$. Además, si $f(rs)=0$ para enteros positivos r y s, entonces $f(r)=f(s)=0$, ya que $f(r)$ y $f(s)$ son enteros no negativos de suma nula por la condición i. En concreto, $f(2)=f(5)=0$ al ser $f(10)=0$. Sea ahora p un primo cualquiera distinto de 2 y 5. Por ser distinto de 2, es impar, y por ser distinto de 5, no acaba en 5, luego acaba en 1, 3, 7 o 9. Pero entonces $3p$, p, $9p$ y $7p$ respectivamente acaban en 3. Luego al ser respectivamente $f(3p)=0$, $f(p)=0$, $f(9p)=0$ y $f(7p)=0$, entonces $f(p)=0$ para cualquier primo. De aquí es trivial comprobar, por inducción sobre el número de factores primos de n, que $f(n)=0$ para todo n. El resultado es obvio cuando n tiene un único factor primo (n sería primo). Si la hipótesis de inducción es cierta para todo natural con q factores primos, y n tiene $q+1$ factores primos, lo podemos escribir como $n=pm$, donde p es primo y m tiene q factores primos, con lo que $f(n)=f(p)+f(m)=0$. Como caso particular, $f(1985)=0$.

Hay veces que no sólo interesa considerar los factores primos de la variable; también puede interesar considerar la descomposición en factores primos de los valores que toma la propia función. Como ejemplo, se presenta una posible solución al problema 6 de la XXXIX Olimpiada Matemática Internacional (1998):

Sean todas las funciones f del conjunto $\mathbb{N}$ de todos los enteros positivos en sí mismo, y que satisfacen $f(t^2f(s))=s(f(t))^2$ para cada s y t de $\mathbb{N}$. Determine el mínimo valor posible de $f(1998)$.

Llamemos $f(1)=\lambda$. Tomando $t=1$, se tiene que

$$f\left(f\left(s\right)\right)=s\left(f\left(1\right)\right)^2=s\lambda^2.$$

En particular, tomando $s=1$ se tiene que $f(\lambda)=\lambda^2$, y tomando $s=f(1)=\lambda$, se tiene que $f(f(\lambda))=f(\lambda^2)=\lambda^3$. Ahora bien,

$$\left(f\left(\lambda t\right)\right)^2=f\left(\left(\lambda t\right)^2 f\left(1\right)\right)=f\left(\lambda^3t^2\right)=f\left(t^2 f\left(\lambda^2\right)\right)=\lambda^2\left(f\left(t\right)\right)^2, \qquad f\left(\lambda t\right)=\lambda f\left(t\right).$$

Por inducción trivial, se comprueba que, para cualquier entero positivo n,

$$f\left(\lambda^n t\right)=\lambda^n f\left(t\right).$$

El resultado está demostrado para $n=1$, y si es cierto para $n=m-1$, entonces

$$f\left(\lambda^m t\right)=f\left(\lambda\left(\lambda^{m-1}t\right)\right)=\lambda f\left(\lambda^{m-1}t\right)=\lambda\lambda^{m-1}f\left(t\right)=\lambda^m f\left(t\right).$$

Además,

$$\lambda f\left(t^2\right) = f\left(\lambda t^2\right) = f\left(t^2 f(1)\right) = \left(f(t)\right)^2 .$$

A partir de aquí, no es complicado demostrar por inducción que

$$\lambda^{n-1} f\left(t^n\right) = f\left(\lambda^{n-1} t^n\right) = \left(f(t)\right)^n .$$

El resultado es trivialmente cierto para n=1 y está demostrado para n=2. Si es cierto para n=m−1, entonces

$$\lambda^m f\left(t^{m+1}\right) = f\left(\lambda^m t^{m+1}\right) = f\left(t^2\lambda^2\left(\lambda^{m-2}t^{m-1}\right)\right) = f\left(t^2 f\left(f\left(\lambda^{m-2}t^{m-1}\right)\right)\right)$$
$$= f\left(\lambda^{m-2}t^{m-1}\right)\left(f(t)\right)^2 = \left(f(t)\right)^{m-1}\left(f(t)\right)^2 = \left(f(t)\right)^{m+1} .$$

Sea entonces p un factor primo de λ con multiplicidad α. Es obvio que, como λ divide a $(f(t))^2$ para cualquier entero positivo t, entonces p divide a $(f(t))^2$, luego divide a $f(t)$, parar cualquier entero positivo t. Supongamos que la menor multiplicidad con la que p divide a cualesquiera de los $f(t)$, es β. Entonces, para todo entero positivo n,

$$p^{\alpha(n-1)} \Big| \lambda^{n-1} f\left(t^n\right) = \left(f(t)\right)^n ; \qquad n\beta \geq \alpha(n-1) ; \qquad \alpha \geq (\alpha-\beta)n .$$

Pero como n puede tomar cualquier valor entero positivo, no puede estar acotado superiormente, luego $\alpha-\beta\leq 0$. Como cualquier primo que divide a λ, también divide a $f(t)$ con la misma o mayor multiplicidad, entonces λ divide a $f(t)$ para todo t. Podemos entonces definir, para todo entero positivo t, $g(t)=f(t)/\lambda$. Ahora bien, g también cumple la condición del enunciado, pues

$$f\left(t^2 f(s)\right) = f\left(\lambda\left(t^2 g(s)\right)\right) = \lambda f\left(t^2 g(s)\right) = \lambda^2 g\left(t^2 g(s)\right),$$

$$s\left(g(t)\right)^2 = \frac{s\left(\lambda g(t)\right)^2}{\lambda^2} = \frac{s\left(f(t)\right)^2}{\lambda^2} = g\left(t^2 g(s)\right).$$

Supongamos que el valor mínimo de f(1998) se alcanza cuando $f(1)=\lambda>1$. Entonces, $g(1998)=f(1998)/\lambda<f(1998)$, que es absurdo. Luego el mínimo sólo se puede alcanzar cuando $f(1)=1$. Por una parte, haciendo entonces s=1 en el enunciado, se obtiene

$$f\left(t^2\right) = f\left(t^2 f(1)\right) = \left(f(t)\right)^2$$

Por otra parte, $f(f(s))=s$, con lo que sustituyendo s por $f(s^2)$ en la relación dada en el enunciado,

$$\left(f(st)\right)^2 = f\left(s^2t^2\right) = f\left(t^2 f\left(f\left(s^2\right)\right)\right) = f\left(s^2\right)\left(f(t)\right)^2 = \left(f(s)f(t)\right)^2 ,$$

$$f(st) = f(s)f(t) .$$

Se comprueba entonces trivialmente por inducción que expresando cualquier entero s como producto de sus factores primos

$$f(s) = f(p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_r) = f(p_1) \cdot f(p_2) \cdot \ldots \cdot f(p_r).$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación del enunciado, se llega, después de simplificar los valores de las imágenes de los factores primos de t, a que

$$f(f(p_1)) \cdot f(f(p_2)) \cdot \ldots \cdot f(f(p_r)) = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_r.$$

Como este resultado debe ser cierto para todo entero positivo, y en particular para los enteros positivos primos, se tiene que, para todo primo p_i, $f(f(p_i))=p_i$.

Luego definiendo cualquier función f tal que su efecto en los números primos sea el descrito, y tal que la imagen de un entero sea igual al producto de las imágenes de sus factores primos, ésta cumplirá la hipótesis del enunciado, y además, si f cumple la hipótesis del enunciado y $f(1998)$ toma un valor mínimo, entonces es de esta forma. Luego nos basta buscar el mínimo valor que pueden tomar $f(1998)=f(2\cdot 3^3\cdot 37)$.

Es trivial constatar que $f(p)$ debe ser primo para todo primo p, pues si se pudiera expresar como mn, con m y n enteros positivos, entonces $f(f(p))=f(mn)=f(m)f(n)$, con lo que una de estas dos imágenes debe ser 1 y la otra p. Como además f es inyectiva por ser $f(f(s))=s$, entonces o m o n es 1.

Por lo tanto, $f(1998)=pq^3r=q^2(pqr)$ donde $p=f(2)$, $q=f(3)$, $r=f(37)$ son primos. Luego el valor mínimo que puede tomar $f(1998)$ es igual al cuadrado de un primo (que será por lo tanto mayor o igual que $2^2=4$), multiplicado por el producto de tres primos distintos (que será por lo tanto mayor o igual que el producto de los tres menores primos, es decir, mayor o igual que $2\cdot 3\cdot 5=30$). Luego $f(1998)\geq 120$. Sea $f(3)=2$, $f(2)=3$, $f(37)=5$, $f(5)=37$, y ordenando el resto de los números primos de forma aleatoria $\{p_1,p_2,p_3,\ldots\}$, sea $f(p_{2n-1})=p_{2n}$, y $f(p_{2n})=p_{2n-1}$ para todo entero positivo n. Esta función cumple obviamente los requisitos pedidos, y $f(1998)=2^3\cdot 3\cdot 5=120$. Luego éste es el mínimo valor posible.

Se propone como último ejemplo de este apartado una ecuación funcional donde el objetivo es construir una función racional de variable racional. Sin embargo, se comprueba inmediatamente que la construcción de la función se simplifica considerablemente definiendo una función para los números primos, extendiéndola luego a enteros y racionales. Es el problema 4 de la XXXI Olimpiada Matemática Internacional (1990):

Sea $\mathbb{Q}^+$ el conjunto de los números racionales positivos. Construya una función f:$\mathbb{Q}^+\rightarrow\mathbb{Q}^+$ tal que

$$f\left(xf\left(y\right)\right)=\frac{f\left(x\right)}{y}$$

para cada x,y de $\mathbb{Q}^+$.

Sea una función definida de la siguiente manera:

$$f\left(x\right)=f\left(\frac{m}{n}\right)=\frac{f\left(m\right)}{f\left(n\right)}=\frac{f\left(p_1\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_r\right)}{f\left(q_1\cdot q_2\cdot\ldots\cdot q_s\right)}=\frac{f\left(p_1\right)\cdot f\left(p_2\right)\cdot\ldots\cdot f\left(p_r\right)}{f\left(q_1\right)\cdot f\left(q_2\right)\cdot\ldots\cdot f\left(q_s\right)},$$

donde m y n son enteros tales que $x=m/n$, $p_1\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_r$ y $q_1\cdot q_2\cdot\ldots\cdot q_s$ son las factorizaciones respectivas de m y n, y sus imágenes respecto a f toman valores racionales, y distintos para cada factor primo distinto (por coherencia se define $f(1)=1$). Nótese que ésta es de hecho una función de los racionales en los racionales, ya que está bien definida, pues para cada dos posibles expresiones de m y n, las imágenes de los factores primos comunes a ambos aparecen un número de veces igual a la multiplicidad común de dicho factor en m y n, en numerador y denominador del último miembro, cancelándose. Así mismo, al ser la imagen de cada primo un número racional, el último miembro es un cociente de productos de racionales, luego es racional. Si además se tiene que $f(f(p))=1/p$ para cada primo p, entonces f satisface la condición del enunciado. Para constatar este hecho, definimos x como cociente de productos de primos como antes, y tomamos

$$y=\frac{m'}{n'}=\frac{p'_1\cdot p'_2\cdot\ldots\cdot p'_{r'}}{q'_1\cdot q'_2\cdot\ldots\cdot q'_{s'}}.$$

Además, es sencillo constatar que la imagen de un cociente es igual al cociente de imágenes, y la imagen de un producto es igual al producto de imágenes:

$$f\left(\frac{x}{y}\right)=f\left(\frac{m\cdot n'}{n\cdot m'}\right)=\frac{f\left(p_1\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_r\cdot q'_1\cdot q'_2\cdot\ldots\cdot q'_{s'}\right)}{f\left(q_1\cdot q_2\cdot\ldots\cdot q_s\cdot p'_1\cdot p'_2\cdot\ldots\cdot p'_{r'}\right)}$$
$$=\frac{f\left(p_1\right)\cdot f\left(p_2\right)\cdot\ldots\cdot f\left(p_r\right)\cdot f\left(q'_1\right)\cdot f\left(q'_2\right)\cdot\ldots\cdot f\left(q'_{s'}\right)}{f\left(q_1\right)\cdot f\left(q_2\right)\cdot\ldots\cdot f\left(q_s\right)\cdot f\left(p'_1\right)\cdot f\left(p'_2\right)\cdot\ldots\cdot f\left(p'_{r'}\right)}$$
$$=\frac{f\left(p_1\right)\cdot f\left(p_2\right)\cdot\ldots\cdot f\left(p_r\right)}{f\left(q_1\right)\cdot f\left(q_2\right)\cdot\ldots\cdot f\left(q_s\right)}\cdot\frac{f\left(q'_1\right)\cdot f\left(q'_2\right)\cdot\ldots\cdot f\left(q'_{s'}\right)}{f\left(p'_1\right)\cdot f\left(p'_2\right)\cdot\ldots\cdot f\left(p'_{r'}\right)}=\frac{f\left(x\right)}{f\left(y\right)},$$

y de forma similar para llegar a $f(xy)=f(x)f(y)$. Por inducción sobre el número de factores en el producto, este último resultado se puede extender al producto de un número arbitrario de racionales. Se tiene entonces que, para una función así definida, y si se cumpliera que $f(f(y))=1/y$ para todo y racional, se tendría

$$f\left(xf\left(y\right)\right)=f\left(x\right)\cdot f\left(f\left(y\right)\right)=f\left(x\right)\cdot\frac{1}{y}=\frac{f\left(x\right)}{y}.$$

Pero con las características definidas,

$$f\left(f\left(y\right)\right)=f\left(f\left(\frac{m'}{n'}\right)\right)=f\left(\frac{f\left(p'_1\right)\cdot f\left(p'_2\right)\cdot\ldots\cdot f\left(p'_{r'}\right)}{f\left(q'_1\right)\cdot f\left(q'_2\right)\cdot\ldots\cdot f\left(q'_{s'}\right)}\right)$$
$$=\frac{f\left(f\left(p'_1\right)\cdot f\left(p'_2\right)\cdot\ldots\cdot f\left(p'_{r'}\right)\right)}{f\left(f\left(q'_1\right)\cdot f\left(q'_2\right)\cdot\ldots\cdot f\left(q'_{s'}\right)\right)}$$
$$=\frac{f\left(f\left(p'_1\right)\right)\cdot f\left(f\left(p'_2\right)\right)\cdot\ldots\cdot f\left(f\left(p'_{r'}\right)\right)}{f\left(f\left(q'_1\right)\right)\cdot f\left(f\left(q'_2\right)\right)\cdot\ldots\cdot f\left(f\left(q'_{s'}\right)\right)}=\frac{q'_1\cdot q'_2\cdot\ldots\cdot q'_{s'}}{p'_1\cdot p'_2\cdot\ldots\cdot p'_{r'}}=\frac{1}{y},$$

y la función así definida efectivamente cumple las condiciones del enunciado. Se podría además demostrar, aunque no es necesario para la resolución del problema, que todas las funciones definidas de esta forma son además las únicas que cumplen la condición del enunciado. Para ello se comienza demostrando que existe algún valor para el que la función toma valor 1 (basta hacer $y=f(x)$ en la ecuación inicial), y ver que si $f(\lambda)=1$ debe ser $\lambda=1$ (tomando $y=\lambda$ en la ecuación inicial). A partir de ahí, haciendo $x=1$ en la ecuación inicial, $y=1/z$ en la ecuación inicial, y $y=f(1/z)$ en la ecuación inicial, se demuestra respectivamente que $f(f(y))=1/y$ (este resultado debe ser cierto en particular cuando y es un entero positivo primo), que $f(x/z)=f(x)/f(z)$, y que $f(xz)=f(x)f(z)$. Expresando entonces x como cociente de dos enteros, y luego cada uno de ambos como producto de primos, se llega necesariamente a la expresión que habíamos dado para la función f que hemos construido.

Finalmente, para hacer entonces que $f(f(p))=1/p$ para todo primo, numeramos los primos en cualquier orden, $p_1,p_2,p_3,\ldots$, y tomamos $f(p_{2r-1})=p_{2r}$, y $f(p_{2r})=1/p_{2r-1}$, para todo entero positivo r, con lo que

$$f\left(f\left(p_{2r-1}\right)\right)=f\left(p_{2r}\right)=\frac{1}{p_{2r-1}},\qquad f\left(f\left(p_{2r}\right)\right)=f\left(\frac{1}{p_{2r-1}}\right)=\frac{f(1)}{f\left(p_{2r-1}\right)}=\frac{1}{p_{2r}},$$

y hemos terminado la construcción de la función pedida.

5.- Expresión en bases distintas de la decimal

En ciertas ecuaciones funcionales con origen e imagen en el conjunto de los naturales, puede ser conveniente realizar un cambio de base para simplificar su resolución, ya que, en la base adecuada, algunas funciones se expresan a través de relaciones muy sencillas. Obviamente, esta técnica es de aplicación por lo menos muy difícil en funciones reales de variable real. Como ejemplo se ofrece una posible solución del problema 6 de la XXXVII Olimpiada Matemática Española (2001):

Determinar la función $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ (siendo $\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$ el conjunto de los números naturales) que cumple, para cualesquiera $s,n\in\mathbb{N}$, las siguientes condiciones: $f(1)=f(2^s)=1$, y si $n<2^s$, entonces $f(2^s+n)=f(n)+1$.
Calcular el valor máximo de $f(n)$ cuando $n\leq 2001$.
Hallar el menor número natural n tal que $f(n)=2001$.

La función f es aquella que, a cada número n, le asocia el número de unos que tiene la expresión en base 2 de n. Vamos a demostrarlo por inducción sobre el número de cifras en la expresión de n en base 2: el resultado es obvio para números de una cifra en base 2, ya que sólo existe $n=1$, y $f(1)=1$, y 1 tiene, en su expresión binaria (que es también 1), un único uno. Si el resultado se cumple para números cuya expresión binaria tiene m o menos dígitos, entonces n con expresión binaria de $m+1$ dígitos se puede escribir como 2^m+p, donde $0\leq p<2^m$, y p tiene como máximo m dígitos. Por lo tanto, como la expresión binaria de 2^m+p, que es igual a un uno seguido de la expresión binaria de p

(completada con ceros entre el primer y el segundo uno si es necesario hasta que dicha expresión binaria tenga $m+1$ dígitos), entonces la expresión binaria de 2^m+p tiene exactamente un uno más que la de p. Pero $f(2^m+p)=f(p)+1$, luego como $f(p)$ es el número de unos en la expresión binaria de p, $f(2^m+p)$ es el número de unos en la expresión binaria de 2^m+p, y hemos acabado.

Ahora bien, si $n\leq 2001$, entonces la expresión binaria de n tiene como máximo 11 cifras, no todas las cuales pueden ser uno, ya que $n<2047=2^{11}-1$, siendo la expresión binaria de 2047 igual a once unos. Luego $f(n)$ puede tomar como máximo el valor 10. Pero $1023=2^{10}-1$ tiene por expresión binaria exactamente 10 unos, luego el valor máximo de $f(n)$ es 10 cuando $n\leq 2001$.

El número $2^{2001}-1$ es el menor tal que su imagen es 2001, ya que su expresión binaria tiene 2001 cifras, todas iguales a uno, y cualquier otro número distinto, cuya expresión binaria contenga 2001 cifras, contendrá al menos un cero, con lo que su expresión binaria tendría por lo menos 2002 cifras, y el número sería mayor que $2^{2001}-1$.

A veces puede ser interesante expresar los valores de la variable y de la imagen en distinta base, como sucede en una posible solución del problema 5 de la IV Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas (1989):

Sea la función f definida sobre el conjunto $\{1,2,3,\ldots\}$ tal que

i. $f(1)=1$,

ii. $f(2n+1)=f(2n)+1$,

iii. $f(2n)=3f(n)$.

Determinar el conjunto de valores que toma f.

La función f asocia, a un número n, una imagen $f(n)$, de tal forma que la expresión en base 3 de $f(n)$ coincide con la expresión en base 2 de n. Demostrémoslo por inducción sobre el número m de cifras binarias de n. Para $m=1$, el resultado es trivialmente cierto, ya que 1 se expresa de igual forma en base 2 y en base 3. Si es resultado es cierto para números cuya expresión binaria tiene m cifras, sea p un número cuya expresión binaria tiene $m+1$ cifras. Entonces, si es par, lo podemos escribir como $2n$, en cuyo caso

$f(p)=f(2n)=3f(n)$, es decir, la expresión ternaria de $f(p)$ es igual a la expresión ternaria de n seguida de un 0. Pero la expresión binaria de $2n$ es igual a la expresión binaria de n seguida de un 0, luego como la expresión binaria de n y la ternaria de $f(n)$ eran iguales, también lo son la expresión binaria de p y la ternaria de $f(p)$. De forma análoga, si p es impar lo podemos escribir como $2n+1$, en cuyo caso se tiene que $f(p)=3f(n)+1$, con lo que la expresión ternaria de $f(p)$ sería igual a la expresión ternaria de $f(n)$ seguida de un cero, a la cuál se le sumaría uno, es decir, sería igual a la expresión ternaria de $f(n)$ seguida de un uno. Pero la expresión binaria de $2n+1$ también es igual a la expresión binaria de n seguida de un uno, y hemos acabado.

Por lo tanto, la expresión ternaria de cualquier $f(n)$, al ser igual a la expresión binaria de n, contiene sólo ceros y unos. Recíprocamente, si un número tiene en su expresión ternaria sólo ceros y unos, y n es el número cuya expresión binaria es igual a dicha expresión ternaria (que existe, al contener ésta sólo ceros y unos), entonces el número dado se puede escribir como $f(n)$. Luego el conjunto de valores que toma f es igual al conjunto de enteros positivos cuya expresión en base 3 contiene sólo ceros y unos, es decir, es el conjunto de números que se pueden escribir como suma de potencias distintas de 3.

Como último ejemplo para ilustrar la técnica del cambio de base, se propone el problema 3 de la XXIX Olimpiada Matemática Internacional (1988)

Una función está definida sobre los enteros positivos mediante

$$\boldsymbol{f(1)=1,\quad f(3)=3,}$$

$$\boldsymbol{f(2n)=f(n),}$$

$$\boldsymbol{f(4n+1)=2f(2n+1)-f(n),}$$

$$\boldsymbol{f(4n+3)=3f(2n+1)-2f(n),}$$

Para cada entero positivo n.

Determine el número de enteros positivos n, menores o iguales que 1988, para los que $f(n)=n$.

Demostraremos por inducción que la expresión binaria de $f(n)$ es el resultado de tomar la expresión binaria de n (sin añadir ceros a la izquierda) e invertir su orden. Así, por ejemplo, $f(11)=13$, siendo la expresión binaria de 11 igual a 1011, y la de 13 igual a 1101; obviamente, también sería $f(13)=11$. Esto se puede comprobar sin más que hallar que $f(11)=f(4\cdot 2+3)=3f(5)-2f(2)=15-2=13$, donde $f(5)=f(4\cdot 1+1)=2f(3)-f(1)=6-1=5$, y que $f(13)=f(4\cdot 3+1)=2f(7)-f(3)=14-3=11$, donde $f(7)=f(4\cdot 1+3)=3f(3)-2f(1)=9-2=7$. El resultado se demuestra muy fácilmente para números de hasta dos cifras binarias, ya que $f(1)=f(2)=1$, siendo las expresiones binarias de 1 y 2 respectivamente iguales a 1 y 10 (al invertir el orden en esta segunda queda 01=1), y $f(3)=3$, siendo la expresión binaria de 3 igual a 11 (queda invariante al invertir su orden).

Supongamos entonces que la hipótesis de inducción se cumple para números de hasta m cifras binarias. Entonces, sea un entero con $m+1$ cifras binarias. Si es par, lo podemos llamar $2n$, siendo n un entero positivo con m cifras binarias, y siendo la expresión binaria de $2n$ igual a la de n seguida de 0. Luego el resultado de invertir la expresión binaria de $2n$ es igual al resultado de invertir la expresión binaria de n (salvo un 0 a la izquierda), con lo que su valor es igual a $f(n)=f(2n)$. Si el entero de $m+1$ cifras binarias es impar, lo podemos escribir como $4n+1$ o $4n+3$, donde n tiene $m-1$ cifras binarias y $2n+1$ tiene m cifras binarias. Ahora bien, por hipótesis de inducción, $f(2n+1)$ es el resultado de invertir la expresión binaria de $2n+1$, siendo esta última, antes de la inversión, igual a la expresión binaria de n seguida de un 1. Luego $f(2n+1)=2^{m-1}+f(n)$, ya que el resultado de invertir la expresión binaria de $2n+1$ es igual a un 1 seguido de la expresión binaria de n invertida, ocupando este 1 la primera posición en una expresión binaria de m cifras. Por lo tanto,

$$f(4n+1)=2f(2n+1)-f(n)=2\big(f(2n+1)-f(n)\big)+f(n)=2^m+f(n),$$

$$\begin{aligned}f(4n+3)&=3f(2n+1)-2f(n)=3\big(f(2n+1)-f(n)\big)+f(n)=3\cdot 2^{m-1}+f(n)\\&=2^m+2^{m-1}+f(n).\end{aligned}$$

Pero como $f(n)$ es el resultado de invertir la expresión binaria de n, y por lo tanto tiene $m-1$ cifras binarias, entonces $f(4n+1)=2^m+f(n)$ tiene por expresión binaria 10 seguido del resultado de invertir la expresión binaria de n, o lo que es lo mismo, el resultado de invertir lo que queda tras añadir 01 al final de la expresión binaria de n, es decir, el resultado de invertir la expresión binaria de $4n+1$. Además, $f(4n+3)=2^m+2^{m-1}+f(n)$ es el resultado de invertir lo que queda tras añadir 11 al final de la expresión binaria de n, es decir, el resultado de invertir la expresión binaria de $4n+3$, y hemos terminado.

Por lo tanto, los números tales que $f(n)=n$ son aquellos cuya expresión binaria (sin añadir ceros a la izquierda) es capicúa o palíndroma, es decir, que se lee igual al derecho o al revés, y por lo tanto es invariante a inversión en su orden. Calculemos pues el número de enteros menores o iguales que 1988 con expresión binaria capicúa, y esta es la respuesta al problema. Para ello, consideremos que, si un número tiene $2p$ cifras binarias (sin ceros a la izquierda), y es capicúa, entonces sus p primeras cifras determinan biunívocamente las p últimas, siendo además la primera y la última iguales a 1. Luego hay $p-1$ cifras que pueden tomar cualquier valor, con lo que hay exactamente 2^{p-1} tales números. Por lo tanto, como 1988 tiene expresión binaria 11111000010, con 11 cifras, hay $2^4+2^3+2^2+2^1+2^0=2^5-1=31$ enteros cuya expresión binaria es capicúa y tienen 10, 8, 6, 4 y 2 cifras binarias. Obviamente, sólo hay un entero (que es 1) con expresión binaria de 1 cifra, y es capicúa. Si un entero tiene un número impar $2p+1$ de cifras binarias ($p\geq 1$), entonces las p primeras determinan biunívocamente las p últimas, siendo además la primera y la última iguales a 1. Además, la cifra $p+1$-ésima puede tomar valores 0 o 1, al igual que las $p-1$ anteriores, con lo que hay exactamente 2^p enteros positivos distintos cuya expresión tiene $2p+1$ cifras binarias y son capicúas. Luego si tomamos los números capicúas con expresiones binarias de 1, 3, 5, 7 y 9 cifras binarias, obtenemos $1+2+2^2+2^3+2^4=31$ enteros menores que 1988 y con expresión binaria capicúa. Los únicos números enteros capicúas mayores que 1986 (que tiene por expresión binaria 11111000000), tienen obviamente por expresiones binarias 11111011111 y 11111111111, siendo iguales a $2047-2^5=2015$ y 2047, respectivamente, y son por lo tanto mayores que 1988. Cualquier otro número capicúa de 11 cifras binarias es menor que 1988. Luego hay $2^5-2=30$ tales números, con lo que hay un total de $31+31+30=92$ números menores o iguales que 1988 y tales que $f(n)=n$.

6.- Inducción

Cada vez que tenemos alguna cantidad o expresión que depende de números enteros, y existe una definición recursiva, la inducción puede ser un arma muy potente, como se muestra en el último ejemplo que se presenta en esta lección de preparación olímpica, en concreto el problema 6 de la XXII Olimpiada Matemática Internacional (1981):

La función *f*(*x*,*y*) satisface

(1) *f*(0,*y*)=*y*+1,

(2) *f*(*x*+1,0)=*f*(*x*,1),

(3) *f*(*x*+1,*y*+1)=*f*(*x*,*f*(*x*+1,*y*)),

para cualesquiera enteros no negativos *x*,*y*. Determine *f*(4,1981).

Es trivial comprobar por inducción que

$$f(1,y)=y+2.$$

El resultado es obvio para y=0, ya que aplicando (2),

$$f(1,0)=f(0,1)=1+1=0+2.$$

Si el resultado se cumple para x=1 y para un y dado, entonces aplicando (3),

$$f(1,y+1)=f(0,f(1,y))=f(1,y)+1=y+2+1=(y+1)+2.$$

Utilizando este resultado, y aplicando nuevamente (2),

$$f(2,0)=f(1,1)=1+2=2\cdot 0+3.$$

Se demuestra entonces de forma sencilla por inducción que

$$f(2,y)=2y+3.$$

El resultado ha sido ya probado para y=0, y si se cumple para un y dado, entonces aplicando (3) se obtiene

$$f(2,y+1)=f(1,f(2,y))=f(2,y)+2=2y+3+2=2(y+1)+3.$$

Aplicando nuevamente (2),

$$f(3,0)=f(2,1)=2\cdot 1+3=2^{0+3}-3.$$

Se puede entonces demostrar por inducción que

$$f(3,y)=2^{y+3}-3.$$

El resultado ha sido ya probado para y=0, y si se cumple para un y dado, entonces aplicando (3) se obtiene

$$f(3,y+1)=f(2,f(3,y))=2f(3,y)+3=2^{y+4}-6+3=2^{(y+1)+3}-3.$$

Tenemos entonces finalmente que

$$f(4,0)=f(3,1)=2^{1+3}-3=2^{2^2}-3.$$

Se demuestra entonces por inducción que

$$f(4,y)=2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}-3,$$

donde la torre de doses tiene y+3 doses. El resultado ya ha sido probado para y=0, y si es cierto para algún y, entonces aplicando (3),

$$f(4,y+1)=f(3,f(4,y))=2^{f(4,y)+3}-3=2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}-3+3}-3=2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}-3,$$

donde la torre de doses tiene un dos más que en el caso de y, es decir, tiene (y+1)+3 doses, y hemos acabado. Luego

$$f(4,1981)=2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}-3,$$

donde la torre de doses tiene 1984 doses.

Referencias: Varios de los problemas propuestos en las Olimpiadas Matemáticas Española, Iberoamericana e Internacional se pueden encontrar en http://platea.pntic.mec.es/csanchez/olimmain.htm, http://www.oei.es/oim/problemas.htm y http://imo.math.ca, respectivamente.

Enseñanza de simetrías matemáticas a través del arte: Propuesta para promover un estudio integral.

Trabajo Especial de Grado

UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
Licenciatura en Educación mención Matemática

Daniela Palacios Salazar

Caracas, Venezuela
Mayo 2007

RESUMEN: Se describen teorías del aprendizaje relacionadas con la construcción del pensamiento y la adquisición de aprendizajes significativos para justificar la importancia de los mismos al momento de diseñar un material instruccional. Junto a estas teorías se considera el modelo de pensamiento geométrico de van Hiele para elaborar clases tipo talleres orientadas hacia la integración de disciplinas que potencien la comprensión de los temas a relacionar e incentivar un pensamiento holístico. Los temas expuestos son ciertas simetrías matemáticas que son fácilmente explicadas a través de representaciones artísticas y decorativas, como pinturas y mosaicos, mostrando cómo pueden construirse y embellecer nuestro derredor.

PALABRAS CLAVES: Aprendizaje Significativo, Modelo van Hiele, Simetrías Matemáticas, Arte Bidimensional, Proyecto Factible.

Introducción

Cabe preguntarse por qué es necesaria la enseñanza de la matemática desde los niveles más bajos de la estructura académica. Como bien es cierto, la matemática, conocida como la Reina de las Ciencias, es una ciencia pura que busca estudiar patrones en las estructuras de entes abstractos y las relaciones que entres ellas puedan existir, aporta métodos de orden y lógica que aparte de desarrollar y potenciar el pensamiento científico, incentiva y capacita un pensamiento abstracto que permite plantear y resolver problemas cotidianos y llegar a conclusiones y convicciones apropiadas. La matemática enseña a resolver problemas de manera ingeniosa y entrena en la búsqueda de soluciones no triviales de los mismos.

Ahora, si bien la matemática ofrece la existencia de una certeza verificable ausente en otros aspectos de la existencia humana permitiendo deducir y delimitar lo verdadero de lo falso, y posee la capacidad de explicar cómo y por qué funcionan ciertas cosas, es innegable la elevada importancia que su estudio esté vinculado a la instrucción que la Educación Básica ofrece, pues asegura la formación de mentes abiertas, espontáneas, flexibles y con grandes capacidades de escrutinio y razonamiento lógico.

La educación busca la integración de las personas frente a un ámbito social en constante evolución, frente a una cultura en la cual la se desenvuelven y sobre todo, busca formar personas que logren tener los medios personales y materiales para continuar con el desarrollo intelectual, moral, laboral y disciplinario que una sociedad evolucionada necesita para mantenerse estable y consolidada.

La educación tiene la obligación intrínseca de permanecer en constante alerta a los cambios profundos que la dinámica social va generando y mantenerse abierta para lograr adaptarse a las nuevas y siempre cambiantes necesidades que la situación global plantea y exige.

Además, uno de los trabajos más importantes del docente, como agente dinámico de la educación, consiste en encaminar su trabajo científico y pedagógico en la elaboración y aplicación de estrategias metodológicas que permitan dirigir, y en otros casos reformular, el proceso de enseñanza-aprendizaje según las diferentes necesidades que la sociedad plantee.

Por todo lo anteriormente expuesto, esta investigación propone un estudio descriptivo sobre la enseñanza de la matemática usando como herramienta estratégica otra disciplina del pensamiento que pareciera tener poco en común con ella, pero que en realidad la representa y complementa, como el arte, para echar mano de nuevas estrategias didácticas que faciliten el aprendizaje de ciertos conceptos sobre simetrías, ejemplificadas a través de representaciones artísticas.

Se busca estimular y desarrollar mentes holística e integrales que permitan reconocer y descubrir cómo lo abstracto de la matemática tiene aplicaciones concretas en el mundo sensible que nos rodea.

Es una investigación orientada hacia los jóvenes estudiantes del ciclo diversificado de la Educación Media buscando que reconozcan por sí mismos la importancia de la matemática tanto en lo académico como en lo cotidiano, pero sobre todo lo que ésta representa en la construcción de su propio pensamiento, en su mundo interno, y en la elección de su futuro como entes partícipes de la sociedad que los rodea y los promueve a mantener y a reelaborar su propia cultura.

La línea de investigación que este trabajo traza depende de aquellos temas educacionales que han tomado fuerza en los últimos tiempos, entre los cuales la interdisciplinariedad ha ocupado un lugar protagónico. Se ha planteado que “las diversas áreas de conocimientos deben mantener una estrecha relación entre sí para dar coherencia al proceso educativo con objeto de lograr la formación completa y equilibrada del alumno” (Ibañez, citado en Pérez Sarduy, 2006). Por ello pudiera asumirse a la interdisciplinariedad como un fenómeno que se concreta en las relaciones objetivas entre las diferentes disciplinas que confluyen en el proceso formativo y como un elemento de vital importancia en la formación integral de la personalidad de las nuevas generaciones (Pérez Sarduy, 2006). Por ello esta investigación emprende su labor reuniendo arte y matemática como elemento unificador, vinculante y revelador para el desarrollo de nuevas personalidades integrales.

Las exigencias de una educación de alta calidad deben estar determinadas por una eficiente aplicación del aprendizaje, en consecuencia, deben ejecutarse estrategias educativas que aporten aprendizajes significativos a los estudiantes. Por ello, tomamos un modelo de pensamiento y aprendizaje elaborado y difundido por los van Hiele unido al concepto de aprendizaje significativo elaborado por Ausubel para asentar las bases teóricas que sustentaron la investigación y que sirven de base para el profesor a la hora de encontrar el punto de partida del cual debe iniciar la enseñanza.

Ofreciendo un diseño instruccional basado en sesiones de cuatro (4) clases tipo talleres extracurriculares que representen una alternativa para el docente y el estudiante que potencie el proceso enseñanza-aprendizaje, se revela el principal objetivo de esta investigación.

Buscando alternativas recreativas para los estudiantes que aspiran aprender una materia en especial y solventar cabalmente la falta de uniformidad y congruencia que el estudio de la matemática puede representar ofrecemos sesiones de aprendizaje estratégico que permiten aprender matemática de una forma menos rigurosa, pero igual eficaz y eficientemente.

El Problema

Planteamiento del problema

Dado que el rendimiento por parte de los alumnos de las escuelas es ciertamente bajo, en cuanto a la matemática como disciplina del pensamiento, alternativas para su enseñanza no son pocas, quizás sí , mal distribuídas.

Peralta (2005) plantea que el principal problema que la enseñanza de la matemática enfrenta deriva de la resistencia que los estudiantes presentan al momento de aplicar los métodos que ésta propone pues, según la tradición de esta misma enseñanza, el aprendizaje de conceptos, la resolución de problemas y la adquisición de procedimientos, generalmente tienen lugar sin la intervención activa de los alumnos mismos.

No se trata de obviar que la matemática es una ciencia metodológica, perfectamente estructurada y conferida de un sistema de orden y lógica que permite plantear y resolver problemas, sean cuales sean sus órdenes, pero justamente por ello presume ser cerrada y rígida. Pareciese ser una disciplina con un lenguaje en los que sólo algunos privilegiados participan, lo que deriva en una rigidez mental que no permite disfrutar de la importancia y de las facilidades que la matemática en todos sus aspectos puede ofrecer, limitando el desarrollo intelectual, el conocimiento por sí mismo y la capacidad creativa que tanto aportan al desenvolvimiento de alumnos y profesores, dando paso a una deficiente interiorización de los significados que la matemática como ciencia y filosofía aporta.

Esta conducta, como consecuencia de esta limitación , conlleva a los estudiantes a asumir que el estudio de la matemática es aburrido, no aporta innovación a sus necesidades y mucho menos las suple.

Dada esta dificultad, la enseñanza de la matemática debe tomar un curso de transformación e integración. Debe el educador asumir nuevas posturas, ya que la búsqueda de la coordinación de las actividades de varios órganos para alcanzar un funcionamiento armonioso y así componer un todo con partes diversas es un sentimiento global que lidera las tendencias educativas contemporáneas.

“Las clasificaciones racionales,..., han sido llevadas a un extremo que . . . condujo a una pérdida de la visión global del conocimiento verdaderamente creativo para sustituirla por visiones parciales de muy corto alcance(. . .). De todas estas clasificaciones, la más evidente y, al mismo tiempo, la más artificial es la que señala fronteras entre las ciencias y las humanidades...” Jiménez (1999).

La separación que ha existido entre las ciencias y las humanidades ha violentado el intelecto humano junto con la palabra “vocación” que ha permitido el florecimiento de este tipo de individuo que no se pregunta qué necesita y, mas aún, qué quiere. Este individuo aislado y perfeccionista, exento de dudas, que no desarrolla sus habilidades innatas en pro a su salud mental y a la salud social y cultural.

Ahora, la presencia de la matemática en el arte se manifiesta desde tiempos remotos: los griegos, artistas del Renacimiento (siglo XV), los árabes (s. XII-XV), utilizaron la geometría en la construcción de sus monumentos, decorados y pinturas. En el siglo XX muchos artistas han utilizado figuras geométricas y a la geometría en sí en sus obras (Matemática para todos, Fundación Polar).

En particular, en el caso de Venezuela, la arquitecto y artista plástico Inés Silva hace uso de la matemática para generar infinidades de estructuras basadas en el arte geométrico (www.inessilva.com). El doctor Mauricio Orellana Chacín, matemático reconocido, lleva más de cinco años dictando conferencias a nivel nacional e internacional acerca de la relación innegable entre las matemáticas y el arte y la belleza que ésta genera, siendo su última ponencia dentro del marco del XII Congreso Interamericano de Educación Matemática a realizarse en julio de 2007.

Por ello, hemos decidido emprender una investigación pedagógica que nos permita a un nivel de educación intermedio (ciclo diversificado) integrar de una forma sencilla ciencias y humanidades, matemática y arte, tomando conceptos específicos, como el de simetrías, para ejemplificarlos a través de representaciones artísticas y lograr, por una parte, afianzar conocimientos y conceptos matemáticos de una manera cotidiana y atractiva, mientras se busca vincular dos mundos tan aparentemente desligados, dándole continuidad a nuestra línea de investigación basada en la interdisciplinariedad desarrollando acciones a través de la educación con el fin de contribuir de manera armónica y sistemática a la formación integral de la personalidad .

Objetivo General

Proponer cuatro (4) clases tipo talleres de aprendizaje estratégico para estudiantes del ciclo diversificado que ejemplifiquen los aspectos estético-emocionales de la matemática, basándose en los conceptos de los distintos tipos de simetrías que se noten claramente representados en pinturas, fotografías, grabados y mosaicos, para superar deficiencias en la comprensión de alguna de estas dos disciplinas y mostrar la estrecha relación que entre el arte y la matemática se ha dado a través de la historia, como un aporte a la educación y a la sociedad.

Objetivos específicos

1. Analizar descriptivamente las relaciones que existen entre el arte y el concepto de simetría en Geometría.

2. Describir los factores que inciden directa e indirectamente en la comprensión de la matemática y cómo algunos de sus conceptos pueden ser ejemplificados artísticamente, y a su vez, cómo algunas representaciones artísticas pueden ser explicadas a través de la matemática.

3. Determinar los métodos, actividades, recomendaciones y materiales que propicien la comprensión y el reconocimiento de los estudiantes en cuanto que la matemática forma parte de su mundo interior y de su vida cotidiana, usando al arte para ello.

4. Integrar a través de imágenes directas, de pensamientos artísticos y de sus representaciones, conceptos de simetrías, para lograr que éstos sean asimilados y se les dé un lugar en el pensamiento del estudiante que genere relación y aplicación (no solo tecnológica, como se acostumbra o espera de la matemática).

Justificación

Mas allá de querer únicamente abordar el tema de la comprensión de la matemática en la educación media, es tratar de contribuir a mejorar la formación integral de la población estudiantil y la formación y actualización de los docentes en dicha área.

Aún en la actualidad, la matemática es casi únicamente reconocida como una disciplina que permite realizar operaciones algebraicas elementales y representar geométricamente figuras para ser estudiadas, pero pareciera ser un reconocimiento limitado, pues no se resalta la importancia del papel que juega esta fascinante rama del pensamiento sobre el desarrollo del estudiante como un ente analítico y participativo .

Las escuelas no escatiman en alternativas para colaborar en la superación intelectual y emocional de sus alumnos y es por ello que demandan nuevas estrategias didácticas que traten de superar las dificultades académicas que la matemática representa y las dificultades vocacionales que la sociedad impone, y poder generar un ámbito educativo placentero, interrelacionado y holístico.

Por esto proponemos una herramienta que combina las necesidades y tendencias actuales con lo constructivista de la educación, que combina la relación entre lo aparentemente desligado del lenguaje de la naturaleza con representaciones creadas por el ingenio humano y buscar inculcar un pensamiento reflexivo, de ejercicio y visión, mas que de prácticas aisladas y rígidas.

Igualmente se pretende proveer a los docentes de estrategias que ayuden a los estudiantes a desarrollar sus habilidades y destrezas, incrementando en ellos la capacidad de descubrimiento y análisis .

De aquí se espera consolidar un aporte significativo a la educación que contribuya y permita solventar la problemática del aislamiento injustificado de la matemática que la labor profesional y el ejercicio docente han propiciado y despertar el interés ante la estética, las emociones y las libertades que esta disciplina aporta.

Marco Teórico

Teorías de Aprendizaje

El ámbito cognitivo puede ser definido como aquel que trata de la memoria o del recuerdo de conocimientos, del desarrollo del entendimiento y de las capacidades técnicas individuales.

La instrucción vincula los procesos de enseñanza y de aprendizaje; de allí que la planificación de la instrucción implique la determinación tanto de lo que el alumno ha de aprender como de las formas de promover ese aprendizaje.

Ahora, al estudiar la adquisición y uso de los conceptos, Ausubel, gran expositor del aprendizaje significativo, plantea que los seres humanos interpretan las experiencias perceptuales de acuerdo a su estructura cognitiva y que los conceptos son el fundamento para el aprendizaje y la resolución significativa de los problemas.

En general, los psicólogos cognitivos describen al aprendizaje como "un proceso generativo en el cual el significado y la comprensión deben ser construídos por los alumnos individualmente...los resultados del aprendizaje son descritos en términos de las modificaciones de las representaciones internas del conocimiento...conocidas como estructuras cognitivas, los cuales se forman a través de...la asimilación de nueva información en las estructuras de memoria ya existentes, por el acomodo de la estructura cognitiva a la nueva información." (Wildman (1981), citado en Dorrego, 1991).

Ausubel distinguía dos tipos de aprendizajes: el aprendizaje rutinario y el **aprendizaje significativo** el cual es un proceso de metacognición donde el estudiante "aprende a aprender", donde sus conocimientos previos le dan la base para integrar de manera congruente los recientemente adquiridos y aprender de una manera más eficaz y eficiente.

El aprendizaje significativo permite al alumno relacionar su mundo interno con el externo, lo que conoce con lo que ha de conocer. Esta teoría del aprendizaje pretende que el estudiante construya su propio aprendizaje, que lo lleve a la autonomía de su modo de pensar, que desarrolle su inteligencia por medio de la integración de lo que tiene y conoce con respecto a lo que quiere aprender, usando la experiencia como herramienta dado que la misma juega un papel fundamental en su desarrollo personal.

lo que nos permitiría integrar disciplinas aisladas para, por una parte, solventar deficiencias educativas, y por el otro desarrollar el potencial innato de cada estudiante.

Se puede observar entonces que el aprendizaje significativo exige, según Ausubel (1992), la existencia de conocimientos previos, una actitud de aprendizaje significativo o disposición del participante para relacionar sustancial y no arbitrariamente el nuevo material con su estructura cognoscitiva, el cual, a su vez, debe ser significativo por igual, para que sea relacionable con la estructura del participante.

Dos de las nociones más fértiles introducidas por el psicólogo experimental Piaget, son la asimilación, "proceso por el cual el individuo toma nuevos datos y los incorpora a las estructuras de conocimiento ya existentes" (Piaget, 1978), y el acomodamiento, construcción dinámica del conocimiento, que están íntimamente asociadas con los conflictos cognitivos que se presentan en los períodos de transición entre una fase dada y la siguiente. Durante la transición pueden entrar en conflicto los elementos de un conocimiento nuevo con la experiencia de las ideas previas adquiridas. El acomodamiento, complementario de la asimilación, lleva consigo una reestructuración de los conocimientos anteriores, más que la sustitución, y conduce, con frecuencia, a una auténtica reconstrucción mental.

Visto ésto, nos enfocaremos en la descripción de un modelo de instrucción de pensamiento geométrico que sigue las mismas líneas estructurales del constructivismo y el aprendizaje significativo orientado a la instrucción de la geometría como rama de la matemática, conocido como el **modelo de van Hiele**.

Entre los continuadores de Piaget, se cuentan los esposos Pierre y Dina van Hiele, quienes introdujeron en Holanda, en 1.957, el modelo de los niveles de pensamiento con el propósito de desarrollar en los alumnos de la escuela elemental el *insight* en la geometría.

Los niveles de pensamiento tal y como fueron aplicados por van Hiele a la geometría son: visualización, análisis,deducción informal, deducción formal y rigor, donde con cada uno se van generando los sistemas de relaciones que el alumno utilizará para ir construyendo su criterio encausado por aprendizajes significativos y que lo hará converger en la autonomía intelectual para resolver problemas de geometría.

Ahora, con el fin de ayudar al alumno a pasar de un nivel a otro de pensamiento dado al nivel inmediatamente superior, los van Hiele propusieron una receta que se debe seguir al impartir la instrucción. La misma se compone de cinco fases de aprendizaje al final de las cuales el alumno habrá alcanzado un nuevo nivel de pensamiento. Estas fases prestan al docente una secuencia lógica que le permitirán orientar su instrucción de acuerdo a lo que sus estudiantes necesitan para el óptimo alcance de sus objetivos. Citando a de la Torre Gómez (2003):

- **Fase 1** . *Indagación*: el maestro sostiene un diálogo con los alumnos acerca de los objetivos de la materia que se va a estudiar.
- **Fase 2** . *Orientación dirigida*: el profesor organiza en forma secuencial las actividades de exploración de los alumnos, por medio de las cuales éstos pueden familiarizarse con las estructuras características.
- **Fase 3** . *Explicitación*: Los estudiantes refinan el empleo de su vocabulario, construyendo ahora sobre experiencias previas. En esta fase los alumnos empiezan a formar el sistema de relaciones del estudio, a partir del cual podrán operar con eficacia en la solución de los problemas.
- **Fase 4** . *Orientación libre*: Los alumnos encuentran en esta fase tareas de múltiples pasos, así como otras que pueden llevarse a cabo por procedimientos diferentes.
- **Fase 5** . *Integración*: Los alumnos revisan en esta fase los métodos que tienen a su disposición a través de una mirada de conjunto, con lo cual se busca que unifiquen los objetos y las relaciones y que los asimilen internamente en un nuevo dominio de pensamiento.

Algunas de las fases pueden diferenciarse por el tipo de problemas que deben plantearse en ellas. En la fase 1 se pretende que los problemas ayuden al aprendiz a descubrir el campo del conocimiento y, aunque deben ser sencillos, no se espera que los alumnos, por sí solos, estén en capacidad de resolverlos. En la fase 2 se delimitan los principales elementos (conceptos, definiciones, propiedades) que forman el sistema de relaciones con los que los alumnos deberán razonar. Es necesario que las fases 2, 3 y 4 se realicen en el orden establecido, para conseguir un buen aprendizaje y un adecuado desarrollo de la capacidad de razonamiento.

Haciendo un resumen vinculante entre las teorías de aprendizaje y modelos de pensamiento de Ausubel y van Hiele, cabe destacar la similitud y complementariedad que presentan sobre los siguientes tópicos:

- Estructura cognitiva: ambas teorías la consideran como la base para la integración de nuevos saberes buscando alcanzar niveles superiores del pensamiento. Una verdadera reinvención mental.
- Sistemas de relaciones: conceptos, definiciones, propiedades con los que el alumno razona, son el fundamento de la construcción.
- El docente y el material didáctico: deben eliminar las fuentes de confusión y apuntar al desarrollo.
- Autonomía intelectual: resolución de problemas de forma propia, aprendizaje personal.
- Didáctica: las nuevas ideas deben presentarse en forma general y luego de forma secuencial para que el estudiante asimile, reorganice y se familiarice con las nuevas estructuras a integrar.

El conjunto de aspectos sobre teorías de enseñanza-aprendizaje que se han mencionado hasta ahora, teoría de la instrucción, constructivismo, aprendizaje significativo y el modelo de pensamiento geométrico de van Hiele, representan el soporte conceptual en el que esta investigación se basará.

Bajo este tipo de enseñanza-aprendizaje, léase, aprendizaje significativo y la secuencia ordenada y lógica en que la instrucción debe impartirse, se pretende que el estudiante construya su propio aprendizaje, su propia manera de remodelar su estructura cognitiva, llevándolo así hacia una autonomía bajo un modo de pensar tal que desarrolle su inteligencia de forma integral relacionando lo que tiene y conoce con respecto a lo que quiere conocer y aprender.

Bases Matemáticas y Artísticas

El estudio de la geometría ha sido tradicionalmente incluído en los currículos escolares no solo por su utilidad práctica, sino además por ser un eficaz medio para que los estudiantes aprendan a razonar, a deducir, a la vez que entiendan el método axiomático con que la matemática opera. “La geometría ofrece una oportunidad para que los estudiantes experimenten en cuanto a las interrelaciones creativas entre las matemáticas y el arte” (Fundación Polar, Matemática para todos).

Dentro de la geometría, un concepto relevante es la **simetría**, que en su sentido más general podría definirse como la armonía resultante de ciertas posiciones de los elementos que constituyen un conjunto, es decir, "significa bien proporcionado, con equilibrio de formas..." (Weyl, 1951).

Si bien ésta define o genera armonía y belleza estética, "el arte, en sus variadas manifestaciones, hace uso de la simetría con el fin de lograr belleza, equilibrio y la armonía de los elementos que utiliza" (MJOCH, 2000).

En un sentido matemático, la noción de simetría es un concepto preciso que viene dado por medio de una aplicación entre elementos de conjuntos: Dado un cuerpo, una configuración espacial, es simétrico con respecto a un punto, a una recta o a un plano dado E si se transforma en sí mismo al reflejarse en E.

Este "reflejarse" puede darse a través de ciertos movimientos rígidos que al ser aplicados a este cuerpo lo dejan invariante.

Estos **movimientos rígidos** son aquellas transformaciones que no cambian la forma ni el tamaño de las figuras, que conservan distancias. "Cuando se trata de un plano, esos movimientos rígidos son las rotaciones, las traslaciones y las reflexiones y sus combinaciones." (MJOCH, 2000).

Así, la simetría en su concepción geométrica se estudia por medio de la teoría de grupos, específicamente con el denominado grupo de los movimientos rígidos del plano cuyo objeto es el de determinar estos movimientos rígidos que dejan invariante a una figura del plano. (MJOCH, 2000).

Existe una amplia clasificación en cuanto a las simetrías de las figuras planas, pero dado que el objetivo principal de esta investigación es la ejemplificación de algunas de estas simetrías a través de representaciones artísticas, sólo nos enfocaremos en algunas de ellas: la primera de ellas es la **simetría cíclica** donde las figuras tienen un centro, un punto fijo O, que se clasifican dentro de los **grupos puntuales o de Leonardo**, específicamente en los **grupos cíclicos** C_n, que son generados por una rotación de ángulo $2\pi/n = 360^o/n$.

La segunda es la **simetría diedral**, también ubicada dentro de los grupos puntuales, específicamente dentro de los **grupos diedrales** D_n, generados por 1 rotación de orden n y 1 reflexión.

Todos los movimientos rígidos T que pertenecen a grupos puntuales, no mueven este punto fijo O y se prueba que tal grupo "sólo puede tener rotaciones de centro en el punto O y reflexiones respecto de ejes que pasan por O" (MJOCH, 2000), es decir, no presentan traslaciones.

Ahora, otro grupo a estudiar y a ejemplificar será el **grupo de simetrías del plano (grupos cristalográficos)** que se refieren a los distintos recubrimientos del plano (mosaicos, rompecabezas, teselaciones). En este grupo hay traslaciones en dos direcciones independientes y como bien su nombre lo dice éstos son utilizados en los ornamentos planos. "Se trata de ornamentar, decorar, un plano bajo ciertas condiciones: a partir de una figura o motivo generador y mediante periodicidad y acoplamiento recubrir el plano." (MJOCH, 2000).

Cuando hablamos de **mosaicos** nos referimos a un recubrimiento del plano con figuras que no dejen huecos y que a la vez no se superpongan entre ellas. Los regulares están formados por polígonos regulares del mismo tamaño (triángulos, cuadriláteros y hexágonos) y los semirregulares son formados po dos o más polígonos regulares de dimensiones adecuadas para que se acoplen. Pero para teselar un plano con mosaicos no solo se utilizan polígonos regulares, ya que éstos son módulos básicos que se pueden deformar y ser sometidos a un conjunto de transformaciones resultando un modelo generador con figuras alusivas.

Las **teselaciones** pueden a su vez ser **periódicas**, donde se limita la región mediante dos traslaciones independientes sin necesidad de rotaciones y reflexiones, o **no periódicas** (mosaicos de Penrose), donde las figuras que rellenan el plano ya no son sólo polígonos regulares sino figuras mucho más complejas, como por ejemplo, animales (gallinas, caballos, peces), y que aún así recubren totalmente el plano.

Tras todas estas generalidades matemáticas lo que se busca es interrelacionar dichas simetrías con representaciones artísticas para realzar los numerosos diseños simétricos que rodean nuestra vida cotidiana, como por ejemplo los trabajos gráficos de M. C. Escher (Países Bajos, 1898-1972) y los ornamentos que decoran edificaciones de origen árabe tales como La Alhambra de Granada, por nombrar algunos de los más conocidos.

Diseño Instruccional

El diseño de instrucción es el conjunto de procedimientos sistemáticos para el desarrollo de ambientes educativos. Es una metodología de planificación pedagógica que sirve de referencia para producir una variedad de materiales educativos atemperados a las necesidades estudiantiles, tratando de asegurar la calidad del aprendizaje.

Siempre y cuando se cumplan con los requisitos metodológicos, cualquier persona se encuentra en la capacidad de crear y desarrollar un material instruccional (Yukavetsky, 2003). Gran parte de estos requisitos nos lo aclaran Duffy y Johanssen (1982) al afirmar que “el diseño y el desarrollo instruccional deben basarse en alguna teoría de aprendizaje y/o conocimiento, siendo posible el diseño efectivo solo si la persona o equipo que lo desarrolla ha efectuado una meditada toma de conciencia de las bases teóricas subyacentes en el diseño”.

Los diseñadores de materiales instruccionales deben entender controlar el propio proceso de aprendizaje propio, por lo cual, el énfasis en la actividad instruccional debe estar en el alumno y no en el profesor, dando así más importancia a “aprender a aprender”.

Para el desarrollo del proceso instruccional es necesario crear y mantener las condiciones mínimas necesarias para que el aprendizaje se produzca, de allí que sean dos aspectos vinculantes el de enseñar y aprender. Si bien es cierto que el aprendizaje ocurre bajo una suerte de condiciones individuales: interés, motivación, aptitudes, actitudes, capacidades cognitivas, también es cierto que se requiere activar todas esas capacidades en el ambiente externo.

Las nuevas tendencias de organizaciones, instituciones y sistemas tratan de prever que la eficacia se desplace de la rigidez a los cambios y a la flexibilidad en la búsqueda de experiencias en las que florezcan la autonomía, la experimentación, la aceptación de riesgos, la innovación y la creatividad (Fernández, 1991).

El uso de estrategias creativas y su relación con los modelos de investigación de la enseñanza ya expuestos nos permite desarrollar etapas por las que el docente debe incursionar para reafirmar conocimientos e incentivar su expresión: tomar conciencia del grupo y de las condiciones existentes; dejar fluir libremente el potencial creativo; dar la información y la ayuda necesaria; administrar adecuadamente la situación instruccional; aplicar procedimientos adecuados de evaluación.

En cuanto a los instrumentos, el diseño de la instrucción no es estructurado sino abierto y convergente, es decir, que nunca está completo y que se termina conjuntamente con la investigación, con una posible pérdida de fiabilidad y objetividad, pero con una mayor flexibilidad y oportunidad de construir sobre el conocimiento tácito.

Develando todo este marco teórico que soporta nuestro diseño instruccional, se puede apreciar la similitud estructural y categórica entre un eficiente diseño y las fases y niveles de aprendizaje que los van Hiele expusieron en su propuesta de pensamiento y enseñanza de la geometría.

Por ello hemos determinado basarnos en esta teoría del aprendizaje para dar forma a nuestra propuesta de material instruccional, diseñando 4 clases diferentes basadas y relacionadas con cada nivel de pensamiento y cada fase de aprendizaje, para tratar de garantizar continuidad en la transmisión y eventual construcción de conocimientos que este trabajo propone.

Ejemplificaciones Artísticas de Simetrías

El objetivo principal del siguiente capítulo es reunir ejemplificaciones artísticas de simetrías matemáticas mostrando imágenes que representen aquellas que se buscan estudiar para dar coherencia y continuidad a la labor teórica que se ha venido desplegando.

Las simetrías que se verán reflejadas en mosaicos, teselaciones, fotografías, son aquellas generadas por rotaciones, reflexiones y traslaciones de figuras planas. Estas son comúnmente llamadas: simetrías cíclicas, simetrías diedrales y simetrías de recubrimiento del plano.

Una traslación mueve puntos en una dirección determinada y a una distancia fija. Todo se conserva, menos la posición.

Un giro hace que respecto a un centro todos los otros puntos se desplacen, según un arco de círculo, un determinado ángulo. Si hacemos una vuelta es como si no hubiéramos hecho nada. Si al hacer media vuelta la figura queda igual diremos que tiene simetría central, y diremos que hay simetría cíclica si la figura sólo queda igual cuando giramos un ángulo divisor de 360º (un tercio de vuelta, un cuarto de vuelta,...).

Una simetría axial consiste en fijar una recta o eje y hacer corresponder a cada punto otro situado idénticamente al primero respecto a esta recta.

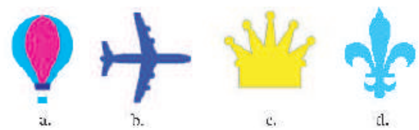
Veamos entonces ejemplos claros que representen las mismas.

Simetría bilateral

Podría decirse que de las simetrías que puedan encontrarse ésta es la más sencilla dado que consiste en fijar un solo eje de reflexión haciendo luego corresponder cada punto de una figura con otro que está situado idénticamente al primero respecto a esta recta.

Un ejemplo claro lo encontramos en las siguientes figura:

Figura 1: Simetría bilateral



Simetrías Cíclicas

Las simetrías cíclicas son aquellas generadas a través de figuras con un centro O, fijo que son rotadas con un ángulo de $2\pi/n$, es decir, se toma un diseño base con un punto fijo y por medio de ese punto que no se mueve se rota la figura con un ángulo de $360°/n$. Este número n es determinado por el número de veces que la figura será rotada y este número representa el orden al que pertenece la simetría.

Un ejemplo claro de un simetría con $n = 4$ lo encontramos en la siguiente figura ilustrada:

Figura 2: Simetría cíclica de orden 4

Este diseño, sin tomar en cuenta los colores, es generada a través de rotar el número 2 cuatro veces (cada rotación es de $360°/4 = 90°$).

La siguiente figura muestra un ejemplo de una simetría cíclica de orden 6. La figura es cíclica dado que no presenta ninguna reflexión. Es fácil ver que la misma debe ser rotada seis veces para encontrarse con la figura original.

Figura 3: Simetría cíclica de orden 6

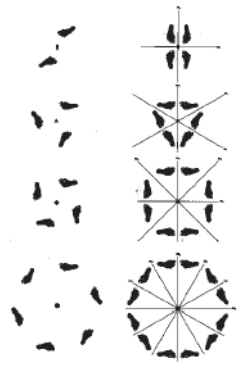


Figura 4: Simetrías cíclicas con $n = 2, 3, 4$ y 6

En esta imagen vemos representada una figura que es rotada dos, tres, cuatro y seis veces generando ejes de simetrías fácilmente reconocibles.

Mostramos ahora un ejemplo muy reconocido como diseño de cotidianidad, pues es comúnmente usado para juegos de palabras, dameros, crucigramas, etc.

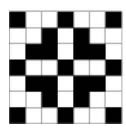
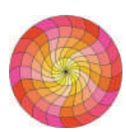


Figura 5: Simetría cíclica de orden 4

Otras imágenes que representan simetrías cíclicas son reconocidas en las llamadas mandalas, que son imágenes con un centro y con una simetría organizada habitualmente en 4 ejes. Y su función puede ir desde lo puramente decorativo a su uso en la meditación, la oración, o como medio de sanación y/o desarrollo mental o espiritual.

Encontramos también en textiles diseños de simetrías cíclicas y otros diseños ubicados en cerámicas:

Figura 6: Textil simétrico

Figura 7: Diseños simétricos en cerámicas

Simetrías Diedrales

Este conjunto de simetrías vienen determinadas por una rotación de orden n y una reflexión, es decir, dada una figura como en el caso anterior con un punto fijo O, la misma es rotada tantas veces como n indique, lo que le confiere el orden, y luego se le aplica a la nueva figura generada una reflexión.

Si una figura tiene más de una línea especular, podemos decir que tiene simetría diedral, como podemos ver en las siguientes figuras:

Figura 8: Figuras con simetría diedral

Ahora, una fotografía que ejemplifica un simetría diedral podría ser:

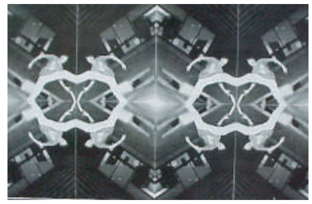


Figura 9: Simetría diedral

ya que vemos claramente cómo una parte de la fotografía es rotada cuatro veces y luego ésta tiene un eje de reflexión que la duplica.

Nos encontramos con simetría diedral en el siguiente diseño muy decorativo, donde la traslación además interviene para seguir generando regularidad:

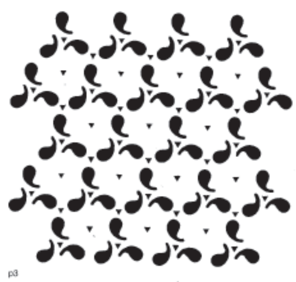


Figura 10: Simetría diedral

Y en el siguiente ejemplo vemos representado este tipo de simetría que decora parte de la Alhambra en Granada:

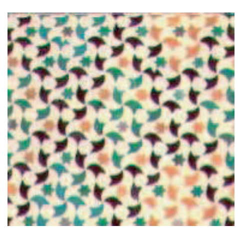


Figura 11: Pajarita

Simetrías de recubrimiento del plano

Este tipo de simetrías son aquellas generadas por traslaciones, en específico, por dos traslaciones independientes de figuras geométricas, bien sean sencillas (polígonos regulares, o la combinación de varios de ellos), o bien sea por figuras un poco más elaboradas.

Los diseños generados por este tipo de movimientos son aquellos que rellenan un plano totalmente, lo recubren de tal manera que no dejan espacio entre figura y figura, generando con ello representaciones artísticas muy llamativas.

Con este tipo de simetrías se generan los reconocidos mosaicos, por ejemplo:

Los únicos polígonos regulares que nos permiten teselar un plano son los triángulos equiláteros, los cuadrados y los hexágonos. Es curioso que ningún otro polígono regular nos permita realizar este procedimiento, que es demostrado matemáticamente y cuya de demostración no viene al caso.

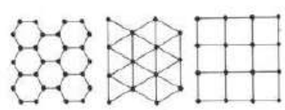


Figura 12: Polígonos que teselan un plano

Este tipo de disposición de figuras genera mosaicos regulares como por ejemplo:

Figura 13: Mosaico regular con hexágonos

Ahora, también existen los llamados mosaicos semirregulares que son aquellos que surgen de combinar dos o más polígonos regulares:

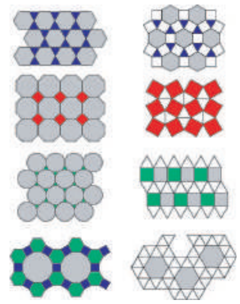


Figura 14: Mosaicos Semirregulares

los que vemos representados en la figura anterior notándose como en cada diseño se combinan triángulos, cuadrados, hexágonos, octágonos, etc., para hacer que el plano completo quede cubierto.

La siguiente figura muestra otro diseño muy colorido de un mosaico semirregular.

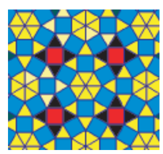


Figura 15: Mosaico Semirregular

Ahora, como bien hemos señalado anteriormente, estos polígonos regulares que teselan el plano pueden ser deformados de tal manera que mantengan el principio de conservación del espacio y generar mosaicos un poco más abstractos. Por ejemplo:

Figura 16: Mosaico Semirregular

En esta figura vemos cómo un cuadrado es modificado de tal manera que la nueva figura generada permite rellenar el plano sin dejar huecos. Y si nos fijamos bien notamos que el mismo es una idea base para generar rompecabezas.

Podemos también usar hexágonos y crear diseños como:

Figura 17: Mosaico Semirregular con hexágonos

Y cuadrados:

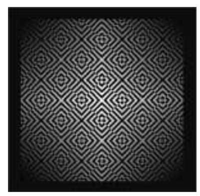


Figura 18: Mosaico Semirregular con cuadrados

Ahora nos acercamos a aquellos mosaicos donde las figuras dejan de ser polígonos regulares o polígonos deformados, como aquellos llamados mosaicos de Escher. Este nombre les es conferido dado que fueron creados por el dibujante M.C. Escher inspirándose en los mosaicos de la Alhambra de Granada. La idea de Escher fue partir de una pieza triangular, cuadrangular o hexagonal y transformarla por el principio de recortar un trozo y volverlo a pegar manteniendo el principio de encaje.

Figura 19: Mosaicos de Escher

El arte bidimensional se encuentra lleno de representaciones donde la simetría juega un papel protagónico. Estos son unos pocos ejemplos donde pueden encontrarse para mostrarlas y permitir que el ojo se acostumbre a este tipo de diseños y logre descubrirlos en su entorno de forma casi natural.

Existen muchos enlaces electrónicos con infinidad de ejemplos y con explicaciones sobre la construcción de estas simetrías, algunos de ellos son nombrados dentro de los planes de clase que la próxima sección ofrece junto con la propuesta que esta investigación plantea para motivar al alumnado a interrelacionar disciplinas que en general no parecieran tener algo en común, tratando de reivindicar la imagen de la matemática como una ciencia rígida y sin atractivo y hacer de su aprendizaje una experiencia gratificante e innovadora.

Marco Metodológico

El marco metodológico es el conjunto de acciones destinadas a describir y analizar el fondo del problema planteado a través de procedimientos específicos que ayudan a determinar el cómo se realizará el estudio.

El fin esencial de su exposición es el de situar en lenguaje de investigación los métodos e instrumentos que se emplearon en el estudio planteado.

Tipo de investigación

El tipo de investigación desarrollado es denominado **proyecto factible** que, según Balestrini (1997), es aquel mediante el cual se logra concretar la elaboración de un modelo operativo viable, o una solución posible a un problema de tipo práctico para satisfacer las necesidades de un grupo social.

La enseñanza de la matemática, en cuanto a cómo ha sido impartida y a la dificultad que lo estudiantes presentan al momento de aprenderla, ha sido el eje principal que ha permitido elaborar el planteamiento del problema en el que esta investigación se ha basado.

La investigación presenta un diseño de tipo descriptivo en el cual se ejecutaron estrategias de revisión documental. Entre los elementos que la conforman e integran se encuentran la descripción de la deficiencia por la que el sistema educativo atraviesa, los obstáculos que genera, sus posibles causas y consecuencias, el uso de distintos medios para potenciar el proceso de enseñanza-aprendizaje y la vinculación de conceptos matemáticos específicos con representaciones artísticas que los ejemplifiquen.

Una vez reconocidas las dificultades que la enseñanza de la matemática posee y las causas que pueden determinarlas, se propondrán clases instruccionales que faciliten la comprensión de simetrías matemáticas a través del arte y promover una relación interdisciplinaria.

Estos métodos buscan brindar soluciones a problemas planteados en una realidad educativa por medio de proyectos factibles que motiven la construcción del pensamiento integral y que supla las necesidades académicas y culturales que el hecho estudiado presenta, y más aún, que el sentimiento global manifiesta.

Diseño de la investigación

Esta investigación presenta tres fases que se ejecutaron mediante un desarrollo documental. Inicialmente se realizó una revisión de fuentes basada en el análisis de los programas educativos relacionados con los cursos de matemática de Educación Media, Diversificada y Profesional, con el fin de hacer un análisis descriptivo que permitiera determinar los objetivos relacionados con la investigación. Por otro lado se realizó un análisis descriptivo de la relación que existe entre simetrías matemáticas y ciertas representaciones artísticas. Luego se plantearon estrategias metodológicas basadas en teorías sólidas del aprendizaje que permitieron desarrollar y lograr el objeto de esta investigación.

Técnicas e instrumentos de recolección de datos

La revisión de diversas fuentes documentales nos permitió abordar y desarrollar un análisis exhaustivo y descriptivo del contenido programático que, a su vez, brindó las herramientas necesarias para realizar un resumen analítico de carácter crítico y así diseñar clases instruccionales que reflejaran el propósito de esta investigación.

Esta revisión y análisis se basó en la descomposición en elementos mínimos de los programas de los cursos de matemática para el ciclo diversificado, los contenidos de cada sección, así como las estrategias metodológicas sugeridas. La misma luego se relacionó con la concepción de la enseñanza y el aprendizaje que asume esta investigación.

La selección de los contenidos a integrar en el diseño de las clases se realizó a partir de la experiencia del investigador y basada en la opinión de docentes expertos y colegas del Componente Docente de la Universidad Central de Venezuela en la materia.

Para el diseño instruccional se combinaron contenidos relacionados con aquellos que determinan simetrías matemáticas y aquellos que pueden determinarlas a través de representaciones artísticas basadas en el modelo de pensamiento geométrico desarrollado por los van Hiele.

Fases de la metodología

Fase de revisión y diagnóstico: Dado que el carácter de esta investigación es documental, no experimental, los resultados obtenidos son también de carácter documental. Es una investigación que plantea nuevas estrategias metodológicas aplicables a cualquier grupo de estudiantes del ciclo diversificado buscando alternativas que ayuden a mejorar la enseñanza de aquellos tópicos que forman parte de la matemática.

La revisión documental permitió hacer un diagnóstico sobre la situación educativa que afronta el país y con ello logramos proponer un plan viable para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática a través del arte buscando el desarrollo de un pensamiento holístico e integral tan en boga en materia educativa.

Fase de formulación: Los planteamientos anteriores junto con la revisión documental que se realizó y la opinión de docentes expertos en la materia sirvieron de soporte para el diseño de las clases instruccionales que propone esta investigación, buscando contribuir al aprendizaje significativo de los estudiantes y estimularlos a encontrar relaciones entre disciplinas del pensamiento aparentemente desligadas.

Fase de factibilidad: Se considera la propuesta expuesta de fácil desarrollo pues es un material escrito en un lenguaje sencillo y de comprensión y aplicación inmediatas. Son sesiones tipo talleres extracurriculares que los textos de matemáticas en general no consideran como estrategias para la enseñanza de ninguno de los tópicos relacionados con la materia.

Para los docentes expertos en los tópicos de esta investigación, el diseño de estas clases cumplen con el programa del nivel en cuestión, a saber, está formulado de tal manera que puede aplicarse inmediatamente, está adaptado a la población a la que se dirige, los objetivos son coherentes entre sí, se precisan los niveles de logro y las estrategias están concebidas desde un punto de vista pedagógico, lo que permite afirmar que el material planteado es factible.

Estas clases motivacionales son de fácil aplicación, son un aporte en la línea de investigación del aprendizaje significativo y de la interdisciplinariedad y su implementación no presenta problemas. Por lo tanto, se afirma que es un proyecto viable.

Son de característica integración aquellos elementos que a través de esta investigación vinculan la matemática y el arte y hacen de la misma un proyecto factible. Entre ellos encontramos los de carácter social que permiten un desarrollo intelectual del alumno dada su condición integral; los de carácter educativo y práctico que asumen una viabilidad pedagógica obtenida a través de una revisión de contenidos que facilitan el proceso de enseñanza-aprendizaje; los de carácter conceptual que muestran y demuestran el vínculo que existe entre arte y matemática a lo largo de la historia; y los de carácter metodológico que permiten describir y analizar el fondo del problema planteado usando como herramienta la vinculación de estas dos disciplinas para ayudar a solventarlo.

Propuesta: Diseño de clases tipo talleres

En estas sección se buscan sintetizar aquellas ideas y teorías expuestas anteriormente ofreciendo una propuesta didáctica que tiene como eje principal el desarrollo de aprendizajes estratégicos adaptado a una estructura que permite que el estudiante obtenga un aprendizaje significativo sobre la estrecha relación que existe entre ciertas ramas de la matemática y las artes, buscando demostrar que la matemática puede ser placentera y significativa y redescubrir que lo abstracto de la misma tiene aplicaciones concretas en el mundo sensible que nos rodea .

Esta es una propuesta enfocada hacia estudiantes del segundo año de Educación Media y Diversificada buscando motivar nuevos enfoques de pensamiento en aquellos alumnos que se encuentran a las puertas de una nueva etapa educativa.

Las cuatro clases reflejan las cinco fases del aprendizaje aplicadas a la geometría por los van Hiele y están adaptadas a los requerimientos del programa de articulación del nivel del ciclo básico de Educación Media.

Se espera establecer formas interesantes de percepción y ahorro de tiempo y esfuerzo en cuanto al aprendizaje de simetrías matemáticas a través del arte como parte de una realidad tangible, orientadas hacia una dinámica de grupo.

Así, justificando cada clase asociándola con las fases del aprendizaje del modelo de pensamiento geométrico de van Hiele y ofreciendo un plan de clase para cada una que oriente a cualquier docente que pudiese impartir estas sesiones didácticas, proponemos el siguiente diseño instruccional para la enseñanza de ciertas simetrías matemáticas a través de representaciones artísticas bidimensionales.

Clase #1: Preparación Conceptual

Esta primera clase resume las fases 1 y 2 del aprendizaje que propusieron los van Hiele dado que se propone como una clase de preparación donde el profesor busca a través de la indagación revisar todos aquellos conceptos que serán utilizados en las subsiguientes clases para ir dando estructura al terreno conceptual.

El profesor organiza en forma secuencial las actividades de exploración de los alumnos: hace preguntas que los oriente hacia los conceptos más relevantes, ofrece ejemplos teóricos para ir calzando conceptos con imágenes que se irán mostrando posteriormente, los motiva a identificar dichos conceptos a través de ejemplos gráficos.

Los alumnos toman conciencia de los objetivos que se persiguen a través de la muestra explícita de los elementos que serán utilizados indagados a través del diálogo y expuestos claramente una vez develados.

Es una sesión donde se organizan las ideas buscando estimular la curiosidad de los alumnos e irlos introduciendo al campo de interrelación que se busca demostrar.

Todos los conceptos, definiciones, ejemplos y gráficos requeridos para esta primera clase están ubicados en el desarrollo de esta investigación.

Clase #2: Simetría en el arte

Esta segunda sesión está orientada a la muestra de imágenes que representen claramente simetrías en el arte.

Esta sesión, al ser una clase que busca la asimilación y la reestructuración cognitiva del alumno a través de la explicitación, se considera representada la tercera fase del aprendizaje definida y aplicada por los van Hiele.

Es una clase motivacional que permite al alumno identificar fácilmente movimientos rígidos en representaciones artísticas de una forma casi natural, de costumbre para el ojo humano y su cultura.

Se busca estimular la visión y asimilación del alumno a través de muestras de expresiones artísticas mientras él mismo las relaciona con conceptos matemáticos sencillos y asequibles, buscando motivar la expresión explícita de los alumnos,determinando su sentir ante la actividad realizada y permitiéndoles aprender a construir su propio aprendizaje.

Clase #3: Formalización matemática

En este tercera clase se busca darle expresión matemática a todos aquellos ejemplos artísticos que se han venido mostrando.

Es una clase de vinculación entre el arte y la matemática. Se presentan todos los conceptos matemáticos relacionados con simetrías cíclicas, diedrales y de recubrimiento del plano para formalizar las nociones de las mismas a través de otra nueva perspectiva - la matemática - y mostrar así a los estudiantes la intrínseca relación que existe entre representaciones artísticas y modelos teóricos.

El objetivo principal de esta clase es buscar que los alumnos comprendan bajo un lenguaje matemático cómo se generan polígonos regulares y simetrías, cómo se representan rotaciones, traslaciones y reflexiones y de qué maneras se puede rellenar el plano con figuras regulares y no regulares, siempre recurriendo a los ejemplos artísticos que hemos mostrado.

Esta sesión comprende o resume las fases 4 y 5 del aprendizaje del modelo de pensamiento geométrico de van Hiele, pues es una clase de orientación libre y de organización de enunciados que permite al alumno relacionar los ejemplos artísticos que se han mostrado con los conceptos matemáticos que los determinan.

Clase #4: Evaluación dinámica

Dada la importancia de la evaluación en todo proceso educativo en esta última sesión propuesta se busca determinar el grado de asimilación y motivación que las clases anteriores dejaron.

Dados los objetivos de vinculación en los que esta investigación se basa esta última etapa está orientada a la evaluación formativa, a una evaluación que muestre esa integración representada en la cotidianidad de cada individuo.

Se propone asignarle en la sesión anterior a los estudiantes un trabajo individual donde cada uno muestre las simetrías estudiadas a través de ejemplos que encuentre en su derredor, y si es el caso, que muestren diseños de simetrías en un plano elaborados por ellos mismos.

En esta sesión dinámica, de intervención libre, todos los alumnos comparten e intercambian los diseños encontrados, los lugares donde los encontraron, las dificultades que pudieron originarse, y a la vez clasificar en conjunto los tipos de simetrías que se ejemplifican en los diseños ofrecidos por los estudiantes.

Es una clase de cierre, de conclusión, donde se busca justificar la importancia del pensamiento integral, holístico e interdisciplinario como aporte a la construcción del pensamiento de los estudiantes, de la reagrupación de las disciplinas que se desempeñan a lo largo del período educativo y afianzar el desarrollo de la cultura a través de las ciencias.

República Bolivariana de Venezuela
Ministerio de Educación
Nombre de la Escuela, Liceo o Colegio
Clases Extracurriculares de vinculación entre el arte y la matemática

PLAN DE CLASE #1: Preparación Conceptual

Objetivo General: Revisar y mostrar los diferentes elementos artísticos y teóricos relacionados con el concepto de la simetría en matemática.

Fecha	Contenido	Objetivos Específicos	Estrategia metodológica
dd/mm/aa	- recubrimientos del plano: mosaicos teselaciones - movimientos rígidos del plano: rotaciones traslaciones reflexiones	- Preparar el terreno conceptual para el estudio posterior mostrando los diferentes elementos que serán utilizados. - Determinar y reconocer los conceptos asociados a las simetrías matemáticas de interés: movimientos rígidos en el plano. - Hallar ejemplos teóricos que reflejen rotaciones, traslaciones y reflexiones.	- Indagar acerca de los objetivos que se van a estudiar a través del diálogo con los alumnos. - Hacer preguntas que orienten el curso conceptual: - ¿Qué estudia la geometría? - ¿Qué es punto, línea, plano, espacio? - ¿Qué los relaciona? - ¿Qué es un plano cartesiano? - ¿Qué son polígonos regulares e irregulares? - ¿Cuáles son los polígonos regulares? - ¿Qué es una función o una aplicación? - ¿Qué es una simetría? - ¿Qué es un eje de simetría? - ¿Cómo se representa? - ¿Qué es una reflexión, una traslación, una rotación? - ¿Cómo puede representarse un movimiento rígido a través de una figura geométrica en un plano cartesiano? - ¿Puede tomarse una reflexión como una imagen especular? - ¿Qué son congruencias entre figuras? - ¿Qué tienen que ver estos elementos con la simetría? - ¿Puede tener la simetría frontera con la belleza?

Fecha	Contenido	Objetivos Específicos	Estrategia metodológica
dd/mm/aa		- Determinar los posibles elementos matemáticos que intervienen en la caracterización de las simetrías resultantes a través de movimientos rígidos en el plano: plano cartesiano, vectores, figuras geométricas, polígonos, ángulos, etc.. - Identificar los diferentes tipos de recubrimientos del plano: mosaicos y teselaciones.	- ¿Qué es un esquema? ¿Qué es un esquema ornamental? - ¿Cómo puede rellenarse un plano? - ¿Qué es un mosaico? - ¿Qué es una teselación? - El profesor ayuda a formalizar los conceptos, elementos y objetos develados usando herramientas tecnológicas (*) para ir reuniéndolos y mantenerlos a la vista. - Ayudar a los alumnos a indagar cómo rellenar un plano con polígonos regulares. Preguntar si podría rellenarse con una combinación de ellos o con aquellos que no sean regulares (pregunta motivacional). - Dar ejemplos de teselaciones con triángulos, cuadrados y hexágonos y hacer que los alumnos identifquen movimientos rígidos o simetrías en ellos. - Dar ejemplos teóricos que reflejen rotaciones, traslaciones y reflexiones.

Conclusión: **-** Cerrar la sesión concluyendo con una frase de Hermann Weyl que dice: " La simetria, por amplio o reducido que se pueda definir su significado, es una idea por la que el hombre, a través de los tiempos, ha intentado comprender y crear orden, belleza y perfección"

- Facilitar a los alumnos enlaces donde puedan ampliar los conocimientos y conceptos redescubiertos en esta clase, tales como:

  www.bymath.com/studyguide/geo/sec/geo22.htm **www.puemac.matem.unam.mx/matechavos/sabias/html/arteymate.html**
  html.ricondelvago.com/transformaciones-geometricas.html **www.sgci.mec.es/usa/materiales/2004nov/3/pag_4.shtml**

- El tiempo de duración de esta sesión dependerá de la planificación de cada docente, pudiendo dividir la misma en varias si así lo requiere.

(*) Los docentes que no cuentan con herramientas tecnológicas para el desarrollo de las clases puede usar la pizarra para ubicar conceptos

República Bolivariana de Venezuela
Ministerio de Educación
Nombre de la Escuela, Liceo o Colegio
Clases Extracurriculares de vinculación entre el arte y la matemática

PLAN DE CLASE #2: Simetrías en el arte

Objetivo General: Mostrar diversos ejemplos de simetrías encontrados en representaciones artísticas.

Fecha	Contenido	Objetivos Específicos	Estrategia metodológica
dd/mm/aa	- recubrimientos del plano. - teselaciones: periódicas y no periódicas.	- Refinar el vocabulario de los estudiantes. - Estimular la visión del alumno con representaciones artísticas, simétricas, rítmicas, llenas de color. - Identificar los diferentes movimientos rígidos que puedan encontrarse en dichos ejemplos artísticos.	- Iniciar la clase recordando los conceptos de los diferentes movimientos rígidos en el plano y de teselaciones, cómo se cubre un plano con polígonos regulares y abrir las respuestas a la pregunta de la sesión anterior: ¿puede rellenarse un plano con más de un polígono regular? ¿y con cualquier otra figura no regular? - Mostrar imágenes de teselaciones de un plano con combinaciones de polígonos regulares. - Incluir color a los diseños - Ayudar a los estudiantes a identificar ejes de simetría - Mostrar ejemplos de teselaciones periódicas y no periódicas. - Permitir que los alumnos identifiquen los diferentes movimientos rígidos que puedan encontrarse en estas imágenes.

Fecha	Contenido	Objetivos Específicos	Estrategia metodológica
dd/mm/aa	- movimientos rígidos del plano: rotaciones traslaciones reflexiones	- Facilitar la expresión explícita de los alumnos con respecto a las estructuras intrínsecas a las simetrías. - Formar el sistema de relaciones entre representaciones matemáticas de una simetría y expresiones artísticas que las ejemplifiquen.	- Ir complejizando progresivamente los diseños a mostrar para aumentar la estimulación del alumno mientras continúa identificando figuras geométricas y movimientos rígidos que permiten rellenar un plano. - Mostrar imágenes de diseños decorativos ubicados en baldosas, edificios, ejemplificaciones que se encuentran en nuestro derredor. - Permitir que los alumnos realicen observaciones explícitas sobre lo que ven, lo que les agrada, lo que sienten, lo que les disgusta. - Estimular a los estudiantes a recordar representaciones similares a las expuestas en sus cercanías.

Conclusión: - Finalizar la clase con la frase: "Cabe definir lo *bello,* como el concierto de cualidades y calidades en una obra de la naturaleza o del hombre que satisfacen o estimulan al espíritu. La belleza resulta de *armonías* y contrastes de líneas, color, forma, tono, plabras, que sugieren o presentan atractivos de la naturaleza, situaciones humanas, logros, anticipaciones o sueños." (Diccionario Filosófico, Julio Rey Pastor e Ismael Quiles, 1952, p. 1057)

- Facilitar a los alumnos enlaces donde puedan ampliar los conocimientos y conceptos redescubiertos en esta clase, tales como:

  www.fpolar.org.ve/matematica/fasciculo4/054.html **www.matem.unam.mx/roli/divulgacion/conferencias.html;**

  www.mi.sanu.ac.yu/vismath/mart.htm **www.jmora7.com/miweb8/mitad/amosai.htm** **www.telefonica.net/web2/m-p/index.htm**

- El tiempo de duración de esta sesión dependerá de la planificación de cada docente, pudiendo dividir la misma en varias si así lo requiere.

República Bolivariana de Venezuela
Ministerio de Educación
Nombre de la Escuela, Liceo o Colegio
Clases Extracurriculares de vinculación entre el arte y la matemática

PLAN DE CLASE #3: Formalización Matemática

Objetivo General: Relacionar los diferentes ejemplos artísticos que representan simetrías con sus respectivas expresiones matemáticas.

Fecha	Contenido	Objetivos Específicos	Estrategia metodológica
dd/mm/aa	- recubrimientos del plano: teselaciones y mosaicos. - movimientos rígidos del plano.	- Mostrar la expresión matemática de una rotación, de una traslación y de una reflexión. - Determinar los conceptos matemáticos involucrados con las simetrías matemáticas. - Determinar la construcción de polígonos. - Determinar los únicos polígonos que rellenan el plano. - Identificar las diferentes maneras de rellenar un plano con polígonos regulares y con otras figuras. - Entender lo que son simetrías cíclicas, simetrías diedrales y las que teselan un plano. - Relacionar este tipo de simetrías con ejemplos artísticos.	- Iniciar la clase con un repaso de cómo se han relacionado el arte decorativo y la matemática a través de la historia (p. 85. *Simetría* . Hermann Weyl). - Mostrar la estructura o esquema general por el que se ha guiado el conocimiento teórico (p. 3. *Simetría* . Hermann Weyl).). - Buscar definir junto con los alumnos los conceptos de plano cartesiano y aplicación de un conjunto en otro (p. 14 y 31. *idem*). - Definir rotación, reflexión y traslación a partir de aplicaciones. - Generar polígonos en el plano a través de la ecuación $x - 1 = 0$, ubicando las raíces de esta ecuación en el plano. - Preguntar: ¿qué tiene que ver todo esto con la simetría? - Ubicar polígonos en planos cartesianos y ver cómo éstos rellenan un plano a través de movimientos rígidos: simetrías cíclicas y diedrales VS. traslaciones, siempre remitiendo a las ejemplificaciones de las clases anteriores. (p. 50. MOCH).

Fecha	Contenido	Objetivos Específicos	Estrategia metodológica
dd/mm/aa	- simetrías cíclicas, diedrales y de recubrimiento	- Facilitar la expresión explícita de los alumnos con respecto a las estructuras intrínsecas a las simetrías. - Formar el sistema de relaciones entre representaciones matemáticas de una simetría y expresiones artísticas que las ejemplifiquen.	- Con una hoja en blanco y varios polígonos regulares de tres, cuatro hasta ocho lados repartidos entre los alumnos verificar que sólo con triángulos, cuadrados y hexágonos se puede rellenar un plano. - Preguntar: ¿por qué sólo triángulos, cuadrados y hexágonos permiten teselar un plano? (p. 71. *Geometry of Art and Life.* Matila Ghyka) (anexo hoja explicativa) - Mostrar las diferentes maneras de teselar un plano. - Mostrar cómo deformar figuras geométricas regulares manteniendo el principio de conservación para obtener nuevos diseños y teselar. (p. 41. *La Belleza desde el Punto de Vista Matemático* . MOCH). - Mostrar las 22 diferentes particiones del plano a través de combinaciones de polígonos regulares, los que generan mosaicos regulares. (p. 73. *Geometry of Art and Life* . Matila Ghyka)) - Mostrar teselaciones no periódicas como cierre.

- Recordar que los alumnos llegan a hacer explícitas muchas de las relaciones entre los objetos de estudio cuando se les estimula a orientarse por sí mismos en el campo de investigación.

Conclusión: - Dada la importancia de la evaluación en todo proceso enseñanza-aprendizaje, se deja como asignación para la próxima sesión realizar un trabajo individual a modo de portafolio, donde cada alumno muestre ejemplificaciones de las simetrías estudiadas que debe buscar a su alrededor y en dado caso que el alumno lo prefiera, que él mismo genere sus propios diseños donde se vean reflejadas las simetrías usadas.

- Facilitar a los alumnos enlaces donde puedan ampliar los conocimientos y conceptos redescubiertos en esta clase, tales como:

  www.mathforum.org/sum95/suzanne/symsusan.html **www.cienciateca.com/simhumana.html** **www.mathworld.wolfram.com/Tessellation.html**
  www.bbc.co.uk/schools/gcsebitesize/img/ma08003.gif **www.geom.uiuc.edu/~demo5337/597a/ref-ws.html**

- El tiempo de duración de esta sesión dependerá de la planificación de cada docente, pudiendo dividir la misma en varias si así lo requiere.

República Bolivariana de Venezuela
Ministerio de Educación
Nombre de la Escuela, Liceo o Colegio
Clases Extracurriculares de vinculación entre el arte y la matemática

PLAN DE CLASE #4: Evaluación Dinámica

Objetivo General: Evaluar formativamente los conocimientos generados y asimilados por parte de los alumnos.

Fecha	Contenido	Objetivos Específicos	Estrategia metodológica
dd/mm/aa	- simetrías - representaciones artísticas bidimensionales.	- Determinar el grado de interés y recepción que presentan los alumnos en cuanto a la relación entre matemática y arte. - Promover la observación de los alumnos para indagar ejemplificaciones concretas de simetrías matemáticas en su entorno cotidiano. - Buscar unificar objetos y relaciones y que sean asimilados en un nuevo dominio de pensamiento.	- Intervención libre por parte de los alumnos. - Dinámica de grupo donde se muestran todos los diseños encontrados o elaborados por los mismos alumnos y enriquecer aún más el conjunto de representaciones matemáticas que encontramos en nuestro derredor. - Señalar las diferentes simetrías representadas en los diseños expuestos por los alumnos. - Buscar el diálogo sobre lo aprendido y las sensaciones que estas clases pudieron generar.

Fecha	Contenido	Objetivos Específicos	Estrategia metodológica
dd/mm/aa	- movimientos rígidos del plano: rotaciones traslaciones reflexiones	- Compartir e intercambiar experiencias en grupo. - Promover la comunicación. - Motivar al estudiante a buscar otras semejanzas entre diversas disciplinas tratando que perciban la relación holística entre el mundo y sus expresiones.	- Justificar la importancia de un pensamiento integral, holístico e interdisciplinario. - Cierre de la clase con la ayuda del maestro dando una vista pano-rámica de todos los conceptos estudiados, representados y ejem-plificados teniendo cuidado de no presentar ideas nuevas o discordantes. - Permitir que los alumnos realicen observaciones explícitas sobre lo que ven, lo que les agrada, lo que sienten, lo que les disgusta.

Conclusión: - Recordar que el conocimiento no es estático y que estas nociones pueden ampliarse a conceptos y representaciones artísticas más complejos y profundos como los fractales, por ejemplo.

- El tiempo de duración de esta sesión dependerá de la planificación de cada docente, pudiendo dividir la misma en varias si así lo requiere.

Conclusiones

Dado que esta investigación ha sido de carácter documental, no experimental, la propuesta no es una intervención didáctica aplicada a un grupo pre-seleccionado de estudiantes, es una exposición, descripción y análisis de la interrelación que puede darse entre ciertos conceptos matemáticos y representaciones artísticas que embellecen y decoran el entorno en el que nos encontramos, con un enfoque totalmente educativo, constructivo y lleno de significados integradores.

Según la investigación realizada, los temas relacionados con la matemática son generalmente transmitidos de una forma tradicional enunciando reglas que aparecen en una bibliografía empleada para la enseñanza de la materia, y que los contenidos que sirven de base para el aprendizaje de éstos se encuentran divorciados de la realidad estudiantil, lo que trae como consecuencia una comprensión pobre de la materia y una desmotivación hacia la misma.

Sucede esto en general dado que los estudiantes ni siquiera son capaces de concretar dudas pues tienen dificultades al momento de comprender los contenidos relacionados con los temas en cuestión, seguir instrucciones, acceder a la información, procesarla y tomar decisiones para su aplicación en situaciones dadas.

Es por ello que se decidió indagar sobre técnicas innovadoras, sustentadas en teorías de aprendizaje sólidas para hacerlas adecuadas, y tratar de aportar un grano de arena a la educación que impulse el desarrollo de la matemática como materia que complementa la estructura cognitiva de los estudiantes y los motiva a comprenderla.

La selección de teorías del aprendizaje estuvo encausada por la búsqueda de un sistema que describiera el desarrollo cognitivo de un estudiante básico, el cómo se construye el pensamiento y con qué facilidad o rapidez los aprendices son capaces de avanzar en una materia determinada. Luego, encausando aun más la selección, se consideró el modelo de pensamiento geométrico de van Hiele para desarrollar la propuesta y darle un sentido holístico que relaciona disciplinas del pensamiento aparentemente aisladas.

El conocimiento de los niveles de pensamiento ofrecidos por el modelo de pensamiento utilizado puede ser de gran utilidad desde un punto de vista didáctico sobre todo si se aprende a combinarlo con el diálogo promoviendo la reflexión del aprendiz no sólo acerca de las preguntas que se le formulan sino, también, acerca de sus propias respuestas.

En cuanto a la teoría matemática utilizada, definiciones básicas de elementos descriptivos para generar simetrías, tales como polígonos, rotaciones, reflexiones, traslaciones, así como la definición de grupos y sus ejemplos, fueron los que sirvieron como estructura lógica para el desarrollo de las técnicas utilizadas.

Para la elaboración de las clases propuestas tipo talleres que permitieran la adquisición de conocimientos y el desarrollo de habilidades para relacionar simetrías matemáticas con expresiones artísticas, se utilizó la metodología del diseño instruccional.

Desde un punto de vista didáctico, el resultado refleja la sencillez de la propuesta en cuanto a su elaboración y aplicación, lo que se espera permita la creación de nuevas vías para mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de contenidos matemáticos en cualquier etapa educativa usando como herramienta principal al aprendizaje estratégico que permite integrar distintas ramas del pensamiento que ofrezca mayores fuentes de asociación donde se base una fuerte estructura cognoscitiva impregnada de significados coherentes.

Para darle formalidad a este sentido educativo, aparte de ser consecuentes con la idea que todo trabajo especial de grado debería generar conocimiento nuevo y fresco, cuatro clases instruccionales fueron diseñadas en un lenguaje sencillo y comprensible, llenas de imágenes directas que representan simetrías y los conceptos relacionados con ellas, ofrecidas para aquel docente que quisiese usarlas como elemento extracurricular motivador e integrador del conocimiento, pues reduce el tiempo de aprendizaje en cada sesión y genera interés en los aprendices al descubrir la utilidad que pueden tener ciertos contenidos científicos que en otras circunstancias no hubiesen causado mayor relevancia.

Recomendaciones

Se considera como una de las más importantes la de continuar con esta línea de investigación, buscando diferentes alternativas en cuanto a los temas de matemática que puedan transmitirse usando como herramienta otras ramas del conocimiento que ayuden a facilitar su comprensión y ayuden sobre todo al estudiante a construir su propio aprendizaje.

Por otro lado, buscar incluir esta propuesta en los cursos escolares de matemática como soporte de los ejes transversales del currículo, o adaptar la misma para cursos con menores conocimientos matemáticos donde los alumnos puedan relacionar conceptos con representaciones artísticas.

Tomar en cuenta que un diseño instruccional justificado bajo la importancia del pensamiento integral, holístico e interdisplinario como aporte a la construcción del pensamiento de los estudiantes reagrupando disciplinas que se enseñan y desempeñan a lo largo del periodo educativo, podría representar un avance didáctico que potencie el aprendizaje.

Dada la sencillez de la propuesta, considerar esta investigación como base fundamental para un futuro trabajo de grado que busque la validación de la misma de forma experimental.

Como educadores siempre mantener la motivación para innovar en nuestros métodos de enseñanza y ubicar al aprendiz en máxima estima para ofrecerle una eficiente y estimulante forma de aprender contenidos que aun se pueden elaborar, sin olvidar que las estrategias no deben ser deliberadas y que deben ser definidas a través de la integración y complementariedad.

Bibliografía

AUSBEL, DAVID, NOVACK, JOSEPH y HANESIAN (1992), *Psicología Educativa*. México: Editorial Trillas.

BALESTRINI, M. (2002), *Cómo se elabora el proyecto de investigación*. Caracas, Venezuela: Consultores Asociados, Servico Editorial.

DE LA TORRE GÓMEZ, Andrés (2003), *El método socrático y el modelo de van Hiele*. Medellín, Colombia: Lecturas Matemáticas, Vol. 24, pp. 99-121.

DORREGO, E.; GARCÍA, A. (1991), *Dos Modelos para la Producción y Evaluación de Materiales Instruccionales*. Caracas, Venezuela: Fondo Editorial de Humanidades y Educación, Universidad Central de Venezuela.

DUFFY, M.; JOHANSSEN, H. (1982), *Constructivism and the Technology for Instruction: a conversation*. Washington, USA: Lawrence Erlbaum Associates.

El Pequeño Larousse Ilustrado 2001. Agrupación Editorial S.A.

FERNÁNDEZ, Alejandra (1990), *Las Estrategias Creativas y su Relación con los Modelos de Investigación en la Enseñanza*. Caracas, Venezuela: Revista de Pedagogía de la UCV, No. 13, pp. 36-45.

FUNDACIÓN POLAR, *Matemática para todos*. Caracas, Venezuela: Fascículos encartados en el *Ultimas Noticias*. Fascículo #1.

JIMÉNEZ, Douglas (1999), *La aventura de la matemática*. Caracas, Venezuela: Editorial C.E.C.

ORELLANA CHACÍN, Mauricio (2000), *La belleza desde el punto de vista matemático*. Caracas, Venezuela: Conferencia Inaugural dictada en la Universidad Central de Venezuela.

PERALTA, Javier (2005), *"Sobre los automatismos en la resolución de problemas"*. Caracas, Venezuela: Boletín de la A.M.V., Vol. XII, No. 1, pp 87-89.

PÉREZ SARDUY, Yunier (2006), *"El diagnóstico de la implementación del principio de interdisciplinariedad en la formación de profesores"*. Revista Iberoamericana de Educación, No. 40. Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura. [Documento PDF]. URL. Disponible en: www.rieoei.org/deloslectores/1347Perez.pdf

SADOVSKY, Patricia (2005), *Enseñar Matemática Hoy: Miradas, Sentidos y Desafíos*. Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.

Problemas para los más jóvenes 31

Problemas de Eslovenia 2005

ESL1. ¿Para qué valores de a el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{c} |x-1|+|y-a|=1 \\ y=2\,|x-1|-1 \end{array}\right\}$$

tiene exactamente tres soluciones?

ESL2.Los números reales a y b verifican las condiciones

$$\begin{aligned} a^3 &= 3ab^2+11, \\ b^3 &= 3a^2b+2. \end{aligned}$$

Hallar el valor de a^2+b^2.

ESL3. Se da un rombo ABCD con el ángulo $\widehat{BAD}$ agudo. El pie de la perpendicular desde D sobre el lado AB divide a este lado en dos segmentos de longitudes x e y. Expresar las longitudes de las diagonales del rombo en función de x e y.

ESL4. Sean a y b números reales positivos. Demostrar que el valor de la expresión

$$\frac{\sqrt{\frac{ab}{2}}+\sqrt{8}}{\sqrt{\frac{ab+16}{8}+\sqrt{ab}}}$$

es independiente de a y b.

ESL5.Resolver en enteros positivos la ecuación

$$m^2-3m+1=n^2+n-1.$$

Problemas de nivel medio y de Olimpiadas 31

Algunos problemas búlgaros

BUL1. Sea H el ortocentro del triángulo acutángulo ABC. Probar que los puntos medios de AB, CH y el punto de intersección de las bisectrices interiores de los ángulos $\widehat{CAH}$ y $\widehat{CBH}$ están alineados. (*Danyo Danev)*

BUL2. Sean $\alpha \neq \beta$ las raíces de la ecuación $x^2 + px + q = 0$. Para cada entero positivo n ponemos

$$a_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}.$$

a) Hallar todos los p y q tales que

$$a_{n+1}a_{n+2} - a_n a_{n+3} = (-1)^n \text{ para todo } n \geq 1.$$

b) Probar que para esos p y q, se verifica $a_n + a_{n+1} = a_{n+2}$ para cualquier $n \geq 1$, y si 3 divide a n, entonces a_n es un número par. (*Lyubomir Davidov).*

BUL3.Hallar todos los números reales x tales que

$$\tan\left(\frac{\pi}{12} - x\right), \tan\left(\frac{\pi}{12}\right), \tan\left(\frac{\pi}{12} + x\right)$$

formen (en algún orden) una progresión geométrica. (*Nikolai Nikolov, Vesselin Drensky)*

BUL4. Hallar todos los números reales m tales que la ecuación

$$\left(x^2 - 2mx - 4\left(m^2+1\right)\right)\left(x^2 - 4x - 2m\left(m^2+1\right)\right) = 0$$

tiene exactamente tres raíces reales distintas. (*Ivan Landgev)*

BUL5. Sea F un punto de la base AB del trapecio $ABCD$ tal que $DF = CF$; sea $E = AC \cap BD$; y O_1, O_2 loscircuncentros de los triángulos ADF y FBC, respectivamente. Demostrar que $FE \perp O_1O_2$.(Nikolai Nikolov)

Problemas 151 - 155

Problema 151, propuesto por el editor (cuando se publique la solución se dará cuenta de su procedencia; el problema no es nuevo)

El triángulo ABC es acutángulo y no isósceles. La bisectriz del ángulo agudo entre las alturas desde A y C corta al lado AB en P y al lado AC en Q.

La bisectriz interior del ángulo B corta en R a la recta que une el ortocentro H con el punto medio M del lado AC.

Demostrar que los puntos B,P,R,Q están en una circunferencia.

Problema 152, propuesto por Manuel Rodríguez Sánchez, Barcelona, España.

Dado un triángulo ABC y un punto P situado en su interior, trazar una recta MN, con M en el lado AC y N en el lado BC, que pasando por P divida al triángulo en dos partes que estén en una proporción dada.

Problema 153, propuesto por Laurentiu Modan, Bucarest, Rumania

Dos personas caminan por una calle, en direcciones y aceras opuestas. En un punto de la calzada hay un obstáculo. Hallar la probabilidad de que las dos personas no puedan verse la una a la otra, si:

a) el obstáculo está en el centro de la calzada.

b) el obstáculo no está a igual distancia de las dos aceras.

Problema 154, propuesto por José Luis Díaz Barrero, Barcelona, España

Hallar todas las ternas (x, y, z) de números reales que son solución del sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{c} x+y+z=2 \\ \sqrt{2x+yz}+\sqrt{2y+zx}+\sqrt{2z+xy}=4 \end{array}\right\}$$

Problema 155, propuesto por Ovidiu Furdui, Toledo, OH, EEUU

Sean a, b, c números reales no negativos. Calcular el límite

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k+a}{(\sqrt{n^2+kn+b})\cdot(\sqrt{n^2+kn+c})}.$$

Problema 146

Solución de Miguel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca, España.

Aplicamos la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica para obtener las siguientes:

$$a=\frac{a+b-c}{2}+\frac{c+a-b}{2}\geq\sqrt{(a+b-c)(c+a-b)}\quad ,$$

$$b=\frac{a+b-c}{2}+\frac{b+c-a}{2}\geq\sqrt{(a+b-c)(b+c-a)}$$

y

$$c=\frac{b+c-a}{2}+\frac{c+a-b}{2}\geq\sqrt{(b+c-a)(c+a-b)}$$

de las cuales resulta, al multiplicar miembro a miembro,

$$abc\geq(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$$

que podemos escribir en la forma

$$\frac{abc}{(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}\geq 1$$

si el triángulo ABC es no degenerado.

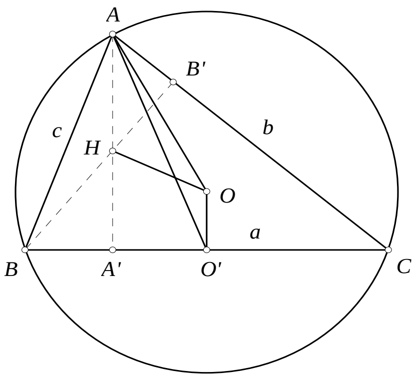
Con esta última y con la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica resulta, en fin:

$$\begin{aligned}\frac{bc}{a(b+c-a)}+\frac{ca}{b(c+a-b)}+\frac{ab}{c(a+b-c)} &\geq 3\sqrt[3]{\frac{(bc)(ca)(ab)}{abc(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}}\\ &= 3\sqrt[3]{\frac{abc}{(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}}\\ &\geq 3\sqrt[3]{1}\\ &= 3\end{aligned}$$

Se verifica la igualdad si y sólo si $a=b=c$.

Problema 147.
Sean respectivamente *O* y *H* el circuncentro y el ortocentro del triángulo *ABC* (no degenerado).
a) Demostrar que no existe ningún triángulo acutángulo tal que la longitud de una de sus medianas sea igual a la distancia *OH*:
b) Caracterizar, si existen, los triángulos tales que la longitud de dos de sus medianas sea igual a la distancia *OH*.

Solución.
a) Razonemos sobre el vértice *A*. Suponiendo que el triángulo es acutángulo, sea *R* el radio del círculo circunscrito. Como *H* es interior al riángulo, se tiene claramente $OH < OA = R$.



Si *A'* es el pie de la altura que parte de *A* y *O'* es la proyección de *O* sobre el lado *a*, en el cuadrilátero *AA'O'O* los ángulos $\angle A'AO$ y $\angle AOO'$ son suplementarios luego $\angle AOO'$ es obtuso y la mediana *AO'* es mayor o igual que *OA*.
Por tanto $OH < OA < AO'$ y de modo análogo se razona para los otros vértices.
Además si *B'* es el pie de la altura que parte de *B*, en el triángulo *ABB'* se tiene $AB' = c \cdot \cos A$ y en el triángulo *AHB'* $AB' = AH \cdot \operatorname{sen} C$ de donde

$$AH = \frac{c}{senC}\cos A = 2R\cos A$$

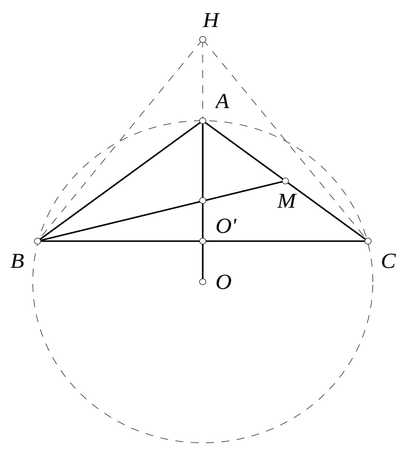
como en el triángulo *OO'C* resulta que $OO' = R\cos A$, entonces concluimos

$$AH = 2OO' \quad (*).$$

b) Supongamos que las dos medianas cuya medida es *OH* son las que parten de los vértices *B* y *C*, entonces

$$\frac{2a^2+2c^2-b^2}{4} = \frac{2a^2+2b^2-c^2}{4} \Rightarrow b = c$$

Por todo lo expuesto un triángulo que cumpla los requisitos del apartado b) ha de ser isósceles y con el ángulo desigual obtuso.
Si llamamos *M* al punto medio de *AC*, la construcción del triángulo solución es inmediata a partir de (*) y de *BM* = *OH*.
Basta partir del segmento *OA*, situar *O'* de modo que $OA = 4OO'$, trazar la circunferencia de centro *O* y radio *OA*, y por el punto *O'* la perpendicular a *OA* determina sobre la circunferencia los vértices *B* y *C*.



Tomando *R* = 1, es fácil establecer que $\tan B = \sqrt{\frac{3}{5}}$.

Los triángulos quedan caracterizados como isósceles con ángulo desigual $B = \arctan\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$.

Problema 148, Propuesto por Luis Gómez Sánchez Alfaro, Universidad de Oriente, Venezuela.

Sea c un número natural mayor que 2. ¿Cuántos triángulos de lados enteros a, b, c existen tales que $a \leqslant b \leqslant c$?

Solución de Francisco Javier García Capitán.

Sea $f(c)$ el número triángulos de lados enteros a, b, c existen tales que $a \leqslant b \leqslant c$. Para que los números a, b y c correspondan a los lados de un triángulo deben ser $a < b+c$, $b < c+a$ y $c < a+b$. Pero la condición $a \leqslant b \leqslant c$ asegura que $a < b + c$ y $b < c + a$, por lo que sólo debemos contemplar la condición $c < a+b$. Así, cuando a varía desde 1 hasta c, b puede variar desde $\max(a, c-a+1)$ hasta c. Teniendo en cuenta que

$$\max(a, c-a+1) = \begin{cases} c-a+1 & \text{si } a \leqslant \frac{c+1}{2} \\ a & \text{si } a \geqslant \frac{c+1}{2} \end{cases},$$

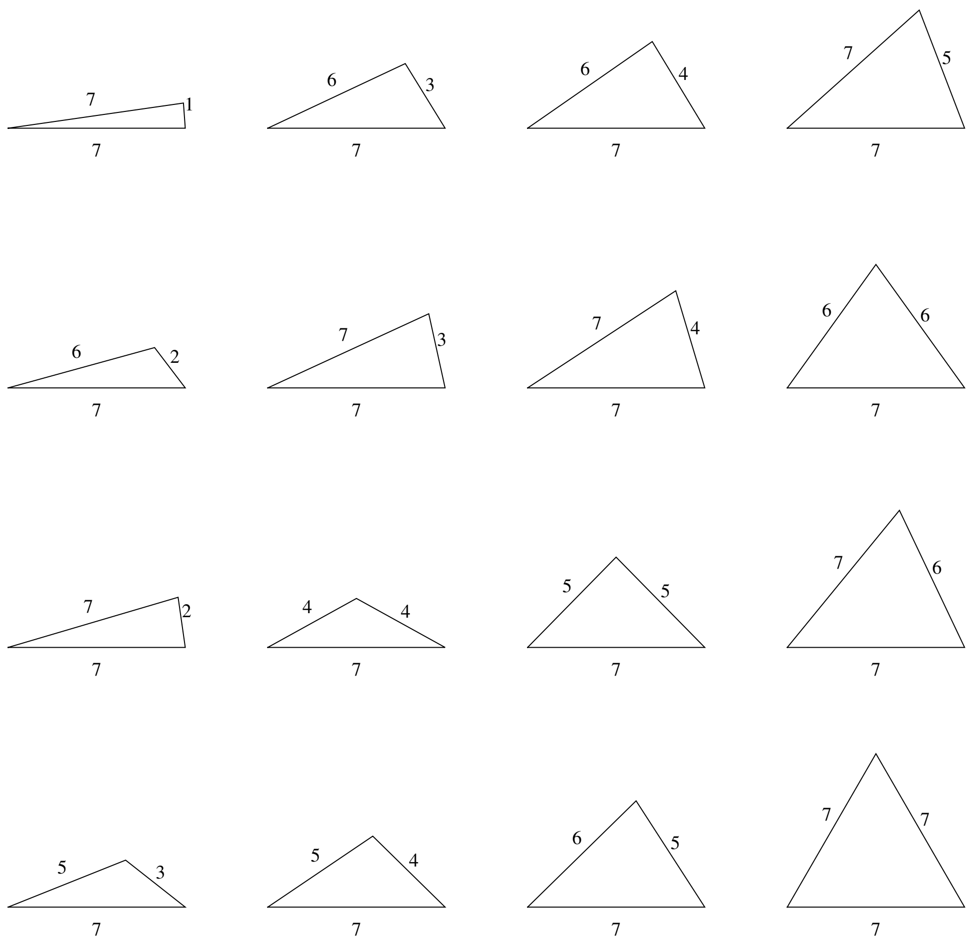
podemos expresar, cuando c es impar,

$$\begin{aligned} f(c) &= \sum_{a=1}^{(c+1)/2}\left(\sum_{b=c-a+1}^{c} 1\right) + \sum_{a=1+(c+1)/2}^{c}\left(\sum_{b=a}^{c} 1\right) \\ &= \sum_{a=1}^{(c+1)/2} a + \sum_{a=1+(c+1)/2}^{c} (c-a+1) \\ &= \frac{1+\frac{c+1}{2}}{2}\cdot\frac{c+1}{2} + \frac{\frac{c-1}{2}+1}{2}\cdot\frac{c-1}{2} \\ &= \frac{(c+1)^2}{4}, \end{aligned}$$

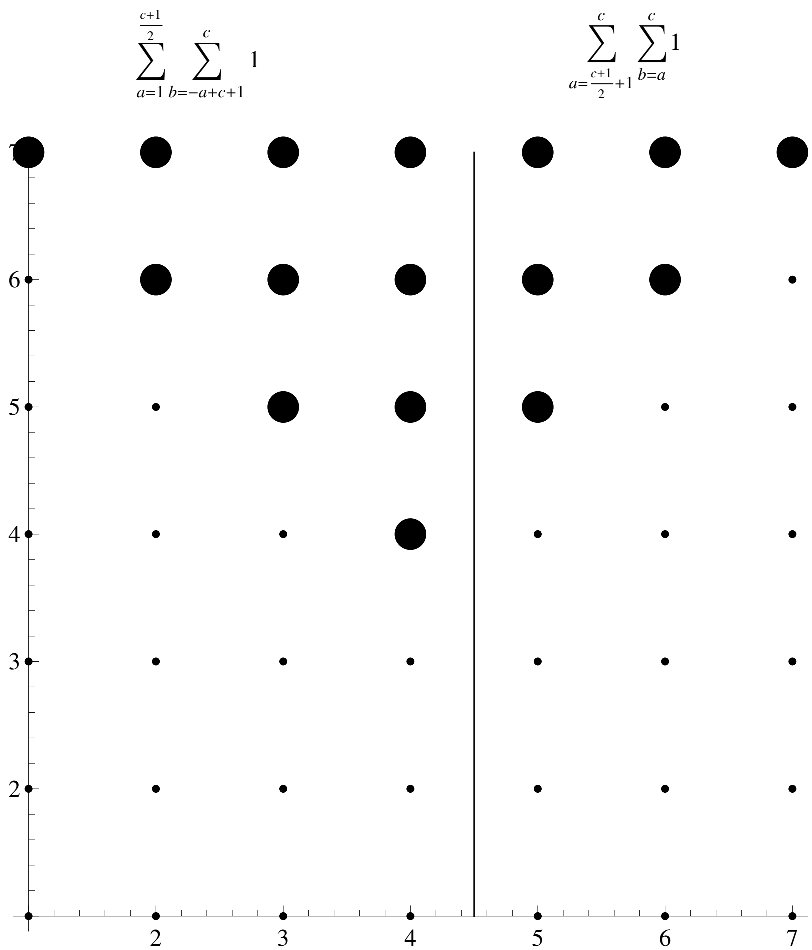
y cuando c es par

$$\begin{aligned} f(c) &= \sum_{a=1}^{c/2}\left(\sum_{b=c-a+1}^{c} 1\right) + \sum_{a=1+c/2}^{c}\left(\sum_{b=a}^{c} 1\right) \\ &= \sum_{a=1}^{c/2} a + \sum_{a=1+c/2}^{c} (c-a+1) \\ &= \frac{1+\frac{c}{2}}{2}\cdot\frac{c}{2} + \frac{\frac{c}{2}+1}{2}\cdot\frac{c}{2} \\ &= \frac{c(c+2)}{4}. \end{aligned}$$

A continuación vemos los $f(7) = \dfrac{(7+1)^2}{4} = 16$ triángulos con $c = 7$ y una demostración sin palabras para este valor de c.



En esta figura vemos una demostración sin palabras del valor de $f(c)$, representado por el número de puntos gordos, para el valor de $c = 7$:



Problema 149. Solución de Roberto Bosch Cabrera, Ciudad de la Habana, Cuba.

Calcular

$$I = \int_1^\infty \frac{x^n}{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2!} - \ldots - \frac{x^n}{n!}} dx$$

$$I = \lim_{M\to\infty} \int_1^M \frac{x^n}{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2!} - \ldots - \frac{x^n}{n!}} dx = \lim_{M\to\infty} \left[n! \ln\left(e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2!} - \ldots - \frac{x^n}{n!}\right) - n!x \right]\Bigg|_1^M$$

$$I = n! \lim_{M\to\infty} \left[\ln\left(e^M - 1 - M - \frac{M^2}{2!} - \ldots - \frac{M^n}{n!}\right) - M \right] + n! - n! \ln\left(e - 1 - 1 - \frac{1}{2!} - \ldots - \frac{1}{n!}\right)$$

Sea $a_M = \ln\left(e^M - 1 - M - \frac{M^2}{2!} - \ldots - \frac{M^n}{n!}\right) - M$ entonces:

$$\lim_{M\to\infty} a_M = \lim_{M\to\infty} \ln\left(e^{a_M}\right) = \ln\left(\lim_{M\to\infty} e^{a_M}\right)$$

$$\lim_{M\to\infty} e^{a_M} = \lim_{M\to\infty} \frac{e^M - 1 - M - \frac{M^2}{2!} - \ldots - \frac{M^n}{n!}}{e^M} = 1$$

De donde $\lim_{M\to\infty} a_M = \ln 1 = 0$.

Finalmente

$$I = n! - n! \ln\left(e - 1 - 1 - \frac{1}{2!} - \ldots - \frac{1}{n!}\right) = n! \ln\left(\frac{e}{e - 1 - 1 - \frac{1}{2!} - \ldots - \frac{1}{n!}}\right)$$

Problema 150

Propuesto por Ovidiu Furdui, Kalamazoo, USA.

Sea $\{a\}=a-[a]$ la parte fraccionaria de a. Calcular

$$\int_0^1\int_0^1\left\{\frac{x}{y}\right\}dxdy.$$

Solución de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, Navarra, España.

Para cada valor de y, podemos encontrar un número entero no negativo m y un real b, $0\leq b<y$, tales que

$$1=my+b, \qquad 1>\frac{b}{y}=\frac{1}{y}-m\geq 0, \qquad b=y\left\{\frac{1}{y}\right\}, \qquad m=\left[\frac{1}{y}\right].$$

Tenemos entonces que podemos escribir el intervalo $[0,1]$ como unión disjunta de intervalos de la forma $[ny,(n+1)y)$, con $n=0,1,...,m-1$, y adicionalmente el intervalo $[my,1]$. Se tiene entonces que, para un valor de y dado,

$$\int_0^1\left\{\frac{x}{y}\right\}dx=\sum_{n=0}^{m-1}\int_{ny}^{(n+1)y}\left\{\frac{x}{y}\right\}dx+\int_{my}^{1}\left\{\frac{x}{y}\right\}dx=\sum_{n=0}^{m-1}\left(\int_{ny}^{(n+1)y}\frac{x-ny}{y}dx\right)+\int_{my}^{1}\frac{x-my}{y}dx$$

$$=\sum_{n=0}^{m-1}\left(\frac{(n+1)^2y^2}{2y}-\frac{n^2y^2}{2y}-ny\right)+\frac{1}{2y}-\frac{m^2y^2}{2y}-m(1-my)$$

$$=\frac{my}{2}+\frac{1}{2y}+\frac{m^2y}{2}-m=\frac{y}{2}\left[\frac{1}{y}\right]+\frac{y}{2}\left\{\frac{1}{y}\right\}^2=\frac{1}{2}-\frac{y}{2}\left\{\frac{1}{y}\right\}\left(1-\left\{\frac{1}{y}\right\}\right).$$

Luego

$$\int_0^1\int_0^1\left\{\frac{x}{y}\right\}dxdy=\frac{1}{2}-\int_0^1\frac{y}{2}\left\{\frac{1}{y}\right\}\left(1-\left\{\frac{1}{y}\right\}\right)dy=\frac{1}{2}-\int_1^\infty\frac{\{z\}(1-\{z\})}{2z^3}dz,$$

donde se ha realizado el cambio de variable $z=1/y$. Calculamos esta última integral:

$$\int_1^\infty\frac{\{z\}(1-\{z\})}{2z^3}dz=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\int_n^{n+1}\frac{\{z\}(1-\{z\})}{2z^3}dz=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\int_n^{n+1}\frac{(z-n)(n+1-z)}{2z^3}dz$$

$$=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\int_n^{n+1}\left(-\frac{n(n+1)}{2z^3}+\frac{2n+1}{2z^2}-\frac{1}{2z}\right)dz.$$

Ahora bien,

$$\int_n^{n+1}-\frac{n(n+1)}{2z^3}dz=\frac{n(n+1)}{4(n+1)^2}-\frac{n(n+1)}{4n^2}=-\frac{2n+1}{4n(n+1)}=-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right),$$

$$\int_n^{n+1} \frac{2n+1}{2z^2}\,dz = -\frac{2n+1}{2(n+1)} + \frac{2n+1}{2n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right), \qquad \int_n^{n+1} -\frac{1}{2z}\,dz = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right),$$

con lo que

$$\int_1^{\infty} \frac{\{z\}\left(1-\{z\}\right)}{2z^3}\,dz = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

$$= -\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N+1}\frac{1}{n}-\ln(N+1)\right)-\frac{1}{4}\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N+1}.$$

Ahora bien, el primer límite es la constante de Euler-Mascheroni *g*, mientras que el segundo es cero, con lo que se llega finalmente a

$$\int_1^{\infty} \frac{\{z\}\left(1-\{z\}\right)}{2z^3}\,dz = \frac{g}{2}-\frac{1}{4}, \qquad \int_0^1\int_0^1 \left\{\frac{x}{y}\right\}dxdy = \frac{3}{4}-\frac{g}{2}.$$

Prepublicación de *Sistema NUFRAC*
De E.Blacker y E.Rojas

Francisco Bellot Rosado,
Editor de la Revista Escolar de la OIM

Según se indica en el subtítulo, “NUFRAC” significa “Nuestra forma de razonar y aprender científica y creativamente”, y se trata de una guía didàctica para el aprendizaje de las matemáticas por parte de los más jóvenes. Es, obviamente, un material para el maestro, que ha sido contrastado en el aula por sus creadores (en particular la Dra. Blacker con sus propios hijos) a lo largo de muchos años y que sin duda debe contribuir al desarrollo de las Matemáticas desde edades muy tempranas.

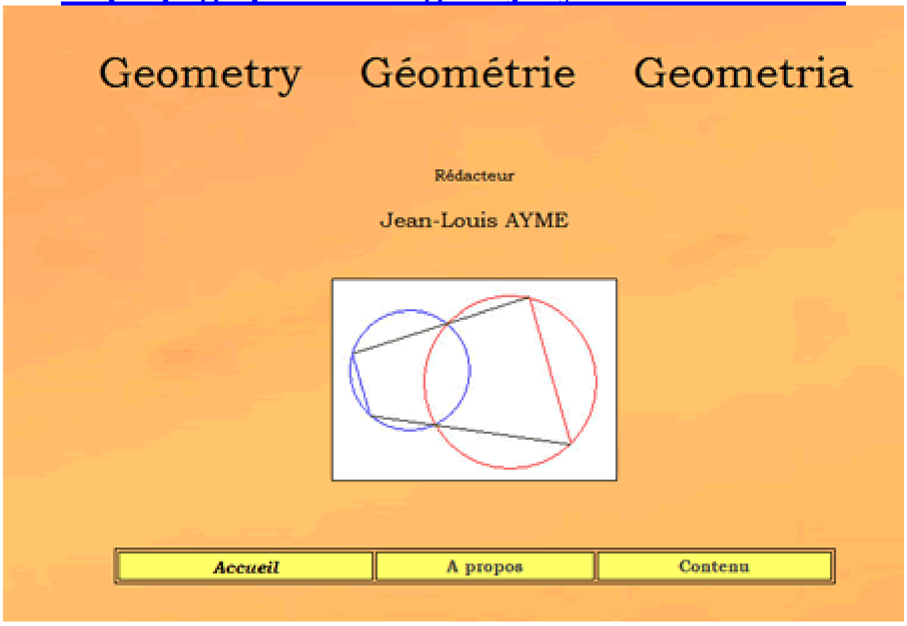
La guía comprende siete capítulos: 1 Números y los sistemas de numeración a lo largo de la historia.; 2. Usamos los números (incluye la minicomputadora esquemática de Blacker, para ayudar a realizar cálculos); 3. Adición (con el juego de Canje y pesas); 4. Sustracción (con el juego de los leones hambrientos); 5. Multiplicación; 6. División y 7. Aplicaciones combinadas de las 4 operaciones.

En la descripción de NUFRAC, la Dra, Blacker menciona los cinco problemas que originan las dificultades en el proceso de aprendizaje de las matemáticas, y las soluciones a esta problemática que dieron origen al sistema NUFRAC.
Los destinatarios de la publicación –los maestros, especialmente del Perú, pues los ejemplos están adaptados a su sistema monetario – son quienes mejor podrán apreciar la utilidad del sistema en su enseñanza diraria.

Comentario de páginas web 31

La página web de Jean-Louis Ayme,

http://pagesperso-orange.fr/jl.ayme/contenu.html



Recientemente, a través de un mensaje del autor, hemos conocido la página web de Jean-Louis Ayme, titulada

Geometry Géométrie Geometría

Y cuyos contenidos son fáciles de adivinar…El Prof. Ayme, bien conocido de los lectores de la REOIM, es un verdadero experto en buscar soluciones "puramente sintéticas" a resultados geométricos clásicos o modernos, probados quizá por otras vías (coordenadas baricéntricas, por ejemplo). En su página, que recomendamos vivamente a todos los amantes de la Geometría, se incluyen sus aportaciones en este campo. A título indicativo, señalamos aquí algunos contenidos de su página en 2008:

- **Los círculos de Morley, Euler, Mannheim y Miquel**
- **La recta de Gray**
- **Los puntos gemelos de Schoute**
- **La fascinante figura de Cundy**
- **El círculo de Lester**
- **Del teorema de Reim al teorema de los 6 círculos.**

Valladolid, marzo 2008.
F.Bellot

Un trozo de pi

La naturaleza de pi, la razón entre la circunferencia de un círculo y su diámetro, ha sido una fuente de frustración y fascinación para matemáticos y filósofos durante milenios. Si se consideran las dimensiones de los cuadrados dibujados dentro y fuera del círculo y que tocan a su circunferencia, resulta obvio que pi debe ser mayor que 2 y menor que 4, pero no hay nada que indique que es un número irracional; es decir, un número que no puede expresarse como la razón entre dos enteros. El valor de pi ha sido calculado con computadores de alta velocidad con miles de millones de cifras decimales, pero no ha surgido ninguna pauta recurrente.

El intento más extraño por racionalizar pi se remonta a 1894, cuando Edward Johnston Goodwin, un médico y matemático aficionado de notoria autoestima que vivía en una pequeña ciudad de Indiana, publicó en el American Mathemarical Monthly un artículo con el título «Cuadratura del círculo». En una serie de pasos obtenía un valor para pi de 3,2 (en lugar de pi = 3,14159..), aunque de un atento análisis de los argumentos que construía podían extraerse otros ocho valores, que iban desde 3.56 a 4. En cualquier caso, Goodwin advenía en su artículo que había registrado su valor de 3.2 en los registros de propiedad intelectual de Estados Unidos, Gran Bretaña, Alemania, Francia, España, Bélgica y Austria. En 1896 se dirigió a su representante en el Parlamento Estatal de Indiana, míster Taylord I. Record, y le pidió que llevara un proyecto de ley ante la cámara baja, la Cámara de Representantes de Indiana, «para una ley que introduce una nueva verdad matemática y que se ofrece como una contribución a la educación para ser utilizada gratuitamente sólo por el Estado de Indiana», mientras que en todo los demás lugares se exigirían derechos de autor. En enero de 1897 llegó a la Cámara la House Bill 246 con este objetivo y después de pasar por dos comités fue aprobada por 67 votos a favor y ninguno en contra. En febrero, a pesar de las mofas de la prensa local, el proyecto de ley fue remitido por el comité responsable a la cámara alta del Parlamento, el Senado, «con la recomendación de que se aprobara la ley».

En este momento intervino un afortunado golpe de suerte en la forma de C. A, Waldo, catedrático de Matemáticas en la Universidad de Purdue, quien casualmente estaba en la Cámara por un asunto de la universidad. Waldo quedó sorprendido al descubrir que ese mismo día se iba a debatir un proyecto de ley sobre un tema matemático. En un artículo escrito 19 años más tarde recordaba:
Un ex profesor de la parte oriental del Estado estaba diciendo: «El caso es muy simple. Si aprobamos este proyecto de ley que establece un nuevo y correcto valor de pi, el autor ofrece a nuestro Estado sin coste alguno el uso de su descubrimiento y su libre publicación en nuestros libros de texto escolares, mientras que todos los demás

deben pagarle derechos.». Un miembro mostró entonces a quien esto escribe una copia del proyecto de ley recién aprobado y le preguntó si desearía ser presentado al sabio doctor, su autor. Él declinó la cortesía dando las gracias y comentando que ya conocía a todos los locos que quería conocer.

Con la exhortación del profesor Waldo, los senadores decidieron que el tema del proyecto de ley no era después de todo un tema de legislación y fue pospuesto *sine die*. Por lo tanto, quizá figure todavía en el código del Estado de Indiana.

Autor:
Eurekas y Euforias, Cómo entender la ciencia a través de sus anécdotas, Walter Gratzer, Crítica, 2004.

Tomado de Divulgamat

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI

Número

32

Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática
ISSN 1698-677X

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

Número 32 (mayo - junio 2008)

ISSN – 1698-277X

Índice

<u>Artículos, notas y lecciones de preparación olímpica (32)</u>

F. Bellot: Geometría del tetraedro

<u>Problemas para los más jóvenes (32)</u>

Presentamos los problemas del Concurso Canguro Matemático 2007, en el nivel 2 (alumnos de 13-14 años).

<u>Problemas de nivel medio y de olimpiadas (32)</u>

Presentamos los problemas de la Competición Matemática Mediterránea 2008.

<u>Problemas</u>

Problemas propuestos 156-160

Problemas resueltos:
<u>Problema 151:</u> Recibidas soluciones de: Miguel Amengual Covas (Santanyí, España); Daniel Lasaosa Medarde (Pamplona, España) y del proponente. Presentamos las soluciones de Amengual y Lasaosa.
Este problema procede de la Olimpiada rusa de 2000, y su autor es Sergei Berlov.
<u>Problema 152:</u> Recibida la solución de Cristóbal Sánchez Rubio (Benicassim, España), que presentamos.
<u>Problema 153:</u> No se han recibido soluciones, por lo que el problema sigue abierto.
<u>Problema 154:</u> Recibidas soluciones de: Fernando Andrés Benavides; Roberto Bosch Cabrera (La Habana, Cuba);Carlos Enrique Cabrera Guevara (Lima, Perú); Jojhan V.Malqui Valera (Lima, Perú); Kee-Wai Lau (Hong Kong, China); Daniel Lasaosa Medarde (Pamplona, España); Daniel Darío Góngora García, de (Lima, Perú); Cristóbal Sánchez Rubio (Benicassim, España) y el proponente. Presentamos la solución de Kee-Wai Lau.
<u>Problema 155</u>: Recibidas soluciones de M.F.L.; Carlos Enrique Cabrera Guevara (Lima, Perú); Daniel Darío Góngora García, de (Lima, Perú); Daniel Lasaosa Medarde (Pamplona, España); Paolo Perfetti, Dept. Matematica, Universitá “Tor Vergata”, Roma, Italia; y el proponente.
Presentamos la solución de Perfetti.

Soluciones a los problemas números 4, 7, 8, 9, 12, 14, 15 y 25 de la Revista, por el Prof. José Heber Nieto (Maracaibo, Venezuela). Estos problemas no habían sido resueltos por los lectores. Agradecemos al Prof. Nieto el envío de todas estas soluciones (y correcciones), y le pedimos disculpas por la tardanza en publicarlas.

Divertimentos Matemáticos (32)
En esta ocasión, la sección no tiene el carácter humorístico de otras veces.
Para la Olimpiada Iberoamericana de 2004, en Castellón, estaba previsto entregar a cada Delegación un CD con una serie de breves resúmenes biográficos de matemáticos iberoamericanos. Por razones que no son del caso, el proyecto no pudo materializarse. Publicamos en la REOIM algunas de las biografías preparadas para aquella ocasión.
Resúmenes biográficos de matemáticos iberoamericanos(I) (recopilados por F.Bellot): Ferrán Sunyer Balaguer (España) y Carlos Grandjot Reins (Chile).

Reseña de páginas web
La página web de la IMO2008 en Madrid.

Editor: Francisco Bellot Rosado

GEOMETRÍA DEL TETRAEDRO

Francisco Bellot Rosado

1. Bibliografía

Valeri V. Vavilov : Geometría del tetraedro (manuscrito privado)

Nathan Altshiller Court : Modern Pure Solid Geometry, Chelsea 1964.

Dan Branzei, Sebastian Anita, Constantin Cocea : Planul si spatiul euclidean (en rumano), Ed. Academiei, Bucarest 1986.

Mihai Miculita, Dan Branzei : Analogii Triunghi-tetraedru (en rumano), Editura Paralela 45, Pitesti, 2000.

Dan Branzei : Notes on Geometry, Ed. Paralela 45, Pitesti 1999.

Georgi Pascalev, Ivan Chovanov : Puntos notables del tetraedro (en búlgaro), Narodna Prosveta, Sofia 1988.

F.Bellot : Círculos y esferas de Lucas, comunicación presentada en la Conferencia de la WFNMC, Melbourne 2002.

Y.Sortais, R. Sortais : Géométrie de l'espace et du plan, Hermann, Paris, 1988.

V.Prasolov,I.Sharigin : Zadachi po stereometrii (en ruso), Nauka, Moscú 1989.

Revistas

The Mathematical Gazette (UK):

R.T.Robinson : The tetrahedron and a twelve-points sphere; vol.XIV, no.198, January 1929, pp.296-299.

F.O'Hara : A 24-points sphere for the orthocentrical tetrahedron; vol.LVI, no.398, December 1972, pp.295-298.

Mathesis (Bélgica; desaparecida en 1962); entre 1922 y 1962 he entresacado 22 referencias sobre el tetraedro, pero hay bastantes más.

G.Cairns,M.McIntyre,J.Strantzen : Geometric Proofs of some recent results of Yang Lu, Mathematics Magazine, vol.66,n^{o}4, oct.1993,p.263-265.

2.Introducción

La geometría del triángulo, hoy prácticamente en grave peligro de extinción, tiene su continuación natural en el espacio tridimensional en el estudio de las propiedades del poliedro más simple, el tetraedro. El hecho de que los mecanismos articulados sean objetos tridimensionales me sugirió la idea de desarrollar algunas propiedades del tetraedro, que espero no sean del todo conocidas. Algunas de ellas serán la generalización de las correspondientes del triángulo, pero hay otras bastante diferentes.

En lo que sigue, ABCD será un tetraedro, de aristas

$$BC = a, CA = b, AB = c, DA = a', DB = b', DC = c'.$$

BC y DA son aristas opuestas; lo mismo que CA y DB, AB y DC.

El ángulo diedro de arista AB se denotará $\widehat{AB}$.

El ángulo triedro de vértice A se denotará, cuando no haya lugar a confusión, por $\widehat{A}$.

El área de la cara ABC se denotará por $S_{ABC} = S_D$.

El plano BCD, es decir, la cara opuesta al vértice A, se denotará por A^f.

Algunas definiciones :

Mediana : une un vértice con el baricentro de la cara opuesta.

Bimediana : une los puntos medios de dos aristas opuestas.

Bialtura: es la perpendicular común a dos aristas opuestas.

Altura: es la perpendicular trazada desde un vértice a la cara opuesta.

Bisectriz : es la intersección de dos planos bisectores de diedros que tienen una cara común.

Un primer resultado que se diferencia del caso del triángulo es que, en general, las alturas de un tetraedro no se intersecan en un punto.

Cuando las alturas no son concurrentes, son las generatrices de un hiperboloide alabeado.

Tetraedros especiales : por las propiedades de las caras

Tetraedro *isofacial* : es la pirámide triangular regular ; una cara es un triángulo equilátero y las otras tres son triángulos isósceles.

Tetraedro *equifacial :* las caras son triángulos de la misma área; esto equivale a que tengan perímetros iguales y a su vez, que sean triángulos iguales.

Tetraedro *regular :* sus cuatro caras son triángulos equiláteros.

Tetraedro *trirrectángulo :* tres de sus caras son triángulos rectángulos con un vértice común.

Por las aristas :

Tetraedro *equifacial :* sus aristas opuestas son iguales.

Tetraedro *ortocéntrico :* Las sumas de los cuadrados de aristas opuestas son iguales.

Tetraedro de Crelle (o *esqueleto,* según la tradición escolar rusa) : las sumas de aristas opuestas son iguales.

Tetraedro *isodinámico :* Los productos de aristas opuestas son iguales.

Algunas propiedades generales del tetraedro.

- Las bimedianas concurren en el centro de gravedad G del tetraedro, que es el punto medio de cada bimediana.Las medianas también son concurrentes en este punto.

Si llamamos G_i al baricentro de la cara opuesta al vértice A_i, se verifica la relación -teorema de Federigo Commandino (1509-1575); el teorema es de 1565, y la obra *De centro gravitatis solidorum* - según Altshiller Court, donde se dan dos demostraciones del resultado:

$$\frac{\overline{GA_i}}{\overline{GG_i}} = -3.$$

(Demostración en Miculita, pg.60-61, utilizando la relación de van Aubel en tetraedros)

- Las longitudes de las medianas y bimedianas de un tetraedro están dadas por las fórmulas siguientes: para las medianas

$$m_i = \frac{3\left(a_{ij}^2 + a_{ih}^2 + a_{ik}^2\right) - \left(a_{jh}^2 + a_{jk}^2 + a_{hk}^2\right)}{9}, \{i, j, h, k\} = \{1, 2, 3, 4\}$$

y además se cumplen las relaciones

$$\begin{aligned} m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 &= \frac{1}{3}\left(a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{14}^2 + a_{23}^2 + a_{24}^2 + a_{34}^2\right) \\ GA_1^2 + GA_2^2 + GA_3^2 + GA_4^2 &= \frac{3}{4}\left(a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{14}^2 + a_{23}^2 + a_{24}^2 + a_{34}^2\right) \end{aligned}$$

La suma de las longitudes de las medianas está comprendida entre los 4/9 y los 2/3 de la suma de las longitudes de las aristas del tetraedro.

Por su parte, la longitud de la bimediana está dada por

$$m_{ij}^2 = \frac{\left(a_{ih}^2 + a_{ik}^2 + a_{jh}^2 + a_{jk}^2\right) - \left(a_{ij}^2 + a_{hk}^2\right)}{4}, \quad \{i, j, h, k\} = \{1, 2, 3, 4\}.$$

Y se tiene

$$m_{12}^2 + m_{13}^2 + m_{14}^2 = \frac{1}{4}\left(a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{14}^2 + a_{23}^2 + a_{24}^2 + a_{34}^2\right).$$

Además, la suma de las longitudes de las bimedianas está comprendida entre la cuarta parte y la mitad de la suma de las longitudes de las aristas del tetraedro.

- La siguiente relación entre las longitudes de las alturas y de las bialturas en un tetraedro aparece en Mathematics Magazine (1993) y sus autores aseguran no haberla encontrado citada antes en la literatura :

Si h_i son las cuatro alturas y b_i las tres bialturas, se verifica

$$\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2} + \frac{1}{h_3^2} + \frac{1}{h_4^2} = \frac{1}{b_1^2} + \frac{1}{b_2^2} + \frac{1}{b_3^2}.$$

Bastante sorprendentemente, la demostración es fácil con cálculo vectorial; pero el resultado no es nuevo: es un ejercicio resuelto en la colección de problemas (en ruso : *Zadachi po stereometrii) de Prasolov y Sharigin,* 1989.

- El punto de Monge del tetraedro : Los planos trazados por los puntos medios de las aristas, perpendiculares a las aristas opuestas, concurren en un punto, que es simétrico del centro de la esfera circunscrita respecto del centro de gravedad. Este es el punto de Monge o *anticentro* del tetraedro, y esos planos son los planos *antimediadores* del tetraedro.(G.Monge, 1811).El punto de Monge es el centro del hiperboloide alabeado del que son generatrices las alturas no concurrentes en un tetraedro no ortocéntrico.

Esferas asociadas a un tetraedro

- La esfera circunscrita. Pasa por los cuatro vértices del tetraedro; su centro O es la intersección de los planos mediadores de las seis aristas.

En la bibliografía a mi alcance, en los libros de Miculita y Branzei se da una fórmula para calcular su radio R. Es una aplicación muy elegante de la inversión en el espacio, obtenida independientemente por Crelle y Staudt. En la revista *Nouvelles Annales de mathématiques, 1874,* aparece una expresión para el radio, en función de las longitudes de las aristas (G.Dostor).

Usaremos la notación especial siguiente : Tetraedro $A_1A_2A_3A_4$, de aristas A_iA_j; en particular nos interesarán

$$a_i = A_iA_4$$

y si B_i son puntos situados en A_4A_i, consideraremos B_iA_4.

Entonces utilizaremos un resultado de proporcionalidad conocido:

$$\frac{v(A_1A_2A_3A_4)}{v(B_1B_2B_3A_4)} = \frac{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3}{B_1A_4 \cdot B_2A_4 \cdot B_3A_4},$$

con las notaciones anteriores (aquí, $v(...)$ es el volumen).

Entonces vamos a demostrar el siguiente resultado :

Dado el tetraedro $(A) = A_1A_2A_3A_4$, de aristas $a_{ij} = A_iA_j$, volumen V, radio de la esfera circunscrita R, existe un triángulo $(B) = B_1B_2B_3$ cuyos lados respectivamente opuestos a $B_{1,}B_2, B_3$ son

$$a_{23} \cdot a_{14}, \quad a_{13} \cdot a_{24}, \quad a_{12} \cdot a_{34}.$$

En efecto, consideremos la inversión de polo A_4 y potencia

$$k = a_{14} \cdot a_{24} \cdot a_{34};$$

esta inversión transforma la esfera circunscrita(de centro O) al tetraedro (A) en un plano π perpendicular a OA_4,y a una distancia de A_4 igual a

$$d = \frac{k}{2R} = \frac{a_{14} \cdot a_{24} \cdot a_{34}}{2R};$$

el transformado de O es un punto $P \in \pi$, y los transformados de A_1, A_2, A_3 son B_1, B_2, B_3, respectivamente. Por la astuta forma de definir la inversión, se tiene

$$\overline{A_4A_i} \cdot \overline{A_4B_i} = k = a_{14} \cdot a_{24} \cdot a_{34},$$

y de aquí obtenemos

$$A_4B_1 = a_{24} \cdot a_{34}, \quad A_4B_2 = a_{14} \cdot a_{34}, \quad A_4B_3 = a_{14} \cdot a_{24}.$$

y podemos escribir

$$\frac{A_4A_i}{A_4B_j}=\frac{A_4A_j}{A_4B_i}, i\neq j.$$

Los triángulos $A_4A_iA_j$ y $A_4B_iB_j$ son semejantes (la restricción de la inversión al plano de esos triángulos es una inversión plana) y podemos completar las razones anteriores con los terceros lados :

$$\frac{A_4A_i}{A_4B_j}=\frac{A_4A_j}{A_4B_i}=\frac{A_iA_j}{B_iB_j}, i\neq j$$

y la segunda de las proporciones nos permite encontrar las longitudes de los lados del triángulo $B_1B_2B_3$:

$$\begin{aligned}
B_2B_3 &= \frac{a_{23}\cdot a_{14}\cdot a_{34}}{a_{34}}=a_{14}\cdot a_{23}=b_1\\
B_1B_2 &= a_{12}\cdot a_{34}=b_3\\
B_1B_3 &= a_{13}\cdot a_{24}=b_2
\end{aligned}$$

que es lo anunciado.

Ahora estamos en condiciones de calcular el radio R. Llamando t al semiperímetro de (B), se tiene, por una parte,

$$S\left(B_1B_2B_3\right)=\sqrt{t\left(t-b_1\right)\left(t-b_2\right)\left(t-b_3\right)};$$

y

$$\begin{aligned}
v(B_1B_2B_3A_4) &= \frac{1}{3}S\left(B_1B_2B_3\right)\cdot A_4P=\\
&= \frac{1}{3}\sqrt{t\left(t-b_1\right)\left(t-b_2\right)\left(t-b_3\right)}\cdot\frac{a_{14}\cdot a_{24}\cdot a_{34}}{2R};
\end{aligned}$$

pero la relación entre los volúmenes de los dos tetraedros da

$$\frac{v(A_1A_2A_3A_4)}{v(B_1B_2B_3A_4)}=\frac{a_{14}\cdot a_{24}\cdot a_{34}}{B_1A_4\cdot B_2A_4\cdot B_3A_4}=\frac{1}{a_{14}\cdot a_{24}\cdot a_{34}},$$

así que finalmente se obtiene

$$R=\frac{\sqrt{t\left(t-b_1\right)\left(t-b_2\right)\left(t-b_3\right)}}{6V}.$$

(*como los lados del triángulo (B) se expresan como producto de dos aristas de (A), el radicando es de dimensión 8, y su raíz cuadrada de dimensión 4, mientras que el denominador (el volumen) es de dimensión 3; la fórmula anterior es dimensionalmente correcta).*

La fórmula que acabamos de obtener es la generalización de la correspondiente al triángulo:

$$R = \frac{abc}{4S}.$$

- El radio de la esfera inscrita en un tetraedro vale

$$r = \frac{3V}{S_A + S_B + S_C + S_D};$$

generalización de la correpondiente fórmula para los triángulos

$$r = \frac{S}{p};$$

como es sabido, un triángulo tiene 4 círculos tritangentes, el círculo inscrito y los tres círculos exinscritos; en el caso del tetraedro, el problema de la determinación de las esferas cuadritangentes, es decir, tangentes a los cuatro planos de las caras del tetraedro, tiene como máximo 8 soluciones; además de la esfera inscrita se tienen las esferas exinscritas a las caras A^i, de radios

$$r_i = \frac{3V}{S_j + S_h + S_k - S_i}, \{i, j, h, k\} = \{1, 2, 3, 4\}$$

y las esferas exinscritas a las caras $A^i y A^j$, de radios

$$r_{ij} = \frac{3V}{S_h + S_k - S_i - S_j}; \{i, j, h, k\} = \{1, 2, 3, 4\}.$$

En este último caso, para que exista esfera exinscrita a las caras $A^i y A^j$ tiene que verificarse la condición $S_h + S_k - S_i - S_j > 0$.

En relación con las esferas tangentes a los planos del tetraedro, se verifica el siguiente resultado : (Branzei-Anita-Cocea, pg.148)

En el tetraedro ABCD

a)Existen a lo sumo 8 esferas tangentes a los planos A^f, B^f, C^f, D^f.

b)Existen siete esferas tangentes a esos planos si y sólo si existen dos parejas de caras distintas que tienen igual la suma de sus áreas.

c)Existen seis esferas tangentes a los planos si y sólo si de las cuatro áreas de las caras, dos a dos son iguales.

d)Existen cinco esferas tangentes a los planos si y solo si el tetraedro es equifacial.

- La distancia entre el baricentro del tetraedro y el centro de la esfera circunscrita está dada por

$$OG^2 = R^2 - \frac{1}{16}\left(a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{14}^2 + a_{23}^2 + a_{24}^2 + a_{34}^2\right)$$

- Mientras en el triángulo existe una relación bien conocida (el teorema de Euler) que relaciona la distancia entre el circuncentro y el incentro con los radios de las circunferencias inscrita y circunscrita (a saber, $IO^2 = R(R-2r)$), en el tetraedro no ocurre lo mismo, salvo que se impongan condiciones especiales; en *Mathesis, 1924, p.256, Cl. Servais* demostraba que, en general, no existe tal relación, refutando la afirmación hecha un siglo antes por Durrande. Cuando el tetraedro es tal que A, I, O están alineados, entonces

$$IO^2 = (R+r)(R-3r).$$

Observación : Durrande es el descubridor de una relación entre la distancia de I a O y los radios de las circunferencias inscrita y circunscrita a un cuadrilátero bicéntrico, es decir, que admite un círculo inscrito y uno circunscrito; tal relación es la siguiente:

$$d^2 = R^2 + r^2 - r\sqrt{4R^2 + r^2},$$

que se puede escribir también como (teorema de Fuss)

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{(R+d)^2} + \frac{1}{(R-d)^2},$$

que generaliza la correspondiente al triángulo, y que es probablemente de Euler :

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R+d} + \frac{1}{R-d}.$$

Otras esferas relacionadas con el tetraedro

Análogas al círculo de los 9 puntos

- La esfera de los doce puntos. Pasa por los centros de gravedad de las caras (4), por los puntos situados a 1/3 de las distancias del punto de Monge a los vértices(4) y por las proyecciones de esos puntos sobre las caras correpondientes(4). Su radio es $R/3$; su centro E (de Euler) es el transformado de O en la homotecia de centro G y razón 1/3.

Los puntos O,G,E y M (de Monge) forman una cuaterna armónica en la recta de Euler del tetraedro.

- La esfera (O'')de los diez y seis puntos. Pasa por las proyecciones del circuncentro O sobre las caras del tetraedro, O_a, O_b, O_c, O_d. Estos cuatro puntos son los centros de los circuncírculos de las caras. Consideremos las cuatro esferas que tienen esos circuncírculos como secciones diametrales. El centro radical O' de estas cuatro esferas es el punto isogonal de O con respecto al tetraedro. Luego las proyecciones de O' sobre las caras del tetraedro están en la esfera (O''). Los puntos simétricos, con respecto a O'', de las 8 proyecciones de O y O' sobre las caras del tetraedro, están en (O'').

Cuando se consideran tetraedros especiales, se definen otras esferas. Lo iremos viendo en cada caso.

Extensión al tetraedro de los puntos isogonales. Teorema de Steiner

Definición.-Los planos (PA_iA_j) y (QA_iA_j) son isogonales respecto al diedro de arista a_{ij} en el tetraedro $(A) = A_1A_2A_3A_4$ cuando son simétricos respecto del plano bisector de este diedro.

Esos planos son isogonales si y sólo si forman, con los planos (A^h) y (A^k), respectivamente, diedros congruentes, para $\{i, j, h, k\} = \{1, 2, 3, 4\}$. Llamando P_i, Q_i a las proyecciones de los puntos P y Q sobre el plano (A^i), se verifica la proposición :

Teorema : Los planos (PA_iA_j) y (QA_iA_j) son isogonales si y sólo si

$$PP_h \cdot QQ_h = PP_k \cdot QQ_k.$$

Teorema de Steiner

Se considera un tetraedro ABCD y los puntos E y F sobre la recta AD. La condición necesaria y suficiente para que los planos (BCE) (BCF) sean isogonales es que se verifique la relación siguiente :

$$EA \cdot FA \cdot (S_A)^2 = ED \cdot FD \cdot (S_D)^2$$

Este teorema extiende al espacio la relación de Steiner sobre puntos isogonales en el triángulo, y al mismo tiempo generaliza el teorema del plano bisector, de Gergonne, que dice que el plano bisector de un diedro en el tetraedro ABCD divide a la arista opuesta en la razón de las áreas de las caras que forman el diedro; a su vez, este resultado generaliza el teorema de la bisectriz en un triángulo.

También se verifica el resultado siguiente :

Teorema : Si (A) es un tetraedro y P es un punto arbitrario,distinto de los vértices, entonces los isogonales de los planos (PA_iA_j) respecto de los diedros de aristas a_{ij} del tetraedro (A) son concurrentes en un punto Q.

P y Q son isogonales conjugados, extensión al tetraedro del correpondiente concepto en el triángulo.

Una definición alternativa del isogonal de un punto interior a un tetraedro está dada en el siguiente resultado (Branzei-Anita-Cocea, p. 176):

Teorema : Sea ABCD un tetraedro y M un punto interior. Existe un único punto M', tal que, para toda permutación (X,Y,Z,U) de los vértices (A,B,C,D), se verifican las siguientes igualdades de ángulos diedros:

$$M\left(\widehat{XY}\right)Z = U\left(\widehat{XY}\right)M'; \quad M\left(\widehat{XY}\right)U = Z\left(\widehat{XY}\right)M'.$$

Los puntos M y M' se llaman isogonales con respecto al tetraedro dado.

El punto de L'Huillier (o primer punto de Lemoine) del tetraedro

Sea ABCD un tetraedro.

Existe un punto K interior al tetraedro, tal que la suma de los cuadrados de sus distancias a las caras del tetraedro es mínima. K se llama *punto de L'Huillier o primer punto de Lemoine.*

K es el isogonal del centro de gravedad del tetraedro.

Si $(BCK) \cap AD = E$, entonces se verifica

$$AE \cdot (S_A)^2 = ED \cdot (S_D)^2 .$$

Este resultado generaliza al tetraedro el teorema de Lemoine para el triángulo; el punto de Lemoine del triángulo es el de concurrencia de las simedianas, es decir, las rectas simétricas de las medianas respecto de las bisectrices. Cada simediana divide al lado opuesto en dos segmentos proporcionales a los cuadrados de los lados adyacentes.

- Las 8 proyecciones, sobre las caras de un tetraedro, de dos puntos isogonales, están en una esfera cuyo centro es el punto medio del segmento determinado por los puntos isogonales. Esta es la *esfera de los 8 puntos.*

- El conjunto de puntos del espacio cuyo isogonal respecto de un tetraedro no está determinado es una superficie (llamada superficie de Sartiaux del tetraedro) cuya ecuación en coordenadas baricéntricas es

$$\frac{S_1^2}{x_1} + \frac{S_2^2}{x_2} + \frac{S_3^2}{x_3} + \frac{S_4^2}{x_4} = 0,$$

y en coordenadas normales (proporcionales a las distancias del punto a las caras del tetraedro),

$$\frac{S_1}{x_1} + \frac{S_2}{x_2} + \frac{S_3}{x_3} + \frac{S_4}{x_4} = 0.$$

En el caso del triángulo, ese lugar geométrico es el círculo circunscrito.La generalización al tetraedro del teorema de Simson para el triángulo es la siguiente :

Las proyecciones de un punto del espacio sobre los planos de las caras de un tetraedro son puntos coplanarios si y sólo si el punto pertenece a la superficie de Sartiaux del tetraedro, y ese plano se llama *plano de Simson* del tetraedro.

A.Sartiaux definió esta superficie en un problema publicado en *Nouvelles Annales de Mathématiques, 1866,* cuando era alumno de l'École Polytechnique.El problema es una generalización de otro publicado por Beltrami en la misma revista, y dice lo siguiente:

Los puntos que dividen a los 28 segmentos que unen dos a dos los centros de las 8 esferas inscritas en un tetraedro cualquiera en la razón de las distancias de esos centros a un plano fijo, están sobre una superficie de tercer orden que contiene a las aristas del tetraedro. (Cuando el plano fijo es el plano del infinito se tiene el problema de Beltrami)

Definición: El isogonal de un plano mediano de un tetraedro se llama *plano simediano.*

Como los planos medianos de un tetraedro concurren en el centro de gravedad, los planos simedianos concurren en un punto K, llamado *punto simediano (o primer punto de Lemoine) del tetraedro, o punto de L'Huillier.*

El punto simediano es el punto cuya suma de los cuadrados de las distancias a las caras del tetraedro es mínima.

La superficie de Sartiaux de un tetraedro es el lugar geométrico de los puntos del espacio cuyos planos polares pasan por el punto simediano del tetraedro.

El Teorema de Desargues para tetraedros

Poncelet demostró el siguiente resultado:

Si para los tetraedros ABCD y A'B'C'D' las rectas AA',BB',CC' y DD' son concurrentes en un punto O, y los planos correspondientes se intersecan según las rectas

$$a = A^f \cap A'^f, b = B^f \cap B'^f, c = C^f \cap C'^f, d = D^f \cap D'^f,$$

entonces las rectas a,b,c d son coplanarias.

O es el centro de la homología y el plano que contiene a las rectas es el plano de homología. Una demostración se puede encontrar en el libro de Branzei, Anita y Cocea, pg.171.

3. Tetraedro ortocéntrico

Las propiedades siguientes son equivalentes :

1.- Las alturas de un tetraedro se cortan en un punto común.

2.- $AD \perp BC, AB \perp CD$ y $AC \perp BD$.

3.- (Feuerbach, 1827)

$$AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2.$$

4.- Las tres bimedianas son iguales.

5.- Existe una constante k tal que

$$DA \cdot DB \cdot \cos \widehat{ADB} = DB \cdot DC \cdot \cos \widehat{BDC} = DC \cdot DA \cdot \cos \widehat{CDA} = k$$

6.- (Vecten, 1817) La proyección ortogonal de cada vértice sobre la cara opuesta es el ortocentro de dicha cara.

El esquema de la demostración es el siguiente :

$$\begin{array}{ccl} (1) & \Longleftrightarrow & (5) \Longleftrightarrow (2) \Longleftrightarrow (3) \\ (2) & \Longleftrightarrow & (6) \end{array}$$

Otras propiedades de los tetraedros ortocéntricos

a) Si ABCD es ortocéntrico, al menos una de sus caras es un triángulo acutángulo.

b) Si ABCD es ortocéntrico, de ortocentro H, baricentro G y centro de la esfera circunscrita O, entonces : i) G es el punto medio de OH (es decir, H coincide con el punto de Monge). ii) Las perpendiculares a las caras trazadas por sus respectivos centros de gravedad se cortan en un punto Γ, alineado con G y H y tal que $H\Gamma = 2 \cdot \Gamma O$.

c) Si ABCD es ortocéntrico, existe una esfera Σ_2 que contiene a los ortocentros y baricentros de las caras.Esta es la llamada *Segunda esfera de los 12 puntos de un tetraedro ortocéntrico.* El centro de esta esfera es un punto Ω de la recta de Euler OH, y su radio es 1/3 del radio R de la esfera circunscrita. Σ_2 divide a los segmentos HA,HB,HC,HD en la proporción 1:2 (Jacobi, 1834)

La *primera esfera de los 12 puntos del tetraedro ortocéntrico* pasa por los puntos medios de las aristas y por los pies de las bialturas.

d) Si ABCD es ortocéntrico, los productos de aristas opuestas son inversamente proporcionales a las distancias entre las rectas que las contienen.

e) Si ABCD es ortocéntrico,

$$AB^2 \cdot CD^2 + AC^2 \cdot BD^2 + AD^2 \cdot BC^2 = 4\left(S_A^2 + S_B^2 + S_C^2 + S_D^2\right).$$

f) $OH = \frac{1}{2}(OA + OB + OC + OD)$

g)Los puntos medios de las aristas de un tetraedro ortocéntrico están en una esfera de centro G y radio $\frac{1}{4}\sqrt{AB^2 + CD^2}$, llamada esfera de Vogt, o *esfera de los 24 puntos del tetraedro ortocéntrico.*Esta esfera corta a las caras del tetraedro según los círculos de los 9 puntos de cada cara.Los 24 puntos son: en cada arista, los puntos medios y los pies de las alturas de cada cara (12); y los puntos medios de los segmentos BH_1, CH_1, DH_1 (siendo H_1 el ortocentro de BCD), en cada cara (12).

4.Tetraedro equifacial

El tetraedro equifacial es a los tetraedros lo que el triángulo equilátero es a los triángulos.

Las siguientes proposiciones son equivalentes :

1.- Las cuatro caras tienen la misma área
2.- Las cuatro alturas son iguales
3.- Las parejas de aristas opuestas son iguales
4.- Los cuatro ángulos triedros son iguales.
5.- Los ángulos diedros opuestos son iguales :

$$\widehat{AB} = \widehat{CD}, \widehat{AC} = \widehat{BD}, \widehat{AD} = \widehat{BC}.$$

6.- Los senos de los ángulos triedros son iguales

$$\sigma_A = \sigma_B = \sigma_C = \sigma_D.$$

7.- Si G, O, I son el baricentro, el centro de la esfera circunscrita y el centro de la esfera inscrita, entonces al menos dos de estos tres puntos coinciden.

Otras propiedades de los tetraedros equifaciales

El círculo de los 9 puntos de cualquier triángulo se extiende a la *esfera de los doce puntos.* Esos doce puntos son :

- 4 proyecciones ortogonales A',B',C',D' de cada vértice sobre la cara opuesta.
- 4 puntos medios de las alturas, A",B",C",D".
- 4 ortocentros de las caras H_A, H_B, H_C, H_D.

(En el caso del tetraedro ortocéntrico, los cuatro primeros y los cuatro últimos coinciden)

El centro de la esfera es G, y su radio $\sqrt{R^2 - 8r^2}$.

Si S_A, S_B, S_C, S_D son las esferas exinscritas, de radios respectivos r_a, r_b, r_c, r_d, entonces ABCD es equifacial si y sólo si $r_a = r_b = r_c = r_d$

Esto significa que en un tetraedro equifacial sólo hay cinco esferas cuadritangentes.

En un tetraedro equifacial ABCD, la esfera exinscrita S_A, de centro I_a, tiene los siguientes puntos de tangencia :

- con la cara opuesta a A, el ortocentro del triángulo BCD.
- con el plano opuesto a B, el punto E diametralmente opuesto a A en el círculo O_E circunscrito al triángulo ACD.

En un tetraedro equifacial, $O = G = I = M = E$, y recíprocamente, si dos de estos puntos coinciden, el tetraedro es equifacial.

En un tetraedro equifacial, la suma de las distancias de un punto interior a las caras del tetraedro es constante (generalización del teorema de Viviani para el triángulo equilátero).

5. Tetraedro trirrectángulo

ABCD es trirrectángulo en D si dos cualesquiera de las rectas DA,DB,DC son perpendiculares.

Un tetraedro trirrectángulo es siempre ortocéntrico.

Las propiedades de este tetraedro generalizan las propiedades métricas de los triángulos rectángulos.

Notación especial en este caso

H será el ortocentro de ABC y E la proyección ortogonal de D sobre BC. Los lados de ABC serán a,b,c.

S_A será el área de la cara opuesta a A.

Propiedades de los tetraedros trirrectángulos

Si ABCD es trirrectángulo en D,

i) $DH^{-2} = DA^{-2} + DB^{-2} + DC^{-2}$ (Generalización del teorema del cateto; el recíproco no es cierto)

ii) $\cos^2 \widehat{HDA} + \cos^2 \widehat{HDB} + \cos^2 \widehat{HDC} = 1$

iii)$\cos^2 \widehat{BC} + \cos^2 \widehat{CA} + \cos^2 \widehat{AB} = 1$

iv) $(S_{DBC})^2 = S_{ABC} \cdot S_{HBC}$ (el recíproco no es cierto)

v) (Desargues, 1699)

$$(S_A)^2 + (S_B)^2 + (S_C)^2 = (S_D)^2$$

(generalización del teorema de Pitágoras)

vi) ABCD trirrectángulo en D si y sólo si se verifican las tres relaciones

$$\begin{aligned} 2DA^2 &= b^2 + c^2 - a^2 \\ 2DB^2 &= a^2 - b^2 + c^2 \\ 2DC^2 &= a^2 + b^2 - c^2 \end{aligned}$$

6. Tetraedro de Crelle (o esqueleto, o circumscriptible)

Es aquél tal que existe una esfera tangente a las 6 aristas (esfera hexatangente)

Las propiedades siguientes son equivalentes :

1.- ABCD es un tetraedro de Crelle

2.- $AD + BC = AC + BD = AB + CD$ (Crelle, 1821)

3.- Entre los ángulos diedros se verifica la relación

$$\widehat{AB} + \widehat{CD} = \widehat{AC} + \widehat{BD} = \widehat{AD} + \widehat{BC}.$$

Propiedades

a) En un tetraedro de Crelle, con $BC = a_{23}, CA = a_{13}, AB = a_{12}$, volumen V y radio ρ de la esfera tangente a las seis aristas, se verifica

$$3V\rho = 2t_1t_2t_3t_4$$

donde t_1 es la distancia del vértice A a los puntos de tangencia de la esfera hexatangente con las tres aristas del tetraedro que concurren en A, y notaciones análogas para los demás (G. Dostor, 1874).

b) En un tetraedro de Crelle, los tres segmentos que unen los puntos de contacto de la esfera de Crelle con las aristas opuestas son concurrentes.

c)En un tetraedro de Crelle los cuatro círculos inscritos de las cuatro caras están en la misma esfera, y cada uno de ellos es tangente a los otros tres.

Recíprocamente, si los incírculos de dos de las caras de un tetraedro son tangentes, cada uno, a los de las tres restantes, el tetraedro es de Crelle.

d)Sean p, q, r, s las longitudes de las tangentes desde A,B,C y D a la esfera tangente a las aristas. Entonces

$$AB = p + q, BC = q + r, CA = r + p.$$

Se puede probar (Altshiller, p.296-297) que si llamamos d al inradio de ABC, se tiene

$$\frac{1}{d^2} = \frac{1}{qr} + \frac{1}{rp} + \frac{1}{pq},$$

y que, si a, b, c son los inradios de BCD,CDA y DAB, entonces

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} = 2\left(\frac{1}{pq} + \frac{1}{pr} + \frac{1}{ps} + \frac{1}{qr} + \frac{1}{qs} + \frac{1}{rs}\right).$$

7. Tetraedro isodinámico (o incéntrico)

Se llama tetraedro incéntrico o isodinámico un tetraedro (A) tal que las rectas A_iI_i, que unen los vértices con los incentros de las caras opuesta, son concurrentes.

Las siguientes proposiciones son equivalentes :

1.- El tetraedro es isodinámico.
2.- Los productos de pares de aristas opuestas son iguales :

$$a_{12} \cdot a_{34} = a_{13} \cdot a_{24} = a_{14} \cdot a_{23}$$

3.- Los productos de los senos de los diedros opuestos son iguales.

Otras propiedades de los tetraedros isodinámicos

a)Un tetraedro isodinámico es isofacial si y sólo si es ortocéntrico.
b)Un tetraedro isodinámico es isofacial si y sólo si es de Crelle.
c)El carácter de isodinámico de un tetraedro es invariante por inversión.
d)Si ABCD es isodinámico, existe al menos un punto W tal que los tetraedros ABCW,WBCD,AWCD,ABWD son isodinámicos.Este punto W es el *punto isodinámico.*

En general existen dos puntos isodinámicos en un tetraedro isodinámico; ambos son inversos con respecto a la esfera circunscrita al tetraedro. Si sólo hay un punto isodinámico, entonces ABCD es regular, y W coincide con el centro O de la esfera circunscrita.

Esferas de Lucas de un tetraedro isodinámico

Victor Thébault (Mathesis 1936) generalizó al tetraedro el problema de los llamados círculos de Lucas para el triángulo : *dado el triángulo ABC, determinar tres círculos, tangentes al circuncírculo interiormente en A,B y C, y tangentes exteriormente entre sí, dos a dos.*

La construcción de los círculos en el plano es sorprendentemente sencilla, usando la homotecia.

Dado el tetraedro ABCD, de aristas

$$BC = a, CA = b, AB = c, DA = a', DB = b', DC = c'$$

inscrito en la esfera (O) de radio R, estudiaremos cuando es posible construir cuatro esferas $\omega_a, \omega_b, \omega_c, \omega_d$, mutuamente tangentes tres a tres, y además tangentes interiores a (O) en A,B,C, y D. Sean $\rho_a, \rho_b, \rho_c, \rho_d$ sus radios respectivos.

La generalización a una esfera de la fórmula que da la longitud de la tangente común exterior a dos circunferencias es

$$4\rho_b\rho_c = \frac{a^2}{R^2}\left(R-\rho_b\right)\left(R-\rho_c\right)$$

y cinco fórmulas análogas, que cuando se multiplican agrupándolas convenientemente dan nada menos que

$$\frac{16R^4\rho_a\rho_b\rho_c\rho_d}{\left(R-\rho_a\right)\left(R-\rho_b\right)\left(R-\rho_c\right)\left(R-\rho_d\right)} = (aa')^2 = (bb')^2 = (cc')^2.$$

Y esto significa que una condición necesaria (que también es suficiente) para que existan esas cuatro esferas es que el tetraedro sea isodinámico.

XIV CONCURSO
CANGURO MATEMÁTICO 2007

Nivel 2 (2º de E.S.O.)

Día 15 de marzo de 2007. Tiempo : 1 hora y 15 minutos

No se permite el uso de calculadoras. Hay una única respuesta correcta para cada pregunta. Cada pregunta mal contestada se penaliza con 1/4 de los puntos que le corresponderían si fuera correcta. Las preguntas no contestadas no se puntúan ni se penalizan. Inicialmente tienes 30 puntos.

***Las preguntas 1 a 10 valen 3 puntos cada uno*.**

1 Susana tiene una caja de cuerpos geométricos. 6 cubos pequeños pesan lo mismo que 7 cilindros; 7 cilindros pesan lo mismo que 3 cubos grandes; y 2 cubos grandes pesan lo mismo que 200 g de chocolate. El peso de un cubo pequeño es:

A) 50gr. B) 70 gr. C) 100 gr. D) 150 gr. E) 200 gr.

2 Tomás tiene una hucha. Saca de ella 6 euros para comprar un juguete. La semana siguiente. Recibe 2 euros de su abuela por recoger manzanas del jardín. Cuando pone este dinero en su hucha, tiene 10 euros. ¿Cuánto dinero había en la hucha al principio?

A) 8€ B) 10€ C) 12€ D) 14€ E) 16€

3 Ana, Berta, Cris, David y Eva están formando un círculo. Fanny está en el centro del círculo y empieza a contar de 1 a 12 empezando en Ana, siguiendo por Berta, etc. ¿Quién es el número 12?

A) Ana B) Berta C) Cris D) David E) Eva

4 El Sean **r** y **s** dos rectas paralelas. Marcamos 5 puntos en r y 3 en s. ¿De los segmentos determinados por dichos puntos, ¿cuántos hay con un extremo en r y el otro en s?

A) 8 B) 15 C) 18 D) 25 E) 28

5 Para llegar a un refugio de montaña, Roberto deja su coche a una altura de 1500 m. Sube 600 m para llegar a un paso, baja hasta un lago que está 250 m más bajo que el paso, y vuelve a subir 780m, por una pendiente, hasta alcanzar el refugio. ¿A qué altura está el refugio?

A) 2630 m B) 2280 m C) 3130 m D)1930 m E) 2880 m

6 Hay 60 pájaros repartidos en tres árboles. En un momento dado, 6 pájaros vuelan del primer árbol, 8 del segundo y 4 del tercero. Entonces queda el mismo número de pájaros en cada uno de los tres árboles. ¿Cuántos había al principio en el segundo árbol?

A) 26 B) 24 C) 22 D) 21 E) 20

7 Si cortas un metro cúbico en milímetros cúbicos, que colocas uno encima de otro, ¿qué altura alcanzarás?

A) 100 m B) 1 km. C) 10 km. D) 1000 km. E)100000 mm.

8 Se eligen 3 números del conjunto {-5,4,3,-6,2} y se multiplican. ¿Cuál es el menor resultado que se puede obtener:

A) 72 B) -72 C) -60 D) -120 E) -50

9 La expresión $\frac{1}{87}\cdot\frac{87.89}{88}-\frac{1}{88}$ es igual a:

A) 1 B) $\frac{1}{88}$ C) 0 D) $-\frac{1}{88}$ E) -1

.

10 Harry envía un mensaje a Potter a las 7h30m con una paloma mensajera, que lo entrega a las 9h10m. La paloma vuela 4 km en 10 minutos. ¿Qué distancia separa a Harry de Potter?

A) 14 km. B) 20 km. C) 40 km. D) 56 km. E) 64 km.

<u>Las preguntas 11 a 20 valen 4 puntos cada una</u>

11 Un paralelepípedo rectángulo $3\times3\times2$ está formado por cubos unidad, y sus caras exteriores se pintan de rojo. ¿Cuántos cubos unidad tienen 2 caras rojas?

A) 10 B) 8 C) 6 D) 4 E) otra respuesta

12 El dígito que ocupa el lugar 1000 en la sucesión

012343210012343210012343210012…..

es:

A)0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

13 La bisectriz BL (L está en el lado AC) del triángulo ABC divide al triángulo en dos triángulos, ABL y CBL, de la misma área. Entonces el triángulo ABC es, necesariamente,

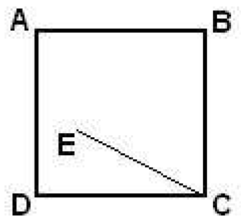
A) equilátero B) isósceles C) rectángulo D) obtusángulo E) imposible precisarlo

14 El producto de las cifras de un número natural es 5040. ¿Cuál es el menor número natural con esta propiedad?

A) 57892 B) 87592 C) 25789 D) 45667 E) 25678

15 El ángulo EAB̦ = 75º, el ángulo ABE̦ = 30º y los lados del cuadrado miden 10 cm. La longitud del segmento EC es:

A) 8 cm. B) 9 cm. C) 9,5 cm. D) 10 cm. E) 11 cm.



16 Marcando diez puntos equidistantes entre si, en una línea recta, ocupan una longitud s. Si en vez de 10 puntos se marcan 100 (a la misma distancia entre dos consecutivos que antes), ocupan una longitud S. ¿Cuántas veces es S mayor que s?

A) 10 veces B) imposible saberlo C) 11 veces D) 100 veces E) 9 veces

17 El volumen del agua al congelarse se incrementa en un 10%. ¿Qué porcentaje disminuye el volumen del hielo cuando se derrite?

A) $\left(9+\frac{1}{11}\right)$% B) 9,11 % C) 0,11 % D) 1+1/11 % E) 1/11 %

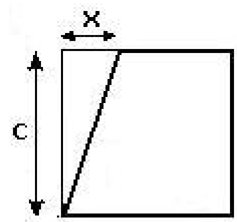
18 Se llena de zumo un vaso hasta una cuarta parte. Luego se incrementa el volumen de zumo en un 50%. ¿Qué fracción del total del vaso está llena ahora?

A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{8}$ D) $\frac{3}{8}$ E) $\frac{3}{4}$

19 Un corredor de maratón empieza a correr a las 13h 47m ; recorre 42,196 km. Termina a las 16h 18m. ¿Cuántos minutos ha corrido?

A) 91 B) 131 C) 151 D) 181 E) 191

20 En la figura, se ha cortado un triángulo rectángulo a partir del cuadrado; los catetos del triángulo miden c (el lado del cuadrado) y x.
El área del trapecio restante es:



A) $\frac{2c-x}{2}\cdot\frac{c}{2}$ B) $c\left(c-\frac{1+x}{2}\right)$ C) $-\frac{x}{2}+c^2$

D) $c\left(\frac{x}{2}-c\right)$ E) $-\frac{c.x}{2}+c^2$.

<u>Las preguntas 21 a 30 valen 5 puntos cada una</u>

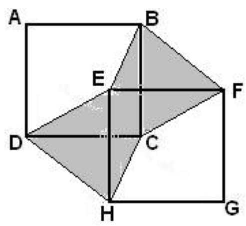
21 La suma de cuatro números, *a, b, c* y *d* es positiva. Se pueden formar cuatro sumas sumando tres de ellos: *a+b+c, a+b+d, a+c+d, b+c+d.*
¿Cuántas de esas sumas se puede asegurar que son positivas?

A)1 B) 2 C) 3 D) 4 E) ninguna

22 Los números que aparecen en las respuestas deben escribirse en orden creciente. ¿Cuál de ellos es el central?

A) 10^2 B) $\sqrt[3]{100000}$ C) $\frac{1234}{321}$ D) $1+10+10^2$ E) π^5

23 En la figura, *ABCD y EFGH*, con *AB* paralelo a *EF, s*on dos cuadrados iguales. El área sombreada vale 1. ¿Cuál es el área del cuadrado ABCD?



A) 1 B) 2 C). $\frac{1}{2}$ D) $\frac{3}{2}$ E) depende del dibujo

24 Sea n mayor o igual que 2007. El mayor de los cinco números siguientes es:

A) $\left(\frac{n-1}{n}\right)^2$ B) $\frac{n-1}{n}$ C) $\frac{n}{n+1}$ D) $\frac{n-2}{n-1}$ E) $\frac{n^2-1}{n^2+1}$

25 ¿Cuál de los siguientes números es la mejor aproximación del número $\frac{5673482}{37828}$

A) 1,5 B) 12 C) 15 D) 120 E) 150

26 ¿Cuál de las siguientes proposiciones es siempre falsa, para la suma S de cuatro números impares consecutivos cualesquiera?

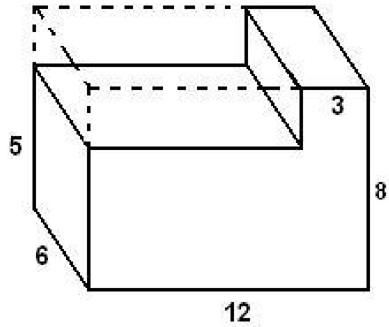
A) S es par B) S es múltiplo de 16 C) S nunca es un cuadrado perfecto
D) S puede ser cuadrado perfecto E) S es mayor o igual que 16.

27 La culebrita Kiki medía 24 cm cuando nació. Desde entonces ha crecido 11 cm cada año. Su hermano Riki, cuatro años mayor que ella, medía 32 cm cuando nació y ha crecido 7 cm cada año. ¿Qué edad tendrá Kiki cuando los dos midan lo mismo?

A) 3 años B) 5 años C) 7 años D) 8 años E) 9 años

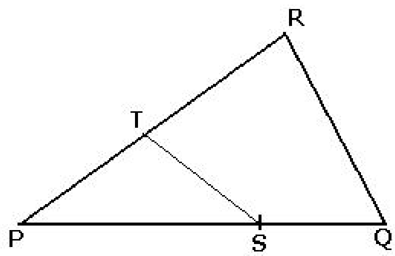
28 Se corta una sección rectangular del bloque rectangular, como se muestra en la figura. Determinar el porcentaje de disminución del área.

A) Menos que el12,5% B) 12,5%
C) Entre el 12,5% y el 25% D) 25%
E) Más del 25%



29 En el triángulo PQR de la figura, el punto S divide a PQ en la razón 2:1. T es el punto de PR tal que el área de PST es la mitad del área del triángulo PQR. ¿En qué razón divide T a PR?

A) $\sqrt{2}$:1 B) 2:1 C) 3:1 D) 4:1 E) 6:1



30 Marco y Jorge van a la piscina; empiezan a nadar al mismo tiempo y cada uno lo hace a velocidad constante. Al final de su cuarto largo, Marco pasa a Jorge por primera vez. Dejan de nadar al mismo tiempo, exactamente cuando Jorge ha terminado su décimo largo. ¿Cuántos largos ha nadado Marco?

A) 20 B) 40 C)14 D) 32 E) 28

Competición Matemática Mediterránea 2008
Memorial Peter O'Halloran
Requena, 3 de mayo de 2008

Problema 1
Sea (c_a) el círculo exinscrito de centro I_a, que es tangente al lado BC del triángulo ABC en el punto D, y a las prolongaciones de los lados AC y AB en los puntos E y Z, respectivamente. Si la recta ED es perpendicular al lado AB, cortándolo en H, y la recta ZF es la perpendicular desde Z a la recta HI_a, cortándola en F, calcular los ángulos $\widehat{BFD}$ y $\widehat{AFE}$.

Problema 2
Sean p y q enteros no nulos. Se supone que la ecuación

$$y^4 + 2\,(2p-1)\,y^2 + 8qy - (4p-1) = 0 \qquad (1)$$

tiene una raíz entera, de signo contrario al de q. Demostrar que la ecuación

$$x^3 + px + q = 0 \qquad (2)$$

tiene al menos una raíz irracional.

Problema 3
La cuaterna $(a; b; c; d)$ de enteros positivos se dice "interesante" si los números

$$a^2; b^2; c^2; d^2 + 1$$

son, en este orden, términos consecutivos de una progresión aritmética creciente.
a) Encontrar, al menos, una cuaterna interesante.
b) Decidir, razonadamente, si el número de todas las cuaternas interesantes es finito o infinito.

Problema 4
Supongamos que los números reales x, y, z pertenecen al intervalo $[0, 1)$ y verifican $x + y + z = 1$.
Demostrar que

$$\sqrt{\frac{xy}{z+xy}} + \sqrt{\frac{xz}{y+xz}} + \sqrt{\frac{yz}{x+yz}} \leq \frac{3}{2}.$$

Problemas propuestos 156-160

Problema 156, *propuesto por Ovidiu Furdui, Toledo (OH,USA)*
Sea f una función tal que

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x), \text{ para } |x| < R,$$

donde $T_n(x)$ es el polinomio de Taylor de grado n en 0. Hallar la suma

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (f(x) - T_n(x)).$$

Problema 157, *propuesto por Ovidiu Furdui, Toledo (OH,USA)*
Sea k un número real positivo. Calcular

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \left\{\frac{n}{x}\right\}^k dx,$$

donde $\{a\} = a - \lfloor a \rfloor$ es la parte fraccionaria del número real a.
***Problema 158,** *propuesto por José Hernández Santiago, Oaxaca, México.*
A,B y **C** son preguntados sobre el carácter de la serie

$$1 - \frac{1}{2^{2008}} + \frac{1}{3^{2008}} - \frac{1}{4^{2008}} + \cdots$$

La persona **A** afirma que la serie es convergente y que su suma es un número irracional. La persona **B** concuerda con **A** en que es convergente, pero afirma que la suma es racional. Finalmente, el individuo **C** asegura que tanto **A** como **B** están equivocados y que la serie ni siquiera es convergente. Un cuarto individuo que pasaba po allí les recomienda solicitar el consejo de los lectores de la *Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas.*

Suponga que ellos hacen caso de esta sugerencia. ¿Cuál sería su dictamen, estimado lector?

Problema 159, *propuesto por José Luis Díaz Barrero, Barcelona, España.*
Calcular la suma

$$\frac{19}{105} + \frac{13}{315} + \frac{67}{3465} + \cdots + \frac{4n^2 + 16n + 19}{16n^4 + 128n^3 + 344n^2 + 352n + 105} + \cdots$$

Problema 160, *propuesto por José Luis Díaz Barrero, Barcelona, España.*
Sea F_n el $n-$ésimo número de Fibonacci, definido por

$$F_0 = 0, F_1 = 1, \text{ y para todo } n > 2, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

Demostrar que

$$\frac{F_n^2 (F_{n+2} + 2F_{n+1}) + F_{n+1}^2 (F_{n+2} + F_n)}{2\left(F_n^3 + F_{n+1}^3\right) + 3F_n F_{n+1} F_{n+2}} < 1.$$

Problema 151

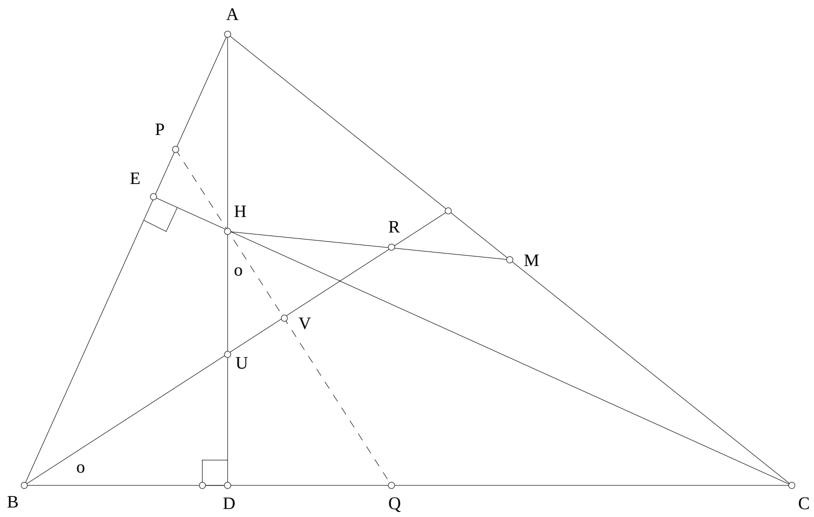
Solución de Miguel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca, España.

Vamos a demostrar que $RQ \perp BC$. Un razonamiento análogo al que seguiremos sirve para probar que $RP \perp AB$.

El cuadrilátero $PBQR$ tendrá, así, rectos dos ángulos opuestos lo cual es suficiente para asegurar que es inscriptible (en la circunferencia de diámetro BR).

Sean D y E los pies de las alturas desde los vértices A y C, respectivamente.

Sean U y V los respectivos puntos de intersección de la bisectriz interior del ángulo B con la altura desde A y con la bisectriz del ángulo agudo entre las alturas desde A y C.



Los ángulos ABD y AHE son iguales, al ser ambos complementarios de $\angle BAD$. También son iguales $\angle AHE$ y $\angle CHD$, por ser opuestos por el vértice. Por tanto, $\angle ABD = \angle CHD$ y, consiguientemente,

$$\angle UBD = \frac{1}{2}\angle ABD = \frac{1}{2}\angle CHD = \angle UHV$$

Se sigue que los triángulos UBD y UHV son semejantes y, siendo rectángulo (en D) el primero, también lo es el segundo con $\angle UVH = 90^{\circ}$, esto es, la bisectriz interior del ángulo B corta perpendicularmente a la bisectriz del ángulo agudo entre las alturas desde A y C.

Consideramos un sistema de coordenadas con BC como eje de abscisas y AD como eje de ordenadas y ponemos $A(0,a)$, $B(b,0)$ y $C(c,0)$.

Se obtienen inmediatamente la ecuación de la bisectriz interior del ángulo B

$$ax + \left(b - \sqrt{a^2 + b^2}\right)y = ab \qquad (1)$$

y las coordenadas del ortocentro $H\left(0, -\frac{bc}{a}\right)$.

La ecuación de la recta PQ, habida cuenta que es perpendicular a (1) y que pasa por H es

$$y + \frac{bc}{a} = \frac{b - \sqrt{a^2 + b^2}}{a}x$$

en la cual sustituimos $y = 0$ para obtener el valor de la abscisa del punto Q,

$$x_Q = \frac{bc}{b - \sqrt{a^2 + b^2}}$$

La recta HM, habida cuenta que las coordenadas del punto M son $\left(\frac{c}{2}, \frac{a}{2}\right)$ tiene ecuación

$$y + \frac{bc}{a} = \frac{a^2 + 2bc}{ca}x \qquad (2)$$

Eliminamos y entre (1) y (2) y obtenemos el valor de la abscisa del punto R, a saber

$$x_R = \frac{bc\left(c - b - \sqrt{a^2 + b^2}\right)}{a^2 + bc - c\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Multiplicamos numerador y denominador por $b - \sqrt{a^2 + b^2}$ y simplificamos, el resultado es

$$x_R = \frac{bc}{b - \sqrt{a^2 + b^2}}$$

Siendo iguales las abscisas de los puntos Q y R, la recta QR es perpendicular a BC, como queríamos demostrar, pues BC es el eje de abscisas.

PROBLEMA 151, propuesto por el editor (cuando se publique la solución se dará cuenta de su procedencia; el problema no es nuevo)

El tringulo ABC es acutángulo y no isósceles. La bisectriz del ángulo agudo entre las alturas desde A y C corta al lado AB en P y al lado BC en Q. La bisectriz interior del ángulo B corta en R a la recta que une el ortocentro H con el punto medio M del lado AC.

Demostrar que los puntos B, P, R, Q están en una circunferencia.

Solución por Daniel Lasaosa Medarde, Universidad Pública de Navarra, Pamplona, España

Supongamos sin pérdida de generalidad que $A > C$. Es fácil comprobar que el triángulo PBQ es isósceles en Q. Para ello, considérese que el ángulo agudo formado por las alturas desde A y desde C es igual a B, pues el ángulo formado por la altura desde A y el lado AB es $\frac{\pi}{2} - B$, siendo recto el ángulo entre la altura desde C y el lado AB. De forma similar, las alturas desde A y B se cortan en un ángulo igual a C, y las alturas desde B y C se cortan en un ángulo igual a A. Entonces, PQ forma con la altura desde B un ángulo igual a $C + \frac{B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{A-C}{2}$, con lo que al formar la altura desde B un ángulo igual a $\frac{\pi}{2} - C$ con el lado BC, se tiene que PQ forma con el lado BC un ángulo igual a $\pi - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{A-C}{2}\right) - \left(\frac{\pi}{2} - C\right) = \frac{A+C}{2}$. De forma análoga se demuestra que éste es también el ángulo que forman PQ con el lado AB.

Al ser PBQ isósceles en B, la bisectriz del ángulo B coincide con un diámetro de la circunferencia circunscrita a PBQ, cortándola nuevamente en S. Llamando T al punto donde la altura desde B corta de nuevo a la circunferencia circunscrita a PBQ, y E al pie de la altura desde B sobre AC, demostraremos que los triángulos THS y EHM son semejantes, lo cuál solucionará el problema, ya que entonces S estará sobre la recta HM y sobre la bisectriz de B, coincidiendo por lo tanto con R, y estando sobre la misma circunferencia que B, P, Q. Para demostrar que ambos triángulos son semejantes, vemos en primer lugar que $\angle HEM = \angle HTS = \frac{\pi}{2}$, pues $\angle HTS = \angle BTS$, y BS es por definición diámetro de la circunferencia circunscrita a PBQ. Además, es conocido (o fácilmente demostrable por el lector) que $HE = 2r \cos A \cos C$, donde r es el radio de la circunferencia circunscrita a ABC, y se tiene fácilmente que

$$EM = \frac{b}{2} - c\cos A = \frac{a\cos C - c\cos A}{2} = r\sin(A - C),$$

donde se ha usado que $b = a\cos C + c\cos A$, y se ha aplicado el teorema del seno. Como además $\angle EBS = \frac{B}{2} - \angle ABE = \frac{A-C}{2}$, entonces $TS = 2\rho \sin \frac{A-C}{2}$, siendo ρ el radio de la circunferencia circunscrita a PBQ. Ahora bien, utilizando el teorema del seno,

$$HT = \frac{PT\sin(\angle HPT)}{\sin(\angle PHT)} = \frac{2\rho\sin(\angle PBT)\sin(\angle QBT)}{\sin(\angle QHT)} = \frac{2\rho\cos A\cos C}{\sin(C + \frac{B}{2})},$$

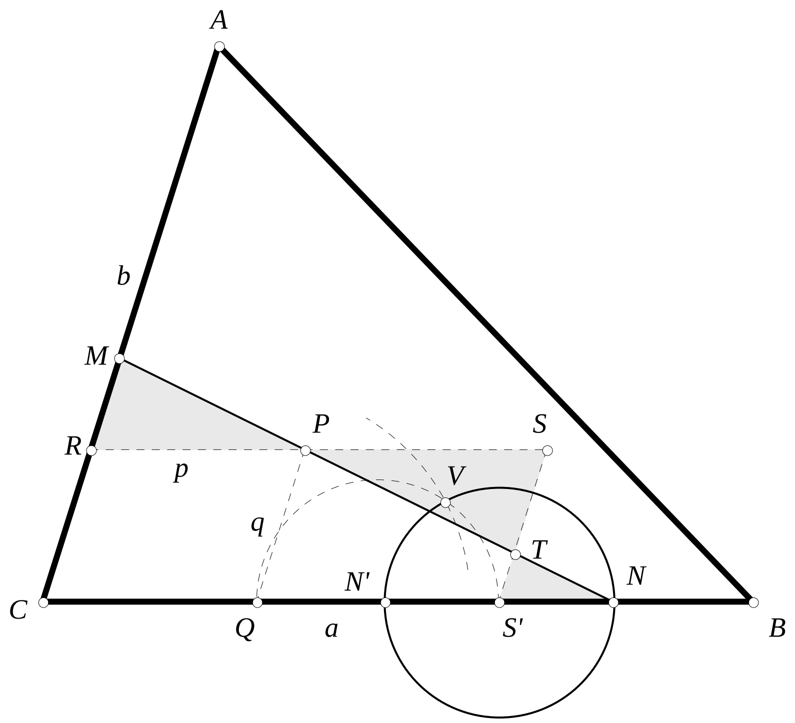
y como $C + \frac{B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{A-C}{2}$, entonces $\frac{HT}{HE} = \frac{TS}{EM}$, y hemos terminado.

Problema 152

Dado un triángulo *ABC* y un punto *P* situado en su interior, trazar una recta *MN*, con *M* en el lado *AC* y *N* en el lado *BC*, que pasando por *P* divida al triángulo en dos partes que estén en una proporción dada.

Solución.

Denotaremos por $[XYZ..]$ el área de polígono de vértices *XYZ..* y sea *k* tal que $\frac{[CMN]}{[ABC]} = k$.



Suponiendo el problema resuelto, la posición de *P* queda fijada mediante las proyecciones paralelas a *CA* y *CB* en *R* y *Q* respectivamente. Pongamos finalmente $p = PR, q = PQ$ y $x = CN, y = CM$.

En términos de las incógnitas *x*, *y* las dos condiciones del enunciado se expresan:

$$\frac{1}{2}xysenC = \frac{1}{2}kabsenC \Leftrightarrow xy = kab \quad (1)$$

para la relación de las áreas y por la semejanza de *PQN* y *MRP*

$$\frac{x-p}{q} = \frac{p}{y-q} \Rightarrow qx + py = xy = kab \quad (2)$$

para expresar la alineación de *P* con *M* y *N*.

Formalmente el problema está resuelto como intersección de la hipérbola (1) con la recta (2) sujeto a las restricciones $x \le a, y \le b$ inherentes al problema.

Para poder resolverlo de modo geométrico comenzaremos por construir un paralelogramo *CRSS*' con dos vértices fijos *C*, *R* cuya área sea la del triángulo *CMN* $(k[ABC])$ y cuyos lados tengan las direcciones de los lados *CB* y *CA* del triángulo como indica la figura.

La construcción del punto *S* es inmediata sabiendo que

$$q \cdot RS \cdot senC = k\frac{1}{2}ab \cdot senC \Leftrightarrow RS = \frac{kab}{2q}$$

(esta construcción se omite para no cargar dibujo).

Finalmente determinaremos *M* y *N* con la condición $[PST] = [PRM] + [TS'N]$.

Como los tres triángulos son semejantes y la razón de las áreas es el cuadrado de la razón de semejanza, dividiendo la relación anterior por $\left[PST\right]$ tenemos

$$1=\frac{\left[PRM\right]}{\left[PST\right]}+\frac{\left[TS'N\right]}{\left[PST\right]}\Leftrightarrow 1=\frac{PR^2}{PS^2}+\frac{S'N^2}{PS^2}\Leftrightarrow PS^2=PR^2+S'N^2$$

queda una sencilla construcción de un triángulo rectángulo conociendo la hipotenusa (*PS* = *QS'*) y un cateto (*PR* = *QC*).
La semicircunferencia de diámetro *QS*' y la circunferencia de centro *Q* y radio *QC* se cortan en el punto *V* interior al triángulo.
Finalmente la circunferencia de centro *S*' y radio *S'V* corta al lado *CB* en los puntos *N* y *N*' que unidos con *P* determinan *M* y *M*' en el lado *AC*.
La discusión es inmediata. Cada solución exige que el punto *N* o *N*' esté en el segmento *CB* y que su correspondiente punto *M* o *M*' este en el segmento *AC*.
En la figura sólo se ha dibujado completa la solución correspondiente al punto *N* para un valor de *k* de 0,35.
En términos de los datos un simple cálculo establece que existe solución cuando cumplen la condición

$$1-\frac{q}{kb}\leq\frac{p}{a}\leq k\left(1-\frac{q}{b}\right)$$

la desigualdad de la derecha garantiza que el punto *N* está en el segmento *CB* y la de la derecha que *M* pertenece al segmento *AC*.
De modo análogo se puede analizar la condición para *N*' y *M*'.

Cristóbal Sánchez-Rubio
I.E.S. Penyagolosa, Castellón.

Problema 154, Propuesto por José Luis Diaz Barrero, Barcelona, España

Haller todas las ternas $(x;y;z)$ de números reales que son solución del sistema de ecuacions

$$\left.\begin{array}{c} x+y+z=2 \\ \sqrt{2x+yz}+\sqrt{2y+zx}+\sqrt{2z+xy}=4 \end{array}\right\}$$

Solution by Kee-Wai Lau, Hong Kong, China

By the Cauchy- Schwarz inequality, we have

$$4=(x+y+z)^2 \le 3(x^2+y^2+z^2)$$

and

$$\begin{aligned} 16 = \ & \left(\sqrt{2x+yz}+\sqrt{2y+zx}+\sqrt{2z+xy}\right)^2 \\ \le \ & 3\left((2x+yz)+(2y+zx)+(2z+xy)\right) \\ = \ & 6(x+y+z)+\frac{3}{2}\left((x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)\right) \\ = \ & 18-\frac{3}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right) \\ \le \ & 18-\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{4}{3}\right) \\ = \ & 16. \end{aligned}$$

It follows that $(x;y;z)=(\frac{2}{3};\frac{2}{3};\frac{2}{3})$.

Proposed solution of problem 155, vol.31 2008

Dear Editor of "Rivista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática", I would like to submit the following solution of problem 155

Sean $a; b; c$ números reales no negativos. Calcular el límite

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k+a}{\sqrt{n^2+nk+b}\,\sqrt{n^2+nk+c}}$$

Answer: $1-\ln 2$

Proof We shall employ $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln n+\gamma+o(1)$ and γ is the well known Euler–Mascheroni constant

$$0<\sum_{k=1}^{n}\frac{a}{\sqrt{n^2+nk+b}\,\sqrt{n^2+nk+c}}=\sum_{r=n+1}^{2n}\frac{a}{\sqrt{nr+b}\,\sqrt{nr+c}}=$$
$$=\sum_{r=n+1}^{2n}\frac{a}{nr}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{b}{nr}}\,\sqrt{1+\frac{c}{nr}}}\le\sum_{r=n+1}^{2n}\frac{a}{nr}=\frac{a}{n}(\ln(2n)-\ln(n+1)+o(1))$$

and the limit $n\to\infty$ is zero.

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{\sqrt{n^2+nk+b}\,\sqrt{n^2+nk+c}}=\sum_{r=n+1}^{2n}\frac{r-n}{\sqrt{nr+b}\,\sqrt{nr+c}}\;;$$

$$\sum_{r=n+1}^{2n}\frac{n}{\sqrt{nr+b}\,\sqrt{nr+c}}=\sum_{r=n+1}^{2n}\frac{1}{r}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{b}{nr}}\,\sqrt{1+\frac{c}{nr}}}=$$
$$=\sum_{r=n+1}^{2n}\frac{1}{r}\big((1+O(\frac{b}{nr}))(1+O(\frac{c}{nr}))\big)=\sum_{r=n+1}^{2n}\frac{1}{r}\big(1+O(\frac{1}{nr})\big)=$$
$$=(\ln(2n)-\ln(n+1)+o(1))+O(n^{-1})$$

whose limit is $\ln 2$.

$$\sum_{r=n+1}^{2n}\frac{r}{\sqrt{nr+b}\,\sqrt{nr+c}}=\sum_{r=n+1}^{2n}\frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{b}{nr}}\,\sqrt{1+\frac{c}{nr}}}=$$
$$=\sum_{r=n+1}^{2n}\frac{1}{n}\big((1+O(\frac{b}{nr}))\cdot(1+O(\frac{c}{nr}))\big)=\sum_{r=n+1}^{2n}\frac{1}{n}\big(1+O(\frac{1}{nr})\big)=$$
$$=1+O(n^{-1})$$

whence the result announced. The proof is completed.

Perfetti Paolo, Dipartimento di Matematica, Università degli studi di Tor Vergata Roma, via della ricerca scientifica, 00133 Roma, Italy – email: perfetti@mat.uniroma2.it

If you will publish or simply acknowledge my solution, please, mention "Dipartimento di matematica" or "math. dept." or anything you like with this information. In the Rome–area there are two "Paolo Perfetti" and although one (me) is a mathematician while the second is a physicist, often it is unclear which one is cited.

Roma(Italy) 04/08/08

Best regards
Paolo Perfetti

Problema 4 (Revista OIM No. 1)
En los lados AB y AC del triángulo ABC se consideran puntos variables F y E, respectivamente, tales que

$$b \cdot \frac{FA}{FB} + c \cdot \frac{EA}{EB} = a.$$

Si M es el punto de intersección de BE y CF, hallar el lugar geométrico del punto M.

Solución por José Heber Nieto, Maracaibo, Venezuela.

Sean P el único punto del lado AB tal que $PA/PB = a/b$ y Q el único punto del lado AC tal que $QA/QC = a/c$. Entonces el lugar geométrico de M es el segmento PQ.

Es claro que P y Q pertenecen al lugar. Si M es cualquier punto interior del segmento PQ tracemos las rectas CM y BM y sean F y E sus puntos de intersección con AB y AC, respectivamente. Si los puntos F, P, A y B se proyectan desde M y se secciona el haz resultante con la recta AC, resultan los puntos C, Q, A, E. Como la razón doble de cuatro puntos es invariante por proyecciones y secciones se tiene que $(FPAB) = (CQAE)$, es decir

$$\frac{FA/FB}{PA/PB} = \frac{CA/CE}{QA/QE.}$$

Luego de sustituir $PA/PB = a/b$, $CA = b$ resulta

$$\begin{aligned} \frac{b}{a} \cdot \frac{FA}{FB} &= \frac{b}{QA} \cdot \frac{QE}{EC} = \frac{b}{QA} \cdot \frac{QA - EA}{EC} = \frac{b}{EC} - \frac{b}{QA} \cdot \frac{EA}{EC} \\ &= \frac{EA + EC}{EC} - \frac{b}{QA} \cdot \frac{EA}{EC} = 1 + (1 - \frac{b}{QA})\frac{EA}{EC}. \end{aligned}$$

Ahora bien, de $QA/QC = a/c$ se sigue $c/a = QC/QA = (b - QA)/QA$, de donde $1 - b/QA = -c/a$. Por tanto

$$\frac{b}{a} \cdot \frac{FA}{FB} = 1 - \frac{c}{a} \cdot \frac{EA}{EC}$$

y finalmente

$$b \cdot \frac{FA}{FB} + c \cdot \frac{EA}{EC} = a.$$

Lo anterior muestra que todo el segmento PQ está contenido en el lugar.

Supongamos ahora que un punto M pertenece al lugar. Sean F y E las intersecciones de las rectas CM y BM con AB y AC, respectivamente, y sea M' la intersección de CM con PQ. Sea E' la intersección de BM' con AC. Entonces como M' pertenece también al lugar se deduce fácilmente que $E'A/E'C = EA/EC$, de donde $E' = E$ y M' debe estar en la recta BM, pero como también está en la recta CM debe ser $M' = M$. Esto prueba que no hay otros puntos en el lugar fuera de PQ.

Problema 7 (Revista OIM No. 2)

Se dan cuatro rectas, tangentes a una parábola no trazada. Determinar el punto de tangencia de la cuarta tangente.

Solución por José Heber Nieto, Maracaibo, Venezuela.

Se trata de un problema clásico de geometría proyectiva. En general, una cónica queda determinada por cinco tangentes. Aunque en este problema sólo se dan cuatro tangentes (llamémoslas a, b, c y d), como se trata de una parábola debe ser tangente a la recta impropia, y ya tenemos una quinta tangente. Sean $A = a \cdot c$ (la intersección de a y c), $A' = a \cdot d$, $B = b \cdot c$, $B' = b \cdot d$, C el punto impropio de la recta c y C' el punto impropio de la recta d. Entonces A', B' y C' son puntos correspondientes de A, B y C en una proyectividad Π. El punto de tangencia de la recta d es el punto P' correspondiente de $P = c \cdot d$ bajo Π. Para hallar P' se usa el hecho de que los puntos $AB' \cdot A'B$, $AC' \cdot A'C$ y $AP' \cdot A'P$ están alineados (notar que AC' es la paralela a d por A y que $A'C$ es la paralela a c por A'. La recta r que contiene estas intersecciones se denomina *eje* de la proyectividad Π. El punto P' de tangencia de d es simplemente la intersección de r con d.

Problema 8 (Revista OIM No. 2)
Un cuadrilátero variable $ABCD$ tiene el lado AB fijo, el lado CD, de longitud constante, gira alrededor del punto de intersección de CD y AB. Hallar el lugar geométrico del punto P de intersección de AC y BD.

Solución por José Heber Nieto, Maracaibo, Venezuela.

Sea O el punto de intersección de CD y AB. Sea Q el punto en el cual la paralela a CD por P intersecta a la recta AB. Entonces el lugar geométrico de P es la circunferencia K' de centro Q homotética de la circunferencia K de centro O en la que gira el punto C, con A como centro de homotecia. En efecto, pongamos $a = OA$, $b = OB$, $c = OC$, $d = OD$,

$$t = \frac{AP}{AC} = \frac{QP}{OC}, \quad s = \frac{BP}{BD} = \frac{QP}{OD}.$$

Entonces

$$s/t = \frac{OC}{OD} = \frac{c}{d}.$$

Anlogamente

$$1 - t = \frac{AC - AP}{AC} = \frac{PC}{AC} = \frac{OQ}{OA},$$

$$1 - s = \frac{BD - BP}{BD} = \frac{PD}{BD} = \frac{OQ}{OB},$$

de donde

$$\frac{1-t}{1-s} = \frac{OB}{OA} = \frac{b}{a}.$$

Por lo tanto

$$1 - t = \frac{b}{a}(1 - s) = \frac{b}{a}(1 - \frac{ct}{d}),$$

de donde se despeja

$$t = \frac{(b-a)d}{bc - ad}.$$

Como al girar CD la razón $t = AP/AC$ se mantiene constante (pues sólo depende de a, b, c y d), el lugar pedido es la la circunferencia K' homotética de la circunferencia K de centro O en la que gira C, con A como centro de homotecia. Puesto que la razón de esta homotecia es t y $t = QA/OA$, el punto Q permanece fijo y es el centro de K'.
Nota: Cuando CD es colineal con AB el punto P no está bien definido, pero los puntos de intersección de K' con la recta AB son los límites de P cuando $\angle AOC$ tiende a $0°$ o a $180°$.

Problema (Revista OIM No. 9)
Dados cuatro puntos A, B, C, M, ¿es posible determinar una cónica que pase por M y respecto de la cual el triángulo ABC sea autopolar?

Solución por José Heber Nieto, Maracaibo, Venezuela. Hay infinitas cónicas que pasan por M y respecto a las cuales el triángulo ABC es autopolar.

Supongamos en primer lugar que una tal cónica K exista. Tracemos las rectas AM y BM y sean $X = AM \cdot BC$ (intersección de AM con BC) y $Y = BM \cdot AC$. Tracemos la recta XY y sea $W = XY \cdot AB$. Por una conocida propiedad de los cuadrivértices completos (en este caso el $BCYW$) se tiene que $N = WC \cdot AM$ es el conjugado armónico de M respecto al par A, X. Por lo tanto, siendo BC la polar de A, N debe pertenecer a K. Sea ahora $P = WC \cdot BM$. Proyectando la cuaterna armónica $MNXA$ desde W y seccionando con la recta BM resulta que la cuaterna $MPYB$ también es armónica y por lo tanto P pertenece a K. Del mismo modo proyectando $MNXA$ desde B y seccionando con la recta CM resulta la cuaterna armónica $MQCZ$ y por lo tanto $Q = CM \cdot BN$ pertenece a K. En resumen hemos probado que cualquier cónica que pase por M y respecto a la cual el triángulo ABC sea autopolar, debe contener a los puntos N, P y Q.

Ahora bien, hay infinitas cónicas que pasan por los puntos M, N, P y Q (pues hacen falta cinco puntos para determinar una cónica). Sea K una cualquiera de ellas. Como la cuaterna que se obtiene proyectando $MPYB$ desde A y cortando con CM es armónica, se deduce que A, Q y P están alineados. Si $U = AC \cdot BN$ y $V = AP \cdot BC$ entonces es fácil ver que las cuaternas $NQUB$ y $PQVA$ también son armónicas. Además, del hecho de que $PQVA$ y $MNXA$ sean armónicas se sigue que la recta XV (que es la misma BC) es la polar del punto A respecto a K. Análogamente como $NQUB$ y $MPYB$ son armónicas se sigue que la recta AC es la polar de B respecto a K. En consecuencia también AB es la polar de C y el triángulo ABC es autopolar.

Lo anterior vale aún si M pertenece a uno de los lados del triángulo ABC (pero no si es igual a uno de los vértices). Por ejemplo si M está en la recta AB entonces ABC es autopolar respecto a cualquier cónica que pase por M y por su conjugado armónico N respecto de A, B, siendo además tangente a las rectas MC y NC en M y N, respectivamente.

Problema 12 (Revista OIM No. 3)
Si $a+b+c+d=0$, $a^2+b^2+c^2+d^2=0$, probar que

$$a^8+b^8+c^8+d^8=\frac{1}{4}(a^4+b^4+c^4+d^4)$$

Solución por José Heber Nieto, Maracaibo, Venezuela.

Lo que afirma el enunciado no es cierto. Como contraejemplo tomemos $a=1$, $b=-1$, $c=i$, $d=-i$. Entonces $a+b+c+d=1-1+i-i=0$, $a^2+b^2+c^2+d^2=1+1-1-1=0$, $a^4+b^4+c^4+d^4=1+1+1+1=4$ y $a^8+b^8+c^8+d^8=4$.

Sin embargo se cumple que

$$a^8+b^8+c^8+d^8=\frac{1}{4}(a^4+b^4+c^4+d^4)^2$$

(que tal vez era el enunciado original del problema y por error no se incluyó el último exponente). Esto se puede probar fácilmente utilizando las relaciones entre las funciones simétricas elementales y las sumas de potencias, establecidas por Newton. Específicamente, definamos

$$\begin{aligned} e_1 &= a+b+c+d, \quad e_2=ab+ac+ad+bc+bd+cd, \\ e_3 &= abc+abd+acd+bcd, \quad e_4=abcd, \\ p_k &= a^k+b^k+c^k+d^k. \end{aligned}$$

Entonces las relaciones de Newton afirman que

$$ke_k=\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}p_je_{k-j}.$$

En nuestro caso se tiene $e_1=p_1=p_2=0$. Aplicando las relaciones de Newton para $k=2$ y $k=4$ resulta

$$\begin{aligned} 2e_2 &= p_1e_1-p_2=0, \quad \text{por tanto } e_2=0, \\ 4e_4 &= p_1e_3-p_2e_2+p_3e_1-p_4=-p_4, \quad \text{por tanto } p_4=-4e_4. \end{aligned}$$

Como $e_k=0$ para $k>4$ se tiene además

$$\begin{aligned} 0 &= 5e_5=p_1e_4-p_2e_3+p_3e_2-p_4e_1+p_5=p_5, \quad \text{por tanto } p_5=0, \\ 0 &= 8e_8=p_1e_7-p_2e_6+p_3e_5-p_4e_4+p_5e_3-p_6e_2+p_7e_1-p_8=-p_4e_4-p_8, \end{aligned}$$

de donde $p_8=-p_4e_4=p_4^2/4=4e_4^2$, es decir

$$a^8+b^8+c^8+d^8=\frac{1}{4}(a^4+b^4+c^4+d^4)^2=4(abcd)^2.$$

Problema 14 (Revista OIM No. 3)
Los lados BC, CA, AB del triángulo ABC cortan a una recta arbitraria en D, E, F respectivamente. Demostrar que existe un punto P en esa recta tal que las áreas de los triángulos PAD, PBE y PCF son iguales.

Solución por José Heber Nieto, Maracaibo, Venezuela.

Tracemos la recta BE y una paralela r a AC por D. Sea M la intersección de r con BE, y tracemos una paralela s a AB por M. Sean N y P los puntos de intersección de s con las rectas AC y FD, respectivamente. Sean h, k y l las distancias desde A, B y C, respectivamente, a la recta FD. Es claro que

$$\frac{PD}{PE} = \frac{PM}{PN} = \frac{FB}{FA} = \frac{k}{h}.$$

Por lo tanto área$(PAD) = PD \cdot h/2 = PE \cdot k/2 =$ área(PBE). Análogamente

$$\frac{PE}{PF} = \frac{ME}{MB} = \frac{DC}{DB} = \frac{l}{k},$$

de donde área$(PBE) = PE \cdot k/2 = PF \cdot l/2 =$ área(PCF). Por lo tanto área$(PAD) =$ área$(PBE) =$ área(PCF) y el punto P cumple la condición pedida. Hay una segunda solución, a saber el conjugado armónico de P respecto a E, D.

Problema 15 (Revista OIM No. 3)
Demostrar que
$$\sec^4\frac{\pi}{7}+\sec^4\frac{2\pi}{7}+\sec^4\frac{2\pi}{7}=416.$$

Solución por José Heber Nieto, Maracaibo, Venezuela.

Sea k un entero impar. Entonces
$$\cos\frac{3k\pi}{7}=4\cos^3\frac{k\pi}{7}-3\cos\frac{k\pi}{7}.$$

Pero por otro lado
$$\begin{aligned}\cos\frac{3k\pi}{7} &= \cos(k\pi-\frac{4k\pi}{7})=-\cos\frac{4k\pi}{7}=1-2\cos^2\frac{2k\pi}{7}\\ &= 1-2(2\cos^2\frac{k\pi}{7}-1)^2=-8\cos^4\frac{k\pi}{7}+8\cos^2\frac{k\pi}{7}-1,\end{aligned}$$

y resulta que
$$8\cos^4\frac{k\pi}{7}+4\cos^3\frac{k\pi}{7}-8\cos^2\frac{k\pi}{7}-3\cos\frac{k\pi}{7}+1=0.$$

Por lo tanto $\cos\pi/7$, $\cos 3\pi/7$, $\cos 5\pi/7$ y $\cos 7\pi/7=-1$ son raíces del polinomio
$$8x^4+4x^3-8x^2-3x+1$$

Si lo dividimos entre $(x+1)$ resulta
$$P(x)=8x^3-4x^2-4x+1,$$

cuyas raíces son $\cos\pi/7$, $\cos 3\pi/7$ y $\cos 5\pi/7=-\cos 2\pi/7$. Los recíprocos de estas cantidades, es decir $x_1=\sec\pi/7$, $x_2=\sec 3\pi/7$ y $x_3=-\sec 2\pi/7$, son las raíces del polinomio
$$x^3P(\frac{1}{x})=x^3-4x^2-4x+8.$$

Por las fórmulas de Vieta se tiene
$$x_1+x_2+x_3=4,\quad x_1x_2+x_2x_3+x_1x_2=-4,\quad x_1x_2x_3=-8,$$

de donde
$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_2)=24,$$

y finalmente
$$\begin{aligned}&\sec^4\frac{\pi}{7}+\sec^4\frac{2\pi}{7}+\sec^4\frac{2\pi}{7}=x_1^4+x_2^4+x_3^4\\ &=(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^2-2(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_2)^2+4x_1x_2x_3(x_1+x_2+x_3)=416.\end{aligned}$$

Problema 25 (Revista OIM No. 5)
Un avión de la compañía *Air Disaster* debe realizar un viaje entre dos ciudades con un total de $m+n$ escalas. En cada escala, el avión ha de cargar o descargar una tonelada de una cierta mercancía; realiza cargas en m de las escalas y descargas en las n restantes. En la compañía, nadie ha reparado en que el avión no soporta una carga mayor que k toneladas ($n < k < m+n$) y las escalas de carga y descarga están distribuidas al azar. Si el avión sale con n toneladas de la mercancía, calcular la probabilidad de que llegue a su destino.

Solución por José Heber Nieto, Maracaibo, Venezuela.

Modelemos cada posible secuencia de cargas y descargas mediante una poligonal de vértices $(0, x_0)$, $(1, x_1)$,...,$(m+a, x_{m+n})$, donde $x_0 = n$ y $x_{i+1} = x_i + 1$ o $x_{i+1} = x_i - 1$ según que en la escala i se cargue o se descargue mercancía, respectivamente. La poligonal finaliza en $(m+n, m)$, y el avión llega a su destino si y sólo si la poligonal se mantiene estrictamente por debajo de la recta $y = k+1$. La probabilidad buscada es el cociente entre el número de poligonales que no tocan esa recta y el total de poligonales, que es $\binom{m+n}{n} = \frac{(m+n)!}{m!n!}$, ya que la poligonal queda determinada si se especifica en cuáles de las $m+n$ escalas se realizan las n descargas.

Si $m > k$ es claro que todas las poligonales de $(0, n)$ a $(m+n, m)$ tocan la recta $y = k+1$ y la probabilidad buscada es 0. Supongamos entonces que $m \leq k$. Para calcular el número de poligonales que no tocan la recta $y = k+1$ utilizamos el llamado *principio de reflexión*, que afirma que el número de poligonales que van de $(0, n)$ a $(m+n, m)$ *tocando* la recta $y = k+1$ es igual al número total de poligonales que van de $(0, n)$ al punto simétrico de $(m+n, m)$ respecto a la recta $y = k+1$, es decir $(m+n, 2(k+1)-m)$ (esto se prueba simetrizando respecto a la recta $y = k+1$, para cada poligonal de $(0, n)$ a $(m+n, m)$ que toque esa recta, la porción que va desde el primer vértice de contacto hasta el último vértice de la poligonal).

Como las poligonales que van de $(0, n)$ a $(m+n, 2(k+1)-m)$ son $\binom{m+n}{k+1}$, la probabilidad buscada es

$$\frac{\binom{m+n}{n} - \binom{m+n}{k+1}}{\binom{m+n}{n}} = 1 - \frac{\binom{m+n}{k+1}}{\binom{m+n}{n}} = 1 - \frac{m!n!}{(k+1)!(m+n-k-1)!}.$$

Nota: Más detalles sobre caminatas al azar y el principio de reflexión pueden encontrarse en el clásico libro de William Feller *Introducción a la Teoría de Probabilidades y sus Aplicaciones*, vol. I, Editorial Limusa, México.

Ferran Sunyer Balaguer 1912 – 1967
España

El Prof. Sunyer Balaguer ha sido una figura absolutamente singular en la investigación matemática de nuestro país. Nació en Figueras en 1912, con una atrofia casi total de su sistema nervioso. Su madre se dedicó enteramente a su educación. Cuando fue patente que la parálisis casi total que sufría no había afectado a sus facultades intelectuales, primero su madre Ángela y más tarde su primo, Ferran Carbona, le proporcionaron los medios – los libros de Matemáticas y Física – para que pudiera estudiar. En 1938 se publicó en *Comptes Rendues de l'Académie des Sciences* de París el primer artículo matemático de Ferran Sunyer : el inicio de su carrera como matemático profesional, enteramente autodidacta. Tras la Guerra Civil española, entre 1939 y 1945, Sunyer comenzó la línea de investigación que le llevaría a alguno de sus mejores resultados en la teoría de funciones de variable compleja. En 1947, Szolem Mandelbrojt, una de las grandes autoridades internacionales del Análisis matemático, que había evaluado una memoria de Sunyer para Comptes Rendues de la Academia, se ofreció a subvencionar el trabajo de Sunyer si éste se trasladaba a Francia, escribió una carta de recomendación que permitió, seguramente, que Sunyer fuera admitido en el Consejo Superior de Investigaciones Científicas español, y le presentó a la Société Mathématique de Francia, sociedad que no es de libre adscripción. Es notable que en los primeros años de la postguerra española Sunyer Balaguer encontrase la motivación y concentración para hacer investigación matemática, que era el medio de subsistencia de su familia. Con el fin, además, de superar el aislamiento científico, presentó trabajos a los premios científicos : 1946, Premio Agell de la Academia de Ciencias y Artes de Barcelona; 1948, Premio Prat de la Riba del Institut d'Estudis Catalans; 1950, Premio de la Academia de Ciencias de Zaragoza; en 1952, la prestigiosa revista *Acta Mathematica* publicó la memoria que había evaluado Mandelbrojt. En 1954 y 1957, los premiosde la Academia de Ciencias de Madrid. El CSIC le concedió tres premios, dos Leonardo Torres Quevedo en 1952 y 1955, y un Premio Nacional de Ciencias Francisco Franco en 1956, que fue clave en su carrera científica. En 1966, el Premio Martí d'Ardenya del Institut d'Estudis Catalans.

Sunyer tenía una movilidad limitada en los brazos, que le permitía pasar hojas o desplazar papeles, pero no escribir. Cuando daba un trabajo por terminado, lo dictaba a su madre (a sus primas, cuando la madre murió en 1955). Sunyer, por fuerza, trabajaba "de cabeza". Publicó 44 artículos y memorias, ocho de ellas en la revista *Collectanea Matematica* del Seminario Matemático de Barcelona.

El 1 de marzo de 1948 el CSIC concedió a Sunyer Balaguer la categoría académica más baja dentro de su escalafón, después de la de becario, pasando más tarde a la de "colaborador temporal". Hasta 1956 su situación no mejoró cualitativamente, gracias al apoyo de Rey Pastor y de Ricardo San Juan. En 1954 no fue aceptada la propuesta de convertirlo en "colaborador especial", porque "las normas eran para doctores". En 1956 Sunyer decidió hacer el Bachillerato y obtener los títulos de licenciado y doctor, lo que sucedió en 1957, 1959 y 1962, respectivamente. La máxima categoría académica dentro del CSIC, la de investigador, se le concedió en noviembre de 1967, pocos días antes de su muerte.

En 1961 Ferran Sunyer empezó a hacer investigación para la Oficina de Investigación Naval de los Estados Unidos, en contratos sucesivos hasta el

momento de su muerte. En la carta de pésame del Almirante Retirado O.B. Owen, se puede leer: ***His value to the prestige of the Spanish Scientific community was outstanding and his work in mathematics was of a steady excellence that makes his loss difficult to accept.*** **Pero el lugar marginal de Sunyer en los círculos académicos hizo que su influencia sobre la comunidad matemática española no fuera proporcional a su valía científica.**

Sunyer Balaguer murió de repente, de un problema cardíaco inesperado, el 27 de diciembre de 1967.

Carlos Grandjot Reins 1900 – 1979
Chile

Carlos Grandjot fue el introductor de la investigación matemática en Chile. Nació en Frankenburg (Alemania), el 23 de agosto de 1900. En 1919 inicia sus estudios de Matemáticas en Göttingen, donde tiene como maestros a Landau (del que fue ayudante), Courant y Hilbert. Se gradúa como Doctor en 1922 (*Convergencia de series de Dirichlet)*, y como *Privatdozent* en 1926(*Investigaciones sobre series de Dirichlet)*, e inicia sus clases de Matemáticas Superiores. En 1928 disfruta de una beca de la Fundación Rockefeller en París. En 1929 es contratado por el Gobierno chileno e inicia sus actividades en el Instituto Pedagógico. En 1930 se crea el Instituto de Ciencias de Chile y Grandjot es uno de sus fundadores. En 1931 viaja a Alemania; en 1933 empieza a dar clases en la facultad de Ingeniería de la Pontificia Universidad Católica (PUC) y en 1940 escribe su *Algebra Abstracta*, que a pesar de todo no tuvo en el país la repercusión que merecía. De haberse divulgado a tiempo habría adelantado, quizás en 20 años, el estudio oficial en Chile de esta *nueva ciencia.*

En 1945 es Profesor en la Escuela de Ingeniería de la Universidad de Chile y amplía a la Física las clases que hasta entonces se había limitado a las áreas de Matemáticas Puras y Aplicads.

En 1953 es Presidente y Socio Fundador de la Sociedad Matemática de Chile. En 1954 obtiene la nacionalidad chilena. Entre 1957 y 1959 es contratado por el Centro de Investigaciones Matemáticas de la Universidad de Chile. En 1962 es nombrado Jefe del Laboratorio de Computación Electrónica de la PUC, y en 1966 asiste al Congreso Internacional de Matemáticos de Moscú. Se jubiló en 1967, después de 38 años de servicios en Chile. A fines de ese año sufre un ataque de hemiplejía del que no logra recuperarse. En 1973, su hija Sigrid lo traslada al Hogar Alemán de Concepción, donde fallece el 5 de octubre de 1979.

Reseña de páginas web (32)

La página web de la IMO2008

Como es bien sabido, del 10 al 22 del pasado mes de julio se celebró en Madrid la 49-ésima IMO (Olimpiada Internacional de Matemáticas).

En la dirección

http://www.imo-2008.es

se encuentran recogidas numerosas fotografías del acontecimiento, así como el saludo a los participantes de la Excma. Sra. Ministra de Educación, y los enunciados de las pruebas en cada uno de los idiomas a los que fueron traducidos para la competición.

Francisco Bellot

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI

Número

33

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática
Número 33 (noviembre - diciembre 2008)
ISSN – 1698-277X

Índice

Artículos, notas y lecciones de preparación olímpica (33)

Vicente Vicario García: ***Las demostraciones alternativas como recurso científico y didáctico. El caso de la infinitud de los números primos.***

Problemas para los más jóvenes (33)

Algunos problemas de la 1ª vuelta de la XVI Olimpiada Matemática Costarricense para Educación Primaria (OMCEP 2008). Agradecemos al Dr. D. Víctor Buján Delgado el envío de estos problemas.

Problemas de nivel medio y de Olimpiadas (33)

Cinco problemas del ***Duelo Matemático 08*** **(Olomouc, Chorzow, Graz).**

Esta competición internacional se celebra anualmente en uno de los tres países de las escuelas participantes, rotativamente: Olomouc, República Checa; Chorzow, Polonia; Graz, Austria.

Problemas (33)

Problemas propuestos 161-165

Problemas resueltos

Problema 156. Recibidas soluciones de: Álvaro Begué Aguado, Nueva York, EEUU; José Heber Nieto, Maracaibo, Venezuela; Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, España; Paolo Perfetti, Depto. De Matemática, Universidad degli Studi “Tor Vergata”, Roma, Italia; y del proponente.
Presentamos la solución de J.H. Nieto (muy similar a la de Lasaosa).
Problema 157. Recibidas soluciones de: Kee-Wai Lau, Hong Kong, China; Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, España; José Heber Nieto, Maracaibo, Venezuela; y del proponente.
Presentamos la solución de Lasaosa (muy similar a la de J.H. Nieto).
***Problema 158.** Recibidas soluciones de: Manuel Fernández López, Vivero, España; Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, España; Xavier Ros, estudiante, Barcelona, España.
Presentamos la solución de Lasaosa.
Problema 159. Recibidas soluciones de: José A. Barrera Gómez, Mataró, España; José Hernández Santiago, estudiante, Oaxaca, México; Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, España; José Heber Nieto, Maracaibo, Venezuela; Paolo Perfetti, Depto. De Matemática, Universita “Tor Vergata”, Roma, Italia; Xavier Ros, estudiante, Barcelona, España; Bruno Salgueiro Fanego, Vivero, Lugo; Cristóbal Sánchez Rubio, Benicássim, España; y del proponente. Presentamos la solución de J.H. Nieto (similar a la de Lasaosa).
Se recibió una solución incorrecta, y otra comprimida, que el sistema rechazó por sospechosa (informáticamente hablando) y que, naturalmente, fue eliminada.
Problema 160. Recibidas soluciones de: José Hernández Santiago, estudiante, Oaxaca, México; Kee-Wai Lau, Hong Kong, China; Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, España; Bruno Salgueiro Fanego, Vivero, España; y del proponente. Presentamos la solución de Salgueiro.

Comentario de páginas web (33)
Un foro peruano de Geometría:http://forogeometras.com

Reseña de libros (33)

Dos títulos recientemente publicados: *10 matemáticos, 100 problemas (O.B.M.)* y *Sacred Mathematics (Japanese Temple Geometry), de H.Fukagawa y T. Rothman.*

Divertimentos matemáticos (33)

Otras dos biografías breves de matemáticos iberoamericanos: Andrés Zavrotsky (Venezuela) y Alfonso Nápoles Gándara (México).

Editor: Francisco Bellot Rosado

Las demostraciones alternativas como recurso científico y didáctico. El caso de la infinitud de los números primos.

Vicente Vicario García

En este artículo pretendemos poner de relieve la importancia de las componentes científica y didáctica asociadas a las demostraciones alternativas de una misma proposición matemática. La pluralidad demostrativa nos permite interpretar las funciones de la demostración y enriquecer la comprensión de un determinado objeto matemático. Es esta gama de posibilidades y relaciones demostrativas la que nos ayuda a alcanzar la óptima comprensión significativa asociada a la demostración matemática y establecer conexiones, a veces inesperadas.

Introducción

Una manera de hacer más significativa la comprensión asociada al contenido de la demostración de una proposición matemática es abordar ésta desde diferentes vertientes. Desde el punto de vista científico, las demostraciones alternativas de una misma proposición brindan espléndidas garantías de poder interconectar y explorar un determinado objeto matemático a través de diversas ramas de la matemática, quizás remotas, para poder así llegar a un alto nivel de comprensión de la proposición demostrada y de todo su entorno asociado. Creemos que es muy conveniente poder utilizar, siempre que sea posible, distintas técnicas para demostrar una misma proposición, ya que nos permite intuir, clarificar, verificar y proporcionar, en muchos casos, pautas explicativas. Además, las diferentes demostraciones suelen aportar matices nuevos que pueden ser interesantes y que nos dan idea de qué camino escoger más acorde a la potencia demostrativa o explicativa que pretendemos en un determinado contexto.

Otra razón esencial para el estudio y análisis de las demostraciones alternativas es su aplicación en el campo de la didáctica de la matemática, y más concretamente, en el aula. Parece razonable pensar que si disponemos de algunas demostraciones alternativas de una proposición, podemos emplear éstas según los fines que se deseen y dependiendo del nivel del auditorio al que se destinan. Podemos también etiquetar y analizar cada demostración según el marco de las funciones más relevantes que muestre, como verificación, sistematización, y explicación, además de otras.[†] Cada nueva demostración debe hacernos reflexionar fundamentalmente sobre su alcance junto con el grado de interconexión y simplicidad que exhibe respecto de otras demostraciones.[‡]

El propósito de estas líneas es reflejar esta dinámica con un ejemplo paradigmático como el elegido: "*El caso de la infinitud de los números primos*".

[†] Véanse el artículo iniciador "*El papel y la función de la demostración en matemáticas*" de M. de Villiers, Universidad de Stellenbosch, Äfrica del Sur, en Epsilon, Nº 26, 1993. pp. 15-30. Este artículo es una versión traducida al castellano y adaptada del artículo aparecido en Pythagoras, 24 Nov, 1990, traducido y publicado con la correspondiente autorización.

[‡] Véase el artículo "*Concepciones del profesor de secundaria sobre la demostración matemática. El caso de la irracionalidad de* $\sqrt{2}$ *y las funciones de la demostración*" de Vicente Vicario García y José Carrillo Yánez en *IX* simposio de la SEIEM, Córdoba, 2005, pp 145-152.

Creemos que la pluralidad demostrativa que se muestra en este trabajo habla por sí sola de la potente gama de ideas científico-didácticas y conclusiones que se pueden extraer del mismo.

A continuación, y después de un breve preámbulo sobre los números primos y sus caracterizaciones básicas, exponemos algunas demostraciones elementales de la infinitud de los números primos. En una parte de las mismas se asumen como previamente demostrados otros teoremas que se especifican, en otras, se escriben algunos comentarios históricos relativos a la demostración. Obviamente, existen versiones muy potentes relativas a la distribución de los números primos como el postulado de Bertrand o incluso el famoso teorema del número primo (*TNP*), pero nuestro objetivo aquí es sólo el análisis de demostraciones simples y relativamente breves.

La sucesión de los números primos $2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47,53,59,...$ extraída del conjunto de los números naturales nos es completamente familiar. Muchos problemas y muy profundos, algunos de los cuales son muy sencillos de enunciar y extraordinariamente complejos de demostrar, han sido planteados a cerca de esta serie de números que ha sido objeto de estudio y reflexión a lo largo de los últimos veinticinco siglos. Ya en 1751 el genial y prolífico matemático suizo Leonhard Euler (1707, 1783) expresaba lo siguiente:

> "*Los matemáticos han intentado en vano, hasta ahora, descubrir algún orden en la secuencia de los números primos y tenemos razones para creer que se trata de un misterio en el que nunca penetrará la mente humana*".

Es fácil construir mecánicamente una tabla de números primos hasta un límite moderado *N*, mediante un procedimiento conocido ya por los antiguos matemáticos griegos denominado "*Criba de Eratóstenes*". Para ello se escriben todos los números naturales desde 2 hasta *N*. A partir de aquí, comenzamos con el 2 y tachamos en sucesión, de dos en dos, todos los números de la lista. El siguiente número no tachado, el 3, es primo, y comenzamos desde este número tachando todos los enteros de tres en tres, no tachados previamente. El siguiente número no tachado, el 5, es primo, y tachamos ahora todos los múltiplos de cinco no tachados previamente, contando para ello de cinco en cinco. Así proseguimos sucesivamente hasta considerar el último primo $p \leq \sqrt{N}$ y se detiene el proceso. Los números que quedan sin tachar, junto con los iniciales ya considerados, son todos los números primos hasta *N*. Este tipo de construcción nos muestra que los números primos son cada vez más escasos.

Por otra parte, es sencillo comprender que existen en la recta numérica bloques de enteros compuestos consecutivos tan grandes como queramos. El precio a pagar es que debemos utilizar números cada vez mayores. Basta observar que para cualquier $n > 1$, los números consecutivos $n!+2$, $n!+3, \ldots$, $n!+n$ son todos compuestos. Nuestro objetivo ahora es demostrar, e intentar comprender, por qué existen infinitos números primos aunque estos se hagan cada vez más raros.

Veamos a continuación diversas demostraciones relativamente breves de la infinitud de los números primos:

Proposición: "El conjunto de los números primos contiene infinitos elementos".

1ª Demostración (Euclides): Razonaremos por reducción al absurdo. Supongamos que el número de primos sea finito. Sean entonces los números primos los elementos del conjunto $\{p_1, p_2, p_3, ..., p_n\}$. Construyamos el número $N = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot ... \cdot p_n + 1$. Este número *N*, o bien es primo, o bien es divisible por algún número primo *q* necesariamente distinto a los p_i anteriores. Por tanto, en cualquier caso, hemos llegado a una contradicción que demuestra el teorema.[†]

2ª Demostración (Hermite): Sean $n = 1,2,3,...$ los números naturales y q_n el factor primo más pequeño de $n!+1$ para cada valor de *n*. Como q_n tiene que ser necesariamente mayor que *n*, se deduce que esta sucesión contiene infinitos elementos distintos, y que por tanto existen infinitos números primos.

3ª Demostración (Saidak): Sea *n* un número natural arbitrario. Sabemos que puesto que *n* y $n+1$ son números naturales consecutivos deben ser primos entre sí. Entonces el número $N_2 = n(n+1)$ debe tener, como mínimo, dos factores primos distintos. Análogamente, los números naturales $n(n+1)$ y $n(n+1)+1$, son consecutivos y, por tanto, primos entre sí. En consecuencia, el número $N_3 = n(n+1) \cdot [n(n+1)+1]$ debe tener, como mínimo, tres factores primos diferentes. Este proceso puede ser continuado indefinidamente, así que el conjunto de los números primos es infinito.[#]

4ª Demostración (Odoni): Se considera la sucesión recurrente $e_{n+1} = e_1 \cdot e_2 \cdot e_3 \cdots e_n + 1$ con $e_1 = 2$ y $n \geq 1$. Podemos observar que si $i \neq j$ entonces $m.c.d.(e_i, e_j) = 1$ ya que cualquier factor primo común a e_i y e_j debe dividir a 1. Sea ahora p_i el menor número primo que aparece en la descomposición en factores primos de e_i, entonces la sucesión $p_1, p_2, p_3, ..., p_n, ...$ es una sucesión infinita de primos distintos, lo que demuestra el teorema.[‡]

5ª Demostración (Stieltjes): Asumiremos (para abreviar la exposición) como lema previo en esta demostración la proposición siguiente debida a Euclides: "*Sea p número primo que divide al producto de naturales ab. Entonces p divide a o p divide b*". (esta proposición aparece en *Los Elementos* como Proposición 30 del libro *VII*, a veces denominada, lema de Euclides.

Razonaremos por reducción al absurdo. Supongamos que el número de primos es finito. Sea *Q* el producto de todos los números primos y sean $m > 1$ y $n > 1$ dos

---

[†] Esta demostración clásica aparece en el libro *IX* de *Los Elementos* como proposición 20. Puede reformularse trivialmente de manera que se transforme en una demostración directa, en lugar de la demostración indirecta dada. Para ello, basta considerar un conjunto de números primos consecutivos $\{p_1, p_2, p_3, ..., p_n\}$ y construir el número $N = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot ... \cdot p_n + 1$ que debe ser divisible por algún número primo distinto a los anteriores. Obsérvese que el razonamiento proporciona un método para construir o identificar, al menos teóricamente, nuevos números primos.

[#] Esta bellísima demostración es extraordinariamente reciente y apareció en un artículo de Filip Saidak con el título "*A new Proof of Euclid´s theorem*" en American Mathematical Monthly, December 2006, pp. 937-938.

[‡] Obsérvese que claramente se cumple la relación $e_{n+1} = e_n^2 - e_n + 1$.

enteros positivos con $Q = m \cdot n$. Se tiene entonces, según el lema de Euclides, que todo número primo *p* divide, o bien a *m*, o bien a *n*, pero no a ambos (*m* y *n* son primos entre sí). Entonces $m+n$ no puede tener ningún divisor primo, lo que es una contradicción.

<u>6ª Demostración (Euler)</u>: El gran matemático Leonhard Euler llegó a descubrir relaciones sorprendentes entre la teoría de números y el análisis. En su artículo "*Variae observationes circa series infinitas*" de 1737, demostró que la divergencia de la serie armónica implica, de forma sorprendente, la existencia de infinitos números primos.

La demostración siguiente, por reducción al absurdo, se basa en el teorema fundamental de la aritmética y en la divergencia de la serie armónica.[†]

Supongamos que existen solamente *k* números primos distintos $\{p_1, p_2, p_3, ..., p_k\}$. Aplicando el teorema fundamental de la aritmética, sabemos que todo número natural *n* es descomponible en forma única (salvo reordenaciones triviales) en la forma canónica $n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$.

Partimos ahora de la siguiente relación, que es fácil de verificar, ya que en el miembro de la derecha aparecen todos los inversos de los números naturales:

[†] El comportamiento divergente de la serie armónica ya había sido detectado en el siglo XIV por Oresme. Agrupó los sucesivos términos de la serie armónica colocando el primer y segundo términos en un primer grupo, los dos términos siguientes en un segundo grupo, los cuatro términos que le siguen en un tercer grupo, y así sucesivamente, de manera que el grupo *m*-ésimo incluye 2^{m-1} términos. Entonces es claro que tenemos infinitos grupos de términos y que la suma de los términos relativos a cada grupo es mayor o igual que 1/2, por lo que sumando una cantidad suficiente de términos podemos superar cualquier número dado.

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+... = 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+...+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+...+\frac{1}{16}\right)+... \geq$$

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+...+\frac{1}{16}\right)+... \geq \frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+...$$

También el matemático Pietro Mengoli (1625,1686) redescubrió el resultado de Oresme sobre la divergencia de la serie armónica asociando términos, teorema que se suele atribuir a Jacques Bernouilli que en 1689 proporcionó en su *Tractatus de seriebus infinitis* una demostración especialmente elegante y rigurosa y que damos a continuación. En su demostración, Jacques afirma primero que, si *a*>1, entonces $\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+2}+...+\frac{1}{a^2} \geq 1$.

Para ello basta considerar la clara desigualdad siguiente $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+2}+...+\frac{1}{a^2} \geq (a^2-a)\frac{1}{a^2} = 1-\frac{1}{a}$ y a partir de aquí, llegamos a lo afirmado por Bernouilli. Por tanto, aplicando esta desigualdad sobre los términos de la serie armónica, llegamos a la relación siguiente:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+...+\frac{1}{25}\right)+\left(\frac{1}{26}+\frac{1}{27}+...+\frac{1}{676}\right)+...\geq 1+1+1+1+...$$

de la que se deduce que la serie armónica crece más que cualquier número prefijado. Otra demostración radicalmente diferente de la divergencia de la serie armónica fue dada por su hermano Jean Bernouilli. El propio Euler proporcionó otra demostración en su *Introductio in Analisin Infinitorum* de 1748, pero resultó poco rigurosa bajo el prisma actual, ya que en ella se omitían conceptos como convergencia/divergencia de una serie.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\left(1+\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_1^2}+...\right)\cdot\left(1+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_2^2}+...\right)\cdots\left(1+\frac{1}{p_k}+\frac{1}{p_k^2}+...\right) \qquad [1]$$

Además, a partir del valor de la suma de los infinitos términos de una serie geométrica convergente, tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\frac{1}{1-\frac{1}{p_1}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{p_2}}\cdots\frac{1}{1-\frac{1}{p_k}} \qquad [2]$$

lo que es absurdo, ya que la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, como es sabido, es divergente.

7ª Demostración (Euler): Esta es otra demostración debida a Euler. Demostraremos que la suma de los inversos de los números primos es divergente utilizando los recursos del análisis matemático, lo cual, como corolario evidente, nos proporciona la infinitud de los números primos. Obsérvese que en esta demostración volvemos a emplear el teorema fundamental de la aritmética y la divergencia de la serie armónica. Ciertamente demostramos mucho más que la infinitud de los números primos.

Demostración: Denotaremos p_n el *n*-ésimo número primo. Sea m un número natural $m \geq 2$. Cada número natural $n \leq m$ es un producto único (salvo reordenaciones triviales) de potencias de números primos p con $p \leq n \leq m$. Por otra parte, para cada número primo *p* se tiene

$$\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{p^j}=\frac{1}{1-\frac{1}{p}} \qquad [3]$$

Es claro que se tiene la desigualdad siguiente

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n}\leq\prod_{p\leq m}\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{p^j}\right)=\prod_{p\leq m}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p}}\right) \qquad [4]$$

donde el producto está extendido a los números primos $p \leq m$. De la desigualdad anterior y del desarrollo de $\ln(1-x)$ se deduce que

$$\ln\left(\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n}\right)\leq-\sum_{p\leq m}\ln\left(1-\frac{1}{p}\right)=\sum_{p\leq m}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{jp^j}=\sum_{p\leq m}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}\sum_{j=2}^{\infty}\frac{1}{jp^{j-2}}\right)\leq$$

$$\leq \sum_{p\leq m}\frac{1}{p}+\sum_{p\leq m}\left(\frac{1}{p^2}\sum_{j=2}^{\infty}\frac{1}{p^{j-2}}\right)=\sum_{p\leq m}\frac{1}{p}+\sum_{p\leq m}\left(\frac{1}{p^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{p}}\right)=$$

$$=\sum_{p\leq m}\frac{1}{p}+\sum_{p\leq m}\frac{1}{p(p-1)}\leq \sum_{p\leq m}\frac{1}{p}+\sum_{n=2}^{m}\frac{1}{n(n-1)}\leq 1+\sum_{p\leq m}\frac{1}{p} \qquad [5]$$

ya que $\sum_{n=2}^{m}\frac{1}{n(n-1)}\leq \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}=\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=1$ puesto que esta última serie es una serie telescópica. Ahora bien, como *m* es arbitrario, a partir de la divergencia de la serie armónica, se deduce entonces que

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{p\leq m}\frac{1}{p}=+\infty \;^{\dagger} \qquad [6]$$

Observemos también, a partir de este breve análisis, que el crecimiento de la serie de los inversos de los números primos hacia infinito es extremadamente lento, pero existen otras series de crecimiento todavía más lento. ‡

<u>8ª Demostración (Erdös)</u>: La siguiente demostración fue dada por el genial y muy prolífico matemático húngaro P. Erdös en el siglo XX. Supongamos que $2,3,5,...p_j$ son los primeros *j* números primos y sea $N(x)$ el número de naturales menores o iguales que *x* que no son divisibles por ningún primo $p > p_j$.

Podemos expresar cualquier *n* en la forma $n = n_1^2 \cdot m$ donde *m* es un número natural libre de cuadrados y entonces no divisible por el cuadrado de ningún número primo. Entonces $m = 2^{b_1}\cdot 3^{b_2}\cdots p_j^{b_j}$ donde b_j es 0 ó 1. Por otra parte, existen 2^j posibles cambios para los exponentes y por tanto, no más de 2^j diferentes valores de *m*.

---

† Obtener el carácter asintótico de $\sum_{n=1}^{n}\frac{1}{p_n}$ supone otra serie de estimaciones más complejas que también Euler obtuvo, pero no con el debido rigor. En realidad, refinando el argumento anterior, se puede obtener la expresión $\sum_{p\leq n}\frac{1}{p}=\ln\ln n + B + O\left(\frac{1}{\ln n}\right)$ donde *B* es una constante caracterizada por la expresión $B=\gamma+\sum_{p}\left[\ln\left(1-\frac{1}{p}\right)+\frac{1}{p}\right]\approx 0.26149...$ donde γ es la famosa constante de Euler.

‡ Piénsese en la llamada escala logarítmica de series, todas ellas divergentes, con ritmo de divergencia cada vez más lento: $\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}$, $\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n\ln n}$, $\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n\ln n\ln\ln n}$, $\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n\ln n\ln\ln n\ln\ln\ln n}$,... respectivamente asintóticas a $\ln n$, $\ln\ln n$, $\ln\ln\ln n$, $\ln\ln\ln\ln n$,...

Además $n_1 \le \sqrt{n} \le \sqrt{x}$ y entonces no existen más de $\sqrt{x}$ diferentes valores de n_1 teniéndose que $N(x) \le \sqrt{x} \cdot 2^j$.

Ahora, si el número de primos fuese finito, sean estos los números $2,3,5,...,p_j$. En este caso $N(x) = x$ para todos los valores de x y entonces $x \le 2^j \cdot \sqrt{x}$, que es lo mismo que $x \le 2^{2j}$, lo que es absurdo para $x \ge 2^{2j} + 1$.†

<u>9ª Demostración (Goldbach)</u>: Consideraremos los denominados números de Fermat $F_n = 2^{2^n} + 1$ con $n \ge 0$.‡ Demostremos por inducción que se verifica la siguiente relación $\prod_{k=0}^{n-1} F_k = F_n - 2$ entre los números de Fermat. Para $n = 1$, tenemos que $F_0 = 3$ y $F_1 - 2 = 3$. Aplicando la hipótesis inductiva, tenemos que

$$\prod_{k=0}^{n} F_k = \left(\prod_{k=0}^{n-1} F_k \right) \cdot F_n = (F_n - 2) \cdot F_n = \left(2^{2^n} - 1\right) \cdot \left(2^{2^n} + 1\right) = 2^{2^{n+1}} - 1 = F_{n+1} - 2 \qquad [7]$$

Por tanto, de la relación: $\prod_{k=0}^{n-1} F_k = F_n - 2$, podemos observar que dos cualesquiera números de Fermat son primos entre sí, y se deduce la existencia de infinitos números primos.

<u>10ª Demostración (Schorn)</u>: Para la demostración observemos que si $1 \le i < j \le n$, entonces $m.c.d.[(n!)i + 1, (n!)j + 1] = 1$. De hecho, escribiendo $j = i + d$, entonces $1 \le d < n$ y $m.c.d.[(n!)i + 1, (n!)j + 1] = m.c.d.[(n!)i + 1, (n!)d] = 1$, porque todo primo *p* dividiendo $(n!)d$ es a lo sumo igual a *n*. Ahora, si el número de primos fuese *m*, tomemos $n = m + 1$. Lo anterior implica que los $m + 1$ enteros $(m+1)!i + 1$ con $1 \le i \le m + 1$ son primos entre sí, dos a dos, así que existen como mínimo $m + 1$ distintos primos en contra de la hipótesis.

---

† Este mismo razonamiento de Erdös se puede emplear para demostrar de forma indirecta la divergencia de los inversos de los números primos. Véase la clásica "*Introduction to the Theory of Numbers*", de Hardy and Wright, fifth edition, Clarendon Press, Oxford, pag 17.

‡ Entre los muchos resultados de Fermat relativos a la teoría de números primos, surge uno especialmente relevante relacionado con una inducción *precipitada*. Creía haber determinado una solución al viejo problema de construir una fórmula que diese sólo números primos para todos los valores de la variable. No es difícil demostrar que $2^m + 1$ no puede ser primo a no ser que *m* sea una potencia de 2 y engañado esta vez por su intuición, pensaba que los números de la forma $F_n = 2^{2^n} + 1$ (números de Fermat F_n) eran primos para todo valor de *n*. En 1732 Euler tras un intenso cálculo y probando con unos determinados candidatos a divisores, demostró que $F_5 = 2^{2^5} + 1 = 4.294.967.297$ es divisible por 641 con lo que la conjetura de Fermat resultaba errónea. Actualmente esta conjetura está tan *devaluada* que los matemáticos se inclinan más bien a la opinión contraria, es decir, la de que no hay ningún número primo de Fermat a partir de F_4. Se conoce actualmente que para todos los *n* tales que $5 \le n \le 22$ y otros valores de *n* mucho mayores los números de Fermat F_n son todos compuestos. Sin embargo, no se sabe actualmente si existe un número finito o infinito de números primos de Fermat.

11ª Demostración (Euler): Asumiremos (para abreviar la exposición) como lema previo en esta demostración la proposición siguiente debida a Euler: "*Sean a y n números naturales tales que* $m.c.d.(a,n)=1$, *entonces en el lenguaje de las congruencias se tiene que* $a^{\varphi(n)} \equiv 1\ (mód.n)$, *donde* $\varphi(n)$ *es la famosa función indicador de Euler que representa el número de los números* $1,2,...,n$ *que son primos con n. Aquí tomamos por definición* $\varphi(1)=1$".†

Sean a y n números naturales tales que $m.c.d.(a,n)=1$. El menor número natural d tal que $a^d \equiv 1\ (mód.n)$ se denomina el orden de a $(mód.n)$. Por el anterior teorema el orden d existe y además divide a $\varphi(n)$. En efecto, d divide a todo entero k tal que $a^k \equiv 1\ (mód.n)$ porque por el algoritmo de la división $k = dq + r$ con $0 \le r < d$ y de aquí $a^r \equiv 1\ (mód.n)$ y por consiguiente, puesto que d es mínimo, se deduce que $r = 0$.

Para demostrar la infinitud de los números primos consideremos los números de la forma $2^p - 1$ con p número primo (denominados números de Mersenne) y demostremos que cualesquiera de sus factores primos q han de ser de la forma $2kp+1$ que obviamente son mayores que p. En efecto, sea q cualquier factor primo de $2^p - 1$. Entonces, en virtud del teorema de Euler, se tiene que $2^{q-1} \equiv 1\ (mód.q)$ y como el orden de 2 $(mód.q)$ es claramente p se tiene que p divide a $q-1$ y de aquí se concluye la demostración.

12º Demostración: Sean $p_1, p_2,...p_j$ números primos consecutivos. Consideremos ahora los números de Mersenne asociados $2^{p_1}-1, 2^{p_2}-1,...,2^{p_j}-1$. Es fácil ver, a partir del argumento utilizado en la demostración anterior, que estos números son primos entre sí, dos a dos, y en consecuencia, existen infinitos números primos.

13ª Demostración (Vinogradov): En esta *exótica* demostración se asume que se ha demostrado previamente la irracionalidad de un valor particular de la función zeta de Riemann, en particular de $\varsigma(2)$ (Euler demostró que $\varsigma(2) = \frac{\pi^2}{6}$) sin recurrir, obviamente, a la infinitud de los números primos, salvando así un argumento circular.

Supongamos que el número de primos sea finito. Sean entonces los números primos los elementos del conjunto $\{p_1, p_2, p_3,..., p_k\}$. Por las relaciones ya comentadas entre la función zeta y los números primos tenemos que

$$\varsigma(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \left(1 + \frac{1}{p_1^2} + \frac{1}{p_1^4} + ...\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{p_k^2} + \frac{1}{p_k^2} + ...\right) \qquad [8]$$

lo que es absurdo, ya que el primer miembro de la igualdad es un número irracional y el segundo es racional.

---

† Se puede deducir la siguiente expresión para la función indicador $\varphi(n) = n \prod_{p/n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$ donde el producto se refiere a todos los primos de la descomposición de *n*.

14ª Demostración (basada en la sucesión de Fibonacci): En esta demostración utilizaremos la conocida sucesión de Fibonacci definida en la forma $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ con $F_1 = F_2 = 1$. Para demostrar la infinitud de los números primos, necesitamos obtener dos relaciones importantes entre los números de Fibonacci. Inicialmente demostraremos, por inducción, que se cumple la siguiente relación:

Teorema: "*Siendo* F_n *el n-ésimo número de Fibonacci definido por* $F_1 = F_2 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ *entonces se cumple que* $F_{n+m} = F_n F_{m+1} + F_{n-1} F_m$, $\forall m, n \geq 1$".

Demostración: La demostración la efectuaremos por inducción sobre m. Para $m = 1$, tenemos la relación $F_{n+1} = F_n \cdot 1 + F_{n-1} \cdot 1 = F_n F_2 + F_{n-1} F_1$. Así que la expresión es cierta $\forall n$ con $m = 1$. Asumiremos que la expresión es cierta $\forall n$ con $m = M$ y demostraremos que la expresión también es cierta con $m = M + 1$.

$$\begin{aligned} F_{n+M+1} &= F_{n+M} + F_{(n-1)+M} = F_n F_{M+1} + F_{n-1} F_M + F_{n-1} F_{M+1} + F_{n-2} F_M = \\ &= F_n F_{M+1} + (F_{n-1} + F_{n-2}) F_M + F_{n-1} F_{M+1} = F_n (F_M + F_{M+1}) + F_{n-1} F_{M+1} = \\ &= F_n F_{M+2} + F_{n-1} F_{M+1} \end{aligned} \qquad [9]$$

y por tanto la proposición dada es cierta $\forall n$ con $m = M + 1$ y el teorema queda demostrado. Por otra parte, surge ahora fácilmente un importante corolario asociado a este resultado, que también se demuestra fácilmente por inducción.

Corolario1: "F_n *divide a* F_{nm} $\forall m, n \geq 1$".

Demostración: La demostración la efectuaremos por inducción sobre m. Para $m = 1$, F_n ciertamente es divisible por sí mismo. Supongamos que la proposición es cierta $\forall n$ con $m = M$. Entonces para $m = M + 1$, tenemos utilizando la proposición anterior

$$F_{n(M+1)} = F_{nM+n} = F_{nM} F_{n+1} + F_{nM-1} F_n \qquad [10]$$

Por la hipótesis de inducción F_n divide a F_{nM} y entonces la última expresión es divisible por F_n. Esto implica que F_n divide a $F_{n(M+1)}$ así que el resultado es cierto para $m = M + 1$ y el corolario está demostrado.

El segundo importante resultado sobre la sucesión de Fibonacci que nos interesa aquí es el siguiente:

$$m.c.d.(F_a, F_b) = F_{m.c.d.(a,b)} \qquad [11]$$

Para demostrarlo es útil recordar las etapas del algoritmo de Euclides junto con el corolario anterior. Supongamos $a \geq b > 0$. Recordemos que sus etapas son las siguientes:

$$\begin{aligned} a &= bq_1 + r_1 & \quad 0 &\leq r_1 < b \\ b &= q_2 r_1 + r_2 & \quad 0 &\leq r_2 < r_1 \end{aligned}$$

$$r_1 = q_3 r_2 + r_3 \qquad 0 \le r_3 < r_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$r_{n-2} = q_n r_{n-1} + r_n \qquad 0 \le r_n < r_{n-1}$$
$$r_{n-1} = q_{n+1} r_n \,. \qquad [12]$$

Denotemos ahora por d al $m.c.d.(a,b)$. Como d/a (d divide a) y d/b (d divide b) se deduce que d/r_1 (d divide r_1). Continuando las etapas del algoritmo, se obtiene que d/r_s para cada s. Así tenemos que d/r_n y por tanto $d \le r_n$. Por otra parte, recorriendo las etapas del algoritmo en sentido inverso tenemos la secuencia $r_n / r_{n-1}, \ldots, r_n / b, r_n / a$ luego r_n / d y por tanto $d \ge r_n$. Se deduce pues, una doble desigualdad, que implica $d = r_n$. Tenemos pues, las relaciones siguientes:

$$m.c.d.(F_a, F_b) = m.c.d.(F_a, F_{aq_1 + r_1}) = m.c.d.(F_a, F_{aq_1} \cdot F_{r_1+1} + F_{aq_1 - 1} \cdot F_{r_1}) \qquad [13]$$

y como F_a divide a $F_{aq_1} \cdot F_{r_1+1}$ por el corolario anterior, entonces se tiene

$$m.c.d.(F_a, F_b) = m.c.d.(F_a, F_{aq_1 - 1} \cdot F_{r_1}) \qquad [14]$$

Además, es claro que dos números de Fibonacci consecutivos son primos entre sí. Por tanto, tenemos que $m.c.d.(F_{aq_1}, F_{aq_1 - 1}) = 1$ y llegamos a la relación

$$m.c.d.(F_a, F_{aq_1 - 1} \cdot F_{r_1}) = m.c.d.(F_a, F_{r_1}) = m.c.d.(F_a, F_b) \qquad [15]$$

Repitiendo el mismo razonamiento obtenemos

$$m.c.d.(F_{r_1}, F_a) = m.c.d.(F_{r_2}, F_{r_1}) = \ldots = m.c.d.(F_{r_n}, F_{r_{n-1}}) \qquad [16]$$

y como $r_n / r_{n-1} \Rightarrow F_{r_n} / F_{r_{n-1}}$ (por el corolario anterior) $\Rightarrow m.c.d.(F_{r_n}, F_{r_{n-1}}) = F_{r_n}$. De aquí se deduce la relación buscada

$$m.c.d.(F_a, F_b) = F_{r_n} = F_{m.c.d.(a,b)} \qquad [17]$$

De esta última relación deducimos inmediatamente como corolario la existencia de infinitos números primos. Basta observar la secuencia de números de Fibonacci $\{F_{p_1}, F_{p_2}, \ldots, F_{p_n}\}$ que está formada por números primos entre sí, dos a dos.†

† Obsérvese que se cumple la relación más fuerte $m.c.d.(n,m) = 1 \Rightarrow m.c.d.(F_n, F_m) = 1$.

COMENTARIOS

Hemos podido observar una gran diversidad en las demostraciones que se han presentado sobre la infinitud de los números primos. Todas ellas se han escogido por su naturaleza de demostraciones elementales. Entre ellas hay demostraciones relativamente breves en las que sobresale su carácter puramente verificativo, como las demostraciones de Euclides, Hermite, Saidak, Odoni y Schorn. Podemos observar que estas demostraciones se limitan a verificar la infinitud de los números primos pero no aportan esencialmente mucho más a la comprensión de la distribución de los mismos. Algunas de ellas se dan en su versión de demostración indirecta, aunque como hemos notado, las cuatro se pueden reformular trivialmente hasta convertirlas en demostraciones directas.

Las demostraciones de Euclides y Hermite son muy similares. Las dos son demostraciones elementales que no recurren a otros resultados previos como a la unicidad de la descomposición de un número natural en factores primos o a otros teoremas *sofisticados*, únicamente se basan en que el menor divisor de un número natural es un número primo. La demostración de Saidak es incluso conceptualmente más simple que las dos citadas. En su argumentación, Euclides se limita a demostrar que si $\{p_1, p_2, p_3, ..., p_n\}$ es un conjunto de números primos consecutivos, entonces en el intervalo $(p_n, p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot ... \cdot p_n + 1]$ existe siempre un número primo. De hecho, se pueden hacer ligeras modificaciones del argumento de Euclides para obtener más precisión. En realidad, si $r \geq 2$ entonces el intervalo $(p_r, \prod_1^r p_r + 1]$ contiene dos números primos ya que un mismo número primo q no puede dividir simultáneamente a $\prod_1^r p_r + 1$ y a $\prod_1^r p_r - 1$ puesto que entonces tendría que dividir a su diferencia 2.†

La demostración de Euclides es muy ingeniosa y aplicable a la demostración de la infinitud de los números primos de otras clases como los números primos de la forma $4n-1$, $6n+1$, $6n+5$ y otras. A modo de ejemplo, para demostrar que existen infinitos números primos de la forma $4n-1$ podemos razonar por reducción al absurdo y suponer que existe un número finito de tales primos siendo p el mayor de ellos. Ahora

† Si $r \geq 3$, entonces el intervalo $(p_r, \prod_2^r p_i)$ contiene como mínimo $\lfloor \log_2(2r) \rfloor + 1$ números primos. Observemos que para $r = 3$ o $r = 4$ el resultado puede obtenerse directamente. Supongamos que $r \geq 5$. Observemos que $p_5 = 11 > 2 \cdot 5$ y que sólo son naturales consecutivos los primos 2 y 3, por tanto, $2r < p_r$. Entonces $\forall j / 1 \leq j \leq \lfloor \log_2(2r) \rfloor + 1$, los números $\prod_2^r p_i - 2^j$ pertenecen al intervalo $(p_r, \prod_2^r p_i)$ y son primos entre sí dos a dos. Claramente $2^j \leq 4r < 2p_r$ y de aquí se sigue que $\prod_2^r p_i - 2^j > 3p_r - 2^j > p_r$. Además $\prod_2^r p_i - 2^j$ no es divisible por p_i para $1 \leq i \leq r$ así que existe un primo $q_j > p_r$ con $q_j / \prod_2^r p_i - 2^j$. Si $j \neq k$, entonces $q_j \neq q_k$ para j ya que si $q_j / \prod_2^r p_i - 2^k \Rightarrow q_j / (2^j - 2^k)$ lo que absurdo, ya que 2 y $2^{j-k} - 1$ son estrictamente menores que p_r, que a su vez es menor que q_j y por tanto este último no puede dividir a $2^k \left(2^{j-k} - 1\right)$.

consideremos el número $N = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdots p - 1$. Como N es de la forma $4k-1$, no puede ser primo ya que p era el mayor de todos. Es claro que ningún número primo menor o igual que p divide N y por tanto sus factores primos son mayores que p. Por otra parte, no todos los factores primos de N pueden ser de la forma $4k+1$, puesto que en ese caso, su producto claramente también lo sería y evidentemente N, no lo es. Por lo tanto, algún factor primo de N ha de ser de la forma $4k-1$, lo que es absurdo. Esta contradicción demuestra el teorema. De nuevo, debemos indicar que se puede trivialmente reformular esta demostración para convertirla en una demostración de carácter directo.‡

Desgraciadamente la demostración de la infinitud de los números primos de la forma $4n+1$ no se puede efectuar mediante una extensión sencilla del argumento de Euclides. Existen varias formas elementales alternativas de demostración para este caso. A continuación expondremos brevemente una de ellas.

Para demostrar la infinitud de los números primos de la forma $4n+1$, supondremos dado un $N>1$, y en el lenguaje de las congruencias, siempre se podrá encontrar un número primo de la forma $p \equiv 1\ (mód.4)$ y mayor que N. Para ello consideremos el número $M = (N!)^2 + 1$ y sea p el factor primo menor de M que necesariamente debe ser mayor que N, puesto que claramente ninguno de los números $\{2,3,4,...,N\}$ puede ser divisor de M. Entonces tenemos que $(N!)^2 \equiv -1\ (mód.p)$ lo que nos lleva a la relación $(N!)^{p-1} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}}\ (mód.p)$ que junto con el teorema de Euler (ya comentado anteriormente en este artículo) produce $(-1)^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1\ (mód.p)$ y esto implica que $p \equiv 1\ (mód.4)$. Esto concluye la demostración.

En realidad, existen otros casos más generales de progresiones aritméticas para las que podemos encontrar demostraciones relativamente sencillas “ad hoc”.

Por otra parte, las demostraciones de Odoni y Schorn son también elementales y relativamente breves, pero su estructura es radicalmente diferente a las demostraciones de Euclides y Hermite. Las demostraciones de Odoni y Schorn se basan en construir secuencias infinitas de números naturales que sean primos dos a dos, lo que es bastante más que demostrar la infinitud de los números primos. Observemos que tampoco se basan en otros teoremas previos.

La demostración de Goldbach, también se basa en generar una secuencia infinita de números naturales primos, dos a dos, tal como la secuencia que forman los números de Fermat. En esta demostración se explicita ya la propia secuencia y no aparece de forma recursiva como en la demostración de Odoni.

‡ P. G. Dirichlet demostró en 1834 el profundo teorema que establece que si $m.c.d.(a,b)=1$ entonces la progresión aritmética $\{an+b\}$ contiene infinitos números primos. La demostración aportada por Dirichlet exigía importantes herramientas del análisis matemático. La demostración muestra que la serie $\sum_{p \equiv a (mód.m)} \frac{1}{p}$ es divergente.

Incluso la demostración basada en la sucesión de Fibonacci se basa en generar también otra secuencia infinita de números naturales primos entre sí, tal como la secuencia de los números de Fibonacci que tengan como subíndices dos números naturales que sean primos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Aparicio, E. (1993). *Teoría de los números*. Servicio editorial. Universidad del País Vasco.

[2] Baker, A. (1984). *Breve introducción a la teoría de los números*. Alianza Universidad. Versión española de Alejandro Salinero Galán.

[3] Boyer, C. B. (1992). *Historia de la Matemática*. Alianza Universidad Textos. Alianza editorial.

[4] Cilleruelo, J. & Córdoba, A. (1992). *La teoría de los números*. Biblioteca Mondadori.

[5] Collete, J. P. (1985). *Historia de las Matemáticas*. Siglo XXI de España ediciones. S.A.

[6] Davis, P.J. & Hersh, R. (1983). *Experiencia Matemática*. Madrid. Labor.

[7] Guzman de, M. (2003). *Cómo hablar, demostrar y resolver en Matemáticas*. Iniciación al método matemático. Base Universitaria. Anaya.

[8] Hardy, G. H. & Wright, E. M. (1978). *An Introduction to the Theory of Numbers*. Fifth edition. Clarendon Press. Oxford.

[9] Ibañes, M. & Ortega, T. (1997). *La demostración matemática. Clasificación y ejemplos en el marco de la Educación Secundaria.* Educación Matemática, 9(2), 65-104.

[10] Kline, M. (1992). *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días*. Tres volúmenes. Alianza editorial.

[11] Lakatos, I. (1978). *Pruebas y refutaciones*. Madrid. Alianza.

[12] López, F. & Tena, J. (1990). *Introducción a la teoría de los números primos. (Aspectos algebraicos y analíticos).* Instituto de ciencias de la educación. Universidad de Valladolid.

[13] Sáenz, C. (2001). *Sobre conjeturas y demostraciones en la enseñanza de las Matemáticas*. En M. F. Moreno et al. (eds). Investigación en educación matemática. Universidad de Almería.

[14] Vicario, V. & Carrillo, J. (2005). *Concepciones del profesor de secundaria sobre la demostración matemática. El caso de la irracionalidad de* $\sqrt{2}$. Simposio de la SEIEM en Córdoba, 2005. pp. 145-152.

[15] Villiers de, M. (1993). *El papel y la función de la demostración en Matemáticas*. Revista Epsilon 26, 15-30. Artículo aparecido en Pythagoras, 24 Nov, 1990. Traducido y publicado con la correspondiente autorización.

[16] Vinogradov, I. (1977). *Fundamentos de la teoría de números*. Editorial MIR. Moscú. Traducido del ruso.

---oooOooo---

Problemas para los más jóvenes (33)

Algunos problemas de la XVI OMCEP (Costa Rica 2008)

PJ33.1

El número de lados de un cuadrado, multiplicado por el número de vértices del cuadrado, es igual a:

A) Cuatro B) ocho C) nueve D) diez y seis

PJ33.2

¿Cuál es el polígono regular que tiene más diagonales que lados?

A) Triángulo B) Cuadrado C) pentágono D) ninguno

PJ33.3

¿Cuál de los siguientes números es divisible por 9?

A) 333 B) 444 C) 777 D) 888

PJ33.4

Si hoy es martes, ¿qué día de la semana será dentro de 31 días?

A) Martes B) Miércoles C) Jueves D) viernes

PJ33.5

El triángulo que tiene más ejes de simetría es el triángulo...

A) Escaleno B) equilátero C) rectángulo D) isósceles

PJ33.6

¿Cuántos minutos hay en un cuarto de un tercio de la mitad de una hora?

A) 2,5 B) 10 C) 5 D) 4,5

PJ33.7

Llamaremos *fechas primas* a las fechas del año en las cuales el mes y el día corresponden a números primos. Por ejemplo, el 17 de mayo (mayo es el mes 5). Lo escribimos (17;5). ¿Cuáles son la primera y la última fecha prima del año?

A) (1;1) y (12;31) B) (2;2) y (29;11) C) (2;2) y (5;12) D) (3;3) y (23;11)

PJ33.8

¿Cuántos números primos son mayores que 83 y menores que 90?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 4

PJ33.9

En el año 2007, Edna Parker, de Indiana (EEUU) e Yone Minagawa, de Fukuoka (Japón) tenían 114 años de edad y se decía que eran las mujeres de más edad del mundo. ¿Qué edad tenían cuando se inició en 1948 la revolución en Costa Rica?

A) 59 años B) 55 años C) 45 años D) 65 años

PJ33.10

¿En cuántos números de dos cifras la suma de sus dígitos es 3?

A) En 3 B) en 20 C) en 30 D) en más de 30

Problemas de nivel medio y de Olimpiadas 33

Cinco problemas del *Duelo Matemático 08*

PMO33.1

El ortocentro H de un triángulo acutángulo ABC se transforma respectivamente en los puntos A_1 ,B_1 , C_1 en las simetrías axiales cuyos ejes son los lados *a,b y c* del triángulo. Se supone que se verifican las siguientes igualdades de ángulos:

$$C_1AB_1 = CA_1B$$

$$A_1BC_1 = AB_1C$$

$$B_1CA_1 = BC_1A.$$

Demostrar que ABC es equilátero.

PMO33.2

Determinar todas las ternas *(x,y,z)* de enteros positivos tales que se verifique la igualdad

$$3+x+y+z = xyz.$$

PMO33.3

Sea ABCD un tetraedro con tres aristas mutuamente perpendiculares en el vértice D. Sea S el centro de su esfera circunscrita. Probar que el baricentro T de su cara ABC está en la recta DS.

PMO33.4

Determinar todos los enteros positivos *n* para los cuales existen enteros positivos *x,y* tales que se cumplen las dos igualdades $x+y=n^2$, $10x+y = n^3$.

PMO33.5

Sean *a,b,c* números reales. Demostrar que

$$V = 4(a^2+b^2+c^2) - ((a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2)$$

Es siempre no negativo y determiner todos los valores de *a,b,c* para los que $V = 0$.

Problemas 161-165

Problema 161

En mi barrio hay una cuadrilla de 9 chicos y chicas que, después de las clases, juegan juntos, dividiéndose cada día aleatoriamente en grupos de 3, de forma independiente a cómo se hayan dividido en días anteriores. Al empezar a jugar, cada grupo elige entre dos opciones: jugar a las tiendas o jugar al escondite, eligiéndose el juego que prefieren al menos dos de los miembros del grupo. Cada vez que un chico o chica juega a un juego, se lo pasa tan bien que ése pasa a ser su juego preferido, aunque no lo fuera antes. Durante el verano, cada uno de los chicos y chicas pasa sus vacaciones en un lugar diferente, y se les olvida cuál era su juego favorito, teniendo a la vuelta de vacaciones, cada uno de forma independiente, la misma probabilidad de preferir uno u otro juego el primer día que vuelven a jugar juntos. Después del día n-ésimo después de las vacaciones, ¿cuál es la probabilidad de que toda la cuadrilla prefiera el mismo juego?
(Propuesto por Daniel Lasaosa Medarde, Universidad Pública de Navarra, Pamplona, España).

Problema 162

Sea O el punto de intersección de las diagonales AC y BD de un cuadrilátero convexo $ABCD$. Sean I_1, I_2, I_3, I_4 los respectivos incentros de ΔOAB, ΔOBC, ΔOCD, ΔODA.

Si $I_1I_2I_3I_4$ es un paralelogramo, demostrar que $ABCD$ es un paralelogramo.

(Propuesto por Miguel Amengual Covas, Santanyí, España)

Problema 163

Se considera la sucesión (A_n), con $n\geq 1$, dada por la relación de

recurrencia

$$A_{n+1}=2A_n+\sqrt{(A_n^2+A_{n+1}^2)},$$

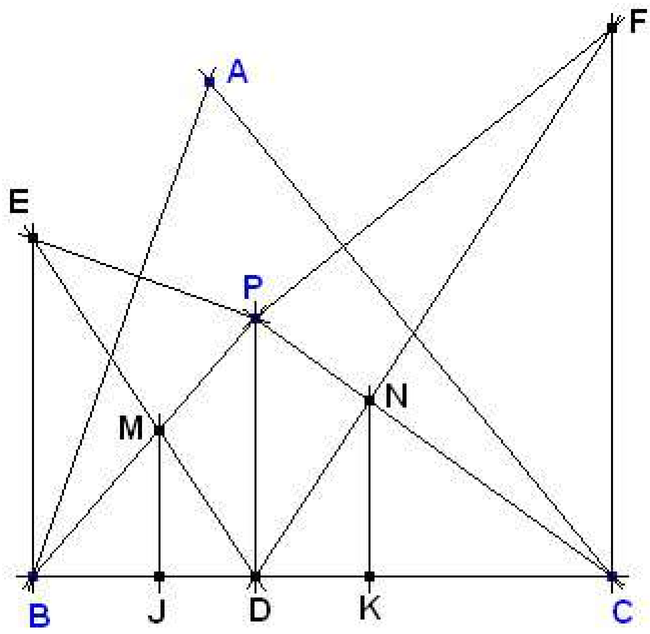
Con $A_1=1$.

i) Estudiar la convergencia de esta sucesión.
ii) Hallar el dominio de convergencia de la serie de potencias de término general $A_n x^n$.

(Propuesto por Laurentiu Modan, Bucarest, Rumania)

Problema 164

Sean *ABC* un triángulo y P un punto cualquiera de su plano. Sea *D* la proyección de *P* sobre *BC*. La perpendicular por *B* a *BC* corta a la perpendicular por *P* a *AB en E*, y la perpendicular por *C a BC* y la perpendicular por *P* a *AC* se cortan en *F.* Sean *M y N* los puntos de intersección de las diagonales de los trapecios *PDBE* y *PDCF*, y sean J y K las proyecciones de *M* y *N* sobre la recta *BC*.



Hallar, en cada caso, el lugar geométrico de los puntos *P* que cumplen

a) La recta *MN* es paralela a *BC.*

b) Los puntos *J* y *K* coinciden.

c) *D* es el punto medio de *J* y *K*.

d) El ángulo *MDN* es recto.

(*Propuesto por Francisco Javier García Capitán, Priego de Córdoba, España).*

Problema 165

El triángulo ABC es isósceles, con AB = AC. Las rectas BD (con D en el lado AC) y CH (con H en el segmento BD) lo dividen en tres triángulos, cuyos incírculos tienen el mismo radio *r*. Encontrar la relación entre *r* y la longitud de CH.

(Propuesto por Hidetosi Fukagawa, Aichi, Japón).

Problema 156, propuesto por Ovidio Furdui, Toledo (OH, USA).
Sea f una función tal que

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x), \quad \text{para } |x| < R$$

donde $T_n(x)$ es el polinomio de Taylor de grado n en 0. Hallar la suma

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}(f(x) - T_n(x)).$$

Solución por José Heber Nieto, Maracaibo, Venezuela. Supongo que en el enunciado, antes de "para $|x| < R$", falta la condición $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ u otra equivalente, ya que de lo contrario la serie propuesta podría no converger (tómese por ejemplo como f la función de Cauchy).

Entonces

$$\sum_{n=1}^{2k} (-1)^{n-1}(f(x) - T_n(x)) = \sum_{n=1}^{2k} (-1)^n T_n(x),$$

y como $T_{2r} - T_{2r-1} = f^{(2r)}(0)x^{2r}/(2r)!$ nos queda

$$\sum_{n=1}^{2k} (-1)^{n-1}(f(x) - T_n(x)) = \sum_{r=1}^{k} \frac{x^{2r}}{(2r)!} f^{(2r)}(0).$$

Ahora bien, como para $|x| < R$ se tiene

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0),$$

también se cumple

$$f(-x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} f^{(n)}(0),$$

y promediando resulta

$$\frac{1}{2}\big(f(x) + f(-x)\big) - f(0) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{x^{2r}}{(2r)!} f^{(2r)}(0) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{2k} (-1)^{n-1}(f(x) - T_n(x)).$$

Y como para $|x| < R$ se tiene $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, resulta finalmente que

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}(f(x) - T_n(x)) = \frac{1}{2}\big(f(x) + f(-x)\big) - f(0).$$

PROBLEMA 157, *propuesto por Ovidiu Furdui, Toledo (OH,USA).*

Sea k un número real positivo. Calcular

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \left\{\frac{n}{x}\right\}^k dx,$$

donde $\{a\} = a - \lfloor a \rfloor$ es la parte fraccionaria del número real a.

Solución por Daniel Lasaosa Medarde, Universidad Pública de Navarra, Pamplona, España

Hallamos en primer lugar el valor para $k = 1$. Para ello, tomemos la integral entre $\frac{1}{N}$ y 1, y dejemos que N tienda a infinito de forma independiente a n. Expresando el intervalo de integración $\left(\frac{1}{N}, 1\right]$ como la unión disjunta de subintervalos de la forma $\left(\frac{n}{m+1}, \frac{n}{m}\right]$, es claro que la parte entera de $\frac{n}{x}$ es constante en cada subintervalo, y es igual a m, con lo que

$$\int_{\frac{1}{N}}^1 \left\{\frac{n}{x}\right\} dx = \sum_{m=n}^{nN-1}\int_{\frac{n}{m+1}}^{\frac{n}{m}}\left(\frac{n}{x}-m\right)dx = n\sum_{m=n}^{nN-1}\ln\frac{m+1}{m} - n\sum_{m=n}^{nN-1}\frac{n}{m+1} =$$

$$= n\left(\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}-\ln n\right) - n\left(\sum_{m=1}^{nN}\frac{1}{m}-\ln(nN)\right).$$

Ahora bien, como cuando M tiende a infinito se tiene que

$$\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{m} = \ln M + \gamma + \frac{1}{2M} + O\left(\frac{1}{M^2}\right),$$

entonces cuando n y N tienden a infinito, se tiene que

$$\int_{\frac{1}{N}}^1 \left\{\frac{n}{x}\right\}^k dx = n\gamma + \frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{n}\right) - n\gamma - O\left(\frac{1}{N}\right),$$

que obviamente tiende a $\frac{1}{2}$ cuando n y N tienden a infinito, con lo que

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \left\{\frac{n}{x}\right\} dx = \frac{1}{2}.$$

Retomamos ahora el caso general para un valor cualquiera de k, y realizamos la división del intervalo de integración en subintervalos de la forma $\left(\frac{n}{m+1}, \frac{n}{m}\right]$, para después realizar el cambio de variable $y = \frac{n}{x} - m$, con lo que $dx = -\frac{ndy}{(y+m)^2}$ en cada intervalo, obteniéndose que

$$\int_0^1 \left\{\frac{n}{x}\right\}^k dx = \sum_{m=n}^{\infty}\int_{\frac{n}{m+1}}^{\frac{n}{m}}\left(\frac{n}{x}-m\right)^k dx = n\sum_{m=n}^{\infty}\int_0^1\frac{y^k dy}{(y+m)^2}.$$

Nótese entonces que, llamando I_m a la integral del último término, se tiene que

$$\frac{1}{(k+1)m^2} = \int_0^1\frac{y^k dk}{m^2} > I_m > \int_0^1\frac{y^k dk}{(m+1)^2} = \frac{1}{(k+1)(m+1)^2},$$

con lo que

$$\frac{n}{k+1}\sum_{m=n}^{\infty}\frac{1}{m^2} > \int_0^1\left\{\frac{n}{x}\right\}^k dx > \frac{n}{k+1}\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{1}{m^2}.$$

Esto concluye el problema, ya que por una parte se constata fácilmente que la diferencia entre las cotas superior e inferior es $\frac{1}{n(k+1)}$, que claramente tiende a cero al tender n a infinito, con lo que el límite pedido es igual al límite de cualquiera de las dos cotas, mientras que por otra parte, salvo el factor de $\frac{1}{k+1}$, las cotas no dependen de k, con lo que el límite es de la forma $\frac{A}{k+1}$, donde A es una constante que no depende de k, y por comparación con el caso $k = 1$ se encuentra fácilmente que $A = 1$. Luego el valor del límite pedido es $\frac{1}{k+1}$ para todo real positivo k.

PROBLEMA 158, *propuesto por José Hernández Santiago, Oaxaca, México.*

A, **B** y **C** son preguntados sobre el carácter de la serie

$$1 - \frac{1}{2^{2008}} + \frac{1}{3^{2008}} - \frac{1}{4^{2008}} + \dots$$

La persona **A** afirma que la serie es convergente y que su suma es un número irracional. La persona **B** concuerda con A en que es convergente, pero afirma que la suma es racional. Finalmente, el individuo **C** asegura que tanto **A** como **B** están equivocados y que la serie ni siquiera es convergente. Un cuarto individuo que pasaba por allí les recomienda solicitar el consejo de los lectores de la Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemticas.

Suponga que ellos hacen caso de esta sugerencia. Cuál sería su dictamen, estimado lector?

Solución por Daniel Lasaosa Medarde, Universidad Pública de Navarra, Pamplona, España

Demostraremos que **A** tiene razón y que las otras dos personas se equivocan. De hecho, iremos más allá y demostraremos que el valor de la suma es trascendente. Para ello, utilizaremos el siguiente resultado, relativamente conocido (ver por ejemplo por ejemplo http://planetmath.org/?op=getobj&from=objects&id=10235 para una demostración):

$$\frac{\zeta(2n)}{\pi^{2n}} = \frac{(-1)^{n-1}2^{2n-1}B_{2n}}{(2n)!},$$

donde $\zeta(x)$ es la función zeta de Riemann y B_n son los números de Bernoulli, definidos respectivamente como

$$\zeta(x) = \frac{1}{\Gamma(x)}\int_0^\infty \frac{u^{x-1}du}{e^u - 1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}, \qquad \frac{u}{e^u - 1} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_m u^m}{m!},$$

donde la segunda definición de la función zeta es conclusión de la primera cuando x es entero positivo.

Demostraremos que los números de Bernoulli son racionales, quedando entonces demostrado que $\zeta(2008)$ es un múltiplo racional no nulo de una potencia entera de π, es decir, que $\zeta(2008)$ es trascendente. La demostración de que los números de Bernoulli son racionales es relativamente sencilla por inducción, ya que se comprueba fácilmente que $B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$, y en general,

$$B_n = \left(\frac{d^n}{du^n}\frac{u}{e^u - 1}\right)\Bigg|_{u\to 0},$$

donde la notación indica que la expresión entre paréntesis ha de ser evaluada en el límite cuando u tiende a 0. Luego para todo $N \geq 2$,

$$\sum_{n=0}^{N}\binom{N}{n}B_n = \sum_{n=0}^{N}\binom{N}{n}\left(\left(\frac{d^n}{du^n}\frac{u}{e^u - 1}\right)\left(\frac{d^{N-n}e^u}{du^{N-n}}\right)\right)\Bigg|_{u\to 0} =$$

$$= \left(\frac{d^N}{du^N}\frac{ue^u}{e^u - 1}\right)\Bigg|_{u\to 0} = \left(\frac{d^N u}{du^N}\right)\Bigg|_{u\to 0} + \left(\frac{d^N}{du^N}\frac{u}{e^u - 1}\right)\Bigg|_{u\to 0} = 0 + B_N,$$

de donde para $N \geq 2$, se cumple $\sum_{n=0}^{N-1}\binom{N}{n}B_n$. Podemos entonces expresar cada B_{N-1} para $N \geq 2$ como combinación lineal, con coeficientes racionales, de los B_n con $n \in \{0, 1, \dots, N-2\}$, y al ser B_0 y B_1 racionales, todos los B_n son racionales, con lo que concluye la demostración de que $\zeta(2008)$ es trascendente. Ahora bien, llamando S a la suma que se está estudiando, se tiene que

$$\zeta(2008) - S = \frac{2}{2^{2008}}\left(1 + \frac{1}{2^{2008}} + \frac{1}{3^{2008}} + \dots\right) = \frac{2\zeta(2008)}{2^{2008}},$$

$$S = \frac{2^{2008}-2}{2^{2008}}\zeta(2008),$$

de donde S es un múltiplo racional de $\zeta(2008)$, y por lo tanto también trascendente.

Problema 159, propuesto por José Luis Díaz Barrero, Barcelona, España. Calcular la suma

$$\frac{19}{105}+\frac{13}{315}+\frac{67}{3465}+\cdots+\frac{4n^2+16n+19}{16n^4+128n^3+344n^2+352n+105}+\cdots$$

Solución por José Heber Nieto, Maracaibo, Venezuela.

Como $16n^4+128n^3+344n^2+352n+105=(2n+1)(2n+3)(2n+5)(2n+7)$ se obtiene fácilmente la siguiente expansión en fracciones simples del término general de la serie:

$$R_n=\frac{1}{4(2n+1)}-\frac{1}{4(2n+3)}+\frac{1}{4(2n+5)}-\frac{1}{4(2n+7)}.$$

Pero

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\cdots=1$$

y análogamente

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+5}-\frac{1}{2n+7}\right)=\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{9}+\frac{1}{9}-\cdots=\frac{1}{5},$$

por lo tanto la suma buscada es

$$\sum_{n=0}^{\infty}R_n=\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{5}\right)=\frac{3}{10}.$$

Problema 160, *propuesto por José Luis Díaz Barrero, Barcelona, España.*

Sea F_n el n–ésimo número de Fibonacci, definido por

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1, \text{ y para todo } n > 2,\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

Demostrar que

$$\frac{F_n^2(F_{n+2}+2F_{n+1})+F_{n+1}^2(F_{n+2}+F_n)}{2(F_n^3+F_{n+1}^3)+3F_nF_{n+1}F_{n+2}}<1.$$

Solución de Bruno Salgueiro Fanego, Viveiro, Lugo.

Sean $n \geq 0$, $a = F_n$, $b = F_{n+1}$ y $c = F_{n+2}$. Por definición, $c = F_{n+2} = F_{n+1} + F_n = b + a$. Además, $\{F_n\}$ es creciente, de donde $0 = F_0 \leq F_n = a$ y $0 < F_1 \leq F_{n+1} = b$, con lo cual $0 < 2b^3 \leq 2(a^3+b^3)+3abc$, siendo entonces la desigualdad a demostrar

$$\frac{a^2(c+2b)+b^2(c+a)}{2(a^3+b^3)+3abc}<1 \Leftrightarrow a^2(c+2b)+b^2(c+a)<2(a^3+b^3)+3abc$$

$$\Leftrightarrow a^2(a+3b)+b^2(2a+b)<2(a^3+b^3)+3ab(a+b)$$

$$\Leftrightarrow 0<2a^3+2b^3+3a^2b+3ab^2-a^3-3a^2b-2ab^2-b^3$$

$\Leftrightarrow 0 < a^3+b^3+ab^2$, que es cierta porque $0 < b^3 \leq a^3+b^3+ab^2$.

Nota: La demostración anterior realmente prueba un resultado más general, que es el siguiente:

Sean a y b números reales tales que $0 \leq a$ y $0 < b$, y sea $c = a + b$. Entonces

$$\frac{a^2(c+2b)+b^2(c+a)}{2(a^3+b^3)+3abc}<1.$$

Es más, si, bajo las mismas hipótesis, se analiza con algo más de detalle, se ve que si en vez de la desigualdad que se ha obtenido al final, $0 < a^3+b^3+ab^2$, se hubiese obtenido la $0 < b^3$, el resultado se seguiría dando; esto ocurre si por ejemplo en lugar de $a^2(c+2b)+b^2(c+a)=a^2(a+3b)+b^2(2a+b)$ en el numerador se coloca $a^2(2a+3b)+b^2(3a+b)=a^2(b+2c)+b^2(2a+c)$, dando origen a este otro resultado, aún más general:

Sean a y b números reales tales que $0 \leq a$ y $0 < b$, y sea $c = a + b$. Entonces

$$\frac{a^2(b+2c)+b^2(2a+c)}{2(a^3+b^3)+3abc}<1,$$

el cual sugiere la siguiente posible reformulación del problema:

Sea F_n el n–ésimo número de Fibonacci, definido por

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1, \text{ y para todo } n > 2,\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

Demostrar que

$$\frac{F_n^2(2F_{n+2}+F_{n+1})+F_{n+1}^2(F_{n+2}+2F_n)}{2(F_n^3+F_{n+1}^3)+3F_nF_{n+1}F_{n+2}}<1.$$

Comentario de páginas web 33

Un foro peruano de geometría:

http://forogeometras.com

Creado a iniciativa de Edson Laura Gálvez, que es el autor de la animación sobre un problema de Stanley Rabinowitz que se publicó en uno de los números de la Revista, y con ayuda de varios colegas suyos, este foro peruano está especializado en problemas de Geometría, plana y del espacio. Con la globalización que tanto favorece Internet, en el foro hay, lógicamente, usuarios de todo el mundo, y no es raro ver intervenciones de Italia e incluso de Turquía, que han llevado a los administradores a subir un diccionario Inglés-Turco...

Es una interesante iniciativa, y desde aquí animo a todos los amantes de la geometría a que visiten el foro y, eventualmente, se registren en él.

Francisco Bellot Rosado

Valladolid, noviembre de 2008

<u>Reseña de libros (33)</u>

Dos títulos recientemente publicados: *10 matemáticos, 100 problemas (O.B.M.)* y *Sacred Mathematics (Japanese Temple Geometry), de H.Fukagawa y T. Rothman.*

1) *"10 matemáticos, 100 problemas"*

Una idea de Juan Carlos Toscano, de la O.E.I., se ha plasmado, con ocasión de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática, celebrada en Salvador de Bahía el pasado mes de septiembre, en lo que el coordinador de la obra, Prof. Eduardo Wagner, llama *un libro de Matemáticas diferente de todos los demás.*

En efecto, hace bastante tiempo surgió la idea de pedir, a 10 matemáticos involucrados en la Olimpiada, que enviasen "sus 10 problemas favoritos", para ser publicada la recopilación en forma de libro. Con más o menos retraso, según las posibilidades y disponibilidad de cada uno, enviamos nuestras colaboraciones, que ahora han visto la luz, en la obra que comentamos, gracias a la Olimpiada Brasileña de Matemática. En realidad son más de 100 problemas, porque varios de nosotros enviamos más de 10…

Los problemas están ordenados por orden alfabético de los países, de modo que la lista empieza por Argentina (Patricia Fauring), y sigue con Brasil (Gustavo Tamm de Araújo Moreira), Colombia (María Falk de Losada), El Salvador (Carlos Canjura Linares), España (Francisco Bellot Rosado), México (José Antonio Gómez Ortega), Perú (Enrique Valeriano Cuba), Portugal (Joana Maria da Silva Teles Correia), Uruguay (Ariel Affonso), y finaliza con Venezuela (Rafael Sánchez Lamoneda).

El trabajo de organización de Eduardo Wagner ha sido excelente, y es curioso que, si no me equivoco, no hay ningún problema repetido en la recopilación, lo cual tampoco hubiera tenido que sorprender, porque a todos nos gustan los buenos problemas…

Aunque pueda sonar a inmodestia, siendo yo uno de los co-autores, creo sinceramente que es una obra que no debería faltar en la biblioteca de ningún problemista, sea o no aficionado a las Olimpiadas.

2) ***Sacred Mathematics (Japanese Temple Geometry), de H.Fukagawa y T. Rothman.***

La editorial Princeton University Press acaba de publicar la obra *Sacred Mathematics (Japanese Temple Geometry)*, de Hidetosi Fukagawa (probablemente el mejor conocedor de la Geometria del SanGaku) y Tony Rothman, con un prefacio de Freeman Dyson.

Se trata de una lujosa edición de 348 páginas, que se puede conseguir a través de Amazon, y a un precio realmente asequible, teniendo en cuenta el tamaño del libro (21x26 cm), la extraordinaria calidad del papel y de las numerosas ilustraciones y reproducciones, y, naturalmente, los fantásticos problemas con sus soluciones que se incluyen en él.

El propio Hidetosi Fukagawa, amigo del que suscribe desde hace muchos años, recomendó la inclusión de uno de los problemas del libro en la sección de Problemas de la REOIM, cosa que hemos hecho en este volumen, con el número 165. La solución del problema en el libro es la original japonesa del siglo XIX, y Fukagawa se pregunta si alguno de los lectores de la REOIM encontrará alguna solución más simple.

Resumimos los títulos de los 10 capítulos de que consta la obra:

1) Japan and Temple Geometry
2) The Chinese foundation of Japanese mathematics
3) Japanese Mathematics and mathematicians of the Edo period
4) Easier Temple Geometry problems
5) Harder Temple Geometry problems
6) Still harder Temple Geometry problems
7) The travel diary of mathematician Yamaguchi Kanzan
8) East and West
9) The mysterious *Enri*
10) Introduction to inversion

Será, sin duda, difícil superar el esfuerzo de los autores para acercar al mundo occidental la matemática tradicional japonesa, en particular la geometría de las tabletas de madera (Sangaku), colgadas en los templos para honrar a los dioses y glorificar a sus autores.

Francisco Bellot Rosado

Valladolid, noviembre 2008

Andrés Zavrotsky 1904 – 1995
Venezuela

“...dicen que es el quinto matemático del mundo...”
Comentario al pasar

Se conocen pocos datos de la vida privada del Dr. Zavrotsky, que él mismo mantenía en secreto y sus amigos de Mérida (Venezuela) han conservado así. Nació en San Petersburgo en 1904. En 1947 comenzó su actividad como Profesor de la Universidad Central de Venezuela, en Caracas; de 1944 a 1947 fue matemático del Servicio de Actuariado y jefe de la sección de Estadística en el Instituto Venezolano de Seguros Sociales; pasando en 1952 a la Universidad de los Andes, en Mérida, donde permanecería el resto de su vida. Se jubiló en la Universidad en 1974, pero siguió trabajando hasta el último día de su vida.

Durante su permanencia en Caracas trabó amistad con Francisco José Duarte, eminente matemático venezolano.

Zavrotsky era un hombre muy culto, con una sólida formación científico-humanista, políglota : hablaba ruso (del que, por alguna razón, no quería hacer gala), un excelente español (corregía a nativos y extranjeros sobre su correcto uso), francés, inglés, japonés, y según él mismo, *entendía el alemán.*

Publicó entre 1945 y 1983 su colección de tablas de ecuaciones de tercero y quinto grado *(Thesaurus equationum)*; según él mismo comentaba, el manuscrito original lo perdió cuando el barco de pasajeros en que viajaba fue torpedeado y hundido, al final de la segunda guerra mundial ; era proverbial su prodigiosa facilidad para el cálculo mental : se decía que conocía de memoria los logaritmos de *todos* los números; y se decía también que había hecho los cálculos para el último tramo del teleférico de Mérida (1958), que es el más alto y largo del mundo.

En 1961 patentó un dispositivo para calcular el máximo común divisor de dos enteros cualesquiera.

En 1952, con Fausto González, realizó la película de animación *El teseracto o Hipercubo,* con objeto de “ilustrar” la cuarta dimensión.

A partir de 1974, tras su jubilación, se dedicó a enseñar en su casa, gratuitamente, a niños de primaria y jóvenes de bachillerato. Nunca permitió que se le rindieran homenajes. En 1983 la Asociación de Profesores de la Universidad de los Andes quiso ofrecerle una placa de reconocimiento. El Dr. Zavrotsky renunció a ella. En su Memorandum de renuncia, Zavrotsky recuerda que desde 1967, en que se produjo un asalto contra el Aula Magna de la Universidad, asalto que nunca fue castigado, se veía incapacitado para recibir distinción alguna. (La Junta Directiva de la Asociación de Profesores solicitó de todos sus miembros abstenerse de acudir a todo acto académico hasta que se aplicaran las sanciones a los asaltantes).

El Dr. Zavrotsky también se interesó por la geografía de la región de Mérdia, que recorrió extensamente, y por fenómenos naturales extraordinarios como *El Relámpago del Catatumbo.*

Murió en Mérida, el 26 de diciembre de 1995.

Alfonso Nápoles Gándara 1897 – 1992
México

**No importa que ustedes olviden el nombre del teorema
Y en qué consiste; para estudiarlo entendieron y ejercitaron el razonamiento. Ese ejercicio intelectual es el que deja huella.
A.Nápoles a sus alumnos**

Nació en Cuernavaca, Morelos. En 1910 ingresó en la Escuela nacional Preparatoria (que incluía la secundaria), y asistió a los cursos en plena tormenta revolucionaria. En 1916 empezó los estudios en la Escuela nacional de Ingenieros. Sustituyó a Sotero Prieto como profesor de dicha escuela en 1921, a propuesta de éste. Allí permaneció dando clases hasta 1946. En 1930 fue profesor en la Escuela de Altos Estudios, y en 1939 participó en la fundación de la Escuela Normal Superior.

Una fecha clave en su carrera es el año 1930, en que consigue la primera beca para un matemático mexicano para estudiar en el Massachussets Institute of Technology, de la Fundación Guggenheim. En el MIT , de 1930 a 1932, se examinó de 14 cursos semestrales de categoría A (para graduados), no tratados en México antes de 1932, obteniendo en 11 de ellos la calificación máxima (H, equivalente a la Matrícula de Honor). En 1934 contribuye a crear la faculatd de Ciencias Físico-Matemáticas, e invita al Prof. Dirk J. Struik (del MIT) a dictar seminarios en la Academia de Ciencias. En 1940 se le concede el doctorado en Matemáticas por la Universidad Nacional. Fue promotor, en 1942, del primer Congreso Nacional de Matemáticas; y Presidente de la Sociedad Matemática Mexicana en los períodos 1943 – 1955 y 1957 – 1961, y a partir de esta última fecha, Presidente honorario vitalicio. En 1965 es nombrado investigador emérito. El destino de las Matemáticas mexicanas estuvo en sus manos durante al menos treinta años. Murió el 11 de noviembre de 1992.

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI

Número

34

Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática
ISSN 1698-677X

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

Número 34 (mayo - junio 2009)
ISSN – 1698-277X

Artículos, notas y lecciones de preparación olímpica (34)

La columna de Andy Liu: Aventuras en el Monte Olimpo (1)

José Manuel Rodríguez Caballero: *Demostraciones trigonométricas de la existencia de infinitos números primos.*

Francisco Javier García Capitán: *Lectura atenta del libro "College Geometry", de Nathan Altshiller Court (1).*

Problemas para los más jóvenes (34)

Presentamos 5 problemas del grado 8, de la Olimpiada de Rusia 2007 (Ronda de distrito).

Problemas de nivel medio y de Olimpiadas (34)

Problemas propuestos: presentamos 5 problemas de la Olimpiada de Irán 2007.

Soluciones a los problemas de nivel medio y de Olimpiadas del vol. 33 : Jesús Álvarez Lobo ha enviado soluciones a los problemas 33.2, 33.4 y 33.5

Daniel Lasaosa Medarde ha enviado soluciones a todos los problemas de nivel medio y de Olimpiadas del vol. 33. Presentamos sus soluciones.

Problemas propuestos:

Problemas (34)

Observación previa del editor

Problemas resueltos:

Problema 160. Presentamos una solución y generalización de Jesús Álvarez Lobo, Oviedo, España.

Problema 161. (Ver la observación previa del editor). Hasta la fecha solamente se ha recibido la solución del proponente, por lo que posponemos la publicación de la solución a este problema un cierto tiempo, a la espera de otras soluciones.

Problema 162. Recibidas soluciones de Raúl A. Simón Eléxpuru, Santiago, Chile; Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, España; y el proponente. Presentamos la solución de Lasaosa.

Problema 163. Recibidas soluciones con correcciones al enunciado de Jesús Álvarez Lobo, Oviedo, España; Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, España; y Bruno Salgueiro Fanego, Vivero, España. Presentamos la solución de Lasaosa. Se han recibido, además, dos soluciones incorrectas.

Problema 164. El problema sigue abierto. Se han recibido soluciones parciales, por lo que animamos a los lectores a que continúen buscando soluciones.

Problema 165.

Nota del editor

El Prof. Hidetosi Fukagawa me sugirió que incluyera uno de los problemas de su libro *Sacred Geometry* (v. comentario en REOIM, vol.33), a fin de que los lectores encontrasen soluciones más simples que la tradicional japonesa. El enunciado del problema 165, redactado por el editor, es un caso más general de aquél, que ha resultado mucho más difícil y cuyo análisis no parece estar terminado, al menos en opinión del que suscribe. El problema se considera abierto.

Problemas propuestos 166-170

Comentario de libros y páginas web (34)

250 enlaces a páginas de Matemáticas

Un amable colega rumano ha hecho llegar al editor un documento en pdf en el que se incluyen 250 enlaces a páginas web de matemáticas y concursos de problemas. Aunque algunos de ellos ya no están activos, publicamos aquí este documento, con la esperanza de que resulte útil a los lectores de la REOIM.

Divertimentos matemáticos (34)

Otras dos biografías breves de matemáticos iberoamericanos: Emiliano Aparicio Bernardo (España + Rusia) y Enzo R. Gentile (Argentina).

LA COLUMNA DE ANDY LIU (1)

Es un verdadero privilegio para la REOIM contar entre sus colaboradores con el Profesor Andy Liu, conocido y amigo del editor desde hace muchos años, y figura internacional en el campo de la resolución de problemas y de las competiciones matemáticas. Los problemas de su columna aparecerán propuestos, posponiendo sus soluciones hasta que, o bien los lectores las envíen, o se incluyan las de Andy en algún número posterior. En este número 34 de la REOIM iniciamos la columna de Andy Liu con su primera colaboración.

Aventuras en el Monte Olimpo

Intensidad de queja

Pierre de la Fontaine vino de su Canadá natal a estudiar el codiciado Certificado Griego de Esclarecimiento, a la sombra del mítico Monte Olimpo. Durante su estancia en Grecia, quiso empaparse de la cultura local. Como no era muy bueno en el aspecto físico, fue al Balneario-Spa del Monte Olimpo para ponerse en forma. Estaba decidido a ir todos los días hasta que resultase lesionado, lo que ocurriría, como muy tarde, el día 361 del año. En ese caso, dejaría de ir el resto del año.

La diosa menor Hygeia regentaba el Balneario. Ofreció a Pierre dos posibilidades. En el Plan A, Pierre debería pagar una tarifa, válida para un año, de 380 dracmas. En el Plan B, pagaría una tarifa diaria de 20 dracmas.

Pierre decidió optar por el plan A, pero los Dioses estaban en su contra. Resultó lesionado el primer día. Si hubiera elegido el Plan B, sólo habría gastado 20 dracmas. Dividió lo que había gastado en realidad por lo que hubiera gastado en el otro plan, y decidió llamar al cociente su *Intensidad de queja.* Ese valor era 380/20 = 19. Comunicó su queja a los Dioses con su intensidad calculada, pero sin ningún efecto.

Al año siguiente, se cambió al Plan B, y esta vez permaneció sin lesionarse hasta el día 361º. Su gasto total fue de 7220 dracmas, en lugar de las 380 que se hubiera gastado en el Plan A. De nuevo, su intensidad de queja fue 7220/380 = 19. Los Dioses se cansaron de sus quejas de alta intensidad, y le dieron un ultimátum. Si en sus quejas futuras, la intensidad era mayor o igual que 2, resultaría fulminado por el rayo de Zeus. Sabiendo ya cómo cualquiera de los Planes acabarían fulminándole, Pierre decidió, cuando volvió al Balneario – Spa el tercer año, pagar la tarifa B por un cierto número de días, y luego la tarifa A por el resto del año.

¿Podrá Pierre evitar los efectos del rayo de Zeus, de esta forma, y durante cuántos días tendría que pagar la tarifa B?

DEMOSTRACIONES TRIGONOMÉTRICAS DE LA EXISTENCIA DE INFINITOS NÚMEROS PRIMOS

JOSÉ MANUEL RODRÍGUEZ CABALLERO

Estudiante de 3er año de lic. Matemática

Los entes precursores de las funciones trigonométricas se remontan al Antiguo Egipto y Babilonia, y surgieron en un contexto puramente geométrico, como respuesta a problemas astronómicos. En el siglo XVIII, gracias a los trabajos de L. Euler, se comienzan a tratar a los conceptos trigonométricos de seno, coseno, etc. como funciones propiamente dichas, e independientes de cualquier consideración geométrica, a lo cual se debe que actualmente estén vinculados con prácticamente todas las ramas de la Matemática.
En la Teoría Analítica de los Números, y en particular, en el difícil campo de los números primos, estas funciones, relacionadas con la exponencial por vía de la unidad imaginaria($i = \sqrt{-1}$), fueron la clave para la demostración de I. Vinográdov de la Conjetura Débil de Goldbach(todo número impar a partir de 5 es la suma de como máximo tres primos), para números naturales suficientemente grandes.
En la presente nota vamos a exponer dos nuevas pruebas del conocido hecho de que existen infinitos números primos, basadas en las funciones trigonométricas, y en especial, en la propiedad de periodicidad de las mismas.

Teorema.(Euclides) *Existen infinitos números primos.*

■ **Demostración 1.**(del autor) Sea $\mathbb{P}$ el conjunto de los números primos, supongamos que es finito, y llamemos N al producto de sus elementos. Para cada $p \in \mathbb{P}$, sabemos que la función de variable real $x \longrightarrow \mathsf{sen}\, \frac{\pi x}{p}$ es $2p$-periódica, luego, es también $2N$-periódica. Definimos la siguiente función de variable real:

$$f(x) := \prod_{p \in \mathbb{P}} \mathsf{sen}\, \frac{\pi x}{p}$$

Como f es el producto de funciones $2N$-periódicas, es también una función $2N$-periódica. Notemos que para cada $n \in \mathbb{Z}$, si $|n| > 1$, entonces $f(n) = 0$, porque n tiene algún divisor primo. Consecuentemente $f(1) = f(2N+1) = 0$, luego, para algún $p \in \mathbb{P}$ concluimos que $\mathsf{sen}\, \frac{\pi}{p} = 0$, lo cual es absurdo, puesto que $0 < \frac{\pi}{p} < \pi$. Por lo tanto, existen infinitos números primos. □

Uno de los objetivos de demostrar por diferentes vías un mismo resultado consiste en ver la relación de este hecho con las demás partes de la Matemática. A continuación mostraremos como a partir de las *funciones enteras*(nombre por el que se conocen en Análisis Complejo a los 'polinomios' de grado infinito) se puede probar también que hay infinitos números primos, sin necesitadad de usar que $\operatorname{sen} \frac{\pi}{p} \neq 0$.

Definición. Sea $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, $n = p_1 p_2 ... p_r$ en su factorización canónica, y en particular $r = 0$ cuando $n = 1$. Definimos la *función de Möebius* $\mu : \mathbb{Z}_{\geq 1} \longrightarrow \{-1, 0, 1\}$ mediante $\mu(n) = (-1)^r$, si $p_1, p_2, ..., p_r$ son distintos dos a dos(incluyendo el caso $r = 0$), y $\mu(n) = 0$ de haber al menos dos iguales.

■ **Demostración 2.**(del autor) Supongamos que hay sólo una cantidad finita de números primos y sea N el producto de ellos. Para cada $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, la función de variable compleja $z \longrightarrow \frac{n}{\pi z} \operatorname{sen} \frac{\pi z}{n}$ es entera, tiene todos sus ceros simples, y precisamente son los elementos de $n\mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Definimos siguiente función de variable compleja:

$$f(z) := \prod_{n=1}^{N} \left(\frac{n}{\pi z} \operatorname{sen} \frac{\pi z}{n} \right)^{\mu(n)}$$

Aplicando el *Principio de Inclusiones y Exclusiones* al conjunto de los ceros de cada $z \longrightarrow \frac{n}{\pi z} \operatorname{sen} \frac{\pi z}{n}$ en el producto anterior, obtenemos que f es entera, tiene todos sus ceros simples, y precisamente son los números enteros no divisibles entre ningún número primo, o sea $\{-1, 1\}$, luego, $f(z) = (1 - z^2)e^{g(z)}$, para alguna función entera g, consecuentemente, tiene lugar la siguente identidad:

$$\prod_{n=1}^{N} \left(\operatorname{sen} \frac{\pi z}{n} \right)^{\mu(n)} = \frac{\pi^M}{L} z^M (1 - z^2) e^{g(z)}$$

donde $M := \sum_{n=1}^{N} \mu(n)$ y $L := \prod_{n=1}^{N} n^{\mu(n)}$.

Observemos que para cada n libre de cuadrados, la función de variable compleja $z \longrightarrow \operatorname{sen} \frac{\pi z}{n}$ es $2N$-periódica, y por lo tanto, es $2N$-periódico el miembro izquierdo de la igualdad anterior, no siéndolo su correrspondiente miembro derecho(porque en caso contrario tendría infinitos ceros). Por redution ad adsurdum, concluimos que existen infinitos números primos. □

Facultad de Matemática y Ciencias de la Computación. Universidad de La Habana
E-mail address: joserodriguez@lab.matcom.uh.cu

Catorce problemas del *Court*

Francisco Javier García Capitán

11 de febrero de 2009

1. Introducción

Stephen Hawking fue avisado de que su libro *Historia del Tiempo* tendría la mitad de ventas por cada ecuación que incluyera en el libro. En relación con los problemas de Geometría, yo creo las soluciones más bellas son aquellas que no usan ninguna ecuación o fórmula, o incluso que no necesitan letras que nombren a los elementos que intervienen en la misma.

A este tipo de soluciones se presta el método analítico para resolver problemas geométricos. Hacemos razonamientos sobre la figura o solución que se busca y de ella deducimos una construcción o forma de resolver el problema. En muchos casos, no necesitamos efectuar prácticamente ningún cálculo para escribir la solución.

Presentamos aquí las soluciones de los problemas propuestos en la sección "General Method of Solution of Construction Problems" del libro *College Geometry* de Nathan Altshiller-Court.

De estos problemas presentaremos:

1. Un análisis, en el que estudiaremos la figura que se busca para determinar en ella alguna propiedad que nos permita llegar a ella a partir de los datos del problema.

2. Una construcción, que detalla los pasos a seguir para llegar a la solución.

3. Una discusión, que determina en qué casos el problema tiene solución y cuántas soluciones tiene en cada caso.

Aunque pueda parecer contradictorio, las soluciones de los problemas que siguen están escritas no para ser leídas, sino sólo por el placer de escribirlas. Se recomienda al lector que, en cuanto le sea posible, deje de serlo, y pase de leer las soluciones a escribir las suyas propias, y será en ese momento cuando obtenga el máximo provecho y satisfacción.

Usaremos el siguiente código de colores en las figuras: en azul, los datos; en negro, los cálculos intermedios; y en rojo, la solución.

2. Los problemas

1. Trazar una recta por un punto dado que forme ángulos iguales con los lados de un ángulo dado.

2. Trazar, por un punto dado, una recta, de manera que dos rectas paralelas dadas determinen sobre ella un segmento de longitud dada.

3. Trazar dos cuerdas iguales por uno de los puntos de intersección de dos circunferencias iguales, una en cada circunferencia, y formando un ángulo dado.

4. Por un punto dado de una circunferencia trazar una cuerda cuya longitud sea el doble que la distancia que la separa del centro de la circunferencia.

5. Hallar un punto sobre la prolongación de un diámetro dado de una circunferencia tal que las tangentes trazadas desde este punto sean iguales al radio de la circunferencia.

6. Trazar, con centro en un punto dado, una circunferencia que biseque a una circunferencia dada, es decir, tal que la cuerda común sea un diámetro de la circunferencia dada.

7. Trazar una circunferencia por dos puntos dados de forma que la cuerda común con una circunferencia dada sea paralela a una recta dada.

8. Construir un paralelogramo tal que tres de los puntos medios de sus lados son tres puntos dados.

9. Hallar, sobre un cateto de un triángulo rectángulo, un punto equidistante de la hipotenusa y del vértice del ángulo recto.

10. Trazar, con centros dos puntos dados, dos circunferencias iguales tales que una de sus tangentes comunes

    a) pasen por un tercer punto dado.

    b) sea tangente a una circunferencia dada.

11. Por un punto dado, trazar una recta que intercepte a dos circunferencias iguales dadas en dos cuerdas iguales.

12. Dada una circunferencia situada entre dos rectas paralelas, trazarle una tangente que intercepte a las dos rectas paralelas en un segmento de longitud dada.

13. Construir un triángulo rectángulo dados la hipotenusa y la distancia del punto medio de la hipotenusa a un cateto.

14. Construir un triángulo conociendo una altura y los circunradios (es decir, los radios de las circunferencias circunscritas) a los dos triángulos en que esta altura divide al triángulo buscado.

3. Las soluciones

1. Trazar una recta por un punto dado que forme ángulos iguales con los lados de un ángulo dado.

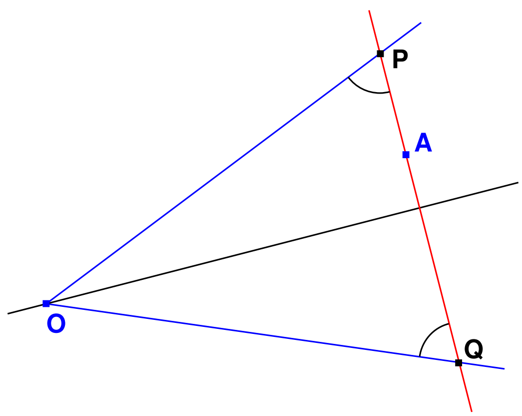


Figura 1

Análisis: Sea, como en la Figura 1, A el punto dado. Si la recta buscada forma ángulos iguales con los lados del ángulo dado, el triángulo OPQ formado por ambos será isósceles. Deducimos entonces que la recta buscada debe ser perpendicular a la bisectriz interior del ángulo dado.

Construcción: Bastará trazar por A una perpendicular a la bisectriz interior del ángulo dado.

Discusión: Para que el problema tenga solución es necesario que la perpendicular a la bisectriz interior por el punto A corte a los lados del ángulo. En consecuencia, de los semiplanos determinados por la bisectriz exterior del ángulo dado, el punto A deberá estar en aquél que contenga a los lados del ángulo. Así, el problema no tendría solución.

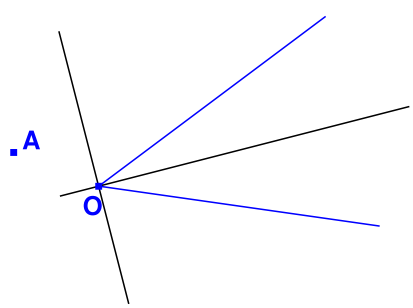


Figura 2

2. Trazar, por un punto dado, una recta, de manera que dos rectas paralelas dadas determinen sobre ella un segmento de longitud dada.

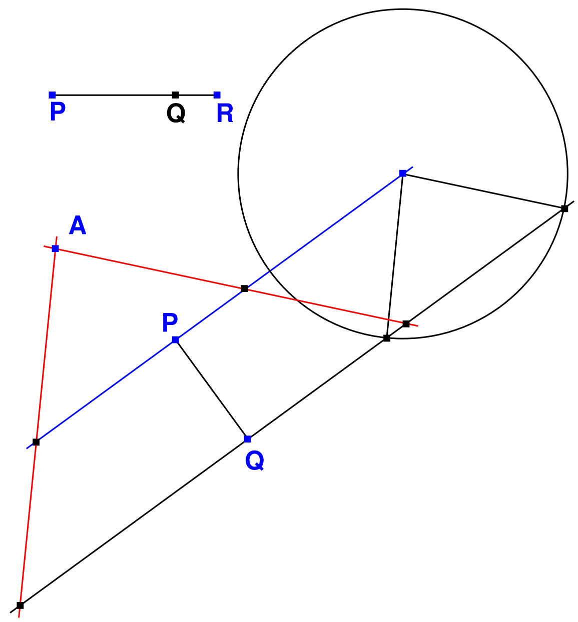


FIGURA 3

ANÁLISIS: En la Figura 3 tenemos el punto dado A, dos rectas paralelas cuya distancia está dada por los puntos P y Q sobre ellas, y una longitud dada $a = PR > PQ$. Observamos que la longitud del segmento interceptado por las dos rectas paralela para una recta cualquiera que pase por A será invariable si cambiamos esta recta por cualquier otra paralela a ella.

CONSTRUCCIÓN: Trazamos, con centro en cualquier punto de una de las rectas paralelas dadas, una circunferencia con radio la longitud dada. En general, esta circunferencia cortará a la otra recta paralela dada en dos puntos, y estos puntos determinan con el centro dos segmentos de la longitud dada. Ahora bastará trazar paralelas por el punto dado a estos segmentos para obtener dos rectas que son las soluciones del problema.

DISCUSIÓN: Las dos soluciones mencionadas se convierten en una sola si la longitud dada es igual a la distancia que separa las dos rectas paralelas dadas, y no habrá ninguna solución si la longitud dada es menor a la distancia entre las dos rectas paralelas dadas.

3. Trazar dos cuerdas iguales por uno de los puntos de intersección de dos circunferencias iguales, una en cada circunferencia, y formando un ángulo dado.

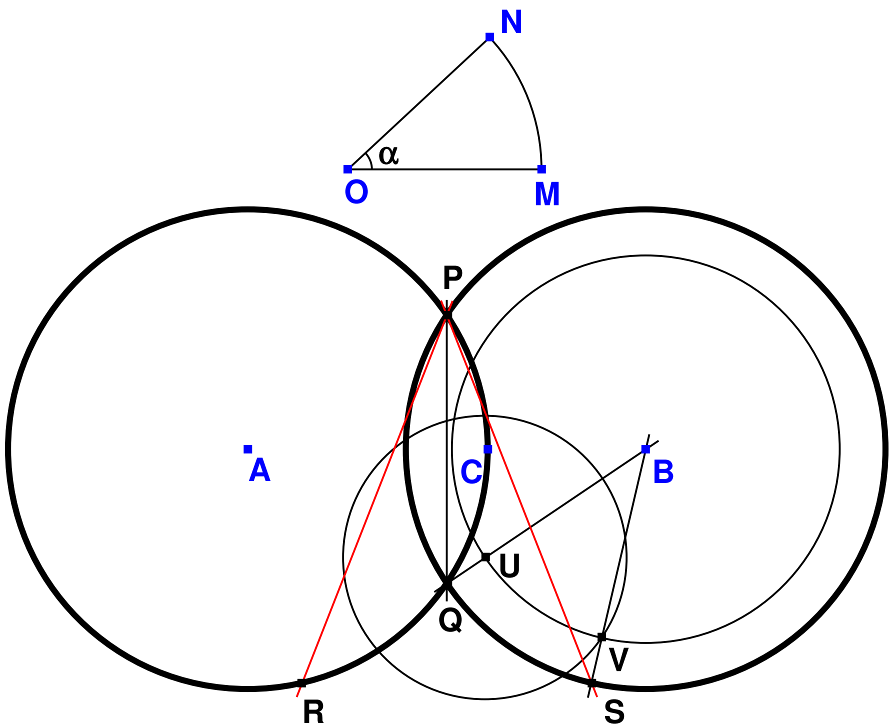


Figura 4

Análisis: En la Figura 4 tenemos dos circunferencias iguales (A) y (B) que se cortan en P y Q. Hemos construido las cuerdas PR y PS formando el ángulo dado $\angle RPS = \alpha$. Observamos que el ángulo inscrito QPW será la mitad del ángulo central QBW, por lo que será suficiente construir un ángulo QBW igual al dado.

Construcción: Dado el ángulo $\alpha = \angle MON$ (con $OM = ON$), trazamos una circunferencia con centro B y radio OM que corta al segmento BQ en U. Ahora con centro en U trazamos un arco con radio MN que corta en V a esa circunferencia con centro en B y radio OM. La intersección de la recta OV con la circunferencia dada de centro B nos da el punto S sobre ella. Si S es el punto simétrico de S respecto de la recta PQ tendremos que $\angle RPS = 2\angle QPS = \angle QBS = \angle UBV = \angle MON = \alpha$.

Discusión: La construcción será posible en todos los casos.

4. Por un punto dado de una circunferencia trazar una cuerda cuya longitud sea el doble que la distancia que la separa del centro de la circunferencia.

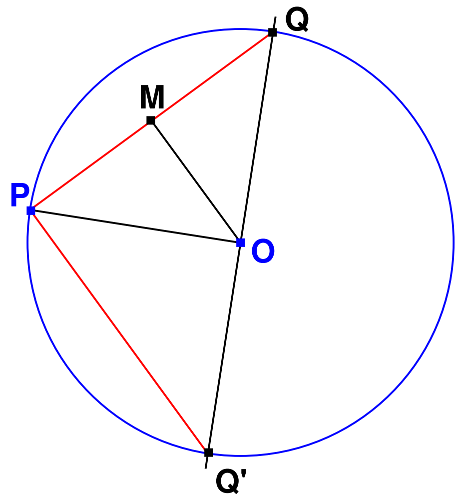


FIGURA 5

ANÁLISIS: Sean P el punto dado sobre una circunferencia (O), PQ la cuerda buscada, y M el punto medio de PQ. Tendremos $2PM = PQ = 2MO$, por lo que $PM = MO$ y el triángulo PMO es rectángulo e isósceles. Entonces es $\angle OPQ = 45°$, y por lo mismo, también es $\angle OQP = 45°$. En consecuencia, el ángulo QOP es recto.

CONSTRUCCIÓN: Unimos PO y trazamos por O la perpendicular a OP. Esta perpendicular cortará a la circunferencia en el punto Q y en su antípoda Q', dando lugar a dos cuerdas solución del problema.

DISCUSIÓN: La construcción será posible en todos los casos, habiendo siempre dos soluciones.

5. Hallar un punto sobre la prolongación de un diámetro dado de una circunferencia tal que las tangentes trazadas desde este punto sean iguales al radio de la circunferencia.

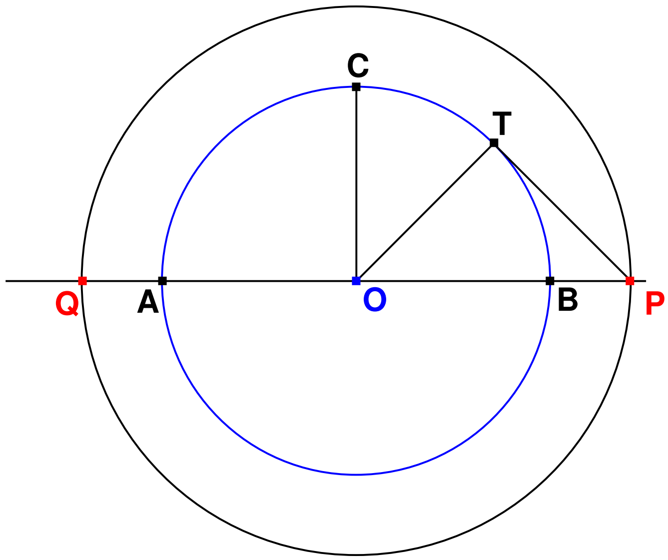


FIGURA 6

ANÁLISIS: En la figura tenemos el diámetro AB de la circunferencia (O) y P es un punto sobre la semirrecta AB cumpliendo la solución, es decir $PT = OT$. Como sabemos, es $\angle OTP = 90°$, por lo que $OP = \sqrt{2} \cdot OT = BC$, siendo OC un radio perpendicular a OB.

CONSTRUCCIÓN: Trazamos el diámetro OC perpendicular a OB. Con centro O y radio BC trazamos una circunferencia, que cortará a la recta AB en los puntos P y P', soluciones del problema.

DISCUSIÓN: La construcción será posible en todos los casos, habiendo siempre dos soluciones.

6. Trazar, con centro en un punto dado, una circunferencia que biseque a una circunferencia dada, es decir, tal que la cuerda común sea un diámetro de la circunferencia dada.

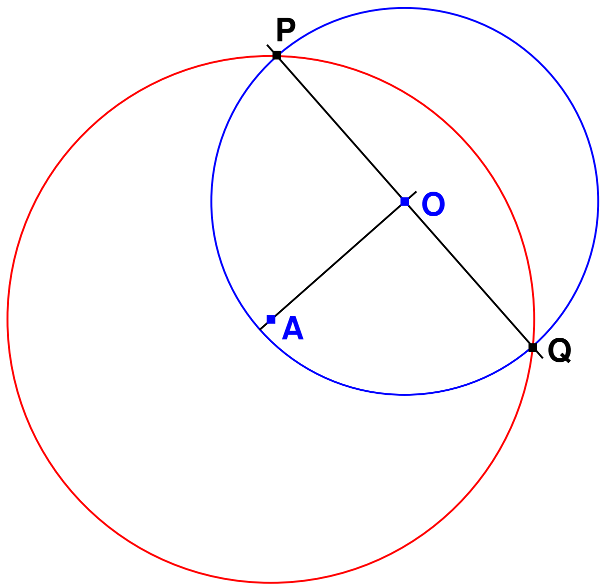


FIGURA 7

ANÁLISIS: Sean A el punto dado y (O) la circunferencia buscada. El diámetro buscado PQ en la circunferencia dada debe ser perpendicular a la recta OA, por lo que está determinado.

CONSTRUCCIÓN: Trazamos por O la recta perpendicular a OA, que corta en P y Q a la circunferencia dada. Estos puntos serán los extremos del diámetro buscado y bastará trazar la circunferencia con centro en A que pasa por cualquiera de ellos.

DISCUSIÓN: El problema siempre tiene solución única, exceptuando el caso en que los puntos O y A coincidan, caso en el que el problema queda indeterminado.

7. Trazar una circunferencia por dos puntos dados de forma que la cuerda común con una circunferencia dada sea paralela a una recta dada.

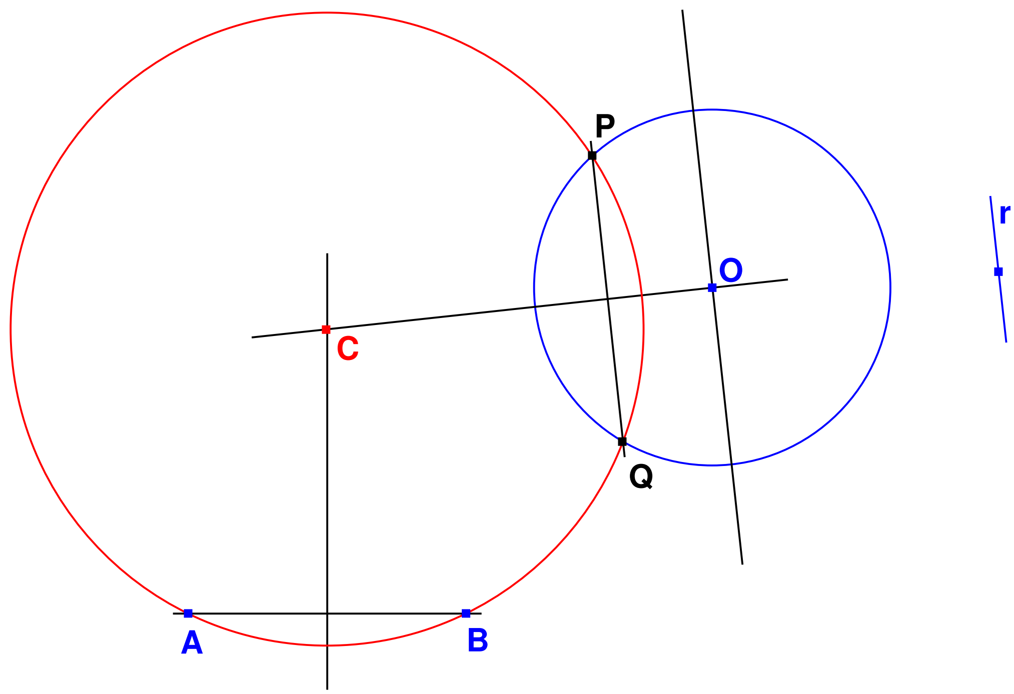


FIGURA 8

ANÁLISIS: Sean A y B los puntos dados, (O) la circunferencia dada y r la recta dada. Teniendo en cuenta que la cuerda común PQ debe ser perpendicular a la recta que une los centros de las dos circunferencias, el centro C de la circunferencias buscada deberá estar en la recta perpendicular por O a la recta dada r. Además, es evidente que C debe estar también en la mediatriz del segmento AB.

CONSTRUCCIÓN: Trazamos por O una paralela a la recta r, y después una perpendicular, también por O, que cortará a la mediatriz de AB en C. Trazamos la circunferencia con centro C que pasa por A.

DISCUSIÓN: El punto C no existirá si la recta dada r es paralela a la que pasa por los puntos dados. Una discusión detallada de este problema es bastante complicada, ya que, además hace falta que la circunferencia con centro C que pasa por A corte a la circunferencia dada.

8. Construir un paralelogramo tal que tres de los puntos medios de sus lados son tres puntos dados.

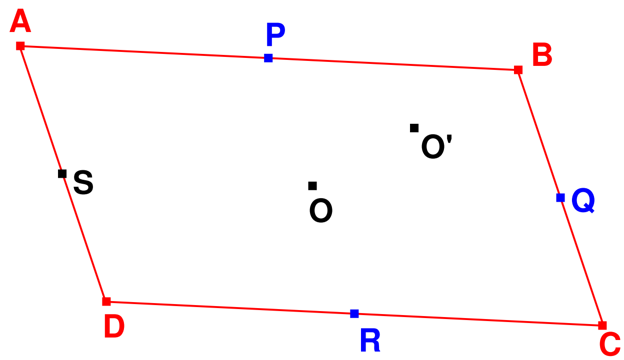


FIGURA 9

ANÁLISIS: Usaremos que los puntos medios de cualquier cuadrilátero forman un paralelogramo, y que las diagonales de un paralelogramo se bisecan una a la otra. Entonces, dados los puntos medios P, Q y R, si O es el punto medio de P y R, el simétrico S de Q respecto de O será otro punto medio del cuadrilátero buscado. También observamos que, por ejemplo, el cuadrilátero $OPBQ$ también es un paralelogramo.

CONSTRUCCIÓN: Dados los puntos medios P, Q, R hallamos los puntos:

O	Punto medio de P y R
S	Simétrico de Q respecto de O
O'	Punto medio de P y Q
B	Simétrico de O respecto de O'
A	Simétrico de B respecto de P
D	Simétrico de A respecto de S
C	Simétrico de D respecto de R

DISCUSIÓN: El problema tiene tres soluciones, ya que dados tres puntos podemos completar de tres formas a un paralelogramo que tenga por vértices a esos puntos.

9. Hallar, sobre un cateto de un triángulo rectángulo, un punto equidistante de la hipotenusa y del vértice del ángulo recto.

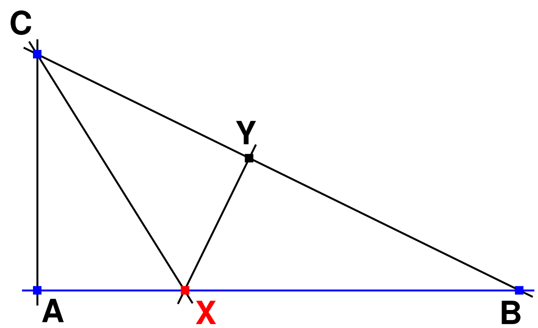


FIGURA 10

ANÁLISIS: En el triángulo ABC rectángulo en A, supongamos que el punto X sobre el lado AC cumple que la distancia XY a la hipotenusa es igual a la distancia AX al vértice del ángulo recto. Entonces, los triángulos rectángulos CAX y CYX tienen la misma hipotenusa e iguales los catetos AX e YX, es decir, son congruentes. Por tanto es $\angle ACX = \angle XCY = \angle XCB$ y AX es la bisectriz interior del ángulo C.

CONSTRUCCIÓN: Trazamos la bisectriz interior del ángulo C, que corta a AC en el punto buscado X.

DISCUSIÓN: El problema tiene, según el análisis, solución única.

10. Trazar, con centros dos puntos dados, dos circunferencias iguales tales que una de sus tangentes comunes

a) pasen por un tercer punto dado.

b) sea tangente a una circunferencia dada.

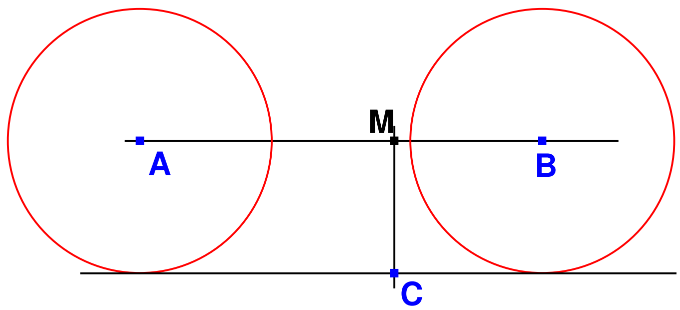


FIGURA 11

ANÁLISIS: En el apartado a), basta observar que el radio de las circunferencias buscadas debe ser igual a la distancia entre el punto buscado y la recta que une los centros.

En el apartado b), la tangente común a las dos circunferencias, que también debe ser tangente a la tercera circunferencia, es paralela a la recta que une los centros de las dos primeras circunferencias.

CONSTRUCCIÓN: Sean A y B los puntos dados como centros.

En el apartado a) (ver Figura 11), si C es un tercer punto, hallamos la proyección M de C sobre la recta AB y trazamos las circunferencias con centros A y B, y radio CM.

Para el apartado b)(ver Figura 12), si (D) es la circunferencia dada, la perpendicular por D a AB cortará a la circunferencia (D) dos posibles puntos de tangencia T y T'. La paralela por T o T' a AB será una posible tangente común a las dos circunferencias dadas. Hallamos la perpendicular por A a esta paralelas obteniendo los puntos de tangencia S y S'. Ahora trazamos unas circunferencias con centros A y B y radio AS y otras circunferencias con los mismos centros y radio AS', obteniendo dos pares de soluciones del problema.

DISCUSIÓN: En el apartado a) hay solución única en todos los casos.

En el apartado a) habrá en general dos soluciones, es decir, dos pares de circunferencias, que se confundirán en una sola cuando el punto D esté sobre la recta AB que une los dos puntos dados.

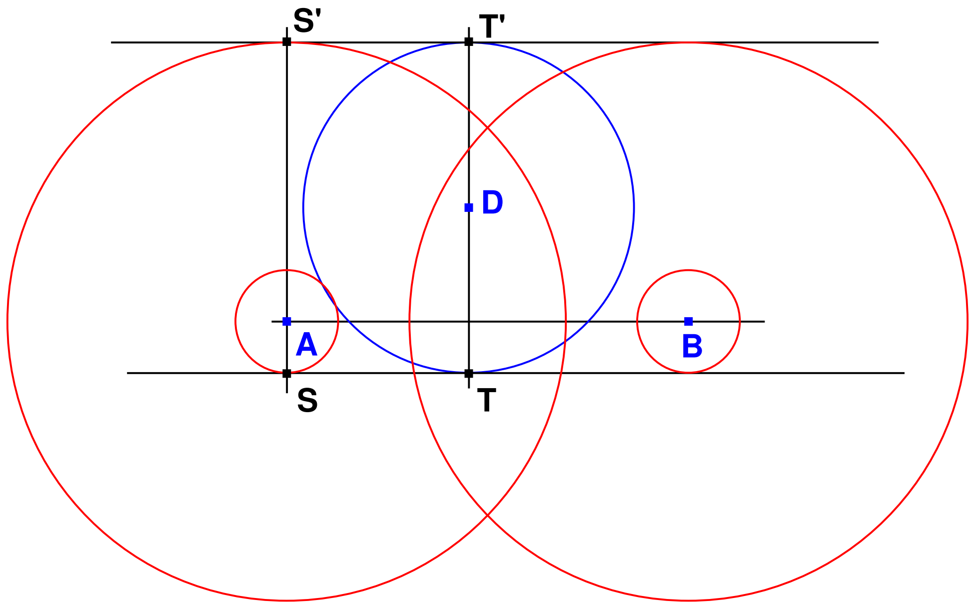


Figura 12

11. Por un punto dado, trazar una recta que intercepte a dos circunferencias iguales dadas en dos cuerdas iguales.

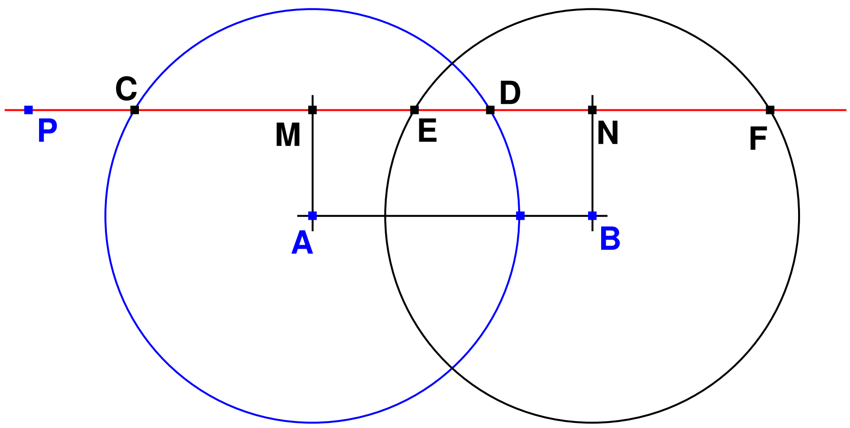


Figura 13

Análisis: Si una recta corta a dos circunferencias iguales en dos cuerdas iguales CD y EF, llamando M y N a los puntos medios de las mismas, tendremos que los segmentos que unen a estos puntos con los centros A y B son iguales y paralelos, por lo que la recta secante debe ser paralela a la recta AB.

Construcción: Trazaremos por el punto dado una recta paralela a la recta que une los centros de las circunferencias dadas.

Discusión: El problema sólo tiene solución si el punto P está situado en la banda paralela a la recta que une los centros limitada por las rectas tangentes comunes a las circunferencias dadas.

12. Dada una circunferencia situada entre dos rectas paralelas, trazarle una tangente que intercepte a las dos rectas paralelas en un segmento de longitud dada.

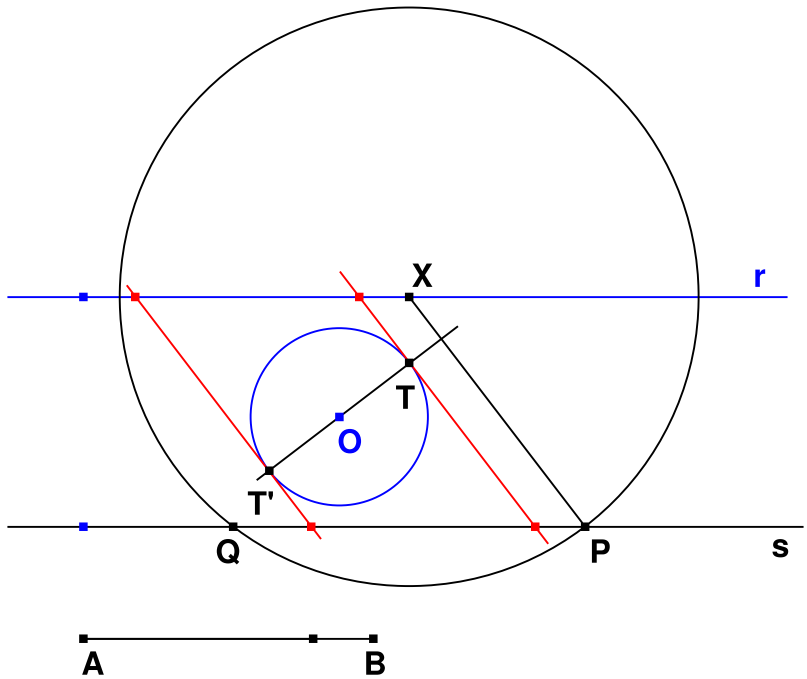


FIGURA 14

ANÁLISIS: Observamos que dos rectas paralelas son interceptadas por un haz de rectas paralelas en segmentos que tienen todos la misma longitud.

CONSTRUCCIÓN: Sean r y s las rectas dadas y (O) la circunferencia dada. Con un punto arbitrario X sobre r como centro trazamos una circunferencia de radio la longitud AB dada, que cortará en P y Q a la otra recta. Las rectas tangentes buscadas son paralelas a XP (mostradas en la figura) y a XQ. Vemos que para hallar los puntos de tangencia T y T' hemos trazado por O la recta perpendicular a XP. Lo mismo se haría con XQ.

DISCUSIÓN: Para que el problema tenga solución es necesario que la longitud dada sea mayor o igual que la distancia que separa a las rectas paralelas dadas. En el caso de la igualdad tendremos dos soluciones y en los restantes casos tendremos cuatro soluciones. Observamos también que la solución es igualmente válida independientemente de la posición de la circunferencia con respecto a las rectas paralelas dadas.

13. Construir un triángulo rectángulo dados la hipotenusa y la distancia del punto medio de la hipotenusa a un cateto.

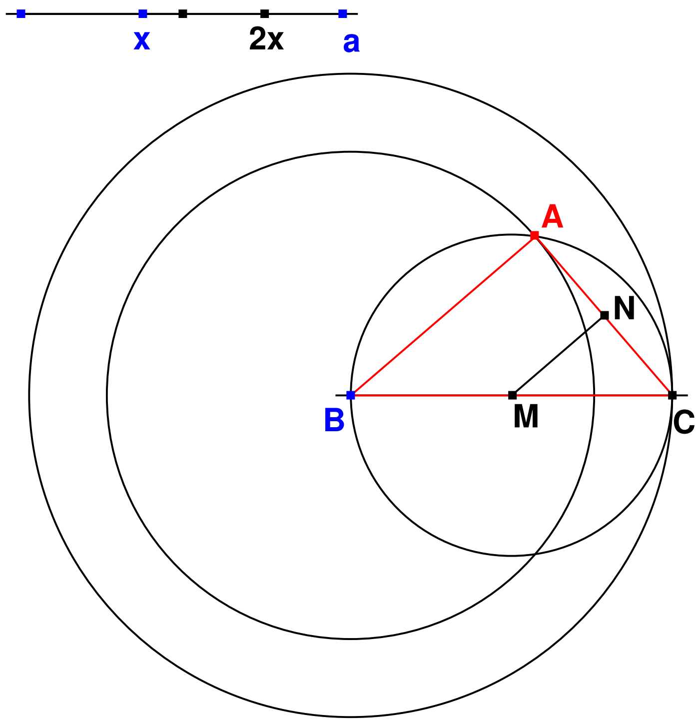


FIGURA 15

ANÁLISIS: En un triángulo rectangulo, la distancia MN del punto medio de la hipotenusa a uno de los catetos es igual a la mitad del otro cateto, por lo que uno de los catetos del triángulo buscado será igual al doble de la distancia dada entre la hipotenusa y el otro cateto.

CONSTRUCCIÓN: Sobre una recta cualquiera fijamos un segmento BC igual al de la hipotenusa dada. Con centro en B trazamos una circunferencia de radio el doble de la distancia dada, que cortará en un punto A a la circunferencia de diámetro BC.

DISCUSIÓN: La distancia dada del punto medio de la hipotenusa a un cateto debe ser menor que la mitad de la hipotenusa dada.

14. Construir un triángulo conociendo una altura y los circunradios (es decir, los radios de las circunferencias circunscritas) a los dos triángulos en que esta altura divide al triángulo buscado.

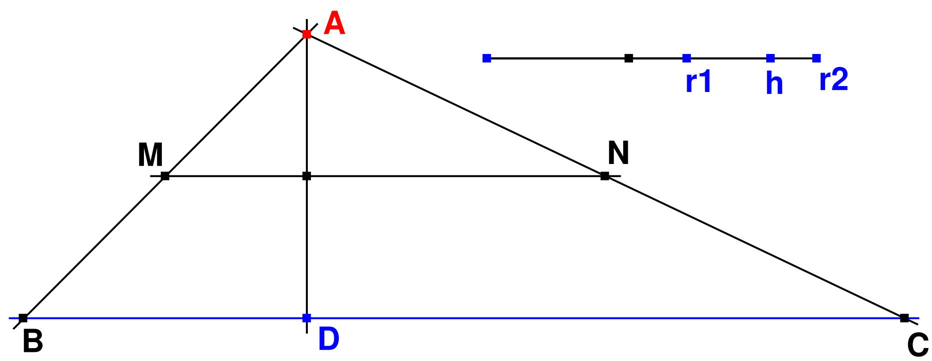


FIGURA 16

ANÁLISIS: Los circunradios dados serán la mitad de los dos lados del ángulo correspondiente a la altura, por lo que podemos construir fácilmente un triángulo homotético al dado (de razón 1/2).

CONSTRUCCIÓN: Sobre una recta cualquiera ℓ marcamos un punto D y levantamos un segmento perpendicular DA igual a la altura dada. Con centro en A trazamos circunferencias con radios los circunradios dados, que cortan a la perpendicular a la mediatriz de AD en los puntos M y N. Las rectas AM y AN cortarán a la recta ℓ en los dos vértices B y C restantes del triángulo buscado.

DISCUSIÓN: Para que el problema tenga solución es necesario que los circunradios dados sean mayores que la mitad de la altura dada.

PROBLEMAS PARA LOS MÁS JÓVENES (34)

CINCO PROBLEMAS DE LA OLIMPIADA DE RUSIA 2007

GRADO 8, RONDA DE DISTRITO

PJ34.1. *(N. Agakhanov)* En un cuadrilátero convexo, se trazan ocho segmentos, cada uno de los cuales une un vértice con el punto medio de sus lados opuestos (cada vértice tiene dos lados opuestos, los que no pasan por él). Siete de estos segmentos tienen la misma longitud, *a.* Demostrar que el octavo también tiene longitud *a.*

PJ34.2. (*M. Murashkin)* Pedro elige un entero positivo *n.* Para cada par (no ordenado) de sus cifras, escribimos su diferencia en el encerado. Después de eso, él borra algunas de esas diferencias, y las que quedan son 2,0,0,7. Hallar el menor valor de *n* para el cual es posible esta situación.

PJ34.3. *(V. Senderov)* Determinar si existen números primos $p_1, p_2, \cdots, p_{2007}$ tales que $p_1^2 - 1$ es divisible por p_2, $p_2^2 - 1$ es divisible por p_3,... y $p_{2007}^2 - 1$ es divisible por p_1.

PJ34.4. *(I. Rubanov)* Tenemos 11 monedas, aparentemente indistinguibles. Sin embargo, 10 son buenas (pesan 20g cada una) y una es falsa (pesa 21g). Disponemos de una curiosa balanza que está equilibrada cuando el peso en el platillo de la de la izquierda es el doble del que hay en el de la derecha. Usando esta balanza, hallar la moneda falsa en tres pesadas.

PJ34.5. *(N. Agakhanov)* Un número B se obtiene del entero positivo A permutando sus cifras. El número A – B es de la forma 111...1 , con N "unos". Hallar el menor valor posible de N.

PROBLEMAS PARA LOS MÁS JÓVENES (34)

CINCO PROBLEMAS DE LA OLIMPIADA DE RUSIA 2007

GRADO 8, RONDA DE DISTRITO

PJ34.1. *(N. Agakhanov)* En un cuadrilátero convexo, se trazan ocho segmentos, cada uno de los cuales une un vértice con el punto medio de sus lados opuestos (cada vértice tiene dos lados opuestos, los que no pasan por él). Siete de estos segmentos tienen la misma longitud, *a.* Demostrar que el octavo también tiene longitud *a.*

PJ34.2. (*M. Murashkin)* Pedro elige un entero positivo *n.* Para cada par (no ordenado) de sus cifras, escribimos su diferencia en el encerado. Después de eso, él borra algunas de esas diferencias, y las que quedan son 2,0,0,7. Hallar el menor valor de *n* para el cual es posible esta situación.

PJ34.3. *(V. Senderov)* Determinar si existen números primos $p_1, p_2, \cdots, p_{2007}$ tales que $p_1^2 - 1$ es divisible por p_2, $p_2^2 - 1$ es divisible por p_3,... y $p_{2007}^2 - 1$ es divisible por p_1.

PJ34.4. *(I. Rubanov)* Tenemos 11 monedas, aparentemente indistinguibles. Sin embargo, 10 son buenas (pesan 20g cada una) y una es falsa (pesa 21g). Disponemos de una curiosa balanza que está equilibrada cuando el peso en el platillo de la de la izquierda es el doble del que hay en el de la derecha. Usando esta balanza, hallar la moneda falsa en tres pesadas.

PJ34.5. *(N. Agakhanov)* Un número B se obtiene del entero positivo A permutando sus cifras. El número A – B es de la forma 111...1 , con N “unos”. Hallar el menor valor posible de N.

Soluciones a los problemas del duelo matemático 08 publicadas en el número 33 de la Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática Por Daniel Lasaosa Medarde, Universidad Pública de Navarra, España

PMO33.1. El ortocentro H de un triángulo acutángulo ABC se transforma respectivamente en los puntos A_1, B_1, C_1 en las simetrías axiales cuyos ejes son los lados a, b, c del triángulo. Se supone que se verifican las siguientes igualdades de ángulos:

$$\angle C_1AB_1 = \angle CA_1B; \qquad \angle A_1BC_1 = \angle AB_1C; \qquad \angle B_1CA_1 = \angle BC_1A.$$

Demostrar que ABC es equilátero.

Es relativamente conocido (o fácilmente demostrable por el lector) que el simétrico del ortocentro H respecto del lado AB coincide con el segundo punto en el que la recta CH corta a la circunferencia circunscrita a ABC, y de forma similar con los simétricos de H respecto de los otros dos lados. Ahora bien, $\angle C_1BA = \angle C_1CA = \angle HCA = \frac{\pi}{2} - \angle A$, mientras que $\angle B_1BA = \angle HBA = \frac{\pi}{2} - \angle A$, luego al ser $\angle C_1AB_1 = \pi - \angle C_1BB_1$, se tiene que $\angle C_1AB_1 = 2\angle A$. Pero $\angle BA_1C = \pi - \angle BAC = \pi - \angle A$, luego por la primera igualdad dada, $\angle A = \frac{\pi}{3}$. Las otras dos igualdades son las permutaciones cíclicas de la primera, luego se obtienen de ellas resultados que son las permutaciones cíclicas del obtenido, es decir, $\angle B = \frac{\pi}{3}$ y $\angle C = \frac{\pi}{3}$, con lo que el resultado pedido queda probado.

PMO33.2. Determinar todas las ternas (x, y, z) de enteros positivos tales que se verifique la igualdad

$$3 + x + y + z = xyz.$$

Supongamos que $yz = 1$. Entonces, $y = z = 1$ por ser enteros positivos, y se tiene que $5 + x = x$, claramente falso. Entonces, como $yz \geq 2$, podemos escribir la ecuación dada como $x = \frac{3+y+z}{yz-1}$, donde sin pérdida de generalidad podemos asumir que $x \leq y \leq z$. Si $x = 1$, se obtiene la relación $5 = yz - y - z + 1 = (y-1)(z-1)$, es decir, $y = 2$ y $z = 6$. Si $x = 2$, se obtiene la relación $5 = 2yz - y - z = y(z-1) + z(y-1) \geq y + z$, pues $y, z \geq x = 2$. Luego sólo pueden ser $y = z = 2$, que obviamente no proporciona solución pues entonces sería $3 + 2 + 2 + 2 = 2 \cdot 2 \cdot 2$, claramente falso, o $y = 2, z = 3$, que nuevamente no proporciona solución porque sería $3 + 2 + 2 + 3 = 2 \cdot 2 \cdot 3$. Finalmente, si $x \geq 3$, entonces $6 \geq 3yz - y - z = yz + z(y-1) + y(z-1) \geq yz + 2y + 2z$ por ser $y, z \geq x = 3$, o $(y+2)(z+2) \leq 10$, imposible ya que debería ser $y+2, z+2 \geq 5$. Luego la única solución es $(1, 2, 6)$ y sus permutaciones cíclicas.

PMO33.3. Sea $ABCD$ un tetraedro con tres aristas mutuamente perpendiculares en el vértice D. Sea S el centro de su esfera circunscrita. Probar que el baricentro T de su cara ABC está en la recta DS.

Claramente, la perpendicular a la cara ABD por el circuncentro del triángulo ABD debe pasar por el centro S de la esfera circunscrita, pues dicha circunferencia circunscrita es la intersección de la esfera circunscrita a $ABCD$ con el plano que contiene a la cara ABD. Al ser ABD rectángulo en D, se tiene que su circuncentro es el punto medio de AB, y por lo tanto S está en la paralela a CD por el punto medio de AB. De forma similar, S también está en las paralelas a AD, BD por los puntos medios de BC, CA respectivamente. Asumiendo que las coordenadas de A, B, C son, sin pérdida de generalidad, $A \equiv (a, 0, 0)$, $B \equiv (0, b, 0)$, $C \equiv (0, 0, c)$ y $D \equiv (0, 0, 0)$, entonces el baricentro tiene por coordenadas $T \equiv (\frac{a}{3}, \frac{b}{3}, \frac{c}{3})$, y el centro de la esfera circunscrita tiene por coordenadas $S \equiv (\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2})$, y ambos puntos están en la recta $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ que claramente pasa por D, luego D, S, T están alineados.

PMO33.4. Determinar todos los enteros positivos n para los cuales existen enteros positivos x, y tales que se cumplen las dos igualdades $x + y = n^2$, $10x + y = n^3$.

Restando ambas igualdades, obtenemos que $9x = n^2(n-1)$. Supongamos en primer lugar que existen soluciones para valores de n que no sean múltiplos de 3. Entonces, 9 divide a $n-1$, y $n = 9a+1$ para algún entero positivo a (en caso de ser $a = 0$ sería $x = 0$). Por lo tanto, $x = a(9a+1)^2$, y se tiene que $y = n^2 - x = n^3 - 10x = (9a+1)^2(1-a)$, que no es positivo al ser $a \geq 1$. Entonces, n ha de ser múltiplo de 3, y podemos escribir $n = 3b$ para algún entero positivo b, con lo que $x = b^2(3b-1)$, y $y = n^2 - x = n^3 - 10x = b^2(10-3b)$. Se sigue que, para que $y > 0$, ha de ser $3b < 10$, o $b \leq 3$. Luego los únicos valores que puede tomar n para que las igualdades se cumplan para enteros positivos x, y son $n = 3, 6, 9$, con soluciones respectivas $(x, y) = (2, 7), (20, 16), (72, 9)$.

PMO33.5. Sean a, b, c números reales. Demostrar que

$$V = 4(a^2 + b^2 + c^2) - \left((a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2\right)$$

es siempre no negativo y determinar todos los valores de a, b, c para los que $V = 0$.

Desarrollando los cuadrados, simplificando y reagrupando, se tiene

$$V = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2.$$

Esta expresión es claramente no negativa al ser suma de cuadrados, siendo nula si y sólo si todos los cuadrados son nulos, es decir, $V \geq 0$, siendo $V = 0$ si y sólo si $a = b = c = \lambda$ para cualquier real λ.

Observación previa del editor

Poco después de que apareciera en la red el volumen 33 de la REOIM, el editor fue advertido de la similitud del problema 161 con el problema 126 de la Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, que se iba a publicar en el vol. 12, número 1, 2009, ambos del mismo proponente.

Comparados los textos de ambos enunciados, si bien son formalmente distintos (el 126 de la Gaceta parece un poco más complicado que el 161 de la REOIM), no cabe ninguna duda de su parecido: podría decirse que son "primos gemelos", por utilizar un término de teoría de números.

El problema del uso de problemas iguales o similares en revistas distintas siempre ha estado presente, y con la actual celeridad en la aparición de la versión digital de las revistas, es de temer que se agudice. En todos los casos, es evidente que la responsabilidad de que se produzca tal situación es enteramente del proponente, entre otras cosas porque los editores no podemos tener acceso a todas las revistas que se publican, con tiempo suficiente para bloquear la publicación de un problema repetido. En el caso que nos ocupa, la REOIM publicó el vol. 33 en diciembre de 2008, y el volumen 12, nº1 de la Gaceta estaba en esa fecha prácticamente ya listo para su publicación (la versión en papel llegó a las manos de este editor a finales de enero de 2009; la versión electrónica estaba en Internet un poco antes). Ninguno de los editores de las dos revistas tuvimos información del hecho hasta que ya no había marcha atrás posible.

Reiteramos la petición a todos nuestros lectores y colaboradores de que no envíen artículos o problemas que hayan sido propuestos a otra publicación sin haber recibido la notificación escrita de su no aceptación.

Valladolid, abril de 2009

Francisco Bellot Rosado

Editor

Problema 160. Propuesto por José Luís Díaz Barrero, Barcelona, España.

Sea F_n el n-ésimo *número de Fibonacci*, definido por

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1,\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2},\ \forall n \in \mathbb{N} \cap [2, +\infty).$$

Demuéstrese la desigualdad,

$$\frac{F_n^2\left(F_{n+2} + 2F_{n+1}\right) + F_{n+1}^2\left(F_{n+2} + F_n\right)}{2\left(F_n^3 + F_{n+1}^3\right) + 3F_nF_{n+1}F_{n+2}} < 1.$$

Solución *de Jesús Álvarez Lobo. Oviedo. Asturias. España.*

A fin de facilitar el seguimiento del desarrollo, denotemos

$$F(n) \equiv \frac{F_n^2\left(F_{n+2} + 2F_{n+1}\right) + F_{n+1}^2\left(F_{n+2} + F_n\right)}{2\left(F_n^3 + F_{n+1}^3\right) + 3F_nF_{n+1}F_{n+2}}.$$

Por la relación de recurrencia que define la *sucesión de Fibonacci*,

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n,\ \forall n \in \mathbb{N} \cap [2, +\infty),$$

y sustituyendo en $F(n)$ el término F_{n+2} por $F_{n+1} + F_n$, se tiene:

$$F(n) = \frac{F_n^2\left(\left\{F_{n+1} + F_n\right\} + 2F_{n+1}\right) + F_{n+1}^2\left(\left\{F_{n+1} + F_n\right\} + F_n\right)}{2\left(F_n^3 + F_{n+1}^3\right) + 3F_nF_{n+1}\left\{F_{n+1} + F_n\right\}}.$$

Realizando las operaciones indicadas, reduciendo y ordenando términos, se llega a la expresión,

$$F(n) = \frac{F_n^3 + 3F_n^2F_{n+1} + 2F_nF_{n+1}^2 + F_{n+1}^3}{2F_n^3 + +3F_n^2F_{n+1} + 3F_nF_{n+1}^2 + 2F_{n+1}^3},$$

cuyo numerador y denominador nos recuerdan el desarrollo del *cubo de un binomio*. En efecto, agrupando términos,

$$F(n) = \frac{\left(F_n + F_{n+1}\right)^3 - F_nF_{n+1}^2}{\left(F_n + F_{n+1}\right)^3 + F_n^3 + 2F_{n+1}^3},$$

quedando probada la desigualdad, $F(n) < 1$, como trivialmente se comprueba, ya que los *números de Fibonacci* se definen estrictamente positivos para $n > 0$.

Nótese que $F(n)$ también se puede expresar en la forma

$$F(n)=\frac{1-\dfrac{F_nF_{n+1}^2}{\left(F_n+F_{n+1}\right)^3}}{1+\dfrac{F_n^3+2F_{n+1}^3}{\left(F_n+F_{n+1}\right)^3}}<1,$$

resultando aún más evidente la desigualdad, puesto que se verifican las desigualdades

$$\frac{F_nF_{n+1}^2}{\left(F_n+F_{n+1}\right)^3}\geq 0,\ \frac{F_n^3+2F_{n+1}^3}{\left(F_n+F_{n+1}\right)^3}>0,$$

ya que, a lo sumo, $F_n = 0$, siendo, por definición, $F_{n+1}>0$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

ꕥ

Aunque no se pide, estudiemos la **convergencia de la sucesión** $\left(F(n)\right)_{n=0}^{\infty}$. A tal fin, escribamos el término general de ésta en la forma

$$F(n)=\frac{1-\dfrac{\left(F_{n+1}/F_n\right)^2}{\left(1+F_{n+1}/F_n\right)^3}}{1+\dfrac{1+2\left(F_{n+1}/F_n\right)^3}{\left(1+F_{n+1}/F_n\right)^3}}.$$

Definiendo, $\Phi(n)\equiv\dfrac{F_{n+1}}{F_n}$, el término general es

$$F(n)=\frac{1-\dfrac{\Phi^2(n)}{\left[1+\Phi(n)\right]^3}}{1+\dfrac{1+2\Phi^3(n)}{\left[1+\Phi(n)\right]^3}}.$$

Así pues,

$$\lim_{x\to\infty}F(n)=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\dfrac{\Phi^2(n)}{\left[1+\Phi(n)\right]^3}}{1+\dfrac{1+2\Phi^3(n)}{\left[1+\Phi(n)\right]^3}}=\frac{1-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\Phi^2(n)}{\left[1+\Phi(n)\right]^3}}{1+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+2\Phi^3(n)}{\left[1+\Phi(n)\right]^3}}=\frac{1-\dfrac{\left[\lim\limits_{x\to\infty}\Phi(n)\right]^2}{\left[1+\lim\limits_{x\to\infty}\Phi(n)\right]^3}}{1+\dfrac{1+2\lim\limits_{x\to\infty}\left[\Phi(n)\right]^3}{\left[1+\lim\limits_{x\to\infty}\Phi(n)\right]^3}}.$$

Ahora bien, entre la pléyade de interesantes propiedades de la *sucesión de Fibonacci*, destaca la del famoso límite que establece una sorprendente vinculación entre el cociente de dos términos consecutivos de la *sucesión de Fibonacci* y el *número áureo*,

$$\lim_{x\to\infty} \Phi(n) = \Phi \ \text{(número áureo), donde } \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Esta relación asintótica fue probada por Barr y Schooling en "*The Field*" (14 de diciembre de 1912).

Por tanto,

$$\lim_{x\to\infty} F(n) = \frac{1-\dfrac{\Phi^2}{(1+\Phi)^3}}{1+\dfrac{1+2\Phi^3}{(1+\Phi)^3}} = \frac{(1+\Phi)^3-\Phi^2}{(1+\Phi)^3+2\Phi^3+1}.$$

Sustituyendo Φ por su valor y simplificando, se llega fácilmente al siguiente resultado:

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} F(n) = \frac{\sqrt{5}}{4}}$$

REVISTA ESCOLAR DE LA O.I.M. (34)

PROBLEMAS 166-170

PROBLEMA 166

Probar que, si n es un número primo, entonces la parte entera de $\left(4+\sqrt{11}\right)^n$ es múltiplo de n más 7.

Propuesto por Álvaro Begué Aguado, Nueva York, EE.UU.

PROBLEMA 167

Sea ABC un triángulo, de lados $a \geq b \geq c$. Si r es el radio del círculo inscrito, y m_a la mediana correspondiente al lado BC, demostrar que

$$2\left(m_a + r\right) \geq b + c \Leftrightarrow A \leq 90^{\circ}$$

la equivalencia análoga cambiando los signos menor o igual que por mayor o igual que.

Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, Ávila, España.

PROBLEMA 168

Hallar todas las ternas (x, y, z) de números reales que son solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x + \arcsin(2x-1) &= y \\ y + \arcsin(2y-1) &= z \\ z + \arcsin(2z-1) &= x \end{aligned}$$

Propuesto por José Luis Díaz Barrero, Barcelona, España.

PROBLEMA 169

Sea q un número primo mayor que 3. Demostrar que existen $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{N}$ tales que

$$\left|\{a_1, \cdots, a_n\} \cap \{3, 4, 5, \cdots\}\right| \geq 1$$

y además

$$2^{2009} \equiv a_1! a_2! \cdots a_n! \bmod q$$

Propuesto por José Hernández Santiago, Oaxaca, México.

PROBLEMA 170

Sean $x_i > 0, i = 1, 2, \cdots, n$, con $n \geq 2$; $\lambda \geq 0$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Calcular el límite doble

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{\alpha\to 0}\sqrt[\alpha]{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\alpha} + \lambda\left(\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^{\alpha} - \sum_{i=1}^{n} x_i^{\alpha}\right)}{n+\lambda\left(n^{\alpha}-n\right)}}$$

Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, Ávila, España

PROBLEMA 162, *propuesto por Miguel Amengual Covas, Santanyí, España*

Sea O el punto de interseccion de las diagonales AC y BD de un cuadrilatero convexo $ABCD$. Sean I_1, I_2, I_3, I_4 los respectivos incentros de ΔOAB, ΔOBC, ΔOCD, ΔODA. Si $I_1I_2I_3I_4$ es un paralelogramo, demostrar que $ABCD$ es un paralelogramo.

Solución por Daniel Lasaosa Medarde, Universidad Pública de Navarra, Pamplona, España

Al ser $I_1I_2 \parallel I_3I_4$, los lados I_1I_2 e I_3I_4 del paralelogramo $I_1I_2I_3I_4$ forman el mismo ángulo α con BD, con lo que $r_1 + r_2 = I_1I_2 \sin\alpha = I_3I_4 \sin\alpha = r_3 + r_4$. De la misma forma, $r_2 + r_3 = r_4 + r_1$, luego $r_1 = r_3$ y $r_2 = r_4$. Supongamos además, sin pérdida de generalidad, que $OA \geq OC$ y $OB \geq OD$, y sean $\kappa = \frac{OA}{OC} \geq 1$ y $\rho = \frac{OB}{OD} \geq 1$. El cociente entre las áreas respectivas de OAB y OCD es

$$\frac{OA + OB + AB}{OC + OD + CD} = \frac{OA \cdot OB}{OC \cdot OD} = \kappa\rho,$$

al ser $r_1 = r_3$ y $\angle AOB = \angle COD$. Entonces, $AB = \kappa(\rho - 1)OC + \rho(\kappa - 1)OD + \kappa\rho CD$, y utilizando el teorema del coseno,

$$AB^2 = \kappa^2 OC^2 + \rho^2 OD^2 + 2\kappa^2\rho(\rho-1)OC(OC+CD) + 2\rho^2\kappa(\kappa-1)OD(OD+CD) +$$
$$+ 2\kappa\rho(\kappa - 1)(\rho - 1)OC \cdot OD - 2\kappa^2\rho^2 OC \cdot OD \cos\alpha.$$

Por la desigualdad triangular, $OC + CD > OD$, luego $(\rho - 1)(OC + CD) \geq (\rho-1)OD$, con igualdad si y sólo si $\rho = 1$, y de la misma forma $(\kappa-1)(OD+CD) \geq (\kappa - 1)OC$. Entonces,

$$AB^2 \geq \kappa^2 OC^2 + \rho^2 OD^2 + 2\kappa\rho(3\kappa\rho - 2\kappa - 2\rho + 1 - \kappa\rho\cos\alpha)OC \cdot OD.$$

Finalmente, utilizando también el teorema del coseno se tiene que

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cos\alpha = \kappa^2 OC^2 + \rho^2 OD^2 - 2\kappa\rho OC \cdot OD \cos\alpha,$$

con lo que insertando la acotación anterior para AB^2, queda, tras simplificar,

$$(\kappa\rho - 1)\cos\alpha \geq 3\kappa\rho - 2\kappa - 2\rho + 1.$$

Como el miembro de la izquierda no supera $\kappa\rho - 1$, se tiene que $(\kappa - 1)(\rho - 1) \leq 0$, que sólo puede darse con igualdad, al ser el miembro de la izquierda no negativo. Se tiene entonces que todas las anteriores desigualdades deben cumplirse como igualdades, con lo que $\kappa = \rho = 1$, y al cortarse entonces las diagonales de $ABCD$ en sus puntos medios, $ABCD$ es un paralelogramo, qed.

PROBLEMA 163, *propuesto por Laurentiu Modan, Rumanía*

Se considera la sucesión (A_n), con $n \geq 1$, dada por la relación de recurrencia

$$A_{n+1} = 2A_n + \sqrt{A_n^2 + A_{n+1}^2},$$

con $A_1 = 1$.

i) Estudiar la convergencia de esta sucesión.

ii) Hallar el dominio de convergencia de la serie de potencias de termino general $A_n x^n$.

Solución por Daniel Lasaosa Medarde, Universidad Pública de Navarra, Pamplona, España

El problema tal y como está formulado no tiene solución, ya que si $A_n > 0$, claramente es $A_{n+1} > \sqrt{A_n^2 + A_{n+1}^2} > A_{n+1}$, absurdo. Tiene sentido sin embargo el problema si se define, para algún $1 > \alpha > 0$, la relación de recurrencia como

$$A_{n+1} = 2A_n + \sqrt{A_n^2 + \alpha A_{n+1}^2}.$$

En este caso, restando $2A_n$ de ambos miembros y elevando al cuadrado se obtiene

$$A_{n+1}^2(1-\alpha) - 4A_n A_{n+1} + 3A_n^2 = 0,$$

con soluciones

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} = \frac{2 \pm \sqrt{1+3\alpha}}{1-\alpha}.$$

La raíz negativa no tiene sentido, ya que claramente $A_{n+1} > 2A_n > 0$ (verificable de forma trivial por inducción al ser $A_1 = 1$). Se tiene entonces que $A_n = \left(\frac{2+\sqrt{1+3\alpha}}{1-\alpha}\right)^{n-1}$. Ahora bien, el numerador es mayor que 2 y el denominador menor que 1, luego A_{n+1} es la n-ésima potencia de un número mayor que 1, y la serie diverge. Se tiene además que

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n x^n = \frac{1-\alpha}{2+\sqrt{1+3\alpha}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2+\sqrt{1+3\alpha}}{1-\alpha} x\right)^n,$$

serie geométrica que claramente converge siempre que la razón sea menor que 1, es decir, siempre que $x < \frac{1-\alpha}{2+\sqrt{1+3\alpha}} = \frac{2-\sqrt{1+3\alpha}}{3}$.

My Best Math-Links Collection

silviumath@yahoo.com

Efectuează "click" pe adresa dorită şi ai direct legătura cu situl respectiv:

1. **http://www.kalva.demon.co.uk/** ***Cel mai bogat site "Math-Competitions", cu enunțuri + soluții!***
2. **http://www.hti.umich.edu/u/umhistmath/** ***Historical Mathematics Collection, 1000 books!***
3. http://www.epsilon.ro/ No comment!
4. http://www.mri.ernet.in/~ntweb/list.html Various Number Theorists' Home Pages/Departmental listings
5. http://www.mathpropress.com/competitions.html - Web Sites with information about Mathematics Competitions
6. http://140.247.141.165/~ajorza/math/ - Andrei Jorza Math Archive
7. http://allinfo.com/directory/Science_and_Health/Math/Math_Competitions/ - All Info Math Competitions
8. http://www.madras.fife.sch.uk/maths/ - Math pages & links
9. http://www.sciencedaily.com/encyclopedia/mathematics - Math & soft links
10. http://websearch.cs.com/cs/browse?id=414709&source=CSBrowse - http://www.madras.fife.sch.uk/maths/
11. http://www.cbel.com/math_recreations/ - Math Recreations
12. http://www.cbel.com/math_recreations/?order=theme&setcols=4 - Math Recreations
13. http://www.1upscience.com/links/recreations-competitions.html - Math Competition Links
14. http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/~nik/bookmarks.html Bookmarks Mathematical resurces
15. http://www.moldova.com/category.asp?n=2 Moldova Catalog
16. http://aoltvsearch.aol.com/cat.adp?id=414709 Math Links Collection
17. http://dir.nodeworks.com/Science/Math/Recreations/Competitions/National/ Math Links Collection
18. http://reference.allrefer.com/encyclopedia/categories/math.html Mathematics Articles
19. http://www.sweden.org/Science/Math/Recreations/Competitions/National/ Math Competition Links
20. http://directory.google.com/Top/Science/Math/Recreations/ Math Recreations Links
21. http://home.flash.net/~markthom/html/math_recreations.html Math Recreations
22. http://dmoz.org/Science/Math/Recreations/ Math Recreations
23. http://recreations.math.designerz.com/ Math Recreations
24. http://www.wordiq.com/search/Science/Math/Recreations/Games_and_Puzzles/ Math Recreations
25. http://thinks.com/math/ Math Recreations
26. http://www.reversi.se/odp/Science/Math/Recreations/Games_and_Puzzles/ Math Recreations

27. http://www.knowledge.com/Top/Science/Math/Recreations Math Recreations
28. http://dmoz.org/Science/Math/Recreations/Games_and_Puzzles/ Math Recreations
29. http://bestofthenet.tv/web.cgi?base=/Science/Math/Recreations/ Math Recreations
30. http://www.interactiva.org/Dir/I/English/Science/Math/Recreations/Tessellations/ Math Recreations
31. http://catalogo.cerca.com/Science/Math/Recreations/ Math Recreations
32. http://www.mf1.it/poleposition/search/directory.asp?ctg=Science/Math/Recreations/ Math Recreations
33. http://camel.math.ca/Exams/competitions.html Mathematics Competitions
34. http://www.albanyconsort.com/contests/contests.html Math Competitions
35. http://math.about.com/od/competitions/ Articles & Resources for Math Competitions
36. http://math.about.com/od/competitions/ Articles & Resources for Math Competitions
37. http://www.math.bas.bg/bcmi/ Bulgarian Competitions in Mathematics and Informatics
38. http://www.virtu-software.com/math/ Math Competition Problem Writer
39. http://www.freemathhelp.com/math-competitions.html Math Competitions
40. http://www.cemc.uwaterloo.ca/ Le centre d'éducation en mathématiques et en informatique
41. http://www.davidson.edu/math/davis/cmc/ssGuideToMathGps.html
42. http://www.la.mvla.net/ Math & Computer Competitions
43. http://www.gctm.org/math_competitions.htm Math Competitions
44. http://members.tripod.com/~PertselV/RusMath.html The problems All-Soviet-Union math competitions 1961-1986
45. http://206.152.229.6/Other_Sites/Sites.html Math Links Collection
46. http://dir.yahoo.com/Science/Mathematics/Education/K_12/Academic_Competitions/ Mathematics Competitions
47. http://www.math.uncc.edu/~hbreiter/AHSME/NCahsme.html The American High School Mathematics Examination
48. http://directory.google.com/Top/Science/Math/Recreations/Competitions/Training/Problem_Archives/ Math Archiv
49. http://www.math.ksu.edu/main/events/hscomp/index_html Mathematics Competitions and Activities
50. http://recreations.math.designerz.com/recreations-competitions.php Math Recreations & Competitions
51. http://www.magicofmath.org/award.html Math Recreations & Competitions
52. http://www.education-world.com/a_curr/curr145.shtml And the Winner Is... Math Competitions for Students
53. http://www.geometry.net/math_help_desk/math_competitions.html Math Competitions
54. http://www.powhatan.k12.va.us/Instruction/Instruct_Special/giftedmath.htm Math Competitions
55. http://www.math.sc.edu/~filaseta/contests.html Math Competitions
56. http://www.brainyencyclopedia.com/encyclopedia/l/li/list_of_mathematics_competitions.html Math Competitions
57. http://math.about.com/ Mathematics Links
58. http://cr.yp.to/djb.html D. J. Bernstein Mathematics and computer science

59.http://www.rhodes.edu/mathcs/mathsites.asp Rhodes Mathematics Sites
60.http://www.ams.org/ American Mathematical Society
61.http://archives.math.utk.edu/ Math Archives
62.http://archives.math.utk.edu/ Mathematics Contests and Competitions
63.http://directory.google.com/Top/Science/Math/ Math Links
64.http://www.prepas.org/ups/maths/#exercices Union des Professeurs de Spéciales Mathématiques
65.http://www.animath.fr/olympiades.html Olympiades internationales de mathématiques, délégation française
66.http://www.vinc17.org/cijml/problemes.html Le Championnat International des Jeux Mathématiques et Logiques
67.http://www.cms.math.ca/Competitions/CMO/exam/cmo2004.html Canadian Mathematical Olympiad 2004
68.http://www.cms.math.ca/Employment/ - Employment Resource
69.http://www.math-jobs.com/ - Employment Resource
70.http://www.craciunaxioma.home.ro/ - Revista Axioma
71.http://www.cms.math.ca/Employment/joblinks.html - Employment Resource
72.http://www2.nas.edu/cpc/ - Employment Resource
73.http://www.youngmath.net/ - Employment Resource
74.http://www.jobsetc.ca/ - Employment Resource
75.http://www.w3.org/Amaya/ - Un soft pentru documente format MathML
76.http://www.cms.math.ca/Competitions/IMTS/info.html#USAMTS - International Mathematical Talent Search
77.http://www.cms.math.ca/Services/ - Other Mathematics Service Providers
78.http://front.math.ucdavis.edu/ - Arhivă de materiale printabile
79.http://www.fest.org.za/pamo/ Pan African Mathematics Olympiad
80.http://www.obm.org.br/eureka.htm - Eureka
81.http://olympiads.win.tue.nl/imo/#archives – MathCollection Archive
82.http://my.netian.com/~ideahitme/problems.html - Forum Geometricorum
83.http://archives.math.utk.edu/tutorials.html - Math Tutorials
84.http://www.mathtype.com/en/products/ - MathType & More Download
85.http://sourceforge.net/softwaremap/trove_list.php - Gutenberg Project
86.http://sourceforge.net/softwaremap/trove_list.php?form_cat=347 – Gutenberg Project
87.http://www.csc.matco.ro/1fract.html - Introducere în geometria fractală
88.http://www.ab-archive.com/Romanian/ - The Best Soft Archive
89.http://www.free4all.go.ro/free_html_tutorial.htm - Situri cu tutoriale HTML
90.http://www.thebugs.ws/ddl/ - Serials & Download Shareware

91. http://www.eevl.ac.uk/mathematics/index.htm - Diverse
92. http://www.cabri.com.br/ Soft geometrie
93. http://www.crmariocovas.sp.gov.br/emr_l.php?t=008 Linkuri spre situri de matematica
94. http://www.mat.ufrgs.br/~edumatec/artigos/artigos.htm Articole de matematica
95. http://olimpiadi.ing.unipi.it/index.php Progetto olimpiadi della matematica
96. http://www.sbem.com.br/ Sociedade Brasileira de Educação Matemática
97. http://www.sbm.org.br/ Sociedade Brasileira de Matemática – are de toate + linkuri spre alte olimpiade
98. http://www.impa.org.br/ Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada
99. http://www.ams.org/ American Mathematical Society
100. http://www.pucpr.br/educacao/academico/graduacao/cursos/matematica/index.html Corso en matematica
101. http://www1.universia.net/CatalogaXXI/C10046PPPTII2/S11856/P11852NN3/INDEX.HTML Math reviste
102. http://www.sbem.com.br/favoritos.htm Matematica Links Favoritos
103. http://www.kluweronline.com/issn/0016-2663 Mathematical Online Journals
104. http://www.mathcounts.org/ Mathematica for Competitions
105. http://www.mth.uct.ac.za/imo/index.html Pan African Mathematics Olympiad (IMO and PAMO)
106. http://www.mth.uct.ac.za/digest/ The Mathematical Magazine for South African Shools
107. http://www.oma.org.ar/ Olimpíada Matemática Argentina
108. http://www.amt.canberra.edu.au/ Australian Mathematics Trust
109. http://www.kulak.ac.be/vwo/uk/ Flanders Mathematics Olympiad
110. http://www.unl.edu/amc/ The American Mathematics Olympiad
111. http://imo.math.ca/ International Mathematical Olympiad
112. http://www.cde4.com/fra/index.html Soft de geometrie si nu numai
113. http://geocentral.net/polyhedron/download/rom/polyhedr.zip Math Soft @ Links
114. http://mathforum.org/mathed/math.software.archives.html Math Software Archives
115. http://mathforum.org/mathed/index.html World Wide Web Resources for Mathematics Education
116. http://mathforum.org/resource_types/ Resurse
117. http://www.spm.pt/Publicacoes/gazeta.html Gazeta de Matemática Portuguesa
118. http://www.spm.pt/index.html Sociedade Portuguesa de Matematica
119. http://www.spm.pt/~opm/ Olimpiadas Portuguesa de Matematica
120. http://www.geocities.com/CapeCanaveral/Lab/4661/ Olympiad Math Madnes
121. http://users.hotlink.com.br/marielli/ Matematica Horizonte da Educacao
122. http://archives.math.utk.edu/contests/ Mathematics Contests, Competitions, and Problem Sets

123.http://camel.math.ca/Exams/competitions.html Mathematics Competitions
124.http://journals.cms.math.ca/CRUX/ CRUX with MAYHEM On-line
125.http://www.math.unb.ca/mathcomp/ New Brunswick Math Competition
126.http://www.e-tutor.com/et100/html/library.htm Education Online Resources
127.http://cs.unm.edu/~joel/NonEuclid/ Non Euclid Demonstration Software
128.http://www.univie.ac.at/future.media/moe/collections.html Useful links to online tools and mathematical subjects
129.http://www.infty08.net/mathart.htm Mathématiques: articles, éléments de cours, exos ...
130.http://www.math.purdue.edu/pow/fall2004/pdf/solution01.pdf Problem of the Week – Online Competition
131.http://www.cut-the-knot.org/content.shtml Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles
132.http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/index.shtml Interactive Mathematics Activities
133.http://www.cut-the-knot.org/content.shtml Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles
134.http://math.ournet.md/link.html Scoala Virtuala a Tânărului Matematician
135.http://www.olsedim.com/olympiad/ Moldavian Mathematical Olympiads
136.http://www.mccme.ru/english/ Moscow Center for Continuous Mathematical Education
137.http://www-sbras.ict.nsc.ru/win/mathpub/math_www.html Математика на страницах WWW
138.http://www-sbras.nsc.ru/EMS/ems_j.htm Mathematical Journals - The Electronic Library of Mathematics
139.http://www-sbras.nsc.ru/EMS/psu_j.htm Math Journals
140.http://www.math.unb.ca/apics.papers/ APICS Competitions
141.http://www-sbras.nsc.ru/EMS/psu_j.htm Gainesville College Math Tournament
142.http://www-sbras.nsc.ru/EMS/psu_j.htm Problemas Semanales
143.http://www.oma.org.ar/enunciados/index.htm#oma Archivo de Enunciados
144.http://www.mathleague.com/ Mathematics materials
145.http://www.oma.org.ar/otras.htm Olimpíada Matemática Argentina - coneXiones
146.http://www.oma.org.ar/omanet/index.htm OMANET Educación Interactiva
147.http://www.oma.org.ar/index.htm Olimpíada Matemática Argentina
148.http://www.reu.edu.uy/jpv/proyectos/cpm/geodin/geodin2002.htm TORNEO GEODIN 2002
149.http://www.keypress.com/sketchpad/ The Geometer's Sketchpad®
150.http://roble.pntic.mec.es/~jarran2/ GEOMETRÍA DINÁMICA - CABRI II.
151.http://www.sciences.univ-nantes.fr/physique/perso/cortial/bibliohtml/biblgene.html Cabri en Physique
152.http://www.terra.es/personal/joseantm/ Geometría con Cabri-Géomètre II.
153.http://www.galaxy.com/galaxy/Science/Mathematics.html Mathematics Servers Links
154.http://www.bangor.ac.uk/ma/CPM/welcome.htm Centre for the Popularisation of Mathematics

155.http://www.ann.jussieu.fr/anneau/ ***L'Anneau des Mathématiques Francophones***
156.http://users.skynet.be/cabri/ Ateliers Mathematiques
157.http://www.pandd.demon.nl/index.html Cabri Geometry
158.http://www.cabri.net/abracadabri/ abraCAdaBRI
159.http://mathic.chez.tiscali.fr/0/index.php?rep=math Mathématiques - NetProblemathique
160.http://abdellah.bechata.free.fr/index.php The Lord of the Math (Francaise)
161.http://maths-forum.com/ Maths-forum.com
162.http://www.mowmowmow.com/math/cabri/index_e.htm Let's enjoy Geometric World ! - Mow'S CABRI II
163.http://www.micromep.net/ MICROMEP pour les élèves du Collège Courbet de Grand-Charmont.
164.http://juliette.hernando.free.fr/ Jeux de maths
165.http://www.univ-orleans.fr/quizz/ QUIZZ Math 2002 - vous pouviez tester vos connaissances en mathématiques
166.http://publimath.irem.univ-mrs.fr/ Base de données bibliographiques sur l'enseignement des mathématiques
167.http://www.mjc-andre.org/pages/amej/accueil.htm MATh .en. JEANS
168.http://cdeval.free.fr/ Cmath - des macros fonctionnant sous Word
169.http://www.ac-noumea.nc/maths/amc/polyhedr/ Une balade dans le monde des polyèdres
170.http://www.ac-noumea.nc/maths/ Mathematiques de Nouvelle Caledonie
171.http://www.ac-noumea.nc/maths/clubsjeux.htm Clubs de mathématiques, clubs de jeux mathématiques
172.http://www.vinc17.org/math/brenoms.pdf Mathématiques, par Vincent Lefèvre
173.http://perso.wanadoo.fr/therese.eveilleau/ Mathématiques magiques
174.http://www.mathkang.org/ JEU-CONCOURS Kangourou des mathématiques
175.http://trucsmaths.free.fr/rubik.htm#programmes Le Rubik's cube
176.http://trucsmaths.free.fr/ Des trucs et des math
177.http://labomath.free.fr/ LaboMath est mon petit laboratoire de Mathématiques
178.http://eteaching.free.fr/ ETEACHING Plus de 10 000 questions !! Des exercices interactifs.
179.http://yttriumath.free.fr/ Bienvenue sur le site étudiant MATHEMATINIUM 2000
180.http://jellevy.yellis.net/ Bienvenue sur Math Web, le site des Mathématiques interactives !
181.http://leprofesseurphifix.estsurle.net/ Des fiches d'exercices pour les niveaux CE1, CE2, CM1 et CM2.
182.http://www.echecsetmaths.com/ L'univers des Nombres, des Echecs, de la Géométrie et de la Logique
183.http://www.webmaths.com/index.php?op=edito WEB MATHS : un site d'aide en mathématiques et physique
184.http://www.maths-express.com/ Baccalauréat Concours Général Olympiades Académiques et Internationales IMO
185.http://mathworld.wolfram.com/ the web’s most extensive mathematics resource
186.http://mathforum.org/math.topics.html Math Resources by Subject (by Math Forum@Drexel)

187.http://www.chez.com/maths1s/ Math1S - Cours et exercices de première S, terminale S, première STI et BTS
188.http://www.chronomath.com/ Bienvenue sur ChronoMath - une chronologie des MATHÉMATIQUES
189.http://www.univ-orleans.fr/quizz/ vous pouviez tester vos connaissances en mathématiques
190.http://enigmath.org/index.php vous pouvez tester vos connaissances en mathématiques
191.http://acm.emath.fr/amm/ Année Mondiale des Mathématiques 2000
192.http://eteaching.free.fr/ Site d'un professeur de mathématiques. Des exercices et des cours auto corrigés.
193.http://www.chez.com/maths1s/ cours et exercices de première S, terminale S, première STI et BTS batiment
194.http://andre.turbergue.free.fr/ Maths en terminale S
195.http://www.col-camus-soufflenheim.ac-strasbourg.fr/Page.php?IDD=45 des cours de maths à télécharger
196.http://perso.wanadoo.fr/gilles.costantini/ documents étoffés utiles aux lycéens, étudiants et professeurs
197.http://www.mathsaharry.com/pbexplications.htm problèmes du Kangourou et de Rallyes Mathématiques
198.http://www.mathprepa.com/ Un abrégé du cours de maths en classe prépa
199.http://www.les-mathematiques.net/pages/cours_zip.php3 Des cours de Mathématiques niveau universitaire.
200.http://petrequin.club.fr/mathema/index.html E-livre de mathématiques élémentaires
201.http://www.archimaths.net/ une publication de maths qui s'adresse du collégien jusqu'à l'étudiant d'IUFM
202.http://users.skynet.be/mathematix/ Questions posées aux examens d'admission des universités belges
203.http://dstheque.free.fr/ site à à vocation communautaire, pour fabriquer rapidement et simplement des devoirs
204.http://www.maths-express.com/ Annales CG(1990-2004), IMO(1983-2003) et OA(2001-2004 Première S)
205.http://pierre.priouret.free.fr/Maths.html Cours de maths de Seconde, de Première STT, de Terminale STI, de BTS
206.http://www.enigmatum.fr.st/ Enigmatum, centre des énigmes logiques, mathématiques, paradoxes
207.http://www.multimagie.com/ le site des carrés multimagiques
208.http://baudrand.club.fr/index.html s'adresse en priorité aux étudiants en classe préparatoire
209.http://perso.wanadoo.fr/stephane.saje/ propose des exercices, des sujets corrigés de mathématiques
210.http://nikopol0.alrj.org/ Regroupe des articles de maths (agreg et autre), des programmes informatiques
211.http://perso.wanadoo.fr/gery.huvent/index_explorer_net.htm des sujets de ds et dns ; des articles de Maths
212.http://www.chambily.com/ un prof de maths qui s'intéresse à plein de trucs ;-) Logiciels, musique, poésie...
213.http://perso.wanadoo.fr/lcholet/math/ proposant des illustrations animées en java de théorèmes mathématiques.
214.http://perso.wanadoo.fr/megamaths/ documents de Mathématiques - Université - Préparation au CAPES – etc
215.http://www.angelfire.com/sc/math/ mathématiques et sciences de niveaux secondaires, l'éducation des adultes.
216.http://perso.wanadoo.fr/steved/ Maths, du collège à l'enseignement supérieur (cours avec JS, QCM, sujets...)
217.http://mathic.chez.tiscali.fr/0/index.php?rep=math des cours de mathématiques des niveaux 4ème et 1ère STI.
218.http://perso.wanadoo.fr/fabien.besnard/maths.htm Page perso de Fabien Besnard, recherche mathématique.

219.http://v.labbe.chez.tiscali.fr/boitemath.htm regroupe des documents d'enseignement des mathematiques.
220.http://www.dma.ens.fr/culturemath/ Accompagnement et Culture Mathématiques
221.http://www.research.att.com/~njas/sequences/indexfr.html L'Encyclopédie Électronique des Suites Entières
222.http://scolamath.free.fr/ des cours, des exercices de math, des idées d'IDD, des trucs, des logiciels, des liens...
223.http://perso.wanadoo.fr/marco.butte/ Un site pour tous ceux qui aiment les maths et qui veulent s'amuser:
224.http://www.lmrl.lu/mathematiques/default.htm le serveur de mathématiques du Lycée Michel-Rodange
225.http://bd.educnet.education.fr/maths/recherche.php une banque des ressources en mathématiques
226.http://casemath.free.fr/ LA CASEMATH
227.http://perso.wanadoo.fr/christophe.hoffmann/ Site partenaire du portail Sésamath
228.http://perso.wanadoo.fr/jacques.nimier/mathematique.htm Les diverses représentations des mathématiques
229.http://tombom.club.fr/index.html Enseigner les mathématiques en utilisant l'outil informatique
230.http://www.apprendre-en-ligne.net/madimu/ un cours de mathématiques en ligne pour le lycée
231.http://www.coolmath.com/ est surtout axé sur l'amusement + des liens vers des sites plus pointus.
232.http://mathematiques.ac-bordeaux.fr/ Académie de Bordeaux – Mathématiques
233.http://hypo.geneve.ch/www/math/html/root.html Récréations informatiques & mathématiques
234.http://www.ima.umn.edu/~arnold/graphics.html un bon dessin vaut mieux qu'un long discours
235.http://www.vsmp.ch/crm/ (CRM) est un organe de la Société Suisse des Professeurs de Mathématique
236.http://math.usask.ca/readin/ Des exercices (niveau lycée ou plus) classés par chapitres et par niveaux
237.http://www.ilemaths.net/ propose des cours et des exercices de maths et de physique.
238.http://membres.lycos.fr/emauvais/idm/MenCom1.htm un grand nombre de notions utiles au lycée
239.http://www.bibmath.net/ BibM@th
240.http://membres.lycos.fr/strom/index.htm du Lycée de Vienne Saint-Romain-En-Gal
241.http://tanopah.jo.free.fr/ Un cours en ligne très bien fait.
242.http://trucsmaths.free.fr/ "Comment se fait-il qu'il y ait des gens qui ne comprennent pas les mathématiques ?"
243.http://www.webmaths.com/index.php?op=edito un site pour les mathématiques scolaires
244.http://www.mathprepa.com/ MathPrépa ! + de 1500 pages de cours, de programmes...
245.http://www.xm1math.net/ Mathématiques en ligne
246.http://gifsa.fsa.ucl.ac.be/jic/ Faculté des Sciences Appliquées de l'UCL - d'admission et recueil de questions
247.http://www.forum.math.ulg.ac.be/ forum M@TH en Ligne! - elève du secondaire, étudiant d'une école supérieure
248.http://www.ulg.ac.be/mathgen/ Université de Liège - Faculté des Sciences Appliquées, informations
249.http://www.ulb.ac.be/polytech/facute/admission/quest.html l'Université Libre de Bruxelles, Ecole polytechnique
250.http://www.fpms.ac.be/fr/admission/admi_toc.html Faculté Polytechnique de Mons

Emiliano Aparicio Bernardo 1926 – 1998

España - URSS

Entrar en una clase universitaria no es lo mismo que entrar en una taberna
E. Aparicio

Emiliano Aparicio nació en Baracaldo en 1926. En 1937 es embarcado, junto a 1500 “niños de la guerra”, rumbo a Rusia, para alejarlos del peligro de la guerra civil. Los primeros 4 años en Rusia transcurren en Odessa, en el internado para niños españoles. Allí su afición y facilidad para las matemáticas hacen que uno de sus profesores, D. Amadeo Usón, le anime a estudiar Matemáticas. La Segunda Guerra Mundial hace que se trasladen a Tiflis, en Georgia, donde conoció a la joven bilbaína Alicia Cortés, con quien se casó años más tarde. Terminada la Guerra, estudia Ciencias matemáticas en la Universidad Lomonosov de Moscú, donde se gradúa con Matrícula de Honor en 1950, así como sus cursos de doctorado, que termina con la misma calificación en 1953. Los Profesores de Moscú eran nada menos que Kurosh, Khintchine, Kolmogórov, Markhushévich, Vinográdov, Nikolsky, Gelfond.....

En 1954 defendió sus tesis doctoral, dirigida por Gelfond. Ya entonces era profesor de la Escuela de Ingenieros Energéticos de Moscú, donde permanecería 18 años. Traduce al español libros de la Editorial MIR y hasta 25 manuales matemáticos.

En 1966, tras un encuentro en un Congreso en Moscú con matemáticos españoles, inicia discretamente las gestiones para regresar a España, cosa que no se produce hasta 1971, cuando es contratado como Profesor Agregado Interino de la facultad de Ciencias de la Universidad de Bilbao. La falta de acuerdos bilaterales de reconocimiento de titulaciones académicas entre España y la URSS hace que en 1973 defienda de nuevo sus tesis ante un tribunal español, dirigida en este caso por el Prof. Rodríguez – Salinas, calificada con Premio Extraordinario. En 1979 obtiene la plaza de Profesor Agregado Numerario de Teoría de Números y posteriormente es nombrado catedrático.

En la Universidad del País Vasco, el Prof. Aparicio desarrolla una gran labor docente e investigadora; organizó la Olimpiada Matemática Española en el Distrito Universitario del País Vasco entre 1980 y 1998. En 1991, tras su jubilación, es nombrado Profesor Emérito.

En sus investigaciones desarrolló y profundizó los temas de aproximación diofántica y teoría de números, publicando más de veinte artículos.

Las costumbres y fórmulas de cortesía usuales en la Universidad de Moscú, que trasladó a sus clases en Bilbao, le valieron el cariñoso apodo de “el ruso”, entre sus estudiantes.

Murió en Bilbao el 26 de septiembre de 1998.

Enzo R. Gentile 1928 – 1991

Argentina

El Dr. Enzo Romeo Gentile nació en Buenos Aires el 14 de diciembre de 1928. Después de obtener en 1958 el título de Doctor en Matemáticas por la Universidad de Cuyo, con una tesis sobre *Anillos inyectivos,* continuó su perfeccionamiento en las Universidades de Princeton y Rutgers, de Estados Unidos. Su brillante carrera de investigador y docente se desarrolló en numerosas Universidades del país y del extranjero. Fue Profesor visitante de las Univeridades de Utrecht (Holanda), Regensburg y Dortmund (Alemania), Berkely y Northwestern (Estados Unidos), Palermo y Milán (Italis), Aarhus (Dinamarca), Santiago de Chile.

El Prof. Enzo R. Gentile dedicó su vida a la matemática, a su enseñanza, que impartía de forma magistral, y a la música. Su habilidad para el Álgebra era inmensa, sus cursos poseían un poder magnético irresistible. Vivió en Buenos Aires, pero formó a matemáticos por toda la Argentina: en las Universidades de Córdoba, Bahía Blanca, San Luis, San Juan, Comahue, Tandil, La Pampa, Salta, Tucumán, Santiago del Estero.

En 1970 se celebró en las Sierras de Córdoba el primer Seminario Nacional de Matemáticas, actividad ya consolidada pero que en sus primeros tiempos pasó por dificultades. Gentile colaboró decisivamente en su establecimiento y asentamiento definitivos.

La Revista de Educación Matemática, publicada por la Unión Matemática Argentina lo tuvo entre sus fundadores y fue su principal protagonista, en casi todos sus números.

Su producción bibliográfica fue muy extensa; sus trabajos de investigación se han publicado en los Proceedings de la AMS, American Mathematical Monthly, Journal of Algebra, Mathematische Zeitschrift.

En 1957, a su llegada a la Facultad de Ciencias Exactas y naturales de la Universidad de Buenos Aires, revolucionó la enseñanza del Álgebra y desde entonces fue el maestro indiscutible de varias generaciones de algebristas.

En 1987 fue designado miembro de la Academia Nacional de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.

Murió el 7 de abril de 1991. Su último trabajo, publicado póstumamente, es la reedición de *Aritmética Elemental en la Formación Matemática,* que fue presentado durante la entrega de Premios de la VIII Olimpiada Matemática Argentina.

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

Número

35

Revista Escolar
de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

Número 35 (julio - agosto 2009)

ISSN – 1698-277X

ÍNDICE

Problemas propuestos 171-175

Problemas resueltos

Problema 165

Problema 168 : Recibidas soluciones de : Luis Gómez Sánchez Alfaro, Venezuela; Daniel Darío Góngora García, Lima, Perú; Kee-Wai Lau, Hong Kong, China; Paolo Perfetti, Dipartimento di Matematica, Universitá degli studi di Tor Vergata, Roma, Italia; Raúl A. Simón Eléxpuru, Santiago, Chile y el proponente. Presentamos la solución de Kee-Wai Lau (traducida por el editor).

Divertimentos matemáticos 35

Presentamos las biografías breves de Julio Garavito Armero (Colombia) y Esteban Terradas Illa (España)

Reseña de páginas web y de Congresos 35

Noticia del Congreso RELME23 en Santo Domingo (República Dominicana), 13-17 de julio de 2009

Valladolid, agosto de 2009

Desarrollada en el Centro de Altos Estudios Universitarios de la OEI con el apoyo de la Agencia Española de Cooperación Internacional para el Desarrollo (AECID)

HISTORIA DE LA MATEMÁTICA EN EL PERÚ

ANÁLISIS DE OBRAS

RECUENTO A LA MATEMÁTICA PERUANA

[1]

Autor: Moisés Samuel Toledo Julián

1 Descripción del logo, de la parte superior hacia el inferior: Miguel Wenceslao Garaycochea, Federico Villarreal Villarreal, Alfred Rosenblatt, Godofredo García Diaz, José Tola Pasquel.

1. Introducción

La historia de la Matemática en el Perú constituye el aporte de aquellas personas que con sus trabajos de investigación y cátedra permitieron que esta ciencia se instaure y desarrolle en nuestro pais.

Historia de la Matemática en el Perú es un libro que será publicado proximamente el cual incluirá reseñas biográficas, históricas y resúmenes de las investigaciones que fueron desarrolladas por Matemáticos Peruanos antes y despues de la fundación de la *Facultad de Ciencias*[2] en la *Universidad Nacional Mayor de San Marcos* (UNMSM) y otros centros donde se estableció la Matemática como carrera profesional hasta tiempos actuales. El presente artículo muestra sólo un pequeño extracto del contenido de este libro (el cual no es solo un recuento a la historia Matemática si no tambien un homenaje y reconocimiento a los personajes que contribuyeron a la consolidación de la Matemática en el Perú).

La fuente de datos con la cual se contó, está constituido en su mayor parte por:

- *La Revista de Ciencias* (redactado por profesores de la *Facultad de Ciencias* de la *Universidad Nacional Mayor de San Marcos* y *Escuela de Ingenieros*) fundada en octubre de 1897.
- Archivos y tésis ubicados en la Unidad de Archivo Histórico *Domingo Angulo* el cual es una dependencia de la UNMSM.
- Entrevistas y trabajos de investigación concedidos generosamente por Matemáticos de reconocida trayectoria.

Para abordar la História de la Matemática en el Perú, la tomaremos en seis etapas:

I.- Antes de 1866, etapa en la que se desarrolló la Matemática aun cuando no existía como carrera profesional.

II.- Desde 1866 año de fundación de la *Facultad de Ciencias* en la UNMSM hasta 1879 año en que Federico Villarreal obtiene el grado de Bachiller en Matemáticas Puras y comienza a dictar cátedra formando una generación de Matemáticos.

III.- Desde 1879 hasta 1935 año en que llega al Perú desde Polonia el Doctor Alfred Rosenblatt y forma una nueva generación de Matemáticos.

IV.- Desde 1935 hasta 1947 año de fallecimiento del Dr. Alfred Rosenblatt y apartir del cual el Dr. José Tola Pasquel se constituye en el conductor y forjador de otra generación de Matemáticos.

V.- Desde 1947 hasta 1957 año en el que se funda la **Sociedad Matemática Peruana**, por iniciativa del Dr. José Tola Pasquel.

VI.- Desde 1957 hasta 1987 año en que se firma el convenio entre la **Sociedad Matemática del Perú**[3] y la **Sociedad Matemática de Brasil**, empezando un nuevo impulso de la Matemática Peruana dirigido por el Dr. César Carranza Saravia.

VII.- Desde 1987 hasta la actualidad (2009).

[2] Fundada el 15 de marzo de 1866
[3] Fundada en 1957

2. Descripción de las Etapas

Describiremos algunas de las etapas (esto debido a que la descripción completa aparecerá en el libro: "Historia de la Matemática en el Perú"), específicamente las dos primeras y solo de manera parcial, señalando los hechos más resaltantes ocurridos en ellas así como de los Matemáticos Peruanos mas respresentativos.

2.1. Etapa I: antes de 1866

En esta etapa se desarrolla la Matemática sin que existiese como carrera profesional. Los personajes que trascendieron se caracterizaron por haber realizado investigaciones en algunos temas especiales y/o publicación de algunos libros de instrucción media. Recordemos que la independencia del Perú se dio en 1821, es por ello que esta etapa queda claramente dividida en las subetapas: **Colonial** (antes de 1821) y **Republicana** (apartir de 1821).

En la subetapa **Colonial** tenemos como principal representante a:

2.1.1. Miguel Wenceslao Garaycochea

Miguel Wenceslao Garaycochea no disfrutó de muy larga vida pues habiendo nacido en Arequipa el año de 1816, murió en Trujillo el año de 1861. Se educó en la ciudad de su nacimiento hasta recibir el grado de Doctor en Jurisprudencia. Fue profesor en el Seminario de Trujillo, rector en el Colegio Nacional de San Juan de esa misma ciudad, juez de primera instancia de Chachapoyas, vocal de la Corte Superior de Cajamarca y diputado. Aunque vivió menos de medio siglo, la vida no debió de parecerle corta: la pasó estudiando, y como él mismo lo asegurara "*el hombre vive tanto cuanto sabe*".

Garaycochea publicó algunos textos de matemática que se adoptaron en los colegios de instrucción media del norte de la República. Dejó las siguientes obras inéditas:

1. Tratado de Filosofía Elemental

2. Disertaciones Teológicas

3. Un tomo de Poesías (publicada posterior a su muerte por su hijo Manuel Garaycochea)
4. Cálculo Binomial

La bien conquistada reputación del Dr. Garaycochea como Matemático, le ha sobrevivido. Su obra más célebre en este ambito: ***Cálculo Binomial***, de la que en 1896 se publicó la primera parte en un volumen de 800 páginas, basta para inmortalizarlo. Garaycochea es el ***Lagrange Americano***, decía un escritor eminente; y en verdad que ningún hombre de ciencia encontrará exagerado el encomio, después de agotar la lectura y estudio del ***Cálculo Binomial***. Este libro honra tanto a su autor como a su patria, que gloria para todo pueblo es la gloria de sus hijos. Así lo ha estimado el Perú, y el retrato de este insigne Matemático figura hoy en la Galería de autores nacionales que adorna el salón de lectura de la Biblioteca de Lima.

2.2. Etapa II: 1866 – 1879

En esta etapa se funda la Facultad de Ciencias en la Universidad Nacional Mayor de San Marcos (UNMSM) y por ende la Matemática en el Perú se desarrollaría de manera profesional. Describiremos así como se instituyó la Facultad de Ciencias, como estuvo estructurada y posteriormente referimos a uno de los personajes más notables de esta etapa: el Dr. Federico Villarreal.

2.2.1. Facultad de Ciencias UNMSM

Esta etapa es muy importante dentro de la Historia de la Matemática Peruana, y es que la fundación de la Facultad de Ciencias en la Universidad Nacional Mayor de San Marcos (UNMSM) constituye el inicio formal de la Matemática en el Perú como carrera Profesional. Esta etapa ciertamente resulta dificil dentro del contexto político, dado los distintos intentos de España por reinstaurar el coloniaje, sin embargo nos centraremos a lo largo de este capítulo sólo en el contexto académico y la organización de la Facultad de Ciencias.

Fundación

La creación de la Facultad de Ciencias en la Universidad Nacional Mayor de San Marcos (UNMSM) se debió a un decreto dado por el entonces Presidente del Perú *Mariano Ignacio Prado* (primer gobierno 1865-1868) el 15 de Marzo de 1866, inició así la Facultad de Ciencias (FC) sus funciones en el Convictorio de San Carlos.


Figura 1: Fotos Convictorio de San Carlos.

Al iniciar sus funciones la FC, en el Convictorio se encontraban las Facultades de Jurisprudencia, Filosofía y Letras; dichas facultades funcionaban con entera y absoluta separación entre sí. La organización de la FC, estaba conformada en su primera etapa por:

Cargo	Responsable
Decano	Dr. Antonio Raimondi
Secretario	———
Prof. Matemáticas Trascendentales	Dr. Mariano Damaso Beraún
Prof. Física	José de la Rosa Toro
Prof. Química	Dr. José Eboli
Prof. História Natural	Dr. Antonio Raimondi

Cuadro 1: Primeras autoridades de la FC.

El Decano sería nombrado por el Gobierno de turno, mientras que el secretario era elegido por los miembros de la Facultad. Mariano Ignacio Prado, decretó tambien que a la FC le correspondía la enseñanza de aplicación a la Minería, Agricultura, Obras Públicas y otras construcciones ó usos industriales.

Tenemos entonces que en la FC, se inpartían 4 asignaturas. Las cuales estaban conformadas de la siguiente manera:

Asignatura	Contenido
Matemáticas Trascendentales	Geometría descriptiva, Álgebra Superior, Geometría Analítica y Cálculo Infinitesimal
Física	Física, Geodésia, Mecánica y Astronomia
Química	Química General y Análisis Químico,
História Natural	Mineralogía, Geología, Botánica y Zoología

Cuadro 2: Estructura de los cursos en la FC.

Plan de estudios de la FC

En sus inicios la FC, quedó regida al plan de estudios asignado por el Gobierno, la cual estaba estructurada de la siguiente manera:

Se tenian por cursos electivos, aquellos que estaban relacionados con la filosofía e história de la ciencia.

Año de Estudio	Cursos
1	Cálculo numérico y algebráico, incluyendo las teorías que sirven de fundamento al cálculo infinitesimal
2	Geometría y trigonometría, con sus principales aplicaciones a la nivelación, agrimensura y levantamiento de planos
3	Geometría analítica y descriptiva, primer año de Física que comprende el estudio de la Física propiamente dicha, calórico, lúz, magnetismo, electricidad y metereología
4	Cálculo infinitesimal, segundo año de física que comprende el estudio de la mecánica, atracción acústica, astronomía, topografía, Química inorgánica, Mineralogía y Geología
5	Teoría general de las curvas, Química orgánica, Botánica y Zoología

Cuadro 3: Plan de estudios de la FC.

Para poder ser admitido en la FC, sólo era necesario que el postulante haya hecho los estudios de instrucción media. El postulante tenía la libertad de poder elegir estudiar paralelamente en otra Facultad.

Grados y títulos en la FC

La FC otorgaba los grados de Bachiller, Licenciado y Doctor en Ciencias de una manera general ya que todos los alumnos estudiaban los mismos ramos (de manera incompleta y elemental). Los grados se discernian ante el Rector quien nombraba un jurado (prescindiendo de la Facultad) y en algunas ocasiones se obtaban los tres grados juntos en pocos minutos.

El 8 de marzo de 1876 un nuevo reglamento de instrucción dividió a la FC en 3 secciones: Ciencias Matemáticas, Físicas y Naturales son sus grados Bachiller, Licenciado y Doctor. Estos grados se optaban de la siguiente manera:

Grado	Requisito
Bachiller	• Terminar dos años de estudios • Resolver un problema asignado por el jurado • Sustentar una tesis
Licenciado	• Terminar tres años de estudios • Resolver un problema sacado por la suerte • Presentar tres días después una Tésis sobre el mismo problema
Doctor	• Hacer por sí solo un cuarto año de estudio sobre las materias indicadas en el reglamento • Presentar una Tésis respecto a su tema de Tésis

Cuadro 4: Obtención de Grados y Títulos en la FC.

2.2.2. Federico Villarreal

Durante la segunda etápa, el personaje más importante sin duda fue Federico Villarreal. Este insigne Matemático nacido en la localidad de Túcume (Lambayeque) en Agosto de 1850 llega a Lima a la edad de 26 años (Marzo de 1879) y rinde su examen de ingreso a la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Acontinuación describiremos el estado de la Matemática en el Perú durante sus estudios en pre-grado así como posterior a ellos.

La Matemática Peruana durante Federico Villarreal

Esta etapa corresponde desde su ingreso a la Facultad de Ciencias (FC) en 1877 hasta su deceso en 1923. Villarreal rindió su exámen de Admisión en el mes de marzo (1877) ante un jurado compuesto por los señores catedráticos: José Granda, Joaquin Capelo y Francisco Marticorena; así ingresa a la FC de la UNMSM a los 26 años, siendo por entonces Decano de la FC el Científico Polaco Uladislao Folkierski , teniendo como profesores a: Uladislao Folkierski, Joaquin Capelo, José Granda, Camilo N. Carrillo, Juan Francisco Marticorena, José Sebastian Barranca y Miguel Colunga.

Durante su desempeño como estudiante en la FC obtuvo diversos premios y reconocimientos en las distintas asiganaturas de carrera, entre ellos se encontraba la ***contenta*** el cual era una beca que lo exoneraba del pago de los derechos universitarios para la obtención de los grados de Bachiller y Licenciado.

Grados que obtuvo Federico Villarreal

Federico Villarreal obtuvo los siguientes grados:

1. **Bachiller en Ciencias Matemáticas:** obtenido el 18 de octubre de 1879, habiendo cumplido con los requisitos dispuestos para obtenerlo, siendo estos:
    - *a*) Culminar los dos años de estudios.
    - *b*) Resolver un problema: el cual fue *Lugar del centro de las superficies de segundo grado.*
    - *c*) Sostener una Tesis ante la FC el cual fué *Fórmulas y métodos que deben completarse en matemáticas.*
2. **Licenciado en Ciencias Matemáticas:** obtenido el 26 de mayo de 1880, habiendo cumplido con los requisitos dispuestos para obtenerlo, siendo estos:
    - *a*) Culminar tres años de estudios.
    - *b*) Resolver un problema sacado por la suerte: el cual fue *Efectos de la refracción en el disco de los astros.*
    - *c*) Sostener una Tesis ante la FC (tres dias despues de la entrega del problema) el cual fue *Efectos de la refracción en el disco de los astros.*
3. **Doctor en Ciencias Matemáticas:** obtenido el 23 de setiembre de 1881, habiendo cumplido con los requisitos dispuestos para obtenerlo, siendo estos:
    - *a*) Hacer por si solo un cuarto año de estudio sobre un tema estipulado en el reglamento.
    - *b*) Sostener una Tesis ante la FC: el cual fue *Clasificación de las curvas de tercer grado.*

2.3. Etapa III: 1879 – 1935

Esta etapa se desarrolla entorno a los trabajos de Federico Villarreal así como de la profusa generación de Matemáticos que formaría. Describiremos someramente los principales trabajos que desarrolló.

2.3.1. Trabajos de Federico Villarreal

La mayoría de los trabajos de Federico Villarreal fueron publicados en **La Revista de Ciencias**, la cual el mismo fundó en 1897 y le sirvió de principal tribuna para exponer sus investigaciones. Punto aparte merecen sus tres tesis que presentó para optar sus grados académicos. Acontinuación describiremos el contenido de las 3 tesis y haremos una lista resumida de sus principales trabajos.

Bachiller en Ciencias Matemáticas

Esta tésis consta de las siguientes partes:

a) Elevación de Polinomios[4]: en esta sección el propone un método para poder elevar un polinomio (o una serie) a un exponente real o complejo, el cual es en esencia sencilla de aplicar y constituye una muestra de su genialidad en el área.

b) Transformación de Imaginarias: en esta sección el propone demostrar de forma adecuada que una expresión imaginaria se reduce al simbolo $a + bi$, mediante tecnicas de Álgebra elemental . Para lo cual sienta el siguiente Teorema: "*Cuando hay dos operaciones sucesivas de composición o de descomposición, ambas del mismo orden, se puede invertir su cálculo; pero si son de distinto orden no se puede cambiar su enunciado si no con cierta condición; mas si una o ambas operaciones son imposibles no es permitida su permutación*" el cual clarifica con el siguiente ejemplo: a la cantidad A agregarle B y quitarle C, es lo mismo quitarle primero C y agregarle despues B; pero si a la cantidad A se añade B y esto se multiplica por C, no es lo mismo multiplicar A por C y agregar B, si no que debe adecuarse BC para obtener el mismo resultado. Al final obtiene como consecuencia dos resultados notables.

c) Volumen de cuerpos regulares: en esta sección mediante técnicas de geometría elemental se propone hallar el volumen en función de las aristas para los trece cuerpos semirregulares (cuya existencia demuestra apartir de los cinco cuerpos regulares), esto para poder ser usado en cristalografía en el reconocimiento, clasificación y densidad de los minerales todo ello tan solo midiendo las aristas.

d) Integración por partes: en esta sección hace notar la libertad que hay para tomar como factor el diferencial ∂x en una integración. Instaura su célebre metodo de los traspasos.

Licenciado en Ciencias Matemáticas

Esta Tesis trata sobre la refracción producida por la envoltura gaseosa de la tierra (en la cual influye la posición geográfica del observador) por ello enfoca el problema haciendo una doble corrección en términos de paralaje y refracción.

Dentro de las soluciones planteadas se impone una sobre la deformación instrumental del telescopio. Para la deformación del disco de los astros toma en cuenta dos factores variables: la presión atmosférica y la temperatura, deduce así la ecuación de la curva que limita el disco deformado.

[4] Actualmente se ha desarrollado un algoritmo en el programa matemático **MATLAB** que permite usar con mucha facilidad dicho método (por el momento dicho algoritmo funciona para exponente real y se trabaja para tenerlo en el caso complejo). Se estudia tambien su aplicación a la solución de ciertos tipos de Ecuaciones Diferenciales y la Hipótesis de Riemann.

Doctor en Ciencias Matemáticas

Esta Tesis es la mas extensa de todas las que se han presentado en la FC, tiene una introducción y tres capítulos (que comprenden 144 párrafos), 158 desarrollos analíticos, se da la ecuación de las 80 curvas de tercer grado y termina con 20 laminas que contienen 82 figuras, de estas una manifiesta la resolución gráfica de la ecuación de tercer grado, otra la transformación de coordenadas que admiten estas curvas y las figuras restantes indican la forma de las 80 líneas de tercer grado. Cabe resaltar que la clasificación la hace en 4 familias: 16 de la primera familia, 34 de la segunda, 22 de la tercera, 8 de la cuarta. Cabe mencionar que esta tesis hace uso de algunas de las técnicas actuales de Geométria Algebraica.

Otras Obras de Federico Villarreal

Acontinuación citaremos dos de las obras del Dr. Villarreal para luego pasar a mencionar otras mas dentro de una lista (sin comentario adicional):

- **El Cáculo Binomial:** Esta obra fue encargada por los hijos de Miguel Wenceslao Garaycochea quienes le pidieron hiciera el comentario a los escritos dejados por su padre, esta obra se encuentra comprendida en dos tomos. Posteriormente se mandaron 4 ejemplares a Francia y Alemania para que pueda ser apreciado por algunos profesores los cuales rescataron el nivel de la Matemática en Sudamérica y que de haber sido publicado con la debida anticipación hubiera merecido la respectiva importancia en los centros Matemáticos Europeos (esta obra fue publicada 30 años posterior a la muerte de Garaycochea).
- **Teorema de Nicómaco:** En 1905 la revista Matemática de Santiago de Chile presentó como problema para resolver una de las proposiciones de Nicómaco , el cual era: "Si en la serie $1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, \ldots, 2n-1, \ldots$ se toma el primer término, después la suma de los dos siguientes, enseguida la de los tres siguientes, etc cada uno de estos números es un cubo perfecto". Villarreal tan pronto como recibió la revista se interesó por el tema y envió su solución (generalizando el resultado), la cual fue publicada por la Imprenta y Litografía Universo de Santiago de Chile en 1906 en forma de una separata (cuyo único ejemplar conocido actualmente en el Perú se encuentra en la Biblioteca Nacional).
- Resolución de la Ecuación de Quinto Grado
- Poliedros regulares y semirregulares
- Reforma de la mecánica celeste por H. Wronski
- Determinación de las coordenadas geográficas del Perú
- Curso de Dinámica Analítica
- Historia de las Matemáticas en el Perú
- otros artículos más

Bibliografía

[1] La Obra del Doctor Federico Villarreal, Godofredo García Díaz. Revista de Ciencias, año XXVII, 1924 N°3, 4,5,6. Lima.

[2] Fórmulas y Métodos que Deben Completarse en Matemáticas, Federico Villarreal Villarreal Tesis de Bachiller, 1879. Lima.

[3] Efectos de la Refracción sobre el Disco de los Astros, Federico Villarreal Villarreal Tesis de Licenciatura, 1880. Lima.

[4] Clasificación de Curvas de Tercer Grado, Federico Villarreal Villarreal Tesis de Doctorado, 1881. Lima.

[5] Federico Villarreal Matemático e Ingeniero, Luis Katzuo Watanabe, Ediciones COPÉ departamento de relaciones públicas PETROPERÚ, 2004. Lima.

[6] Revista de la Facultad de Ciencias Matemáticas, Facultad de Ciencias de la UNMSM, N° 2, 1988. Lima.

[7] Unidad de Árchivo Histórico Domingo Ángulo UNMSM, Árchivos de la Facultad de Ciencias 1875,1876,1877,1878,1879,1880,1881.

LA COLUMNA DE ANDY LIU (1)

Aventuras en el Monte Olimpo

Intensidad de queja

Pierre de la Fontaine vino de su Canadá natal a estudiar el codiciado Certificado Griego de Esclarecimiento, a la sombra del mítico Monte Olimpo. Durante su estancia en Grecia, quiso empaparse de la cultura local. Como no era muy bueno en el aspecto físico, fue al Balneario-Spa del Monte Olimpo para ponerse en forma. Estaba decidido a ir todos los días hasta que resultase lesionado, lo que ocurriría, como muy tarde, el día 361 del año. En ese caso, dejaría de ir el resto del año.

La diosa menor Hygeia regentaba el Balneario. Ofreció a Pierre dos posibilidades. En el Plan A, Pierre debería pagar una tarifa, válida para un año, de 380 dracmas. En el Plan B, pagaría una tarifa diaria de 20 dracmas.

Pierre decidió optar por el plan A, pero los Dioses estaban en su contra. Resultó lesionado el primer día. Si hubiera elegido el Plan B, sólo habría gastado 20 dracmas. Dividió lo que había gastado en realidad por lo que hubiera gastado en el otro plan, y decidió llamar al cociente su *Intensidad de queja.* Ese valor era 380/20 = 19. Comunicó su queja a los Dioses con su intensidad calculada, pero sin ningún efecto.

Al año siguiente, se cambió al Plan B, y esta vez permaneció sin lesionarse hasta el día 361º. Su gasto total fue de 7220 dracmas, en lugar de las 380 que se hubiera gastado en el Plan A. De nuevo, su intensidad de queja fue 7220/380 = 19. Los Dioses se cansaron de sus quejas de alta intensidad, y le dieron un ultimátum. Si en sus quejas futuras, la intensidad era mayor o igual que 2, resultaría destruido por el rayo de Zeus. Sabiendo ya cómo cualquiera de los Planes acabarían destruyéndolo, Pierre decidió, cuando volvió al Balneario – Spa el tercer año, pagar la tarifa B por un cierto número de días, y luego la tarifa A por el resto del año.

¿Podrá Pierre evitar los efectos del rayo de Zeus, de esta forma, y durante cuántos días tendría que pagar la tarifa B?

SOLUCIÓN

Supongamos que el plan de Pierre era pagar la tarifa de usuario durante *k* días, y luego pagar la tarifa de socio. Los Dioses le habrían lesionado con certeza el día $k+1$. Su gasto habría sido $20k+380$ dracmas. Su gasto según los planes A y B hubieran sido 380 dracmas y $20k+20$ dracmas, respectivamente. Igualando esas cantidades obtenemos $k=18$.

Para $k=18$, si resultase lesionado antes del día décimooctavo, su intensidad de queja habría sido menor que 1 contra el plan A e igual a 1 contra el plan B. Si resultaba lesionado el día 19, su gasto hubiera sido 18x20+380 = 740 dracmas, donde su gasto con el Plan A o B sería 380 dracmas. Así, la intensidad de queja sería menor que 2. Si resultaba lesionado después del día 19, su intensidad de queja permanecería constante contra el Plan A y disminuiría contra el Plan B. Luego la cremación se evitaría tomando $k=18$.

Supongamos que $k \leq 17$ y que Pierre es lesionado el día $k+1$. Su intensidad de queja contra el Plan B sería

$$\frac{20k+380}{20k+20} \geq 1+\frac{360}{20 \bullet 17+20} = 2 \,.$$

Supongamos $k \geq 19$ y que Pierre es lesionado el día $k+1$. Su intensidad de queja contra el Plan A sería

$$\frac{20k+380}{380} \geq 20 \bullet \frac{19}{380} + 1 = 2 \,.$$

Se concluye que a menos que tome $k=18$, Pierre no puede evitar el efecto del rayo de Zeus.

CINCO PROBLEMAS DE LA OLIMPIADA DE BIELORRUSIA 2009, CATEGORIA E (ALUMNOS DE 12-13 AÑOS DE EDAD)

Problema By35.1 (*I. Voronovich)*

Se da el trapecio ABCD con BC paralelo a AD y el ángulo CAD de 30º. La longitud de la diagonal BD es igual a la longitud de la paralela media del trapecio. Hallar la medida del ángulo entre las diagonales AC y BD.

Problema By35.2 (*I. Bliznets)*

Se dan 15 trinomios cuadráticos con coeficientes distintos dos a dos:

$$x^2 + p_i x + q_i \ ,$$

con $i = 1, \cdots, 15$. El conjunto de los valores de los coeficientes de esos trinomios es $\{1, 2, \cdots, 30\}$. Una raíz de uno de esos trinomios cuadráticos se dice que es *buena* si es mayor que 20. Sea M el número total de raíces buenas de esos 15 polinomios.

Determinar el mayor valor que puede tomar M.

Problema By35.3 (*V.Karamzin)*

Se dan un número primo $p>3$ y los enteros positivos k y n.

Mediante $S_p(k,n)$ representamos la suma de todas las fracciones irreducibles de la forma m/p tales que $k<(m/p)<n$.

Hallar todos los números p,k,n tales que $S_p(k,n)$ =2009.

Problema By35.4 (*I.Voronovich)*

Se dibuja la gráfica de la parábola $y=x^2$ en el plano cartesiano. Dos rectas, r_1 y r_2 son paralelas al eje de abscisas; la distancia entre ellas es 1, y r_1 es más próxima al eje de abscisas que r_2. A es uno de los puntos de intersección de la parábola con r_1, B es el punto de intersección de r_2 con el eje de ordenadas y O es el origen de coordenadas. Hallar la medida del ángulo OAB.

Problema By35.5 *(A.Mirotin)*

Las casillas de un tablero 4x4 se pintan de verde, rojo o azul de acuerso con las siguientes reglas: Cualquier casilla se puede pintar de rojo. Una casilla se puede pintar de azul solamente si tiene alguna casilla adyacente pintada de rojo (dos casillas son adyacentes si comparten un lado). Una casilla se puede pintar de verde solamente si tiene una casilla adyacente azul. Cualquier casilla se puede pintar más de una vez.

Determinar el mayor número posible de casillas que pueden pintarse de verde.

COMPETICIÓN MATEMÁTICA MEDITERRÁNEA 2009

Memorial Peter O'Halloran

Requena, 2 de mayo de 2009

Problema 1

Determinar todos los enteros $n \geq 1$ para los que existen n números reales $x_1, x_2, \cdots, x_n$ en el intervalo cerrado $[-4, 2]$ tales que se verifiquen simultáneamente las tres condiciones siguientes:

- La suma de esos números es mayor o igual que n.
- La suma de sus cuadrados es menor o igual que $4n$.
- La suma de sus cuartas potencias es mayor o igual que $34n$.

Problema 2

Sea ABC un triángulo con $90º \neq \hat{A} \neq 135º$. Sean D y E puntos exteriores al triángulo tales que DAB y EAC son triángulos isósceles con los ángulos en D y en E rectos. Sea $F = BE \cap CD$, y M y N los puntos medios respectivos de BC y DE.

Probar que si tres de los puntos A, F, M, N están alineados, entonces los cuatro están alineados.

Problema 3

Decidir, razonadamente, si los enteros $1, 2, \cdots, 99, 100$ pueden colocarse en las celdas $C(i, j)$ de una matriz 10x10 (con $1 \leq i, j \leq 10$), de tal manera que se verifiquen las tres condiciones siguientes:

- (i) en cada fila, la suma de todos sus elementos es la misma, S.
- (ii) en cada columna, la suma de todos sus elementos es la misma, S.
- (iii) Para todo $k = 1, \cdots, 10$, los 10 elementos $C(i, j)$ con $i - j \equiv k (\mathrm{mod}\, 10)$ suman también S.

Problema 4

Sean x, y, z números reales positivos. Demostrar que

$$\sum_{cíclica} \frac{xy}{xy + x^2 + y^2} \leq \sum_{cíclica} \frac{x}{2x + z}.$$

$$xyz \le \frac{1}{9}\sum_{cíclica}\left(\frac{\sqrt{\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)}}{x+y}-z\right) \le \frac{x+y+z}{9}\,.$$

Problemas propuestos

Problema 171. *Propuesto por Paolo Perfetti, Dipartimento di Matematica, Universitá degli Studi Tor Vergata, Roma, Italia.*

Sean *a,b,c* números reales positivos tales que *abc=1.* Probar que

$$\frac{a}{c(1+a)}+\frac{b}{a(1+b)}+\frac{c}{b(1+c)}\leq\frac{1}{18}\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}\right)(a+b+c)^2.$$

Problema 172. *Propuesto por Luis Gómez Sánchez Alfaro, Universidad de Oriente, Venezuela.*

Probar que hay una infinidad de enteros naturales tales que si se traslada su cifra de las unidades a la posición de mayor orden (por ejemplo, 12345 se convierte en 51234), entonces el número queda multiplicado por 9. Calcular el más pequeño de dichos enteros.

Problema 173. *Propuesto por Xavi Ros, estudiante, Universidad Politécnica de Cataluña, Barcelona, España.*

Probar o refutar la siguiente afirmación :

Sea $I\subset R$ un intervalo cerrado. La sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones medibles $f_n: I\to R$, y existe una función $f: I\to R$ tal que

$$\lim_{n\to\infty}\int_I\left|f_n-f\right|=0.$$

Entonces $f_n\to f$ puntualmente salvo en un conjunto de medida nula.

¿Y si las funciones f_n y f son continuas?

Problema 174. *Propuesto por Luis Gómez Sánchez Alfaro, Universidad de Oriente, Venezuela.*

Determinar todos los números que son producto de dos enteros naturales consecutivos y que son de la forma *abcabc*, donde *a,b,c* son dígitos.

Problema 175. *Propuesto por José Luis Díaz Barrero, Barcelona, España.*

Sean *x,y,z* tres números reales estrictamente positivos tales que

$$xy+yz+zx=1.$$

Demostrar que

$$xyz \le \frac{1}{9}\sum_{cíclica}\left(\frac{\sqrt{\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)}}{x+y}-z\right) \le \frac{x+y+z}{9}.$$

Problemas resueltos

Problema 165

Comentarios del editor

Además de la solución que presentamos, del Prof. Luis A. Gómez Sánchez Alfaro, de la Universidad de Oriente (Venezuela), se han recibido soluciones digamos parciales de varios lectores, que a juicio de este editor merecen ser comentadas.

El caso particular en el que CH es perpendicular a BD (o lo que es equivalente, los incírculos de BCH y CHD son tangentes exteriores entre sí) es precisamente el problema 3 del capítulo 6 del libro de H.Fukagawa y T. Rothman, *Sacred Geometry.* En este caso se obtiene *4r=CH*, resultado obtenido por Jesús Álvarez Lobo (Oviedo, España) trigonométricamente. Al tratar de la misma manera el caso general, concluye que la ecuación resultante sería algebraicamente intratable y que el problema sólo es resoluble por métodos numéricos. Es posible que el enunciado "*hallar la relación entre r y CH"* haya provocado cierta confusión, lo que el editor lamenta, pero en ningún caso se pedía encontrar una de las incógnitas en términos de la otra.

Por su parte, Raúl A. Simón Eléxpuru, de Santiago, Chile obtiene de una manera muy sencilla, por consideraciones de áreas, la relación

$$S_{ABC} = r\left(s + BD + CH\right),$$

en donde *r* es el valor común de los tres inradios y *s* el semiperímetro de ABC. La relación es correcta, pero tiene el inconveniente de introducir la longitud del segmento BD, que a juicio de este editor debería escribirse en términos convenientes de los elementos de ABC, puesto que no todas las posiciones de D sobre AC valen para que los tres incírculos sean iguales.

En tercer lugar, Daniel Lasaosa Medarde, de Pamplona, España, hace un minucioso análisis del problema, probando previamente que, en las condiciones del problema, se cumple la relación

$$r \bullet BD = (\sigma - CH)\rho,$$

donde σ es el semiperímetro de BCD y ρ el inradio de BCD. Conviene quizá comentar en este momento que en un problema propuesto por la URSS en la IMO de 1988 (pero no usado) se da como condición para que los incírculos de BCH y CHD sean iguales que se verifique

$$CH = \sqrt{\sigma\left(\sigma - BD\right)},$$

resultado que también aparece en el libro de H.Fukagawa y D. Pedoe *Sangaku: Japanese Temple Geometry Problems, 1989* (p. 27), así como en el problema E1090 del *AmericanMathematical Monthly 1954,p.348.* En el proceso de edición del problema 165, el editor ha contado con la inestimable ayuda de Miguel Amengual y Francisco Javier García Capitán, a quienes doy públicamente las gracias.

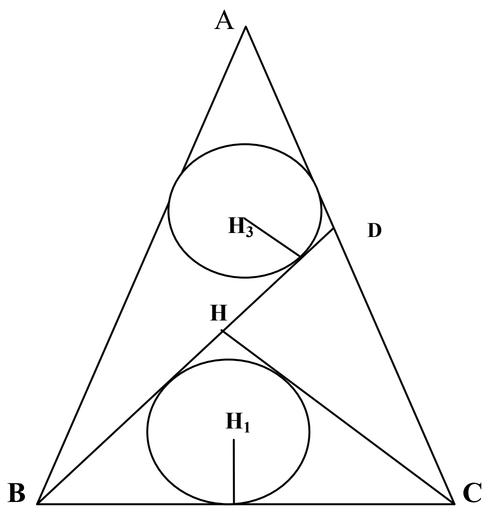
Volviendo a la solución de Lasaosa, señala al final de su análisis que no ha podido dar con una relación simple entre *r* y CH. (Tal relación no es simple, pero tampoco – dicho sea en términos de defensa – se decía en ninguna parte que lo fuera…).

El editor agradece los esfuerzos de los tres lectores mencionados y, como dice el "motto" de la sección de problemas, estaría encantado de volver sobre este problema.

Valladolid, agosto de 2009

Francisco Bellot Rosado

Problema 165 *(Propuesto por Hidetoshi Fukagawa, Aichi, Japón).*



El triángulo ABC es isósceles, con AB = AC. Las rectas BD (con D en el lado AC) y CH (con H en el segmento BD) lo dividen en tres triángulos, cuyos incírculos tienen el mismo radio *r*. Encontrar la relación entre *r* y la longitud de CH.

SOLUCIÓN.-Sea el triángulo isósceles ABC, con B(0,0), C(2a,0) y A(a, h) en un sistema rectangular de coordenadas (nótese que la ordenada de A es la altura del triángulo bajada de A la cual es también mediatriz). Sean H_1, H_2 y H_3 los incentros de los triángulos ΔBHC, ΔHDC y ΔBAD respectivamente. Fijado el radio r común de los incírculos, se ve fácilmente que $H_3 = (a, b)$ donde $b = h - rc/a$ y c es la longitud del lado AB. Similarmente se tiene $H_1 = (t, r)$ donde t es incógnita y como H_1 está en la bisectriz interna que pasa por B, determina la pendiente de la recta BD.

(H_1 y H_3 determinan el incentro H_2 que es el único punto en el interior del ΔHDC cuya distancia a los lados DH y DC es igual a r y que está dado por la intersección de las paralelas a las rectas BD y AC que pasan por H_1 y H_3 respectivamente. Es posible entonces prescindir del uso explícito de H_2 en la solución del problema).

1) Longitud de CH = d(C; H) ≡ X

La posición del punto H depende de los ángulos $\angle DBC = \theta$ y $\angle HCB = \theta_1$. Si $m = \text{tg}\,\theta$ y $m_1 = \text{tg}\,\theta_1$, se tiene

Recta BD: $mx - y = 0$

Recta CH: $m_1x + y - 2am_1 = 0$

La intersección de estas dos rectas es el punto H; se tiene entonces las coordenadas (x_H, y_H) de H:

$$x_H = 2am_1 / (m+m_1)$$
$$y_H = 2amm_1 / (m+m_1)$$

de donde la longitud de CH como distancia entre dos puntos d(C; H) ≡ X es

$$X = [2am /(m+m_1)]\sqrt{(1+m_1^2)} \qquad (1)$$

2) Distancia de H_3 a la recta BD

$$d(H_3; BD) = r = (ma - b) / \sqrt{(m^2+1)}$$

$$r\sqrt{(m^2+1)} = ma - b \qquad (2)$$

3) H_1 siendo incentro de ΔBHC, se puede remitir m y m_1 a las coordenadas (t, r) de H_1

Se tiene obviamente

$$\text{tg}\,(\theta/2) = r/t \quad \text{y} \quad \text{tg}(\theta_1/2) = r/(2a - t)$$

luego

$$m = 2rt / (t^2 - r^2) \quad \text{y} \quad m_1 = 2r(2a - t) / [(2a - t)^2 - r^2]$$

porque $m = \text{tg}\,\theta$ y $m_1 = \text{tg}\,\theta_1$

Entonces las ecuaciones (1) y (2) se transforman en

$$X(2at - t^2 - r^2) = t\,(4a^2 - 4at + t^2 + r^2) \qquad (1')$$
$$(r + b)t^2 - 2art + (r^3 - br^2) = 0 \qquad (2')$$

Se busca una expresión racional F(X, r) = 0 a coeficientes constantes. Consideramos el sistema

$$\begin{cases} A_0t^3 + A_1t^2 + A_2t + A_3 = 0 \\ \qquad\quad B_0t^2 + B_1t + B_2 = 0 \end{cases}$$

$A_0 = 1$
$A_1 = X - 4a$
$A_2 = 4a^2 + r^2 - 2aX$
$A_3 = r^2X$
$B_0 = r + b$
$B_1 = -2ar$
$B_2 = r^3 - br^2$
donde $b = h - rc/a \equiv h - dr$

Se desea eliminar la variable t lo que se hace aquí por el método de Sylvester (puede usarse opcionalmente la resultante de Bézout). Se tiene el determinante nulo

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & 0 \\ 0 & A_0 & A_1 & A_2 & A_3 \\ B_0 & B_1 & B_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_0 & B_1 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & B_0 & B_1 & B_2 \end{vmatrix} = 0$$

En esta ecuación está implícita una solución racional $F(X, r) = 0$.

Examinando el determinante auxiliar (no hay riesgo por el doble uso de las letras a, b y c)

$$\Delta' = \begin{vmatrix} 1 & a & b & c & 0 \\ 0 & 1 & a & b & c \\ x & y & z & 0 & 0 \\ 0 & x & y & z & 0 \\ 0 & 0 & x & y & z \end{vmatrix}$$

en el que son obvios los reemplazos, se tiene que

$$\Delta' = xz^2a^2 + x^2zb^2 + x^3c^2 - xyzab + (xy^2 - 2x^2z)ac - x^2ybc$$
$$-yz^2a + (y^2z - 3xz^2)b + (4xyz - y^3)c + z^3 ,$$

y por lo tanto la expresión buscada será de la forma

$$F(X, r) = f_2(r)\, X^2 + f_1(r)\, X + f_0(r) = 0 \qquad (3)$$

en donde f_0, f_1 y f_2 son polinomios en r, a coeficientes constantes. Hay que calcular dichos polinomios. Los damos directamente (factorizados en factores irreducibles para mostrar que no hay más factores comunes, aparte de $4r^2$ que corresponde a una solución trivial y que ha sido simplificado en el cálculo) y haremos un bosquejo de los cálculos a mano en el apéndice.

$$\mathbf{F(X, r) = f_2(r)\, X^2 + f_1(r)\, X + f_0(r) = 0}$$

$$\mathbf{f_2(r) = (dr - h)^2 (a - r)(a + r)(c_1 r - h)}$$

$$\mathbf{f_1(r) = -2a(dr - h)(c_2 r^4 + c_3 r^3 + c_4 r^2 - 4a^2 hdr + 2a^2 h^2)}$$

$$\mathbf{f_0(r) = (c_5 r - h)(d^2 r^6 - 2dhr^5 + c_6 r^4 + 4a^2 hr^3 + 4a^4 d^2 r^2 - 8a^4 dhr + 4a^4 h^2)}$$

las constantes c_i ; $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, teniendo los siguientes valores:

$c_1 = d - 1$ $\quad c_2 = 1 - d - d^2$
$c_3 = h(2d+1)$ $\quad c_4 = 2a^2d^2 - a^2 - h^2$
$c_5 = d+1$ $\quad c_6 = -4a^2d + a^2 + h^2$

en donde $d = c/a$, a y c siendo constantes conocidas, al igual que h, del triángulo isósceles ΔABC del enunciado.

NOTA: Según el profesor F. Bellot, en su Nota del Editor al Problema 165, en el número 34 de la REOIM, el problema aquí resuelto generaliza un tanto el original y antiguo expuesto por el profesor Hidetoshi Fukagawa en su libro *Sacred Geometry*. Una generalización mayor aún sería que el triángulo ΔABC fuera escaleno. ¿Quién se anima? El suscrito no.

Luis Gómez Sánchez A.
Universidad de Oriente, Venezuela.
lagsa7@hotmail.com

APÉNDICE

(*Quiero agradecer al profesor Julio Ramos Fernández, de la Universidad de Oriente, por la comprobación con MAPLE de los polinomios aquí calculados. Sin su ayuda no habría podido asegurar que los resultados dados aquí son correctos, es decir sin errores en el cálculo*).

$$\begin{aligned}\Delta = &(r + b)(r^3 - br^2)^2(X - 4a)^2 + (r + b)^2 (r^3 - br^2) (4a^2 + r^2 - 2aX)^2 \\ &+(r + b)^3(r^2X)^2 - (r + b) (- 2ar) (r^3 - br^2) (X - 4a) (4a^2 + r^2 - 2aX) \\ &+ [(r + b) (- 2ar)^2 - 2(r + b)^2(r^3 - br^2)] (r^2X) (X - 4a) \\ &-(r + b)^2(- 2ar) (4a^2 + r^2 - 2aX) (r^2X) - (- 2ar) (r^3 - br^2)^2 (X - 4a) \\ &+ [(- 2ar)^2 (r^3 - br^2) - 3(r + b)(r^3 - b^2r^2)^2](4a^2 + r^2 - 2aX) \\ &+ [4(r + b) (- 2ar) (r^3 - br^2) - (- 2ar)^3] (r^2X) + (r^3 - br^2)^3\end{aligned}$$

Hay un factor r^2 que se puede obviamente descartar por ser delta nulo (*nótese sin embargo que $r = 0$ es también en rigor una solución, que corresponde al caso trivial $c = a$ en que ΔABC se reduce a un segmento*) lo que da

$$\begin{aligned}\Delta = &r^2 (r + b)(r - b)^2(X - 4a)^2 + (r + b)^2 (r - b) (4a^2 + r^2 - 2aX)^2 \\ &+ r^2(r + b)^3X^2 + 2ar(r + b) (r - b) (X - 4a) (4a^2 + r^2 - 2aX) \\ &+ r^2[4a^2 (r + b) - 2(r + b)^2 (r - b)] X (X - 4a) \\ &+ 2ar (r + b)^2 (4a^2 + r^2 - 2aX)X + 2ar^3 (r - b)^2 (X - 4a) \\ &+ [4a^2r^2 (r - b) - 3r^2 (r + b)(r - b)^2](4a^2 + r^2 - 2aX) \\ &+ r^2[- 8ar(r + b) (r - b) + 8a^3r] X + r^4 (r - b)^3\end{aligned}$$

Desarrollando los factores cuadráticos en X, se tendrán a la vista los polinomios buscados:

$$\Delta = r^2 (r^2 - b^2)(r - b)(X^2 - 8aX + 16a^2) +$$

$$(r+b)^2 (r-b) [4a^2X^2 - (16a^3 + 4ar^3)X + r^4 + 8a^2r^2 + 16a^4]$$
$$+ r^2(r+b)^3X^2 + 2ar (r^2 - b^2) [-2aX^2 + (12a^2 + r^2)X$$
$$- 4a(4a^2 + r^2)] + r^2[4a^2 (r+b) - 2(r+b)^2 (r-b)](X^2 - 4aX)$$
$$+ 2ar (r+b)^2 [(4a^2 + r^2)X - 2aX^2] + 2ar^3 (r-b)^2 (X - 4a)$$
$$+ [4a^2r^2 (r-b) - 3r^2 (r+b)(r-b)^2](4a^2 + r^2 - 2aX)$$

es decir,

$$f_2(r) = r^2 (r^2 - b^2)(r-b) + 4a^2 (r+b)^2 (r-b) + r^2(r+b)^3$$
$$- 4a^2 r (r^2 - b^2) + r^2[4a^2 (r+b) - 2(r+b)^2 (r-b)]$$
$$- 4a^2 r (r+b)^2$$
$$f_2(r) = (r+b) \{ r^2(r-b)^2 + 4a^2 (r^2 - b^2) + r^2(r+b)^2 - 4a^2 r (r-b)$$
$$+ r^2[4a^2 - 2(r^2 - b^2)] - 4a^2 r (r+b) \}$$

► $\mathbf{f_2(r) = 4(r^2 - a^2)(r+b)b^2}$ y con $b = h - dr$ y la simplificación del factor común 4, se obtiene el $f_2(r)$ dado en la solución .

Similarmente para f_1 y f_0 .

Luis Gómez Sánchez A.

Universidad de Oriente, Venezuela.

lagsa7@hotmail.com

Problema 168. *Propuesto por José Luis Díaz Barrero, Barcelona, España.*

Hallar todas las ternas *(x,y,z)* de números reales que son solución del sistema de ecuaciones

$$x + \arcsin(2x-1) = y$$

$$y + \arcsin(2y-1) = z$$

$$z + \arcsin(2z-1) = x$$

Solución de Kee-Wai Lau, HongKong, China.

Probaremos que el sistema tiene la solución única $x = y = z = ½$.

La función $f(t) = t + \arcsin(2t-1)$, definida en $0 \le t \le 1$, tiene la primera derivada positiva

$$1 + \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}$$

para $0 < t < 1$. Supongamos que *x,y,z* no son todos iguales. Por simetría, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $x<y$, así que $f(x)<f(y)$. De la primera y segunda ecuaciones del sistema se obtiene $y<z$ y entonces $f(y)<f(z)$. De la segunda y tercera ecuaciones obtenemos $z<x$, así que $x<y<z<x$, una contradicción. Por lo tanto, $x=y=z$, y entonces $\arcsin(2x-1) = \arcsin(2y-1) = \arcsin(2z-1) = 0$.

En conclusión, $x=y=z=1/2$, *como se anunciaba.*

Julio Garavito Armero 1865 – 1920
Colombia

Nació en Bogotá el 5 de nero de 1865. En 1884 se gradúa como Bachiller en Filosofía y Letras en el Colegio de San Bartolomé. En 1887, tras la llamada *guerra de los tres años,* se reorganiza la Universidad Nacional y Garavito ingresa en la Facultad de Ingeniería. En 1891 recibe el título de Profesor de Matemáticas y el de Ingeniero Civil. Inmediatamente es nombrado profesor de varias cátedras, y en 1893, Director del Observatorio Astronómico.

Durante la *guerra de los tres años* se formó, en torno a Garavito y a otros aficionados a las matemáticas, una *asociación* que se llamó *El círculo de los nueve puntos,* con un ceremonial especial bastante simbólico. Sus miembros se llamaban *puntos*, y no podían ser más de nueve ni menos de tres (porque no podrían determinar una circunferencia...había quórum con tres de ellos...las libaciones se hacían con café líquido, que consumían en grandes cantidades...y cada uno de los *puntos* debía dar una demostración del teorema de Euler. Hay que decir que la de Garavito la extendió a la esfera de los 24 puntos de un tetraedro ortocéntrico.

Garavito fue miembro de varias Sociedades extranjeras de Astronomía, además de ser Presidente Honorario de la Sociedad Colombiana de Ingenieros desde 1917. Su actividad científica abarcó numerosos trabajos de matemáticas, física, astronomía, meteorología y economía política.

Murió el 11 de marzo de 1920.

Esteban Terradas Illa 1883 – 1950
España

Terradas es uno de los seis primeros cerebros mundiales de su tiempo
A. Einstein

Esteban Terradas nació en Barcelona el 5 de septiembre de 1883. Huérfano de padre a los dos años de edad, fue dirigido y educado por su tío D. José, sacerdote, quien le envió muy pronto a Alemania para que aprendiese el idioma. No sólo alemán, sino hasta otros cinco idiomas llegó a dominar Terradas *como un nativo,* en frase de Sixto Ríos. En un mismo año obtuvo sobresaliente en 15 asignaturas de la Facultad de Ciencias y la Escuela de Ingenieros Industriales; realizó en dos convocatorias la carrera de Ingeniero de Caminos; obtuvo dos Premios Extraordinarios de Doctorado (1905) en Exactas y Físicas *¡el mismo día!*; y ganó dos oposiciones de Cátedras de Facultad (Mecánica racional, Zaragoza, 1906 y Acústica y Óptica) en dos años.
En 1905 instaló la red telefónica de Cataluña; proyectó y dirigió la construcción del ferrocarril metropolitano transversal de Barcelona y fue Director de la Compañía Telefónica Nacional de España de 1927 a 1931.
Asistió al Congreso Internacional de matemáticas de Cambridge (1912), donde, formando parte de la Delegación institucional española, presentó una memoria sobre *El Movimiento de un hilo.* Este fenómeno lo había empezado a estudiar en Zaragoza en 1904, recibiendo un Premio del Ateneo Científico Escolar.
En 1933 ingresa en la Real Academia de Ciencias, tras el desagradable episodio de la anulación del nombramiento de catedrático Extraordinario de Ecuaciones Diferenciales, que se había producido 2 años antes, y el rechazo de su candidatura en las subsiguientes oposiciones.
Se traslada a Argentina en 1936. Dirigió el Observatorio Astronómico de la Universidad del Plata, estudió las mareas de las costas de Patagonia y proyectó el aeropuerto de Buenos Aires.
Regresa a Madrid tras la Guerra Civil española y en 1941 se encarga de la Cátedra de Física matemática (Fac. de Ciencias) y de Mecánica racional (Escuela de Ingenieros Aeronáuticos). En 1942 es nombrado Director del Instituto Nacional de Técnica Aeroespacial. En 1945 es nombrado Presidente de la Empresa Nacional de Electricidad.
Murió en Madrid el 9 de mayo de 1950.

NOTICIA DEL CONGRESO RELME 23 EN SANTO DOMINGO (REPÚBLICA DIOMINICANA), 13-17 DE JULIO DE 2009

Francisco Bellot Rosado

Se ha celebrado en la Universidad Primada de América, en Santo Domingo, del 13 al 17 de julio de 2009, la 23 Reunión Latino Americana de Matemática Educativa, a la que asistió el que suscribe, con el doble objetivo de presentar la Revista Escolar de la OIM (no ha habido, hasta ahora, demasiadas suscripciones del país caribeño) y el Concurso Canguro Matemático.

Los Congresos RELME dependen del CLAME (Comité Latino Americano de Matemática Educativa) y se celebran anualmente. El Comité Organizador local estaba formado por miembros del CLAMED (La rama dominicana del CLAME), presididos por Ángela Martín (Coordinadora General de RELME 23). Se presentaron 522 trabajos, distribuidos en 4 conferencias plenarias,23 conferencias especiales, 230 Informes de Investigación, 144 Comunicaciones breves y 52 carteles, además de grupos de discusión, cursos cortos y Talleres.

Dado que, necesariamente, muchas actividades se realizan en paralelo, los participantes tuvimos que elegir entre unas u otras….

Destacaremos aquí, por ejemplo, el Taller sobre *Números complejos* de la Prof. Yahaira A. Rodríguez Hernández, de la Rep. Dominicana; la Conferencia plenaria *El uso de la matemática para explicar fenómenos matemáticos y financieros*, del prof. Arístides Escuder (R.D.); el Taller *Resolución de problemas mediante coloración,* del Prof. Walter Carballosa Torres (colaborador de la REOIM), de Cuba.

Si bien, en principio, estaba prevista una reunión de Editores de Revistas matemáticas a la que el que suscribe había manifestado su interés en asistir, finalmente no se celebró, dado que no hubo ninguna otra persona interesada…

Presentamos a continuación algunas fotos tomadas durante el evento:

Aula Magna de la UASD

F.Bellot presentando la REOIM

Fbellot ante el Rectorado de la UASD.

El esfuerzo desplegado por los matemáticos dominicanos para que los participantes estuviéramos bien atendidos fue enorme. La próxima RELME tendrá lugar en Guatemala en 2010.

Valladolid, agosto 2009

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.oei.es/oim/revistaoim/

Editado por la OEI a través de su Centro de Altos Estudios Universitarios

Con el apoyo de la Agencia Española de Cooperación Internacional para el Desarrollo (AECID)

Número

36

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática
OEI
Agencia Española de Cooperación Internacional para el Desarrollo
ISSN 1698-677X

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

Número 36 (septiembre - octubre 2009)

ISSN – 1698-277X

Una foto del editor con Paul Erdös, Pravetz (Bulgaria) 1994.

Durante el Congreso de la WFNMC en Pravetz, Bulgaria, 1994, el Prof. Erdös accedió amablemente a fotografiarse conmigo. La fotografía fue tomada por Alexander Soifer. Ni qué decir tiene que ocupa un lugar destacado en mi biblioteca.

ÍNDICE

Problemas para los más jóvenes (36)

Cinco problemas de Letonia

Problemas de nivel medio y de Olimpiadas (36)

Algunos problemas de la Olimpiada de Europa Central 2009

Problemas (36)

Problemas 176 – 180

Problemas resueltos

Problema 166

Recibidas soluciones de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, España y el proponente. Presentamos la solución de Lasaosa.

Problema 167

Recibidas soluciones de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, España; Ercole Suppa, Teramo (Italia) ; y el proponente. Presentamos la solución de Suppa.

Problema 168

Recibida una solución más, de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona (España).

Problema 169

Recibida una solución, que presentamos, de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona (España).

Problema 170

Recibidas soluciones de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona (España) y del proponente. Presentamos la solución de Lasaosa.

Problema 171

Recibidas soluciones de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona (España), Pedro Henrique O. Pantoja, Natal (Brasil) y del proponente. Presentamos la solución de Lasaosa.

Problema 172

Recibidas soluciones de: Jesús Álvarez Lobo, Oviedo (España); Miguel Amengual Covas, Santanyí (España); Álvaro Begué Aguado, Nueva York (EEUU); Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona (España); Bruno Salgueiro Fanego, Vivero (España); Cristóbal Sánchez-Rubio, Castellón (España) y del proponente.

Presentamos las soluciones de Lasaosa y de Sánchez-Rubio.

Problema 173

Recibidas soluciones de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona (España) y del proponente. Presentamos la solución de Lasaosa.

Problema 174

Recibidas soluciones de: Miguel Amengual Covas, Santanyí (España); Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona (España); Bruno Salgueiro Fanego, Vivero (España); Cristóbal Sánchez-Rubio, Castellón (España); y del proponente. Presentamos la solución de Amengual.

Se recibió una solución incompleta.

Problema 175

Recibidas soluciones de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona (España); Bruno Salgueiro Fanego, Vivero (España) y del proponente. Presentamos las soluciones de Lasaosa y Salgueiro.

Comentario de páginas web, de libros y noticias de congresos (36)

Dos Congresos europeos del verano 2009, por Francisco Bellot.

A. Soifer:*The Mathematical Coloring Book,* Springer, 2009.

Divertimentos matemáticos (36)

Tres notas sobre Pi, por Luis A. Gómez Sánchez Alfaro (Universidad de Oriente, Venezuela.

Desarrollada en el Centro de Altos Estudios Universitarios de la OEI con el apoyo de la Agencia Española de Cooperación Internacional para el Desarrollo (AECID)

“Ejemplos que sí son ejemplos” para el desarrollo de esquemas conceptuales en la determinación de puntos críticos

Claudia Guzner, *Universidad Tecnológica Nacional, Universidad Nacional de Cuyo, Mendoza, Argentina*
Sandra Segura, *Universidad Tecnológica Nacional, Universidad Nacional de Cuyo, Mendoza, Argentina*

RESUMEN

El presente trabajo gira en torno a privilegiar la construcción de esquemas conceptuales –que a su vez potencien otros ya construidos- para la aprehensión del siguiente criterio en torno a la derivada: “Sea f una función real, dos veces derivable en un intervalo (a, b), sea c un punto de (a, b) tal que $f'(c) = 0$. Entonces, si $f''(c) < 0$, f presenta un máximo relativo en c; si $f''(c) > 0$, f presenta un mínimo relativo en c”. Trabajar sobre esta propiedad, no ha sido casual. A pesar de su aparente claridad y especificidad, varios son los autores que ponen de manifiesto interpretaciones erróneas del criterio, basadas, posiblemente, en “malos ejemplos” que obscurecen los atributos relevantes que pudieran ser transferidos como características del principio.

Nivel educativo: secundario y universitario

"Los atributos relevantes de un concepto son las características que un objeto debe poseer para poder ser considerado un ejemplo de dicho concepto"
Carmen Azcárate (2003)

1. INTRODUCCIÓN

A la hora de programar su clase, un docente debe tomar decisiones didácticas y epistemológicas –cruciales pero no excluyentes-, para mostrar aquello que considera como relevante alrededor de un objeto matemático. Generalmente, primero toma decisiones didácticas –clase tradicional, a partir de situaciones, en entornos computacionales, entre otros-; luego epistemológicas – qué como a priori, qué como definiciones, qué como propiedades-. Posteriormente, elige una serie de "problemas" y luego opta por ejercicios de reforzamiento, para finalmente evaluar.
En la mayoría de los casos, a pesar de que el itinerario elegido por cada docente depende de sus creencias, la elección del "problema" ocupa sólo una parte del proceso, y no se tiene en cuenta que de esta decisión depende "qué" se muestra y "qué" se deja a la propia interpretación del alumno.
En este artículo se explican las decisiones tomadas, al momento de la elección de un "problema", en el marco de una secuencia de enseñanza para el uso del criterio de la derivada en la determinación de máximos y mínimos de una función.

2. MARCO TEÓRICO

Este trabajo se enmarca en el paradigma que sostiene que proponer secuencias de enseñanza significa poner al alumno ante experiencias donde él construya sus conocimientos desde la memoria comprensiva, a través de situaciones en las cuales encuentre un equilibrio adecuado entre la lógica del saber matemático y la lógica de su propia estructura y desarrollo cognitivo. Se asume que lo que el alumno evoca cuando un objeto matemático aparece nuevamente dentro del contexto de otro, no es la definición de aquel, sino lo que Vinner & Tall (1981) llaman sus esquemas conceptuales -representaciones, procedimientos, actividades, problemas, ejemplos, recuerdos, propiedades, definiciones, entre otros-.
Contrariamente, cuando un docente propone un trabajo con cierto objeto matemático, tradicionalmente suele suponer que la definición del mismo es lo que primero aparece en la mente del estudiante, por lo que, en las situaciones de aula, los alumnos no son enfrentados con la génesis de los conceptos, sino que a partir de una definición, propiedades o aplicaciones algorítmicas, se les acerca a ellos.
La estructura cognitiva desarrollada alrededor de un concepto matemático, no es estática, sino que va evolucionando a medida que transcurre el tiempo y como consecuencia de las experiencias que va teniendo el estudiante alrededor del concepto. Por esta razón, el docente debe proponer situaciones que provoquen desequilibrios a fin de promover la aparición de las relaciones y vinculaciones asociadas al concepto que conlleven al salto cognitivo que produce un aprendizaje.
En este contexto la elección del "problema" y el "medio" no es trivial. Uno no debe supeditarse al otro, pero si hubiera que privilegiar alguno, sería el problema. No cabe duda que el medio del siglo XXI es la WEB porque ofrece la posibilidad de manipular dinámicamente los objetos matemáticos, en múltiples sistemas de representación, dentro de esquemas interactivos y ambientes de exploración, en pos del enriquecimiento de la construcción de los esquemas personales.

En el caso particular de la construcción de esquemas conceptuales alrededor de la derivada, algunos autores (Sánchez-Matamorros, 2006) sostienen que "hay que centrar la atención en el «tipo de relaciones» que los estudiantes son capaces de establecer entre los «elementos matemáticos»[1] del concepto, comprendidos, de alguna manera determinada (como una acción, un proceso o un objeto), cuando resuelven problemas" .
Otros (Moreno y Cuevas, 2004), sugieren el diseño de situaciones didácticas para la enseñanza del concepto derivada y sus elementos, que puedan evitar falsas interpretaciones fruto, en general, de una fuerte carga operativa y descontextualización. Estos mismos autores citan resultados que ponen de manifiesto esquemas conceptuales falaces sobre los "elementos máximos y mínimos", al aplicar el clásico criterio de la derivada sin una reflexión previa, pero relevante, como la es la del dominio de la función y sus características de continua, acotada y diferenciable.
Algunos sostienen que, para la construcción de un esquema conceptual congruente con la actividad matemática futura del alumno, debe generársele un sentimiento de acuerdo que lo que está aprendiendo efectivamente es cierto para todos los elementos dentro de la categoría bajo estudio. En este sentido Balacheff (Balacheff, 1990) analiza algunas respuestas en torno a la idea de contraejemplo, tomando en particular aquellos contraejemplos que hacen que deba modificarse una conjetura inicial, ya sea en forma superficial –sólo debe contemplar ese contraejemplo- o profunda. Uno de los casos que trata es el criterio de la derivada primera para encontrar puntos críticos en una función, proponiendo contrajemplos a una primera conjetura, y poniendo en reconsideración algunas cuestiones, en particular que el punto en donde la derivada primera es cero "debe" ser del dominio de la función, punto que los alumnos al aplicar este criterio pasan de alto de manera sistémica.
Calvo Pesce (Calvo Pesce, 2001), analiza un repertorio de "ejemplos y no-ejemplos"[2] en torno a funciones de concavidad positiva, basado en el análisis de entrevistas realizadas a un número representativo de alumnos. En ellas se destaca la preferencia de presentar como definición una caracterización sólo aplicable bajo condiciones suficientes pero no necesarias -funciones con derivada segunda positiva o no negativa, funciones con derivada creciente, funciones en cuyos gráficos todas las rectas tangentes quedan por debajo de él, por citar algunas-. Al requerírseles posteriormente a los mismos entrevistados ejemplos de funciones de concavidad positiva, sólo proporcionan algunos en relación a funciones no derivables o de funciones cuyas gráficas se asimilen a parábolas, lo cual muestra que el esquema conceptual asociado a la concavidad positiva se confunde con el criterio para su determinación.
Más recientemente, Sánchez (Sánchez, 2006), puntualiza que en el desarrollo del esquema conceptual de la derivada, la comprensión de la relación entre puntos críticos y derivadas (primera y segunda) son indicadores de la evolución del mismo.

3. UN APORTE PARA LA CONSTRUCCIÓN DE ESQUEMAS CONCEPTUALES EN LA DETERMINACIÓN DE PUNTOS CRÍTICOS

Se adhiere al principio -análogamente adoptado para los primeros pasos en la enseñanza de la derivada, dando consistencia en el planteo metodológico- que para la construcción de esquemas conceptuales en torno al criterio de la derivada segunda no es conveniente

---

[1] Piaget (1963) define un elemento como «el producto de una disociación o de una segregación en el interior de una totalidad previa»
[2] En el sentido de Azcárate (2003).

poner en acto el tradicional esquema propiedad-ejemplos-ejercicios, sino, por el contrario, uno de la forma problema-tarea-institucionalización-reforzamiento.
La intención del problema seleccionado es permitir al alumno experimentar, a través de simulaciones interactivas -Figura 1- con relaciones y aproximaciones numéricas, expresiones algebraicas, gráficos, etc., a efectos de enriquecer los esquemas conceptuales personales a priori, en torno a la propiedad en cuestión.

En la Facultad Regional Mendoza le han dado al grupo ECAMI una oficina para desarrollar sus tareas de investigación. Como el grupo necesita tener acceso a Internet, debe realizar una conexión por cable desde un servidor que se encuentra en otro edificio. Dado que los fondos son escasos es necesario mantener los costos al mínimo. Hay dos tipos de cables para la conexión, uno exterior que cuesta $125 el metro y otro interior que cuesta $100 el metro. Los edificios distan 6 metros en línea recta (distancia S-E). El servidor (S) está en el tercer piso de uno de los edificios, y la oficina del grupo ECAMI (O) está en el tercer piso del otro edificio. El cable puede ingresar por cualquier punto (I) del piso donde está la oficina. Si ingresa por un punto enfrentado al servidor (E) la cantidad de cable interno necesario para llegar a la oficina es de 11 metros (distancia O-E). El grupo debe decidir por donde ingresar el cable al edificio en donde se encuentra la oficina, es decir debe determinar si la conexión es completamente externa, o una parte interna y otra externa, con el fin de minimizar el gasto a realizar

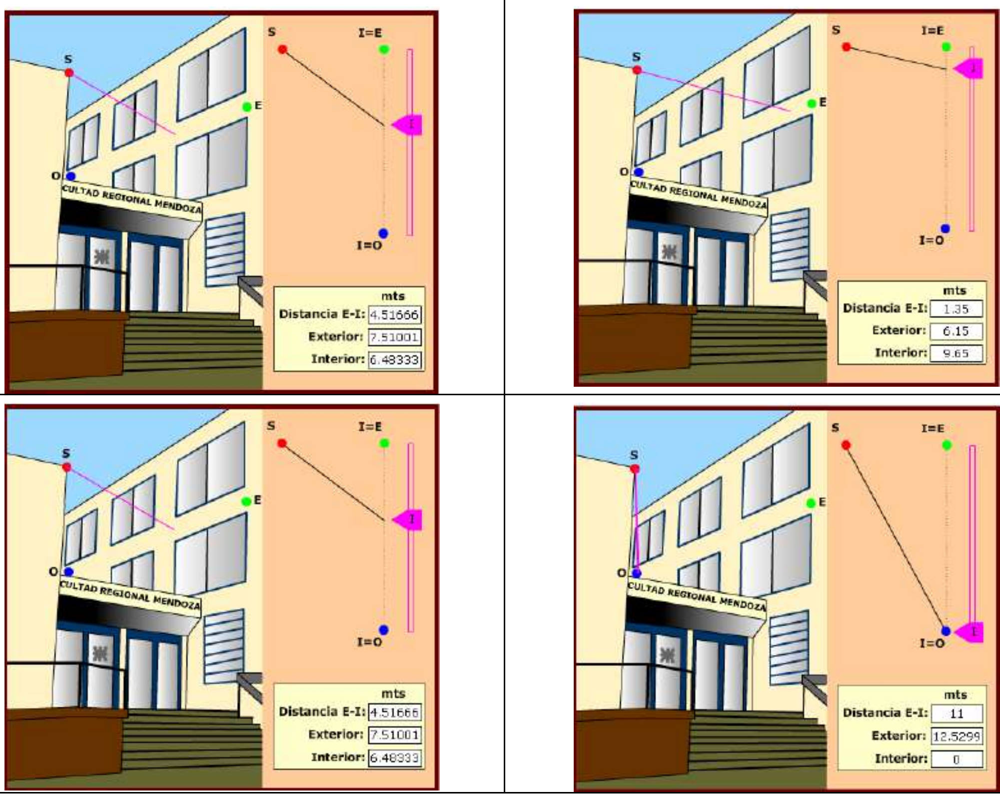


Figura 1

A partir de las tareas propuestas, alrededor del “cableado”, el alumno construye la función f que lo modela, la cual no es trivial – f: $[0,11] \rightarrow \Re$ dada por $f(x) = 125\sqrt{36 + x^2} + 100\,(11 - x)$ -, pero que sin embargo, implícitamente, remite a funciones cuadráticas usualmente usadas como “ejemplos prototípicos”.

La secuencia finaliza cuando el alumno “encuentra” el valor mínimo del costo del cableado, a partir del cálculo de la derivada primera y el punto del dominio para el cual ésta se anula.
Hasta aquí el problema es un ejemplo convencional del uso del criterio mencionado ut supra. Para transformarlo en un “buen ejemplo” se propone un cambio de parámetro: el valor del metro de cable exterior pasa a ser de $110.
A partir de tareas similares a las anteriores, el alumno “descubre” que en este caso: f: $[0,11] \rightarrow \Re$ dada por $f(x) = 125\sqrt{36+x^2} + 100\,(11-x)$; $f'(13.09) = 0$, $f''(13.09) > 0$; en m = 11 la función alcanza un mínimo relativo.
Se observan claramente las consecuencias de este ingenuo cambio de parámetro en el problema. Ahora la función presenta un mínimo en un punto extremo del intervalo de definición. El criterio de la derivada “funciona mal”: el cálculo de las derivadas primera y segunda darían como valor mínimo un punto no perteneciente al dominio de definición de la función, valor que no tiene sentido en el contexto del problema. Si el esquema conceptual construido alrededor de la propiedad en cuestión fuera débil, los alumnos podrían incluso concluir que el problema no tiene solución.

4. CONCLUSIONES

El objeto del trabajo ha sido mostrar una secuencia de enseñanza, que favorecería la construcción de esquemas conceptuales sustentables; entendiendo esto último como un aprendizaje no percibido como un proceso memorístico o algorítmico, sino más bien como un proceso asociativo, no rutinario, con sentido, que conlleva a interpretar adecuadamente los aspectos relevantes de los elementos que funcionan, en este caso, en torno a la derivada.
La praxis del recurso tiene por intención crear escenarios ricos desde una perspectiva semiológica a partir de la concreción de “ejemplos” que a nuestro criterio “sí son ejemplos”.
Las condiciones de éxito del desarrollo del diseño que se propone, quedan indirectamente vinculadas a confrontaciones posteriores. La sola implementación del recurso no asegura su eficacia, habrá que ser cuidadosos en la prevención de los conflictos que pudieran producirse.
Las decisiones que se han tomado lo han sido sobre la base de las referencias teóricas y antecedentes, siendo lo que justifica que, a nuestro entender, esta propuesta sea valiosa.
Análisis similares pueden servir para diseñar otras prácticas que hagan uso de las herramientas empleadas en esta y resulten de valor en la aprehensión de otros conceptos matemáticos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

MORENO, S., CUEVAS, C. (2004). *Interpretaciones erróneas sobre los conceptos de máximos y mínimos en el cálculo diferencial.* Red de Revistas Científicas de América Latina y el Caribe, España y Portugal. Educación Matemática. Vol. 16, Nº 2, pág. 93-104. Santillana. Distrito Federal, México

AZCÁRATE, C. (2003). *Definiciones, demostraciones, ¿por qué?, ¿cuándo?, ¿cómo?* . Ponencia en las X JAEM. Editado en www.quadernsdigitals.net

CALVO PESCE, C. (2001). *Un estudio sobre el papel de las definiciones y las demostraciones en cursos preuniversitarios de Cálculo diferencial e integral.* Universitat autònoma de Barcelona. Departament de Didàctica de la Matemàtica i de les Ciènces Experimentals.

BALACHEFF, H. (1990). *Beyond a psychological approach: the psychology of mathematics education*. Learning of Mathematics, Vol. 10, Nº 3, 2-8.

GUZNER, C., SEGURA, S. y otros (2008). *Learning styles and environments web design: the case of the derivative.* Inédito, aceptado para presentación en ICME 11

ROMERO, C. (1996). *Una investigación sobre los esquemas conceptuales del continuo. Ensayo de un cuestionario.* Revista Enseñanza de las Ciencias, 14 (1), 3-14.

SÁNCHEZ-MATAMORROS, G. y otros. (2006). *El desarrollo del esquema de derivada.* Revista Enseñanza de las Ciencias, 24 (1), 85-98.

El Legado de Paul Erdős

Roberto Bosch Cabrera
Facultad de Matemática y Computación
Universidad de la Habana

Introducción:

El objetivo principal de este trabajo es dar a conocer la vida y el quehacer científico del excepcional matemático Paul Erdős. El cual nace el 26 de Marzo de 1913 en Budapest-Hungría y fallece el 20 de Septiembre de 1996 en Warsaw-Polonia. Las dos direcciones fundamentales de este trabajo son indagar en la personalidad de Erdős y en su extensa obra matemática propiamente. Aparecen muchos de sus teoremas y conjeturas algunas de las cuales aun no han sido probadas. Este matemático se dedicó principalmente a la Teoría de Números, aunque trabajó también en:
Teoría de Grafos, Combinatoria, Geometría, Análisis Clásico y Probabilidades.
Hoy en día se le considera el matemático con mayor número de publicaciones científicas después de Euler. Basta mencionar que trabajaba aproximadamente 19 horas al día, muchos de sus resultados fueron en colaboración, Erdős fue notable por su cooperación con otros matemáticos y por las soluciones tan bellas y sencillas que muchas veces obtenía. Es importante apuntar que muchos problemas propuestos por Erdős a la comunidad matemática fueron el germen para posteriores investigaciones.
En el trabajo aparecen reflejadas algunas anécdotas y datos de la vida privada de este matemático debido a la necesidad de entender a fondo su comportamiento excéntrico y obsesivo, muchas veces criticado y malentendido. Por último destacar que su obra es vastísima y que su vida es la encarnación del amor por la matemática.

Por qué los números son bellos?
Alguien se pregunta por qué la Novena Sinfonía de Beethoven lo es?
Yo conozco números bellos, si ellos no lo son; nada lo es.
Paul Erdős.

Vida Personal:

Paul Erdős nació el 26 de Marzo de 1913 en Budapest, Hungría. Mientras su madre estaba en el hospital dando a luz mueren sus dos hijas de tres y cinco años respectivamente de fiebre escarlata. Erdős ("de el bosque") pasa a ser hijo único y un niño sobreprotegido. Temiendo que contrajera una enfermedad contagiosa sus padres lo retiran de la escuela pública y se encargan ellos mismos de su educación. Ellos eran profesores de matemática y física. Su padre es hecho prisionero de los rusos durante la primera Guerra Mundial y enviado a la Siberia, no es hasta el 1920 que vuelve a ver a su hijo.

Erdős fue un niño prodigio; con tres años multiplicaba números de varios dígitos en la mente, con cuatro descubrió los números negativos por sí mismo, cuando llegaba alguien a su casa le preguntaba la edad y se entretenía calculando los segundos que había vivido, con cinco años calculó la distancia de la Tierra al Sol conociendo cuanto demoraría un tren en llegar hasta este. Erdős fue un solucionador regular de los problemas propuestos en la Revista Komal, una publicación matemática de primer orden para estudiantes de preuniversitario. A final de año siempre aparecía una foto suya entre los estudiantes más talentosos. Aprendió varios idiomas, entre ellos, Alemán, Inglés, Francés, Latín, Griego Antiguo, y más adelante en su vida un conocimiento superficial de Hebreo. En 1930 con 17 años entra al Pázmány Péter Tudományégyeten, la universidad de ciencias de Budapest fundada en el 1635. Fue por esta época que Erdős comenzó a desarrollar su propio lenguaje especial: él llamaba a los niños "epsilon", Sam a los Estados Unidos y Joe (Joseph Stalin) a la Unión Soviética. Con 19 años encuentra una demostración elemental del Teorema de Chebyshev. Posteriormente halla una extensión para un teorema de Menger en grafos infinitos, su demostración es incluida en el libro clásico de Teoría de Grafos de Dénes Kőnig. En 1934 termina la universidad y presenta su tesis sobre las progresiones aritméticas y su relación con los números primos tutoreado por Leopold Fejér, gran parte del trabajo lo hizo estando en segundo año.

Decide continuar estudios en Inglaterra uniéndose al excepcional grupo de teoría de números de Louis Mordell en Manchester. Pasa por Cambridge donde conoce a Harold Davenport y Richard Rado quienes más tarde se convertirían en dos de sus mejores amigos. En 1938 Erdős entra al Instituto de Estudios Avanzados en Princeton; bajo la atmósfera estimulante del lugar su talento florece como nunca antes, él considera este como su *annus mirabilis.* Escribió artículos con Mark Kac y Aurel Wintner prácticamente los creadores de la teoría de números probabilística, también escribió con Paul Turán sobre teoría de aproximación y resuelve un problema importante de Witold Hurewics en teoría de dimensión.

Erdős deja Princeton y comienza a viajar por todo el mundo desarrollando sus investigaciones. Colabora con matemáticos de la talla de Alfred Tarski, Ivan Niven, Gábor Szego, William Feller, Ernst Straus, entre otros. Este último tuvo publicaciones con Albert Einstein. A propósito es bueno comentar un fenómeno conocido como el número de Erdős; este se define como sigue: Paul tiene número 0, una persona que haya publicado con Erdős tiene número 1, una que haya publicado con el anterior pero no con Erdős tiene asignado un 2 y así sucesivamente. Esto puede parecer poco serio pero da la medida de la gran contribución de Erdős a la matemática, valga decir que posee alrededor de 1500 publicaciones y colaboró con cerca de 500 matemáticos. Solo comparable con el gigante Euler. Sus obras se están recopilando en una serie de DVDs, para su posterior divulgación.

No obstante a Erdős se le critica el no haber investigado en temas de las matemáticas modernas como son: Grupos de Lie, Geometría Algebraica, Topología Algebraica, Mecánica Cuántica y Teoría de la Relatividad. A menudo algunos matemáticos afirmaban lo mucho que había hecho Erdős con tan poco conocimiento, la explicación a lo anterior la encontramos en que Paul Erdős estuvo fuertemente influenciado a lo largo de su vida por el tipo de matemáticas que hizo en sus primeros años, ocurre que la matemática en Hungría se especializa en temas de la Teoría de Números, Combinatoria y Teoría de Grafos, el razonamiento combinatorio es central en Ciencia de la Computación, donde por cierto los húngaros están entre los líderes a nivel mundial. En **[4]** se explica la relación de Erdős con niños prodigios húngaros. Por otro lado está su permanencia en Inglaterra, durante este tiempo su mentor fue Louis Mordell, un eminente teórico de números. Si la matemática se pudiera separar en los constructores de teorías y los solucionadores de problemas Erdős estaría sin duda en la segunda clasificación, más que esto; sería el monarca absoluto.

Una posible explicación del comportamiento excéntrico de Erdős es la concepción que tenía este del mundo. Poseer bienes eran un problema para él, nunca tuvo tarjeta de crédito, nunca aprendió a manejar (Hay una anécdota muy curiosa estando en Australia con Szekeres)**[8]**; y era feliz de viajar por años con dos maletas casi vacías. Para conocer de su visión acerca de la religión, la política, la música, entre otras cosas ver**[6][7]**. Sus relaciones interpersonales fuera del marco matemático no siempre eran las mejores, pero es importante considerar el papel sobreprotector de su madre, basta decir que Erdős estando en Inglaterra una vez afirmó que nunca antes le había untado mantequilla a un pan. Erdős nunca superó la pérdida de sus hermanas, aun sin haberlas conocido, quizás por esto sentía una gran pasión por los niños, cuando se encontraba con una mujer siempre le preguntaba cuantos hijos tenía, si le respondía varios él le comentaba que era una mujer afortunada. Cuando arribaba a una nueva ciudad se presentaba diciendo "Mi cerebro está abierto". Una vez instalado en casa de un amigo o conocido trabajaba arduamente por días con estos, intercambiando ideas y proponiendo problemas. Solía terminar las sesiones diciendo "Mañana continuaremos si estoy vivo."

Después de la muerte de su madre en Enero de 1971 Erdős se sumerge en su trabajo cada vez con mayor vigor; alrededor de 19 horas diarias, para esto toma café y Benzedrina (derivado de la anfetamina). El se veía más frágil y demacrado que nunca, a menudo usaba la chaqueta del pijama como pulóver. Debido a su simple estilo de vida necesitaba poco dinero; solía donarlo a matemáticos jóvenes los cuales decía lo necesitarían más que él. Decía que Dios poseía un libro transfinito donde estaban las demostraciones más bellas y cuando él quería referirse a alguna decía esta es del libro. Erdős recibió el Premio Wolf en el 1983, además de numerosos grados honorarios en Academias de Ciencias de varios países:

-Miembro honorífico de la Academia de Ciencias de Hungría.
-Miembro extranjero de la Academia de Ciencias de EUA.
-Miembro extranjero de la Academia de Ciencias de la India.
-Miembro honorífico de la Sociedad Matemática de Londres.
-Miembro extranjero de la Sociedad Real de Londres.

Estando en vida se instauró el Premio Paul Erdős con el objetivo de estimular a matemáticos que tuvieran una labor meritoria en la divulgación y enseñanza de la matemática, principalmente elemental, un galardonado fue el cubano Luis J. Davidson, uno de los fundadores de los concursos de matemática en Cuba.

A Erdős le gustaba ser libre, hacer lo que quería cuando quería. Siempre vivió a la altura de sus principios morales y esperaba de los demás lo mismo. Le disgustaban mucho los sistemas políticos opresivos y estuvo libre de odio personal.

Paradójicamente muere solo el 20 de Septiembre de 1996 a la edad de 83 años de un ataque al corazón en Warsaw, Polonia. Se encontraba allí para participar en una conferencia, estando en el hotel comienza a sentirse mal y es llevado al hospital, donde fallece 12 horas más tarde, al día siguiente sus colegas debido a su retraso llaman al hotel y se les informa de lo sucedido. Erdős es cremado y sus cenizas llevadas a un cementerio judío en Budapest. En su memoria se celebra una conferencia anual a la que asisten matemáticos de todos los países.

Paul Erdős fue una fuente mágica de inspiración por su mente incisiva y uno de los matemáticos más prolíficos de nuestro tiempo.

Trabajos Matemáticos:

1. Teorema de los números primos.
   El número de primos menores que n es asintóticamente igual a $\frac{n}{\log(n)}$.

   Esto fue probado por Hadamard y de la Vallée-Poussin en 1896 usando fuertes herramientas analíticas. En el 1948 Erdős y Atle Selberg descubren en Princeton una demostración elemental. Ellos publican sus resultados en revistas diferentes.[**9**][**10**]

2. Postulado de Bertrand.
   Para todo $n \geq 1$ existe algún primo p con $n < p \leq 2n$.

   Joseph Bertrand conjetura y verifica empíricamente este postulado para $n < 3000000$.
   Se conocen tres demostraciones:
   1850 Chebyshev
   1919 Ramanujan[**11**]
   1932 Erdős (1er artículo publicado)(19 años)[**12**]

3. Método Probabilístico.[**1**]
   Si en un conjunto dado de objetos la probabilidad de que uno de estos no tenga una cierta propiedad es menor que 1, entonces debe existir un objeto con esta propiedad.
   Ejemplo:
   Sea F una colección de $A_i \subset X$ con $d = |A_i| \geq 2$. F es 2-coloreable si existe una coloración de X con dos colores tal que todo A_i es no monocromático.
   Teorema: Toda familia de a lo sumo $2^{(d-1)}$ d-conjuntos es 2-coloreable.

   Coloreamos X aleatoriamente con dos colores, todas las coloraciones son igualmente probables. Para cada $A \in F$ sea E_A el evento tal que A es monocromático.
   $p(E_A) = \frac{2}{2^d} = \frac{1}{2^{(d-1)}}$ y sea $m = |F| \leq 2^{(d-1)}$. Los eventos E_A no son excluyentes.

   $$p(\bigcup_{A\in F} E_A) < \sum_{A\in F} p(E_A) = \frac{m}{2^{(d-1)}} \leq 1$$

   Entonces existe una coloración que pertenece a:

   $$\left[\bigcup_{A\in F} E_A\right]^c = \bigcap_{A\in F} E_A^c$$

4. Número Normal.[**5**]

$$x = [x] + \frac{c_1}{g} + \frac{c_2}{g^2} + ...$$

Representación de x real en base $g \quad 0 \leq c_i \leq g - 1$
Para cualquier dígito c (base g) y todo número natural n denotamos $l(c, n)$ como el número de dígitos de la sucesión $c_1, ..., c_n$ los cuales son igual a c. Si

$$\lim_{n \to \infty} \frac{l(c, n)}{n} = \frac{1}{g} \quad \forall c : \; 0 \leq c \leq g - 1$$

Entonces x es normal en base g. Un número se dice absolutamente normal si es normal en cualquier base.
La existencia de números absolutamente normales fue probada por E.Borel usando Teoría de la Medida. El primer ejemplo lo da Sierpinski en el 1916.

En el 1933 Champernowne conjetura que 0,2357111317... (se forma poniendo los números primos uno a continuación del otro) es normal en base 10.
En el 1946 Erdős y Copeland lo prueban.[13]

5. Teorema de Sylvester-Gallai[**1**]
Dados $n \geq 3$ puntos en el plano no todos alineados existe una recta que solo contiene dos de estos.

Erdos conjetura este resultado en el 1933, pero no puede probarlo. Posteriormente Tibor Grunwald (Gallai) lo demuestra. Se cree que este problema fue primeramente propuesto por Sylvester en la revista Educational Times en 1893.

6. Para todo n uno puede encontrar n puntos en una circunferencia tal que la distancia entre dos cualesquiera es entera. (1945)[**14**][**15**]

7. Es imposible encontrar infinitos puntos en el plano no todos alineados tal que todas las distancias sean enteras. (1945)[**14**][**15**]

8. Constante de Erdős-Borwein

$$E = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1} \approx 1{,}6066951524$$

1948 Erdős demuestra que E es irracional.[**16**]
1992 Borwein encuentra generalizaciones a este resultado.[**17**]

9. Conjetura de Erdős-Turán.[**18**]
$A \subseteq \mathbb{N}$
$$\sum_{n \in A} \frac{1}{n} = \infty$$
Entonces A contiene progresiones aritméticas arbitrariamente grandes.

10. En el 1849 A. de Polignac conjetura que cualquier número impar $n \geq 3$ es de la forma $2^k + p$ $k \in \mathbb{N}$ con p primo o $p = 1$.
1950 Erdős prueba que existen infinitos números impares términos de una progresión aritmética para los cuales la conjetura falla.[**5**][**19**]

11. Cualquier entero x satisface al menos una de las siguientes congruencias:
$$x \equiv 0(2) \quad x \equiv 0(3) \quad x \equiv 1(4) \quad x \equiv 3(8) \quad x \equiv 7(12) \quad x \equiv 23(24)$$
Si x no es par ni múltiplo de 3 entonces $x = 24t + r$ con $t \in \mathbb{Z}$ y $r \in \{1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\}$
1950 Erdős conjetura que dado cualquier natural n existe un conjunto finito de congruencias con módulos diferentes mayores que n y tal que cualquier entero satisface al menos una.
Erdős lo prueba para $n = 2$ usando como módulos varios divisores de 120. Para $n = 3$ con divisores de 2880.[**5**]

12. Existen infinitos pares de números naturales $x < y$ tal que:
$$d(x) = d(y) \quad \varphi(x) = \varphi(y) \quad \sigma(x) = \sigma(y)$$
Basta considerar $x = 3^k 568 \quad y = 3^k 638 \quad k = 0, 1, 2...$
1958 Erdős [**21**]demuestra que para cualquier número natural n existen n números naturales diferentes $a_1, ..., a_n$ tal que:
$$d(a_i) = d(a_j) \quad \varphi(a_i) = \varphi(a_j) \quad \sigma(a_i) = \sigma(a_j) \quad 1 \leq i < j \leq n.$$

13. En el 1800 fue conjeturado que
$$(n+1)(n+2) \cdots (n+k) = x^l \quad k, l \geq 2 \quad n \geq 0$$
no tiene solución en enteros.
1975 Erdős y Selfridge lo demuestran.[**20**]

14. Conjetura de Erdős-Strauss.[**31**]
Para todo $n \geq 2$ existen a, b, c naturales tal que se cumple:
$$\frac{4}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$
Actualmente se conoce que es verdadera para $2 \leq n \leq 10^{14}$.
Se puede probar para los $n \equiv 2(3)$ usando la identidad:
$$\frac{4}{2+3x} = \frac{1}{2+3x} + \frac{1}{1+x} + \frac{1}{(1+x)(2+3x)}$$

15. Sea h la altura máxima de un triángulo no obtusángulo, R, r son respectivamente el radio de la circunferencia circunscrita e inscrita, se cumple que: $R + r \leq h$.[**22**]

16. Desigualdad de Erdős-Mordell:[**23**][**24**][**25**]
Sea M un punto arbitrario tomado dentro de un triángulo ABC; x, y, z las distancias desde M hasta A, B, C respectivamente y u, v, w las distancias hasta los lados BC, CA, AB respectivamente. Se cumple que:
$$x + y + z \geq 2(u + v + w)$$
con igualdad si y solo si el triángulo es equilátero y M su centro.

17. Conjetura de Erdős:
1953 Sea f un polinomio de grado 3 con coeficientes enteros . Existen infinitos primos p tal que $f(p)$ es libre de cuadrados?

2007 Harald Helfgott[**26**] demuestra el siguiente teorema:
Sea $f \in \mathbb{Z}[x]$ un polinomio cúbico sin raíces repetidas. Asumamos que, para todo primo q, existe una solución $x \in (\mathbb{Z}/q^2\mathbb{Z})^*$ a $q^2 \nmid f(x)$. Entonces existen infinitos primos p tal que $f(p)$ es libre de cuadrados.

18. Todo entero positivo es la suma de uno o más números de la forma $2^r 3^s$, donde r y s son enteros no negativos y ningún sumando divide a otro. (23=9+8+6).[**27**]

19. Sea $A \subset \mathbb{R}^2$ tal que toda recta paralela al x-eje intersecta el conjunto A en un número finito de puntos, entonces existe una recta paralela al y-eje la cual intersecta el conjunto $A^{\complement}$ en $\boldsymbol{c}$ puntos. ($\boldsymbol{c}$ es la cardinalidad del continuum.)[**28**]

Bibliografía:

[**1**] Martin Aigner, Gunter M.Ziegler, Proofs from the Book. Springer-Verlag, 2003.

[**2**] Béla Bollobás, Prove and Conjecture, American Mathematical Monthly 105, March 1998.

[**3**] Ralph Faurdree, A conjecture of Erdős, American Mathematical Monthly 105, May 1998.

[**4**] Paul Erdős, Child Prodigies, Mathematics Competitions 8, 1995.

[**5**] W.Sierpinski, Elementary Theory of Numbers, Polska Akademia Nauk, 1964.

[**6**] Melvyn B.Nathanson, The Erdős Paradox. (lecture)

[**7**] Janos Pach,Two Place at Once. (lecture)

[**8**] George Szekeres, My collaboration with Paul Erdos. (lecture)

[**9**] A. Selberg, An elementary proof of the prime-number theorem, Ann. of Math. (2)50, 1949.

[**10**] P. Erdős, On a new method in elementary number theory, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 35, 1949.

[**11**] S. Ramanujan, A proof of Bertrand's postulate, J. Indian Math.Soc.11, 1919.

[**12**] P. Erdős, Beweis eines Satzes von Tschebyschef, Acta Sci.Math.5,1932.

[**13**] P. Erdős, A.Copeland, Note on normal numbers, Bull.Amer.Math.Soc. 52,1946.

[**14**] P. Erdős, N.H.Anning, Integral distances, Bull.Amer.Math.Soc. 51,1945.

[**15**] P. Erdős, Integral distances, Bull.Amer.Math.Soc. 51,1945.

[**16**] P. Erdős, On arithmetical properties of Lambert series, J. Indian Math. Soc.12,1948.

[**17**] P. Borwein, On the irrationality of certain series. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 112,1992.

[**18**] G. Halász, L. Lovász, M. Simonovits, V.T. Sós(eds), Paul Erdős and His Mathematics.I,II. Springer-Verlag. 2002.

[**19**] P. Erdős, On integers of the form $2^k + p$ and some related problems, Summa Brasil. Math. 2, 1950.

[**20**] P. Erdős, J. L. Selfridge, The product of consecutive integers is never a power, Illinois J. Math. 19,1975.

[**21**] P. Erdős, Solution of two problems of Jankowska, Bull. Acad. Polon. Sci. 6,1958.

[**22**] I.F.Sharygin, Problemas en Planimetría, Mir Moscú. 1988.

[**23**] P. Erdős, Proposed problem 3740, American Mathematical Monthly 42,1935.

[**24**] L.J.Mordell, D.F.Barrow, Solution to problem 3740, American Mathematical Monthly 44,1937.

[**25**] R.A.Satnoianu, Erdős-Mordell-Type inequalities in a triangle, American Mathematical Monthly 110,2003.

[**26**] `http://www.arxiv.org/0706.1497.`

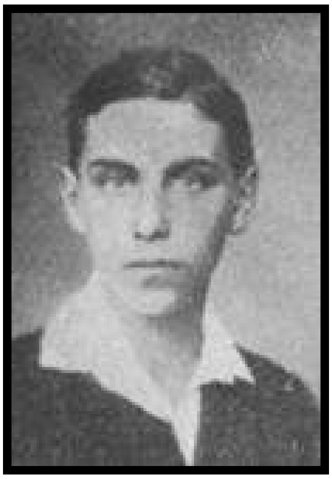
[**27**] Problem 1, 66th William Lowell Putnam Mathematical Competition. 2005.

[**28**] W.Sierpinski, Cardinal and ordinal numbers, Polska Akademia Nauk, 1958.

[**29**] `http://mathworld.wolfram.com`

[**30**] `http://www.oakland.edu./enp`

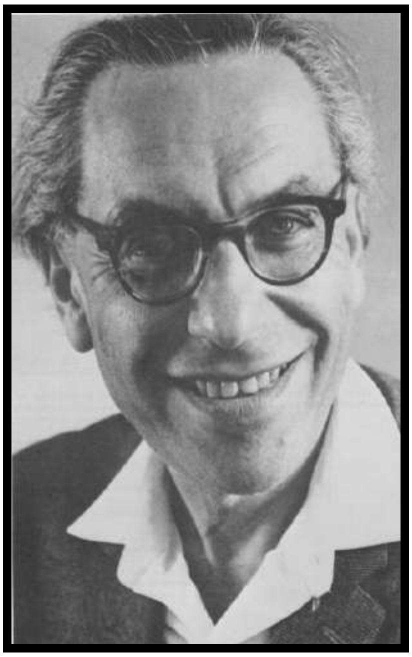
[**31**] `http://math.uindy.edu/swett`



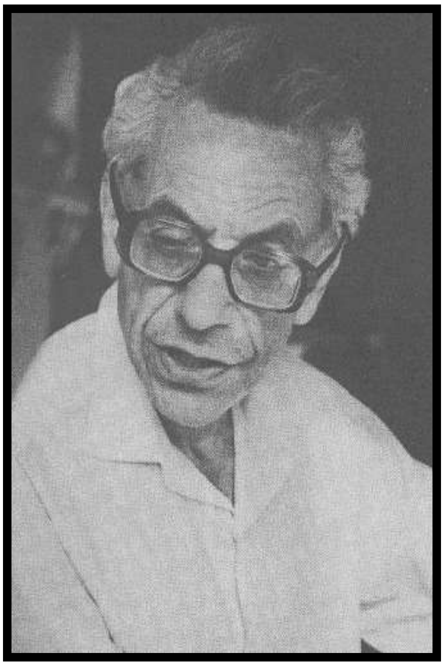
[1]

[2]

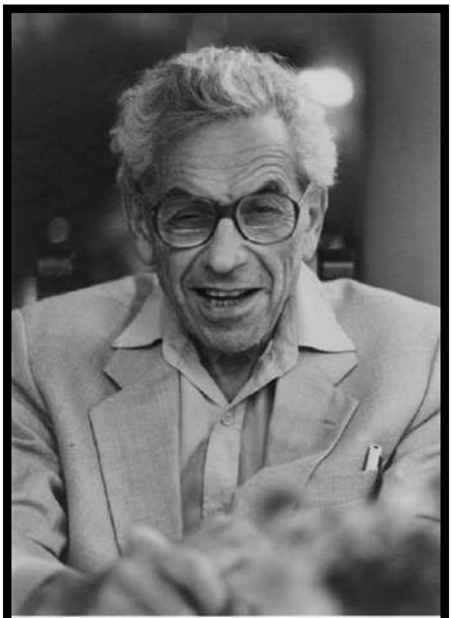
[3]



[4]



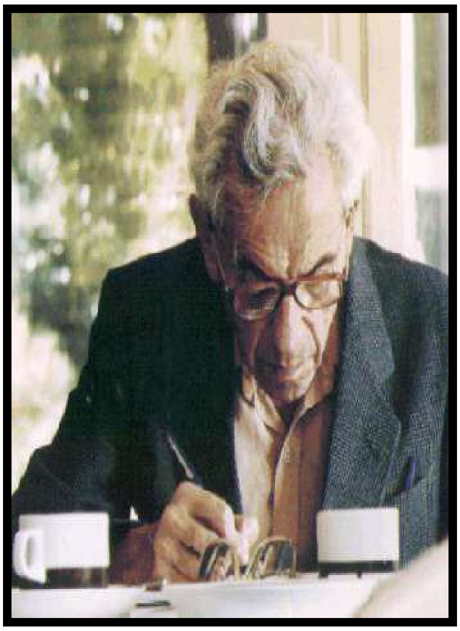
[5]



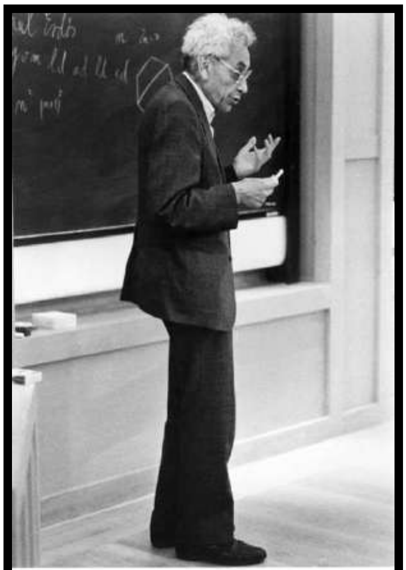
Paul Erdős, the most prolific mathematician who ever lived, has no home and no job, but he has wandered the world for over fifty years, inspiring other mathematicians. From the documentary N is a Number: A Portrait of Paul Erdős © 1993 by George Csicsery

[6]

[7]

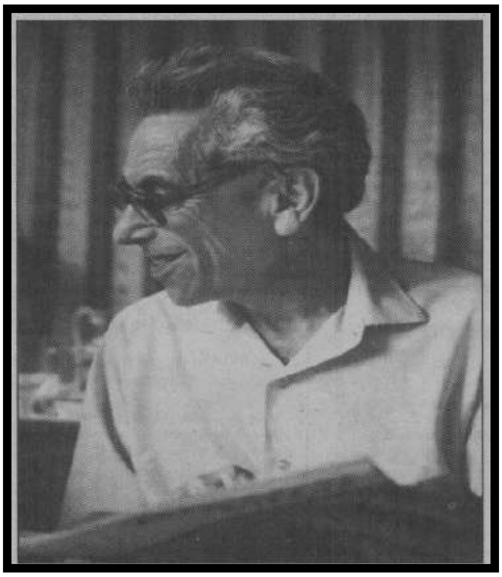


[8]



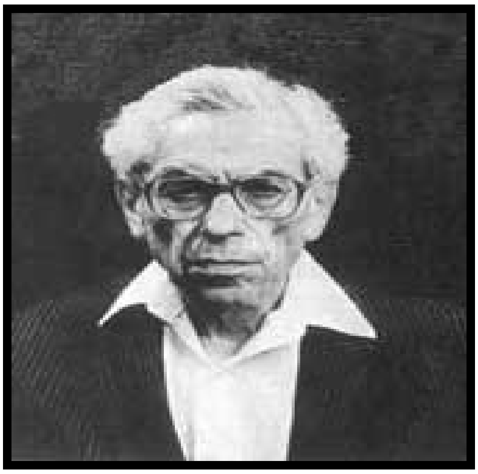
Paul Erdős, the most prolific mathematician who ever lived, delivers his "Sixty Years of Mathematics" lecture at Trinity College, University of Cambridge in June, 1991, the day before receiving Cambridge's prestigious honorary doctorate. From the documentary N is a Number: A Portrait of Paul Erdős © 1993 by George Csicsery

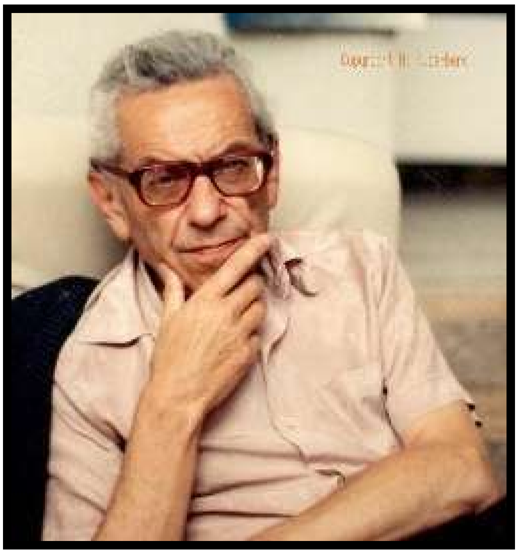
[9]


[10]


[11]


[12]


[13]


[14]

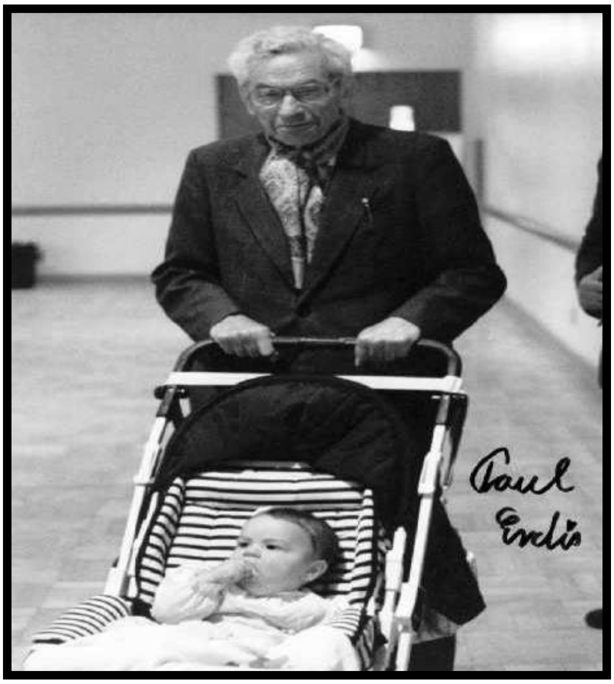
[15]

[16]

[17]

[18]

[19]

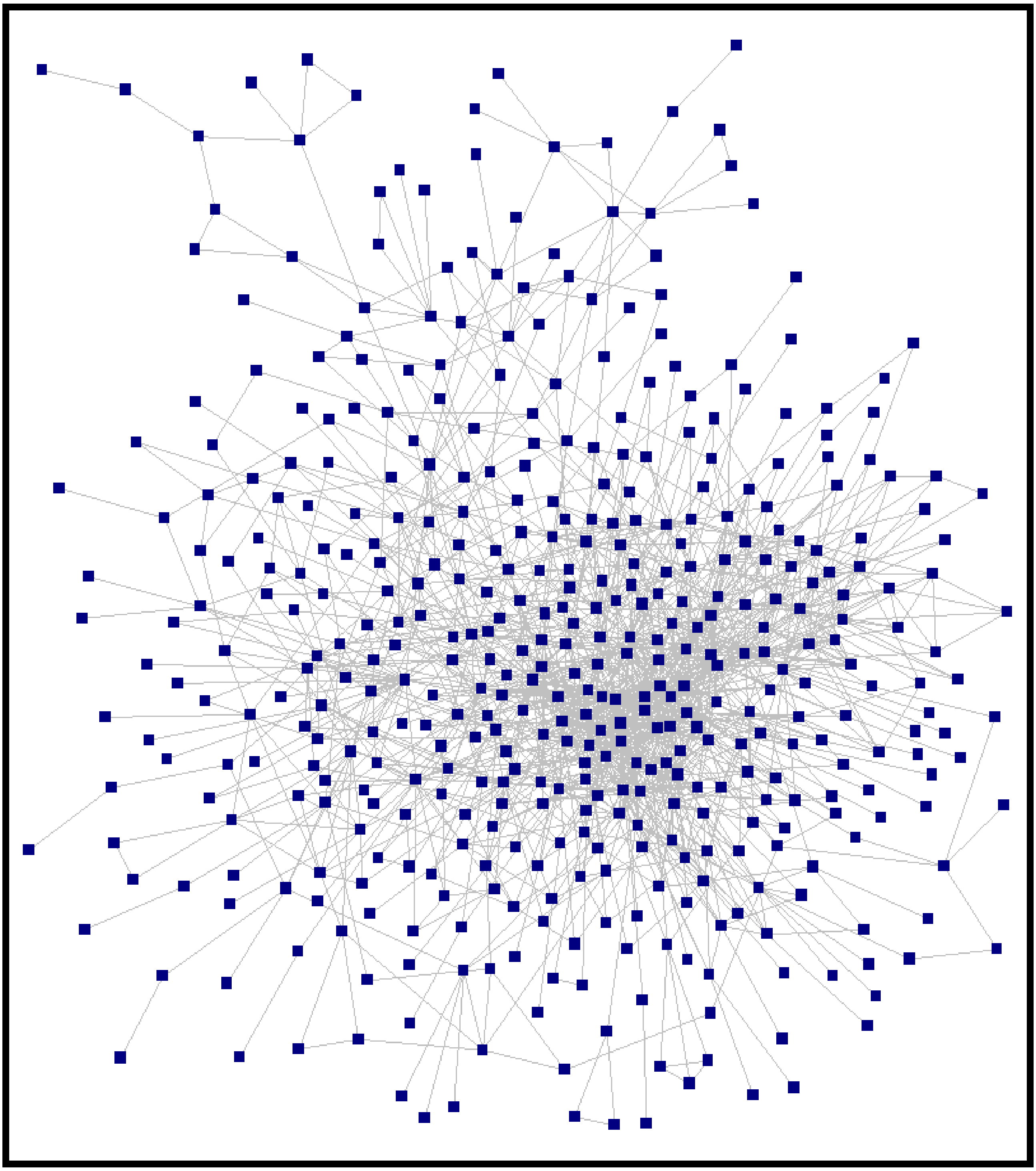


[20]

[21]

[22]

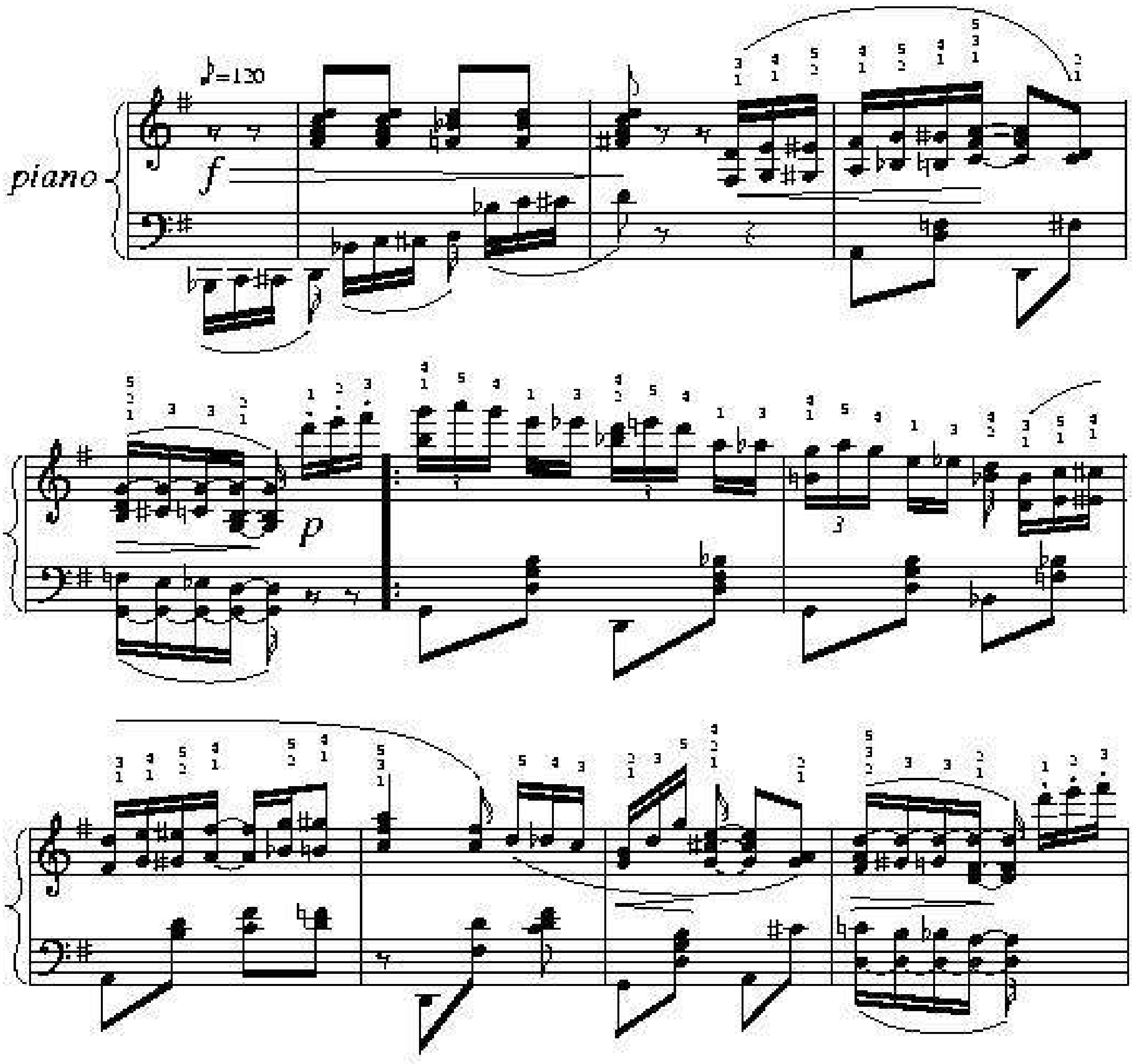
GRAFO SOCIAL DE PAUL ERDOS.
FENÓMENO CONOCIDO COMO EL NÚMERO DE ERDOS.



Budapest Rag

dedicated to the memory of Paul Erdős

Peter Winkler



Hardy and Veblen on Erdos

Below are some extracts from correspondence between G H Hardy and Veblen relating to Paul Erdos to be found in the Veblen archive at the US Library of Congress in Washington, DC. Notes are by Douglas Rogers.

GHH to OV, 11th November, 1935
[annotation - copy kept in IAS file; letter on Trinity College, Cambridge notepaper]

Dear Veblen,

Having occasion to write to you about something else, I find a letter which I got in Sept and have neglected. I have better excuses than usual: (a) I have moved my rooms, and everything has been in disorder; (b) I was knocked down by a motor-cyclist and laid up for 2 or 3 weeks just at the beginning of term. No serious injury.

The other thing is: Mordell says that P Erdos, a young Hungarian, is very anxious to go to Princeton for the session 1936-7. He is undeniably a very remarkable man, extraordinarily quick and fertile; v. Neumann has met him, and should know something about him. Is there any chance of his getting any scholarship or grant? I imagine that his own country can do nothing for him. He is not a "refugee".

His line is theory of numbers in the main; and I am out of touch with it. But I have read some of his papers, and they have an undeniable touch of quality.

Yours ever,

G H Hardy.

Who won the World Series? Widder doesn't know.

GHH to OV, 22nd July,[1939?]
[On New College, Oxford notepaper]

Heilbronn reports to me that Erdos's position is getting very acute, and asks me to write on his behalf. I do this gladly, because I do feel that Erdos is an exceptional man.

I gather that E. has not "made himself popular" in Princeton: I do not mean that he is in any sense actively disliked, but that he has been a bit aloof and not become, so to say, part of the place. Against this you must remember that he must be, scientifically, very isolated - I can hardly think of anyone in Princeton likely to be very interested in his work. An older person like Landau or myself can to some extent get over this, but it must be rather difficult for a quite young man like E. At Manchester it was quite different, since there the centre of interest lay right in his direction. But Manchester did, I think, provide for him for at least 2 years.

Heilbronn suggested - I do not know just on what grounds, and cannot cross-examine him now - that there was some more or less definite chance of his getting a studentship, away from Princeton in 1940-41, if only P could keep him another year. Is that so?

I do not see any chance of getting anything for him out of the "Society for the protection of science and learning". They are still making grants pretty vigorously, but E. is definitely excluded by their axioms - they strictly confine themselves to refugees ejected from a position. E. can to England before there was a chance of getting one - practically just at the end of his student stage (no doubt judging that he had no chance at home). So if you *can* do anything for him, I should be much relieved.

{If the year, 1939, assigned to this letter is correct, then Hardy is writing just ahead of the 1939-40 academic year, which would account for Heilbronn's and his sense of urgency. But the second paragraph is a bit curious, in that one might suppose that Veblen would be more directly aware of whatever problems Erdos was facing at Princeton. One also wonders about Erdos's later relations with Selberg and Princeton.}

International Congress of Mathematicians

WARSAW 1983

The Congress was held from 16 August to 24 August 1983.

Vladimir Igorevich Arnold	Singularities of Ray Systems.
Paul Erdös	Extremal Problems in Number Theory, Combinatorics, and Geometry.
Wendell Helms Fleming	Optimal Control of Markov Processes.
Christopher Hooley	Some Recent Advances in Analytical Number Theory.
Wu-chung Hsiang	Geometric Applications of Algebraic K-Theory.
Peter David Lax	Problems Solved and Unsolved Concerning Linear and Non-Linear Partial Differential Equations
Victor P Maslov	Non-Standard Characteristics in Asymptotical Problems.
Barry Mazur	Modular Curves and Arithmetic.
Robert Duncan MacPherson	Global Questions in the Topology of Singular Spaces.
Aleksander Pelczynski,	Structural Theory of Branch Spaces and Its Interplay with Analysis and Probability
David Ruelle	Turbulent Dynamical Systems.
Mikio Sato	Monodromy Theory and Holonomic Quantum Fields - a New Link between Mathematics and Theoretical Physics.
Yum-Tong Siu	Some Recent Developments in Complex Differential Geometry.

PROBLEMAS PARA LOS MÁS JÓVENES (36)

CINCO PROBLEMAS DE LETONIA

Problema Jov36-1

10 números están escritos en una circunferencia. Algunos son positivos y los demás, negativos. En un movimiento se pueden cambiar los signos a tres números en posiciones consecutivas. Probar que repitiendo el movimiento se puede conseguir que todos los números sean positivos.

Problema Jov36-2

Probar que la ecuación

$$x^5 + y^3 = z^2$$

Tiene inficitas soluciones naturales.

Problema Jov36-3

Probar que las diagonales de un cuadrilátero convexo ABCD son perpendiculares si y solamente si

$$AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$$

Problema Jov36-4

El cuadrilátero convexo ABCD tiene sus diagonales perpendiculares. Demostrar que puede ser descompuesto en tres piezas que se pueden disponer para formar un trapecio.

Problem Jov36-5

Demostrar que no hay ningún par de números reales tales que se verifiquen simultáneamente las igualdades

$$x = y^2 + 1;\ \ y = x^2 + 1.$$

PROBLEMAS DE NIVEL MEDIO Y DE OLIMPIADAS 36

ALGUNOS PROBLEMAS DE LA OLIMPIADA DE EUROPA CENTRAL 2009

MEMO2009-1

Supongamos que se tienen $n \geq 3$ colores distintos. Sea f(n) el mayor entero con la siguiente propiedad: Todo lado y toda diagonal de un polígono convexo con f(n) vértices puede ser coloreado con uno de entre n colores, de la manera siguiente:

i) Al menos se usan dos colores.
ii) Tres vértices cualesquiera del polígono determinan, o bien tres segmentos del mismo color , o bien tres seg,mentos de colores diferentes.

Probar que $f(n) \geq (n-1)^2$, con igualdad para infinitos valores de n.

MEMO2009-2

Sea ABCD un cuadrilátero convexo tal que AB y CD no son paralelas y AB = CD. Los puntos medios de las diagonales AC y BD son E y F, respectivamente. La recta EF corta a los segmentos AB y CD en G y H, respectivamente. Demostrar que el ángulo AGH es igual al ángulo DHG.

MEMO 2009- 3

Determinar todos los enteros $k \geq 2$ tales que, para todos los pares (m,n) de enteros positivos distintos, no mayores que k, el número

$$n^{n-1} - m^{m-1}$$

NO es divisible por k.

MEMO2009-4

Sean *a,b,c* números reales tales que para dos cualesquiera de las ecuaciones

$$x^2 + ax + b = 0; x^2 + bx + c = 0; x^2 + cx + a = 0 ,$$

hay exactamente un número real que satisface a ambas.

Determinar todos los posibles valores de $a^2 + b^2 + c^2$. $a^2 + b^2 + c^2$

PROBLEMAS 176 – 180

Problema 176, propuesto por Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona (España)

Dado un triángulo no degenerado ABC, y un punto P en su interior, trazamos las cevianas AD, BE, CF que pasan por P. Determinar todos los triángulos ABC y todos los puntos P en su interior para los que se cumple que al menos dos de las circunferencias circunscritas a AEF, BFD y CDE pasan por P.

Problema 177, propuesto por Laurentiu Modan, Bucarest, Rumania

Sea $P(n, senx)$ el siguiente polinomio:

$$P(n, senx) = \binom{n}{0} sen^2 x + \binom{n}{1} \frac{sen^4 x}{2} + \cdots + (-1)^{n+1} \binom{n}{n} \frac{sen^{2n+2} x}{n+1}$$

Calcular el límite cuando n tiende a infinito de ese polinomio.

Problema 178, propuesto por José Luis Díaz Barrero, Barcelona (España)

Sean *a,b,c* números reales verificando $0 < a,b,c \le 1$. Demostrar que

$$\frac{1}{\sqrt{2+3a}} + \frac{2}{\sqrt{2+3b}} + \frac{3}{\sqrt{2+3c}} \ge \frac{6\sqrt{5}}{5}.$$

Problema 179, propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, Ávila (España)

Sean T y T' los triángulos ABC, A'B'C', rectángulos respectivamente en A y A'. Se supone que sus lados respectivos verifican

$$a > b \ge c \quad \text{y} \quad a' > b' \ge c'.$$

Demostrar que

$$\left(\frac{aa'}{4} - \frac{1}{9}\sum_{cíclica} aa'\right)^2 \ge \left(\frac{a^2}{4} - \frac{1}{9}\sum_{cíclica} a^2\right)\left(\frac{a'^2}{4} - \frac{1}{9}\sum_{cíclica} a'^2\right)$$

¿Cuándo se verifica la igualdad?

*¿Se verifica la desigualdad para toda clase de triángulos?

***Problema 180, propuesto por José M. Rodríguez Caballero, estudiante, Cuba**

Sea $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$. Demostrar que

$$\frac{H_1}{2} - \frac{H_2}{3} + \frac{H_3}{4} - \frac{H_4}{5} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{H_n}{n+1} + \cdots = \frac{(\ln 2)^2}{2}.$$

PROBLEMA 166, *propuesto por Álvaro Begué Aguado, Nueva York, EE.UU.*

Probar que, si n es un número primo, entonces la parte entera de $(4+\sqrt{11})^n$ es múltiplo de n más 7.

Solución por Daniel Lasaosa Medarde, Universidad Pública de Navarra, Pamplona, España

Si $n=2$, entonces $\lfloor(4+\sqrt{11})^2\rfloor = 27+\lfloor 8\sqrt{11}\rfloor = 53$, al ser $26^2 = 676 < 8^2\cdot 11 = 704 < 729 = 27^2$. Al ser $53-7=46$ par, ser cumple el resultado propuesto.

Sea ahora n un primo impar. Entonces, al ser $0 < 4-\sqrt{11} < 1$, se tiene que

$$\lfloor(4+\sqrt{11})^n\rfloor - 7 = (4+\sqrt{11})^n + (4-\sqrt{11})^n - 8 = 2\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2k} 4^{n-2k} 11^k + 8(4^{n-1}-1).$$

Como $\binom{n}{2k} = \frac{n!}{(2k)!(n-2k)!}$ contiene n como factor primo en el numerador pero no en el denominador para $k=1,2,\ldots,\frac{n-1}{2}$, claramente cada miembro del sumatorio en el miembro de la derecha es divisible por n. Al mismo tiempo, al ser n primo impar, por el teorema pequeño de Fermat 4^{n-1} da resto 1 al dividir por n, con lo que también lo es el término restante.

Problema 167. Sea ABC un triangulo, de lados $a \geq b \geq c$. Si r es el radio del circulo inscrito, y a m_a la mediana correspondiente al lado BC, demostrar que

$$2\left(m_a + r\right) \geq b + c \qquad \Leftrightarrow \qquad A \leq 90^\circ$$

y la equivalencia analoga cambiando los signos menor o igual que por mayor o igual que.

Propuesto por Juan Bosco Romero Marquez, Avila, Espana.

Solución de Ercole Suppa, Teramo, Italia.

Utilizando las fórmulas conocidas:

$$s = \frac{a+b+c}{2} \quad , \quad \Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad , \quad m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$$

podemos escribir la siguiente cadena de equivalencias:

$$\begin{aligned}
2\left(m_a + r\right) \geq b + c & \qquad \Longleftrightarrow \\
2\left(\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2} + \frac{\Delta}{s}\right) \geq b + c & \qquad \Longleftrightarrow \\
\left(\sqrt{2b^2+2c^2-a^2} + 2\frac{\Delta}{s}\right)^2 \geq (b+c)^2 & \qquad \Longleftrightarrow \\
2b^2+2c^2-a^2+4\frac{\Delta^2}{s^2}+4\frac{\Delta}{s}\cdot\sqrt{2b^2+2c^2-a^2} \geq b^2+c^2+2bc & \qquad \Longleftrightarrow \\
(b-c)^2-a^2+4\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}+4\frac{\Delta}{s}\cdot\sqrt{2b^2+2c^2-a^2} \geq 0 & \qquad \Longleftrightarrow \\
s\left[(b-c)^2-a^2\right]+4(s-a)(s-b)(s-c)+4\Delta\cdot\sqrt{2b^2+2c^2-a^2} \geq 0 & \qquad \Longleftrightarrow \\
4\Delta\cdot\sqrt{2b^2+2c^2-a^2} \geq a(a+b-c)(a-b+c) & \qquad \Longleftrightarrow \\
4\Delta\cdot\sqrt{2b^2+2c^2-a^2} \geq 4a(s-c)(s-b) & \qquad \Longleftrightarrow \\
s(s-a)(s-b)(s-c)\left(2b^2+2c^2-a^2\right) \geq a^2(s-c)^2(s-b)^2 & \qquad \Longleftrightarrow \\
s(s-a)\left(2b^2+2c^2-a^2\right) \geq a^2(s-c)(s-b) & \qquad \Longleftrightarrow \\
\frac{1}{2}(b+c)^2(b^2+c^2-a^2) \geq 0 & \qquad \Longleftrightarrow \\
bc(b+c)^2\cos A \geq 0 & \qquad \Longleftrightarrow \\
A \leq 90^\circ & \qquad \Longleftrightarrow
\end{aligned}$$

La otra equivalencia

$$2\left(m_a + r\right) \leq b + c \qquad \Leftrightarrow \qquad A \geq 90^\circ$$

se muestra exactamente de la misma manera. $\square$

PROBLEMA 169, *propuesto por José Hernández Santiago, Oaxaca, México*

Sea q un número primo mayor que 3. Demostrar que existen $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$ tales que

$$|\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \cap \{3, 4, 5, \ldots\}| \geq 1$$

y además

$$2^{2009} \equiv a_1!a_2!\ldots a_n! \pmod{q}.$$

Solución por Daniel Lasaosa Medarde, Universidad Pública de Navarra, Pamplona, España

Por el teorema de Wilson, $(q-1)! \equiv q-1 \pmod{q}$ para todo primo q, o equivalentemente $(q-2)! \equiv 1 \pmod{q}$. Si $2^{2009} \equiv 1 \pmod{q}$, nos basta con tomar $a_1 = q-2 \geq 3$, mientras que si $2^{2009} \equiv q-1 \pmod{q}$, nos basta con tomar $a_1 = q-1 > 3$.

Para cualquier otro resto r tal que $2 \leq r \leq q-2$ y $2^{2009} \equiv r \pmod{q}$, nótese que, al ser $q-m \equiv (-1)m \pmod{q}$, entonces

$$r!(q-r)! \equiv (-1)^{q-r} r(q-1)! \equiv (-1)^r r \pmod{q}.$$

Claramente, r y $q-r$ tienen distinta paridad y suman q, con lo que son distintos y al menos uno de ellos es no inferior a $\frac{q+1}{2} \geq 3$. Además, ninguno de ellos puede ser igual a $q-1$. Nos basta entonces con tomar, si r es par, $a_1 = r$, $a_2 = q-r$, y si r es impar, $a_1 = r$, $a_2 = q-r$, $a_3 = q-1$.

PROBLEMA 170, *propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, Ávila, España*

Sean $x_i > 0$, $i = 1, 2, \cdots, n$, con $n \geq 2$, $\lambda \geq 0$ y $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Calcular el límite doble

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{\alpha\to 0} \sqrt[\alpha]{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^\alpha + \lambda\left(\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^\alpha - \sum_{i=1}^n x_i^\alpha\right)}{n + \lambda(n^\alpha - n)}}.$$

Solución por Daniel Lasaosa Medarde, Universidad Pública de Navarra, Pamplona, España

Si $x_i = x$ para todo i siendo x un real positivo, la raíz vale claramente x, con lo que ése es también el valor del límite. Asumiremos entonces en el resto del problema que los x_i no son todos iguales.

Llamemos A_n y G_n respectivamente a las medias aritmética y geométrica de los n primeros x_i, y para todo $\alpha \neq 0$,

$$M_n(\alpha) = \sqrt[\alpha]{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^\alpha}$$

a la media potencial de exponente α. Es conocido que $\lim_{\alpha\to 0} M_n(\alpha) = G_n$, y que para todo $0 < \alpha < 1$, $A_n > M_n(\alpha) > G_n$ al no ser todos los x_i iguales.

Hallemos el límite en los casos particulares $\lambda = 1$ y $\lambda = 0$. En el primer caso, se tiene que el límite doble es

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{\alpha\to 0} A_n = \lim_{n\to\infty} A_n,$$

mientras que en el segundo caso, el límite doble es

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{\alpha\to 0} M_n(\alpha)$$

Si calculamos primero el límite cuando $\alpha \to 0$, obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} G_n.$$

Consideremos ahora la sucesión definida de la siguiente manera: $x_1 = 1$, $x_2 = x_3 = b$, para todo entero no negativo m, $x_{3\cdot 2^m+1} = x_{3\cdot 2^m+2} = \cdots = x_{3\cdot 2^{m+1}}$, igual a 1 si m es par, e igual a b si m es impar. Queda entonces que, para todo entero par no negativo m,

$$A_{3\cdot 2^m} = \frac{2b+1}{3}, \qquad G_{3\cdot 2^m} = \sqrt[3]{b^2}, \qquad M_{3\cdot 2^m}(\alpha) = \sqrt[\alpha]{\frac{2b^\alpha + 1}{3}},$$

mientras que para todo entero impar positivo m,

$$A_{3\cdot 2^m} = \frac{b+2}{3}, \qquad G_{3\cdot 2^m} = \sqrt[3]{b}, \qquad M_{3\cdot 2^m}(\alpha) = \sqrt[\alpha]{\frac{b^\alpha + 2}{3}},$$

Claramente, las sucesiones $A_n, G_n, M_n(\alpha)$ no tienen límite si $b \neq 1$, con lo que no se podría hallar el límite doble ni para $\lambda = 0$ ni para $\lambda = 1$. Supondremos entonces en el resto del problema que existen los límites de A_n, G_n y $M_n(\alpha)$, y los denotaremos respectivamente por $A, G, M(\alpha)$. Entonces, para $\lambda = 1$ el límite pedido es claramente A, mientras que para $\lambda = 0$, calculando primero el límite con respecto a α se llega a $\lim_{n\to\infty} G_n = G$, mientras que tomando primero el límite con respecto a n se llega a $\lim_{\alpha\to 0} M(\alpha) = G$. Asumiremos entonces en lo que queda de problema que $\lambda \neq 0, 1$.

Demostraremos ahora que el límite doble pedido vale G si $\lambda \neq 0, 1$, independientemente del orden en el que tomemos los límites. Aunque vayamos a tomar el límite cuando $n \to \infty$ en primer lugar, claramente podemos asumir que $\alpha < 1$, ya que luego tendremos que tomar el límite cuando $\alpha \to 0$. Ahora bien, siempre que $\alpha < 1$ pero independientemente de su valor, el límite cuando $n \to \infty$ del radicando es

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(1-\lambda)\left(M_n(\alpha)\right)^\alpha + \lambda n^{\alpha-1} A_n^\alpha}{(1-\lambda) + n^{\alpha-1}} = \lim_{n\to\infty} \left(M_n(\alpha)\right)^\alpha = \left(M(\alpha)\right)^\alpha,$$

con lo que el límite doble, tomando primero el límite cuando $n \to \infty$, valdría

$$\lim_{\alpha\to 0} M(\alpha) = G.$$

Para tomar primero el límite cuando $\alpha \to 0$, escribimos primero la raíz como

$$\sqrt[\alpha]{\frac{(1-\lambda)n\left(M_n(\alpha)\right)^\alpha + \lambda n^\alpha A^\alpha}{(1-\lambda)n + \lambda n^\alpha}}.$$

Ésta es claramente la media potencial ponderada, con exponente α, de $M_n(\alpha)$ y A, con pesos respectivos $(1-\lambda)n$ y λn^α. Mientras los límites existan y no exista indeterminación, el límite cuando $\alpha \to 0$ será la media geométrica ponderada de los límites de $M_n(\alpha)$ y de A, con pesos respectivos iguales a los límites de $(1-\lambda)n$ y λn^α, es decir, el límite con respecto de α de la raíz será

$$\left(G_n^{(1-\lambda)n} A_n^\lambda\right)^{\frac{1}{(1-\lambda)n+\lambda}} = G_n \left(\frac{A_n}{G_n}\right)^{\frac{\lambda}{(1-\lambda)n+\lambda}}.$$

El límite de esta última cantidad cuando $n \to \infty$ es claramente G.

PROBLEMA 171, *propuesto por Paolo Perfetti, Dipartimento di Matematica, Universitá degli Studi Tor Vergata, Roma, Italia*

Sean a, b, c números reales positivos tales que $abc = 1$. Probar que

$$\frac{a}{c(1+a)} + \frac{b}{a(1+b)} + \frac{c}{b(1+c)} \leq \frac{1}{18}\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b}\right)(a+b+c)^2.$$

Solución por Daniel Lasaosa Medarde, Universidad Pública de Navarra, Pamplona, España

Como $(1-\sqrt{a})^2 \geq 0$, entonces $1 + a \geq 2\sqrt{a}$ con igualdad si y sólo si $a = 1$. Por la desigualdad entre medias aritmética y geométrica, $\frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a}{c}\frac{b}{a}\frac{c}{b}} = 3$, y como a, b, c son números positivos, $a + b + c \geq \sqrt[3]{abc} = 1$, con igualdad en ambos casos si y sólo si $a = b = c$. Finalmente, utilizando la desigualdad entre medias aritmética y cuadrática,

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{ab+bc+ca}{abc} = \frac{(a+b+c)^2 - (a^2+b^2+c^2)}{2} \leq \frac{(a+b+c)^2}{3},$$

con igualdad si y sólo si $a = b = c$.

Por lo tanto, nos basta con demostrar que

$$\frac{\sqrt{a}}{c} + \frac{\sqrt{b}}{a} + \frac{\sqrt{c}}{b} \leq \sqrt{\frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b}}\sqrt{\frac{1}{c} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}},$$

que es cierta por ser la desigualdad de Cauchy-Schwarz aplicada a los vectores $\left(\sqrt{\frac{a}{c}}, \sqrt{\frac{b}{a}}, \sqrt{\frac{c}{b}}\right)$ y $\left(\frac{1}{\sqrt{c}}, \frac{1}{\sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{b}}\right)$, con igualdad si y sólo si $a = b = c$. Queda pues demostrada la desigualdad propuesta, dándose la igualdad si y sólo si $a = b = c = 1$.

PROBLEMA 172, *propuesto por Luis Gómez Sánchez Alfaro, Universidad de Oriente, Venezuela*

Probar que hay una infinidad de enteros naturales tales que si se traslada su cifra de las unidades a la posición de mayor orden (por ejemplo, 12345 se convierte en 51234), entonces el número queda multiplicado por 9. Calcular el más pequeño de dichos enteros.

Solución por Daniel Lasaosa Medarde, Universidad Pública de Navarra, Pamplona, España

Sea N un tal entero, y supongamos que podemos escribir $N = 10a + b$, donde b es un dígito decimal y a es un entero positivo con expresión decimal de k cifras (sin ceros a la izquierda). Entonces, $10^k > a \geq 10^{k-1}$, y ha de ser $b \cdot 10^k + a = 9N$, o lo que es lo mismo, como claramente ha de ser $b = 9$ al ser $10^{k+1} > b \cdot 10^k + a = 9N > 9 \cdot 10^k$, se debe cumplir que

$$a = \frac{9 \cdot 10^k - 81}{89}, \qquad 10a + b = \frac{9 \cdot 10^{k+1} - 810}{89} + 9 = 9\frac{10^{k+1} - 1}{89}.$$

Nos basta entonces con demostrar que existen infinitas soluciones para la congruencia $10^{k+1} \equiv 1 \pmod{89}$, que claramente es cierto, pues por el pequeño teorema de Fermat, al menos $10^{88\ell} \equiv 1^\ell \equiv 1 \pmod{89}$ para todo entero positivo ℓ. Necesitamos además encontrar el valor positivo más pequeño m tal que $10^m \equiv 1 \pmod{89}$. Expresando $n = um + v$ para cualquier n positivo tal que $10^n \equiv 1 \pmod{89}$, donde u es un entero no negativo y $0 \leq v \leq m - 1$ es un resto entero al dividir por m, se tiene que $10^v \equiv 1 \pmod{89}$, y por la definición de m como mínimo, $v = 0$, y m divide a n. Finalmente, se comprueba tras cálculos sencillos pero tediosos que $10^9 = 89 \cdot 11235955 + 5$, con lo que $10^{45} \equiv 5^5 \equiv 10 \pmod{89}$ y $10^{44} \equiv 1 \pmod{89}$, pero $10^{22} \equiv 500^2 \equiv (-1) \pmod{89}$ y $10^4 \equiv 32 \pmod{89}$, luego el menor m positivo tal que $10^m \equiv 1 \pmod{89}$ debe dividir a 44, pero no puede dividir a 22 ni a 4, luego es 44, y el menor N que cumple la propiedad del enunciado es

$$N = 9\frac{10^{44} - 1}{89}.$$

Deducimos entonces también que N tiene la propiedad del enunciado si y sólo si es de la forma

$$N = 9\frac{10^{44\ell} - 1}{89}.$$

para algún entero positivo ℓ.

Problema 172.- Probar que hay una infinidad de enteros naturales tales que si se traslada su cifra de las unidades a la posición de mayor orden (por ejemplo, 12345 se convierte en 51234), entonces el número queda multiplicado por 9. Calcular el más pequeño de dichos enteros.
Designaremos por $N = na$ al número buscado siendo *a* la cifra de las unidades y *n* el número que resulta de suprimir dicha cifra que suponemos tiene *p* dígitos.
Para que el número buscado na no aumente de longitud al multiplicarse por 9 cuando se transforma en an, forzosamente ha de comenzar por 1 y terminar por 9, por tanto

$$n9 = 10n + 9,\ 9n = 9\cdot 10^p + n\,,$$

la condición del enunciado queda:

$$9\cdot 10^p + n = 9\left(10n + 9\right)$$

despejando *n*,

$$n = \frac{9\left(10^p - 9\right)}{89}$$

Como 89 es primo, tenemos que buscar *p* para que $10^p \equiv 9\,(89)$.

Haciendo la sucesión de restos potenciales de 10 módulo 89, encontramos que $10^{43} \equiv 9\,(89)$.

Como el ciclo de los restos es de orden 44, hay solución para los infinitos valores de $p = 43 + 44k, \left(k = 0, 1, \ldots\right)$.

La solución mas pequeña corresponde a *p* = 43 y será un entero de 44 dígitos que podemos encontrar con un sencillo algoritmo que es prácticamente el de la multiplicación por 9 apoyándonos en el hecho de que en el resultado los dígitos se desplazan una posición. El siguiente cuadro describe el comienzo del algoritmo. Partimos de la cifra final que es conocida (el 9 en negrilla de la fila inferior), vamos multiplicando por 9 y colocando en la fila segunda la cifra de las unidades del producto y en la primera la de las decenas para facilitar el siguiente producto.
El algoritmo progresa al trasladar cada dígito de las unidades a la fila inferior en la columna de la izquierda como indican las flechas. El proceso termina cuando hemos alcanzado la longitud (44 en este caso).

	….	4	6	1	8	Decenas
	…	2	4	7	1	Unidades
…	2	4	7	1	**9**	Inicio

El número pedido es *N* = 10112359550561797752808988764044943820224719
El método es generalizable si cambiamos el factor 9 por cualquier otro dígito $a = 2, 3, \ldots, 9$.
La expresión que determina *n* es entonces

$$n = \frac{a\left(10^p - a\right)}{10a - 1}$$

El resto del proceso es análogo al caso anterior.
La tabla siguiente muestra todos los resultados de longitud mínima para $a = 2, 3, \ldots, 9$.

Factor	Nº dígitos	Número
2	18	105263157894736842
3	28	1034482758620689655172413793
4	6	102564
5	42	102040816326530612244897959183673469387755
6	58	1016949152542372881355932203389830508474576271186440677966
7	22	1014492753623188405797
8	13	1012658227848
9	44	10112359550561797752808988764044943820224719

Cristóbal Sánchez-Rubio
I.E.S. Penyagolosa, Castellón.

PROBLEMA 173, *Propuesto por Xavi Ros, estudiante, Universidad Politécnica de Cataluña, Barcelona, España*

Probar o refutar la siguiente afirmación:

Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo cerrado. La sucesion $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones medibles $f_n : I \to \mathbb{R}$, y existe una funcion $f : I \to \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \int_I |f_n - f| = 0.$$

Entonces $f_n \to f$ puntualmente salvo en un conjunto de medida nula.

¿Y si las funciones f_n y f son continuas?

Solución por Daniel Lasaosa Medarde, Universidad Pública de Navarra, Pamplona, España

Nótese que podemos considerar sin pérdida de generalidad el caso en el que $f = 0$ e $I = [0, 1]$, pues podemos restar f a sí misma y a cada f_n, y sustituir la variable independiente x por $a+(b-a)x$ para mapear el intervalo $[0, 1]$ a cualquier intervalo cerrado $I = [a, b]$, sin alterar ni hipótesis ni tesis del problema.

Denotaremos como suele ser habitual $H_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ al n-ésimo número armónico, y definimos la sucesión de funciones $g_n : \mathbb{R} \to [0, 1]$ dada por $g_n(x) = 1$ cuando $H_n + \frac{1}{4(n+1)} < x < H_{n+1} - \frac{1}{4(n+1)}$, $g_n(x) = 0$ cuando $x < H_n - \frac{1}{4(n+1)}$ y cuando $x > H_{n+1} - \frac{1}{4(n+1)}$, $g_n(x) = \frac{1}{2}+2(n+1)(x-H_n)$ cuando $|x-H_n| \le \frac{1}{4(n+1)}$, y $g_n(x) = \frac{1}{2}-2(n+1)(x-H_{n+1})$ cuando $|x-H_{n+1}| \le \frac{1}{4(n+1)}$. Nótese que $g_n(x)$ es nula salvo en un intervalo $\left(H_n - \frac{1}{4(n+1)}, H_{n+1} + \frac{1}{4(n+1)}\right)$ de longitud $\frac{3}{2(n+1)} \le \frac{3}{4} < 1$, con lo que podemos tomar sin pérdida de generalidad un intervalo J_n de longitud 1 que contiene enteramente en su interior al intervalo donde g_n es no nula. Tomamos ahora, para cada $x \in J_n$, $f_n(\{x\}) = g_n(x)$, donde $\{x\}$ denota a la parte fraccional de x, es decir, $\{x\} = x - [x]$ donde $[x]$ es el mayor entero menor o igual que x, y tomamos finalmente $f_n(1) = f_n(0)$. Claramente, las funciones f_n así definidas son continuas en $[0, 1]$, toman valores en el conjunto $[0, 1]$, y además

$$\int_I |f_n - f| = \int_0^1 f_n(x)dx = \frac{1}{n+1},$$

pues la gráfica de $f_n(x)$ es un trapecio con bases de longitudes $\frac{3}{2(n+1)}$ y $\frac{1}{2(n+1)}$, y altura de longitud 1, posiblemente "partido" por una recta perpendicular a sus bases, con una mitad situada a partir de $x = 0$ inclusive, y otra situada hasta $x = 1$ inclusive. Nótese que la sucesión de funciones así definida cumple los requisitos del problema. Nótese también que los intervalos en los que g_n y g_{n+1} valen al menos $\frac{1}{2}$ son dos intervalos cerrados con el extremo superior del primero igual al extremo inferior del segundo. Finalmente, la sucesión $\{H_n\}$ no está acotada, evolucionando para n arbitrariamente grande como $\ln n + \gamma + O\left(\frac{1}{n}\right)$, donde γ es la constante de Euler-Mascheroni y se ha utilizado notación de Landau. Pero entonces, para cualquier $x \in [0, 1]$, existe N arbitrariamente grande de forma que $g_N(x) \ge \frac{1}{2}$ para algún x' tal que $\{x'\} = x$. Luego la sucesión $f_n(x)$ no converge para ningún $x \in [0, 1]$.

El anterior argumento demuestra que la afirmación propuesta es falsa incluso para funciones continuas; es más, "redondeando" los cuatro vértices del trapecio que conforma la gráfica de $g_n(x)$ mediante trozos de parábola tangentes a dos lados o a un lado y su prolongación, generalizamos el resultado, demostrando que la afirmación es falsa también cuando cada f_n es derivable y con derivada continua.

La afirmación pasa a ser cierta sin embargo cuando las f_n son derivables y además $f_n'(x)$ está uniformemente acotada, es decir, si existe un real M tal que $|f_n'(x)| < M$ para todo n y todo $x \in I$. En este caso, si la sucesión no converge puntualmente en x_0, para todo natural N existen $n > N$ y $\epsilon > 0$ tales que $|f_n(x_0)| > \epsilon$. Como $f_n'(x)$ está acotada, se puede comprobar que existe un intervalo $\left(x_0 - \frac{\epsilon}{M}, x_0 + \frac{\epsilon}{M}\right)$, en el que f_n tiene el mismo signo que $f_n(x_0)$, siendo además el área bajo $|f_n(x)|$ en dicho intervalo al menos igual al área de un triángulo cuya base es el intervalo y su altura ϵ, es decir, la contribución de este intervalo a la integral de $|f_n|$ es al menos $\frac{\epsilon^2}{M}$. Luego si las f_n y f son derivables con derivada uniformemente acotada, y la integral de $|f_n - f|$ tiende a 0, la sucesión converge puntualmente para cada $x \in I$.

Problema 174

Miguel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca

Si n es un número natural tal que $n\,(n+1) = \underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c}\,\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c}$, con $a \neq 0$, tendremos $n^2 < n\,(n+1) \leq 999999$ y $(n+1)^2 > n\,(n+1) \geq 100100$, de donde

$$316 \leq n \leq 999 \tag{1}$$

A su vez,

$$\begin{aligned} n\,(n+1) &= 10^5 a + 10^4 b + 10^3 c + 10^2 a + 10b + c \\ &= 1001\,(10^2 a + 10b + c) \\ &= 1001 \cdot (\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c}) \end{aligned}$$

que implica $1001 | n\,(n+1)$. Pues $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, tenemos $1001 = 1 \cdot 1001 = 7 \cdot 143 = 11 \cdot 91 = 13 \cdot 77$ y, habida cuenta que $mcd\,(n, n+1) = 1$, hay que considerar los siguientes casos:

1. $1001|n$, que es incompatible con (1).
2. $1001|n+1$, incompatible también con (1).
3. $7|n$ y $143|n+1$. Existirán números naturales x, y tales que $n = 7x$, $n+1 = 143y$. Al eliminar n obtenemos la ecuación diofántica $7x - 143y = -1$ cuya solución general puede escribirse en la forma $x = 102 + 143t$, $y = 5 + 7t$ siendo t un número entero. Únicamente cuando $t = 0$ obtenemos una solución válida, a saber, $n = 7 \cdot 102 = 714$, $n + 1 = 715$ con $714 \times 715 = 510510$.
4. $143|n$ y $7|n+1$. Hacemos servir la notación anterior en este caso y los siguientes; se llega a la ecuación $143x - 7y = -1$ con solución general $x = 2 + 7t$, $y = 41 + 143t$. Sin solución válida.
5. $11|n$ y $91|n+1$. La ecuación es, ahora, $11x - 91y = -1$ con solución general $x = 33 + 91t$, $y = 4 + 11t$ y única solución válida cuando $t = 0$: $n = 11 \cdot 33 = 363$, $n + 1 = 364$ y $363 \times 364 = 132132$.
6. $91|n$ y $11|n+1$. Se obtiene $91x - 11y = -1$, $x = 7 + 11t$, $y = 58 + 91t$; única solución válida para $t = 0$: $n = 91 \cdot 7 = 637$, $n + 1 = 638$ y $637 \times 638 = 406406$.
7. $13|n$ y $77|n+1$. Se obtiene $13x - 77y = -1$, $x = 71 + 77t$, $y = 12 + 13t$; única solución válida para $t = 0$: $n = 13 \cdot 71 = 923$, $n + 1 = 924$ y $923 \times 924 = 852852$.
8. $77|n$ y $13|n+1$. Se llega a la ecuación $77x - 713y = -1$ con solución general $x = 14 + 13t$, $y = 83 + 77t$. Sin solución válida.

Así, pues, los números que se piden son 132.132, 406.406, 510.510 y 852.852 .

PROBLEMA 175, *propuesto por José Luis Díaz Barrero, Barcelona, España*

Sean x, y, z tres números reales estrictamente positivos tales que $xy+yz+zx = 1$. Demostrar que

$$xyz \leq \frac{1}{9} \sum_{\text{cíclica}} \left(\frac{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}}{x+y} - z \right) \leq \frac{x+y+z}{9}.$$

Solución por Daniel Lasaosa Medarde, Universidad Pública de Navarra, Pamplona, España

Como $(1+x^2)(1+y^2) = (1+xy)^2 + (x-y)^2$, se tiene que

$$\frac{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}}{x+y} - z \geq \frac{1+xy-yz-zx}{x+y} = \frac{2xyz}{z(x+y)} = \frac{2xyz}{1-xy},$$

con igualdad si y sólo si $x = y$, y de forma análoga para sus permutaciones cíclicas. Para demostrar la desigualdad de la derecha, basta entonces probar que

$$\frac{3}{\frac{1}{1-xy} + \frac{1}{1-yz} + \frac{1}{1-zx}} \leq \frac{2}{3} = \frac{(1-xy)+(1-yz)+(1-zx)}{3},$$

claramente cierto en virtud de la desigualdad entre medias aritmética y armónica, con igualdad si y sólo si $xy = yz = zx$. Queda pues demostrada la desigualdad de la izquierda, en la que se da la igualdad claramente si y sólo si $x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Como $1 + x^2 = x^2 + xy + yz + zx = (x+y)(x+z)$, y de forma similar para sus permutaciones cíclicas, la desigualdad de la derecha es equivalente a

$$\sqrt{(y+z)(z+x)} + \sqrt{(z+x)(x+y)} + \sqrt{(x+y)(y+z)} \leq 2(x+y+z).$$

Pero aplicando la desigualdad entre medias aritmética y geométrica a $y+z, z+x$, se tiene que

$$\sqrt{(y+z)(z+x)} \leq \frac{x+y}{2} + z,$$

con igualdad si y sólo si $x = y$, y de forma similar para sus permutaciones cíclicas. Queda pues demostrada la desigualdad de la derecha, en la que se da la igualdad si y sólo si $x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

PROBLEMA 175, *Propuesto por José Luis Díaz Barrero, Barcelona, España.*

Sean x, y, z tres números reales estrictamente positivos tales que $xy+yz+zx=1$. Demostrar que

$$xyz \le \frac{1}{9}\sum_{cíclica}\left(\frac{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}}{x+y}-z\right) \le \frac{x+y+z}{9}.$$

Solución de Bruno Salgueiro Fanego (Viveiro, Lugo).

Las hipótesis implican que existen A, B, C ángulos de un triángulo ΔABC tales que $x=\cot A$, $y=\cot B$, $z=\cot C$. Como $A+B+C=\pi$ rad,

$$\frac{\sqrt{(1+\cot^2 A)(1+\cot^2 B)}}{\cot A+\cot B}-\cot C = \frac{\csc A\csc B}{(\cos A\sin B+\cos B\sin A)\csc A\csc B}-\cot C = \csc(A+B)-\cot C = \csc C-\cot C,$$

siendo entonces las desigualdades a probar

$$\cot A\cot B\cot C \le \frac{1}{9}(\csc C-\cot C+\csc A-\cot A+\csc B-\cot B) \le \frac{\cot A+\cot B+\cot C}{9};$$

al ser $A+B+C=\pi$ rad, $\cot A+\cot B+\cot C=\cot A\cot B\cot C-\csc A\csc B\csc C=\dfrac{\cos A\cos B\cos C-1}{\sin A\sin B\sin C}$,

luego dichas desigualdades son equivalentes a

$$\frac{\cos A\cos B\cos C}{\sin A\sin B\sin C} \le \frac{1}{9}\left(\frac{\sin A\sin B+\sin B\sin C+\sin C\sin A}{\sin A\sin B\sin C}-\frac{\cos A\cos B\cos C+1}{\sin A\sin B\sin C}\right) \le \frac{\cos A\cos B\cos C-1}{9\sin A\sin B\sin C},$$

es decir,

$$\cos A\cos B\cos C \le \frac{1}{9}[\sin A\sin B+\sin B\sin C+\sin C\sin A-(\cos A\cos B\cos C+1)] \le \frac{1}{9}(\cos A\cos B\cos C-1).$$

Denotando por p, r y R al semiperímetro, inradio y circunradio de ΔABC, dichas desigualdades se reescriben como $\dfrac{p^2-r^2-4rR-4R^2}{4R^2} \le \dfrac{1}{9}\left(\dfrac{p^2+r^2+4rR}{4R^2}-\dfrac{p^2-r^2-4rR}{4R^2}\right) \le \dfrac{1}{9}\dfrac{p^2-r^2-4rR}{4R^2}$ o

$$p^2-r^2-4rR-4R^2 \le \frac{1}{9}(2r^2+8rR) \le \frac{1}{9}(p^2-r^2-4rR).$$

La desigualdad de la izquierda es equivalente a la $9p^2 \le 11r^2+44rR+36R^2$, que es cierta debido a las desigualdades de Gerretsen, $p^2 \le 3r^2+4rR+4R^2$, y de Euler, $2r \le R$, puesto que

$$9p^2 \le 9(3r^2+4rR+4R^2) = 27r^2+36rR+36R^2 \le 11r^2+44rR+36R^2.$$

La igualdad se alcanza si y sólo si se alcanza en las de Gerretsen y de Euler, es decir, sólo y cuando ΔABC es equilátero, lo cual equivale a que $x=y=z$ o bien, al ser $xy+yz+zx=1$, a $x=y=z=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Los lados a, b, c de ΔABC son raíces del polinomio $P(t)=(t-a)(t-b)(t-c)=t^3-(a+b+c)t^2+(ab+bc+ca)t-abc=t^3-2pt^2+[p^2+r(r+4R)]t-4prR$, que tiene una sola, o dos o tres raíces reales distintas. En el primer caso, el polinomio $P'(t)=3t^2-4pt+p^2+r(r+4R)$ tendrá una raíz real, y en los otros, por el teorema de Rolle, por lo menos (y, por tanto, exactamente, al ser de grado dos) dos raíces reales distintas, luego su discriminante, $(-4p)^2-4\cdot 3\cdot[p^2+r(r+4R)]=4[p^2-3r(r+4R)]$, será nulo o estrictamente positivo, es decir, $3r^2+12rR \le p^2$, que es la desigualdad de la derecha. Además, en ella se da la igualdad si y sólo si $P(t)$ tiene una raíz real triple, o sea, sólo y cuando ΔABC es equilátero, es decir, si y sólo si $x=y=z=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

NOTICIA DE CONGRESOS (36)

DOS CONGRESOS EUROPEOS DEL VERANO 2009

35º Congreso de la SBPMef, Nivelles, Bélgica

Y

10ª Conferencia Internacional del Mathematics Education into the 21st Century Project, Dresden, Sajonia, Alemania

Es tradicional aprovechar el verano para la celebración de Congresos, sobre todo en el caso de la Educación Matemática, por las restricciones que los docentes de educación secundaria suelen encontrar para poder asistir a estos eventos. En este número 36 de la REOIM damos noticia de dos de ellos, a los que ha asistido el editor.

35º Congreso de la SBPMef, Nivelles, Bélgica

La Sociedad Belga de Profesores de matemáticas de expresión francesa celebra, a finales de agosto, su congreso anual. En este caso se ha celebrado los días 25, 26 y 27 de agosto de 2009, en la pequeña ciudad de Nivelles, a medio camino entre Bruselas y Charleroi. Las sesiones han tenido lugar en el Instituto Provincial de Artes y Oficios (IPAM).

No es un congreso demasiado grande (166 asistentes), pero la calidad de las presentaciones suele ser muy notable. En la sesión inaugural del martes 25 de agosto se difundió la noticia del fallecimiento, el día 18 de agosto, de una persona muy conocida en la Olimpiada belga y por los lectores veteranos de *Crux Mathematicorum* : Claudine Festraets-Hamoir. Se prepara una necrológica que se publicará en la revista de la Sociedad, *Losanges,* para la que el que suscribe ha escrito unas líneas de homenaje personal.

La conferencia inaugural estuvo a cargo del Prof. Jean Mawhin *(Belleza de las matemáticas y matemáticas de la belleza: el número de oro).*

Dentro del apretado programa de presentaciones en paralelo, señalamos las siguientes:

Richard Choulet, de Francia, presentó un taller con problemas abiertos : *Pythagore et Diophante: carrément contents, jamais méchants.*

El veterano profesor Mustapha Kassab, en dos sesiones consecutivas, habló sobre *Les éléments de l'infini du plan projectif et les théorèmes de Pascal et Desargues.*

Claude Villers presentó *La cravate de Papi C.*, donde a partir de una situación banal se pueden encontrar ideas no triviales para utilizar en clase.

El anfitrión Eric Deridiaux presentó aplicaciones con *Geogebra.*

Dirk de Bock expuso *Le problème d'Isis : de l'Egypte ancien au 21ème siècle.*

Francis Buekenhout dio su conferencia *Pourquoi les mathématiques?* en dos sesiones. Es posible descargarla de la URL siguiente:

http://dev.ulb.ac.be/urem/Pourquoi-les-maths-par-Francis

Finalmente, el que suscribe presentó *Parmi les beaux problèmes de Victor Thébault.*

Es la cuarta vez que asisto al congreso de la SBPMef, y nunca defrauda. Esperemos continuar el año próximo.

10ª Conferencia Internacional del Mathematics Education into the 21st Century Project, Dresden, Sajonia, Alemania

Del 11 al 17 de septiembre de 2009 se ha celebrado en la hermosísima ciudad de Dresden (cuyos edificios públicos han sido reconstruidos) la 10ª Conferencia Internacional del Proyecto *Educación Matemática en el siglo 21,* bajo el subtítulo *Models in Developing Mathematics Education.*

En ella presenté la REOIM con una exposición en inglés (idioma de trabajo de la Conferencia), el primer día de presentaciones, el 12 de septiembre. Hay que decir que las conferencias de este grupo han ido evolucionando a lo largo de los años, en mi opinión favorablemente: la primera vez que asistí a una de ellas, en 2001 en Palm Cove (Queensland, Australia), la única presentación en la que se habló de Matemáticas fue la mía; en esta ocasión las cosas han sido distintas. El trabajo de los organizadores del Proyecto, Alan Rogerson y Fayez Mina (a los que se puede ver en la siguiente fotografía en la sesión inaugural) ha sido muy bueno, confirmándose además el característico “buen olfato” para elegir emplazamiento… sin olvidar el excelente trabajo “de campo” de Ludwig Paditz y su equipo de organizadores locales.

De las conferencias, talleres y charlas inevitablemente en paralelo mencionaremos las siguientes:

Agnis Andzans y Laila Racene (Letonia) presentaron *How do rabbits help to integrate teaching of mathematics and Informatics?*

Alexander Domoshnitsky y Roman Yavich (Israel) presentaron *Mathematical Competitions for University Students* en donde hicieron mención de la llamada *Blitz Math Olympiad,* una olimpiada por equipos y por Internet, donde se dan entre 5 y 10 minutos para resolver cada problema. De manera similar al concurso Canguro Matemático, la competición no está pensada para buscar a los alumnos más brillantes.

En una segunda exposición, presentaron *Internet Math. Olympidas for University Students,* donde los problemas se "abren" online teniendo en cuenta las horas locales en que se desarrolla la competición. Hay 5 problemas fáciles y 5 difíciles, pero la lista es más larga. El número de puntos que se conceden a cada problema es inversamente proporcional al número de estudiantes que lo resuelven correctamente.

Tuba Ada (Turquía) presentó *A Study on Problem Solving in the Taxicab Geometry.*

Kerry Thomas (Australia) expuso *How can a System with no public Exams be Fair?* en donde señaló que en Australia hay 6 estados y 2 territorios, cada uno con su correspondiente autoridad educativa y curriculum distinto… definitivamente, no hay nada nuevo bajo el Sol…

Jasna Kos y Darka Hvastija (Eslovenia) expusieron un proyecto interesante con alumnos de educación secundaria, de 15 años de edad: *El legado de la Antigua Grecia y Roma, ¿es realmente el núcleo de la civilización europea?,* en el que los alumnos hicieron un buen trabajo de búsqueda en Internet de resultados de teoría de números que fueran comprensibles para su edad.

Laurentiu Modan (Rumania), colaborador habitual de la REOIM, expuso *Cómo enseñar Combinatoria aprovechando problemas erróneos de un Manual.*

Mona Hanna y Carrie Chiapetta (USA) expusieron el trabajo que se lleva a cabo en su departamento de Stamford (Connecticut) *Each and Every Student: The Stamford Model for Change in Mathematics,* con el objetivo de poner orden en el aparentemente caótico mundo de las escuelas primarias y secundarias de la zona.

Miriam Berezina (Israel) presentó *Proofs and Puzzles,* con el objetivo de justificar por qué se deben enseñar demostraciones de los teoremas a los estudiantes de Ingeniería.

La excursión de la Conferencia fue a la Fortaleza de Königstein, a 33 km de Dresden, en el valle del Elba, un impresionante lugar, verdadero "nido de águilas".

La próxima Conferencia, en 2011, tendrá lugar en Grahamtown (Africa del Sur).

Valladolid, septiembre 2009

Francisco Bellot Rosado

Comentario de libros

Alexander Soifer : *The Mathematical Coloring Book* (*Mathematics of Coloring and the Colorful Life of its Creators*). 607 páginas. Springer, 2009.

Se puede pensar en un proyecto a largo plazo, pero ha de reconocerse que no es fácil imaginar que un libro va a tardarse en escribir 18 años. Este es el tiempo que le ha llevado al autor, miembro destacado de la World Federation of National Mathematics Competitions, Premio Paul Erdös del año 2006, en completar esta obra realmente excepcional. No solamente por tratarse de una parte tan actual de la Matemática contemporánea, en la que el autor es una reconocida autoridad; ni por la fabulosa capacidad para relacionarse con los mejores expertos en Geometría Combinatoria y Teoría de Números (su amistad con el legendario Paul Erdös es bien conocida y se refleja de una manera constante a lo largo de todo el libro); sino porque el libro está escrito casi como una novela de misterio, como indica Branko Grünbaum en uno de sus tres prólogos. La historia de los descubrimientos, demostraciones, controversias sobre la autoría de los teoremas importantes de la teoría de la coloración, de la teoría de grafos son meticulosa y fundamentadamente descritas por Soifer en las once partes en que se divide el libro, y que enumeramos a continuación (la traducción de los títulos es del comentarista):

I : Carrousel. II: El Plano Coloreado. III: Coloreando Grafos. IV: Coloreando mapas. V: Grafos Coloreados. VI : El Principio de Ramsey. VII: Coloreando enteros: Teoría de Ramsey antes de Ramsey y después. VIII: Polígonos coloreados: la teoría euclídea de Ramsey. IX : Enteros coloreados al servicio del número cromático del plano. X: Predicción del futuro. XI : Despedida al lector.

Otras obras bien conocidas del mismo autor son *How does one cut a triangle* (reeditado por Springer, con el 50% más de material respecto a su primera edición de 1990); *Mathematics as Problem Solving*, *Geometric Etudes in Combinatorial Mathematics* (con V. Boltyanski), *The first 10 Years of Colorado Mathematical Olympiad* (en preparación los segundos 10 años) y es el fundador de la revista *Geombinatorics* (1991).

El libro *The mathematical Coloring Book* debería figurar, a buen seguro, en la Biblioteca de todo Departamento de Matemáticas, y su lectura será provechosa para la preparación de Olimpiadas, Concursos y, más generalmente, para la formación matemática de cualquier estudioso.

Valladolid, octubre 2009.

Francisco Bellot Rosado

TRES NOTAS SOBRE π

DISCRIMINACIÓN RACIAL: Tres eminentes matemáticos, E. Landau, L. Bieberbach y G. H. Hardy, estuvieron involucrados en un conflicto racial en torno a π que se produjo en la Alemania de preguerra en 1934. El rigor analítico de Landau al definir, en su cátedra de Göttingen, el número $\pi/2$ de una manera inédita, como el número comprendido entre 1 y 2 tal que su coseno se anula, fue criticado públicamente por Bieberbach aduciendo un "estilo no germano", de miembros de otra raza para imponer sus ideas, lo que ocasionó a Landau la pérdida de su importante cargo. Hardy entra en la historia de este caso por su irónico ataque, desde Inglaterra, a los argumentos de Bieberbach. En la actualidad, esta definición de Landau puede usarse sin objeciones en tratados rigurosos de análisis.

INGENIO MNEMOTÉCNICO: En todos los idiomas cultos -incluyendo el latín- existen ingeniosas reglas mnemotécnicas para las cifras decimales de π. Así por ejemplo, en castellano figura la muy conocida composición de autor aparentemente no conocido:

Soy y seré a todos definible
mi nombre tengo que daros
cociente diametral siempre inmedible
soy de los redondos aros.

Este cuarteto, a la par de ser una adivinanza sobre π, da también un modo de recordar fácilmente las veinte primeras cifras exactas de este número, lo que se comprueba contando sucesivamente el número de letras (3, 1,........, 8, 4) en cada una de las palabras usadas. Así se obtiene

$$\pi = 3{,}141\ 592\ 653\ 589\ 793\ 2384$$

El récord en esta clase de descripciones literarias -en inglés- de las cifras de π lo detenta Mike Keith, con su ingeniosísima ***Cadaeic Cadenza***, aparecida en 1996. Con uso de ciertas licencias en textos famosos de Lewis Carroll, E. A. Poe, Omar Khayyam, T. S. Eliot, Shakespeare y Carl Sandburg, este matemático americano logró 3,835 dígitos. (el neologismo "cadaeic", proviene de la aproximación de siete cifras $\pi = 3.141593$: al 3 le corresponde la tercera letra del alfabeto c, al 1 le corresponde a, al 4 d, etc).

MEMORIA PRODIGIOSA: Akira Haraguchi, un jubilado japonés, es quien detenta el récord actual de memorización del mayor número de cifras decimales de π. En julio del 2005 recitó de memoria 83,431 dígitos durante más de 13 horas, batiendo el récord anterior que ostentaba el también ciudadano nipón Hiroyuki Goto con 42,195 dígitos. Previamente, en 1983, el hindú Rajan Mahadevan había recitado 31,811 dígitos.

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

Número

37

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática
ISSN 1698-677X

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

Número 37 (noviembre 2009 – enero 2010)

ISSN – 1698-277X

ÍNDICE

Problemas resueltos

Problema 176

Recibidas soluciones de: Roberto Bosch Cabrera, La Habana, Cuba; Luis Gómez Sánchez-Alfaro, Univ. de Oriente, Venezuela; Cristóbal Sánchez Rubio, Benicassim, España; Raúl A. Simón Eléxpuru, Santiago, Chile; y del proponente. Presentamos la solución de Sánchez Rubio.

Problema 177

Recibidas soluciones de: Devis M. Alvarado, estudiante, UNH, Tegucigalpa, Honduras; Ovidiu Furdui, Cluj, Rumania; Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, España y el proponente.. Presentamos la solución de Alvarado.

Problema 178

Recibidas soluciones de: Devis M. Alvarado, estudiante, UNH, Tegucigalpa, Honduras; Roberto Bosch Cabrera (2 soluciones), La Habana, Cuba; Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, España; Pedro H.O. Pantoja, UFRN, Natal, Brasil; Paolo Perfetti, Dipart. di Matematica, Univ. “Tor Vergata”, Roma, Italia; Cristóbal Sánchez Rubio, Benicassim, Castellón; y del proponente. Presentamos la solución de Sánchez Rubio (similar a la primera de Roberto Bosch y a la de Lasaosa)

Nota del editor: Este problema, o mejor dicho, las soluciones recibidas, me ha hecho recordar un comentario del final del primer capítulo del libro *Tres perlas de teoría de números,* de A.J.Chintschin, dedicado al teorema de Van der Waerden sobre progresiones aritméticas: *“Vemos cuán complicado puede llegar a ser un resultado completamente elemental”.*

Problema 179

Recibidas soluciones de Roberto Bosch Cabrera, La Habana, Cuba;Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, España; y del proponente. Presentamos las soluciones de Bosch y de Lasaosa.

Problema 180

Recibidas soluciones de: Devis M. Alvarado, estudiante, UNH, Tegucigalpa, Honduras; Roberto Bosch Cabrera, La Habana, Cuba; Ovidiu Furdui, Cluj, Rumania; Kee-Wai Lau, HongKong, China; Paolo Perfetti, Dip. di Matematica, Univ. “Tor Vergata”, Roma, Italia; y del proponente. Presentamos la solución de Alvarado.

Comentario de páginas web, de libros publicados y noticia de Congresos 37

Comentario al libro “21 Aulas de Matemática Olímpica”, de Carlos Yuzo Shine. (Comentario de F. Bellot)

Divertimentos matemáticos 37
Algunas citas de *Mathematical Circles, de Howard E. Eves*

Desarrollada en el Centro de Altos Estudios Universitarios de la OEI con el apoyo de la Agencia Española de Cooperación Internacional para el Desarrollo (AECID)

Acceder

http://www.oei.es/oim/revistaoim/numero37.htm

EL PEQUEÑO TEOREMA DE FERMAT Y APLICACIONES

Un enfoque heurístico, una demostración elemental y algunas aplicaciones del mismo

FRANCISCO BELLOT ROSADO

La lección de preparación olímpica que presento a continuación ha sido expuesta en el Seminario de Problemas de Valladolid, el miércoles 14 de octubre de 2009.

UN PROBLEMA PARA EMPEZAR

Un disco, dividido en p (p, primo) sectores iguales, se desea colorear con n colores, pudiendo estar varios, o todos los sectores, pintados del mismo color. No se consideran distintas dos coloraciones tales que se pueda deducir una de otra girando el disco alrededor de su centro, en un cierto sentido (horario o antihorario, pero no los dos).

¿De cuántas maneras se puede hacer esto?

(Origen del problema : la Olimpiada de la antigua Unión Soviética)

Tras unos momentos de reflexión, hago la siguiente sugerencia a los alumnos:

F.B.: *Por si alguno no se siente cómodo por no haberos dado valores particulares de n y p, sería perfectamente razonable empezar a ver lo que sucede con valores pequeños de n y p, para comprender bien el problema.*

Primer caso: *n=2, p=2.*

Varios alumnos contestan en seguida : 3 coloraciones. Las dibujo en el encerado, siguiendo las respuestas de los alumnos.

Segundo caso: *n=2, p=3.*

La respuesta es igualmente rápida : 4 coloraciones, que igualmente se dibujan en el encerado.

Tercer caso : *n=3, p=3.*

Ahora tarda un poco más en aparecer la respuesta correcta; tras una respuesta de 10, otro alumno justifica que ha de considerarse una más, porque los giros se hacen en un solo sentido : 11 coloraciones.

Cuarto caso : *n=4, P=3.*

Alguno aventura 24, sin mucha convicción… les digo que sí, que esa es la respuesta.

Escribo entonces en el encerado las igualdades (¡obvias!)

$$3=1+2;\ 4=2+2;\ 11=8+3;\ 24=20+4$$

Hago ver que el segundo sumando de cada suma coincide con n.

Para contar las coloraciones utilizaremos, en todos los casos, el siguiente procedimiento:

Primero se considera el disco fijo, y los sectores numerados, de 1 a p; y se cuentan las coloraciones posibles así, que resultan ser n^p.

(Para los no convencidos, hago el típico ejemplo de las quinielas: ¿Cuántas columnas de 14 partidos hay que rellenar para estar seguros de que en una de ellas tenemos 14 aciertos?). Salvo los alumnos de 2º de Bachillerato, en el grupo de Olimpiadas hay alumnos de 3º, 4º de E.S.O. y 1º de Bachillerato; la Combinatoria se estudia en 4º, pero no tan pronto. Por lo tanto, prefiero obviar el tecnicismo de llamarle "número de variaciones con repetición".

Después se restan las que corresponden a un solo color, que son n. Así, con el disco fijo y los sectores numerados, tenemos

$$n^p-n$$

coloraciones en donde por lo menos se utilizan dos colores.

A continuación se eliminan los números de los sectores. ¿Qué efecto tiene esto sobre las coloraciones que inicialmente eran diferentes? ¿Cuántas coloraciones que eran diferentes coincidirán al borrar la numeración de los sectores?

Los alumnos van examinando los casos vistos hasta ahora y contestan:

Primer caso: 2

Segundo caso: 3

Tercer caso: 3

Cuarto caso: 3

La supresión de los números de los sectores equivale a hacer giros de

$$\frac{k\bullet 360^{\circ}}{p}$$

grados de amplitud alrededor del centro del disco; o lo que es lo mismo, cada coloración no monocromática se cuenta p veces: la inicial y las que resultan de los $p-1$ giros de amplitudes

$$\frac{1\bullet 360^{\circ}}{p},\frac{2\bullet 360^{\circ}}{p},\dots,\frac{(p-1)\bullet 360^{\circ}}{p}.$$

Es instructivo ver cuáles son esos giros en los casos particulares estudiados. En el primer caso hay un solo giro (*p-1=1)* y en todos los demás hay 2.

Entonces parece que ya estamos en condiciones de formular la respuesta a la pregunta del problema, con generalidad : **el número de coloraciones es**

$$\frac{n^p - n}{p} + n\,.$$

La respuesta al problema es un número natural; por lo tanto, como consecuencia se obtiene que

n^p-n es múltiplo de p, si p es un número primo.

Doy nombre a esta proposición : “Pequeño teorema de Fermat”, enunciado en una carta de Fermat del 18 de octubre de 1640 a su amigo Frénicle de Bessy, naturalmente sin demostración (en esto, Fermat era un verdadero experto) y con una formulación ligeramente diferente. Leibniz dejó una demostración en un manuscrito no publicado, antes de 1683, y Euler publicó la suya en 1736 (*Theorematum Quorundam ad Numeros Primos Spectantium Demonstratio).* La expresión “Pequeño teorema de Fermat” se usó por primera vez en 1913 en un libro alemán de Teoría de Números.

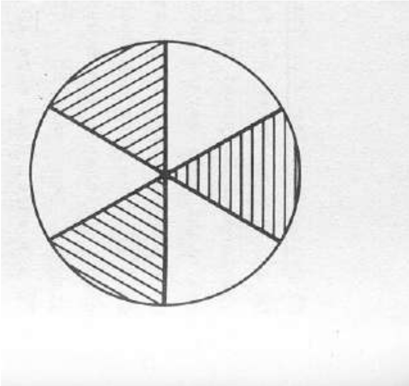
Retrato de Fermat

FB ante la estatua de Fermat en el pueblo natal de Fermat, Beaumont de Lomagne, en el Sur de Francia, verano de 2002

Acto seguido pregunto: ¿qué ocurriría si p no fuera primo, por ejemplo si tenemos el caso $n=2, p=6$?

Una alumna mete los datos en su calculadora para ver el valor de la fracción que da el número de coloraciones no monocromáticas y encuentra un número decimal. Le digo : acabas de comprobar que el resultado no es válido si p no es primo.

Gráficamente la situación se puede visualizar como



y aquí un giro de 120º transforma la figura en sí misma.

A continuación lanzo la pregunta

¿Os parece que hemos demostrado algo?

No hay unanimidad en las respuestas; los que me conocen de años anteriores se inclinan por el NO; a otros les parece que el argumento se debilita al decir que *p* de las coloraciones coinciden cuando se suprimen los números de los sectores; algunos se muestran convencidos de la bondad del argumento. Con objeto de eliminar cualquier sombra de duda, expongo una de las demostraciones del libro *Selected Problems and Thorems in Elementary Mathematics,* de D.O.Schklyarsky, N.N.Chentsov e I.M. Yaglom, MIR, Moscú 1979, que considero al alcance de todos los alumnos de la audiencia.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA

Se puede suponer, sin pérdida de la generalidad, que *n* no es divisible por *p* (porque en tal caso el resultado es evidente). Entonces los números

n, 2n, 3n, ..., (p-1)n

tampoco son divisibles por *p*, y los restos de su división por *p* son DIFERENTES. Justifiquemos esta última afirmación. Si *kn* y *ln* (con $p-1 \geq k > l$) dieran el mismo resto al ser divididos por *p,* entonces su diferencia $k \bullet n - l \bullet n = (k-l)n$ tendría que ser divisible por *p*, pero eso es imposible porque *p* es primo, *n* no es divisible por *p,* y $k - l < p$.

Como los posibles restos de la división por *p* son 1,2,3,...,p-1, se tiene

$$n = q_1 p + a_1; 2n = q_2 p + a_2, \cdots, (p-1)n = q_{p-1} p + a_{p-1},$$

donde los números $a_1, a_2, \cdots, a_{p-1}$ son 1,2,...,p-1 en algún orden. Multiplicando todas esas igualdades se obtiene

$$\left[1\bullet 2\bullet 3\bullet\cdots\bullet(p-1)\right]n^{p-1}=Np+a_1\bullet a_2\bullet\cdots\bullet a_{p-1}\ ,$$

o lo que es igual

$$\left[1\bullet 2\bullet 3\bullet\cdots\bullet(p-1)\right]\left(n^{p-1}-1\right)=Np\ .$$

De aquí que $\left(n^{p-1}-1\right)$es divisible por *p* (esta es la forma en que Fermat formuló su teorema) y multiplicando por *n* se obtiene el resultado.

Finalizada la demostración, pido a los alumnos que enuncien el resultado recíproco (para algunos era la primera vez que oían esa expresión) . Se formula como

Si n^p-n es múltiplo de p, entonces p es primo.

Acto seguido señalo que, desafortunadamente, esta proposición es falsa, como lo prueba el contraejemplo (tomado de *Problem Solving strategies,* de Arthur Engel, un libro indispensable en la preparación de Olimpiadas):

341 divide a 2^{341}-2,

pero 341=31x11 no es primo; y la expresión en negrita se justifica escribiendo

$$2^{341}-2=2\left(2^{340}-1\right)=2\left(\left(2^{10}\right)^{34}-1^{34}\right)=2\left(2^{10}-1\right)(\cdots)=2\bullet 3\bullet 341\bullet(\cdots)\ .$$

Este es el menor contraejemplo al recíproco, por lo que a mi entender no resultaría conveniente haberles pedido que fueran comprobando algunos casos para valores pequeños de *p* y *n.*

En el libro de Engel antes citado se incluyen tres demostraciones del teorema: por inducción, utilizando congruencias y de tipo combinatorio (con collares, pero utilizando el concepto de permutaciones cíclicas, no apropiado para esta audiencia en este momento). En el de los tres autores rusos mencionados antes se incluye una segunda demostración, por inducción y el teorema del binomio. Una búsqueda en Internet da como resultado siete demostraciones, una de ellas por teoría de grupos, otra sistemas dinámicos y una tercera con la fórmula de Leibniz para la potencia de un polinomio, también conocida como fórmula multinomial. Personalmente, mi favorita es la que acabo de exponer.

ALGUNOS PROBLEMAS DONDE SE APLICA EL TEOREMA

Observación previa

Para agilizar la aplicación del teorema de Fermat es necesario utilizar el concepto y propiedades de las congruencias. Resumo, sin demostración, algunas de sus propiedades.

Si los enteros *a* y *b* dan el mismo resto al ser divididos por el entero *k*, se dice que ambos son congruentes respecto al módulo *k,* y se escribe $a \equiv b (\mathrm{mod}\, k)$. Las principales propiedades de las congruencias son:

$a \equiv a (\mathrm{mod}\, k)$ (propiedad reflexiva)

Si $a \equiv b (\mathrm{mod}\, k)$, entonces $b \equiv a (\mathrm{mod}\, k)$ (propiedad simétrica)

Si $a \equiv b (\mathrm{mod}\, k)$, y $b \equiv c (\mathrm{mod}\, k)$, entonces $a \equiv c (\mathrm{mod}\, k)$ (propiedad transitiva)

Las congruencias se pueden sumar y multiplicar:

Si $a \equiv b (\mathrm{mod}\, k)$ y $c \equiv d (\mathrm{mod}\, k)$, entonces $(a \pm c) \equiv (b \pm d)(\mathrm{mod}\, k)$

Si $a \equiv b (\mathrm{mod}\, k)$ y $c \equiv d (\mathrm{mod}\, k)$, entonces $(ac) \equiv (bd)(\mathrm{mod}\, k)$.

Pero en general no se pueden dividir los términos de una congruencia, salvo por un número que sea primo con el módulo de la congruencia.

1.- Calcular el resto de la división por 13 del número 7^{44}.

Por el pequeño teorema de Fermat, 7^{12}-1 es múltiplo de 13, lo cual significa que 7^{12} da resto 1 al ser dividido por 13. De aquí resulta que $7^{36}=(7^{12})^3$ también da resto 1 al ser dividido por 13. Entonces 7^{44} y 7^8 dan el mismo resto al ser divididos por 13. Pero 7^2 da resto 10 al ser dividido por 13, 7^4 da el mismo resto que 10^2, es decir, 9. Entonces 7^8 da el mismo resto que 9^2=81, es decir, da resto 3 cuando se divide por 13, y esta es la respuesta.

2.- Demostrar que 2^{70} + 3^{70} es divisible por 13.

Por el pequeño teorema de Fermat, 2^{12} da resto 1 al ser dividido por 13, así que 2^{60} = $(2^{12})^5$ dará resto 1^5 = 1. Como 2^5 da resto 6, 2^{10} dará resto -3 al ser dividido por 13. Entonces 2^{70} da resto -3 al ser dividido por 13.

Por otra parte, 3^3 da resto 1, y lo mismo ocurre con 3^{69}. De aquí que 3^{70} dará resto 3. Entonces, sumando 2^{70} + 3^{70} dará resto -3+3 =0, es decir, será divisible por 13.

3.- Demostrar que los posibles restos de la división por 7 de un cubo perfecto son 0, 1 ó 6.

Sea *n* un número natural cualquiera. 7 es evidentemente primo.

Si *n* no es divisible por 7, entonces por el teorema de Fermat,

$$n^6 \equiv 1(\mathrm{mod}\,7) \Leftrightarrow n^6 - 1 \equiv 0(\mathrm{mod}\,7) \Leftrightarrow (n^3 - 1)(n^3 + 1) \equiv 0(\mathrm{mod}\,7)$$

Luego, o bien $(n^3 - 1) \equiv 0(\mathrm{mod}\,7)$, o bien $(n^3 + 1) \equiv 0(\mathrm{mod}\,7)$.

Si $(n^3 - 1) \equiv 0(\mathrm{mod}\,7)$, esto es lo mismo que $n^3 \equiv 1(\mathrm{mod}\,7)$.

Si $(n^3 + 1) \equiv 0(\mathrm{mod}\,7)$, esto es lo mismo que $n^3 \equiv -1(\mathrm{mod}\,7) \Leftrightarrow n^3 \equiv 6(\mathrm{mod}\,7)$.

Por último, si n es divisible por 7, n^3 también lo es, y $n^3 \equiv 0(\mathrm{mod}\,7)$.

4.- Calcular el resto de la división de 2^{98} por 101.

Como 101 es primo, utilizando el teorema de Fermat tenemos que

$$2^{100} \equiv 1(\mathrm{mod}\,101) \Leftrightarrow 2^{98} \bullet 4 \equiv 1(\mathrm{mod}\,101) \Leftrightarrow 2^{98} \bullet 4 \equiv -100(\mathrm{mod}\,101)$$

Como 4 y 101 son primos entre sí, podemos dividir la última congruencia por 4 y obtenemos

$$2^{98} \equiv -25(\mathrm{mod}\,101) \Leftrightarrow 2^{98} \equiv 76(\mathrm{mod}\,101).$$

Por lo tanto, el resto es 76.

5.- Demostrar que si *p* es primo, entonces, cualquiera que sea el número natural *n,* se tiene

$$\sum_{k=1}^{p} n^{mcd(k,p)} \equiv 0(\mathrm{mod}\,p).$$

Se verifica

$\sum_{k=1}^{p} n^{mcd(k,p)} = n + n + \cdots + n + n^p$ (p-1 sumandos iguales a n), es decir

$(p-1)n + n^p = np + n^p - n$. Ahora bien,

$$(1)\ np \equiv 0(\mathrm{mod}\,p)$$

$$(2)\ n^p \equiv n(\mathrm{mod}\,p)(Teorema de Fermat) \Leftrightarrow n^p - n \equiv 0(\mathrm{mod}\,p)$$

Y de (1) y (2) se obtiene el resultado.

6.- Si *p* es un número primo mayor que 5, demostrar que p^4-1 es divisible por 240.

Sea *p* primo mayor que 5. Se tiene que 240 = 8x5x6 = 16x5x3.

$$p^4-1=\left(p^2-1\right)\left(p^2+1\right)=\left(p-1\right)\left(p+1\right)\left(p^2+1\right).$$

Como p es impar, entonces $p-1$ y $p+1$ son dos números pares consecutivos, así que su producto es múltiplo de 8. Pero $p^2 + 1$ también es par, así que el producto de los tres es múltiplo de 16.

Por el teorema de Fermat, $p^4-1\equiv 0\left(\operatorname{mod} 5\right)$.

Por otra parte, si $p>5$ es primo, p no puede ser divisible por 3, así que lo será uno de los números $p-1$ ó $p+1$.

Finalmente, 16, 5 y 3 son primos entre sí dos a dos, así que si p^4-1 es divisible por 16, por 5 y por 3, lo será por su producto, que es 240.

7.- Si *m* es primo, y *a,b* son dos números enteros positivos menores que m, demostrar que

$$a^{m-2}+a^{m-3}b+a^{m-4}b^2+\cdots+b^{m-2}$$

Es múltiplo de m.

Se verifica

$$a^{m-1}-b^{m-1}=\left(a-b\right)\left(a^{m-2}+a^{m-3}b+a^{m-4}b^2+\cdots+b^{m-2}\right).$$

Puesto que m es primo, y $a<m,b<m$, por el teorema de Fermat se tiene que

$$a^{m-1}\equiv 1\left(\operatorname{mod} m\right);b^{m-1}\equiv 1\left(\operatorname{mod} m\right);$$

por lo tanto su diferencia será múltiplo de m:

$$a^{m-1}-b^{m-1}\equiv 0\left(\operatorname{mod} m\right).$$

Como $a-b$ no puede ser múltiplo de m (de hecho, el mcd($a-b,m)=1$),se obtiene el resultado.

PROCEDENCIA DE LOS PROBLEMAS

El problema 1 está tomado del libro *Introduction to Number Theory and Inequalities,* de C.J. Bradley (publicado por UKMT, 2006).

El problema 2 procede de uno de los libros “míticos” en Teoría de Números: *250 problèmes de théorie élémentaire des nombres,* de Waclaw Sierpinski (publicado en francés por Ed. Jacques Gabay, 1992), y cuya edición original en inglés se publicó en Varsovia en 1970.

Los restantes problemas proceden de una lección de Olimpiadas de la Prof. hispano-cubana María Emilia Santibáñez Piñera sobre el teorema de Fermat, no publicada (sin fecha; probablemente alrededor de 1987).

BIBLIOGRAFÍA

Además de las tres fuentes recién mencionadas, presento a continuación algunos libros válidos para la preparación de Olimpiadas en lo que se refiere a Teoría de Números:

1) Arthur Engel: *Problem solving strategies*; Springer 1998.

2) Enzo Gentile : *Aritmética Elemental en la formación matemática; Olimpiada Matemática Argentina, 1991.*

3) Saulo Rada Aranda : *Aritmética;* CENAMEC, Caracas 1992.

4) Waclaw Sierpinski: *Elementary Theory of Numbers;* North Holland&PNN, Amsterdam y Varsovia 1988.

5) Ivan Niven, Herbert S. Zuckerman, Hugh L. Montgomery : *An Introduction to the Theory of Numbers;* John Wiley, 1991.

El triángulo órtico en el *Court*

Francisco Javier García Capitán

4 de febrero de 2009

Resumen

Hacemos una lectura atenta de la sección The orthic triangle del libro *College Geometry, An Introduction to the Modern Geometry of the Triangle and the Circle*, de Nathan Altshiller-Court. En este caso, la lectura atenta consiste en la realización de algunas figuras que no vienen en el texto y en la resolución de los ejercicios propuestos.

1. Definición y propiedades

Definición. *El triángulo que tiene por vértices los pies de las alturas de un triángulo dado ABC se llama* triángulo órtico *del ABC.*

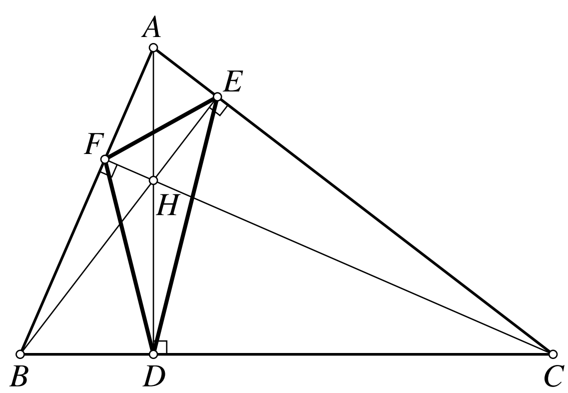


Figura 1

Propiedad 1. *Los triángulos AEF, DBF y DEC son semejantes al triángulo ABC*

Demostración. En efecto, por ser cíclico el cuadrilátero $BCEF$, los ángulos AEF y ABC son ambos complementarios del ángulo FEC, por lo que son iguales. De igual forma, $\angle AFE = \angle ABC$, así que los triángulos ABC y AEF son semejantes. Y lo mismo puede hacerse con los triángulos DBF y DEC.

Propiedad 2. *Si H es el ortocentro de un triángulo ABC y las alturas AH, BH, CH cortan a la circunferencia circunscrita a ABC en D', E', F', entonces se cumplen las igualdades: $HD = HD'$, $HE = HE'$, $HF = HF'$.*

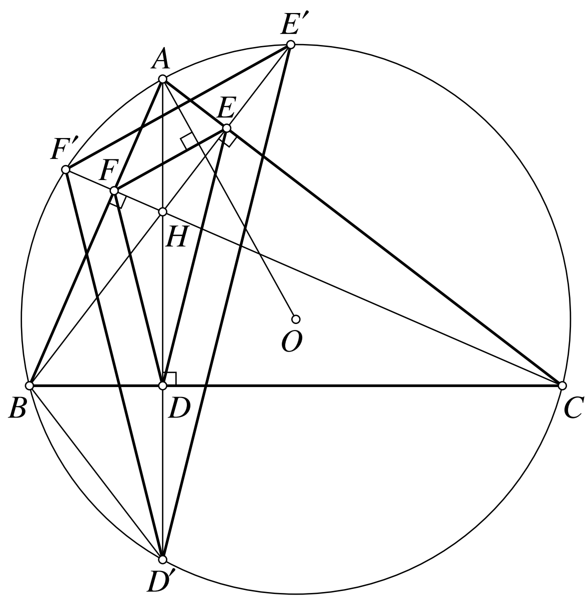


FIGURA 2

Demostración. Por ejemplo, en el triángulo BHD' tenemos

$$\angle BHD = \angle BFD = \angle C = \angle BCA = \angle BD'A = \angle BD'H.$$

En consecuencia, el triángulo BHD es isósceles, y su altura BD tambien es su mediana, por lo que $HD = HD'$.

Propiedad 3. *El triángulo $D'E'F'$ es el resultado de aplicar al triángulo DEF una homotecia de centro H y razón 2.*

Demostración. Por ser $HD = DD'$ es $HD' = 2 \cdot HD$ y lo mismo para los otros vértices.

Propiedad 4. *Cada vértice del triángulo ABC es el punto medio del arco determinado en la circunferencia circunscrita por las prolongaciones de las alturas trazadas desde los otros vértices.*

Demostración. Para obtener que A es el punto medio del arco $E'F'$ basta observar que por ser cíclico el cuadrilátero $BCEF$, tenemos

$$\angle ABE' = \angle FBE = \angle FCE = \angle F'CA.$$

Como consecuencia, obtenemos que la recta OA es perpendicular a la cuerda $E'F'$ y, por tanto, también es perpendicular al lado EF del triángulo órtico.

Propiedad 5. *El ángulo que forma el lado de un triángulo con el lado correspondiente del triángulo órtico es igual a la diferencia de los lados del triángulo dado adyacentes al lado considerado.*

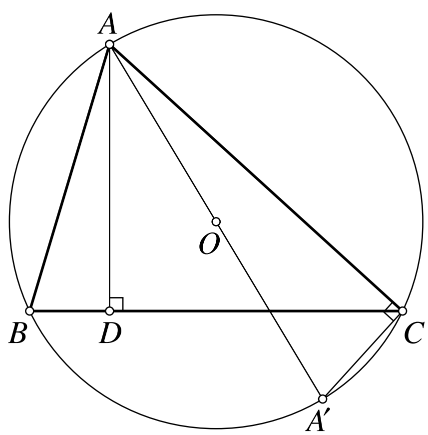


Figura 3

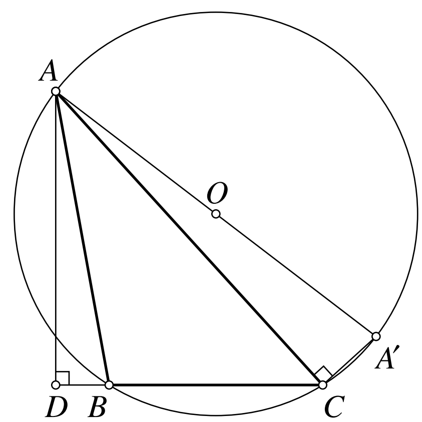


Figura 4

Demostración. En efecto, cuando el triángulo es acutángulo (ver Figura 3), el ángulo formado por el lado BC con el lado EF del triángulo órtico será el mismo que el formado por la altura AD (perpendicular a BC) con el diámetro AA' (perpendicular a EF). Por ser $\angle ABD = \angle ABC = \angle AA'C$, los triángulos rectángulos ABD y AKC son semejantes, y entonces

$$\angle DAA' = A - 2(90^\circ - B) = 180^\circ - (B + C) - 180^\circ + 2B = B - C.$$

En el caso de que, por ejemplo B sea obtusángulo, tenemos

$$\angle DAA' = A + 2\angle DAB = A + 2(B - 90^\circ) = (180^\circ - B - C) + 2B - 180^\circ = B - C.$$

Propiedad 6. *El triángulo tangencial y el triángulo órtico de un triángulo son homotéticos.*

Demostración. El triángulo tangencial es el triángulo formado por las rectas tangentes a la circunferencia circunscrita en los vértices del triángulo. Según hemos visto, los lados del triángulo órtico son perpendiculares a los correspondientes radios de la circunferencia circunscrita, y los lados del triángulo tangencial también lo son. De ahí, la propiedad.

Propiedad 7. *Las alturas de un triángulo bisecan los ángulos interiores del triángulo órtico.*

Demostración. En la Figura 2 vemos que la recta $D'A$ biseca el ángulo $E'D'F'$, y hemos visto que las rectas DE, DF son paralelas a $D'F'$, $D'E'$, así que la recta DA biseca el ángulo EDF. De otra forma, también podemos usar los cuadriláteros cíclicos $BDHF$, $BCEF$ y $CDHE$ para obtener

$$\angle HDF = \angle HBF = \angle EBF = \angle ECF = \angle ECH = \angle EDH.$$

Corolario. *Los lados del triángulo bisecan a los ángulos exteriores de su triángulo órtico.*

Demostración. Ya que los lados son perpendiculares a las alturas del triángulo, que son las bisectrices interiores del triángulo órtico.

Corolario. *Los vértices y el ortocentro de un triángulo son los centros tritangentes (incentro y excentros) de su triángulo órtico.*

Problema. *Construir un triángulo conociendo los puntos en que la prolongación de las alturas cortan a la circunferencia circunscrita.*

Solución. Aquí, Court dice que los puntos dados D', E', F' determinan la circunferencia circunscrita (O) del triángulo buscado ABC, cuyos vértices serán los puntos medios de los arcos $D'E'$, $E'F'$, $F'E'$, y también plantea la siguiente cuestión:

> ¿Cuántas soluciones puede tener el problema?

Para dar respuesta a esta cuestión vamos a considerar la Figura 5, que está construida como se explica a continuación.

Dado el triángulo acutángulo ABC con ortocentro H y circuncentro O, las alturas AH, BH y CH cortan a los lados BC, CA y AB, en los puntos

D, E y F, y a la circunferencia circunscrita en los puntos D', E' y F', respectivamente. Si aplicamos al triángulo ABC una homotecia de centro H y razón 2 obtendremos el triángulo $H_aH_bH_c$, siendo D', E', F' los pies de las alturas de este triangulo.

La circunferencia $D'E'F'$, siendo la circunferencia de los nueve puntos del triángulo $H_aH_bH_c$ contendrá a los puntos medios A', B', C' de los lados H_bH_c, H_cH_a y H_aH_b.

Observemos entonces que por ser $\angle AC'A' = \angle AD'A' = 90°$, la recta $C'A$ es perpendicular a $A'C'$ y por ello también perpendicular a H_cH_a y $B'H_a$, es decir, $B'H_a$ la altura del triángulo $AB'C'$ correspondiente al vértice B', y esta altura vuelve a cortar a la circunferencia circunscrita en E'. De igual forma, $C'H_a$ es la altura del triángulo $AB'C'$ correspondiente al vértice C', y esta altura vulve a cortar a la circunferencia circunscrita en F'.

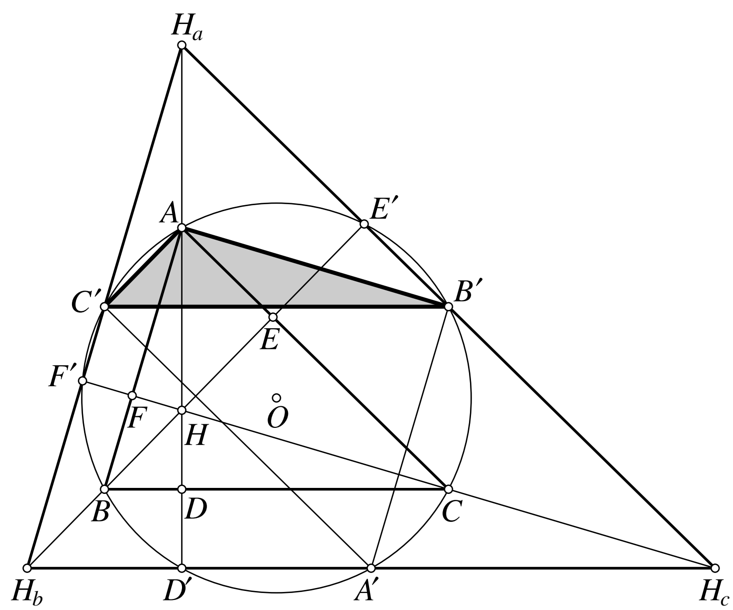


FIGURA 5

Resulta entonces claro que las alturas del triángulo $AB'C'$ vuelven a cortar a su circunferencia circunscrita en los mismos puntos en que lo hacen las alturas del triángulo ABC, por lo que los CUATRO triángulos ABC, $AB'C'$, $A'BC'$ y $A'B'C$ comparten los puntos D', E', F' de intersección de las alturas con la circunferencia circunscrita.

2. Ejercicios

1. Si O es el circuncentro y H es el ortocentro de un triángulo ABC, y AH, BH, CH cortan a la circunferencia circunscrita en D', E', F', demostrar que las paralelas por D', E', F' a OA, OB, OC, respectivamente, se cortan en un punto.

   Solución. La paralela por D' a OA será perpendicular a $E'F'$, es decir será una altura del triángulo $D'E'F'$. Por tanto, las paralelas por D', E', F' a OA, OB, OC, respectivamente, se cortarán en el ortocentro de $D'E'F'$.

2. Demostrar que (a) el producto de los segmentos en los que un lado de un triángulo queda dividido por el vértice correspondiente del triángulo órtico es igual al producto de los lados del triángulo órtico que pasan por el vértice considerado; (b) el producto de los seis segmentos en los que los lados de un triángulo quedan divididos por los pieds de las alturas es igual al cuadrado del producto de los tres lados del triángulo órtico.

   Solución. Para demostrar (a) usamos los triángulos semejantes DBF y DEC.

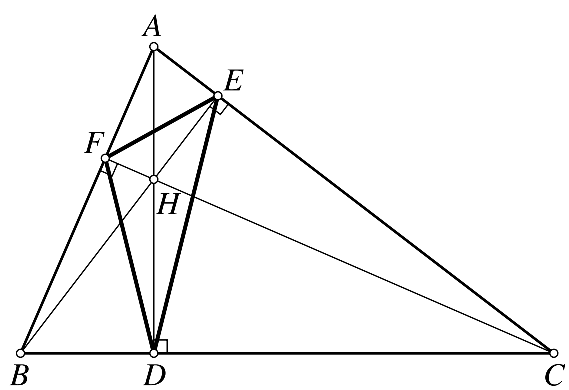


Figura 6

$$\frac{BD}{DF} = \frac{ED}{DC} \Rightarrow BD \cdot DC = DF \cdot ED.$$

Para demostrar (b) obtenemos expresiones similares para los otros vértices y las multiplicamos:

$$\begin{aligned} BD \cdot DC \cdot CE \cdot EA \cdot AF \cdot FB =& (DF \cdot ED) \cdot (ED \cdot FE) \cdot (FE \cdot DF) \\ =& (DF \cdot FE \cdot ED)^2. \end{aligned}$$

3. Si P, Q son los pies de las perpendiculares desde los vértices B, C del triangulo ABC sobre los lados DF, DE del triángulo órtico DEF, demostrar que $EQ = FP$.

   Solución. Con trigonometría tenemos:

$$\begin{aligned} EQ = CE \cdot \cos B =& (BC \cdot \cos C) \cdot \cos B \\ =& (BC \cdot \cos B) \cdot \cos C = FB \cdot \cos C = FP. \end{aligned}$$

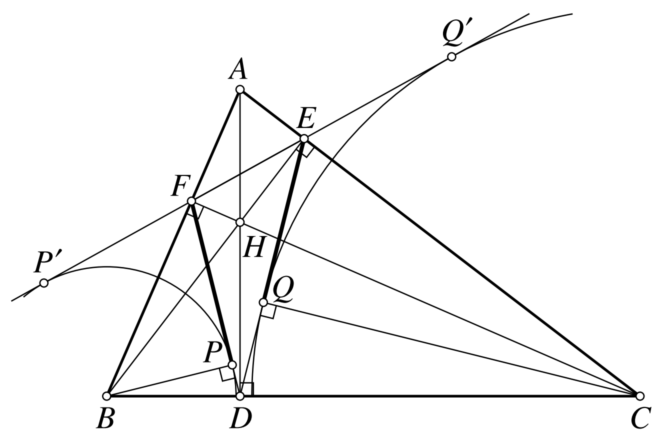


Figura 7

   De otra forma, B y C son excentros del triángulo DEF, y P y Q son puntos de contacto de las circunferencias exinscritas (B) y (C) al triángulo DEF y como es conocido, tenemos $EP' = FQ' = s$, siendo s el semiperímetro de DEF. Entonces, tenemos

$$FP = FP' = EP' - FE = s - FE = FQ' - FE = EQ' = EQ.$$

4. DP, DQ son las perpendiculares desde el pie D de la altura AD del triángulo ABC sobre los vértices AC, AB. Demostrar que los puntos B, C, P, Q son concíclicos y que $\angle DPB = \angle CQD$.

Solución. Para razonar que los puntos B, C, P, Q son concíclicos tenemos en cuenta que B, C, E, F lo son. Entonces, usando potencias, $AF \cdot AB = AE \cdot AC$. Ahora, usando los triángulos semejantes AEF y APQ,

$$\frac{AP}{AQ} = \frac{AE}{AF} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AP \cdot AC = AQ \cdot AB,$$

es decir, B, C, P, Q son concíclicos. A partir de aquí,

$$\angle DPB = \angle CPB - 90^\circ = \angle CQB - 90^\circ = \angle CQB.$$

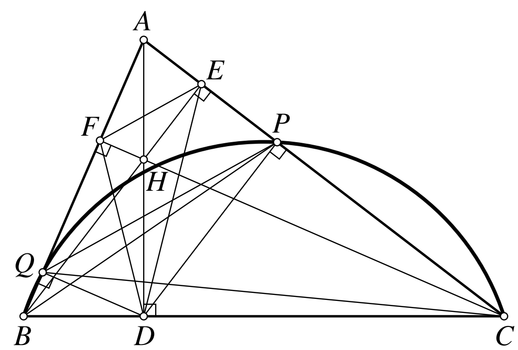


Figura 8

5. Demostrar que las cuatro proyecciones del pie de la altura sobre un lado de un triángulo sobre los otros dos lados y las otras dos alturas están alineados.

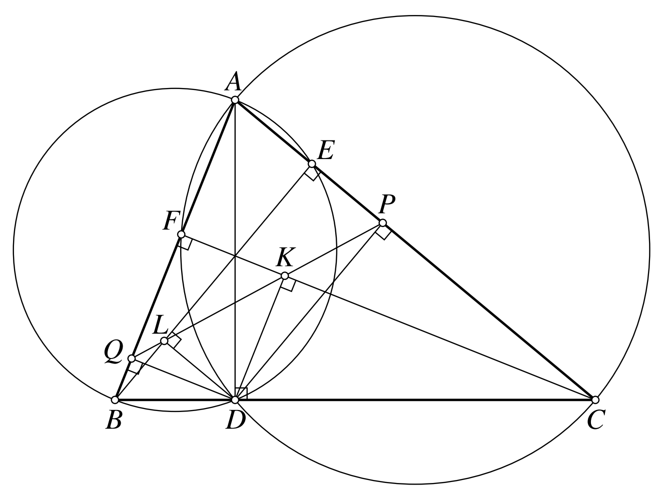


Figura 9

Solución. El pie D de la altura trazada por A es común a las circunferencias con diámetros AB y AC como diámetro. Los puntos L, P y Q son los pies de las perpendiculares trazadas por el punto D a los lados del triángulo ABE, por lo que están alineados (sobre la recta de Wallace-Simson del punto D respecto del triángulo ABE. De la misma forma, los puntos K, Q, P están alineados, ya que son los pies de las perpendiculares trazadas por el punto D sobre los lados CF, FA, AC del triángulo ACF. En consecuencia, los cuatro puntos K, L, P, Q están alineados.

6. Demostrar que el perímetro del triángulo órtico de un triángulo acutángulo ABC es menor que el doble de cualquier altura del triángulo ABC.

   Solución. Sea DEF el triángulo órtico de ABC y sean P, Q las proyecciones de D sobre las rectas CA y AB respectivamente. Llamemos R y S a los simétricos de D respecto de P, Q.

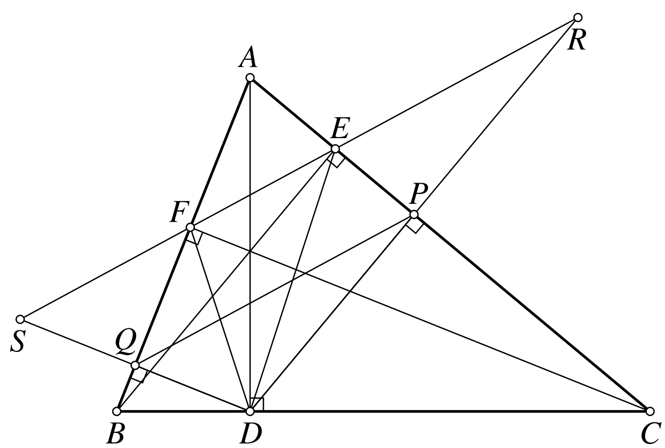


FIGURA 10

Por ser $\angle DEF = 2(90^\circ - B)$ y $\angle DEC = B$, los puntos F, E, R están alineados, y lo mismo les ocurre a los puntos S, F, E. El perímetro p del triángulo órtico es

$$p = DF + FE + ED = SF + FE + ED = 2 \cdot QP < 2 \cdot AD$$

La desigualdad se debe a que, por ser $\angle DPA = 90^\circ = \angle DQA$, el cuadrilátero $APDQ$ está inscrito en una circunferencia, de la que PQ es una cuerda y AD es un diámetro.

3. Algunas fórmulas interesantes

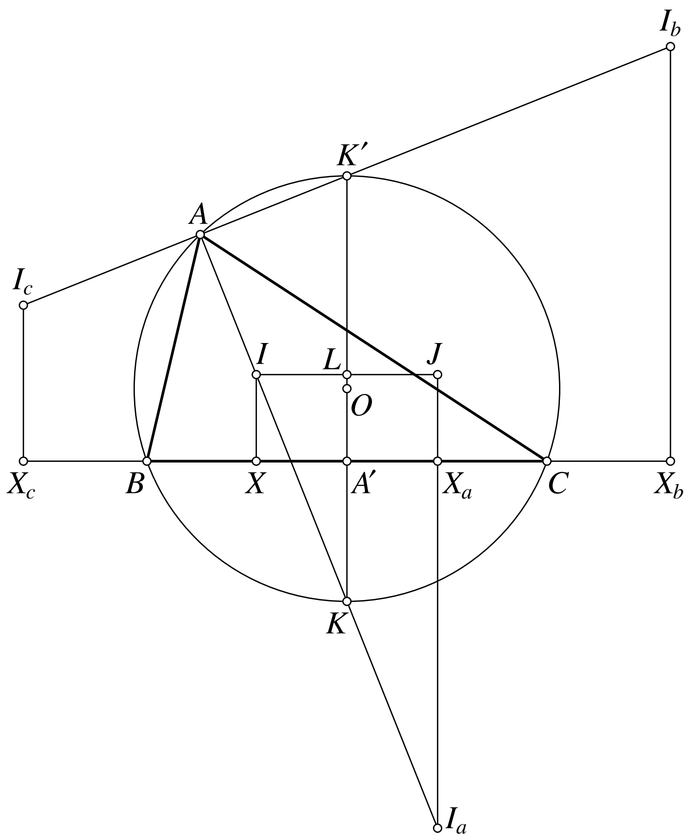


Figura 11

Sean A' el punto medio del lado BC (Figura 11), y sean X, X_a, X_b, X_c los puntos de contacto de la circunferencia inscrita y las circunferencias exinscritas. La recta paralela a BC por I corta al diámetro KK' en L y a la prolongación de I_aX_a en J.

El punto K es el punto medio del lado II_a del triángulo IJI_a, y entonces tenemos

$$KA' + r = KA' + A'L = KL = \tfrac{1}{2}I_aJ = \tfrac{1}{2}(I_aX_a + X_aJ) = \tfrac{1}{2}(r_a + r),$$

de donde

$$A'K = \tfrac{1}{2}(r_a - r). \qquad (1)$$

Por otro lado, por ser $BXb = CXb = s$, K' es el punto medio del lado I_bI_c

del trapecio $I_bI_cX_cX_b$, resultando

$$A'K' = \frac{1}{2}(I_bX_b + I_cX_c) = \frac{1}{2}(r_b + r_c). \tag{2}$$

Sumando (1) y (2), $2R = KK' = KA' + A'K' = \frac{1}{2}(r_a - r) + \frac{1}{2}(r_b + r_c)$, es decir

$$4R = r_a + r_b + r_c - r. \tag{3}$$

Teorema de Carnot. *La suma de las distancias del circuncentro de un triángulo a los tres lados del triángulo es igual a la suma de los radios de las circunferencias circunscrita e inscrita.*

Demostración. En efecto, es $OA' = OK - A'K = R - \frac{1}{2}(r_a - r)$ y lo mismo para los otros vértices, $OB' = R - \frac{1}{2}(r_b - r)$ y $OC' = R - \frac{1}{2}(r_c - r)$. Sumando las tres cantidades,

$$\begin{aligned} OA' + OB' + OC' &= 3R - \frac{1}{2}\left(r_a + r_b + r_c - 3r\right) \\ &= 3R - \frac{1}{2}\left(4R + r - 3r\right) = R + r. \end{aligned}$$

4. Más propiedades del triángulo órtico

Propiedad 8. *La distancia de un lado de un triángulo al circuncentro es la mitad de la distancia del vértice opuesto al ortocentro.*

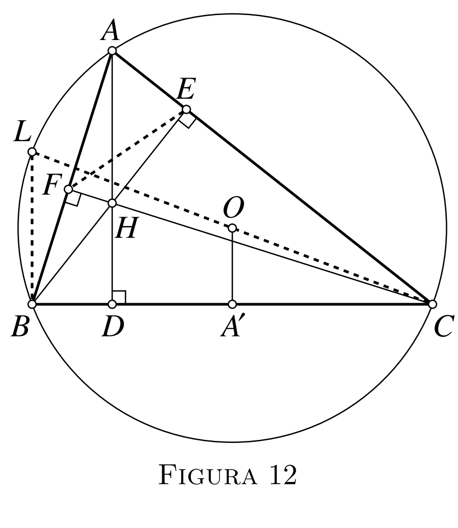


Figura 12

Demostración. Sea L el punto diametralmente opuesto al vértice C sobre la circunferencia circunscrita (Figura 12); el segmento OA' une los puntos medios de los lados del triángulo recto BCL, y de aquí $OA' = \frac{1}{2}BL$. Por otro lado, los lados opuestos del cuadrilátero $ALBH$ son respectivamente perpendiculares a las rectas AC, BC; por tanto $ALBH$ es un paralelogramo, y $BL = AH$, que es lo que se quería demostrar.

Propiedad 9. *En un triángulo las distancias de los vértices al ortocentro, incrementadas con los correspondientes exradios, son iguales.*

Demostración. Teniendo en cuenta (1) $A'K = \frac{1}{2}(r_a - r) \Rightarrow r_a - r = 2A'K = 2(OK - OA') = 2R - 2OA' = 2R - AH \Rightarrow AH + r_a = 2R + r$.

Propiedad 10. *La razón entre un lado de un triángulo y el correspondiente lado del triángulo órtico es igual la razón entre el radio de la circunferencia circunscrita y la distancia del lado considerado al circuncentro.*

Propiedad 11. *El segmento AH es el diámetro de la circunferencia circunscrita al triángulo AEF, y las rectas BC, EF son lados correspondientes en los triángulos semejantes ABC, AEF, de donde resulta*

$$BC : EF = 2R : AH = R : OA'.$$

Corolario. *Si DEF es el triángulo órtico de un triángulo acutángulo ABC y R, r son los radios de la circunferencia circunscrita e inscrita, respectivamente, entonces*

$$\frac{EF}{BC} + \frac{FD}{CA} + \frac{DE}{AB} = \frac{R + r}{r}.$$

Demostración. Usando la propiedad anterior y el teorema de Carnot,

$$\frac{EF}{BC} + \frac{FD}{CA} + \frac{DE}{AB} = \frac{OA'}{R} + \frac{OB'}{R} + \frac{OC'}{R} = \frac{R + r}{R}.$$

Propiedad 12. *El perímetro del triángulo órtico de un triángulo acutángulo es igual al doble del área del triángulo dividido por el radio de la circunferencia circunscrita.*

Demostración. Según la propiedad 11, llamando S al área del triángulo ABC,

$$EF + FD + DE = \frac{BC \cdot OA' + CA \cdot OB' + AB \cdot OC'}{R} = \frac{2S}{R}.$$

Problema. *Construir un triángulo dados en posición las trazas D, U, A' sobre la base del triángulo de la altura, la bisectriz interior y de la mediana trazadas desde el vértice opuesto, y la distancia d de ese vértice al ortocentro.*

Solución. Sobre la perpendicular a DUA' en A', levantamos $A'O = \frac{1}{2}d$ obteniendo el circuncentro O del triángulo buscado. El punto A estará sobre la perpendicular a DUA' trazada por D. Según vimos en la demostración de la Propiedad 5, la bisectriz del ángulo A también debe ser bisectriz del ángulo DAO, por lo que el punto A debe estar en la recta tangente desde O a la cirucnferencia con centro U que pasa por D. De esta manera, el vértice A queda determinado. La circunferencia con centro O y radio OA cortará a la recta DUA' en los dos vértices B y C del triángulo buscado.

5. Más ejercicios

7. En el triángulo ABC demostrar que: $AH^2 + BC^2 = 4OA^2$.

   Solución. Con la misma notación que antes,

   $$AH^2 + BC^2 = 4OA'^2 + 4BA'^2 = 4OB^2 = 4OA^2.$$

8. Construir un triángulo dados en posición un vértice, el punto medio del lado opuesto y el ortocentro.

   Solución. Como el segmento AH es el doble del segmento OA', trazamos por A' una paralela a AH y sobre ella marcamos el punto O cumpliendo $A'O = \frac{1}{2}HA$, lo cual determina el circuncentro O. Trazando la circunferencia con centro O y radio OA, y hallando su intersección con la perpendicular a AH por A' obtendremos los dos vertices restantes del triángulo buscado.

9. Construir un triángulo dados en posición la circunferencia circunscrita, el ortocentro y la longitud de un lado.

Solución. Suponemos conocido en posición la circunferencia circunscrita, con centro O y radio R, el ortocentro H y la longitud a del lado BC. Teniendo en cuenta la fórmula $AH^2 + BC^2 = 4OA^2$, es decir, $AH^2 + a^2 = 4R^2$, trazamos una cuerda cualquiera PQ de longitud a sobre la circunferencia y el diámetro PP'. Entonces, la longitud QP' será igual a AH. Esto permite localizar el vértice A, trazando una circunferencia de centro H y radio QP', que cortará en general en dos puntos a la circunferencia dada. Una vez hallado el vértice A, tenemos en cuenta que los segmentos AH y OA' son paralelos y uno el doble del otro, lo que permite determinar A', punto medio del lado BC. Por A' trazamos una perpendicular a la recta AH y tendremos la recta BC, que cortará a la circunferencia dada en los dos vértices restantes del triángulo buscado.

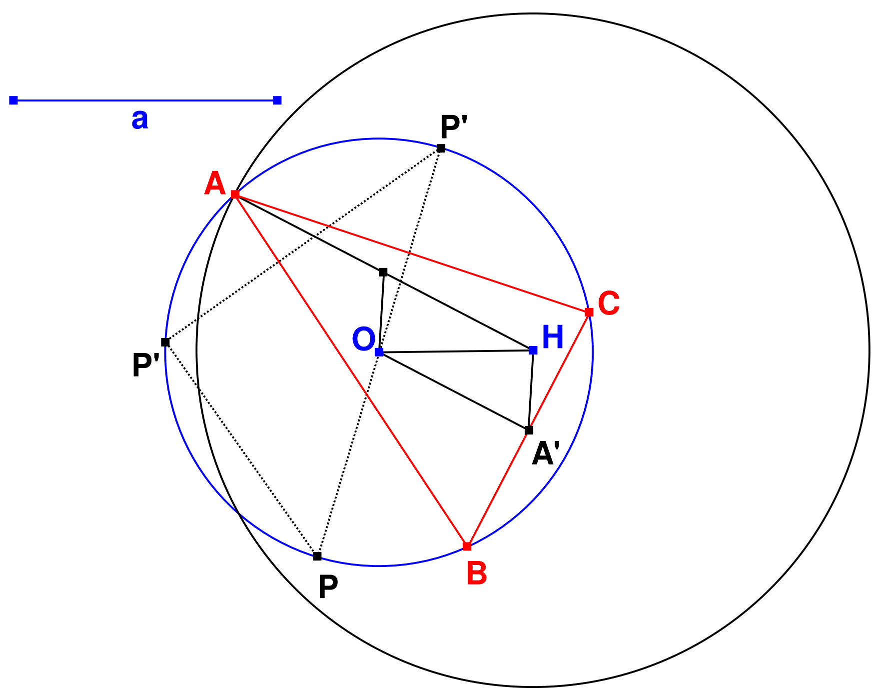


FIGURA 13

Discusión. Para que el problema tenga solución es necesario que la circunferencia dada y la circunferencia con centro H y radio QP' tengan puntos en común. Puede comprobarse que ello ocurre si y solo si se cumplen las condiciones siguientes:

$$OH \leqslant 3R, \quad |a^2 + OH^2 - 3R^2| \leqslant 2R \cdot OH.$$

10. Construir un triángulo dados el radio de la circunferencia circunscrita, la distancia de un vértice al ortocentro y la longitud de la mediana trazada desde ese vértice.

    Solución. Suponemos conocido el radio R de la circunferencia circunscrita, la distancia $2d$ del vértice A al ortocentro y la longitud m_a de la mediana trazada desde A. Sobre una recta cualquiera r, fijamos un punto A' que va a ser el punto medio del lado BC. Por A' levantamos una perpendicular $A'O$ a dicha recta, de longitud d, con lo que O será el circuncentro del triángulo buscado. Con centro O y radio R trazamos una circunferencia, que será la circunferencia circunscrita al mismo. Para determinar el vértice A tenemos en cuenta que $m_a = AA'$ es conocida, por lo que trazamos una circunferencia con centro A' y radio AA', que encuentra a la circunferencia (O) en las posibles posiciones del vértice A. Los vértices B y C se obtienen como intersección de la circunferencia (O) y la recta r.

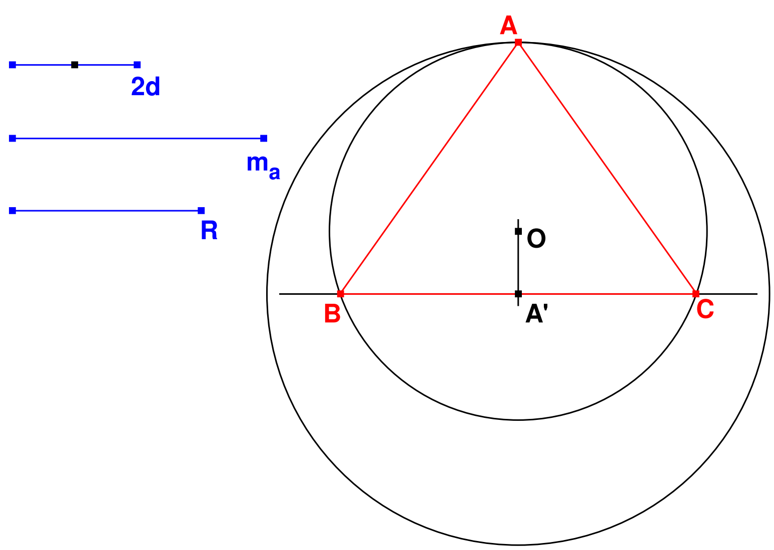


Figura 14

Discusión. Para que el problema tenga solución es necesario que las circunferencias (O) y (A') de la construcción tengan puntos comunes.

Ello ocurrirá si y solo si las longitudes d, m_a y R forman triángulo, aunque éste sea degenerado, es decir, aunque alguna de ellas sea la suma de las demás.

11. Construir un triángulo conociendo la base, la distancia del vértice opuesto al ortocentro y el radio de la circunferencia inscrita.

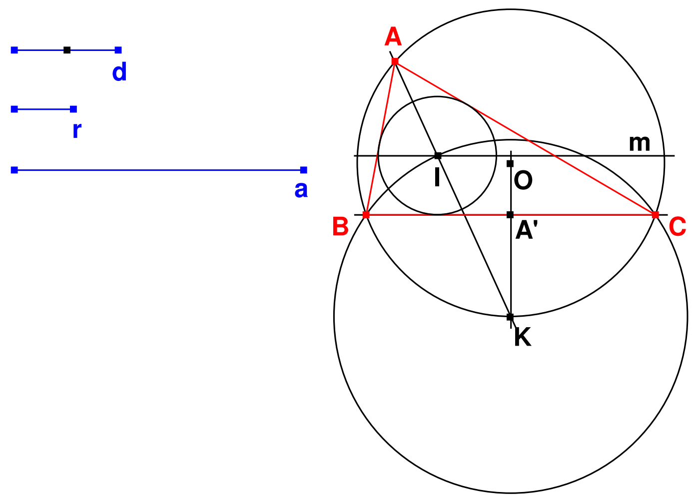


FIGURA 15

Solución. Suponemos conocida la longitud a de la base BC, la distancia $2d$ del vértice A al ortocentro H y el radio r de la circunferencia inscrita. Comenzamos por fijar sobre una recta cualquiera dos puntos B y C tales que $BC = a$. Hallamos el punto medio A' de BC y por el levantamos una perpendicular $A'O$ de longitud $\frac{1}{2}d$, de manera que O será el circuncentro del triángulo buscado. Con centro en O y radio OB podemos trazar la circunferencia circunscrita al triángulo buscado. Al prolongar el segmento OA' encontramos el punto K sobre esta circunferencia. Sabemos que K es centro de una circunferencia que pasa por los vértices B y C y por el incentro I. Como conocemos el radio r de la circunferencia inscrita podemos trazar una recta m a distancia r de la recta BC y por el lado contrario de ésta al que está el punto K. Esta recta cortará a la circunferencia (K) en el incentro I (en general aparecerán dos puntos simétricos respecto de la recta OA'). La recta KI cortará a la circunferencia (O) en el vértice A del triángulo buscado.

Discusión. Además de la condición evidente $a > 2r$, para que el problema tenga solución es necesario que la circunferencia (K) corte a la recta m, y esto ocurrirá siempre que sea

$$d \geqslant \frac{24a^2r^2 - a^4 - 16r^4}{8r(a^2 - 4r^2)}.$$

12. Una segmento variable de longitud constante tiene sus extremos en dos rectas secantes fijas. Demostrar que el lugar geométrico del ortocentro del triángulo variable formado por las tres rectas es una circunferencia.

    Solución. En el triángulo variable sean A el ángulo formado por las dos rectas y a el lado variable de longitud constante. Entonces, por ser $a = 2R \operatorname{sen} A$, el radio de la circunferencia circunscrita es constante, y usando la fórmula $AH^2 + BC^2 = 4 \cdot OA^2$, la distancia de A al ortocentro H también será constante, es decir H estará en una circunferencia de centro A.

13. La base BC y la circunferencia circunscrita (O) de un triángulo variable ABC son fijos. Hallar el lugar geométrico del ortocentro del triángulo que tiene por vértices las trazas sobre (O) de las bisectrices interiores de los ángulos de ABC.

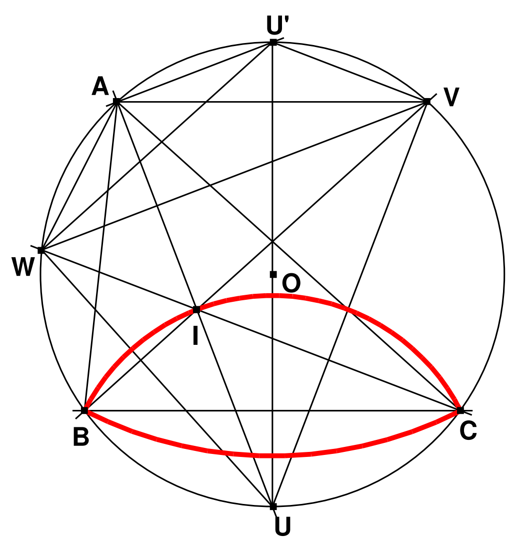


Figura 16

Solución. Supongamos que las bisectrices del ángulo ABC cortan a la circunferencia (O) en los puntos U, V, W. En la Figura 16 hemos trazado el diámetro UU' formando el ángulo recto UAU'. Entonces, siendo $\angle UAC = \frac{1}{2}A$ y $\angle CAV = \frac{1}{2}B$, resulta que

$$\angle VAU' = 90^\circ - \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B = \frac{1}{2}C = \angle ACW = \angle AU'W,$$

la cuerda VW será paralela a la cuerda $U'A$, y por tanto perpendicular a la recta UA. Esto indica que UA es una altura del triángulo UVW. De la misma forma, VB y WC son también alturas, por lo que el ortocentro de UVW es el incentro I de ABC. Al variar A sobre la circunferencia sabemos que I describe arcos de circunferencia con centros en U y U', y pasando por B y C, y estos dos arcos son el lugar geométrico buscado.

PROBLEMAS PARA LOS MÁS JÓVENES 37

Cinco problemas de un campamento matemático de verano 2009 en Darmanesti (Rumania)

J37.1: Si la suma de la longitud y la anchura de un rectángulo es 2, demostrar que el perímetro de este rectángulo es cuadrado perfecto.

J37.2: Sea $A = 10^{n+2} + 10^{n} - a$, donde *n* es un número natural y *a* es un dígito. Determinar *a* sabiendo que A es divisible por 3.

J37.3: La mediana AM (M pertenece al lado BC) en el triángulo acutángulo ABC corta por segunda vez a la circunferencia circunscrita al triángulo en D (la primera vez es en A). Si E es el simétrico de A con respecto a M, demostrar que BC es la tangente común a los círculos circunscritos a los triángulos BDE y CDE.

J37.4: Calcular el resto de la división del número

$$A = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 2007 + 2008$$

por 2002.

J37.5: Se considera el número

$$a = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{100^2}\ .$$

Demostrar que

$$0,2 < \sqrt{\frac{a}{11}} < 0,3\ .$$

Solución al Problema 24.2.

24.2 Un conjunto M de cuatro números naturales se dice *ligado*, si para todo elemento $x \in M$, al menos uno de los números $x - 1$ y $x + 1$ pertenece a M. Sea U_n el número de subconjuntos *ligados* del conjunto {1, 2, ..., n}.
a)Calcular U_7 .
b) Determinar el menor número n tal que $U_n \geq 2006$.

Por la definición de conjunto *ligado*, éste debe estar formado por dos pares de enteros del tipo (k,k+1), $k \in N$. Ahora, si tenemos el conjunto $S_n = \{1,2,3,....,n\}$, para formar todos los subconjuntos *ligados* de S_n, basta tomar de dos en dos pares del tipo (k,k+1); el número de ellos es $n - 1$; si los enumeramos, tenemos: (1,2),(2,3),(3,4),.....(n – 1, n). El número de los "pares de pares" es:

$$U_n = \binom{n-1}{2} = (n-1)!/[(n-3)!\ 2!] = (n-1)(n-2)/2. \qquad (*)$$

a) Con la fórmula (*) , tenemos: $U_7 = 6!/[4!2!] = 15$.
b) Haciendo $U_n = 2006$ y despejando n de la fórmula (*), obtenemos la ecuación cuadrática

$$n^2 - 3n - 4012 = 0,$$

cuya raíz positiva es

$$x = n = (3 + \sqrt{16049})/2.$$

Como $\sqrt{16049} \approx 126{,}7$ y U_n es una función creciente de n, aproximamos hacia arriba:

$$x = n = (3 + 127)/2 = 65.$$

Substituyendo en la fórmula (*), nos da: $U_n = 2016$. Se comprueba que, para n = 64, resulta $U_n < 2006$.

PROBLEMAS DE NIVEL MEDIO Y DE OLIMPIADAS 37

Cinco problemas de la Competición Matemática de Stanford (1946-1965)

37.1. En un tetraedro (no necesariamente regular), dos aristas opuestas tienen la misma longitud a y son mutuamente perpendiculares. Además, cada una de ellas es perpendicular al segmento, de longitud b, que une sus respectivos puntos medios. Expresar el volumen del tetraedro en función de a y b (1946,#2).

37.2. Diez personas están sentadas alrededor de una mesa redonda. Se quiere distribuir la cantidad de 10$ entre ellas, de manera que cada una reciba la mitad de la suma de las cantidades que reciben las dos personas que tiene sentadas a su derecha y a su izquierda. ¿Hay una única forma de hacer el reparto? (1956,#4).

37.3. ¿Cuál es la edad del capitán, cuántos hijos tiene, y cuál es la longitud de su barco?. Se conoce el producto, 32118, de los tres números naturales buscados; la longitud de su barco se mide en pies (más de uno); el capitán tiene hijos e hijas; y tiene más años que el número total de sus hijos, pero no llega a tener 100 años. (1958,#1)

37.4. Sobre cada lado de un triángulo cualquiera se construye, exteriormente al triángulo, un cuadrado. Los 6 vértices de esos cuadrados que no son vértices del triángulo forman un hexágono. Tres de sus lados son, evidentemente, iguales a los lados correspondientes del triángulo. Demostrar que cada uno de los restantes tres lados del hexágono es igual al doble de una mediana del triángulo. (1959,#4)

37.5. (1961#4)Dados a,b,c resolver el sistema de tres ecuaciones en las incógnitas x,y,z :

$$x^2y^2 + x^2z^2 = axyz$$

$$y^2z^2+y^2x^2 = bxyz$$

$$z^2x^2 + z^2y^2 = cxyz$$

Revista Escolar de la O.I.M. 37
Problemas 181 - 185

Problema 181 (propuesto por Pedro H.O. Pantoja, UFRN, Natal, Brasil)

Hallar todos los polinomios $p(x)$*, con coeficientes enteros, cuyo coeficiente de primer grado es nulo, tales que se verifican las dos condiciones siguientes:*

a) $p(2009) + p\left(2009^2\right) + \cdots + p\left(2009^{100}\right) = 2008^{2009}$

b) $p\,(2009) = p'\,(2009)$

Problema 182 (propuesto por Pedro H.O. Pantoja, UFRN, Natal, Brasil)

Demostrar que la ecuación

$$x^3 - y^4 - 32 + 4^z = (1-x)^3 + 6w^2 + 6t\,(t-1) + 219$$

tiene infinitas soluciones (x, y, z, w, t) *en enteros.*

Problema 183 (propuesto por Laurentiu Modan, Bucarest, Rumania)

Calcular, si existen, los siguientes límites :

$$\begin{aligned} a)\quad L_1 &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2+n^2}{n^2} \ln \frac{k+n}{k} \\ b)\quad L_2 &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2+n^2}{n^2} \ln \frac{k^2+n^2}{k^2} \end{aligned}$$

Problema 184 (propuesto por Luis Gómez Sánchez, Universidad de Oriente, Venezuela)

Resolver la ecuación

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-2}}{(1+x^k)\,(1+x^{k-2})} = \frac{1}{18}; \quad x \in \mathbb{R}.$$

Problema 185 (propuesto por el editor)

ABCD es un paralelogramo; el orden de las letras indica el sentido antihorario. E es un punto fijo de la recta BC. Se dividen AB y AD en el mismo número de partes iguales, y se unen E y C con los correspondientes puntos de AB y AD. Determinar el lugar geométrico de los puntos de intersección de esas rectas.

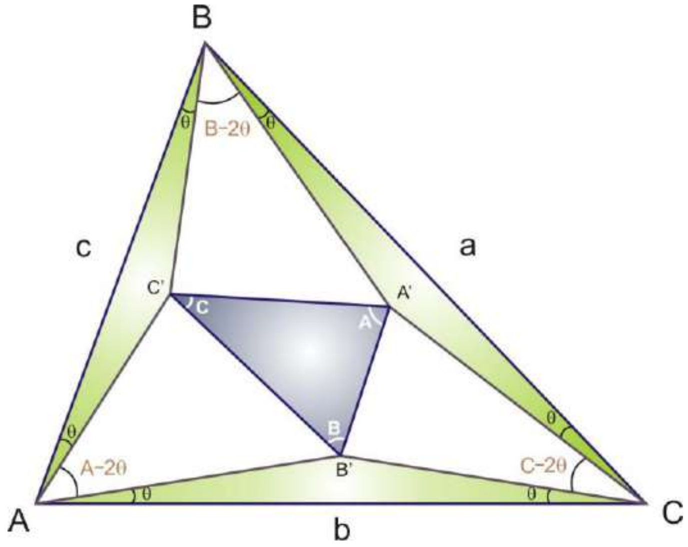
Nota: el problema no es nuevo. Se dará noticia de su procedencia cuando se publique la solución.

Problema 11 (REVISTA N°3)

Sobre los lados de un triángulo ABC como bases se trazan, interiormente, tres triángulos isósceles, cuyos ángulos iguales miden θ radianes. Si el triángulo formado por los terceros vértices de esos tres triángulos es semejante al ABC, demostrar que

$$\tan\theta = \frac{\text{senAsenBsenC}}{1+\cos A\cos B\cos C}$$

RESOLUCIÓN



i. **En el triángulo ABC:**

$$\begin{cases} AC' = BC' = \dfrac{1}{2}c.\sec\theta \\ BA' = CA' = \dfrac{1}{2}a.\sec\theta \\ AB' = CB' = \dfrac{1}{2}b.\sec\theta \end{cases}$$

ii. **En el triángulo** $AC'B'$ **(Teorema de cosenos)**

$$B'C'^{\,2} = AC'^{\,2} + AB'^{\,2} - 2AC'.AB'.\cos(A-2\theta)$$

$$\Rightarrow\; B'C'^{\,2} = \frac{1}{4}\sec^2\theta\;\; c^2 + b^2 - 2c.b.\cos(A-2\theta)$$

$$\text{tambien}:\quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$$

$$\Rightarrow\; B'C'^{\,2} = \frac{1}{4}\sec^2\theta.(a^2 + \underbrace{2bc.\cos A - 2cb.\cos(A-2\theta)}_{2bc\;\;\cos A-\cos(A-2\theta)})$$

$$\therefore\; B'C'^{\,2} = \frac{1}{4}\sec^2\theta\;\; a^2 - 4bc.\text{sen}(A-\theta).\text{sen}\theta$$

Análogo para los demás lados.

$$\therefore \begin{cases} A'B'^{\;2} = \dfrac{1}{4}\sec^2\theta \;\; c^2 - 4ab.\text{sen}(C-\theta).\text{sen}\theta \\ C'A'^{\;2} = \dfrac{1}{4}\sec^2\theta \;\; b^2 - 4ca.\text{sen}(B-\theta).\text{sen}\theta \end{cases}$$

iii. En el triángulo $A'B'C'$ (teorema de senos)

$$\frac{B'C'}{\text{sen}A} = \frac{A'B'}{\text{sen}C} \Rightarrow \left(\frac{\text{sen}C}{\text{sen}A}\right)^2 = \left(\frac{A'B'}{B'C'}\right)^2 = \frac{c^2}{a^2}$$

Reemplazando y efectuando:

$$\Rightarrow \left(\frac{\text{sen}C}{\text{sen}A}\right)^2 = \frac{\dfrac{1}{4}\sec^2\theta \;\; c^2 - 4ab.\text{sen}(C-\theta).\text{sen}\theta}{\dfrac{1}{4}\sec^2\theta \;\; a^2 - 4bc.\text{sen}(A-\theta).\text{sen}\theta} = \frac{c^2}{a^2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\text{sen}C}{\text{sen}A}\right)^2 = \frac{c^2 - 4ab.\text{sen}(C-\theta).\text{sen}\theta \;\; - c^2}{a^2 - 4bc.\text{sen}(A-\theta).\text{sen}\theta \;\; - a^2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\text{sen}C}{\text{sen}A}\right)^2 = \frac{a.\text{sen}(C-\theta)}{c.\text{sen}(A-\theta)} = \frac{\dfrac{\text{sen}(C-\theta)}{\text{sen}C.\text{sen}\theta}}{\dfrac{\text{ssen}(A-\theta)}{\text{sen}A.\text{sen}\theta}} = \frac{\cot\theta - \cot C}{\cot\theta - \cot A}$$

Por propiedad de proporciones y aplicando identidades:

$$\Rightarrow \frac{\cot\theta - \cot C}{\underbrace{\cot C - \cot A}_{\frac{\text{sen}(A-C)}{\text{sen}A.\text{sen}C}}} = \frac{\text{sen}^2C}{\underbrace{\text{sen}^2A - \text{sen}^2C}_{\text{sen}(A+C).\text{sen}(A-C)}}$$

$$\Rightarrow \cot\theta - \cot C = \frac{\text{sen}C}{\underbrace{\text{sen}(A+C)}_{\text{sen}B}.\text{sen}A}$$

$$\Rightarrow \cot\theta = \frac{\overbrace{\text{sen}^2C}^{1-\cos^2C} + \text{sen}B\text{sen}A\cos C}{\text{sen}B.\text{sen}A\text{sen}C}$$

$$\Rightarrow \cot\theta = \frac{1-\cos C \;\; \cos C - \text{sen}B\text{sen}A}{\text{sen}B.\text{sen}A\text{sen}C}$$

$$\Rightarrow \cot\theta = \frac{1-\cos C\left(\cos(A+B) - \text{sen}B\text{sen}A\right)}{\text{sen}B.\text{sen}A\text{sen}C}$$

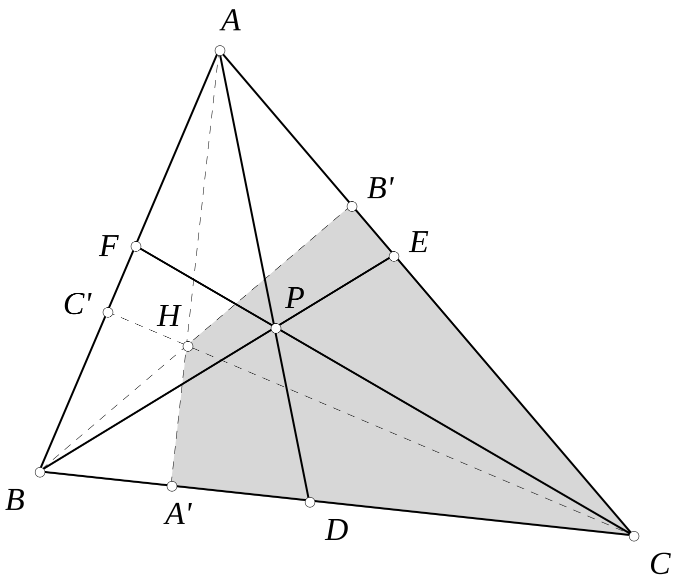
$$\Rightarrow \cot\theta = \frac{1-\cos C\cos A\cos B}{\text{sen}B.\text{sen}A\text{sen}C}$$

$$\therefore \tan\theta = \frac{\text{sen}B.\text{sen}A\text{sen}C}{1-\cos C\cos A\cos B} \qquad \text{l.q.q.d.}$$

Problema 176, propuesto por Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona (España)

Dado un triángulo no degenerado *ABC*, y un punto *P* en su interior, trazamos las cevianas *AD*, *BE*, *CF* que pasan por *P*. Determinar todos los triángulos *ABC* y todos los puntos *P* en su interior para los que se cumple que al menos dos de las circunferencias circunscritas a *AEF*, *BFD* y *CDE* pasan por *P*.

Solución.



En primer lugar la condición "al menos dos circunferencias circunscritas pasan por *P*" implica que las tres circunferencias pasan por *P*.

En efecto, supongamos que las circunferencias circunscritas a *AEF* y *BFD* pasan por *P*, entonces los cuadriláteros *AEPF* y *BFPD* son inscriptibles , tenemos

$$\left.\begin{array}{l} \angle FPE = 180^{\circ} - A \\ \angle FPD = 180^{\circ} - B \end{array}\right\} \Rightarrow \angle DPE = 360^{\circ} - \left(\angle FPE + \angle FPD\right) = A + B = 180^{\circ} - C$$

y la circunferencia circunscrita a *CDE* pasa por *P*.

Si trazamos las tres alturas *AA'*, *BB'* y *CC'* que se cortan en *H*, el triángulo queda descompuesto en tres cuadriláteros *AC'HB'*, *BA'HC'* y *CB'HA'*.

Supongamos que *P* está en el interior del cuadrilátero *CB'HA'*, entonces los ángulos $\angle PEC$ y $\angle PDC$ son obtusos y el cuadrilátero *CEPD* no puede ser inscriptible; luego *P* no puede estar en el interior del cuadrilátero *CB'HA'*. Por el mismo motivo no puede estar en el interior de los cuadriláteros *AC'HB'*, *BA'HC'*.

Finalmente si *P* está en alguna de las alturas, por ejemplo en el segmento *BB'* entonces $\angle PEC = 90^{\circ}$ y el ángulo opuesto $\angle PDC$ también debe ser recto, es decir *P* debe estar sobre la altura *AA'* y por tanto debe coincidir con *H*.

Como *P* ha de estar en el interior del triángulo la respuesta es todos los triángulos acutángulos y para cada uno *P* el ortocentro.

PROBLEMA 177

Sea $P(n,\sin(nx))$ el siguiente polinomio:

$$P(n,\sin(nx)) = -\binom{n}{0}(\sin x)^2 + \binom{n}{1}\frac{(\sin x)^4}{2} - \cdots + (-1)^{n+1}\binom{n}{n}\frac{(\sin x)^{2n+2}}{n+1}$$

Calcular el límite cuando n tiende a infinito de ese polinomio.

SOLUCION:

Escribiendo $P(n,\sin(nx)) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^{i+1}\binom{n}{i}\frac{(\sin x)^{2i+2}}{i+1}$

Como $\frac{(\sin x)^{2i+2}}{i+1} = \frac{\left[(senx)^2\right]^{i+1}}{i+1} = \left[\frac{z^{i+1}}{i+1}\right]_0^{(senx)^2} = \int_0^{(senx)^2} z^i\, dz$

Podemos reescribir el polinomio como y usando el binomio de Newton se obtiene

$$\begin{aligned}
P(n,\sin(nx)) &= \sum_{i=0}^{n}(-1)^{i+1}\binom{n}{i}\int_0^{(senx)^2} z^i\, dz = \int_0^{(senx)^2}\sum_{i=0}^{n}(-1)^{i+1}\binom{n}{i} z^i\, dz \\
&= -\int_0^{(senx)^2}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i} z^i\, dz = -\int_0^{(senx)^2}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(1)^{n-i}(-z)^i\, dz \\
&= -\int_0^{(senx)^2}(1-z)^n\, dz = -\left[-\frac{(1-z)^{n+1}}{n+1}\right]_0^{(senx)^2} \\
&= \frac{(1-(senx)^2)^{n+1}}{n+1} - \frac{(1-0)^{n+1}}{n+1} = \frac{((cosx)^2)^{n+1}}{n+1} - \frac{1^{n+1}}{n+1} \\
&= \frac{(cosx)^{2n+2}-1}{n+1}
\end{aligned}$$

Si $cosx = \pm 1$ se tiene que $P(n,\sin(nx)) = 0$

Si $(cosx)^2 < 1\ entonces,$ cuando $n \to \infty$ se tiene que $P(n,\sin(nx)) \to 0$

Por tanto $\lim_{n\to\infty} P(n,\sin(nx)) = 0$

Problema 178.
Sean a,b,c números reales verificando $0 < a,b,c \le 1$. Demostrar que

$$\frac{1}{\sqrt{2+3a}} + \frac{2}{\sqrt{2+3b}} + \frac{3}{\sqrt{2+3c}} \ge \frac{6\sqrt{5}}{5}.$$

Claramente

$$\frac{1}{\sqrt{2+3a}} \ge \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{2+3b}} \ge \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{2+3c}} \ge \frac{3}{\sqrt{5}} \ ,$$

sumando

$$\frac{1}{\sqrt{2+3a}} + \frac{2}{\sqrt{2+3b}} + \frac{3}{\sqrt{2+3c}} \ge \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

PROBLEMA 179, *propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, Ávila, España*

Sean T y T' los triángulos ABC, $A'B'C'$, rectángulos respectivamente en A y A'. Se supones que sus lados respectivos verifican

$$a > b \geq c \qquad \text{y} \qquad a' > b' \geq c'.$$

Demostrar que

$$\left(\frac{aa'}{4} - \frac{1}{9}\sum_{\text{cíclica}} aa'\right)^2 \geq \left(\frac{a^2}{4} - \frac{1}{9}\sum_{\text{cíclica}} a^2\right)\left(\frac{a'^2}{4} - \frac{1}{9}\sum_{\text{cíclica}} a'^2\right).$$

¿Cuándo se verifica la igualdad?
¿Se verifica la desigualdad para toda clase de triángulos?

Solución por Daniel Lasaosa Medarde, Universidad Pública de Navarra, Pamplona, España

Nótese en primer lugar que un escalado de uno de los dos triángulos (manteniendo las proporciones relativas entre sus lados) por un factor ρ no afecta al problema, pues entonces el término de la izquierda queda multiplicado por ρ^2, igual que el factor del miembro de la derecha correspondiente al triángulo escalado, quedando invariante el otro factor del miembro de la derecha. Podemos entonces asumir sin pérdida de generalidad que $a' = a$.

Multiplicando por 36^2 a ambos miembros de la igualdad, y desarrollando las sumas cíclicas, la desigualdad se escribe de forma equivalente como

$$\left(5a^2 - 4bb' - 4cc'\right)^2 \geq \left(5a^2 - 4b^2 - 4c^2\right)\left(5a^2 - 4b'^2 - 4c'^2\right).$$

Si los triángulos son rectángulos en A, A' respectivamente, entonces $b = a\sin B$, $c = a\cos B$, $b' = a\sin B'$ y $c' = a\cos C'$, con lo que la desigualdad queda como

$$\left(5 - 4\cos(B - B')\right)^2 \geq 1.$$

Al ser $4\cos(B - B') \leq 4$, el miembro de la derecha es claramente mayor o igual que $1^2 = 1$, con igualdad si y sólo si $B = B'$, es decir, si y sólo si ABC y $A'B'C'$ son semejantes.

Supongamos ahora que los triángulos no son rectángulos en A, A', pero que mantenemos las condiciones $a \geq b \geq c$ y $a = a' \geq b' \geq c'$. Si $5a^2 \geq 4b^2 + 4c^2$ pero $5a^2 \leq 4b'^2 + 4c'^2$, o viceversa, el miembro de la derecha es no positivo, cumpliéndose claramente la desigualdad, con igualdad si y sólo si ambos miembros son nulos. El miembro de la derecha es nulo, sin pérdida de generalidad por simetría en el problema, si $5a^2 = 4b'^2 + 4c'^2$. Ha de ser además $5a^2 = 4bb' + 4cc'$ para que el término de la izquierda sea nulo. Se tiene entonces que $bb' + cc' = b'^2 + c'^2$, pudiendo tomar b y c a priori varios valores; por ejemplo, si $a = a' = 2$, $b' = c' = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$, cualquier combinación con $b + c = \sqrt{10}$, siempre que $2 \geq b \geq c$, proporciona el resultado adecuado, es decir, cualquier combinación de la forma $b = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} + \left(2 - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\right)\rho$, $c = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} - \left(2 - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\right)\rho$ para cualquier $\rho \in [0, 1]$.

Supongamos ahora que $5a^2 > 4b^2 + 4c^2, 4b'^2 + 4c'^2$. Escribimos la desigualdad a demostrar como inecuación de segundo grado en c':

$$(5a^2 - 4b^2)c'^2 - 2c(5a^2 - 4bb')c' + 5a^2(b' - b)^2 + (5a^2 - 4b'^2)c^2 \geq 0.$$

El discriminante de esta inecuación es

$$c^2(5a^2-4bb')^2-5a^2(b'-b)^2(5a^2-4b^2)-c^2(5a^2-4b^2)(5a^2-4b'^2)=$$
$$=-5[5a^2-4b^2-4c^2]a^2(b'-b)^2\leq 0,$$

con igualdad si y sólo si $b=b'$. Como para $c'=0$ la inecuación claramente se cumple de forma estricta, pues $c>0$ y $4b'^2\leq 4a^2$, y la ecuación correspondiente no puede tener raíces reales pues el discriminante es nulo, entonces la desigualdad siempre se cumple de forma estricta para cualquier valor de c' cuando $b\neq b'$. Otro tanto sucede si escribimos la desigualdad como inecuación cuadrática en c. Sin embargo, si $b=b'$, la desigualdad se escribe como $(c-c')^2\geq 0$, que es claramente cierta, con igualdad si y sólo si $c=c'$. Se tiene entonces que si $5a^2>4b^2+4c^2, 4b'^2+4c'^2$, la desigualdad se cumple siempre, con igualdad si y sólo si los triángulos son semejantes.

Supongamos finalmente que $5a^2<4b^2+4c^2, 4b'^2+4c'^2$. Igual que en el caso anterior, podemos escribir la desigualdad como inecuación cuadrática en c o c', pero esta vez se tiene que la inecuación tiene soluciones reales, con lo que ya no se cumple siempre. Por ejemplo, si $a=a'=\frac{2\sqrt{3}b'}{3}=\frac{2\sqrt{3}c'}{3}$, se tiene que la desigualdad se convierte en

$$15a^2+4b^2+4c^2-10\sqrt{3}ab-10\sqrt{3}ac+12bc\geq 0.$$

Si además $b=a$, se tiene que la desigualdad es equivalente a

$$4c^2-(10\sqrt{3}-12)ac+(19-10\sqrt{3})a^2\geq 0.$$

Nótese por ejemplo que la desigualdad se cumple de forma estricta cuando $c=b=a$, y cuando $c\to 0$, al ser $10\sqrt{3}<\sqrt{361}=19$, pero para $c=a\frac{5\sqrt{3}-6}{4}$, la desigualdad sería equivalente a

$$0\leq 4\frac{(5\sqrt{3}-6)^2}{16}-(10\sqrt{3}-12)\frac{5\sqrt{3}-6}{4}+(19-10\sqrt{3})=(19-10\sqrt{3})-\frac{(5\sqrt{3}-6)^2}{4}=$$
$$=\frac{5(4\sqrt{3}-7)}{4},$$

que es imposible al ser el último miembro negativo, por ser $4\sqrt{3}=\sqrt{48}<7$, con lo que en este caso no se cumpliría la desigualdad, que de hecho no se cumpliría para todo c tal que

$$\frac{5\sqrt{3}-6-2\sqrt{5})+\sqrt{15}}{4}<c<a\frac{5\sqrt{3}-6+2\sqrt{5}-\sqrt{15}}{4}.$$

Resumiendo, podemos decir que la desigualdad se cumple para todos aquellos pares de triángulos tales que no se cumple simultáneamente $5a^2<4b^2+4c^2$ y $5a'^2<4b'^2+4c'^2$, dándose la igualdad si y sólo si ambos triángulos son semejantes, o si $5aa'=4bb'+4cc'$, y además $5a^2=4b^2+4c^2$ o $5a'^2=4b'^2+4c'^2$. Para aquellos pares de triángulos tales que $5a^2<4b^2+4c^2$ y $5a'^2<4b'^2+4c'^2$, la desigualdad no tiene por qué darse, siendo relativamente compleja la condición que han de cumplir los triángulos para que se cumpla la desigualdad y para que se dé la igualdad.

Problema 179. Solución de Roberto Bosch Cabrera, Ciudad de la Habana, Cuba.

Debemos probar que:

$$\left[\frac{aa'}{4} - \frac{1}{9}(aa' + bb' + cc')\right]^2 \geq \left[\frac{a^2}{4} - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2)\right]\left[\frac{a'^2}{4} - \frac{1}{9}(a'^2 + b'^2 + c'^2)\right]$$

Después de expandir y usar que $a^2 = b^2 + c^2$, $a'^2 = b'^2 + c'^2$ queda lo siguiente:

$$10(aa')^2 - 9(aa' + bb' + cc')aa' + 2(aa' + bb' + cc')^2 \geq 0$$

factorizemos

$$[2(aa' + bb' + cc') - 5aa']\,[(aa' + bb' + cc') - 2aa'] \geq 0 \tag{1}$$

Notar que

$$0 \leq (bc' - b'c)^2 \Leftrightarrow (bb' + cc')^2 \leq (b^2 + c^2)(b'^2 + c'^2) \Leftrightarrow bb' + cc' \leq aa'$$

De donde se deduce que $(aa' + bb' + cc') - 2aa' \leq 0$ y $2(aa' + bb' + cc') - 5aa' < 0$, o sea hemos probado la desigualdad (1). Se tiene igualdad si y solo si $bc' = b'c$.

La desigualdad original no se cumple para triángulos arbitrarios, basta considerar el siguiente ejemplo: $(a, b, c) = (4, 3, 2)$ y $(a', b', c') = (5, 4, 2)$.

PROBLEMA 180:

Sea $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$. Demostrar que

$$\frac{H_1}{2} - \frac{H_2}{3} + \frac{H_3}{4} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{H_n}{n+1} + \cdots = \frac{(\ln 2)^2}{2}.$$

SOLUCION:

Primero probaremos si la serie alternante converge

i) $\frac{H_n}{n+1} \geq \frac{H_{n+1}}{n+2} \iff H_n(n+2) \geq H_{n+1}(n+1) = \left(H_n + \frac{1}{n+1}\right)(n+1) = H_n(n+1) + 1 \iff H_n(n+2-n-1) \geq 1 \iff H_n \geq 1$ se cumple para cualquir n natural

ii) Como $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} = 1 + \sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i} < 1 + \int_1^n \frac{1}{x}dx = 1 + \ln n$ entonces

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}}{n+1} \leq \lim_{n\to\infty}\frac{1+\ln n}{n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{1} = 0 \implies \frac{H_n}{n+1} \longrightarrow 0 \text{ cuando } n \to \infty$$

Por el criterio de la serie alternante, esta serie converge.

Ahora proseguimos a calcular su valor.

Sea $S = \frac{H_1}{2} - \frac{H_2}{3} + \frac{H_3}{4} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{H_n}{n+1} + \cdots$ al agruparla de la siguiente forma

$S = \frac{1}{2}(1) - \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) + \cdots = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \cdots + (-1)^n\frac{1}{n} + \cdots\right)(1) + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \cdots + (-1)^n\frac{1}{n} + \cdots\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \cdots + \left((-1)^{n+1}\frac{1}{n+1} + (-1)^{n+2}\frac{1}{n+2} + \cdots\right)\left(\frac{1}{n}\right) + \cdots = (1)\sum_{j=2}^{\infty}(-1)^j\frac{1}{j} + \left(\frac{1}{2}\right)\sum_{j=3}^{\infty}(-1)^j\frac{1}{j} + \cdots + \left(\frac{1}{n}\right)\sum_{j=n+1}^{\infty}(-1)^j\frac{1}{j} + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}\sum_{j=i+1}^{\infty}(-1)^j\frac{1}{j} = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}\sum_{j=i+1}^{\infty}(-1)^j\int_0^1 x^{j-1}\,dx = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}\int_0^1\sum_{j=i+1}^{\infty}(-1)^j x^{j-1}dx$ pero

$$\sum_{j=i+1}^{\infty}(-1)^j x^{j-1} = -\sum_{j=i+1}^{\infty}(-1)^{j-1}x^{j-1} = -\sum_{j=i+1}^{\infty}(-x)^{j-1} = -(-x)^i\sum_{k=0}^{\infty}(-x)^k$$
$$= -(-x)^i\left(\frac{1}{1+x}\right)$$

Sustituyendo

$$S = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}\int_0^1 -(-x)^i\left(\frac{1}{1+x}\right)dx = -\int_0^1\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-x)^i}{i}\left(\frac{1}{1+x}\right)dx = -\int_0^1\frac{1}{1+x}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-x)^i}{i}\,dx$$

Como $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-x)^i}{i} = \ln(1+x)$ sustituyendo se obtiene

$$S = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\ln(1+x)\,dx$$

Utilizando integración por partes con,

$u = \ln(1+x) \quad y \quad dv = \frac{1}{1+x}dx\,, du = \frac{1}{1+x}dx \quad y \quad v = \ln(1+x)$

Se tiene $\int \frac{1}{1+x}\ln(1+x)\,dx = [\ln(1+x)]^2 - \int \frac{1}{1+x}\ln(1+x)\,dx \implies \int \frac{1}{1+x}\ln(1+x)\,dx = \frac{[\ln(1+x)]^2}{2}$

Evaluando

$$S = \frac{[\ln(2)]^2}{2}$$

<u>Comentario al libro "21 Aulas de Matemática Olímpica"</u>

El Prof. Carlos Yuzo Shine es el Coordinador académico para el bienio 2008-2009 de la Revista oficial de la Olimpiada Brasileira de matemática y es bien conocido por los participantes en la Olimpiada Internacional. La Sociedade Brasileira de Matemática ha publicado en 2009 su excelente libro *21 Aulas de Matemática Olímpica.* Se trata de una recopilación de lecciones de preparación de Olimpiadas, dictadas por el autor durante los distintos períodos de entrenamiento de los estudiantes de su país, y que bajo la dirección de Shine, han obtenido excelentes resultados en las competiciones internacionales de matemáticas en las que toman parte.

El libro se divide en cinco partes: Álgebra, Combinatoria, Geometría, Teoría de Números, y *Outras coisas!*

Cada capítulo de esas partes (4 en Álgebra, 6 en Combinatoria, 3 en Geometría, 6 en Teoría de Números y 2 en Outras coisas!) es, en buena medida, independiente de los demás. Algunos temas no forman parte del currículo no escrito de la I.M.O., como el primero (*Introducción a la Programación Lineal)*, pero capítulos como ése enriquecen el aprendizaje de los estudiantes, que, en definitiva, es mucho más importante que ganar muchas medallas en las Olimpiadas. El penúltimo capítulo del libro (*Aplicaciones de Planos proyectivos en Teoría de Números y Combinatoria)* es otro ejemplo de este tipo.

Sería, en mi opinión, una verdadera lástima que el hecho de estar escrito en portugués (de Brasil) supusiera un freno para que el libro fuera conocido, leído, y ampliamente aprovechado por los preparadores olímpicos de los países iberoamericanos. Por lo que a mi respecta, tengo la intención de utilizarlo tanto como pueda en el entrenamiento de mis estudiantes y los del equipo olímpico español.

Valladolid, enero de 2010

Francisco Bellot

<u>DIVERTIMENTOS MATEMÁTICOS 37</u>

Algunas citas recopiladas por Howard E. Eves en *Mathematical Circles*

Un Rey decidió honrar a aquél de sus súbditos que más hubiera contribuido al desarrollo del conocimiento. Aparecieron varios investigadores de primer orden como candidatos, en las diversas disciplinas. Después de considerar cuidadosamente las credenciales de los candidatos, el Rey observó a una mujer mayor, vestida pobremente, en el fondo de la sala.

¿Quién es esa mujer?, preguntó el Rey.

Sólo viene a observar, Señor, le dijo el Primer Ministro. *Está interesada en el desenlace, porque ella dio clase a todos los candidatos cuando eran estudiantes.*

El Rey bajó del trono e impuso la banda de honor a la maestra de todos los candidatos.

Un comentario de Leo Moser:

A Ludwig Bieberbach le gustaba la cerveza y tenía una panza considerable. Sus estudiantes le apodaban *Bier Bauch (*panza cervecera).

Además tenía considerables dificultades con la aritmética elemental. Sus estudiantes, siempre que terminaba la demostración de un teorema que pudiera ser ilustrado con un ejemplo numérico, le pedían tal ejemplo. Después de varios intentos infructuosos, se exasperaba y exclamaba: *Es ist doch so wie so bewiesen! (*¡Qué más da, ya ha sido demostrado!)

Una anécdota de Ralph Boas

Finkbeiner y Boas estaban comiendo en un restaurante de San Antonio de Texas y pidieron la cuenta. La camarera preguntó: *¿La quieren conjunta o separada?* Boas dijo: *Separada, por favor.* La camarera se volvió a Finkbeiner y dijo: *¿Usted también la quiere separada?*

Una niña está haciendo sus deberes escolares y llama a su madre: *Mamá, ¿cuánto vale 129/3?* La madre se lo dice. Poco después, la nña vuelve a preguntar: *Mamá, ¿cuánto vale 196/7?.* La madre se lo dice. El asunto se repite unas cuantas veces más, hasta que la madre le dice: *¿Por qué no haces los deberes por ti misma?* La niña explica: *Oh, la profesora nos ha dicho que podemos usar el método que queramos.*

Valladolid, enero 2010

Número

38

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

Número 38 (febrero - mayo 2010)

ISSN – 1698-277X

ÍNDICE

Nota previa del Editor:

Como consecuencia de una grave avería informática, cabe la posibilidad de que algunas de las soluciones enviadas recientemente por nuestros lectores se hayan perdido. Pedimos excusas por ello; en cualquier caso, haremos todo lo posible por recuperar esa información.

Problema 177

Recibida una solución tardía de Carlos Enrique Cabrera Guevara, Santiago del Surco (Lima, Perú)

Problema 181

Recibidas soluciones de Luis Gómez-Sánchez, Univ. de Oriente (Venezuela), Daniel Lasaosa Medarde (Pamplona, España) y del proponente. Presentamos la solución de Lasaosa.

Problema 182

Recibidas soluciones de Daniel Lasaosa Medarde (Pamplona, España) y del proponente. Presentamos la solución de Lasaosa

Problema 183

Recibidas soluciones de Daniel Lasaosa Medarde (Pamplona, España), Paolo Perfetti (Dep.Mat., Univ. "Tor Vergata", Roma), y del proponente. Presentamos la solución de Lasaosa.

Problema 184

Recibidas soluciones de Daniel Lasaosa Medarde (Pamplona, España) y del proponente. Presentamos la solución de Lasaosa.

Problema 185

Recibida solución de Daniel Lasaosa Medarde (Pamplona, España), que presentamos. El problema forma parte de la recopilación de *Weekly Problem Papers* de John Milne (1891)

Divertimentos matemáticos (38)

Algunas citas del libro *Infinitum*, de Juan Guirado.

Comentario de libros, páginas web y reseñas de Congresos (38)

Comentario al libro *Making Mathematics Come to Life (A Guide for Teachers and Students),* de O.A. Ivanov; AMS, 2009.

Desarrollada en el Centro de Altos Estudios Universitarios de la OEI con el apoyo de la Agencia Española de Cooperación Internacional para el Desarrollo (AECID)

Acceder

http://www.oei.es/oim/revistaoim/numero38.htm

Convocatoria: Curso para la formación permanente en el área de las Matemáticas

El curso está dirigido al profesorado de Enseñanza Secundaria en ejercicio de cualquiera de los países iberoamericanos. Cualquier docente de este nivel puede solicitar participar. No es necesario ningún tipo de requisito previo salvo el impartir docencia en ese nivel que acreditará cuando se le solicite. Tampoco es necesario poseer una formación previa en el manejo de los medios informáticos porque, precisamente, uno de los objetivos del curso es proporcionar esos conocimientos a quienes estén dispuestos a formarse para la utilización de esos recursos. En este sentido, habrá una unidad cero cuyo contenido va en esa línea.

http://www.oei.es/formularios/cursomat.htm

NOTA NECROLÓGICA

Mis recuerdos personales de Slavy Bilchev

Francisco Bellot Rosado

El pasado día 24 de marzo de 2010, el correo electrónico traía muy malas noticias: Emilia Velikova informaba que Svetoslav Jordanov Bilchev, *Slavy* para sus muchos amigos, había muerto en su ciudad natal de Rousse (Bulgaria). Pocos días antes, en mi calidad de miembro del Comité Internacional del Programa del Congreso sobre Creatividad y Alumnos especialmente dotados, que se celebrará en Riga el próximo mes de agosto, yo había tenido que evaluar la contribución de Bilchev al Congreso. Emilia Velikova decía en su email que “Slavy deseaba tanto ir a Riga para ver allí a sus amigos por última vez”.

Mi relación profesional con Bilchev comenzó hace mucho tiempo, con ocasión de un difícil problema sobre desigualdades geométricas propuesto por Bilchev y Velikova en *Crux Mathematicorum (1990, #1410, pg.91-92)* y que resolvimos Klamkin, Walther Janous y yo mismo (además de los proponentes). Slavy y Emy me pidieron que les enviara mi solución, dado que la solución publicada en *Crux* era, como no podía ser de otra forma, la de Murray Klamkin. La clave para que yo encontrara una solución al problema fue un artículo sobre isogonales en un triángulo publicado en un viejo número de la revista inglesa *The Mathematical Gazette.* A raíz de aquello comenzó una relación epistolar, y más tarde coincidimos en Congresos de la WFNMC e ICMEs, y nos hicimos buenos amigos.

Bilchev era un reputadísimo experto en el tratamiento de desigualdades geométricas difíciles. Los lectores de la REOIM pueden ver el tipo de problemas que le gustaba resolver volviendo a leer el artículo conjunto de Bilchev, Velikova y Vlamos que se publicó en el número 2 de la Revista: *Problemas difíciles, creados por alumnos de alto rendimiento* (julio-agosto de 2002).

Es curioso, y al mismo tiempo muy gratificante que partiendo de una relación puramente profesional se puedan establecer grandes lazos de amistad; el hecho es que Slavy siempre me demostró su afecto y siempre le estaré agradecido por ello, aún después de su temprana desaparición. Estoy seguro de que en la Revista *Mathematics Competitions*, de la WFNMC se incluirán artículos como éste.

En la siguiente foto aparecemos Slavy (a la derecha), yo mismo (a la izquierda), y la esposa de Slavy, Ginka, entre los dos. La foto es del año 1996, durante mi primera visita a la ciudad de Rousse.

La última vez que coincidí con Slavy en su país fue en 2003, durante la 3ª Conferencia Internacional sobre *Creativity in Mathematics Education and the Education of Gifted Students,* organizada en Rousse por Emilia Velikova. Durante la excursión a Veliko Trnovo y Gabrovo, nos hicimos una foto juntos, que incluyo ahora como final de esta breve Nota necrológica.

Los antiguos romanos despedían a los difuntos deseándoles que la tierra les fuera leve: *Slavy, sit tibi terra levis.*

Valladolid, mayo de 2010.

FUNCIONES ARITMÉTICAS I

MAX DIAZ ROMANÍ

Estudiante del Colegio “San Juan Bosco”

Huancayo, Perú

DEDICADO A MIS PADRES

INTRODUCCIÓN

En la presente serie de tres artículos vamos a estudiar el tema de las funciones aritméticas, pero el tratamiento que damos a la teoría es de nivel elemental, es por eso que no todos los teoremas están con sus respectivas demostraciones. También incluimos aplicaciones de problemas olímpicos y en el artículo final incluimos problemas propuestos. Dividimos el tema en tres secciones-artículos: Funciones aritméticas; desigualdades con funciones aritméticas y ecuaciones diofanticas con funciones aritméticas. En este primer artículo vamos a dar a conocer las definiciones y teoremas más importantes que utilizaremos en los dos artículos siguientes.

En el artículo, f siempre indicara una función aritmética, n un entero positivo, $\log x$ el logaritmo natural de x y p un número primo, salvo que se indique lo contrario.

1. FUNCIONES ARITMÉTICAS

Una función aritmética es una función de valores complejos definida en los enteros positivos, en otras palabras una sucesión tal como se les conoce en Análisis.

Simbólicamente decimos que f es una función aritmética si $f: \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{C}$.

1.1.1. Funciones Aditivas y Multiplicativas.- Decimos que f es una función aditiva si

$$f(mn) = f(m) + f(n) \text{ cuando } (m,n) = 1$$

Y que es totalmente aditiva si no hay restricción para m y n.

Análogamente indicamos que f es multiplicativa si

$$f(mn) = f(m)f(n) \text{ cuando } (m,n) = 1$$

Y si esto es cierto para todo m y n decimos que f es completamente multiplicativa.

* Teorema 1. Sean f y g dos funciones aritméticas tales que $f(1) = 1$ y $g(1) = 0$, entonces:

I) f es multiplicativa si $f(p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}) = f(p_1^{\alpha_1}) \dots f(p_r^{\alpha_r})$ y si es multiplicativa, es completamente multiplicativa si $f(p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}) = \left(f(p_1)\right)^{\alpha_1} \dots \left(f(p_r)\right)^{\alpha_r}$

II) g es aditiva si $f(p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}) = f(p_1^{\alpha_1}) + \cdots + f(p_r^{\alpha_r})$ y si es aditiva, es completamente aditiva si $f(p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}) = \alpha_1 f(p_1) + \ldots + \alpha_r f(p_r)$

Demostración: Las demostraciones se siguen fácilmente de las definiciones de 2.1. $\square$

En relación con este teorema tenemos el siguiente problema:

1. (TST-CHINA, 2003[1]).- Encontrar todas las funciones $f: \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}$ tales que $f(n+1) \geq f(n)$ para todo $n \geq 1$ y $f(mn) = f(m)f(n)$ si $(m,n) = 1$.
SOLUCIÓN: Si $m = n = 1$ entonces $f(1) = f(1)f(1)$. Luego o $f(1) = 0$ o $f(1) = 1$. En el primer caso si $m = 1$ tenemos que $f(n) = 0$ para todo n. Supongamos ahora que $f(1) = 1$. Se sigue que $f(n) \geq 1$. Vamos a demostrar que f es completamente multiplicativa. Sea $a \geq 2$ un entero y definamos el conjunto $A_a = \{x \in \mathbb{Z}^+ | (x,a) = 1\}$. Definimos

$$I = \inf_{x \in A_a} \frac{f(x+a)}{f(x)}$$

Ya que f es creciente claramente $I \geq 1$. Notamos que $f(k+a) \geq If(k)$ cuando $k \in A_a$. Sea m un entero positivo. Tomamos un entero suficientemente grande $x_0 > ma$ con $(x_0, a) = (x_0, 2) = 1$, en consecuencia

$$f(2)f(x_0) = f(2x_0) \geq f(x_0 + ma) \geq If(x_0 + (m-1)a) \geq \ldots \geq I^m f(x_0)$$

Entonces $f(2) \geq I^m$ y ya que m es arbitrario, se sigue que debe ser $I = 1$. Cuando $x \in A_a$ tenemos

$$\frac{f(a^{k+1})f(x)}{f(a^k)} = \frac{f(a^{k+1}x)}{f(a^k)} \leq \frac{f(a^{k+1}x + a^k)}{f(a^k)} = f(ax+1) \leq f(ax+a^2)$$
$$= f(a)f(x+a) \Leftrightarrow \frac{f(x+a)}{f(x)} \geq \frac{f(a^{k+1})}{f(a^k)f(a)}$$

Por ende

$$1 = \inf_{x \in A_a} \frac{f(x+a)}{f(x)} \geq \frac{f(a^{k+1})}{f(a^k)f(a)}$$

O sea $f(a^{k+1}) \leq f(a^k)f(a)$.

De manera análoga si definimos

$$S = \sup_{x \in A_a} \frac{f(x+a)}{f(x)}$$

Se cumple que

$$\sup_{x \in A_a} \frac{f(x+a)}{f(x)} = \frac{1}{\inf_{x \in A_a} \frac{f(x+a)}{f(x)}} = 1$$

Cuando $x \in A_a$ y $x > a$ tenemos

$$\frac{f(a^{k+1})f(x)}{f(a^k)} = \frac{f(a^{k+1}x)}{f(a^k)} \geq \frac{f(a^{k+1}x - a^k)}{f(a^k)} = f(ax-1) \geq f(ax-a^2)$$
$$= f(a)f(x+a) \Leftrightarrow \frac{f(x+a)}{f(x)} \leq \frac{f(a^{k+1})}{f(a^k)f(a)}$$

O sea $f(a^{k+1}) \geq f(a^k)f(a)$. En consecuencia, si $a \geq 2$ tenemos que $f(a^{k+1}) = f(a^k)f(a)$ y por inducción $f(a^k) = \left(f(a)\right)^k$ para todos los enteros positivos a y k. Si $n = {p_1}^{\alpha_1} \ldots {p_r}^{\alpha_r}$ entonces ya que f es multiplicativa

$$f(n) = f({p_1}^{\alpha_1} \ldots {p_r}^{\alpha_r}) = f({p_1}^{\alpha_1}) \ldots f({p_r}^{\alpha_r}) = \left(f(p_1)\right)^{\alpha_1} \ldots \left(f(p_r)\right)^{\alpha_r}.$$

Por lo tanto f es completamente multiplicativa, o sea $f(mn) = f(m)f(n)$ para todos los m y n enteros positivos, pero es conocido que la solución general de la última ecuación funcional es $f(n) = n^\alpha$ (ver [5]) con $\alpha \geq 0$ ya que f es creciente.

---

[1] TST es una abreviación de las palabras Team Selection Test que significa prueba de selección del equipo (en todos los casos es para la IMO).

En conclusión, las únicas funciones que satisfacen las condiciones del problema son $f(n) \equiv 0$ y $f(n) = n^\alpha$ con $\alpha \geq 0$. $\square$

* Teorema 2. Si $f(n)$ es una función multiplicativa, entonces la función:

$$F(n) = \sum_{d|n} f(d)$$

También es multiplicativa.
Demostración: Primero asumimos que $f(n)$ es multiplicativa. Sean m y n tales que $(m,n) = 1$. Cada divisor d de mn se puede expresar de la forma $d = ab$ con $a|m$, $b|n$ y $(a,b) = 1$ en virtud del teorema fundamental de la Aritmética, además existe una correspondencia uno a uno entre el conjunto de los divisores d de mn y los productos ab. Entonces:

$$F(mn) = \sum_{d|mn} f(d) = \sum_{a|m} \sum_{b|n} f(ab)$$

Ya que f es multiplicativa:

$$\sum_{a|m} \sum_{b|n} f(ab) = \sum_{a|m} f(a) \sum_{b|n} f(b) = F(m)F(n).$$

$\square$

1.1.2. Notaciones.- Para claridad en la lectura del artículo, indicamos al lector las siguientes notaciones que vamos a utilizar.
Si tenemos $f(x) = O\big(g(x)\big)$ equivale a que $|f(x)| \leq Ag(x)$, para $g(x) > 0$ para todo $x \geq a$, donde A es independiente de x. Esta notación nos quiere decir que el cociente $f(x)/g(x)$ esta acotado para todo $x \geq a$. A veces también se utiliza la notación $f(x) \ll g(x)$. Equivalentemente tenemos la notación $g(x) \gg f(x)$.
Si $f(x) \ll g(x)$ y $g(x) \gg f(x)$ escribiremos $f(x) \asymp g(x)$.

La notación $f(x) = o\big(g(x)\big)$ indica que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Claramente si $f(x) = o\big(g(x)\big)$ entonces $f(x) = O\big(g(x)\big)$.
También escribimos $f(x) \sim g(x)$ cuando

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Ejemplos: $\sqrt[n]{n} = O(n)$, $5 \ll 5^5$, $n = o(n^n)$, $10^{10} \gg 1$.

1.2.1. Función $d(n)$.- Es la función que indica el número de divisores de n. A veces también se utiliza la notación $\tau(n)$.
Por ejemplo $d(1) = 1$, $d(2) = d(3) = d(5) = 2$, $d(4) = 3$, $d(6) = 4$.

* Teorema 3. Si $n = {p_1}^{\alpha_1} \dots {p_r}^{\alpha_r}$ entonces

$$\tau(n) = (\alpha_1 + 1) \dots (\alpha_r + 1).$$

Demostración: Ya que $\tau(n) = \sum_{d|n} 1$ si consideramos la función $u(n) = 1$, esta es claramente multiplicativa, luego por el teorema anterior también lo es τ. Ahora procedemos por inducción. Si $n = {p_1}^{\alpha_1}$ sus divisores son $1, p_1, \dots, {p_1}^{\alpha_1}$ por ende hay $\alpha_1 + 1$. Si es cierto para $r - 1$. Ya que τ es multiplicativa:

$$\tau({p_1}^{\alpha_1} \dots {p_r}^{\alpha_r}) = \tau({p_1}^{\alpha_1})\tau({p_2}^{\alpha_2} \dots {p_r}^{\alpha_r}) = (\alpha_1 + 1) \dots (\alpha_r + 1).$$

$\square$

1.2.2. Una generalización de $\tau(n)$.- Para cada n y cada $m \geq 1$ definimos la función $\tau_m(n)$ como el número de $m - uplas$ ordenadas $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ tales que $x_1.x_2 \dots x_m = n$. Claramente si $m = 1$, entonces $\tau_1(n) = 1$ y si $m = 2$ entonces $\tau_2(n) = \tau(n)$. Tenemos el siguiente teorema:

* Teorema 4.

$$\tau_m(n) = \sum_{d|n} \tau_{m-1}(n)$$

Demostración: Sea $m > 1$, notamos que para cada x_m que sea divisor de n la ecuación $x_1.x_2 \dots x_m = n$ admite $\tau_{m-1}(n/x_m)$ soluciones. En consecuencia

$$\tau_m(n) = \sum_{x_m|n} \tau_{m-1}({}^{n}/_{x_m}) = \sum_{d|n} \tau_{m-1}(n).$$

$\square$

* Teorema 5. Si $n = p_1{}^{\alpha_1} \dots p_r{}^{\alpha_r}$ y $m > 1$ entonces

$$\tau_m(n) = \binom{\alpha_1 + m - 1}{m - 1} \dots \binom{\alpha_r + m - 1}{m - 1}$$

Demostración: Primero veamos que τ_m es multiplicativa. En efecto, por inducción. Si $m = 1, 2$ claramente $\tau_1(n) = 1$ y $\tau_2(n) = \tau(n)$ son multiplicativas. Supongamos que $\tau_{m-1}(n)$ es multiplicativa. Luego, por los teoremas 2 y 4 se cumple que $\tau_m(n)$ también es multiplicativa. Nuevamente por inducción en m. Es suficiente considerar el caso en el que $n = p^\alpha$. Si $m = 2$ tenemos que $\tau_2(p^\alpha) = \alpha + 1$. Supongamos que es cierto para m. Tenemos

$$\tau_{m+1}(p^\alpha) = \sum_{k=0}^{\alpha} \tau_m(p^\alpha) = \binom{m-1}{m-1} + \binom{m}{m-1} + \dots + \binom{\alpha + m - 1}{m - 1} = \binom{\alpha + m}{m}.$$

Notar que hemos usado la identidad:

$$\sum_{l=k}^{n} \binom{l}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

$\square$

1.2.3. La suma $d(1) + d(2) + \dots + d(n)$.- Vamos ahora a analizar la sumatoria

$$\sum_{i=1}^{n} d(i)$$

Para empezar vamos a definir la función $[x]$, donde x es un número real, esta función indica el mayor entero menor o igual que x. A pesar de no ser una función aritmética, la función máximo entero interviene bastante en Teoría de Números.

Ahora definimos la siguiente sumatoria

$$\sum_{n \leq x} d(n)$$

Donde $n = [x]$. Si $0 < x < 1$, consideramos la sumatoria igual a cero.

Ahora vamos a ver la conexión de esta sumatoria con la función máximo entero en el siguiente problema:

2. (SL, 2006[2]).- Definimos la función $f(n)$ como sigue:

$$f(n) = \frac{1}{n}\left(\left\lfloor\frac{n}{1}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor + \ \dots\ + \left\lfloor\frac{n}{n}\right\rfloor\right), \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

I) Demostrar que existen infinitos enteros positivos n tales que $f(n+1) < f(n)$.
II) Demostrar que existen infinitos enteros positivos n tales que $f(n+1) > f(n)$.

SOLUCIÓN: Si hacemos $g(n) = \left\lfloor\frac{n}{1}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor + \ \dots\ + \left\lfloor\frac{n}{n}\right\rfloor$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, al evaluar algunos valores encontramos:
$g(1) = 1 = d(1)$, $g(2) = 3 = g(1) + d(2)$, $g(3) = 5 = g(2) + d(3)$. Entonces conjeturamos que $g(n) - g(n-1) = d(n)$. En efecto, ya que

$$g(n-1) = \left\lfloor\frac{n-1}{1}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor + \ \dots\ + \left\lfloor\frac{n-1}{n-1}\right\rfloor \text{ y } g(n) = \left\lfloor\frac{n}{1}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor + \ \dots\ + \left\lfloor\frac{n}{n}\right\rfloor$$

Notamos que $\left\lfloor\frac{n}{i}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{n-1}{i}\right\rfloor = 0$ si $i \nmid n$ y $\left\lfloor\frac{n}{i}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{n-1}{i}\right\rfloor = 1$ si $i|n$. Pero la cantidad de i`s que dividen a n es justamente $d(n)$, o sea $g(n) = g(n-1) + d(n)$. En consecuencia por suma telescópica deducimos que $g(n) = d(1) + d(2) + \ldots + d(n)$. Por ende

$$f(n) = \frac{1}{n}\big(d(1) + d(2) + \ldots + d(n)\big)$$

y

$$f(n+1) = \frac{1}{n+1}\big(d(1) + d(2) + \ldots + d(n+1)\big)$$

Entonces
I) $f(n+1) < f(n)$, si y sólo si,

$$\frac{d(n+1)}{(n+1)} < d(1) + d(2) + \ldots + d(n)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

Si y sólo si $nd(n+1) < d(1) + d(2) + \ldots + d(n)$. Pero si $n+1$ es primo se tiene que $nd(n+1) = 2n$. En la suma $d(1) + d(2) + \ldots + d(n)$ se cumple que
$d(2) + d(3) + d(5) \ldots + d(n-1) \geq 2(n-3) = 2n - 6$ y $d(1) + d(4) + d(n) \geq 7$, entonces $d(1) + d(2) + \ldots + d(n) \geq 2n + 1 > 2n$ para $n > 4$.
II) $f(n+1) > f(n)$, si y sólo si,

$$\frac{d(n+1)}{(n+1)} > d(1) + d(2) + \ldots + d(n)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

Si y sólo si $nd(n+1) > d(1) + d(2) + \ldots + d(n)$ y esto se cumplirá si $d(n+1) > d(n)$, $d(n+1) > d(n-1)$,..., $d(n+1) > d(1)$. Veamos que hay infinitos m tales que $d(m) > d(k)$ para todo $k < m$. Procedemos por contradicción. Sea M el mayor de todos los elementos del conjunto $A = \{x/d(x) > d(y)\ \forall\ y < x\}$. Entonces para $M+1$ existe un J entre $\{1, \dots, M\}$ tal que $d(M+1) \leq d(J) \leq d(M)$, análogamente para $M+2$ deducimos que es cierto que $d(M+2) \leq d(M)$ y siguiendo esto llegaremos a que $d(2M) \leq d(M)$, absurdo. En consecuencia existe un $H > M$ tal que $H \in A$, contradicción, por ende el conjunto A tiene infinitos elementos. Tomando $n+1 = x$ para cada $x \in A$ se satisface la desigualdad. $\square$

Por Cálculo sabemos que

[2] SL es una abreviación de la palabra Short List que se refiere a la lista corta de la IMO donde el jurado selecciona los seis problemas para el examen.

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\sim \log n \text{ cuando } n\rightarrow\infty.$$

Y que el error en la estimación es menor para cada n. En consecuencia deducimos el
* Teorema 6.

$$\sum_{n\leq x} d(n) = x\log x + O(x)$$

O sea $\sum_{n\leq x} d(n) \sim x\log x$ cuando $n\rightarrow\infty$.

1.3.1. La función $\sigma(n)$.- Es la función que indica la suma de los divisores positivos de n. Por ejemplo $\sigma(1)=1$, $\sigma(2)=3$, $\sigma(3)=4$, $\sigma(4)=7$, $\sigma(5)=6$. A veces también se denota por $s(n)$.

* Teorema 7. Si $n=p_1{}^{\alpha_1}\ldots p_r{}^{\alpha_r}$ entonces

$$\sigma(n)=\frac{p_1{}^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}\ldots\frac{p_r{}^{\alpha_r+1}-1}{p_r-1}.$$

Demostración: Aplicando el teorema 2 con $N(n)=n$ y $F(n)=\sigma(n)$ deducimos que σ es multiplicativa. Ahora aplicamos inducción en r. Si $r=1$ entonces $n=p_1{}^{\alpha_1}$ y sus divisores son $1, p_1, \ldots, p_1{}^{\alpha_1}$, en virtud de la identidad:

$$\frac{a^{k+1}-1}{a-1}=1+a+\ldots+a^k$$

Deducimos que $\sigma(p_1{}^{\alpha_1})={p_1{}^{\alpha_{1+1}}-1}\big/{p_1-1}$. Supongamos que es cierto para $r-1$.

Ya que σ es multiplicativa:

$$\sigma(p_1{}^{\alpha_1}\ldots p_r{}^{\alpha_r})=\sigma(p_1{}^{\alpha_1})\sigma(p_2{}^{\alpha_2}\ldots p_r{}^{\alpha_r})=\frac{p_1{}^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}\ldots\frac{p_r{}^{\alpha_r+1}-1}{p_r-1}.$$

$\square$

1.3.2. La suma $\sigma(1)+\sigma(2)+\ldots+\sigma(n)$.- Análogamente vamos a considerar la sumatoria

$$\sum_{n\leq x}\sigma(n)$$

Para $x\geq 1$, siendo $n=[x]$.
* Teorema 8.

$$\sum_{n\leq x}\sigma(n)=\frac{\pi^2x^2}{12}+O(x\log x)$$

La demostración es mucho más complicada que para el caso de $d(n)$ y por eso no vamos a incluirla. El lector interesado puede encontrarla en [2].

1.3.3. La generalización de $d(n)$ y $\sigma(n)$.- Definimos la función

$$\sigma_a(n)=\sum_{d|n}d^a.$$

Donde α es un número real. Notar que si $a=0$ entonces $\sigma_0(n)=\tau(n)=d(n)$ y si $a=1$ entonces $\sigma_1(n)=\sigma(n)=s(n)$. Tenemos el siguiente teorema:

* Teorema 9. Si $n=p_1{}^{\alpha_1}\ldots p_r{}^{\alpha_r}$ y $a\neq 0$ entonces

$$\sigma_a(n)=\frac{p_1{}^{a(\alpha_1+1)}-1}{p_1{}^a-1}\ldots\frac{p_r{}^{a(\alpha_r+1)}-1}{p_r{}^a-1}.$$

Demostración: Por inducción en r. Para $r=1$ es cierto en virtud del teorema 2. Si es cierto para $r-1$. Entonces:

$$\sigma_a(p_1{}^{\alpha_1}\ldots p_r{}^{\alpha_r}) = \sigma_a(p_1{}^{\alpha_1})\sigma_a(p_2{}^{\alpha_2}\ldots p_r{}^{\alpha_r}) = \frac{p_1{}^{a(\alpha_1+1)}-1}{p_1{}^a-1}\ldots\frac{p_r{}^{a(\alpha_r+1)}-1}{p_r{}^a-1}.$$

$\square$

Por ejemplo, si $\tau(n)=s$, entonces al hacer $a=-1$ tenemos que

$$\sigma_{-1}(n) = \frac{1}{d_1}+\ldots+\frac{1}{d_s} = \frac{1}{n}\left(\frac{n}{d_1}+\ldots+\frac{n}{d_s}\right) = \frac{1}{n}(d_1+\ldots+d_s) = \frac{\sigma(n)}{n}.$$

1.4. Las funciones $\omega(n), \nu(n), \Omega(n)$ y $\mathrm{N}(n)$.- Estas funciones indican la cantidad de divisores primos distintos de n, la suma de los divisores primos de n, la cantidad de divisores primos contando multiplicidad y la suma de los divisores primos multiplicados cada uno por su multiplicidad, respectivamente.
Por ejemplo $\omega(1)=0$, $\omega(2)=\omega(3)=\omega(4)=\omega(5)=1$, $\omega(6)=2$. $\nu(1)=0$, $\nu(2)=\nu(4)=2$, $\nu(3)=3$, $\nu(5)=\nu(6)=5$. $\Omega(1)=0$, $\Omega(2)=\Omega(3)=1$, $\Omega(4)=\Omega(6)=2$, $\Omega(5)=1$. $\mathrm{N}(1)=0$, $\mathrm{N}(2)=2$, $\mathrm{N}(3)=3$, $\mathrm{N}(4)=4$, $\mathrm{N}(5)=5$, $\mathrm{N}(6)=5$. Fácilmente notamos que $\omega(n)$ y $\nu(n)$ son aditivas mientras que $\Omega(n)$ es completamente aditiva.

* Teorema 11. Si $n=p_1{}^{\alpha_1}\ldots p_r{}^{\alpha_r}$ entonces:

$$\omega(n)=r, \nu(n)=p_1+\ldots+p_r, \Omega(n)=\alpha_1+\ldots+\alpha_r \wedge \mathrm{N}(n)=p_1\alpha_1+\ldots+p_r\alpha_r.$$

Demostración: Se sigue de las definiciones de cada una de las funciones. $\square$

* Teorema 12.

$$\sum_{n\le x}\omega(n) = x\log\log x + O\left(\frac{x}{\log x}\right) = \sum_{n\le x}\Omega(n) = x\log\log x + O\left(\frac{x}{\log x}\right)$$

O sea

$$\sum_{n\le x}\omega(n) \sim \sum_{n\le x}\Omega(n) \sim x\log\log x$$

La demostración de este teorema se puede encontrar en [7].

1.5. Las funciones $\mu(n)$ y $\lambda(n)$.- Llamamos a la función $\mu(n)$ la función de Mobiüs y se define como sigue. Si $n=1$, entonces $\mu(1)=1$, si n es libre de cuadrados, entonces $\mu(n)=(-1)^{\omega(n)}$ y $\mu(n)=0$ en otro caso. Análogamente la función $\lambda(n)$ se llama la función de Liouville y es definida como $\lambda(n)=(-1)^{\Omega(n)}$ si $n\neq 1$ y $\lambda(1)=1$.
Por ejemplo $\mu(1)=1$, $\mu(2)=\mu(3)=\mu(5)=-1$, $\mu(4)=0$, $\mu(6)=1$. También $\lambda(1)=1$, $\lambda(2)=\lambda(3)=\lambda(5)=-1$, $\lambda(4)=0$, $\lambda(6)=1$.
Deducimos fácilmente que $\mu(n)$ es multiplicativa y que $\lambda(n)$ es completamente multiplicativa.

* Teorema 13. Se cumple que

$$\sum_{d|n}\mu(d) = \begin{cases}1\ si\ n=1\\ 0\ si\ n\ge 2\end{cases} \qquad \sum_{d|n}\lambda(d) = \begin{cases}1\ si\ n=m^2\\ 0\ si\ n\neq m^2\end{cases}$$

Demostración: Del teorema 2, si sigue que cada una da las dos sumatorias define dos funciones multiplicativas ya que μ y λ lo son. Por el teorema 1, sólo es necesario verificar el resultado para $n=p^\alpha$. Entonces

$$F(n)=\sum_{d|p^\alpha}\mu(d)=1-1=0\ \wedge G(n)=\sum_{d|p^\alpha}\lambda(d)=1-1+1-\ldots\pm1$$
Pues en la primera sumatoria los únicos divisores libres de cuadrados de n son 1 y p. Y en la segunda sumatoria, si $n=m^2$ hay un número impar de sumandos y si $n\neq m^2$ hay un número par de sumandos. □

* Teorema 14. Fórmula de Inversión de Mobiüs.- Sean f y g dos funciones aritméticas, entonces:
$$f(n)=\sum_{d|n}g(d)\ \Leftrightarrow g(n)=\sum_{d|n}\mu(d)f\left({}^{n}/_{d}\right)=\sum_{d|n}\mu\left({}^{n}/_{d}\right)f(d)$$
También:
$$f(n)=\prod_{d|n}g(d)\ \Leftrightarrow g(n)=\prod_{d|n}f\left({}^{n}/_{d}\right)^{\mu(d)}=\prod_{d|n}f(d)^{\mu\left({}^{n}/_{d}\right)}$$
Demostración: Primero supongamos que $f(n)=\sum_{d|n}g(d)$. Entonces:
$$\sum_{d|n}\mu(d)f\left({}^{n}/_{d}\right)=\sum_{d|n}\mu(d)\sum_{k|n/d}g(k)=\sum_{dk|n}\mu(d)g(k)=\sum_{k|n}g(k)\sum_{d|n/k}\mu(d)$$
Luego por el teorema 15
$$\sum_{d|n}\mu(d)f\left({}^{n}/_{d}\right)=\sum_{k|n}g(k)\sum_{d|n/k}\mu(d)=g(n).$$

Recíprocamente, si $g(n)=\sum_{d|n}\mu(d)f\left({}^{n}/_{d}\right)$, se sigue que:
$$\sum_{d|n}g(n)=\sum_{d|n}\sum_{k|n}\mu(k)f(d/k)=\sum_{d|n}\sum_{k|n}\mu(d/k)f(k)=\sum_{k|n}\sum_{r|n/k}\mu(r)f(k)$$
Nuevamente por el teorema 15,
$$\sum_{d|n}g(d)=\sum_{k|n}\sum_{r|n/k}\mu(r)f(k)=f(n).$$
La segunda parte del teorema tiene una demostración análoga y se deja como problema para el lector. □

* Teorema 15.
$$\sigma_a(mn)=\sum_{d|(m,n)}d^a\mu(d)\sigma_a\left(\frac{m}{d}\right)\sigma_a\left(\frac{n}{d}\right)\quad\wedge\quad\sigma_a(m)\sigma_a(n)=\sum_{d|(m,n)}d^\alpha\sigma_a\left(\frac{mn}{d^2}\right)$$
Demostración: Para el lector.

* Teorema 16. Relación entre μ y ω.-
$$2^{\omega(n)}=\sum_{d|n}|\mu(d)|$$
Demostración: Si $n=1$, ambos lados de la igualdad son 1. Supongamos que $n>1$. Si $n={p_1}^{\alpha_1}\ldots{p_r}^{\alpha_r}$ entonces $\omega(n)=r$. Los únicos términos no nulos de las sumatoria $\sum_{d|n}|\mu(d)|$ proceden de los divisores libres de cuadrados, en consecuencia:
$$\sum_{d|n}|\mu(d)|=1+\sum_{i}|\mu(p_i)|+\sum_{i,j}\left|\mu\left(p_ip_j\right)\right|+\cdots+|\mu(p_1\ldots p_r)|=$$
$$1+\binom{r}{1}+\binom{r}{2}+\ldots+\binom{r}{r}=(1+1)^{\omega(n)}=2^{\omega(n)}.$$
□

1.6.1. La función indicador de Euler φ.- Es la función que nos señala la cantidad de enteros positivos menores o iguales que n y coprimos con n.
Por ejemplo $\varphi(1) = \varphi(2) = 1$, $\varphi(3) = \varphi(4) = 2$, $\varphi(5) = 4$.

* Teorema 17.

$$n = \sum_{d|n} \varphi(d)$$

Demostración: Definimos el siguiente conjunto $S = \{1,2, \dots, n\}$. Distribuimos los enteros de S en conjuntos disjuntos de la siguiente forma. Para cada divisor d de n, sea $A(d) = \{k: (k,n) = d, 1 \leq k \leq n\}$. Los conjuntos $A(d)$ constituyen una partición de S. En consecuencia, si $f(d)$ designa el número de enteros de $A(d)$, tenemos:

$$\sum_{d|n} f(d) = n$$

Pero $(k,n) = d$, si y sólo si, $(k/d\,, n/d) = 1$ y $0 < k \leq n$, si y sólo si, $0 < k/d \leq n/d$. Por consiguiente, si hacemos $q = k/d$, existe una correspondencia uno a uno entre los elementos de $A(d)$ y los enteros q que satisfacen $0 < q \leq n/d$ y $(q, n/d) = 1$. El número de tales q es $\varphi(n/d)$. Entonces $f(d) = \varphi(n/d)$ y deducimos que

$$\sum_{d|n} \varphi(n/d) = \sum_{d|n} \varphi(d) = n.$$

□

Considerando la función $N(n) = n$, entonces por el teorema anterior vemos que

$$N(n) = \sum_{d|n} \varphi(d)$$

Luego por la formula de inversión de Mobiüs deducimos el:
* Teorema 18.

$$\varphi(n) = \sum_{d|n} \mu(d)\, {}^{n}\!/_{d}$$

* Teorema 19. Fórmula para $\varphi(n)$:

$$\varphi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

Demostración: Para $n = 1$ el producto es vacío pues ningún primo divide a 1. En este caso se asigna al producto el valor 1. Supongamos que $n > 1$ y que $p_1, \dots, p_r$ son los divisores primos de n. Podemos escribir el producto de la siguiente manera:

$$\prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \prod_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) = 1 - \sum \frac{1}{p_i} + \sum \frac{1}{p_i p_j} - \dots + \frac{(-1)^r}{p_1 \dots p_r} \qquad (*)$$

Observamos que cada uno de los términos de la derecha de $(*)$ es de la forma $\pm\, 1/d$, donde d es un divisor de n que es 1 o un producto de primos distintos. El numerador ± 1 es exactamente $\mu(d)$. Ya que $\mu(d) = 0$ si d es divisible por el producto de algún p_i, deducimos que

$$\prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = 1 - \sum \frac{1}{p_i} + \sum \frac{1}{p_i p_j} - \dots + \frac{(-1)^r}{p_1 \dots p_r} = \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d} = \frac{\varphi(n)}{n}.$$

□

* Teorema 20. Si $(m,n)=d$, entonces $\varphi(mn)=\varphi(m)\varphi(n)\,d/\varphi(d)$. En particular si $(m,n)=1$ tenemos que $\varphi(mn)=\varphi(m)\varphi(n)$, o sea φ es multiplicativa.
Demostración: Sean m y n enteros positivos. Notamos que cada divisor primo de mn o es un divisor primo de m o n, además los divisores que dividen tanto a m como a n dividen a (m,n). En consecuencia

$$\frac{\varphi(mn)}{mn}=\prod_{p|mn}\left(1-\frac{1}{p}\right)=\frac{\prod_{p|m}\left(1-\frac{1}{p}\right)\prod_{p|n}\left(1-\frac{1}{p}\right)}{\prod_{p|(m,n)=d}\left(1-\frac{1}{p}\right)}=\frac{\frac{\varphi(m)}{m}\frac{\varphi(n)}{n}}{\frac{\varphi(d)}{d}}.$$

□

* Teorema 21. Si m y n tienen los mismos factores primos, entonces $m\varphi(n)=n\varphi(m)$.
Demostración: Por la hipótesis del problema tenemos que $m={p_1}^{\beta_1}\dots{p_r}^{\beta_r}$ y $n={p_1}^{\alpha_1}\dots{p_r}^{\alpha_r}$, entonces

$$m\varphi(n)=mn\prod_{p|n}\left(1-\frac{1}{p}\right)=nm\prod_{p|m}\left(1-\frac{1}{p}\right)=n\varphi(m).$$

□

* Teorema 22. Si $a|b$ entonces $\varphi(a)|\varphi(b)$.
Demostración: Ya que $a|b$ existe un $c\in\mathbb{Z}^+$ tal que $b=ac$. Si $b=c$ entonces $a=1$ y el resultado es trivial. Supongamos ahora que $c<b$. Por el teorema anterior tenemos:

$$\varphi(b)=\varphi(ac)=\varphi(a)\varphi(c)\,{}^{d}\!/_{\varphi(d)}=d\varphi(a)\,{}^{\varphi(c)}\!/_{\varphi(d)}\qquad(*)$$

Donde $d=(a,c)$. Ahora procedemos por inducción en b. Para $b=1$ es trivial el resultado. Suponemos pues que el resultado se verifica para todo entero menor que b. En particular se verifica para c, luego ya que $d|c$ entonces $\varphi(d)|\varphi(c)$. O Sea el segundo miembro de $(*)$ es múltiplo de $\varphi(a)$. En consecuencia $\varphi(a)|\varphi(b)$. □

* Teorema 23. Si $n=[x]$, entonces:

$$\sum_{n\leq x}\varphi(n)=\frac{3}{\pi^2}x^2+O(x\log x)$$

La demostración se omite, el lector la puede encontrar en [2].

1.6.2. El producto de Dirichlet de dos funciones. Sean f y g dos funciones aritméticas. Definimos el producto de Dirichlet de f y g como:

$$h(n)=\sum_{d|n}f(d)g\left({}^{n}\!/_{d}\right)$$

En vez de utilizar h escribiremos $f*g$. Como ejemplo vemos del teorema 18 que $\varphi=\mu*N$.

* Teorema 24. Si f y g son multiplicativas, entonces $f*g$ también es multiplicativa.
Demostración: Sea $h=f*g$ y seleccionamos dos enteros coprimos m,n. Entonces

$$h(mn)=\sum_{c|mn}f(c)g\left(\frac{mn}{c}\right)$$

Ahora bien, cada divisor c de mn se puede expresar de la forma $c=ab$ con $a|m$, $b|n$ y $(a,b)=1$, además existe una correspondencia uno a uno entre el conjunto de los divisores c de mn y los productos ab. Por ende:

$$h(mn) = \sum_{\substack{a|m \\ b|n}} f(ab) g\left(\frac{mn}{ab}\right) = \sum_{\substack{a|m \\ b|n}} f(a) f(b) g\left(\frac{m}{a}\right) g\left(\frac{n}{b}\right)$$
$$= \sum_{a|m} f(a) g\left(\frac{m}{a}\right) \sum_{b|n} f(b) g\left(\frac{n}{b}\right) = h(m)h(n).$$

□

Por ejemplo si definimos las función $u(n) = 1$ y $N_r(n) = n^r$, vemos que $\sigma_a = u * N_r$. Por lo que $\sigma_a(n)$ es multiplicativa. Advertimos que el resultado no es necesariamente cierto si las funciones f y g son completamente multiplicativas.
Otro ejemplo es el reciproco del teorema. Ya que $F(n) = \sum_{d|n} f(d)$, por la fórmula de inversión de Mobiüs $f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) F\left({}^{n}/_{d}\right)$ y si asumimos ahora que F es multiplicativa, por el teorema anterior $f = \mu * F$ también es multiplicativa.

* Teorema 25. Para todo n se cumple que

$$\sigma(n) = \sum_{d|n} \varphi(d) \tau\left({}^{n}/_{d}\right)$$

Demostración: Ya que φ y τ son multiplicativas, se sigue del teorema anterior que $\varphi * \tau$ es multiplicativa. Luego, por el teorema 1 solo es necesario verificar la igualdad en el caso de que $n = p^\alpha$. Luego de un cálculo algebraico se comprueba la igualdad. □

Otra relación interesante de φ aparece con la suma $[(1, n) + (2, n) + \ldots + (n, n)]$. Esta suma viene en el siguiente problema:

3. (SL, 2004).- Definimos la función $f: \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ mediante la fórmula:

$$P(n) = \sum_{k=1}^{n} (k, n)$$

a) Demostrar que P es multiplicativa.
b) Probar que para cada $a \in \mathbb{Z}^+$ la ecuación $P(x) = ax$ tiene solución.
c) Encontrar todos los $a \in \mathbb{Z}^+$ tales que la ecuación $P(x) = ax$ tiene única solución.

SOLUCIÓN: Para cada $k = 1, 2, \ldots, n$ el número (k, n) es un divisor de n. Sea d el divisor conjugado de n, o sea $(k, n) = n/d$, entonces $k = nm/d$ para cierto $m \in \mathbb{Z}^+$ y $(k, n) = (m, d)n/d$, que implica que m es coprimo con d y $m \leq d$. Entonces (k, n) es igual a n/d para exactamente $\varphi(d)$ enteros positivos $k \leq n$. En consecuencia

$$P(n) = \sum_{k=1}^{n} (k, n) = \sum_{d|n} \varphi(d) \frac{n}{d} = n \sum_{d|n} \frac{\varphi(d)}{d}$$

Ahora:
a) Notamos que $P = \varphi * N$, y se sigue por el teorema 25 que f es multiplicativa.
Segunda demostración: Sabemos que cada divisor d de mn se puede expresar de la forma $d = ef$ con $e|m$, $f|n$ y $(e, f) = 1$. En consecuencia:

$$P(mn) = mn \sum_{d|mn} \frac{\varphi(d)}{d} = mn \sum_{\substack{e|m \\ f|m}} \frac{\varphi(ef)}{ef} = mn \sum_{\substack{e|m \\ f|m}} \frac{\varphi(e)}{e}\frac{\varphi(f)}{f}$$
$$= m \sum_{e|m} \frac{\varphi(e)}{e} n \sum_{f|m} \frac{\varphi(f)}{f} = P(m)P(n).$$

□

Las partes b y c serán resueltas en el tercer artículo, ya que estas tienen que ver con ecuaciones diofánticas.

La función anterior es conocida como la función de Pillai. Incluso existe un teorema relativo a la suma $P(1)+\ldots+P(n)$ ([12]).
* Teorema 26.

$$\sum_{n \le x} P(n) = \frac{3}{\pi^2} x^2 \log x + O(x^2)$$

Ahora incluimos una generalización de esta función:

$$P_f(n) = \sum_{k=1}^{n} f\big((k,n)\big)$$

Notar que cuando f es la función identidad obtenemos la función de Pillai. Tenemos el siguiente teorema:
* Teorema 27. Si $r \in \mathbb{R}$, se cumple que:

$$P_f(n) = \sum_{d|n} \varphi(d) f\left(\frac{n}{d}\right)$$

Demostración: Sea $A = \{1,2,\ldots,n\}$, $A_d = \{i \in A: (i,n) = d\}$. Entonces $(i,n) = d \Leftrightarrow \left(\frac{i}{d}, \frac{n}{d}\right) = 1$ y $1 \le \frac{i}{d} \le \frac{n}{d}$. En consecuencia A_d tiene $\varphi\left(\frac{n}{d}\right)$ elementos. Ya que $A = \bigcup_{d|n} A_d$ and $\# A_d = \varphi\left(\frac{n}{d}\right)$ se sigue que

$$P_f(n) = \sum_{d \in A} f(d) = \sum_{d|n} \# A_d . f(d) = \sum_{d|n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right) f(d) = \sum_{d|n} \varphi(d) f\left(\frac{n}{d}\right).$$

□

Notamos que cuando f es multiplicativa, P_f es multiplicativa también. En relación con esto tenemos el siguiente teorema.
* Teorema 28.

$$P_f(n) = \prod_{i=1}^{r} \sum_{k=0}^{\alpha_i} f({p_i}^k)({p_i}^{\alpha_i - k} - {p_i}^{\alpha_i - k - 1}).$$

Donde $n = {p_1}^{\alpha_1} \ldots {p_r}^{\alpha_r}$es la factorización prima de $n > 1$ y considerando ${p_i}^{-1} = 0$.
Demostración: Tenemos que

$$P_f(n) = \prod_{i=1}^{r} P_f({p_i}^{\alpha_i}),$$

ya que P_f es multiplicativa.

Por el teorema 27 deducimos que

$$P_f(p_i{}^{\alpha_i}) = \sum_{d|p_i{}^{\alpha_i}} \varphi(d) f\left(\frac{p_i{}^{\alpha_i}}{d}\right) = \sum_{k=0}^{\alpha_i} (p_i{}^k - p_i{}^{k-1}) f(p_i{}^{\alpha_i - k}).$$

□

1.6.3. Las generalizaciones de φ.- La primera generalización es la función indicador de Legendre. Esta función se define como el número de enteros positivos menores o iguales a x coprimos con n. Su notación es $\varphi(x,n)$, notar que $\varphi(n,n) = \varphi(n)$.

* Teorema 29. Se cumple que

$$\varphi(x,n) = \sum_{d|n} \mu(d) \left[\frac{x}{d}\right] \quad \wedge \quad \sum_{d|n} \varphi\left(\frac{x}{d}, \frac{n}{d}\right) = [x].$$

Demostración: Para el lector

La segunda generalización de la función de Euler es la función indicador de Jordan. Se define como sigue: $J_k(1) = 1$ y

$$J_k(n) = n^k \prod_{p|n} (1 - p^{-k})$$

Donde $k \in \mathbb{R}$. Notar que $J_1(n) = \varphi(n)$.

* Teorema 30.

$$J_k(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \left(\frac{n}{d}\right)^k \wedge \ n^k = \sum_{d|n} J_k(d).$$

Demostración: Notar que por la fórmula de inversión de Mobiüs si demostramos una de las identidades la otra también se verifica. Primero vamos a demostrar que $J_k(n)$ es multiplicativa. Tenemos

$$J_k(mn) = (mn)^k \prod_{p|mn} (1 - p^{-k}) = m^k \prod_{p|m} (1 - p^{-k}) \, n^k \prod_{p|n} (1 - p^{-k}) = J_k(m) J_k(n).$$

Ahora vamos a probar que

$$n^k = \sum_{d|n} J_k(d)$$

Por el teorema 24 sólo es necesario probar el resultado para $n = p^a$. Pero un simple cálculo algebraico comprueba la validez de la igualdad. □

1.7.1. La función de von Mangoldt.- Esta función denotada por Λ se define como sigue. Si $n = p^m$ para cierto primo p y con $m \geq 1$ entero positivo, entonces $\Lambda(n) = \log p$ y $\Lambda(n) = 0$ en otro caso. Por ejemplo $\Lambda(1) = 0$, $\Lambda(2) = \Lambda(4) = \log 2$, $\Lambda(3) = \log 3$, $\Lambda(5) = \log 5$, $\Lambda(6) = 0$.

* Teorema 31. Para todo n se cumple que

$$\log n = \sum_{d|n} \Lambda(d)$$

Demostración: El teorema es obviamente cierto para $n = 1$. Supongamos ahora que $n > 1$ y escribimos la descomposición canónica de n.

$$n = \prod_{k=1}^{r} {p_k}^{a_k}$$

Tomando logaritmos tenemos

$$\log n = \sum_{k=1}^{n} a_k \log p_k$$

En la sumatoria $\sum_{d|n} \Lambda(d)$ los únicos términos no nulos provienen de los divisores de la forma ${p_k}^b$ para todo $b \in \overline{1, \dots, a_k}$ y $k \in \overline{1, \dots, r}$. Luego

$$\sum_{d|n} \Lambda(d) = \sum_{k=1}^{r} \sum_{b=1}^{a_k} \Lambda({p_k}^b) = \sum_{k=1}^{r} \sum_{b=1}^{a_k} \log p_k = \sum_{k=1}^{n} a_k \log p_k = \log n.$$

□

Si hacemos $g(n) = \log n$ por la fórmula de inversión de Mobiüs tenemos el
* Teorema 32.

$$\Lambda(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \log {}^{n}/_{d}$$

1.7.2. La función ψ.- Esta función se define como:

$$\psi(n) = \sum_{n \le x} \Lambda(n) = \sum_{k=1}^{n} \Lambda(k)$$

El nombre con el que se conoce a esta función es el de función de Chebyshev.
Ejemplos: $\psi(1) = 0$, $\psi(2) = \log 2$, $\psi(3) = \log 2 + \log 3$, $\psi(4) = 2 \log 2 + \log 3$, $\psi(5) = \psi(6) = 2 \log 2 + \log 3 + \log 5$.

* Teorema 33. Se cumple que $\psi(x) \asymp x$ para todo $x \ge 2$.
La demostración se puede encontrar en [7]. En la siguiente sección veremos que esta función esta relacionada con la distribución de los números primos.

1.8. La función $\pi(n)$.- Es la función que nos indica la cantidad de números primos menores o iguales a n. Esta función puede extender su dominio a los reales positivos.
Ejemplos: $\pi(1) = 0, \pi(2) = 1, \pi(3) = \pi(4) = 2, \pi(5) = \pi(6) = 3$.
Notar que es una función escalonada con salto en cada primo. El siguiente teorema es uno de los resultados más importantes en la Teoría Analítica de Números.

* Teorema 34. Si $x \in \mathbb{R}^+$, entonces cuando $x \to \infty$ se cumple que:

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$$

O sea

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x) \log x}{x} = 1$$

La demostración de este teorema puede encontrarse en [2, 7].
Este resultado fue primero conjeturado por Gauss y después por Legendre. Décadas después Chebyshev demostró que si el límite existía entonces era igual a uno, pero no fue capaz de demostrar que existía el límite. Hasta que en 1896, de manera independiente y casi simultáneamente J. Hadamard y Ch. de la Valle Poussin lograron demostrar el teorema por medio del Análisis Complejo utilizando la función zeta de

Riemann. En 1949, P. Erdos y A. Selberg demostraron independientemente el teorema de los números primos por métodos elementales que sólo utiliza Cálculo básico.

* Teorema 35. Si p_n designa el n-ésimo primo, entonces se cumple que las siguientes relaciones asintóticas son lógicamente equivalentes:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)\log x}{x}=1\,,\qquad \lim_{x\to\infty}\frac{\psi(x)}{x}=1 \quad \wedge \quad \lim_{x\to\infty}\frac{p_n}{n\log n}=1$$

Las demostraciones de estos teoremas pueden encontrarse en $[2,7]$.

Ahora veamos una aplicación de la función de Chebyshev en el siguiente problema:

4. (TST-RUMANIA, 1995).- Para cada entero positivo n definimos la función

$$f(n)=[1,2,\dots,n].$$

I) Demostrar que para cada k existen k enteros positivos consecutivos para los cuales f es constante.

II) Encontrar el máximo cardinal posible de un conjunto de enteros positivos tales que f es estrictamente creciente y determinar todos los conjuntos para los cuales se cumple ese máximo.

SOLUCIÓN: Necesitamos los tres siguientes lemas.

Lema 1. Para cada n se cumple que $[1,2,\dots,n]=e^{\psi(n)}$.

Demostración: Tenemos que

$$\sum_{n\le x}\Lambda(n)=\sum_{p^k\le n}\log p=\log\prod_{p^k\le n}p$$

Sea α_p el mayor entero positivo tal que $p^{\alpha_p}\le n$. Entonces

$$\log\prod_{p\le n}p^{\alpha_p}=\log f(n)$$

Donde lo último se sigue del conocido cálculo del m.c.m. Por lo tanto $\epsilon^{\psi(n)}=f(n)$. $\square$

Lema 2. Para cada n existe un N tal que ninguno de los números $N+1,N+2,\dots,N+n$ es potencia de un primo o es un número primo.

Demostración: Este es el problema 5 de la IMO, 1989. La demostración de este resultado se puede encontrar en $[3]$.

Lema 3. La única solución de la ecuación diofántica $2^\alpha+1=p^\beta$ con p primo y $\alpha,\beta>1$ es $(\alpha,\beta,p)=(3,2,3)$.

Demostración: Para el lector.

I) Por el lema 2 y de la definición de $\psi(n)$ tenemos que para cada k existe un K tal que $K+1,K+2,\dots,K+k$ son compuestos y entonces

$$\psi(K+1)=\psi(K+2)=\ldots=\psi(K+k).$$

En consecuencia:

$$e^{\psi(K+1)}=e^{\psi(K+2)}=\ldots=e^{\psi(K+k)}.$$

$\square$

II) Sea $A=\{a_1,\dots,a_n\}$ el conjunto con cardinal máximo. Para que $f(n)$ sea estrictamente creciente se debe cumplir que $a_i=p^m$ con p primo y $m\ge 1$ para todo $i\in\overline{1,\dots,n}$. Analizaremos tres casos:

i) a_1 es primo impar. Entonces a_1+1 es par y necesariamente potencia de 2, a_1+2 o es primo o es una potencia de un número impar. En el primer caso se sigue que a_1+3

es nuevamente una potencia de 2, pero por $(*)$ debemos tener $a_1 = 1$, contradicción. En el segundo caso tenemos que la única potencia consecutiva de una potencia de 2 por el lema 3 es cuando la potencia es 8, luego $a_1 = 7$, entonces $A = \{7,8,9\}$ pues $\psi(9) = \psi(10)$.
ii) Si a_1 es par compuesto. Como es par tendría que ser a_1 una potencia de dos, entonces $a_1 + 1$ o es potencia de primo o es primo. En el primer caso tendríamos que $A = \{8,9\}$. Nuevamente por el lema 3. Si $a_1 + 1$ es primo, $a_1 + 2$ es potencia de dos, luego de $(*)$ $a_1 = 2$, contradicción.
iii) Si a_1 es impar compuesto. En este caso tendríamos que $a_1 + 1$ es par y potencia de dos, $a_1 + 2$ o es potencia de un primo o es primo, en el primer caso por la parte i sería $a_1 = 7$, contradicción. Luego $a_1 + 2$ es primo y $a_1 + 3$ debe ser potencia de 2, entonces nuevamente por $(*)$ tendríamos $a_1 = 1$, contradicción.
Vemos que $A = \{2,3,4,5\}$ satisface la condición de la parte II pero $A = \{1,2,3,4,5\}$ también. Por lo tanto el mayor cardinal de un conjunto que cumple la condición de la parte II es 5 y el único conjunto que tiene este cardinal es $A = \{1,2,3,4,5\}$. $\square$

Por el teorema 35, vemos que $\psi(n)/n \longrightarrow 1$ cuando $n \longrightarrow \infty$ y unido con el resultado del lema 1 del problema anterior, deducimos que
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{f(n)} = e.$$

Referencias

1. Andreescu T., Feng Z., Andrica D., 104 Number Theory problems from the training of USA IMO team, Birkhäuser, 2007.
2. Apóstol T., Introducción a la Teoría Analítica de Números, Reverte, 2002.
3. Djukic D., et al, The IMO Compendium, Springer, 2006.
4. Hardy G., Wright, An introduction to the Theory of Numbers, Oxford University Press, 1975.
5. Lasaosa D., Algunas técnicas de resolución de ecuaciones funcionales en problemas de olimpiadas I: Funciones reales de variable real, Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática, 2007. Disponible en: http://www.oei.es/oim/revistaoim/numero30/ecuacionesfuncionales1.pdf
6. Mathlinks Forum, http://www.mathlinks.ro/resources.php
7. Montgomery H., R. Vaughan, Multiplicative Number Theory I. Classical Theory, Cambridge University Press, 2006.
8. Niven I., H. Zuckerman, H. Montgomery, An introduction to the Theory of Numbers, John Wiley & Sons Inc, 1991.
9. Hojoo L., et al, Problems in Elementary Number Theory, Vol. 1, 2008. Disponible en: http://projectpen.files.wordpress.com/2008/10/pen-vol-i-no-1.pdf
10. Sandor J., Geometric Theorems, Diophantine Equations and Arithmetic Fuctions, American Research Press Rehoboth, 2002. Disponible en: http://fs.gallup.unm.edu//JozsefSandor2.pdf
11. Sierpinsky W., Elementary Theory of Numbers, P.W.N., 1964.
12. Tóth L., The unitary analogue of Pillai´s arithmetical function II, Notes Number Theory Discrete Math., 2 (1996). Disponible en: http://www.ttk.pte.hu/matek/ltoth/Toth_Pillai2_1996.pdf
13. Vinogradov I., Fundamentos de la Teoría de los Números, MIR, 1937
14. Yimin G., Elementary properties of cyclotomic polynomials, Mathematical reflections, 2007. Disponible en: http://reflections.awesomemath.org/2008_2/cyclotomic.pdf

FAMOSOS PROBLEMAS DE LA I.M.O. (1)

Francisco Bellot Rosado

En la Olimpiada Internacional de 1977, celebrada en Belgrado, VietNam propuso el siguiente problema:

Una sucesión finita de números reales es tal que la suma de 7 términos consecutivos cualesquiera es negativa, y la suma de 11 términos consecutivos cualesquiera es positiva.

¿Cuál es el mayor número de términos que puede tener tal sucesión?

Este es un ejemplo de lo que Arthur Engel llamaría "un buen problema para un concurso", es decir, un problema frente al cual un profesor experto no tiene, necesariamente, ventaja frente a un alumno. El problema fue elegido por el Jurado Internacional y fue propuesto con el número 2.

Indicaciones para la solución

Comencemos formando un cuadro con términos de la sucesión:

$$\begin{array}{ccccccc}
a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 \\
a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17}
\end{array}$$

Si nos fijamos en las filas de este cuadro, observamos que están formadas por 7 términos consecutivos de la sucesión, asi que las sumas de los números por filas son negativas; por su parte, las columnas del cuadro están formadas por 11 términos consecutivos de la sucesión y por lo tanto sus sumas son positivas. Pero esta situación es claramente absurda: la suma de todos los números del cuadro no puede ser negativa si los sumamos por filas y negativa si los sumamos por columnas.

Por consiguiente, es imposible que la sucesión llegue a tener 17 términos.

Ya que el número máximo de términos de la sucesión no puede ser 17, veamos cómo encontrar una sucesión, en las condiciones del problema, que esté formada por 16 términos.

Para ello le impondremos a la sucesión dos condiciones suplementarias, que no aparecen en el enunciado del problema:

Buscaremos una sucesión que sea capicúa, es decir, se lea igual de derecha a izquierda que de izquierda a derecha;

y que además, sea tal que la suma de los 7 términos consecutivos cualesquiera valga -1 y la suma de los 11 términos consecutivos cualesquiera valga +1.

Cuando estas dos condiciones suplementarias se aplican a la sucesión que buscamos, encontramos que se reduce drásticamente el número de términos distintos que puede tener la sucesión, y un sistema de dos ecuaciones en dos incógnitas conduce a la solución

5,5,-13,5,5,5,-13,5,5,-13,5,5,5,-13,5,5

con lo que la solución del problema se completa.

En el libro rumano de Ion Cuculescu, *Olimpiadele Internationale de Matematica ale elevilor, Editura tehnica, Bucarest 1984[1],* se pueden encontrar varias soluciones y generalizaciones, halladas por los concursantes. El procedimiento esbozado para calcular el ejemplo figura desarrollado en el libro de Samuel Greitzer, *International Mathematical Olympiads 1959-1977[2]*, publicado por la Mathematical Association of America en 1978. Allí señala Greitzer que va a indicar un procedimiento *distinto de la simple adivinación* para encontrar el ejemplo de sucesión que cumpla las condiciones del problema.

De hecho, tal y como indica Arthur Engel en un artículo sobre el entrenamiento de Alemania Federal para la IMO, publicado en la revista *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 1988* y que más tarde forma parte de su libro *Problem Solving Strategies, pg.85 y siguientes, (Springer 1998)[3],* este problema nunca debió ser aceptado por el Jurado, porque con una formulación parecida había sido propuesto en la Olimpiada de Moscú de 1969 (Engel cita una fuente rusa del año 1971, con 200000 ejemplares vendidos; yo lo he localizado en el libro – en ruso – *Moscovskiie matematicheskie Olimpiadii,* de G.A. Galperin y A. K. Tolpygo, 1986)[4]. Pero el hecho es que el problema se propuso en la I.M.O., y hay abundante bibliografía sobre él. En este artículo ofrezco a los lectores de la REOIM una selección de sus soluciones, con atribución de autoría siempre que es posible.

Solución de John Rickard, participante por Gran Bretaña, galardonada con Premio Especial del Jurado.(Ver [5])

Si en el enunciado, 7 y 11 se reemplazan por los enteros positivos m,n entonces el máximo número de términos es m + n –(m,n) – 1, donde (m,n) es el máximo común divisor de m y n.

Sea $a_k, k=1,2,\cdots,l$ una sucesión de números reales. Definimos la sucesión $s_k, k=0,1,2,\cdots,l$ de la manera siguiente:

$$s_0 = 0; s_k = \sum_{i=1}^{k} a_i, k = 1,2,\cdots,l .$$

Las condiciones del problema son equivalentes a

$$s_k > s_{k+m}, k = 0,1,2,\cdots,l-m; s_k < s_{k+n}, k = 0,1,2,\cdots,l-n \quad * \quad .$$

Sea *d* el máximo común divisor de *m* y *n.* Entonces $m = m'd; n = n'd$, y ahora *m′* y *n′* son primos entre sí.

Supongamos que existiera una sucesión a_k de longitud $l = m+n-d$ (o más larga) verificando las condiciones del problema. Entonces consideramos los números $s_0, s_d, \cdots, s_{m'+n'-1\ d}$. Son en total $m'+n'$ números, que satisfacen n' desigualdades $s_{k+m} < s_k$ y m' desigualdades $s_k < s_{k+n}$. Además, cada término s_{kd} aparece dos veces en esas desigualdades, una vez en el primer miembro y una vez en el segundo: esto significa que podemos formar una cadena circular

$$s_{i_1} < s_{i_2} < \cdots < s_{i_k} < s_{i_1}$$

lo cual es una contradicción.

Supongamos ahora que no existiera una sucesión de longitud $m+n-\ m,n\ -1$ que satisface las condiciones requeridas. Si (*) no tiene solución, entonces existe una cadena de desigualdades como antes. Los índices de los términos de esa cadena deben ser todos congruentes dos a dos, módulo d. Hay $m'+n'-1$ posibles índices en cada clase de restos, así que a lo sumo hay $m'+n'-1$ términos en la cadena circular. La diferencia de índices de dos términos consecutivos en la cadena es n ó bien $-m$. Supongamos que q de ellos son iguales a n y r de ellos iguales a $-m$. Entonces $qn-rm=0$, así que $qn'=rm'$. Como m' y n' son primos entre sí, q es divisible por m' y r es divisible por n'. Se sigue de ahí que $q+r\geq m'+n'$, luego al menos hay $m'+n'$ términos en la cadena circular, lo cual es una contradicción.

Solución de István Reiman *(International Mathematical Olympiad 1959-1999, Anthem Press, 2001[6])*

La ventaja de esta solución es que permite construir infinitos ejemplos con el máximo número de términos.

Sea s_i la suma de los i primeros elementos, con $s_0=0$. Las condiciones del problema dicen que

$$s_{i+7}-s_i<0\Leftrightarrow s_i>s_{i+7}, i=0,1,2,\cdots 1$$

Y

$$s_i-s_{i-11}>0\Leftrightarrow s_i>s_{i-11}, i=11,12,\cdots(2)$$

Si la sucesión tuviera 17 elementos, iterando ls dos desigualdades obtenemos

$$s_7>s_{14}>s_3>s_{10}>s_{17}>s_6>s_{13}>s_2>s_{16} \quad (3)$$

$$>s_5>s_{12}>s_1>s_8>s_{15}>s_4>s_{11}>s_0=0,$$

y esto es una contradicción, porque $s_7<0$.

Supongamos ahora que la sucesión sólo tiene 16 términos y empezamos la cadena en s_6, y continuamos desde s_0 como sigue:

$$s_0>s_7>s_{14}>s_3>s_{10} \quad (4)$$

Ahora la cadena se interrumpe porque ni (1) ni (2) se aplica.Daremos valores arbitrarios a los s valores de s_i que verifican (3) y (4), es decir 12>11>10>… y construimos la tabla

S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}	S_{11}	S_{12}	S_{13}	S_{14}	S_{15}	S_{16}
5	10	-3	2	7	12	-1	4	9	-4	1	6	11	-2	3	8

Ya que $a_i = s_i - s_{i-1}$, la tabla proporciona

5,5,-13,5,5,5,-13,5,5,-13,5,5,5,-13,5,5

Como tenemos infinitas elecciones para los s valores de s_i, podemos construir infinitas sucesiones de 16 términos en las condiciones del problema.

El Prof. Mircea Becheanu, en su libro "International Mathematical Olympiads 1959-2000 (Academic Distribution Center, 2001)[7] incluye dos demostraciones basadas en consideraciones de Álgebra Lineal: en definitiva se trata de demostrar la existencia de una solución para un sistema de 16 ecuaciones con 16 incógnitas.

Solución de Mircea Becheanu (Univ. de Bucarest, Rumania)

Se trata de encontrar los números reales

$$x_1, x_2, \cdots, x_{16}$$

que deben cumplir las condiciones

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_7 = a_1$$

$$x_2 + x_3 + \cdots + x_8 = a_2$$

……………..

$$x_{10} + x_{11} + \cdots + x_{16} = a_{10}$$

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{11} = b_1$$

$$x_2 + x_3 + \cdots + x_{12} = b_2$$

……………..

$$x_6 + x_7 + \cdots + x_{16} = b_6 ,$$

donde $a_1, a_2, \cdots, a_{10}$ son ciertos números negativos y $b_1, b_2, \cdots, b_6$ positivos.

La matriz del sistema es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

y observándola cuidadosamente se observa que su determinante es la resultante de los polinomios

$$\phi_7(X) = X^6 + X^5 + \cdots + X + 1 \text{ y } \phi_{11}(X) = X^{10} + X^9 + \cdots + X + 1.$$

Estos dos son polinomios ciclotómicos para la división de la circunferencia en 7 y 11 arcos iguales, respectivamente. No tienen raíces comunes y por lo tanto el determinante de la matriz es distinto de cero y el sistema tiene solución única.

También se puede probar esto *por métodos elementales:* es suficiente demostrar que el correspondiente sistema homogéneo sólo tiene la solución trivial

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_{16} = 0.$$

Sea $x_1, x_2, \cdots, x_{11}, x_{12}, \cdots, x_{16}$ una sucesión en la cual cualquier sucesión de 7 términos consecutivos y cualquier sucesión de 11 términos consecutivos tenga suma 0. Si se consideran sucesivamente sumas de 7 términos consecutivos en cada suma de 11 términos consecutivos, se ve que cualquier suma de 4 términos consecutivos es 0. Por ejemplo,

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{11} = 0, x_5 + x_6 + \cdots + x_{11} = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

Luego de aquí deducimos que cualquier suma de 8 términos consecutivos es 0. Usando de nuevo sumas de 7 términos consecutivos obtenemos que cada término es 0, lo que termina la demostración.

Solución de Peter Winkler

En el libro *Mathematical Puzzles (A Connoisseur's Collection),* de Peter Winkler, *A.K.Peters 2004[8]* se incluye una variante de este problema, con una solución por inducción. La variante consiste en la siguiente conversación entre la Comisión Ejecutiva (C.E.) y un accionista (A), en la Asamblea general de una sociedad de inversiones:

C.E.:"Observen que hemos tenido ganancias en cada período de 8 meses consecutivos, desde nuestra última Asamblea"

A.:"Puede ser, pero yo también veo que hemos perdido dinero en cada período de 5 meses consecutivos"

¿Cuál es el máximo número de meses transcurridos desde la última Asamblea?

Transcribo la solución de Winkler, para finalizar este recorrido por las soluciones del problema.

Winkler toma el problema de forma general: la cuestión es llamar $f\ x,y$ a la longitud de la sucesión más larga tal que toda subsucesión de x elementos tenga suma positiva y toda subsucesión de y elementos tenga suma negativa; se puede suponer $x > y$.

Si *x* es un múltiplo de y, entonces $f\ x,y\ = x-1$.

¿Qué sucede si $y=2$, con x impar? Entonces se podría tener una sucesión de longitud x, con elementos que se alternan entre, digamos $x-1$ y $-x$. Pero no puede haber $x+1$números, porque en cada subsucesión de longitud $x$los elementos impares tienen que ser positivos (ya que se pueden cubrir con subsucesiones de longitud 2 dejando fuera cualquier elemento impar). Pero hay ahí dos subsucesiones de longitud x, y conjuntamente implican que los dos números centrales son positivos, una contradicción.

Aplicando este razonamiento más generalmente, se puede conjeturar que $f(x,y) \leq x+y-2$ cuando x e $y$son primos entre sí. Podemos probar esto por inducción, como sigue.

Supongamos, por el contrario, que tenemos una sucesión de longitud $x+y-1$ que satisface las condiciones. Escribimos $x=ay+b$, con $0<b<y$, y nos fijamos en los últimos $y+b-1$ números de la sucesión. Obsérvese que cualesquiera b consecutivos de ellos pueden expresarse como una subsucesión de longitud x, de la sucesión entera, con a subsucesiones de longitud y eliminadas. Por lo tanto tiene suma positiva. Por otra parte, cualquier subsucesión de longitud $y-b$, de los últimos $y+b-1$, se puede expresar como $a+1$ sucesiones de longitud y con una sucesión de longitud x eliminada, así que tiene suma negativa. Se sigue de aquí que $f(b,y-b)\geq y+b-1$, lo que contradice nuestra hipótesis de inducción porque b e $y-b$ son primos entre sí.

Para demostrar que $f(x,y)$ es efectivamente igual a $x+y-2$, cuando x e y son primos entre sí, construiremos una sucesión que tenga las propiedades requeridas, y algo más: que tome solamente dos valores distintos, y sea periódica con los dos períodos x,y. Llamaremos u,v a los dos valores, e imaginemos que los asignamos arbitrariamente a los y primeros elementos de nuestra sucesión.

Esas asignaciones las repetiremos hasta el final de la sucesión, haciéndola, por fuerza, periódica en y. Para que sea periódica en x también, sólo necesitamos asegurarnos de que los últimos $y-2$ elementos se emparejen con los primeros $y-2$, lo que lleva a satisfacer $y-2$ igualdades de entre las y elecciones originales que hicimos. Ya que no son suficientes igualdades para forzar que todas las elecciones sean la misma, podemos asegurar que hay al menos un u y un v.

Hagamos esto, por ejemplo, con $x=8$, $y=5$. Llamamos $c_1,\cdots,c_5$ alos primeros cinco elementos de la sucesión, de modo que ésta es

$$c_1c_2c_3c_4c_5c_1c_2c_3c_4c_5c_1 .$$

Para que sea periódica con período 8, debe ser $c_4=c_1,c_5=c_2,c_1=c_3$. Esto nos permite poner $c_1=c_3=c_4=u;c_2=c_5=v$, con lo que la sucesión es

$$uvuuvuvuuvu .$$

Volviendo a x, y en general, se observa que una sucesión que es periódica en x automáticamente tiene la propiedad de que toda subsucesión de longitud x tiene suma constante; porque como se desplaza la subsucesión un lugar de cada vez, el elemento cogido en un extremo es igual que el dejado en el otro. Obviamente, lo mismo ocurre con las subsucesiones de longitud y si la sucesión tiene período y.

Sea S_x la suma de la subsucesión de longitud x, y análogamente S_y. Afirmamos que $S_x/x \neq S_y/y$. La razón es que si hubiera, digamos, p términos iguales a u en cada subsucesión de longitud x, y q términos iguales a v en cada subsucesión de longitud y, entonces $S_x/x = S_y/y$ implicaría que $y\ \ pu+\ \ x-p\ \ v\ \ =x\ \ qu+\ \ y-q\ \ v$ lo que se simplifica para dar $yp=xq$. Ya que x e y son primos entre sí, esto no puede ocurrir para $0<p<x;0<y<q$.

De aquí resulta que podemos ajustar u y v para que S_x sea positiva y S_y negativa. En el caso anterior, cada subsucesión de longitud 8 contiene 5 veces u y 3 veces v; mientras que cada subsucesión de longitud 5 contiene 3 veces u y 2 veces v. Si tomamos $u=5$ y $v=-8$, resultan $S_x=1$, $S_y=-1$. La sucesión final resulta ser

5, -8, 5, 5, -8, 5, -8, 5,5,-8,5.

El argumento precedente se generaliza al caso en que x, y tienen un máximo común divisor (x, y), distinto de 1. El resultado es

$$f(x,y)=x+y-1-\ \ x,y\ \ .$$

Bibliografía

[1] Cuculescu, I. *Olimpiadele Internationale de matematica ale elevilor. Editura Tehnica, Bucarest, 1984* (en rumano).

[2] Greitzer, S.L. *International Mathematical Olympiads 1959-1977. Mathematical Association of America, 1978.*

[3] Engel, A. *Problem-Solving Strategies, Springer 1998.*

[4] Galperin, G.A. & Tolpygo,A.K. *Moskovskiie Matematicheskiie Olimpiadii (en ruso), Prosveschenii e, 1986*

[5] Jankovic, V. & Micic, V. *IX & XIX International Mathematical Olympiads, Mathematician Society of Serbia, 1997.*

[6] Reiman, I. *International Mathematical Olympiad 1959 – 2000***.** *Anthem Press, 2001.*

[7] Becheanu, M. *International Mathematical Olympiads 1959 – 2000. Academic Distribution Center, 2001.*

[8] Winkler, P. *Mathematical Puzzles (A Connoisseur's Collection), A.K. Peters Ltd., 2004*

Otras referencias donde se pueden encontrar soluciones a este problema

Kontogiannis, D. *Matematikes Olympiades 1 (en griego). (4 soluciones y 3 generalizaciones).Edición privada del autor, 1981.*

Hanjs, Z. *Medunarodne Matematicke Olimpjade (en croata). Zagreb 1997.*

Djukic, D. y otros *: The IMO Compendium (A Collection of problems suggested for the International Mathematical Olympiads, 1959 – 2004. Springer 2006.*

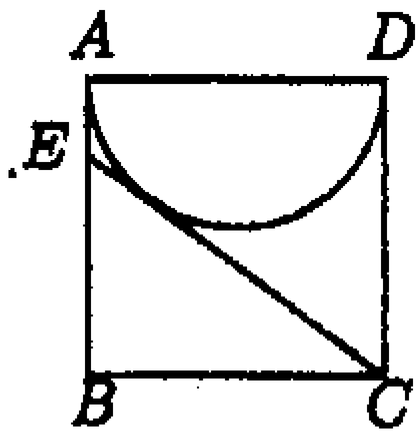
Bourgade, P. *Olympiades internationals de mathématiques 1976 – 2005 (en francés). Cassin, Paris 2005.*

Problemas para los más jóvenes (38)

Selección de problemas de la Olimpiada Provincial de Valladolid para alumnos de 2º y 4º de E.S.O. (12 y 14 años de edad, respectivamente)

Prob. 38-1

ABCD es un cuadrado de lado 1. Una semicircunferencia, de diámetro AD, está contenida en el cuadrado. E es un punto del lado AB de tal forma que CE es tangente a la semicircunferencia. Calcular el área del triángulo CBE.



Prob. 38 – 2

Calcular el número de ternas (a,b,c) de números naturales tales que el mínimo común múltiplo de a, b y c sea 720.

Prob. 38 – 3

Cuando un número natural se divide por 10, el resto es 9.

Cuando se divide por 9, el resto es 8.

Cuando se divide por 8, el resto es 7.

Cuando se divide por 7, el resto es 6.

Cuando se divide por 6, el resto es 5.

Cuando se divide por 5, el resto es 4.

Cuando se divide por 4, el resto es 3.

Cuando se divide por 3, el resto es 2.

Y cuando se divide por 2, el resto es 1.

Aunque hay más de un número que cumple todas esas condiciones, ¿cuál es el más pequeño de todos ellos?

Prob. 38 – 4

Carlos y Jorge están en la estación esperando un tren. Mientras llega, deciden entretenerse al paso de un mercancías, que no reduce su velocidad al pasar por la estación. Están juntos en el andén; cuando la locomotora del mercancías llega al punto donde ellos se encuentran, Carlos comienza a andar en el sentido de la marcha del tren, y Jorge en sentido contrario, los dos a la misma velocidad. Se detienen en el momento en que el último vagón del mercancías pasa por el punto donde ellos se encuentran en ese momento. Carlos recorrió 45 metros y Jorge 30. ¿Cuánto mide el tren?

Language **Spanish**

2nd Benelux Mathematical Olympiad
Amsterdam, 23–25 April 2010

Problems

Problema 1. Un conjunto finito de enteros se denomina *malo* si la suma de sus elementos es 2010. Un conjunto finito de enteros se denomina *conjunto Benelux* si ninguno de sus subconjuntos es un conjunto malo. Determinar el menor entero n para el cual existe una partición del conjunto $\{502, 503, 504, \ldots, 2009\}$ en n conjuntos Benelux.
(Una partición de un conjunto S en n subconjuntos es una colección de n subconjuntos de S disjuntos dos a dos, cuya unión es igual a S.)

Problema 2. Determinar todos los polinomios $p(x)$ con coeficientes reales tales que

$$p(a+b-2c)+p(b+c-2a)+p(c+a-2b)=3p(a-b)+3p(b-c)+3p(c-a)$$

para todos los $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Problema 3. Los puntos A, B y P están sobre la recta l, en ese orden. Sea a la recta perpendicular a l por A, y sea b la recta perpendicular a l por B. Una recta distinta de l que pasa por P corta a la recta a en Q y a la recta b en R. La perpendicular por A a BQ corta a BQ en L y a BR en T. La perpendicular a AR por B corta a AR en K, y a AQ en S.

(a) Demostrar que P, T, S están alineados.

(b) Demostrar que P, K, L están alineados.

Problema 4. Determinar todas las cuaternas (a, b, p, n) de enteros positivos tales que p es primo y

$$a^3+b^3=p^n.$$

Language: Spanish

Tiempo: 4 horas y 30 minutos
Cada problema vale 7 puntos

PROBLEMAS DE NIVEL MEDIO Y DE OLIMPIADA 37

Cinco problemas de la Competición Matemática de Stanford

Soluciones por Daniel Lasaosa Medarde, Universidad Pública de Navarra, Pamplona, España

37.1. En un tetraedro (no necesariamente regular), dos aristas opuestas tienen la misma longitud a y son mutuamente perpendiculares. Además, cada una de ellas es perpendicular al segmento, de longitud b, que une sus respectivos puntos medios. Expresar el volumen del tetraedro en función de a y b (1946,#2).

Con origen en el punto medio del segmento de longitud b, podemos expresar las coordenadas de los vértices del tetraedro como $\left(-\frac{a}{2}, 0, -\frac{b}{2}\right)$, $\left(\frac{a}{2}, 0, -\frac{b}{2}\right)$, $\left(0, -\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ y $\left(0, \frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$, con lo que los tres vectores con origen en el primer vértice y extremo en los otros tres serían $(a, 0, 0)$, $\left(\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}, b\right)$ y $\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, b\right)$, con producto mixto

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ \frac{a}{2} & -\frac{a}{2} & b \\ \frac{a}{2} & \frac{a}{2} & b \end{vmatrix} = -a^2 b,$$

con lo que el volumen buscado es $\frac{|-a^2 b|}{6} = \frac{a^2 b}{6}$.

37.2. Diez personas están sentadas alrededor de una mesa redonda. Se quiere distribuir la cantidad de 10$ entre ellas, de manera que cada una reciba la mitad de la suma de las cantidades que reciben las dos personas que tiene sentadas a su derecha y a su izquierda. Hay una única forma de hacer el reparto? (1956,#4).

Numeramos las personas de 1 a 10 con notación cíclica, es decir, $11 = 1$, $0 = 10$, y sea x_i la cantidad de dinero que recibe la persona i. Si $x_i = x_{i+1}$ para algún i, entonces todos los x_k con $k = 1, 2, \ldots, 10$ son iguales; en efecto, $x_{i-1} = 2x_i - x_{i+1} = x_i$, $x_{i+2} = 2x_{i+1} - x_i = x_i$, y tras trivial inducción $x_k = x_i$ para todo k. Ahora bien, sea j tal que x_j es la máxima cantidad dada a una de las 10 personas. Claramente, $2x_j = x_{j-1} + x_{j+1} \leq 2x_j$, con igualdad si y sólo si $x_{j-1} = x_j = x_{j+1}$, y como ha de darse necesariamente la igualdad, $x_j = x_{j+1}$, con lo que todos los x_k son iguales y existe una única manera, dando 1$ a cada persona.

37.3. ¿Cuál es la edad del capitán, cuántos hijos tiene, y cuál es la longitud de su barco? Se conoce el producto, 32118, de los tres números naturales buscados; la longitud de su barco se mide en pies (más de uno); el capitán tiene hijos e hijas; y tiene más años que el número total de sus hijos, pero no llega a tener 100 años. (1958,#1)

Como $32118 = 2 \cdot 3 \cdot 53 \cdot 101$ en factores primos, y la edad del capitán no puede ser mayor que 100, ha de ser un divisor de $6 \cdot 53$, con lo que la edad del capitán es 53 años. Si asumimos que por "*el capitán tiene hijos e hijas*" se entiende que tiene más de un hijo y más de una hija (luego por lo menos 4 en total), y al tener menos de 53 hijos, entonces el capitán tiene 6 hijos, y la longitud del barco es 101 pies. En caso de que no sea posible asumir lo anterior, lo único que sabríamos es que el capitán tiene por lo menos 2 hijos en total, para posibles soluciones de 2 hijos (un hijo y una hija), y barco de 303 pies, 3 hijos en total (dos hijos y una hija, o dos hijas y un hijo), y barco de 202 pies, además de la ya comentada anteriormente.

37.4. Sobre cada lado de un triángulo cualquiera se construye, exteriormente al triángulo, un cuadrado. Los 6 vértices de esos cuadrados que no son vértices del triángulo forman un hexágono. Tres de sus lados son, evidentemente, iguales a los lados correspondientes del triángulo. Demostrar que cada uno de los restantes tres lados del hexágono es igual al doble de una mediana del triángulo. (1959,#4)

Sea ABC el triángulo, y sean $ABDE$, $BCFG$ y $CAHI$ los cuadrados. Se tiene entonces que el hexágono es $DEHIFG$, siendo $DE = AB$, $FG = BC$ y $HI = CA$. Ahora bien, $\angle EAH = \pi - \angle BAC$ al ser $\angle BAE = \angle CAH = 90°$. Por lo tanto, utilizando el teorema del coseno dos veces y el teorema de la mediana (siendo m_A la longitud de la mediana desde A), se tiene

$$EH^2 = AE^2 + AH^2 - 2AE \cdot AH \cos \angle EAH =$$
$$= AB^2 + AC^2 + 2AB \cdot AC \cos \angle BAC = 2AB^2 + 2AC^2 - BC^2 = 4m_A^2,$$

al ser $AE = AB$ y $AH = CA$. Luego $EH = 2m_A$. Permutando cíclicamente los vértices, se obtiene igualmente que $GD = 2m_B$ e $IF = 2m_C$.

37.5. (1961#4) Dados a, b, c resolver el sistema de tres ecuaciones en las incógnitas x, y, z:

$$x^2y^2 + x^2z^2 = axyz,$$
$$y^2z^2 + y^2x^2 = bxyz,$$
$$z^2x^2 + z^2y^2 = cxyz.$$

Nótese en primer lugar que si alguno de entre a, b, c es nulo (sin pérdida de generalidad $a = 0$), entonces $xy = zx = xyz = 0$, con lo que $xy = yz = zx = 0$ para las soluciones $(x, 0, 0)$, $(0, y, 0)$ y $(0, 0, z)$ para cualesquiera x, y, z reales, siendo éstas además las únicas soluciones tales que $xyz = 0$. Si a, b, c no son todos del mismo signo, y al ser los miembros de la derecha no negativos, o xyz es a la vez positivo y negativo (absurdo) o $xyz = 0$. Si $xyz \neq 0$, entonces podemos afirmar que a, b, c tienen el mismo signo no siendo ninguno nulo, y podemos escribir que

$$y^2z^2 = \frac{(b+c-a)xyz}{2}, \qquad xyz = \frac{(b+c-a)x^2}{2}, \qquad y^2+z^2 = \frac{ayz}{x} = \frac{a(b+c-a)}{2},$$

y de forma similar para y^2, z^2. Por lo tanto,

$$x^2 = \frac{b(c+a-b) + c(a+b-c) - a(b+c-a)}{4} = \frac{(a+b-c)(c+a-b)}{4},$$

y de forma similar para sus permutaciones cíclicas. Luego las soluciones reales (x, y, z) tales que $xyz \neq 0$, que existen sólo cuando a, b, c tienen el mismo signo y ninguno de ellos es superior en valor absoluto a la suma de los otros dos, son

$$\left(\pm\frac{\sqrt{(c+a-b)(a+b-c)}}{2}, \pm\frac{\sqrt{(a+b-c)(b+c-a)}}{2}, \pm\frac{\sqrt{(b+c-a)(c+a-b)}}{2}\right),$$

donde un número par de los signos (es decir, ninguno o dos) son negativos y el resto (tres o uno) son positivos si a, b, c son todos positivos, y un número impar de los signos son negativos y el resto son positivos si a, b, c son todos negativos.

Problemas 186 - 190

Problema 186 *(propuesto por Luis Gómez-Sánchez, Universidad de Oriente, Venezuela)*
Sean los números naturales a, b, c tales que $a < b < c$ y $a^2 + b^2 > c^2$. Demostrar que existe un único entero que satisface la inecuación

$$a^{2x+1} + b^{2x+1} + c^{2x+1} + (a+b)(ab)^x < (a+c)(ac)^x + (b+c)(bc)^x .$$

Problema 187 *(propuesto por Panagiote Ligouras, Bari, Italia)*
Sean a, b, c los lados; m_a, m_b, m_c las medianas; h_a, h_b, h_c las alturas; l_a, l_b, l_c las bisectrices y R el radio del círculo circunscrito al triángulo ABC. Demostrar que

$$\sum_{cíclica} \frac{l_a^3 m_a \left(m_a^2 - h_a^2\right)}{h_a^2 \left(l_a^2 - h_a^2\right)} \geq 12R^2.$$

Problema 188 *(propuesto por Roberto Bosch Cabrera, La Habana, Cuba)*
Determinar todos los polígonos regulares para los que existe una curva cúbica de ecuación

$$y = x^3 + ax^2 + bx + c; \quad a, b, c \text{ reales},$$

que pasa por todos sus vértices.

Problema 189 *(propuesto por el editor)*
A, B, C, D, E son cinco puntos en una circunferencia. Se trazan cónicas tangentes a los lados de los triángulos BCD, CDA, DAB y ABC, respectivamente, y para las cuales E es un foco. Demostrar que todas son parábolas, y que sus directrices son tangentes a otra parábola de foco E.
Nota: este problema no es nuevo. Se dará noticia de su procedencia cuando se publique la solución)

Problema 190 *(propuesto por el editor)*
La quinta potencia de un número entero es congruente con 5, módulo 91. Demostrar que el número es congruente con 31, módulo 91.
Nota: este problema no es nuevo. Se dará noticia de su procedencia cuando se publique la solución)

PROBLEMA 181, *propuesto por Pedro H.O. Pantoja, UFRN, Natal, Brasil*

Hallar todos los polinomios $p(x)$, con coeficientes enteros, cuyo coeficiente de primer grado es nulo, tales que se verifican las dos condiciones siguientes:

a) $p(2009) + p(2009^2) + \cdots + p(2009^{100}) = 2008^{2009}$

b) $p(2009) = p'(2009)$.

Solución por Daniel Lasaosa Medarde, Universidad Pública de Navarra, Pamplona, España

Sea $p(x)$ un tal polinomio, y sea r su término independiente. Como $p'(x)$ tiene término independiente nulo (por tener $p(x)$ coeficiente de primer grado nulo), entonces $p'(2009)$ es múltiplo de 2009, luego $p(2009)$ es múltiplo de 2009, y finalmente r es múltiplo de 2009. Pero al ser enteros los coeficientes de $p(x)$, se tiene que, al ser $2009, 2009^2, \ldots, 2009^{100}$ múltiplos de 2009, entonces $p(2009)$, $p(2009^2)$,..., $p(2009^{100})$ son múltiplos de 2009, es decir, 2008^{2009} debe ser múltiplo de 2009. Hemos llegado a una contradicción, con lo que no hay ningún tal polinomio.

PROBLEMA 182, *propuesto por Pedro H.O. Pantoja, UFRN, Natal, Brasil*

Demostrar que la ecuación

$$x^3 - y^4 - 32 + 4^z = (1-x)^3 + 6w^2 + 6t(t-1) + 219$$

tiene infinitas soluciones (x, y, z, w, t) en enteros.

Solución por Daniel Lasaosa Medarde, Universidad Pública de Navarra, Pamplona, España

Sean $x = 6$, $t = w = 3$. Tenemos entonces que la ecuación se reduce a $y^4 = 4^z$, que se satisface para cualquier entero no negativo a tomando $y = 2^a$ y $z = 2a$. Existen por lo tanto al menos tantas soluciones enteras como enteros no negativos a.

PROBLEMA 183, *propuesto por Laurentiu Modan, Bucarest, Rumanía*

Calcular, si existen, los siguientes límites :

$$\text{a)} \quad L_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2+n^2}{n^2} \ln\frac{k+n}{k}$$

$$\text{b)} \quad L_2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2+n^2}{n^2} \ln\frac{k^2+n^2}{k^2}$$

Solución por Daniel Lasaosa Medarde, Universidad Pública de Navarra, Pamplona, España

Sean

$$f(x) = (x^2+1)\ln\frac{x+1}{x}, \qquad g(x) = (x^2+1)\ln\frac{x^2+1}{x^2}.$$

Claramente, los límites pedidos son las sumas de Riemann respectivas para aproximar las integrales de estas dos funciones en el intervalo $(0,1)$. Se tiene entonces que los límites existirán cuando dichas integrales existan, siendo entonces iguales a dichas integrales. Ahora bien, integrando por partes,

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{4}{3}\ln 2 - \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^3+3x}{3}\ln\frac{x+1}{x}\right) + \int_0^1 \frac{x^3+3x}{3}\frac{1}{x(x+1)}dx =$$

$$= \frac{4}{3}\ln 2 - \lim_{y\to\infty}\left(\frac{y}{e^y-1}\left(1+\frac{1}{3(e^y-1)^2}\right)\right) + \int_0^1\left(\frac{x-1}{3}+\frac{4}{3(x+1)}\right)dx =$$

$$= \frac{4}{3}\ln 2 - 0 - \frac{1}{6} + \frac{4}{3}\ln 2 = \frac{16\ln 2 - 1}{6},$$

donde se ha realizado el cambio de variable $y = \ln\frac{x+1}{x}$, y se ha utilizado que $\lim_{y\to\infty}\frac{y}{e^y-1} = 0$ al crecer la función exponencial mucho más rápido que la variable. Además, integrando nuevamente por partes,

$$\int_0^1 g(x)dx = \frac{4}{3}\ln 2 - \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^3+3x}{3}\ln\frac{x^2+1}{x^2}\right) + \int_0^1 \frac{x^3+3x}{3}\frac{2}{x(x^2+1)}dx =$$

$$= \frac{4}{3}\ln 2 - \lim_{z\to\infty}\left(\sqrt{\frac{z^2}{e^z-1}}\left(1+\frac{1}{3(e^z-1)}\right)\right) + \int_0^1\left(\frac{2}{3}+\frac{4}{3(x^2+1)}\right)dx =$$

$$= \frac{4}{3}\ln 2 - 0 + \frac{2}{3} + \frac{4}{3}\arctan(1) = \frac{4\ln 2 + \pi + 2}{3}.$$

donde se ha realizado el cambio de variable $z = \ln\frac{x^2+1}{x^2}$, y se ha utilizado que $\lim_{z\to\infty}\frac{z^2}{e^z-1} = 0$ al crecer la función exponencial mucho más rápido que la función cuadrática. Se tiene pues finalmente que ambos límites existen, y

$$L_1 = \frac{16\ln 2 - 1}{6}, \qquad L_2 = \frac{4\ln 2 + \pi + 2}{3}.$$

PROBLEMA 184, *propuesto por Luis Gómez Sánchez, Universidad de Oriente, Venezuela*

Resolver la ecuación

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-2}}{(1+x^k)(1+x^{k-2})} = \frac{1}{18}; \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Solución por Daniel Lasaosa Medarde, Universidad Pública de Navarra, Pamplona, España

Denotemos $a_k = \frac{x^{k-2}}{(1+x^k)(1+x^{k-2})}$, y para cualquier entero positivo n, sean $S_{2n-1} = a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2n-3} + a_{2n-1}$, y $S_{2n} = a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{2n-2} + a_{2n}$. Demostraremos por inducción que

$$S_{2n-1} = \frac{1-x^{2n}}{(1+x)(1-x^2)(1+x^{2n-1})}, \qquad S_{2n} = \frac{1-x^{2n}}{2(1-x^2)(1+x^{2n})}.$$

Para $n = 1$, el resultado es trivialmente cierto, ya que

$$S_1 = a_1 = \frac{x^{-1}}{(1+x)(1+x^{-1})} = \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{1-x^{2\cdot 1}}{(1+x)(1-x^2)(1+x^{2\cdot 1-1})},$$

$$S_2 = a_2 = \frac{1}{(1+x^2)2} = \frac{1-x^{2\cdot 1}}{2(1-x^2)(1+x^{2\cdot 1})}.$$

Si el resultado es cierto para algún n, entonces para $n+1$ tenemos

$$S_{2(n+1)-1} = S_{2n-1} + a_{2n+1} = \frac{(1-x^{2n})(1+x^{2n+1}) + x^{2n-1}(1+x)(1-x^2)}{(1+x)(1-x^2)(1+x^{2n-1})(1+x^{2n+1})} =$$

$$= \frac{1+x^{2n-1}-x^{2n+2}-x^{4n+1}}{(1+x)(1-x^2)(1+x^{2n-1})(1+x^{2n+1})} = \frac{1-x^{2(n+1)}}{(1+x)(1-x^2)(1+x^{2(n+1)-1})},$$

mientras que

$$S_{2(n+1)} = S_{2n} + a_{2n+2} = \frac{(1-x^{2n})(1+x^{2n+2}) + 2x^{2n}(1-x^2)}{2(1-x^2)(1+x^{2n})(1+x^{2n+2})} =$$

$$= \frac{1+x^{2n}-x^{2n+2}-x^{4n+2}}{2(1-x^2)(1+x^{2n})(1+x^{2n+2})} = \frac{1-x^{2(n+1)}}{2(1-x^2)(1+x^{2(n+1)})}.$$

Claramente, la ecuación no puede tener solución si $x = 1$, pues entonces $a_k = \frac{1}{4}$ para todo k, y la suma diverge, mientras que si $x = -1$, los términos con k impar de la suma no están definidos. Ahora bien, si $|x| > 1$,

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n-1} = \frac{x}{(1+x)(x^2-1)}, \qquad \lim_{n\to\infty} S_{2n} = \frac{1}{2(x^2-1)},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-2}}{(1+x^k)(1+x^{k-2})} = \frac{x}{(1+x)(x^2-1)} + \frac{1}{2(x^2-1)} = \frac{3x+1}{2(1+x)(x^2-1)}.$$

Luego cualquier solución de la ecuación con $|x| > 1$ ha de cumplir

$$9(3x+1) = (1+x)(x^2-1), \qquad 0 = x^3+x^2-28x-10 = (x-5)(x+3+\sqrt{7})(x+3-\sqrt{7}).$$

ahora bien, si $x = -3 + \sqrt{7}$, claramente $|x| = \frac{2}{3+\sqrt{7}} < 1$, luego las únicas soluciones con $|x| > 1$ son $x = 5$ y $x = -3 - \sqrt{7}$. Supongamos finalmente que $|x| < 1$. Entonces,

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n-1} = \frac{1}{(1+x)(1-x^2)}, \qquad \lim_{n\to\infty} S_{2n} = \frac{1}{2(1-x^2)},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-2}}{(1+x^k)(1+x^{k-2})} = \frac{1}{(1+x)(1-x^2)} + \frac{1}{2(1-x^2)} = \frac{3+x}{2(1+x)(1-x^2)}.$$

Luego cualquier solución de la ecuación con $|x| < 1$ ha de cumplir

$$9(3+x) = (1+x)(1-x^2), \qquad 0 = 26 + 8x + x^2 + x^3.$$

Pero esta última ecuación no puede tener solución con $|x| < 1$, pues se tiene $|8x + x^2 + x^3| < 8 + 1 + 1 = 10 < 26$, y la igualdad no se puede alcanzar con $|x| < 1$. Concluimos entonces que las soluciones de la ecuación propuesta son

$$x = 5, \qquad x = -3 - \sqrt{7}.$$

PROBLEMA 185, *propuesto por el editor*

$ABCD$ es un paralelogramo; el orden de las letras indica el sentido antihorario. E es un punto fijo de la recta BC. Se dividen AB y AD en el mismo número de partes iguales, y se unen E y C con los correspondientes puntos de AB y AD. Determinar el lugar geométrico de los puntos de intersección de esas rectas.

Solución por Daniel Lasaosa Medarde, Universidad Pública de Navarra, Pamplona, España

Nótese antes de empezar que existen dos casos "patológicos", que suceden cuando E coincide con B, en cuyo caso el lugar geométrico buscado es la semirrecta contenida en AB, que parte de A y no pasa por B, y cuando E coincide con C, en cuyo caso el lugar geométrico coincide con el punto C. Para el resto de casos, es válida la siguiente solución:

Sea un sistema de coordenadas con el origen en el vértice A, y de forma que el semieje positivo de abscisas contiene al lado AB. Llamando $a = AB$, $b = DA$, $0 < \angle BAD = \alpha < \pi$, se tiene que las coordenadas de los vértices del paralelogramo son

$$A \equiv (0,0), \qquad B \equiv (a,0), \qquad C \equiv (a + b\cos\alpha, b\sin\alpha), \qquad D \equiv (b\cos\alpha, b\sin\alpha).$$

Realicemos entonces un cambio lineal de coordenadas, llamando $u = \frac{x}{a} - \frac{y}{a\tan\alpha}$, $v = \frac{y}{b\sin\alpha}$, con lo que los vértices del paralelogramo pasan a ser $A \equiv (0,0)$, $B \equiv (1,0)$, $C \equiv (1,1)$ y $D \equiv (0,1)$. Las rectas cuya intersección queremos encontrar pasan entonces, para cualquier $0 < \rho < 1$, por $(\rho, 0) \in AB$ y $E \equiv (1,h)$, y por $(0,\rho) \in AD$ y $C \equiv (1,1)$, donde al tomar h todos los posibles valores reales, el punto E recorre la recta BC. Estas dos rectas vienen claramente definidas por las respectivas ecuaciones

$$v = \frac{h(u-\rho)}{1-\rho}, \qquad v = (1-\rho)u + \rho.$$

El punto de intersección de ambas es entonces

$$P \equiv \left(\frac{\rho(h+1-\rho)}{h-(1-\rho)^2}, \frac{h - h(1-\rho)^2}{h-(1-\rho)^2} \right).$$

Podemos despejar $(1-\rho)^2 = \frac{h-hv}{h-v}$, y $u - 1 = \frac{(1-\rho)(1-h)}{h-(1-\rho)^2} = \frac{(1-\rho)(v-h)}{h}$, es decir,

$$\left(v - \frac{1+h}{2} \right)^2 - h(u-1)^2 = \frac{(1-h)^2}{4}.$$

Se tiene entonces que el lugar geométrico pedido es un trozo de cónica, que será respectivamente una hipérbola o una elipse, según el signo de h, es decir, según E esté en la semirrecta que, partiendo de B, pase por C ($h > 0$), o no pase por C ($h < 0$). Nótese que el centro de la cónica es el punto de coordenadas $(1, \frac{h+1}{2})$, es decir, el punto medio de CE, y que la cónica pasa claramente por A y C. Nótese también que, derivando implícitamente respecto de la coordenada u, tenemos que $(2v - 1 - h)v' - 2h(u-1) = 0$, es decir, $v' = 0$ cuando $u = 1$, o lo que es lo mismo, la cónica es tangente al lado CD en C. Estas propiedades (el lugar geométrico es un trozo de cónica que pasa por A y C, la cónica está centrada en el punto medio de CE, la cónica es tangente a CD en C), se preservan bajo cambios lineales de coordenadas, con lo que también son ciertas para el lugar geométrico en el sistema de coordenadas original.

Nótese finalmente que las anteriores propiedades definen exactamente una cónica que es una elipse o hipérbola; sin pérdida de generalidad, escribimos la ecuación de dicha cónica como $x^2+Ty^2+Uxy+Vx+Wy=0$, ya que el término independiente debe ser nulo al pasar por $A\equiv(0,0)$. Derivando implícitamente, se tiene que $2x_C+y_CU+V=-2x_C$ para que la cónica sea tangente a la recta $CD\equiv y=y_C$ en el punto $C\equiv(x_C,y_C)$. El que la cónica pase por C nos da la condición adicional $y_C^2T+x_Cy_CU+x_CV+y_CW=-x_C^2$. Denotando por (x_0,y_0) al centro de la cónica, si transformamos cualquiera de sus puntos (x,y) en el punto $(2x_0-x,2y_0-y)$, el punto sigue perteneciendo a la cónica, con lo que la ecuación de la cónica debe ser invariante ante esta transformación, lo cuál nos proporciona las ecuaciones adicionales $2y_0^2T+2x_0y_0U+x_0V+y_0W=-2x_0^2$, $y_0U+2V=-2x_0$, $2y_0T+x_0U+W=0$, siendo la primera redundante pues es combinación lineal de las otras dos. Hemos agotado las condiciones, obteniendo cuatro ecuaciones lineales para cuatro incógnitas T,U,V,W. Se puede comprobar que el sistema es compatible y determinado a menos que estemos en uno de los dos casos patológicos mencionados al principio de esta solución, es decir, siempre que no nos hallemos en uno de dichos casos patológicos, existe una y sólo una cónica que cumple las condiciones halladas, y el lugar geométrico buscado es un trozo de la misma comprendido entre A y C; nótese que, según la posición del punto E, este trozo puede ser exterior al paralelogramo, e incluso cuando la cónica sea una hipérbola, es posible que al desplazarse los puntos sobre los segmentos AB, AD desde A hacia B y D, respectivamente, el lugar geométrico vaya desde A hasta C, por el exterior del paralelogramo, y "pasando por el infinito", es decir, recorriendo una rama entera de la hipérbola salvo un trozo acotado de la misma. Podemos fácilmente hallar un punto E para el que esto se cumpla: nos basta con tomar puntos P y Q en AB, AD tales que $AP/AB=AQ/AD$, y tomar entonces E como el punto de intersección de BC y la paralela a CQ por P; nótese que este punto E estará claramente en el interior del lado BC.

Nota: Hablando en propiedad, ρ no toma todos los valores reales en $(0,1)$, sino los valores racionales entre 0 y 1, al ser $(\rho,0)$ uno de los puntos de división del lado AB en partes iguales. Por lo tanto, aunque hemos hallado que todos los puntos de intersección pedidos están sobre un trozo de cónica, si nos restringimos estrictamente a la definición del enunciado, el conjunto de puntos de intersección será un subconjunto denso y numerable en dicho trozo de cónica.

DIVERTIMENTOS MATEMÁTICOS (38)

Algunas citas tomadas del libro *Infinitum,* del Prof. Juan Guirado

Ley de Murphy

Si algo puede salir mal, saldrá mal

Segunda Ley de Scott

Cuando se ha detectado y corregido un error, se suele descubrir que no era un error

Corolario: *Después de la corrección, será imposible volver a poner en la ecuación la cantidad original*

Ley de Finman

Nadie quiere leer las fórmulas de otro

Ley de Gumperson

La probabilidad de que suceda algo es inversamente proporcional a lo que se quiere que suceda

Ley de Maine

Nadie nota los errores grandes

Ley de Natalie

No lo comprenderá hasta después del examen

Ley de Sprinkel

Las cosas siempre caen en ángulo recto

Ley de la Idea Genial

Cuando a usted se le ocurra la solución ideal, alguien habrá resuelto ya el problema

Postulado de Tylczak

Los sucesos fortuitos tienden a suceder todos juntos

Valladolid, mayo de 2010.

Por la transcripción: Francisco Bellot

Comentario de libros, páginas web y reseñas de Congresos (38)

Comentario al libro *Making Mathematics Come to Life (A Guide for Teachers and Students),* de O.A. Ivanov; AMS, 2009.

En febrero de 2010 asistí en Albacete al Primer Congreso de Educación Matemática de la Sociedad Castellano-Manchega de Profesores de Matemáticas, donde presenté un Taller de Resolución de problemas. En uno de los problemas presentados se utilizaba la fórmula de Pick, que da el área de un polígono simple cuyos vértices tienen coordenadas enteras. Pocos días después, uno de los asistentes al Taller me indicó que se había publicado el libro objeto de este comentario, y en el que se incluía una demostración del teorema de Pick.

El libro es la traducción al inglés de un libro ruso publicado en 2009. El autor es Oleg A. Ivanov, Profesor de la Facultad de matemáticas y mecánica de la Universidad Estatal de San Petersburgo, y sin lugar a dudas se puede decir que es una joya para cualquier biblioteca. En su prólogo, A.S. Merkuriev dice: *No es un libro de problemas, ni un libro de texto, ni un libro de lectura sobre matemáticas. Más que todo eso, es lo que queda después de un buen curso, del que el estudiante inteligente sale con mucho más de lo que se dijo en las lecciones. Me gusta el comienzo de cada capítulo, con problemas elementales como punto de partida de la exposición subsiguiente, y también la forma en que el autor sabe detenerse en la exposición de los temas teóricos. Me gusta el carácter y la distribución de la multitud de ejercicios que, por un lado, hacen el libro fácil de leer, y por otro, dan al lector reflexivo la oportunidad de comprobar lo que realmente ha entendido.*

Yo añadiría que me gustan también los Comentarios de naturaleza pedagógica que aparecen al final de varios capítulos, y el capítulo final: *Cómo buscar soluciones a los problemas, o Fantasía al estilo de Pólya.*

Pero además es uno de los pocos libros que yo conozco en el que el dificilísimo teorema de Muirhead se expone de una manera didáctica, yendo de lo sencillo a lo más complicado. Basta recordar los clásicos de Hardy, Littlewood y Pólya *Inequalities,* o el más moderno tratado de Marshall y Olkin *Inequalities: Theory of Majorization and its applications,* en los que la demostración del teorema es extraordinariamente difícil de seguir. Recientemente se ha publicado también, en este caso por Bikhäuser, *Inequalities, A mathematical Olympiad Approach,* de los autores mexicanos Bulajich, Gómez Ortega y Valdez, y en donde el tratamiento del teorema de Muirhead es, a mi juicio, muy bueno (desde el punto de vista de cómo enseñarlo, que es lo verdaderamente difícil); la corrección formal “se le supone”, como el valor en los militares.

Pero además el autor del libro recuerda en la introducción el papel jugado en su vida por la Escuela de Matemáticas y Física nº 30 de San Petersburgo y uno de sus profesores, Iosif Yakovlevich Verebeichik, de quien dice que siempre recordará las cualidades que les imbuyó en sus clases durante los 10 años que enseñó en esa Escuela : responsabilidad, capacidad de trabajar duramente, precisión en el razonamiento, apertura a nuevas ideas, confianza en sí mismos. Para los estudiantes de la generación de Ivanov, Verebeichik (1921-2007) es *su maestro*, y la Escuela nº 30, *su* escuela.

Es gratificante leer esas cosas en un libro. En mi opinión, ni las Matemáticas son frías, ni los matemáticos insensibles.

Valladolid, mayo de 2010.

Francisco Bellot Rosado

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática
ISSN 1698-677X

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http:www.oei.es/oim/revistaoim/

Desarrollada en el Centro de Altos Estudios Universitarios de la OEI con el apoyo de la Agencia Española de Cooperación Internacional para el Desarrollo (AECID)

Editor: Francisco Bellot Rosado

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

Número 37 (noviembre 2009 – enero 2010)

ISSN – 1698-277X

ÍNDICE

Problemas resueltos

Problema 176

Recibidas soluciones de: Roberto Bosch Cabrera, La Habana, Cuba; Luis Gómez Sánchez-Alfaro, Univ. de Oriente, Venezuela; Cristóbal Sánchez Rubio, Benicassim, España; Raúl A. Simón Eléxpuru, Santiago, Chile; y del proponente. Presentamos la solución de Sánchez Rubio.

Problema 177

Recibidas soluciones de: Devis M. Alvarado, estudiante, UNH, Tegucigalpa, Honduras; Ovidiu Furdui, Cluj, Rumania; Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, España y el proponente.. Presentamos la solución de Alvarado.

Problema 178

Recibidas soluciones de: Devis M. Alvarado, estudiante, UNH, Tegucigalpa, Honduras; Roberto Bosch Cabrera (2 soluciones), La Habana, Cuba; Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, España; Pedro H.O. Pantoja, UFRN, Natal, Brasil; Paolo Perfetti, Dipart. di Matematica, Univ. "Tor Vergata", Roma, Italia; Cristóbal Sánchez Rubio, Benicassim, Castellón; y del proponente. Presentamos la solución de Sánchez Rubio (similar a la primera de Roberto Bosch y a la de Lasaosa)
Nota del editor: Este problema, o mejor dicho, las soluciones recibidas, me ha hecho recordar un comentario del final del primer capítulo del libro *Tres perlas de teoría de números,* de A.J.Chintschin, dedicado al teorema de Van der Waerden sobre progresiones aritméticas: *"Vemos cuán complicado puede llegar a ser un resultado completamente elemental".*

Problema 179

Recibidas soluciones de Roberto Bosch Cabrera, La Habana, Cuba;Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, España; y del proponente. Presentamos las soluciones de Bosch y de Lasaosa.

Problema 180

Recibidas soluciones de: Devis M. Alvarado, estudiante, UNH, Tegucigalpa, Honduras; Roberto Bosch Cabrera, La Habana, Cuba; Ovidiu Furdui, Cluj, Rumania; Kee-Wai Lau, HongKong, China; Paolo Perfetti, Dip. di Matematica, Univ. "Tor Vergata", Roma, Italia; y del proponente. Presentamos la solución de Alvarado.

Comentario de páginas web, de libros publicados y noticia de Congresos 37

Comentario al libro "21 Aulas de Matemática Olímpica", de Carlos Yuzo Shine. (Comentario de F. Bellot)

Divertimentos matemáticos 37
Algunas citas de *Mathematical Circles, de Howard E. Eves*

Desarrollada en el Centro de Altos Estudios Universitarios de la OEI con el apoyo de la Agencia Española de Cooperación Internacional para el Desarrollo (AECID)

Acceder

http://www.oei.es/oim/revistaoim/numero37.htm

EL PEQUEÑO TEOREMA DE FERMAT Y APLICACIONES

Un enfoque heurístico, una demostración elemental y algunas aplicaciones del mismo

FRANCISCO BELLOT ROSADO

La lección de preparación olímpica que presento a continuación ha sido expuesta en el Seminario de Problemas de Valladolid, el miércoles 14 de octubre de 2009.

UN PROBLEMA PARA EMPEZAR

Un disco, dividido en p (p, primo) sectores iguales, se desea colorear con n colores, pudiendo estar varios, o todos los sectores, pintados del mismo color. No se consideran distintas dos coloraciones tales que se pueda deducir una de otra girando el disco alrededor de su centro, en un cierto sentido (horario o antihorario, pero no los dos).

¿De cuántas maneras se puede hacer esto?

(Origen del problema : la Olimpiada de la antigua Unión Soviética)

Tras unos momentos de reflexión, hago la siguiente sugerencia a los alumnos:

F.B.: *Por si alguno no se siente cómodo por no haberos dado valores particulares de n y p, sería perfectamente razonable empezar a ver lo que sucede con valores pequeños de n y p, para comprender bien el problema.*

Primer caso: *n=2, p=2.*

Varios alumnos contestan en seguida : 3 coloraciones. Las dibujo en el encerado, siguiendo las respuestas de los alumnos.

Segundo caso: *n=2, p=3.*

La respuesta es igualmente rápida : 4 coloraciones, que igualmente se dibujan en el encerado.

Tercer caso : *n=3, p=3.*

Ahora tarda un poco más en aparecer la respuesta correcta; tras una respuesta de 10, otro alumno justifica que ha de considerarse una más, porque los giros se hacen en un solo sentido : 11 coloraciones.

Cuarto caso : *n=4, P=3.*

Alguno aventura 24, sin mucha convicción... les digo que sí, que esa es la respuesta.

Escribo entonces en el encerado las igualdades (¡obvias!)

$$3=1+2;\ 4=2+2;\ 11=8+3;\ 24=20+4$$

Hago ver que el segundo sumando de cada suma coincide con *n*.

Para contar las coloraciones utilizaremos, en todos los casos, el siguiente procedimiento:

Primero se considera el disco fijo, y los sectores numerados, de 1 a *p*; y se cuentan las coloraciones posibles así, que resultan ser n^p.

(Para los no convencidos, hago el típico ejemplo de las quinielas: ¿Cuántas columnas de 14 partidos hay que rellenar para estar seguros de que en una de ellas tenemos 14 aciertos?). Salvo los alumnos de 2º de Bachillerato, en el grupo de Olimpiadas hay alumnos de 3º, 4º de E.S.O. y 1º de Bachillerato; la Combinatoria se estudia en 4º, pero no tan pronto. Por lo tanto, prefiero obviar el tecnicismo de llamarle "número de variaciones con repetición".

Después se restan las que corresponden a un solo color, que son *n.* Así, con el disco fijo y los sectores numerados, tenemos

$$n^p - n$$

coloraciones en donde por lo menos se utilizan dos colores.

A continuación se eliminan los números de los sectores. ¿Qué efecto tiene esto sobre las coloraciones que inicialmente eran diferentes? ¿Cuántas coloraciones que eran diferentes coincidirán al borrar la numeración de los sectores?

Los alumnos van examinando los casos vistos hasta ahora y contestan:

Primer caso: 2

Segundo caso: 3

Tercer caso: 3

Cuarto caso: 3

La supresión de los números de los sectores equivale a hacer giros de

$$\frac{k \bullet 360^{\circ}}{p}$$

grados de amplitud alrededor del centro del disco; o lo que es lo mismo, cada coloración no monocromática se cuenta *p* veces: la inicial y las que resultan de los *p-1* giros de amplitudes

$$\frac{1 \bullet 360^{\circ}}{p}, \frac{2 \bullet 360^{\circ}}{p}, \ldots, \frac{(p-1) \bullet 360^{\circ}}{p}.$$

Es instructivo ver cuáles son esos giros en los casos particulares estudiados. En el primer caso hay un solo giro (*p-1=1)* y en todos los demás hay 2.

Entonces parece que ya estamos en condiciones de formular la respuesta a la pregunta del problema, con generalidad : **el número de coloraciones es**

$$\frac{n^p - n}{p} + n \text{.}$$

La respuesta al problema es un número natural; por lo tanto, como consecuencia se obtiene que

n^p-n es múltiplo de p, si p es un número primo.

Doy nombre a esta proposición : “Pequeño teorema de Fermat”, enunciado en una carta de Fermat del 18 de octubre de 1640 a su amigo Frénicle de Bessy, naturalmente sin demostración (en esto, Fermat era un verdadero experto) y con una formulación ligeramente diferente. Leibniz dejó una demostración en un manuscrito no publicado, antes de 1683, y Euler publicó la suya en 1736 (*Theorematum Quorundam ad Numeros Primos Spectantium Demonstratio).* La expresión “Pequeño teorema de Fermat” se usó por primera vez en 1913 en un libro alemán de Teoría de Números.

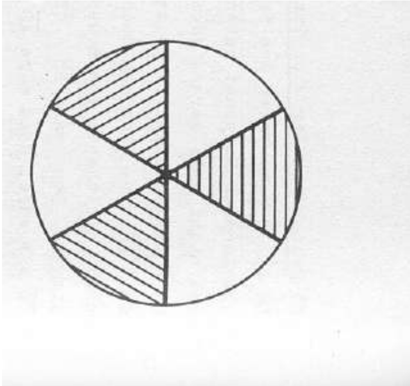
Retrato de Fermat

FB ante la estatua de Fermat en el pueblo natal de Fermat, Beaumont de Lomagne, en el Sur de Francia, verano de 2002

Acto seguido pregunto: ¿qué ocurriría si p no fuera primo, por ejemplo si tenemos el caso $n=2, p=6$?

Una alumna mete los datos en su calculadora para ver el valor de la fracción que da el número de coloraciones no monocromáticas y encuentra un número decimal. Le digo : acabas de comprobar que el resultado no es válido si p no es primo.

Gráficamente la situación se puede visualizar como



y aquí un giro de 120º transforma la figura en sí misma.

A continuación lanzo la pregunta

¿Os parece que hemos demostrado algo?

No hay unanimidad en las respuestas; los que me conocen de años anteriores se inclinan por el NO; a otros les parece que el argumento se debilita al decir que *p* de las coloraciones coinciden cuando se suprimen los números de los sectores; algunos se muestran convencidos de la bondad del argumento. Con objeto de eliminar cualquier sombra de duda, expongo una de las demostraciones del libro *Selected Problems and Thorems in Elementary Mathematics,* de D.O.Schklyarsky, N.N.Chentsov e I.M. Yaglom, MIR, Moscú 1979, que considero al alcance de todos los alumnos de la audiencia.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA

Se puede suponer, sin pérdida de la generalidad, que *n* no es divisible por *p* (porque en tal caso el resultado es evidente). Entonces los números

n, 2n, 3n, ..., (p-1)n

tampoco son divisibles por *p*, y los restos de su división por *p* son DIFERENTES. Justifiquemos esta última afirmación. Si *kn* y *ln* (con $p-1 \geq k > l$) dieran el mismo resto al ser divididos por *p,* entonces su diferencia $k \bullet n - l \bullet n = (k-l)n$ tendría que ser divisible por *p*, pero eso es imposible porque *p* es primo, *n* no es divisible por *p,* y $k - l < p$.

Como los posibles restos de la división por *p* son 1,2,3,...,p-1, se tiene

$$n = q_1 p + a_1; 2n = q_2 p + a_2, \cdots, (p-1)n = q_{p-1} p + a_{p-1},$$

donde los números $a_1, a_2, \cdots, a_{p-1}$ son 1,2,...,p-1 en algún orden. Multiplicando todas esas igualdades se obtiene

$$\left[1\bullet 2\bullet 3\bullet\cdots\bullet(p-1)\right]n^{p-1}=Np+a_1\bullet a_2\bullet\cdots\bullet a_{p-1}\ ,$$

o lo que es igual

$$\left[1\bullet 2\bullet 3\bullet\cdots\bullet(p-1)\right]\left(n^{p-1}-1\right)=Np\ .$$

De aquí que $\left(n^{p-1}-1\right)$es divisible por *p* (esta es la forma en que Fermat formuló su teorema) y multiplicando por *n* se obtiene el resultado.

Finalizada la demostración, pido a los alumnos que enuncien el resultado recíproco (para algunos era la primera vez que oían esa expresión) . Se formula como

Si n^p-n es múltiplo de p, entonces p es primo.

Acto seguido señalo que, desafortunadamente, esta proposición es falsa, como lo prueba el contraejemplo (tomado de *Problem Solving strategies,* de Arthur Engel, un libro indispensable en la preparación de Olimpiadas):

341 divide a 2^{341}-2,

pero 341=31x11 no es primo; y la expresión en negrita se justifica escribiendo

$$2^{341}-2=2\left(2^{340}-1\right)=2\left(\left(2^{10}\right)^{34}-1^{34}\right)=2\left(2^{10}-1\right)(\cdots)=2\bullet 3\bullet 341\bullet(\cdots)\ .$$

Este es el menor contraejemplo al recíproco, por lo que a mi entender no resultaría conveniente haberles pedido que fueran comprobando algunos casos para valores pequeños de *p* y *n.*

En el libro de Engel antes citado se incluyen tres demostraciones del teorema: por inducción, utilizando congruencias y de tipo combinatorio (con collares, pero utilizando el concepto de permutaciones cíclicas, no apropiado para esta audiencia en este momento). En el de los tres autores rusos mencionados antes se incluye una segunda demostración, por inducción y el teorema del binomio. Una búsqueda en Internet da como resultado siete demostraciones, una de ellas por teoría de grupos, otra sistemas dinámicos y una tercera con la fórmula de Leibniz para la potencia de un polinomio, también conocida como fórmula multinomial. Personalmente, mi favorita es la que acabo de exponer.

ALGUNOS PROBLEMAS DONDE SE APLICA EL TEOREMA

Observación previa

Para agilizar la aplicación del teorema de Fermat es necesario utilizar el concepto y propiedades de las congruencias. Resumo, sin demostración, algunas de sus propiedades.

Si los enteros *a* y *b* dan el mismo resto al ser divididos por el entero *k*, se dice que ambos son congruentes respecto al módulo *k,* y se escribe $a \equiv b(\mathrm{mod}\, k)$. Las principales propiedades de las congruencias son:

$a \equiv a(\mathrm{mod}\, k)$ (propiedad reflexiva)

Si $a \equiv b(\mathrm{mod}\, k)$, entonces $b \equiv a(\mathrm{mod}\, k)$ (propiedad simétrica)

Si $a \equiv b(\mathrm{mod}\, k)$, y $b \equiv c(\mathrm{mod}\, k)$, entonces $a \equiv c(\mathrm{mod}\, k)$ (propiedad transitiva)

Las congruencias se pueden sumar y multiplicar:

Si $a \equiv b(\mathrm{mod}\, k)$ y $c \equiv d(\mathrm{mod}\, k)$, entonces $\left(a \pm c\right) \equiv \left(b \pm d\right)(\mathrm{mod}\, k)$

Si $a \equiv b(\mathrm{mod}\, k)$ y $c \equiv d(\mathrm{mod}\, k)$, entonces $\left(ac\right) \equiv \left(bd\right)(\mathrm{mod}\, k)$.

Pero en general no se pueden dividir los términos de una congruencia, salvo por un número que sea primo con el módulo de la congruencia.

1.- Calcular el resto de la división por 13 del número 7^{44}.

Por el pequeño teorema de Fermat, 7^{12}-1 es múltiplo de 13, lo cual significa que 7^{12} da resto 1 al ser dividido por 13. De aquí resulta que $7^{36}=(7^{12})^3$ también da resto 1 al ser dividido por 13. Entonces 7^{44} y 7^8 dan el mismo resto al ser divididos por 13. Pero 7^2 da resto 10 al ser dividido por 13, 7^4 da el mismo resto que 10^2, es decir, 9. Entonces 7^8 da el mismo resto que $9^2=81$, es decir, da resto 3 cuando se divide por 13, y esta es la respuesta.

2.- Demostrar que $2^{70} + 3^{70}$ es divisible por 13.

Por el pequeño teorema de Fermat, 2^{12} da resto 1 al ser dividido por 13, así que $2^{60} = (2^{12})^5$ dará resto $1^5 = 1$. Como 2^5 da resto 6, 2^{10} dará resto -3 al ser dividido por 13. Entonces 2^{70} da resto -3 al ser dividido por 13.

Por otra parte, 3^3 da resto 1, y lo mismo ocurre con 3^{69}. De aquí que 3^{70} dará resto 3. Entonces, sumando $2^{70} + 3^{70}$ dará resto -3+3 =0, es decir, será divisible por 13.

3.- Demostrar que los posibles restos de la división por 7 de un cubo perfecto son 0, 1 ó 6.

Sea *n* un número natural cualquiera. 7 es evidentemente primo.

Si *n* no es divisible por 7, entonces por el teorema de Fermat,

$$n^6 \equiv 1 \pmod 7 \Leftrightarrow n^6 - 1 \equiv 0 \pmod 7 \Leftrightarrow (n^3 - 1)(n^3 + 1) \equiv 0 \pmod 7$$

Luego, o bien $(n^3 - 1) \equiv 0 \pmod 7$, o bien $(n^3 + 1) \equiv 0 \pmod 7$.

Si $(n^3 - 1) \equiv 0 \pmod 7$, esto es lo mismo que $n^3 \equiv 1 \pmod 7$.

Si $(n^3 + 1) \equiv 0 \pmod 7$, esto es lo mismo que $n^3 \equiv -1 \pmod 7 \Leftrightarrow n^3 \equiv 6 \pmod 7$.

Por último, si n es divisible por 7, n^3 también lo es, y $n^3 \equiv 0 \pmod 7$.

4.- Calcular el resto de la división de 2^{98} por 101.

Como 101 es primo, utilizando el teorema de Fermat tenemos que

$$2^{100} \equiv 1 \pmod{101} \Leftrightarrow 2^{98} \bullet 4 \equiv 1 \pmod{101} \Leftrightarrow 2^{98} \bullet 4 \equiv -100 \pmod{101}$$

Como 4 y 101 son primos entre sí, podemos dividir la última congruencia por 4 y obtenemos

$$2^{98} \equiv -25 \pmod{101} \Leftrightarrow 2^{98} \equiv 76 \pmod{101}.$$

Por lo tanto, el resto es 76.

5.- Demostrar que si *p* es primo, entonces, cualquiera que sea el número natural *n,* se tiene

$$\sum_{k=1}^{p} n^{mcd(k,p)} \equiv 0 \pmod p.$$

Se verifica

$\sum_{k=1}^{p} n^{mcd(k,p)} = n + n + \cdots + n + n^p$ (p-1 sumandos iguales a n), es decir

$(p-1)n + n^p = np + n^p - n$. Ahora bien,

(1) $np \equiv 0 \pmod p$

(2) $n^p \equiv n \pmod p \, (Teorema de Fermat) \Leftrightarrow n^p - n \equiv 0 \pmod p$

Y de (1) y (2) se obtiene el resultado.

6.- Si *p* es un número primo mayor que 5, demostrar que *p^4-1* es divisible por 240.

Sea *p* primo mayor que 5. Se tiene que 240 = 8x5x6 = 16x5x3.

$$p^4-1=\left(p^2-1\right)\left(p^2+1\right)=\left(p-1\right)\left(p+1\right)\left(p^2+1\right).$$

Como p es impar, entonces $p-1$ y $p+1$ son dos números pares consecutivos, así que su producto es múltiplo de 8. Pero p^2+1 también es par, así que el producto de los tres es múltiplo de 16.

Por el teorema de Fermat, $p^4-1\equiv 0\left(\operatorname{mod} 5\right)$.

Por otra parte, si $p>5$ es primo, p no puede ser divisible por 3, así que lo será uno de los números $p-1$ ó $p+1$.

Finalmente, 16, 5 y 3 son primos entre sí dos a dos, así que si p^4-1 es divisible por 16, por 5 y por 3, lo será por su producto, que es 240.

7.- Si *m* es primo, y *a,b* son dos números enteros positivos menores que m, demostrar que

$$a^{m-2}+a^{m-3}b+a^{m-4}b^2+\cdots+b^{m-2}$$

Es múltiplo de m.

Se verifica

$$a^{m-1}-b^{m-1}=\left(a-b\right)\left(a^{m-2}+a^{m-3}b+a^{m-4}b^2+\cdots+b^{m-2}\right).$$

Puesto que m es primo, y $a<m,b<m$, por el teorema de Fermat se tiene que

$$a^{m-1}\equiv 1\left(\operatorname{mod} m\right); b^{m-1}\equiv 1\left(\operatorname{mod} m\right);$$

por lo tanto su diferencia será múltiplo de m:

$$a^{m-1}-b^{m-1}\equiv 0\left(\operatorname{mod} m\right).$$

Como $a-b$ no puede ser múltiplo de m (de hecho, el mcd$(a-b,m)=1$),se obtiene el resultado.

PROCEDENCIA DE LOS PROBLEMAS

El problema 1 está tomado del libro *Introduction to Number Theory and Inequalities,* de C.J. Bradley (publicado por UKMT, 2006).

El problema 2 procede de uno de los libros “míticos” en Teoría de Números: *250 problèmes de théorie élémentaire des nombres,* de Waclaw Sierpinski (publicado en francés por Ed. Jacques Gabay, 1992), y cuya edición original en inglés se publicó en Varsovia en 1970.

Los restantes problemas proceden de una lección de Olimpiadas de la Prof. hispano-cubana María Emilia Santibáñez Piñera sobre el teorema de Fermat, no publicada (sin fecha; probablemente alrededor de 1987).

BIBLIOGRAFÍA

Además de las tres fuentes recién mencionadas, presento a continuación algunos libros válidos para la preparación de Olimpiadas en lo que se refiere a Teoría de Números:

1) Arthur Engel: *Problem solving strategies*; Springer 1998.

2) Enzo Gentile : *Aritmética Elemental en la formación matemática; Olimpiada Matemática Argentina, 1991.*

3) Saulo Rada Aranda : *Aritmética;* CENAMEC, Caracas 1992.

4) Waclaw Sierpinski: *Elementary Theory of Numbers;* North Holland&PNN, Amsterdam y Varsovia 1988.

5) Ivan Niven, Herbert S. Zuckerman, Hugh L. Montgomery : *An Introduction to the Theory of Numbers;* John Wiley, 1991.

El triángulo órtico en el *Court*

Francisco Javier García Capitán

4 de febrero de 2009

Resumen

Hacemos una lectura atenta de la sección THE ORTHIC TRIANGLE del libro *College Geometry, An Introduction to the Modern Geometry of the Triangle and the Circle*, de Nathan Altshiller-Court. En este caso, la lectura atenta consiste en la realización de algunas figuras que no vienen en el texto y en la resolución de los ejercicios propuestos.

1. Definición y propiedades

Definición. *El triángulo que tiene por vértices los pies de las alturas de un triángulo dado ABC se llama* triángulo órtico *del ABC.*

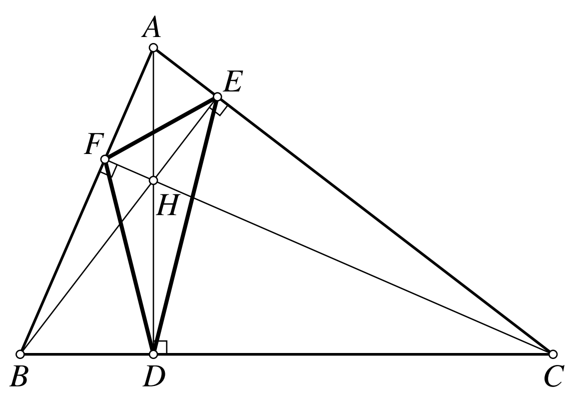


FIGURA 1

Propiedad 1. *Los triángulos AEF, DBF y DEC son semejantes al triángulo ABC*

Demostración. En efecto, por ser cíclico el cuadrilátero $BCEF$, los ángulos AEF y ABC son ambos complementarios del ángulo FEC, por lo que son iguales. De igual forma, $\angle AFE = \angle ABC$, así que los triángulos ABC y AEF son semejantes. Y lo mismo puede hacerse con los triángulos DBF y DEC.

Propiedad 2. *Si H es el ortocentro de un triángulo ABC y las alturas AH, BH, CH cortan a la circunferencia circunscrita a ABC en D', E', F', entonces se cumplen las igualdades: $HD = HD'$, $HE = HE'$, $HF = HF'$.*

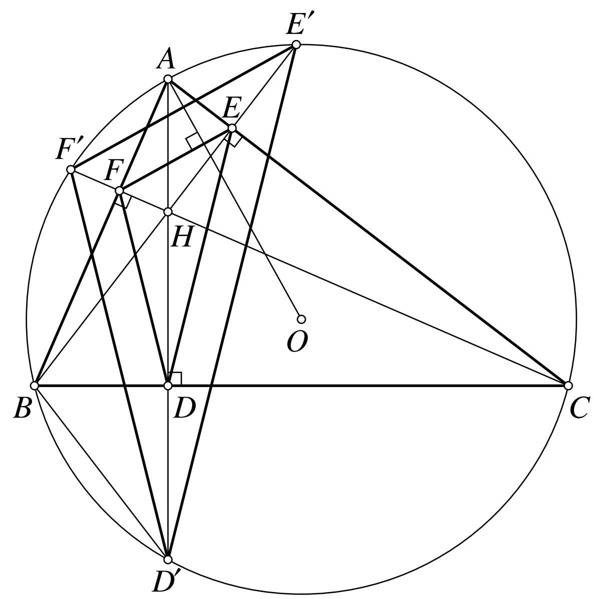


FIGURA 2

Demostración. Por ejemplo, en el triángulo BHD' tenemos

$$\angle BHD = \angle BFD = \angle C = \angle BCA = \angle BD'A = \angle BD'H.$$

En consecuencia, el triángulo BHD es isósceles, y su altura BD tambien es su mediana, por lo que $HD = HD'$.

Propiedad 3. *El triángulo $D'E'F'$ es el resultado de aplicar al triángulo DEF una homotecia de centro H y razón 2.*

Demostración. Por ser $HD = DD'$ es $HD' = 2 \cdot HD$ y lo mismo para los otros vértices.

Propiedad 4. *Cada vértice del triángulo ABC es el punto medio del arco determinado en la circunferencia circunscrita por las prolongaciones de las alturas trazadas desde los otros vértices.*

Demostración. Para obtener que A es el punto medio del arco $E'F'$ basta observar que por ser cíclico el cuadrilátero $BCEF$, tenemos

$$\angle ABE' = \angle FBE = \angle FCE = \angle F'CA.$$

Como consecuencia, obtenemos que la recta OA es perpendicular a la cuerda $E'F'$ y, por tanto, también es perpendicular al lado EF del triángulo órtico.

Propiedad 5. *El ángulo que forma el lado de un triángulo con el lado correspondiente del triángulo órtico es igual a la diferencia de los lados del triángulo dado adyacentes al lado considerado.*

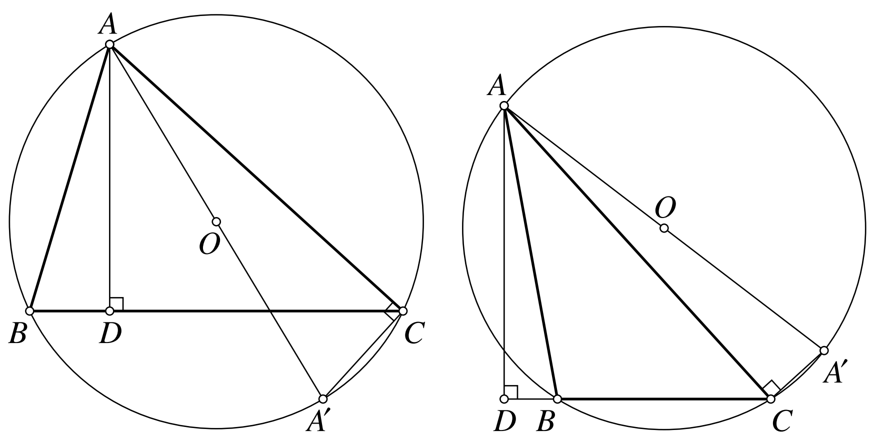


Figura 3 Figura 4

Demostración. En efecto, cuando el triángulo es acutángulo (ver Figura 3), el ángulo formado por el lado BC con el lado EF del triángulo órtico será el mismo que el formado por la altura AD (perpendicular a BC) con el diámetro AA' (perpendicular a EF). Por ser $\angle ABD = \angle ABC = \angle AA'C$, los triángulos rectángulos ABD y AKC son semejantes, y entonces

$$\angle DAA' = A - 2(90^\circ - B) = 180^\circ - (B + C) - 180^\circ + 2B = B - C.$$

En el caso de que, por ejemplo B sea obtusángulo, tenemos

$$\angle DAA' = A + 2\angle DAB = A + 2(B - 90^\circ) = (180^\circ - B - C) + 2B - 180^\circ = B - C.$$

Propiedad 6. *El triángulo tangencial y el triángulo órtico de un triángulo son homotéticos.*

Demostración. El triángulo tangencial es el triángulo formado por las rectas tangentes a la circunferencia circunscrita en los vértices del triángulo. Según hemos visto, los lados del triángulo órtico son perpendiculares a los correspondientes radios de la circunferencia circunscrita, y los lados del triángulo tangencial también lo son. De ahí, la propiedad.

Propiedad 7. *Las alturas de un triángulo bisecan los ángulos interiores del triángulo órtico.*

Demostración. En la Figura 2 vemos que la recta $D'A$ biseca el ángulo $E'D'F'$, y hemos visto que las rectas DE, DF son paralelas a $D'F'$, $D'E'$, así que la recta DA biseca el ángulo EDF. De otra forma, también podemos usar los cuadriláteros cíclicos $BDHF$, $BCEF$ y $CDHE$ para obtener

$$\angle HDF = \angle HBF = \angle EBF = \angle ECF = \angle ECH = \angle EDH.$$

Corolario. *Los lados del triángulo bisecan a los ángulos exteriores de su triángulo órtico.*

Demostración. Ya que los lados son perpendiculares a las alturas del triángulo, que son las bisectrices interiores del triángulo órtico.

Corolario. *Los vértices y el ortocentro de un triángulo son los centros tritangentes (incentro y excentros) de su triángulo órtico.*

Problema. *Construir un triángulo conociendo los puntos en que la prolongación de las alturas cortan a la circunferencia circunscrita.*

Solución. Aquí, Court dice que los puntos dados D', E', F' determinan la circunferencia circunscrita (O) del triángulo buscado ABC, cuyos vértices serán los puntos medios de los arcos $D'E'$, $E'F'$, $F'E'$, y también plantea la siguiente cuestión:

> ¿Cuántas soluciones puede tener el problema?

Para dar respuesta a esta cuestión vamos a considerar la Figura 5, que está construida como se explica a continuación.

Dado el triángulo acutángulo ABC con ortocentro H y circuncentro O, las alturas AH, BH y CH cortan a los lados BC, CA y AB, en los puntos

D, E y F, y a la circunferencia circunscrita en los puntos D', E' y F', respectivamente. Si aplicamos al triángulo ABC una homotecia de centro H y razón 2 obtendremos el triángulo $H_aH_bH_c$, siendo D', E', F' los pies de las alturas de este triangulo.

La circunferencia $D'E'F'$, siendo la circunferencia de los nueve puntos del triángulo $H_aH_bH_c$ contendrá a los puntos medios A', B', C' de los lados H_bH_c, H_cH_a y H_aH_b.

Observemos entonces que por ser $\angle AC'A' = \angle AD'A' = 90°$, la recta $C'A$ es perpendicular a $A'C'$ y por ello también perpendicular a H_cH_a y $B'H_a$, es decir, $B'H_a$ la altura del triángulo $AB'C'$ correspondiente al vértice B', y esta altura vuelve a cortar a la circunferencia circunscrita en E'. De igual forma, $C'H_a$ es la altura del triángulo $AB'C'$ correspondiente al vértice C', y esta altura vulve a cortar a la circunferencia circunscrita en F'.

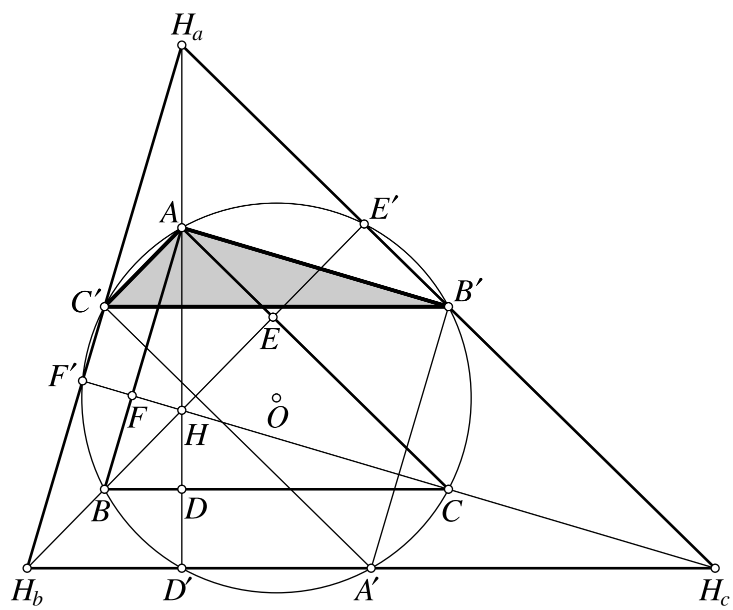


Figura 5

Resulta entonces claro que las alturas del triángulo $AB'C'$ vuelven a cortar a su circunferencia circunscrita en los mismos puntos en que lo hacen las alturas del triángulo ABC, por lo que los CUATRO triángulos ABC, $AB'C'$, $A'BC'$ y $A'B'C$ comparten los puntos D', E', F' de intersección de las alturas con la circunferencia circunscrita.

2. Ejercicios

1. Si O es el circuncentro y H es el ortocentro de un triángulo ABC, y AH, BH, CH cortan a la circunferencia circunscrita en D', E', F', demostrar que las paralelas por D', E', F' a OA, OB, OC, respectivamente, se cortan en un punto.

   Solución. La paralela por D' a OA será perpendicular a $E'F'$, es decir será una altura del triángulo $D'E'F'$. Por tanto, las paralelas por D', E', F' a OA, OB, OC, respectivamente, se cortarán en el ortocentro de $D'E'F'$.

2. Demostrar que (a) el producto de los segmentos en los que un lado de un triángulo queda dividido por el vértice correspondiente del triángulo órtico es igual al producto de los lados del triángulo órtico que pasan por el vértice considerado; (b) el producto de los seis segmentos en los que los lados de un triángulo quedan divididos por los pieds de las alturas es igual al cuadrado del producto de los tres lados del triángulo órtico.

   Solución. Para demostrar (a) usamos los triángulos semejantes DBF y DEC.

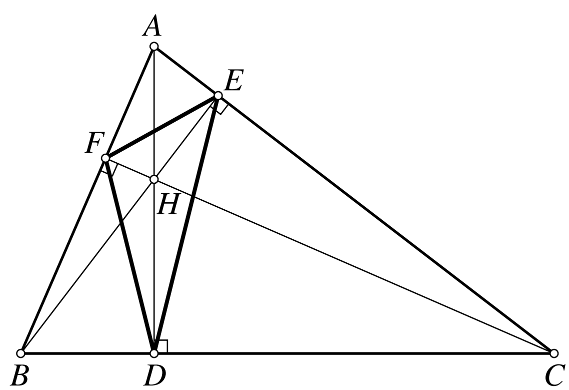


Figura 6

$$\frac{BD}{DF} = \frac{ED}{DC} \Rightarrow BD \cdot DC = DF \cdot ED.$$

Para demostrar (b) obtenemos expresiones similares para los otros vértices y las multiplicamos:

$$\begin{aligned} BD \cdot DC \cdot CE \cdot EA \cdot AF \cdot FB =& (DF \cdot ED) \cdot (ED \cdot FE) \cdot (FE \cdot DF) \\ =& (DF \cdot FE \cdot ED)^2. \end{aligned}$$

3. Si P, Q son los pies de las perpendiculares desde los vértices B, C del triangulo ABC sobre los lados DF, DE del triángulo órtico DEF, demostrar que $EQ = FP$.

   Solución. Con trigonometría tenemos:

$$\begin{aligned} EQ = CE \cdot \cos B =& (BC \cdot \cos C) \cdot \cos B \\ =& (BC \cdot \cos B) \cdot \cos C = FB \cdot \cos C = FP. \end{aligned}$$

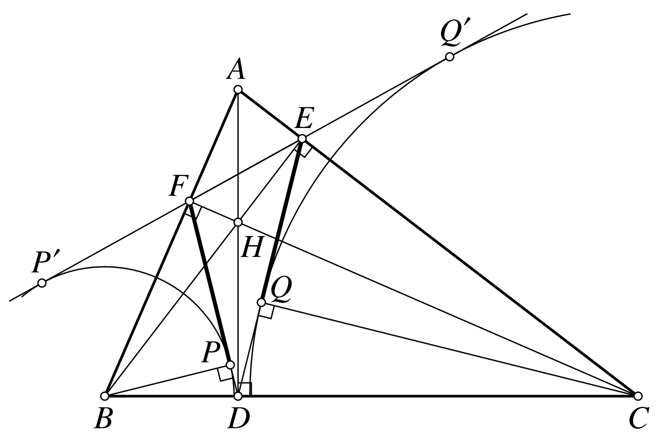


FIGURA 7

   De otra forma, B y C son excentros del triángulo DEF, y P y Q son puntos de contacto de las circunferencias exinscritas (B) y (C) al triángulo DEF y como es conocido, tenemos $EP' = FQ' = s$, siendo s el semiperímetro de DEF. Entonces, tenemos

$$FP = FP' = EP' - FE = s - FE = FQ' - FE = EQ' = EQ.$$

4. DP, DQ son las perpendiculares desde el pie D de la altura AD del triángulo ABC sobre los vértices AC, AB. Demostrar que los puntos B, C, P, Q son concíclicos y que $\angle DPB = \angle CQD$.

Solución. Para razonar que los puntos B, C, P, Q son concíclicos tenemos en cuenta que B, C, E, F lo son. Entonces, usando potencias, $AF \cdot AB = AE \cdot AC$. Ahora, usando los triángulos semejantes AEF y APQ,

$$\frac{AP}{AQ} = \frac{AE}{AF} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AP \cdot AC = AQ \cdot AB,$$

es decir, B, C, P, Q son concíclicos. A partir de aquí,

$$\angle DPB = \angle CPB - 90^\circ = \angle CQB - 90^\circ = \angle CQB.$$

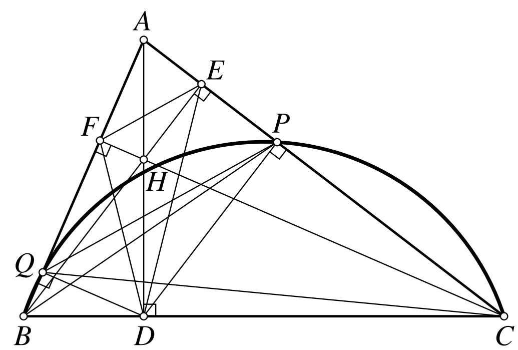


Figura 8

5. Demostrar que las cuatro proyecciones del pie de la altura sobre un lado de un triángulo sobre los otros dos lados y las otras dos alturas están alineados.

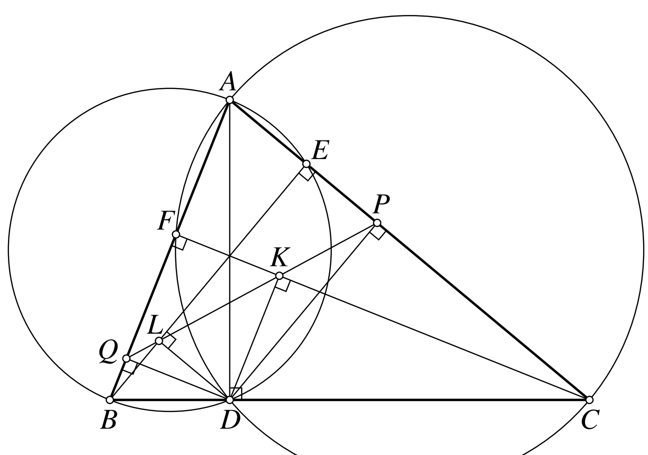


Figura 9

Solución. El pie D de la altura trazada por A es común a las circunferencias con diámetros AB y AC como diámetro. Los puntos L, P y Q son los pies de las perpendiculares trazadas por el punto D a los lados del triángulo ABE, por lo que están alineados (sobre la recta de Wallace-Simson del punto D respecto del triángulo ABE. De la misma forma, los puntos K, Q, P están alineados, ya que son los pies de las perpendiculares trazadas por el punto D sobre los lados CF, FA, AC del triángulo ACF. En consecuencia, los cuatro puntos K, L, P, Q están alineados.

6. Demostrar que el perímetro del triángulo órtico de un triángulo acutángulo ABC es menor que el doble de cualquier altura del triángulo ABC.

   Solución. Sea DEF el triángulo órtico de ABC y sean P, Q las proyecciones de D sobre las rectas CA y AB respectivamente. Llamemos R y S a los simétricos de D respecto de P, Q.

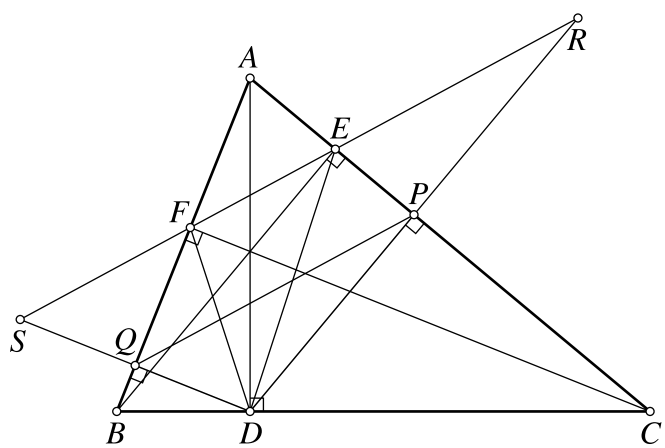


FIGURA 10

Por ser $\angle DEF = 2(90° - B)$ y $\angle DEC = B$, los puntos F, E, R están alineados, y lo mismo les ocurre a los puntos S, F, E. El perímetro p del triángulo órtico es

$$p = DF + FE + ED = SF + FE + ED = 2 \cdot QP < 2 \cdot AD$$

La desigualdad se debe a que, por ser $\angle DPA = 90° = \angle DQA$, el cuadrilátero $APDQ$ está inscrito en una circunferencia, de la que PQ es una cuerda y AD es un diámetro.

3. Algunas fórmulas interesantes

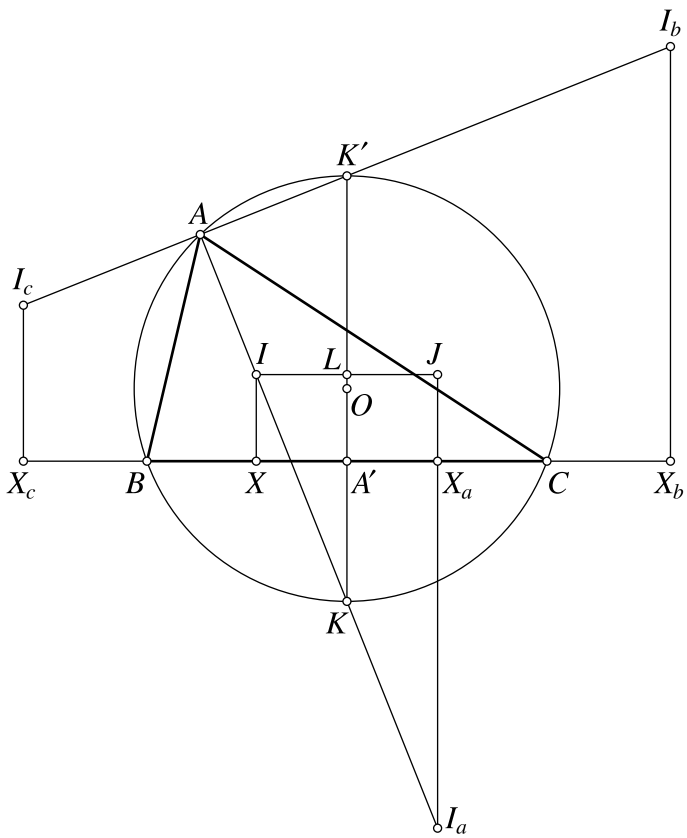


Figura 11

Sean A' el punto medio del lado BC (Figura 11), y sean X, X_a, X_b, X_c los puntos de contacto de la circunferencia inscrita y las circunferencias exinscritas. La recta paralela a BC por I corta al diámetro KK' en L y a la prolongación de I_aX_a en J.

El punto K es el punto medio del lado II_a del triángulo IJI_a, y entonces tenemos

$$KA' + r = KA' + A'L = KL = \tfrac{1}{2}I_aJ = \tfrac{1}{2}(I_aX_a + X_aJ) = \tfrac{1}{2}(r_a + r),$$

de donde

$$A'K = \tfrac{1}{2}(r_a - r). \qquad (1)$$

Por otro lado, por ser $BXb = CXb = s$, K' es el punto medio del lado I_bI_c

del trapecio $I_bI_cX_cX_b$, resultando

$$A'K' = \frac{1}{2}(I_bX_b + I_cX_c) = \frac{1}{2}(r_b + r_c). \tag{2}$$

Sumando (1) y (2), $2R = KK' = KA' + A'K' = \frac{1}{2}(r_a - r) + \frac{1}{2}(r_b + r_c)$, es decir

$$4R = r_a + r_b + r_c - r. \tag{3}$$

Teorema de Carnot. *La suma de las distancias del circuncentro de un triángulo a los tres lados del triángulo es igual a la suma de los radios de las circunferencias circunscrita e inscrita.*

Demostración. En efecto, es $OA' = OK - A'K = R - \frac{1}{2}(r_a - r)$ y lo mismo para los otros vértices, $OB' = R - \frac{1}{2}(r_b - r)$ y $OC' = R - \frac{1}{2}(r_c - r)$. Sumando las tres cantidades,

$$\begin{aligned} OA' + OB' + OC' =& 3R - \frac{1}{2}\left(r_a + r_b + r_c - 3r\right) \\ =& 3R - \frac{1}{2}\left(4R + r - 3r\right) = R + r. \end{aligned}$$

4. Más propiedades del triángulo órtico

Propiedad 8. *La distancia de un lado de un triángulo al circuncentro es la mitad de la distancia del vértice opuesto al ortocentro.*

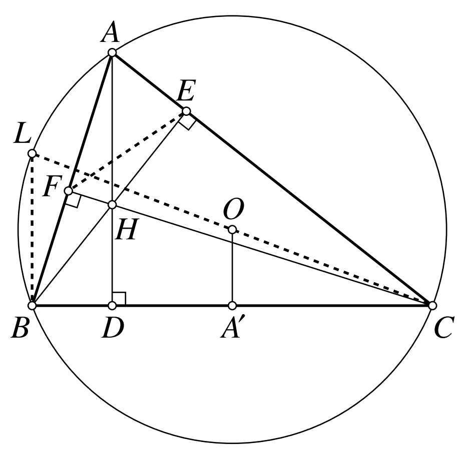


Figura 12

Demostración. Sea L el punto diametralmente opuesto al vértice C sobre la circunferencia circunscrita (Figura 12); el segmento OA' une los puntos medios de los lados del triángulo recto BCL, y de aquí $OA' = \frac{1}{2}BL$. Por otro lado, los lados opuestos del cuadrilátero $ALBH$ son respectivamente perpendiculares a las rectas AC, BC; por tanto $ALBH$ es un paralelogramo, y $BL = AH$, que es lo que se quería demostrar.

Propiedad 9. *En un triángulo las distancias de los vértices al ortocentro, incrementadas con los correspondientes exradios, son iguales.*

Demostración. Teniendo en cuenta (1) $A'K = \frac{1}{2}(r_a - r) \Rightarrow r_a - r = 2A'K = 2(OK - OA') = 2R - 2OA' = 2R - AH \Rightarrow AH + r_a = 2R + r$.

Propiedad 10. *La razón entre un lado de un triángulo y el correspondiente lado del triángulo órtico es igual la razón entre el radio de la circunferencia circunscrita y la distancia del lado considerado al circuncentro.*

Propiedad 11. *El segmento AH es el diámetro de la circunferencia circunscrita al triángulo AEF, y las rectas BC, EF son lados correspondientes en los triángulos semejantes ABC, AEF, de donde resulta*

$$BC : EF = 2R : AH = R : OA'.$$

Corolario. *Si DEF es el triángulo órtico de un triángulo acutángulo ABC y R, r son los radios de la circunferencia circunscrita e inscrita, respectivamente, entonces*

$$\frac{EF}{BC} + \frac{FD}{CA} + \frac{DE}{AB} = \frac{R + r}{r}.$$

Demostración. Usando la propiedad anterior y el teorema de Carnot,

$$\frac{EF}{BC} + \frac{FD}{CA} + \frac{DE}{AB} = \frac{OA'}{R} + \frac{OB'}{R} + \frac{OC'}{R} = \frac{R + r}{R}.$$

Propiedad 12. *El perímetro del triángulo órtico de un triángulo acutángulo es igual al doble del área del triángulo dividido por el radio de la circunferencia circunscrita.*

Demostración. Según la propiedad 11, llamando S al área del triángulo ABC,

$$EF + FD + DE = \frac{BC \cdot OA' + CA \cdot OB' + AB \cdot OC'}{R} = \frac{2S}{R}.$$

Problema. *Construir un triángulo dados en posición las trazas D, U, A' sobre la base del triángulo de la altura, la bisectriz interior y de la mediana trazadas desde el vértice opuesto, y la distancia d de ese vértice al ortocentro.*

Solución. Sobre la perpendicular a DUA' en A', levantamos $A'O = \frac{1}{2}d$ obteniendo el circuncentro O del triángulo buscado. El punto A estará sobre la perpendicular a DUA' trazada por D. Según vimos en la demostración de la Propiedad 5, la bisectriz del ángulo A también debe ser bisectriz del ángulo DAO, por lo que el punto A debe estar en la recta tangente desde O a la cirucnferencia con centro U que pasa por D. De esta manera, el vértice A queda determinado. La circunferencia con centro O y radio OA cortará a la recta DUA' en los dos vértices B y C del triángulo buscado.

5. Más ejercicios

7. En el triángulo ABC demostrar que: $AH^2 + BC^2 = 4OA^2$.

   Solución. Con la misma notación que antes,

   $$AH^2 + BC^2 = 4OA'^2 + 4BA'^2 = 4OB^2 = 4OA^2.$$

8. Construir un triángulo dados en posición un vértice, el punto medio del lado opuesto y el ortocentro.

   Solución. Como el segmento AH es el doble del segmento OA', trazamos por A' una paralela a AH y sobre ella marcamos el punto O cumpliendo $A'O = \frac{1}{2}HA$, lo cual determina el circuncentro O. Trazando la circunferencia con centro O y radio OA, y hallando su intersección con la perpendicular a AH por A' obtendremos los dos vertices restantes del triángulo buscado.

9. Construir un triángulo dados en posición la circunferencia circunscrita, el ortocentro y la longitud de un lado.

Solución. Suponemos conocido en posición la circunferencia circunscrita, con centro O y radio R, el ortocentro H y la longitud a del lado BC. Teniendo en cuenta la fórmula $AH^2 + BC^2 = 4OA^2$, es decir, $AH^2 + a^2 = 4R^2$, trazamos una cuerda cualquiera PQ de longitud a sobre la circunferencia y el diámetro PP'. Entonces, la longitud QP' será igual a AH. Esto permite localizar el vértice A, trazando una circunferencia de centro H y radio QP', que cortará en general en dos puntos a la circunferencia dada. Una vez hallado el vértice A, tenemos en cuenta que los segmentos AH y OA' son paralelos y uno el doble del otro, lo que permite determinar A', punto medio del lado BC. Por A' trazamos una perpendicular a la recta AH y tendremos la recta BC, que cortará a la circunferencia dada en los dos vértices restantes del triángulo buscado.

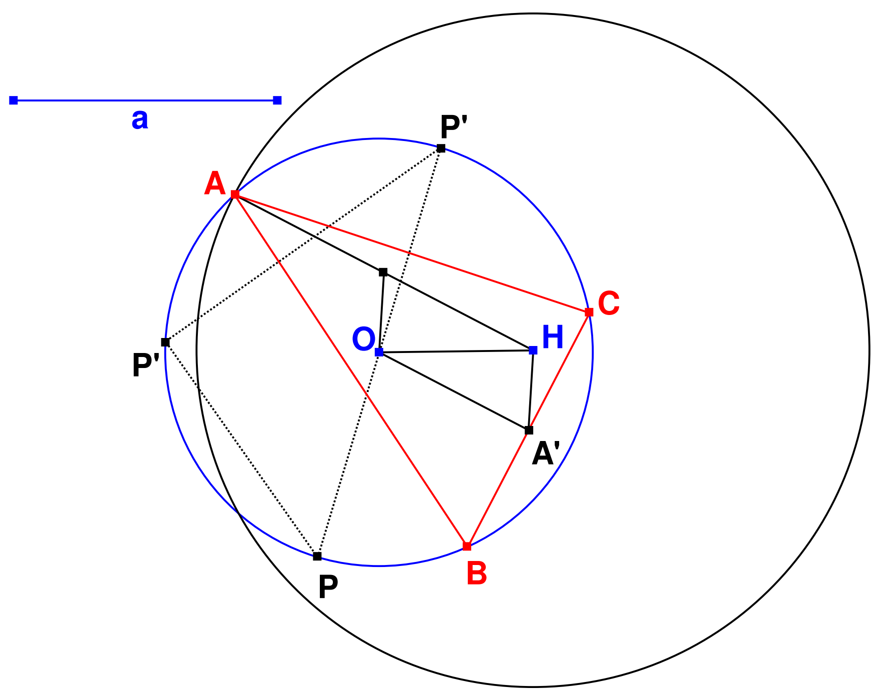


FIGURA 13

Discusión. Para que el problema tenga solución es necesario que la circunferencia dada y la circunferencia con centro H y radio QP' tengan puntos en común. Puede comprobarse que ello ocurre si y solo si se cumplen las condiciones siguientes:

$$OH \leqslant 3R, \quad |a^2 + OH^2 - 3R^2| \leqslant 2R \cdot OH.$$

10. Construir un triángulo dados el radio de la circunferencia circunscrita, la distancia de un vértice al ortocentro y la longitud de la mediana trazada desde ese vértice.

    Solución. Suponemos conocido el radio R de la circunferencia circunscrita, la distancia $2d$ del vértice A al ortocentro y la longitud m_a de la mediana trazada desde A. Sobre una recta cualquiera r, fijamos un punto A' que va a ser el punto medio del lado BC. Por A' levantamos una perpendicular $A'O$ a dicha recta, de longitud d, con lo que O será el circuncentro del triángulo buscado. Con centro O y radio R trazamos una circunferencia, que será la circunferencia circunscrita al mismo. Para determinar el vértice A tenemos en cuenta que $m_a = AA'$ es conocida, por lo que trazamos una circunferencia con centro A' y radio AA', que encuentra a la circunferencia (O) en las posibles posiciones del vértice A. Los vértices B y C se obtienen como intersección de la circunferencia (O) y la recta r.

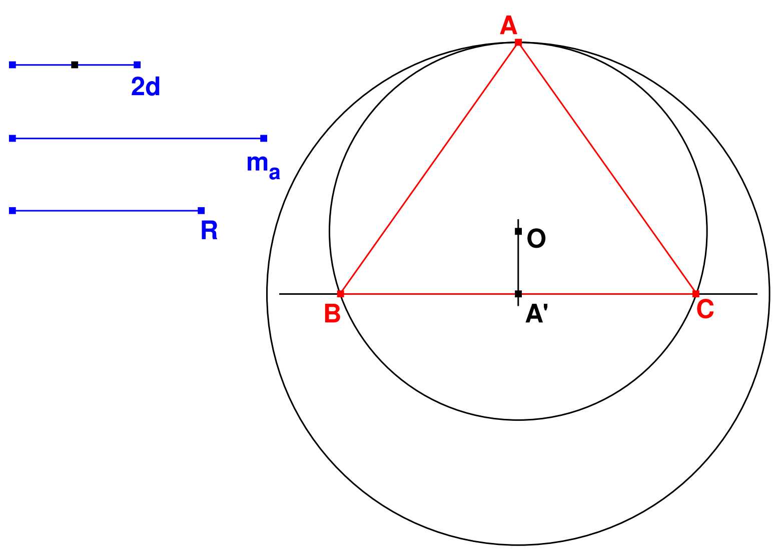


Figura 14

Discusión. Para que el problema tenga solución es necesario que las circunferencias (O) y (A') de la construcción tengan puntos comunes.

Ello ocurrirá si y solo si las longitudes d, m_a y R forman triángulo, aunque éste sea degenerado, es decir, aunque alguna de ellas sea la suma de las demás.

11. Construir un triángulo conociendo la base, la distancia del vértice opuesto al ortocentro y el radio de la circunferencia inscrita.

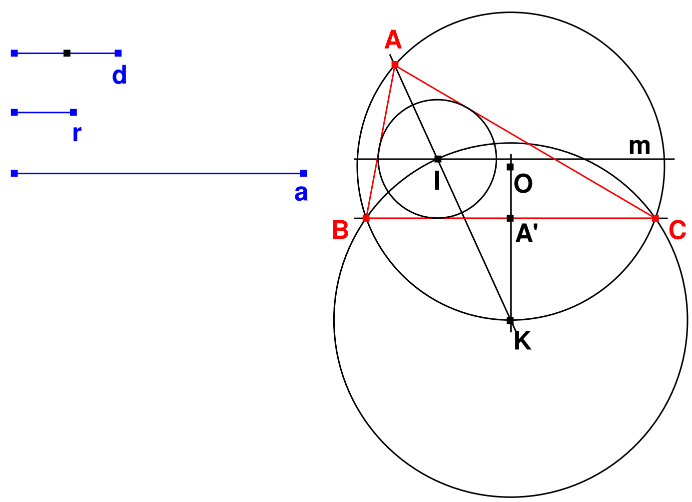


FIGURA 15

Solución. Suponemos conocida la longitud a de la base BC, la distancia $2d$ del vértice A al ortocentro H y el radio r de la circunferencia inscrita. Comenzamos por fijar sobre una recta cualquiera dos puntos B y C tales que $BC = a$. Hallamos el punto medio A' de BC y por el levantamos una perpendicular $A'O$ de longitud $\frac{1}{2}d$, de manera que O será el circuncentro del triángulo buscado. Con centro en O y radio OB podemos trazar la circunferencia circunscrita al triángulo buscado. Al prolongar el segmento OA' encontramos el punto K sobre esta circunferencia. Sabemos que K es centro de una circunferencia que pasa por los vértices B y C y por el incentro I. Como conocemos el radio r de la circunferencia inscrita podemos trazar una recta m a distancia r de la recta BC y por el lado contrario de ésta al que está el punto K. Esta recta cortará a la circunferencia (K) en el incentro I (en general aparecerán dos puntos simétricos respecto de la recta OA'). La recta KI cortará a la circunferencia (O) en el vértice A del triángulo buscado.

Discusión. Además de la condición evidente $a > 2r$, para que el problema tenga solución es necesario que la circunferencia (K) corte a la recta m, y esto ocurrirá siempre que sea

$$d \geqslant \frac{24a^2r^2 - a^4 - 16r^4}{8r(a^2 - 4r^2)}.$$

12. Una segmento variable de longitud constante tiene sus extremos en dos rectas secantes fijas. Demostrar que el lugar geométrico del ortocentro del triángulo variable formado por las tres rectas es una circunferencia.

    Solución. En el triángulo variable sean A el ángulo formado por las dos rectas y a el lado variable de longitud constante. Entonces, por ser $a = 2R \operatorname{sen} A$, el radio de la circunferencia circunscrita es constante, y usando la fórmula $AH^2 + BC^2 = 4 \cdot OA^2$, la distancia de A al ortocentro H también será constante, es decir H estará en una circunferencia de centro A.

13. La base BC y la circunferencia circunscrita (O) de un triángulo variable ABC son fijos. Hallar el lugar geométrico del ortocentro del triángulo que tiene por vértices las trazas sobre (O) de las bisectrices interiores de los ángulos de ABC.

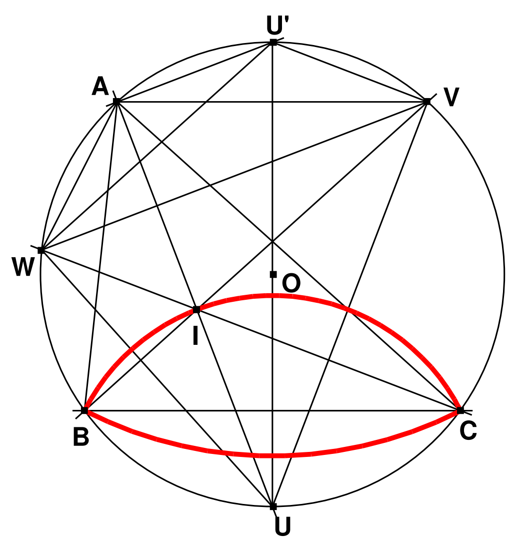


Figura 16

Solución. Supongamos que las bisectrices del ángulo ABC cortan a la circunferencia (O) en los puntos U, V, W. En la Figura 16 hemos trazado el diámetro UU' formando el ángulo recto UAU'. Entonces, siendo $\angle UAC = \frac{1}{2}A$ y $\angle CAV = \frac{1}{2}B$, resulta que

$$\angle VAU' = 90^\circ - \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B = \frac{1}{2}C = \angle ACW = \angle AU'W,$$

la cuerda VW será paralela a la cuerda $U'A$, y por tanto perpendicular a la recta UA. Esto indica que UA es una altura del triángulo UVW. De la misma forma, VB y WC son también alturas, por lo que el ortocentro de UVW es el incentro I de ABC. Al variar A sobre la circunferencia sabemos que I describe arcos de circunferencia con centros en U y U', y pasando por B y C, y estos dos arcos son el lugar geométrico buscado.

PROBLEMAS PARA LOS MÁS JÓVENES 37

Cinco problemas de un campamento matemático de verano 2009 en Darmanesti (Rumania)

J37.1: Si la suma de la longitud y la anchura de un rectángulo es 2, demostrar que el perímetro de este rectángulo es cuadrado perfecto.

J37.2: Sea A = $10^{n+2} + 10^{n} - a$, donde *n* es un número natural y *a* es un dígito. Determinar *a* sabiendo que A es divisible por 3.

J37.3: La mediana AM (M pertenece al lado BC) en el triángulo acutángulo ABC corta por segunda vez a la circunferencia circunscrita al triángulo en D (la primera vez es en A). Si E es el simétrico de A con respecto a M, demostrar que BC es la tangente común a los círculos circunscritos a los triángulos BDE y CDE.

J37.4: Calcular el resto de la división del número

$$A = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 2007 + 2008$$

por 2002.

J37.5: Se considera el número

$$a = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{100^2}\ .$$

Demostrar que

$$0,2 < \sqrt{\frac{a}{11}} < 0,3\ .$$

Solución al Problema 24.2.

24.2 Un conjunto M de cuatro números naturales se dice *ligado*, si para todo elemento $x \in M$, al menos uno de los números $x - 1$ y $x + 1$ pertenece a M. Sea U_n el número de subconjuntos *ligados* del conjunto {1, 2, ..., n}.
a)Calcular U_7 .
b) Determinar el menor número n tal que $U_n \geq 2006$.

Por la definición de conjunto *ligado*, éste debe estar formado por dos pares de enteros del tipo (k,k+1), $k \in N$. Ahora, si tenemos el conjunto $S_n = \{1,2,3,....,n\}$, para formar todos los subconjuntos *ligados* de S_n, basta tomar de dos en dos pares del tipo (k,k+1); el número de ellos es n – 1; si los enumeramos, tenemos: (1,2),(2,3),(3,4),.....(n – 1, n). El número de los "pares de pares" es:

$$U_n = \binom{n-1}{2} = (n-1)!/[(n-3)!\,2!] = (n-1)(n-2)/2. \qquad (*)$$

a) Con la fórmula (*) , tenemos: $U_7 = 6!/[4!2!] = 15$.
b) Haciendo $U_n = 2006$ y despejando n de la fórmula (*), obtenemos la ecuación cuadrática

$$n^2 - 3n - 4012 = 0,$$

cuya raíz positiva es

$$x = n = (3 + \sqrt{16049})/2.$$

Como $\sqrt{16049} \approx 126{,}7$ y U_n es una función creciente de n, aproximamos hacia arriba:

$$x = n = (3 + 127)/2 = 65.$$

Substituyendo en la fórmula (*), nos da: $U_n = 2016$. Se comprueba que, para n = 64, resulta $U_n < 2006$.

PROBLEMAS DE NIVEL MEDIO Y DE OLIMPIADAS 37

Cinco problemas de la Competición Matemática de Stanford (1946-1965)

37.1. En un tetraedro (no necesariamente regular), dos aristas opuestas tienen la misma longitud *a* y son mutuamente perpendiculares. Además, cada una de ellas es perpendicular al segmento, de longitud *b*, que une sus respectivos puntos medios. Expresar el volumen del tetraedro en función de *a* y *b* (1946,#2).

37.2. Diez personas están sentadas alrededor de una mesa redonda. Se quiere distribuir la cantidad de 10$ entre ellas, de manera que cada una reciba la mitad de la suma de las cantidades que reciben las dos personas que tiene sentadas a su derecha y a su izquierda. ¿Hay una única forma de hacer el reparto? (1956,#4).

37.3. ¿Cuál es la edad del capitán, cuántos hijos tiene, y cuál es la longitud de su barco?. Se conoce el producto, 32118, de los tres números naturales buscados; la longitud de su barco se mide en pies (más de uno); el capitán tiene hijos e hijas; y tiene más años que el número total de sus hijos, pero no llega a tener 100 años. (1958,#1)

37.4. Sobre cada lado de un triángulo cualquiera se construye, exteriormente al triángulo, un cuadrado. Los 6 vértices de esos cuadrados que no son vértices del triángulo forman un hexágono. Tres de sus lados son, evidentemente, iguales a los lados correspondientes del triángulo. Demostrar que cada uno de los restantes tres lados del hexágono es igual al doble de una mediana del triángulo. (1959,#4)

37.5. (1961#4)Dados *a,b,c* resolver el sistema de tres ecuaciones en las incógnitas *x,y,z :*

$$x^2y^2 + x^2z^2 = axyz$$

$$y^2z^2+y^2x^2 = bxyz$$

$$z^2x^2 + z^2y^2 = cxyz$$

Revista Escolar de la O.I.M. 37
Problemas 181 - 185

Problema 181 (propuesto por Pedro H.O. Pantoja, UFRN, Natal, Brasil)

Hallar todos los polinomios $p(x)$, con coeficientes enteros, cuyo coeficiente de primer grado es nulo, tales que se verifican las dos condiciones siguientes:

a) $p(2009) + p\left(2009^2\right) + \cdots + p\left(2009^{100}\right) = 2008^{2009}$

b) $p\,(2009) = p'\,(2009)$

Problema 182 (propuesto por Pedro H.O. Pantoja, UFRN, Natal, Brasil)

Demostrar que la ecuación

$$x^3 - y^4 - 32 + 4^z = (1-x)^3 + 6w^2 + 6t\,(t-1) + 219$$

tiene infinitas soluciones (x, y, z, w, t) en enteros.

Problema 183 (propuesto por Laurentiu Modan, Bucarest, Rumania)

Calcular, si existen, los siguientes límites :

$$\begin{aligned} a) \quad L_1 &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2+n^2}{n^2} \ln \frac{k+n}{k} \\ b) \quad L_2 &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2+n^2}{n^2} \ln \frac{k^2+n^2}{k^2} \end{aligned}$$

Problema 184 (propuesto por Luis Gómez Sánchez, Universidad de Oriente, Venezuela)

Resolver la ecuación

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-2}}{\left(1+x^k\right)\left(1+x^{k-2}\right)} = \frac{1}{18}; \quad x \in \mathbb{R}.$$

Problema 185 (propuesto por el editor)

$ABCD$ es un paralelogramo; el orden de las letras indica el sentido antihorario. E es un punto fijo de la recta BC. Se dividen AB y AD en el mismo número de partes iguales, y se unen E y C con los correspondientes puntos de AB y AD. Determinar el lugar geométrico de los puntos de intersección de esas rectas.

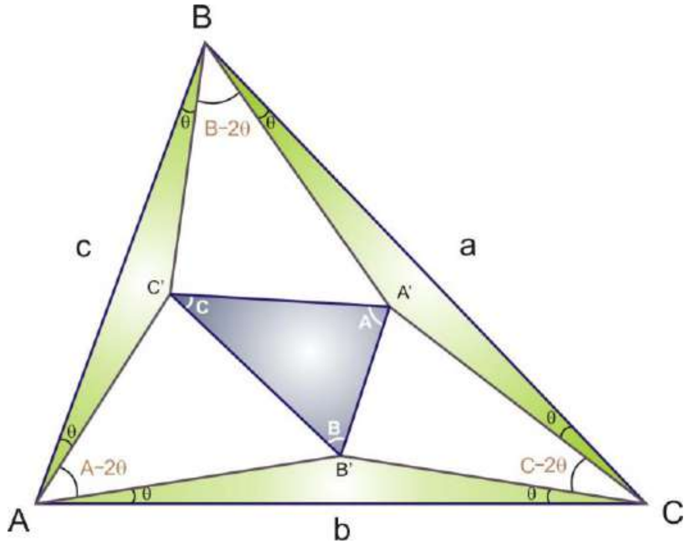
Nota: el problema no es nuevo. Se dará noticia de su procedencia cuando se publique la solución.

<u>Problema 11</u> (REVISTA N°3)

Sobre los lados de un triángulo ABC como bases se trazan, interiormente, tres triángulos isósceles, cuyos ángulos iguales miden θ radianes. Si el triángulo formado por los terceros vértices de esos tres triángulos es semejante al ABC, demostrar que

$$\tan\theta = \frac{\text{senAsenBsenC}}{1+\cos A\cos B\cos C}$$

<u>RESOLUCIÓN</u>



i. **En el triángulo ABC:**

$$\begin{cases} AC' = BC' = \dfrac{1}{2}c.\sec\theta \\ BA' = CA' = \dfrac{1}{2}a.\sec\theta \\ AB' = CB' = \dfrac{1}{2}b.\sec\theta \end{cases}$$

ii. **En el triángulo** $AC'B'$ **(Teorema de cosenos)**

$$B'C'^{\,2} = AC'^{\,2} + AB'^{\,2} - 2AC'.AB'.\cos(A-2\theta)$$

$$\Rightarrow B'C'^{\,2} = \frac{1}{4}\sec^2\theta\ \ c^2 + b^2 - 2c.b.\cos(A-2\theta)$$

$$\text{tambien}:\ a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$$

$$\Rightarrow B'C'^{\,2} = \frac{1}{4}\sec^2\theta.(a^2 + \underbrace{2bc.\cos A - 2cb.\cos(A-2\theta)}_{2bc\ \cos A - \cos(A-2\theta)})$$

$$\therefore B'C'^{\,2} = \frac{1}{4}\sec^2\theta\ \ a^2 - 4bc.\text{sen}(A-\theta).\text{sen}\theta$$

Análogo para los demás lados.

$$\therefore \begin{cases} A'B'\ ^2 = \dfrac{1}{4}\sec^2\theta\ \ c^2 - 4ab.\text{sen}(C-\theta).\text{sen}\theta \\ C'A'\ ^2 = \dfrac{1}{4}\sec^2\theta\ \ b^2 - 4ca.\text{sen}(B-\theta).\text{sen}\theta \end{cases}$$

iii. **En el triángulo** $A'B'C'$ **(teorema de senos)**

$$\frac{B'C'}{\text{sen}A} = \frac{A'B'}{\text{sen}C} \Rightarrow \left(\frac{\text{sen}C}{\text{sen}A}\right)^2 = \left(\frac{A'B'}{B'C'}\right)^2 = \frac{c^2}{a^2}$$

Reemplazando y efectuando:

$$\Rightarrow \left(\frac{\text{sen}C}{\text{sen}A}\right)^2 = \frac{\dfrac{1}{4}\sec^2\theta\ \ c^2 - 4ab.\text{sen}(C-\theta).\text{sen}\theta}{\dfrac{1}{4}\sec^2\theta\ \ a^2 - 4bc.\text{sen}(A-\theta).\text{sen}\theta} = \frac{c^2}{a^2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\text{sen}C}{\text{sen}A}\right)^2 = \frac{c^2 - 4ab.\text{sen}(C-\theta).\text{sen}\theta\ \ - c^2}{a^2 - 4bc.\text{sen}(A-\theta).\text{sen}\theta\ \ - a^2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\text{sen}C}{\text{sen}A}\right)^2 = \frac{a.\text{sen}(C-\theta)}{c.\text{sen}(A-\theta)} = \frac{\dfrac{\text{sen}(C-\theta)}{\text{sen}C.\text{sen}\theta}}{\dfrac{\text{ssen}(A-\theta)}{\text{sen}A.\text{sen}\theta}} = \frac{\cot\theta - \cot C}{\cot\theta - \cot A}$$

Por propiedad de proporciones y aplicando identidades:

$$\Rightarrow \frac{\cot\theta - \cot C}{\underbrace{\cot C - \cot A}_{\frac{\text{sen}(A-C)}{\text{sen}A.\text{sen}C}}} = \frac{\text{sen}^2 C}{\underbrace{\text{sen}^2 A - \text{sen}^2 C}_{\text{sen}(A+C).\text{sen}(A-C)}}$$

$$\Rightarrow \cot\theta - \cot C = \frac{\text{sen}C}{\underbrace{\text{sen}(A+C)}_{\text{sen}B}.\text{sen}A}$$

$$\Rightarrow \cot\theta = \frac{\overbrace{\text{sen}^2 C}^{1-\cos^2 C} + \text{sen}B\text{sen}A\cos C}{\text{sen}B.\text{sen}A\text{sen}C}$$

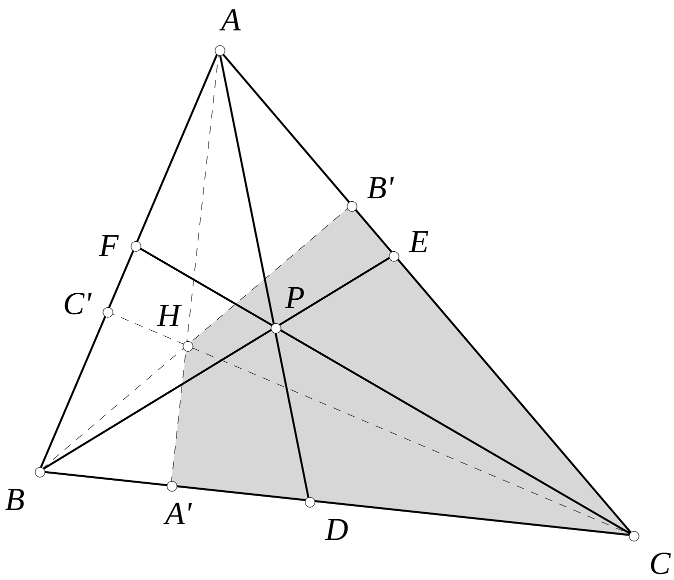
$$\Rightarrow \cot\theta = \frac{1-\cos C\ \ \cos C - \text{sen}B\text{sen}A}{\text{sen}B.\text{sen}A\text{sen}C}$$

$$\Rightarrow \cot\theta = \frac{1-\cos C\left(\cos(A+B) - \text{sen}B\text{sen}A\right)}{\text{sen}B.\text{sen}A\text{sen}C}$$

$$\Rightarrow \cot\theta = \frac{1-\cos C\cos A\cos B}{\text{sen}B.\text{sen}A\text{sen}C}$$

$$\therefore \tan\theta = \frac{\text{sen}B.\text{sen}A\text{sen}C}{1-\cos C\cos A\cos B} \qquad \text{l.q.q.d.}$$

Problema 176, propuesto por Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona (España)
Dado un triángulo no degenerado *ABC*, y un punto *P* en su interior, trazamos las cevianas *AD*, *BE*, *CF* que pasan por *P*. Determinar todos los triángulos *ABC* y todos los puntos *P* en su interior para los que se cumple que al menos dos de las circunferencias circunscritas a *AEF*, *BFD* y *CDE* pasan por *P*.
Solución.



En primer lugar la condición "al menos dos circunferencias circunscritas pasan por *P*" implica que las tres circunferencias pasan por *P*.
En efecto, supongamos que las circunferencias circunscritas a *AEF* y *BFD* pasan por *P*, entonces los cuadriláteros *AEPF* y *BFPD* son inscriptibles , tenemos

$$\left.\begin{aligned}\angle FPE &= 180^\circ - A\\ \angle FPD &= 180^\circ - B\end{aligned}\right\} \Rightarrow \angle DPE = 360^\circ - \left(\angle FPE + \angle FPD\right) = A + B = 180^\circ - C$$

y la circunferencia circunscrita a *CDE* pasa por *P*.
Si trazamos las tres alturas *AA*', *BB*' y *CC*' que se cortan en *H*, el triángulo queda descompuesto en tres cuadriláteros *AC'HB'*, *BA'HC'* y *CB'HA'*.

Supongamos que *P* está en el interior del cuadrilátero *CB'HA'*, entonces los ángulos $\angle PEC$ y $\angle PDC$ son obtusos y el cuadrilátero *CEPD* no puede ser inscriptible; luego *P* no puede estar en el interior del cuadrilátero *CB'HA'*. Por el mismo motivo no puede estar en el interior de los cuadriláteros *AC'HB*', *BA'HC'*.

Finalmente si *P* está en alguna de las alturas, por ejemplo en el segmento *BB*' entonces $\angle PEC = 90^\circ$ y el ángulo opuesto $\angle PDC$ también debe ser recto, es decir *P* debe estar sobre la altura *AA*' y por tanto debe coincidir con *H*.
Como *P* ha de estar en el interior del triángulo la respuesta es todos los triángulos acutángulos y para cada uno *P* el ortocentro.

PROBLEMA 177

Sea $P(n, \sin(nx))$ el siguiente polinomio:

$$P(n, \sin(nx)) = -\binom{n}{0}(\sin x)^2 + \binom{n}{1}\frac{(\sin x)^4}{2} - \cdots + (-1)^{n+1}\binom{n}{n}\frac{(\sin x)^{2n+2}}{n+1}$$

Calcular el límite cuando n tiende a infinito de ese polinomio.

SOLUCION:

Escribiendo $P(n, \sin(nx)) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^{i+1}\binom{n}{i}\frac{(\sin x)^{2i+2}}{i+1}$

Como $\frac{(\sin x)^{2i+2}}{i+1} = \frac{[(senx)^2]^{i+1}}{i+1} = \left[\frac{z^{i+1}}{i+1}\right]_0^{(senx)^2} = \int_0^{(senx)^2} z^i\, dz$

Podemos reescribir el polinomio como y usando el binomio de Newton se obtiene

$$\begin{aligned} P(n, \sin(nx)) &= \sum_{i=0}^{n}(-1)^{i+1}\binom{n}{i}\int_0^{(senx)^2} z^i\, dz = \int_0^{(senx)^2}\sum_{i=0}^{n}(-1)^{i+1}\binom{n}{i} z^i\, dz \\ &= -\int_0^{(senx)^2}\sum_{i=0}^{n}(-1)^{i}\binom{n}{i} z^i\, dz = -\int_0^{(senx)^2}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(1)^{n-i}(-z)^i\, dz \\ &= -\int_0^{(senx)^2}(1-z)^n\, dz = -\left[-\frac{(1-z)^{n+1}}{n+1}\right]_0^{(senx)^2} \\ &= \frac{(1-(senx)^2)^{n+1}}{n+1} - \frac{(1-0)^{n+1}}{n+1} = \frac{((cosx)^2)^{n+1}}{n+1} - \frac{1^{n+1}}{n+1} \\ &= \frac{(cosx)^{2n+2}-1}{n+1} \end{aligned}$$

Si $cosx = \pm 1$ se tiene que $P(n, \sin(nx)) = 0$

Si $(cosx)^2 < 1\ entonces,$ cuando $n \to \infty$ se tiene que $P(n, \sin(nx)) \to 0$

Por tanto $\lim_{n\to\infty} P(n, \sin(nx)) = 0$

Problema 178.
Sean a,b,c números reales verificando $0 < a,b,c \leq 1$. Demostrar que

$$\frac{1}{\sqrt{2+3a}} + \frac{2}{\sqrt{2+3b}} + \frac{3}{\sqrt{2+3c}} \geq \frac{6\sqrt{5}}{5}.$$

Claramente

$$\frac{1}{\sqrt{2+3a}} \geq \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{2+3b}} \geq \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{2+3c}} \geq \frac{3}{\sqrt{5}} \ ,$$

sumando

$$\frac{1}{\sqrt{2+3a}} + \frac{2}{\sqrt{2+3b}} + \frac{3}{\sqrt{2+3c}} \geq \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

PROBLEMA 179, *propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, Ávila, España*

Sean T y T' los triángulos ABC, $A'B'C'$, rectángulos respectivamente en A y A'. Se supones que sus lados respectivos verifican

$$a > b \geq c \qquad \text{y} \qquad a' > b' \geq c'.$$

Demostrar que

$$\left(\frac{aa'}{4} - \frac{1}{9}\sum_{\text{cíclica}} aa'\right)^2 \geq \left(\frac{a^2}{4} - \frac{1}{9}\sum_{\text{cíclica}} a^2\right)\left(\frac{a'^2}{4} - \frac{1}{9}\sum_{\text{cíclica}} a'^2\right).$$

¿Cuándo se verifica la igualdad?
¿Se verifica la desigualdad para toda clase de triángulos?

Solución por Daniel Lasaosa Medarde, Universidad Pública de Navarra, Pamplona, España

Nótese en primer lugar que un escalado de uno de los dos triángulos (manteniendo las proporciones relativas entre sus lados) por un factor ρ no afecta al problema, pues entonces el término de la izquierda queda multiplicado por ρ^2, igual que el factor del miembro de la derecha correspondiente al triángulo escalado, quedando invariante el otro factor del miembro de la derecha. Podemos entonces asumir sin pérdida de generalidad que $a' = a$.

Multiplicando por 36^2 a ambos miembros de la igualdad, y desarrollando las sumas cíclicas, la desigualdad se escribe de forma equivalente como

$$\left(5a^2 - 4bb' - 4cc'\right)^2 \geq \left(5a^2 - 4b^2 - 4c^2\right)\left(5a^2 - 4b'^2 - 4c'^2\right).$$

Si los triángulos son rectángulos en A, A' respectivamente, entonces $b = a\sin B$, $c = a\cos B$, $b' = a\sin B'$ y $c' = a\cos C'$, con lo que la desigualdad queda como

$$\left(5 - 4\cos(B - B')\right)^2 \geq 1.$$

Al ser $4\cos(B - B') \leq 4$, el miembro de la derecha es claramente mayor o igual que $1^2 = 1$, con igualdad si y sólo si $B = B'$, es decir, si y sólo si ABC y $A'B'C'$ son semejantes.

Supongamos ahora que los triángulos no son rectángulos en A, A', pero que mantenemos las condiciones $a \geq b \geq c$ y $a = a' \geq b' \geq c'$. Si $5a^2 \geq 4b^2 + 4c^2$ pero $5a^2 \leq 4b'^2 + 4c'^2$, o viceversa, el miembro de la derecha es no positivo, cumpliéndose claramente la desigualdad, con igualdad si y sólo si ambos miembros son nulos. El miembro de la derecha es nulo, sin pérdida de generalidad por simetría en el problema, si $5a^2 = 4b'^2 + 4c'^2$. Ha de ser además $5a^2 = 4bb' + 4cc'$ para que el término de la izquierda sea nulo. Se tiene entonces que $bb' + cc' = b'^2 + c'^2$, pudiendo tomar b y c a priori varios valores; por ejemplo, si $a = a' = 2$, $b' = c' = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$, cualquier combinación con $b + c = \sqrt{10}$, siempre que $2 \geq b \geq c$, proporciona el resultado adecuado, es decir, cualquier combinación de la forma $b = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} + \left(2 - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\right)\rho$, $c = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} - \left(2 - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\right)\rho$ para cualquier $\rho \in [0, 1]$.

Supongamos ahora que $5a^2 > 4b^2 + 4c^2, 4b'^2 + 4c'^2$. Escribimos la desigualdad a demostrar como inecuación de segundo grado en c':

$$(5a^2 - 4b^2)c'^2 - 2c(5a^2 - 4bb')c' + 5a^2(b' - b)^2 + (5a^2 - 4b'^2)c^2 \geq 0.$$

El discriminante de esta inecuación es

$$c^2(5a^2-4bb')^2-5a^2(b'-b)^2(5a^2-4b^2)-c^2(5a^2-4b^2)(5a^2-4b'^2)=$$
$$=-5[5a^2-4b^2-4c^2]a^2(b'-b)^2\leq 0,$$

con igualdad si y sólo si $b=b'$. Como para $c'=0$ la inecuación claramente se cumple de forma estricta, pues $c>0$ y $4b'^2\leq 4a^2$, y la ecuación correspondiente no puede tener raíces reales pues el discriminante es nulo, entonces la desigualdad siempre se cumple de forma estricta para cualquier valor de c' cuando $b\neq b'$. Otro tanto sucede si escribimos la desigualdad como inecuación cuadrática en c. Sin embargo, si $b=b'$, la desigualdad se escribe como $(c-c')^2\geq 0$, que es claramente cierta, con igualdad si y sólo si $c=c'$. Se tiene entonces que si $5a^2>4b^2+4c^2, 4b'^2+4c'^2$, la desigualdad se cumple siempre, con igualdad si y sólo si los triángulos son semejantes.

Supongamos finalmente que $5a^2<4b^2+4c^2, 4b'^2+4c'^2$. Igual que en el caso anterior, podemos escribir la desigualdad como inecuación cuadrática en c o c', pero esta vez se tiene que la inecuación tiene soluciones reales, con lo que ya no se cumple siempre. Por ejemplo, si $a=a'=\frac{2\sqrt{3}b'}{3}=\frac{2\sqrt{3}c'}{3}$, se tiene que la desigualdad se convierte en

$$15a^2+4b^2+4c^2-10\sqrt{3}ab-10\sqrt{3}ac+12bc\geq 0.$$

Si además $b=a$, se tiene que la desigualdad es equivalente a

$$4c^2-(10\sqrt{3}-12)ac+(19-10\sqrt{3})a^2\geq 0.$$

Nótese por ejemplo que la desigualdad se cumple de forma estricta cuando $c=b=a$, y cuando $c\to 0$, al ser $10\sqrt{3}<\sqrt{361}=19$, pero para $c=a\frac{5\sqrt{3}-6}{4}$, la desigualdad sería equivalente a

$$0\leq 4\frac{(5\sqrt{3}-6)^2}{16}-(10\sqrt{3}-12)\frac{5\sqrt{3}-6}{4}+(19-10\sqrt{3})=(19-10\sqrt{3})-\frac{(5\sqrt{3}-6)^2}{4}=$$
$$=\frac{5(4\sqrt{3}-7)}{4},$$

que es imposible al ser el último miembro negativo, por ser $4\sqrt{3}=\sqrt{48}<7$, con lo que en este caso no se cumpliría la desigualdad, que de hecho no se cumpliría para todo c tal que

$$\frac{5\sqrt{3}-6-2\sqrt{5})+\sqrt{15}}{4}<c<a\frac{5\sqrt{3}-6+2\sqrt{5}-\sqrt{15}}{4}.$$

Resumiendo, podemos decir que la desigualdad se cumple para todos aquellos pares de triángulos tales que no se cumple simultáneamente $5a^2<4b^2+4c^2$ y $5a'^2<4b'^2+4c'^2$, dándose la igualdad si y sólo si ambos triángulos son semejantes, o si $5aa'=4bb'+4cc'$, y además $5a^2=4b^2+4c^2$ o $5a'^2=4b'^2+4c'^2$. Para aquellos pares de triángulos tales que $5a^2<4b^2+4c^2$ y $5a'^2<4b'^2+4c'^2$, la desigualdad no tiene por qué darse, siendo relativamente compleja la condición que han de cumplir los triángulos para que se cumpla la desigualdad y para que se dé la igualdad.

Problema 179. Solución de Roberto Bosch Cabrera, Ciudad de la Habana, Cuba.

Debemos probar que:

$$\left[\frac{aa'}{4} - \frac{1}{9}(aa' + bb' + cc')\right]^2 \geq \left[\frac{a^2}{4} - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2)\right]\left[\frac{a'^2}{4} - \frac{1}{9}(a'^2 + b'^2 + c'^2)\right]$$

Después de expandir y usar que $a^2 = b^2 + c^2$, $a'^2 = b'^2 + c'^2$ queda lo siguiente:

$$10(aa')^2 - 9(aa' + bb' + cc')aa' + 2(aa' + bb' + cc')^2 \geq 0$$

factorizemos

$$[2(aa' + bb' + cc') - 5aa']\,[(aa' + bb' + cc') - 2aa'] \geq 0 \tag{1}$$

Notar que

$$0 \leq (bc' - b'c)^2 \Leftrightarrow (bb' + cc')^2 \leq (b^2 + c^2)(b'^2 + c'^2) \Leftrightarrow bb' + cc' \leq aa'$$

De donde se deduce que $(aa' + bb' + cc') - 2aa' \leq 0$ y $2(aa' + bb' + cc') - 5aa' < 0$, o sea hemos probado la desigualdad (1). Se tiene igualdad si y solo si $bc' = b'c$.

La desigualdad original no se cumple para triángulos arbitrarios, basta considerar el siguiente ejemplo: $(a, b, c) = (4, 3, 2)$ y $(a', b', c') = (5, 4, 2)$.

PROBLEMA 180:

Sea $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$. Demostrar que

$$\frac{H_1}{2} - \frac{H_2}{3} + \frac{H_3}{4} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{H_n}{n+1} + \cdots = \frac{(\ln 2)^2}{2}.$$

SOLUCION:

Primero probaremos si la serie alternante converge

i) $\frac{H_n}{n+1} \geq \frac{H_{n+1}}{n+2} \iff H_n(n+2) \geq H_{n+1}(n+1) = \left(H_n + \frac{1}{n+1}\right)(n+1) = H_n(n+1) + 1 \iff H_n(n+2-n-1) \geq 1 \iff H_n \geq 1$ se cumple para cualquir n natural

ii) Como $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} = 1 + \sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i} < 1 + \int_1^n \frac{1}{x}dx = 1 + \ln n$ entonces

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}}{n+1} \leq \lim_{n\to\infty}\frac{1+\ln n}{n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{1} = 0 \implies \frac{H_n}{n+1} \longrightarrow 0 \text{ cuando } n \to \infty$$

Por el criterio de la serie alternante, esta serie converge.

Ahora proseguimos a calcular su valor.

Sea $S = \frac{H_1}{2} - \frac{H_2}{3} + \frac{H_3}{4} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{H_n}{n+1} + \cdots$ al agruparla de la siguiente forma

$S = \frac{1}{2}(1) - \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) + \cdots =$
$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \cdots + (-1)^n\frac{1}{n} + \cdots\right)(1) + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \cdots + (-1)^n\frac{1}{n} + \cdots\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \cdots +$
$\left((-1)^{n+1}\frac{1}{n+1} + (-1)^{n+2}\frac{1}{n+2} + \cdots\right)\left(\frac{1}{n}\right) + \cdots = (1)\sum_{j=2}^{\infty}(-1)^j\frac{1}{j} + \left(\frac{1}{2}\right)\sum_{j=3}^{\infty}(-1)^j\frac{1}{j} + \cdots +$
$\left(\frac{1}{n}\right)\sum_{j=n+1}^{\infty}(-1)^j\frac{1}{j} + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}\sum_{j=i+1}^{\infty}(-1)^j\frac{1}{j} = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}\sum_{j=i+1}^{\infty}(-1)^j\int_0^1 x^{j-1}\,dx =$
$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}\int_0^1\sum_{j=i+1}^{\infty}(-1)^j x^{j-1}dx$ pero

$$\sum_{j=i+1}^{\infty}(-1)^j x^{j-1} = -\sum_{j=i+1}^{\infty}(-1)^{j-1}x^{j-1} = -\sum_{j=i+1}^{\infty}(-x)^{j-1} = -(-x)^i\sum_{k=0}^{\infty}(-x)^k$$
$$= -(-x)^i\left(\frac{1}{1+x}\right)$$

Sustituyendo

$$S = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}\int_0^1 -(-x)^i\left(\frac{1}{1+x}\right)dx = -\int_0^1\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-x)^i}{i}\left(\frac{1}{1+x}\right)dx = -\int_0^1\frac{1}{1+x}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-x)^i}{i}\,dx$$

Como $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-x)^i}{i} = \ln(1+x)$ sustituyendo se obtiene

$$S = \int_0^1\frac{1}{1+x}\ln(1+x)\,dx$$

Utilizando integración por partes con,

$u = \ln(1 + x) \quad y \quad dv = \frac{1}{1+x} dx \, , du = \frac{1}{1+x} dx \quad y \quad v = \ln(1 + x)$

Se tiene $\int \frac{1}{1+x} \ln(1 + x)\, dx = [\ln(1 + x)]^2 - \int \frac{1}{1+x} \ln(1 + x)\, dx \implies \int \frac{1}{1+x} \ln(1 + x)\, dx = \frac{[\ln(1+x)]^2}{2}$

Evaluando

$$S = \frac{[\ln(2)]^2}{2}$$

Comentario al libro "21 Aulas de Matemática Olímpica"

El Prof. Carlos Yuzo Shine es el Coordinador académico para el bienio 2008-2009 de la Revista oficial de la Olimpiada Brasileira de matemática y es bien conocido por los participantes en la Olimpiada Internacional. La Sociedade Brasileira de Matemática ha publicado en 2009 su excelente libro *21 Aulas de Matemática Olímpica.* Se trata de una recopilación de lecciones de preparación de Olimpiadas, dictadas por el autor durante los distintos períodos de entrenamiento de los estudiantes de su país, y que bajo la dirección de Shine, han obtenido excelentes resultados en las competiciones internacionales de matemáticas en las que toman parte.

El libro se divide en cinco partes: Álgebra, Combinatoria, Geometría, Teoría de Números, y *Outras coisas!*

Cada capítulo de esas partes (4 en Álgebra, 6 en Combinatoria, 3 en Geometría, 6 en Teoría de Números y 2 en Outras coisas!) es, en buena medida, independiente de los demás. Algunos temas no forman parte del currículo no escrito de la I.M.O., como el primero (*Introducción a la Programación Lineal)*, pero capítulos como ése enriquecen el aprendizaje de los estudiantes, que, en definitiva, es mucho más importante que ganar muchas medallas en las Olimpiadas. El penúltimo capítulo del libro (*Aplicaciones de Planos proyectivos en Teoría de Números y Combinatoria)* es otro ejemplo de este tipo.

Sería, en mi opinión, una verdadera lástima que el hecho de estar escrito en portugués (de Brasil) supusiera un freno para que el libro fuera conocido, leído, y ampliamente aprovechado por los preparadores olímpicos de los países iberoamericanos. Por lo que a mi respecta, tengo la intención de utilizarlo tanto como pueda en el entrenamiento de mis estudiantes y los del equipo olímpico español.

Valladolid, enero de 2010

Francisco Bellot

<u>DIVERTIMENTOS MATEMÁTICOS 37</u>

Algunas citas recopiladas por Howard E. Eves en *Mathematical Circles*

Un Rey decidió honrar a aquél de sus súbditos que más hubiera contribuido al desarrollo del conocimiento. Aparecieron varios investigadores de primer orden como candidatos, en las diversas disciplinas. Después de considerar cuidadosamente las credenciales de los candidatos, el Rey observó a una mujer mayor, vestida pobremente, en el fondo de la sala.

¿Quién es esa mujer?, preguntó el Rey.

Sólo viene a observar, Señor, le dijo el Primer Ministro. *Está interesada en el desenlace, porque ella dio clase a todos los candidatos cuando eran estudiantes.*

El Rey bajó del trono e impuso la banda de honor a la maestra de todos los candidatos.

Un comentario de Leo Moser:

A Ludwig Bieberbach le gustaba la cerveza y tenía una panza considerable. Sus estudiantes le apodaban *Bier Bauch (*panza cervecera).

Además tenía considerables dificultades con la aritmética elemental. Sus estudiantes, siempre que terminaba la demostración de un teorema que pudiera ser ilustrado con un ejemplo numérico, le pedían tal ejemplo. Después de varios intentos infructuosos, se exasperaba y exclamaba: *Es ist doch so wie so bewiesen! (*¡Qué más da, ya ha sido demostrado!)

Una anécdota de Ralph Boas

Finkbeiner y Boas estaban comiendo en un restaurante de San Antonio de Texas y pidieron la cuenta. La camarera preguntó: *¿La quieren conjunta o separada?* Boas dijo: *Separada, por favor.* La camarera se volvió a Finkbeiner y dijo: *¿Usted también la quiere separada?*

Una niña está haciendo sus deberes escolares y llama a su madre: *Mamá, ¿cuánto vale 129/3?* La madre se lo dice. Poco después, la nña vuelve a preguntar: *Mamá, ¿cuánto vale 196/7?.* La madre se lo dice. El asunto se repite unas cuantas veces más, hasta que la madre le dice: *¿Por qué no haces los deberes por ti misma?* La niña explica: *Oh, la profesora nos ha dicho que podemos usar el método que queramos.*

Valladolid, enero 2010

Número

39

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática
Agencia Española de Cooperación Internacional para el Desarrollo
OEI
ISSN 1698-677X

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

Número 39 (junio - agosto 2010)

ISSN – 1698-277X

ÍNDICE

Observación previa del editor
Reiteramos a todos nuestros comunicantes que tanto en el texto de las soluciones como en el nombre de los ficheros que se nos envíen aparezcan el nombre (o al menos las iniciales) del autor de la solución, además de identificar debidamente el problema. Esto es especialmente importante cuando se envían desde una dirección electrónica que no es del autor de la solución.

Artículos, Notas y Lecciones de Preparación de Olimpiadas (39)

Problemas para los más jóvenes (39)

Problemas resueltos:
Presentamos la solución de Andrés Zorrilla Vaca (estudiante, Col. Lacordaire, Cali, Colombia) al problema 36-5 de esta sección, y a los problemas 38-1 y 38-3 del número anterior.
Presentamos también las soluciones a los problemas para los más

jóvenes del número 37 de la REOIM, que ha enviado Raúl Simón Elexpuru (Santiago, Chile).

Problemas de nivel medio y de Olimpiadas (39)

Problemas propuestos: Competición Matemática Mediterránea 2010

Resueltos:

Presentamos la solución de Andrés Zorrilla Vaca (estudiante, Col. Lacordaire, Cali, Colombia) a los problemas 2 y 4 de la 2ª Olimpiada del Benelux (vol. 38).

Problemas (39)

Problemas propuestos 191-195

Problemas resueltos

Recibidas soluciones después de la aparición del número anterior: al problema 183, de Pedro Henrique O. Pantoja, Natal (Brasil), y al problema 185, de Luis Gómez Sánchez, Univ. de Oriente, Cumaná, Venezuela.

Problema 36

Propuesto por José Luis Díaz Barrero (Barcelona, España), no se había publicado solución. Presentamos la solución enviada por José Hernández Santiago, Oaxaca, México.

Problema 186

Recibidas soluciones de José Heber Nieto (U. del Zulia, Maracaibo, Venezuela), Daniel Lasaosa Medarde (U. Pública de Navarra, Pamplona, España) y del proponente. Presentamos la solución de Nieto.

Problema 187

Recibidas soluciones de Miguel Amengual Covas (Cala Figuera, Mallorca, España), Daniel Lasaosa Medarde (U. Pública de Navarra, Pamplona, España), Vicente Vicario García (IES El Sur, Huelva, España) y del proponente.

Presentamos la solución de Vicario.

Problema 188

Recibidas soluciones de Daniel Lasaosa Medarde (U. Pública de Navarra, Pamplona, España) y del proponente. Presentamos la solución de Lasaosa.

Problema 189

Propuesto en *Mathematical Problems papers, del Rev. Radford.* Recibidas soluciones de José Heber Nieto (U. del Zulia, Maracaibo, Venezuela), Daniel Lasaosa Medarde (U. Pública de Navarra, Pamplona, España) y el proponente. Presentamos la solución de Nieto.

Problema 190

Propuesto en *Mathematical Problems papers, del Rev. Radford.*

Recibidas soluciones de: Dones Colmenárez (UPEL, Barquisimeto, Venezuela); José Heber Nieto (U. del Zulia, Maracaibo, Venezuela); Daniel Lasaosa Medarde (U. Pública de Navarra, Pamplona, España); Daniel López Aguayo (Puebla, México); Andrés Zorrilla Vaca (estudiante, Colegio Lacordaire, Cali, Colombia). Presentamos las soluciones de Nieto y López Aguayo.

Comentario de páginas web y noticias de congresos 39

Tres congresos del verano 2010: *RELME 24 en Guatemala; 6º Congreso de la WFNMC en Riga; 6ª Conferencia Internacional sobre Creatividad Matemática y Enseñanza a alumnos de alto rendimiento en Riga.*

Divertimentos matemáticos (39)

El Ornitorrinco (Prueba por equipos de la Fase Regional de la Olimpiada de 2º y 4º de ESO 2010, en Ávila, Castilla y León, España)

Desarrollada en el Centro de Altos Estudios Universitarios de la OEI con el apoyo de la Agencia Española de Cooperación Internacional para el Desarrollo (AECID)

Acceder

http://www.oei.es/oim/revistaoim/numero39.htm

Convocatoria: Curso para la formación permanente en el área de las Matemáticas

El curso está dirigido al profesorado de Enseñanza Secundaria en ejercicio de cualquiera de los países iberoamericanos. Cualquier docente de este nivel puede solicitar participar. No es necesario ningún tipo de requisito previo salvo el impartir docencia en ese nivel que acreditará cuando se le solicite. Tampoco es necesario poseer una formación previa en el manejo de los medios informáticos porque, precisamente, uno de los objetivos del curso es proporcionar esos conocimientos a quienes estén dispuestos a formarse para la utilización de esos recursos. En este sentido, habrá una unidad cero cuyo contenido va en esa línea.

http://www.oei.es/formularios/cursomat.htm

UNA PRUEBA ELEMENTAL DEL TEOREMA DE PASCAL

Milton F. Donaire Peña

Lima, Perú

En este artículo se presenta una nueva prueba del teorema que el matemático Blaise Pascal $(1623 - 1662)$ obtuviera a la edad de 16 años, sobre la colinealidad de las intersecciones de los lados opuestos de un hexágono.

Comúnmente tal resultado es conocido como el teorema del hexagráma místico. Con el fín de que tal teorema pueda ser presentado a alumnos de la escuela secundaria, requerimos un teorema previo de J. J. A. Mathieu sobre las rectas isogonales que generalmente se demuestra usando el teorema reíproco del teorema de Ceva en su forma trigonométrica, pero que ahora probaremos también por un nuevo camino para asegurar la prueba elemental del teorema de Pascal.

Definición (Conjugadas Isogonales)

Sean OX y OX' rayos que pasan por el vértice O del ángulo MON simétricos con respecto a la bisectriz del ángulo MON. Entonces OX y OX' se llaman par de rectas isogonales para el ángulo MON.

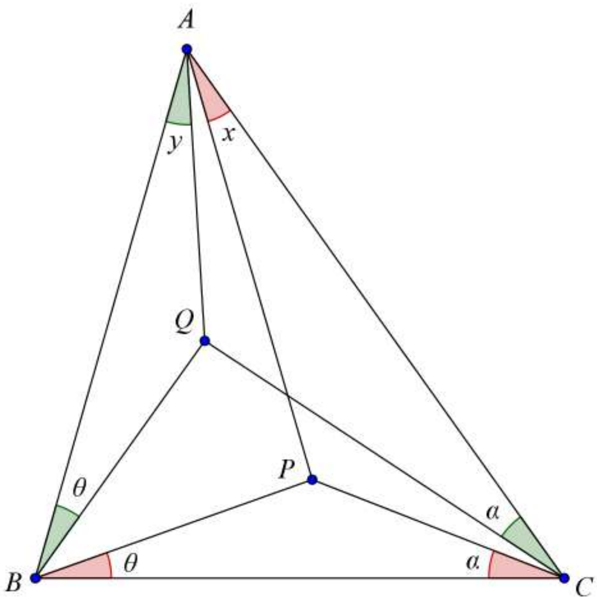


Figura 1: Se cumple que $x = y$

Teorema (J. J. A. Mathieu)

Si BP y BQ son conjugadas isogonales del ángulo CBA del triángulo ABC, y también CP y CQ son conjugadas isogonales para el ángulo ACB, entonces AQ y AP son conjugadas isogonales para el ángulo BAC.

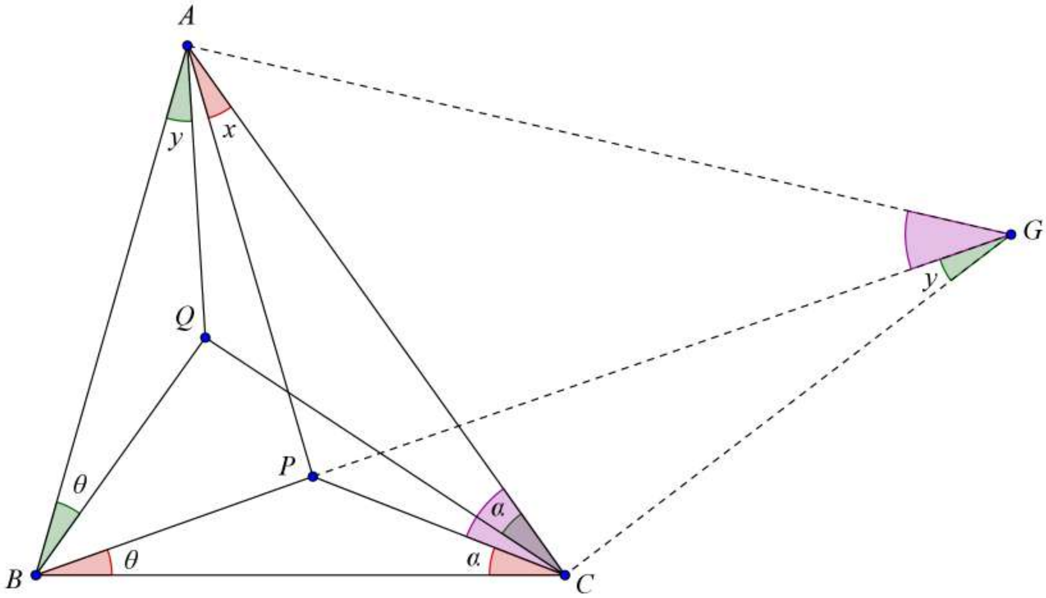


Figura 2: Concurrencia de conjugadas isogonales

Prueba

Prolonguemos BP hasta G de modo que los trángulos BQA y BCG sean semejantes, luego: $m\angle BGC = m\angle BAQ = y$.
De allí: $BC = BQ \cdot k$ y $BG = AB \cdot k$ y como $m\angle CBQ = m\angle PBA$, tendremos que los triángulos CBQ y GBA también serán semejantes, entonces $m\angle BCQ = m\angle BGA$, pero como $m\angle BCQ = m\angle PCA$ tenemos que el cuadrilátero $CPAG$ es inscriptible, entonces: $m\angle PGC = m\angle PAC$, es decir $x = y$.

Finalmente agregaremos que este documento ha sido elaborado de acuerdo a la demostración del teorema de Pascal que apareció por primera vez en el libro FORMAS Y NÚMEROS - La geometría en las Olimpiadas Matemáticas - (pág. 270), publicada por la Universidad de Ciencias y Humanidades de Perú en enero del 2010.

Teorema de Blaise Pascal

Los puntos P, Y, X de intersección de los tres pares de lados opuestos AQ y BZ, BC y AR, QC y RZ, de un hexágono (no necesariamente convexo), $AQCBZR$, inscrito en una circunferencia están en una recta.[1].

[1]En general el teorema es válido para cualquier cónica y la prueba del teorema general se puede reducir a la forma que mostramos a continuación luego de realizar una conveniente proyección de la cónica en algún plano

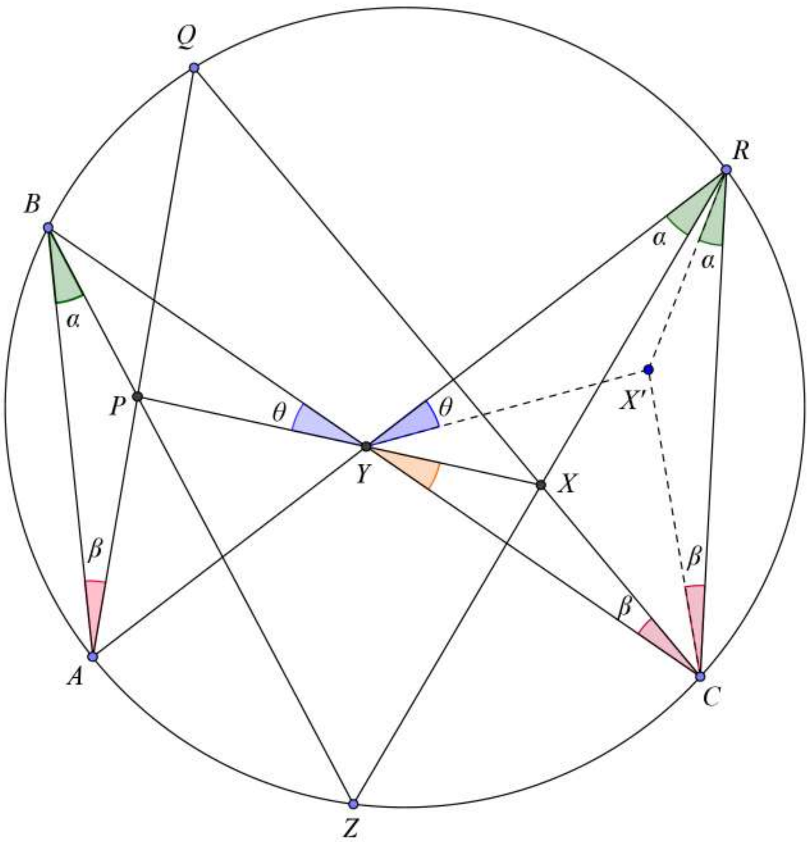


Figura 3: Pascal y las medidas angulares

La Prueba

Los triángulos ABY y CRY son semejantes, pero P y X no son homólogos, entonces construimos el punto X' que sea el homólogo de P, luego $m\angle RYX' = m\angle BYP = \theta$, por el teorema anterior $m\angle XYC$ será igual a θ y por lo tanto P, Y, X son colineales.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Eves, Howard *Estudio de todas las geometrías.* Hispano - Américana. México. 1969.
[2] Frére Gabriel Marie. *Exercises de Geómétrie.* J. Gigord. París. 1920.
[3] Donaire, Milton *Formas y Números. La geometría en las olimpiadas Matemáticas.* Universidad de Ciencias y Humanidades. Perú 2010.
[4] Barroso, Ricardo http://personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/
[5] Ayme, Jean Louis http://pagesperso-orange.fr/jl.ayme/contenu.html
[6] Capitán, García http://garciacapitan.auna.com/index.htm

GENERALIZACIÓN DE LA DESIGUALDAD PROPUESTA EN LA I.M.O. 2008 MADRID (ESPAÑA)

Prof. Marian Dinca

El problema 4 de la 49^a IMO 2008, propuesto por Austria y cuyo autor es Walther Janous, decía:

i) *Si x,y,z son tres números reales diferentes de 1, tales que* $xyz = 1$, *demostrar que*

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geq 1 \qquad (1)$$

ii) Probar que el signo igual se alcanza para infinitas ternas de números racionales x, y, z.

Para $x_k \in \mathbb{R}$, y $\lambda_k \in \mathbb{R}_+$, se tiene la identidad de Lagrange:

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k^2 = \frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right)^2}{\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k} + \frac{\sum\limits_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_i \lambda_j (x_i - x_j)^2}{\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k} \qquad (2)$$

La identidad (2) implica la desigualdad

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k^2 \geq \frac{\sum\limits_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_i \lambda_j (x_i - x_j)^2}{\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k} \geq \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k \lambda_{k+1} (x_k - x_{k+1})^2}{\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k} \qquad \text{donde } \lambda_{n+1} = \lambda_1 \text{ y } x_{n+1} = x_1 \qquad (3).$$

Así pues, tenemos

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k^2 \geq \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k \lambda_{k+1} (x_k - x_{k+1})^2}{\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k} \qquad (4).$$

Si en esta desigualdad (4) ponemos

$$\lambda_k = \frac{1}{(x_k - x_{k+1})^2}, k = 1, 2, \cdots, n$$

resulta

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2}{(x_k - x_{k+1})^2} \geq \frac{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \lambda_{k+1} \frac{1}{\lambda_k}}{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k} = \frac{\sum_{k=1}^{n} \lambda_{k+1}}{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k} = \frac{\sum_{k=2}^{n+1} \lambda_k}{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k} = 1 \quad \text{pues } \lambda_{n+1} = \lambda_1 \qquad (5).$$

Escribiendo la desigualdad (5) en la forma

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\left(\frac{x_k}{x_{k+1}}\right)^2}{\left(\frac{x_k}{x_{k+1}} - 1\right)^2} \geq 1,$$

y llamando $y_k = \frac{x_k}{x_{k+1}}$ para $k = 1, 2, \cdots, n$ se obtiene la desigualdad

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{y_k^2}{(y_k - 1)^2} \geq 1, \text{ con } \prod_{k=1}^{n} y_k = 1, \ y_k \neq 1 \text{ para } k = 1, 2, \cdots, n.$$

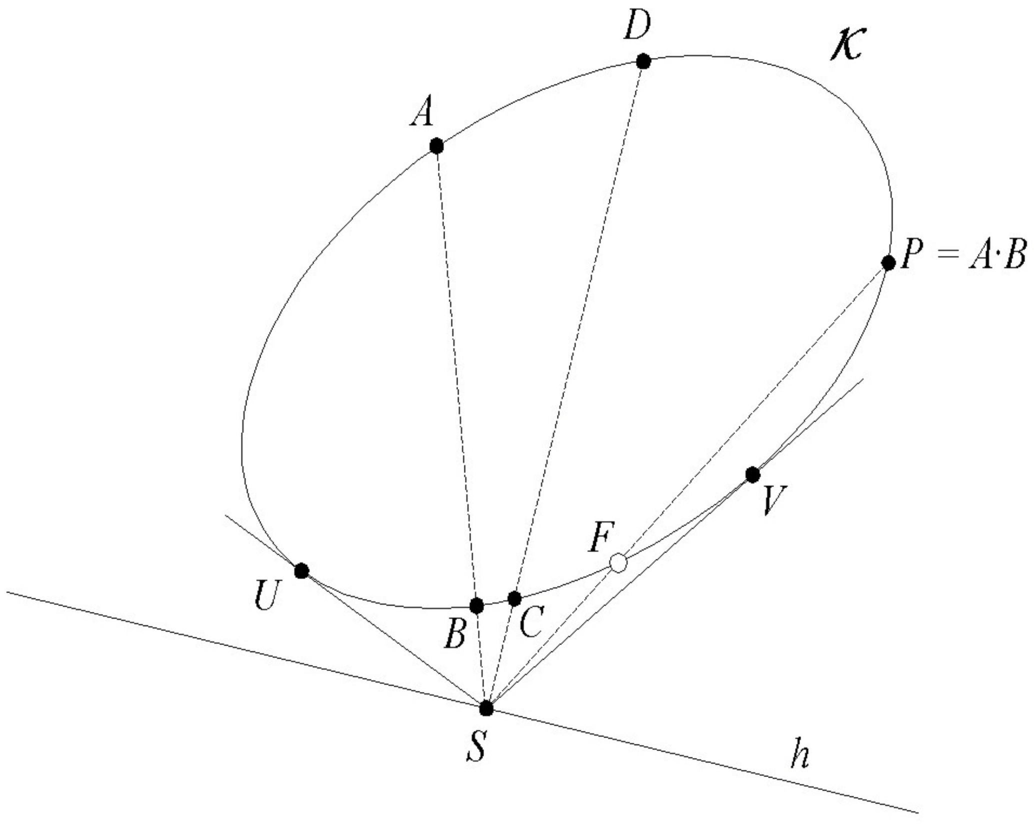
HABLANDO DE CUADRADOS NEGATIVOS...

Guido Lasters y Hugo Staelens

Los alumnos que se encuentran por primera vez ante los números imaginarios desconfían frecuentemente del hecho que $i^2=-1$. No siempre es fácil para el profesor de matemáticas hacer que sus estudiantes acepten tal fórmula, por no hablar de nuestra frustración para hacerles entender la utilidad de la misma. Hay diferentes maneras de introducir los números imaginarios. El enunciado axiomático de la fórmula no es un modo apto para convencer a los alumnos. No obstante, hay que decir que en los cursos de matemáticas uno se las arregla bastante bien.

Si se quiere convencer a los alumnos más profundamente de que los cuadrados negativos no son tan anormales, se puede volver más tarde sobre el problema, una vez que hayan sido estudiadas las cónicas. Se comprobará entonces que los cuadrados negativos aparecen de un forma natural.

Definiremos una multiplicación entre los puntos que se encuentran sobre una cónica k.

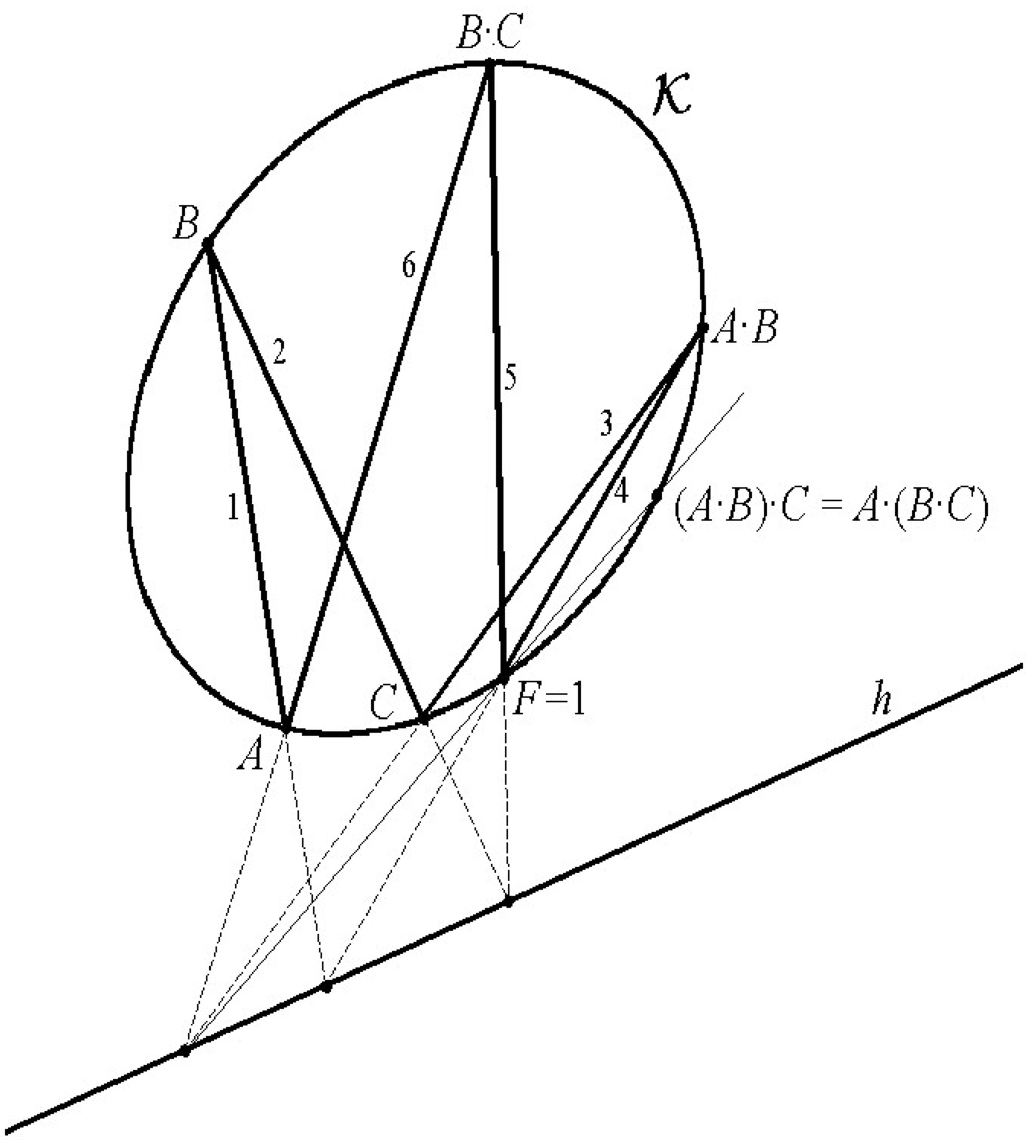


Sea F un punto fijo de k y sea h una recta fija en el plano. Por definición, el producto A∘B es el punto P, obtenido uniendo el punto de intersección S de la recta AB y la recta fija h, con el punto fijo F de k. (Ver fig. 1)

Se tiene, claramente,

$$P = A \circ B = C \circ D = U^2 = V^2 = P \circ F.$$

Resulta de aquí que la multiplicación es conmutativa y que F es su elemento neutro. A partir de ahora se puede representar a F por 1:F=1. La figura 2 muestra que la multiplicación es también asociativa.



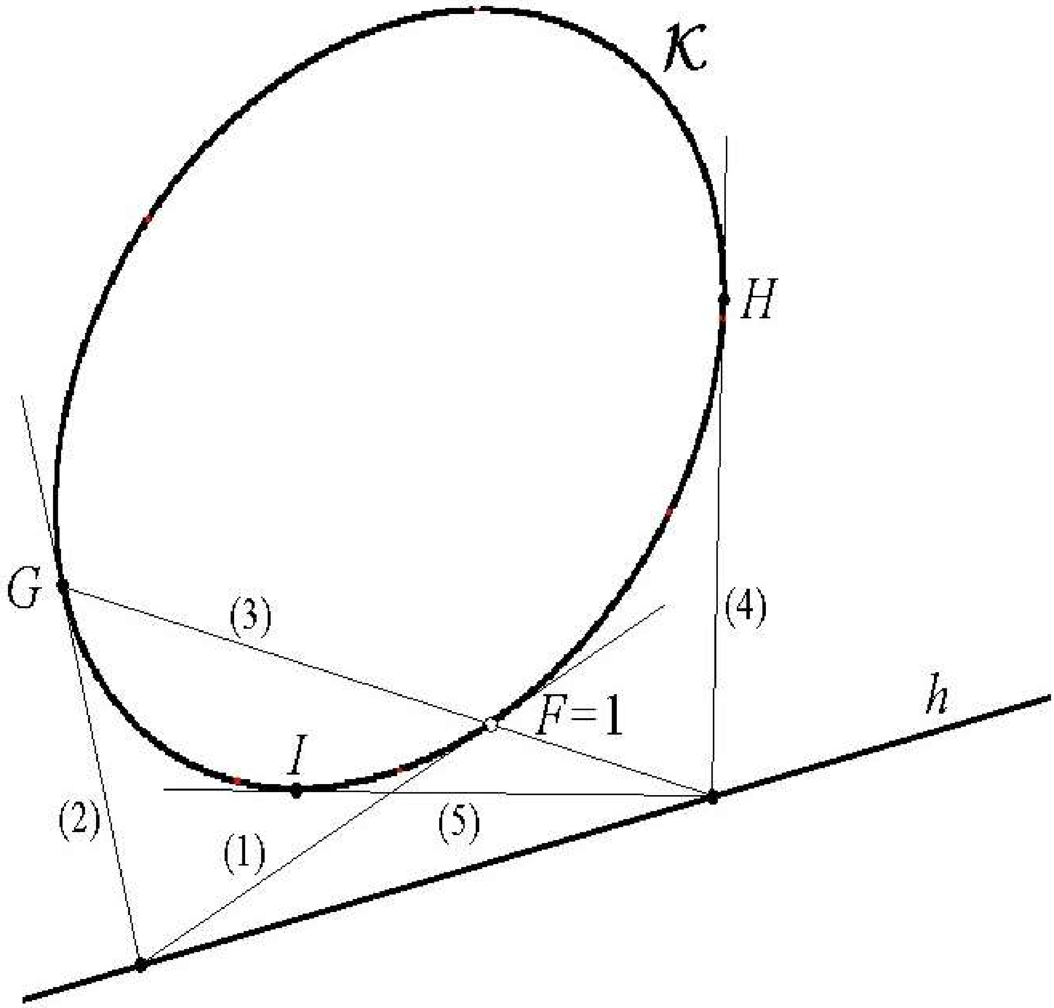
En efecto, si se piensa en el teorema de Pascal, aplicado al hexágono definido por los puntos A,B,C,A∘B,1,B∘C, se observa que los pares de puntos opuestos (1,4),(2,5) y (3,6) se cortan sobre la recta fija h.

Entonces es fácil ver que los puntos (A∘B)∘C y A∘(B∘C) coinciden,

(A∘B)∘C=A∘(B∘C),

lo que demuestra la asociatividad.

Consideremos ahora la figura 3. Para la construcción, sígase la numeración.



Se tiene $G^2=F^2$, y como F=1, se sigue que $G^2=1$. Podemos entonces identificar a G con -1:

G=-1.

Finalmente obtenemos

$$H^2=I^2=G\circ F=G\circ 1=G=-1.$$

Conclusión: H e I pueden identificarse con los números imaginarios i o -i:

$$H,I\in\{i,-i\}.$$

Los cuadrados negativos son inherentes a la Matemática. ¡Somos nosotros los que los debemos descubrir!

Guido Lasters
K.A.Redingerhof Leuven
Ganzendries 245
3300 Tienen (Oplinter)

Hugo Staelens
Ereleraar P.T.I. Eeklo
Beneluxstraat 1
9900 Eeklo

ACERCA DE UNA SUMA COMBINATORIA INUSUAL Y DIFÍCIL

LAURENTIU MODAN

Abstract

In this short note, we present the origin story and the manner in which it can be calculated the sum

$$\sum_{k=1}^{n-1}\binom{2n-1}{k}\binom{2n+1}{k+1}$$

Key words

Intervalo de aproximación, suma combinatoria, límite, fórmula de Stirling para $n!$

Mathematics classification

Primaria : 05A05, 11B75. Secundaria: 05A10

1. Preliminares

En [4] corregimos un error aparecido en el texto y en la solución de un problema de [1] . Luego presentamos la siguiente generalización:

i) *Estudiar de cuántas maneras se pueden distribuir* $2n-1$ chicos y $2n+1$ *chicas en dos equipos, cada uno de* $2n$ *personas.*

ii) *Hallar el número total de posibilidades cuando, en cada equipo de i), debe haber al menos un chico.*

En [6] presentamos la solución a la parte i), a saber $\frac{(4n)!}{[(2n)!]^2}$, pero por lo que a la segunda parte respecta, solamente indicamos la manera en la que había que calcular las posibilidades buscadas, dada por la suma

$$\sum_{k=1}^{n-1}\binom{2n-1}{k}\binom{2n+1}{k+1}. \qquad (1)$$

2.Resultados

Estudiemos la forma en la que aparece (1). La elección de k chicos de entre $2n-1$, y de $2n-k$ chicas de entre $2n+1$, para el primer equipo que consta de $2n$ personas, puede realizarse de

$$\binom{2n-1}{k}\binom{2n+1}{2n-k} \text{ maneras.}$$

Para el segundo equipo, también de $2n$ personas, el número de posibilidades es

$$\binom{2n-1-k}{2n-1-k}\binom{2n+1-(2n-k)}{2n+1-(2n-k)} = 1.$$

De todo ello se deduce que el número de formas en el que estamos interesados viene dado por la suma

$$\sum_{k=1}^{n-1}\binom{2n-1}{k}\binom{2n+1}{2n-k}=\sum_{k=1}^{n-1}\binom{2n-1}{k}\binom{2n+1}{k+1},$$

es decir, la relación (1).

Lo calcularemos usando la siguiente suma (véase [2])

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{p}{k}\binom{q}{m-k}=\binom{p+q}{m}, p,q,m\in\mathbb{N} \qquad (2).$$

Con $m=2n, p=2n-1, q=2n+1$ en (2), se obtiene

$$\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n-1}{k}\binom{2n+1}{2n-k}=\binom{4n}{2n},$$

o lo que es lo mismo,

$$\sum_{k=1}^{2n-2}\binom{2n-1}{k}\binom{2n+1}{2n-k}=\binom{4n}{2n}-2\,(2n+1)\,. \qquad (3)$$

Como en la suma (3) los términos son iguales dos a dos, reescribimos la relación anterior como

$$\sum_{k=1}^{n-1}\binom{2n-1}{k}\binom{2n+1}{k+1}=\frac{1}{2}\binom{4n}{2n}-2n-1.$$

Así hemos obtenido el valor de la suma (1).

Observación 1

Recordaremos aquí, en relación con (1), que en [5] *propusimos el cálculo del siguiente límite:*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\sum_{k=1}^{n-1}\binom{2n-1}{k}\binom{2n+1}{k+1}\right]$$

Vamos a calcularlo ahora hallando un intervalo de aproximación. Denotamos

$$S(n)=\sum_{k=1}^{n-1}\binom{2n-1}{k}\binom{2n+1}{k+1}=\frac{1}{2}\frac{(4n)!}{[(2n)!]^2}-2n-1 \qquad (4).$$

En primer lugar damos una estimación de $S(n)$ mediante la fórmula de Stirling (ver [3]):

$$n!=\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\theta/12n}, \quad \theta\in(0,1) \qquad (5)$$

De esta forma, encontramos

$$\frac{(4n)!}{[(2n)!]^2} = \frac{\sqrt{8\pi n}\left(\frac{4n}{e}\right)^{4n} e^{\theta_1/48n}}{\left[\sqrt{4\pi n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} e^{\theta_2/24n}\right]^2} = \frac{2^{4n}}{\sqrt{2\pi n}} e^{1/12n\left(\frac{\theta_1}{4}-\theta_2\right)}, \theta_1, \theta_2 \in (0,1) \qquad (6).$$

Ya que $\theta_1, \theta_2 \in (0,1)$, ocurre que

$$\begin{aligned} \frac{1}{12n}\left(\frac{\theta_1}{4} - \theta_2\right) &\in \left(-\frac{1}{12n}, \frac{1}{12n}\right), \text{ y de aquí} \\ e^{\frac{1}{12n}\left(\frac{\theta_1}{4}-\theta_2\right)} &\in \left(e^{-\frac{1}{12n}}, e^{\frac{1}{48n}}\right) \qquad (7) \end{aligned}$$

Llevando esta aproximación a (6) obtenemos

$$e^{-1/12n} \cdot \frac{2^{4n}}{\sqrt{2\pi n}} < \frac{(4n)!}{[(2n)!]^2} < e^{1/48n} \cdot \frac{2^{4n}}{\sqrt{2\pi n}} \qquad (8),$$

y yendo a (4), obtenemos

$$e^{-1/12n} \cdot \frac{2^{4n}}{\sqrt{2\pi n}} - 2n - 1 < S(n) < e^{1/48n} \cdot \frac{2^{4n}}{\sqrt{2\pi n}} - 2n - 1 \qquad (9),$$

que nos da el intervalo de aproximación para $S(n)$.Otra forma mejor es

$$e^{-1/12n} < [S(n) + 2n + 1] \frac{\sqrt{2\pi n}}{2^{4n}} < e^{1/48n} \qquad (10).$$

Observación 2
Tomando límites en (10) obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} [S(n) + 2n + 1] \frac{\sqrt{2\pi n}}{2^{4n}} = 1 \blacksquare$$

Referencias

[1] Brandiburu M., Joitza D., Nastasescu C., Nitza C.: *Exercices and problems for Algebra (en rumano); Rotech Pro, 2004, Bucarest.*

[2] Iaglom A.M., Iaglom I.M.: *Unelementary problems solved elementarily (en rumano).* Editura Tehnica, 1983, Bucarest.

[3] Modan L.: From Stirling Formulas to some Inequalities, *Octogon, Math. Magazine, vol.15, nr 2A, 2007. Brasov, pg.833-835.*

[4] Modan L.: Accuracy of the Mathematic Language used in Combinatorics (en rumano). *Recreatii Mat., vol 10, nr.1, 2007, Iasi, pg.42-43.*

[5] Modan L.: PP13474, *Octogon, Math Magazine, vol.16, nr 1B, 2008, Brasov, pg. 500.*

[6] Modan L.: To teach Combinatorics using selected problems, *Proc. of Conf. "Models in developing Math", september 2009, Dresden, pg. 420-422.*

Department of Mathematics
Faculty of Computer Science, Bucarest
Calea Dorbantzilor 15-17, sector I, Bucarest
modan.laurent@yahoo.fr

Un problema de Teoría de Grafos, de Colorado

Alexander Soifer, USA

La teoría de grafos ha sido una base fértil para obtener bellas ideas que funcionan muy bien en competiciones del tipo de las Olimpiadas. El problema que presentamos aquí fué utilizado como problema 4 el 23 de abril de 2010 en la Olimpiada Matemática de Colorado.

Para crear este problema yo necesitaba conocer cuántos países forman las Naciones Unidas. Supuse que eran 200, ¡y estuve muy cerca de acertar!

Wikipedia informa: "**La Organización de Naciones Unidas (ONU)** es una organización internacional cuyos propósitos son facilitar la cooperación en las leyes internacionales, la seguridad internacional, desarrollo económico, progreso social, derechos humanos y la consecución de la paz mundial… Actualmente tiene 192 estados miembros, incluyendo casi todo estado soberano en el mundo."

Y ahora, el problema:

"PARA FORMAR UNA UNIÓN MÁS PERFECTA…" (A. Soifer). La Organización de Naciones Unidas tiene 192 Estados Miembros, tal que cada par de los cuales tiene un desacuerdo. Para formar una Unión más perfecta, se establece una *negociación*: Si cuatro represenatntes de cuatro estados miembros se sientan alrededor de una Mesa Redonda, de manera que cada par de representantes consecutivos tiene un desacuerdo, la negociación elimina UNO de esos cuatro desacuerdos. Una serie de negociaciones consecutives reduce el número total de desacuerdos a n. ¿Cuál es el *mínimo* valor de n?

Solución.

1). Cada Estado Miembro está representado por un vértice de un grafo, en el que dos vertices están conectados por una arista si y solamente si los países correspondientes tienen un desacuerdo. Entonces el Grafo Inicial de Desacuerdos es el grafo completo K_{192} de 192 vértices (un conjunto de 192 vértices, tal que dos cualesquiera de ellos está unidos por medio de una arista). Una negociación selecciona un ciclo de 4 vértices C_4 del grafo ("representantes de cuatro países se sientan en una mesa redonda de modo que cada par de consecutivos tiene un desacuerdo") y elimina una arista de él. El problema, traducido a este lenguaje, pide determiner el mínimo número de aristas del Grafo de Desacuerdos obtenido del inicial K_{192} por una serie de eliminaciones consecutives de una arista de un 4-ciclo.

2). Obsérvese primero que la eliminación de una arista en un subgrafo C_4 conserva la conectividad del grafo (es decir, la capacidad para pasar de un vértice a otro a través de una serie de aristas).

Si la serie de negociaciones consecutivas llevase a eliminar todos los ciclos, obtendríamos un grafo conexo sin ciclos, lo que se llama un *árbol* , de 192 vértices. Ese árbol tiene exactamente 191 aristas (demostración fácil por inducción).

Obsérvese que para cualquier par de puntos de un árbol hay un único camino que los conecta, a través de una serie de aristas (porque si hubiera más, habríamos creado un ciclo con la union de dos caminos distintos). Esta observación nos permite demostrar que *cualquier árbol es coloreable con 2 colores* (de modo que los vértices del mismo color no sean adyacentes). En efecto, se colorea un punto A del color 0, y cualquier otro punto B de color 0 ó 1 dependiendo de la paridad de la distancia en aristas de A a B.

Obsérvese ahora que la propiedad de colorearse con 2 colores se conserva bajo la operación inversa a la negociación, es decir la operación consistente en completar un camino de 4 aristas en un ciclo de 4. Por lo tanto, si suponemos que se ha conseguido el grafo de 191 aristas, el Grafo Inicial de Desacuerdos es también coloreable con 2 colores. Sin embargo el grafo Inicial de desacuerdos K_{192} no es coloreable con 2 colores (require 192 colores), luego nunca obtendremos un árbol como resultado de una serie de negociaciones. Hemos probado de 191 es inalcanzable.

3). Por otra parte, veamos el siguiente proceso a partir del Grafo de Desacuerdos de 192 aristas.

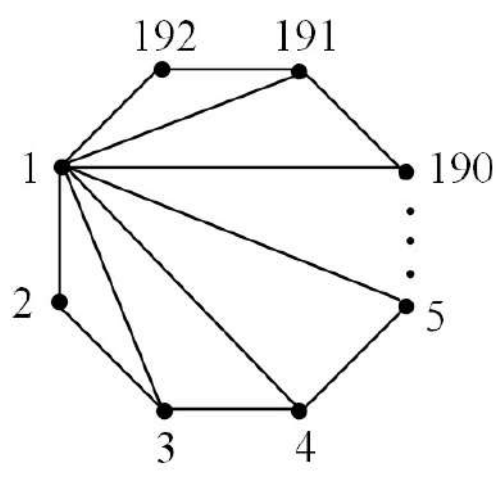


Figura 1: Kite-0

A través de la serie de negociaciones podemos pasar, del grafo Kite-0, que es K_{192}, al Kite-1 , que consta de K_{191} con una arista adicional (una “cola”). En efecto (v. fig.1), del 4-ciclo {1, 3, 4, 5} quitamos la arista {1, 3}; de {1, 4, 5, 6} quitamos {1, 4}; …, de {1, 190, 191, 192} quitamos {1, 190}; de {1, 191, 192, 2} quitamos {1, 191}. Finalmente, de {1, 2, 3, 192}, quitamos {1, 192}, y obtenemos el Kite-1 deseado (Figura 2).

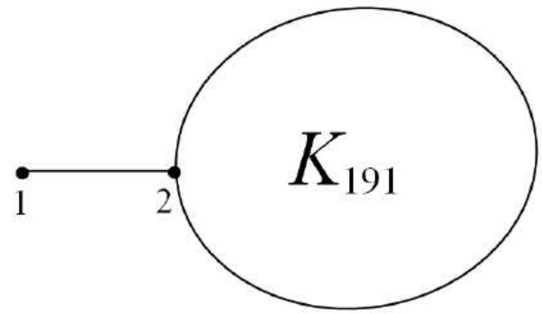


Figura 2: Kite-1

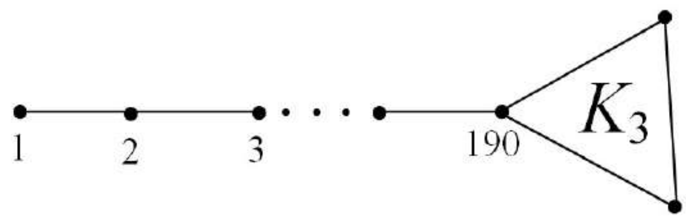


Figura 3: Kite-189

Continuando este proceso (que se puede formalizar por simple inducción), llegaremos al grafo Kite-189 , que consta de K_3 con una cola de longitud 189 (figura 3), que tiene exactamente 192 aristas, como se quería demostrar. ■

Problem Jov36-5

Demostrar que no hay ningún par de números reales tales que se verifiquen simultáneamente las igualdades

$$x = y^2 + 1; y = x^2 + 1$$

Solución:

Primero, sumamos las dos igualdades, para llegar a:

$$x + y = x^2 + y^2 + 2$$

luego restamos a ambos lados de la ecuación (x+y), para luego factorizar convenientemente de la siguiente manera:

$$0 = x^2 - x + y^2 - y + 2$$

$$0 = x(x-1) + y(y-1) + 2$$

llegamos a una contradicción ya que:

$$x(x-1) \geq 0$$

$$y(y-1) \geq 0$$

$$2 > 0$$

y el resultado de la suma nunca sera "cero", por consiguiente no existe ningún numero REAL que satisfaga las igualdades. Finalmente se ha demostrado.

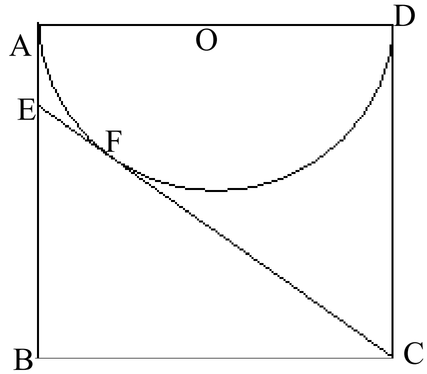
Andrés Zorrilla Vaca

Cali, Colombia

Colegio Lacordaire

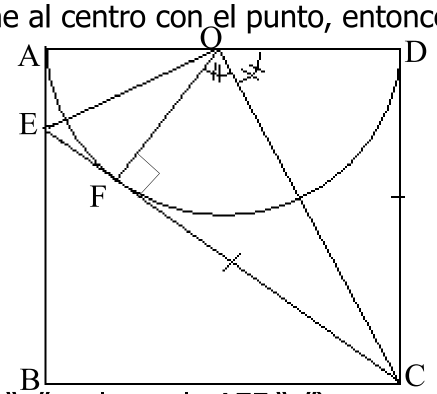
Prob. 38-1

ABCD es un cuadrado de lado 1. Una semicircunferencia, de diámetro AD, está contenida en el cuadrado. E es un punto del lado AB de tal forma que CE es tangente a la semicircunferencia. Calcular el área del triángulo CBE.



Solución:

En primer lugar, es obvio que los segmentos AE y EF son congruentes por ser tangentes que parten desde un mismo punto en común; lo mismo ocurre con las tangentes CF y CD. Razonando, obtenemos que los angulos AEF y DCF suman 180° ya que sabiendo de que la suma de los angulos internos del cuadrilatero AECD suman 360° y como el angulo EAD y ADC son rectos, entonces concluimos lo anterior. Luego, como el radio de un circulo es siempre perpendicular a sus tangentes y como los segmentos tangentes al circulo desde un punto exterior forman angulos congruentes con la recta que une al centro con el punto, entonces podemos graficar lo siguiente:



datos: (llamemos al angulo FCD "p" y al angulo AEF "z")

p+z=180°

p/2= $\measuredangle$FCO.

z/2= $\measuredangle$FEO.

p/2 + z/2= 90°

entonces: (llamemos al angulo EOC "t")

t=180°-(p/2 + z/2), reemplazando:

t=180° - 90° = 90°

Ya podemos entonces decir que el triangulo EOC es rectangulo, y de acuerdo a la geometría euclidiana tenemos que los triangulos EOF y OFC son semejantes, y cumplen la proporción: (llamemos al segmento EF "e", al segmento OF "u" y a FC "r")

$$e/u=u/r$$

$$e/(1/2)=(1/2)/1$$

$$2e=1/2$$

$$\mathbf{e=1/4}$$

ya como conocemos el valor de "e" y que "e" (segmento EF) es igual al segmento AE (por ser tangentes que tienen un punto en común exterior a la circunferencia) , entonces AB-AE= altura del triangulo CBE. Como el lado AB=1 (por el enunciado), entonces la altura(h) del triangulo es igual a ¾ y la base(b)=1.

Area del triangulo CBE=(b*h)/2

= [(3/4)*1]/2 (unidades cuadradas)

= (3/4)/2 (unidades cuadradas)

=***3/8 (unidades cuadradas) = 0,375 u*** ^{2}

Andrés Zorrilla Vaca 10°

Cali. Colombia

Colegio Lacordaire

Prob. 38 – 3

Cuando un número natural se divide por 10, el resto es 9.

Cuando se divide por 9, el resto es 8.

Cuando se divide por 8, el resto es 7.

Cuando se divide por 7, el resto es 6.

Cuando se divide por 6, el resto es 5.

Cuando se divide por 5, el resto es 4.

Cuando se divide por 4, el resto es 3

Cuando se divide por 3, el resto es 2.

Y cuando se divide por 2, el resto es 1.

Aunque hay más de un número que cumple todas esas condiciones, ¿cuál es el más pequeño de todos ellos?

Solución:

El numero más pequeño que cumple con todos los anteriores requerimientos es una unidad menos que el menor numero divisible entre 2,3,4,5,6,7,8,9 y 10. Este minimo numero es su M.C.M, es decir 2520, y como dije anteriomente: a este se le debe restar una unidad ya que al dividirse entre 2,3,4,5,6,7,8,9 y 10 su residuo es uno menos que el divisor correspondiente.

Entonces queda decir que el resultado es: ***2519***.

Si la suma de la longitud y la anchura de un rectángulo es 2, demostrar que el perímetro de este rectángulo es cuadrado perfecto.

Solución. Sean a el largo y b el ancho del rectángulo. El problema dice que

$$a + b = 2. \qquad (1)$$

El perímetro es

$$P = 2(a + b) = 2x2 = 2^2 .$$

Raul A. Simon
CHILE.

Sea $A = 10^{n+2} + 10^{n} - a$, donde n es un número natural y a es un dígito ($0 < a \leq 9$). Determinar a sabiendo que A es divisible por 3.

Solución. Si A es divisible por 3, la suma de sus cifras, c(A), también lo es. Para calcular c(A), debemos escribir A en forma más apropiada. Sea el entero b tal que

$$a + b = 10, \tag{1}$$

de modo que

$$a = 10 - b. \tag{2}$$

Sustituyendo la Ec.(2) en la forma de A:

$$A = 10^{n+2} + 10^{n} + b - 10 . \tag{3}$$

De la Ec.(3), la suma de cifras de A es

$$c(A) = (n + 2) + n + b - 1 = 2n + 1 + b = 2n + 11 - a ; \tag{4}$$

Si yo quiero que c(A) sea múltiplo de 3, tendré

$$2n + 11 - a = 3k,$$

para k natural; es decir,

$$a = 2n + 11 - 3k. \tag{5}$$

Esta es la forma más general de a; depende de n, y de k, que es arbitrario (pero positivo).

Raul A. Simon
CHILE.

La transversal de gravedad AM (M pertenece al lado BC)en el triángulo acutángulo ABC corta por segunda vez a la circunferencia circunscrita al triángulo en D (la primera vez es en A). Si E es el simétrico de A con respecto á M, demostrar que BC es la tangente común a los círculos circunscritos a los triángulos BDE y CDE.

Solución. El cuadrilátero ABEC es un paralelógramo, ya que sus diagonales se dimidian. (Puede probarse fácilmente, por congruencia de triángulos, que , si en un cuadrilátero las diagonales se dimidian, éste es un paralelógramo.) Sean:

$$\angle 1 = \angle BAM, \qquad \angle 2 = \angle MAC. \tag{1}$$

Luego, por ser ABEC paralelógramo,

$$\angle AEC = \angle 1, \qquad \angle AEB = \angle 2. \tag{2}$$

Como el $\angle BCD$ es inscrito en el círculo ABC,

$$\angle BCD = \angle 1 \; ; \tag{3}$$

análogamente,

$$\angle DBC = \angle 2. \tag{4}$$

Sean ahora:

O' = circunscentro del ΔCDE, O'' = circunscentro del ΔBDE. (5)

De las Ecs.(2) tenemos

$$\angle CO'D = 2\angle 1, \tag{6}$$

$\angle DO''B = 2\angle 2.$ (7)

Como el $\Delta CDO'$ es isósceles, de la Ec.(6) obtenemos

$\angle O'CD = (\pi - \angle CO'D)/2 = (\pi/2) - \angle 1$; (8 a)

análogamente, del $\Delta DO''B$ obtenemos

$\angle O''BD = (\pi - \angle DO''B)/2 = (\pi/2) - \angle 2.$ (8b)

Por lo tanto, considerando las Ecs.(3),(4), (8 a-b), tenemos

$\angle O'CB = \angle O'CD + \angle DCB = \pi/2;$ (9 a)

$\angle O''BC = \angle O''BD + \angle DBC = \pi/2.$ (9b)

Las Ecs.(9 a-b) prueban que BC es la tangente común a los círculos BDE y CDE.

Raul A. Simon
CHILE

Calcular el resto de la división del número

A = 1.2.3....2007 + 2008

por 2002.

Solución. Al dividir A por 2002, el primer término da un entero, ya que 2002 está incluido entre los factores que lo forman. El segundo término es

2008/2002 = 1004/1001 ;

aquí, el cuociente es 1, y el resto es 3. Por lo tanto, el resto de dividir A por 2002 es 3.

Raul A. Simon
CHILE.

Se considera el número

$$a = (1/2^2) + (1/3^2) + (1/4^2) + ... + (1/100^2). \qquad (*)$$

Demostrar que

$$0,2 < \sqrt{(a/11)} < 0,3. \qquad (**)$$

Solución. Demostraremos la relación (**) elevada al cuadrado, lo cual es equivalente a demostrar (**). Elevando (**) al cuadrado, obtenemos

$$0,04 < a/11 < 0,09 ;$$

multiplicando por 11,

$$0,44 < a < 0,99. \qquad (1)$$

Esto es lo que demostraremos.

Usaremos la conocida suma parcial (Ferrar, W.L.:"Higher Algebra", Oxford, Clarendon, 1962, p. 9)

$$[1/(1.2)] + [1/(2.3)] + ... + \{1/[n(n + 1)]\} = n/(n + 1). \qquad (2)$$

Comparando denominadores término a término, tenemos

$2.2 > 1.2$,

$3.3 > 2.3$,

....

$100.100 < 99.100$.

Raul A. Simon
CHILE

De aquí,

$1/(2.2) < 1/(1.2)$,
$1/(3.3) < 1/(2.3)$,
....

$1/(100.100) < 1/(99.100)$.

Sumando estas últimas desigualdades,

$$a < 99/100 = 0{,}99. \qquad (3)$$

La Ec.(3) es la segunda parte de la Ec.(1).

Ahora,

$2.2 < 2.3$,
$3.3 < 3.4$,
....

$100.100 < 100.101$.

De aquí,

$1/(2.2) > 1/(2.3)$,
$1/(3.3) > 1/(3.4)$,
....
$1/(100.100) > 1/(100.101)$.

Sumando todas estas desigualdades, y teniendo en cuenta que a la derecha falta 1/(1.2), tenemos

$$a > (100/101) – (1/2) = 99/202 = 0{,}49 > 0{,}44. \qquad (4)$$

La Ec.(4) es la primera parte de la Ec.(1)---la cual equivale a la Ec.(*)---.

Raul A. Simon
CHILE.

Problemas de la Competición Matemática Mediterránea 2010 (*Memorial Peter O'Halloran*)

Problema 1

Dados los números reales a, b, c, d , resolver el sistema de ecuaciones (incógnitas x, y, z, u)

$$\left.\begin{array}{l} x^2 - yz - zu - \text{yu} = a \\ y^2 - zu - ux - xz = b \\ z^2 - ux - xy - yu = c \\ u^2 - xy - yz - zx = d \end{array}\right\}$$

Problema 2

Dados los números positivos $a_1, a_2, \cdots, a_n$, con $n > 2$ y $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$, probar que

$$\frac{a_2 \cdot a_3 \cdot \cdots \cdot a_n}{a_1 + n - 2} + \frac{a_1 \cdot a_3 \cdot \cdots \cdot a_n}{a_2 + n - 2} + \cdots + \frac{a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_{n-1}}{a_n + n - 2} \leq \frac{1}{(n-1)^2}$$

Problema 3

Sean $A' \in (BC), B' \in (CA), C' \in (AB)$ los puntos de tangencia de los círculos exinscritos del triángulo ABC con los lados de ABC. Sea R' el circunradio de $A'B'C'$. Demostrar que

$$R' = \frac{1}{2r}\sqrt{2R\left(2R - h_a\right)\left(2R - h_b\right)\left(2R - h_c\right)},$$

donde, como es usual, R es el circunradio de ABC, r es el inradio de ABC, y h_a, h_b, h_c son las longitudes de las alturas de ABC.

Problema 4

Sea p un entero positivo, $p > 1$. Hallar el número de matrices $m \times n$ con elementos en el conjunto $\{1, 2, \cdots, p\}$ y tales que la suma de los elementos de cada fila y de cada columna NO es divisible por p.

2.Hallar números naturales a, b < 10 tales que

$$a^n + b^{n+1} + a^{n+2} + b^{n+3}$$

sea divisible por 10 para todo número natural "n" mayor o igual a "2". (M.Radu)

SOLUCIÓN//:
Primero, factorizar la expresión hasta llegar a que:

$$a^n (a^2 + 1) + b^{n+1} (b^2 + 1)$$

luego, razonamos la expresión con el enunciado hasta concluir que para que dicha sea divisible entre 10 entonces debe terminar en cero(0); por lo tanto la suma de los dos factores debe terminar en cero, para todo n mayor o igual que 2. Entonces, formamos una tabla para justificar los planteamientos:

$a^n (a^2 + 1)$	$b^{n+1} (b^2 + 1)$
$2^n \to (2^2 + 1) = 5$	...
$3^n \to 10$	...
* $4^n \to 17$	...
$5^n \to 26$	...
* $6^n \to 37$	...
$7^n \to 50$	...
$8^n \to 65$	...
* $9^n \to 82$	...

En esta tabla se observa cada uno de los posibles valores que podrían tomar cada una de las variables. Facilmente se puede deducir que unicamente cuando las variables toman valores como (2,3,5,7,8)* siempre terminarán en cero(0), para cualquier valor que pudiese tomar "n". Por lo tanto, todas las parejas de (a,b) que hacen parte de las soluciones son todas las permutaciones posibles del conjunto (2,3,5,7,8), son 25 soluciones de distintas formas que puede tomar la pareja de variables (a,b).
PRUEBA: Probemos la solucion con dos tipos de parejas (a,b).

-1- (a,b)=(5,3) para n=4

$$5^4 + 3^5 + 5^6 + 3^7 = 18680$$

-2- (a,b)=(8,2) para n=3

$$8^3 + 2^4 + 8^5 + 2^6 = 33360$$

las cuales son ciertas para los dos casos; ya que el resultado de las dos operaciones son divisibles por 10, y ya quedaría solucionado el problema.

*NOTA: Las variables (a,b) no pueden tomar los valores de 1,4,6,9; ya que para cualquier “n” mayor o igual a “2” no cumple con la condicion de que el resultado de la operación sea divisible entre 10. Por lo tanto quedarón excluidas de la solución.

SOLUCION AL PROBLEMA 4 DE LAS 2nd OLIMPIADAS BENELUX AMSTERDAM.
4 PROBLEMA PROPUESTO EN LAS OLIMPIADAS BENELUX AMSTERDAM

NOMBRE: ANDRES ZORRILLA VACA   _GRADO_: 9° (bachillerato) Nivel Medio
PAIS: COLOMBIA   _CIUDAD_: CALI   _COLEGIO_: Colegio Lacordaire

Problema 4. Determinar todas las cuaternas (a, b, p, n) de enteros positivos tales que p es primo y

$$a^3 + b^3 = p^n.$$

SOLUCIÓN.// (1,1,2,1) ; (1,2,3,2) y (2,1,3,2)

Primero factorizamos el lado izquierdo de la igualdad teniendo de esta forma:

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

luego, se tendría:

$$\sqrt[n]{(a+b)(a^2 - ab + b^2)} = p$$

Descomponiendo el radical, se tiene:

$$\sqrt[n]{(a+b)} \times \sqrt[n]{(a^2 - ab + b^2)} = p$$

Siendo "p" un numero primo cualquiera, y de acuerdo a la ecuación anterior entonces concluimos,(por la definición de primo: es un numero primo aquel que tiene como divisores únicamente al uno y el mismo) que:

A) Uno de los dos factores (a+b) ó (a^2-ab+b^2) tiene que ser uno (1), ya que el numero primo "p" debe ser divisible por uno o por el mismo. Luego si (a+b) es uno(1) entonces una de las variables ya sea "a" o "b" tendría que ser cero o un numero negativo pero de acuerdo a la información del enunciado estas variables deben ser únicamente números enteros positivos, es decir, mayores que cero (0); solamente nos resta evaluar cuando (a^2-ab+b^2) es igual a "uno" y razonando obtenemos de que:

$$(a^2 - ab + b^2) = 1$$
$$(a^2 - ab + b^2) - ab = 1 - ab$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = 1 - ab$$

, por conveniencia agrego "-ab" a ambos lados de la ecuación para factorizarlo como un cuadrado perfecto:

$$(a - b)^2 = 1 - ab$$

, razonamos de que el producto (ab) debe de ser menor o igual a "uno", ya que todo numero elevado al cuadrado es "positivo"; entonces:
$0<ab\leq 1$; y la única solución acondicionada y coherente es cuando a=b=1.

Tenemos entonces ya una primera cuaterna: (1,1,2,1) $\longrightarrow$ <u>1*</u>
<u>Prueba</u>: $1^3+1^3=2^1$
1+1=2
2=2

B) Ó de que los dos factores sean iguales. En este caso, continuamos (factorizando):

$$(a+b) = (a^2 - ab + b^2)$$
$$a - a^2 = b^2 - ab - b$$
$$a(1-a) = b^2 - b(a+1)$$

,ya factorizado procedemos a pasar a restar a ambos lados "a(1-a)"

$$0 = b^2 - b(a+1) - a(1-a)$$

Teniendo de esta forma un polinomio de grado 2, cuyos coeficientes son: (1; -(a+1); -a(1-a))respectivamente (a_1,b_1,c_1); que se puede resolver (resolver las raíces) mediante la ecuación cuadrática, teniendo:

$$\frac{-b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - 4a_1c_1}}{2a_1}$$

, reemplazando obtenemos:

$$b = \frac{(a+1) \pm \sqrt{(a+1)^2 - [4(1) * -a(1-a)]}}{2(1)}$$

Evaluando la expresión "-a(1-a)", en este caso a≥1 (de acuerdo al enunciado del problema) y lógicamente podríamos expresarlo por "a(1-a)" *positivo,* ya que (–) × (–) = (+). Entonces transformada la ecuación cuadrática con los argumentos anteriores nos quedaría:

$$b = \frac{(a+1) \pm \sqrt{(a+1)^2 - 4a(1-a)}}{2}$$

, en este caso, como "b" es un numero entero positivo(por el enunciado) entonces la discriminante debe de ser un numero positivo cuadrado perfecto, es decir mayor que cero, por lo tanto(razonando):

Si $|-4a(1-a)| \geq |(a+1)^2| \forall \{a | a \in Z^+ \wedge a<2 \text{ ó } a>2\}$, entonces no existe un numero "b" dentro del conjunto de los enteros positivos.

Si $|-4a(1-a)| < |(a+1)^2| \forall \{a | a \in Z^+ \wedge a=2\}$, entonces si existe un numero "b" dentro de los números enteros positivos; ya que resolviendo la desigualdad tenemos de que la única solución para los valores de "a" es que sea igual a dos(2):

Prueba:

$|-4(2)(1-2)| < (2+1)^2$

$|8| < 3^2$

8<9, ya esta demostrado; ahora procedemos a resolver la ecuación cuadrática sabiendo de que "a" obligatoriamente debe de ser igual a dos(2) para una solución de "b" dentro del conjunto de los enteros positivos:

$$b = \frac{(2+1) \pm \sqrt{(2+1)^2 - 4(2)(1-2)}}{2}$$

$$b = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2}$$

$$b = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2}$$

$b = \frac{4}{2} = 2$ ó $b = \frac{2}{2} = 1$

Resolviéndolo podemos observar de que "b" puede tener dos valores, dos(2) [que no se puede tener en cuenta como componente de una nueva cuaterna ya que el "p" no sería primo]*; ó uno(1)**.

*no se debe tener en cuenta como cuaterna por que:

$2^3+2^3=16=4^2$, por tanto “4” no es un numero primo(es un numero compuesto).

**Entonces trasladando los valores anteriores para la cuaterna (2,1,3,n),[en donde “n” no lo conocemos](falta hallarlo) tenemos:

$$2^3 + 1^3 = 3^n$$
$$9 = 3^n$$

Ahora despejo “n”:

$$n = \log_3 9$$
$$n = 2$$

Teniendo de esta forma las dos ultimas formas de cuaterna, (hay que probarlas):

(2,1,3,2) $\longrightarrow$ 2*

(1,2,3,2) $\longrightarrow$ 3*

PRUEBAS DE LAS TRES CUATERNAS DICHAS ANTERIORMENTE:

1* (1,1,2,1)	2* (2,1,3,2)	3*
$1^3+1^3=2^1$	$2^3+1^3=3^2$	$1^3+2^3=3^2$
1+1=2	8+1=9	1+8=9
2=2	9=9	9=9

PROBLEMAS PROPUESTOS 191-195

PROBLEMA 191 (propu esto por Ovidiu Furdui, Cluj, Rumania)
Sea $k \geq 1$ un número natural. Hallar la suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{1-x} - 1 - x - x^2 - \cdots - x^n \right)^k, \qquad \text{para } |x| < 1.$$

PROBLEMA 192 (propuesto por Pedro Henrique O. Pantoja, Natal, Brasil)
Demostrar que para $n \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^{n^2-1} \varphi(k) \geq \frac{(n-1)(5n-1)}{12}, \quad \text{siendo } \varphi \text{ la función de Euler.}$$

PROBLEMA 193 (propuesto por Mari del Rayo Pérez Ríos)
Demostrar que

$$q < \frac{A}{2} \quad \text{y} \quad q < \frac{B}{2},$$

siendo

$$q = arc\tan \frac{\sin A \sin B \sin C}{1 + \cos A \cos B \cos C}, \qquad A + B + C = \pi, \quad C < |B - A|.$$

PROBLEMA 194 (propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, Ávila, España)
Sean ABC y A'B'C' dos triángulos, rectángulos respectivamente en A y A'; y sean D y D' los pies de las bisectrices interiores de A y A', respectivamente.
Demostrar que

$$\frac{4}{AD \cdot A'D'} \geq \left(\frac{1}{BD} + \frac{1}{DC} \right) \left(\frac{1}{B'D'} + \frac{1}{D'C'} \right).$$

¿cuándo se alcanza la igualdad?
PROBLEMA 195 (original de Dan Branzei, Iasi, Rumania; propuesto por el editor)
Dado el triángulo ABC, de semiperímetro s, se define $t = \frac{sr}{R}$ (notaciones habituales).
1) Demostrar que $\min(a, b, c) > t$.
2) Demostrar que existe un triángulo de lados

$$a' = \sqrt{a(a-t)}, b' = \sqrt{b(b-t)}, c' = \sqrt{c(c-t)}.$$

Problema 36. Si $\{F_n\}_{\geq 0}$ es la sucesión de Fibonacci, pruebe que

$$\sqrt{4(2F_{n+1}^2 - F_{2n})^2 + F_{2n}(F_n^2 + 4F_{n+1}^2 - 2F_{2n}) + 6F_nF_{n+1}(4F_{n+1}^2 - F_{2n})}$$

es un entero que es suma de dos cuadrados.

Solución. La expresión dentro del radical es

$$(4F_{n+1}^2 - 2F_{2n})[(4F_{n+1}^2 - 2F_{2n}) + F_{2n}] + F_{2n}F_n^2 + 6F_nF_{n+1}(4F_{n+1}^2 - F_{2n}),$$

ó equivalentemente,

$$(4F_{n+1}^2 - F_{2n})[(4F_{n+1}^2 - 2F_{2n}) + 6F_nF_{n+1}] + F_{2n}F_n^2.$$

Ahora bien, de la identidad $F_{2n} = 2F_nF_{n+1} - F_n^2$ se tiene que la expresión dentro de los corchetes en la línea anterior es $4F_{n+1}^2 + 2F_nF_{n+1} + 2F_n^2$ y de aquí que todo ese renglón se pueda reescribir como

$$(4F_{n+1}^2 - F_{2n})(4F_{n+1}^2 + 2F_nF_{n+1} + 2F_n^2) + F_{2n}F_n^2.$$

Esto último es equivalente a

$$(4F_{n+1}^2 - 2F_nF_{n+1} + F_n^2)(4F_{n+1}^2 + 2F_nF_{n+1} + 2F_n^2) + F_{2n}Fn^2$$

y por tanto a

$$\begin{aligned}(4F_{n+1}^2 + F_n^2)^2 - 4F_n^2F_{n+1}^2 + F_n^2(4F_{n+1}^2 - 2F_nF_{n+1} + F_n^2) \quad &+ \quad F_{2n}F_n^2 \\ &= \quad (4F_{n+1}^2 + F_n^2)^2\end{aligned}$$

tal como deseabamos establecer.

$\square$

José Hernández Stgo,
Oaxaca,
México.

Problema 186 (propuesto por Luis Gómez-Sánchez, Universidad de Oriente, Venezuela)
Sean los números naturales a, b, c tales que $a < b < c$ y $a^2 + b^2 > c^2$. Demostrar que existe un único entero que satisface la inecuación

$$a^{2x+1} + b^{2x+1} + c^{2x+1} + (a+b)(ab)^x < (a+c)(ac)^x + (b+c)(bc)^x.$$

Solución por José Heber Nieto, Universidad del Zulia, Maracaibo, Venezuela.
Como $0 < a/c < b/c < 1$, la sucesión $(a/c)^n + (b/c)^n$ es decreciente y tiende a 0 cuando n tiende a $+\infty$. Por lo tanto hay un mínimo entero $x \geq 2$ tal que $a^x + b^x > c^x$ pero $a^{x+1} + b^{x+1} \leq c^{x+1}$. De hecho, la última desigualdad es estricta debido al teorema de Fermat-Wiles. Por lo tanto

$$\begin{aligned} & a^{2x+1} + b^{2x+1} + c^{2x+1} + (a+b)(ab)^x - (a+c)(ac)^x - (b+c)(bc)^x \\ &= (a^x + b^x - c^x)(a^{x+1} + b^{x+1} - c^{x+1}) < 0. \end{aligned}$$

Obviamente la expresión anterior es positiva para cualquier entero diferente de x, ya que es igual al producto de dos factores del mismo signo.

Problema 187.- (Propuesto por Panagiote Ligouras, Bari, Italia).
Sean *a, b, c* los lados; m_a **,** m_b **,** m_c **las medianas;** h_a **,** h_b **,** h_c **las alturas;** l_a **,** l_b **,** l_c **las bisectrices interiores y *R* el radio del circulo circunscrito al triangulo *ABC*. Demostrar que**

$$\sum_{ciclica} \frac{l_a^3 m_a (m_a^2 - h_a^2)}{h_a^2 (l_a^2 - h_a^2)} \geq 12R^2$$

Resolución: (Vicente Vicario García, I.E.S. El Sur, Huelva)

A lo largo de la resolución del problema utilizaremos la notación habitual en la geometría del triangulo. Necesitamos previamente un lema.

Lema: "*En todo triangulo ABC se tiene que* $\frac{m_a^2 - h_a^2}{l_a^2 - h_a^2} = \frac{4R^2 h_a}{l_a^2}$ ".

Demostración: Usando las expresiones bien conocidas para las longitudes de las bisectrices interiores y las medianas en función de los lados del triangulo

$$l_a^2 = bc\left[1 - \left(\frac{a}{b+c}\right)^2\right], \text{ etc., y } \quad m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}, \text{ etc.}$$

y la expresión $h_a = \frac{bc}{2R}$, etc., que se demuestra teniendo en cuenta que $a = 2RsenA$, etc. y $2\Delta = ah_a = bcsenA$, etc., y sustituyendo en la expresión $\frac{m_a^2 - h_a^2}{l_a^2 - h_a^2} = \frac{4R^2 h_a}{l_a^2}$, tenemos que

$$\frac{l_a^2}{h_a}\sqrt{\frac{m_a^2 - h_a^2}{l_a^2 - h_a^2}} = 2R \Leftrightarrow \frac{(b+c+a)^2(b+c-a)^2}{(b+c)^2} = \frac{4R^2 a(b+c+a)(b+c-a) - b^2c^2(b+c)^2}{R^2(2b^2 + 2c^2 - a^2) - b^2c^2(b^2 + c^2)^2}$$

que puede desarrollarse teniendo en cuenta la relación $R = \frac{abc}{4\Delta}$ y la formula de Heron $4\Delta = \sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}$ y simplificar, para llegar a la prueba de la identidad. ■

Centrándonos ahora en la desigualdad original, es claro que

$$\sum_{ciclica} \frac{l_a^3 m_a (m_a^2 - h_a^2)}{h_a^2 (l_a^2 - h_a^2)} \geq 12R^2 \Leftrightarrow \sum_{ciclica} \frac{l_a^3 m_a}{h_a^2} \cdot \frac{m_a^2 - h_a^2}{l_a^2 - h_a^2} = 4R^2 \cdot \sum_{ciclica} \frac{m_a}{w_a} \geq 4R^2 \cdot 3 = 12R^2$$

---oooOooo---

Nota: Se puede mejorar la desigualdad anterior utilizando el famoso teorema de Liu[1] que establece que si θ es el Angulo que forman la mediana y la bisectriz interior que parten del mismo vértice, entonces se cumple que $m_a l_a \cos\theta = s(s-a)$, con lo que tenemos

$$\sum_{ciclica} \frac{m_a}{l_a} = \sum_{ciclica} \frac{s(s-a)}{l_a^2 \cos\theta} \geq \sum_{ciclica} \frac{s(s-a)}{l_a^2} \geq 3$$

y empleando la conocida desigualdad

$$l_a = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcs(s-a)} \leq \sqrt{s(s-a)}$$

llegamos a

$$\sum_{ciclica} \frac{l_a^3 m_a (m_a^2 - h_a^2)}{h_a^2 (l_a^2 - h_a^2)} = 4R^2 \cdot \sum_{ciclica} \frac{m_a}{l_a} \geq 4R^2 \cdot \sum_{ciclica} \frac{s(s-a)}{l_a^2 \cos\theta} \geq 4R^2 \cdot \sum_{ciclica} \frac{s(s-a)}{l_a^2} \geq 4R^2 \cdot 3$$

lo que mejora la desigualdad.

[1] Ver en la red *Pythagoras theorem and its Applications* de Paul Yiu ; Pag. 128.

PROBLEMA 188, *(propuesto por Roberto Bosch Cabrera, La Habana, Cuba)*

Determinar todos los polígonos regulares para los que existe una curva cúbica de ecuación

$$y = x^3 + ax^2 + bx + c, \qquad a, b, c \text{ reales},$$

que pasa por todos sus vértices.

Solución por Daniel Lasaosa Medarde, Universidad Pública de Navarra, Pamplona, España

Una traslación del polígono hasta que su centro esté en $(0,0)$ es equivalente a intercambiar x por $x + x_0$, y y por $y + y_0$, donde (x_0, y_0) es el centro original del polígono, cambio que afecta tan sólo a a, b, c, que se ven sustituidos por otros valores reales distintos. Podemos pues suponer sin pérdida de generalidad que el centro del polígono regular es el origen de coordenadas $(0,0)$, con lo que los vértices del polígono tiene coordenadas $(R\cos\alpha, R\sin\alpha)$. Como además cada dos puntos distintos de la cúbica tienen necesariamente valor distinto de x, se tiene que, elevando al cuadrado la ecuación de la cúbica y haciendo $y^2 = R^2 - x^2$, puede haber como máximo 6 puntos de intersección de la cúbica y la circunferencia circunscrita al polígono, es decir, el polígono no puede tener más de 6 lados.

Supongamos que el polígono es un pentágono. Hay exactamente un vértice cuyo valor de α está en el intervalo $(-36°, 36°)$ y es distinto de $0°$, y que corresponde al valor máximo de x para el que la curva cúbica pasa por un vértice del polígono. Supongamos que está en el intervalo $(0°, 36°)$ (si está en el intervalo $(-36°, 0°)$ el procedimiento es análogo). Entonces, el valor de α correspondiente al siguiente valor más alto de x está en el intervalo $(-72°, -36°)$, con lo que entre ambos la pendiente de la curva cúbica es positiva. El siguiente valor de x se corresponde con un valor de α en el intervalo $(72°, 108°)$, luego la pendiente ha de ser negativa entre éste y el siguiente. El valor de α para el siguiente valor de x ha de estar en el intervalo $(-144°, -108°)$, con pendiente positiva entre éste y el siguiente, y el último ha de estar en el intervalo $(144°, 180°)$, con pendiente negativa. La curva cúbica ha de tener por lo tanto al menos tres cambios en el signo de su pendiente, absurdo pues su derivada tiene como máximo dos ceros. Luego el polígono no puede ser un pentágono. De forma análoga se demuestra que tampoco puede ser un hexágono.

Tomemos $a = c = 0$ y $b = -\frac{17}{6}$. Tenemos entonces que los puntos (x_0, y_0), $(-y_0, x_0)$, $(-x_0, -y_0)$ y $(y_0, -x_0)$, donde $x_0 = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$ y $y_0 = -\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$, están en la cúbica y forman un cuadrado con circunradio $R = \frac{5}{\sqrt{6}}$.

Tomemos finalmente $a = \frac{5}{11}$, $b = -\frac{176}{11}$ y $c = -\frac{94}{11}$. Se puede comprobar que los puntos $(4, 2)$, $(-2 - \sqrt{3}, 2\sqrt{3} - 1)$ y $(\sqrt{3} - 2, -2\sqrt{3} - 1)$ forman un triángulo equilátero con centro en $(0,0)$ y radio $2\sqrt{5}$, y los tres puntos están en la curva cúbica.

Luego el polígono puede ser un triángulo equilátero o un cuadrado, pero no puede ser otro.

Problema 189 (propuesto por el editor)
A, B, C, D, E son cinco puntos en una circunferencia. Se trazan cónicas tangentes a los lados de los triángulos BCD, CDA, DAB y ABC, respectivamente, y para las cuales E es un foco. Demostrar que todas son parábolas, y que sus directrices son tangentes a otra parábola de foco E.

Solución por José Heber Nieto, Universidad del Zulia, Maracaibo, Venezuela. Es sabido que el lugar geométrico de los simétricos de un foco respecto a las distintas tangentes a una cónica es la directriz (en el caso parábola) o la circunferencia focal con centro en el otro foco (en los casos elipse e hipérbola). De aquí se deduce que, si las proyecciones ortogonales de un punto E sobre tres rectas p, q y r pertenecen a una misma recta s, entonces hay una única cónica tangente a p, q y r y con un foco en E, a saber la parábola cuya directriz es la recta homotética de s en la homotecia $\mathcal{H}$ de centro E y razón 2.

Llamemos E_{XY} al pie de la perpendicular desde E a la recta XY. Si A, B, C, D y E son concíclicos entonces E_{AB}, E_{BC} y E_{AC} pertenecen a la recta de Simson $s(A,B,C)$ del triángulo ABC respecto a E, por lo tanto la (única) cónica con un foco en E que es tangente a los lados del triángulo ABC es una parábola, cuya directriz es la recta $s'(A,B,C)$ homotética de $s(A,B,C)$ por $\mathcal{H}$.

Lo mismo vale para los triángulos ABD, ACD y BCD. Para probar que $s'(A,B,C)$, $s'(A,B,D)$, $s'(A,C,D)$ y $s'(B,C,D)$ son tangentes a una misma parábola de foco E basta probar que $s(A,B,C)$, $s(A,B,D)$, $s(A,C,D)$ y $s(B,C,D)$ lo son (luego bastará aplicar $\mathcal{H}$).

Ahora bien, como los ángulos $\angle AE_{AB}E$, $\angle AE_{AC}E$ y$\angle AE_{AD}E$ son rectos, los puntos E_{AB}, E_{AC} y E_{AD} pertenecen a la circunferencia de diámetro AE. Por lo tanto las proyecciones ortogonales de E sobre las rectas $E_{AB}E_{AC} = s(A,B,C)$, $E_{AB}E_{AD} = s(A,B,D)$ y $E_{AC}E_{AD} = s(A,C,D)$ son colineales. Permutando cíclicamente A, B, C y D resulta que también las proyecciones ortogonales de E sobre $s(B,C,D)$, $s(B,C,A)$ y $s(B,D,A)$ son colineales, es decir que las proyecciones ortogonales de E sobre las cuatro rectas de Simson $s(A,B,C)$, $s(A,B,D)$, $s(A,C,D)$ y $s(B,C,D)$ son colineales, como queríamos probar.

Problema 190 (propuesto por el editor)
La quinta potencia de un número entero es congruente con 5, módulo 91. Demostrar que el número es congruente con 31, módulo 91.

Solución por José Heber Nieto, Universidad del Zulia, Maracaibo, Venezuela.
Sea x tal que $x^5 \equiv 5 \pmod{91}$. Como $91 = 7 \cdot 13$ resulta que $x^5 \equiv 5 \pmod{7}$ y $x^5 \equiv 5 \pmod{13}$, y en particular x no es divisible entre 7 ni entre 13. Entonces por el teorema pequeño de Fermat $x^6 \equiv 1 \pmod{7}$ y $x^{12} \equiv 1 \pmod{13}$. Por lo tanto

$$x \equiv x(x^6)^4 \equiv x^{25} \equiv (x^5)^5 \equiv 5^5 \equiv (-2)^5 \equiv -32 \equiv 3 \equiv 31 \pmod{7}$$

y

$$x \equiv x(x^{12})^2 \equiv x^{25} \equiv (x^5)^5 \equiv 5^5 \equiv 25^2 \cdot 5 \equiv (-1)^2 5 \equiv 5 \equiv 31 \pmod{13},$$

de donde $x \equiv 31 \pmod{91}$.

Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática
Número 38, Problema 190.

Daniel Lopez Aguayo
Puebla, México.

La quinta potencia de un número entero es congruente con 5, módulo 91. Demostrar que el número es congruente con 31, módulo 91.

Solución:

Vamos a resolver el problema usando un enfoque algebraico. Sea $\mathbb{Z}_{91}^*$ el grupo multiplicativo de unidades y veamos que si x satisface $x^5 \equiv 5 \bmod 91$ entonces $x \in \mathbb{Z}_{91}^*$. Sea φ la función de Euler y recordemos que $\mathbb{Z}_{91}^*$ tiene orden $\varphi(91) = 72$. Notemos que $5^{-1} \equiv 73 \bmod 91$, luego si $x^5 \equiv 5 \bmod 91$ entonces $x * x^4 * 73 \equiv 1 \bmod 91$ y por ende x es una unidad en $\mathbb{Z}_{91}$. Por lo tanto tiene sentido considerar la aplicación $\phi : \mathbb{Z}_{91}^* \to \mathbb{Z}_{91}^*$ dada por $\phi(g) = g^5$. Es fácil ver que ϕ es un homomorfismo ya que $\mathbb{Z}_{91}^*$ es un grupo abeliano, además ϕ es inyectiva pues $(5, 72) = 1$. Dado que $|\mathbb{Z}_{91}^*| < \infty$ entonces ϕ es de hecho sobreyectiva, luego un isomorfismo. Concluimos que la ecuación $x^5 \equiv 5 \bmod 91$ tiene una única solución. Dado que $(5, 72) = 1$ entonces por el lema de Bezout existen enteros r,s tales que $5r + 72s = 1$. Una solución es $r = 29, s = -2$, luego se tiene $x = x^{5r+72s} = x^{5r} = x^{5*29} = (x^5)^{29} \equiv 5^{29}$. Se puede verificar que $5^{12} \equiv 1 \bmod 91$ luego $5^{29} = 5^{24+5} = (5^{12})^2 * 5^5 \equiv 5^5 \equiv 31 \bmod 91$. Por unicidad de la solución concluimos que $x \equiv 31 \bmod 91$. $\square$

<u>**Comentario de páginas web y noticias de congresos 39**</u>

TRES CONGRESOS DEL VERANO 2010

<u>**RELME 24, GUATEMALA, 4-9 DE JULIO**</u>

La 24ª *Reunión Latino Americana de Matemática Educativa (RELME 24)* se ha celebrado en la ciudad de Guatemala, del 4 al 9 de julio de 2010.

El Comité Organizador local, presidido por la Prof. Claudia Lara Galo, tuvo dificultades para desarrollar los trabajos preliminares, de recepción y acuse de recibo de varias propuestas enviadas por los participantes, por una parte, y otras en forma de catástrofes naturales (la erupción del volcán Pacaya, el más cercano a la capital, y la tormenta tropical *Agatha*, a menos de dos meses del inicio del Congreso). No obstante, el 4 de julio se inició el proceso de registro de participantes previamente inscritos, comenzando las diferentes sesiones al día siguiente, en la Universidad *Galileo*.

La lluvia fue la compañera inseparable del Congreso, hasta el punto que, con muy buen criterio, la organización, en lugar del típico t-shirt, puso a la venta *chubasqueros* (o *chumpas*, en el lenguaje coloquial de la zona), que fueron rápidamente puestos en servicio por los participantes.

La conferencia inaugural, titulada *De conocimientos a prácticas sociales: Paradigmas en Matemática Educativa,* corrió a cargo del Prof. Fernando Cajas, del CUNOC de Quetzaltenango (Guatemala).

Dentro del capítulo de los *Talleres,* el que suscribe desarrolló el *Taller de resolución de problemas no convencionales,* en dos sesiones. La presentación estuvo a cargo de la Profª Ysmenia Cristina Mirabel Martínez, del Liceo *Gregorio Urbano Gilbert* de Puerto Plata (Rep. Dominicana).

Las Prof. Kathia Valladares y Kristel Weber(Colegio Valle Verde, Guatemala) presentaron un *Rallye Matemático*, una actividad que es ya habitual en Europa y que es interesante su popularización en América.

La presidenta de CLAMED (la rama dominicana del Comité Latino Americano de Matemática Educativa), Profª Ángela Martín, me pidió que ejerciera el papel de árbitro de algunos de los *Carteles* presentados, para su evaluación. De los que me tocó evaluar, el que en mi opinión era más original es el que lleva por título **Actividades didácticas en línea : Trigonometría y el pez arquero**, una de cuyas ilustraciones incluimos aquí.

En la actividad didáctica los alumnos deben utilizar funciones trigonométricas para calcular si un disparo del pez (cuyo nombre científico es *Toxotes jaculatrix)* va a lograr golpear al insecto.

En un próximo número de la Revista presentaremos alguno de los carteles presentados.

Dentro de los *Cursos cortos,* el Prof. brasileño afincado en Costa Rica Edison de Faria presentó una interesante exposición sobre magnitudes numéricas grandes y pequeñas y su medida, con un título que él mismo calificó de *provocador* : *Ojos logarítmicos, oídos trigonométricos.*

Por su parte, el Prof. Hugo Parra, de la Universidad del Zulia (Maracaibo, Venezuela) disertó sobre *Proporcionalidad y uso de medidas convencionales y no convencionales en el aula.*

Dentro de los *Informes de Investigación,* la Prof. Teresa de Jesús Valerio (UNAM de Querétaro, México) presentó su trabajo conjunto con el Prof. Jordi Deulofeu (UA de Barcelona, España) sobre el proyecto ESTALMAT, titulado *Una aproximación a la resolución de problemas de jóvenes con talento matemático.*

En el capítulo de *Comunicaciones breves,* la Profª Angela Tavarez (UASD, Santo Domingo, República Dominicana) expuso *Algunos de los resultados de la evaluación realizada a alguna de las actividades académicas de la XXIII RELME,* un trabajo conjunto con las Prof. Ángela Martin y Evarista Matías.

La próxima RELME, que llevará el número 25, tendrá lugar en 2011 en Cuba.

6ª CONGRESO DE LA WORLD FEDERATION OF NATIONAL MATHEMATICS COMPETITIONS, RIGA (LETONIA), 25-31 JULIO 2010

Organizar dos congresos seguidos, en dos semanas consecutivas, no es precisamente tarea fácil, y al viejo amigo de Olimpiadas Agnis Andzans el stress le ha pasado factura. Esperamos y deseamos su total recuperación. Su equipo de organizadores locales, bajo la dirección de Dace Bonka, hicieron un excelente trabajo tanto en esta conferencia como en la de Creatividad que comentaremos después. Vaya por delante el reconocimiento de todos los participantes.

Las sesiones de trabajo se realizaron en el edificio central de la Universidad de Riga, muy cerca de la bellísima zona antigua de la ciudad, con apertura presidida por el Rector de la Universidad.

El único “pero” que hay que señalar no es imputable a los organizadores: se había pedido a cada participante que enviase tres problemas, indicando las razones para elegirlos. Sólo cuatro o cinco participantes lo hicimos, lo que hizo que una de las actividades tradicionales en estas reuniones (la discusión en detalle de los problemas presentados) tuviera que ser sustituída por una sesión más o menos informal en la cual se presentaron de manera más bien espontánea algunos problemas y la solución no fue detallada.

En la Asamblea de la WFNMC se anunció la concesión de los Premios *Paul Erdös 2010,* uno de los cuales recayó en el Prof. Rafael Sánchez Lamoneda (Caracas, Venezuela), al que felicitamos calurosamente desde aquí.

El veterano participante en la I.M.O. Prof. Matti Lehtinen (Finlandia) hizo un recorrido histórico muy interesante y completo por las diferentes Olimpiadas Internacionales de las que ha sido testigo de excepción : *Eye-witnessing IMO*, acompañada de una presentación de fotografías en Power point.

El Prof. Chun Chor-Litwin Cheng, de Hong Kong, hizo una interesante presentación sobre *Solving the problema of number of zero in the expansión of n!.*

Por mi parte, presenté cinco problemas utilizados en el entrenamiento de una Olimpiada Junior.

El próximo Congreso de la WFNMC se celebrará en Pekin en 2014.

6ª CONFERENCIA INTERNACIONAL SOBRE CREATIVIDAD MATEMÁTICA Y ENSEÑANZA A ALUMNOS DE ALTO RENDIMIENTO, RIGA (LETONIA), 1-5 AGOSTO 2010

Con los mismos organizadores que el congreso anterior, el 1 de agosto se inauguró la Conferencia MCG (*Mathematical Creativity and Giftedness),* en una de cuyas sesiones se constituyó un grupo internacional de trabajo sobre el tema, para el que fueron elegidos un Comité Ejecutivo de 4 miembros y un Comité Internacional de otros 12, entre los que me encuentro. En un próximo número de la REOIM publicaremos el formulario de adhesión al grupo, al que desde este momento invito a adherirse, dado que yo era el único participante de habla española y es evidente que Iberoamérica no puede quedar al margen de este grupo.

En la conferencia de Apertura, el que luego sería elegido Presidente del grupo, Prof. Hartwig Meissner (U. de Münster, Alemania), disertó sobre *Challenges to Further Creativity in Mathematics Learning.*

La Prof. Ingrida Veilande (Riga, Letonia) expuso dos ejemplos muy bien elegidos de problemas combinatorios utilizados en su *Mathematical Circle* de Adazi, durante su presentación, titulada *The issue of Problem Study in the Mathematical Circle of Secondary School.*

La Prof. Lina Fonseca, de Viana do Castelo (Portugal) , presentó *Paper folding and pattern tasks in teaching and learning geometry to pre-service teachers.*

La Prof. Miriam Amit (Technion, Haifa, Israel) disertó sobre *Developing the Skills of Critical and Creative Thinking by Probability Teaching.*

El Prof. Ali Rejali (Isfahan, Irán), presentó *Isfahan Mathematics House activities for mathematically gifted students.*

La Prof. Emiliya Velikova (U. *Angel Kanchev,* Russe, Bulgaria) hizo una interesante presentación sobre *Developing Student's abilities to Create mathematical problems.*

La Prof. Valentina Gogovska (Skopje, Macedonia) presentó *Mathematical models in mathematics Curriculum.*

La Prof. Maruta Avotina (Riga, Letonia) presentó *Inequalities in Mathematical Olympiads.*

Por mi parte, presenté cinco problemas utilizados durante mis clases del proyecto ESTALMAT en Valladolid, después de hacer una pequeña introducción con las características del mismo.

La próxima Conferencia sobre MCG tendrá lugar en Busan (Corea del Sur) en 2012, una vez terminado el ICME de ese año.

Francisco Bellot Rosado, agosto 2010.

DIVERTIMENTOS MATEMÁTICOS 39

Durante la Fase regional de la Olimpiada para alumnos de 2º y 4º de E.S.O., celebrada en mayo de 2010 en Ávila (España), los Prof. Porfirio Pérez y Marisa Cortés propusieron a los alumnos participantes, como prueba por equipos, el juego-concurso llamado genéricamente ***El ornitorrinco.*** Presentamos gustosamente en la REOIM 39 el primer problema de este concurso. En otros números de la Revista continuaremos con otros más.

1.- EL PROBLEMA DEL CANGREJO

El ornitorrinco celebra el cumpleaños y está en casa tomando té con sus amigos. La liebre lo toma con leche y sin azúcar, la tortuga solo y con azúcar, el cangrejo nunca toma té, sólo azúcar. Cuando la liebre y la tortuga no discuten los amigos se divierten con rompecabezas de números enteros, tanto más festejados cuanto más absurdos.

Hoy el cangrejo ha traído un problema del que está muy orgulloso. La tortuga, el ornitorrinco y la liebre son políglotos, pero uno y sólo uno de ellos entiende las lenguas urolo-kantúes, que, como es bien sabido, es la familia a la que pertenece el kangrojo, lingua franca entre los cangrejos.

Todos sabéis lo que pasa cuando se escucha una lengua extraña:

Lo que entiende el ornitorrinco:

Orbuc nudo ne muuelo bevlel piter sesa mode aya sarri cortu a ucipa enun nose

Lo que entiende la liebre:

Obuk neunnen ulobel delpi lesizameza llezafir korta uzoda azipa coremen naze

Lo que entiende la tortuga:

Ob uc nuednemulovledel pirtles esamed aysarfi cortauceda ucipacoremun nuse

¿En qué número piensa el cangrejo?

Número

40

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática
ISSN 1698-677X

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

Número 40 (septiembre – noviembre 2010)

ISSN – 1698-277X

ÍNDICE

Artículos, notas y lecciones de preparación de Olimpiadas 40

Cristóbal Sánchez-Rubio García: *Nueve caracterizaciones de los triángulos cuyos lados están en progresión aritmética.*

Albrecht Hess: *Nuevas soluciones a los "Problemas de Geometría de Olimpiadas*", lección de preparación olímpica de F.Bellot.

Francisco Bellot: *El teorema de Muirhead y aplicaciones a problemas de Olimpiadas.*

Luis Gómez-Sánchez: *¿Cuadrados negativos?*

Problemas para los más jóvenes 40

Jorge Núñez Calderón (Lima, Perú) hace la observación (acertada, a juicio de este editor) que la respuesta correcta al problema 4 de los Problemas para los más jóvenes (39) debe ser 6, en lugar de 3 (obtenida al simplificar la fracción 2008/2002, que divide por 2 el resto de la división). El editor agradece esta colaboración.

Problemas de la 1ª Olimpiada de Lituania para los más jóvenes (1990). Agradecemos al Prof. Romualdas Kasuba habernos proporcionado estos problemas.

Problemas de nivel medio y de Olimpiadas 40

Cinco problemas de la Olimpiada de Suiza 2007.

Problemas

Problemas propuestos: 196 – 200

Problemas resueltos

Problema 191

Recibidas soluciones de Álvaro Begué Aguado (Nueva York, USA); Sebastián Espinal (Univ. de Antioquia, Colombia); Xavier Ros (Barcelona, España) y del proponente. Presentamos la solución de Espinal.

Problema 192

Recibidas soluciones de Xavier Ros (Barcelona, España) y del proponente. Presentamos la solución de Ros.

Problema 194

Recibidas soluciones de Miguel Amengual Covas (Cala Figuera, Mallorca, España); Ricard Peiró i Estruch (Valencia, España); Xavier Ros (Barcelona, España); Bruno Salgueiro Fanego (Vivero, Lugo, España) y el proponente. Presentamos la solución (más generalizada) de Xavier Ros.

Comentario de páginas web y noticias y anuncios de Congresos 40

36 Congreso de la SBPMef en Dinant, Bélgica.

13 CEAEM Thales en Córdoba, España.

Divertimentos matemáticos 40

La historieta como estrategia de aprendizaje en los cursos de matemáticas (Poster presentado en RELME 24, Guatemala)

Desarrollada en el Centro de Altos Estudios Universitarios de la OEI con el apoyo de la Agencia Española de Cooperación Internacional para el Desarrollo (AECID)

Acceder

http://www.oei.es/oim/revistaoim/numero40.htm

Convocatoria: Curso para la formación permanente en el área de las Matemáticas

El curso está dirigido al profesorado de Enseñanza Secundaria en ejercicio de cualquiera de los países iberoamericanos. Cualquier docente de este nivel puede solicitar participar. No es necesario ningún tipo de requisito previo salvo el impartir docencia en ese nivel que acreditará cuando se le solicite. Tampoco es necesario poseer una formación previa en el manejo de los medios informáticos porque, precisamente, uno de los objetivos del curso es proporcionar esos conocimientos a quienes estén dispuestos a formarse para la utilización de esos recursos. En este sentido, habrá una unidad cero cuyo contenido va en esa línea.

http://www.oei.es/formularios/cursomat.htm

Nueve caracterizaciones de los triángulos cuyos lados están en progresión aritmética.

Sea un triángulo de vértices *A*, *B*, *C* y lados opuestos *a*, *b*, *c* respectivamente, supondremos sin pérdida de generalidad que $a \le b \le c$.
Denotaremos como es habitual por *p* al semiperímetro, *S* al área, *r* al inradio, *R* al circunradio, *I* el incentro, y $[X,Y,Z..]$ el área del polígono de vértices *X*, *Y*, *Z*,…
Diremos que un triángulo es de la clase P.A. cuando sus lados están en progresión aritmética, lo que supone que cumple las siguientes condiciones trivialmente equivalentes:

$$a+c=2b \Leftrightarrow 2p=3b \Leftrightarrow p-b=\frac{b}{2}$$

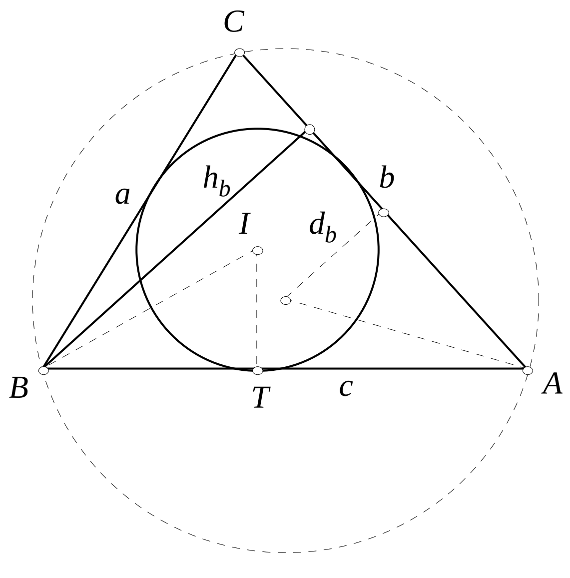
Vamos a establecer nueve condiciones necesarias y suficientes para que un triángulo pertenezca a la clase P.A.

1) La altura relativa al lado *b* es tres veces el inradio *r*. (XLI OME, Fase nacional 2005, apartado b).
En efecto, si h_b es la altura correspondiente al lado *b*, en cualquier triángulo se cumple: $pr=\frac{1}{2}bh_b$.
Si suponemos que el triángulo es P.A., tenemos

$$\frac{3br}{2}=\frac{1}{2}bh_{ab} \Leftrightarrow 3r=h_b$$

El recíproco se prueba siguiendo el mismo razonamiento en sentido contrario.

2) La distancia del circuncentro al lado *b* es *R* – *r*. (XLI OME, Fase nacional 2005, apartado c).



Pongamos d_b a la distancia entre el circuncentro y el lado *b*.
De una parte en todo triángulo se cumple

$$d_b^{\,2}=R^2-\frac{b^2}{4} \quad (1)$$

y de otra para los triángulos P.A. se tiene

$$tg\frac{B}{2}=\frac{r}{p-b}=\frac{2r}{2p-2b}=\frac{2r}{3b-2b}=\frac{2r}{b}.$$

Como

$$2R=\frac{b}{\operatorname{sen} B} \quad \text{y} \quad \frac{1}{\operatorname{sen} B}=\frac{1+tg^2\frac{B}{2}}{2tg\frac{B}{2}},$$

resulta:

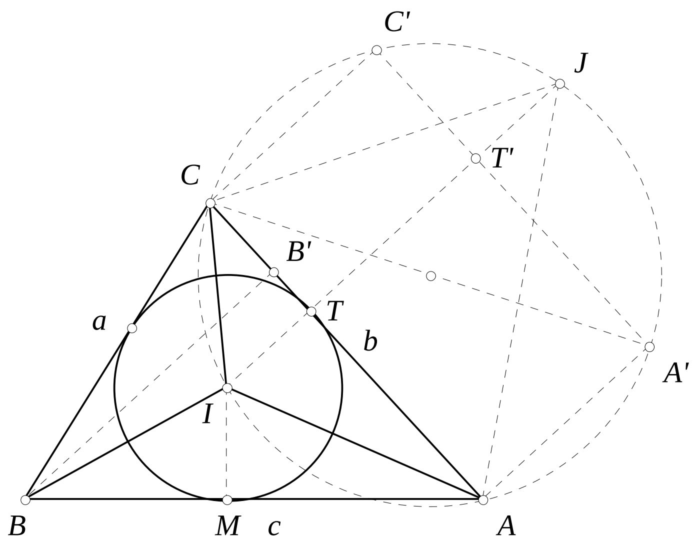
$$2R=b\frac{1+\frac{4r^2}{b^2}}{\frac{4r}{b}}=\frac{b^2}{4r}+r \Rightarrow \frac{b^2}{4}=2Rr-r^2$$

que sustituida en (1) queda:

$$d_b{}^2=R^2-\frac{b^2}{4}=R^2-2Rr+r^2=\left(R-r\right)^2 \Leftrightarrow d_b=R-r\,.$$

El recíproco se prueba siguiendo el mismo razonamiento en sentido contrario.

3) Las áreas de los triángulos *ABC* y *ACJ* son iguales. (Revista Escolar de la OIM - Número 21 problema 101).
Siendo *T* el punto de tangencia del círculo inscrito con el lado *AC* y *J* la segunda intersección de la recta IT con el círculo circunscrito al triángulo *AIC* .



Primero vamos a calcular *TJ* en función de elementos del triángulo *ABC*
Trazamos las perpendiculares a *AC* por *A* y *C* que cortan de nuevo al circuncírculo en *A'* y *C'* respectivamente determinando el rectángulo *CAA'C'* inscrito en el circuncírculo de *ACJ*.
Claramente se tiene

$$\widehat{CAJ}=90^\circ-\frac{C}{2}, \widehat{ACJ}=90^\circ-\frac{A}{2}\,.$$

Entonces

$$\widehat{ACA'}=\widehat{ACJ}-\widehat{A'CJ}=90^\circ-\frac{A}{2}-\widehat{A'AJ}=90^\circ-\frac{A}{2}-\frac{C}{2}=\frac{B}{2}.$$

Por tanto lo triángulos *IBM* y *A'CA* son semejantes y se tiene

$$\frac{AA'}{CA}=\frac{r}{BM} \Leftrightarrow AA'=r\frac{CA}{p-b},$$

y de ahí que

$$TJ = TT' + T'J = AA' + r = r\frac{b}{p-b} + r = r\left(\frac{b}{p-b}+1\right) = \frac{pr}{p-b}$$

pero $pr = \frac{1}{2}b\cdot BB'$ (ambas expresiones son el área de ABC) y nos queda finalmente

$$TJ = \frac{b\cdot BB'}{2(p-b)}.$$

Relación válida en cualquier triángulo. Si suponemos que el triángulo es de la clase P.A., entonces

$$p-b = \frac{b}{2} \Leftrightarrow \frac{b}{2(p-b)} = 1 \Leftrightarrow TJ = BB'.$$

Y los triángulos *ABC* y *ACJ* tienen la misma área al tener la misma base y alturas equivalentes.
Recíprocamente, si los triángulos *ABC* y *ACJ* tienen la misma área, al tener la base común sus alturas serán iguales, por tanto

$$TJ = BB' \Leftrightarrow \frac{b}{2(p-b)} = 1 \Leftrightarrow 2p = 3b \Leftrightarrow b = \frac{a+c}{2}$$

4) $\operatorname{sen}\frac{B}{2} = 2\operatorname{sen}\frac{A}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2}$. (Nota añadida a la solución del problema anterior).
En efecto, en cualquier triángulo se cumple

$$\left.\begin{aligned} TJ &= CJ\cos\frac{A}{2} \\ TJ = BB' &= c\operatorname{sen}A = 2c\operatorname{sen}\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow CJ = 2c\operatorname{sen}\frac{A}{2}$$

de modo análogo $AJ = 2a\operatorname{sen}\frac{C}{2}$ y el área de *CAJ* vale

$$[CAJ] = \frac{1}{2}CJ\cdot AJ\cdot\operatorname{sen}\left(90^\circ - \frac{B}{2}\right) = 2ac\ \operatorname{sen}\frac{C}{2}\ \operatorname{sen}\frac{A}{2}\ \cos\frac{B}{2}$$

por otra parte

$$[ABC] = \frac{1}{2}ac\operatorname{sen}B = ac\operatorname{sen}\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2}$$

Si el triángulo es de la clase P.A,, las áreas son iguales y resulta

$$\operatorname{sen}\frac{B}{2} = 2\operatorname{sen}\frac{A}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2}.$$

Esta caracterización se expresa en función de elementos que sólo dependen de la “forma” del triángulo. Resultado esperable ya que la pertenencia a la clase P.A. es invariante por semejanza.
Para probar el recíproco basta seguir el razonamiento en sentido contrario.
Como

$$\operatorname{sen}\frac{B}{2} = \cos\frac{A+C}{2} = \cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2} - \operatorname{sen}\frac{A}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2},$$

sustituyendo en la expresión anterior y operando, resulta otra caracterización equivalente

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{1}{3}$$

5) $\dfrac{S\left(r_a-r_c\right)}{b^2\left(a-c\right)}=\dfrac{3}{4}$. Siendo r_a, r_b, r_c los exinradios.

Es sabido que en cualquier triángulo $r_a=\dfrac{S}{p-a}$, $r_c=\dfrac{S}{p-c}$.

entonces,

$$r_a-r_c=S\left(\frac{1}{p-a}-\frac{1}{p-c}\right)=\frac{S\left(a-c\right)}{\left(p-a\right)\left(p-c\right)}=\frac{S^2\left(a-c\right)}{S\left(p-a\right)\left(p-c\right)}$$

como $S^2=p\left(p-a\right)\left(p-b\right)\left(p-c\right)$, resulta

$$r_a-r_c=\frac{S^2\left(a-c\right)}{S\left(p-a\right)\left(p-c\right)}=\frac{p\left(p-a\right)\left(p-b\right)\left(p-c\right)\left(a-c\right)}{S\left(p-a\right)\left(p-c\right)}=\frac{p\left(p-b\right)\left(a-c\right)}{S}$$

$$\frac{S\left(r_a-r_c\right)}{\left(a-c\right)}=p\left(p-b\right).$$

Si el triángulo es P.A., entonces

$$2b=a+c\Leftrightarrow 2p=a+b+c=3b\Leftrightarrow p=\frac{3}{2}b,\, p-b=\frac{1}{2}b\Leftrightarrow p\left(p-b\right)=\frac{3}{4}b^2,$$

y sustituyendo queda

$$\frac{S\left(r_a-r_c\right)}{b^2\left(a-c\right)}=\frac{3}{4}$$

Para probar el recíproco basta seguir el razonamiento en sentido contrario.

6) $6Rr=ac$. (Propuesto sin resolver en "Traité de Géométrie" de Eugène Rouché i Charles de Comberousse).

Es sabido que $R=\dfrac{abc}{4rp}$, siendo p el semiperímetro.

Si el triángulo es P.A., , $2b=a+c$ y en consecuencia $p=\dfrac{a+b+c}{2}=\dfrac{3b}{2}$ de donde,

$$Rr=\frac{abc}{4p}=\frac{abc}{6b}\Rightarrow 6Rr=ac$$

Recíprocamente, si $6Rr=ac$; entonces

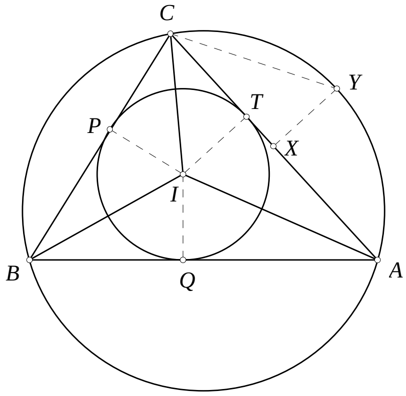
$$\frac{3abc}{2p}=ac\Rightarrow 3b=2p=a+b+c\Leftrightarrow b=\frac{a+c}{2}$$

7) $AT\cdot TC=3r^2$, siendo T el punto de tangencia del incírculo con el lado AC. (Problema 144 de la Gaceta de la RSME apartado b).

Como

$$r=\sqrt{\frac{\left(p-a\right)\left(p-b\right)\left(p-c\right)}{p}},$$

se tiene



$$AT\cdot TC=(p-a)(p-c)=\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{p(p-b)}=\frac{pr^2}{p-b}=\frac{3b}{2}\cdot\frac{2}{b}r^2=3r^2$$

y recíprocamente,

$$3r^2=\frac{3(p-a)(p-b)(p-c)}{p}=\frac{3AT\cdot TC(p-b)}{p}\Rightarrow\frac{3(p-b)}{p}=1\Rightarrow 2p=3b\Rightarrow a+c=2b$$

8) $XY=r$, siendo X es el punto medio del lado AC, e Y el punto medio del arco AC del circuncírculo que no contiene a B. (Problema 144 de la Gaceta de la RSME apartado c).

En efecto, como $\widehat{XCY}=\frac{B}{2}$, los triángulos CYX y PBI son semejantes.

Si el triángulo es P.A., entonces $(p-b)=\frac{b}{2}$, y los triángulos CYX y PBI son iguales de donde $XY=r$.

Recíprocamente, si $XY=r$ entonces los triángulos CYX y PBI son iguales y se sigue que

$$CX=\frac{b}{2}=BP=p-b\Leftrightarrow p=\frac{3b}{2}$$

9) $\frac{IA\cdot IC}{IB}=2r$. (Problema 144 de la Gaceta de la RSME apartado d).

En efecto, $BP=p-b=\frac{b}{2}$ si y sólo si $[ICA]=2[BIP]$ ya que ambos triángulos tienen la misma altura r y uno de ellos tiene la base doble que la del otro.

Calculando ambas áreas

$$[ICA]=\frac{1}{2}IA\cdot IC\cdot\operatorname{sen}\widehat{AIC}=\frac{1}{2}IA\cdot IC\cdot\operatorname{sen}\left(90^{\circ}+\frac{B}{2}\right)=\frac{1}{2}IA\cdot IC\cdot\cos\frac{B}{2}$$

$$[IPB]=\frac{1}{2}r\cdot IB\cdot\operatorname{sen}\left(90^{\circ}-\frac{B}{2}\right)=\frac{1}{2}r\cdot IB\cos\frac{B}{2}$$

multiplicando por 2 la segunda e igualando con la primera, resulta:

$$r\cdot IB=\frac{1}{2}IA\cdot IC\Leftrightarrow 2r=\frac{IA\cdot IC}{IB}.$$

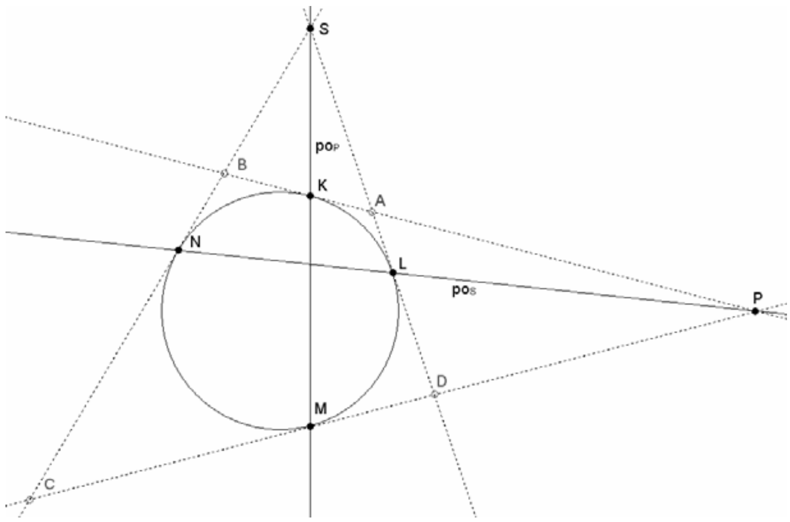
PROBLEMAS DE GEOMETRIA DE OLIMPIADAS

Problemas de Francisco Bellot Rosado – soluciones modificadas por Albrecht Hess

Problema 1 *En el cuadrilátero ABCD está inscrito un círculo, siendo K, L, M, N los puntos de tangencia con los lados AB, BC, CD y DA, respectivamente. Las rectas DA y CB se cortan en S, mientras que BA y CD se cortan en P. Si S, K y M están alineados, probar que P, N y L también lo están.*

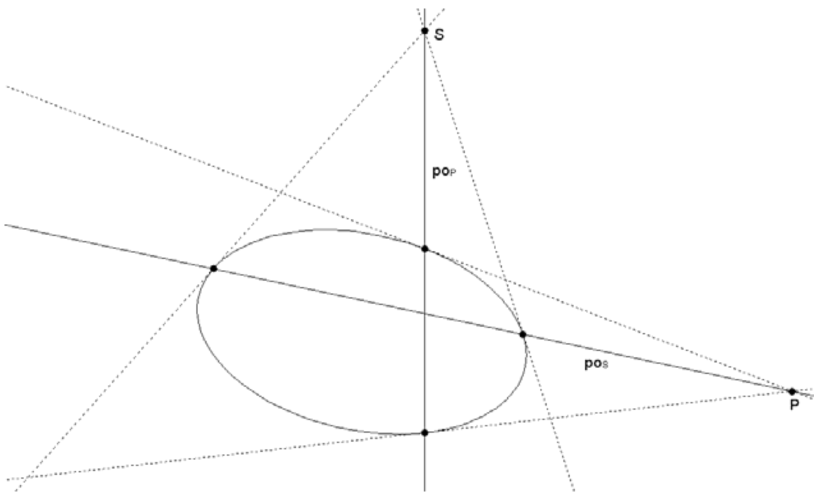
(Olimpiada de Bielorrusia 1996)

Solución mía:



S, K y M están alineados, lo cual significa, que el punto S(s|t) está en la linéa polar po_P del punto P(p|q) con respecto al círculo. Esta linéa polar pasa siempre por los puntos K y M donde las tangentes que pasan por P tocan el círculo. Para un círculo con la ecuación $x^2 + y^2 = r^2$ y, la ecuación de po_P es $p\,x + q\,y = r^2$ y por lo tanto $p\,s + q\,t = r^2$. Entonces, la linéa polar po_S por N y L tiene la ecuación $s\,x + t\,y = r^2$, lo que significa que los puntos P, N y L están alineados.

(Válido también para otras cónicas: La linéa polar – con respecto a una cónica – de un punto S que está en la linéa polar de otro punto P siempre pasa por P.)



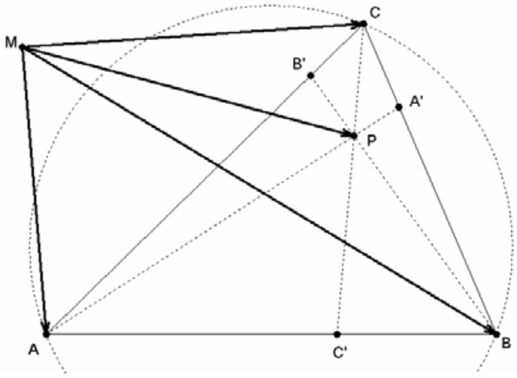
Problema 2 *En el triángulo ABC, sea P el punto de concurrencia de las cevianas AA', BB' y CC' (con A'∈(BC) , B'∈(CA) , C'∈(AB)), y sea M un punto del plano del triangulo. Demostrar que*

$$\frac{[BPC]MA^2+[CPA]MB^2+[APB]MC^2}{[ABC]}=MP^2+r(P)$$

donde r(P) es la potencia de P respecto al círculo circunscrito a ABC y [...] representa el área.

(Revista rumana Gamma)

Solución mía:



Los números $u=\frac{[BPC]}{[ABC]}, v=\frac{[CPA]}{[ABC]}, w=\frac{[APB]}{[ABC]}$ son las coordenadas baricéntricas del punto P con respecto al triángulo ΔABC. Eso significa que para cualquier punto M del plano tenemos la ecuación

$$\overrightarrow{MP}=u\,\overrightarrow{MA}+v\,\overrightarrow{MB}+w\,\overrightarrow{MC}.$$

Entonces

$$\left|\overrightarrow{MP}\right|^2=u^2\left|\overrightarrow{MA}\right|^2+v^2\left|\overrightarrow{MB}\right|^2+w^2\left|\overrightarrow{MC}\right|^2+2uv\,\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}+2vw\,\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}+2wu\,\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MA}.$$

Utlizando

$$2\,\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\left|\overrightarrow{MA}\right|^2+\left|\overrightarrow{MB}\right|^2-\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 \quad \text{y} \quad u+v+w=1$$

llegamos a

(1) $$\left|\overrightarrow{MP}\right|^2=u\left|\overrightarrow{MA}\right|^2+v\left|\overrightarrow{MB}\right|^2+w\left|\overrightarrow{MC}\right|^2-\left(uv\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+vw\left|\overrightarrow{BC}\right|^2+wu\left|\overrightarrow{CA}\right|^2\right).$$

Eligimos M = O, el centro der circumcírculo del triángulo ΔABC con el radio r, obtenemos con $u+v+w=1$

$$\left|\overrightarrow{OP}\right|^2=r^2-\left(uv\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+vw\left|\overrightarrow{BC}\right|^2+wu\left|\overrightarrow{CA}\right|^2\right),$$

lo que significa que la potencia r(P) de P con respecto al círculo circunscrito es:

(2) $$r(P)=r^2-\left|\overrightarrow{OP}\right|^2=\left(uv\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+vw\left|\overrightarrow{BC}\right|^2+wu\left|\overrightarrow{CA}\right|^2\right).$$

La solución se obtiene combinando (1) y (2).

(Con la ecuación (1) se describen círculos en coordenadas baricéntricas del punto P.)

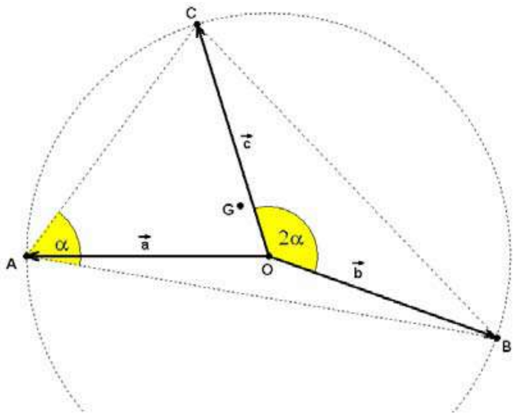
Problema 3 *Demostrar que, si en el triángulo ABC, donde O es el centro del círculo circunscrito con el radio R y G el baricentro,*

$$GO = \frac{R}{3},$$

entonces ABC es rectángulo, y recíprocamente.

(Elemente der Mathematik, 1952)

Solución mía:



Por $\overrightarrow{OG} = \dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$ vemos que hay que demostrar que ABC es rectángulo si y sólo si $\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right| = R$ que equivale a demostrar que

$$3R^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + 2\vec{b}\cdot\vec{c} + 2\vec{c}\cdot\vec{a} = R^2$$

o bien

$$1 + \cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = 0$$

Utilizando $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$, $\cos 2\beta = 2\cos^2\beta - 1$ y $\cos 2\gamma = 1 - 2\sin^2\gamma$ llegamos a

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta - \sin^2\gamma = 0.$$

Como $\gamma = 180° - \alpha - \beta$, eso significa

$$\left(\cos^2\alpha - \cos^2\alpha\sin^2\beta\right) + \left(\cos^2\beta - \sin^2\alpha\cos^2\beta\right) - 2\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\cos\beta = 0$$

por lo tanto

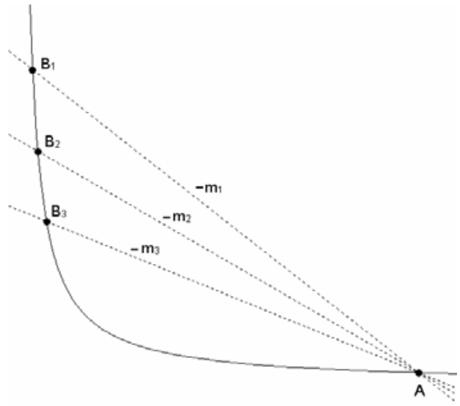
$$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 0.$$

Problema 4 *La gráfica Γ de la función*

$$y = \frac{1}{x}, \quad x \in (0, +\infty)$$

se dibuja en el plano con respecto a unos ejes de coordenadas rectangulares Oxy. Después se borran los ejes de coordenadas. Reconstruirlos con regla y compás.

(Competición búlgara de primavera, 1992)



Solución mía:

Elegimos un punto $A\left(a \mid \frac{1}{a}\right) \in \Gamma$ y consideramos el conjunto de las rectas que pasan por A con sus respectivas inclinaciones –m. Como Γ es de grado 2, el punto B en que estas rectas cortan Γ tiene una expresión racional en a y m:

$$B\left(\frac{1}{ma} \mid ma\right).$$

Se observa, que el punto medio $C\left(\frac{ma^2+1}{2ma} \middle| \frac{ma^2+1}{2a}\right)$ del segmento AB está en la recta y = mx si A recorre Γ. Esta recta pasa por O(0 | 0). El punto O se reconstruye eligiendo dos valores distintos de m y para cada uno de estos valores dos paralelas con sus respectivos puntos A, B y C.

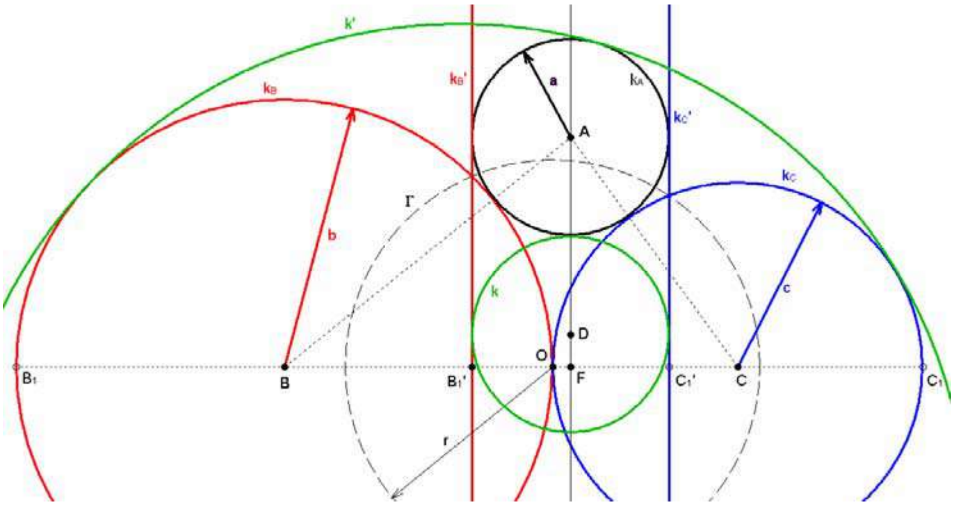
Como AB y OC tienen inclinaciones con signos opuestos, se construye la paralela a AB por O y los ejes son los bisectores de los ángulos entre esta paralela y OC.

Problema 5 *Resolver la ecuación*

$$\sqrt{abx(x-a-b)}+\sqrt{bcx(x-b-c)}+\sqrt{cax(x-c-a)}=\sqrt{abc(a+b+c)}$$

(Mathesis, 1890)

Solución mía:



La ecuación (y el problema) admite la siguiente reformulación geométrica: Hallar el radio de una circunferencia tangente exteriormente a tres circunferencias k_A, k_B y k_C dadas de radios a, b, c tangentes dos a dos.

En el punto O de tangencia de k_B y k_C construimos un círculo Γ de tal manera, que la inversion con respecto a Γ deja k_A cómo estaba. Entonces las imágenes k_B' y k_C' serán rectas perpendiculares a BC y tangentes a k_A. Si el radio de Γ es r, obtenemos

(1) $$2a = OB_1' + OC_1' = \frac{r^2}{2b}+\frac{r^2}{2c},$$ lo cual significa $r^2 = \dfrac{4abc}{b+c}$.

El radio R' de la imagen k' en la inversion con respecto a Γ de un círculo k con centro M y radio R se calcula con la formula

(2) $$R' = \frac{r^2}{\left|OM^2 - R^2\right|}R.$$

Para el círculo k_A obtenemos entonces

$$a = \frac{r^2}{OA^2 - a^2}a \text{ que implica } OA^2 = r^2 + a^2.$$

Para aplicar la formula (2) al círculo k con centro D hay que calcular OD:

$$\begin{aligned} OD^2 &= OF^2 + FD^2 \\ &= OA^2 - AF^2 + (AF-2a)^2 \quad \text{con } AF = h_{BC} \\ &= r^2 + 5a^2 - 4ah_{BC} \end{aligned}$$

Entonces el radio x del círculo k' es según las fórmula (1) y (2)

$$x = \frac{r^2}{\left|OD^2 - a^2\right|}a = \frac{r^2}{\left|r^2+4a^2-4ah_{BC}\right|}a = \frac{abc}{\left|ab+bc+ca-(b+c)h_{BC}\right|} = \frac{abc}{\left|ab+bc+ca-2A_{ABC}\right|}$$

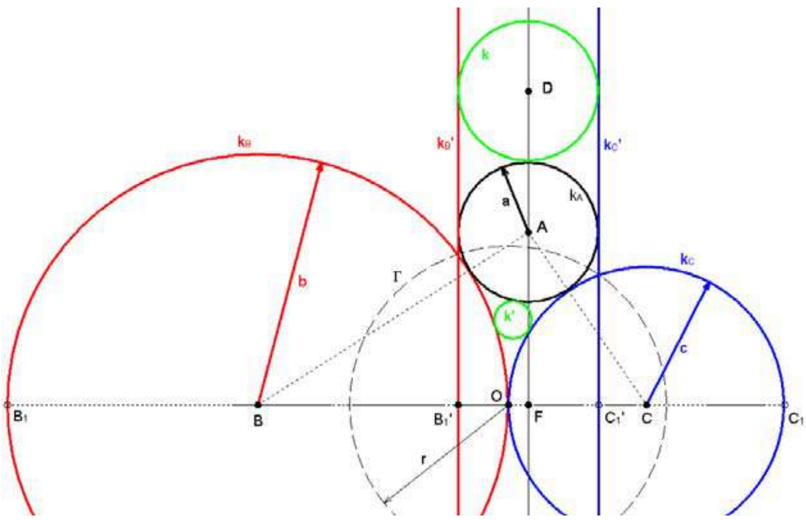
.

El problema se explica mejor con la ecuación

$$\sqrt{abx(x+a+b)}+\sqrt{bcx(x+b+c)}+\sqrt{cax(x+c+a)}=\sqrt{abc(a+b+c)},$$

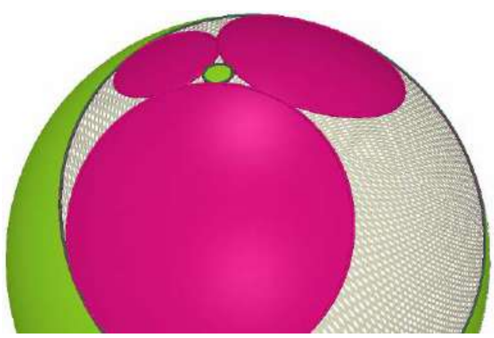
ya que el centro D’ de k’ está dentro del tríangulo ABC. En el problema tal como se da en el enunciado el punto D’ puede salir del tríangulo ABC y entonces el área de ABC no es la suma de los tres tríangulos.

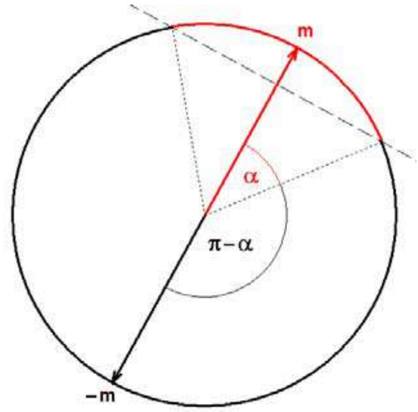
$$\begin{aligned}
x=\frac{abc}{ab+bc+ca+2A_{ABC}} &= \frac{abc}{ab+bc+ca+2\sqrt{abc(a+b+c)}}\\
\frac{1}{x}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}-\frac{1}{c} &= 2\sqrt{\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}}\\
\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)^2 &= 4\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)\\
\frac{1}{x^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} &= 2\left(\frac{1}{xa}+\frac{1}{xb}+\frac{1}{xc}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)\\
2\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right) &= \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2
\end{aligned}.$$



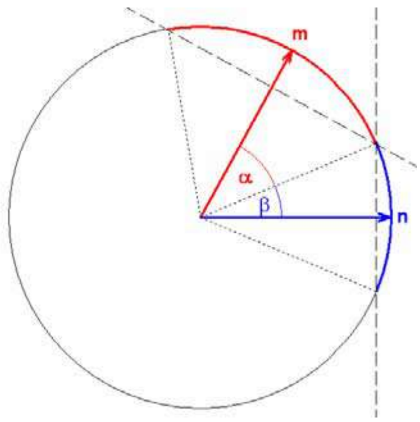
La explicación más lucida de esta fórmula, que además se puede generalizar al caso de más dimensiones, está en un árticulo “Beyond the Descartes Circle Theorem” de Lagarias, Mallows y Wilks en Amer. Math. Monthly **109** (2002), 338–361 [**http://arxiv.org/abs/math/0101066**].

En realidad, esta fórmula es una formula sobre círculos en una esfera. La diferencia más notable entre las configuraciones de los círculos en el plano y de los casquetes en la esfera es que los interiores de estos casquetes no tienen puntos en común si se elige bien entre las dos posibilidades de los casquetes que corresponden a un círculo – como se puede ver en la imagen.





Si los casquetes están sobre una esfera Ò$_3$ de radio 1 la ecuación del plano que separa el casquete del resto de la esfera es $x \cdot m = \cos\alpha$ para el casquete rojo y $x \cdot (-m) = \cos(\pi - \alpha)$ para el casquete negro. Hacemos corresponder a un casquete el vector $p = \frac{1}{\sin\alpha}(\cos\alpha, m)$ de cuatro dimensiones. El factor $\frac{1}{\sin\alpha}$ sirve para poner todos estos vectores en la pseudo–esfera $-p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 = 1$. Al revés, a cada punto de la pseudo–esfera corresponde un vector que representa un casquete.



La condición para que dos casquetes $p = \frac{1}{\sin\alpha}(\cos\alpha, m)$ y $q = \frac{1}{\sin\beta}(\cos\beta, n)$ se toquen es $m \cdot n = \cos(\alpha + \beta)$ o en coordenadas de p y q: $-p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3 + p_4q_4 = -1$. Si tenemos cuatro casquetes p, q, r, s unimos sus componentes en una matriz $P = \begin{pmatrix} p_1 & q_1 & r_1 & s_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 & s_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 & s_3 \\ p_4 & q_4 & r_4 & s_4 \end{pmatrix}$. La condición necesaria y suficiente para que estos casquetes se toquen mutualmente es

$$(1) \quad \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \\ q_1 & q_2 & q_3 & q_4 \\ r_1 & r_2 & r_3 & r_4 \\ s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 & q_1 & r_1 & s_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 & s_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 & s_3 \\ p_4 & q_4 & r_4 & s_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

que de forma más corta se escribe $P^T J P = K$ con las matrices

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad K = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Invertiendo $P^T J P = K$ llegamos a $P K^{-1} P^T = J^{-1}$. Como $K^{-1} = \frac{1}{4} K$ y $J^{-1} = J$ la ecuación (1) es equivalente a $P K P^T = 4J$. De ahí se deduce

$$2\left(p_1^2 + q_1^2 + r_1^2 + s_1^2\right) - \left(p_1 + q_1 + r_1 + s_1\right)^2 = -4$$

para casquetes mutuamente tangentes con los radios esféricos $\alpha, \beta, \ldots$ y $p_1 = \cot\alpha, \; q_1 = \cot\beta, \ldots$ (Los radios esféricos están elegidos de tal manera que los interiores de los casquetes no tienen puntos en común.)

Para llegar a fórmulas correspondientes en el caso del plano, aplicamos una proyección estereográfica de la esfera Ò$_3$ desde el “polo sur” s = (−1|0|0) sobre el

plano $x_1 = 0$. Un punto $x = (x_1 | x_2 | x_3)$ de Ò$_3$ se proyecta en $(y_1 \,|\, y_2) = \dfrac{1}{1+x_3}(x_2 \,|\, x_3)$.
A esta fórmula añadimos las fórmulas $x \cdot m = \cos\alpha$ y $x \cdot x = 1$ y llegamos a

$$y_1^2 + y_2^2 = \frac{x_2^2 + x_3^2}{(1+x_1)^2} = \frac{1-x_1^2}{(1+x_1)^2} = \frac{2}{1+x_1} - 1$$

$$m_1(1+x_1) + m_2 y_1 (1+x_1) + m_3 y_2 (1+x_1) = \cos\alpha + m_1 \quad \text{o} \quad \frac{m_1 + m_2 y_1 + m_3 y_2}{\cos\alpha + m_1} = \frac{1}{1+x_1},$$

así que el círculo que limita el casquete $x \cdot m = \cos\alpha$ se transforma en

$$\left(y_1 - \frac{m_2}{m_1 + \cos\alpha}\right)^2 + \left(y_2 - \frac{m_3}{m_1 + \cos\alpha}\right)^2 = \left(\frac{\sin\alpha}{m_1 + \cos\alpha}\right)^2,$$

es decir en un círculo con el centro $\left(\dfrac{m_2}{m_1 + \cos\alpha} \,\middle|\, \dfrac{m_3}{m_1 + \cos\alpha}\right)$ y el radio $\dfrac{\sin\alpha}{m_1 + \cos\alpha}$.

¿Qué pasa si el radio $\dfrac{\sin\alpha}{m_1 + \cos\alpha}$, o lo que es lo mismo, $m_1 + \cos\alpha$ es negativo?
Entonces $s \cdot m - \cos\alpha = -m_1 - \cos\alpha > 0$ y el polo sur s pertenece al casquete. Así de forma automatica hemos integrado a través de esta transformación el caso de un círculo en el plano que toca otro círculo por dentro. El círculo exterior tiene en este caso una curvatura $b = \dfrac{1}{r} = \dfrac{m_1 + \cos\alpha}{\sin\alpha}$ negativa.

Si hacemos corresponder a un círculo con centro $(x_1 | y_1)$ y curvatura $b_1 = \dfrac{1}{r_1}$ el vector $(b_1 | b_1 x_1 | b_1 y_1)$, entonces al círculo con centro $\left(\dfrac{m_2}{m_1 + \cos\alpha} \,\middle|\, \dfrac{m_3}{m_1 + \cos\alpha}\right)$ y radio $\dfrac{\sin\alpha}{m_1 + \cos\alpha}$ le corresponde un vector $\dfrac{1}{\sin\alpha}(\cos\alpha + m_1 | m_2 \,|\, m_3)$ que es

$$\frac{1}{\sin\alpha}(\cos\alpha + m_1 | m_2 \,|\, m_3) = \frac{1}{\sin\alpha}(\cos\alpha \,|\, m_1 | m_2 \,|\, m_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

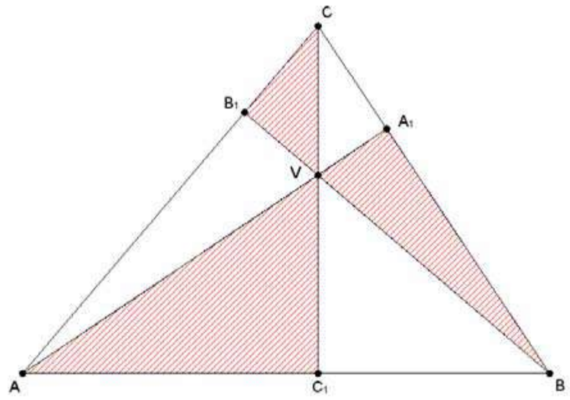
Si tenemos cuatro círculos del plano tangentes cada dos entre ellos y la correspondiente matriz $C = \begin{pmatrix} b_1 & b_1x_1 & b_1y_1 \\ b_2 & b_2x_2 & b_2y_2 \\ b_3 & b_3x_3 & b_3y_3 \\ b_4 & b_4x_4 & b_4y_4 \end{pmatrix} = P^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ obtenemos

$$C^T K C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} PKP^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} 4J \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

que incluye $2\left(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2\right) - \left(b_1 + b_2 + b_3 + b_4\right)^2 = 0$.

Problema 6 *Sean AA_1, BB_1, CC_1 las alturas del triángulo acutángulo ABC, y sea V su punto de intersección. Si los triángulos AC_1V, BA_1V y CB_1V tienen la misma área, ¿será ABC equilátero?*

(Olimpiada de Chequia 1994)



Solución mía

Sean (a, b, c), a+b+c = 1, las coordenadas baricéntricas del punto V. Las coordenadas baricéntricas de los otros puntos son:

A(1, 0, 0), B(0, 1, 0), C(0, 0, 1), $A_1\left(0,\frac{b}{b+c},\frac{c}{b+c}\right)$

$B_1\left(\frac{a}{a+c},0,\frac{c}{a+c}\right)$, $C_1\left(\frac{a}{a+b},\frac{b}{a+b},0\right)$. Las áreas de los triángulos AC_1V, BA_1V y CB_1V se calculan con

$$A_{AC_1V}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ \frac{a}{a+b} & \frac{b}{a+b} & 0\\ a & b & c\end{vmatrix}\cdot A_{ABC}=\frac{bc}{a+b}\cdot A_{ABC}=\frac{abc}{a(a+b)}\cdot A_{ABC},$$

$$A_{BA_1V}=\frac{abc}{b(b+c)}\cdot A_{ABC},\quad A_{CB_1V}=\frac{abc}{c(a+c)}\cdot A_{ABC}$$

Sea a el mínimo de las coordenadas de V. Si b o c son distintos de a, entonces $a(a+b)<b(c+b)$ y el área del triángulo AC_1V es más grande que el área del triángulo BA_1V, en contra de la condición del problema.

Así tenemos V = G (ortocentro = baricentro) y ABC es equilátero.

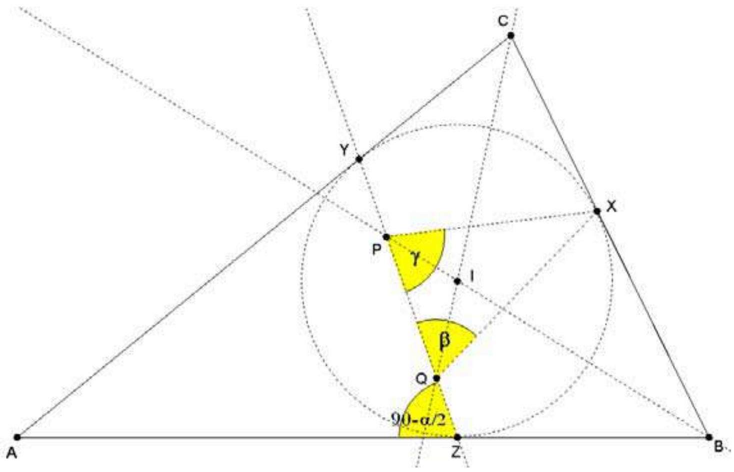
Problema 7 *La circunferencia inscrita en el triángulo ABC tiene centro I y es tangente a los lados BC, CA y AB en los puntos X, Y, Z respectivamente. Las rectas BI y CI cortan a la recta YZ en los puntos P y Q, respectivamente. Demostrar que si los segmentos XP y XQ tienen la misma longitud, entonces ABC es isósceles.*

(Olimp. Iberoamericana 2001, Problema 2)

Solución mía

Sin palabras!

(BZPX y CXQY tienen ejes de simetría)



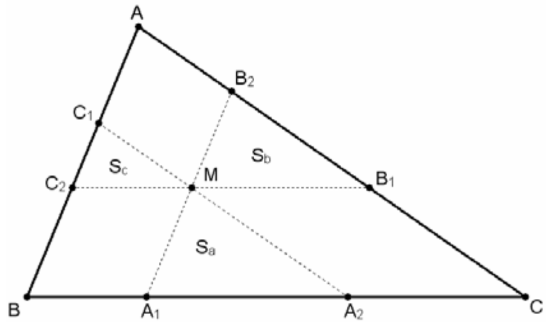
Problema 8 *Sea M un punto interior al triángulo ABC cuyo área es S. Las paralelas por M a AB y a AC forman, con BC, un triángulo de área S_a. Se definen análogamente S_b y S_c..*

a) Demostrar que

$$\frac{1}{\sqrt{S_a}}+\frac{1}{\sqrt{S_b}}+\frac{1}{\sqrt{S_c}}\geq\frac{9}{\sqrt{S}}.$$

b) Determinar la posición del punto M para que se verifique la igualdad.

Solución mía



Calculamos en coordenadas baricéntricas: A(1|0|0), B(0|1|0), C(0|0|1) y M(a|b|c) con a+b+c=1. La recta que pasa por A y B es z = 0. Una recta paralela a z = 0 tiene una ecuación x + y + tz=0. Con esta observación se calculan las coordenadas A_1(0|1–c|c), A_2(0|b|1–b), B_1(a|0|1–a), B_2(1–c|0|c), C_1(1–b|b|0), C_2(a|1–a|0) y las áreas

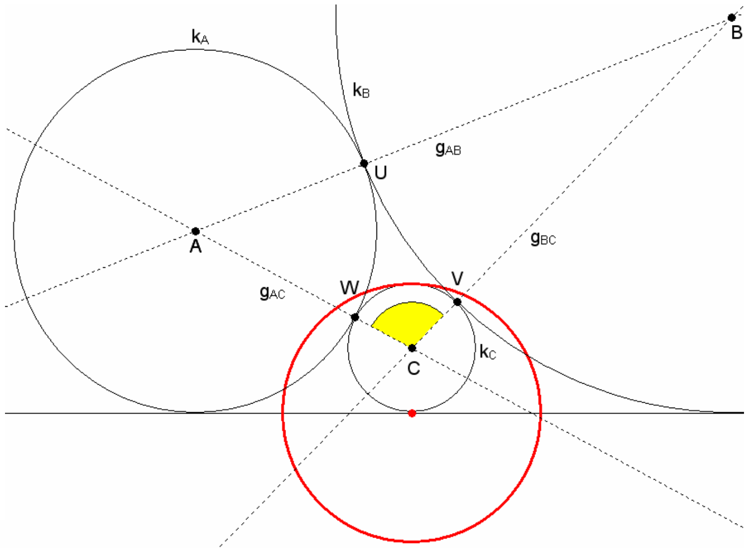
$$S_a=\begin{vmatrix} a & b & c\\ 0 & 1-c & c\\ 0 & b & 1-b\end{vmatrix}\cdot S=a^2\cdot S,\quad S_b=b^2\cdot S,\quad S_c=c^2\cdot S.$$

La desigualdad se transforma en $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 9$ para a+b+c=1 y se deduce de la desigualdad $\frac{a+b+c}{3}\geq\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$ entre la media aritmética y la media armónica.

Igualdad habrá sólo en el caso a = b = c = 1/3, es decir en caso que M es el baricentro.

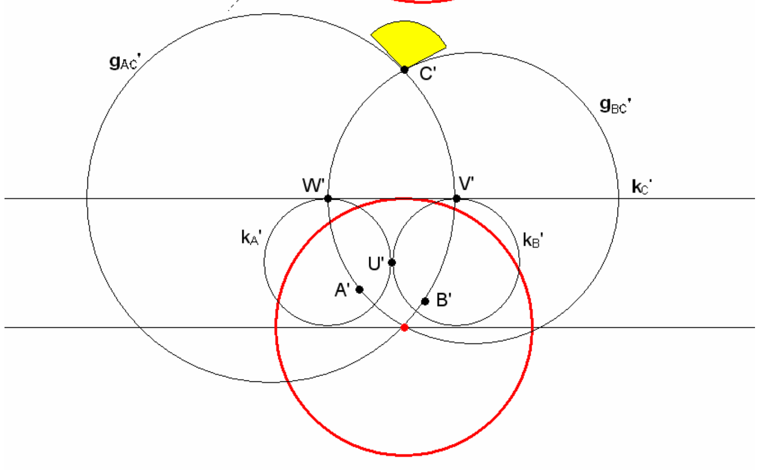
Problema 9 *Se dan en el plano una recta Δ y tres circunferencias de centros A, B, C, tangentes a Δ y tangentes exteriores entre sí dos a dos. Demostrar que el triángulo ABC es obtusángulo y hallar el valor máximo de la medida del ángulo obtuso .*

Solución mía



Inversión con respecto al círculo rojo cuyo centro es el centro de tangencia del círculo k_A con la recta Δ.:

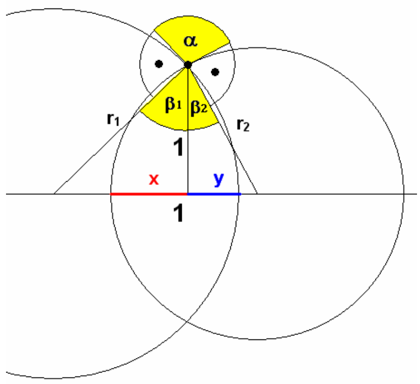
k_C se transforma en una línea k_C’ paralela a Δ. k_A’ y k_B’ están tangentes a Δ y k_C’ y además entre sí. Las rectas g_{AC} y g_{BC} se transforman en círculos que cruzan perpendicularmente la línea k_C’ en V’ y W’ y pasan por C’.



Suponiende que el diámetro de k_C es 1, el punto C’ dista 1 de k_C’ y la misma distancia hay entre V’ y W’. El ángulo ACB se transforma en el ángulo entre g_{AC}’ y g_{BC}’ en el punto C’.

Ahora consideramos sólo las cosas importantes: Dos círculos que se cortan en dos puntos cuyo distancia es 2. Los puntos en que los círculos cortan la recta entre sus centros tienen la distancia 1. Hay que encontrar el máximo del ángulo α y hay que probar que α siempre es más grande que 90°.

La última afirmación es evidente ya que $\alpha+\beta_1+\beta_2 = 180°$ y $\beta_1+\beta_2 < 90°$.



Para los radios r_1 y r_2 tenemos:

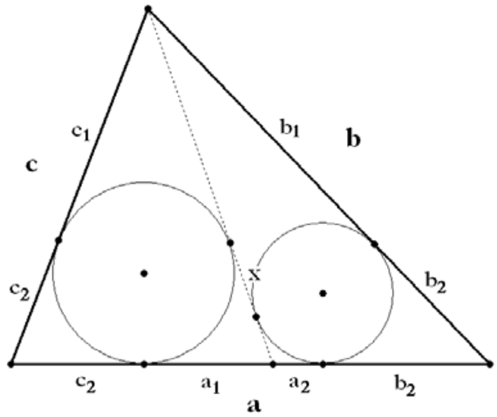
$$r_1^2 = 1 + (r_1 - y)^2 \text{ o } r_1 = \frac{1+y^2}{2y} \quad \text{y} \quad \tan\beta_1 = r_1 - y = \frac{1-y^2}{2y}.$$

Como eso parece al inverso de una formula para el tangente del ángulo doble, intentamos sacar una formula para $\tan\frac{\beta_1}{2} = \frac{1-\cos\beta_1}{\sin\beta_1} = \frac{x}{1+y}$. De la misma manera obtenemos $\tan\frac{\beta_2}{2} = \frac{y}{1+x}$ y $\tan\frac{\beta_1+\beta_2}{2} = \dfrac{\tan\frac{\beta_1}{2}+\tan\frac{\beta_2}{2}}{1-\tan\frac{\beta_1}{2}\tan\frac{\beta_2}{2}} = 1-xy$.

El máximo valor de α sale con el mínimo valor de $\beta_1+\beta_2$ y eso ocurre si x = y = ½. (x+y=1). En este caso tenemos $\tan\frac{\beta_1+\beta_2}{2} = \frac{3}{4}$ y $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{4}{3}$.

Problema 10 *Sea el triángulo ABC y $A_1 \in (BC)$. Demostrar que los círculos inscritos en los triángulos ABA_1 y ACA_1 son tangentes entre sí, si y solamente si A_1 es el punto de tangencia del circulo inscrito en ABC.*

Solución mía:



Tenemos las ecuaciones:

(1) $c_1 + c_2 = c$

(2) $b_1 + b_2 = b$

(3) $a_1 + a_2 + b_2 + c_2 = a$

(4) $a_1 = x + a_2$

(5) $b_1 = x + c_1$

(4)+(5) $2x = a_1 - a_2 + b_1 - c_1$

(3) $= 2a_1 + b_1 + b_2 + c_2 - c_1 - a$

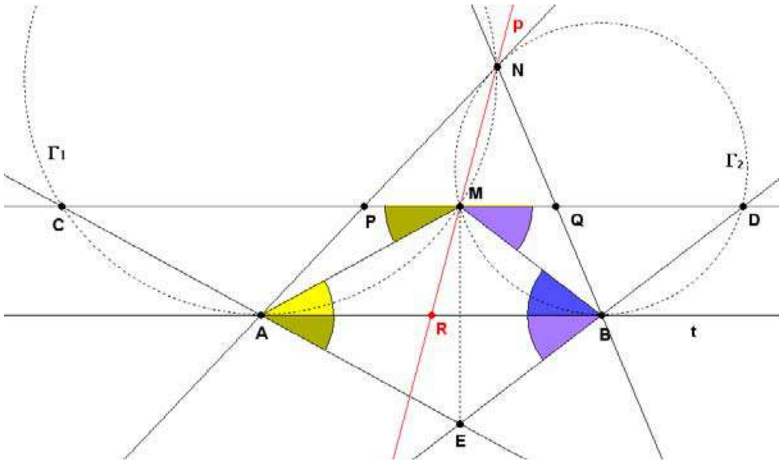
(1)+(2) $= 2a_1 + 2c_2 - a - c + b$

Solucionamos por x = $a_1 + c_2 - \frac{a+c-b}{2}$. Eso es justo lo que había que demonstrar.

Problema 11 *Dos circunferencias, Γ_1 y Γ_2, se cortan en M y N. Sea t la recta tangente común a ambas circunferencias, tal que M está más cerca de t que N. La recta t es tangente a Γ_1 en A y a Γ_2 en B. La recta paralela a t que pasa por M corta de nuevo a Γ_1 en C y a Γ_2 en D. Las rectas CA y DB se cortan en E. Las rectas AN y CD se cortan en P; las rectas BN y CD se cortan en Q. Demostrar que EP = EQ.*

(Problema 1, IMO 2000)

Solución mía



Los tres ángulos amarillos son iguales – y los azules también. Entonces AMBE es simetrico con respecto a AB y ME es perpendicular a AB.

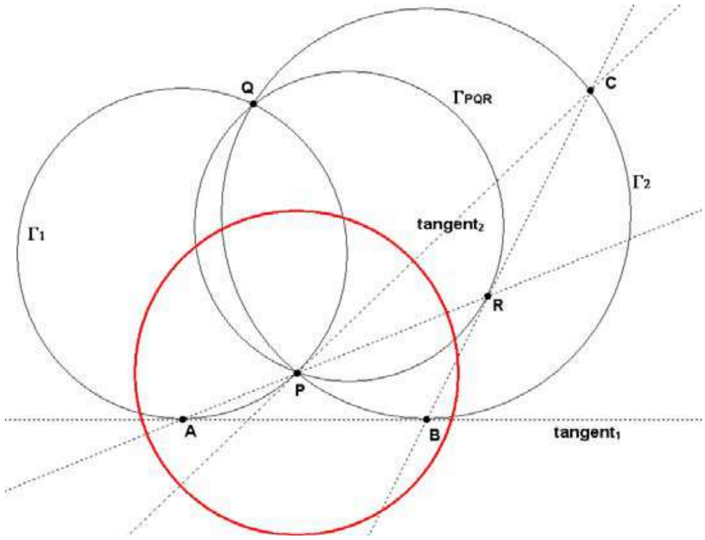
La recta p que pasa por M y N es la linea de potencia de Γ_1 y Γ_2 lo cual significa que las distancias entre cualquier punto X sobre p y los puntos donde los tangentes que pasan por X tocan a los círculos Γ_1 y Γ_2 son iguales. Por ejemplo: AR = RB. Por homotetía PM = MQ, lo cual nos lleva a PE = QE.

Problema 12 *Sean Γ_1 y Γ_2 dos circunferencias que se cortan en P y Q. La tangente común a ambas, más próxima a P, es tangente a Γ_1 en A y a Γ_2 en B. La tangente a Γ_1 en P corta a Γ_2 en $C \neq P$, y la prolongación de AP corta a BC en R. Demostrar que el círculo circunscrito a PQR es tangente a BP y a BR.*

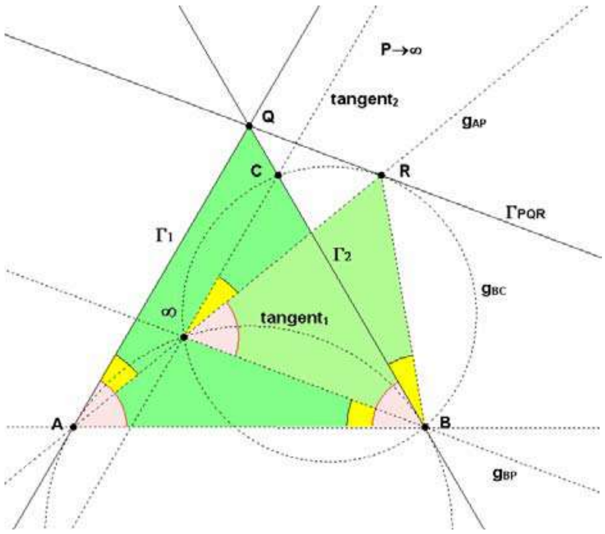
(Problema 2, APMO 1999)

Solución mía

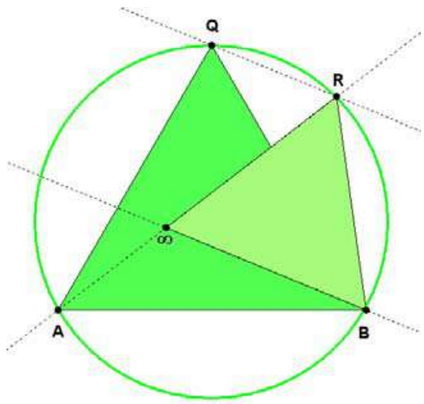
Inversión con respecto al círculo rojo cuyo centro es el punto P con radio arbitrario:



El punto P se va hacia el infinito, el infinito ∞ está ahora donde estaba P. Γ_1 y Γ_2 se transforman en líneas rectas que son tangentes al círculo que es el imagen de la tangente$_1$. Por lo tanto, el triángulo ABQ es isósceles. La tangente$_2$ a Γ_1 en P se transforma en una paralela a Γ_1 por ∞. La recta g_{BC} se ha convertido en el circuncírculo de BC∞. Y la recta g_{AP} es invariable y el círculo Γ_{PQR} se transforma en la recta por Q y R. Lo que queda a demostrar es que la recta Γ_{PQR} es tangente a g_{BC} en R y paralela a B∞.



Comparando unos ángulos se ve que los triángulos ABQ y BR∞ son semejantes en una posición en que A, ∞ y R están sobre una línea recta. Para esta configuración se demuestra facilmente, que B∞ y QR son paralelas, lo que quedaba a probar.

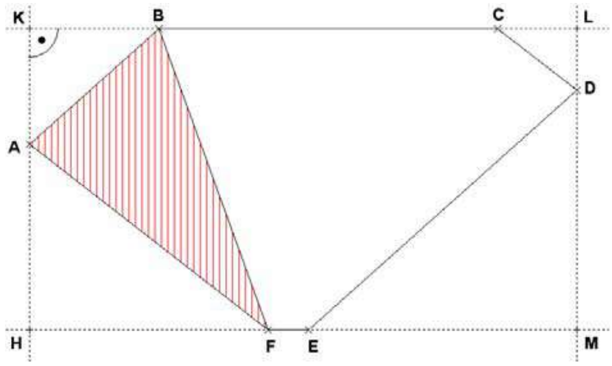


Problema 13 *Sea ABCDEF un hexágono convexo tal que AB es paralelo a ED, BC es paralelo a FE y CD es paralelo a AF. Sean R_A, R_C, R_E los radios de las circunferencias circunscritas a los triángulos FAB, BCD y DEF, respectivamente; y sea p el perímetro del hexágono. Demostrar que*

$$R_A + R_E + R_C \geq \tfrac{1}{2} p.$$

(Original de Nairi M. Sedrakian).

Solución oficial



Sean a, b, c, d, e, f las longitudes de AB, BC, DE, EF y FA, respectivamente. Obsérvese que los ángulos opuestos del hexágono son iguales. Desde A y D se trazan perpendiculares a las rectas BC y EF . Se verifican las relaciones

KH = AB sin B + AF sin F

LN = DC sin C + DE sin E

que, mediante la igualdad de ángulos opuestos en el hexágono, se covierten en

KH = AB sin B + AF sin C

LN = DC sin C + DE sin B.

La distancia KH = LN es la distancia entre las rectas BC y EF, luego BF ≥ KH =LN, y por lo tanto

2 BF ≥ KH + LN = AB sin B + AF sin C + DC sin C + DE sin B.

El teorema de los senos en ABF da BF = $2R_A \cdot$ sin A, de donde

$4R_A$ sin A = 2BF ≥ AB sin B + AF sin C + DC sin C + DE sin B

y análogamente

$4R_C$ sin C = 2BD ≥ FA sin A + FE sin B + CB sin B + CD sin A

$4R_E$ sin B = 2DF ≥ BC sin C + BA sin A + ED sin A + EF sin C

Dividiendo esas desigualdades respectivamente por sin A, sin B, sin C y sumando, se obtiene

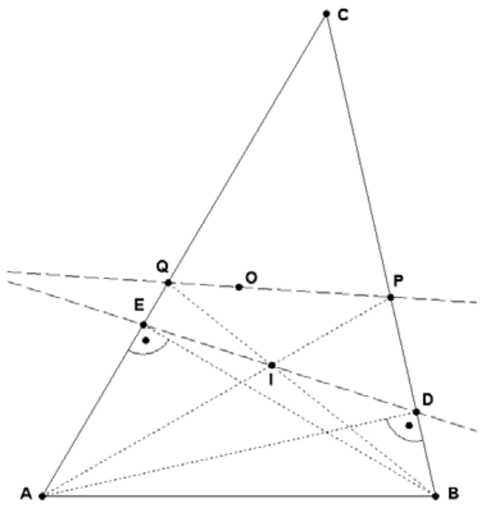
$$4\,(R_A + R_C + R_E) \geq DC\left(\frac{\sin C}{\sin A}+\frac{\sin A}{\sin C}\right)+CB\left(\frac{\sin B}{\sin C}+\frac{\sin C}{\sin B}\right)+\ldots$$

y que falta para obtener el resultado es utilizar la desigualdad y/x + x/y ≥ 2.

La igualdad se alcanza si y sólo si el hexágono es regular.

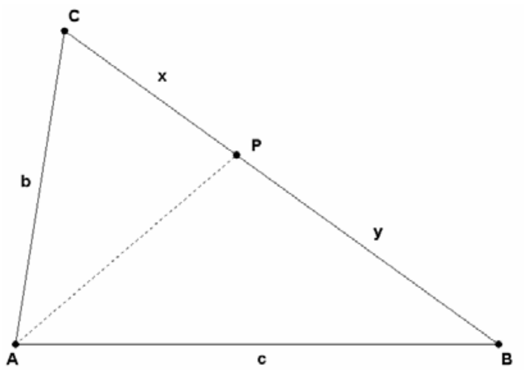
Sedrakian ha publicado en Mathematics Competitions, vol. 9, n°2, 1996, un artículo titulado “The Story of creation of a 1996 IMO problem”, en el que explica el proceso de obtención del problema.

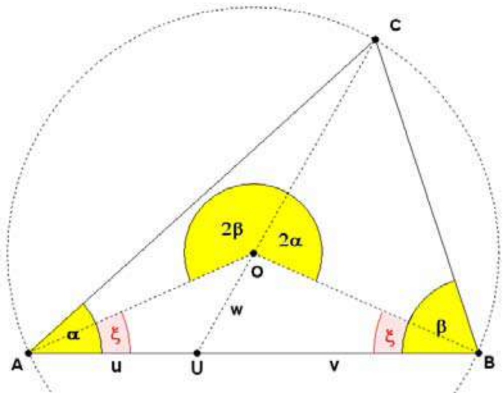
Problema 14 *En el triángulo acutángulo ABC, AD y BE son alturas, y AP, BQ bisectrices interiores. Si I, O son, respectivamente, el incentro y el circuncentro de ABC, demostrar que D, E, I están alineados si y sólo si P, Q, O están alineados.*



Solución mía

Si AP es bisectriz, entonces b : c = x : y , lo cuál significa que las coordenadas baricentricas homogéneas de P son $(0|b|c) \equiv (0|\sin\beta|\sin\gamma)$. De la misma manera se calculan las coordenadas baricentricas $(\sin\alpha|0|\sin\gamma)$ de Q, $(\sin\alpha|\sin\beta|\sin\gamma)$ de I, $(\tan\alpha|0|\tan\gamma)$ de E y $(0|\ \tan\beta|\tan\gamma)$ de D.





Para determinar las coordenadas baricentricas de O obtenemos en los triángulos AUO y BUO: $u : \sin 2\beta = w : \sin\xi = v : \sin 2\alpha$, lo cuál significa que las coordenadas de U son $(\sin 2\alpha|\sin 2\beta|0)$. Un cálculo similar para los otros lados del triángula ABC nos lleva a las coordenadas baricentricas $(\sin 2\alpha|\sin 2\beta|\sin 2\gamma)$ de O.

D, E y I están alineados – en coordenadas baricentricas: $\begin{vmatrix} 0 & \tan\beta & \tan\gamma \\ \tan\alpha & 0 & \tan\gamma \\ \sin\alpha & \sin\beta & \sin\gamma \end{vmatrix} = 0$

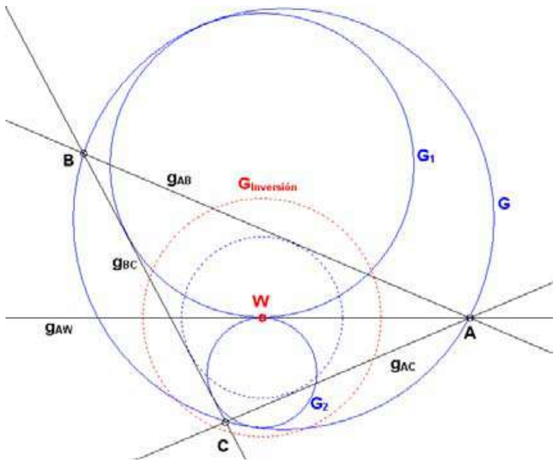
(Eso significa que el área del triángulo DEI es zero.)

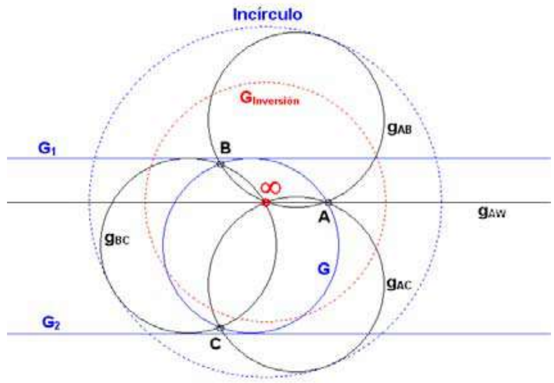
P, Q y O están alineados – en coordenadas baricentricas: $\begin{vmatrix} 0 & \sin\beta & \sin\gamma \\ \sin\alpha & 0 & \sin\gamma \\ \sin 2\alpha & \sin 2\beta & \sin 2\gamma \end{vmatrix} = 0$

Pero la segunda determinante es $2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$ veces la primera:

Problema 15 *Las circunferencias G, G_1, G_2 están relacionadas de la siguiente manera: G_1 y G_2 son tangentes exteriores en el punto W; ambas son, además, tangentes interiores a G. Los puntos A, B y C de la circunferencia G se determinan de la siguiente forma: BC es la tangente exterior común a G_1 y G_2; y WA es la tangente común interior a G_1 y G_2, de modo que W y A están a un mismo lado de la recta BC. Demostrar que W es el incentro de ABC.*

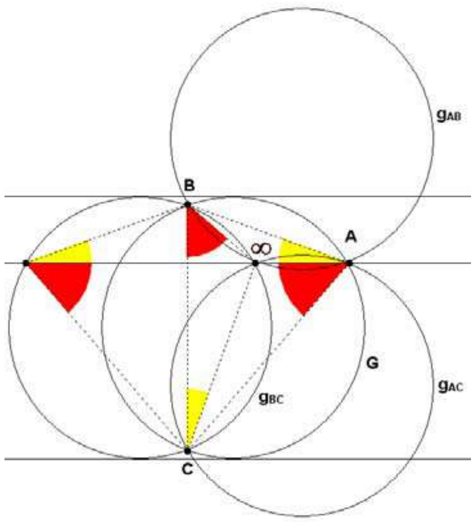
Solución mía





En el imagen a la izquierda se ve el problema y a la derecha su transformación después de una inversión con respecto a un círculo con centro W y un radio sin especificar. Los círculos G_1 y G_2 se transforman en rectas paralelas y el imagen de G toca las dos rectas. La recta g_{WA} queda invariable, y en lugar de W tenemos el punto ∞. El imagen de la recta BC es un círculo que toca como G las dos paralelas G_1 y G_2 y pasa por ∞ – entonces una traslación de G por el vector $\overrightarrow{A\infty}$. Las imagenes de B y C son los puntos de intersección de ambos círculos G y g_{BC}. Las rectas g_{AB} y g_{AC} son los circuncírculos de los triángulos AB∞ y AC∞.

El problema se transforma en la afirmación de que g_{AB}, g_{AC} y g_{BC} tienen el mismo radio, ya que en este caso ∞ es el centro de un círculo al que g_{AB}, g_{AC} y g_{BC} son tangentes interiores (o A∞, B∞ y C∞ son ejes de simetría de cada dos de los círculos g_{AB}, g_{AC} y g_{BC}).



La demonstración se basa en la igualdad de los ángulos amarillos y rojos.

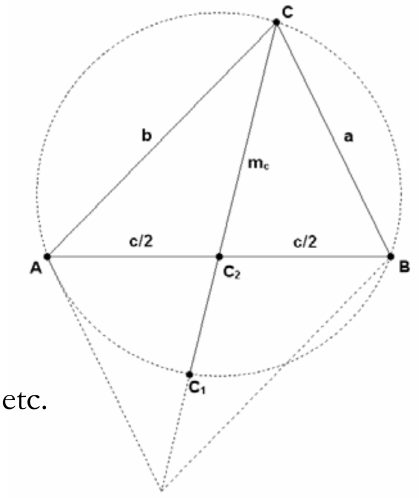
Por ejemplo $\angle BC\infty = \angle BA\infty$ significa que los circuncírculos de BC∞ y BA∞ tienen el mismo radio $R = \dfrac{B\infty}{2\sin\sphericalangle BC\infty}$.

Problema 16 *Sean a, b, c los lados de un triángulo; m_a, m_b, m_c las longitudes de sus medianas, y D el diámetro del círculo circunscrito. Demostrar que*

$$\frac{a^2+b^2}{m_c}+\frac{b^2+c^2}{m_a}+\frac{c^2+a^2}{m_b}\le 6D.$$

(Olimpiada de Rusia 1994, Dimitri Tereshin)

Solución mía (muy similar a la solución propuesta)



Como hay la formula: $\dfrac{2a^2+2b^2-c^2}{4}=m_c^2$

(ecuación de paralelogramo $2a^2+2b^2=(2m_c)^2+c^2$)

se puede escribir $\dfrac{a^2+b^2}{2}=m_c^2+\dfrac{c^2}{4}$ o $\dfrac{a^2+b^2}{2m_c}=m_c+\dfrac{c^2}{4m_c}$

Como $\dfrac{c^2}{4}=m_c\cdot\overline{C_1C_2}$, entonces $\dfrac{a^2+b^2}{2m_c}=m_c+\overline{C_1C_2}=\overline{CC_1}<D$ etc.

EL TEOREMA DE MUIRHEAD Y ALGUNAS APLICACIONES A PROBLEMAS DE CONCURSO

Francisco Bellot Rosado

Introducción

Durante las sesiones de trabajo entre los miembros del Jurado Internacional de la IMO, en una de las Olimpiadas Internacionales a las que tuve el privilegio de asistir como Jefe de la Delegación de España, escuché a Valeri Vavilov (entonces Jefe de la Delegación de la URSS) el siguiente comentario:

Si se propone una desigualdad simétrica, mis estudiantes conocen la técnica que permite resolverla de manera automática, casi sin pensar. Por lo tanto, yo estaría de acuerdo en que tal desigualdad se incluyera en la prueba.

La técnica de la que hablaba Valeri es el teorema de Muirhead, y algún tiempo después de aquella Olimpiada, la Revista SIPROMA (nr. 2, septiembre de 1997) publicó un artículo de Vavilov sobre el particular[1].

La demostración general del teorema es muy complicada, y hasta hace relativamente poco tiempo, la única documentación a mi alcance sobre el asunto, de un nivel adecuado para ser presentado a alumnos de Bachillerato, era el artículo mencionado y el publicado en *Quantum*, nov.-dic. 1999, titulado [2]*Obtaining symmetric inequalities,* de S. Dvoryaninov y E. Yasinovyi, y que en mi opinión es excelente. Los trabajos clásicos, el de Hardy, Littlewood y Pólya en su libro [3]*Inequalities, Cambridge U.P. 1934;* y el de Marshall y Olkin en [4]*Inequalities:Theory of Majorization and its Applications, Academic Press 1979,* no parecen, a mi juicio, muy apropiados para una exposición ante un público poco experimentado; sus tecnicismos son demasiado sofisticados.

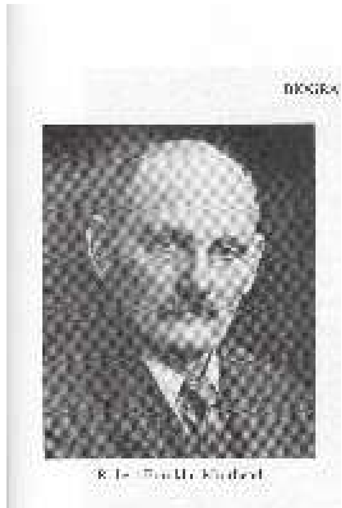
Creo que la situación, recientemente, ha cambiado. En [5]*Making Mathematics Come to Life, de O.A. Ivanov (AMS, 2009),* y en [6]*Inequalities: A mathematical Olympiad Approach,* de R. Bulajich Manfrino, J.A. Gómez Ortega y R. Valdez Delgado (Birkhäuser, 2009) se trata el teorema desde un punto de vista riguroso pero plenamente abordable durante la preparación de Olimpiadas Internacionales. Además Birkhäuser va a publicar la versión en español del libro escrito por los colegas mexicanos, lo cual hará mucho más accesible el resultado a los alumnos iberoamericanos. Tampoco se debe olvidar el artículo de Lau Chi Hin [7]*Muirhead's Inequality,* en la revista digital gratuita *Mathematical Excalibur (vol. 11, nr.1)* que se encuentra en *http://www.math.ust.hk/mathematical_ excalibur/.*

Otro libro relativamente moderno, donde se relaciona el teorema de Muirhead con el de Cauchy-Schwarz y otros, de una forma a mi juicio magistral, es [8] *The Cauchy-Schwarz Master Class,* de J. Michael Steele (MAA-CUP, 2004).

En este trabajo pretendo utilizar las fuentes [1] , [2] , [5] , [6] , [7] , [8] , para poner a disposición de los lectores de la REOIM el teorema de Muirhead y como utilizarlo para resolver problemas de concurso.

Una mínima nota biográfica

Robert Franklin Muirhead (1860 - 1941) fué un matemático escocés que desempeñó el cargo de Presidente de la Edinburgh Mathematical Society, en



cuyos *Proceedings* publicó el teorema que nos ocupa y que se puede descargar gratuitamente de la red (*Some methods applicable to identities and inequalities of symmetric algebraic functions of n letters,* Vol. 21,pp. 144-157, año 1903). En [4] hay una pequeña biografía suya y dos fotos, una de las cuales incluyo ahora aquí:

En 1900 fundó el Glasgow Tutorial College, del que fué Director hasta su muerte en 1941. Presidió la EMS en 1899 y en 1909. La segunda foto de [4] muestra un Muirhead mucho mayor, leyendo el *Scots Independent,* periódico socialista del Scots National Party, en el que militó activamente.

Primeras aproximaciones al teorema de Muirhead

Trataremos de seguir, modestamente, el parecer de David Hilbert, quien en cierta ocasión dijo: *El arte de hacer matemáticas consiste en encontrar ese caso particular que contiene todo el germen de generalidad.*

Es bien conocido que, para números reales positivos a, b se verifica

$$ab \leq \frac{(a+b)^2}{4} \leq \frac{a^2+b^2}{2},$$

y designaremos esas tres expresiones por G, A, Q respectivamente.
¿Cuál de estas dos expresiones será mayor, GQ ó A^2?
Se puede comprobar sin dificultad que

$$ab\left(a^2+b^2\right) \leq \frac{(a+b)^4}{8},$$

porque la diferencia

$$(a+b)^4 - 8ab\left(a^2+b^2\right) = \cdots = (a-b)^4 \geq 0.$$

Como segunda pregunta, tratemos de ver si la desigualdad

$$ab\left(a^2+b^2\right)^2 \leq \frac{(a+b)^6}{16}$$

es cierta para todos $a, b \geq 0$.

En este caso, poniendo $b = 2a$, el primer miembro es $50a^6$ y el segundo $\frac{729}{16}a^6$. Ya que $50 \cdot 16 = 800$, la presunta desigualdad no se cumple siempre.

Vamos a considerar ahora desigualdades con polinomios *homogéneos* (todos sus términos son del mismo grado), como por ejemplo

$$\begin{array}{rcll}
x^2+y^2 & \geq & 2xy & (1)\\
x^5+y^5 & \geq & x^3y^2+y^3x^2 & (2)\\
x^2+y^2+z^2 & \geq & xy+yz+zx & (3)\\
x^3+y^3+z^3 & \geq & 3xyz & (4)\\
x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2 & \geq & x^2yz+y^2xz+z^2xy & (5)\\
x^4+y^4+z^4+w^4 & \geq & 4xyzw & (6)
\end{array}$$

que se verifican cualesquiera que sean los valores positivos de las variables. Si el número de variables es 2, usualmente agrupando términos y factorizando se consigue probar la desigualdad. Por ejemplo, en (2):

$$x^5+y^5-x^3y^2-y^3x^2 = x^3\left(x^2-y^2\right) - y^3\left(x^2-y^2\right) = \left(x^3-y^3\right)\left(x^2-y^2\right),$$

y los dos factores tienen el mismo signo, tanto si $x \geq y \geq 0$ (ambos son positivos) como si $y \geq x \geq 0$ (ambos son negativos).

Para desigualdades con tres o más variables, es más difícil encontrar una prueba simétrica. En el ejemplo (5), será conveniente pasar todos los términos de la desigualdad propuesta a un miembro, multiplicar por 2 y agruparlos convenientemente:

$$\begin{array}{rcl}
x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2-x^2yz-y^2xz-z^2xy & = & \\
x^2\left(y^2-2yz+z^2\right)+y^2\left(x^2-2xz+z^2\right)+z^2\left(x^2-2xy+y^2\right) & = & \\
x^2(y-z)^2+y^2(x-z)^2+z^2(x-y)^2 & \geq & 0.
\end{array}$$

Simetrización de un monomio

Supongamos que tenemos las **tres** variables x, y, z que toman valores no negativos. Se nos da un conjunto de **tres** enteros no negativos $\alpha = (k, j, i)$, con $k \geq j \geq i$, que serán los *exponentes.* Formamos una tabla con tres cuadrados

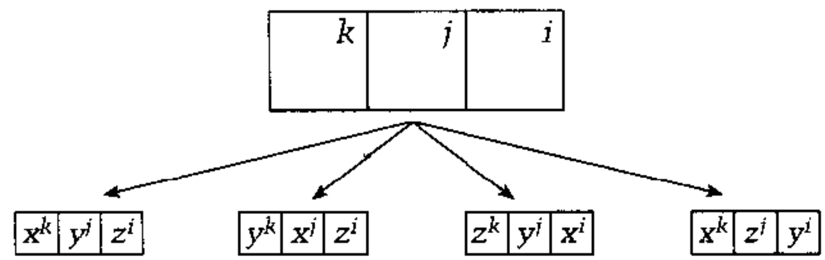


Figure 1

e insertamos el correspondiente exponente en el vértice superior derecho de cada cuadrado. Ponemos las tres variables en los cuadrados para obtener el monomio $x^k y^j z^i$. A continuación ponemos las variables en un orden diferente y obtendremos otro monomio, como $y^k x^j z^i$. Una figura contribuye a clarificar las cosas:

Contemos el número de monomios que se obtienen de esta forma. Cada una de las tres variables se puede colocar en el primer cuadrado, lo que da 3 posibilidades. Luego, cada una de las tres restantes se puede colocar en el segundo, lo que da $3 \times 2 = 6$ posibilidades, y no hay más, porque una vez colocadas dos de las variables, la tercera va obligada. Luego sumamos todos los monomios que hemos obtenido así para formar un polinomio en las tres variables x, y, z, que designaremos como

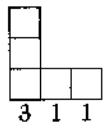
$$T_{(k,j,i)}\,(x,y,z) \;\text{ o bien }\; T_\alpha\,(x,y,z) \;\text{ o incluso }\; T_\alpha.$$

Estos polinomios son simétricos porque no varían si se intercambian las variables. El grado de cada monomio es $s = k + j + i$.

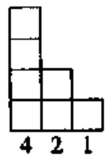
Veamos algunos ejemplos más:

$$\begin{aligned}
T_{(2,1,0)}\,(x,y,z) &= x^2y + y^2x + z^2x + x^2z + y^2z + z^2y \\
T_{(3,1,1)}\,(x,y,z) &= x^3yz + y^3xz + z^3xy + x^3zy + y^3zx + z^3yx \\
&= 2\left(x^3yz + y^3zx + z^3xy\right) \\
T_{(2,2,2)}\,(x,y,z) &= 6x^2y^2z^2
\end{aligned}$$

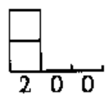
En los dos últimos ejemplos se ve que, **si hay números iguales en los exponentes,** se agrupan los términos semejantes, dando una expresión más corta.



$$T_{(3,1,1)}(x,y,z) = 2(x^3yz + y^3zx + z^3xy)$$



$$T_{(4,2,1)}(x,y,z) = x^4y^2z + y^4z^2x + z^4y^2x + x^4z^2y + y^4x^2z + z^4x^2y$$



$$T_{(2,0,0)}(x,y,z) = 2(x^2 + y^2 + z^2)$$

Para representar de una forma más gráfica los polinomios T podemos utilizar los diagramas de Young:

Si el conjunto de exponentes $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ consta de n números, la tabla debe contener n cuadrados, y debemos usar n variables $x_1, x_2, \cdots, x_n$. Entonces el polinomio $T_\alpha(x_1, \cdots, x_n)$ debe contener $n! = 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot n$ términos (**antes de que los términos semejantes sean agrupados).**

Así, a cada conjunto $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ de enteros, con $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_n \geq 0$, se le asigna un polinomio T_α.A este polinomio se dice que es la *simetrización* del monomio de exponentes $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$.

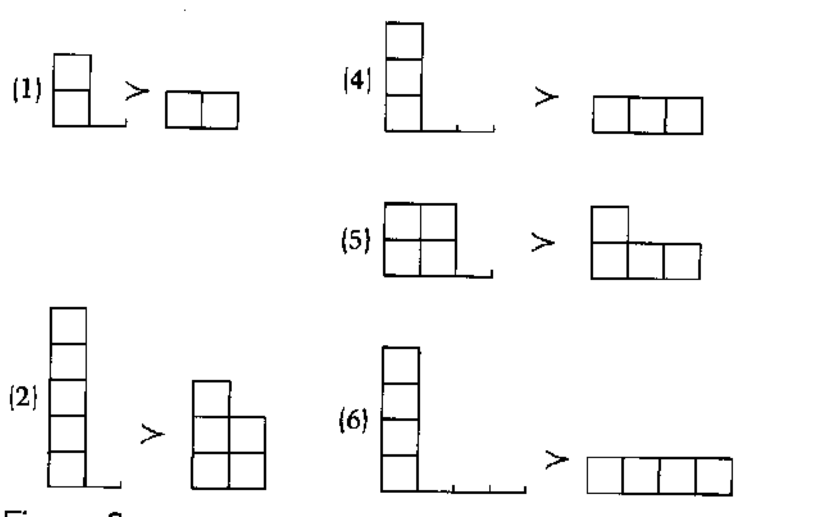
El número de cuadrados de cada diagrama de Young es igual al grado del polinomio $T : s = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$.

Ejercicio: Escribir los polinomios T_α y dibujar el correspondiente diagrama de Young para los siguientes conjuntos α :

$$\begin{array}{l}(3,2)\\(3,2,1)\\(3,3,0,0)\\(4,1,1,0)\\(5,0,0,0,0)\\(1,1,1,1,1)\end{array}$$

Comparación de diagramas de Young

La figura que sigue muestra los pares de diagramas de Young correspondientes a las desigualdades (1), (2), y (4) - (6) anteriores. Vemos que el diagrama más "empinado" corresponde al mayor de los dos polinomios.



Podemos pasar del diagrama más empinado al otro moviendo los cuadrados **hacia la derecha y hacia abajo, como se muestra en la figura siguiente:**

Vamos a formular una definición más precisa de la expresión *más empinado.* Lo haremos para diagramas de tres exponentes.

Sean $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ y $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ dos conjuntos de enteros tales que

$$\begin{aligned} s &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3, \\ \alpha_1 &\geq \alpha_2 \geq \alpha_3 \quad \text{y} \quad \beta_1 \geq \beta_2 \geq \beta_3. \end{aligned}$$

Diremos que α *mayoriza* β, y lo escribimos $\alpha \succ \beta$, si se verifica la condición siguiente: β se puede obtener a partir de α realizando la siguiente operación un cierto número (puede ser 0) de veces:

Esta condición puede formularse también de la siguiente manera equivalente:

$$\alpha \succ \beta \text{ si} \quad \left\{ \begin{array}{c} \alpha_1 \geq \beta_1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 \geq \beta_1 + \beta_2 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \end{array} \right. \qquad (**)$$

En general, para conjuntos no crecientes de enteros no negativos $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \cdots, \beta_n)$ escribimos $\alpha \succ \beta$ si

$$\left\{ \begin{array}{c} \alpha_1 \geq \beta_1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 \geq \beta_1 + \beta_2 \\ \cdots\cdots \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{n-1} \geq \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_{n-1} \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{n-1} + \alpha_n \geq \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_{n-1} + \beta_n \end{array} \right.$$

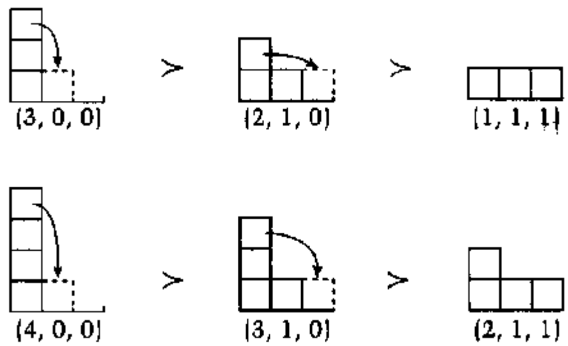


Figure 4

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & (k, j, i) \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\ (k-1, j+1, i) & (k-1, j, i+1) & (k, j-1, i+1) \end{tikzcd} \qquad (*)$$

Por ejemplo, $(4,2,1) \succ (3,2,2)$ porque $4 \geq 3; 4{+}2 \geq 3{+}2; 4{+}2{+}1 \geq 3{+}2{+}2$.

La relación $\succ$ es una relación de orden parcial entre los conjuntos de enetros considerados, porque hay pares de conjuntos que no son comparables mediante $\succ$, aunque ambos tengan la misma suma.

Ejercicios

i) Comprobar que las condiciones (*) y (**) se verifican para los diagramas de Young de la figura 3.

ii) Probar que las condiciones (*) y (**) son equivalentes.

iii) Dibujar los diagramas de Young formados por $s = 4$ escalones en orden decreciente, empezando por $(4,0,0,0)$ y terminando por $(1,1,1,1)$. Hágase lo mismo para $s = 5$.

iv) Comprobar que los diagramas de Young $(4,1,1)$ y $(3,3,0)$ no son comparables, es decir que ninguno mayoriza al otro. ¿Hay otros conjuntos incomparables con suma 6?

Hallar todos los pares de conjuntos incomparables para $s = 7$.

El "aperitivo simétrico" de Michael Steele

En [8], antes de enunciar el teorema de Muirhead, se propone la siguiente desigualdad:

Demuéstrese que para valores no negativos de x, y, z se verifica

$$x^2y^3 + x^2z^3 + y^2x^3 + y^2z^3 + z^2x^3 + z^2y^3 \leq xy^4 + xz^4 + yx^4 + yz^4 + zx^4 + zy^4,$$

e inspírese en sus descubrimientos para generalizar este resultado lo más ampliamente que pueda.

Es, en mi opinión, instructivo, hacer aquí un inciso para ver el tratamiento que se da en [8] a esta desigualdad.

"Para relacionar dos polinomios homogéneos con la desigualdad de las medias aritmética y geométrica (ponderadas), sería necesario ver que cada sumando del primer miembro se puede escribir como la media geométrica ponderada de sumandos del segundo miembro. La clave en este caso es

$$a^2b^3 = \left(ab^4\right)^{\frac{2}{3}} \left(a^4b\right)^{\frac{1}{3}} \leq \frac{2}{3}\left(ab^4\right) + \frac{1}{3}\left(a^4b\right)$$

y la cuestión es ver cómo podemos aplicar ésto.

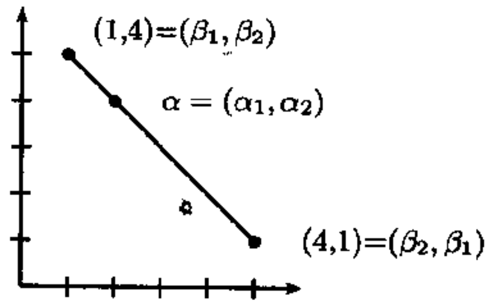
Si se sustituye sucesivamente (a,b) por los pares ordenados (x,y) e (y,x), tenemos (sumando)

$$x^2y^3 + y^2x^3 \leq xy^4 + x^4y,$$

de modo que ya lo que sigue no es difícil: es repetir el asunto con los pares (x,z) y (z,x) ;y finalmente con (y,z) , (z,y) . Sumando las tres cotas se obtiene el resultado.

Naturalmente, para productos de más variables las cosas se complican bastante. Pero la geometría enseña el camino (*sic).*

186 *Symmetric S*



El punto $(2,3)$ está en la envolvente convexa de los puntos $(1,4)$ y $(4,1)$, y se tiene

$$(2,3) = \frac{2}{3}(1,4) + \frac{1}{3}(4,1).$$

Si el punto (α_1, α_2) está en la envolvente convexa de (β_1, β_2) y (β_2, β_1), entonces $x^{\alpha_1}y^{\alpha_2}$ esta acotado por una combinación lineal de $x^{\beta_1}y^{\beta_2}$ y $x^{\beta_2}y^{\beta_1}$. Esto conduce a algunas desigualdades notables, cuando se aplica a sumas simétricas de productos, y hay generalizaciones excepcionalmente reveladoras de esas cotas.

Pasando a los exponentes, se vuelve a obtener la descomposición $a^2b^3 = \left(ab^4\right)^{\frac{2}{3}}\left(a^4b\right)^{\frac{1}{3}}$.

Pero el beneficio real del punto de vista geométrico es que sugiere la representación útil para productos de tres o más variables. La clave es encontrar la figura análoga a la anterior:

En este caso, la envolvente convexa $H(\beta)$ es el subconjunto del hiperplano bidimensional de $\mathbb{R}^3$ generado por los 6 puntos obtenidos al permutar las coordenadas de $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ .Entonces, como en el caso bidimensional,

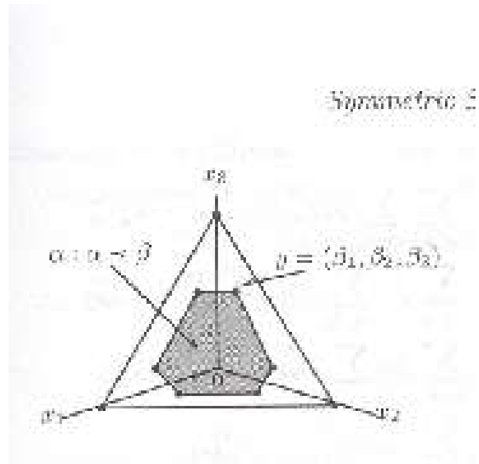
$$\alpha \prec \beta \Longleftrightarrow \alpha \in H(\beta).$$

En dimensiones mayores que 3, la intuición geométrica sigue siendo sugestiva, pero el álgebra es la que debe servir de guía infalible."

El teorema de Muirhead

Utilizaremos la formulación incluida en [2].

Sean $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ *y* $\beta = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$ *dos conjuntos de exponentes con la misma suma. Si* $\alpha \succ \beta$, *entonces* $T_\alpha(x_1, x_2, \cdots, x_n) > T_\beta(x_1, x_2, \cdots, x_n)$



para todos los valores no negativos de las x_i. Y recíprocamente, si esta última desigualdad se cumple, entonces $\alpha \succ \beta$.

Las ideas básicas subyacentes en la demostración son (siguiendo [2]) :

La necesidad de la condición $\alpha \succ \beta$ se deduce del hecho simple que, de dos polinomios en una variable t (con coeficientes principales positivos), el polonomio de mayor grado es mayor para valores grandes de t.

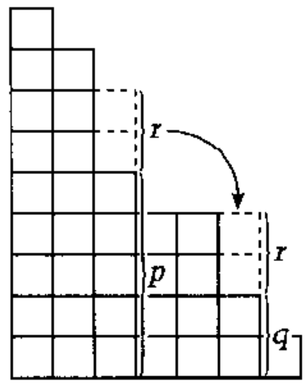
La prueba de la suficiencia se basa en dos ideas: la primera es la idea de mover cuadrados en los diagramas de Young hacia la derecha y hacia abajo. Dos conjuntos $\alpha \succ \beta$ pueden conectarse por una cadena de conjuntos de manera que dos conjuntos consecutivos de la cadena difieran en sólo dos lugares. Podemos pasar de cada conjunto de la cadena al siguiente moviendo un cuadrado de un escalón al siguiente en el correspondiente diagrama. La segunda idea es la del *agrupamiento simétrico:* la diferencia entre los polinomios correspondientes a conjuntos consecutivos se puede representar como la suma (extendida a todos los conjuntos de las variables x e y) de grupos idénticos de la forma

$$\left(x^{p+r}y^q + y^{p+r}x^q - x^p y^{q+r} - y^p xq + r\right) Z,$$

donde Z es el producto de otras variables correspondiente a exponentes idénticos en los conjuntos consecutivos. La última expresión puede ser factorizada y se verifica que es no negativa para $p > q$ y $r \geq 0$.

La demostración detallada del teorema se puede encontrar en [6] , donde por cierto se advierte que "es bastante difícil". En [5] también es posible seguirla (con algún detalle dejado a los lectores); y en [8] la notación empleada es, por llamarlo de alguna forma, "tensorial", con orgía de sub y superíndices incluida.

Aplicaciones del teorema de Muirhead a problemas de concurso y otros



En uno de los informes que habitualmente presenta el Jefe de la Delegación británica en la IMO después de cada prueba, y que se pueden descargar en la página web de la British Mathematical Olympiad, se menciona como "de pasada" : *parece que algunos estudiantes conocían mejor el teorema de Muirhead que algunos miembros del Jurado Internacional.* Veamos cómo se pueden resolver problemas de concursos y otros resultados de desigualdades "vía Muirhead". Se recomienda, en todos los casos, dibujar los diagramas de Young correspondientes. Pero hay que advertir igualmente a los participantes en concursos que no debe uno quedarse en los diagramas de Young y pensar que eso es una demostración rigurosa. En algunos ejemplos que siguen se dan soluciones detalladas y en otros no. En un concurso hay que pensar siempre que el jurado va a inclinarse por la solución más rigurosa posible, y que por lo tanto no bastará con invocar el teorema de Muirhead.

Problema 1
Si $a > 0, b > 0$, *demostrar que* $\sqrt{\frac{a^2}{b}} + \sqrt{\frac{b^2}{a}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}.$
Solución *(incluida en* [1])
Llamando $x = \sqrt{a}, y = \sqrt{b}$ y simplificando, queda $x^3 + y^3 \geq xy\,(x + y)$.
Por tanto, según el teorema de Muirhead, bastará comprobar que $T_{30} \geq T_{21}$ lo cual es fácil.■
Problema 2
Si a, b, c *son no negativos, demostrar que*

$$a^3 + b^3 + c^3 + abc \geq \frac{1}{7}\,(a + b + c)^3 .$$

Solución (*incluida en* [1])
Teniendo en cuenta que

$$(a+b+c)^3 = \frac{1}{2}T_{300} + 3T_{210} + T_{111},$$

lo que debemos comprobar en este caso es que

$$\frac{1}{2}T_{300} + \frac{1}{6}T_{111} \geq \frac{1}{7}\left(\frac{1}{2}T_{300} + 3T_{210} + T_{111}\right),$$

es decir,

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{6}{7}T_{300} + \frac{1}{42}T_{111} \geq \frac{3}{7}T_{210} \Longleftrightarrow \frac{3}{7}\left(T_{300} - T_{210}\right) + \frac{1}{42}T_{111} \geq 0,$$

y esto es una consecuencia de las desigualdades $T_{300} \geq T_{210}$ y $T_{111} \geq 0$.■

Problema 3*(de la Olimpiada URSS 1962)*
Los cuatro números positivos a, b, c, d son tales que $abcd = 1$. Demostrar que

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + ac + ad + bc + bd + cd \geq 10.$$

Solución *(incluida en [1])*
Elevando al cuadrado la desigualdad propuesta se obtiene

$$\left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + ac + ad + bc + bd + cd\right) \geq 100abcd.$$

Desarrollando el primer miembro obtendremos una combinación de los polinomios $T_{4000}, T_{3100}, T_{2200}, T_{2110}, T_{1111}$ con ciertos coeficientes; hallaremos esos coeficientes y una estimación para el primer miembro de la desigualdad con el teorema de Muirhead:

$$\begin{array}{rcl}
24abcd & = & T_{1111} \\
a^4 + b^4 + c^4 + d^4 & = & \frac{1}{6}T_{4000} \geq \frac{1}{6}T_{111} = 4abcd \\
2\left(a^3b + a^3c + \cdots\right) & = & T_{3100} \geq T_{1111} = 24abcd \\
3\left(a^2b^2 + a^2c^2 + \cdots\right) & \geq & 18abcd \\
a^2bc + ab^2c + \cdots & \geq & 48abcd \\
6abcd & \geq & 6abcd
\end{array}$$

y sumando miembro a miembro se obtiene el resultado.■

Veamos un ejemplo en el que inicialmente no se puede aplicar el teorema de Muirhead:

Problema 4 *(IMO 1964, #2, propuesto por Hungría)*
Si a, b, c son estrictamente positivos, entonces

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)$$

Solución *(incluida en* [1]*)*
Escribimos la desigualdad de otra forma

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq ab\,(a+b-c) + bc\,(b+c-a) + ca\,(c+a-b)$$

y hacemos la sustitución

$$x = a+b-c, y = b+c-a, z = c+a-b.$$

Entonces se tiene

$$a = \frac{x+z}{2}, b = \frac{x+y}{2}, c = \frac{y+z}{2} \qquad (*)$$

Observación: esta sustitución, de un tiempo a esta parte, recibe en algunos medios olímpicos el nombre de "sustitución de Ravi", aludiendo al medallista de oro canadiense Ravi Vakil(1975). Pero, como ya indicó el jefe de la delegación israelí, Shay Gueron, en un artículo publicado en CRUX MATHEMATICORUM, es un cambio de variable conocido desde mucho tiempo antes de que Ravi naciera, y se encuentra profusamente documentada en los libros clásicos de Desigualdades de Bottema y Mitrinovic.En el libro "Geometric Inequalities" de Bottema hay, al menos referencias datadas en 1925 en las que se utiliza, y en el "American Mathematical Monthly", anteriores.

Volviendo al problema, la desigualdad propuesta se convierte en

$$\frac{1}{8}\left[(x+y)^3 + (y+z)^3 + (z+y)^3\right] \geq \frac{1}{4}\left[(x+y)(x+z)x + (x+y)(y+z)y + (x+z)(y+z)z\right]$$

y haciendo operaciones resulta

$$3\left(x^2y + y^2x + \cdots + z^2x\right) \geq 2\left(x^2y + \cdots\right) + 6xyz$$

o lo que es lo mismo

$$x^2y + y^2x + y^2z + z^2y + z^2x + x^2z \geq 6xyz,$$

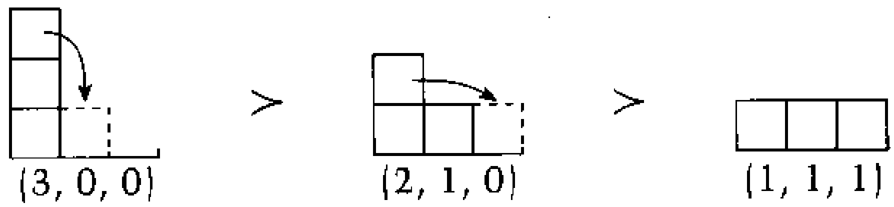
y aplicando ahora el teorema de Muirhead se obtiene el resultado, cuando x, y, z son mayores o iguales que 0.

Si de entre los números x, y, z exactamente uno es negativo (no puede haber más), entonces usando (*) obtendremos la desigualdad propuesta en la forma siguiente:

$$x^2\,(y+z) + y^2\,(z+x) + z^2\,(x+y) + x^2 \cdot 2c + y^2 \cdot 2a + z^2 \cdot 2b \geq 6xyz,$$

pero el segundo miembro es negativo y el primero no negativo, luego es cierta también en este caso.

En el lenguaje de los polinomios T, el enuncado original pide probar que $T_{300} + T_{111} \geq 2 \cdot T_{210}$, y no podemos usar directamente el teorema de Muirhead.■



Observación: En el libro "International Mathematical Olympiads 1959 - 1977", Samuel Greitzer presenta tres demostraciones distintas de este problema. Ninguna de ellas utiliza el teorema de Muirhead.

Problema 5 *(la desigualdad de las medias aritmética y geométrica)*

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \geq \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3}$$

con $a_1, a_2, a_3 \geq 0$.
Solución via Muirhead:
Ponemos $a_1 = x^3, a_2 = y^3, a_3 = z^3$ y llegamos a la desigualdad

$$x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz.$$

Con los diagramas de Young:
Debemos probar que

$$T_{(3,0,0)}(x, y, z) \geq T_{(2,1,0)}(x, y, z) \geq T_{(1,1,1)}(x, y, z).$$

Formemos la diferencia entre el primero y el segundo:

$$\begin{aligned} R_1 &= T_{(3,0,0)}(x, y, z) - T_{(2,1,0)}(x, y, z) \\ &= 2\left(x^3 + y^3 + z^3\right) - x^2y - y^2z - z^2x - x^2z - y^2x - z^2y \end{aligned}$$

Reordenaremos los términos en grupos de cuatro de acuerdo con el siguiente método: para cada par de variables, incluimos en un grupo todos los términos en los que los exponentes de esas variables cambian de $(3, 0)$ a $(2, 1)$, y el exponente común de la tercera variable es cero. Así se tiene

$$\begin{aligned} R_1 &= \left(y^3 + z^3 - y^2z - z^2y\right) + \left(x^3 + y^3 - x^2y - y^2x\right) + \left(z^3 + x^3 - z^2x - x^2z\right) \\ &= \left(y^2 - z^2\right)(y - z) + \left(x^2 - y^2\right)(x - y) + \left(z^2 - x^2\right)(z - x) \geq 0 \end{aligned}$$

para x, y, z no negativos.
Ahora probaremos la segunda desigualdad:

$$\begin{aligned} R_2 &= T_{(2,1,0)}(x,y,z) - T_{(1,1,1)}(x,y,z) \\ &= x^2y + y^2z + z^2x + x^2z + y^2x + z^2y - 6xyz \end{aligned}$$

Aquí, el exponente común de la variable y es igual a 1, y los exponentes $(2,0)$ de las variables x, z cambian a $(1,1)$. Ahora se tiene

$$\begin{aligned} R_2 &= x\left(y^2+z^2-2yz\right) + y\left(z^2+x^2-2xz\right) + z\left(x^2+y^2-2xy\right) \\ &= x(y-z)^2 + y(z-x)^2 + z(x-y)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

La desigualdad queda probada.■

Problema 6
Demostrar que, si $a, b, c \geq 0$, *se verifica*

$$\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} \geq \frac{a^2+b^2}{2c} + \frac{b^2+c^2}{2a} + \frac{c^2+a^2}{2b} \geq a+b+c$$

Solución *(incluida en* [2]*)*
Multiplicando por $2abc$ escribimos las desigualdades "tipo Muirhead":

$$2\left(a^4+b^4+c^4\right) \geq a^3b+b^3a+b^3c+c^3b+c^3a+a^3c \quad (7)$$
$$a^3b+b^3a+b^3c+c^3b+c^3a+a^3c \geq 2\left(a^2bc+b^2ac+c^2ab\right) \quad (8)$$

Veamos los diagramas de Young correspondientes:
La diferencia entre el primer y el segundo miembros de cada desigualdad puede escribirse, como antes, como una suma de tres grupos, de cuatro términos cada uno. Escribimos solamente el primero (los demás se obtienen cambiando a, b y c por b, c, a y por c, a, b, respectivamente):
Para la desigualdad (7)

$$\left(a^4+b^4-a^3b-b^3a\right) + \cdots = \left(a^3-b^3\right)(a-b) + \cdots$$

Para la (8):

$$\left(a^3b+c^3b-a^2cb-c^2ab\right) + \cdots = b\left(a^2-c^2\right)(a-c) + \cdots$$

lo cual demuestra las desigualdades.■

Terminamos el artículo con algunos problemas propuestos, sin solución.

Problema 7
Escribir todas las desigualdades de Muirhead para polinomios de grado 4

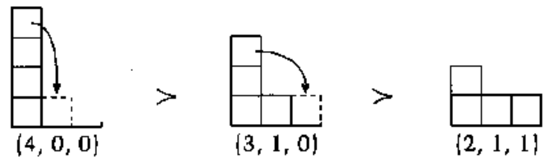


Figure 4

Problema 8
Sea

$$T_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}\left(x,y,z\right) \geq T_{(\beta_1,\beta_2,\beta_3)}\left(x,y,z\right).$$

probar que se cumplen las desigualdades (**). Considérense varios casos: $x=y=z=t; x=y=t, z=1; x=t, y=z=1$ y comparar las potencias de los polinomios obtenidos.

Problema 9
Demostrar las siguientes desigualdades para valores no negativos de las variables:

$$\begin{aligned} a)\;\; x^4y^2z+y^4x^2z+z^4yx^2+x^4z^2y+z^4x^2y &\geq 2\left(x^3y^2z^2+y^3z^2x^2+z^3x^2y^2\right) \\ b)\;\; x^5+y^5+z^5 &\geq x^2y^2z+y^2z^2x+z^2x^2y \\ c)\;\; x^3+y^3+z^3+v^3 &\geq xyz+xyv+xzv+yzv \end{aligned}$$

Problema 10
Deducir del teorema de Muirhead la desigualdad de las medias aritmética y geométrica para n variables. ¿Cuántos cuadrados hay que mover para que el conjunto $(n,0,0,\cdots,0)$ se transforme en $(1,1,\cdots,1)$?

Problema 11
¿Hay algún tipo de ordenación entre los polinomios

$$\begin{aligned}
p_1 &= abc\,(a+b+c)\\
p_2 &= \frac{1}{27}\,(a+b+c)^4\\
p_3 &= \frac{1}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)^2\\
p_4 &= a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\\
p_5 &= \frac{1}{3}\,(ab+bc+ca)\left(a^2+b^2+c^2\right),
\end{aligned}$$

en el sentido de que haya desigualdades entre ellos, válidas para todos $a, b, c \geq 0$?

Bibliografía

[1] Vavilov, V.: *El teorema de Muirhead (y 2). Revista SIPROMA, vol. 2, sept. 1997*

[2] S. Dvoryaninov y E. Yasinovyi.: *Obtaining symmetric inequalities. QUANTUM, Nov.-Dec. 1999, Springer.*

[3] G.H. Hardy, J.E. Littlewood y G.Pólya.: *Inequalities, Cambridge U.P. 1934.*

[4] A.W. Marshall e I. Olkin.: *Inequalities: Theory of majorization and its applications. Academic Press 1979*

[5] O.A. Ivanov.*:Making Mathematics Come to Life, AMS, 2009.*

[6] R. Bulajich Manfrino, J.A. Gómez Ortega y R. Valdez Delgado.: *Inequalities: A mathematical Olympiad Approach,* Birkhäuser, 2009

[7] Lau Chi Hin . : *Muirhead's Inequality, Mathematical Excalibur (vol. 11, nr.1)* que se encuentra en *http://www.math.ust.hk/mathematical_ excalibur/.*

[8] J. Michael Steele.: *The Cauchy-Schwarz Master Class,* MAA-CUP, 2004.

¿CUADRADOS NEGATIVOS?

Luis Gómez-Sánchez
Universidad de Oriente. Venezuela.
lagsa7@gmail.com

Ejemplos de supuestos cuadrados negativos no dados por la unidad imaginaria en $\mathbb{C}$, podrían presentarse fácilmente en los anillos de clases residuales módulo n. Así por ejemplo en $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ se tiene $(\mathbf{2})^2 = -\mathbf{1}$ y en $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ se tiene $(\mathbf{5})^2 = -\mathbf{1}$ **(***donde también se tiene* $(\mathbf{3})^2 + (\mathbf{4})^2 = -\mathbf{1}$ *y en general se demuestra que en todo cuerpo finito todo elemento es suma de dos cuadrados***).** Otro ejemplo sería la matriz $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ para la cual se tiene también $\mathbf{M}^2 = -\mathbf{1}$ donde $-\mathbf{1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

¿Pero acaso son buenos ejemplos los que preceden? ¿Qué significa la palabra negativo en los anillos correspondientes? En principio nada, porque en dichos anillos no se define una relación estándar de orden, similar a la conocida en $\mathbb{R}$ (*la que define* $x < 0$). Además en el anillo $\mathbb{Z}/\mathbf{n}\mathbb{Z}$ todo elemento no nulo "sería" a la vez positivo y negativo lo que prácticamente equivaldría a volver inútiles en $\mathbb{Z}/\mathbf{n}\mathbb{Z}$ dichos términos. Notemos desde ahora que los vocablos positivo y negativo se deben en el conjunto de los números reales al orden usual el cual es **total** sobre $\mathbb{R}$, lo que significa que dos reales arbitrarios son siempre **comparables**, es decir, o bien son iguales o bien uno es mayor que el otro. Esto es clave para lo que queremos aquí responder: **¿Cuándo, en conjuntos X no contenidos en $\mathbb{C}$, un cuadrado puede ser negativo?**

Aclaremos que esta pregunta es defectuosa porque, en particular, no dice lo que significa "negativo" en **X**. Es más propio preguntar en qué clase de conjuntos **X**, distintos de $\mathbb{C}$, la ecuación $\mathbf{x}^2 = -\mathbf{1}$, o su equivalente $\mathbf{x}^2 + \mathbf{1} = \mathbf{0}$, tiene solución. Y vale decir al paso que también en **X** deben entonces estar definidas una suma y una multiplicación (*ésta para que tenga sentido inmediato* x^2), así como también dos elementos notados $\mathbf{1}$ y $\mathbf{0}$. La pregunta es entonces obviamente pertinente cuando **X** es un anillo o cuerpo (*¿cuántas soluciones, distintas de la* M *del ejemplo dado al comienzo, habrá en el correspondiente anillo de matrices*?.....). Y si se quiere que tenga sentido hablar de elementos negativos, debe además el anillo **X** estar provisto de una relación de orden. Seguiremos con esto más adelante.

****

El interesante artículo, **Hablando de cuadrados negativos**, muy laudable en su intención pedagógica y que aparece en el número 39 de esta REOIM, expone un ejemplo en que no se da ningún significado contextual a la palabra "negativo". Agreguemos que dicho ejemplo es lo que los geómetras contemporáneos llaman un conjunto algebraico, el cual resulta ser una cúbica que no es irreducible por constar de dos conjuntos algebraicos irreducibles, a saber, una recta y una cónica no degenerada en dos rectas. Pero es una cúbica **(***producto de un polinomio lineal por otro de segundo grado***)** y la ley de composición que usualmente se define en las cúbicas irreducibles y que da lugar a la teoría de curvas elípticas **(***una rama importantísima y muy activa de la matemática actual***)** es consagradamente notada como suma y no como multiplicación. **(***El producto G^2 del ejemplo comentado, en el cual se usa una notación multiplicativa pasaría a ser $G + G$***)**. Además esta multiplicación **(***cuya asociatividad es demostrada de muy bonito modo***)** es prácticamente la misma que la suma de las cúbicas elípticas **(***cuando tres puntos A, B y C son colineales se tiene en las curvas elípticas $A + B + C = 0$ mientras que en el ejemplo citado se tendría $ABC = 1$ si no se exceptuaran los puntos C de la recta h***)**, con la sola diferencia que se ha tomado el punto fijado F como elemento neutro en vez del usual punto del infinito y que no se define el producto para puntos de la recta h; por lo demás, sabemos determinarlo pero no debe ser claro para un escolar cuál punto de la cónica es AB si los puntos A y B determinan una línea paralela a dicha recta h.

****

UN EJEMPLO NOTABLE.- En el cuerpo no conmutativo $\mathbb{H}$ de los cuaterniones, *o cuaternios*, definidos sobre $\mathbb{R}$, se tiene una infinidad no numerable de soluciones de la ecuación $\mathbf{x^2 + 1 = 0}$ **(**¡*Recordar que si el cuerpo de coeficientes fuese conmutativo debería haber a lo sumo sólo dos soluciones*!**)** con la particularidad de que el **1** que aquí figura, sí puede propiamente "identificarse" con el número real 1, tal como sucede en $\mathbb{C}$. **(***En efecto, $\mathbb{H}$ contiene una copia de $\mathbb{C}$ al mismo título que $\mathbb{C}$ contiene una copia de $\mathbb{R}$***).**

Recordar que $\mathbb{R}^2$ referido a la base canónica {(1, 0), (0, 1)} es un espacio vectorial real en el que para los vectores $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ y $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ se puede definir una multiplicación $\mathbf{ab} = (a_1b_1 - a_2b_2, a_1b_2 + a_2b_1)$. Así $\mathbb{R}^2$, provisto de esta multiplicación y de la suma proveniente de su estructura de espacio vectorial, deviene un cuerpo conmutativo que se identifica con $\mathbb{C}$.

(*En* [1] *se puede ver una demostración sencilla de que en $\mathbb{R}^3$ es imposible actuar de una manera similar. Pero en $\mathbb{R}^4$ sí es posible hacerlo y lo que se obtiene es el cuerpo $\mathbb{H}$, el primero no conmutativo en ser descubierto, en 1843 por Hamilton, de donde la consagrada letra $\mathbb{H}$ para su notación. Y no hay otro espacio vectorial real $\mathbb{R}^n$ que pueda convertirse en* *un cuerpo, de acuerdo a un teorema de Frobenius (1878). Salvo isomorfismos, sólo* $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ *y* $\mathbb{H}$*, de dimensión 1, 2 y 4 respectivamente*).

El conjunto de los cuaternios es definido por $\mathbb{H} = \{a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} \ / \ a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ donde $\{\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ es la base canónica $\{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ de $\mathbb{R}^4$ sobre $\mathbb{R}$ cumpliéndose por definición los productos $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -\mathbf{1}$ de donde se deduce que $\mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k}$, $\mathbf{jk} = -\mathbf{kj} = \mathbf{i}$, $\mathbf{ki} = -\mathbf{ik} = \mathbf{j}$ lo que define componente a componente una multiplicación asociativa en $\mathbb{H}$.

Abreviadamente se puede notar $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ y $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ y entonces a las conocidas suma y producto por un escalar, $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1+b_1, \ a_2+b_2, \ a_3+b_3, \ a_4+b_4)$ y $\lambda\,\mathbf{a} = (\lambda a_1, \ \lambda a_2, \ \lambda a_3, \lambda a_4)$, se agrega la multiplicación $\mathbf{ab} = (p_1, \ p_2, \ p_3, \ p_4)$ donde

$$
\begin{aligned}
p_1 &= a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3 - a_4b_4 \\
p_2 &= a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_4 - a_4b_3 \\
p_3 &= a_1b_3 - a_2b_4 + a_3b_1 + a_4b_2 \\
p_4 &= a_1b_4 + a_2b_3 - a_3b_2 + a_4b_1
\end{aligned}
$$

Se puede verificar que por lo general $\mathbf{ab} \neq \mathbf{ba}$ si bien la sola igualdad $\mathbf{ij} = -\mathbf{ji}$ dice ya de por sí que esta multiplicación no es conmutativa.

Se ve fácilmente que $\mathbf{0} = (0, 0, 0, 0)$ y $\mathbf{1} = (1, 0, 0, 0)$ son, respectivamente, elementos neutros de la suma y de la multiplicación en $\mathbb{H}$ y que tiene sentido plantearse en $\mathbb{H}$ la ecuación $\mathbf{x^2 + 1 = 0}$.

Todo cuaternio $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ posee un inverso único $\mathbf{a}^{-1} = \left(\frac{\mathbf{1}}{a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2}\right) \mathbf{a^*}$ donde $\mathbf{a^*} = (a_1, -a_2, -a_3, -a_4)$ es el cuaternio **conjugado** de **a** (*nótese la similitud con* $\mathcal{C}$).

Provisto de la suma y multiplicación precedentes, se puede verificar que $\mathbb{H}$ es un cuerpo y se deduce fácilmente que los cuaternios solución de la ecuación $\mathbf{x^2 + 1 = 0}$ son todos aquellos $\mathbf{x} = (0, b, c, d)$ tales que $b^2 + c^2 + d^2 = 1$, es decir **todo punto de la esfera unidad proporciona un cuaternio cuyo cuadrado es igual a – 1.**

****

Pasamos a deducir formalmente una respuesta a la pregunta **¿En qué clase de conjuntos X, la ecuación** $\mathbf{x^2 = -1}$ **tiene solución?** (*Se ha visto al comienzo que* **X** *debe ser un anillo o un cuerpo*).

Para ello generalizaremos a cuerpos abstractos, propiedades bien conocidas del cuerpo ordenado $\mathbb{R}$ de los números reales. Con respecto a su suma, $\mathbb{R}$ es un grupo conmutativo provisto de un orden que es **compatible** con dicha suma, es decir, si para $x, y, z \in \mathbb{R}$ se tiene $x \leq y$, entonces $x + z \leq y + z$. Además los términos **positivos** son aquellos $x \in \mathbb{R}$ tales que $0 \leq x$, los **negativos** siendo los opuestos $-x$ de los x positivos.

(*se requiere para nuestro propósito que el cero sea a la vez positivo y negativo por lo cual los x tales que $0 < x$ son dichos estrictamente positivos y similarmente con los negativos*)
Con respecto a la multiplicación, $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ es un grupo conmutativo que es también dicho compatible con el orden, en el sentido de que si para $x, y \in \mathbb{R}$ se tiene $x \leq y$, entonces $xz \leq yz$ para todo positivo $z \in \mathbb{R}$.

Así, notando P al conjunto de todos los positivos en $\mathbb{R}$, se cumple que $P + P \subset P$, $P.P \subset P$, y $P \cap (-P) = \{0\}$, es decir, toda suma y todo producto de positivos es positivo y el único elemento a la vez positivo y negativo es 0. Como dos reales arbitrarios son siempre comparables, el orden usual es total lo que equivale a decir que $P \cup (-P) = \mathbb{R}$.

Se recuerda que una relación binaria $\preccurlyeq$ en un conjunto S es una relación de orden si ella es:

1) Reflexiva: $a \preccurlyeq a$,
2) Transitiva: $a \preccurlyeq b$ y $b \preccurlyeq c$ implica $a \preccurlyeq c$,
3) Antisimétrica: $a \preccurlyeq b$ y $b \preccurlyeq a$ implica $a = b$

para todos a, b, c en S. Cuando todo par de elementos es comparable el orden es dicho total.

EJEMPLOS: El orden usual en $\mathbb{N}$ es un orden total. La relación de divisibilidad en $\mathbb{N}$ es un orden que no es total. En el conjunto de partes del conjunto {a, b, c, d}, la relación de inclusión $\subset$ define un orden que no es total.

Se dice que A es un **anillo ordenado c**uando se define una relación de orden en A. Los elementos positivos y negativos se definen como usualmente en $\mathbb{R}$, es decir, todo elemento x tal que $0 \leq x$ es dicho **positivo** y todo $x \leq 0$ es **negativo**. **(***Asimismo se hereda nociones como mayor que, menor que, signos iguales o contrarios, mayorante, minorante, máximo, mínimo, sucesor (cuando existe), etc y se verifica para la multiplicación la ley escolar de los signos***)**.

En un anillo ordenado, $a \preccurlyeq b \Longleftrightarrow 0 \preccurlyeq b - a$ por lo cual la relación de orden está completamente determinada por el conjunto P de los elementos positivos.

Un **anillo totalmente ordenado** A, es un anillo conmutativo, con unidad y cero distintos, provisto de un orden total $\preccurlyeq$ compatible con la suma y con el producto, tal como hemos visto en $\mathbb{R}$, es decir

1) $a \preccurlyeq b$ implica $a + c \preccurlyeq b + c$ para todos a, b, c en A.
2) $a \preccurlyeq b$ implica $ac \preccurlyeq bc$ para todos a, b, c en A con c positivo.

Un **cuerpo totalmente ordenado** es un anillo totalmente ordenado A que es un cuerpo, es decir todos los elementos no nulos son inversibles, o lo que es lo mismo, $A^* = A \setminus \{0\}$ es un grupo multiplicativo.

EJEMPLOS: $\mathbb{Z}$ con el orden usual es un anillo totalmente ordenado.

El anillo $\mathbb{R}[x]$ de todos los polinomios en una variable y a coeficientes reales es totalmente ordenado para la relación definida por

$$P(x) \preccurlyeq Q(x) \Longleftrightarrow a_n \geq 0, \text{ siendo } Q(x) - P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

En cambio ni $\mathbb{C}$, ni $\mathbb{H}$, ni todos los cuerpos finitos $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ de clases módulo un primo p admiten un orden que los haga anillos totalmente ordenados.

Se demuestra fácilmente que el conjunto P de los elementos positivos de un anillo ordenado A satisface las propiedades $P + P \subset P$, $P.P \subset P$, $P \cap (-P) = \{0\}$ que hemos visto se satisfacen en el caso de $\mathbb{R}$. Se verifica, recíprocamente, que si P es un subconjunto de un anillo conmutativo A satisfaciendo estas tres propiedades existe entonces un único orden compatible sobre el anillo A y que admite P como el conjunto de los elementos positivos (ver ejemplo 1 al final).

Se define la **característica de un cuerpo** K como el menor entero no negativo n tal que la suma de n veces **1** es igual a **0** donde **1** y **0** son, respectivamente, los elementos neutros de la multiplicación y de la suma en K. Los cuerpos finitos $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ de clases módulo un primo p tienen característica p. El cuerpo $\mathbb{Q}$ de los números racionales tiene característica 0 y todo cuerpo que contenga $\mathbb{Q}$ como subcuerpo tiene entonces la misma característica.

TEOREMA.- Sea K un anillo totalmente ordenado; se tiene entonces:

a) Todo cuadrado en K es positivo

b) La característica de K es 0

DEMOSTRACIÓN: a) Si x es positivo su cuadrado es positivo y si x es negativo su opuesto –x es positivo por lo cual $(-x)^2$ es positivo. Como el orden es total, es decir $P \cup (-P) = K$, no existen en K cuadrados negativos.

b) **1** es positivo porque $(\mathbf{1})^2 = \mathbf{1}$. Si la característica fuera n > 0 se tendría que la suma de n-1 veces **1** sería igual a $-\mathbf{1}$ lo que se opone a que la suma de positivos sea positiva **(***por definición* **1≠ 0)**.

Este teorema demuestra lo ya dicho previamente**:** ningún cuerpo finito puede ser totalmente ordenado porque la característica es mayor que 0 y $\mathbb{C}$ tampoco porque posee cuadrados negativos.

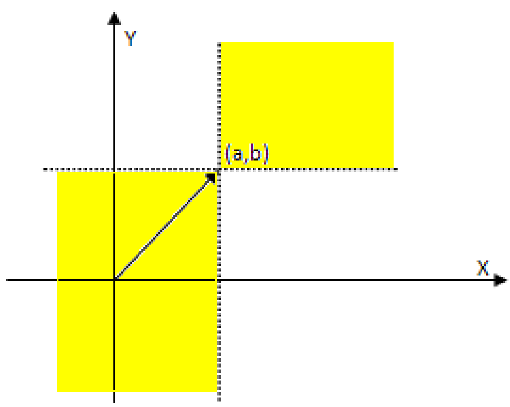
Si un cuerpo K está provisto de una relación de orden no total, compatible con la suma y la multiplicación, se puede demostrar que K posee elementos cuyo cuadrado no es positivo.

EJEMPLOS DE ÓRDENES EN ℂ.- Ningún orden compatible con la suma y la multiplicación que se defina sobre ℂ puede ser total por el teorema precedente pero existen en ℂ órdenes totales que no son compatibles. En los tres ejemplos siguientes, se deja como ejercicio verificar que la relación notada $\preccurlyeq$ define en efecto una relación de orden en ℂ.

EJEMPLO 1 (La única extensión compatible del orden usual $\leq$ de ℝ): Identificando por comodidad ℂ con $\mathbb{R}^2$, se define un orden por

$$(a, b) \preccurlyeq (c, d) \Longleftrightarrow \quad a \leq c \quad y \quad b \leq d$$

Es claro en la figura que los únicos elementos comparables con **z** = (a, b) son los (x, y) situados en la zona amarilla (no acotada, por supuesto) lo que pone en evidencia que el orden $\preccurlyeq$ no es total y es además claro que $\preccurlyeq$ es compatible con la suma.



Para verificar que $\preccurlyeq$ es compatible también con la multiplicación de ℂ, determinamos el conjunto P de los correspondientes elementos positivos. Se requiere que si **x** $\preccurlyeq$ **y** entonces **xz** $\preccurlyeq$ **yz** para todo **z** = $(z_1, z_2) \in$ P**,** es decir que si **x** = (x_1, x_2), **y** = (y_1, y_2) se debe tener en ℝ las dos desigualdades

$$x_1z_1 - x_2z_2 \leq y_1z_1 - y_2z_2$$
$$x_1z_1 + x_2z_2 \leq y_1z_1 + y_2z_2$$

Se deduce fácilmente que $z_1 \geq 0$. Si $z_2 \neq 0$, entonces la correspondiente forma polar del número complejo **z**, es decir **z** = $r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\theta) = re^{i\theta}$ deja ver claro que existe una potencia $\mathbf{z}^n$ de **z** cuya primera componente es estrictamente negativa (*porque* $\mathbf{z}^{\mathbf{n}} = r^n e^{in\theta}$ *con* $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$). Esto niega la propiedad P.P ⊂ P y por lo tanto P= {(x, 0) ∈ ℂ / x ≥ 0} que es la imagen en ℂ del conjunto de los positivos de ℝ por la función inyectiva que aplica x en (x, 0). **La restricción de $\preccurlyeq$ al eje real coincide con el orden usual $\leq$.** Obviamente $P \cup (-P) \neq \mathbb{C}$ por lo cual el orden $\preccurlyeq$ no es total lo que ya sabíamos por la figura.

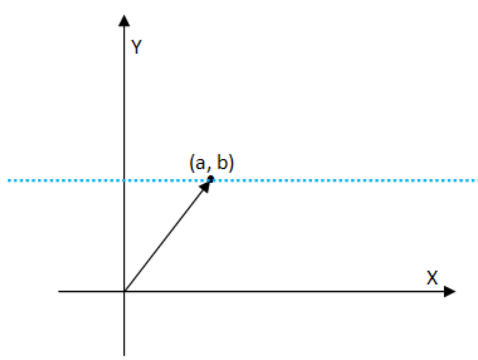
EJEMPLO 2 (Orden total pero no compatible): Se define $(a, b) \preccurlyeq (x, y)$ como equivalente al hecho de que o bien $a < x$ o bien $b \leq y$ cuando $a = x$.

(*Este es el **orden lexicográfico**, que se usa para las palabras en los diccionarios sobre la base del orden total $\preccurlyeq$ definido en el alfabeto tal que* $a \prec b \prec c \prec \cdots\cdots \prec x \prec y \prec z$).

Es claro que es total porque necesariamente se tiene en toda ocasión $(a, b) \preccurlyeq (x, y)$ o bien $(x, y) \preccurlyeq (a, b)$ para todos (a, b) y (x, y), es decir estos dos elementos arbitrarios son siempre comparables. No es compatible porque $(0, 0) \preccurlyeq (0, 1) = i$ pero $i^2 = -1 = -(1, 0) \preccurlyeq (0, 0)$ y no se cumple entonces $P.P \subset P$.

EJEMPLO 3 (Orden compatible que no es extensión del orden usual $\leq$ de $\mathbb{R}$): Se define un orden en $\mathbb{C}$ por

$$(a, b) \preccurlyeq (x, y) \Longleftrightarrow \quad a \leq x \quad y \quad b = y$$



En la figura es evidente que el orden no es total --porque los únicos elementos comparables con $z = (a, b)$ son los que están en la línea celeste—y que los elementos positivos son de la forma $(x, 0)$, con lo cual se deduce fácilmente que el conjunto P de los elementos positivos se reduce a un punto y entonces se verifica trivialmente la compatibilidad de $\preccurlyeq$ con la multiplicación de $\mathbb{C}$. Es clara además la compatibilidad con la suma de $\mathbb{C}$. Deduzcamos sin embargo el conjunto P: si $\mathbf{x} \preccurlyeq \mathbf{y}$ se debe tener $\mathbf{xz} \preccurlyeq \mathbf{yz}$ para todo $\mathbf{z} = (z_1, z_2)$ positivo, es decir que si $\mathbf{x} = (x_1, c)$, $\mathbf{y} = (y_1, c)$ y $x_1 \leq y_1$ se deben cumplir en $\mathbb{R}$ las dos condiciones

$$x_1z_1 - cz_2 \leq y_1z_1 - cz_2$$
$$x_1z_1 + cz_2 = y_1z_1 + cz_2$$

lo que da $z_1 = 0$. Por otro lado, $(0, 0) \preccurlyeq (0, z_2)$ de donde $z_2 = 0$ por lo cual $P = \{(0, 0)\}$. Es claro que este orden no prolonga el orden usual de $\mathbb{R}$ y entonces no puede ser total lo que ya sabíamos por la figura.

****

REFERENCIAS

[1]Algèbre linéaire et géométrie élémentaire (p. 197). Jean Dieudonné, Hermann, Paris 1964. (Hay edición en español).

Problemas para los más jóvenes 40

Problemas de la Primera Olimpiada de Lituania para los más jóvenes (1999)

Nuestro agardecimiento al Prof. Romualdas Kasuba por habernos facilitado estos problemas.

LIT1. En la multiplicación siguiente, en los factores cada letra representa un número, de modo que letras distintas corresponden a números distintos. Pero en los productos parciales, todos los números (iguales o no) han sido codificados por la letra x :

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & & F & I & N & D \\
 & & & & F & I & N & D \\
\hline
 & & & & x & x & x & x \\
 & & x & x & x & x & & \\
 & x & x & x & x & & & \\
\hline
x & x & x & x & x & x & x & x
\end{array}$$

LIT2. Descomponer un rectángulo 4x9 en dos partes tales que se puedan reunir sin solaparse formando un cuadrado.

LIT3. Robinson Crusoe, navegando por el proceloso Océano de los Números, se aproxima a la isla donde habitan todos los números con exactamente 100 dígitos. Quiere cumplir dos deseos:

a) Hallar un número de 100 dígitos divisible por 100 y tal que la suma de sus cifras sea 100.

b) Encontrar el menor de tales números.

LIT4. Carlos y su hermano menor tienen una Megatableta de chocolate de tamaño 1999x1999. Se la empiezan a comer cumpliendo las reglas siguientes:

Empieza Carlos, que corta piezas 2x2; su hermano las corta 1x1. Si uno de los dos no puede cortar su pieza en un momento dado, el otro se comerá todo el chocolate que queda.

¿Es posible que alguno de los dos proceda de tal forma que siempre obtenga más de la mitad de la tableta, independientemente de lo que hag el otro?

Problemas de Nivel medio y de Olimpiadas 40
Cinco problemas de la Olimpiada de Suiza 2007

CH1. Determinar todas las soluciones reales positivas del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} a &= \max\left\{\frac{1}{b},\frac{1}{c}\right\} \ ; \ b=\max\left\{\frac{1}{c},\frac{1}{d}\right\} \ ; \ c=\max\left\{\frac{1}{d},\frac{1}{e}\right\} \\ d &= \max\left\{\frac{1}{e},\frac{1}{f}\right\} \ ; \ \ e=\max\left\{\frac{1}{f},\frac{1}{a}\right\} \ ; f=\max\left\{\frac{1}{a},\frac{1}{b}\right\} \end{aligned}$$

CH2. Sea ABC un triángulo acutángulo con AB > AC y ortocentro H. Sea D el pie de la altura desde A sobre BC. Sea E el simétrico de C respecto de D. Las rectas AE y BH se cortan en el punto S. Sea N el punto medio de AE y M el punto medio de BH. Demostrar que MN es perpendicular a DS.

CH3. Determinar todas las funciones $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ que verifican las propiedades siguientes:
i) $f(1) = 0$
ii) $f(x) > 0$ para todo $x > 1$.
iii) Cualesquiera que sean $x, y \geq 0$ tales que $x + y > 0$, se verifica

$$f\left(xf\left(y\right)\right)f\left(y\right) = f\left(\frac{xy}{x+y}\right).$$

CH4. Sean a, b, c números reales no negativos con media aritmética $m = \frac{a+b+c}{3}$.
Demostrar que

$$\sqrt{a+\sqrt{b+\sqrt{c}}}+\sqrt{b+\sqrt{c+\sqrt{a}}}+\sqrt{c+\sqrt{a+\sqrt{b}}} \leq 3\sqrt{m+\sqrt{m+\sqrt{m}}}.$$

CH5. Hallar todos los pares (a, b) de números naturales tales que

$$\frac{a^3+1}{2ab^2+1} \text{ es un número entero.}$$

Problemas 196 - 200

Problema 196 *(Propuesto por Pedro H.O. Pantoja, Universidad de Natal, Brasil)*

Sea p un número primo. Demostrar que

$$\sum_{k=0}^{p} (p+k-1)(p+k-2)\cdots(k+1) \equiv -2 (\operatorname{mod} p)$$

Problema 197 *(propuesto por Laurentiu Modan, Univ. de Bucarest, Rumania)*

Se considera un cuadrilátero inscrito en una circunferencia de radio R. Sean $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ los ángulos subtendidos por los lados en el centro de la circunferencia.

i) Hallar una expresión para el área S del cuadrilátero en función de $R, \alpha, \beta, \gamma, \delta$.

ii) Si en la expresión para S los términos que dependen de los ángulos son todos iguales, y $\alpha = \frac{\pi}{3}$, hallar los valores de los lados y ángulos del cuadrilátero.

Problema 198 *(propuesto por el editor)*

Sea M un punto interior al triángulo ABC, y N, P, Q los puntos en que una recta corta a los lados AB, BC y a la prolongación de CA. Utilizamos la notación [...] para representar el área del polígono cuyos vértices se escriben entre los corchetes.

Demostrar que si

$$\frac{[MAN]}{[MBN]} + \frac{[MBP]}{[MCP]} = 2\sqrt{\frac{[MAQ]}{[MCQ]}},$$

entonces la recta NPQ es antiparalela de CA con respecto a AB y BC.

(el problema no es nuevo. Se dará noticia de su procedencia cuando se publique la solución)

Problema 199 *(propuesto por el editor)*

Demostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{n^2}\right) < \frac{\pi}{2}.$$

(el problema no es nuevo. Se dará noticia de su procedencia cuando se publique la solución)

Problema 200 *(propuesto por el editor)*

Determinar, en función del parámetro real a, el número de raíces de la ecuación

$$a^x = \log_a x.$$

(el problema, obviamente, no es nuevo. Se dará noticia de su procedencia cuando se publique la solución)

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Problema 191 Solución

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1-x} - (1+x+x^2+...+x^n)\right)^k$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1-x} - \frac{(1-x)}{1-x}(1+x+x^2+...+x^n)\right)^k$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1-(1-x^{n+1})}{1-x}\right)^k = \left(\frac{x}{1-x}\right)^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^k)^n}{n}$$

Por la expansión en series de Taylor se sabe que

$$ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$$

cuando $|x| < 1$

Ahora notese

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^k)^n}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(-x^k)^n}{n} = -\ln(1-x^k).$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1-x} - (1+x+x^2+...+x^n)\right)^k = -\left(\frac{x}{1-x}\right)^k \ln(1-x^k)$$

Problema 192

Demostrar que para $n \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^{n^2-1} \phi(k) \geq \frac{(n-1)(5n-1)}{12}, \qquad \text{siendo } \phi \text{ la función de Euler.}$$

Solución (Xavier Ros, Barcelona)

A continuación demostraremos que

$$\sum_{k=1}^{m} \phi(k) > \frac{\sqrt{2m^3}}{3},$$

que para $m = n^2 - 1$ nos dará una desigualdad más fuerte que la del enunciado, pues para probar la del enunciado basta usar que $\phi(k) \geq 1$.

Para demostrar nuestra desigualdad, probaremos en primer lugar que

$$\phi(k) \geq \sqrt{\frac{k}{2}}, \qquad k \geq 2. \tag{1}$$

En efecto, como $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$ si $\mathrm{mcd}(a,b) = 1$, entonces basta comprobar la desigualdad para números de la forma p^α. En este caso tenemos

$$\frac{\phi(p^\alpha)}{\sqrt{p^\alpha/2}} = p^{\alpha/2}\left(1 - \frac{1}{p}\right)\sqrt{2} \geq 2^{\alpha/2}\left(1 - \frac{1}{2}\right)\sqrt{2} \geq 1,$$

y queda probada la desigualdad (1).

Ahora, como la función $\sqrt{\frac{x}{2}}$ es una función creciente, tendremos que

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{m} \phi(k) &\geq \sum_{k=2}^{m} \sqrt{\frac{k}{2}} \\ &\geq \int_1^m \sqrt{\frac{x}{2}} dx \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3} m^{3/2} - \frac{\sqrt{2}}{3}, \end{aligned}$$

de donde

$$\sum_{k=1}^{m} \phi(k) \geq 1 - \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3} m^{3/2} > \frac{\sqrt{2}}{3} m^{3/2},$$

tal como queriamos demostrar.

Problema 194

Sean ABC y $A'B'C'$ dos triángulos, rectángulos respectivamente en A y A'; y sean D y D' los pies de las bisectrices interiores de A y A', respectivamente.

Demostrar que

$$\frac{4}{AD{\cdot}A'D'} \geq \left(\frac{1}{BD}+\frac{1}{DC}\right)\left(\frac{1}{B'D'}+\frac{1}{D'C'}\right).$$

¿Cuándo se alcanza la igualdad?

Solución (Xavier Ros, Barcelona)

A continuación demostraremos que la desigualdad es cierta para todo par de triángulos, no necesariamente rectángulos.

Aplicando el Teorema del seno a los triángulos ABD y ACD obtenemos que

$$\frac{BD}{\sin\frac{A}{2}} = \frac{AD}{\sin B}, \qquad \frac{DC}{\sin\frac{A}{2}} = \frac{AD}{\sin C},$$

por lo que

$$\frac{AD}{BD}+\frac{AD}{DC} = \frac{\sin B}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{\sin C}{\sin\frac{A}{2}}.$$

Usando ahora que la función sin es convexa en $(0,\pi)$,

$$\sin B + \sin C \leq 2\sin\left(\frac{B+C}{2}\right) = 2\sin\frac{A}{2},$$

de donde

$$\frac{AD}{BD}+\frac{AD}{DC} \leq 2, \tag{1}$$

y la igualdad se da si y solo si $B = C$.

Análogamente, tendremos que

$$\frac{A'D'}{B'D'}+\frac{A'D'}{D'C'} \leq 2, \tag{2}$$

y multiplicando las desigualdades (1) y (2), obtenemos

$$\left(\frac{1}{BD}+\frac{1}{DC}\right)\left(\frac{1}{B'D'}+\frac{1}{D'C'}\right) \leq \frac{4}{AD{\cdot}A'D'},$$

con igualdad cuando los triángulos son isósceles en A y A', respectivamente.

Noticia de Congresos y páginas web 40

Congreso de la SBPMef en Dinant (Bélgica)

La Sociedad Belga de Profesores de Matemáticas de expresión francesa ha celebrado en agosto de 2010 su Congreso número 36, con asistencia de unos 150 participantes, y en el cual quien suscribe colaboró con la exposición del tema *René Goormaghtigh, ingeniero y geómetra de Mathesis.*

El Congreso ha tenido lugar en la pintoresca y espectacular pequeña ciudad de Dinant, en el valle del Mosa, en las instalaciones del Colegio Bellevue, sobre la orilla derecha, y desde el cual se apreciaba una vista espectacular de la Colegiata y la ciudadela de Dinant:

El Congreso tuvo sesiones los días 24, 25 y 26 de agosto. La Conferencia inaugural corrió a cargo del Prof. André Deledicq, creador del concurso Canguro Matemático, llevaba por título *Pourquoi les Mathématiques sont-elles jubilatoires?*, y fue expuesta con la proverbial brillantez del conferenciante.

El lema del Congreso era *Matemáticas y Palabras*, y además de las sesiones plenarias hubo varios talleres, uno de los cuales versó sobre la creación de gráficos y figuras en Latex.

En la página web http://www.sbpm.be/congres/ se pueden consultar tanto los resúmenes como las exposiciones completas de las ponencias presentadas.

La SBPMef puso a la venta, en el stand habilitado al efecto, sus publicaciones, en particular el 7° volumen de la Olimpiada belga y el muy interesante libro (con CD incluido) *Enseignons en jouant,* escrito por B. Honclair, N. Lambelin, G.Noël y Y. Noël-Roch.

El próximo Congreso de la Sociedad Belga tendrá lugar en agosto de 2011 en Bastogne, la ciudad clave de la batalla de las Ardenas en la Segunda Guerra Mundial.

XIII Congreso de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas THALES

Los días 10, 11 y 12 de septiembre de 2010 se ha celebrado en Córdoba el décimo tercer congreso de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES, bajo el lema *Matemáticas para observar y actuar,* en un marco realmente excepcional: el recientemente renovado Rectorado, en cuya Sala Mudéjar el que suscribe tuvo la oportunidad de exponer un Taller de Resolución de problemas.

Durante el Congreso se pudo contemplar la exposición *¿Por qué las Matemáticas?,* patrocinada por la UNESCO. La Conferencia inaugural estuvo a cargo del matemático y educador danés Mogen Niss; la pronunciada por el creador de GeoGebra, Markus Hohenwarter despertó gran expectación, lo mismo que las *Matemáticas surrealistas* de Claudi Alsina, a quien se le hizo entrega del nombramiento de Socio de Honor de la Sociedad Thales. La de clausura, *Qué cuentan los números,* también muy interesante, estuvo a cargo de la Prof. Capi Corrales, del Departamento de Álgebra de la Universidad Complutense de Madrid.

Dentro de las Comunicaciones presentadas, muy numerosas como es habitual, destacamos aquí *La técnica de la evaluación del aprendizaje de las Matemáticas por elementos del conocimiento: Una experiencia en la Educación Primaria en México,* de los veteranos matemáticos cubanos Celia Rizo y Luis Campistrous; *Propuestas didácticas con la nueva familia de los polígonos cordobeses,* de Antonia Redondo y Encarnación Reyes; *Estrellas en lacerías,* de Encarnación Reyes e Inmaculada Fernández; y *La tecnología y el desarrollo del pensamiento en la Geometría,* de Luis Campistrous, Jorge López y Celia Rizo.

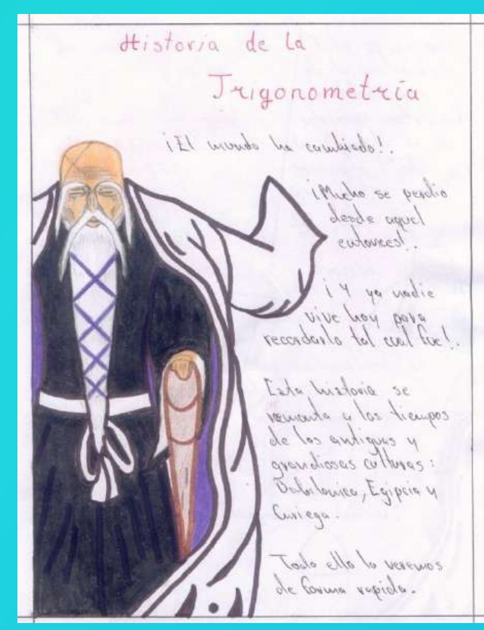
Valladolid, octubre 2010

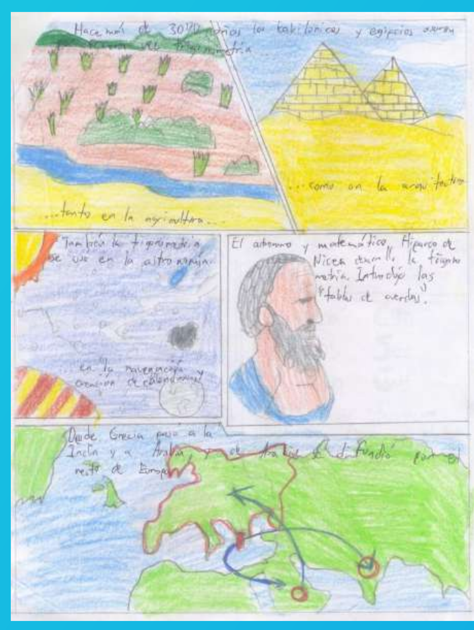
Francisco Bellot Rosado

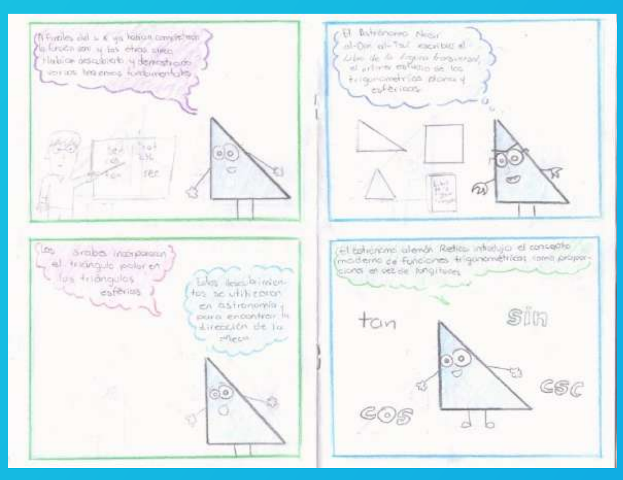
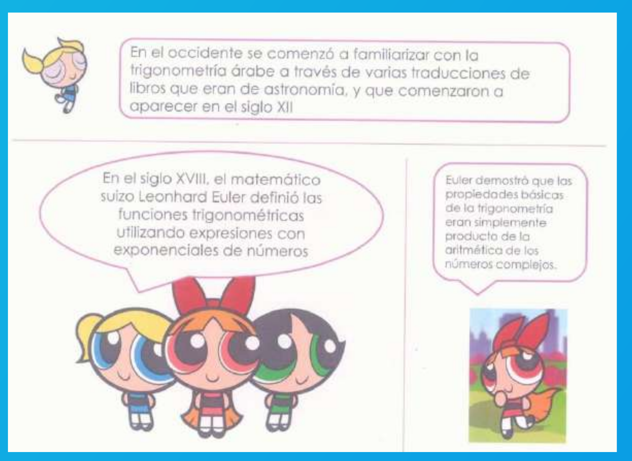
LA HISTORIETA COMO ESTRATEGIA DE APRENDIZAJE EN LOS CURSOS DE MATEMATICAS

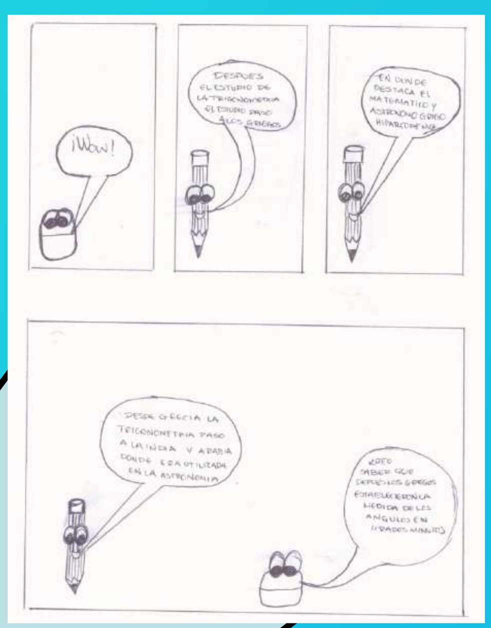
MODELO EDUCATIVO

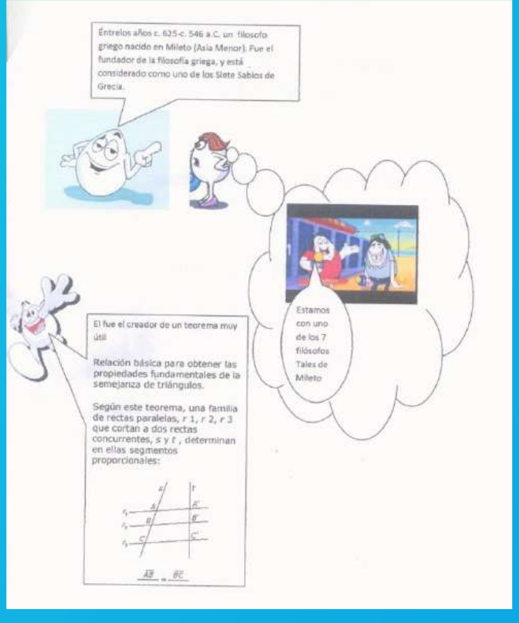
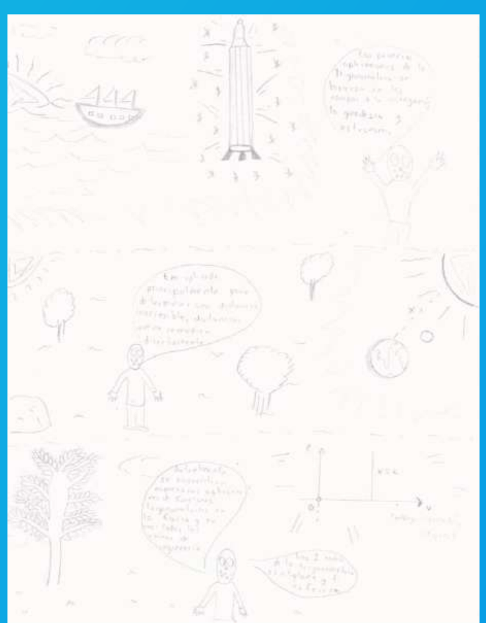
A partir del enfoque educativo centrado en el aprendizaje propuesto en el Modelo Educativo del IPN, el Instituto actualizó sus programas de estudios promoviendo los conceptos de aprender a aprender y aprendizaje a lo largo de la vida, así como una evaluación dividida en conceptual, procedimental y actitudinal (destrezas, habilidades y actitudes). Es un hecho de que en las aulas predomina el aprendizaje memorístico y que no existe en nuestros alumnos una disposición positiva para aprender. Para ayudar a resolver estas dificultades, se propuso como una alternativa de aprendizaje significativo, utilizar la elaboración de historietas como una estrategia complementaria de aprendizaje para los cursos de matemáticas.

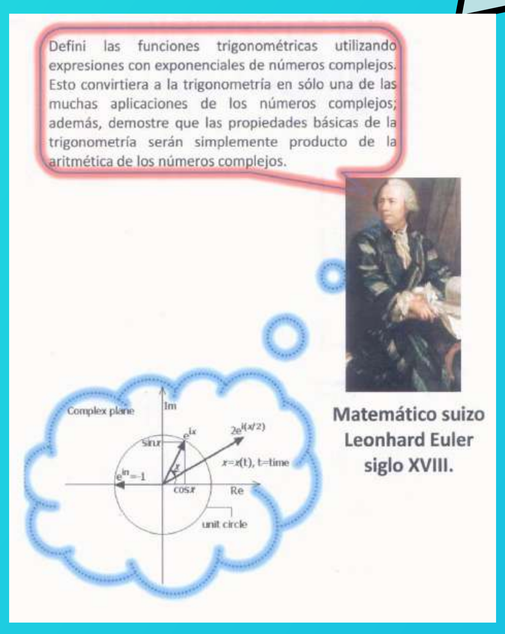
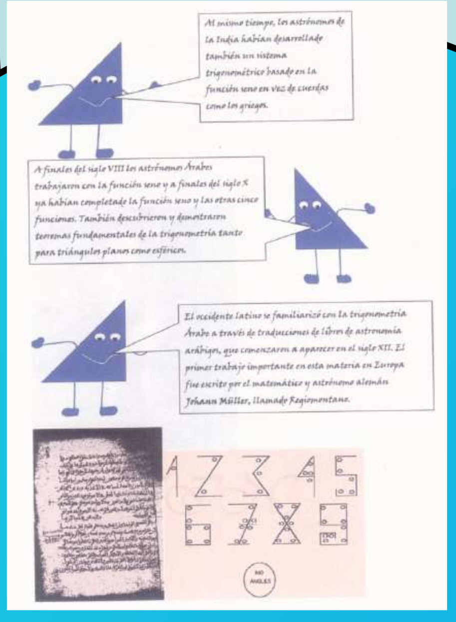
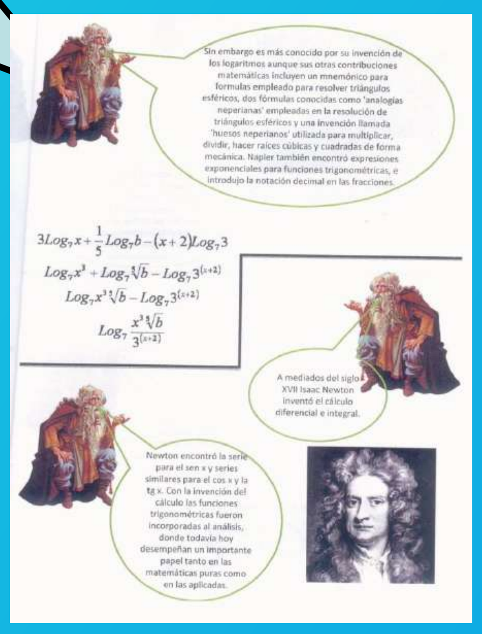
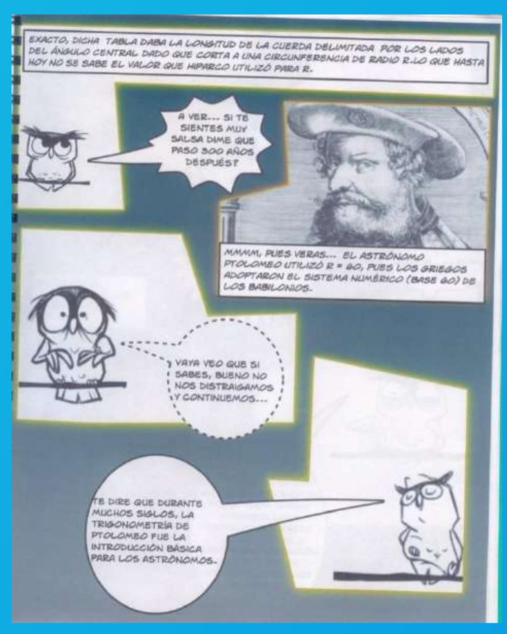




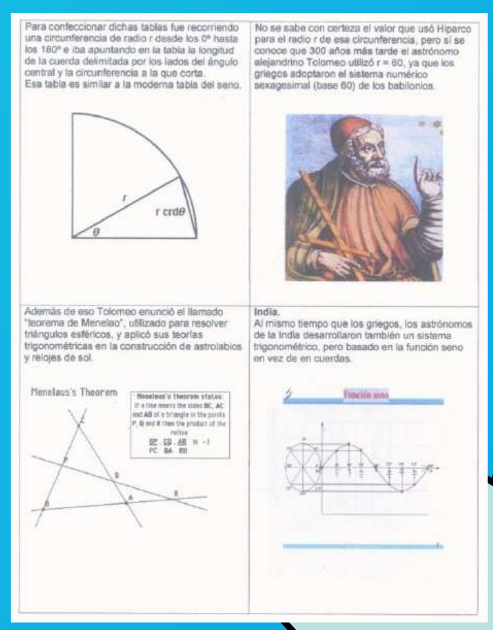
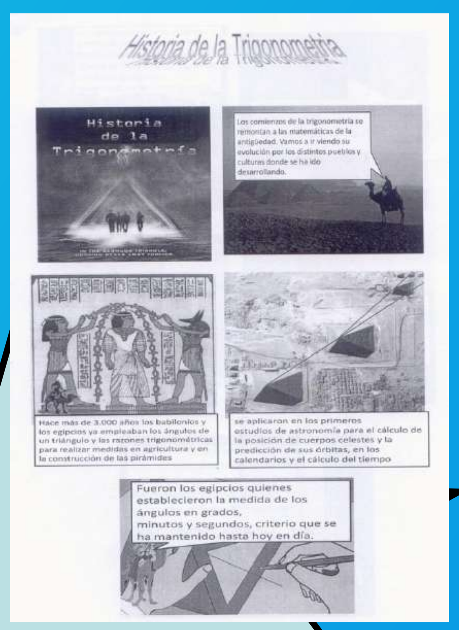



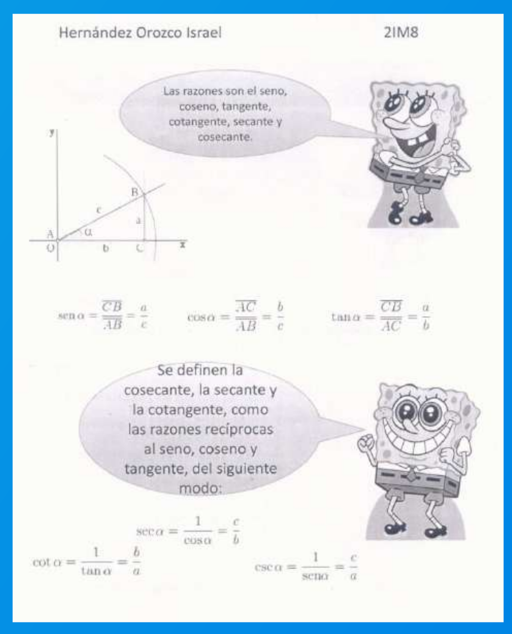
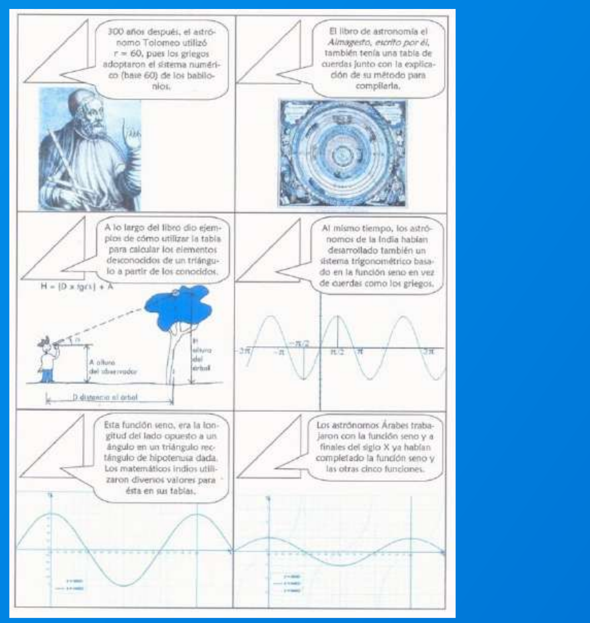
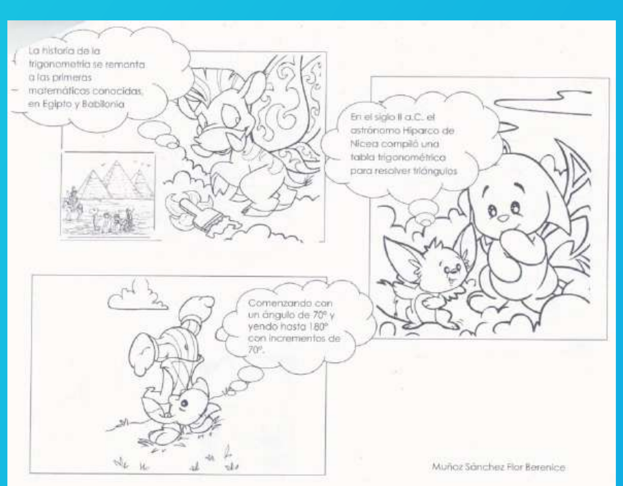
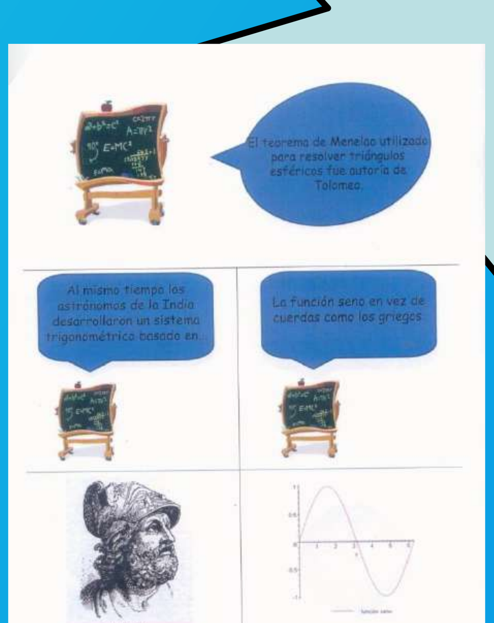
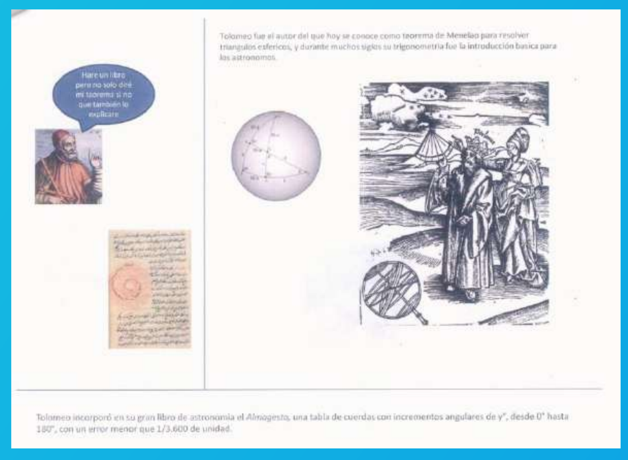
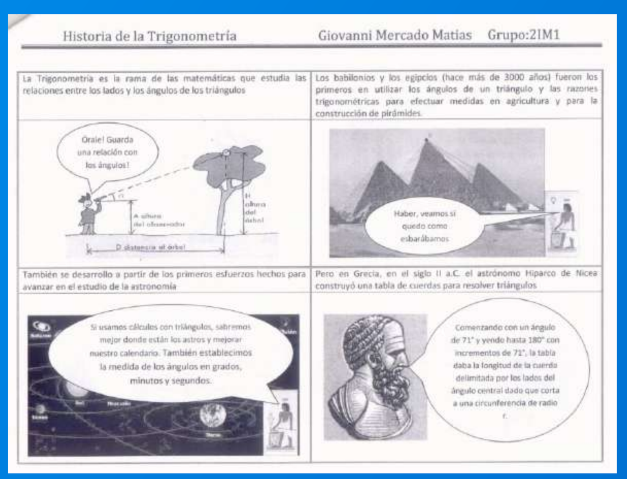
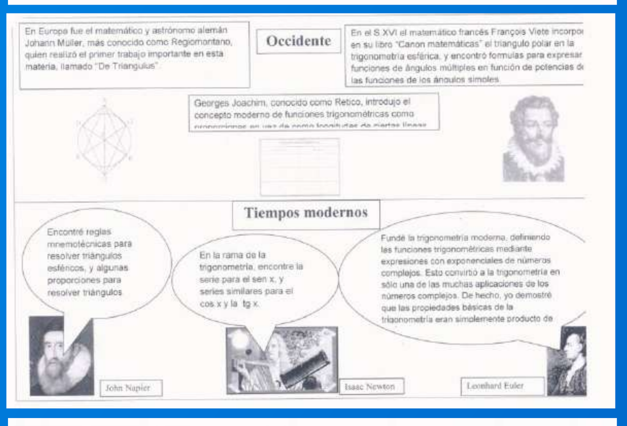
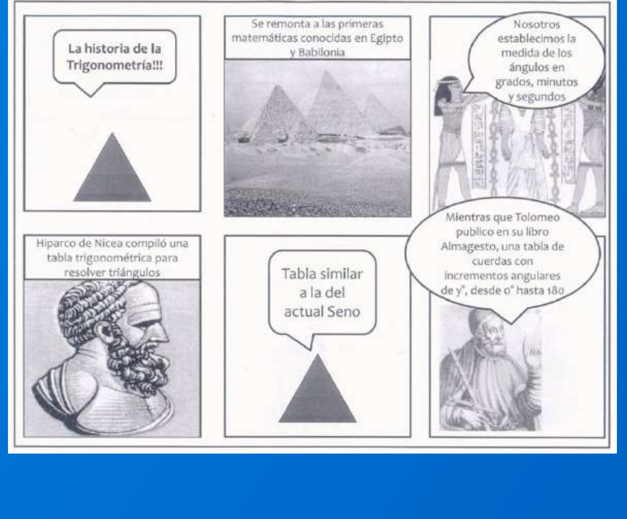
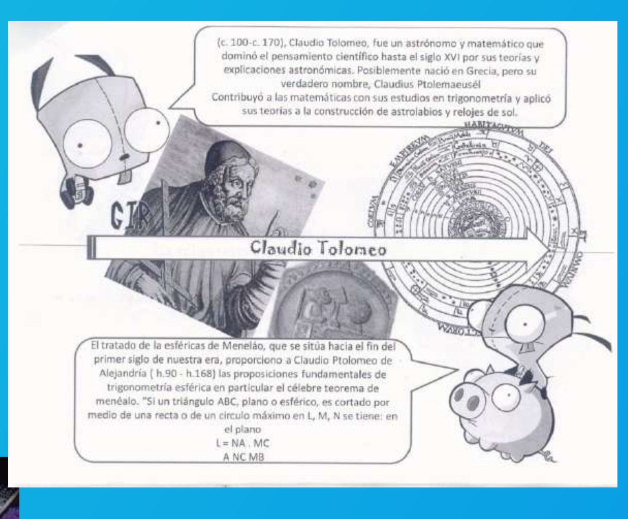



LA HISTORIETA

La historieta es uno de los medios de comunicación más extendidos entre la juventud y es uno de los recursos comunicativos en continua evolución que más público potencial tiene. La accesibilidad de la historieta hace que sea un instrumento ideal para familiarizar al alumno con el mundo del relato y la imagen. Actualmente las nuevas generaciones están más acostumbradas a convivir más con medios visuales, con los que se les bombardean día a día (programas de televisión, películas, videojuegos, etc.), que con la lectura de textos literarios, con los que cada vez mantienen un menor contacto. En este sentido la historieta puede ser de gran utilidad para empezar a convertir el interés por los medios visuales en conocimiento.

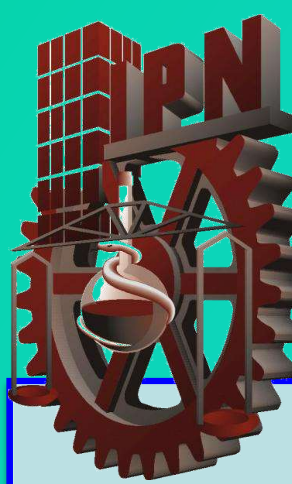











CONCLUSIONES

Durante el ciclo escolar 2009-2010 se trabajó con los estudiantes del curso de Geometría y Trigonometría, a los cuales se les pidió que elaboraran una historieta de la historia de la Trigonometría. La presentación del trabajo fue libre: usando la computadora (en power point o con software para la elaboración de comics), con recortes de revistas o dibujada a mano; pudiendo utilizar personajes existentes o inventados para contar la historia. A partir de esta experiencia los estudiantes han propuesto estrategias similares como hacer animaciones o videos, teatro guiñol, dramatizaciones y hasta cantar corridos.

El resultado en general fue exitoso, ya que a los estudiantes les gustó la estrategia y les pareció divertida. Además, según un cuestionario de opinión que les fue aplicado, calificaron a la elaboración de la historieta como una actividad creativa, con trabajo colaborativo y que les ayudó a mejorar su aprendizaje.

En general el nivel de aprovechamiento grupal fue aprobatorio.

DISEÑO:
UNIDAD DE TECNOLOGÍA EDUCATIVA
CENTRO DE ESTUDIOS CIENTÍFICOS Y TECNOLÓGICOS
"JUAN DE DIOS BATIZ " 2010

Número

41

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

Número 41 (diciembre 2010 – febrero 2011)

ISSN – 1698-277X

ÍNDICE

Artículos, Notas y lecciones de preparación de Olimpiadas 41

Pedro H.O. Pantoja, Univ. de Lisboa, Portugal: *Números de Fermat.*
Jorge Mozo Fernández, Univ. de Valladolid, España: *Comentarios sobre un problema de la I.M.O. 2010.*
Famosos problemas de la I.M.O. (2)
Francisco Bellot Rosado: *29ª I.M.O. 1988, Canberra (Australia), Problema # 6.*

Problemas para los más jóvenes 41

Cinco problemas de la Olimpiada Junior de Bucarest.

Recibidas soluciones a los problemas 1 y 3 de la Primera Olimpiada Junior de Lituania, por Ricardo Espino Lizama (estudiante), Lima, Perú, que presentamos.

Problemas de Nivel Medio y de Olimpiadas 41

Problemas propuestos en la Universidad de Valladolid en la Fase local de la XLVII Olimpiada Matemática Española.
Recibida solución al problema 1 de la Competición Matemática Mediterránea 2010, por Angel Espino Lizama (estudiante), Lima, Perú, que presentamos.

Problemas

Problemas propuestos 201 – 205

Problemas resueltos

Problema 191: *Recibidas soluciones de Luis Blanco (estudiante) y Angel Plaza, Univ. de Las Palmas de Gran Canaria, España; Paolo Perfetti, Dipart. Di Matematica, Univ. degli studi Tor Vergata, Roma, Italia; Daniel Lasaosa*

Medarde, Univ. Pública de Navarra, Pamplona, España. Todas ellas se recibieron cuando el número 40 ya estaba en línea.

Problema 193: *Recibida solución de Daniel Lasaosa Medarde, Univ. Pública de Navarra, Pamplona, España, que presentamos.*

Problema 194: *Recibida (cuando el número 40 ya estaba en línea) una solución de Daniel Lasaosa Medarde, Univ. Pública de Navarra, Pamplona, España.*

Problema 195: *Origen del problema: "Competentza si performantza en Geometrie", de Dan Branzei, S. Anitza y A. Anitza. Recibida solución de Daniel Lasaosa Medarde, Univ. Pública de Navarra, Pamplona, España, que presentamos.*

Problema 196: *Recibidas soluciones de: Gustavo Espínola Mena (Capiatá, Paraguay), Vicente Vicario García (Huelva, España); Daniel Lasaosa Medarde (Pamplona, España), y del proponente. Presentamos la solución de Espínola.*

Problema 197: *Recibidas soluciones de: Daniel Lasaosa Medarde (Pamplona, España); Bruno Salgueiro Fanego (Vivero, España); Vicente Vicario García (Huelva, España); y del proponente. Presentamos la solución de Lasaosa.*

Problema 198: *Recibida solución con corrección de Daniel Lasaosa Medarde, que presentamos.*
El problema 198 con el enunciado incluido en el vol. 40 de la REOIM, apareció propuesto sin solución en la Revista matematica din Timisoara (nº1, 1978, p. 66), y posteriormente en Gazeta Matematica (serie B, nº 2, 1979, p.56), igualmente sin solución. En ninguna de las dos revistas se publicó posteriormente solución alguna al problema. El autor del mismo, a pregunta de este Editor, contestó que "ahora estaba muy ocupado para responder"...

Problema 199: Origen del problema: la revista rusa *Matematika v. Skola, 1969; incluido en el libro rumano de Gh. Siretchi "Analiza Matematica, vol.1, pg. 135.*
Recibidas soluciones de: Daniel Lasaosa Medarde (Pamplona, España); Pedro H. O. Pantoja (Univ. de Lisboa, Portugal); Xavier Ros (Barcelona, España); Vicente Vicario García (2 soluciones), Huelva, España. Presentamos las soluciones de Vicario.

Problema 200: Origen del problema: la publicación de la Universidad Lomonosov de Moscú, "Problemas con parámetros", 1990, de Valeri Vavilov.
Recibidas soluciones (prácticamente iguales) de Xavier Ros (Barcelona, España), y Vicente Vicario García (Huelva, España). Presentamos la solución de Ros.

Comentario de páginas web, noticia de congresos y reseña de libros
Breve reseña de tres libros recientes, por F. Bellot.

Divertimentos matemáticos
Sobre la regla de Ruffini, por Francisco Bellot. Una breve nota sin el carácter "lúdico" que otras veces tiene esta sección.

Editor: Francisco Bellot Rosado

Desarrollada en el Centro de Altos Estudios Universitarios de la OEI con el apoyo de la Agencia Española de Cooperación Internacional para el Desarrollo (AECID)

Acceder

http://www.oei.es/oim/revistaoim/numero41.htm

NÚMEROS DE FERMAT

(Pedro H. O. Pantoja, Universidade de Lisboa, Portugal)

Intrudução:

- O matemático francês Pierre de fermat (1601-1665) é famoso pelo seu extensivo trabalho em teoria dos números. Suas principais contribuições são o pequeno teorema de Fermat, o último teorema de fermat (demonstrado por A. Wiles), números de fermat, entre outros. Nesse trabalho vamos explorar algumas propriedades elementares dos números de Fermat.
  Para aprofundar os conceitos aqui introduzidos, recomendamos a excelente obra [1].

Um número de Fermat é um número da forma

$$F_n = 2^{2^n} + 1$$

Para $n = 0, 1, 2, \dots$

Fermat conjecturou que esses números eram todos primos, de fato, para $n = 0, 1, 2, 3, 4$ dão realmente números primos 3, 5, 17, 257, 65537. Entretanto Euler mostrou que F_5 é divisível por 641. O argumento usado abaixo é devido a Kraïtchik.

Note que $641 = 2^4 + 5^4 = 5 \cdot 2^7 + 1$ daí $2^{2^5} = 2^{32} = 2^4 \cdot 2^{28} = (641 - 5^4)2^{28} \equiv -5^4 \cdot 2^{28} = -(5 \cdot 2^7)^4 = -(641 - 1)^4 \equiv -1 \ (mod\ 641)$

Logo 641 divide $2^{2^5} + 1$. Atualmente os únicos números primos de Fermat conhecidos, são aqueles apresentados pelo próprio Fermat.

Proposição: A fórmula $F_m = F_0 \cdot F_1 \cdot \dots \cdot F_n \cdot \dots \cdot F_{m-1} + 2$ é verdadeira para todo $m \geq 1$ e $n < m$.

Prova:

Por indução, $m = 1$ temos que $F_1 = F_0 + 2 = 3 + 2 = 5$ que é verdadeiro. Suponhamos que a expressão é válida para m, daí $F_{m+1} - 2 = 2^{2^{m+1}} - 1 = \left(2^{2^m} + 1\right)\left(2^{2^m} - 1\right) = F_m\left(2^{2^m} - 1\right) = (F_0 \cdot \dots \cdot F_{m-1} + 2)(F_m - 2) = F_0 \cdot \dots \cdot F_m$.

Corolário: $MDC(F_m, F_n) = 1$, para $m \neq n$.

Prova:

Suponhamos que $F_m\ e\ F_n$ tenham um fator primo p, então pela proposição anterior, $F_m = F_0 \cdot F_1 \cdot \dots \cdot F_n \cdot \dots \cdot F_{m-1} + 2$

Como p divide ambos F_m e F_n p deverá dividir 2, ou seja, p é igual a 1 ou 2. Não pode ser 2, pois F_m e F_n são ímpares.
Em particular, esse corolário mostra que existem infinitos números primos(vide [2]). Pode-se também provar que $MDC(F_m\,, m) = 1$ para m maior ou igual a 1.
É muito conhecido que $a^4 + 4$ para $a > 1$ é composto (devido a Sophie Germain). De fato, $a^4 + 4 = (a^2 + 2a + 2)(a^2 - 2a + 2)$. Fazendo $a = 2^{2^{m-2}}$ para $m \geq 2$, encontramos $a^2 + 1 = F_{m-1}$, $a^4 + 1 = F_m$ e portanto

$$F_m + 3 = (F_{m-1} + 2F_{m-2} - 1)(F_{m-1} - 2F_{m-2} + 3).$$

Exemplo 1: Para $n \geq 2$ o dígito das unidades de F_n é 7.
Solução:
Para $n \geq 2$, 2^n é múltiplo de 4 então existe k inteiro tal que $2^n = 4k$ daí $F_n = 2^{2^n} + 1 = (2^4)^k + 1 \equiv 1 + 1 = 2(mod\ 5)$ e como $F_n \equiv 1(mod\ 2)$ o dígito das unidades é 2 ou 7, não pode ser 2 pois F_n não pode ser par.

Em particular, esse exemplo mostra que nenhum número de Fermat pode ser quadrado perfeito. Com efeito, é bem conhecido que o dígito das unidades de um quadrado perfeito é 0, 1, 4, 5, 6 ou 9, e como $F_0 = 3$, $F_1 = 5$ e para $n \geq 2$ F_n é 7, uma contradição. Mais geralmente é fácil provar que nenhum número de fermat é uma potência perfeita. O caso de cubo perfeito foi proposto na Baltic Way.

Exemplo 2: (Baltic Way) Prove que nenhum dos números
$F_n = 2^{2^n} + 1$ Para $n = 0, 1, 2, \ldots$
é o cubo de um inteiro.

Solução:
Assuma que exista um inteiro K tal que $2^{2^n} + 1 = k^3$, k ímpar e
$2^{2^n} = k^3 - 1 = (k-1)(k^2 + k + 1)$ daí $k - 1 = 2^s$ e $k^2 + k + 1 = 2^r$ para alguns s,r inteiros positivos com soma igual a 2^n. Agora, $2^t - 2^{2s} = 3k$, contradição pois o lado esquerdo é par e o direito ímpar.

Exemplo 3: Cada número de Fermat maior do que 3 é da forma $6n - 1$.
Solução:
É suficiente provar que 6 divide $F_m + 1$ para $m \geq 1$. com efeito,

$$F_m + 1 = F_0 \cdot \ldots \cdot F_{m-1} + 3 = 3(F_1 \cdot \ldots \cdot F_{m-1} + 1)$$

E o número entre parênteses é par.

Exemplo 4: Resolva a equação diofantina

$$F_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 2^{2^m}.$$

Solução:

Temos que $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 2^{2^m} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + \left(2^{2^{m-1}}\right)^2$ fazendo $q = 2^{2^{m-1}}$ e portanto

$$F_n = \frac{q(q+1)(2q+1)}{6} = \left(2^{2^{m-1}-1}\right)\frac{(q+1)(2q+1)}{3}$$

Como o último fator é sempre inteiro, concluímos que F_n é par, absurdo. Assim a equação proposta não possui solução em inteiros.

Exemplo 5: Prove que existem infinitos inteiros positivos n tais que $F_n + 2$ não é primo.

Solução:

Vamos mostrar que $F_{2k+1} + 2$ é $múltiplo\ de\ 7. Note\ que$
$F_1 + 2 = 7$, $F_3 + 2 = 259$, são múltiplos de 7. Agora para $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$2^{2^n} \equiv 2, 4, 2, 4, \ldots\ (mod\ 7)$$

$daí\ para\ n\ ímpar\ \ 2^{2^n} + 1 + 2 \equiv 4 + 1 + 2 \equiv 0\ (mod\ 7).$

Os números de Fermat podem ser generalizados. Define-se

$$L_{p,m}(a) = \frac{a^{p^{m+1}} - 1}{a^{p^m} - 1}$$

Onde p é primo, $a \geq 2\ e\ m \geq 0$ o qual generaliza tanto os números de Fermat $F_m = L_{2,m}(2), como$ os números de Mersenne $M_p = L_{p,0}(2) = 2^p - 1$. Vamos estudar alguns casos como, por exemplo,

$$L_{3,m}(3) = 3^{3^m} + 1\ e\ L_{7,m}(7) = 7^{7^m} + 1.$$

Exemplo 6: Prove que para todos os inteiros positivos n, o número $3^{3^n} + 1$ é produto de pelo menos $2n + 1$ (não necessariamente distintos) primos.

Solução:

Por indução, o caso $n = 1$ é evidentemente verdadeiro. Como

$$3^{3^{n+1}} + 1 = \left(3^{3^n} + 1\right)\left(3^{2\cdot 3^n} - 3^{3^n} + 1\right)$$

Então é suficiente provar que $3^{2\cdot 3^n} - 3^{3^n} + 1$ é composto , já que por hipótese de indução $3^{3^n} + 1$ tem $2n + 1$ fatores primos. Claramente,

$$\left(3^{3^n} + 1\right)^2 - \left(3^{\frac{3^n+1}{2}}\right)^2 = \left(3^{3^n} + 1 + 3^{\frac{3^n+1}{2}}\right)\left(3^{3^n} + 1 - 3^{\frac{3^n+1}{2}}\right).$$

o que completa a prova por indução.

Exemplo 7: (USAMO-2007) Prove que para todos os inteiros não-negativos n, o número $7^{7^n} + 1$ é produto de pelo menos $2n + 3$ (não necessariamente distintos) primos.

Solução:

Por indução, o caso $n = 0$ é trivial pois $7^{7^0} + 1 = 2^3$. Como7^n é ímpar, $7^n = 2m - 1$ para algum inteiro m, agora $7^{7^{n+1}} + 1 = \left(7^{7^n}\right)^7 + 1 = x^7 + 1$ onde $x = 7^{2m-1}$. Portanto é suficiente provar que

$$\frac{x^7 + 1}{x + 1}$$

É composto, pois consequentemente $x^7 + 1$ terá pelo menos dois fatores primos a mais do que $x + 1$. Assim

$\frac{x^7+1}{x+1} = \frac{(x+1)^7 - \left((x+1)^7 - (x^7+1)\right)}{x+1} = (x+1)^6 - \frac{7x(x^5+3x^4+5x^3+5x^2+3x+1)}{x+1} =$
$(x+1)^6 - 7x(x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1) = (x+1)^6 - 7^{2m}(x^2 + x + 1)^2 =$
$\left((x+1)^3 + 7^m(x^2 + x + 1)\right)\left((x+1)^3 - 7^m(x^2 + x + 1)\right)$.

O primeiro fator é maior do que 1. Para o segundo,

$$\begin{aligned}(x+1)^3 - 7^m(x^2 + x + 1) &= (x+1)^3 - \sqrt{7x}(x^2 + x + 1) \\ &\geq (x+1)^3 - x(x^2 + x + 1) = 2x^2 + 2x + 1 \geq 113 > 1\end{aligned}$$

$pois\ \sqrt{7x} \leq x.$

a prova está completa.

Exercícios:

1) Prove que para qualquer $n \leq 2^m - 1$
   F_n divide $2^{F_m} - 2$.

2) (USAMO-1991) Mostre que, para qualquer inteiro fixo $n \geq 1$, a sequência $2,\ 2^2, 2^{2^2}, 2^{2^{2^2}},\ \ldots (mod\ n)$ é eventualmente constante.

3) (Iran-2009) Seja a um número natural fixo. Prove que o conjunto dos divisores primos de $2^{2^n} + a$, para $n = 1, 2, \ldots$ é infinito.

4) (China-2010) Suponhamos que $m\ e\ k$ são inteiros não-negativos, e $p = 2^{2^m} + 1$ é um número primo. Prove que:
   a) $2^{2^{m+1}p^k} \equiv 1(mod\ p^{k+1})$;
   b) $2^{m+1}p^k$ é o menor inteiro positivo n que satisfaz a equação de congruência $2^n \equiv 1(mod\ p^{k+1})$

REFERÊNCIAS

[1] MICHAL K. , F. LUCA, L. SOMER, 17 LECTURES ON FERMAT NUMBERS, CANADIAN MATHEMATICAL SOCIETY.
[2] RIBENBOIM, P. THE BOOK OF PRIME NUMBERS RECORDS, SPRINGER, 1991.
[3] DUBRER, H. GENERALIZED FERMAT PRIMES, J. RECREATIONAL MATH. 1985.

COMENTARIOS SOBRE UN PROBLEMA DE LA IMO 2010

JORGE MOZO FERNÁNDEZ

Llamó mi atención uno de los problemas propuestos en la 51 Olimpiada Internacional de Matemáticas, que se celebró en Astaná (Kazakhstan), del 2 al 14 de julio de 2010. Concretamente se trata del problema 5, propuesto el segundo día de competición (el jueves 8 de julio). Este problema, en su redacción oficial en castellano, dice lo siguiente:

> En cada una de las seis cajas B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, hay inicialmente sólo una moneda. Se permiten dos tipos de operaciones:
>
> ***Tipo* 1:** Elegir una caja no vacía B_j, con $1 \leq j \leq 5$. Retirar una moneda de B_j y añadir dos monedas a B_{j+1}.
>
> ***Tipo* 2:** Elegir una caja no vacía B_k, con $1 \leq k \leq 4$. Retirar una moneda de B_k e intercambiar los contenidos de las cajas (posiblemente vacías) B_{k+1}, B_{k+2}.
>
> Determinar si existe una sucesión finita de estas operaciones que deja a las cajas B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 vacías, y a la caja B_6 con exactamente $2010^{2010^{2010}}$ monedas (observe que $a^{b^c} = a^{(b^c)}$).

En esta nota voy a comentar algunas ideas útiles para abordar este problema, así como proponer algunas cuestiones complementarias. No pretendo ser exhaustivo ni abordar todas las vías posibles de ataque, simplemente compartir con los lectores algunas de las reflexiones que he hecho estudiándolo.

En primer lugar parece sensato plantearnos el problema con un número inferior a 6 cajas, en la esperanza de que exista alguna recurrencia cómoda. Denotamos C el número de cajas. Si $C = 2$, sólo tiene sentido realizar una operación de tipo 1:

$$(1,1) \xrightarrow{T_1} (0,3).$$

La notación que empleo es, creo, autoexplicativa: denotaré $(N_1, N_2, \ldots, N_r)$ una posición en la que considero r cajas consecutivas, con N_i monedas en la caja i-ésima. Asimismo, T_1, T_2 representará la aplicación de una operación de tipo 1 o tipo 2, respectivamente. Con 2 cajas, sólo pueden obtenerse 3 monedas en la última de ellas.

Si $C = 3$, también pueden computarse todos los posibles movimientos. Estos son esencialmente los siguientes:

$$(1,1,1) \xrightarrow{T_1} (0,3,1) \xrightarrow{T_1^3} (0,0,7)$$
$$(1,1,1) \xrightarrow{T_1} (1,0,3) \xrightarrow{T_2} (0,3,0) \xrightarrow{T_1^3} (0,0,6)$$
$$(1,1,1) \xrightarrow{T_2} (0,1,1) \xrightarrow{T_1} (0,0,3).$$

Así, en la última caja sólo es posible obtener 3, 6 ó 7 monedas. Obsrevemos que el hecho de poder obtener N monedas en la última caja no implica necesariamente que pueda obtenerse cualquier cantidad de monedas $N' < N$.

Para precisar las cosas daremos una definición:

Definición 1. Un número natural N se llamará C-accesible si a partir de una situación inicial con C cajas y una moneda en cada caja, es posible, mediante transformaciones de Tipo 1 y Tipo 2 llegar a una situación final con N monedas en la última caja y ninguna en las anteriores.

Así, 3 es el único número 2-accesible y $\{3, 6, 7\}$ es el conjunto de números 3-accesibles. El problema es determinar si $N_0 := 2010^{2010^{2010}}$ es un número 6-accesible.

En primer lugar veamos que es posible hallar números 6-accesibles mayores que N_0. Para ello establezcamos unas pautas sencillas:

(a) A partir de una situación (N_1, N_2) se llega a $(0, 2N_1 + N_2)$ tras N_1 operaciones T_1.
(b) A partir de (N_1, N_2, N_3) jugamos de la siguiente manera:

$$(N_1, N_2, N_3) \to (N_1, 0, 2N_1 + N_3) \xrightarrow{T_2} (N_1 - 1, 2N_2 + N_3, 0) \to (N_1 - 1, 0, 2(2N_2 + N_3)).$$

Aplicando esto sucesivamente llegamos a

$$(N_1, N_2, N_3) \to (0, 0, 2^{N_1}(2N_2 + N_3)).$$

(c)

$$\begin{aligned}(N, 0, 0, M) &\to (N-1, 2, 0, M)\\ &\to (N-1, 1, M, 0)\\ &\to (N-2, M, 1, 0)\\ &\to (N-2, 0, 0, 2^{M+1}).\end{aligned}$$

Utilizando estas pautas, podemos lograr lo siguiente:

$$\begin{aligned}(1,1,1,1,1,1) &\to (0,0,7,0,0,7) \to (0,0,6,0,0,15)\\ &\to (0,0,4,0,0,2^{16}) \to (0,0,2,0,0,2^{2^{16}+1})\\ &\to (0,0,0,0,0,2^{2^{2^{16}+1}+1}).\end{aligned}$$

El número $2^{2^{2^{16}+1}+1}$ es 6-accesible. Comprobamos que es mayor que N_0. Para ello, observemos que

$$2^{10} < 2010 < 2^{11}.$$

Por consiguiente,

$$2010^{2010} \cdot 10 < \log_2 N_0 < 2010^{2010} \cdot 11.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}20103 = 3 + 2010 \cdot 10 &< \log_2 10 + 2010 \cdot \log_2 2010 < \log_2 \log_2 N_0\\ &< \log_2 11 + 2010 \cdot \log_2 2010 < 4 + 11 \cdot 2010 = 22114.\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$14 < \log_2 \log_2 \log_2 N_0 < 15,$$

es decir,

$$2^{2^{2^{14}}} < N_0 < 2^{2^{2^{15}}} < 2^{2^{2^{16}+1}+1},$$

con lo que efectivamente hay números 6-accesibles mayores que N_0. Para ver qué números menores de N_0 podemos conseguir, moderemos las pautas establecidas en (b). Así, en lugar de empezar haciendo N_2 operaciones T_1, hagamos una cantidad r_0, con $0 \le r_0 \le N_2$, de estas operaciones.

$$(N_1, N_2, N_3) \to (N_1, N_2 - r_0, N_3 + 2r_0) \to (N_1 - 1, N_3 + 2r_0, N_2 - r_0).$$

Tomemos ahora $0 \le r_1 \le N_3 + 2r_0$. El proceso es

$$\begin{aligned}(N_1 - 1, N_3 + 2r_0, N_2 - r_0) &\to (N_1 - 1, N_3 + 2r_0 - r_1)\\ &\to (N_1 - 2, N_2 - r_0 + 2r_1, N_3 + 2r_0 - r_1).\end{aligned}$$

Tras m pasos, llegamos a $(N_1 - m, N_{2m}, N_{3m})$, donde:

- Si $m = 2k$, par,

$$\begin{aligned}N_{2m} &= N_2 - (r_0 + \cdots + r_{2k-2}) + 2(r_1 + \cdots + r_{2k-1})\\ N_{3m} &= N_3 + 2(r_0 + \cdots + r_{2k-2}) - (r_1 + \cdots + r_{2k-1}).\end{aligned}$$

- Si $m = 2k - 1$, impar:

$$\begin{aligned}N_{2m} &= N_3 + 2(r_0 + \cdots + r_{2k}) - (r_1 + \cdots + r_{2k-1})\\ N_{3m} &= N_2 - (r_0 + \cdots + r_{2k}) + 2(r_1 + \cdots + r_{2k-1}),\end{aligned}$$

siendo $r_0, r_1, \ldots, r_{m-1}$ enteros arbitrarios que satisfacen las desigualdades:

$$\begin{aligned}
&0 \le r_0 \le N_2\\
&0 \le r_1 \le N_3 + 2r_0\\
&0 \le r_2 \le N_2 - r_0 + 2r_1\\
&0 \le r_3 \le N_3 + 2r_0 - r_1 + 2r_2\\
&\vdots\\
&0 \le r_{2k} \le N_2 - (r_0 + \cdots + r_{2k-2}) + 2(r_1 + \cdots + r_{2k-1})\\
&0 \le r_{2k+1} \le N_3 + 2(r_0 + \cdots + r_{2k}) - (r_1 + \cdots + r_{2k-1}).
\end{aligned}$$

Prosiguiendo de esta forma, a partir de (N_1, N_2, N_3) podemos llegar a $(0, 0, \tilde{N})$, donde $\tilde{N}$ es un entero de la forma siguiente:

$$\tilde{N} = \begin{cases} 2N_2 + N_3 + 3(r_1 + \cdots + r_{2k-1}), & \text{si } N_1 = 2k, \text{ par },\\ 2N_3 + N_2 + 3(r_0 + \cdots + r_{2k}), & \text{si } N_1 = 2k+1, \text{ impar.} \end{cases}$$

Observemos dos cosas:

1. El máximo valor posible que puede tomar r_l, $l \ge 1$, es $2^{l-1}(2N_2 + N_3)$. Sólo puede alcanzarse este valor si hemos tomado como $r_0, r_1, \ldots, r_{l-1}$ los máximos valores posibles en cada caso. La verificación de este hecho es simple: si $l = 1$, $r_1 \le N_3 + 2r_0 \le N_3 + 2N_2$. Si $l > 1$, argumentamos por inducción.
2. De esta manera, los valores que puede tomar $\tilde{N}$ son de la forma

$$\tilde{N} = \begin{cases} 2N_2 + N_3 + 3r \le 2^{2k}(2N_2 + N_3), & \text{si } N_1 = 2k, \text{ par,}\\ 2N_3 + N_2 + 3r \le 2^{2k+1}(2N_2 + N_3), & \text{si } N_1 = 2k+1, \text{ impar.} \end{cases}$$

   En particular, sólo valores congruentes con $2^{N_1}(2N_2 + N_3)$ módulo 3. Todo valor $\tilde{N}$ de este tipo, anterior,es alcanzable: tomemos como r_i el máximo posible mientras no se supere $\tilde{N}$, y 0 de ahí en adelante.

Si aplicamos esto al proceso descrito, una vez llegados al paso $(0, 0, 2, 0, 0, 2^{2^{16}+1})$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
(0, 0, 2, 0, 0, 2^{2^{16}+1}) &\to (0, 0, 1, 2, 0, 2^{2^{16}+1}) \to (0, 0, 1, 1, 2^{2^{16}+1})\\
&\to (0, 0, 0, 2^{2^{16}+1}, 1, 0),
\end{aligned}$$

de donde deducimos que es 6-accesible todo entero $\tilde{N}$ de la forma $2 + 3r$ comprendido entre 2 y $2^{2^{2^{16}+1}+1}$. Todos estos enteros $\tilde{N}$ son congruentes con 2 módulo 3, mientros que N_0 es divisible por 3 y no está, pues, entre ellos. Modifiquemos levemente el proceso como sigue:

$$(0, 0, 1, 1, 2^{2^{16}+1}, 0) \to (0, 0, 1, 1, 2^{2^{16}+1} - 2, 4) \to (0, 0, 0, 2^{2^{16}+1} - 2, 1, 4).$$

Los cómputos anteriores muestran que son 6-accesibles todos los enteros $\tilde{N}$ comprendidos entre $6 = 2\cdot 1 + 4$ y $6 \cdot 2^{2^{2^{16}+1}-2}$, de la forma $6 + 3r$, todos ellos múltiplos de 3, y entre los que se encuentra N_0. El problema está resuelto.

La técnica expuesta ni es exhaustiva ni es óptima. Por ejemplo, el número $2^{2^{2^{16}+1}+1}$ no es, ni de lejos el máximo número 6-accesible. La sucesión de operaciones

$$\begin{aligned}
(1, 1, 1, 1, 1, 1) &\to (0, 1, 5, 0, 0, 7) \to (0, 1, 3, 0, 0, 2^8)\\
&\to (0, 1, 2, 2, 0, 2^8) \to (0, 1, 2, 1, 2^8, 0)\\
&\to (0, 1, 1, 2^8, 1, 0) \to (0, 0, 2^8, 1, 1, 0)\\
&\to (0, 0, 2^8, 0, 0, 6),
\end{aligned}$$

y una aplicación sucesiva del punto (c) permite obtener enteros extraordinariamente más grandes.

En mi opinión, parte de la belleza del problema anterior estriba en que permite plantearse nuevas preguntas, así como distintas generalizaciones. Me permito sugerir algunas:

1. ¿Cuál es el mayor entero M_C C-accesible, para cualquier C? Hemos visto que $M_2 = 3$, $M_3 = 7$. Es más, podemos plantearnos si, para todo C. M_C es finito (a priori no resulta evidente que si el número de cajas es suficientemente grande, no puedan conseguirse cantidades arbitrariamente altas de monedas en la última caja). Queda como ejercicio para el lector el probar que, efectivamente, así es.
2. ¿Qué estructura tiene el conjunto de enteros C-accesibles? Hemos visto que, al menos para $C = 2$, 3, no todo entero menor que N_C es C-accesible. ¿Ocurre lo mismo para valores de C mayores que 3? Por ejemplo, si $C \geq 4$, 0 es un entero C-accesible, como muestra la siguiente secuencia:
$$\begin{aligned}(1,1,1,1) &\to (1,1,0,3) \to (1,0,3,0) \to (0,3,0,0)\\ &\to (0,2,0,0) \to (0,1,0,0) \to (0,0,0,0).\end{aligned}$$
¿Es C-accesible todo entero menor o igual que M_C? Dejamos al lector tratar de resolver primero una pregunta más simple: ¿Es 1 un entero 4-accesible?
3. Otras preguntas más complejas pueden formularse. Por ejemplo, sería de interés estudiar la sucesión $M_1, M_2, M_3, \ldots$ de los máximos enteros C-accesibles. Puede plantearse la búsqueda de una expresión, si existe, para el término general de esta sucesión. O al menos, alguna regla de recurrencia.
4. La última generalización que quiero plantear consiste en modificar las condiciones iniciales: en lugar de empezar con una moneda en cada caja, puede empezarse con cantidades distintas. ¿Cuál es la respuesta a las preguntas anteriores en estas condiciones?

Desde estás páginas, invito a los lectores de esta revista a aportar posibles soluciones a las preguntas anteriores, ya sean totales o parciales, o a plantear nuevos interrogantes relacionados con este curioso problema.

Referencias

[1] *Olimpiada Internacional de Matemáticas*. Sitio web: http://www.imo-official.org/.
[2] Tao, Terence. *The Polymath blog. Minipolymath2 project: IMO 2010 Q5*. Blog administrado por Terence Tao. Sitio web: http://polymathprojects.org/2010/07/08/minipolymath2-project-imo-2010-q5/.

(Jorge Mozo Fernández) Dpto. Matemática Aplicada, Facultad de Ciencias, Universidad de Valladolid, Prado de la Magdalena, s/n, 47005 Valladolid, Spain

Correo electrónico: jmozo@maf.uva.es

FAMOSOS PROBLEMAS DE LA I.M.O. (2)

Francisco Bellot Rosado

29^a I.M.O., Canberra (Australia) 1988, problema #6

Aparte de sus propios méritos como problema 6 en una Olimpiada Internacional, el problema #6 de 1988 fué el, digamos, "responsable" de que a partir de entonces se instituyera por el Jurado Internacional la "Mención Honorífica", para premiar a los estudiantes que, no obteniendo puntos suficientes para recibir medalla, tuvieran puntuación máxima (7 puntos) en algún problema.

El problema fué propuesto por Alemania Federal, y el Comité Selector de problemas australiano, presidido por David Hunt, estaba formado por otros cinco matemáticos de Sidney, entre los que se encontraban el matrimonio Szekeres (George y Esther), condiscípulos y amigos de Paul Erdös, y autoridades mundiales en Teoría de Números.

Parece (pero las deliberaciones del comité son secretas) que el problema no fué resuelto por los miembros del Comité, pero una vez vista la solución "oficial", se decidió incluirlo entre los que forman la llamada *lista corta* (unos 30 problemas) que se presenta al Jurado Internacional, y éste lo eligió y lo propuso como problema 6. Once participantes recibieron la calificación de 7 puntos en el problema (cinco de ellos, con puntuación perfecta de 42 puntos). En la sesión final del Jurado, el delegado de la República Democrática Alemana dijo: *Yo creo que se debería dar un reconocimento especial a los once estudiantes que han resuelto bien este problema, en vista de que destacados especialistas en Teoría de Números no consiguieron hacer lo mismo.* Claro que tampoco consiguió resolver el problema el 70% de los participantes, que obtuvieron 0 puntos en él.

El Jurado Internacional, a partir de entonces, concede Mención Honorífica, en los términos más arriba descritos, dentro del capítulo de Premios de la Olimpiada. La idea ha sido después incorporada a otros muchos concursos.

Enunciado del problema

Sean a y b enteros positivos tales que $ab+1$ divide a a^2+b^2. Demostrar que

$$\frac{a^2+b^2}{ab+1}$$

es el cuadrado de un entero.

Las soluciones

He tenido acceso a trece fuentes distintas donde se incluyen soluciones a este problema. Las enumero en la Bibliografía al final de este artículo, pero también iré mencionando las que efectivamente utilice a medida que desarrolle esas soluciones. Naturalmente, las primeras en ser mostradas van a ser de dos estudiantes: el búlgaro Emmanouil Atanassou (que recibió un Premio Especial del Jurado por su solución durante el concurso) y el rumano Adrian Vasiu (uno de los estudiantes con 42 puntos, antes mencionados).

1.Solución de Atanassou (BUL 2)

Supongamos que

$$\frac{a^2+b^2}{ab+1}=k, \text{ un entero.}$$

Entonces,

$$a^2-kab+b^2=k \qquad (1).$$

Supongamos a partir de ahora que k no es un cuadrado. Toda solución de (1) tiene

$$a,b>0 \text{ o bien } a,b<0 \qquad (2)$$

(Claramente, $a,b\neq 0$, y si fuera $ab<0$, entonces $a^2-kab+b^2>k$).

Consideremos una solución (a,b) de (1) con $a\geq b>0$ y supongamos a mínimo. Obsérvese que $b<a$, porque si fuera $b=a$, entonces $(2-k)\,a^2=k$, pero el primer miembro no es positivo. Consideremos (1) como una ecuación cuadrática en a. Tiene dos raíces, a y a_1. Se tiene $a+a_1=kb$, luego a_1 es un entero. Por (2), ya que $b>0, a_1>0$.

Además, $aa_1=b^2-k$, luego

$$a_1=\frac{b^2-k}{a}<\frac{a^2-1}{a}<a.$$

El par (a_1,b) satisface (1) y $a_1>0, b>0, a_1<a, b<a$, lo que contradice la minimalidad supuesta de a, y hemos terminado.■

2. Solución de Adrian Vasiu (ROM 1)

Tomada del artículo "A 29-a Olimpiada Internationala de matematica, Canberra, 9-21 iulie 1988", del Jefe de la delegación rumana, Prof. Mircea Becheanu, en la revista Gazeta matematica, nr. 11-12/1988.

Aunque la solución de Vasiu es también por reducción al absurdo, en un momento dado utiliza la descomposición en factores de un número de la forma $N=n^4+1$.

Supongamos que existieran parejas (a,b) de números naturales tales que

$$\frac{a^2+b^2}{ab+1}=q\in\mathbb{N}^*,$$

y que q no sea cuadrado perfecto. Elegimos una de esas parejas con a mínimo. Entonces

$$\begin{aligned}\frac{a^2+b^2}{ab+1} &= q\Longrightarrow\frac{a^4+a^2b^2}{ab+1}=a^2q\in\mathbb{N}^*\Longrightarrow\\ ab-1+\frac{a^4+1}{ab+1} &\in \mathbb{N}^*\Longrightarrow\frac{a^4+1}{ab+1}=c\in\mathbb{N}^*\Longrightarrow\\ a^4+1 &= c\,(ab+1)\Longrightarrow a\mid c-1\Longrightarrow c=ad+1.\end{aligned}$$

Si fuera $d = 0$, entonces $c = 1 \Longrightarrow a^4 + 1 = ab + 1 \Longrightarrow a^3 = b \Longrightarrow q = a^2$, contradicción.

Luego $d \neq 0$. Entonces $a^4 + 1 = (ab + 1)(ad + 1) \Longrightarrow ad + 1 \mid a^4 + 1 \Longrightarrow ad + 1 \mid a^2d^2 + a^4$.

Del hecho que $mcd\left(ad + 1, a^2\right) = 1$ y de $ad + 1 \mid a^2\left(a^2 + d^2\right)$ resulta que

$$ad + 1 \mid a^2 + d^2.$$

Además

$$ad + 1 = \frac{a^4 + 1}{ab + 1} \leq \frac{a^4 + 1}{a^2 + 1} < a^2 + 1 \Longrightarrow 0 < d < a.$$

Como

$$\frac{a^2 + d^2}{ad + 1} = \frac{a^2 + b^2}{ab + 1},$$

se tiene

$$\frac{a^4 + a^2b^2}{ab + 1} = ab - 1 + c = ab - 1 + ad + 1 = ad - 1 + \frac{a^4 + 1}{ad + 1} = \frac{a^4 + a^2d^2}{ad + 1}.$$

Pero $d < a$ y a era mínimo, luego q es cuadrado perfecto, contradicción.■

Soluciones de los matemáticos profesionales

Las soluciones redactadas por profesionales arrojan luces inesperadas sobre el problema, y en algunos casos son verdaderas obras maestras de la presentación didáctica de un problema. Personalmente, las que más me gustan son las del Dr. John Campbell (Canberra), la del Prof. John Burns (en su excelente libro *Seeking solutions, AMT, 2000)*, la de Jean-Pierre Boudine, François Lo Jacomo y Roger Cuculière (en su no menos excelente libro *Olympiades Internationales de Mathématiques, Énoncés et solutions détaillées, Années 1988 à 1997, Ed. du Choix, 1998)* y la de Marcin Kuczma en su libro *International Mathematical Olympiads 1986 - 1999,* MAA 2003.

3. La solución del Dr. J. Campbell (en 1988, en el Canberra College of Advanced Education, hoy Universidad de Canberra)

Si comparamos la sorprendente semejanza entre la sustitución

$$b \longrightarrow qa - b \quad \text{(v. las siguientes líneas)}$$

que deja invariante

$$\frac{a^2 + b^2}{ab + 1} = q,$$

y la sustitución bien conocida

$$b \longrightarrow b - qa \quad (= \text{resto de la división de } b \text{ entre } a),$$

que deja invariante el máximo común divisor de a y b, hacemos la siguiente conjetura:

CONJETURA

Si a, b son enteros no negativos tales que

$$q = \frac{a^2 + b^2}{ab + 1}$$

es entero, entonces

$$q = (mcd\,(a, b))^2 \,.$$

DEMOSTRACIÓN

Si $ab = 0$, entonces el resultado es claro. Esto sugiere usar la inducción sobre el producto ab.

Si $ab > 0$, podemos suponer (por la simetría del problema) que $a \leq b$, y que el resultado está probado para valores pequeños de ab.

Primero encontraremos un entero c tal que

$$q = \frac{a^2 + c^2}{ac + 1} \qquad (*)$$

y que cumpla

$$0 \leq c < b \qquad (**).$$

De ahí se deducirá por inducción (puesto que $ac < ab$) que

$$q = (mcd\,(a, b))^2 \,. \qquad (***)$$

Para obtener c, resolveremos

$$\frac{a^2 + b^2}{ab + 1} = \frac{a^2 + c^2}{ac + 1} = q.$$

Ya que las razones son iguales, restaremos numeradores y denominadores en la proporción, y resultará

$$q = \frac{b^2 - c^2}{ab - ac} \Longrightarrow \frac{b + c}{a} = q \quad (\text{puesto que queremos que } c \neq b),$$

y esto es lo mismo que

$$c = aq - b.$$

Obsérvese que c es entero, y que $mcd\,(a, c) = mcd(a, b)$.

Por lo tanto, la prueba estará terminada si conseguimos probar (**). Para ello, por un lado se tiene

$$q=\frac{a^2+b^2}{ab+1}<\frac{a^2+b^2}{ab}=\frac{a}{b}+\frac{b}{a},$$

con lo cual resulta

$$aq<\frac{a^2}{b}+b\leq\frac{b^2}{b}+b=2b \quad (\text{ya que } a\leq b),$$

y esto es lo mismo que

$$aq-b<b, \text{ es decir, } c<b.$$

Por otra parte,

$$q=\frac{a^2+c^2}{ac+1}\Longrightarrow ac+1>0\Longrightarrow c>-\frac{1}{a}\Longrightarrow c\geq 0 \quad (\text{pues } c \text{ es entero}).\blacksquare$$

Algunas otras observaciones

Supongamos dado $q=k^2$, con k entero positivo. Un estudio cuidadoso de la anterior demostración muestra que todas las soluciones (a,b) - con a,b enteros no negativos - de

$$\frac{a^2+b^2}{ab+1}=q \quad (****)$$

se pueden obtener aplicando una sucesión de los operadores (transformaciones)

$$\begin{array}{rcl} S & : & (a,b)\longrightarrow(b,a) \\ T & : & (a,b)\longrightarrow(a,aq-b) \end{array}$$

()

a la solución $(k,0)$. Puesto que S^2 (es decir, S aplicado dos veces) y T^2 dejan invariable (a,b), toda solución de (****) tiene la forma

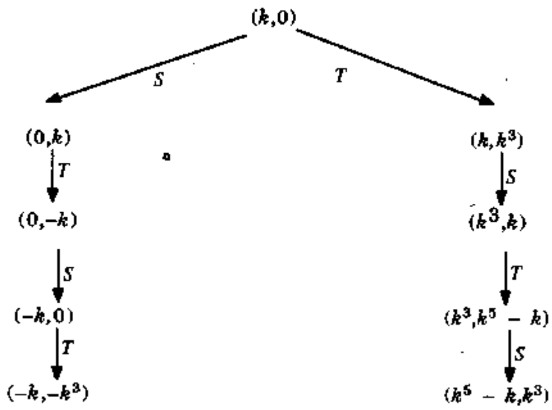
$$W(k,0),$$

donde W denota una sucesión(podría ser vacía) de $S's$ y de $T's$ en la que *operadores adyacentes nunca son iguales.* Recíprocamente, si W es una tal sucesión, entonces $W(k,0)$ es una solución de (****) porque los operadores S y T dejan invariable la función

$$\frac{a^2+b^2}{ab+1}.$$

Para identificar las soluciones $(a,b)=W(k,0)$ con $a,b\geq 0$ mostramos las primeras aplicaciones de S y T a la pareja $(k,0)$:

Evidentemente, las soluciones (a,b) de la ecuación (****), con $a,b\geq 0$ son



$$(k,0)\,, \quad (0,k) \quad \text{y } W(k,0)$$

donde la sucesión W termina en T (así que T se aplica primero a $(k,0)$).

Una observación final (cuya verificación se deja al lector):

Si $q = 1$ hay exactamente 3 soluciones.

Si $q > 1$ hay infinitas soluciones.

Esta solución está incluida en el folleto "Mathematical Olympiads: The 1988 Australian Scene", publicado por el Australian Mathematics Trust.

4. La solución de Boudine, Lo Jacomo y Cuculière: el *descenso infinito.*

Sería bueno tener ejemplos de a, b y k tales que

$$\frac{a^2+b^2}{ab+1} = k.$$

Busquémoslos.

1) Si $a = 1$, tenemos $b^2 + 1 = k\,(b+1)$. Una buena idea consiste en restar $b^2 - 1$. Se obtiene $2 = (b+1)\,(k-b+1)$. Como $b \geq 1$, necesariamente es $b = 1 = a = k$.

2) Si $a = b$, entonces $2a^2 = k\left(1+a^2\right)$. Como a^2+1 es primo con a^2, $1 + a^2$ divide a 2, y de nuevo obtenemos $a = 1 = b = k$. Ya que la ecuación es simétrica en a y b, supondremos que $a > b > 1$.

3) Observemos, por otra parte, que k no puede ser igual a 2.

En efecto, $a^2 + b^2 = 2 + 2ab$ implica $(a-b)^2 = 2$, pero 2 no es un cuadrado perfecto. Se puede entonces suponer $k \geq 3$.

4) La igualdad $a^2 + b^2 = k + kab$ se cumple si $a = bk$ y $b^2 = k$. Esto nos lleva a una familia infinita de soluciones $b = b, k = b^2, a = b^3$. Los primeros ejemplos son

$$\begin{aligned} \frac{8^2+2^2}{1+8\times 2} &= 2^2, \quad \text{solución } (8,2,4) \\ \frac{27^2+3^2}{1+27\times 3} &= 3^2, \quad \text{solución } (27,3,9) \\ \frac{125^2+5^2}{1+125\times 5} &= 5^2, \quad \text{solución } (125,5,25) \end{aligned}$$

5) Siendo más sistemáticos, la ecuación original se escribirá como

$$x^2 - kxy + y^2 - k = 0,$$

ecuación de segundo grado en x, o en y; la otra letra, como el entero k, juegan el papel de parámetros. Considerada como ecuación en x, su discriminante vale

$$\left(k^2 - 4\right) y^2 + 4k > 0 \quad \text{puesto que } k > 2.$$

Por lo tanto, fijado y, hay dos soluciones, x' y $x'' = ky - x'$, ya que la suma de las raíces vale ky. Sabemos que existen pares (a, b) de enteros que son soluciones, con $a > b$. Ponemos $a = x', b = y$. De aquí surge el par (x'', y), es decir $(kb - a, b)$.

6) $kb - a$ es entero; ¿será positivo?

No puede ser negativo porque (a', b), con $a' = kb - a$ es solución, y b es positivo. Pero el segundo miembro de la ecuación se escribe como $k(1 + a'b)$ y es una suma de cuadrados: si un producto de enetros es negativo, será menor o igual que -1, de donde una contradicción.

7) El número $kb - a$ puede ser 0, como en el apartado 4) anterior. Si es nunlo, hemos probado que k era un cuadrado : basta reemplazar kb por a en la ecuación original. Si $a' = kb - a$ no es cero, (a', b) es otra solución del problema inicial.

8) Vamos a demostrar que $a' < b$.

De la misma manera, a partir del par (b, a'), podemos formar el par $(ka' - b, a')$ donde $a'' = ka' - b < a'$. Probaremos que $a' = kb - a < b$. Construimos desigualdades equivalentes, empezando por la que deseamos probar:

$$kb < a + b \Longleftrightarrow kab < a^2 + ab \Longleftrightarrow kab + k < a^2 + ab + k;$$

pero como $a^2 + b^2 = k + kab$, se tiene

$$a^2 + b^2 < a^2 + ab + k \Longleftrightarrow b^2 < ab + k,$$

y esta última es claramente cierta porque $a > b$.

En resumen, definimos

$$a_0 = a; \quad a_1 = b; \qquad a_{n+1} = ka_n - a_{n-1};$$

para todo n, la pareja (a_n, a_{n+1}) es una solución de la ecuación. Si para todo n fuera $a_n \neq 0$, la sucesión (a_n) sería una sucesión estrictamente decreciente de números enteros positivos, lo cual es imposible. Por lo tanto, existe n tal que $a_n = 0$, y entonces $k = a_{n-1}^2$ es efectivamente un cuadrado.■

5. La solución "con aire geométrico" de Marcin Kuczma

Sea q un entero mayor que 1 (ver la observación un poco más adelante). Vamos a examinar las soluciones enteras de la ecuación

$$x^2 + y^2 = q\,(xy + 1) \qquad (+)$$

y a demostrar que:

a) si q no es un cuadrado perfecto, la ecuación $(+)$ no tiene soluciones en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

b) si q es un cuadrado perfecto, $q = k^2, k \in \mathbb{Z}^+$, entonces la fórmula de recurrencia

$$x_0 = 0, x_1 = k; \quad x_{n-1} + x_{n+1} = qx_n, \text{ con } n \in \mathbb{Z},$$

define una sucesión estrictamente creciente de enteros, cuyos términos consecutivos, a pares ($x = x_n, y = x_{n+1}$, o viceversa, $n \in \mathbb{Z}$) conforman la solución completa de $(+)$ en enteros.

Evidentemente, el aserto a) resuelve por sí sólo el problema; pero es ventajoso estudiar conjuntamente a) y b), y examinar la ecuación $(+)$ sobre el retículo de los enteros con total generalidad, porque arroja más luz sobre el problema.

Reescribimos (*astutamente)* la $(+)$ en la forma

$$(q+2)\,(x-y)^2 - (q-2)\,(x+y)^2 = 4q,$$

lo que nos indica que describe una hipérbola, cuyos ejes de simetría son $y = x$ e $y = -x$. Si $q = 2$, la hipérbola degenera en dos rectas paralelas. Sea H la rama "superior" $(x < y)$ de la hipérbola. Consideremos el punto $Q_0\left(0, \sqrt{q}\right)$ - a priori, $\sqrt{q}$ no tiene por qué ser entero - . Ya que Q_0 está en H, las asíntotas de H (semirrectas) forman un ángulo obtuso y entonces H es la gráfica de una función f, continua y estrictamente creciente, que transforma el conjunto de todos los números reales en sí mismo.

Elijamos un punto $P_0 = (x_0, f(x_0)) \in H$ y consideremos la sucesión (en dos sentidos) de iteradas $x_n = f^n\,(x_0)\,.$

Aquí, para $n \in \mathbb{Z}^+$, el símbolo f^n significa la $n-$ésima composición de f; para $n = 0, f^0$ es la identidad; y si $n \in \mathbb{Z}^-, f^n$ es la $|n|$-ésima composición de la función inversa de f, f^{-1}.

A la sucesión de puntos

$$P_n = (x_n, x_{n+1}) = (x_n, f(x_n)) \in H$$

le llamaremos la *trayectoria* que pasa por P_0.En particular, tomando como P_0 el punto $Q_0\left(0, \sqrt{q}\right)$ se obtiene la *trayectoria principal.* El predecesor de Q_0 en el orden de la trayectoria es $Q_{-1}\left(-\sqrt{q}, 0\right)$.

Sea ahora

$$\{P_n = (x_n, x_{n+1}) : n \in \mathbb{Z}\}$$

una trayectoria cualquiera. Sustituyendo en (+) en lugar de x, y las coordenadas de P_{n-1}, P_n y restando las ecuaciones resultantes obtenemos la recurrencia anterior, posiblemente con otras condiciones iniciales (los datos iniciales $x_0 = 0, x_1 = \sqrt{q}$ caracterizan la trayectoria principal). La ecuación recurrente demuestra que si uno cualquiera de los puntos $P_{n-1} = (x_{n-1}, x_n)$ y $P_n = (x_n, x_{n+1})$ es un punto de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, lo es también el otro. Así (por inducción ascendente y descendente) toda trayectoria o está contenida en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ o es disjunta de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Obsérvese que la ecuación (+) no tiene soluciones enteras de distinto signo. Luego si H contine un punto reticular P, entonces la trayectoria por P, formada enteramente por puntos reticulares, no tiene representante entre Q_{-1} y Q_0. Por otra parte, una trajectoria no puede saltarse el arco cerrado $Q_{-1}Q_0$ (pues eso requeriría $f(x) > 0$ para algún $x < -\sqrt{q}$, lo que es absurdo). Así pues, la trayectoria principal es el único *candidato* para el conjunto de puntos reticulares sobre H.

En otras palabras, la ecuación (+) tiene soluciones en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ si y solamente si la trayectoria principal está compuesta de puntos reticulares. Esto ocurre cuando $Q_0 \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, es decir, cuando q es un cuadrado perfecto, en cuyo caso la recurrencia anterior, con $k = \sqrt{q}$, define el conjunto completo de abscisas de puntos reticulares en H; los asertos a) y b) quedan probados. Esta sucesión es simétrica con respecto a 0; la otra rama de la hipérbola es simétrica de H con respecto al origen. Los puntos reticulares sobre ella son los mismos que los de H, pero con los papeles de x e y intercambiados. Estos puntos también han de ser tomados en consideración.

Observación

Los términos de la recurrencia pueden expresarse de manera explícita:

$$x_n = \sqrt{\frac{q}{q^2-4}}\left[\left(\frac{q+\sqrt{q^2-4}}{2}\right)^n - \left(\frac{q-\sqrt{q^2-4}}{2}\right)^n\right], n \in \mathbb{Z}.$$

Al principio nos limitábamos a considerar enteros $q > 1$. Porque si $q = 1$, la ecuación (+) es equivalente a $(x-y)^2 + x^2 + y^2 = 2$, con las soluciones enteras obvias $(0, \epsilon), (\epsilon, 0)$ y $(\epsilon, \epsilon), \epsilon = \pm 1$.■

BIBLIOGRAFÍA

[1] Australian Mathematics Trust: *Mathematical Olympiads, The 1988 Australian Scene, Canberra 1988.*

[2] Becheanu, M.: *International Mathematical Olympiads 1959-2000. Academic Distribution Center, Freeland, Maryland 2001.*

[3] Bellot Rosado, F. y López Chamorro, M^a A.: *Cien Problemas de Matemáticas, Combinatoria, Álgebra, Geometría. I.C.E. U. de Valladolid, 1994.*

[4] Boudine, J.P.; Cuculière, R.; Lo Jacomo, F.: *Olympiades Internationales de Mathématiques. Énoncés et solutions détaillées. Années 1988 à 1997. Ed. du Choix, 1998*

[5] Bourgade,P.: *Olympiades Internationales de mathématiques, 1976 - 2005. Cassini 2005.*

[6] Burns, J.C.: *Seeking solutions. AMT 2000.*

[7] Falk de Losada, M.; Arrieta Ortiz, E.; Berenstein, D.: *1981-1990 Diez años de Colombia en las Olimpiadas Internacionales de Matemáticas. C.U. "Antonio Nariño", Bogotá, 1991.*

[8] Ferreol, R.; Cuculière, R.; Casiro, F.: *Olympiades Internationales de Mathématiques & Concours Géneral 1988, 1989, 1990. Ed. du Choix, 1991.*

[9] Galvin, W.P.; Hunt, D.C.; O'Halloran, P.J. (editors): *An Olympiad down under. A report on the 29th International Mathematical Olympiad in Australia. Australian Mathematical Foundation, 1989.*

[10] Kuczma, M.: *International mathematical Olympiads 1986-1999. M.A.A. 2003.*

[11] Reiman, I.: *International Mathematical Olympiad 1959 - 1999. Anthem Press, 2001*

[12] Djukic, D.; Jankovic V.; Matic, I.; Petrovic, N.: *The IMO Compendium, Springer 2006.*

[13] *Gazeta matematica, nr. 11-12/1988. Societatea de Stiintze matematice din Republica socialista Romania, 1988.*

Problemas para los más jóvenes 41

CINCO PROBLEMAS DE LA OLIMPIADA DE BUCAREST (JUNIOR)

J41.1. En el triángulo ABC, la mediana BD (D es el punto medio de AC) es perpendicular a la bisectriz interior AE (E es un punto de BC).

Demostrar que el centro de gravedad del triángulo ABD es el punto medio del segmento AE.

J41.2. i) Si a y b son números reales tales que

$$\left|a-b^2\right|+a^2+a=0,$$

demostrar que a = b = 0.

ii) Encontrar los números reales x e y que verifican la relación

$$\left|(2x-y)^2-3x-2y+7\right|+(3x+2y-7)^2+3x+2y=7$$

J41.3. Tres números positivos, x, y z son directamente proporcionales a los números 2; 3 y 5.

a) **Hallar la razón entre el mayor de los tres números y la suma de los otros dos.**
b) **Si, además, xy + yz + zx = 124, calcular los tres números.**

J41.4. Si los números a y b verifican -1 < a < 1; -1< b < 1, demostrar que

$$-1<\frac{a+b}{1+ab}<1.$$

J41.5. Sea O un punto interior al triángulo ABC. Se traza por O la paralela a BC, que corta a AB en S y a AC en P; se traza análogamente la paralela a AC que pasa por O, que corta a BC en N y a AB en R; y finalmente, la recta por O paralela a AB, que corta a AC en Q y a BC en M.

i) **Demostrar que**

$$\frac{MN}{BC}+\frac{PQ}{CA}+\frac{RS}{AB}=1$$

ii) **Si se verifica** $\frac{MN}{BC}=\frac{PQ}{CA}=\frac{RS}{AB}$, **demostrar que O es el baricentro (centro de gravedad) del triángulo ABC.**

Solución al Prob #1 y Prob #3 de la Primera Olimpiada de Lituania
Solución por: Ricardo Junior Espino Lizama,(15 años) Lima/Perú

LIT1. En la multiplicación siguiente, en los factores cada letra representa un número, de modo que letras distintas corresponden a números distintos. Pero en los productos parciales, todos los núumeros (iguales o no) han sido codificados por la letra x :

```
                    F    I    N    D
                    F    I    N    D
————————————————————————
                    x    x    x    x
          x    x  x    x
     x    x    x  x
————————————————————————
 x  x  x  x    x  x    x    x
```

SOLUCIÓN:

Como no se presenta el segundo producto parcial, deducimos que el valor de N es cero

Quedando lo siguiente:

```
                    F    I    0    D
                    F    I    0    D
————————————————————————
                    x    x    x    x
               0    0    0    0
          x    x  x    x
     x    x    x  x
————————————————————————
 x  x  x  x    x  x    x    x
```

Al analizar el cuarto producto parcial, el cual es resultado de la multiplicación
FIODxF, este producto tiene 4 cifras, concluimos diciendo que el valor de F pueden ser {1,2,3}
Pero analizando el producto total, este presenta una cifra más, lo que quiere decir que el valor de F debe ser 3
ya que si toma el valor de 1 o 2, el producto final no sera posible.
Quedando asi:

```
                    3    I    0    D
                    3    I    0    D
————————————————————————
                    x    x    x    x
                0  0    0    0
          x    x  x    x
     x    x    x  x
————————————————————————
 x  x  x  x    x  x    x    x
```

Ahora, analizando los dos productos parciales restantes, se observa que estos son de 4 cifras, por lo tanto
los productos 3I y 3D deben tener solo una cifra, osea, tanto I como D pueden tener como valores {1,2,3}

pero no contemos al 3 ya que, a letras distintas, valores distintos (condición del problema)
por lo tanto I y D solo podran ser 1 y 2, mas no se sabe el orden
Evaluando las dos posibles soluciones, se muestra que la única solución sl problema es si I=2 Y D=1

Finalmente, reconstruyendo la multiplicvación:

```
                  3   2   0   1
                  3   2   0   1
—— —— —— —— —— —— —— ——
                  3   2   0   1
          6   4  0   2
     9   6   0  3
—— —— —— —— —— —— —— ——
 1  0   2   4   6   4   0   1
```

LIT3. Robinson Crusoe, navegando por el proceloso Océano de los Números,
se aproxima a la isla donde habitan todos los números con exactamente 100
dÌgitos. Quiere cumplir dos deseos:
a) Hallar un número de 100 dÌgitos divisible por 100 y tal que la suma de
sus cifras sea 100.
b) Encontrar el menor de tales números.

SOLUCIÓN:

a) Si el número es divisible por 100, entonces deberá acabar en dos ceros y la suma de sus otras 98 cifras deberá ser 100
un número que cumpla esos requisitos es el siguiente

1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1..... 1 2200
-----------96 veces "1"-------------

b) Para encontrar el menor de todos los números que cumplan los mencionados requisitos, debemos contar con que
se vea mayor cantidad de nñumeros 1, aquél número sería el siguiente:

1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1... 1300
----------98 veces "1"------------------

XLVII Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Primera Sesión

<u>Viernes, 21 de enero de 2011</u>

1.- Hallar todos los enteros *n* tales que $n - 50$ y $n + 50$ sean simultáneamente cuadrados perfectos.

2.- Sea $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$ el conjunto de los números naturales. Se escriben en el encerado *n* números naturales. Si *a* y *b* son dos de los números naturales escritos, se realiza con ellos la siguiente operación:

$$\frac{a+b}{a-b},$$

y si este número es entero, se añade al conjunto de números escritos en el encerado. Se pretende conseguir que, por este procedimiento, aparezca en el encerado cualquier número natural.

Calcular el menor valor de *n* para que esto suceda, los números inicialmente escritos, y la forma de obtener así cualquier número natural.

3.- Un cuadrado C se recubre completamente con un número entero de cuadrados de lado unidad, sin solapamientos. Si uno coloca dentro de C y sin solapamientos tantos cuadrados de área 2 como sea posible, con los lados paralelos a los lados de C, se pueden cubrir las ocho novenas partes del área del cuadrado. Determinar todas las posibles dimensiones de tales cuadrados.

No está permitido el uso de calculadoras

Cada problema se puntúa sobre 7 puntos

El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media

XLVII Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Segunda Sesión

<u>Sábado, 22 de enero de 2011</u>

4.- Sea *f* una función definida en el conjunto de los enteros positivos y que verifica las dos condiciones siguientes:

$$f(1) = 2010$$

$$f(1) + f(2) + \dots + f(n) = n^2 f(n), \text{ para todo } n > 1.$$

Calcular el valor exacto de f(2010).

5.- Se ordenan los números naturales en forma de tabla triangular, es decir

			1			
		2	3	4		
	5	6	7	8	9	
10	11	12	13	14	15	16
....	....	....	....	....	....	....

Diremos que la posición de un número N en la tabla viene dada por dos "coordenadas": el primer número de su fila y el primer número de su columna. Por ejemplo, si N = 15, su posición es (10,9). Cuando un número N, en la posición *(n,m),* verifica que N = n + m, diremos que N está <u>bien colocado</u> en la tabla; así, 12 y 14 están bien colocados, y 15 no lo está. ¿Está 2^{2011} bien colocado?

6.- En un triángulo, llamaremos O al circuncentro, I al incentro y *r* al radio de la circunferencia inscrita. Sea L uno de los dos puntos en que la mediatriz del segmento OI corta a la circunferencia circunscrita, si LI vuelve a cortarla en M, demostrar que IM = 2r.

No está permitido el uso de calculadoras

Cada problema se puntúa sobre 7 puntos

El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media

PROBLEMA 1 de la MMC 2010

Solución de Angel Espino Lizama, Lima, Perú.

Dado los números reales a, b, c, d, resolver el siguiente sistema de ecuaciones (incógnitas x, y, z, u)

$x^2 - yz - zu - yu = a$ …. (1)
$y^2 - zu - ux - xz = b$ …(2)
$z^2 - ux - xy - yu = c$ …(3)
$u^2 - xy - yz - zx = d$ …(4)

Solución

En (4) – (2)

$$(u-y)(x+z+u+y) = d-b$$

En (3)- (1)

$$(z-x)(x+z+u+y) = d-b$$

En (4) – (1)

$$(u-x)(u+x+y+z) = d-a$$

En (3)-(2)

$$(z-y)(x+y+z+u) = c-b$$

Hacemos el cambio de variable:

$$x+y+z+u = \frac{1}{k}$$

Reemplazando el cambio de variable:

$$u-x = (d-a)k$$
$$z-y = (c-b)k$$
$$u-y = (d-b)k$$
$$z-x = (c-a)k$$

Igualando:

$$u = dk; x = ak; z = ck; y = bk$$

Sumando:

$$u + y + z + x = (a + b + c + d)k \ldots (5)$$

Por el cambio de variable

$$u + y + z + x = \frac{1}{k}$$

Reemplazando en (5)

$$k = \sqrt{\frac{1}{a + b + c + d}}$$

Finalmente

$$u = d \sqrt{\frac{1}{a + b + c + d}}$$

$$x = a \sqrt{\frac{1}{a + b + c + d}}$$

$$z = c \sqrt{\frac{1}{a + b + c + d}}$$

$$y = b \sqrt{\frac{1}{a + b + c + d}}$$

REOIM vol. 41

Problemas propuestos 201-205

Problema 201 (propuesto por Roberto Bosch Cabrera, C. de la Habana, Cuba)

Sea $ABCD$ un cuadrilátero inscrito en una circunferencia c_0 de centro O interior al cuadrilátero. Se consideran las circunferencias $c_1(A, AO)$ (de centro A y radio AO); $c_2(B, BO)$; $c_3(C, CO)$ *y* $c_4(D, DO)$.

Sean $c_1 \cap c_2 = \{P, O\}$; $c_2 \cap c_3 = \{Q, O\}$; $c_3 \cap c_4 = \{R, O\}$; y $c_4 \cap c_1 = \{S, O\}$.

Demostrar que $PQRS$ es un paralelogramo.

Problema 202 (propuesto por José Luis Díaz Barrero, Univ. Politécnica de Cataluña, Barcelona, España)

Sean a, b, c las longitudes de los lados de un triángulo de perímetro 2. Demostrar que

$$\sqrt[4]{a^2b^2\sin C} + \sqrt[4]{b^2c^2\sin A} + \sqrt[4]{c^2a^2\sin B} \le 2\sqrt[8]{\frac{3}{4}}.$$

Problema 203 (propuesto por Vicente Vicario García, Huelva, España)

Es bien conocido que existen números irracionales α, β tales que α^β es racional. Para la demostración clásica se parte del hecho de que $\sqrt{2}$ es irracional, y se considera el número $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. Si este número es racional, ya tenemos identificados los irracionales α, β que cumplen la condición del teorema. Si no es racional, consideramos $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$, que es racional y se concluye la demostración.

Se pide dar una demostración constructiva alternativa y construir infinitas parejas de números irracionales α y β tales que α^β es un número racional.

Problema 204 (propuesto por Pedro H.O. Pantoja, Univ. de Lisboa, Portugal)

Demostrar que las ecuaciones $3^x - 1 = y^4$, $3^x + 1 = y^4$ no tienen socuciones enteras positivas.

Problema 205 (propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, Ávila, España)

Sea ABC un triángulo rectángulo en A, con lados $a > b \ge c$. Sean r el radio del círculo inscrito, R el del círculo circunscrito, y w_a la bisectriz interior del ángulo A. Demostrar que

$$c \le \left(2+\sqrt{2}\right)r \le \frac{2bc}{b+c} \le R+r \le b \Longleftrightarrow \frac{c}{\sqrt{2}} \le \left(1+\sqrt{2}\right)r \le w_a \le \frac{R+r}{\sqrt{2}} \le \frac{b}{\sqrt{2}}.$$

PROBLEMA 193, *(propuesto por Mari del Rayo Pérez Ríos)*

Demostrar que

$$q < \frac{A}{2} \qquad \text{y} \qquad q < \frac{B}{2},$$

siendo

$$q = \arctan \frac{\sin A \sin B \sin C}{1 + \cos A \cos B \cos C}, \qquad A + B + C = \pi, \qquad C < |B - A|.$$

Solución por Daniel Lasaosa Medarde, Universidad Pública de Navarra, Pamplona, España

Si tomamos A, B de signo negativo y C positivo, podemos encontrar q positivo, y por lo tanto mayor que $\frac{A}{2} < 0$ y que $\frac{B}{2} < 0$; podríamos también tomar $A = B = -C = \pi$, con lo que no se podría definir q. Entenderemos pues que la condición $A + B + C = \pi$ ha de traducirse como "A, B, C son los ángulos de un triángulo", donde sin pérdida de generalidad $A > B > 0$, y $A - B > C$, es decir, A es obtusángulo. Entonces, $\sin C < \sin(A - B)$ y $\cos C > \cos(A - B)$, luego nos basta con demostrar que, si A, B son dos ángulos positivos que suman menos de π, se cumple

$$\tan \frac{B}{2} \geq \frac{\sin A \sin B \sin(A - B)}{1 + \cos A \cos B \cos(A - B)}$$

Pero

$$\frac{\sin B}{\tan \frac{B}{2}} = 2\cos^2 \frac{B}{2} = 1 + \cos B,$$

de donde nos basta con demostrar que

$$(1 + \cos B)(1 + \cos A \cos B \cos(A - B)) \geq \sin A \sin B \sin(A - B),$$

o equivalentemente tras algo de álgebra, nos basta con demostrar que

$$(1 + \cos B)\frac{5 + \cos(2A) + \cos(2B) + \cos(2A - 2B)}{4} \geq$$
$$\geq \frac{\sin(2A - 2B) - \sin(2A) + \sin(2B)}{4}.$$

Ahora bien, como B es claramente acutángulo, tenemos que $1 + \cos B > 1$, luego nos basta con demostrar que

$$5 + \cos(2A) + \sin(2A) + \cos(2B) - \sin(2B) + \cos(2A - 2B) - \sin(2A - 2B) \geq 0,$$

es decir, usando que $\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin(45°) = \cos(45°)$, nos basta con demostrar que

$$\frac{5}{\sqrt{2}} \geq -\cos(2A - 45°) - \cos(2B + 45°) - \cos(2A - 2B + 45°),$$

siendo claramente el miembro de la derecha menor o igual que 3 por ser la suma de tres elementos cuyo valor absoluto es a lo sumo 1, mientras que el miembro de la izquierda es mayor que 3, pues $5 = \sqrt{25} > \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$, con lo que queda probado el resultado pedido.

PROBLEMA 195, *(original de Dan Branzei, Iasi, Rumanía; propuesto por el editor)*

Dado el triángulo ABC, de semiperímetro s, se define $t = \frac{sr}{R}$ (notaciones habituales).

1) Demostrar que $\min(a,b,c) > t$.

2) Demostrar que existe un triángulo de lados

$$a' = \sqrt{a(a-t)}, \qquad b' = \sqrt{b(b-t)}, \qquad c' = \sqrt{c(c-t)}.$$

Solución por Daniel Lasaosa Medarde, Universidad Pública de Navarra, Pamplona, España

1) Como $sr = S$, siendo S el área de ABC, tenemos que $t = \frac{S}{R} = \frac{abc}{4R^2}$, con lo que por el teorema del seno, $c > t$ si y sólo si $1 > \frac{ab}{4R^2} = \sin A \sin B$, siendo esta desigualdad claramente cierta.

2) Es conocido que a, b, c son los lados de un triángulo no degenerado si y sólo si

$$2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4 = (a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) > 0,$$

siendo en ese caso, por la fórmula de Herón, el miembro de la izquierda igual a $16S^2$, donde S es el área del triángulo de lados a, b, c. Tenemos entonces que

$$2a'^2b'^2+2b'^2c'^2+2c'^2a'^2-a'^4-b'^4-c'^4 = 16S^2+t^2\left(2ab+2bc+2ca-a^2-b^2-c^2\right)+$$
$$+2t\left(a^3+b^3+c^3-ab(a+b)-bc(b+c)-ca(c+a)\right).$$

Ahora bien,

$$(a+b+c)\left(a^3+b^3+c^3-ab(a+b)-bc(b+c)-ca(c+a)\right) =$$
$$= a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2-2abc(a+b+c) = -16S^2-2abc(a+b+c),$$
$$(a+b+c)^2\left(2ab+2bc+2ca-a^2-b^2-c^2\right) =$$
$$= -a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2a^2c^2+8abc(a+b+c) = 16S^2+8abc(a+b+c).$$

Sustituyendo la definición de t, tenemos entonces que

$$2a'^2b'^2+2b'^2c'^2+2c'^2a'^2-a'^4-b'^4-c'^4 =$$
$$= 16S^2 + \frac{r^2(16S^2+8abc(a+b+c))}{4R^2} - \frac{r(16S^2+2abc(a+b+c))}{R} = \frac{4S^2r^2}{R^2}.$$

Como ésta cantidad es positiva, tenemos que, en efecto, a', b', c' son los lados de un triángulo. Nótese además que hemos probado que el área S' de este triángulo cumple $S' = S\frac{r}{2R}$; en el caso de que ABC fuera equilátero, se tendría que $2r = R$, con lo que sería $S' = \frac{S}{4}$, claramente cierto ya que también sería $t = \frac{s}{2} = \frac{3a}{4}$, $a' = b' = c' = \frac{a}{2} = \frac{b}{2} = \frac{c}{2}$, siendo entonces a', b', c' los lados de un triángulo equilátero de longitud mitad, con lo que el área en efecto sería la cuarta parte.

Problema 196
Gustavo Espínola Mena (Capiatá, Paraguay)

Sea p un número primo. Demostrar que

$$\sum_{k=0}^{p}(p+k-1)(p+k-2)...(k+1) \equiv -2(\mathrm{mod}p) \tag{1}$$

Demostración: Se observa, en la ecuación (1), que el miembro de la izquierda se puede escribir como

$$\sum_{k=0}^{p}(k+1)...(k+p-2)(k+p-1) \tag{2}$$

Así, para $k=0$, se cumple el Teorema de Wilson:

$$(1)(2)...(p-2)(p-1) = (p-1)! \equiv -1(\mathrm{mod}p) \tag{3}$$

Cuando $k = 1, 2, ..., p-1$, la sumatoria queda:

$$\sum_{k=1}^{p-1}\prod_{j=1}^{p-1}(k+j) \tag{4}$$

Luego, existe algún $j = p-k$ tal que la productoria resulta en un múltiplo de p:

$$\sum_{k=1}^{p-1}\prod_{j=1}^{p-1}(k+j) \equiv 0(\mathrm{mod}p) \tag{5}$$

Y si $k = p$, el producto queda así:

$$(p+1)(p+2)...(p+p-1) = p^{n-1}+a_1p^{n-2}+...+a_{n-2}p+(p-1)! \equiv -1(\mathrm{mod}p) \tag{6}$$

Sumando $(3), (5)$ y (6), se llega a la equación (1), tal como se quería demostrar.

PROBLEMA 197, *(propuesto por Laurentiu Modan, Univ. de Bucarest, Rumanía)*

Se considera un cuadrilátero inscrito en una circunferencia de radio R. Sean $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ los ángulos subtendidos por los lados en el centro de la circunferencia.

i) Hallar una expresión para el área S del cuadrilátero en función de $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

ii) Si en la expresión para S los términos que dependen de los ángulos son todos iguales, y $\alpha = \frac{\pi}{3}$, hallar los valores de los lados y ángulos del cuadrilátero.

Solución por Daniel Lasaosa Medarde, Universidad Pública de Navarra, Pamplona, España

i) Supondremos sin pérdida de generalidad que $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ son respectivamente los ángulos $\angle AOB, \angle BOC, \angle COD, \angle DOA$, siendo O el circuncentro de $ABCD$. Si O es interior al cuadrilátero $ABCD$, entonces $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 2\pi$, y tenemos que el área de $ABCD$ es la suma de las áreas de OAB, OBC, OCD, ODA, siendo además el área de OAB igual a

$$[OAB] = \frac{R^2 \sin\alpha}{2},$$

y de forma similar para los otros tres triángulos. Llegamos entonces a la expresión

$$S = \frac{R^2(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma + \sin\delta)}{2}.$$

Si el circuncentro O está en un lado de $ABCD$, sin pérdida de generalidad AB, entonces el razonamiento y el resultado son idénticos, salvo que $\alpha = 180°$, con lo que el término correspondiente se anularía. Finalmente, si el circuncentro O es exterior al cuadrilátero $ABCD$, existe un lado, sin pérdida de generalidad AB, tal que los otros dos vértices C, D, están en el lado opuesto al circuncentro O, respecto de la recta AB. El área S es entonces la suma de las áreas de BOC, COD, DOA, menos el área de AOB. Sin embargo, si definimos el ángulo $\angle AOB$ como el ángulo comprendido entre las semirrectas OA, OB y que no deja a C, D en su interior, entonces $\angle AOB > \pi$, con lo que su seno sería negativo, y sigue siendo válida la expresión anterior.

ii) Si los términos que dependen de los ángulos son todos iguales, tenemos entonces que

$$\sin\alpha = \sin\beta = \sin\gamma = \sin\delta,$$

con lo que $\beta, \gamma, \delta \in \{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\}$, y además $\beta + \gamma + \delta = \frac{5\pi}{3}$. Claramente, dos de entre β, γ, δ han de ser iguales a $\frac{2\pi}{3}$, y el tercero igual a $\frac{\pi}{3}$. Además,

$$\angle DAB = \frac{\beta+\gamma}{2}, \qquad \angle ABC = \frac{\gamma+\delta}{2}, \qquad \angle BCD = \frac{\delta+\alpha}{2}, \qquad \angle CDA = \frac{\beta+\alpha}{2},$$

al ser el ángulo subtendido desde un vértice igual a la mitad del ángulo subtendido desde el circuncentro. Restaurando la generalidad, obtenemos que, bien $\angle DAB = \angle ABC = \angle BCD = \angle CDA = \frac{\pi}{2}$, bien dos de ellos (opuestos) son rectos, siendo los otros dos $\frac{\pi}{3}$ y $\frac{2\pi}{3}$. En el primer caso, los lados miden todos $R\sqrt{2}$ y $ABCD$ es un cuadrado, y en el segundo caso dos lados contiguos miden $R\sqrt{3}$, formando entre ellos un ángulo de $\frac{\pi}{3}$, y los otros dos lados (perpendiculares a los anteriores) miden R, formando entre ellos un ángulo de $\frac{2\pi}{3}$; es un caso particular de lo que en inglés se denomina "kite" (cometa, o cuadrilátero cuyas diagonales se cortan perpendicularmente, y con simetría de reflexión sobre una de ellas).

PROBLEMA 198, *(propuesto por el editor)*

Sea M un punto interior al triángulo ABC, y N, P, Q los puntos en que una recta corta a los lados AB, BC y a la prolongación de CA. Utilizamos la notación $[\ldots]$ para representar el área del polígono cuyos vértices se escriben entre los corchetes. Demostrar que si

$$\frac{[MAN]}{[MBN]} + \frac{[MBP]}{[MCP]} = 2\sqrt{\frac{[MAQ]}{[MCQ]}},$$

entonces la recta NPQ es antiparalela de CA con respecto a AB y BC.

(el problema no es nuevo. Se dará noticia de su procedencia cuando se publique la solución)

Solución por Daniel Lasaosa Medarde, Universidad Pública de Navarra, Pamplona, España

Sea $\rho = \frac{AN}{NB}$, $\kappa = \frac{BP}{PC}$, claramente reales positivos ambos, con lo que por el teorema de Menelao $\frac{AQ}{QC} = \rho\kappa$. Ahora bien, la altura desde M sobre AB coincide con la altura sobre AN y sobre BN, con lo que $\frac{[MAN]}{[MBN]} = \frac{AN}{BN} = \rho$, y de forma similar para los otros dos cocientes entre áreas, de donde obtenemos

$$\rho + \kappa = 2\sqrt{\rho\kappa}.$$

Por la condición de igualdad en la desigualdad entre medias aritmética y geométrica, tenemos que la condición dada en el enunciado es equivalente a $\rho = \kappa$.

Ahora bien, el que la recta NPQ sea la antiparalela de AC respecto de AB y BC es, por definición, equivalente a que ABC sea semejante a PBN, o lo que es lo mismo, que $\frac{BP}{AB} = \frac{BN}{BC}$. Pero $\frac{BC}{BP} = 1 + \frac{PC}{BP} = \frac{\kappa+1}{\kappa}$, mientras que $\frac{AB}{BN} = 1 + \frac{AN}{NB} = 1 + \rho$, con lo que el que NPQ sea la antiparalela de AC es equivalente a $\frac{AB^2}{BC^2} = \frac{(1+\rho)\kappa}{1+\kappa}$. Como podemos elegir independientemente la relación entre los lados AB, BC, y los parámetros reales positivos ρ y κ, el que $\rho = \kappa$ no implica necesariamente que las rectas sean antiparalelas. Claramente, en la situación descrita (en la que como ya se ha visto es necesario que $\rho = \kappa$), las rectas mencionadas serán antiparalelas si y sólo si la recta NPQ se elige de forma que $\rho = \kappa = \frac{AB^2}{BC^2}$.

Problema 199.- (Propuesto por el editor).

Demostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{1}{n^2} < \frac{\pi}{2}$ **.**

Resolución: Vicente Vicario García, Huelva, España.

Daremos dos soluciones diferentes al problema, una totalmente elemental y otra en la que se recurre a la conocida suma de Euler para el famoso problema de Basilea $\varsigma(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

1ª Demostración. Utilizaremos dos lemas sencillos que demostramos a continuación.
Lema 1: "*La función* $f(x) = \arctan x$ *es estrictamente creciente en el intervalo* $(0, \pi/2)$".

Basta con observar que $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} > 0$ en todo el intervalo considerado. ■

Lema 2:"*Si* $x > 0$ *se cumple que* $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{x}{1+n(n-1)x^2} = \frac{\pi}{2}$ ".

Para la demostración basta emplear la identidad $\arctan a - \arctan b = \arctan \frac{a-b}{1+ab}$ con $a = \arctan nx$ y $b = \arctan(n-1)x$, para obtener

$$\arctan \frac{x}{1+n(n-1)x^2} = \arctan \frac{nx-(n-1)x}{1+nx\cdot(n-1)x} = \arctan nx - \arctan(n-1)x$$

Por otra parte, la suma parcial *n*-ésima de la serie anterior es claramente

$$S_n = (\arctan x - \arctan 0) + (\arctan 2x - \arctan x) + (\arctan 3x - \arctan 2x) + \cdots +$$
$$(\arctan nx - \arctan(n-1)x) = \arctan nx$$

y, en consecuencia

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{x}{1+n(n-1)x^2} = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \arctan nx = \begin{cases} \pi/2 & ,x>0 \\ 0 & ,x=0 \\ -\pi/2 & ,x<0 \end{cases} \quad ■$$

Finalmente, considerando $x = 1$ en el lema anterior y como $\forall n \geq 1$ tenemos que $n^2 \geq n^2 - n + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n^2-n+1}$, entonces aplicando lema 1, llegamos al resultado pedido: $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{1}{n^2} < \sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{1}{n^2-n+1} = \frac{\pi}{2}$.

2ª Demostración. Emplearemos aquí la famosa suma de Euler y el siguiente lema que demostramos a continuación.

Lema: "*Tenemos la desigualdad* $\arctan x < x$, $\forall x \in (0, \pi/2)$".
Para la demostración basta aplicar el teorema del valor medio de Lagrange a la función $f(x) = \arctan x$, en $(0, x)$ y observar que

$$\frac{\arctan x - \arctan 0}{x - 0} = \frac{1}{1 + c^2} \quad \text{con } c \in (0, x) \rightarrow \frac{\arctan x}{x} < 1, \ \forall x \in (0, \pi/2) \quad \blacksquare$$

Ahora, basta aplicar el lema y observar la desigualdad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{1}{n^2} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi}{4} + \left(\frac{\pi^2}{6} - 1 \right) < \frac{\pi}{2}$$

que es cierta ya que $2\pi^2 < 3\pi + 12$, (que se comprueba con una aproximación sencilla de π), lo que concluye la demostración.

---oooOooo---

Problema 200

Xavier Ros

Problema. *Determinar, en función del parámetro real a, el número de raíces de la ecuación*

$$a^x = \log_a x.$$

Solución. En primer lugar, notemos que la función $\log_a x$ es por definición la inversa de la función a^x, y que está definida solo para $a > 0$, $a \neq 1$. De este modo, denotando $f(x) = a^x$, la ecuación se puede escribir como $f(x) = f^{-1}(x)$, o equivalentemente,

$$f(f(x)) = x.$$

Además, la función f es creciente para $a > 1$ y decreciente para $a < 1$.

A continuación demostraremos que si f es una función monótona, entonces los puntos fijos de $f \circ f$ son exactamente los puntos fijos de f, es decir, que si f es monótona y $f(f(x)) = x$, entonces $f(x) = x$.

Supongamos $f(x) < x$ y f creciente, y veamos que $f(f(x)) < x$. Sea $I = (a, b)$ el máximo intervalo que contiene x y que cumple $f(y) < y$ para todo $y \in I$ (puede ser $a = -\infty$ y/o $b = +\infty$). Si $a > -\infty$, entonces $f(a) \geq a$ (por definición de I) y, como f es creciente, tenemos que $a < x$ implica $a \leq f(a) < f(x)$. Análogamente, si $b < +\infty$, entonces $f(x) < b$, y por lo tanto, tendremos que $f(x) \in I$, y por definición de I, $f(f(x)) < f(x)$, de donde $f(f(x)) < x$. De la misma forma, se demuestra que si f es creciente y $f(x) > x$, entonces $f(f(x)) > x$, y lo mismo para f decreciente.

De este modo, el número de soluciones de la ecuación $f(f(x)) = x$ es el mismo que el de soluciones de $f(x) = x$, por lo que hemos reducido el problema a calcular el número de puntos fijos de la ecuación

$$a^x = x.$$

Definimos la función auxiliar $g(x) = a^x - x$, y notemos que los ceros de g seran los puntos fijos de f.

Si $0 < a < 1$, tendremos que $g(0) = 1 > 0$ y $g(1) = a - 1 < 0$, y por el Teorema de Bolzano g tiene un cero en $(0, 1)$. Además, tendremos que $g'(x) = a^x \ln a - 1 < 0$ y por el Teorema de Rolle la función no podrá tener más de un cero. Por lo tanto, si $0 < a < 1$ el número de soluciones de la ecuación es 1, y dicha solución se encuentra en el intervalo $(0, 1)$.

Si $a > 1$, entonces $g'(x) = a^x \ln a - 1$ y $g''(x) = a^x \ln^2 a > 0$. Como la derivada segunda no se anula en ningun punto, entonces aplicando el Teorema de Rolle dos veces obtenemos que g tiene a lo sumo dos ceros. Como

$$\lim_{x \to \pm\infty} g(x) = +\infty,$$

el mínimo absoluto de g se encuentra en el punto donde la derivada vale cero, es decir, $x_{min} = -\ln \ln a / \ln a$. La función g tendrá uno, dos o ningun cero dependiendo de si este mínimo absoluto es cero, negativo o positivo, respectivamente. Como

$$g(x_{min}) = \frac{1}{\ln a} + \frac{\ln \ln a}{\ln a} = \frac{\ln(e \ln a)}{\ln a},$$

entonces el signo de este mínimo será positivo si $\ln a > e$, negativo si $\ln a < e$ y cero si $\ln a = e$, así que finalmente tendremos que la función f tiene dos puntos fijos si $1 < a < e^{1/e}$, un punto fijo si $a = e^{1/e}$, y ningun punto fijo si $a > e^{1/e}$.

RESEÑA BREVE DE TRES LIBROS RECIENTES

C. Alsina & R. Nelsen, "Charming Proofs (A Journey into Elegant Mathematics", Dolciani Mathematical Expositions # 42, Mathematica Association of America, 2010.

La fecunda colaboración entre Alsina y Nelsen (han publicado, con éste, por lo menos tres libros juntos) ha dado, en este caso, un libro a mi entender indispensable en la biblioteca de cualquier profesor, sea del nivel que sea.

El adjetivo "elegante", aplicado a una demostración o una solución es, lógicamente, subjetivo, porque entre otras cosas depende de las fuentes que los autores hayan podido consultar, pero el título es sin duda apropiado. Todas las soluciones y demostraciones han sido cuidadosamente seleccionadas para formar un verdadero ramillete de ejemplos brillantes de las Matemáticas. No me resisto a reproducir la dedicatoria: *Dedicado a nuestros muchos estudiantes, con la esperanza de que hayan disfrutado de la belleza de las matemáticas, y que (quizá inconscientemente) nos han inspirado a escribir este libro.*

Le Hai Chau & Le Hai Khoi, "Selected problems of the VietnameseMathematical Olympiad (1969 – 2009)"; Mathematical Olympiad Series, vol. 5; World Scientific, Singapore, 2010.

Los excelentes resultados obtenidos por VietNam en la I.M.O. hacían largamente esperado un libro como éste. En su primer capítulo, titulado *The Gifted Students*, se da amplia información sobre la Olimpiada vietnamita, el sistema educativo de ese país, los centros de excelencia para los buenos estudiantes y la participación en la Olimpiada Internacional. Después de unos conceptos básicos, se desarrollan 230 problemas de la Olimpiada de VietNam, con sus soluciones, distribuidos de la manera siguiente: 63 de Álgebra, 62 de Análisis, 42 de Teoría de Números, 15 de Combinatoria y 48 de Geometría. Dicen los autores: *Debe observarse que los problemas presentados en este libro son de un nivel de dificultad moderado. En el futuro esperamos publicar otro libro con problemas de la Olimpiada de VietNam verdaderamente difíciles.*

Ante esta "confesión de parte", hay que reconocer que el concepto de nivel de dificultad en el extremo Oriente es muy diferente del que se tiene aquí, en el Suroeste de Europa. Claro que los niveles de exigencia a los estudiantes en uno y otro lado tampoco tienen nada que ver…

Elijo al azar uno de los problemas, del año 2003, y de los que se proponen como "de serie B", para estudiantes de las ciudades pequeñas y de las áreas rurales:

Dado el número real $\alpha \neq 0$, se define la sucesión (x_n) mediante

$$x_1 = 0; \quad x_{n+1}(x_n + \alpha) = \alpha + 1, \quad \forall n \geq 1$$

1) *Encontrar una fórmula general en función de n para el término general de la sucesión.*

2) *Demostrar que es convergente y calcular su límite.*

Debo decir que estoy expectante ante los anunciados en el futuro próximo *problemas verdaderamente difíciles.*

Bruce Shawyer, "Explorations in Geometry"; World Scientific, Singapore, 2010.

Los suscriptores de CRUX MATHEMATICORUM acabamos de recibir, en papel, el número de octubre de 2010 de la revista. En él aparece un comentario más extenso que éste sobre el libro de referencia, a cargo de J. Chris Fisher, de la Universidad de Regina (Saskatchewan, Canadá Central). Dicen que no hay peor cuña que la de la misma madera (Shawyer es Profesor emérito de la Universidad de Terranova).

El libro contiene un elevado número de problemas interesantes de geometría euclídea y se supone dirigido a estudiantes del primer año universitario y de Olimpiadas. Las notas teóricas que figuran al principio son objeto de aceradas críticas por parte de Fisher, sobre todo por la falta de detalles en las demostraciones de algunas proposiciones importantes. Por otro lado, es un libro con un alto número de erratas de imprenta, algo impensable si se tiene en cuenta que la editorial es la misma que hace ya muchos años publicó uno de los mejores libros de Combinatoria, *Principles and Techniques in Combinatorics, de Chen y Koh (1992).* Pero, pese a todo, el libro de Shawyer es interesante y conviene tenerlo en nuestra biblioteca.

Valladolid, 24 de enero de 2011

Francisco Bellot Rosado

SOBRE LA REGLA DE RUFFINI

Una breve nota tomada del libro *Higher Algebra,* de Barnard y Child (MacMillan 1936)

Francisco Bellot Rosado

En el tercer capítulo del libro mencionado, además de la regla de Ruffini en el sentido clásico, se ofrecen algunas generalizaciones de interés.

1)Para dividir un polinomio $A(x)$ por $ax-b$:

Se halla el cociente Q y el resto R de la división de $A(x)$ por $x-\frac{b}{a}$; *entonces $\frac{Q}{a}$ y R son, respectivamente, el cociente y el resto buscados.*

En efecto, se tiene

$$A(x)=\left(x-\frac{b}{a}\right)Q(x)+R=(ax-b)\frac{Q(x)}{a}+R.$$

Ejemplo:

Dividir x^3+2x^2-3x-4 por $2x-1$:

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & 2 & -3 & -4 \\ \frac{1}{2}) & & \frac{1}{2} & \frac{5}{4} & -\frac{7}{8} \\ - & - & - & - & - \\ & 1 & \frac{5}{2} & -\frac{7}{4} & -\frac{39}{8} \end{array}$$

Entonces el cociente buscado es

$$\frac{1}{2}\left(x^2+\frac{5}{2}x-\frac{7}{4}\right)$$

y el resto, $-\frac{39}{8}$.

2) Si el divisor es de segundo grado, o mayor, el proceso a seguir es el siguiente:

Supongamos que se quiere dividir $4x^4+3x^3+x-1$ por x^2-2x+3.

Lo primero que se hace es escribir el divisor en la forma $x^2-(2x-3)$.

$$\begin{array}{ccccccc} & 4 & 3 & 0 & 1 & -1 & \\ & & & -12 & -33 & -30 & (a) \\ 2,-3) & & 8 & +22 & +20 & & (b) \\ - & - & - & - & - & - & - \\ & 4 & 11 & 10 & -12 & -31 & (c) \end{array}$$

El primer término de la fila (c) es 4; $4(2-3)=8-12$; se pone 8 en la fila (b) y -12 en (a); 8+3 = 11; $11(2-3)=22-33$; se pone 22 en (b) y -33 en (a); y así sucesivamente.

Se puede comparar la regla con el método de la división "con caja", para justificarlo.

El cociente es $4x^2+11x+10$ y el resto $-12x-31$.

3) Expresar $f(x) = 4x^4 + 3x^3 + x - 1$ en la forma

$$a\left(x^2 - 2x + 3\right)^2 + (bx + c)\left(x^2 - 2x + 3\right) + dx + e,$$

donde a, b, c, d, e son constantes.

Se divide, como en 2), $f(x)$ por $x^2 - 2x + 3$. El cociente es $4x^2 + 11x + 10$ y el resto $-12x - 31$.

A continuación se divide $4x^2 + 11x + 10$ por $x^2 - 2x + 3$:

$$\begin{array}{cccc}
 & 4 & 11 & 10 \\
 & & & -12 \\
(2-3) & & 8 & \\
- & - & - & - \\
 & 4 & 19 & -2
\end{array}$$

El cociente es 4 y el resto $19x - 2$.Entonces

$$4x^4 + 3x^3 + x - 1 = 4\left(x^2 - 2x + 3\right)^2 + (19x - 2)\left(x^2 - 2x + 3\right) - 12x - 31.$$

El libro de Barnard y Child es la única fuente donde he encontrado estos trucos algebraicos. Actualmente, los programas de cálculo simbólico realizan estas operaciones con bastante rapidez.

Número

42

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

ISSN 1698-677X

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

Número 42 (marzo 2011 – junio 2011)

ISSN – 1698-277X

ÍNDICE

Presentamos soluciones a los problemas 21 y 38, que permanecían abiertos, de Roberto Bosch Cabrera, Florida (U.S.A.), al tiempo que le pedimos excusas por no habernos hecho eco de sus soluciones cuando publicamos las de estos problemas que permanecían abiertos.

Presentamos una solución al problema 144, de Saturnino Campo Ruiz (Salamanca, España), que por alguna razón no había llegado al editor, por lo que le pedimos excusas al Prof. Campo.

Recibida una solución al problema 197, por Raúl A. Simón Elexpuru (Chile), una vez publicado el número correspondiente.

Problema 201

Recibidas soluciones de: Miguel Amengual Covas, Cala Figuera, España; Saturnino Campo Ruiz, Salamanca, España; Gabriel Alexander Chicas Reyes, El Salvador; Pedro Luis Clavería Vila, Zaragoza, España; Mariela Lilibeth Herrera Ruiz, Maracay, Venezuela; Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, España; Cristóbal Sánchez-Rubio García, Benicasim, España; y el proponente, todas muy similares. Presentamos la solución de Chica Reyes.

Problema 202

Recibidas soluciones muy similares de: Roberto Bosch Cabrera, Florida, USA; Gabriel Alexander Chicas Reyes, El Salvador; Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, España; Jorge Mozo Fernández, Valladolid, España; Bruno Salgueiro Fanego, Vivero, España; Cristóbal Sánchez-Rubio García, Benicasim, España; y el proponente. Presentamos la solución de Bosch Cabrera.

Problema 203

Recibidas soluciones de: Roberto Bosch Cabrera, Florida, USA; José Hernández Santiago, Oaxaca, México; Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, España; Joaquín Rivero Rodríguez, Zalamea de la Serena, España; Bruno Salgueiro Fanego, Vivero, España; Jorge Tipe Villanueva, Lima, Perú; y el proponente. Presentamos las soluciones de Lasaosa, Rivero, Salgueiro y Tipe.

Problema 204

Recibidas soluciones de : Roberto Bosch Cabrera, Florida, USA; José Hernández Santiago, Oaxaca, México; Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, España; Joaquín Rivero Rodríguez, Zalamea de la Serena, España; Bruno Salgueiro Fanego, Vivero, España; Cristóbal Sánchez Rubio, Benicasim, España; y el proponente. Presentamos las soluciones de Lasaosa y Salgueiro.

Problema 205

Recibidas soluciones de: Miguel Amengual Covas, Cala Figuera, España; Roberto Bosch Cabrera, Florida, USA; Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, España; Ricard Peiró, Valencia, España; Bruno Salgueiro Fanego, Vivero, España; Cristóbal Sánchez-Rubio García, Benicasim, España; y el proponente. Presentamos la solución de Sánchez-Rubio

Comentario de páginas web y de libros publicados, y noticias de congresos 42

Comentario al libro de Mª Victoria Veguin Casas *Historia de las Matemáticas en la Península Ibérica (desde la Prehistoria al siglo XV),* ed. Reverté, 2011.

Divertimentos matemáticos 42

El teatro como herramienta didáctica: *La rebelión de los números,* de Antonio de la Fuente Arjona.

Cartas al editor

Las opiniones recogidas en esta sección son, evidentemente, de la exclusiva responsabilidad de sus autores. Nos hacemos eco de ellas cuando el editor considera que tienen alguna relevancia o suponen una aclaración importante en cuestiones tan controvertidas como la primera autoría o publicación de algún resultado.

Sobre el artículo *Una prueba elemental del teorema de Pascal (REOIM nº 39)* ; comentario del Prof. Lucas Martín Andisco, Mar del Plata, Argentina.

Desarrollada en el Centro de Altos Estudios Universitarios de la OEI con el apoyo de la Agencia Española de Cooperación Internacional para el Desarrollo (AECID)

Editor: Francisco Bellot Rosado

Acceder

http://www.oei.es/oim/revistaoim/numero42.htm

Curso iberoamericano de formación de profesores de secundaria en el área de matemáticas Ñandutí

El curso está dirigido al profesorado de Enseñanza Secundaria en ejercicio de cualquiera de los países iberoamericanos. Cualquier docente de este nivel puede solicitar participar. No es necesario ningún tipo de requisito previo salvo el impartir docencia en ese nivel que acreditará cuando se le solicite. Tampoco es necesario poseer una formación previa en el manejo de los medios informáticos porque, precisamente, uno de los objetivos del curso es proporcionar esos conocimientos a quienes estén dispuestos a formarse para la utilización de esos recursos. En este sentido, habrá una unidad cero cuyo contenido va en esa línea.

http://www.oei.es/cursomatematica/

Abel y las Ecuaciones Integrales

José Manuel Sánchez Muñoz

6 de mayo de 2011

Resumen

El nombre de Niels Henrik Abel tiene un lugar privilegiado en el Olimpo Matemático, al lado de nombres como Newton, Euler, Gauss, Cauchy o Riemann. A lo largo de su corta vida, realizó numerosas contribuciones matemáticas tan importantes como significativas. Aunque sus estudios se centraron fundamentalmente en el álgebra y el cálculo integral, su nombre será siempre asociado a algunas ramas del análisis, particularmente a la teoría de las ecuaciones integrales, cuyo desarrollo sistemático llevaron a cabo Volterra, Fredholm y Hilbert setenta años después de sus descubrimientos.

Palabras Clave: Ecuaciones Integrales, Abel, Funciones Trascendentes, Quíntica.

1. Introducción

Ofrecemos a nuestro lector una traducción de un artículo llamado *"Auflösung einer mechanischen Aufgabe"* que Abel publicó en el *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (Crelle), Vol. I, 1826, pp. 153–157; *Oeuvres Complètes, Nouvelle édition par L. Sylow et S. Lie*, Vol. I, 1881, pp. 97–101. Se trata de una versión revisada y mejorada de unos estudios anteriores con el nombre de *"Solution de quelques problèmes a l'aide d'intégrales définies", Magazin for Naturvidenskaberne, Aargang I, Bind 2, Christiania, 1823; Oeuvres Complètes.* Vol. I, pp. 11–18.

Abel resolvió el famoso problema de la curva tautócrona mediante su reducción a una ecuación integral que desde entonces lleva su nombre. Su elegante solución necesita de una ligera modificación para ser presentada de una forma moderna. Esta solución y las fórmulas

$$\phi(x) = \int_0^\infty dq\, f(q) \cos qx, \qquad f(q) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dx\, \phi(x) \cos qx$$

dadas por Fourier[1] son quizás los primeros ejemplos de la expresión implícita de una función desconocida de una ecuación en la que esta función aparece en

[1] *"Théorie de mouvement de la chaleur les corps solides" Mémoires de l'Académie royale des sciences de l'Institut de France*, Vol. 4, 1819–1820 (publicado en 1824) pp. 185–555 (489). Esta memoria fue presentada por Fourier en 1811 y fue premiada en 1812.

forma integral. Una ecuación que puede ser reducida a la que Abel dio, fue dada casi de forma simultánea por Poisson[2], sin solución. Gracias a la ecuación de Abel y a otras ecuaciones integrales análogas existe ahora un amplia bibliografía sobre el tema, relacionada estrechamente con los conceptos de integrales y derivadas de orden no entero[3] sugeridos por primera vez por Leibniz (1695) y Euler[4]; el concepto fue desarrollado posteriormente por Liouville y Riemann[5], y en la actualidad hay aplicaciones muy importantes a varios problemas de análisis puro y aplicado.

2. Niels Henrik Abel (1802-1829)

Sobre la vida y obra de Niels Henrik Abel se ha escrito una gran cantidad de bibliografía. Casi toda, por no decir la totalidad, coincide en una misma afirmación, que Abel ha sido el matemático escandinavo más brillante de la historia. Su vida presenta todos los ingredientes de un melodrama; la pobreza de un genio que muere consumido en su barrio natal, mientras que egoístas académicos le niegan un lugar privilegiado entre ellos que tanto necesitaba y merecía. Desafortunadamente, éstos mismos académicos sólo fueron capaces de rectificar la injusticia cometida con él cuando ya era demasiado tarde, el cuerpo y el genio de Abel se habían ido apagando poco a poco, víctimas de la incomprensión y la tuberculosis.

Niels Henrik Abel

Søren Georg Abel, párroco luterano de una pequeña isla de la ciudad de Stavenger llamada Finnøy, en la costa sudoccidental noruega, era un ambicioso teólogo educado en la Universidad de Copenhage; su mujer, Anne Marie Simonsen, era la hija de Niels Henrik Saxild Simonsen, un mercader de Risør, dueño de una flota de barcos. Su segundo hijo Niels Henrik, nació el 5 de Agosto de 1802.

Iglesia de Gjerstad. Foto tomada en torno a 1890-1895

[2] *"Second Mémoire sur la distribution de la chaleur dans les corps solides"*, *Journal de l'Ecole Polytechnique*, Cahier 19, Vol. 12, 1823, pp. 249–403 (299).

[3] Existe toda una rama del análisis denominada Cálculo Fraccional.

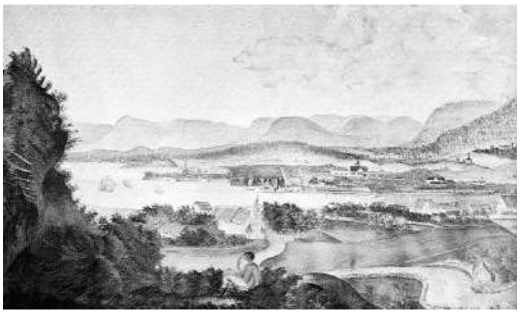
[4] Leibniz, *Mathematische Schriften, herausgegeben* de C.I. Gerhardt, Halle, Vol.3, 1855 (cartas de Johan Bernoulli), Vol. 4, 1859 (cartas a Wallis).

L. Euler, *"De progressionibus trascendentibus seu quarum termini generales algebraice dari nequeunt"*, *Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae*, Vol. 5, 1730-1731, pp. 36–57 (55–57); Opera Omnia (1)14, pp. 1–25 (23–25).

[5] J. Liouville, *"Mémoire sur quelques questions de géometrie et de mécanique, et sur un nouveau genre de calcul pour résoudre ces questions"*, *Journal de l'Ecole Polytechnique,* Cahier 21, Vol. 13, 1832, pp. 1–69; *"Mémoire sur le calcul des différentielles a l'indices quelconques"*, *ibidem*, pp. 71–162.

B. Riemann, *"Versuch einer allgemeinen Auffassung der Integration und Differentiation"*, *Werke,* 2nd edition, 1892, pp. 353–366.

Fue el segundo de siete hermanos (seis niños y una niña). Cuando Niels tenía sólo un año de edad, su padre fue designado pastor de un lugar llamado Gjerstad cerca de Risør. Aquellos primeros años fueron tiempos difíciles, dado que Noruega pasaba por un época crítica para su desarrollo político y económico. En el país dominaba la pobreza, el hambre, y la carestía. Antes en 1789 había comenzado la Revolución francesa, y años más tarde, el gran conquistador Napoleón en el apogeo máximo de su poder e influencia sobre Europa, había forzado a Noruega a la unión política con Dinamarca, y aunque ambas naciones pretendieron ser neutrales en el transcurso de las guerras que se desencadenaron, sufrieron un fuerte ataque naval de Inglaterra en Copenhague (1801), y un bloqueo de la costa noruega en 1807, además de tener que afrontar posteriormente un enfrentamiento militar con Suecia (1813). Tras las guerras napoleónicas, dado que los noruegos habían realizado varios intentos de independizarse de Suecia sin éxito, su padre, un profundo nacionalista, y habida cuenta de su actividad política , fue considerado para ser elegido miembro en el cuerpo legislativo del Storting o Parlamento Noruego, encargado en 1814 de reescribir la constitución noruega con el fin de disolver la unión con Dinamarca y pactar la anexión a Suecia.



Cristianía en julio de 1814
Pintura de Margrethe Kristine Tholstrup

Unos años antes, Søren había llevado a cabo varias campañas eficaces, como la fundación de la primera Universidad noruega en Cristianía (actual Oslo) que tuvo lugar en 1811, la cual se pudo crear al proveerse de un cuerpo docente constituido por los mejores maestros de la Escuela Catedralicia de Cristianía (existente desde la Edad Media), inaugurando la docencia universitaria en 1813. Pero Noruega estaba inmersa en una profunda crisis, y el padre de Abel fue incapaz de resolver la precaria situación familiar, por lo que difícilmente pudo lograr escolarizar a su primogénito y a Niels Henrik.

Bernt Michael Holmboe

A la edad de trece años, en 1815, su hijo Niels ingresaría a duras penas en la Escuela Catedralicia de Cristianía, en la moderna ciudad de Oslo. La escuela tenía una inmejorable reputación, pero acababa de perder a parte de sus mejores profesores que se habían mudado a la Universidad Real Frederik, lo que provocó que parte del entusiasmo intelectual de los alumnos de la Catedralicia se viera pronto frenado. Al principio de su instrucción, Abel se mostraría como un estudiante indiferente, más bien mediocre y sin que ni siquiera las matemáticas le despertaran atracción alguna. Sin embargo, afortunadamente, se produjo un inesperado cambio en su actitud tras la muerte de un condiscípulo suyo ante los malos tratos recibidos por un maestro brutal que se excedía con métodos pedagógicos mediante castigos corporales a sus alumnos. El maestro fue entonces relevado (1818) por un joven aunque capacitado profesor matemático llamado Bernt Michael Holmboe (1795-1850), quien inició su misión motivando a sus alumnos para que resolvieran por sí mismos algunos problemas de álgebra y geometría. Supo así vislumbrar entonces el gran potencial de Abel, teniendo que escoger cuestiones especiales para él, a la vista de su enorme capacidad. Según coinciden varios historiadores, es en aquel momento crucial de la vida de Abel, cuando *"se consagra a las matemáticas con la pasión más ardiente"*, adquiriendo rápidamente un pleno conocimiento de las matemáticas elementales.

Bajo las enseñanzas de Holmboe, el joven Abel comenzó a familiarizarse con trabajos de mayor nivel como los de L. Euler (1707-1803) sobre el cálculo (obras que fueron textos universitarios durante más de cien años)[6], Lagrange y Laplace. Registros Bibliotecarios, acreditan que durante su primer año universitario, Abel había solicitado en préstamo, la *Arithmetica Universalis* y *Principia Mathematica* de I. Newton, *Disquisitiones Arithmmeticae* de C. F. Gauss, o *Calcul de fonctions* de J. L. Lagrange entre otras obras de grandes maestros. Años más tarde le preguntaron cómo pudo situarse tan rápidamente en primera fila, a lo que Abel replicó:

> *"...estudiando a los maestros, no a sus discípulos."*

En esta época, la carrera política del padre de Abel acababa de forma inesperada y trágica en Septiembre de 1818, expulsado del Parlamento debido a falsas acusaciones contra algunos de sus colegas. Inmerso en una profunda depresión, Søren se había refugiado en la bebida como válvula de escape a sus problemas lo que le hizo enfermar gravemente. El padre de Abel fallecía sólo dos años después en 1820. En su funeral, su viuda Anne Marie Abel bebió en exceso y se fue a la cama con uno de sus sirvientes a la vista de todos los asistentes al acto. Esta pérdida sumiría a la familia en una situación crítica, recayendo sobre Abel una gran responsabilidad para su sustento, ya que su hermano mayor estaba incapacitado para trabajar por enfermedad. Su madre cayó en una profunda depresión difícil de superar lo que la hizo convertirse en una alcohólica.

Niels Henrik Abel (retrato original)
Este es el único retrato de Abel que se hizo en vida. Se trata de un grabado realizado por Johan Gørbitz en otoño de 1826 durante su estancia en París. ©Matematisk Institutt, Universidad de Oslo.

En 1821, a pesar de la precaria situación en la que vivían él y su familia, Abel logra ser matriculado en la Universidad Real Frederik y en atención a

[6]A los 16 años, Abel generalizó el teorema del binomio formulado por Isaac Newton (y extendido luego a los números racionales por Euler), dando una prueba válida, no sólo para números enteros y racionales, sino también para los casos de exponentes irrarionales e imaginarios.

una solicitud tramitada por su mentor Holmboe, se le concede a Abel con carácter excepcional, alojamiento gratuito y una modesta aportación monetaria para pequeños gastos (parte de la misma sufragada particularmente por el propio Holmboe). En aquel entorno universitario y en su ciudad, Abel ya estaba reconocido como un genio sobre el que sus profesores comenzaban a depositar grandes esperanzas desde el punto de vista científico.


Antigua Universidad de Cristianía (en el actual Oslo)

Durante su último año en la universidad, cuando sólo tenía veinte años, Abel comenzó a atacar el viejo problema de encontrar la solución de la ecuación general quíntica mediante operaciones algebraicas. En términos concretos, se trataba de encontrar la solución mediante radicales de la ecuación general de quinto grado $ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0$; es decir, hallar una fórmula que exprese sus raíces en términos de coeficientes a, b, c, d, e y f dados, de modo que sólo incluya un número finito de las operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división y extracción de raíces. Abel no sólo estuvo al tanto de los trabajos desarrollados por Cardano y Bombelli para las ecuaciones cúbica y cuártica, sino que conocía muy bien la problemática pendiente, estimulado por el trabajo de algunos maestros como Lagrange y su obra *"Réflexions sur la résolution algébrique des équations"* (1770)[7] donde había reconsiderado críticamente los métodos y fracasos de todas las tentativas de búsqueda de soluciones para las ecuaciones algebraicas. Paolo Ruffini (1765-1822) en 1813 intentó probar la imposibilidad de la resolución algebraica de la ecuación general de grado $n > 4$. Había tenido éxito en demostrar haciendo uso del método de Lagrange que no existe ninguna ecuación *resolvente*[8] que satisfaga una ecuación de grado menor que cinco. Ruffini hizo uso, aunque sin demostrarlo, de un teorema ya hoy conocido como el teorema de Abel, en el que se afirma que si una ecuación es resoluble con el uso de radicales, las expresiones para las raíces pueden darse de tal forma que los radicales en ellas sean funciones racionales con coeficientes racionales de las raíces de la ecuación dada y las raíces de la unidad. A pesar de todo, no se pudo lograr una fundamentación completa. En trabajos posteriores, formularía una regla de cálculo aproximado de raíces. El primer triunfo real del problema corresponde a Abel quien, al parecer, independientemente de Ruffini, anduvo por el mismo camino. Al igual que otros que habían considerado erróneamente resolver el problema antes que él, Abel creyó en un principio haber descubierto la resolución del problema de la quíntica; sin embargo, a la vista de que ni Holmboe ni ninguno de los mejo-

[7] Este trabajo influyó tanto en Ruffini como en Abel para el caso $n > 4$ y también condujo a Galois a su *Teoría de Grupos*. Debe añadirse que Abel tuvo conocimiento de Ruffini por una referencia que de éste realizó Cauchy en su trabajo de 1815.

[8] El término *resolvente* (del latín *aequatio resolvens* significa ecuación que resuelve. Los referidos intentos de resolución eran equivalentes al establecimiento de la teoría algebraica de la *resolvente*, es decir, el hallazgo de otra ecuación algebraica de grado menor (en general) cuyos coeficientes sean funciones racionales de los coeficientes de la ecuación de partida, y tal que aquella permita hallar las raíces de esta última.

res matemáticos de Noruega (Christopher Hansteen, Søren Rasmussen,...) pudieron comprobar la veracidad de su conjetura, envió a través de Holmboe la presunta resolución al matemático profesor Ferdinand Degen en Copenhague, para que la presentase a la Real Sociedad de Ciencias de Dinamarca. Degen le contestó requiriéndole algún ejemplo numérico, y sin comprometerse a dar su opinión. Esa respuesta contenía la advertencia de que "estudiara las integrales elípticas"[9]. Fue entonces cuando Abel se puso a trabajar en la búsqueda de ejemplos, hallando más tarde un error en su razonamiento, lo que le suscitó su primera gran decepción, aunque este hecho le motivaría para reconducir su estrategia en la dirección correcta. Abel se dio cuenta de que su estrategia no era la adecuada y no había tenido éxito en su empresa y aparcó de momento el problema de la quíntica. Fue entonces cuando centró su atención y sus energías en las integrales elípticas y se dio cuenta de que las funciones inversas de las integrales elípticas, esto es las funciones elípticas, tenían propiedades muy interesantes.

Con respecto a sus gustos, aficiones y carácter, Abel mostraba un gran interés por el teatro, pero nulo por la música. A veces mostraba un espíritu impetuoso, mientras que otras entraba en profundas depresiones; todo esto sugiere que sufría cambios de humor con tendencias maníaco depresivas. Era muy modesto y aparentemente amable, y siempre estaba dispuesto a ayudar a sus amigos cuando fuera necesario. Abel no ofrecía nada notable en su aspecto general. Era de estatura media, complexión delicada y ojos azul claro, y vestía siempre con un atuendo simple y descuidado. Quizás lo único destacable de su carácter era que no resultaba ser una persona demasiado extrovertida. En 1822 conseguiría la graduación.

Residencia de estudiantes en Oslo

Durante su estancia en la Universidad, fueron los propios profesores quienes le ayudaron a su manutención. Abel había encontrado en cierto modo una acogida lo más similar posible a un ambiente familiar en la casa del científico, explorador, catedrático de Oslo y profesor de Astronomía Christopher Hansteen, quien le había dado un techo en una habitación del ático de su vivienda, y consideraba a su esposa como una segunda madre, ya que ésta cuidó de él como si de un hijo se tratara, y en estos años difíciles le ayudó enormemente. Abel publicó su primer artículo en una revista de Ciencias Naturales (*Magazin for Naturvidenskaben*) impresa en Noruega, y de la que Hansteen era uno de sus editores. Se publicaron algunos breves trabajos de Abel, pero pronto se comprobó que aquel material que Abel presentaba no era muy común. En 1823, escribió un ensayo en francés titulado "*Solution*

[9]Esto hizo que Abel se iniciara en la que sería su segunda contribución fundamental para las matemáticas, que le condujo a su famosa memoria de París y su posterior competición con Jacobi.

de quelques problèmes a l'aide d'intégrales définies", aparece por primera vez el planteamiento y la solución de una ecuación integral. Buscó financiación en la Universidad para poder publicarlo, sin embargo el trabajo se perdió mientras estaba siendo revisado.

Al contrario que Noruega, Dinamarca contaba con una buena escuela de matemáticas. Por ello en el verano de 1823, con la edad de veintiún años, y a instancias de su benefactor Hansteen, el profesor Rasmussen concedió a Abel una modesta beca de 100 *speciedaler*[10](propulsada con la ayuda de profesores de la Universidad) para visitar a Ferdinand Degen o von Schmidten entre otros célebres matemáticos daneses en Copenhague. Una vez allí, Abel realizó algunos estudios acerca del último teorema de Fermat. El tío de Abel, Peder Mandrup Tuxen, trabajaba en la base naval de Christianshavn, en Copenhague,donde conoció a una joven llamada Christine Kemp, hija de un comisario de guerra en Dinamarca, con quien entabló una relación sentimiental. Se dice de ella que no era especialmente bella, pero gozaba de un excepcional buen carácter. En 1824, Christine se mudaría a Son en Noruega donde trabajó como institutriz para estar cerca de su novio, y en las navidades de ese mismo año se prometerían.

Christine Kemp, retrato de Johan Gørbitz, 1835

Tras su retorno de Copenhague, Abel retomó nuevamente el problema de la ecuación quíntica. Ya a finales de 1823, fue capaz de demostrar correctamente que en general, ésta no podía ser resuelta mediante radicales, resultado ampliado más tarde por Galois a las ecuaciones de grado mayor. Publicó su primera demostración en 1824 en una memoria que comenzaba así:

> *"Los geómetras se han ocupado mucho de la solución general de las ecuaciones algebraicas y varios de ellos trataron de probar la imposibilidad. Pero, si no estoy equivocado, ellos no han tenido éxito hasta el presente."*

y seguía,

> *"Uno de los problemas más interesantes del Álgebra es el de la solución algebraica de las ecuaciones, y observamos que casi todos los matemáticos distinguidos se han ocupado de este tema. Llegamos sin dificultad a la expresión de las raíces de las ecuaciones de los cuatro primeros grados en función de sus coeficientes. Fue descubierto un método uniforme para resolver estas ecuaciones, y se creyó sería aplicable a las ecuaciones de cualquier grado, pero, a pesar de todos los esfuerzos de Lagrange y de otros distinguidos matemáticos, el fin propuesto no fue alcanzado. Esto llevó a la creencia de que la solución de las ecuaciones generales era algebraicamente imposible; pero esta creencia no podía ser comprobada, dado que el método seguido sólo llevaba a conclusiones decisivas en los casos en que las ecuaciones eran solubles. En efecto, los matemáticos se proponían resolver ecuaciones sin saber si era posible. Así se podía llegar a una solución, pero*

[10]Moneda Noruega en circulación entre 1816 y 1875. Más tarde sería sustituida por el *rigsdaler specie*, y este a su vez por la corona noruega. Al cambio 1 corona noruega = $^1/_4$ *speciedaler*.

si por desgracia la solución era imposible, podríamos buscarla durante una eternidad sin encontrarla. Para llegar infaliblemente a una conclusión debemos por tanto seguir otro camino. Podemos dar al problema tal forma que siempre sea posible resolverlo, cosa que podemos hacer con cualquier problema. En lugar de preguntarnos sí existe o no una solución de relación que no nos es conocida, debemos preguntarnos si tal relación es en efecto posible... Cuando se plantea un problema de esta forma, el enunciado contiene el germen de la solución e indica el camino que debe seguirse, y yo creo que habrá pocos ejemplos donde seamos incapaces de llegar a proposiciones de más o menos importancia, hasta cuando la complicación de los cálculos impide una respuesta completa al problema."

Abel sigue diciendo que debe seguirse el método científico, pero ha sido poco usado debido a la extraordinaria complicación de los cálculos algebraicos que supone.

"Pero en muchos ejemplos esta complicación es sólo aparente y se desvanece en cuanto se aborda."

y añade,

"He tratado de esta forma diversas ramas del Análisis, y aunque muchas veces me he encontrado ante problemas más allá de mi capacidad, he llegado de todos modos a gran número de resultados generales que aclaran la naturaleza de esas cantidades cuya dilucidación es el objeto de las Matemáticas. En otra ocasión mencionaré los resultados a que he llegado en esas investigaciones y el procedimiento que me ha conducido a ellos. En la presente memoria trataré el problema de la solución algebraica de las ecuaciones en toda su generalidad."

Desafortunadamente el resultado de la impresión de este trabajo dejó mucho que desear, fundamentalmente debido a que Abel sólo utilizó seis páginas para ello con el objetivo de ahorrar costes de impresión, lo que le infirió un carácter bastante ecléptico e incluso ilegible en ocasiones. Una versión mucho más elaborada aparecería más tarde en 1826, en el primer volumen del *Journal* de Crelle (del que hablaremos más adelante).

Para entonces el Senado de la Universidad de Cristianía, reconoció la excepcional habilidad de Abel, y decidió que debía ser considerado receptor de una beca para estudiar alemán y francés, y visitar los centros matemáticos más importantes del continente (en Alemania y Francia). Los fondos necesarios provendrían del Estado (200 speciedaler anuales por un periodo de dos años). En agosto de 1825, Abel junto a otros cuatro jóvenes científicos de la universidad (Christian P. B. Boeck, Balthazar M. Keilhau, Nicolay B. Møller and Otto Tank) emprendieron su viaje por las universidades de Francia y Alemania. El plan original consistía en que primeramente Abel debía visitar a Degen en Dinamarca, pero a su llegada encontró que éste ya había fallecido.

En su viaje por tierras germanas, Abel decidió acompañar a sus compañeros que se dirigían a Berlín. Previamente hizo un alto en las proximidades de Hamburgo, en Altona, donde contactó con el astrónomo Heinrich Christian Schumacher (amigo de Gauss). Una vez llegaron a Berlín, decidieron que pasarían allí el invierno. Abel gastó gran parte de sus fondos en Berlín, pero tuvo la gran suerte de que entró en contacto, previa misiva de recomendación de von Schimidten, con August Leopold Crelle (1780-1855), quien se convertiría en un personaje vital en su vida tanto personal como profesional.

Berlín, Heinrich Hintze, 1829

Crelle era un exitoso ingeniero civil que dirigía grandes obras públicas de ferrocarril en Prusia, y gozaba de un mayor peso específico en el mundo matemático que su gran benefactor hasta el momento Holmboe. Nacido en 1780, había desarrollado una temprano interés por las matemáticas, y publicado algunas obras sobre matemáticas aplicada y escolar. En 1826, cuando llegó Abel, Crelle acababa de fundar el *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (Diario sobre matemáticas pura y aplicada), llamado comúnmente *Journal* de Crelle. Este hecho provocó que debido a la emisión regular del diario, Berlín fuera considerada una importante ciudad en el mundo matemático. Aunque su objetivo era cubrir también aspectos formales de matemáticas aplicadas, pronto se centra prácticamente de forma exclusiva en la matemática pura. Crelle sostenía que:

August Leopold Crelle

> *"...las matemáticas puras deberían ser explicadas en primera instancia sin prestar atención a sus aplicaciones. Debería desarrollarse puramente desde y para sí misma, para que sólo de esta manera pueda ser libre para moverse y evolucionar en cualquier dirección. En la enseñanza de las aplicaciones matemáticas, éste es el resultado particular que la gente busca. Serán extremadamente sencillas de encontrar para aquellos que estén científicamente entrenados, y los que hayan captado su espíritu."*

En el prefacio del primer número de su *Journal*, Crelle declaró sus objetivos: no sólo se publicarían nuevos artículos sino que una selección de artículos publicados en otras lenguas serían traducidos al Alemán. El propio Crelle había traducido al alemán el libro de geometría de Legendre y algunos de los trabajos de Lagrange. Pronto, el *Journal* adquirió carácter internacional, gracias a los contactos de Crelle en París entre otros lugares. Tenía un don extraordinario para descubrir jóvenes prometedores matemáticos y animarlos. Los primeros trabajos de Abel, Dirichlet, Eisenstein, Grassmann, Hesse, Jacobi, Kummer, Lobachevski, Möbius, Plücker, von Staudt, Steiner y Weiertrass fueron todos publicados en el *Journal* de Crelle.

Crelle era un hombre de carácter afable y sociable. Después de que Abel lo conociera en Enero de 1826, éste escribió a su antiguo profesor Holmboe:

> *"No puede usted imaginar qué hombre tan excelente es, exactamente tanto como uno mismo debería ser; pensativo y sin embargo terriblemente cortés como multitud de gente, bastante honesto llegado el caso. Cuando me encuentro con él, me siento tan agusto como cuando estoy con usted o con otros buenos amigos."*

Cuando Abel llegó a Berlín, Crelle estaba pensando en lanzarse a esta gran aventura con sus propios medios económicos y Abel tuvo una parte en que tomara la decisión. Existen dos relatos acerca de la primera visita de Abel a Crelle, ambos interesantes. Por aquella época Crelle desempeñaba un cargo del gobierno para el que tenía poca aptitud y menos gusto: el de examinador del Instituto de Industria (Gewerbe-Institut) en Berlín. El relato de Crelle, de tercera mano (Crelle a Weierstrass y éste a Mittag-Leffler), de esta visita histórica es el siguiente:

> *"Un buen día, un joven muy desconcertado, con un rostro juvenil e inteligente, penetró en mi habitación. Creyendo que se trataba de un candidato para ingresar en el Instituto le expliqué que eran necesarios diversos exámenes. Al fin, el joven abrió su boca y dijo en muy mal alemán: ¡No exámenes, sólo Matemáticas!."*

Con los ánimos, el apoyo y la amistad de Crelle, Abel publicó sus trabajos de forma regular en el *Journal*; para entonces Crelle ya se había percatado de que estaba ante un auténtico genio matemático. El primer volumen por sí sólo contenía siete de sus trabajos, y los siguientes volúmenes muchos más la mayoría de ellos de importancia suprema. En total llegó a publicar 22.

La estancia de Abel en Berlín, de unos cinco meses, influyó sobremanera en su vida profesional. Allí leyó el *Analyse Algébrique* de A. L. Cauchy (1789-1857) por quien manifestaría más adelante una gran admiración por el conjunto de sus trabajos. En uno de sus artículos sobre la quíntica, ya Abel había usado resultados de Cauchy sobre permutaciones.

En una carta a Hansteen, Abel habla fundamentalmente de dos temas, el primero la necesidad de inferir al Análisis Matemático un fundamento firme, y el segundo una imagen de su humanidad y optimismo a pesar de todas las contrariedades con las que se había encontrado a lo largo de su vida.

> *"En el análisis superior pocas proposiciones han sido demostradas con un rigor suficiente. En todas partes encontramos el desgraciado procedimiento de razonar desde lo especial a lo general, y es un milagro que esta forma de razonar sólo rara vez nos haya llevado a la paradoja. Es en efecto extraordinariamente interesante buscar la razón de esto. Esta razón, en mi opinión, reside en el hecho de que las funciones que hasta ahora se presentan en el Análisis pueden ser expresadas en su mayor parte por potencias... Cuando*

seguimos un método general ello no es muy difícil [para evitar trampas]; pero tengo que ser muy circunspecto, pues las proposiciones sin prueba rigurosa (es decir sin prueba alguna) se han apoderado de mí en tal grado que constantemente corro el riesgo de usarlas sin nuevo examen. Estas bagatelas aparecerán en el Journal publicado por el Sr. Crelle."

Expresa luego la gratitud a como fue tratado en Berlín.

"Cierto es que pocas personas se interesaron por mí. Pero estas pocas han sido infinitamente cariñosas y amables. Quizá pueda responder en alguna forma a las esperanzas que han puesto en mí, pues es desagradable para un bienhechor ver perderse todos sus esfuerzos."

En la primavera de 1826, era el momento de que Abel se dirigiera a París. Crelle prometió acompañarle e intentar realizar una parada en Gotinga y concertar una visita con Gauss. Desafortunadamente asuntos de negocios impidieron a Crelle dejar Berlín. Previamente Abel había enviado a C. F. Gauss una copia de sus trabajos con la demostración del problema de la quíntica, motivo principal por lo que en el viaje se había planificado hacer un alto en Gotinga para tener una entrevista con él. Cabe destacar la gran decepción y desengaño que sufrió Abel cuando se enteró de la noticia de que Gauss, sin ni siquiera echar un vistazo al breve folleto con la demostración de la resolución de la quíntica por radicales, manifestaba textualmente:

"¡He aquí otra de esas monstruosidades!"

Es claramente evidente que si Gauss se hubiera dignado a enterarse de algunos de los párrafos de la obra, hubiera mostrado otro interés por el trabajo que llegó a sus manos. Quizás no atribuyó la importancia que merecía a la resolubilidad por radicales, y no supo vislumbrar que estaba ante el nacimiento del álgebra moderna, de la que tanto Abel como Galois deben ser considerados los padres naturales. Cuando Abel se enteró de la reacción de Gauss, decidió no visitarlo, no ocultando desde entonces su antipatía por aquél, que manifestaba siempre que encontraba ocasión. Así, Abel llegaría a decir de Gauss:

"Jamás en sus grandes trabajos descubre la idea generadora. Es como el zorro, que con la cola va borrando el camino que sigue, para que nadie pueda ir detrás."

Durante la estancia de Abel en Berlín, surgió un puesto vacante de profesor en su *alma mater*[11] de forma inesperada, pero antes incluso de que Abel conociera este hecho la vacante fue ocupada por su mentor Holmboe. Abel fue considerado demasiado joven e inexperto. Una vez conoció la noticia se sintió terriblemente desdichado, puesto que sería bastante difícil que volviera a surgir una oportunidad similar en bastante tiempo. Quería casarse pero difícilmente podría hacerlo sin una posición asegurada. Quizás el querer resarcirse

[11] *Alma mater* es una expresión procedente de la locución latina, que significa literalmente "madre nutricia" (que alimenta) y que se usa para referirse metafóricamente a una universidad, aludiendo a su función proveedora de alimento intelectual, generalmente para referirse al sitio en donde determinada persona cursa o cursó sus estudios universitarios.

de esta decepción fue el motivo por el que en lugar de encaminarse a París, Abel decidió prolongar su viaje (a todas luces, en perjuicio de su salud y de su carrera, además de tratarse de un viaje que poco tenía que ofrecerle desde el punto de vista científico) para disfrutar en algunas "juergas" con sus compañeros estudiantes, dirigiéndose hacia Venecia y el norte de Italia, para atravesar los Alpes en su ruta hacia la capital francesa. Como justificación, Abel escribiría a Hansteen:

> *"Pensé al principio marchar directamente desde Berlín a París, satisfecho con la promesa de que el Sr. Crelle me acompañaría. Pero el Sr. Crelle tuvo dificultades, y tendré que viajar solo. Estoy constituido de tal modo que no puedo tolerar la soledad. Cuando estoy solo me hallo deprimido, me siento pendenciero, y tengo poca inclinación para el trabajo. Por tanto me he dicho a mí mismo que sería mucho mejor ir con el Sr. Boeck a Viena, y este viaje me parece injustificado por el hecho de que en Viena hay hombres como Litrow, Burg, y otros, todos ellos excelentes matemáticos; añádase también que será la única ocasión en mi vida de hacer este viaje. ¿Hay algo que no sea razonable en este deseo mío de ver algo de la vida del Sur? Puedo trabajar activamente mientras viajo. Una vez en Viena, existe para ir a París, una vía directa por Suiza. ¿Por qué no ver un poco todas estas cosas? ¡Dios mío! también a mí me gustan las bellezas de la naturaleza como a cualquier otro. Este viaje me hará llegar a París dos meses más tarde, esto es todo. Podré rápidamente recuperar el tiempo perdido. ¿No le parece que este viaje me hará mucho bien?."*

Visitaron Leipzig, Freiburgo, Dresden, Praga, Viena, Graz, Trieste, Venecia, Verona, Innsbruck, Lucerna, Zurich, y Basilea. En Freiburgo, visitó a Georg Amadeus Carl Friedrich Naumann y su hermano el matemático August Naumann, y fue aquí donde Abel llevó a cabo descubrimientos interesantes sobre teoría de funciones, sobre todo elípticas e hiperelípticas, y unas clases de funciones que son ahora conocidas como *funciones abelianas*.

París, Seyfert, 1818

Era Julio cuando Abel llegó a París y con la ayuda de su amigo Johan Gørbitz encontró acomodo con una familia pobre pero codiciosa que le proporcionaba dos malas comidas por día y un inmundo aposento a cambio de un elevado alquiler. Había mandado a Berlín la mayoría de sus trabajos para la publicación en el *Journal*, pero se había reservado el que consideraba el más importante para presentarlo en la Acedemia de Ciencias de Francia. El trabajo en cuestión era un teorema sobre funciones trascendentales. Las vacaciones de verano habían comenzado recientemente, por lo que aquellos matemáticos con los que esperaba entrevistarse estaban fuera de la ciudad. Por lo tanto Abel continuó trabajando en su teorema hasta Octubre momento en el que lo finalizó para su presentación en la Academia.

Cuando los profesores regresaron, Abel sintió que éstos eran demasiado inaccesibles, además de que difícilmente le entendían quizás porque su francés no era lo suficientemente fluido. Legendre, cuya principal especialidad eran las integrales elípticas, tuvo su primer encuentro efímero con Abel antes de subir a un carruaje, y sólo tuvo tiempo de saludarle costésmente y presentarle sus excusas pues debía marcharse. Cauchy también lo recibió con su característica descortesía. Abel comentó sobre este encuentro en una carta fechada el 24 de octubre de 1826, dirigida a Holmboe:

> *"Le diré que esta ruidosa capital del continente me ha producido por el momento el efecto de un desierto. Prácticamente no conozco a nadie, a pesar de hallarnos en la más agradable estación cuando todos se hallan en la ciudad ... Hasta ahora he conocido a Sr. Legendre, a Sr. Cauchy y a Sr. Hachette y a algunos matemáticos menos célebres, pero muy capaces: Sr. Saigey, editor del Bulletin des Sciences y Sr. Lejeune-Dirichlet, un prusiano que vino a verme el otro día creyéndome compatriota suyo. Es un matemático de gran penetración. Con Sr. Legendre ha probado la imposibilidad de resolver la ecuación*
>
> $$x^5 + y^5 = z^5$$
>
> *en enteros, y otras cosas importantes. Legendre es un hombre extraordinariamente cortés, pero desafortunadamente tan viejo como las piedras. Cauchy es un excéntrico, y no se puede llegar a ningún lado con él, aunque es el matemático que sabe en estos momentos cómo desarrollar la matemática. Al principio no comprendía prácticamente nada, pero ahora veo algunas cosas con más claridad. Cauchy es extremadamente Católico y fanático. Una cosa muy extraña en un matemático (...). Es el único que se preocupa de las matemáticas puras. Poisson, Fourier, Ampére, trabajan exclusivamente en problemas de magnetismo y en otras materias físicas. Sr. Laplace creo que ahora no escribe nada. Su último trabajo fue un complemento a su teoría de las probabilidades. Muchas veces le veo en el Instituto. Es un buen sujeto(...) Poisson es un hombre bajo con una tripita muy graciosa. Es un agradable camarada y sabe comportarse con dignidad. También Fourier (...) Lacroix es extremadamente viejo. El lunes Sr. Hachette me presentará a varios de estos caballeros. Por otro lado, los franceses no me gustan tanto como los alemanes; los franceses son anormalmente reservados hacia los extranjeros. Es difícil acercarse a ellos. Y no me atrevo a presentar mis pretensiones. Todo el mundo trabaja en sus propios asuntos sin importarle los otros. Todo el mundo quiere enseñar y nadie aprender. El más absoluto egoísmo prevalece por todos los sitios. Lo único que buscan los franceses de los extranjeros son la práctica (...) puede imaginar qué difícil es hacerse notar, especialmente para un principiante (...) He realizado un trabajo sobre ciertas clases de funciones trascendentes, para presentarlo al Instituto (...) He decidido que lo vea Cauchy, pero seguramente ni se dignará a mirarlo. Y me atrevo a decir sin jactancia, que es un buen trabajo. Siento gran curiosidad por conocer el juicio del Instituto."*

Luego cuenta lo que está haciendo, y añade un resumen de sus proyectos no muy optimistas.

"Lamento haber pedido dos años para mis viajes, pues año y medio habrían sido suficientes."

El estudio fue presentado al Secretario de la Academia de Ciencias de París, Joseph Fourier, el 30 de octubre de 1826, para ser publicado en su revista. El trabajo se remitió a Cauchy y Legendre, con Cauchy como responsable principal, para que fuera evaluado. Para aquel entonces, Legendre contaba ya con 74 años, y consideró pobre y difícilmente legible el manuscrito, manifestando:

"...percibimos que la memoria era apenas legible; estaba escrita con una tinta casi blanca y las letras defectuosamente formadas; estuvimos de acuerdo en que el autor debió proporcionarnos una copia más limpia para ser leída."

por lo que confió a Cauchy (con 39 años) para que se encargara del informe, informe que Abel esperaba lleno de esperanza pero que nunca llegaba. Lamentablemente como más tarde se confirmaría, no recibió respuesta en vida sobre el trabajo presentado. Sumergido en su propia tarea, Cauchy quizás no le prestó la atención merecida, tal vez porque vislumbrara en aquel mísero estudiante noruego un pobre diablo con ensoñaciones imposibles o incluso quizás por indiferencia al principiante. Al igual que Legendre, Cauchy extravió y olvidó aquel ensayo del que era depositario. Al parecer, cuando Abel se enteró de que Cauchy no lo había leído, aguardó con paciente resignación el veredicto de la Academia (que nunca recibiría), como así reveló a Holmboe en otra carta:

"Espero todos los días la decisión sobre los trabajos que presenté en el Instituto. Pero los lentos nunca acaban. Legendre y Cauchy fueron los jueces, Cauchy es el principal y Legendre simplemente se deja llevar."

Pero cuando tuvo constancia de que su manuscrito se había extraviado, hizo además otra cosa, redactar de nuevo el principal resultado. El artículo, aún siendo el más profundo de todos sus trabajos, constaba tan sólo de dos breves páginas. Abel lo llamó estrictamente teorema; no tenía introducción alguna, ni contenía observaciones superfluas, ni aplicaciones.

Como hemos comentado antes, Holmboe había sido contratado como profesor de la Universidad de Oslo. Holmboe no quería el puesto, pensando en que Abel era verdaderamente merecedor de él, pero lamentablemente no tuvo elección, ya que la Universidad de Oslo no podía aguardar la decisión, y en caso de no contestar (Abel para entonces se encontraba en Berlín), se lo ofrecerían a otro candidato. Desafortunadamente este hecho significó la imposibilidad de que Abel pudiera ocupar un puesto apropiado regular en la enseñanza superior de matemáticos.

Después del tiempo transcurrido en Berlín con Crelle, Abel se había cargado de deudas y, aunque su colega y amigo quiso que volviera a Berlín con algunas ofertas para intentar retenerle, una vez agotado incluso el préstamo de Holmboe, Abel quería volver a casa. Sobre todo porque la situación familiar, especialmente la de sus hermanos, era ya desesperada.

En una carta, Abel expresa su necesidad de abandonar la Europa Continental, pues quería dedicarse en profundizar en su matemática.

"Muchas cosas me quedan por hacer, pero en tanto me halle en el extranjero todo lo que haga será bastante malo. ¡Si yo tuviera mi cátedra como el Sr. Kielhau tiene la suya!. Mi posición no está asegurada, pero no me inquieto acerca de esto; si la fortuna no me acompaña en una ocasión, quizá me sonría en otra."

Regresó a Cristianía en Mayo de 1827, y para ganar algún dinero tuvo que dar instrucción a algunos escolares. Su novia Christine se empleó como institutriz en casa de unos amigos de su familia en Frøland. Abel pasó el verano con su novia en esa ciudad. Estaba a la sazón, dedicado a la teoría de funciones elípticas, en su competición con Jacobi, escribiendo algunos artículos sobre la misma. En la Navidad de ese año, hubo de viajar en trineo para visitar a su novia en Frøland, llegando tras su viaje bastante enfermo. El riguroso clima noruego ya le había hecho desde hacía tiempo padecer tuberculosis pulmonar, de la que tuvo conocimiento médico durante su estancia en París y que Abel había atribuido a un frío persistente. Quizás el trajín y la excesiva tensión de aquel largo viaje al extranjero de más de año y medio de duración, contribuyeron a que esa enfermedad le llevara más tarde a su fatal desenlace.

Casa donde murió Abel en Frøland

En 1828, Hansteen recibió una subvención para investigar el magnetismo terrestre en Siberia y se nombró entonces a Abel para que lo sustituyera en su puesto docente en la Universidad y también en la Academia Militar. Este hecho mejoró su precaria situación económica. Pero Abel continuaba entregado en cuerpo y alma a su investigación matemática, si bien su salud se iba deteriorando cada día. Las vacaciones veraniegas de 1828 las pasó junto a su novia en Frøland y volvería a viajar de nuevo a esta ciudad para celebrar la Navidad de ese año. A mediados de enero de 1829, Abel empeoró notablemente. Supo que no viviría mucho tiempo, a causa de una hemorragia que no fue posible detener. Con anterioridad ya había escrito a su amigo Keilhau, con quien Abel se sentía profundamente unido, implorándole que se hiciera cargo de la asistencia de su madre; y además de aquel requerimiento, al visitarle le aconsejó que entablara una relación seria con Christine (a quien Keilhau no conocía), manifestándole:

"No es bella; tiene el cabello rojo y es pecosa, pero se trata de una mujer admirable."

(un tiempo después de que Abel muriera, resultó que ambos se casaron). Así fueron los últimos días de Abel en Frøland en el hogar de la familia inglesa en la que Christine era institutriz. La debilidad y la creciente tos hicieron que sólo pudiese estar fuera de la cama unos pocos minutos. Ocasionalmente intentaba trabajar en su matemática, pero ya no podía escribir. A veces revivía el pasado, hablando de su pobreza y de la bondad de la Señora Hansteen. Padeció su peor agonía durante la noche del 5 de abril. En la madrugada llegó a sentirse más tranquilo, y durante la mañana a las once en punto del 6 de abril de 1829, exhaló su último suspiro. Tenía 26 años y ocho meses.

Dos días más tarde de la muerte de Abel llegaba una carta de Crelle, quien se había encargado de intermediar con el ministro de educación en Berlín para que Abel obtuviera una plaza definitiva como profesor de la Universidad de Berlín en un nuevo Instituto Tecnológico. Allí tendría por compañeros de trabajo a Dirichlet, Jacobi y Steiner. Lamentablemente la carta llegaba demasiado tarde. El propio Gauss, con el fin de reparar dignamente su anterior comportamiento para con Abel, había intermediado junto a Humboldt, solicitando una cátedra para él. Legendre, Poisson y Laplace, habían escrito asimismo al rey de Suecia para que Abel ingresara en la Academia de Estocolmo. Para entonces Cauchy no había aún emitido informe alguno sobre el primer ensayo de Abel, a pesar de que Legendre había emitido varias protestas al respecto, pero para este momento ya se conocía la esencia de la misma a través del *Journal* de Crelle.

El propio Crelle escribió un largo elogio en su *Journal* en el que decía:

> *"Todo el trabajo de Abel lleva la imprenta de la genialidad y la fuerza de su intelecto que es extraordinario y en ocasiones increíble, aún cuando la juventud del mismo no fuera tomada en consideración. Se puede decir que fue capaz de salvar todos los obstáculos hasta llegar a la raíz de los problemas con un vigor que parecía inagotable. Atacaba los problemas con extraordinaria energía; él los consideraba desde su superficie y era capaz de vislumbrar con tal perspectiva su estado, que todas las dificultades parecían desvanecerse bajo el victorioso ataque de su genio...Pero no sólo era su gran talento lo que fomentó el respeto de los demás por Abel y lo que hace infinitamente lamentable su pérdida. Se distinguió por la pureza y la nobleza de su carácter y por una rara modestia que le hizo ser una persona tan apreciada como su genialidad."*

Al final de sus días, ajeno al conocimiento de Abel y otras instituciones noruegas competentes, ocurrió que C. G. Jacobi (1804-1851) tuvo noticias del teorema de Abel por el propio Legendre (con quien Abel sostuvo correspondencia después de su regreso a Noruega) y en una carta a Legendre fechada el 14 de marzo de 1829, éste comentó:

> *"¡Qué descubrimiento es ese Abel!(...) ¿Cómo es posible que ese descubrimiento, quizás el más importante que se haya hecho en nuestro siglo, se comunicara a su Academia hace dos años y se escapara a la atención de sus colegas?."*

Esta noticia llegó hasta Noruega, lo que unido a las expectativas que en su momento se habían depositado en la figura de Abel, hizo que el propio cónsul de Noruega en París interpusiera una reclamación diplomática con la firme intención de que el manuscrito perdido se recuperara. La Academia indagó y casualidades de la vida Cauchy encontró dicho manuscrito en 1830. En una carta fechada en abril de 1829 que contestaba a la del 14 de marzo a Jacobi, Legendre comenta que una vez hallado el manuscrito, Cauchy se dispuso a redactar el correspondiente informe, pero que ambos se vieron retenidos al sopesar que Abel ya había publicado parte de la memoria en el *Journal* de Crelle. Cuando, tras su muerte, la fama de Abel ya estaba cimentada, su apreciadísimo ensayo afortunadamente no se había extraviado, sin embargo no fue publicado hasta el año 1841 en *Mémoires des savants etrangers, vol.7, 176-264*. Para colmo de desgracias, editor, impresor, o ambos, perdieron el manuscrito antes de que fueran leídas las pruebas de imprenta. La Academia en 1830, quiso sincerarse con Abel, concediéndole el Gran Premio de Matemáticas, en unión con Jacobi, pero Abel ya había fallecido.

Los siguientes párrafos de la memoria muestran su objeto:

> *"Las funciones transcendentes hasta ahora consideradas por los matemáticos son escasas en número. Prácticamente toda la teoría, de funciones transcendentes se reduce a la de funciones logarítmicas, circulares y exponenciales, funciones que en el fondo forman una sola especie. Tan sólo recientemente se ha comenzado a considerar algunas otras funciones. Entre las últimas, las transcendentes elípticas, algunas de cuyas notables y elegantes propiedades han sido desarrolladas por Sr.Legendre, ocupan el primer lugar. El autor [Abel] considera, en la memoria que tiene el honor de representar a la Academia, una clase muy extensa de funciones, todas aquellas cuyas derivadas pueden expresarse por medio de ecuaciones algebraicas cuyos coeficientes sean funciones racionales de una variable, y ha demostrado para estas funciones propiedades análogas a la de las funciones logarítmicas y elípticas... y ha llegado al siguiente teorema*[12]*:*
>
> *"Si tenemos varias funciones cuyas derivadas pueden ser raíces de una, y la misma ecuación algebraica cuyos coeficientes son funciones racionales de una variable, podemos siempre expresar la suma de cualquier número de tales funciones por una función algebraica y logarítmica, siempre que establezcamos cierto número de relaciones algebraicas entre las variables de las funciones en cuestión."*
>
> *El número de estas relaciones no depende en modo alguno del número de funciones, sino sólo de la naturaleza de las funciones particulares."*

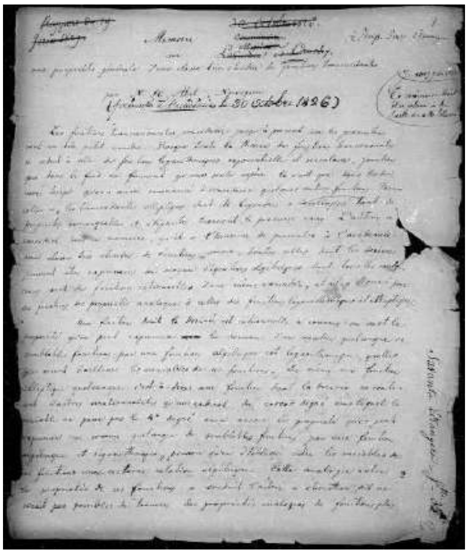
Realmente, y aparte de la escasez de sus recursos, lo más razonable es deducir que después del episodio acaecido, la estancia de Abel en París sólo pudo proporcionarle una amarga tristeza en todos los sentidos. Resulta evidente que a Abel, resumiendo, le sobrarían razones para sentir resentimiento de la actitud de Cauchy, aún cuando jamás dudase de que éste fuera indiscutiblemente un gran maestro del análisis.

Cabe destacar, que para mayor gloria de la ciencia, fue determinante la atención que Jacobi solicitó para con Abel, como muestra de su noble rivalidad, además del mismo requerimiento por parte de toda la Alemania científica, para que se buscase con empeño la admirable memoria de Abel. Con todo lo escrito anteriormente, no acabaron aún las peripecias habidas con el manuscrito de Abel. Cuando los matemáticos noruegos Ludwing Sylow y Sophus Lie elaboran en la década de 1870-1880 la publicación de las obras completas de Abel

[12] Conocido hoy en día como *Teorema de Abel*.

se encontraron con la desagradable sorpresa de que el manuscrito que Abel había presentado a la Academia de París se había perdido. ¿Qué había ocurrido esta vez?. Según se pudo averiguar más adelante, a un profesor matemático italiano, Guglielmo Libri, alumno de Legendre, le fue asumida la responsabilidad de seguir la impresión de *Mémoires des savants* antes citadas. En 1952, siglo y cuarto después de que Abel presentara la Memoria sobre funciones elípticas a la Academia de París fue finalmente encontrada por Viggo Brun, de Oslo, en la biblioteca Moreniana de Florencia (Italia). Brun, que visitaba la ciudad, aprovechó para saber si en la biblioteca matemática había legados de Guglielmo Libri, sospechando la implicación de éste en la desaparición del manuscrito. Después de realizar algunas pesquisas, Brun encontró lo que buscaba, es decir la Memoria original de Abel que el pícaro de Libri había ocultado en el archivo de Sophie Germain.

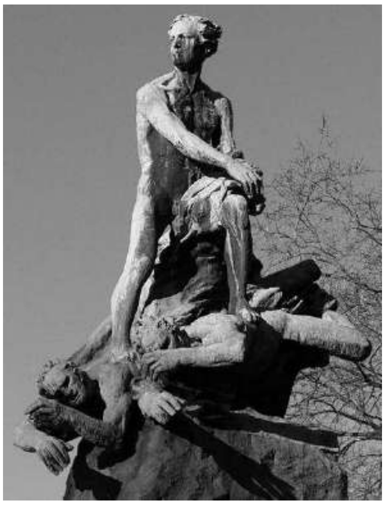
La narración de la vida de Abel es terriblemente triste, claro ejemplo como en muchos casos, de la íntima conexión entre la pobreza y la tragedia. Su corta vida y su trágica muerte ha dado lugar a numerosos mitos sobre su persona. Algunos lo han considerado como el Mozart de la ciencia. Junto a Galois, ambos son considerados como los precursores del álgebra moderna. Ambos vivieron la época del Romanticismo en su plenitud, y como otros tantos jóvenes incomprendidos dejaron su existencia terrenal a muy corta edad. Sin embargo su legado fue tan inmenso que será imposible que sus nombres queden en el olvido. Como dijo Charles Hermite en referencia a Abel, *"Ha legado a los matemáticos algo que les mantendrá activos durante 500 años"*.



Primera página de la Memoria que Abel presentó a la Academia de París

En Noruega, Abel es considerado un héroe nacional. El centenario de su nacimiento es ampliamente celebrado, y varios han sido los honores a título póstulo otorgados al joven sabio, como un cráter lunar o un asteroide que llevan su nombre, una calle del distrito duodécimo de París denominada "rue Abel", una estatua en bronce realizada por el escultor Gustav Vigeland en 1908 que se encuentra en el "Jardín Abel" del Royal Park de Oslo, y que constituye hoy día una de las imágenes más representativas de la ciudad, o una estatua en la Universidad de Oslo. Además de todas estas muestras de afecto, su rostro aparece en multitud de tiradas de sellos filatélicos, o en antiguos billetes noruegos.

Tumba de Abel en Frøland



Escultura de Abel en el Royal Park de Oslo

Estatua de Abel en la Universidad de Oslo

Sellos conmemorativos del centenario
de la muerte de Abel (Noruega-1929)

Sello conmerativo de Abel (Noruega-2002)

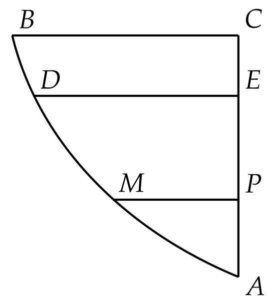
Sello conmemorativo de Abel
(Noruega-1983)

Billete de 500 coronas noruegas (1978)

De estudiante, Abel vivió en Lille Grensen 5.
En 2002 la Sociedad Patrimonial de Oslo
colocó una placa en su recuerdo.

3. Solución de un problema de mecánica

Veamos en esta sección como Abel resolvió de una manera muy elegante el famoso *"Problema de la Braquistócrona"* haciendo uso del *"Cálculo Fraccional"*, esto es el cálculo de derivadas e integral de orden no entero. De aquí en adelante el lector considerará que está leyendo el propio trabajo al respecto que Abel editó en el *Journal* de Crelle en 1826.



Sea $BDMA$ una curva cualquiera. Sea BC una recta horizontal y CA una recta vertical. Sea una partícula que se mueve sobre la curva bajo la acción de la gravedad, comenzando en el punto D. Sea τ el tiempo transcurrido hasta que la partícula alcanza el punto A, y sea a la distancia EA. La magnitud τ es una función de a que depende de la forma de la curva e inversamente, la forma de la curva dependerá de esta función. Investigaremos cómo es posible encontrar la ecuación de la curva mediante una integral definida, si τ es una función de a continua dada.

Sea $AM = s$, $AP = x$ y sea t el tiempo en el que la partícula describe el arco DM. Por las reglas de la mecánica tenemos:
$-\frac{ds}{dt} = \sqrt{a-x}$,[13] donde $dt = -\frac{ds}{\sqrt{a-x}}$. Consecuentemente, integrando desde $x = a$ a $x = 0$,

$$\tau = -\int_a^0 \frac{ds}{\sqrt{a-x}} = \int_0^a \frac{ds}{\sqrt{a-x}} \,,$$

donde $\int_\alpha^\beta$ significa que los límites de integración corresponden a $x = \alpha$ y $x = \beta$ respectivamente. Sea ahora $\tau = \phi(a)$ la función dada; entonces

$$\phi(a) = \int_0^a \frac{ds}{\sqrt{a-x}}$$

será la ecuación por la que s se determinará como una función de x. En lugar de esta ecuación consideraremos otra más general,

$$\phi(a) = \int_0^a \frac{ds}{(a-x)^n} \,, \quad [0 < n < 1]$$

de la que intentaremos obtener la expresión para s en términos de x.

Si designamos a $\Gamma(\alpha)$ como la función

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^1 dx \left(\log \frac{1}{x}\right)^{\alpha-1} \,, \quad \left[= \int_0^\infty e^{-z} z^{\alpha-1} dz\right]$$

[13] Si designamos por $v_0 = 0$ y v las velocidades de la partícula en los puntos D y M respectivamente y por g la aceleración debido a la gravedad, entonces la ecuación de la energía resulta $v^2 - v_0^2 = 2g(a-x)$, donde

$$v = \frac{ds}{dt} = -\sqrt{2g}\,\sqrt{a-x}$$

Por lo tanto la ecuación del texto corresponde a la elección de unidades de tal forma que $2g = 1$.

se sabe que

$$\int_0^1 y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}dy = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

donde α y β deben ser mayores que cero. Considerando $\beta = 1-n$ nos encontramos

$$\int_0^1 \frac{y^{\alpha-1}dy}{(a-y)^n} = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-n)}{\Gamma(\alpha+1-n)},$$

donde, considerando $z = ay$

$$\int_0^a \frac{z^{\alpha-1}dz}{(a-z)^n} = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-n)}{\Gamma(\alpha+1-n)} \cdot a^{\alpha-n}$$

Multiplicando por $\frac{da}{(x-a)^{1-n}}$ e integramos desde $a=0$ a $a=x$:

$$\int_0^x \frac{da}{(x-a)^{1-n}} \int_0^a \frac{z^{\alpha-1}dz}{(a-z)^n} = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-n)}{\Gamma(\alpha+1-n)} \int_0^x \frac{a^{\alpha-n}da}{(x-a)^{1-n}}.$$

Considerando $a = xy$ tenemos

$$\int_0^a \frac{a^{\alpha-n}da}{(x-a)^{1-n}} = x^\alpha \int_0^1 \frac{y^{\alpha-n}dy}{(1-y)^{1-n}} = x^\alpha \cdot \frac{\Gamma(\alpha-n+1)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)}$$

por lo tanto

$$\int_0^x \frac{da}{(x-a)^{1-n}} \int_0^a \frac{z^{\alpha-1}dz}{(a-z)^n} = \frac{x^\alpha\Gamma(n)\Gamma(1-n)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

Pero, por una propiedad de la función Γ,

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha),$$

entonces, sustituyendo,

$$\int_0^x \frac{da}{(x-a)^{1-n}} \int_0^a \frac{z^{\alpha-1}dz}{(a-z)^n} = \frac{x^\alpha}{\alpha}\Gamma(n)\Gamma(1-n)$$

Multiplicando ésta por $\alpha\phi(\alpha)d\alpha$ e integrando con respecto a α [entre límites constantes cualesquiera], tenemos

$$\int_0^x \frac{dx}{(a-x)^{1-n}} \int_0^a \frac{\left(\int \phi(\alpha)\alpha z^{\alpha-1}d\alpha\right) dz}{(a-z)^n} = \Gamma(n)\Gamma(1-n) \int \phi(\alpha)x^\alpha \, d\alpha.$$

Considerando

$$\int \phi(\alpha)x^\alpha \, d\alpha = f(x)$$

y diferenciando, tenemos

$$\int \phi(\alpha)\alpha x^{\alpha-1}d\alpha = f'(x), \quad \int \phi(\alpha)\alpha z^{\alpha-1}d\alpha = f'(z).$$

Entonces
$$\int_0^x \frac{da}{(a-x)^{1-n}} \int_0^a \frac{f'(z)\,dz}{(a-z)^n} = \Gamma(n)\Gamma(1-n)f(x)^{14}$$
o, como
$$\Gamma(n)\Gamma(1-n) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} n\pi}\ ,$$
$$(1)\quad f(x) = \frac{\operatorname{sen} n\pi}{\pi} \int_0^x \frac{da}{(x-a)^{1-n}} \int_0^a \frac{f'(z)\,dz}{(a-z)^n}\ .$$

Por medio de esta fórmula es sencillo encontrar s de la ecuación
$$\phi(a) = \int_0^a \frac{ds}{(a-x)^n}\ .$$
Multiplicando esta ecuación por $\frac{\operatorname{sen} n\pi}{\pi} \cdot \frac{da}{(x-\alpha)^{1-n}}$ e integrando desde $a=0$ a $a=x$ tenemos
$$\frac{\operatorname{sen} n\pi}{\pi} \int_0^x \frac{\phi(a)\,da}{(x-a)^{1-n}} = \frac{\operatorname{sen} n\pi}{\pi} \int_0^x \frac{da}{(x-a)^{1-n}} \int^a \frac{ds}{(a-x)^n};$$
por lo tanto, por (1),
$$s = \frac{\operatorname{sen} n\pi}{\pi} \int_0^x \frac{\phi(a)\,da}{(x-a)^{1-n}}{}^{15}$$

[14]Esta identidad se obtiene inmediatamente de la fórmula de Dirichlet
$$(*)\quad \int_0^x da \int_0^a F(a,z)\,dz = \int_0^x dz \int^x F(a,z)\,da$$
(Bôcher, *An introduction to the study of integral equations*, 1909, p. 4) con ciertas restricciones para $f(z)$. Por ejemplo, basta con asumir que $f'(z)$ es continua y $f(0)=0$. Considerando en (*)
$$F(a,z) = (x-a)^{n-1}(a-z)^{-n}da.$$
Sustituyendo $a = z + t(x-z)$ en la integral, la reduciremos a
$$\int_0^1 t^{-n}(1-t)^{n-1}dt = \Gamma(n)\Gamma(1-n)$$
con el resultado final
$$\int_0^x (x-\alpha)^{n-1}da \int_0^a (\alpha-z)^{-n} f'(z)dz = \Gamma(n)\Gamma(1-n) \int_0^x f'(z)dz = \Gamma(n)\Gamma(1-n)f(x).$$

Hablando estrictamente, el método usado en el texto establece la igualdad en cuestión sólo para las funciones $f(x)$ que pueden ser expresadas mediante integrales definidas de la forma
$$\int \phi(\alpha)x^\alpha d\alpha$$
pero la investigación demuestra que tal expresion, requiere la solución de una ecuación integral de expresión mas complicada que la especificada.

[15]Dos observaciones deben realizarse concernientes a la solución obtenida.

1. Ya que la función s reemplaza a $f(x)$ de (1), esta debe satisfacer las restricciones impuestas a $f(x)$, por ejemplo $s'(x)$ debe ser continua y $s(0)=0$, lo que es natural desde el punto de vista de la interpretación física de $s(x)$. Esto supone ciertas restricciones sobre la función dada $\phi(a)$; se puede demostrar fácilmente que las condiciones anteriores se satisfacen siempre que $\phi'(a)$ sea continua y que $\phi(0)=0$. La última condición nuevamente surge de manera natural de la ecuación integral del problema.
2. Si todas las condiciones anteriores son satisfechas, la igualdad (1) ofrece inmediatamente que la solución del problema es única, entonces la integral se reduce a $\phi(a)$, lo que nos da la solución obtenida en el texto.

Sea ahora $n = \frac{1}{2}$, entonces

$$\phi(a) = \int_0^a \frac{ds}{\sqrt{a-x}}$$

y

$$s = \frac{1}{\pi}\int_0^x \frac{\phi(a)da}{\sqrt{x-a}}\,.$$

Esta ecuación expresa s en términos de la abcisa x, y la curva por lo tanto está completamente definida.

Aplicaremos la expresión anterior a algunos ejemplos.

I. Si

$$\phi(a) = \alpha_0 a^{\mu_0} + \alpha_1 a^{\mu_1} + \ldots + \alpha_m a^{\mu_m} = \sum \alpha a^{\mu}$$

la expresión para s será

$$s = \frac{1}{\pi}\int_0^x \frac{da}{\sqrt{x-a}} \sum \alpha a^{\mu} = \frac{1}{\pi}\sum\left(\alpha \int_0^x \frac{a^{\mu}da}{\sqrt{x-a}}\right).$$

Considerando $a = xy$ tenemos

$$\int_0^x \frac{a^{\mu}da}{\sqrt{x-a}} = x^{\mu+\frac{1}{2}}\int_0^1 \frac{y^{\mu}dy}{\sqrt{1-y}} = x^{\mu+\frac{1}{2}}\frac{\Gamma(\mu+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\mu+\frac{3}{2}\right)};$$

por lo tanto

$$s = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\pi}\sum \frac{\alpha\Gamma(\mu+1)}{\Gamma\left(\mu+\frac{3}{2}\right)}\, x^{\mu+\frac{1}{2}}$$

o, como $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$,

$$s = \sqrt{\frac{x}{\pi}}\left[\alpha_0 \frac{\Gamma(\mu_0+1)}{\Gamma\left(\mu_0+\frac{3}{2}\right)}\cdot x^{\mu_0} + \ldots + \alpha_{\mu}\frac{\Gamma(\mu_m+1)}{\Gamma\left(\mu_m+\frac{3}{2}\right)}\cdot x^{\mu_m}\right].$$

Si $m = 0$ y $\mu_0 = 0$, la curva en cuestión es una isócrona, y resulta que

$$s = \sqrt{\frac{x}{\pi}}\alpha_0\frac{\Gamma(1)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{\alpha_0}{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\sqrt{\frac{x}{\pi}} = \frac{2\alpha_0}{\pi}\,\sqrt{x}$$

conocida por ser la ecuación de una cicloide.[16]

[16] Omitimos el ejemplo II, donde se asume que la función $\phi(a)$ se expresa por diferentes fórmulas en diferentes intervalos.

En un artículo anterior mencionado anteriormente, Abel dio la misma fórmula final para la solución pero basando su discusión en la asunción de que s puede expresarse como una suma de términos de la forma

$$s = \sum \alpha^{(m)} x^m.$$

Entonces comenta casos particulares donde el tiempo de descenso es proporcional a una potencia de la distancia vertical a o es constante (curva isócrona). Al final del artículo Abel ofrece una sor-

Referencias

[1] ABEL, Niels Henrik. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Vol. I, pp. 153–157, Berlín, 1826. *Göttinger Digitalisierungzentrum* http://gdz.sub.uni-goettingen.de/no_cache/dms/load/toc/?IDDOC=238618

[2] BELL, Eric Temple. *Men of Mathematics*, pp. 307–326, Simon & Schuster, Inc, New York, 1986.

prendente expresión de la solución mediante el uso de la notación de las derivadas e integrales de orden no entero. Definimos como la derivada de orden α de una función $\psi(\lambda)$ a la expresión

$$\frac{d^\alpha \psi(x)}{dx^\alpha} = D_x^\alpha \psi(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_c^x (x-z)^{-\alpha-1}\psi(z)dz \text{ si } \alpha < 0 \\ \frac{d^p}{dx^p} D_x^{\alpha-p}\psi(x) \text{ si } p \text{ es un número entero y } 0 \leq p-1 < \alpha \leq p \end{cases}$$

siendo c una constante que resulta igual a 0 en la discusión de Abel. Si consideramos sin demostración que $D^\alpha D^\beta \psi = D^{\alpha+\beta}\psi$ entonces la ecuación integral de Abel puede expresarse

$$\phi(x) = \Gamma(1-n) D_x^{n-1} D_x s = \Gamma(1-n) D_x^n s,$$

la cual puede ser resuelta inmediatamente mediante la fórmula

$$s(x) = \frac{1}{\Gamma(1-n)} D_x^{-n} \phi = \frac{1}{\Gamma(1-n)\Gamma(n)} \int_0^x \phi(a)(x-a)^{n-1} da.$$

Para justificar esta operación Abel demuestra la identidad

$$D_x^{-n-1} D_x^{n+1} f = f,$$

que también puede obtenerse de la igualdad (1) antes vista. Para el caso particular de $n = \frac{1}{2}$, Abel expresa la ecuación y su solución respectivamente como

$$\psi(x) = \sqrt{\pi} \frac{d^{1/2} s}{dx^{1/2}}; \quad s = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d^{-1/2}\psi}{dx^{-1/2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int^{1/2} \psi(x)\, dx^{1/2}.$$

Al final del artículo Abel expresa:

> *"De la misma manera con la que he encontrado s de la ecuación*
>
> $$\psi(a) = \int_{x=0}^{x=a} \frac{ds}{(a-x)^n}$$
>
> *he determinado la función ϕ de la ecuación*
>
> $$\psi(a) = \int \phi(xa) f(x)\, dx$$
>
> *donde ψ y f son funciones dadas y se toma la integral entre límites cualquiera (¿constantes?); pero la solución a este problema es demasiado larga para darla aquí."*

Esta solución nunca fue publicada por Abel.

Debe comentarse finalmente que la ecuación de Abel y otras análogas fueron resueltas por Liouville mediante el uso de derivadas e integrales de orden no entero. El procedimiento de Liouville es puramente formal, y parece que no se percató de los resultados de Abel. Fue también Liouville quien resolvió la ecuación de Poisson (*Note sur la détermination d'une fonction arbitraire placée sous un signe d'intégration définie*, Journal de l'École Polytechnique, Cahier 24, Vol. 15, 1835, pp.55–60). La ecuación de Poisson es

$$F(r) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\, r^{n+1} \int_0^x \psi(r\cos\omega) \operatorname{sen}^{2n+1}\omega\, d\omega$$

donde $F(r)$ es una función dada y la función desconocida $\psi(a)$ se considera impar, es decir $\psi(-u) = -\psi(u)$. La ecuación de Poisson se reduce a una del tipo de Abel utilizando $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ como intervalo de integración y haciendo la sustitución $\cos\omega = \left(\frac{z}{x}\right)^{1/2}$, $r^2 = x$.

[3] HAYEK, Nácere. *Una Biografía de Abel*, Revista *Números*, Vol. 52, pp. 3–26, Sociedad Canaria “Isaac Newton” de Profesores de Matemáticas, diciembre 2002.

[4] JAMES, Ioan. *Remarkable Mathematicians*, pp. 91–97, Cambridge University Press, The Mathematical Association of America, Cambridge, 2002.

[5] KATZ, Victor J. *A History of Mathematics: An Introduction*, 2nd. Ed., pp. 665–666, Adisson Wessley Educational Publishers, Inc., USA, 1998.

[6] PESIC, Peter. *Abel's Proff*, The MIT Cambridge Press, Massachusetts, Londres, 2003.

[7] ROUSE BALL, Walter William. *A Sourt Account of The History of Mathematics*, 4th. Ed., pp. 461–462, MacMillan and Co., Limited, Londres, 1919.

[8] SMITH, David Eugene. *A Source Book in Mathematics*, pp. 656–662, McGraw-Hill Book Company,Inc., New York, 1929.

[9] STEWART, Ian. *Historia de las Matemáticas (En los últimos 10.000 años)*, 1ª.Ed. pp. 190–193, Crítica Editorial, Colección Drakontos, 2008.

[10] THE ABEL PRIZE WEBSITE. *Página completa dedicada a la figura de Abel*, http://www.abelprisen.no/en/abel/

[11] WIKIPEDIA. *Niels Henrik Abel*, http://en.wikipedia.org/wiki/Niels_Henrik_Abel

Evgeniy Kulanin, Alexei Myakishev

Algunas cónicas relacionadas con el triángulo

Moscú
2007

Resumen. Estudiamos tres resultados sobre el triángulo y algunas cónicas relacionadas con él.

1. Cónicas plus Triángulo: tres problemas.

El objetivo de este artículo es presentar al lector algunas propiedades interesantes de ciertas cónicas relacionadas con un triángulo.
Consideremos tres problemas propuestos por *Evgeniy Kulanin*:

1.
Probar que la recta que une el punto de Nagel y el punto de Gergonne de un triángulo escaleno es paralela a un lado de este triángulo, si y solamente si el punto de Feuerbach está sobre la mediana que pasa por el vértice opuesto a dicho lado.

2.
Probar que la recta que une el baricentro y el punto de Lemoine de un triángulo escaleno es paralela a un lado del triángulo, si y solamente si el punto de Steiner pertenece a la recta que contiene a la mediana que pasa por el vértice opuesto a dicho lado.

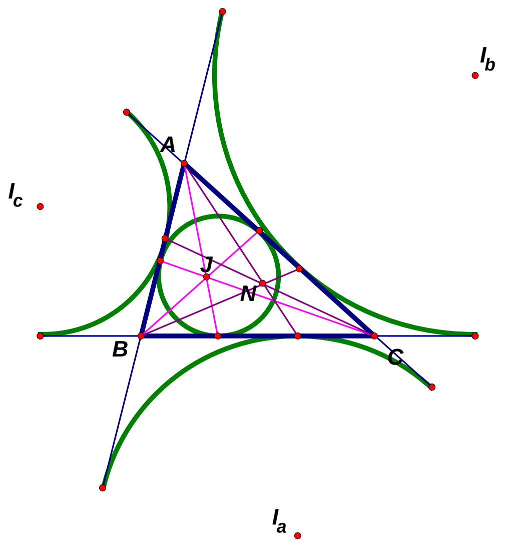
3.
Probar que la hipérbola de Kiepert es tangent a la elipse de Steiner circunscrita al triángulo si y solamente si la parabola de Kiepert es tangent a la elipse de Steiner inscrita en el triángulo.

Antes de presentar las soluciones invitamos al lector a dar un corto paseo por la *tierra de las cónicas del triángulo.*
Las demostraciones de los resultados que siguen (en la sección 2) se encuentran en [1],[2],[3].

2. Algunos resultados de la Geometría del Triángulo. Principales propiedades de las cónicas del triángulo.

a. Puntos notables del triángulo.

Según fuentes históricas, los antiguos griegos conocieron cuatro puntos notables – el baricentro G, circuncentro O, incentro I y ortocentro H. Desde aquella época se han añadido muchos puntos a esta lista..
Por ejemplo, los puntos de Gergonne J y de Nagel N.
Puntos de Gergonne y Nagel.
El punto de Gergonne es el punto de intersección de las rectas que unen los vértices del triángulo con los puntos de tangencia del círculo inscrito con los lados respectivamente opuestos.
El punto de Nagel es el punto de intersección de las rectas que unen los vértices del triángulo con los puntos de tangencia de los círculos exinscritos con los lados respectivamente opuestos.

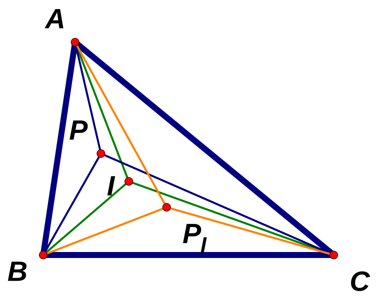


□

b. Conjugados isogonales e isotómicos. Puntos fijos.

Conjugado isogonal.

Supongamos que P es un punto del plano del triángulo ABC, no situado en ninguna de las rectas que contienen los lados. Se halla la recta simétrica de AP respect de la bisectriz interior del ángulo A; la de BP y la de CP respecto de las bisectrices análogas. Las tres rectas simétricas concurren en el punto *isogonal conjugado* de P, que llamamos P_l .

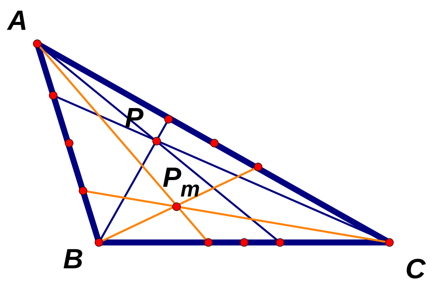


La conjugación isogonal, considerada como una transformación F_l del plano, tiene cuatro puntos fijos : el incentro y los exincentros I, I_a, I_b, I_c .

Por ejemplo, el circuncentro *O* y el ortocentro *H* forman un par de isogonales conjugados.

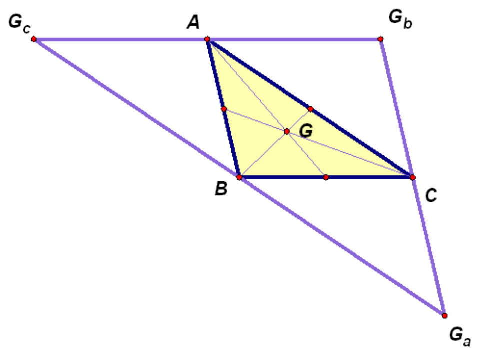
Conjugado isotómico.

Sea *P* un punto del plano del triángulo *ABC*, no situado en las rectas que contienen los lados. Sean A_1, B_1, C_1 los puntos en los que las rectas *AP*, *BP*, *CP* cortan a las rectas *BC*, *CA*, *AB*, respectivamente. Los simétricos de A_1, B_1, C_1 respecto de los puntos medios de los lados *BC*, *CA*, *AB* son los puntos A_2, B_2, C_2, respectivamente. Las rectas AA_2, BB_2, CC_2 concurren en el *conjugado isotómico* de P, P_m.



La conjugación isotómica, considerada como una transformación F_m del plano, tiene cuatro puntos *fijos* : el baricentro y los vértices del triángulo anticomplementario (el triángulo cuyo triángulo medial es *ABC*) - G, G_a, G_b, G_c.

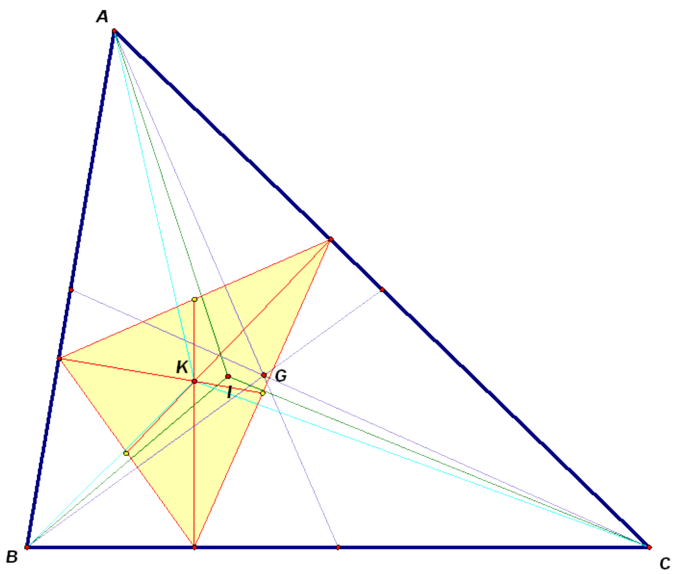
Por ejemplo, el punto de Gergonne *J* y el de Nagel *N son un par de puntos conjugados isotómicos*.



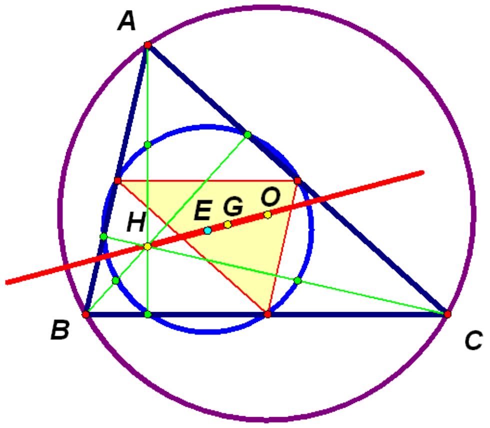
c. El punto de Lemoine.

El conjugado isogonal del baricentro G es el punto de Lemoine *K* (también llamado *punto simediano*).

K es el único punto que es el baricentro de su propio triángulo *pedal* (*o mejor dicho, podario).*



d. La recta de Euler y el círculo de Euler. El teorema de Feuerbach y el punto de Feuerbach.



La recta de Euler

El circuncentro O, el ortocentro H y el baricentro G de un triángulo no equilátero están alineados. Además, $OG : GH = 1 : 2$.

La recta OGH es la recta de Euler del triángulo.

El círculo de Euler

Sea ABC un triángulo dado, con

(i) A_1, B_1, C_1 los puntos medios de los lados BC, CA, AB,

(ii) P, Q, R las proyecciones ortogonales de los vértices A, B, C sobre sus lados opuestos; las alturas AP, BQ, CR concurren en el ortocentro H,

(iii) X, Y , Z los puntos medios de los segmentos AH, BH, CH.

Los nueve puntos A_1, B_1, C_1, P, Q, R, X, Y , Z son *concíclicos*.

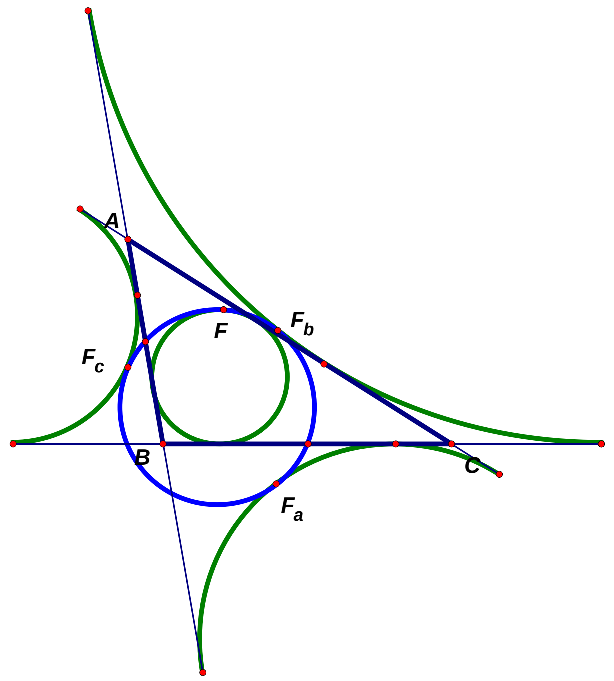
Éste es el círculo de Euler (o de los nueve puntos) de ABC. El centro de este círculo es E, que es el circuncentro del triángulo medial.

El centro E del círculo de los nueve puntos está en la recta de Euler y es el punto medio del segmento OH.

El teorema de Feuerbach.

En 1822 Karl Feuerbach publicó el siguiente notable resultado:

El círculo de los nueve puntos de un triángulo es tangent interiormente al incírculo y externamente a cada uno de los círculos exinscritos.



El punto *F* de tangencia del círculo inscrito con el de Euler se llama *punto de Feuerbach*

e. Otras rectas notables.

Diámetro de Brocard

Es la recta que pasa por el circuncentro *O* y el punto de Lemoine *K*.

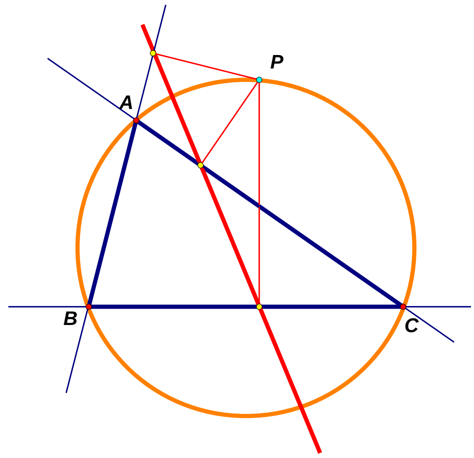
La recta de Gergonne.

Es la recta que une los puntos de Gergonne *G* y de Nagel *N*. Contiene además a los puntos H_m, I_m - conjugados isotómicos del incentro *I* y del ortocentro *H*.

La recta de Lemoine.

El punto de Lemoine *K*, el antiortocentro H_m y el baricentro *G* de un triángulo no equilátero están alineados y $KG : GH_m = 1 : 2$.

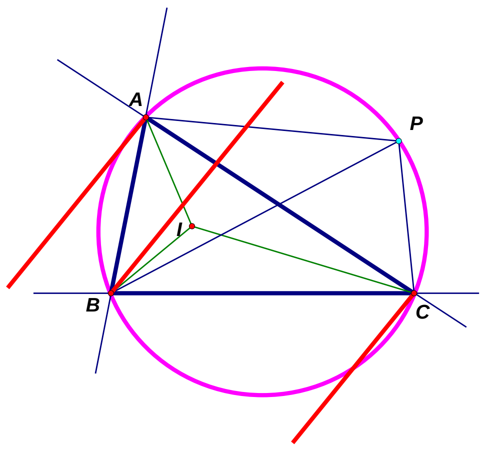
La recta de Simson.



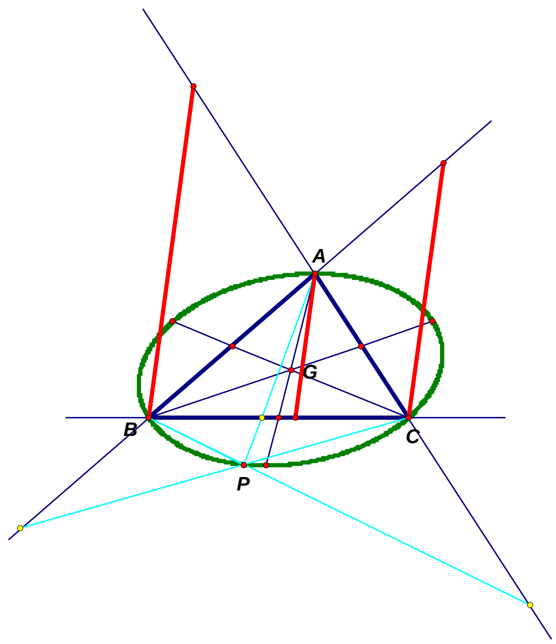
Dado un punto *P* sobre la circunferencia circunscrita al triángulo *ABC*, construimos sus proyecciones ortogonales sobre las rectas que contienen los lados del triángulo. Estas proyecciones están alineadas sobre la llamada *recta de Simson* s(*P*) of *P*.

f. Puntos del infinito. Recta del infinito y conjugados.

Desde el punto de vista de la geometría *proyectiva*, toda familia de rectas paralelas tiene un punto común – llamado *punto del infinite* . Y todos los puntos del infinito del plano proyectivo forman la llamada *recta del infinitoy*. La recta del infinito es la conjugada isogonal de la circunferencia circunscrita.



Es también la transformada isotómica de la *elipse circunscrita de Steiner* (cuyo centro es el baricentro *G*)



g. Algunas propiedades generales de las cónicas.

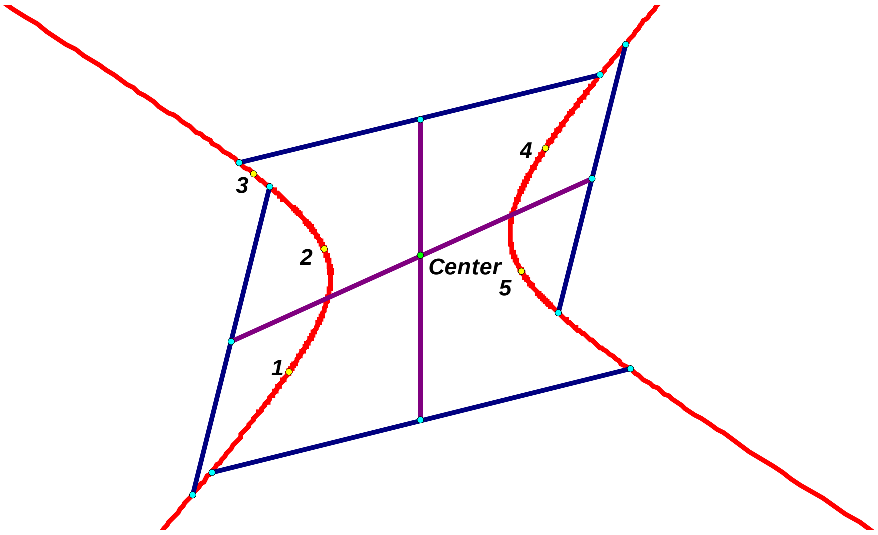
Todas las cónicas son *pryjectivamente equivalentes*, es decir, una cónica arbitraria puede transformarse en otra por una transformación proyectiva.

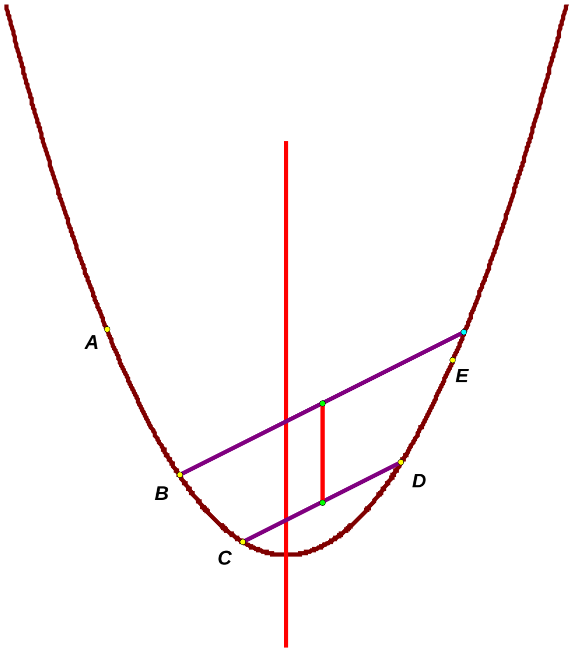
La Hipérbola tiene dos puntos de intersección con la recta del infinito; la *parábola* es tangente a ella (en otras pañabras, tiene un solo punto común con esa recta) y la *elipse* no tiene puntos comunes con la recta del infinito.

Cinco puntos del plano determinan una cónica, así como cinco rectas tangentes en el plano.

La hipérbola y la elipse son curvas *centro-simétricas* (en el caso de la parábola se puede considerer el punto del infinito del eje de la parábola como su centro).

Cualquier recta que une los puntos medios de dos cuerdas paralelas de la cónica pasa por el centro de ésta (en el caso de la parábola es una recta paralela al eje de la parábola).

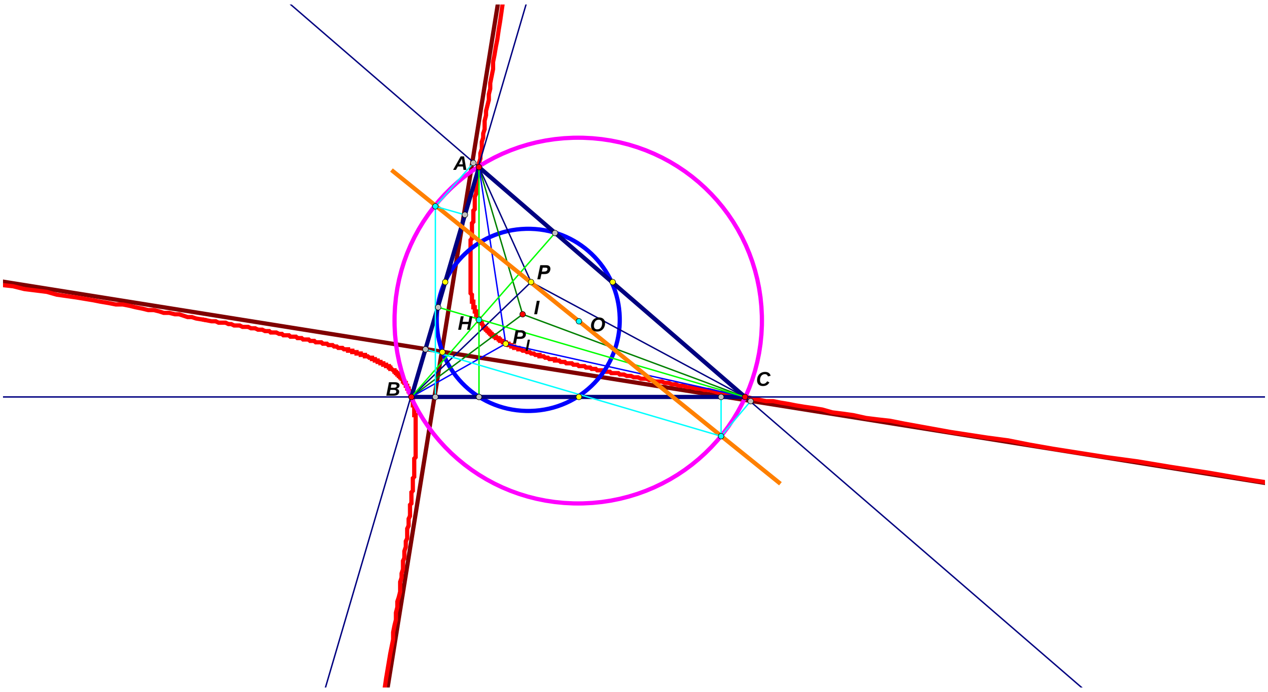




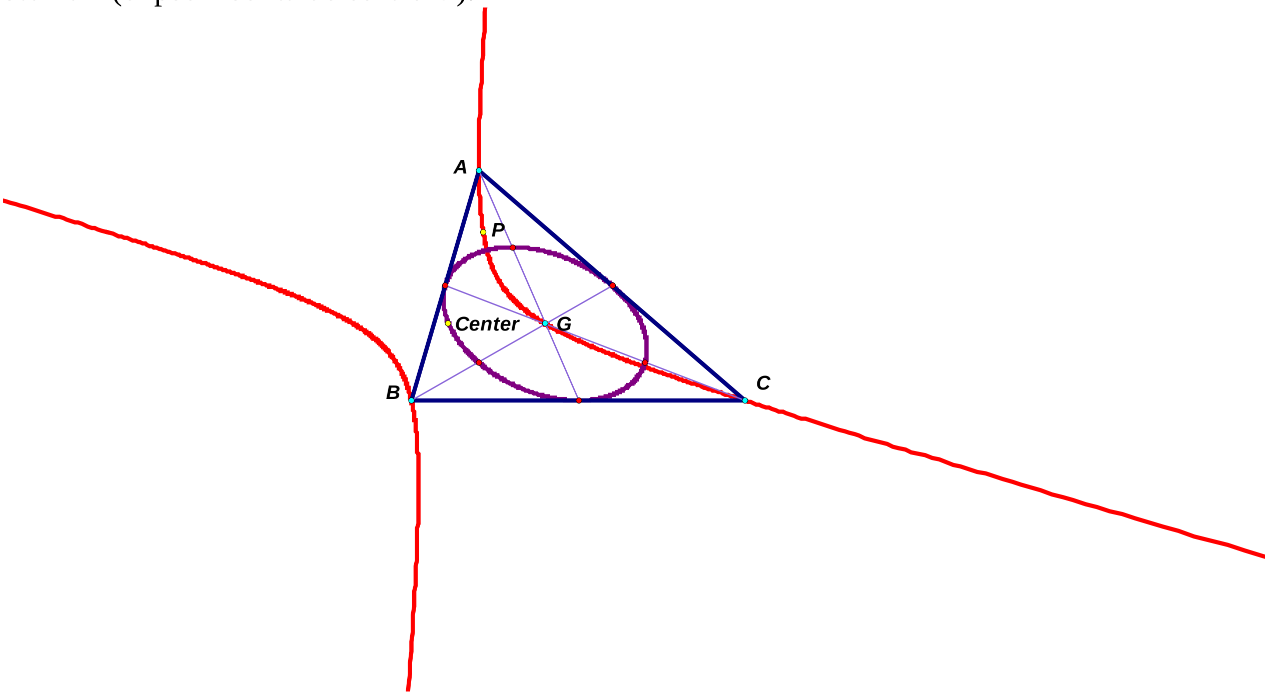
h. Cónicas circunscritas e inscritas.

Una *circucónica* pasa por los vertices del triángulo de referencia y puede considerarse la transformada isogonal (o isotómica) de una recta.
La circunferencia circunscrita es la transformada isogonal de la recta del infinito. Por lo tanto, una cónica circunscrita es una elipse, una hipérbola o una parábola según que su transformada isogonal corte a la circunferencia circunscrita en 0, 1, o 2 puntos reales.
Aparte de los tres vertices, la cónica circunscrita corta a la circunferencia circunscrita al triángulo en el conjugado isogonal del punto del infinito de la recta.(En el caso de la transformada isotómica de la recta debemos considerar la *circunelipse de Steiner* en vez del círculo circunscrito).

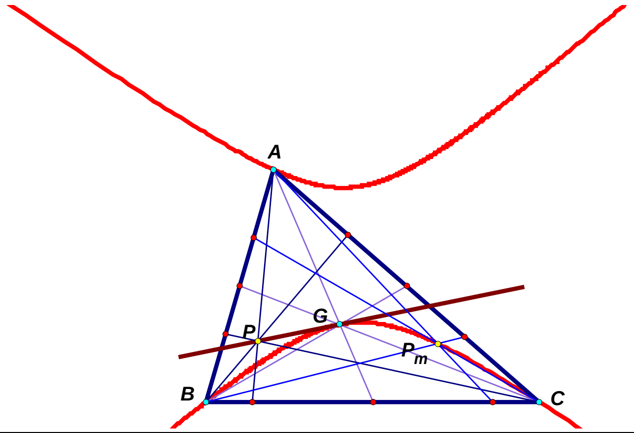
La cónica circunscrita es una hipérbola rectangular si y solamente si esta curva pasa por el ortocentro *H*.
Sean *R* y *T* puntos diametralmente opuestos de la circunferencia circunscrita. Las asíntotas de la circun-hipérbola rectangular que es la transformada isogonal de *RT* son las rectas de Simson de *R* y *T*. Se deduce de aquí que el centro de la circun-hipérbola rectangular es la intersección de esas rectas de Simson, y es un punto del círculo de los nueve puntos.

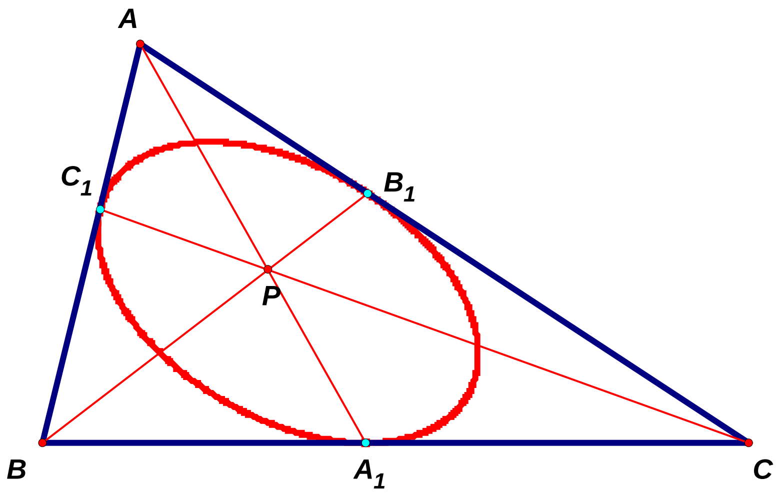


El centro de una circun-hipérbola que pasa por el baricentro *G* es un punto de la *in-elipse de Steiner* (elipse inscrita de centro *G*).



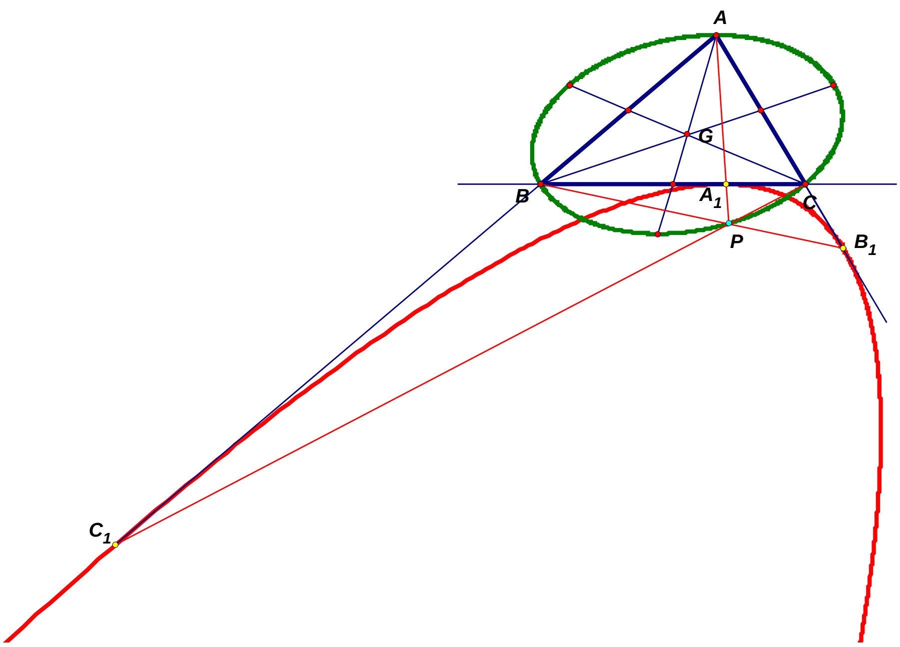
Si la circuncónica es la transformada isogonal (isotómica) de una recta que pasa por un *punto fijo* de la conjugación correspondiente, entonces esta recta es tangente a la cónica en dicho punto (la figura siguiente ilustra el caso de la transformación isotómica de una recta que pase por *G*.)





Una cónica *inscrita* es tangente a las tres rectas que contienen los lados del triángulo ABC.
Los puntos de tangencia forman un triángulo perspectivo con ABC, que llamaremos el *perspector* de la cónica inscrita.

El perspector de una parábola inscrita es un punto de la *circun elipse de Steiner*

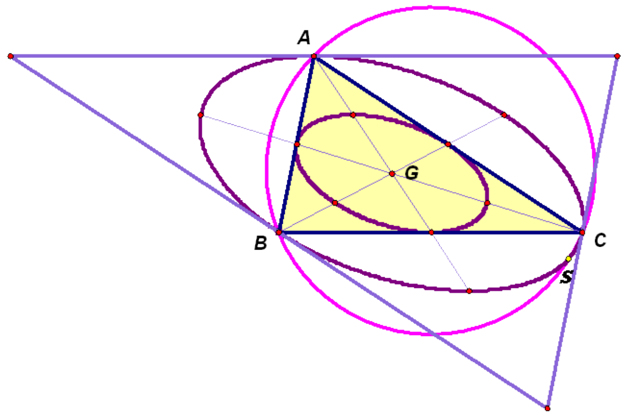


La *directriz* de una *parábola inscrita* pasa por el ortocentro H y el foco pertenece a la circunferencia circunscrita.

i. Cinco cónicas notables.

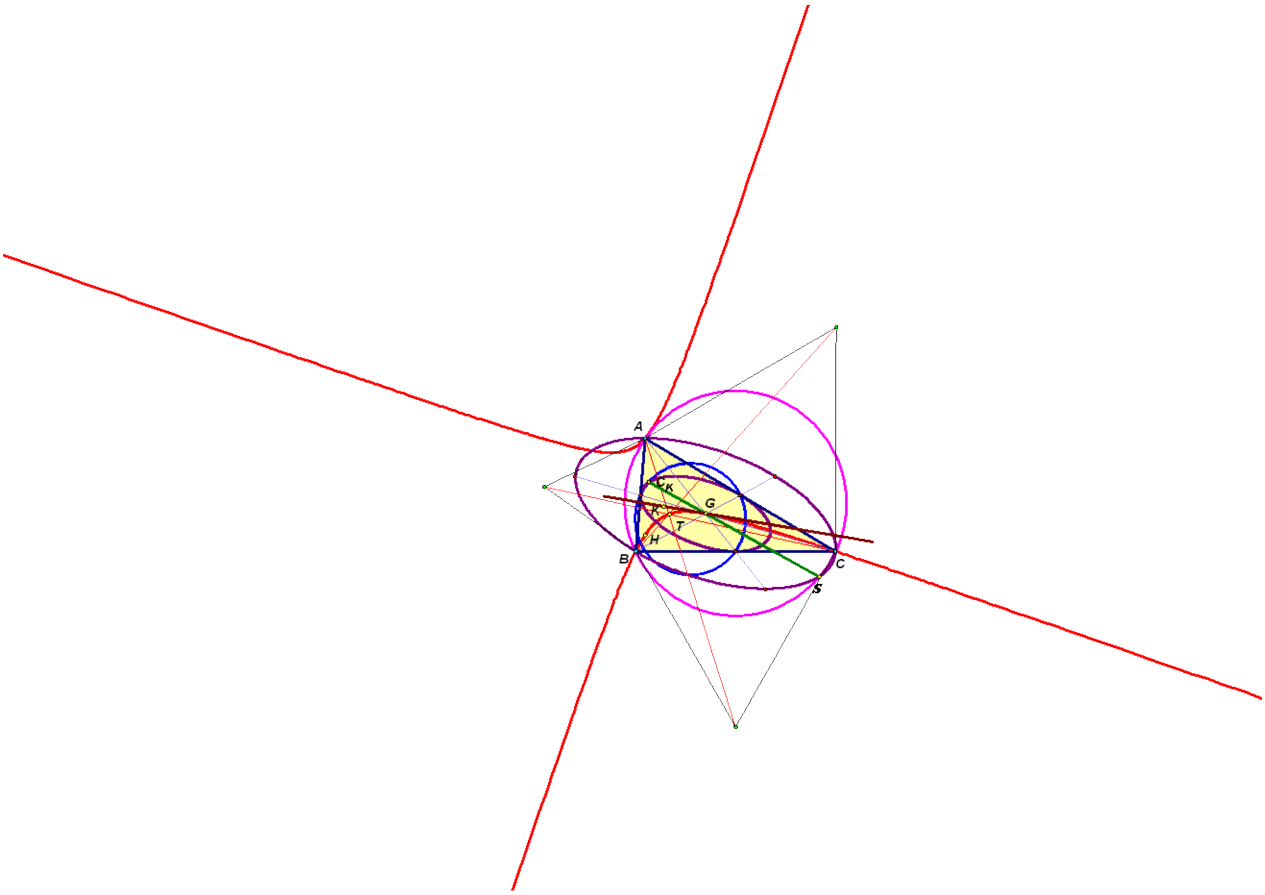
La circun-elipse de Steiner y la in-elipse de Steiner. El punto de Steiner **S**.

La circun-elipse de Steiner es una elipse circunscrita de centro G.
La in-elipse de Steiner es una elipse inscrita de centro G.
La circun-elipse de Steiner es la imagen de la *in-elipse de Steiner* en la *homotecia* h(G,-2) (observes que el circuncírculo es la imagen del círculo de Euler en esta homotecia).
Los lados del *triángulo anticomplementario son tangentes* a la circun-elipse de Steiner en los vértices del triángulo de referencia.
El punto de Steiner point **S** es el *cuarto punto* de intersección de la *circun-elipse de Steiner* con el *circuncírculo.*



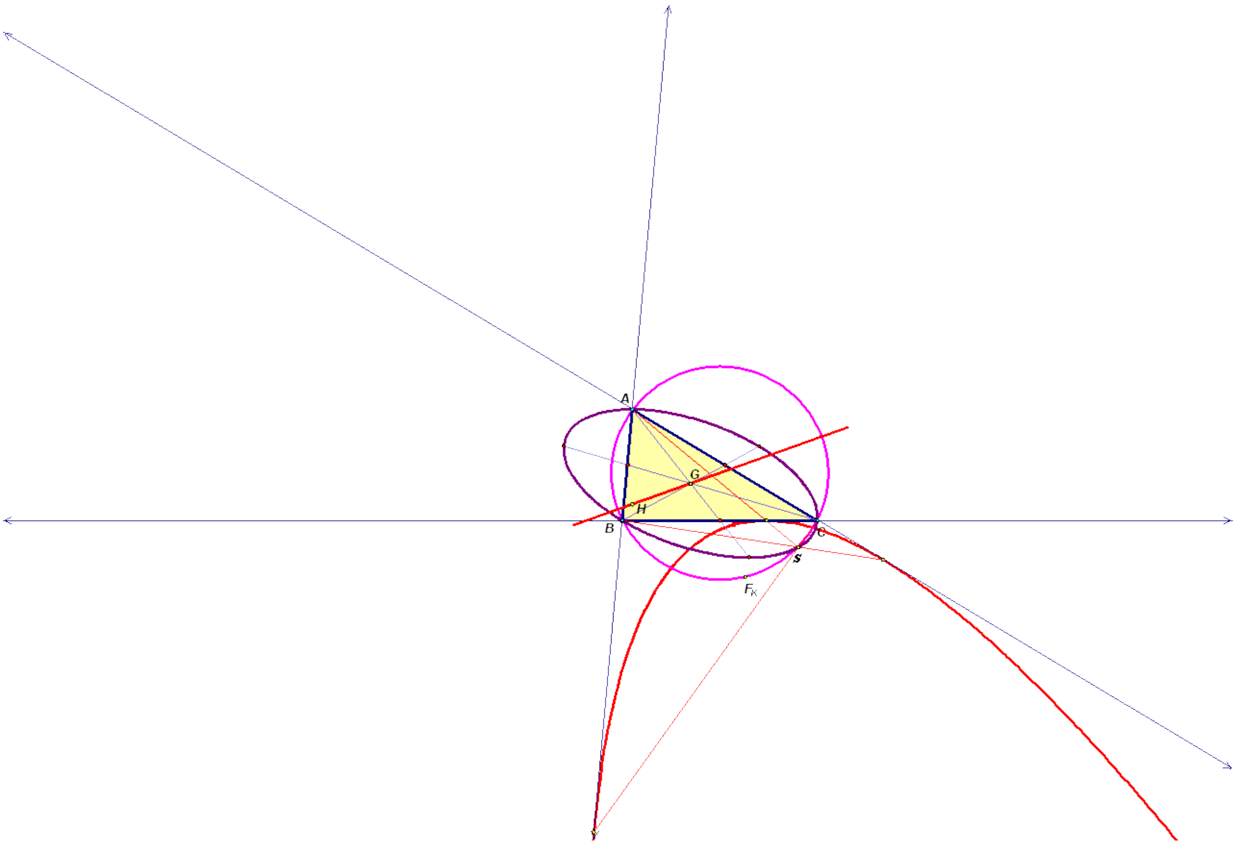
La hipérbola de Kiepert.

Es una hipérbola rectangular circunscrita, que pasa por G y H. El conjugado isogonal de la hipérbola de Kiepert es el diámetro de Brocard, y el conjugado isotómico es la recta de *Lemoine* , que es tangente a la hipérbola en el baricentro G (ver las seccionese **2.e, 2.h**).
Las rectas que unen los vertices del triángulo dado y los correspondientes *picos* de los triángulos isosceles concurren y el lugar de esos puntos es también la hipérbola de Kiepert (en el caso de los *triángulos equiáateros* se obtiene el famoso punto de *Fermat-Torricelli* T).
De acuerdo con **2.h**, el centro C_K de la hipérbola de Kiepert es el *cuarto punto* de intersección de la *in-elipse de Steiner* con el *círculo de Euler.* Se sigue que el punto de Steinert **S** es la imagen de C_K en la homotecia h(G,-2), luego los puntos **S**, G, C_K están alineados y $\frac{SG}{GC_K} = \frac{2}{1}$.



La parabola de Kiepert .

Es la parabola inscrita cuya directriz es la recta de Euler. Su perspector coincide con el punto de Steiner point **S**, y su foco está en la circunferencia circunscrita; es el resultado de la composición $F_l \circ F_m(\mathbf{S})$.

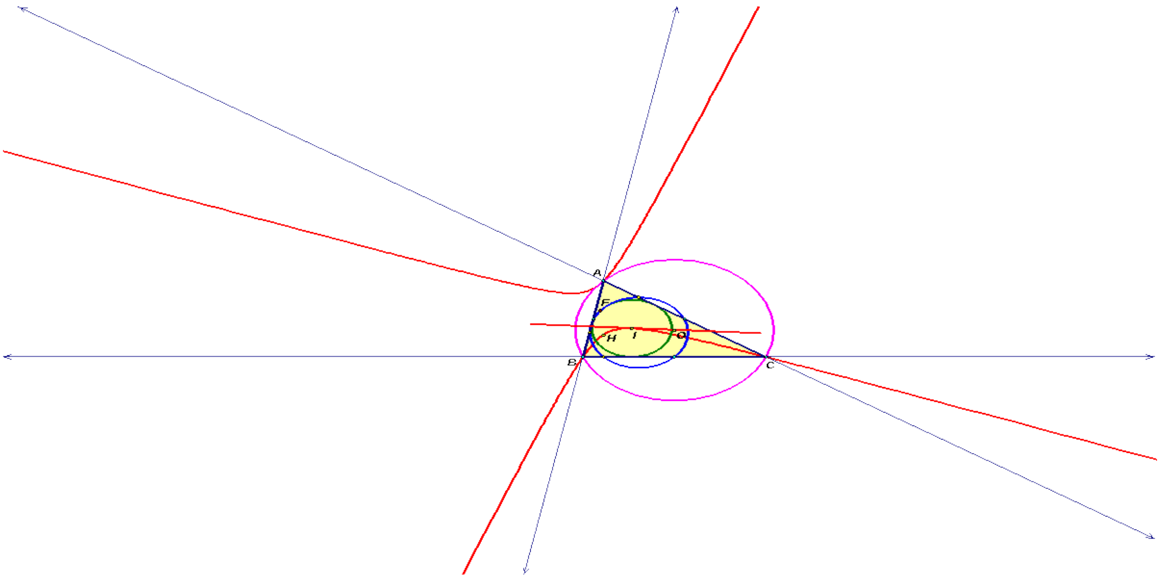


La hipérbola de Feuerbach .

Es una hipérbola rectangular circunscrita que pasa por el incentro *I* y el ortocentro *H*. Además pasa por el punto de Gergonne *J* y el de Nagel *N*. El conjugado isogonal de la hipérbola de Feuerbach es la *recta OI* (que es tangente a la hipérbola en el incentro *I*) y el conjugado isotómico es la *recta de* Gergonne (ver **2.e**).

El centro de la hipérbola de Feuerbach es el punto de Feuerbach *F*.(vere **2.d**)

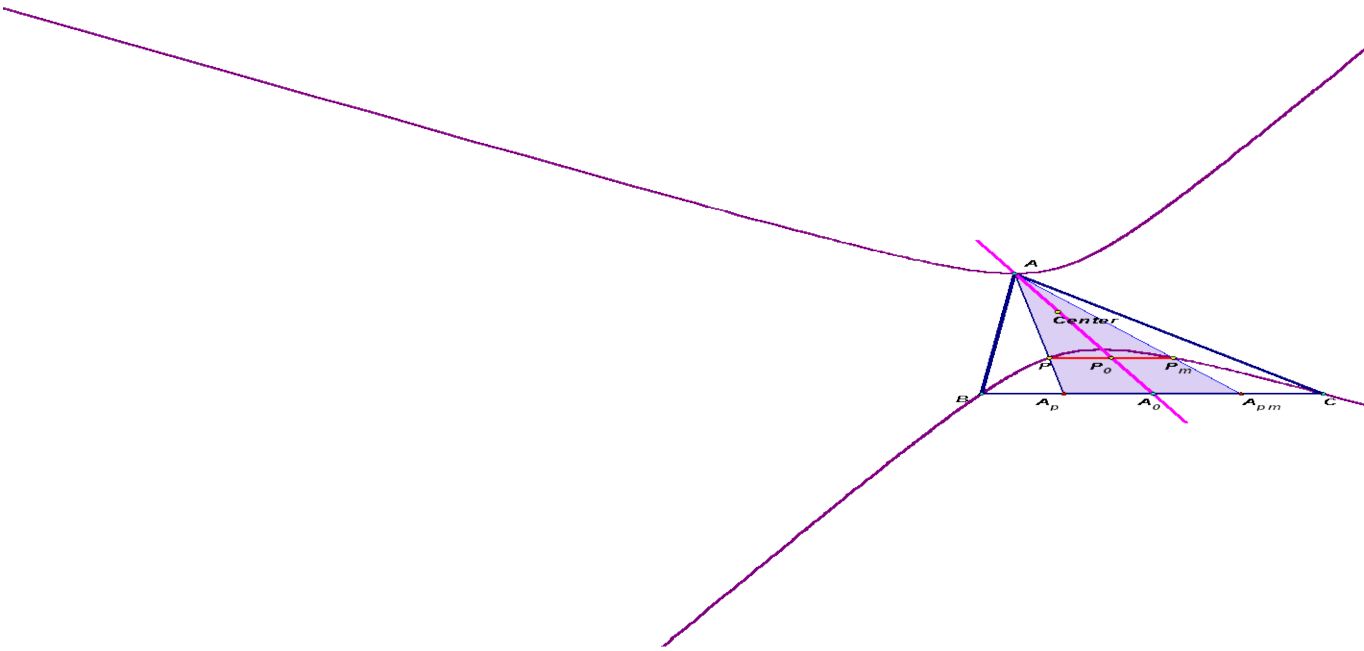
⋁



3. Las soluciones.

Ahora estamos en disposición de resolver los problemas planteados al principio, en la sección **1**. Comenzaremos con el siguiente

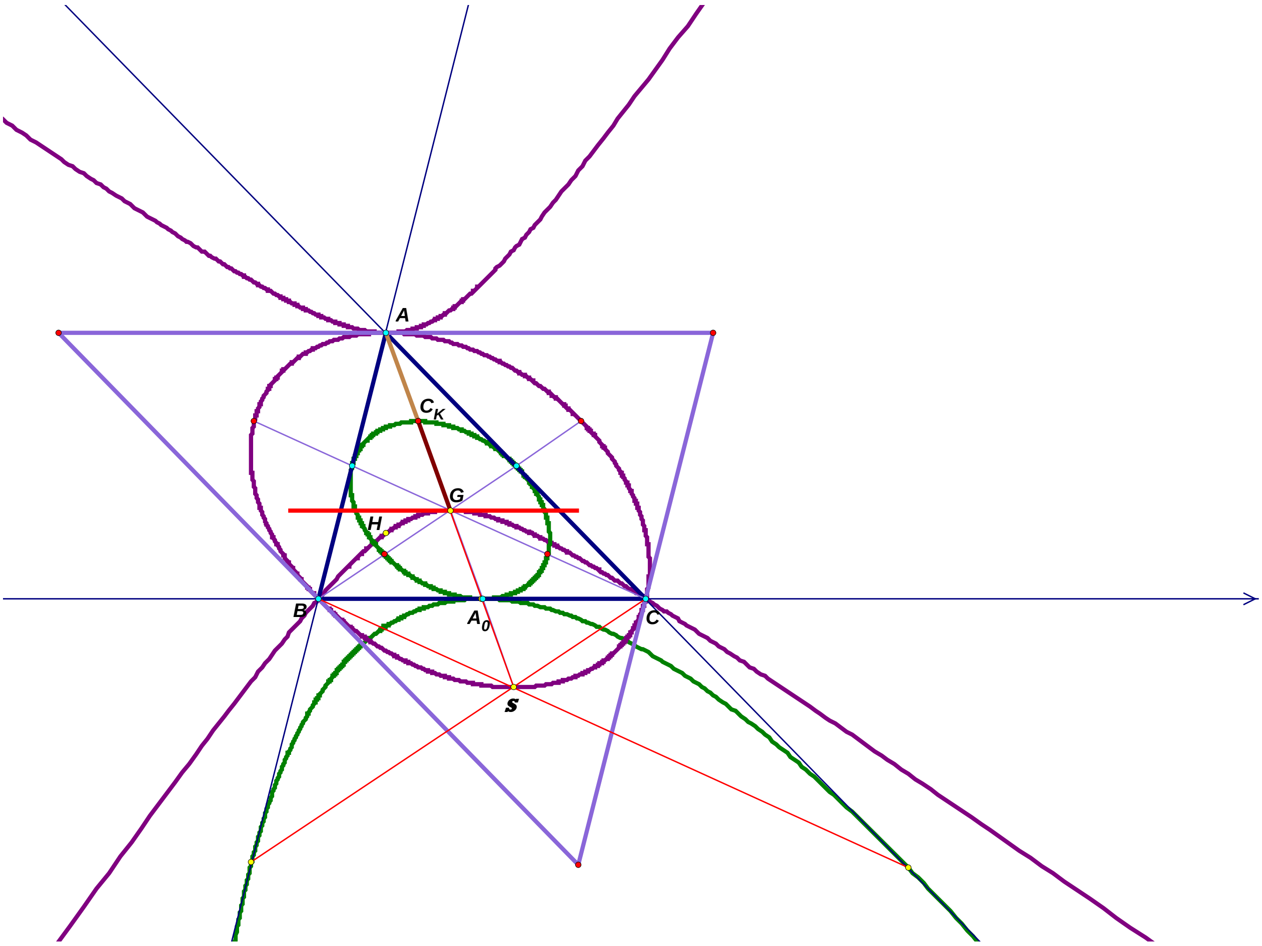
Lema:



Seant P y P_m *un par de puntos conjugados isotómicos con respect al triángulo ABC. Entonces la* *recta PP_m es paralela a la recta BC si y solamente si el centro de la cónica circunscrita que pasa por P y P_m está en la mediana AA_0.*

Demostración:
De acuerdo con **2.g**, cinco puntos del plano determinan una cónica, luego existe una cónica que pasa por A,B,C,P,P_m. Supongamos que la recta PP_m es paralela a la recta BC. Sean A_P y A_{Pm} los puntos de intersección de las rectas AP y AP_m, respectivamente. Esos puntos son simétricos con respect al punto A_0 - punto medio del segmento BC. Luego A_0 es también el punto medio del segmento $A_P A_{Pm}$. Se sigue que P_0 - el punto de intersección de la mediana AA_0 y la recta PP_m - es el punto medio del segmento PP_m. Obviamente, tenemos dos cuerdas paralelas de la cónica, con A_0 y P_0 como sus puntos medios. Por lo tanto (por **2.g**) el centro de la cónica está sobre la mediana AA_0.
La demostración del recíproco es similar.
□
Volviendo ahora a los problemas 1 y 2, obsérvese primero que en el caso de un *triángulo isósceles* (por ejemplo, con $AB = AC$) las rectas *JN* y *GK* coinciden con la mediatriz de *BC***, lo que excluye cualquier paralelismo**.

Solución del problema 1
Por **2.b**, el punto de Gergonne J y el de Nagel N son conjugados isotómicos. La cónica circunscrita que pasa por esos puntos es la *hipérbola de Feuerbach*, con el *punto de Feuerbach* como centror.(por **2.i**)
Y, por el *Lema*, hemos terminado.
□
Solución del problema 2.
Por ejemplo, supongamos que la recta *GK* es paralela a la recta *BC*. Ahora consideramos la hipérbola de Kiepert. Según **2.i**, la recta de Lemoine *GK* es tangent a la hipérbola en el baricentro *G*. Usando de nuevo el *Lema* (en el caso en que los puntos P y P_m coinciden con el baricentro *G*), obtenemos que la recta *GK* es paralela a la recta $BC \Leftrightarrow$ el centro de la hipérbola de Kiepert C_K está en la mediana AA_0 (que contiene a *G*). Pero, por **2.i**, los puntos **S**, *G*, C_K están alineados.
□
Solución del problema 3
Supongamos que la hipérbola de Kiepert es tangente a la circun-elipse de Steiner del triángulo *ABC*. Entonces el punto de tangencia coincide con uno de los vertices del triángulo, por ejemplo A (pues aquí tenemos tres vertices del triángulo y un par de puntos coincidentes en el punto de tangencia).
Obsérvese que la recta tangent a la circun-elipse en el vértice A es paralela a *BC* (como el lado correspondiente del triángulo anticomplementario). Entonces esa recta es también tangent a la hipérbola de Kiepert. Ahora tenemos la cuerda de la hipérbola – el segmento BC con su punto medio A_0. Se sigue que el centro C_K está en la mediana AA_0 (en el caso degenerado de la tangent el punto medio de la segunda cuerda coincide con el punto de tangencia). Por la colinealidad de los puntos **S**, G, C_K resulta que el punto de Steiner **S** está en la mediana AA_0.
Queda por señalar que el perspector de la parábola de Kiepert es el punto de Steiner **S**.(ver **2.i**)
La demostración del recíproco es similar.



Referencias:

[1] *Kimberling C.* Encyclopedia of triangle centers “ETC”. [http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/].
[2] *Kimberling C.* Triangle centers and central triangles. Winnipeg: Utilitas Mathematica Publ., 1998.
[3] *Yiu P.* Introduction to the Geometry of the Triangle. [http://www.math.fau.edu/yiu/geometry.html]

Autores:

Evgeniy D. Kulanin,
lucas03@mail.ru

Alexei G. Myakishev,
alex_geom@mtu-net.ru

DISQUISITIONES.
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.

ROBERTO BOSCH CABRERA

Abstract. Con este artículo pretendemos abordar diversos temas relacionados con la resolución de problemas en matemáticas. Nuestro principal objetivo es demostrar que está estrechamente vinculada con la investigación. También queremos darle un carácter enciclopédico - pedagógico, trataremos de dilucidar los procesos cognitivos involucrados en la resolución de problemas y por último ver esta como arte, ciencia y deporte.

The mathematician's main reason for existence is to solve problems (Paul Halmos 1980).

La motivación de este trabajo fue el libro Mosaico Ajedrecístico de A.Karpov, E.Guik. Donde se estudia el ajedrez desde las tres aristas antes propuestas: arte, ciencia y deporte. Nos preguntamos, puede la resolución de problemas enmarcarse en este contexto ? Y creemos que la respuesta es si. Comenzemos por ver esta en un contexto general.

1. Contexto general

La resolución de problemas es considerada como la más compleja de todas las actividades intelectuales. Ha sido definida como el proceso cognitivo que requiere la modulación y el control de abilidades fundamentales. La resolución de problemas ocurre cuando un organismo o un sistema de inteligencia artificial necesita moverse de un estado dado a un estado final o meta. Veamos cuales son las técnicas de resolución de problemas.

1.1 Técnicas generales

- Abstracción: Resolver el problema en un modelo de el sistema antes de ser aplicado al sistema real.
- Analogía: Usar una solución que resuelve un problema análogo.
- Reunión creativa: Especialmente entre grupos de personas, sugiriendo un gran número de soluciones o ideas y combinando y desarrollando estas hasta alcanzar el óptimo.
- Divide y vencerás: Particionar un problema complejo en pequeños problemas solubles.
- Prueba de Hipótesis: Asumir una posible explicación al problema y tratar de probar (o desaprobar) lo asumido.
- Pensamiento lateral: Aproximarse a una solución indirectamente y creativamente.
- Análisis medio - fin: Seleccionar una acción en cada estado (paso) para acercarse más a la meta.

- Método de focalizar objetos: Sintetizar características aparentemente no relacionadas de diferentes objetos en algo nuevo.
- Análisis morfológico: La evaluación de las interacciones de un sistema completo.
- Reducción: Transformar el problema en otro el cual posee solución.
- Investigación: Emplear ideas o soluciones existentes a problemas similares.
- Análisis causa raíz: Eliminar la causa del problema
- Prueba y error: Probar posibles soluciones hasta encontrar la correcta.

Todo lo anterior fue tomado de [1].

2. Trabajos de George Polya y Alan Schoenfeld

Dada la complejidad y la madurez necesaria para entender la obra de Polya y Schoenfeld hemos decidido solo escribir algunos apuntes y preferimos referir al lector a las obras ya establecidas de los anteriores. Un análisis riguroso y exhaustivo de estos va más allá de las pretensiones de este trabajo. Veamos:

George Polya dedicó un esfuerzo considerable en tratar de caracterizar los métodos usados para resolver problemas, y describir como la resolución de problemas debe ser enseñada y aprendida. Escribió 4 libros sobre el tema:

- How to solve it.
- Mathematical Discovery: On understanding, learning, and teaching problem solving.
- Mathematics and plausible reasoning. Volume 1: Induction and analogy in mathematics.
- Mathematics and plausible reasoning. Volume 2: Patterns of plausible reasoning.

Polya sugiere los siguientes pasos a la hora de resolver un problema matemático:

(1) Entender el problema.
(2) Hacer un plan.
(3) Llevar a cabo el plan.
(4) Ir atrás en el trabajo y ver como puede este ser mejorado.

Si esta técnica falla existe un problema más fácil que puede ser resuelto: encontrarlo. Si no se puede resolver el problema propuesto, tratar de resolver primero algún problema relacionado. Polya le da mucha importancia al reconocimiento de patrones, simetría, analogías y al proceso de inducción. Habla de hacer figuras y gráficas y de buscar un modelo. Es muy importante también la heurística y la generalización. Estos son a muy grandes rasgos los temas que aborda Polya en su obra. Recomendamos el divertimento "Los diez mandamientos del profesor" en la REOIM 10; ver `http://www.oei.es/oim/revistaoim/divertimentos10.htm`. Además sugerimos el capítulo 1 de [30] el cual está inspirado en los trabajos de Polya.

Alan Schoenfeld recomienda que la enseñanza de la matemática debe ser abordada a través de la resolución de problemas. Su teoría está basada en un extenso análisis de estudiantes vinculados a esta. La estructura teórica descansa en la psicología cognitiva, particularmente en los trabajos de Newell - Simon. Schoenfeld enfatiza en la importancia de la metacognición y las componentes culturales en el aprendizaje de las matemáticas. El éxito en la resolución de problemas depende de una combinación de conocimiento de recursos, heurística, procesos de control y confianza. Para Schoenfeld es muy importante que los estudiantes

- Busquen soluciones, no solo memorizen procedimientos.
- Exploren patrones, no solo memorizen fórmulas.
- Formulen conjeturas, no solo resuelvan ejercicios.

Recomendamos los siguientes libros:

- Mathematical problem solving.
- Cognitive science and mathematics education.
- Learning to think mathematically : problem solving, metacognition, and sense making in mathematics.

3. Consideraciones Generales

La resolución de problemas mayormente se asocia a las olimpiadas matemáticas y a las numerosas revistas que existen dedicadas al tema. Con este artículo queremos hacer un análisis sistemático y analizar varios factores que influyen en la resolución de problemas. Demostraremos que este campo de la matemática no está desligado de la investigación. De hecho grandes investigadores alguna vez han hecho resolución de problemas de forma muy activa, un caso notable es el de Terence Tao [30]. Curiosamente muchos exitosos olimpistas abandonan esta una vez que entran a la universidad, aunque algunos participan en olimpiadas y competencias a este nivel. Pero una vez que estos estudiantes se graduan abandonan por completo la resolución de problemas , es notable que concursantes con un altísimo rendimiento en Olimpiadas, cabe citar al moldavo Iurie Boreico, actual estudiante de la Universidad de Harvard, veamos sus comentarios una vez realizada la Putnam 2010 : básicamente afirmó que la investigación matemática trataba con problemas más difíciles y que había participado en la Putnam 2010 casi que por casualidad. También está el caso de un colega cubano, Jorge Erick, un gran olimpista, quien en comunicación personal me comentó que la resolución de problemas fue una parte de su vida, pero ahora estaba dedicándose exclusivamente a la investigación. Esta afirmación fue en respuesta a mi propuesta de hacer un Compendio Iberoamericano, que incluiría todas las olimpiadas iberoamericanas y sus bancos de problemas, algo similar al ya famoso IMO Compendio. Qué hace que estudiantes con un gran talento y habilidades en Olimpiadas Matemáticas abandonen este campo ? A mi entender una de las causas es que la resolución de problemas y los concursos muchas veces se toman como hobby o como actividad extracurricular, también algunos olimpistas ven este campo como una serie de técnicas y abilidades y se enfocan solamente en resolver problemas, sin llegar a ver la interconexión con la investigación matemática al más alto nivel. Es lamentable que varios colegas cubanos muy exitosos en Olimpiadas actualmente se encuentren sumergidos a tiempo completo en programas de maestría y doctorado. Cabe citar Andrés Sánches Pérez, Mario Garcia Armas, Gerandy Montes de Oca, Hector Raul Fernandez Morales. Muchas veces estudiantes involucrados en los concursos pueden sufrir decepciones, dado que no alcanzan una alta calificación, estos casos deben ser atendidos personalmente por el entrenador y estudiar a fondo que factores influyeron en esto. Los factores pueden ser variados: falta de concentración, incapacidad para resolver un problema determinado en muy poco tiempo. Estos alumnos deben ser estimulados y no rechazados, ese mismo problema fuera de la olimpiada se puede hacer con calma y buscando varias vias de ataque.

No obstante existen ex-olimpistas los cuales están muy activos, un caso notable es Daniel Lasaosa, Universidad Pública de Navarra , España. Ver sus contribuciones en la Revista Escolar de la OIM y la Revista Mathematical Reflections.

Según Kolmogórov el interés por las matemáticas en edades tempranas suele ser temporal y no siempre se conserva, este criterio es sostenido en [2] basados en casos encontrados en escuelas secundarias chinas. Sin embargo curiosamente en Cuba no ocurre así generalmente, hay varios colegas que desde niños estuvieron involucrados en los concursos matemáticos y conservaron sus abilidades e interés por la matemática en general.

Un matemático debe tener todos sus conocimientos en la mente , o debe tener punteros hacia determinados libros y artículos ? Esta es una larga discusión intelectual que tuve con mi amigo y colega Felix Gotti, mi modesta opinión es la segunda, inspirado en mi profesora de Análisis de primer año Sofía, este método de investigación y de resolución de problemas me ha traido muy buenos resultados, la deficiencia que vemos en lo primero es que el estudiante se prepara para un examen y muchas veces memoriza las ideas, una vez que se gradúa no está preparado para la investigación, el papel que juegan los exámenes debe ser considerado y estudiado seriamente. El trabajo en equipos de investigación es mucho más interesante y eficiente desde nuestro modesto punto de vista. La resolución de problemas aparejada con la investigación es crucial, un problema puede motivar la reflexión y el intercambio de ideas, es más flexible que los rígidos exámenes. Debe darse mucho valor al método socrático.

Las olimpiadas matemáticas así como las olimpiadas deportivas son y deben serlo siempre un puente entre las naciones, entre las distintas culturas, un medio para intercambiar ideas. Las revistas matemáticas no deben dar preferencia a subscriptores locales, deben estar por encima de cualquier limitación ideológica o política. Aunque cada editor está en el derecho de seleccionar el material a ser publicado. Debe dársele crédito a todas las personas que de una forma u otra colaboran con la revista.

El entrenamiento excesivo para las Olimpiadas puede ser dañino para los estudiantes, debe vincularse la resolución de problemas con puzzles y juegos, charlas educativas de cine, arte , literatura. Es necesario detectar las abilidades de cada estudiante y darle una atención personalizada, siempre se deben suministrar al alumno grupos de problemas desafiantes pero en orden creciente de dificultad, el autoestudio es también muy importante, esto fomenta independencia en el estudiante y hace que mediante la autorreflexión surgan preguntas e inquietudes. Surge la pregunta : hasta que punto puede un estudiante autodidácticamente mejorar sus abilidades en resolución de problemas y en matemática en general

? Creemos que esto es posible, siempre y cuando se disponga de suficiente bibliografía actualizada y acceso a sitios de Internet vinculados con la matemática, páginas web de olimpiadas, forum, revistas, etc. La correspondencia con otros alumnos y matemáticos ya sea online o por correo postal puede ser muy estimulante. Pero el lector debe estar diciendo que hay una contradicción en todo lo anteriormente dicho, por un lado se necesita un equipo multidisciplinario de entrenadores y por otro lado existe la opción de que el estudiante trabaje por su cuenta, creemos que debe ser parte y parte, expliquemos esto en más detalle, un alumno muy joven, un niño por ejemplo, necesita de todo un equipo de especialistas, pero un estudiante graduado universitario puede perfectamente mejorar sus abilidades en la resolución de problemas de manera autodidacta. Existe un antiguo mito sobre la participación de muchachas en olimpiadas. Ver [31] para un estudio demográfico minucioso por regiones con numerosas estadísticas sobre países y estudiantes.

5. Puzzles y juegos

Es conocida la importancia de los puzzles y juegos en la vinculación de los niños y jóvenes a la matemática. En este campo es notable el trabajo de Andy Liu. Seleccionamos algunos por puro gusto personal pero existen muchos otros igual de interesantes, ver [3][4].

Sudoku:

Un tablero Sudoku relativamente fácil puede ser resuelto con una cadena de implicaciones de principio a fin. Esto permite introducir conceptos de lógica formal didácticamente. Ver anexo, Sudoku 1. Sin embargo hay tableros Sudokus muy difíciles los cuales requieren del método de reducción al absurdo, en algunos casos con una suposición basta, pero en otros hay que hacer hasta 2 suposiciones, si en el camino no se llega a contradicción queda resuelto el tablero , de lo contrario cambiamos de número y seguimos el proceso. Las cadenas de implicación y el método de reducción al absurdo son cruciales en resolución de problemas. Hablando de problemas, construir un tablero Sudoku ! Esto es posible a mano o es necesaria una computadora ? Este fue un debate que tuve con mi amigo Hector Armando Riso. El me comentaba que la idea apropiada era aplicar un algoritmo backtracking, recursividad. Ver anexo, Sudoku 2 el cual es muy difícil.

Cubo Rubik:

El cubo Rubik fue creado por el arquitecto húngaro Ernő Rubik , ver el excelente libro [5] para conocer como surgió este formidable juego. El cubo Rubik sirve para mejorar la percepción espacial en niños y jóvenes, puede ser utilizado en clases de matemática para introducir conceptos combinatorios, y a un nivel superior (preuniversitario - universidad) para introducir ideas de la teoría de grupos [33]. Veamos todo esto en detalle:

Se puede formular la pregunta en clase: cuántas configuraciones posibles tiene el cubo ? Esta es una pregunta sumamente difícil, el objetivo no es que los alumnos encuentren la respuesta exacta, sino motivar el conteo de configuraciones, una vez que los estudiantes detecten la dificultad del problema se les puede ir guiando hasta la solución, este ejercicio debe ser orientado para trabajar en grupo (trabajo cooperativo). La respuesta es 43252003274489856000 configuraciones, y un ordenador necesitaría cerca de 14000 millones de años a un ritmo de 100 configuraciones por segundo para imprimirlas [5]. A un nivel superior son considerables los trabajos de Emmanuel Halberstad - quien vincula el teorema de Jordan Holder.

Mi amigo Ariel Velazques estando en la escuela vocacional V.I.Lenin intentó componer el cubo sin conocer un algoritmo previo y mi amigo y colega Jesús Cabrera intentó mediante la observación componer los cubos esquinas en la tercera fase de un algoritmo que ambos conocíamos pero no recordábamos , esto es excelente para niños y jóvenes con una gran imaginación, conlleva a la experimentación y al reconocimiento de patrones. Este método debe ser aplicado aproximadamente por una semana, después de este tiempo se le debe enseñar un algoritmo al estudiante, en caso de que no haya encontrado uno por si solo. Son notable el trabajo de Andy Liu con clubes de matemática en este sentido y de Jerry Slocum con la Slocum Puzzle Foundation la cual promueve el uso de puzzles con fines educativos. Ver [23]

Ajedrez:

Ver los problemas 3 y 4 en el apéndice de [6]. Estos problemas interrelacionan la matemática con el ajedrez, son considerables los trabajos de Noam Elkies en la vinculación ajedrez - matemática [7]. En [8] se puede estudiar la regla del cuadrado: promoción del peón o también la obstrucción Novotny. En [4] se pueden encontrar también temas vinculados con el ajedrez y la matemática.

Tickets:

Este es un juego matemático muy popular en la Facultad de Matemática y Ciencia de la Computación de la Universidad de la Habana. Consiste en una serie de 6 dígitos con los cuales usando operaciones matemáticas elementales debe obtenerse el número 100. Pero como influye esto en la resolución de problemas ? Es una forma excelente de ejercitar la mente, hace que un estudiante pueda resolver problemas en poco tiempo y gane en concentración, aspectos indispensables en las olimpiadas matemáticas. Veamos un ejemplo muy simple: 405050; obtenemos 100 de la siguiente forma: $(4 + 0) * (5 + 0) * (5 + 0) = 100$.

Tetris:

Un juego ideal para introducir los polyominoes (Solomon Golomb). Ver [9] para información muy detallada, muy interesante la sección sobre el efecto del juego sobre el cerebro.

15 - Puzzle:

Para la historia de como surgió este puzzle y otras cuestiones ver [10]. Este juego es apropiado tanto para niños como para investigadores, un niño con mucha fuerza de voluntad puede ser capaz de encontrar el algoritmo que resuelve este puzzle y a estudiantes que están tomando un curso de teoría de grupos se les pueden presentar preguntas muy interesantes sobre grupos de permutaciones, existe una amplia bibliografía que puede ser encontrada en [11]. Siendo estudiante en la Facultad de Matemática y Ciencia de la Computación formé parte de una discusión intelectual con varios colegas, dos de ellos de ciencia de la computación Dayron Edmundo Acosta y Douglas , Willy Valcarce y Felix Gotti (matemáticos) sobre este puzzle, la verdad no recordaba que siendo niño había jugado este en la escuela primaria, la discusión se centraba en tomar un tablero 15-puzzle con una configuración arbitraria y ver si era soluble o no. Pensé que el problema podía ser solucionado buscando un invariante pero confieso que no lo encontré, mucho después encuentro el artículo [12] , y descubro que la idea está en la Teoría de Grupos. Una muestra más que ideas sencillas pueden llevar a la investigación, y que la resolución de problemas no está necesariamente desligada de la investigación.

6. Revistas

Existen numerosas revistas dedicadas a la resolución de problemas:

Kőmal:

Fundada el 1ero de Enero de 1894, ”KőmaL - Kőzépiskolai Matematikai és Fizikai Lapok” es publicada en húngaro con algunas excepciones en inglés. Paul Erdős fue uno de sus más grandes colaboradores. El sitio web oficial es [13]. Recomendamos el artículo: On János Bolyai’s Bicentennial. Elemér Kiss. Es una tarea muy ambiciosa pero sería ideal que se recopilaran todos los ejemplares en idioma inglés.

Crux Mathematicorum with Mathematical Mayhem:

Esta revista es publicada por la Canadian Mathematical Society (CMS). Ha sido referida como ”la mejor revista de resolución de problemas en el mundo”. Crux incluye una sección titulada ”Olympiad Corner” la cual es muy útil para estudiantes preparándose para competiciones matemáticas. Esta es una excelente revista, donde se pueden encontrar problemas de variados niveles de dificultad y artículos. Tiene contribuyentes de todo el mundo, y fue muy popular entre un grupo de colegas que estubímos involucrados con los concursos de matemática y la resolución de problemas. Son notables los problemas de Walther Janous, por solo mencionar uno de sus colaboradores. Cabe destacar el hecho de que todos los ejemplares anteriores al 2006 sean de libre acceso, esto permite a estudiantes muy jóvenes consultar estos archivos y sumergirse en el fascinante mundo de la resolución de problemas.
Recomendamos al lector el siguiente problema:
Volume 17, number 1, January 1991.
(1984 : 74) West point proposal:
Determine the maximum of the convex hull of four circles C_i, $i = 1, 2, 3, 4$ each of unit radius, which are placed so that C_i is tangent to C_{i+1} for $i = 1, 2, 3$.
Con solución muy elegante del experimentado Richard K. Guy. El sitio web de la revista es [14].

Revista Escolar OIM:

La Revista Escolar de Matemáticas digital para uso de alumnos y profesores de Educación Media es promovida por el profesor Francisco Bellot Rosado, Catedrático del I.E.S. ”Emilio Ferrari” de Valladolid, representante para Europa de la World Federation of National Mathematics Competitions. La mayor fuerza de esta revista estriba en que estudiantes iberoamericanos puedan acceder a material actualizado y didáctico sobre resolución de problemas, aunque hoy en día es vital para todo problemista dominar varios idiomas, la política editorial de la REOIM de publicar solo en español es excelente. Esta revista tiene un enfoque ligero y ameno, cabe destacar sus divertimentos, los problemas propuestos no son extremadamente difíciles pero si motivadores. La mayor colaboración viene dada por los españoles, aunque se han ido sumando problemistas de todo el mundo. Más adelante hablaremos de un problema propuesto en la revista por su editor. Su sitio web oficial es [17]

Eureka:

Excelente revista brasilera, cubre totalmente las Olimpiadas Brasileras de Matemática a todos los niveles. Esta fue la primera revista que conocí estando en la escuela vocacional Lenin, recuerdo que mi amigo Jorge Erick poseía algunos ejemplares. Un tema geométrico muy interesante es el propio logo de la revista vinculado con la inversión, ver [15]. Esta revista recibe el apoyo del prestigioso IMPA, actual centro donde estudian varios colegas. El sitio web oficial es [18]

Mathematical Reflections:

Esta revista fue fundada en el 2006, por el profesor Dr. Titu Andreescu. Se proponen 24 problemas en cada ejemplar siendo una publicación bimensual. Los problemas están divididos en 4 categorías, Junior, Senior, Undergraduate and Olympiad. Los problemas propuestos abarcan muchos temas pero se pudiera decir que las desigualdades es el fuerte de la revista. Tiene suscriptores de 54 paises, con predominancia de las contribuciones de Rumania. Recientemente se acaba de publicar un libro que compila los años $2006-2007$. El sitio web es [16]

American Mathematical Monthly:

Fundada por Benjamin Finkel en 1894. Una revista con artículos muy interesantes de gran valor científico y a su vez entendibles por estudiantes universitarios. La sección de problemas es ya legendaria, y la dificultad de estos es considerable. Cubre la competición Putnam.

Kvant (Quantum):

Revista fundada en la ex-Unión Soviética en 1970 por un grupo de prominentes físicos y matemáticos soviéticos. Siendo sus editores Isaak Kikoin y Andrés Kolmogórov. Con el derrumbe del campo socialista la circulación de la revista disminuyó considerablemente. En 1991 surge Quantum publicada por Springer - Verlag. Kvant era publicada por la Academia de Ciencias y por la Academia de Ciencias Pedagógicas. En Kvant alguna que otra vez aparecían entrevistas a prominentes matemáticos y físicos como V. Arnold, I. Gelfand, A. Kolmogórov, S. Novikov, R. Graham. Ver [19] y para información específica sobre Quantum ver [20].

Math Horizons:

Revista publicada por la MAA. Publica artículos muy interesantes en un tono relativamente ligero accesibles a un amplio público. Sus editores son Stephen D. Abbott, F. Torrence. Se publican 4 ejemplares al año. El sitio web oficial es [21]. Posee ilustraciones y portadas muy bellas.

7. La Gran Biblioteca

Este es un proyecto utópico, pudiera parecer ciencia ficción pero creemos que es realizable con un trabajo bien organizado por parte de un equipo multidisciplinario. Veamos; una serie de computadoras en paralelo, conectadas a una máquina central que es la que contiene la base de datos, todas estas máquinas deben ser capaces de tener una gran posibilidad de procesamiento de datos, reconocimiento de patrones, filtros y buscadores. La base de datos debe ser accesible en todos los idiomas. El propósito es principalmente de consulta, deben estar disponibles todos los libros de resolución de problemas publicados, revistas y sitios web, todas las olimpiadas matemáticas, biografías de problemistas, etc. Parte de lo anterior existe pero en otro contexto, ver ArXiv, o los archivos del Bulletin of AMS, pero por ejemplo American Mathematical Monthly no (a pesar de JSTOR), es sumamente difícil vincular un problema con su solución, ya que pueden llegar a pasar años entre la publicación de uno y otro. En este sentido es notable el sitio web `http://www.artofproblemsolving.com/`, pero hablamos de algo más abarcador. No confundir las publicaciones electrónicas de revistas con esta idea, estamos hablando de una biblioteca inteligente. Esta idea está inspirada por La Biblioteca de Babel de Borges, a su vez tiene relación con EL LIBRO de Erdős. Esta biblioteca debe ser de libre acceso, y debe ser actualizada constantemente. Pero donde quedan los tan apreciados libros de papel ?, el que escribe particularmente prefiere estos últimos, nuestra modesta opinión es que deben seguir siendo publicados, lo mismo con las revistas, etc. La función de las editoriales debe seguir vigente, ya que la Gran Biblioteca repetimos sería de consulta. Hay una gran disyuntiva entre comprar o leer online, debe haber un equilibrio.

8. Temas geométricos olvidados

Es notable que no se propongan problemas de estereometría en la IMO desde hace varios años. El último problema propuesto fue 10(ICE) Lista corta 1990. Ver [24]. No obstante existe bibliografía dedicada a este tema [25][26][27]. Otro tema geométrico que ha quedado un poco en el pasado son las construcciones geométricas con regla y compás y los lugares geométricos. Estos resultan temas muy desafiantes. El libro [28] posee muy buenos problemas. Ahora veamos un bello problema propuesto por Oleg Mushkarov a Mathematical Reflections sobre un lugar geométrico:

O137. Encontrar el lugar geométrico de los centros de los triángulos equiláteros inscritos en un cuadrado dado.

9. Especialización

Es notable que haya especialización en resolución de problemas. Consideremos el caso de Walther Janous en el campo de las desigualdades, Ovidiu Furdui con integrales relacionadas con funciones parte entera y funciones parte fraccionaria, K. R. S. Sastry con los triángulos heronianos, Toshio Seimiya en la geometría y por último Nairi Sedrakyan con los hexágonos en particular. Estos famosos problemistas trabajan en otras áreas de las matemáticas como es de suponer pero creemos estas son sus especialidades y trataremos de demostrarlo con varios ejemplos. Se podían haber incluido otros nombres, no lo hemos hecho por brevedad.

Walther Janous:

- Problemas $1366, 1484, 1606, 2093, 2468, 2152, 2159, 2172, 2173, 2179, 2190, 2202, 2214, 2233, 2299$. (Revista CRUX).
- Problema 2 IMO 2008. Ver generalización en [29].
- `http://depmath.ulbsibiu.ro/genmath/gm/vol15nr1/janous/janous.pdf`

Ovidiu Furdui:

- Calcular $\int_0^1 \left\{\frac{1}{x}\right\}^4 dx$ Revista CRUX.
- Problemas $136, 157$ REOIM.
- `http://www.math.armstrong.edu/faculty/chang/spring/solutions_2010/PME1217.pdf`
- `http://www.siam.org/journals/problems/downloadfiles/07-002.pdf`

En el siguiente sitio web pueden ser encontrados muchos problemas en esta línea:
- `http://www.math.utoledo.edu/~ofurdui/Probleme.html`

K. R. S. Sastry:

- Problema 100 REOIM
- Problema 79 H. The Mathematical Gazette.
- Pares de triángulos heronianos con áreas y perímetros iguales: una descripción. REOIM 16.
- "Heron Triangles: A Gergonne-Cevian-and-Median Perspective." Forum Geometricorum 1, 17-24, 2001.
- `http://forumgeom.fau.edu/FG2001volume1/FG200104index.html.`

Toshio Seimiya:

- Problemas $2114, 2255, 2708, 2709, 2936$. Revista CRUX.
- $1990-14$, $1991-2$ IMO Compendium
- Toshio Seimiya, Peter Y. Woo. Solution of Problem 2338, Crux Mathematicorum 4/25 (1999) pp. 243-245.

Nairi M. Sedrakyan:

- Problema 5 IMO 1996.
- The story of the Creation of the 1996 IMO problem, Mathemathics Competitions, vol 9, no 2, 1996.
- Problema 6 IMO 2008
- On Hexagon-parallelogram, Mathematical education, 2001, N3, p18 (in russian)

- Problema O143 Mathematical Reflections.
Los siguientes problemas pertenecen a ICME 11, México 2008.
- Dado el hexágono $ABCDEF$ probar la desigualdad:
$(AB+DE)^2+(AF+CD)^2+(BC+EF)^2 \geq AD^2+BE^2+CF^2$.

- En el hexágono convexo $ABCDEF$ es conocido que $AD = BC+EF$, $BE = AF+CD$, $CF = AB+DE$. Probar que:
$\frac{AB}{DE} = \frac{CD}{AF} = \frac{EF}{BC}$.

10. Kolmogórov y la resolución de problemas

Kolmogórov se preocupó mucho por la educación integral de los jóvenes. Creía necesario que tuvieran literatura científica y se relacionaran con personalidades relevantes. Trabajó mucho en el perfeccionamiento de la enseñanza general de las matemáticas, elaboración de nuevos programas, libros de textos y formación de profesores. Formó parte en la organización de la Academia de Ciencias Pedagógicas de la Unión Soviética. Para Kolmogórov las capacidades creativas se dividían en:

(1) algorítmica

(2) intuitivo - geométrica

(3) lógica

En los años treinta siendo profesor de la Universidad de Moscú participa en el trabajo de círculos estudiantiles y en la organización de la 1era Olimpiada Matemática. Daba gran importancia a las olimpiadas como medio para detectar jóvenes talentos pero se pronuncia en contra de que tuvieran un carácter meramente deportivo. El principal objetivo debe ser el contacto entre jóvenes y la matemática y no el entrenamiento de campeones. Citamos textual de [32] lo siguiente:
" *De los éxitos en las olimpiadas es natural alegrarse e incluso enorgullecerse. Los fracasos en la olimpiada no deben entristecer excesivamente y llevar a desilusionarse de sus capacidades. El hecho de que se le asigne un tiempo muy limitado a la resolución de los problemas, convierte a muchos en incompetentes. Existen muchos problemas matemáticos, que pueden ser resueltos sólo como resultado de un largo tiempo de tranquila meditación.*"
Cuando se refiere al interés por las matemáticas en edades tempranas dice que suele ser temporal aunque "*cuando se cultivan de forma hábil sus capacidades, éstas gradualmente se desarrollan y, como regla, ya no se pierden*". Para desarrollar las capacidades creativas en los estudiantes a temprana edad es necesario sumergirlos en un ambiente de creación matemática y de investigación científica, todo esto aparejado por un gran apasionamiento.

Es preciso seleccionar personas capaces e interesadas en el desarrollo del talento matemático de los jóvenes. Estas ideas animaron el surgimiento de las escuelas de verano y las escuelas internados, anexas a las universidades. En uno de los meses de vacaciones, los ganadores de las olimpiadas se reunían con el fin de trabajar en matemáticas y descansar activamente. Kolmogórov participó personalmente en al menos 11 de estas escuelas de verano entre los años 1963 y 1977. La sesión diurna se dedicaba a las conferencias y a las clases de ejercicios y problemas. Las noches se destinaban a la realización de encuentros literarios o musicales. La práctica deportiva como los ejercicios matutinos era obligatoria; estamos en desacuerdo, creemos debe ser opcional.

Uno de los principios pedagógicos de Kolmogórov relacionado con la enseñanza de la matemática a estudiantes de talento era que un material bastante difícil se debía presentar en forma concreta más que abstracta.

11. Ciencia

11.1 Computación Simbólica

MAPLE:

Veamos dos problemas propuestos en Olimpiadas los cuales pueden ser vistos en un contexto muy general con la ayuda de Maple, bien pudiera usarse Mathematica también. Estudiando esta generalización como se dice "a mano" propuse a la revista escolar OIM el caso $n = 4$, sin saber que este problema fue propuesto a la IMC 2010. Pero veamos los problemas, el lector debe estar ansioso, denotemos por

$$S_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(nk+1)(nk+2)\cdots(nk+n)}$$

Calcular $S_3 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}$ fue propuesto en la XXVI Olimpiada Brasileira de Matemática Universitaria. Ver solución publicada en la revista Eureka 22. Calcular S_4 con dos soluciones puede ser encontrado en [22]. Nosotros incluiremos la función gamma que permitirá un estudio de sumas del tipo inversos de coeficientes binomiales y un análogo integral fácilmente computable en un programa de matemática simbólica y creemos no aparece reflejada en ninguna de las anteriores soluciones.

Es notable la dificultad de calcular S_n para $n \geq 5$, es todo un desafío el caso $n = 5$. Hace un tiempo traté de encontrar una regla o patrón en las fórmulas explícitas para S_n. Es un problema abierto demostrar la irracionalidad de S_n.

Este es un magnífico ejemplo que vincula problemas de olimpiadas con la investigación, y se relaciona con un problema abierto. Discutí este problema con Dayron Edmundo Acosta (un colega estudiante de ciencia de la computación) , quién me ayudó a verificar los cálculos en Maple, los cuales yo había hecho a mano. Veamos como calcular $S_4 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4n+1)(4n+2)(4n+3)(4n+4)}$.

Tenemos que:

$$S_4 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4n+1)(4n+2)(4n+3)(4n+4)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!}{(4n+4)!} = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(4n+1)\Gamma(4)}{\Gamma(4n+5)} = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty} \beta(4n+1,4)$$

Recordar que

$$\begin{aligned}
\Gamma(a) &= \int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}dx \quad a>0 \\
\Gamma(n+1) &= n! \\
\beta(a,b) &= \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx \quad a>0,\ b>0 \\
\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} &= \beta(a,b)
\end{aligned}$$

Por tanto

$$S_4 = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 x^{4n}(1-x)^3dx = \frac{1}{6}\int_0^1\sum_{n=0}^{\infty}x^{4n}(1-x)^3dx = \frac{1}{6}\int_0^1(1-x)^3\sum_{n=0}^{\infty}x^{4n}dx$$

Pero

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^{4n} = \frac{1}{1-x^4}$$

ya que es una serie geométrica, notar que converge debido a que $0<x<1$. Entonces

$$S_4 = \frac{1}{6}\int_0^1\frac{(1-x)^3}{1-x^4}dx = \frac{1}{6}\int_0^1\frac{(1-x)^2}{(1+x)(1+x^2)}dx$$

Notar que

$$\frac{(1-x)^2}{(1+x)(1+x^2)} = \frac{2}{1+x} - \frac{1}{1+x^2} - \frac{x}{1+x^2}$$

De donde

$$\begin{aligned}
\int_0^1\frac{(1-x)^2}{(1+x)(1+x^2)}dx &= 2\int_0^1\frac{1}{1+x}dx - \int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx - \frac{1}{2}\int_0^1\frac{2x}{1+x^2}dx \\
&= 2\ln(1+x)\ |_0^1 - \arctan(x)\ |_0^1 - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\ |_0^1 \\
&= 2\ln 2 - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{3}{2}\ln 2 - \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

Finalmente

$$S_4 = \frac{\ln 2}{4} - \frac{\pi}{24}.$$

De forma análoga puede expresarse

$$S_n = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^1\frac{(1-x)^{n-1}}{1-x^n}dx$$

La fórmula explícita para S_5 es impresionante, convidamos al lector a encontrarla con Maple, sin embargo $S_6 = \frac{1}{4320}(192\ln 2 - 81\ln 3 - 7\sqrt{3}\pi)$, no es tan complicada !

Veamos otro problema el cual puede ser resuelto con la ayuda de Maple:

El triángulo ABC es isósceles, con $AB = AC$. Las rectas BD (con D en el lado AC) y CH (con H en el segmento BD) lo dividen en tres triángulos, cuyos incírculos tienen el mismo radio r. Encontrar la relación entre r y la longitud de CH.

Este problema fue propuesto por Hidetoshi Fukawaga y Francisco Bellot Rosado a la REOIM como problema 165. Puede verse la solución de Luis Gómez Sánchez, Venezuela. Intentar resolver este problema a mano es prácticamente imposible.

11.2 Generalización

Veamos varias generalizaciones a problemas IMO:

[36] Nairi M. Sedrakyan. Problema 2 IMO 2000.
[34] Alex Fink. Problema 4 IMO 2001.
[37] Oleg Mushkarov, Nikolai Nikolov. Problema 3 IMO 2003.
[29] Marian Dinca. Problema 2 IMO 2008.
[35] Jean - Louis AYME. Problema 2 IMO 2009.

El problema S2 de Mathematical Reflections propuesto por Ivan Borsenco permite introducir la fórmula de Descartes sobre el radio del círculo inscrito y circunscrito a tres círculos dados, e incluso (tratando de generalizar a esferas) estudiar las fórmulas de Soddy ya que el estudiante buscará la forma de encontrar fórmulas explícitas para R y r. Esto resulta bien difícil , y ahí es donde entra a jugar la inversión. No obstante un estudiante especializado en geometría puede usar directamente las fórmulas ya establecidas y darle al problema un carácter puramente algebraico al demostrar la desigualdad.

12. Deporte

Es vital para alcanzar buena puntuación en una olimpiada dominar varias técnicas. Tener en cuenta que se dispone de poco tiempo, una estrategia que funciona muy bien es haber visto muchos problemas similares durante el entrenamiento, los cuales van variando en dificultad, esto hace que el estudiante se apropie de esta herramienta. Este enfoque se pone de manifiesto en numerosos libros del experimentado Dr. Titu Andreescu, ver por ejemplo Mathematical Olympiad Challenges. Pero no obstante esta técnica puede poner en riesgo la creatividad, ya que puede haber una solución más elegante y el estudiante pasarla por alto. He ahí la genialidad de los olimpistas que combinan ambas cosas. Es notable hoy en día las numerosas técnicas de resolución de problemas que existen, las cuales han sido sistematizadas, de ahí que sea un reto la creación de nuevos problemas . El campo de las desigualdades es uno de los más desarrollados, pero curiosamente existen desigualdades poco conocidas en este campo que pueden originar nuevos problemas, los cuales son notablemente difíciles de atacar por otras vías, el siguiente problema fue propuesto por el que escribe a la revista Mathematical Reflections y tal vez aparezca en el próximo número:

Sea $0 < x < y < z$. Demostrar que

$$(x+y+z)(xy+yz+zx) < \left(\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y}\right)^2 y(x+z)^2$$

solo adelantamos que la solución es una combinación de la Desigualdad de Kantoróvich (poco conocida en el ámbito olímpico) y la Desigualdad de Nesbitt. Retamos al lector a encontrar una solución por otra vía. Ver `http://mathworld.wolfram.com/KantorovichInequality.html`.. Este problema puede ser usado para motivar a los estudiantes a que investiguen bajo que condiciones se cumple la igualdad en la desigualdad de Kantoróvich (investigación).

Una técnica muy útil en la resolución de problemas es reconocer problemas similares. Esto permite ver un problema determinado dentro de todo un conjunto. Veamos un caso concreto: Los cuadriláteros bicéntricos. A continuación analizaremos una serie de problemas en los cuales es necesario demostrar propiedades de estos interesantes cuadriláteros.

Problema 1.
Un cuadrilátero bicéntrico es aquel que es inscribible y circunscribible. Demostrar que para tal cuadrilátero los centros de las dos circunferencias asociadas son colineales con el punto de intersección de las diagonales.

Este es conocido como el Teorema de Newton, fue propuesto por la India como problema 14, lista corta 1989, IMO. En `http://www.maa.org/editorial/knot/BicentricQuadri.html` aparece una explicación detallada de este problema con múltiples referencias bibliográficas y applets que ayudan a comprender mucho mejor el problema, es un excelente método para aprender geometría

Problema 2. J46. Ivan Borsenco. Mathematical Reflections.
Construir con regla y compás un cuadrilátero bicéntrico con todos sus lados distintos.

Problema 3. S94. Ivan Borsenco. Mathematical Reflections.
Probar que el producto de sus diagonales es una constante.

Es necesario acotar que por constante se entiende una relación que involucre solamente R y r, no necesariamente un número, este enunciado puede traer confusión.

Problema 4. S150. Ivan Borsenco. Mathematical Reflections.
Sea $A_1A_2A_3A_4$ un cuadrilátero inscrito en una circunferencia $C(O,R)$ y circunscrito a una circunferencia $w(I,r)$. Denotamos por R_i el radio de la circunferencia tangente a A_iA_{i+1} y tangente a las extensiones de los lados $A_{i-1}A_i$ y $A_{i+1}A_{i+2}$. Probar que la suma $R_1+R_2+R_3+R_4$ no depende de la posición de los puntos A_1, A_2, A_3, A_4.

De S94 obtenemos que el producto de las diagonales $d_1d_2 = 2r^2 + 2r\sqrt{r^2+4R^2}$ y por tanto sustituyendo en la expresión $R_1+R_2+R_3+R_4 = \frac{16R^2r}{d_1d_2}$ se demuestra que esta suma no depende de la posición de A_1, A_2, A_3, A_4.

Los resultados básicos sobre cuadriláteros bicéntricos pueden ser encontrados en la siguiente web: `http://mathworld.wolfram.com/BicentricQuadrilateral.html`. El estudio de artículos también es importante:

Martin Josefsson. Characterizations of bicentric quadrilaterals. Forum Geometricorum.

Por último queremos esbozar un posible método de entrenamiento el cual no hemos puesto en práctica y creemos puede tener tanto ventajas como desventajas. Queremos dejarlo a consideración del lector. A este método lo llamaremos de (No Aceptación). La idea clave es no dar completo reconocimiento al estudiante por sus logros, consiguiendo así un trabajo más intenso por parte de este en pos de alcanzar el éxito. Funciona principalmente en estudiantes con baja autoestima y un gran deseo de reconocimiento. Normalmente se van guiando a través de la resolución de problemas, una liga de problemas relativamente fáciles (motivación - elevar autoestima) hasta enfrentar problemas muy difíciles o incluso un método innovador (experimental): proponer un enunciado el cual no es cierto en su totalidad pero que estimula al estudiante a la investigación y posible correción del problema inicial. Son muy importantes los contraejemplos.

13. Arte

Trataremos de demostrar que en la resolución de problemas también hay arte. Veamos el siguiente problema el cual es una joya y en términos ajedrecísticos puede ser considerado una miniatura:

Sean $a, b \in \mathbb{Z}$. Resolver (! numéricamente !) la ecuación

$$(ax - b)^2 + (bx - a)^2 = x,$$

sabiendo que admite una raíz entera.

(M. Becheanu, *Gazeta Matematica*, *Rumania*)

Según Francisco Bellot este es " el más bello problema sobre la ecuación de segundo grado jamás propuesto". La solución se puede encontrar en [38].

Veamos ahora un problema con un enunciado muy simple pero que es difícil de resolver, muy desafiante para la edad de los estudiantes a los que es propuesto. Otra miniatura.

Hay cuatro botes en una de las orillas del río; sus nombres son Ocho, Cuatro, Dos y Uno, porque esa es la cantidad de horas que tarda cada uno de ellos en cruzar el río. Se puede atar un bote a otro, pero no ms de uno, y entonces el tiempo que tardan en cruzar es igual al del más lento de los dos botes. Un solo marinero debe llevar todos los botes a la otra orilla. Cuál es la menor cantidad de tiempo que necesita para completar el traslado?

(IV Olimpiada de Mayo, primer nivel, 1998).

Retamos al lector a resolver este problema en apariencia tan sencillo !

La creación de problemas es todo un arte, debe lograrse un enunciado simple, motivador y desafiante a la vez. Considerar el siguiente:

Teorema de Sylvester-Gallai:
Dados $n \geq 3$ puntos en el plano no todos alineados existe una recta que solo contiene dos de estos.

Erdős conjetura este resultado en el 1933, pero no puede probarlo. Posteriormente Tibor Grunwald (Gallai) lo demuestra. Se cree que este problema fue primeramente propuesto por Sylvester en la revista Educational Times en 1893.

Teorema de Steiner - Lehmus:
Un triángulo con dos bisectrices iguales es isósceles.

Recomendamos la página web [39] donde aparece una demostración sintética , entre otras tantas, y [40] para referencias a trabajos vinculados con este bello teorema. Si este problema es propuesto a un grupo de estudiantes casi seguro buscarán la solución métrica (aproximación deportiva), pero sin embargo puede ser muy desafiante sugerir la búsqueda de una solución puramente sintética, y aun más, una solución directa sin el uso de reducción al absurdo (puro arte). Este pequeño experimento lo llevé a cabo con tres colegas: Mario Garcia, Jorge Erick, Yaser Quevedo (todos olimpistas), solo uno encontró la solución sintética !

Por último veremos un problema que puede ser encontrado con solución en [41] como problema 5 página 115.

Construir el menor y el mayor triángulo equilátero en un cuadrado dado.

Pero hay arte también en encontrar una solución elegante e ingeniosa. Muchas veces estas soluciones son premiadas en los concursos de matemática. Tenemos el caso del búlgaro Emmanouil Atanassou (que recibió un Premio Especial del Jurado por su solución durante el concurso), Problema 6 IMO 1988, Canberra, Australia. Ver solución en el artículo [42].

14. Palabras finales

Esperamos que el lector quede convencido de que la resolución de problemas está vinculada con la investigación. Por otro lado existen problemas los cuales es difícil catalogar como arte, ciencia o deporte exclusivamente. Veamos el Teorema de Victor Thebault, el cual puede considerarse como ciencia y como arte dadas las demostraciones existentes. Consideramos este como uno de los problemas geométricos más difíciles propuesto.

Teorema de Victor Thebault:

Dado un triángulo ABC, sea M un punto sobre BC. I el incentro. Sea P el centro de la circunferencia la cual toca MA, MC, y el circuncírculo y sea Q el centro de la circunferencia la cual toca MA, MB, y el circuncírculo. Probar que P, I, Q están alineados.

Ver [43] para una historia detallada del problema y para una solución que vincula la geometría analítica con la computación (ciencia). Sorprendentemente en [44] se puede encontrar una solución puramente sintética y toda una nueva descripción detallada del problema (arte). Existen varios trabajos vinculados a este problema inicialmente propuesto a la Monthly en 1938. Estudiarlos todos no es el propósito de esta sección, dejamos este reto al lector. También quedamos en deuda con el lector sobre los trabajos de Polya y Schoenfeld, un estudio minucioso debe ser hecho. Muchas de las soluciones (e incluso) a veces los propios enunciados de los problemas aquí mencionados han sido referidos y no planteados explícitamente, esto ha sido en aras de la brevedad, esperamos que un lector interesado y con mucha curiosidad y amor por la resolución de problemas pueda consultar la extensa bibliografía expuesta. El autor está abierto a críticas y sugerencias, cualquier comentario será bienvenido. Aquí termina nuestro artículo, pero seguimos con deseos de investigar y escribir sobre este fascinante mundo dentro de las matemáticas.

Bibliografía:

[1] http://en.wikipedia.org/wiki/Problem_solving
[2] Zonghu Qiu , Pak - Hong Cheung. Mathematics Competitions in China: success and deficiency. Mathematics Competitions. vol 10, no 1, 1997.
[3] E. Berlekamp, J.Conway, R.Guy. Winning Ways for Your Mathematical Plays, Vol. 1,2,3,4. 2001.
[4] E. Ya. Guik. Juegos matemáticos recreativos. Mir Moscú. 1989.
[5] El Cubo Mágico de Rubik. (fotocopia).
[6] Andy Liu. The Smart Club. Mathematics Competitions, vol. 10, no 1, 1997.
[7] Ravi Vakil. The Youngest Tenured Professor in Harvard History. Math Horizons, Sept. 1998, pp. 8-12.
[8] A. Karpov, E. Guik. Mosaico Ajedrecístico. Ráduga Moscú. 1984.
[9] http://en.wikipedia.org/wiki/Tetris
[10] http://en.wikipedia.org/wiki/Fifteen_puzzle
[11] http://mathworld.wolfram.com/15Puzzle.html.
[12] A. F. Archer. A modern treatment of the 15 puzzle. Amer. Math. Monthly, 9, November 1999.
[13] http://www.komal.hu/info/miazakomal.e.shtml
[14] http://www.math.ca/crux/
[15] Paulo Cezar Pinto Carvalho. O logotipo da olimpiada brasileira de matematica.
[16] http://awesomemath.org/mathematical-reflections/
[17] http://www.oei.es/oim/revistaoim/
[18] http://www.obm.org.br/opencms/revista_eureka/
[19] Serge Tabachnikov. Kvant Selecta. AMS. 1999.
[20] http://www.nsta.org/quantum/
[21] http://www.maa.org/mathhorizons/
[22] http://www.imc-math.org.uk/imc2010/imc2010-day1-solutions.pdf
[23] J. Slocum, D. Singmaster, Wei-Hwa Huang, D. Gebhardt, G. Hellings, E. Rubik. The Cube: The Ultimate Guide to the World's Bestselling Puzzle - Secrets, Stories, Solutions. 2009.
[24] D. Djukić, V. Janković, I. Matic, N. Petrović. IMO Compendium. Springer. 2010.
[25] V. Gúsiev, V. Litvinenko, A. Mordkóvich. Prácticas para resolver problemas matemáticos. Mir Moscú. 1989.
[26] I.F.Sharygin. Problems in Solid Geometry. Mir Publishers. 1986.
[27] T. Andreescu, R. Gelca. Mathematical Olympiad Challenges. Birkhäuser. 2000.
[28] V. Lidski. Problemas de matemáticas elementales. Mir Moscú. 1972.
[29] M. Dinca. Generalización de la desigualdad propuesta en la IMO 2008 (Madrid, España). REOIM 39.
[30] T. Tao. Solving mathematical problems. A personal perspective. 2005.

[31] T. Andreescu, J. A. Gallian, J. M. Kane, J. E. Mertz. Cross-Cultural Analysis of Students with Exceptional Talent in Mathematical Problem Solving. Notices of the AMS. Vol 55, number 10, November 2008.

[32] Carlos Sánchez Fernández, Concepción Valdés Castro. Kolmogórov. El zar del azar. Nivola. 2003.

[33] Group theory via Rubik's cube. Tom Davis. 2006.

[34] Alex Fink. A generalization of an IMO problem. Integers. 6, 2006.

[35] `http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/Docs/A20generalization20of20IMO202009.pdf`

[36] Nairi M. Sedrakyan. Remark on the problem 2 of the XLII IMO and its generalization, Mathemathics Competitions, vol 14, no 2, 2001.

[37] Oleg Mushkarov, Nikolai Nikolov. Semiregular polygons. Amer. Math. Monthly, Vol 113, No 4, April 2006.

[38] 10 matemáticos, 100 problemas. (Colectivo de autores). 2008.

[39] `http://www.mathematik.uni-bielefeld.de/~sillke/PUZZLES/steiner-lehmus`

[40] `http://mathworld.wolfram.com/Steiner-LehmusTheorem.html`

[41] J. S. Madachy. Mathematics on vacation. 1966.

[42] Francisco Bellot Rosado. Famosos problemas de la IMO. REOIM 41.

[43] R. Shail. A Proof of Thebault's Theorem. Amer. Math. Monthly, April 2001.

[44] Jean-Louis Ayme. Sawayama and Thebault's theorem. Forum Geometricorum, vol 3, 2003.

Correo electrónico:
`bobbydrg@gmail.com`

PROBLEMAS PARA LOS MÁS JÓVENES 42

CINCO PROBLEMAS DEL CONCURSO NACIONAL RUMANO "SPERANTZE RÂMNICENE", 2011

JUNIOR (12-13 AÑOS)

Agradecemos al Prof. Neculai Stanciu, de Buzau (Rumania), el habernos proporcionado estos enunciados.

PJ42-1

Si $a = 7 + 6 \cdot 7 + 6 \cdot 7^2 + \cdots + 6 \cdot 7^{2011}$, encontrar x tal que $x^2 = a$.

PJ42-2

Probar que si $a^2 + 9b^2 - 4a - 24b + 16 = 0$, entonces $2 \le 3(a+b) \le 18$.

PJ42-3

Con la notación $\overline{abc}$ representamos el número cuya cifra de unidades es c, decenas b y centenas a. Determinar todos los números $\overline{abc}$ tales que se verifique la igualdad $\sqrt{\overline{abc}} = \overline{ab} - \sqrt{c}$.

PJ42-4

El triángulo ABC es equilátero (AB = BC = CA), y P es un punto interior. Desde P se trazan las perpendiculares a los lados AB,BC y CA, a los que cortan en M, N y R, respectivamente (es decir, PM es perpendicular a AB, etc). Si se sabe que PM = 2009; PN = 2010; y PR = 2011, calcular el lado del triángulo equilátero.

PJ42-5

ABC es un triángulo rectángulo en A. D es un punto del lado BC; los puntos M y N equidistan, respectivamente, de A y D y de C y D; y los ángulos $\measuredangle ABM$ y $\measuredangle CAN$ son iguales. Demostrar que AD es perpendicular a BC.

PROBLEMAS DE OLIMPIADAS Y DE NIVEL MEDIO 42

Cinco problemas de la Competición Matemática Húngaro-Transilvana 2011

Agradecemos al Prof. Mihaly Bencze, de Brasov, por habernos facilitado los enunciados.

PO42-1

A es una matriz 2x2 cuyos elementos son números complejos. Supongamos que $\det(A)=\alpha$. Si I_2 es la matriz identidad 2x2, demostrar que

$$\det(A^2+A-\alpha I_2)+\det\left(A^2+\alpha I_2\right)=\alpha\left(1+4\alpha\right)$$

PO42-2

El triángulo ABC no es equilátero. Sean: A_1 el punto simétrico de A respecto de B; B_1 el simétrico de B respecto de C; C_1 el simétrico de C respecto de A. Sean O y H el circuncentro y ortocentro de ABC; y O_1 y H_1 el circuncentro y el ortocentro de $A_1B_1C_1$. Demostrar que OO_1HH_1 es un trapecio.

PO42-3

Sea ABCD un cuadrado, y $M\in\left(AD\right)$; y $N\in\left(BC\right)$ puntos tales que AM = BN.

Sea $P\in\left(MN\right)$ tal que $\frac{MP}{PN}=\left(\frac{AM}{MD}\right)^2$. Demostrar que AP es perpendicular a PB y hallar el lugar geométrico del punto P cuando M describe el segmento AD (excluidos los extremos).

PO42-4

Sea ABC un triángulo y M,N y P los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita con los lados BC, CA y AB, respectivamente. Si D es el punto medio del lado BC, y E es el punto de intersección de AD con NP, demostrar que ME es perpendicular a BC.

PO42-5

Hallar el menor entero positivo *m* que verifica la siguiente propiedad: entre cada *m* enteros positivos consecutivos existe uno de ellos tal que si se suman todos sus divisores propios, la suma no es menor que 4/3 de dicho número.

PROBLEMAS PROPUESTOS 206-210

Problema 206, propuesto por José Luis Díaz Barrero, Barcelona, España

Sea ABC un triángulo de lados *a,b,c*; circunradio *R* y sean r_a, r_b, r_c los radios de los círculos exinscritos en los ángulos A, B y C, respectivamente. Demostrar que

$$\sum \sqrt{\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\frac{1}{c^2}} \geq \sqrt{\frac{1}{R}}\left(\sqrt{\frac{1}{r_a}}+\sqrt{\frac{1}{r_b}}+\sqrt{\frac{1}{r_c}}\right),$$

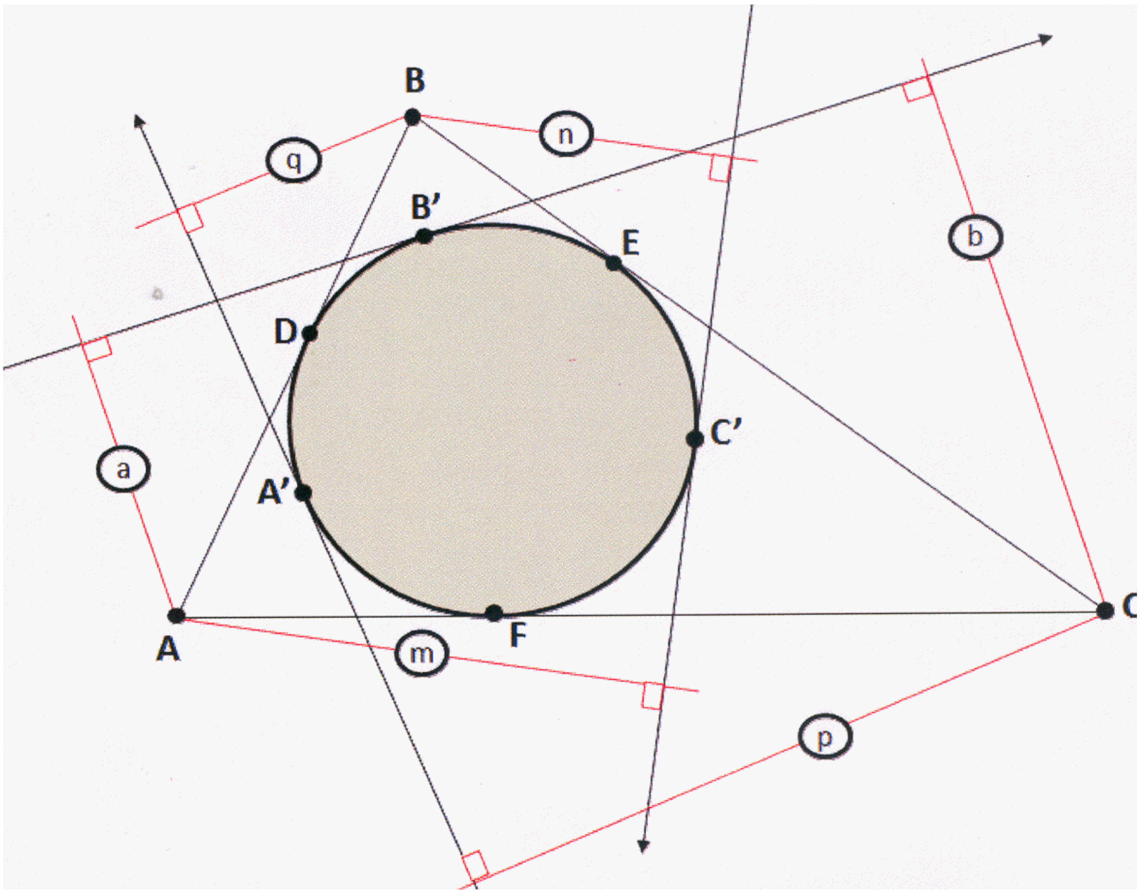
donde la suma es cíclica en a,b,c.

Problema 207, propuesto por Carlos Hugo Olivera Díaz, Lima, Perú

Se tiene un triángulo ABC y su circunferencia inscrita, tangente a los lados en los puntos D, E y F, como se indica en la figura. Por los puntos A',B',C' de la circunferencia inscrita se trazan las rectas tangentes a los arcos FD,DE y EF, respectivamente. Desde los vértices de ABC se trazan rectas perpendiculares a dichas tangentes (véase igualmente la figura adjunta).

Determinar los puntos de tangencia A',B' y C' para que se cumpla la siguiente condición:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{p}{q}\cdot\frac{n}{m}=1$$



Problema 208, propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, Ávila, España

Demostrar que $\pi < \int_0^{\pi} \sqrt{3+\cos 4x}\,dx < \dfrac{3\pi}{2}$

Problema 209, propuesto por D.M. Batinetzu-Giurgiu, Bucarest, y Neculai Stanciu, Buzau, ambos de Rumania.

Determinar todos los números positivos x que verifican la ecuación

$$2^x + 2^{1+\frac{1}{\sqrt{x}}} = 6\,.$$

Problema 210, propuesto por Laurentiu Modan, Bucarest, Rumania

Se lanzan 3 veces un dado y se denota con z_i, con $i \in \{1,2,3\}$, la variable aleatoria que da el número de puntos obtenidos en la situación *i*. Si la probabilidad $P(z_1 + z_2 = z_3) = p \in [0,1]$, se considera la variable aleatoria

$$X : \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ p & 1-p \end{pmatrix}.$$

Por otra parte, se considera también la variable aleatoria

$$Y:\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ \alpha & \alpha^2 & 1/4 \end{pmatrix}$$

donde $\alpha \in (0,1)$.

Se pide:

A) Comparar M(X) y M(Y)

B) Estudiar si X e Y son independientes y si están correlacionadas sabiendo que $P(X=1, Y=0)=\dfrac{35}{72}$ y $P(X=-1, Y=2)=\dfrac{1}{72}$.

Problema 21. Solución de Roberto Bosch Cabrera, Florida, USA.

En general se cumple que

$$\begin{aligned}(xy+yz+zx)^2 &= x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2xyz(x+y+z)\\(x+y+z)^2 &= x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)\end{aligned}$$

Multiplicando por 2 la segunda ecuación del sistema original obtenemos

$$2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2) = 2xyz(x+y+z)^3 = [(xy+yz+zx)^2-x^2y^2-y^2z^2-z^2x^2][x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)]$$

Denotemos

$$\begin{aligned}x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2 &= a\\xy+yz+zx &= b\end{aligned}$$

Entonces se cumple que

$$2a = (b^2-a)(\frac{1}{3}+2b)$$

Despejando a queda

$$a = \frac{6b^3+b^2}{6b+7}$$

Pero notar que

$$(xy+yz+zx)^2 = x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2xyz(x+y+z) \leq 3(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)$$

de donde se deduce que $b^2 \leq 3a$, es decir $a \geq \frac{b^2}{3}$. Sustituyendo

$$\frac{6b^3+b^2}{6b+7} \geq \frac{b^2}{3}$$

pero $\frac{1}{3}+2b = (x+y+z)^2 \geq 0 \Rightarrow 6b+1 \geq 0 \Rightarrow 6b+7 > 0$, de donde obtenemos $18b^3 + 3b^2 \geq 6b^3+7b^2 \Rightarrow 4b^2(3b-1) \geq 0$ entonces si $b \neq 0$ se tiene que $b \geq \frac{1}{3}$. Lo cual implica que $xy+yz+zx \geq x^2+y^2+z^2$ pero es bien conocido que $x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$, de donde $x^2+y^2+z^2 = xy+yz+zx$ y por tanto $x=y=z$. Sustituyendo en la primera ecuación del sistema obtenemos las soluciones $(x,y,z) = (\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ y $(x,y,z) = (-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3})$. Notar que $b=0 \Rightarrow a=0 \Rightarrow xy=0, yz=0, zx=0$, de donde al menos dos variables son 0 y sustituyendo quedan las soluciones $(x,y,z) = (0,0,\pm\frac{\sqrt{3}}{3}), (x,y,z) = (0,\pm\frac{\sqrt{3}}{3},0), (x,y,z) = (\pm\frac{\sqrt{3}}{3},0,0)$.

Problema 38. Solución de Roberto Bosch Cabrera, Florida, USA.

Tenemos 40 cartas normales y 12 comodines. La probabilidad buscada es igual a casos favorables sobre casos posibles. Veamos los casos favorables:

1. Exactamente 1 comodín: $(12 \cdot 40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36) \cdot 6 = 5685189120$
2. Exactamente 2 comodines: $(12 \cdot 11 \cdot 40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37) \cdot \binom{6}{2} = 4342852800$
3. Exactamente 3 comodines: $(12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 40 \cdot 39 \cdot 38) \cdot \binom{6}{3} = 1564992000$
4. Exactamente 4 comodines: $(12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 40 \cdot 39) \cdot \binom{6}{4} = 277992000$
5. Exactamente 5 comodines: $(12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 40) \cdot \binom{6}{5} = 22809600$
6. Exactamente 6 comodines: $(12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7) = 665280$

De donde los casos favorables son la suma: 11894500800. Los casos posibles son $52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 = 14658134400$ y finalmente la probabilidad buscada es igual a $\frac{11894500800}{14658134400} \approx 0{,}81$.

Problema 144, propuesto por Vicente Vicario García, Huelva, España

Dados los números α y β siguientes, probar o refutar que $\alpha = \beta$.

$$\begin{aligned}\alpha &= \sqrt{13}+\sqrt{10+2\sqrt{13}}\\ \beta &= \sqrt{5+2\sqrt{3}}+\sqrt{18-2\sqrt{3}+2\sqrt{65-26\sqrt{3}}}.\end{aligned}$$

Solución

$\alpha = \sqrt{13}+\sqrt{10+2\sqrt{13}}$; $\beta=\sqrt{5+2\sqrt{3}}+\sqrt{18-2\sqrt{3}+2\sqrt{65-26\sqrt{3}}}$.

El número α es solución de la ecuación $(\alpha-\sqrt{13})^2=10+2\sqrt{13}$. (1)

Cambiando α por x y desarrollando el cuadrado, después de reducir términos resulta

$$x^2+3=2\sqrt{13}\,(1+x)$$

y volviendo a elevar al cuadrado

$$(x^2+3)^2 = 52\cdot(1+x)^2 \quad \text{o bien} \quad x^4-46x^2-104x-43=0 \quad (2)$$

Para el número β, observando que

$$13 = (5-2\sqrt{3})\cdot(5+2\sqrt{3}),$$

tenemos que

$$18-2\sqrt{3}+2\sqrt{65-26\sqrt{3}} = 13+(5-2\sqrt{3})+2\cdot\sqrt{13\cdot\left(5-2\sqrt{3}\right)} = \left(\sqrt{13}+\sqrt{5-2\sqrt{3}}\right)^2.$$

Por tanto

$$\beta = \sqrt{5+2\sqrt{3}}+\sqrt{13}+\sqrt{5-2\sqrt{3}}$$

y

$$(\beta-\sqrt{13})^2 = 5+2\sqrt{3}+5-2\sqrt{3}+2\sqrt{13} = 10+2\sqrt{13} \quad (3).$$

Las expresiones (1) y (3) indican que los números α y β son iguales u opuestos. Al ser ambos positivos han de ser iguales. c.q.d.

Vamos a concluir hallando las otras tres soluciones de la ecuación (2) que verifica α (o β).

Si $\alpha = \sqrt{13}+\sqrt{10+2\sqrt{13}}$ es solución, también lo es $\alpha' = \sqrt{13}-\sqrt{10+2\sqrt{13}}$ como es fácil de comprobar. El polinomio de segundo grado que tiene a α y a α' por raíces es $x^2-2\sqrt{13}\,x+(3-2\sqrt{13})$. Dividiendo el polinomio de (2) por él se obtiene

$$x^2+2\sqrt{13}\,x+(3+2\sqrt{13})$$

que es el polinomio que contiene las otras dos raíces de la ecuación (2).

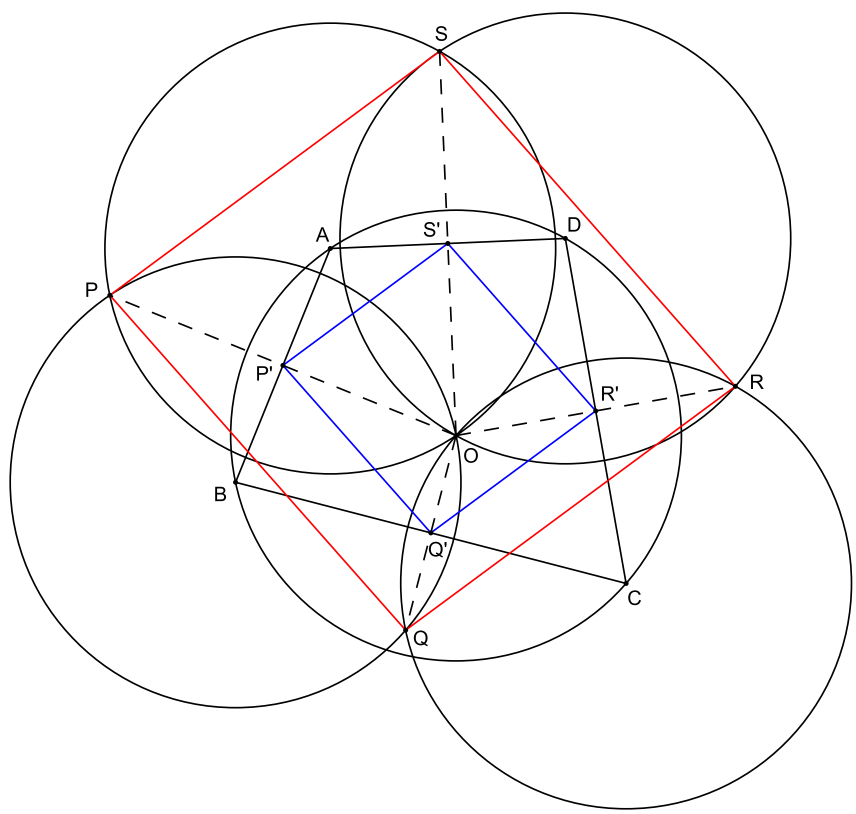
Resolviendo $x^2+2\sqrt{13}\,x+(3+2\sqrt{13})=0$ resulta $x=-\sqrt{13}\pm\sqrt{10-2\sqrt{13}}$.

Problema 201 (Propuesto por Roberto Bosch Cabrera, C. de la Habana, Cuba)

Sea $ABCD$ un cuadrilátero inscrito en una circunferencia c_0 de centro O interior al cuadrilátero. Se consideran las circunferencias $c_1(A; AO)$ (de centro A y radio AO), $c_2(B; BO)$, $c_3(C; CO)$ y $c_4(D; DO)$. Sean $c_1 \cap c_2 = \{P, O\}$, $c_2 \cap c_3 = \{Q, O\}$, $c_3 \cap c_4 = \{R, O\}$ y $c_4 \cap c_1 = \{S, O\}$. Demostrar que $PQRS$ es un paralelogramo.

Solución de Gabriel Alexander Chicas Reyes (El Salvador)

Sean P', Q', R', S' los puntos medios de AB, BC, CD y AD, respectivamente. Notemos que O y P son simétricos respecto a AB, ya que c_1 y c_2 tienen el mismo radio $OA = OB$. Luego P' está sobre OP y además es su punto medio, es decir $OP'/OP = 1/2$. De manera análoga vemos que $OP'/OP = OQ'/OQ = OR'/OR = OS'/OS = 1/2$, y de esto se desprende que los cuadriláteros $PQRS$ y $P'Q'R'S'$ son homotéticos desde O, con razón de homotecia $1/2$. Dado que $P'Q'R'S'$ es un paralelogramo (el paralelogramo de Varignon de $ABCD$), concluimos que $PQRS$ también es un paralelogramo. ■



Problema 202. Solución de Roberto Bosch Cabrera, Florida, USA.

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos

$$\sqrt[4]{a^2b^2senC} + \sqrt[4]{b^2c^2senA} + \sqrt[4]{c^2a^2senB} \leq \sqrt{(ab+bc+ca)(\sqrt{senA}+\sqrt{senB}+\sqrt{senC})}$$

Ahora de la conocida desigualdad $ab+bc+ca \leq a^2+b^2+c^2$ se deduce que $ab+bc+ca \leq \frac{(a+b+c)^2}{3} = \frac{4}{3}$ y también se cumple que

$$\sqrt{senA}+\sqrt{senB}+\sqrt{senC} \leq 3\sqrt{\frac{senA+senB+senC}{3}}$$

por la desigualdad Media Aritmética - Media Cuadrática y usando la conocida desigualdad

$$\frac{senA+senB+senC}{3} \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

que es consecuencia de la desigualdad de Jensen obtenemos

$$\sqrt{senA}+\sqrt{senB}+\sqrt{senC} \leq 3\sqrt[4]{\frac{3}{4}}$$

y finalmente basta multiplicar y extraer raíz cuadrada para obtener la desigualdad pedida.

PROBLEMA 203, *(propuesto por Vicente Vicario García, Huelva, España)*

Es bien conocido que existen números irracionales α, β tales que α^β es racional. Para la demostración clásica se parte del hecho de que $\sqrt{2}$ es irracional, y se considera el número $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. Si este número es racional, ya tenemos identificados los irracionales α, β que cumplen la condición del teorema. Si no es racional, consideramos $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$, que es racional y se concluye la demostración. Se pide dar una demostración constructiva alternativa y construir infinitas parejas de números irracionales α y β tales que α^β es un número racional.

Solución por Daniel Lasaosa Medarde, Universidad Pública de Navarra, Pamplona, España

Sean p, q, r tres primos cualesquiera (no necesariamente distintos). Es de sobra conocido (o fácilmente demostrable) que $\alpha_0 = \sqrt[q]{r}$ y $\beta = \sqrt[p]{q}$ no son racionales. Consideremos ahora $\alpha_i = \alpha_{i-1}^{\beta}$. Por trivial inducción, $\alpha_k = \alpha_0^{\beta^k}$, luego $\alpha_p = \alpha_0^{\beta^p} = \alpha_0^q = r$ es entero, luego racional. Sea ahora K el menor entero positivo tal que α_K es racional. Claramente K existe y es a lo sumo igual a p, y $\alpha = \alpha_{K-1}$ y β son irracionales tales que α_{K-1}^{β} es racional; se demuestra fácilmente que de hecho $K = p$.

Nótese que existe al menos una tal pareja de irracionales distintos para cada terna de primos (p, q, r); en caso de que existiera otra terna (p', q', r') que generara los mismos valores de α, β, claramente los valores de β han de ser iguales, y $\sqrt[p]{q} = \sqrt[p']{q'}$, luego $q^{p'} = q'^p$, con lo que al ser ambos potencias enteras de un cierto primo, los primos tienen que ser el mismo, y $q = q'$, llevando a $p = p'$. Además deberían ser iguales los valores de α, que son $\sqrt[q]{r}^{\sqrt[p]{q}^{p-1}}$ y $\sqrt[q]{r'}^{\sqrt[p]{q}^{p-1}}$, con lo que ha de ser $r = r'$, y si los valores de α, β son iguales, entonces también lo son las ternas, y recíprocamente ternas distintas generan valores distintos de α, β.

Solución del PROBLEMA 203 aparecido en la REVISTA ESCOLAR DE LA OLIMPÍADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA, volumen 41.

Es bien conocido que existen números irracionales α, β tales que α^β es racional. Para la demostración clásica se parte del hecho de que $\sqrt{2}$ es irracional, y se considera el número $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. Si este número es racional, ya tenemos identificados los irracionales α, β que cumplen la condición del teorema. Si no es racional, consideramos $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$, que es racional y se concluye la demostración.

Se pide dar una demostración constructiva alternativa y construir infinitas parejas de números irracionales α y β tales que α^β es un número racional.

SOLUCIÓN

Consideremos α cualquier número trascendente positivo y $\beta = \log_\alpha q$ siendo q cualquier número racional positivo distinto de la unidad. Todas estas parejas (α, β) verifican las condiciones del problema. Como $\alpha^\beta = q$ racional, sólo falta comprobar que β es irracional:

$$\beta = \log_\alpha q = \frac{1}{\log_q \alpha}$$

por lo que la racionalidad de β es equivalente a la de $\log_q \alpha$ pero este último no puede ser racional puesto que de así serlo:

$$\log_q \alpha = \frac{m}{n} \quad \Longrightarrow \quad \alpha = q^{m/n} \text{ algebraico}$$

lo que contradice, por hipótesis, la naturaleza de α.

Joaquín Rivero Rodríguez
I.E.S. Antonio de Nebrija
Zalamea de la Serena, España

Problema 203 (propuesto por Vicente Vicario García, Huelva, España)

Es bien conocido que existen números irracionales α, β *tales que* α^{β} *es racional. Para la demostración clásica se parte del hecho de que* $\sqrt{2}$ *es irracional, y se considera el número* $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. *Si este número es racional, ya tenemos identificados a los irracionales* α, β *que cumplen la condición del teorema. Si no es racional, consideramos* $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$*, que es racional y se concluye la demostración.*

Se pide dar una demostración constructiva alternativa y construir infinitas parejas de números irracionales α *y* β *tales que* α^{β} *es un número racional.*

Solución de Bruno Salgueiro Fanego, Viveiro, Lugo, España

Comencemos con una demostración constructiva alternativa:

Sean, para $x \in R$, la función f y la sucesión $\{a_n\}_{n\in N}$ definidas por $f(x) = \left(\sqrt{2}\right)^x = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^x = 2^{\frac{x}{2}}$ y por $a_1 = \sqrt{2}$ y, para todo $n \in N^*$, $a_{n+1} = f(a_n)$. Entonces

$$\left(\left(\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}$$

lo interpretamos como el límite, si existe, de dicha sucesión.

Si $x < 2$, entonces $\frac{x}{2} < 1$, luego $f(x) = 2^{\frac{x}{2}} < 2^1$. Por inducción resultará entonces que, para todo $n \in N^*$, $a_{n+1} = f(a_n) < 2$, es decir, que la sucesión $\{a_n\}_{n\in N}$ está acotada superiormente por el número 2. Sea ahora, para $x \in R$, la función g definida por $g(x) = f(x) - x$; probaremos que si $x \in (0,2)$ entonces $g(x) > 0$: En efecto, g es derivable y

$$g'(x) = f'(x) - 1 = 2^{\frac{x}{2}}(\ln 2)\frac{1}{2} - 1 \lesseqgtr 0 \Leftrightarrow 2^{\frac{x}{2}} \lesseqgtr \frac{1}{\frac{1}{2}\ln 2} \Leftrightarrow \frac{x}{2} \lesseqgtr \log_2\left(\frac{2}{\ln 2}\right) \Leftrightarrow x \lesseqgtr x_0, \quad \text{siendo}$$

$x_0 = 2\log_2\left(\frac{2}{\ln 2}\right) = 2\frac{\ln\left(\frac{2}{\ln 2}\right)}{\ln 2} = 3{,}05753\ldots$, luego g decrece en $(-\infty, x_0)$ y crece en $(x_0, +\infty)$, alcanzando su mínimo relativo y absoluto en $x = x_0$; y además su gráfica cortará al eje de abscisas exactamente en $x = 2$ y en $x = 4$ (nótese que $g(2) = 0 = g(4)$). En particular, g decrece estrictamente en $(-\infty, 2)$ y $g(2) = 0$, luego para $x \in (-\infty, 2]$ se tiene que $g(x) \geq g(2) = 0$, con igualdad si y sólo si $x = 2$. Entonces para $x \in (-\infty, 2)$ resulta que $f(x) - x > 0$, con lo cual para $x \in (0,2)$ resulta que $f(x) > x > 0$. De aquí y del hecho ya demostrado de que, para todo $n \in N^*$, $a_n \in (0,2)$, se obtendrá por inducción que $a_{n+1} = f(a_n) > a_n$, es decir, que la sucesión $\{a_n\}_{n\in N}$ es estrictamente creciente. De ello y del hecho de estar acotada superiormente, se concluye que es convergente, es decir, que existe $a=\lim_{n\to\infty} a_n$. Tiene sentido entonces tomar límites cuando $n\to\infty$ en la igualdad $a_{n+1}=f(a_n)$, obteniéndose, al ser además f continua, que $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}=\lim_{n\to\infty} f(a_n)=f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)$, es decir, $a=f(a)$, o equivalentemente, $g(a)=0$, esto es, $x=a$ es uno de los puntos de corte de la gráfica de g con el eje de abscisas, de donde resulta que $a\in\{2,4\}$. Como $a_n<2$, no puede ser que $a=4$, luego $a=2$. Por lo tanto, queda demostrado de forma alternativa que $\left(\left(\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}=2$, que es racional.

Construyamos ahora infinitas parejas de números irracionales α y β tales que α^β es un número racional:

Sea $n\in N$, $n\geq 2$; primeramente, habida cuenta de la nota que aparece en la solución publicada en el número 26 de esta revista para el problema 24.1, se tiene que $\sqrt[n]{n}$ es irracional, puesto que n no es una n- potencia de ningún número entero m, ya que, en caso contrario, $n=m^n$, con lo cual, la desigualdad de Bernoulli aplicada a $n\in N$, $n\geq 2$ y $m-1\in R$, $m-1\geq -1$, implica que $m^n=(1+(m-1))^n\geq 1+n(m-1)\geq 1+n>n$, que contradice la suposición de que $m^n=n$.

Siguiendo un razonamiento similar al del enunciado, se parte del hecho ya comprobado de que $\sqrt[n]{n}$ es irracional, y se considera el número real $\sqrt[n]{n}^{\sqrt[n]{n}}$. Si este número $\sqrt[n]{n}^{\sqrt[n]{n}}$ es racional, ya tenemos identificados a los irracionales $\alpha=\sqrt[n]{n}$, $\beta=\sqrt[n]{n}$ que cumplen la condición del teorema de que $\alpha^\beta=\sqrt[n]{n}^{\sqrt[n]{n}}$ es racional. Si el número $\sqrt[n]{n}^{\sqrt[n]{n}}$ no es racional, consideramos el número real $\left(\sqrt[n]{n}^{\sqrt[n]{n}}\right)^{\sqrt[n]{n}}$. Si este número $\left(\sqrt[n]{n}^{\sqrt[n]{n}}\right)^{\sqrt[n]{n}}$ es racional, ya tenemos identificados a los irracionales $\alpha=\sqrt[n]{n}^{\sqrt[n]{n}}$ y $\beta=\sqrt[n]{n}$ que cumplen la condición del teorema.

Si el número $\left(\sqrt[n]{n}^{\sqrt[n]{n}}\right)^{\sqrt[n]{n}}$ no es racional, se repiten los razonamientos precedentes y es claro que en algún momento, a lo sumo tras considerar un número de los de la forma $\left(\left(\sqrt[n]{n}^{\sqrt[n]{n}}\right)^{\sqrt[n]{n}}\right)^{\cdot^{\cdot^{\sqrt[n]{n}}}}$ formado por n exponentes en total, se obtendrá la pareja de números irracionales α y β tales que α^β es un número racional, debido a que dicho número $\left(\left(\sqrt[n]{n}^{\sqrt[n]{n}}\right)^{\sqrt[n]{n}}\right)^{\cdot^{\cdot^{\sqrt[n]{n}}}}$ es igual a $\sqrt[n]{n}^{\overbrace{\sqrt[n]{n}\cdot\ldots\cdot\sqrt[n]{n}}^{n \quad factores}}=\sqrt[n]{n}^{\sqrt[n]{n}^n}=\sqrt[n]{n}^n=n$, que es racional.

Solución: Problema 203. (Jorge Tipe Villanueva)

Sea n un entero positivo, existe un real positivo x_n tal que $2^{x_n} = 3^n$. Vamos a demostrar que x_n es irracional para todo n.
En efecto, si x_n fuera racional, sería de la forma $x_n = \frac{a}{b}$ donde a y b son enteros positivos. Reemplazando obtenemos $2^a = 3^{bn}$, lo cual no es posible porque un lado es par y el otro no. Ahora, una vez que sabemos que x_n es irracional, usamos el reemplazo $2^{x_n} = \sqrt{2}^{2x_n}$ para darnos cuenta que tanto la base como el exponente son irracionales mientras que la potencia es igual a 3^n que es racional.

PROBLEMA 204, *(propuesto por Pedro H.O. Pantoja, Univ. de Lisboa, Portugal)*

Demostrar que las ecuaciones $3^x - 1 = y^4$, $3^x + 1 = y^4$ no tienen soluciones enteras positivas.

Solución por Daniel Lasaosa Medarde, Universidad Pública de Navarra, Pamplona, España

El resultado se deduce trivialmente del teorema de Mihailescu (conjetura de Catalan), que dice que las únicas potencias perfectas no nulas cuya diferencia es 1 son 2^3 y 3^2. Daremos no obstante una solución a este problema por medios elementales.

Supongamos que $3^x + 1 = y^4$ para enteros positivos x, y. Se tiene entonces que $3^x = y^4 - 1 = (y^2 - 1)(y^2 + 1)$, es decir, tanto $y^2 + 1$ como $y^2 - 1$, que son enteros no negativos y cuya diferencia es 2, son divisores de 3^x. Uno de ellos es primo con 3 porque no pueden ambos ser divisibles por 3, luego uno de ellos (claramente el menor $y^2 - 1$) ha de ser igual a 1, luego $y^2 = 2$, absurdo pues y no sería entero.

Supongamos que $3^x - 1 = y^4$. Claramente y no puede ser divisible entre 3, pero cualquier cuadrado perfecto que no sea múltiplo de 3, es decir, de la forma $(3n \pm 1)^2 = 3n(3n \pm 2) + 1$, da resto 1 al dividir entre 3, luego $3^x = y^4 + 1 = (3m + 1)^2 + 1 = 3m(3m + 2) + 2$ da resto 2 al dividir entre 3, absurdo.

Problema 204 (propuesto por Pedro H. O. Pantoja, Univ. de Lisboa, Portugal)

Demostrar que las ecuaciones $3^x - 1 = y^4$, $3^x + 1 = y^4$ *no tienen soluciones enteras positivas.*

Solución de Bruno Salgueiro Fanego, Viveiro, Lugo, España

Demostremos primero que la ecuación $3^x - 1 = y^4$ no tiene soluciones enteras positivas: Por reducción al absurdo, supongamos que existen x, $y \in Z_+^*$ tales que $3^x - 1 = y^4$; entonces $3^x - 1 = y'^2$, siendo $y' = y^2$. Según el algoritmo de la división entera de numeros enteros positivos, al dividir cualquier número entero positivo z entre 3, se obtendrán un cociente c y un resto r tales que $z = 3c + r$ y $0 \le r < 3$, luego $z^2 = (3c+r)^2 = 9c^2 + 6cr + r^2 = \begin{cases} 3c(3c+2r) & si \quad r = 0 \\ 3c(3c+2r)+1 & si \quad r = 1 \\ 3c(3c+2r+1)+1 & si \quad r = 2 \end{cases}$, luego, por la unicidad de dichos cociente y resto, cualquier cuadrado perfecto, como z^2, se obtiene, al ser dividido entre 3, de resto 0 (si dicho cuadrado es de la forma $3c(3c+2r)$, es decir, un múltiplo de 3) ó bien 1 (en caso contrario); en particular, el resto de la división de y'^2 entre 3 es 0 ó 1, es decir, $y'^2 \equiv 0\,(\text{mód } 3)$ ó $y'^2 \equiv 1\,(\text{mód } 3)$, que equivale, al ser $3^x - 1 = y'^2$, a que $3^x - 1 \equiv 0\,(\text{mód } 3)$ ó $3^x - 1 \equiv 1\,(\text{mód } 3)$, o lo que es lo mismo, a que $3^x \equiv 1\,(\text{mód } 3)$ ó $3^x \equiv 2\,(\text{mód } 3)$, lo cual es una contradicción porque $3^x \equiv 0\,(\text{mód } 3)$.

Demostremos ahora que la ecuación $3^x + 1 = y^4$ no tiene soluciones enteras positivas: Por reducción al absurdo, supongamos que existen x, $y \in Z_+^*$ tales que $3^x + 1 = y^4$; entonces $3^x = y^4 - 1 = (y^2+1)(y^2-1)$, luego $y^2 + 1$ e $y^2 - 1$ son divisores de 3^x que, multiplicados, dan como resultado 3^x, es decir, existen r, $s \in Z_+$ tales que $y^2 + 1 = 3^r$, $y^2 - 1 = 3^s$ y $3^x = (y^2+1)(y^2-1) = 3^r \cdot 3^s = 3^{r+s}$, es decir, $x = r + s$. Entonces $2 = (y^2+1) - (y^2-1) = 3^r - 3.^s$ Al ocurrir que las únicas potencias de 3 que, restadas, dan 2 (dan mayor que 2 en cualquier otro caso) son 3^1 y 3^0, resulta que $r = 1$ y $s = 0$, con lo cual $x = r + s = 1 + 0 = 1$ y por tanto $y^4 = 3^x + 1 = 3^1 + 1 = 4$, siendo entonces $y = \sqrt[4]{2^2} = \sqrt{2}$, que contradice la suposición de que $y \in Z_+^*$.

Nota: En la 15ª Olimpiada Italiana de Matemáticas del año 1999 se propuso un problema que contiene como caso particular, para $n = 4$, a la primera de las ecuaciones de este problema 204; viene a plantear la siguiente cuestión:

Encontrar todas las ternas (x, y, n) *de enteros positivos tales que* $3^x - 1 = y^n$.

Puede demostrarse que: Si $n = 1$, las ternas solución son $(x, y, n) = (x, 3^x - 1, 1)$ y si $n \ge 2$, la única terna solución es $(x, y, n) = (2, 2, 3)$.

Problema 205.

Sea ABC un triángulo rectángulo en A, con lados $a > b \geq c$. Sean r el radio del círculo inscrito, R el del círculo circunscrito, y w_a la bisectriz interior del ángulo A. Demostrar que

$$c \leq \left(2+\sqrt{2}\right) r \leq \frac{2bc}{b+c} \leq R+r \leq b \Leftrightarrow \frac{c}{\sqrt{2}} \leq \left(1+\sqrt{2}\right) r \leq w_a \leq \frac{R+r}{\sqrt{2}} \leq \frac{b}{\sqrt{2}}$$

Probaremos sucesivamente las desigualdades de la izquierda.

1.- $c \leq \left(2+\sqrt{2}\right) r \Leftrightarrow \frac{c}{r} \leq 2+\sqrt{2}$,

en efecto, se tiene

$$\frac{1}{2} bc = \frac{a+b+c}{2} r \Leftrightarrow \frac{c}{r} = \frac{a+b+c}{b} = 1 + \frac{a+c}{b},$$

entonces hemos de probar

$$\frac{a+c}{b} \leq 1+\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{(a+c)^2}{b^2} \leq 3+2\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{a+c}{a-c} \leq 3+2\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1+\sin C}{1-\sin C} \leq 3+2\sqrt{2}$$

operando la última expresión queda en la forma

$$\sin C \leq \frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)}{4-2} = \frac{2-2+2\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

que se satisface por la hipótesis de ser $c \leq b \Leftrightarrow C \leq 45^{\circ} \Leftrightarrow \sin C \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2.- $\left(2+\sqrt{2}\right) r \leq \frac{2bc}{b+c}$.

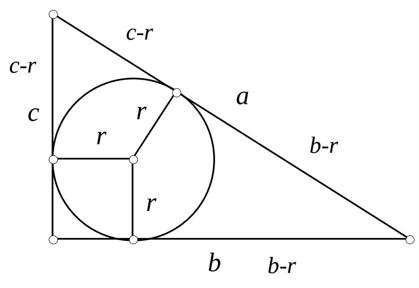
En efecto, de $\frac{1}{2} bc = \frac{a+b+c}{2} r$ se sigue $r = \frac{bc}{a+b+c}$ y la desigualdad queda: $\frac{2+\sqrt{2}}{a+b+c} \leq \frac{2}{b+c}$

que una vez operada, resulta

$$\sqrt{2}(b+c) \leq 2a \Leftrightarrow 2\left(b^2+c^2+2bc\right) \leq 4\left(b^2+c^2\right) \Leftrightarrow 0 \leq b^2+c^2-2bc \Leftrightarrow 0 \leq (b-c)^2$$

que es obviamente cierta en cualquier triángulo rectángulo.

3.- $\frac{2bc}{b+c} \leq R+r$.



En efecto, de la figura se sigue de modo inmediato que

$$a = b-r+c-r \Leftrightarrow r = \frac{b+c-a}{2} = \frac{b+c}{2} - R \Leftrightarrow R+r = \frac{b+c}{2}.$$

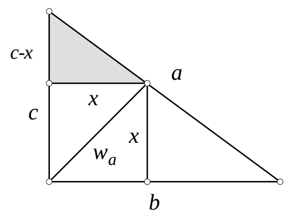
La desigualdad queda

$$\frac{2bc}{b+c} \leq \frac{b+c}{2} \Leftrightarrow (b+c)^2 - 4bc \geq 0 \Leftrightarrow (b-c)^2 \geq 0$$

cierta en cualquier triángulo rectángulo.

4.- $R+r \leq b$. Por lo anterior y por la hipótesis $b \geq c$, resulta $R+r = \frac{b+c}{2} \leq \frac{b+b}{2} = b$

Para las desigualdades de la derecha basta dividir todas por $\sqrt{2}$ y solo queda ver que $w_a = \frac{\sqrt{2}bc}{b+c}$.



En la figura de la derecha por la semejanza del triángulo inicial y el sombreado se tiene

$$\frac{c-x}{x} = \frac{c}{b} \Leftrightarrow bc - bx = cx \Leftrightarrow x = \frac{bc}{b+c}.$$

Como w_a es la diagonal del cuadrado de la do x se sigue el resultado.

COMENTARIO DE LIBROS, PÁGINAS WEB Y NOTICIAS DE CONGRESOS 42

Historia de las Matemáticas en la Península Ibérica (Desde la prehistoria al siglo XV); por **Mª Victoria Veguin Casas.** Ed. Reverté, Madrid, 2011. 431 páginas.

El pasado día 9 de febrero, en el Salón de Actos del IES "Beatriz Galindo" de Madrid, en un acto presidido por Dª Alicia Delibes Liniers, Viceconsejera de Educación de la Comunidad de Madrid, se presentó el libro cuyo título figura unas líneas más arriba.

Como Editor de la REOIM, para mí es un honor y un placer dar a conocer mediante este breve comentario la obra de la Profª. Veguin, durante varios años compañera en el Departamento de Matemáticas del IES "Emilio Ferrari" de Valladolid.

No creo exagerado decir que, desde la obra clásica de Francisco Vera, probablemente no se había publicado en España un estudio tan riguroso, profundo y al mismo tiempo escrito con una gran amenidad, de un tema tan especializado como éste.

Numerosas fotografías, muchas de ellas obra de Jesús Salas Parrilla, ilustran con profusión el libro. Las notas y una extensa bibliografía, y un Anexo dedicado a glosar la vida y obra del Prof. José Augusto Sánchez Pérez (1882 – 1958), *primer historiador de las matemáticas en al-Ándalus*, completan este magnífico trabajo.

A título ilustrativo, destacamos aquí los títulos de algunos de sus quince capítulos:

Cap.3: *Las matemáticas en Hispania*

Cap.4: *Las matemáticas en el reino visigodo*

Cap. 5, 6, 7 y 8: *Las matemáticas en al-Ándalus*

Cap.12: *La influencia de la peregrinación jacobea en la difusión del saber matemático*

Cap.13: *Las matemáticas en romance (siglos XIII-XV)*

Cap.15: *Las matemáticas en Sefarad*

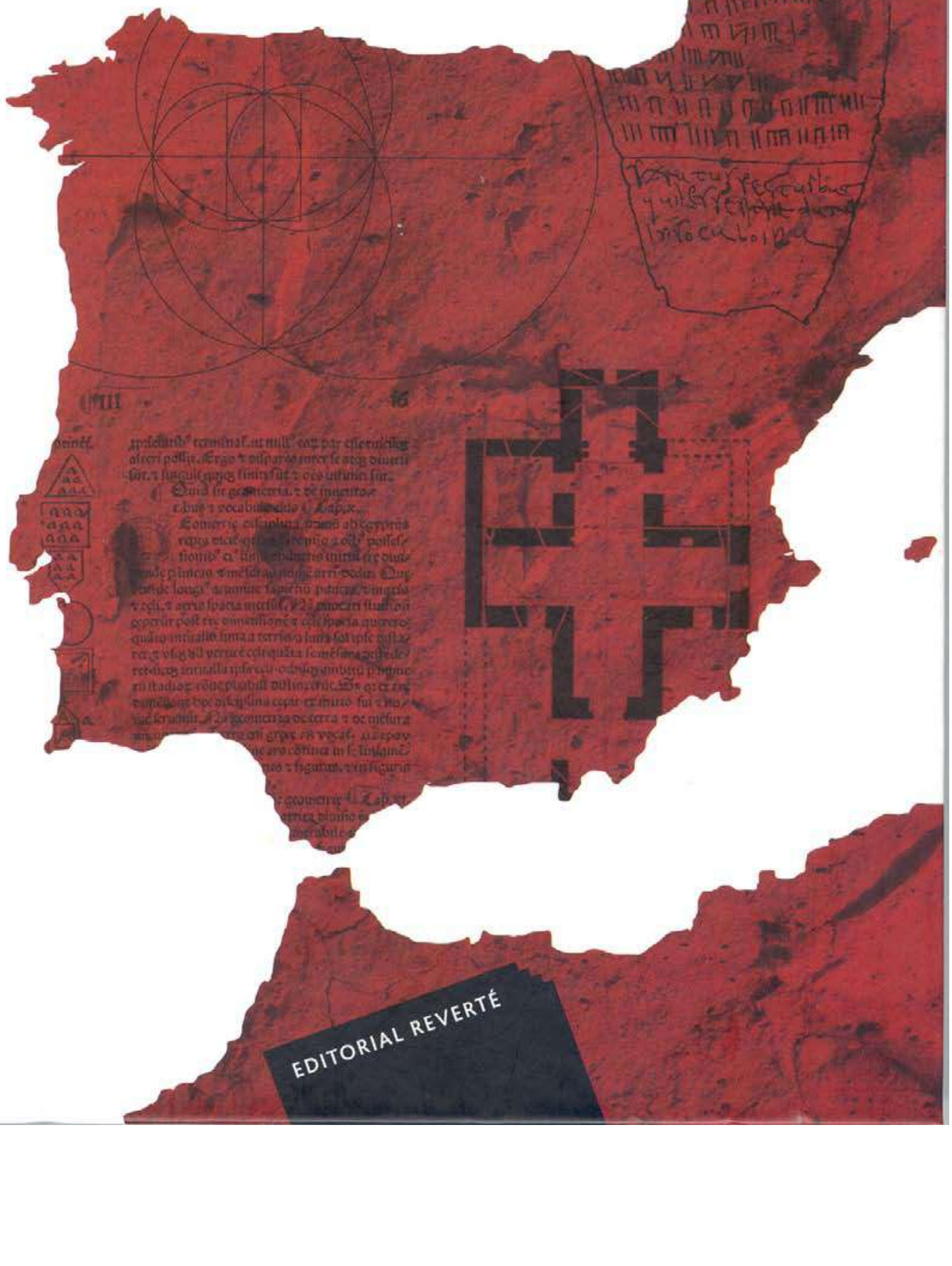
Los estudiosos de la historia en general y de la historia de las matemáticas en particular tienen, a buen seguro, en la obra de Mª Victoria Veguin una referencia insoslayable.

Valladolid, junio 2011. Francisco Bellot Rosado.

María Victoria Veguín Casas

Historia de las Matemáticas en la Península Ibérica

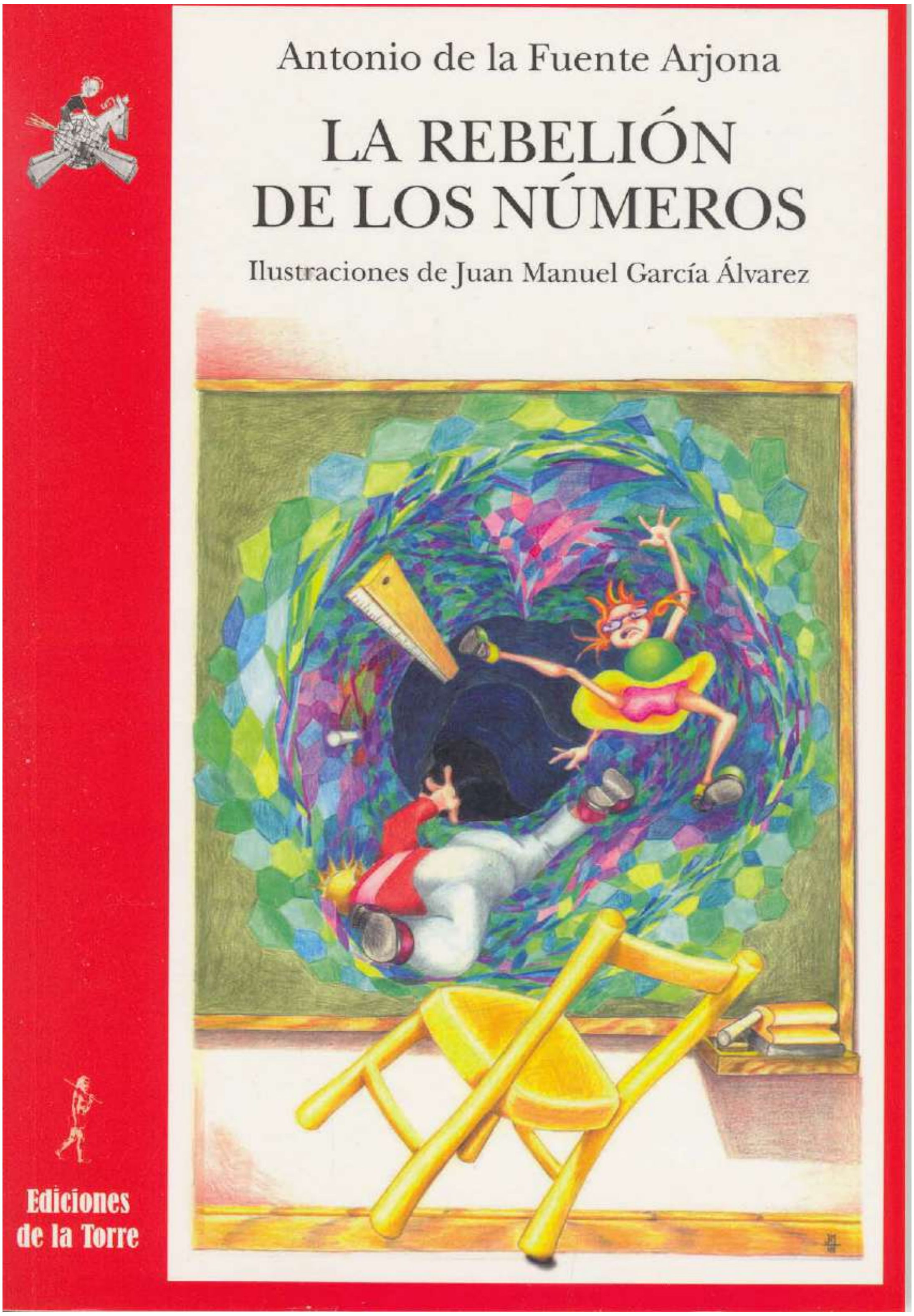
Desde la prehistoria al siglo XV



EDITORIAL REVERTÉ

<u>**DIVERTIMENTOS MATEMÁTICOS 42**</u>

El teatro como herramienta didáctica: *La rebelión de los números,* por Antonio de la Fuente Arjona.



Amablemente enviado por su autor, ha llegado a manos del editor que suscribe el texto escrito (y publicado por Ed. De la Torre, Madrid 2010) de *La rebelión de los números (Un espectáculo para lápiz y papel),* una obra de teatro muy adecuada, en mi opinión, para ser representada en los centros escolares. El autor ha conseguido convertir en acción, en vivencia teatral, algo tan abstracto como un (en realidad varios) problema matemático. Además de ser representada, *La rebelión de los números* puede (y debe) ser leída con lápiz y papel, puesto que en varios momentos de la acción se pregunta al lector (o al espectador, en su caso) algún *enigma matemático*, no excesivamente difícil, pero siempre atrayente. Los espectadores más jóvenes irán apreciando porqué a los matemáticos nos gusta resolver problemas; por una razón muy parecida a la que dan los alpinistas para subir a las montañas: *porque están ahí.*

Como no es cuestión aquí de desvelar el argumento, citaremos algunas de las frases de la contraportada del libro:

De nuevo la Panda de Los Últimos de la Clase entra en acción...

¿Lograrán rescatar a su profesor de matemáticas secuestrado por unos Números muy revoltosos?

Matemáticas y Teatro: una ecuación explosiva

Un texto original e insólito, en la escuela y en un escenario.

Valladolid, junio de 2011

Francisco Bellot Rosado

Mar del Plata, Argentina

Sr. Editor de la Revista Escolar de la OIM

Recientemente tuve oportunidad de leer el artículo publicado en el número 39 de la revista, "Una prueba elemental del teorema de Pascal" de Milton Donaire Peña. En tal artículo se sugiere que esta demostración apareció por primera vez en el libro del autor publicado en 2010. Simplemente deseaba hacer saber que dicha prueba ya era conocida por este servidor desde hace algunos años, y que en particular la publiqué tardíamente en MathLinks en 2008: <http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=50&t=218485&p=1211436#p1211436>http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=50&t=218485&p=1211436#p1211436

Tampoco considero haber sido el primero en encontrarla, y menos en publicarla, pues seguramente ya alguien lo hizo con anterioridad en este inmenso mundo de geómetras y románticos de la matemática dispersos por todo el globo.

Tal aclaración no va en desmedro de la calidad de los artículos de la revista ni de la alta valoración que me despierta la publicación que Ud. edita.

Con mucho respeto lo saluda atte.

Lucas Martín Andisco

UNMDP/UBA/Conicet

(Recibido por el editor el 4 de febrero de 2011)

Número

43

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

ISSN 1698-677X

OEI

Agencia Española de Cooperación Internacional para el Desarrollo

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

Número 43 (octubre – diciembre 2011)

ISSN – 1698-277X

ÍNDICE

(1997), donde fue propuesto en su última ronda. El Editor agradece el esfuerzo realizado de rastreo del origen del problema.

Problema 201. A su debido tiempo se recibieron sendas soluciones a este problema, por Dones Colmenárez, Barquisimeto, Venezuela, y Roberto Bosch Cabrera, entonces en La Habana, Cuba, que no fueron mencionadas en el vol. 42, por lo que el Editor presenta sus excusas a ambos resolventes.

Recibida una solución del problema 204 por Robinson Alexander Higuita Díaz, Antioquia, Colombia.

Problema 206

Recibidas soluciones de Kee-Wai Lau, HongKong, China; Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, España; Ricard Peiró i Estruch, Valencia, España; Bruno Salgueiro Fanego, Viveiro, España; y el proponente.

Presentamos la solución de Peiró.

Problema 207

Recibidas soluciones de Francisco Javier García Capitán, Priego de Córdoba, España; Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, España; Cristóbal Sánchez-Rubio García, Benicassim, España; y el proponente.

Presentamos la solución de García Capitán.

Problema 208

Recibidas soluciones de: Álvaro Begué Aguado, Nueva York, USA; Daniel Darío Góngora García, Lima, Perú; José Hernández Santiago, Oaxaca, México; Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, España; Paolo Perfetti, Universitá degli Studi Tor Vergata, Roma, Italia; Bruno Salgueiro Fanego, Vivero, España; y el proponente.

Presentamos la solución de Begué.

Problema 209

Recibidas soluciones de: Floro Damián Aranda Ballesteros, Córdoba, España; Álvaro Begué Aguado, Nueva York, USA; Daniel Darío Góngora García, Lima, Perú; Kee-Wai Lau, Hong Kong, China; Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, España; Ricard Peiró i Estruch, Valencia, España;

Paolo Perfetti, Universitá degli Studi Tor Vergata, Roma, Italia; Henry Alexander Ramírez Bernal, Bogotá, Colombia; Joaquín Rivero Rodríguez, Zalamea de la Serena, España; Bruno Salgueiro Fanego, Vivero, España; y los proponentes.

Presentamos la solución de Begué.

Problema 210

Recibidas soluciones de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, España; y del proponente.

Presentamos la solución de Lasaosa.

Divertimentos Matemáticos 43

Covadonga Rodríguez-Moldes Rey: *Liberando incógnitas.*

F. Bellot: Capturado en Internet

Comentario de páginas web y Noticias de Congresos 43

XV JAEM en Gijón (España)

Congreso de la SBPMef en Bastogne (Bélgica)

Congreso *Elementary Geometry from an Advanced Point of Vue* en Aveiro (Portugal)

XXVI Olimpiada Iberoamericana de Matemática, en Costa Rica.

Cartas al editor 43

Sobre la prueba de Pascal : Respuesta del Prof. Milton Donaire Peña al comentario del Prof. Lucas Martín Andisco, publicada en el vol. 42.

Sobre *Historia de las Matemática en la Península Ibérica :* carta de Raúl A. Simón Elexpuru, Chile.

Convocatorias OEI

Curso iberoamericano de formación de profesores de secundaria en el área de matemáticas Ñandutí

17 de noviembre de 2011
El curso lo convoca la Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura (OEI) en el seno de su Centro de Altos Estudios Universitarios con la participación de aquellos países Iberoamericanos que decidan incorporarse al proyecto. El proyecto se enmarca en la colaboración que la OEI y la Agencia Española de Cooperación Internacional para el Desarrollo AECID desarrollan con el fin de apoyar la construcción del Espacio Iberoamericano del Conocimiento a través del fomento de vocaciones hacia la ciencia y al avance del Programa Metas Educativas 2021.
Además, presta su colaboración el Ministerio de Educación de Paraguay y la Consejería de Innovación, Ciencia y Empresa de la Junta de Andalucía (España).
Empezamos en marzo 2012

Más información [+]

Curso Básico sobre TIC y Educación

24 de noviembre de 2011
Convocatoria de matrícula y becas abierta
A los cursos inicial y de especialización que la OEI tiene puestos en marcha se une a partir de marzo de 2012 el Curso Básico.
El curso se propone para docentes en ejercicio y estudiantes de la carrera docente.
El objetivo del Curso es proporcionar a los participantes de las herramientas básicas que las TIC proporciona a la educación.
Al tratarse de un sector de gran dinamismo se hace un especial énfasis en la capacidad de seguir aprendiendo y conociendo los avances y propuestas tecnológicas para la educación
Este curso se hace con el apoyo de la **Fundación Telefónica**.

Más información [+]

VI Curso sobre Educación para la Cultura Científica

15 de noviembre de 2011
Próxima edición marzo 2012. Becas disponibles
En el marco del **Proyecto Iberoamericano de Divulgación Científica** de la **Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura** con la coordinación académica de la **Universidad de Oviedo** y realizado con el apoyo de la **Agencia Española de Cooperación Internacional para el Desarrollo (AECID)** se convocan a profesores/as (con alumnos/as con edades comprendidas entre los 14 y 18 años) a

participar en esta nueva edición del curso.

Más información [+

Congreso Iberoamericano de las Lenguas en la Educación

23 de noviembre de 2011
Salamanca, España, 5 al 7 de septiembre de 2012
La Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura (OEI) en el marco de su Programa para el fortalecimiento de las Lenguas de Iberoamérica en la Educación convoca al Congreso Iberoamericano de las Lenguas en la Educación que se celebrará en la ciudad de Salamanca del 5 al 7 de septiembre de 2012.
Se encuentra abierta la inscripción y la entrega de propuestas de comunicaciones y experiencias
Incluye: Leer para aprender matemática

Más información [+]

REOIM 43

Nota necrológica, por Francisco Bellot

<u>Prof. Dr. Luis Davidson San Juan (1921 – 2011)</u>

Estando en preparación este número 43 de la REOIM nos llega, a través del correo electrónico, la triste noticia del fallecimiento, en su querida La Habana, del Prof. Luis Davidson, pocos días después de habérsele rendido allí un merecido homenaje con motivo de su nonagésimo cumpleaños. Agradecemos al Prof. Mario Díaz su amabilidad para enviarnos el texto del Prof. Carlos Sánchez Fernández, de la Universidad de La Habana, leído durante dicho homenaje, y del que nos permitimos tomar algunos datos biográficos del Prof. Davidson.

Luis Davidson San Juan nació en La Habana el 10 de septiembre de 1921. En la Universidad de La Habana cursó la carrera de Ciencias Físico-Matemáticas, doctorándose en 1944 con su tesis *Desarrollos en serie de las funciones analíticas.* De 1945 a 1961 impartió sus clases en el Instituto de Segunda Enseñanza de Matanzas. En 1950 formó parte de la delegación cubana en el ICM de Harvard, y el curso 1958 – 59 realizó un intercambio con una High School de Nuevo México.

En 1960 es nombrado Inspector Nacional de Matemáticas y en 1966 Coordinador Nacional de Planeamiento e Inspección Técnica. Desde 1963 organizó los concursos de Matemáticas para estudiantes de Bachillerato en todo el país y participó desde 1971 en la Olimpiada Internacional de Matemáticas como Jefe de la Delegación de Cuba, llegando en 1988 a ser Vicepresidente del IMO Site Committee (y a presidir sus reuniones en 1988, por ausencia del Presidente).

La O.E.I. le concedió en 199 un Diploma como *Maestro Fundador de los Concursos de Matemáticas en Iberoamérica.*

La primera vez que coincidí en persona con Luis Davidson fue, si la memoria no me falla, en Australia en 1988. Conocía, a través del Prof. Raimundo Reguera, algunas de sus publicaciones (*Los concursos de Matemática, con Félix Recio)*. Un año más tarde volví a verle en el Simposio previo a la Olimpiada Iberoamericana. El mes de Abril, en La Habana,

suele ser caliente. Pero Davidson siempre parecía inmune al calor ambiental, con su impecable corbata y su traje, perfectamente planchado. Además de su aspecto, impresionaba la precisión de su lenguaje, la forma de transmitir sus conocimientos, propia de un verdadero maestro. Tras aquellos primeros encuentros, coincidimos a lo largo de los años siguientes en varias reuniones y congresos : en 1990, en Waterloo (Canadá), en la 1ª Conferencia de la Federación Mundial de Competiciones Matemáticas Nacionales (WFNMC); en 1992, en el ICME de Quebec, donde Davidson recibió el Premio Paul Erdös de la FNMC. En la siguiente foto se nos ve al final de una de las sesiones en Quebec.

Y me considero muy afortunado porque, a lo largo de mi carrera, he sido considerado amigo por muchos matemáticos ilustres. Entre ellos está, por descontado, Luis Davidson, cuya tradicional felicitación de Año Nuevo ya no podré recibir más…

En 2009, Davidson me hizo llegar un ejemplar dedicado de su último libro, *Ecuaciones y Matemáticos, Ed. Pueblo y Educación, 2008.* Lo conservo con singular cariño en mi biblioteca. También tengo el primer volumen de una obra colectiva (Davidson – Reguera – Frontela – Castro) que considero tuvo una enorme influencia en la educación matemática de los estudiantes cubanos: *Problemas de Matemática Elemental, Ed. Pueblo y Educación, 1987.* El libro fue un regalo durante la IMO de Australia de 1988 del otro pionero, junto a Davidson, de los concursos de Matemáticas en Cuba, Prof. Raimundo Reguera, fallecido hace varios años.

Sirvan estas breves, pero sinceras, líneas, de homenaje y recuerdo a un gran matemático, un excelente profesor y una mejor persona.

Luis, *sit tibi terra levis.*

Valladolid, noviembre de 2011

Francisco Bellot Rosado

HISTORIA DE LA MATEMÁTICA EN EL PERÚ

ANÁLISIS DE OBRAS

MÉTODO DE INTEGRACIÓN DE FEDERICO VILLARREAL

Autor: Moisés Samuel Toledo Julián
(el_numeros@hotmail.com)

Resumen

Federico Villarreal al presentar su tesis de Bachiller[2] ante la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos (Lima–Perú), realizó una observación notable sobre el método de integración por partes. Dada la importancia del tema, este será tratado en tres secciones, cada uno de los cuales indicará una subparte de la misma, los puntos a tratar serán:

1. Sobre expresiones susceptibles de generalización.
2. Método de traspasos.
3. Aplicación del método de traspasos.

Es claro que no describiremos la teoría de integración (en el sentido de riemann), el presente desarrollo asumirá que el lector posee por lo menos nociones sobre el proceso de integración.

1. Sobre expresiones susceptibles de generalización

Es bien conocido que las operaciones aritméticas de composición ($+$, $\times$, $()^n$) y descomposición ($-$, $\div$, $\sqrt[n]{}$) cuando son tomadas en forma sucesiva no siempre es posible invertir el orden en la que se operan. Por ejemplo: a la cantidad a agregarle b y quitarle c es lo mismo que quitarle primero c y agregarle después b, es decir $(a+b)-c=(a-c)+b$. Pero si a la cantidad a se agrega b y se multiplica por c no es lo mismo que multiplicar a por c y agregar b, es decir: $(a+b)c \neq ac+b$ sino que debe añadirse bc para obtener el mismo resultado. Podemos resumir lo mencionado líneas arriba mediante el siguiente principio[2]:

> "*Cuando hay dos operaciones sucesivas de composición o descomposición, ambas del mismo orden, se puede invertir su cálculo; pero si son de distinto orden no se puede cambiar su enunciado sino con cierta condición; más si una o ambas operaciones son imposibles no es permitida su permutación*"
>
> — *Federico Villarreal*

El anterior principio sirve para mostrar que existen diferentes proposiciones suceptibles de una expresión general. Es así que el Dr. Villarreal plantea el caso de integración por partes como uno suceptible de generalización.

1.1. Recordando el método de integración por partes

Pasamos ahora a recordar (brevemente) en que se basa el método de integración por partes:

1^{ro} por la regla de la derivada de un producto tenemos

$$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

2^{do} integrando a ambos lados de la igualdad

$$\Rightarrow \int (f(x)\cdot g(x))'\partial x = \int f'\cdot g(x)\partial x + \int f(x)\cdot g'(x)\partial x$$

3^{ro} usando el hecho que la derivada e integral son operadores inversos y despejando adecuadamente

$$\Rightarrow \int f(x)\cdot g'(x)\partial x = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)\partial x$$

A partir de los calculos anteriores y del hecho que una integral $y=\int f(x)\partial x$ sienpre es posible escribirla como $y=\int A\cdot dB$ tenemos que esta ultima puede ser expresada como la combinación de dos términos con signos alternados. Esto da pie a considerar la integración por partes como suceptible de generalización y a corroborar lo dicho en 1 puesto que $y=\int f(x)\partial x$ escrita en términos de A, B tomará una forma mas simple o complicada segun sean A y B escogidos en forma adecuada.

Recordemos tambien que el método de integración por partes puede subdividirse en dos casos:

- Descomponiendo la función en sumandos: este método es aplicable a funciones racionales, que descompuestos en sus fracciones parciales se pueden integrar algebraicamente o por logaritmos o por arco tangentes.

- Descomponiendo la función en factores: aplicable a los demás casos.

Al segundo método se le ha dado (impropiamente) el nombre de integración por partes, pues aunque los factores pueden considerarse como partes de ese producto, tambien lo son los sumandos como parte del total. Por tanto a los dos juntos deberían llamarseles integración por partes, a la primera integración por sumandos y a la segunda integración por factores.

Habiendo hecho notar los principios sobre los cuales el Dr. Federico Villarreal inicia su estudio sobre la integración por traspasos, pasamos a describir el método en si.

2. Método de traspasos

Primero haremos notorio algunas observaciones relativas a las técnicas de integración.

2.1. Observaciones:

1. El método de integración inmediata tiene sus reglas fijas. La inversa de la derivación: $\int x^3 \partial x = \frac{x^4}{4} + cte$, o tambien $\int \sqrt{x}\partial x = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + cte$ (cte: constante real)
2. El método de integración por sustitución no posee sus reglas fijas, pues depende de los casos que se presenten:
   a) Para convertir en algebraica una expresión trascendente $\int \ln(x+1)\cos x\partial x$
   b) Para bajar el orden de las ecuaciones integrales, para hacerlas homogéneas, etc (esto constituye parte de la teoria de ecuaciones integrales)
   c) Para hacer racional a una función inconmensurable $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\partial x$
3. El método de integración por sumandos tambien tiene sus reglas fijas:
   a) Si el denominador de la fracción tiene raíces iguales $\int \frac{\partial x}{x^2-6x+9}$
   b) Si el denominador tiene raíces distintas $\int \frac{\partial x}{x^2+3x+10}$
   c) Si el denominador tiene raíces imaginarias $\int \frac{\partial x}{x^2+1}$
4. Sin embargo no se ha hecho lo mismo con la integración por factores, atendiendo a ello Juan Bernoulli sentó lo que se denomina la base del cálculo integral (en analogía a lo que el método de Taylor lo es al cálculo diferencial). Así considerando como factor constante ∂x tenemos:

$$\begin{aligned} y &= \int f(x)\partial x \\ &= xf(x) - \int f'(x)x\partial x \end{aligned}$$

Pero

$$\int f'(x)x\partial x = \frac{x^2}{2}f'(x) - \frac{1}{2}\int f''(x)x^2\partial x$$

Así

$$y = xf(x) - \frac{x^2}{2!}f'(x) + \frac{1}{2!}\int f''(x)x^2\partial x$$

Procediendo análogamente para la ultima integral:

$$y = xf(x) - \frac{x^2}{2!}f'(x) + \frac{x^3}{3!}f''(x) - \frac{x^4}{4!}f'''(x) + \cdots \tag{1}$$

Si bien es cierto que el factor ∂x se presenta de forma natural, el método no supone que precisamente deba tomarse ese factor sino cualquier otro, ya que al hacerlo lo particulariza, esto es la escencia del método de integración por traspasos del Dr. Federico Villarreal.

2.2. Principio de integración por traspasos

Dada la expresión $y = \int f(x)\partial x$ siempre es posible expresarla en la forma $y = \int A \cdot dB$ y *sin hacer traspasos* de términos, podemos interpretar la fórmula (1) del modo siguiente:

1. Tomar A después diferenciarla y dividir por ∂x, volver a diferenciar y dividir por ∂x, etc. Es decir, calcular las derivadas sucesivas de A.

2. Tomar B después multiplicarla por ∂x e integrar, volver a multiplicar por ∂x e integrar, etc. Es decir, calcular las integrales multiples de B.

3. Multiplicar los resultados homólogos y dar los signos mas y menos, es decir

$$A \cdot B - A' \cdot \int B\partial x + A'' \cdot \int\int B\partial x - A''' \cdot \int\int\int B\partial x \cdots$$

Como por la diferenciación va aumentando el coeficiente y disminuyendo el exponente, cuando este sea cero la derivada es constante y la siguiente será cero, por tanto en este caso habrá integración exacta. Así también, como por la integración va disminuyendo el coeficiente y aumentando el exponente resulta que si una integración es constante la siguiente no será cero, pues al multiplicar por ∂x la integración dará ∂x, pero si el exponente es negativo la integración llegará a ser infinita, y en este caso la integral (como se sabe) es un logaritmo.

■ Ejemplo **1.** *Sea la función x^4, cuya integral puede ser expresada en formas distintas y por tanto el factor ∂x no es el único que se presenta de forma* natural*, así pues:*

$$z = \int x^4 \partial x = \int x^2 \times x^2 \partial x = \int x^2 \times \partial(\int x^2)\partial x = \int x^2 \times \partial(\frac{x^3}{3}) \tag{2}$$

aplicando el método para $A = x^2$ y $B = \frac{x^3}{3}$ tenemos en cada caso:

$$A = x^2 \qquad\qquad B = \frac{x^3}{3}$$

$$\frac{dA}{dx} = 2x \qquad\qquad \int B\partial x = \frac{x^4}{12}$$

$$\frac{d^2A}{dx^2} = 2 \qquad\qquad \int(\int B\partial x)\partial x = \frac{x^5}{60}$$

$$\frac{d^3A}{dx^3} = 0$$

note que no consideramos la cuarta iteración para B puesto que la cuarta iteración para A fue cero, luego la integral resultante de acuerdo a (3) será:

$$\begin{aligned} z &= \frac{x^5}{3} - \frac{x^5}{6} + \frac{x^5}{30} \\ &= \frac{x^5}{5} \end{aligned}$$

Si bien es cierto la función considerada para la integración es bastante simple, nos permite hacer notar la recursividad del método y la tendencia a buscar una generalización del mismo (esto en realidad constituye un caso muy simple del método de traspasos del Dr. Federico Villarreal, note que si estamos realizando traspasos, con la descripción de la siguiente sección podrá usted darse cuenta de ello y corroborará que la manera de hacerlo constituye un caso trivial).

Para fijar notación al término A lo denominaremos factor integral en tanto que B será el factor integral, esto debido a las derivaciones e integraciones sucesivas que se realizan en cada paso (o proceso de iteración) a considerar.

2.3. Variantes del método de traspasos

Los traspasos pueden ser realizados de dos maneras, de A a B o de B a A, así como también es posible considerar un proceso *mixto* de ambos, pero por el momento solo consideraremos los dos primeros casos y dejaremos el ultimo para la próxima sección.

2.3.1. Traspaso del factor diferencial al factor integral:

En este primer caso estamos considerando el traspaso de A a B, así pues la función z expresada como $z = \int AdB$ esta en su forma *natural*, e indicamos la regla de formación: "*se saca la derivada dA y se traspasa a B lo que se quiera (sea factor o divisor, constante o variable), después se integra B (la expresión resultante es B_1). Se vuelve a derivar, en este caso a A_1, y se hace el traspaso a B_1 en seguida se integra B_1 (la expresión resultante es B_2), etc.*" En resumen:

Primer paso: no efectuamos ninguna operación, tan solo escogemos los A y B adecuados

$$A \Rightarrow B$$

Segundo paso: T_1 será el término a traspasar

$$dA = T_1 \cdot A_1 \Rightarrow \int B \cdot T_1 \partial x = B_1$$

Tercer paso: T_2 será el nuevo término a traspasar

$$dA_1 = T_2 \cdot A_2 \Rightarrow \int B_1 \cdot T_2 \partial x = B_2$$

$$etc.$$

Ultimo paso: Colocamos los términos A_i, B_i para obtener el resultado final del proceso de integración

$$\begin{aligned} z &= \int AdB \\ &= \sum \pm A_i \cdot B_i;\ i = 0, 1, \ldots, m,\ (m\text{: n}^{\text{o}} \text{ de pasos y } A_0 = A, B_0 = B) \end{aligned}$$

por esta operación se disminuye el cálculo a bondad, puesto que se puede traspasar toda la variable (pero de modo que se pueda integrar B) así la siguiente diferencial será cero y por lo tanto se acorta el cálculo.

■ Ejemplo **2.** *Sea la función* $z = \int x^4 \partial x$ *damos la forma que deseamos* $z = \int x^2 \cdot \partial(\frac{x^3}{3})$ *luego aplicando la regla de formación:*

Primer paso: *no efectuamos ninguna operación, tan solo identificamos A y B*

$$A \Rightarrow B$$

Segundo paso: *T_1 será el término a traspasar*

$$dA = x \cdot 2 = T_1 \cdot A_1 \Rightarrow \int \frac{x^3}{3} \cdot x \partial x = \frac{x^5}{15} = B_1$$

Tercer paso: *T_2 será el nuevo término a traspasar, pero notemos que*

$$dA_1 = \partial(2) = 0, \textit{ puesto que la derivada es nula, paramos el proceso.}$$

Ultimo paso: *Colocamos los términos A_0, A_1, B_0, B_1 para obtener el resultado final del proceso de integración:*

$$\begin{aligned} z &= \int x^4 \partial x \\ &= A_0 \cdot B_0 - A_1 \cdot B_1 \\ &= x^2 \cdot \frac{x^3}{3} - 2 \cdot \frac{x^5}{15} \\ &= \frac{x^5}{5} \end{aligned}$$

2.3.2. Traspaso del factor integral al factor diferencial:

En este segundo caso estamos considerando el traspaso de B a A, así pues la función z expresada como $z = \int AdB$ esta en su forma *natural*, e indicamos la regla de formación: "*se saca la derivada dA y se traspasa lo que se quiera de B, después se integra B (la expresión resultante es B_1). Se vuelve a derivar, en este caso a A_1 (expresión que resulta de multiplicar la derivada de A por el termino traspasado de B), y se traspasa lo que se desea de B_1 en seguida se integra B_1 (la expresión resultante es B_2), etc.*" En resumen:

Primer paso: no efectuamos ninguna operación, tan solo escogemos los A y B adecuados

$$A \Rightarrow B$$

Segundo paso: donde $B = T_1 \cdot B_1^*$ y T_1 es el término traspasado a dA

$$dA \cdot T_1 = A_1 \Rightarrow \int B_1^* \partial x = B_1$$

Tercer paso: donde $B_1 = T_2 \cdot B_2^*$ y T_2 es el término traspasado a dA_1

$$dA_1 \cdot T_2 = A_2 \Rightarrow \int B_2^* \partial x = B_2$$

etc.

Ultimo paso: Colocamos los términos A_i, B_i para obtener el resultado final del proceso de integración

$$\begin{aligned} z &= \int AdB \\ &= \sum \pm A_i \cdot B_i;\ i = 0, 1, \ldots, m,\ (m\text{: n}^{\text{o}} \text{ de pasos y } A_0 = A, B_0 = B) \end{aligned}$$

■ Ejemplo **3.** *Sea la función* $z = \int x^4 dx$ *damos la forma que deseamos* $z = \int x^2 \cdot d(\frac{x^3}{3})$ *luego aplicando la nueva regla de formación:*

Primer paso: *no efectuamos ninguna operación, tan solo identificamos A y B*

$$A \Rightarrow B$$

Segundo paso: *donde* $B = T_1 \cdot B_1^* = x \cdot \frac{x^2}{3}$ *y* T_1 *es el término traspasado a* dA

$$dA \cdot T_1 = 2x \cdot x = 2x^2 \Rightarrow \int B_1^* dx = \int \frac{x^2}{3} = \frac{x^3}{3^2} = B_1$$

Tercer paso: *donde* $B_1 = T_2 \cdot B_2^* = x \cdot \frac{x^2}{3^2}$ *y* $T_2 = x$ *es el término traspasado a* dA_1.

$$dA_1 \cdot T_2 = 2^2 x \cdot x = 2^2 x^2 = A_2 \Rightarrow \int B_2^* dx = \int \frac{x^2}{3^2} = \frac{x^3}{3^3} = B_2$$

siguiendo de forma similar obtendremos una serie infinita (no siempre es el caso)

Ultimo paso: *Colocamos los terminos* A_i, B_i *(aquí* $A_0 = A, B_0 = B$*), para obtener el resultado final del proceso de integración:*

$$\begin{aligned} z &= \int AdB \\ &= A_0 \cdot B_0 - A_1 \cdot B_1 + A_2 \cdot B_2 \cdots \\ &= \frac{x^5}{3} - \frac{2x^5}{3^2} + \frac{2^2 x^5}{3^3} - \frac{2^3 x^5}{3^4} \cdots \end{aligned}$$

Este ejemplo muestra que dada una integral esta puede ser aproximada por una serie infinita, para nuestro caso dicha serie converge a $\frac{x^5}{5}$, así suponiendo $x = 1$ se tiene:

$$\frac{1}{5} = \frac{1}{3} - \frac{2}{3^2} + \frac{2^2}{3^3} - \frac{2^3}{3^4} \cdots$$

en efecto, siendo esta progresión geométrica decreciente (cuya razón es $\frac{-2}{3}$) tendremos:

$$\frac{\frac{1}{3}}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{1}{5}$$

En la siguiente sección presentamos una *mistura* de los métodos anteriores y finalizamos con una aplicación de tal proceso (misturado), así también se da una observación sobre exponentes negativos.

3. Aplicación del método de traspasos

En esta sección daremos una aplicación del método de traspasos de Federico Villarreal, pero antes presentamos una generalidad sobre el método, éste no es otra cosa mas que una *mistura* de los casos señalados en la anterior sección.

3.1. Generalidad de los traspasos

Siendo los traspasos arbitrarios, se pueden hacer continuamente de A a B o de B a A o bien primero de A a B y después de B a A, ya sea alternándolos, siguiendo de dos en dos, de tres en tres, dejando de hacer traspasos al capricho del calculador. En cualquiera de estos casos siempre se obtendá integración exacta (siempre que se consiga un coeficiente diferencial nulo), por consiguiente la fórmula propuesta es una expresión general de la integración por partes.

■ Ejemplo **4.** *Integraremos la función x^4 usando trapasos alternados:*

$$z = \int x^4 \partial x = \int x^2 \times \partial(\frac{x^3}{3})$$

aplicando el método para $A = x^2$ y $B = \frac{x^3}{3}$ tenemos en cada caso:

$$A_0 = x^2 \qquad\qquad B_0 = \frac{x^3}{3}$$

derivamos A_0 y traspasamos el factor integral x de B_0 e intragamos lo sobrante de B_0

$$A_1 = 2x^2 \qquad\qquad B_1 = \frac{x^3}{9}$$

derivamos A_1 y traspasamos el factor integral x de B_1 e intragamos lo sobrante de B_1

$$A_2 = 4x^2 \qquad\qquad B_2 = \frac{x^3}{27}$$

derivamos A_2 y traspasamos el factor integral x de B_2 e intragamos lo sobrante de B_2

$$A_3 = 8x^2 \qquad\qquad B_3 = \frac{x^3}{81}$$

derivamos A_3 e integramos B_3 sin efectuar trapaso alguno

$$A_4 = 16x \qquad\qquad B_4 = \frac{x^4}{324}$$

derivamos A_4 e integramos B_4 sin efectuar trapaso alguno

$$A_5 = 16 \qquad\qquad B_5 = \frac{x^5}{1620}$$

dado que la próxima derivada será nula paramos el proceso,de modo que

$$z = \frac{x^5}{3} - \frac{2x^5}{9} + \frac{4x^5}{27} - \frac{8x^5}{81} + \frac{4x^5}{81} - \frac{4x^5}{405}$$
$$z = \frac{x^5}{5}$$

3.2. Observación sobre exponentes negativos

Si los exponentes son negativos la diferenciación va aumentando el exponente en su valor absoluto y la integración lo va disminuyendo hasta ser infinita (así pues la integral es logarítmica), sin embargo en virtud de la teoría de traspasos se puede hacer que la diferenciación llegue a anularse y por lo mismo se llegue a la integral exacta.

■ Ejemplo **5.** *Integraremos la función $x^4 \cdot \ln x$ la cual puesta en forma adecuada:*

$$z = \int \ln x (\frac{x^5}{5})$$

identificando términos

$$A_0 = \ln x \qquad B_0 = \frac{x^5}{5}$$

derivamos A_0 y siendo x en el numerador con exponente negativo lo traspasamos a B_0 e integramos, quedando

$$A_1 = 1 \qquad B_1 = \frac{x^5}{25}$$

dado que la próxima derivada será nula paramos el proceso,de modo que

$$z = \ln x \cdot \frac{x^5}{5} - \frac{x^5}{25}$$

■ Ejemplo **6.** *Integraremos la función x^4 pero en esta oportunidad procuramos expresar el término integral con exponente negativo:*

$$z = \int x^6 d(-x^{-1})$$

identificando términos

$$A_0 = x^6 \qquad B_0 = \frac{-1}{x}$$

derivamos A_0 e integramos B_0 sin efectuar traspaso alguno

$$A_1 = 6x^5 \qquad B_1 = -\ln x$$

derivamos A_1 y traspasamos el factor diferencial x^4 a B_1 e integramos

$$A_2 = 30 \qquad B_2 = \int -x^4 \cdot \ln x = \frac{-x^5 \cdot \ln x}{5} + \frac{x^5}{25}$$

dado que la próxima derivada será nula paramos el proceso,de modo que

$$z = -x^5 + 6x^5 \cdot \ln x - 6x^5 \cdot \ln x + \frac{6x^5}{5}$$

$$z = \frac{x^5}{5}$$

3.3. Recursividad para decimales del número π

Es tan general el método que se puede poner una multitud de ejemplos en los cuales tendría cabida los traspasos. Como muestra de ello veamos la siguiente:

3.3.1. Observación sobre los arcotangentes

Sabemos que la diferencial de un arco x cuya tangente es u tiene por expresión:

$$\partial x = \frac{\partial u}{1+u^2}$$

el cual podemos integrar haciendo uso del método de traspasos pues

$$x = \int \frac{1}{1+u^2} \cdot \partial u$$

identificando términos, podemos aplicar el proceso ya descrito en las secciones anteriores

$$A_0 = \frac{1}{1+u^2} \qquad\qquad B_0 = u$$

tomando derivada a los A_i, traspasando el factor integral u a B_i e integrando resulta el siguiente cálculo

$$\begin{aligned}
A_1 &= -2 \cdot \frac{1}{(1+u^2)^2} & B_1 &= \frac{u^3}{1 \cdot 3} \\
A_2 &= 2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{(1+u^2)^3} & B_2 &= \frac{u^5}{1 \cdot 3 \cdot 5} \\
A_3 &= -2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \frac{1}{(1+u^2)^4} & B_3 &= \frac{u^7}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} \\
A_4 &= 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \frac{1}{(1+u^2)^5} & B_4 &= \frac{u^9}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}
\end{aligned}$$

continuando el proceso obtenemos la fórmula recursiva

$$A_n = (-1)^n \cdot \prod_{i=1}^{n} (2i) \cdot \frac{1}{(1+u^2)^{n+1}} \qquad\qquad B_n = \frac{u^{2n+1}}{\prod\limits_{i=1}^{n} (2i+1)}$$

Luego multiplicamos los términos A_i, B_i y colocamos los términos de acorde a lo establecido en el método de traspasos para obtener el resultado final del proceso de integración:

$$x = \frac{u}{1+u^2} + \sum_{j=1}^{\infty} \left[\prod_{i=1}^{j} \left(\frac{2i}{2i+1} \right) \cdot \frac{u^{2j+1}}{(1+u^2)^{j+1}} \right] \tag{3}$$

tomando factor común, la expresión (3) puede ser reducida a

$$x = \frac{u}{1+u^2} \left\{ 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \left[\prod_{i=1}^{j} \left(\frac{2i}{2i+1} \right) \cdot \left(\frac{u^2}{1+u^2} \right)^{j} \right] \right\} \tag{4}$$

examinemos si la serie encerrada entre llaves es convergente, para ello utilizamos el criterio de la razón, por lo que formaremos el cociente del término general con el que le precede

$$\begin{aligned} r &= \frac{\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)}\left(\frac{u^2}{1+u^2}\right)^n}{\frac{2\cdot 4\cdots 2(n-1)}{3\cdot 5\cdots(2n-1)}\left(\frac{u^2}{1+u^2}\right)^{n-1}} \\ &= \frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{u^2}{1+u^2} \\ &= \frac{2}{2+\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{u^2}} \end{aligned}$$

tomamos límite para $n = \infty$, resulta

$$r = \frac{1}{1+\frac{1}{u^2}}$$

para que la serie sea convergente debemos tener que $|r| < 1$, así reemplazando la expresión obtenida en esta condición se tiene que la serie es convergente cualquiera que sea el valor de u, en particular si esta asume valores pequeños, luego tomando $u = \frac{1}{z}$ y reemplazando en (4) tendremos:

$$x = \frac{z}{z^2+1}\left(1+\frac{2}{3}\frac{1}{z^2+1}+\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{1}{(z^2+1)^2}+\cdots+\frac{2\cdot 4\cdots(2n)}{3\cdot 5\cdots(2n+1)}\cdot\frac{1}{(z^2+1)^n}+\cdots\right) \tag{5}$$

luego puesto que asumiremos valores pequeños de u la serie anterior es convergente para valores grandes de z.

3.3.2. Aproximando decimales de π

Para aplicar la fórmula (5) y aproximar decimales de π debemos conocer un arco (denotado por x) y su tangente (denotado por u), el primero que se presenta es el de 45° cuya tangente es la unidad, luego $z = 1$ y reemplazando en (5) resulta

$$\text{Arco de } 45^\circ = \frac{1}{2}\left(1+\frac{2}{2\cdot 3}+\frac{2\cdot 4}{2^2\cdot 3\cdot 5}+\frac{2\cdot 4\cdot 6}{2^3\cdot 3\cdot 5\cdot 7}+\cdots+\frac{2\cdot 4\cdots(2n)}{2^n\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}+\cdots\right) \tag{6}$$

"como es poco convergente" descompondremos el arco de 45°, por lo que buscaremos otros arcos cuyas tangentes sean menores que uno. Para ello apelamos a una conocida fórmula trigonométrica:

$$\begin{aligned} a+b &= 45^\circ \\ \Rightarrow \tan(a+b) &= \frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\cdot\tan b} \\ &= 1 \end{aligned}$$

tomando $\tan a = 1/3$ tendremos

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{1}{3} + \tan b}{1 - \frac{1}{3} \cdot \tan b} &= 1 \\
\Rightarrow \frac{1}{3} + \tan b &= 1 - \frac{1}{3} \cdot \tan b \\
\Rightarrow \frac{4}{3} \cdot \tan b &= \frac{2}{3} \\
\Rightarrow \tan b &= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

así tenemos que el arco de $45°$ es igual a la suma de los arcos cuyas tangentes son $1/2, 1/3$. Dividamos ahora el arco cuya tangente es $1/2$ en otros dos, así

$$\frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y} = \frac{1}{2}$$

tomando $\tan x = 1/3$ (notar que $x = a$ pues $\tan x = \tan a$) tendremos

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{1}{3} + \tan y}{1 - \frac{1}{3} \cdot \tan y} &= \frac{1}{2} \\
\Rightarrow \frac{1}{3} + \tan y &= \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \cdot \tan y \\
\Rightarrow \frac{7}{6} \cdot \tan y &= \frac{1}{6} \\
\Rightarrow \tan y &= \frac{1}{7}
\end{aligned}$$

vemos ahora que el arco de $45°$ es igual a la suma del arco (denotado por y) cuya tangente es $1/7$ más el doble del arco (denotado por x) cuya tangente es $1/3$. Luego haciendo $z = 3$ y $z = 7$ en (5) tendremos los valores aproximados

$$\begin{aligned}
x &= \frac{3}{10} \cdot \left\{ 1 + \frac{2}{10 \cdot 3} + \frac{2 \cdot 4}{10^2 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{10^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} + \cdots + \frac{2 \cdot 4 \cdots (2n)}{(10)^n \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)} + \cdots \right\} \\
y &= \frac{7}{50} \cdot \left\{ 1 + \frac{2}{50 \cdot 3} + \frac{2 \cdot 4}{50^2 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{50^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} + \cdots + \frac{2 \cdot 4 \cdots (2n)}{(50)^n \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)} + \cdots \right\}
\end{aligned}$$

finalmente podemos expresar el arco de $45°$ como

$$\begin{aligned}
\text{Arco de } 45° &= 2x + y \\
\Rightarrow \pi &= 8x + 4y \\
\Rightarrow \pi &= 3,14159265358979323846264338327950288419716939 9\cdots
\end{aligned}$$

Haciendo uso de las fórmulas expuestas se puede obtener una mejor aproximación, el grado de precisión aumenta a medida que se continúe la división en arcos menores. La presente aproximación es más curiosa que útil, habiendo servido para dar uno de los muchos ejemplos en que tiene cabida la integración por traspasos.

Bibliografía

[1] La Obra del Doctor Federico Villarreal, Godofredo García Díaz. Revista de Ciencias, año XXVII, 1924 N^{o}3, 4,5,6. Lima.

[2] Fórmulas y Métodos que Deben Completarse en Matemáticas, Federico Villarreal Villarreal Tesis de Bachiller, 1879. Lima.

[3] Federico Villarreal Matemático e Ingeniero, Luis Katzuo Watanabe, Ediciones COPÉ departamento de relaciones públicas PETROPERÚ, 2004. Lima.

[4] Revista de la Facultad de Ciencias Matemáticas, Facultad de Ciencias de la UNMSM, N^o 2, 1988. Lima.

[5] Unidad de Árchivo Histórico Domingo Ángulo UNMSM, Árchivos de la Facultad de Ciencias 1875,1876,1877,1878,1879,1880,1881.

Problemas para los más Jóvenes 43

PMJ43-1

Propuesto por Carlos Hugo Olivera Díaz, Lima, Perú.

ABC es un triángulo rectángulo en B. H es el pie de la altura desde B. Las medianas que parten de A y B, relativas respectivamente a los lados BH y HC de los triángulos ABH y HBC, se cortan en el punto M.

Las bisectrices interiores de los ángulos BAH y HBC se cortan en el punto N. Si $\alpha = \measuredangle AMN, \beta = \measuredangle ANH$, determinar el ángulo $\measuredangle BHN$.

PMJ43-2

Propuesto por Carlos Hugo Olivera Díaz, Lima, Perú.

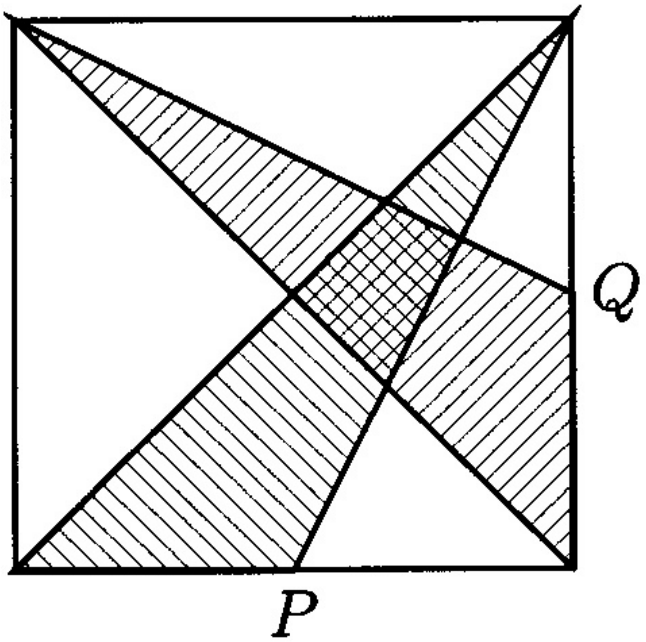
El triángulo ABC es rectángulo en B, y sea r el radio de su círculo inscrito. Las bisectrices interiores de los ángulos en A y en C cortan a sus lados opuestos en N y M, respectivamente. Calcular el área del triángulo BMN en función de r.

PMJ43-3

Enviado por Juan Jesús Moncada Bolón, San Francisco de Campeche, México.

En la figura, P y Q son los respectivos puntos medios de los lados de un cuadrado.

de sus respectivos lados.



Determinar el cociente entre el área de la región doblemente sombreada y el área del cuadrado.

PMJ43-4

Enviado por Juan Jesús Moncada Bolón, San Francisco de Campeche, México.

Se trata de colocar – ante cada uno de los números de la secuencia siguiente – un signo de suma o de resta:

1 2 3 4 5 6 7 8 ... 2006 2007 2008

Encontrar al menos 2008 maneras diferentes de colocar los signos de manera que el resultado sea 2008.

PMJ43-5

Enviado por Juan Jesús Moncada Bolón, San Francisco de Campeche, México.

Se considera el menor n tal que 10^{2008} divide a $n!$

Hallar la última cifra distinta de cero de $n!$.

RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA PJ42 – 3 (Vol. 42 de la REOIM)

Luis M. Maraví Zavaleta

Profesor

I.E. 80915 “Miguel Grau Seminario”, El Pallar, Huamachuco, región de La Libertad, Perú

El valor de *c* debe corresponder al de un número cuadrado perfecto de una cifra, ya que no es posible una cifra no entera. De esta manera, el análisis se reduce a cuatro casos:

(i) *c = 0*

En este caso la igualdad es $\sqrt{\overline{ab0}} = \overline{ab}$. Elevando al cuadrado cada miembro y despejando $\overline{ab}$, tenemos que resolver la ecuación $0 = \overline{ab}(\overline{ab} - 10)$, de donde $\overline{ab}$=0 (raíz no aceptada para las condiciones del problema) o $\overline{ab}$=10 (raíz aceptada). Por lo tanto, el primer valor de $\overline{abc}$ es 100.

(ii) *c = 1*

En este caso la igualdad es $\sqrt{\overline{ab1}} = \overline{ab} - 1$. Elevando al cuadrado cada miembro y despejando $\overline{ab}$, se trata de resolver la ecuación $0 = \overline{ab}(\overline{ab} - 12)$, de donde, por razones análogas a las del primer caso, $\overline{ab}$=12. Por lo tanto, el segundo valor de $\overline{abc}$ es 121.

(iii) *c = 4*

En este caso la igualdad es $\sqrt{\overline{ab4}} = \overline{ab} - 2$. Elevando al cuadrado cada miembro y despejando $\overline{ab}$, se trata de resolver la ecuación $0 = \overline{ab}(\overline{ab} - 14)$, de donde, por razones análogas a las de los casos anteriores, $\overline{ab}$=14. Por lo tanto, el tercer valor de $\overline{abc}$ es 144.

(iv) *c = 9*

En este caso la igualdad es $\sqrt{\overline{ab9}} = \overline{ab} - 3$. Elevando al cuadrado cada miembro y despejando $\overline{ab}$, se trata de resolver la ecuación $0 = \overline{ab}(\overline{ab} - 16)$, de donde, por razones análogas a las de los casos anteriores, $\overline{ab}$=16. Por lo tanto, el cuarto valor de $\overline{abc}$ es 169.

De esta manera, los números de tres cifras que cumplen con la condición señalada en el problema son 100, 121, 144 y 169.

Problemas propuestos 211-215

Problema 211

Propuesto por Carlos Hugo Olivera Díaz, Lima, Perú.

Se da un triángulo ABC y la circunferencia exinscrita relativa al lado AC. Se traza la recta que pasa por el vértice B y por el punto de tangencia, N, de dicha circunferencia con el lado AC. La recta BN vuelve a cortar en P a la circunferencia exinscrita. Sean D y E los otros puntos de tangencia de dicha circunferencia con las rectas que contienen a los lados BC y AB, respectivamente. M es el punto medio de la cuerda ED. Hallar $\widehat{BPM}$ en función de los elementos del triángulo ABC.

Problema 212

Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, Ávila, España.

Sea ABC un triángulo y H el pie de la altura desde A ($H \in BC$). $DEFG$ es el cuadrado inscrito en el triángulo, con el lado DG sobre BC, E en AB y F en AC. Se consideran los puntos definidos a continuación:

$J = AD \cap HE$; $K = AG \cap FH$; I, L son las proyecciones ortogonales de J, K, respectivamente, sobre el lado BC.

Además, $M = AD \cap EF$; $N = AG \cap EF$; $R = AG \cap FL$; y $S = AD \cap IE$.

Demostrar que:

i) $IJKL$ es un cuadrado cuyo lado se determinará.

ii) Las rectas EI, FL y AH se cortan en un punto P tal que $AH = HP$.

iii) Las rectas BJ, CK y AH se cortan en el punto medio P^* de AH.

iv) Las rectas CN, BM y AH son concurrentes.

v) Los triángulos AKJ, ARS y AGD son semejantes.

Problema 213

Propuesto por Gabriel Alexander Chicas Reyes, El Salvador.

Sea $\{b_n\}\, n \geq 0$ la sucesión definida por $b_0 = 0$, $b_1 = 1$, y para todo $n \geq 2$,

$$b_{n+1} = \frac{2b_n^2}{b_{n-1} + b_n}.$$

Demostrar que esta sucesión es convergente.¿Qué se puede decir de su límite?

Problema 214

Propuesto por Pedro Pantoja, Brasil.

Resolver en el conjunto $\mathbb{Z}$ la ecuación

$$3^{x+y-2} = 2\left(x^3 + y^3\right) + 3\left(x^2 + y^2\right) + x + y - 11.$$

Problema 215

Propuesto por Francisco Javier García Capitán, Priego de Córdoba, España.

Sean α, β, γ tres números complejos cuyo módulo es la unidad, y A, B, C los puntos del plano de los que son afijos. Sean $A'B'C'$ y $A''B''C''$ los triángulos órtico y tangencial de ABC. Demostrar que $A'B'C'$ y $A''B''C''$ son homotéticos y que se cumple la relación

$$\frac{B'C'}{B''C''} = -\frac{\alpha\beta\gamma}{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)}.$$

Problema 206, propuesto por José Luis Díaz Barrero, Barcelona, España

Sea ABC un triángulo de lados a,b,c; circunradio R y sean r_a,r_b,r_c los radios de los círculos exinscritos en los ángulos A, B y C, respectivamente. Demostrar que

$$\sum\sqrt{\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\frac{1}{c^2}}\geq\sqrt{\frac{1}{R}}\left(\sqrt{\frac{1}{r_a}}+\sqrt{\frac{1}{r_b}}+\sqrt{\frac{1}{r_c}}\right),$$

Solución de Ricard Peiró i Estruch. IES “Abastos” València.

El área del triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ es:

$$S_{ABC}=\frac{abc}{4R}=r_c\frac{a+b-c}{2}.$$

$$\frac{1}{Rr_c}=\frac{2(a+b-c)}{abc}.$$

La proposición quedaría probada si $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\frac{1}{c^2}\geq\frac{1}{Rr_c}\quad\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\quad\frac{a^2+b^2}{abc^2}\geq\frac{2(a+b-c)}{abc}\quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad\frac{a^2+b^2}{c}\geq 2(a+b-c)\quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad a^2+b^2+2c^2-2ac-2bc\geq 0\quad\Leftrightarrow$$

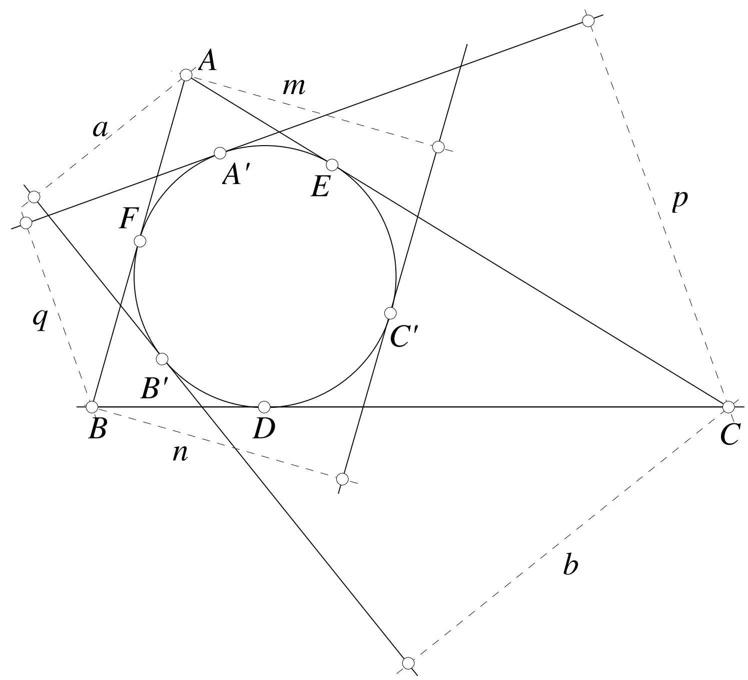
$$\Leftrightarrow\quad (a-c)^2+(b-c)^2\geq 0.$$

Esta última igualdad es cierta.

Por tanto la proposición es cierta y la igualdad se alcanza cuando $a=b=c$, es decir, cuando el triángulo es equilátero.

Problema 207. *Se tiene un triángulo ABC y su circunferencia inscrita, tangente a los lados en los puntos D, E y F, como se indica en la figura. Por los puntos A', B', C' de la circunferencia inscrita se trazan las rectas tangentes a los arcos FD, DE y EF, respectivamente. Desde los vértices de ABC se trazan rectas perpendiculares a dichas tangentes (véase igualmente la figura adjunta). Determinar los puntos de tangencia A',B' y C' para que se cumpla la siguiente condición:*

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{p}{q} \cdot \frac{n}{m} = 1.$$



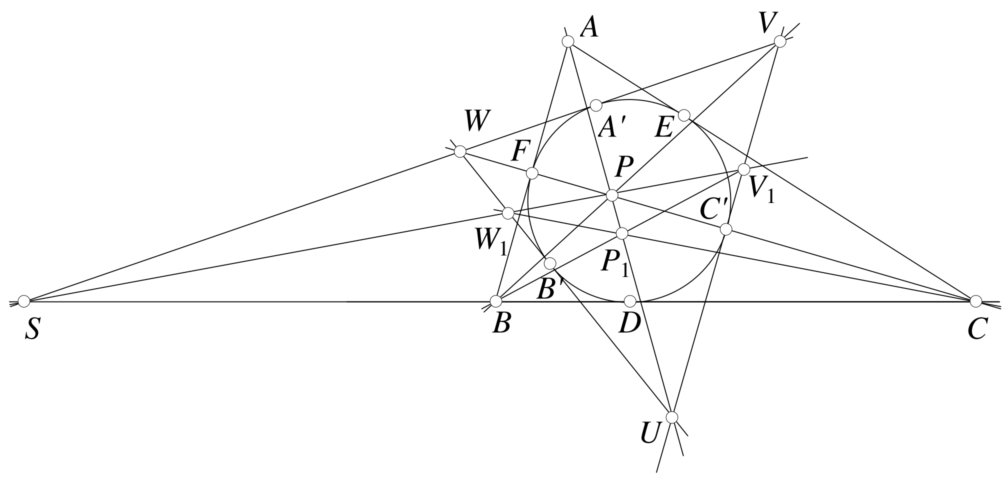
Propuesto por Carlos Hugo Olivera Díaz, Lima, Perú

Solución de Francisco Javier García Capitán.

La condición que cumplen las distancias a, b, p, q, m, n indican que el triángulo UVW formado por las tangentes en A', B', C' es perspectivo con ABC (ver por ejemplo el apartado 179 de Lachlan: *An Elementary Treatise on Modern Pure Geometry*).

Sean B', C' dos puntos cualesquiera sobre la circunferencia, y sea U el punto común de las tangentes por B' y C' Hallemos otro punto A' sobre la circunferencia que forma con B' y C' el triángulo UVW perspectivo con ABC.

Para ello, observemos qeu si P_1 es un punto arbitrario sobre AU, y las rectas BP_1, CP_1 cortan a UC', UB' en V_1, UW_1, respectivamente, los triángulos UV_1W_1 y ABC son perspectivos.



Según el teorema de Desargues, los puntos $V_1W_1 \cap BC$, $W_1U \cap CA$ y $UV_1 \cap AB$ están alineados. Pero las rectas W_1U y UV_1 son fijas, por tanto también lo son los puntos $W_1U \cap CA$ y $UV_1 \cap AB$, haciendo fija a la recta que pasa por los tres puntos. Por tanto el punto $S = V_1W_1 \cap BC$ también es fijo.

Para un punto arbitrario P_1 sobre AU, la recta V_1W_1 no será tangente a la circunferencia, pero conocido el punto S, bastará trazar la tangente desde dicho punto (además de la recta BC) para obtener la recta tangente buscada.

Solución al problema 208 de la REOIM

Álvaro Begué Aguado, Nueva York, USA

Dado que la función coseno sólo toma valores entre -1 y 1, la función que estamos integrando está acotada entre $\sqrt{2}$ y 2. La integral estará acotada entre $\pi\sqrt{2}$ y 2π. Basta ahora observar que $2\pi < \pi\sqrt{2}\cdot\frac{3}{2}$, porque $\sqrt{2} < \frac{3}{2}$.

Nota: separando las partes en que el coseno es positivo de las partes en que es negativo, se obtiene una cota inferior mejor que la propuesta: $\frac{\pi\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$, y aplicando la desigualdad de Jensen de manera bastante directa se obtiene una cota superior mucho mejor que la propuesta: $\pi\sqrt{3}$.

Solución al problema 209

Álvaro Begué

Tomemos la función $f(x) := 2^x + 2^{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}$ y calculemos sus dos primeras derivadas:

$$f'(x) = 2^x \log(2) - \frac{2^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \log(2)}{x^{3/2}}$$

$$f''(x) = \frac{3 \cdot 2^{-1+\frac{1}{\sqrt{x}}} \log(2)}{x^{5/2}} + 2^x \log(2)^2 + \frac{2^{-1+\frac{1}{\sqrt{x}}} \log(2)^2}{x^3}$$

Obsérvese que $f(x)$ es convexa (los tres términos de $f''(x)$ son positivos si $x > 0$), $f(1) = 6$ y $f'(1) = 0$. Luego $f(x)$ tiene un único mínimo global en $x = 1$, y este es el único valor para el cual $f(x) = 6$.

PROBLEMA 210, propuesto por Laurentiu Modan, Bucarest, Rumanía

Se lanza 3 veces un dado y se denota con z_i, con $i \in \{1,2,3\}$, la variable aleatoria que da el número de puntos obtenidos en la situación i. Si la probabilidad $P(z_1 + z_2 = z_3) = p \in [0,1]$, se considera la variable aleatoria

$$X : \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ p & 1-p \end{pmatrix}.$$

Por otra parte, se considera también la variable aleatoria

$$Y : \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ \alpha & \alpha^2 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

donde $\alpha \in (0,1)$.

Se pide:

(A) Comparar $M(X)$ y $M(Y)$.

(B) Estudiar si X e Y son independientes y si están correlacionadas sabiendo que $P(X=1, Y=0) = \frac{35}{72}$ y $P(X=-1, Y=2) = \frac{1}{72}$.

Solución por Daniel Lasaosa Medarde, Universidad Pública de Navarra, Pamplona, España

(A) Para que Y sea una variable aleatoria, necesitamos que $1 = \alpha + \alpha^2 + \frac{1}{4} = \left(\alpha + \frac{1}{2}\right)^2$, es decir $\alpha = -\frac{1}{2} \pm 1$, y como $\alpha > 0$, ha de ser $\alpha = \frac{1}{2}$. Claramente,

$$M(Y) = 0\alpha + 2\alpha^2 + 3\frac{1}{4} = \frac{5}{4}.$$

Al mismo tiempo, tirar 3 dados da un total de $6^3 = 216$ casos posibles, de los que son favorables aquellos de la forma $(a, s-a, s)$, donde $1 \leq s \leq 6$ y $1 \leq a \leq s-1$. Esto nos proporciona $s-1$ valores posibles para a, luego un total de $0+1+2+\cdots+5 = 15$ casos favorables, con lo que $p = \frac{15}{216} = \frac{5}{72}$. Luego

$$M(X) = p(-1) + (1-p)1 = 1 - 2p = \frac{31}{36}.$$

(B) Si X, Y fueran independientes, se tendría que

$$\frac{35}{72} = P(X=1, Y=0) = P(X=1) \cdot P(Y=0) = (1-p)\alpha = \frac{67}{144},$$

claramente falso. Luego X, Y no son independientes. De forma análoga, si X, Y fueran independientes, también se tendría

$$\frac{1}{72} = P(X=-1, Y=2) = P(X=-1) \cdot P(Y=2) = p\frac{1}{4} = \frac{5}{288},$$

nuevamente también falso.

Comentario de páginas web y noticias de Congresos 43

XV JAEM en Gijón, España

En el espléndido marco de La Laboral, de Gijón, se han celebrado del 3 al 6 de julio de 2011 las décimoquintas Jornadas sobre el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas. Este congreso, que se celebra cada dos años, se ha convertido en un lugar de encuentro de una gran mayoría de Profesores de Matemáticas de todos los niveles para compartir experiencias, escuchar las Conferencias y Poenecias o participar en los Talleres. Inevitablemente, hay que elegir, porque muchas de las actividades son simultáneas. El que suscribe impartió un Taller de Resolución de Problemas (*Algunos métodos de resolución de problemas)* y voy a citar algunas de las actividades en las que estuve presente.

La Profª Mª Encarnación Reyes Iglesias, de la Escuela de Arquitectura de Valladolid, impartió una de las conferencias invitadas: *Matemáticas, Naturaleza y Arte: Tres mundos interconectados,* que tuvo un gran impacto, porque es un tema que domina a la perfección.

El Prof. Juan Martínez-Tébar Giménez, del IESO *Cinxella,* de Chinchilla de Montearagón (Albacete), presentó *De Combinatione (Breve historia de la Combinatoria, de la mano de dos españoles).* Uno de ellos es bien conocido (Raimundo Lulio), pero el otro (Sebastián Izquierdo) era completamente desconocido para mí, hasta ese momento.

Alicia Pedreiro Mengotti (IES Monelos de La Coruña) y Covadonga Rodríguez-Moldes Rey (IES de Mugardos) presentaron muy brillantemente su lección para un grupo de ESTALMAT *Entrando en el palomar.*

Miquel Albertí Palmer (Instituto Vallés, Sabadell) fue otro de los conferenciantes invitados, con *Investigación etnomatemática: más allá de la línea de Wallace.*

Antonio Ledesma López (IES 1 de Requena, Valencia), como coordinador del *Colectivo Frontera de Matemáticas,* presentó *Poesía visual y resolución de problemas en torno a la XXIIIª edición del Open Matemático.*

La conferencia de Clausura, a cargo del *Grupo Alquerque* se titulaba *Si hay Matemáticas, esto es Cultura* e hizo las delicias del auditorio.

Antigua Capilla de la Universidad Laboral de Gijón

La cúpula de la Antigua Capilla de La Laboral

Congreso de la Sociedad Belga de Profesores de Matemáticas de lengua francesa; Bastogne, Bélgica.

La SBPMef ha celebrado su congreso anual del 23 al 25 de agosto de 2011, en esta ocasión en Bastogne, donde el ejército nortemericano resistió el invernal e infernal asedio del ejército alemán durante la Segunda Guerra Mundial en la batalla de las Ardenas. La minúscula ciudad conserva las placas conmemorativas, documentos y la reproducción de un tanque Sherman en su plaza principal.

El lema del Congreso era *Las matemáticas hacen viajar.* El que suscribe presentó una comunicación sobre *Algunos problemas de Geometría del espacio.* Aunque este congreso es pequeño, siempre hay que elegir entre las actividades simultáneas. Y las presentaciones del veterano profesor Claude Villers (del que publicaremos una en un próximo número de la REOIM) nunca dejan indiferente y siempre proporcionan ideas muy interesantes para desarrollar en clase. En este caso se trataba de *C'est l'occassion qui….*(que se podría traducir por *Érase una vez…)* que el autor subraya como una matematización de lo cotidiano. Tras un diaporama con varias fotos "matemáticas" del autor, desgranó varios ejemplos de situaciones de la vida real en las que subyacen problemas matemáticos, y cómo resolverlos.

El Prof. Eric Deridiaux presentó de una manera práctica como construir, casi artesanalmente, una antena *parabólica* para captar via satélite imágenes de Televisión de todo el mundo (más de 2000 canales). *L'orientation des antennes de télévision directe par satellite* era el título de su comunicación.

El General Mc Auliffe, defensor de Bastogne

Congreso *Elementary Geometry from an Advanced Point of View, Aveiro, Portugal.*

Del 1 al 3 de septiembre se ha celebrado en Aveiro un minicongreso con el título que antecede a estas líneas, dentro del proyecto Klein y como casi la última actividad del mismo. Contó con la intervención del Secretario General del ICMI , Prof. Jaime Carvaho e Silva, de la Universidad de Coimbra (*El desarrollo y el declive de los Elementos de Euclides en la enseñanza de las Matemáticas);* del Prof. Pedro Duarte de la Univ. de Lisboa (*Paisajes de Morse);* del Prof. José María Montesinos (Univ. Complutense; *Klein, aritmética fuchsiana y grupos y nudos de Klein);* del Prof. Francisco Santos Leal (Univ. de Cantabria, Santander, España: *Politopos, programación lineal y complejidad*). La contribución del que suscribe fue presentar una demostración elemental del teorema del ortopolo, de Gheorge Tzitzeica, descubierta cuando el matemático rumano era un estudiante de Bachillerato.

Porche de la Universidad de Aveiro.

XXVIª Olimpiada Iberoamericana de Matemática, en Costa Rica.

Se ha celebrado en Costa Rica, durante la segunda mitad de septiembre, el Simposio Iberoamericano de Educación Matemática y la vigésimasexta Olimpiada Iberoamericana de Matemática.

La O.E.I. envió al que suscribe como experto para dar un curso de Capacitación durante los tres días del Simposio (21-22-23 de Septiembre), que se celebró en el Hotel Condesa, cerca de Heredia, y en la sede de San José del Instituto Tecnológico de Costa Rica. En el curso de capacitación había tres grupos de asistentes (A:Profesores con poca experiencia en Olimpiadas; B: Profesores con cierta experiencia en Olimpiadas; y C: estudiantes de las carreras de matemáticas de las diferentes Universidades del país). Además de mi persona, también dieron clase en este curso los Prof. José Heber Nieto, de Maracaibo, y José Antonio Gómez Ortega, de la UNAM de México. Fueron tres días muy intensos, con sesiones de trabajo largas, en sesiones de mañana y tarde, pero en mi opinión muy fructíferas.

Una de las sesiones del grupo A

Concluido el Simposio fuimos trasladados a San José, para colaborar como Coordinadores de uno de los problemas de la Olimpiada. Todo el desarrollo de la Olimpiada fue normal, y tanto el Jurado Internacional como los Coordinadores realizamos nuestro trabajo en un ambiente de total cordialidad.

El alumno ganador de la Olimpiada fue el jovencísimo peruano Raúl Chávez, que lleva camino de convertirse en el Terry Tao de Iberoamérica. Ojalá en el futuro sea uno de los galardonados con la medalla Fields.

Los medallistas de oro de la Olimpiada

Valladolid, noviembre de 2011.

Francisco Bellot Rosado

<u>Divertimentos matemáticos 43</u>

El primero de los divertimentos de este número es una narración, original de la Profª Covadonga Rodríguez-Moldes Rey, Profesora de Matemáticas y Directora del I.E.S. de Mugardos (La Coruña), que resultó premiada en un concurso de cuentos didácticos para alumnos y profesores en Galicia.

Es un cuento literario-matemático, y está escrito en gallego, idioma, como se sabe, muy próximo al portugués, uno de los idiomas oficiales de la REOIM, y que no hemos traducido.

El segundo divertimento está formado por algunas viñetas capturadas en Internet, por lo que resultaría casi imposible averiguar la procedencia real.

LIBERANDO INCÓGNITAS

Hoxe hai unha importante reunión. A Raiña ten convocado ao comité de liberación e hai moita expectación. Dende que dirixe o país, a Raíña leva feitos moitos cambios, non sempre ben recibidos polos que antes tiñan o poder, que protestan: "Onde se viu un país coma este!, xa non hai exército, hai comité de liberación de incógnitas!". E ameazan: "Temos que volver ao de sempre, hai que derrocar a Raíña, non podemos perder incógnitas e caer nas mans dos atrapadores de incógnitas".

As incógnitas son elementos moi importantes do país. Están gardadas con vixilancia especial. Serven para resolver problemas. Nunca se sabe o que pode agochar unha incógnita, só cando o problema está resolto libérase a incógnita descubríndose o seu valor. A incógnita máis famosa é X, pero tamén hai Y, Z, a, b, c e outras raras que só se utilizan en certas ocasións.

Así de enrarecido está o ambiente. E aínda non saben o motivo polo que a Raíña ten convocado ao comité de liberación!

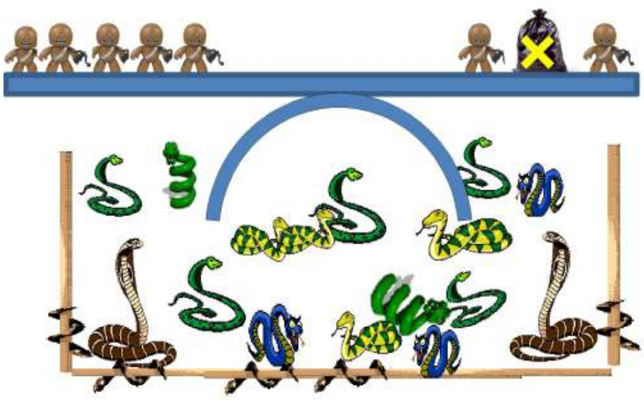
Silencio, fala a Raíña:

"Meus queridos amigos e amigas, membros do comité de liberación: os atrapadores de incógnitas queren poñernos a proba, esta é a mensaxe que acabo de recibir:

> *Onte procedemos a atrapar unha incógnita, témola retida seguindo o procedemento habitual. Calquera intento de rescate pode dar lugar a que a incógnita se precipite na cova das serpes e desapareza para sempre. Anunciamos que a nosa intención é a de atrapar tódalas incógnitas que podamos do voso país para así estar en condicións de resolver por nós mesmos os problemas e ter o dominio. (Atrapadores de incógnitas)*

Ante isto, queridos amigos e amigas, propóñovos actuar con sixilo e intelixencia. Tentaremos rescatar a incógnita atrapada. Trátase de X. O primeiro é saber onde e como se atopa. Enviarei especialistas a analizar a situación e mañá de novo reunirémonos para peparar o rescate".

Esa noite un comando de especialistas obtivo imaxes de X. Efectivamente, estaba sobre a cova das serpes, vixiada por sete guerreiros, dous ao seu carón e cinco enfronte. Todos en equilibrio sobre a cova das serpes.



Ao día seguinte a Raiña reúne ao comité de liberación:

“ A situación é delicada pero sinxela, a un lado hai cinco guerreiros e ao outro a x con dous guerreiros (5=x+2) . Necesitamos actuar con precisión e sincronizadamente nos dous lados. Basta con eliminar a dous guerreiros a cada lado, despois rescátase X procedendo á súa liberación e traendo retidos aos tres guerreiros aos que equivale. O rescate será esta noite”.

Chegada a noite o plan desenvolveuse coa precisión que pedía a Raíña: a incógnita foi devolta ao seu recinto e os tres guerreiros inimigos postos á súa disposición.

Despois deste acontecemento a Raíña chamou a sabios de todo o mundo. Foron varios días de reunións, discusións e estudos. Agora a Raíña driríxese a tódolos habitantes do país nunha convocatoria extraordinaria que se espera con moita espectación.

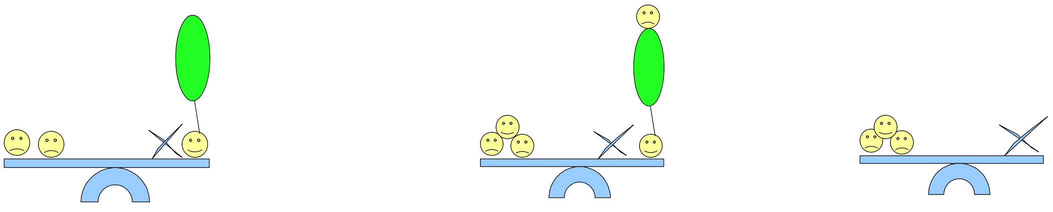
"Queridos amigos e amigas -comeza a falar a Raíña- teño que comunicarvos unha importante decisión. É froito de profundas reflexións de toda a comunidade de sabios e levará a cambios moi importantes que mellorarán as condicións de vida e a formación de todos os habitantes do país. A decisión que tomei é que TODOS VOS CONVIRTADES EN LIBERADORES DE INCÓGNITAS. A tarefa non será doada, é necesario prepararse a fondo. Contratarei a sabios e estudosos que nos formarán na arte de liberar incógnitas. A medida que vaiamos aprendendo usaremos técnicas e utensilios máis complicados. A próxima semana comenzará a formación para tódolos os habitantes que o desexen, que espero sexa a maioría de todos vós".

E así foi, o chamamento da Raíña foi seguido por habitantes de todas as idades.

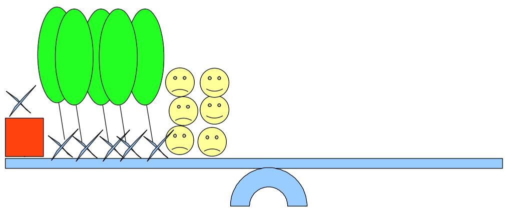
Despois de varios días de preparativos comezou a formación.

Un mes despois a Raíña visita as salas de aprendizaxe.

“Maxestade, esta é a sala de 1º grao, aquí están os principiantes que aprenden a liberar as incógnitas tratando de que quede soa a un lado da balanza mantendo o equilibrio. Pode ver como agora a un lado da balanza hai dous *lilís* (elementos de liberación) e ao outro está a x acompañada dun *lilí* suxeito a un globo que tira del e da balanza para arriba (2=x-1). Observe como con coidado colocan un *lilí* a cada lado da balanza e así a un lado quedan tres *lilís* e ao outro queda soa a x pois os dous *lilís* anuláronse. A x está liberada e o seu valor é 3”.

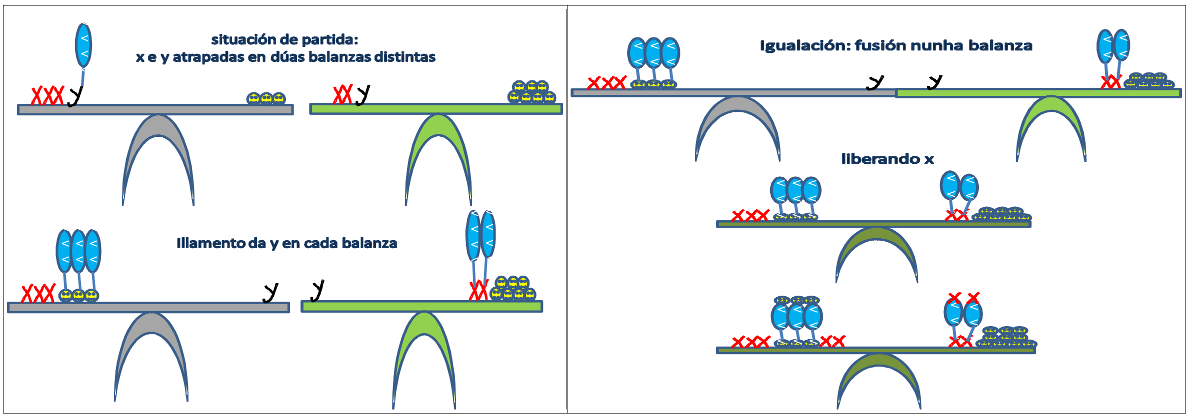


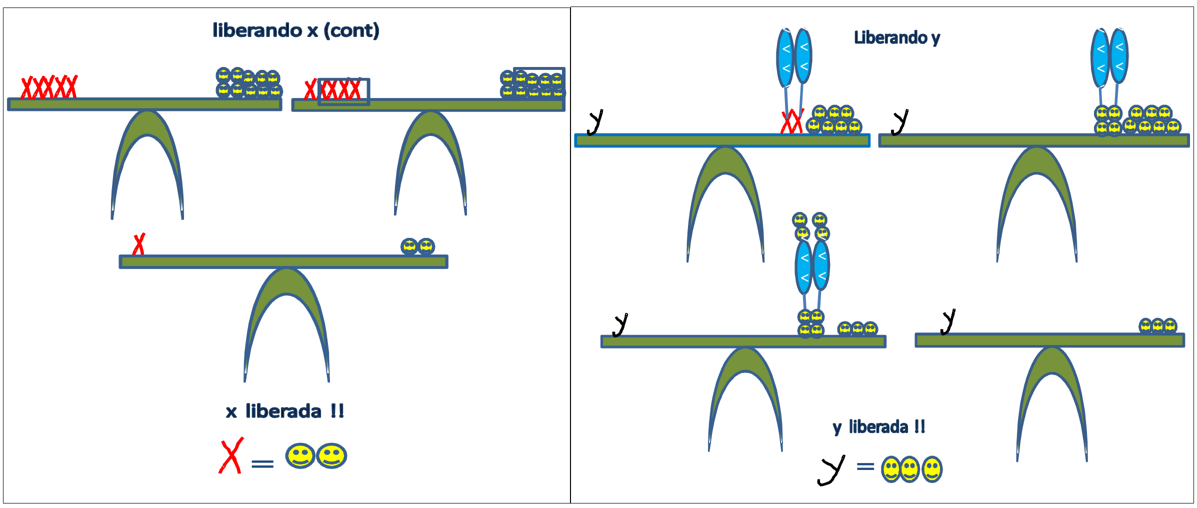
Satisfeita a Raíña prosegue o percorrido. Entran nunha sala ampla onde hai cadrados de varios tamaños, *lilís* e globos polo chan. O ambiente é moi serio. A incógnita X está atrapada elevada ao cadrado, hai ademais outras cinco X cada unha delas colgada dun globo que as empuxa para riba pero aferránse ao bambán, ademais hai seis *lilís*. Ao outro lado da balanza, non hai nada!, non obstante o bambán está en equilibrio (x^2-5x+6=0). Levan tempo tratando de liberar a X . Parece unha empresa complicada.



A Raíña di que quere colaborar pois coñece unha técnica que leu nun libro. Despois de frenética actividade movendo globos, cadrados e *lilís,* entre todos conseguen o obxectivo: a x queda liberada con dúas liberacións posibles! (x=2, x=3).

Remata a visita da Raíña na gran sala de sistemas. Alí están a liberar dúas incógnitas, x e y, atrapadas conxuntamente en dous lugares distintos. A Raíña asiste emocionada á liberación das dúas incógnitas e móstrase interesada pola estratexia seguida:





A Raíña, moi satisfeita do visto, dá por terminada a primeira xornada de visita ás salas de aprendizaxe A semana próxima visitará outras: a sala das raíces nas que liberan incógnitas atrapadas en raíces cadradas, a sala exponencial cos famosos “logaritmos”, a sala de Ruffini… Pensa que moi pronto o país será forte e sabio, estará preparado para liberar incógnitas e resolver problemas e ela poderá negociar un acordo co país veciño para compartir a formación adquirida e anular os temibles atrapadores de incógnitas, todo a cambio de que se facilite ao seu país a ansiada vía de acceso ao mar.

Esa noite, nas súas dependencias, a Raíña ten nas mans o libro *Lilavati,* que escribiu o mestre hindú Bhaskara, hai varios séculos, e le: “*A quinta parte dun enxame de abellas pousa sobre unha flor de kadamba, a terceira parte sobre unha flor de silindra. O triplo da diferenza entre estes dous números voa sobre unha flor de krutxa e unha abella, voa indecisa dunha flor de Pandanus a un xazmín*”. A Raíña pecha os ollos pensando como liberar o número de abellas do enxame.

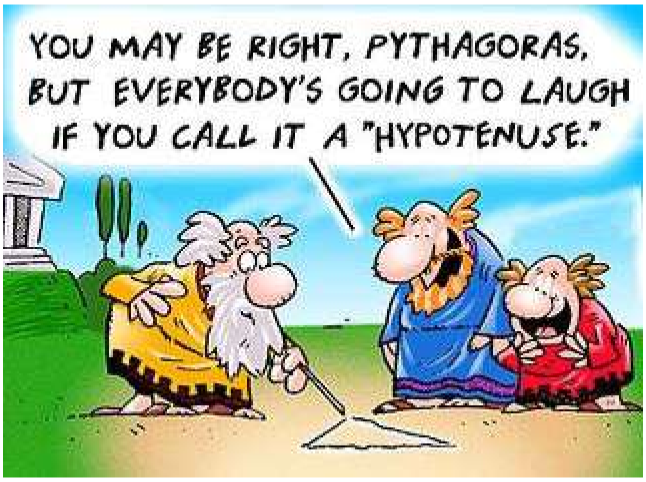
En Ares no mes de abril do 2011

Covadonga Rodríguez-Moldes Rey

Algunas viñetas capturadas en Internet

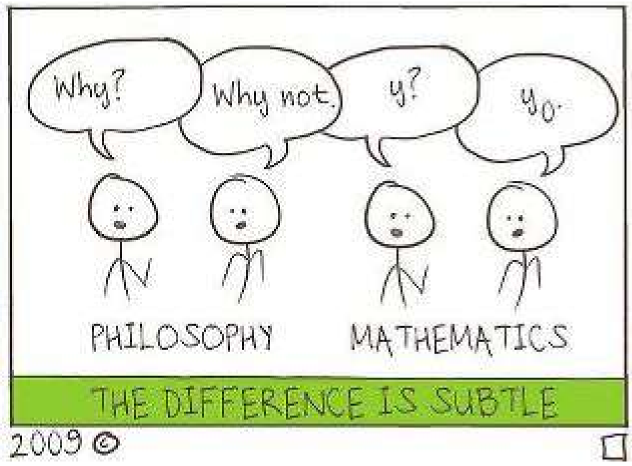
Presentamos a continuación algunas viñetas capturadas en Internet o recibidas por correo electrónico. La procedencia de cada una es, como puede suponerse, muy difícil de determinar.

Esta es la verdadera raíz cuadrada….



Las primeras críticas al teorema….

El recibimiento a Steve Jobbs en el Más Allá



La sutil diferencia entre Filosofía y Matemáticas.

Cartas al editor 43

En esta ocasión, nos hacemos eco de dos cartas recibidas.

En la primera, nuestro colaborador Milton Donaire Peña comenta la de Lucas Martin Andisco publicada en el vol.42 de la REOIM:

"En el número 42 de la REOIM, he visto con mucho interés la aclaración que nos hace nuestro amigo Lucas Martín Andisco, sobre la autoría de la demostración del teorema de Pascal. Bien, por el gran respeto y credibilidad que la comunidad de asesores de olimpiadas matemáticas le tenemos a la web http://www.artofproblemsolving.com/ , veo muy conveniente la aclaración hecha por el Prof. Lucas, y debo agregar que para acertar sobre la originalidad de la prueba realicé las consultas respectivas con destacados geómetras de nuestro medio que se encargan de presentar pruebas originales a teoremas clásicos, entre los cuales, como todos sabemos, destaca por sus amplias publicaciones originales nuestro amigo francés Jean Louis Ayme, quien se tomó la molestia de averiguar sobre la originalidad de la prueba".

Por lo que a este Editor respecta, este asunto se considera cerrado.

En la segunda, nuestro también colaborador Raúl A. Simón Elexpuru (Santiago, Chile), dice:

"Me alegra muchísimo que existan libros como el de María Victoria Veguín Casas: "Historia de las Matemáticas en la Península Ibérica (de la Prehistoria al siglo XV)". Con ellos se demuestra que la contribución de los pueblos hispánicos a la ciencia – en especial, a la ciencia matemática – no ha sido nula, como se suele creer. Faltaría una continuación hasta nuestros días, para terminar de ilustrar esta tesis."

Número

44

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática
ISSN 1698-677X

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

Número 44 (enero - marzo 2012)

ISSN – 1698-277X

ÍNDICE

Recibidas soluciones de: Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, España; Bruno Salgueiro Fanego, Vivero, España; y del proponente. Presentamos la solución de Lasaosa.

Problema 212

Recibidas soluciones de: Miguel Amengual Covas, Cala Figuera, España; Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, España; Bruno Salgueiro Fanego, Vivero, España; Cristóbal Sánchez-Rubio García, Benicassim, España, y del proponente. Presentamos la solución de Sánchez-Rubio.

Problema 213

Recibidas soluciones de: Roberto Bosch Cabrera, Texas, USA; Robinson Higuita, estudiante, Antioquia, Colombia; Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, España; Albert Stadler, Herrliberg, Suiza; y el proponente.

Presentamos la solución de Bosch.

Problema 214

Recibidas soluciones de: Roberto Bosch Cabrera, Texas, USA; Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, España; Oscar Reynaga Alarcón, Lima, Perú; Bruno Salgueiro Fanego, Vivero, España; Albert Stadler, Herrliberg, Suiza; y del proponente. Presentamos la solución de Reynaga.

Problema 215 (corrección)

Los dos resolventes del problema observaron que el enunciado original no era correcto y probaron el enunciado una vez corregido: Daniel Lasaosa Medarde , Pamplona, España; y Bruno Salgueiro Fanego, Vivero, España. Presentamos la solución de Salgueiro. También lo observó Carlos Hugo Olivera Díaz, Lima, Perú.

Comentario de páginas web, noticias de congresos, reseña de publicaciones 44

Una nueva revista digital de Geometría Clásica

Divertimentos matemáticos 44

Capturado en Internet (2)

Convocatorias OEI

Curso iberoamericano de formación de profesores de secundaria en el área de matemáticas Ñandutí

El curso lo convoca la Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura (OEI) en el seno de su Centro de Altos Estudios Universitarios con la participación de aquellos países Iberoamericanos que decidan incorporarse al proyecto. El proyecto se enmarca en la colaboración que la OEI y la Agencia Española de Cooperación Internacional para el Desarrollo AECID desarrollan con el fin de apoyar la construcción del Espacio Iberoamericano del Conocimiento a través del fomento de vocaciones hacia la ciencia y al avance del Programa Metas Educativas 2021. Además, presta su colaboración el Ministerio de Educación de Paraguay y la Consejería de Innovación, Ciencia y Empresa de la Junta de Andalucía (España).
Empezamos en abril 2012

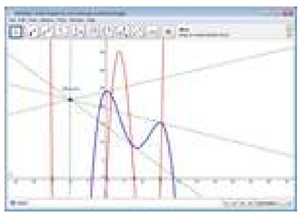
Más información [+]

Congreso Iberoamericano de las Lenguas en la Educación

Salamanca, España, 5 al 7 de septiembre de 2012
La Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura (OEI) en el marco de su Programa para el fortalecimiento de las Lenguas de Iberoamérica en la Educación convoca al Congreso Iberoamericano de las Lenguas en la Educación que se celebrará en la ciudad de Salamanca del 5 al 7 de septiembre de 2012.
Se encuentra abierta la inscripción y la entrega de propuestas de comunicaciones y experiencias
Incluye: Leer para aprender matemática

Más información [+]

Curso de formación docente de TIC y matemática



Especialización en TIC y Educación del CAEU de la OEI
Este curso de formación tiene como objetivo dar a conocer distintas aplicaciones que faciliten la incorporación de las TIC al aula de matemáticas en los diferentes niveles educativos.
Es evidente que resulta imposible recoger todos los recursos existentes, por lo que en cada uno de los bloques desarrollados en el siguiente material se ha apostado por unos determinados programas por sus características y posibilidades,

apoyados en todo momento con otros recursos disponibles en Internet.
Matrícula y becas parciales abiertas

Más información [+]

SOBRE LA DESIGUALDAD DE CAUCHY

Un enfoque heurístico y algunas aplicaciones

Francisco Bellot Rosado

En muchos problemas de concursos se puede utilizar la desigualdad de Cauchy como herramienta para demostrar desigualdades.

En esta nota voy a exponer la forma en que a mí, personalmente, me gusta presentar la desigualdad a alumnos de 14 – 15 años de edad en adelante. Descarto, por la edad de los alumnos, el enfoque vectorial habitual con la utilización del producto escalar; emplearé la identidad de Lagrange, pero no la voy a presentar “caída del cielo” ni despacharla diciendo (como he llegado a leer en algún texto) que “se demuestra haciendo operaciones y desarrollando ambos miembros”.

La identidad de Lagrange

Queremos comparar las dos expresiones siguientes:

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right) \qquad (1)$$

y

$$\left(ax+by+cz\right)^2 \qquad (2)$$

con objeto de saber cuál de las dos será mayor. Aquí, los seis números involucrados son números reales cualesquiera. Pido a los alumnos que desarrollen por separado (1) y (2) :

$$(1)= a^2x^2+a^2y^2+a^2z^2+b^2x^2+b^2y^2+b^2z^2+c^2x^2+c^2y^2+c^2z^2$$

$$(2)= a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+2abxy+2acxz+2bcyz$$

A la vista del resultado obtenido, y si es preciso con algunos ejemplos numéricos, conjeturamos que (1) debe ser mayor o igual que (2); para demostrar esto de forma concluyente vamos a ver si conseguimos expresar (1) como una suma, uno de cuyos sumandos sea (2) y los demás sean positivos. Para que esto sea así, procuraremos que los otros sumandos sean cuadrados, y además que los términos que están en (1) pero no en (2) aparezcan en la suma – y se simplificarán – y los dobles productos, que están en (2) pero no en (1), se simplifiquen directamente apareciendo con signo opuesto en los desarrollos de los cuadrados:

Propongo, entonces, a los alumnos, que completen adecuadamente

$$\left(ax+by+cz\right)^2+(\cdots-\cdots)^2+(\cdots-\cdots)^2+\left(\cdots-\cdots\right)^2$$

y que escriben como

$$\left(ax+by+cz\right)^2+(ay-bx)^2+(bz-cy)^2+\left(cx-az\right)^2.$$

Hemos llegado, de esta forma a la identidad

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)=\left(ax+by+cz\right)^2+(ay-bx)^2+(bz-cy)^2+\left(cx-az\right)^2$$

que recibe el nombre de Lagrange (para tres variables, pero que es fácilmente generalizable a más) y que, “como subproducto”, demuestra la desigualdad

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)\geq\left(ax+by+cz\right)^2,$$

que es la desigualdad de Cauchy.

El caso de igualdad

¿Cuándo valdrá el signo igual en la desigualdad de Cauchy?

Los alumnos, después de reflexionar un poco, dicen: *cuando sean 0 los tres cuadrados suplementarios del segundo miembro de la identidad.*

Esto se formula como

$$ay-bx=bz-cy=cx-az=0$$

que se expresa de forma más compacta en forma de proporción:

$$\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z},$$

es decir, cuando las tres primeras variables sean proporcionales a las tres segundas.

Algunos comentarios

En la excelente monografía de J. Michael Steele *The Cauchy-Schwarz Master Class, Cambridge U.P. & M.A.A. 2004* se afirma que el procedimiento que hemos utilizado es el que describe Cauchy en su libro de texto para los alumnos de la Escuela Politécnica de Francia (1821).

En la bibliografía rusa, se suele añadir el nombre de Buniakovski a los de Cauchy y Schwarz. En realidad, Schwarz y Buniakovski desarrollaron, independientemente uno de otro, una generalización de la desigualdad de Cauchy para cálculo integral.

La formulación generalizada de la desigualdad es

$$\left(a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots+a_n{}^2\right)\left(b_1{}^2+b_2{}^2+\cdots+b_n{}^2\right)\geq\left(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\right)^2,$$

valiendo el signo igual si y sólo si las variables a_i y b_i son proporcionales, es decir, si existe

$$\lambda \text{ tal que } \lambda=\frac{a_i}{b_i},$$

Cualquiera que sea $i, 1\leq i\leq n$.

Para generalizar el argumento anteriormente usado en la identidad de Lagrange, hay que observar que a la expresión

$$\left(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\right)^2$$

es necesario sumarle los *n(n-1)/2* cuadrados

$$\left(a_1b_2-a_2b_1\right)^2+\left(a_1b_3-a_3b_1\right)^2+\cdots+\left(a_{n-1}b_n-a_nb_{n-1}\right)^2$$

número que coincide con el de formas de elegir dos subíndices distintos de entre los *n.* Con esto, se obtiene el primer miembro de la identidad de Lagrange para *n* variables.

Aplicaciones

El primer ejemplo que vamos a ver procede de una pequeña obra maestra: *Maxima and Minima without Calculus,* de Ivan Niven (M.A.A. 1981).

Ejemplo 1

Hallar los valores máximo y mínimo de 2x+3y+6z para valores de x,y,z que satisfacen $x^2+y^2+z^2=1$.

Solución

Por la desigualdad de Cauchy para 3 variables, con a = 2, b=3, c = 6 obtenemos

$$\left(2^2+3^2+6^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)\geq\left(2x+3y+6z\right)^2,$$

con igualdad si y sólo si

$$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{6}.$$

Pero sobre la esfera $x^2+y^2+z^2=1$, se tiene

$$49 \geq (2x+3y+6z)^2,$$

lo cual significa que

$$-7 \leq 2x+3y+6z \leq 7.$$

El problema estará terminado cuando encontremos efectivamente puntos sobre la esfera donde se verifique el signo igual. Para ello resolvemos el sistema formado por la ecuación de la esfera junto con las dos condiciones

$$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{6}.$$

Así obtenemos los valores

$$(x,y,z) \equiv \left(\frac{2}{7},\frac{3}{7},\frac{6}{7}\right) \text{ y} \left(\frac{-2}{7},\frac{-3}{7},\frac{-6}{7}\right).$$

Por lo tanto, el mínimo valor es -7 y el máximo 7.

Ejemplo 2

(del libro de Mircea Becheanu y Bogdan Enescu *Inegalitati elementare...si mai putin elementare*, Ed. Gil, 2002)

Si a,b,c son números reales tales que a + b + c = 1, demostrar que

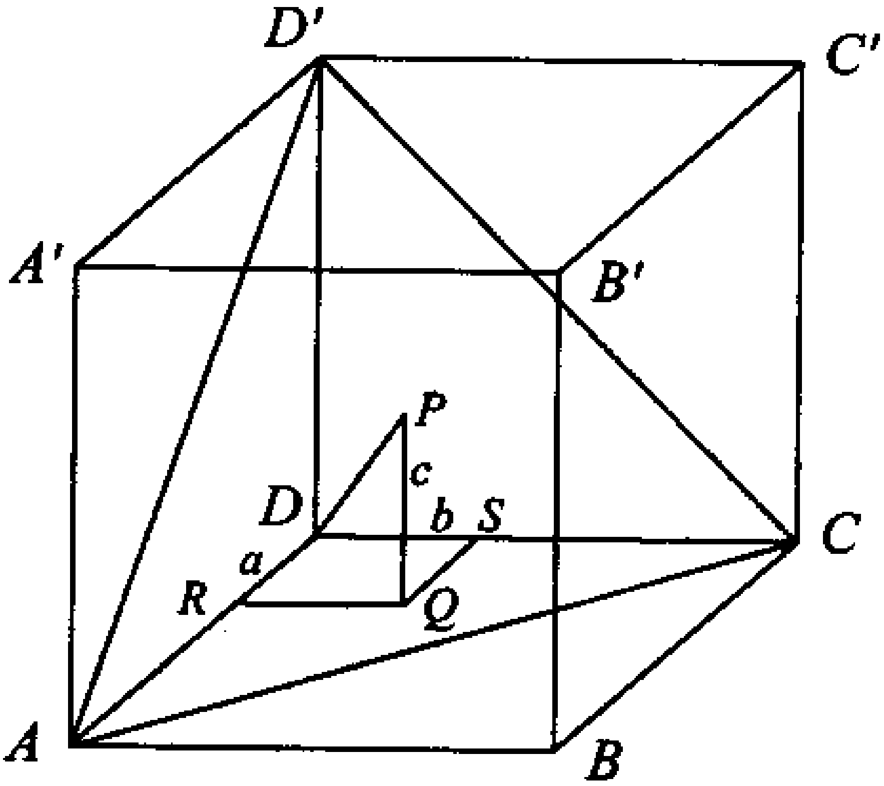
$a^2+b^2+c^2$ es mayor o igual que 1/3.

Solución

Aplicamos la desigualdad de Cauchy en la forma

$$1^2 = (1\bullet a+1\bullet b+1\bullet c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2).$$

La desigualdad que acabamos de demostrar tiene una interpretación geométrica interesante:



Consideremos el cubo ABCDA'B'C'D' de lado 1 y sea P un punto interior situado en el plano ACD'. El punto P se proyecta en el plano ABCD en Q, y Q se proyecta sobre las aristas AD y CD en los puntos R y S, respectivamente. Supongamos que DR = a, DS = b, PQ = c. Entonces

$$DP^2 = a^2 + b^2 + c^2 .$$

Por otra parte, el volumen del tetraedro DACD' se puede expresar de dos maneras:

$$V = \frac{1}{3} DD' \bullet S_{ADC} = \frac{1}{3} \bullet \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \text{ o bien } V = \frac{1}{3} S_{AD'C} \bullet h,$$

donde h es la distancia de D al plano AD'C. Ya que $S_{AD'C} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, resulta que

$h = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Puesto que $DP^2 \geq h^2$, la desigualdad propuesta expresa el siguiente resultado geométrico: la distancia del vértice D del cubo a un punto P interior al triángulo AD'C es mayor o igual que $\frac{\sqrt{3}}{3}$. La distancia mínima tendrá lugar cuando los vértices PDRQS sean vértices de un cubo.

Ejemplo 3

Si a, b, c son números positivos, demostrar que

$$\left(a+b+c\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 9$$

Solución

Como a,b,c son estrictamente positivos, podemos considerar los números (también positivos) $\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{c}$ y aplicar la desigualdad de Cauchy:

$$\left(a+b+c\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=\left(\left(\sqrt{a}\right)^2+\left(\sqrt{b}\right)^2+\left(\sqrt{c}\right)^2\right)\left(\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2\right)$$

$$\geq\left(\sqrt{a}\cdot\frac{1}{\sqrt{a}}+\sqrt{b}\cdot\frac{1}{\sqrt{b}}+\sqrt{c}\cdot\frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2=9.$$

Ejemplo 4

Si a,b,c son números reales positivos, entonces

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\geq\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$$

Solución

Escribimos el segundo miembro astutamente:

$$\frac{a}{c}\cdot\frac{c}{b}+\frac{c}{a}\cdot\frac{a}{b}+\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}\leq\sqrt{\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{c^2}{a^2}+\frac{b^2}{c^2}\right)}\cdot\sqrt{\left(\frac{b^2}{c^2}+\frac{a^2}{b^2}+\frac{c^2}{a^2}\right)}=\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}.$$

Ejemplo 5 (La desigualdad de Nesbitt)

Si a, b, c son números positivos, entonces

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}.$$

Solución

Obsérvese la forma en que se invoca aquí la desigualdad de Cauchy:

$$\left[a\left(b+c\right)+b\left(c+a\right)+c\left(a+b\right)\right]\cdot\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)\geq\left(a+b+c\right)^2$$

De esta desigualdad se obtiene

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}=1+\frac{a^2+b^2+c^2}{2(ab+bc+ca)}$$

Pero como es bien conocido que $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$, resulta

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq 1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}.$$

Bibliografía

M.Becheanu, B. Enescu: ***Inegalitati elementare…si mai putin elementare. Ed. Gil, Zalau, 2002.***

J.Michael Steele: ***The Cauchy-Schwarz Master Class, Cambridge U.P. & M.A.A.2004.***

I Niven: ***Maxima and Minima without Calculus. M.A.A. 1981.***

ARTÍCULOS DE REVISTAS, ÚTILES EN LA PREPARACIÓN DE OLIMPIADAS

Una pequeña bibliografía comentada (1)

Francisco Bellot Rosado

En un número anterior de la REOIM presentamos una bibliografía comentada de libros para la preparación y el entrenamiento de estudiantes olímpicos. En esta ocasión enumeramos a continuación (como primera entrega) artículos publicados en revistas, que pueden servir al mismo objetivo, esperando sea de utilidad a nuestros lectores.

Svrcek, Jaroslav: *The systems of cyclic equations. Mathematics and Informatics quarterly, 1/2001, vol. 11, pp.4-7.*

Entre otras ventajas, el artículo muestra ejemplos en los que la solución de un sistema cíclico NO está compuesta por valores IGUALES de las variables.

Mihaylov, Borislav: *When a quadratic equation has three roots. Mathematics and Informatic quarterly, 1/93, vol. 3, pp. 2-5.*

Cómo probar identidades cíclicas.

MacHale, Desmond: *My favourite polynomial. The Mathematical Gazette, junio 1991, pp. 157-165.*

Propiedades de $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$.

Kung, Sidney: *A butterfly theorem for quadrilaterals. Mathematics Magazine, vol. 78, #4, octubre 2005, pp. 314-316.*

Un complemento a los artículos clásicos (sobre todo de Bankoff) acerca de este tema.

Gueron, Shay: *Substitutions, Inequalities, and History. Crux Mathematicorum, 2002*

La sustitución mal llamada de Ravi y la desigualdad de reordenación (que debe llamarse de Karamata) son discutidas en este artículo.

Rabinowitz, Stanley: *The factorization of $x^5 \pm x + n$. Mathematics Magazine, junio 1988.*

Se estudian los (pocos) casos en los que esa quíntica es reducible.

Klamkin, Murray & Liu, Andy: *Simultaneous generalization of the Ceva's and Menalaus's theorems. Mathematics Magazine , 1-1992*

La generalización comprende ambos teoremas como casos particulares.

Segers, Jack: *Le cosinus au secours de l'équation cubique. Mathematica et Pédagogie, n^o 125, 5-11, 2000.*

Como evitar los números complejos en la ecuación cúbica con tres raíces reales.

Detemple, Duane & Harold, Sonia: *A round-up of square problems. Mathematics Magazine, vol. 69, nº 1, febrero 1996, pp. 15-27.*

Toda clase de problemas sobre el cuadrado.

Holanda, Bruno: *O lema da perpendicular. Sigma, nº 3, septiembre 2006.*

www.grupoteorema.mat.br/sigma

Andreescu, Titu & Enescu, Bogdan: *Equiangular polygons. Mathematical Reflections, 1, 2006.*

Wegner, Kenneth W.: *Equations with trigonometric values as roots. American Mathematical Monthly, 1959, pp.52-53.*

Brodsky, Y.S. & Slipenko, A.K.: *Functional equations and groups (A formal introduction). Quantum, nov-dicbre 1998.*

PROBLEMAS PARA LOS MÁS JÓVENES 44

CINCO PROBLEMAS DE LA OLIMPIADA DE BIELORRUSIA 2009

PMJ-44-1

La gráfica de la parábola $y = x^2$ se dibuja en el plano cartesiano. Dos rectas r_1 y r_2 son paralelas al eje de abscisas; la distancia entre ellas es 1, y r_1 está más cerca del eje de abscisas que r_2. El punto A es uno de los puntos de intersección de la parábola con r_1; el punto B es el punto de intersección de r_2 con el eje de ordenadas, y O es el origen de coordenadas. Calcular el valor del ángulo OAB. (I. Voronovich)

PMJ-44-2

Sean un número primo p>3 y los enteros positivos *k* y *n.* Designamos con *$S_p(k,n)$* la suma de todas las fracciones irreducibles de la forma m/p tales que $k < \frac{m}{p} < n$. Hallar todos los números *p,k,n* tales que $S_p(k,n) = 2009$. (V.Karamzin)

PMJ-44-3

En el trapecio ABCD (con BC paralela a AD), el ángulo CAD es de 30º. La longitud de la diagonal BD es igual a la longitud de la paralela media del trapecio. Calcular el valor del ángulo entre las diagonales AC y BD. (I. Voronovich)

PMJ 44-4

Tom y Jerry juegan de la siguiente manera: Cada uno, por turno, reemplazan uno de los asteriscos de la expresión ********* por una cifra del 1 al 9 (cada cifra sólo se puede utilizar una vez). Una vez terminado, Tom gana si el número de 9 cifras así formado es divisible por 11; si no lo es, gana Jerry. ¿Quién de los jugadores tiene estrategia ganadora si i) Tom empieza el juego; ii) Jerry empieza el juego? (E.Barabanov, S. Mazanik, I. Voronovich)

PMJ-44-5

Se consideran 15 trinomios cuadráticos con coeficientes distintos dos a dos:

$x^2 - p_i x + q_i,\ \ i = 1,2,\cdots,15$. El conjunto de valores de los coeficientes de esos trinomios es $\{1,2,\cdots,29,30\}$. Una raíz de uno de esos trinomios se dirá *buena* si esa raíz es mayor que 20. Sea M el número total de raíces *buenas* de esos quince trinomios. Determinar el mayor valor posible de M. (I. Bliznets)

PMN43-1

Propuesto por Carlos Hugo Olivera Díaz, Lima, Perú.

ABC é un triángulo rectángulo en $B.$ H é o pé da altura desde $B.$ As medianas que parten de A e $B,$ relativas respectivamente aos lados BH e HC dos triángulos ABH e $HBC,$ córtanse no punto $M.$ As bisectrices interiores dos ángulos BAH e HBC córtanse no punto $N.$ Se $\alpha = \measuredangle AMN,$ $\beta = \measuredangle ANH,$ determinar o ángulo $\measuredangle BHN.$

Solución por Bruno Salgueiro Fanego, Viveiro, Lugo.

Sexan P e Q os respectivos puntos medios de BH e $HC,$ R o punto de intersección de BH e $AN,$ S o punto de intersección de CA e $BN,$ $\measuredangle A = \measuredangle BAC$ e $\gamma = \measuredangle BHN.$ Na referencia de orixe H na que se teñen as coordenadas $A(2a,0),$ $C(-2c,0),$ $B(0,2b),$ resulta que $P(0,b),$ $Q(-c,0)$ e $0 = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = (-2c,-2b)\cdot(2a,-2b) = -4ca + 4b^2,$ logo $b = \sqrt{ca},$ sendo entón M a intersección das rectas $AP : y = -\dfrac{b}{2a}x + b$ e $BQ : y = \dfrac{2b}{c}x + 2b,$ que é $M\left(\dfrac{-2ca}{c+4a}, \dfrac{2\sqrt{ca}\,(c+2a)}{c+4a}\right),$ co cal $AM \perp BM,$ pois

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = \left(\frac{4a(c+2a)}{c+4a}, \frac{-2\sqrt{ca}\,(c+2a)}{c+4a}\right)\cdot\left(\frac{2ca}{c+4a}, \frac{4a\sqrt{ca}}{c+4a}\right) = \frac{8ca^2(c+2a)}{c+4a} - \frac{8ca^2(c+2a)}{c+4a} = 0.$$

Como $\measuredangle HRA = \pi - (\measuredangle RAH + \measuredangle AHR) = \pi - \left(\dfrac{\measuredangle A}{2} + \measuredangle AHR\right) = \dfrac{\pi - \measuredangle A}{2},$ tense que

$$\measuredangle NRH = \pi - \measuredangle HRA = \frac{\pi + \measuredangle A}{2} \quad \text{e}$$

$$\gamma = \measuredangle RHN = \pi - (\measuredangle RNH + \measuredangle NRH) = \pi - (\measuredangle ANH + \measuredangle NRH) = \pi - \left(\beta + \frac{\pi + \measuredangle A}{2}\right) = \frac{\pi - \measuredangle A}{2} - \beta.$$

Nótese que $\measuredangle NBA = \measuredangle SBA = \measuredangle SBH + \measuredangle HBA = \dfrac{\measuredangle A}{2} + \left(\dfrac{\pi}{2} - \measuredangle A\right) = \dfrac{\pi - \measuredangle A}{2}$ implica que $\measuredangle ANB = \pi - (\measuredangle NBA + \measuredangle BAN) = \pi - \left(\dfrac{\pi - \measuredangle A}{2} + \dfrac{\measuredangle A}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2},$ co cal $AN \perp BN,$ de onde resulta, ao ser $AM \perp BM,$ que $\measuredangle NBA = \measuredangle SBA = \measuredangle SBH + \measuredangle HBA = \dfrac{\measuredangle A}{2} + \left(\dfrac{\pi}{2} - \measuredangle A\right) = \dfrac{\pi - \measuredangle A}{2}$ e $\measuredangle NMA = \alpha$ son iguais, por ser ángulos inscritos na circunferencia de diámetro AB que abarcan o mesmo arco, $AN,$ é dicir, que $\gamma = \dfrac{\pi - \measuredangle A}{2} - \beta = \alpha - \beta.$

PMN43-2

Propuesto por Carlos Hugo Olivera Díaz, Lima, Perú.

O triángulo ABC é rectángulo en B, e sexa r o raio do seu círculo inscrito. As bisectrices interiores dos ángulos en A e en C cortan aos seus lados opostos en N e M, respectivamente. Calcular a área do triángulo BMN en función de r.

Solución por Bruno Salgueiro Fanego, Viveiro, Lugo.

Sexan I o incentro do triángulo ABC, A', B' e C' os puntos de tanxencia da circunferencia inscrita ao triángulo ABC cos lados BC, CA e AB, respectivamente, a, b e c as respectivas lonxitudes de ditos lados, p o semiperímetro e R o raio do círculo circunscrito a ABC, n a lonxitude de BN, m a lonxitude de BM e $[\ldots]$ a área do triángulo que se encerre entre corchetes. Nótese que N pertence á bisectriz interior AI e que M pertence á bisectriz interior CI, col cal tanto A, I e N, coma C, I e M, están aliñados.

Polo teorema da bisectriz interior AN do triángulo ABC, $\dfrac{NC}{NB}=\dfrac{AC}{AB}$, é dicir, $\dfrac{a-n}{n}=\dfrac{b}{c}$, co cal $n=\dfrac{ca}{b+c}$; analogamente, $m=\dfrac{ca}{a+b}$.

Como o ángulo no vértice B do triángulo ABC é recto, resulta que dito triángulo está inscrito na circunferencia de diámetro BC, sendo polo tanto dita circunferencia a circunscrita ao mesmo, co cal $R=\dfrac{b}{2}$. Ademais, $pr=[ABC]=\dfrac{ca}{2}$ e $\dfrac{a-b+c}{2}=BA'=C'I=r$ e, segundo a igualdade $ab+bc+ca=r^2+p^2+4Rr$, demostrada na páxina 29 do número 29 desta revista,

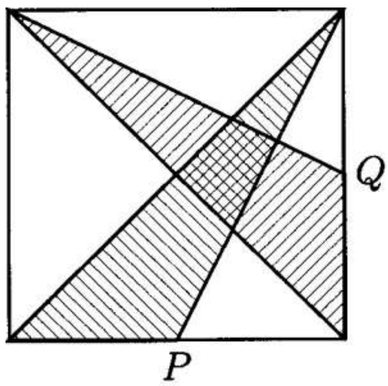
$$(a+b)(b+c)=ab+bc+ca+b^2=r^2+p^2+4Rr+b^2=r^2+p^2+2br+b^2=(b+r)^2+p^2=2p^2,$$

de onde resulta $[BMN]=\dfrac{mn}{2}=\dfrac{c^2a^2}{2(a+b)(b+c)}=\dfrac{(2pr)^2}{4p^2}=r^2.$

PMN43-3

Enviado por Juan Jesús Moncada Bolón, San Francisco de Campeche, México.

Na figura, P e Q son os respectivos puntos medios dos lados dun cadrado.



Determinar o cociente entre a área da rexión dobremente sombreada e a área do cadrado.

Resolto por Bruno Salgueiro Fanego, Viveiro, Lugo.

Sexan $30a$ a lonxitude do lado do cadrado, A, B, C e D os vértices do cadrado dados en sentido antihorario, de tal xeito que $P \in AB$ e $Q \in BC$, R a intersección de DB e PC, S a intersección de DQ e PC, T a intersección de DQ e AC, U a intersección de DB e AC, que é o centro do cadrado, e $[\ldots]$ a área do polígono que se encerre entre corchetes.

Fixada a referencia de orixe U na cal as coordenadas de P e Q son, respectivamente, $P(0,-15a)$ e $Q(15a,0)$, terase que $A(-15a,-15a)$, $B(15a,-15a)$, $C(15a,15a)$ e $D(-15a,15a)$. Así, R obtense como intersección das rectas $PC: y = 2x - 15a$ e $DB: y = -x$, é dicir, $R(5a,-5a)$, S obtense como intersección das rectas $PC: y = 2x - 15a$ e $DQ: y = \frac{15a - x}{2}$, é dicir, $S(9a,3a)$, e T obtense como intersección das rectas $AC: y = x$ e $DQ: y = \frac{15a - x}{2}$, é dicir, $T(5a,5a)$, co cal

$$[RSTU] = [RST] + [TUR] = \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5a & 9a & 5a \\ -5a & 3a & 5a \end{pmatrix}\right| + \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5a & 0 & 5a \\ 5a & 0 & -5a \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|40a^2\right| + \frac{1}{2}\left|-50a^2\right| = 45a^2,$$

logo o cociente pedido é $\frac{[RSTU]}{[ABCD]} = \frac{45a^2}{900a^2} = \frac{1}{20}$.

REAL SOCIEDAD
MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Olimpiada Matemática
Española

XLVIII Olimpiada Matemática Española
Fase Nacional
Prueba de selección regional de Castilla y León
PRIMERA PRUEBA

14 de Febrero de 2012

PROBLEMA 1

Determinar, razonadamente, los enteros positivos k tales que el polinomio $x^5+x^4+x^3+kx^2+x+1$ sea el producto de dos polinomios con coeficientes enteros de grados menores que 5.

PROBLEMA 2

Demostrar que si (m,n) recorre todos los pares de enteros positivos, entonces la función polinómica

$$P(m,n)=\frac{(m+n-1)(m+n-2)}{2}+n$$

alcanza todos los valores enteros positivos sin repetir ninguno.

PROBLEMA 3

Sea ABC un triángulo isósceles con AC = BC. Su circunferencia inscrita es tangente a AB y a BC en D y E, respectivamente. Una recta (distinta de AE) pasa por A y corta a la circunferencia inscrita en F y G. Las rectas EF y EG cortan a AB en K y L, respectivamente. Demostrar que DK = DL.

PROBLEMA 4

Sobre una mesa horizontal hay una pila de 7 discos metálicos perfectamente iguales, cada uno de diámetro 40 cm.

Determinar razonadamente cuál es la distancia máxima, sobre el plano horizontal de la mesa, entre la proyección del centro del disco más alto y el centro del disco más bajo, sin que la pila se desmorone.

Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
No se permite utilizar calculadoras ni otros dispositivos electrónicos.
Tiempo: 4 horas.

REAL SOCIEDAD
MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Olimpiada Matemática
Española

XLVIII Olimpiada Matemática Española
Fase Nacional
Prueba de selección regional de Castilla y León
SEGUNDA PRUEBA

24 de Febrero de 2012

PROBLEMA 1

Demostrar que si a_1, a_2, ..., a_n son n números reales no nulos, tales que verifican la relación

$$\left(a_1^{\,2}+a_2^{\,2}+\cdots+a_{n-1}^{\,2}\right)\left(a_2^{\,2}+a_3^{\,2}+\cdots+a_n^{\,2}\right)=$$
$$=\left(a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_{n-1}a_n\right)^2,$$

entonces esos números están en progresión geométrica.

PROBLEMA 2

En un billar circular de un metro de radio tenemos dos bolas, A y B, situadas en un mismo diámetro y separadas por el centro del círculo, a distancias *a* y *b* de éste. Determinar la posición de un punto P de la banda circular,(distinto de los extremos del diámetro donde están A y B) donde debería incidir la bola A para que en el primer rebote choque contra la bola B. Se supone que el lanzamiento se hace sin dar efecto a la bola A.

PROBLEMA 3

La sucesión de números positivos $\{a_i\}$ cumple la siguiente condición:

$$\text{Si } k+n=m+l, \text{ entonces } \frac{a_k+a_n}{1+a_ka_n}=\frac{a_m+a_l}{1+a_ma_l}.$$

Demostrar que existen números positivos *b* y *c* tales que $b\le a_n\le c,$ para todo n natural , y encontrar un ejemplo de sucesión (no constante) con la propiedad del enunciado.

PROBLEMA 4

En cada vértice de un polígono regular de 2012 lados hay colocada una piedra. Dos jugadores, A y B, van retirando cada uno una piedra en su turno, empezando por A, hasta que queden dos piedras. Si esas dos piedras ocupan vértices contiguos, gana el jugador B; en caso contrario gana A. Analizar cuál de los dos jugadores tiene una estrategia que le permita ganar siempre.¿Qué pasará el año que viene cuando repitan el mismo juego con 2013 piedras?

Cada problema se puntúa sobre 7 puntos. No se permite utilizar calculadoras ni ningún otro dispositivo electrónico. Tiempo: 4 horas

Competición Matemática Mediterránea 2011

PROBLEMA 1

Un polinomio mediterráneo es de la forma

$$P(x) = x^{10} - 20x^9 + 135x^8 + a_7x^7 + a_6x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

y sólo tiene raíces reales. Sus coeficientes son reales también. Determinar el mayor número real que puede ser raíz de un polinomio mediterráneo.

Solución por Daniel Lasaosa Medarde, Universidad Pública de Navarra, Pamplona, España

Sea r una de las raíces que puede tener un polinomio mediterráneo, y sean $s_1, s_2, \ldots, s_9$ las demás raíces reales de dicho polinomio. Denotemos $S = s_1 + s_2 + \cdots + s_9$, $\sigma = s_1s_2 + s_2s_3 + \cdots + s_8s_9$ y $Q = {s_1}^2 + {s_2}^2 + \cdots + {s_9}^2$. Por la desigualdad entre medias aritmética y cuadrática, y por la desigualdad triangular, tenemos que

$$Q \geq \frac{1}{9}\left(|s_1| + |s_2| + \cdots + |s_9|\right)^2 \geq \frac{S^2}{9},$$

con igualdad si y sólo si $s_1 = s_2 = \cdots = s_9$. Por las relaciones de Cardano-Vieta, tenemos que

$$20 = r+S, \qquad 135 = rS+\sigma = rS+\frac{S^2-Q}{2} \leq rS+\frac{4S^2}{9} = r(20-r)+\frac{4(20-r)^2}{9},$$

con lo que operando, se obtiene

$$0 \geq r^2 - 4r - 77 = (r-11)(r+7).$$

Se tiene entonces que ha de ser $-7 \leq r \leq 11$, con lo que los valores mínimo y máximo que puede tener una raíz de un polinomio mediterráneo son -7 y 11, respectivamente, siendo esto posible si y sólo si el resto de las raíces son iguales entre sí, e iguales a 3 en el caso del mínimo, e iguales a 1 en el caso del máximo. Se puede comprobar en efecto fácilmente que tanto $(x+7)(x-3)^9$ como $(x-11)(x-1)^9$ son polinomios mediterráneos.

Competición Matemática Mediterránea 2011

PROBLEMA 2

Sea A un conjunto finito de números reales positivos; sea B el conjunto de números de la forma x/y, siendo x e y elementos de A; y sea C el conjunto de números de la forma xy, siendo x e y elementos de A.

Si representamos con S el número de elementos del conjunto S, demostrar que $|A| \cdot |B| \leq |C|^2$.

Solución por Daniel Lasaosa Medarde, Universidad Pública de Navarra, Pamplona, España

Supongamos que todos los elementos de A son distintos, y que tanto dos resultados iguales del cociente como del producto de dos elementos de A se cuentan como un único elemento de B o C, respectivamente (la solución a la alternativa es una versión simplicada, con $D = 0$, de la solución que se expone a continuación).

Supongamos en primer lugar que no existen cuatro elementos de A, x_1, x_2, y_1, y_2 con $x_1 \neq x_2$, y tales que $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} \neq 1$ o $x_1y_1 = x_2y_2$. Entonces, el número de elementos de B es claramente igual al número de pares ordenados (x, y) que podemos formar con dos elementos distintos cualesquiera de B, es decir $n^2 - n$, más un elemento adicional por todas las parejas de la forma $\frac{x}{x} = 1$, mientras que el número de elementos de C es igual al número de pares no ordenados que podemos formar con dos elementos distintos de A, es decir $\binom{n}{2}$, más n elementos de la forma x^2. Luego $|B| = n^2 - n + 1$ y $|C| = \frac{n(n+1)}{2}$, con lo que el resultado a demostrar es equivalente a

$$4n(n^2 - n + 1) = 4|A| \cdot |B| \leq 4|C|^2 = n^2(n + 1)^2,$$
$$0 \leq n^3 - 2n^2 + 5n - 4 = (n - 1)(n^2 - n + 4),$$

claramente cierto y con igualdad si y sólo si $n = 1$, pues $n^2-n+4 = (n-2)^2+3n > 0$.

Supongamos finalmente que existen cuaternas de elementos de A, x_1, x_2, y_1, y_2 con $x_1 \neq x_2$, y tales que $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} \neq 1$ o $x_1y_1 = x_2y_2$. Nótese que en el primer caso, se daría $x_1y_2 = x_2y_1$ y también $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} \neq 1$, mientras que en el segundo caso se daría $\frac{y_2}{x_1} = \frac{y_1}{x_2} \neq 1$ y $\frac{x_1}{y_2} = \frac{x_2}{y_1} \neq 1$. Luego por cada elemento de C que se "pierde" por haber dos productos iguales, existen dos elementos que se "pierden" en B por haber dos pares de cocientes iguales. Llamando D al número de elementos de C que se pierden, tenemos que de B se pierden exactamente el doble, con lo que nos bastaría con demostrar que

$$4n(n^2 - n + 1 - 2D) \leq (n(n + 1) - 2D)^2,$$
$$4D(n^2 - n - D) \leq (n^2 - n)^2 + 4n(n - 1),$$

y esta última desigualdad es claramente cierta, ya que por la desigualdad entre medias aritmética y geométrica, $D(n^2 - n - D) \leq \left(\frac{n^2-n}{2}\right)^2$, con igualdad si y sólo si $D = \frac{n^2-n}{2}$. Nótese que la desigualdad es siempre estricta, a menos que $n = 1$, en cuyo caso $A = \{x\}$ para algún real positivo x, con lo que $B = \{1\}$, $C = \{x^2\}$, y $|A| \cdot |B| = 1 = |C|^2$.

Competición Matemática Mediterránea 2011

PROBLEMA 3

De un tetraedro regular de altura h se corta un tetraedro regular de altura xh por medio de un plano paralelo a la base.

Cuando el tronco de pirámide resultante se coloca en un plano horizontal sobre una de sus caras laterales, la proyección del centro de gravedad G del tronco de cono es un punto de la base menor de esta cara lateral.

Demostrar que x es una raíz de la ecuación $x^3 + x^2 + x = 2$.

Solución por Daniel Lasaosa Medarde, Universidad Pública de Navarra, Pamplona, España

Supongamos el tetraedro apoyado en un plano horizontal tal que, al cortarlo, el tronco piramidal quede apoyado sobre una de sus caras laterales; es decir, una vez apoyado el tetraedro con una de sus caras sobre el plano horizontal, lo cortaremos por un plano paralelo a una de sus caras laterales. Llamemos A, B, C a los vértices del tetraedro apoyados sobre el plano horizontal, de forma que el plano que corta al tetraedro es paralelo al lado BC, cortando a las aristas AB, AC en los puntos respectivos B', C'. Si llamamos H a la longitud de la altura de cada cara del tetraedro, la recta $B'C'$ está a una distancia $(1-x)H$ de la arista BC, y a una distancia xH del vértice A.

Al realizar el corte, quedan dos sólidos, un tetraedro regular, una de cuyas caras es $AB'C'$, y cuyo centro de gravedad llamaremos P_1, y un tronco de pirámide una de cuyas caras laterales es $BB'C'C$, y cuyo centro de gravedad llamaremos $P_2 = G$. Nótese que el centro de gravedad del tetraedro es también el centro de gravedad de dos pesos puntuales, uno situado en P_1 con masa x^3, y otro situado en P_2 con masa $1 - x^3$, por ser esta la proporción de volúmenes entre el tetraedro pequeño y el tronco piramidal, en los que queda dividido el tetraedro original. Podemos entonces decir que, para cualquier punto O de la recta P_1P_2 que deja a P_1, P_2 en la misma semirrecta, el centro de gravedad P del tetraedro original está también sobre dicha semirrecta, y cumple

$$OP = x^3 \cdot OP_1 + (1 - x^3) \cdot OP_2.$$

Sean ahora Q_1, Q_2, Q, O' las proyecciones respectivas de P_1, P_2, P, O sobre el plano horizontal, y tomemos sin pérdida de generalidad O' como el punto medio de BC. Claramente, el centro de gravedad de ambos tetraedros estará en el centro de sus respectivas bases, es decir, sobre la altura de dicha base, a una distancia de la base igual a un tercio de la altura. Luego $O'Q_1 = (1-x)H + \frac{xH}{3}$, $O'Q = \frac{H}{3}$. Pero el punto Q_2 es, por definición en el enunciado, el punto medio de $B'C'$, con lo que $O'Q_2 = (1-x)H$. Se tiene entonces que, al ser $O'Q = x^3 \cdot O'Q_1 + (1-x^3) \cdot O'Q_2$ por el teorema de Thales, se cumple

$$1 = x^3(3-2x) + 3(1-x^3)(1-x), \qquad 0 = x^4 - 3x + 2 = (x-1)(x^3 + x^2 + x - 2).$$

Ahora bien, $x = 1$ no puede darse, pues entonces el corte dejaría intacto el tetraedro original, y el tronco de pirámide no existiría, luego ha de ser $x^3 + x^2 + x - 2 = 0$, qed.

Competición Matemática Mediterránea 2011

PROBLEMA 4

Sea D el pie de la bisectriz interior del angulo $\angle A$ del triángulo ABC. La recta que une los incentros de los triángulos ABD y ACD corta a AB en M y a AC en N. Demostrar que BN y CM se cortan sobre la bisectriz AD.

Solución por Daniel Lasaosa Medarde, Universidad Pública de Navarra, Pamplona, España

Sean E, F los puntos de corte respectivos de la recta BC y las bisectrices de los ángulos $\angle BAD$ y $\angle CAD$, y sean I_1, I_2, y r_1, r_2, los incentros e inradios respectivos de los triángulos ABD, ACD. Claramente, $r_1 = AI_1 \sin \frac{A}{4} = I_1E \sin \angle AED$, con lo que

$$\frac{AI_1}{I_1E} = \frac{\sin \angle AED}{\sin \frac{A}{4}}, \qquad \frac{AI_2}{I_2F} = \frac{\sin \angle AFD}{\sin \frac{A}{4}}.$$

Si $BC \parallel I_1I_2$, entonces $\sin \angle AED = \sin \angle EFD$. Pero $\angle AED = B + \frac{A}{4}$ y $\angle AFD = C + \frac{A}{4}$, luego como $B + C + \frac{A}{2} < 180°$, entonces $B = C$, AD es eje de simetría del triángulo ABC isósceles en A, luego también del segmento MN, y BN, CM se cortan en dicho eje de simetría. Queda entonces probado en este caso el resultado pedido.

Si I_1I_2 no es paralela a BC, ambas se cortan en un punto P, y al ser B, C intercambiables sin afectar al problema, podemos suponer que B está en el interior del segmento PC. Se tiene entonces por el teorema de Menelao, y usando el teorema del seno, que

$$\frac{EP}{PF} = \frac{I_2A}{FI_2} \cdot \frac{I_1E}{AI_1} = \frac{\sin \angle AFD}{\sin \angle AED} = \frac{AE}{AF}.$$

Ahora bien, por el teorema de la bisectriz, $\frac{DE}{EB} = \frac{AD}{AB}$, para $DE = \frac{AD \cdot BD}{AD+AB}$ y $BE = \frac{AB \cdot BD}{AD+AB}$, y por el teorema de Stewart,

$$AE^2 = \frac{DE \cdot AB^2 + BE \cdot AD^2}{BD} - BE \cdot DE = \left(\frac{2AB \cdot AD}{AD + AB} \cos \frac{A}{4} \right)^2,$$

luego

$$\frac{PE}{PF} = \frac{AE}{AF} = \frac{AB(AD + AC)}{AC(AD + AB)},$$

$$\frac{AB(AD + AC)}{AC(AD + AB)} = \frac{PB + BE}{PC - CF} = \frac{PB + \frac{AB \cdot BD}{AB+BD}}{PC - \frac{AC \cdot CD}{AC+AD}},$$

$$AB(AD + AC)PC - AC(AD + AB)PB = AB \cdot AC \cdot BC = AB \cdot AC(PC - PB),$$

y usando el teorema de la bisectriz, $\frac{PB}{PC} = \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$. Ahora bien, por el teorema de Menelao, y al estar alineados M, N, P, se tiene

$$1 = \frac{AM}{MB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CN}{NA} = \frac{AM}{MB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CN}{NA},$$

y por el teorema de Ceva, también en este caso las rectas AD, BN, CM coinciden en un punto.

Problemas 216 - 220

Problema 216

(*Propuesto por Laurentiu Modan, Bucarest, Rumania)*

Sea $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ una función continua. Con la notación $f^n(a)$ denotamos $(f(a))^n$.

Calcular el límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{\binom{n-1}{k}}{n-k} f^n\left(\frac{k}{n}\right).$$

Problema 217

(*Propuesto por D.M.Batinetu-Giurgiu, Bucarest, y N. Stanciu, Buzau, Rumania)*

Sean m y n números reales positivos. Demostrar que para cualquier triángulo ABC se verifican las desigualdades

1)

$$\frac{ab^2}{ma+nb} + \frac{bc^2}{mb+nc} + \frac{ca^2}{mc+na} \geq \frac{\left(s^2+r^2+4Rr\right)^2}{(2m+n)\,s^2+(n-2m)\,r^2+4\,(n-2m)\,Rr}$$

y 2)

$$\frac{1}{(mr_a+nr_b)^2} + \frac{1}{(mr_b+nr_c)^2} + \frac{1}{(mr_c+nr_a)^2} \geq \frac{27}{(m+n)^2\,(4R+r)^2}$$

donde las notaciones del triángulo son las usuales.

Problema 218

(Propuesto por el editor)

La tangente en P a una cierta curva corta al eje Ox en T. PN es la perpendicular desde P a dicho eje. Si el perímetro del triángulo PTN es constante e igual a $2c$, demostrar que la ecuación de la curva es de la forma

$$y^2 - 2cy = Ae^{\frac{x}{c}}.$$

Problema 219

(Propuesto por el editor)

ABC es un triángulo. Se trazan círculos de centros A y B que pasan por C. Demostrar que el producto de las distancias desde C a las tangentes comunes a ambas circunferencias es

$$\frac{4\,(s-a)^2\,(s-b)^2}{c^2}.$$

Problema 220

(Propuesto por el editor)
Si la sucesión $\{u_j\}$se define mediante

$$\begin{aligned} u_{2n} &= u_{2n-2} + u_n - u_{n-8} \text{ para } n > 8; \\ u_{2n} &= u_{2n-2} + u_n \text{ para } n < 8; \\ u_{2n+1} &= u_{2n} \text{ y } u_1 = u_0 = 1, \end{aligned}$$

demostrar que

$$u_{8n} = \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}.$$

PROBLEMA 211, propuesto por Carlos Hugo Olivera Díaz, Lima, Perú.

Se da un triángulo ABC y la circunferencia exinscrita relativa al lado AC. Se traza la recta que pasa por el vértice B y por el punto de tangencia, N, de dicha circunferencia con el lado AC. La recta BN vuelve a cortar en P a la circunferencia exinscrita. Sean D y E los otros puntos de tangencia de dicha circunferencia con las rectas que contienen a los lados BC y AB, respectivamente. M es el punto medio de la cuerda ED. Hallar $\angle BPM$ en función de los elementos del triángulo ABC.

Solución por Daniel Lasaosa Medarde, Universidad Pública de Navarra, Pamplona, España

Denotemos por I_b al centro de la circunferencia exinscrita relativa al lado AC, y por Q al punto donde se cortan las rectas AC y DE; si estas dos rectas no se cortan, entonces AC es perpendicular a la bisectriz BM ya que DE lo es, con lo que ABC es isósceles en B, la mediatriz es eje de simetría y N coincide con el punto donde ésta corta a AC, y $\angle BPM = 0$ por estar P, M sobre dicha bisectriz. Supondremos en el resto de la solución que ABC no es isósceles, y sin pérdida de generalidad $\angle A > \angle C$, luego en efecto Q existe y está bien definido.

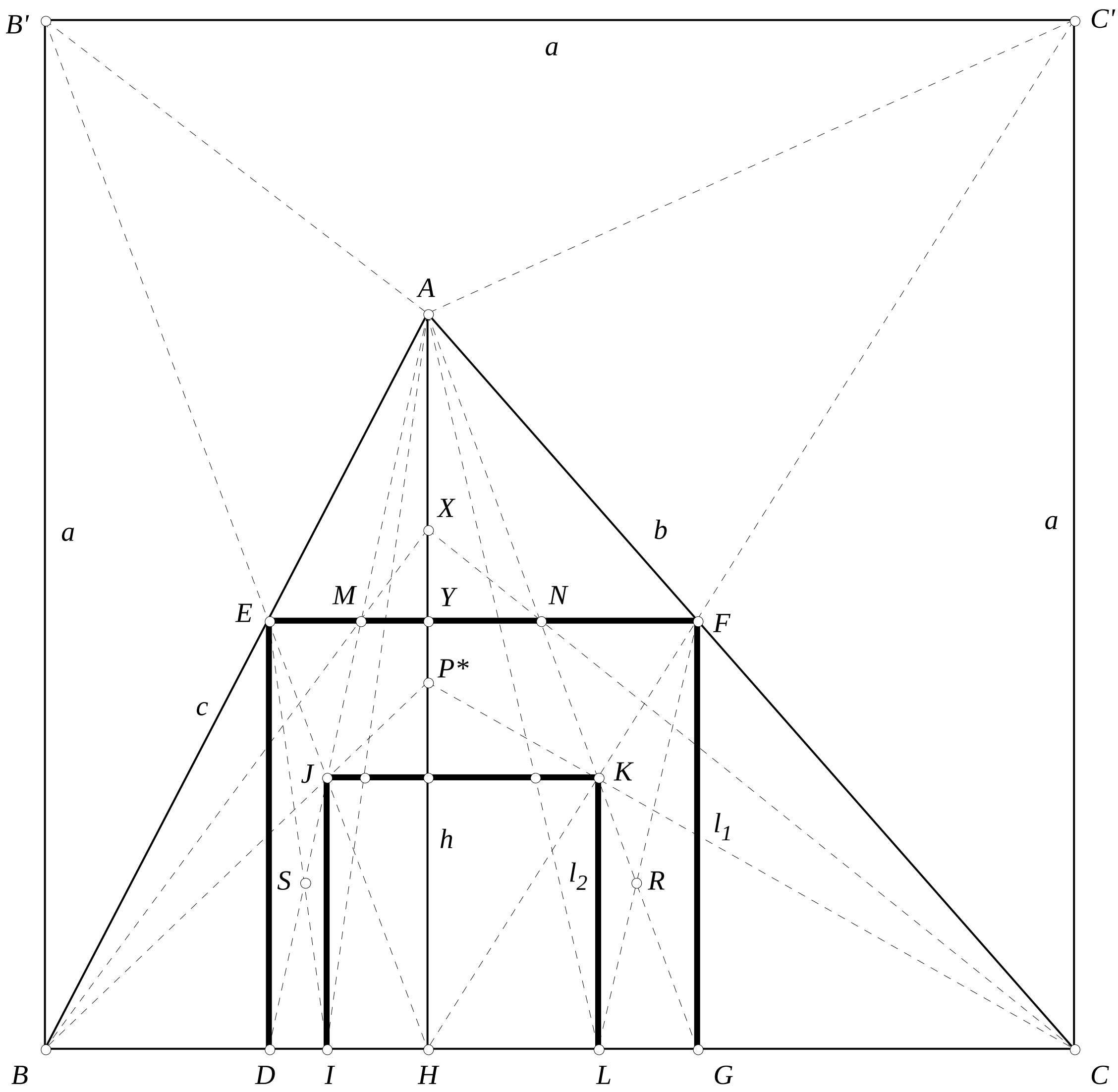
Demostraremos en primer lugar que los puntos I_b, M, N, P, Q son concíclicos. En efecto, consideremos la circunferencia de diámetro I_bQ. Como I_bN es perpendicular a la recta AC, que es la misma que la recta QN, entonces $\angle I_bNQ = 90°$, y N está en dicha circunferencia. Al mismo tiempo, como la recta QM coincide con la recta DE, que por simetría alrededor de la bisectriz del ángulo B es perpendicular a la recta BI_b, que a su vez coincide con la recta MI_b, tenemos que $\angle QMI_b = 90°$, con lo que nuevamente M también está en dicha circunferencia. Finalmente, la potencia de B respecto a la circunferencia exinscrita es $BN \cdot BP = BE^2 = BM \cdot BI_b$, al ser los triángulos BME y BEI_b semejantes, ya que ambos triángulos son rectángulos, respectivamente en M y E, y ambos comparten el ángulo $\angle EBM = \angle I_bBE = \frac{B}{2}$. Se tiene entonces que I_bMNP es cíclico, y su circunferencia circunscrita, que es claramente la de I_bMN, pasa por Q al estar M, N en la circunferencia de diámetro I_bQ.

Nos basta ahora con observar que $\angle BPM = \angle NPM = \angle NQM = \angle AQM$, es el ángulo formado por las rectas AC y EQ. Como $A > C$, se tiene que $\angle EAQ = 180° - A$, mientras que $\angle AEQ = \angle BED = 90° - \frac{B}{2}$, luego

$$\angle BPM = \angle AQE = 180° - \angle EAQ - \angle AEQ = A + \frac{B}{2} - 90° = \frac{A - C}{2}.$$

En el caso en que ABC sea isósceles en B, esta relación nos da el resultado, justificado al principio de esta solución, de $\angle BPM = 0$.

Problema 212.
Solución:
La figura (necesariamente grande) recoge todos los extremos del enunciado.



Detallaremos la construcción del cuadrado inscrito *EDGF* ya que se va a reiterar y explica por sí sola algunos de los apartados del problema.
Se construye un cuadrado *BCC'B'* de lado *a*, las intersecciones de las rectas que unen *H* con los vértices B', *C'* determinan los puntos *E* y *F* que se proyectan sobre el lado *BC* en *D* y *G*.
Claramente los cuadrados *BCB'C'* y *FGEF* son homólogos en la homotecia de centro *H*.
Por el uso reiterado que vamos a hacer, vamos a recordar una propiedad elemental de los trapecios que por comodidad la llamaremos propiedad T.
T.- Si en un trapecio de bases *a* y *b* trazamos la paralela a las bases por el punto de intersección de las diagonales, la medida del segmento que intercepta con los lados no paralelos es la media armónica de *a* y *b* y su punto medio es el de intersección de las diagonales. (La demostración es sencilla).
Llamando l_1 al lado del cuadrado inscrito *EDGF*, aplicando la propiedad T al trapecio *AHCC*',

$$l_1 = \frac{1}{2}\frac{2ah}{a+h} = \frac{ah}{a+h}$$

Si repetimos la construcción inscribiendo un cuadrado en el triángulo *ADG* con la misma altura *AH*, obtenemos el cuadrado *ILKJ* cuyo lado l_2 vale por la propiedad T en el trapecio *AHGF*:

$$l_2 = \frac{1}{2}\frac{2l_1 h}{l_1+h} = \frac{\dfrac{ah^2}{a+h}}{\dfrac{ah}{a+h}+h} = \frac{ah}{2a+h}.$$

Con esto queda resuelto el apartado i).
ii) Simetrizando las rectas *EI* y *FL* respecto de la recta *BC*; basta probar que la recta *IJ* es la bisectriz del ángulo *EIA* y que la recta *KL* es la bisectriz de *ALF*.
Detallamos el cálculo para uno de los casos, el otro es análogo:
Llamando $k = \dfrac{b\cos C}{a}$, claramente $HG = kl_1,\ HL = kl_2,\ HC = ka$.
Llamando $k' = \dfrac{c\cos B}{a}$, claramente $HD = k'l_1,\ HI = k'l_2,\ HB = k'a$.
Entonces, *KL* es la bisectriz de *ALF* es equivalente a probar que $\dfrac{FG}{GL} = \dfrac{h}{HL}$ y, por lo anterior,

$$\frac{FG}{GL} = \frac{h}{HL} \Leftrightarrow \frac{l_1}{(l_1-l_2)k} = \frac{h}{l_2 k} \Leftrightarrow \frac{l_1+h}{l_1} = \frac{h}{l_2} \Leftrightarrow 1+\frac{h}{l_1} = \frac{h}{l_2}$$

Sustituyendo los valores de l_1, l_2 y operando, los dos miembros de la última igualdad valen $2+\dfrac{h}{a}$.
iii) Si *P** es el punto medio de *AH* y hacemos la construcción del punto i) para inscribir un cuadrado en el triángulo *P*BC* con la misma base y altura mitad, obtenemos el cuadrado *ILKJ* ya que

$$JK = l_2 = \frac{ah}{2a+h} = \frac{a\dfrac{h}{2}}{a+\dfrac{h}{2}}$$

Esto demuestra el apartado iii).
iv) Vamos a calcular *HX* como intersección de la recta *CN* con *AH*.
Por la semejanza de los triángulos *AHG* y *XYN*, y teniendo en cuenta que $\dfrac{h-l_1}{h} = \dfrac{l_1}{a}$, se tiene

$$\frac{YN}{h-l_1} = \frac{kl_1}{h} \Leftrightarrow YN = \frac{kl_1(h-l_1)}{h} = \frac{kl_1^2}{a}.$$

Por la semejanza de los triángulos *XHG* y *XYN*, resulta

$$\frac{XH}{ka} = \frac{XH-l_1}{YN} = \frac{l_1}{ka-YN} \Rightarrow XH = \frac{l_1\cancel{k}a}{\cancel{k}a-\dfrac{\cancel{k}l_1^2}{a}} = \frac{a^2 l_1}{a^2-l_1^2}$$

Expresión que no depende del factor *k*.
Si calculásemos *HX* como intersección de la recta *BM* con *AH*, repetiríamos el cálculo cambiando el triángulo *XYN* por *XYM*, …,el factor *k* por *k'* y sale el mismo valor, lo que demuestra el punto iv).
v) De nuevo por la propiedad T aplicada a los trapecios *KLGF* y *EDIJ* ambos de bases l_1, l_2 resulta que los puntos *R* y *S* están a la misma distancia de la recta *BC* y por tanto *JK*, *SR* y *DG* son paralelos y la semejanza es trivial.

Problema 213. Solución de Roberto Bosch Cabrera, Texas, USA.

Tenemos que $b_2 = \frac{1}{\frac{1}{2}}, b_3 = \frac{1}{\frac{3}{8}}, b_4 = \frac{1}{\frac{21}{64}}$ de donde en general se va a cumplir que

$$b_n = \frac{1}{\prod_{k=1}^{n-1}\left(1 - \frac{1}{2^k}\right)} \qquad n \geq 2$$

lo cual puede ser probado por inducción usando la relación de recurrencia. Entonces $\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{L}$ donde $L = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{2^k}\right)$. Este producto infinito converge si y solo si la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{2^k}\right)$ converge, la cual es una serie de términos negativos que convergerá si y solo si la serie de términos positivos $\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2^k}}\right)$ converge. Lo cual es verdad dada la cadena de desigualdades siguiente:

$$\ln\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2^k}}\right) \leq \frac{1}{1-\frac{1}{2^k}} - 1 = \frac{1}{2^k - 1} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$$

notar que estaríamos comparando con una serie geométrica de razón $\frac{1}{2}$. Sobre L se puede encontrar información en `http://mathworld.wolfram.com/TreeSearching.html`, ver fórmulas $(19)-(25)$, tenemos que $L = 0.2887880950$ de donde el límite de b_n es igual a $3.4627466204934798299078083533388$; para esta constante en particular ver $A065446$ en On-line Encyclopedia of Integer Sequences.

REVISTA OIM N 43
Problema 214
Propuesto por Pedro Pantoja, Brasil
Resolver en el conjunto $\mathbb{Z}$ la ecuación

$$3^{x+y-2} = 2\left(x^3+y^3\right)+3\left(x^2+y^2\right)+x+y-11.$$

Resolución 214. Sean $a,b\in\mathbb{Z}$ tales que $x+y=a,\ xy=b$, la ecuación dada se transforma en $11+3^{a-2}=a(a+1)(2a+1)-6b(a+1)$. Puesto que $a(a+1)(2a+1)\equiv 0 \mod(3)$, entonces $3^{a-2}\equiv 1 \mod(3)$, es decir $a=2$, de aquí $b=1$. Finalmente $x=y=1$ es la única solución.

Oscar Reynaga Alarcón
Lima. Perú
pcmaorey@hotmail.com

Problema 215 (modificado)

Proposto por Francisco Javier García Capitán, Priego de Córdoba, España.

Sexan $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ tres números complexos cuxo módulo é a unidade, e $A,\ B,\ C$ os puntos do plano dos que son afixos. Sean $A'B'C'$ e $A''B''C''$ os triángulos órtico e tanxencial de ABC. Demostrar que $A'B'C'$ e $A''B''C''$ son homotéticos e que se cumpre a relación

$$\frac{B'C'}{B''C''}=-\frac{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)}{4\alpha\beta\gamma}.$$

Solución de Bruno Salgueiro Fanego, Viveiro, Lugo.

Supoñendo que a notación é tal que $A'\in BC$, e $B'\in CA$, e $C'\in AB$, sexan $\alpha',\ \beta',\ \gamma',\ \alpha'',\ \beta'',\ \gamma''$ os afixos de $A',\ B',\ C',\ A'',\ B'',\ C''$.

Ao ter $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ módulo a unidade, $A,\ B,\ C$ distan dita unidade da orixe, co cal $A,\ B,\ C$ están situados sobre a circunferencia de centro a orixe e raio a unidade, que coincidirá, por conter aos seus vértices, coa circunferencia circunscrita ao triángulo ABC.

O feito de que $A'B'C'$ e $A''B''C''$ son homotéticos xa aparece demostrado na propiedade 6 de http://www.oei.es/oim/revistaoim/numero37/ortico.pdf, extraída do libro *College Geometry, An Introduction to the Modern Geometry of the Triangle and the Circle*, de Nathan Altshiller-Court, co cal chegará con demostrar a relación proposta no enunciado.

Como B' é o pé da perpendicular trazada desde B á corda CA da circunferencia de centro a orixe e raio unidade, e como $1=|\beta|^2=\beta\overline{\beta}$, resulta

$\beta'=\frac{1}{2}(\gamma+\alpha+\beta-\gamma\alpha\overline{\beta})=\frac{1}{2}\left(\alpha+\beta+\gamma-\frac{\gamma\alpha}{\beta}\right);$ e analogamente,

$\gamma'=\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma-\alpha\beta\overline{\gamma})=\frac{1}{2}\left(\alpha+\beta+\gamma-\frac{\alpha\beta}{\gamma}\right),$ co cal

$B'C'=\gamma'-\beta'=\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma\alpha}{\beta}-\frac{\alpha\beta}{\gamma}\right)=\frac{\alpha(\gamma+\beta)(\gamma-\beta)}{2\beta\gamma}.$

Como B'' é a intersección das tanxentes á circunferencia de centro a orixe e raio unidade trazadas desde C e A, $\beta''=\frac{2\gamma\alpha}{\gamma+\alpha}$; e analogamente, $\gamma''=\frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}$, co cal

$B''C''=\gamma''-\beta''=\frac{2\alpha[\beta(\gamma+\alpha)-\gamma(\alpha+\beta)]}{(\alpha+\beta)(\gamma+\alpha)}=\frac{2\alpha^2(\beta-\gamma)}{(\alpha+\beta)(\gamma+\alpha)}$, sendo entón

$$\frac{B'C'}{B''C''}=\frac{\frac{\alpha(\gamma+\beta)(\gamma-\beta)}{2\beta\gamma}}{\frac{2\alpha^2(\beta-\gamma)}{(\alpha+\beta)(\gamma+\alpha)}}=\frac{\alpha(\gamma+\beta)(\alpha+\beta)(\gamma+\alpha)(\gamma-\beta)}{4\alpha^2\beta\gamma(\beta-\gamma)}=-\frac{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)}{4\alpha\beta\gamma}.$$

COMENTARIO DE PÁGINAS WEB, NOTICIA DE CONGRESOS Y RESEÑA DE LIBROS 44

Una nueva revista de geometría

Recientemente se ha subido a la red el primer número de una nueva revista de geometría, *Journal of Classic Geometry,* en la URL http://jcgeometry.org

Sus editores son los Prof. Arseniy Akopyan y Alexey A. Zaslavsky, ambos de Moscú. El primero de ellos es el autor del libro *Geometry in Figures,* publicado en 2011 y disponible en Amazon. El segundo es miembro del grupo de discusión de Internet *Hyacinthus*, dedicado a la geometría del triángulo (en particular a las coordenadas baricéntricas).

Los artículos del primer número, todos en inglés, son 12 e incluyen una sección de problemas. Por la identidad de varios de los autores es fácil suponer que se trata de extensiones, en algunos casos, de problemas discutidos en el foro *The Art of Problem Solving* y que ahora se desarrollan de una manera más pausada que en la red, donde parece haber un prurito de inmediatez que hace que resultados poco fundamentados se consideren casi evidentes o se afirme de ellos que son fáciles de demostrar, lo cual está por ver en muchos casos.

La revista parece muy interesante y es posible comprar los ejemplares en papel. Aunque, en los tiempos que corren, esta última posibilidad no creo que sea demasiado popular.

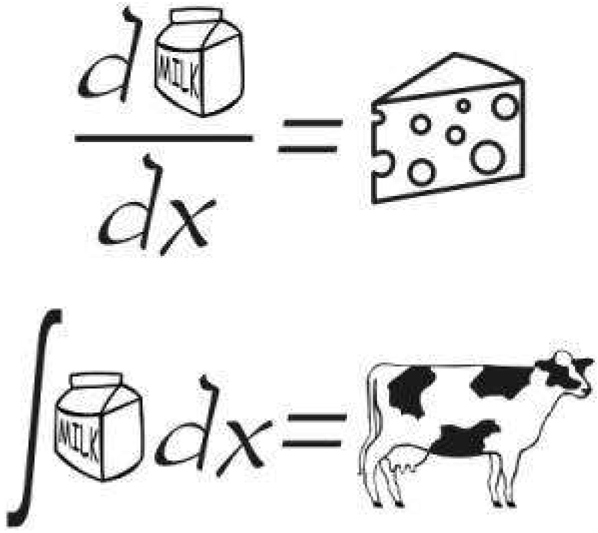
Los editores esperan las colaboraciones para los siguientes números.

Valladolid, 19 de marzo de 2012.

Francisco Bellot

DIVERTIMENTOS MATEMÁTICOS 44

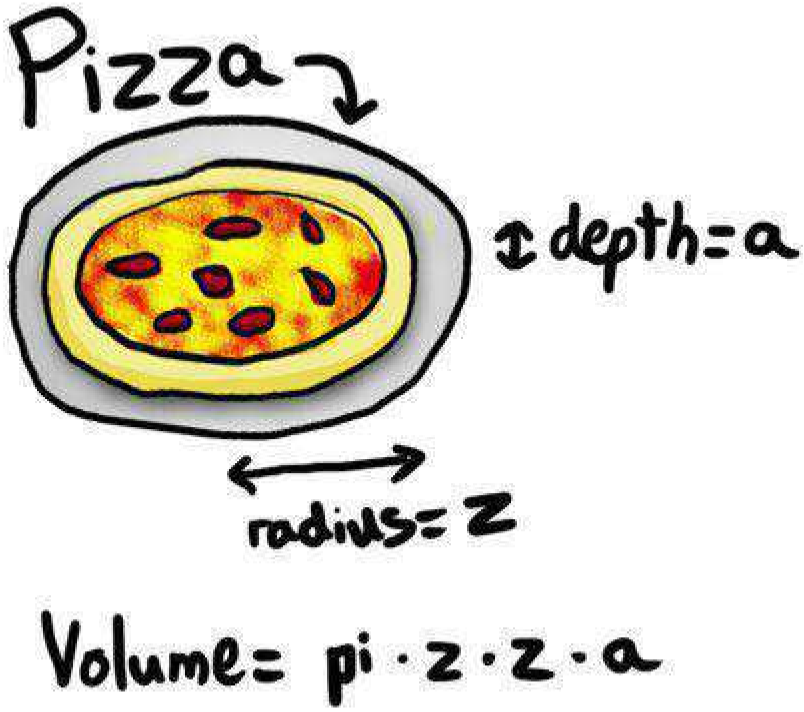
CAPTURADO EN INTERNET



Matemática aplicada

Buena vecindad


AINDA NÃO ME ACOSTUMEI COM ESSA TECNOLOGIA WIRELESS...


Pizza
depth=a
radius=z
Volume= pi · z · z · a

MATH IS

$$\int e^{xy}$$

La aplastante lógica de las autoridades de tráfico…

Número

45

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática
ISSN 1698-677X

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

Número 45 (abril -junio 2012)

ISSN – 1698-277X

ÍNDICE

Problema 219

Recibidas soluciones (muy similares) de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, España; y Cristóbal Sánchez-Rubio García, Benicassim, España. Presentamos la solución de Sánchez Rubio.

Problema 220

Recibidas soluciones de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, España; y Albert Stadler, Herrliberg, Suiza (utilizando el teorema de los residuos). Presentamos la solución de Lasaosa.

Reseña de Congresos, Libros y páginas web 45

Reseña del libro de I.M. Yaglom, *Números complejos y sus aplicaciones a la Geometría.Ed. URSS, Moscú, 2009.*

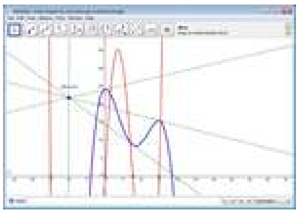
Divertimentos matemáticos 45

A decadencia dun mito estético: o rectángulo de moda fala galego.

Trabajo realizado por un grupo de 4 alumnos del I.E.S. de Mugardos, coordinados por la Prof. Covadonga Rodríguez-Moldes Rey.

Convocatorias OEI

Curso de formación docente de TIC y matemática



Especialización en TIC y Educación del CAEU de la OEI
Este curso de formación tiene como objetivo dar a conocer distintas aplicaciones que faciliten la incorporación de las TIC al aula de matemáticas en los diferentes niveles educativos.
Es evidente que resulta imposible recoger todos los recursos existentes, por lo que en cada uno de los bloques desarrollados en el siguiente material se ha apostado por unos determinados programas por sus características y posibilidades, apoyados en todo momento con otros recursos disponibles en Internet.
Matrícula y becas parciales abiertas

Más información [+]

PRIMOS GÊMEOS E OUTRAS CONJECTURAS

PEDRO PANTOJA

RESUMO. Nessa nota trataremos alguns aspectos de uma classe especial de primos, os primos gêmeos. Existe um problema em aberto bastante conhecido: A conjectura dos primos gêmeos. Iremos provar várias equivalências de primos gêmeos. Algumas generalizações desse problema, como a conjectura de Polignac, a conjectura de Hardy–Litllewood e a conjectura de Dickson serão discutidas. Falaremos também sobre a distribuição dos números primos.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

1

Desde o tempo de Euclides sabe-se da existência da infinitude dos números primos. Muito mais tarde Dirichlet, estudou primos em progressões aritméticas. Recentemente em 2004, T. Tao e B. Green provaram um resultado de progressões aritméticas arbitrariamente longas de primos, veja §[1]. O problema aqui é um pouco diferente. Vejamos o seguinte caso trivial: É fácil de argumentar que os únicos primos cuja diferença é 1 são $(2,3)$. A famosa conjectura dos números primos gêmeos pergunta se existem um número infinitos de pares de primos da forma $(p, p+2)$, em outras palavras, se existem infinitos números primos cuja diferença é 2. Esta conjectura está em aberto, poucos avanços foram dados em busca de sua solução e é um dos temas centrais da moderna teoria analítica dos números. Os primeiros pares de primos gêmeos menores do que 250 são $(3,5)$, $(5,7)$, $(11,13)$, $(17,19)$, $(29,31)$, $(41,43)$,$(59,61)$, $(71,73)$, $(101,103)$, $(107,109)$, $(137,139)$, $(149,151)$,$(179,181)$, $(191,193)$, $(197,199)$, $(227,229)$, $(239,241)$.

Curiosamente, com exceção de $(3,5)$, todos esses pares de primos podem ser escritos como $(6k-1, 6k+1)$ para algum $k \in \mathbb{Z}$, por exemplo, $5 = 6 \cdot 1 - 1$ e $7 = 6 \cdot 1 + 1$. Isso é fácil de ver, já que todo número inteiro pode ser escrito como $6k, 6k-1, 6k-2, 6k+1, 6k+2, 6k+3$ desses os únicos que podem ser primos são $(6k-1, 6k+1)$ com $6k+1-(6k-1) = 2$, os outros são múltiplos de 2 e de 3. Agora pelo teorema de Dirichlet existem infinitos primos da forma $6k-1$ e $6k+1, k \in \mathbb{Z}$ e cada par pode ser escrito como $(6k-1, 6k+1)$ exceto para $(3,5)$, Poderemos concluir assim, tão facilmente que existem infinitos primos gêmeos?

Infelizmente (ou felizmente) muito dos números da forma $(6k-1)$ e $(6k+1)$ não são primos. Veremos mais tarde que o conjunto dos números primos gêmeos é limitado no seguinte sentido, a soma da série dos inversos dos números primos gêmeos converge, ao contrário da soma da série dos inversos

[1]Data: Versão de 22 de Abril de 2012.
Gostaria de agradecer ao professor Pedro Duarte e a fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa–Portugal.
Dedicamos este trabalho em memória do Professor Elmano († 30/03/2012).
Palavras chaves. Primos Gêmeos, Conjectura de Hardy-Litllewood, Teorema de Brun.

dos números primos que diverge. Existem uma grande quantidade de primos gêmeos descobertos, mas isso não resolve nosso problema. A maioria dos primos gêmeos muito grandes descobertos são da forma $k \cdot 2^n \pm 1$ pois existem eficientes testes de primalidade para números quando k não é muito grande, por exemplo, o teorema de Proth[2] (vide §[8] e §[33] para os detalhes). Dubner em 1993 mostrou que $459 \cdot 2^{8529} \pm 1$ são primos gêmeos, Forbes em 1995 mostrou que $6797727 \cdot 2^{15328} \pm 1$ são primos gêmeos e da mesma forma Lifchitz em 1999 mostrou que $361700055 \cdot 2^{39020} \pm 1$ são primos gêmeos. Também os números $65516468355 \cdot 2^{333333} \pm 1$ são primos gêmeos.

Existem outras classes de primos, os chamados triplos de primos (p_1, p_2, p_3) onde $p_1 < p_2 < p_3$ são números primos consecutivos com a menor diferença $p_3 - p_1$ possível. Há dois tipos neste caso $(p, p+2, p+6)$ e $(p, p+4, p+6)$. Para os primos quádruplos só existe um tipo, a saber, os números primos da forma $(p, p+2, p+6, p+8)$. Os números primos quádruplos menores do que 800 são $(5, 7, 11, 13)$, $(11, 13, 17, 19)$, $(101, 103, 107, 109)$, $(191, 193, 197, 199)$. Podemos generalizar esse conceito, e dizemos que para $k \geq 2$, $(p_1, \ldots, p_k)$ é uma k–tupla de primos se $p_1 < \ldots < p_k$ são números primos consecutivos com a diferença $p_k - p_1$ menor possível.

O texto é organizado da seguinte forma. Na seção 2 apresentamos alguns resultados elementares. Na seção 3 resultados assegurando condições necessárias e suficientes para pares de primos gêmeos. Na seção 4 apresentamos o teorema de Brun e a conjectura de hardy–Litllewood. Também estudaremos o comportamento da distribuição dos números primos. Finalmente, estudaremos várias conjecturas importantes relacionadas com os primos gêmeos. A notação usada nesse trabalho é basicamente a standard.

2. Resultados Elementares

Nosso primeiro resultado é uma simples consequência do pequeno teorema de Fermat.

Proposição 2.1. *Se os números* $(p, p+2)$ *são primos gêmeos, então*

$$2^{p+2} \equiv 3p + 8 \pmod{p^2 + 2p}. \tag{2.1}$$

Demonstração. A prova é fácil. Se p é primo, então pelo pequeno teorema de Fermat (claro que $p \neq 2$) tem-se $2^{p-1} \equiv 1 \pmod p \Rightarrow 2^{p+2} \equiv 8 \equiv 3p + 8 \pmod p$.
Analogamente, se $p+2$ é primo,
$2^{p+1} \equiv 1 \pmod{p+2} \Rightarrow 2^{p+2} \equiv 2 \equiv 2 + 3(p+2) = 3p + 8 \pmod p$.
É claro que p e $p+2$ são coprimos, O resultado segue. □

Vale salientar que a recíproca não é válida, um contra-exemplo é o par $(561, 563)$ (será mera coincidência 561 ser um número de Carmichael?).

Proposição 2.2. *Se os números* $(p, p+2)$, $p \neq 3$, $p \neq 5$ *são primos gêmeos, então:*

i) $3^{p+1} \equiv 4p + 9 \pmod{p^2 + 2p}$
ii) $5^{p+2} \equiv 60p + 125 \pmod{p^2 + 2p}$.

Demonstração. É deixada ao cuidado do leitor. □

Consideremos agora os números de Catalan, definidos por

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} \tag{2.2}$$

Existem várias propriedades interessantes dos números de Catalan, vide §[2].
O seguinte Lema é imediato.

Lema 2.3. *Se* p *é um primo ímpar, então* $(-1)^{\frac{p-1}{2}} C_{\frac{p-1}{2}} \equiv 2 \pmod p$.

[2] Seja $N = k \cdot 2^n + 1$ com $k < 2^n$, se existe um inteiro a tal que $a^{\frac{N-1}{2}} \equiv -1 \pmod N$, então N é primo.

Demonstração. Tem-se que $p - i \equiv -i (\mathrm{mod}\ p)$ para qualquer inteiro i, daí

$$(p-1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot \left(\frac{p-1}{2}\right)\left(p - \left(\frac{p-1}{2}\right)\right)\left(p - \left(\frac{p-1}{2} - 1\right)\right) \cdot \ldots \cdot (p-1)$$

$$\equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} \left[\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right]^2 \Rightarrow C_{\frac{p-1}{2}} \equiv (p+1) C_{\frac{p-1}{2}} = 2\binom{p-1}{(p-1)/2} = 2\frac{(p-1)!}{\left[\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right]^2}$$

$\equiv 2(-1)^{\frac{p-1}{2}} \pmod p$, o resultado segue. □

Proposição 2.4. *Se os números* $(p, p+2)$, *são primos gêmeos, então*

$$8(-1)^{\frac{p-1}{2}} C_{\frac{p-1}{2}} \equiv 7p + 16 \pmod{p^2 + 2p}. \tag{2.3}$$

Demonstração. Pelo lema anterior,

$$8(-1)^{\frac{p-1}{2}} C_{\frac{p-1}{2}} \equiv 2 \cdot 8 \equiv 7p + 16 \pmod p$$

Analogamente, como

$$C_{(p-1)/2} = \left(\frac{p+3}{4p}\right) C_{(p+1)/2}$$

tem-se

$$8(-1)^{\frac{p-1}{2}} C_{(p-1)/2} = 8(-1)^{\frac{p-1}{2}} \left(\frac{p+3}{4p}\right) C_{(p+1)/2} \equiv -4\left(\frac{p+3}{p}\right) \equiv 2 \equiv$$

$2 + 7(p+2) = 7p + 16 \pmod{p+2}$, desde que $-4(p+3) \equiv 2p \pmod{p+2}$. □

O seguinte teorema será útil na próxima seção. É bem conhecido da teoria elementar dos números.

Teorema 2.5. *(Wilson) Um número natural* p *é primo se, e somente se,*

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod p. \tag{2.4}$$

Indicamos ao leitor interessado §[19] para material adcional e Discussão sobre generalizações do teorema de Wilson.

3. Equivalências

Muitas das equivalências provadas nessa seção não são muito úteis na prática, para determinar se primos são gêmeos. O principal e difícil problema é saber se existem infinitos primos gêmeos. Isto será discutido com mais detalhes nas próximas seções. O resultado abaixo foi demonstrado por P. A. Clement em 1949.

Equivalência 3.1. *(Clement) Os números* $(p, p+2)$ *são primos gêmeos se, e somente se,*

$$4[(p-1)! + 1] + p \equiv 0 \pmod{p^2 + 2p}. \tag{3.5}$$

Demonstração. Suponhamos primeiramente que $(p, p+2)$ são primos, então por 2.4, $(p-1)! + 1 \equiv 0 \pmod p$ e $(p+1)! + 1 \equiv 0 \pmod{p+2} \Rightarrow 2(p-1)! + 1 = k(p+2)$ para algum $k \in \mathbb{Z}$, sai $-1 \equiv 2k \pmod p$, em outras palavras, $2k + 1 \equiv 0 \pmod p$ daí $4(p-1)! + 2 = 2k(p+2) \Rightarrow 4[(p-1)! + 1] + p = (2k+1)(p+2) \equiv 0 \pmod{p^2 + 2p}$.
Reciprocamente, se $4[(p-1)! + 1] + p \equiv 0 \pmod{p^2 + 2p} \Rightarrow 4[(p-1)! + 1] + p \equiv 0 \pmod p$. 4 não pode dividir p, assim $[(p-1)! + 1] \equiv 0 \pmod p$, pelo teorema de Wilson p é primo. Analogamente, se $4[(p-1)! + 1] + p \equiv 0 \pmod{p+2}$ tem-se $4(p-1)! + p + 4 \equiv 2(-1)(-2)(p-1)! + 2 \equiv 2(p+1)! + 2 = 2[(p+1)! + 1] \equiv 0 \pmod{p+2}$ pode-se argumentar que $p+2$ e 2 são coprimos, então $(p+1)! + 1 \equiv 0 \pmod{p+2}$ pelo teorema de Wilson $p+2$ é primo. □

Equivalência 3.2. *Os números* $(p, p+2)$ *são primos gêmeos se, e somente se,*

$$2\left[\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right]^2 + (-1)^{\frac{p-1}{2}}(5p+2) \equiv 0 \pmod{p^2 + 2p}. \tag{3.6}$$

Demonstração. Pelo lema 2.3 e o teorema 2.5, $(-1)^{\frac{p-1}{2}}\left[\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right]^2 \equiv -1 \pmod p$ se, e somente se p é primo, então $\left[\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right]^2 + (-1)^{\frac{p-1}{2}} \equiv 0 \pmod p$ donde

$$2\left[\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right]^2 + 2(-1)^{\frac{p-1}{2}} \equiv 0 \pmod p \Leftrightarrow$$

$$2\left[\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right]^2 + (-1)^{\frac{p-1}{2}}(5p+2) \equiv 0 \pmod p$$

se, e somente se p é primo. Para $p+2$ tem-se

$$\left[\left(\frac{p+1}{2}\right)!\right]^2 + (-1)^{\frac{p+1}{2}} \equiv 0 \pmod{p+2}$$

se, e somente se $p+2$ é primo, então

$$8\left[\left(\frac{p+1}{2}\right)!\right]^2 + 8(-1)^{\frac{p+1}{2}} \equiv 0 \pmod{p+2} \Leftrightarrow$$

$$8\left(\frac{p+1}{2}\right)^2\left[\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right]^2 + (-8)(-1)^{\frac{p-1}{2}} \equiv 0 \pmod{p+2} \Leftrightarrow$$

$$2(p^2+2p+1)\left[\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right]^2 + (5(p+2)-8)(-1)^{\frac{p-1}{2}} \equiv 0 \pmod{p+2} \Leftrightarrow$$

$$2\left[\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right]^2 + (-1)^{\frac{p-1}{2}}(5p+2) \equiv 0 \pmod{p+2}$$

se, e somente se $p+2$ é primo. Assim

$$2\left[\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right]^2 + (-1)^{\frac{p-1}{2}}(5p+2) \equiv 0 \pmod{p^2+2p}.$$

se, e somente se $(p, p+2)$ são primos gêmeos. □

Os seguintes resultados dão uma caracterização de primos gêmeos usando a função de Euler e a função soma de divisores.

Equivalência 3.3. *Os números* $(p, p+2)$ *são primos gêmeos se, e somente se,*

$$\phi(p) + \phi(p+2) = 2p. \tag{3.7}$$

Demonstração. Se $(p, p+2)$ são primos, $\phi(p) = p-1$ e $\phi(p+2) = p+1$ donde $\phi(p)+\phi(p+2) = 2p$. Reciprocamente, como $\phi(n) \leq n-1$ para qualquer inteiro n, suponhamos que $\phi(p)+\phi(p+2) = 2p$. Se p não fosse um número primo, digamos $p = cd, 1 < c, d < p \Rightarrow \phi(p) \leq (p-1)-2 \Rightarrow \phi(p)+\phi(p+2) = 2p \leq \phi(p+2)+p-3 \Rightarrow \phi(p+2) \geq p+3$, uma contradição. Portanto p é primo. O caso onde $p+2$ não é um número primo é análogo. A prova está completa. □

Equivalência 3.4. *Os números* $(p, p+2)$ *são primos gêmeos se, e somente se,*

$$\sigma_a(p) + \sigma_a(p+2) = 2 + p^a + (p+2)^a \tag{3.8}$$

para a *inteiro,* $a \geq 1$.

Demonstração. Se $p, p+2$ são primos $\sigma_a(p) = p^a+1$ e $\sigma_a(p+2) = (p+2)^a+1$ assim, $\sigma_a(p)+\sigma_a(p+2) = 2+p^a+(p+2)^a$.
Reciprocamente, é óbvio que $\sigma_a(n) \geq n^a+1$ para qualquer inteiro n, assim se p não fosse primo, então $p = bc, 1 < b, c < p$. Por hipótese, $\sigma_a(p)+\sigma_a(p+2) = 2+p^a+(p+2)^a$ i.e. $\sigma_a(p) \geq 1+b^a+c^a+p^a > 1+1+1+p^a = 3+p^a$ daí $\sigma_a(p)+\sigma_a(p+2) = 2+p^a+(p+2)^a > \sigma_a(p+2)+p^a+3 \Rightarrow \sigma_a(p+2) < (p+2)^a-1$ o que não pode acontecer, pois $\sigma_a(p+2) \geq (p+2)^a+1$, portanto p é um número primo. Da mesma forma se $p+2$ não for primo, chegaremos a uma contradição. A prova está completa. □

Equivalência 3.5. *Seja* $n = pq$, *então* (p, q) *são primos gêmeos se, e somente se,*

$$\phi(n)\sigma(n) = (n-3)(n+1). \tag{3.9}$$

Demonstração. Se (p,q), $p<q$ são primos gêmeos, então $\phi(n)=\phi(p)\phi(q)=(p-1)(q-1)$ e $\sigma(n)=1+p+q+pq=(1+p)(1+q) \Rightarrow \ \phi(n)\sigma(n)=(p^2-1)(q^2-1)=(pq)^2-p^2-q^2+1=(pq)^2-p^2+2pq-q^2+1-2pq=(pq)^2-(p-q)^2+1-2pq=n^2-2n-3=(n-3)(n+1)$ porque $q-p=2$.
A outra parte da demonstração é deixada ao cuidado do leitor. Vide §[8]. □

Com a equivalência 3.4 podemos mostrar um resultado interessante.

Equivalência 3.6. *Os números* $(p,p+2)$ *são primos gêmeos se, e somente se,*

$$\sum_{i=1}^{p} i^a\left(\left\lfloor\frac{p+2}{i}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{p}{i}\right\rfloor\right)=2+p^a+\sum_{i=1}^{p} i^a\left(\left\lfloor\frac{p+1}{i}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{p-1}{i}\right\rfloor\right) \tag{3.10}$$

Para $a\geq 0$*, onde* $\lfloor x\rfloor$ *denota a parte inteira de* x*.*

Demonstração. Como para qualquer inteiro $p\geq 2$

$$\left\lfloor\frac{p}{i}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{p-1}{i}\right\rfloor=\begin{cases}1, & \text{se i divide p}\\ 0, & \text{caso contrário}\end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{p} i^a\left(\left\lfloor\frac{p}{i}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{p-1}{i}\right\rfloor\right)=\sum_{i|p} i^a=\sigma_a(p).$$

Donde, pela Equivalência 3.4

$$2+p^a+(p+2)^a=\sigma_a(p)+\sigma_a(p+2)=$$

$$\sum_{i=1}^{p} i^a\left(\left\lfloor\frac{p}{i}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{p-1}{i}\right\rfloor\right)+\sum_{i=1}^{p+2} i^a\left(\left\lfloor\frac{p+2}{i}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{p+1}{i}\right\rfloor\right)=$$

$$\sum_{i=1}^{p} i^a\left(\left\lfloor\frac{p}{i}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{p-1}{i}\right\rfloor\right)+\sum_{i=1}^{p} i^a\left(\left\lfloor\frac{p+2}{i}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{p+1}{i}\right\rfloor\right)$$

$$+(p+1)^a\left\lfloor\frac{p+2}{p+1}\right\rfloor-(p+1)^a\left\lfloor\frac{p+1}{p+1}\right\rfloor+(p+2)^a\left\lfloor\frac{p+2}{p+2}\right\rfloor-(p+2)^a\left\lfloor\frac{p+1}{p+2}\right\rfloor=$$

$$\sum_{i=1}^{p} i^a\left(\left\lfloor\frac{p+2}{i}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{p}{i}\right\rfloor\right)-\sum_{i=1}^{p} i^a\left(\left\lfloor\frac{p+1}{i}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{p-1}{i}\right\rfloor\right)$$

$$+(p+1)^a\left\lfloor 1+\frac{1}{p+1}\right\rfloor-(p+1)^a+(p+2)^a-(p+2)^a\left\lfloor\frac{p+1}{p+2}\right\rfloor$$

$$=\sum_{i=1}^{p} i^a\left(\left\lfloor\frac{p+2}{i}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{p}{i}\right\rfloor\right)-\sum_{i=1}^{p} i^a\left(\left\lfloor\frac{p+1}{i}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{p-1}{i}\right\rfloor\right)+(p+2)^a$$

O resultado segue imediatamente. □

4. Teorema de Brun e a Conjectura de Hardy-Litllewood

Um resultado profundo de primos gêmeos é devido ao matemático norueguês Viggo Brun em 1920. Ele afirma que a soma dos inversos de todos os pares de primos gêmeos converge.

A seguinte série é convergente

$$\sum_{p,p+2\in\mathbb{P}}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p+2}\right) \tag{4.11}$$

onde $\mathbb{P}$ denota o conjunto dos números primos.

Entretanto, sabe-se que a soma dos inversos de todos os primos diverge.

Teorema 4.1. *(Euler) A seguinte série é divergente*

$$\sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p}. \tag{4.12}$$

Demonstração. Iremos comparar a série dada com a série harmônica que sabemos ser divergente. Para isso, fixemos $t \in \mathbb{N}$ arbitrariamente. Pelo teorema fundamental da aritmética, sabemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $2 \leq n \leq t$, a fração $\frac{1}{n}$ é o produto de (um número finito) de frações do tipo $\frac{1}{p^k}$ onde p é primo, $p \leq n \leq t$ e $k \in \mathbb{N}$. Sendo assim, $\frac{1}{n}$ é uma parcela do produto

$$\prod_{\substack{p\in\mathbb{P}\\ p\leq t}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p^k}\right) = \prod_{\substack{p\in\mathbb{P}\\ p\leq t}} \left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \ldots\right) = \prod_{\substack{p\in\mathbb{P}\\ p\leq t}} \frac{1}{1-(1/p)}$$

e portanto

$$\sum_{n=1}^{t} \frac{1}{n} \leq \prod_{\substack{p\in\mathbb{P}\\ p\leq t}} \frac{1}{1-(1/p)}$$

tomando os logarítmos, obtemos

$$\log\left(\sum_{n=1}^{t} \frac{1}{n}\right) \leq \sum_{\substack{p\in\mathbb{P}\\ p\leq t}} \log\left(\frac{1}{1-(1/p)}\right).$$

Agora, fixemos $p \in \mathbb{P}$ arbitrário. Como $1/p < 1$, a expansão em série de potências da função logarítmica, permite-nos deduzir que

$$\begin{aligned}
\log\left(\frac{1}{1-(1/p)}\right) &= -\log(1-(1/p)) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(1/p)^n \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{np^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p^n} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2}\left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \ldots\right) \\
&= \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2[1-(1/p)]} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p(p-1)}.
\end{aligned}$$

por conseguinte,

$$\log\left(\sum_{n=1}^{t} \frac{1}{n}\right) \leq \sum_{\substack{p\in\mathbb{P}\\ p\leq t}} \frac{1}{p} + \sum_{\substack{p\in\mathbb{P}\\ p\leq t}} \frac{1}{p(p-1)} \leq \sum_{\substack{p\in\mathbb{P}\\ p\leq t}} \frac{1}{p} + \sum_{n=2}^{t} \frac{1}{n(n-1)}.$$

finalmente, tomando os limites (quando $t \to \infty$), obtemos

$$\log\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\right) \leq \sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 1 + \sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p}$$

porque

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1$$

e, portanto, a série

$$\sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p}$$

é divergente, já que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ é divergente. Como queríamos. □

Observação 4.2. *Este fato implica que existem infinitos números primos.*

Observação 4.3. *Pode-se provar que se* $\mathtt{mdc}(a, n) = 1$*, então*

$$\sum_{p\equiv a \pmod p} \frac{1}{p} = \infty. \tag{4.13}$$

De 4.13 segue imediatamente o seguinte teorema, devido a Dirichlet em 1837:

Teorema 4.4. *(Dirichlet) Dado um inteiro* $n > 1$ *e um inteiro* a *tal que* $\mathtt{mdc}(a, n) = 1$*, existem infinitos primos* p *tais que* $p \equiv a \pmod p$.

Sejam $\pi(x) := \mathtt{card}\{p \le x : p \in \mathbb{P}\}$ e $F_n = 2^{2^n} + 1$ o n–ésimo número de Fermat.
É natural perguntar se a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi(n)} \tag{4.14}$$

é convergente ou divergente. Temos o seguinte exemplo.

Exemplo 4.5. *Mostre que* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi(F_1) + \dots + \pi(F_n)} < 2.$

Solução: Considere $P = p_1 \cdot \dots \cdot p_n + 1$, onde p_n é o n–ésimo número primo. Como qualquer número natural admite um fator primo, então $p_{n+1} \le p_1 \cdot \dots \cdot p_n + 1$. Vamos mostrar por indução que $p_n < 2^{2^n}$ para $n \ge 1$. Quando $n = 1$, $2 < 2^2$ que é um resultado verdadeiro. Suponhamos que $p_n < 2^{2^n}$ assim

$$p_{n+1} \le p_1 \cdot \dots \cdot p_n + 1 < 2^{2^1} 2^{2^2} \cdot \dots \cdot 2^{2^n} + 1 < 2^{2^1 + \dots + 2^n} + 1 = 2^{2^{n+1} - 1} + 1 < 2^{2^{n+1}}.$$

Segue que $p_n < F_n$ daí $\pi(F_n) > n \Rightarrow \pi(F_1) + \dots + \pi(F_n) > 1 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, logo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi(F_1) + \dots + \pi(F_n)} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)} = 2.$$ ◄

O (não trivial) teorema 4.4 tem um moderno refinamento. É conhecido que se $\pi(x, d, a)$ denota o números de primos com classe de resíduos $a \pmod d$ que não exedem x, então para fixos inteiros coprimos a, d com $d > 0$

$$\pi(x, d, a) \sim \frac{1}{\phi(d)}\pi(x) \sim \frac{1}{\phi(d)} \cdot \frac{x}{\ln(x)} \sim \frac{1}{\phi(d)}\mathrm{Li}(x), \tag{4.15}$$ [3]

onde

$$\mathrm{Li}(x) := \int_2^x \frac{dt}{\ln(t)}. \tag{4.16}$$

Teorema 4.6. *(Siegel-Walfisz) Para qualquer número* $\eta > 0$ *existe um número positivo* $C(\eta)$ *tal que para todos os inteiros positivos coprimos* a, d *com* $d < (\ln(x))^n$*,*

$$\pi(x, d, a) = \frac{1}{\phi(d)}\mathrm{Li}(x) + O\left(x\left(-c(\eta)\sqrt{\ln(x)}\right)\right), \tag{4.17}$$ [4]

onde a grande notação O é absoluta.

Discussões desses e outros teoremas encontram-se em §[18].
A seguir daremos uma das mais belas versões da desigualdade de Brun-Titchmarsh devido a Montgomery e Vaughan em 1979, vide §[15].

Teorema 4.7. *(Desigualdade de Brun-Titchmarsh) Se* d, a *são inteiros positivos com* $\mathtt{mdc}(a, d) = 1$*, então para todos* $x > d$*,*

$$\pi(x, d, a) < \frac{2x}{\phi(d) \cdot \ln(x/d)}. \tag{4.18}$$

---

[3] $f(x) \sim g(x)$ é equivalente a $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

[4] Sejam f e g funções onde g é positiva. Se existe uma constante positiva C tal que $|f(x)| \le Cg(x)$ escrevemos $f(x) = O(g(x))$.

Seja $\pi_2(x)$ o número de primos gêmeos $(p, p+2)$ tal que $p \leq x$. Por exemplo,

$$\pi_2(5,4 \cdot 10^{15}) = 5761178723343. \tag{4.19}$$

Brun provou que existe um inteiro x_0 tal que $x \geq x_0$

$$\pi_2(x) < \frac{100x}{(\log x)^2}. \tag{4.20}$$

Mostra-se que

$$\pi_2(x) \leq c \prod_{p>2} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \frac{x}{(\log x)^2} \cdot \left(1 + O\left(\frac{\log \log x}{x}\right)\right) \tag{4.21}$$

ou

$$\pi_2(x) \leq c \cdot \Pi_2 \frac{x}{(\log x)^2} \cdot \left(1 + O\left(\frac{\log \log x}{x}\right)\right). \tag{4.22}$$

Π_2 é conhecida como constante dos primos gémeos e c é outra constante. Hardy e Littlewood conjecturaram que $c = 2$ e que

$$\pi_2(x) \sim \Pi_2(x) \int_2^x \frac{dx}{(\log x)^2}. \tag{4.23}$$

A conjectura dos primos gêmeos é equivalente a $\liminf d_n = 2$, onde $d_n = p_{n+1} - p_n$ é a diferença de dois primos consecutivos, e pouco se sabe do comportamento dessa função. Conjectura-se que

$$L = \liminf \frac{d_n}{\log p_n} = 0. \tag{4.24}$$

Mas não há uma prova disso. Paul Erdös mostrou que $L < 1$, sucessivamente houve melhoras desse resultado. O seguinte resultado é simples.

Lema 4.8. $\limsup d_n = \infty$.

Demonstração. Considere a seguinte sequência de números compostos consecutivos $n!+2, n!+3, ..., n!+n$ então a diferença entre o maior primo menor do que $n!+2$ e o menor primo maior $n!+n$ é pelo menos n, então $d_n > n$, o resultado segue imediatamente. $\square$

Westzynthius em 1931, provou que

$$\limsup \frac{d_n}{\log p_n} = \infty. \tag{4.25}$$

D. A. Goldston, J. Pintz e C. Y. Yildirim provaram que

$$\liminf \frac{p_{n+1} - p_n}{\sqrt{\log p_n}(\log \log p_n)^2} < \infty, \tag{4.26}$$

(veja §[14] para os pormenores).
e em 1963, Rankin complatando o trabalho de Erdös mostrou que

$$\limsup \frac{d_n (\log \log \log p_n)^2}{\log p_n \cdot \log \log p_n \cdot \log \log \log \log p_n} \geq e^\gamma \tag{4.27}$$

Onde γ denota a constante Euler–Mascheroni, definida por

$$\gamma = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} - \log(n)\right). \tag{4.28}$$

Em 1919 Cramer, assumindo a hipótese de Riemann, provou que existe uma constante $M > 0$ tal que

$$d_n = P_{n+1} - p_n < M(\sqrt{p_n} \log(p_n)) \tag{4.29}$$

Por esse motivo a Hipótese de Riemann está intimamente relacionada com a função d_n. É claro que esse último resultado pode em princípio ser falso, caso a hipótese de Riemann também seja.
Finalmente, daremos uma prova do teorema de Brun. Iremos utilizar o seguinte

$$\pi_2(x) \ll \frac{x(\log\log x)^2}{(\log x)^2} \tag{4.30}$$

Para mais detalhes veja o artigo de M. Faester §[5].

Teorema 4.9. *(Brun)* $\sum_{p,p+2\in\mathbb{P}}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p+2}\right) < \infty.$

Demonstração. B_2 é chamada constante de Brun, cujo valor aproximado é 1.99. Considere a_n definido por:

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{se p,p+2 são primos gêmeos} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Obtemos

$$\sum_{p,p+2\in\mathbb{P}}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p+2}\right) \ll \lim_{x\to+\infty}\frac{(\log\log x)^2}{(\log x)^2} + \int_2^\infty \frac{(\log\log t)^2}{t(\log t)^2}dt$$

Fazendo a substituição $u = \log t$ na última integral temos

$$\sum_{p,p+2\in\mathbb{P}}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p+2}\right) \ll \lim_{x\to+\infty}\frac{(\log\log x)^2}{(\log x)^2} + \int_{\log 2}^\infty \left(\frac{\log u}{u}\right)^2 du$$

Um simples cálculo mostra que

$$\int\left(\frac{\log u}{u}\right)^2 du = -\frac{(\log u)^2 + 2\log u + 2}{u} + C \tag{4.31}$$

Portanto a série em questão converge. □

5. Conjecturas

Para finalizar, nessa seção abordaremos outras conjecturas importantes da teoria analítica dos números, que de alguma forma tem a ver com a conjectura dos primos gêmeos.
A conjectura geral de Polignac, é uma generalização da conjectura dos primos gêmeos. Definimos $\pi_{2k}(x)$ da seguinte maneira, Para todo $k \geq 1$ e $x > 1$, seja $\pi_{2k}(x)$ o número de inteiros n tal que

$$p_{n+1} \leq x \quad \text{e} \quad p_{n+1} - p_n = 2k. \tag{5.32}$$

Com o método de Brun, pode-se mostrar que existe uma constante $C_k > 0$ tal que

$$\pi_{2k}(x) < C_k\frac{x}{(\log x)^2}. \tag{5.33}$$

Em outras palavras, a conjectura de Polignac pode ser enunciada como

Conjectura 5.1. *Todo número par é a diferença de dois números primos consecutivos, em um número infinito de maneiras.*

Se essa conjectura for verdadeira, tomando a diferença igual a 2, obtemos a conjectura dos primos gêmeos (vide §[35] e §[36]).

Em 1904, Dickson §[38] conjecturou um fato importante, chamada hoje de conjectura de Dickson. Em 1958 Schinzel e Sierpinski generalizaram essa conjectura, mas não trataremos disso. A conjectura de Dickson (sobre polinômios lineares) afirma o seguinte:

Conjectura 5.2. *Seja* $s \geq 1$ *e* $f_i(X) = b_iX + a_i$, *onde* $i = 1, ..., s$, $a_i, b_i \in \mathbb{Z}$ *e* $b_i \geq 1$. *Além disso, não existe um inteiro* $n > 1$ *que divida todos os produtos* $\prod_{j=1}^{s} f_j(k)$ *para cada inteiro* k.
Então existe uma infinidade de números naturais m *tais que cada um dos inteiros* $f_1(m)$, ... , $f_s(m)$ *é um números primo.*

Essa última conjectura tem como caso particular a conjectura dos primos gêmeos e a conjectura dos primos de Sophie Germain. Dizemos que p é um número primo de Sophie Germain se p e $2p+1$ são primos. Os primos de Sophie Germain foram considerados pela primeira vez, para provar o primeiro caso do último teorema de Fermat (demonstrado completamente pelas idéias de vários matemáticos, mas principalmente por Andrew Wiles) se $p > 2$ é um número primo de Sophie Germain, então não existem inteiros x, y, z tais que $x^p + y^p + z^p = 0$ com $mdc(x, y, z) = 1$ e p não divide xyz. Lagrange provou em 1775 que se $p \equiv 3 \pmod 4$ então p é primo de Sophie Germain se, e somente se, $2p + 1 | M_p$ onde $M_p = 2^p - 1$ é o número de Mersenne. Também é notável dizer que a conjectura de Dickson engloba o teorema de Dirichlet como caso particular.

Conjectura 5.3. *Existem infinitos números primos de Sophie Germain.*

Entretanto, resolver a conjectura dos primos de Sophie Germain será tão difícil quanto resolver a conjectura dos primos gêmeos.
Prova-se que, Sendo $\pi(x, S)$ o número de primos de Sophie Germain menores ou iguais a x, existe C tal que para todo x

$$\pi(x, S) < C\frac{x}{(\log x)^2} \tag{5.34}$$

Por fim, daremos uma generalização da conjectura de Hardy–Litllewood, chamada de k–Tupla conjectura, ela afirma que o número assintótico de constelações de primos pode ser calculado explicitamente.

Conjectura 5.4. *Seja* $0 < m_1 < m_2 < ... < m_k$ *então, sendo* $\pi_{m_1,m_2,...,m_k}(x)$ *o número de primos* $p \leq x$ *tais que* $p + 2m_1, p + 2m_2, ..., p + 2m_k$ *são todos primos, satisfaz*

$$\pi_{m_1,m_2,...,m_k}(x) \sim C(m_1, m_2, ..., m_k)\int_2^x \frac{dt}{(\log t)^{k+1}} \tag{5.35}$$

onde $C(m_1, m_2, ..., m_k) = 2^k \prod_q \frac{1 - \frac{\omega(q;m_1,m_2,...,m_k)}{q}}{(1 - \frac{1}{q})^{k+1}}$

o produto é tomado sobre todos os primos ímpares q *e* $\omega(q; m_1, m_2, ..., m_k)$ *é o número de distintos resíduos* $0, m_1, ..., m_k \pmod q$.

Referências

[1] Bryna Kra, The Green–Tao Theorem on Arithmetic Progressions in the Primes: An Ergodic Point of View.
[2] Conway and Guy, The Book of Numbers. New York.
[3] Teoria dos Números: Um passeio com Primos e outros Números Familiares pelo Mundo Inteiro, IMPA.
[4] Tom Apostol, Introduction to analytic number theory, Springer.
[5] M. Faester, Bruns Theorem and Sieve of Erastosthenes.
[6] P.A. Clement, Congruences for sets of primes, AMM, 1949.
[7] H. Cramer, On the order of magnitude of the difference between consecutive prime numbers, Acta Math.
[8] P. Ribenboim, The new book of prime number records, Springer, 1996.
[9] Carlos G. T. A. Moreira, Nicolau C. Saldanha Primos de Mersenne (e outros primos muito grandes).
[10] Twin primes and twin primes conjecture, Wolfram Mathematics.
[11] D. A. Goldston, Are There Infinitely Many Twin Primes ?
[12] Ernest, Siong, On Riemann Zeta Function and Twin prime Conjecture.
[13] Wikipedia, Twin Primes.
[14] D. A. Goldston, J. Pintz and C. Y. Yildirim, Primes in tuples II, Acta Math. 204, no. 1, 1–47(2010).
[15] H. Montgomery and R. Vaughan. The large sieve. Mathematika 20:119–134, 1973.
[16] T. Nicely prime constellations research project 2004. `http://www.trnicelly.net/counts.html`.
[17] C. Richard, P. Carl. Prime numbers, A Computacional perspective. Springer–Verlag.
[18] H. Davenport. Multiplicative Number Theory (Second edition). Springer–Verlag, 1980.
[19] Cong Lin and Li Zhipeng, On Wilsons Theorem and Polignac Conjecture. Arxiv.
[20] D. J. Newman, Analytic number theory, Springer, 1998.
[21] Hans Riesel, Prime Numbers and Computer Methods for Factorization, second edition, Birkhäuser, 1994.
[22] Guy, Richard K. (1981), Unsolved Problems in Number Theory, Berlin, New York: Springer–Verlag.

[23] Riesel, Hans (1994), Prime numbers and computer methods for factorization, Basel, Switzerland: Birkhäuser.
[24] Furstenberg, Harry (1955),"On the infinitude of primes", The American Mathematical Monthly (Mathematical Association of America) 62 (5): 353.
[25] Viggo Brun (1919). "La série 1/5+1/7+1/11+1/13+1/17+1/19+1/29+1/31+1/41+1/43+1/59+1/61+..., où les dénominateurs sont nombres premiers jumeaux est convergente ou finie". Bulletin des Sciences Mathématiques 43: 100–104,124–128.
[26] Alina Carmen Cojocaru; M. Ram Murty (2005). An introduction to sieve methods and their applications. London Mathematical Society Student Texts. 66. Cambridge University Press.
[27] Christopher Hooley (1976). Applications of sieve methods to the theory of numbers. Cambridge University Press.
[28] E. Landau (1927). Elementare Zahlentheorie. Leipzig, Germany: Hirzel. Reprinted Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1990.
[29] J. Wu (2004). "Chen's double sieve, Goldbach's conjecture and the twin prime problem". Acta Arithmetica 114 (3): pp. 215–273.
[30] Golomb, S. W. (1963), "On the sum of the reciprocals of the Fermat numbers and related irrationalities", Canad. J. Math. 15: 475–478.
[31] Luca, Florian (2000), "The anti-social Fermat number", American Mathematical Monthly 107 (2): 171-173.
[32] Robinson, Raphael M. (1954), "Mersenne and Fermat Numbers", Proceedings of the American Mathematical Society 5 (5): 842–846.
[33] Pascal Sebah and Xavier Gourdon. Introduction to twin primes and Bruns constant computation. 2002.
[34] On-Line Encyclopedia of Integer Sequences(OEIS). http://oeis.org/A153185.
[35] Ball, W. W. R. and Coxeter, H. S. M. Mathematical Recreations and Essays, 13th ed. New York: Dover, p. 64, 1987.
[36] Dickson, L. E. History of the Theory of Numbers, Vol. 1: Divisibility and Primality. New York: Dover, 2005.
[37] Leonard E. Dickson, A new extension of dirichlets theorem on prime numbers, Messenger of Mathematics, 33, pp155–161, (1904).
[38] Halberstam, E. and Richert, H.-E. Sieve Methods. New York: Academic Press, 1974.
[39] Odlyzko, A.; Rubinstein, M.; and Wolf, M. "Jumping Champions." Experiment. Math. 8, 107–118, 1999.

Departamento de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Campus Universitário, Lagoa Nova 59078-970. Natal, RN – Brazil.
E-mail address: p.pantoja@hotmail.com

<u>Problemas para los más jóvenes 45</u>

Cuatro problemas de la Olimpiada de Eslovenia 1997

PJ45-1

Probar que la ecuación $a^2+b^2-8c=6$ *no tiene soluciones enteras.*

PJ45-2

El punto P dista 9 unidades del centro de un círculo de radio 15. ¿Cuántas cuerdas de longitud entera pasan por P?

PJ45-3

Se da el cuadrado ABCD. Sea E el punto medio del lado CD y F la intersección de AE y BD. Calcular la razón AF/FE.

PJ45-4

¿Para qué valores del parámetro "a" las ecuaciones

$$19x^2+ax+97=0 \text{ y } 97x^2+ax+19=0$$

Tienen una raíz común?

COMPETICIÓN MATEMÁTICA MEDITERRÁNEA 2012

REQUENA, 5 DE MAYO DE 2012

PROBLEMA 1

Dado el número $\alpha > 0$**, se considera la sucesión infinita definida por** $x_1 = 1$**,**

$$\text{y} \quad \alpha x_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_{n+1} \text{ para } n \geq 1 .$$

Determinar el menor α **para el cual todos los términos de esta sucesión son números reales positivos.**

PROBLEMA 2

Sean α, β, γ **los ángulos de un triángulo acutángulo ABC. Probar que**

$$\frac{1}{3} \sum_{cíclica} \frac{\tan^2 \alpha}{\tan \beta \tan \gamma} + 3\left(\frac{1}{\tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma} \right)^{2/3} \geq 2 .$$

PROBLEMA 3

Se considera una matriz M de ceros y unos, de r filas y c columnas, tal que toda fila y toda columna contiene al menos un "1". Demostrar que existe una matriz M(i,j) formada por "unos", tal que la correspondiente suma de filas R(i) y suma de columnas C(j) verifica $r \cdot R(i) \geq c \cdot C(j)$**.**

PROBLEMA 4

Sea O el circuncentro y R el radio de la circunferencia circunscrita de un triángulo ABC; y (O;R) es su circunferencia circunscrita. Sea k_1 **una circunferencia tangente a las semirrectas (AB y (AC y también tangente internamente a (O;R). Sea** k_2 **una circunferencia tangente a las semirrectas (AB y (AC y además tangente exteriormente a (O;R). Llamamos** A_1 **y** A_2 **a los respectivos centros de** k_1 **y** k_2**.**

Demostrar que $(OA_1 + OA_2)^2 - A_1A_2^2 = 4R^2$**.**

Problemas propuestos 221 – 225

Problema 221 (Propuesto por D.M. Batinetzu-Giurgiu, Bucarest, y Neculai Stanciu, Buzau)

Sea ABCD un tetraedro y M un punto del espacio, distinto de los vértices del tetraedro. Demostrar que

$$\frac{MA}{MB+MC+MD}+\frac{MB}{MC+MD+MA}+\frac{MC}{MD+MA+MB}+\frac{MD}{MA+MB+MC}\geq\frac{R+r}{R}\geq\frac{4r}{R}$$

donde R y r son, respectivamente, el radio de la esfera circunscrita y el de la esfera inscrita en el tetraedro.

Problema 222 (propuesto por el editor)

ABC es un triángulo; P es un punto variable tal que $m\cdot BP\cdot sen\measuredangle APB=n\cdot CP\cdot sen\measuredangle APC$, donde *m* y *n* son constantes. Determinar el lugar geométrico del punto P.

Problema 223 (propuesto por el editor)

Demostrar que si los lados de un cuadrilátero son las raíces de la ecuación

$$x^4-4x^3+6qx^2+\left(8-12q\right)x+s=0$$

entonces el cuadrilátero tiene un círculo inscrito.

Problema 224 (propuesto por el editor)

Si *n* es un entero impar, y *a,b,c,…* son las *n-1* raíces n-ésimas complejas de la unidad, probar que

$$\left(a^r-1\right)\left(b^r-1\right)\left(c^r-1\right)\cdots=n$$
$$\left(a^r+1\right)\left(b^r+1\right)\left(c^r+1\right)\cdots=1$$

si *r* es cualquier número primo con *n.*

Problema 225 (propuesto por el editor)

XAYB es una cuaterna armónica; P es un punto que no está en la recta XY, tal que XP = p, YP = q, y el $\measuredangle XPY=\theta$. Si *x,y* son las longitudes de las perpendiculares desde X e Y a la tangente común a los dos círculos de centros respectivos A y B, y que pasan por P, demostrar que $xy=pq\cdot\cos\theta$.

<u>Observación del editor:</u>se utiliza la notación inglesa para la cuaterna armónica: los puntos X, A, Y, B están **en ese orden** sobre la recta.

PROBLEMA 216.

Propuesto por: Laurentiu Modan, Bucarest, Rumania.

Sea $f:[-1;1]\to\mathbb{R}$. Una función continúa con la notación: $f^n(a)$ denotamos $(f(a))^n$

Calcular el límite:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3^n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{\binom{n-1}{k}}{n-k}f^n\left(\frac{k}{n}\right)$$

Solución de: Daniel Darío, Góngora García.

Universidad Nacional de Ingeniería. Lima, PERU.

Dado que n esta en el superíndice de la sumatoria, entonces en un entero positivo.

Ahora bien: sea L, el límite, reacomodamos el término general de la sumatoria:

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3^n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{\binom{n-1}{k}}{n-k}f^n\left(\frac{k}{n}\right)$$

Observar que: $\frac{k}{n}$ pertenece al dominio de la función continua.

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3^n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{\binom{n}{k}}{n}f^n\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3^n.n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}f^n\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3^n.n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k f^k\left(\frac{k}{n}\right)f^{n-k}\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3^n.n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left[-f\left(\frac{k}{n}\right)\right]^k\left[f\left(\frac{k}{n}\right)\right]^{n-k}$$

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3^n.n}\left[f\left(\frac{k}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right]^n$$

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3^n.n}.[0]=0$$

Por lo tanto:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3^n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{\binom{n-1}{k}}{n-k}f^n\left(\frac{k}{n}\right)=0$$

PROBLEMA 217, propuesto por D.M. Batinetu-Giurgiu, Bucarest, y N. Stanciu, Buzau, Rumanía

Sean m y n números reales positivos. Demostrar que para cualquier triángulo ABC se verifican las desigualdades

$$(1) \quad \frac{ab^2}{ma+nb} + \frac{bc^2}{mb+nc} + \frac{ca^2}{mc+na} \geq \frac{(s^2+r^2+4Rr)^2}{(2m+n)s^2+(n-2m)r^2+4(n-2m)Rr},$$

$$(2) \qquad \frac{1}{(mr_a+nr_b)^2} + \frac{1}{(mr_b+nr_c)^2} + \frac{1}{(mr_c+nr_a)^2} \geq \frac{27}{(m+n)^2(4R+r)^2},$$

donde las notaciones del triángulo son las usuales.

Solución por Daniel Lasaosa Medarde, Universidad Pública de Navarra, Pamplona, España

Los triángulos ATI y AUI_a son semejantes, donde I, I_a son el incentro y el exincentro opuesto a A, y T, U los puntos respectivos de tangencia de incírculo y exincírculo opuesto a A, con el lado AB. Como además es conocido (o fácilmente demostrable) que $AT = s-a$, $AU = s$, tenemos que $\frac{r_a}{r} = \frac{s}{s-a}$. Luego denotando por S el área de ABC y usando la fórmula de Herón,

$$r(r_a+r_b+r_c) = \frac{Sr}{s-a} + \frac{Sr}{s-b} + \frac{Sr}{s-c} = ab+bc+ca-s^2.$$

Pero al mismo tiempo,

$$\frac{r_a+r_b+r_c}{s} = \tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2} = \frac{1+\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} = \frac{4R+r}{s},$$

donde hemos usado conocidas relaciones para el triángulo. Deducimos entonces que

$$(4R+r)r = r(r_a+r_b+r_c) = ab+bc+ca-s^2.$$

La primera desigualdad es entonces equivalente a

$$\frac{ab}{w+\rho} + \frac{bc}{u+\rho} + \frac{ca}{v+\rho} \geq \frac{ab+bc+ca}{\frac{abw+bcu+cav}{ab+bc+ca}+\rho}.$$

donde hemos llamado $\rho = \frac{n}{m}$, $u = \frac{b}{c}$, $v = \frac{c}{a}$, $w = \frac{a}{b}$. Pero esta desigualdad no es más que la desigualdad de Jensen aplicada a la función convexa $f(x) = \frac{1}{x+\rho}$ con derivada segunda estrictamente positiva $f''(x) = \frac{2}{(x+\rho)^3}$ para todo $x, \rho > 0$, en valores u, v, w y con pesos respectivos bc, ca, ab. Luego la primera desigualdad es siempre cierta, y se da la igualdad si y sólo si $u = v = w$, es decir, si y sólo si $a = b = c$.

La segunda desigualdad es equivalente a

$$\frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2} + \frac{1}{w^2} \geq \frac{3}{\left(\frac{u+v+w}{3}\right)^2},$$

donde hemos llamado ahora $w = mr_a + nr_b$, $u = mr_b + nr_c$, $v = mr_c + nr_a$, luego $u+v+w = (m+n)(r_a+r_b+r_c)$. Pero nuevamente, esta es la desigualdad de Jensen aplicada a la función convexa $f(x) = \frac{1}{x^2}$, con derivada segunda estrictamente positiva $f''(x) = \frac{6}{x^4}$, en valores u, v, w y con pesos iguales a 1. Luego también es siempre cierta la segunda desigualdad, y se da la igualdad si y sólo si $mr_a + nr_b = mr_b + nr_c = mr_c + nr_a$. Supongamos que $r_a \geq r_b, r_c$, con lo que al ser $m(r_a - r_b) =$

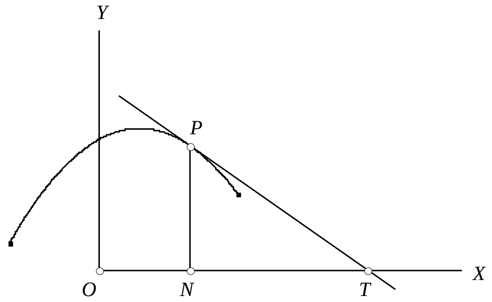
$n(r_c - r_b)$ no negativo, tenemos que $r_c \geq r_b$, pero al ser $n(r_a - r_c) = m(r_b - r_c)$ no negativo, tenemos que $r_b \geq r_c$. Luego $r_b = r_c$, de donde trivialmente $r_a = r_b = r_c$, o equivalentemente, se da la igualdad si y sólo si $a = b = c$.

La tangente en P a una cierta curva corta al eje OX en T. PN es la perpendicular desde P a dicho eje. Si el perímetro del triángulo PTN es constante e igual a $2c$, demostrar que la ecuación de la curva es de la forma

$$y^2 - 2cy = Ae^{\frac{x}{c}}.$$

Solución:

La ecuación de la tangente a la curva $y(x)$ en el punto $P(x, y)$ es $Y - y = y'(X - x)$ que corta al



eje OX en el punto $T\left(x + \dfrac{y}{y'}, 0\right)$, entonces tenemos

$$PN = y, TN = OT - ON = -\frac{y}{y'}, PT = \sqrt{y^2 + \frac{y^2}{y'^2}}$$

La condición del enunciado se expresa:

$$y - \frac{y}{y'} + \sqrt{y^2 + \frac{y^2}{y'^2}} = 2c$$

que después de simplificar y racionalizar queda la ecuación diferencial de variables separadas

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - 2cy}{2c(c - y)}$$

que se integra de modo inmediato:

$$\int \frac{2(c-y)}{y^2 - 2cy} dy = \int \frac{1}{c} dx \Leftrightarrow \ln\left(y^2 - 2cy\right) = \frac{x}{c} + k$$

Despejando el paréntesis y poniendo $A = e^k$ obtenemos

$$y^2 - 2cy = e^{\frac{x}{c}+k} = e^k e^{\frac{x}{c}} = Ae^{\frac{x}{c}}.$$

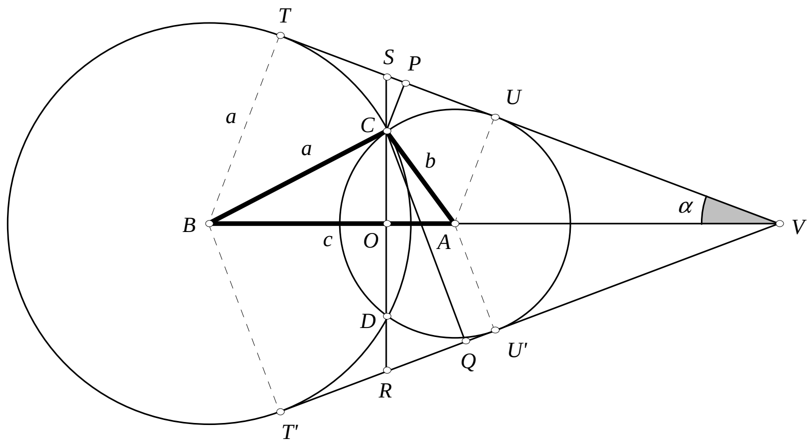
Cristóbal Sánchez-Rubio, Benicasim.

ABC es un triángulo. Se trazan círculos de centros *A* y *B* que pasan por *C*. Demostrar que el producto de las distancias desde *C* a las tangentes comunes a ambas circunferencias es

$$\frac{4(s-a)^2(s-b)^2}{c^2}$$

Solución:
Es inmediato comprobar que los triángulos *UAV*, *TBV*, *PSC* y *CRQ* son semejantes por ser rectángulos y con un ángulo agudo α.
Al ser *S* el punto medio del segmento *TU*, claramente se cumple:

$$CP = CS\cos\alpha, CQ = CR\cos\alpha \Rightarrow CP\cdot CQ = CS\cdot CR\cdot\cos^2\alpha = CS\cdot CD\cdot\cos^2\alpha = SU^2\cos^2\alpha. \quad (1)$$



Por semejanza de los triángulos *UAV* y *TBV*:

$$\frac{AV}{b} = \frac{c+AV}{a} = \frac{c}{a-b} \Rightarrow AV = \frac{bc}{a-b}.$$

De donde

$$UV = \sqrt{AV^2 - b^2} = \frac{b}{a-b}\sqrt{c^2-(a-b)^2} = \frac{b}{a-b}\sqrt{(c+a-b)(c-a+b)} = \frac{2b}{a-b}\sqrt{(s-a)(s-b)}$$

y

$$\cos\alpha = \frac{UV}{AV} = \frac{2b}{a-b}\sqrt{(s-a)(s-b)}\,\frac{a-b}{bc} = \frac{2\sqrt{(s-a)(s-b)}}{c} \quad (2).$$

Como *S* es el punto medio del segmento *UT*, $SU = \dfrac{VT-VU}{2}$.

Por la semejanza de *UAV* y *TBV*,

$$\frac{a}{b} = \frac{VT}{VU} \Rightarrow VT = \frac{a}{b}VU \Rightarrow SU = \frac{VT-VU}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}-1\right)UV = \frac{a-b}{2b}UV.$$

Sustituyendo *UV*, resulta

$$SU = \frac{a-b}{2b}UV = \frac{a-b}{2b}\,\frac{2b}{a-b}\sqrt{(s-a)(s-b)} = \sqrt{(s-a)(s-b)} \quad (3).$$

Finalmente sustituyendo (2) y (3) en (1), queda

$$CP\cdot CQ = SU^2\cdot\cos^2\alpha = (s-a)(s-b)\frac{4(s-a)(s-b)}{c^2} = \frac{4(s-a)^2(s-b)^2}{c^2}.$$

Cristóbal Sánchez-Rubio, Benicasim.

PROBLEMA 220, propuesto por el editor

Si la sucesión $\{u_j\}$ se define mediante

$$\begin{array}{rcll} u_{2n} & = & u_{2n-2}+u_n-u_{n-8}, & \text{para } n\geq 8, \\ u_{2n} & = & u_{2n-2}+u_n, & \text{para } n<8, \\ u_{2n+1} & = & u_{2n}, & \end{array}$$

y $u_0=u_1=1$, demostrar que

$$u_{8n}=\frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}.$$

Solución por Daniel Lasaosa Medarde, Universidad Pública de Navarra, Pamplona, España

No es muy laborioso encontrar que los primeros 12 términos con índice par de la sucesión (desde u_0 hasta u_{22} inclusive) son

$$1,2,4,6,10,14,20,26,35,44,56,68$$

Claramente, cada término con índice impar sería igual al anterior término con índice par por ser $u_{2n+1}=u_{2n}$.

Denotemos $v_n=u_n-u_{n-8}$ para todo $n\geq 8$. Es sencillo comprobar, a partir de los anteriores valores, que $v_{4m}=(m+1)^2$, mientras que $v_{4m+2}=(m+1)(m+2)$ para $m=2,3,4,5$. Usando que $u_{2n+1}=u_{2n}$, obtenemos claramente que $v_{4m+1}=v_{4m}=(m+1)^2$ y $v_{4m+3}=v_{4m+2}=(m+1)(m+2)$. Demostraremos por inducción que estos resultados son ciertos para todo $m\geq 2$. Supongamos que los resultados son ciertos para $2,3,\ldots,m-1$ para algún $m-1\geq 5$. Se tiene claramente que

$$u_{4m+2}=u_{4m}+u_{2m}-u_{2m-8}, \qquad u_{4m}=u_{4m-2}+u_{2m}-u_{2m-8},$$

$$u_{4m-2}=u_{4m-4}+u_{2m-2}-u_{2m-10}, \qquad u_{4m-4}=u_{4m-6}+u_{2m-2}-u_{2m-10},$$

$$u_{4m-6}=u_{4m-8}+u_{2m-4}-u_{2m-12},$$

con lo que sumando las cuatro primeras y las cuatro últimas de las anteriores igualdades, obtenemos

$$u_{4m+2}-u_{4m-6}=2u_{2m}+2u_{2m-2}-2u_{2m-8}-2u_{2m-10},$$

$$u_{4m}-u_{4m-8}=u_{2m}+2u_{2m-2}+u_{2m-4}-u_{2m-8}-2u_{2m-10}-u_{2m-12},$$

es decir,

$$v_{4m+2}=2v_{2m}+2v_{2m-2}, \qquad v_{4m}=v_{2m}+2v_{2m-2}+v_{2m-4}.$$

Ahora bien, supongamos que $m=2k$ es par. Entonces, $v_{2m}=v_{4k}=(k+1)^2$, $v_{2m-2}=v_{4k-2}=k(k+1)$, $v_{2m-4}=v_{4k-4}=k^2$, con lo que

$$v_{4m+2}=4k^2+6k+2=m^2+3m+2=(m+1)(m+2),$$

$$v_{4m}=4k^2+4k+1=m^2+2m+1=(m+1)^2,$$

y el resultado también es cierto para m par si es cierto para $2,3,\ldots,m-1$. Supongamos ahora que $m=2k+1$ es impar. Entonces, $v_{2m}=v_{4k+2}=(k+1)(k+2)$, $v_{2m-2}=v_{4k}=(k+1)^2$, $v_{2m-4}=v_{4k-2}=k(k+1)$, con lo que

$$v_{4m+2}=4k^2+10k+6=m^2+3m+2=(m+1)(m+2),$$

$$v_{4m}=4k^2+8k+4=m^2+2m+1=(m+1)^2,$$

y el resultado también es cierto para m impar si es cierto para $2, 3, \ldots, m-1$. Luego el resultado es cierto para todo $m \geq 2$.

Es también sencillo comprobar, con los valores mostrados al principio de esta solución, que para todo $n = 0, 1, 2$ tenemos

$$u_{8n} = \frac{4n^3 + 12n^2 + 11n + 3}{3}, \qquad u_{8n+2} = \frac{4n^3 + 15n^2 + 17n + 6}{3},$$
$$u_{8n+4} = \frac{4n^3 + 18n^2 + 26n + 12}{3}, \qquad u_{8n+6} = \frac{4n^3 + 21n^2 + 35n + 18}{3}.$$

Supongamos este resultado cierto para $n-1$. Usando el resultado anterior, tenemos entonces que

$$u_{8n} = u_{8n-8} + v_{8n} = \frac{4n^3 - n}{3} + (2n+1)^2 = \frac{4n^3 + 12n^2 + 11n + 3}{3},$$
$$u_{8n+2} = u_{8n-6} + v_{8n+2} = \frac{4n^3 + 3n^2 - n}{3} + 4n^2 + 6n + 2 = \frac{4n^3 + 15n^2 + 17n + 6}{3},$$
$$u_{8n+4} = u_{8n-4} + v_{8n+4} = \frac{4n^3 + 6n^2 + 2n}{3} + 4n^2 + 8n + 4 = \frac{4n^3 + 18n^2 + 26n + 12}{3},$$
$$u_{8n+6} = u_{8n-2} + v_{8n+6} = \frac{4n^3 + 9n^2 + 5n}{3} + 4n^2 + 10n + 6 = \frac{4n^3 + 21n^2 + 35n + 18}{3}.$$

Luego todos estos resultados son ciertos para todo $n \geq 0$, habiéndose por lo tanto hallado una fórmula cerrada para todo término de la sucesión con índice par, y por lo tanto para todo término de la sucesión, pues cada término con índice impar será igual al término anterior.

En particular, para todo $n \geq 0$, se tiene

$$u_{8n} = \frac{4n^3 + 12n^2 + 11n + 3}{3} = \frac{(n+1)(4n^2 + 8n + 3)}{3} = \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3},$$

como queríamos demostrar. Se comprueba también que

$$u_{8n+2} = \frac{(n+1)(4n^2 + 11n + 6)}{3} = \frac{(n+1)(n+2)(4n+3)}{3},$$
$$u_{8n+4} = \frac{(n+1)(4n^2 + 14n + 12)}{3} = \frac{2(n+1)(n+2)(2n+3)}{3},$$
$$u_{8n+6} = \frac{(n+1)(4n^2 + 17n + 18)}{3} = \frac{(n+1)(n+2)(4n+9)}{3},$$

con lo que se puede obtener también la siguiente generalización del resultado propuesto:

$$u_{4n} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6} = \binom{2n+3}{3}.$$

Reseña de Congresos, libros y páginas web 45

Comentario al libro de I.M. Yaglom, *Números complejos y sus aplicaciones a la geometría.*

La editorial rusa URSS ha publicado en 2011, en español, el famoso libro de Isaac Moisevich Yaglom *Números complejos y sus aplicaciones a la Geometría.*

La versión rusa, publicada en los años 30 del siglo pasado, y disponible gratuitamente en Internet en la página web *Internet Biblioteka po Matematika,* supuso en su momento un verdadero hito en la enseñanza de las aplicaciones de los números complejos, y estamos seguros que su publicación ahora en español será de una enorme utilidad en la Península Ibérica y en Iberoamérica.

Las secciones del libro se diferencian netre sí, atendiendo a su nivel de dificultad, por no llevar asterisco, llevar un asterisco o llevar dos asteriscos.

Las secciones sin asterisco representan la línea fundamental de exposición de la teoría de los números complejos. Su aplicación a la geometría elemental lleva un asterisco. El autor recomienda, en una primera lectura, no detenerse demasiado en las secciones con asterisco, pero será necesario hacerlo si se pretende comprender conceptos como la inversión axial (de Laguerre), definida con ayuda de los conceptos de potencia de un punto y de una recta con respecto a una circunferencia.

Las secciones con dos asteriscos incluyen material que se encuentra fuera del alcance de las Matemáticas escolares, y se refieren a las relaciones de los números complejos con las geometrías no euclídeas.

El libro se compone de tres amplios capítulos: El primero se titula *Tres tipos de números complejos(con 6 secciones);* el segundo*, Interpretaciones geométricas de los números complejos(con 6 secciones);* y el tercero, *Transformaciones circulares y geometrías circulares(igualmente con 6 secciones).*

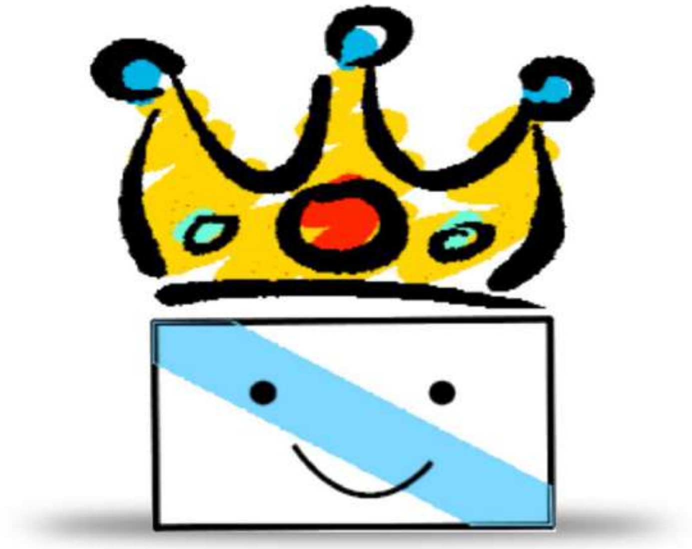
En definitiva, se trata de una importante contribución a la literatura matemática en español.

Valladolid, 6 de julio de 2012

Francisco Bellot Rosado

II CONCURSO INCUBADORA DE SONDAXES E EXPERIMENTOS SGAPEIO

Maio 2012



A DECADENCIA
DUN MITO ESTÉTICO

"O rectángulo de moda fala galego"

(O REI TÁNGULO)

IES
MUGARDOS

CÓDIGO: 15
CATEGORÍA: 1º e 2º da ESO

PROFESORA:
Covadonga Rodríguez-Moldes Rey

GRUPO:
Rubén González Rodríguez (2º ESO)
Joâo Pedro Moreira Dos Santos (2º ESO)
Mercedes Pereira Rodríguez (2º ESO)
Sara Vázquez Rumbo (2º ESO)

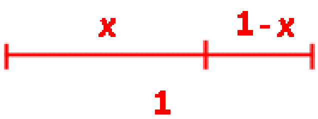
A decadencia dun mito estético

O rectángulo de moda fala galego

1.- PRESENTACIÓN

Dende a antiguidade clásica os gregos crían que a proporción era a clave da beleza. A proporción que constituía a base na que se fundaban a arte e a arquitectura gregas era a «*sección áurea*», o Partenón de Atenas, por exemplo, está baseado nesta proporción. Na Idade Media pensábase que a *sección áurea* mostraba a perfección da creación divina e así foi utilizada polos artistas do Renacemento como Leonardo da Vinci. A *"sección áurea"* tamén é coñecida polo nome de *Divina Proporción* que foi a que utilizou Fra Luca Pacioli (1445 – 1517) no seu libro "De Divina Proportione" para referirse a ela.

A sección áurea defínese como a proporción que aparece entre dous segmentos dunha recta ao dividir esta en media e extrema razón, isto é, un segmento queda dividido noutros dous segmen-



tos de tal forma que o segmento maior é ao menor como o todo é ao maior:

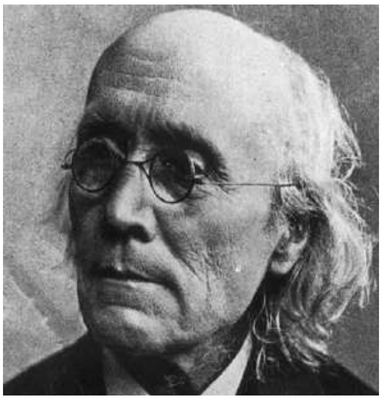
$$\frac{x}{1-x} = \frac{1}{x} \Rightarrow x^2 = 1 - x \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0$$

Esta ecuación ten dúas solucións irracionais, unha delas desígnase coa letra grega Φ e é o chamado Número de Ouro:

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}61803398\ldots$$

Este número define polo tanto a *proporción áurea* ou *divina proporción* e ademais de ser usado por artistas e arquitectos, aparece con moita frecuencia na natureza, como por exemplo nas cunchas dos moluscos, en moitas flores ou nas pólas das árbores.

A súa aceptación como canon de beleza lévanos a convivir con el na nosa cotianeidade, pois o DNI ou as tarxetas de crédito teñen esta proporción.



Gustav Frechner

En 1876 o alemán Gustav Theodor Frechner (1801-1887), creador da *psicofísica* -disciplina que establece as relacións matemáticas precisas entre os estímulos e as sensacións que estes provocan- fixo un estudo estatístico con varios centenares de persoas sen experiencia artística ás que lle pediu que escolleran o rectángulo que máis lles agradase entre varios. O *rectángulo áureo*, definido pola proporción áurea, resultou elixido por ampla maioría.

2.- OBXECTIVOS

O noso traballo pretende r**epetir o experimento de Frechner na vila de Mugardos.**

Será necesario elixir rectángulos que acompañen ao *rectángulo áureo* na enquisa e seleccionar unha mostra que represente con garantía á poboación de Mugardos.

Pretendemos, ademais, con este traballo:

- Relacionar ámbitos matemáticos como a xeometría e a estatística.
- Implicar ao pobo de Mugardos nunha investigación matemática.
- Aprender conceptos estatísticos como o tamaño dunha mostra.
- Saber organizarse para a realización dun amplo traballo de campo
- Aprender a manexar informaticamente unha cantidade elevada de datos.

3.- DESENVOLVEMENTO DA EXPERIENCIA

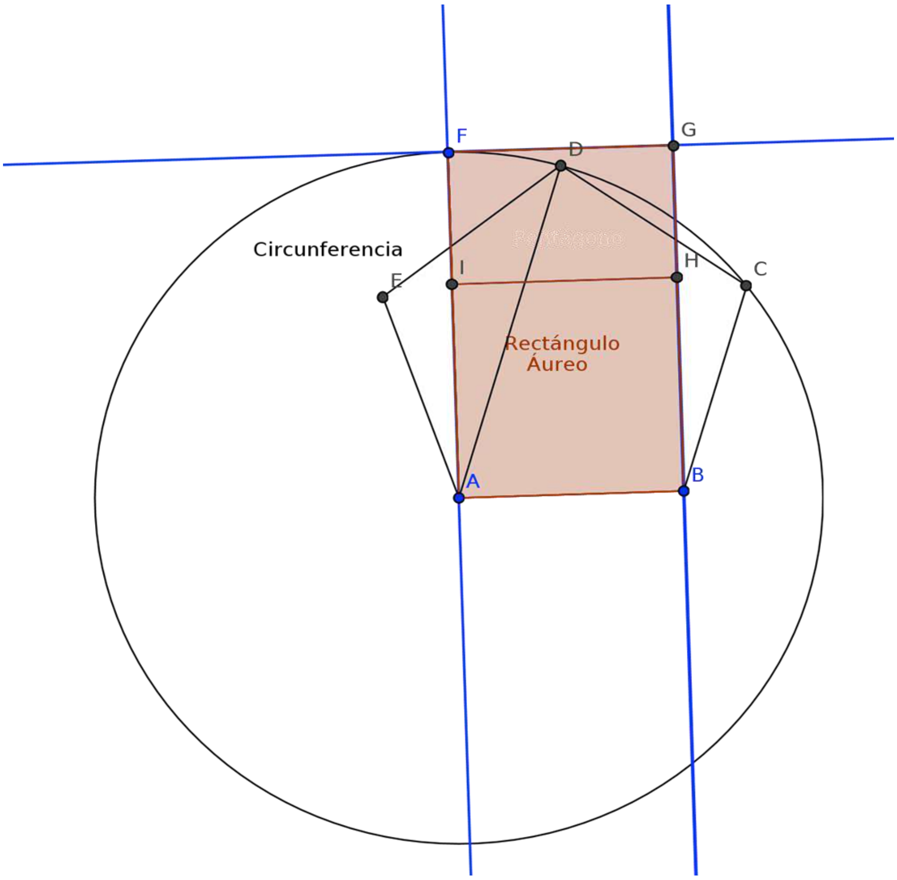
Os rectángulos que eliximos como opoñentes do *rectángulo áureo son* o *rectángulo cordobés*, o r*ectángulo din* e o *rectángulo galego.* Parécenos un número suficiente para poder elixir, sempre que teñan algunha característica común que permita comparalos. Decidimos que debían ter unha das súas medidas -o ancho- da mesma lonxitude. A continuación describimos algunhas características dos rectángulos que interveñen na nosa investigación e presentamos a súa construción co programa xeoxebra.

3.1.- OS RECTÁNGULOS DA ENQUISA

O RECTÁNGULO ÁUREO

Na presentación xa mencionamos que o *rectángulo áureo* ten entre os seus lados a proporción que define o Número de Ouro, Φ. A construción xeométrica que eliximos é a que parte dun pentágono regular e se forma coa diagonal e o lado do pentágono. Podiamos construílo tamén a partir dun cadrado, pero como isto xa o fixeramos na clase de matemáticas preferimos facelo así.

Esta é a nosa construción do *rectángulo áureo* co programa xeoxebra.



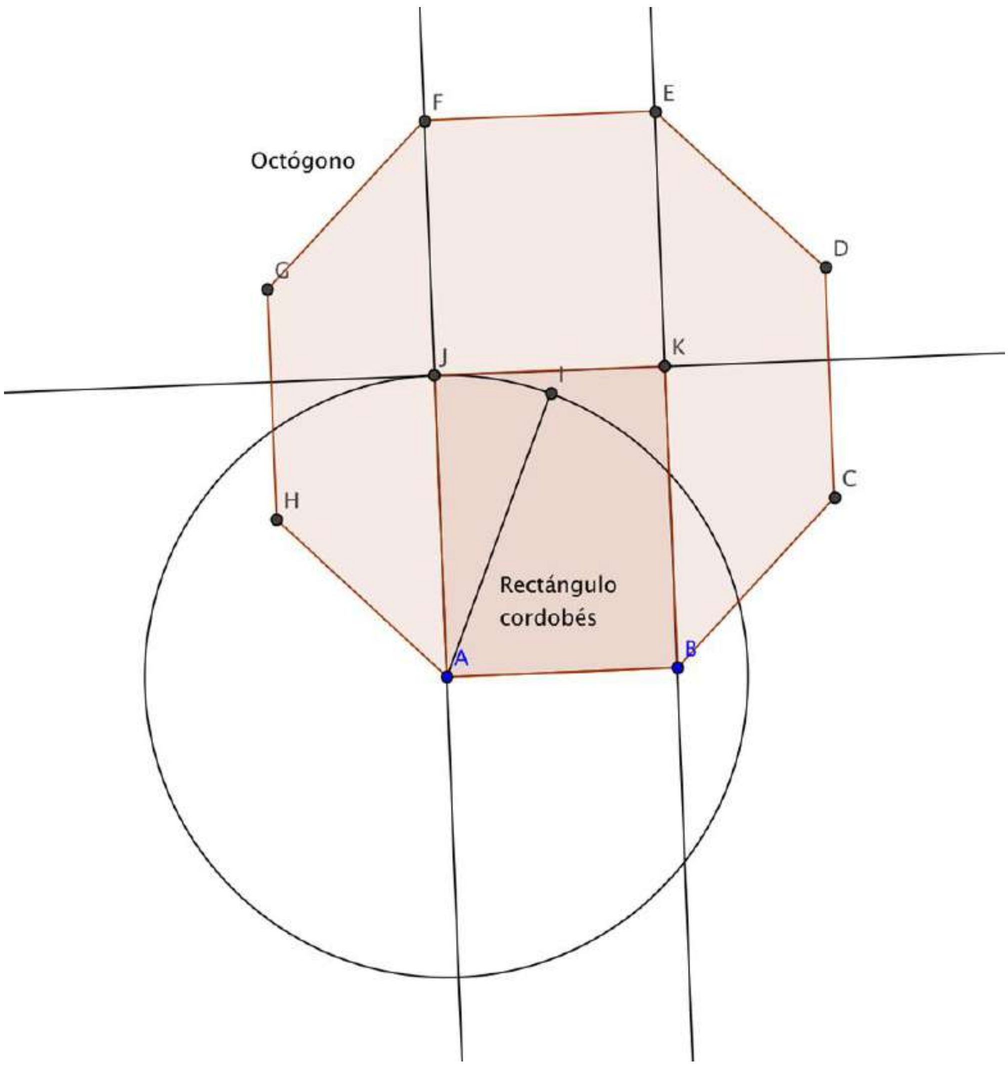
O RECTÁNGULO CORDOBÉS

A nosa profesora neste traballo contounos que nunha conferencia que lle escoitara en Sevilla no ano 1994 ao arquitecto cordobés **Rafael de la Hoz Arderius** (1924-2000) titulada *"La proporción cordobesa"*, este aseguraba que un estudo estatístico que el realizara mostraba como a tendencia estética non conducía á esperada *proporción divina*.

Polo contrario, a elixida segundo Rafael de la Hoz, era unha proporción que, por non axustarse á *divina*, chamou *proporción humana* ou *proporción cordobesa* que vén definida ***pola relación entre o radio da circunferencia circunscrita ao octógono regular e o lado de este .*** Trátase da proporción definida polo número irracional:

$$c = \frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} \approx 1{,}30652964\ldots$$

Esta é a construción do *rectángulo cordobés en xeoxebra:*



O RECTÁNGULO DIN

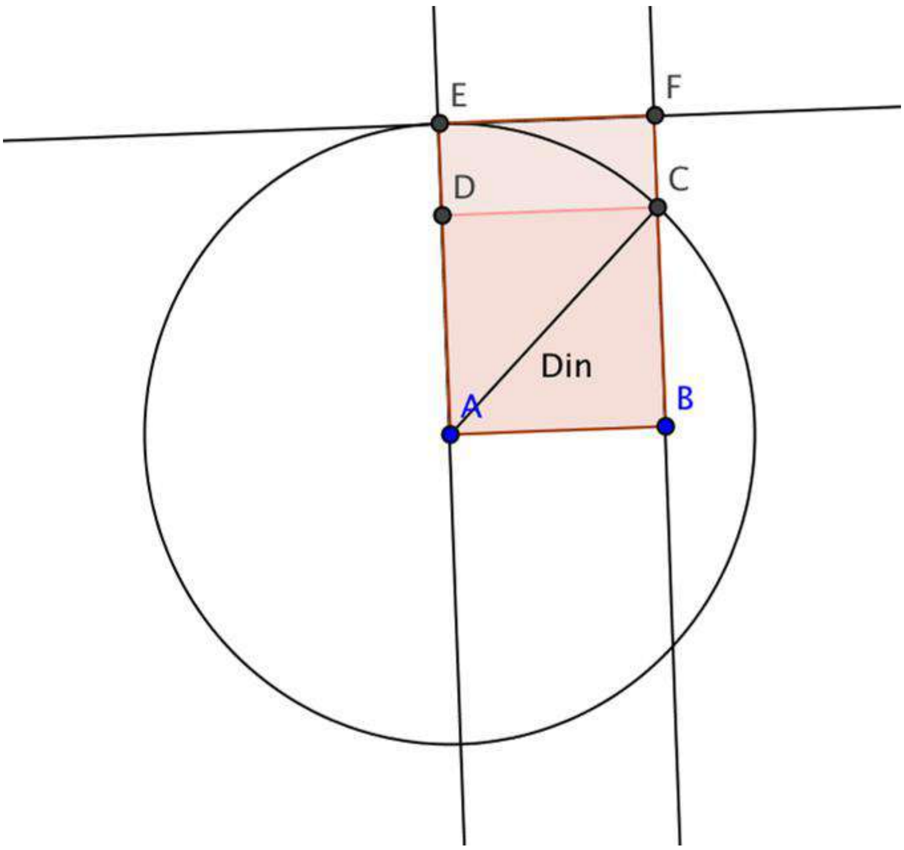
É o rectángulo que usamos habitualmente para escribir sobre el, é o rectángulo que se pon na impresora para poder ver en papel o que vemos no ordenador. Trátase dun tamaño estándar que se usa en moitas partes do mundo -curiosamente non se usa en Estados Unidos e Canadá- e que se caracteriza porque se se divide en dúas metades polo lado máis longo, os dous rectángulos que se obteñen teñen a mesma proporción.

Este rectángulo vén definido pola **proporción entre a diagonal e o lado dun cadrado** e a obtención desta proporción é moi doada a partir do teorema de Pitágoras. É o número irracional:

$$D = \sqrt{2} \approx 1{,}41421356\ldots$$

A base do estándar chámase Din A0 que ten un metro cadrado de superficie. Partindo este en dous obtense o Din A1 e en sucesivas particións obtéñense os Din A2, A3, **A4**, A5...

Esta é a construción:

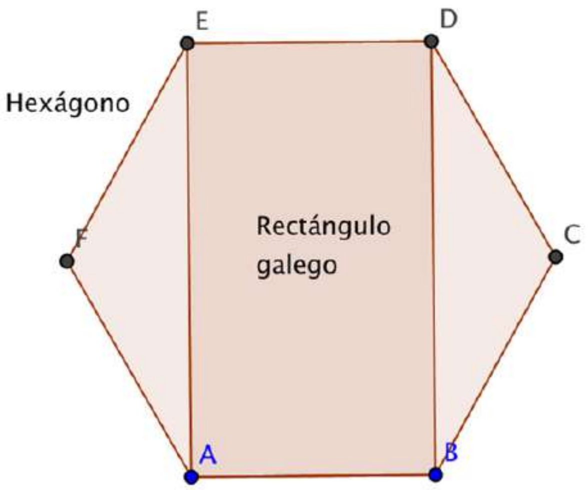


O RECTÁNGULO GALEGO

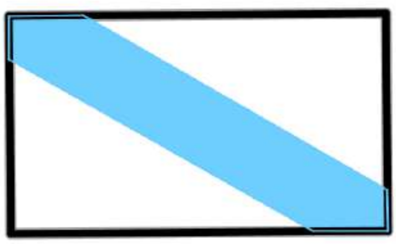
Buscabamos outro rectángulo para engadir aos tres anteriores. Queriamos que a súa porporción tamén estivera definida por un número irracional, que fora maior que as tres anteriores e que a súa construción fora sinxela. E tamén buscabamos que nel puidera inscribirse a fachada da Catedral de Santiago e a bandeira galega. Así foi como xurdiu o que nos chamamos ***rectángulo galego***.

Definimos a ***proporción galega,*** que designamos con **g,** á **relación entre o segmento que une dous vértices opostos dun hexágono e o lado do hexágono**.

$$g = \sqrt{3} \approx 1{,}73205080\ldots$$



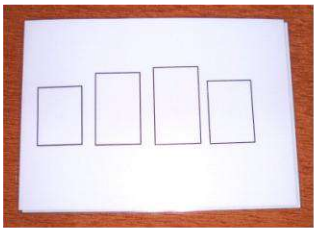
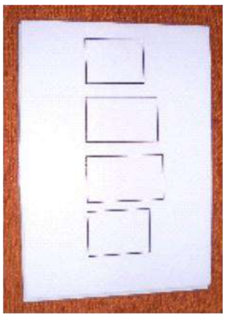
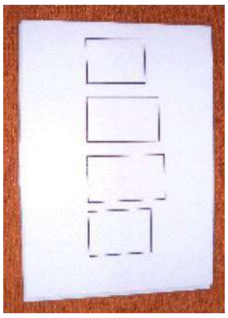
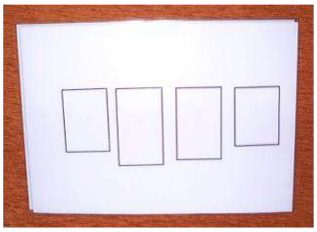
Este rectángulo adáptase ao que pensaramos: a súa contrucción é moi sinxela, o número irracional que o define non é complicado de obter e, sobre todo, parece funcionar con símbolos galegos como podemos comprobar coas seguintes imaxes:



3.2.- PREPARANDO AS ENQUISAS

Unha vez decididos os rectángulos da enquisa tiñamos que ver a forma de presentalos. En principio probamos a presentalos individualmente para que as persoas que respondesen puideran manipulalos ao seu antollo, pero vimos que non era cómodo -necesitábase un lugar para deposita-los-, foi así que nunha folla de papel colocamos os catro rectángulos, todos coa mesma medida para o lado menor, 4cm. Fixemos fotocopias e plastificamos para manipular sen que se estropeasen nin aparecesen marcas nos rectángulos.

Vimos que, para non condicionar respostas, era necesario presentar de cada vez os rectángulos nunha posición distinta. Tamén preparamos os formularios de recollida de datos, cada formulario recollía 50 respostas:

	Sexo		Idade	Opción elixida			
nº	♀	♂	1º cifra	**C**	**A**	**g**	**d**
001							
002							
003							
004							
005							
006							
007							
008							
009							

3.3.- SELECCIÓN DA MOSTRA

Mugardos atópase no lado sur da ría do Ferrol, ocupando unha franxa da denominada Península de Bezoucos -conformada entre a devandita ría e a de Ares-Betanzos-. Os lindes do municipio veñen determinados pola propia liña de costa no lado norte, polo concello de Ares ó oeste e ó sur, e polo de Fene ó leste. A superficie é de 12'73 Km^2.

Os datos do IGE no ano 2011 establecen para Mugardos un cómputo de 5536 habitantes, e unha alta densidade de poboación: 435 hab./Km^2. A idade media é de 47,3 anos (dato de 2010) e o número de habitantes maiores de 65 anos case triplica ao número de habitantes menores de 15 anos o que indica o grao de envellecemento da poboación.

Por tramos de idade os datos do IGE son os seguintes:

	[0,9]	[10,19]	[20,29]	[30,39]	[40,49]	[50,59]	[60,69]	[70,79]	[80,-)	Totais
Mugardos	368	353	573	895	758	782	731	673	403	5536

Na elección da mostra tivemos en conta esta distribución, é unha nostra *estratificada*.

Calcular o tamaño da mostra foi o máis complicado para nós porque non temos o vocabulario nin o nivel matemático requirido pero fomos quen de usar conceptos como *parámetro*, *estatístico*, *erro mostral* ou *intervalo de confianza.*

Utilizamos a fórmula:

$$n = \frac{N\, z_{\alpha/2}^2\, P(1-P)}{(N-1)e^2 + z_{\alpha/2}^2 P(1-P)}$$

onde

n: tamaño da mostra

N: tamaño da poboación

$\mathbf{Z_{\alpha/2}}$: é un valor tabulado, o seu valor é 1,96 e depende do nivel de confianza elixido que normalmente é 0 95%. Non entendemos ben quen é o z(variable normal e reducida) pero ten que ser de moita utilidade porque aparece moito.

p: é a proporción en que a variable estudada se da na poboación, asígnaselle o valor, 0,5, é a probabilidade de elixir unha opción ou a contraria, q=1-p. Corresponde ao caso máis desfavorable posible.

e : erro máximo que nos situamos no 5%

Aplicando a fórmula aos nosos valores temos:

N =	*5536*
$Z_{\alpha/2}$ =	*1,96*
p =	*0,5*
e =	*0,05*

$$n = \frac{5536 \cdot 1{,}96 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}{(5536-1) \cdot 0{,}05^2 + 1{,}96^2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5} = 385{,}189$$

Polo tanto necesitabamos unha mostra mínima de 386 persoas que aumentamos ata as 500 e repartimos en estratos por franxas de idade da forma seguinte:

	[0,9]	[10,19]	[20,29]	[30,39]	[40,49]	[50,59]	[60,69]	[70,79]	[80,-)	Totais
Mugardos	368	353	573	895	758	782	731	673	403	5536
Mostra	33	32	52	81	68	71	66	61	36	500

3.4.- TRABALLO DE CAMPO

Despois de preparalo todo, baixamos ao pobo unha mañá de mercadiño para realizar algunhas enquisas, nas que, ademais de preguntar a primeira cifra da idade, faciamos a pregunta: “*cal destes catro é o rectángulos que máis che gusta?”*.

En primeiro lugar fomos ao colexio para cubrir a franza de idade dos máis novos, logo ao concello, ao centro médico -era día de Sintrón- e ao mercado. A maioría da xente respondeu sen problemas, aínda que soían asustarse ao escoitar que a enquisa tiña relación coas matemáticas e a arte.

Aquel día, volvemos ao centro con máis de 300 respostas, coas que puidemos comezar a traballar, aínda que nos faltaban case 200 para conseguir o noso obxectivo.

Nos días seguintes, intentamos entrevistar a máis persoas, esta vez por separado e tratando de conseguir o número de persoas que faltaban de cada grupo de idade. Recollemos tamén datos no Rastriño Solidario que montou o instituto na vila.

Como resumo temos que mencionar o complicado que resulta atopar xente entre 20 e 30 anos ou maiores de 70 unha mañá calquera en Mugardos durante a semana, os primeiros porque non teñen alternativas de traballo e estudo na vila e os segundos porque están nas súas casas cando o tempo é chuvioso, como sucedeu no mes de abril cando se realizou o traballo de campo. Sabemos que deberiamos esforzarnos máis por atopar aos de 20 a 30 anos, porque podemos atopalos na fin de semana pero ...non nos deixan saír de noite!

Finalmente conseguimos 581 entrevistas válidas. Esta é a nosa mostra co balance entre o que temos e o que queriamos ter, pódese observar que faltan 5 de idades entre 20 e 30 e faltan 30 maiores de 70.

MOSTRA

idades	mostra	queriamos	balance final
[0,10)	**51**	33	+18
[10,20)	**73**	32	+41
[20,30)	**47**	52	-5
[30,40)	**86**	81	+5
[40,50)	**104**	68	+36
[50,60)	**82**	71	+11
[60,70)	**71**	66	+5
[70,80)	**44**	61	-17
[80,-)	**23**	36	-13
Totais	**581**	500	+81

Estas son algunhas imaxes da realización de enquisas:

3.5.- TRABALLO INFORMÁTICO

Unha vez recollidas todas as enquisas necesarias, comezamos a traballar no ordenador. Dividimos o grupo en dous: unha parella redactaba un documento de texto no que incluía toda a información sobre o traballo e outra pasaba os datos das enquisas.

Pasados os datos comenzaron as ordenacións dos mesmos, os recontos e as gráficas. Como son bastantes datos os listados non os engadimos neste informe.

4.- RESULTADOS DA ENQUISA

Mostraremos os resultados da enquisa cos datos e gráficas nas que aparecen:

1.- Resultados xerais

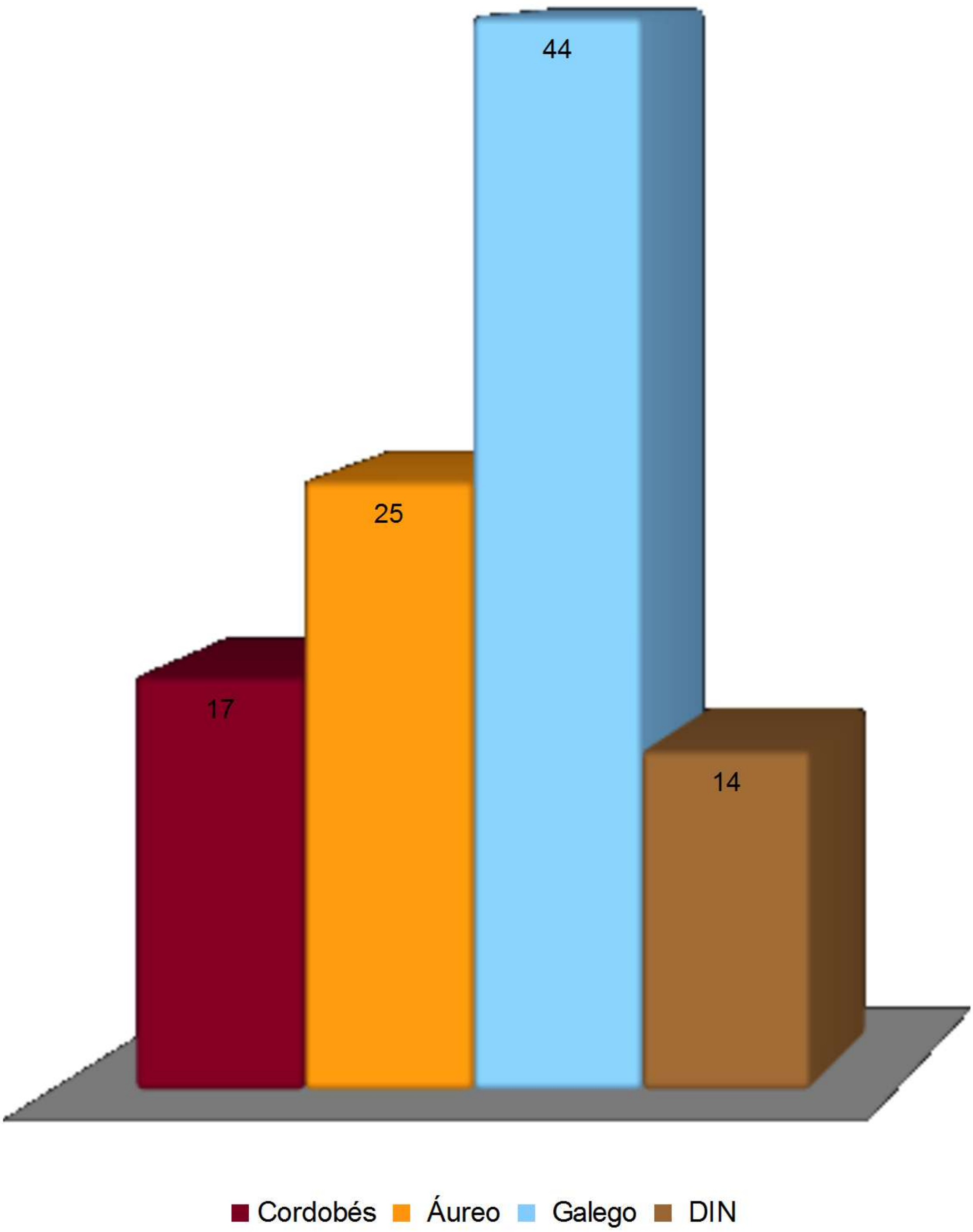
2.- Resultados por sexos

3.-Resultados por tramos de idade

Usaremos porcentaxes nas gráficas para unha mellor comparación.

4.1.- RESULTADOS GLOBAIS

	CORDOBÉS	ÁUREO	GALEGO	DIN	Total
Nº respostas	100	145	255	81	581
%	17	15	44	14	100

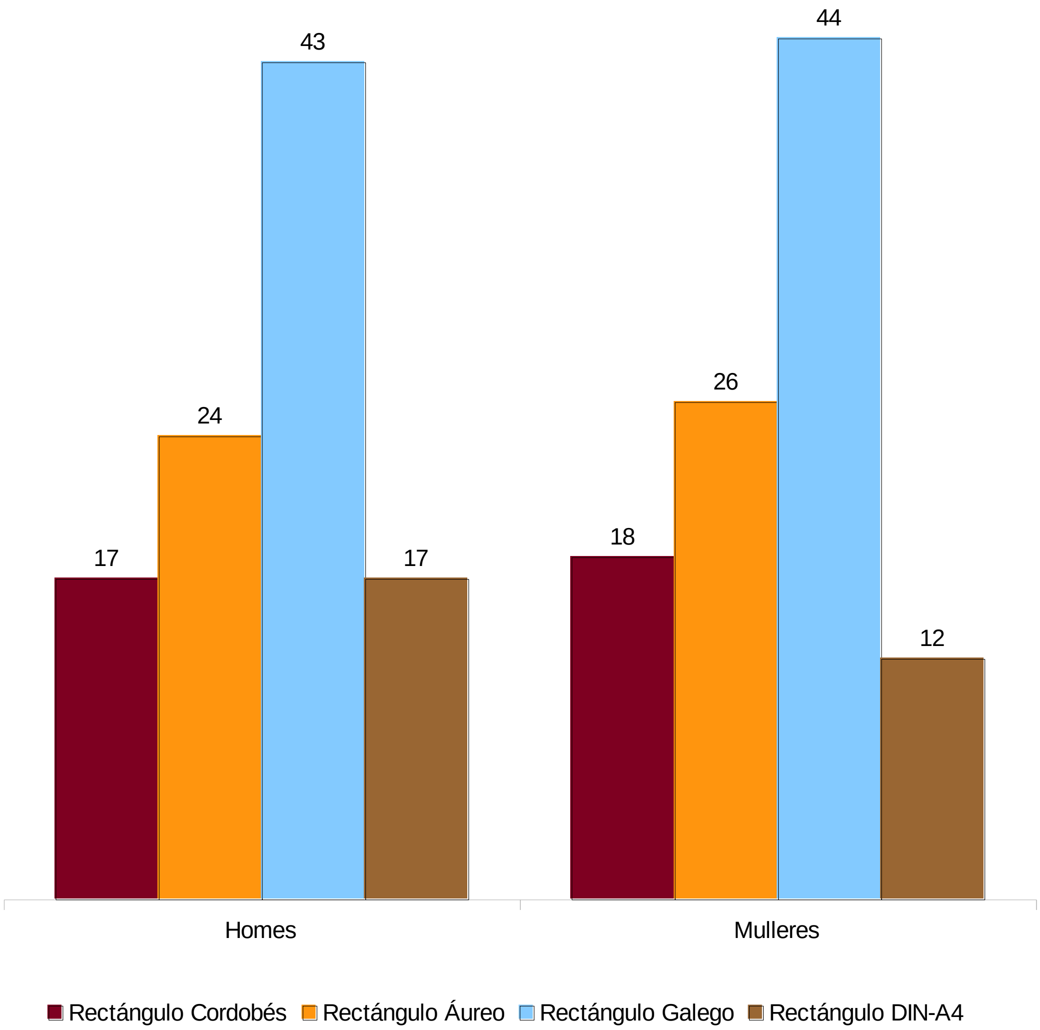


4.2.- RESULTADOS POR SEXOS

SEXO	CORDOBÉS	ÁUREO	GALEGO	DIN	Totais
HOMES	36	52	94	36	218
MULLERES	64	93	161	45	363

Porcentaxes

%	SEXO	CORDOBÉS	ÁUREO	GALEGO	DIN
40	HOMES	**16,5**	**24**	**43**	**16,5**
60	MULLERES	**18**	**26**	**44**	**12**



4.3.- RESULTADOS POR TRAMOS DE IDADES

Idades	nº persoas	Cordobés	Áureo	Galego	Din
[0,10)	51	6	14	23	8
[10,20)	73	15	20	25	13
[20,30)	47	7	15	17	8
[30,40)	85	15	22	38	10
[40,50)	104	16	22	56	10
[50,60)	82	15	23	33	11
[60,70)	71	14	12	32	13
[70,80)	44	10	9	20	5
[80,--)	24	2	8	11	3

Porcentaxes

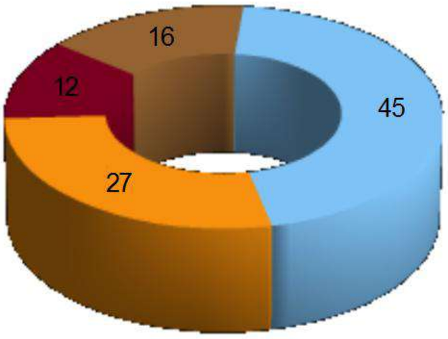
Idades	Cordobés	Áureo	Galego	Din
[0,10)	12	27	45	16
[10,20)	21	27	34	18
[20,30)	15	32	36	17
[30,40)	18	26	45	12
[40,50)	15	21	54	10
[50,60)	18	28	40	13
[60,70)	20	17	45	18
[70,80)	23	20	45	11
[80,--)	8	33	46	13

Clave de cores para as gráficas que veñen a continuación

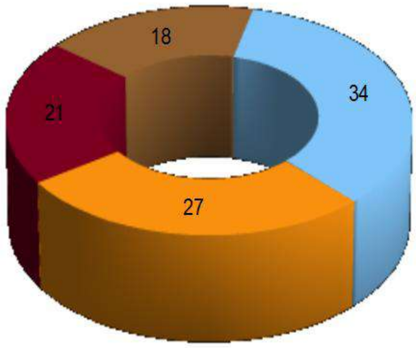
Rectángulo galego	
Rectángulo áureo	
Rectángulo cordobés	
Rectángulo din	

Gráficas por tramos de idade

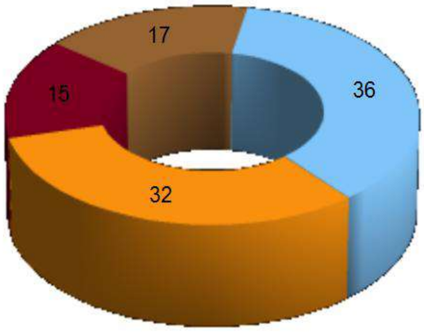
[0,10)



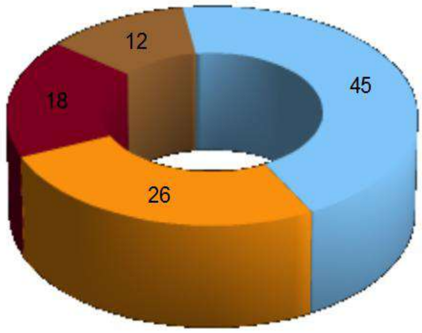
[10,20)



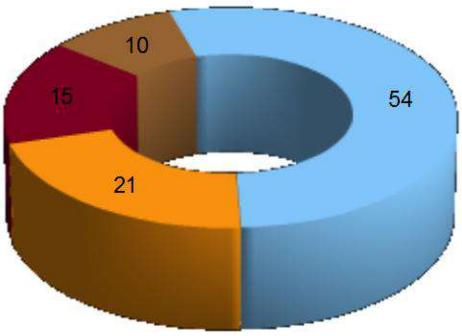
[20,30)



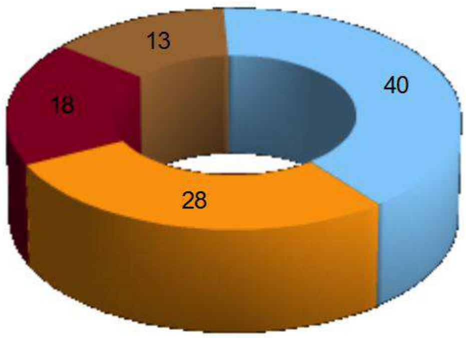
[30,40)

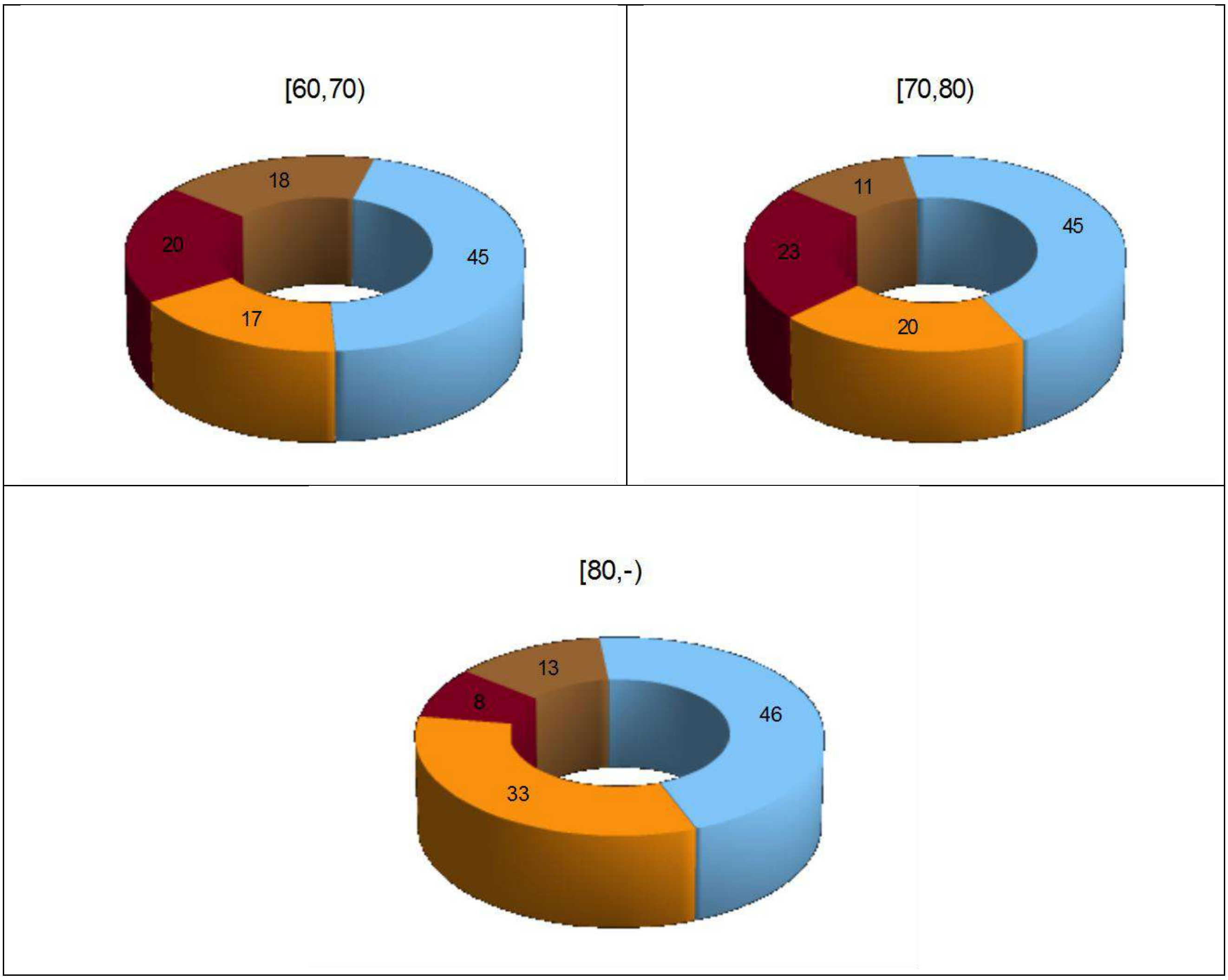


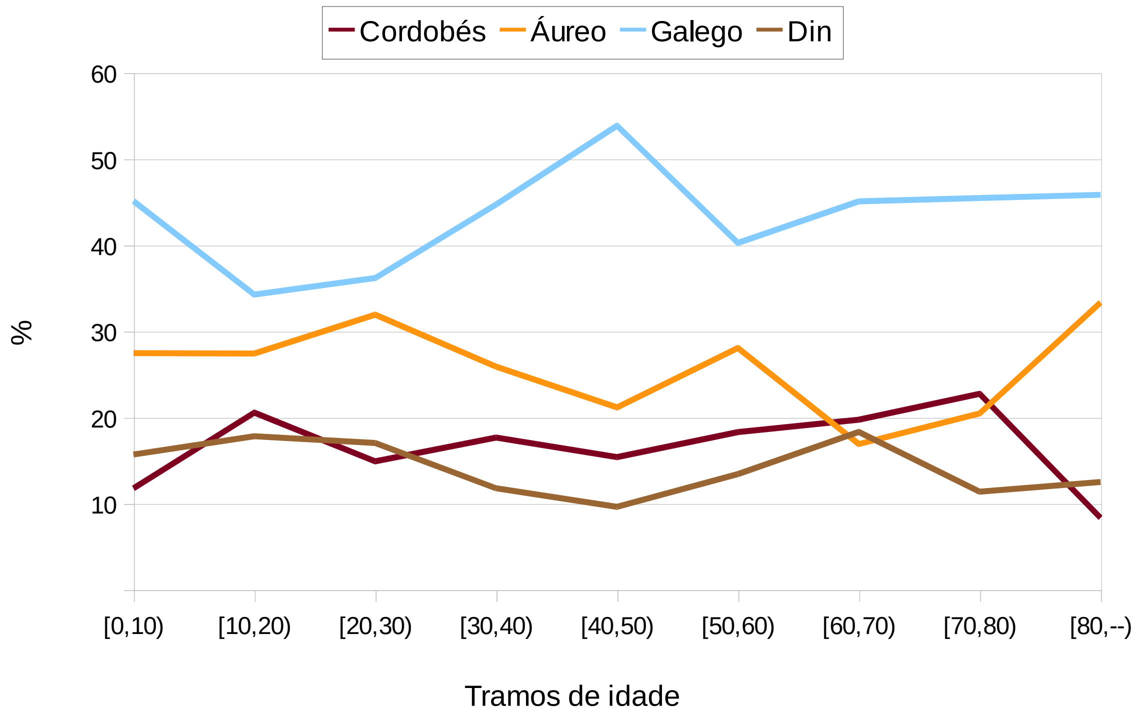
[40,50)



[50,60)




[60,70)
18
20
45
17
[70,80)
11
23
45
20
[80,-)
13
8
46
33


Cordobés
Áureo
Galego
Din
60
50
40
30
20
10
%
[0,10)
[10,20)
[20,30)
[30,40)
[40,50)
[50,60)
[60,70)
[70,80)
[80,--)
Tramos de idade

5.- CONCLUSIÓNS

Cando comenzamos este traballo non imaxinabamos o que logo aconteceu. Dun xeito irrefutable, con sorprendente uniformidade por sexos e tramos de idades, un mito estético como a *Divina Proporción* derrúbase na vila de Mugardos.

Nada nos fai pensar que esta vila ten gustos estéticos diferentes a outras vilas e cidades, ao contrario, Mugardos é un lugar no que se impulsan accións que melloran a formación estética da xente como os premios de pintura *Bello Piñeiro* e *Piñeiro Pose* que gozan de prestixio en Galicia, o proxecto educativo do IES de Mugardos *"Isto faino un neno"* que achegou a todos os estudiantes do concello a arte contemporánea, as clases do concello de debuxo e pintura con grande afluencia de alumnado, incluso existe algo tan curioso como unha activa sociedade cultural co nome *"Amigos da paisaxe galega"* no lugar de O Seixo.

Polo dito anteriormente atrevémonos a extrapolar os resultados obtidos en Mugardos aseguramos que existe un rectángulo que se alza coa coroa do reino estético dos rectángulos, **o rectángulo galego:** o *REI TÁNGULO*

Somos conscientes de que haberá presións para derrocalo, sabemos que o rectángulo 16:9 ten importantes apoios que tentarán facerse coa coroa estética, incluso sabemos que a *Divina Proporción* tentará voltar ao trono estético apoiada por unha parte importante da comunidade matemática, pero dende a vila de Mugardos esperamos que o *REI TÁNGULO* logre ter un longo **reinado.**

FICHA TÉCNICA

ÁMBITO: Municipio de Mugardos.
UNIVERSO: Poboación do concello de Mugardos.
TIPO DE ENQUISA: Entrevista directa.
TAMAÑO DA MOSTRA: 581 entrevistas.
SELECCIÓN DAS ENTREVISTAS: Selección aleatoria por cuotas de idade.
ERRO MOSTRAL: Cun nivel de confianza do 95,5% (dos sigmas), e P=Q como caso máis desfavorable, o erro é de ±5%.
DATAS DE REALIZACIÓN: Do 9 ao 23 de abril de 2012.
INSTITUTO RESPONSABLE: IES Mugardos. O Cristo s/n . 15624 Mugardos (A Coruña)
Tel: 981472074; Fax: 981470818. Correo electrónico:ies.mugardos@edu.xunta.es.
Internet: www.edu.xunta.es/centros/iesdemugardos/

A decadencia dun mito estético

O rectángulo de moda fala galego

ÍNDICE

Agradecementos:

A Rafael Lago

A Leticia Ogando

Aos compañeiros e compañeiras de 2º ESO B

Ao pobo de Mugardos.

A Isabel Seoane

En Mugardos a 14 de maio de 2012

Mercedes **Sara** **Covadonga** **Rubén** **Pedro**

Número

46

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática
ISSN 1698-677X

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

Número 46 (julio - octubre 2012)

ISSN – 1698-277X

ÍNDICE

Problema 222: Recibidas soluciones de Floro Damián Aranda Ballesteros, Córdoba (España); Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona (España), y Cristóbal Sánchez-Rubio, Benicassim (España). Presentamos la solución de Aranda.

Problema 223: Recibidas soluciones de Floro Damián Aranda Ballesteros, Córdoba (España); Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona (España), y Cristóbal Sánchez Rubio, Benicassim (España). Presentamos la solución de Sánchez-Rubio.

Problema 224: Recibidas soluciones (muy similares entre sí) de: Devis M. Alvarado, Mayagüez, Puerto Rico; Floro Damián Aranda Ballesteros, Córdoba (España); Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona (España), y Cristóbal Sánchez-Rubio, Benicassim (España). Presentamos la solución de Alvarado.

Problema 225: Recibida solución de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona (España), que presentamos.

Noticia de Congresos, reseña de libros y de páginas web 46

Posamentier, A.S. & Lehman, I: *The secrets of triangles. Prometheus Books 2012. Comentario de F. Bellot.*

Divertimentos matemáticos 46

Capturado en Internet (3)

In Memoriam: Prof. José Javier Etayo Miqueo (1926 – 2012)

por Francisco Bellot Rosado

El pasado 11 de septiembre falleció en Madrid el Profesor D. José Javier Etayo Miqueo, *Etayo padre,* como se le conocía entre los que fuimos sus alumnos, como cabeza de una saga de matemáticos. El número 93 del Boletín de la Sociedad *Puig Adam* de Profesores de Matemáticas será un número especial dedicado íntegramente a él, a su vida y su importante obra matemática. En la presente Nota Necrológica trataré de rememorar los recuerdos que yo tengo de quien fue mi profesor de Geometría Diferencial de 5º(1963), Presidente de mi Tribunal de Oposiciones a Cátedras de INEM (1966), y también, Presidente de la Real Sociedad Matemática Española entre 1976 y 1982.

El segundo trimestre del curso 1962-63 en la Facultad de Ciencias Exactas de Madrid comenzó con un nuevo Catedrático de Geometría: el Prof. Etayo Miqueo, procedente de la Universidad de Zaragoza, que se encargó de la asignatura de Geometría 5º, que cursábamos los que, salvo imprevistos, terminaríamos la carrera en Junio de 1963. Éramos 31, que aparecemos en la orla tradicional fotografiados en el inevitable estudio de Beringola, en la calle del Pez:

En las clases de Etayo aprendimos, entre otras muchas cosas importantes, (como claridad de exposición, exquisito trato a todos nosotros, rigor en los detalles *técnicos)*, lo que era de verdad una variedad diferenciable, un concepto que aparecía *definido* de la siguiente manera en un libro presuntamente de texto, extranjero por cierto, de cuyo nombre no tengo la menor intención de acordarme: *Una variedad diferenciable es un concepto muy complicado. Sea M una variedad diferenciable….*

La última vez que tuve el placer de saludarle, después de muchos años sin verlo, fue el 24 de marzo de este año 2012, en Santander, durante la Olimpiada Matemática Española en un acto en el que se le entregó la medalla de Oro de la Olimpiada, en justo reconocimiento a una de las personas que más ha hecho por esta competición, creada por la RSME durante la presidencia de D. Pedro Abellanas en 1964.

El Profesor Etayo fue un excelente profesor, pero además fue una persona generosa con sus estudiantes, justo en todo momento y un trabajador infatigable, si repasamos los numerosos cargos que sirvió, con dedicación y entrega: Vicedecano de la facultad de Ciencias de la Universidad Complutense (1971 – 1975), Secretario, Vicepresidente y Presidente de la Real Sociedad Matemática Española (entre 1960 y 1982), miembro del Comité Español de la Unión Internacional de Matemáticas (1970-1985), …

Su ejemplo y su recuerdo permanecerá siempre entre quienes tuvimos el privilegio de conocerle. Descanse en Paz.

Valladolid, 23 de noviembre de 2012.

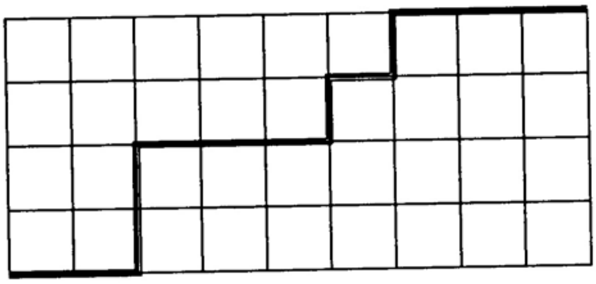
UNA PRIMERA LECCIÓN DE COMBINATORIA

Francisco Bellot Rosado

Seminario de Problemas, Valladolid, 16-17 de octubre de 2012

Algunas formas de explicar cuestiones de Matemáticas, expuestas por buenos profesores, te impresionan de tal forma que, desde que las ves, las utilizas de manera sistemática. Eso me ocurrió en octubre de 1964, cuando tuve el privilegio de seguir, siendo su alumno becario, el desarrollo de la Combinatoria presentado en el Instituto "Cervantes" por el Profesor D. José Ramón Pascual Ibarra.

Para empezar, un problema...



La figura sobre estas líneas representa idealizado el plano de una ciudad, con manzanas de casas exactamente iguales. Se pretende ir del vértice inferior izquierdo al superior derecho, por las calles, y de manera que el camino recorrido tenga longitud mínima. ¿Cuántos caminos de estas características hay?

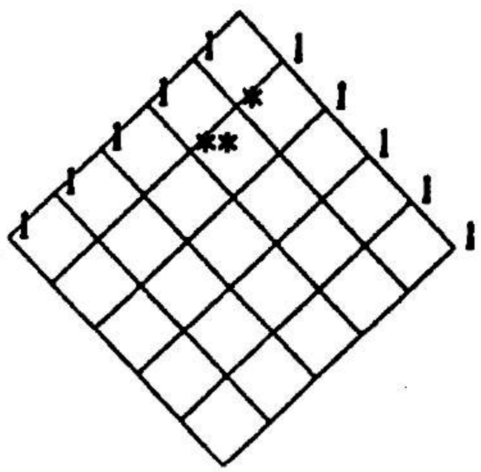
(La exigencia de ser de longitud mínima implica en este caso que solamente se pueda ir, horizontalmente, de izquierda a derecha; y verticalmente, de abajo a arriba).

Se observa fácilmente que los caminos posibles tienen todos 4 tramos verticales y 9 horizontales. Pero llegar a saber cuántos son no parece demasiado sencillo (si no se conoce el problema, naturalmente).

¿Serán más o menos de 100 los caminos? *(Podemos hacer una votación...)*

Al cabo de unos momentos, se puede sugerir a los alumnos que sigan el consejo de Pólya: *Si un problema plantea una* *situación muy complicada, estúdiese el mismo problema en un contexto más sencillo...*

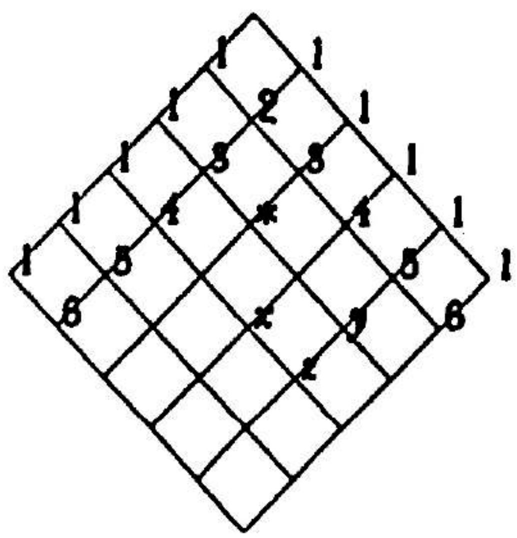
La figura siguiente está tomada de un libro de Pólya, *Notes on Introductory Combinatorics.*



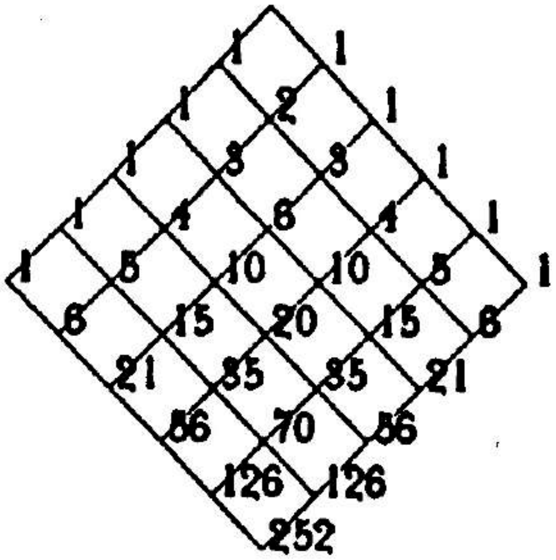
Por conveniencia hemos dispuesto la figura con otra orientación, y ahora se trata de hallar el número de caminos que van del vértice superior al inferior del cuadrado.

¿Cuántos caminos llevan al vértice marcado con un asterisco? ¿Y con dos?

Compliquemos la figura un poco más:



Hasta que, finalmente, la completamos :

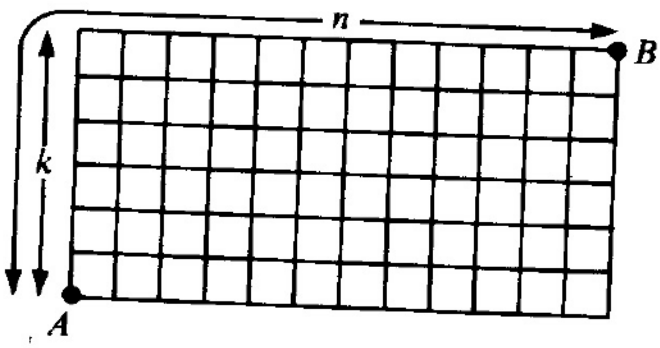


Si aplicamos el procedimiento descrito al problema original, obtendríamos 715 caminos: demasiados para dibujarlos todos y contarlos después.

Este primer ejemplo pertenece a lo que se llama *Combinatoria enumerativa,* o si se quiere, al *Arte de contar sin enumerar.* A continuación trataremos de profundizar un poco más en lo que hay *detrás* del problema.

Nomenclatura

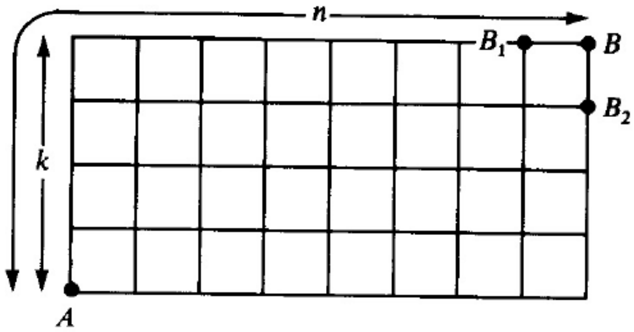
Imaginemos, como se indica en la figura siguiente, que se tiene de nuevo un rectángulo en su posición normal, con caminos que constan de *n* segmentos, de los que *k* de ellos van *hacia arriba:*



Sería importante disponer de una fórmula que permitiera calcular el número de caminos, en función de k y de n, para no tener que repetir el procedimiento *pedestre,* pero eficaz, empleado para el cálculo en los casos particulares. Por lo de pronto vamos a utilizar el símbolo siguiente para representar ese número:

$$C_k^n = \binom{n}{k}.$$

La C no es exactamente por "caminos", pero viene bien en esta ocasión. El símbolo de la derecha lo leemos como *"n sobre k".*



Es evidente, según la figura anterior, que el número de caminos mínimos para ir de A a B es la suma de los que van desde A a B_1 más los que van desde A a B_2.

Con la notación que hemos elegido, hemos llegado a

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

Esta igualdad es lo que se llama una *fórmula de recurrencia;* para calcular el valor del primer miembro necesitamos conocer todos los valores anteriores (es lo que hemos hecho antes para calcular el número de caminos).

Si $k=0$, el rectángulo se reduce a un segmento horizontal de longitud n. Para ir de un extremo a otro solamente hay un camino, lo cual se puede expresar mediante

$$\binom{n}{0} = 1.$$

Si el segmento fuera vertical con $k=n$ también tendríamos un único camino, de modo que

$$\binom{n}{n}=1.$$

Estas dos son las <u>*condiciones iniciales*</u> de la recurrencia.

Por otro lado, con la interpretación de los caminos que estamos haciendo, se ve que también se verifica

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k},$$

porque eso es tanto como decir que giramos el rectángulo 90º alrededor de un vértice: los tramos horizontales antes, ahora son verticales.

Los números $\binom{n}{k}$ reciben el nombre de *coeficientes binomiales o números combinatorios*. Si observamos los números que van apareciendo al calcular los caminos, pero sin la cuadrícula, obtenemos el llamado *triángulo aritmético, triángulo de Tartaglia o triángulo de Pascal:*

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

Del que, naturalmente, sólo podemos mostrar una parte, porque tiene infinitas filas.

El nombre coeficientes binomiales se debe a que son los coeficientes que se obtienen cuando se calcula el desarrollo de

$$(1+x)^n,$$

para valores de *n=0,1,2,3,...* como se comprobará dentro de poco.

Una expresión explícita para los coeficientes binomiales

La definición clásica de $\binom{n}{k}$ es la de contar el número de subconjuntos con k elementos de un conjunto que tiene n elementos (no se permiten repeticiones, por eso hablamos de conjuntos). No se considera, tampoco, el orden en que aparezcan los elementos.

El siguiente procedimiento para obtener explícitamente n sobre k en función de n y k está tomado de otro excelente libro: *A First Course in Discrete Mathematics,* de Ian Anderson (Springer, 2000).

Supongamos que hemos de elegir un equipo de k jugadores de un grupo de n personas, uno de los cuales será el capitán. Esto se puede hacer eligiendo primero el equipo – y hay $\binom{n}{k}$ formas de hacerlo – y luego elegir el capitán – y hay k maneras de hacerlo. Luego en total tenemos $k\binom{n}{k}$ maneras de conseguirlo. Pero, en vez de eso, podemos primero elegir el capitán – y hay n formas de hacerlo – y después elegir al resto del equipo – y hay $\binom{n-1}{k-1}$ formas, con lo que en definitiva tenemos de este otro modo $n\binom{n-1}{k-1}$ equipos posibles con su capitán. Es decir, que se tendrá que cumplir

$$n\binom{n-1}{k-1}=k\binom{n}{k},$$

con lo que

$$\binom{n}{k}=\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}.$$

Reiterando el procedimiento obtenemos

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} = \frac{n}{k}\cdot\frac{n-1}{k-1}\binom{n-2}{k-2}$$

y continuando de este modo, llegaremos a

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} = \frac{n}{k}\cdot\frac{n-1}{k-1}\binom{n-2}{k-2} = \cdots = \frac{n(n-1)\cdots(n-(k-2))}{k\cdot(k-1)\cdot\cdots 2}\binom{n-(k-1)}{1}$$

y como $\binom{m}{1} = m$, se tiene la fórmula explícita que buscábamos:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+2)(n-k+1)}{k\cdot(k-1)\cdot\cdots 2\cdot 1}.$$

El razonamiento anterior es una buena muestra de lo fructífero que puede ser contar la misma cosa de dos maneras distintas.

Esta fórmula se puede escribir de una manera más compacta si utilizamos el concepto de *factorial* y su correspondiente símbolo.

Si n es un entero mayor que 0, se define el *factorial de n* y se representa por *n!* al producto de los n números enteros que van de 1 a n:

n! = n(n-1)(n-2)...3.2.1

Si n = 0, para que las dos condiciones iniciales de la recurrencia anterior sigan valiendo, se admite por convenio que 0! = 1.

Utilizando los factoriales, la fórmula para n sobre k se escribe como

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Si esta expresión se toma como definición, es posible demostrar la relación de recurrencia de los coeficientes binomiales haciendo operaciones en el segundo miembro de dicha recurrencia.

La fórmula del binomio de Newton

Como decíamos antes, observando el desarrollo de las potencias sucesivas de x + y obtenemos

$$
\begin{aligned}
&(x+y)^0 = 1\\
&(x+y)^1 = x+y\\
&(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2\\
&(x+y)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3\\
&\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

y los coeficientes son los términos de las diferentes filas del triángulo de Tartaglia. Vamos a demostrar que

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{n}y^n = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}x^{n-r}y^r \text{ , } (*)$$

que se conoce como fórmula del binomio de Newton.

Demostración

Es claro que $(x+y)^n = (x+y)(x+y)\ldots(x+y)$, donde hay n paréntesis.

Por lo tanto el coeficiente de $x^{n-r}y^r$ en el desarrollo final es el número de formas de obtener $x^{n-r}y^r$ cuando se multiplican los n paréntesis. Cada término del desarrollo es el producto de un sumando de cada paréntesis; por lo tanto $x^{n-r}y^r$ se obtiene tantas veces como podamos elegir *y* de r de los n paréntesis (y *x* de los n-r restantes). Pero esto es precisamente el número de maneras de elegir r de los n paréntesis, es decir, $\binom{n}{r}$.

Identidades combinatorias mediante el desarrollo del binomio

Entre la literatura matemática sobre Combinatoria está el casi exhaustivo *Combinatorial Identities,* de John Riordan (Krieger, 1968). En esta sección solamente veremos algunas identidades que se deducen con ayuda del binomio de Newton.

Haciendo en (*) x = y = 1 obtenemos

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n} = 2^n \text{ ,}$$

identidad que tiene una interpretación conjuntista: Un conjunto de n elementos tiene 2^n subconjuntos, incluyendo el conjunto vacío (que tiene 0 elementos) y el propio conjunto dado.

Haciendo en (*) x = 1, y = -1 obtenemos

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}=0 \quad (n>0)$$

Consideremos la identidad algebraica

$$(1+x)^n(1+x)^n=(1+x)^{2n}$$

que escribimos desarrollando ambos miembros

$$\left\{\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\cdots+\binom{n}{n}x^n\right\}\left\{\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\cdots+\binom{n}{n}x^n\right\}=\sum_{r=0}^{n}\binom{2n}{r}x^r .$$

Igualando los coeficientes de x^n en cada miembro de la identidad tenemos

$$\binom{n}{0}\binom{n}{n}+\binom{n}{1}\binom{n}{n-1}+\cdots+\binom{n}{n}\binom{n}{0}=\binom{2n}{n},$$

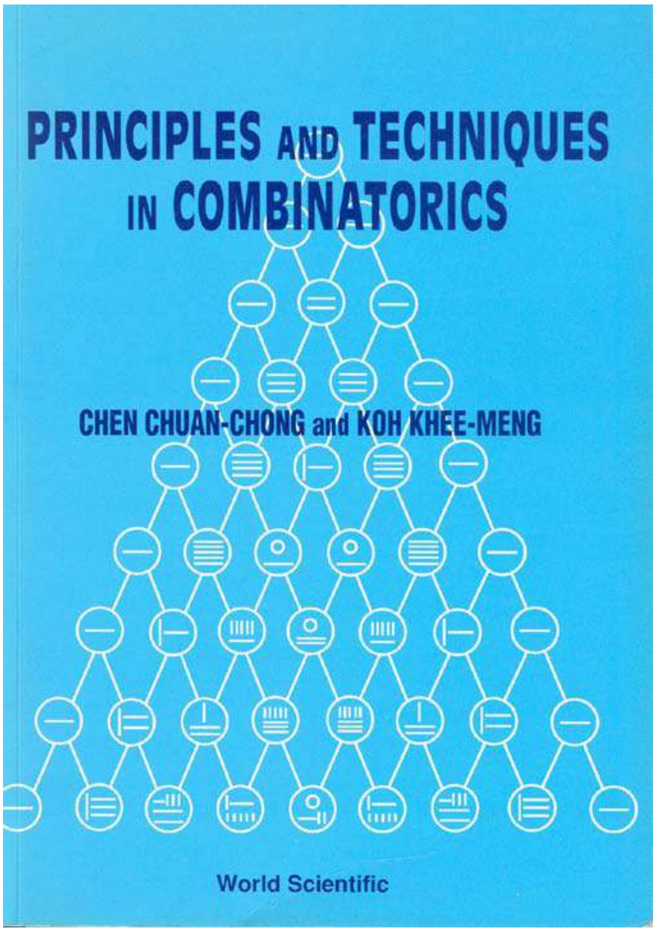
que se puede escribir, ya que cada sumando del primer miembro está formado por coeficientes binomiales *iguales*, en la forma (más sofisticada)

$$\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\cdots+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n},$$

y que es un caso particular de la llamada *identidad de Vandermonde.*

En otro libro clásico (y excelente) de Combinatoria, de *Chen y Koh, Principles and Techniques in Combinatorics, (World Scientific, 1992)* las identidades combinatorias ocupan buena parte de su capítulo 2.

Como curiosidad, la portada de este libro muestra el triángulo aritmético en chino:



El número de soluciones de algunas ecuaciones en enteros no negativos y su relación con la enumeración combinatoria

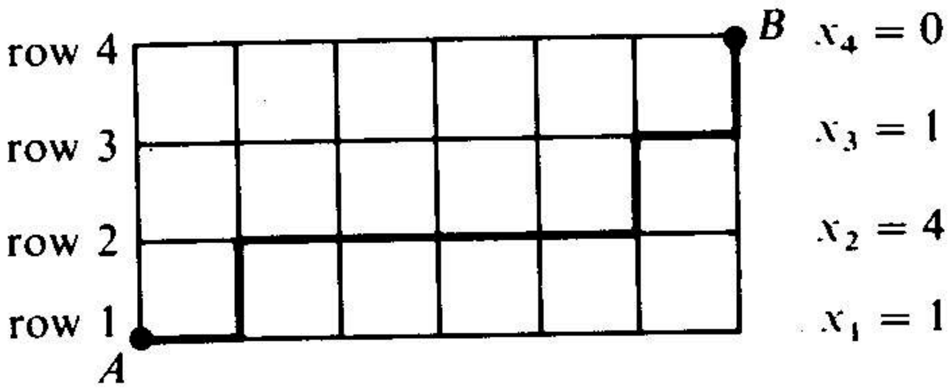
¿Cuál es el número de soluciones enteras no negativas, de la ecuación

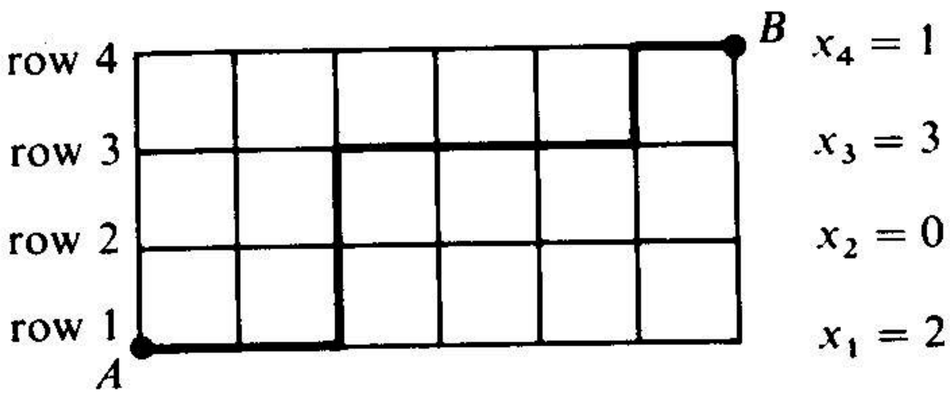
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6\text{?}$$

¿Y el de la ecuación

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n?$$

De los varios métodos para resolver este problema elegimos buscar caminos en un retículo rectangular. Por razones que en seguida aparecerán, elegimos un retículo con 4 calles horizontales y seis movimientos hacia la derecha, como se ilustra en la figura siguiente:





Si el número de movimientos en la fila i es x_i, las dos imágenes ilustran dos de las soluciones de la primera ecuación. Claramente hay una correspondencia biunívoca entre los caminos mínimos y las soluciones de la ecuación, y por consiguiente el número de soluciones coincide con el de caminos, que en nuestro caso es $\binom{9}{3} = 84$.

En el caso de la segunda ecuación, la cuadrícula debe tener k calles horizontales y n movimientos hacia la derecha. Un camino mínimo en este caso tiene *n+k-1* movimientos, de los que cualesquiera k-1 deben ser hacia arriba. Por lo tanto el número de soluciones es $\binom{n+k-1}{k-1}$.

La siguiente tabla muestra el número de formas de elegir k objetos de entre n, según que se permitan o no repeticiones y se considere o no el orden:

Elegir k de entre n	ordenados	No ordenados
Sin repeticiones	$\frac{n!}{(n-k)!}=n(n-1)\cdots(n-k+1)$	$\binom{n}{k}$
Con repeticiones	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$

De izquierda a derecha, y de arriba abajo, las cuatro expresiones de la tabla cuentan el número de las *variaciones sin repetición, combinaciones sin repetición, variaciones con repetición y combinaciones con repetición, de n elementos, tomados de k en k.*

Permutaciones con repetición y coeficientes multinomiales

El ejemplo que sigue es del libro de Pólya, antes citado.

Sean n casas iguales. Se van a pintar, r de ellas de rojo; s de ellas de amarillo y las restantes t, de verde. ¿De cuántas maneras se pueden asignar colores a las casas?

Primero elegimos las que serán pintadas de rojo: hay $\binom{n}{r}$ maneras de elegirlas; quedan n – r casas, de las que s van a ser pintadas de amarillo, para lo que hay $\binom{n-r}{s}$ formas de elegirlas; y ya no hay más que una forma de elegir las que quedan, que serán verdes, ya que $n=r+s+t$. Por la regla del producto, en total tendremos $\binom{n}{r}\binom{n-r}{s}$ formas de pintar las casas. Se tiene

$$\binom{n}{r}\binom{n-r}{s}=\frac{n!}{r!(n-r)!}\cdot\frac{(n-r)!}{s!(n-r-s)!}=\frac{n!}{r!s!t!}$$

que es simétrica con respecto a r, s y t, como no podía ser menos, pues el problema original lo es.

Esta expresión cuenta el número de *permutaciones con repetición de n elementos, de los que r son iguales entre sí, s son iguales entre sí y t son iguales entre sí, con r+s+t=n.* Para ese número se utiliza la notación

$$\binom{n}{r \quad s \quad t} = \frac{n!}{r!s!t!}$$

que recibe el nombre de *coeficiente multinomial.*

Un segundo ejemplo, tomado del libro de Victor Bryant *Aspects of Combinatorics (Cambridge U.P. 1993):*

¿Cuántos números de 10 cifras se pueden formar escribiendo, en algún orden, las cifras 4,4,4,4,3,3,3,2,2 y 1?

Supongamos, por un momento, que las cifras fueran todas distintas, por ejemplo pintando los cuatros con 4 colores diferentes, los treses con tres colores diferentes y los doses con 2 colores diferentes. Entonces tendríamos 10! números, muchos de ellos repetidos si no se tuviera en cuenta los colores. Si los cuatros los barajamos entre sí, de todas las maneras posibles, hay 4! números que, cuando dejemos de imaginar los números coloreados, dan lugar al mismo número. Por lo tanto después de esto hay $\frac{10!}{4!}$ números donde ya no es posible distinguir los cuatros. Repitiendo el razonamiento con los treses llegamos a $\frac{10!}{4!3!}$ números con los 4s y 3s indistinguibles. Y repitiéndolo con los doses hay $\frac{10!}{4!3!2!}$ números con 4s,3s y 2s indistinguibles. Como solamente hay una cifra 1, este número coincide con $\frac{10!}{4!3!2!1!}$, es decir, 12600 números en las condiciones del problema.

Otra forma alternativa de resolver el problema es la siguiente: Se eligen 4 posiciones de entre las diez disponibles para colocar los cuatros: esto se puede hacer de $\binom{10}{4}$ maneras; a continuación, las tres posiciones para los treses de entre las seis que quedan: $\binom{6}{3}$ maneras; luego las dos posiciones para los doses de entre las tres que quedan, lo que da $\binom{3}{2}$ maneras; y finalmente, en la única posición que todavía falta, se coloca el 1: $\binom{1}{1}$ manera. El principio de la multiplicación (o de *los pastores*) da el resultado final:

$$\binom{10}{4}\binom{6}{3}\binom{3}{2}\binom{1}{1}=12600\,.$$

En general, si $r \geq 2$ y $k_1, k_2, \cdots, k_r$ son enteros positivos cuya suma es n, entonces el número de formas de colocar n cosas en r cajas, con k_1 cosas en la primera caja, k_2 en la segunda, ... , k_r en la r-ésima se representa mediante

$$\left(\begin{matrix} & & n & & \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_{r-1} & k_r \end{matrix}\right)=\frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_r!}$$

que es el coeficiente multinomial. La justificación en este caso general de la fórmula anterior es la misma que la empleada antes en el ejemplo.

Los coeficientes multinomiales aparecen en la llamada *fórmula de Leibniz para la potencia de un polinomio:*

$$\left(a_1+a_2+\cdots+a_r\right)^n=\sum_{k_1+\cdots+k_r=n}\left(\begin{matrix} & & n & & \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_{r-1} & k_r \end{matrix}\right)a_1^{k_1}\cdots a_r^{k_r}$$

en donde la suma se extiende a todos los k_i mayores o iguales que 0 cuya suma es n. El argumento para justificar la fórmula de Leibniz es el mismo que el empleado en la demostración de la fórmula de Newton, *mutatis mutandis*, y no lo repetimos.

Bibliografía

Anderson, I. ***A first Course in Discrete Mathematics*** *(Springer, 2001)*

Briant, V. ***Aspects of Combinatorics (A wide-ranging introduction)*** *(Cambridge U.P. 1993)*

Chen,C-C & Koh, K-M. ***Principles and Techniques in Combinatorics*** *(World Scientific, 1992)*

Pólya, G. & Tarjan,R. & Woods,D. ***Notes on Introductory Combinatorics*** *(Birkháuser, 2010)*

EL DESAFÍO DE ENSEÑAR ÁLGEBRA LINEAL POR COMPETENCIAS

Claudia GUZNER[1]

Resumen: La idea central es que el aprendizaje y la enseñanza de la Matemática no se limita a una absorción individual y memorizada de un cuerpo fijo de conceptos descontextualizados y de habilidades procedimentales transmitidas por el profesor, sino que es una construcción colaborativa, de conocimiento significativo y útil, que incluye habilidades de resolución de problemas, que articulan los ambientes cercanos al alumno. A la luz de esta reflexión, este trabajo tiene por finalidad mostrar cómo presentar los contenidos secuencialmente, con el objeto de orientar su profundización, ampliación y aprendizaje; a la vez que contemplar las posibilidades cognoscitivas y afectivas de los estudiantes; atendiendo a la articulación horizontal y vertical para un tratamiento de temáticas que requieren la integración de conceptos provenientes de diversas áreas.

Palabras claves: competencia, aprendizaje, enseñanza.

Si se conviene que la enseñanza es una práctica social que consiste en la mediación entre un sujeto que aprende y un contenido a aprender, queda claro que tanto alumnos como docentes son actores del proceso, cada uno con roles propios y complementarios. Juntos procurarán llegar a una construcción colaborativa de conocimiento significativo, para lo cual habrá que articular ambientes cercanos a los sujetos, enfrentándolos a situaciones nuevas en escenarios auténticos de la vida real, permitiéndoles caracterizar aquello que saben hacer en realidades simuladas o auténticas. Enseñar/ aprender no es identificar aquello que los estudiantes aún no han logrado o les falta sino más bien es conectar entre sí los "saberes" construidos en un sistema jerárquico de interrelaciones o red de significaciones que favorezca un uso creativo y flexible de aquello que se conoce.

Así es que toda propuesta pedagógica deberá enfatizar el saber y el saber hacer en el mismo acto de enseñanza y aprendizaje (Dolz, J. & Ollagnier 2000). Todo esto en un marco de formación integral, en el cual cada individuo se comprometa y responsabilice por su propio aprendizaje y el de sus pares, a partir del intercambio y confrontación de ideas, opiniones, experiencias, en un marco de mutuo respeto.

Queda claro que la oferta educativa tradicional, centrada en la teoría y el saber técnico-conceptual, que sólo propicia una desarticulación entre aquella, la prospección y la práctica, no responde a la mencionada concepción, que persigue que las personas se relacionen con el cómo es o cómo se hace algo a la vez que con el querer hacerlo.

En este contexto, si la *competencia* es un conocimiento que se expresa en un saber hacer o actuar frente a tareas que plantean exigencias específicas (Thierry García, 2001), que supone

[1] Mgter.; Universidad nacional de Cuyo, Argentina; cguzner@frm.utn.edu.ar

conocimientos, saberes y habilidades que emergen en la interacción que se establece entre el individuo y una determinada situación, se propone el *aprendizaje basado en competencias* como un paradigma que promueve más de una estrategia, sin prescribir, sugerir o recomendar, a fin de que el aprendiz no pierda ese espacio de libertad fundamental que permite la acción y su involucramiento profundo en la experiencia educativa planteada.

La educación superior en general, y la matemática en particular, no es ajena a estos planteos. A la luz de las reflexiones previas, este escrito pretende mostrar cómo presentar -en esos ámbitos- los *contenidos* del Álgebra Lineal, con el objeto de orientar su profundización, ampliación y aprendizaje, a la vez que contemplar las posibilidades cognoscitivas y afectivas de los estudiantes, atendiendo a la articulación horizontal y vertical para el tratamiento de temáticas que requieren la integración de conceptos provenientes de diversas áreas.

El escrito ha sido organizado en dos partes. La primera – Introducción – es un espacio de análisis y reflexión en el cual se delimita qué se entiende por *competencia* y por *competencia matemática* en el contexto de la presente investigación. La segunda – Resultados - describe algunas de las actividades que se llevan a cabo en un curso de Álgebra Lineal a nivel universitario en la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad Nacional de Cuyo – Mendoza, Argentina-. Finalmente se ofrecen las conclusiones.

1. Introducción: Competencias y competencias matemáticas

1.a Competencias

Se ha dicho que el conocimiento - Figura 1. - es el resultado de una movilización de recursos de índole diversa, asociados a la aparición de esquemas organizados de "*saber, saber hacer y saber ser*".

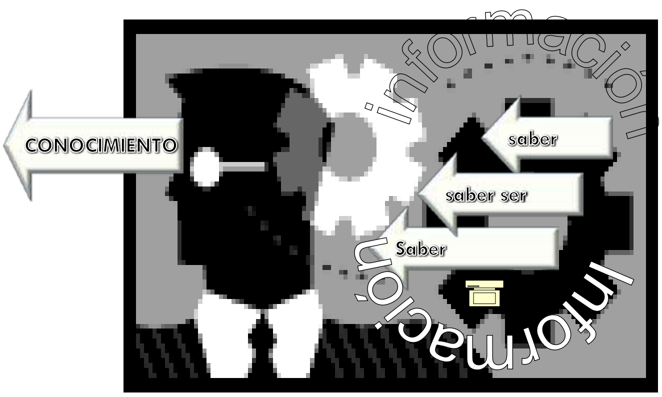


Figura 1. Construcción del conocimiento

Esta visión, que adhiere a la idea del conocimiento no sólo como sinónimo de la aprehensión de un cuerpo rígido de contenidos disciplinares (Delors, 1996), es lo que se conoce como "*aprendizaje por competencias*".

El enfoque tiene una visión global de la situación de aprendizaje y, por tanto, del acto de aprendizaje, el cual, en este contexto, se manifiesta en términos de una combinación de atributos (conocimientos, aplicaciones, capacidades y responsabilidades) que describen el nivel o grado de competencia con que una persona es capaz de utilizarlos (González y Wagenaar, 2003).

Desde una perspectiva estrictamente conceptual (Guzner, 2010), hablar de competencias supone referirse a la capacidad del sujeto que aprende a fin de movilizar los recursos que ha adquirido para afrontar y resolver una situación problema –intra o inter disciplinar-. Involucra, en principio, la selección, movilización y combinación de un conjunto de:

- “conocimientos teóricos”, asociados a criterios de ejecución o desempeño (niveles de dominio) - con los cuales se puede reproducir, decir el qué es, el cómo es, el cuándo acerca de un objeto,
- “habilidades”, como resultado de un proceso de integración que habilita contestar para qué es, cómo se usa ese objeto.

Estas dos cuestiones refieren tanto a la naturaleza específica de un campo disciplinar - o a elementos comunes a cualquier outro-, así como a las capacidades de aprender, de pensar de forma creativa, de tomar decisiones, de resolver problemas, de usar la imaginación, por mencionar algunos. Todo esto sin dejar de lado a cualidades personales como la responsabilidad, la autoestima, la sociabilidad, el autocontrol y la integridad (Goody, 2001).

Estas características delimitan las diferentes dimensiones de la *competencia* -Figura 2. -.

SABER ⇒
- conocimiento de un campo disciplinar independientemente de la estructura cognitiva,
- abstracción o conceptualización para obtener nuevos conocimientos a partir de los conocimientos previos;

SABER HACER ⇒
- movilizar el saber y la experiencia en un contexto particular,
- integrar o combinar saberes múltiples y heterogéneos,
- analizar, sintetizar, inferir;

SABER SER ⇒
- afrontar la vida con ciertas actitudes y valores, dando sentido a las otras dos dimensiones de la competencia,
- aprender, aprender a aprender,
- comprometerse.

Figura 2. Dimensiones de la competencia.

Así es que la educación basada en competencias se concibe como un modelo abierto que incluye diferentes campos semánticos de los conceptos y procedimientos, así como la reelaboración del conocimiento aprendido en situaciones nuevas, que conduce, a diferencia de los regímenes que promueven una estrategia única, a nuevos significados y a nuevas interpretaciones.

Hacia el interior de las instituciones educativas, la incorporación de este tipo de aprendizaje conlleva considerar implicancias curriculares, didácticas y evaluativas:

a) curriculares, ya que el diseño del currículo no ha de estar orientado sólo al contenido entendido como una cuestión disciplinar - como tradicionalmente se hace -, sino que implica una profunda refuncionalización de lo que se enseña o se espera que se les enseñe a los sujetos, de forma explícita e implícita -Figura 3 -.;

Figura 3. Clasificación de contenidos.

b) didácticas, porque la escolarización no se reduce ya más al contacto con "contenidos de aprendizaje", sino que es la integración significativa de esos contenidos lo que le da sentido;

c) evaluativas, porque el proceso de evaluación transita desde una evaluación por logros hacia una evaluación por procesos, en la cual no se evalúa un resultado aislado, circunstancial, sino todo el proceso de aprendizaje, en un contexto, con determinados sistemas simbólicos, atento a la motivación y desarrollo cognitivo propios de cada sujeto.

Esta concepción provoca cuestionar la formación docente actual, la cual, a la luz de este nuevo paradigma, debería centrarse en lograr una mayor conexión entre los contenidos del currículo escolar y las prácticas docentes que revaloricen la gestión del saber.

La educación basada en competencias - que está estrechamente vinculada con el principio de la comprensión empleada por la escuela de Gardner, en el que la prueba de comprensión no implica ni la repetición de la información aprendida, sino que incluye una aplicación adecuada de los conceptos y principios a problemas que se presentan por primera vez - apunta, como se dijo, a integrar al estudiante en un ambiente de aprendizaje situado en campos acordes a su desarrollo integral como persona.

1.b Competencias matemáticas

Las consideraciones anteriores no son ajenas a la educación matemática. Una sociedad tan cambiante como el actual exige que los ciudadanos posean una cultura matemática básica que les permita, entre otras cosas, abordar exhaustivamente la evolución de la ciencia y las nuevas tecnologías.

Esta nueva realidad hace que, hacia el interior de la comunidad de educación matemática, se comience a tomar consenso que el aprendizaje de la disciplina es un proceso dinámico que tiene lugar en diferentes niveles: cada *saber* se basa en un *saber* anterior, los individuos, sobre núcleos problemáticos que integran su experiencia y su propia reflexión, construyen los nuevos conceptos y las vinculaciones que le dan sentido y aplicabilidad.

En consonancia la enseñanza –de la disciplina- también comienza a revisarse. Se pasa de metodologías transmisionistas, centradas en la figura del profesor como presentador de contenidos en compartimentos estancos, a metodologías centradas en el alumno, que privilegian la solución de problemas por ellos vivenciados, tanto al interior de la matemática misma, como en otras disciplinas (Guzner, Schilardi et. al, 2010).

En este sentido, varios son los autores que dan cuenta que la formación por competencias es un tema coyuntural en el debate académico. El enfoque conceptual y teórico subyacente en el paradigma marca la diferencia entre el contenido enseñado o transmitido: como se dijo, es un modelo abierto que incluye, por un lado, distintos campos semánticos de los conceptos, procedimientos y objetos matemáticos, y, por el otro, la reelaboración del uso aprendido en nuevas situaciones, que conducen a nuevos sentidos y nuevas interpretaciones.

Así es que las tres dimensiones nucleares mencionadas para la competencia en general –SABER, SABER HACER, SABER SER -, podrían identificarse con el reconocimiento significativo del objeto matemático, la potencia para su modelación en contextos diversos y su comunicación, entendida ésta como la interacción social desde la que se construye su significado. Tienen sentido sólo en función del conjunto, aunque se puedan explicitar por separado Su puesta en acto simultánea muestra que un sujeto es competente en matemáticas, son expresión de su competencia matemática. Aunque no explícitamente dicho, la operacionalización incluye dimensiones metacognitivas – deseo de explorar, investigar, profundizar- ligadas a la reelaboración de significados.

Figura 4. Operacionalización de la competencia matemática

Esta nueva cultura del aprendizaje depende en gran medida del modelo pedagógico que la escuela ofrece a sus alumnos, de los que se requiere, como se ha dicho, construir su propio conocimiento, rechazando actividades mecánicas basadas en esquemas rígidos. Pero también requiere que el docente, en su tarea diaria en el aula, realice importantes esfuerzos de forma tal de hacer este cambio posible.

2. RESULTADOS

2.a Propósito general

Teóricamente, adherir al enfoque en educación matemática, presupone abordar experiencias donde el alumno desarrolla su c*ompetencia* desde la memoria comprensiva, la potencia matemática y la funcionalidad del contenido en sentido amplio. Prácticamente, la implantación del modelo implica la discusión del qué, el cómo, el cuándo.

- Conocimientos?
- Capacidades?

⇒

- Por conceptos?
- Por problemas?

Qué comportamientos se espera provocar?

⇒

- En qué dominios?
- Con qué medios?
- Individualmente?
- Grupalmente?

Figura 5. Momentos de la competencia matemática.

Si lo que se espera es promover no sólo la actividad sino la reflexión sobre la actividad, queda absolutamente claro que la separación que se suele hacer entre “teoría y práctica” consecuencia metodológica de la tradición axiomática – deductiva en la enseñanza de la Matemática - la teoría se memoriza y la práctica se aplica-, de ninguna manera se ajusta al objetivo que se plantea.

Desde la perspectiva docente, la puesta en acto de estas ideas conlleva reflexionar sobre cuestiones relacionadas tanto con la propia praxis como con los procesos que activará un alumno para dar respuesta a la cuestión o cuestiones planteadas. De hecho, aunque estos dos asuntos puedan explicitarse separadamente, las especulaciones teóricas que al respecto se hagan tendrán sentido sólo en función del conjunto.

En cuanto a la primera –la praxis-, fundamentalmente, habrá que analizar, a nivel macro, si las acciones que se emprenden ubican al alumno en el centro de la escena didáctica, si a partir de

las situaciones que se ponen en juego el alumno moviliza sus propias acciones simbólicas y concretas y analiza sus producciones en un proceso individual o colectivo.
El docente deberá responder, entre otras, las siguientes preguntas:

- ⇒ se facilita la apropiación de las propiedades de los saberes involucrados?,
- ⇒ se ponen en juego criterios de ejecución?,
- ⇒ se promueve la ejecución de algoritmos?,
- ⇒ se impulsa la reorganización de datos y relación de estos con saberes previos?,
- ⇒ se potencia la capacidad de reconocer patrones que aportan a la resolución de un problema dado?,
- ⇒ se realiza tratamiento y traducción entre diferentes registros de representación semiótica?,
- ⇒ se analiza un enunciado, se comunican sus resultados?,
- ⇒ se conjetura, se argumenta, se valida?,
- ⇒ se escucha, se debate?

Respecto de las segundas –procesos que activan los estudiantes-, a nivel micro, habrá que observar qué posibilidades se ofrecen a los sujetos para ejecutar cuestiones relacionadas con el contenido conceptual abordado, el contexto al que se refiere y la forma en que se socializa.

Producir material educativo bajo esta nueva concepción de la educación es ciertamente un **desafío**. Por varias décadas, un número razonable de textos se han ofrecido que siguen la línea clásica del pensamiento matemático, donde la disciplina se enseña, secuencialmente, por medio de definiciones rigurosas, teoremas y demostraciones cuidadosamente detalladas y exhaustivas.

Esta modalidad no es acorde con la educación matemática del siglo XXI, donde el interés reposa en las formas de *ser y hacer* y en la cual, en consecuencia, los procedimientos deben ser desarrollados de forma tal que promuevan la autonomía de los sujetos, su pensamiento crítico y la cooperación entre ellos.

De acuerdo con las ideas anteriores, se puede decir que el diseño del material innovador para la enseñanza de matemáticas y el aprendizaje de la matemáticas implica dos aspectos: el didáctico y el tecnológico. Para el primero – el segundo de los aspectos está más allá del alcance del presente trabajo-, debe realizarse un sondeo preliminar que tenga en cuenta un análisis:

- epistemológico de los objetos matemáticos,
- de la educación tradicional y sus efectos,

- de las concepciones de los estudiantes, las dificultades y limitaciones que determinan su evolución,
- de las restricciones del campo de la efectiva realización,
- de la especificación de objetivos.

Una propuesta que privilegie el desarrollo de la competencia matemática de una manera significativa del concepto por aprender intentará que, a partir de una situación problema, el estudiante logre, por medio de la utilización de un concepto no formal, la idea de concepto.

2.b El caso particular

Como respuesta a esta descripción general, para el caso particular de la enseñanza del Álgebra Lineal a nivel universitario, se desarrolla un material (Guzner, 2011) especialmente orientado a las titulaciones en Ciencias Económicas. El texto toma como unidades de análisis los contenidos conceptuales mínimos que para esas carreras establece Facultad de Ciencias Económicas, Universidad Nacional de Cuyo, Mendoza, Argentina.

Figura 6. Contenidos conceptuales Álgebra Lineal.

Los contenidos, en sentido amplio, se gestionan a la manera de módulos de aprendizaje (Guzner, Del Vecchio, 2012), entendidos éstos como "… la unidad de enseñanza y aprendizaje con sentido completo, que integra los conocimientos, habilidades, destrezas y actitudes requeridas para el logro de una capacidad, a través del desarrollo de diversas experiencias y actividades complejas, que se relacionan con el contexto real del campo laboral". Cada uno de los módulos contempla cada una de las tres dimensiones de la competencia matemática, integradas en desempeños prácticos que muestran determinados niveles de logro en el desempeño.

La organización macro es por capítulos y la micro, por secciones. Hacia el interior de cada uno de ellas se recurre a diferentes registros de representación semiótica – lenguaje coloquial, lenguaje simbólico, lenguaje computacional, tablas-.

Asimismo, a medida que se avanza en el desarrollo, se retrotrae a saberes abordados en capítulos anteriores y se los trabaja a partir de los nuevos que se están aprendiendo, a fin de mostrar la coherencia interna del Álgebra Lineal. Cabe mencionar que cada sección finaliza con una serie de Ejercicios y Problemas, el primero de la lista una reflexión "algebraica" sobre la apertura de comienzo de capítulo. Los ejercicios, al igual que los ejemplos, se organizan en torno a las tres dimensiones de la competencia matemática.

Figura 7. Estructura de cada capítulo

Al finalizar completamente el abordaje, el usuario deberá estar en condiciones de extender el dominio y responder las siguientes preguntas:

⇒ ¿Estoy en condiciones de resolver el ejercicio?

⇒ ¿Estoy en condiciones de definir el concepto?

⇒ ¿Estoy en condiciones de distinguir entre... y ....?

⇒ ¿Estoy en condiciones de dar una conclusión?

⇒ ¿Estoy en condiciones de discutir las conclusiones?

⇒ ¿Estoy en condiciones de explicar el procedimiento?

⇒ ¿Estoy en condiciones retener la información adquirida?

A continuación se ejemplifica la reseña anterior en el caso particular del abordaje del contenido conceptual **Vectores en el Plano y en el Espacio**. La propuesta corresponde al Capítulo 3 de la mencionada obra (Guzner, 2012). A fin de dejar claro qué se quiere significar con *la reelaboración del conocimiento aprendido en nuevas situacion*es, se muestran en primer lugar las actividades de apertura de los capítulos previos – Matrices y Sistemas de Ecuaciones Lineales, Figuras 8. y 9. respectivamente-.

Al consultar http://mip.cba.gov.ar encontrará los sectores y subsectores en que se divide la economía de la provincia de Córdoba y las transacciones intersectoriales en miles de pesos corrientes a precios de mercado en un año dado.

…………………………………………………………………………………………………….

Si los sectores de la mencionada economía se agrupan sólo en tres: Sector I o PRIMARIO DE ACTIVOS EXTRACTIVOS, Sector II o MANUFACTURERO y Sector III o de SERVICIOS no stockeable, responda:

i. a qué sector de estos tres pertenecen los subsectores de 2.?
ii. el subsector ELECTRICIDAD, pertenece al Sector MANUFACTURERO?
iii. cómo se interpreta el siguiente cuadro de transacciones intersectoriales?

	SECTOR I	SECTOR II	SECTOR III
SECTOR I	2.392.169,32 4	2.758.564,737	284.330,6231
SECTOR II	290.720,717	2.414.017,046	1.350.511,12
SECTOR III	577.262,452	1.188.497,866	4.666.116,526

También se obtienen los siguientes datos, que representan, respectivamente, las demandas internas de

cada uno de los Sectores I, II y III : 11.396.905,7; 17.278.884,7 y 25.221.688,7.

iv. Construya un nuevo cuadro que incorpore estas cantidades.

v. Diga qué representan los valores: 16.831.970,4; 21.334.133,6 y 31.653.565,5; $\dfrac{290.720,717}{16.831.970,4}$.

vi. Responda qué representa el siguiente cuadro llamado matriz de *coeficientes técnicos*.

	0,142120576	0,129302872	0,008982578
	0,017271936	0,113152805	0,042665371
	0,034295596	0,055708748	0,147412035

Si se supone que los coeficientes técnicos se mantienen constantes durante dos años consecutivos, y x_i es la compra total que subsector i realiza en esos años, responda qué representa:

vii. $x_1 \begin{bmatrix} 0{,}142120576 \\ 0{,}017271936 \\ 0{,}034295596 \end{bmatrix}$

viii.

$$\begin{array}{lclcl} 0{,}142120576\ x_1 & + & 0{,}129302872\ x_2 & + & 0{,}008982578\ x_3 \\ 0{,}017271936\ x_1 & + & 0{,}113152805\ x_2 & + & 0{,}042665371\ x_3 \\ 0{,}034295596\ x_1 & + & 0{,}055708748\ x_2 & + & 0{,}147412035\ x_3 \end{array}$$

Figura 8. Actividad inicial Matrices

Si los sectores y subsectores en que se divide la Economía de la provincia de Córdoba se agrupan sólo en tres y se consideran las demandas internas y los valores agregados correspondientes, se obtiene la siguiente matriz:

				demanda directa y_j	valor de producción x_i
	2392169	2758565	284331	1139690	1683197
	290721	2414017	1350511	1727888	2133413
	577262	1188498	4666117	2522168	31653566
	3260152	6361080	6300958		
valor agregado	13571818	14973054	25352607		
valor producción	16831970	21334134	31653566		

- Para cada uno de los tres sectores, escriba una expresión que represente el valor de producción x_i i = 1, 2, 3 en función de las transacciones x_{ij} que realiza cada sector i para i = 1, 2, 3 con cada sector j para j = 1, 2, 3.

……………………………………………………………………………..…………………………

- Verifique que $\begin{bmatrix} (1-0{,}1421) & -0{,}1293 & -0{,}0089 \\ -0{,}0172 & (1-0{,}1131) & -0{,}0426 \\ -0{,}0342 & -0{,}0557 & (1-0{,}1474) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12536596{,}3 \\ 19006773{,}1 \\ 27743857{,}6 \end{bmatrix}$

  representa lo expresado en i.

……

- Interprete la igualdad matricial X = AX + Y si se considera que las matrices:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdots \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ e } Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \cdots \\ \cdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

son respectivamente la matriz de valores de producción esperados de una economía divida en n sectores, la de coeficientes técnicos y la demandas internas.

Figura 9. Actividad inicial Sistemas de Ecuaciones Lineales

Los vectores en R^2 y R^3 se "inducen" a partir de un modelo hipotético – Figura 10.-:

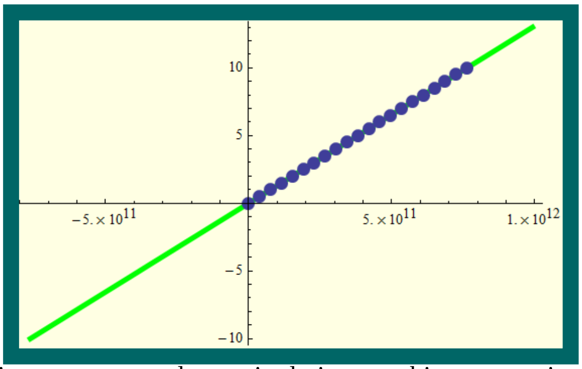
Suponga un modelo hipotético de una economía sencilla sin demanda externa de los sectores PESCA y PESCADO de la Provincia de Córdoba. Considere el problema de determinar las precios por unidad p_A y p_B de cada uno de los subsectores PESCA y PESCADO de la Provincia de Córdoba de forma tal que el intercambio encuentre un estado de equilibrio.

i. Responda si *estado de equilibrio* se alcanzará si el precio unitario que paga el sector PESCA es $2{,}28861\times10^{11}$ y el que paga el sector PESCADO es 3 en las unidades de $ correspondientes?

Diga si los siguientes pares de números representan los precios que cada uno de los sectores puede imponer en las unidades de $ correspondientes a fin de alcanzar el *equilibrio*:

($-6{,}48439\times10^{11}$; -8.5), ($1{,}1443\times10^{11}$; 1.5), ($8{,}39157\times10^{11}$; 11), ($5{,}72152\times10^{11}$; 7.5), (0, 0)

ii. por qué los precios que cada uno de los sectores puede imponer a fin de alcanzar el *equilibrio* pertenecen al conjunto de puntos cuya gráfica es:



iii. En relación a i., si se supone que la matriz de intercambio se mantiene constante por cuatro años, y que los siguientes pares de números representan los precios unitarios en las unidades correspondientes de $ que cada uno de los subsectores PESCA y PESCADO en ese orden pagan a lo largo de esos cuatro años respectivamente: (4,19578×1011; 5.5), (4,57722×1011; 6), (4,95865×1011; 6.5), (5,34009×1011; 7)

……

Suponga un modelo hipotético de una economía sencilla sin demanda externa de los sectores CULTIVOS DE CEREALES, OLEAGINOSAS Y PASTOS FORRAJEROS; CULTIVO DE HORTALIZAS, LEGUMBRES, FLORES Y PLANTAS ORNAMENTALES; PRODUCCION DE SEMILLAS

iv. Responda si estado de equilibrio se alcanzará si: los precios unitarios son respectivamente $p_A = 32.3978$, $p_B = 1.61327$ y $p_C = 1$ en las unidades de $ correspondientes? los precios unitarios son respectivamente $p_A = 1$, $p_B = 1.61327$ y $p_C = 32.3978$ en las unidades de $ correspondientes? los precios unitarios son respectivamente $p_A = 145.79$, $p_B = 7.25974$ y $p_C = 4.5$ en las unidades de $ correspondientes? los precios unitarios son respectivamente $p_A = 0$, $p_B = 7.25974$ y $p_C = 4.5$ en las unidades de $ correspondientes?

……………………………………………………………..………………………………………

v. Diga si las siguientes ternas de números representan los precios unitarios que cada uno de los sectores puede imponer en las unidades de $ correspondientes a fin de alcanzar el equilibrio:

- (-64.7956; -3.22655; -2)
- (0, 0, 0)
- (16.1989; 0.806637; 0.5)
- (161.989; 8.06637; 5)

vi. Diga por qué los precios que cada uno de los sectores puede imponer a fin de alcanzar el equilibrio pertenecen al conjunto de puntos: $\mathscr{P} = \{(x, y, z) \ / \ 0{,}8x - 10y - 10z = 0 \quad x, y, z \in R\}$ cuya gráfica es

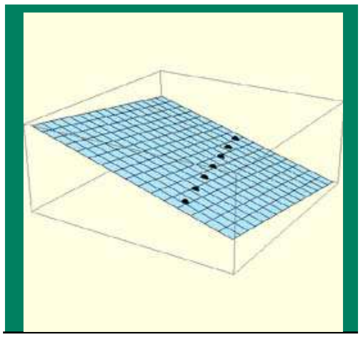


Figura 10. Actividad inicial Vectores en R^2 y R^3

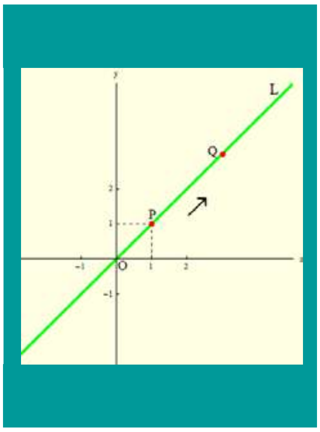
En síntesis, la apertura del módulo coincide con la modelación de dos problemas con dos sistemas, respectivamente, con dos y tres incógnitas. Se analizan pares y ternas de números reales y se los asocia con soluciones a los problemas. También se trabaja en registro gráfico. Se hacen suposiciones sobre las soluciones y se "opera" con ellas.

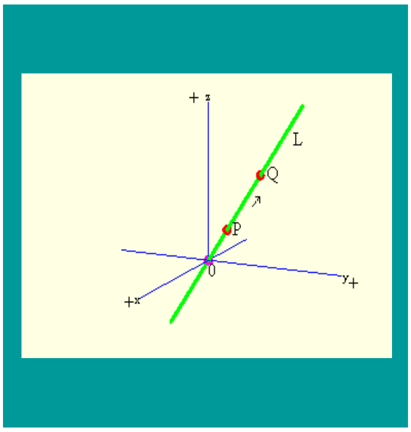
El cuerpo del capítulo se compone de definiciones, propiedades, ejemplificación y ejercitación, como de manera sucinta se detalla a continuación. La descripción discurre sobre las distintas estrategias y registros que, a lo largo del módulo, se utilizan como recurso didáctico.

Definición	Un **segmento** de **recta dirigido** es toda **porción** de **recta entre dos puntos** dados, llamados respectivamente **punto inicial** y **punto final** del segmento**.**

- En símbolos, se anota $\overrightarrow{\mathbf{PQ}}$, si **P** es el **punto inicial** y **Q** el **punto final** del segmento de recta $\overrightarrow{PQ}$.
- Gráficamente $\overrightarrow{PQ}$ se **representa** sobre un **sistema** de **ejes ortogonales.**

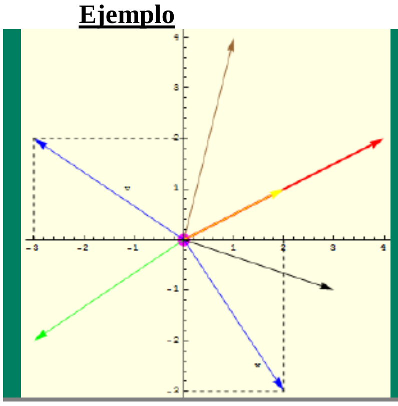
- Se llama:
  - ejes coordenados al sistema de ejes ortogonales;
  - **dirección** de $\overrightarrow{PQ}$ a la recta que contiene a $\overrightarrow{PQ}$ El sentido de $\overrightarrow{PQ}$ queda implícito al hablar respectivamente de un punto inicial y un punto final de $\overrightarrow{PQ}$. Usualmente se anota con la letra L.
  - origen de coordenadas al punto de intersección de los ejes coordenados. Usualmente se anota con el símbolo 0;
  - coordenadas de un punto a las proyecciones del punto sobre cada uno de los ejes coordenados.
- Cuando los ejes coordenados son dos, $\overrightarrow{PQ}$ es un segmento de recta dirigido en el PLANO o Espacio Bidimensional.Usualmente, se denomina abcisa y ordenada a las coordenadas de un punto en el PLANO.
- Las coordenadas del origen de coordenadas en el PLANO son 0 y 0 –.
- Cuando los ejes coordenados son tres, $\overrightarrow{PQ}$ es un segmento de recta dirigido en el ESPACIO o Espacio Tridimensional
- Las coordenadas del origen de coordenadas en el ESPACIO son 0, 0 y 0





……………………………………………………………………………………………..

Ejemplo

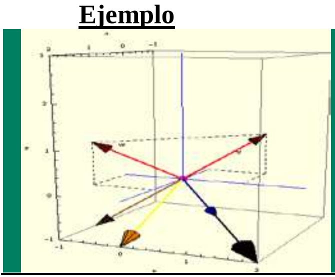


La Figura muestra una colección de vectores de $\mathbf{R}^2$.

- ➢ $v \in \mathbf{R}^2$, v = (-3, 2).
- ➢ $w \in \mathbf{R}^2$, w = (2,-3).
- ➢ Los vectores v y w son distintos.

…………………………………………………………………………………………….

Ejemplo



La Figura muestra una colección de vectores de R^3.

- ➢ **$v \in R^3$, v = (-1, 1, 1).**
- ➢ **$w \in R^3$, w = (1, -1, 1).**

Los vectores v y w son distintos.

…………………………………………………………………………………………………

Ejemplo

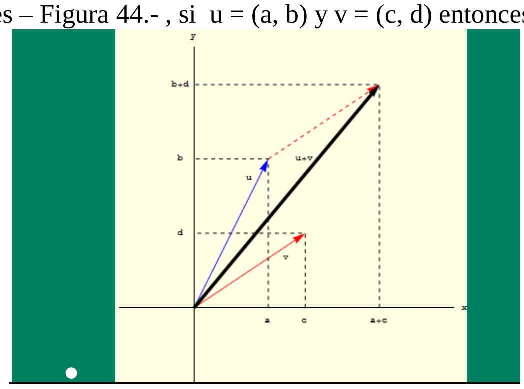
i. Con la sola información que $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & a_{13} \\ 3 & 2 & a_{23} \\ 0 & 1 & a_{33} \end{bmatrix}$, es suficiente que $\begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix}$ sea el vector nulo de $\mathbf{R}^3$ para afirmar que A es una matriz no inversible cuyas dos primeras columnas son los vectores u $= \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ y v $= \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. det A = 0;

ii. Con la sola información que $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & a_{13} \\ 3 & 2 & a_{23} \\ 0 & 1 & a_{33} \end{bmatrix}$, es necesario que $14a_{33} + a_{23} + 3a_{13} \neq 0$ para que A sea una matriz inversible. Si $14a_{33} + a_{23} + 3a_{13} = 0$, la matriz A tiene sólo 2 pivotes.

....

Definición	La **suma** de dos vectores **u, v** de $\mathbf{R}^2$ es otro **vector** de $\mathbf{R}^2$ que se obtiene **sumando** a **u** un vector **equivalente** a **v** con **extremo inicial** en el **extremo final** de **u**.

- Se anota u + v a la suma de los vectores u, v.
- Usando componentes – Figura 44.- , si u = (a, b) y v = (c, d) entonces u + v = (a+c, b+**d).**

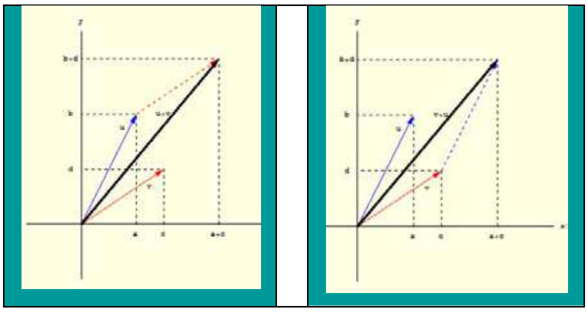


Debe quedar claro que la notación **u + v** hace **referencia** a la **suma** de **dos vectores**, en tanto que las notaciones **a + c** y **b + d** hacen **referencia** a la **suma** de **números reales**. Habrá que diferenciarlos según el contexto en el cual aparezcan

....

Propiedad	i. La suma de vectores de R^2 es conmutativa. ii. La suma de vectores de R^2 es asociativa. iii. La suma de vectores de R^2 admite elemento neutro. iv. Los **vectores** de $\mathbf{R}^2$ admiten **opuesto** respecto de la **suma** de vectores**.**

- Para i, en símbolos: u, v $\in$ R2 $\rightarrow$ u + v = v + u
- Demostración**:**
  - o Algebraica: como cada vector de R2 se puede identificar con una matriz 2x1, la demostración algebraica es análoga a la de la conmutatividad de la suma en ese caso.
  - o Gráfica: es suficiente analizar qué sucede al realizar las sumas “u + v” y “v + u”.



……

Propiedad	Es **suficiente** que el **producto de un escalar por un vector** sea el **vector nulo** para que el **escalar** sea **cero o** el **vector nulo.**

- La condición es trivialmente necesaria.
- Las demostraciones geométricas son análogas al caso R2.
- Como cada vector de R3 se puede identificar con matriz de orden 3x1, las demostraciones algebraicas son análogas a las de ese caso.

……

<u>Ejemplo</u>

Se sabe que un agente de bolsa registra los valores máximos y mínimos semanales del precio de las acciones de tres compañías I, II y III.

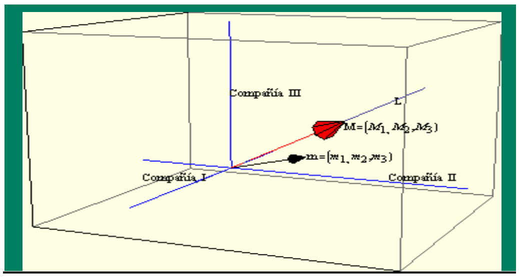
i. El vector M = (M_1, M_2, M_3) representa los valores máximos semanales de las acciones de tres compañías I, II y III.

ii. El vector m = (m_1, m_2, m_3) representa los valores mínimos semanales de las acciones de las mismas tres compañías I, II y III.

iii. Los vectores que tienen su extremo final sobre la recta L representan los valores máximos de las tres compañías en una semana dada, si los mismos cambiaran su valor en la misma proporción.

iv. El vector $\frac{1}{2}$(M + m) representa los valores semanales promedio del precio de las acciones de las tres compañías mencionadas.

v. El vector $((0.15\ M + 0.05\ m)$ representa los valores semanales promedio del precio de las acciones de las tres compañías mencionadas, si se espera que, en una semana dada, los valores máximos se incrementen por igual en un 30% y los mínimos, en un 10%.



……

Propiedad	Si **u no** es el **vector nulo** de $\mathbf{R}^3$, v = $\left(\frac{1}{\|\mathbf{u}\|}\mathbf{u}\right)$ es un vector **unitario.**

- Tácito, v es un vector unitario en la dirección y sentido de u.
- En símbolos: $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^3 \ \wedge \ \mathbf{u} \neq \mathbf{O} \rightarrow \left\| \frac{1}{\|\mathbf{u}\|}\mathbf{u} \right\| = \mathbf{1}$.

Demostración:

1.	$\mathbf{u} \in \mathbf{R}^3 \wedge \mathbf{u} \neq \mathbf{O}$	
2.	u = (a, b, c) con a ≠ 0	De 1., sin pérdida de generalidad
3.	$\|u\| = +\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$	De 2., por definición de norma
4.	$\|u\| \neq 0$	De 2. y 3.
5.	$\frac{1}{\|u\|} \in \mathbf{R}$	De 4.
6.	$\frac{1}{\|u\|}\, u = \left(\frac{a}{+\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{b}{+\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{c}{+\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right)$	De 2. y 5.
7.	$\left\|\frac{1}{\|u\|}u\right\| = \sqrt{\frac{a^2}{(\sqrt{a^2+b^2+c^2})^2} + \frac{b^2}{(\sqrt{a^2+b^2+c^2})^2} + \frac{c^2}{(\sqrt{a^2+b^2+c^2})^2}}$	De 6., por definición de norma
8.	$\left\|(\frac{\mathbf{1}}{\|\mathbf{u}\|}\mathbf{u}\right\| = \mathbf{1}$	De 7., operando

…………………………………………………………………………………………………

Ejercicios y Problemas

1. Identifique las tareas que en los ítemes 1/8 de comienzo de capítulo corresponden a los conceptos de:
   - vector;
   - vector en el PLANO;
   - vector en el ESPACIO;
   - componentes.

……

2. Dados los vectores u = (-1, 3, 4) y v = (5, 0, -1), construya, de ser posible:

i la matriz de coeficientes de un sistema de ecuaciones homogéneo compatible determinado;

ii la matriz de coeficientes de un sistema de ecuaciones compatible indeterminado;

iii la matriz de coeficientes de un sistema de ecuaciones a veces incompatible.

……

3. Dado el vector u = (1, ….) en el PLANO, indique en cada caso si es posible completar la segunda componente de u de forma tal que se cumplan las condiciones que se listan a continuación. Si su respuesta es afirmativa, muestre u.

i. $\|u\| = 1$; ☐

ii. $\|u\| = 2$ y la dirección del vector u es la recta de ecuación y = 2x; ☐

iii. u = (0, 1); ☐

iv. la dirección del vector u es la recta de ecuación y = 3x; ☐

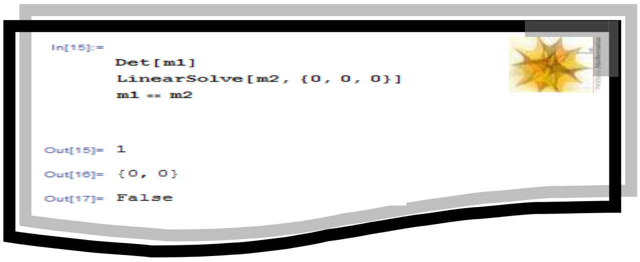
v. Los vectores u y v = (-1, -1) tienen la misma dirección. ☐

…………………………………………………………………………………………………

4. Escriba, de ser posible, una condición:
i. suficiente pero no necesaria para que el producto de un escalar por un vector de R^2 sea el vector nulo de R^2;
ii. necesaria para que un vector de R^2 sea combinación lineal de un conjunto de vectores de R^2 dados;
iii. necesaria para que el vector nulo de R^2 se pueda escribir como combinación lineal de un conjunto de vectores de R^2;
iv. necesaria pero no suficiente para que un vector de R^2 sea unitario.
....

5. Con la sola información que proporciona la siguiente lista Input/Output en referencia a dos matrices M_1 y M_2, responda Sí, NO, NO SE SABE.

i. Las columnas de M1 son vectores de R3; ☐
ii. Si las columnas de M1 son vectores de R3, las filas también lo son; ☐
iii. Las columnas de M2 son vectores de R3; ☐
iv. M2 es una matriz inversible; ☐
v. Las columnas de M2 son vectores de R3 de igual dirección. ☐



3. DISCUSIÓN Y CONCLUSIÓN

El surgimiento de un nuevo modelo productivo, basado en un uso intensivo del conocimiento, requiere evaluar la gestión del saber y la información. Sin perder de vista el horizonte de la calidad en educación formal o informal, o el interés y los efectos que aquella tiene sobre aspectos personales o colectivos de los sujetos, una adaptación a la realidad actual aparece como esencial y se considera que el enfoque por competencias responde a estas nuevas exigencias del contexto.

Bajo este marco es que se reportan algunos resultados de una investigación educativa, llevada a cabo durante los últimos años, acerca de la enseñanza y aprendizaje de la Matemática de manera experimental, con aplicaciones en el mundo real, usando el mencionado enfoque.

Como resultado, se ha desarrollado un texto completo de Álgebra Lineal cuya validación fue llevada a cabo por profesores y estudiantes universitarios, así como por profesores de enseñanza media. La retroalimentación de esos cotejos ha sido incorporada al texto, pudiéndose afirmar que tanto unos como otros han sido asimilado y aceptado el enfoque.

Se cree que de esta forma se ha realizado una contribución a las acciones que deberían llevarse a cabo en la educación matemática en el siglo XXI, a modo de potenciar en los estudiantes habilidades en saber, saber hacer y saber ser. Se sostiene que con este aporte los estudiantes tendrán una visión más "viva", "realista" y "accesible" del Álgebra Lineal.

No obstante, una real reconversión en la enseñanza de la Matemática todavía está muy distante. Muchos textos del tipo del que aquí se ha presentado deberían ser escritos y diseminados a gran escala, a la vez que privilegiar una *profesionalización* de la carrera docente.

En cuanto a los logros, no se puede decir que sean representativos de todos los alumnos, o de todas las instituciones, o del plan de estudios completo, pero en nuestra opinión es una buena aproximación a las cuestiones planteadas. La reforma que se propone deberá ampliarse a otros actores del sistema educativo, así como a la enseñanza de otras áreas de la misma disciplina.

Referencias

Barnett, R. (2001) Los límites de la competencia. El conocimiento, la educación superior y la sociedad. Gedisa.

Delors, J. (1996) La educación encierra un tesoro. Santillana Unesco.

Dolz, J. & Ollagnier, E. (2000). La notion de compétence: nécessité ou vogue éducative. Raisons éducatives, vol.1-2(2). De Boeck Université.

Gonczi, A. (2002) Teaching and Learning of the Key Compete*ncies*. Presentation at DeSeCo's 2nd International Symposium. Neuchâtel, Switzerland. Swiss Federal Statistical Office.

Goody, J. (2001). Competencies and Education: Contextual Diversity. In D. S. Rychen & L. H. Salganik (Eds.), Defining and Selecting Key Competencies (pp. 175–190). Hogrefe & Huber.

González, J. Y Wagenaar, R. (2003). Tuning Educational Structures in Europe. Final Report. Phase 1. Bilbao: Universidad de Deusto. Graó.

Guzner, C. & Del Vecchio, S. (2008) Aproximaciones conceptuales a la noción de competencias. Actas Jornadas FCE-UNCuyo.

Guzner, C., Schilardi, A. et al. (2010) Un aporte a la formación docente desde la Licenciatura en Enseñanza de la Matemática para la integración de las NTIC´s a las prácticas aúlicas. En edUTecNe (Ed.) La tecnología educativa al servicio de la educación tecnológica.pp. 283-311.

Guzner, C. (2010) Un estudio descriptivo explortorio en relación a las competencias y la teoría curricular de la enseñanza de la Matemática. En EDIUNC (çed.) Educación basada en competencias. Cap. 3.

Guzner, C. (2011) Álgebra Lineal para estudiantes de Ciencias Económicas. Talleres gráficos FCE- UNCuyo

Guzner, C. y Del Vecchio, S. (2012) La concreción del enfoque basado en competencias. EAE.

IBERFOP-OEI, (1998) Metodología para definir competencias. CINTER/OIT.

Le Boterf, G. (2000*)* Ingeniería de las competencias. Gestión.

Morin, E. (2000) Los siete saberes necesarios para la educación del futuro. Paidós.

Perrenoud, P. (1999) Construir competencias desde la escuela. Dolmen.

Rue, J. (2002) Qué enseñar y por qué. Elaboración y desarrollo de proyectos de formación. Paidós.

Thierry García, D. (2001) La educación y capacitación basadas en competencias. Modelos y metodologías. Revista Iberoamericana de Educación.

GENERALIZACIÓN DE UN PROBLEMA PROPUESTO EN LA XLVI OME Y SU RELACIÓN CON LA DESIGUALDAD DE NESBITT

D.M. BĂTINEȚU-GIURGIU[1] y NECULAI STANCIU[2]

Abstract. This note presents a generalization for a problem given to the $XLVI^{th}$ National Mathematics Olympiad of Spain (OME).

Keywords: Cauchy-Buniakovski-Schwarz's inequality, Bergström's inequality, Jensen's inequality, the AM-QM inequality, Nesbitt's inequality, Olympiad.

MSC : 26D15

En la XLVI Olimpiafa Matemática Española, Fase Nacional (Valladolid), el segundo día (27de marzo de 2010) se propuso el siguiente

Problema. *Sean a, b, c numerous reales positivos. Probar que:*

$$\frac{a+b+3c}{3a+3b+2c}+\frac{a+3b+c}{3a+2b+3c}+\frac{3a+b+c}{2a+3b+3c}\geq\frac{15}{8} \tag{1}$$

Si llamamos $a = x_1, b = x_2, c = x_3$, y $X_3 = a+b+c$, entonces la (1) se convierte en:

$$\frac{X_3+2x_1}{3X_3-x_1}+\frac{X_3+2x_2}{3X_3-x_2}+\frac{X_3+2x_3}{3X_3-x_3}\geq\frac{15}{8} \tag{2}$$

Nos proponemos generalizar esta desigualdad y dar varias demostraciones de su generalización.

Una Generalización. *Si* $n\in N^*-\{1,2\}, a\in R_+, b, c, d, x_k\in R_+^*, \forall k=\overline{1,n}$,

$$X_n=\sum_{k=1}^{n}x_k \text{ and}$$

$$cX_n > d\max_{1\leq k\leq n}x_k$$

entonces:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{aX_n+bx_k}{cX_n-dx_k}\geq\frac{(an+b)n}{cn-d} \tag{3}$$

Demostración 1. Tenemos:

$$(an+b)^2X_n^2=\left(\sum_{k=1}^{n}(aX_n+bx_k)\right)^2=\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{aX_n+bx_k}{cX_n-dx_k}}\cdot\sqrt{(aX_n+bx_k)(cX_n-dx_k)}\right)^2\overset{(C-B-S)}{\leq}$$

$$\overset{(C-B-S)}{\leq}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{aX_n+bx_k}{cX_n-dx_k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}(aX_n+bx_k)(cX_n-dx_k)\right)\Leftrightarrow$$

[1] Department of Mathematics, "Matei Basarab" National College, Bucharest, Romania

[2] Department of Mathematics, "George Emil Palade" General School, Buzău, Romania

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n}\frac{aX_n+bx_k}{cX_n-dx_k}\ge \frac{(an+b)^2X_n^2}{\sum_{k=1}^{n}(aX_n+bx_k)(cX_n-dx_k)}=\frac{(an+b)^2X_n^2}{acnX_n^2+(bc-ad)X_n\sum_{k=1}^{n}x_k-bd\sum_{k=1}^{n}x_k^2}=$$
$$=\frac{(an+b)^2X_n^2}{(acn+bc-ad)X_n^2-bd\sum_{k=1}^{n}x_k^2}.$$

Por la desigualdad de las medias aritmética y geométrica deducimos que:

$$\sum_{k=1}^{n}x_k^2\ge\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)^2=\frac{X_n^2}{n} \qquad (4)$$

Entonces obtenemos:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{aX_n+bx_k}{cX_n-dx_k}\ge\frac{(an+b)^2X_n^2}{(acn+bc-ad)X_n^2-\frac{bd}{n}X_n^2}=\frac{(an+b)^2n}{acn^2+(bc-ad)n-bd}=\frac{(an+b)n}{cn-d}.$$

Demostración 2. Se tiene:

$$U_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{aX_n+bx_k}{cX_n-dx_k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{(aX_n+bx_k)^2}{(aX_n+bx_k)(cX_n-dx_k)},$$

Y por la desigualdad de *Bergström* deducimos que:

$$U_n\ge\frac{\left(\sum_{k=1}^{n}(aX_n+bx_k)\right)^2}{\sum_{k=1}^{n}\left(acX_n^2+(bc-ad)X_nx_k-bdx_k^2\right)}=\frac{(an+b)^2X_n^2}{acnX_n^2+(bc-ad)X_n^2-bd\sum_{k=1}^{n}x_k^2},$$

Donde hemos tenido en cuenta (4), y se obtiene la conclusión.

Demostración 3. Consideremos el trinomio:

$$T_n=\left(\sqrt{\frac{aX_n+bx_k}{cX_n-dx_k}}\cdot X-\sqrt{(aX_n+bx_k)(cX_n-dx_k)}\right)^2=$$
$$=\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{aX_n+bx_k}{cX_n-dx_k}\right)X^2-2\left(\sum_{k=1}^{n}(aX_n+bx_k)\right)X+\sum_{k=1}^{n}(aX_n+bx_k)(cX_n-dx_k)=$$
$$=\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{aX_n+bx_k}{cX_n-dx_k}\right)X^2-2\left(\sum_{k=1}^{n}(aX_n+bx_k)\right)X+\sum_{k=1}^{n}\left(acX_n^2+(bc-ad)X_nx_k-bdx_k^2\right).$$

Ya que los valores del trinomio cuadrático $T_n(x)\ge 0,\forall x\in R$ resulta:

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(aX_n+bx_k)\right)^2\le\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{aX_n+bx_k}{cX_n-dx_k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\left(acX_n^2+(bc-ad)X_nx_k-bdx_k^2\right)\right)=$$
$$=\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{aX_n+bx_k}{cX_n-dx_k}\right)\left(acnX_n^2+(bc-ad)X_n^2-bd\sum_{k=1}^{n}x_k^2\right).$$

Entonces, por (4) se obtiene que:

$$\sum_{k=1}^{n}(aX_n+bx_k)^2\le\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{aX_n+bx_k}{cX_n-dx_k}\right)\left(acn+bc-ad-\frac{bd}{n}\right)X_n^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{aX_n + bx_k}{cX_n - dx_k} \geq \frac{(an+b)^2 X_n^2}{\left(acn + bc - ad - \frac{bd}{n}\right) X_n^2}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{aX_n + bx_k}{cX_n - dx_k} \geq \frac{n(an+b)^2}{acn^2 + (bc-ad)n - bd} =$$

$$= \frac{n(an+b)^2}{(an+b)(cn-d)} = \frac{n(an+b)}{cn-d}, \text{ q.e.d.}$$

Demostración 4. Consideremos $R^n = \underbrace{R \times R \times ... \times R}_{n}$, $n \in N^*$, donde para cualesquiera $x, y \in R^n$,

$x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ y para todo $\lambda \in R$, definimos:

$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n) \in R^n$ y $\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n) \in R^n$.

Así R^n es un espacio vectorial sobre el cuerpo R .Definimos también

$\langle \, , \, \rangle : R^n \times R^n \to R$, $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$ (producto escalar de los vectores x e y) y entonces R^n se convierte en un espacio de Hilbert en el que una base ortogonal es el sistema de vectores $e_k = (\delta_{1k}, \delta_{2k}, ..., \delta_{nk})$, donde $k = \overline{1, n}$ y $\delta : A_n \times A_n \to R$, $\delta(i, j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, \text{if } i = j \\ 0, \text{if } i \neq j \end{cases}$, y $A_n = \{1, 2, ..., n\}$.

La función δ es el símbolo de *Kroneker*.

Es obvio que $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}, \forall (i, j) \in A_n \times A_n$ .Así, $\|e_k\| = 1$, $\forall k = \overline{1, n}$ y entonces el sistema $\{e_k\}_{1 \leq k \leq n}$ es un sistema ortonormal de vectores del espacio de Hilbert R^n.

Para cualquier vector $x \in R^n$, consideremos la función $\varphi : A_n \to R$, $\varphi(k) = \langle x, e_k \rangle = \varphi_k$ o sea, $x = (\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n)$, donde $\varphi_k, k = \overline{1, n}$ son los coeficientes de *Fourier*s de x del espacio de *Hilbert* R^n con respecto al sistema ortonormal $\{e_k\}_{1 \leq k \leq n}$.

Por lo tanto para todo $x \in R^n$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ se tiene $x = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k e_k = (\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n)$, es decir $x_k = \varphi_k = \langle x, e_k \rangle$, $\forall k = \overline{1, n}$. También tenemos: $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k^2$, y entonces se verifica la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\langle x, y \rangle \leq \|x\| \cdot \|y\|, \ \forall x, y \in R^n,$$

O sea

$$(\langle x, y \rangle)^2 \leq \|x\|^2 \cdot \|y\|^2 \Leftrightarrow \left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2 \right).$$

Considerando los vectores $x, y \in R^n$, con:

$$x = \left(\sqrt{\frac{aX_n + bx_1}{cX_n - dx_1}}, \sqrt{\frac{aX_n + bx_2}{cX_n - dx_2}}, ..., \sqrt{\frac{aX_n + bx_n}{cX_n - dx_n}} \right) \text{ e}$$

$$y = \left(\sqrt{(aX_n + bx_1)(cX_n - dx_1)}, \sqrt{(aX_n + bx_2)(cX_n - dx_2)}, ..., \sqrt{(aX_n + bx_n)(cX_n - dx_n)} \right).$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$\left(\langle x,y\rangle\right)^2=\left(\sum_{k=1}^{n}\left(aX_n+bx_k\right)\right)^2\leq\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{aX_n+bx_k}{cX_n-dx_k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\left(acX_n^2+(bc-ad)X_nx_k-bdx_k^2\right)\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sum_{k=1}^{n}\frac{aX_n+bx_k}{cX_n-dx_k}\geq\frac{\left(an+b\right)^2X_n^2}{\left(acn+bc-ad\right)X_n^2-bd\sum_{k=1}^{n}x_k^2}\qquad(5)$$

Como la función $f:R_+^*\to R_+^*,\ f(t)=t^2$ es convexa en R_+^*, por la desigualdad de *Jensen* se deduce que:

$$f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n)\geq nf\left(\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}\right)=n\left(\frac{X_n}{n}\right)^2=\frac{X_n^2}{n},$$

Y entonces de (5) resulta que:

$$U_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{aX_n+bx_k}{cX_n-dx_k}\geq\frac{\left(an+b\right)^2X_n^2}{\left(acn+bc-ad-\frac{bd}{n}\right)X_n^2}=\frac{\left(an+b\right)^2n}{\left(an+b\right)\left(cn-d\right)}=\frac{\left(an+b\right)n}{cn-d},$$

q.e.d.

Aplicaciones.

A.1. Si $a=0,b=c=d=1$, entonces la relación (3) se escribe como:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{X_n-x_k}\geq\frac{n}{n-1},$$

y para $n=3$ obtenemos la desigualdad de *Nesbitt*, i.e.:

$$\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_3+x_1}+\frac{x_3}{x_1+x_2}\geq\frac{3}{2}.$$

A.2. Si $a=1,b=2,c=3$ y $d=1$, entonces la (3) resulta ser:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{X_n+2x_k}{3X_n-x_k}\geq\frac{\left(n+2\right)n}{3n-1},$$

de la que para $n=3$ se obtiene la (2) y después se deduce (1).

Problemas para los más Jóvenes 46

Cuatro problemas de la Prueba Final de la Olimpiada Juvenil de Matemáticas de Venezuela 2011(Primer Año)

PMJ46-1

Sea n un entero positivo y k el entero que resulta al borrar la cifra de las unidades de n. (por ejemplo, si $n = 7492, k = 7499$).

Si $n - k = 2011$, ¿cuál es el valor de n?

PMJ46-2

ABCD es un cuadrado y P es un punto exterior tal que $AP = AC$ y $\widehat{BCP} = 17^o$. Calcular la medida del ángulo $\widehat{BAP}$.

PMJ46-3

Se forma una larga lista de dígitos escribiendo los enteros del 1 al 2011 uno a continuación de otro:

$$1234567891011121314.......200920102011$$

¿Cuántas veces aparece la secuencia 12 en esta lista?

PMJ46-4

En cierto pueblo, $\frac{2}{3}$ del total de hombres está casado con $\frac{3}{5}$ del total de mujeres. Si nunca se casan con forasteros, ¿cuál es la proporción de personas solteras respecto a la población total del pueblo?

La Batalla Matemática

Eric Milesi, Óscar Rivero

1 Introducción

La extinta Unión Soviética era un lugar donde las competiciones de matemáticas gozaban de gran importancia y prestigio dentro del sistema educativo, y hoy en día aún perviven diversos torneos y olimpiadas oriundos de dicho país. El profesor Francisco Bellot Rosado introdujo el curso pasado en España las denominadas "batallas matemáticas", formato originario de San Petersburgo que permite desarrollar la capacidad expositiva y la claridad a la hora de presentar los razonamientos, a la par que potencia el trabajo colectivo y, obviamente, la habilidad para resolver problemas.

En las batallas matemáticas, los contendientes son divididos en dos equipos y llevados a aulas separadas donde se les entregan copias de los enunciados y se les deja un tiempo razonable para su resolución (en nuestro caso hora y media). Posteriormente, ya reunidos los equipos bajo la presidencia del jurado, se procede al inicio de la batalla; primero, cada uno de los bandos designa a un capitán, que deberá salir al estrado para batirse con su oponente en el denominado torneo de capitanes, que consta sólo de un problema, generalmente de baja dificultad. El primero en encontrar la respuesta correcta lo indica y procede a su explicación, y en caso de ser ésta aceptada, es declarado ganador, mientras que en caso contrario puede optarse por automáticamente declarar al oponente ganador o esperar a que éste encuentre la solución.

El equipo que gana este torneo inicial será el que tome la iniciativa, y decidirá si quiere empezar retando o siendo retado; este proceso se mantendrá a lo largo de toda la contienda, y se basa en que un equipo (digamos A), desafía al oponente a la resolución de uno de los problemas, pudiendo el equipo contrario (digamos B) aceptar o rehusar la propuesta. En el primer caso, uno de los miembros debe salir a la pizarra a exponer la solución, actuando uno de los integrantes del otro bando como oponente, pudiendo refutar o criticar sus argumentos. Si el equipo B rechaza el reto, entonces alguien del equipo A deberá explicar la solución, teniendo entonces a un miembro de B como oponente; si A también rechazase el salir a explicar la solución, se considera "reto incorrecto". Finalmente, tras cada turno, el jurado reparte y distribuye los 12 puntos que vale cada problma, teniendo en cuenta la claridad en la exposición del ponente y la labor crítica del oponente, pudiendo también atribuirse puntos a sí mismo. En caso de reto incorrecto, el equipo B (el que fue retado), recibe 6 puntos y el jurado otros 6 puntos.

Después de que el equipo ganador del torneo de capitanes decida si quiere empezar retando o siendo retado, se va alternando el equipo que lanza el desafío, hasta que uno de los bandos en contienda ya no tenga más problemas resueltos, momento a partir del cual el otro equipo presenta el resto de soluciones que haya obtenido. Concluida la batalla, se suman los puntos y el equipo que tenga mayor cantidad es proclamado ganador por el jurado.

2 Problemas y soluciones

A continuación presentamos los enunciados y soluciones de la batalla matemática celebrada el pasado verano en las sesiones de preparación del equipo que representó a España en la IMO 2012.

Problema 1. *Un número de* 6 *cifras (todas distintas y no nulas) es divisible por* 37*. Demostrar que, por permutación de sus cifras, se pueden obtener al menos* 23 *números más, igualmente divisibles por* 37*.*

Solución. El número de 6 cifras distintas lo podemos escribir en la forma $A = a_6a_5a_4a_3a_2a_1$, que en notación decimal es

$$a_6a_5a_4a_3a_2a_1 = a_6 10^5 + a_5 10^4 + a_4 10^3 + a_3 10^2 + a_2 10 + a_1$$

Ahora construimos una tabla donde figuran los restos de las potencias de 10^n, $(0 \leq n \leq 5)$ módulo 37:

n	$10^n \pmod{37}$
0	1
1	10
2	-11
3	1
4	10
5	-11

Dado que $A \equiv 0 \pmod{37}$, entonces se tiene que

$$a_6 10^5 + a_5 10^4 + a_4 10^3 + a_3 10^2 + a_2 10 + a_1$$

$$\equiv -11a_6 + 10a_5 + a_4 - 11a_3 + 10a_2 + a_1 \equiv 0 \pmod{37}$$

De donde se deduce que permutando a_6 con a_3 , a_5 con a_2 y a_4 con a_1 en $a_6a_5a_4a_3a_2a_1$ el número que resulte seguirá siendo congruente con 0 (mod 37). Si procedemos de esta forma obtenemos 8 permutaciones que corresponden a números multiplos de 37 que son la inicial y 7 más.

Multiplicando $-11a_6 + 10a_5 + a_4 - 11a_3 + 10a_2 + a_1$ por 10, se obtiene

$$10 \times (-11a_6 + 10a_5 + a_4 - 11a_3 + 10a_2 + a_1)$$

$$\equiv 1a_6 - 11a_5 + 10a_4 + a_3 - 11a_2 + 10a_1 \equiv 0 \pmod{37}$$

De lo que se deduce que el número $a_5a_4a_6a_2a_1a_3$ es múltiplo de 37 porque

$$a_5 10^5 + a_4 10^4 + a_6 10^3 + a_2 10^2 + a_1 10 + a_3$$

$$\equiv 1a_6 - 11a_5 + 10a_4 + a_3 - 11a_2 + 10a_1 \equiv 0 \pmod{37}$$

Permutando nuevamente a_6 con a_3, a_5 con a_2 y a_4 con a_1 en $a_5a_4a_6a_2a_1a_3$ se obtienen 8 nuevas permutaciones que no han sido contadas antes porque ahora la primera cifra o bien es a_5 o bien es a_2 y antes era a_6 o a_3.

Nuevamente multiplicando por 10

$$10 \times (1a_6 - 11a_5 + 10a_4 + a_3 - 11a_2 + 10a_1)$$

$$\equiv 10a_6 + 1a_5 - 11a_4 + 10a_3 + 10a_2 - 11a_1 \equiv 0 \pmod{37}$$

se obtiene que el número $a_4a_6a_5a_1a_3a_2$ es múltiplo de 37 porque

$$a_4 10^5 + a_6 10^4 + a_5 10^3 + a_1 10^2 + a_3 10 + a_2$$

$$\equiv 10a_6 + 1a_5 - 11a_4 + 10a_3 + 10a_2 - 11a_1 \equiv 0 \pmod{37}$$

Permutando a_6 con a_3, a_5 con a_2 y a_4 con a_1 en $a_4a_6a_5a_2a_3a_2$ se obtienen 8 nuevas permutaciones que son distintas de las anteriores porque la primera cifra es o a_4 o a_1. En total tenemos $7 + 8 + 8 = 23$ permutaciones que son múltiplos de 37, y hemos terminado.

Problema 2. *En un torneo de patinaje hay* 10 *participantes. Cada uno de los tres jueces asigna a cada participante un rango (de* 1 *a* 10*, indicando el puesto que según él merece cada uno). Javi suma sus tres rangos y esa suma es menor que la de los demás participantes. ¿Cuál es el mayor valor de esa suma, que puede obtener Javi?*

Solución. Denotamos $A, B, C, \ldots, J$ a los participantes, siendo Javi la J. A continuación vamos a mostrar un caso en el que se observa que es posible que la puntuación de Javi sea 15 y se cumplan las condiciones del enunciado. Esto se puede ver con la siguiente distribución de puntos:

Part.	Juez 1	Juez 2	Juez 3	Total
A	2	4	10	16
B	10	2	4	16
C	4	10	2	16
D	1	7	9	17
E	9	1	7	17
F	7	9	1	17
G	3	6	8	19
H	8	3	6	19
I	6	8	3	19
J	5	5	5	15

Como se observa en la tabla, la puntuación de Javi es 15, cada participante tiene puntuación mayor que 15 y cada juez ha atribuido todos los posibles rangos entre 1 y 10. Una vez constatado que es posible que Javi tenga 15 puntos vamos a ver que no es posible que tenga 16. Procederemos por reducción al absurdo. En efecto, supongamos que la puntación de Javi fuese $p = 16$ y sea S la suma de las puntuaciones totales. Por las condiciones del enunciado la puntuación de cada particpante distinto de Javi tiene que ser como mínimo $p+1$. Entonces tenemos: $S \geq p+9(p+1) \Rightarrow S \geq 16+9\times 17 = 169$. Luego la suma de las puntuacions totales es como mínimo 169. Pero por otro lado tenemos que la suma de puntuaciones totales es

$$S = (1+2+\ldots+10)\times 3 = \frac{10(10+1)}{2}\times 3 = 165$$

Luego no puede ser que $S \geq 169$, y por lo tanto Javi no puede tener 16 puntos.

Problema 3. *Probar que la ecuación*

$$(a+b\sqrt{3})^4 + (c+d\sqrt{3})^4 = 1+\sqrt{3}$$

no tiene solución en números racionales a, b, c, d.

Solución. En lo que sigue vamos a necesitar el siguiente resultado.

Lema 1. *Si $x, y, z, t \in \mathbb{Q}^+$ entonces $x + y\sqrt{3} = z + t\sqrt{3}$ si y sólo si $x = z$ e $y = t$.*

Demostración. Supongamos que $y \neq t$. Tenemos que $x - z = (t-y)\sqrt{3}$ y como $t - y \neq 0$ entonces $\sqrt{3} = \dfrac{x-z}{t-y}$ con lo que $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}^+$ lo cual es falso. □

Ahora desarrollamos las potencias de ambos binomios y agrupamos los términos con $\sqrt{3}$ por un lado y aquellos que no tengan $\sqrt{3}$ por otro. Según el lema anterior tenemos que

$$\left.\begin{array}{r} a^4+6a^2b^23+9b^4+c^4+6c^2d^23+d^29=1 \\ 4a^3b\sqrt{3}+4ab^33\sqrt{3}+4c^3d\sqrt{3}+4cd^33\sqrt{3}=\sqrt{3} \end{array}\right\}$$

Restando de la primera la segunda ecuación se obtiene

$$a^4-4a^3b\sqrt{3}+6a^2b^23-4ab^33\sqrt{3}+9b^4+c^4-4c^3d\sqrt{3}+6c^2d^23-4cd^33\sqrt{3}+d^29=1-\sqrt{3}$$

Factorizando resulta

$$(a-b\sqrt{3})^4+(c-d\sqrt{3})^4=1-\sqrt{3}$$

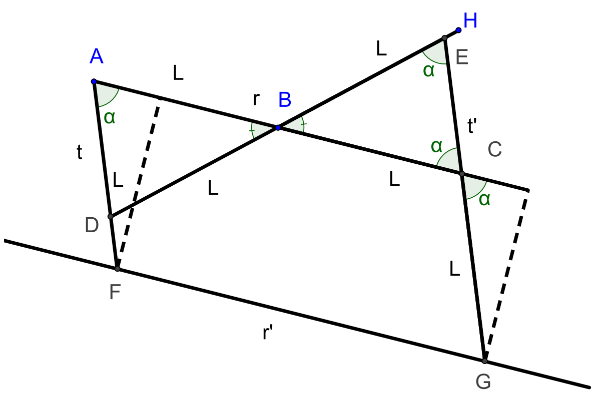
Como la parte izquierda es suma de cuadrados, entonces

$$(a-b\sqrt{3})^4+(c-d\sqrt{3})^4\geq 0$$

y resulta claro que $1-\sqrt{3}<0$. Por tanto, el término izquierdo es no negativo y el derecho estrictamente negativo entonces la igualdad no se alcanza y por consiguiente la ecuación no tiene soluciones con $a,b,c,d\in\mathbb{Q}^+$.

Problema 4. *La regla infinita con dos puntos marcados en ella, a distancia L entre sí, es un instrumento de dibujo para trazar la recta que pasa por dos puntos, y también para marcar el punto de la recta ya dibujada, a distancia L de uno de los puntos dados. No se puede usar el otro lado de la regla ni girarla alrededor de un punto fijo (si la giras, la regla se cae). Usando solamente esta regla y un lápiz, construir una recta paralela a una dada.*

Solución. Tenemos una recta dada en el plano a la cual llamaremos r. En r fijamos un punto cualquiera al cual llamaremos B. Con nuestra regla podemos encontrar dos nuevos puntos A y C sobre r tal que estén a distancia L de B y a distancia $2L$ entre ellos.



Podemos marcar un punto cualquiera H en el plano, y al unirlo con B utilizando nuestra regla, tendremos una recta arbitraria que pasa por B. Sobre esta recta $\overline{BH}$ que llamaremos s, con la regla trazamos D y E a distancia L de B. Llamamos a las rectas $\overline{AD}$ y $\overline{CE}$, t y t' respectivamente. Se forman así dos triángulos congruentes ABD y BCE. Tienen dos lados iguales (los que miden L), y el ángulo ABD es igual a CBE y por ser isósceles, $BAD = BCE = \alpha$. Como comparten el punto B entonces las rectas t y t' son paralelas porque los triángulos son homotéticos. Desde A y C se mide sobre t y t' respectivamente, una distancia L obteniéndose así los puntos F y G y la recta $\overline{FG}$, paralela a r porque la distancia de F a r es $d = L\sin\alpha$ y es la misma que la que hay desde G a r, $d = L\sin\alpha$.

Problema 5. *Con la notación $[x]$ representamos el mayor entero que es menor o igual que x (es decir, es la parte entera de x). Hallar todos los números primos que son de la forma $\left[\frac{n^2}{5}\right]$, siendo n un número natural.*

Solución. Como n es un entero consideraremos 5 casos distintos que corresponden a los restos de n módulo 5. Es decir, $0, 1, 2, 3, 4$.
Caso $1 : n \equiv 0 \pmod 5$
Entonces $n = 5k$ con $k \in \mathbb{Z}$ y $n^2 = 25k^2$, por tanto

$$\left[\frac{n^2}{5}\right] = \left[\frac{25k^2}{5}\right] = 5k^2$$

que es primo si y solo si $k = 1$ y entonces $\left[\frac{n^2}{5}\right] = 5$.
Caso $2 : n \equiv 1 \pmod 5$
Entonces $n = 5k + 1 \Rightarrow n^2 = 25k^2 + 10k + 1$ luego

$$\left[\frac{n^2}{5}\right] = \left[\frac{25k^2 + 10k + 1}{5}\right] = 5k^2 + 2k = k(5k + 2)$$

Para que sea primo uno de los dos factores tiene que ser 1 pero como $5k + 2 > 1$ entonces $k = 1$ y $\left[\frac{n^2}{5}\right] = 1(5 \times 1 + 2) = 7$
Caso $3 : n \equiv 2 \pmod 5$
Entonces $n = 5k + 2 \Rightarrow n^2 = 25k^2 + 20k + 4$ luego

$$\left[\frac{n^2}{5}\right] = \left[\frac{25k^2 + 20k + 4}{5}\right] = 5k^2 + 4k = k(5k + 4)$$

Ahora para que sea primo $k = 1$ pero con $k = 1$ obtenemos $1(5\times 1+4) = 9$, que no es primo.
Caso $4 : n \equiv 3 \pmod 5$
Entonces $n = 5k + 3 \Rightarrow n^2 = 25k^2 + 30k + 9$ luego

$$\left[\frac{n^2}{5}\right] = \left[\frac{25k^2 + 30k + 9}{5}\right] = 5k^2 + 6k + 1 = (k + 1)(5k + 1)$$

Para que sea primo uno de los dos factores tiene que ser 1, pero ambos factores son 1 cuando $k = 0$ y entonces tenemos $(0+1)(5 \times 0 + 1) = 1$ que no es primo
Caso 5 : $n \equiv 4 \pmod 5$
Entonces $n = 5k + 4 \Rightarrow n^2 = 25k^2 + 40k + 16$ luego

$$\left[\frac{n^2}{5}\right] = \left[\frac{25k^2 + 40k + 16}{5}\right] = 5k^2 + 8k + 3 = (k+1)(5k+3)$$

Para que sea primo o $5k + 3 = 1 \Rightarrow k = \frac{-2}{5}$ lo cual es imposible porque $k \in \mathbb{Z}$ o si $k + 1 = 1 \Rightarrow k = 0$ y resulta $\left[\frac{n^2}{5}\right] = (0+1)(5 \times 0 + 3) = 3$ que sí es primo.
Por tanto todos los posibles valores primos que toma $\left[\frac{n^2}{5}\right]$ son: $3, 5, 7$.

Problema 6. *El dragón es una pieza de ajedrez situada en una casilla de un tablero infinito (con las casillas coloreadas de blanco y negro alternativamente). Se mueve de la manera siguiente: salta a una casilla contigua (horizantal o verticalmente) y a continuación salta N casillas en la dirección perpendicular a la de la primera parte de su movimiento. Es decir, para $N = 2$ el movimiento del dragón es el de caballo de ajedrez. ¿Para qué valores de N el dragón puede alcanzar cualquier casilla del tablero?*

Solución. Vamos a distinguir dos casos: N par y N impar. Con N impar no se puede porque el dragón se va a mover sólo sobre las casillas de un mismo color, dado que en cada salto se produce un cambio de color y en total hará $N + 1$ saltos, que será un número par. Es decir, cambiará de color un número par de veces y como sólo hay dos colores es lo mismo que no cambiar, luego o sólo se mueve por casillas blancas o sólo por negras.
Procedamos ahora con el caso en que N sea par. Vamos a demostrar que el dragón sí que puede ir a todas las casillas. En efecto, vamos a describir un algoritmo que nos permita llegar a una casilla contigua a la que se parte. Así por simetría podríamos ir a cualquiera de las 4 direcciones y en consecuencia podremos ir a todas las casillas del tablero. Supongamos que partimos de la posición (x, y) y queremos llegar a $(x, y + 1)$. Entonces el dragón puede moverse de 8 maneras distintas que corresponden a los siguientes vectores:

$$\left.\begin{array}{c} (1, N) \\ (1, -N) \\ (-1, N) \\ (-1, -N) \\ (N, 1) \\ (N, -1) \\ (-N, 1) \\ (-N, -1) \end{array}\right\}$$

Ahora, partiendo de (x,y) y mediante combinaciones lineales de los vectores anteriores queremos llegar a $(x,y+1)$. Empezamos con $(x,y)+(1,N)+(1,-N)=(x+2,y)$, y en dos pasos podemos ir a $(x+2,y)$. Ahora como N es par si repetimos este procedimiento $\frac{N}{2}$ veces llegaremos a la casilla $(x+N,y)$, y si ahora nos movemos $(-N,1)$ iremos a $(x+N,y)+(-N,1)=(x,y+1)$. Análogamente podemos ir a $(x+1,y)$, $(x-1,y)$ y $(x,y-1)$ y así el dragón puede ir a todas las casillas del tablero.

Centro de Formación Interdisciplinaria Superior (CFIS)
BARCELONA TECH, Barcelona, España.
milesividal@gmail.com, riverosalgado@tgmail.com

Solución al problema 1 de la Competición Mediterránea 2012, dada por el concursante Darío Nieuwenhuis durante la prueba.

Sea S la suma de todos los elementos de la matriz. Entonces,

$$\sum_{i=1}^{f} F(i) = \sum_{j=1}^{c} C(j) = S,$$

ya que estamos sumando todos los elementos de la matriz, por filas o por columnas-

Existe un i tal que

$$F(i) \geq \frac{S}{f},$$

porque si todas las $F(i)$ fueran menores, $\sum_{i=1}^{f} F(i) < S$, lo cual no puede ser.

Análogamente, existe un j tal que

$$C(j) \leq \frac{S}{c}$$

Entonces

$$f \cdot F(i) \geq S \geq c \cdot C(j),$$

como queríamos demostrar, para algún par (i, j).

PROBLEMAS PARA LOS MS JÓVENES 45
CUATRO PROBLEMAS DE LA OLIMPIADA DE ESLOVENIA 1997

PJ45-1

Probar que la ecuación $a^2 + b^2 - 8c = 6$ no tiene soluciones enteras.

Solución

Supongamos que hay una solución, para la que a y b deben tener la misma paridad, pues en caso contrario el miembro de la izquierda sería impar.

Si ambos son pares, entonces sus cuadrados son múltiplos de 4, con lo que 6 sería suma de múltiplos de 4, absurdo.

Si ambos son impares, como para todo impar $2n + 1$ se tiene que $(2n + 1)^2 = 4n(n + 1) + 1$, y uno de entre $n, n + 1$ es par, entonces a^2, b^2 dan cada uno resto 1 al dividir entre 8, y 6 da resto 2 al dividir entre 8, nuevamente absurdo.

Luego no puede haber soluciones enteras.

PJ45-2

El punto P dista 9 unidades del centro de un círculo de radio 15. ¿Cuántas cuerdas de longitud entera pasan por P?

Solución

La mayor cuerda que pasa por P es claramente el diámetro que pasa por P, que mide 30. La menor cuerda que pasa por P es claramente la perpendicular por P al diámetro que pasa por P, cuya longitud es 2ℓ, donde $\ell^2 + 9^2 = 15^2$, es decir, $\ell = 12$, y la cuerda más corta que pasa por P mide 24.

Supongamos que una cuerda que pasa por P tiene longitud L y no es el diámetro por P (que es claramente único), ni la perpendicular al diámetro por P (también claramente única). Trazamos la circunferencia concéntrica con la dada, tangente a dicha cuerda. Toda cuerda de longitud L es, por simetría, tangente a esta segunda circunferencia. Pero por cada punto exterior a una circunferencia hay exactamente dos rectas tangentes a dicha circunferencia, luego para cada longitud L, con $30 > L > 24$, hay exactamente dos cuerdas de longitud L que pasan por P (de las cuales tienen longitud entera las que miden $25, 26, 27, 28, 29$), además de una cuerda de longitud 30 y otra de longitud 24. Luego hay un total de 12 tales cuerdas.

PJ45-3

Se da el cuadrado $ABCD$. Sea E el punto medio del lado CD y F la intersección de AE y BD. Calcular la razón AF/FE.

Solución

En los triángulos ABF y EDF, el ángulo $\angle AFB = \angle EFD$ es común, mientras que al ser BD diagonal del cuadrado, $\angle ABF = \angle EDF = 45°$, con lo que ambos triángulos son semejantes. Luego $AF/FE = AB/ED = 2$ por ser E punto medio de CD.

PJ45-4

¿Para qué valores del parámetro a las ecuaciones

$$19x^2 + ax + 97 = 0 \qquad \text{y} \qquad 97x^2 + ax + 19 = 0$$

tienen una raíz común?

Solución

La raíz común r también será raíz del resultado de restar miembro a miembro ambas ecuaciones, es decir, $0 = 78(r^2 - 1) = 78(r + 1)(r - 1)$, siendo además $a = -\frac{97+19r^2}{r}$. Luego la raíz común es 1 cuando $a = -116$, -1 cuando $a = 116$, y no ninguna otra raíz común para ningún otro valor de a.

Problemas propuestos 226-230

Problema 226 (propuesto por Marcel Chirita, Bucarest, Rumania)
Se considera la sucesión

$$\begin{aligned} (x_n)_{n\geq 0} \text{ tal que } x_n &= 73x_n - 256x_{n-1} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}, \\ \text{con } x_0 &= 4a+3,\ x_1 = 256a+27;\ a \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

En lo que sigue se considerará el resto de la división de x_n por 11, para todo $n \in \mathbb{N}$.

a) Determinar los valores del parámetro a para los que (x_n) es convergente, y en tales casos calcular su límite.

b) Si $a-1$ es múltiplo de 11, determinar la sucesión (x_n).

Problema 227 (propuesto por Marcel Chirita, Bucarest, Rumania)
En el plano del cuadrado ABCD, M es un punto cualquiera. Encontrar el conjunto de valores de la expresión

$$R(M) = \frac{MA + MC}{MB + MD}.$$

Problema 228 (propuesto por Roberto Bosch Cabrera, Florida, Estados Unidos)

Se divide un cuadrado en n^2 cuadrados más pequeños, iguales entre si, *mediante paralelas a los lados del inicial (la cursiva es del editor).*Se trazan algunas diagonales de los cuadrados pequeños, de modo tal que no haya dos diagonales con un punto común. Sea $D(n)$ el número máximo de diagonales que es posible trazar en esas condicones. Probar que:

$$\begin{aligned} a)D(1) &= 1, D(2) = 3, D(3) = 6, D(4) = 10, D(5) = 16 \\ b) \text{ Si } n \text{ es impar, entonces } D(n) &\leq \frac{(n+1)^2}{2} - 2 \\ c) \text{ Si } n \text{ es par, entonces } D(n) &= \left\lfloor \frac{(n+1)^2}{2} \right\rfloor - 1 \\ &*d) \text{ Encontrar } \textit{una expresión para } D(n) \end{aligned}$$

(Nota del editor: como es habitual, se marca con * un apartado propuesto sin solución)

Problema 229 (propuesto por Marcel Chirita, Bucarest, Rumania)
Sea ABC un triángulo y AA_1, BB_1, CC_1 tres cevianas concurrentes en un punto O interior al triángulo.

Sean

$$
\begin{aligned}
\alpha &= [AOC_1] - [COA_1]\,, \\
\beta &= [BOA_1] - [AOB_1]\,, \\
\gamma &= [COB_1] - [BOC_1]\,.
\end{aligned}
$$

Probar que si $\alpha + \beta + \gamma = 0$, entonces $\alpha\beta\gamma = 0$.
Nota: $[PQR]$ es el área del triángulo PQR.

Problema 230 (Propuesto por Marcel Chirita, Bucarest, Rumania)
Demostrar que se verifica la siguiente desigualdad triangular:

$$\max\left\{\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{a}{c}\right),\left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right),\left(1+\frac{c}{a}\right)\left(1+\frac{c}{b}\right)\right\} \geq 4$$

PROBLEMA 221, propuesto por D.M. Batinetzu-Giurgiu, Bucarest, y Neculai Stanciu, Buzau

Sea $ABCD$ un tetraedro y M un punto del espacio, distinto de los vértices del tetraedro. Demostrar que

$$\frac{MA}{MB+MC+MD}+\frac{MB}{MC+MD+MA}+\frac{MC}{MD+MA+MB}+\frac{MD}{MA+MB+MC}\geq$$

$$\geq\frac{R+r}{R}\geq\frac{4r}{R},$$

donde R y r son, respectivamente, el radio de la esfera circunscrita y el de la esfera inscrita en el tetraedro.

Solución por Daniel Lasaosa Medarde, Universidad Pública de Navarra, Pamplona, España

Lema 1: Sea $ABCD$ un tetraedro inscrito en una esfera de radio R. Entonces su volumen es $V\leq\frac{8R^3}{9\sqrt{3}}$, con igualdad si y sólo si el tetraedro es regular.

Demostración 1: Siendo O el circuncentro del tetraedro, podemos elegir sin pérdida de generalidad un sistema de coordenadas XYZ con centro O, tal que el plano XY sea paralelo al triángulo ABC, y que los ángulos formados por el eje X con respecto a las rectas OB', OC' sean iguales, donde B', C' son las proyecciones respectivas de B, C sobre el plano XY. Entonces, $A\equiv(\rho\cos\delta,\rho\sin\delta,h)$, $B\equiv(\rho\cos\alpha,\rho\sin\alpha,h)$, $C\equiv(\rho\cos\alpha,-\rho\sin\alpha,h)$ y $D\equiv(\rho'\cos\beta,\rho'\sin\beta,h')$, donde $\rho^2+h^2=\rho'^2+h'^2=R^2$, y sin pérdida de generalidad $h>h'$. Se tiene entonces que el volumen V del tetraedro cumple

$$3V=\rho^2(h-h')\left|\sin\alpha\,(\cos\delta-\cos\alpha)\right|.$$

Nótese que esta cantidad es una función periódica e infinitamente derivable respecto de α,δ salvo en los puntos en los que $V=0$, con lo que podemos ignorar el valor absoluto, derivar respecto a las variables, e igualar a 0 para obtener todos los extremos. Derivando respecto a δ, tenemos que sin pérdida de generalidad por simetría, ha de darse $\cos\delta=1$, y sustituyendo y derivando respecto a α, ha de darse además

$$0=2\cos^2\alpha-\cos\alpha-1=(2\cos\alpha+1)(\cos\alpha-1).$$

Claramente $\cos\alpha=1$ resulta en un tetraedro con volumen 0 (mínimo absoluto), luego $\cos\alpha=-\frac{1}{2}$ resulta en el máximo absoluto, a la vez que V es claramente máximo cuando h' es mínimo, es decir, para $h'=-R$. Luego

$$V\leq\frac{\sqrt{3}}{4}\rho^2(R+h)=\frac{\sqrt{3}}{8}(R+h)^2(2R-2h)\leq\frac{\sqrt{3}}{8}\left(\frac{2(R+h)+(2R-2h)}{3}\right)^3=\frac{8R^3}{9\sqrt{3}},$$

como queríamos demostrar, y con igualdad en la última desigualdad si y sólo si $R+h=2(R-h)$, es decir $R=3h$. Las condiciones $\delta=0$, $\cos\alpha=-\frac{1}{2}$, $h=-R$ y $h=\frac{R}{3}$ son claramente equivalentes a que $ABCD$ sea regular.

Lema 2: Sea un tetraedro $ABCD$ de volumen V, inradio r y suma de áreas de sus caras S. Entonces, $S\geq6\sqrt[3]{\sqrt{3}V^2}$. Se da la igualdad si y sólo si $ABCD$ es regular. Como consecuencia, se tiene $V\geq8\sqrt{3}r^3$, con igualdad si y sólo si $ABCD$ es regular.

Demostración 2: Sean a, b las longitudes respectivas de AD, BC, d la distancia entre las rectas AD, BC, y θ el ángulo formado por ambas rectas. Se puede completar $ABCD$ añadiendo rectas paralelas a sus lados, hasta formar un paralelepípedo con base de área $ab \sin\theta$, y altura d, luego $6V = abd \sin\theta$.

Al mismo tiempo, existen puntos $P \in AD$, $Q \in BC$, tales que $PQ \perp AD, BC$ y $PQ = d$. Se tiene entonces que la altura del triángulo DAB desde B es $\sqrt{BP^2 + d^2}$, luego el área $[DAB]$ del triángulo DAB es $\frac{AD}{2}$ veces esta altura. Se tiene entonces que

$$[CDA] + [DAB] = a\frac{\sqrt{CP^2 + d^2} + \sqrt{BP^2 + d^2}}{2} \geq a\sqrt{d^2 + \frac{BC^2}{4}} = a\sqrt{d^2 + \frac{b^2}{4}}.$$

Esta última desigualdad es consecuencia de la desigualdad entre medias aritmética y geométrica para BP^2, CP^2, y de la desigualdad triangular $BC \leq BP + CP$. Se da la igualdad entonces si y sólo si $BP = CP$ estando P en el interior del segmento BC. De forma similar, $[ABC] + [BCD] \geq b\sqrt{d^2 + \frac{a^2}{4}}$, con igualdad si y sólo si $AQ = DQ$.

Usando las anteriores desigualdades, aplicando la desigualdad entre medias, usando la expresión de V y que $\sin\theta \leq 1$, se obtiene

$$S^2 \geq \left(a\sqrt{d^2 + \frac{b^2}{4}} + b\sqrt{d^2 + \frac{a^2}{4}}\right)^2 \geq 4ab\sqrt{\left(d^2 + \frac{a^2}{4}\right)\left(d^2 + \frac{b^2}{4}\right)} \geq 4abd^2 + a^2b^2 =$$

$$= \frac{24dV}{\sin\theta} + \frac{36V^2}{d^2 \sin^2\theta} \geq 12V\frac{d^3 + d^3 + 3V}{d^2} \geq 36V\sqrt[3]{3V},$$

equivalente a la primera parte del Lema 2. Se da la igualdad en esta desigualdad si y sólo si, simultáneamente, $a = b$, $\sin\theta = 1$, $3V = d^3$, $BP = CP$, $AQ = DQ$, o equivalentemente, si y sólo si $ABCD$ es regular.

Como consecuencia de lo anterior, y al ser $3V = Sr$, tenemos que

$$9V^2 = S^2r^2 \geq 36V\sqrt[3]{3V}r^2, \qquad V \geq 8\sqrt{3}r^3,$$

con igualdad claramente si y sólo si $ABCD$ es regular.

Lema 3: En todo tetraedro $ABCD$, se da $R \geq 3r$, con igualdad si y sólo si $ABCD$ es regular.

Demostración 3: Consecuencia inmediata de los Lemas 1 y 2.

Usando el Lema 3, es claro que nos basta con demostrar que, para cualesquiera reales no negativos a, b, c, d (que representan respectivamente a MA, MB, MC, MD), y siendo $s = a + b + c + d$, se cumple

$$\frac{a}{s-a} + \frac{b}{s-b} + \frac{c}{s-c} + \frac{d}{s-d} \geq \frac{4}{3}.$$

Esto es consecuencia trivial de la desigualdad de Jensen aplicada a la función $f(x) = \frac{x}{s-x}$, con derivada segunda estrictamente positiva $f''(x) = \frac{2s}{(s-x)^3}$ para $0 < x < s$, y con igualdad si y sólo si $a = b = c = d$.

Se sigue entonces el resultado pedido, dándose la igualdad en la segunda desigualdad si y sólo si $ABCD$ es regular, y en la primera si y sólo si $ABCD$ es regular y además M es su centro.

<u>Problema 222</u> (propuesto por el editor)

ABC es un triángulo; P es un punto variable tal que $m.BP.sen\measuredangle APB = n.CP.sen\measuredangle APC$, donde m y n son constantes. Determinar el lugar geométrico del punto P.

Solución de Floro Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba (España).

Sea P un punto del plano ($P \neq A$) y consideramos el segmento AP.

De la expresión dada, $m.BP.sen\measuredangle APB = n.CP.sen\measuredangle APC \rightarrow \frac{1}{2}.AP.m.BP.sen\measuredangle APB = \frac{1}{2}.AP.n.CP.sen\measuredangle APC$

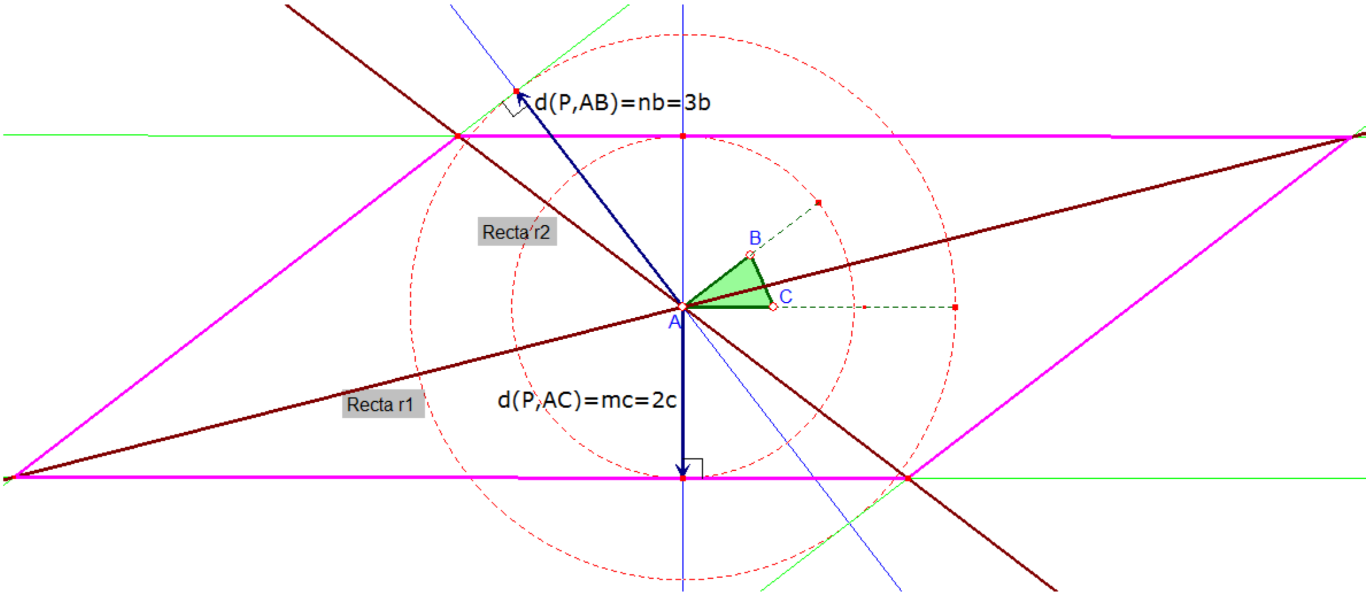
$$m.(\frac{1}{2}.AP.BP.sen\measuredangle APB) = n.(\frac{1}{2}.AP.CP.sen\measuredangle APC) \rightarrow m.Area(\overset{\Delta}{APB}) = n.Area(\overset{\Delta}{APC})$$

En definitiva, $\dfrac{Area(\overset{\Delta}{APB})}{Area(\overset{\Delta}{APC})} = \dfrac{n}{m}$.

Es decir, $\dfrac{Area(\overset{\Delta}{APB})}{Area(\overset{\Delta}{APC})} = \dfrac{c.h_c}{b.h_b} = \dfrac{n}{m} \rightarrow \dfrac{h_c}{h_b} = \dfrac{n.b}{m.c}$.

Esta última condición equivale a decir que un punto P del plano distinto de A pertenecerá a nuestro L.G. si y solo si $\dfrac{d(P,AB)}{d(P,AC)} = \dfrac{h_c}{h_b} = \dfrac{n.b}{m.c}$.

Ahora bien, esta última condición algebraica es fácil de construir geométricamente. Los puntos que la verifican están situados en un par de rectas que, pasando por el punto A, cumplen la condición exigida.
Podemos visualizar dicha construcción para un caso concreto. Sean los valores m=2 y n=3.



Como podemos observar, el L.G. reside en las rectas que pasan por las dos diagonales de cualquier paralelogramo centrado en el punto A y de lados paralelos a los lados AB=c y AC=b, respectivamente y cuyos lados distan del centro A unos valores que en proporción coincide con $\dfrac{d(P,AB)}{d(P,AC)} = \dfrac{n.b}{m.c}$.

Problema 223

Demostrar que si los lados de un cuadrilátero son las raíces de la ecuación

$$x^4-4x^3+6qx^2+(8-12q)x+s=0$$

entonces el cuadrilátero tiene un círculo inscrito.

Solución

Es sabido que la condición necesaria y suficiente para que un cuadrilátero admita círculo inscrito es que los pares de lados opuesto sumen lo mismo.

Vamos a caracterizar los polinomios mónicos de grado cuatro para que los dos pares de raíces sumen lo mismo.

Sea el polinomio

$$x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0$$

y sean sus raíces $\alpha, \beta, \gamma, \delta$

Por las fórmulas de Cardano-Vieta tenemos

$$\begin{aligned}\alpha+\beta+\gamma+\delta&=-a_3\\ \alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\delta\gamma&=a_2\\ \alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta&=-a_1\\ \alpha\beta\gamma\delta&=a_0\end{aligned}$$

Imponiendo la condición $\alpha+\beta=\gamma+\delta$ (pondremos $\alpha+\beta=\gamma+\delta=m$) y operando, queda

$$\begin{aligned}2m&=-a_3\\ \alpha\beta+\delta\gamma+m^2&=a_2\\ (\alpha\beta+\gamma\delta)m&=-a_1\\ \alpha\beta\gamma\delta&=a_0\end{aligned}$$

Eliminado $\alpha\beta+\gamma\delta$ y m de las tres primeras, resulta

$$a_2-\frac{a_3^2}{4}=\frac{2a_1}{a_3} \quad (1)$$

que es la condición para que dos pares de raíces sumen lo mismo.

Sólo queda verificar que los coeficientes de nuestra ecuación $(a_3=-4, a_2=6q, a_1=8-12q)$ cumplen (1):

$$a_2-\frac{a_3^2}{4}=6q-\frac{16}{4}=6q-4$$

$$\frac{2a_1}{a_3}=\frac{-24q+16}{-4}=6q-4$$

Cristóbal Sánchez-Rubio Benicasim

Problema 224

3 de noviembre de 2012

Problem No. 224. *Si n es un entero impar, y $a, b, c, \cdots$ son las $n-1$ raíces $n-$ésimas complejas de la unidad, probar que:*

$$(a^r - 1)(b^r - 1)(c^r - 1) \cdots = n$$

$$(a^r + 1)(b^r + 1)(c^r + 1) \cdots = 1$$

si r es cualquier nÃºmero primo con n.

Demostración. (Devis M. Alvarado, University of Puerto Rico Mayaguez)
(I) Consideremos el polinomio: $P(z) = \sum_{i=0}^{n-1} z^i$ con n impar, y sean ω_i las $n-1$ raíces complejas. Si ω es una de estas raíces, se tiene que $\{\omega_i\}_{i=1}^{n-1} = \{\omega^i\}_{i=0}^{n-1}$. Tambien como n y r son primos relativos, y sean $r_1, r_2, \cdots, r_{n-1}$ tal que $ir \equiv r_i mod(n)$ entonces $\{r_1, r_2, \cdots, r_{n-1}\}$ es una permutación de $\{1, 2, 3, \cdots, n-1\}$

$$P(z) = \prod_{i=1}^{n-1}(z - \omega_i) = \prod_{i=1}^{n-1}(z - \omega^i) = \prod_{i=1}^{n-1}(z - \omega^{r_i}) = \prod_{i=1}^{n-1}(z - \omega^{ir-kn}) = \prod_{i=1}^{n-1}(z - \omega^{ir})$$

esta última igualdad por que $\omega^n = 1$.

$$\prod_{i=1}^{n-1}(z - \omega^{ir}) = \prod_{i=1}^{n-1}(z - \omega_i^r) = \prod_{i=1}^{n-1}(-1)\prod_{i=1}^{n-1}(\omega_i^r - z) = \prod_{i=1}^{n-1}(\omega_i^r - z)$$

Evaluando $P(z)$ en $z = 1$ se obtiene

$$\prod_{i=1}^{n-1}(\omega_i^r - 1) = \sum_{i=0}^{n-1}(1) = n$$

(II) Evaluando $P(z)$ en $z = -1$ se obtiene

$$\prod_{i=1}^{n-1}(\omega_i^r + 1) = \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i = \frac{1 - (-1)^n}{2} = 1$$

que era lo que se quería. $\square$

PROBLEMA 225, propuesto por el Editor

$XAYB$ es una cuaterna armónica; P es un punto que no está en la recta XY, tal que $XP = p$, $YP = q$, y el $\angle XPY = \theta$. Si x, y son las longitudes de las perpendiculares desde X e Y a la tangente común a los dos circulos de centros respectivos A y B, y que pasan por P, demostrar que $xy = pq \cdot \cos\theta$.

Observación del editor: se utiliza la notación inglesa para la cuaterna armónica: los puntos X, A, Y, B estan **en ese orden** sobre la recta.

Solución por Daniel Lasaosa Medarde, Universidad Pública de Navarra, Pamplona, España

Sean a, b los radios de los círculos de centros A, B por P. Aplicando el teorema de Stewart a las cevianas PA, PY en los triángulos PXY, PXB respectivamente, y tras reorganizar términos, se llega a

$$p^2 + q^2 - XY^2 = \frac{XY^2}{XA \cdot AY} a^2 - \frac{AY}{XA} p^2 - \frac{XA}{AY} q^2 = \frac{YB}{XB} p^2 + \frac{XB}{YB} q^2 - \frac{XY^2}{YB \cdot XB} b^2.$$

Ahora bien, por ser $XAYB$ cuaterna armónica, se tiene que $\frac{AY}{XA} = \frac{YB}{XB}$, luego sumando ambas expresiones para $p^2 + q^2 - XY^2$, y aplicando el teorema del coseno, se tiene

$$4pq\cos\theta = \frac{XY^2}{XA \cdot AY} a^2 - \frac{XY^2}{YB \cdot XB} b^2 = \frac{XB \cdot YB \cdot a^2 - XA \cdot AY \cdot b^2}{AY^2 \cdot XB^2} XY^2.$$

Por ser $ABCD$ una cuaterna armónica, existe $k = \frac{XA}{AY} = \frac{XB}{YB}$, con lo que podemos escribir $XY = AY(k+1) = (k-1)YB$ donde claramente k no puede tomar los valores $-1, 0, 1$ porque los puntos X, A, Y, B son distintos. Usando k, la anterior expresión se puede escribir como

$$4pq\cos\theta = \frac{(k+1)^2 a^2 - (k-1)^2 b^2}{k}.$$

Consideramos ahora dos casos:

Caso 1: La recta tangente a ambos círculos es paralela a la recta XB, o equivalentemente, $a = b = x = y$, con lo que

$$pq\cos\theta = \frac{(k+1)^2 - (k-1)^2}{4k} xy = xy,$$

como queríamos demostrar.

Caso 2: La recta tangente a ambos círculos no es paralela a la recta XB, o equivalentemente x, a, y, b son todos distintos y están en orden bien estrictamente creciente, bien estrictamente decreciente. Por el teorema de Thales,

$$\frac{a-x}{XA} = \frac{y-x}{XY} = \frac{b-x}{XB} = \frac{y-a}{AY} = \frac{b-y}{YB},$$

donde los numeradores en la anterior cadena de igualdades son, o todos positivos, o todos negativos. Se comprueba fácilmente que $(k+1)a = ky + x$ y $(k-1)b = ky - x$, luego

$$pq\cos\theta = \frac{(ky+x)^2 - (ky-x)^2}{4k} = xy,$$

como queríamos demostrar.

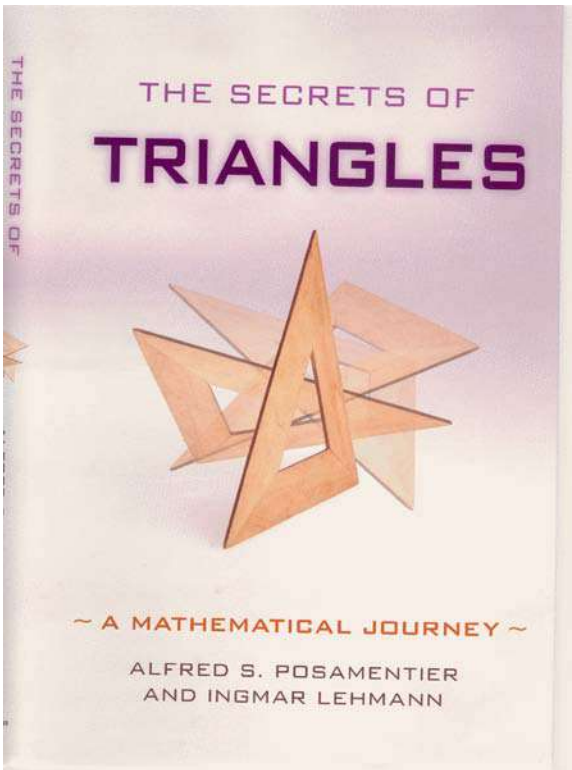
Noticia de Congresos, reseña de libros y de páginas web 46

Posamentier, A.S. & Lehman, I: *The secrets of triangles. Prometheus Books 2012*

Alfred S. Posamentier es un viejo conocido de los aficionados a la resolución de problemas, no solamente de Geometría, sino también de Álgebra. Decano de la school of Education en el Mercy College de Nueva York, es autor, con Charles T. Salkind, de dos buenos ejemplos de libros de resolución de problemas de estas dos áreas de las Matemáticas.

Por su parte, Ingmar Lehmann, de la Universidad Humboldt de Berlin, preside la Sociedad de Estudiantes de Matemáticas de Berlin y es coautor de otros varios libros con Posamentier.

The Secrets of Triangles, subtitulado *A mathematical Journey,* es un recorrido muy complete por las propiedades del triángulo, muchas de las cuales son completamente desconocidas por un buen número de estudiantes actuales y – lo que es peor – por buena parte también de profesores, al menos en mi país. El décimo capítulo del libro, dedicado a los fractales, es una colaboración especial de Robert A. Chaffer, de la Universidad Central de Michigan.



Los autores ponen énfasis en las propiedades que pueden resultar *inesperadas* (es lo que ellos llaman secretos del triángulo, y de ahí el título) y no debería faltar en la biblioteca de ningún centro escolar.

Valladolid, noviembre de 2012.

Francisco Bellot Rosado

Henri Cartan

André Weil

René de Possel

Charles Ehresmann

Laurent Schwartz

Jean Dieudonné

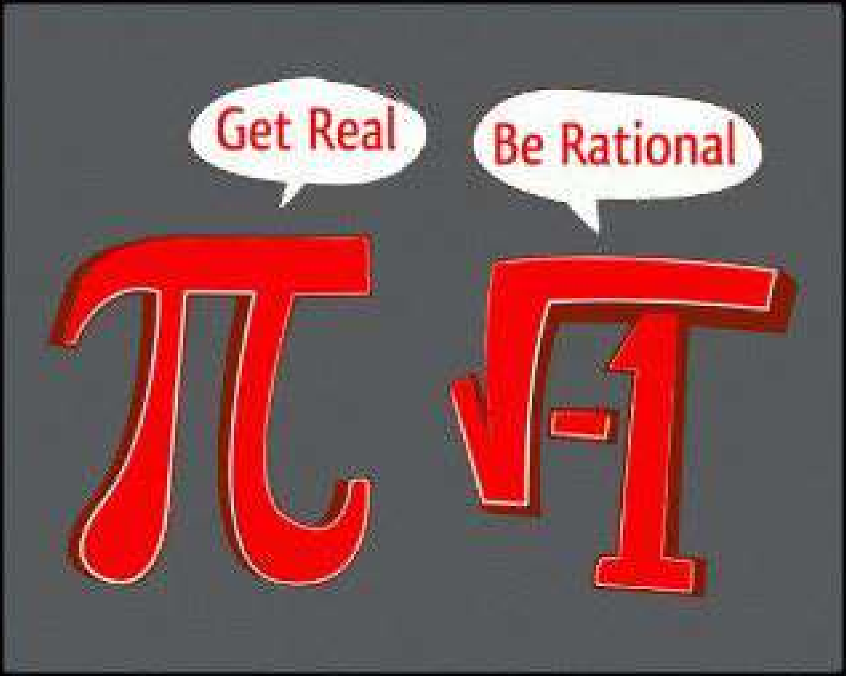
Claude Chevalley

Pierre Samuel

Jean-Pierre Serre

Adrien Douady


DO i REALLY EXIST?
$\sqrt{-1}$
SNODGRASS/
D'Amico


Get Real
Be Rational


ME LIMPIAS TODO PITÁGORAS

Número

47

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

ISSN 1698-677X

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

Número 47 (noviembre 2012 - febrero 2013)

ISSN – 1698-277X

ÍNDICE

Problema 227

Recibidas soluciones de Roberto Bosch Cabrera, Florida, USA; Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, España; y Cristóbal Sánchez-Rubio, Benicassim, España y el proponente. Presentamos la solución de Sánchez-Rubio.

Problema 228

No se han recibido soluciones, por lo que el problema sigue abierto.

Problema 229

Recibidas soluciones de Roberto Bosch Cabrera, Florida, USA; Neculai Stanciu y Titu Zvonaru (conjuntamente), Rumania; Daniel Lasaosa Medarde, Pamplon, España y el proponente. Presentamos la solución de Lasaosa.

Problema 230

Recibidas soluciones de Miguel Amengual Covas, Cala Figuera, España; Roberto Bosch Cabrera, Florida, USA; Daniel Lasaosa medarde, Pamplona, España; Cristóbal Sánchez-Rubio, Benicassim, España; Neculai Stanciu (Buzau) y Titu Zvonaru (Comanesti),conjuntamente, Rumania; y el proponente. Presentamos la solución de Lasaosa.

Noticia de Congresos, comentario de libros y de páginas web 47

Comentario al libro *Probleme de extrem in Geometrie,* de Ionut Ivanescu; por F.Bellot

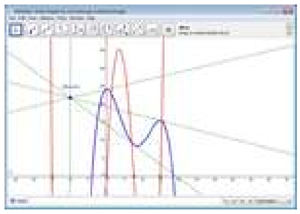
Divertimentos Matemáticos 47

Capturado en Internet (4)

Curso iberoamericano de formación de profesores de secundaria en el área de matemáticas

El curso lo convoca la Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura (OEI) en el seno de su Centro de Altos Estudios Universitarios con la participación de aquellos países Iberoamericanos que decidan incorporarse al proyecto. El proyecto se enmarca en la colaboración que la OEI y la Consejería de Innovación, Ciencia, Empresa y Empleo de la Junta de Andalucía (España) desarrollan con el fin de apoyar la construcción del Espacio Iberoamericano del Conocimiento a través del fomento de vocaciones hacia la ciencia y al avance del Programa Metas Educativas 2021.
Además, presta su colaboración el Ministerio de Educación de Paraguay y la AECID (España). **http://www.oei.es/cursomatematica/**

Curso GeoGebra de formación docente en TIC y matemática



Especialización en TIC y Educación del CAEU de la OEI
Este curso de formación tiene como objetivo dar a conocer distintas aplicaciones que faciliten la incorporación de las TIC al aula de matemáticas en los diferentes niveles educativos.
Es evidente que resulta imposible recoger todos los recursos existentes, por lo que en cada uno de los bloques desarrollados en el siguiente material se ha apostado por unos determinados programas por sus características y posibilidades, apoyados en todo momento con otros recursos disponibles en Internet.
Matrícula y becas parciales abiertas http://www.oei.es/ticymatematicas/

In Memoriam

Prof. Juan Bosco Romero Márquez (1945-2013)

El pasado 19 de enero falleció repentinamente en su casa de Ávila el Prof. Juan Bosco Romero Márquez, habitual colaborador de la REOIM. Sirvan estas líneas, escritas conjuntamente por Francisco Javier García Capitán y el editor, de sincero homenaje a su memoria.

Juan Bosco (como le llamábamos algunos de sus amigos, tal vez para diferenciarle de otros "Juanes", matemáticos también) nació en Montilla (Córdoba) en 1945. Estudió la carrera de Matemáticas en Madrid, y a su término comenzó a trabajar en el Instituto "Jorge Juan" del Consejo Superior de Investigaciones Científicas, como becario de Investigación, entre 1971 y 1976; al tiempo que resolvía y proponía problemas en la revista *Gaceta Matemática*, de la Real Sociedad Matemática Española. Sus intereses eran las desigualdades con medias y la Geometría. Posteriormente, combinó ambas áreas proponiendo y resolviendo problemas de desigualdades geométricas. Una vez ganadas las oposiciones a Cátedras de Instituto, en 1976, se estableció en Ávila, sirviendo, hasta su jubilación, en el Instituto "Isabel de Castilla".

La siguiente foto, amablemente cedida por el Prof. Tomás Recio Muñiz, compañero de despacho de Juan Bosco en el CSIC, nos muestra a los profesores del departamento de Álgebra de la U. Complutense en 1973 rodeando a su Director, el Prof. Abellanas:

Juan Bosco está en la segunda fila, el segundo por la izquierda. La primera de la derecha en la primera fila es Ángeles, su esposa.

Su interés por la investigación de nuevos problemas y la profundización de otros conocidos era infatigable; en el caso de los geométricos, sin ayuda de programas informáticos.

En la Revista Virtual *Laboratorio de Triángulos Cabri,* cuyo editor es el Prof. Ricardo Barroso Campos, de la U. de Sevilla, se publicó una entrañable entrevista virtual con Juan Bosco, en la que se dan numerosos detalles de su trayectoria profesional. Se puede leer la entrevista en

http://personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/600jbrm.pdf

Además de su trabajo inicial en la sección de problemas de *Gaceta Matemática,* las colaboraciones con revistas extranjeras fueron muy numerosas: *The American Mathematical Monthly, Crux Mathematicorum, Mathematics Magazine, Math Horizons, School Science and Mathematics* son los títulos de algunas de ellas. De entre las españolas, la *Gaceta de la R.S.M.E.;* y entre las virtuales, la *REOIM* y el *Laboratorio Virtual de Triángulos Cabri.* La página web de García Capitán incluye una sección titulada *Charlas con JBRM* en la que se reflejan muchos de los problemas estudiados por Juan Bosco, en este caso conjuntamente con el mantenedor de la página.

En el libro de Ross Honsberger *Mathematical Diamonds* (MAA 2003) se dedica una de sus secciones a *Three Pretty Theorems in Geometry*. Citamos textualmente a Honsberger: *Es un placer felicitar al Prof. Marquez (sic) por sus deliciosos descubrimientos y agradecerle por el permiso para presentarlos aquí con mis propias palabras".*

Las dos fotografías siguientes muestran a Juan Bosco con el editor de REOIM, en Ávila, en 2010, durante la Olimpiada Regional de 2º y 4º de E.S.O.; y con García Capitán, comentando unos problemas en su casa de Ávila. Tal vez sea la única donde Juan Bosco no luce su característico bigote.

El problema con el que terminamos esta Nota es uno de los que más apreciaba Juan Bosco; lo envió a Crux Mathematicorum como homenaje a Murray S. Klamkin:

Problema Klamkin-08. *Sean m y n números enteros positivos, y sean $x_1, x_2, \ldots x_m$ números reales positivos. Si λ es un número real, $\lambda \geq 1$, demostrar que*

$$\left(\prod_{i=1}^{m} x_i\right)^{\frac{1}{m}} \leq \left(\frac{\lambda\left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)^n + (1-\lambda)\sum_{i=1}^{m} x_i^n}{\lambda m^n + (1-\lambda)m}\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_i.$$

Le despedimos con el antiguo aforismo funerario latino: *Sit tibi terra levis.*

Valladolid y Priego de Córdoba, enero de 2013.

Francisco Bellot Rosado y Francisco Javier García Capitán

NUEVAS GENERALIZACIONES Y APLICACIONES DE LA DESIGUALDAD DE NESBITT

D. M. BĂTINEȚU-GIURGIU y **N**ECULAI **S**TANCIU

Abstract. This paper presents new generalizations and new refinements for Nesbitt's inequality (other than those of $[1]$).
Keywords: Nesbitt's inequality, Jensen's inequality, Radon's inequality, Bergström inequality.
MSC : 26D15.

1. Introducción

Consideramos los siguientes conjuntos, $\mathbf{N}=\{0,1,2,...\}$, $\mathbf{N}^*=\{1,2,...\}$, $\mathbf{R}_+=[0,\infty)$ y $\mathbf{R}_+^*=(0,\infty)$. También usaremos los símbolos $\forall$, que significa “para todo”, y $k=\overline{1,n}$ que quiere decir que $k\in\{1,2,3,...,n\}$.

La desigualdad de Nesbitt (v. por ej. $[2]$) es

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\geq\frac{3}{2},\quad \text{cualesquiera que sean } x,y,z\in\mathbf{R}_+^*$$

En este artículo probaremos una generalización de la desigualdad de Nesbitt y por particularización obtendremos refinamientos de la misma.

2. Una generalización de la desigualdad de Nesbitt

TEOREMA 2.1. Si $n\in N^*-\{1\}$, $a\in R_+$, $b,c,d,x_k\in R_+^*$, $\forall k=\overline{1,n}$, $X_n=\sum_{k=1}^{n}x_k$, $m,p,r,s\in[1,\infty)$, tales que $cX_n^r>d\max_{1\leq k\leq n}x_k^r$, entonces

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(aX_n^m+bx_k^m\right)^p}{\left(cX_n^r-dx_k^r\right)^s}\geq\frac{\left(an^m+b\right)^p}{\left(cn^r-d\right)^s}n^{rs-mp+1}X_n^{mp-rs}\tag{1}$$

Demostración. Si llamamos $y_k=\frac{x_k}{X_n}$, $\forall k=\overline{1,n}$, entonces $Y_n=\sum_{k=1}^{n}y_k=1$, y (1) se escribe

$$U_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(aX_n^m+bx_k^m\right)^p}{\left(cX_n^r-dx_k^r\right)^s}=X_n^{mp-rs}\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(a+by_k^m\right)^p}{\left(c-dy_k^r\right)^s}\geq\frac{\left(an^m+b\right)^p}{\left(cn^r-d\right)^s}n^{rs-mp+1}X_n^{mp-rs}\tag{2}$$

Probaremos (2) considerando las funciones

$$f,g,h:\left(0,\left(\frac{c}{d}\right)^{\frac{1}{r}}\right)\to R_+^*,\ f(y)=\left(a+by^m\right)^p,\ g(y)=\left(c-dy^r\right)^{-s},\ h=fg.$$

Se tiene

$$f'(y)=bmp\left(a+by^m\right)^{p-1}y^{m-1}>0,\ g'(y)=drs\left(c-dy^r\right)^{-(s+1)}y^{r-1}>0,\ \forall y\in\left(0,\left(\frac{c}{d}\right)^{\frac{1}{r}}\right)\ \square\text{i}$$

$$f''(y)=bmp\left(a+by^m\right)^{p-2}y^{m-2}\left((m-1)a+b(mp-1)y^m\right)>0,$$

$$g''(y)=drs\left(c-dy^r\right)^{-(s+2)}y^{r-2}\left((r-1)c+d(rs+1)y^r\right)>0,\ \forall y\in\left(0,\left(\frac{c}{d}\right)^{\frac{1}{r}}\right).$$

Ya que $h=fg$, tenemos $h''=f''g+2f'g'+fg''$ y entonces

$$h''(y)=f''(y)g(y)+2f'(y)g'(y)+f(y)g''(y)>0,\ \forall y\in\left(0,\left(\frac{c}{d}\right)^{\frac{1}{r}}\right),$$

Luego h es convexa en $\left(0,\left(\frac{c}{d}\right)^{\frac{1}{r}}\right)$ y por la desigualdad de Jensen deducimos que

$$\sum_{k=1}^{n}h(y_k)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(a+by_k^m\right)^p}{\left(c-dy_k^r\right)^s}\geq nh\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}y_k\right)=nh\left(\frac{1}{n}Y_n\right)=nh\left(\frac{1}{n}\right)=n\cdot\frac{\left(a+\frac{b}{n^m}\right)^p}{\left(c-\frac{d}{n^r}\right)^s}=$$

$$=\frac{\left(an^m+b\right)^p}{\left(cn^r-d\right)^s}n^{rs-mp+1} \qquad (3)$$

Por (2) y (3) obtenemos que

$$U_n\geq\frac{\left(an^m+b\right)^p}{\left(cn^r-d\right)^s}n^{rs-mp+1}X_n^{mp-rs},$$

luego (1) queda demostrado.

3. Un refinamiento de la desigualdad de Nesbitt

TEOREMA 3.1. **Si** $n\in N^*-\{1\}$, $a\in R_+$, $b,c,d,x_k\in R_+^*$, $\forall k=\overline{1,n}$, $X_n=\sum_{k=1}^{n}x_k$, $m,p,r,s\in[1,\infty)$, tales que $cX_n^r>d\max_{1\leq k\leq n}x_k^r$, entonces

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(aX_n^m+bx_k^m\right)^p}{\left(cX_n^r-dx_k^r\right)^s}\geq\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(aX_n^m+bx_k^m\right)^p\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(cX_n^r-dx_k^r\right)^s}\geq$$

$$\geq\frac{\left(anX_n^m+b\sum_{k=1}^{n}x_k^m\right)^p}{\left(cnX_n^r-d\sum_{k=1}^{n}x_k^r\right)^s}n^{s-p+1}\geq\frac{\left(an^m+b\right)^p}{\left(cn^r-d\right)^s}n^{rs-mp+1}X_n^{mp-rs} \qquad (4)$$

Demostración. Sin pérdida de la generalidad podemos suponer que $x_1\leq x_2\leq\ldots\leq x_n$ y entonces

$$\left(aX_n^m+bx_1^m\right)^p\leq\left(aX_n^m+bx_2^m\right)^p\leq\ldots\leq\left(aX_n^m+bx_n^m\right)^p \qquad (5)$$

y

$$\frac{1}{\left(cX_n^r-dx_1^r\right)^s}\leq\frac{1}{\left(cX_n^r-dx_2^r\right)^s}\leq\ldots\leq\frac{1}{\left(cX_n^r-dx_n^r\right)^s} \qquad (6)$$

Por la desigualdad de P.L. Chebyshev tenemos

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\left(aX_n^m + bx_k^m\right)^p}{\left(cX_n^r - dx_k^r\right)^s} \geq \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(aX_n^m + bx_k^m\right)^p\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(cX_n^r - dx_k^r\right)^s} \tag{7}$$

Ya que la función $u : R_+^* \to R_+^*,\ u(t) = t^p,\ p \geq 1$ es convexa en R_+^* deducimos que

$$\sum_{k=1}^{n}\left(aX_n^m + bx_k^m\right)^p \geq n\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(aX_n^m + bx_k^m\right)\right)^p = \frac{1}{n^{p-1}}\left(anX_n^m + b\sum_{k=1}^{n}x_k^m\right)^p \tag{8}$$

Por la desigualdad de J. Radon obtenemos que

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(cX_n^r - dx_k^r\right)^s} \geq \frac{n^{s+1}}{\left(\sum_{k=1}^{n}\left(cX_n^r - dx_k^r\right)\right)^s} = \frac{n^{s+1}}{\left(cnX_n^r - d\sum_{k=1}^{n}x_k^r\right)^s} \tag{9}$$

Por (7), (8) y (9) resulta que

$$U_n \geq \frac{\left(anX_n^m + b\sum_{k=1}^{n}x_k^m\right)^p}{\left(cnX_n^r - d\sum_{k=1}^{n}x_k^r\right)^s} n^{s-p+1} \tag{10}$$

Ya que las funciones $v, w : R_+^* \to R_+^*,\ v(t) = t^m,\ w(t) = t^r,\ m, r \geq 1$ son convexas en R_+^* se tiene

$$\sum_{k=1}^{n}x_k^m \geq \frac{X_n^m}{n^{m-1}} \tag{11}$$

Y, respectivamente,

$$\sum_{k=1}^{n}x_k^r \geq \frac{X_n^r}{n^{r-1}} \tag{12}$$

Por (11) y (12) la desigualdad (10) se convierte en

$$U_n \geq \frac{\left(anX_n^m + \frac{b}{n^{m-1}}X_n^m\right)^p}{\left(cnX_n^r - \frac{d}{n^{r-1}}X_n^r\right)^s} n^{s-p+1} = \frac{\left(an^m + b\right)^p}{\left(cn^r - d\right)^s} n^{rs-mp+1} X_n^{mp-rs} \tag{13}$$

Por lo tanto

$$U_n \geq \frac{\left(anX_n^m + b\sum_{k=1}^{n}x_k^m\right)^p}{\left(cnX_n^r - d\sum_{k=1}^{n}x_k^r\right)^s} n^{s-p+1} \geq \frac{\left(an^m + b\right)^p}{\left(cn^r - d\right)^s} n^{rs-mp+1} X_n^{mp-rs} \tag{14}$$

4. Algunas consecuencias

COROLARIO 4.1. Si $n \in N^* - \{1\},\ a \in R_+,\ b, c, d, x_k \in R_+^*,\ \forall k = \overline{1, n}$, $X_n = \sum_{k=1}^{n} x_k,\ \alpha \in [1, \infty)$, tales que $cX_n > d \max_{1 \leq k \leq n} x_k$, entonces

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(aX_n + bx_k\right)^\alpha}{cX_n - dx_k} \geq \frac{\left(an + b\right)^\alpha}{cn - d} n^{2-\alpha} X_n^{\alpha-1} \tag{15}$$

Demostración: En el teorema 2.1., basta tomar $m = r = s = 1,\ p = \alpha$.

COROLARIO 4.2. Si $n \in N^* - \{1\},\ x_k \in R_+^*,\ \forall k = \overline{1,n},\ X_n = \sum_{k=1}^{n} x_k,\ \alpha \in [1,\infty)$, entonces

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^{\alpha}}{X_n - x_k} \geq \frac{n^{2-\alpha}}{n-1} X_n^{\alpha-1} \tag{16}$$

Demostración: En el corolario 4.1. tomamos $a = 0,\ b = c = d = 1$ y se obtiene (16), es decir, el corolario 2.1. de $[1]$.

COROLARIO 4.3. Si $n \in N^* - \{1\},\ x_k \in R_+^*,\ \forall k = \overline{1,n},\ X_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$, entonces

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{X_n - x_k} \geq \frac{n}{n-1} \tag{17}$$

Demostración: En el corolario 4.2. tomamos $\alpha = 1$ y obtenemos el corolario 2.2. de $[1]$.

NOTA 4.1. Para $n = 3$, por el corolario 4.3. se obtiene la desigualdad de Nesbitt "clásica":

$$\frac{x_1}{x_2 + x_3} + \frac{x_2}{x_3 + x_1} + \frac{x_3}{x_1 + x_2} \geq \frac{3}{2},\ \forall x_1, x_2, x_3 \in R_+^* \tag{18}$$

COROLARIO 4.5. Si $n \in N^* - \{1\},\ a \in R_+,\ b, c, d, x_k \in R_+^*,\ \forall k = \overline{1,n},\ X_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$, $cX_n > d \max_{1 \leq k \leq n} x_k,\ \alpha \in R_+$, entonces

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(aX_n + bx_k)^{\alpha+1}}{cX_n - dx_k} \geq \frac{\left(anX_n + b\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^{\alpha+1}}{cnX_n - d\sum_{k=1}^{n} x_k} n^{1-\alpha} \geq \frac{(an+b)^{\alpha+1}}{cn-d} n^{1-\alpha} X_n^{\alpha} \tag{19}$$

Demostración. En el teor. 3.1.basta tomar $p = \alpha + 1,\ m = r = s = 1$.

COROLARIO 4.6. Si $n \in N^* - \{1\},\ c, d, x_k \in R_+^*,\ \forall k = \overline{1,n},\ X_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$, $cX_n > d \max_{1 \leq k \leq n} x_k,\ \alpha \in R_+$, entonces

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^{\alpha+1}}{cX_n - dx_k} \geq \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k^{\alpha+1}}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{cX_n - dx_k} \geq \frac{n^{1-\alpha}}{cn-d} X_n^{\alpha} \tag{20}$$

Demostración: En (4) tomamos $a = 0,\ b = 1,\ m = r = s = 1,\ p = \alpha + 1$, y deducimos que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^{\alpha+1}}{cX_n - dx_k} \geq \frac{1}{n} X_n^{\alpha+1} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{cX_n - dx_k} \geq \frac{n^{1-\alpha}}{cn-d} X_n^{\alpha},$$

es decir, el teor. 4.1. de $[1]$.

COROLARIO 4.7. Si $n \in N^* - \{1\},\ x_k \in R_+^*,\ \forall k = \overline{1,n},\ X_n = \sum_{k=1}^{n} x_k,\ \alpha \in R_+$, entonces

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^{\alpha+1}}{X_n - x_k} \geq \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^{\alpha+1}\right) \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{X_n - x_k} \geq \frac{n^{1-\alpha}}{n-1} X_n^{\alpha} \tag{21}$$

Demostración. En el corolario 4.6. basta tomar $c = d = 1$.De esta forma se vuelve a obtener el corolario 4.1. de $[1]$.

NOTA 4.2. La desigualdad (21) es uj refinamiento de la desigualdad 2.2. de $[1]$, así que (21) es una generalización y un refinamiento de la de Nesbitt

COROLARIO 4.8. Si $x, y, z \in R_+^*$, entonces

$$\frac{x^{\alpha+1}}{c(y+z)-(d-c)x}+\frac{y^{\alpha+1}}{c(z+x)-(d-c)y}+\frac{z^{\alpha+1}}{x(x+y)-(d-c)z} \geq$$

$$\geq \frac{1}{3}(x+y+z)^{\alpha+1}\left(\frac{1}{c(y+z)-(d-c)x}+\frac{1}{c(z+x)-(d-c)y}+\frac{1}{c(x+y)-(d-c)z}\right) \geq \frac{3^{1-\alpha}}{3c-d} \quad (22)$$

Demostración: En (20) basta tomar $n = 3$.

COROLARIO 4.9. Si $x, y, z \in R_+^*$, entonces

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y} \geq \frac{1}{3}(x+y+z)\left(\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}+\frac{1}{x+y}\right) \geq \frac{3}{2} \quad (23)$$

Demostración: En (22) se toma $\alpha = 0$, es decir, se vuelve a obtener el corolario 4.2. de $[1]$.

NOTA 4.3. La desigualdad (23) es un refinamiento de la de Nesbitt.

5. Algunas aplicaciones

APLICACIÓN 5.1. Si $n \in N^* - \{1\}$, $a \in R^+$, $b, c, d, a_k \in R_+^*$, $\forall k = \overline{1,n}$, $H_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}$, $m, p, r, s \in [1, \infty)$, y $cH_n^r > d \max_{1\leq k\leq n}\frac{1}{a_k}$, entonces

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(aH_n^m+\dfrac{b}{a_k^m}\right)^p}{\left(cH_n^r-\dfrac{d}{a_k^r}\right)^s} \geq \frac{(an^m+b)^p}{(cn^r-d)^s}n^{rs-mp+1}H_n^{mp-rs} \quad (24)$$

Demostración: En el teor. 2.1. tomamos $x_k = \frac{1}{a_k}$, $k = \overline{1,n}$, y obtenemos (24).

Si $a_1 a_2 ... a_n = 1$, entonces $H_n \geq n \cdot \sqrt[n]{\frac{1}{a_1 a_2 ... a_n}} = n$, y (24) se convierte en

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(aH_n^m+\dfrac{b}{a_k^m}\right)^p}{\left(cH_n^r-\dfrac{d}{a_k^r}\right)^s} \geq \frac{(an^m+b)^p}{(cn^r-d)^s}n^{rs-mp+1}n^{mp-rs} = \frac{(an^m+b)^p}{(cn^r-d)^s}n \quad (25)$$

Si consideramos $n = 3$, entonces por (25) se tiene

$$\frac{\left(aH_3^m+\dfrac{b}{a_1^m}\right)^p}{\left(cH_3^r-\dfrac{d}{a_1^r}\right)^s}+\frac{\left(aH_3^m+\dfrac{b}{a_2^m}\right)^p}{\left(cH_3^r-\dfrac{d}{a_2^r}\right)^s}+\frac{\left(aH_3^m+\dfrac{b}{a_3^m}\right)^p}{\left(cH_3^r-\dfrac{d}{a_3^r}\right)^s} \geq 3\cdot\frac{(3^m a+b)^p}{(3^r c-d)^s} \quad (26)$$

y para $a = 0, b = c = d = 1$, deducimos que

$$\frac{1}{a_1^{mp}\left(\frac{1}{a_2^r}+\frac{1}{a_3^r}\right)^s}+\frac{1}{a_2^{mp}\left(\frac{1}{a_3^r}+\frac{1}{a_1^r}\right)^s}+\frac{1}{a_3^{mp}\left(\frac{1}{a_1^r}+\frac{1}{a_2^r}\right)^s}\geq\frac{3}{\left(3^r-1\right)^s}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{a_1^{mp+rs}\left(a_2^r+a_3^r\right)^s}+\frac{1}{a_2^{mp+rs}\left(a_3^r+a_1^r\right)^s}+\frac{1}{a_3^{mp+rs}\left(a_1^r+a_2^r\right)^s}\geq\frac{3}{\left(3^r-1\right)^s} \tag{27}$$

Si tomamos $m = 2,\ p = r = s = 1$, entonces por (27) se obtienee

$$\frac{1}{a_1^3(a_2+a_3)}+\frac{1}{a_2^3(a_3+a_1)}+\frac{1}{a_3^3(a_1+a_2)}\geq\frac{3}{2} \tag{28}$$

Es decir, el problema propuesto por Rusia en la 36ª I.M.O., Canada, 1995.

APLICACIÓN 5.2. Si tomamos $a = 0, b = c = d = 1,\ p \in N^*$ y $m = r = s = 1$, entonces por (1) resulta

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k^p}{X_n - x_k}\geq\frac{X_n^{p-1}}{n^{p-2}(n-1)} \tag{29}$$

Es decir, el problema O:1087 de la revista rumana Gazeta Matematica, 5/2005, p. 226 , propuesto por Gh. Ivancev (Vidin, Bulgaria) y Lucian Tu□escu (Craiova, Romania).

REFERENCES

[1] **M. B**ENCZE AND **O.T. P**OP, *Generalizations and refinements for Nesbitt's inequality*, J. Math. inequalities, **5** (2011), No. 1, 13-20.

[2] **A.M. N**ESBITT, *Problem* 15114, Educational Times (2), 3 (1903), 37-38.

D.M. Bătinețu- Giurgiu
Department of Mathematics
"Matei Basarab" National College
Bucharest, Romania

Neculai Stanciu
Department of Mathematics,
"George Emil Palade" Secondary School,
Buzău, Romania
e-mail: stanciuneculai@yahoo.com

RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA PJ42 – 1 DEL VOL. 42 DE LA REOIM

Luis M. Maraví Zavaleta

$a = 7 + 6.7 + 6.7^2 + \cdots + 6.7^{2011}$

Esta igualdad también puede ser expresada como

$a = 7 + 6(7 + 7^2 + \cdots + 7^{2011})$

El factor al que multiplica 6 constituye la suma de los 2011 primeros términos de una progresión geométrica de razón 7, por lo que la igualdad queda de la siguiente manera:

$$a = 7 + 6\left(\frac{7^{2012} - 7}{6}\right)$$

$\Leftrightarrow a = 7^{2012}$

Como $x^2 = a$, entonces $x = 7^{1006}$.

REVISTA DE LA OIM Nº 45

PROBLEMAS PARA LOS MÁS JÓVENES

OLIMPÍADA DE ESLOVENIA, 1997

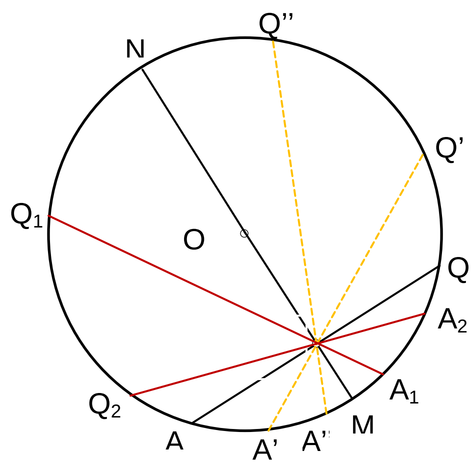
Luis M. MARAVÍ ZAVALETA

I.E. 80915 “Miguel Grau Seminario”, C. P. El Pallar, Huamachuco, La Libertad, Perú

……………………………………………………………………………………………………..

PJ45 – 2: El punto P dista 9 unidades del centro de un círculo de radio 15. ¿Cuántas cuerdas de longitud entera pasan por P?

Realicemos un boceto:

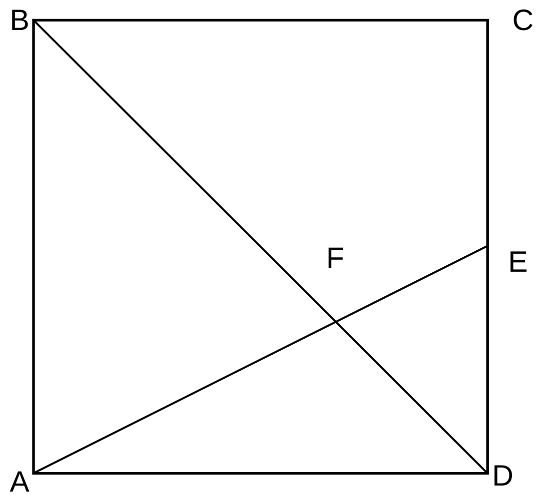


En el gráfico, la cuerda AQ pasa por P. Los segmentos AP y PQ poseen las distancias más cortas desde los puntos A y Q de la circunferencia O. Como el centro O equidista de aquellos puntos, entonces pertenece a la mediatriz del segmento AQ. Es decir, OP es mediatriz de la cuerda AQ. Con este dato y la aplicación del teorema de Pitágoras en el triángulo OAP, obtenemos que AQ mide 24 u. Esta es la mediana más corta que pasa por P.

Como el diámetro también es una cuerda, entonces aquellas que pasan por P pueden tener como longitudes enteras a 24 u., 25 u., 26 u., 27 u., 28 u., 29 u. y 30 u. Ahora imaginemos que la cuerda AQ rota en sentido antihorario con centro en P y “crece” hasta coincidir con el diámetro MN. Las cuerdas A’Q’ y A”Q” ilustran algunos de los casos de este razonamiento. Continuemos imaginando que el movimiento sigue pero hacia el “otro lado” del círculo y con la longitud “decreciente” de las cuerdas (A_1Q_1 y A_2Q_2 ilustran algunas de las posiciones de este razonamiento). De esta manera, la cantidad de cuerdas de longitud entera que pasan por P se duplicaría. Considerando que el diámetro y la cuerda AQ deben ser contadas solamente una vez, ***concluimos que las cuerdas que tiene longitud entera y pasan por P son 12***.

PJ45 – 3: Se da el cuadrado ABCD. Sea E el punto medio del lado CD y F la intersección de AE y BD. Calcular la razón AF/FE.

Esbocemos la situación



Por las propiedades del cuadrado, BD es diagonal y bisectriz de D. Entonces, en el triángulo ADE se aplica el teorema de la bisectriz interior:

$\frac{AF}{FE} = \frac{AD}{DE} \Leftrightarrow \frac{AF}{FE} = \frac{a}{a/2} = 2.$

Por lo tanto, la razón AF/FE es 2.

PJ45 – 4: ¿Para qué valores del parámetro "a" las ecuaciones $19x^2 + ax + 97 = 0$ y $97x^2 + ax + 19 = 0$ tienen una raíz común?

Designemos a las ecuaciones de la siguiente manera:

$$19x^2 + ax + 97 = 0 \ldots E_1$$

$$97x^2 + ax + 19 = 0 \ldots E_2$$

Expresando ambas ecuaciones en función de ax, tenemos las siguientes expresiones (procedimientos abreviados):

$$-97 - 19x^2 = -19 - 97x^2$$

$$-78 + 78x^2 = 0$$

$$78(x+1)(x-1) = 0$$

$$x_1 = -1 \vee x_2 = 1$$

Analicemos los dos casos:

(1) *La raíz común es* $x_1 = -1$

Sustituyendo este valor de x en E_1, obtenemos a = 78 y en E_2, a = -116. De esta forma, obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$19x^2 + 78x + 97 = 0 \ldots E_1$$

$$97x^2 - 116x + 19 = 0 \ldots E_2$$

El discriminante de la primera ecuación es -1288, mientras que el discriminante de la segunda ecuación es 6084. Ello nos indica que ambas ecuaciones no pueden tener raíces comunes, ya que E_1 no las tiene reales mientras que E_2, sí. **Por lo tanto, x_1 = -1 no puede ser la raíz común**.

(2) *La raíz común es* $x_2 = 1$

Al sustituir el valor de x en ambas ecuaciones, obtenemos a = -116 en E_1 y en E_2. De esta manera, obtenemos las ecuaciones:

$$19x^2 - 116x + 97 = 0 \ldots E_1$$

$$97x^2 - 116x + 19 = 0 \ldots E_2$$

El discriminante de ambas ecuaciones 6084. Al resolver E_1 obtenemos como raíces a 5,11 y a 1, mientras que al resolver E_2, tenemos a 1 y a 0,20. ***Es decir que, solamente cuando a = -116, ambas ecuaciones tienen la raíz común x = 1.***

REVISTA DE LA OIM Nº 46

PROBLEMAS PARA LOS MÁS JÓVENES

PRUEBA FINAL DE LA OJM DE VENEZUELA 2011 (Primer Año)

Luis M. MARAVÍ ZAVALETA

I.E. 80915 “Miguel Grau Seminario”, C. P. El Pallar, Huamachuco, La Libertad, Perú

……………………………………………………………………………………………………..

PMJ46-1

Sea n un entero positivo y k el entero que resulta al borrar la cifra de las unidades de n: (por ejemplo, si n = 7492; k = 7499). Si n - k = 2011, ¿cuál es el valor de n?

Sea $n = \overline{abcd}, k = \overline{abc}$. Se trata de resolver:

$$\overline{abcd} - \overline{abc} = 2011$$
$$\Leftrightarrow 10^3a + 10^2b + 10c + d - \overline{abc} = 2011$$
$$\Leftrightarrow 10\left(\overline{abc}\right) + d - \overline{abc} = 2011$$
$$\Leftrightarrow 9\overline{abc} + d = 2011$$

Claramente, $d \leq 9$. Además 2011 = 9(223) + 4. 2011 también es igual a 9(222) + 13, pero $d \neq 13$. Por lo tanto, $si\ \overline{abc} = 223\ y\ d = 4, entonces\ n = 2234$.

Problemas para los más jóvenes 47
Cinco problemas de la Olimpiada de Moldavia

PMJ47-1
Hallar los números naturales n tales que los números n+200 y n-269 sean cubos de números naturales.

PMJ47-2
Las longitudes de los lados de un triángulo son números enteros consecutivos. Se sabe que una mediana del triángulo es perpendicular a una bisectriz. Hallar las longitudes de los lados del triángulo.

PMJ47-3
Sea M un subconjunto del conjunto $A = \{1, 2, ..., 50\}$ tal que la suma de dos elementos distintos cualesquiera de M no es divisible por 7. ¿Cuál es el máximo número de elementos que puede contener M?

PMJ47-4
En el cuadrilátero ABCD los ángulos A y C son iguales. La bisectriz del ángulo B corta al círculo circunscrito al triángulo BCD en el punto C_1, distinto de D. La bisectriz del ángulo D corta al círculo circunscrito a BDA en un punto A_1, distinto de B. Demostrar que el cuadrilátero A_1BC_1D es un paralelogramo.

PMJ-47-5
Hallar el mayor número natural d que divide a todo número de la forma $n(n+1)(2n+1996)$, para todo n natural.

Problemas de Nivel Medio y de Olimpiadas 47

Cinco problemas de la revista rusa *Kvant*

PNM47-1

Probar que para todo número impar a existe un número natural b tal que $2^b - 1$ es divisible por a.

PNM47-2

Tres circunferencias del mismo radio r pasan por un punto H. Las tres circunferencias se cortan dos a dos en tres puntos A, B y C. ¿Cuánto mide el radio de la circunferencia que pasa por A, B y C?

PNM47-3

Cada uno de los números $x_1, x_2, ..., x_n$ es igual a $+1$ ó a -1. Además, $x_1x_2 + x_2x_3 + ... + x_{n-1}x_n + x_nx_1 = 0$.

Demostrar que n es divisible por 4 (*A.Leontovich)*

PNM47-4

Los 7 enanitos están esperando a Blanca Nieves, sentados en torno a una mesa circular. Cada uno tiene una enorme copa, y en algunas de las copas hay leche. El primer enanito distribuye toda la leche de su copa en las de los otros 6, a partes iguales. El siguiente sentado a su derecha hace lo mismo, y así se continúa hasta que el séptimo enenito reparte toda la leche de su copa a partes iguales en las de los demás. Entonces ocurre que cada uno de ellos tiene en su copa la misma cantidad que tenía al principio. ¿Cuál era ésta, si en total hay 3 litros de leche?(*V.Gutenmacher)*

PNM47-5

Resolver el sistema de ecuaciones

$$\frac{x-1}{xy-3} = \frac{y-2}{xy-4} = \frac{3-x-y}{7-x^2-y^2}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS 231-235

Problema 231, propuesto por Antonio F. Costa y Juan Bosco Romero Márquez (†), Ávila, España

Sea ABC un triángulo rectángulo cuyo ángulo recto tiene por vértice A. En la recta que contiene a la hipotenusa de ABC se consideran los puntos B', exterior a la hipotenusa y tal que BB' = BA, y C', exterior a la hipotenusa y tal que CC' = CA.

Sea r la recta que pasa por B' y C'; H_1 el semiplano determinado por r que contienen a A; H_2 el semiplano determinado por r que no contiene a A.

Por B' trazamos dos rectas paralelas a los catetos y lo mismo hacemos por C' obteniendo así un rectángulo A'B'C'D'; el punto A' es el vértice del rectángulo que está en el semiplano H_2.

Por A' trazamos las rectas que pasan por B y C, y llamamos B'' y C'' a las intersecciones de dichas rectas con los lados del rectángulo y distintas de A'.

Probar:

1. Que el punto A está en el segmento B''C''
2. El triángulo A'B''C'' es rectángulo si y sólo si el triángulo ABC tiene ángulos agudos que miden 30º y 60º.
3. El ángulo con vértice A' del triángulo A'B''C'' es como máximo 45º, y ese valor se alcanza cuando ABC es un triángulo isósceles (y por tanto también A'B''C'' es isósceles).

Problema 232, propuesto por Juan Bosco Romero Márquez (†), Ávila, España.

Sean a, b números reales positivos. Si λ es un parámetro, se definen

$$x=\sqrt{ab},\ y=\frac{\sqrt{(\lambda a+b)(a+\lambda b)}}{\lambda+1},\ z=\sqrt{\frac{a^2+\lambda ab+b^2}{\lambda+2}};\ u=\frac{a+b}{2}.$$

Demostrar que

1) Si a,b>0, $\lambda\geq 2$,entonces

$$\sqrt{ab}\leq\frac{\sqrt{(\lambda a+b)(a+\lambda b)}}{\lambda+1}\leq\sqrt{\frac{a^2+\lambda ab+b^2}{\lambda+2}}\leq\frac{a+b}{2}$$

2) Si a,b >0, $0\leq\lambda\leq 2$, entonces

$$\sqrt{ab}\leq\frac{\sqrt{(\lambda a+b)(a+\lambda b)}}{\lambda+1}\leq\frac{a+b}{2}\leq\sqrt{\frac{a^2+\lambda ab+b^2}{\lambda+2}}.$$

***Problema 233, propuesto por Aldo Gil Crisóstomo, Lima, Perú.**

En un cono recto, de radio r y altura h, por un punto O sobre la circunferencia de la base trazamos un plano inclinado. Hallar el ángulo que debe formar el plano con la base para que los volúmenes determinados por el plano en el cono sean iguales.

Problema 234, propuesto por D.M. Batinetu-Giurgiu, Bucarest, y Neculai Stanciu, Buzau, Rumania

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función par y derivable, con derivada continua.

Si $a\in\mathbb{R}^+$, calcular

$$\int_{-a}^{a}\left(\frac{f(x)}{1+e^x}+f'(x)\ln\left(1+e^x\right)\right)dx$$

Problema 235, propuesto por Laurentiu Modan, Bucarest, Rumania

Hallar la variable aleatoria Y que verifica la relación $P\left(X\geq 3\right)=P\left(Y\leq n\right)$, cuando la variable aleatoria $X\in\gamma(n+1,1), n\in\mathbb{N}$, y después estudiar si $\left[\frac{m_3\left(Y\right)}{m_2\left(Y\right)}\right]$ es un número primo.

Problema 226. Solución de Roberto Bosch Cabrera, Ciudad de la Habana, Cuba.

Se tiene $x_n = \alpha_n a + \beta_n$. Donde $\alpha_{n+1} = 73\alpha_n - 256\alpha_{n-1}$ y $\beta_{n+1} = 73\beta_n - 256\beta_{n-1}$ con $\alpha_0 = 4, \alpha_1 = 256$ y $\beta_0 = 3, \beta_1 = 27$. Si reducimos módulo 11 queda $\alpha_{n+1} \equiv 7\alpha_n - 3\alpha_{n+1}$ y $\beta_{n+1} \equiv 7\beta_n - 3\beta_{n-1}$. Vamos a probar por inducción que α_n es 10-periódica módulo 11. (Análogo para β_n). Para esto supongamos que $\alpha_{n-1} \equiv \alpha_{n+9}(11)$ y $\alpha_n \equiv \alpha_{n+10}(11)$, entonces se tiene $\alpha_{n+1} \equiv 7\alpha_n - 3\alpha_{n-1} \equiv 7\alpha_{n+10} - 3\alpha_{n+9} \equiv \alpha_{n+11}(11)$. De esta forma es suficiente considerar los primeros 10 valores de ambas sucesiones para determinar x_n. Tenemos

$$\begin{aligned} \alpha_n(11) &= \{4, 3, 9, 10, 10, 7, 8, 2, 1, 1\} \\ \beta_n(11) &= \{3, 5, 4, 2, 2, 8, 6, 7, 9, 9\} \end{aligned}$$

a)Si x_n es convergente entonces las subsucesiones constantes $4a + 3$ y $3a + 5$ convergen al mismo límite, de donde $4a + 3 \equiv 3a + 5(11)$, lo cual es equivalente a $a \equiv 2(11)$, de donde el límite de x_n será 0 porque se verifica fácilmente que todos sus términos son divisibles por 11.

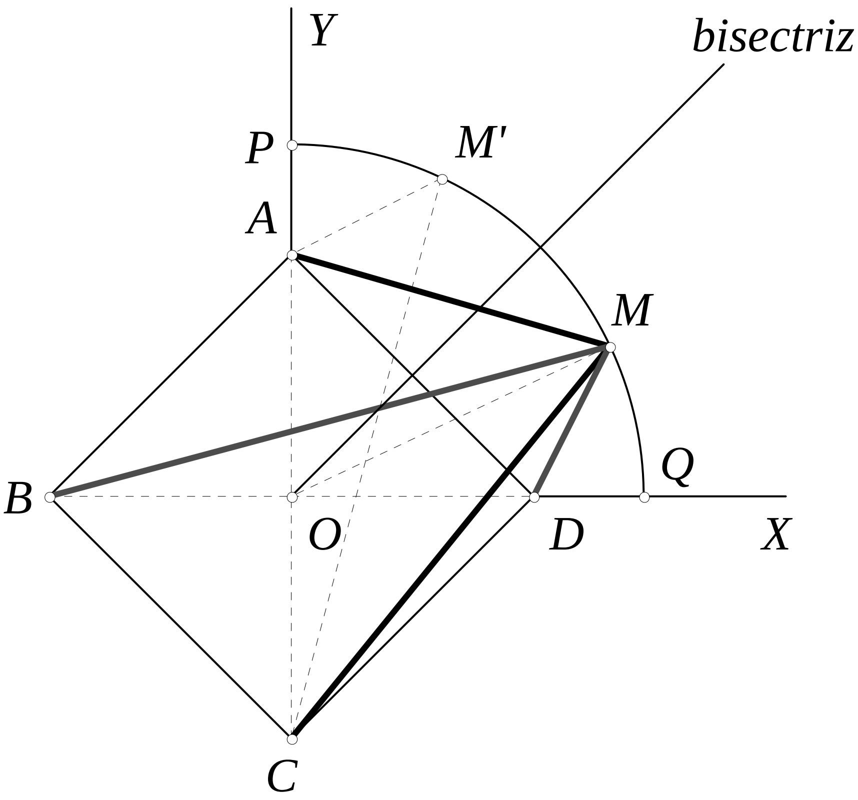
b) Si $a \equiv 1(11)$ entonces $x_n = \{7, 8, 2, 1, 1, 4, 3, 9, 10, 10\}$.

Problema 227.
En el plano del cuadrado *ABCD*, *M* es un punto cualquiera. Encontrar el conjunto de valores de la expresión

$$R(M)=\frac{MA+MC}{MB+MD}$$

Solución.
Vamos a determinar los extremos de *R(M)* cuando *M* se mueve en el plano y por comodidad para los cálculos buscaremos los extremos de

$$R(M)^2=\frac{MA^2+MC^2+2MA\cdot MB}{MB^2+MD^2+2MC\cdot MD} \quad (1)$$



Por la simetría del problema respecto de los ejes *OX*, *OY*, basta considerar que *M* se mueve en el primer cuadrante.

Pongamos $\rho=OM$, $r=OD,\alpha=\widehat{AMC},\ \beta=\widehat{BMD}$.

Como *OM* es la mediana del triángulo *AMC*,

$$\rho^2=\frac{2MA^2+2MC^2-4r^2}{4}\Leftrightarrow MA^2+MC^2=2\rho^2+2r^2.$$

De modo análogo en el triángulo *BMD*, $MB^2+MD^2=2\rho^2+2r^2$.

Por otra parte, por el teorema del coseno en el triángulo *AMC*,

$$4r^2=MA^2+MC^2-2MA\cdot MC\cdot\cos\alpha=2\rho^2+2r^2-2MA\cdot MC\cdot\cos\alpha\Leftrightarrow 2MA\cdot MC=\frac{2\rho^2-2r^2}{\cos\alpha}$$

Y por el mismo teorema en el triángulo *BMD* , $2MB\cdot MD=\dfrac{2\rho^2-2r^2}{\cos\beta}$.

Sustituyendo todo lo anterior en (1), queda

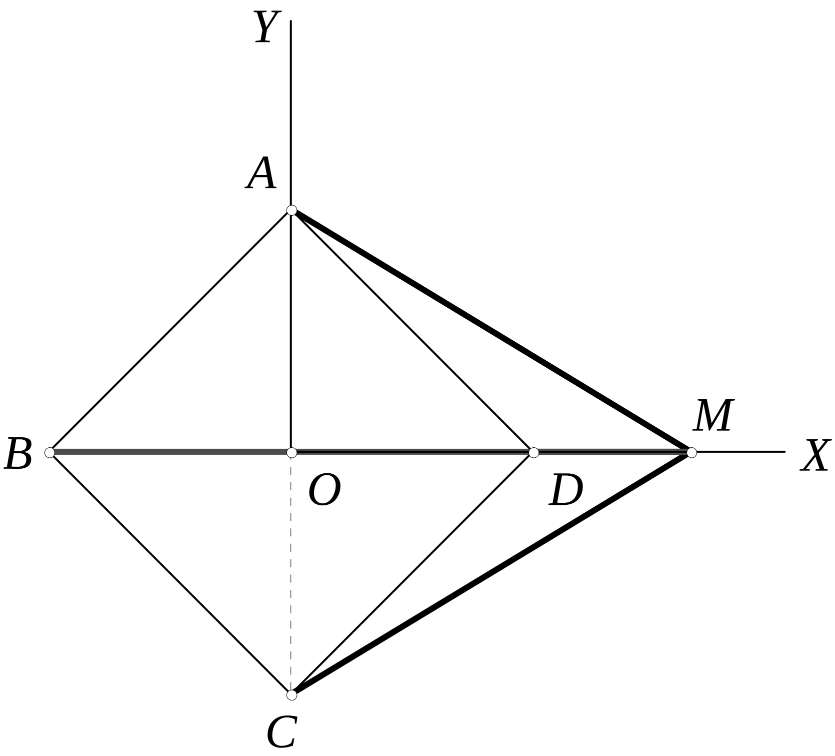
$$R(M)^2 = \frac{MA^2 + MC^2 + 2MA \cdot MB}{MB^2 + MD^2 + 2MC \cdot MD} = \frac{\rho^2 + r^2 + \dfrac{\rho^2 - r^2}{\cos\alpha}}{\rho^2 + r^2 + \dfrac{\rho^2 - r^2}{\cos\beta}} \quad (2)$$

Si fijamos ρ y movemos *M* en el arco desde *P* hasta *Q*, α crece, el coseno decrece y el numerador crece para cualquier valor de ρ.

Para ver la variación del denominador basta tener en cuenta que simetrizando *M* respecto de la bisectriz del primer cuadrante obtenemos *M'* y el valor de β correspondiente a *M* coincide con el de α correspondiente a *M'* de modo que al moverse *M* de *P* a *Q* , *M'* lo hace en sentido inverso y el denominador decrece.

Resumiendo: para ρ constante *M* se mueve en el arco desde *P* hasta *Q* y tiene el mínimo en *P* y el máximo en *Q*.

Sólo nos resta hallar el máximo y el mínimo de $R(M) = \frac{MA + MC}{MB + MD}$ en las semirrectas *OX* y OY



respectivamente.

Si *M* se mueve en el semieje *OX* positivo, el valor denominador de *R*(*M*) cambia según *M* esté a la izquierda o a la derecha de *D*. De modo más preciso se tiene

$$R(M) = \begin{cases} \dfrac{MA}{\rho} = \dfrac{1}{\cos\dfrac{\alpha}{2}}, \text{ si } \rho \geq r \\[2ex] \dfrac{MA}{r} = \dfrac{1}{sen\dfrac{\alpha}{2}}, \text{ si } \rho \leq r \end{cases}$$

Y claramente el máximo se alcanza cuando $\rho = r$ (*M* = *D*) y vale $\frac{1}{\cos 45^{\circ}} = \frac{1}{sen 45^{\circ}} = \frac{2}{\sqrt{2}}$.

Procediendo de modo análogo con *M* en el semieje *OY* positivo, resulta

$$R(M)=\begin{cases}\dfrac{\rho}{MB}=\cos\dfrac{\beta}{2}, \text{ si } \rho\geq r\\ \dfrac{r}{MB}=sen\dfrac{\beta}{2}, \text{ si } \rho\leq r\end{cases}$$

Y el mínimo se alcanza para $\rho=r$ $(M=A)$ y vale $sen 45º=\cos 45º=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Como las funciones son continuas toman todos los valores intermedios y el conjunto de valores pedido es el intervalo real $\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2}\right]$.

Cristóbal Sánchez-Rubio, Benicasim

PROBLEMA 229 (propuesto por Marcel Chirita, Bucarest, Rumanía)

Sea ABC un triángulo y AA_1, BB_1, CC_1 tres cevianas concurrentes en un punto O interior al triángulo. Sean

$$\alpha = [AOC_1]-[COA_1], \qquad \beta = [BOA_1]-[AOB_1], \qquad \gamma = [COB_1]-[BOC_1].$$

Probar que si $\alpha+\beta+\gamma = 0$, entonces $\alpha\beta\gamma = 0$.

Nota: $[PQR]$ es el área del triángulo PQR.

Solución por Daniel Lasaosa Medarde, Universidad Pública de Navarra, Pamplona, España

Claramente, existen constantes reales positivas ρ, κ tales que $BC_1 = \rho AC_1$, $CA_1 = \kappa BA_1$, y por el teorema de Ceva, $CB_1 = \rho\kappa AB_1$. Al mismo tiempo, por el terorema de Menelao,

$$\frac{AO}{OA_1} \cdot \frac{A_1C}{CB} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1,$$

o equivalentemente,

$$\frac{AA_1}{OA_1} = 1 + \frac{AO}{OA_1} = \frac{1+\kappa+\rho\kappa}{\rho\kappa},$$

luego por estar en la misma proporción las alturas desde A y desde O sobre BC por el teorema de Thales, se tiene que $[BOC] = \frac{\rho\kappa[ABC]}{1+\kappa+\rho\kappa}$, y al ser $BA_1 = \frac{BC}{1+\kappa}$, $CA_1 = \frac{\kappa BC}{1+\kappa}$, tenemos que

$$[BOA_1] = \frac{BA_1}{BC}[BOC] = \frac{\rho\kappa[ABC]}{(1+\kappa)(1+\kappa+\rho\kappa)},$$

$$[COA_1] = \frac{CA_1}{BC}[BOC] = \frac{\rho\kappa^2[ABC]}{(1+\kappa)(1+\kappa+\rho\kappa)}.$$

De forma análoga, se demuestra que

$$\frac{OB_1}{BB_1} = \frac{\kappa}{1+\kappa+\rho\kappa}, \qquad \frac{OC_1}{CC_1} = \frac{1}{1+\kappa+\rho\kappa},$$

$$[COB_1] = \frac{\rho\kappa^2[ABC]}{(1+\rho\kappa)(1+\kappa+\rho\kappa)}, \qquad [AOB_1] = \frac{\kappa[ABC]}{(1+\rho\kappa)(1+\kappa+\rho\kappa)},$$

$$[AOC_1] = \frac{[ABC]}{(1+\rho)(1+\kappa+\rho\kappa)}, \qquad [BOC_1] = \frac{\rho[ABC]}{(1+\rho)(1+\kappa+\rho\kappa)}.$$

Tenemos entonces que

$$\alpha = \frac{(1-\rho\kappa)[ABC]}{(1+\kappa)(1+\rho)}, \qquad \beta = -\frac{\kappa(1-\rho)[ABC]}{(1+\kappa)(1+\rho\kappa)}, \qquad \gamma = -\frac{\rho(1-\kappa)[ABC]}{(1+\rho)(1+\rho\kappa)}.$$

Luego

$$\alpha+\beta+\gamma = \frac{(1-\kappa-\rho+\rho\kappa^2+\kappa\rho^2-\rho^2\kappa^2)[ABC]}{(1+\kappa)(1+\rho)(1+\rho\kappa)} = \frac{(1-\rho)(1-\kappa)(1-\rho\kappa)[ABC]}{(1+\kappa)(1+\rho)(1+\rho\kappa)} =$$

$$= \frac{(1+\kappa)(1+\rho)(1+\rho\kappa)}{\rho\kappa[ABC]^2}\alpha\beta\gamma,$$

y como $\rho, \kappa, [ABC]$ son reales positivos, se tiene que $\alpha\beta\gamma = 0$ si y sólo si $\alpha+\beta+\gamma = 0$, quedando probado el resultado propuesto y su recíproco.

PROBLEMA 230 (propuesto por Marcel Chirita, Bucarest, Rumanía)

Demostrar que se verifica la siguiente desigualdad triangular:

$$\max\left\{\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{a}{c}\right),\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{b}{a}\right),\left(1+\frac{c}{a}\right)\left(1+\frac{c}{b}\right)\right\}\geq 4.$$

Solución por Daniel Lasaosa Medarde, Universidad Pública de Navarra, Pamplona, España

Demostramos el siguiente resultado, más general: Sea (u,v,w,x,y,z) una permutación cualquiera de $\left(\frac{a}{b},\frac{b}{c},\frac{c}{a},\frac{a}{c},\frac{b}{a},\frac{c}{b}\right)$. Entonces,

$$\max\left\{(1+u)(1+x),(1+v)(1+y),(1+w)(1+z)\right\}\geq 4,$$

con igualdad si y sólo si $a=b=c$.

Claramente $uvwxyz=1$, mientras que el resultado a demostrar es equivalente a que

$$\max\left\{u+x+ux,v+y+vy,w+z+wz\right\}\geq 3.$$

Por la desigualdad entre medias aritmética y geométrica, $u+x+ux\geq 3\sqrt[3]{u^2x^2}$, con igualdad si y sólo si $u=x=ux$, es decir si y sólo si $u=x=1$ por ser u,x reales positivos. Nos basta entonces con demostrar que

$$\max\{ux,vy,wz\}\geq 1,$$

claramente cierta porque ux,vy,wz son tres reales positivos con producto igual a 1. Nótese que se da la igualdad en esta última relación si y sólo si $ux=vy=wz=1$, y en estas condiciones, se da la igualdad en la anterior si y sólo si, simultáneamente, $u=x=1$, $v=y=1$, y $w=z=1$. Es decir, se da la igualdad en la desigualdad alternativa a la propuesta, si y sólo si $a=b=c$, como queríamos demostrar.

Ionut Ivanescu: *Probleme de extrem in Geometrie.* Ed.Grapho, Bacau 2012, Rumania.

Este manual de 160 páginas, escrito en lengua rumana, y al que he tenido acceso gracias a la generosidad de un amigo, constituye una aportación, a mi juicio, muy importante con vistas a la preparación de los estudiantes para las Olimpiadas, concursos y la enseñanza de la Matemática. Su contenido se distribuye en 4 capítulos.

El primero (*Métodos de resolución de problemas de extremos geométricos)* es posiblemente esencial, puesto que en él se describen, con precisión y numerosas aplicaciones, los 8 métodos de resolución*: de las desigualdades, de la simetría, de las desigualdades algebraicas, del trinomio cuadrático, de las relaciones métricas, trigonométrico, de desarrollos en el plano, y de geometría analítica.* Es un capítulo muy sistemático, que ayudará al lector a comprender porqué unos métodos son buenos para un cierto tipo de problemas y otros no.

Tras una explicación de cada uno de los métodos, se dan varias aplicaciones de los mismos.

El segundo capítulo trata de la *caracterización de unos elementos geométricos importantes con ayuda de las propiedades de los extremos geométricos.* Caracterización de puntos, de figuras geométricas, de cuerpos geométricos en el espacio.

El tercero versa sobre *Aplicaciones prácticas de los problemas de extremos geométricos.*

Y el cuarto sobre *Problemas de extremos geométricos para Olimpiadas y Círculos de alumnos.*

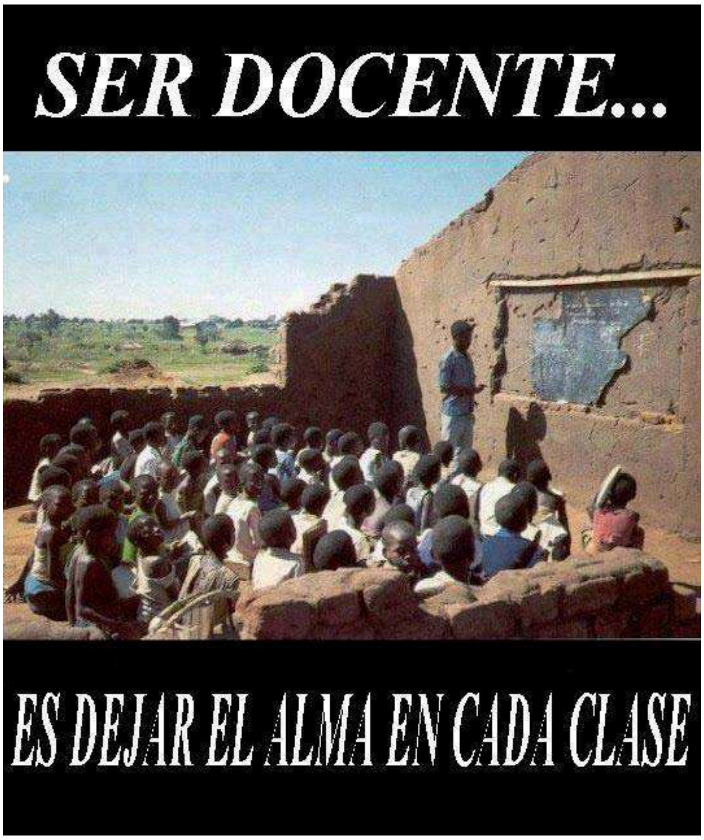
Se añade una Bibliografía de 36 entradas y el índice.

Valladolid, febrero 2013

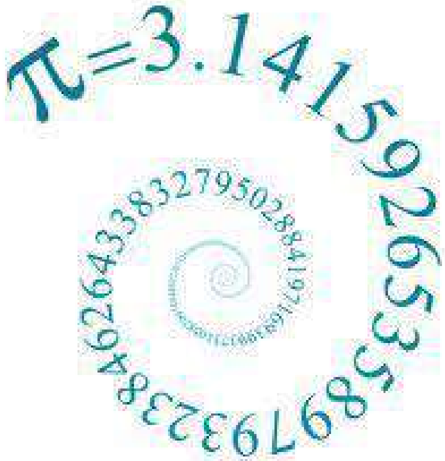
Francisco Bellot Rosado

Divertimentos Matemáticos 47

Capturados en internet

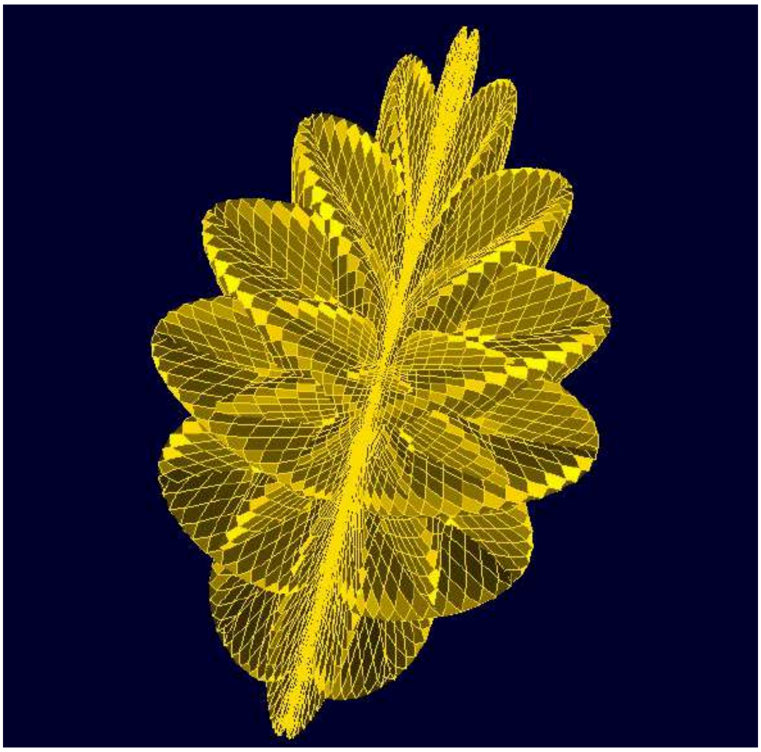


Esta foto no es, obviamente un "divertimento", sino un homenaje a todos los profesores que siguen dándolo todo cuanto saben en sus clases, sobreponiéndose a las circunstancias más difíciles.



π en espiral

Einstein and company



Simplemente hermoso

Árbol de Navidad matemático

La primera computadora del mundo

Número

48

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática
iberciencia
OEI
ISSN 1698-677X

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

Número 48 (marzo - junio 2013)

ISSN – 1698-277X

ÍNDICE

El editor presenta excusas al Prof. Paolo Perfetti, Universitá degli Studi Tor Vergata, Roma, Italia, por no haber incluido su nombre entre quienes han resuelto los problemas 217 y 230 de esta REOIM.

Solución del problema 231

Recibidas soluciones de: Ricardo Barroso Campos, Sevilla, España, y Floro Damián Aranda Ballesteros, Córdoba, España (conjuntamente); Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, España; Bruno Salgueiro Fanego, Vivero, España; Cristóbal Sánchez-Rubio García, Benicassim, España; y los proponentes.

Las soluciones de Barroso-Aranda y de Salgueiro utilizan coordenadas; las de Lasaosa y Sánchez-Rubio son de Geometría sintética.

Como homenaje a la memoria de uno de los proponentes del problema (Prof. Juan Bosco Romero Márquez), presentamos las 4 soluciones recibidas.

Solución al problema 232

Recibidas soluciones de: Roberto Bosch Cabrera, La Habana, Cuba; Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, España; Bruno Salgueiro Fanego, Vivero, España; Paolo Perfetti, Universitá Tor Vergata, Roma, Italia; y el proponente. Presentamos la solución de Bosch.

Solución al problema 234

Recibidas soluciones de: Roberto Bosch Cabrera, La Habana, Cuba; Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, España; Daniel López Aguayo, Morelia, México; Paolo Perfetti, Universitá Tor Vergata, Roma, Italia; Bruno Salgueiro Fanego, Vivero, España; una solución anónima y la de los proponentes. Presentamos la solución de Lasaosa.

Solución al problema 235

Recibidas soluciones de: Roberto Bosch Cabrera, La Habana, Cuba (que presentamos) y del proponente.

Noticia de Congresos, comentario de páginas web y reseña de libros 48

Crossing the bridge y The Geometry of the triangle; dos libros de Gerry Leversha.

Divertimentos Matemáticos 48

Los Caballeros de la Larga Búsqueda(1ª parte), por Víctor Buján Delgado.

Capturado en internet 48

Otras informaciones

Club GeoGebra Iberoamericano. Abierta la convocatoria de IBERTIC

La Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura (OEI) desde sus **Instituto Iberoamericano de TIC y Educación (IBERTIC) e Instituto Iberoamericano de Enseñanza de la Ciencia y la Matemática (IBERCIENCIA)** invitan a los profesores y estudiantes iberoamericanos a incorporarse al **Club GeoGebra Iberoamericano**. Esta iniciativa cuenta con el apoyo e impulso de la **Consejería de Economía, Innovación, Ciencia y Empleo de la Junta de Andalucía** y la coordinación académica se lleva desde la **Universidad de Córdoba (España)**.

Más información [+] http://www.ibertic.org/clubgeogebra.php

Día GeoGebra en Iberoamérica

Abierta la inscripción
Enmarcado en la Semana Iberoamericana de GeoGebra realizamos la convocatoria del Día de GeoGebra en Iberoamérica que tendrá lugar en Montevideo el 14 de septiembre de 2013, como actividad previa al VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (CIBEM).

Más información [+]http://www.ibertic.org/diageogebra.php

In memoriam ANGELO BARONE NETTO

1937-2013

El pasado día 5 de abril falleció en Sao Paulo (Brasil) una de las personalidades más relevantes de la Olimpiada Matemática Brasileña, así como de la Iberoamericana e Internacional : Angelo Barone.

Las trayectorias académica, olímpica y vital de Barone han sido calificadas de *singulares* por quienes le conocían mejor: sus muchos amigos, en Brasil y en todo el mundo. En efecto, Barone era único.

Su formación académica universitaria comenzó en la Escuela Politécnica de la Universidad de Sao Paulo, donde en 1958 obtuvo el título de Ingeniero Mecánico Electricista. En esa institución comienza a dar clase en 1960, hasta 1968, en que se traslada a Unicamp (la Universidad de Campinas), participando en un atrevido proyecto para post graduados, que le lleva a la Universidad de Besançon (Francia), donde en 1970 completa su Maestría en Lingüística (¡). No tiene nada de extraño, entonces, que en la Olimpiada Iberoamericana sus intervenciones durante la redacción de los enunciados de los problemas fueran del siguiente tenor: ***No se debe escribir "mayor o igual que", ha de ser "mayor que o igual a"…***

También en Unicamp defiende en 1972 su doctorado con una tesis sobre la estabilidad de puntos de equilibrio en sistemas lagrangianos con vínculos, un trabajo pionero en ese campo en el Brasil.

En 1973 comienza a desarrollar en el Departamento de Matemática Aplicada del Instituto de Matemática y Estadística de la Universidad de Sao Paulo una actividad notable. Entre sus estudiantes están los profesores Marco Antonio Teixeira y Edson de Faria (éste último afincado en Costa Rica desde hace muchos años).

Otra característica de Barone era su versatilidad. No compartía la afición (tan extendida en las Universidades de todo el mundo) por la excesiva - y excluyente - especialización. Aunque su interés eran los sistemas dinámicos, también produjo trabajos en lógica y en combinatoria. Y nunca se cansó de aprender y de enseñar. De 1987 a 1990 fue Director del Departamento de Matemática Aplicada, y tras su jubilación, continuó asistiendo a seminarios, e investigando y colaborando con sus colegas.

Su labor en la Olimpiada Brasileña de Matemáticas, en la participación de Brasil en la Olimpiada Internacional desde 1979 (Londres) fue clave para que hoy en día Brasil sea uno de los primeros países iberoamericanos con resultados muy buenos en la IMO. Durante 11 años consecutivos fue Jefe de la Delegación de Brasil; su última participación como tal fue en Braunschweig (1989). Ayudó a descubrir los jóvenes talentos en Matemáticas y les proporcionó el entrenamiento adecuado para que ellos, ahora, sean los entrenadores de los equipos de Brasil en la IMO y en las demás competiciones internacionales en las que Brasil toma parte: Iberoamericana, Olimpiada del Cono Sur, Rioplatense,...

No me resisto a mostrar un ejemplo de la creatividad matemática de Barone. En la Olimpiada Iberoamericana de 1989, en La Habana, el banco de problemas preparado por los organizadores locales incluía el enunciado siguiente: *Sean a, b, c las longitudes de los lados de un triángulo. Demostrar que*

$$\left|\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}\right|<1.$$

El jurado obtuvo rápidamente la solución, transformando en producto la expresión entre las barras del valor absoluto:

$$\left|\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}\right|=\left|\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\right|<1.$$

Barone dijo: la cota se puede mejorar, disminuyéndola hasta 1/16, y lo demostró razonando de la siguiente manera: *como la desigualdad es simétrica en las tres variables, podemos suponer que a < b < c; y además sin pérdida de la generalidad se puede suponer que a = 1, b = 1 +x, c = 1 + x + y. Entonces la desigualdad triangular permite escribir que c < a+b, es decir, 1+x+y<2+x, o lo que es lo mismo, y < 1. Entonces la expresión que se pretende hacer menor que 1/16 es*

$$S=\left|\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\right|=\frac{xy(x+y)}{(2+x)(2+2x+y)(2+x+y)}.$$

Como y < 1, S es menor que la fracción obtenida sustituyendo en el numerador la "y" por 1; y por otra parte, si los dos últimos factores del denominador se sustituyen, respectivamente, por 2+2x y por 2 + x, ese denominador disminuirá y el cociente aumentará. En definitiva se tiene

$$S < \frac{x}{2\left(2+x\right)^2} < \frac{1}{16}$$

que equivale a $0 < \left(2-x\right)^2$*.*

Angelo, sit tibi terra levis.

Valladolid, 27 de mayo de 2013.

Francisco Bellot Rosado

APROXIMACIÓN A LOS NÚMEROS PRIMOS

Pregunta de examen: El producto de dos números primos, ¿es primo?

Respuesta (un tanto airada) de un alumno: Pero, ¿primos de quién?

Francisco Bellot Rosado

La lectura del primer capítulo de un libro realmente excelente, ***Le lezioni del supplente (Un tentativo di insegnare la matematica che non si insegna),*** del recientemente desaparecido **Italo D'Ignazio,** me da pie a tratar de escribir una primera aproximación a los números primos, para los alumnos de Olimpiadas y Seminarios de ampliación. La foto del Prof. D'Ignazio ha sido gentilmente cedida por el Prof. Ercole Suppa, de Teramo (Italia).

Para este artículo me he servido no solamente del libro mencionado, sino también de los que cito igualmente en la Bibliografía, y que, a mi entender, no deberían faltar en ninguna Biblioteca del Departamento de Matemáticas de los centros escolares de cualquier nivel educativo.

Se suponen conocidos los conceptos de divisibilidad, máximo común divisor, mínimo común múltiplo y de números primos entre si (cuando su máximo común divisor es 1).

Paulo Ribenboim, en el prólogo de su obra ***Nombres premiers: mystères et records,*** enumera las preguntas que de una manera natural, surgen en relación con los números primos:

a) ¿Cuántos números primos hay?

b) ¿Cómo reconocer si un número natural dado es primo?

c) ¿Hay fórmulas o algoritmos para generar los números primos?

d) ¿Cómo se distribuyen los números primos entre los naturales?

1. Números primos y compuestos

Algunos números naturales se pueden descomponer en producto de dos o más factores más pequeños; otros, como 7, 13, 17, no. Diremos que si el número natural c = a x b, siendo a y b números naturales, éstos se dicen factores o divisores de c. Todo número admite la *factorización trivial*

$$c = 1xc = cx1;$$

y en correspondencia con esto diremos que 1 y c son los *divisores triviales* de c. Cualquier número natural c > 1 que tiene alguna factorización no trivial, se llamará *compuesto.* Los que solamente admiten la factorización trivial se llaman *números primos.*

Entre los 100 primeros números naturales, los 25 de la tabla siguiente son primos:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41,

43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

El número 1 no es ni primo, ni compuesto.

El primer resultado que probaremos es sencillo, pero importante:

Todo entero c>1, o es primo, o admite un divisor primo.

Si c no es primo, sea *p* el menor divisor no trivial de *c*. Entonces, *p* tiene que ser primo, porque si fuera compuesto, *c* tendría un divisor menor que *p*.■

La siguiente observación, igualmente sencilla e importante, es que no necesitamos dividir *c* por todos los números menores que *c* para saber si es primo o compuesto. Si *c = a x b,* los dos divisores *a* y *b* no pueden ser mayores que √c, porque si ese fuera el caso, se tendría

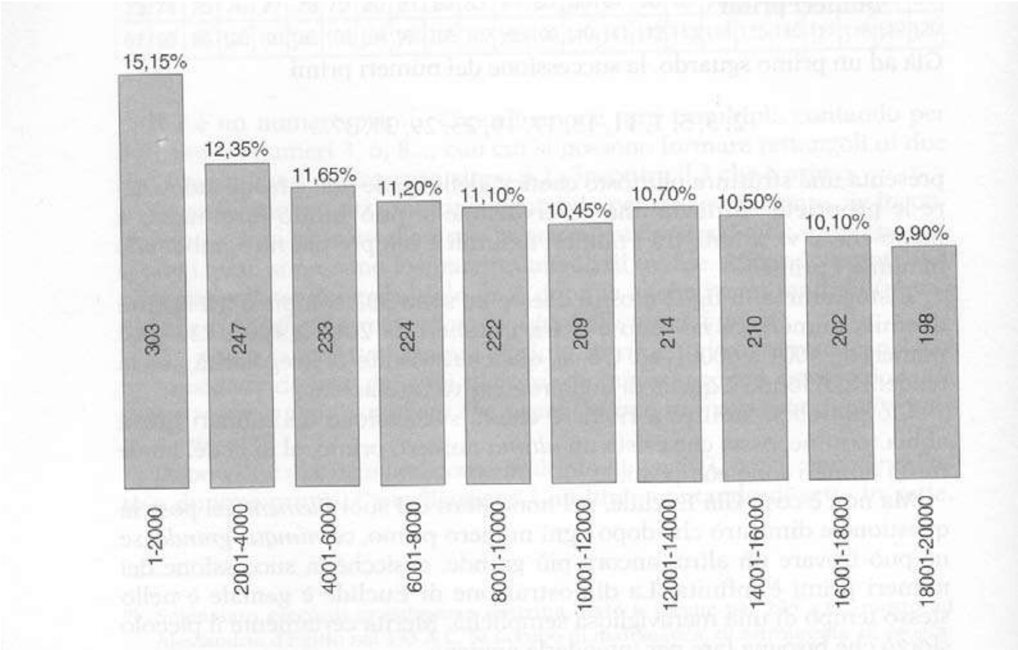
$$axb > \sqrt{c} \times \sqrt{c} = c,$$

lo cual es imposible. Por lo tanto, es suficiente probar los números primos que son menores o iguales que √c.

Desde la escuela se conoce el procedimiento llamado *criba de Eratóstenes* para encontrar los números primos menores que un número natural dado: a partir del 2, se suprimen todos los múltiplos de 2; a continuación, dejando el 3, se suprimen todos los múltiplos de 3 que no hayan sido previamente borrados; se repite el proceso con el 5, etc.

2. El conjunto de los números primos es infinito

En el libro de D'Ignazio se muestra el siguiente histograma para ilustrar lo que llama *rarefacción de los números primos:*



El significado de las barras es claro: hay 303 primos entre los números 1 y 2000, etc.

Podría pensarse que, a la vista de esto, hay un número primo mayor que todos los demás. Pero ya Euclides demostró (en los *Elementos*) que no es así.

Observemos la tabla siguiente:

$$2 \times 3 + 1 = 7$$

$$2 \times 3 \times 5 + 1 = 31$$

$$2 \times 3 \times 5 \times 7 + 1 = 211$$

$$2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 + 1 = 2311$$

$$2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 + 1 = 30031$$

Los números que aparecen en los segundos miembros no son divisibles (obviamente) por los números primos que se multiplican en los primeros miembros. Los cuatro primeros (7, 31, 211 y 2311) son primos, mayores que los que se van multiplicando. En cuanto al quinto, se tiene

$$30031 = 59 \times 509,$$

y estos dos primos son mayores que 13.

La generalización de estas observaciones constituye la famosa **demostración de Euclides de que la sucesión de números primos es infinita:**

Supongamos que la lista de números primos $p_1=2,\ p_2=3,\ldots p_r$ *sea finita.* Entonces formamos el número

$$P = p_1p_2p_3\ldots.p_r + 1.$$

Si P es primo, no hay nada que demostrar. En caso de no ser primo, sea p un número primo que divide a P. Este número p no puede ser ninguno de los primos $p_1,p_2,\ldots,p_r$, ya que en tal caso p dividiría a la diferencia $P - (p_1p_2p_3\ldots.p_r) = 1$, *lo que es absurdo.* Por lo tanto, p es un número primo mayor que p_r, y por lo tanto la lista de números primos no puede ser finita.■

La demostración de Euclides es simple, pero al mismo tiempo es brillante. Es uno de los primeros ejemplos de demostración por reducción al absurdo, que es algo que nuestros alumnos no dominan bien, sobre todo al principio.

Ribenboim en su libro incluye 9 demostraciones de este resultado.

La criba de Eratóstenes permite obtener otra demostración de este teorema

Supongamos que sólo hubiera k primos,

$$2,3,5,7,\ldots,p_k.$$

Entonces, en la criba no podrían quedar números después de p_k, puesto que vamos suprimiendo los múltiplos de los diferentes primos. Pero esto es imposible, porque si consideramos el número

$$P = 2x3x5x\ldots xp_k$$

éste habría sido suprimido k veces, una vez por cada uno de los primos, y el número P + 1 no habría sido suprimido por ninguno de ellos.■

Esta demostración aparece en el libro de **Oystein Ore** ***Invitation to Number Theory.***

3. El Teorema fundamental de la aritmética

Todo entero positivo se puede descomponer en producto de números primos de manera única, salvo el orden de los factores.

Este resultado es conocido desde la escuela primaria; sin embargo, podemos demostrarlo (una actividad común entre los matemáticos, que queremos demostrarlo casi todo; sorprendentemente en los primeros años de la enseñanza secundaria no se demuestra casi nada (clases de Matemáticas incluidas!). Vamos a seguir la demostración de **D'Ignazio,** un prodigio de claridad y sencillez.

Sea N un número compuesto; si p_1 es el menor de sus divisores (distinto de 1), tiene que ser necesariamente primo (esto lo habíamos visto en el párrafo 1). Hagamos la división N:p_1 *y sea* N_1 *el cociente:*

$$N = p_1 N_1 \qquad (1)$$

Si N_1 es primo, la (1) da ya la descomposición de N en producto de primos; en caso contrario repetimos el proceso con N_1*:* sea p_2 el menor divisor de N_1 que ha de ser necesariamente primo y mayor o igual que p_1; hacemos la división y obtenemos $N_1 = p_2 N_2$ con lo cual

$$N = p_1 p_2 N_2;$$

Reiterando el procedimiento obtenemos $N > N_1 > N_2 > \ldots$y al cabo de un cierto número de operaciones llegaremos a un cociente N_k primo. Entonces la (1) se convierte en

$$N = p_1 p_2 \ldots p_k \quad (2)$$

donde hemos puesto, para unificar la notación, $N_k = p_k$. Hay que observar que algunos de los factores primos p_i pueden ser iguales, y se podrán asociar en forma de potencias.

Vamos a demostrar que la factorización obtenida para el número N es única.

Supongamos que existiera otra:

$$N = q_1 q_2 \ldots q_h$$

Entonces se tendrá

$$p_1 p_2 \ldots p_k = q_1 q_2 \ldots q_h \qquad (3)$$

Sin pérdida de la generalidad se puede suponer que los factores “p” y los factores “q” están en orden creciente:

$$p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_k \qquad \text{y} \qquad q_1 \leq q_2 \leq \ldots \leq q_h$$

Ahora bien, p_1 es el menor divisor primo de N; como q_1 también lo es, tiene que ser $p_1 = q_1$.

Dividiendo los dos miembros de (3) por $p_1 = q_1$ se obtiene

$$p_2 p_3 \ldots p_k = q_2 q_3 \ldots q_h$$

y la situación se repite, con lo cual resulta que todos los factores de la primera factorización son iguales a todos los de la segunda, y esa es única.■

Otras demostraciones de este resultado utilizan el método de reducción al absurdo (v. **Puig Adam, *Matemáticas Preuniversitario,*** Madrid 1967).

En el libro del gran matemático polaco **Waclaw Sierpinski**, ***Elementary theory of numbers*** se llama teorema fundamental de la aritmética al siguiente, también conocido en otras fuentes como *primer teorema de Euclides:*

Si un número divide a un producto de dos factores y es primo con uno de ellos, entonces divide al otro.

Veamos la demostración de **Sierpinski**:

Sean *a* y *b* dos números primos entre sí y *c* un número natural, tales que *b* divide al producto *ac.* El número *ac* es divisible tanto por *a* como por *b*, y por lo tanto, por su mínimo común múltiplo, que es *ab.* Entonces

$$ac = tab,$$

con *t* entero, luego *c=tb* y por lo tanto *b* divide a *c.*■

A la pregunta b) de **Ribenboim** es fácil contestar cuando el número dado no es muy grande, pero si no, se convierte en un problema con aplicaciones prácticas inesperadas, como la criptografía. No entraremos aquí a tratar de los *tests de primalidad* y sus problemas asociados de velocidad en los cálculos hechos con los ordenadores más potentes.

4. Números primos de Fermat

Fermat (1601 – 1665) conjeturó que los números que son de la forma

$$F_n = 2^{2^n} + 1$$

eran todos primos. La notación utilizada para la potencia cuyo exponente es otra potencia significa que 2 lo elevamos a 2^n, y no que 2^2 lo elevamos al exponente n, ya que en ese caso hubiéramos escrito simplemente 4^n.

Con las posibilidades de cálculo de la época, era una conjetura razonable, porque

$$F_0 = 2^{2^0} + 1 = 3,\ F_1 = 2^{2^1} + 1 = 5,\ F_2 = 2^{2^2} + 1 = 17,$$
$$F_3 = 2^{2^3} + 1 = 257, F_4 = 2^{2^4} + 1 = 65537$$

son primos.

Sin embargo, el matemático suizo **Leonhard Euler** demostró en 1732 que el siguiente número de Fermat,

$$F_5 = 2^{2^5} + 1 = 4294967297 = 641 \cdot 6700417$$

no es primo. En 1958 se demostró que F_{1945} era divisible por $5x2^{1947} + 1$.

Tal vez la historia de los números de Fermat hubiera terminado aquí, pero por una de esas *vueltas de tuerca* que da la historia en general y la de las matemáticas en particular, en 1801 el genial matemático alemán **C.F.Gauss** (1777-1855) demostró en sus *Disquisitiones Arithmeticae* que los polígonos regulares con un número n primo impar de lados son construibles con regla y compás si y solamente si $n = F_m$. En particular, el polígono de 17 lados es construible, y la lápida de la tumba de Gauss en Braunschweig representa este polígono regular, en su honor. Gauss descubrió este último resultado cuando tenía 19 años, si bien la publicación se produjo más tarde.

5. Los números de Mersenne

El monje francés **Marin Mersenne** (1588 – 1648) estudió los números de la forma siguiente:

$$M_p = 2^p - 1, \quad p \text{ primo.}$$

Los cuatro primeros números de **Mersenne**

$$M_2 = 2^2 - 1 = 3; \; M_3 = 2^3 - 1 = 7; \; M_5 = 2^5 - 1 = 31; \; M_7 = 2^7 - 1 = 127$$

son primos, pero $M_{11} = 2^{11} - 1 = 2047 = 23x89$. Sin embargo, hay otros primos de **Mersenne**: **Euler** probó en 1750 que M_{31} es primo, y en 1876 el francés **Lucas** estableció que M_{127} , un número de 39 cifras, es primo.

En el momento de redactar esta nota, el mayor número primo conocido, descubierto en agosto de 2008, es el número de Mersenne $M_{43112609}$ y tiene más de doce millones de cifras; para ser exactos, 12 978 189.

6. La búsqueda de fórmulas o algoritmos para generar números primos

Hay varios ejemplos de polinomios en *n* que dan valores primos hasta un cierto valor, a partir del cual pueden dar valores primos o compuestos. **Ribenboim** señala que una tal función *f(n)* debería cumplir al menos una de las condiciones siguientes:

a) $f(n) = p_n$ (el n-ésimo primo)

b) *f(n) siempre es primo, y si n es distinto de m, f(n) no es igual a f(m)*

c) *El conjunto de los números primos* es *igual al conjunto de valores de la función f.*

Es claro que a) es más restrictiva que b) ó c).

La mayor parte de las funciones f buscadas tienen expresiones muy complicadas. ¿Por qué no probar con los polinomios? Al fin y al cabo, Euler observó que $n^2 + n + 41$ toma valores primos desde n = 0 hasta 39. Para n = 40 el valor es 1681 = 41^2. Con $n^2 - 79n + 1601$ se avanza algo más; da valores primos desde n = 0 hasta 79, pero para n = 80 obtenemos otra vez 41^2 . La razón para no seguir esta vía la da el teorema negativo siguiente:

Si f es un polinomio en n con coeficientes enteros, no constante, existen infinitos enteros n tales que el valor absoluto de f(n) no es un número primo.

Demostración (**Ribenboim,** pg.129)

Como el polinomio no es constante, sería trivial si tomase todos sus valores compuestos. Por lo tanto, se puede suponer que existe un entero $n_0 \geq 0$ tal que $|f(n_0)| = p$ sea primo. Igualmente porque el polinomio no es constante, se tiene $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, luego existe $n_1 > n_0$ tal que si $n \geq n_1$, entonces $|f(n)| > p$. Para todo entero *h* tal que $n_0 + ph \geq n_1$ se tiene

$$f(n_0 + ph) = f\left(n_0\right) + (\text{múltiplo de p}) = (\text{múltiplo de p}) .$$

Dado que $|f(n_0 + ph)| > p$, $|f(n_0 + ph)|$ es compuesto.■

Siguiendo los pasos de **Euclides**, es posible construir un conjunto de números primos tan grande como se quiera. Empezando por 2 y 3, ponemos 2 x 3 + 1 =7 y ya tenemos el conjunto {2,3,7}. Poniendo 2x3x7+1 = 43, tenemos {2,3,7,43}. Ahora 2x3x7x43+1 = 1807 = 13x139 y eso conduce al conjunto {2,3,7,43,13,139}. Y así sucesivamente...

Pero, por otra parte, y eso ya está relacionado con la distribución de los números primos dentro de la serie natural, ***dado un número k arbitrario, se pueden encontrar k números consecutivos que no son primos.***

7. La distribución de los números primos dentro del conjunto de los números naturales

Vamos en primer lugar a justificar la afirmación que cierra el párrafo 6:

Dado un número k arbitrario, se pueden encontrar k números consecutivos que no son primos.

Consideramos los números

$$N_1 = (k+1)! + 2$$

$$N_2 = (k+1)! + 3$$

$$N_3 = (k+1)! + 4$$

……………..

$N_k = (k+1)! + k+1$

Este conjunto de k números consecutivos responde a la cuestión; pues el primero es múltiplo de 2, el segundo de 3, etc. ■

Este apartado 7 de esta nota trata de la pregunta d) de las planteadas por **Ribenboim** en su obra. Necesitamos, entre otras cosas una notación para una de las funciones aritméticas importantes: la que cuenta los números primos *p* menores o iguales que un cierto número x>0, y que se representa por π(x). Lo formalizamos como

$$\pi(x) = \#\{p \in P \text{ tales que } p \leq x\}$$

Un aspecto de la distribución de los números primos en el conjunto de los naturales lo dio la ***conjetura de Bertrand*** (1845), que afirma que **para todo** $n \geq 2$**, existe un número primo entre n y 2n .** Esta conjetura fue demostrada por **Chebyshev,** y desde entonces se conoce como teorema de **Bertrand-Chebyshev.**

El teorema del número primo

En 1792 **Gauss** conjeturó que $\pi(x) \sim \int_2^x \frac{dt}{\ln t}$ y dado que el logaritmo integral es asintóticamente equivalente a $\frac{x}{\ln x}$ (es decir que su cociente tiende a 1 cuando x tiende a infinito), el resultado

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$$

se conoce, desde su primera demostración en 1896 por **Hadamard** y **de la Vallée-Poussin** (independientemente uno del otro) como el **teorema del número primo.**

Esta incursión de las nociones de Análisis en la Teoría de números dio lugar a la **Teoría analítica de Números.** Se creía que solamente era posible este tipo de demostración para este teorema, pero en 1949, **Erdös** y **Selberg** dieron (por separado) demostraciones que utilizaban estimaciones elementales de ciertas funciones aritméticas (y que por eso se llaman *demostraciones elementales del teorema del número primo).*

8. La conjetura de Goldbach

Finalizaremos esta digresión sobre los números primos con uno de los problemas *abiertos* de la Teoría de Números. Es la conjetura de **Goldbach** quien en 1742 pidió a **Euler** que demostrase que ***todo número par,***

mayor que 2, es suma de 2 números primos. La conjetura parece razonable, ya que, por ejemplo, 10 = 3 + 7 = 5 + 5; 24 = 11 + 13 = 7 + 17; 8 = 5 + 3; etc. Pero, hasta la fecha, no hay ninguna demostración general, si bien, como dice **D'Ignazio** en los últimos párrafos del capítulo sobre primos de su libro, el haberse probado que ***todo número natural, suficientemente grande, es suma de no más de cuatro números primos***, debería ser el preludio de una demostración de la conjetura.

9. Dos observaciones finales…pero no últimas

A punto de enviar al webmaster de la OEI el número 48 de la REOIM se han producido dos noticias que han revolucionado a los matemáticos.

Por una parte, el matemático peruano Harald Helfgott, investigador en el Centre Nationale de la Recherche Scientifique de París ha demostrado la llamada conjetura débil de Goldbach: ***Todo número impar mayor que 5 puede expresarse como suma de tres números primos.***

Casi simultáneamente, un investigador chino, Yitang Zhang, de la Universidad de New Hampshire, envió a la prestigiosa revista *Annals of Mathematics* un manuscrito (escrito con claridad cristalina y no dejando ni un detalle sin demostrar) en el que prueba un resultado clave en el estudio de la distribución de los números primos: ***Existe un número N menor que 70 millones tal que hay infinitos pares de primos que difieren en N.*** El 17 de mayo de 2013, mientras Zhang daba cuenta de su demostración en una conferencia en la Universidad de Harvard, "saltó" a las noticias el resultado de Helfgott.

Algunos problemas para resolver

i) Demostrar que $n^4 + 4$ no es primo si n > 1 (Sophie Germain)

ii) Si a y n son enteros, $a \geq 0, n \geq 2$, demostrar que

$$N = \left(1 + a + a^2 + \cdots + a^n\right)^2 - a^n$$

es compuesto.

iii) Si a,b son números naturales mayores que 1 y primos entre sí, demostrar que $\log_a b$ es irracional.

iv) Un número $N = 2^x.3^y.5^z$. Se suprimen 24 divisores al dividirlo por 2, 18 al hacerlo por 3 y 12 al hacerlo por 5. Calcular N.

v) ¿Es siempre posible convertir un número entero en primo, modificando una sola de sus cifras (Sierpinsky)

vi) Probar que n! es divisible por la suma 1 + 2+ 3+…+ n si y solamente si n+1 no es un primo impar (V. Thébault)

vii) Probar que no existen un primo p > 5 ni un natural m tales que $(p - 1)! + 1 = p^m$

viii) Si p es primo y $1 \leq k \leq p$, entonces $(k-1)!(p-k)! + (-1)^{k-1} \equiv 0 (\text{mod } p)$ y recíprocamente (H.Demir, Mathesis 1962)

ix) Demostrar que en cualquier progresión aritmética, cuyp primer término y la diferencia sean números naturales, se puede encontrar cualquier número prefijado de términos que no sean primos.

x) Se consideran los números primos 2, 3, 5, 7, ..., p; demostrar que el número 2.3.5.7....p + 1 nunca es cuadrado perfecto (V. Thébault)

10. Bibliografía

1) **Cilleruelo, J. & Córdoba, A. *La teoría de los números.*** Mondadori, Madrid 1992.

2) **D'Ignazio, I. *Le lezioni del supplente.*** Interlinea Ed., Teramo, 1995.

3) **Ore, O. *Invitation to Number Theory.*** New Mathematical Library #20, M.A.A., 1967.

4) **Ribenboim, P. *Nombres premiers: mystères et records.*** P.U.F. Paris, 1994.

5) **Sautoy, M. de. *The music of the primes.*** Harper, New York 2004.

6) **Sierpinski, W. *Elementary Theory of Numbers.*** North-Holland & PWN, Amsterdam y Varsovia 1988.

Título: La desigualdad entre la media aritmética y geométrica en problemas de olimpiadas.

Resumen:

En el presente artículo se pretende mostrar la utilidad de una desigualdad tan elemental como la relación entre las medias aritmética y geométrica para resolver problemas de olimpiadas, se ofrece una demostración algebraica y una geométrica para esta relación en dos elementos, a continuación se ofrece la demostración realizada por Cauchy al caso general y se proponen problemas con soluciones de olimpiadas realizadas en diferentes países.

Palabras claves: desigualdades, media aritmética, media geométrica, olimpiadas de Matemática.

Summary:

Presently article is sought to show the utility of such an elementary inequality as the relationship among the stockings arithmetic and geometric to solve problems of olympiads, he/she offers an algebraic demonstration and a geometric one for this relationship in two elements, next he/she offers the demonstration carried out by Cauchy to the general case and they intend problems with solutions of olympiads carried out in different countries.

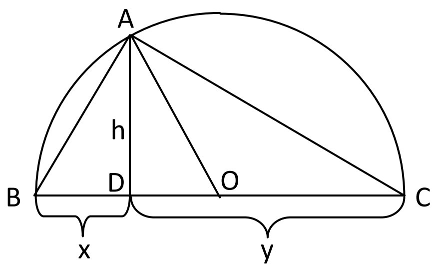
Key words: inequalities, half arithmetic, mediates geometric, olympiads of Mathematics.

Desarrollo:

Se conoce que la media aritmértica entre dos valores no negativos a y b se calcula como $\frac{a+b}{2}$ y la media geométrica como $\sqrt{ab}$ entonces demostraremos que $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. Usaremos una vía algebraica y una geométrica que nos permitirá analizar algunas de las interconexiones conceptuales que se establecen entre estas dos disciplinas de la Matemática.

Vía algebraica: Conocemos que $x^2 \geq 0$, si en la desigualdad que queremos demostrar multiplicamos por 2 y transponemos todo al miembro izquierdo, obtenemos $a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0$, factorizando tenemos $\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \geq 0$, que se cumple.

Vía Geométrica:



Utilizando el teorema de las alturas se tiene que $h = \sqrt{xy}$ es decir la media geométrica entre x, y. Por otra parte podemos percatarnos que $OA = \frac{x+y}{2}$, es decir la media geométrica, que en este caso es la hipotenusa del triángulo rectángulo AOD y la media geométrica es uno de sus catetos, entonces se tiene que $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

Esta desigualdad se cumple además si la cantidad de valores aumenta. Según Bulajich, Gómez y Valdés (2008), Cauchy probó esta desigualdad utilizando una inducción de la siguiente forma:

1. Probar que se cumple para dos números.
2. Probar que si se cumple para n elementos entonces se cumple para n – 1 elementos.
3. Probar que si se cumple para n elementos entonces se cumple para 2n elementos.

En el caso que nos ocupa el primer paso está probado. Probaremos el segundo y el tercer pasos:

2) Tomamos n – 1 números no negativos $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$ y sea $g = \sqrt[n-1]{a_1 a_2 \cdots a_{n-1}}$, como tenemos como premisa que se cumple para n elementos entonces:

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + g}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_{n-1} g} = \sqrt[n]{g^{n-1} g} = g$$

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + g \geq ng$$

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}}{n-1} \geq \sqrt[n-1]{a_1 a_2 \cdots a_{n-1}}$$

Entonces se cumple para n – 1 elementos.

3) sean 2n números reales no negativos $a_1, a_2, \cdots, a_{2n}$

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{2n} = (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) \cdots + (a_{2n-1} + a_{2n})$$

$$\geq 2\left(\sqrt{a_1 a_2} + \sqrt{a_3 a_4} + \cdots + \sqrt{a_{2n-1} a_{2n}}\right)$$

$$\geq 2n \sqrt[n]{\sqrt{a_1 a_2} \cdot \sqrt{a_3 a_4} \cdot \cdots \cdot \sqrt{a_{2n-1} a_{2n}}}$$

$$\geq 2n \sqrt[2n]{a_1 a_2 \cdots a_{2n}}$$

A continuación analizaremos algunos problemas de olimpiadas donde se puede utilizar esta desigualdad.

Problema 1. (Bulgaria, 1995) Sean S_A, S_B y S_C las áreas de los heptágonos regulares $A_1A_2\ldots A_7$, $B_1B_2\ldots B_7$, $C_1C_2\ldots C_7$, respectivamente. Si se sabe que $A_1A_2 = B_1B_3 = C_1C_4$. Prueba que $\frac{S_B+S_C}{S_A} > \frac{1}{2}$

Solución:

Si $a = A_1A_2$, $b = B_1B_3$ y $c = C_1C_4$, usando el teorema de Ptolomeo se deuce que ab + ac = bc. Usando esto concluimos que $B_1B_2 = \frac{a^2}{b}$, $C_1C_2 = \frac{a^2}{c}$ y $\frac{S_B+S_C}{S_A} = \frac{a^2}{b^2} + \frac{a^2}{c^2}$. Usando la desigualdad entre media aritmética y media geométrica concluimos que $\frac{S_B+S_C}{S_A} > \frac{1}{2}$

Problema 2. (Estonia, 1995) Sean a, b, c las longitudes de los lados de un triángulo y α, β y γ los ángulos opuestos a esos lados. Prueba que si r es el radio de la circunferencia inscrita en el triángulo, entonces: $a \operatorname{sen} \alpha + b \operatorname{sen} \beta + c \operatorname{sen} \gamma \geq 9r$.

Solución:

Sea S el área del triángulo, tenemos $\operatorname{sen} \alpha = \frac{2S}{bc}$, $\operatorname{sen} \beta = \frac{2S}{ca}$, $\operatorname{sen} \gamma = \frac{2S}{ab}$ y $r = \frac{S}{p} = \frac{2S}{a+b+c}$

$$a \cdot \frac{2S}{bc} + b \cdot \frac{2S}{ca} + c \cdot \frac{2S}{ab} \geq 9 \cdot \frac{2S}{a+b+c}$$

$$\frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab} \geq \frac{9}{a+b+c}$$

$$\left(\frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab}\right)(a+b+c) \geq 9$$

Por la desigualdad entre la media aritmética y la geométrica

$\frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab} \geq 3\sqrt[3]{\frac{abc}{a^2b^2c^2}}$ y $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$

Multiplicando se cumple lo buscado.

Problema 3. (Repúblicas Checa y Eslovaca, 2000) Prueba que para todos a, b reales positivos se cumple que:

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}}+\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\leq\sqrt[3]{2(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}$$

Solución: Haciendo $\sqrt[3]{a}=x$ y $\sqrt[3]{b}=y$ (Esto es fundamental a la hora de resolver desigualdades, pues en muchas ocasiones una adecuada transformación puede facilitarnos mucho la demostración.

En este caso

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\leq\sqrt[3]{2(x^3+y^3)\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}\right)}$$

$$\frac{x^2+y^2}{xy}\leq\sqrt{\frac{2(x^3+y^3)^2}{x^3y^3}}$$

$$x^2+y^2\leq\sqrt{2(x^3+y^3)^2}$$

Que se puede transformar en: $3x^4y^2+3x^2y^4\leq x^6+4x^3y^3+y^6$

Aplicando dos veces la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica tenemos:

$$x^6+x^3y^3+x^3y^3\geq 3\sqrt[3]{x^{12}y^6}=3x^4y^2$$

$$y^6+x^3y^3+x^3y^3\geq 3\sqrt[3]{y^{12}x^6}=3y^4x^2$$

Sumando las dos desigualdades miembro a miembro se tiene la desigualdad deseada. La igualdad se cumple si y solo si $x^6=x^3y^3=y^6\Leftrightarrow x=y\Leftrightarrow a=b$

Problema 4. (Brasil, 2001) Prueba que $(a+b)(a+c)\geq 2\sqrt{abc(a+b+c)}$, $\forall a,b,c\in\mathcal{R}_+^*$

Solución:

Vamos a transformar $(a+b)(a+c)=a^2+ab+ac+bc=a(a+b+c)+bc$

Aplicando la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica se tiene:

$$a(a+b+c)+bc\geq 2\sqrt{abc(a+b+c)}$$

Problema 5. (IMO, 2001) Prueba que para $a,b,c\in\mathcal{R}_+^*$ se cumple:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\geq 1$$

Solución:

Podemos percatarnos que la solución de la desigualdad es equivalente a demostrar:

$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} \geq \frac{a^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}}$. Aplicado a los tres sumandos. Esta última desigualdad se puede transformar como:

$$a\left(a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}\right) \geq a^{\frac{4}{3}}\sqrt{a^2+8bc}$$

$$a^2\left(a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}\right)^2 \geq a^{\frac{8}{3}}(a^2+8bc)$$

$$\left(a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}\right)^2 \geq a^{\frac{2}{3}}(a^2+8bc) = a^{\frac{8}{3}}+8a^{\frac{2}{3bc}}$$

Entonces esto es equivalente a demostrar que:

$$\left(a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}\right)^2 - \left(a^{\frac{4}{3}}\right)^2 \geq 8a^{\frac{2}{3}}bc$$

$$\left(a^{\frac{4}{3}}+a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}\right)\left(b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}\right) \geq 8a^{\frac{2}{3}}bc$$

Aplicando dos veces la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica:

$$a^{\frac{4}{3}}+a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}} \geq 4\sqrt[4]{a^{\frac{8}{3}}b^{\frac{4}{3}}c^{\frac{4}{3}}} = 4a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}}$$

$$b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}} \geq 2\sqrt{b^{\frac{4}{3}}c^{\frac{4}{3}}} = 2b^{\frac{2}{3}}c^{\frac{2}{3}}$$

Multiplicando miembro a miembro se tiene el resultado deseado.

Problema 6. (Balcanes, 2002) Sean a, b, c reales positivos, prueba que:

$$\frac{2}{b(a+b)}+\frac{2}{c(b+c)}+\frac{2}{a(c+a)} \geq \frac{27}{(a+b+c)^2}$$

Solución: aplicando la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica

$$\frac{2}{b(a+b)}+\frac{2}{c(b+c)}+\frac{2}{a(c+a)} \geq \frac{2\cdot 3}{\sqrt[3]{abc}\cdot\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}}$$

Apliquemos dos veces más la desigualdad media aritmética – media geométrica

$\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3}$; $\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)} \leq \frac{2(a+b+c)}{3}$; entonces

$$\frac{2\cdot 3}{\sqrt[3]{abc}\cdot\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}} \geq \frac{27}{(a+b+c)^2}$$

Problema 7. (Canadá, 2002) Prueba que $\forall a, b, c \in \mathcal{R}_+^*$, se cumple que $\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} \geq a + b + c$. ¿Cuándo ocurre la igualdad?

Solución: teniendo en cuenta que $abc > 0$ podemos multiplicar la desigualdad por abc con lo cual transformamos lo que queremos demostrar en: $a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a + b + c)$

Transformando el miembro izquierdo, $a^4 + b^4 + c^4 = \frac{a^4+b^4}{2} + \frac{b^4+c^4}{2} + \frac{c^4+a^4}{2}$

Si aplicamos media aritmética – media geométrica a cada sumando tenemos:

$$\frac{a^4 + b^4}{2} + \frac{b^4 + c^4}{2} + \frac{c^4 + a^4}{2} \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$$

$$= \frac{a^2(b^2 + c^2)}{2} + \frac{a^2(b^2 + c^2)}{2} + \frac{a^2(b^2 + c^2)}{2}$$

Aplicando nuevamente la desigualdad media aritmética – media geométrica tenemos que:

$$\frac{a^2(b^2 + c^2)}{2} + \frac{a^2(b^2 + c^2)}{2} + \frac{a^2(b^2 + c^2)}{2} \geq a^2bc + b^2ca + c^2ab = abc(a + b + c)$$

La igualdad si y solo si a = b = c.

Problema 8. (Rusia, 2002) Prueba que $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \geq xy + yz + zx$, para $x, y, z \in \mathcal{R}_+^*: x + y + z = 3$

Solución:

Esta desigualdad puede ser transformada de la siguiente forma:

$$2(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}) \geq 2(xy + yz + zx)$$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 + 2(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}) &\geq x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) \\ &= (x + y + z)^2 = 3(x + y + z) \end{aligned}$$

Entonces la demostración de la desigualdad original se reduce a demostrar que

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}) \geq 3(x + y + z)$$

Vamos a utilizar 3 veces la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica:

$x^2 + \sqrt{x} + \sqrt{x} \geq 3\sqrt[3]{x^3} = 3x$, de la misma forma $y^2 + \sqrt{y} + \sqrt{y} \geq 3\sqrt[3]{y^3} = 3y$; $z^2 + \sqrt{z} + \sqrt{z} \geq 3\sqrt[3]{z^3} = 3z$, sumando estas desigualdades se tiene la deseada.

Problema 9. (Repúblicas Checa y Eslovaca, 2003) Demuestra que si $a, b, c \in \mathcal{R}_+^*: abc = 1$, entonces $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq a + b + c$.

Solución: Esta desigualdad se puede transformar en $\frac{1}{3}\left(\frac{a}{b}+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{b}{c}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{a}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}\right) \geq a+b+c$, vamos a demostrar por partes utilizando la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica.

$\frac{1}{3}\left(\frac{a}{b}+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}\right) \geq \sqrt[3]{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}} = \sqrt[3]{\frac{a^2}{bc}} = \sqrt[3]{\frac{a^3}{abc}} = \sqrt[3]{a^3} = a$, de manera análoga $\frac{1}{3}\left(\frac{b}{c}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right) \geq b$, y $\frac{1}{3}\left(\frac{c}{a}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}\right) \geq c$. Sumando miembro a miembro obtenemos la desigualdad deseada.

Problema 10. (Lista corta, OIM 2004) Si los números positivos $x_1, x_2, \cdots, x_n$, satisfacen que la suma es 1, prueba que: $\frac{x_1}{x_2(x_1+x_2+x_3)} + \frac{x_2}{x_3(x_2+x_3+x_4)} + \cdots + \frac{x_n}{x_1(x_n+x_1+x_2)} \geq \frac{n^3}{3}$.

Soludión: Haciendo $x_{n+1} = x_1$, $x_{n+2} = x_2$, definimos $a_i = \frac{x_i}{x_{i+1}}$; $b_i = x_i + x_{i+1} + x_{i+2}, i = \overline{1,n}$

Es evidente que $\prod_{i=1}^{n} a_i = 1$, $\sum_{i=1}^{n} b_i = 3$ $\sum_{i=1}^{n} x_i = 3$, la desigualdad es equivalente a: $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{b_i} \geq \frac{n^3}{3}$. Usando la desigualdad media aritmética – media geométrica deducimos que:

$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} b_i} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} b_i}} \geq \frac{n}{3}$, usando la desigualdad media aritmética – media geométrica $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{b_i} \geq n\sqrt[n]{\frac{a_1}{b_1}\cdot\frac{a_2}{b_2}\cdot\ldots\cdot\frac{a_n}{b_n}} = \frac{n\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}}{\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} b_i}} \geq \frac{n^3}{3}$

Problema 11. (Ucrania, 2004) Sean $x, y, z \in \mathcal{R}_+^*$, con $x+y+z=1$. Prueba que

$\sqrt{xy+z} + \sqrt{yz+x} + \sqrt{zx+y} \geq 1 + \sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx}$

Solución:

$\sqrt{xy+z} = \sqrt{xy+z(x+y+z)} = \sqrt{xy+xz+yz+z^2}$

$= \sqrt{\frac{xy}{2}+\frac{xy}{2}+\frac{xz}{2}+\frac{yz}{2}+\frac{xz}{2}+\frac{yz}{2}+\frac{z^2}{2}+\frac{z^2}{2}}$

Por la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica esta última expresión:

$\geq \sqrt{xy + z\sqrt{xy} + z\sqrt{xy} + z^2} = \sqrt{xy + 2z\sqrt{xy} + z^2} = \sqrt{\left(\sqrt{xy} + z\right)^2} = \sqrt{xy} + z$, de manera análoga $\sqrt{yz + x} \geq \sqrt{yz} + x$; $\sqrt{zx + y} \geq \sqrt{zx} + y$; por tanto

$$\begin{aligned}\sqrt{xy + z} + \sqrt{yz + x} + \sqrt{zx + y} &\geq \sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx} + x + y + z \\ &= \sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx} + 1\end{aligned}$$

Problema 12. (Kazajstán, 2009) Prueba que $\forall a, b, c \in \mathcal{R}_+^*: abc \leq 1$, se cumple que:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 1 + \frac{6}{a + b + c}$$

Solución:

La desigualdad se puede transformar multiplicando por $a + b + c$,

$$(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq (a + b + c) + 6$$

Utilizando la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica en ambos factores del miembro izquierdo tenemos:

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{abc}} \geq 3$, entonces $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 1$; y además $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$

Entonces $\frac{1}{3}(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq a + b + c$

Y $\frac{2}{3}(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{\sqrt[3]{abc}} \cdot 3\sqrt[3]{abc} = 6$, sumando miembro a miembro tenemos la desigualdad que queremos demostrar.

Problema 13. (Grecia, 2010) Si $a, b \in \mathcal{R}_+^*: a + b = 3$ y $x, y, z \in \mathcal{R}_+^*: xyz = 1$, prueba que $(ax + b)(ay + b)(az + b) \geq 27$. ¿Cuándo ocurre la igualdad?

Solución:

La desigualdad se puede transformar en

$$a^3xyz + a^2b(xy + yz + zx) + ab^2(x + y + z) + b^3 \geq 27$$

Por la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica

$x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz} = 3$; $xy + yz + zx \geq 3\sqrt[3]{(xyz)^2} = 3$, entonces:

$a^3xyz + a^2b(xy + yz + zx) + ab^2(x + y + z) + b^3 \geq a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, y por tanto es suficiente demostrar que

$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \geq 27 \Leftrightarrow (a+b)^3 \geq 27$, que se cumple por ser $a + b = 3$.

La igualdad se verifica si y solo si x = y = z = 1.

Problema 14. (Prueba de selección de Cuba, 2006) Encuentra el mayor valor posible de k tal que para todo polinomio de grado n > 1 cuyas raíces son todas reales positivas $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1x + a_0$ se cumple que y determina en qué casos se cumple la igualdad.

En este problema se establecen relaciones entre elementos propios del Álgebra como es el caso del trabajo con polinomios y la desigualdad entre las medias.

Solución:

Sean r_1, r_2, r_3, … , r_n las raíces de p(x). Según las fórmulas de Vieta se tiene que $\sum_{i)1}^{n-1}(-1)^i a_{n-1} = \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i\left((-1)^i \sum_{1\leq j_1<\ldots<j_i\leq n} r_{j_1}..r_{j_i}\right) = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{1\leq j_1<\ldots<j_i\leq n} r_{j_1}..r_{j_i}$

Una doble sumatoria con un total de $\sum_{i=1}^{n-1}\binom{n}{i} = 2^n - 2$ términos. Ahora por la desigualdad Media Aritmética-Media Geométrica (aplicable porque los r_i son positivos) se sabe que

$$\frac{\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{1\leq j_1<\ldots<j_i\leq n} r_{j_1}..r_{j_i}}{2^n-2} \geq \sqrt[2^n-2]{\prod_{i=1}^{n-1}\prod_{1\leq j_1<\ldots<j_i\leq n} r_{j_1}..r_{j_i}}$$

Para simplificar la raíz (2^n-2)-ésima obtenida en este punto nótese que

$$\sqrt[2^n-2]{\prod_{i=1}^{n-1}\prod_{1\leq j_1<\ldots<j_i\leq n} r_{j_1}..r_{j_i}} = \sqrt[2^n-2]{\sqrt{\left(\prod_{i=1}^{n-1}\prod_{1\leq j_1<\ldots<j_i\leq n} r_{j_1}..r_{j_i}\right)\left(\prod_{i=1}^{n-1}\prod_{1\leq j_1<\ldots<j_i\leq n}\frac{\prod_{k=1}^{n} r_k}{r_{j_1}..r_{j_i}}\right)}}$$

$$= \sqrt[2(2^n-2)]{\left(\prod_{k=1}^{n} r_k\right)^{2^n-2}} = \sqrt{\prod_{k=1}^{n} r_k} = \sqrt{|a_0|}$$

Una recopilación de los resultados obtenidos hasta el momento permite concluir que

$$\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i a_{n-i} \geq (2^n-2)\sqrt{|a_o|} \quad \text{entonces} \quad \left(\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i a_{n-1}\right)^2 \geq (2^n-2)^2|a_o|$$

Se tiene que la constante k es $(2^n - 2)^2$, y en este caso es fácilmente verificable, por las condiciones de la desigualdad Media Aritmética-Media Geométrica, que la igualdad en este caso es alcanzada cuando

$r_1 = r_2 = \ldots = r_n = 1$ y solamente en ese caso, con lo que se obtienen además las condiciones de igualdad. Además, por existir igualdad par este valor de k, es claro que no puede encontrarse ninguno mayor.

Problema 15. (Prueba de selección cubana, 2006) Sean a, b y c números positivos tales que ab + bc + ca = 1. Probar que $3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}+6(a+b+c)} \le \frac{\sqrt[3]{3}}{abc}$.

Solución:

Escribamos $\frac{3}{\sqrt[3]{3}}\sqrt[3]{\frac{1}{abc}+6(a+b+c)} = \frac{3}{\sqrt[3]{3}}\sqrt[3]{\frac{1+6a^2bc+6ab^2c+6abc^2}{abc}}$ =

= $\frac{3}{\sqrt[3]{3}}\sqrt[3]{\frac{1+3ab(ac+bc)+3bc(ba+ca)+3ca(ab+bc)}{abc}}$

como ab + bc + ca = 1 tenemos $\frac{3}{\sqrt[3]{3}}\sqrt[3]{\frac{1+3ab-3(ab)^2+3bc-3(bc)^2+3ca-3(ca)^2}{abc}}$ =

= $\frac{3}{\sqrt[3]{3}}\sqrt[3]{\frac{4-3(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2}{abc}}$.

Es fácil ver que $3((ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2) \ge (ab + bc + ca)^2 = 1$ con lo que se prueba que $\frac{3}{3\sqrt{3}}\sqrt[3]{\frac{3}{abc}} \le \frac{1}{abc}$, que es equivalente a que $(abc)^2 \le \frac{1}{27}$ y por la relación entre la media aritmética y la media geométrica se tiene que $(abc)^2 = (ab)(bc)(ca) \le \left(\frac{ab+bc+ca}{3}\right)^2 = \frac{1}{27}$.

La igualdad se cumple si y solo si $a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

<u>Otros problemas donde se utiliza la desigualdad</u>

En los problemas que se muestran a continuación se evidencia la utilización de la desigualdad entre las medias en otros contextos, donde no se solicita explícitamente la demostración de una desigualdad. Esto muestra las relaciones internas que se establecen en el Álgebra.

Problema 16. (Grecia, 2009) Determina $x, y, z \in \mathcal{R}_+^*$ que satisfacen el sistema

$$\begin{cases} x + y + z = xy + yz + zx \\ \quad xyz = 1 \end{cases}$$

Y tienen la menor suma posible.

Solución:

Sea (x_1, y_1, z_1) la solución del sistema con la menor suma posible, entonces por la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica se tiene:

$\frac{x_1+y_1+z_1}{3} \geq \sqrt[3]{x_1y_1z_1} \Longrightarrow x_1 + y_1 + z_1 \geq 3$, con la igualdad para $x_1 = y_1 = z_1 = 1$

Problema 17. (Grecia, 2010) Resolver en reales positivos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + y + z + w = 4 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{w} = 5 - \frac{1}{xyzw} \end{cases}$$

Solución:

Por la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica se tiene que:

$$1 = \frac{x + y + z + w}{4} \geq \sqrt[4]{xyzw} \Longrightarrow xyzw \leq 1 \qquad (1)$$

La segunda ecuación se transforma en $xyz + yzw + zwx + wxy + 1 = 5xyzw$

Usando la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica se tiene:

$5xyzw = xyz + yzw + zwx + wxy + 1 \geq 5\sqrt[5]{(xyzw)^3} \Longrightarrow (xyzw)^5 \geq (xyzw)^3$,

entonces $xyzw \geq 1 \qquad (2)$

Con la igualdad para $xyz = yzw = zwx = wxy = 1$

Por (1) y (2), $xyzw = 1$, que es posible cuando $x = y = z = w = 1$

Por tanto la única solución $(x, y, z, w) = (1,1,1,1)$

Problema 18. (Rumanía, 2002) Sea $a \in \mathcal{R}$, $a > 1$, y $f, g, h: \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}$, funciones reales tal que $f(x) + g(x) + h(x) \geq 0, \forall x \in \mathcal{R}$. Demuestra que la ecuación $a^{f(x)} + a^{g(x)} + a^{h(x)} = 3$ tiene soluciones si y solo si las funciones $f(x), g(x), h(x)$ tienen ceros comunes.

a) Resuelve la ecuación $5^{1+\cos\pi x} + 2^{x^2-1} + 2^{2(1-|x|)} = 3$

Solución:

Por la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica tenemos:

$$1 = \frac{1}{3}\left(a^{f(x)} + a^{g(x)} + a^{h(x)}\right) \geq \sqrt[3]{a^{f(x)} \cdot a^{g(x)} \cdot a^{h(x)}} = \sqrt[3]{a^{f(x)+g(x)+h(x)}} \geq \sqrt[3]{a^0}$$
$$= 1$$

Entonces se cumple la igualdad en esta desigualdad: $a^{f(x)} = a^{g(x)} = a^{h(x)} \Longrightarrow f(x) = g(x) = h(x)$ y como $f(x) + g(x) + h(x) = 0$, porque tiene que cumplirse la igualdad $f(x) = g(x) = h(x) = 0$, entonces los valores de x tienen que ser ceros comunes.

a) La ecuación puede escribirse en la forma: $2^{(1+cos\pi x)\log_2 5} + 2^{x^2-1} + 2^{2(1-|x|)} = 3$, por tanto considerando $f(x) = (1 + cos\pi x)\log_2 5$, $g(x) = x^2 - 1$, $h(x) = 2(1 - |x|)$, tenemos $f(x) + g(x) + h(x) = (1 + cos\pi x)\log_2 5 + (|x| - 1)^2 \geq 0$, el resultado anterior implica que la solución está formada por las raíces comunes a las tres funciones f, g, h, que son $x = 1, x = -1$.

Problema 19. (China, 2006) Sea $n \in \mathbb{Z}_+^*: n \geq 2$ y $a_1, a_2, \cdots, a_n \in (0,1)$. Determina el máximo valor de la suma $\sum_{i=1}^{n} \sqrt[6]{a_i(1 - a_i)}$, donde $a_{n+1=}\ a_n$

Solución: Por la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica:

$\sqrt[6]{a_i(1 - a_i)} = 2^{\frac{4}{6}} \sqrt[6]{a_i(1 - a_i)\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} \leq 2^{\frac{2}{3}}\cdot\frac{1}{6}(a_i - a_{i+1} + 3)$, luego

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt[6]{a_i(1 - a_i)} \leq 2^{\frac{2}{3}}\cdot\frac{1}{6}(a_i - a_{i+1} + 3) = 2^{\frac{2}{3}}\cdot\frac{1}{6}\cdot 3n = \frac{n}{\sqrt[3]{2}}$$

La igualdad se logra si y solo si $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = \frac{1}{2}$, luego el máximo es $\frac{n}{\sqrt[3]{2}}$.

Problema 20. (Primera prueba selectiva de Cuba, curso 2006 – 2007) Hallar el valor mínimo posible de $x^2 + y^2$ si $x,\ y$ son números reales que satisfacen la condición $xy(x^2 - y^2) = x^2 + y^2$, con $x \neq 0$.

Solución:

Sea $A = x^2 + y^2$ y $B = x^2 - y^2$ entonces $x^2 = \frac{A+B}{2}$ y $y^2 = \frac{A-B}{2}$, tenemos que

$xy = \sqrt{x^2y^2} = \sqrt{\frac{A+B}{2}\cdot\frac{A-B}{2}}$, notemos que debemos asumir que xy > 0.

Sustituyendo en la ecuación dada tenemos $A = B\sqrt{\frac{A+B}{2}\cdot\frac{A-B}{2}}$ (1)

De acuerdo a la relación entre la media aritmética y geométrica se cumple que

$\sqrt{\dfrac{A+B}{2}\cdot\dfrac{A-B}{2}} \le \dfrac{\frac{A+B}{2}+\frac{A-B}{2}}{2} = \dfrac{A}{2}$ teniendo que $A \le \dfrac{A}{2}\cdot B$ y $B \ge 2$.

Reordenando (1) encontramos que $4a^2 = B^2(A^2 - B^2)$ y $A^2 = \dfrac{B^4}{B^2-4}$ luego $B \neq 2$ obteniendo que $B > 2$.

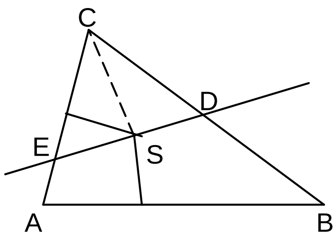
Ahora, $(B^2 - 8)^2 \ge 0$, y $B^4 \ge 16B^2 - 64 = 16(B^2 - 4)$, teniendo que $\dfrac{B^4}{B^2-4} \ge 16$ teniendo entonces que $x^2 + y^2 = A \ge 4$. Finalmente notemos que $x^2 + y^2$ puede tomar el valor 4, por ejemplo para $x = \sqrt{2+\sqrt{2}}$, $y = \sqrt{2-\sqrt{2}}$.

Problema 21. (Pruebas de selección Cuba, 2006) Una circunferencia de radio r y centro S está inscrita en el triángulo ABC. Una recta que pasa por el punto S interseca a los lados BC y CA en los puntos D y E respectivamente. Si P es el área del triángulo CED, probar que $P \ge 2r^2$. determina para qué casos se cumple la igualdad.

Solución:

El área A del triángulo CED satisface que

$A = A_{CES} + A_{CSD} = ½\ CE\cdot r + ½\ CD\cdot r = \dfrac{CE+CD}{2}\cdot r$.



Por la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica tenemos que $\dfrac{CE+CD}{2}\cdot r \ge \sqrt{CE\cdot CD}$ por lo que $A \ge \sqrt{CE\cdot CD}\cdot r$. El producto de las longitudes de los lados de un triángulo no es menor que el doble del área del triángulo.

En nuestro caso $CE\cdot CD \ge 2A$, donde la igualdad se cumple si y solo si el ángulo del vértice C es recto, entonces $A \ge \sqrt{CE\cdot CD}\cdot r\ \sqrt{2A}\cdot r$ y $A^2 \ge 2Ar^2$ donde $A \ge 2r^2$. La igualdad se cumple si y solo si CE = CD y $\angle C = 90^0$.

Bibliografía:

Beskin, N. M. (1980). División de un segmento en una razón dada. Moscú: Mir.
Bulajich Manfrino, R. & Gómez Ortega, J. A. (2007). Desigualdades. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. México: Instituto de Matemáticas de la UNAM.
Bulajich Manfrino, R. & Rubio Barrios, C. J. (2008). Las Olimpiadas Matemáticas en San Luis Potosí 1987 – 2005. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. México: Instituto de Matemáticas de la UNAM.

Colectivo de autores (1995). Olimpiada Nacional de Bulgaria.
Colectivo de autores (1995). Olimpiada Nacional de Estonia.
Colectivo de autores (2000). Olimpiada Nacional de Repúblicas Checa y Eslovaca.
Colectivo de autores (2001). Olimpiada Nacional de Brasil.
Colectivo de autores (2001). Lista Corta de la IMO.
Colectivo de autores (2002). Olimpiada Nacional de Rumanía.
Colectivo de autores (2002). Olimpiada Nacional de Canadá.
Colectivo de autores (2002). Olimpiada Nacional de Rusia.
Colectivo de autores (2003). Olimpiada Nacional de Repúblicas Checa y Eslovaca.
Colectivo de autores (2004). Lista Corta de la OIM.
Colectivo de autores (2004). Olimpiada Nacional de Ucrania.
Colectivo de autores (2009). Olimpiada Nacional de Kazajstán.
Colectivo de autores (2010). Olimpiada Nacional de Grecia.
Colectivo de autores (2009). Olimpiada Nacional de Grecia.
Colectivo de autores (2006). Olimpiada Nacional de China.
Davidson San Juan, L., Reguer Villar, R., & Frontela, R. (1987). Problemas de Matemática Elemental 1. La Habana: Pueblo y Educación.
Davidson San Juan, L., Reguer Villar, R., & Frontela, R. (1995). Problemas de Matemática Elemental 2. La Habana: Pueblo y Educación.
Davidson San Juan, & Recio, F. (1974). Los Concursos de Matemática. Primera parte. La Habana: Dirección de producción de medios de enseñanza. MINED.
Davidson San Juan, & Recio, F. (1975). Los Concursos de Matemática. Segunda parte. La Habana: Dirección de producción de medios de enseñanza. MINED.
Díaz González, M. (2004). Problemas de Matemática para los entrenamientos de la Educación Preuniversitaria I. La Habana: Pueblo y Educación.
Díaz González, M. (2007). Problemas de Matemática para los entrenamientos de la Educación Preuniversitaria II. La Habana: Pueblo y Educación.
Díaz González, M. (2011). Problemas de Matemática para los entrenamientos de la Educación Secundaria Básica III. La Habana: Pueblo y Educación.
Hall, H. S., & Night, S. R. (1948). Álgebra Superior. México: Hispano – Americana.
Mati, I. (2007). Classical Inequalities. En www.imocompendium.com

PROBLEMAS PARA LOS MÁS JÓVENES 48

Cinco problemas de la prueba por equipos Coppa Italo d'Ignazio 2012

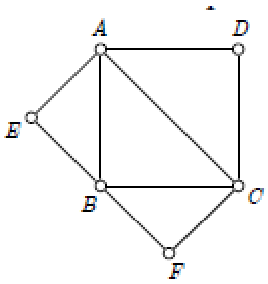
Coppa Italo D'Ignazio
Prima Edizione
Teramo, 18 Aprile 2012

Gara di matematica a squadre

PMJ48-1

La Biblioteca de Alejandría

La planta de la Biblioteca de Alejandría, la más rica de la Antigüedad, tenía la forma indicada en la figura:



Sabiendo que EF es paralelo a AC, que ABCD es un cuadrado de 40 m de lado y que AEFC es un rectángulo, calcular la medida del área ocupada por la Biblioteca.

PMJ48-2

En un rectángulo ABCD las longitudes de las proyecciones ortogonales de los lados AB y BC sobre la diagonal AC son, respectivamente, 9cm y 16 cm. Calcular el área de ABCD.

PMJ48-3

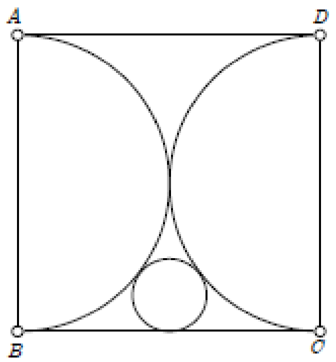
Iniciación pitagórica

Se dice que a un joven discípulo de Pitágoras, el día de su iniciación en la escuela pitagórica, se le pidió que resolviera el siguiente problema: Si ***a*** y ***b*** son dos enteros positivos cuyo producto ***ab=1000***, calcular la suma ***a+b*** sabiendo que ni ***a*** ni ***b*** son múltiplos de 10.

PMJ48-4

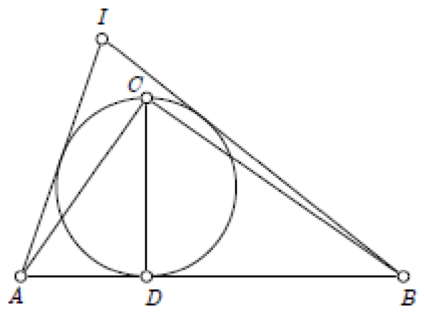
No borres mis círculos

Parece que estas fueron las últimas palabras de Arquímedes, antes de que el soldado enviado por el emperador romano Marcelo para llevarlo a su presencia se impacientase y lo matase. Tal vez Arquímedes estab tratando de resolver este problema: Sea ABCD un cuadrado de lado AB = 200. Hallar el radio de la circunferencia pequeña de la figura, tangente al lado BC y a las semicircunferencias construidas interiormente al cuadrado:



PMJ48-5

En el triángulo rectángulo ABC de hipotenusa AB, los catetos AC y BC miden 12 y 35, respectivamente. CD es la altura sobre la hipotenusa. Se considera la circunferencia ω de diámetro CD. Sea I un punto exterior al triángulo ABC tal que las rectas AI y BI son tangentes a la circunferencia ω. La razón entre el perímetro del triángulo ABI y la longitud de AB se puede expresar como m/n, siendo m y n primos entre sí. Calcular m+n.



REVISTA DE LA OIM Nº 47

PROBLEMAS PARA LOS MÁS JÓVENES

OLIMPIADA DE MOLDAVIA

PMJ 47 – 2

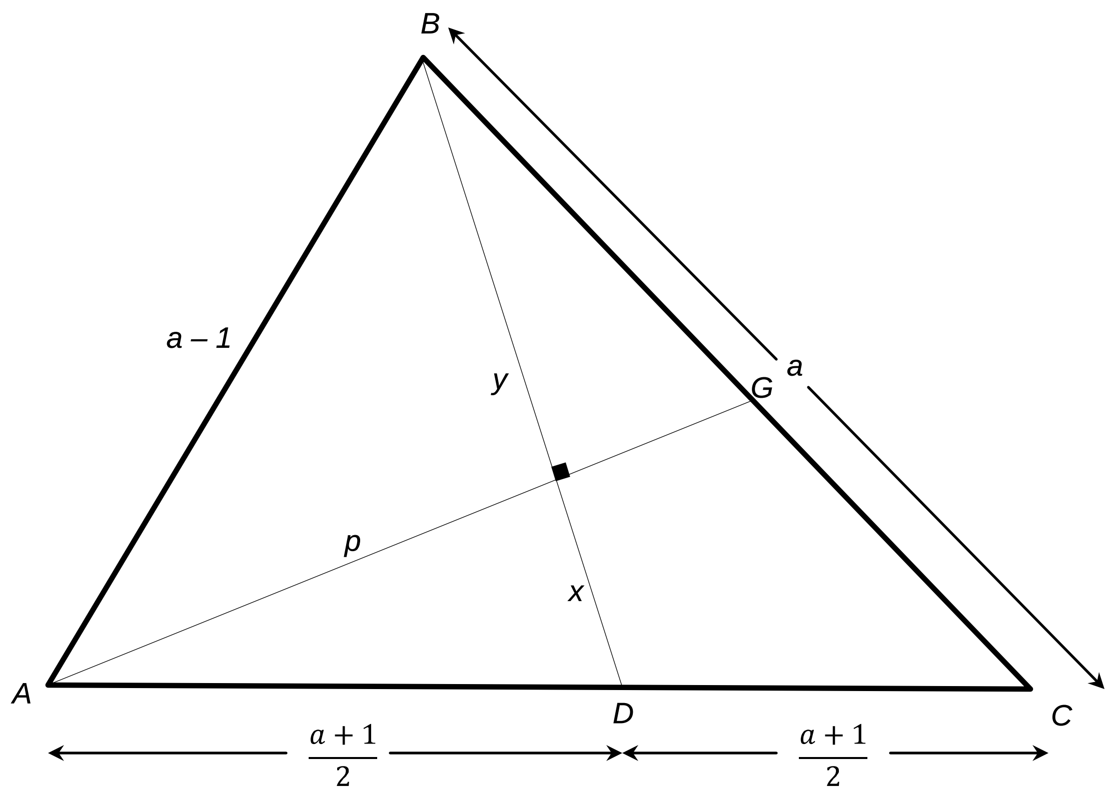
Luis M. MARAVÍ ZAVALETA

I. E. Nº 80915 "Miguel Grau Seminario", C. P. El Pallar, distrito de Huamachuco, región La Libertad, Perú

…………………………………………………………………………………………….

Las longitudes de los lados de un triángulo son números enteros consecutivos. Se sabe que una mediana del triángulo es perpendicular a una bisectriz. Hallar las longitudes de los lados del triángulo.

Resolución:



Sea el triángulo ABC, BD la mediana relativa a lado AC y AG la bisectriz del ángulo A. Las longitudes de AB, BC y AC han sido representadas por *a – 1*, *a* y *a*

+ 1, respectivamente, así como *y*, *x* y *p* representan a las longitudes de los segmentos BE, ED y AE, respectivamente. Por el teorema de Pitágoras aplicado al triángulo ABE:

$$(a-1)^2 = p^2 + y^2 \Leftrightarrow (a-1)^2 - y^2 = p^2 \ \ldots(1)$$

Por el teorema de Pitágoras aplicado al triángulo ADE:

$$\left(\frac{a+1}{2}\right)^2 = p^2 + x^2 \Leftrightarrow \left(\frac{a+1}{2}\right)^2 - x^2 = p^2 \ldots \ (2)$$

Dado que las expresiones (1) y (2) equivalen:

$$(a-1)^2 - y^2 = \left(\frac{a+1}{2}\right)^2 - x^2$$

$$\Leftrightarrow 4a^2 - 8a + 4 - 4y^2 = a^2 + 2a + 1 - 4x^2$$

$$\Leftrightarrow 3a^2 - 10a + 3 = 4y^2 - 4x^2$$

$$\Leftrightarrow 3a^2 - 10a + 3 = 4(y+x)(y-x)$$

Como los triángulos ABE y ADE son congruentes (teorema "ángulo – lado – ángulo"), las longitudes de los segmentos BE y ED son iguales (*y* = *x*). Entonces, $(3a-1)(a-3) = 0$. No se admite a_1=1/3 por contradecir las condiciones del problema. De esta manera, el valor de*a* es 3 u. y los lados AB, BC y AC miden 2 u, 3 u. y 4 u., respectivamente.

XLIX Olimpiada Matemática Española
Fase Nacional
Prueba de selección regional de Castilla y León
PRIMERA PRUEBA

22 de Febrero de 2013

PROBLEMA 1
En el aire se encuentra suspendida una plataforma horizontal en forma de tablero cuadriculado de tamaño 5x5. Inicialmente la casilla central está ocupada por 27 lemmings, pequeños personajes verdes de los videojuegos. Se desarrolla un juego con las siguientes reglas:

(i) En cada momento podemos elegir una casilla con 4 o más lemmings y provocar una explosión, de manera que 4 de los lemmings salgan despedidos, uno a cada una de las 4 casillas vecinas (se consideran vecinas las casillas con un lado común).

(ii) Un lemming cae al vacío, si la explosión se produce en una casilla del borde de la plataforma.

Demostrar que el juego siempre termina después de un número finito de explosiones, y que es imposible que se precipite al vacío un lemming. Por lo tanto, ninguna criatura resulta lastimada con este experimento.

PROBLEMA 2
Resolver, en el conjunto de los números reales, el sistema de ecuaciones

$$y+3x = 4x^3$$
$$x+3y = 4y^3$$

PROBLEMA 3
La circunferencia que tiene como diámetro la altura desde A en el triángulo ABC corta al lado AB en D y al lado AC en E. Probar que el circuncentro (centro del círculo circunscrito) de ABC está en la recta que contiene a la altura desde A en el triángulo ADE.

PROBLEMA 4
Sean *a,b,c números reales positivos. Probar que se cumple la desigualdad*

$$a\sqrt{2a^2+2ab+5b^2}+b\sqrt{2b^2+2bc+5c^2}+c\sqrt{2c^2+2ca+5a^2}\geq (a+b+c)^2 .$$

Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
No se permite utilizar calculadoras ni otros dispositivos electrónicos.
Tiempo: 4 horas.

REAL SOCIEDAD
MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Olimpiada Matemática
Española

XLIX Olimpiada Matemática Española
Fase Nacional
Prueba de selección regional de Castilla y León
SEGUNDA PRUEBA

8 de Marzo de 2013

PROBLEMA 5

Una parábola $y=ax^2$ con $a>0$, y la hipérbola $y=1/x$ se cortan en un punto T.
Una recta que es tangente común a ambas curvas es tangente a la hipérbola en Q y a la parábola en P.
a)Demostrar que dos medianas del triángulo PQT son perpendiculares.
b)Hallar el área del triángulo PQT.

PROBLEMA 6

$ABCDEFGHIJKLMN$ es un polígono regular. Las rectas BA y JK se cortan en un punto P. Las rectas BM y HK se cortan en un punto Q. Demostrar que PQ es un segmento paralelo a AH con la mitad de su longitud.

PROBLEMA 7

Se desea colorear los cuadrados de una tira de n cuadrados, que están numerados de 1 a n, de izquierda a derecha. Cada cuadrado será coloreado con uno de tres colores, 1, 2 ó 3. Los cuadrados numerados pares se colorean con cualquier color, pero los numerados impares sólo se pueden colorear con los colores impares, 1 ó 3. Además, dos cuadrados adyacentes no se pueden colorear con el mismo color. ¿De cuántas maneras se puede realizar esta coloración de la tira?

PROBLEMA 8

Se considera una sucesión $(a_1,a_2,a_3,\ldots)$ de números reales. Para cada entero positivo n, se define m_n como la media aritmética de los números de la sucesión desde a_1 hasta a_n.
Se sabe que existe un número real C tal que se verifica la siguiente condición:

$$(i-j)m_k+(j-k)m_i+(k-i)m_j = C,$$

cualesquiera que sean las ternas (i,j,k) de enteros positives distintos dos a dos.
Demostrar que $(a_1,a_2,a_3,\ldots.)$ es una progresión aritmética.

Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
No se permite utilizar calculadoras ni otros dispositivos electrónicos.
Tiempo: 4 horas.

Problemas propuestos 236-240

Problema 236 (propuesto por Laurentiu Modan, Bucarest, Rumania)

Sean $f:[0,1]\to[2,3]$ una función estrictamente monótona; $C=\left\{\frac{1}{3},\frac{1}{2},1\right\}\subset[0,1]$; $A\subseteq[2,3]$ tal que $f^{-1}(A)=C$.

i) Estudiar si f admite función inversa.

ii) Se considera la función $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ definida mediante

$$g(x)=\left\{\begin{array}{c} f(x)\,,\ x\in\left[0,\frac{1}{2}\right] \\ 3-f(x)\,,\ \ x\in\left(\frac{1}{2},1\right]\end{array}\right.$$

¿Puede ser g una función continua? Estudiar si g admite primitivas.

Problema 237 (propuesto por Marcel Chiritza, Bucarest, Rumania)

Sea ABCD un tetraedro inscrito en la esfera S de centro O y radio R. Sea M un punto cualquiera de la esfera.

Llamamos $f(M)=AM^2+BM^2+CM^2+DM^2$.

Si $f(M)$ es constante para todo M de la esfera, calcular su valor y probar que AB,AC,AD son los lados de un triángulo.

Problema 238 (propuesto por Marcel Chiritza, Bucarest, Rumania)

Sea ABCD un cuadrilátero convexo, E el punto medio de AC, F el punto medio de BD, y M un punto del plano del cuadrilátero. Demostrar que

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MD}\geq\frac{1}{4}\left(2EF^2-AC^2-BD^2\right).$$

Problema 239 (propuesto por Marcel Chiritza, Bucarest, Rumania)

Sea $a\in(0,1)$ un número real fijo. Determinar todas las funciones $f\to\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continuas en $x=0$, tales que $f(0)=1$ y que verifican

$$3f(x)-5f(ax)+2f\left(a^2x\right)=x^2+x,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Problema 240 (propuesto por Marcel Chiritza, Bucarest, Rumania)

a) Demostrar que no existen enteros x,y,z tales que

$$(x-y)^5+(y-z)^5+(z-x)^5=200$$

b) Demostrar que existen infinitos enteros x,y,z tales que

$$(x-y)^5+(y-z)^5+(z-x)^5=210$$

Problema 231, proposto por Antonio F. Costa e Juan Bosco Romero Márquez (†), Ávila, España.

Sexa ABC un triángulo rectángulo cuxo ángulo recto ten por vértice A. Na recta que contén á hipotenusa de ABC, considéranse os puntos B', exterior á hipotenusa e tal que $BB' = BA$, e C', exterior á hipotenusa e tal que $CC' = CA$.

Sexan r a recta que pasa por B' e C', H_1 o semiplano determinado por r que contén a A; H_2 o semiplano determinado por r que non contén a A.

Por B', trazamos dúas rectas paralelas aos catetos e o mesmo facemos por C', obtendo así un rectángulo $A'B'C'D'$; o punto A' é o vértice do rectángulo que está no semiplano H_2.

Por A', trazamos as rectas que pasan por B e C, e chamamos B'' e C'' ás interseccións de ditas rectas cos lados do rectángulo e distintas de A'.

Probar que:

1. O punto A está no segmento $B''C''$.

2. O triángulo $A'B''C''$ é rectángulo se e só se o triángulo ABC ten ángulos agudos que miden 30° e 60°.

3. O ángulo con vértice A' do triángulo $A'B''C''$ é como máximo 45°, e ese valor alcánzase cando ABC é un triángulo isósceles (e, polo tanto, tamén $A'B''C''$ é isósceles).

Solución de Bruno Salgueiro Fanego, Viveiro, España.

Pode asumirse, sen perda de xeneralidade, que $BC = 1$. Sexan $c = AB$, $b = AC$, $\{B_1\} = AB \cap A'B'$, $\{C_1\} = C'A' \cap CA$ e $\beta = \angle CBA$ (en radiáns). Os triángulos B_1BB' e $C_1C'C$ teñen os lados respectivamente paralelos aos do triángulo ABC, logo son semellantes e, polo tanto, as lonxitudes dos seus lados son respectivamente proporcionais, co cal $BB_1 = c^2$, $B_1B' = bc = C'C_1$ e $C_1C = b^2$.

Considerando a referencia cartesiana rectangular na cal $A(0,0)$, $B(c,0)$ e $C(0,b)$, tense que as coordenadas de B' son $(AB + BB_1, -B_1B') = (c(1+c), b(1+b))$ e as de C' son $(-C'C_1, C_1C + CA) = (-bc, b(1+b))$ e, polo tanto, $A'(c(1+c), b(1+b))$.

1. B'' pode obterse como intersección das rectas $A'B: b(b+1)x - c^2 y = bc(b+1)$ e $B'B'': y = -bc$, logo $B''(bc, -bc)$; analogamente, C'' pode obterse como intersección das rectas $A'C: (c-1)x + cy = bc$ e $C'C'': x = -bc$, logo $C''(-bc, bc)$. Entón a recta $B''C''$ ten por ecuación $B''C'': y = -x$, é dicir, é a bisectriz do segundo e cuarto cuadrantes, que contén ao punto $A(0,0)$.

2. O triángulo $A'B''C''$ non pode ser rectángulo en A', pois $\angle C''A'B' < \angle C'A'B' = \pi/2$. Dito triángulo será rectángulo en B'' se e só se ABB'' o é, ou sexa, $AB^2 = AB''^2 + BB''^2$, é dicir,

$c^2 = 2b^2c^2 + \left(c^2(b-1)^2 + b^2c^2\right)$, que equivale, dividindo por c^2 e utilizando o teorema de Pitágoras $b^2 + c^2 = 1$ en ABC, a que $2b(2b-1) = 0$, ou sexa, $b = 1/2$ e $c = \sqrt{3}/2$, é dicir, $\angle CBA = \pi/6$ e $\angle ACB = \pi/3$. E, analogamente, $A'B''C''$ será rectángulo en C'' se e só se $c = 1/2$, é dicir, $\angle ACB = \pi/6$ e $\angle CBA = \pi/3$.

3. $\angle C''A'B'' \le \pi/4 \Leftrightarrow \angle C_1A'C + \angle BA'B_1 \ge \pi/4 \Leftrightarrow \arctan\left(b^2/\left(c+c^2\right)\right) + \arctan\left(c^2/\left(b+b^2\right)\right) \ge \pi/4$ $\Leftrightarrow \arctan\left((1-c)/c\right) + \arctan\left((1-b)/b\right) \ge \pi/4 \Leftrightarrow \arctan\left((1-\operatorname{sen}\beta)/\operatorname{sen}\beta\right) + \arctan\left((1-\cos\beta)/\cos\beta\right) \ge \pi/4$.

Sexa $f(x) = \arctan\left((1-\operatorname{sen}x)/\operatorname{sen}x\right) + \arctan\left((1-\cos x)/\cos x\right)$, $x \in (0, \pi/2)$. Como $f'(x) \lesseqgtr 0$

$\Leftrightarrow (\operatorname{sen}x - \cos x)\left(3 + 2(\operatorname{sen}x\cos x - \operatorname{sen}x - \cos x)\right) \lesseqgtr 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen}x \lesseqgtr \cos x \Leftrightarrow x \gtreqless \pi/4$

(pois $3 + 2(\operatorname{sen}x\cos x - \operatorname{sen}x - \cos x) > 0$ para $0 < x < \pi/2$) e $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pi/4$, resulta que f decrece en $(0, \pi/4)$, crece en $(\pi/4, \pi/2)$ e alcanza o seu mínimo en $x = \pi/4$. Como, ademais, $f\left(0^+\right) = 0 = f\left((\pi/2)^-\right)$, resulta que $f(\beta) \ge f(\pi/4) = \pi/4$, con igualdade se e só se $\beta = \pi/4$, ou sexa, se e só se ABC é isóscele (e, polo tanto, tamén $A'B''C''$ é isóscele, pois $A'\left(b(1+b), b(1+b)\right)$ está sobre a bisectriz do primeiro e terceiro cuadrantes e $B''C''$ sobre a bisectriz do segundo e cuarto cuadrantes).

PROBLEMA 231, propuesto por Antonio F. Costa y Juan Bosco Romero Márquez (†), Ávila, España

Sea ABC un triángulo rectángulo cuyo ángulo recto tiene por vértice A. En la recta que contiene a la hipotenusa de ABC se consideran los puntos B', exterior a la hipotenusa y tal que $BB' = BA$, y C', exterior a la hipotenusa y tal que $CC' = CA$.

Sea r la recta que pasa por B' y C'; H_1 el semiplano determinado por r que contienen a A; H_2 el semiplano determinado por r que no contiene a A.

Por B' trazamos dos rectas paralelas a los catetos y lo mismo hacemos por C' obteniendo así un rectángulo $A'B'C'D'$; el punto A' es el vértice del rectángulo que está en el semiplano H_2.

Por A' trazamos las rectas que pasan por B y C, y llamamos B'' y C'' a las intersecciones de dichas rectas con los lados del rectángulo y distintas de A'.

Probar:

1. Que el punto A está en el segmento $B''C''$.
2. El triángulo $A'B''C''$ es rectángulo si y sólo si el triángulo ABC tiene ángulos agudos que miden $30°$ y $60°$.
3. El ángulo con vértice A' del triángulo $A'B''C''$ es como máximo $45°$, y ese valor se alcanza cuando ABC es un triángulo isósceles (y por tanto también $A'B''C''$ es isósceles).

Solución por Daniel Lasaosa Medarde, Universidad Pública de Navarra, Pamplona, España

Los triángulos ABC, $D'B'C'$ y $A'C'B'$ son claramente semejantes, siendo el segundo y el tercero resultado de escalar el primero con factor de escala $\frac{a+b+c}{a}$, donde se ha usado la notación habitual para los lados del triángulo, y $a^2 = b^2 + c^2$ por ser ABC rectángulo en A. Usaremos libremente esta relación de semejanza en toda la solución. Asumiremos sin pérdida de generalidad que $b \geq c$, ya que podemos intercambiar B, C y todos sus puntos correspondientes, sin alterar el problema.

Proposición 1: Sea $A'B'D'C'$ un rectángulo cuyos lados mayores $A'B'$ y $C'D'$ miden $\frac{b(a+b+c)}{a}$, y sus lados menores $B'D'$ y $A'C'$ miden $\frac{c(a+b+c)}{a}$, donde $a^2 = b^2 + c^2$. Elijamos respectivamente sobre los lados $D'B', D'C'$ puntos P, Q tales que $D'P = D'Q = \frac{2bc}{a}$. Entonces, las rectas $A'P$ y $A'Q$ cortan a la diagonal $B'C'$ respectivamente en puntos P', Q' tales que $B'P' = c$, $P'Q' = a$, $Q'C' = b$.

Demostración 1: Como $a^2 = b^2 + c^2$, la diagonal $B'C'$ del rectángulo mide claramente $a + b + c$. Consideremos un sistema de coordenadas cartesianas con centro en B' y tal que las semirrectas $B'A'$ y $B'D'$ son respectivamente los semiejes positivos horizontal y vertical. La ecuación de la diagonal es claramente $y = \frac{cx}{b}$, y como $B'P = \frac{c(a+b+c)}{a} - \frac{2bc}{a} = \frac{c(a-b+c)}{a}$, la ecuación de la recta $A'P$ es claramente $y = \frac{c(a-b+c)}{a} - \frac{c(a-b+c)x}{b(a+b+c)}$. La intersección de ambas rectas sucede entonces cuando

$$\frac{c(a-b+c)}{a} - \frac{c(a-b+c)x}{b(a+b+c)} = \frac{cx}{b}, \qquad x = \frac{b(a-b+c)(a+b+c)}{2a(a+c)} = \frac{bc}{a},$$

con lo que $y = \frac{c}{b} \cdot \frac{bc}{a} = \frac{c^2}{a}$, y $B'P' = c$. De forma análoga se demuestra que $Q'C' = b$, y al ser $B'C' = a + b + c$, entonces $P'Q' = a$.

Proposición 2: En la situación descrita en el enunciado, A está a una distancia $AD' = \frac{\sqrt{2}bc}{a}$ de D', y sobre la bisectriz del ángulo recto $\angle B'D'C'$.

Demostración 2: Sean H, H' las proyecciones de A, D' sobre la recta $B'C'$. Claramente,

$$HH' = BB' + BH - B'H' = c + \frac{c^2}{a} - \frac{c^2(a+b+c)}{a^2} = \frac{bc(b-c)}{a^2},$$

mientras que $AH = \frac{bc}{a}$ y $D'H' = \frac{bc(a+b+c)}{a^2}$, luego

$$AD' = \sqrt{HH'^2 + (D'H' - AH)^2} = \frac{bc}{a^2}\sqrt{(b-c)^2 + (b+c)^2} = \frac{\sqrt{2}bc}{a},$$

quedando demostrada la primera parte de la proposición. Al mismo tiempo,

$$\cos\angle AD'H' = \frac{D'H' - AH}{AD'} = \frac{b+c}{\sqrt{2}a}, \qquad \sin\angle AD'H' = \frac{HH'}{AD'} = \frac{b-c}{\sqrt{2}a},$$

con lo que al ser $\cos\angle B'D'H' = \frac{b}{a}$ y $\sin\angle B'D'H' = \frac{c}{a}$, se tiene que

$$\cos\angle B'D'A = \cos\angle B'D'H' \cdot \cos\angle AD'H' - \sin\angle B'D'H' \cdot \sin\angle AD'H' = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

luego en efecto $\angle B'D'A = 45°$, quedando demostrada la segunda parte de la proposición.

En la situación descrita en el enunciado, los puntos B, C coinciden con los puntos P', Q' de la Proposición 1, luego B'', C'' coinciden con los puntos P, Q de la Proposición 1, es decir, $B''D'C''$ es rectángulo isósceles en D', con longitud de catetos $\frac{2bc}{a}$. El punto medio de la hipotenusa $B''C''$ es claramente el circuncentro de $B''D'C''$, y está sobre la bisectriz de $\angle B''D'C''$ a una distancia igual a la longitud del cateto partido por $\sqrt{2}$, es decir, A es dicho punto medio de la hipotenusa, y por lo tanto está sobre $B''C''$, como queríamos demostrar.

Supongamos que $A'B''C''$ es rectángulo en C''. Como $\angle D'C''B'' = 45°$, se tiene que $\angle A'C''C' = 45°$, es decir, al ser $\angle A'C'C'' = \angle A'C'D' = 90°$, $A'C''C'$ es rectángulo isósceles en C', luego $A'C' = C'C'' = C'D' - D'C''$. El recíproco es cierto, es decir, si $A'C' = C'C''$, entonces $\angle A'C''C' = 45°$, y $\angle A'B''C'' = 90°$. Luego $A'B''C''$ es rectángulo en C'' si y sólo si

$$\frac{c(a+b+c)}{a} = \frac{b(a+b+c)}{a} - \frac{2bc}{a}, \qquad c^2 + 2bc - b^2 = a(b-c).$$

Sea $\frac{b}{a} = \sin\alpha = \sqrt{1-x^2}$, $\frac{c}{a} = \cos\alpha = x$, con lo que sustituyendo y reorganizando términos, la anterior relación es equivalente a

$$0 = (1-2x)\left(\sqrt{1-x^2} + 1 + x\right).$$

El segundo factor sólo puede ser nulo cuando $x = -1$, claramente imposible pues $0 < \frac{c}{a} < 1$, luego ha de ser $c = \frac{a}{2}$ y $b = \frac{\sqrt{3}a}{2}$, con $\angle ABC = 60°$ y $\angle ACB = 30°$. Restaurando la generalidad, y al no poder ser $B''A'C'' = 90°$ por ser $\angle B''A'C'' < \angle B'A'C' = 90°$, se tiene que $A'B''C''$ es rectángulo si y sólo si uno de entre $\angle B, \angle C$ mide $60°$ y el otro $30°$, como queríamos demostrar.

La altura de A' sobre $B'C'$ es claramente $\frac{bc(a+b+c)}{a^2}$, con lo que el área del triángulo $A'BC$ es $\frac{bc(a+b+c)}{2a}$. Ahora bien, por el teorema de Stewart,

$$BA'^2 = \frac{BB' \cdot A'C'^2 + BC' \cdot A'B'^2}{B'C'} - BB' \cdot BC' = \frac{(a+b)^2(a^2-2ab+2b^2)}{a^2},$$

y de forma similar para CA' intercambiando b y c. Entonces,

$$\sin \angle B''A'C'' = \sin \angle BA'C = \frac{abc(a+b+c)}{(a+b)(a+c)\sqrt{(a^2-2ab+2b^2)(a^2-2ac+2c^2)}}.$$

Definiendo $s = b + c$, $d = b - c$, tenemos que $s^2 + d^2 = 2a^2$, y que $s^2 - d^2 = 4bc$, de donde sustituyendo y operando, obtenemos que

$$\sin \angle B''A'C'' = \sin \angle BA'C = \frac{a(s-a)}{\sqrt{2a^4 - 2as^3 + s^4}}.$$

Por lo tanto, $\angle B''A'C'' \geq 45°$ es equivalente a

$$\frac{a(s-a)}{\sqrt{2a^4 - 2as^3 + s^4}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}},$$

es decir, a

$$(2a - s)(s^2 - 2a^2) \geq 0, \qquad (2a - b - c)(b - c)^2 \leq 0.$$

El primer factor en el miembro de la izquierda es claramente positivo al ser $a > b, c$, luego sólo puede darse la igualdad y esto sucede si y sólo si $b = c$, es decir, $\angle B''A'C'' \leq 45°$, con igualdad si y sólo si ABC es isósceles, como queríamos demostrar.

Problema 231

Sea *ABC* un triángulo rectángulo cuyo ángulo recto tiene por vértice *A*. En la recta que contiene a la hipotenusa de *ABC* se consideran los puntos *B*', exterior a la hipotenusa y tal que *BB*' = *BA*, y *C*', exterior a la hipotenusa y tal que *CC*' = *CA*.

Sea *r* la recta que pasa por *B*' y *C*'; H_1 el semiplano determinado por *r* que contienen a *A*; H_2 el semiplano determinado por *r* que no contiene a *A*.

Por *B*' trazamos dos rectas paralelas a los catetos y lo mismo hacemos por *C*' obteniendo así un rectángulo *A'B'C'D'*; el punto *A*' es el vértice del rectángulo que está en el semiplano H_2.

Por *A*' trazamos las rectas que pasan por *B* y *C*, y llamamos *B''* y *C''* a las intersecciones de dichas rectas con los lados del rectángulo y distintas de *A*'.

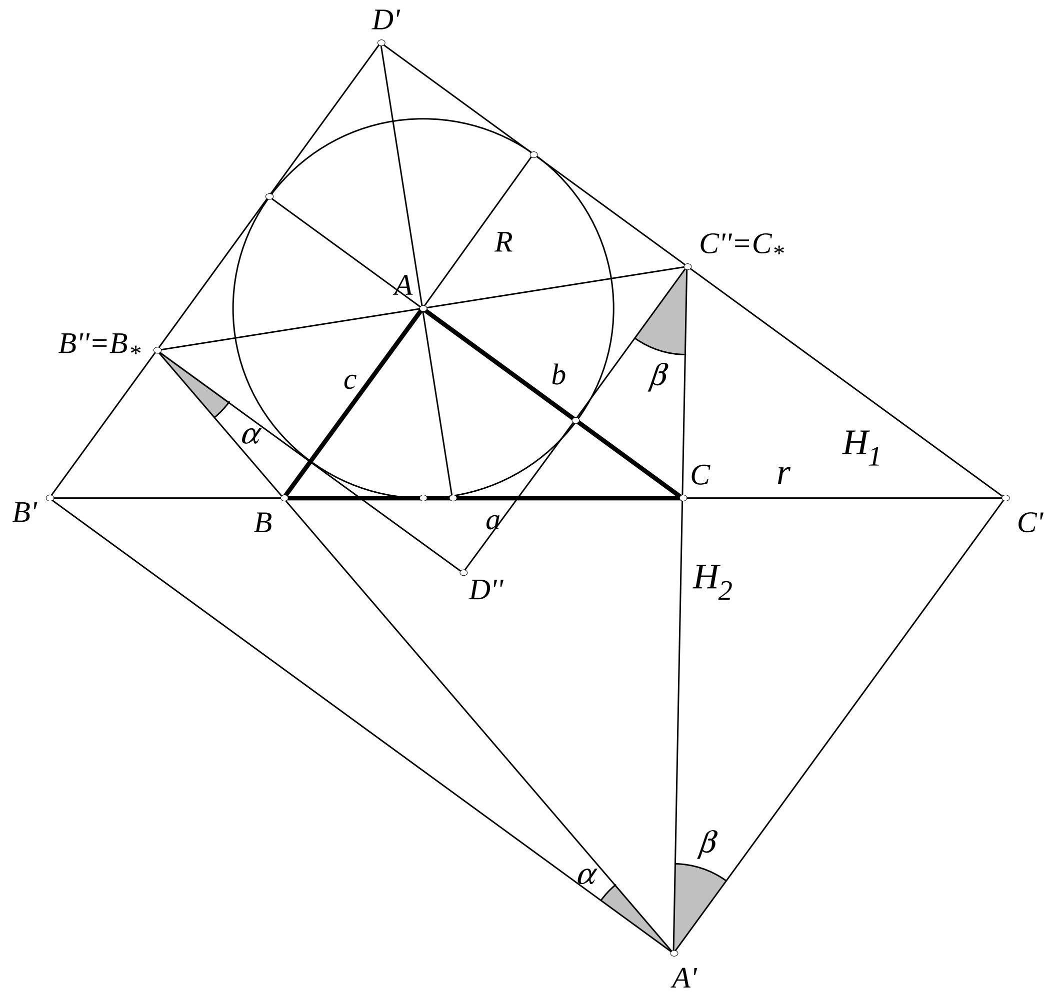
Probar:

1. Que el punto *A* está en el segmento *B''C''*
2. El triángulo *A'B''C''* es rectángulo si y sólo si el triángulo *ABC* tiene ángulos agudos que miden 30º y 60º.
3. El ángulo con vértice *A*' del triángulo *A'B''C''* es como máximo 45º, y ese valor se alcanza cuando *ABC* es un triángulo isósceles (y por tanto también *A'B''C''* es isósceles).

Solución:

a) Por construcción es claro que los triángulos *D'B'C'* y *ABC* son semejantes con razón de semejanza

$$k = \frac{a+b+c}{a}.$$



También es evidente que *A* es el incentro del triángulo *D'B'C'* y que su irradio *R* coincide con la altura del triángulo *ABC* relativa a la hipotenusa y vale $R = \frac{bc}{a}$.

Llamemos B_* al punto sobre *D'B'* tal que $D'B_* = 2R$ y C_* al punto sobre *D'C'* tal que $D'C_* = 2R$.

Evidentemente *A* es el centro del cuadrado $D'B_*D''C_*$ que tiene a B_* y C_* como vértice opuestos y por tanto es el punto medio del segmento B_*C_*.

Sólo queda ver que los puntos así definidos coinciden con los *B''*, *C''* del enunciado.

Tenemos de una parte $B'B_* = kc - 2R$ y de otra, al ser *B''B'B* semejante a *A'C'B* se sigue

$$\frac{B'B''}{kc} = \frac{c}{a+b} \Leftrightarrow B'B'' = \frac{kc^2}{a+b}$$

Entonces $B_* = B''$ si y sólo si

$$kc - 2R = \frac{kc^2}{a+b} \Leftrightarrow k\left(c - \frac{a^2-b^2}{a+b}\right) = 2R$$

Operando el primer miembro de la última igualdad, queda

$$\frac{(a+b+c)(c-a+b)}{a} = \frac{(b+c)^2 - a^2}{a} = \frac{b^2+c^2+2bc-a^2}{a} = \frac{2bc}{a} = 2R$$

de modo análogo se comprueba que $C_* = C''$.

Queda probado que *A* es el punto medio del segmento *B''C''*.

b) Como $\widehat{AC''D''} = 45^\circ$, *A'B''C''* será rectángulo en *C''* si y sólo si *AC''C* es rectángulo e isósceles lo que equivale a $R = \frac{b}{2} \Leftrightarrow \frac{bc}{a} = \frac{b}{2} \Leftrightarrow \frac{c}{a} = \cos B = \frac{1}{2} \Leftrightarrow B = 60^\circ$.

c) Claramente $A' = 90^\circ - (\alpha+\beta)$, por tan to hemos de buscar el mínimo de $\alpha+\beta$ y al estar en el primer cuadrante bastará buscar el mínimo de su tangente.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{c-R}{R} = \frac{c}{R} - 1 = \frac{ac}{bc} - 1 = \frac{a}{b} - 1 = \frac{1}{\operatorname{sen} B} - 1$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{b-R}{R} = \frac{b}{R} - 1 = \frac{ab}{bc} - 1 = \frac{a}{c} - 1 = \frac{1}{\cos B} - 1$$

De donde

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\cos B + \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} B \cdot \cos B} - 2 = \frac{\cos B + \operatorname{sen} B - \operatorname{sen} 2B}{\operatorname{sen} B \cdot \cos B}$$

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta = 1 + \frac{1 - (\cos B + \operatorname{sen} B)}{\operatorname{sen} B \cdot \cos B}$$

Y finalmente

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta} = \frac{\cos B + \operatorname{sen} B - \operatorname{sen} 2B}{\cos B + \operatorname{sen} B - 1} = 1 + \frac{1 - \operatorname{sen} 2B}{\cos B + \operatorname{sen} B - 1}$$

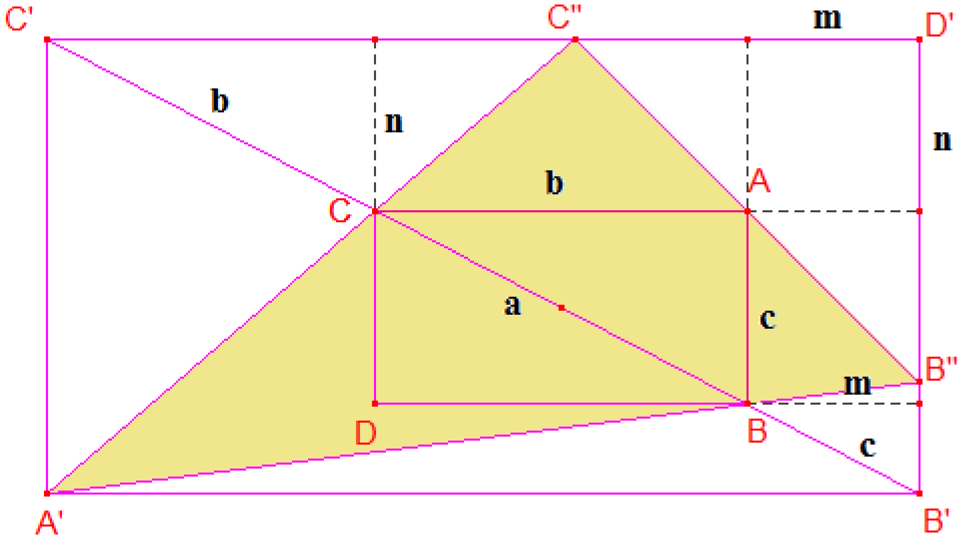
El mínimo se alcanza cuando el numerador tome su menor valor posible y su denominador el mayor valor y ambas cosas suceden cuando $B = 45^\circ$.

Cristóbal Sánchez-Rubio, Benicasim

Problema 231, propuesto por Antonio F. Costa y Juan Bosco Romero Márquez (†), Ávila, España
Sea ABC un triángulo rectángulo cuyo ángulo recto tiene por vértice A. En la recta que contiene a la hipotenusa de ABC se consideran los puntos B', exterior a la hipotenusa y tal que BB' = BA, y C', exterior a la hipotenusa y tal que CC' = CA.
Sea r la recta que pasa por B' y C'; H1 el semiplano determinado por r que contienen a A; H2 el semiplano determinado por r que no contiene a A.
Por B' trazamos dos rectas paralelas a los catetos y lo mismo hacemos por C' obteniendo así un rectángulo A'B'C'D'; el punto A' es el vértice del rectángulo que está en el semiplano H2.
Por A' trazamos las rectas que pasan por B y C, y llamamos B'' y C'' a las intersecciones de dichas rectas con los lados del rectángulo y distintas de A'.
Probar:
1. Que el punto A está en el segmento B''C''
2. El triángulo A'B''C'' es rectángulo si y sólo si el triángulo ABC tiene ángulos agudos que miden 30º y 60º.
3. El ángulo con vértice A' del triángulo A'B''C'' es como máximo 45º, y ese valor se alcanza cuando ABC es un triángulo isósceles (y por tanto también A'B''C'' es isósceles).

Solución por sus amigos Ricardo Barroso Campos, profesor jubilado de la Universidad de Sevilla y Floro Damián Aranda Ballesteros, profesor de Matemáticas del IES Blas Infante en Córdoba. In memoriam.

1. Que el punto A está en el segmento B''C''



Sea el sistema de referencia euclídeo formado por:
{A' B' (Eje x) y A' C' (Eje y); siendo A' el origen de referencia}
Se tiene que n/b=c/a, por un lado y m/c=b/a. De donde resulta que: m=n=b.c/a.

Por tanto el punto A está en la bisectriz del ángulo recto en el vértice D'.
Veamos que la distancia del punto C" a D" es 2 m y que la distancia del punto B" a la recta C' D' es 2 n.

Si esto fuese así entonces A sería el punto medio del segmento B" C"."Hallamos las coordenadas del punto C".

Para ello, observamos que C" pertenece a la recta $y=\sqrt{c^2-m^2}+c+n \rightarrow y=\dfrac{c(a+b+c)}{a}$ y a la recta A'C,

siendo $C=(\sqrt{b^2-n^2},\sqrt{c^2-m^2}+c)$

Por tanto, la ecuación de la recta A'C' será $y=\dfrac{\sqrt{c^2-m^2}+c}{\sqrt{b^2-n^2}}x \rightarrow\ y=\dfrac{c(a+c)}{b^2}x$.

Así el punto tendrá las coordenadas, $C" = (\frac{b^2(a+b+c)}{a(a+c)}, \frac{c(a+b+c)}{a})$

Así, la distancia C"D' será igual a la diferencia siguiente:

$$(n+c+\sqrt{c^2-n^2}) - \frac{c^2(a+b+c)}{a(a+b)} = (\frac{bc}{a} + c + \sqrt{c^2 - \frac{b^2c^2}{a^2}}) - \frac{c^2(a+b+c)}{a(a+b)} =$$

$$= (\frac{bc}{a} + c + \frac{c^2}{a}) - \frac{c^2(a+b+c)}{a(a+b)} = \frac{c(a+b+c)}{a} - \frac{c^2(a+b+c)}{a(a+b)} = (a+b+c)\frac{(a+b-c)c}{a(a+b)} =$$

$$= c.\frac{(a+b)^2 - c^2}{a(a+b)} = c.\frac{(a+b)^2 - (a^2-b^2)}{a(a+b)} = c.\frac{2ab+2b^2}{a(a+b)} = c.\frac{2b(a+b)}{a(a+b)} = \frac{2bc}{a}$$

Procediendo de la misma forma para el punto B’’, obtenemos sus coordenadas

$$B" = (\frac{b(a+b+c)}{a}, \frac{c^2(a+b+c)}{a(a+b)})$$

Y así, la distancia B"D' será igual a la diferencia siguiente:

$$(m+b+\sqrt{b^2-n^2}) - \frac{b^2(a+b+c)}{a(a+c)} = (\frac{bc}{a} + b + \sqrt{b^2 - \frac{b^2c^2}{a^2}}) - \frac{b^2(a+b+c)}{a(a+c)} =$$

$$= (\frac{bc}{a} + b + \frac{b^2}{a}) - \frac{b^2(a+b+c)}{a(a+c)} = \frac{b(a+b+c)}{a} - \frac{b^2(a+b+c)}{a(a+c)} = (a+b+c)\frac{(a+c-b)b}{a(a+c)} =$$

$$= b.\frac{(a+c)^2 - b^2}{a(a+c)} = b.\frac{(a+c)^2 - (a^2-c^2)}{a(a+c)} = b.\frac{2ac+2c^2}{a(a+c)} = b.\frac{2c(a+c)}{a(a+c)} = \frac{2bc}{a}$$

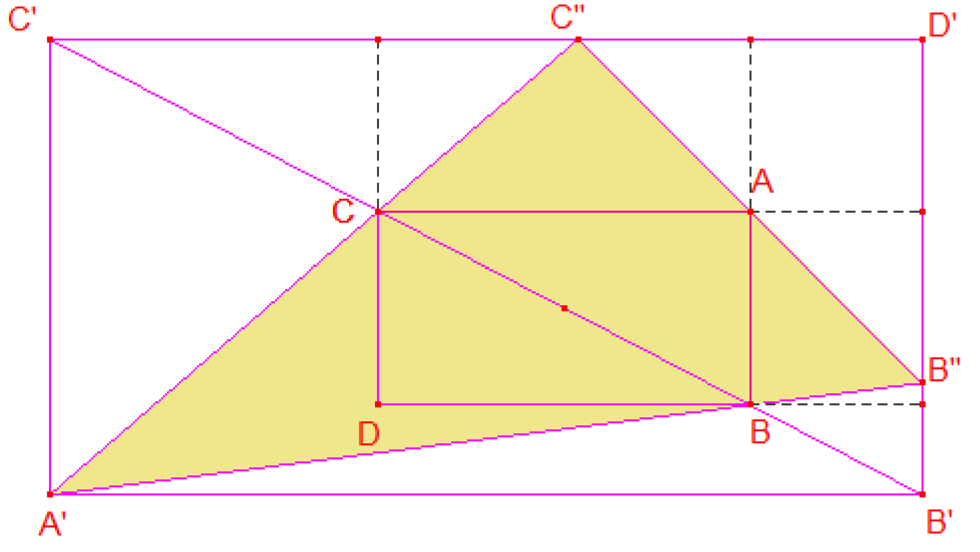
Por tanto, se tiene que el triángulo rectángulo D’B’’C’’ es isósceles y que, en efecto, A es el punto medio del segmento B’’C’’.

Observamos además que la razón de semejanza entre los triángulos B’C’D’ y BCA es igual a

$$K = \frac{(a+b+c)}{a}$$

2.- El triángulo A’B’’C’’ es rectángulo si y sólo si el triángulo ABC tiene ángulos agudos que miden 30º y 60º.
Supongamos que A’ B’’ C’’ sea rectángulo.

Tenemos que habrá de serlo por ejemplo en C’’. Por ello dado que hemos visto que D’B’’C’’ es rectángulo isósceles, habrá de ser también rectángulo isósceles el C’’C’A’.



Es decir, que habrá de ser: C’’C’ = C’A’

Es decir:

$$\frac{b^2(a+b+c)}{a(a+c)} = \frac{c(a+b+c)}{a} \rightarrow b^2 = c(a+c)$$

O sea:

$$b^2 = c(a+c) = ac + c^2$$
$$a^2 - c^2 = ac + c^2$$
$$a - c = c$$
$$a = 2c$$

Así sucederá que el triángulo rectángulo ABC sea de ángulo C igual a 30º, y de ángulo B igual a 60º. c.q.d.

Supongamos ahora que ABC es 90º, 60º, 30º.

Es decir, $a = a; \quad b = \frac{\sqrt{3}}{2}a; \quad c = \frac{a}{2}$

Por la razón de semejanza $K = \frac{(a+b+c)}{a}$ podemos hallar fácilmente A’C’:

$$A'C' = \frac{a}{2}\,\frac{a + \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{3}a}{2}}{a} = \frac{a}{4}(\sqrt{3}+3)$$

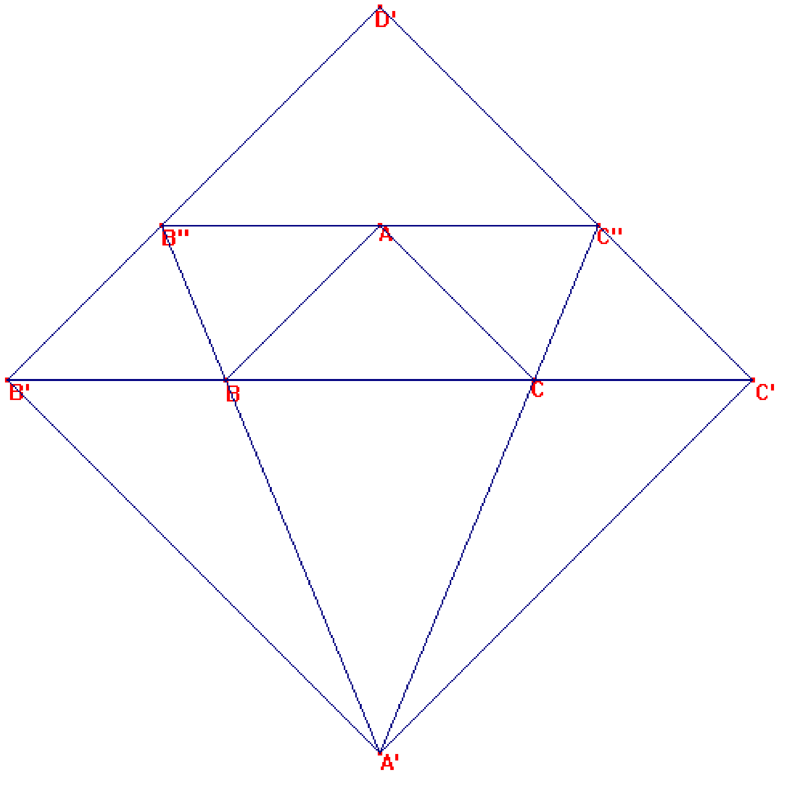
Por otro lado, como $C''=(\frac{b^2(a+b+c)}{a(a+c)},\frac{c(a+b+c)}{a})$

$$C'C''=\frac{b^2(a+b+c)}{a(a+c)}=\frac{\frac{3}{4}a^2(1+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2})a}{a^2(1+\frac{1}{2})}=\frac{a}{4}(\sqrt{3}+3)$$

Entonces A'C'=C'C''→ Así el triángulo C'C''A' es rectángulo isósceles, y <A'C''C' =45º, y dado que hemos visto anteriormente que <D'C''B''=45º, ha de ser A' B'' C'' rectángulo, c.q.d.

3. El ángulo con vértice A' del triángulo A'B''C'' es como máximo 45º, y ese valor se alcanza cuando ABC es un triángulo isósceles (y por tanto también A'B''C'' es isósceles).

Si ABC es isósceles, Es 90º, 45º, 45º, y lo serán así también los triángulos D'B'C' y D'B''C''.



Por ello, el triángulo C'C''C es isósceles como se comprueba ya que: CC'= b y, como ya se ha visto,

C'C''= $\mathbf{\frac{b^2(a+b+c)}{a(a+c)}=\frac{b^2(\sqrt{2}b+2b)}{\sqrt{2}b(\sqrt{2}b+b)}=\boldsymbol{b}.}$

En definitiva, el triángulo C'C''C es isósceles con ángulos iguales a 45º, 67,5º, 67,5º.

Así, <A'CB'=67,5º.

De manera análoga, <A'BC'=67,5º, y por fin, c.q.d., <BA'C=45º.

3) El ángulo con vértice A' del triángulo A'B''C'' es como máximo 45º.

Como las coordenadas de los puntos son estas $\begin{cases} A'(0,0) \\ B''(\frac{b}{a}(a+b+c),\frac{c^2}{a(a+b)}(a+b+c)) \\ C''(\frac{b^2}{a(a+c)}(a+b+c),\frac{c}{a}(a+b+c)) \end{cases}$, podemos hallar la expresión del coseno del ángulo A', que coincidirá con la que formarían los vectores siguientes:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{b}=\left(\frac{b}{a},\frac{c^2}{a(a+b)}\right)\\ \vec{c}=\left(\frac{b^2}{a(a+c)},\frac{c}{a}\right)\end{array}\right\} \rightarrow \cos A''=\frac{\vec{b}.\vec{c}}{|\vec{b}|.|\vec{c}|}.$$

Ahora bien, esta expresión determina una función simétrica respecto de las variables b y c. Por tanto, esta función continua presentará un extremo óptimo cuando b=c. Y, por el apartado 3i) anterior, si b=c entonces A'=45º.

Veamos además que el extremo que se presenta en $x=\frac{\pi}{4}$ es un mínimo ya que en ambos casos límite, b=0 (ó c=0), se tiene que cos A''=1, luego cuando b=c→ $A'=\frac{\pi}{4}$ y $\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ y así el valor máximo del ángulo que puede tomar A'' es de 45º.

Problema 232. Solución de Roberto Bosch Cabrera, Ciudad de la Habana, Cuba.

Probaremos varias desigualdades las cuales en su conjunto implican (1) y (2).

Para $\lambda \geq 0$ se tiene

$$\begin{aligned}
\sqrt{ab} &\leq \frac{\sqrt{(\lambda a+b)(a+\lambda b)}}{\lambda+1} \\
\Leftrightarrow ab &\leq \frac{(\lambda a+b)(a+\lambda b)}{\lambda^2+2\lambda+1} \\
\Leftrightarrow \lambda a^2+(\lambda^2+1)ab+\lambda b^2 &\geq \lambda^2 ab+2\lambda ab+ab \\
\Leftrightarrow \lambda(a-b)^2 &\geq 0
\end{aligned}$$

Para $\lambda \geq 0$ se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{(\lambda a+b)(a+\lambda b)}}{\lambda+1} &\leq \sqrt{\frac{a^2+\lambda ab+b^2}{\lambda+2}} \\
\Leftrightarrow \frac{\lambda a^2+(\lambda^2+1)ab+\lambda b^2}{\lambda^2+2\lambda+1} &\leq \frac{a^2+\lambda ab+b^2}{\lambda+2} \\
\Leftrightarrow (\lambda^2+2\lambda+1)a^2+(\lambda^3+2\lambda^2+\lambda)ab+(\lambda^2+2\lambda+1)b^2 &\geq (\lambda^2+2\lambda)a^2+(\lambda^3+2\lambda^2+\lambda+2)ab+(\lambda^2+2\lambda)b^2 \\
\Leftrightarrow (a-b)^2 &\geq 0
\end{aligned}$$

Para $\lambda \geq 2$ se tiene

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{a^2+\lambda ab+b^2}{\lambda+2}} &\leq \frac{a+b}{2} \\
\Leftrightarrow \frac{a^2+2ab+b^2}{4} &\geq \frac{a^2+\lambda ab+b^2}{\lambda+2} \\
\Leftrightarrow (\lambda+2)a^2+(2\lambda+4)ab+(\lambda+2)b^2 &\geq 4a^2+4\lambda ab+4b^2 \\
\Leftrightarrow (\lambda-2)(a-b)^2 &\geq 0
\end{aligned}$$

Para $\lambda \geq 0$ se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{(\lambda a+b)(a+\lambda b)}}{\lambda+1} &\leq \frac{a+b}{2} \\
\Leftrightarrow (\lambda^2+2\lambda+1)a^2+(2\lambda^2+4\lambda+2)ab+(\lambda^2+2\lambda+1)b^2 &\geq 4\lambda a^2+(4\lambda^2+4)ab+4\lambda b^2 \\
\Leftrightarrow (\lambda-1)^2(a-b)^2 &\geq 0
\end{aligned}$$

Para $0 \leq \lambda \leq 2$ se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{a+b}{2} &\leq \sqrt{\frac{a^2+\lambda ab+b^2}{\lambda+2}} \\
\Leftrightarrow 4a^2+4\lambda ab+4b^2 &\geq (\lambda+2)a^2+(2\lambda+4)ab+(\lambda+2)b^2 \\
\Leftrightarrow (2-\lambda)(a+b)^2 &\geq 0
\end{aligned}$$

PROBLEMA 234, propuesto por D.M. Batinetu-Giurgiu, Bucarest, y Neculai Stanciu, Buzau, Rumanía

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función par y derivable, con derivada continua. Si $a \in \mathbb{R}^+$, calcular

$$\int_{-a}^{+a} \left(\frac{f(x)}{1+e^x} + f'(x)\ln(1+e^x) \right) dx.$$

Solución por Daniel Lasaosa Medarde, Universidad Pública de Navarra, Pamplona, España

Sea $g(x) = f(x)\ln(1+e^x)$, con lo que

$$g'(x) = f'(x)\ln(1+e^x) + \frac{e^x f(x)}{1+e^x},$$

y la integral pedida es

$$\int_{-a}^{+a} \left(\frac{f(x)}{1+e^x} + f'(x)\ln(1+e^x) \right) dx = \int_{-a}^{+a} \left(g'(x) - \frac{e^x-1}{e^x+1} f(x) \right) dx =$$

$$= g(a) - g(-a) - \int_{-a}^{+a} f(x)\tanh(x)dx.$$

Ahora bien, como $f(x)$ es par, y $\tanh(x)$ es impar, su producto es impar, y la integración de éste entre límites simétricos es nula. Luego como $f(-a) = f(a)$ por ser $f(x)$ par, el valor de la integral pedida es

$$g(a) - g(-a) = f(a)\ln\left(\frac{1+e^a}{1+e^{-a}}\right) = f(a)\ln(e^a) = af(a).$$

Problema 235. Solución de Roberto Bosch Cabrera, Ciudad de la Habana, Cuba.

La distribución gamma es continua y depende de dos parámetros k y λ cuya función de densidad para valores $x > 0$ es

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^{k-1}}{\Gamma(k)}$$

de donde $X \sim \gamma(n+1, 1)$ tendrá función de densidad

$$f(x) = \frac{x^n e^{-x}}{n!}$$

de esta forma resulta

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \geq 3) &= \int_3^\infty \frac{x^n e^{-x}}{n!} dx \\
&= \frac{1}{n!} \left(\int_0^\infty x^n e^{-x} dx - \int_0^3 x^n e^{-x} dx \right) \\
&= \frac{\Gamma(n+1)}{n!} - \frac{1}{n!} \int_0^3 x^n e^{-x} dx \\
&= e^{-3} + e^{-3} 3 + e^{-3} \frac{3^2}{2!} + \cdots + e^{-3} \frac{3^n}{n!}
\end{aligned}$$

después de aplicar integración por partes varias veces. Entonces $Y \sim \text{Poisson}(3)$, ya que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y \leq n) &= \mathbb{P}(Y=0) + \mathbb{P}(Y=1) + \cdots + \mathbb{P}(Y=n) \\
&= e^{-3} + e^{-3} 3 + e^{-3} \frac{3^2}{2!} + \cdots + e^{-3} \frac{3^n}{n!}
\end{aligned}$$

Ahora teniendo en cuenta que $m_k(Y) = \mathbb{E}(Y^k)$ se obtiene

$$m_1(Y) = \mathbb{E}(Y) = \sum_{k=0}^\infty k \frac{3^k}{k!} e^{-3} = 3$$

donde se ha usado la expansión en serie de Taylor de e^x. Además queda

$$\begin{aligned}
m_2(Y) = \mathbb{E}(Y^2) &= \sum_{k=0}^\infty k^2 \frac{3^k}{k!} e^{-3} \\
&= \sum_{k=0}^\infty k \frac{3^k}{k!} e^{-3} + \sum_{k=0}^\infty k(k-1) \frac{3^k}{k!} e^{-3} \\
&= 3 + 9 \sum_{k=2}^\infty \frac{3^{k-2}}{(k-2)!} e^{-3} \\
&= 12
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
m_3(Y) = \mathbb{E}(Y^3) &= \sum_{k=0}^{\infty} k^3 \frac{3^k}{k!} e^{-3} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{3^k}{(k-1)!} e^{-3} \\
&= 3\sum_{k=1}^{\infty} (k-1)^2 \frac{3^{k-1}}{(k-1)!} e^{-3} + 6\sum_{k=1}^{\infty} (k-1) \frac{3^{k-1}}{(k-1)!} e^{-3} + 3\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^{k-1}}{(k-1)!} e^{-3} \\
&= 3 \cdot 12 + 6 \cdot 3 + 3 \\
&= 57
\end{aligned}
$$

Quedando finalmente $\frac{m_3(Y)}{m_2(Y)} = \frac{57}{12} = 4.75$, cuya parte entera es 4.

Noticia de Congresos, comentario de páginas web y reseña de libros 48

Crossing the Bridge* y *The Geometry of the triangle; dos libros de Gerry Leversha.

La colección de libros que publica The United Kingdom Mathematics Trust no tiene, todavía, muchos títulos en su haber, pero todos son sumamente interesantes. En 2008, Gerry Leversha, miembro de la *Mathematical Association* y actualmente editor de su revista *The Mathematical Gazette* publicó *Crossing the bridge,* un volumen de 180 páginas dedicado a estudiar los aspectos fundamentales de la Geometría euclídea elemental.

Recientemente (este mismo año 2013) ha realizado un verdadero *tour de forcé* y acaba de salir, también en la colección del UKMT, *The Geometry of the triangle (541 páginas!).* Este libro está llamado a ser, a buen seguro, un título de referencia para quienes, por su edad o por obra y *desgracia* del currículo escolar y universitario que les tocó vivir, no han podido degustar los resultados geométricos sin utilizar coordenadas; aun cuando en uno de los Apéndices del libro se tratan las coordenadas baricéntricas, muy utilizadas hoy en día en revistas digitales como *Forum Geometricorum* o Foros de internet como *Advanced Geometry,* un foro muy reciente que sustituye a *Hyacinthus,* que ha sido cancelado unilateralmente por su Administrador de cuyo nombre prefiero no acordarme.

En ambos libros se incluyen muchos ejercicios propuestos; la edición y tipografía son impecables (no podía ser menos, en estos tiempos tecnológicamente avanzados); la Bibliografía es amplia e incluye muchos enlaces a sitios de Internet, con lo que se beneficiarán, también, quienes no tengan acceso a una Biblioteca tradicional con libros de Geometría en formato tradicional.

Recomiendo vivamente estas dos preciosas muestras de la Geometría explicada *comme il faut.*

Leversha, G. *Crossing the bridge. Pathways number 1. UKMT, 2008.*

Leversha, G. *The Geometry of the Triangle. Pathways number 2. UKMT, 2013.*

Valladolid, 27 de mayo de 2013

Francisco Bellot Rosado

VICTOR M. BUJAN DELGADO

Los Caballeros de la Larga Búsqueda

1

Los Caballeros de la larga búsqueda

Víctor Buján Delgado

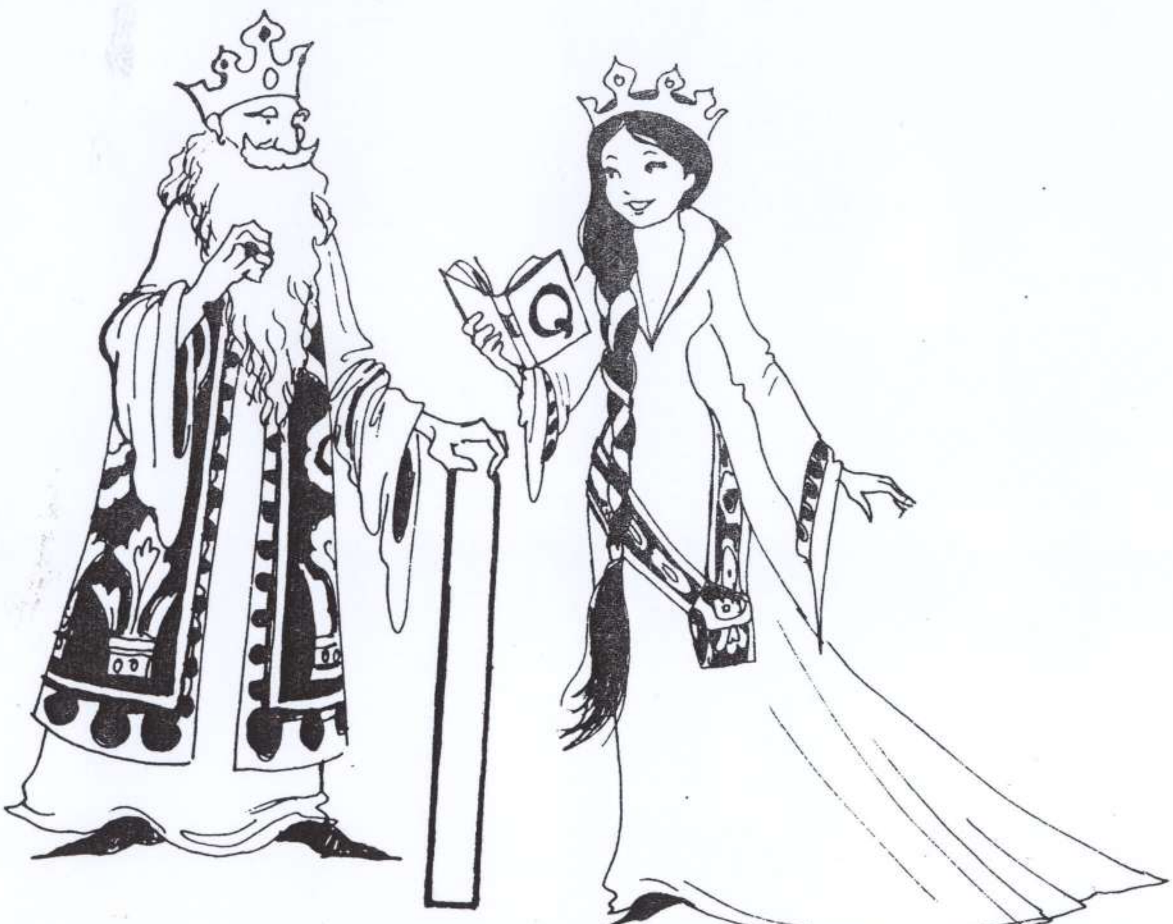
2

San José, Costa Rica
Editorial Fernández-Arce
1987

LOS CABALLEROS DE LA LARGA BUSQUEDA

4

El anciano rey Bertrand vivía muy feliz en su lejano reino de Ruselia. Disfrutaba de la alegría de todos sus súbditos. Del cariño de su bella hija, la estudiosa princesa Noetheria. De la riqueza de su país, que era el principal productor de cintas de seda del mundo. De su hermoso bastón de platino e iridio, su compañero inseparable.



Cierto día, el viejo rey recibió en audiencia pública a cinco caballeros que lo esperaban impacientes en la gran sala de audiencias del palacio. El rey se sorprendió mucho al ver que los cinco caballeros vestían armaduras y portaban espadas. Aquello era un insulto a Su Majestad. Nadie se atrevía a presentarse ante el rey Bertrand preparado para la guerra. Tanto el monarca de Ruselia como todos sus amigos y súbditos eran gente muy amante de la paz. Veían con gran disgusto las guerras, las armas, y a los guerreros mismos. Por esto el anciano rey se dirigió a los cinco caballeros y les dijo así:

—A pesar de que me ofenden ustedes al presentarse ante mí vistiendo armaduras y con armas en la mano, les concederé una audiencia de una hora. Después, se irán ustedes de mi reino para siempre.

5

Inmediatamente, uno de los cinco amenazantes caballeros dio un paso adelante y contestó en tono de desafío:

—Su Majestad, una hora será suficiente. Somos los príncipes de los cinco reinos vecinos. Nuestros países, como bien sabéis, viven de la guerra. Como la guerra es cada vez más mal negocio, nuestras naciones empiezan ya a sufrir pobreza y miseria. La única esperanza para nuestros arruinados países y su única defensa contra la pobreza, es la riqueza de Ruselia, tu país, y venimos por ella.

Al oir esto, el rey Bertrand, indignado, exclamó:

—¡Pero ustedes no tienen derecho a tocar nuestras riquezas! Ustedes mismos han empobrecido sus reinos con las guerras que han provocado. En vez de venir a Ruselia a quitarnos nuestras cosas, regresen a sus países. Si se ponen a trabajar honradamente, sus países llegarán a ser tan prósperos y felices como el mío.

El caballero que hablaba por todos los cinco, continuó en tono aún más amenazador:

6

—Viejo rey, somos fieros guerreros. Venimos a quitarte las riquezas de tu nación para salvar a nuestros estados de la pobreza que nuestras guerras han causado. Pero no venimos simplemente a arrebatarte tus tesoros y a llevárnoslos ahora mismo con nosotros, por la fuerza de las armas. Tenemos una idea mejor. Venimos más bien a proponerte un negocio muy bueno para nuestros cinco países. Un negocio que tú no podrás rechazar. ¿Cómo podría rechazarlo Ruselia siendo un solo reino muy pacífico, enfrentado a cinco estados aliados, acostumbrados a la guerra?

Muy preocupado, agitando débilmente su bastón de platino e iridio, el anciano rey le respondió:

—Me doy cuenta de que mi reino tendrá por la fuerza que aceptar ese trato que vienen ustedes a imponernos bajo amenaza de guerra. Contra mi voluntad estoy dispuesto a escuchar las condiciones del negocio ahora mismo.

Con una sonrisa cruel, el caballero que representaba a los cinco impacientes guerreros, prosiguió:

—Como solo uno de nosotros podría convertirse en el nuevo rey de Ruselia, en el esposo de tu hija, y en el dueño de tus riquezas, competiremos para decidir cuál de los cinco será el ganador. Serás tú mismo quien invente la prueba a la cual debemos someternos para determinar quién será el vencedor. Hemos acordado acatar las reglas de la prueba y todas tus instrucciones al pie de la letra.

Con la tristeza reflejada en su cara, el rey Bertrand dijo entonces a todos los presentes:

—Por hoy, no queda más que decir. La princesa Noetheria, mis ministros y mis consejeros, nos reuniremos ahora en la biblioteca del palacio. Pensaremos en una prueba a la cual se someterán no solamente estos cinco caballeros guerreros, sino cualquier caballero que aspire a quedarse con mi trono, con la mano de la princesa Noetheria, y con todas las riquezas de mi nación. Si ningún caballero resulta victorioso en esa prueba, entonces Noetheria escogerá, a su gusto, a aquel que será su esposo y nuevo rey de Ruselia. Mañana por la mañana, en esta sala, nos volveremos a reunir todos. Yo les explicaré las condiciones del concurso.

Muy preocupados, el rey, apoyado en su querido bastón de platino e iridio, acompañado de su hija, la estudiosa y bella Noetheria, y seguido por todos sus ministros y consejeros pensativos y cabizbajos, abandonaron la sala de audiencias. Se dirigieron a la biblioteca del palacio donde se sentaron alrededor de una gran mesa. El rey pidió entonces a todos los presentes que propusieran tareas bien difíciles para escoger al nuevo rey de Ruselia. No quería que ninguno de los cinco crueles guerreros resultara vencedor en la prueba escogida.

Después de un largo rato de pensar intensamente, el ministro de conservación de animales y plantas, con expresión angustiada, levantó la mano.

—Creo que se me ha ocurrido una prueba tan difícil que ninguno de esos cinco guerreros podrá pasarla airosamente— dijo presuroso.

—¿Qué tal si el rey reconoce como vencedor a aquel que traiga a Ruselia el primer remedio para curar el resfrío?

Todos los ahí presentes estuvieron de acuerdo. Se trataba de una idea muy buena. Estaban conversando acerca de ella, cuando el Ministro de Energía, levantó su mano y pidió la palabra:

—A lo mejor es más seguro que el rey ofrezca el trono de Ruselia al primer caballero que traiga un motor que funcione sin gastar combustible alguno.

8

Al oír aquella proposición tan interesante, por segunda vez se animaron las caras de aquellas personas tan preocupadas por el destino de su nación. Parecía constituir una prueba difícil, capaz de salvar a Ruselia de caer en manos de alguno de los detestables caballeros guerreros. La conversación acerca del remedio para el resfrío y el motor que no gastaba combustible, fue interrumpida por el ministro de comunicaciones quien sugirió:

—¿Y si acordamos que el sucesor del rey Bertrand será aquel que invente un aparato que permita, a personas separadas por grandes distancias, sostener una conversación sin tener que levantar la voz? Como todos los aquí presentes sabemos, es imposible inventar una cosa así.

De nuevo se sintieron un tanto aliviados los ministros y consejeros del rey. De pronto, las voces comenzaron a apagarse. La princesa Noetheria se puso de pie lentamente y se dirigió a la cabecera de la mesa, donde se

9

encontraba su padre el rey. Fue entonces cuando se dieron cuenta de que ella era la única persona que se mantenía serena y confiada en aquella reunión de personas apesadumbradas y nerviosas. En medio de un silencio total, todos vieron como la princesa hablaba al oído de Su Majestad y cómo la cara del rey se iba poco a poco iluminando de entusiasmo. Cuando la princesa terminó de hablar con su padre, el rey, con expresión alegre y optimista, declaró:

—Queridos amigos, mi hija acaba de darme una idea que pienso convertir en la prueba que impondré a los aspirantes al trono de nuestra nación. Mañana mismo en la mañana, tal y como habíamos decidido, daré a conocer los detalles de dicha prueba. Por hoy, damos por terminada esta reunión y nos retiramos a descansar.

Al siguiente día, la gran sala de audiencias del palacio estaba llena de personas. Aguardaban desde muy temprano que apareciera el rey y explicara los detalles de la prueba. Todos estaban tensos y nerviosos. No podían apartar del pensamiento la idea de que el vencedor en aquel concurso iba a convertirse en su nuevo rey. Se preguntaban, preocupados, qué cosas malas sucederían si uno de los cinco feroces guerreros resultaba vencedor.

Su Majestad, el rey Bertrand, se presentó a la sala de audiencias. Para asombro de los presentes, su cara no mostraba la preocupación de un monarca justo que estaba por entregar su trono, su hija, y sus riquezas a un desconocido que resultara ganador de un concurso. Por el contrario, el rey parecía sentirse sereno y seguro. Siempre apoyado en su querido bastón de platino e iridio y acompañado de su hija, la estudiosa Noetheria. Se hizo un silencio total, y el rey empezó a explicar:

—Escuchen con cuidado las condiciones de la prueba que mi hija, la princesa, me sugirió. He decidido entregar mi trono, la mano de Noetheria, y todas las riquezas de mi reino, al hombre que me traiga el más pequeño de los números racionales. Deberán cumplirse las siguientes tres condiciones: primera condición, el número deberá ser menor que uno. Segunda condición, el número tendrá que ser mayor que cero. Tercera condición, el aspirante al trono me traerá una cinta de seda cuya longitud represente a ese número racional. Doy para este concurso un plazo de un año a partir de hoy. Si transcurre un año y ningún pretendiente me trae el más pequeño de los números que llene las tres condiciones mencionadas, entonces la princesa Noetheria escogerá, a su gusto, a aquel que será su esposo y nuestro nuevo rey.

Al oir las palabras del monarca, los ministros, consejeros y amigos de Su Majestad se volvieron a ver unos a otros sorprendidos. Confiaban en que el anciano rey y la estudiosa princesita sabían lo que hacían. Pero los cinco caballeros guerreros, que se hallaban sentados muy cerca del trono, estaban muy incómodos. Uno de ellos se adelantó, y a nombre de sus compañeros, dijo:

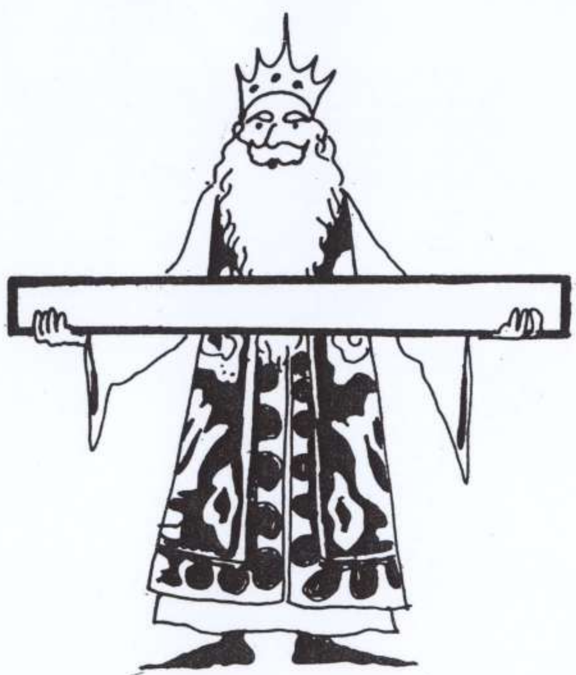
—Su Majestad, hay una dificultad. Nosotros dimos nuestra palabra de que acataríamos las condiciones de tu prueba, y cumpliremos con la palabra empeñada. Pero el caso es que no entendimos lo que dijiste. Para comenzar, ninguno de nosotros sabe lo que es un número racional. Tendrás que explicarnos qué es eso. Te aseguramos que, en cuanto comprendamos lo que es un número racional nos lanzaremos por el mundo a buscarlo. Atraparemos algunos para traerlos ante tu trono. Aunque para ello tengamos que acorralarlos en las heladas comarcas del norte o perseguirlos por los caldeados desiertos del sur. Ya sea que, para capturarlos, necesitemos de largas lanzas, ingeniosas trampas, o de poderosas ballestas.

El rey hizo un esfuerzo por no reirse al oir aquello, y explicó pacientemente:

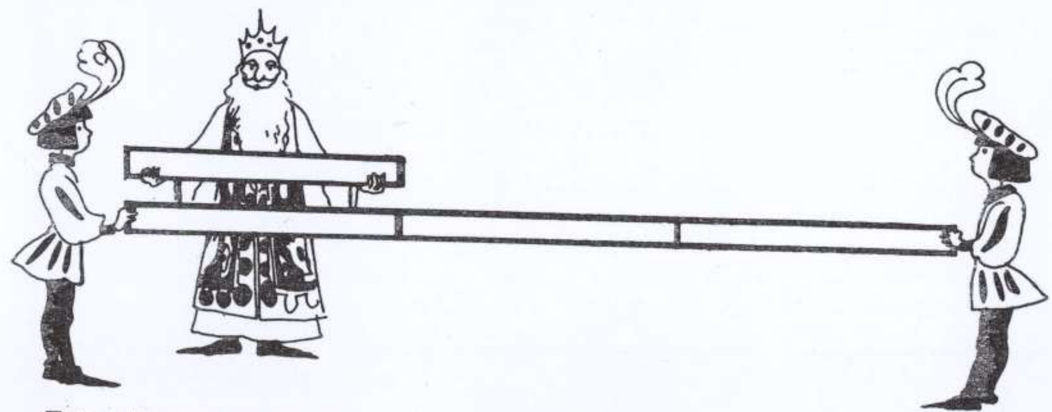
—No van ustedes a necesitar todas esas armas. Escuchen con atención. Entenderán enseguida lo que es un número racional menor que uno pero más grande que cero.

Primero vamos a convenir en que la longitud de mi bastón es la unidad de longitud:

11



De modo que, si mi bastón cabe tres veces en una cinta de seda, esa cinta tendrá "tres bastones de longitud".

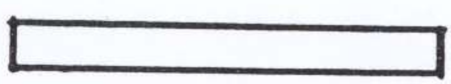


Esta cinta representa el número tres. Espero que a ningún aspirante se le ocurra traerme una cinta de tres bastones de longitud. Recuerden que la primera condición de la prueba señala que el número deberá ser menor que uno. También espero que ustedes entiendan que el número tres es mayor que el número uno.

Los cinco caballeros se pusieron colorados al oir aquellas palabras y darse cuenta de que la princesita Noetheria los estaba mirando a punto de soltar la risa.

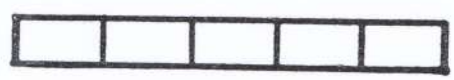
—¡Por supuesto! — dijeron a coro —nosotros sabemos que el número tres es más grande que el número uno.

—Bien. Pues ahora— les contestó el rey Bertrand— les voy a dar algunos ejemplos de números racionales menores que uno. Tomemos una cinta de seda que tenga la misma longitud que mi bastón de iridio y platino. La longitud de esta cinta es una unidad de longitud. O sea, "un bastón".



Ahora haremos dos cosas con esta cinta. Primero la dividiremos en cinco porciones de la misma longitud:

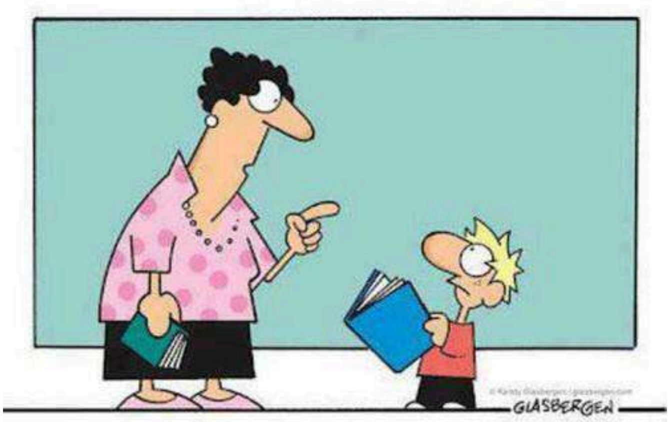
12



Capturado en internet 48

Topología de la recta real

Que levante la mano quien no lo haya escuchado en clase alguna vez…

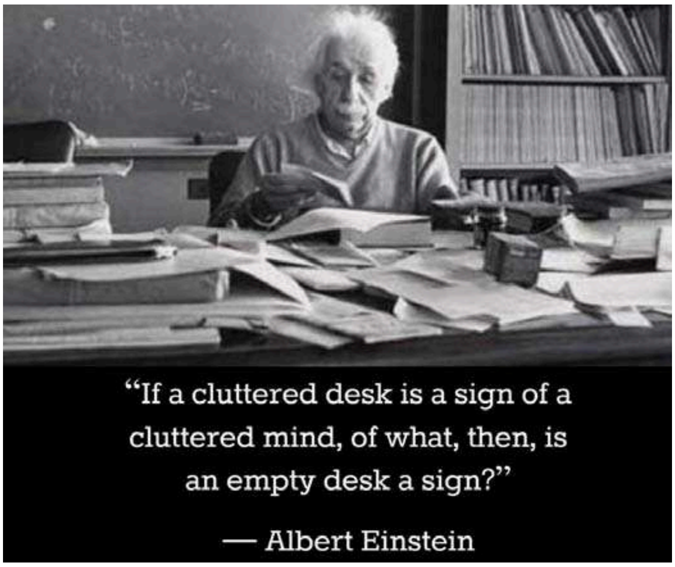


"Isto se chama livro. É com ele que se instala novos softwares no Sistema Operacional cerebral!"

Nuevas tecnologías

La vida real no siempre es políticamente correcta

Si lo ponen en práctica, los matemáticos sí que tendrían desempleo



Salvando la infinita distancia con el protagonista de la foto, la mesa del editor está aproximadamente así.

Número

49

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática
OEI iberciencia
ISSN 1698-677X

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

Número 49 (julio - agosto 2013)

ISSN – 1698-277X

ÍNDICE

Problema 234: Recibida una solución de Karol José María Huarcaya Huarcaya, Universidad Nacional *Federico Villarreal*, Lima, Perú. Esta solución se recibió cuando los originales del vol. 48 ya habían sido enviados a la página web de la OEI.

Por otra parte, la solución “anónima” de este problema es original de Edgardo Escarone, Florida, Uruguay.

Problema 237

Recibidas soluciones de : Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, España, que presentamos, y del proponente. Se ha recibido una solución parcialmente correcta.

Problema 238

Recibidas soluciones de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, España (que presentamos) y del proponente.

Problema 239

Recibidas soluciones (similares) de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, España; Marcos Martinelli (Brasil); Albert Stadler, Herrliberg, Suiza; y el proponente. Presentamos la solución de Martinelli.

Problema 240

Recibidas soluciones de: Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, España; Marcos Martinelli, Brasil; Albert Stadler, Herrliberg, Suiza; y el proponente. Presentamos la solución de Lasaosa.

Noticia de Congresos, comentario de páginas web y reseña de libros 49

La página www.mathigon.org

Divertimentos Matemáticos 49

Los Caballeros de la Larga Búsqueda(2ª parte), por Víctor Buján Delgado.

Capturado en internet 49

Otras informaciones

Club GeoGebra Iberoamericano. Abierta la convocatoria de IBERTIC

La Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura (OEI) desde sus **Instituto Iberoamericano de TIC y Educación (IBERTIC) e Instituto Iberoamericano de Enseñanza de la Ciencia y la Matemática (IBERCIENCIA)** invitan a los profesores y estudiantes iberoamericanos a incorporarse al **Club GeoGebra Iberoamericano**. Esta iniciativa cuenta con el apoyo e impulso de la **Consejería de Economía, Innovación, Ciencia y Empleo de la Junta de Andalucía** y la coordinación académica se lleva desde la **Universidad de Córdoba (España)**.

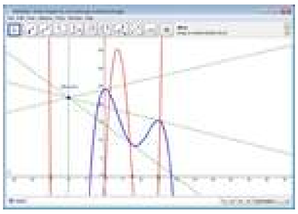
Más información [+] http://www.ibertic.org/clubgeogebra.php

Día GeoGebra en Iberoamérica

Abierta la inscripción
Enmarcado en la Semana Iberoamericana de GeoGebra realizamos la convocatoria del Día de GeoGebra en Iberoamérica que tendrá lugar en Montevideo el 14 de septiembre de 2013, como actividad previa al VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (CIBEM).

Más información [+]http://www.ibertic.org/diageogebra.php

Curso GeoGebra de formación docente en TIC y matemática IBERTIC



Especialización en TIC y Educación del CAEU de la OEI

Este curso de formación tiene como objetivo dar a conocer distintas aplicaciones que faciliten la incorporación de las TIC al aula de matemáticas en los diferentes niveles educativos.

Es evidente que resulta imposible recoger todos los recursos existentes, por lo que en cada uno de los bloques desarrollados en el siguiente material se ha apostado por unos determinados programas por sus características y posibilidades, apoyados en todo momento con otros recursos disponibles en Internet.

Más información [+] http://www.ibertic.org/ticymatematica

Las desigualdades de Cauchy – Buniakovski – Schwarz y de Bergström son equivalents e independientes

por D.M. Bătinețu-Giurgiu y Neculai Stanciu

La desigualdad de H. Bergström. Si $n \in N^* - \{1\}, x_k \in R, y_k \in R_+^*, k = \overline{1,n}$, entonces:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2}{y_k} \geq \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2}{\sum_{k=1}^{n} y_k} \qquad \text{(B)}$$

con igualdad si y solo si existe $t \in R^*$ tal que $x_k = ty_k, \forall k = \overline{1,n}$.

La desigualdad de Cauchy – Buniakowski – Schwarz. Si $n \in N^* - \{1\}, a_k, b_k \in R, k = \overline{1,n}$,
entonces:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) \geq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \qquad \text{(C-B-S)}$$

con igualdad si y solo si existe $t \in R^*$ tal que $b_k = ta_k, \forall k = \overline{1,n}$.

Probemos que: **(B)** $\Leftrightarrow$ **(C-B-S).**

Demostración.

(B) $\Rightarrow$ **(C-B-S)**

Si en la desigualdad (B) tomamos $x_k = a_k b_k$ e $y_k = b_k^2, \forall k = \overline{1,n}$ obtenemos que:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2}{y_k} \geq \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2}{\sum_{k=1}^{n} y_k} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^2 b_k^2}{b_k^2} \geq \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2}{\sum_{k=1}^{n} b_k^2} \Rightarrow \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) \geq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2,$$

que es **(C-B-S).**

(C-B-S) $\Rightarrow$ **(B)**

Si en la desigualdad **(C-B-S)** tomamos $a_k = \sqrt{y_k}$ y $b_k = \dfrac{x_k}{\sqrt{y_k}}$ $\forall k = \overline{1,n}$ obtenemos que:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) \geq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \Leftrightarrow \left(\sum_{k=1}^{n} y_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2}{y_k}\right) \geq \left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{y_k} \cdot \frac{x_k}{\sqrt{y_k}}\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2}{y_k} \geq \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2}{\sum_{k=1}^{n} y_k},$$ que es **(B).**

Observación. Puesto que (C-B-S) se puede demostrar independientemente de (B) y vice versa deducimos que ambas son independientes una de otra.

Título: Los vectores una de las vías fundamentales para el vínculo interconceptual entre las disciplinas Álgebra y Geometría en problemas de olimpiadas.

Autores:

MSc. Eduardo Miguel Pérez Almarales. Profesor Auxiliar.

Dr. C. Guillermo Calixto González Labrada. Profesor Titular.

Dr. C. Marta Álvarez Pérez. Profesor Titular.

Resumen:
El trabajo con vectores es una vía eficaz para resolver problemas geométricos en olimpiadas de Matemática. En muchas ocasiones los estudiantes que no tienen un gran desarrollo en la geometría sintética recurren a este método para resolver los problemas de geometría que aparecen en las olimpiadas estableciendo relaciones conceptuales con el Algebra.

Palabras claves: Vectores, relaciones conceptuales, Algebra, Geometría.

Summary:
The work with vectors is an effective road to solve geometric problems in olympiads of Mathematics. In many occasions the students that don't have a great development in the synthetic geometry appeal to this method to solve the geometry problems that they appear in the olympiads establishing conceptual relationships with the Algebra.

Key words: Vectors, conceptual relationships, Algebra, Geometry.

Introducción:

Según aborda Macedo (2001) dentro de los métodos que, como tendencias, más han impactado a América Latina y el Caribe en las últimas décadas se encuentra el aprendizaje por cambios conceptuales que tiene como rasgos distintivos la sustitución de ideas previas de sentido común por otras más cercanas a las ideas científicas, producir insatisfacción con lo que se sabe, los estudiantes tienen conceptos, sean útiles o no, deben evolucionar. Del mismo modo se deben establecer relaciones, a partir de la construcción de significados, favoreciendo que los estudiantes sean protagonistas de su aprendizaje, facilitando la construcción del conocimiento. Estos aspectos se potencian con la sistematización de conocimientos interconceptuales.

La gestión de conocimientos dentro de los grupos de preparación de estudiantes talentosos en Matemática es una vía eficaz para lograr conocimientos sólidos, a partir de la base teórica creada, por la utilización de relaciones de integración de los conceptos matemáticos básicos, que se expresan a partir de relaciones interconceptuales disciplinares (aquellos en el interior de alguna de las disciplinas matemáticas) y las interdisciplinares (entre los diferentes dominios cognitivos de la Matemática).

La combinación interconceptual de conocimientos se define por G. González (2012) como la intencionalidad de interrelacionar conceptos según la lógica histórica de su formación, el carácter inexacto de las definiciones y la necesidad de estructurar un pensamiento matemático dialéctico portador de apropiaciones culturales que garantizan esencialidades del proceso. En el proceso de preparación de estudiantes talentosos para olimpiadas de Matemática se van estableciendo interconexiones culturales que le permiten a partir de la sistematización interconceptual concatenar los conceptos que necesita y aplicarlos en disímiles situaciones durante la resolución de problemas.

El modo de realizar la sistematización del conocimiento matemático con base interconceptual en estudiantes talentosos es muy limitado; el profesor preparador, en la mayoría de los casos aborda los elementos teóricos que desde su punto de vista deben conocer, sin tener en cuenta en muchas ocasiones un orden lógico, ni la imprescindible sistematización y consolidación de los conocimientos. Se pudo determinar además que desde lo teórico la mayor parte de los libros que se utilizan en la preparación se basan de modo general en colecciones de problemas o contenidos específicos, carentes de las conexiones propias de la Matemática.

La preparación de los estudiantes se basa en memorizar un gran cúmulo de contenidos, sin tener en cuenta las interrelaciones y los conocimientos indispensables que necesitan a partir de las características individuales de cada uno de los estudiantes talentosos y de los contenidos que se tratan. Ni el profesor ni los estudiantes realizan el análisis de todos los conceptos fundamentales que se trabajan en cada una de las disciplinas de la enseñanza de la Matemática, objetos de estudio para olimpiadas de conocimientos (Álgebra, Teoría de Números, Geometría y Matemática Discreta), hacia su interior y aquellos útiles para interconectar disciplinas.

Este aspecto es de vital importancia en la preparación de los estudiantes porque permite no memorizar tantos conceptos y realizar el trabajo sobre la base de analizar las relaciones y características más importantes de los conceptos fundamentales, saber determinar cuáles son las características distintivas de las definiciones de los conceptos subordinados, las comunes a objetos de un mismo tipo y las interconexiones conceptuales existentes.

Del mismo modo los estudiantes tienen la posibilidad de trabajar con los contenidos en los cuales tiene mayor desarrollo, por ejemplo en la dinámica de la preparación existen estudiantes que presentan dificultades en disciplinas como la Geometría que pueden a partir de las interconexiones con el Álgebra resolver los problemas geométricos que se les proponen, tanto en la preparación como en los eventos competitivos, al utilizar contenidos como los de Geometría Analítica, Trigonometría, conjugación anarmónica y armónica, trabajo con vectores o números complejos.

Desarrollo:

En el presente artículo se pretende mostrar la forma de utilizar el trabajo con vectores en la solución de problemas geométricos de olimpiadas de Matemática.

Dentro de los elementos teóricos necesarios se tienen:

Se denomina segmento dirigido $\overrightarrow{AB}$ a un par ordenado (A; B) donde el punto A se llama origen y el punto B extremo.

El segmento dirigido $\overrightarrow{BA}$ es el contrario de $\overrightarrow{AB}$ y se denota por $-\overrightarrow{AB}$

Si los puntos A y B son distintos $\overrightarrow{AB}$ es no nulo y si A = B, entonces el segmento dirigido es nulo.

Se dice que $\overrightarrow{AB}$ es paralelo con una recta l si $\overrightarrow{AB}$ es nulo o la recta que contiene a A y a B es paralela a la recta l. Por su parte $\overrightarrow{AB} \perp$ l si la recta que pasa por A y B es perpendicular a la recta l.

Los segmentos dirigidos $\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{A_2B_2}$, …, $\overrightarrow{A_nB_n}$ se denominan colineales si existe una recta l tal que cada uno de ellos es paralelo a la recta l.

Si se desea adicionar segmentos dirigidos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$, es suficiente con trasladar el segmento dirigido $\overrightarrow{CD}$ de modo que el origen de $\overrightarrow{CD}$ coincida con el extremo de $\overrightarrow{AB}$, entonces el segmento dirigido suma sería el que tiene como origen a A y como extremo a D. La adición de segmentos dirigidos es asociativa y conmutativa.
Si tenemos un conjunto finito de puntos A_1, A_2, …, A_n una línea poligonal con vértices consecutivos en esos puntos se llama camino que lleva de A_1 a A_n. Para todo camino se cumple que: $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \cdots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \overrightarrow{A_1A_n}$, del mismo modo una línea poligonal cerrada se denomina ciclo y se cumple que: $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \cdots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} + \overrightarrow{A_nA_1} = \vec{0}$ es decir la suma de las componentes de un ciclo da como resultado el segmento dirigido nulo.
Dos segmentos dirigidos son iguales si tienen la misma longitud, la misma dirección y el mismo sentido.
Se denomina vector en el plano al conjunto de todos los segmentos dirigidos iguales entre si, cuyos origenes y extremos pertenecen al plano. Suelen denotarse por letras minúsculas $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \cdots$.
Si los puntos A y B y el vector $\vec{a}$ son tales que cumplen que $\overrightarrow{AB} \in \vec{a}$, entonces $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$. En este caso se dice que el segmento dirigido $\overrightarrow{AB}$ es un representante del vector $\vec{a}$. Los vectores cumplen las mismas propiedades de sus representantes.
Se llama ángulo entre dos vectores no nulos $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ y $\vec{b} = \overrightarrow{CD}$ al ángulo entre los rayos AB y CD. El ángulo entre vectores con la misma dirección y sentido es 0º, el ángulo entre vectores con la misma dirección y sentidos contrarios es 180º. Si el ángulo que forman es 90º se dice que son ortogonales.
El producto escalar de dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ se denota por ($\vec{a}$, $\vec{b}$) y se calcula como: $(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$ si uno de los vectores es el nulo el producto escalar es cero.
Si se toma como origen del sistema de vectores al circuncentro del triángulo ABC, entonces el ortocentro H cumple que $\vec{H} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$, donde la notación con una sola letra denota el vector de posición de los puntos representados por esas rectas. Esta relación es conocida como teorema de Silvestre. El vector de posición es el que tiene como origen el origen del sistema de vectores que se tome y como extremo ese punto.
Esta fórmula se deduce tomando como origen del sistema de vectores al centro de la circunferencia circunscrita, entonces los vértices de cada triángulo serán los vectores de posición de esos puntos y las coordenadas del ortocentro sería la suma de los vectores de posición de los vértices. El vector suma de $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, pasa por el punto medio de $\overline{AB}$ y tiene una longitud de dos veces la distancia desde O al punto medio de $\overline{AB}$, como se conoce que la distancia del ortocentro al vértice es el doble de la distancia del circuncentro al punto medio, entonces el vector desde el circuncentro al ortocentro es la suma de los tres vectores de posición de los vértices del triángulo.

En este caso que analizamos el baricentro G cumple que $\vec{G}=\frac{\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}}{3}$.

En todo vector $\overrightarrow{AB}$ se cumple que $\overrightarrow{AB}=\vec{B}-\vec{A}$

El punto medio M de un segmento $\overline{AB}$ cumple que $\vec{M}=\frac{\vec{A}+\vec{B}}{2}$

En un sistema de coordenadas los vectores que se encuentran a una unidad del centro del sistema y sobre los ejes coordenados se denominan vectores unitarios. Los vectores unitarios se denotan por e_1 y e_2.
Cualquier vector de posición del plano correspondiente al punto P(a; b) se puede expresar como $\vec{P}=ae_1+be_2$, siempre y cuando e_1 y e_2 sean ortogonales.

Si un punto M divide a un segmento $\overline{AB}$ en una razón λ, es decir $\frac{AM}{MB}=\lambda$, entonces se cumple que $\vec{M}=\frac{\vec{A}+\lambda\vec{B}}{\lambda+1}=\frac{1}{\lambda+1}\vec{A}+\frac{\lambda}{\lambda+1}\vec{B}=(1-\lambda)\vec{A}+\lambda\vec{B}$

A continuación se proponen algunos problemas como ejemplo de la utilización de los vectores en la resolución de problemas geométricos de olimpiadas en los cuales se utilizan los elementos teóricos abordados.
Problema 1. (Hungría, 1997) Sean R el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC, G su baricentro, H su ortocentro y F el punto medio de GH. Prueba que $\overline{AF}^2+\overline{BF}^2+\overline{CF}^2=3R^2$.
Solución:
Tomemos a O como origen de un sistema de vectores, entonces $\vec{H}=\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}$, $\vec{G}=\frac{\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}}{3}$ y $\vec{F}=\frac{2(\vec{A}+\vec{B}+\vec{C})}{3}$, entonces: $\overrightarrow{AF}^2+\overrightarrow{BF}^2+\overrightarrow{CF}^2=(\vec{A}-\vec{F})(\vec{A}-\vec{F})+(\vec{B}-\vec{F})(\vec{B}-\vec{F})+(\vec{C}-\vec{F})(\vec{C}-\vec{F})=\vec{A}^2+\vec{B}^2+\vec{C}^2-2(\vec{A}+\vec{B}+\vec{C})\cdot\vec{F}+3\vec{F}^2=3R^2-\vec{F}\cdot[2(\vec{A}+\vec{B}+\vec{C})-3\vec{F}]=3R^2$
Problema 2. (Rumanía, 1997) Sea ABCDEF un hexágono convexo, sean P, Q, R los puntos de intersección de AB y EF; EF y CD; CD y AB, respectivamente y sean S, T, U los puntos de intersección de BC y DE; DE y FA; FA y BC, respectivamente. Prueba que $\frac{AB}{PR}=\frac{CD}{RQ}=\frac{EF}{QP}\Leftrightarrow\frac{BC}{US}=\frac{DE}{ST}=\frac{FA}{TU}$

Solución:
La premisa $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{PR},\ \overrightarrow{CD}=\lambda\overrightarrow{RQ},\ \overrightarrow{EF}=\lambda\overrightarrow{QP}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}=\lambda(\overrightarrow{PR}+\overrightarrow{RQ}+\overrightarrow{QP})=\vec{0}$, como se cumple además que $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FA}=\vec{0}$, es equivalente a $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{FA}=\vec{0}$, como U,B,C,S están alineados, entonces $\overrightarrow{BC}=\lambda_1\overrightarrow{US}$, de manera análoga $\overrightarrow{DE}=\lambda_2\overrightarrow{ST}$ y $\overrightarrow{FA}=\lambda_3\overrightarrow{TU}$, entonces $\lambda_1\overrightarrow{US}+\lambda_2\overrightarrow{ST}+\lambda_3\overrightarrow{TU}=\vec{0}$, entonces como $\overrightarrow{US}+\overrightarrow{ST}+\overrightarrow{TU}=\vec{0}\Rightarrow-\overrightarrow{TU}=\overrightarrow{US}+\overrightarrow{ST}$, sustituyendo se tiene $\lambda_1\overrightarrow{US}+\lambda_2\overrightarrow{ST}=\lambda_3(\overrightarrow{US}+\overrightarrow{ST})=\lambda_3\overrightarrow{US}+\lambda_3\overrightarrow{ST}$, entonces se cumple que $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$, esto es equivalente a la tesis $\frac{BC}{US}=\frac{DE}{ST}=\frac{FA}{TU}$.
Otra forma de demostrar lo pedido es demostrando que ambas expresiones son equivalentes a $\vec{B}-\vec{A}+\vec{D}-\vec{C}+\vec{F}-\vec{E}$, como pudo apreciarse el miembro izquierdo es equivalente con $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{B}-\vec{A}+\vec{D}-\vec{C}+\vec{F}-\vec{E}=\vec{0}$,

por su parte el miembro derecho es equivalente con $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{AF}=\vec{0} \Leftrightarrow \vec{B}-\vec{C}+\vec{D}-\vec{E}+\vec{F}-\vec{A}=\vec{0}$, que es equivalente al caso anterior.

Problema 3. (San Petesburgo, 1997) Sean K, L, M, N los puntos medios de los lados AB, BC, CD y DA respectivamente de un cuadrilátero cíclico ABCD. Prueba que los ortocentros de los triángulos AKN, BKL, CLM, DMN son los vértices de un paralelogramo.

Solución:

Tomando vectores de origen en el centro de la circunferencia circunscrita al cuadrilátero $ABCD$, entonces el ortocentro de ABD es $\vec{A}+\vec{B}+\vec{D}$; pero como AKN es una homotecia de ABD con centro en A y razón $\frac{1}{2}$, se tiene que el ortocentro de AKN es $\vec{A}+\frac{\vec{B}+\vec{D}}{2}$, de igual modo el ortocentro de CLM es $\vec{C}+\frac{\vec{B}+\vec{D}}{2}$ y su punto medio es $\frac{1}{2}(\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}+\vec{D})$, de igual modo se prueba con los dos restantes. Por tanto como los puntos medios coinciden el cuadrilátero es un paralelogramo.

Problema 4. (Rumanía, 2002) Sea $ABCD$ un cuadrado unitario y M, N puntos interiores a los lados AB y BC respectivamente, tal que: $\frac{AM}{MB}=7$ y $\frac{CN}{NB}=2$, sea P el punto de intersección de las rectas CM y DN.

a) Demuestra que $13\overrightarrow{AP}=12\overrightarrow{AB}+5\overrightarrow{AD}$

b) Calcula la longitud de AP.

Solución:

Usaremos coordenadas, tomemos como origen de un sistema de coordenadas rectangular en $A(0,0)$, tal que tenemos $B(1,0)$, $C(1,1)$, $M\left(\frac{7}{8},0\right)$, $N\left(1,\frac{1}{3}\right)$. Las rectas DN y CM tienen respectivamente ecuaciones $8x-y=7$ y $2x+3y=3$, resolviendo el sistema tenemos las coordenadas de $P\left(\frac{12}{13},\frac{5}{13}\right)$ como $\overrightarrow{AB}=e_1$, $\overrightarrow{AD}=e_2$ son vectores unitarios ortogonales del sistema de coordenadas seleccionado, tenemos: $\overrightarrow{AP}=\frac{12}{13}e_1+\frac{5}{13}e_2=\frac{12}{13}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{13}\overrightarrow{AD}$, se sigue por cálculo estándar que $AP=\sqrt{\left(\frac{12}{13}\right)^2+\left(\frac{5}{13}\right)^2}=1$

Problema 5. (Rumanía, 2002) Sea ABCD un rombo y M, N, P puntos interiores a los lados AB, BC, CD, respectivamente. Demuestra que el baricentro del triángulo MNP pertenece a la recta AC si y solo si $AM+DP=BN$.

Solución:

Sea O el punto de intersección de las diagonales del rombo dado, usaremos vectores poniendo $\frac{AM}{AB}=m, \frac{BN}{BC}=n, \frac{DP}{DC}=p$, como $AB=BC=CD$, la condición $AM+DP=BN$ es equivalente a $m+p=n$.

Considere los vectores

$\overrightarrow{OM}=(1-m)\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OB}$; $\overrightarrow{ON}=(1-n)\overrightarrow{OB}+n\overrightarrow{OC}$; $\overrightarrow{OP}=(1-p)\overrightarrow{OD}+p\overrightarrow{OC}$.

Sea G el baricentro del triángulo MNP, como $\overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}=-\overrightarrow{OB}$ y $3\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}$, obtenemos que

$3\overrightarrow{OG} = (m+n+p-1)\overrightarrow{OC} + (m-n+p)\overrightarrow{OB}$, entonces el punto G pertenece a la recta AC si y solo si los vectores $\overrightarrow{OG}$ y $\overrightarrow{OC}$ son colineales, que es si y solo si $m-n+p=0$.

Problema 6. (Rumanía, 2002) Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico y M un punto en su circunferencia circunscrita. Sean H_1, H_2, H_3, H_4 los ortocentros de los triángulos MAB, MBC, MCD, MDA, respectivamente. Prueba que:

a) $H_1\ H_2\ H_3\ H_4$ es un paralelogramo.

b) $H_1\ H_3 = 2EF$

Solución:

Usaremos Álgebra de vectores. El circuncentro de todos los triángulos MAB, MBC, MCD, MDA es O, que lo tomamos como origen del sistema de vectores, por tanto por la fórmula de Silvestre tenemos:

$\overrightarrow{OH_1} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OH_2} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OH_3} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$ y $\overrightarrow{OH_4} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA}$.

Calculando $\overrightarrow{H_1H_2} = \overrightarrow{OH_2} - \overrightarrow{OH_1} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OH_3} - \overrightarrow{OH_4} = \overrightarrow{H_4H_3}$

b) Usando también vectores:

$\overrightarrow{H_1H_3} = \overrightarrow{OH_3} - \overrightarrow{OH_1} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{EF}$, por tanto $H_1\ H_3 = 2EF$

Problema 7. (Rumanía, 2002) Sea ABC un triángulo, G su baricentro y M, N, P puntos en los lados AB, BC, CA, respectivamente tal que $\frac{AM}{MB} = \frac{BN}{NC} = \frac{CP}{PA}$, denote por G_1, G_2, G_3 los baricentros de los triángulos AMP, BMN, CNP, respectivamente, prueba que:

a) Los triángulos ABC y $G_1G_2G_3$ tienen el mismo baricentro.

b) Para todo punto D en el plano ABC se cumple que $3DG < DG_1 + DG_2 + DG_3 < DA + DB + DC$.

Solución:

Sea $\frac{AM}{MB} = \frac{BN}{NC} = \frac{CP}{PA} = \lambda$, entonces $\overrightarrow{GM} = \frac{1}{\lambda+1}\overrightarrow{GA} + \frac{\lambda}{\lambda+1}\overrightarrow{GB}$, $\overrightarrow{GN} = \frac{1}{\lambda+1}\overrightarrow{GB} + \frac{\lambda}{\lambda+1}\overrightarrow{GC}$, $\overrightarrow{GP} = \frac{1}{\lambda+1}\overrightarrow{GC} + \frac{\lambda}{\lambda+1}\overrightarrow{GA}$

Por lo tanto $\overrightarrow{GG_1} + \overrightarrow{GG_2} + \overrightarrow{GG_3} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GP} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GP} + \overrightarrow{GA}\right) = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

, esto puesto que G es el baricentro del triángulo $G_1G_2G_3$.

b) La primera desigualdad se tiene de $3\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DG_1} + \overrightarrow{DG_2} + \overrightarrow{DG_3}$, lo cual es una consecuencia del resultado anterior. Entonces aplicando la longitud de vectores y el hecho obvio que DG_1, DG_2, DG_3 no son colineales.

La segunda desigualdad sale de $\left|\overrightarrow{DG_1}\right| = \left|\frac{2}{3}\overrightarrow{DA} + \frac{\lambda}{3(\lambda+1)}\overrightarrow{DB} + \frac{1}{3(\lambda+1)}\overrightarrow{DC}\right| < \frac{2}{3}DA + \frac{\lambda}{3(\lambda+1)}DB + \frac{1}{3(\lambda+1)}DC$ y dos desigualdades semejantes que después son adicionadas.

Problema 8. (Rumanía, 2002) Sea ABC un triángulo rectángulo con $\measuredangle BAC = 90^\circ$ y sea $M \in AB$, tal que $\frac{AM}{MB} = 3\sqrt{3} - 4$. Es conocido que el punto simétrico de M con respecto a la recta GI está en AC. Determina la amplitud del $\measuredangle ABC$ (G es el baricentro del triángulo ABC e I es el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo).

Solución:

Usaremos vectores. Sea N el punto simétrico de M con respecto al punto medio de GI. Consideremos α y β tal que $\overrightarrow{AM}=\alpha\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN}=\beta\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{GI}=\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GN}=(2-2\alpha-\beta)\overrightarrow{GA}+(\beta-\alpha)\overrightarrow{GC}$, por otra parte $\overrightarrow{GI}=\frac{(a-b)\overrightarrow{GA}+(c-b)\overrightarrow{GC}}{a+b+c}$, por igualdad de coeficientes tenemos $\alpha=\frac{1}{3}+\frac{b}{a+b+c}=\frac{1}{3}+\frac{3-\sqrt{3}}{6}$. Denote $x=\frac{b}{a}, y=\frac{c}{a}$, obtenemos $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ \frac{x}{1+x+y}=\frac{3-\sqrt{3}}{6} \end{cases}$, resolviendo para x tenemos $x=\frac{1}{2}$, implicando por tanto $\measuredangle ABC=30^\circ$

Problema 9. (Eslovenia, 2008) Sean A, B, C, D y E, puntos consecutivos en una circunferencia con centro en O, tal que $|AC|=|BD|=|CE|=|DO|$. Sean H_1, H_2, H_3 los ortocentros de los triángulos ACD, BCD y BCE. Prueba que el triángulo $H_1H_2H_3$ es rectángulo.

Solución

Tomemos el circuncentro O del triángulo como centro del sistema de vectores. Como H_1 es el ortocentro del triángulo ACD tenemos que $\overrightarrow{OH_1}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$, similarmente $\overrightarrow{OH_2}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$ y $\overrightarrow{OH_3}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OE}$, luego $\overrightarrow{H_1H_2}=\overrightarrow{OH_2}-\overrightarrow{OH_1}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{H_2H_3}=\overrightarrow{OH_3}-\overrightarrow{OH_2}=\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OD}$, el producto escalar de estos dos vectores es: $\overrightarrow{H_1H_2}\cdot\overrightarrow{H_2H_3}=(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})(\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OD})=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}=|OB||OE|\cos\measuredangle BOE-|OB||OD|\cos\measuredangle BOD-|OA||OE|\cos\measuredangle AOE+|OA||OD|\cos\measuredangle AOD=|OA|^2(\cos\measuredangle BOE-\cos\measuredangle BOD-\cos\measuredangle AOE+\cos\measuredangle AOD)$

, aquí usamos el hecho de que O es el centro de la circunferencia que contiene a A, B, C, D y E. Los triángulos AOC y COE son equiláteros, luego $\measuredangle AOE=120^\circ$, el triángulo BOD es también equilátero, luego $\measuredangle BOD=60^\circ$, entonces:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{H_1H_2}\cdot\overrightarrow{H_2H_3}&=|OA|^2(\cos\measuredangle BOE-\cos 60^\circ-\cos 120^\circ+\cos\measuredangle AOD)\\&=|OA|^2(\cos\measuredangle BOE+\cos\measuredangle AOD)\\&=|OA|^2\cos\left(\frac{\measuredangle BOE+\measuredangle AOD}{2}\right)\cos\left(\frac{\measuredangle BOE-\measuredangle AOD}{2}\right)\end{aligned}$$

Verificándose que $\measuredangle BOE+\measuredangle AOD=2\measuredangle BOE+\measuredangle DOE+\measuredangle AOB$ lo que implica que $\frac{\measuredangle BOE+\measuredangle AOD}{2}=\measuredangle BOD+\frac{\measuredangle DOE+\measuredangle AOB}{2}=60^\circ+\measuredangle DCE+\measuredangle ACB=60^\circ+\measuredangle DCB-\measuredangle ECA=60^\circ+(180^\circ-30^\circ)-120^\circ=90^\circ$

, luego $\cos\left(\frac{\measuredangle BOE+\measuredangle AOD}{2}\right)=0$ y $\overrightarrow{H_1H_2}\cdot\overrightarrow{H_2H_3}=0$, por lo tanto el triángulo $H_1H_2H_3$ es rectángulo.

Problema 10. (Rumanía, 2009). En los lados AB y AC del triángulo ABC considera a los puntos D y E respectivamente, tal que $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EC}=\vec{0}$.

Sea T el punto de intersección de las rectas DC y BE. Determina el número real α tal que $\overrightarrow{TB} + \overrightarrow{TC} = \alpha\overrightarrow{TA}$.
Solución:
Recuerde que los vectores $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB}$ y $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EC}$ tienen la dirección de los vectores no colimneales $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$, respectivamente, luego su suma es $\vec{0}$ ssi ambos son $\vec{0}$.
Deducimos que D y E son los puntos medios de los segmentos AB y AC, respectivamente, por tanto T es el baricentro del triángulo ABC. De $\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{TC} = \vec{0}$ obtenemos que $\alpha = -1$.
En algunos problemas de primera vista es bastante difícil pensar en la utilización de los vectores un ejemplo lo tenemos en el siguiente problema propuesto en Sudáfrica en el 2009.
Problema 11. Demuestra que para cualquier coloración del plano usando dos colores se puede encontrar un triángulo con los tres vértices y el baricentro del mismo color.
Solución:
Pintemos el plano de rojo y verde, es obvio que podemos encontrar un triángulo con todos los vértices del mismo color, supongamos que ellos son todos rojos. Sean los vectores de posición de los vértices de este triángulo son $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Su baricentro es $\vec{G} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$, si es rojo acabamos, supongamos que es verde. Ahora tomamos nuestros tres puntos rojos y tomemos a $\vec{b}$ y $\vec{c}$ como vértices y $\vec{a}$ como baricentro. Si el otro vértice que se obtiene al formar el triángulo es rojo se acaba el problema, luego lo tomamos verde. Este punto es $\vec{A} = 3\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$, similarmente podemos demostrar que los puntos $\vec{B} = 3\vec{b} - \vec{c} - \vec{a}$ y $\vec{C} = 3\vec{c} - \vec{a} - \vec{b}$ tienen que ser verdes, pero entonces el baricentro del triángulo con vectores de posición $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ tiene como baricentro a $\vec{G}$ que es verde.

Bibliografía:

Andreescu, T. (1998). Mathematical Contests 1997-1998. Olimpiad Problems and solution from around the worl. USA: American Mathematics Competitions.
Colectivo de autores (2002). Olimpiada Nacional de Rumanía.
Colectivo de autores (2009). Olimpiada Nacional de Rumanía.
Colectivo de autores (2008). Olimpiada Nacional de Eslovenia.
Colectivo de autores (2009). Olimpiada Nacional de Sudáfrica.
Davidson San Juan, L., Reguer Villar, R., & Frontela, R. (1987). Problemas de Matemática Elemental 1. La Habana: Pueblo y Educación.
Davidson San Juan, L., Reguer Villar, R., & Frontela, R. (1995). Problemas de Matemática Elemental 2. La Habana: Pueblo y Educación.
Davidson San Juan, & Recio, F. (1974). Los Concursos de Matemática. Primera parte. La Habana: Dirección de producción de medios de enseñanza. MINED.
Davidson San Juan, & Recio, F. (1975). Los Concursos de Matemática. Segunda parte. La Habana: Dirección de producción de medios de enseñanza. MINED.
Díaz González, M. (2004). Problemas de Matemática para los entrenamientos de la Educación Preuniversitaria I. La Habana: Pueblo y Educación.
Díaz González, M. (2007). Problemas de Matemática para los entrenamientos de la Educación Preuniversitaria II. La Habana: Pueblo y Educación.

Díaz González, M. (2011). Problemas de Matemática para los entrenamientos de la Educación Secundaria Básica III. La Habana: Pueblo y Educación.
González Labrada, G. C. (2012). Didáctica combinativa de base interconceptual: Matemática de la Educación primaria. Manzanillo: UCP Blas Roca
Lehmann, Ch. (1989). Geometría Analítica. Limusa.
Macedo, B. (2001). La enseñanza de las ciencias en América Latina y el Caribe. Conferencia central del simposio 4 sobre Didáctica de las Ciencias en el nuevo milenio. Ciudad de La Habana: Evento Pedagogía ‘2001. MINED.
Ortega, M. (1910). Geometría. Tomo I. Parte elemental. Madrid: Perlado, Páez & Cia.
Ortega, M. (1910). Geometría. Tomo II. Complementos y ejercicios. Madrid: Perlado, Páez y Cia.
Pogorélov, A. V. (1974). Geometría elemental. Moscú: Mir.
Shariguin, H. (1989). Problemas de Geometría. Moscú: Mir.

XV Olimpíada Matemática de Centroamérica y El Caribe

Nicaragua 2013

Managua, 26 de junio de 2013

Día 1

Problema 1. Juan escribe la lista de parejas $(n, 3^n)$ con $n = 1, 2, 3, \ldots$ en un pizarrón. A medida que va escribiendo la lista, subraya las parejas $(n, 3^n)$ cuando n y 3^n tienen la misma cifra de las unidades. De las parejas subrayadas, ¿cuál ocupa la posición 2013?

Problema 2. Alrededor de una mesa redonda están sentadasen sentido horario las personas $P_1, P_2, \ldots, P_{2013}$. Cada una tiene cierta cantidad de monedas (posiblemente ninguna); entre todas tienen 10000 monedas. Comenzando por P_1 y prosiguiendo en sentido horario, cada persona en su turno hace lo siguiente:

- Si tiene un número par de monedas, se las entrega todas a su vecino de la izquierda.
- Si en cambio tiene un número impar de monedas, le entrega a su vecino de la izquierda un número impar de monedas (al menos una y como máximo todas las que tiene), y conserva el resto.

Pruebe que, repitiendo este procedimiento, necesariamente llegará un momento en que todas las monedas estén en poder de una misma persona.

Problema 3. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo y M el punto medio del ladoAB.La circunferencia que pasa por D y es tangente al ladoAB en A corta al segmento DM en E. La circunferencia que pasa por C y es tangente allado AB en B corta al segmento CM en F. Suponga que las rectas AF y BE se intersecan en un punto que pertenece a la mediatriz del ladoAB.Demuestre que A, E y C son colineales si y sólo si B, F y D son colineales.

Cada problema vale 7 puntos.
Duración de la prueba: 4 horas y media.

XV Olimpíada Matemática de Centroamérica y El Caribe

Nicaragua 2013

Managua, 27 de junio de 2013

Día 2

Problema 4. Ana y Beatriz alternan turnos en un juego que se inicia con un cuadrado de lado 1 dibujado en un tablero infinito. Cada jugada consiste en dibujar un cuadrado que no se sobreponga con la figura ya dibujada, de manera que uno de sus lados sea un lado (completo) del rectángulo que está dibujado. Gana el juego aquella persona que logre completar una figura cuya área sea múltiplo de 5. Si Ana realiza la primera jugada, ¿existe estrategia ganadora para alguna jugadora?

Problema 5. Sea ABC un triángulo acutángulo y sea Γ su circuncírculo. La bisectriz del ángulo A interseca a BC en D, a Γ en K (distinto de A), y a la tangente a Γ por B en X. Demuestre que K es el punto medio de AX si y sólo si $\frac{AD}{DC} = \sqrt{2}$.

Problema 6. Determine todas las parejas de polinomios no constantes $p(x)$ y $q(x)$, cada uno con coeficiente principal 1, grado n y n raíces enteras no negativas, tales que $p(x) - q(x) = 1$.

Cada problema vale 7 puntos.
Duración de la prueba: 4 horas y media.

Problemas de Nivel Medio y de Olimpiadas 49

Problemas de la Olimpiada Balcánica 2013

La Olimpiada Balcánica ha estado a punto de no celebrarse (en Albania, como estaba previsto) por problemas extraacadémicos: el visado de los representantes de Kosovo. Con posterioridad a la fecha establecida en el reglamento (principios de Mayo), y en un tiempo récord, la Sociedad Matemática de Chipre la ha organizado con asistencia de todos los países inscritos y algunos invitados, como Gran Bretaña. He aquí los problemas propuestos en Junio de 2013:

Problema 1 (Bulgaria)

En un triángulo ABC, la circunferencia exinscrita ω_a opuesta a A es tangente a AB en P y a AC en Q. La circunferencia exinscrita ω_b opuesta a B es tangente a BA en M y a BC en N. Sea K la proyección de C sobre MN y L la proyección de C sobre PQ. Demostrar que el cuadrilátero $MKLP$ es cíclico.

Problema 2 (Serbia)

Determinar todos los enteros positivos x, y, z tales que $x^5 + 4^y = 2013^z$.

Problema 3 (Reino Unido)

Sea S el conjunto de los números reales positivos. Hallar todas las funciones $f : S^3 \to S$ tales que, para cualesquiera números reales x, y, z, k, satisfacen las tres condiciones siguientes:

$$\begin{aligned} a)\ \ xf(x,y,z) &= zf(z,y,x) \\ b)\ \ f(x,ky,k^2z) &= kf(x,y,z) \\ c)\ f(1,k,k+1) &= k+1 \end{aligned}$$

Problema 4 (Serbia)

En una competición matemática, algunos participantes son *amigos;* la amistad es mutua, es decir, si A es amigo de B, entonces B es amigo de A. Decimos que $n \geq 3$ participantes distintos $A_1, A_2, \cdots, A_n$ forman un *ciclo débilmente amistoso si* A_i no es amigo de A_{i+1} para $1 \leq i \leq n$ (donde $A_{n+1} = A_1$), y no hay otros pares de *no amigos* entre los componentes del ciclo.

Se verifica la siguiente propiedad: "*Para todo participante C y todo ciclo débilmente amistoso S de participantes que no contiene a C, el conjunto D*⊂S *que no son amigos de C tiene, a lo sumo, un elemento*".

Demostrar que todos los participantes de esta competición matemática pueden ser distribuidos en tres habitaciones de tal manera que dos participantes cualesquiera que están en la misma habitación sean amigos.

Problemas propuestos 241 - 245

Problema 241, propuesto por D.M. Batinetu-Giurgiu (Bucarest) y N. Stanciu (Buzau)

Sean $s, t \in \mathbb{R}$ y consideremos la sucesión

$$\{L_n(s,t)\}_{n\geq 2}$$

definida por

$$L_n(s,t) = (n+1)^s \cdot \sqrt[n+1]{((n+1)!)^t} - n^s \cdot \sqrt[n]{(n!)^t}.$$

Calcular

$$\lim_{n\to\infty} L_n(s,t) = L\left(s,t\right)$$

Problema 242, propuesto por D.M. Batinetu-Giurgiu (Bucarest) y N. Stanciu (Buzau)

Sea $m \in \mathbb{R}^+$. Con las notaciones habituales para los triángulos, llamando S al área del triángulo ABC, demostrar que se verifica la siguiente desigualdad:

$$\frac{a^{m+2}}{(b\cdot R + c\cdot r)^m} + \frac{b^{m+2}}{(c\cdot R + a\cdot r)^m} + \frac{c^{m+2}}{(a\cdot R + b\cdot r)^m} \geq \frac{4\sqrt{3}}{(R+r)^m}\cdot S$$

Problema 243, propuesto por D.M. Batinetu-Giurgiu (Bucarest) y N. Stanciu (Buzau)

Sean $A_1, A_2, \cdots, A_n$ (con $n \geq 3$) los vértices de un polígono regular; M un punto de su círcunferencia inscrita y N un punto de su circunferencia circunscrita. Demostrar que

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{MA_k^4}{NA_k^2} \geq \frac{1}{4}\left(3+\cos\frac{2\pi}{n}\right)\sum_{k=1}^{n} MA_k^2.$$

Problema 244, propuesto por Marcel Chiritza, Bucarest

Sea ABC un triángulo cuyo ángulo $A \geq 90^o$. Sea M uno cualquiera de los puntos interiores al triángulo tales que sus proyecciones ortogonales sobre los lados de ABC son los vértices de un triángulo rectángulo. Demostrar que, de 7 cualesquiera de esos puntos, hay 4 que son concíclicos.

Problema 245, propuesto por el editor en homenaje a David Monk y deseando su recuperación.

Las alturas BE y CF de un triángulo ABC se cortan en H. Las prolongaciones de FE y BC se ncortan en U. Una recta que pasa por el punto medio L de BC, paralela a la bisectriz interior de $\widehat{EUB}$, corta a CA, AB, HC y HB (o a sus prolongaciones, si fuera necesario) en P, Q, X, Y, respectivamente.

Demostrar que las circunferencias APQ y HXY tienen radios iguales.

PROBLEMA 237 (propuesto por Marcel Chiritza, Bucarest, Rumanía

Sea $ABCD$ un tetraedro inscrito en la esfera S de centro O y radio R. Sea M un punto cualquiera de la esfera.

Llamamos $f(M) = AM^2 + BM^2 + CM^2 + DM^2$.

Si $f(M)$ es constante para todo M de la esfera, calcular su valor y probar que AB, AC, AD son los lados de un triángulo.

Solución por Daniel Lasaosa Medarde, Universidad Pública de Navarra, Pamplona, España

Como el problema es invariante ante escalados, podemos asumir sin pérdida de generalidad que $R = 1$. Podemos también elegir un sistema de coordenadas cartesianas tales que $O \equiv (0,0,0)$ y $A \equiv (1,0,0)$, con lo que existirán ángulos fijos p, q, t, u, v, w y ángulos variables x, y tales que

$$B \equiv (\cos p, \sin p \cos q, \sin p \sin q), \qquad C \equiv (\cos t, \sin t \cos u, \sin t \sin u),$$

$$D \equiv (\cos v, \sin v \cos w, \sin v \sin w), \qquad M \equiv (\cos x, \sin x \cos y, \sin x \sin y),$$

teniéndose entonces que $AM^2 = 2 - 2\cos x$, que

$$BM^2 = 2 - 2\cos p \cos x - 2 \sin p \cos q \sin x \cos y - 2 \sin p \sin q \sin x \sin y,$$

y para CM, DM de forma similar a BM, sustituyendo p, q por t, u y v, w. Se tiene entonces que

$$f(M) = 8 - 2\ell \cos x - 2m \sin x \cos y - 2n \sin x \sin y,$$

donde ℓ, m, n son expresiones que dependen sólo de los ángulos p, q, t, u, v, w. Ahora bien, tomando $x = \frac{\pi}{2}$, tenemos que $f(M) = 8 - 2m \cos y - 2n \sin y$, que es constante para todo y si y sólo si $m = n = 0$, con lo que para que sea constante, ha de ser $f(M) = 8 - 2\ell \cos x$, siendo entonces necesario que $\ell = 0$. Luego $f(M) = 8$ cuando f es constante, lo cuál sucede si y sólo si $\ell = m = n = 0$, es decir si y sólo si se cumplen simultáneamente las tres relaciones

$$\cos p + \cos t + \cos v + 1 = 0, \qquad \sin p \cos q + \sin t \cos u + \sin v \cos w = 0,$$

$$\sin p \sin q + \sin t \sin u + \sin v \sin w = 0.$$

Al mismo tiempo, se tiene que

$$AB^2 = 2 - 2\cos p, \qquad AC^2 = 2 - 2\cos t, \qquad AD^2 = 2 - 2\cos v,$$

con lo que

$$\frac{2AB^2AC^2 + 2AC^2AD^2 + 2AD^2AB^2 - AB^4 - AC^4 - AD^4}{16}$$

$$= \frac{3 - \left(\cos^2 p + \cos^2 t + \cos^2 v\right)}{2}.$$

donde hemos usado que $\cos p + \cos t + \cos v + 1 = 0$. Nótese que la anterior expresión

- si es positiva, es igual al cuadrado del área de un triángulo uyos lados miden AB, AC, AD, que obviamente existiría en ese caso,
- si es nula, implica que uno de entre AB, AC, AD es igual a la suma de los otros dos, y AB, AC, AD serían los lados de un triángulo degenerado a un segmento, y

- si es negativa, implica que uno de entre AB, AC, AD es mayor que la suma de los otros dos, y no existiría ningún triángulo, degenerado o no, con lados de longitudes AB, AC, AD.

Ahora bien, $\cos^2 p, \cos^2 t, \cos^2 v \leq 1$, con igualdad si y sólo si los tres tienen valor absoluto nulo. Pero $\cos p = \pm 1$ implica $\sin p = 0$, con lo que para darse la igualdad, B, C, D tendrían que coincidir con A o ser el punto diametralmente opuesto a A en la esfera S, cosa imposible pues son tres puntos distintos entre sí y distintos de A. Luego cuando $f(M)$ es constante, la expresión estudiada en este apartado es estrictamente positiva, y existe un triángulo no degenerado de lados AB, AC, AD, como queríamos demostrar.

PROBLEMA 238 (propuesto por Marcel Chiritza, Bucarest, Rumanía

Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo, E el punto medio de AC, F el punto medio de BD, y M un punto del plano del cuadrilátero. Demostrar que

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} \geq \frac{1}{4}\left(2EF^2 - AC^2 - BD^2\right).$$

Solución por Daniel Lasaosa Medarde, Universidad Pública de Navarra, Pamplona, España

Utilizando la definición de producto escalar, y los teoremas del coseno y de la mediana, tenemos que

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \frac{MA^2 + MC^2 - AC^2}{2} = ME^2 - \frac{AC^2}{4},$$
$$\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} = \frac{MB^2 + MD^2 - BD^2}{2} = MF^2 - \frac{BD^2}{4},$$

con lo que la desigualdad a demostrar es equivalente a

$$\frac{EF}{2} \leq \sqrt{\frac{ME^2 + MF^2}{2}}.$$

Ahora bien, por la desigualdad triangular, $EF \leq ME + MF$, con igualdad si y sólo si M está en el interior del segmento EF, mientras que por la desigualdad entre medias aritmética y cuadrática, el miembro de la derecha es como mínimo $\frac{ME+MF}{2}$, con igualdad si y sólo si $ME = MF$. Se concluye por lo tanto el resultado propuesto, con igualdad si y sólo si M es el punto medio del segmento EF.

Solución al problema 239) por Marcos Martinelli

Dada la ecuación $\boldsymbol{3f(x) - 5f(ax) + 2f(a^2x) = x^2 + x}$ [$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R} \wedge \boldsymbol{a} \in (\boldsymbol{0},\boldsymbol{1})$], podemos hacer $\boldsymbol{x \equiv a^{n-2}x}$ y $\{\boldsymbol{X_n}\} = \boldsymbol{f(a^n x)}$ ($\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}_+$). Por lo tanto:

$$f(a^n x) = {}^5\!/_2 \,.\, f(a^{n-1}x) - {}^3\!/_2 \,.\, f(a^{n-2}x) + (a^{n-2}x)^2 + a^{n-2}x \Rightarrow X_n = {}^5\!/_2 \,.\, X_{n-1} - {}^3\!/_2 \,.\, X_{n-2} + \frac{(a^{n-2}x)^2}{2} + \frac{a^{n-2}x}{2}\ (I).$$

Para resolver (I), podemos hacer $Y_n = X_n - \frac{(a^n x)^2}{2a^4-5a^2+3} - \frac{a^n x}{2a^2-5a+3}\ (II)$.

Sustituyendo (II) en (I):

$$Y_n + \frac{(a^n x)^2}{2a^4-5a^2+3} + \frac{a^n x}{2a^2-5a+3} = \frac{5}{2}\left[Y_{n-1} + \frac{(a^{n-1}x)^2}{2a^4-5a^2+3} + \frac{a^{n-1}x}{2a^2-5a+3}\right] - \frac{3}{2}\left[Y_{n-2} + \frac{(a^{n-2}x)^2}{2a^4-5a^2+3} + \frac{a^{n-2}x}{2a^2-5a+3}\right] + \frac{(a^{n-2}x)^2}{2} + \frac{a^{n-2}x}{2} \Rightarrow$$

$$Y_n = {}^5\!/_2 \,.\, Y_{n-1} - {}^3\!/_2 \,.\, Y_{n-2} - \frac{(a^{n-2}x)^2}{2a^4-5a^2+3}\left(a^4 - \frac{5a^2}{2} + \frac{3}{2}\right) - \frac{a^{n-2}x}{2a^2-5a+3}\left(a^2 - \frac{5a}{2} + \frac{3}{2}\right) + \frac{(a^{n-2}x)^2}{2} + \frac{a^{n-2}x}{2} \Rightarrow Y_n = {}^5\!/_2 \,.\, Y_{n-1} - {}^3\!/_2 \,.\, Y_{n-2}\ (III).$$

Resolviendo (III):

$$Y_n = A.\left({}^3\!/_2\right)^n + B \Rightarrow X_n = f(a^n x) = A.\left({}^3\!/_2\right)^n + B + \frac{(a^n x)^2}{2a^4-5a^2+3} + \frac{a^n x}{2a^2-5a+3}\ (IV).$$

Puesto que $\boldsymbol{f}$ es continua en 0, $\exists\, \lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 1$. Podemos hacer $\boldsymbol{n} \to +\infty$ em (IV). Por lo tanto, tenemos:

$$1 = f(0) = \lim_{n\to+\infty} f(a^n x) = \lim_{n\to+\infty} A.\left({}^3\!/_2\right)^n + B + \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{(a^n x)^2}{2a^4-5a^2+3} + \frac{a^n x}{2a^2-5a+3}\right] \Rightarrow A = 0\ y\ B = 1.$$

Em (IV), podemos hacer $\boldsymbol{n = 0}$ para conseguir nuestra expresión final: $f(x) = \frac{x^2}{2a^4-5a^2+3} + \frac{x}{2a^2-5a+3} + 1$. Podemos confirmar que $\boldsymbol{f}$ satisface todos los supuestos de la cuestión.

PROBLEMA 240 (propuesto por Marcel Chiritza, Bucarest, Rumanía

a) Demostrar que no existen enteros x, y, z tales que

$$(x-y)^5 + (y-z)^5 + (z-x)^5 = 200.$$

b) Demostrar que existen infinitos enteros x, y, z tales que

$$(x-y)^5 + (y-z)^5 + (z-x)^5 = 210.$$

Solución por Daniel Lasaosa Medarde, Universidad Pública de Navarra, Pamplona, España

Utilizamos en la solución la siguiente

Proposición: La ecuación

$$(x-y)^5 + (y-z)^5 + (z-x)^5 = K,$$

con K entero, tiene infinitas soluciones enteras si y sólo si existen enteros u, v, w tales que $u + v + w = 0$ y $u^5 + v^5 + w^5 = K$. No existen enteros u, v, w tales que $u + v + w = 0$ y $u^5 + v^5 + w^5 = K$, si y sólo si no existe ninguna solución a la ecuación dada.

Demostración: Si existen enteros $u+v+w = 0$ con $u^5+v^5+w^5 = K$, nos basta tomar $x = z-w$ e $y = z+v$ para cualquier entero z, con lo que $x-y = -v-w = u$, generándose así infinitas soluciones enteras de

$$(x-y)^5 + (y-z)^5 + (z-x)^5 = K.$$

Recíprocamente, si existe al menos una solución a la anterior ecuación, podemos tomar $u = x-y$, $v = y-z$, $w = z-x$, con lo que existen tales u, v, w, y por ende infinitas soluciones a la ecuación. Caso de que no suceda una de estas dos cosas equivalentes, no puede entonces haber ninguna solución a la ecuación, ni puede haber tales u, v, w.

a) Por la Proposición, nos basta con demostrar que no existen enteros u, v, w tales que $u+v+w = 0$ y $u^5+v^5+w^5 = 200$. Supongamos que sí existieran, con lo que asumiendo sin pérdida de generalidad que u, v bien tienen el mismo signo bien al menos uno de ellos es nulo, y al ser $w = -(u+v)$, se tendría

$$-200 = (u+v)^5 - u^5 - v^5 = 5uv(u+v)(u^2+uv+v^2).$$

Ahora bien, claramente $uv \neq 0$ para que esto sea posible, con lo que ninguno de ellos es nulo y ambos tienen el mismo signo, luego uv, u^2+uv+v^2 son positivos, $u+v$ ha de ser negativo, y u, v han de ser ambos negativos. Como al mismo tiempo $u^2+v^2 \geq 2uv$ es equivalente a $(u-v)^2 \geq 0$ y por lo tanto claramente cierto, se tiene que

$$40 \geq 3u^2v^2|u+v|,$$

de donde al ser $|u+v| \geq 2$, tenemos que $u^2v^2 \leq \frac{20}{3} < 7$, es decir $uv \leq 2$, luego u, v, bien ambos son -1, bien uno es -1 y el otro -2. Sustituyendo, observamos que ninguno de los dos casos satisface la relación necesaria, con lo que no existen tales u, v, w, y no existe ninguna solución a la ecuación propuesta.

b) Por procedimiento análogo al anterior, llegamos de forma similar a que u, v han de cumplir la relación

$$uv(u+v)(u^2+uv+v^2) = -42,$$

y que bien ambos son -1 (que no satisface la relación), bien uno es -1 y el otro -2 (que sí la satisface). Dejando entonces que z tome cualquier valor entero n, tenemos que existen infinitas soluciones, y que además todas ellas son

$$(x, y, z) = (n, n + 1, n + 3), \qquad (x, y, z) = (n, n + 2, n + 3),$$

o una de sus permutaciones cíclicas, y donde n puede tomar cualquier valor entero, siendo entonces $x - y, y - z, z - x$ una permutación de $-1, -2, 3$, y siendo

$$(-1)^5 + (-2)^5 + 3^5 = -1 - 32 + 243 = 210$$

para todas estas infinitas ternas.

Comentario de páginas web 49

www.mathigon.org

Ante una recomendación de una página web, lo que obviamente procede es seguir el enlace y verla. El mejor comentario sobre ella es el que procede de sus lectores.

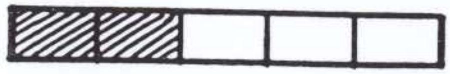
En el caso de la que nos ocupa, conviene decir que es una excelente página de divulgación matemática seria, y que se abra con un navegador moderno (posterior al Explorer 8), o se corre el riesgo de bloqueo. Sería muy bueno tener una versión en español o portugués (la página está en inglés), pero eso es algo que excede de las posibilidades de este comentarista. Las ilustraciones, applets y videos son de magnífica calidad. Resumiendo: sigan el enlace y disfrútenla.

Valladolid, 2 de agosto de 2013.

F. Bellot

La segunda cosa que haremos es tomar dos de esas partes y pintarlas de rojo:

13



Pues bien, la longitud de la parte roja de la cinta se representa así:

$\frac{2}{5}$ de bastón

 $\frac{2}{5}$

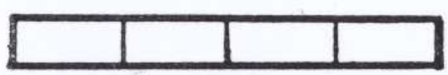
Esta última figura muestra una cinta cuya longitud es $\frac{2}{5}$. O, si ustedes lo prefieren, una cinta de $\frac{2}{5}$ "de bastón" de longitud.

Y mientras tanto, a la princesita Noetheria se le empezaban a salir las lágrimas del esfuerzo que hacía por no reírse. El rey agregó:

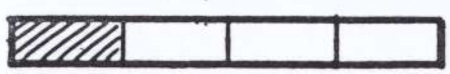
—Como veo que algunos de ustedes ponen cara de no entender muy bien, les daré otro ejemplo.

—Dividiremos ahora una cinta de un bastón de longitud

en cuatro partes de longitudes iguales;



ahora pintemos de rojo una de esas cuatro partes:

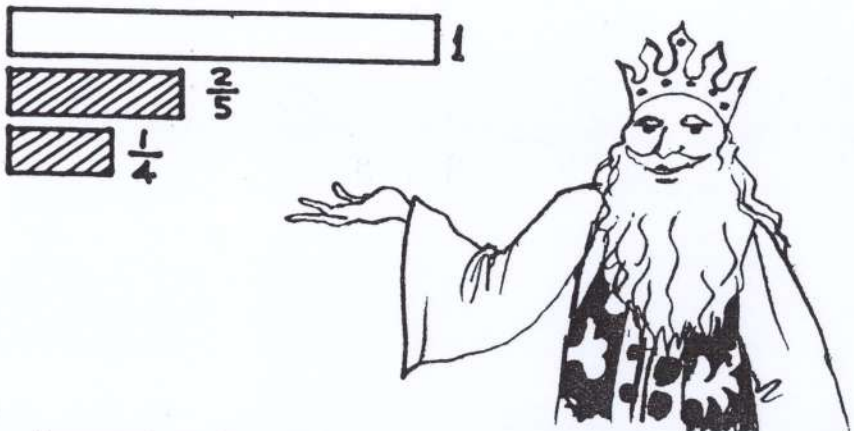


Esta pequeña cinta roja que obtuvimos tiene una longitud de $\frac{1}{4}$ de bastón.

 $\frac{1}{4}$

—Para terminar— dijo el rey— vamos a exhibir en esta sala las cintas que vayan trayendo los concursantes y pretendientes al trono. Colocaremos en esta pared las cintas que representan la unidad de longitud, y los números racionales $\frac{2}{5}$ y $\frac{1}{4}$.

14



—Recuerden. Tienen un plazo de un año para traer la cinta que representa su número racional. Ordenaré que a todo pretendiente le sea entregada una cinta de un bastón de longitud, para usarla en la construcción de un número racional menor que uno. La que represente al número racional más pequeño de todos los números racionales, será la cinta del triunfador.

—¡Entendido! —: Dijeron los cinco guerreros al mismo tiempo y con brío.— Será una larga búsqueda y la comenzaremos ahora mismo. Viajaremos por todo el mundo buscando el número racional más pequeño de todos. Preguntaremos a los sabios de lejanas tierras. Consultaremos hechiceros y oráculos.

—Sé que la búsqueda será larga para ustedes— dijo Su Majestad— y por eso los llamaré de ahora en adelante los Caballeros de la Larga Búsqueda.

Mientras el rey decía todo esto, la princesita Noetheria, muerta de risa, hundía su carita en un gran pañuelo que una de las damas de la corte le acababa de pasar. Muchos de los presentes la miraban sin entender qué podría parecerle tan gracioso a la hija del rey en un momento como aquel. Parecía saber algo que los demás no sabían.

ooo O ooo .

15

Y así fue como empezó la larga búsqueda del número racional más pequeño de todos. Los cinco caballeros guerreros, y otros muchos pretendientes, se lanzaron por el mundo en busca de un número racional que cumpliera las tres condiciones establecidas por el rey de Ruselia. Preguntaron a las brujas y a las hadas. Pidieron consejo a magos y hechiceros. Tuvieron largas conversaciones con ogros y con gnomos.

16

Por donde pasaban, dejaban a la gente pensando en aquellos interesantes números más grandes que cero pero más pequeños que el uno. Cuando los hombres de remotas naciones se enteraban de que el rey Bertrand de Ruselia había prometido su trono, la mano de su hija, y las riquezas de su país, a aquel que le presentara el menor de los números racionales comprendidos entre cero y uno, verdaderas multitudes de aspirantes recorrían el mundo en su persecución.

A los dos meses justos del inicio de aquel concurso, se presentó ante la corte el primero de los cinco guerreros, el más fiero de todos. Quería mostrarle al rey el número racional que había encontrado. Muy seguro de sí mismo, dijo:

—Su Majestad, aquí traigo una cinta de seda que representa a un número racional muy pequeño. Empecé con la cinta de un bastón de longitud:

después dividí esta cinta en dos porciones de longitudes iguales:

luego pinté de rojo una de esas partes:

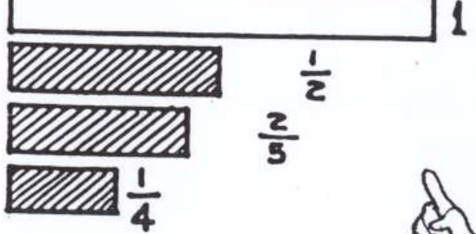
y obtuve una cinta de $\frac{1}{2}$ bastón de longitud;

de modo que aquí está mi cinta, la cual representa al número racional $\frac{1}{2}$ de acuerdo con tus instrucciones.

—Tu número racional cumple con mis tres condiciones y por lo tanto lo acepto, sin más.— respondió el rey. Colocaremos ahora mismo tu cinta en el lugar que le corresponde, en la pared de la sala en la cual exhibiremos todos los números racionales que los pretendientes obtengan.

El rey pasó a la sala de las cintas acompañado por otros miembros de su corte y por el caballero que acababa de traerle una representación del racional $\frac{1}{2}$.

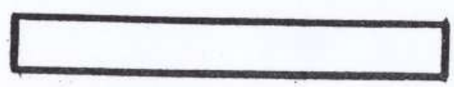
17



—Cómo puedes ver— continuó diciendo el rey— tu número es ciertamente menor que uno y mayor que cero. Pero no es el más pequeño de todos. Los ejemplos que yo puse, $\frac{2}{5}$ y $\frac{1}{4}$, son más pequeños que tu número. Por lo tanto, quedas eliminado de la competencia.

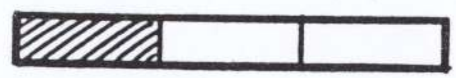
Treinta días después, apareció el segundo de los fieros guerreros con cara de triunfo por el palacio del rey de Ruselia.

—Traigo una cinta que representa al número racional más pequeño de todos. De manera que prepárense para declararme vencedor en el certamen y nuevo soberano de Ruselia. Les explicaré cómo construí una representación del número racional más pequeño de todos. Empecé con mi cinta de un bastón de longitud:



a continuación dividí esta cinta en tres partes, cada una de ellas, de la misma longitud:

Luego pinté una de esas tres pequeñas partes de rojo

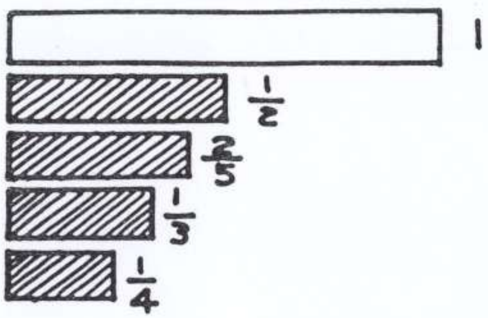


18

y obtuve una cinta roja de $\frac{1}{3}$ de bastón de longitud.

$\frac{1}{3}$

—Vamos inmediatamente a la sala donde están las otras cintas— dijo el rey. Llegaron a la sala y colocaron la cinta recién traída al palacio, en el sitio correspondiente:



19

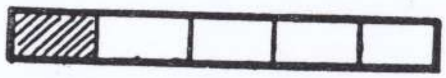
—Como verás— dijo Su Majestad— tú número es menor que $\frac{2}{5}$,uno de los dos números racionales que yo puse como ejemplos. Pero no es menor que $\frac{1}{4}$. De manera que quedas descalificado.

Cuatro semanas después fue recibido en el palacio el tercero de los guerreros que participaban en el concurso del rey Bertrand. La gente decía que este tercer caballero era uno de los más inteligentes de los cinco y que a lo mejor resultaba vencedor en la prueba. El fiero pretendiente fue recibido por Su Majestad sin tardanza; en cuanto se le dio audiencia, explicó:

—Señor, traigo un número racional que, estoy seguro, es el más pequeño de cuantos cumplen tus condiciones. Para construir una representación de mi número, empecé con la cinta de un bastón de longitud que me diste:

Después, dividí esta cinta en cinco partes de la misma longitud, como hiciste tú el día que nos pusiste ejemplos de números racionales:

pero, en vez de pintar de rojo dos de esas partes, pinté sólo una:



esta parte roja de mi cinta tiene una longitud de $\frac{1}{5}$ de bastón. O sea, representa al número racional $\frac{1}{5}$ según lo convenido.

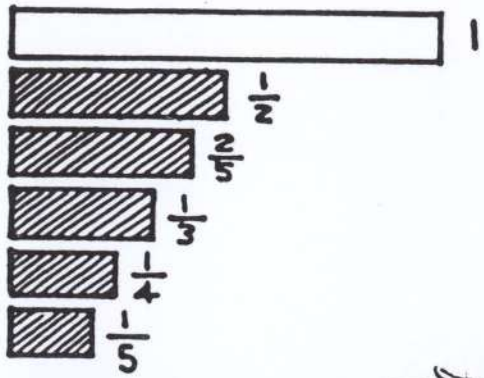
20

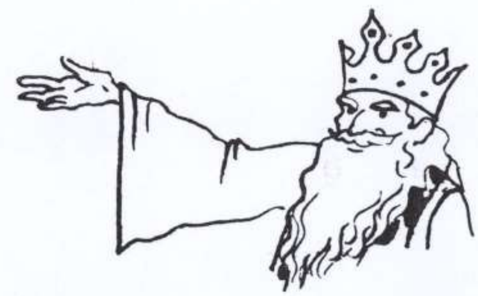
 $\frac{1}{5}$

Los señores y señoras de la corte ahí presentes, se miraron nerviosos unos a otros. El número $\frac{1}{5}$ era el menor de los números racionales traídos ante el rey hasta ese momento. Tenían miedo de que uno de aquellos hombres de guerra resultara ganador del concurso y, por lo tanto, su nuevo rey.

El rey Bertrand invitó a todos a pasar con él a la sala en la cual se exhibían las cintas que representaban a los números racionales recibidos hasta ahora. Una vez ahí, fue colocada en el sitio correspondiente la representación del número $\frac{1}{5}$:

21





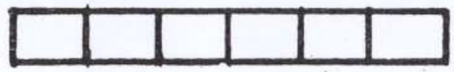
—Has traído, ciertamente, el menor de los números racionales hasta el día de hoy. Tu número es menor que los números racionales que yo puse como ejemplos, y menor que todos los que otros pretendientes han señalado hasta este momento. Eres, pues, el primer aspirante que no puede ser descalificado enseguida. Pero el plazo de la prueba no ha terminado. Debes tener paciencia y esperar.

Pasó otro mes y llegaron al palacio, a galope tendido, los dos últimos guerreros. El rey los recibió a los dos a la vez y, a la suerte, escogió a uno de ellos en primer término para recibirle su número racional.

Muy confiado en su victoria, el caballero guerrero comenzó:

—Su Majestad, yo dividí mi cinta de un bastón de longitud

en seis partes de longitudes iguales



y pinté una de ellas de rojo:

me quedé con una cinta roja cuya longitud es $\frac{1}{6}$ de bastón;

 $\frac{1}{6}$

estoy seguro de que mi número racional es el menor de todos; seré declarado ganador de la prueba y recibiré las recompensas del caso.

—Vamos pronto a la sala de las cintas a comparar tu cinta con las que me han traído los otros participantes en este concurso.

Al llegar a la sala y colocar la cinta de $\frac{1}{6}$ de bastón de longitud en su lugar, el rey y todos los presentes vieron y comentaron que, en realidad, la cinta recién colocada, era la menor de cuantas habían llegado a manos del rey Bertrand.

22

Capturado en Internet 49

Los peligros del Álgebra

Aniversario de la Universidad de Coimbra

Técnicas Comuns de Demonstrações Matemáticas

Demonstração por Intimidação: Trivial!

Demonstração por notação carregada: O teorema decorre imediatamente do fato de que $\left|\bigoplus_{k\in S}\left(\mathfrak{K}^{F^{\alpha}(i)}\right)_{i\in\mathcal{U}_k}\right| \preccurlyeq \aleph_1$ quando $[\mathfrak{H}]_{\mathcal{W}} \cap \mathbb{F}^{\alpha}(\mathbb{N}) \neq \emptyset$.

Demonstração por Literatura Inacessível: O teorema é um corolário fácil cuja demonstração se encontra em uma nota escrita à mão entregue durante uma conferência da Sociedade Iugoslava de Matemática em 1973.

Demonstração por Referência Fantasma: Esta demonstração encontra-se na página 478 (o livro tem apenas 396 páginas).

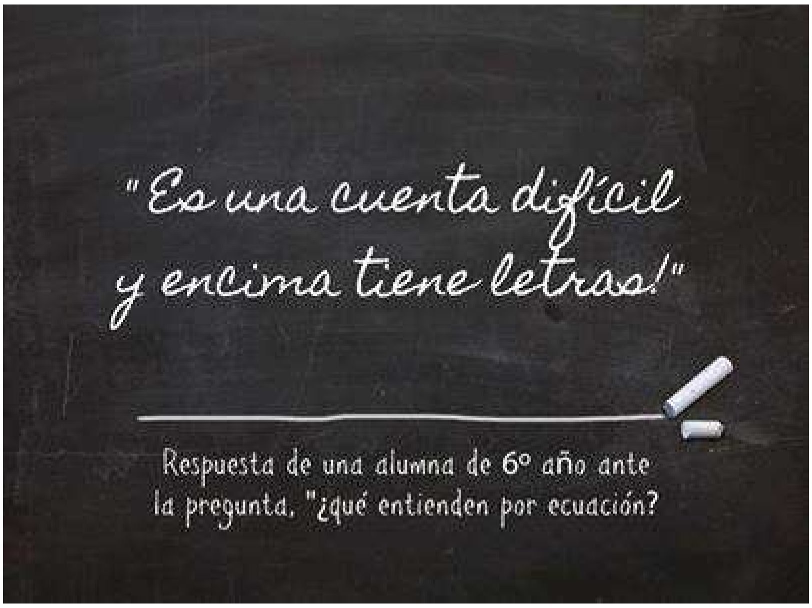
Demonstração por Argumentação Circular: A proposição 5.18 [BL] é um corolário simples do teorema 7.18 em [C], o qual é novamente baseado na corolário 2.14 em [K]. (Por sua vez, o corolário 2.14 em [K] é referenciado na proposição 5.18 em [BL]).

Demonstração por Autoridade: Um grande amigo meu disse que havia encontrado uma prova disto há alguns anos atrás... Ele garantiu!

Demonstração por Referência na Internet: Para aqueles que tiverem interesse, o resultado encontra-se na *web-page* do livro (contudo, o site já não existe mais).

Demonstração por Evasão: *Capítulo 3:* A demonstração disso será deixada para o Capítulo 7, quando a teoria estiver mais desenvolvida. *Capítulo 7:* Para facilitar a compreensão, iremos demonstrar apenas para o caso $z = 0$, mas o caso geral será tratado no Apêndice C. *Apêndice C:* A demonstração formal foge ao escopo deste livro. Entretanto, é fácil ver intuitivamente que isto é verdade.

Diversos tipos de demostraciones



A preguntas tontas, respuestas inteligentes

Universidad de Ciudad del Cabo, IMO 2014

Número

50

Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

Número 50 (septiembre 2013 - mayo 2014)

ISSN – 1698-277X

ÍNDICE

Recibidas soluciones de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, España; Marcos Martinelli, Brasilia, Brasil; y de los proponentes

Problema 242

Recibidas soluciones de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, España y de los proponentes.

Problema 243

Recibidas soluciones de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, España; Marcos Martinelli, Brasilia, Brasil y de los proponentes.

Problema 244

Recibidas soluciones de Ignacio Larrosa Cañestro, La Coruña, España; Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, España; Marcos Martinelli, Brasilia, Brasil; y del proponente.

Problema 245

Recibidas soluciones de Saturnino Campo Ruiz, Salamanca, España; Andrea Fanchini, Cantú, Italia; Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, España.

El editor se complace en comunicar la recuperación de David Monk, autor del problema 245.

Noticia de congresos, referencia de páginas web y reseña de libros (50)

Tres necrológicas: Pawel Jarek , Leon van den Broek y Marie Hélène Deledicq, por F. Bellot

Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación, Buenos Aires (Argentina). 12 al 14 de noviembre de 2014

Divertimentos Matemáticos (50)

Los Caballeros de la Larga Búsqueda (3ª y última parte), por Víctor Buján Delgado

Otras informaciones

Cursos de GeoGebra

Para Primaria
http://www.ibertic.org/primariageogebra/

Para Secundaria
http://www.ibertic.org/ticymatematica/

Formación Docente

Especialización en Educación Matemática (secundaria)
http://www.oei.es/cursomatematica/

Curso Programación, Creatividad y Resolución de Problemas con Scratch
http://www.ibertic.org/scratch/

Colaboración docentes alumnos

Club Iberoamericano GeoGebra

http://www.ibertic.org/clubgeogebra.php

Realizado en el marco del **Instituto Iberoamericano de Enseñanza de las Ciencias y la Matemática (IBERCIENCIA)** con la colaboración de la **Consejería de Economía, Innovación, Ciencia y Empleo de la Junta de Andalucía**

Revista Escolar
de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática

EDITORIAL EN EL CINCUENTENARIO

El que la Revista Escolar de la O.I.M. llegue a su volumen número 50 justifica, en mi opinión, un editorial. Y lo primero que hay que decir son dos palabras: *gracias y perdón.*

Gracias a todos los colaboradores, y lectores de la Revista. Gracias, sin duda a la OEI, en cuyas generosas páginas web se alberga la REOIM y sin cuyo decidido apoyo desde el primer momento no hubiera sido posible llevar a efecto la iniciativa. Gracias a los más de treinta mil quinientos suscriptores, que, aparte del aviso por email de que el siguiente número está en la red, no reciben otros beneficios. Muchas gracias a todos.

En segundo lugar, el editor tiene que pedir perdón. En 2006, un persistente vértigo provocó un impasse de varios meses en la publicación. Ahora se ha vuelto a producir una larga interrupción, afortunadamente no por enfermedad, sino por un exceso de trabajo (parece mentira que esto lo diga un jubilado…): la Olimpiada Matemática Española, el Concurso Canguro Matemático, los Seminarios de Problemas, el proyecto ESTALMAT…

Por eso presento mis excusas a los lectores de la Revista, y aprovechando que 50 es un *número redondo*, en lugar de los cinco problemas propuestos en cada número, en éste proponemos 10, e incluimos las soluciones de los problemas del número anterior de todos los que nos las han hecho llegar.

Quisiera mencionar también a los autores de los Artículos que presentamos en este volumen.

El Prof. Claude Villers es un veterano matemático belga, cuyo artículo fue presentado en el Congreso de la Sociedad Belga de Profesores de Matemáticas de expresión francesa celebrado en 2010 en Dinant, una de las ciudades con emplazamiento más espectacular en el valle del río Meuse, y que ha accedido amablemente a que lo traduzcamos para los lectores de la REOIM.

Los Prof. Batinetzu-Giurgiu y Neculai Stanciu, de Rumania, nos hicieron llegar el artículo complementario del que apareció en el vol. 49 al poco tiempo de la publicación de éste, y han tenido que esperar pacientemente la aparición del volumen 50.

La profesora Ekaterina Zhukova, de la Universidad de Electrotecnia de San Petersburgo, y su colaborador A. Kiselev, de la Universidad de San Petersburgo contribuyen con un artículo de Introducción a la teoría de grafos que espero sea del agrado de todos los lectores, y en especial de los jóvenes. Contiene un gran número de ejercicios, cuyas soluciones se incluyen en la última parte de su contribución. Creo que es una excelente muestra de la manera de enseñar en los centros rusos.

Los posibles errores son imputables al editor, naturalmente.

Las tres notas necrológicas afectan en esta ocasión a tres destacados miembros de la Asociación Kangourou Sans Frontières que han desaparecido entre febrero de 2013 y abril de 2014: Pawel Jarek, de Polonia; Leon van den Broek, de Holanda, y Marie Hélène Deledicq, de Francia. Nuestras más sinceras condolencias a sus familiares y amigos.

La OEI está ahora inmersa en la organización, el próximo mes de noviembre, de un macro congreso en Buenos Aires sobre Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación Matemática en Iberoamérica. Por eso la sección Noticia de Congresos está dedicada a este magno acontecimiento.

Y la sección de Divertimentos Matemáticos contiene el tercer y último capítulo del relato *Los Caballeros de la Larga Búsqueda,* del Prof. Víctor Buján Delgado, de Costa Rica.

Repito mis palabras iniciales: *Muchísimas gracias a todos, y perdón por el retraso en la salida de este vol. 50 de la REOIM.*

Francisco Bellot Rosado

Valladolid, mayo de 2014.

Artículos, Notas y lecciones de preparación de Olimpiadas

<u>Lo que se piensa bien ….</u>

Claude Villers

Dirección del autor: Rue Louis Piérard, 29 à 7022 Hyon
Mail : claude.villers@swing.be

Este texto es el soporte de la conferencia presentada en Dinant, el miércoles 25 de agosto de 2010, en el marco del 36e congreso de la SBPMef (Société Belge des Professeurs de Mathématiques d'expression française).

> Las matemáticas no se aprenden : se comprenden.
> **Autor desconocido**

1-Introducción

« Maths et mots » era el tema principal del congreso.
Un tema vasto, sin duda alguna, y particularmente abierto.
Puede, evidentemente, suscitar la expresión de numerosos puntos de vista yendo en sentidos diversos y encontrarse también en el origen de debates, discusiones, textos, intervenciones, … sin duda muy interesantes.
Por otra parte, el tema ha sido tratado de diferentes formas en numerosas obras cuyas referencias pueden encontrarse fácilmente en Internet utilizando algún motor de búsqueda.

Es bastante evidente que la matemática, tanto en su enseñanza como en sus aplicaciones y en sus investigaciones, necesita, al menos para su comunicación, el uso de diversos lenguajes, entre los cuales está el lenguaje coloquial, formado por frases constituidas a su vez por palabras, y que tiene ciertamente un lugar importante.

La búsqueda de la calidad de esta comunicación y de su percepción aparecen abundantemente en las recomendaciones metodológicas que acompañan a los programas de los cursos de matemáticas, especialmente los de los dos primeros cursos de la enseñanza secundaria.

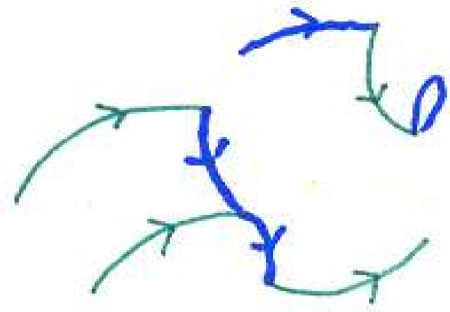
En las listas de competencias a desarrollar que conciernen al lenguaje, están por ejemplo ::

- Expresarse correctamente,
- Formular correctamente los razonamientos,
- Enunciar y redactar claramente la respuesta a la pregunta planteada o la conclusión del razonamiento elaborado,
- Comprender un mensaje,
- Analizar la estructura global de un texto y distinguir en él lo esencial de lo accesorio,
- Traducir una información de un lenguaje a otro,
- Pasar del lenguaje coloquial al algebraico o al gráfico y recíprocamente,
- Dominar el vocabulario y el simbolismo,
- Explicar y redactar una demostración,
- Extender una regla, un enunciado o una propiedad a un dominio más amplio,
- etc…

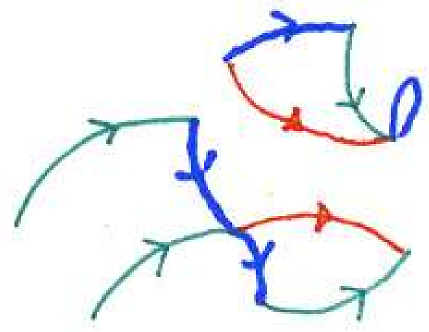
Todos nosotros estamos ciertamente convencidos de la necesidad de alcanzar lo mejor posible esos objetivos, pero también sabemos que no siempre es evidente conseguirlo totalmente y que, a veces, son esas « pasadas de frenada » en el nivel de la lengua utilizada las que plantean problemas a ciertos alumnos.

He aquí un ejemplo vivido por mí, hace…. mucho tiempo.
El ejercicio propuesto a los alumnos les pedía dibujar las flechas de la composición de dos relaciones mediante flechas de colores.
La consigna a aplicar era la siguiente : « *Cada vez que a una flecha verde le sigue una flecha azul, entonces se traza una flecha roja directa».*

La situación inicial era, por ejemplo :

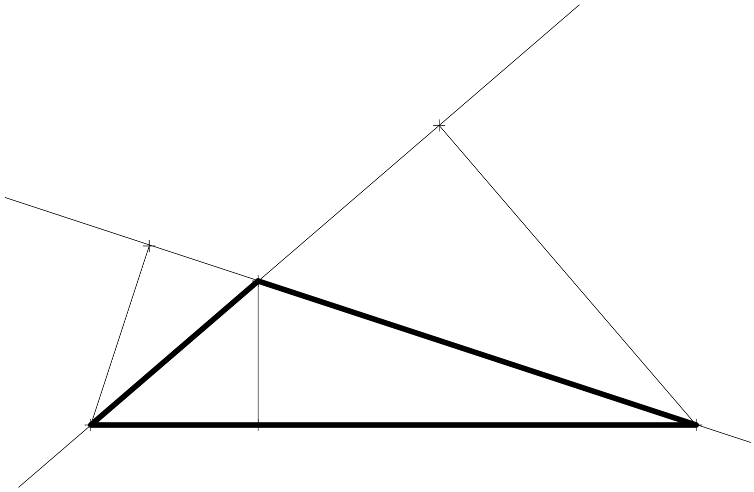


Un alumno ha propuesto la construcción de la derecha, justificándola porque si una flecha verde está seguid de una azul, es que la azul está <u>detrás</u> de la verde y no delante de ella.



Otro ejemplo.
¿Qué significados atribuímos a la palabra « altura » ? cuando se dice :

- El área de un triángulo es igual a la mitad del producto de su base por su altura.
- Las tres alturas de un triángulo se cortan en un mismo punto, llamado ortocentro del triángulo.



En el primer caso, la « altura » es la longitud de un segmento (la base también).
En el segundo, ¿las alturas siguen siendo segmentos ?

Esos dos ejemplos ilustran bien que una misma palabra puede tener diferentes significados según el contexto en que se encuentra en el momento en que se utiliza.
Sin embargo, eso puede resultar perturbador para los alumnos que nos escuchan. Conviene, por tanto, estar atentos.

Vamos ahora a presentar algunas situaciones de enseñanza que ilustran las relaciones de causa a efecto que pueden existir entre las matemáticas y las palabras.
En esta ocasión, se verán situaciones muy sencillas que permitan reencontrar nociones enseñadas que aclaren, quizá un nuevo día y que ofrezcan a menudo la oportunidad de abordar nociones matemáticas nuevas.

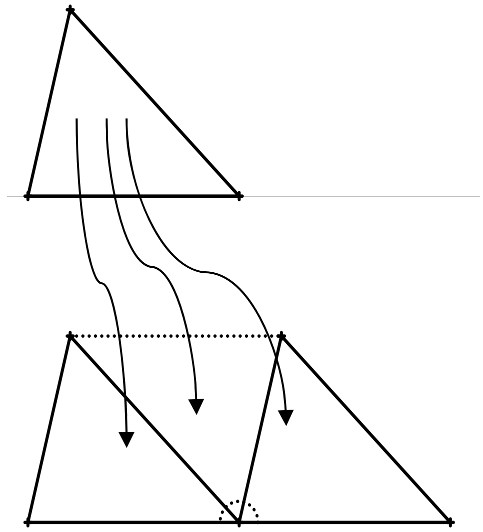
2 – Matemáticas sin palabras

Es posible practicar ocasionalmente matemáticas sin utilizar palabras. Es el caso, por ejemplo, en algunas demostraciones.
Se pueden encontrar numerosos ejemplos en un libro como « Proofs without words » de Roger B. Nelsen o en sitios de Internet.

Sin embargo, deberían acompañar o seguir a esas figuras algunos comentarios orales o escritos.

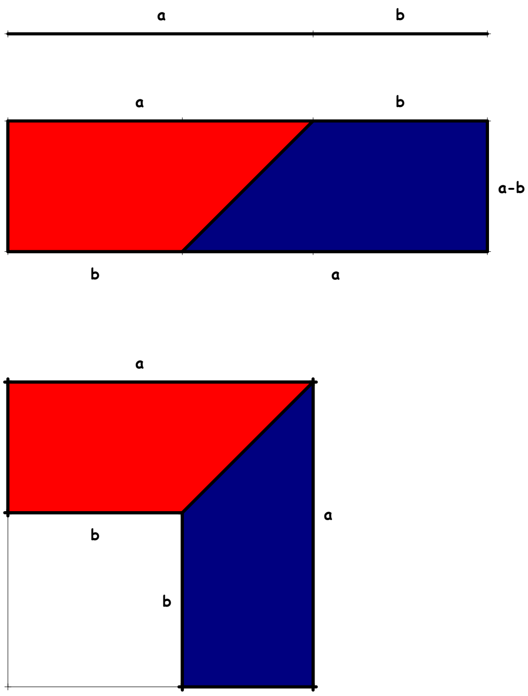
He aquí ejemplos de tales justificaciones sin palabras.

- **Suma de los ángulos de un triángulo**



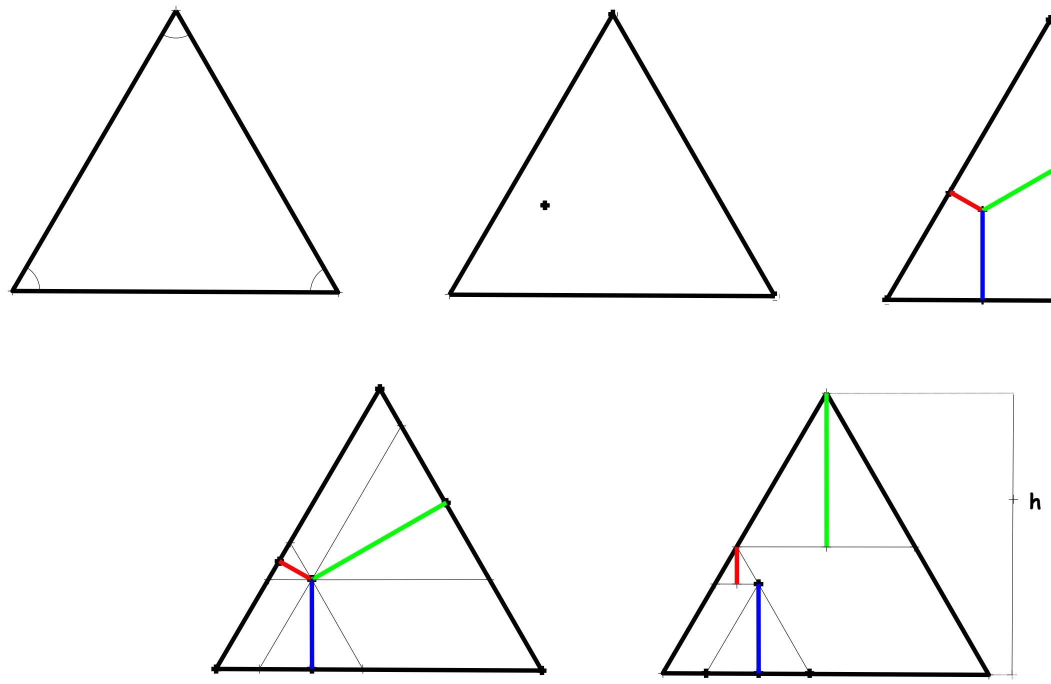
La suma de los tres ángulos interiores de un triángulo es el ángulo llano.

- **Diferencia de dos cuadrados**



$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

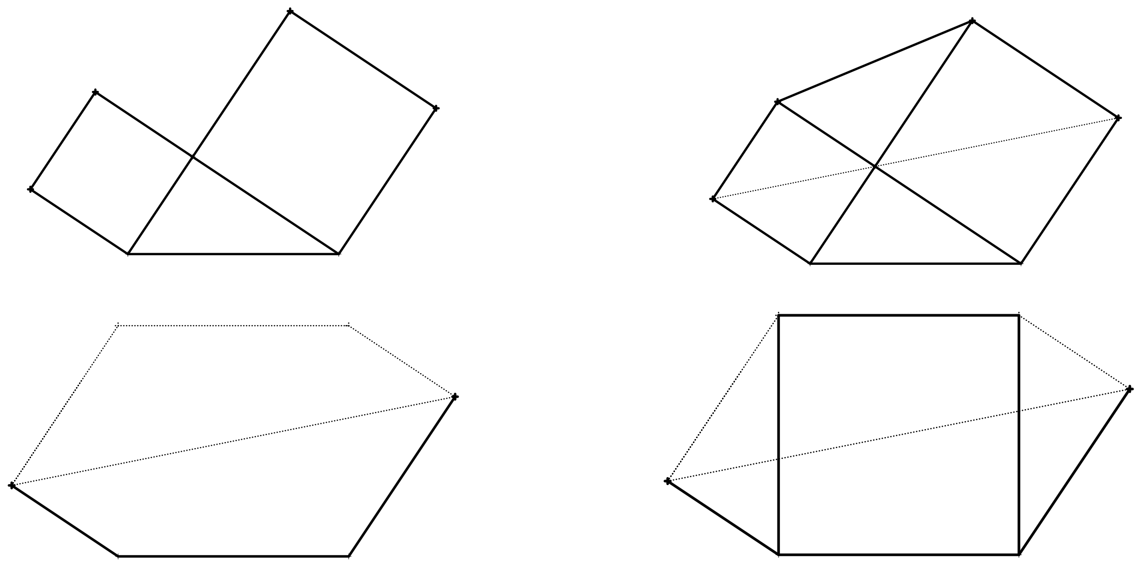
- **El teorema de Viviani**



Teorema : la suma de las distancias de un punto interior a un triángulo equilátero a los tres lados es igual a la longitud de la altura del triángulo.

- **El teorema de Pitágoras por Leonardo da Vinci**

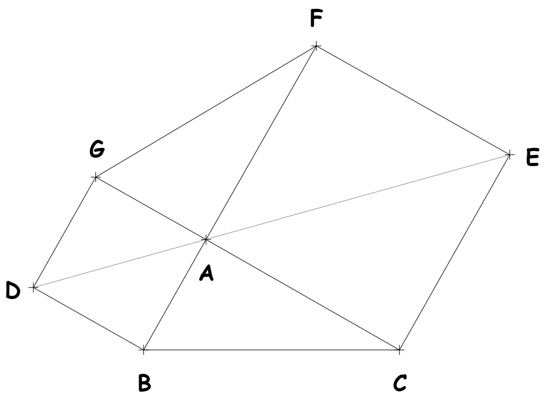
De izquierda a derecha y de abajo a arriba.



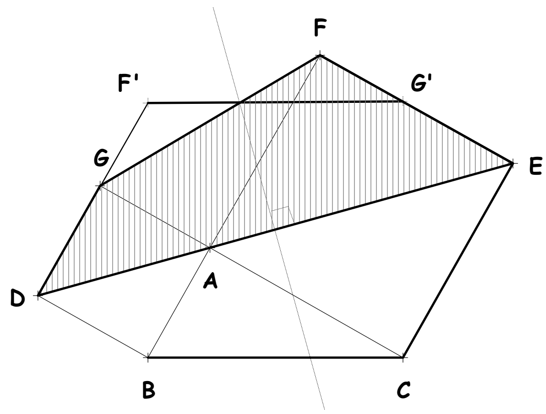
Esta justificación es espectacular, pero hay que probar que el cuadrilátero de trazo pleno es efectivamente un cuadrado.

He aquí, pues, una propuesta de demostración de la relación en cuestión.

BAC es un triángulo rectángulo; BAGD y CAFE son los cuadrados construídos sobre los lados del ángulo recto.



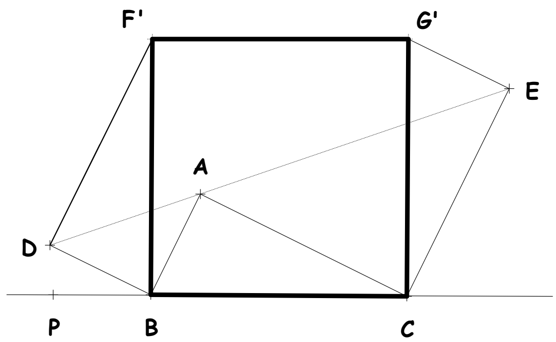
Trazamos el segmento [GF].
|GF|=|BC| (isometría de los triángulos AGF y ABC)
Trazamos [DA] y [AE].
D, A y E están alineados porque el ángulo DAE mide 45°+90°+45° es decir 180° (diagonales de cuadrados y triángulo rectángulo)



Consideremos la imagen EG'F'D de DGFE por la simetría ortogonal cuyo eje es la mediatriz de [DE] .
Toda simetría ortogonal conserva las longitudes, las áreas y las medidas de los ángulos en valor absoluto.
Luego DGFE y EG'F'D tienen la misma área y por consiguiente los hexágonos BDGFEC y BDF'G'EC tienen también la misma área.

Los puntos D, G y F' están alineados pues los ángulos no orientados GDA y F'DA miden los dos 45° .
Igualmente E, G' y F están alineados.

Se tiene también |F'G'|=|FG|.
Pero|FG|=|BC|=|BF'|=|CG'|(triángulos isométricos).
Luego |BF'|=|F'G'|=|G'C|=|BC|.



Observemos el hexágono BDF'G'EC.
Tracemos [BF'] y [CG']

El cuadrilátero BCG'F' es un rombo pues sus cuatro lados son de la misma longitud (la de la hipotenusa del triángulo rectángulo BAC).

Sea P un punto de la recta CB (ver la figura).
DB y AC son perpendiculares a AB (cuadrado y triángulo rectángulo), luego DB//AC.
Los ángulos PBD y PCA son isométricos (ángulos correspondientes formados por dos paralelas y una secante).
Ahora bien, los ángulos BCA y BF'D son isométricos (triángulos isométricos).
Los ángulos DBF' y BF'D sont complementarios (triangulo rectángulo) luego los ángulos DBF' y DBP también lo son.
PBF' es pues un ángulo recto, así como F'BC.

El rombo BCF’G’ tiene un ángulo recto y por tanto es un cuadrado.

Comparando la segunda y cuarta figuras que tienen la misma área y haciendo abstracción de los dos triángulos rectángulos isométricos que aparecen en ellas, resulta que ***la suma de las áreas de los cuadrados construídos sobre los lados del ángulo recto de un triángulo rectángulo es igual al área del cuadrado construído sobre la hipotenusa.***

3 – Matemáticas con palabras

En el sentido estricto del título, es cierto que es posible encontrar matemáticas y desarrollar nociones de los programas utilizando diversos textos en los cuales las palabras o los conjuntos de palabras son considerados únicamente como simples objetos.

He aquí un ejemplo sacado de El Burgués Gentilhombre de Molière que puede abrir el camino al análisis combinatorio.

M. JOURDAIN. No, no, no, yo no quiero todo eso : yo no quiero más que lo que os he dicho : « Belle marquise, vos beaux yeux me font mourir d'amour. »
MAESTRO DE FILOSOFÍA. Es preciso extender un poco el asunto.

Los cinco términos que son: belle marquise - vos beaux yeux - me font – mourir - d'amour, pueden ser permutados. Engendran así 120 anástrofes. He aquí 10.

1: (belle marquise vos beaux yeux me font mourir d'amour)
2: (vos beaux yeux belle marquise me font mourir d'amour)
3: (me font belle marquise vos beaux yeux mourir d'amour)
4: (belle marquise me font vos beaux yeux mourir d'amour)
5: (vos beaux yeux me font belle marquise mourir d'amour)
6: (me font vos beaux yeux belle marquise mourir d'amour)
7: (mourir belle marquise vos beaux yeux me font d'amour)
8: (belle marquise mourir vos beaux yeux me font d'amour)
9: (vos beaux yeux mourir belle marquise me font d'amour)
10: (mourir vos beaux yeux belle marquise me font d'amour

Naturalmente, queda el problema de construirlos todos de manera organizada y no anárquicamente. Ahí aparece la noción de algoritmo.
Quizá es el momento de resolverlo en colaboración con el curso de informática.

4 – Las matemáticas después de las palabras

Una lectura, una afirmación o una reflexión bien entendidas son a menudo ocasiones de establecer una búsqueda de lo que puede desembocar en algo creativo en el dominio matemático. Veamos un ejemplo.

Es bien conocida la emisión « Cifras y letras » de las emisoras de TV, y en particular, su componente « La cuenta está bien ».

El objetivo de este último juego consiste en formar, en un tiempo limitado, un número natural de 3 cifras (por tanto entre 100 y 999), utilizando las operaciones elementales (suma, resta, multiplicación y división exacta) sobre 6 números naturales sacados al azar de entre los números naturales siguientes: los que van de 1 a 10, que pueden aparecer dos veces cada uno, como máximo, más 25, 50, 75 y 100 , es decir 24 possibilidades en total que se pueden suponer equiprobables.

4-1 La cuenta suele estar bien.

Este es el título de un artículo que trata del juego, publicado en el número de marzo-abril de 2010 del boletín n° 487 de l'APMEP (Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public (France)), firmado por Michel Lafond.
El autor estudia este juego bajo diversos aspectos combinatorios y muestra de manera muy detallada que la probabilidad de hacer bien la cuenta es particularmente grande.
Para ello, el autor calcula el número total de casos del juego, lo que no plantea gran dificultad si se dispone de elementos de análisis combinatorio.
Ese número es C(24,6)X900 o sea 121 136 400.
A continuación, mediante un cálculo detallado y bastante complejo demuestra que el número de casos que permiten obtener el resultado correcto es 113 554 259.
La probabilidad en cuestión es pues 113 554 259/121 136 400 es decir 0,93740823567…

4-2 Las palabras en cuestión

En el transcurso de una emisión, los dos concursantes debían tratar de formar el número 864 o aproximarse a él lo más posible, con los números 2, 1, 5, 3, 1, 9.
Ambos han respondido 540 efectuando (2+1)x(3+1)x5x9.

El presentador ha declarado entonces que 540 era efectivamente el máximo valor posible y sobre todo ha añadido con insistencia que ambos concursantes habían aplicado bien la siguiente regla « que no me canso de repetir ».

> ***« Si aparece un 1 entre los números extraídos, entonces el producto de otros dos de los números extraídos sera el mayor posible si se suma el 1 al menor de los dos números, antes de multiplicarlos ».***

Efectivamente, en el caso de la situación propuesta es preferible calcular (2+1)x(3+1)x5x9 en vez de 2x3x(5+1)x(9+1) que vale solamente 360.

<u>Reacciones</u>

Una primera reacción consiste en preguntarse si la regla enunciada es correcta. Algunos ejemplos numéricos utilizando los números autorizados por el juego (e incluso otros) parecen ir en el sentido de una respuesta afirmativa.

Y al mismo tiempo esas verificaciones numéricas nos empujan a <u>abandonar el estricto dominio de los números utilizables en el juego</u> y a generalizar la regla a los elementos del conjunto N de los números naturales.
Es conveniente entonces recurrir a una demostración, es decir, utilizar variables que generalicen el estudi hecho.

Sean dos naturales a y b tales que $a \leq b$ y el número 1 que se sumará a uno u otro antes de efectuar el producto.

Comparemoss (a+1)b con a(b+1) es decir ab+b conc ab+a.
Se tiene : ab = ab
Y $a \leq b$
De ahí, $ab + a \leq ab + b$
O bien $ab + b \geq ab + a$ lo que da validez a la regla enunciada.

5 – Las matemáticas antes de las palabras

5-1 Puesta en situación

a y b son dos números tales que $a - ab + b = 0$.   *¿Qué significa esta igualdad? ¿Qué interpretación darle ?*

Existen, desde luego, diferentes maneras de traducir esta espresión al lenguaje ordinario, transformándola.
Así se utiliza la competencia de interpretación que da sentido a la escritura de la fórmula.

$a - ab + b = 0$ se escribe como $(a+b) - ab = 0$
La diferencia entre la suma de dos números a y b y su producto es nula.

$a- ab + b = 0$ se escribe también $a+b = ab$
La suma de dos números a y b es igual a su producto.

Se observará que esas expresiones no traducen en ningún modo una propiedad general de los números, sino una igualdad local.

Esta situación ambigua podía evitarse enunciando :

a y b son dos números tales que la diferencia entre su suma y su producto es nula.
a y b son dos números tales que su suma es igual a su producto.

5-2 Investigaciones

Busquemos, en primer lugar, valores naturales de a y b.
Se obtienen rápidamente los valores siguientes :
$a=b=0$ dan $a+b=0=ab$ y $a=b=2$ dan $a+b=4=ab$

Otros ensayos dan lugar a casos interesantes que generan terminología matemática.
Por ejemplo $a=1$ da $1 - b + b = 0$ o sea $1=0$ que es imposible. a no puede valer 1.
La cuestión es ahora buscar si existen pares (a,b) de NxN distintos de (0,0) y (2,2) que verifiquen la igualdad. Eso exige un tratamiento matemático que constittuye una cierta forma de investigación.

5-3 Búsqueda de pares (a,b) de NxN

Vamos a expresar b en términos de a pero también sería posible escribir a en términos de b.
Así aparecen las nociones de variable independiente y de variable dependiente.
Sea pues $a-ab+b=0$.
Entonces $a - b(a-1) = 0$ o bien $a=b(a-1)$ luego $b = \frac{a}{a-1}$. La ley de formación de b en términos de a es bastante simple.
El denominador a-1 no puede anularse pues a no puede valer 1. Volvemos a encontrar la condición hallada previamente.

Además se tiene b=a/(a-1) o sea b=(a-1+1)/(a-1) [1]
Es decir b=1+ 1/(a-1)

Para que b sea un número natural, es necesario que a – 1 divida a 1, lo que da a-1=1 ó a-1=-1 de donde a=2 ó a=0.
Las dos únicas parejas de naturales son pues (2,2) y (0,0).
Esto confirma lo que habíamos hallado antes y responde a nuestra pregunta.

5-4 Y en RxR?
Todo valor de a, distinto de 1, proporciona un valor correspondiente para b.
(Ejemplos: a= 5 da $b = \frac{5}{6}$, a= -3 da $b = \frac{3}{4}$, $a = \frac{1}{4}$ da $b = \frac{-1}{3}$, etc…)
Es claro que existen infinitas parejas (a,b) de números reales tales que
a-ab+b=0

La tabla muestra algunas de ellas.

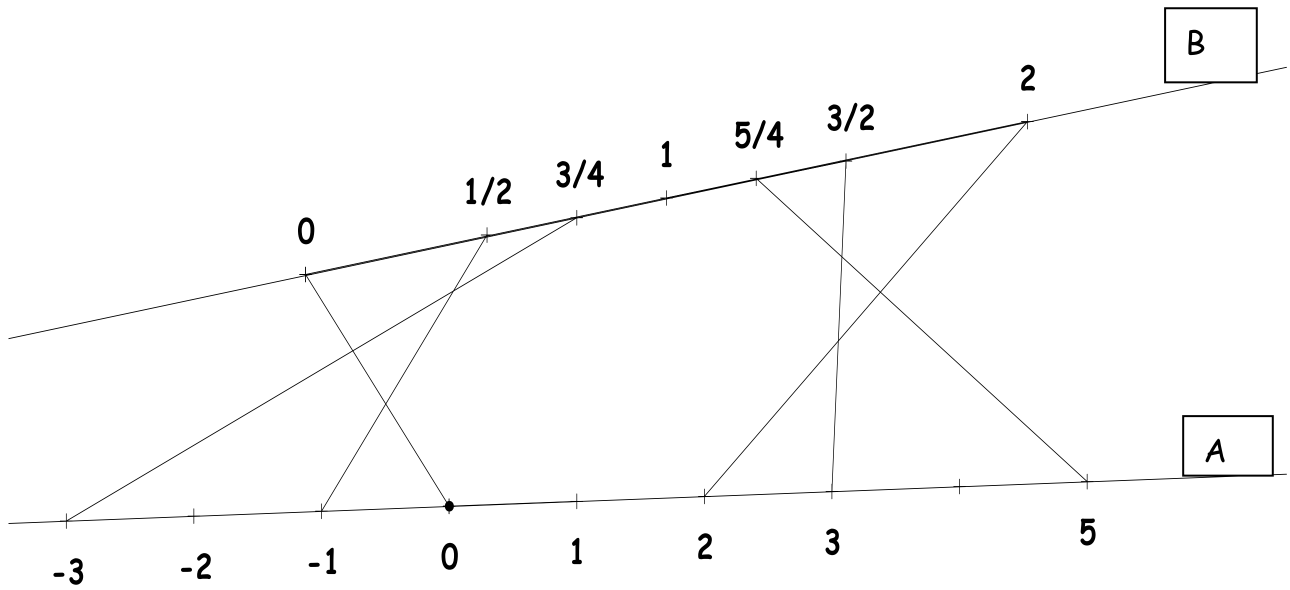
a	b
-2,00	0,67..
-1,50	0,60
-1,00	0,50
-0,50	0,33..
0,00	0,00
0,50	-1,00
1,00	
1,50	3,00
2,00	2,00
2,50	1,67..

[1] La transformation de la fraction utilisée ici pourra être réinvestie dans la rencontre ultérieure d’autres notions (asymptote oblique, p. ex.).

<u>5-5 Representaciones gráficas</u>

a y b son ahora <u>números reales</u>.

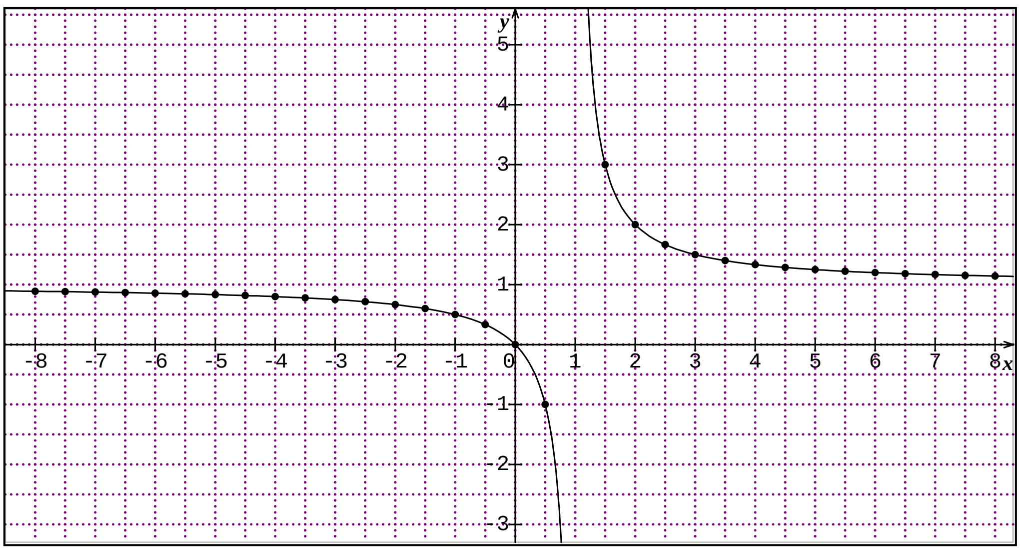
Podemos representar los valores de a sobre una recta dotada de una referencia (0,1) y los valores de b sobre otra recta igualmente dotada de otra referencia (0,1) como muestra el ejemplo que sigue.



Llamaremos a esta dibujo una « gráfica segmentaria ».

De hecho, la utilización de las flechas en vez de los segmentos sería lo mismo que establecer el grafo sagital de la función que relaciona los elementos de A con los de B.

Naturalmente, es posible utilizar la representación de una gráfica cartesiana. He aquí una parte.



NB : Aquí la función utilizada es y=f(x)=x/(x-1) con x distinto de 1 en vez de b=f(a)=a/(a-1) con a distinto de 1.

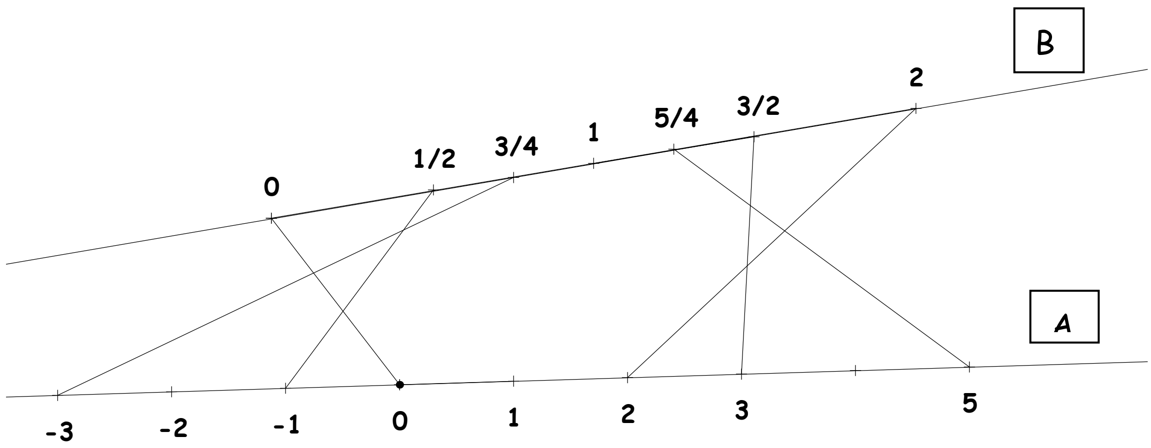
De esta gráfica cartesiana se pueden hacer varias lecturas.

- Cuánto más aumenta a, en valor absoluto, más se acerca b a 1.

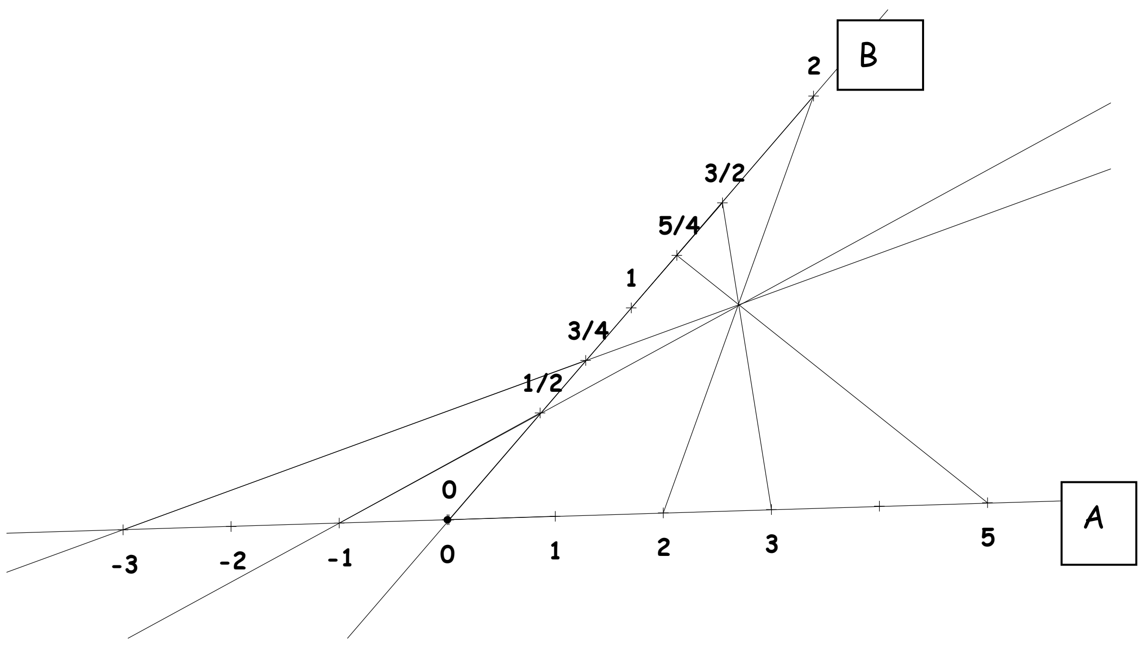
- Cuanto más se acerca a a 1, mayor es b.

<u>5-6 Y si … ?</u>

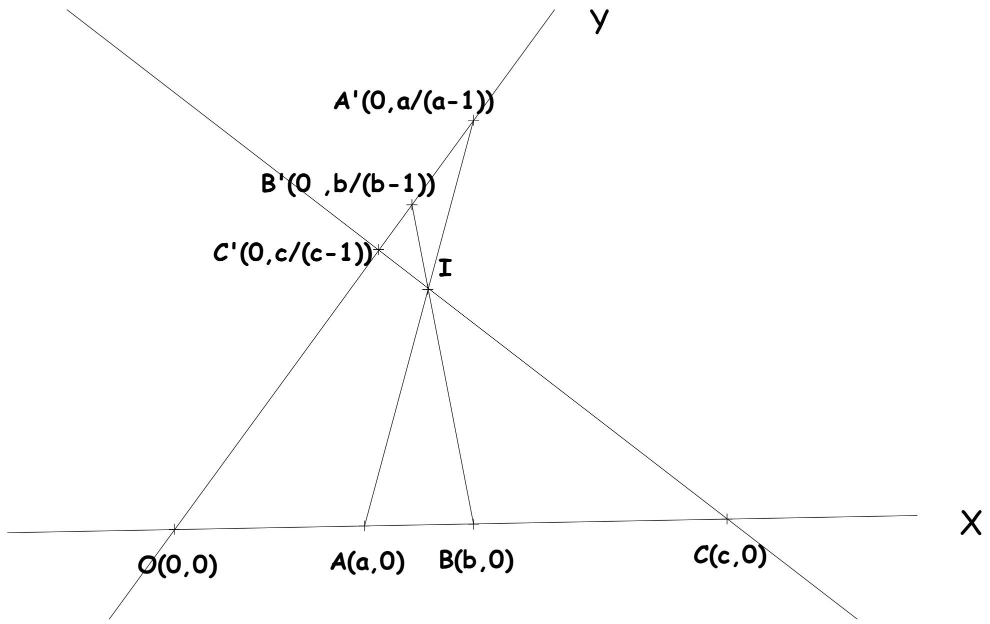
¿Y si intentamos modificar el gráfico segmentario haciendo coincidir los puntos cuyas abscisas son 0 ?
Esto es lo que da utilizando un programa de geometría dinámica.



Se convierte en….



y … sorpresa : **Todas las rectas que contienen los segmentos de esa gráfica parecen <u>concurrir</u> en un punto de coordenadas (1,1).**
La validez de esta conjetura ha de ser justificada, evidentemente.
Volvamos a las notaciones tradicionales de los ejes.
La función representada se define como f(x)=x/(x-1).



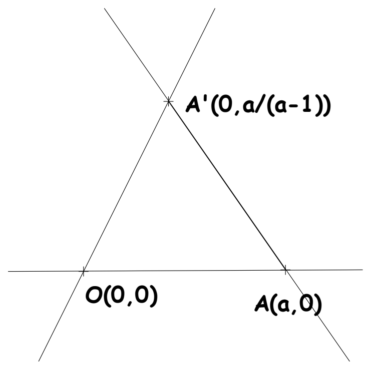
Una primera estrategia:

AA’ tiene por ecuación : $\frac{x}{a}+\frac{y}{\frac{a}{a-1}}=1$ es decire x + (a-1)y =a o bien x+(a-1)y-a=0

Igualmente, BB’ tiene por ecuación x+(b-1)y-b=0 y CC’ tiene por ecuación x+(c-1)y-c=0
Ahora se demuestra que el sistema de esas tres ecuaciones lineales con dos incógnitas tiene la solución única x=1, y=1.

Une segunda estrategia:
Se escriben las ecuaciones de AA’ y de BB’; su intersección es I : (1,1), que verifican la ecuación de CC’’.

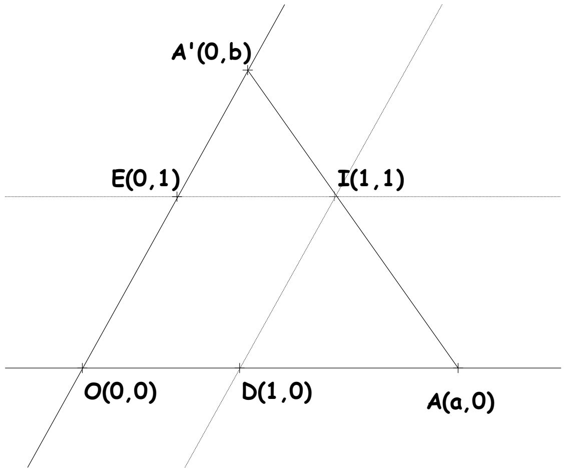
Une tercera estrategia



A :(a,0) y A’ :(0,a/(a-1)) son las coordenadas de los extremos de un segmento [AA’] de la gráfica segmentaria.
AA’ tiene por ecuación: x + (a-1)y – a = 0
O sea (x-y) + a(y-1) = 0

AA’ es pues un elemento de un haz de rectas que pasan todas por el punto definido por $\begin{cases} x-y=0 \\ y-1=0 \end{cases}$ es decir (1,1).

Otra estrategia que no precisa las ecuaciones de las rectas:
Seat A:(a,0) e I: (1,1). La recta AI corta ae OY en A'.
Pongamos A': (0,b) y demostremos que entonces a-ab+b=0.



¡Aprovechemos la semejanza de triángulos !
Los triángulos A'OA y A'EI son semejantes
luego $\frac{b}{a} = \frac{b-1}{1}$ de donde : b=ab-a o a-ab+b=0.

5 -7 Algunas sugerencias de investigación.

- ¿ Se pueden hacer coincidir otros puntos de la gráfica segmentaria y obtener la misma constante que antes ? ¿Cuáles ?
- Comparar la suma de dos números con su diferencia,
- Comparar la suma de dos números con su cociente,
- Comparar la diferencia de dos números con su producto
- Comparar la diferencia de dos números con su cociente,
- Comparar el producto de dos números con su cociente.

6 – A modo de conclusión.

Avant donc que d'écrire, apprenez à penser.
Selon que notre idée est plus ou moins obscure,
L'expression la suit, ou moins nette, ou plus pure.
Ce que l'on conçoit bien s'énonce clairement,
Et les mots pour le dire arrivent aisément.
Boileau (L'art poétique)

Antes que a escribir, aprended a pensar.
Según que nuestra idea sea más o menos oscura,
La expresión la sigue, o menos neta, o más pura.
Lo que se piensa bien, se enuncia claramente,
Y las palabras para decirlo llegan fácilmente

Introducción a la teoría de grafos

A.Kiselev, Universidad Estatal de San Petersburgo, y Ekaterina Zhukova, Universidad Estatal Electrotécnica de San Petersburgo

1. Introducción

Todos los lectores habrán visto problemas como los siguientes

Problema 1.1. En el país de Genovia hay 2013 ciudades. ¿Es posible conectarlas con carreteras de tal manera que salgan 3 carreteras de cada ciudad?

Problema 1.2. Demostrar que si 2013 personas asisten a una reunión y algunas de ellos estrechan la mano con otras (pero no a si mismas), entonces al final hay al menos dos personas que han estrechado la mano al mismo número de personas.

Problema 1.3. Demostrar que si 2013 personas asisten a una reunión y todo el mundo estrecha la mano a otros (pero no a sí mismo), entonces al final se han producido $\frac{2013 \cdot 2012}{2}$ apretones de manos.

Todos estos problemas están relacionados con el concepto de grafo. Los objetos de los que trata cada problema (ciudades, personas, etc) se llaman *vértices*. Para hacer la situación más obvia, se pueden dibujar como puntos en el plano. La representación visual del grafo puede ser útil para entender mejor el concepto. Conectaremos vértices que estén relacionados entre sí (ciudades unidas por carreteras, personas relacionadas entre sí por apretones de manos, etc) por líneas llamadas *aristas* .Se verá un dibujo, parecido a un mapa o algo similar.

Esta es una idea intuitiva de la noción de grafo. Vamos a dar ahora la definición estricta para expresar la idea visual.

Definición 1.1. *Sea V cualquier conjunto finito de vértices y sea VV el conjunto de todos los subconjuntos de V que tengan 2 elementos. Entonces $E \subset VV$ es el conjunto de las aristas. El par ordenado (V, E) es un grafo .*

He aquí algunos ejemplos de grafos. El grafo tal que $E = VV$ se dice que es *completo.* El grafo tal que $E = \varnothing$ se dice *grafo vacío o grafo nulo.*

En lo que sigue, para hablar sobre vértices y aristas de grafos usaremos alguna terminología intuitivamente entendible que exprese el enfoque visual. Por ejemplo, la arista y el vértice perteneciente a ella se dirán *incidentes. Dos vértices* a y b tales que $\{a, b\} \in E$ se dirá que están conectados por una arista o que son *adyacentes.*

Necesitaremos la siguiente definición:

Definición 1.2. *El número de aristas incidentes con un vértice se llamará grado del vértice.*

Ahora echemos una mirada a algunas propiedades obvias de los grafos.

Teorema 1.1.*El número de vértices de grado impar es un número par.*

La suma de los grados de todos los vértices de un grafo es igual al número de aristas multiplicado por 2 (un número efectivamente par), así que debe haber un número par de términos impares en esta suma.$\blacksquare$

Teorema 1.2. *En cualquier grafo hay dos vértices del mismo grado.*

Consideremos la negación de la proposición: supongamos que todos los vértices del grafo tienen grados distintos. Puesto que puede haber grados desde 0 hasta $n-1$ (donde n es el número de vértices), pero no puede haber un vértice de grado 0 y otro con grado $n-1$ en el mismo grafo, esto es una contradicción.■

Teorema 1.3. *Un grafo completo de n vértices tiene $\frac{n(n-1)}{2}$ aristas.*

En efecto, cada vértice está conectado a otros $n-1$, pero cada vértice se cuenta así dos veces.■

Cada uno de los teoremas anteriores da la solución a los problemas de la sección siguiente. Luego se proponen otros problemas de solución obvia.

Problema 1.4. *Demostrar que si hay 2013 ciudades y cada ciudad está conectada a todas las demás, entonces en total hay $\frac{2013\cdot 2012}{2}$ carreteras entre ellas.*

Problema 1.5. *Demostrar que si hay 2013 ciudades y cada una de ellas está conectada por carretera con alguna de las demás, entonces hay al menos dos ciudades de las que sale el mismo número de carreteras.*

Problema 1.6. *En Genovia hay 2013 ciudades. ¿Es posible conectarlas por carretera de manera salgan 3, 5 ó 7 carreteras de cualquier ciudad?*

Problema 1.7. *¿Existe un grafo con vértices de grados*

4,4,4,3,3,2?
8,6,6,5,3,2,1,1?
7,3,3,3,3,2,2,1?
7,7,5,4,4,2,2,1?
7,6,4,3,4,4,1,2?
7,7,7,5,3,3,2,2?

Definición 1.3. *Un grafo con vértices que pueden ser distribuidos en dos grupos de tal manera que ningún par de vértices del mismo grupo estén conectados por una arista se llama grafo bipartito.*

Si el grafo bipartito es tal que toda arista permitida está en E (toda arista entre vértices de grupos diferentes) se llamará *grafo completo bipartito.*

Teorema 1.4. *En un grafo completo bipartito con n y m vértices en los grupos hay nm aristas.*

En efecto, todo vértice del primer grupo está conectado con m vértices, así que hay nm aristas que salen del primer grupo. Obsérvese que así contamos todas las aristas (una sola vez).■

Problema 1.8. Vamos a considerar que algunos vértices del grafo son azules y otros son verdes. Todo vértice azul está conectado a 5 vértices azules y a 10 vértices verdes; y todo vértice verde está conectado a 9 vértices azules y 6 verdes. ¿Cuál es el color dominante en ese grafo?

Problema 1.9. En Genovia hay 100 ciudades y cuatro carreteras salen de cada ciudad. ¿Cuántas carreteras hay en total?

Problema 1.10. ¿Existe una línea quebrada de 21 segmentos tal que interseque a cualquiera de esos segmentos

a) una vez?
b) dos veces?
c) tres veces?

Problema 1.11. En una clase hay 30 estudiantes. ¿Es posible que 9 de ellos tengan (en la clase) 3 amigos cada uno, 11 tengan 4 amigos cada uno y 10 tengan 5 amigos cada uno?

Problema 1.12. El rey de Genovia tiene 19 vasallos. ¿Es posible que cada vasallo tenga 1, 5 ó 9 vecinos?

Problema 1.13. En el reino de Genovia hay 3 carreteras que salen de cada ciudad. ¿Es posible que haya 100 carreteras en Genovia?

Problema 1.14. Probar que el número de personas de entre la población de Valladolid que han dado apretones de manos a un número impar de otros residentes de Valladolid, es par.

Problema 1.15. Nueve personas juegan un torneo a una sola vuelta. En un cierto momento solo hay dos jugadores que hayan jugado el mismo número de partidas. Probar que, o bien hay un jugador que todavía no ha jugado, o bien un jugador que ya ha jugado todas sus partidas.

Problema 1.16. Cada uno de los 102 estudiantes de un centro escolar conoce al menos a otros 68 estudiantes. Probar que hay cuatro estudiantes que tienen el mismo número de amistades.

Problema 1.17. Una matemática y su marido van a una reunión, en la que hay un total de cuatro parejas. Como es normal, al llegar los participantes se saludan dándose la mano (Nadie se da la mano a sí mismo o a la persona con la que llega). Y no todo el mundo le da la mano a todos los demás. Pero cuando la matemática pregunta a las otras 7 personas presentes a cuántas personas ha dado la mano, recibe 7 respuestas diferentes. ¿A cuántas personas ha dado la mano el marido de la matemática?

Problema 1.18. Juan, a su regreso de Disneylandia, dice que allí ha visto un lago encantado con 7 islas, a cada una de las cuales llegan 1, 3 ó 5 puentes. Es verdad que alguno de esos puentes debe llegar a la orilla del lago?

En nuestra introducción decíamos que la aproximación visual es bastante apropiada para entender estos conceptos. En realidad, nuestra representación visual del grafo, un dibujo, es un objeto que merece la pena estudiar por sí mismo. Diferentes grafos a veces se pueden representar por la misma figura, o diferentes figuras pueden representar el mismo grafo. La siguiente definición pretende dar más luz sobre este asunto.

Definición 1.4. *Dos grafos se llamarán isomorfos si sus vértices pueden ser numerados de tal manera que los vértices con el mismo número está conectados o no, simultáneamente, en ambos grafos.*

Esto significa que a veces uno puede considerar dos grafos como distintos solo si no son isomorfos (y dos grafos isomorfos se consideran el mismo), aunque se diga otra cosa en la definición de grafo que dimos antes. Los siguientes problemas pretenden simplificar la definición y ayudar a entenderla mejor.

Problema 1.19. Hágase una lista con todos los grafos no isomorfos con 4 vértices.

Problema 1.20. Hallar dos grafos con el mismo número de vértices de cada grado que no sean isomorfos.

Problema 1.21. ¿Es verdad que dos grafos deben ser isomorfos, si

a) ambos tienen 10 vértices y el grado de cada uno es 9?

b) ambos tienen 8 vértices y el grado de cada uno es 3?

2. Conectividad

Como se puede observar de la Introducción, la noción de grafo puede representarse en forma visual. Dijimos que dibujar un grafo tiene algunas desventajas relacionadas con un grafo equivalente, pero aún asi, varios conceptos y proposiciones sobre grafos en teoría de grafos provienen de la experiencia práctica, deducidos de la intuición y obvios para las figuras.

Uno de esos conceptos es la conectividad. Ante todo, necesitamos algunas definiciones que son intuitivamente claras.

Definición 2.1. *Una sucesión de vértices, en la que cada dos vértices consecutivos están conectados por una arista, se llama ruta.*

Visualmente, esta definición significa que se empiezan a conectar vértices en un cierto orden; se elige siempre el siguiente vértice de modo que sea adyacente al anterior.

Definición 2.2. *Una ruta en la que el primer y el último vértice coinciden, se llamará cerrada.*

Si el vértice a está en la ruta, se dice que la ruta pasa por el vértice a. Si los vértices a y b son consecutivos en la ruta, se dice que la ruta contiene a la arista $\{a, b\}$.

Definición 2.3. *Una ruta que contiene cada arista no más de una vez, se llama camino.*

Es claro que cualquier camino es una ruta por la definición anterior. Pero antes, en nuestro dibujo, se pueden conectar vértices en cualquier orden posible, se permite usar cualquier arista dos veces, o tres, o más. Ahora sólo se puede usar cada arista una vez. Esta es la diferencia entre ruta y camino. Tampoco es obligatorio usar todas las aristas.

Definición 2.4. *Una ruta cerrada que además es un camino, se llama ciclo.*

Si existe una ruta en la que el vértice a es el primero y el vértice b es el último, se dice que los vértices a y b están conectados por la ruta. La misma terminología se usa para caminos. En efecto, si los vértices están conectados por un camino, también lo están por una ruta (es obvio que cualquier camino es también una ruta). Se puede observar que el recíproco es también cierto: si los vértices están conectados por la ruta, también lo están por el camino.

Definición 2.5. *La componente de conectividad de un vértice es un conjunto de vértices para los cuales existe un camino que los conecta con el vértice dado.*

Se debe observar que las componentes de conectividad de dos vértices diferentes o son iguales o son disjuntos. En efecto, si los consideramos conjuntamente obtendremos que deben ser iguales en ese caso. Recordemos siempre la representación visual del grafo que introdujimos antes. Úsese para conseguir una visualización más clara.

Problema 2.1. Se considera el "grafo del alfil": V es el conjunto de las casillas del tablero de ajedrez y E está formado por los pares de tales casillas tales que el alfil puede moverse de una a otra en un movimiento. ¿Cuántas componentes de conectividad hay en este grafo?

Definición 2.6. *Un grafo con una única componente de conectividad se llama un grafo conexo.*

Hay otros grafos relacionados con el ajedrez construídos de esta manera: "grafo del rey", "grafo de la reina", "grafo del caballo", "grafo de la torre" - y obsérvese que todos son conexos.

Problema 2.2. Considérese el "grafo del caballo" en un tablero $n \times n$. Hallar valores de n para los que el grafo no es conexo.

La definición 2.6 confirma una vez más nuestro punto de vista intuitivo del grafo. Un grafo es conexo si y solamente si existe un camino entre cualesquiera vértices en él. Visualmente significa que se puede trazar una línea quebrada usando aristas como segmentos entre cualquier par de vértices. Así en este aspecto, dos vértices cualesquiera están "conectados".

Hay una condición simple para que el grafo sea conexo, expresada en términos del número de aristas:

Teorema 2.1. *Sea n el número de vértices de un grafo. Si el número de aristas es mayor que $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$, entonces el grafo es conexo.*

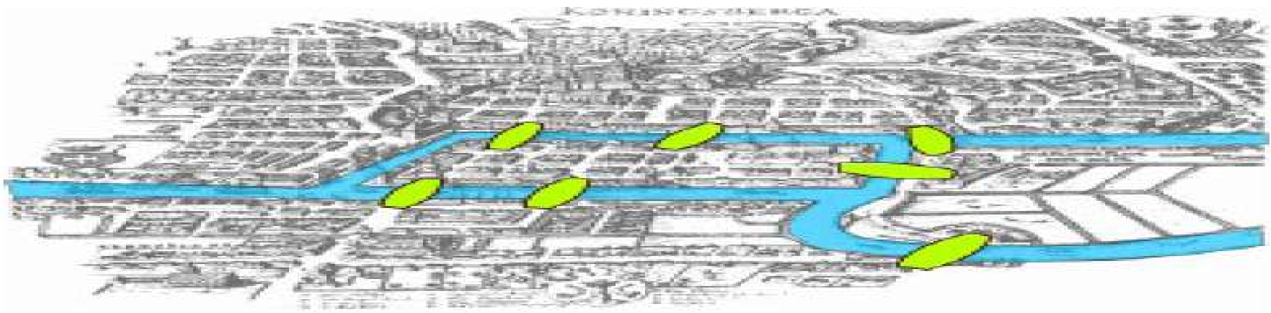
Supongamos que hay al menos dos componentes de conectividad en el grafo dado. Sea k el número de vértices en una de las componentes, y por tanto, $n-k$ vértices en la otra. El máximo número de aristas cuando hay dos componentes de conectividad es cuando ambos son grafos completos. Por lo tanto, el número de aristas en el grafo entero es $\frac{k(k-1)}{2} + \frac{(n-k)(n-k-1)}{2}$ que no es mayor que $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$. Esto es una contradicción, así que el grafo es conexo.■

También se puede observar que si hay menos de $n-2$ aristas en el grafo, no es conexo. Luego cualquier grafo con n vértices debe tener al menos $n-1$ aristas para ser conexo. Más adelante estudiaremos algunos grafos interesantes con exactamente $n-1$ aristas.

Ahora, algunos problemas relativos a la conectividad.

Problema 2.3. Un grafo tiene 100 vértices y el grado de cada vértice es por lo menos 50. Probar que el grafo es conexo.

Problema 2.4. En un grafo conexo, el grado de 4 de los vértices es 3 y el de los demás vértices es 4. Probar que no se puede borrar una arista de tal manera que el grafo se dividaen dos componentes de conectividad isomorfos.



Definición 2.7. *Una arista tal que al borrarla aumenta el número de componentes de conectividad de un grafo se llama puente.*

Problema 2.5. Hay 10 vértices en un grafo y exactamente dos de sus aristas son puentes. ¿Cuál es el máximo número de aristas en este grafo?

Problema 2.6. ¿Es verdad que dos grafos tienen que ser isomorfos si ambos son conexos, sin ciclos y tienen 6 aristas?

Problema 2.7. En el reino de Genovia salen 100 carreteras de cada ciudad y se puede viajar por ellas de cualquier ciudad a otra. Se cierra una carretera por obras de reparación. Probar que se sigue pudiendo viajar de cualquier ciudad a cualquier otra.

3 Caminos y ciclos Eulerianos

En nuestra infancia intentábamos dibujar figuras sin levantar el lápiz del papel. Algunas veces se podía, y otras no. Por ejemplo, no es posible dibujar un sobre cerrado (que se ve como un rectángulo con sus diagonales) sin levantar el lápiz del papel, pero sí se puede dibujar un sobre abierto.

He aquí el conocido problema de los puentes de Königsberg

La ciudad de Königsberg en Prusia Oriental (hoy Kaliningrado, Rusia) está construída en ambas orillas del río Pregel, que forma dos grandes islas conectadas entre sí y con las orillas del río por medio de siete puentes. El problema era encontrar un camino que cruzase cada puente una vez y solamente una. Las islas no se podían alcanzar de ninguna forma que no fuera por los puentes; y cada puente debía cruzarse por completo cada vez: no se podía dar media vuelta al llegar a la mitad del puente. El camino no tenía por qué empezar y terminar en el mismo sitio. Leonhard Euler demostró que el problema no tenía solución.

Veremos a continuación el criterio para saber si tal camino es posible.

Definición 3.1. *Un camino que visite cada arista exactamente una vez se llama camino euleriano.*

Definición 3.2. *Un ciclo que visite cada arista exactamente una vez se llama ciclo euleriano.*

El siguiente teorema es el criterio de existencia de un ciclo euleriano en un grafo conexo, que fué introducido por primera vez por Euler cuando intentaba resolver el problema de los puentes de Königsberg.

Teorema 3.1. *Existe un ciclo euleriano en un grafo conexo si y solamente si todos los vértices tienen grado par.*

Supongamos que en el grafo existe un ciclo euleriano. Cada vez que el ciclo visita un vértice, hay dos aristas incidentes con el vértice. Luego el grado de cada vértice ha de ser par.

Recíproco: Supongamos que todos los vértices tienen grado par. Construyamos un ciclo A que visite cada arista solamente una vez (pero que tal vez no visite todas las aristas del grafo).Si quedara alguna arista que el ciclo A no visite, consideremos un vértice c que visite el ciclo A pero que no visite alguna de las aristas incidentes con el vértice c. Es posible construir un ciclo B que empiece y termine en c tal que A no visite ninguna de las aristas de B. Ahora consideremos un ciclo D que sea la unión de A y B (el ciclo B está "incluído" en el ciclo A). Obsérvese que D sigue visitando cada una de sus aristassolamente una vez y es más largo que A. Si siguieran quedando aristas, el proceso se puede repetir, pero no puede ser infinito porque el conjunto de aristas es finito. Al final tenemos un ciclo euleriano.■

También hay el criterio de existencia de camino euleriano en un grafo conexo que formulamos a continuación.

Teorema 3.2. *Existe un camino euleriano (pero no ciclo) en un grafo conexo si y solamente si todos los vértices, salvo dos, tienen grado par y esos dos tienen grado impar.*

La demostración es bastante similar a la anterior. El camino euleriano empieza y termina en un vértice de grado impar.

Problema 3.1. Probar que un grafo conexo con $2n$ vértices de grado impar puede trazarse sin dibujar ninguna arista más de una vez y de tal manera que el lápiz se levante del papel exactamente $n-1$ veces.

Problema 3.2. Hay 100 círculos formando una figura conexa en el plano. Demostrar que esta figura se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel o dibujando cualquier parte de cualquier círculo dos veces.

Problema 3.3. En la ciudad de Tiro hay 7 islas. Hay 3 puentes entre 2 islas, 3 puentes entre 4 islas y 4 puentes desde la última. ¿Es posible recorrer la ciudad visitando cada puente una vez y solamente una?

Problema 3.4. Hallar valores de n tales que sea posible dibujar un polígono de n lados con todas sus diagonales sin levantar el lápiz del papel.

Problema 3.5. a) Un trozo de cable mide 120 cm de largo. ¿Se puede usar para formar las aristas de un cubo, que midan 10cm cada una?

b) ¿Cuál es el menor número de cortes que hay que hacer en el cable para poder formar ese cubo?

Problema 3.6. ¿Es posible contruir una red con 5×5 nudos a partir de 5 líneas quebrads de longitud 8?

Problema 3.7. ¿Es posible construir una red de 5×5 nudos a partir de ocho líneas quebradas de longitud 5?

4 Camino y ciclo hamiltoniano

En paralelo al contenido de la sección anterior, vamos a tratar ahora de los caminos y ciclos hamiltonianos, que visitan cada vértice del grafo una vez y solamente una.

Definición 4.1. *En un grafo, un camino que pasa por cada vértice exactamente una vez se llama hamiltoniano.*

Definición 4.2. *En un grafo, un ciclo que pasa por cada vértice (excepto uno, en el que empieza y termina) exactamente una vez, se llama hamiltoniano.*

Definición 4.3. *Un grafo se llama hamiltoniano si existe un ciclo hamiltoniano en él.*

No hay criterios de existencia de caminos y ciclos hamiltonianos, sino sólo condiciones necesarias. Los enunciados correspondientes van a continuación. Su uso práctico es casi inexistente y sus demostraciones son bastante complicadas y no las incluiremos aquí. El lector interesado puede consultar los títulos [3] y [4] de la Bibliografía.

Teorema 4.1. (Dirac, 1952) *Un grafo con n* vértices ($n \geq 3$) *es hamiltoniano si cada vértice tiene grado $\frac{n}{2}$ o mayor.*

Teorema 4.2. (Ore, 1960) *Un grafo con n vértices* ($n \geq 3$) *es hamiltoniano si, para cada par de vértices no adyacentes, la suma de sus grados en n* o *mayor.*

Para formular el siguiente teorema necesitamos el concepto de clausura de un grafo. Dado un grafo G con n vértices, la *clausura de G, $cl(G)$*, se construye de manera unívoca a partir de G, añadiendo repetidamente una nueva arista $\{u, v\}$ que conecte dos vértices no adyacentes u y v con grado(u) +grado$(v) \geq n$, hasta que no puedan encontrarse más pares con esta propiedad.

Teorema 4.3. (Bondy-Chvátal, 1972) *Un grafo es hamiltoniano si y solamente si su clausura es hamiltoniana.*

Problema 4.1. Dado el tablero 4×4 sin las casillas de las 4 esquinas, ¿es posible que el caballo de ajedrez visite cada casilla exactamente una vez y vuelva?

Problema 4.2. ¿Existe un ciclo hamiltoniano en el grafo del caballo de ajedrez en el tablero 5×5?

Problema 4.3. ¿Existe un ciclo hamiltoniano en el grafo de la torre, del alfil, de la reina y del caballo en el tablero de ajedrez tradicional?

Problema 4.4. Se considera el siguiente grafo: sus vértices son los vértices de un cubo y los centros de las caras; sus aristas son las diagonales (o sea, las aristas del cubo no son aristas en este grafo). ¿Existe un ciclo hamiltoniano en este grafo?

5 Árboles

Definición 5.1. *Un grafo conexo sin ciclos se llama un árbol.*

Definición 5.2. *Un grafo conexo tal que todas sus aristas son puentes es un árbol.*

Definición 5.3. *Un grafo en el que existe exactamente un camino entre cada par de vértices es un árbol.*

Como hemos dado tres definiciones diferentes del mismo objeto, debemos probar que todas definen el mismo objeto, pues si no, no las podríamos utilizar:

Teorema 5.1. *Las tres definiciones de árbol son equivalentes.*

Consideremos un árbol dado por la primera definición y probemos que cumple la tercera. Supongamos que el grafo G no tiene ciclos. Enteonces en efecto todos los vértices están conectados por un camino - existe al menos uno (G es conexo) y si existieran al menos dos diferentes habría un ciclo.

Ahora tomemos un árbol según la tercera definición y probemos que cumple la segunda. El grafo G es conexo por definición. Supongamos que G es tal que existe exactamente un camino entre cada par de vértices. Tomemos la arista $\{a, b\}$. Observemos que si no es un puente, existiría un camino diferente entre los vértices a y b, ya que G sin $\{a, b\}$ sigue siendo conexo. Luego toda arista es un puente.

Finalmente, tomemos un árbol según la segunda definición y probemos que cumple la primera. Supongamos que cada arista de G es un puente. Entonces efectivamente no hay ciclos en G, porque si C fuera un ciclo entonces ninguna arista de C sería un puente.$\blacksquare$

Ya que hemos definido bien la noción de árbol, usaremos en lo que sigue cualquiera de las 3 definiciones a nuestra conveniencia.

Veamos algunas propiedades importantes de los árboles.

Teorema 5.2. *En cualquier árbol existe un vértice de grado 1.*

Consideremos el camino P más largo del árbol G. Ese camino existe, porque como entre dos vértices cualesquiera, existe siempre un camino, no puede haber más de $\frac{n(n-1)}{2}$ caminos en G, que es finito. Si hubiera varios de la máxima longitud, elegimos uno cualquiera de ellos. Marcamos el último vértice, b, en ese camino. Si el grado de b fuera mayor que 1, podríamos prolongar el camino usando otra arista incidente con b. Esto contradice la hipótesis sobre la maximalidad de P.$\blacksquare$

De hecho, en´un árbol hay al menos dos vértices de grado 1. Se puede probar fácilmente esto a partir de la demostración del teorema anterior.

Observemos que hay un grafo conexo "mínimo" - en el sentido de que tiene el menor número de aristas para el número dado de vértices. Antes vimos que cualquier grafo con n vértices y menos de $n-1$ aristas no es conexo.

Teorema 5.3. *En cualquier árbol con n vértices hay $n-1$ aristas.*

Sea m el número de aristas en el árbol G de n vértices. Por el teorema anterior, existe un vértice a de grado 1 en G. Consideremos G_1, que va a ser G

sin el vértice a y sin la única arista incidente con a. Obviamente, en G_1 hay $n-1$ vértices y $m-1$ aristas; sigue siendo conexo y no tiene ciclos. Así construímos una cadena de árboles en la que cada G_k es G_{k-1} sin el vértice de grado 1 y sin la única arista incidente en él. El último, G_{n-1}, tiene sólo dos vértices y $m-(n-2)$ aristas. Pero el único árbol (el único grafo conexo) con dos vértices tiene solamente una arista. Por tanto $m-(n-2)=1$, es decir, $m=n-1$.■

Así, es obvio que en cualquier grafo conexo con n vértices debe haber al menos $n-1$ arista, como dijimos antes sin demostración.

Problema 5.1. En un país encantado hay 239 ciudades y dos ciudades cualesquiera están unidas por una carretera y solamente una. ¿Cuántas carreteras hay allí?

Problema 5.2. El rey Guidon tiene 3 hijos. Tiene un total de 93 descendientes; algunos de ellos tienen 2 hijos y otros ni se han casado ni tienen hijos. ¿cuántos de sus descendientes no se han casado?

Problema 5.3. Tenemos 5 cajas. Dentro de algunas de ellas hay otras 5 cajas (de menor tamaño), y así sucesivamente. En total hay 12 cajas no vacías. ¿Cuántas cajas hay en total?

Problema 5.4. La diabólica reina del ajedrez edifica muros entre todos los escaques del tablero. ¿Cuál es el menor número de muros que hay que derribar para que la torre pueda visitar todos los escaques?

Problema 5.5. Una red de volleyball tiene un retículo rectangular de dimensiones 50×600. El gamberro Xavi corta sus hilos unidad. ¿Cuál es el máximo número de hilos unidad que puede cortar antes de que la red se rompa en dos o más trozos?

Esta última proposición es bastante fácil de formular de manera formal y tiene su importancia en aplicaciones de la teoría de grafos, así que merece la pena discutirla.

Teorema 5.4. *Para todo grafo $G=(V,E)$, existe un árbol $T=(V,E^*)$ tal que $E^* \subset E$. Además, si n es el número de vértices de G y N es el número de aristas, entonces hay que borrar exactamente $N-n+1$ aristas de E para obtener E^*.*

Problema 5.6. En el reino de Genovia hay 30 ciudades. Cada una de ellas está unida a cualquier otra por una única carretera. ¿Cuál es el máximo número de carreteras que se pueden cerrar de manera que siga pudiéndose ir de cualquier ciudad a cualquier otra?

Problema 5.7. Probar que en cualquier grafo conexo es posible borrar un vértice, junto con todas las aristas que salen de él, de manera que el grafo así obtenido siga siendo conexo.

Problema 5.8. El mapa del metro de Tiro es un grafo conexo. Demostrar que el alcalde de Tiro puede cerrar una estación, y todas las líneas de metro que llegan a ella desde estaciones contiguas de forma que lo que quede siga siendo conexo.

6 Grafos binarios coloreados

Problema 6.1. En el valle del río Amazonas hay 5 poblados. Dos cualesquiera de ellos están conectados por senderos selváticos o por el río, pero no por ambas cosas al mismo tiempo. Además, de entre tres poblados cualesquiera, existe un par conectados por el río y un par conectados por sendero. Probar que es posible completar un viaje empezando y terminando en el mismo poblado, visitando los 5 poblados (cada uno de ellos solamente una vez) y usando solamente senderos o la ruta fluvial.

Problema 6.2. En el valle del río Mississippi hay 6 poblados. Dos cualesquiera de ellos están conectados por senderos o por el río, pero no por los dos medios simultáneamente. Probar que los 6 poblados no se pueden conectar de tal manera que entre tres cualesquiera de ellos existan dos conectados por el río y dos conectados por senderos.

Resolveremos primero el segundo problema. Llamemos A a uno de los poblados. Existen al menos tres rutas fluviales o senderos desde él (porque si hubiera menos de dos senderos o menos de 2 rutas fluviales, entonces A no se podría conectar con cualquier otro poblado). Tratemos el caso de al menos 3 senderos. Razonemos por contradicción: los poblados se conectarían como se indica en el enunciado. Entonces, cualquier par de tres poblados conectados con A por senderos deberían estar conectados por rutas fluviales, lo cual es una contradicción.

El caso de al menos 3 rutas fluviales se analiza de manera análoga.■

Ahora vamos con el primer problema. De la solución del segundo se deduce que debe haber exactamente dos senderos y exactamente dos rutas fluviales desde cualquier poblado. Entonces se puede fácilmente deducir que es posible completar el viaje en la forma que se indica.■

Por último, definamos la noción en cuestión: el grafo binario coloreado.

Definición 6.1. *Un grafo completo, cada una de cuyas aristas es de uno de dos colores, se llama grafo binario coloreado.*

Problema 6.3. Supongamos que seis personas son citadas, aleatoriamente, para formar parte de un Jurado. Probar que o bien tres de ellas se conocen mutuamente, o bien tres de ellas no se conocen mutuamente.

Problema 6.4. Supongamos que nueve personas son citadas, aleatoriamente, para formar parte de un Jurado. Se sabe que ninguna terna de ellas está formada por personas que no se conocen entre sí. Demostrar que cuatro de ellas se conocen mutuamente.

Problema 6.5. Supongamos que 18 personas han sido citadas, aleatoriamente, para formar parte de un Jurado. Probar que, o bien cuatro de ellas se conocen mutuamente o bien cuatro de ellas no se conocen mutuamente.

Problema 6.6. En el reino de Genovia las ciudades están conectadas por carretera o por tren. El ministro de Transportes introduce líneas de autobús entre aquellos pares de ciudades que no están conectadas por tren. Probar que es posible llegar a cualquier ciudad desde cualquier otra usando solamente un tipo de transporte.

Soluciones de los problemas

1.1 a 1.6 están resueltos en el texto.

1.7. El primer grafo es fácil de dibujar. Sea $V = \{a, b, c, d, e, f\}$ y

$$E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, e\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{b.e\}, \{c, d\}, \{c, f\}, \{e, f\}\}.$$

El segundo grafo no existe porque el máximo grado en el grafo con 8 vértices es 7 y no puede ser 8.

El tercer grafo existe: $V = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ y

$$E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, e\}, \{a, f\}, \{a, g\}, \{a, h\}, \{b, c\}, \{b.e\}, \{c, d\}, \{d, e\}, \{f, g\}\}.$$

El cuarto grafo no existe pues dos vértices deben estar conctados con los demás, con lo que los grados de estos demás vértices deben ser al menos 2, así que no puede haber un vértice de grado 1.

El sexto grafo no existe por la misma razón: tres vértices han de estar conectados con cualesquiera otros, luego los grados de estos deben ser al menos 3 y no puede haber un vértice de grado 2.

El quinto grafo no existe porque hay tres vértices de grado impar, lo que contradice el teorema 1.3.

1.8. Olvidémonos de las aristas que conectan vértices del mismo color. Así tenemos un grafo bipartito. Contemos sus aristas. Sea g el número de vértices verdes y b el número de vértices azules. Por una parte, hay $9g$ aristas (todo vértice verde está conectado a 9 azules); por otro lado, debe ser igual a $10b$ (todo vértice azul está unido a 10 verdes). Como $9g = 10b$, debe ser b menor que g, luego predomina el color verde.

1.9. Si hay 100 ciudades y 4 carreteras llegando a cada una, hay 400 finales de carreteras: luego hay 200 carreteras.

1.10. a) y c). Consideremos el grafo cuyos vértices son los segmentos de la línea quebrada y las aristas conectan aquellos pares que se intersecan mutuamente. Tenemos 21 vértices de grado 1 (en a)) o 3 (en c)). Eso contradice el teorema 1.1.

b) Consideremos la siguiente situación: hay 21 puntos en el círculo, numerados en el sentido horario. Conectamos el punto N^{o}1 con el N^{o}3, el N^{o}2 con el N^{o}4, ... , N^o 19 con el N^o 21, el N^o 20 con el N^o 1, el N^o 21 con el N^o 2. Se observa fácilmente que esta es la quebrada buscada.

1.11. Si fuera posible, entonces también sería posible dibujar un grafo con 30 vértices (los estudiantes), nueve de los cuales tienen grado 3, once tienen grado 4 y diez tienen grado 5 (conectando "amistosamente" los vértices con aristas). Sin embargo, tal grafo tendría 19 vértices con grados impares, lo que contradice el teorema 1.3.

1.12. Considermos un grafo en el que los vasallos son los vértices y los que sean vecinos se conectan por una arista. Ese grafo tendría 19 vértices de grado impar, contradiciendo el teorema 1.3.

1.13. Sea n el número de ciudades en Genovia. Entonces hay $\frac{3n}{2}$ carreteras. Si fuera igual a 100, resultaría que 200 sería divisible por 3, lo cual es falso. Por tanto no puede haber 100 carreteras en Genovia.

1.14. Es la situación del teorema 1.1 para un grafo en el que V es el conjunto de los habitantes de Valladolid y E es el conjunto de pares de elementos de V que han estrechado sus manos,

1.15. Si sólo hay 2 jugadores que han jugado el mismo número de partidas, habría exactamente 8 números diferentes de partidas jugadas por los jugadores. Pero si nadie ha jugado 0 u 8 partidas, no puede haber más de 7 números diferentes.

1.16. Todo estudiante conoce a otros 68, 69,...,101; en total hay 33 oportunidades. Si no hay más de 3 estudiantes que tengan el mismo número de conocidos, entonces no hay más de 99 estudiantes. Por lo tanto, debe haber al menos 4 con el mismo número de conocidos.

1.17. Como cualesquiera 7 personas dan diferentes respuestas, esas respuestas varían de 0 a 6, porque nadie puede estrechar menos de 0 ó más de 6 manos. Si alguna persona estrecha 6 manos, entonces la única persona que estrecha 0 manos puede ser su cónyuge. Entonces, si alguna persona estrecha 5 manos, la única persona que estrecha 1 mano ha de ser su cónyuge. Lo mismo para 4 y 2. Entonces, el único número disponible para el marido de la matemática es 3.

1.18. Si ningún puente conduce a la costa, entonces existiría un grafo (donde V es el conjunto de islas y E el conjunto de puentes que las conectan) con 7 vértices de grado impar, lo que contradice el teorema 1.1.

1.19. He aquí los 11 grafos existentes

1.20. Ver la solución del siguiente problema, apartado b).

1.21. a) Tales grafos son completos, luego en efecto todos son isomórficos.

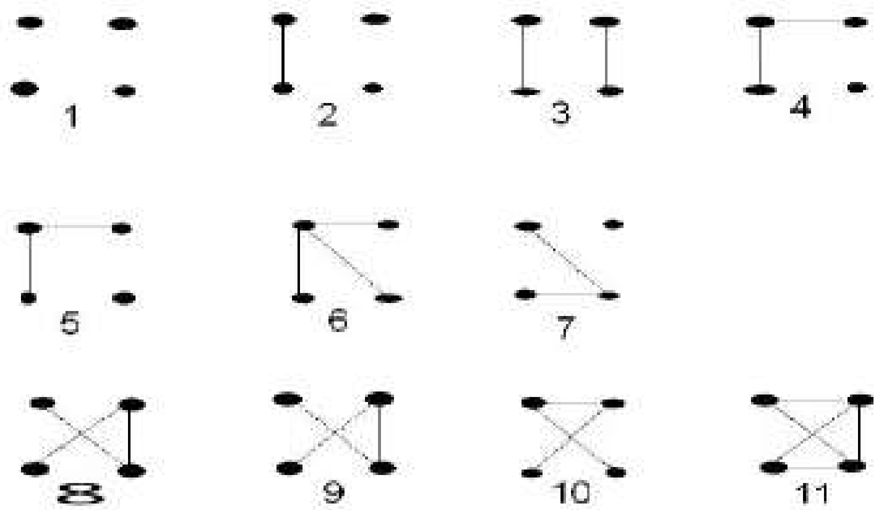
b) Consideremos los siguientes grafos de 8 vértices. Numeramos los vértices de 1 a 8. Las aristas de uno de los grafos conectan el vértice 1 con el 2, el 2 con el 3, ... , el 7 con el 8 y el 8 con el 1, el 1 con el 5, el 2 con el 6, el 3 con el 7 y el 4 con el 8.

El otro grafo consiste en dos grafos completos de vértices 1,2,3,4 y 5,6,7,8.

Ambos grafos no son isomorfos.

2.1. Es bastante obvio que ningún alfil cambia el color de los escaques; el alfil visita escaques del mismo color. Por lo tanto, habrá dos componentes de conectividad: "blanca" y "negra".

2.2. Se comprueba sin dificultad que $n = 2$ y $n = 3$ da grafos no conexos (si $n = 2$ no hay aristas en el grafo de 4 vértices, si $n = 3$ no hay ningún cuadrado conectado con la casilla central), $n = 1$ y $n = 4$ dan grafos conexos. Entonces es claro ampliar el tablero $(n-1) \times (n-1)$ hacia la derecha y hacia abajo (obteniendo un tablero $n \times n$) con cada nuevo escaque añadido conectado a alguno de los anteriores.



2.3. Razonemos por contradicción: supongamos que hay al menos dos componentes de conectividad en el grafo. Supongamos que los vértices a y b están en componentes diferentes. No pueden ser adyacentes a los mismos vértices, así que debe haber al menos 51 vértices más en la primera componente y otros tantos en la segunda. Entonces hay al menos 102 vértices en el grafo, lo que contradice el que en el grafo haya 100.

2.4. Razonemos por contradicción: Debe haber un número par de vértices del mismo grado. Entonces habrá 0 ó 2 vértices de grado 2. En el primer caso hay 2 vértices de grado 3 y en el segundo 6. Luego en ambas componentes isomorfas hay 1 (ó 3) vértices de grado 3; cualquier otro vértice tiene grado 2 ó 4, lo que contradice el Teorema 1.1.

2.5. Excluyamos ambos puentes del grafo. Entonces hay 3 componentes de conectividad. El máximo número de aristas estará en el grafo completo de 8 vértices y 2 vértices solitarios. Esto da 28 aristas. Por tanto en total hay 30 aristas en el grafo.

2.6. Consideremos los dod grafos siguientes: uno consta de 7 vértices conectados en fila; el otro, 7 vértices de tal forma que uno de ellos esté conectado a todos los demás. Obviamente esos dos grafos no son isomorfos.

2.7. Se requiere demostrar que ninguna arista en tal grafo es un puente, así que su supresión no afecta a la conectividad. Razonemos por contradicción: sea $\{u, v\}$ el puente; quitándolo descompone el grafo en dos componentes de conectividad. Pero el número de finales de arista (finales de carretera) en ambas componentes es impar, lo cual es imposible.

3.1. La demostración es similar a la del teorema 3.1.

3.2. Consideremos un grafo cuyos vértices son puntos de intersección de circunferencias y las aristas, los arcos de circunferencia entre esos puntos. El grado de cada vértice es par (cada circunferencia da dos aristas a cada punto de intersección). Entonces existe un ciclo euleriano.

3.3. Hay 4 vértices de grado impar, lo cual contradice los teoremas 3.1 y 3.2.

3.4. Es fácil observar que el grado de cada vértice es $n-1$, y debe ser par por el teorema3.1. Luego es posible dibujar tal polígono, si y sólo si n es impar.

3.5. a) La longitud total del cable es igual a la suma de las longitudes de las aristas del cubo. Luego necesitamos que exista un ciclo euleriano, pero no puede ser que el grado de cada vértice sea 3.

b) Como hemos observado, tenemos 8 vértices de grado 3. Luego por el problema 3.1, necesitamos 3 cortes. Es decir, podemos cortar tres trozos de 10 cm del cable.

3.6. Es claro que hay 12 nudos (los vértices del grafo) de grado 3, así que debe haber, por lo menos, 6 líneas quebradas.

3.7. Es posible y no es difícil de dibujar.

4.1. Consideremos el tablero como el tablero de ajedrez standard usando las letras a,b,c,d y los números 1,2,3,4. Las esquinas del tablero (que no pertenecen al grafo) son a1,a4, d1, d4. Entonces el ciclo siguiente

$$d3-b2-c4-d2-b3-c1-a2-c3-b1-a3-c2-b4-d3$$

es un ciclo hamiltoniano.

4.2. No, ese ciclo no es hamiltoniano. Como el movimiento del caballo es entre casillas de diferente color, todo ciclo debe tener longitud par. Pero el tablero tiene 25 casillas, así que todo posible ciclo hamiltoniano dbería tener longitud impar de 25. Esto es una contradicción.

4.3. El grafo del alfil, como sabemos por el problema 2.1, no es conexo, así que no puede ser ni camino ni ciclo hamiltoniano (aunque haya ciclos hamiltonianos en las dos componentes de conectividad). Considermos el tablero etiquetado por las letras a,b,c,d,e,f,g,h y por los números 1,2,3,4,5,6,7,8. Un ciclo hamiltoniano en el grafo de la torre o en el de la reina no son difíciles de construir (de hecho, el mismo grafo de la torre sirve para el de la reina). El siguiente ciclo es hamiltoniano para ambos:

$$a1-a2...a8-b8...b2-c2...c8-d8...d2-e2...e8-f8...f2-g2...g8-h8...h1-g1...b1-a1.$$

El siguiente ciclo es hamiltoniano para el grafo del caballo:

$$\begin{aligned}&a1-c2-a3-b5-a7-c8-d6-c4-e5-f7-h8-g6-h4-g2-e1-d3-\\&c1-e2-g1-f3-d2-b1-c3-a2-b4-a6-b8-d7-c5-e4-f6-e8-\\&g7-h5-g3-h1-f2-h3-g5-h7-f8-e6-f4-d5-c7-a8-b6-a4-\\&b2-d1-e3-f1-h2-g4-h6-g8-e7-f5-d4-c6-d8-b7-a5-b3-a1.\end{aligned}$$

4.4. Obsérvese que toda arista conecta vértices de tipo diferente - "vértice-vértice" con "vértice-centro". Luego si existiera un camino o ciclo hamiltonianoentonces el número de "vértices-vértices" y el número de "vértices-centros" debería ser igual o diferir en no más de 1. Pero el grafo tiene 8 vértice-vértices y 6 vértices-centros.

5.1. El mapa de carreteras es, por definición, un árbol (solamente un camino conecta cada par de ciudades-vértices.. Por lo tanto hay 238 aristas-carreteras.

5.2. El árbol genealógico de Guidon es un árbol (en el sentido de los grafos)-es conexo y no hay ciclos en él. Contemos el número de sus aristas. Por un lado son 93 (el número de vértices menos 1). Por otro lado es igual al doble de los que tienen 2 hijos, más 3. Si x es el número de descendientes solteros, entonces el número de los que tienen 2 hijos es $93-x$ y resulta entonces $2\,(93-x)+3=93$, de donde $x=45$.

5.3. Construyamos un grafo cuyos vértices son las cajas, y sus aristas conectan dos cajas tales que una está dentro de otra. Es útil introducir una caja imaginaria en la que están las 5 cajas. Entonces, el grafo así construído es un árbol. Así, podemos contar el número de aristas en este grafo. Es igual a $13\times 5=65$.El número de cajas reales es igual al número de aristas (toda caja, salvo la imaginaria, está dentro de alguna otra). Por lo tanto hay 65 cajas.

5.4. Construyamos el grafo de la torre. Al principio está vacío, porque todo par de escaques está separado por el muro. El menor número de muros derribados es el mismo que el de aristas en el árbol de 64 vértices, que es 63.

5.5. Consideremos esta red de volleyball como un grafo. Sus nudos son los vértices, y las arsitas son las cuerdas. Nuestro objetivo es borrar tantas aristas como sea posible, manteniendo el grafo conexo. borramos las aristas de una en una, tantas como se pueda. Obsérvese que si el grafo tiene un ciclo, entonces podemos borrar cualquiera de las aristas de este ciclo. Pero un grafo conexo sin ciclos es un árbol - es decir, cuando hayamos obtenido un árbol, ¡no podemos borrar ninguna más de las aristas del grafo!. Calculemos el número de aristas en nuestro grafo en este momento final. El número de vértices es el mismo que al principio - es decir, es igual a $51\times 601=30651$. Por otro lado, un árbol con tantos vértices debe tener $30651-1=30650$ aristas. Al principio había $601\times 50+600\times 51=60650$ aristas. Luego no se pueden borrar más de 30000 aristas, y es fácil ver como se puede conseguir esto.

5.6. Tenemos un grafo completo y la situación tras cerrar tantas carreteras como se pueda la expresamos en términos de árboles. Por el teorema 5.4 sabemos que es posible cerrar $\frac{30\cdot 29}{2}-30+1=406$ carreteras.

5.7. En cualquier grafo conexo hay un sub-árbol (Teorema 5.4). En el árbol existe un vértice de grado 1 (Teorema 5.2). Podemos quitar este vértice, y lo que queda sigue siendo un grafo conexo. Después restauramos otras aristas (excepto las que llevan al vértice borrado), y la conectividad se mantiene.

5.8. Es la reformulación de 5.7 en términos "sociales".

6.1 a 6.2 se discutieron en la sección correspondiente.

6.3. En lenguaje formal, tenemos un grafo binario coloreado donde el color 1 es "se conocen" y el color 2 es "no se conocen"; y hay que probar la existencia de un triángulo monocromático. Consideremos el vértice a; al menos tiene tres aristas del mismo color (digamos color 1) incidentes con él. Sean b,c,d los tres vértices conectados a a por esas aristas. Las aristas $\{b,c\},\{c,d\}$ y $\{b,d\}$ no pueden tener el mismo color (ya que entonces tendríamos un triángulo de color

1). Pero así hemos obtenido un triángulo de color 2.

6.4. En lenguaje formal, tenemos un grafo binario coloreado donde el color 1 es "se conocen" y el color 2 es "no se conocen"; no hay un triángulo de color 2, y hemos de probar la existencia de un rectángulo de color 1 con diagonales. Consideremos el vértice a.

Si existen al menos 4 aristas de color 2 (conectando a con los vértices b, c, d, e), entonces toda arista que conecte los vértices b, c, d, e debe ser de color 1 y tenemos el problema resuelto.

Si existen al menos 6 aristas de color 1 (conectando a con otros seis vértices), entonces consideramos el grafo con esos vértices. Hay un triángulo de color 1 (por el problema 6.3). Incluyendo a a se obtiene un rectángulo con diagonales.

El único caso que queda es el siguiente: no hay más de 3 aristas de color 2 y no más de 5 de color 1. Como el grado es igual a 8, hay exactamente 3 aristas de color 2 y exactamente 5 aristas de color 1. Si esto fuera verdad para cualquier vértice, consideremos el grafo con aristas únicamente de color 1. Es un grafo con 9 vértices , todos de grado 5, lo que contradice el teorema 1.1. Por lo tanto, el primero o el segundo caso deben ser ciertos para algún vértice.

6.5. En lenguaje formal, tenemos un grafo binario coloreado donde el color 1 es "se conocen" y el color 2 es "no se conocen"; y hay que probar la existencia de un rectángulo con diagonales, del mismo color. Consideremos el vértice a. Hay al menos 9 aristas de un mismo color.

Por el problema 6.4 obtenemos que en el grafo construido con esos 9 vértices, o bien existe un triángulo monocromático, o bien existe un rectángulo con diagonales del otro color. Incluyendo a el triángulo nos da un rectángulo con diagonales.

6.6. De nuevo tenemos un grafo binario coloreado. El color 1 son las conexiones por tren y el color 2 las conexiones por autobús. Supongamos el grafo de color 1. Si no es conexo, todos los vértices con diferentes componentes de conectividad deben ser conectados con diferente color. Así, cada par de vértices está conectado; bien por una arista del segundo color, o un camino de longitud 2 cruza cualquier vértice de diferente componente de conectividad.

Bibliografía

1. D. Fomin, S. Genkin, I. Itenberg. *Mathematical Circles (Russian Experience).* AMS, 1996.

2. O. Ore. *Graphs and their uses.* Random House, New York, 1963.

3. O. Ore. *Theory of Graphs.* AMS, Providence, Rhode Island, 1962.

4. R.J.Wilson. *Introduction to Graph Theory.* Oliver and Boyd, Edinburgh, 1972.

La suficiencia de la equivalencia e independencia de las desigualdades de Cauchy-Buniakowski-Schwarz y de Bergström

por D.M. Bătinețu-Giurgiu, Bucharest, Romania
y Neculai Stanciu, Buzău, Romania

La desigualdad de H. Bergström:

Si $n \in N^* - \{1\}$, $x_k \in R$, $y_k \in R_+^*$, $\forall k = \overline{1,n}$, entonces:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2}{y_k} \geq \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2}{\sum_{k=1}^{n} y_k} \qquad \textbf{(B)}$$

La desigualdad de Cauchy-Buniakowski-Schwarz:

Si $n \in N^* - \{1\}$, $a_k \in R$, $b_k \in R$, $\forall k = \overline{1,n}$, entonces:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) \qquad \textbf{(C-B-S)}$$

1. Probaremos que es suficiente demostrar (B) sólo para $x_k, y_k \in R_+^*$, $\forall k = \overline{1,n}$.
Por tanto, suponemos que (B) se verifica para $x_k, y_k \in R_+^*, \forall k = \overline{1,n}$, y demostraremos que (B) se cumple para $x_k \in R$, $y_k \in R_+^*$, $\forall k = \overline{1,n}$.

a) Si $x_k \in R$, $\forall k = \overline{1,n}$, teniendo en cuenta que:

$$x^2 = (|x|)^2, \forall x \in R,$$

y

$$|x| + |y| \geq |x + y|, \forall x, y \in R.$$

entonces:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2}{y_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{|x_k|^2}{y_k} \overset{(B)}{\geq} \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|\right)^2}{\sum_{k=1}^{n} y_k} \geq \frac{\left(\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right|\right)^2}{\sum_{k=1}^{n} y_k} \geq \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2}{\sum_{k=1}^{n} y_k},$$

luego (B) es cierta.

b) Si $x_k = 0$, $\forall k = \overline{1,n}$, tenemos: 0=0, que es cierto.

c) Si m $(m \in N^*, m < n)$ de los números $x_1, x_2, ..., x_n$ son nulos y el resto son no nulos, podemos suponer (sín pérdida de generalidad) que $x_1, x_2, ..., x_n \in R_+^*$, y $x_{m+1} = x_{m+2} = ... = x_n = 0$.

En este caso se tiene:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2}{y_k} = \sum_{k=1}^{m} \frac{x_k^2}{y_k} \overset{(B)}{\geq} \frac{\left(\sum_{k=1}^{m} x_k\right)^2}{\sum_{k=1}^{m} y_k} = \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2}{\sum_{k=1}^{m} y_k} \geq \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2}{\sum_{k=1}^{n} y_k},$$

luego (B) queda probado también en este caso.

2. Probaremos que es suficiente demostrar (C-B-S) sólo para $a_k, b_k \in R_+^*, \forall k = \overline{1,n}$.

Supongamos que (C-B-S) se cumple para $a_k, b_k \in R_+^*, \forall k = \overline{1,n}$ y demostremos que (C-B-S) se cumple $\forall a_k, b_k \in R,\ k = \overline{1,n}$.

a) Si entre los números a_k, b_k algunos son negatives, entonces considerando que:

$$x^2 = (|x|)^2, \forall x \in R,$$

y

$$|x| + |y| \geq |x + y|, \forall x, y \in R,$$

deducimos que:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 = \left(\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right|\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k|\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k| \cdot |b_k|\right)^2 \overset{(C-B-S)}{\leq}$$

$$\overset{(C-B-S)}{\leq} \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^2\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right),$$

lo que demuestra que (C-B-S) se cumple.

b) Si entre los números a_k, b_k algunos son nulos, sin pérdida de la generalidad suponemos que

$$a_k \in R_+^*, k = \overline{1,m},\ a_{m+1} = a_{m+2} = ... = a_n = 0,$$

y

$$b_k \in R_+^*, k = \overline{1,p},\ b_{p+1} = b_{p+2} = ... = b_n = 0, \text{ donde } 1 \leq p \leq m \leq n,$$

con lo cual:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{p} a_k b_k,$$

así que de aquí se obtiene:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{p} a_k b_k\right)^2 \overset{(C-B-S)}{\leq} \left(\sum_{k=1}^{p} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{p} b_k^2\right) \leq$$

$$\leq\left(\sum_{k=1}^{m}a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{p}b_k^2\right)=\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right).$$

Por lo tanto, cuando hablamos de la equivalencia entre las desigualdades (B) y (C-B-S) podemos suponer que $a_k, b_k, x_k, y_k \in R_+^*, \forall k=\overline{1,n}$.

A continuación, probaremos que:

$$\textbf{(B)}\Leftrightarrow\textbf{(C-B-S).}$$

Demostración.

$$\textbf{(B)}\Rightarrow\textbf{ (C-B-S)}$$

Si en la desigualdad (B) tomamos $x_k=a_kb_k$ e $y_k=b_k^2, \forall k=\overline{1,n}$ obtenemos que:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k^2}{y_k}\geq\frac{\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)^2}{\sum_{k=1}^{n}y_k}\Leftrightarrow\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^2b_k^2}{b_k^2}\geq\frac{\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)^2}{\sum_{k=1}^{n}b_k^2}\Rightarrow\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)\geq\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)^2,$$

es decir, **(C-B-S).**

$$\textbf{(C-B-S)}\Rightarrow\textbf{ (B)}$$

Si en la desigualdad **(C-B-S)** tomamose $a_k=\sqrt{y_k}$ y $b_k=\dfrac{x_k}{\sqrt{y_k}}$ $\forall k=\overline{1,n}$ obtenemos que:

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)\geq\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)^2\Leftrightarrow\left(\sum_{k=1}^{n}y_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k^2}{y_k}\right)\geq\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{y_k}\cdot\frac{x_k}{\sqrt{y_k}}\right)^2=\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)^2$$

$$\Rightarrow\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k^2}{y_k}\geq\frac{\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)^2}{\sum_{k=1}^{n}y_k}$$, es decir, **(B).**

Observación. Ya que (C-B-S) puede demostrarse independientemente de (B) y vice versa deducimos que (C-B-S) y (B) son mutuamente independientes.

Problemas para los más jóvenes

Problemas para los más Jóvenes 50

Problemas de la "Brother Alfred Brousseau Mathematics Competition, Introductory Division"

Los problemas que presentamos a continuación proceden del libro - publicado por Dale Seymour Publications - sobre la Competición arriba mencionada, que se desarrolla en California.

PMJ50-1

Las dimensiones de una caja rectangular están en la proporción $2:3:5$ y su volumen es 82320 cm^3. Calcular estas dimensiones.

PMJ50-2

Formando las tablas de valores de $3^n, 7^n$ y 4^n para $n = 1, 2, ..., 10$ y observando las regularidades existentes, determinar la cifra de las unidades del número $13^{841} + 17^{508} + 24^{617}$.

PMJ50-3

Los cuatro enteros positivos a, b, c, d son tales que tomándolos por parejas en las 6 maneras posibles, los dos números de cada pareja tienen un divisor común mayor que uno. Además, $a + b + c + d$ es un número primo. Hallar el conjunto de enteros más pequeños para los que se cumplan esas dos condiciones.

PMJ50-4

Dos jugadores igualmente hábiles juegan cinco partidas, de manera que quien gane tres partidas se llevará las apuestas. Si el jugador A gana la primera partida, ¿cuál es la probabilidad de que se lleve las apuestas?

PMJ50-5

Un barco echa el ancla en aguas tranquilas (sin corriente). Cuatro horas más tarde el nivel del mar ha bajado 8 pies y el barco se ha movido una distancia horizontal de 80 pies desde el ancla. ¿Qué longitud de la cadena del ancla hay sumergida en ese momento?

REVISTA DE LA OIM Nº 48
PROBLEMAS PARA LOS MÁS JÓVENES
Cinco problemas de la prueba por equipos Coppa Italo d'Ignazio
2012

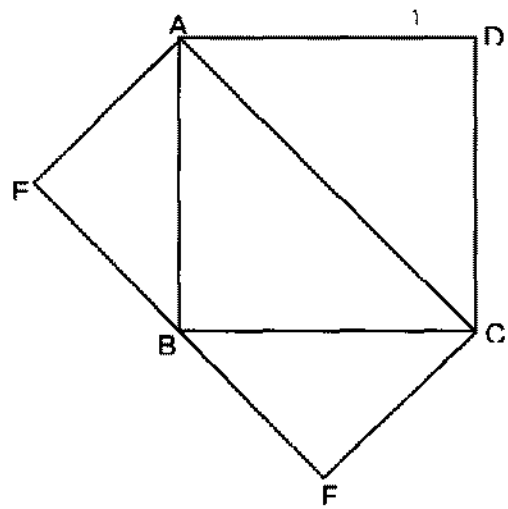
Luis Miguel MARAVÍ ZAVALETA.

Prof. de Matemática en I. E. Nº 80915 "Miguel Grau Seminario", C. P. El Pallar, Huamachuco, región La Libertad, Perú.

....

PMJ48 -1

La planta de la Biblioteca de Alejandría, la más rica de la Antigüedad, tenía la forma indicada en la figura:



Sabiendo que EF es paralelo a AC, que ABCD es un cuadrado de 40 m de lado y que AEFC es un rectángulo, calcular la medida del área ocupada por la Biblioteca.

Solución:

En el rectángulo AEFC, AE es congruente con CF. Dado que AC (lado del rectángulo) es la diagonal del cuadrado ABCD, su medida es de $40\sqrt{2}$ m. ¿B es punto medio de EF? Sí, pues los triángulos AEB y CFB son congruentes (teorema "lado – ángulo – lado"). Entonces, EB = EF = $20\sqrt{2}$ m. Mediante el teorema de Pitágoras se determina que CF = AE = $20\sqrt{2}$ m. Con estos datos y la descomposición del área de la planta en la suma de dos áreas parciales, tenemos que el área del rectángulo AEFC es de 1600 m^2, mientras que el área del triángulo

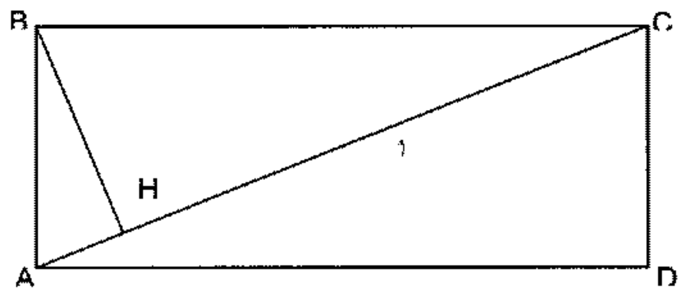
ADC mide 800 m^2. El área total de la planta de la antigua Biblioteca de Alejandría es de 2400 m^2.

PMJ48 – 2

En un rectángulo ABCD las longitudes de las proyecciones ortogonales de los lados AB y BC sobre la diagonal AC son, respectivamente, 9cm. y 16 cm. Calcular el área de ABCD.

Solución:

Grafiquemos la figura:



Para calcular el área del rectángulo ABCD es necesario contar con las medidas de sus lados AB y BC o de los lados respectivamente paralelos a ellos... En el triángulo rectángulo ABC, la longitud de la altura BH relativa a la hipotenusa AC es de 12 cm., pues

$$(9)(16) = BH^2$$

Mediante el teorema de Pitágoras, empleado en el triángulo rectángulo ABH, se obtiene AB = 15 cm. Con un razonamiento similar se obtiene en el triángulo rectángulo BHC que BC = 20 cm. Se concluye entonces que el área del rectángulo ABCD es de 300 cm^2.

PMJ48 – 3

Iniciación pitagórica
*Se dice que a un joven discípulo de Pitágoras, el día de su iniciación en la escuela pitagórica, se le pidió que resolviera el siguiente problema: Si **a** y **b** son dos enteros positivos cuyo producto **ab=1000**, calcular la suma **a+b** sabiendo que ni **a** ni **b** son múltiplos de 10.*

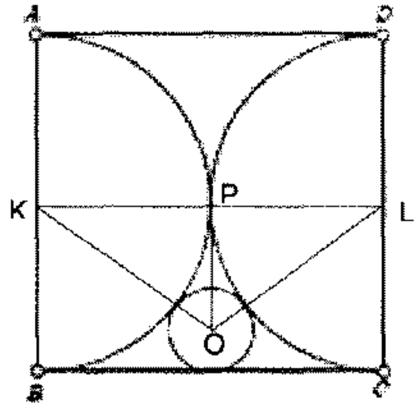
Solución:

Al descomponer 1000 en sus factores primos, observamos que $1000 = 2^3.5^3$Los únicos factores que generan ese producto de acuerdo con las condiciones del problema son 8 y 125. Cualquier otra pareja de factores significaría, bien la multiplicación de alguna potencia de 2 con cinco, bien el producto de alguna potencia de cinco con 2. En estos casos, se observan factores múltiplos de 10, lo que está fuera de las condiciones brindadas. Luego, la suma de 8 + 125 es 133.

PMJ48 – 4

No borres mis círculos

Parece que estas fueron las últimas palabras de Arquímedes, antes de que el soldado enviado por el emperador romano Marcelo para llevarlo a su presencia se impacientase y lo matase. Tal vez Arquímedes estaba tratando de resolver este problema: Sea ABCD un cuadrado de lado AB = 200. Hallar el radio de la circunferencia pequeña de la figura, tangente al lado BC y a las semicircunferencias construidas interiormente al cuadrado:



Solución:

K y L son los centros de las semircunferencias de radios KB y LC, respectivamente. Ello significa que KB = KP = 100 u. (LC = LP = 100 u.) Si x es la medida del radio de la circunferencia O, entonces OK = OL = (100 + x) u. Además, OP (segmento tangente a las semicircunferencias K y L en el punto P) mide (100 – x) u. Como KP y PL son perpendiculares a OP, quedan determinados los triángulos rectángulos KPO y LPO, donde el empleo del teorema de Pitágoras permitirá calcular el valor de x en cualquiera de ellos:

$$100^2 + (100 - x)^2 = (100 + x)^2$$

Problemas de nivel medio y de Olimpíadas

Problemas de Nivel Medio y de Olimpiadas 50

Problemas de la Ronda final de la 26ª Olimpiada de Corea del Sur (2013)

PO50-1

Sea ABC un triángulo con $\widehat{B} > \widehat{C}$ y sea D el punto del lado AC tal que $\widehat{ADC} = \widehat{C}$. Sea I el incentro de ABC y $E \neq I$ el segundo punto de intersección de AI con la circunferencia circunscrita de CDI. Sea P el punto de intersección de la recta BD con la recta que pasa por E y es paralela a AB. Sea J el incentro de ABD,y A' el simétrico de A con respecto a I.Supongamos que las dos rectas JP y $A'C$ se cortan en el punto Q. Demostrar que $QJ = QA'$.

PO50-2

Hallar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ tales que, para todos los reales a, b, c, d que verifican $ab + bc + cd = 0$, se cumple la siguiente igualdad:

$$f(a-b) + f(c-d) = f(a) + f(b+c) + f(d).$$

PO50-3

Dado un entero positivo $n \geq 2$, se define el conjunto T de la siguiente manera:

$$T = \{(i,j) : 1 \leq i < j \leq n \text{ con } i \mid j\} \quad (i \text{ divide a } j).$$

Para los números reales no negativos $x_1, x_2, ..., x_n$ tales que $x_1+x_2+\cdots+x_n = 1$, hallar el máximo valor (en función de n) de la suma

$$\sum_{(i,j)\in T} x_i x_j$$

PO50-4

Dado el triángulo ABC, sean B_1 y C_1 los exincentros correspondientes a los ángulos $\widehat{B}$ y $\widehat{C}$, respectivamente.

La recta B_1C_1 corta a la circunferencia circunscrita de ABC en un punto $D \neq A$. La perpendicular desde B_1 a CA y la perpendicular desde C_1 a AB se cortan en E. Sea ω la circunferencia circunscrita a ADE. La tangente a ω en D corta a la recta AE en F. La perpendicular desde D a AE corta a AE en G e interseca a ω en $H \neq D$.La circunferencia circunscrita de HGF corta a ω en $I \neq H$. Sea J el pie de la perpendicular desde D a AH.

Demostrar que AI pasa por el punto medio de DJ.

PO50-5

Sean a y b enteros positivos primos entre sí, y a_n, b_n sucesiones de enteros que verifican

$$\left(a + b\sqrt{2}\right)^{2n} = a_n + b_n\sqrt{2}.$$

Hallar todos los números primos p tales que existe un entero positivo n menor o igual que p que verifica $b_n \equiv 0 (\operatorname{mod} p)$.

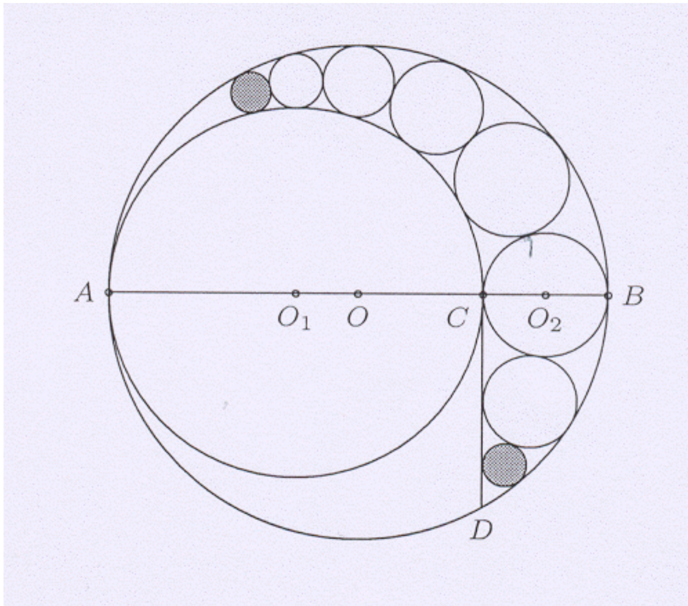
PO50-6

Dada una correspondencia 1-1 $f : \{1, 2, ..., n\} \to \{1, 2, ..., n\}$ para algún entero positivo n, se definen cuatro conjuntos A, B, C, D de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
A &= \{i \mid i > f(i)\} \\
B &= \{(i,j) \mid i < j \leq f(j) < f(i) \ \text{ o } f(j) < f(i) < i < j\} \\
C &= \{(i,j) \mid i < j \leq f(i) < f(j) \ \text{ o } \ f(i) < f(j) < i < j\} \\
D &= \{(i,j) \mid i < j \ \text{ y } \ f(i) > f(j)\}
\end{aligned}$$

Si $|X|$ representa el número de elementos del conjunto X, demostrar que $|A| + 2|B| + |C| = |D|$.

Problemas



Problema 246, propuesto por M^a Francisca Adrover Garau y Miguel Amengual Covas, Mallorca, España

En la figura, el segmento CD es una semicuerda perpendicular al diámetro AB de una circunferencia de centro O. Los respectivos centros de las circunferencias de diámetros AC y CB son los puntos O_1 y O_2. Las restantes circunferencias son tangentes exteriores entre sí y están inscritas en el ángulo curvilíneo y en el segmento circular, tal como se indica. Si los círculos sombreados (los de ambos extremos de la cadena de círculos) son iguales, determinar la razón $AC : CB$.

Problema 247, propuesto por Marcos Martinelli, Brasilia, Brasil

Si $n \in \mathbb{N}$ *y* $k \in \mathbb{N}$ *tal que* $1 \leq k \leq n+1$, *se consideran los números reales* a_k *tales que*

$$\sum_{k=1}^{n+1} a_k^2 \neq 0.$$

Calcular

$$\max\left\{\frac{\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k a_{k+1}\right|}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} a_k^2}\right\}.$$

Problema 248, propuesto por José Luis Díaz Barrero, Barcelona, España

Sean $x_1, x_2, ..., x_n$ con $n \geq 2$, números reales no negativos menores que 1 y tales que $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1$.

Demostrar que

$$x_n \sqrt{\frac{x_1}{x_1 x_2 + n - 1}} + x_{n-1} \sqrt{\frac{x_2}{x_2 x_3 + n - 1}} + \cdots + x_1 \sqrt{\frac{x_n}{x_n x_1 + n - 1}} \leq 1.$$

Problema 249, propuesto por Marcel Chiritza, Bucarest, Rumania

Resolver, en el conjunto de los números reales, el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \left(9^x + 9^y + 9^z\right)\left(3^{-x} + 3^{-y} + 3^{-z}\right) = 3 \\ 3^{x+y+1} \cdot 3^{y+z+1} \cdot 3^{z+x+1} = 3^x + 3^y + 3^z \end{cases}$$

Problema 250, propuesto por Marcel Chiritza, Bucarest, Rumania

Sea P un punto interior al triángulo equilátero ABC, de lado 1. Si ponemos $x = PA, y = PB, z = PC$, probar que

$$\left(x^2 + y^2 + z^2\right) + \left(x^2 + y^2 + z^2 - 1\right)^2 = 3\left(x^2 y^2 + y^2 z^2 + z^2 x^2\right).$$

Problema 251, propuesto por Marcel Chiritza, Bucarest, Rumania

Hallar los números reales a, b tales que

$$\lim_{n \to \infty} \left[\frac{n^3}{(n+1)^2} + an + b\right] = 0.$$

Problema 252, propuesto por Marcel Chiritza, Bucarest, Rumania

Sea ABC un triángulo. Si existe una recta que corte a los lados AB y AC en M y N, respectivamente, de tal manera que exista una circunferencia interior, tangente a las rectas AB, AC, BN y CM, entonces el triángulo es isósceles.

Problema 253, propuesto por Marcel Chiritza, Bucarest, Rumania

Las sucesiones $(a_n)_{n \geq 1}$ y $(b_n)_{n \geq 1}$ se definen de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{m=1}^{n} \sum_{k=0}^{m} (-1)^m \frac{\binom{n}{m}}{m+2} \\ b_n &= \sum_{m=1}^{n} \sum_{k=0}^{m} (-1)^m \frac{\binom{n}{m}}{(m+2)(m+4)}. \end{aligned}$$

Determinar si son convergentes y, en su caso, hallar sus límites cuando $n \to \infty$.

Problema 254, propuesto por Laurentiu Modan, Bucarest, Rumania

Sea ABC un triángulo isósceles con $b = c$. Demostrar que existen infinitos triángulos de ese tipo, verificando que $R < 2r$, siendo R el radio de la circunferencia circunscrita y r el de la inscrita.

Problema 255, propuesto por D.M. Batinetzu-Giurgiu, Bucarest, y Neculai Stanciu, Buzau, Rumania

Sean $a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), b \in [1, \infty)$, *y* $m, n \in \mathbb{N}^*$. *Calcular*

$$\int_{-a}^{a} \frac{\sin x + \tan x}{(b - \cos x)^m + \sin^{2n} x} dx.$$

PROBLEMA 241, propuesto por D.M. Batinetu-Giurgiu (Bucarest) y N. Stanciu (Buzau)

Sean $s, t \in \mathbb{R}$, y consideremos la sucesión

$$\{L_n(s,t)\}_{n\geq 2}$$

definida por

$$L_n(s,t) = (n+1)^s \cdot \sqrt[n+1]{((n+1)!)^t} - n^s \cdot \sqrt[n]{(n!)^t}.$$

Calcular

$$\lim_{n\to\infty} L_n(s,t) = L(s,t).$$

Solución por Daniel Lasaosa Medarde, Universidad Pública de Navarra, Pamplona, España

Definamos $M_n(s,t) = n^s \cdot \sqrt[n]{(n!)^t}$, con lo que usando notación de Landau, y la aproximación de Stirling

$$\ln(n!) = n\ln(n) - n + \frac{1}{2}\ln(2\pi n) + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Tenemos entonces que

$$\ln\left(M_n(s,t)\right) = s\ln(n) + \frac{t}{n}\ln(n!) = (s+t)\ln(n) - t + \frac{t}{2n}\ln(2\pi n) + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Si $s+t=0$ y $s+t<0$, entonces respectivamente tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left(M_n(s,t)\right) = -t, \qquad \lim_{n\to\infty} \ln\left(M_n(s,t)\right) = -\infty,$$

luego como $M_n(s,t)$ tiende a una constante, igual a e^{-t} en el primer caso e igual a 0 en el segundo caso, entonces $L_n(s,t) = M_{n+1}(s,t) - M_n(s,t)$ tiende a 0 en ambos casos, es decir, $L(s,t) = 0$ siempre que $s+t \leq 0$.

Supogamos que $s+t=\alpha>0$, con lo que

$$\frac{M_n(s,t)}{e^{-t}} = n^\alpha \cdot \left(1 + \frac{t}{2n}\ln(2\pi n) + O\left(\frac{\ln^2(n)}{n^2}\right)\right) \cdot \left(1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) =$$

$$= n^\alpha + \frac{tn^{\alpha-1}}{2}\ln(2\pi n) + O\left(n^{\alpha-2}\ln^2(n)\right).$$

Ahora bien, $(n+1)^\alpha - n^\alpha = \alpha \cdot n^{\alpha-1} + O\left(n^{\alpha-2}\right)$, luego si $\alpha > 1$, se tiene que el término dominante en $M_{n+1}(s,t) - M_n(s,t)$ es de la forma $\alpha \cdot n^{\alpha-1}$, que diverge. Luego $L(s,t) \to +\infty$ cuando $s+t>1$. Si $\alpha = 1$, tenemos que

$$\frac{M_n(s,t)}{e^{-t}} = n + \frac{t}{2}\ln(2\pi n) + O\left(\frac{\ln^2(n)}{n}\right),$$

luego

$$\frac{L_n(s,t)}{e^{-t}} = 1 + \frac{t}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + O\left(\frac{\ln^2(n)}{n}\right) = 1 + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

con lo que $L(s,t) = e^{-t} = e^{s-1}$ cuando $s+t=1$. Finalmente, si $0 < s+t = \alpha < 1$, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{M_n(s,t)}{e^{-t}} - n^\alpha\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{t}{2n^{1-\alpha}}\ln(2\pi n) + O\left(\frac{\ln^2(n)}{n^{2-\alpha}}\right)\right) = 0,$$

con lo que

$$L(s,t) = e^{-t} \cdot \lim_{n\to\infty} ((n+1)^\alpha - n^\alpha) = e^{-t} \cdot \lim_{n\to\infty} n^{\alpha-1} = 0.$$

Concluímos por lo tanto que:

- si $s+t<1$, $L(s,t) = 0$,
- si $s+t=1$, $L(s,t) = e^{-t} = e^{s-1}$,
- si $s+t>1$, $L(s,t)$ no existe porque $L_n(s,t)$ diverge a $+\infty$.

Solución al problema 241)

Considere la siguiente función $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}\mid f(x)=\ln x$. La comparación de áreas de rectángulos con el área bajo de la curva de f, nos permite obtener las siguientes desigualdades:

$$\sum_{k=1}^{n-1}\ln k<\int_1^n \ln t\cdot dt\Rightarrow\sum_{k=1}^{n}\ln k<\ln n+(\ln t\cdot t-t)|_1^n=(n+1)\ln n+1-n\Rightarrow n!<\frac{e\cdot n^{n+1}}{e^n}.$$

$$\sum_{k=2}^{n}\ln k>\int_1^n \ln t\cdot dt\Rightarrow\sum_{k=1}^{n}\ln k>\ln 1+(\ln t\cdot t-t)|_1^n=n\ln n+1-n\Rightarrow n!>\frac{e\cdot n^{n}}{e^n}.$$

Consideremos ahora los siguientes casos:

I.i) $s\le 0\wedge t=0$ $(s\equiv -s, s\ge 0)$:

$$L_n(s,t)=(n+1)^{-s}\cdot\sqrt[n+1]{[(n+1)!]^0}-n^{-s}\cdot\sqrt[n]{(n!)^0}=\frac{1}{(n+1)^s}-\frac{1}{n^s}\Rightarrow L(s,t)=0-0=0.$$

I.ii) $0<s<1\wedge t=0$:

$$L_n(s,t)=(n+1)^s-n^s=n^s\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^s-1\right]=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^s-1}{\left(\frac{1}{n}\right)^s}\Rightarrow L(s,t)=\lim_{u\to0^+}\frac{(1+u)^s-1}{u^s}=$$

$$=\lim_{u\to0^+}\frac{s\cdot(1+u)^{s-1}}{s\cdot u^{s-1}}=\lim_{u\to0^+}\left(\frac{u}{1+u}\right)^{1-s}=0.$$

I.iii) $s=1\wedge t=0$:

$$L_n(s,t)=(n+1)^1-n^1=1\Rightarrow L(s,t)=1.$$

I.iv) $s>1\wedge t=0$:

$$L_n(s,t)=(n+1)^s-n^s=n^s\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^s-1\right]=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^s-1}{\left(\frac{1}{n}\right)^s}\Rightarrow L(s,t)=\lim_{u\to0^+}\frac{(1+u)^s-1}{u^s}.$$

$\dfrac{(1+u)^s-1}{u^s}>\dfrac{1+us-1}{u^s}=\dfrac{s}{u^{s-1}}$. Como $\lim\limits_{u\to0^+}\dfrac{s}{u^{s-1}}=+\infty\Rightarrow L(s,t)=+\infty$.

II) $t>0$:

Como $t>0$, las dos desigualdades en rojo implican: $\dfrac{e^{\frac{t}{n}}\cdot n^t}{e^t}<\sqrt[n]{(n!)^t}<\dfrac{e^{\frac{t}{n}}\cdot n^{\frac{t(n+1)}{n}}}{e^t}$. Así:

$$L_n(s,t) < \frac{(n+1)^s \cdot e^{\frac{t}{n+1}} \cdot (n+1)^{\frac{t(n+2)}{n+1}}}{e^t} - \frac{n^s \cdot e^{\frac{t}{n}} \cdot n^t}{e^t} = g(s,t)$$

$$L_n(s,t) > \frac{(n+1)^s \cdot e^{\frac{t}{n+1}} \cdot (n+1)^t}{e^t} - \frac{n^s \cdot e^{\frac{t}{n}} \cdot n^{\frac{t(n+1)}{n}}}{e^t} = h(s,t)$$

Sabemos que: $\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{\frac{t}{n+1}}}{1} = 1 \; y \; \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{\frac{t}{n}}}{1} = 1 \Rightarrow e^{\frac{t}{n+1}} \equiv 1 \wedge e^{\frac{t}{n}} \equiv 1 \; (*)$.

Como $\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^{\frac{t(n+2)}{n+1}}}{(n+1)^t} = \lim_{u\to+\infty} u^{\frac{t}{u}} = \lim_{u\to+\infty} e^{\frac{t\ln u}{u}} = \lim_{u\to+\infty} e^{\frac{t}{u}} = 1 \Rightarrow (n+1)^{\frac{t(n+2)}{n+1}} \equiv (n+1)^t$

Recordando $(*)$ y la ecuación anterior, tenemos:

$$\lim_{n\to+\infty} L_n(s,t) < \lim_{n\to+\infty} g(s,t) = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^{s+t} - n^{s+t}}{e^t} (I).$$

Como $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{\frac{t(n+1)}{n}}}{n^t} = \lim_{n\to+\infty} n^{\frac{t}{n}} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{t\ln n}{n}} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{t}{n}} = 1 \; \Rightarrow n^{\frac{t(n+1)}{n}} \equiv n^t$

Recordando $(*)$ y la ecuación anterior, tenemos:

$$\lim_{n\to+\infty} L_n(s,t) > \lim_{n\to+\infty} h(s,t) = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^{s+t} - n^{s+t}}{e^t} (II).$$

A partir de(I)y(II): $L(s,t) = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^{s+t} - n^{s+t}}{e^t}$.

Ahora considere las siguientes sub-casos:

II.i) $s \le -t \; (t > 0)$:

$$L(s,t) = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^{s+t} - n^{s+t}}{e^t} = 0 .$$

II.ii) $-t < s < 1 - t \; (t > 0)$:

$$L(s,t) = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^{s+t} - n^{s+t}}{e^t} = 0 .$$

II.iii) $s + t = 1 (t > 0)$:

$$L(s,t) = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^{s+t} - n^{s+t}}{e^t} = \frac{1}{e^t} .$$

II.iv) $s + t > 1 (t > 0)$:

$$L(s,t) = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^{s+t} - n^{s+t}}{e^t} = +\infty\,.$$

II) $t < 0$:

Como $t < 0$, las dos desigualdades en rojo implican: $\dfrac{e^{\frac{t}{n}} \cdot n^t}{e^t} > \sqrt[n]{(n!)^t} > \dfrac{e^{\frac{t}{n}} \cdot n^{\frac{t(n+1)}{n}}}{e^t}$. Así:

$$L_n(s,t) < \frac{(n+1)^s \cdot e^{\frac{t}{n+1}} \cdot (n+1)^t}{e^t} - \frac{n^s \cdot e^{\frac{t}{n}} \cdot n^{\frac{t(n+1)}{n}}}{e^t} = g(s,t)$$

$$L_n(s,t) > \frac{(n+1)^s \cdot e^{\frac{t}{n+1}} \cdot (n+1)^{\frac{t(n+2)}{n+1}}}{e^t} - \frac{n^s \cdot e^{\frac{t}{n}} \cdot n^t}{e^t} = h(s,t)$$

Sabemos que: $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e^{\frac{t}{n+1}}}{1} = 1\ y\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e^{\frac{t}{n}}}{1} = 1 \Rightarrow e^{\frac{t}{n+1}} \equiv 1 \wedge e^{\frac{t}{n}} \equiv 1\ (*)$.

Como $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^{\frac{t(n+1)}{n}}}{n^t} = \lim\limits_{n\to+\infty} n^{\frac{t}{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{\frac{t\ln n}{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{\frac{t}{n}} = 1\ \Rightarrow n^{\frac{t(n+1)}{n}} \equiv n^t$

Recordando $(*)$ y la ecuación anterior, tenemos:

$$\lim_{n\to+\infty} L_n(s,t) < \lim_{n\to+\infty} g(s,t) = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^{s+t} - n^{s+t}}{e^t} (I).$$

Como $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(n+1)^{\frac{t(n+2)}{n+1}}}{(n+1)^t} = \lim\limits_{u\to+\infty} u^{\frac{t}{u}} = \lim\limits_{u\to+\infty} e^{\frac{t\ln u}{u}} = \lim\limits_{u\to+\infty} e^{\frac{t}{u}} = 1 \Rightarrow (n+1)^{\frac{t(n+2)}{n+1}} \equiv (n+1)^t$

Recordando $(*)$ y la ecuación anterior, tenemos:

$$\lim_{n\to+\infty} L_n(s,t) > \lim_{n\to+\infty} h(s,t) = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^{s+t} - n^{s+t}}{e^t} (II).$$

A partir de (I) y (II): $L(s,t) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(n+1)^{s+t} - n^{s+t}}{e^t}$.

Ahora considere las siguientes sub-casos:

III.i) $s \leq -t\ (t < 0)$:

$$L(s,t) = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^{s+t} - n^{s+t}}{e^t} = 0\,.$$

III.ii) $-t < s < 1 - t\ (t < 0)$:

$$L(s,t) = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^{s+t} - n^{s+t}}{e^t} = 0\,.$$

III.iii) $s+t=1(t<0)$:

$$L(s,t)=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^{s+t}-n^{s+t}}{e^{t}}=\frac{1}{e^{t}}.$$

III.iv) $s+t>1(t<0)$:

$$L(s,t)=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^{s+t}-n^{s+t}}{e^{t}}=+\infty.$$

Resumiendo nuestra respuesta final: $L(s,t)=\begin{cases}0 & \text{si } s+t<1\\ e^{-t} & \text{si } s+t=1\\ +\infty & \text{si } s+t>1\end{cases}$

Marcos Francisco Ferreira Martinelli – Brasília – Brasil

PROBLEMA 242, propuesto por D.M. Batinetu-Giurgiu (Bucarest) y N. Stanciu (Buzau)

Sea $m \in \mathbb{R}^+$. Con las notaciones habituales para los triángulos, llamando S al área del triángulo ABC, demostrar que se verifica la siguiente desigualdad:

$$\frac{a^{m+2}}{(b\cdot R + c\cdot r)^m} + \frac{b^{m+2}}{(c\cdot R + a\cdot r)^m} + \frac{c^{m+2}}{(a\cdot R + b\cdot r)^m} \geq \frac{4\sqrt{3}}{(R+r)^m}\cdot S.$$

Solución por Daniel Lasaosa Medarde, Universidad Pública de Navarra, Pamplona, España

Utilizamos en la solución el siguiente

Lema: En todo triángulo de lados a, b, c y área S, se cumple que $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}\cdot S$, con igualdad si y sólo si el triángulo es equilátero.

Demostración: Ya que ambos miembros son positivos, el Lema es equivalente a $(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq 48S^2$. La fórmula de Herón para S en función de a, b, c se puede escribir de forma equivalente como

$$16S^2 = 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4,$$

que introducida en el resultado a demostrar, reduce la tarea a probar que $a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$, claramente cierta en virtud de la desigualdad del producto escalar, y con igualdad si y sólo si $a = b = c$, cqd.

Volviendo al problema propuesto, definamos $f(x) = \frac{1}{x^m}$, que para $x, m \in \mathbb{R}^+$ es estrictamente convexa al ser su derivada segunda $f''(x) = \frac{m(m+1)}{x^{m+2}} > 0$. Tenemos entonces que el miembro de la izquierda de la desigualdad a demostrar es

$$a^2 f\left(\frac{b\cdot R + c\cdot r}{a}\right) + b^2 f\left(\frac{c\cdot R + a\cdot r}{b}\right) + c^2 f\left(\frac{a\cdot R + b\cdot r}{c}\right) \geq$$

$$\geq (a^2 + b^2 + c^2) f\left(\frac{a^2\frac{b\cdot R + c\cdot r}{a} + b^2\frac{c\cdot R + a\cdot r}{b} + c^2\frac{a\cdot R + b\cdot r}{c}}{a^2 + b^2 + c^2}\right) =$$

$$= (a^2 + b^2 + c^2) f\left(\frac{(R+r)(ab + bc + ca)}{a^2 + b^2 + c^2}\right) = \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca}\right)^m \cdot \frac{a^2 + b^2 + c^2}{(R+r)^m} \geq$$

$$\geq \frac{4\sqrt{3}\cdot S}{(R+r)^m},$$

como queríamos demostrar, y donde hemos usado la desigualdad de Jensen, el Lema, y que $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ en virtud de la desigualdad del producto escalar. El que el triángulo ABC sea equilátero es condición necesaria para que se dé la igualdad, y se comprueba trivialmente que también es suficiente.

PROBLEMA 243, propuesto por D.M. Batinetu-Giurgiu (Bucarest) y N. Stanciu (Buzau)

Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (con $n \geq 3$) los vértices de un polígono regular; M un punto de su circunferencia inscrita y N un punto de su circunferencia circunscrita. Demostrar que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{{MA_k}^4}{{NA_k}^2} \geq \frac{1}{4}\left(3+\cos\frac{2\pi}{n}\right)\sum_{k=1}^{n} {MA_k}^2.$$

Solución por Daniel Lasaosa Medarde, Universidad Pública de Navarra, Pamplona, España

Comenzamos la solución con un Lema general y dos Proposiciones particulares a la situación descrita en el enunciado:

Lema: Sean R, r el circunradio e inradio de un polígono regular de $n \geq 3$ lados. Entonces, $r = R\cos\frac{\pi}{n}$.

Demostración: Sea $A_1A_2\ldots A_n$ el polígono, y O su centro. El triángulo A_1OA_2 es isósceles en O, con $OA_1 = OA_2 = R$, $\angle A_1OA_2 = \frac{2\pi}{n}$, y siendo r la longitud de la altura desde O sobre A_1A_2. Como $A_1A_2 = 2R\sin\frac{\pi}{n}$, el área de A_1OA_2 es

$$Rr\sin\frac{\pi}{n} = \frac{1}{2}R^2\sin\frac{2\pi}{n} = R^2\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n},$$

de donde dividiendo ambos lados por $R\sin\frac{\pi}{n}$ se deduce inmediatamente el Lema.

Proposición 1: Con las definiciones del enunciado, se tiene que

$$\sum_{k=1}^{n} {NA_k}^2 = 2nR^2, \qquad \sum_{k=1}^{n} {MA_k}^2 = n(R^2+r^2).$$

Demostración 1: Utilizaremos en esta demostración el siguiente resultado conocido: para todo ángulo δ y todo entero $n \geq 3$, se tiene

$$\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{2k\pi}{n}+\delta\right) = \sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{2k\pi}{n}+\delta\right) = 0.$$

La combinación de ambas igualdades es equivalente a la existencia de un polígono regular de n lados, uno de los cuáles forma un ángulo de δ con el eje X en un cierto sistema de coordenadas cartesianas. Sea entonces un sistema de coordenadas cartesianas con origen en el centro del polígono regular y $A_n \equiv (R, 0)$, con lo que podemos escribir

$$A_k \equiv \left(R\cos\frac{2k\pi}{n}, R\sin\frac{2k\pi}{n}\right).$$

Podemos entonces tomar $N \equiv (R\cos\alpha, R\sin\alpha)$ y $M \equiv (r\cos\beta, r\sin\beta)$, donde r es el inradio del polígono, y α, β son ángulos cualesquiera. Tenemos entonces que

$${NA_k}^2 = 2R^2 - 2R^2\cos\alpha\cos\frac{2k\pi}{n} - 2R^2\sin\alpha\sin\frac{2k\pi}{n} = 2R^2 - 2R^2\cos\left(\frac{2k\pi}{n}-\alpha\right),$$

cuya suma para $k = 1, 2, \ldots, n$ es $2nR^2$, pues la suma del segundo sumando en el miembro de la derecha es claramente 0. De la misma forma,

$${MA_k}^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos\left(\frac{2k\pi}{n}-\beta\right),$$

cuya suma para $k = 1, 2, \ldots, n$ es $n(R^2+r^2)$. Queda demostrada la Proposición 1.

Proposición 2: En la situación descrita en el enunciado, se tiene que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{MA_k{}^4}{NA_k{}^2} > \frac{n(R^2+r^2)^2}{2R^2}.$$

Demostración 2: En virtud de la desigualdad del producto escalar, se tiene

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{MA_k{}^4}{NA_k{}^2}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} NA_k{}^2\right) \geq \left(\sum_{k=1}^{n} MA_k{}^2\right)^2,$$

con igualdad si y sólo si $\frac{NA_k}{MA_k}$ es independiente de k. Sustituyendo los resultados de la Proposición 1, nos basta con demostrar que la igualdad no puede darse. En efecto, supongamos que $\frac{NA_k}{MA_k}$ es independiente de k, con lo que $N \neq A_k$ para todo k, pues en caso contrario esta cantidad sería 0 para un k, y no nula para el resto. Luego sin pérdida de generalidad podemos asumir que N está en la circunferencia circunscrita al polígono, en el arco A_nA_1 que no contiene a ningún otro vértice, y no más cerca de A_1 que de A_n, es decir, $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{n}\right]$, y $NA_1 \geq NA_n$ son los dos menores valores que puede tomar NA_k. Luego $MA_n \leq MA_1$ han de ser los dos menores valores que toma MA_k, y $\beta \in \left(0, \frac{\pi}{n}\right]$. Igualando entonces $\frac{NA_n}{MA_n} = \frac{NA_1}{MA_1}$ y bajo estas condiciones, tras algo de álgebra obtenemos que ha de ser $\alpha = \beta = \frac{\pi}{n}$, e introduciendo el resultado en las expresiones para NA_k y MA_k, llegamos a que $\frac{NA_k}{MA_k} = \frac{NA_1}{MA_1}$ si y sólo $r = R\cos\frac{(2k-1)\pi}{n}$. Pero por el Lema, esta igualdad no se cumple para $k = 2$. Luego la desigualdad hallada es siempre estricta, quedando demostrada la Proposición 2.

En virtud de las Proposiciones 1 y 2, e introduciendo los resultados hallados en ella en la desigualdad propuesta en el enunciado, nos basta con demostrar que

$$\frac{R^2+r^2}{R^2} \geq \frac{1}{2}\left(3+\cos\frac{2\pi}{n}\right) = 1+\cos^2\frac{\pi}{n} = 1+\frac{r^2}{R^2},$$

claramente cierta y con igualdad siempre, y donde hemos usado el Lema. Como la desigualdad en la Proposición 2 es estricta, hemos probado que la desigualdad propuesta en el enunciado se cumple siempre, pero siempre estrictamente sin posibilidad de darse la igualdad.

Solución del problema 243)

Seja $\alpha = \measuredangle A_1ON$ (O es el centro de los círculos circunscritos e inscritos para el polígono) e $\beta = \measuredangle A_1OM$. Tenemos las siguientes relaciones: $NA_k = |2R\sin\theta_{k,\alpha}|$e $MA_k = |2r\sin\theta_{k,\beta}|$, donde $\theta_{k,\gamma} = \frac{\pi}{n}\cdot(k-1) - \frac{\gamma}{2}(\gamma = \{\alpha,\beta\})$. Vamos a demonstrar que $\sum_{k=1}^{n}\sin^2\theta_{k,\gamma} = \frac{n}{2}$.

$\sin^2\theta_{k,\gamma} = \frac{1-\cos 2\theta_{k,\gamma}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\left(A\lambda^{k-1} + \frac{1}{A\lambda^{k-1}}\right)}{2}$, donde $A = e^{-i\gamma}$ y $\lambda = e^{i\cdot\frac{2\pi}{n}}$. Tenemos:

$$\sum_{k=1}^{n}\sin^2\theta_{k,\gamma} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2} - \frac{A}{4}\cdot\sum_{k=1}^{n}\lambda^{k-1} - \frac{1}{4A}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\lambda^{k-1}} = \frac{n}{2} - \frac{A}{4}\cdot\left(\frac{\lambda^n-1}{\lambda-1}\right) - \frac{1}{4A}\cdot\left[\frac{\left(\frac{1}{\lambda}\right)^n - 1}{\left(\frac{1}{\lambda}\right)-1}\right] =$$

$$= \frac{n}{2} - \frac{A}{4}\cdot\left(\frac{e^{i\cdot 2\pi}-1}{\lambda-1}\right) - \frac{1}{4A}\cdot\left[\frac{e^{-i\cdot 2\pi}-1}{\left(\frac{1}{\lambda}\right)-1}\right] = \frac{n}{2}\text{porque} e^{i\cdot 2\pi} = e^{-i\cdot 2\pi} = 1.$$

Hay una pequeña errata en el enunciación. Vamos a mostrar la siguiente desigualdad:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{NA_k^{\,4}}{MA_k^{\,2}} > \frac{1}{4}\cdot\left(3+\cos\frac{2\pi}{n}\right)\cdot\sum_{k=1}^{n}NA_k^{\,2} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n}\frac{16R^4\sin^4\theta_{k,\alpha}}{4r^2\sin^2\theta_{k,\beta}} > \frac{1}{4}\cdot\left(3+\cos\frac{2\pi}{n}\right)\cdot\sum_{k=1}^{n}4R^2\sin^2\theta_{k,\alpha}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n}\frac{4R^2\sin^4\theta_{k,\alpha}}{R^2\cos^2(\pi/n)\sin^2\theta_{k,\beta}} > \left(3+\cos\frac{2\pi}{n}\right)\cdot\sum_{k=1}^{n}\sin^2\theta_{k,\alpha}\ [r = R\cos(\pi/n)].\text{ Por lo tanto:}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n}\frac{\sin^4\theta_{k,\alpha}}{\sin^2\theta_{k,\beta}} > \frac{\cos^2(\pi/n)}{4}\left(3+\cos\frac{2\pi}{n}\right)\cdot\sum_{k=1}^{n}\sin^2\theta_{k,\alpha}.$$

Para demostrar esta última desigualdad, podemos aplicar Cauchy-Schwarz.

Son $X = \left(\frac{\sin^2\theta_{k,\alpha}}{\sin\theta_{k,\beta}}\right)$ y $Y = (\sin\theta_{k,\beta})(1 \le k \le n)$. Tenemos: $(X\cdot Y)^2 \le (X\cdot X)(Y\cdot Y)$. Así:

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\sin^2\theta_{k,\alpha}\right)^2 \le \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin^4\theta_{k,\alpha}}{\sin^2\theta_{k,\beta}}\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}\sin^2\theta_{k,\beta}\right) \Rightarrow \sum_{k=1}^{n}\frac{\sin^4\theta_{k,\alpha}}{\sin^2\theta_{k,\beta}} \ge \sum_{k=1}^{n}\sin^2\theta_{k,\alpha}\text{ porque}$$

$\sum_{k=1}^{n}\sin^2\theta_{k,\alpha} = \sum_{k=1}^{n}\sin^2\theta_{k,\beta} = \frac{n}{2}$. Podemos provar ainda que: $1 > \frac{\cos^2(\pi/n)}{4}\left(3+\cos\frac{2\pi}{n}\right) =$

$$= \frac{\cos^2(\pi/n)}{4}[3 + 2\cos^2(\pi/n) - 1] = \frac{\theta(1+\theta)}{2},\text{ donde} 0 < \theta = \cos^2(\pi/n) < 1 \Rightarrow \theta(1+\theta) < 2.$$

Las dosúltimas ecuacionesen rojopermitena la siguiente conclusión:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin^4 \theta_{k,\alpha}}{\sin^2 \theta_{k,\beta}} \geq \sum_{k=1}^{n} \sin^2 \theta_{k,\alpha} > \frac{\cos^2(\pi/n)}{4}\left(3 + \cos\frac{2\pi}{n}\right) \cdot \sum_{k=1}^{n} \sin^2 \theta_{k,\alpha} \text{ . c.q.d}$$

Marcos Francisco Ferreira Martinelli – Brasília - Brasil

Problema 244, propuesto por Marcel Chiritza, Bucarest:

“Sea ABC un triángulo cuyo ángulo A $\geq$ 90°. Sea M uno cualquiera de los puntos interiores al triángulo tales que sus proyecciones ortogonales sobre los lados de ABC son los vértices de un triángulo rectángulo. Demostrar que, de 7 cualesquiera de esos puntos, hay 4 que son concíclicos.”

RESOLUCIÓN:

Sean D, E y F los pies de las perpendiculares a los lados a, b y c respectivamente. Supongamos que es el ángulo FED el que es recto. Se tiene que el ángulo FMD = 180º - B, pues el cuadrilátero BFMD es inscrito, al ser rectos sus ángulos en F y D.

Como el cuadrilátero AFME es igualmente inscrito, los ángulos AMF y AEF son iguales. Otro tanto ocurre con los ángulos DMC y DEC. Dado que el ángulo FED es recto, tenemos que:

90º = AEF + DEC = AMF + DMC

Entonces, para el ángulo AMC se tiene:

AMC = 360º - FMD - (AMF + DMC) = 360º - (180º - B) - 90º = B + 90º

Por tanto, el punto M se encuentra en el arco capaz, interior al triángulo, del segmento AC con ángulo B + 90º.

Si el triángulo DEF es recto en F, el punto M deberá encontrarse en el arco capaz, interior al triángulo, del segmento AB con amplitud C + 90º.

Finalmente el triángulo DEF no puede ser recto en D, pues el correspondiente arco capaz sería de mas de 180º.

Por tanto los siete puntos m cualesquiera deben estar en uno u otro de estos dos arcos capaces, y necesariamente debe haber al menos cuatro en uno de ellos.

Ignacio Larrosa Cañestro

IES Rafael Dieste

A Coruña (España)

PROBLEMA 244, propuesto por Marcel Chiritza, Bucarest

Sea ABC un triángulo cuyo ángulo $A \geq 90°$. Sea M uno cualquiera de los puntos interiores al triángulo tales que sus proyecciones ortogonales sobre los lados de ABC son los vértices de un triángulo rectángulo. Demostrar que, de 7 cualesquiera de esos puntos, hay 4 que son concíclicos.

Solución por Daniel Lasaosa Medarde, Universidad Pública de Navarra, Pamplona, España

Sean D, E, F las proyecciones ortogonales de M sobre BC, CA, AB. Se tiene entonces que $\angle FDE < \angle FME = 180° - \angle A \leq 90°$, luego DEF nunca puede ser rectángulo en D. Supongamos entonces que M es tal que DEF es rectángulo en E. Como $BDMF$ es cíclico con diámetro MB por ser MD, MF respectivamente perpendiculares a las rectas $BC = BD$ y $AB = FB$, se tiene por el teorema del seno que $DF = MB \sin \angle B$, y de forma similar $DE = MC \sin \angle C$, $EF = MA \sin \angle A$. Luego usando nuevamente el teorema del seno, M es tal que DEF es rectángulo en E si y sólo si $b^2 \cdot MB^2 = c^2 \cdot MC^2 + a^2 \cdot MA^2$. De forma análoga, se tiene que M es tal que DEF es rectángulo en F, si y sólo si $c^2 \cdot MC^2 = b^2 \cdot MB^2 + a^2 \cdot MA^2$.

Podemos entonces particionar el conjunto de puntos M que satisfacen la condición del enunciado, en dos conjuntos, R_E y R_F, según sea DEF rectángulo respectivamente en E y en F. Demostraremos que R_E, R_F son, cada uno, un subconjunto de puntos situados sobre una cierta circunferencia, con lo que quedará demostrado el resultado pedido. En efecto, de cada 7 puntos, por el principio del palomar hay, bien al menos 4 en R_E (siendo por lo tanto esos 4 puntos concíclicos sobre la circunferencia que contiene a R_E), bien al menos 4 en R_F (siendo nuevamente concíclicos). Es decir, al poder intercambiar B, C y todos los puntos definidos a partir de ellos sin afectar al problema, nos basta con demostrar que la condición $b^2 \cdot MB^2 = c^2 \cdot MC^2 + a^2 \cdot MA^2$ define una circunferencia o un subconjunto de puntos situado sobre una circunferencia.

Sea un sistema de coordenadas cartesianas con origen en el pie de la perpendicular desde A sobre BC. Se tiene entonces que $B \equiv (-c \cos B, 0)$, $C \equiv (b \cos C, 0)$ y $A \equiv (0, h_a)$, donde h_a es la longitud de la altura desde A. Luego dado $M \equiv (x, y)$, se tiene

$$MA^2 = x^2 + y^2 - 2h_a y + {h_a}^2, \qquad MB^2 = x^2 + y^2 + 2cx \cos B + c^2 \cos^2 B,$$

$$MC^2 = x^2 + y^2 - 2bx \cos C + b^2 \cos^2 C,$$

siendo por lo tanto, tras algo de álgebra, $M \in R_E$ si y sólo si

$$\left(a^2 + c^2 - b^2\right)\left(x^2 + y^2\right) - 2abcx \cos(B - C) - 4aSy + 4S^2 \frac{a^2 + b^2 - c^2}{a^2} = 0,$$

donde S es el área de ABC, y hemos usado relaciones del triángulo fácilmente demostrables por trigonometría básica, como la fórmula de Herón para el área,

$$b \cos B + c \cos C = a \cos(B - C), \qquad \text{o} \qquad b^2 c^2 \left(\cos^2 C - \cos^2 B\right) = \frac{4S^2 (b^2 - c^2)}{a^2}.$$

Nótese que esta expresión puede ponerse en la forma

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2,$$

donde

$$x_0 = \frac{bc\,(b\cos B + c\cos C)}{a^2+c^2-b^2} = \frac{b\cos(B-C)}{2\cos B}, \qquad y_0 = \frac{2aS}{a^2+c^2-b^2} = \frac{a\sin B}{2\cos B},$$

y

$$\rho^2 = {x_0}^2 + {y_0}^2 - \frac{bc\sin^2 B\cos C}{\cos B}$$

donde x_0, y_0, ρ dependen de ABC, pero no de la elección de M. Es decir, todos los puntos de R_E están en una circunferencia de centro (x_0, y_0) constante, y radio ρ constante, quedando demostrado el resultado pedido en el enunciado.

Solución al problema 244)

Dado un ΔXYZ: x, y,z son sus lados, X, Y, Z son sus ángulos y M, el raio de su circuncirculo.

Sonun ΔPQR y unsistema cartesiano con $Q \equiv (0,0), R \equiv (p, 0)$ e $P \equiv (r\cos Q\,, r\sin Q)$.

SonP_1, Q_1, R_1 los pies de las perpendiculares trazadas desde $M \equiv (x_m, y_m)$, interior a ΔPQR.

$\#$ QP_1MR_1es inscribible $\Rightarrow \measuredangle QR_1P_1 = \measuredangle QMP_1 = \theta$. También sabemos que$\measuredangle P_1R_1M = 90 - \theta$.

Queremos encontrar todos los puntos M tales que $\measuredangle P_1R_1Q_1 = 90 \Rightarrow \measuredangle MR_1Q_1 = \theta$.

$\#$ PQ_1MR_1es inscribible $\Rightarrow \measuredangle MPQ_1 = \measuredangle MR_1Q_1 = \theta \Rightarrow \ \Delta QP_1M \sim \Delta PQ_1M \Rightarrow \dfrac{P_1Q}{MP_1} = \dfrac{MQ_1}{PQ_1}$.

$$Sea\ \measuredangle P_1RM = \alpha\ y\ MR = K \Rightarrow \frac{x_m}{y_m} = \frac{K\sin(R-\alpha)}{q - K\cos(R-\alpha)} = \frac{K\sin R\cos\alpha - K\sin\alpha\cos R}{q - K\cos R\cos\alpha - K\sin R\sin\alpha} =$$

$$= \frac{(p-x_m)\sin R - y_m\cos R}{q-(p-x_m)\cos R - y_m\sin R} \Rightarrow \cos R\, x_m^2 + \cos R\, y_m^2 + (q - p\cos R)x_m - p\sin R\, y_m = 0\ (C_M).$$

i) $Q \equiv (0,0) \in C_M$. Vamos a demonstrar que ii) $P \equiv (r\cos Q\,, r\sin Q) \in C_M$. Observe:

$cos\,R\,(r\,cos\,Q)^2 + cos\,R\,(r\,sin\,Q)^2 + (q - p\,cos\,R)r\,cos\,Q - p\,sin\,R\,(r\,sin\,Q) = cos\,R\,r^2 + qr\,cos\,Q -$

$-pr\,cos(R-Q) = 2Mr[sin\,R\,cos\,R + sin\,Q\,cos\,Q - sin\,P\,cos(R-Q)] = Mr[sin\,2R + sin\,2Q -]$

$[-2\,sin(R+Q)\,cos(R-Q)] = \ Mr[2sin(R+Q)\,cos(R-Q) - 2\,sin(R+Q)\,cos(R-Q)] = 0$.

Estudiaremos tres casos posibles: $\boldsymbol{I}$) $\boldsymbol{R} = \mathbf{90}$; $\boldsymbol{II}$) $\boldsymbol{R} < 90\ \vee\ \boldsymbol{III}$) $\boldsymbol{R} > 90$.

$\boldsymbol{I}$) C_M:y_m=$\left(\frac{q}{p}\right)y_m \Rightarrow M \in \overline{PQ}$.Absurdo! $\Rightarrow \nexists M$ que satisface la condition $\measuredangle P_1R_1Q_1 = 90$.

$\boldsymbol{II}$) C_M: $\left[x_m - \left(\dfrac{p\,cos\,R - q}{2\,cos\,R}\right)\right]^2 + \left(y_m - \dfrac{p\,sin\,R}{2\,cos\,R}\right)^2 = \left(\dfrac{r}{2\,cos\,R}\right)^2$. Se demuestra que el punto$R$ pertenece a lo exterior de la circunferenciaC_M. Podemos reemplazar $R \equiv (p, 0)$ en C_M:

$\left[p - \left(\dfrac{p\,cos\,R - q}{2\,cos\,R}\right)\right]^2 + \left(0 - \dfrac{p\,sin\,R}{2\,cos\,R}\right)^2 = \dfrac{pq}{cos\,R} + \left(\dfrac{r}{2\,cos\,R}\right)^2 > \left(\dfrac{r}{2\,cos\,R}\right)^2$. Recordando i) y ii), hay un arco de C_M en el interior del ΔPQR de tal forma que$\measuredangle P_1R_1Q_1 = 90$.

$\boldsymbol{III}$) C_M: $\left[x_m - \left(\dfrac{p\,|cosR| + q}{2|cosR|}\right)\right]^2 + \left[y_m - \left(-\dfrac{p\,sin\,R}{2|cosR|}\right)\right]^2 = \left(\dfrac{r}{2|cosR|}\right)^2$. Se demuestra que el punto Rpertenece a lo interior de la circunferenciaC_M. Podemos reemplazar$R \equiv (p, 0)$ en C_M:

$\left[p - \left(\dfrac{p\,|cosR| + q}{2|cosR|}\right)\right]^2 + \left[0 - \left(-\dfrac{p\,sin\,R}{2|cosR|}\right)\right]^2 = -\dfrac{pq}{|cosR|} + \left(\dfrac{r}{2|cosR|}\right)^2 < \left(\dfrac{r}{2|cosR|}\right)^2$. Recordando

i) y ii), no hay un arco de C_M en el interior del ΔPQR de tal forma que $\measuredangle P_1R_1Q_1 = 90$.

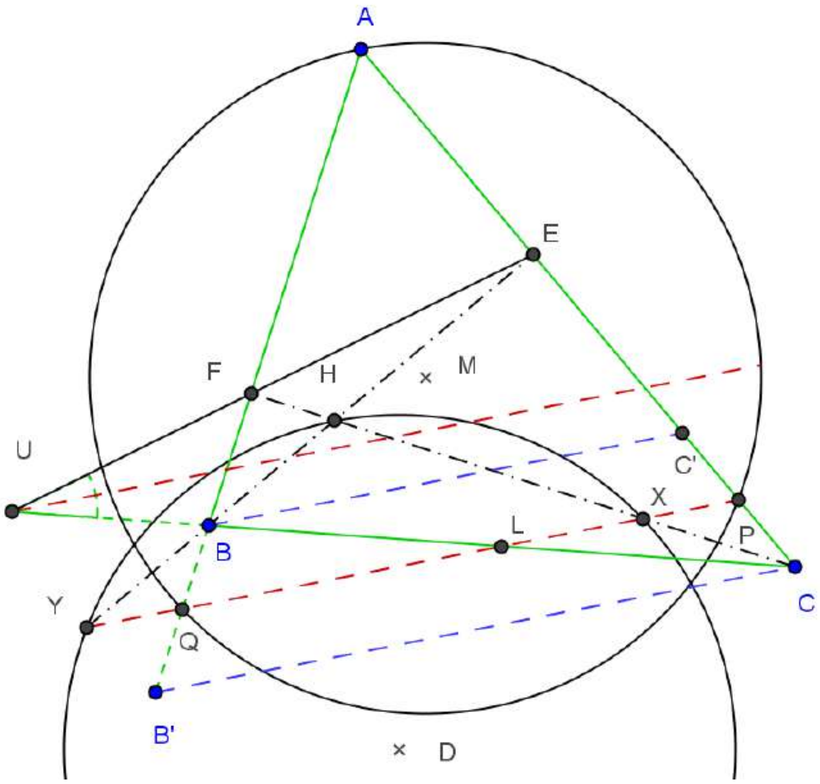
Para nuestro problema, $A \geq 90$. Por lo tanto, los posibles puntos M se derivam sólo de los ángulos B e C. Considere $7(3 \cdot 2 + 1)$ puntos M cualquiera. Cada punto pertence a uma de las dos circunferencias C_{M_B} o C_{M_C}. Por lo tanto, 4 puntos pertenecen a la misma circunferencia.

Marcos Francisco Ferreira Martinelli – Brasília - Brasil

Problema 245.-

Las alturas BE y CF de un triangulo ABC se cortan en H. Las prolongaciones de FE y BC se cortan en U. Una recta que pasa por el punto medio L de BC, paralela a la bisectriz interior de <EUB, corta a CA, AB, HC y HB (o a sus prolongaciones, si fuera necesario) en P, Q, X, Y, respectivamente. Demostrar que las circunferencias APQ y HXY tienen radios iguales.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.



El diámetro de la circunferencia de centro D, circunscrita al triángulo HXY es $d_G = \frac{YX}{sen(180-A)}$.
El de la de centro M, circunscrita al triángulo APQ es $d_M = \frac{QP}{sen\ A}$. La igualdad de ambas se concluirá si los segmentos QP e YX son de la misma longitud.

De otra parte sabemos que el triángulo con vértice A y los pies E y F de las es semejante al ABC (por una semejanza inversa). Así pues $\measuredangle FEA = \measuredangle B$ y por tanto, los ángulos del triángulo $\triangle EUC$ son, $180 - B, B - C$ y C.

- **El triángulo AQP es isósceles.**

Vamos a calcular el ángulo APQ.

$\measuredangle APQ = 180 - (180 - B) - \frac{B-C}{2} = \frac{B+C}{2} = 90 - \frac{A}{2}$. Por tanto también $\measuredangle AQP = 90 - \frac{A}{2}$ y en consecuencia AQP es isósceles.

- **Los triángulos YBQ y XCP son semejantes y congruentes**

Son semejantes pues tienen dos ángulos iguales, $< YBQ =< XCP = 90 - \hat{A}$. $< BQY = 90 + A/2 =< CPX$.

Ya que AQP es isósceles, trazando por B y C paralelas a QP obtenemos al cortar cada una con el lado opuesto, sendos triángulos isósceles: ABC' y AB'C. Por tanto, el trapecio BB'CC' es isósceles y *la paralela por* L *a la bisectriz interior de* $< EUB$ es la paralela media de este trapecio (la paralela media contiene los puntos medios de las dos diagonales). Resulta así que los segmentos de igual longitud BB' y C'C quedan bisecados en dos partes iguales por el segmento QP. Por tanto los triángulos YBQ y XCP, son congruentes y los segmentos QP e YX de la misma longitud, como queríamos demostrar.■

Solución al Problema 245 propuesto en La Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática No. 49 - 2013

enviada por
Andrea Fanchini
Cantú,
Italia.

Enero 25, 2014

Problema 245. *(propuesto por el editor en homenaje a David Monk y deseando su recuperación.)*
Las alturas BE y CF de un triángulo ABC se cortan en H. Las prolongaciones de FE y BC se ncortan en U. Una recta que pa por el punto medio L de BC, paralela a la bisectriz interior de $\widehat{EUB}$, corta a CA, AB, HC y HB (o a sus prolongaciones, si fue necesario) en P, Q, X, Y, respectivamente. Demostrar que las circunferencias APQ y HXY tienen radios iguales.

Solución 245. *(Andrea Fanchini, Cantú, Italia)*
Denotamos por α, β y γ ángulos en $\widehat{A}, \widehat{B}$ y $\widehat{C}$.

a) Siendo $\widehat{AEB}$ recto, tenemos que $\widehat{ABE} = 90° - \alpha$ y $\widehat{HBF} = \widehat{ABE}$ siendo ángulos opuestos. $\widehat{BF}$ es recto, por lo tanto $\widehat{BHF} = \alpha$ y siendo B, Y y F, X alineado, tenemos que $\widehat{YHX} = \widehat{BHF} = \alpha$
Por lo tanto denotado por O_1 el centro de las circunferencia que pasa de los puntos H, X, Y, las cuerd XY subtiende un ángulo en el centro $\widehat{XO_1Y} = 2\alpha$.

b) Tenemos que $\widehat{PAQ} = 180° - \alpha$. Por lo tanto denotado por O_2 el centro de las circunferencia qu pasa de los puntos A, P, Q, las cuerda PQ subtiende un ángulo en el centro $\widehat{PO_2Q} = 2\alpha$.

c) Los triángulos rectángulos $\triangle BFC$ y $\triangle BEC$ tienen la hipotenusa BC en común y por lo tanto s inscriben en semicircunferencias con BC como diámetro. Entonces el cuadrilátero $EBFC$ está inscrit en una circunferencia que tiene como diámetro BC y L su centro, siendo L definido como el punto medi de BC.

Siendo $\widehat{BEC}$ recto tenemos que $\widehat{EBC} = 90° - \gamma$ y $\widehat{YBL} = \widehat{EBC}$ porque E, Y y C, L están alineado Por otra parte, por el triángulo $\triangle BFC$ recto en F y con $\widehat{CBF} = 180° - \beta$ tenemos que $\widehat{BCF} = \beta - 90$

Pero el cuadrilátero $EBFC$ está inscrito en una circunferencia, por lo tanto las cuerda BF subtiend los mismos ángulos a la circunferencia, a saber tenemos $\widehat{BEF} = \widehat{BCF} = \beta - 90°$ y siendo F y alineados, también $\widehat{BEU} = \widehat{BEF}$. Por lo tanto $\widehat{EUB} = 180° - \widehat{EBC} - \widehat{BEU} = 180° - \beta + \gamma$.

Por supuesto será $\widehat{BLY} = \frac{\widehat{EUB}}{2}$. Entonces $\widehat{BYL} = 180° - \widehat{YBL} - \widehat{BLY} = \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}$ y $\widehat{HYX} = \widehat{BY}$ siendo H, B e X, L alineados.

Entonces $\widehat{HXY} = 180° - \widehat{YHX} - \widehat{HYX} = \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}$ por lo tanto $\widehat{HXY} = \widehat{HYX}$ y entonces el triángul $\triangle HXY$ es isósceles con XY como base.

d) Movemos el triángulo $\triangle CLX$ de manera que coinciden los puntos L con B y C con L, entonce las líneas BX y CY son paralelas.

Denotando con X' los punto X movido, también tenemos que $\widehat{BYL} = \widehat{X'LY}$ para los cuales e cuadrilátero $BYLX'$ es un trapecio isósceles y $BY \cong X'C \cong XC$.

$\widehat{PXC} = \widehat{BYQ}$ son ángulos suplementarios de ángulos iguales y $\widehat{PCX} = \widehat{YBQ} = 90° - \alpha$. Entonces por el segundo criterio de congruencia tenemos que $\triangle BYQ \cong \triangle CXP$ por lo tanto $XP \cong YQ$ y tambié $XY \cong PQ$ para la diferencia de segmentos iguales con el segmento común PY.

Para como se ha demostrado en los puntos a) y b) las cuerdas XY y PQ subtienden ángulos iguale en el centro y por lo tanto pertenecen a circunferencias congruentes q.e.d.

Solución al problema 245)

Si $A = 90 \vee C = B \Rightarrow \nexists U$ que satisface el problema. Así $A \neq 90 \wedge C \neq B$.

I) Supongamos $A < 90$ y, sin pérdida de generalidad, que A≥$C > B$. H es interior a el ΔABC:

\# $FHEA$ es inscribible $\Rightarrow \measuredangle HFE = \measuredangle HAE$. Sea D el pie de la perpendicular trazada desde A em el lado BC. Como ΔACD es rectángulo $\Rightarrow \measuredangle HAE = 90 - C = \measuredangle HFE$.

Sabemos que $\measuredangle FCU = 90 + B \Rightarrow \measuredangle EUB = 2\alpha = 180 - (90 - C + 90 + B) \Rightarrow \alpha = \dfrac{C - B}{2}$.

Sabemos que $\measuredangle YBL = 90 - C \Rightarrow \measuredangle BYQ = 90 - C + \alpha = \dfrac{180 - B - C}{2} = \dfrac{A}{2}$.

$\measuredangle QBY = 90 - A \Rightarrow \measuredangle FQP = 90 - A + \dfrac{A}{2} = 90 - \dfrac{A}{2} \Rightarrow \measuredangle CPX = 90 - \dfrac{A}{2} + A = 90 + \dfrac{A}{2}$.

$\measuredangle FCA = \measuredangle PCX = 90 - A \Rightarrow \measuredangle PXC = 180 - \left(90 + \dfrac{A}{2} + 90 - A\right) = \dfrac{A}{2}$.

Vamos a aplicar la ley de los senos en los siguientes triángulos:

i) ΔBYL e ΔPCL: $\dfrac{\sin\left(180 - \frac{A}{2}\right)}{BL} = \dfrac{\sin\alpha}{BY}$ e $\dfrac{\sin\alpha}{PC} = \dfrac{\sin\left(90 - \frac{A}{2}\right)}{BL} \Rightarrow \dfrac{BY}{\cos\left(\frac{A}{2}\right)} = \dfrac{PC}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)} (I)$

ii) ΔBQY e ΔPXC: $\dfrac{\sin(90 - A)}{QY} = \dfrac{\sin\left(90 + \frac{A}{2}\right)}{BY}$ e $\dfrac{\sin(90 - A)}{PX} = \dfrac{\sin\left(\frac{A}{2}\right)}{PC} \Rightarrow \dfrac{QY}{PX} = \dfrac{\frac{BY\cos(A)}{\cos\left(\frac{A}{2}\right)}}{\frac{PC\cos(A)}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)}}$.

Substituyendo (I) en la ecuación anterior: $QY = PX\ (II)$

Vamos a aplicar la ley de los senos en los ΔAQP e ΔHXY:

R_1 e R_2 son los raios de los círculos circunscritos a los ΔAQP e ΔHXY.

$\sin A = \dfrac{PY + QY}{2R_1}$ e $\sin(180 - A) = \dfrac{PY + PX}{2R_2}$. De (II): $R_1 = R_2$.

II) Supongamos $A > 90$ y, sin pérdida de generalidad, que A>$C > B$. H es exterior a el ΔABC:

\# $FHEA$ es inscribible $\Rightarrow \measuredangle AEF = \measuredangle AHF$. Sea D el pie de la perpendicular trazada desde A em el lado BC. Como ΔBFC es rectángulo $\Rightarrow \measuredangle BCF = 90 - B \Rightarrow \measuredangle DHC = B = \measuredangle AEF$.

Sabemos que $C = \measuredangle BCA = \measuredangle AEH + \measuredangle CUE \Rightarrow C = B + 2\alpha \Rightarrow \alpha = \dfrac{C - B}{2}$.

Sabemos que $\measuredangle YBL = 90 - C \Rightarrow \measuredangle YBQ = 90 - C - B = A - 90$.

$BEFC$es inscribible $\Rightarrow \measuredangle FCE = \measuredangle XCP = \measuredangle YBQ = A - 90$.

Sabemos que $\measuredangle XQF = \measuredangle BQY = B + \dfrac{C-B}{2} = \dfrac{B+C}{2} = 90 - \dfrac{A}{2}$.

Sabemos que$\measuredangle QXF + \measuredangle XQF = 90 \Rightarrow \measuredangle QXF = 90 - \left(90 - \dfrac{A}{2}\right) = \dfrac{A}{2}$.

Como $\measuredangle QXF = \measuredangle XCP + \measuredangle CPX \Rightarrow \measuredangle CPX = \dfrac{A}{2} - (A - 90) = 90 - \dfrac{A}{2}$.

Vamos a aplicarlaley de los senosen los siguientestriángulos:

i)ΔBQL e ΔXCL: $\dfrac{\sin\left(90+\frac{A}{2}\right)}{BL} = \dfrac{\sin\alpha}{BQ}$ e $\dfrac{\sin\alpha}{CX} = \dfrac{\sin\left(\frac{A}{2}\right)}{CL} \Rightarrow \dfrac{BQ}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)} = \dfrac{CX}{\cos\left(\frac{A}{2}\right)} (II)$

ii)ΔBQY e ΔPXC: $\dfrac{\sin(A-90)}{QY} = \dfrac{\sin\left(180-\frac{A}{2}\right)}{BQ}$ e $\dfrac{\sin(A-90)}{PX} = \dfrac{\sin\left(90-\frac{A}{2}\right)}{CX} \Rightarrow \dfrac{QY}{PX} = \dfrac{\frac{-BQ\cos(A)}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)}}{\frac{-CX\cos(A)}{\cos\left(\frac{A}{2}\right)}}$

Substituyendo(II)en la ecuación anterior: $QY = PX\ (III)$

Vamos a aplicarlaley de los senosen losΔAQP e ΔHXY:

R_1 e R_2 son los raios de los círculos circunscritos a losΔAQP e ΔHXY.

$\sin A = \dfrac{QX+PX}{2R_1}$ e $\sin(180-A) = \dfrac{QX+QY}{2R_2}$. De (III): $R_1 = R_2$. c.q.d

Marcos Francisco Ferreira Martinelli – Brasília - Brasil

PROBLEMA 245, propuesto por el editor en homenaje a David Monk y deseando su recuperación.

Las alturas BE y CF de un triángulo ABC se cortan en H. Las prolongaciones de FE y BC se cortan en U. Una recta que pasa por el punto medio L de BC, paralela a la bisectriz interior de $\angle EUB$, corta a CA, AB, HC y HB (o a sus prolongaciones, si fuera necesario) en P, Q, X, Y, respectivamente.

Demostrar que las circunferencias APQ y HXY tienen radios iguales.

Solución por Daniel Lasaosa Medarde, Universidad Pública de Navarra, Pamplona, España

Notemos antes de empezar que $\angle PAQ = \angle A$, mientras que $\angle XHY = \angle BHC = 180° - \angle A$, pues $\angle HBC = 90° - \angle C$ y $\angle HCB = 90° - \angle B$. Por el teorema del seno, el resultado pedido es equivalente a demostrar que PQ y XY tiene la misma longitud.

Como $\angle BFC = \angle CEB = 90°$, $BFEC$ es claramente cíclico. Si $\angle B = \angle C$, se tiene que $EF \parallel BC$, y no existe el punto U, salvo "en el infinito"; podríamos entonces decir en todo caso que la bisectriz de $\angle EUB$ es paralela a BC y a EF, con lo que $P = X = C$ y $Q = Y = B$, siendo trivialmente cierto el resultado pedido. Consideraremos entonces en el resto del problema, sin pérdida de generalidad al poder intercambiarlos sin afectar al problema, que $\angle B > \angle C$. Se tiene entonces que U está en la semirrecta CB más allá de B, y que al ser $\angle UFB = \angle AFE = \angle C$, y $\angle FBU = 180° - \angle B$, se tiene $\angle EUB = \angle B - \angle C$, es decir, la recta que pasa por L, P, Q, X, Y forma con la recta BC un ángulo igual a $\frac{\angle B - \angle C}{2}$. Al mismo tiempo, P, X están respectivamente sobre los segmentos CA, CH, pero Q, Y están respectivamente sobre las prolongaciones de BA, BH más allá de B.

Deducimos entonces, sin más que considerar triángulos, que

$$\angle CPX = \angle CPL = 180° - \frac{\angle B + \angle C}{2} = 90° + \frac{\angle A}{2},$$

y como $\angle PCX = 90° - \angle A$, se tiene que $\angle PXC = \frac{A}{2}$. De forma análoga,

$$\angle BQY = 180° - \angle BQL = \angle LBQ + \angle BLY = 180° - \angle B + \frac{\angle B - \angle C}{2} = 90° + \frac{\angle A}{2},$$

con $\angle QBY = \angle EBA = 90° - \angle A$, luego los triángulos PCX y QBY son semejantes, y como hemos de demostrar que $PQ = XY$, o equivalentemente que $PX = QY$, nos basta entonces con demostrar que $PC = BQ$. Ahora bien, $\angle CLP = \angle BLQ$, $CL = BL$, y $\angle CPL = 180° - \angle BQL$, luego aplicando el teorema del seno a los triángulos CLP y BLQ, se obtiene en efecto $PC = BQ$, quedando concluido el problema.

Noticia de congresos, referencia de páginas web y reseña de libros

CONGRESO IBEROAMERICANO
DE CIENCIA, TECNOLOGÍA, INNOVACIÓN Y EDUCACIÓN

BUENOS AIRES, ARGENTINA
12, 13 Y 14 DE NOVIEMBRE 2014

CONGRESSO IBERO-AMERICANO
DE CIÊNCIA, TECNOLOGIA, INNOVAÇÃO Y EDUCAÇÃO

BUENOS AIRES, ARGENTINA
12, 13 Y 14 DE NOVEMBRO 2014

"Avanzando juntos hacia las Metas Educativas Iberoamericanas 2021"
Buenos Aires, Argentina
12, 13 y 14 de noviembre 2014

En la XXIII Conferencia Iberoamericana de Educación el Secretario General de la OEI presentó a las delegaciones asistentes la convocatoria del Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación a celebrarse en Buenos Aires, Argentina, del 12 al 14 de noviembre de 2014.

Presentación

En el año 2010, fue aprobado por los Ministros de Educación y, posteriormente, por los Jefes y Jefas de Estado y de Gobierno de Iberoamérica, el proyecto promovido por la OEI, *Metas Educativas 2021: la educación que queremos para la generación de los Bicentenarios*, que tienen por objeto elevar la calidad y la equidad educativa en la región y conseguir sociedades más libres y democráticas.

En este marco y como parte constitutiva de este proyecto, la OEI ha impulsado algunas iniciativas importantes para el desarrollo de la educación, la ciencia y la tecnología en la región. Entre ellas se destaca el Instituto Iberoamericano de TIC y Educación, IBERTIC, con sede en Buenos Aires, Argentina, que haciendo hincapié en las políticas educativas de la región recupera y potencia una de las líneas históricas de trabajo de la OEI: el proyecto Ciencia, Tecnología y Sociedad (CTS).

El Instituto se desarrolla en las siguientes áreas: Investigación, Formación, Evaluación y una línea de Difusión y Transferencia del Conocimiento que es un espacio en el cual se celebran conferencias con especialistas, presentaciones de resultados de estudios/investigaciones, un ciclo de talleres "De docentes para docentes" y actividades especiales.

IBERTIC lleva adelante su tarea de manera articulada con el Centro de Altos Estudios de la OEI (CAEU); la Red Latinoamericana de Portales Educativos (RELPE); Virtual Educa; la Televisión Educativa Iberoamericana (TEIB) y el Portal Educativo del Ministerio de Educación de la Argentina, EDUC.AR.

A finales de 2012, y siguiendo la estela de IBERTIC, la OEI puso en marcha IBERCIENCIA, el Instituto Iberoamericano de Enseñanza de las Ciencias y la Matemática, en respuesta a la petición del Consejo Directivo de la Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura (OEI) que señaló la importancia de fortalecer la enseñanza de las ciencias y la matemática como prioridad de los sistemas educativos.

En la misma línea la OEI ha elaborado un documento de base destinado a impulsar un programa de ciencia y tecnología para el desarrollo sostenible, la equidad y la cohesión social, aplicable a escala iberoamericana. Este documento, que aspira a orientar la acción de la OEI durante los próximos años y a ofrecer un espacio de convergencia con otras organizaciones, ha sido puesto a consideración de la comunidad iberoamericana a través de la Web, habiendo sido consultado por más de un millón de lectores. Con este documento la OEI quiere dar un desarrollo especial a la Meta Educativa 9: Ampliar el Espacio Iberoamericano del Conocimiento y fortalecer la investigación científica y a todas aquellas referencias que la meta 5 tiene sobre la necesidad de fomentar las vocaciones hacia la ciencia y la ingeniería.

Para cerrar este proceso participativo en ciencia, tecnología e innovación y darle al mismo tiempo un nuevo impulso, la OEI convoca al **Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación** que se celebrará los días 12, 13 y 14 de noviembre de 2014 en la ciudad de Buenos Aires (Argentina) dando un espacio privilegiado a la incorporación de las TIC en cada una de las facetas educativas por lo que representará, además, un espacio de diálogo académico sobre el avance de las Metas Educativas 2021.

El Congreso tiene una sección de **comunicaciones libres para resultados de investigación y experiencias** y esperamos que las acciones vinculadas a las Olimpíadas tenga una importante presencia que permita coordinar la cooperación entre todos los actores implicados para que en 2021 sea una realidad que haya muchos estudiantes atraídos por la matemática y la resolución de problemas.

http://www.oei.es/congreso2014

TRES NECROLÓGICAS : PAWEL JAREK, LEON VAN DEN BROEK Y MARIE HÉLÈNE DELEDICQ

Francisco Bellot

Como bastantes de nuestros lectores conocen, desde su creación el editor de la REOIM está involucrado en el Concurso Canguro Matemático; de hecho algunos de los países iberoamericanos participantes lo son por iniciativa nuestra. Los años 2013 y lo que va del 2014 han sido particularmente duros con la familia de "canguristas", que ha perdido a tres de sus miembros. Sirvan estas líneas de homenaje de respeto y agradecimiento a su importante labor.

Pawel Jarek (Polonia)

Pawel Jarek (Ruda Slaska, 22 de junio de 1933 – Torún, 5 de febrero de 2013) fue, junto con varios matemáticos de Torún y Wroclaw, fundador del Concurso Canguro Matemático en Polonia, y presidente de su Comité Organizador entre 1992 y 1997, así como miembro del Comité Directivo de Kangourou Sans Frontières durante los primeros años de la andadura internacional de KSF.

Estudió Matemáticas en la Universidad "Nicolás Copérnico" de Torun, de 1950 a 1955, doctorándose en 1965 bajo la supervisión del Prof. Jerzy Los. Trabajó en la Cátedra de Matemáticas de dicha Universidad y en su Instituto de Matemáticas entre 1953 y 1994. Fue Vicedirector de dicho Instituto entre 1978 y 1985 así como entre 1989 y 1992. Sus líneas de investigación están relacionadas con el álgebra, la dinámica topológica y los cuerpos aleatorios.

También estuvo involucrado en la Olimpiada matemática de Polonia (una de las más prestigiosas de Europa) entre 1956 y 2013. Pero además Pawel tenía otras pasiones: era un buen artista gráfico; sus dibujos de paisajes de los montes Tatra y de los monumentos de la ciudad de Torún son muy apreciados; un consumado excursionista montañero y un excelente fotógrafo. Dirigía en Zakopane el campamento matemático de verano para los ganadores del Canguro en varios países europeos. También le gustaba la música clásica. Sus colegas del Canguro polaco continúan su incansable trabajo. Descanse en paz.

Leon van den Broek (Holanda)

Pocas semanas después de la reunión internacional de KSF en Edimburo (Noviembre 2013) nos llegó la inesperada mala noticia del fallecimiento repentino de Leon van den Broek, el 11 de diciembre, como consecuencia de un ataque al corazón.

El equipo holandés del canguro se ha visto así golpeado por la desgracia: Leon era una persona enormemente activa, creaba cada año un gran número de problemas para el concurso (de hecho Holanda ganó dos años consecutivos, desde su creación, el premio al país del que más problemas se habían elegido; la última vez, precisamente en Edimburgo). Era un excelente matemático, un gran profesor y un buen polemista. Solía participar en los grupos de trabajo de KSF de los alumnos más jóvenes - para los que resulta, en mi opinión, más difícil encontrar buenos problemas, con enjundia matemática pero formulación asequible para esos estudiantes; y en eso, Leon era un maestro.

Pero además, Leon ayudaba a cualquier matemático que se lo pidiera. En varias ocasiones le he pedido ayuda para encontrar alguna copia de artículos en holandés del gran matemático holandés Oene Bottema, publicados en revistas neerlandesas muy difíciles de encontrar. A vuelta de correo recibía siempre el sobre con la fotocopia de los artículos buscados, con la cariñosa advertencia: “Warning! Its written in Dutch!”, a lo que yo solía contestarle: “Lo sé, pero tengo un diccionario” .

Le echaremos mucho de menos.

Marie Hélène Deledicq (Francia)

La esposa de André Deledicq, y cofundadora con él del Concurso Le Kangourou des Mathématiques, falleció el 15 de abril de 2014 en su casa de París, donde se fundó el concurso. Dirigió las primeras publicaciones de ACL-Les éditions du Kangourou, contribuyendo de esta forma a la popularización de las matemáticas en lengua francesa. Nacida el 11 de noviembre de 1939, su labor y la de su marido André, Presidente de Honor de KSF, la continúan sus hijos, Jean-Philippe y Jean-Christophe, tanto en la Editorial como en la organización en Francia del Concurso.

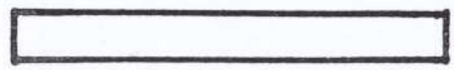
Descanse en paz.

Valladolid, 11 de mayo de 2014.

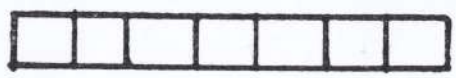
Divertimentos matemáticos

—¡Un momento! — dijo el otro guerrero en alta voz— mi número es menor que ese que Su Majestad acaba de recibir— y empezó a decir:

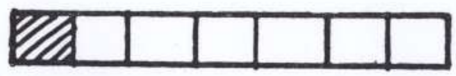
—Yo también comencé con mi cinta de un bastón de longitud.



y con mucho cuidado le hice marcas para dividirla en siete partes de la misma longitud:



pinté de rojo una de esas partes:



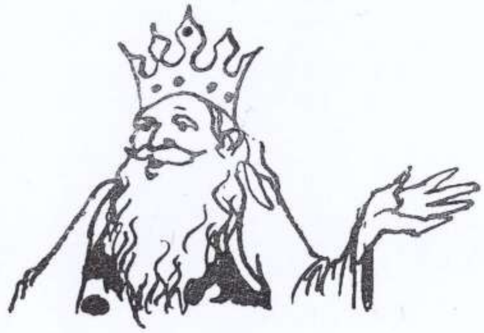
y así obtuve, una cinta roja cuya longitud es $\frac{1}{7}$ de bastón.

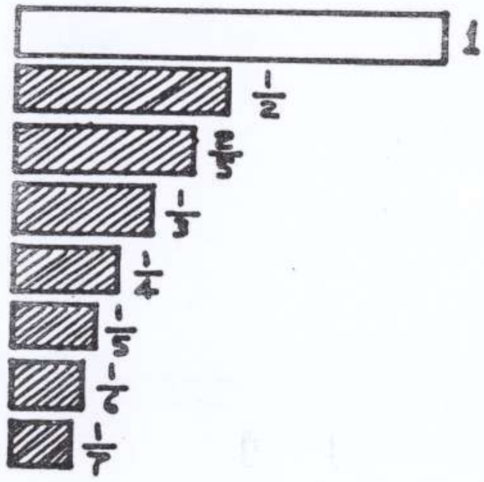
El rey, pacientemente, esperó a que este quinto y último guerrero se tranquilizara un poco. Le recibió la cinta que representaba al número racional $\frac{1}{7}$ e hizo que un ayudante la colocara en la pared, en su lugar correspondiente.

23

 $\frac{1}{7}$

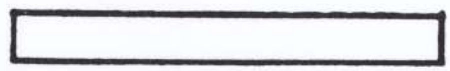
—Por cierto —observó el rey Bertrand— que tu número es, hasta este momento, el menor de cuantos han sido traídos a palacio. Ahora debemos esperar a ver qué sucede entre hoy y el último día del plazo de esta prueba.





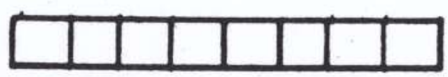
Poco después llegaron al palacio, al mismo tiempo, otros tres aspirantes al trono de Ruselia. Traían sus respectivas cintas y solicitaban ser recibidos por el rey como participantes en la gran prueba.

El primero de los tres había dividido su cinta de un bastón de longitud

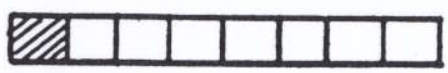


24

en ocho porciones de la misma longitud:



pintó de rojo una de esas partes

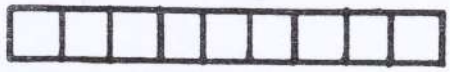


y obtuvo así una cinta roja que representaba al racional $\frac{1}{8}$

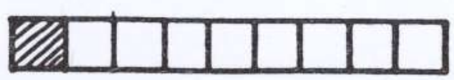
 $\frac{1}{8}$

El segundo aspirante también había comenzado con su cinta de un bastón de longitud:

La dividió en nueve porciones de igual longitud,

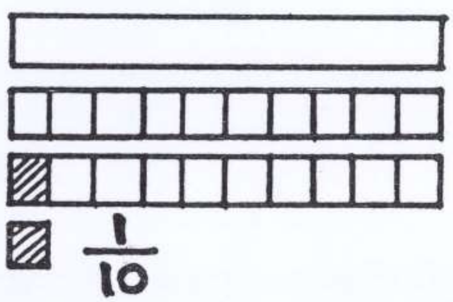


pintó una de esas porciones de rojo



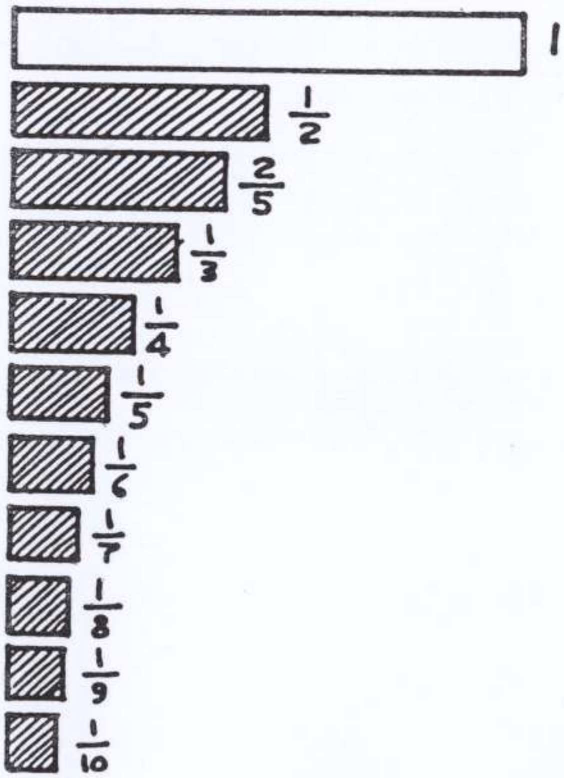
y terminó con una representación del número $\frac{1}{9}$

El tercero de los aspirantes recién llegados dividió su cinta de un bastón de longitud en diez partes de longitudes iguales, y obtuvo una representación del número racional $\frac{1}{10}$



El rey ordenó colocar estas últimas tres cintas, junto con las otras. Solicitó a todos los presentes que tuvieran paciencia y esperaran hasta el último día de la competencia, para conocer el resultado de la misma.

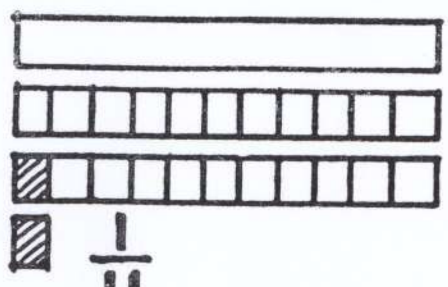
Hasta el momento, las cintas que el rey había recibido se veían así:



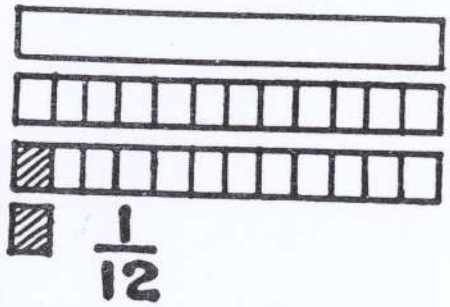
Pasaron muchos días más y la gente empezó a sentir que el último día de la competencia estaba cerca. A visitar al rey, llegaron cierto día cuatro pretendientes más, con cintas que representaban número racionales muy pequeños. Habían dividido sus cintas de un bastón de longitud en once, doce, trece, y catorce partes de la misma longitud.

El primero de ellos mostró al rey la forma en que obtuvo una cinta que representaba al número racional $\frac{1}{11}$:

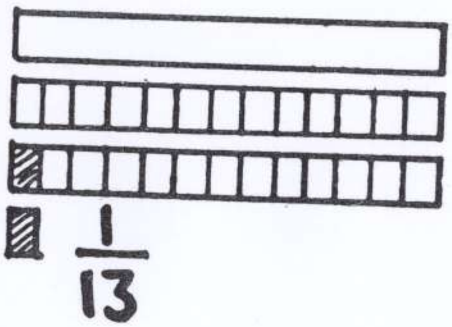
26



El segundo explicó a todos el proceso que había seguido para obtener una cinta de $\frac{1}{12}$ de bastón de longitud:

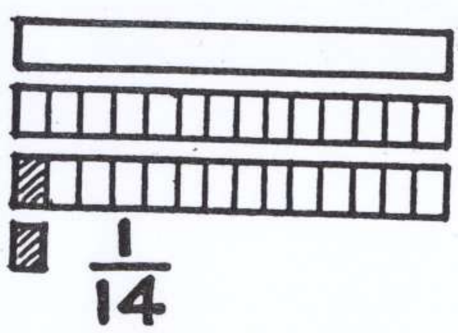


El tercero se había preparado cuidadosamente para enseñar a los miembros de la corte cómo obtener el racional $\frac{1}{13}$:

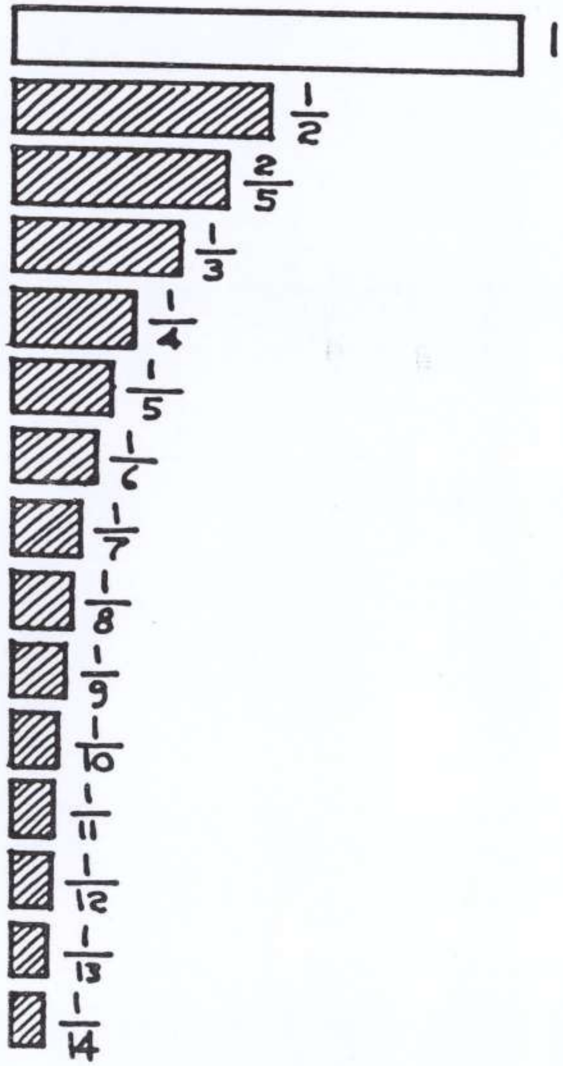


El cuarto aspirante mostró su manera de construir una cinta que representaba al número $\frac{1}{14}$:

27



Hasta aquí, el rey había recibido las cintas de doce aspirantes. La pared de la sala en la cual iba colocándolas, lucía así:

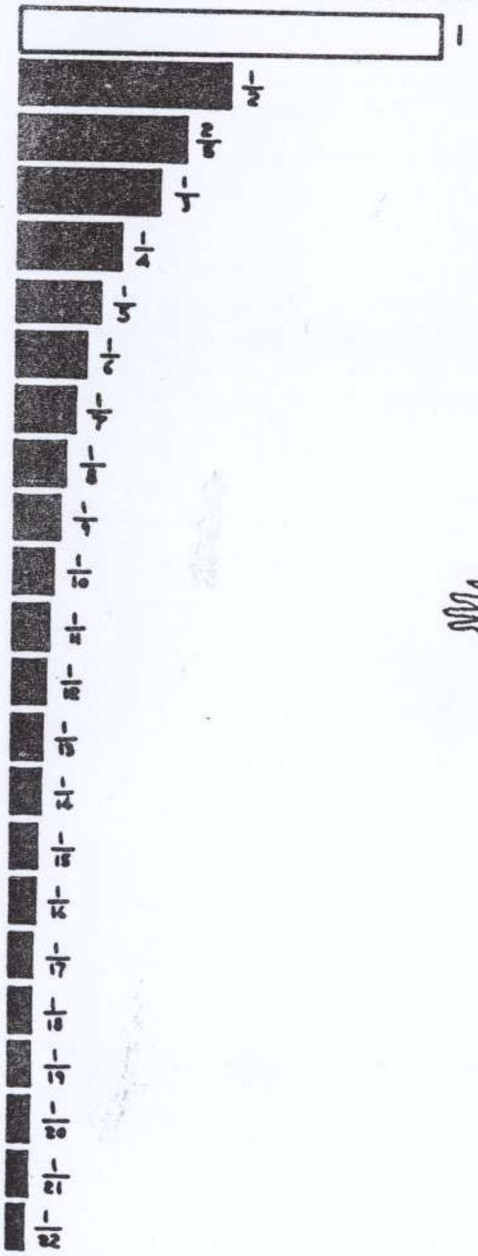


28

Al fin, llegó el último día del concurso. El rey Bertrand había recibido a veinte participantes en la gran prueba. Cada uno le había entregado su representación de otros tantos números racionales. Llegó el momento que todos esperaban con impaciencia. Al día siguiente del último día del concurso, el rey, acompañado de su hija, la estudiosa Noetheria, y apoyado en su querido bastón de platino e iridio, convocó a todos los aspirantes y a todos sus amigos, para hacer público el resultado de la competencia.

Para comenzar aquel acto tan importante para el reino de Ruselia, el rey exhibió la colección de cintas que había recibido de los pretendientes. Representaban varios números racionales mayores que cero, pero menores que uno. Su colección de cintas lucía así:

29



Ante la multitud de súbditos y visitantes emocionados, el rey Bertrand dijo así:

—Ayer fue el último día del concurso. Como todos lo saben, participaron veinte aspirantes; entre ellos debería decidirse el resultado final de la prueba. Sin embargo, el menor número racional ofrecido es $\frac{1}{22}$, pero este no es el más pequeño de todos los números racionales comprendidos entre cero y uno.

— ¡No lo es, padre mío! — lo interrumpió la princesa. — Yo puedo, ahora mismo, añadir a nuestra colección, un nuevo número racional menor

30

que $\frac{1}{22}$. Para ello dividiría la cinta de un bastón de longitud en veintitrés partes de longitudes iguales.

—Eso prueba— continuó el rey— que ninguno de los participantes ha ganado el concurso. Ninguno de ellos encontró el más pequeño de todos los números racionales más grandes que cero y más pequeños que uno. Por lo tanto, seguiré siendo el rey de Ruselia y mi hija, la princesa, elegirá a su gusto quien será su esposo y nuestro nuevo monarca. Este es un día muy feliz.

Nuestro reino se ha salvado de caer en manos de alguno de los cinco Caballeros de la Larga Búsqueda, quienes no son sino crueles guerreros. Y se ha salvado gracias a los números racionales y a la estudiosa Noetheria, quien los ha estudiado con mucho cariño.

La multitud aplaudió y lanzó mil exclamaciones de alegría al escuchar aquel anuncio de su amado rey.

En medio de aquellas desbordantes manifestaciones de júbilo, de alegres canciones, himnos y gritos de gozo, el rey Bertrand se acercó a su hija, la estudiosa y bella princesita Noetheria, y le dijo en voz baja, para que sólo ella pudiera oirlo:

—Al ver la colección de cintas, quedo con la impresión de que no existe un número racional más grande que el cero y más pequeño que el uno, que sea el menor de todos los racionales.

Esa era la impresión con que quedó el rey. ¿Y tú, querido lector, qué piensas?

31

. . . ooo O ooo

EPILOGO

Todos los habitantes de Ruselia vivieron muy felices después de librarse de los temidos Caballeros de la larga Búsqueda.

Los niños de Ruselia estudiaron desde ese día en adelante, con mucho cariño, aquellos números racionales tan hermosos que habían salvado a su patria de caer en manos de un rey guerrero y cruel.

Si algún día visitas París, la capital de Francia, conoce la Oficina de Pesas y Medidas que hay en Sevrès. Ahí se guarda, en una urna, una hermosa barra de platino e iridio, igual en forma y tamaño, al bastón del rey Bertrand de Ruselia.

32

Número

51

Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

Número 51 (junio 2014 – diciembre 2014)

ISSN – 1698-277X

ÍNDICE

Después de la aparición del vol. 50 de la REOIM, se han recibido dos soluciones a problemas propuestos anteriormente:

Al problema 231, de **Gabriel Chicas Reyes,** San Salvador (El Salvador).

Al problema 245, de **Ricardo Largaespada,** Managua, Nicaragua.

Problema 246

Recibidas soluciones de : **Florentino Damián Aranda Ballesteros,** Córdoba (España); **Javier Cornejo Tejada,** Lima (Perú); **Marcos Martinelli,** Brasilia (Brasil); **Bruno Salgueiro Fanego,** Vivero (España); **Cristóbal Sánchez-Rubio García,** Benicassim (España); y de los proponentes.

Presentamos la solución de **Sánchez-Rubio.**

Problema 247

Recibida hasta el momento solamente la solución del proponente. Mantenemos el problema abierto a la consideración de los lectores.

Problema 248

Recibidas soluciones de: **Marcos Martinelli,** Brasilia (Brasil); **Paolo Perfetti,** Departamento de Matematica, Universitá degli Studi "Tor Vergata", Roma (Italia); **Neculai Stanciu,** Buzau, y **Titu Zvonaru,** Comanetzi, (Rumania). Presentamos la solución de Martinelli.

Problema 249

Recibidas soluciones de: **Devis Alvarado,** Tegucigalpa (Honduras) y **Marcos Martinelli,** Brasilia (Brasil). Presentamos la solución de Alvarado.

Problema 250

Recibidas soluciones de: **Devis Alvarado,** Tegucigalpa (Honduras); **D.M. Batinetzu-Giurgiu** (Bucarest), **N. Stanciu** (Buzau), y **T.Zvonaru** (Comanetzi), conjuntamente, (Rumania); **Javier Cornejo Tejada,** Lima (Perú); **Andrea Fanchini,** Cantú (Italia); **Marcos Martinelli,** Brasilia (Brasil); y **Bruno Salgueiro Fanego,** Vivero (España). Presentamos la solución de Salgueiro.

Problema 251

Recibidas soluciones de: **Devis Alvarado**, Tegucigalpa (Honduras); **Marcos Martinelli,** Brasilia (Brasil); **Paolo Perfetti,** Depto.Matemática, Universitá degli Studi "Tor Vergata", Roma (Italia); **Bruno Salgueiro Fanego** (dos soluciones), Vivero (España); **Neculai Stanciu** (Buzau) y **Titu Zvonaru** (Comanestzi) (conjuntamente), Rumania; y **Daniel Vacaru,** Pitesti (Rumania). Presentamos la solución de Salgueiro.

Problema 252

Solución con corrección del enunciado recibida de **Marcos Martinelli,** Brasilia (Brasil), que presentamos. El editor presenta excusas por no haber modificado el enunciado original.

Problema 253

Recibidas soluciones de: **Devis Alvarado,** Tegucigalpa (Honduras); **Marcos Martinelli,** Brasilia (Brasil) y **Paolo Perfetti,** Depart. Matematica, Universitá degli Studi "Tor Vergata", Roma (Italia). Presentamos la solución de Alvarado.

Problema 254

Como han señalado varios lectores, así como el propio proponente, el enunciado es incorrecto (no existen triángulos donde el diámetro del círculo inscrito sea mayor que el radio del circunscrito). El problema queda anulado.

Problema 255

Recibidas soluciones de: **Marcos Martinelli,** Brasilia (Brasil); **Paolo Perfetti,** Depto. Matematica, Universitá degli Studi "Tor Vergata", Roma (Italia); **Bruno Salgueiro Fanego**, Vivero (España); y **Daniel Vacaru,** Pitesti (Rumania). Presentamos la solución de Martinelli.

Noticia de Congresos, comentario de páginas web y reseña de libros (51)

Divertimentos Matemáticos (51)

Capturado en Internet (51)

Rectificación del editor

En la necrológica de Madame Deledicq, incluida en el número 50 de la REOIM, se escribió su nombre equivocadamente. Su hijo Jean Philippe ha indicado al editor que su nombre correcto es Hélène, lo que hacemos constar ahora con nuestras disculpas y nuestro agradecimiento por la observación.

Otras informaciones

Formación Docente

Especialización en Educación Matemática (secundaria)
http://www.oei.es/cursomatematica/

Colaboración docentes alumnos

Club Iberoamericano GeoGebra

http://www.ibertic.org/clubgeogebra.php

Realizado en el marco del **Instituto Iberoamericano de Enseñanza de las Ciencias y la Matemática (IBERCIENCIA)** con la colaboración de la **Consejería de Economía, Innovación, Ciencia y Empleo de la Junta de Andalucía**

ALGUNOS PROBLEMAS TIENEN SIETE VIDAS

Francisco Bellot Rosado

Una de las primeras tareas del Jurado Internacional de cualquier competición es tratar de descartar aquellos problemas de la "lista corta" (puesta a su disposición por el Comité selector de problemas de la competición) que son conocidos, por ejemplo por haber aparecido anteriormente en otro concurso. En algunos casos esto se consigue con cierta rapidez. En otros, como es el caso del bellísimo problema objeto de este artículo, el problema puede escapar a los filtros y repetirse; o aparecer modificado y no ser fácilmente detectado.

Un problema de la Olimpiada rusa de 1971: los vasos de Shirshov.

Se tienen tres jarros con agua, cada uno conteniendo un número entero de litros. Se permite echar en cada jarro tanta agua como ya contiene, procedente de otro de los jarros. Demostrar que repitiendo esta operación las veces necesarias, es posible vaciar por completo uno de los jarros. (Se supone que los jarros son suficientemente grandes: cada uno puede contener toda el agua disponible).

En la recopilación de problemas de la Olimpiada rusa (1961-1986) de Vassiliev y Egorov (Ed. Nauka, Moscú 1988), en ruso, se señala que se propuso en la 5ª Olimpiada de la URSS, celebrada en Riga, para la clase 9 (alumnos de 16 años), el primer día de competición. Por su parte, Titu Andreescu y Svetoslav Savchev, en su *Mathematical Miniatures, MAA 2003,* dan algunos detalles biográficos del proponente, **Alexei Shirshov.** Titulado en Lengua rusa y literatura, dio clase en una escuela rural. Movilizado durante la Segunda Guerra Mundial, sorprendentemente resultó atraído por las Matemáticas en aquellos años (1939 – 1945). Volvió a la Universidad a los 30 años de edad, se graduó y doctoró en Matemáticas y sus resultados más importantes son de Álgebra. El problema del que hablamos tiene una solución realmente brillante, incluida en el libro ruso antes citado. Vamos a analizarla, partiendo de un ejemplo numérico para mayor sencillez. Es suficiente mostrar cómo obtener menos litros en uno de los jarros que los que contenga el menor número de litros, porque repitiendo el proceso alguno se vaciará.

Supongamos que los jarros contienen 3 <17<33 litros; en general serán $0<a\leq b\leq c$ litros.

Dividimos (con resto) 17 entre 3:

$$17 = 3x5 +2$$

$$b=a\cdot q+r$$

Escribimos 5 en el sistema binario:

$$5 = 101_2$$

Es decir, $1\cdot 2^0+0\cdot 2^1+1\cdot 2^2=5$. Y a los exponentes los llamamos

$$i_0=0<i_1=1<i_2=2\,.$$

Los 17 litros del jarro B pueden considerarse formados por porciones de

$2^0\cdot 3;\ 2^2\cdot 3$ litros más otra con 2 =r litros.

Falta una potencia de 2 multiplicada por 3: digamos

$$j_1=2^1\cdot 3$$

Esta porción que no está en B (superaría los 17 litros) está en C.

Entonces, sucesivamente, vamos echando en A, tomándolas de B o de C, las porciones

$$2^0\cdot 3;\ j_1=2^1\cdot 3\ ;2^2\cdot 3;$$

(j_1 es lo que tomamos de C) de manera que en B quedará el resto r = 2 litros, con lo que el problema (en el caso numérico) queda resuelto: ahora en B hay <u>menos</u> de 3 litros. Continuando el proceso se forma una sucesión decreciente estrictamente de enteros positivos, que no puede prolongarse indefinidamente, y por lo tanto acabará terminando en 0 y uno de los jarros se vacía.

Generalicemos: supongamos que los vasos A, B y C tienen, respectivamente,

$0<a\leq b\leq c$ litros.

Ponemos

$b=a\cdot q+r$, con $0\leq r<a$.

Ya que $a \le b$, entonces $q > 0$. Vamos a ver cómo se pueden echar *q.a* litros en A, con lo que en B quedarán *r<a* litros y el problema quedará resuelto. Escribimos en el sistema binario *q:*

$$q = 2^{i_0} + 2^{i_1} + \cdots + 2^{i_n}, \text{ con } 0 \le i_0 < i_1 < \cdots < i_n .$$

Entonces el agua que hay en B puede considerarse formada por porciones de volúmenes

$$2^{i_0} a, 2^{i_1} a, \cdots, 2^{i_n} a \quad (1)$$

y una porción más, de volumen *r.* En general sucederá (como en el ejemplo numérico de introducción del problema) que algunos de los números

$$0,1,\cdots,\text{n-1}$$

faltan entre los exponentes $i_0, i_1, \cdots, i_n - 1$. Llamemos $j_1, j_2, \cdots, j_k$ a los exponentes que faltan e imaginemos que las porciones de volúmenes

$$2^{j_1} a, 2^{j_2} a, \cdots, 2^{j_k} a \quad (2)$$

están en el jarro más grande C. Entonces podemos echar todas las porciones (1) y (2) en A en su orden natural,

$$2^0 a = a, 2^1 a, 2^2 a, \cdots, 2^{i_n} a ,$$

cogiéndolas de B o de C, y obteniendo así consecutivamente en A

$$2a, 2^2 a, ..., 2^{i_n+1} a \text{ litros.}$$

Como consecuencia quedarán en B exactamente *r* litros y el problema queda resuelto. Lo único que nos falta por demostrar es que las cantidades (2) están efectivamente en C. Esto es verdad, porque incluso en el caso en que solamente $2^{i_n} a$ estuviera en la sucesión (1), necesitaríamos no más de

$$\left(2^0 + 2^1 + \cdots + 2^{i_n - 1}\right) a = \left(2^{i_n} - 1\right) a$$

litros en C. Esto es menor que b, y a su vez no es mayor que c.■

Aunque en la literatura han aparecido problemas titulados “de los tres jarros”, en general no se refieren al de Shirshov (v. por ejemplo, ***Geometry revisited,*** de ***Coxeter y Greitzer,*** *MAA 1967). En la competición de invierno búlgara de 1989 se propuso una variante, y* *es posible que en otras competiciones de carácter regional o nacional se hayan propuesto también. Pero hay que esperar a 1993 para que el problema, con una formulación diferente, se propusiera en la famosa competición americana y canadiense* ***William Lowell Putnam.***

Problema B6, Putnam 1993

Sea S un conjunto de tres enteros positivos, no necesariamente distintos. Demostrar que se puede transformar S en un conjunto que contiene al 0, mediante un número finito de aplicaciones de la siguiente regla: Seleccionamos dos de los tres enteros, digamos *x* e *y, con* $x \leq y$**, *y los reemplazamos por 2x e y-x.***

El libro de **Kiran Kedlaya, Bjorn Poonen y Ravi Vakil (*The William Lowell Putnam Mathematical Competition 1985-2000, Problems, Solutions and Commentary)***, MAA, incluye tres soluciones del problema, de las que en la primera, atribuida a Garth Payne (uno de los participantes) se pasa de la terna (d, e, f) a (2d, e, f-d) y reiterándola se transforma (a, b, c) en (b', r, c') con r el resto de la división de b por a.

La segunda prueba el resultado por inducción fuerte en a + b + c, que es constante por aplicación de la regla, y razonando por contradicción, suponiendo que S no se puede transformar en un conjunto conteniendo al 0. La tercera, de Dylan Thurston (otro participante) es similar a la segunda.

Un problema propuesto por Macedonia en la IMO 1994

En la Olimpiada Internacional de 1994 (HongKong), Macedonia propuso el siguiente problema:

C-3 (Combinatoria)

Pedro tiene tres cuentas en un banco, cada una con un número entero de dólares. Solamente se le permite transferir dinero de una cuenta a otra de manera que la cantidad de dinero en ésta última se duplique.

- **a) Probar que Pedro siempre puede transferir su dinero a dos de las cuentas.**
- **b) ¿Puede siempre transferir su dinero a una sola cuenta?**

Ni el comité selector de problemas ni el Jurado Internacional apreciaron la semejanza del problema con el de Shirshov ni con el de la Competición Putnam del año anterior (y si alguno de los miembros lo apreció, no dijo nada). Fue elegido como problema 6, pero el primer día de competición llegó como observador (de Nueva Zelanda) **Arkadi Slinko**, que en cuanto lo vió advirtió al Jurado que era, c por b, el problema de Shirshov y citó la fuente del libro ruso de Vassiliev y Egorov: reunión extraordinaria del Jurado y el problema se cambió… se podría decir que al Jurado "lo salvó la campana".
En 1987, en el ***Newsletter of the World Federation of National Mathematics Competitions, nr.6,*** el belga **René Laumen** publicó ***The Art of Borrowing Problems,*** artículo en el que analiza el problema de los enunciados que se "alquilan" de una competición a otra. Con la extensión actual de los resultados y problemas por Internet, ese peligro debería disminuir. Pero nunca se sabe…

Bibliografía

[1]N.V. Vassiliev, A.A. Egorov: ***Problemas de la Olimpiada Matemática URSS 1961-1986 (en ruso).*** Nauka, Moscú, 1988.

[2] Svetoslav Savchev, Titu Andreescu: ***Mathematical Miniatures.*** MAA 2003.

[3] Kiran S. Kedlaya, Bjorn Poonen, Ravi Vakil : ***The William Lowell Putnam Mathematical Competition 1985-2000. Problems, Solutions and Commentary.*** MAA 2002.

[4] Shortlisted Problems for the 35th International Mathematical Olympiad. HongKong Mathematical Society, 1994.

Valladolid, diciembre 2014.
Francisco Bellot Rosado

Problemas para los más jóvenes 51

Cinco problemas de Olimpiadas rumanas para jóvenes

PMJ51-1

Los números reales positivos x, y, z son tales que $xyz\,(x+y+z)=1$

a) Demostrar que

$$\sqrt{\left(x^2+\frac{1}{y^2}\right)\left(y^2+\frac{1}{z^2}\right)\left(z^2+\frac{1}{x^2}\right)}=(x+y)\,(y+z)\,(z+x)\,.$$

b) Determinar una terna de números que verifique la hipótesis.

PMJ 51-2

x, y, z son números naturales tales que $x<y<z$. Si x, y, z son directamente proporcionales a tres números naturales consecutivos, ¿de cuántas maneras distintas se puede escribir el número 180 en la forma $x+y+z$?

PMJ51-3

Los números naturales no nulos a, b, c cumplen la condición

$$\frac{a+b}{bc}=\frac{b+c}{ca}=\frac{c+a}{ab}.$$

Demostar que $a=b=c$.

PMJ51-4

El triángulo isósceles ABC tiene como base AC $=a$ y el ángulo B es de 70^o. En los segmentos AB y AC se eligen puntos D y E, respectivamente, de manera que DA+AE = a. En los segmentos AC y BC se eligen puntos F y G, respectivamente, de modo que FC+CG=a. Los puntos E y F son distintos. Calcular la medida del ángulo agudo que forman las rectas DF y EG.

PMJ51-5

Determinar los números enteros x, y tales que

$$\frac{2}{x-y}=x+3.$$

Problemas de nivel medio y de Olimpiadas (51)

Cinco problemas de un manual inglés de 1962

PM51-1

El polinomio $ax^3 + bx^2 + cx + d$ toma el valor 3 cuando x es igual a -1 ó 2, y toma el valor 0 cuando x es 1 ó $-\frac{1}{2}$.

Descomponerlo en factores de primer grado.

PM51-2

Si $u = x + y + z$, $x + u = b + c$, $y + u = c + a$, $z + u = a + b$, se pide:

1) hallar x, y, z en función de a,b,c.

2) hallar a, b, c en función de x,y,z.

PM51-3

Probar que $\frac{(x-a)(x-b)}{x-c}$ toma todos los valores reales cuando x varía, si $a < c < b$.

Probar que si $c < a < b$, entonces se excluye un rango de valores de longitud $4l$, donde $l^2 = (a-c)(b-c)$.

PM51-4

El jarro A, de 1 litro de capacidad, se llena de whisky. Una fracción de $k < 1$ litros se trasvasa de A a un jarro B, también de 1 litro, inicialmente vacío. A continuación, B se termina de llenar de agua . Se trasvasa ahora parte de la mezcla de B a A, hasta llenarlo. Hallar la cantidad de whisky que ahora contiene A, y demostrar que no es menos de 3/4 de litro.

PM51_5

Las tangentes en A, B y C al círculo circunscrito al triángulo ABC cortan a las rectas que contienen los lados, BC, CA y AB en U, V y W, respectivamente.

1)Demostrar que U, V y W están alineados.

2) Probar que $VW : WU : UV = (b^2 - c^2) : (c^2 - a^2) : (a^2 - b^2)$

Problemas 256 - 260

Problema 256

Propuesto por Gabriel Chicas Reyes (El Salvador)

Sea p un número primo impar. Para cada entero no negativo k, determinar el residuo módulo p del determinante

$$\begin{vmatrix} 1^k & 2^k & \cdots & p^k \\ 2^k & 3^k & \cdots & 1^k \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p^k & 1^k & \cdots & (p-1)^k \end{vmatrix}$$

Problema 257

Propuesto por D.M.Batinetzu-Giurgiu (Bucarest) y Neculai Stanciu (Buzau), conjuntamente (Rumania)

Sea $(a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión real acotada de números positivos. Calcular

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+a_k+k}\right)$$

Problema 258

Propuesto por el editor.

Construir el triángulo ABC conociendo su ortocentro H, su circuncentro O, un punto P del eje órtico de ABC y la longitud del lado a.

Problema 259

Propuesto por el editor

Calcular la integral curvilínea

$$I=\int\frac{\left(1+x^2-y^2\right)dx+2xydy}{\left(1+x^2-y^2\right)^2+4x^2y^2}$$

a lo largo de un cuadrado con vértices en los puntos $\pm 2, \pm 2i$.

Problema 260

Propuesto por el editor

Hallar una solución x de la ecuación

$$x^2+m^2+n^2-2\left(mn+mx+nx\right)=8\sqrt{2mnx\left(x+m+n\right)}$$

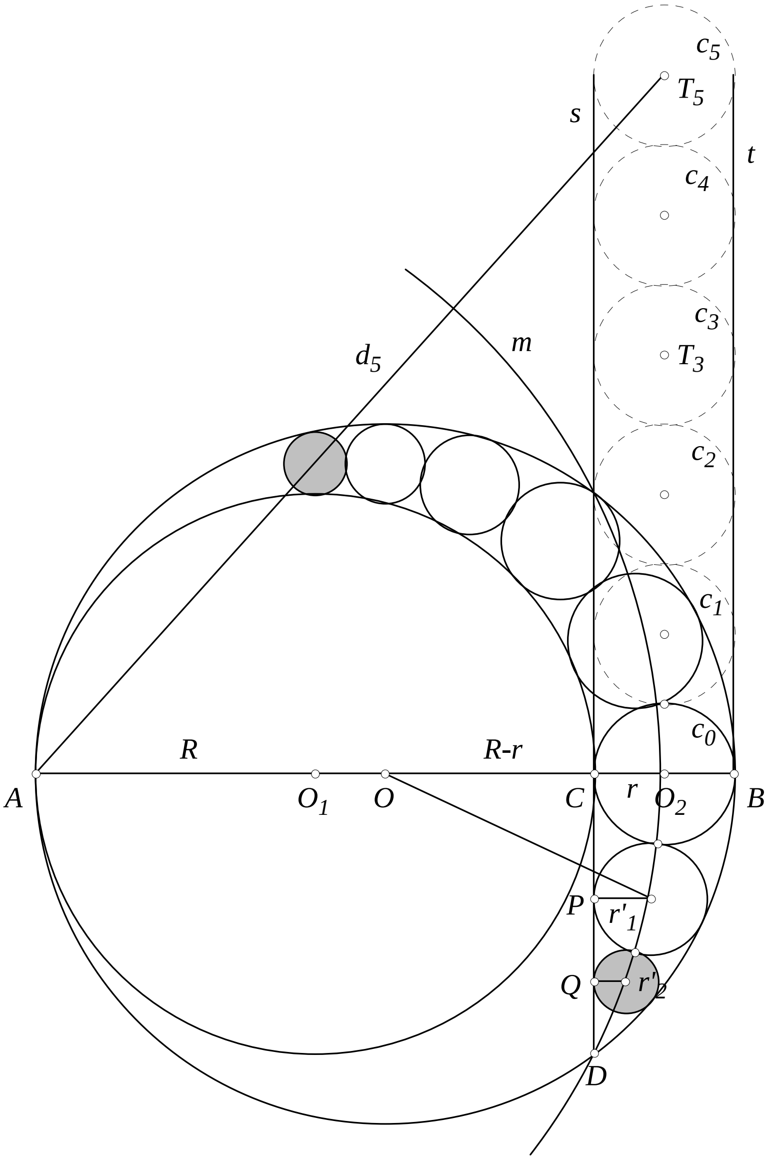
"por un método simple" (se decía en el enunciado original).

Problema 246. En la figura, el segmento *CD* es una semicuerda perpendicular al diámetro *AB* de una circunferencia de centro *O*. Los respectivos centros de las circunferencias de diámetros *AC* y *CB* son los puntos O_1 y O_2.

Las restantes circunferencias son tangentes exteriores entre sí y están inscritas en el ángulo curvilíneo y en el segmento circular, tal como se indica. Si los círculos sombreados (los de ambos extremos de la cadena de círculos) son iguales, determinar la razón $\dfrac{AC}{CB}$.

Solución:

Llamando *R* y *r* a los radios de las circunferencias de centros O_1 y O_2 respectivamente, el radio de la de centro *O* es $R+r$.



En la inversión definida por la circunferencia *m* de centro *A* y radio *AD*, *C* se invierte en *B* (teorema del cateto en *ADB*) y en consecuencia la circunferencia de centro O_1 se invierte en la recta *t* perpendicular a *AB* por *B* y la circunferencia de centro O se invierte en la recta *s* perpendicular a *AB* por *C*.

Como la inversión conserva las tangencias, las cadena de circunferencias tangentes entre sí y tangentes a las de centros O_1 y O_2 se invierten en las circunferencias $c_1, c_2, \ldots, c_k$ todas de radio *r* tangentes entre sí y a las rectas *s* y *t*.

Basta volver a invertir para poder construir fácilmente la cadena.

El cálculo del radio r_k de la circunferencia k-ésima es inmediato al ser homotética de la correspondiente de radio *r*.
Por el teorema del cateto en *ADB* y el de Pitágoras en AO_2T_k, la razón de la homotecia es

$$h_5 = \frac{AD^2}{d_5^2 - r^2} = \frac{2R(2R+2r)}{(2R+r)^2 + (10r)^2 - r^2} = \frac{4R^2 + 4Rr}{4R^2 + 4Rr + 100r^2} = \frac{R(R+r)}{R^2 + Rr + 25r^2}$$

y el radio buscado para la quinta circunferencia es

$$r_5 = \frac{Rr(R+r)}{R^2 + Rr + 25r^2}.$$

Llamando r'_1 y r'_2 a los radios de las primeras circunferencias tangentes a la recta *CD* y a la circunferencia de centro *O*, .
Para hallar r'_1 hay que despejar r'_1 de las relaciones:

$$CP^2 = 4rr'_1$$

$$\left[(R+r) - r'_1\right]^2 = CP^2 + \left[(R-r) + r'_1\right]^2$$

La primera por ser tangentes entre sí y a la misma recta en *C* y *P*. y la segunda añadiendo la tangencia a la circunferencia de centro *O*.
Resulta (omitimos los detalles del cálculo),

$$r'_1 = \frac{Rr}{R+r}$$

Repitiendo el mismo esquema de cálculo para r'_2, tenemos

$$PQ^2 = 4r'_1 r'_2$$

$$\left[(R+r) - r'_2\right]^2 = (CP + PQ)^2 + \left[(R-r) + r'_2\right]^2$$

Obviando de nuevo los detalles del cálculo despejamos r'_2:

$$r'_2 = \frac{R^2 r}{(R+2r)^2}$$

Finalmente, igualando las expresiones obtenidas para r_5 y r'_2, restando numeradores y denominadores y simplificando, queda

$$\frac{R+r}{R^2 + Rr + 25r^2} = \frac{R}{R^2 + 4Rr + 4r^2} = \frac{r}{21r^2 - 3Rr} = \frac{1}{21r - 3R}$$

Multiplicando en cruz las fracciones segunda y cuarta,

$$21Rr - 3R^2 = R^2 + 4r^2 + 4Rr \Leftrightarrow 4R^2 + 4r^2 - 17Rr = 0$$

Dividiendo por r^2 y llamando $t = \frac{R}{r}$, queda la ecuación cuadrática $4t^2 - 17t + 4 = 0$. Resolviendo,

$$t = \frac{R}{r} = \frac{17 \pm \sqrt{17^2 - 64}}{8} = \left\langle \begin{matrix} 4 \\ \frac{1}{4} \end{matrix} \right.$$

La solución válida según el esquema del dibujo es 4.

Solução do problema 248 – Marcos Martinelli, Brasília)

Seja $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \sqrt{x}$. Considere, ainda, $t_k \in \mathbb{R}_+^* (k \in \mathbb{N} | 1 \le k \le n)$ tais que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} t_k = 1$.

Como $f''(x) < 0\ (\forall x \in \mathbb{R}_+^*)$, podemos aplicar a desigualdade de Jensen: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} t_k\, f(u_k) \le f\left(\sum_{k=1}^{n} t_k\, u_k\right.$

Sejam $x_{n+1} = x_1$ e $j \in \mathbb{N} \big| \big[1 \le j \le n \wedge x_j x_{j+1} = min\{x_k x_{k+1}\}(\forall k)\big]$.

Seja $t_k = x_{n+1-k}^2 \wedge u_k = \dfrac{x_k}{x_{n+1-k}^2 (x_k x_{k+1} + n - 1)}$. Aplicando tais escolhas na desigualdade anterior

$$\sum_{k=1}^{n} x_{n+1-k}^2 \sqrt{\frac{x_k}{x_{n+1-k}^2 (x_k x_{k+1} + n - 1)}} = \sum_{k=1}^{n} x_{n+1-k} \sqrt{\frac{x_k}{x_k x_{k+1} + n - 1}} \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{x_k x_{k+1} + n - 1}}\,(A)$$

Podemos observar ainda: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{x_k x_{k+1} + n - 1} \le \frac{1}{x_j x_{j+1} + n - 1} \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k \le \frac{x_j + x_{j+1} + n - 2}{1 + x_j x_{j+1} + n - 2} < 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_j + x_{j+1} < 1 + x_j x_{j+1} \Leftrightarrow x_j^2 + x_{j+1}^2 < 1 + x_j^2 x_{j+1}^2 \Leftrightarrow x_j^2 + x_{j+1}^2 - 1 \le 0 < x_j^2 x_{j+1}^2\,(B)$

De (B) e (A): $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_{n+1-k} \sqrt{\frac{x_k}{x_k x_{k+1} + n - 1}} \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{x_k x_{k+1} + n - 1}} < 1$. c.q.d

Problema 249, propuesto por Marcel Chiritza, Bucarest, Rumania
Resolver, en el conjunto de los nḿeros reales, el sistema de ecuaciones

$$(9^x + 9^y + 9^z)(3^{-x} + 3^{-y} + 3^{-z}) = 3$$

$$3^{x+y+1} \cdot 3^{x+z+1} \cdot 3^{y+z+1} = 3^x + 3^y + 3^z$$

Solución, (Devis Alvarado, UNAH,Tegucigalpa, Honduras)
Aplicando la desigualdad entre MA-MG se obtiene.

$$(9^x + 9^y + 9^z)(3^{-x} + 3^{-y} + 3^{-z}) \geq 3\left(9^{x+y+z}\right)^{\frac{1}{3}} 3\left(3^{-(x+y+z)}\right)^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{x+y+z}{3}+2}$$

$$\Rightarrow 3^{\frac{x+y+z}{3}+2} \leq 3 \Leftrightarrow x + y + z \leq -3$$

Y

$$3^x + 3^y + 3^z \geq 3\left(3^{x+y+z}\right)^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{x+y+z}{3}+1}$$

$$\Rightarrow 3^{\frac{x+y+z}{3}+1} \leq 3^{2(x+y+z)+3} \Leftrightarrow x + y + z \geq -\frac{6}{5}$$

Con esto se concluye que el sistema de ecuaciones no tiene solución en los números reales.

Problema 250, propuesto por Marcel Chiritza, Bucarest, Romanía.

Sexa P *un punto interior ao triángulo equilátero* ABC, *de lado* 1. *Se poñemos* $x = PA$, $y = PB$, $z = PC$, *probar que*

$$x^2 + y^2 + z^2 + \left(x^2 + y^2 + z^2 - 1\right)^2 = 3\left(x^2 y^2 + y^2 z^2 + z^2 x^2\right).$$

Solución enviada por Bruno Salgueiro Fanego, Viveiro, Lugo.

Probaremos o seguinte resultado, máis xeral:

Sexa P un punto do plano do triángulo equilátero ABC, de lado t. Se poñemos $x = PA$, $y = PB$, $z = PC$, entón

$$\left(x^2 + y^2 + z^2\right)t^2 + \left(x^2 + y^2 + z^2 - t^2\right)^2 = 3\left(x^2 y^2 + y^2 z^2 + z^2 x^2\right).$$

En efecto: é coñecida (*) a relación $3\left(x^4 + y^4 + z^4 + t^4\right) = \left(x^2 + y^2 + z^2 + t^2\right)^2$. Como

$$\left(x^2 + y^2 + z^2 - t^2\right)^2 = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2 - 2\left(x^2 + y^2 + z^2\right)t^2 + \left(t^2\right)^2$$
$$= x^4 + y^4 + z^4 + t^4 + 2\left(x^2 y^2 + y^2 z^2 + z^2 x^2\right) - 2\left(x^2 + y^2 + z^2\right)t^2,$$ e
$$\left(x^2 + y^2 + z^2 + t^2\right)^2 = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2 + 2\left(x^2 + y^2 + z^2\right)t^2 + \left(t^2\right)^2$$
$$= \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2 - 2\left(x^2 + y^2 + z^2\right)t^2 + t^4 + 4\left(x^2 + y^2 + z^2\right)t^2$$
$$= \left(x^2 + y^2 + z^2 - t^2\right)^2 + 4\left(x^2 + y^2 + z^2\right)t^2,$$ dita relación é equivalente a
$$3\left(\left(x^2 + y^2 + z^2 - t^2\right)^2 - 2\left(x^2 y^2 + y^2 z^2 + z^2 x^2\right) + 2\left(x^2 + y^2 + z^2\right)t^2\right) = \left(x^2 + y^2 + z^2 - t^2\right)^2 + 4\left(x^2 + y^2 + z^2\right)t^2,$$
é dicir, $(3-1)\left(x^2 + y^2 + z^2 - t^2\right)^2 + (6-4)\left(x^2 + y^2 + z^2\right)t^2 = 6\left(x^2 y^2 + y^2 z^2 + z^2 x^2\right)$, ou sexa,
$$\left(x^2 + y^2 + z^2\right)t^2 + \left(x^2 + y^2 + z^2 - t^2\right)^2 = 3\left(x^2 y^2 + y^2 z^2 + z^2 x^2\right).$$

(*) *Curious properties of the circumcircle and incircle o fan equilateral triangle*, Prithwijit De, *Mathematical Spectrum, 41 (1), 2008-2009, 32-35.*

Problema 251, proposto por Marcel Chiritza, Bucarest, Romanía.

Achar os números reais a , b *tales que*

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n^3}{(n+1)^2}+an+b\right]=0.$$

Solución enviada por Bruno Salgueiro Fanego, Viveiro, Lugo.

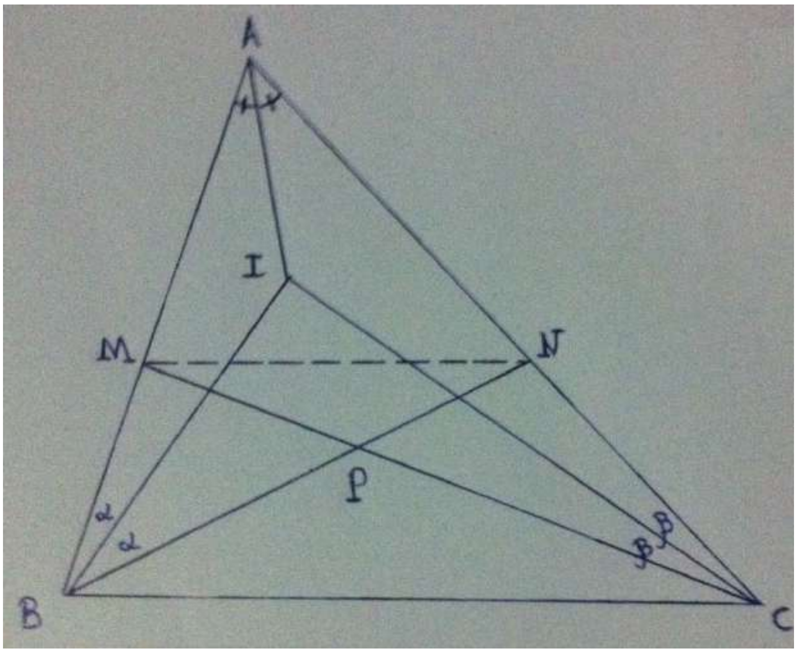
$$0=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n^3}{(n+1)^2}+an+b\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+(n+1)^2(an+b)}{(n+1)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+(n^2+2n+1)(an+b)}{(n+1)^2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+an^3+2an^2+an+bn^2+2bn+b}{(n+1)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(a+1)n^3+(2a+b)n^2+(a+2b)n+b}{n^2+2n+1}.$$

Como este último límite é finito, o grao do numerador ten que ser menor ou igual có do denominador, logo $a+1=0$, sendo entón
$0=\lim_{n\to\infty}\frac{(b-2)n^2+(2b-1)n+b}{n^2+2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{(b-2)n^2}{n^2+2n+1}+\lim_{n\to\infty}\frac{(2b-1)n+b}{n^2+2n+1}=b-2+0$, logo é necesario que $a=-1\wedge b=2$. Ademais, é suficiente que $a=-1\wedge b=2$ para que o se verifique a condición do enunciado, pois nese caso
$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n^3}{(n+1)^2}+an+b\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n^3}{(n+1)^2}-n+2\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+2}{n^2+2n+1}=0$, xa que o grao do numerador é inferior ao do denominador.

Entón os números reais pedidos son $a=-1\wedge b=2$.

Solução do problema 252)

Nota: o enunciado deveria ter mencionado que $MN \parallel BC$. Tendo em conta essa premissa adicional, podemos considerar a figura seguinte e os elementos nela indicados.



A) Do ΔABI: $\dfrac{\sin\alpha}{AI} = \dfrac{\sin\left(\pi - \alpha - {}^{A}\!/_{2}\right)}{c}$. Analogamente $\dfrac{\sin\beta}{AI} = \dfrac{\sin\left(\pi - \beta - {}^{A}\!/_{2}\right)}{b}$. A partir dessas equações: $\dfrac{\mathrm{b}\cdot\sin\beta}{\sin\left({}^{A}\!/_{2} + \beta\right)} = \dfrac{\mathrm{c}\cdot\sin\alpha}{\sin\left({}^{A}\!/_{2} + \alpha\right)}\,(I)$

B) Do ΔABN: $\dfrac{\sin 2\alpha}{AN} = \dfrac{\sin(\pi - 2\alpha - A)}{c}$. Analogamente $\dfrac{\sin 2\beta}{AM} = \dfrac{\sin(\pi - 2\beta - A)}{b}$. Lembrando que $MN \parallel BC \Rightarrow \Delta AMN \sim \Delta ABC \Rightarrow \dfrac{AM}{c} = \dfrac{AN}{b} \Rightarrow \dfrac{\mathrm{b}\cdot\sin 2\beta}{\sin(A+2\beta)}\cdot\dfrac{1}{c} = \dfrac{\mathrm{c}\cdot\sin 2\alpha}{\sin(A+2\alpha)}\cdot\dfrac{1}{b}$. Desenvolvendo, temos:

$$\frac{\mathrm{b}^2\cdot 2\sin\beta\cos\beta}{2\sin\left({}^{A}\!/_{2}+\beta\right)\cos\left({}^{A}\!/_{2}+\beta\right)} = \frac{\mathrm{c}^2\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha}{2\sin\left({}^{A}\!/_{2}+\alpha\right)\cos\left({}^{A}\!/_{2}+\alpha\right)}\,(II)$$

Fazendo(I) em (II): $\dfrac{b\cos\beta}{\cos\left({}^{A}\!/_{2}+\beta\right)} = \dfrac{c\cos\alpha}{\cos\left({}^{A}\!/_{2}+\alpha\right)}\,(III)$. $(I)\div(III) \Rightarrow \dfrac{\tan\beta}{\tan\left({}^{A}\!/_{2}+\beta\right)} = \dfrac{\tan\alpha}{\tan\left({}^{A}\!/_{2}+\alpha\right)}$.

Suponhamos, por absurdo e sem perda de generalidade, que $B > C$.

Seja $f\colon \left(0, {}^{B}\!/_{2}\right) \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \dfrac{\tan x}{\tan\left({}^{A}\!/_{2}+x\right)} = \dfrac{\tan x}{\frac{\tan{}^{A}\!/_{2}+\tan x}{1-\tan{}^{A}\!/_{2}\cdot\tan x}} = \dfrac{\tan x - \tan{}^{A}\!/_{2}\tan^2 x}{\tan{}^{A}\!/_{2} + \tan x} \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) = -\tan{}^{A}\!/_{2}\left(\tan x + \dfrac{\tan^2{}^{A}\!/_{2}+1}{\tan{}^{A}\!/_{2}+\tan x}\right) + \tan^2{}^{A}\!/_{2} + 1$.Derivando esta função, encontramos:

$f'(x) = -\tan {}^{A}/_{2} \sec^2 x \left[1 - \dfrac{\tan^2 {}^{A}/_{2} + 1}{\left(\tan {}^{A}/_{2} + \tan x\right)^2}\right]$. Esta derivada tem uma única raiz (x^*), que é ponto de máximo global: $\tan x^* = \sqrt{\tan^2 {}^{A}/_{2} + 1} - \tan {}^{A}/_{2}$. Podemos demostrar que: ${}^{C}/_{2} < x^* < {}^{B}/_{2}$.

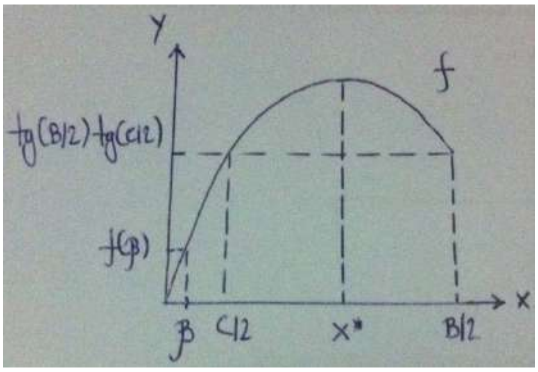
. ${}^{C}/_{2} < x^* \Leftrightarrow \tan {}^{C}/_{2} < \tan x^* = \sqrt{\tan^2 {}^{A}/_{2} + 1} - \tan {}^{A}/_{2} = \dfrac{1 - \sin {}^{A}/_{2}}{\cos {}^{A}/_{2}} \Leftrightarrow \sin {}^{C}/_{2} \cos {}^{A}/_{2} < \cos {}^{C}/_{2} -$

$- \sin {}^{A}/_{2} \cos {}^{C}/_{2} \Leftrightarrow \sin \dfrac{A+C}{2} = \cos {}^{B}/_{2} < \cos {}^{C}/_{2} \Leftrightarrow B > C$, o que é verdade.

. ${}^{B}/_{2} > x^* \Leftrightarrow \tan {}^{B}/_{2} > \tan x^* = \sqrt{\tan^2 {}^{A}/_{2} + 1} - \tan {}^{A}/_{2} = \dfrac{1 - \sin {}^{A}/_{2}}{\cos {}^{A}/_{2}} \Leftrightarrow \sin {}^{B}/_{2} \cos {}^{A}/_{2} > \cos {}^{B}/_{2} -$

$- \sin {}^{A}/_{2} \cos {}^{B}/_{2} \Leftrightarrow \sin \dfrac{A+B}{2} = \cos {}^{C}/_{2} > \cos {}^{B}/_{2} \Leftrightarrow B > C$, o que é verdade.

Como $f\left({}^{B}/_{2}\right) = \dfrac{\tan {}^{B}/_{2}}{\tan\left({}^{A}/_{2} + {}^{B}/_{2}\right)} = \tan {}^{B}/_{2} \tan {}^{C}/_{2} = \dfrac{\tan {}^{C}/_{2}}{\tan\left({}^{A}/_{2} + {}^{C}/_{2}\right)} = f\left({}^{C}/_{2}\right)$, podemos desenhar o gráfico seguinte para a função f:



Como $\beta < {}^{C}/_{2}$, só existe um valor deα tal que $\dfrac{\tan \beta}{\tan\left({}^{A}/_{2} + \beta\right)} = \dfrac{\tan \alpha}{\tan\left({}^{A}/_{2} + \alpha\right)}$: $\alpha = \beta$. Assim, de (I), obtemos$b = c$, o que contradiz $B > C$. O caso $B < C$é análogo. Assim: $B = C$. c.q.d

Marcos Francisco Ferreira Martinelli – Brasília - Brasil

Problema 253, propuesto por Marcel Chiritza, Bucarest, Rumania
Las sucesiones $(a_n)_{n\geq 1}$ y $(b_n)_{n\geq 1}$ se definen de la manera siguiente:

$$a_n = \sum_{m=1}^{n}\sum_{k=0}^{m}(-1)^m \frac{\binom{n}{m}}{m+2}$$

$$b_n = \sum_{m=1}^{n}\sum_{k=0}^{m}(-1)^m \frac{\binom{n}{m}}{(m+2)(m+4)}$$

Determinar si son convergentes y en su caso, hallar sus límites cuando $n \to \infty$.
Solución, (Devis Alvarado, UNAH,Tegucigalpa, Honduras)
Primeros trabajemos con a_n

$$a_n = \sum_{m=1}^{n}\sum_{k=0}^{m}(-1)^m \frac{\binom{n}{m}}{m+2} = \sum_{m=1}^{n}(-1)^m(m+1)\frac{\binom{n}{m}}{m+2}$$

$$= -\sum_{m=1}^{n}\binom{n}{m}\int_{-1}^{0}\left[x\frac{d}{dx}(x^{m+1})\right]dx = -\int_{-1}^{0}\left[x\frac{d}{dx}\left(\sum_{m=1}^{n}\binom{n}{m}x^{m+1}\right)\right]dx$$

$$= -\int_{-1}^{0}\left[x\frac{d}{dx}\left(x(x+1)^n - x\right)\right]dx = -\int_{-1}^{0}\left[x(x+1)^n + nx^2(x+1)^{n-1} - x\right]dx$$

$$= -\int_{0}^{1}\left[(n+1)u^{n+1} - (2n+1)u^n + nu^{n-1} - u + 1\right]du$$

$$= -\frac{n+1}{n+2} + \frac{2n+1}{n+1} - \frac{3}{2} = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2}$$

Por lo que a_n converge y su límite es: $-\frac{1}{2}$.
Ahora observemos que

$$b_n = \sum_{m=1}^{n}\sum_{k=0}^{m}(-1)^m \frac{\binom{n}{m}}{(m+2)(m+4)} = \sum_{m=1}^{n}(-1)^m(m+1)\frac{\binom{n}{m}}{(m+2)(m+4)}$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n}(-1)^m\frac{\binom{n}{m}}{m+2} + \frac{3}{2}\sum_{m=1}^{n}(-1)^m\frac{\binom{n}{m}}{m+4}$$

Similar que, con a_n

$$\sum_{m=1}^{n}(-1)^m\frac{\binom{n}{m}}{m+2} = -\sum_{m=1}^{n}\binom{n}{m}\int_{-1}^{0}x^{m+1}dx = -\int_{-1}^{0}\sum_{m=1}^{n}\binom{n}{m}x^{m+1}dx$$

$$= -\int_{-1}^{0}x\left[(x+1)^n - 1\right]dx = -\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2} = -1 - a_n$$

Y

$$\sum_{m=1}^{n}(-1)^m\frac{\binom{n}{m}}{m+4}=-\sum_{m=1}^{n}\binom{n}{m}\int_{-1}^{0}x^{m+3}dx=-\int_{-1}^{0}\sum_{m=1}^{n}\binom{n}{m}x^{m+3}dx$$

$$=-\int_{-1}^{0}x^3\left[(x+1)^n-1\right]dx=-\frac{1}{n+4}+\frac{3}{n+3}-\frac{3}{n+2}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{4}$$

Por lo tanto

$$b_n=-\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{2}\right]+\frac{3}{2}\left[-\frac{1}{n+4}+\frac{3}{n+3}-\frac{3}{n+2}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{4}\right]$$

$$=-\frac{\frac{3}{2}}{n+4}+\frac{\frac{9}{2}}{n+3}-\frac{4}{n+2}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{8}.$$

Que converge y su límite es: $-\frac{1}{8}$.

Solução do problema 255)

Lema) Seja $g: I = [-a, a] \to \mathbb{R}$ $(a > 0)$tal que g é contínua em I. Se $g(-x) = -g(x)\ \forall\, x \in I$, temos a seguint

igualdade $\int_{-a}^{a} g(x)\, dx = 0$.

Proof)Como g é contínua $\exists \int\limits_{-a}^{a} g(x)\, dx \Rightarrow \int\limits_{-a}^{a} g(x)\, dx = \int\limits_{-a}^{0} g(x)\, dx + \int\limits_{0}^{a} g(x)\, dx$. Podemos notar o seguinte:

$$\int\limits_{-a}^{0} g(x)\, dx \underbrace{=}_{\begin{cases} x=-u \\ dx=-du \end{cases}} \int\limits_{a}^{0} -g(-u)\, du = \int\limits_{a}^{0} g(u)\, du \underbrace{=}_{x=u} -\int\limits_{0}^{a} g(x)\, dx \Rightarrow \int\limits_{-a}^{0} g(x)\, dx + \int\limits_{0}^{a} g(x)\, dx = \int\limits_{-a}^{a} g(x)\, dx =$$

i) $\boxed{b > 1} \Rightarrow f(x) = \dfrac{\sin x + \tan x}{(b - \cos x)^m + \sin^{2n} x}$ é uma função contínua pois $b > 1 \geq \cos x \Rightarrow\ b - \cos x > 0$. E ain

$\sin^2 x \geq 0 \Rightarrow\ (b - \cos x)^m + \sin^{2n} x > 0$. Podemos mostrar ainda que f é uma função ímpar:

$f(-x) = \dfrac{\sin(-x) + \tan(-x)}{[b - \cos(-x)]^m + \sin^{2n}(-x)} = \dfrac{-\sin(x) - \tan(x)}{[b - \cos(x)]^m + \sin^{2n}(x)} = -f(x)$. Como f cumpre as condições

lema, temos: $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\, dx = \boxed{\int\limits_{-a}^{a} \dfrac{\sin x + \tan x}{(b - \cos x)^m + \sin^{2n} x} dx = 0}$.

i) $\boxed{b = 1} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sin x + \tan x}{(1 - \cos x)^m + \sin^{2n} x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x + x}{x^{2n}} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{2}{x^{2n-1}} = +\infty$. Temos, portanto, f descontínua e

0. Mostraremos que $\nexists \lim\limits_{t \to 0^+} \int\limits_{t}^{a} f(x)\, dx$, que implica $\boxed{\nexists \int\limits_{-a}^{a} f(x)\, dx}$. Seja $0 < t \leq x \leq a < \pi/_2$ e $\alpha = min\{m, n\}$

$(1 - \cos x)^m + \sin^{2n} x = (1 - \cos x)^\alpha[(1 - \cos x)^{m-\alpha} + (1 + \cos x)^n (1 - \cos x)^{n-\alpha}] < (1 - \cos x)^\alpha (1 + 2^n$

$$\int\limits_{t}^{a} \frac{\sin x + \tan x}{(1 - \cos x)^m + \sin^{2n} x}\, dx > \frac{1}{1 + 2^n} \cdot \int\limits_{t}^{a} \frac{\sin x + \tan x}{(1 - \cos x)^\alpha}\, dx \underbrace{=}_{\begin{cases} 1-\cos x = u \\ \sin x \cdot dx = du \end{cases}} \frac{1}{1 + 2^n} \cdot \int\limits_{1-\cos t}^{1-\cos a} \frac{(2 - u)}{(1 - u)u^\alpha}\, du\,.$$

Como $\dfrac{(2 - u)}{(1 - u)u^\alpha} = \dfrac{1}{u^\alpha} + \dfrac{1}{(1 - u)u^\alpha} > \dfrac{1}{u^\alpha} \Rightarrow \dfrac{1}{1 + 2^n} \cdot \int\limits_{1-\cos t}^{1-\cos a} \dfrac{(2 - u)}{(1 - u)u^\alpha}\, du > \dfrac{1}{1 + 2^n} \cdot \int\limits_{1-\cos t}^{1-\cos a} \dfrac{1}{u^\alpha}\, du$.

i.1) $\alpha = 1 \Rightarrow \int\limits_{1-\cos t}^{1-\cos a} \dfrac{1}{u^1}\, du = \ln(1 - \cos a) - \ln(1 - \cos t) \Rightarrow \lim\limits_{t \to 0^+} \int\limits_{1-\cos t}^{1-\cos a} \dfrac{1}{u^1}\, du = +\infty$.

i.2) $\alpha > 1 \Rightarrow \int\limits_{1-\cos t}^{1-\cos a} \dfrac{1}{u^\alpha}\, du = -\dfrac{(1 - \cos a)^{1-\alpha}}{\alpha - 1} + \dfrac{1}{(1 - \cos t)^{\alpha-1}(\alpha - 1)} \Rightarrow \lim\limits_{t \to 0^+} \int\limits_{1-\cos t}^{1-\cos a} \dfrac{1}{u^\alpha}\, du = +\infty$.

De i.1) e i.2), temos: $\lim\limits_{t \to 0^+} \int\limits_{t}^{a} \dfrac{\sin x + \tan x}{(1 - \cos x)^m + \sin^{2n} x} dx = +\infty$.

Marcos Francisco Ferreira Martinelli – Brasília - Brasil

Noticia de congresos, comentario de páginas web y reseñas de libros 51

La noticia de congresos de la REOIM en estas fechas tenía, necesariamente, que hacerse eco del **Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación,** organizado por la O.E.I. en Buenos Aires del 18 al 22 de noviembre de 2014, y cuyas conclusiones y resúmenes en video se encuentran disponibles en las redes sociales, especialmente Facebook y Twitter. Mi participación en él fue formar parte como ponente de una Mesa redonda sobre Olimpiadas Matemáticas, coordinada por Agustín Carrillo de Albornoz y en la que fueron también ponentes Eduardo Wagner, de Brasil y Juan Carlos Dalmasso, de Argentina.

Dentro de la reseña de libros, la Olimpiada Mexicana de Matemáticas acaba de publicar, en su colección **Cuadernos de Olimpiadas de matemáticas,** un nuevo volumen, de 352 páginas, titulado ***Álgebra*** y del que son autores **Radmila Bulajich Manfrino, José Antonio Gómez Ortega y Rogelio Valdez Delgado.** La versión en inglés del mismo será publicada próximamente por Birkhäuser. Es una obra muy completa, que estudia todos los tópicos que en la "jerga de olimpiadas" se engloban en la palabra Álgebra, con muchos ejercicios y sus correspondientes soluciones, y posiblemente es el primer libro de entrenamiento olímpico en el que se demuestra rigurosamente el Teorema fundamental del álgebra (pag. 91) dentro del capítulo dedicado a los números complejos.

Es un libro fundamental para todo el público iberoamericano interesado en la resolución de problemas y en las Olimpiadas.

La segunda novedad bibliográfica es el libro de la Editorial Springer, escrito por **Sotirios E. Louridas y Michael Th. Rassias,** ***Proble-Solving and Selected Topics in Euclideam Geometry (In the Spirit of the Mathematical Olympiads),*** publicado en 2013. Los problemas están agrupados en dos secciones, la correspondiente a la que los autores llaman **Teoría básica** y la relativa a la **Teoría más avanzada.** Las desigualdades geométricas forman un grupo diferente. Es, con certeza, un libro de consulta obligada para los comités selectores de problemas de cualquier olimpiada, tanto nacional como internacional.

Valladolid. Enero 2015.

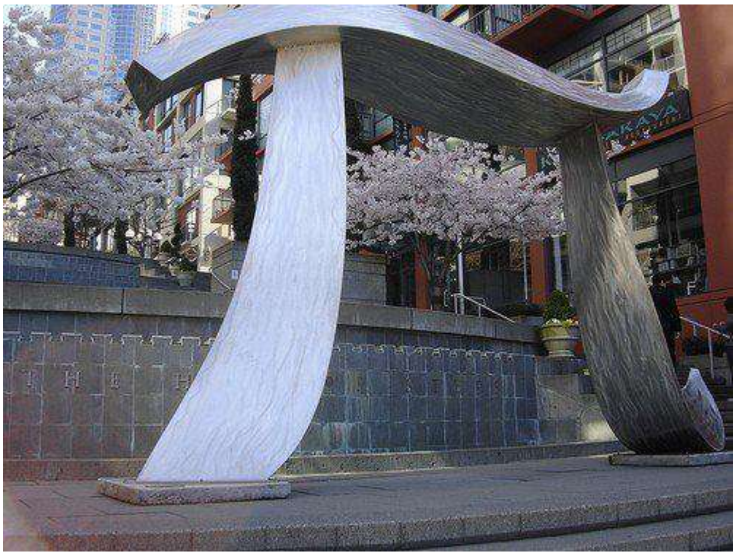
Francisco Bellot

Divertimentos matemáticos (51)

Capturado en Internet

Las instrucciones de las recetas de cocina se deben cumplir al pie de la letra

Matemáticas "fashion"



Π en Seattle

El teorema del valor medio en un puente peatonal de Pekín

Número

52

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

Número 52 (enero - junio 2015)

ISSN – 1698-277X

ÍNDICE

Acuse de recibo y excusas del editor

Por algún error informático acusamos recibo ahora de las soluciones a los problemas 250 y 251, enviadas por el Prof. Florentino Damián Aranda Ballesteros, del IES "Blas Infante" de Córdoba, al que el editor presenta sus excusas.

Igualmente acusamos ahora recibo de las soluciones a los problemas 241, 242, 248, 250, 251, 253 y 255 enviadas en su momento por el Prof. Paolo Perfetti, Universitá degli Studi Tor Vergata, Roma, Italia, al que igualmente presentamos excusas.

Problema 256

Recibidas soluciones de: José Heber Nieto, Maracaibo, Venezuela y el proponente. Presentamos la solución de Nieto.

Problema 257

Recibidas soluciones de: José Heber Nieto, Maracaibo, Venezuela; Paolo Perfetti, Dept. Matematica, Universitá degli Studi Tor Vergata, Roma, Italia; Bruno Salgueiro Fanego, Vivero, España y del proponente. Presentamos la solución de Nieto.

Problema 258

Recibida solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, Córdoba, España, y del proponente. Presentamos la solución de Aranda.

Problema 259

No se han recibido soluciones a este problema, procedente de un examen final de Análisis IV (Teoría de funciones de variable compleja) en 1965 en la Universidad Central de Madrid (hoy Complutense), por lo que sigue abierto, a la espera de soluciones de los lectores.

Problema 260

Recibidas soluciones de: Florentino Damián Aranda Ballesteros, Córdoba, España; dos soluciones de Bruno Salgueiro Fanego.

Presentamos la solución de Salgueiro.

<u>Reseña de libros, comentario de páginas web y noticia de Congresos 52</u>

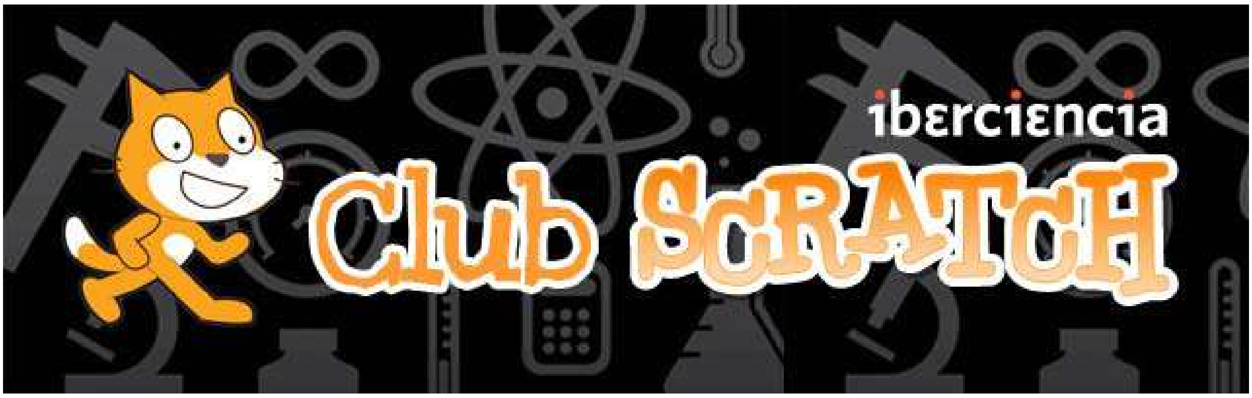
Dos publicaciones de Roberto Bosch Cabrera :

Olimpiadas Universitarias de Matemática en Cuba (2002-2012) y Concursos Nacionales Preuniversitarios en Cuba (2000-2013)

<u>Divertimentos matemáticos 52</u>

Capturado en Internet 52

Otras informaciones



5a Olimpíada de Matemática da Comunidade dos Países da Língua Portuguesa (Praia, Cabo Verde, Julho de 2015)

24 de enero de 2015

Os ministros da Educação da Comunidade de Países de Língua Portuguesa (CPLP) manifestaram o apoio às Olimpíadas de Matemática da CPLP (OMCPLP) na VII Reunião de Ministros da Educação da CPLP, que decorreu no dia 30 de Março de 2012, em Luanda. Na Declaração Final, aprovada pelos governantes dos diversos países, sublinha-se a necessidade de "apoiar as Olimpíadas da Matemática da CPLP" e de "incentivar os Estados Membros a criar as condições para a participação dos seus jovens naquela iniciativa".

Más información [+]

Conferencia I del Club Iberoamericano Scratch 2015

18 de abril de 2015

Conferencia de apertura del año 2015 de José Francisco Quesada del Club Scratch de IBERCIENCIA. Scratch es uno de los entornos actuales más interesantes. Está desarrollado por un equipo de expertos del Instituto Tecnológico de Massachusetts (MIT), uno de los centros de referencia a nivel mundial en informática. Cuenta con un equipo de investigación que lleva trabajando durante muchos años en modelos de informática educativa.

Más información [+]

Realizado en el marco del **Instituto Iberoamericano de Enseñanza de las Ciencias y la Matemática (IBERCIENCIA)** con la colaboración de la **Consejería de Economía, Innovación, Ciencia y Empleo de la Junta de Andalucía**

Circunradio y Volumen de Poliedros

Julio Castiñeira Merino

A mis queridos nietos
Santiago, Gonzalo y Nicolás

1. Introducción

Una parte importante de los poliedros convexos con caras regulares son inscribibles en una esfera, la esfera circunscrita. Esta familia está compuesta por:

- Los 5 poliedros regulares, tambien llamados sólidos platónicos.
- Los 13 poliedros arquimedianos.
- Los prismas regulares cuyas caras laterales son cuadrados.
- Los antiprismas cuyas caras laterales son triángulos equiláteros.
- 25 de los 92 sólidos de Johnson.

Las primeras cuatro categorías corresponden a los poliedros uniformes convexos llamados así por ser iguales los vértices del poliedro. Los sólidos de Johnson circunscribibles se obtienen por disección (14), rotación de una parte (7) o rotación y disección (4) de algunos poliedros uniformes. Una buena descripción de los poliedros uniformes se encuentra en [6] y en [4] y de los sólidos de Johnson en [5].

Este trabajo calcula, en primer lugar, los circunradios de dichos cuerpos utilizando la fórmula que relaciona la arista lateral y la arista basal con el coseno del ángulo diedral de una pirámide regular, la configuración en el vértice de los poliedros uniformes y los polinomios de Chebishev. Posteriormente calculamos el volumen de los poliedros por descomposicion en pirámides regulares, usando el número y tipo de sus caras, y el valor del circunradio del poliedro con arista unidad.

2. Angulo Diedro Interior de una Pirámide Regular

Si b es la arista de la base de una pirámide regular de n lados y l la arista lateral, entonces el ángulo diedro interior de arista l que denotaremos por δ_n satisface la relación:

$$\cos\delta_n = 1 + \frac{8l^2}{b^2 - 4l^2}\cos^2\frac{\pi}{n}. \tag{1}$$

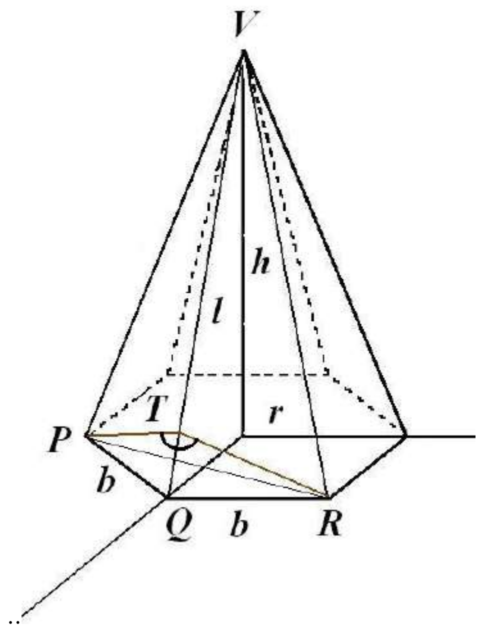


Figura 1: Angulo interior $\angle PTR$ de una pirámide regular

Demostración

Sea T el pie de la perpendicular a la arista l que pasa por el vértice Q, (ver figura 1). Por el teorema del coseno

$$\overline{PR}^2 = \overline{PT}^2 + \overline{TR}^2 - 2\overline{PT} \cdot \overline{TR} \cos \delta_n$$

observando que el triángulo $\triangle PTR$ es isósceles

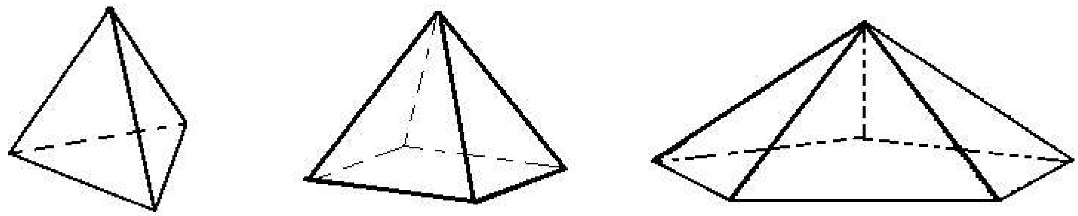
$$\cos \delta_n = 1 - \frac{\overline{PR}^2}{2\overline{TR}^2}$$

La base del triángulo isósceles $\triangle PQR$ es $\overline{PR} = 2b \sin\left(\frac{1}{2}\left(\pi - \frac{2\pi}{n}\right)\right) = 2b \cos \frac{\pi}{n}$
Calculemos ahora $\overline{TR}^2$. Usando el teorema de Pitágoras tenemos:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} l^2 & = & \overline{TR}^2 + \left(l - \overline{TQ}\right)^2 \\ b^2 & = & \overline{TQ}^2 + \overline{TR}^2 \end{array} \right. \Rightarrow \overline{TQ} = \frac{b^2}{2l} \Rightarrow \overline{TR}^2 = \frac{b^2\left(4l^2 - b^2\right)}{4l^2}$$

y por tanto

$$\cos \delta_n = 1 + \frac{8l^2}{b^2 - 4l^2} \cos^2 \frac{\pi}{n}. \blacksquare$$



..

Figura 2: Pirámides triangular, cuadrada y pentagonal

2.1. Ángulos de las Pirámides de Caras Regulares

Apliquemos la fórmula (1) a las pirámides cuyas caras son polígonos regulares $l = b$ y el número de caras laterales $n = 3, 4$ y 5. Tenemos

$$\cos \delta_n = 1 - \frac{8}{3} \cos^2 \frac{\pi}{n}, n = 3, 4, 5$$

los ángulos se muestran en el cuadro (1).

n	Nombre	$\cos \delta_n$	Ángulo
3	Tetraedro	$1/3$	70º 31' 43.6"
4	Pirámide Cuadrada	$-1/3$	109º 28' 16.3"
5	Pirámide Pentagonal	$-\sqrt{5}/3$	138º 11' 22.8"

Cuadro 1: Ángulos de Pirámides

3. Poliedros Convexos con Caras Regulares

Un poliedro convexo con caras regulares inscribible en una esfera se puede descomponer en tantas pirámides regulares como caras tiene. Los vértices de las pirámides coinciden con el circuncentro del poliedro, las bases de las pirámides son las caras de éste, la arista basal es la arista a del poliedro, el número de caras laterales es el número de lados n de la cara correspondiente y la arista lateral de estas pirámides es el circunradio R del poliedro.

El circunradio es, obviamente, directamente proporcional al valor de la arista, es decir, $R = \rho a$, donde la constante de proporcionalidad ρ es el valor del circunradio del poliedro con arista $a = 1$ y por tanto $\frac{1}{\rho}$ es el valor de la arista del poliedro de circunradio unidad. La fórmula del ángulo diedro queda:

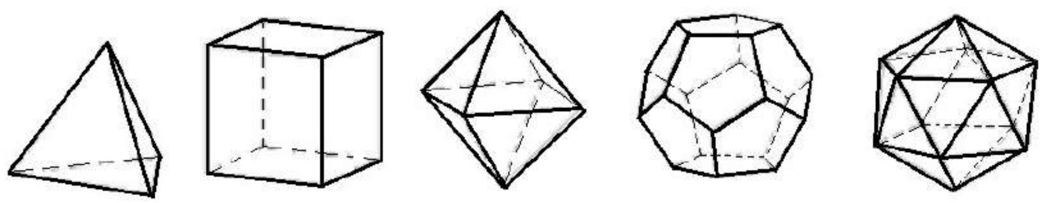
$$\cos \delta_n = 1 + \frac{8\rho^2}{1 - 4\rho^2} \cos^2 \frac{\pi}{n}, n \geq 3. \tag{2}$$

Algunos casos notables que usaremos en lo que siguen son:

n	Pirámide	$\cos\delta_n$	n	Pirámide	$\cos\delta_n$
3	Triangular	$\frac{1-2\rho^2}{1-4\rho^2}$	6	Hexagonal	$\frac{1+2\rho^2}{1-4\rho^2}$
4	Cuadrada	$\frac{1}{1-4\rho^2}$	8	Octogonal	$\frac{1+2\sqrt{2}\rho^2}{1-4\rho^2}$
5	Pentagonal	$\frac{1+(\sqrt{5}-1)\rho^2}{1-4\rho^2}$	10	Decagonal	$\frac{1+(\sqrt{5}+1)\rho^2}{1-4\rho^2}$

Cuadro 2: Cosenos de los ángulos interiores de las pirámide regulares

4. Circunradio de los Poliedros Regulares



..

Figura 3: Los cincos Poliedros Regulares

Un poliedro regular con m caras de n lados se puede dividir en m pirámides regulares iguales cuyo vértice es el circuncentro del poliedro, las aristas laterales de la pirámides son circunradios y las aristas de la base son las aristas del poliedro. Si s el número de aristas por vértice, debido a la regularidad, en cualquiera de los vértices del poliedro se unen s pirámides. Tenemos la ecuación:

$$\cos\delta_n = \cos\frac{2\pi}{s}$$

Resolviendo esta ecuación obtenemos el valor del circunradio para los poliedros regulares de arista unidad.El cuadro (3) muestra el nombre del poliedro regular, su configuración en el vértice, la ecuación del circunradio, y los valores exacto y aproximado del circunradio. La notación $\{n, s\}$ significa que el poliedro tiene s n-ágonos alrededor de cada vértice. Esta notación se debe a Schläfi.

Nombre	Vértice	Ecuación del Circunradio	ρ	Valor Aproximado
Tetraedro	$\{3,3\}$	$8\rho^2-3=0$	$\sqrt{6}/4$	0.612372435
Cubo	$\{4,3\}$	$4\rho^2-3=0$	$\sqrt{3}/2$	0.866025403
Octaedro	$\{3,4\}$	$2\rho^2-1=0$	$\sqrt{2}/2$	0.707106781
Dodecaedro	$\{5,3\}$	$(6-2\sqrt{5})\rho^2-3=0$	$\frac{1}{4}\left(\sqrt{3}+\sqrt{15}\right)$	1.401258538
Icosaedro	$\{3,5\}$	$(12-4\sqrt{5})\rho^2+\sqrt{5}-5=0$	$\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	0.951056516

Cuadro 3: Circunradio de los Poliedros Regulares de Arista Unidad

5. Polinomios de Chebishev

Los polinomios de Chebishev se definen por la relación de recurrencia:

$$\begin{cases} T_0 = 1 \\ T_1(x) = x \\ T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x), \quad \text{si} \quad n \geq 1 \end{cases}$$

Y están caracterizados por la propiedad $\cos n\omega = T_n(\cos\omega)$. Esta y otras propiedades de los polinomios de Chebyshev pueden consultarse en [1] y [3].
Algunos polinomios con sus correspondientes fórmulas de ángulo múltiple son:

Polinomio	Fórmula de ángulo múltiple
$T_2(x) = 2x^2 - 1$	$\cos 2\omega = 2\cos^2\omega - 1$
$T_3(x) = 4x^3 - 3x$	$\cos 3\omega = 4\cos^3\omega - 3\cos\omega$
$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$	$\cos 4\omega = 8\cos^4\omega - 8\cos^2\omega + 1$

Cuadro 4: Polinomios de Chebishev

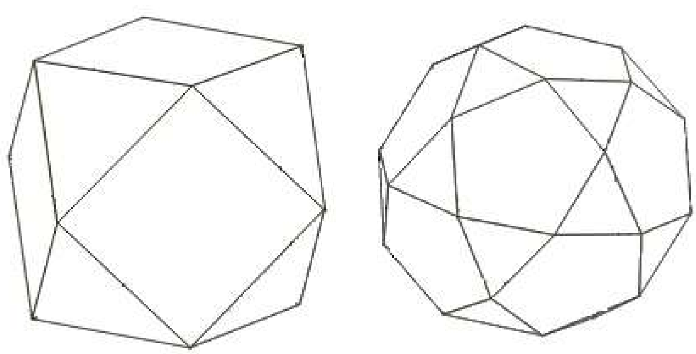
6. Circunradio de Poliedros Uniformes con 2 tipos de caras

Si en un vértice de un poliedro uniforme se juntan r polígonos de m lados y s polígonos de n lados, los ángulos diédricos de las pirámides δ_m y δ_n satisfacen:

$$r \cdot \delta_m + s \cdot \delta_n = 2\pi \tag{3}$$

hay dos casos, el primero $r = s = 2$ y el segundo $r = 1$.

6.1. Circunradios del Cuboctaedro y el Icosidodecaedro



..

Figura 4: Cuboctaedro e Icosidodecaedro

Si en la ecuación (3) $r = s = 2$, como ocurre con el cuboctaedro y el icosidodecaedro, tenemos

$$2 \cdot \delta_m + 2 \cdot \delta_n = 2\pi \Rightarrow \delta_m + \delta_n = \pi \Rightarrow \cos\delta_m = \cos(\pi - \delta_n) \Rightarrow \cos\delta_m + \cos\delta_n = 0.$$

Por tanto:

Poliedro	Configuración Vértice	Ecuación	Ecuación simplificada
Cuboctaedro	$\{3,2\} + \{4,2\}$	$\cos\delta_3 + \cos\delta_4 = 0$	$1 - \rho^2 = 0$
Icosidodecaedro	$\{3,2\} + \{5,2\}$	$\cos\delta_3 + \cos\delta_5 = 0$	$(3 - \sqrt{5})\rho^2 - 2 = 0$

Cuadro 5: Ecuaciones de los circunradios del cuboctaedro y del icosidodecaedro

Resolviendo dichas ecuaciones obtenemos los resultados:

Poliedro	Circunradio ρ	Valor Aproximado
Cuboctaedro	1	1
Icosidodecaedro	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	1.618033988749

Cuadro 6: Circunradios del Cuboctaedro y del Icosidodecaedro

6.2. Circunradios de los arquimedianos truncados

..

Figura 5: Tetraedro, Cubo, Octaedro, Dodecaedro e Icosaedro Truncados

Si en la ecuación (3) $r = 1$, como ocurre en la mayoría de los casos, tenemos:

$$\cos(2\pi - \delta_m) = \cos s \cdot \delta_n \Rightarrow \cos\delta_m = T_s(\cos\delta_n)$$

Sustituyendo $\cos\delta_m$ y $\cos\delta_n$ en función del circunradio ρ del poliedro con arista unidad, obtenemos una ecuación que caracteriza a dicho circunradio.
En lo que sigue la notación $\{m, r\} + \{n, s\}$ significa que el poliedro tiene r m-ágonos y s n-ágonos alrededor de cada vértice.

Los poliedros que se obtienen al truncar los vértices de los poliedros regulares tienen la configuración en lós vértices que se indican y los circunradios satisfacen las ecuaciones que se muestran en el cuadro 7. Resolviendo dichas ecuaciones obtenemos los circunradios de los poliedros arquimedianos con arista unidad que se nombran en el cuadro 8.

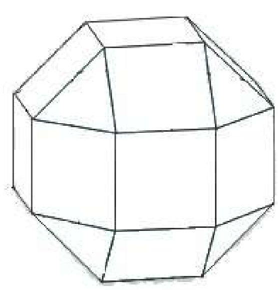
Poliedro	Vértice	Ecuación	Ecuación simplificada
Tetraedro Truncado	$\{3,1\}+\{6,2\}$	$\cos\delta_3 = T_2(\cos\delta_6)$	$8\rho^2 - 11 = 0$
Cubo Truncado	$\{3,1\}+\{8,2\}$	$\cos\delta_3 = T_2(\cos\delta_8)$	$4\rho^2 - (7+4\sqrt{2}) = 0$
Octaedro Truncado	$\{4,1\}+\{6,2\}$	$\cos\delta_4 = T_2(\cos\delta_6)$	$2\rho^2 - 5 = 0$
Dodecaedro Truncado	$\{3,1\}+\{10,2\}$	$\cos\delta_3 = T_2(\cos\delta_{10})$	$2(\sqrt{5}-3)\rho^2 + 9 + 2\sqrt{5} = 0$
Icosaedro Truncado	$\{5,1\}+\{6,2\}$	$\cos\delta_5 = T_2(\cos\delta_6)$	$4(3-\sqrt{5})\rho^2 + \sqrt{5} - 21 = 0$

Cuadro 7: Ecuaciones Circunradio de Arquimedianos Truncados

Poliedro	Circunradio ρ	Valor Aproximado
Tetraedro Truncado	$\frac{1}{4}\sqrt{22}$	1.172603939955
Cubo Truncado	$\frac{1}{2}\sqrt{7+4\sqrt{2}}$	1.778823645663
Octaedro Truncado	$\frac{1}{2}\sqrt{10}$	1.581138830084
Dodecaedro Truncado	$\frac{1}{4}\sqrt{74+30\sqrt{5}}$	2.969449015863
Icosaedro Truncado	$\frac{1}{4}\sqrt{58+18\sqrt{5}}$	2.478018659067

Cuadro 8: Circunradios Arquimedianos truncados

6.3. Pequeño Rombicuboctaedro



..

Figura 6: Pequeño Rombicuboctaedro

El pequeño rombicuboctaedro tiene la configuración en los vértices $\{3,1\}+\{4,3\}$, por lo tanto el circunradio satisface la ecuación $\cos\delta_3 = T_3(\cos\delta_4)$, que simplificando queda:

$$16\rho^4 - 40\rho^2 + 17 = 0.$$

Resolviendo esta ecuación bicuadrada obtenemos el circuncentro:

$$\rho = \frac{1}{2}\sqrt{5+2\sqrt{2}} \simeq 1{,}398966325966$$

6.4. Circunradio del Cubo Romo.

El cubo romo tiene la configuración en los vértices $\{4,1\}+\{3,4\}$, por lo tanto el circunradio satisface la ecuación $\cos\delta_4 = T_4(\cos\delta_3)$, que simplificando queda:

$$32\rho^6 - 80\rho^4 + 44\rho^2 - 7 = 0$$

La única raíz positiva de esta ecuación es:

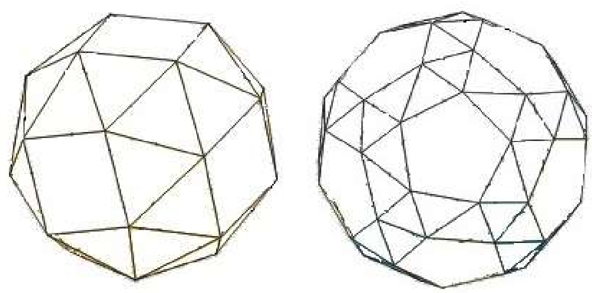
$$\rho = \frac{1}{6}\sqrt{30 + 3\sqrt[3]{199+3\sqrt{33}} + 3\sqrt[3]{199-3\sqrt{33}}} \simeq 1{,}34371337374460170127.$$

Se puede expresar ρ en función de la constante t, llamada constante de tribonacci, que es la única raíz real positiva del polinomio $x^3 - x^2 - x - 1$, y cuyo valor es

$$t = \frac{1}{3}\left(1 + \sqrt[3]{19+3\sqrt{33}} + \sqrt[3]{19-3\sqrt{33}}\right) \simeq 1{,}83928675521416113255 \tag{4}$$

Si en la ecuación del circunradio hacemos el cambio de variable $\rho = \sqrt{z}$ y luego la transformación de Tschirnhausen $z = \frac{3-t}{8-4t}$, obtenemos la ecuación $t^3 - t^2 - t - 1 = 0$. Por tanto:

$$\rho = \sqrt{\frac{3-t}{8-4t}} \text{ siendo } t \text{ la constante de tribonacci.}$$



..

Figura 7: Cubo Romo y Dodecaedro Romo

6.5. Circunradio del Dodecaedro Romo.

El dodecaedro romo tiene la configuración en los vértices $\{3,4\}+\{5,1\}$, por lo tanto el circunradio satisface la ecuación $\cos\delta_5 = T_4(\cos\delta_3)$, que simplificando queda:

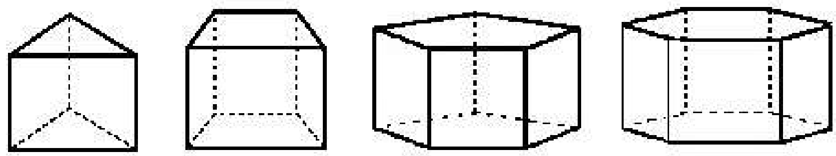
$$128\rho^6 - 16(27+7\sqrt{5})\rho^4 + 4(63+19\sqrt{5})\rho^2 - 41 - 13\sqrt{5} = 0$$

cuya única solución positiva es:

$$\rho = \sqrt{\frac{9}{8} + \frac{7}{24}\sqrt{5} + \sqrt[3]{\frac{71}{48} + \frac{2285}{3456}\sqrt{5} + \sqrt{\frac{793}{147456} + \frac{133}{55296}\sqrt{5}}} + \sqrt[3]{\frac{71}{48} + \frac{2285}{3456}\sqrt{5} - \sqrt{\frac{793}{147456} + \frac{133}{55296}\sqrt{5}}}}$$

Cuyo valor aproximado es $\rho = 2{,}15583737511563970183$.

6.6. Circunradio de los Prismas



..

Figura 8: Prisma triangular, Cubo y Prismas pentagonal y hexagonal

Sea R el circunradio del prisma regular de altura a y base el polígono de n lados cuyo lado vale a. Si r es el circunradio de la base,

$$r = a : 2\sin\frac{\pi}{n}.$$

Por el teorema de Pitágoras tenemos: $R^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2\sin\omega}\right)^2$ siendo $\omega = \frac{\pi}{n}$. Operando tenemos que el circunradio $\rho = \frac{R}{a}$ de un prisma regular de arista unidad y n lados de base es:

$$\rho = \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{1}{\sin^2\omega}} = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \cot^2\omega}$$

Algunos casos interesantes se muestran en la tabla:

n	Circunradio ρ	Aproximación	n	ρ	Aproximación
3	$\frac{1}{6}\sqrt{21}$	0.763762615	8	$\frac{1}{2}\sqrt{5+2\sqrt{2}}$	1.398966326
4	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	0.866025403	10	$\frac{1}{2}\sqrt{7+2\sqrt{5}}$	1.693527085
5	$\frac{1}{2}\sqrt{3+\frac{2\sqrt{5}}{5}}$	0.986715155	12	$\frac{1}{2}\sqrt{9+4\sqrt{3}}$	1.995507657
6	$\frac{1}{2}\sqrt{5}$	1.118033989			

Cuadro 9: Circunradios de Prismas con arista unidad

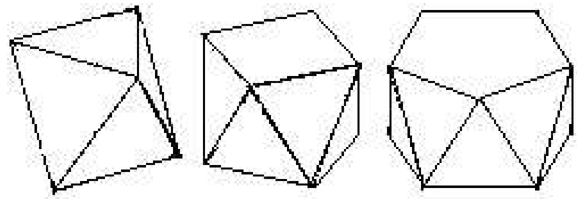
6.7. El Circunradio de los Antiprismas

En un antiprisma de n lados la configuración en cada vértice es un polígono de n lados y tres triángulos, luego $\cos\delta_m = T_3(\cos\delta_3)$ y por tanto:

$$1 + \frac{8\rho^2\cos^2\omega}{1-4\rho^2} = T_3\left(\frac{1-2\rho^2}{1-4\rho^2}\right), \quad \omega = \frac{\pi}{n}$$

Operando y simplificando obtenemos la ecuación bicuadrada:

$$64\left(1-\cos^2\omega\right)\rho^4 + 16\left(2\cos^2\omega - 3\right)\rho^2 + 9 - 4\cos^2\omega = 0$$



..

Figura 9: Antiprismas triangular, cuadrado y pentagonal

Resolviendo esta ecuación:

$$\rho = \pm\sqrt{\frac{2\cos\omega \pm 3}{8(\cos\omega+1)}(\cos\omega-1)}$$

Expresando las soluciones en función del ángulo $\varphi = \frac{\omega}{2} = \frac{\pi}{2n}$, tenemos

$$\rho = \pm\frac{1}{4}\sqrt{4+\sec^2\varphi}, \rho = \pm\frac{1}{4}\sqrt{4+\csc^2\varphi}$$

Obviamente las raíces negativas no nos sirven y la raiz $\rho = \frac{1}{4}\sqrt{4+\sec^2\varphi}$ tampoco pues

$$\rho = \frac{1}{4}\sqrt{4+\sec^2\frac{\pi}{2n}\varphi} \leq \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{n}} = r$$

siendo r el circunradio de la base del antiprisma. La única solución con sentido geométrico es:

$$\rho = \frac{1}{4}\sqrt{4+\csc^2\frac{\pi}{2n}}.$$

Algunos casos interesantes se muestran en la tabla:

n	Circunradio ρ	Valor Aprox.	n	Circunradio	Valor Aprox.
2	$\frac{1}{4}\sqrt{6}$	0.612372435	6	$\frac{1}{2}\sqrt{3+\sqrt{3}}$	1.087663874
3	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	0.707106781	8	$\frac{1}{2}\sqrt{3+\sqrt{2}+\sqrt{5+\frac{7}{2}\sqrt{2}}}$	1.735548581
4	$\frac{1}{4}\sqrt{8+2\sqrt{2}}$	0.822664388	10	$\frac{1}{4}\sqrt{16+4\sqrt{5}+2\sqrt{50+22\sqrt{5}}}$	1.674504744
5	$\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	0.951056516	12	$\frac{1}{2}\sqrt{5+2\sqrt{3}+\frac{5}{2}\sqrt{2}+\frac{3}{2}\sqrt{6}}$	1.979511943

Cuadro 10: Circunradios de los Antiprismas

7. Circunradio de Arquimedianos con 3 tipos de caras.

Si en cada vértice del poliedro se juntan un polígono de m lados, otro de n lados y r polígonos de p lados, se cumple la relación $\delta_m + \delta_n + r \cdot \delta_p = 2\pi$, luego $T_r(\cos\delta_p) = \cos\delta_m \cdot \cos\delta_n - \sqrt{1-\cos^2\delta_m} \cdot \sqrt{1-\cos^2\delta_n}$ y racionalizando tenemos:

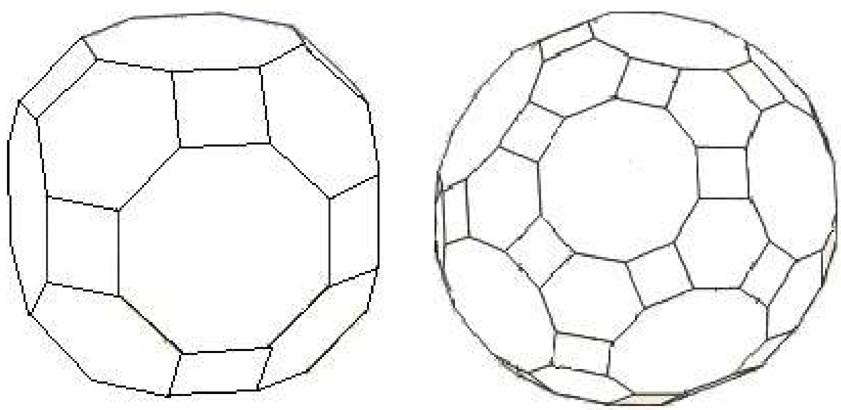
$$(\cos\delta_m \cdot \cos\delta_n - T_r(\cos\delta_p))^2 - (1-\cos^2\delta_m) \cdot (1-\cos^2\delta_n) = 0,$$

7.1. Gran Rombicuboctaedro y el Gran Rombicosidodecaedro

Para el Gran Rombicuboctaedro y el Gran Rombicosidodecaedro $r = 1$, luego:

$$\cos^2\delta_m + \cos^2\delta_n + \cos^2\delta_p - 2\cos\delta_m \cos\delta_n \cos\delta_p = 1$$

Aplicando a esta fórmula los valores correspondientes y simplificando, obtenemos las ecuaciones del circunradio del poliedro con arista unidad que se muestran en el cuadro (11).



..

Figura 10: Gran Rombicuboctaedro y Gran Rombicosidodecaedro

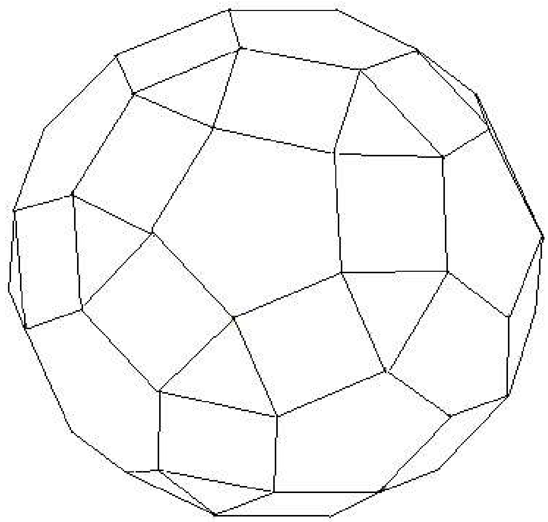
Poliedro	Vértice	Ecuación
Gran Rombicuboctaedro	$\{4\}+\{6\}+\{8\}$	$4\rho^2 - 13 - 6\sqrt{2} = 0$
Gran Rombicosidodecaedro	$\{4\}+\{6\}+\{10\}$	$4(3-\sqrt{5})\rho^2 - 33 - 5\sqrt{5} = 0$

Cuadro 11: Ecuaciones del Circunradio

Resolviendo las ecuaciones obtenemos:

Poliedro	Circunradio ρ	Valor Aproximado
Gran Rombicuboctaedro	$\frac{1}{2}\sqrt{13+6\sqrt{2}}$	2.317610913
Gran Rombicosidodecaedro	$\frac{1}{2}\sqrt{31+12\sqrt{5}}$	3.8023945

Cuadro 12: Circunradios



..

Figura 11: Pequeño Rombicosidodecaedro

7.2. Pequeño Rombicosidodecaedro

El Pequeño Rombicosidodecaedro tiene en cada vértices la configuración $\{3\}+\{5\}+2\{4\}$, es decir, $r=2$ y $m=3, n=5$ y $p=4$, por tanto:

$$\left(\cos\delta_3\cdot\cos\delta_5-2\cos^2\delta_4+1)\right)^2-(1-\cos^2\delta_3)\cdot(1-\cos^2\delta_5)=0,$$

Simplificando:

$$16(7-3\sqrt{5})\rho^4+8(7\sqrt{5}-17)\rho^2+51-15\sqrt{5}=0$$

Esta ecuación tiene dos soluciones positivas:

$$\rho=\frac{\sqrt{3}}{2},\rho=\frac{1}{2}\sqrt{11+4\sqrt{5}}$$

La primera no sirve pues el circunradio de un poliedro es mayor que su arista. Luego el circunradio del Pequeño Rombicosidodecaedro de arista unidad vale:

$$\rho=\frac{1}{2}\sqrt{11+4\sqrt{5}}\simeq 2{,}232950509.$$

8. Volumen de Poliedros Uniformes

En lo que sigue calcularemos el volumen de los poliedros uniformes convexos por descomposición en pirámides regulares. Nos interesa expresar el volumen de una pirámide regular en función de su arista lateral l, su arista basal b y el número de aristas de su base n. Si r es el circunradio de la base, B el área de la base, h la altura de la pirámide y $\omega = \frac{\pi}{n}$ sabemos que

$$b = 2r\sin\omega, B = \frac{nb^2}{4}\cot\omega \text{ y } h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{l^2 - \frac{b^2}{4\sin^2\omega}}$$

Luego VP_n, el volumen de la pirámide regular de n caras, de arista basal $b = 1$ y lateral ρ es:

$$VP_n = \frac{n}{12}\cot\omega\sqrt{\rho^2 - \frac{1}{4\sin^2\omega}}, \text{ siendo } \omega = \frac{\pi}{n} \tag{5}$$

8.1. Volumen de los Poliedros Regulares

El volumen del poliedro regular con m caras de n-lados es m veces el volumen de la pirámide regular de vértice el circuncentro y base una cualquiera de las caras del poliedro. Si la arista del poliedro es a y ρ el circunradio del poliedro de arista unidad la fórmula del volumen es:

$$V = m \cdot VP_n = \frac{m \cdot n}{12}\cot\omega\sqrt{\rho^2 - \frac{1}{4\sin^2\omega}} \cdot a^3, \text{ siendo } \omega = \frac{\pi}{n}$$

sustituyendo en esta fórmula ρ por los valores obtenidos anteriormente para los poliedros regulares, obtenemos los resultados que se muestran en el cuadro (13).

Nombre	caras $m\{n\}$	Volumen	Valor Aproximado
Tetraedro	$4\{3\}$	$\frac{1}{12}\sqrt{2} \cdot a^3$	$0.117851130197735117814a^3$
Cubo	$6\{4\}$	a^3	a^3
Octaedro	$8\{3\}$	$\frac{1}{3}\sqrt{2} \cdot a^3$	$0.471404520791031682933a^3$
Dodecaedro	$12\{5\}$	$\frac{1}{4}\left(15 + 7\sqrt{5}\right) \cdot a^3$	$7.66311896062463196871a^3$
Icosaedro	$20\{3\}$	$\frac{5}{12}\left(3 + \sqrt{5}\right) \cdot a^3$	$2.18169499062491237350a^3$

Cuadro 13: Volúmenes de los Poliedros Regulares de arista a

Sustituyendo el valor de la arista a por $\frac{R}{\rho}$ obtenemos las fórmulas que expresan el volumen de los poliedros en función del circunradio R las cuales se muestran en el cuadro 14 junto al tanto por ciento que ocupan en la circunesfera.

8.2. Volumen de los poliedros arquimedianos no romos

Un poliedro arquimediano cuya superficie es $m\{r\} + n\{s\}$, es decir, tiene m caras de r lados y n caras de s lados es la suma de las $m+n$ pirámides regulares con vértice en el circuncentro en las cuales se divide. Por tanto, el volumen de los poliedros arquimedianos no romos de arista unidad es:

$$V = mVP_r + nVP_s$$

Nombre	Volumen	Valor Aproximado	% Esfera
Tetraedro	$\frac{8}{27}\sqrt{3}R^3$	$0{,}513200239279R^3$	12.25
Cubo	$\frac{8}{9}\sqrt{3}R^3$	$1{,}53960071783R^3$	36.76
Octaedro	$\frac{4}{3}R^3$	$1{,}33333333333R^3$	31.83
Dodecaedro	$\frac{2}{9}\left(5\sqrt{3}+\sqrt{15}\right)R^3$	$2{,}78516386312R^3$	66.49
Icosaedro	$\frac{2}{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}}R^3$	$2{,}53615071012R^3$	60.55

Cuadro 14: Volúmes poliedros Regulares en función del Circunradio R

Análogamente si el poliedro tiene una configuración $m\{r\}+n\{s\}+p\{t\}$ la fórmula del volumen es:

$$V = mVP_r + nVP_r + sVP_t$$

Aplicando a estas fórmulas los valores de los circunradios obtenidos anteriormente para los poliedros arquimedianos no romos, y operando obtenemos los resultados que se muestran en la tabla. El

Poliedro	Caras	Volumen	Valor Aprox.
Tetraedro Truncado	$4\{3\}+4\{6\}$	$\frac{23}{12}\sqrt{2}$	2.7105759
Cubo Truncado	$8\{3\}+6\{8\}$	$\frac{1}{3}\left(21+14\sqrt{2}\right)$	13.5996632
Octaedro Truncado	$8\{6\}+6\{4\}$	$8\sqrt{2}$	11.3137085
Dodecaedro Truncado	$20\{3\}+12\{10\}$	$\frac{5}{12}\left(99+47\sqrt{5}\right)$	85.0396645
Icosaedro Truncado	$20\{6\}+12\{5\}$	$\frac{1}{4}\left(125+43\sqrt{5}\right)$	55.2877307
Cuboctaedro	$8\{3\}+6\{4\}$	$\frac{5}{3}\sqrt{2}$	2.3570226
Icosidodecaedro	$20\{3\}+12\{5\}$	$\frac{1}{6}\left(45+17\sqrt{5}\right)$	13.8355594
P. Rombicuboctaedro	$8\{3\}+18\{4\}$	$\frac{1}{3}\left(12+10\sqrt{2}\right)$	8.714045208
G. Rombicuboctaedro	$12\{4\}+8\{6\}+6\{8\}$	$22+14\sqrt{2}$	41.79898987
P. Rombicosidodecaedro	$20\{3\}+30\{4\}+12\{5\}$	$\frac{1}{3}\left(60+29\sqrt{5}\right)$	41.61532378
G.Rombicosidodecaedro	$30\{4\}+20\{6\}+12\{10\}$	$95+50\sqrt{5}$	206.8033989

Cuadro 15: Volúmenes de los Arquimedianos no Romos de arista unidad

Volumen de los poliedros no romos en función del circunradio R y el tanto por ciento que ocupan en la circunesfera es:

8.3. El Volumen de los Antiprismas

En un antiprisma de arista unidad cada una de las $2n$ pirámides triangulares tiene un volumen $\frac{1}{12}\sqrt{3R^2-1}$ y cada una de las dos pirámides regulares de n lados tiene un volumen de

Poliedro	Volumen	Valor Aprox.	% Esfera
Tetraedro Truncado	$\frac{184}{363}\sqrt{11}R^3$	$1{,}6811541637R^3$	40.13
Cuboctaedro	$\frac{5}{3}\sqrt{2}R^3$	$2{,}35702260395R^3$	56.27
Cubo Truncado	$\frac{56}{51}\sqrt{\frac{1}{17}\left(71+8\sqrt{2}\right)}R^3$	$2{,}41618105343R^3$	57.68
Octaedro Truncado	$\frac{32}{25}\sqrt{5}R^3$	$2{,}86216701119R^3$	68.33
P.Rombicuboctaedro	$\frac{16}{51}\sqrt{\frac{2}{17}\left(575+212\sqrt{2}\right)}R^3$	$3{,}18271701646R^3$	75.98
Dodecaedro Truncado	$\frac{10}{183}\sqrt{\frac{2}{61}\left(461393-158157\sqrt{5}\right)}R^3$	$3{,}24783471362R^3$	77.54
Icosidodecaedro	$\frac{1}{6}\sqrt{11\sqrt{5}-5}R^3$	$3{,}26612462541R^3$	77.97
G.Rombicuboctaedro	$\frac{16}{97}\sqrt{\frac{1}{97}\left(26103+9964\sqrt{2}\right)}R^3$	$3{,}35771789409R^3$	80.16
Icosaedro Truncado	$\frac{2}{109}\sqrt{\frac{10}{109}\left(830361-180203\sqrt{5}\right)}R^3$	$3{,}63341536474R^3$	86.74
P.Rombicosidodecaedro	$\frac{8}{123}\sqrt{\frac{5}{41}\left(32171-2276\sqrt{5}\right)}R^3$	$3{,}73779935903R^3$	89.23
G.Rombicosidodecaedro	$\frac{40}{241}\sqrt{\frac{1}{241}\left(1154211-460816\sqrt{5}\right)}R^3$	$3{,}76171728773R^3$	89.80

Cuadro 16: Volúmenes Arquimedianos no Romos en función del circunradio R

$\frac{n}{24}\cot\frac{\pi}{n}\sqrt{4R^2-\csc^2\frac{\pi}{n}}$. Si $\varphi=\frac{\pi}{2n}$, el volumen de un antiprisma de n lados con arista unidad es

$$V=\frac{n}{48}\frac{\sqrt{\left(4\cos^2\varphi-1\right)^3}}{cos^2\varphi\sin\varphi}$$

Operando tenemos

$$V=\frac{n}{48}\frac{\sqrt{(3-\tan^2\varphi)^3}}{\tan\varphi},\ \text{siendo } \varphi=\frac{\pi}{2n}.$$

Algunos casos interesantes se muestran en el cuadro 17.

n	Volumen	Vol. Approx.	n	Volumen	Vol. Approx.
2	$\frac{\sqrt{2}}{12}$	0.11785113019	6	$\sqrt{2+2\sqrt{3}}$	2.3375417889
3	$\frac{\sqrt{2}}{3}$	0.47140452079	8	$\frac{2}{3}\sqrt{4+2\sqrt{2}+2\sqrt{146+103\sqrt{2}}}$	4.2679567504
4	$\frac{1}{3}\left(\sqrt[4]{2}+\sqrt{8}\right)$	0.95699998183	10	$\frac{5}{6}\sqrt{2\sqrt{650+290\sqrt{5}}-2-2\sqrt{5}}$	6.74928787554
5	$\frac{1}{6}\left(5+2\sqrt{5}\right)$	1.5786893258	12	$\sqrt{28\sqrt{6}+48\sqrt{2}-12\sqrt{3}-20}$	9.781786856245

Cuadro 17: Volúmenes de Antiprismas de arista unidad

Para $n=2$, el antiprisma es el tetraedro regular y para $n=3$ el octaedro. El icosaedro regular está formado por un antiprisma pentagonal y dos pirámides pentagonales regulares. Los antiprismas son parte de varios sólidos de Johnson.

8.4. Volumen del Cubo Romo

El cubo romo tiene 32 caras triangulares y seis cuadradas, luego se descompone en 38 pirámides regulares. Calculemos el volumen del cubo romo de arista unidad aplicando las fórmulas del volumen de la pirámide:

$$V = 32\frac{\sqrt{3R^2-1}}{12} + 6\frac{\sqrt{4R^2-2}}{6} = \frac{8}{3}\sqrt{3R^2-1} + \sqrt{4R^2-2},$$

Reemplazando R en función de la constante de Tribonacci (4), obtenemos la fórmula:

$$V = \sqrt{\frac{t-1}{2-t}} + \frac{4}{3}\sqrt{\frac{t+1}{2-t}}$$

Elevando al cuadrado y operando

$$V^2 = \frac{24\sqrt{t^2-1}+25t+7}{9(2-t)},$$

La identidad $(62t^2-97t-35)^2-(62-35t)^2(t^2-1) = (t^3-t^2-t-1)(2619t-5069)$ junto a la ecuación caracteristica de la constante de tribonacci $t^3-t^2-t-1=0$ implica

$$\sqrt{t^2-1} = \frac{62t^2-97t-35}{62-35t}, \text{ si } t \text{ es la constante de tribonacci}$$

Por tanto

$$V^2 = \frac{613t+203}{9(35t-62)} \Rightarrow t = \frac{558V^2+203}{315V^2-613}$$

Reemplazando el valor de t en la ecuación característica de la constante de tribonacci y operando, obtenemos

$$729V^6 - 45684V^4 + 19386V^2 - 12482 = 0$$

Luego

$$V = \frac{1}{3}\sqrt{188+\sqrt[3]{6448437+45111\sqrt{33}}+\sqrt[3]{6448437-45111\sqrt{33}}} \simeq 7{,}88947739997539020645.$$

8.5. Volumen del Dodecaedro Romo

El dodecaedro romo tiene 80 caras triangulares y 12 pentagonales. Aplicando la fórmula del volumen de la pirámide su volumen es

$$V = \frac{20}{3}\sqrt{3R^2-1} + \sqrt{(25+10\sqrt{5})R^2 - \frac{35+15\sqrt{5}}{2}}.$$

Usando el valor aproximado de R calculado anteriormente obtenemos que el valor aproximado del volumen del dodecaedro romo de arista unidad es $V \simeq 37{,}6166$.

Eliminando R entre esta ecuación y la ecuación caracteristica del circunradio obtenemos la siguiente ecuación de grado 12:

$$4353564672V^{12} - 1813985280(719\sqrt{5} + 1883)V^{10} + 629856000(71677\sqrt{5} + 189227)V^8 +$$

$$116640000(61151727\sqrt{5} + 134585062)V^6 + 85050000(3046379915\sqrt{5} + 6825930641)V^4 +$$

$$675000(4628171926145\sqrt{5}+10347323869627)V^2+20853222016652203125\sqrt{5}+46629280368208859375 = 0$$

cuyo polinomio tiene dos factores de grado 6.

$$V^6 - \frac{5(3523 + 1431\sqrt{5})}{24}V^4 - \frac{25(113921 + 53549\sqrt{5}}{288}V^2 - \frac{125(69005843 + 30704463\sqrt{5})}{93312} = 0,$$

resolviendo esta ecuación:

$$V = \sqrt{\frac{17615}{72} + \frac{795\sqrt{5}}{8} + \sqrt[3]{\alpha + \sqrt{\beta}} + \sqrt[3]{\alpha - \sqrt{\beta}}}$$

donde

$$\alpha = \frac{2486533428125}{46656} + \frac{247086456875\sqrt{5}}{10368}$$

y

$$\beta = \frac{70860298451751953125}{11943936} + \frac{213905516865552734375\sqrt{5}}{80621568}$$

Approximately $V \simeq 37{,}6166499627333629757767$.

8.6. Prismas Regulares

El volumen de un prisma regular con arista y altura unidad es $V = \frac{n}{4}\cot\frac{\pi}{n}$. Podemos expresar V como la raíz de un polinomio con coeficientes enteros y, en muchos casos, calcular la raíz facilmente. En orden a realizar esta tarea, usaremos la función tangente de ángulo multiple, definida por la expresión: $R_n(x) = \tan(n \cdot \arctan x)$. Esta función se expresa recursivamente por la fórmula

$$R_n(x) = \begin{cases} x & if \quad n = 1 \\ \frac{x+R_{n-1}(x)}{1-R_{n-1}(x)} & if \quad n > 1 \end{cases}$$

Algunos valores de la función R se muestran en la tabla siguiente:

n	Función	n	Función	n	Función	n	Función
2	$\frac{2x}{1-x^2}$	3	$\frac{x^3-3x}{3x^2-1}$	4	$\frac{-4x^3+4x}{x^4-6x^2+1}$	5	$\frac{x^5-10x^3+5x}{5x^4-10x^2+1}$

Cuadro 18: Función tangente del ángulo múltiple

De la fórmula

$$V = \frac{n}{4}\cot\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow n \cdot \arctan\frac{n}{4V} = \pi$$

Obtenemos la ecuación algebraica

$$\text{Numerador}\left(R_n\left(\frac{n}{4V}\right)\right) = 0$$

y el volumen V es la raíz mas grande.
Usando números complejos la ecuación anterior puede expresarse como

$$\frac{1}{i}((4V + in)^n - (4V - in)^n) = 0 \tag{6}$$

Pues $R_n(x) = \frac{1}{i}\frac{(1+ix)^n-(1-ix)^n}{(1+ix)^n+(1-ix)^n}$.
Algunos casos interesantes, para los cuales V se expresa por medio de irracionales cuadráticos se muestran en el cuadro 19.

n	Volumen	Approx	n	Volumen	Aprox
3	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	0.43301270189	12	$6+3\sqrt{3}$	11.1961524227
4	1	1	15	$\frac{15}{4}\left(\sqrt{3}+\sqrt{15}+\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)$	17.6423629105
5	$\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}$	1.72047740058	16	$4\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{4+2\sqrt{2}}\right)$	20.1093579685
6	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	2.59807621135	20	$5\left(1+\sqrt{5}+\sqrt{5+2\sqrt{5}}\right)$	31.5687575733
8	$2+2\sqrt{2}$	4.82842712474	24	$6\left(2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)$	45.5745246763
10	$\frac{5}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	7.69420884293	30	$\frac{15}{4}\left(3\sqrt{3}+\sqrt{15}+\sqrt{50+22\sqrt{5}}\right)$	71.3577334067

Cuadro 19: Volúmenes de Prismas de arista unidad

Si el número de caras laterales n es un número compuesto, es preferible usar otra ecuación distinta de la (6) para calcular V. Ilustraremos este hecho con un ejemplo: Calcular el volumen del prisma cuya base es el polígono regular de 15 lados.

$$15\arctan\frac{15}{4v} = \pi \Rightarrow 3\arctan\frac{15}{4v} = \frac{\pi}{5} \Rightarrow R_3\left(\frac{15}{4V}\right) = \tan\frac{\pi}{5}$$

De aquí $\frac{45(16V^2-75)}{4V(16V^2-675} = \sqrt{5-2\sqrt{5}}$ and $V = \frac{15}{4}\left(\sqrt{3}+\sqrt{15}+\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)$.

9. Volumen de los Sólidos de Johnson Circunscribibles

Los sólidos de Johnson son los 92 poliedros convexos con caras regulares con más de un tipo de vértice, es decir que no son uniformes. Los sólidos de Johnson circunscribibles en una esfera son 25 poliedros que están relacionados con los siguientes poliedros uniformes: El octaedro, el icosaedro, el cuboctaedro, el rombicuboctaedro, el rombicosidodecaedro y el icosidodecaedro. A partir de las fórmulas de estos volúmenes y los de las pirámides regulares y las cúpulas podemos calcular el volumen de todos los sólidos de Johnson circunscribibles.

9.1. Pirámides con Caras Regulares

Hay tres casos posibles de pirámides con todas sus caras regulares, es decir, con las aristas iguales $b = l = a$. Aplicando la fórmula queda:

$$VP_n = \frac{n}{12}\cot\omega\sqrt{1-\frac{1}{4\sin^2\omega}}\cdot a^3, \omega = \frac{\pi}{n}, n = 3, 4, 5$$

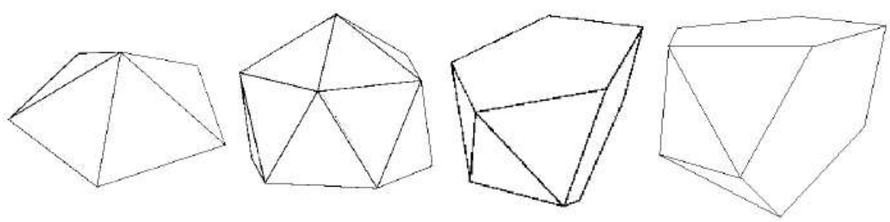
Los nombres de las pirámides y sus volúmenes se muestran en la tabla:

n	Nombre	Volumen	Volumen Aproximado
3	Tetraedro	$\frac{1}{12}\sqrt{2}a^3$	$0{,}11785113a^3$
4	Pirámide Cuadrada J_1	$\frac{1}{6}\sqrt{2}a^3$	$0{,}23570226a^3$
5	Pirámide Pentagonal J_2	$\frac{1}{24}(5+\sqrt{5})a^3$	$0{,}301502832a^3$

Cuadro 20: Volúmenes Pirámides Regulares de arista a

Recordemos que la pirámide cuadrada es la mitad del octaedro regular.

9.2. Relacionados con el Icosaedro



..

Figura 12: J_2, J_{11}, J_{62} y J_{63}

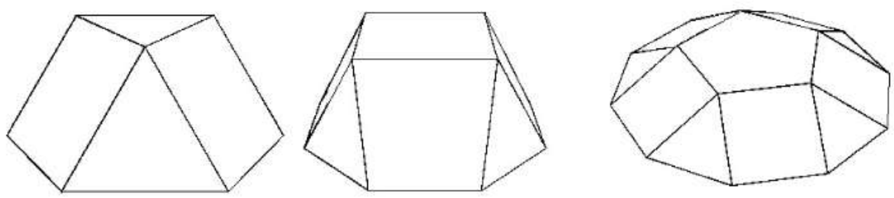
Hay 5 circunscribibles de Jonhson relacionados con el icosaedro, la pirámide pentagonal J_2,y los obtenidos quitandole pirámides pentagonales: la pirámide pentagonal giroelongada J_{11} que se obtiene quitando una, el icosaedro metabidisminuido J_{62} obtenido quitando dos pirámides adyacentes y el icosaedro tridisminuido J_{63} quitando tres. Si quitamos dos pirámides no adyacentes el resultado es el antiprisma pentagonal. Los volúmenes se obtienen fácilmente y se muestran en la tabla:

9.3. Cúpulas

La cúpula triangular J_3 es la mitad del cuboctaedro. Dos cúpulas triangulares unidas por la base forman o el cuboctaedro o la ortobicúpula triangular J_{27}.
La cúpula cuadrada es un trozo del pequeño rombicuboctaedro y la cúpula pentagonal es un trozo del pequeño rombicosidodecaedro. Los circunradios de estos sólidos son los de los cuerpos arquimedianos que los contienen. El volumen de la cúpula triangular es la mitad del cuboctaedro. Calcular el

Poliedro	Volumen	Aproximación
Icosaedro	$\frac{5}{12}(3+\sqrt{5})$	2.181694991
Pirámide Pentagonal J_2	$\frac{1}{24}(5+\sqrt{5})$	0.301502832
Pirámide Pentagonal Giroelongada J_{11}	$\frac{1}{24}(25+9\sqrt{5})$	1.880192158
Icosaedro Metabidisminuido J_{62}	$\frac{1}{6}(5+2\sqrt{5})$	1.578689326
Icosaedro Tridisminuido J_{63}	$\frac{1}{24}(15+7\sqrt{5})$	1.277186493

Cuadro 21: Volúmenes Sólidos de Johnson de arista unidad relacionados con el Icosaedro



..

Figura 13: Cúpulas triangular, cuadrada y pentagonal

volumen de las otras dos cúpulas se puede hacer de la siguiente forma: Si la configuración de la cúpula es $1\{n\}+n\{4\}+n\{3\}+1\{2n\}$ el volumen de la cúpula de arista unidad es:

$$V = VP_n + nVP_4 + nVP_3 - VP_{2n}$$

Tenemos que el volumen de la cúpula cuadrangular es

$$V = 5VP_4 + 4VP_3 - VP_8$$

Puesto que $\rho = \frac{1}{2}\sqrt{5+2\sqrt{2}}$, tenemos que $VP_4 = \frac{1}{6}(1+\sqrt{2})$, $VP_3 = \frac{1}{24}(3+\sqrt{2})$, y $VP_8 = \frac{1}{3}(1+\sqrt{2})$, luego

$$V = 1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Analogamente el volumen de la cúpula pentagonal es

$$V = VP_5 + 5VP_4 + 5VP_3 - VP_{10}$$

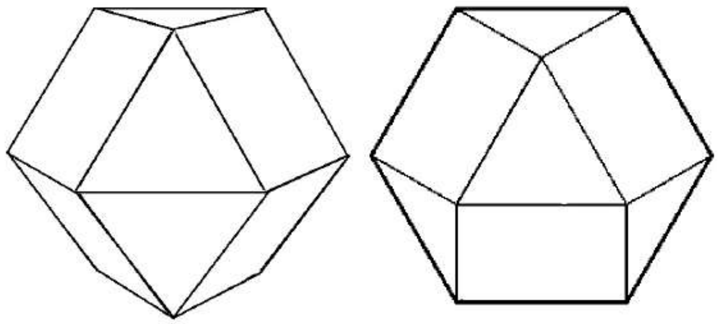
y el circunradio es $\rho = \frac{1}{2}\sqrt{11+4\sqrt{5}}$, luego $VP_5 = \frac{1}{8}(5+2\sqrt{5})$, $VP_4 = \frac{1}{6}(2+\sqrt{5})$, $VP_3 = \frac{1}{24}(3+2\sqrt{5})$ y $VP_{10} = \frac{1}{12}(25+10\sqrt{5})$. El volumen es por tanto

$$V = \frac{1}{6}(5+4\sqrt{5})$$

Resumiendo

Poliedro	Volumen	Vol. Aproximado
Cúpula Triangular	$\frac{5}{6}\sqrt{2}$	0.589255651
Cúpula Cuadrada	$1+\frac{2}{3}\sqrt{2}$	1.471404521
Cúpula Pentagonal	$\frac{1}{6}(5+4\sqrt{5})$	2.324045318

Cuadro 22: Volúmenes de cúpulas de arista unidad



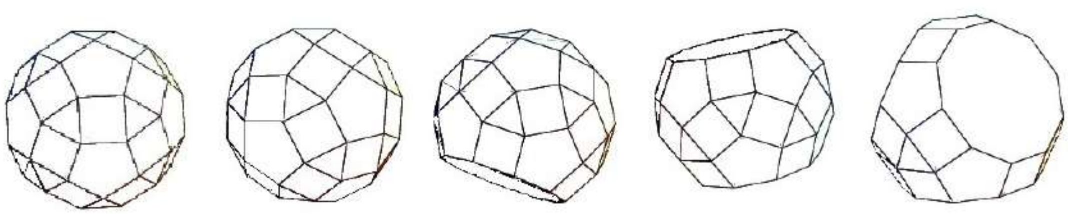
..

Figura 14: La ortobicúpula triangular y el cuboctaedro

9.4. Relacionados con el Cuboctaedro

La cúpula triangular J_3 es la mitad del cuboctaedro. La ortobicúpula triangular J_{27} es parecida al cuboctaedro, se diferencia de éste en que los triángulos de las cúpulas constituyentes tienen un lado común y los cuadrados también. Su volumen es igual que el del cuboctaedro.

9.5. Relacionados con el Rombicosidodecaedro



..

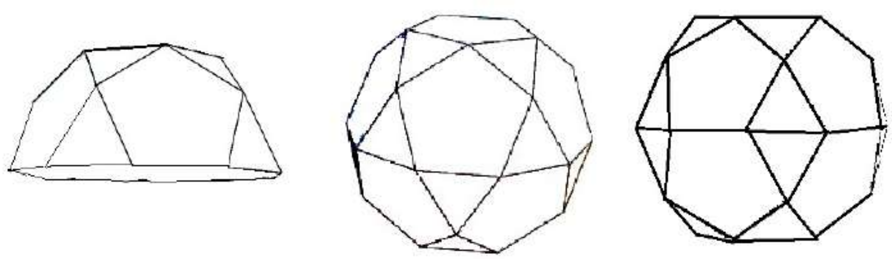
Figura 15: Rombicosidodecaedro, J_{72}, J_{76}, J_{80} y J_{83}

Trece sólidos de Johnson inscribibles están relacionados con el Rombicosidodecaedro. El primero es la Cúpula Pentagonal, cuatro de ellos, el J_{72}, J_{73}, J_{74} y J_{75}, se obtienen girando, una, dos o tres cúpulas pentagonales; otros cuatro, J_{76}, J_{77}, J_{78} y J_{79}, tienen una menos; otros tres, J_{80}, J_{81} y J_{82}, dos cúpula menos y uno J_{83} una menos. Sus volúmenes son por tanto:

Poliedro	Volumen	Aproximación
Rombicosidodecaedro	$\frac{1}{3}(60+29\sqrt{5})$	41.61532378
Cúpula Pentagonal J_5	$\frac{1}{6}(5+4\sqrt{5})$	2.324045318
J_{72}, J_{73}, J_{74} y J_{75}	$\frac{1}{3}(60+29\sqrt{5})$	41.61532378
J_{76}, J_{77}, J_{78} y J_{79}	$\frac{115}{6}+9\sqrt{5}$	39.29127846
J_{80}, J_{81} y J_{82}	$\frac{5}{3}(11+5\sqrt{5})$	36.96723314
J_{83}	$\frac{35}{2}+\frac{23}{3}\sqrt{5}$	34.64318782

Cuadro 23: Volúmenes de sólidos de Johnson relacionados con el Rombicosidodecaedro

9.6. Relacionados con el Icosidodecaedro



..

Figura 16: Rotonda Pentagonal, Icosidodecaedro y Ortobirotonda Pentagonal J_{34}

La Rotonda pentagonal J_6 es la mitad del Icosidodecaedro por tanto su volumen es $V = \frac{1}{12}(45+75\sqrt{5})$. La ortobirrotonda pentagonal J_{34} se obtiene del Icosidodecaedro girando una Rotonda 36º, por lo cual, ambos cuerpos tienen igual volumen $V = \frac{1}{6}(45+17\sqrt{5})$.

10. Epílogo

Con estos datos es fácil calcular el volumen de otros 58 sólidos de Johnson que se obtienen cortando y pegando sólidos plátonicos, arquimedianos y antiprismas. Alguno de los volúmenes de los 9 restantes se pueden consultar en [2].

Referencias

[1] Burden, R.L. y Faires, J.D., Análisis Numérico, Grupo Editorial IberoAmericana, 1985.

[2] Castiñeira Merino, Julio, La fórmula del primatoide y el cálculo de volúmenes, Boletín nº 84 de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas, Febrero de 2010.

[3] Castiñeira Merino, Julio, Fórmulas de ángulo múltiple, Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática, Número 19, Mayo-Junio 2005.

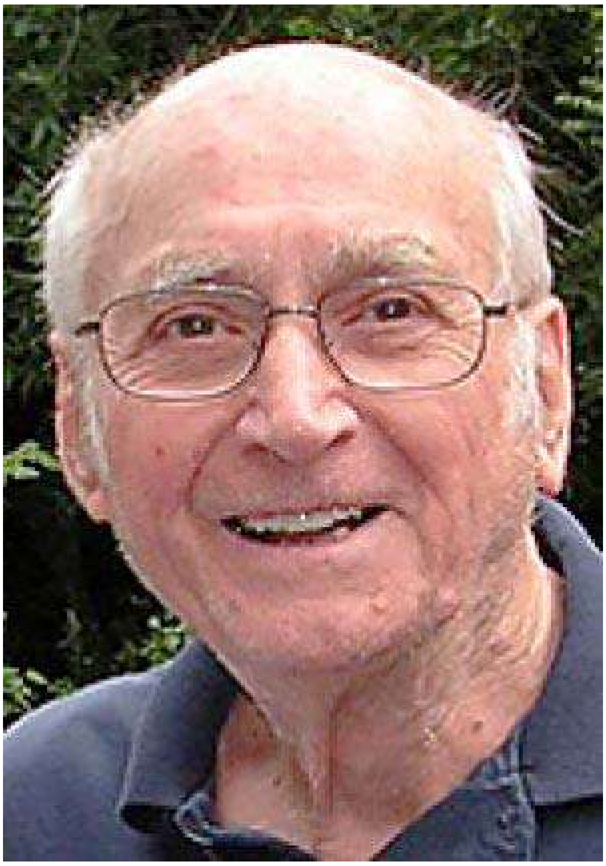
[4] Guillén Soler, Gregoria, El Mundo de los Poliedros, Editorial Síntesis, 1991.

[5] Johnson, N. W. Convex Polyhedra with Regular Faces. Canad. J. Math. 18, 169-200, 1966.

[6] Wenniger, Magnus J. , Polyhedron Models, Cambridge University Press, 1989.

In memoriam Walter E. Mientka (1925-2014)

Francisco Bellot Rosado



Con retraso respecto a su fecha de fallecimiento (1 de junio de 2014), escribo estas líneas en recuerdo de un antiguo y buen amigo, con el que coincidí muchos años en la Olimpiada Internacional de Matemáticas, y en una ocasión (1996) en la Iberoamericana; ocasión de la que hablaré algo más extensamente más adelante.

Walter E. Mientka hizo su doctorado en Teoría Analítica de Números en la Universidad de Colorado, enseñó en las Universidades de Massachussets y Nevada en los comienzos de su carrera profesional, culminándola como Profesor de Matemáticas en la Universidad de Nebraska (Lincoln), de 1957 a 2002.

Durante su período de mandato como director de las American Mathematics Competitions y como director ejecutivo de la USA Mathematical Olympiad fue elegido Secretario del Comité Asesor de la Olimpiada Internacional de Matemáticas (precedente del actual IMOAB). En esta época se produjo en la IMO un acontecimiento realmente singular: en 1994, en HongKong, el equipo olímpico de Estados Unidos logró 6 medallas de oro con puntuación perfecta (252 puntos de 252 posibles). Walter contó para este extraordinario resultado con la ayuda de mucha gente, pero sería injusto no mencionar al encargado de dirigir la preparación de sus estudiantes, Titu Andreescu.

Walter era especialmente sensible a ofrecer las mejores oportunidades a todos sus estudiantes, los de la Universidad y los de las Olimpiadas, y me atrevo a suponer que esta sensibilidad es la que le llevó a proponer, en 1996, durante la Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas en San José de Costa Rica, la participación de un equipo de estudiantes norteamericanos de habla española, con Jefe de la Delegación y Tutor también hispano hablantes. El proyecto no salió adelante, pero como la vida da muchas vueltas, no se puede saber si en algún momento futuro podrá ser realidad.

La última vez que nos vimos, si no recuerdo mal, fue en el verano de 1998, durante la Conferencia de la World Federation of National Mathematics Competitions en Zhong Shang (China).

Termino estas líneas en su memoria con el viejo aforismo funerario latino: *Walter, sit tibi terra levis.*

Presentación de Darío Durán Cepeda, por José Heber Nieto (Univ. del Zulia, Maracaibo)

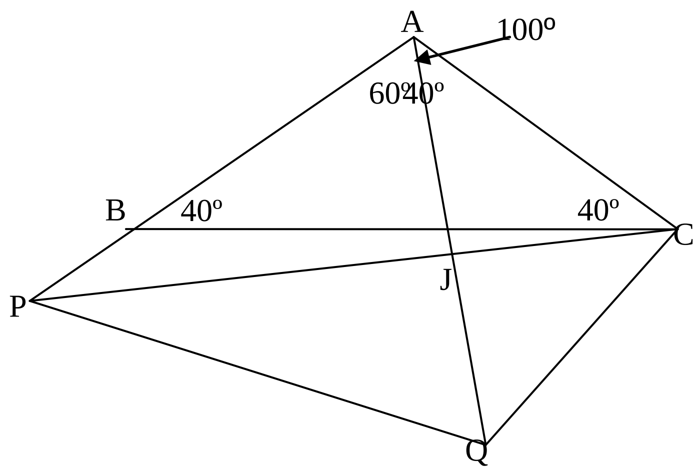
Darío Durán es un matemático venezolano, oriundo de Maracaibo. Ha escrito muchos libros y formado varias generaciones de profesores. Es célebre por su manera de dar clases; verdadero exponente del arte de enseñar, utiliza todo tipo de recursos para captar la atención de sus alumnos e involucrarlos intelectual y emocionalmente en el tema. Muchos de ellos han confesado que, antes de conocerlo, odiaban la matemática, pero que después de oir sus clases aprendieron a amarla. Su didáctica ha sido calificada de "provocativamente metacognoscitiva". Su área predilecta es la geometría, en la cual se solaza proponiendo problemas y hallándoles elegantes soluciones.

SOLUCIONES ELEMENTALES A PROBLEMAS ELEMENTALES

Darío Durán Cepeda

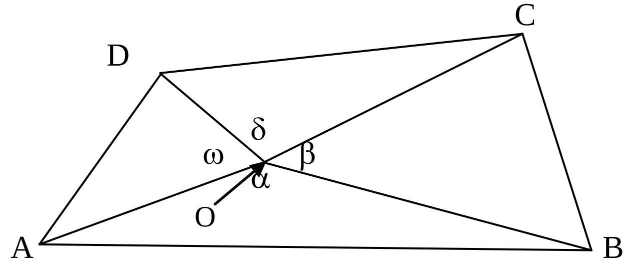
He sido profesor de matemática desde el año de 1960 hasta la fecha y he aprendido que la matemática no se enseña aunque sí se aprende. Mucha gente da estrategias para resolver problemas y yo, que he resuelto, muchos y variados problemas elementales de matemática, no he podido aprender ninguna de esas destrezas que muchos profesores manejan. Creo que en toda solución hay una especie de milagro personal que yo he llamado jocosamente **Teorema de la desesperación**. En las soluciones de los pequeños problemas que a continuación aparecen he usado ese "teorema" personal. Ojalá estos ejemplos sirvan a algunos jóvenes que van a ser profesores de matemática en cualquier nivel educativo.

PROBLEMA #1. El ángulo vertical A de un triángulo isósceles ABC mide 100º. Se prolonga el lado AB hasta el punto P de tal manera que AP = BC. Halle la medida del ángulo BCP.
Solución:



Trace por C una semirrecta que forme un ángulo de 100º con el lado AC del triángulo como se indica en la figura, y sea Q un punto de esa semirrecta tal que CQ = AC. Se deduce que el vértice C está en la mediatriz del segmento AQ. Por otro lado esa igualdad también dice que los triángulos CAQ y ABC son congruentes. Luego, AQ = BC y el ángulo QAC mide 40º,y como el ángulo en A mide 100º, se tendrá que el ángulo PAQ mide 60º. Esto indica que el triángulo APQ es equilátero y P está en la mediatriz del segmento AQ. Es decir, PC es la mediatriz del segmento AQ y, por ende, PC y AQ son perpendiculares y el ángulo en su intersección J es recto. Del triángulo ACJ se ve que $\angle ACP = 50°$ y así $\angle BCP = 10°$.

PROBLEMA #2. Si O es un punto en el interior de un cuadrilátero ABCD tal que $OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2 = 2[ABCD]$, entonces ABCD es un cuadrado y O es su centro. ([XYZ…] representa el área de laa figura de vértices X, Y, Z, …)
Solución:



Se ve que
$OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2 = 2[ABCD] = 2[AOB] + 2[BOC] + 2[COD] + 2[AOD]$
$= OA \cdot OB \cdot \text{sen}\ \alpha + OB \cdot OC \cdot \text{sen}\ \beta + OC \cdot OD \cdot \text{sen}\ \delta + OA \cdot OD \cdot \text{sen}\ \omega$

ya que el doble del área de un triángulo es el producto de dos lados por el seno del ángulo comprendido entre ellos.Ya que $0 \leq \text{sen } x \leq 1$ para todo x, se tiene que

$$OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2 \leq OA\cdot OB + OB\cdot OC + OC\cdot OD + OA\cdot OD$$

Al multiplicar por 2 la desigualdad anterior se ve que es equivalente a

$$(OA - OB)^2 + (OB - OC)^2 + (OC - OD)^2 + (OA - OD)^2 \leq 0.$$

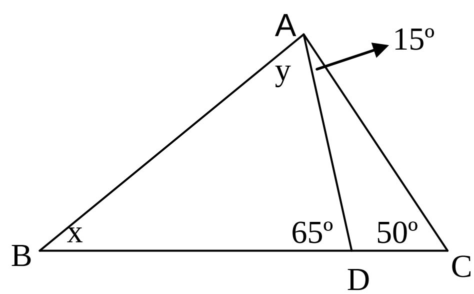
Como el primer miembro es un número no negativo se tendrá que es cero y, por ende, cada uno de los sumandos es cero, y se tiene que OA = OB = OC = OD. Al sustituir en la primera de las igualdades de arriba se obtiene $4\cdot OA^2 = OA^2$ (sen α + sen β + sen δ + sen ω) y por lo tanto

$$\text{sen } \alpha + \text{sen } \beta + \text{sen } \delta + \text{sen } \omega = 4.$$

Ya que el máximo valor de cada sumando es uno se tendrá que sen α = sen β = sen δ = sen ω = 1, de donde $\alpha = \beta = \delta = \omega = 90º$. Los triángulos AOB, BOC, COD, AOD son rectángulos e isósceles. Por ende, los ángulos del cuadrilátero en A, B, C y D son rectos, ABCD es un cuadrado y O es el corte de las diagonales.

PROBLEMA #3. En un triángulo ABC se tiene C = 50º. El punto D está entre B y C ycumple BD = AC y $\angle DAC = 15º$. Halle el valor del ángulo $x = \angle ABC$.

Solución:



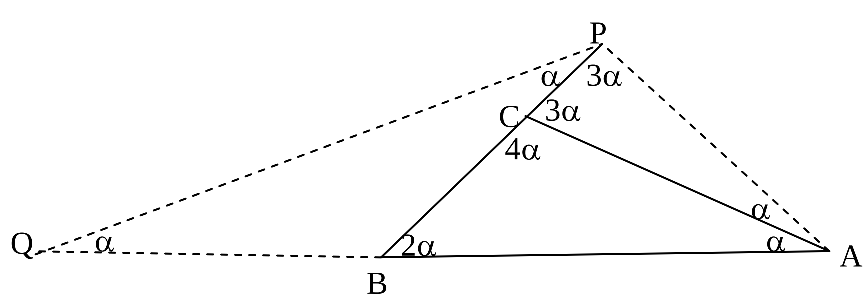
Como $\angle BDA$ es exterior al triángulo ADC se tiene que $\angle BDA = 15º + 50º = 65º$. Si $y = \angle BAD$, entonces en el triángulo ABD se tiene que $x + y + 65º = 180º$ y así

$$x + y = 115º \qquad (*)$$

Supóngase que $x < 50º$. A mayor ángulo mayor lado en el triángulo ABC y se ve que AC < AB. Pero, AC = BD y se tendrá que BD < AB. A mayor lado mayor ángulo en el triángulo ABD y se tiene que $y < 65º$. Al sumar ambas desigualdades se obtiene $x + y < 115º$ lo que contradice a (*). Si se supone que $x > 50º$, entonces las desigualdades se revierten y se ve que $x + y > 115º$ lo cual vuelve a contradecir a (*). En consecuencia, $x = 50º$.

PROBLEMA #4. Los ángulos A, B, C del triángulo ABC son proporcionales a los números 1, 2 y 4, respectivamente. Pruebe que $\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{1}{BC}$.

Solución:

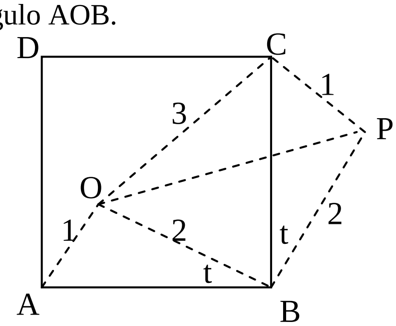


Se colocan los ángulos $A = \alpha$, $B = 2\alpha$, $C = 4\alpha$ y se tiene que

$$180° = A + B + C = 7\alpha \qquad (*)$$

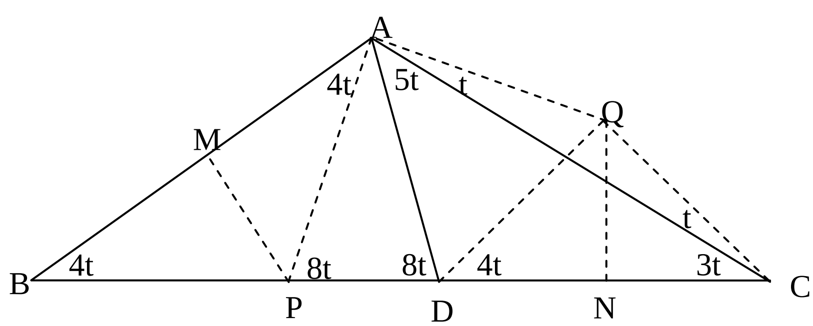
La mediatriz del segmento AB corta la recta BC en el punto P produciendo el triángulo isósceles APB de base AB. Luego, ∠PBA = ∠PAB = 2α y se tiene que ∠PAC = α. Además, AP = BP. De (*) se ve que ∠BPA = 3α y en el ángulo llano BCP se tiene que ∠PCA = 3α, por lo que el triángulo PAC es isósceles y AP = AC. Por otro lado tracemos la recta por P que forma ángulo α con PB y corta a la recta AB en Q. Ya que B = 2α es exterior al triángulo PBQ se tiene que ∠BQP = α y dicho triángulo es isósceles de base PQ. Así, BQ = BP = AP = AC. Por último, los triángulos QAP y ABC son semejantes por tener los mismos ángulos. Luego, $\frac{AQ}{AB} = \frac{AP}{BC}$, es decir, $\frac{QB+AB}{AB} = \frac{AC}{BC}$. De las igualdades anteriores resulta que $\frac{AC}{AB} + 1 = \frac{AC}{BC}$, y al dividir por AC se obtiene el resultado deseado.

PROBLEMA#5. Las distancias de un punto interior O de un cuadrado ABCD a los vértices A, B y C son 1, 2 y3, respectivamente. Halle el ángulo AOB.
Solución:



Trace por B el segmento BP de igual tamaño que OB = 2 y que forme con el lado BC del cuadrado un ángulo t = ∠ABO. Los triángulos AOB y CPB son congruentes por tener dos lados iguales como sus ángulos comprendidos y resulta que ∠AOB = ∠BPC. Por otro lado, ∠OBP = ∠OBC + t = 90° y el triángulo OBP es rectángulo e isósceles. Luego, ∠OPB = 45°. En el mismo triángulo por Pitágoras se ve que $OP^2 = 2^2 + 2^2 = 8$ y así $OP = \sqrt{8}$. En el triángulo OCP se tiene que $\left(\sqrt{8}\right)^2 + 1^2 = 3^2$ y se deduce por Pitágoras que el triángulo OCP es rectángulo de hipotenusa OC. Por tanto, ∠OPC = 90°. En consecuencia, ∠AOB = ∠BPC = ∠BPO + ∠OPC = 45° + 90° = 135°.

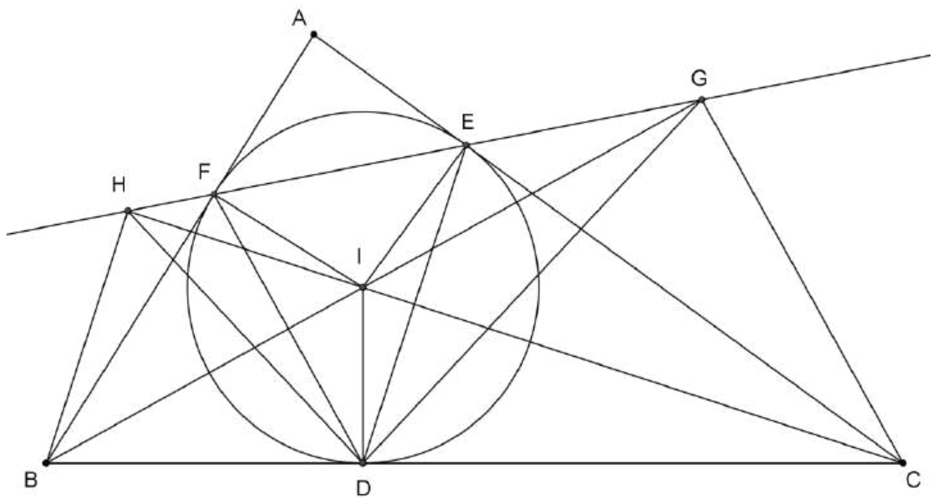
Problema #6. En un triángulo ABC se tiene que B = 4t, C = 3t y D es un punto del lado BC tal que ∠CAD = 5t y AB = DC. Halle el valor de t.
Solución:



Ya que el ángulo ADB es exterior al triángulo ADC se tendrá que ∠ADB = 5t + 3t = 8t. Trace la perpendicular al lado AB por su punto medio M hasta cortar al lado BC en un punto P. El triángulo ABP es isósceles de base AB y así ∠BAP = ∠ABP = 4t. Como ∠APD es exterior al triángulo ABP se tiene que ∠APD = 4t + 4t = 8t y el triángulo APD es isósceles y así AP = AD. Por el punto medio N del segmento CD trace la perpendicular hasta el punto Q tal que NQ = MP. Entonces los triángulos ABP y QDC son congruentes y se tiene que ∠QDC = ∠QCD = 4t y que QD = QC = AP = AD. Por tanto, ∠QCA = 4t – 3t = t. Nótese que el triángulo DAQ es isósceles de base AQ porque AD = DQ. En ese triángulo en el vértice D se ve que ∠ADQ +12t = 180°. Además, en ese mismo triángulo se tiene que 2∠DAQ + ∠ADQ = 180°. Al comparar las dos últimas igualdades resulta que ∠DAQ = $\frac{12t}{2}$ = 6t. Por ende ∠QAC = ∠QAD – ∠DAC = 6t – 5t = t y el triángulo AQC es isósceles de base AC resultando AQ = QC = AD y el triángulo AQD es equilátero. Por consiguiente, ∠DAQ = 6t = 60° y se ve que t = 10°.

PROBLEMA #7. Sean D, E y F las proyecciones del incentro I del triángulo ABC sobre los lados BC, AC y AB. Las bisectrices de los ángulos B y C del triángulo cortan la recta EF en los puntos G y H. Pruebe que los triángulos ABC y DHG son semejantes y tienen el mismo incentro.

Solución:



(1) El cuadrilátero BHFI es cíclico. Comenzamos por observar que los triángulos AFE, BDF y CDE son isósceles porque desde un punto exterior a una circunferencia los segmentos de tangente son iguales. Por ende, ∠AFE = ∠AEF = 90° – $\frac{A}{2}$, ∠BFD = ∠BDF = 90° – $\frac{B}{2}$, ∠CDE = ∠CED = 90° – $\frac{C}{2}$. Ahora en el triángulo CHE se tiene ∠CHE + ∠HEC + ∠ECH = 180º. Pero, ∠HEC = 180º – ∠AEF = 180º – $\left(90° - \frac{A}{2}\right)$ = 90º + $\frac{A}{2}$. Además, ∠ECH = $\frac{C}{2}$ porque CH es la bisectriz del ángulo C en el triángulo ABC. Colocando estos dos valores en la igualdad anterior se obtiene que ∠CHE + 90º + $\frac{A}{2} + \frac{C}{2}$ = 180º y así ∠IHF = ∠CHE = 90º – $\frac{A+C}{2} = \frac{180°-B}{2} = \frac{B}{2}$. Por otro lado, ∠FBI = $\frac{B}{2}$ porque BF es la bisectriz del ángulo B en el triángulo ABC. Se ha demostrado que ∠IHF = ∠FBI = $\frac{B}{2}$ y el cuadrilátero BHFI es cíclico. Análogamente CGEI es cíclico.

(2) Los puntos B, H, F, I y D son concíclicos. En efecto en el cuadrilátero BFID los ángulos opuestos F y D son rectos, luego BFID es cíclico. Esto quiere decir que D está en el circuncírculo del triángulo BFI. Pero, en (1) se vio que H también está en dicho circuncírculo. Por tanto, los puntos B, H, F, I y D son concíclicos. Análogamente C, G, E, I, D son concíclicos.

(3) Como consecuencia de (2) se tiene ∠FBH = ∠FDH = ∠FIH y ∠BHI = ∠BFI = 90º. por estar inscritos en al arco BI de la circunferencia que pasa por B, H, F, I y D. Además, ∠IGC = ∠IEC = 90º por estar inscritos en el arco IC de la circunferencia que pasa por los puntos D, I, G, E y C.

(4) Como CH es perpendicular a BH y CH es perpendicular a la recta DE por ser CH bisectriz en el ángulo vertical del triángulo isósceles CDE, las rectas BH y DE son paralelas. Análogamente CG y DF son paralelas.

(5) Los triángulos ABC y DHG son semejantes. En efecto los ángulos DHI y DFI son iguales por estar inscritos en el arco ID de la circunferencia que pasa por los puntos D, B, H y F. Pero, $\angle$DFI = 90º – $\angle$FID = $\frac{B}{2}$. Luego, $\angle$DHI = $\frac{B}{2}$. En (1) se vió que $\angle$IHF = $\frac{B}{2}$. Por tanto, $\angle$DHG = $\angle$DHI + $\angle$IHF = B. Análogamente $\angle$DGH = C y se sigue que ABC y DHG son semejantes por el segundo criterio de semejanza.

(6) Ya se vio que HI es la bisectriz del ángulo DHG y GI es la bisectriz del ángulo HGD. Luego, I es el incentro del triángulo DHG.

Problemas para los más jóvenes 52

Cinco problemas de la Olimpiada belga (miNI)

PMJ52-1

El número 99...999, formado por 2011 nueves, se multiplica por 198. Se suman las cifras de ese producto. ¿Qué valor tiene esa suma?

PMJ52-2

Juan, mayor que Fabricio, observa que permutando las dos cifras de su edad obtiene la de Fabricio. Éste, por su parte, observa que la diferencia entre los cuadrados de sus edades es el cuadrado de un número natural no nulo. ¿Cuáles son las edades respectivas?

PMJ52-3

El depósito de la mobylette de Claudio tiene una capacidad de 6 litros. El carburante que utiliza es una mezcla de gasolina sin plomo y aceite sintético. En la estación de servicio de su pueblo, sólo hay dos tipos de mezcla: la mezcla "A", que contiene el 7% de aceite, y la mezcla "B", que contiene el 2% de aceite.

a) Claudio compra 3 litros de cada mezcla. ¿Cuál es el porcentaje de aceite en la mezcla obtenida?
b) Claudio sabe que la mejor mezcla para su mobylette debe contener el 3% de aceite. Para obtener 6 litros de tal mezcla, qué cantidad de "A" y de "B" debe comprar?
c) En su depósito vacío, Claude echa 1 litro de "A" y 2 litros de "B". ¿Cómo debe completarlo para tenerlo lleno con el 3% de aceite?

PMJ52-4

Las diagonales AC y BD del cuadrilátero ABCD se cortan en P y NO son perpendiculares. Sean: H el ortocentro de ABP; I, el de BCP; J el de CDP y K el de DAP.

a) ¿De qué tipo es el cuadrilátero si H, J y P están alineados?
b) ¿De qué tipo es el cuadrilátero si H,J y P están alineados e I, K y P también lo están?
c) Si ABCD es un rectángulo, de qué tipo es el cuadrilátero HIJK?

PMJ52-5

ABCD es un trapecio cuya base DC es triple de la base AB. Si M es el punto medio de AD, ¿qué fracción del área del trapecio es el área del triángulo BDM?

Problemas de nivel medio y de Olimpiadas 52

Cinco problemas de la Olimpiada húngara

PNMO52-1

Se sabe que al lanzar una moneda, sale cara (C) con probabilidad p ($0<p<1$). Dos jugadores, A y B, lanzan por turno esta moneda, hasta que aparece una de las secuencias CCC ó C+C. Si la secuencia que aparece primero es CCC, entonces gana A. Si C+C precede a CCC, entonces gana B. ¿Para qué valor de p es equitativo el juego?

PNMO52-2

Sea k un entero positivo y consideremos la sucesión definida recurrentemente por

$$x_1 = k, \quad x_{n+1} = kx_n + \sqrt{\left(k^2-1\right)\left(x_n{}^2-1\right)}$$

Demostrar que todos los elementos de la sucesión son enteros positivos.

PNMO52-3

Para un polígono convexo P y un entero positivo k, diremos que “k divide a P” si existen k semirrectas que parten de un punto común, tales que el ángulo entre cada dos semirrectas contiguas es $\frac{2\pi}{k}$, y las semirrectas dividen a P en k trozos de la misma área.

Demostrar que existe un polígono convexo P tal que k no divide a P si $k \geq 5$.

PNMO52-4

Probar que si a,b,c son números reales positivos cualesquiera, entonces

$$\sqrt{a^2+b^2-ab}+\sqrt{b^2+c^2-bc} \geq \sqrt{a^2+b^2+ac}\ .$$

PNMO52-5

Resolver en enteros la ecuación $x^2-2y^4 = 1$

PROBLEMAS PROPUESTOS 261-265

Problema 261 (*propuesto por D.M. Batinetzu-Giurgiu, Bucarest, y N.Stanciu, Buzau, Rumania)*

Si

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

y $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ es una función continua, calcular

$$\lim_{n\to\infty} \int_{e^{x_n}}^{e^{x_{n+1}}} f\left(\frac{x}{n}\right) dx.$$

Problema 262 *(propuesto por Laurentiu Modan, Bucarest, Rumania)*

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} mx + 5 \text{ si } x < 0 \\ e^{2x} + m \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

siendo $m \in \mathbb{R}$.

i) Hallar m para que f sea inversible.

ii) Calcular

$$I = \int_4^6 f^{-1}(x)\, dx$$

y comparar el valor de I con $5/8$.

Problema 263, propuesto por Andrés Sáez Schwedt, Universidad de León, España

$ABCD$ es un cuadrilátero cíclico y E es un punto de AC (A entre C y E). La circunferencia por A y B tangente a BE corta a AC en F y a AD en G. Si BG corta a ED en H, probar que FH es paralela a CD.

***Problema 264, propuesto por el editor.**

Cuando se publique la solución se indicará la procedencia.

Los vértices de un polígono de 2007 lados se colorean alternativamente de blanco, negro y rojo. Uno de los vértices rojos tiene una ficha. Dos jugadores, por turno, hacen dos cosas: mueven la ficha a otro vértice a lo largo de un lado del polígono y después borran algún lado. El juego termina cuando es imposible mover la ficha.

Al final del juego, si la ficha está en un vértice blanco, gana el primer jugador; si está en un vértice negro, gana el segundo jugador; y si está en un vértice rojo, hay empate. ¿Alguno de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora? En caso afirmativo, ¿cuál de ellos?

***Problema 265, propuesto por el editor**

Cuando se publique la solución se indicará la procedencia.

Sean $a, b, c.d$ enteros tales que $|ad - bc| = 1$ y $|a| > |c|$.

Demostrar que $a^2 + ab + b^2 \geq c^2 + cd + d^2$

Problema 256, propuesto por Gabriel Chicas Reyes (El Salvador).

Sea p un número primo impar. Para cada entero no negativo k, determinar el residuo módulo p del determinante

$$\begin{vmatrix} 1^k & 2^k & \cdots & p^k \\ 2^k & 3^k & \cdots & 1^k \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p^k & 1^k & \cdots & (p-1)^k \end{vmatrix}.$$

Solución por José Heber Nieto, Universidad del Zulia, Maracaibo, Venezuela.

Sea D el determinante a evaluar. Probaremos que si $(p-1) \nmid k$ entonces $D \equiv 0 \pmod{p}$, mientras que si $(p-1) \mid k$ entonces

$$D \equiv \begin{cases} -1 \pmod{p} & \text{si } p \equiv 1 \pmod{4}, \\ 1 \pmod{p} & \text{si } p \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

Veamos primero algunos resultados más o menos conocidos, cuya demostración incluimos por completitud.

Lema 1. *Si* $x \not\equiv 0, 1 \pmod{p}$ *entonces* $1 + x + x^2 + \cdots + x^{p-2} \equiv 0 \pmod{p}$.

Demostración. Como $x \not\equiv 0 \pmod{p}$, por el teorema de Fermat $x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, luego

$$(x-1)(1 + x + x^2 + \cdots + x^{p-2}) = x^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p},$$

y como $p \nmid (x-1)$ se tiene $1 + x + x^2 + \cdots + x^{p-2} \equiv 0 \pmod{p}$. □

Lema 2.

$$1^k + 2^k + \cdots + p^k \equiv \begin{cases} -1 \pmod{p} & \textit{si } (p-1) \mid k, \\ 0 \pmod{p} & \textit{si } (p-1) \nmid k. \end{cases}$$

Demostración. Si $(p-1) \mid k$ entonces $1^k \equiv 2^k \equiv \cdots \equiv (p-1)^k \equiv 1 \pmod{p}$, luego $1^k + 2^k + \cdots + p^k \equiv 1 + 1 + \cdots + 1 + 0 \equiv p - 1 \equiv -1 \pmod{p}$.

Si $(p-1) \mid k$, sea g una raíz primitiva módulo p. Entonces $w = g^k \not\equiv 0, 1 \pmod{p}$ y además g, g^2,..., g^{p-1} son congruentes módulo p, en algún orden, con 1, 2,..., $p-1$. Luego

$$\sum_{j=1}^{p-1} j^k \equiv \sum_{j=1}^{p-1} (g^j)^k \equiv \sum_{j=1}^{p-1} w^j \equiv w \sum_{j=0}^{p-2} w^j \equiv 0 \pmod{p}$$

por el Lema 1. □

Lema 3.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{(n-1)(n-2)/2}(n-1),$$

donde $n \geq 2$ es el número de filas (y columnas) del determinante.

Demostración. Sea T_n el determinante a evaluar. Entonces $T_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$. Si $n > 2$ entonces

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{1}{n-2}\begin{vmatrix} n-2 & n-2 & \cdots & n-2 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{n-2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1-n \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{n+1}\frac{1-n}{n-2}T_{n-1} \end{aligned}$$

(en el paso intermedio restamos a la primera fila las filas 2, 3,..., n). Luego

$$\begin{aligned} T_n &= (-1)^n\frac{n-1}{n-2} = (-1)^n\frac{n-1}{n-2}(-1)^{n-1}\frac{n-2}{n-3} = \cdots \\ &= (-1)^{n+(n-1)+\cdots+3}\frac{n-1}{n-2}\frac{n-2}{n-3}\cdots\frac{2}{1}T_2 \\ &= (-1)^{(n+3)(n-2)/2}(n-1) = (-1)^{(n-1)(n-2)/2}(n-1). \end{aligned}$$

□

Ya estamos en condiciones de evaluar $D \pmod{p}$. Si $S = 1^k + 2^k + \cdots + p^k$, sumando a la primera fila las filas 2, 3,..., p resulta

$$D = \begin{vmatrix} S & S & \cdots & S \\ 2^k & 3^k & \cdots & 1^k \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p^k & 1^k & \cdots & (p-1)^k \end{vmatrix} = S\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2^k & 3^k & \cdots & 1^k \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p^k & 1^k & \cdots & (p-1)^k \end{vmatrix}.$$

Luego si $(p-1) \nmid k$, por el Lema 2 se tiene $S \equiv 0 \pmod{p}$ y por tanto $D \equiv 0 \pmod{p}$. Si en cambio $(p-1) \mid k$ entonces

$$D \equiv T_p \equiv (-1)^{(p-1)(p-2)/2}(p-1) \equiv -(-1)^{(p-1)(p-2)/2} \pmod{p},$$

de donde se sigue que si $p \equiv 1 \pmod{4}$ entonces $D \equiv -1 \pmod{p}$, mientras que si $p \equiv 3 \pmod{4}$ entonces $D \equiv 1 \pmod{p}$.

Problema 257, propuesto por D. M. Batinetzu-Giurgiu (Bucarest) y Neculai Stanciu (Buzau), conjuntamente (Rumania).

Sea $(a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión real acotada de números positivos. Calcular

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+a_k+k}.$$

Solución por José Heber Nieto, Universidad del Zulia, Maracaibo, Venezuela.

Sea A un entero positivo tal que $a_n \leq A$ para todo $n \geq 1$. Entonces, para cualquier $k \geq 1$ se tiene

$$\frac{1}{n+A+k} \leq \frac{1}{n+a_k+k} \leq \frac{1}{n+k}.$$

Sumando las desigualdades anteriores desde $k=1$ hasta n se obtiene

$$\sum_{k=A+n+1}^{A+2n} \frac{1}{k} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+a_k+k} \leq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k},$$

que, poniendo $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, queda

$$H_{A+2n} - H_{A+n} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+a_k+k} \leq H_{2n} - H_n. \qquad (*)$$

Pero como es bien sabido $H_n = \ln(n) + \gamma + \varepsilon_n$, donde $\gamma = 0{,}577\ldots$ es la constante de Euler y $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$. Luego

$$\lim_{n\to\infty} (H_{A+2n} - H_{A+n}) = \lim_{n\to\infty} (\ln(A+2n) - \ln(A+n)) = \lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{A+2n}{A+n}\right) = \ln(2)$$

y como lo anterior es cierto para cualquier $A \geq 0$ también se tiene

$$\lim_{n\to\infty} (H_{2n} - H_n) = \ln(2).$$

De esto y (*) se concluye que

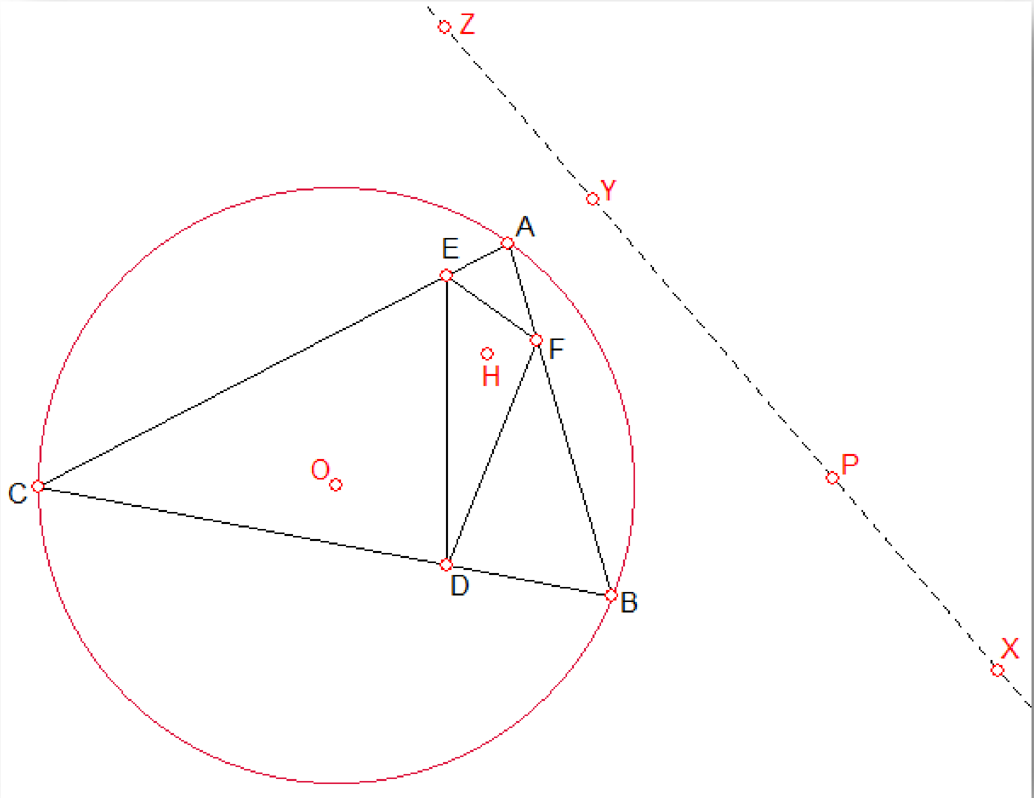
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+a_k+k} = \ln(2).$$

Problema 258, propuesto por el editor.

Construir el triángulo ABC conociendo su ortocentro H, su circuncentro O, un punto P del eje Órtico de ABC y la longitud del lado a.

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba (España).

Sea la configuración siguiente donde se muestra el triángulo ABC, su triángulo órtico DEF y un punto P cualquiera sobre el eje órtico XYZ.



Para construir el triángulo con los datos que se nos dan, tendremos en cuenta los siguientes resultados o hechos geométricos de interés:

H1.- El eje órtico XYZ es perpendicular a la Recta de *Euler*.
(Ver con mayor detalle http://garciacapitan.99on.com/ortologicos/ortologicos.pdf)

H2.- Si llamamos $M = RectaOH \cap RectaXYZ$ se verifica la siguiente relación métrica $R^2 = \frac{OH(4.OM - OH)}{3}$, siendo R= radio de la circunferencia circunscrita al ΔABC.
(Ver con mayor detalle http://amontes.webs.ull.es/pdf/ejct2536.pdf)

H3.- La circunferencia de los 9 puntos asociada al ΔABC tiene el centro N en el punto medio del segmento OH y su radio $R_N = \frac{1}{2}R$.

Con estos resultados geométricos, justificaremos la siguiente construcción, paso a paso.

Primer paso. Sea la $recta\ OH$. Trazando la recta perpendicular a OH por el punto P, determinamos así el *Eje Órtico*.

Segundo paso. Considerando el punto $M = RectaOH \cap Eje\ órtico$, podemos determinar así los segmentos $OH\ y\ OM$.

Tercer paso. Obtenemos R como la media geométrica de los segmentos $\frac{1}{3}OH\ \ y\ \ (4.OM - OH)$ ya que $\frac{R}{\frac{1}{3}OH} = \frac{4.OM-OH}{R} \rightarrow R^2 = \frac{OH(4.OM-OH)}{3}$

Cuarto paso. Trazamos la circunferencia de centro O y radio R, circunferencia circunscrita al ΔABC.

Quinto paso. Trazamos la circunferencia de centro N, punto medio del segmento OH, y radio $R_N = \frac{1}{2}R$.
Esta será la circunferencia de los 9 puntos asociada al ΔABC.

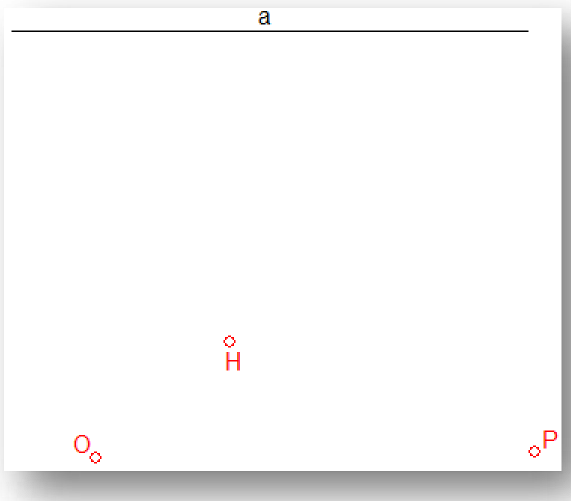
Sexto paso. Sea A' el punto medio del lado BC, cuya longitud a es conocida.

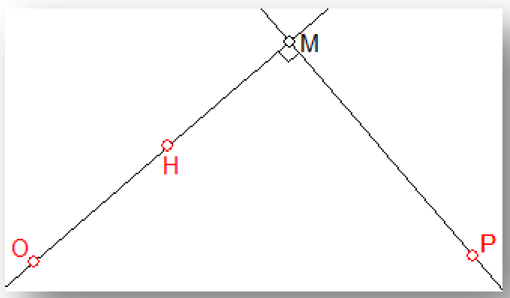
Como este punto A' se encuentra en la circunferencia de los 9 puntos y $d(O, A') = OA' = \sqrt{R^2 - \left(\frac{1}{2}a\right)^2}$ entonces podemos determinar el punto A' como la intersección de las siguientes dos circunferencias

$$A' = Circunferencia\left(O, radio = \sqrt{R^2 - \left(\frac{1}{2}a\right)^2}\right) \cap Circunferenciade\ los\ 9\ puntos.$$

Séptimo paso. Trazamos por el punto A' la circunferencia de radio $\frac{a}{2}$ que cortará a la circunferencia circunscrita en dos puntos, los vértices B y C, y así obtenemos la posición del lado $BC = a$.
La perpendicular al lado BC por el punto H cortará a la circunferencia circunscrita ΔABC por fin, en el punto A.

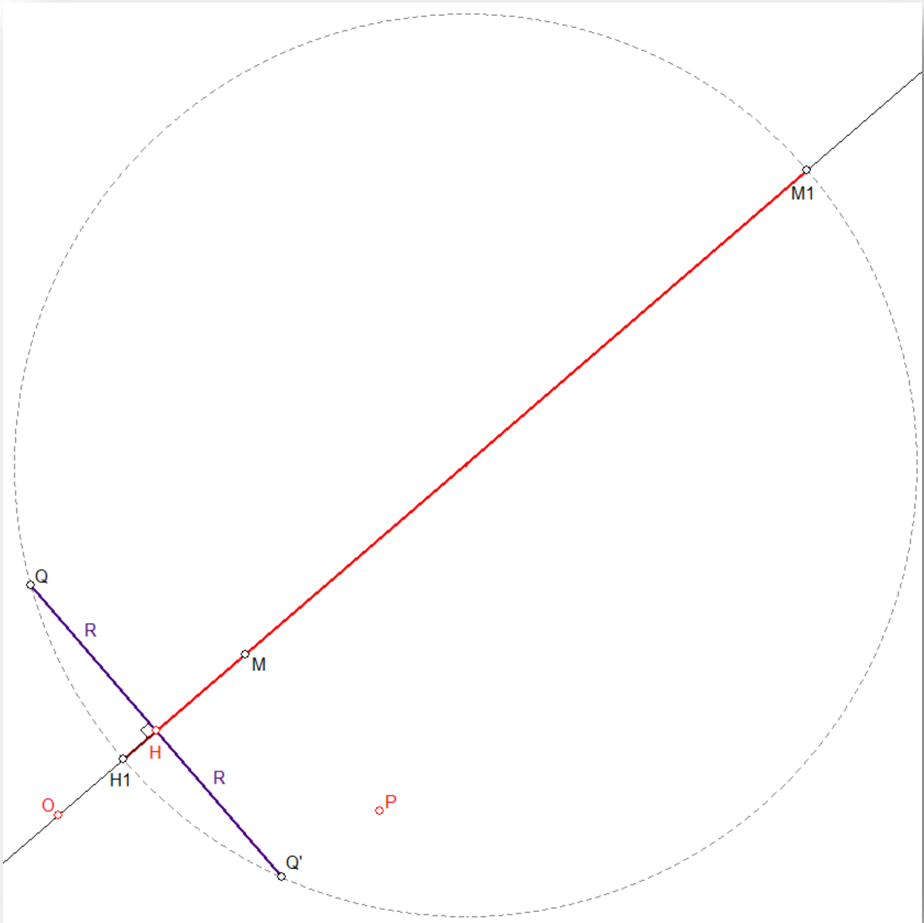
Su construcción:



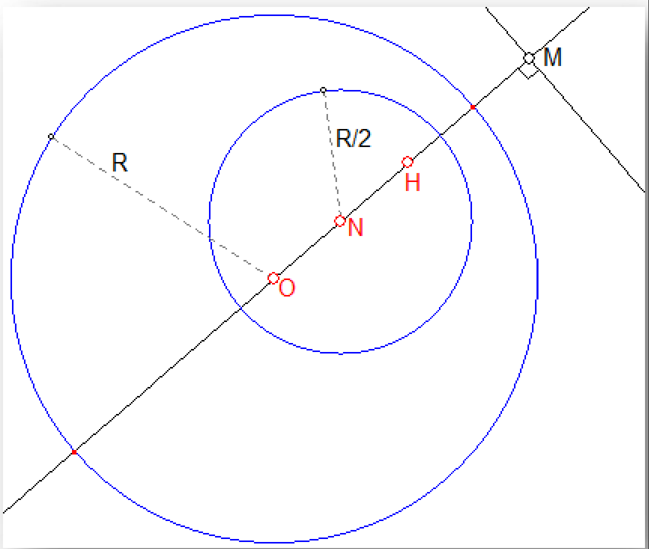


Determinación del valor de R:

$$HH_1 = \frac{1}{3}OH \;\; y \;\; HM_1 = 4OM - OH \rightarrow \frac{R}{\frac{1}{3}OH} = \frac{4.OM - OH}{R} \rightarrow R^2 = \frac{OH(4.OM - OH)}{3}$$

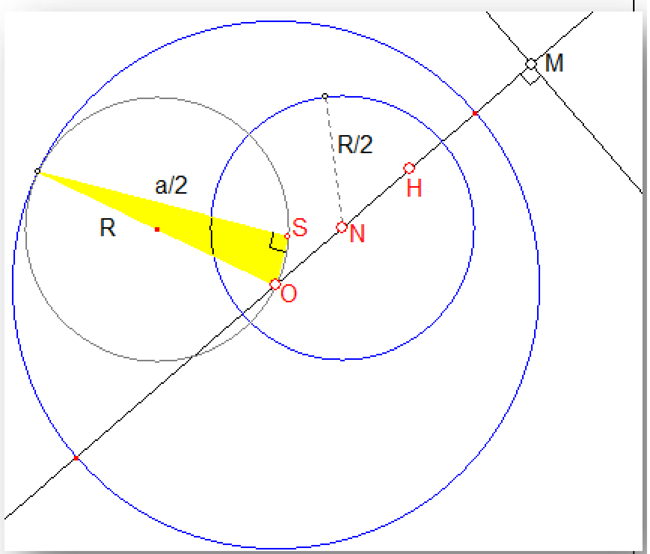


Construcción de las circunferencias circunscrita y la de los 9 puntos.



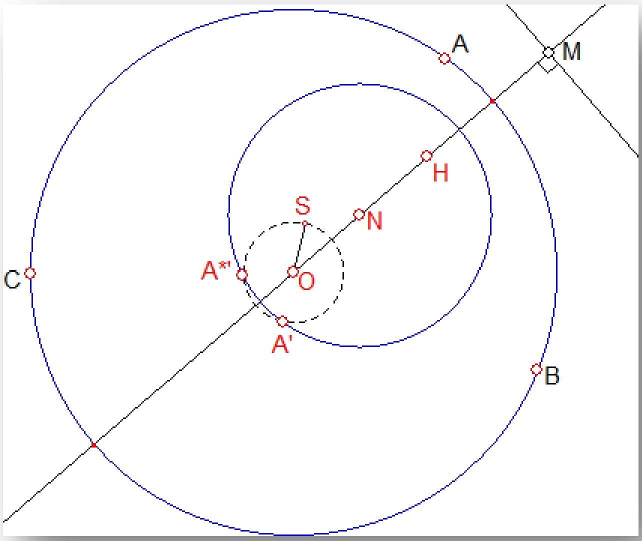
Determinación de los puntos S que distan del punto O

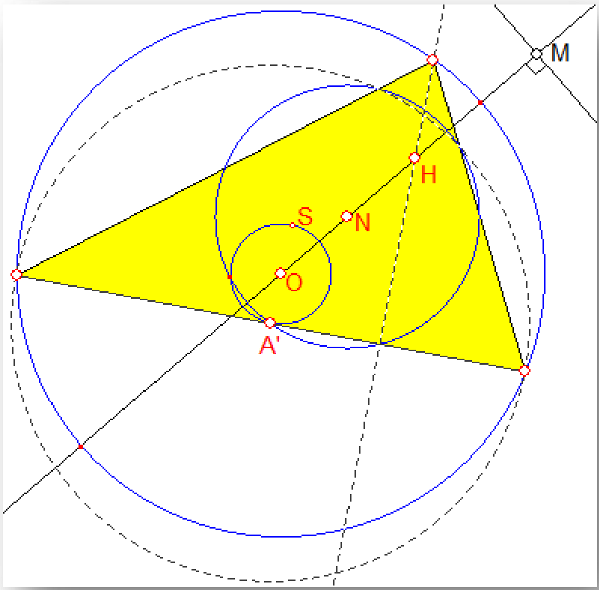
$$d(O,S) = OS = \sqrt{R^2 - \left(\frac{1}{2}a\right)^2}$$



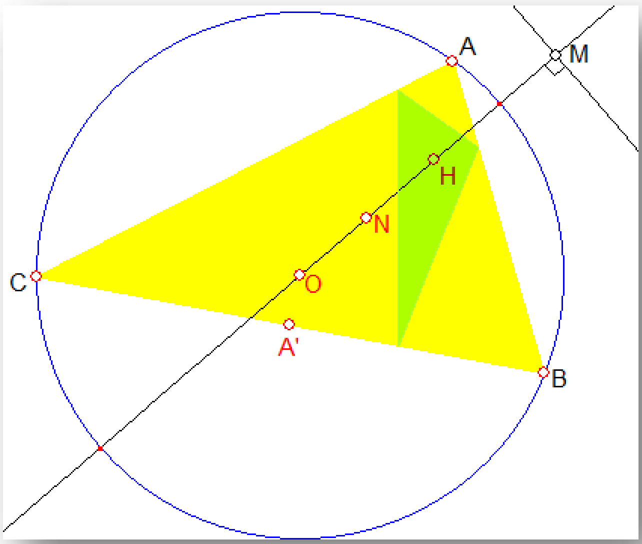
Determinación del punto medio del lado BC como intersección de las circunferencias de los 9 puntos y de la de centro O y radio OS.
Hay dos soluciones posibles, A’ y A*’.

Por el punto A' trazamos la circunferencia de radio $\frac{a}{2}$ que cortará a la circunferencia circunscrita en dos puntos, los vértices B y C, y así determinamos la posición del lado $BC = a$.

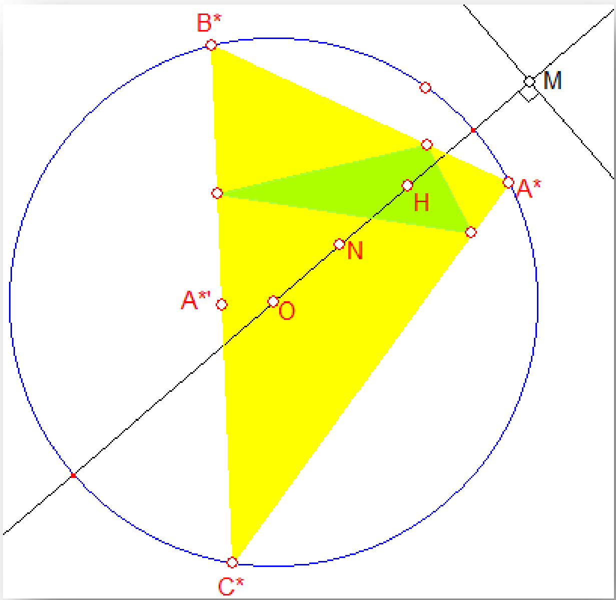




Primera Solución



Segunda Solución



Ambas soluciones son simétricas respecto de la recta de *Euler*, recta OH.

Problema 260
Proposto polo editor
Achar unha solución x da ecuación

$$x^2+m^2+n^2-2(mn+mx+nx)=8\sqrt{2mnx(x+m+n)}$$

"por un método simple" (dicíase no enunciado orixinal).

Solución enviada por Bruno Salgueiro Fanego, Viveiro, Lugo.

$x^2+m^2+n^2-2(mn+mx+nx)=x^2-2(m+n)x+(m-n)^2$ é un polinomio en x con raíces $\left(\sqrt{m}\pm\sqrt{n}\right)^2$. Entón, se denotamos $a=\sqrt[4]{m}$ e $b=\sqrt[4]{n}$, a ecuación convértese en

$$\left(x-\left(a^2+b^2\right)^2\right)\left(x-\left(a^2-b^2\right)^2\right)=8\sqrt{2a^4b^4x\left(x+a^4+b^4\right)}\ .$$

Demostremos agora que $x=(a+b)^4$ é unha solución válida desa ecuación:

$\left((a+b)^4-\left(a^2+b^2\right)^2\right)\left((a+b)^4-\left(a^2-b^2\right)^2\right)$

$=\left((a+b)^2+a^2+b^2\right)\left((a+b)^2-\left(a^2+b^2\right)\right)\left((a+b)^2+a^2-b^2\right)\left((a+b)^2-\left(a^2-b^2\right)\right)$

$=2\left(a^2+ab+b^2\right)2ab2a(a+b)2b(b+a)=16\left(ab(a+b)\right)^2\left(a^2+ab+b^2\right)$

$=8\sqrt{4a^4b^4(a+b)^4\left(a^2+ab+b^2\right)^2}=8\sqrt{2a^4b^4(a+b)^4\,2\left(a^4+2a^3b+3a^2b^2+2ab^3+b^4\right)}$

$=8\sqrt{2a^4b^4(a+b)^4\left((a+b)^4+a^4+b^4\right)}\ .$

Analogamente, $x=(a-b)^4$ é outra solución, pois

$\left((a-b)^4-\left(a^2+b^2\right)^2\right)\left((a-b)^4-\left(a^2-b^2\right)^2\right)=16\left(ab(a-b)\right)^2\left(a^2-ab+b^2\right)$

$=8\sqrt{2a^4b^4(a-b)^4\left((a-b)^4+a^4+b^4\right)}\ .$

Se consideramos agora $x=(a+bi)^4$ ou $x=(a-bi)^4$, do mesmo xeito obteriamos, respectivamente, que

$\left((a+bi)^4-\left(a^2+b^2\right)^2\right)\left((a+bi)^4-\left(a^2-b^2\right)^2\right)=-16\left(ab(a+bi)\right)^2\left(a^2-b^2+abi\right)$

$=-8\sqrt{2a^4b^4(a+bi)^4\left((a+bi)^4+a^4+b^4\right)}$ e que

$\left((a-bi)^4-\left(a^2+b^2\right)^2\right)\left((a-bi)^4-\left(a^2-b^2\right)^2\right)=-16\left(ab(a-bi)\right)^2\left(a^2-b^2-abi\right)$

$=-8\sqrt{2a^4b^4(a-bi)^4\left((a-bi)^4+a^4+b^4\right)}$, o cal significa que $x=(a+bi)^4$ e $x=(a-bi)^4$ son solucións da ecuación $\left(x-\left(a^2+b^2\right)^2\right)\left(x-\left(a^2-b^2\right)^2\right)=-8\sqrt{2a^4b^4x\left(x+a^4+b^4\right)}$, é dicir, son as outras dúas solucións da ecuación de cuarto grao

$\left(\left(x-\left(a^2+b^2\right)^2\right)\left(x-\left(a^2-b^2\right)^2\right)\right)^2=\left(8\sqrt{2a^4b^4x\left(x+a^4+b^4\right)}\right)^2$, que contén a todas as da ecuación irracional do enunciado e, segundo acabamos de ver, a outras dúas solucións estranas máis. Polo tanto, as solucións de dita ecuación irracional son exactamente $x=\left(a+b\right)^4=\left(\sqrt[4]{m}+\sqrt[4]{n}\right)^4$ e $x=\left(a-b\right)^4=\left(\sqrt[4]{m}-\sqrt[4]{n}\right)^4$.

Noticia de congresos, reseña de libros, comentario de páginas web 52

Dos publicaciones de Roberto Bosch Cabrera:

Olimpiadas Universitarias de Matemática en Cuba (2002-2012) y Concursos Nacionales Preuniversitarios en Cuba (2000-2013)

El primero de estos dos libros, muy recientes, está escrito en colaboración con la Prof. Rita Roldán Inguanzo. Según indica el autor, el propósito en ambos casos era llenar el vacío producido por la falta de publicación de ambos concursos durante ese largo período, salvo algunas esporádicas excepciones. Por lo tanto, estos libros (especialmente el segundo) siguen la estela de otro libro cubano, muy querido para mí por haberme sido regalado por Luis Davidson: *Los Concursos de Matemática,* escrito en colaboración con Félix Recio. Es bien cierto que las Olimpiadas Universitarias de Matemáticas son de creación mucho más reciente que las preuniversitarias (hay quien las considera, con humor, parecidas a una reunión de “Olímpicos Anónimos”) y producto, en buena medida, del deseo de los participantes en la I.M.O. de no perder el contacto con las amistades allí conseguidas, involucrando a sus profesores universitarios y a las instituciones académicas para resolver el siempre difícil problema de la financiación.

Las dos recopilaciones de Bosch contienen casi todas las ediciones de ambas competiciones, y ha tenido especial cuidado en la redacción de las soluciones, mencionando en el prólogo la ayuda recibida por parte de algunos colaboradores de la REOIM, excelentes problemistas todos ellos, como también lo es Roberto.

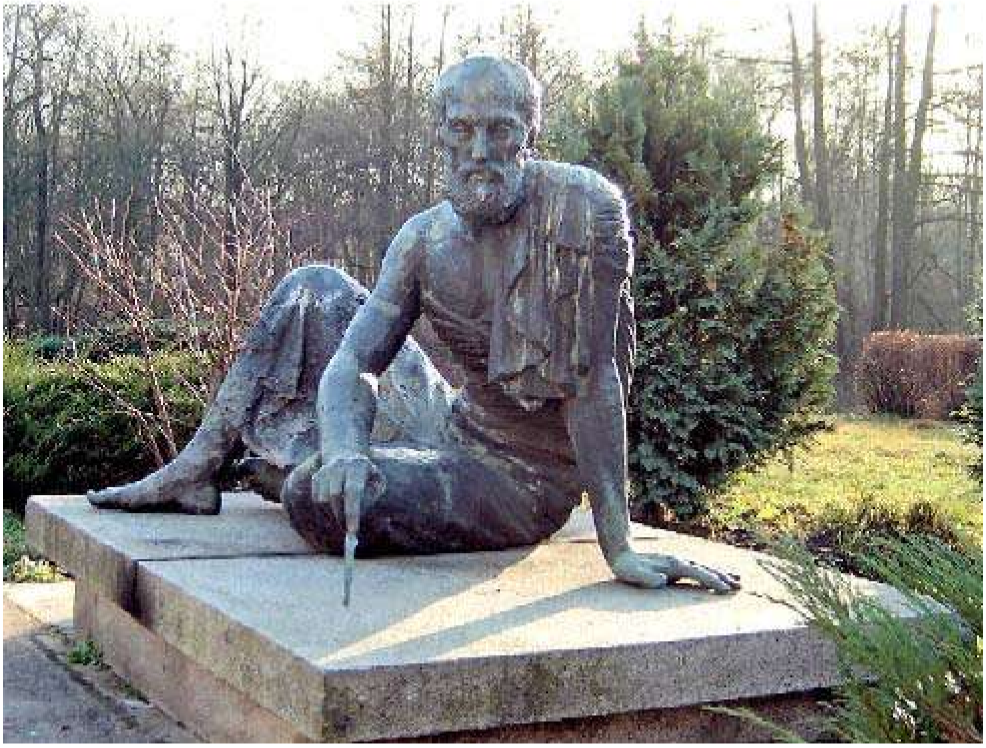
Para mí es un placer comentar y recomendar estas dos compilaciones de problemas, que sin duda contribuirán a difundir el “espíritu olímpico matemático” por Iberoamérica.

Valladolid, abril de 2015

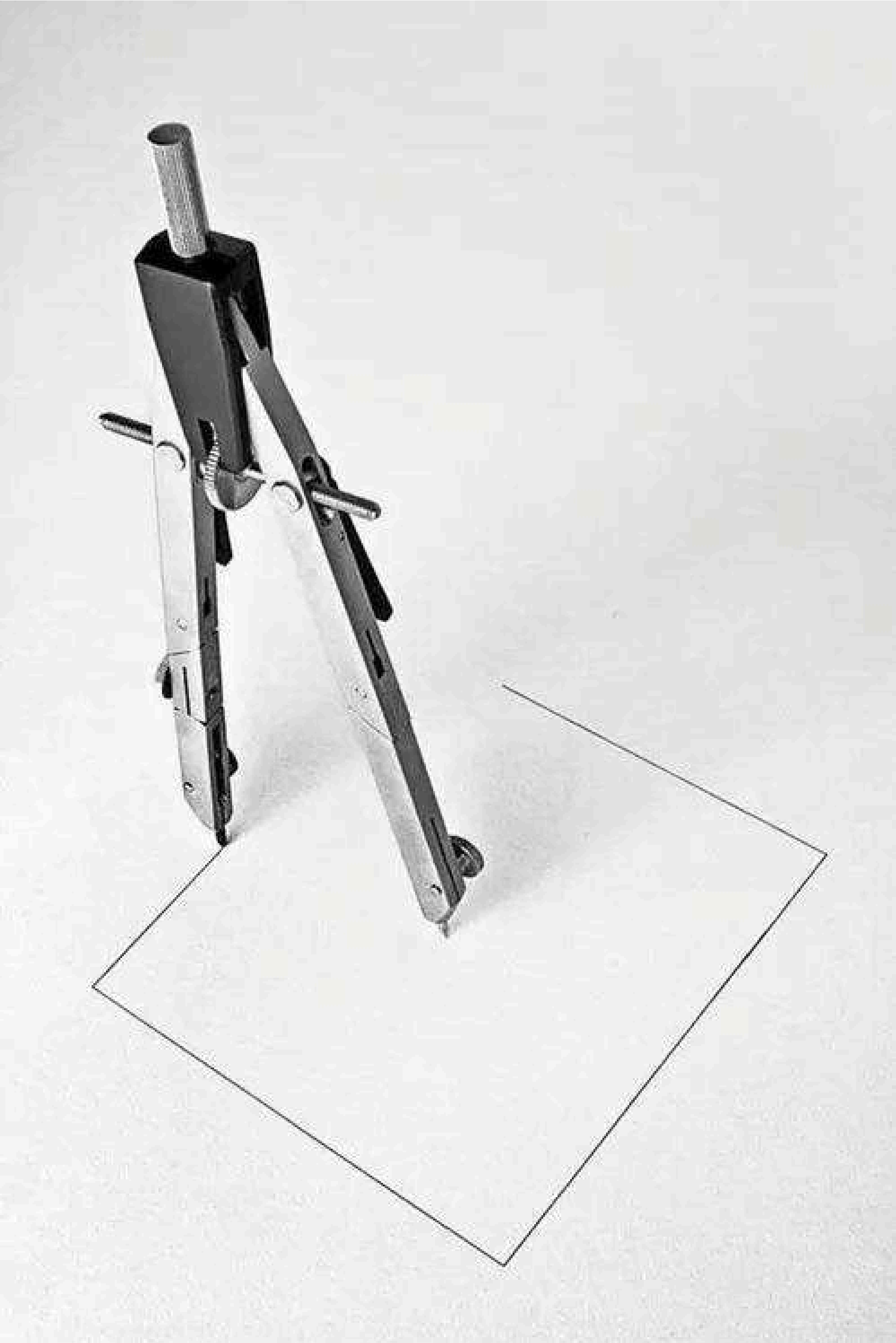
Francisco Bellot Rosado

Divertimentos matemáticos 52

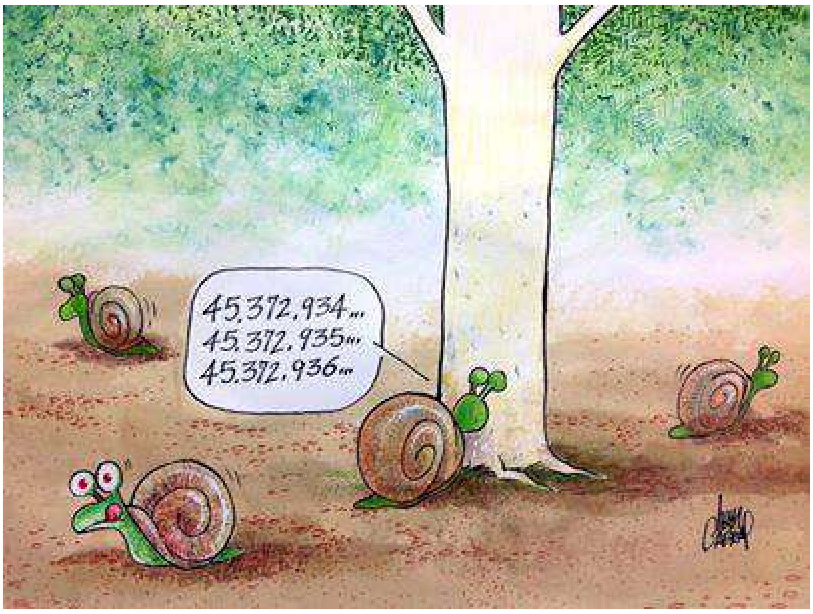
Capturado en Internet



Arquímedes



¿Cuadratura del círculo o circulatura del cuadrado?



Afortunadamente para los caracoles, el conjunto de los naturales es infinito

Número

53

Revista Escolar
de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

Número 53 (julio – diciembre 2015)

ISSN – 1698-277X

ÍNDICE

y del editor. Se recibió una solución incorrecta. Presentamos las soluciones de Nieto y de Plaza.

Problema 261

Recibidas soluciones de: Paolo Perfetti, Universita degli Studi "Tor Vergata", Roma, Italia; Bruno Salgueiro Fanego, Vivero, España; y de los proponentes. Presentamos las soluciones de Perfetti y Salgueiro.

Problema 262

Recibidas soluciones de: Ramón Orlando Godoy Vindel, Tegucigalpa, Honduras; Bruno Salgueiro Fanego, Vivero, España; y del proponente. Presentamos las soluciones de Godoy y Salgueiro.

Problema 263

Recibidas soluciones de Floro Damián Aranda Ballesteros, Córdoba, España; y del proponente. Presentamos la solución de Aranda.

Comentario de páginas web 53

La página de OMAPA (www.omapa.org) por Roberto Bosch Cabrera

Divertimentos matemáticos 53

Victor Buján Delgado: Un gran baile en Euclídea.
(Un cuento geométrico para los más pequeños)

Otras informaciones

Especialización en Educación Matemática para Primaria #Online

1ro de septiembre de 2015

Convocatoria de becas abierta. El curso lo convoca la Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura (OEI) en el seno de su Centro de Altos Estudios Universitarios y de su Instituto Iberoamericano de Enseñanza de las Ciencias y la Matemática IBERCIENCIA. El organismo convocante cuenta con el apoyo de la de la Federación Iberoamericana de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FISEM) con el apoyo de la Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas "Isaac Newton", de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales" y la Consejería de Economía y Conocimiento de la Junta de Andalucía (España)

Terminan la Olimpíadas de Matemática de la CPLP en Cabo Verde

3 de agosto de 2015

La 5ª edición de las Olimpíadas de Matemática dos países da Língua Portuguesa ha sido clausurada en Praia, en la isla Santiago de Cabo Verde. En esta edición han participado delegaciones formadas por cuatro estudiantes, un tutor y un líder de los siguientes países: Angola, Brasil, Cabo Verde, Mozambique, Portugal y Santo Tomé y Príncipe. Por primera vez la OEI estuvo presente con la presencia del especialista de IBERCIENCIA Luis Balbuena

Realizado en el marco del **Instituto Iberoamericano de Enseñanza de las Ciencias y la Matemática (IBERCIENCIA)** con la colaboración de la **Consejería de Economía y Conocimiento de la Junta de Andalucía**

iberciencia

JUNTA DE ANDALUCIA
CONSEJERÍA DE ECONOMÍA, INNOVACIÓN, CIENCIA Y EMPLEO

Presentación de José Heber Nieto por Darío Durán Cepeda (Universidad del Zulia. Maracaibo)

Existe un universo paralelo al nuestro, lleno de armonía y belleza que está inexplicablemente mezclado con el nuestro. Es el mundo de las matemáticas. Para la mayoría de las personas ese mundo es invisible y mucha gente educada lo califica como una tortura. Pero, la obra del doctor Honoris Causa de la Universidad del Zulia, **José Heber Nieto**, venezolano, oriundo de Uruguay, nos invita a desvelar los misterios de dicho mundo y evitar que se convierta en una pesadilla para las personas comunes. Sus clases y conversaciones no sólo son una poesía para el oído de sus participantes, sino que enseña que la matemática puede ser apreciada por cualquier persona. Además de deleitarnos, **José Heber** nos muestra que la matemática es parte vital de nuestra herencia cultural al igual que el arte, la literatura y la música. Veamos a continuación la sinfonía matemática que José Heber nos presenta.

Invariantes y Problemas de Olimpiadas

José Heber Nieto Said (jhnieto@gmail.com)
Universidad del Zulia, Maracaibo, Venezuela.

Resumen

Un invariante es una función I, cuyo dominio es el conjunto de los estados de un sistema, tal que si existe una transición válida del estado E_1 al etado E_2, entonces $I(E_1) = I(E_2)$. En este artículo se analizan varios ejemplos que muestran la utilidad de este concepto para la resolución de problemas matemáticos de tipo olímpico.
Palabras y frases clave: invariante, sistema, olimpiadas matemáticas, resolución de problemas.

1. Introducción

Un *sistema* es un conjunto de elementos interrelacionados, que forman un todo complejo y organizado. Vivimos rodeados de sistemas: el universo, la Tierra, un océano, cada ser vivo, una célula, un átomo son ejemplos de sistemas. Un sistema está en cada momento en un *estado* determinado, que suele ser descripto mediante los valores de ciertos *parámetros*. Por ejemplo, un gas puede ser descripto especificando el volumen V que ocupa, su presión P, su temperatura T y su masa. Los sistemas son por lo general dinámicos, su estado cambia con el tiempo. ¿Cómo se puede, entonces, alcanzar algún conocimiento sobre ellos? Bueno, una de las formas en que la ciencia lo logra es buscando características que se mantengan invariables a lo largo del tiempo, generalmente bajo la forma de relaciones entre los parámetros. A esas características se les llama *invariantes* del sistema. En el ejemplo del gas, una conocida ley física dice que $PV = nRT$ (donde n es la masa en moles y R una constante). Esta ley puede expresarse diciendo que $PV/(nT)$ es un invariante.

En lo que sigue consideraremos sistemas *discretos*, en los cuales el conjunto de estados posibles $\mathscr{E} = \{E_1, E_2, E_3, \dots\}$ es finito o numerable y el tiempo no es continuo, sino más bien una sucesión de instantes. En cada instante hay un conjunto de *transiciones válidas* $E_i \to E_j$ que representan los cambios de estado posibles. Un juego como el ajedrez es un buen ejemplo: un *estado* queda determinado por la posición de las fichas en el tablero, a quien le toca jugar y alguna información adicional sobre las jugadas previas. Las transiciones válidas corresponden a las jugadas posibles en cada estado, según las reglas del juego.

Se dice que un estado B es *accesible* desde otro estado A si existen una o más transiciones válidas que lleven el sistema desde A hasta B, es decir si existe un conjunto de estados $A = E_0$, E_1,..., E_{n-1}, $E_n = B$ y transiciones válidas $E_0 \to E_1$, $E_1 \to E_2$,..., $E_{n-1} \to E_n$.

Un problema típico es el de saber si un estado B es accesible o no desde otro estado A. Para probar que lo es, basta hallar una sucesión de transiciones que nos lleve de A a B. Pero probar la inaccesibilidad suele ser más difícil. Un enfoque exhaustivo (examinar todas las sucesiones de transiciones posibles) puede ser prohibitivo por el tiempo requerido. En estos casos suele ser útil la noción de *invariante*, que definiremos como una función $I : E \to X$, donde E es el conjunto de estados del sistema y X un conjunto cualquiera, tal que para cada transición válida $E_1 \to E_2$ se cumple $I(E_1) = I(E_2)$. Si I es un invariante y B es accesible desde A, entonces por transitividad $I(A) = I(B)$. Por lo tanto si $I(A) \neq I(B)$ entonces B no es accesible desde A (ni A desde B). Lamentablemente, de la igualdad $I(A) = I(B)$ no se puede deducir, en general, la accesibilidad.

2. Algunos ejemplos sencillos

Ejemplo 1. Suponga que en una pizarra se escriben los números naturales del 1 al 100. A continuación se escogen dos de esos números a y b, se borran y se escribe en la pizarra el valor de la suma $a + b$. Se continúa de este modo hasta que quede un sólo número en la pizarra. ¿Cuál es ese número?

Solución. Un análisis exhaustivo no es viable, porque el número de maneras diferentes en que puede desarrollarse este sistema es enorme. Pero tratemos de hallar un invariante. Si se borran a y b y se escribe en la pizarra $a+b$, habrá un número menos en la pizarra, pero ¿hay algo que no haya cambiado? Sí, la suma S de todos los números en la pizarra. Como al principio $S = 1 + 2 + 3 + \cdots + 100 = 5050$, al final debe tener ese mismo valor y el número que queda en la pizarra es siempre el 5050. $\square$

Ejemplo 2. Los números $1, 2, \ldots, 20$ se escriben en una pizarra. En una operación se borran dos números a y b y se escribe el número $a + b - 1$. ¿Qué número queda en la pizarra después de 19 operaciones?

Solución. La suma S de los números que están en la pizarra no es un invariante, pues en cada operación disminuye en 1. Pero la cantidad N de números escritos también disminuye en 1, luego la diferencia $D = S - N$ es un invariante. El valor inicial de D es $1 + 2 + \cdots + 20 - 20 = 1 + 2 + \cdots + 19 = 190$. Cuando quede solo un número x se tendrá $D = x - 1 = 190$, por lo tanto el último número que queda en la pizarra es el 191. $\square$

Ejemplo 3. Los números $1, 2, \ldots, 20$ se escriben en una pizarra y se permite la siguiente operación: se borran dos números a y b y se escribe el número $ab + a + b$. ¿Qué número queda después de realizar 19 de estas operaciones?

Solución. Notemos que $ab + a + b = (a + 1)(b + 1) - 1$. Si en una operación posterior se elige este número con algún otro número c, se deberá escribir el número $(a+1)(b+1)(c+1)-1$. Esto sugiere que pensemos en el producto de los números que están en la pizarra incrementados en 1, el cual evidentemente es un invariante. Inicialmente ese invariante vale $(1 + 1)(2 + 1) \cdots (20 + 1) = 21!$. Luego de 19 operaciones quedará un número x tal que $x + 1 = 21!$, por lo tanto $x = 21! - 1$. $\square$

Ejemplo 4. En una pizarra están escritos los números naturales del 1 al 100. Jorge escoge dos de esos números a y b, los borra y luego escribe alguno de los números $a - b$, $b - a$ ó $a + b$. Continúa de esa manera hasta que queda un sólo número k en la pizarra. ¿Puede determinarse la paridad de k?

Solución. En este caso el valor de k no queda determinado como en el ejemplo anterior; su valor depende de las decisiones que se vayan tomando en el proceso. Más precisamente, si luego de borrar a y b Jorge escribe $a+b$, entonces la suma no varía, pero si escribe $a - b$ la variación de la suma es $a - b - (a + b) = -2b$, y si escribe $b - a$ la variación es $b - a - (a + b) = -2a$. Se ve entonces que la variación de la suma es siempre un número par (0, $-2b$ ó $-2a$). Por lo tanto la *paridad* de la suma es un invariante. Como inicialmente la suma es par (ya que es 5050), seguirá siendo par hasta el final y por lo tanto k debe ser par. $\square$

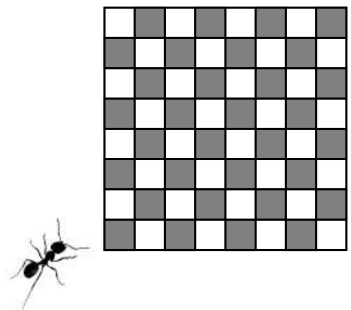
Ejemplo 5. Sobre una mesa hay 11 vasos, 5 de ellos boca arriba y 6 boca abajo. Un movimiento consiste en escoger dos vasos cualesquiera y voltearlos simultáneamente. ¿Será posible, mediante una sucesión de estos movimientos, dejar todos los vasos boca arriba? ¿Y dejarlos todos boca abajo?

Solución. La respuesta a la primera pregunta es afirmativa: basta tomar dos de los 6 vasos que están boca abajo y voltearlos, voltear luego dos de los 4 vasos que quedan boca abajo y finalmente voltear los dos únicos que quedan boca abajo. La respuesta a la segunda pregunta es negativa. En cada movimiento el número de vasos boca abajo o permanece igual, o aumenta en 2 o disminuye en 2. Por lo tanto la paridad del número de vasos boca abajo es un invariante, que inicialmente es par, mientras que en la posición “todos boca abajo” es impar. $\square$

Ejemplo 6. En cada uno de los 10 escalones de una escalera hay una rana. Cada rana puede dar un salto para llegar a cualquiera de los otros escalones, pero cuando lo hace, al mismo tiempo otra rana salta la misma cantidad de escalones pero en sentido contrario (una rana sube y la otra baja). ¿Podrán, en algún momento, quedar todas las ranas juntas en un mismo escalón?

Solución. Numeremos los escalones del 1 al 10 y asociemos a cada rana el número del escalón que ocupa. La suma inicial de esos valores es $R = 1 + 2 + \cdots + 10 = 55$. Esta suma no cambia después de cada salto de dos ranas, ya que si una rana salta m escalones la otra salta también m pero en sentido inverso, por lo que la suma no se altera. Si las ranas, en algún momento, ocupasen un mismo escalón, digamos el n, la suma de los números asignados a cada rana sería $10n$. Pero 55 no es múltiplo de 10, luego esa situación es imposible. $\square$

Ejemplo 7. En cada una de las 64 casillas de un tablero de ajedrez hay un grano de azúcar. Una hormiga llega al vértice inferior izquierdo del tablero, come el azúcar, y se traslada a una casilla adyacente, desplazándose en dirección horizontal o vertical (pero nunca en diagonal). Continúa de este modo hasta acabar con todo el azúcar, y sin pasar dos veces por una misma casilla. ¿Es posible que su trayecto finalice en el vértice superior derecho?



Solución. Numeremos las filas del tablero de 1 a 8, de abajo hacia arriba, y las columnas de 1 a 8, de izquierda a derecha. Entonces cada casilla puede identificarse por sus coordenadas (fila, columna). Supongamos que la hormiga recorre las 64 casillas del tablero y que la n-sima casilla visitada tiene coordenadas (f_n, c_n). En cada movimiento f_n ó c_n se incrementan o disminuyen en una unidad, por lo tanto la *paridad* de $f_n + c_n$ cambia. Pero también cambia la paridad de n al incrementarse en 1, por lo tanto la paridad de $I = f_n + c_n + n$ permanece invariante a lo largo de todo el recorrido. Ahora bien, al inicio del trayecto se tiene $I = 1 + 1 + 1$ impar. Si la última casilla visitada fuese la (8,8) entonces se tendría $I = 8 + 8 + 64$, que es par, por lo tanto el trayecto no puede terminar allí.

Una forma más amena de este argumento utiliza la noción de *coloración.* Como se sabe las casillas del tablero de ajedrez están pintadas de dos colores, digamos blanco y negro, en forma alternada. Cada movimiento unitario, en dirección horizontal o vertical, nos lleva de una casilla a otra de diferente color. Ahora bien, como el tablero tiene $8 \times 8 = 64$ casillas, comenzando en cualquiera de ellas se requieren 63 movimientos para recorrerlas todas. Pero es claro que después de 1, 3, 5 o cualquier número impar de movimientos estaremos en una casilla de color diferente a la inicial. Esto demuestra que la respuesta al problema que nos ocupa es negativa, ya que un vértice y el opuesto son del mismo color. $\square$

Ejemplo 8. En una pizarra están escritos los números 3, 4 y 12. Las operaciónes permitidas consisten en escoger dos de los tres números, digamos a y b, y reemplazarlos por $0{,}6a - 0{,}8b$ y $0{,}8a + 0{,}6b$. ¿Es posible, aplicando estas operaciones, llegar a tener los números 4, 6 y 12?

Solución. Como

$$(0{,}6a - 0{,}8b)^2 + (0{,}8a + 0{,}6b)^2 = a^2 + b^2,$$

la suma de los cuadrados de los tres números es un invariante. Su valor inicial es $3^2 + 4^2 + 12^2 = 169$, mientras que $4^2 + 6^2 + 12^2 = 196$, por lo tanto no es posible llegar a tener los números 4, 6 y 12.
Nota: Si los tres números se interpretan como las coordenadas (x, y, z) de un punto en el espacio, las operaciones permitidas corresponden a rotaciones alrededor de los ejes coordenados, las cuales no alteran la distancia $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ del punto al origen. $\square$

Ejemplo 9. (Olimpiada del Cono Sur, 2000) En el plano cartesiano, considere los puntos con ambas coordenadas enteras y las rotaciones de 90 grados en sentido antihorario con centro en esos puntos. ¿Es posible, mediante una sucesión de esas rotaciones, transformar el triángulo de vértices (0, 0), (1, 0) y (0, 1) en el triángulo de vértices (0, 0), (1, 0) y (1, 1)?

Solución. Luego de algunos intentos fallidos, uno comienza a pensar que es imposible. Si se aplican las rotaciones permitidas al punto (0,0) se pueden obtener los puntos (1,1), (-1,1), (-1,-1), (1,-1), (2,0), (0,2), etc., pero en cambio no pueden obtenerse (1,0), (0,1), (-1,0), (0,-1), (2,1),... Esto nos sugiere que sólo pueden obtenerse puntos con suma de coordenadas par, como el origen. De hecho, la paridad $I(P) = x + y \bmod 2$ de la suma de ambas coordenadas de un punto $P = (x, y)$ es un invariante. En efecto, si se aplica a P la rotación R de centro (a, b) se obtiene $R(P) = (a+b-y, b-a+x)$.

La diferencia entre la suma de coordenadas de $R(P)$ y P es $(a+b-y)+(b-a+x)-(x+y) = 2(b-y)$ que es par, luego $I(P) = I(R(P))$. Ahora bien, para el primer triángulo se tiene $I(0,0) = 0$, $I(1,0) = I(0,1) = 1$, es decir que I es 0 en un vértice y 1 en los dos restantes, mientras que para el segundo $I(0,0) = I(1,1) = 0$, $I(1,0) = 1$. Inmediatamente se concluye que es imposible transformar uno en otro. $\square$

Ejemplo 10. (Olimpiada Iberoamericana 2002) Dado cualquier conjunto de 9 puntos en el plano de los cuales no hay tres colineales, demuestre que para cada punto P del conjunto, el número de triángulos que tienen como vértices a tres de los ocho puntos restantes y a P en su interior, es par.

Solución. Si se une con un segmento cada par de puntos diferentes de P, el plano queda dividido en regiones poligonales, una de ellas no acotada. Si P se mueve dentro de una de esas regiones entonces el número de triángulos a los que pertenece no cambia. Pero si cruza la frontera entre dos regiones entonces sale de algunos triángulos y entra en otros. Si una frontera es parte del segmento que une dos puntos Q y R del conjunto dado y x de los 6 puntos diferentes de P, Q y R quedan del mismo lado de la recta QR que P, entonces al cruzar esa frontera P sale de x triángulos y entra en otros $6-x$. El cambio neto en el número de triángulos que contienen a P es $(6-x)-x = 2(3-x)$ que es par. Si P se mueve desde su posición inicial hasta la región no acotada, el número de triángulos que lo contienen mantendrá su paridad. Pero al llegar a la región no acotada ese número será 0, lo que completa la prueba. Observe que si en el enunciado se cambia 9 por cualquier entero impar la conclusión es la misma. $\square$

Ejemplo 11. Considere los puntos del plano cartesiano con ambas coordenadas naturales. A partir de un punto (a,b) está permitido moverse a $(a-b,b)$ si $a > b$ o a $(a,b-a)$ si $a < b$. Por ejemplo la siguiente es una trayectoria válida partiendo de $(12,7)$:

$$(12,7) \to (5,7) \to (5,2) \to (3,2) \to (1,2) \to (1,1).$$

Partiendo de $(86415, 69118)$, ¿será posible llegar hasta $(1,1)$?

Solución. Si $a > b$ entonces $\mathrm{mcd}(a-b,b) = \mathrm{mcd}(a,b)$ y si $a < b$ entonces $\mathrm{mcd}(a,b-a) = \mathrm{mcd}(a,b)$, es decir que el máximo común divisor de las coordenadas es un invariante. Como $\mathrm{mcd}(86415, 69118) = 7$ y $\mathrm{mcd}(1,1) = 1$, le respuesta es que no es posible. De hecho, las trayectorias que parten de (a,b) siempre terminan en (d,d), donde $d = \mathrm{mcd}(a,b)$. $\square$

Ejemplo 12. (Torneo de las Ciudades 1984) En la isla Camaleón hay 13 camaleones de color amarillo, 15 de color verde y 17 de color rojo. Si se encuentran dos camaleones de diferente color, cambian ambos simultáneamente al tercer color (por ejemplo si se encuentran uno amarillo y otro verde, ambos se vuelven rojos). ¿Es posible que en algún momento todos los camaleones lleguen a ser del mismo color?

Solución. En este sistema un estado se puede describir mediante una terna (a,v,r), donde a es la cantidad de camaleones amarillos, v la de verdes y r la de rojos. Un invariante obvio es $a+v+r = 45$, pero no es suficiente para resolver el problema. Analicemos lo que ocurre después del encuentro de dos camaleones. Las cantidades cambian a:

$(a-1, v-1, r+2)$, si se encuentran un camaleón amarillo y uno verde,

$(a-1, v+2, r-1)$, si se encuentran un camaleón amarillo y uno rojo,

$(a+2, v-1, r-1)$, si se encuentran un camaleón verde y uno rojo.

La diferencia de las cantidades a y v cambia, según el caso, a $(a-1)-(v-1) = a-v$, $(a-1)-(v+2) = a-v-3$ o $(a+2)-(v-1) = a-v+3$. Por lo tanto, $a-v$ es un invariante si se toma módulo 3. Si todos los camaleones en algún momento llegaran a ser del mismo color, la diferencia $a-v$ sería 0, 45 ó -45, es decir 0 módulo 3. Pero originalmente $a-b = 13-15 = -2 \equiv 1 \pmod{3}$, por lo tanto es imposible que lleguen a ser todos del mismo color.

Otra forma de verlo: inicialmente el conjunto de restos de a, b y c módulo 3 es $R = \{1,0,2\}$. En cada encuentro de dos camaleones de diferente color, dos de los números a, b y c disminuyen en 1 y el otro aumenta en 2. Pero módulo 3 aumentar en 2 es lo mismo que disminuir en 1, por lo tanto se puede decir que los tres números, tomados módulo 3, disminuyen en 1. Por lo tanto el conjunto R es un invariante. Los camaleones no pueden llegar a ser todos del mismo color, pues en ese caso dos de los restos serían iguales a 0. $\square$

Ejemplo 13. En el tablero de la figura está permitido cambiar de signo a todos los números de una misma fila, columna, diagonal o paralela a una diagonal. ¿Podrá llegarse a obtener un tablero sin elementos negativos?

-1	1	1	1
1	1	1	-1
-1	1	-1	1
1	-1	1	1

Solución. El producto de los elementos en las casillas marcadas con x es un invariante. Como inicialmente es -1, no es posible obtener un tablero sin elementos negativos.

	x	x	
x			x
x			x
	x	x	

□

Ejemplo 14. Sea $n \geq 4$. Si cada uno de los números a_1, a_2,..., a_n son 1 ó -1 y cumplen

$$a_1a_2a_3a_4 + a_2a_3a_4a_5 + \cdots + a_na_1a_2a_3 = 0,$$

pruebe que n es múltiplo de 4.

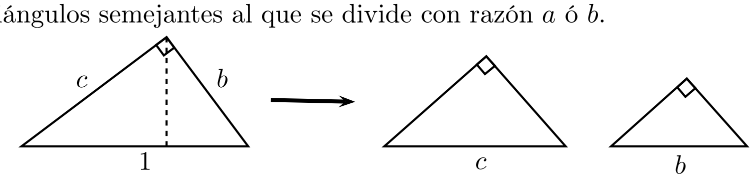
Solución. Se puede introducir un proceso en este problema considerando que se parte de $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ y que se van cambiando los signos de los elementos negativos de uno en uno, hasta llegar a $(1, 1, \ldots, 1)$. Sea $S = a_1a_2a_3a_4 + a_2a_3a_4a_5 + \cdots + a_na_1a_2a_3$. Cuando se cambia de signo un a_i cambian de signo los cuatro productos en que aparece. Pero la suma de esos cuatro productos, que son impares, es un número par $2k$, y después del cambio de signo será $-2k$. Luego la variación de S es $-2k - 2k = -4k$ que es múltiplo de 4. Es decir que S mód 4 es un invariante. Inicialmente $S = 0$ y al final $S = n$ mód 4. Por lo tanto n mód $4 = 0$. □

Ejemplo 15. (Olimpiada Centroamericana y del Caribe 2002) En el plano coordenado se tiene la cuadrícula de $n \times n$, con n entero mayor o igual que 2, cuyos vértices son los puntos de coordenadas enteras (x, y), con $0 \leq x \leq n$ y $0 \leq y \leq n$. Considere los caminos que van de $(0, 0)$ a (n, n) sobre las líneas de esta cuadrícula y que sólo avanzan hacia la derecha o hacia arriba. Uno de tales caminos se llama *equilibrado* si la suma de los valores de x de todos los puntos por los que pasa es igual a la suma de todos los valores de y de esos mismos puntos. Muestre que todo camino equilibrado divide al cuadrado de lado n en dos figuras de la misma área.

Solución. Sea P_0, P_1,..., P_{2n} un camino. Pongamos $P_i = (x_i, y_i)$ y llamemos L al área que queda por debajo del camino y U al área que queda por encima. Sean P_{k-1}, P_k, P_{k+1} tres puntos consecutivos tales que el segmento $P_{k-1}P_k$ sea vertical y el segmento P_kP_{k+1} sea horizontal. Construyamos otro camino sustituyendo P_k por $P'_k = (x_k+1, y_k-1)$. Es claro que en el nuevo camino la suma de las x's aumenta en 1 respecto al camino original, mientras que el área debajo del camino disminuye en 1. Por lo tanto $I = L + \sum x_i$ es un invariante para estas transformaciones elementales de caminos. Como cualquier camino puede llevarse mediante sucesivas transformaciones de este tipo al camino que tiene n segmentos horizontales seguidos de n segmentos verticales, resulta que $L + \sum x_i = 0 + (0 + 1 + 2 + \cdots + n) + (n + \cdots + n) = n(n+1)/2 + n^2$. Intercambiando los ejes se prueba del mismo modo que para cualquier camino se cumple $U + \sum y_i = n(n+1)/2 + n^2$. Por tanto $L + \sum x_i = U + \sum y_i$. Esta igualdad muestra que $L = U$ si y sólo si $\sum x_i = \sum y_i$. □

Ejemplo 16. (Olimpiada de Moscú 1995) Se tienen inicialmente 4 triángulos rectángulos congruentes. En un movimiento se puede tomar cualquier triángulo y partirlo en dos por la altura desde su ángulo recto. Muestre que siempre se tiene al menos un par de triángulos congruentes.

Solución. Tomemos la hipotenusa de los triángulos iniciales como unidad y sean a y b las longitudes de los catetos. Cada división produce triángulos semejantes al que se divide con razón a ó b.



Por lo tanto cada triángulo generado será semejante a los iniciales, con razón $a^i b^j$ para ciertos enteros $i, j \geq 0$. Cada triángulo de este tipo se puede asociar con una ficha colocada en el punto de coordenadas (i, j) del plano cartesiano. Inicialmente hay cuatro fichas en el punto $(0, 0)$. Asignemos ahora a cada ficha ubicada en (i, j) un *peso* igual a 2^{-i-j}. La división de un triángulo de tipo (i, j) genera un triángulo de tipo $(i+1, j)$ y otro de tipo $(i, j+1)$. Esta operación no cambia el peso total de las fichas, que es por lo tanto un invariante y su valor es el inicial, es decir 4. Ahora bien, si en un número finito de pasos se logra que en ningún punto (i, j) haya más de una ficha, el peso total sería menor que 4, lo cual es imposible. En efecto, el conjunto de todas las fichas puede encerrarse dentro de un rectángulo de vértices $(0, 0)$, $(n, 0)$, $(0, m)$ y (n, m) y el peso de las fichas en ese rectángulo es a lo sumo

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} 2^{-i-j} = \sum_{i=0}^{n} 2^{-i} \sum_{j=0}^{m} 2^{-j} = (2-2^n)(2-2^m) < 4.$$

□

3. Permutaciones

Sea a_1, a_2,..., a_n una permutación de los números de 1 a n (es decir, una reordenación de los mismos). Un par (a_i, a_j) se dice que es una *inversión* si $i < j$ y $a_i > a_j$. La *paridad* de la permutación es la paridad del número total de inversiones que tenga. Por ejemplo la permutación 2, 3, 1, 5, 4 tiene 3 inversiones, a saber (2,1), (3,1) y (5,4), luego es una permutación impar. La permutación (1,2,3,4,5) no tiene ninguna inversión: es par.

Si en una permutación se intercambian de lugar dos elementos contiguos a_i y a_{i+1}, entonces el número de inversiones disminuye en una unidad si (a_i, a_{i+1}) era una inversión, o aumenta en una unidad si no lo es, por lo tanto la paridad de la permutación cambia. Más en general, si se intercambian de lugar dos elementos cualesquiera a_i y a_j (operación que se llama *transposición*) la paridad de la permutación cambia. En efecto, si $i < j$ el intercambio puede realizarse transponiendo sucesivamente a_i con a_{i+1}, a_{i+2},... a_j y luego a_j con a_{j-1}, a_{j-2},... a_{i+1}. Como en total se realizaron $2(j-i)-1$ transposiciones de elementos contiguos, la paridad cambió un número impar de veces, es decir que cambió.

Ejemplo 17. En la pizarra están escritos los números del 1 al 10 en orden creciente:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Una operación permitida consiste en seleccionar cuatro números, intercambiar el primero con el cuarto y el segundo con el tercero. Analice la posibilidad de que alguna secuencia de estas operaciones produzca como resultado

10 9 8 7 6 5 4 3 2 1.

Solución. Las operaciones permitidas equivalen a efectuar dos transposiciones, por lo tanto cambian la paridad dos veces, es decir que la dejan igual. Tenemos así un invariante.

La permutación inicial (1,2,3,4,5,6,7,8,9,10) no tiene inversiones, mientras que (10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1) tiene $9+8+7+\cdots+1 = 45$ inversiones. Como 0 y 45 son de diferente paridad, el segundo estado es inaccesible desde el primero. □

Ejemplo 18. En 1878 Sam Loyd propuso un rompecabezas que ha mantenido su popularidad hasta nuestros días. En una caja hay 15 fichas cuadradas, numeradas del 1 al 15, dispuestas como se ve en el siguiente diagrama.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

La casilla inferior derecha está vacía, y si los números se leen de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo entonces están ordenados en forma creciente, excepto por el 15 y el 14 que aparecen transpuestos. Un *movimiento válido* consiste en deslizar una de las fichas adyacentes a la casilla vacía hasta ocuparla. ¿Es posible, mediante una secuencia de movimientos válidos, intercambiar el 14 y el 15 dejando a los demás números en su posición inicial? Sam Loyd ofreció 1000 dólares de premio a quien lo lograse, generando una verdadera fiebre entre la gente que procuraba hallar la solución. Sin embargo nadie logró cobrar el premio...

Solución. No es posible. Numeremos las filas de 1 a 4, de arriba hacia abajo. A cada posición del juego del 15 le podemos asociar una permutación de los números del 1 al 15, leyendo cada fila de izquierda a derecha, desde la 1 hasta la 4, sin tomar en cuenta la casilla vacía. A la posición inicial le corresponde la permutación 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 14, que tiene una sola inversión, a saber la (15, 14), y por lo tanto es impar. La permutación que había que obtener para ganar el premio era simplemente la sucesión ordenada de los números del 1 al 15, que es par. Es claro que los movimientos horizontales no modifican en nada la permutación ni la fila en que se encuentra la casilla vacía. En cambio si se mueve un número hacia abajo el efecto será que este número adelanta a los tres que le siguen, lo que equivale a efectuar tres transposiciones sucesivas, y la paridad de la permutación cambia. Pero en este caso cambia también la paridad de la fila ocupada por la casilla vacía. En consecuencia la suma módulo 2 del número de fila en que se encuentra la casilla vacía y la paridad (par $= 0$, impar $= 1$) de la permutación de los números en las fichas, es un invariante. En la posición inicial este invariante es 1, y en la que se quiere lograr es 0. □

4. Juegos de estrategia

Los *juegos* a los cuales nos referimos en esta sección pueden conceptualizarse como sistemas que pueden estar en cierto número de estados, también llamados *posiciones* del juego. Debe haber un estado *inicial* y uno o más estados *finales*. El estado del juego puede cambiar como consecuencia de las *jugadas* que realizan los contendientes, siguiendo reglas específicas. Un juego puede ser unipersonal (como los conocidos *solitarios* que se juegan con cartas) o pluripersonal. Cuando se llega a una posición final la partida termina y las reglas del juego determinan qué jugador es el ganador, o si hay empate. Una *estrategia ganadora* es un método de juego que asegura la victoria al jugador que la aplica.

A continuación consideraremos juegos *bipersonales*, en los cuales participan dos jugadores que convencionalmente llamaremos A y B. Una *partida* se inicia en el estado inicial, y su desarrollo consiste en que A y B realizan jugadas de manera alternada, comenzando por A. Supondremos que el juego es de *información perfecta*, es decir que ambos jugadores tienen pleno conocimiento del juego, de sus reglas y de las jugadas que cada uno ha realizado. En particular, no hay jugadas ocultas ni interviene para nada el azar. También supondremos que el juego es *finito*, es decir que cada jugador, en su turno, tiene a su disposición un número finito de jugadas posibles para elegir y que toda partida finaliza (llega a una posición final) en un número finito de jugadas. Si no hay posibilidad de empate (es decir, si toda partida finaliza con un ganador y un perdedor) vale el siguiente resultado:

Teorema de Zermelo
En un juego bipersonal finito de información perfecta y sin posibilidad de empate, uno de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora.

Las estrategias ganadoras suelen estar ligadas a invariantes, como en los siguientes problemas.

Ejemplo 19 (OMCC 2002)**.**
Dos jugadores A, B y otras 2001 personas forman un círculo, de modo que A y B no quedan en posiciones consecutivas. A y B juegan por turnos alternadamente empezando por A. Una jugada consiste en tocar a una de las personas que se encuentra a su lado, la cual debe salir del círculo. Gana el jugador que logre sacar del círculo a su oponente. Demostrar que uno de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora y describir dicha estrategia.

Solución. Como 2001 es impar, en uno de los arcos que separan A de B hay un número par de personas interpuestas y en el otro una cantidad impar. Si A logra que se repita esa situación cada vez que sea su turno entonces ganará el juego, ya que la reducción del número de personas hará que eventualmente B quede a su lado. Esto lo logra A

fácilmente tocando a su vecino en el arco par, dejando así un número impar de personas en cada arco. Al jugar B vuelven a quedar un arco par y otro impar. $\square$

Ejemplo 20 (Juego de Bachet)**.** En un montón hay 100 piedras. Dos jugadores A y B juegan alternadamente, comenzando por A. Cada jugador puede retirar como mínimo una y como máximo cinco piedras. Gana el que retire la última piedra. ¿Tiene alguno de ellos una estrategia ganadora? ¿Cuál es esa estrategia?

Solución. Por el Teorema de Zermelo alguno de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora, el problema es determinar cuál de los dos la tiene, y cuál es esa estrategia. Parte de la dificultad de este problema es el gran número de piedras inicial, que hace muy difícil un análisis exhaustivo de todas las jugadas posibles. Lo indicado en estos casos es simplificar el problema, para lo cual podemos estudiar qué sucede para valores pequeños del número inicial de piedras n. Para $n = 1$ obviamente A la retira y gana. Lo mismo ocurre si $n = 2, 3, 4$ ó 5. En cambio si $n = 6$ quien tiene una estrategia ganadora es B, ya que juegue lo que juegue A en el montón quedarán de 1 a 5 piedras, y B gana retirándolas todas. Si $n = 7$, A puede ganar retirando 1 y dejándole 6 a B. Del mismo modo si $n = 8, 9, 10$ u 11, A gana retirando respectivamente 2, 3, 4 ó 5 piedras. Pero para $n = 12$ quien tiene una estrategia ganadora es nuevamente B. En general, si n es múltiplo de 6, B tiene una estrategia ganadora. Lo que debe hacer, si A retira k piedras $(1 \leq k \leq 5)$, es retirar $6 - k$ piedras, dejando nuevamente un múltiplo de 6 en el montón. Así el montón llegará eventualmente a 0, ganando B. En cambio si n no es múltiplo de 6, quien tiene una estrategia ganadora es A. En su primera jugada debe retirar un número de piedras igual al resto de la división de n entre 6, para así dejarle a B un múltiplo de 6. En lo sucesivo juega dejando siempre un múltiplo de 6 en el montón.

En este ejemplo $n = 100$, que no es múltiplo de 6, por lo tanto A tiene una estrategia ganadora. En su primera jugada debe retirar 4 piedras y en lo sucesivo jugar de modo de dejarle siempre a su oponente un múltiplo de 6. $\square$

5. Subinvariantes

Un *subinvariantes* es una función $S : \mathscr{E} \to \mathbb{R}$ tal que, si $E_i \to E_j$ es una transición válida, entonces $S(E_i) \leq S(E_j)$. Si el estado B es accesible desde A entonces evidentemente $S(B) \leq S(A)$. Por lo tanto si $S(B) > S(A)$ podemos concluir que B es inaccesible desde A. Por esta razón los subinvariantes suelen ser tan útiles como los verdaderos invariantes. Un caso particular importante se presenta cuando el subinvariante toma valores enteros no negativos. En este caso no puede haber una sucesión infinita estrictamente decreciente de valores de S, por lo tanto a partir de cierto instante los valores de S deben estabilizarse y ya no cambiarán.

Ejemplo 21. En un parlamento unicameral cada miembro tiene a lo sumo 3 enemigos. Muestre que el parlamento se puede dividir en 2 cámaras, de manera que cada miembro tenga a lo más un enemigo en la cámara en que quede.

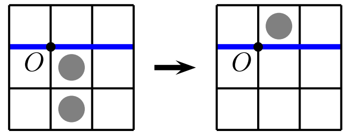
Solución. Distribuya las personas en dos cámaras A y B de cualquier manera. Si una persona tiene más de un enemigo en el comité en que está, cámbiela a la otra cámara, donde tendrá a lo sumo un enemigo. La suma del número de pares de enemigos en cada cámara es entonces un subinvariante que toma valores enteros no negativos. Cuando llegue a su valor mínimo se habrá logrado el objetivo. $\square$

Ejemplo 22. En un tablero cuadrado de 100×100 hay 99 casillas infectadas. Si una casilla tiene dos o más lados comunes con casillas infectadas, ella también se infecta por contagio. ¿Es posible que en algún momento todas las casillas del tablero estén infectadas?

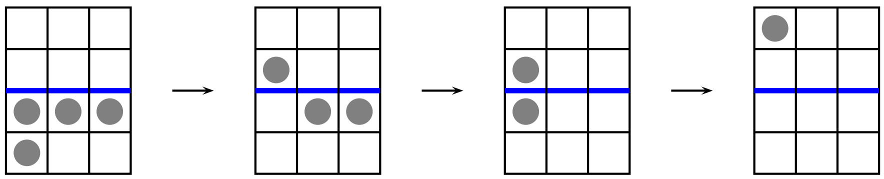
Solución. No es posible. El perímetro P de la figura formada por las casillas infectadas es un subinvariante, ya que cuando una casilla sana se infecta al menos dos lados comunes con casillas previamente infectadas dejan de pertenecer al borde de la figura, mientras que a lo sumo otros dos se incorporan al borde. Si todas las casillas se infectasen P terminaría siendo 400, pero el valor inicial de P es a lo sumo $99 \times 4 < 400$. $\square$

Ejemplo 23. (Subiendo al cielo) Consideremos en el plano cartesiano la cuadrícula cuyos vértices son los puntos con ambas coordenadas enteras. Supongamos que se colocan fichas en celdas ubicadas debajo de la línea $y = 0$ (a lo sumo una ficha por celda). Una ficha puede saltar sobre otra contigua hasta una casilla vacía, y la ficha sobre la cual se salta se retira (como en el juego de damas). Llamemos *coordenadas* de una celda unitaria a las coordenadas de su vértice inferior izquierdo. ¿Para qué valores de $n \geq 0$ es posible llevar una ficha hasta la celda $(0, n)$?

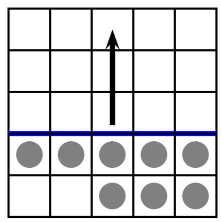
Solución. Con dos fichas en $(0-1)$ y $(0,-2)$ se puede llegar a colocar una ficha en (0,0):



Con cuatro fichas se puede llegar a colocar una ficha en (0,1):



Del mismo modo con 8 fichas dispuestas como muestra la figura



es fácil ver que se puede alcanzar $(0,2)$. Y con 21 fichas se puede alcanzar $(0,3)$ (esto se deja como ejercicio). Podría pensarse entonces que, comenzando con un número suficiente de fichas, se podría alcanzar cualquier altura. Pero en realidad no es así, de hecho ¡la celda $(0,4)$ es inalcanzable! Para probarlo construiremos un subinvariante. La idea es tratar de expresar la «energía» de una configuración sumando las energías $E(x,y)$ de cada una de las fichas. La energía de una ficha ubicada en la celda $(0,y+2)$ debe ser igual a la suma de dos fichas ubicadas en $(0,y)$ y $(0,y+1)$, es decir

$$E(0,y+2)=E(0,y)+E(0,y+1).$$

Esto puede verse como una relación de recurrencia, de hecho la famosa recurrencia de Fibonacci, que tiene la solución $E(0,y)=r^y$, si $r^2=r+1$. La raíz positiva de esta ecuación es $\varphi=(1+\sqrt{5})/2$ (la *razón áurea*).

Si deseamos colocar una ficha en una celda $(0,y)$ con el mayor y posible, los únicos movimientos razonables parecen ser los ascendentes y los horizontales dirigidos hacia el eje de las y. La misma ley de conservación puede obtenerse para estos movimientos tomando $E(x,y)=\varphi^{y-|x|}$. Finalmente, si S es un conjunto de celdas con fichas, definimos

$$E(S)=\sum_{(x,y)\in S}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{y-|x|}.$$

Observamos que el valor de $E(S)$ se mantiene si se efectúan movimientos «en la dirección correcta», es decir hacia arriba u horizontales hacia el centro. Para otros movimientos, $E(S)$ disminuye (es decir que es un subinvariante).

Ahora bien, la energía de una ficha en la celda $(0,4)$ es φ^4. Si se coloca una ficha en cada celda (x,y) con $y<0$, la energía total sería

$$\begin{aligned}\sum_{y=-\infty}^{-1}\sum_{x=-\infty}^{+\infty}\varphi^{y-|x|}&=\sum_{y=-\infty}^{-1}\varphi^y\left(1+2\sum_{x=1}^{\infty}\varphi^{-x}\right)=\sum_{y=-\infty}^{-1}\varphi^y\left(1+\frac{2\varphi^{-1}}{1-\varphi^{-1}}\right)\\&=\frac{1+\varphi^{-1}}{1-\varphi^{-1}}\sum_{y=-\infty}^{-1}\varphi^y=\frac{1+\varphi^{-1}}{1-\varphi^{-1}}\frac{\varphi^{-1}}{1-\varphi^{-1}}=\frac{\varphi+1}{(\varphi-1)^2},\end{aligned}$$

pero como $\varphi(\varphi-1)=\varphi^2-\varphi=1$ resulta

$$\frac{\varphi^2}{(\varphi-1)^2}=\frac{\varphi^4}{(\varphi(\varphi-1))^2}=\varphi^4.$$

Esto significa que ninguna cantidad finita de fichas en el semiplano $y<0$ logra alcanzar la energía φ^4 (y una cantidad infinita nunca permitiría llegar en un número finito de pasos hasta $(0,4)$). $\square$

6. Referencias

El siguiente libro dedica su primer capítulo al Principio de Invariancia y contiene problemas de todos los grados de dificultad:

Engel, A., *Problem-Solving Strategies*, Springer, New York, 1998.

Vea también la sección 3.4 de

Zeitz, P., *The Art and Craft of Problem Solving*, 2nd ed., John Wiley & Sons, 2007.

El Capítulo 12 del siguiente libro contiene problemas interesantes y accesibles sobre invariantes:

Fomin, D., Genkin, S., Itenberg, I. V. , *Mathematical Circles (Russian Experience)*, American Mathematical Society, 1996.

Un análisis elemental del juego del 15 puede verse en

Nieto, J. H., *Permutaciones y el Juego del 15*, Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, **12**(2) (2005), 259–264. Este artículo está disponible en
`http://www.emis.de/journals/BAMV/conten/vol12/jnieto.pdf`

En `http://www.jhnieto.org/15-1.htm` se puede practicar el juego del 15 en línea.

En `http://www.jhnieto.org/sube.htm` se puede jugar “Subiendo al cielo” en línea.

De mi biblioteca (1)

Tradicionalmente, aunque no hay un currículo oficial en la IMO o en la Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas, los problemas que se incluyen en las respectivas Listas Cortas se agrupan de la siguiente manera: Combinatoria y grafos, Geometría, Teoría de Números, Álgebra, y Problemas diversos. En una serie de artículos que comenzamos ahora, me propongo recomendar los que, escarbando en mi biblioteca particular, considero de interés para la preparación en ambas Olimpiadas. Ni que decir tiene que las opiniones que incluyo son mías, subjetivas y sin pretender que sean exclusivas.

Combinatoria y grafos

a) Nivel Inicial

1.- **Morgado, Pitombeira, Carvalho, Fernández:** ***Análise Combinatória e Probabilidade. S.B.M. 1991.***

Una excelente introducción al tema, escrita por cuatro especialistas brasileños, el primero de ellos lamentablemente fallecido hace algunos años. El tratamiento es clásico y se incluyen los lemas de Kaplansky.

2.-**Niven, Ivan:** ***Mathematics of choice (How to count without counting).New Mathematical Library (15), 1965.***

En mi opinion, Ivan Niven es una especie de “Rey Midas” que todo cuanto escribe es una obra maestra. Esta monografía consta de 11 capítulos y es un modelo de cómo introducir a partir de problemas bien elegidos, cada uno de los aspectos del análisis combinatorio.

3.-**Pólya, Tarjan, Woods:** ***Notes on Introductory Combinatorics. Birkhäuser (Reimpresión de la edición de 1983).***

Creo que con decir que el libro recoge las Notas (recopiladas por Woods como Profesor Asistente) del Curso de Combinatoria impartido en la Universidad de Stanford en 1978 por Pólya y Tarjan, bastará para dar idea de su interés.

4.- **Bryant, Victor:** ***Aspects of Combinatorics (A wide-ranging introduction). Cambridge U.P.1993.***

Un clásico libro de corte inglés, muy práctico en la exposición de los problemas y temas, con muchos ejercicios.

5.- **Anderson, Ian:** ***A first Course in Discrete Mathematics. Springer, 2000.***

Como indica su título, más que Combinatoria. Su autor es escocés (trabaja en la Universidad de Glasgow) y es otro libro de lectura casi obligada para los profesores que preparamos estudiantes para las Olimpiadas.

6.-**Ore, Oystein:** ***Graphs and their uses. NML(10), 1963.***

Una buena monografía como introducción a la teoría de grafos. Muy recomendable.

b) Nivel Avanzado

7.-**Chen y Koh:** ***Principles and Techniques in Combinatorics. World Scientific, 1992.***

Tres de sus seis capítulos tratan de la Teoría de Ramsey, las funciones Generatrices y las sucesiones recurrentes. Estudiando este libro el equipo de Singapur en la IMO comenzó su despegue para obtener magníficos resultados en la competición.

8.- **Tomescu, Ioan:** ***Problems in Combinatorics and graph Theory. Wiley, 1985.***

Una gran colección de problemas por uno de los más expertos especialistas de todo el mundo.

9.- **Lovász, László :** ***Combinatorial Problems and exercises. North Holland 1979.***

Una enorme colección de problemas, generalmente muy difíciles, de otro experto mundial, húngaro en este caso.

10.- **Pérez Seguí, Mª Luisa:** ***Combinatoria y Combinatoria Avanzada. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas, México 2010.***

Dos monografías que han estado en la base de los magníficos resultados obtenidos por México en las competiciones internacionales en las que toma parte. Se une a ellos ***Combinatoria para Olimpiadas Internacionales,*** de **Pablo Soberón Bravo,** también publicado en 2010.

Valladolid, agosto 2015.

Francisco Bellot Rosado

Problemas para los más jóvenes 53

Cinco problemas rumanos

PMJ53_1

Un número natural A lo llamamos "super 3" si la suma de sus cifras es tres veces mayor que la suma de las cifras del número A + 1.

Hallar todos los números "super 3" que tienen a lo sumo 4 cifras.

PMJ53_2

Demostrar que la fracción

$$\frac{2013^{2013}-2013^{2012}-2013^{2011}}{2012^{2013}-2012^{2012}-2012^{2011}-2013}$$

no es irreducible.

PMJ53_3

a) **Descomponer el número 2012 en suma de números naturales consecutivos**
b) **Descomponer el número 2012 en suma de números naturales pares consecutivos**
c) **Descomponer el número 2012 en suma de números naturales impares consecutivos**

Observación: 2,4,6 son números pares consecutivos y 3,5,7 números impares consecutivos.

PMJ53_4

El área de un rectángulo es 2 m^2. Si se aumenta la longitud y la anchura en 2 m, el área aumenta en 8 m^2. Hallar el perímetro del rectángulo inicial.

PMJ53_5

Determinar los números naturales x y los números enteros y, primos entre sí, sabiendo que

$$\frac{5y^2}{x^2-xy}$$

es un número entero.

Problemas de nivel medio y olimpiadas 53

Cinco problemas del Talent Search 1994

NM53_1

Probar que si $a^2+b^2+c^2=1$**, entonces** $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\leq 3$**.**

NM53_2

Probar que no existen enteros positivos m y n tales que $2\left(m^2+mn+n^2\right)$ **sea un cuadrado perfecto.**

NM53_3

En el triángulo ADC, E es un punto del lado AC, O es un punto del lado AD y la recta EO corta a la recta DC en un punto B más allá de D. Se sabe que BD / DC = 4 / 7 y que AE / EC = 2 / 3. Calcular AO / OD.

NM53_4

Dos polígonos regulares de m y n lados, respectivamente, están inscritos en la misma circunferencia. La razón de sus áreas es m / n. Hallar todos los posibles valores de m y n.

NM53_5

¿Cuál es el mayor número natural par que no puede expresarse como suma de de dos números compuestos impares?

Problemas propuestos 266-270

Problema 266, propuesto por Andrés Sáez Schwedt, Universidad de León, España.

ABC es un triángulo acutángulo con circuncentro O y ortocentro H. La recta por A perpendicular a AO corta a BH en E y a CH en F. AO corta a BC en G, EG corta a AC en M y FG corta a AB en N. Probar que M, N y H están alineados.

Problema 267, propuesto por Laurentiu Modan, Univ. de Bucarest, Rumania.

Sea Z =(X,Y) una variable aleatoria bidimensional, con

$$P\left(\left\{w / X(w)=i, Y(w)=j\right\}\right)=\frac{i}{10\cdot 2^{i}}\cdot C_{i,j},$$

con $1\leq i\leq 4$ y $0\leq j\leq i$.

Estudiar si

$$P\left(\left\{w / \left|X(w)-3\right|<2\right\}\right)<\frac{1}{3}.$$

Problema 268, propuesto por D.M. Batinetzu-Giurgiu, Bucarest, y N. Stanciu, Buzau, Rumania.

Si m,n,x,y,z > 0, entonces

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\left(\frac{xy}{my+nz}+\frac{yz}{mz+nx}+\frac{zx}{mx+ny}\right)\geq\frac{3}{m+n}+3\sqrt[3]{\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{(mx+ny)(my+nz)(mz+nx)}}$$

***Problema 269, propuesto por el editor**

ABCD es un cuadrilátero; E y F son los puntos medios de AB y DC, respectivamente. G es el punto medio de EF.

DG corta a CE en H. Demostrar que AH biseca BC.

***Problema 270, propuesto por el editor**

Si a, b, c son las raíces de la ecuación

$$x^3+px^2+qx+r=1,$$

demostrar que

$$\left(a^3-1\right)\left(b^3-1\right)\left(c^3-1\right)=3pqr-p^3-q^3-r^3.$$

Problema 259, propuesto por el editor.

Calcular la integral curvilínea

$$I = \int \frac{(1 + x^2 - y^2)dx + 2xy\,dy}{(1 + x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2}.$$

Solución por José Heber Nieto, Universidad del Zulia, Maracaibo, Venezuela.

El resultado es 0. Veamos dos maneras de probarlo.

1) Es fácil ver que la integral propuesta es la parte real de $\int \frac{dz}{1+z^2}$. Como

$$f(z) = \frac{1}{1 + z^2} = \frac{i}{2}\left(\frac{1}{z + i} - \frac{1}{z - i}\right)$$

tiene dos polos dentro del cuadrado, a saber i y $-i$, con residuos $-i/2$ y $i/2$, se tiene $\frac{1}{2\pi i}\int f(z)dz = \frac{i}{2} - \frac{i}{2} = 0$, de donde $\int f(z)dz = 0$ y $\Re(\int f(z)dz) = 0$.

2) Escribamos la integral como $\int a(x, y)dx + b(x, y)dy$. Es claro que $a(-x, -y) = a(x, y)$ y $b(-x, -y) = b(x, y)$. Como el cuadrado es simétrico respecto al origen, si $(x(t), y(t))$ con $0 \le t \le T$ es una parametrización de la mitad del cuadrado, digamos dos lados, entonces $(-x(t), -y(t))$ es una parametrización de la otra mitad y $\int a\,dx + b\,dy$ se puede calcular como

$$\int_0^T (a(x, y)\dot{x} + b(x, y)\dot{y})dt + \int_0^T (a(-x, -y)(-\dot{x}) + b(-x, -y)(-\dot{y}))dt$$
$$= \int_0^T (a(x, y)\dot{x} + b(x, y)\dot{y})dt - \int_0^T (a(x, y)\dot{x} + b(x, y)\dot{y})dt = 0.$$

Solución al Problema 259

Ángel Plaza
Universidad de Las Palmas de Gran Canaria (Epaña)

Problema 259 *(Propuesto por el editor)*

Calcular la integral curvilínea

$$\int \frac{(1+x^2-y^2)\,dx + 2xy\,dy}{(1+x^2-y^2)^2+4x^2y^2}$$

a lo largo de un cuadrado con vértices en los puntos $\pm 2, \pm 2i$.

Solution. Planteando el problema en variable compleja $z = x+yi$, $dz = dx+idy$. Entonces, haciendo $f(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$, se tiene $f(z) = \dfrac{1}{1+z^2} = \dfrac{1}{1+x^2-y^2+2xyi} = \dfrac{1+x^2-y^2-2xyi}{(1+x^2-y^2)^2+4x^2y^2}$.
Y $\displaystyle\int \frac{(1+x^2-y^2)\,dx + 2xy\,dy}{(1+x^2-y^2)^2+4x^2y^2} = \text{Re}\left(\oint_c f(z)dz\right)$.

Nótese que la función $f(z)$ presenta polos simples en los puntos $\pm i$ interiores al dominio de integración. Por el teorema de de los residuos, se tiene que la integral pedida es

$$\int \frac{(1+x^2-y^2)\,dx + 2xy\,dy}{(1+x^2-y^2)^2+4x^2y^2} = \text{Re}\left(2\pi i\left(\text{Res}(f,i)+\text{Res}(f,-i)\right)\right).$$

Como $\text{Res}(f,i) = \lim_{z\to i} \dfrac{z-i}{1+z^2} = \dfrac{1}{2i}$, y $\text{Res}(f,-i) = \frac{-1}{2i}$, se sigue que la integral pedida es cero.
□

Proposed solution of problem 261, num.52 (Enero - Junio 2015))

Dear Editor of "Rivista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática", I would like to submit the following solution of problem 257

Si

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

y $f\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ *es una función continua, calcolar*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{e^{x_n}}^{e^{x_{n+1}}} f\left(\frac{x}{n}\right) dx.$$

Proof Let's change variable $x = nt$. The limit reads as

$$\lim_{n\to\infty} n \int_{\frac{1}{n}e^{x_n}}^{\frac{1}{n}e^{x_{n+1}}} = \lim_{n\to\infty} nf(\xi) \left(\frac{1}{n}e^{x_{n+1}} - \frac{1}{n}e^{x_n}\right), \qquad \frac{1}{n}e^{x_n} < \xi < \frac{1}{n}e^{x_{n+1}}$$

$$x_n = \ln n + \gamma + o(1)$$

thus

$$\frac{1}{n}e^{x_n} = \frac{1}{n}(ne^{\gamma+o(1)}) \to e^{\gamma}$$

and the same limit occurs for $e^{x_{n+1}}/n$. It follows thanks to the continuity of f that

$$\lim_{n\to\infty} f(\xi) = f(e^{\gamma})$$

Moreover

$$e^{x_{n+1}} - e^{x_n} = e^{x_n}\left(e^{\frac{1}{n+1}} - 1\right) = ne^{\gamma+o(1)}\left(e^{\frac{1}{n+1}} - 1\right) \to e^{\gamma}$$

The limit we are searching equals

$$e^{\gamma} f(e^{\gamma})$$

Roma 05/14/2015

Best regards
Paolo Perfetti

Perfetti Paolo, dipartimento di matematica, Università degli studi di Tor Vergata Roma, via della ricerca scientifica, 00133 Roma, Italy – email: perfetti@mat.uniroma2.it

Problema 261 *(Proposto por D. M. Batinetzu-Giurgiu e Neculai Stanciu, Buzau, Romanía)*

Se

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

e $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ é unha función continua, calcular

$$\lim_{n\to\infty} \int_{e^{x_n}}^{e^{x_{n+1}}} f\left(\frac{x}{n}\right) dx .$$

Solución enviada por Bruno Salgueiro Fanego, Viveiro, Lugo

Sexa $n \in \mathbb{N}^*$; como f é continua en $\left[e^{x_n}, e^{x_{n+1}}\right]$, aplicando o teorema do valor medio do cálculo integral, temos que

$$\int_{e^{x_n}}^{e^{x_{n+1}}} f\left(\frac{x}{n}\right) dx = f\left(\frac{\xi_n}{n}\right)\left(e^{x_{n+1}} - e^{x_n}\right) = f\left(\frac{\xi_n}{n}\right) e^{x_n - \ln n} e^{\ln n}\left(e^{\frac{1}{n+1}} - 1\right) = f\left(\frac{\xi_n}{n}\right) e^{x_n - \ln n} n\left(e^{\frac{1}{n+1}} - 1\right),$$

para algún $\xi_n \in \left(e^{x_n}, e^{x_{n+1}}\right)$.

Como $\frac{e^{x_n}}{n} < \frac{\xi_n}{n} < \frac{e^{x_{n+1}}}{n}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{e^{x_n}}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} e^{x_n - \ln n} = e^{\lim_{n\to\infty}(x_n - \ln n)} = e^{\gamma}$ e $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{e^{x_{n+1}}}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} e^{x_n - \ln n} e^{\frac{1}{n+1}} = e^{\lim_{n\to\infty}(x_n - \ln n)} e^{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}} = e^{\gamma} e^{0} = e^{\gamma}$, da regra do sándwich deducimos que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\xi_n}{n} = e^{\gamma}$ e, polo tanto, $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\frac{\xi_n}{n}\right) = f\left(\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\xi_n}{n}\right) = f\left(e^{\gamma}\right)$, onde $\gamma = \lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n - \ln n\right)$ é a constante de Euler-Mascheroni.

Ao ser $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(e^{\frac{1}{n+1}} - 1\right) = \lim\limits_{n\to\infty} n \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1}\right)^k = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} + \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^k} = 1 + 0 = 1$,

concluímos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{e^{x_n}}^{e^{x_{n+1}}} f\left(\frac{x}{n}\right) dx = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{\xi_n}{n}\right) \lim_{n\to\infty} e^{x_n - \ln n} \lim_{n\to\infty} n\left(e^{\frac{1}{n+1}} - 1\right) = f\left(e^{\gamma}\right) e^{\gamma} 1 = e^{\gamma} f\left(e^{\gamma}\right).$$

Solucion al problema 262 de la revista Iberoamericana de Matemáticas

Nombre : Prof. Ramón Orlando Godoy Vindel

Colegio de secundaria : Instituto Técnico Luis Bogran

Direccion : Tegucigalpa , Honduras.

Problema 262 *(propuesto por Laurentiu Modan, Bucarest, Rumania)*
Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} mx + 5 \text{ si } x < 0 \\ e^{2x} + m \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

siendo $m \in \mathbb{R}$.
i) Hallar m para que f sea inversible.
ii) Calcular

$$I = \int_4^6 f^{-1}(x)\,dx$$

y comparar el valor de I con $5/8$.

Teorema:

Para que exista la inversa de una función, la función debe de cumplir dos cosas ser Inyectiva y suprayectiva esto quiere decir ser biyectiva, por lo cual la función seria inversible.

- Desarrollo:

Estrategia (Analítica):

1) Crear una función de tal forma que sea creciente o decreciente pero no ambas cosas, esto con el objetivo de que se cumpla que si **a ≠ b** entonces
f(a) ≠ f(b) que es la inyectividad en otras palabras.

2) A su vez la función debe hacer un recorrido completo por el eje **X** y eje **Y** esto con el objetivo de que sea suprayectiva.

3) Elegir una función de la familia de funciones **f(x) = mx + 5, si x $<$ 0.**

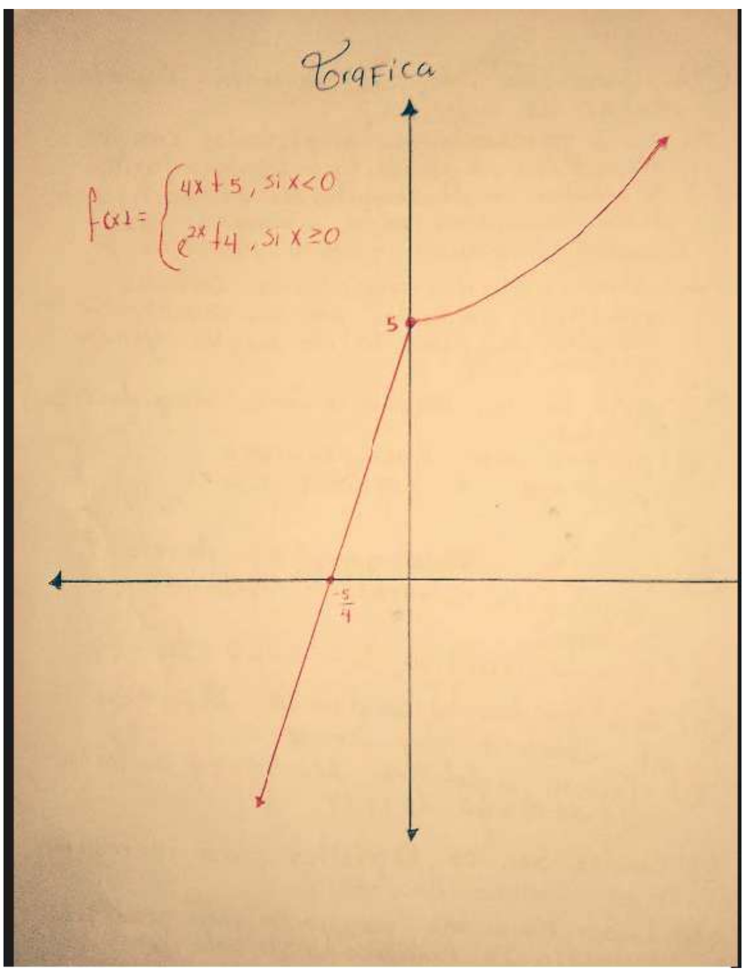
4) Elegir una función de la familia de funciones **f(x) =** $e^{2x} + m$**, si x ≥ 0.**

5) Al unir la funciones del paso 3 y 4 deberán cumplir el paso 1 y 2 esto con el propósito que

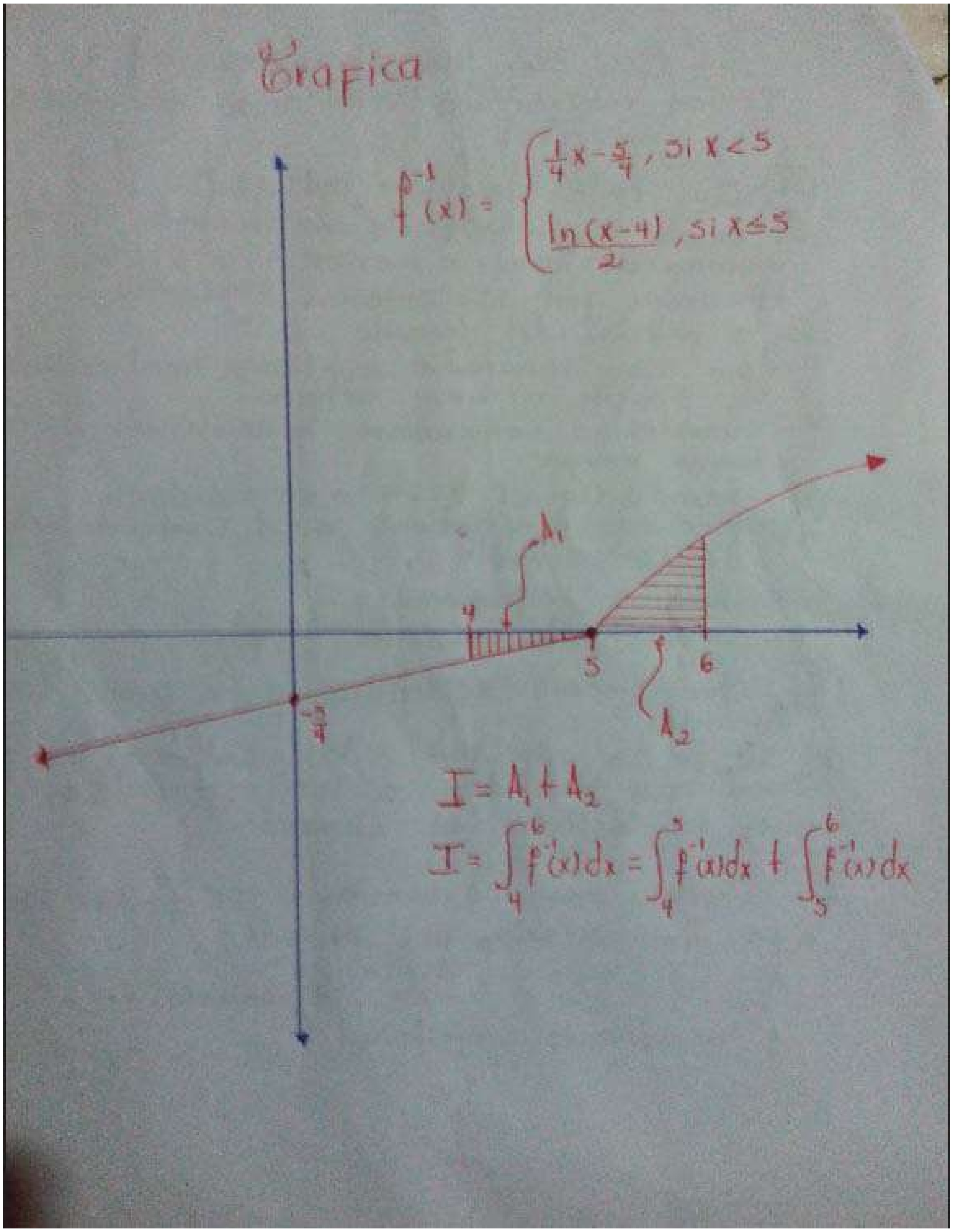
$$f(x) = \begin{cases} mx + 5 \text{ si } x < 0 \\ e^{2x} + m \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

Sea biyectiva y por supuesto a la vez inversible para algun m que pertenece a los reales.

6) Como el intersecto en Y de la familia de funciones de **f(x)= mx + 5 ,es (0,5)**
es crusial que **f(x) =** $\boldsymbol{e^{2x} + m}$**, si x ≥ 0** pase por **(0,5)** ya que, **f(x)=mx +5, six>0,** dejara un hueco para **x=0 en (0,5).**
Por lo cual **5 =**$\boldsymbol{e^{2(0)}}$**+ m** despejando obtenemos que **m= 4** por tanto la gráfica de la función es la siguiente:
Nota:
La asíntota Horizontal no interfiere en la gráfica ya que queda por debajo de la función exponencial acotada.



7) Como la grafica anterior cumple ser biyectiva por ser creciente y hacer un recorrido por ambos ejes de manera completa nos asegura que la inversa existe así que con un simple cambio de variable y algo de despeje llegamos a que la funcion inversa y el area bajo la currva son de la siguiente forma :$f^{-1}(x) =$ **{ 1/4x -5/4 ,si x$^<$5 y (ln(x-4))/2, si x ≥5.**



8) Calculo del area bajo la curva para encontrar I :

Paso#9

Encontrando I.

$$I = \int_{4}^{5} \left(0 - \left(\tfrac{1}{4}x - \tfrac{5}{4}\right)\right)dx + \int_{5}^{6} \left(\frac{\ln(x-4)}{2} - 0\right)dx$$

$$I = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{5}{4}x \Big|_{4}^{5} + \frac{1}{2}\left((x-4)\ln(x-4) - (x-4)\right)\Big|_{5}^{6}$$

$$I = \frac{1}{8} + \ln 2 - \frac{1}{2}$$

$$I = \ln 2 - \frac{3}{8} \cong 0.318\ u^2 \#$$

9) Por lo cual al comparar **I** con 5/8 vemos que al dividir **I** /(5/8)*100 = 50.88%
asi que **I** es aproximadamente un poco mas del 50% de 5/8 lo que quiere decir que el area bajo esa curva es casi la mitad del area de un rectangulo de 1/8 unidades de ancho y 5 unidades la largo,que era lo que queriamos comparar por lo tanto quedan resueltas las dos pregunta al problema antes planteado.

Problema 262 *(Proposto por Laurentiu Modan, Bucarest, Romanía)*

Sexa $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a función definida por

$$f(x)=\begin{cases} mx+5 & \text{se} \quad x<0 \\ e^{2x}+m & \text{se} \quad x\geq 0 \end{cases}$$

sendo $m\in\mathbb{R}$.

i) Achar $m\in\mathbb{R}$ para que f sexa invertible.

ii) Calcular

$$I=\int_4^6 f^{-1}(x)\,dx$$

e comparar o valor de I con $5/8$.

Solución enviada por Bruno Salgueiro Fanego, Viveiro, Lugo

i) Como unha función é invertible se e só se é bixectiva e calquera función bixectiva definida en todo $\mathbb{R}$ é estritamente crecente ou estritamente decrecente, e f é estritamente crecente en $\mathbb{R}_+^*$, para que f sexa bixectiva é necesario que sexa tamén estritamente crecente en todo $\mathbb{R}$ e, polo tanto, tamén en $\mathbb{R}_-^*$, co cal deberá terse que $m\in\mathbb{R}_+^*$, sendo entón a gráfica de f a unión dunha semirrecta estritamente crecente definida en $\mathbb{R}_-^*$ e dunha función estritamente crecente en $\mathbb{R}_+^*$; como ademais f está definida en todo $\mathbb{R}$ e é bixectiva, dita función ten que ser continua en $x=0$, é dicir,

$$5=\lim_{x\to 0^-} mx+5=\lim_{x\to 0^-} f(x)=f(0)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} e^{2x}+m=1+m,$$

isto é, $m=4$.

Como a condición $m=4$ tamén é suficiente para que f sexa bixectiva, ou equivalentemente, invertible, deducimos que f é invertible se e só se $m=4$.

ii) A integral a calcular existe só e cando existe a inversa de f, é dicir, f^{-1}, o cal ocorre se e só se $m=4$. Como ademais $y=f(x)\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$, temos, por unha parte, que, como para $x\in\mathbb{R}_-^*$, $y=f(x)=4x+5\Leftrightarrow x=\dfrac{y-5}{4}$, será $f^{-1}(y)=\dfrac{y-5}{4}$ para $\dfrac{y-5}{4}\in\mathbb{R}_-^*$, ou sexa, se $y<5$, e, por outra que, para $x\in\mathbb{R}_+$,

$y=f(x)=e^{2x}+4\Leftrightarrow e^{2x}=y-4\Leftrightarrow x=\ln\sqrt{y-4}$, logo $f^{-1}(y)=\ln\sqrt{y-4}$ para $\ln\sqrt{y-4}\in\mathbb{R}_+$, é dicir, se $y>5$, co cal

$$f^{-1}(x)=\begin{cases} \dfrac{x-5}{4} & \text{se} \quad x<5 \\ \ln\sqrt{x-4} & \text{se} \quad x\geq 5. \end{cases}$$

Entón

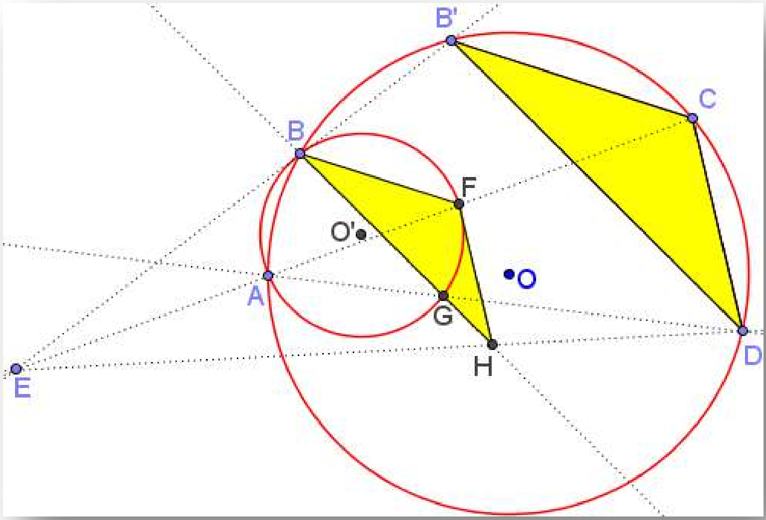
$$I=\int_4^6 f^{-1}(x)\,dx=\int_4^5 f^{-1}(x)\,dx+\int_5^6 f^{-1}(x)\,dx=\int_4^5 \frac{x-5}{4}\,dx+\frac{1}{2}\int_5^6 \ln(x-4)\,dx \underset{t=x-4}{=} \left.\frac{(x-5)^2}{8}\right]_{x=4}^{x=5}+\frac{1}{2}\int_1^2 \ln t\,dt$$

$$=\frac{1}{8}\left(0^2-(-1)^2\right)+\frac{1}{2}t(\ln t-1)\Big]_{t=1}^{t=2}=-\frac{1}{8}+\frac{1}{2}2(\ln 2-1)-\frac{1}{2}1(\ln 1-1)=\ln 2-\frac{5}{8}\cong 0{,}068147<\frac{5}{8}.$$

Problema 263, propuesto por Andrés Sáez Schwedt, Universidad de León, España.
ABCD es un cuadrilátero cíclico y E es un punto de AC (A entre C y E). La circunferencia por A y B tangente a BE corta a AC en F y a AD en G. Si BG corta a ED en H, probar que FH es paralela a CD.

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba (España).

Una vez realizada la construcción descrita en el enunciado, consideramos el punto B', punto de corte de la recta EB con la circunferencia de centro O, que circunscribe al cuadrilátero $ABCD$.



Como la circunferencia de centro O', que pasa por $A \; y \; B$ y es tangente a BE, corta a AC en F se tiene que

$$EB^2 = EA \cdot EF$$

Por otra parte,

$$EB \cdot EB' = EA \cdot EC$$

Relacionando ambas expresiones:

$$\frac{EB}{EB'} = \frac{EF}{EC} \rightarrow \frac{EB}{EF} = \frac{EB'}{EC}$$

Por tanto, obtenemos la semejanza entre los triángulos $\Delta EBF \sim \Delta EB'C$. Sea además k>0, la razón de semejanza entre ambos triángulos:

$$\frac{EB'}{EB} = \frac{B'C}{BF} = \frac{EC}{EF} = k \; (I)$$

De esta semejanza, deducimos el paralelismo entre los segmentos $BF \parallel B'C$.
Observamos las igualdades entre los siguientes ángulos $\measuredangle CB'D = \measuredangle CAD = \measuredangle FAG = \measuredangle FBG = \measuredangle FBH$.
Si tenemos que $\measuredangle CB'D = \measuredangle FBH \;\; y \;\; BF \parallel B'C$, entonces $BH \parallel B'D$.
Por tanto, obtenemos la semejanza entre los triángulos $\Delta EB'D \sim \Delta EBH$, siendo además que:

$$\frac{EB'}{EB} = \frac{B'D}{BH} = \frac{ED}{EH} = k \; (II)$$

De ambas relaciones (I) y (II), se obtiene que:

$$\frac{B'C}{BF} = \frac{B'D}{BH} = k \rightarrow \frac{B'C}{B'D} = \frac{BF}{BH}$$

En el siguiente par de triángulos, $\Delta DB'C \; y \; \Delta HBF$, se verifica $\measuredangle CB'D = \measuredangle FBH$ y $\frac{B'C}{B'D} = \frac{BF}{BH}$.
Por tanto, ambos triángulos son semejantes, $\Delta DB'C \sim \Delta HBF$ y, como quiera que, $BF \parallel B'C$ y $BH \parallel B'D$, necesariamente $FH \parallel CD, \; cqd$ ■

OMAPA

www.omapa.org

Hoy en día es casi imposible vivir al margen de las redes sociales, y también es un hecho que si sabemos utilizarlas pueden ser muy provechosas e instructivas. Es así que a través de `Facebook` he dado con la página web de `OMAPA`. " *Organización multidisciplinaria de apoyo a profesores y alumnos.*" El objetivo de esta organización es mejorar la calidad de la Educación en Paraguay. Entre sus objetivos está:

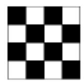
- ⋆ Crear conciencia e influir en la comunidad académica y empresarial.
- ⋆ Impulsar la educación de calidad.
- ⋆ Participar en la formación de profesores y estudiantes.
- ⋆ Fomentar el desarrollo de políticas, herramientas legales y académicas.

Al navegar por este excelente sitio web podemos encontrar los examenes de varios años de la Olimpiada Paraguaya tanto a nivel infantil como juvenil; y con diferentes rondas. De los problemas que he visto mi favorito es el de la *Hormiga Viajera*. Luego podemos descargar de manera gratuita una colección de libros, con bellas portadas y muchos problemas desafiantes al Nivel Primario y Secundario. Cabe destacar los problemas de la prestigiosa Competencia Internacional *Canguro Matemático*.

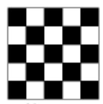
Estimados lectores disfruten este instructivo sitio web que nos brinda Paraguay.

Roberto Bosch Cabrera, Miami, EE.UU, 2015.

Problema 2



Tablero 4 × 4



Tablero 5 × 5

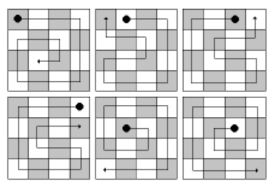
La Hormiguita Viajera camina sobre varios tableros cuadriculados en blanco y negro, moviéndose horizontalmente o verticalmente, pero sin pasar dos o más veces por la misma casilla. En cualquier tablero, la primera casilla superior izquierda es negra.

a) Si el tablero es de 4×4, ¿de cuáles casillas puede partir para que pueda recorrer todas las casillas del tablero?

b) Si el tablero es de 5×5, ¿de cuáles casillas puede partir para que pueda recorrer todas las casillas del tablero?

c) Si el tablero es de $n \times n$ (donde n es cualquier número natural), ¿de cuáles casillas puede partir para que pueda recorrer todas las casillas del tablero?

Solución



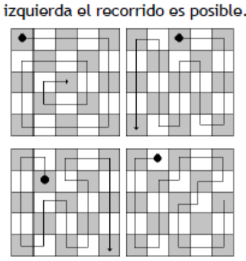
Vemos que en un tablero 4×4, el recorrido por todo el tablero es siempre posible, cualquiera sea la casilla de la cual parte la hormiguita.

Están dibujados algunos de los caminos posibles y algunas de las casillas.

Pero sin embargo, por la simetría de la figura (por rotación), están cubiertas todas las posibilidades del punto de partida.

Respuesta para la pregunta a: **puede partir de cualquier casilla.**

Analizamos ahora un tablero 5×5.Vemos que si parte de la esquina superior izquierda el recorrido es posible.



Por simetría esto se cumplirá también para las otras tres casillas que están en las esquinas.

Si parte de una de las casillas del medio de los lados, también es recorrido es posible. Por simetría esto se cumple para todas las casillas que están en el medio de los lados del tablero. Todas estas casillas son negras.

En cambio, en el último tablero, el recorrido no es posible. En este caso la hormiguita partió de una casilla blanca.

Respuesta para la pregunta b: **debe partir de una casilla negra.**

A partir de este análisis, y teniendo en cuenta que siempre elegiremos el camino más conveniente, estamos en condiciones de hacer generalizaciones.

En el caso de que n sea par, la cantidad de casilla bancas y negras es la misma y hay dos posibilidades:

Primero, que parta de una casilla blanca. Entonces la secuencia del recorrido es:

B N B N B N B N B N ... B N B N B N

La otra:

N B N B N B N B N B ... N B N B N B

Entonces partiendo de cualquier casilla, el recorrido por todas las casillas será siempre posible.

En el caso de que n sea impar habrá una casilla negra más que la cantidad de casillas blancas.

Consideramos las dos posibilidades:

B N B N B N ... B N B N B N N

N B N B N B ... N B N B N B N

En el caso de que parta de una casilla blanca, al final tendrá que pasar de una casilla negra a otra negra y eso es imposible porque no se mueve en diagonal.

En cambio, si parte de una casilla negra siempre habrá una casilla negra al lado de una blanca y entonces podrá completar el recorrido.

Respuesta para la pregunta c:

Si n es par puede partir de cualquier casilla.

Si n es impar no puede partir de una casilla blanca.

CRITERIOS DE CORRECCIÓN

- Resuelve el caso 4×4 — 1 punto
- Resuelve el caso 5×5 — 2 puntos
- Generaliza para el caso n par — 2 puntos
- Generaliza para el caso n impar — 2 puntos

VICTOR M. BUJAN DELGADO

1

Un gran baile en Euclídea

Víctor Buján Delgado

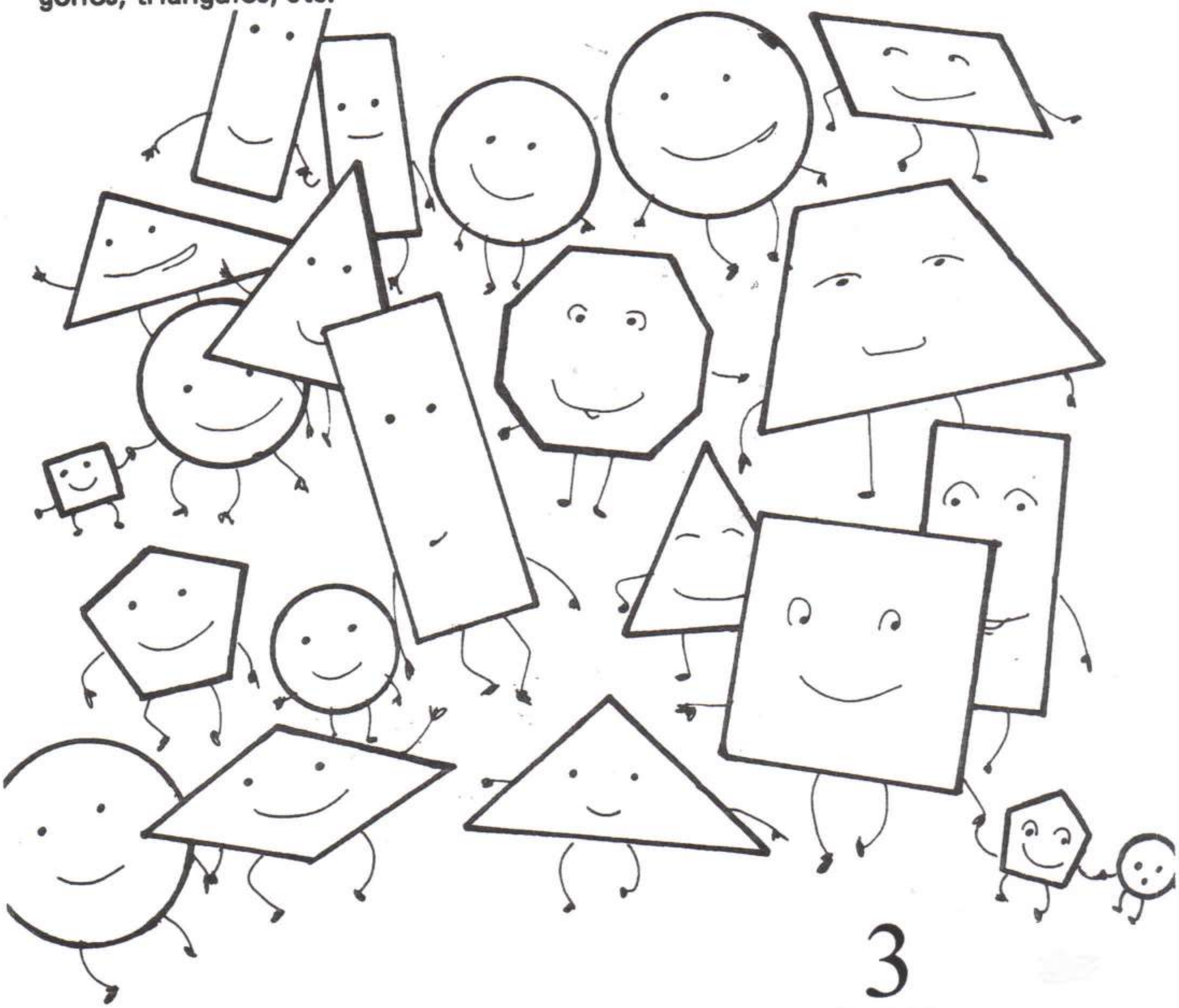
San José, Costa Rica

1987

2

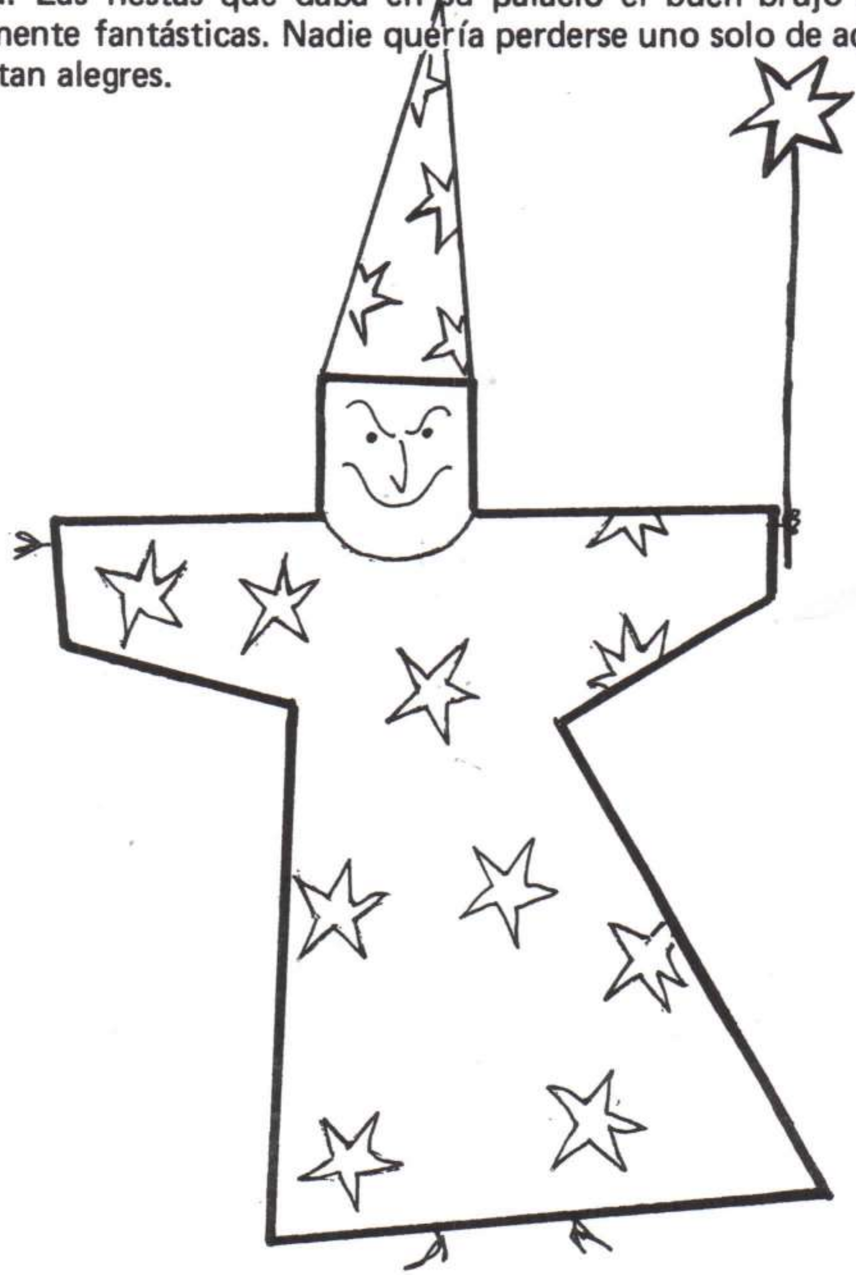
UN GRAN BAILE EN EUCLIDEA

Euclídea es un reino extraño y hermoso habitado por toda clase de figuras geométricas. Allá viven, en gran armonía, cuadrados, trapecios, pentágonos, triángulos, etc.

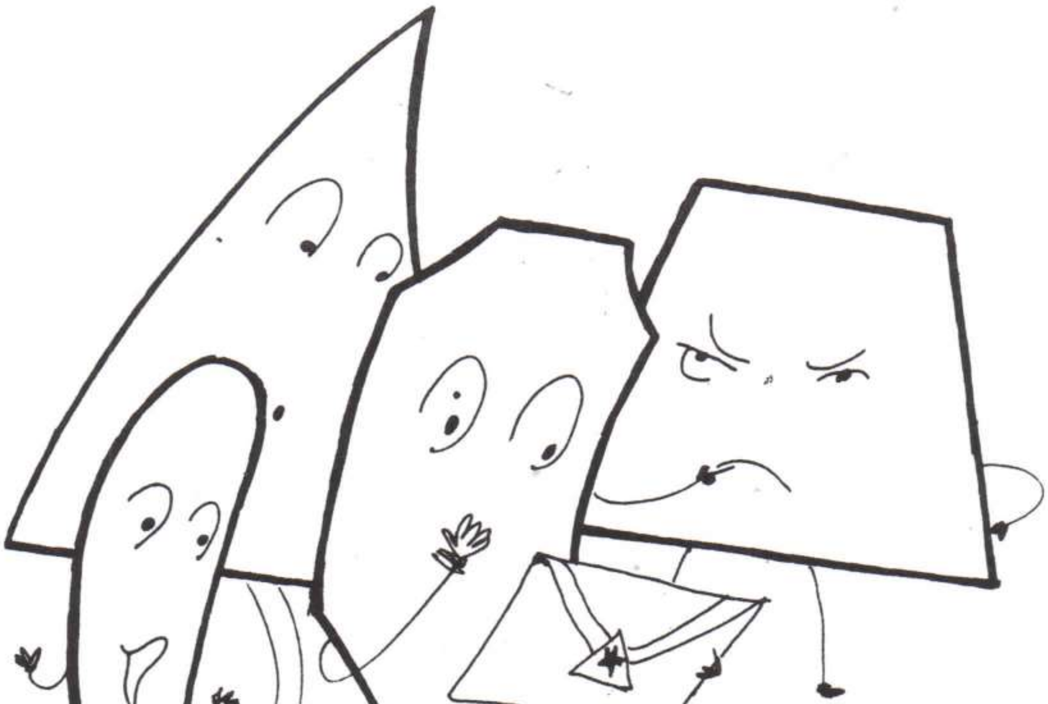


Este reino se mantiene pacífico y feliz todo el tiempo, gracias a que sus habitantes están siempre dispuestos a ayudarse unos a otros generosamente. También a que los niños y adultos son muy estudiosos. Sólo una vez, hace algún tiempo, sucedió algo que conmovió a todos los tranquilos euclideanos y dejó un recuerdo que aún hoy inquieta a algunos.

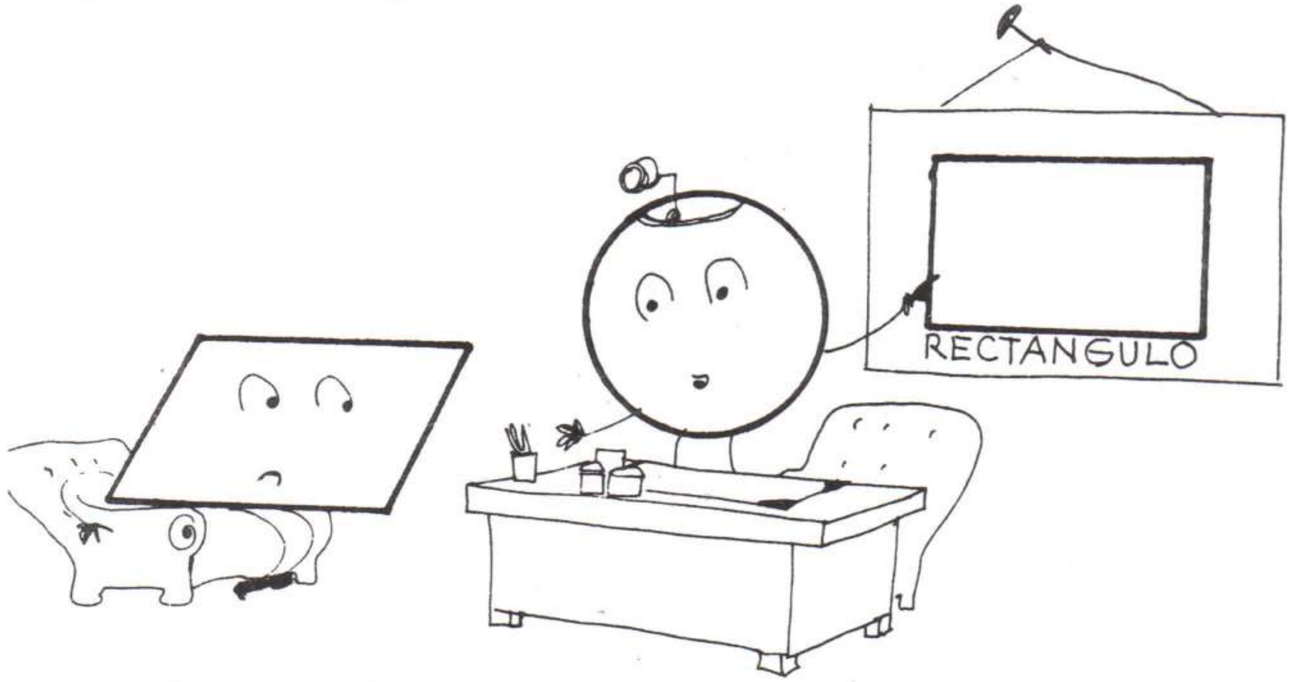
Todo empezó el día en que el brujo Saccherio envió invitaciones a su gran baile de disfraces. Aquello era un importantísimo acontecimiento en Euclídea. Las fiestas que daba en su palacio el buen brujo Saccherio eran sencillamente fantásticas. Nadie quería perderse uno solo de aquellos eventos sociales tan alegres.



Como Saccherio era muy dado a gastar bromas a sus amigos, todos buscaron, en la invitación, alguna pista que les permitira adivinar el truco que Saccherio se traía entre manos esta vez. Y la encontraron enseguida. La invitación decía en una esquina que, el día del baile, el invitado tenía que estar transformado en un rectángulo. Todas las figuras geométricas que no eran rectángulos se echaron a llorar y salieron a la calle a preguntarse unas a otras qué hacer. ¿Qué puede hacer un rombo que recibe una invitación tan importante como aquella, si la invitación dice que sólo rectángulos serán aceptados? No era cosa fácil para un pentágono, pongamos por ejemplo, transformarse en un rectángulo. La pregunta del momento, la que todos se hacían, era ésta: "¿Cómo me las arreglo para convertirme en un rectángulo a tiempo para asistir al gran baile de disfraces del brujo Saccherio? "

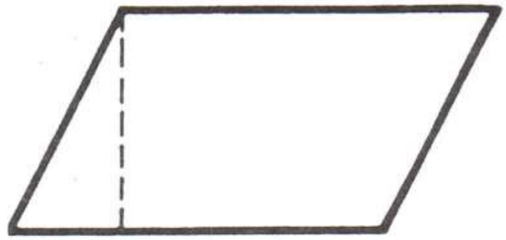


A los tres días de agitación apareció la respuesta en todos los periódicos: el Doctor Círculo, gran cirujano, especialista en cirugía plástica, ofrecía operar a cualquier figura plana y transformarla en un rectángulo. Muchos leyeron aquel anuncio y se pusieron contentísimos. Pensaron que el Doctor Círculo representaba la solución del problema en que los había metido la invitación del brujo Saccherio. Otros eran más difíciles de convencer. El trapecio, por ejemplo, pensaba: "¿Cómo me va a transformar a mí en un rectángulo ese Doctor Círculo? Yo nací trapecio, y trapecio me quedaré para siempre". El triángulo decía, muy triste, que él tenía todavía menos esperanzas de convertirse en un rectángulo. Que por lo menos un trapecio se parecía a un rectángulo.

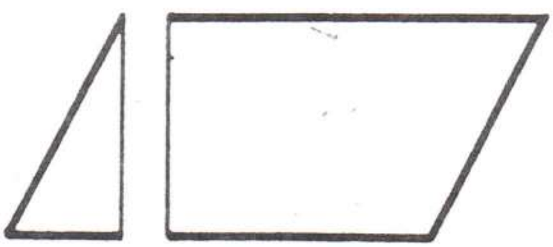


El valiente Romboide fue el primero en decidirse a consultar al Doctor Círculo. Le pidió que lo operara y lo convirtiera en un rectángulo, para poder asistir al gran baile del brujo Saccherio. El Doctor Círculo, un círculo muy serio y profesional, lo examinó, le hizo muchas pruebas y mil preguntas, determinó su grupo sanguíneo, y con una sonrisa tranquilizadora le comunicó que podía operarlo en cualquier momento. El romboide dijo que deseaba ser operado inmediatamente. Acaso, en el fondo, tenía miedo de arrepentirse, si abandonaba el hospital. El especialista no encontró inconveniente alguno. En cosa de una hora, el romboide se encontraba en la mesa de operaciones debidamente anestesiado y esperando el bisturí del Doctor Círculo.

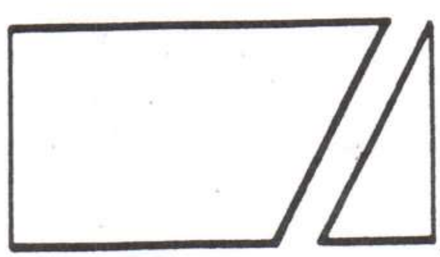
El habilísimo cirujano dibujó una línea de puntos en el cuerpo del paciente con un desinfectante rojo que parecía mercurocromo:



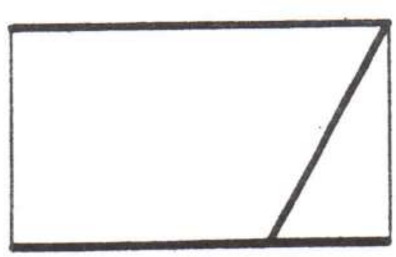
Ahora venía la parte delicada de la operación: el Doctor Círculo hizo un corte recto, por la línea de puntos, con su afilado bisturí:



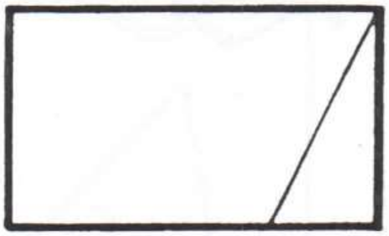
Una vez separado el paciente en dos partes, el cirujano plástico tomó el trocito pequeño, de forma triangular, y lo colocó a la derecha del cuerpo del paciente, quien se encontraba profundamente anestesiado en aquel momento:



A continuación, el médico cosió el trocito triangular al cuerpo del paciente en su lado derecho:

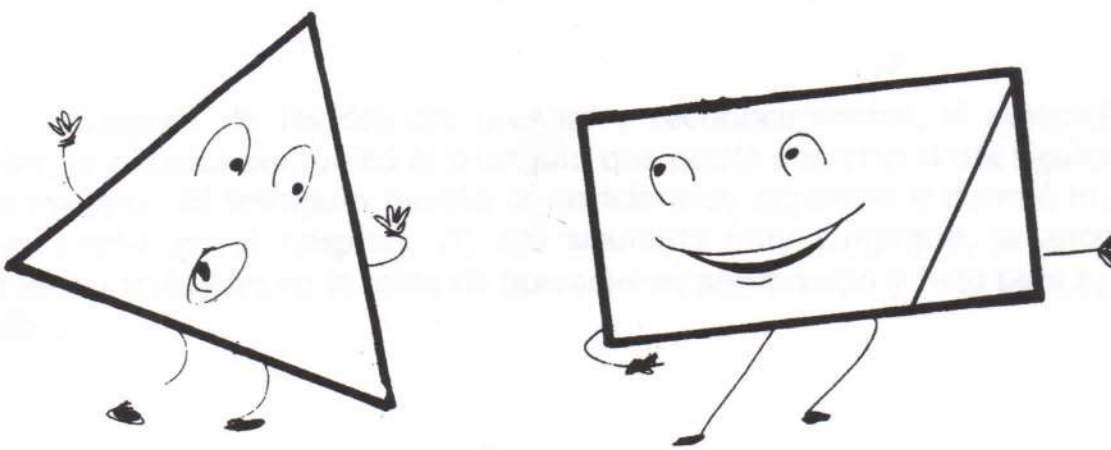


A las pocas horas de la operación, el que había sido un preocupado romboide, era todo un rectángulo, un poco mareado, pero satisfecho. El doctor le aseguró que le quitaría los puntos y que no se le notaría cicatriz alguna el día del gran baile del brujo Saccherio.

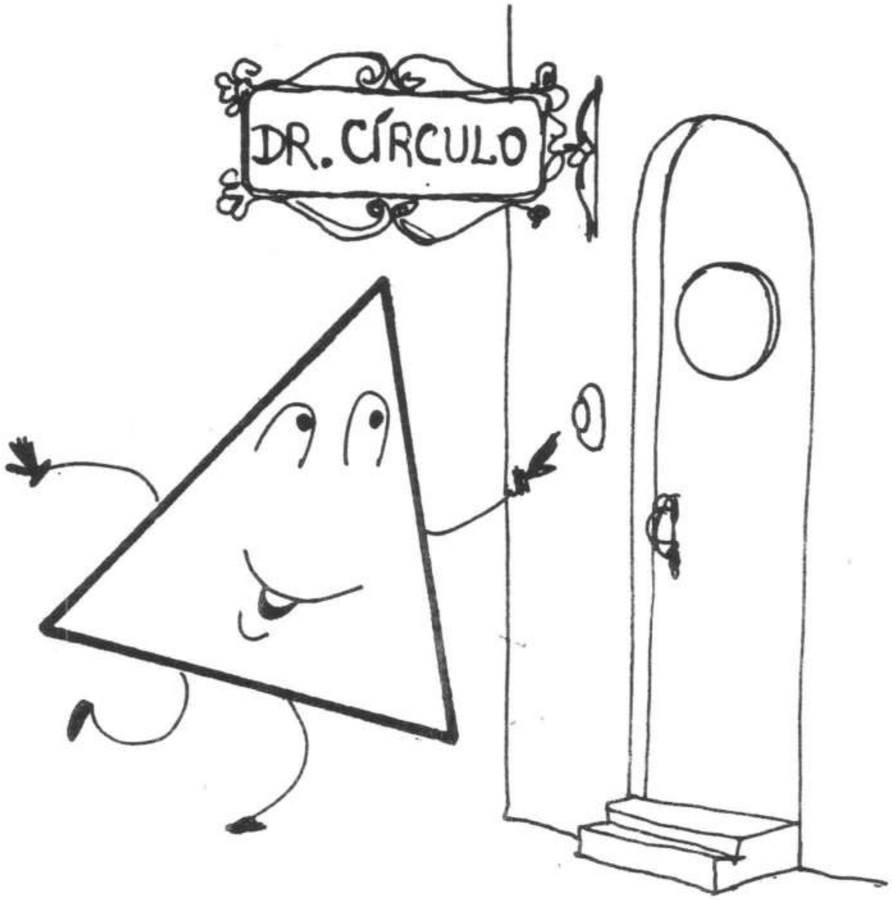


En cuanto le permitieron abandonar el hospital donde el Doctor Círculo atendía a sus pacientes, el que había sido un romboide, y que ahora era un rectángulo feliz, corrió a la casa de su amigo, el triángulo, para darle las buenas noticias.

—Mírame bien— le dijo—, nada me duele, me quitan los puntos dentro de muy pocos días, y no se me verá cicatriz ni marca alguna, para el día del baile. ¿Qué esperas para correr a ponerte en manos del gran Doctor Círculo?

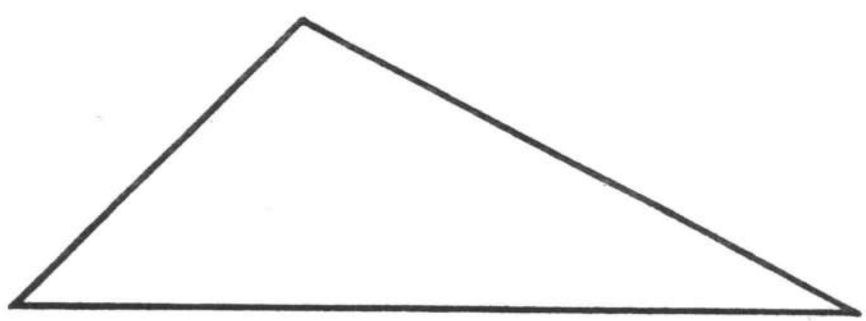


Sin perder un minuto, el triángulo preparó una maleta con alguna ropa y salió corriendo en busca del Doctor Círculo.

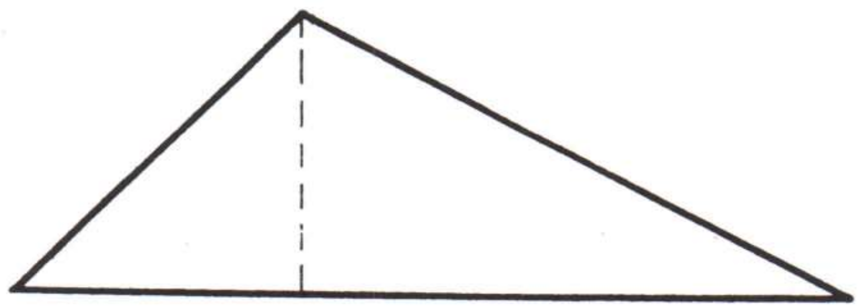


9

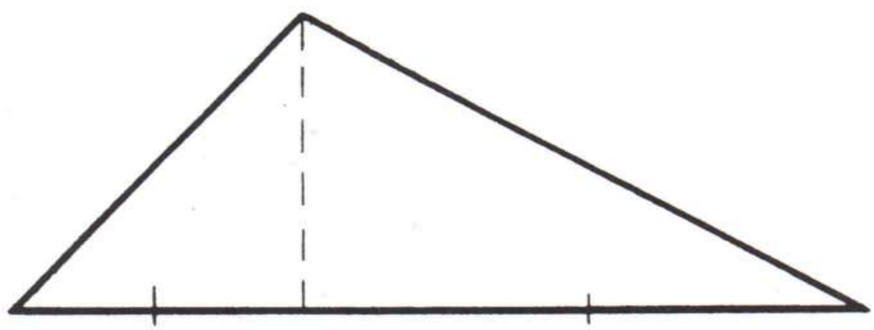
Después de las debidas pruebas y reconocimientos, el especialista en cirugía plástica comunicó al triángulo que podía operarlo al día siguiente por la mañana. El triángulo recibió la noticia muy contento y durmió muy bien esa noche en el hospital. Al día siguiente muy temprano, se encontraba nuestro triángulo en la mesa de operaciones anestesiado y listo para su operación.



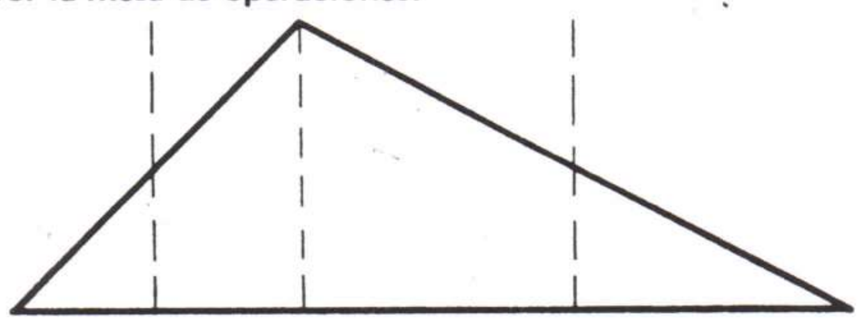
El Dr. Círculo trazó con mercurocromo la altura del triángulo:



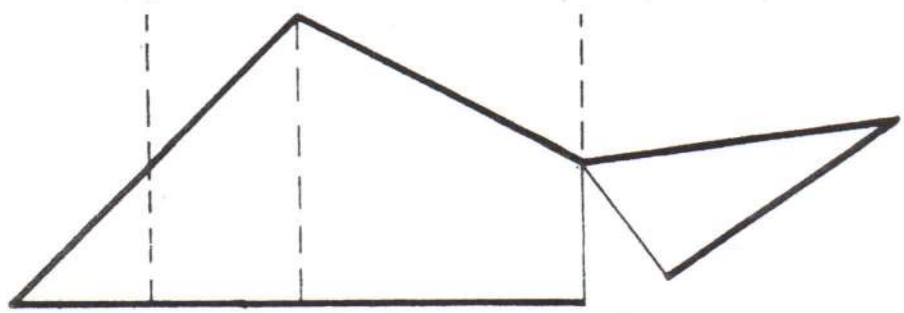
La base del triángulo quedó dividida en dos partes. El cirujano marcó los puntos medios de cada una de esas partes:



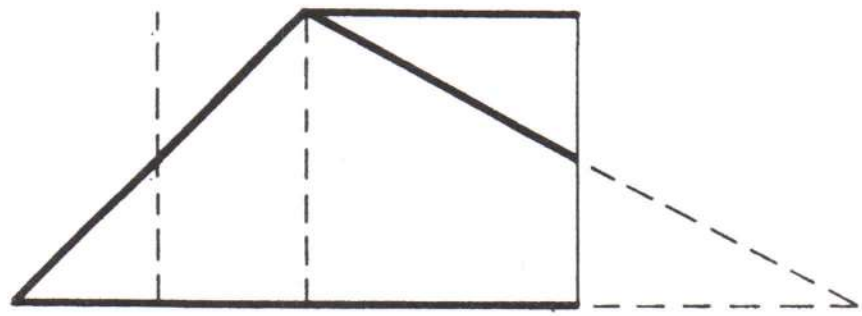
A continuación, el médico trazó líneas de puntos por esos puntos medios, paralelas a la altura. Las líneas iban más allá del cuerpo del triángulo y se extendían por la mesa de operaciones:



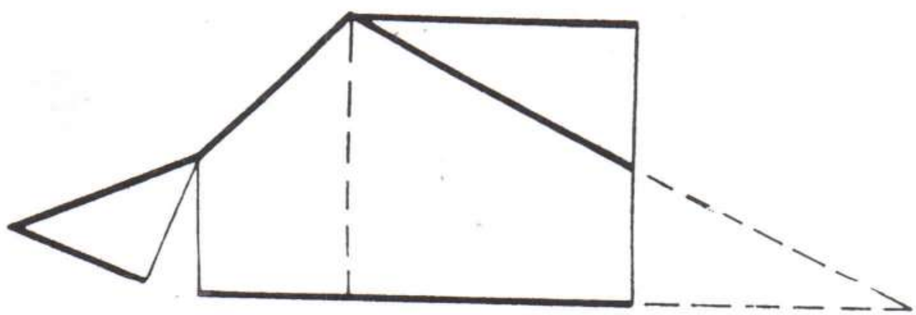
Ahora, venía la parte delicada: con mano firme, el cirujano plástico cortó por la línea de puntos de la derecha, hasta casi desprender un trocito:



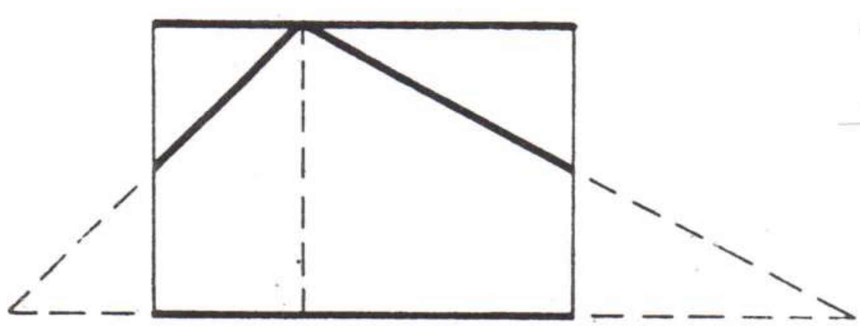
El trocito triangular fue colocado por encima del triángulo con mucho cuidado:



Terminada esta fase de la operación, el Dr. Círculo procedió a cortar hábilmente por la línea de puntos de la izquierda, hasta casi separar una porción triangular pequeñita:

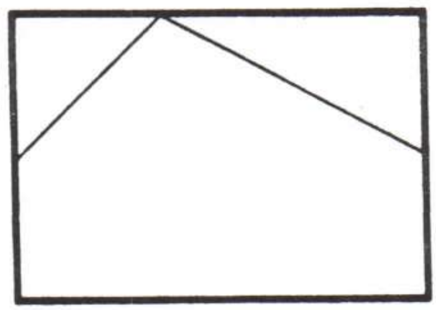


Cuando el médico colocó el trocito de la izquierda en la parte superior del triángulo, ya el paciente tenía el aspecto de un rectángulo:



Había pasado la parte difícil de la operación. Ahora, el especialista en cirugía plástica dedicó toda su atención a coser con mucho cuidado los dos trocitos al cuerpo de su paciente.

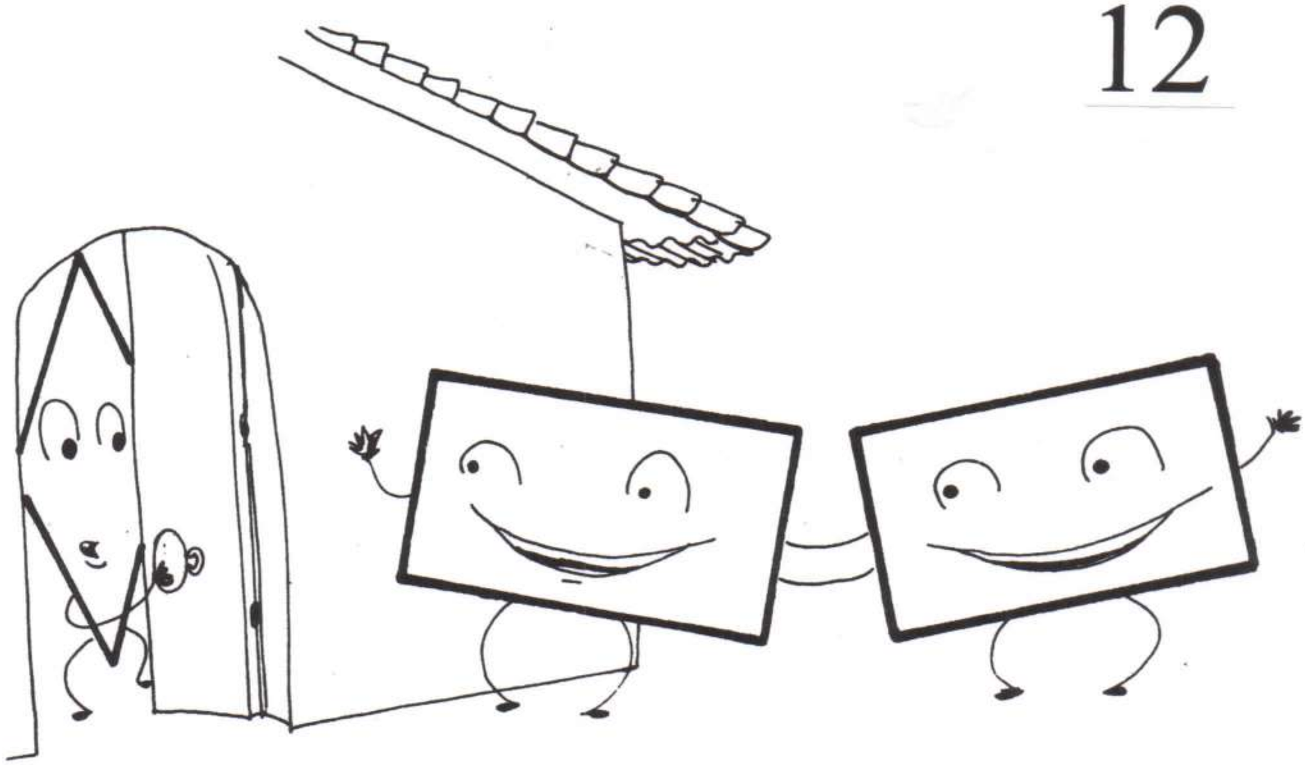
Cuando el triángulo despertó del todo y se pudo ver en un espejo, sonrió con gusto. Admiraba el prodigio de cirugía que el habilísimo Dr. Círculo había hecho con él. Ya él no era un triángulo. Ahora era un rectángulo, hecho y derecho.



El triángulo y el romboide, que ya habían sido operados y transformados en rectángulos con todo éxito, corrieron entonces a casa de un amigo común: el rombo.

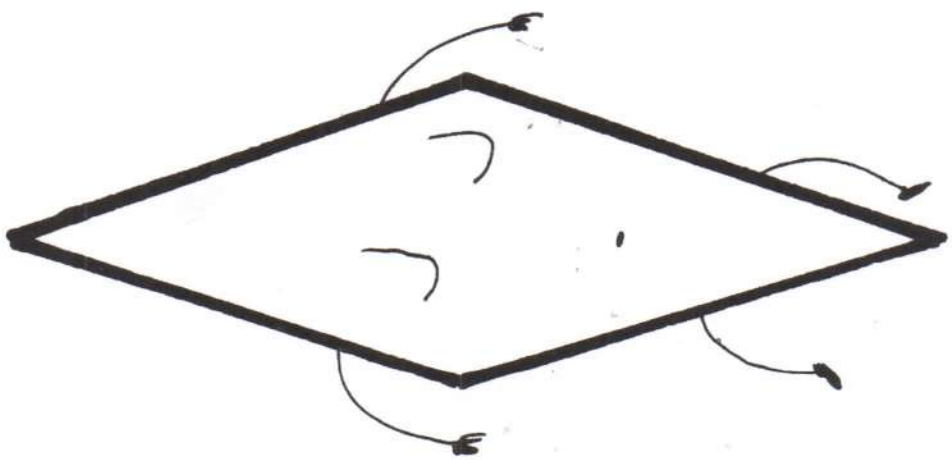
Cuando el rombo les abrió la puerta de su casa, no los reconoció. El pobre se encontró ante dos rectángulos muy bien parecidos a quienes no conocía. Cuando les preguntó qué deseaban, los dos rectángulos desconocidos estallaron en risas, cosa que desconcertó totalmente al tímido rombo.

12

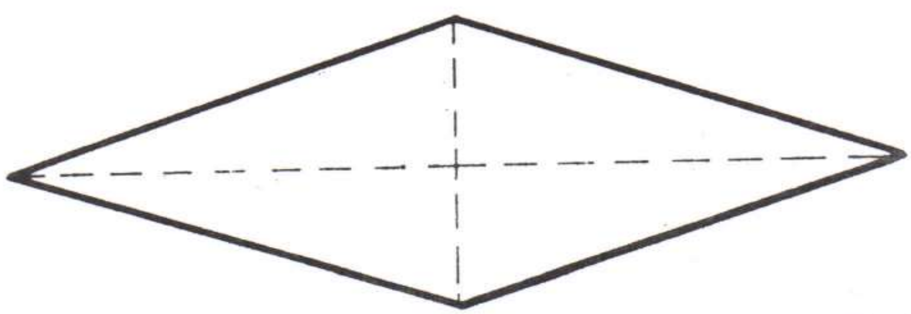


Después de un rato de reírse a costa de él, los dos rectángulos recién llegados explicaron al rombo que ellos eran sus grandes amigos de siempre: el romboide y el triángulo. Los tres se pusieron felices. Hablaron maravillas de la pericia del Doctor Círculo. El extriángulo y el exromboide convencieron a su amigo, el rombo, de que debería apurarse e irse al hospital, sin pérdida de tiempo. A aquellas horas, empezaba ya a correrse la voz por todo el reino de Euclídea, de que el Doctor Círculo estaba transformando a sus pacientes en rectángulos con todo éxito.

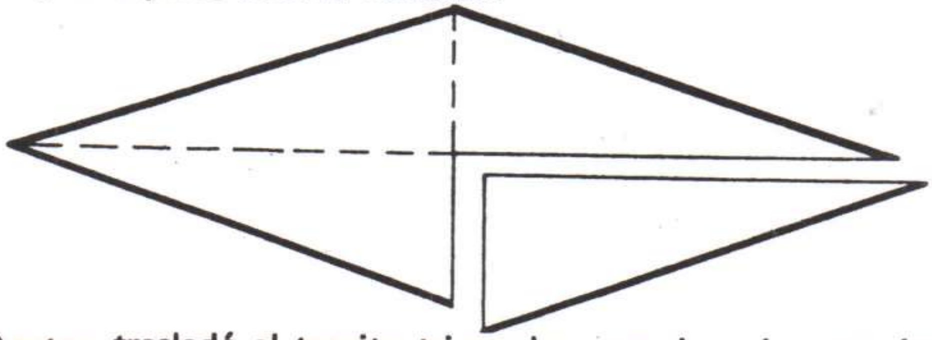
Después de los correspondientes exámenes previos, el Dr. Círculo hizo saber al rombo que lo encontraba muy sano y fuerte y que podía operarlo ese mismo día. Pronto se encontró el rombo acostado en la mesa de operaciones profundamente dormido.



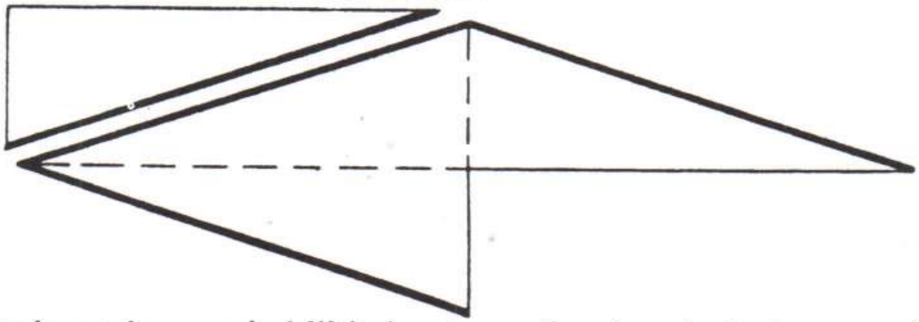
Lo primero que hizo el cirujano fue trazar con mercurocromo las dos diagonales del cuerpo del paciente:



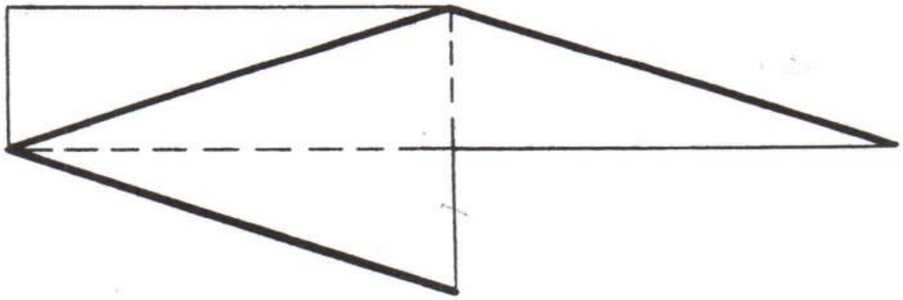
A continuación, procedió a cortar con pulso firme un trocito de forma de triángulo, en la parte inferior derecha:



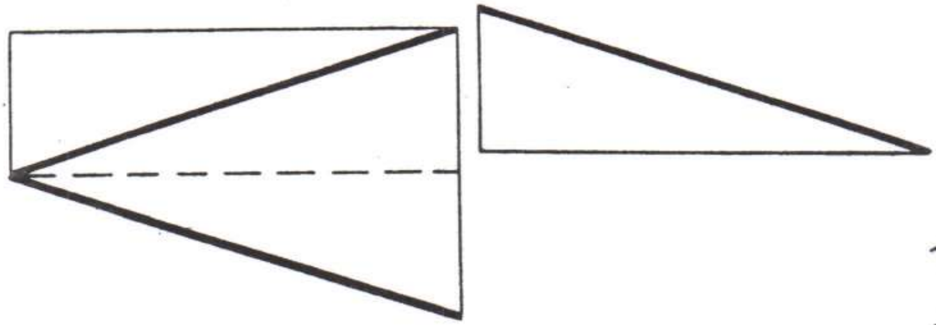
El Doctor trasladó el trocito triangular cortado, a la parte izquierda y por encima de su anestesiado paciente:



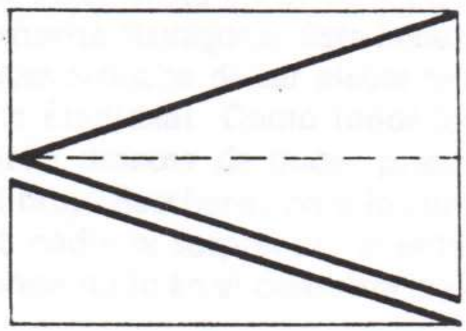
Desplegando una habilidad extraordinaria, el cirujano cosió el trocito cortado al cuerpo del paciente, en la parte superior izquierda:



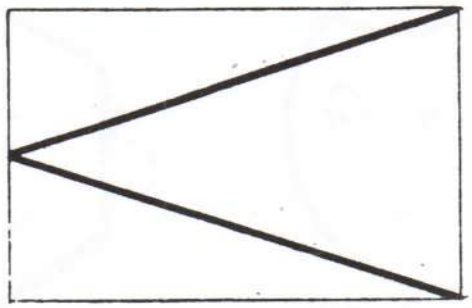
Después, el Dr. Círculo cortó cuidadosamente la porción triangular, de la parte derecha del cuerpo de su paciente:



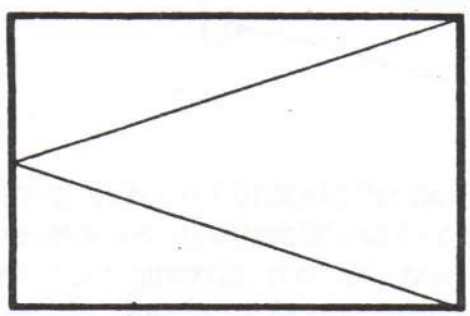
Este pedacito triangular se llevó a la parte izquierda del rombo y por debajo de éste:



Para terminar, el cirujano plástico cosió el segundo trocito triangular al cuerpo del rombo por debajo de éste y a la izquierda:



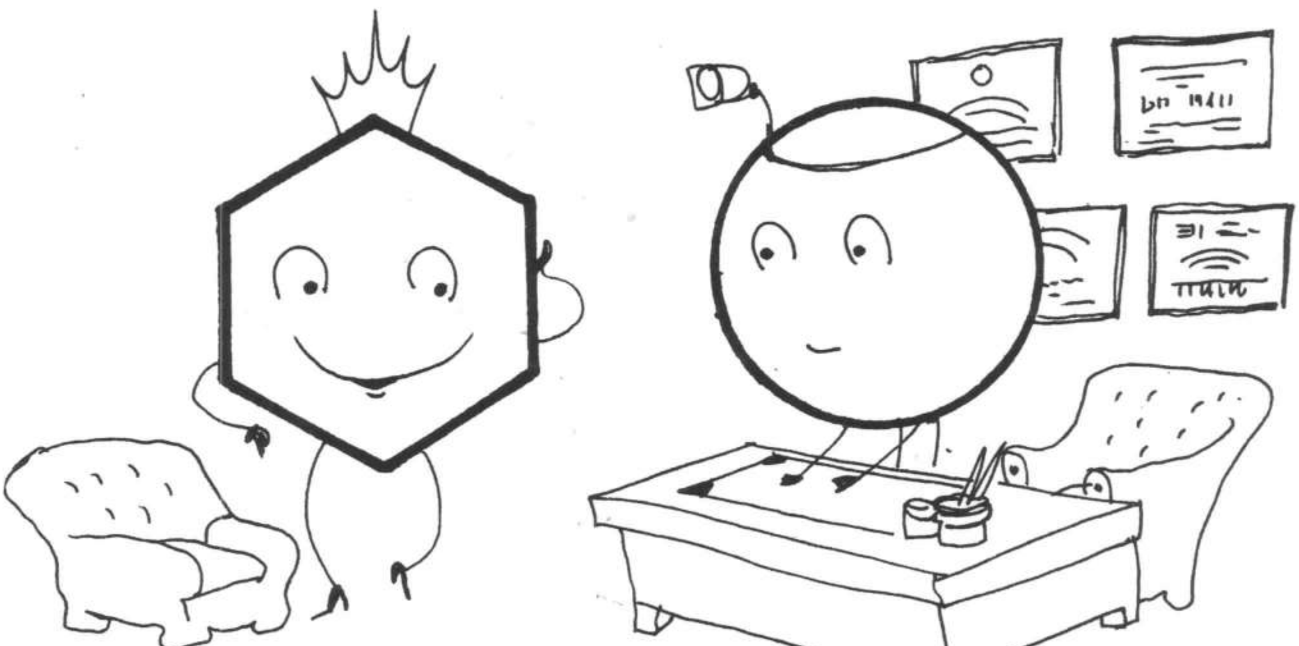
Eso fue todo. Cuando el tímido rombo despertó, no podía creer lo que veía en el espejo. Ya él no era un rombo. Era un rectángulo de muy buen ver, y tenía asegurada la entrada al gran baile del brujo Saccherio.



Con esta operación, el prestigio y la fama del Dr. Círculo se divulgaron por todos los rincones del país de Euclídea. Largas colas de figuras geométricas esperaban ser operadas por el renombrado médico y transformadas en hermosos rectángulos. Todos los pacientes atendidos por el Doctor Círculo quedaban satisfechos y felices con sus servicios. No hacían más que repetir por ahí que no podía haber cirujano plástico más competente.

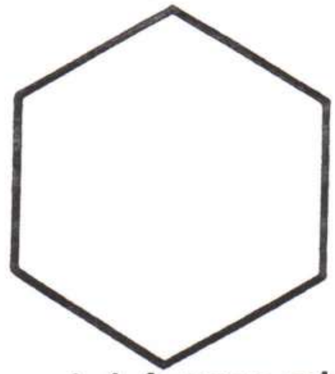
ooooo O ooooo

Muy pronto ocurrió lo que nadie se esperaba, ni podía imaginar. Al hospital donde atendía el especialista en cirugía plástica, se presentó nada menos que la bellísima Señorita Hexágono. Esta belleza nacional era siempre seguida por periodistas, pues acababa de ser electa reina de belleza del país. ¡Nada menos que Señorita Euclídea! Como todos los habitantes del reino, la Señorita Hexágono estaba deseosa de poder presentarse al gran baile de disfraces en el palacio del brujo Saccherio, para lo cual debía ser transformada en rectángulo. Por esto nadie se sorprendió al enterarse de la noticia. La Srta. Hexágono se había presentado en el consultorio del Doctor Círculo.

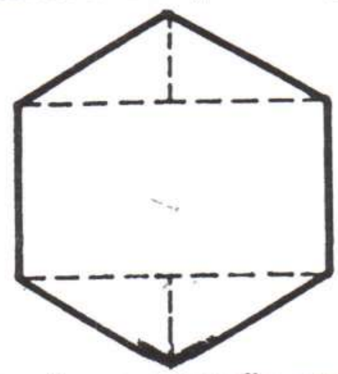


La linda Srta. Hexágono llegó al consultorio del Dr. Círculo un lunes. Después de los exámenes necesarios, el especialista le comunicó que su operación quedaba fijada para el día siguiente, martes, por la noche. Ella debería dormir esa noche en el hospital donde sería preparada para la delicada intervención quirúrgica a que iba a ser sometida. La muchacha recibió aquellas instrucciones muy contenta y se retiró a la habitación que le asignaron.

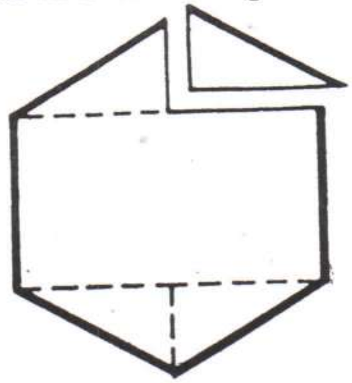
Al día siguiente, muy temprano en la mañana, la paciente fue trasladada a la sala de operaciones. En cosa de una hora dormía profundamente anestesiada. Así se veía la linda Srta. Hexágono cuando esperaba en el quirófano:



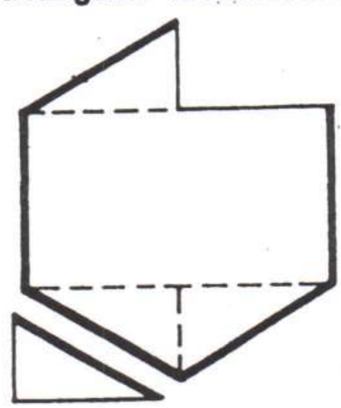
El cirujano trazó, con un desinfectante rojo, probablemente mercurocromo, varias líneas de puntos en el cuerpo de la paciente:



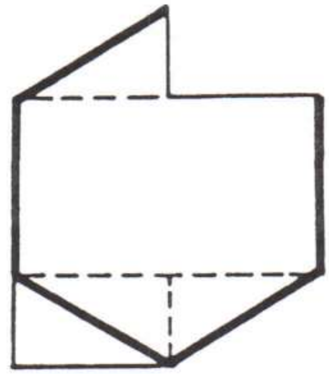
Luego cortó con su bisturí una pequeña porción triangular de la parte superior derecha del cuerpo de la Srta. Hexágono:



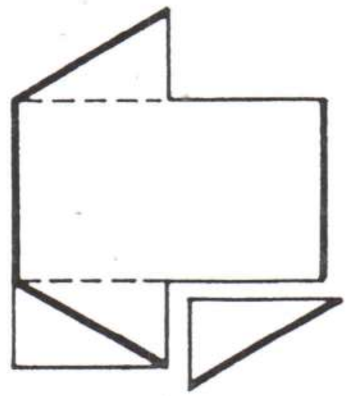
Esta pequeña porción triangular fue llevada a la parte inferior izquierda del cuerpo de la paciente.



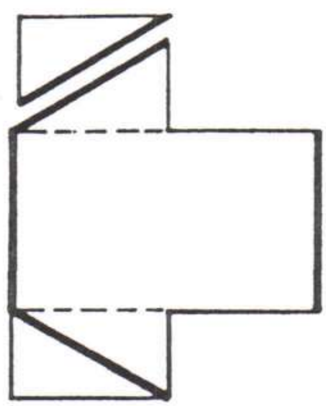
El cirujano se dedicó a coser ese pequeño trocito triangular al cuerpo anestesiado de la reina de belleza:



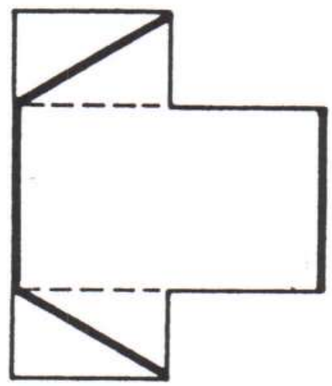
En la etapa siguiente de la operación, el cirujano plástico cortó y separó del cuerpo un pedacito de forma de triángulo, esta vez de la parte inferior derecha:



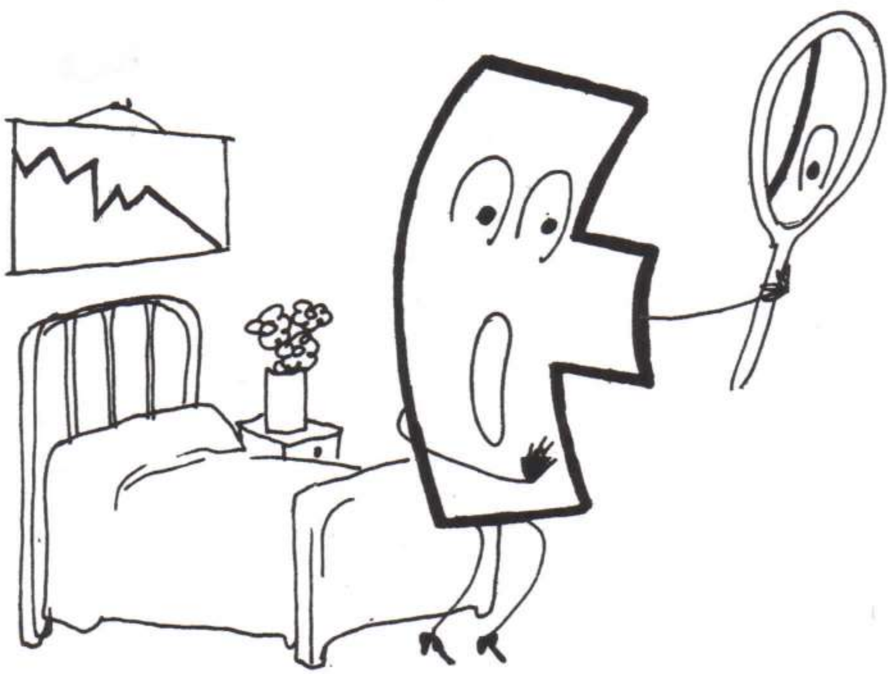
El pedacito triangular se trasladó a la parte superior izquierda del cuerpo de la Srta. Hexágono:



Lo más difícil había pasado. El médico se dedicó entonces a coser el segundo pedacito triangular al cuerpo de su paciente:



Cuando la Srta, Hexágono despertó y pidió un espejo para apreciar su nueva figura de rectángulo, lo que vio en vez de rectángulo fue esto:



Horrorizada, descubrió que no sólo no era ya la linda Srta. Hexágono, sino que, para colmo, no la habían transformada en un rectángulo, sino en una figura muy rara. No solamente había perdido su forma de hermoso hexágono con la cual había ganado el concurso de belleza. Además, la habían convertido en una figura muy extraña que, por supuesto, no sería admitida al gran baile del brujo Saccherio. Por ello empezó a dar unos gritos terribles.

— ¡Quiero ver ahora mismo al director de este hospital! — decía entre sollozos.

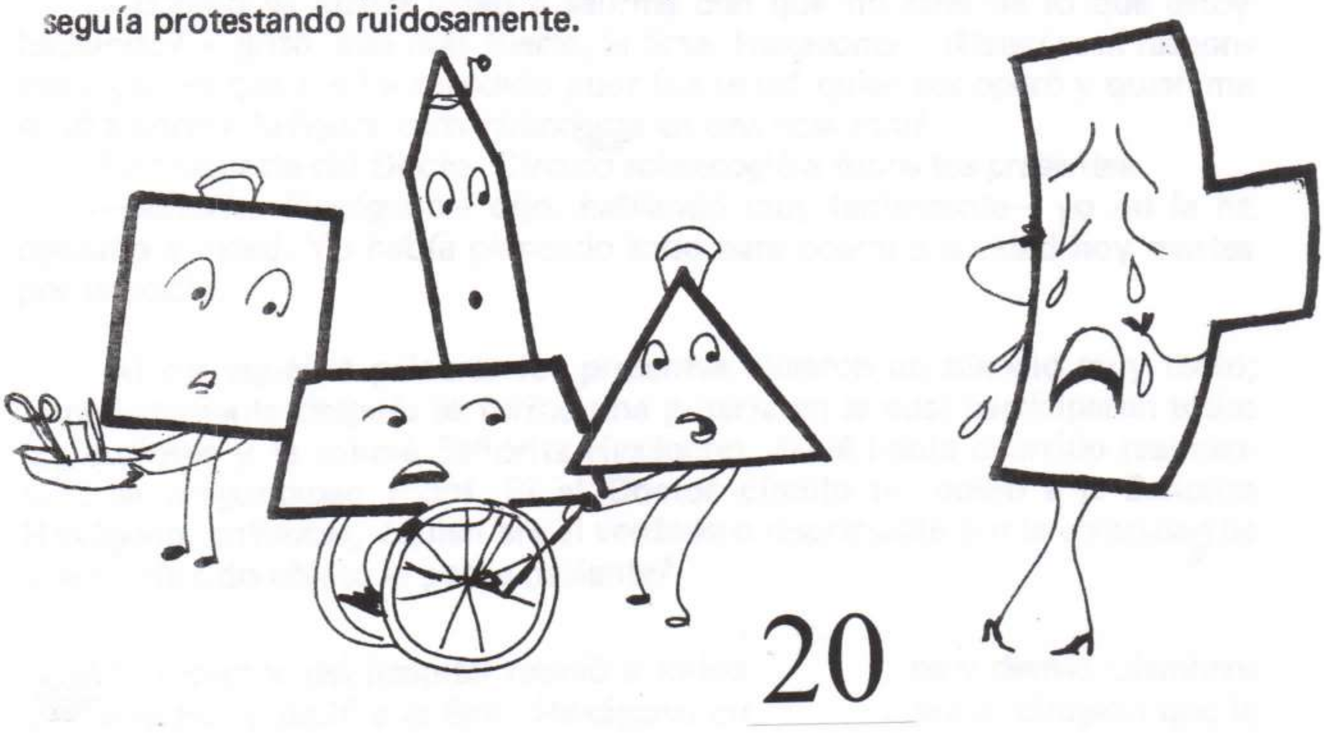
Poco después, atraída por el escándalo, apareció la enfermera responsable. —¿Qué desea usted Señorita . . .Señorita Hexágono? — preguntó sin saber cómo llamar a la paciente que ya no era ni hexágono, ni rectángulo.

— ¡Deseo quejarme de la barbaridad que me han hecho en este horrible hospital! — gritaba la Srta. Hexágono fuera de sí.

—Voy volando ahora mismo a darle su recado al Señor Director del Hospital— dijo horrorizada la enfermera, al ver aquel bicho raro en que habían transformado a la bellísima Señorita que había sido toda una reina de belleza.

Al oír aquel estruendo, un par de periodistas de los que siempre seguían los pasos de la reina de belleza de Euclídea, se presentaron en la habitación de la paciente, que ya no era hexagonal ni rectangular. Cuando vieron la figura que había quedado de su admirada reina de belleza, los periodistas corrieron a publicar sus artículos. Dieron a conocer a todos la barbaridad de que había sido víctima la Srta. Hexágono. Hasta incluyeron fotografías. El público, sin poder creer lo que veía, se dio cuenta de que la víctima de aquella torpeza había perdido su linda figura de hexágono. No tenía ya la forma de rectángulo que se requería para poder asistir al gran baile del brujo Saccherio. El impacto en la opinión pública fue tremendo. Todo el mundo hablaba indignado de lo ocurrido.

Mientras tanto, en el hospital, la que había sido la bella Srta. Hexágono, seguía protestando ruidosamente.



—¡Que me traigan ahora mismo al tal Doctor Círculo para decirle lo que pienso de él! — gritaba a voz en cuello.

Enfermos y enfermeras corrían en todas direcciones por los pasillos del hospital, que de pronto parecía haberse vuelto un manicomio. Todos estaban pendientes de aquel lío colosal y nadie pensaba ni hablaba de otra cosa.

Al fin sucedió lo que tenía que suceder. El Doctor Círculo se presentó en la habitación de la Srta. Hexágono. Al ver la nueva facha de aquella paciente que había sido una reina de belleza, exclamó muy sorprendido:

—¿Pero Señorita Hexágono, ¿qué le ha pasado a usted?

—¿Que qué me ha pasado? — contestó la paciente aun más furiosa— ¿Y viene precisamente usted a preguntarme qué cosa me ha pasado a mí? Pues me pasó que usted, el cirujano plástico más torpe, me operó y me transformó en una figura rarísima y no en un rectángulo.

Gran número de curiosos se había congregado en el pasillo y dentro de la habitación. Pacientes, enfermeras, enfermeros, periodistas, reporteros de la televisión, y otros muchos curiosos. Todos escuchaban aquella conversación, nerviosos y tensos.

—No sé de qué me está usted hablando, Srta. Hexágono— dijo el Doctor Círculo muy impresionado por lo que veía y por el escándalo que tenía que oír.

—¿Cómo se atreve usted a salirme con que no sabe de lo que estoy hablando? — gritó, aún más fuerte, la Srta. Hexágono— ¡Usted es el responsable por lo que me ha sucedido pues fue usted quien me operó y quien me echó a perder la figura convirtiéndome en una cosa rara!

La respuesta del Doctor Círculo sobrecogió a todos los presentes.

—Señorita Hexágono— dijo, hablando muy lentamente— yo no la he operado a usted. Yo había planeado todo para operarla a usted hoy martes por la noche.

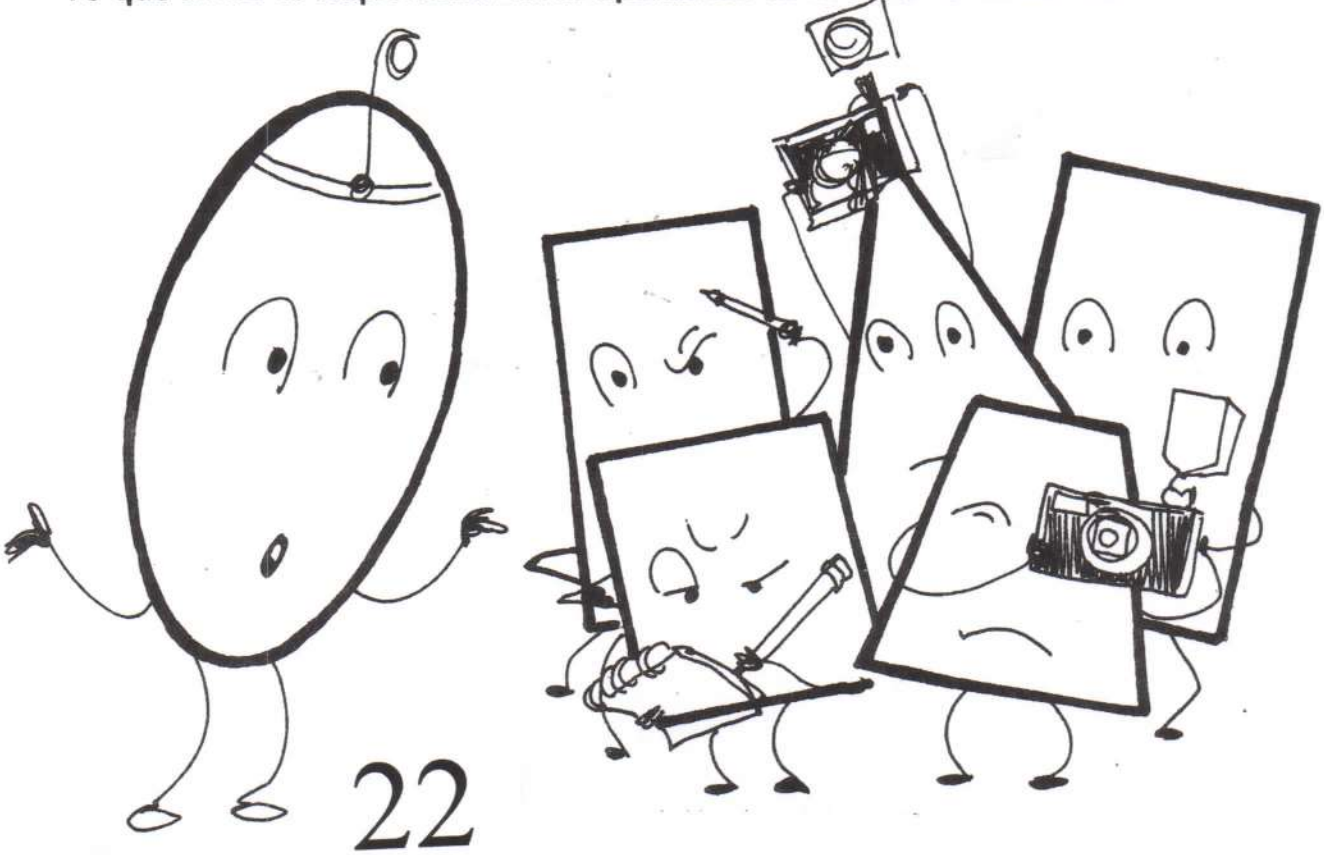
Al oír aquellas palabras los presentes hicieron un silencio muy tenso; inmediatamente después se formó una gritería en la cual participaron todos los curiosos y la misma Señorita Hexágono. ¿Qué había ocurrido realmente?, se preguntaban todos. Si el Doctor círculo no operó a la Señorita Hexágono, entonces, ¿quién era el verdadero responsable por la atrocidad de que había sido objeto la pobre paciente?

El Director del hospital reunió a todos los médicos y demás miembros del personal y pidió a la Srta. Hexágono que identificara al cirujano que la había operado aquella mañana. Mientras tanto, la prensa y la televisión de toda Euclídea publicaban noticias sobre el gran escándalo de aquella operación. Los titulares decían "IMPOSTOR SE HACE PASAR POR EL DOCTOR CIRCULO Y OPERA EN SU LUGAR", y cosas por el estilo.

Cuando todo el personal del hospital fue alineado frente a la Señorita Hexágono para que reconociera al cirujano que la había operado, ella recordó que no podía identificar al cirujano porque nunca lo vio. La exreina de belleza explicó que ella había sido llevada al quirófano muy temprano en la mañana. Se encontraba bajo los efectos de la anestesia, cuando el misterioso cirujano plástico llegó a operarla.

Otro revuelo en Euclídea. Esta vez los titulares de todos los periódicos decían cosas como "JAMAS SE SABRA QUIEN OPERO A LA SEÑORITA HEXAGONO"; "ANDA SUELTO UN IMPOSTOR QUE SE HACE PASAR POR EL DOCTOR CIRCULO"; "NUNCA SABREMOS QUIEN TRANSFORMO A NUESTRA REINA DE BELLEZA EN UNA RARA FIGURA"; "LA POLICIA BUSCA AL RESPONSABLE".

Entonces, para alivio de muchos, el responsable de la desafortunada operación de la Srta.Hexágono se entregó a las autoridades. A la oficina del jefe de la policía de Euclídea se presentó el Doctor Elipse muy triste. Declaró que él era el responsable de la operación de la exreina de belleza.



Aceptó que él se había presentado temprano en la mañana del martes a operar a la paciente sin permiso de las autoridades del hospital y había engañado a las enfermeras y a medio mundo. Se había hecho pasar por el Doctor Círculo.

Cuando le preguntaron al Doctor Elipse en su celda de la cárcel por qué había cometido aquella falta tan grave, siendo él un médico de reconocida competencia, explicó:

—Hice esto porque desde hace mucho tiempo soy admirador de la Srta. Hexágono. Al enterarme de que ella deseaba ser transformada en un rectángulo, decidí hacer algo por ella: transformarla, no en un simple rectángulo, sino en dos a la vez.

—¿Pero por qué se le ocurrió semejante idea? — le preguntaron— ¿Por qué convertirla en una rareza si lo que ella deseaba era convertirse en rectángulo?

—Reconozco que hice una gran tontería —repondió el Doctor Elipse— Pensé que si a la Srta. Hexágono la hacía feliz la idea de transformarse en un rectángulo, la haría aun más feliz el convertirse en dos rectángulos. Por eso, si ustedes se fijan bien en ella ahora, verán que actualmente luce como dos rectángulos puestos juntos.

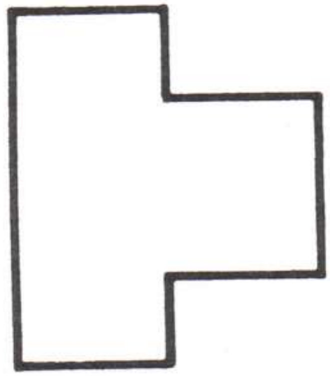
Naturalmente, aquellas explicaciones no tranquilizaron a los ciudadanos de Euclídea. Mientras tanto, la pobre Señorita Hexágono seguía tristísima. Había perdido su bella figura de hexágono. Se encontraba transformada en una figura muy rara, y, lo que era aun más triste para ella, sin esperanza de ser admitida al gran baile del brujo Saccherio.

Quien solucionó toda esta situación fue el Doctor Círculo.

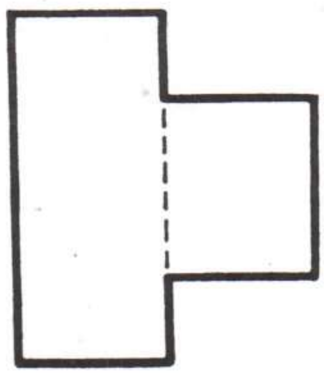
—Yo puedo remediar esto— dijo, tranquilizadoramente— les ofrezco operar nuevamente a la Señorita Hexágono y transformarla en un rectángulo, y en un rectángulo bellísimo.

La Señorita Hexágono, qué era muy valiente para eso de inyecciones, operaciones y médicos, supo de las palabras del cirujano plástico. Declaró en rueda de prensa que estaba dispuesta a someterse a una operación cuanto antes. Todo el mundo se alegró mucho cuando estas declaraciones se hicieron públicas, y sintió más admiración aún por la Señorita Hexágono.

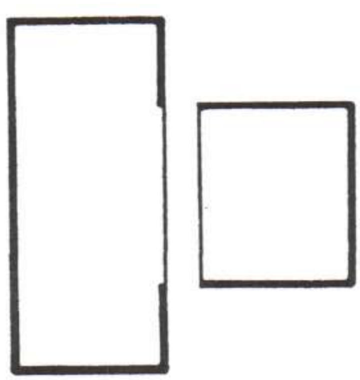
El día fijado para la segunda operación, la Srta. Hexágono, anestesiada en la mesa de operaciones, se veía así:



El Doctor Círculo trazó, con mucho cuidado, en el cuerpo de su paciente, una línea de puntos que mostraba a la exreina de belleza como dos rectángulos unidos.



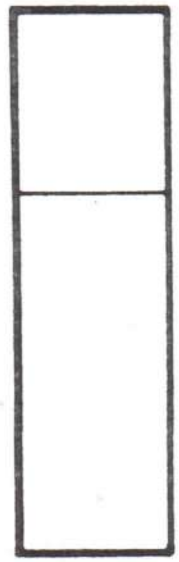
El cirujano procedió entonces a cortar con pulso certero por la línea de puntos y separó los dos rectángulos que componían el cuerpo de la paciente:



El médico trasladó el rectángulo menor a la parte superior del rectángulo mayor.

Para concluir, el Doctor Círculo mostró su habilidad de extraordinario cirujano plástico. Cosió los dos rectángulos pequeños y convirtió a su paciente en un bello rectángulo.

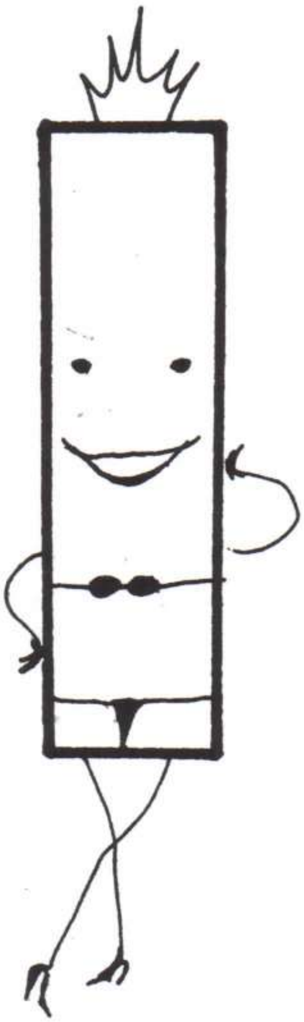
Pasados los efectos de la anestesia, la Señorita Hexágono se vio en un espejo y quedó de lo más contenta. Efectivamente, tal como el gran cirujano, el Doctor Círculo, había prometido, ella era ahora un rectángulo. Y no un rectángulo cualquiera, sino un rectángulo muy bello.



Afortunadamente, la Señorita Hexágono quedó muy bien después de su segunda operación. Otros muchos habitantes de Euclídea fueron operados por el Doctor Círculo y convertidos en rectángulos deseosos de presentarse al gran baile de disfraces en el palacio del buen brujo Saccherio.

El baile fue todo un éxito. El brujo Saccherio, quien vivía convencido de que no hay cosa más bella en este mundo que la forma del rectángulo, estuvo feliz. Hizo felices a todos sus amigos con una de las fiestas más espléndidas y lucidas dadas hasta aquella fecha. Todo estaban encantados con sus nuevas figuras rectangulares, obtenidas gracias a la chifladura del buen Saccherio, y a la pericia del Doctor Círculo.

Pero la más feliz, era la Señorita Hexágono. Ahora andaba por ahí convertida en un rectángulo esbelto, delgado, de muy buen ver. Aquí la tienen ustedes luciendo su mejor traje de baño de dos piezas:



Número

54

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

Número 54 (enero – mayo 2016)

ISSN – 1698-277X

ÍNDICE

Presentamos las soluciones a 4 problemas de nivel medio y de Olimpiadas del vol. 53 que ha enviado el estudiante Alex-Andrei Cioc, de Pitesti, Rumania.

Problemas 54

Problemas propuestos 271-275

Problemas resueltos

Problema 266

Propuesto por Andrés Sáez Schwedt (Univ. de León, España). Recibidas soluciones de Roberto Bosch Cabrera, Miami (Estados Unidos); Saturnino Campo Ruiz, Salamanca (España); Francisco Javier García Capitán, Priego de Córdoba (España); Bruno Salgueiro Fanego (2 soluciones, una trigonométrica y otra por coordenadas baricéntricas), Vivero, España; Titu Zvonaru y Neculai Stanciu, Rumania; y el proponente. Presentamos las soluciones de Campo y de García Capitán.

Problema 267

Propuesto por Laurentiu Modan, Bucarest (Rumania). Recibidas soluciones de Roberto Bosch Cabrera, Miami (Estados Unidos); Bruno Salgueiro Fanego, Vivero (España) y del proponente. Presentamos la solución de Salgueiro.

Problema 268

Propuesto por D.M. Batinetzu-Giurgiu, Bucarest, y N. Stanciu, Buzau (Rumania). Recibidas soluciones de: Roberto Bosch Cabrera, Miami (Estados Unidos); Elena Codeci, D. Codeci y D. Vacaru, Rumania (mejorando la cota inferior); Javier Cornejo Tejada, Lima (Perú); Paolo Perfetti, Dipartamento di Matematica, Universitá degli studi di Tor Vergata, Roma; Bruno Salgueiro Fanego, Vivero (España); Titu Zvonaru, Comanesti (Rumania) y los proponentes. Presentamos las soluciones de Codeci y de Cornejo.

Problema 269

Propuesto por el editor. Origen del problema: T.B.W. Spencer, *Mathematical Problem Papers, Methuen and Co. Londres 1943.* Recibidas soluciones de: Roberto Bosch Cabrera, Miami (Estads Unidos); Saturnino Campo Ruiz, Salamanca (España); Dones Colmenárez (Venezuela); Javier Cornejo Tejada, Lima (Perú); Francisco Javier García Capitán (con geometría de masas), Priego de Córdoba (España); Bruno Salgueiro Fanego (2 soluciones, una de ellas con coordenadas baricéntricas), Vivero (España); Cristóbal Sánchez-Rubio, Benicassim (España); Titu Zvonaru y Neculai Stanciu, Rumania. Presentamos las soluciones de Campo y de García Capitán.

Problema 270

Propuesto por el editor. Origen del problema: T,B.W. Spencer, Methuen and Co. Londres 1943. Recibidas soluciones de: Álvaro Begué Aguado (con Mathematica), Nueva York (Estados Unidos); Roberto Bosch Cabrera, Miami (Estados Unidos); Saturnino Campo Ruiz, Salamanca (España); Javier Cornejo Tejada, Lima (Perú); Bruno Salgueiro Fanego, Vivero (España); Cristóbal Sánchez Rubio, Benicassim (España); Albert Stadler, Herrliberg (Suiza); Titu Zvonaru y N. Stanciu, Rumania. Presentamos la solución de Bosch.

Reseña de libros, comentario de páginas web y noticia de congresos 54

F. Bellot: *De mi biblioteca (2)*

Divertimentos matemáticos 54

Otras informaciones

XXX Olimpíada Iberoamericana de Matemática

Juan Carlos Toscano. OEI
La semana que viene se celebra en Mayagüez, Puerto Rico, la XXX Olimpíada Iberoamericana de Matemática cuya promoción fue obra de María Falk de Losada y Jorge Cavodeassi. Un hito que merece ser comentado.

Más información [+]

Club Iberoamericano GeoGebra - IBERCIENCIA - IBERTIC 2015-2016

Reinicio de actividades 1 de noviembre de 2015. Gratuito. La Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura (OEI) desde sus Instituto Iberoamericano de TIC y Educación (IBERTIC) e Instituto Iberoamericano de Enseñanza de la Ciencia y la Matemática (IBERCIENCIA) invitan a los profesores y estudiantes iberoamericanos a incorporarse al Club GeoGebra Iberoamericano. Esta iniciativa cuenta con el apoyo e impulso de laConsejería de Economía e Innovación, de la Junta de Andalucía y la coordinación académica se lleva desde la Universidad de Córdoba (España) a través del profesor Agustín Carrillo

Más información [+]

VIII CIBEM Congreso Iberoamericano de Educación Matemática

Convoca la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática (FISEM) con el apoyo de la Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura OEI.
El Congreso Iberoamericano de Educación Matemática es responsabilidad de la Federación Iberoamericana de Educación Matemática (FISEM), que delega su organización en alguna de sus sociedades. Se realiza cada cuatro años, siendo la Junta de Gobierno de la FISEM quien designa al país anfitrión.
Será en Madrid del 10 al 14 de julio de 2017
Organizan: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas y Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas Emma Castelnuovo (SMPM)

Más información [+]

Realizado en el marco del **Instituto Iberoamericano de Enseñanza de las Ciencias y la Matemática (IBERCIENCIA)** con la colaboración de la **Consejería de Economía y Conocimiento de la Junta de Andalucía**

Ángulos e inversión

Francisco Javier García Capitán

10 de octubre de 2015

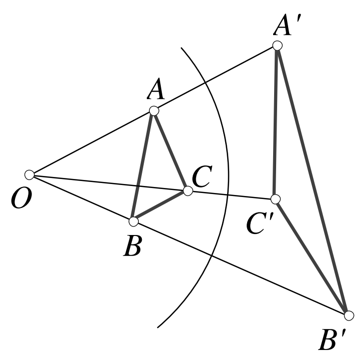
Resumen

Usamos la fórmula que relaciona ángulos en una inversión para solucionar algunos problemas de construcción.

Comenzamos estableciendo un teorema que relaciona los ángulos de dos figuras inversas (Johnson, §75, p. 52). Recordemos que $\measuredangle ABC$ indica el ángulo que debe girar la recta AB en sentido positivo hasta coincidir con la recta BC.

Teorema 1. *Si A', B', C' son los inversos de los puntos A, B, C y O es el centro de inversión, entonces*

$$\measuredangle ABC + \measuredangle A'B'C' = \measuredangle AOC.$$



Por un lado tenemos

$$\measuredangle ABO = \measuredangle OA'B' = \measuredangle A'OB' + \measuredangle OB'A',$$

y por otro,

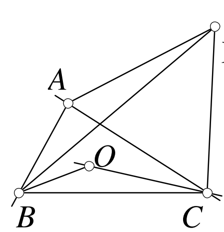
$$\measuredangle OBC = \measuredangle B'C'O = \measuredangle C'B'O + \measuredangle B'OC'.$$

Sumando,

$$\begin{aligned}
\measuredangle ABC =& \measuredangle ABO + \measuredangle OBC \\
=& (\measuredangle A'OB' + \measuredangle OB'A') + (\measuredangle C'B'O + \measuredangle B'OC') \\
=& (\measuredangle A'OB' + \measuredangle B'OC') + (\measuredangle C'B'O + \measuredangle OB'A') \\
=& \measuredangle A'OC' + \measuredangle C'B'A' \\
=& \measuredangle AOC - \measuredangle A'B'C'.
\end{aligned}$$

Consideremos el caso en que $A'B'C'$ es equilátero:

Problema 1. *Dados un triángulo ABC, hallar el centro de una inversión que transforma sus vértices en los vértices de un triángulo equilátero.*



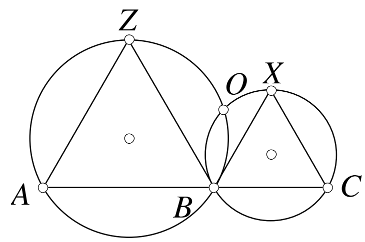
Solución. Según el Teorema 1, se cumple $\measuredangle BOC = \measuredangle BAC + 60°$, y lo mismo $\measuredangle COA = \measuredangle CBA + 60°$ y $\measuredangle AOB = \measuredangle ACB + 60°$, por lo que O debe ser uno de los puntos isodinámicos, puntos de intersección de las circunferencias de Apolonio.

Problema 2. *Dados tres puntos alineados, hallar el centro de una inversión que los transforme en los vértices de un triángulo equilátero.*

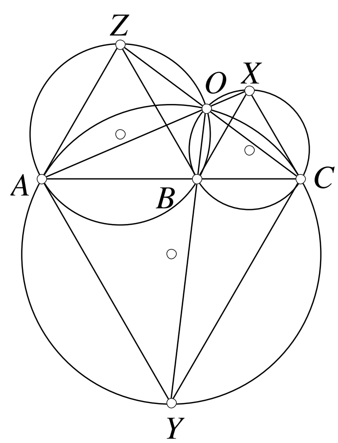
Sean A, B, C los tres puntos, y O el centro de inversión. Aplicando el Teorema 1, deben cumplirse

$$\measuredangle AOB = \measuredangle ACB + \measuredangle A'C'B' = 0° + 60° = 60°,$$
$$\measuredangle BOC = \measuredangle BAC + \measuredangle B'A'C' = 0° + 60° = 60°,$$

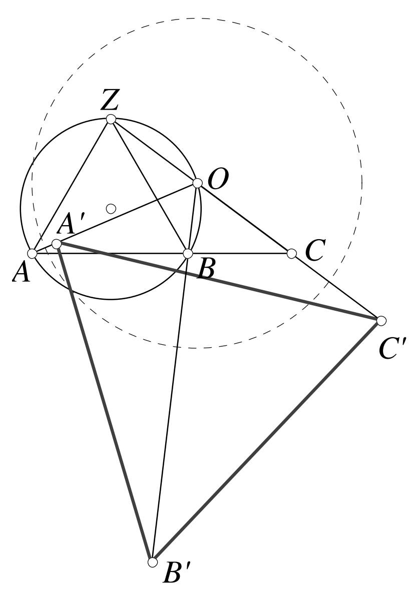
por lo que O será el punto común a dos circunferencias circunscritas a triángulos equiláteros ZAB y XBC levantados sobre AB y BC respectivamente.



Como también es $\measuredangle COA = 60°$, el punto O también está sobre la circunferencia circunscrita al triángulo YCA levantado sobre CA:

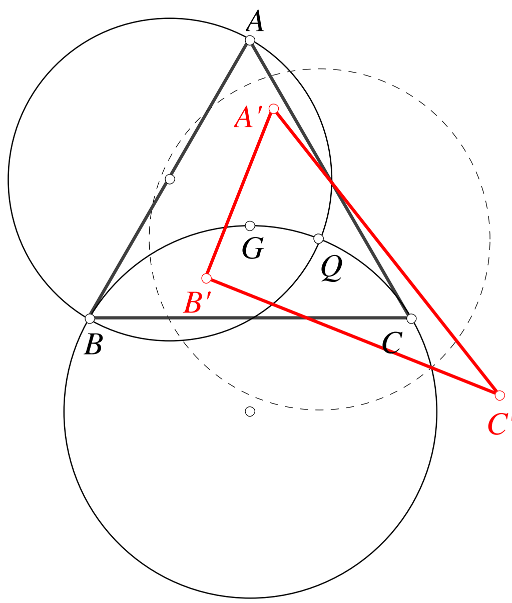


Observamos que O está sobre las rectas AX, BY y CZ, ya que, por ejemplo, $\angle AOB = 60°$ y $\angle XBC = 120°$. Entonces una de las circunferencias será suficiente para hallar el punto O:



Para terminar observemos cómo el Teorema 1 permite transformar por una inversión los vértices de un triángulo dado en un triángulo semejante a uno dado.

Problema 3. *Transformar por una inversión los vértices de un triángulo equilátero en los vértices de un triángulo* $30° - 60° - 90°$.



Para concretar, sea ABC el triángulo equilátero, y busquemos un centro de inversión Q que consiga que $A' = 60°$, $B = 90°$ y $C' = 30°$. Debe ser $\measuredangle CQB = \measuredangle CAB + \measuredangle C'A'B' = 60° + 60° = 120°$ y $\measuredangle BQA = \measuredangle BCA + \measuredangle B'C'A' = 60° + 30° = 90°$. Entonces podemos obtener el punto Q como intersección de la circunferencia BCG, siendo G el baricentro del triángulo ABC, y la circuferencia con diámetro AB.

Referencias

[1] Roger A. Johnson, *Advanced Euclidean Geometry*. Dover Publications. 2007 (Reimpresión).

Presentación del Prof. Pierre Lapôtre, por F. Bellot

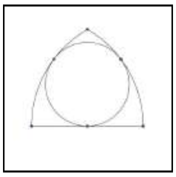
El Prof. Pierre Lapôtre es un asistente habitual al Congreso anual de la Sociedad Belga de Profesores de Matemáticas de habla francesa, donde hemos coincidido varios años. El pasado mes de Agosto, en Mons, ofreció un taller titulado *Problemas de agrimensores*, con un éxito de público tal que hubo de ser trasladado a un local más amplio. Cuando le propuse traducirlo para la REOIM, aceptó con mucho gusto y de ahí que en el presente Vol. 54 de la REOIM incluyamos esa traducción.

Antiguo alumno del IPES de Lille (Institut de Préparation à l'Enseignement Secondaire), Agregé de Matemáticas actualmente en situación de retiro, pero continúa prestando su concurso en el IREM de Lille (Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques), formando parte del grupoAMECMI (Actividades Matemáticas en Clase con Medios Informáticos). Estas actividades son accesibles en la página web del IREM de Lille y también en www.gradus at mathematicam .

Estoy seguro de que los lectores de la REOIM apreciarán el estilo (muy francés) de este excelente geómetra.

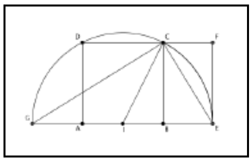
Valladolid, diciembre de 2015.

F. Bellot



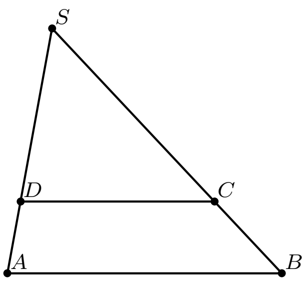
Problemas de agrimensores

Declaraciones

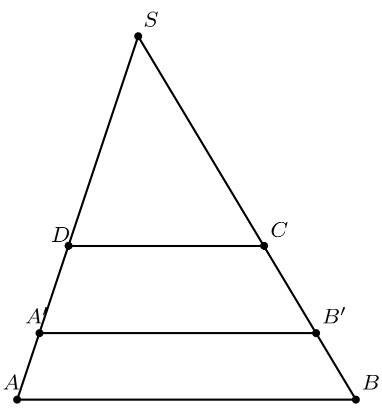


Presentación :
El libro « Histoires de géomètres. . . et de géométrie » (´Editions Le Pommier), escrito por Jean-Louis Brahem, arquitecto, aporta, sobre problemas de geometría, una luz diferente de la que se encuentra habitualmente en los manuales de matemáticas para los colegios y liceos.
El propósito de este taller es estudiar algunos de los problemas presentados en esta obra, proponiendo justificaciones accesibles al mayor número de alumnos.

I.- Dividir, mediante un segmento paralelo a una de sus bases, un triángulo en dos superficies iguales.
SAB es un triángulo. Se buscan $D \in [SA]$ y $C \in [SB]$, tales que $(DC)//(AB)$ de suerte que el área del triángulo SCD sea igual a la del trapecio $ABCD$.

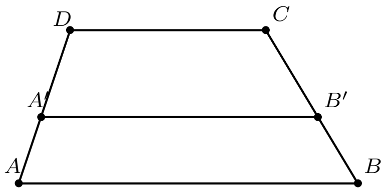


II.- Dividir, mediante dos segmentos paralelos a una de sus bases, un triángulo en tres superficies iguales.

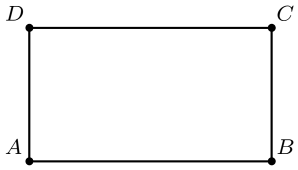


Observación : El trapecio $ABCD$ es, en este caso, un trapecio babilónico. Está dividido por el segmento $[A'B']$ en dos trapecios de la misma área.

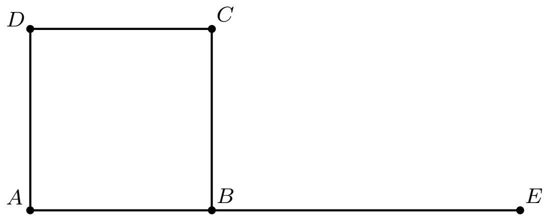
III.- Trapecio babilónico.
´Dado un trapecio $ABCD$ con $(AB)//(DC)$, se buscan $A' \in [AD]$ y $B' \in [BC]$ con $(A'B')//(AB)$ de suerte que los trapecios $ABB'A'$ y $A'B'CD$ tengan la misma área.



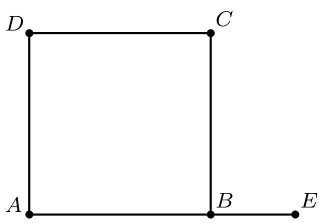
IV.- Cuadratura de un rectángulo.
Construir un cuadrado cuya área es la misma que la de un rectángulo dado.



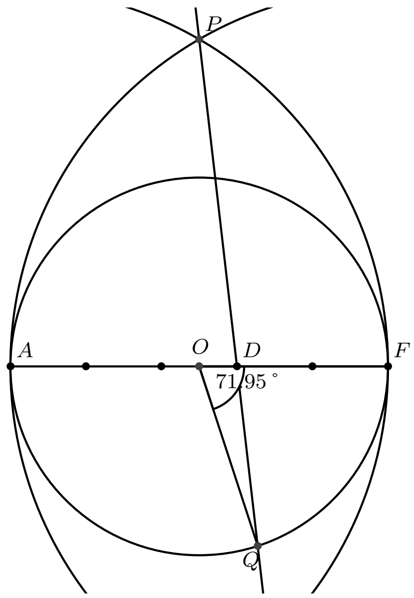
V.- Dado un cuadrado de lado c , construir un rectángulo de la misma área cuya longitud L es dada. $L \geqslant c$



VI.- Dado un cuadrado de lado c , construir un rectángulo de la misma área cuya anchura l es conocida. $0 < l \leqslant c$



VII.- El pentágono del joyero.
Un jardinero quiere hacer un macizo en forma de pentágono regular inscrito en una circunferencia. Utilizará para su trazado el método del joyero.
« El joyero dibuja una circunferencia, divide su su diámetro en cinco partes iguales, luego traza dos arcos de círculo con centros en sus extremos y de radio igual al diámetro de la circunferencia. Une su intersección a la segunda marca y así encuentra el lado del pentágono »



El Ministerio de Defensa de los Estados Unidos tiene forma de pentágono regular de 280 m de lado. Está inscrito en una circunferencia de radio r que verifica :

$$280^2 = r^2 + r^2 - 2r^2\cos 72^\circ \quad \text{sabiendo que} \cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \text{se deduce que}$$
$$280^2 = r^2\left(2 - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$$
$$280^2 = r^2\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)$$

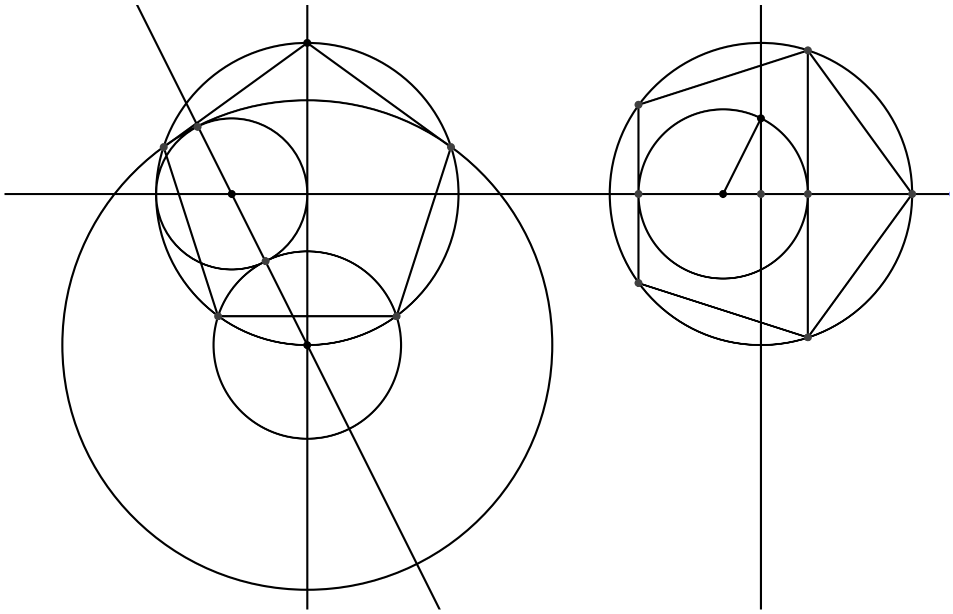
Es decir $r \approx 238,1822$ m.
Para una circunferencia de ese radio, por el método del joyero se obtiene un lado c que verifica :

$$c^2 = r^2 + r^2 - 2r^2\cos 71,95^\circ$$
$$= r^2(2 - 2\cos 71,95^\circ)$$

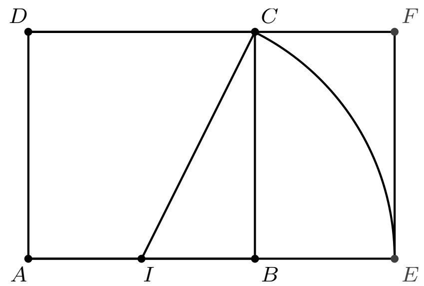
Eso da $c \approx 279,8318$ m. Faltarían 16,82 cm.

Observación : $\cos 72^\circ = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ resulta del siguiente resultado :
para todo x real, $1 - \cos 5x = (1-\cos x)(4\cos^2 x + 2\cos x - 1)^2$.

Dos métodos para hacer una construcción exacta :



VIII.- Rectángulo de oro, escuadra de plata.
$ABCD$ es un cuadrado de lado 1.
I es el punto medio de $[AB]$.
E es el punto de (AB), sobre la semirrecta de origen B que no contiene a A, tal que $IE = IC$.
F es la intersección de (DC) con la perpendicular a (AB) que pasa por E.
$AEFD$ es un rectángulo llamado *rectángulo de oro*.

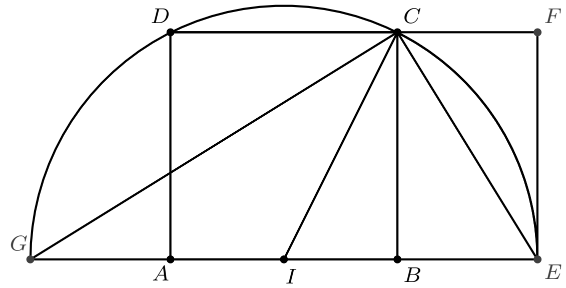


En efecto, $IC^2 = IB^2 + BC^2$ o sea $IC^2 = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$, de donde $IC = \frac{\sqrt{5}}{2}$, como $IE = IC$ y $AI = \frac{1}{2}$, se tiene :

$$AE = AI + IC = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$$

φ es el *número de oro*.
La razón entre la *longitud* y la *anchura* en el rectángulo $AEFD$ es efectivamente φ, de ahí su nombre.
El número de oro verifica $\varphi^2 - \varphi = 1$ es decir, $\varphi = \frac{1}{\varphi - 1}$ lo que da : $\frac{AE}{AB} = \frac{AB}{BE}$.
« AE es a AB como AB es a BE ».

Se puede volver a obtener este resultado considerando la semicircunferencia de centro I de origen E, que pasa por C.
Sea G la intersección de ese semicírculo con (AB).

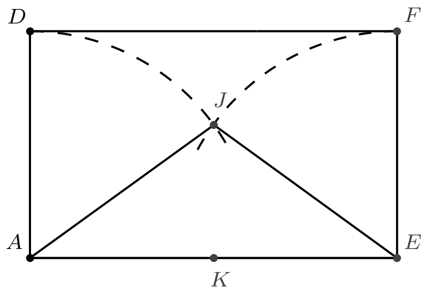


En el triángulo rectángulo ECG, $[CB]$ es la altura desde de C. Se tiene :

$$CB^2 = GB \times BE \text{ o } CB = AB \; y \; GB = AE$$

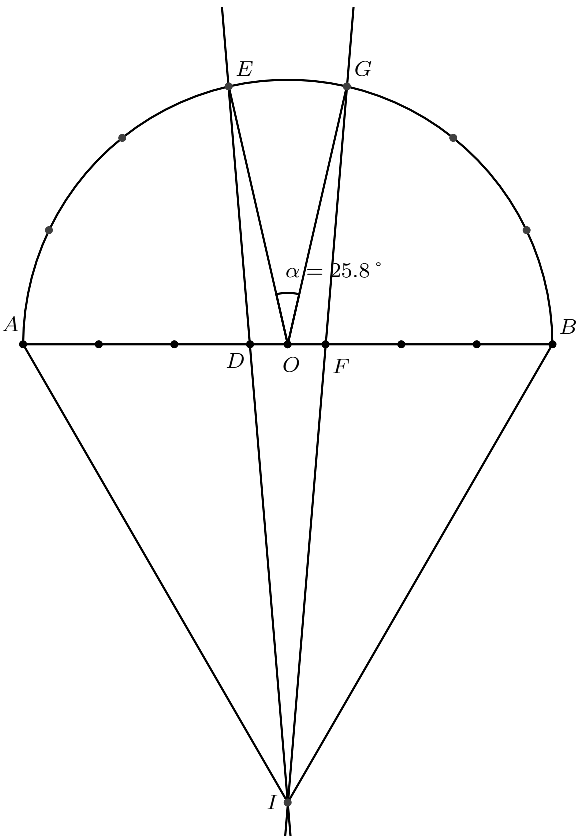
de donde $AB^2 = AE \times BE$.

Los arcos de círculo de centros respectivos E y A, de radio 1 se cortan en el interior del rectángulo $AEFD$ en J.



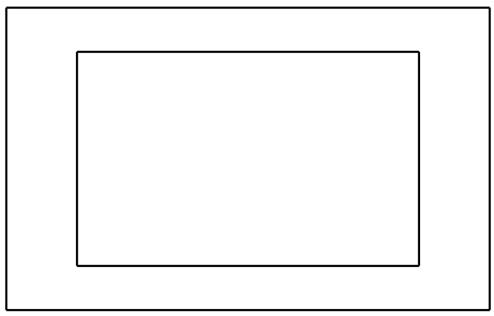
El triángulo isósceles AEJ es une representación de la *escuadra de plata*. Es la que permite el trazado del pentágono regular.
Se comprueba que el ángulo $\widehat{AJE}$ mide 108 ˚ . En efecto, elángulo $\widehat{AEJ}$ tiene como coseno $\dfrac{\varphi}{2}$ lo que demuestra que su medida es 36 ˚ , de donde el resultado.

IX.- Metodo aproximado para dividir un ángulo llano en siete partes iguales.
Antiguamente útil para trazar el ábside de una abadía de siete capillas

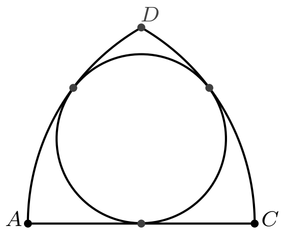


El diámetro $[AB]$ de un semicírculo de centro O se divide en siete partes iguales. Para eso, se sitúan seis marcas en el segmento $[AB]$. Sean D y F la tercera y cuarta marcas.
En el semiplano de frontera (AB) que no contiene al semicírculo, se trazan dos arcos de círculo de centros respectivos A y B, de radio AB. Se cortan en I.
Las rectas (ID) e (IF) cortan al semicírculo en E y G.
Entonces, el ángulo $\widehat{EOG} \approx 25,8\,^\circ$, que difiere poco de $\dfrac{180\,^\circ}{7}$.

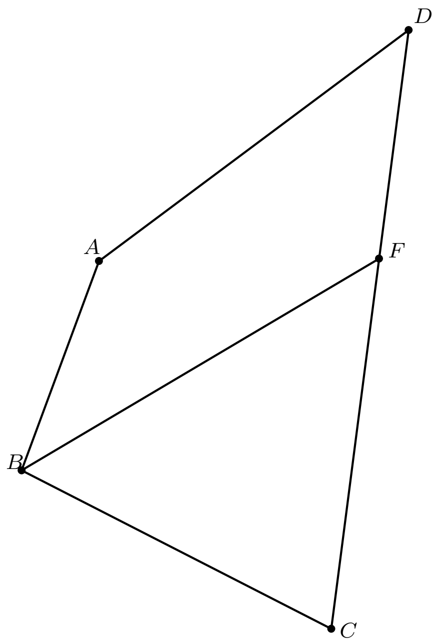
X.- El claustro rectangular
En el interior de un claustro debe acomodarse un espacio rectangular. Se prevé una zona rectangular central con césped, rodeada de un paseo de bordes paralelos. Se desea que el paseo y el prado central tengan la misma área. Se espera que este equilibrio sea propicio a la meditación.
En el interior de un rectángulo, trazar un rectángulo de lados paralelos al primero, cuya área sea la mitad de la del rectángulo inicial.



XI.- Rosetón entre dos arcos y un dintel.
Se da un segmento $[AC]$. Se trazan los arcos de círculo de radio AC, de centros respectivos A y C. Sea D uno de los puntos de intersección de los dos arcos.
Trazar una circunferencia tangente a los dos arcos y al segmento $[AC]$.



XII.- Dividir un cuadrilátero cualquiera en dos superficies iguales, por medio de un segmento con origen en uno de los vértices.
$ABCD$ es un cuadrilátero. Se busca un punto F, sobre $[AD]$ o sobre $[DC]$, tal que $[BF]$ divida al cuadrilátero en dos superficies de la misma área.



1. Considere un triángulo cuyos lados miden 1, r y r^2
valores de r de manera tal que el triángulo sea rect

2. Considere tres puntos en el interior de un cuadrado
que el área del triángulo que forman es menor o igu

3. Encuentre todos los valores enteros positivos de
ecuación

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}=2009$$

Dos problemas propuestos al Banco de la Olimpiada Centroamericana y del Caribe 2015

1. **Si un ángulo de un cuadrilátero cíclico es igual al que forman sus diagonales, entonces dos lados consecutivos del cuadrilátero son iguales, y recíprocamente.**

2. **Si** a **y** b **son números reales positivos, demostrar que**

$$\frac{(a-b)^2}{2\,(a+b)} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} - \sqrt{ab} \leq \frac{(a-b)^2}{\sqrt{2}\,(a+b)}.$$

Tres problemas de la Olimpiada de Chile 2009, Nivel Menor

Cioc Alex-Andrei, Pitesti

PMJ53_1: Un numero natural A lo llamanos ”super 3” si la suma de sus cifras e stres veces mayor que la suma de las cifras del numero A + 1.

Hallar todos los numeros ”super 3” que tienen a lo sumo 4 cifras.

PMJ53_1 – Solution:

Because the sum of digits of A is divisible by 3, A must be divisible by 3 too. This sum is bigger than the sum of digits of A + 1, so the last digit of A is 9.

Let us note s(n) the sum of digits of n.

We have 4 cases:

a) A has only one digit => A = 9 => s(A) = 9.

A + 1 = 10 => s(A + 1) = 1 => s(A) = 9s(A + 1), it is not a solution

b) A has two digits => A € {39, 69, 99}.

A = 39 => s(A) = 12, s(A + 1) = 4 => s(A) = 3s(A + 1) => A = 39 is a solution.

A = 69 => s(A) = 15, s(A + 1) = 7, it is not a solution.

A = 99 => s(A) = 18, s(A + 1) = 1, it is not a solution.

c) A has three digits
   a. The second digit is not 9 => s(A) – s(A + 1) = 8
      s(A + 1) + 8 = 3s(A + 1) => s(A + 1) = 4 => A + 1 € {130, 220, 310, 400} ⇔ A € {129, 219, 309, 399}, but the second digit of 399 is 9.
   b. The second digit is 9 => s(A) – s(A + 1) = 17 => s(A + 1) + 17 = 3s(A + 1) => 2s(A + 1) = 17, contradiction.
   c. A = 999 => A + 1 = 1000 => s(A) = 27s(A + 1), it is not a solution.

d) A has four digits
   a. The third digit is not 9 =>s(A) – s(A + 1) = 8
      s(A + 1) + 8 = 3s(A + 1) => s(A + 1) = 4 => A + 1 € {1030, 1120, 1210, 1300, 2110, 2020, 2200, 3010, 3100, 4000}⇔ A €{1029, 1119, 1209, 1299, 2109, 3009, 3099, 2009, 2199, 3999} but 1299, 3099, 2199, 3999 are not solutions.
   b. The third digit is 9

b.1. The second digit is not 9 => $s(A) – s(A + 1) = 17$ =>$s(A + 1) + 17 = 3s(A + 1)$ => $2s(A + 1) = 17$, contradiction.

b.2. The second digit is 9 => $s(A) – s(A + 1) = 26$ =>$s(A + 1) = 13$, but $A + 1$ has last three digits 0, so $s(A + 1) \le 9$ =>contradiction.

c. $A = 9999$ => $A + 1 = 10000$ => $s(A) = 9999s(A + 1)$, it is not a solution

In conclusion, the solutions are: 39, 129, 219, 309, 1029, 1119, 1209, 2109, 3009, 2009.

Cioc Alex-Andrei, Pitesti

PMJ53_2: Demonstrar que la fraction

$$\frac{2013^{2013}-2013^{2012}-2013^{2011}}{2012^{2013}-2012^{2012}-2012^{2011}-2013}$$

No es irreductible.

PMJ53_2 – Solution:

$2013^{2013} - 2013^{2012} - 2013^{2011} = 2013^{2011} (2013^2 - 2013 - 1)$

Let us note u(n) the last digit of the natural number n.

$u(2013^2 - 2013 - 1) = u(9 - 3 - 1) = 5 \Rightarrow 5 \mid 2013^{2013} - 2013^{2012} - 2013^{2011}$ **(1)**

$2012^{2013} - 2012^{2012} - 2012^{2011} - 2013 = 2012^{2011} (2012^2 - 2012 - 1)$

$u(2012^2 - 2012 - 1) = u(4 - 2 - 1) = 1 \Rightarrow u(2012^{2011} (2012^2 - 2012 - 1)) = u(2012^{2011}) = 8 \Rightarrow u(2012^{2013} - 2012^{2012} - 2012^{2011} - 2013) = u(8 - 3) = 5 \Rightarrow 5 \mid 2012^{2013} - 2012^{2012} - 2012^{2011} - 2013$ **(2)**

From (1) and (2) we obtain that the fraction is reductible by 5.

Cioc Alex-Andrei, Pitesti

PMJ53_3:

a) Descompuner el numero 2012 en suma de numeros naturales consecutivos
b) Descompuner el numero 2012 en suma de numeros naturales pares consecutivos
c) Descompuner el numero 2012 en suma de numeros naturales impares consecutivos

PMJ53_3 – Solution:

a) 2012 = 248 + 249 + 250 + 251 + 252 + 253 + 254 + 255.
b) 2012 = 500 + 502 + 504 + 506.
c) 2012 = 1005 + 1007.

Cioc Alex-Andrei, Pitesti

PMJ53_4: El area de un rectangulo es $2m^2$. Si se aumenta la longitud y la anchura en 2m, el area aumenta en $8m^2$. Hallar el perimetro del rectangulo inicial.

PMJ53_4 – Solution:

Let us note L the length and l the width of the rectangle.

$L \cdot l = 2m^2$.

$(L + 2m)(l + 2m) = 2 + 8 = 10m^2 \Leftrightarrow L \cdot l + 4m^2 + 2m \cdot (L + l) = 10m^2 \Leftrightarrow 2m \cdot (L + l) = 4m^2 \Leftrightarrow L + l = 2m$.

$(L + l)^2 = 4m^2 \Leftrightarrow L^2 + l^2 + 2L \cdot l = 4m^2 \Leftrightarrow L^2 + l^2 = 4m^2 - 4m^2 = 0$, but $L^2 > 0$ and $l^2 > 0 \Rightarrow L = l = 0$, contradiction.

In conclusion, the respectively rectangle cannot exist.

Problemas de nivel medio y de olimpiadas 54

REPÚBLICA DE MOÇAMBIQUE
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DESENVOLVIMENTO HUMANO
DIRECÇÃO NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

Olimpíada Provincial de Matemática 2015

1. Sejam x e y números reais positivos satisfazendo as equações $x^2 + y^2 = 1$ e $x^4 + y^4 = \frac{17}{18}$. Calcule o valor de $\frac{1}{xy}$.
2. Determine todos os inteiros positivos $\boldsymbol{m}$ e $\boldsymbol{n}$ tais que: $m^2 + 161 = 3^n$.
3. Um trapézio *ABCD*, com lados paralelos *AB* e *CD*, está inscrito em uma circunferência de raio 25. Sabe-se que *CD* é um diâmetro e a altura desse trapézio é 24. Seja *E* um ponto no arco menor determinado por *A* e *B* e sejam *F* e *G* os pontos de intersecção de *ED* e *EC* com *AB*, respectivamente. Calcule $\frac{AF \cdot BG}{FG}$.
4. Determine todos os pares $(a; b)$ de inteiros positivos tais que $ab^2 + b + 7$divide $a^2b + a + b$.

Cioc Alex-Andrei, Pitesti, Romania

NM53_1: Probar que si $a^2 + b^2 + c^2$, entonces $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \leq 3$.

NM53_1 – Solution:

We have $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$, but $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, so

$$\left.\begin{array}{l}(a + b + c)^2 = 1 + 2(ab + bc + ca) \\ \\ (a + b + c)^2 \geq 0\end{array}\right\} \Rightarrow \quad 1 + 2(ab + bc + ca) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2(ab + bc + ca) \geq -1 \ \mathbf{(1)}$$

$$\begin{aligned}(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 &= 2(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab + bc + ca) \\ &= 2 - 2(ab + bc + ca) \qquad \mathbf{(2)}\end{aligned}$$

Suming (1) and (2) we obtain $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \leq 2 - (-1) = 3$, and the problem is solved.

Cioc Alex-Andrei, Pitesti

NM53_2: Probar quenoexistenenterospositivos m y n talesque2(m^2 + mn + n^2)sea un cuadradoperfecto.

NM53_2 – Solution:

Wesupposethat $2(m^2 + mn + n^2)$ is a perfect square.

Let p be a natural numbersuchthat $2(m^2 + mn + n^2) = p^2$.

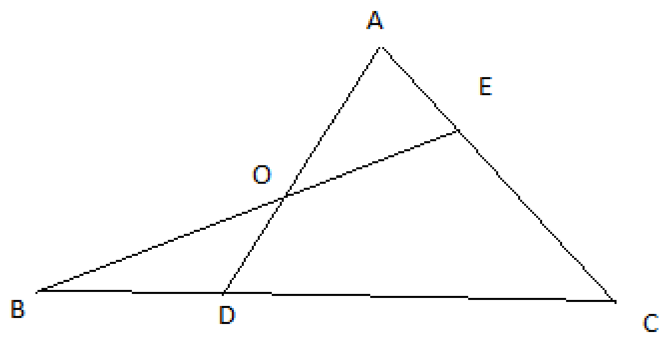
Wehave $2 \mid p^2 \Leftrightarrow \quad 2^{2k} \mid p^2$, where $k \in N^*$, so $2^{2k} \mid 2(m^2 + mn + n^2) \Leftrightarrow$ $2^{2k-1} \mid (m^2 + mn + n^2)$**(1)**

$2k - 1 > 0 \Rightarrow 2 \mid m^2 + mn + n^2$, relationpossibleonlyif m and n are botheven. In this case, theexponent of 2 in thenumbers m^2, mn, n^2iseven, sothe exponent of 2 in $(m^2 + mn + n^2)$ iseven, contradictionwithrelation**(1)** =>the assumptionis false => $2(m^2 + mn + n^2)$ cannotbe a perfect square.

Cioc Alex-Andrei, Pitesti

NM53_3: En el triangulo ADC, E es un punto del lado AC, O es un punto del lado AD y la recta EO a la recta DC en un punto B mas alla de D. Se sabe que BD/DC = 4/7 y que AE/EC = 2/3. Calcular AO/OD.

NM53_3 – Solution:



In triangle ABC we have the transversal B-O-E => (Menelaus)

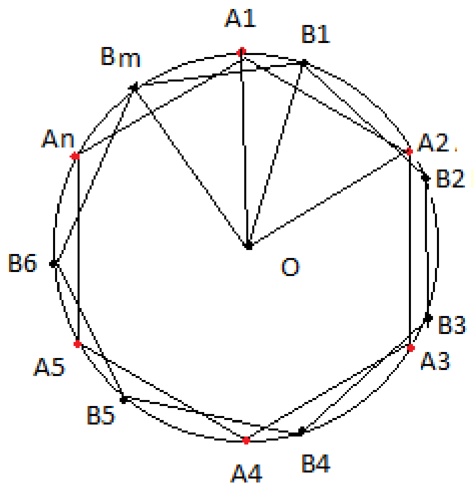
$\frac{AO}{DO} \bullet \frac{DB}{CB} \bullet \frac{CE}{AE} = 1$

From the hypothesis we have $\frac{BD}{DC} = \frac{4}{7} \Leftrightarrow \frac{DB}{CB} = \frac{4}{11}$ and $\frac{CE}{AE} = \frac{3}{2}$, so $\frac{AO}{DO} \bullet \frac{12}{22} = 1$ $\Rightarrow \frac{AO}{DO} = \frac{11}{6}$.

Cioc Alex-Andrei, Pitesti

NM53_4: Dos poligons regulares de m y n lados, respectivamente, estan inscritos en la misma circunferencia, La razon de sus areas es m/n. Hallar todos los posibles valores de m y n.

NM53_4 – Solution:



$OA_i = OB_j = R$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$.

$m(\angle A_1OA_2) = \frac{360°}{n}$, $m(\angle B_1OB_2) = \frac{360°}{m}$.

Using the cos theorem we obtain:

$$\left.\begin{array}{l} A_iA_{i+1} = \frac{OA_i \cdot OA_{i+1} \cdot \sin\frac{360°}{n}}{2} \\ \\ B_jB_{j+1} = \frac{OB_j \cdot OB_{j+1} \cdot \sin\frac{360°}{m}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{m}{m} = \frac{m \cdot sin\frac{360°}{n}}{n \cdot sin\frac{360°}{m}} \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $sin\frac{360°}{m} = sin\frac{360°}{n}$ =>we have two cases:

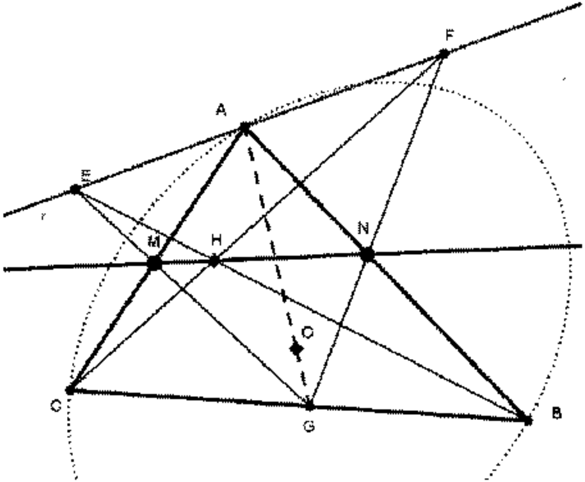
1) $m = n$, we have infinite solutions
2) $\frac{360°}{m} + \frac{360°}{n} = 180° \Leftrightarrow \frac{1}{n} + \frac{1}{m} = \frac{1}{2}$ => $mn = 2m + 2n$.

$\Leftrightarrow$ $mn - 2m - 2n + 4 = 4$ $\Leftrightarrow$ $(m - 2)(n - 2) = 4$. =>
the solution pairs (m,n) are: (3, 6), (4, 4), (6, 3).

In conclusion, pairs (m,n) that meet the problem requirements are: (k,k), $(3,6)$, $(6,3)$, where $k \in N$, $k \geq 3$.

ROEI 266.- *ABC es un triángulo acutángulo con circuncentro O y ortocentro H. La recta por A perpendicular a AO corta a BH en E y a CH en F. AO corta a BC en G, EG corta a AC en M y FG corta a AB en N. Probar que M, N y H están alineados.*

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.



Sea r una recta que pasa por A; H y O dos puntos arbitrarios no situados sobre el triángulo; G la proyección de A sobre BC desde O; E y F las proyecciones de B y C sobre r por H; M y N las de E y F sobre AC y AB respectivamente, desde G.

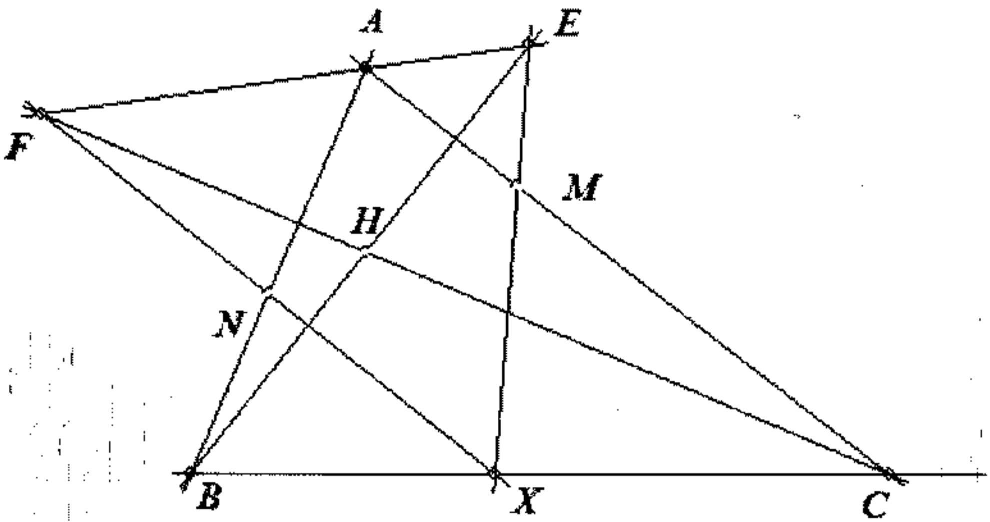
La proyectividad definida entre la recta r y la recta $c = AB$ mediante la asignación

$$(AEF) \to (GCB)$$

tiene como eje proyectivo la recta definida por los puntos $AC \cap EG = M$; $FC \cap EB = H$ y $AB \cap FG = N$, por tanto esos puntos están alineados como se pretendía demostrar.

Como puede verse, no se necesita imponer condiciones métricas a los puntos O, y H, como tampoco a la recta r (tangente a la circunscrita en el enunciado original). Tampoco se precisa de ninguna cónica que circunscriba al triángulo. ■

Problema 266, propuesto por Andrés Sáez Schwedt, Universidad de León, España.
ABC es un triángulo acutángulo con circuncentro O y ortocentro H. La recta por A perpendicular a AO corta a BH en E y a CH en F. AO corta a BC en G, EG corta a AC en M y FG corta a AB en N. Probar que M, N y H están alineados.



Podemos ignorar la condición de triángulo acutángulo, que G sea la intersección de AO y BC (en su lugar podemos considerar cualquier punto X sobre BC) y que la recta que pasa por A sea perpendicular a AO (puede ser cualquier recta que pasa por A).

El resultado se deduce aplicando el teorema de Pappus a las ternas F,A,E y B,X,C.

*** Es curioso que en el caso particular del enunciado original la recta MN resulta paralela a la recta BC y ello ocurre sólo en ese caso. Entonces el problema podría haber sido:

ABC es un triángulo con ortocentro H y X un punto de la recta BC. La recta por A perpendicular a AX corta a BH en E y a CH en F. EX corta a AC en M y FX corta a AB en N.

1) Probar que M, N y H están alineados.
2) La recta MN es paralela a BC si y solo si AX pasa por O o X es el punto del infinito de la recta BC.

Problema 267, proposto por Laurentiu Modan, Universidade de Bucarest, Romanía.

Sexa $Z=(X,Y)$ unha variable aleatoria bidimensional, con

$$P(\{w/X(w)=i,Y(w)=j\})=\frac{i}{10\cdot 2^i}\cdot C_{i,j}.$$

con $1\leq i\leq 4$ e $0\leq j\leq i$. Estudar se

$$P(\{w/|X(w)-3|<2\})<\frac{1}{3}.$$

Solución enviada por Bruno Salgueiro Fanego, Viveiro, Lugo.

A función de masa de probabilidade da variable aleatoria Z vén dada por

(i,j)	$(1,0)$	$(1,1)$	$(2,0)$	$(2,1)$	$(2,2)$	$(3,0)$	$(3,1)$	$(3,2)$	$(3,3)$	$(4,0)$	$(4,1)$	$(4,2)$	$(4,3)$	$(4,4)$
$\frac{i\cdot C_{i,j}}{10\cdot 2^i}$	$\frac{4}{80}$	$\frac{4}{80}$	$\frac{4}{80}$	$\frac{8}{80}$	$\frac{4}{80}$	$\frac{3}{80}$	$\frac{9}{80}$	$\frac{9}{80}$	$\frac{3}{80}$	$\frac{2}{80}$	$\frac{8}{80}$	$\frac{12}{80}$	$\frac{8}{80}$	$\frac{2}{80}$

Notemos que está ben definida, pois

$$\sum_{\substack{1\leq i\leq 4\\ 0\leq j\leq i}}\frac{i}{10\cdot 2^i}\cdot C_{i,j}=\frac{1}{80}\cdot(4+4+4+8+4+3+9+9+3+2+8+12+8+2)=1.$$

Polo tanto,

$$P(\{w/|X(w)-3|<2\})=P(\{w/-2<X(w)-3<2\})=P(\{w/1<X(w)<5\})$$
$$=P(\{w/2\leq X(w)\leq 4\})=1-P(\{w/X(w)=1\})$$
$$=1-\left[P\left(\{w/Z(w)=(1,0)\}\dot{\cup}\{w/Z(w)=(1,1)\}\right)\right]$$
$$=1-P(\{w/Z(w)=(1,0)\})-P(\{w/Z(w)=(1,1)\})=1-\frac{1}{20}-\frac{1}{20}=\frac{9}{10}>\frac{1}{3}.$$

Problema 268 (Propuesto por D.M. Batinetzu-Giurgiu, Bucarest, y N. Stanciu, Buzau, Rumania)

Si m, n, x, y, z > 0, entonces:

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\left(\frac{xy}{my+nz}+\frac{yz}{mz+nx}+\frac{zx}{mx+ny}\right)\geq\frac{3}{m+n}+3\sqrt[3]{\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{(mx+ny)(my+nz)(mz+nx)}}$$

Solución por Javier Cornejo Tejada, Universidad Nacional de Ingeniería, Lima, Perú.

Desarrollando el primer miembro de la expresión:

$$\frac{x+y}{my+nz}+\frac{y+z}{mz+nx}+\frac{z+x}{mx+ny}+\frac{xy}{z(my+nz)}+\frac{yz}{x(mz+nx)}+\frac{zx}{y(mx+ny)}$$

Aplicando $MA \geq MG$:

$$\frac{x+y}{my+nz}+\frac{y+z}{mz+nx}+\frac{z+x}{mx+ny}\geq 3\sqrt[3]{\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{(mx+ny)(my+nz)(mz+nx)}}\ \ldots(I)$$

Trabajando con lo que resta de la expresión:

$$\frac{xy}{z(my+nz)}+\frac{yz}{x(mz+nx)}+\frac{zx}{y(mx+ny)}=\frac{(xy)^2}{xyz(my+nz)}+\frac{(yz)^2}{xyz(mz+nx)}+\frac{(zx)^2}{xyz(mx+ny)}$$

Aplicando el lema de Titu:

$$\frac{(xy)^2}{xyz(my+nz)}+\frac{(yz)^2}{xyz(mz+nx)}+\frac{(zx)^2}{xyz(mx+ny)}\geq\frac{(xy+yz+zx)^2}{xyz[m(x+y+z)+n(x+y+z)]}=\frac{(xy+yz+zx)^2}{xyz(x+y+z)(m+n)}$$

Se sabe que $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$, sumando a cada miembro $2(ab+bc+ca)$ se tiene: $(a+b+c)^2\geq 3(ab+bc+ca)$.
Haciendo $a=xy; b=yz; c=zx$:

$$(xy+yz+zx)^2\geq 3xyz(x+y+z)\rightarrow\frac{(xy+yz+zx)^2}{xyz(x+y+z)(m+n)}\geq\frac{3}{m+n}$$

Por lo tanto:

$$\frac{xy}{z(my+nz)}+\frac{yz}{x(mz+nx)}+\frac{zx}{y(mx+ny)}\geq\frac{3}{m+n}\ \ldots(II)$$

Sumando (I) y (II) se obtiene la expresión que se pedía demostrar:

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\left(\frac{xy}{my+nz}+\frac{yz}{mz+nx}+\frac{zx}{mx+ny}\right)\geq\frac{3}{m+n}+3\sqrt[3]{\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{(mx+ny)(my+nz)(mz+nx)}}$$

Problema 268, propuesto por D.M.Batinetzu – Giurgiu, Bucarest, y N.Stanciu, Buzau, Romania
Si $m, n, x, y, z > 0$, entonces

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\cdot\left(\left(\frac{xy}{my+nz}+\frac{yz}{mz+nx}+\frac{zx}{mx+ny}\right)\right)\geq\frac{3}{m+n}+3\sqrt[3]{\left(\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{(mx+ny)\cdot(my+nz)\cdot(mz+nx)}\right)}.$$

Solution (proposed by **Elena Codeci, Daniel Codeci** and **Daniel Văcaru**)
One find

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\cdot\left(\frac{xy}{my+nz}+\frac{yz}{mz+nx}+\frac{zx}{mx+ny}\right)=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\cdot\left(\frac{xy}{my+nz}\right)+\frac{xy}{z\cdot(my+nx)}+\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\cdot\left(\frac{yz}{mz+nx}\right)+\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(\frac{yz}{mz+nx}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)\cdot\left(\frac{zx}{mx+ny}\right)+\frac{1}{y}\cdot\left(\frac{zx}{mx+ny}\right).$$

One may write

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\cdot\left(\frac{xy}{my+nz}\right)+\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\cdot\left(\frac{yz}{mz+nx}\right)+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)\cdot\left(\frac{zx}{mx+ny}\right)=\frac{x+y}{my+nz}+\frac{y+z}{mz+nx}+\frac{x+z}{mx+ny}=\frac{\left[\sqrt{(x+y)}\right]^2}{my+nz}+\frac{\left[\sqrt{(y+z)}\right]^2}{mz+nx}+\frac{\sqrt{\left[(x+z)\right]^2}}{mx+ny}$$
$$\overbrace{\geq}^{Bergstrom}\geq\frac{\left[\sqrt{(x+y)}+\sqrt{(y+z)}+\sqrt{(z+x)}\right]^2}{(my+nz)+(mz+nx)+(mx+ny)}\overbrace{\geq}^{AM-GM}\frac{3\cdot\left[\sqrt{(x+y)}\cdot\sqrt{(y+z)}+\sqrt{(y+z)}\sqrt{(z+x)}+\sqrt{(z+x)}\sqrt{(x+y)}\right]}{(m+n)\cdot(x+y+z)}\geq$$
$$\geq\frac{3\cdot\cancel{(x+y+z)}}{(m+n)\cdot\cancel{(x+y+z)}}=\frac{3}{m+n}$$

The remaining sum can be write as

$$\frac{xy}{z\cdot(my+nx)}+\frac{yz}{x\cdot(mz+nx)}+\frac{zx}{y\cdot(mx+ny)}\underbrace{\geq}_{AM-GM}3\sqrt[3]{\left(\left(\frac{\cancel{x}y}{\cancel{z}\cdot(my+nx)}\right)\left(\frac{y\cancel{z}}{\cancel{x}\cdot(mz+nx)}\right)\left(\frac{z\cancel{x}}{\cancel{y}\cdot(mx+ny)}\right)\right)}=3\sqrt[3]{\left(\frac{xyz}{(my+nx)\cdot(mz+ny)\cdot(mx+nz)}\right)}.$$

That concludes this solution.
Observation
We think that one better inferior bound could be obtained if one write

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\cdot\left(\frac{xy}{my+nz}\right)+\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\cdot\left(\frac{yz}{mz+nx}\right)+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)\cdot\left(\frac{zx}{mx+ny}\right)=\frac{x+y}{my+nz}+\frac{y+z}{mz+nx}+\frac{x+z}{mx+ny}=\frac{\left[\sqrt{(x+y)}\right]^2}{my+nz}+\frac{\left[\sqrt{(y+z)}\right]^2}{mz+nx}+\frac{\sqrt{\left[(x+z)\right]^2}}{mx+ny}$$
$$\overbrace{\geq}^{Bergstrom}\geq\frac{\left[\sqrt{(x+y)}+\sqrt{(y+z)}+\sqrt{(z+x)}\right]^2}{(my+nz)+(mz+nx)+(mx+ny)}=\frac{2x+2y+2z+2\cdot\sqrt{(x+y)}\cdot\sqrt{(y+z)}+2\cdot\sqrt{(y+z)}\sqrt{(z+x)}+2\cdot\sqrt{(z+x)}\sqrt{(x+y)}}{(m+n)\cdot(x+y+z)}\geq$$
$$\geq\frac{4\cdot\cancel{(x+y+z)}}{(m+n)\cdot\cancel{(x+y+z)}}=\frac{4}{m+n}$$

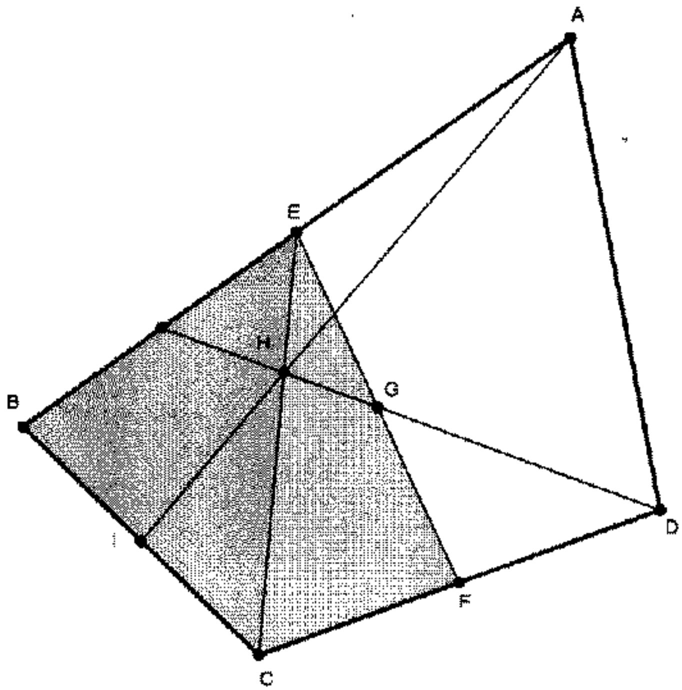
It follows that

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\cdot\left(\left(\frac{xy}{my+nz}+\frac{yz}{mz+nx}+\frac{zx}{mx+ny}\right)\right)\geq\frac{4}{m+n}+3\sqrt[3]{\left(\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{(mx+ny)\cdot(my+nz)\cdot(mz+nx)}\right)}.$$

ROEI 269, propuesto por el editor.

$ABCD$ es un cuadrilátero; E y F son los puntos medios de AB y DC, respectivamente. G es el punto medio de EF. DG corta a CE en H. Demostrar que AH biseca BC.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.



Sea I el punto de intersección de las rectas AH y BC. En el triángulo ΔECF (azul) con la transversal DG el teorema de Menelao nos da $\frac{EH}{HC} \cdot \frac{DC}{DF} \cdot \frac{GF}{EG} = 1$, de donde resulta $\frac{EH}{HC} = \frac{1}{2}$.

En el triángulo ΔEBC (rojo) con la transversal AH se tiene, por el mismo teorema:

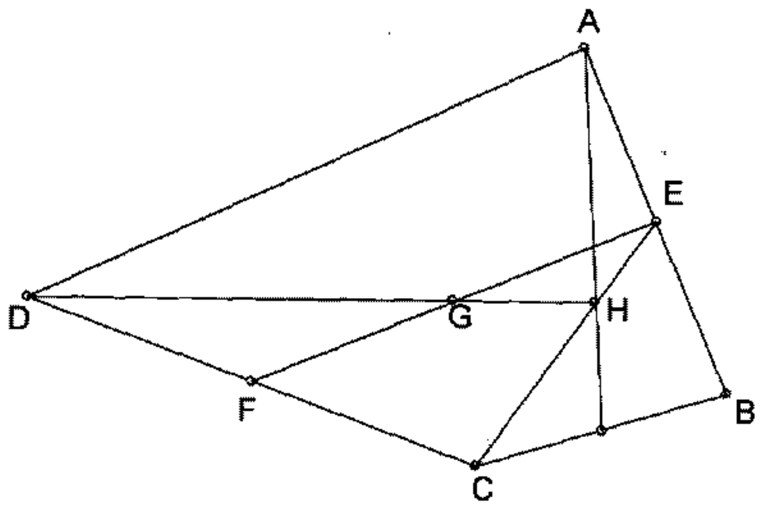
$\frac{HC}{EH} \cdot \frac{AE}{AB} \cdot \frac{BI}{IC} = 1$ o bien $\frac{HC}{EH} \cdot \frac{BI}{IC} = 2$.

Multiplicando ambas se obtiene finalmente $\frac{BI}{IC} = 1$que nos dice que I es el punto medio de B

Y se acabó.■

***Problema 269, propuesto por el editor**

ABCD es un cuadrilátero; E y F son los puntos medios de AB y DC, respectivamente. G es el punto medio de EF.
DG corta a CE en H. Demostrar que AH biseca BC.



(1) Situamos 4 masas iguales en los puntos A, B, C, D.

(2) Las masas de A y B se colocan en el punto medio E y las masas de C y D se colocan en su punto medio F. El centro de masas del sistema no habrá cambiado.

(3) Las cuatro masas se colocan en el punto medio G de E y F, resultando que G es centro de masas del sistema.

(4) Considerando ahora el centro de masas H del sistema formado por A, B y C, éste estará sobre la recta CE en y se cumplirá CH:HE=2:1. Pero además, G es el centro de masas del sistema formado por A, B, C, D, por lo que G debe estar en la recta AH y además cumplirse que AG:GH=3:1. Esto indica que H (centro de masas de A, B, C) coincide con la definición del enunciado (intersección de DG y CE).

(5) En el triángulo ABC, AH es una mediana, y debe cortar a BC en su punto medio.

Francisco Javier García Capitán, 2015.

De mi biblioteca (2)

Geometría

En esta segunda entrega recopilo algunos libros de Geometría (excluyendo deliberadamente las colecciones de problemas, de las que hay muchas y excelentes, pero que para una preparación inicial pueden no ser tan importantes).

a) Nivel inicial

1.- Posamentier, A.S.: *Advanced Euclidean Geometry.* Addison-Wesley Pub. Co., 1984.

Una buena obra para empezar el estudio de la propiedades básicas que hacen falta para resolver problemas de Geometría.

2.- Slowik, J-M.: *Invent'Aire!. ACL-les éditions du Kangourou, 2008.*

Solamente son 48 páginas, pero me atrevo a calificar de obra maestra la colección de ejemplos de división de un cuadrado o de un triángulo mediante cortes rectos.

3.- Coxeter, H.S.M. & Greitzer, S.L.: *Geometry revisited. M.A.A. New Mathematical Library 19, 1967.*

Un clásico en la preparación de Geometría para Olimpiadas. Por la fecha de su primera edición (1967) fue bastante denostado en la Francia de las "Matemáticas modernas", pero es un libro excelente.

5.- Huvent, G.: *Sangaku (Le mystère des énigmes géométriques japonaises). Dunod, 2008.*

La palabra japonesa *sangaku* se refiere a las tabletas de madera con enunciados de problemas geométricos que sus autores colgaban en el pórtico de los templos, a modo de desafío. Géry Huvent ha reunido 34 sangakus para cuya solución no hacen falta resultados sofisticados, pero sí ingenio y conocimientos de geometría elemental. Una obra que recomiendo con énfasis.

6.- Enescu, B.: *Arii (Áreas). Ed. GIL, Zalau, 2006.*

Puede parecer "exótico" aquí un libro en lengua rumana. El rumano es la única lengua de Europa Oriental que tiene raíces latinas y además en Rumania nació la Olimpiada Matemática Internacional en 1959. Esta pequeña publicación (64 páginas y 11 capítulos) ofrece una muestra de cómo a través del concepto de área se pueden resolver problemas y demostrar resultados. Un librito extraordinario, en mi opinión.

7.- Rincón Abella, G.: ***Un recorrido por la geometría. Univ. Antonio Nariño, Santa Fe de Bogotá, 1994.***

También es una obra de tamaño medio (128 páginas), pero busca las demostraciones lo más sencillas posibles y esta es una gran virtud. Perfecta para empezar a estudiar geometría de Olimpiadas.

b) Nivel avanzado

8.- Davis, D.R.: ***Modern College Geometry. Addison Wesley 1949.***

Trata todos los temas importantes, con énfasis en la construcción de triángulos.

9.- Altshiller Court, N.: ***College Geometry. Barnes & Noble, 1952.***

Posiblemente el libro más citado en las soluciones de problemas de la revista *Crux Mathematicorum.* Los dos ejemplares que tengo (uno de ellos de la edición de 1925) son sendos regalos: el de 1925, de mi admirado profesor cubano Raimundo Reguera Vilar ; el de 1952, del Gerente de *Crux* Kenneth Williams.

10.- Lalesco, T.: ***La Géométrie du triangle. Ed. Jacques Gabay, 1987 (reimpresión de la edición de 1952).***

Un libro clásico, en algunos casos demasiado escueto (algunas propiedades solamente están enunciadas y su demostración no es sencilla). La Cuarta parte, titulada *La métrique du triangle,* contiene una impresionante recopilación de fórmulas con propiedades del triángulo.

11.- Honsberger, R.: ***Episodes in Nineteenth and twentieth Century Euclidean Geometry. M.A.A., New Mathematicla Library 37, 1995.***

Ross Honsberger es un magnífico expositor y prolific recopilador de resultados de Matemáticas Elementales (que no resultados elementales de Matemáticas). Aquí presenta, junto con el Prof. John Rigby, del University of Wales College de Cardiff una interesante colección de propiedades geométricas de triángulos y cuadriláteros.

12.- Louridas, S.E. & Rassias, M.Th.: ***Problem-Solving and Selected Topics in Euclidean Geometry (in the Spirit of the Mathematical Olympiads). Springer, 2013.***

Un gran libro. Geometría basada en Transformaciones geométricas, con una gran cantidad de problemas resueltos.

13.- Pop, O.T. & Minculete, N. & Bencze M.: ***An introduction to quadrilateral geometry. Editura didactica si pedagogica, 2013.***

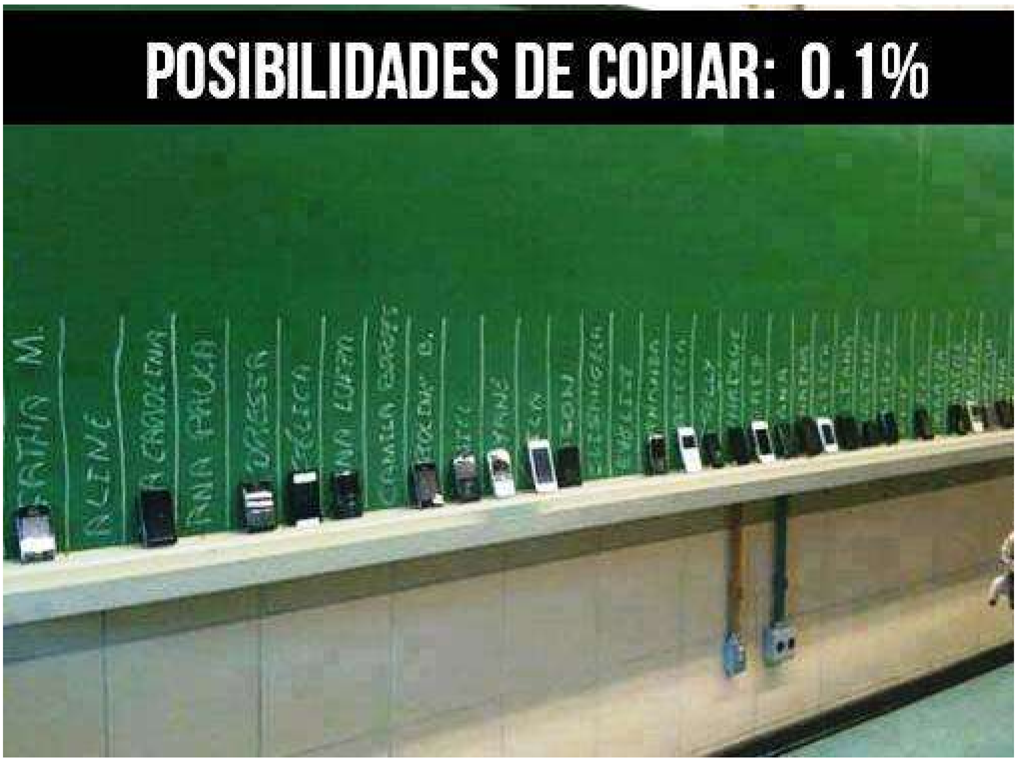
Una excelente monografía sobre la geometría de los cuadriláteros, que no había sido tratada con tanta profusión como la del triángulo. Sumamente recomendable.

Valladolid, septiembre 2015.

Francisco Bellot Rosado

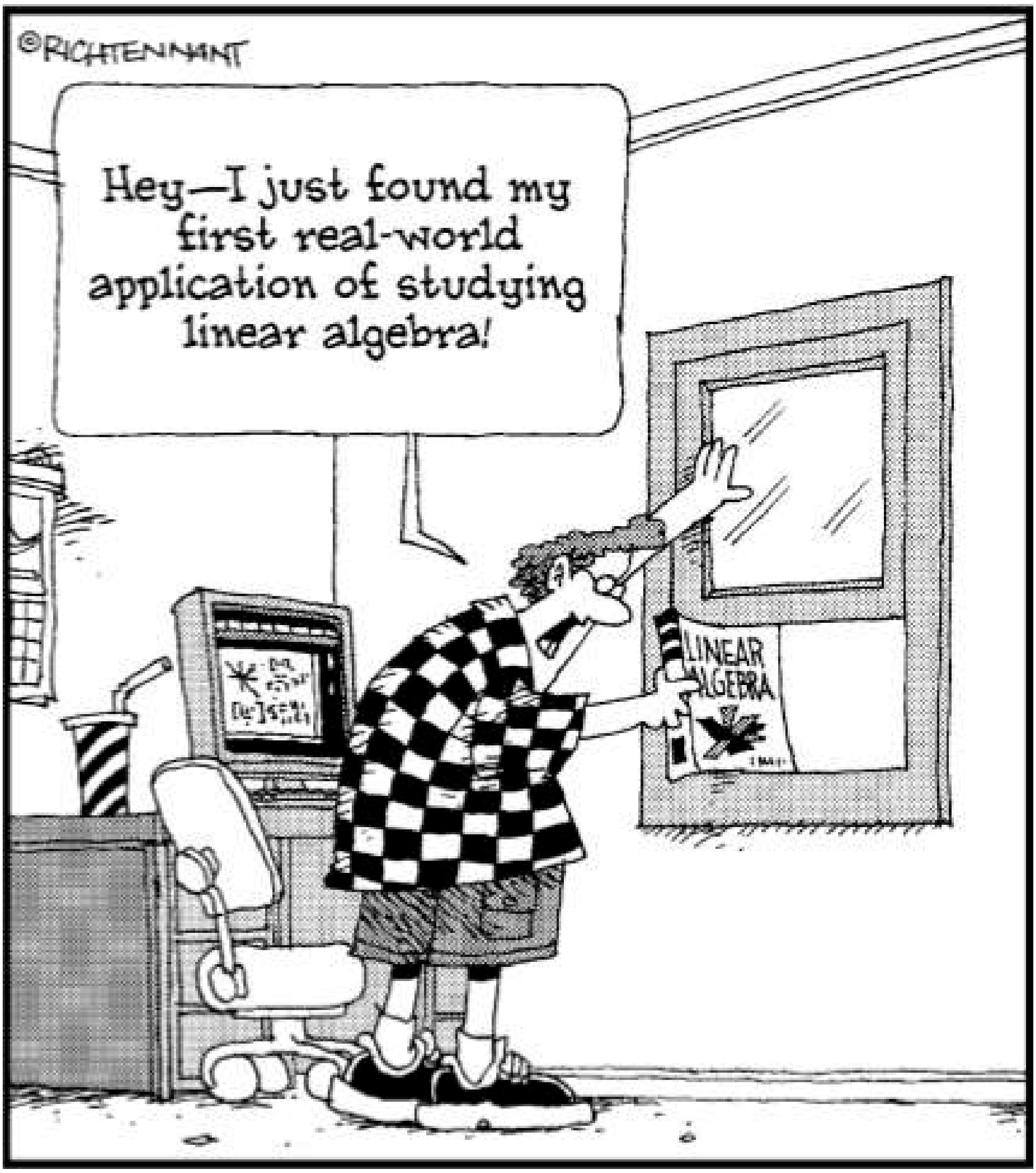
DIVERTIMENTOS MATEMATICOS 54

Capturado en Internet (de diversas fuentes)



Aparcamiento de celulares durante un examen

Cuadrado mágico de 16 números primos consecutivos



La verdadera utilidad del Álgebra lineal

Moneda astronómica china

4	9	7	π	5							
	π		8			9	6	1	5	2	
	8		1				π		7		
							π		4		
5	3	9	6								
9	4		π	π	π	7					
					6	2	5	π		7	4
								π	π	3	8
	7	8	4	6	9						
		3		π			4	7	1	6	9
		4		1				6		π	
								4		5	

Sudoku de pi

Número

55

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

Número 55 (junio – septiembre 2016)

ISSN – 1698-277X

ÍNDICE

<u>Artículos, notas y lecciones de preparación olímpica 55</u>

Necrológica de Ross Honsberger (1929-2016) *por F. Bellot*

C.Rusu: *Distancia de un punto del espacio a un punto en el plano de un triángulo.*

Traducción de F. Bellot

El Prof. Constantin Rusu es profesor en el Colegio Nacional *Stefan cel Mare (Esteban el Grande), en Ramnicu Sarat, Buzau, Rumania.*

<u>Problemas para los más jóvenes 55</u>

Propuestos

Cinco problemas de los *Juegos de Arquímedes* de la Olimpiada Italiana

Resueltos

Presentamos las soluciones de Bruno Salgueiro a los problemas para los más jóvenes del vol. 54 números 1,2,3,4 y 5 (En el caso del número 5, con una corrección del enunciado, que agradecemos). Igualmente presentamos la solución del número 3 de la estudiante Lucía de Fang Ma Li y de Angel Plaza.

<u>Problemas de nivel medio y de Olimpiadas 55</u>

Propuestos: *Los problemas propuestos en la 5 Olimpiada Matemática Europea Femenina, Busteni (Rumania) 2016*

Resueltos

Presentamos las soluciones de Bruno Salgueiro a los problemas de nivel medio 54 números 1,2,3 y 4.

<u>Problemas 55</u>

Problemas propuestos 276-280

Resueltos

Problema 266: El editor presenta excusas al Prof. Andrea Fanchini, de Cantú, Italia, quien fue omitido en la relación de resolventes de este problema, en el nº 54 de la Revista.

Problema 271: Propuesto por Francisco Javier García Capitán, Priego de Córdoba, España. Soluciones recibidas de: Miguel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca, España; Florentino Damián Aranda Ballesteros, Córdoba, España; Saturnino Campo Ruiz, Salamanca, España; Ignacio Larrosa Cañestro, La Coruña, España; Bruno Salgueiro Fanego, Vivero, España; y el proponente. Presentamos las soluciones de Amengual, Aranda, Campo, Larrosa y Salgueiro.

Problema 272: Propuesto por Francisco Javier García Capitán, Priego de Córdoba, España, dedicado a la memoria de José María Pedret. Soluciones recibidas de: Miguel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca, España; Saturnino Campo Ruiz, Salamanca, España; Bruno Salgueiro Fanego, Vivero, España; y el proponente. Presentamos las soluciones de Amengual, Campo y Salgueiro.

Problema 273: Propuesto por Álvaro Begué Aguado, Nueva York, Estados Unidos. Soluciones recibidas de : Ignacio Larrosa Cañestro, La Coruña, España; Albert Stadler, Herrliberg, Suiza; y el proponente. Como nos indicó amablemente el Prof. Bruno Salgueiro, este problema ya había sido propuesto en la REOIM con el número 166 (vol. 34) y resuelto en el vol. 36. En cualquier caso, presentamos la solución de Larrosa.

Problema 274: Propuesto por Andrés Sáez Schwedt, León, España. Soluciones recibidas de: Florentino Damián Aranda Ballesteros, Córdoba, España; Saturnino Campo Ruiz, Salamanca, España; Bruno Salgueiro Fanego, Vivero, España; Neculai Stanciu, Buzau y Titu Zvonaru, Comanesti, Rumania (conjuntamente); y el proponente. Presentamos las soluciones de Aranda, Campo y Salgueiro.

Problema 275: Propuesto por el editor. Recibida solución de Bruno Salgueiro Fanego, Vivero, España, que presentamos.

<u>Reseña de libros, comentario de páginas web, noticia de Congresos 55</u>

Encarnación Reyes Iglesias e Inmaculada Fernández Benito: **Pentágonos (Construcciones. Mosaicos. Geometría sagrada).** Universidad de Valladolid, 2015.

Divertimentos matemáticos 55

Una muestra de fotografías más o menos matemáticas, de la colección personal del editor.

Otras informaciones

VIII CIBEM Congreso Iberoamericano de Educación Matemática

Convoca la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática (FISEM) con el apoyo de la Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura OEI.
El Congreso Iberoamericano de Educación Matemática es responsabilidad de la Federación Iberoamericana de Educación Matemática (FISEM), que delega su organización en alguna de sus sociedades. Se realiza cada cuatro años, siendo la Junta de Gobierno de la FISEM quien designa al país anfitrión.
Será en Madrid del 10 al 14 de julio de 2017
Organizan: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas y Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas Emma Castelnuovo (SMPM)

Más información [+]

IV Día GeoGebra Iberoamericano - VI Día GeoGebra Portugal 21 de mayo / 21 de maio 2016

7 de abril de 2016

A Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra acolherá o IV DÍA GEOGEGRA IBEROAMERICANO, 2016 - VI DIA GEOGEBRA PORTUGAL. Participem!

Más información [+]

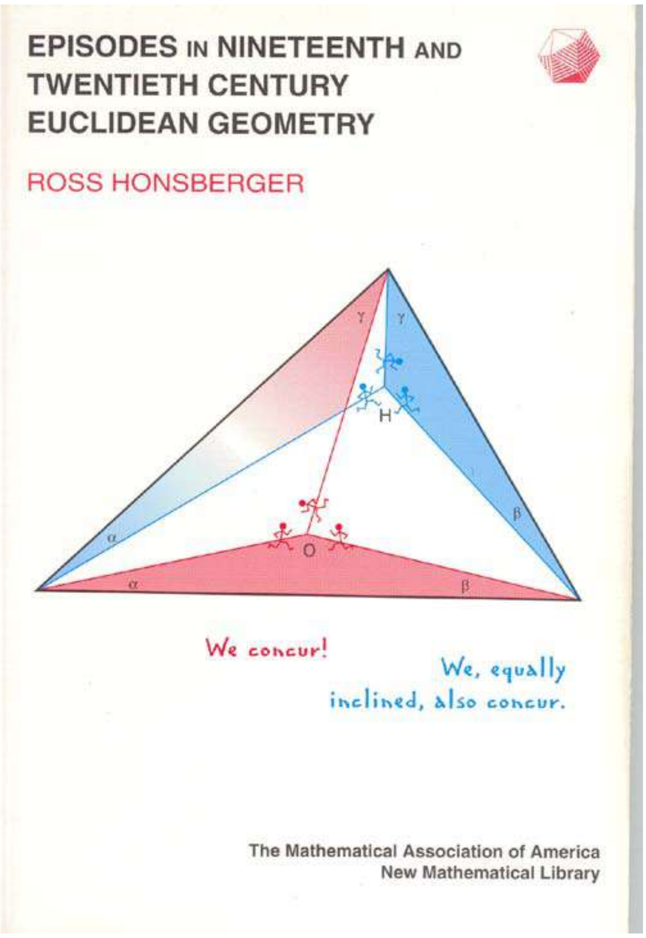
Realizado en el marco del **Instituto Iberoamericano de Enseñanza de las Ciencias y la Matemática (IBERCIENCIA)** con la colaboración de la **Consejería de Economía y Conocimiento de la Junta de Andalucía**

Necrológica de Ross Honsberger (1929-2016)

Francisco Bellot Rosado

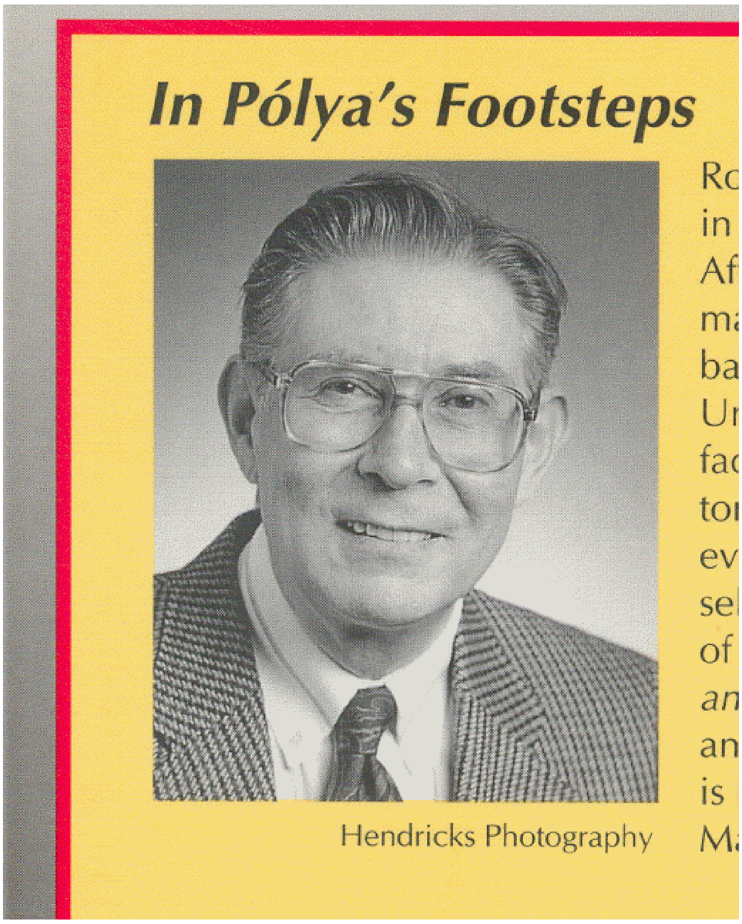
El pasado 3 de abril falleció en Waterloo, Ontario (Canadá) el Prof. Ross Arnold Honsberger, gran expositor de temas de Matemáticas Elementales y autor de un número considerable de libros de problemas, que la mayor parte de los amantes de las Olimpiadas matemáticas seguramente conocemos y, sin duda, hemos disfrutado con su lectura.

Tuve la fortuna de escucharle en una de las conferencias plenarias de la Primera Conferencia de la WFNMC, precisamente en Waterloo, que llevaba por título ***El punto simediano***. Encandiló a la audiencia con su inigualable manera de explicar los temas que le gustaban. Años más tarde, esa conferencia la incorporó a su libro ***Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry*** (MAA, NML37, 1995), cuya portada reproducimos aquí.



- Nacido en Toronto, en cuya Universidad se graduó y enseñó durante 10 años, se trasladó durante un año sabático a la Universidad de Waterloo, continuando allí sus estudios, incorporándose en 1964 a su Departamento de Combinatoria y Optimización, permaneciendo allí desde entonces, y del que era Profesor Emérito. Es autor de 13 libros, todos ellos publicados por la Mathematical Association of America, entre

1970 (*Ingenuity in Mathematics*, New Mathematical Library, Random House / Singer 1970) y 2004 (*Mathematical Delights*, MAA 2004 (Dolciani Mathematics Expositions Bd.28). El formato de casi todos ellos es siempre el mismo: cortas notas planteando y resolviendo (en muchos casos con sus propias soluciones) problemas de Matemáticas Elementales, o contando anécdotas de historia de las Matemáticas (recuerdo a vuelapluma *La historia de Luis Posá,* con Paul Erdös como narrador). Sería muy difícil elegir uno de estos libros. Tengo la fortuna de tenerlos todos ellos en mi biblioteca, los he leído en muchas ocasiones, buscando soluciones o nuevos problemas para mis intervenciones en congresos y Olimpiadas y, ciertamente no podría elegir uno como mi favorito.



Con esta foto de la contracubierta de otro de sus libros (*Tras las huellas de Pólya)* termino esta breve necrológica de un extraordinario profesor.

Sic tibi terra levis, Ross.

Valladolid, mayo de 2016

Distancia de un punto del espacio a un punto en el plano de un triángulo

Constanti Rusu[1]

RESUMEN. En este artículo damos fórmulas para la distancia de un punto M del espacio **S** al punto K del interior del triángulo ABC. También calculamos esa distancia en los casos $K \in (ABC)$ y $K \notin Int[ABC]$.

I. Introducción

Utilizaremos las notaciones habituales para el triángulo.
Sea ABC el triángulo, y los puntos $M \in S$, $K \in Int(\Delta ABC)$. La recta AK interseca al lado BC en el punto A'.

Llamamos:

$$p_K = \frac{AK}{KA'}, q_K = \frac{BA'}{A'C}, \alpha_K = \frac{1}{1+p_K}, \beta_K = \frac{p_K}{(1+p_K)(1+q_K)}, \gamma_K = \frac{p_K q_K}{(1+p_K)(1+q_K)}.$$

Observemos que $\alpha_K + \beta_K + \gamma_K = 1$.

Observemos también que el punto K está bien definido por los números positivos p_k y q_k.
Vamos a deducir los valores de $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$ para varios puntos notables del triángulo ABC. En general usaremos el teorema de *Van Aubel* para calcular p_k.

Para el baricentro deducimos inmediatamente

$$p_G = 2,\ q_G = 1, \alpha_G = \beta_G = \gamma_G = \frac{1}{3}.$$

Para el incentro I tenemos, por el teorema de la bisectriz: $q_I = \frac{c}{b}$, que aplicado de nuevo al triángulo $\Delta BAA'$, da ::

$$p_I = \frac{AI}{IA'} = \frac{c}{BA'} = \frac{c}{\frac{ac}{b+c}} = \frac{b+c}{a}.$$

Por el teorema de *Van Aubel* se tiene

$$\frac{AI}{IA'} = \frac{b}{a} + \frac{c}{a} = \frac{b+c}{a}, \alpha_I = \frac{a}{a+b+c}, \beta_I = \frac{b}{a+b+c}, \gamma_I = \frac{c}{a+b+c}.$$

Para el ortocentro H se obtiene:

$$p_H = \frac{AH}{HA'} = \frac{\frac{c\cos A}{\sin C}}{c\sin C\cos B ctg C} = \frac{\cos A}{\cos B\cos C};$$

[1] Received:
2010 *Mathematics Subject Classification*. 51M16, 26D15
Key words and phrases. Triangle identities and inequalities.

$$q_H = \frac{BA'}{A'C} = \frac{c\cos B}{b\cos c} = \frac{\sin C\cos B}{\sin B\cos C} = ctgBtgC\,;$$

$$\alpha_H = \frac{1}{1+p_H} = \frac{\cos B\cos C}{\cos A+\cos B\cos C} = \frac{1}{tgBtgC}\,;$$

$$\beta_H = \frac{1}{tgCtgA}\,;\gamma_H = \frac{1}{tgAtgB}\,.$$

Para el circuncentro O mediante el teorema de los senos en ΔAA_1C y ΔABA_1:

$$\frac{A_1C}{\sin\angle A_1AC} = \frac{AC}{\sin\angle AA_1C} \Rightarrow A_1C = \frac{b\cos B}{\cos(B-C)}\,;$$

$$\frac{A_1B}{\sin\angle BAA'} = \frac{AB}{\sin\angle AA_1B} \Rightarrow A_1B = \frac{c\cos C}{\cos(B-C)}\,.$$

Por lo tanto

$$q_O = \frac{A_1B}{A_1C} = \frac{c\cos C}{b\cos B} = \frac{\sin 2C}{\sin 2B}\,.$$

Y nuevamente con el teorema de *Van Aubel* obtenemos:

$$\frac{AO}{OA_1} = \frac{AC_1}{C_1B} + \frac{AB_1}{B_1C}\,.$$

Entonces

$$p_O = \frac{\sin 2B}{\sin 2A} + \frac{\sin 2C}{\sin 2A} = \frac{2\sin(B+C)\cos(B-C)}{\sin 2A} = \frac{\cos(B-C)}{\cos A}\,.$$

Luego

$$\alpha_O = \frac{\cos A}{2\sin B\sin C}\,;\beta_O = \frac{\cos B}{2\sin C\sin A}\,;\gamma_O = \frac{\cos C}{2\sin A\sin B}\,.$$

Para el punto simediano L (punto de *Emile Lemoine*, 1840-1908) mediante el teorema de *Jakob Steiner* (1796-1819) deducimos que

$q_L = \dfrac{BA_1}{A_1C} = \dfrac{c^2}{b^2}$, y nuevamente por el teorema de *Van Aubel* resulta

$p_L = \dfrac{AC_1}{C_1B} + \dfrac{AB_1}{B_1C} = \dfrac{b^2}{a^2} + \dfrac{c^2}{a^2} = \dfrac{b^2+c^2}{a^2}$, donde A_1, B_1, C_1 son los pies de las simedianas desde los vértices A, B, C del triángulo.

Con los valores anteriores de p_L y q_L se obtiene

$$\alpha_L = \frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}\,,\beta_L = \frac{b^2}{a^2+b^2+c^2}\,,\gamma_L = \frac{c^2}{a^2+b^2+c^2}\,.$$

Para el punto Γ de *Joseph Diaz Gergonne* (1771-1859) resulta:

$q_\Gamma = \dfrac{p-b}{p-c}$ □i $p_\Gamma = \dfrac{p-a}{p-b} + \dfrac{p-a}{p-c} = \dfrac{a(p-a)}{(p-b)(p-c)}$, so:

$$\alpha_\Gamma = \frac{(p-b)(p-c)}{a(p-a)+(p-b)(p-c)}\,,\beta_\Gamma = \frac{(p-c)(p-a)}{a(p-a)+(p-b)(p-c)}\,,$$

$$\gamma_\Gamma = \frac{(p-a)(p-b)}{a(p-a)+(p-b)(p-c)}.$$

Para el punto N de *Christian Heinrich Von Nagel* (1803-1882) es:

$$\alpha_N = \frac{p-a}{p},\ \beta_N = \frac{p-b}{p},\gamma_N = \frac{p-c}{p}.$$

Demostración. Sean A_2, B_2, C_2 los puntos de tangencia de las circunferencias exinscritas con los lados BC, CA, AB del triángulo ABC. Si tenemos en cuanta que $BA_1 = A_2C$ se tendrá :

$$q_N = \frac{BA_2}{A_2C} = \frac{a-(p-b)}{p-b} = \frac{p-c}{p-b},\ p_N = \frac{p-c}{p-a} + \frac{p-b}{p-a} = \frac{a}{p-a}.$$

Por lo tanto:

$$\alpha_N = \frac{1}{1+p_N} = \frac{1}{1+\dfrac{a}{p-a}} = \frac{p-a}{p},$$ y análogamente se obtienen los valores de β_N y γ_N.

II. Los vectores de posición

Lema 1. Sea el triángulo ABC. Para el punto $M \in \mathbf{S}$ y para cualquier punto $K \in [ABC]-\{A\}$ tenemos:

$$\overrightarrow{MK} = \alpha_K \overrightarrow{MA} + \beta_k \overrightarrow{MB} + \gamma_K \overrightarrow{MC},\ (1)$$

(ver [1]).

Demostración. En el triángulo MAA' tenemos

$$\overrightarrow{MK} = \frac{\overrightarrow{MA} + p_K \overrightarrow{MA'}}{1+p_k}$$

y en el triángulo MBC

$$\overrightarrow{MA'} = \frac{\overrightarrow{MB} + q_K \overrightarrow{MC}}{1+q_k},$$ con lo que obtenemos (1).

Si $K \in (AB)$ entonces $p_K = \dfrac{AK}{KB}$, $q_K = \dfrac{BB}{BC} = 0$ y

$$\overrightarrow{MK} = \frac{1}{1+p_k}\overrightarrow{MA} + \frac{p_K}{(1+p_K)(1+0)}\overrightarrow{MB} + \frac{p_K \cdot 0}{(1+p_k)(1+0)}\overrightarrow{MC} =$$

$$= \frac{\overrightarrow{MA} + p_K \overrightarrow{MB}}{1+p_K}.$$

Si $K = B$, entonces $p_K = \dfrac{AB}{BB}$, $q_K = \dfrac{BB}{BC} = 0$ y

$$\overrightarrow{MK}=\lim_{p_K\to\infty}\frac{1}{1+p_K}\overrightarrow{MA}+\lim_{p_K\to\infty}\frac{p_K}{(1+p_K)(1+0)}\overrightarrow{MB}+\lim_{p_K\to\infty}\frac{p_k}{1+p_k}\cdot\frac{q_k}{1+q_k}\overrightarrow{MC}=$$
$$=0\cdot\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+0\cdot\overrightarrow{MC}.$$

Si $K\in(BC), A'=K$, $p_K=\dfrac{AK}{KK}$, $q_K=\dfrac{AK}{KC}$ y

$$\overrightarrow{MK}=\lim_{p_K\to\infty}\frac{1}{1+p_K}\overrightarrow{MA}+\lim_{p_K\to\infty}\frac{p_K}{(1+p_K)(1+q_K)}\overrightarrow{MB}+\lim_{p_K\to\infty}\frac{p_k}{1+p_k}\cdot\frac{1}{1+q_k}\overrightarrow{MC}=$$
$$=0\cdot\overrightarrow{MA}+\frac{\overrightarrow{MB}+q_k\overrightarrow{MC}}{1+q_K}.$$

Si $K=C=A'$, $p_K=\dfrac{AC}{CC}$, $q_K=\dfrac{BC}{CC}$ y tomando límites en (1) cuando $p_K\to\infty$, $q_K\to\infty$ obtenemos $\overrightarrow{MK}=0\cdot\overrightarrow{MA}+0\cdot\overrightarrow{MB}+1\cdot\overrightarrow{MC}$.

Si $K\in(CA), A'=K$, $q_K=\dfrac{BC}{CC}$ y

$$\overrightarrow{MK}=\frac{1}{1+p_K}\overrightarrow{MA}+\frac{p_K}{1+p_K}\lim_{q_K\to\infty}\frac{1}{1+q_K}\overrightarrow{MB}+\frac{p_K}{1+p_K}\lim_{q_K\to\infty}\frac{1}{1+q_k}\overrightarrow{MC}=$$
$$=\frac{\overrightarrow{MA}+p_k\overrightarrow{MC}}{1+p_K}.$$

Por tanto el lema es cierto para $K\in(AB]\cup[BC]\cup[CA)$.

Si $K\in\{G,I,H,O,L,N,\Gamma\}$ entonces (1) se convierte en:

$$\overrightarrow{MG}=\frac{\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}}{3},\ (1_a)$$

$$\overrightarrow{MI}=\frac{a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}+c\overrightarrow{MC}}{a+b+c},(1_b)$$

$$\overrightarrow{MH}=\frac{tgA\overrightarrow{MA}+tgB\overrightarrow{MB}+tgC\overrightarrow{MC}}{tgAtgBtgC},\ (1_c)$$

$$\overrightarrow{MO}=\frac{\cos A}{2\sin B\sin C}\overrightarrow{MA}+\frac{\cos B}{2\sin C\sin A}\overrightarrow{MB}+\frac{\cos C}{2\sin A\sin B}\overrightarrow{MC},\ (1_d)$$

$$\overrightarrow{ML}=\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}\overrightarrow{MA}+\frac{b^2}{a^2+b^2+c^2}\overrightarrow{MB}+\frac{c^2}{a^2+b^2+c^2}\overrightarrow{MC},(1_e)$$

$$\overrightarrow{MN}=\frac{p-a}{p}\overrightarrow{MA}+\frac{p-b}{p}\overrightarrow{MB}+\frac{p-c}{c}\overrightarrow{MC},\ (1_f)$$

$$\overrightarrow{M\Gamma}=\frac{(p-b)(p-c)}{a(p-a)+(p-b)(p-c)}\overrightarrow{MA}+\frac{(p-c)(p-a)}{a(p-a)+(p-b)(p-c)}\overrightarrow{MB}+$$
$$+\frac{(p-a)(p-b)}{a(p-a)+(p-b)(p-c)}\overrightarrow{MC},\ (1_g).$$

El lema 1 se puede extender al caso $K\notin[ABC]$ y resulta:

$$\overrightarrow{MK}=\frac{1}{1+p_K}\overrightarrow{MA}+\frac{p_k}{(1+p_k)(1-q_k)}\overrightarrow{MB}+\frac{p_K(-q_K)}{(1+p_K)(1-q_K)}\overrightarrow{MC}, \text{ si } K\in I\bigcup II$$

$$\overrightarrow{MK}=\frac{1}{1-p_K}\overrightarrow{MA}+\frac{-p_k}{(1-p_k)(1+q_k)}\overrightarrow{MB}+\frac{-p_K(q_K)}{(1-p_K)(1+q_K)}\overrightarrow{MC}, \text{ si } K\in III\bigcup IV$$

$$\overrightarrow{MK}=\frac{1}{1-p_K}\overrightarrow{MA}+\frac{-p_k}{(1-p_k)(1-q_k)}\overrightarrow{MB}+\frac{-p_K(-q_K)}{(1-p_K)(1-q_K)}\overrightarrow{MC}, \text{ si } K\in V\bigcup VI$$

donde $I=\{M\in(ABC)|M\in Int(\angle ACB)-[ABC]\}$,
$II=\{M\in(ABC)|M\in Int(\angle ABC)-[ABC]\}$,
$III=\{M\in(ABC)|M\in Int(\angle A')\}$, con $\angle A'$ es el ángulo opuesto al ángulo A
$IV=\{M\in(ABC)|M\in Int(\angle BAC)-[ABC]\}, V=\{M\in(ABC)|M\in Int(\angle B')\}$,
$VI=\{M\in(ABC)|M\in Int(\angle C')\}$.

Si en (1_c) tomamos $M=O$ obtenemos

$$\overrightarrow{OH}=\frac{tgA\overrightarrow{OA}+tgB\overrightarrow{OB}+tgC\overrightarrow{OC}}{tgAtgBtgC},\ (1_{c'})$$

La relación $(1_{c'})$ es equivalente a la de *James Joseph Sylvester* (1814-1897) es decir

$$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}.$$

Demostración. Sea C' el simétrico de C con respecto a O.
Descomponemos el vector $\overrightarrow{OC'}$ según las direcciones de los vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$.
Se tiene $\overrightarrow{OC'}=\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}=\left\|\overrightarrow{OA'}\right\|\cdot\vec{u}+\left\|\overrightarrow{OB'}\right\|\cdot\vec{v}$ ($\vec{u}$ and $\vec{v}$ son los vectores unitarios de los vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$, respectivamente). Por el teorema de los senos en $\Delta OC'A'$ y $\Delta OB'C'$ obtenemos:

$\left\|\overrightarrow{OA'}\right\|=\frac{R\sin 2A}{\sin 2C}$, $\left\|\overrightarrow{OB'}\right\|=\frac{R\sin 2B}{\sin 2C}$. Ya que $\overrightarrow{OA}=\|OA\|\cdot\vec{u}\Rightarrow\vec{u}=\frac{\overrightarrow{OA}}{R}$, y $\vec{v}=\frac{\overrightarrow{OB}}{R}$.
deducimos

$$\overrightarrow{OC'}=-\overrightarrow{OC}=\frac{R\sin 2A}{\sin 2C}\cdot\frac{1}{R}\cdot\overrightarrow{OA}+\frac{R\sin 2B}{\sin 2C}\cdot\frac{1}{R}\cdot\overrightarrow{OB}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\overrightarrow{OC}=-\frac{\sin 2A}{\sin 2C}\cdot\overrightarrow{OA}-\frac{\sin 2B}{\sin 2C}\cdot\overrightarrow{OB}, \text{ (a)}$$

Probaremos que:

$$\frac{tgA\overrightarrow{OA}+tgB\overrightarrow{OB}+tgC\overrightarrow{OC}}{tgAtgBtgC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}.$$

$$\Leftrightarrow\left(1-\frac{tgC}{tgA+tgB+tgC}\right)\cdot\overrightarrow{OC}=\left(\frac{tgA}{tgA+tgB+tgC}-1\right)\cdot\overrightarrow{OA}+\left(\frac{tgB}{tgA+tgB+tgC}-1\right)\cdot\overrightarrow{OB}$$

$$\Leftrightarrow\frac{tgA+tgB}{tgA+tgB+tgC}\cdot\overrightarrow{OC}=-\frac{tgB+tgC}{tgA+tgB+tgC}\cdot\overrightarrow{OA}-\frac{tgC+tgA}{tgA+tgB+tgC}\cdot\overrightarrow{OB}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\sin C}{\cos A\cos B}\cdot\overrightarrow{OC}=-\frac{\sin A}{\cos B\cos C}\cdot\overrightarrow{OA}-\frac{\sin B}{\cos C\cos A}\cdot\overrightarrow{OB}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OC} = -\frac{\sin 2A}{\sin 2C}\cdot\overrightarrow{OA} - \frac{\sin 2B}{\sin 2C}\cdot\overrightarrow{OB}$$, q.e.d.

Mediante $\dfrac{tgA\overrightarrow{OA} + tgB\overrightarrow{OB} + tgC\overrightarrow{OC}}{tgAtgBtgC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ obtenemos

$$OH^2 = [3 + 2(\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C)]\cdot R^2 =$$

$$= \frac{tg^2 A + tg^2 B + tg^2 C + 2tgAtgB\cos 2C + 2tgBtgC\cos 2A + 2tgCtgA\cos 2B}{tg^2 Atg^2 Btg^2 C}.$$

Observaciones.

(1_{c_1}) ΔABC equilátero $\Leftrightarrow \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -\dfrac{3}{2}$

(1_{c_2}) ΔABC equilátero $\Leftrightarrow \sum tg^2 A + 2\sum tgAtgB\cos 2C = 0$.

Usamos que $\overrightarrow{OH}^2 = 0 \Leftrightarrow O = H$.

III.Cálculos de las distancias

Teorema. Si $M \in \mathbf{S}$ y $K \in [ABC] - \{A\}$ se tiene:

$$MK = \sqrt{\alpha_K MA^2 + \beta_K MB^2 + \gamma_K MC^2 - \beta_K\gamma_K a^2 - \gamma_K\alpha_K b^2 - \alpha_K\beta_K c^2}, \ (2)$$

Demostración. Por (1) y el teorema del coseno en MAB, MBC, MCA resulta

$$MK^2 = \alpha_K^2 MA^2 + \beta_K^2 MB^2 + \gamma_K^2 MC^2 + 2\alpha_K\beta_K\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} + 2\beta_K\gamma_K\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC} +$$
$$+ 2\gamma_K\alpha_K\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MA}$$

$$\Leftrightarrow MK^2 = \alpha_K^2 MA^2 + \beta_K^2 MB^2 + \gamma_K^2 MC^2 + 2\alpha_K\beta_K MA\cdot MB\cdot\cos\angle AMB +$$
$$+ 2\beta_K\gamma_K MB\cdot MC\cdot\cos\angle BMC + 2\gamma_K\alpha_K MC\cdot MA\cdot\cos\angle CMA$$

$$\Leftrightarrow MK^2 = \alpha_K^2 MA^2 + \beta_K^2 MB^2 + \gamma_K^2 MC^2 + 2\alpha_K\beta_K MA\cdot MB\cdot\frac{MA^2 + MB^2 - MC^2}{2MA\cdot MB} +$$
$$+ 2\beta_K\gamma_K MB\cdot MC\cdot\frac{MB^2 + MC^2 - MA^2}{2MB\cdot MC} + 2\gamma_K\alpha_K MB\cdot MC\cdot\frac{MC^2 + MA^2 - MB^2}{2MC\cdot MA}$$

$$\Leftrightarrow MK^2 = (\alpha_K + \beta_K + \gamma_K)(\alpha_K MA^2 + \beta_K MB^2 + \gamma_K MC^2 - \beta_K\gamma_K a^2 - \gamma_K\alpha_K b^2 - \alpha_K\beta_K c^2)$$

$$\Leftrightarrow MK = \sqrt{\alpha_K MA^2 + \beta_K MB^2 + \gamma_K MC^2 - \beta_K\gamma_K a^2 - \gamma_K\alpha_K b^2 - \alpha_K\beta_K c^2}$$, q.e.d.

Aplicaciones.

1. Tenemos

$$K = A', p_{A'} = \frac{AA'}{A'A'}, q_{A'} = 1, \alpha_{A'} = \lim_{p_{A'}\to\infty}\frac{1}{1 + p_{A'}} = 0, \beta_{A'} = \lim_{p_{A'}\to\infty}\frac{p_{A'}}{1 + p_{A'}}\cdot\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2},$$

$\gamma_{A'} = \lim_{p_{A'}\to\infty}\dfrac{p_{A'}}{1 + p_{A'}}\cdot\dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$ y $AA' = \sqrt{\dfrac{1}{2}AB^2 + \dfrac{1}{2}AC^2 - \dfrac{1}{4}a^2}$, entonces

$$m_a = \sqrt{\frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}}.$$

2. $K = A', p_{A'} = \dfrac{AA'}{A'A'}, q_{A'} = \dfrac{b^2}{c^2}, \alpha_{A'} = 0, \beta_{A'} = \dfrac{b^2}{b^2+c^2}, \gamma_{A'} = \dfrac{c^2}{b^2+c^2}$, y por (2) se obtene:

$$s_a = \sqrt{\frac{b^2c^2}{b^2+c^2} + \frac{c^2b^2}{b^2+c^2} - \frac{b^2c^2}{(b^2+c^2)^2}a^2} = \frac{bc}{b^2+c^2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2} \Rightarrow s_a = \frac{2bc}{b^2+c^2}m_a .$$

3. $\alpha_{A'} = a, \beta_{A'} = \dfrac{b}{b+c}, \gamma_{A'} = \dfrac{c}{b+c}$ y por (2) deducimos que:

$l_a = AA' = \sqrt{\dfrac{bc^2}{b+c} + \dfrac{cb^2}{c+b} - \dfrac{bc}{(b+c)^2}a^2}$, luego

$$l_a = \frac{2}{b+c}\sqrt{pbc(p-a)} .$$

4. $\alpha_{A'} = 0, \beta_{A'} = \dfrac{1}{1+ctgBctgC}, \gamma_{A'} = \dfrac{1}{1+ctgBctgA}$ o bien

$\beta_{A'} = \dfrac{\sin B\cos C}{\sin A}, \gamma_{A'} = \dfrac{\cos B\cos C}{\sin A}$ y por (2) deducimos:

$$h_a = \sqrt{\frac{\sin B\cos C}{\sin A}c^2 + \frac{\cos B\cos C}{\sin A}b^2 - \frac{\sin B\cos C\sin C\cos B}{\sin^2 A}a^2} =$$

$$= \frac{1}{\sin A}\sqrt{c^2\sin A\sin B\cos C + b^2\sin A\cos B\sin C - \frac{a^2}{4}\sin 2B\sin 2C} =$$

$$= \frac{2R}{\sin A}\sqrt{\frac{abc^2}{4R^2}\cos C + \frac{ab^2c}{4R^2}\cos B - \frac{a^2bc}{4R^2}\cos C\cos B} =$$

$$= \frac{\sqrt{abc}}{a}\sqrt{c^2\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2abc} + b^2\cdot\frac{a^2-b^2+c^2}{2acb} - a\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\cdot\frac{a^2-b^2+c^2}{2ac}} =$$

$$= \frac{1}{2a}\sqrt{-a^4-b^4-c^4+2c^2a^2+2c^2b^2+2b^2c^2} = \frac{1}{2a}S .$$

5. Para la ceviana de Gergonne:

Se tiene $\alpha_{A'} = 0, \beta_{A'} = \dfrac{p-c}{a}, \gamma_{A'} = \dfrac{p-b}{a}$ y mediante (2) resulta:

$$g_a = \frac{1}{\sqrt{a}}\sqrt{b^2(p-b)+c^2(p-c)-(p-c)(p-b)a} .$$

6. La ceviana de Nagel.

Ahora $\alpha_{A'} = 0, \beta_{A'} = \dfrac{p-b}{a}, \gamma_{A'} = \dfrac{p-c}{a}$ y por (2) resulta:

$$\eta_a = \frac{1}{\sqrt{a}}\sqrt{c^2(p-b)+b^2(p-c)-(p-c)(p-b)a} .$$

Observaciones:

2.a. $MK \geq 0 \Rightarrow \alpha_K MA^2 + \beta_K MB^2 + \gamma_K MC^2 \geq \beta_K\gamma_K a^2 + \gamma_K\alpha_K b^2 + \alpha_K\beta_K c^2$.

2.b. Hay igualdad en 2.a si $M = K$.

2.c. Si $M \in Int(\Delta ABC)$, entonces $(q', p') \in R_+^* \times R_+^*$, $MK = KM \Leftrightarrow$

$$\alpha_K MA^2 + \beta_K MB^2 + \gamma_K MC^2 - \beta_K \gamma_K a^2 - \gamma_K \alpha_K b^2 - \alpha_K \beta_K c^2 =$$
$$= \alpha_M KA^2 + \beta_M KB^2 + \gamma_M KC^2 - \beta_M \gamma_M a^2 - \gamma_M \alpha_M b^2 - \alpha_M \beta_M c^2 .$$

Aplicaciones.

Se considera el conjunto $\Delta = \{O, G, H, I, L, N, \Gamma\}$.
Por (2) obtenemos:

$$\text{(2.1)}\ OH = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{tg^2 AtgBtgC} - \frac{b^2}{tgAtg^2 BtgC} - \frac{c^2}{tgAtgBtg^2 C}} =$$
$$= \sqrt{R^2 - 4R^2\left(\frac{\cos^2 A\cos B\cos C}{\sin B\sin C} + \frac{\cos A\cos^2 B\cos C}{\sin A\sin C} + \frac{\cos A\cos B\cos^2 C}{\sin A\sin B}\right)} =$$
$$= R\sqrt{1 - 4\cos A\cos B\cos C\left(\frac{\cos A}{\sin B\sin C} + \frac{\cos B}{\sin C\sin A} + \frac{\cos C}{\sin A\sin B}\right)} =$$

$= R\sqrt{1 - 8\cos A\cos B\cos C}$, donde usamos el que

$$\frac{\cos A}{\sin B\sin C} + \frac{\cos B}{\sin C\sin A} + \frac{\cos C}{\sin A\sin B} = 2 .$$

Así $OH = R\sqrt{1 - 8\cos A\cos B\cos C}$.

Observaciones.

$OH < R \Leftrightarrow \Delta ABC$ acutángulo;
$OH = R \Leftrightarrow \Delta ABC$ rectángulo ([2]);
$OH > R \Leftrightarrow \Delta ABC$ obtusángulo.

$$\text{(2.2)}\ OG = \sqrt{R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9}} = \frac{R}{3}\sqrt{1 - 8\cos A\cos B\cos C} .$$

$$\text{(2.3)}\ HG = \frac{2R}{3}\sqrt{1 - 8\cos A\cos B\cos C} .$$

Observacion.

Por (2.1), (2.2) y (2.3) tenemos: $OH = HG + OG \Rightarrow$ los puntos O, G y H están alineados.

$$\text{(2.4)}\ OL = \sqrt{R^2 - 3\cdot\frac{a^2 b^2 c^2}{(a^2 + b^2 + c^2)}} = \frac{2R}{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{a^4 + b^4 + c^4 - a^2 b^2 - b^2 c^2 - c^2 a^2} .$$

Observación.

$$OL \ge 0 \Rightarrow \frac{abc\sqrt{3}}{a^2 + b^2 + c^2} \le R \Leftrightarrow \frac{abc}{4S} \ge \frac{abc\sqrt{3}}{a^2 + b^2 + c^2} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \ge 4\sqrt{3}S$, que es la desigualdad de *Ionescu – Weitzenböck*.

$$\text{(2.5)}\ LO = \sqrt{\frac{1}{2}\sum LA^2 \cdot \frac{\cos A}{\sin B\sin C} - \frac{1}{4}\sum \frac{a^2}{\sin^2 A}\cdot ctgBctgC} .$$

$$\text{(2.6)}\ HO = 2R\cdot\sqrt{\sum\frac{\cos^3 A}{2\sin B\sin C} - \frac{1}{4}\sum ctgBctgC} .$$

(2.7) $GO=\sqrt{\frac{2}{9}\sum m_a^2\cdot\frac{\cos A}{\sin B\sin C}-\frac{1}{4\sin A\sin B\sin C}\sum\frac{\cos B\cos C}{\sin A}\cdot a^2}$.

(2.8) $GH=\sqrt{\frac{4}{9}\sum\frac{m_a^2}{tgBtgC}-\sum\frac{a^2}{tg^2 AtgBtgC}}$.

Por (2.a) obtenemos:

$OH\geq 0\Leftrightarrow \cos A\cos B\cos C\leq\frac{1}{8}$;

$HO\geq 0\Leftrightarrow \sum\frac{\cos^3 A}{2\sin B\sin C}\geq\frac{1}{4}\sum ctgBctgC\Leftrightarrow\sum\frac{\cos^3 A}{2\sin B\sin C}\geq\frac{1}{4}$;

$GO\geq 0\Leftrightarrow\frac{2}{9}\sum m_a^2\cdot\frac{\cos A}{\sin B\sin C}\geq\frac{1}{4\sin A\sin B\sin C}\sum a^2\cdot\frac{\cos B\cos C}{\sin A}$

$GH\geq 0\Leftrightarrow\frac{4}{9}\sum\frac{m_a^2}{tgBtgC}\geq\sum\frac{a^2}{tg^2 AtgBtgC}$.

Mediante (2.b) obtenemos:

$OH=0\Leftrightarrow\cos A\cos B\cos C=\frac{1}{8}\Leftrightarrow\Delta ABC$ equilátero;

$HO=0\Leftrightarrow\sum\frac{\cos^3 A}{2\sin B\sin C}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow\Delta ABC$ equilátero;

$GO=0\Leftrightarrow\frac{2}{9}\sum m_a^2\cdot\frac{\cos A}{\sin B\sin C}=\frac{1}{4\sin A\sin B\sin C}\sum a^2\cdot\frac{\cos B\cos C}{\sin A}\Leftrightarrow\Delta ABC$ es equilátero;

$OL=0\Leftrightarrow a^4+b^4+c^4-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2=0\Leftrightarrow\Delta ABC$ equilátero;

$LO=0\Leftrightarrow\frac{1}{2}\sum LA^2\cdot\frac{\cos A}{\sin B\sin C}=\frac{1}{4}\sum ctgBctgC\cdot\frac{a^2}{\sin^2 A}\Leftrightarrow\Delta ABC$ is equilatero;

$GH=0\Leftrightarrow\frac{4}{9}\sum\frac{m_a^2}{tgBtgC}=\sum\frac{a^2}{tg^2 AtgBtgC}\Leftrightarrow\Delta ABC$ equilátero;

Mediante (2.c) obtenemos:

$HO=OH\Rightarrow 4\cos A\cos B\cos C+\sum\frac{\cos^3 A}{2\sin B\sin C}=1$;

$GO=OG\Rightarrow 8\sum m_a^2\cdot\frac{\cos A}{\sin B\sin C}-9\sum a^2\cdot\frac{\cos B\cos C}{\sin A}=4R^2(1-8\cos A\cos B\cos C)$;

$$LO=OL\Rightarrow\frac{1}{2}\sum LA^2\cdot\frac{\cos A}{\sin B\sin C}-\frac{1}{4}\sum ctgBctgC\cdot\frac{a^2}{\sin^2 A}=$$

$$=\frac{4R^2}{(a^2+b^2+c^2)}(a^4+b^4+c^4-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2);$$

$GH=HG\Rightarrow 4\sum\frac{m_a^2}{tgBtgC}-9\sum\frac{a^2}{tg^2 AtgBtgC}=4R^2(1-8\cos A\cos B\cos C)$.

Hemos obtenido una propiedad del conjunto Δ :

$$\forall K, K' \in \Delta, KK' = 0 \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ es equilátero.}$$

Sea P el primer punto de *Pierre René Jean Baptiste Henri Brocard* (1845-1922).
Tenemos $m(\angle BAP) = m(\angle PBC) = m(\angle PCA) = \alpha$.
Por el teorema de los senos en ABP y CPA resulta

$$ctg\alpha = ctgA + ctgB + ctgC \text{ (ver [3]).}$$

Proposición 1. $P = H \Leftrightarrow \Delta ABC$ es equilátero.

Demostración. Tenemos :

$$\frac{\pi}{2} - B = \alpha \Rightarrow ctg\left(\frac{\pi}{2} - B\right) = ctg\alpha \Leftrightarrow tgB = ctgA + ctgB + ctgC \text{, (a).}$$

Análogamente,
$tgC = ctgA + ctgB + ctgC$, (b) y $tgB = ctgA + ctgB + ctgC$, (c). De (a), (b) y (c) resulta $tgA = tgB = tgC$, i.e. ΔABC es equilátero.

Proposición 2. $P = I \Leftrightarrow \Delta ABC$ es equilátero.

Demostración. $P = I \Rightarrow ctg\frac{A}{2} = ctgA + ctgB + ctgC$ and $ctg\frac{B}{2} = ctgA + ctgB + ctgC$.

$$ctg\frac{A}{2} = ctgA + ctgB + ctgC \Leftrightarrow \frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}} - \frac{\cos A}{\sin A} = ctgB + ctgC$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sin\frac{A}{2}}\left(\cos\frac{A}{2} - \frac{2\cos^2\frac{A}{2} - 1}{2\cos\frac{A}{2}}\right) = \frac{\sin(B+C)}{\sin B \sin C} \Leftrightarrow \frac{1}{\sin A} = \frac{\sin A}{\sin B \sin C} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \sin^2 A = \sin B \sin C$, (a).
También es $\sin^2 B = \sin C \sin A$, (b).
De (a) y (b) resulta:

$$\frac{\sin^4 B}{\sin^2 C} = \sin B \sin C \Leftrightarrow \sin^3 B = \sin^3 C \Rightarrow \sin B = \sin C \Rightarrow B = (-1)^k C + k\pi, k \in Z .$$

Si $k = 0$ se tiene $B = C$. Tomamos $A = \pi - 2B$ y resulta:

$$\sin^2 2B = \sin^2 B \Leftrightarrow (\sin 2B - \sin B)(\sin 2B + \sin B) = 0 \Leftrightarrow \sin 2B = \sin B \Rightarrow$$

$\Rightarrow 2B = (-1)^k B + k\pi$, and ya que $k = 1$ y $3B = \pi \Leftrightarrow B = \frac{\pi}{3} = C$ y ΔABC es equilátero.

Proposición 3. $P = G \Leftrightarrow \Delta ABC$ es equilátero.

Demostración. Seat ΔABC y $m(\angle BAA') = \alpha'$ (A' es el punto medio del lado BC).
Tenemos:

$$A(\Delta BAA') = \frac{cm_a \sin\alpha'}{2} = \frac{S}{2} \Leftrightarrow c \cdot \sqrt{\frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}} \cdot \sin\alpha' = \frac{bc \sin A}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin\alpha' = \frac{\sin B \sin A}{\sqrt{2(\sin^2 B + \sin^2 C) - \sin^2 A}} \text{ y}$$

$$ctg\alpha' = \frac{\sqrt{2\sin^2 B + 2\sin^2 C - \sin^2 A - \sin^2 B\sin^2 A}}{\sin B\sin A}.$$

$P = G \Rightarrow [AP] \subset [AA']$ y $[BP] \subset [BB']$, dondee B' es el punto medio de CA.

Entonces $\alpha = \alpha'$ y $\alpha = m(\angle CBB') = \beta$.

Por tanto $\alpha = \alpha' \Rightarrow ctg\alpha = ctg\alpha' \Leftrightarrow$

$$\frac{\sqrt{2\sin^2 B + 2\sin^2 C - \sin^2 A - \sin^2 B\sin^2 A}}{\sin B\sin A} = ctgA + ctgB + ctgC.$$

Llamando $ctgA = x, ctgB = y, ctgC = z$ resulta:

$$\frac{\dfrac{2}{1+y^2} + \dfrac{2}{1+z^2} - \dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{1}{1+y^2}\cdot\dfrac{1}{1+x^2}}{\dfrac{1}{(1+y^2)(1+x^2)}} = x^2 + y^2 + z^2 + 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 + 2x^2 + 2z^2 + 2z^2x^2 + 2 + 2y^2 + 2x^2 + 2x^2y^2 - 1 - z^2 - y^2 - y^2z^2 - 1 - z^2 =$$

$$= (1+z^2)(x^2 + y^2 + z^2 + 2) \Leftrightarrow 3x^2 - 3z^2 + z^2x^2 - z^4 + 2x^2y^2 - 2z^2y^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - z^2)(3 + z^2 + 2y^2) = 0 \Leftrightarrow x = z,$$ i.e. $ctgA = ctgC \Rightarrow A = C$.

Si $[BP] \subset [BB']$ de forma similar obtenemos que

$$\frac{\sqrt{2\sin^2 C + 2\sin^2 A - \sin^2 B - \sin^2 C\sin^2 B}}{\sin B\sin C} = ctgA + ctgB + ctgC,$$

lo que nos dice que $C = B$, y la conclusión deriva de ahí.

Proposición 4. $P = O \Leftrightarrow \Delta ABC$ es equilátero.

Demostraciónf. $P = O \Rightarrow m(\angle BAP) = m(\angle BAO) \Rightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{2} - C \Rightarrow$

$\Rightarrow ctg\alpha = ctg\left(\dfrac{\pi}{2} - C\right) \Leftrightarrow ctg\alpha = tgC \Leftrightarrow ctgA + ctgB + ctgC = tgC$ como en la proposición 1 se obtene el resultado deseado.

Proposición 5. $P = L \Leftrightarrow \Delta ABC$ es equilátero.

Demostración. Seat A' el pie de la simediana desde A. Ponemos $AA' = s_a$ y $m(\angle BAA') = \beta$. Por $P = L \Rightarrow m(\angle BAA') = m(\angle BAP)$ i.e. $\beta = \alpha$. Por el teorema de los senos en $\Delta BAA'$ tenemos $\dfrac{BA'}{\sin\beta} = \dfrac{s_a}{\sin B} \Leftrightarrow \sin\beta = \dfrac{BA'}{s_a}\cdot\sin B$. De

$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{c^2}{b^2} \Leftrightarrow \frac{BA'}{a} = \frac{c^2}{b^2 + c^2} \Leftrightarrow BA' = \frac{ac^2}{b^2 + c^2},$$

resulta que : $\sin\beta = \dfrac{c^2a^2\sin^2\beta}{4b^2m_a^2} \Rightarrow ctg^2\beta = \dfrac{1 - \sin^2\beta}{\sin^2\beta} = \dfrac{4b^2m_a^2}{c^2a^2\sin^2\beta} - 1.$

De $\beta = \alpha \Rightarrow ctg\beta = ctg\alpha \Rightarrow \dfrac{4b^2m_a^2}{c^2a^2\sin^2\beta} - 1 = (ctgA + ctgB + ctgC)^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sin^2 B + 2\sin^2 C - \sin^2 A}{\sin^2 C\sin^2 A} = \frac{1}{\sin^2 A} + \frac{1}{\sin^2 B} + \frac{1}{\sin^2 C}.$$

Llamando $\sin A = x, \sin B = y, \sin C = z$ obtenemos:

$$\frac{2y^2+2z^2-x^2}{x^2y^2}=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2} \Leftrightarrow 2y^4+2z^2y^2-x^2y^2=x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2$$

$$\Leftrightarrow 2y^2(y^2-x^2)+z^2(y^2-x^2)=0 \Leftrightarrow (y^2-x^2)(2y^2+z^2)=0 \Leftrightarrow y=x \Rightarrow A=B.$$

Análogamente, de $P=L$, obtenemos $B=C$. Luego $B=A=C$, q.e.d.

Proposición 6. $P=\Gamma \Leftrightarrow \Delta ABC$ es equilátero.

Demostración. Aplicando el teorema de los senos en BAA' deducimos

$$\frac{BA'}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin(\beta+B)} \Leftrightarrow \frac{\sin(\beta+B)}{\sin\beta}=\frac{c}{p-b} \Leftrightarrow \cos B+ctg\beta\sin B=\frac{c}{p-b} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ctg\beta=\frac{c}{(p-b)\sin B}-ctgB \Leftrightarrow ctgB=\frac{2\sin C}{(\sin A-\sin B+\sin C)\sin B}-ctgB.$$

De $P=\Gamma \Rightarrow P\in(A\Gamma) \Rightarrow ctg\alpha = ctg\beta \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sin C}{(\sin A-\sin B+\sin C)\sin B}=ctgA+2ctgB+ctgC$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sin C}{(\sin A-\sin B+\sin C)\sin B}=\frac{\sin(A+B)}{\sin A\sin B}+\frac{\sin(B+C)}{\sin B\sin C}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sin C}{\sin A-\sin B+\sin C}=\frac{\sin^2 C+\sin^2 A}{\sin A\sin C}.$$

Poniendo: $\frac{\sin A}{\sin C}=x, \frac{\sin B}{\sin C}=y$ y entonces resulta:

$$\frac{2x}{x-y+1}=\frac{1+x^2}{1} \Leftrightarrow x-y+1=\frac{2x}{1+x^2} \Leftrightarrow x-y=\frac{-(x-1)^2}{1+x^2} \Rightarrow x\le y, \qquad \text{(a)},$$

con igualdad si $x=1$.

De manera similar:

Ya que $P\in[BA'] \Rightarrow \frac{2y}{x+y-1}=\frac{x^2+y^2}{x^2}$, (b) y como $P\in[CC'] \Rightarrow \frac{2}{-x+y+1}=\frac{1+y^2}{y^2}$, (c).

De (b) deducimos: $\frac{2xy}{x^2+y^2}=\frac{x+y-1}{x} \Leftrightarrow \frac{2xy}{x^2+y^2}-1=\frac{y-1}{x} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{-(x-y)^2}{x^2+y^2}=\frac{y-1}{x} \Rightarrow y\le 1.$$

De (c) resulta: $\frac{-x+y+1}{y}=\frac{2y}{1+y^2} \Leftrightarrow \frac{2y}{1+y^2}-1=\frac{-x+y+1}{y}-1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{-(y-1)^2}{1+y^2}=\frac{-x+1}{y} \Rightarrow -x+1\le 0 \Rightarrow x\ge 1.$$

Entonces, $x\le y\le 1$ and $x\ge 1 \Rightarrow x=y=1$, i.e. $\sin A=\sin B=\sin C$ y ΔABC es equilátero.

Proposición 7. $P=N \Leftrightarrow \Delta ABC$ es equilátero.

Demostración. Sean $[AA_2],[BB_2],[CC_2]$ las cevianas de Nagel del triángulo ABC.

Poniendo $\alpha_1 = m(\angle BAA_2), \alpha_2 = m(\angle B_2BC), \alpha_3 = m(\angle C_2CA)$, por el teorema de los senos en ΔABA_2 y ΔB_2BC tenemos:

$$\frac{BA_2}{\sin\alpha_1} = \frac{c}{\sin(B+\alpha_1)} \Leftrightarrow \frac{a}{p-c} = \frac{\sin(\alpha_1 + B)}{\sin\alpha_1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sin C}{\sin A + \sin B - \sin C} = \cos B + \sin B ctg\alpha_1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sin C}{(\sin A + \sin B - \sin C)\sin B} = ctgB + ctg\alpha_1 .$$

Ya que: $\alpha = \alpha_1 \Rightarrow ctg\alpha = ctg\alpha_1 \Leftrightarrow ctgA + ctgB + ctgC = ctg\alpha_1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sin C}{(\sin A + \sin B - \sin C)\sin B} = (ctgA + ctgB) + ctgB + ctgC)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sin C}{(\sin A + \sin B - \sin C)\sin B} = \frac{\sin C}{\sin A \sin B} + \frac{\sin A}{\sin B \sin C}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin^2 C + \sin^2 A}{2\sin^2 C} = \frac{\sin A}{\sin A + \sin B - \sin C} \Leftrightarrow \frac{\sin^2 C + \sin^2 A}{2\sin C \sin A} = \frac{\sin C}{\sin A + \sin B - \sin C}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sin C \sin A}{\sin^2 C + \sin^2 A} - 1 = \frac{\sin A + \sin B - \sin C}{\sin C} - 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{-(\sin A - \sin C)^2}{\sin^2 C + \sin^2 A} = \frac{\sin A + \sin B - 2\sin C}{\sin C}$$

$\Leftrightarrow \sin A + \sin B - 2\sin C \le 0 \Leftrightarrow \sin A + \sin B \le 2\sin C$, (1).

De $\alpha = \alpha_2$ y como antes, obtenemos:

$$\sin B + \sin C \le 2\sin A, (2).$$

Análogamente $\alpha = \alpha_3$ y deducimos que $\sin A + \sin C \le 2\sin B$, (3).

De (1), (2) y (3) obtenemos:

$$(\sin A + \sin B)(\sin B + \sin C)(\sin C + \sin A) \le 8\sin A \sin B \sin C, (a).$$

Ya que $\sin A + \sin B \ge 2\sqrt{\sin A \sin B}$, $\sin B + \sin C \ge 2\sqrt{\sin B \sin C}$, $\sin C + \sin A \ge 2\sqrt{\sin C \sin A}$, entonces

$$(\sin A + \sin B)(\sin B + \sin C)(\sin C + \sin A) \ge 8\sin A \sin B \sin C, (b).$$

De (a) y (b) resulta:

$$(\sin A + \sin B)(\sin B + \sin C)(\sin C + \sin A) = 8\sin A \sin B \sin C$$

$$\Leftrightarrow \sin A(\sin B - \sin C)^2 + \sin B(\sin C - \sin A)^2 + \sin C(\sin A - \sin B)^2 = 0$$

$\Leftrightarrow \sin A = \sin B = \sin C$, q.e.d.

References:

[1] Rusu C., *O metodă de obținere a unor inegalități*,G.M.-B nr. 1/2002, 7-10.
[2] Problema 2680, G.M.-B nr.9/2013, autor Marcel Țena.
[3] Mihăileanu N., *Complemente de geometrie sintetică*, Editura Didactică y Pedagogică, 1965, 84-86.
[4] Tom F., *Proprietăți caracteristice triunghiului echilateral*, Recreații Matematice, Nr. 1, 2011, 17-19.

[5] Zvonaru T., Stanciu N., *Alte proprietăți caracteristice triunghiului echilateral*, Recreații Matematice, Nr. 2, 2011, 108-111.

Department of Mathematics,
“Ştefan cel Mare” High School,
Rîmnicu Sărat, Romania

Problemas para los más jóvenes 55

Cinco problemas de los Juegos de Arquímedes

PMJ55-1

Sabiendo que f es una función impar, es decir, tal que $f(x) = -f(-x)$, ¿cuál de las siguientes es con certeza una función impar?

a) $f(x)-1$ b) $\left(f\left(x\right)\right)^2$ c) $\left(f\left(x\right)\right)^2 + f\left(x\right)$ d) $\left(f\left(x\right)\right)^3 + 1$ e) $\left(f\left(x\right)\right)^3 + f\left(x\right)$

PMJ55-2

Calcular el valor de $\log_2\left(3\right)\cdot\log_3\left(4\right)\cdot\log_4\left(5\right)\cdots\log_{126}\left(127\right)\cdot\log_{127}\left(128\right)$

PMJ55-3

En un trapecio ABCD, la base mayor AB es triple de la base menor CD. Si E es el punto medio de BD, hallar la razón entre el área del triángulo CDE y el área del trapecio.

PMJ55-4

Sabiendo que *k* es un número entero positivo fijo, ¿cuántas parejas (x,y) de números reales mayores o iguales que 0 verifican la igualdad $x^{2k} + y^{2k} = \left(xy\right)^k$?

PMJ55-5

Si n es un número natural con 6 divisores enteros positivos, ¿cuántos divisores enteros positivos tiene n^2?

Problemas para os máis novos 54.

1. Se un ángulo dun cuadrilátero cíclico é igual ao que forman as súas diagonais, entón dous lados consecutivos do cuadrilátero son iguais, e reciprocamente.

Solución enviada por Bruno Salgueiro Fanego, Viveiro, Lugo.

Sexan $ABCD$ o cuadrilátero cíclico, O o centro da súa circunferencia circunscrita e E o punto de corte das súas diagonais AC e BD. Utilizaremos os feitos coñecidos de que un ángulo interior nunha circunferencia coincide coa semisuma dos ángulos centrais asociados aos arcos que abarca dito ángulo interior e un ángulo inscrito nunha circunferencia é igual á metade do ángulo central asociado.

Vexamos que os lados consecutivos AB e BC do cuadrilátero $ABCD$ son iguais se e só se o ángulo interior no vértice A do cuadrilátero cíclico $ABCD$, $\measuredangle BAD$, é igual ao ángulo $\measuredangle AEB$ que forman as súas diagonais:

$AB = BC \Leftrightarrow \measuredangle AOB = \measuredangle BOC \Leftrightarrow \measuredangle AOB + \measuredangle COD = \measuredangle BOC + \measuredangle COD \Leftrightarrow 2\measuredangle AEB = \measuredangle BOD$
$\Leftrightarrow \measuredangle AEB = \measuredangle BOD/2 \Leftrightarrow \measuredangle AEB = \measuredangle BAD$.

O enunciado queda, polo tanto, demostrado.

Problemas para os máis novos 54.

2. Se a e b son números reais positivos, demostrar que

$$\frac{(a-b)^2}{2(a+b)} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} - \sqrt{ab} \le \frac{(a-b)^2}{\sqrt{2}(a+b)}.$$

Solución enviada por Bruno Salgueiro Fanego, Viveiro, Lugo.

Probaremos as desigualdades por separado elevando ao cadrado e illando as raíces:

Sendo $a>0$ e $b>0$, $\frac{(a-b)^2}{2(a+b)} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} - \sqrt{ab}$

$$\Leftrightarrow \frac{(a-b)^4}{4(a+b)^2} = \left[\frac{(a-b)^2}{2(a+b)}\right]^2 \le \left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} - \sqrt{ab}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{2} - \sqrt{2ab\left(a^2+b^2\right)} + ab$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2ab\left(a^2+b^2\right)} \le \frac{a^2+b^2}{2} + ab - \frac{(a-b)^4}{4(a+b)^2} = \frac{(a+b)^4 + 8ab\left(a^2+b^2\right)}{4(a+b)^2}$$

$$\Leftrightarrow 2ab\left(a^2+b^2\right) = \left[\sqrt{2ab\left(a^2+b^2\right)}\right]^2 \le \left[\frac{(a+b)^4 + 8ab\left(a^2+b^2\right)}{4(a+b)^2}\right]^2$$

$$= \frac{(a+b)^8 + 16ab\left(a^2+b^2\right)(a+b)^4 + 64a^2b^2\left(a^2+b^2\right)^2}{16(a+b)^4}$$

$$\Leftrightarrow 32ab\left(a^2+b^2\right)(a+b)^4 \le (a+b)^8 + 16ab\left(a^2+b^2\right)(a+b)^4 + 64a^2b^2\left(a^2+b^2\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 0 \le (a+b)^8 - 16ab\left(a^2+b^2\right)(a+b)^4 + 64a^2b^2\left(a^2+b^2\right)^2 = \left[(a+b)^4 - 8ab\left(a^2+b^2\right)\right]^2$$

$$= (a-b)^8,$$

o cal se cumpre, obténdose ademais a igualdade se e só se $a-b=0$, isto é, só e cando $a=b$.

Analogamente, $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} - \sqrt{ab} \le \frac{(a-b)^2}{\sqrt{2}(a+b)}$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2+b^2}{2} - \sqrt{2ab\left(a^2+b^2\right)} + ab = \left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} - \sqrt{ab}\right)^2 \le \left[\frac{(a-b)^2}{\sqrt{2}(a+b)}\right]^2 = \frac{(a-b)^4}{2(a+b)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4ab\left(a^2+b^2\right)}{(a+b)^2} = \frac{a^2+b^2}{2} + ab - \frac{(a-b)^4}{2(a+b)^2} \le \sqrt{2ab\left(a^2+b^2\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{16a^2b^2\left(a^2+b^2\right)^2}{(a+b)^4} = \left[\frac{4ab\left(a^2+b^2\right)}{(a+b)^2}\right]^2 \le \left[\sqrt{2ab\left(a^2+b^2\right)}\right]^2 = 2ab\left(a^2+b^2\right)$$

$$\Leftrightarrow 8a^2b^2\left(a^2+b^2\right)^2 \le ab\left(a^2+b^2\right)(a+b)^4 \Leftrightarrow 0 \le ab\left(a^2+b^2\right)\left[(a+b)^4 - 8ab\left(a^2+b^2\right)\right]$$

$$= ab\left(a^2+b^2\right)(a-b)^4,$$

que tamén se verifica, dándose a igualdade, coma antes, se e só se $a=b$.

Problemas para os máis novos 54.

3. Considérase un triángulo cuxos lados miden 1, r e r^2. Determine todos os valores de r de maneira que o triángulo sexa rectángulo.

Solución enviada por Bruno Salgueiro Fanego, Viveiro, Lugo.

Se $0<r<1$, entón $r^2<r<1$ e, polo tanto, o lado maior do triángulo mide 1. Polo teorema de Pitágoras e o seu recíproco, o triángulo será rectángulo se e só se $1^2=\left(r^2\right)^2+r^2$, ou equivalentemente, só e cando $r^2=\dfrac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot(-1)}}{2\cdot 1}$, co cal (ao ser $r^2>0$) $r=\pm\sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}}$ e, polo tanto (como $r>0$), $r=\sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}}$, que cumpre que $0<r<1$, co cal é unha (e, polo tanto, a única) solución válida neste caso.

Se $r=1$, os lados do triángulo miden todos 1, logo é un triángulo equilátero e, polo tanto, todos os seus ángulos son iguais, co cal non é un triángulo rectángulo.

Se $r>1$, entón $1<r<r^2$ e, polo tanto, o lado maior do triángulo mide r^2. Polo teorema de Pitágoras e o seu recíproco, o triángulo será rectángulo se e só se $\left(r^2\right)^2=r^2+1^2$, ou equivalentemente, só e cando $r^2=\dfrac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-1)}}{2\cdot 1}$, co cal (ao ser $r^2>0$) $r=\pm\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$ e, polo tanto (como $r>0$), $r=\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$, que cumpre que $r>1$, co cal é unha (e, polo tanto, a única) solución válida nestoutro caso.

As solucións son, entón, $r=\sqrt{1/\varphi}$ e $r=\sqrt{\varphi}$, onde $\varphi=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ é o número de ouro.

Problemas para os máis novos 54.

4. Tómanse tres puntos no interior dun cadrado de lado 1. Demostre que a área do triángulo que forman é menor ou igual ca $\frac{1}{2}$.

Comentario enviado por Bruno Salgueiro Fanego, Viveiro, Lugo.

Con maior xeneralidade, pode demostrarse que, se se toman tres puntos no interior ou nos bordos dun rectángulo, a área do triángulo que forman é menor ou igual cá metade da área de dito rectángulo, dándose a igualdade se e só ditos puntos son vértices do rectángulo. Véxase, por exemplo, o argumento que aparece en:

mathforum.org/library/drmath/view/55051.html.

Problemas para os máis novos 54.

5. Encontrar todos os valores positivos de a e b que verifican a ecuación $\sqrt{a}+\sqrt{b}=2009$.

Solución e nota enviadas por Bruno Salgueiro Fanego, Viveiro, Lugo.

En xeral, se c é un número real positivo,

$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{c} \Rightarrow x \geq 0$, $\sqrt{x} \leq \sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{c} \Rightarrow x=\left(\sqrt{x}\right)^2 \leq \left(\sqrt{c}\right)^2=c$.

Por simetría, tamén temos que $0 \leq y \leq c$. Así, $(x,y) \in [0,c]^2$. Ademais,

$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{c} \Rightarrow x+y+2\sqrt{xy}=\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2=\left(\sqrt{c}\right)^2=c \Rightarrow 2\sqrt{xy}=c-x-y$

$\Rightarrow 4xy=\left(2\sqrt{xy}\right)^2=(c-x-y)^2=c^2+x^2+y^2-2cx-2cy+2xy$

$\Rightarrow 0=x^2+y^2-2xy-2cx-2cy+c^2=\begin{pmatrix}1 & x & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c^2 & -c & -c\\ -c & 1 & -1\\ -c & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ x\\ y\end{pmatrix} \Rightarrow (x,y)$ varía nun anaco dunha cónica, cuxas matriz M e submatriz A de termos cuadráticos teñen determinantes $|M|=\begin{vmatrix}c^2 & -c & -c\\ -c & 1 & -1\\ -c & -1 & 1\end{vmatrix}=-4c^2 \neq 0$ e $|A|=\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{vmatrix}=0$, respectivamente, co cal dita cónica é unha parábola. Ademais, o parámetro de dita parábola é $\sqrt{-\frac{|M|}{(\mathrm{tr}A)^3}}=\frac{c}{\sqrt{2}}$ e o seu eixo de simetría é a recta $\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c^2 & -c & -c\\ -c & 1 & -1\\ -c & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ x\\ y\end{pmatrix}=0$, ou sexa, a bisectriz do primeiro e terceiro cuadrantes.

As tanxentes nos extremos $(0,c)$ e $(c,0)$ do arco da parábola son, respectivamente, as polares de ditos puntos respecto a tal cónica, cuxas ecuacións respectivas son

$\begin{pmatrix}1 & 0 & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c^2 & -c & -c\\ -c & 1 & -1\\ -c & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ x\\ y\end{pmatrix}=0$ e $\begin{pmatrix}1 & c & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c^2 & -c & -c\\ -c & 1 & -1\\ -c & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ x\\ y\end{pmatrix}=0$, que veñen a ser os eixes de ordenadas e de absicas, respectivamente. Esas dúas tanxentes córtanse na orixe $(0,0)$.

A gráfica da curva de ecuación $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{c}$ é entón a do arco de parábola antes estudado contido no cadrado $[0,c]^2$. Polo tanto, no caso particular $c=2009^2$, os pares de números reais positivos (a,b) tales que $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{2009^2}$ son os infinitos pares de coordenadas dos puntos situados sobre tal arco de parábola.

Nota: Parece razoable supor que o enunciado proposto na Olimpíada de Chile 2009, Nivel Menor, foi: Encontrar todos os valores enteiros positivos de a e b que verifican a ecuación $\sqrt{a}+\sqrt{b}=2009$, ou, seguramente (para evitar a aparición de excesiva cantidade de solucións), a ecuación $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{2009}$. Neste último caso, as solucións son

$(a,b)\in\{(41,1476),(164,1025),(369,656),(656,369),(1025,164),(1476,41)\}$.

A verificación de tal suposición, a proba de que esas son todas as solucións positivas da ecuación $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{2009}$, e resolucións dos outros dous problemas 3 e 4 propostos na sección *Problemas para os máis novos* do número 54 da Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática, poden consultarse en:

http://www.olimpiadadematematica.cl/images/Pruebas/Final2009.pdf.

Olimpiada de Chile 2009, Nivel Menor. Solución al Problema 3

Lucía **Ma Li** (estudiante de 2 de bachillerato)
IES Isabel de España, Las Palmas de Gran Canaria, España
& Ángel **Plaza**
Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, España

Problema 3. Se considera un triángulo cuyos lados miden $1, r$ y r^2. Determine todos los valores de r de manera que el triángulo sea rectángulo.

Solución. Es suficiente considerar el teorema de Pitágoras y despajar r que ha de ser un número real positivo. Es decir:

a) Si $r < 1$ entonces $1 = r^2 + r^4$. Haciendo $r^2 = t$, resulta $t^2 + t - 1 = 0$, de donde
$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$
y como $t > 0$, se tiene $t = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ y $r = \sqrt{\dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}}$.

b) En otro caso, si $r > 1$ entonces $r^4 = r^2 + 1$. Haciendo de nuevo $r^2 = t$, resulta $t^2 - t - 1 = 0$, de donde
$$t = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$
y como $t > 0$, se tiene $t = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$ y $r = \sqrt{\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}}$.

$\square$

Problemas propuestos en la 5^a Olimpiada Matemática Europea Femenina, abril 2016, Busteni (Rumania)

Problema 1 (propuesto por Holanda)

Sean: *n un entero positivo impar, y* $x_1, ..., x_n$ números reales no negativos. Demostrar que

$$\min_{i=1,\ldots,n} \left\{x_i^2 + x_{i+1}^2\right\} \leq \max_{j=1,\ldots,n} \left\{2x_j x_{j+1}\right\}.$$

donde $x_{n+1} = x_1$.

Problema 2 (propuesto por Bielorrusia)

Sea ABCD un cuadrilátero cíclico, y X la intersección de las diagonales AC y BD. Sean C_1, D_1 y M los puntos medios de los segmentos CX, DX y CD, respectivamente. Las rectas AD_1 y BC_1 se intersecan en Y, la recta MY corta a las diagonales AC y BD en dos puntos distintos, que llamamos respectivamente E y F. Demostrar que la recta XY es tangente a la circunferencia que pasa por E, F y X.

Problema 3 (propuesto por Mexico)

Sea m un entero positivo. Se considera un tablero de $4m \times 4m$ casillas cuadradas. Dos casillas diferentes están *relacionadas* si están ya sea en la misma fila o en la misma columna. Ninguna casilla está *relacionada* con ella misma. Algunas casillas se colorean de azul, de tal manera que cada casilla está relacionada con, al menos, dos casillas azules. Determinar el mínimo número de casillas azules.

Problema 4 (propuesto por Luxemburgo)

Dos circunferencias ω_1 y ω_2 del mismo radio se intersecan en dos puntos distintos, X_1 y X_2. Se considera una circunferencia ω, tangente exteriormente a ω_1 en un punto T_1, y tangente interiormente a ω_2 en un punto T_2. Demostrar que las rectas X_1T_1 y X_2T_2 se cortan en un punto que pertenece a ω.

Problema 5 (propuesto por Holanda)

Sean k y n enteros tales que $k \geq 2$ y $k \leq n \leq 2k - 1$. Se ponen piezas rectangulares, cada una de tamaño $1 \times k$ ó $k \times 1$, en un tablero de $n \times n$ casillas cuadradas, de forma que cada pieza cubra exactamente k casillas del tablero y no haya dos piezas superpuestas. Se hace esto hasta que no se puedan colocar más piezas. Para n y k en las condiciones anteriores, determinar el mínimo número de piezas que puede contener dicho tablero.

Problema 6 (propuesto por Holanda)

Sea S el conjunto de todos los enteros positivos n tales que n^4 tiene un divisor en el conjunto $\left\{n^2+1, n^2+2, ..., n^2+2n\right\}$.

Demostrar que hay infinitos elementos en S de cada una de las formas $7m, 7m+1, 7m+2, 7m+5$ y $7m+6$, pero S no contiene elementos de la forma $7m+3$ y $7m+4$, siendo m un entero.

Problema 271

Miguel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca, España

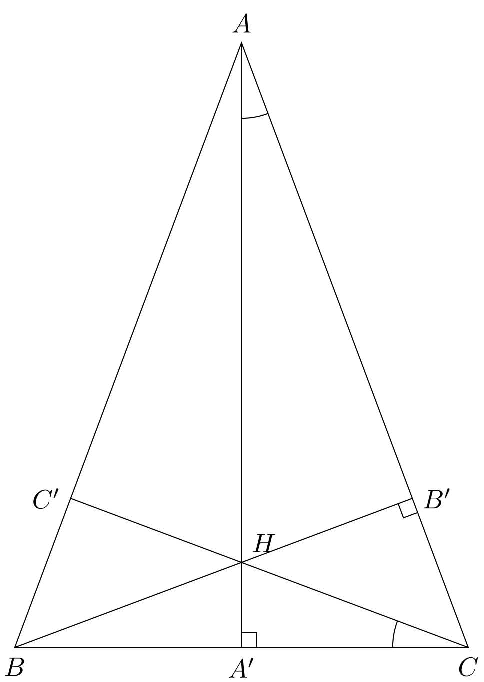
Sea A' el pie de la altura relativa al lado BC. Al ser $AB = AC$, A' es el punto medio del lado BC. Habida cuenta de que son iguales los ángulos agudos que se ven marcados en la figura 1, así como los análogos marcados en la figura 2 (en el primer caso, su valor común es $\frac{1}{2}\angle CAB$ y, en el segundo, $90^\circ - \frac{1}{2}\angle CAB$), son semejantes - en ambos casos - los triángulos rectángulos $AA'C$ y $HA'C$; por consiguiente, tenemos

$$\frac{A'C}{A'A} = \frac{A'H}{A'C}$$

esto es,

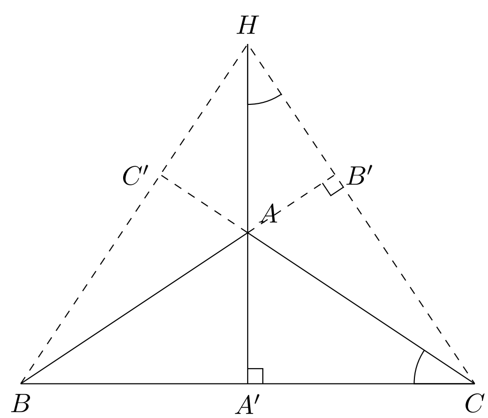
$$A'A \cdot A'H = \left(A'C\right)^2,$$

como se quería, pues $A'C$ es el radio de la circunferencia de diámetro BC.



$\triangle ABC$ acutángulo

Figura 1

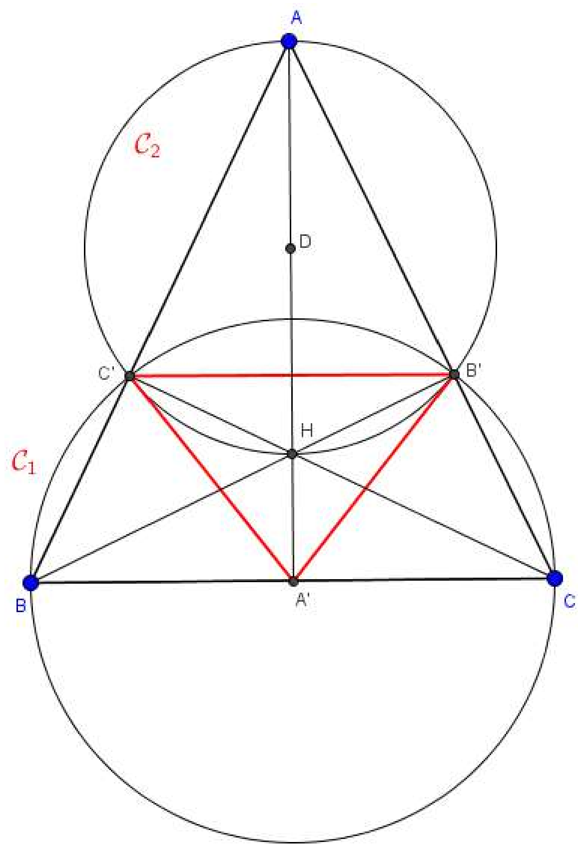


$\triangle ABC$ obtusángulo

Figura 2

Problema 271 Propuesto por Francisco Javier García Capitán, Priego de Córdoba, España.
Sean ABC un triángulo isósceles, con AB = AC; H su ortocentro y A'B'C' su triángulo órtico.
Demostrar que H es el inverso de A respecto de la circunferencia de diámetro BC.

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba (España).
Sea $\mathcal{C}_1$ la circunferencia de diámetro BC.
A la vista de la construcción realizada, podemos reseñar los siguientes hechos de interés:



1.- Los puntos B', C', H y A son concíclicos.
Sea D el centro de esta circunferencia $\mathcal{C}_2$.
Por tanto, $\measuredangle C'DB' = 2A$.

2.- En el triángulo órtico A'B'C', el ángulo en A' es el doble del ángulo $\measuredangle B'BC' = 90º - A \rightarrow \measuredangle B'A'C' = 180º - 2A$.

3.- Por tanto, el cuadrilátero $A'B'D\,C'$ es también concíclico ya que $\measuredangle C'DB' + \measuredangle B'A'C' = 180º$.
Entonces, también sucederá que los otros dos ángulos opuestos, $\measuredangle A'B'D + \measuredangle A'C'D = 180º$ y, por la simetría del triángulo isósceles, como han de ser iguales ambos ángulos, resultará que $\measuredangle A'B'D = \measuredangle A'C'D = 90º$.

4.- Entonces, ambas circunferencias $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ son **ortogonales**.
Por tanto, $\mathcal{C}_2$ será invariante respecto de la inversión de la circunferencia $\mathcal{C}_1$.
De este modo, H es el punto inverso de A respecto de la circunferencia $\mathcal{C}_1$, por tratarse de dos puntos de la circunferencia $\mathcal{C}_2$, alineados con el punto A', centro de la circunferencia $\mathcal{C}_1$.

***Problema* 271**

Sean ABC un triángulo isósceles, con $AB = AC$; H su ortocentro y $A'B'C'$ su triángulo órtico. Demostrar que H es el inverso de A respecto de la circunferencia de diámetro BC.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.

Sea A' el centro de esa circunferencia. Para que H sea el inverso de A respecto de esa circunferencia se ha de verificar

$$A'H \cdot A'A = A'B^2 \qquad (*).$$

Sea H' es el simétrico de H respecto del lado BC; como sabemos, H' está en la circunferencia circunscrita al triángulo isósceles ABC, diametralmente opuesto a A y por ello el triángulo ABH' es rectángulo en B.

Tenemos pues $A'H \cdot A'A \ = \ A'H' \cdot A'A$ y según el teorema de la altura, ese producto es igual al cuadrado de la altura sobre la hipotenusa, o sea, a $A'B^2$, como queríamos demostrar.■

Problema 271

Sean ABC un triángulo isósceles, con AB = AC; H su ortocentro y A'B'C' su triángulo órtico. Demostrar que H es el inverso de A respecto de la circunferencia de diámetro BC.

Solución

Es muy conocido que en cualquier triángulo, el simétrico del ortocentro respecto a cualquiera de sus lados yace en la circunferencia circunscrita.

La demostración es por otra parte sencilla. Sea ABC el triángulo de referencia, A', B', C' su triángulo órtico y H' el simétrico de H respecto del lado a = BC. Se tiene que <H'BC = <CBH por la simetría. Por otra parte, <CBH = H'AC, pues sus lados son respectivamente perpendiculares y ambos son agudos. Por Tanto <H'BC = <H'AC y los cuatro puntos A, B, C y H' son concíclicos.

Volviendo al triángulo del enunciado, sea entonces H' el simétrico de H respecto al lado BC. Por potencia de A', que es el punto medio del lado BC, respecto a la circunferencia circunscrita, se tiene que A'H·A'A = H'A'·A'A = A'B·A'C = r^2, siendo r el radio de la circunferencia de diámetro BC. Por tanto A y H son inversos respecto de tal circunferencia

Ignacio Larrosa Cañestro

(profesor de enseñanza secundaria jubilado)

Problema 271.

Proposto por Francisco Javier García Capitán, Priego de Córdoba, España.

Sexan ABC un triángulo isóscele, con $AB = AC$; H o seu ortocentro e $A'B'C'$ o seu triángulo órtico. Demostrar que H é o inverso de A respecto da circunferencia de diámetro BC.

Solución enviada por Bruno Salgueiro Fanego, Viveiro, Lugo.

Sexan $c = AB = AC$, $2a = BC$ e $b = AA'$ e consideremos a referencia cartesiana rectangular onde se teñen as seguintes coordenadas: $A'(0,0)$, $C(a,0)$ e $A(0,b)$.

Como $BA' = A'C$, $B(-a,0)$.

As coordenadas do ortocentro virán caracterizadas por dous feitos:

$H \in AA'$, logo $H(0,h)$, e

$0 = \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CA} = (0-(-a), h-0) \cdot (0-a, b-0) = (a,h) \cdot (-a,b) = -a^2 + hb$

$= -A'C^2 + A'H \cdot A'A$, ou equivalentemente, $A'A \cdot A'H = A'C^2$,

que é precisamente a condición para que, por definición, H sexa o inverso de A respecto da circunferencia de de centro A' e raio $A'C$, ou sexa, para que H sexa o inverso de A respecto da circunferencia de diámetro BC, como queriamos demostrar.

Problema 272

Miguel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca, España

Consideremos un sistema de ejes de coordenadas rectangulares tomando como eje de abscisas la recta determinada por los puntos A y B y como eje de ordenadas la mediatriz del segmento AB.

Pongamos $A\,(-a, 0)$ y $B\,(a, 0)$, siendo a un número real positivo. Sea $y = mx + n$ la ecuación de la recta r y (α, β) las coordenadas de M. Entonces,

$$\beta = m\alpha + n \tag{1}$$

y las coordenadas (x, y) del punto P satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones formado por las de las rectas AM y perpendicular a BM por B, a saber:

$$y = \frac{\beta}{a + \alpha}\,(x + a)$$

y

$$y = \frac{a - \alpha}{\beta}\,(x - a)$$

Despejamos α y β, obteniendo

$$\alpha = \frac{a\left(a^2 - x^2 + y^2\right)}{a^2 - x^2 - y^2} \qquad \beta = \frac{2ay\,(a - x)}{a^2 - x^2 - y^2}$$

Al sustituir estas expresiones de α y β en (1), se obtiene, después de simplificar, la ecuación

$$(am + n)\,x^2 + (-am + n)\,y^2 - 2axy + 2a^2y - a^2\,(am + n) = 0 \tag{2}$$

que es, en general, la de una cónica, como se quería.

Dicha ecuación será la de una parábola si y solo si se cumplen las condiciones

$$\begin{vmatrix} am + n & -a & 0 \\ -a & -am + n & a^2 \\ 0 & a^2 & -a^2\,(am + n) \end{vmatrix} \neq 0$$

y

$$\begin{vmatrix} am + n & -a \\ -a & -am + n \end{vmatrix} = 0$$

es decir,

$$a^2\,(am - n)\,(am + n)^2 \neq 0 \tag{3}$$

y

$$n^2 - a^2m^2 - a^2 = 0 \tag{4}$$

Escrita esta última en la forma $(n - am)\,(n + am) = a^2$ nos revela, habida cuenta de que $a \neq 0$, que cada uno de los factores del primer miembro es dintinto de cero. Por consiguiente, (4) implica (3).

Se concluye, pues, que (2) es la ecuación de una parábola si y solo si $n^2 - a^2m^2 - a^2 = 0$, si y solo si $n = \pm a\sqrt{1 + m^2}$, con lo que la ecuación (en el sistema de coordenadas que hemos adoptado) de las rectas pedidas es

$$y = mx \pm a\sqrt{1 + m^2}, \qquad m \in \mathbb{R}$$

Problema 272

Propuesto por Francisco Javier García Capitán, Priego de Córdoba, España. Dedicado a la memoria de José María Pedret.

Sean dos puntos A y B y una recta r. Para cada punto M de r sea P la intersección de la recta AM y la recta perpendicular a BM por B.

1) Demostrar que el lugar geométrico de P al variar M sobre r es, en general, una cónica.

2) Dados los puntos A y B, hallar las rectas r para las que la cónica es una parábola.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.

Vamos a definir una correspondencia homográfica entre las rectas que pasan por B y las que pasan por A del siguiente modo: a una recta b del haz B^* (de las que pasan por B), le asocio primero la perpendicular b' por B, que corta en M a la recta r y finalmente la recta $a = AM$ del haz A^*. (De forma más general, puede sustituirse b' por la homóloga de b en cualquier involución de rectas de centro B. Obsérvese también que los papeles de a y a', b y b', M y M' son intercambiables).

El lugar geométrico descrito en el problema es el mismo que el definido por la intersección de los pares (a, b) de rectas homólogas en la proyectividad anterior, y ese lugar geométrico es una cónica que pasa por A y por B (es otra forma de definir una cónica proyectivamente).

Esta cónica tendrá puntos en el infinito cuando las rectas $b = BP$ y $a = AM$ sean paralelas. Como $BP \perp BM$, eso sucederá cuando también sean perpendiculares AM y BM, para lo cual solamente se precisa que M esté sobre la circunferencia de diámetro AB.

Así pues, cuando la recta r corte a esta circunferencia en dos puntos el lugar geométrico es una hipérbola, si corta en uno, es decir, **si r es tangente, es una parábola** y es una elipse cuando es exterior.■

Problema 272.
Proposto por Francisco Javier García Capitán, Priego de Córdoba, España. Dedicado á memoria de José María Pedret.

Sexan dous puntos A e B e unha recta r. Para cada punto M de r, sexa P a intersección da recta AM e a recta perpendicular a BM por B.

1) Demostrar que o lugar geométrico de P ao variar M sobre r é, en xeral, unha cónica.
2) Dados os puntos A e B, achar as rectas r para as que a cónica é unha parábola.

Solución enviada por Bruno Salgueiro Fanego, Viveiro, Lugo.

1) Sexa O o punto medio de AB e introduzamos o sistema de referencia cartesiano rectangular de orixe O e base positivamente orientada de primeiro vector $\overrightarrow{OB}$. Temos así as seguintes coordenadas: $A(-1,0)$ e $B(1,0)$.

Supoñamos que a ecuación da recta r nesa referencia é $r: ax+by=c$ con $a^2+b^2\neq 0$ e que as coordenadas respectivas de M e P son $M(m,n)$ e $P(p,q)$.

Como M é un punto de r, $am+bn=c$; ao estar M, A e P aliñados,

$$0=\begin{vmatrix}1 & m & n\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & p & q\end{vmatrix}=-q+pn+n-qm$$ e, por ser $BM\perp BP$,

$$0=\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{BP}=(m-1,n-0)\cdot(p-1,q-0)=(m-1)(p-1)+nq\,.$$

Así, o sistema

$$\begin{cases} ax+by=c\\ -qx+(p+1)y=q\\ (p-1)x+qy=p-1\end{cases}$$

debe ter polo menos unha solución $(x,y)=(m,n)$, o cal implica, polo teorema de Rouché-Fröbenius, que o rango das matrices dos coeficientes e ampliada cos termos independentes deben ser iguais ao número de incógnitas, que neste caso é 2, logo o determinante de dita matriz ampliada debe ser nulo, é dicir,

$$0=\begin{vmatrix}a & b & c\\ -q & p+1 & q\\ p-1 & q & p-1\end{vmatrix}=(a-c)p^2+2bpq-(a+c)q^2-2bq-a+c$$

$$=\begin{pmatrix}1 & p & q\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-a+c & 0 & -b\\ 0 & a-c & b\\ -b & b & -a-c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ p\\ q\end{pmatrix},$$ logo o punto $P=(p,q)$ pertence á cónica

de ecuación $$\begin{pmatrix}1 & x & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-a+c & 0 & -b\\ 0 & a-c & b\\ -b & b & -a-c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ x\\ y\end{pmatrix}=0\,.$$

2) A cónica anterior é unha parábola se e só se o menor complementario $\begin{vmatrix} a-c & b \\ b & -a-c \end{vmatrix}$ do elemento da fila e columnas primeira da súa matriz asociada é nulo, é dicir, só e cando $d^2(O,r) = \left(\dfrac{|a \cdot 0 + b \cdot 0 - c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)^2 = \dfrac{c^2}{a^2+b^2}$ é igual a 1, ou equivalentemente, se e só se a distancia da recta r ao centro da circunferencia de diámetro AB é igual ao raio da mesma, isto é, só e cando a recta r é tanxente a dita circunferencia.

Problema 273

Demostrar que si n es primo, el número $\left[\left(4+\sqrt{11}\right)^n\right]$ es un múltiplo de n más 7.

Solución

Se tiene que $0 < \left(4-\sqrt{11}\right)^n < 1,\ \forall\, n > 0$. Consideremos entonces el número

$$a(n) = \left(4+\sqrt{11}\right)^n + \left(4-\sqrt{11}\right)^n$$

Se tiene que a(n) es entero para todo n, pues al desarrollar las potencias por la fórmula del binomio, las potencias impares de $\sqrt{11}$ se cancelan. Entonces

$$\left[\left(4+\sqrt{11}\right)^n\right] = a(n) - 1$$

El enunciado es entonces equivalente a mostrar que a(n) ≡ 8 (mod n) si n es primo. Desarrollando las potencias, tenemos que para n = 2k+1, k ≥ 0

$$\boldsymbol{a(n) = 2\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{2i}4^{n-2i}11^{i}}$$

Pero si n es primo, $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ es múltiplo de n si 0 < k < n, pues el factor primo n del numerador no se puede simplificar con ninguno del denominador. Por tanto, el único término del sumatorio que no es múltiplo de n es el correspondiente a i = 0, y

$a(n) \equiv 2\cdot 4^n \equiv 2\cdot 4 \equiv 8\ (mod\ n)$ (Teorema de Euler-Fermat)

Esto demuestra el enunciado para todo n primo impar. Para n = 2,

$$a(2) = \left(4+\sqrt{11}\right)^2 + \left(4-\sqrt{11}\right)^2 = 2(16+11) \equiv 8 \equiv 0\ (mod\ 2)$$

El recíproco no es cierto en general, sin embargo el único contraejemplo con n < 10000 es n = 46.

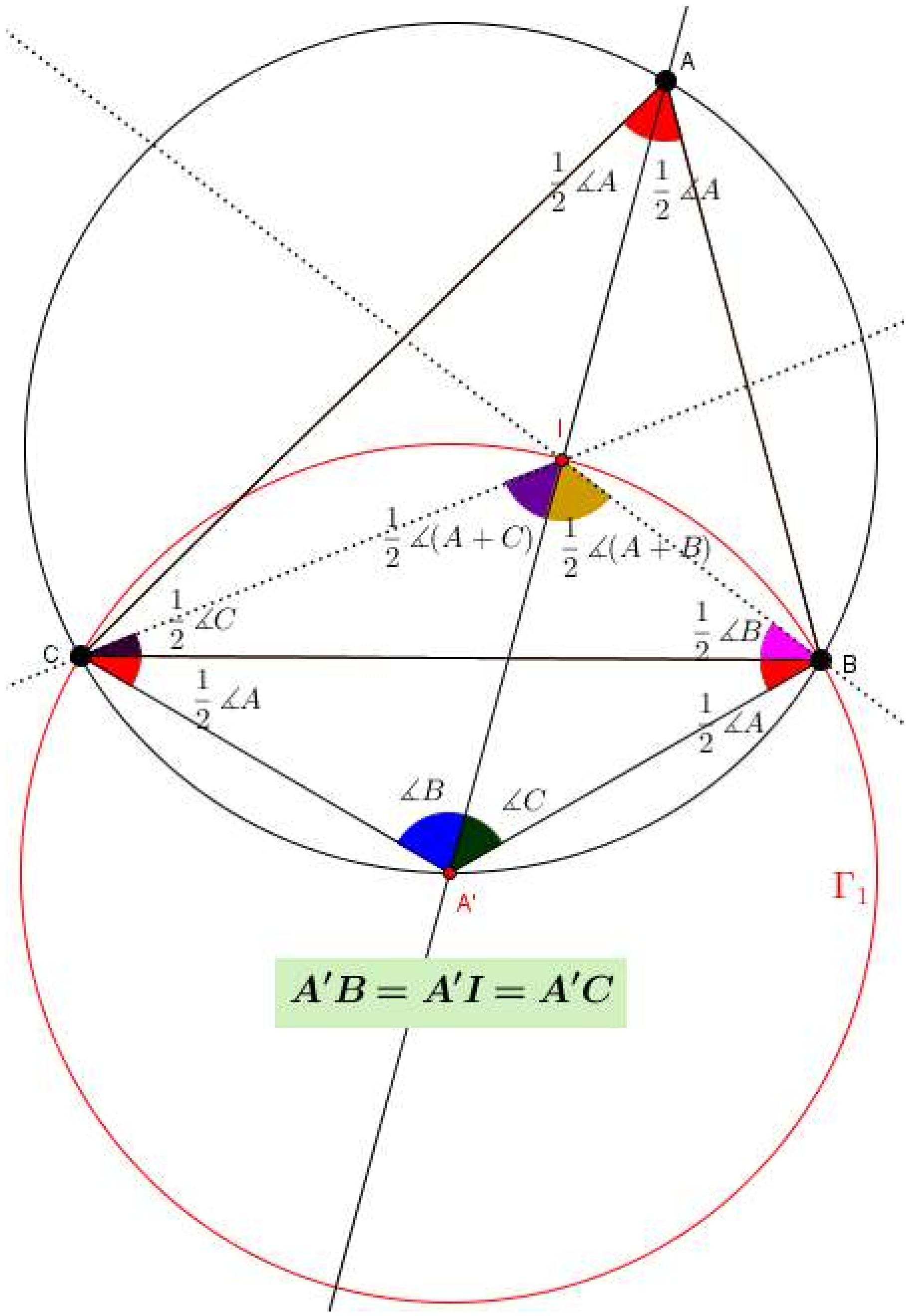
Ignacio Larrosa Cañestro

(profesor de enseñanza secundaria jubilado)

Problema 274, propuesto por Andrés Sáez Schwedt, León, España.
En el triángulo ABC, con incentro I, la recta AI corta a BC en D, y E es el punto medio de AD. Las circunferencias circunscritas de ABD y BCI se cortan en otro punto F, distinto de B. Probar que $\angle ABE = \angle FBC$.

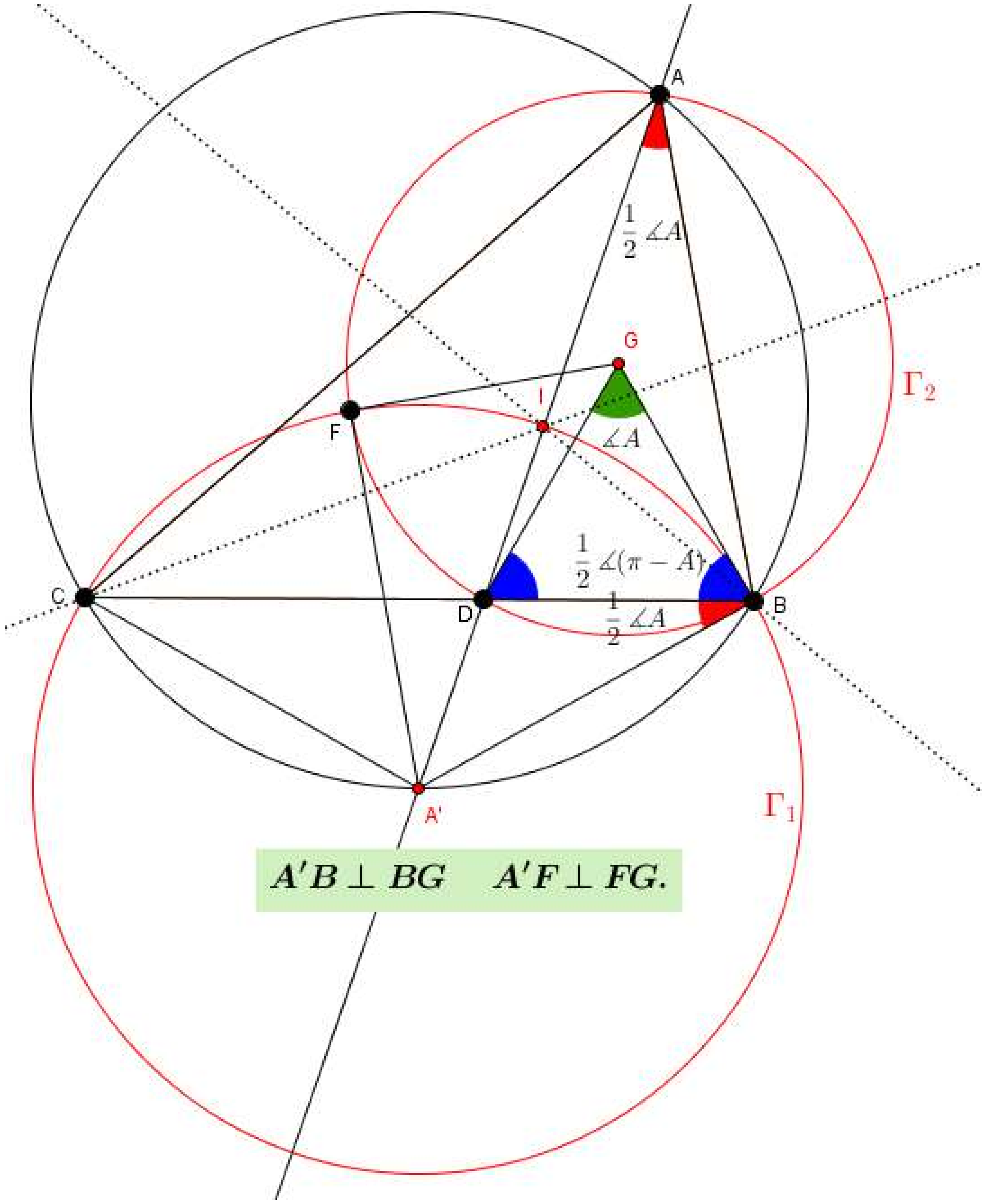
Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba (España).

Sea Γ_1, la circunferencia circunscrita al triángulo BCI. Esta circunferencia tiene como centro, el punto A', punto intersección de la bisectriz AI con la circunferencia circunscrita al triángulo ABC.



Sea Γ_2, la circunferencia de centro G, circunscrita al triángulo ABD. Ambas circunferencias construidas son ortogonales entre sí, ya que $\angle CBA' = \frac{1}{2}\angle A \;\; y \;\; \angle CBG = \frac{1}{2}\angle(\pi - A) \rightarrow A'B \perp BG.$

Del mismo modo, $A'F \perp FG.$ Por tanto, el cuadrilátero A'BGF es inscriptible. Y también lo será el cuadrilátero A'BGE, siendo E el punto medio de AK, ya que EG es la mediatriz del segmento AD. $AD \perp EG.$



Sea Γ_3, la circunferencia que circunscribe a la figura determinada por los puntos A'BGEF.

Vamos a probar que el punto I (incentro del triángulo ABC) es también el incentro del triángulo BEF.
Para ello, observamos que $\angle FEI = \angle FEA' = \angle A'EB = \angle BEI$, ya que ambos ángulos inscritos en la circunferencia Γ_3, abarcan una misma cuerda $A'F = A'B$.

Por otro lado,

$$\angle EFB = \angle EA'B = \angle AA'B = \angle C$$

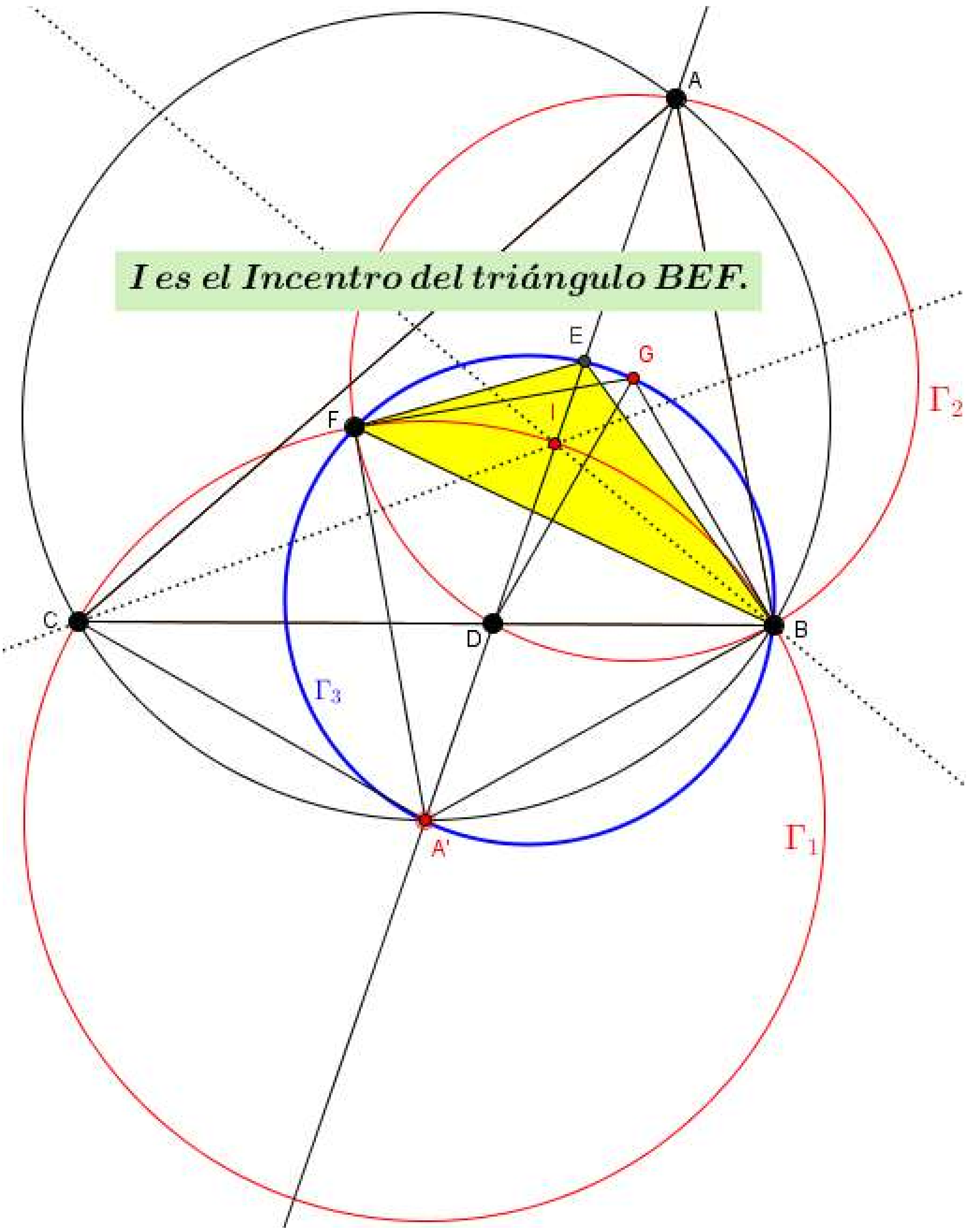
$$\angle IFB = \angle ICB = \frac{1}{2}\angle C$$

En definitiva, hemos probado que las bisectrices de dos de los ángulos del triángulo BEF,

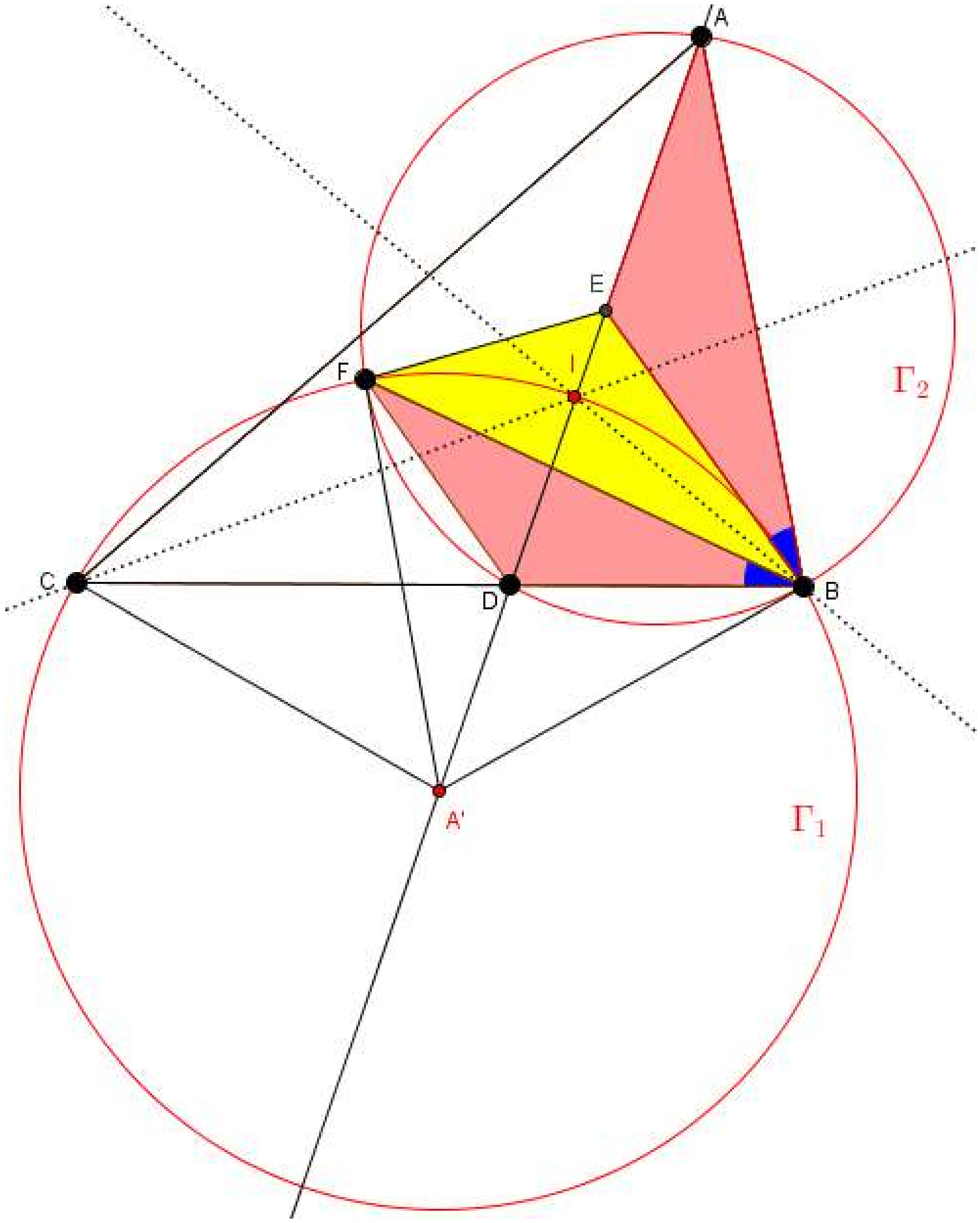
$\angle FEB$ y $\angle EFB$

pasan por el punto I.

Por tanto, la tercera bisectriz, la del ángulo $\angle EBF$ también pasará por el punto I.



Una vez que ya hemos probado que I, incentro del triángulo ABC, es también el incentro del triángulo BEF, queda claro que $\angle ABE = \angle FBC$.



Problema **274**

En el triángulo ABC, con incentro I, la recta AI corta a BC en D y E es el punto medio de AD. Las circunferencias circunscritas de ABD y BCI se cortan en otro punto F, distinto de B. Probar que $\measuredangle ABE = \measuredangle FBC$.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.

Utilizando coordenadas baricéntricas relativas al triángulo ABC, tenemos para el incentro $I = (a\!:\!b\!:\!c)$ y por tanto $D = (0\!:\!b\!:\!c)$ y para el punto medio de AD, $E = (b + c\!:\!b\!:\!c)$.

La ecuación de una circunferencia en estas coordenadas es de la forma

$$\Gamma(x, y, z) - (x + y + z)(px + qy + rz) = 0$$

donde $\Gamma(x, y, z) = 0$ es la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC, es decir:

$$a^2yz + b^2zx + c^2xy = 0$$

Con esto se tienen para las circunferencias del problema las siguientes ecuaciones:

(ABD):

$$\Gamma(x, y, z) - (x + y + z)\frac{a^2b}{b + c}z = 0$$

(BCI):

$$\Gamma(x, y, z) - (x + y + z)bcx = 0$$

Para la resolución del problema no es necesario hallar el punto F de intersección de estas dos, es suficiente probar que el conjugado ortogonal de E está sobre el eje radical de estas circunferencias. Un cálculo sencillo nos da para este eje radical la ecuación:

(EJE):

$$(b + c)cx - a^2z = 0.$$

El conjugado ortogonal de un punto arbitrario $X = (x\!:\!y\!:\!z)$ es el punto X^* de coordenadas $X^* = \left(\frac{a^2}{x}\!:\!\frac{b^2}{y}\!:\!\frac{c^2}{z}\right)$, por tanto, $E^* = \left(\frac{a^2}{b+c}\!:\!\frac{b^2}{b}\!:\!\frac{c^2}{c}\right) = (a^2\!:\!b(b + c)\!:\!c(b + c))$. Resulta inmediato comprobar que E^*pertenece al eje radical. ■

Problema 274.
Proposto por Andrés Sáez Schwedt, León, España.

No triángulo ABC, con incentro I, a recta AI corta a BC en D, e E é o punto medio de AD. As circunferencias circunscritas de ABD e BCI córtanse noutro punto F, distinto de B. Probar que $\measuredangle ABE = \measuredangle FBC$.

Solución enviada por Bruno Salgueiro Fanego, Viveiro, Lugo.

Introduzamos coordenadas baricéntricas con respecto ao triángulo de referencia ABC, de lados $a = BC$, $b = BC$ e $c = AB$.
Entón $A = (1:0:0)$, $B = (0:1:0)$, $C = (0:0:1)$ e $I = (a:b:c)$.

Ademais, $AI \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0$, é dicir, $AI \equiv cy = bz$, e $BC \equiv x = 0$, logo $D = (x:y:z)$ con $cy = bz$ e $x = 0$, sendo por tanto as coordenadas baricéntricas absolutas de $D = (x:y:z)$ as seguintes: $D = \left(0 : \frac{b}{b+c} : \frac{c}{b+c}\right)$; o punto medio de AD é, polo tanto,

$$E = \left(\frac{1+0}{2} : \frac{0+\frac{b}{b+c}}{2} : \frac{0+\frac{c}{b+c}}{2} \right) \equiv (b+c:b:c).$$

As circunferencias circunscritas a ABD e a BCI terán por ecuacións
$a^2yz + b^2zx + c^2xy = (x+y+z)(ux+vy+wz)$ e
$a^2yz + b^2zx + c^2xy = (x+y+z)(u'x+v'y+w'z)$,
onde u, v e w e u', v' e w' se poden obter tendo en conta que, por pertencer A, B e D á primeira e B, C e I á segunda circunferencia,
$a^2 \cdot 0 \cdot 0 + b^2 \cdot 0 \cdot 1 + c^2 \cdot 1 \cdot 0 = (1+0+0)(u \cdot 1 + v \cdot 0 + w \cdot 0)$,
$a^2 \cdot 1 \cdot 0 + b^2 \cdot 0 \cdot 0 + c^2 \cdot 0 \cdot 1 = (0+1+0)(u \cdot 0 + v \cdot 1 + w \cdot 0)$ e
$a^2 \cdot b \cdot c + b^2 \cdot c \cdot 0 + c^2 \cdot 0 \cdot b = (0+b+c)(u \cdot 0 + v \cdot b + w \cdot c)$, e
$a^2 \cdot 1 \cdot 0 + b^2 \cdot 0 \cdot 0 + c^2 \cdot 0 \cdot 1 = (0+1+0)(u' \cdot 0 + v' \cdot 1 + w' \cdot 0)$,
$a^2 \cdot 0 \cdot 1 + b^2 \cdot 1 \cdot 0 + c^2 \cdot 0 \cdot 0 = (0+0+1)(u' \cdot 0 + v' \cdot 0 + w' \cdot 1)$ e
$a^2 \cdot b \cdot c + b^2 \cdot c \cdot a + c^2 \cdot a \cdot b = (a+b+c)(u' \cdot a + v' \cdot b + w' \cdot c)$, ou sexa, $u = 0$, $v = 0$ e $w = \frac{a^2 b}{b+c}$, e $v' = 0$, $w' = 0$ e $u' = bc$, sendo polo tanto

$a^2yz + b^2zx + c^2xy = (x+y+z)\frac{a^2 b}{b+c}z$ e
$a^2yz + b^2zx + c^2xy = bcx(x+y+z)$
as ecuacións de ditas circunferencias.

Os seus puntos de corte, B e F, están no eixo radical r das mesmas, cuxa ecuación se obtén restando membro a membro esas ecuacións:

$$r \equiv \left(\frac{a^2 b}{b+c} z - bcx \right)(x+y+z) = 0 \Rightarrow a^2 z = c(b+c)x \text{ ou } x+y+z=0 .$$

Se tomamos $x = a^2$, entón $z = c(b+c)$, logo as coordenadas de F serán da forma $F = \left(a^2 : y_F : c(b+c)\right)$, e como F pertence á circunferencia circunscrita a BCI, deducimos que $a^2 y_F c(b+c) + b^2 c(b+c)a^2 + c^2 a^2 y_F = bcx\left(a^2 + y_F + c(b+c)\right)$, co cal $y_F = \dfrac{b}{2c}\left(a^2 - b^2 + c^2\right)$ e, polo tanto, $F = \left(2ca^2 : b\left(a^2 - b^2 + c^2\right) : 2c^2(b+c)\right)$.

Notemos agora que $\measuredangle ABE = \measuredangle FBC \Leftrightarrow BE$ e BF son rectas conxugadas isogonais de BA e BC.
É sabido que as rectas simétricas de AE con respecto a AI, de BE con respecto a BI e de CE con respecto a CI se cortan nun punto E^{-1}, que se chama isogonal conxugado de $E = (x_E : y_E : z_E)$ e que, ao non pertencer E^{-1} á circunferencia circunscrita a ABC, as súas coordenadas poden obterse do seguinte xeito:

$$E^{-1} = \left(\frac{a^2}{x_E} : \frac{b^2}{y_E} : \frac{c^2}{z_E} \right) = \left(\frac{a^2}{b+c} : \frac{b^2}{b} : \frac{c^2}{c} \right) = \left(\frac{a^2}{b+c} : b : c \right) = \left(a^2 : b(b+c) : c(b+c)\right).$$

Como E^{-1} está sobre a recta simétrica de BE con respecto a BI e $E^{-1} \neq F$, temos que $\measuredangle ABE = \measuredangle FBC \Leftrightarrow B$, F e E^{-1} están aliñados

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2ca^2 & b\left(a^2 - b^2 + c^2\right) & 2c^2(b+c) \\ a^2 & b(b+c) & c(b+c) \end{vmatrix} = 0 ,$$

o cal se cumpre, tal e como queriamos probar.

Problema 275. Proposto polo editor.

Demostrar que, se $p(x)$ é calquera polinomio, entón a ecuación

$$\left(x^2-1\right)^2 p''(x)+8x\left(x^2-1\right)p'(x)+4\left(3x^2-1\right)p(x)=0$$

ten ao menos dúas raíces reais no intervalo $(-1,1)$.

Solución enviada por Bruno Salgueiro Fanego, Viveiro, Lugo.

Probaremos que é certo o mesmo resultado no caso máis xeral de que $p(x)$ sexa calquera función continua no intervalo pechado $[-1,1]$ e dúas veces derivable no intervalo aberto respectivo $(-1,1)$ e se existen $p'\left((-1)^+\right)$ e $p'\left(1^-\right)$.

Definamos a función $q(x)=\left(x^2-1\right)^2 p(x)$, que é continua en $[-1,1]$ e dúas veces derivable en $(-1,1)$ por ser produto de funcións continuas en $[-1,1]$ e dúas veces derivables en $(-1,1)$, respectivamente. Entón

$$q'(x)=\left[\left(x^2-1\right)^2\right]' p(x)+\left(x^2-1\right)^2 p'(x)=\left(x^2-1\right)^2 p'(x)+4x\left(x^2-1\right)p(x) \text{ e}$$

$$q''(x)=\left[\left(x^2-1\right)^2\right]' p'(x)+\left(x^2-1\right)^2 p''(x)+\left[4x\left(x^2-1\right)\right]' p(x)+4x\left(x^2-1\right)p'(x)$$
$$=\left(x^2-1\right)^2 p''(x)+8x\left(x^2-1\right)p'(x)+4\left(3x^2-1\right)p(x),$$

logo a ecuación da que hai que probar que ten ao menos dúas raíces reais no intervalo $(-1,1)$ é equivalente á ecuación $q''(x)=0$.

Como a función $q(x)$ é continua en $[-1,1]$, derivable en $(-1,1)$ e tal que $q(-1)=(0=)q(1)$, do teorema de Rolle deducimos que a ecuación $q'(x)=0$ ten polo menos unha raíz real x_1 no intervalo $(-1,1)$, é dicir, que existe ao menos un número real $x_1\in(-1,1)$ tal que $q'(x_1)=0$.

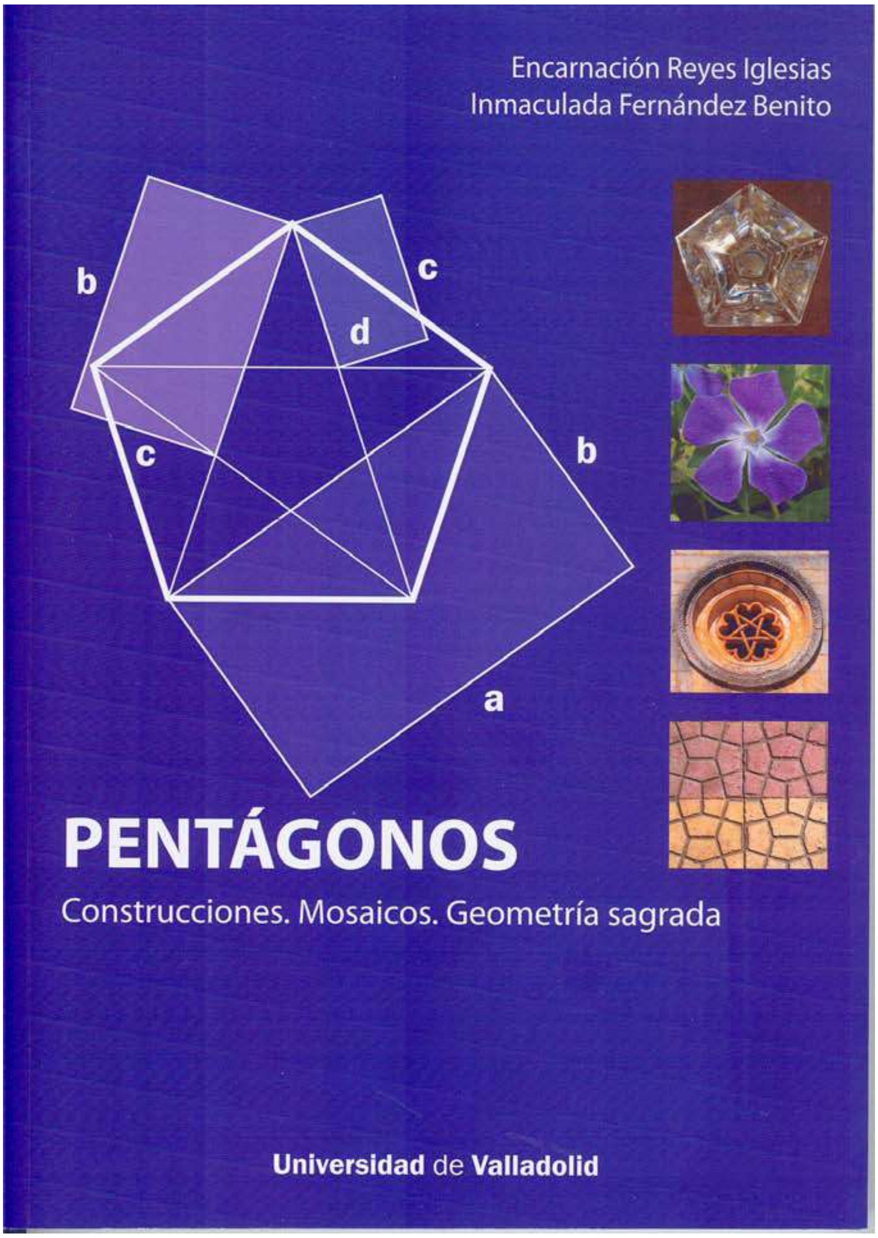
Como se cumpren as hipótesis do mesmo teorema para a función $q'(x)$ nos intervalos $[-1,x_1]$ e $[x_1,1]$, pois é continua neles -é continua en $(-1,1)$ por ser derivable en $(-1,1)$, e é continua á dereita de $x=-1$ e á esquerda de $x=1$ por existir $p'\left((-1)^+\right)$ e $p'\left(1^-\right)$, respectivamente-, derivable nos intervalos abertos respectivos $(-1,x_1)$ e $(x_1,1)$ e $q'(-1)=(0=)q'(x_1)$ e $q'(x_1)=(0=)q'(1)$, concluímos que a ecuación $q''(x)=0$ ten polo menos unha raíz real x_0 no intervalo $(-1,x_1)$ e ao menos unha raíz real x_2 no intervalo $(x_1,1)$, ou sexa, existen polo menos un número real $x_0\in(-1,x_1)$ para o cal $q'(x_1)=0$ e ao menos un número real $x_2\in(x_1,1)$ con $q'(x_2)=0$.

Acabamos así de comprobar que existen polo menos dous números reais x_0 e x_2 situados no intervalo $(-1,1)$ que son raíces da ecuación $q'(x)=0$. Tales números son necesariamente distintos porque pertencen a intervalos disxuntos. Polo tanto, a ecuación $q'(x)=0$ ten ao menos dúas raíces reais, x_0 e x_2, no intervalo $(-1,1)$, como queriamos demostrar.

Encarnación Reyes Iglesias e Inmaculada Fernández Benito: **Pentágonos (Construcciones. Mosaicos. Geometría sagrada).** Universidad de Valladolid, 2015.

Comentario de F. Bellot

En 1989, la famosa Editorial Springer publicó en su “serie amarilla” el libro de Edward Barbeau (U. de Toronto) *Polynomials.* En una cierta ocasión, comentando ese libro, creo recordar que dije: *Las Matemáticas a través de los polinomios.* El libro de Encarna e Inmaculada que acaba de ser publicado por la Universidad de Valladolid me ha recordado el de Barbeau, en este caso habría que decir algo así como *La Geometría a través del pentágono.*



El libro consta de 8 capítulos, cuyos títulos son suficientemente expresivos para dar una idea de lo que el lector va a encontrar:

1. El Pentágono. Naturaleza y Cultura
2. Número áureo y pentágono regular
3. Construcciones de pentágonos y otras figuras derivadas
4. Pentágonos con papiroflexia
5. Disecciones y cuadraturas de pentágonos
6. Mosaicos con pentágonos
7. Pentágonos en Geometría sagrada
8. Actividades

Merece también especial atención la Bibliografía, que contiene 58 libros, 27 artículos y 16 páginas web. Y si se ha dicho que hacer Geometría es el arte de razonar bien sobre figuras mal dibujadas, aquí hay que decir que se razona mucho mejor con figuras y fotografías tan bien hechas como las que ilustran casi todas las páginas del libro (si no me he equivocado, no llegan a 10 las páginas, de las 282 de que consta, en las que no hay, al menos una figura o una foto).

Me atrevo a decir que el libro debería ser de lectura obligada para todos los profesores, cualquiera que sea el nivel educativo en el que den clase, para mostrar a sus alumnos la belleza de la geometría, tan inexplicablemente eliminada de los planes de estudio desde hace tanto tiempo.

Valladolid, mayo de 2016.

F. Bellot Rosado

Divertimentos matemáticos 55

Algunas fotografías más o menos matemáticas de la colección personal del editor

“Las setas”. Una plaza de Sevilla

Esferas anudadas en Bilbao

Un calendario "perpetuo", copia de uno tibetano, en mi mesa.

Reflexiones en espejos, en el Museo de Matemáticas de Cataluña

Una “matraca” en la Torre de la Catedral de Valladolid

Parte de la alfombra de Sierpinski en Badajoz

Número

56

Revista Escolar
de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

Número 56 (octubre – diciembre 2016)

ISSN – 1698-277X

VIII CIBEM Madrid 2017 CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ÍNDICE

publicados en dicho volumen, correspondientes a la Olimpiada Europea Femenina de 2016. Invitamos cordialmente a nuestros habituales colaboradores a que se enfrenten a dichos problemas, que tienen un nivel de dificultad comparable a los de la IMO.

Problemas 56

Problemas propuestos 281-285

Resueltos

Problema 276, propuesto por Laurentiu Modan, Bucarest, Rumania.

Recibidas las soluciones de Bruno Salgueiro Fanego, Vivero, España, y del proponente. Presentamos la solución de Salgueiro.

Problema 277, propuesto por M. Batinetu-Giurgiu y N. Stanciu, Bucarest y Buzau, Rumania.

Recibidas soluciones de: Álvaro Begué Aguado, Nueva York, Estados Unidos (utilizando el teorema de Muirhead); Javier Cornejo Tejada, Lima, Perú; Ricardo Espino Lizama, Lima, Perú; Andrea Fanchini, Cantú, Italia (Muirhead); Paolo Perfetti, Depto. de Matemática, Universitá de Tor Vergata, Roma, Italia (también usando Muirhead); Bruno Salgueiro Fanego, Vivero, España, y de los proponentes. Se ha recibido una solución anónima. Presentamos la solución de Cornejo.

Problema 278, propuesto por Roberto Bosch Cabrera, Miami, Estados Unidos.

Recibidas soluciones de Miguel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca, España; Florentino Damián Aranda Ballesteros, Córdoba, España; Álvaro Begué Aguado, Nueva York, Estados Unidos; Edgardo Escarone, Chile; Ricardo Espino Lizama, Lima, Perú; Daniel Darío Góngora García, Lima, Perú; Ignacio Larrosa Cañestro, La Coruña, España; Paolo Perfetti, Dep. Matematica, Universitá Tor Vergata, Roma, Italia; Angel Plaza, Las Palmas de Gran Canaria, España; Bruno Salgueiro Fanego, Vivero, España; y del proponente. Se recibió una solución anónima y una incorrecta. Presentamos la solución de Aranda.

Problema 279, propuesto por el editor

Recibidas soluciones de: Javier Cornejo Tejada, Lima, Perú; Raúl Simón Elexpuru, Chile; Edgardo Escalona, Chile; Ignacio Larrosa Cañestro, La Coruña, España; Paolo Perfetti, Dep. Matemática, Universitá Tor Vergata, Roma, Italia; Bruno Salgueiro Fanego, Vivero, España (invocando la fórmula 3249 de “Table of >Integrals, Series and Products”, de Gradshteyn y Ryzhik). Presentamos la solución de Larrosa.

Problema 280, propuesto por el editor

Origen del problema: Revista escolar ucraniana 2007; problema propuesto por T. Lazorenko, Kiev.

Recibidas soluciones de: Florentino Damián Aranda Ballesteros, Córdoba, España; Saturnino Campo Ruiz, Salamanca, España; Javier Cornejo Tejada, Lima, Perú; Andrea Fanchini, Cantú, Italia; Bruno Salgueiro Fanego, Vivero, España. Se recibió una solución anónima. Presentamos la solución de Fanchini.

Reseña de libros, comentario de páginas web, noticia de Congresos 55

Una reseña sobre la REOIM en la Revista UNO, por A. Población

Alfonso Población es Prof. Titular del Depto. de Matemática Aplicada de la Universidad de Valladolid y es un experto en analizar las películas que tienen relación con las Matemáticas (es el responsable de la sección “Cine y Matemáticas” del boletín semanal de la RSME). A raíz del visionado de una película no estrenada en España, “X más Y” en el Cine Club “Casablanca”, de Valladolid, ha hecho llegar a este editor la reseña sobre la REOIM que aparece en el número de octubre de 2016 de la Revista UNO, de Didáctica de las Matemáticas. Agradecemos a nuestro colega y amigo el habernos enviado el pdf con esta reseña “externa” de nuestra Revista.

Divertimentos matemáticos 56

Algunas capturas de Internet

Realizado en el marco del **Instituto Iberoamericano de Enseñanza de las Ciencias y la Matemática (IBERCIENCIA)** con la colaboración de la **Consejería de Economía y Conocimiento de la Junta de Andalucía**

#

Desigualdad de Blundon en triángulos acutángulos

MARIUS DRĂGAN[1] y NECULAI STANCIU[2]

Abstract. This note presents a new proof for Blundon's inequality in acute triangle.
Keywords: Cardano, Tartaglia, Blundon..
MSC: 51M16.

Sea ABC un triángulo de lados a,b,c, semiperímetro s y R,r circunradio e inradio, respectivamente.

En esta nota damos una nueva demostración de la desigualdad de *Blundon* (ver [1]) i.e.

$$2R^2+10Rr-r^2-2\sqrt{R(R-2r)^3}\le s^2\le 2R^2+10Rr-r^2+2\sqrt{R(R-2r)^3}\text{ , (1)}$$

usando las relaciones de *Cardano-Tartaglia* (ver [2]) y también estudiaremos la desigualdad de Blundon para un triángulo acutángulo.

Llamamos

$$x+y=c,y+z=a,z+x=b,\ x+y+z=\sigma_1, xy+yz+zx=\sigma_2, xyz=\sigma_3\text{, (2).}$$

Entonces, x,y,z son las raíces positivas de la ecuación

$$X^3-\sigma_1X^2+\sigma_2X-\sigma_3=0\text{, (3).}$$

Es bien conocido que x,y,z son las raíces reales de (3) si y sólo si

$$18\sigma_1\sigma_2\sigma_3-4\sigma_1^3\sigma_3+\sigma_1^2\sigma_2^2-4\sigma_2^3-27\sigma_3^2\ge 0\text{, (4), (ver también [2]).}$$

Si ponemos $x=s-a, y=s-b, z=s-c$, entonces por (2) deducimos que

$$\sigma_1=s,\sigma_2=r^2+4Rr,\sigma_3=sr^2\text{, (5).}$$

De (4) y (5) se obtiene que:

$$18(r^4+4Rr^3)s^2-4r^2s^4+(r^2+4Rr)^2s^2-4(r^2+4Rr)^3-27r^4s^2\ge 0$$

$$\Leftrightarrow r^2(s^2)^2+2r^2(r^2-2R^2-10Rr)s^2+(r^2+4Rr)^3\le 0$$

$$\Leftrightarrow \left|s^2-2R^2-10Rr+r^2\right|\le 2\sqrt{R(R-2r)^3}\text{ , i.e. (1).}$$

- En lo que sigue denotaremos por $\Delta=(x-y)^2(y-z)^2(z-x)^2$. Es bien conocido que

$\Delta=18\sigma_1\sigma_2\sigma_3-4\sigma_1^3\sigma_3+\sigma_1^2\sigma_2^2-4\sigma_2^3-27\sigma_3^2$, y que la ecuación
$u^3-\sigma_1u^2+\sigma_2u-\sigma_3=0$, (6) tiene tres raíces positivas si y solo si

$$\Delta\ge 0,\sigma_1\ge 0,\sigma_2\ge 0,\sigma_3\ge 0\text{, (7).}$$

En lo sucesivo buscaremos la condición para que las raíces de la ecuación (6) sean mayors o iguales que un número real α.

Teorema 1. La ecuación (6) tiene tres raíces reales $x,y,z\in[\alpha,\infty)$ si y sólo si

---

[1] Professor, ''Mircea cel Bătrân'' National College, Bucharest, Romania

[2] Professor, ''George Emil Palade'' School, Buzău, Romania

$$\Delta \geq 0, \sigma_1 - 3\alpha \geq 0, 3\alpha^2 - 2\sigma_1 a + \sigma_2 \geq 0, -\alpha^3 + \sigma_1\alpha^2 - \sigma_2\alpha + \sigma_3 \geq 0 \text{, (8).}$$

Demostración. Llamemos $u = t + \alpha$. La ecuación (6) tiene tres raíces reales $x, y, z \in [\alpha, \infty)$ si y sólo si

$f(t + a) = 0$ tiene tres raíces positivas, donde f es el polinomio de (6). Resulta que

$t^3 - (-3\alpha + \sigma_1)t^2 + (3\alpha^2 - 2\sigma_1\alpha + \sigma_2)v - (-\alpha^3 + \sigma_1\alpha^2 - \sigma_2\alpha + \sigma_3) = 0$, y de (7) deducimos

$\Delta \geq 0, \sigma_1^{'} = -3\alpha + \sigma_1 \geq 0, \sigma_2^{'} = 3\alpha^2 - 2\sigma_1\alpha + \sigma_2 \geq 0, \sigma_3^{'} = -\alpha^3 + \sigma_1\alpha^2 - \sigma_2\alpha + \sigma_3 \geq 0$, q.e.d.

Si el triángulo es acutángulo se tiene $a^2 + b^2 \geq c^2, b^2 + c^2 \geq a^2, c^2 + a^2 \geq b^2$.

De (2) deducimos que $x \geq \sqrt{\frac{\sigma_3}{\sigma_1}},\ y \geq \sqrt{\frac{\sigma_3}{\sigma_1}},\ z \geq \sqrt{\frac{\sigma_3}{\sigma_1}}$ y por (5) obtenemos que

$x \geq r$, $y \geq r$, $z \geq r$. Por (8) se sigue que la ecuación (6) tiene tres raíces reales mayores que r lo cual significa que ABC es acutángulo si y sólo si $\Delta \geq 0$, $-3r + \sigma_1 \geq 0$,

$$3r^2 - 2\sigma_1 r + \sigma_2 \geq 0,\ -r^3 + \sigma_1 r^2 - \sigma_2 r + \sigma_3 \geq 0 \text{, (9).}$$

Pongamos $s_0 = 3r$, $s_1 = \sqrt{2R^2 + 10Rr - r^2 - 2\sqrt{R(R-2r)^3}}$,

$$s_2 = \sqrt{2R^2 + 10Rr - r^2 + 2\sqrt{R(R-2r)^3}},\ s_3 = 2R + r,\ s_4 = 2R + 2r.$$

Teorema 2. En todo triángulo acutángulo se cumplen las desigualdades

$$s_1 \leq s \leq s_2 \text{ si } 2 \leq \frac{R}{r} \leq \sqrt{2} + 1$$

$$\text{y } s_3 \leq s \leq s_2 \text{ si } \frac{R}{r} \geq \sqrt{2} + 1.$$

Demostración. De (4), (5) y (9) resultan $s_1 \leq s \leq s_2$, $s \geq s_0$, $s \leq s_4$, $s \geq s_3$, (10).

Llamemos $x = \frac{R}{r}$. Se tiene $s_0 \leq s_1$, (11), porque $9r^2 \leq 2R^2 + 10Rr - r^2 - 2\sqrt{R(R-2r)^3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x(x-2)^3 \leq (x^2 + 5x - 5)^2 \Leftrightarrow 16x^3 - 3x^2 + 42x - 25 \geq 0$, que es verdad para $x \geq 2$.

También tenemos $s_2 \leq s_4$, (12), ya que $2x^2 + 10x - 1 + 2\sqrt{x(x-2)^3} \leq 4x^2 + 8x + 4$ que después de un poco de álgebra da $16x^3 - 24x^2 + 12x + 25 \geq 0$, cierto para $x \geq 2$.

De (11) y (12) obtenemos $s_0 \leq s_1 \leq s_2 \leq s_4$, luego (10) es equivalente a $s_1 \leq s \leq s_2$, $s \leq s_4$, $s \geq s_3$, (14). Distinguiremos tres casos:

Caso 1. $s_3 \le s_1 \Leftrightarrow -\sqrt{x(x-2)^3} \ge x^2 - 3x + 1$, (15).

Si $x \in \left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \infty\right)$, entonces (15) no tiene soluciones.

Si $x \in \left[2, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$, entonces $(x^2 - 3x + 1)^2 \ge x(x-2)^3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 \le 0 \Leftrightarrow x \in [1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}]$.

Resulta entonces que $x \in [2, 1+\sqrt{2}]$.

De aquí, por (14) obtenemos que si $\frac{R}{r} \in [2, 1+\sqrt{2}]$, entonces $s_1 \le s \le s_2$, (16).

Caso 2. $s_1 \le s_3 \le s_2$. Tenemos $\sqrt{x(x-2)^3} \ge |x^2 - 3x + 1|$ y tras elevar al cuadrado y realizar algunos cálculos $x^2 - 2x - 1 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge \sqrt{2} + 1$.

Luego por (14) obtenemos que si $\frac{R}{r} \ge \sqrt{2} + 1$, entonces $s_3 \le s \le s_2$, (17).

Caso 3. $s_2 \le s_3$. En este caso no hay solución.

Luego por (16) y (17) hemos terminado

REFERENCES

[1]W.J. Blundon - *Inequalities associated with the triangle*, Can. Math. Bull **8** (1965), pp. 615-626.

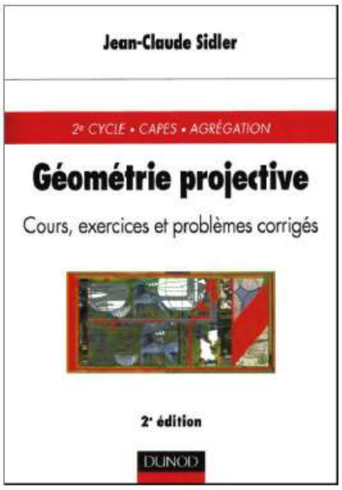
[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Cubic_function

UN PROBLEMA DEL SIDLER

FRANCISCO JAVIER GARCÍA CAPITÁN

1. Introducción

En este trabajo presentamos una solución de un bonito problema del libro *Géométrie Projective* de Jean Claude Sidler, libro apreciadísimo por mi amigo Jose María Pedret, un especialista en la materia.



Sin embargo, no usaremos geometría proyectiva sino coordenadas baricéntricas, para lo que nos ayudaremos del programa de cálculo simbólico *Mathematica* y del paquete `baricentricas.nb`[1] para trabajar con este tipo de coordenadas.

La pareja formada por *Mathematica* y las coordenadas baricéntricas se convierte así en una especie de oráculo, de manera que nuestro papel se puede centrar en hacer las preguntas adecuadas y, por supuesto, en interpretar las respuestas.

2. Enunciado

El problema que vamos a resolver es el siguiente:

5.2. *Sean Ω una circunferencia, y A, B dos puntos sobre Ω. Una recta variable que pasa por el polo T de AB corta a Ω en P y Q. Determinar P para que las rectas AP y BQ son paralelas.*

[1]Disponible en `http://garciacapitan.99on.com/baricentricas`

3. Cálculos

Introducimos un tercer punto C sobre Ω para formar un triángulo de referencia. Entonces, en coordenadas baricéntricas el polo de AB es $T = (a^2 : b^2 : -c^2)$. Si P es el conjugado isogonal del punto infinito $(1 : t : -1-t)$, entonces obtenemos el punto

$$Q = (a^2(-1+t)t : -b^2(-1+t) : c^2t).$$

La intersección de AP y BQ nos da el punto

$$M = (a^2(1-t)t : b^2(1+t) : -c^2t).$$

Al variar P sobre Ω, el punto M describe la cónica

$$c^4xy + b^2c^2xz + a^2c^2yz + 2a^2b^2z^2 = 0,$$

cuyo discriminante es $\Delta = (c^2 - a^2 - b^2)^2 + 4a^2b^2 > 0$, por lo que la cónica es siempre una hipérbola. Lo que queremos hallar son los puntos infinitos de dicha hipérbola.

Hallando la intersección de la cónica y la recta del infinito (con ecuación $x + y + z = 0$) obtenemos que los puntos del infinito de la hipérbola son los conjugados isogonales de los puntos de intersección de Ω y la recta l de ecuación $(2b^2 - c^2)x + (2a^2 - c^2)y - c^2z = 0$.

Con el fin de encontrar una construcción sencilla de esta recta, hallamos su polo respecto de Ω, obteniendo el punto

$$S = (a^2(b^2 + c^2 - a^2) : b^2(a^2 - b^2 + c^2) : -4a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 - c^4).$$

Afortunadamente, encontramos que este punto cumple la relación

$$CS : SO = -\frac{c^2}{4R^2}.$$

Esto quiere decir que S es el punto medio del segmento $S'S''$ siendo S' y S'' los puntos que dividen el segmento CO en las razones

$$\frac{CS'}{S'O} = \frac{c}{2R}, \quad \frac{CS''}{S''O} = -\frac{c}{2R}.$$

En efecto, si $CS' : S'O = \lambda$ y $CS'' : S''O = -\lambda$, y S es el punto medio de $S'S''$, resulta

$$\begin{aligned}
\begin{cases} (1+\lambda)S' = C + \lambda O \\ (1-\lambda)S' = C - \lambda O \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} (1-\lambda^2)S' = (1-\lambda)C + \lambda(1-\lambda)O \\ (1-\lambda^2)S'' = (1+\lambda)C - \lambda(1+\lambda)O \end{cases} \\
&\Rightarrow (1-\lambda^2)(S' + S'') = 2C - 2\lambda^2 O \\
&\Rightarrow (1-\lambda^2)(2S) = 2C - 2\lambda^2 O \\
&\Rightarrow (1-\lambda^2)S = C - \lambda^2 O,
\end{aligned}$$

es decir $CS : SO = -\lambda^2$.

4. Cálculos con *Mathematica*

Los cálculos y resultados descritos en la sección anterior los podemos obtener con las instrucciones:

```
<< Baricentricas`;

ptT = {a^2, b^2, -c^2};
ptP = ConjugadoIsogonal[{1, t, -1 - t}];
ptQ = SegundaInterseccionCircunferencia[ptT, {ptP, ptA, ptB}]
```

$\{a^2(-1+t)\,t,\ -b^2(-1+t),\ c^2\,t\}$

```
ptM = Punto[Recta[ptA, ptP], Recta[ptB, ptQ]]
```

$\{a^2(-1+t)\,t,\ -b^2(1+t),\ c^2\,t\}$

```
conic = Last[ConicaParametricas[ptM, t]]
```

$c^4\,x\,y + b^2c^2\,x\,z + a^2c^2\,y\,z + 2\,a^2b^2\,z^2$

```
rtL = Apply[Recta, Map[ConjugadoIsogonal, PuntosInfinitoConica[conic]]]
```

$\{2\,b^2 - c^2,\ 2\,a^2 - c^2,\ -c^2\}$

```
ptS = Factor[PoloConica[rtL, circunscrita]]
```

$\{a^2(a^2-b^2-c^2),\ b^2(-a^2+b^2-c^2),\ 4\,a^2b^2 - a^2c^2 - b^2c^2 + c^4\}$

```
ToRrp[Factor[RazonSimple[ptC, ptS, ptO]] / c^2]
```

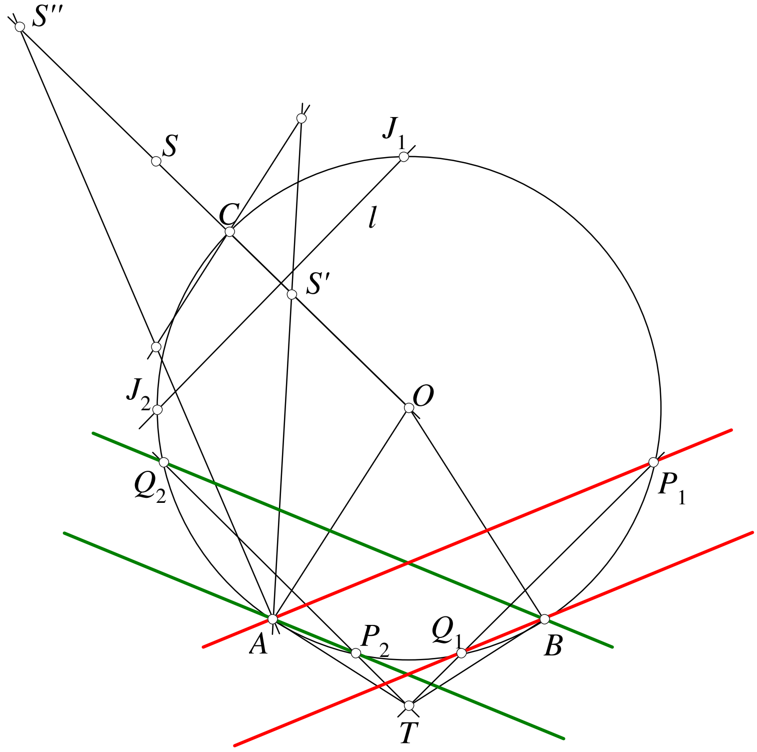
$-\dfrac{1}{4\,R^2}$

```
disc = DiscriminanteConica[conic]
```

$\dfrac{1}{4}\,c^4\,(a^4 + 6\,a^2b^2 + b^4 - 2\,a^2c^2 - 2\,b^2c^2 + c^4)$

5. Construcción

A continuación detallamos los pasos que dan las dos soluciones del problema:



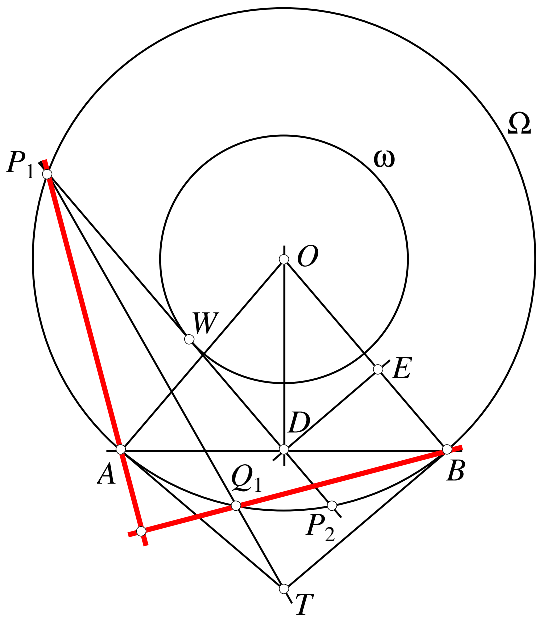
1. Sea C un punto arbitrario de la circunferencia Ω.
2. Obtenemos los puntos S' y S'' que dividen el segmento CO en la razones $\pm AB/(2R)$, siendo R el radio de la circunferencia circunscrita a ABC.
3. S es el punto medio de S' y S''.
4. La recta l es la polar de S respecto de Ω.
5. J_1 y J_2 son los puntos de intersección de l y Ω.
6. P_1 y P_2 son los puntos de Ω tales que AP_1 y AP_2 son rectas isogonales de AJ_1 y AJ_2.
7. Q_1 y Q_2 son las segundas intersecciones con Ω de las rectas TP_1 y TP_2.

6. Perpendicularidad

Cambiamos paralelismo por perpendicularidad y obtenemos un problema que también podemos intentar resolver:

5.2a. *Sean Ω una circunferencia, y A, B dos puntos sobre Ω. Una recta variable que pasa por el polo T de AB corta a Ω en P y Q. Determinar P para que las rectas AP y BQ son perpendiculares.*

En este caso, sólo damos la solución del problema, quedando la investigación correspondiente a cargo del lector:



1. Sea D el punto medio de AB.

2. Sea E la proyección ortogonal de D sobre el radio OB.

3. Sea w la circunferencia con centro O y radio DE.

4. Trazamos una tangente a ω desde D, que corta a la circunferencia Ω en los puntos P_1 y P_2.

5. Entonces P_1 y P_2 son soluciones del problema. Así, como se muestra en la figura, si Q_1 es la segunda intersección de TP_1 y Ω, las rectas AP_1 y BQ_1 son perpendiculares.

Las Rodoneas

Italo D'Ignazio, Ercole Suppa

Mayo 1991

Resumen

Artículo publicado en el segundo número de Pi GRECO, folleto producido por la sección Mathesis de Teramo.

Agradecimientos

Ellos van a profesor Francisco Bellot Rosado por la traducción al español de este artículo.

1. Introducción

Guido Grandi[1]publicó en 1728, en Florencia, una obra (*"Flores geometrici ex rhodonearum et claeliarum descriptione resultantes"*) en la cual trató de *definir geométricamente las curvas que tienen la forma de rosas de muchos pétalos* (y llamó *rodoneas* las planas y *clelias* las esféricas). En un cierto sentido, en este estudio se hace una inversión del problema fundamental de la geometría analítica tradicionalmente entendida, que consiste principalmente en la búsqueda de las ecuaciones de lugares geométricamente definidos y, sucesivamente, a la determinación del aspecto de estos lugares. En *Flores geometrici*, inversamente, el aspecto de las curvas se convierte en el punto de partida. Aquí vamos a dar una presentación de las rodoneas e ilustraremos el valor *ornamental* mediante algunas figuras obtenidas con un ordenador personal.

[1]Guido Grandi (Cremona 1671-Pisa 1742). A los 16 años, se convirtió en Monje camaldulense, cambiando su nombre de pila, Francesco Ludovico, en Guido, con el que es conocido. Enseñó por primera vez física y matemáticas en la Universidad de Pisa. También fue miembro de la Royal Society de Londres. Dejó muchos escritos, incluyendo una prueba geométrica de los teoremas de Huygens en logaritmos, una cuadratura del círculo y la hipérbola, las discusiones sobre los métodos de cálculo y luego introducidos por Leibnitz y Newton, y de los cuales el Grande fue uno de los primeros divulgadores en Italia. Estudió la *versiera*, que comúnmente pero erróneamente se atribuye a Agnesi.

2. Generación mecánica de las rodoneas

En coordenadas polares[2] ρ, ϑ las rodoneas están representadas por equaciones del tipo

$$\rho = R\cos(h\vartheta) \tag{1}$$

siendo R una longitud dada y h un número real que puede suponerse siempre positivo. La propiedad fundamental de estas curvas consiste en la posibilidad de generarlas mediante el movimiento, en el plano, de dos aspas OA y AP, de igual longitud ℓ, ensambladas en A, la primera de las cuales gira con velocidad angular constante ω alrededor de O, mientras que la otra gira con velocidad angular $k\omega$ alrededor de A ($k \in \mathbb{R}$)[3]. En estas condiciones, P describe una rodonea, como veremos.

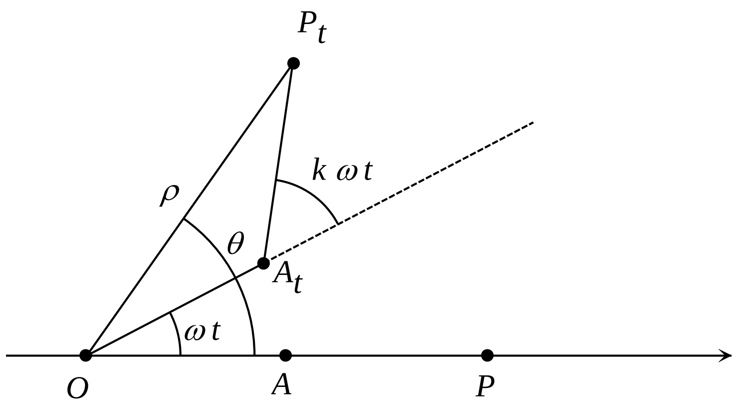


FIGURA 1

En su movimiento las dos aspas se encontrarán en un cierto instante alineadas: elegimos este instante como origen de los tiempos ($t = 0$), siendo la recta OAP sobre la que yacen las aspas como eje polar. Sean, después, A y P_1 las posiciones de A y P en un instante genérico t.

[2]Por razones de continuidad, en el presente documento se utilizan las coordenadas polares *generalizadas*. Es decir, ρ también puede ser negativa: el punto (ρ, θ), con ρ negativo no es otro que el punto de una distancia $|\rho|$ desde el polo y anomalia $\rho + \pi$ en el sentido ordinario.

[3]k es positivo o negativo según que el sentido de rotación de la segunda aspa sea el mismo u opuesto al de la primera.

Obtenemos de inmediato (fig. 1):

$$\widehat{A_tOP_t} = \frac{k\omega t}{2}$$
$$\overline{OP_t} = \rho = 2\ell \cos \frac{k\omega t}{2}$$
$$\vartheta = \frac{k\omega t}{2} + \omega t$$

da donde $\dfrac{k\omega t}{2} = \dfrac{k\vartheta}{k+2}$ y, en definitiva,

$$\rho = 2\ell \cos \frac{k\omega}{k+2}$$

Si en esta última ecuación se pone

$$2\ell = R, \qquad \frac{k}{k+2} = h$$

se obtiene la (1) y eso muestra que P_t describe una rodonea.

3. Propiedades de las rodoneas

De la (1) es evidente que
$$|\rho| \leq R$$
Es decir: *toda rodonea es interior al círculo de centro O y radio R (círculo fundamental)*. Además:

$$\begin{array}{lcl} \rho = 0 & \text{si} & h\vartheta = \dfrac{(2n+1)\pi}{2} \\ |\rho| = R & \text{si} & h\vartheta = n\pi \end{array}$$

siendo n un entero.

A las anomalías $\dfrac{n\pi}{h} - \alpha$ y $\dfrac{n\pi}{h} + \alpha$, cualquiera que sea α, corresponden los mismos radios vectores; en efecto:

$$\cos\left[h\left(\frac{n\pi}{h} - \alpha\right)\right] = \cos\left(n\pi - h\alpha\right) = (-1)^n \cos\left(h\alpha\right)$$
$$\cos\left[h\left(\frac{n\pi}{h} + \alpha\right)\right] = \cos\left(n\pi + h\alpha\right) = (-1)^n \cos\left(h\alpha\right)$$

Esto significa que las rodoneas son simétricas respecto a las semirectas de origen O y anomalía $n\pi/h$. Para *contar* los semiejes de simetría de este tipo, distinguimos el caso en que sea *racional* del que sia *irracional*. En el primero ponemos $h = p/q$, con p y q primos entre sí. Con esta notación, la anomalía ϑ_n del enésimo semieje de simetría es:

$$\vartheta_n = \frac{nq\pi}{p}, \qquad n = 0, 1, 2 \dots$$

Es decir,

$$\vartheta_0 = 0, \quad \vartheta_1 = \frac{q\pi}{p}, \quad \vartheta_2 = \frac{2q\pi}{p}, \quad \dots \quad , \vartheta_{p-1} = \frac{(p-1)q\pi}{p}$$

Cuando n toma el valor p la anomalía vale $q\pi$. Si q es par, $q\pi$ es múltiplo de 2π, el p-ésimo semieje se superpone al 0-ésimo (o sea, el de anomalía 0), el $(p+1)$-ésimo al 1-ésimo (o sea, de anomalía $q\pi/p$), el $(p+2)$-ésimo al 2-esimo (de anomalia $2q\pi/p$), etc. Los semiejes distintos son, por tanto, p.

Si q es impar, el p-ésimo semieje es opuesto al 0-ésimo, el $(p+1)$-ésimo es opuesto al 1-ésimo, ..., el $2p$-ésimo se superpone al 0-ésimo; los semiejes distintos son, en este caso, $2p$.

Resumiendo: *los semiejes de simetría del tipo considerado son p o $2p$ según que q sea par o impar.*

En particular, *si h es entero ($q = 1$) los semiejes de simetría son $2h$.*

Examinemos ahora el caso en que h sea *irracional*. Si incluso en esta hipótesis existiese un valor de la anomalía en correspondencia con el cual el enésimo semieje de simetría se superpusiera al 0-ésimo, debería ser múltiplo de 2π. Es decir, siendo m un entero, deberíamos tener

$$\frac{n}{h}\pi = 2m\pi \quad \Rightarrow \quad h = \frac{n}{2m}$$

Pero esta igualdad es absurda, porque m y n son enteros y h es irracional. Cae así la hipótesis de la periodicidad para la sucesión de los semiejes. Concluimos que:

si h es irracional los semiejes de simetría (distintos) son infinitos.

De la (1) se observa que, para n entero cualquiera, $|\rho|$ cresce de 0 a R cuando

$$\left(\frac{2n-1}{h}\right)\frac{\pi}{2} \leq |\vartheta| \leq \frac{n\pi}{h}$$

para decrecer, después, de R a 0 cuando

$$\frac{n\pi}{h} \leq |\vartheta| \leq \left(\frac{2n+1}{h}\right)\frac{\pi}{2}$$

Por tanto, al variar la anomalía entre los extremos indicados (y por ello en un sector de amplitud π/h) el radio vector describe un *pétalo* de la rodonea.

De la (1) es también evidente que *todos los pétalos son iguales*. Determinemos el número. Si h es racionale, poniendo como antes $h = p/q$, se presentan dos casos: o p y q son los dos impares, o bien uno es par y el otro es impar; está excluido que puedan ser ambos pares, porque son primos entre sí (en lo que sigue llamaremos, por brevedad, *caso impar* al primero y *caso par* al segundo).

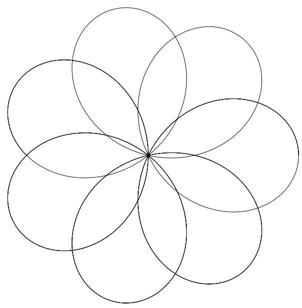
Si q es impar ya habíamos visto que existen $2p$ semiejes y que el p-ésimo es opuesto al 0-ésimo, el $(p+1)$-ésimo opuesto al 1-ésimo, etc.

Dos casos son ahora possibles, según que p sea par o impar. Si p es par el pétalo correspondiente al p-ésimo semieje es simétrico respecto al polo del correspondiente al 0-ésimo, el pétalo correspondiente al $(p+1)$-ésimo semieje es, análogamente, simétrico del correspondiente al 1-ésimo, ... etc. Cada uno de los primeros p pétalos tiene un simétrico respecto al polo al que pertenece, y también a la rodonea. Se tienen en total, $2p$ pétalos distintos. Si, en cambio, p es impar, el pétalo correspondiente al p-ésimo semieje se superpone al correspondiente al 0-ésimo, y análogamente ocurre para los siguientes; los pétalos distintos son solamente p. Si, finalmente, q es par, p debe ser necesariamente impar y en tal caso no puede ocurrir que dos semiejes estén sobre la misma recta. Del 0-ésimo al $(p-1)$-ésimo semieje hay un primer grupo de p pétalos. El p-ésimo vuelve a coincidir con el 0-ésimo, pero el correspondiente pétalo no se superpone al 0-ésimo, sino al simétrico di éste con respecto al polo. Nace, así, un $(p+1)$-ésimo pétalo y lo mismo sucede para los semiejes sucesivos, si bien los pétalos son ahora también $2p$.

Resumiendo:

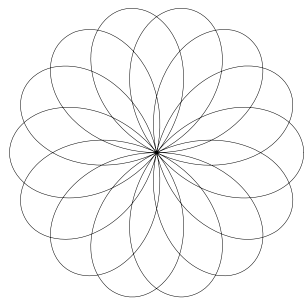
- *si h es racional, o sea $h = p/q$ con p y q enteros primos entre sí, la rodonea consta de p pétalos en el caso impar y $2p$ pétalos en el caso par.*

- *En particular, si h es entero ($q = 1$) la rodonea consta de h o $2h$ pétalos según que h sea impar o par.*



Rodonea de ecuación polar:

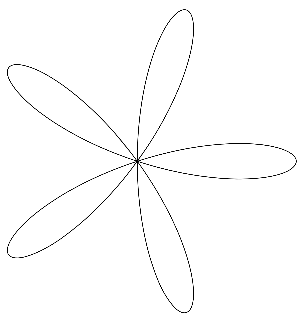
$$\rho = R \cos \frac{7\vartheta}{5}$$



Rodonea de ecuación polar:

$$\rho = R \cos \frac{7\vartheta}{4}$$

FIGURA 2



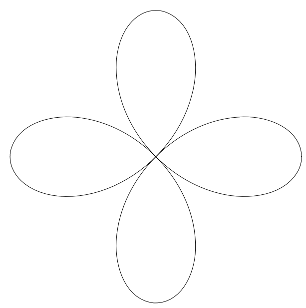
Rodonea de ecuación polar

$$\rho = R \cos 5\vartheta$$

y ecuación cartesiana

$$\left(x^2 + y^2\right)^3 - R\left(x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4\right) = 0$$

Estamos en el h entero impar. El número de pétalos es 5. Tenemos una curva de orden 6, teniendo en cuenta que $p = 5$, $q = 1$, $p + q = 6$.



Rodonea de ecuación polar

$$\rho = R \cos 2\vartheta$$

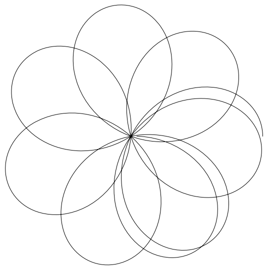
y ecuación cartesiana

$$\left(x^2 + y^2\right)^3 - R^2\left(x^2 - y^2\right)^2 = 0$$

Estamos en el h entero par. El número de pétalos es 4. Tenemos una curva de orden 6, teniendo en cuenta que $p = 2$, $q = 1$, $2(p + q) = 6$.

FIGURA 3

- Si h es *irracional* existen infinitos semiejes de simetría y, consiguientemente, infinitos pétalos. La rodonea pasa infinitas veces por el polo y es por tanto una curva *trascendente*.



Rodonea de ecuación polar $\rho = R\cos\sqrt{2}\vartheta$

FIGURA 4

4. Ecuación cartesiana de una rodonea en el caso h racional. Otras propiedades.

La rodonea es, en cambio, una curva *algebraica* en el caso h racional $(= p/q)$, como veremos determinando la ecuación cartesiana. Partiendo de la identidad

$$\cos(p\vartheta) = \cos\left[q\left(\frac{p}{q}\right)\vartheta\right]$$

y aplicando a ambos miembros la formula de multiplicación de arcos[4] obtenemos

$$\cos^p\vartheta - \binom{p}{2}\cos^{p-2}\vartheta\sin^2\vartheta + \binom{p}{4}\cos^{p-4}\vartheta\sin^4\vartheta - \cdots = \tag{2}$$

$$= \cos^p\left(\frac{p\vartheta}{q}\right) - \binom{q}{2}\cos^{q-2}\left(\frac{p\vartheta}{q}\right)\sin^2\left(\frac{p\vartheta}{q}\right) + \binom{q}{4}\cos^{q-4}\left(\frac{p\vartheta}{q}\right)\sin^4\left(\frac{p\vartheta}{q}\right) - \cdots$$

Teniendo en cuenta las fórmulas de paso de coordenadas polares a cartesianas

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \cos\vartheta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \sin\vartheta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \tag{3}$$

[4]Para estas fórmulas se puede, por ejemplo, consultar: Faure, Kaufmann e Denis-Papin, Manuale di matematica, Milano 1971 (pag. 85).

de (1) se obtiene

$$\cos\left(\frac{p\vartheta}{q}\right)=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{R},\quad \sin\left(\frac{p\vartheta}{q}\right)=\frac{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}{R} \tag{4}$$

Sustituyendo (3) y (4) en (2) obtenemos

$$R^q\left(x^p-\binom{p}{2}x^{p-2}y^2+\binom{p}{4}x^{p-4}y^4-\cdots\right)=$$
$$=\left(x^2+y^2\right)^{\frac{p+q}{2}}-\binom{q}{2}\left(x^2+y^2\right)^{\frac{p+q-2}{2}}\left(R^2-x^2-y^2\right)+\cdots \tag{5}$$

La (5) es la ecuación cartesiana buscada. Si p y q son los dos impares (caso impar), es racional de grado $p+q$. Si, en cambio, uno de los números p, q es par (caso par) la razionalización se obtiene elevando al cuadrado los dos miembros de (5) y el grado resultarà $2(p+q)$.

Es decir: *la rodonea es una curva algebraica de orden $p+q$ en el caso impar y de orden $2(p+q)$ en el caso par.*

La (5) muestra además que el origen tiene multiplicidad p en el caso impar y $2p$ en el caso par. En particular si $h=1/(2n+1)$, $(n\in\mathbb{N})$ la rodonea pasa *simplemente* por el origen. Y, además, es evidente que todas las rodoneas pasan por los *puntos cíclicos*, o sea son *curvas circulares.*

5. Los puntos múltiples

Siempre en el caso h racional, la rodonea es una curva de *género cero*, como prueba el hecho de que no se pueda dar una representación paramétrica racional. Si, en efecto, en su ecuación polar se pone

$$\varphi=\frac{\vartheta}{q}$$

se obtiene:

$$\begin{aligned}\rho&=R\cos\left[p\left(\frac{\vartheta}{q}\right)\right]=R\cos\left(p\varphi\right)\\ x&=\rho\cos\vartheta=R\cos(p\varphi)\cos(q\varphi)\\ y&=\rho\sin\vartheta=R\cos(p\varphi)\sin(q\varphi)\end{aligned}$$

y las fórmulas de ángulos múltiples permiten expresar x y y como funciones racionales de $\tan\frac{\varphi}{2}$. Por tanto el número de puntos dobles (o singularidades equivalentes) que tiene una rodonea es el máximo admitido por su orden.

Llamaremos *intervalo de la rodonea* el intervalo en que debe variar la anomalía para obtener *todos los puntos* de la rodonea y *cada uno una sola vez* (se entiende que un punto múltiple va contado tantas vecescomo indica su multiplicidad) e tal, además, que su *primer extremo sea cero.* Llamaremos *origen* de la rodonea su punto de coordinadas cartesianas $(R, 0)$.

Busquemos el intervalo. Se trata de determinar el mínimo valor positivo para el cual el punto que *traza* la rodonea *vuelve* al origen. Debe, pues, tenerse

$$R\cos\left(\frac{p\overline{\vartheta}}{q}\right)\cos\overline{\vartheta} = R$$
$$R\cos\left(\frac{p\overline{\vartheta}}{q}\right)\sin\overline{\vartheta} = 0$$

Se obtiene en seguida:

$$\tan\overline{\vartheta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{\vartheta} = a\pi, (a \in \mathbb{N}) \quad \Rightarrow \quad \cos\left(\frac{p}{q}\overline{\vartheta}\right) = \pm 1$$

donde vale el signo $+$ cuando a es par y el signo $-$ cuando a es impar. Deberán entonces satisfacerse las ecuaciones:

$$\begin{cases} \cos\overline{\vartheta} = 1 \\ \cos\frac{p}{q}\overline{\vartheta} = 1 \end{cases} \tag{6}$$

o bien

$$\begin{cases} \cos\overline{\vartheta} = -1 \\ \cos\frac{p}{q}\overline{\vartheta} = -1 \end{cases} \tag{6*}$$

Las (6) hacen que $\overline{\vartheta}$ y $\frac{p}{q}\overline{\vartheta}$ sean los dos múltiplos de 2π y dan el intervalo $0 \leq \vartheta \leq 2q\pi$. Sin embargo hay que examinar si (6*) no dan lugar a un intervalo *menor*. Se obtiene:

$$\begin{cases} \vartheta = (2u+1)\pi \\ \frac{p}{q}\vartheta = (2v+1)\pi \end{cases} \tag{7}$$

con $u, v \in \mathbb{N}$. De (7) resulta

$$2(up - vq) = q - p \tag{7*}$$

Esta última no puede satisfacerse si p y q son de distinta paridad, puesto que el primer miembro es par y el segundo impar. En tal hipótesis por tanto el intervalo es el ya calculado, $0 \leq \vartheta \leq 2q\pi$. Si, por el contrario, p y q son los dos impares, la (7*) puede verificarse. Escrita en la forma

$$p(2u+1) = q(2v+1)$$

se tiene:

$$p = 2v+1, \qquad q = 2u+1$$

y de aquí $u = (q-1)/2$ que, sustituído en la primera de las fórmulas (7) da, para el segundo extremo del intervalo, el valor $q\pi$.

Resumiendo: *el intervalo de la rodonea de ecuación polar* $\rho = R\cos\left(\frac{p}{q}\vartheta\right)$ *es* $0 \leq \vartheta \leq 2q\pi$ *o bien* $0 \leq \vartheta \leq q\pi$, *, según que* p *y* q *sean de distinta paridad o sean los dos impares.*

Hecho esto, pasemos a la determinación de los puntos dobles distintos del polo. Se obtienen en correspondencia con aquellos valores de la anomalía que difieren entre sí por un múltiplo de 2π y que dan los mismos valores de ρ, o bien que difieren entre sí un múltiplo impar de π que dan valores opuestos de ρ. En sustancia se trata de resolver la ecuación

$$R\cos\left(\frac{p}{q}\vartheta\right) = (-1)^k R\cos\left[\frac{p}{q}(\vartheta + k\pi)\right] \tag{8}$$

siendo k un número natural no nulo y tal que la anomalía $\vartheta + k\pi$ pertenezca al intervalo de la rodonea.

Para k impar $(= 2m+1)$ la (8) se convierte en

$$\cos\left(\frac{p}{q}\vartheta\right) = -\cos\left\{\frac{p}{q}\left[\vartheta + (2m+1)\pi\right]\right\}$$

que implica

$$\frac{p}{q}\vartheta + \frac{p}{q}\left[\vartheta + (2m+1)\pi\right] = (2n+1)\pi, \qquad (n \in \mathbb{N})$$

de donde

$$\vartheta = \frac{\pi}{2p}\left[(2n+1)q - (2m+1)p\right] \tag{9}$$

Para k par $(= 2m)$ la (8) se convierte en

$$\cos\left(\frac{p}{q}\vartheta\right) = \cos\left[\frac{p}{q}\left(\vartheta + 2m\pi\right)\right]$$

que implica

$$\frac{p}{q}\vartheta + \frac{p}{q}(\vartheta + 2m\pi) = 2n\pi, \qquad (n \in \mathbb{N})$$

de donde

$$\vartheta = \frac{\pi}{p}\,(nq - mp) \tag{9*}$$

En la (9) y (9*), fijado m, deberíamos considerar asignados a n todos los valores para los cuales ϑ permanece dentro del intervalo. Si llamamos *distancia angular* $\delta(\vartheta)$ de dos puntos dobles la diferenciaa de las anomalías correspondientes a dos valores sucesivos de n, tenemos de la a (9):

$$\delta(\vartheta) = \frac{\pi}{2p}\,[(2n+1)q - (2m+1)p] - \frac{\pi}{2p}\,[(2n-1)q - (2m+1)p] = \frac{q}{p}\pi$$

y de (9*):

$$\delta(\vartheta) = \frac{\pi}{p}(nq - mp) - \frac{\pi}{p}\,[(n-1)q - mp] = \frac{q}{p}\pi$$

Luego la distancia angular es $\frac{q}{p}\pi$, independiente de m. Esto permite la determinación del número de puntos dobles coorespondientes a un m dado: basta dividir el intervalo por la distancia angular, y se encuentra que eso es p *en el caso impar y* $2p$ *en el caso par.*

Calculemos, finalmente, los valores absolutos de los radios vectores correspondientes a las anomalías (9) y (9*). Obtenemos

$$|\rho_{\text{impar}}| = R\left|\sin\frac{(2m+1)p\pi}{2q}\right| \tag{10}$$

$$|\rho_{\text{par}}| = R\left|\cos\frac{mp\pi}{q}\right| \tag{10*}$$

Como se ve, dependen de m pero no de n. Eso quiere decir que todos los puntos dobles correspondientes a un m dado se encuntran en un círculo de centro el polo y radio ρ.

Los resultados precedentes permiten también concluir que los puntos dobles son vértices de un polígono regular de p o $2p$ lados. De (10),(10*) es posible comprobar que los valores *distintos* de ρ obtenidos al variar m son $q-1$ en el caso par y $(q-1)/2$ en el caso impar.

Por *tanto el número de puntos dobles de una rodonea, reales, y fuera del polo, son* $p(q-1)/2$ *en el caso impar y* $2p(q-1)$ *en el caso par*. En particular, en el caso h entero ($q = 1$), no existen puntos dobles reales fuera del polo y por lo tanto *los pétalos no se superponen.*

6. El área de un pétalo

Se tiene:

$$S = \frac{1}{2}\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \rho^2 d\vartheta = 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2h}} R^2\cos^2 h\vartheta\ d\vartheta = \frac{\pi R^2}{4h}$$

Es decir, todos los pétalos tienen área igual $\frac{1}{4h}$ de la del círculo fundamental. Si h es entero (recordemos que en este caso los pétalos no se superponen) el área de toda la rodonea puede encontrarse multiplicando el valor encontrado por el número de pétalos, o sea por h o $2h$ según que h sea impar o par. Se obtiene, respectivamente, la cuarta parte o la mitad del círculo fundamental.

El cálculo de la longitud del contorno de un pétalo conduce a una integral elíptica; en efecto:

$$L = 2\int_0^{\vartheta} \sqrt{\rho^2+\rho'^2}d\vartheta = 2R\int_0^{\frac{\pi}{2h}} \sqrt{1+(h^2-1)\sin^2 h\vartheta}\ d\vartheta$$

7. Las concoides de las rodoneas

Recordemos que se llama *concoide* de una curva plana (que, a su vez, se llama *base* de la concoide) de ecuación polar

$$\rho = f(\vartheta)$$

a toda curva de ecuación

$$\rho = f(\vartheta) + \ell$$

donde ℓ indica una constante positiva o negativa. Los puntos de la concoide se obtienen a partir de los de la base *alargando* o *acortando* los radios vectores una longitud igual a $|\ell|$.

Si la base es la recta de ecuación

$$\rho = \frac{a^3}{\cos\vartheta}$$

perpendicular al eje polar y a distancia a del polo, se tiene la célebre *concoide de Nicomedes*, utilizada para resolver el no menos célebre problema de la *trisección del ángulo*. La concoide de una rodonea tiene por ecuación

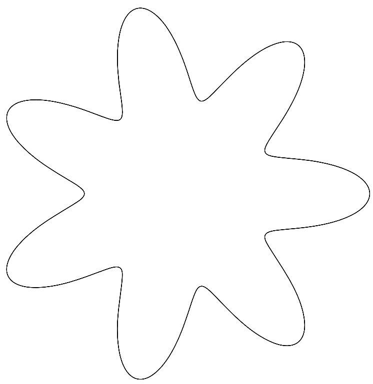
$$\rho = R\cos h\vartheta + \ell \tag{11}$$

De ahí se observa que la concoide está contenida en el círculo de centro el polo y radio $R + |\ell|$.

Al igual que las rodoneas, las curvas de ecuación (11) son ricas en simetrías y en motivos ornamentales.Además de otras propiedades, estos valores estéticos son evidentes de las figuras 5,6,7 obtenidas con un microcomputer.

Una vez programado, se han itroducido sucesivamente los valores elegidos para los parámetros R, h, ℓ que aparecen en (11).

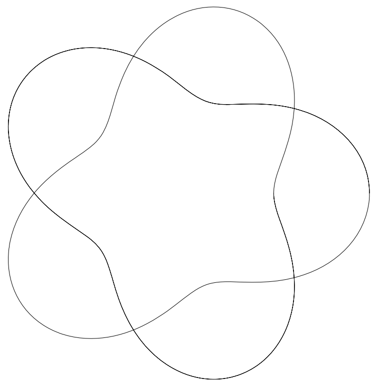
De esto depende la forma de la curva, su mayor o menor complejidad y en definitiva su *estética*.



Curva di equazione polare

$$\rho = R\cos 7\vartheta + 3R$$

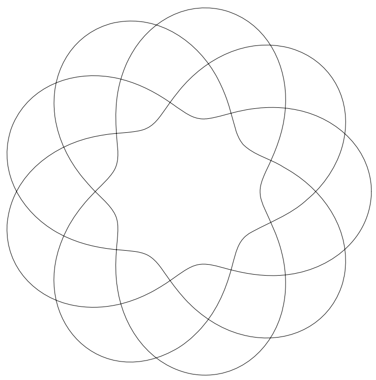
Los valores máximo y mínimo de ρ son $4R$ y $2R$, respectivamente. Por lo tanto la curva está contenida dentro de la corona circular centrada en el polo y rayos $2R$ y $4R$.



Curva de ecuación polar

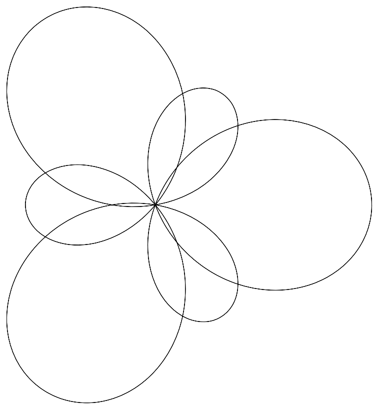
$$\rho = R\cos\frac{5}{2}\vartheta + 3R$$

Figura 5



Curva de ecuación polar

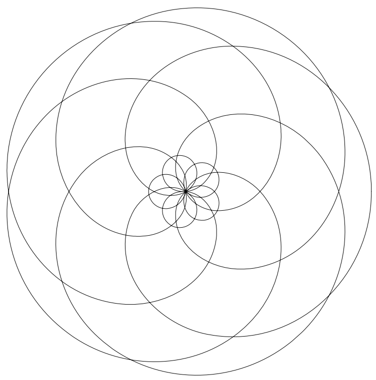
$$\rho = R \cos \frac{9}{4}\vartheta + \frac{7}{3}R$$



Curva de ecuación polar

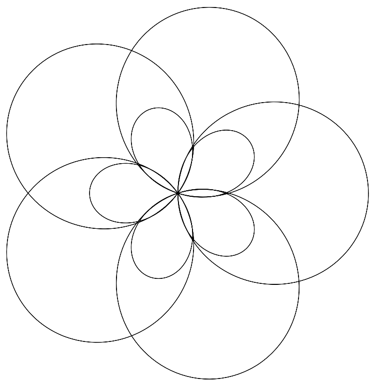
$$\rho = 4a \cos \frac{3}{2}\vartheta + a$$

Figura 6



Curva de ecuación polar

$$\rho = 3a \cos \frac{5}{8}\vartheta + 2a$$



Curva de ecuación polar

$$\rho = 3a \cos \frac{5}{4}\vartheta + \frac{11}{10}a$$

Figura 7

Es muy interesante e instructivo observar como varía la curva por pequeñas variaciones de los parámetros (mejor hacer variar uno de cada vez); las figuras se obtienen en un tiempo muy breve, y un operador puede acumular rápidamente numerosas *experiencias*, *diseñar* con el computer, *retocar* y *corregir* los diseños con adecuadas variaciones de los parámetros numéricos, y en definitiva desarrolar sensibilidad y sentido estético.

En un momento en el que se anuncian las más variadas aplicaciones de los computadores en la didáctica, parece oportuno señalar una de sus posibles usosci è sembrato opportuno segnalare anche uno de sus posibles usos para pasar de la geometría a la fantasía, de la matemática al arte. La convicción, muy difundida, de que la matemática es árida y aburrida, depende en buena medida de la ignorancia del elemento estético inherente a ella, mientras por el contrario, el aprecio de este elemento la hace viva e interesante como ninguna otra creación del espíritu humano. Según Poincaré el elemento dominante en la creatividad matemática es estético, más que lógico.

Finalizaremos con una cita de Aristóteles: *"La ciencia matemática presenta particularmente el orden, la simetría y los limites; y estas son las formas más grandes de la belleza"*.

SOLUCIÓN DE ALGUNOS PROBLEMAS DEL Nº 55 DE LA REOIM

Luis Miguel Maraví Zavaleta

I. E. Nº 80915 “Miguel Grau Seminario”

Centro Poblado El Pallar, Huamachuco, región de La Libertad, Perú

PMJ55 – 1*.* Sabiendo que f es una función impar, es decir, tal que $f(x) = -f(-x)$**, ¿cuál de las siguientes es con certeza una función impar?**

La condición brindada en el problema equivale a afirmar que $-f(x) = f(-x)$. Con esa acotación procedemos a resolver los problemas.

a) $\boldsymbol{f(x) - 1}$

Debería cumplirse que $-[f(x) - 1] = f(-x) - 1$. Sin embargo,$-f(x) + 1 \neq -f(x) - 1$. Luego, la función $f(x) - 1$ no es impar.

b) $\boldsymbol{(f(x))^2}$

Se debe cumplir que $-[f(x)]^2 = [f(-x)]^2$. Empero, $-[f(x)]^2 \neq [-f(x)]^2$ pues, $-[f(x)]^2 \neq [f(x)]^2$. De este modo, la función $(f(x))^2$ no es impar.

c) $\boldsymbol{(f(x))^2 + f(x)}$

En este caso, la igualdad que debería cumplirse es $-[f(x)]^2 - f(x) = [f(-x)]^2 + f(-x)$. Pero $-[f(x)]^2 - f(x) \neq [-f(x)]^2 - f(x)$, pues $-[f(x)]^2 \neq [-f(x)]^2$. Así, la función $(f(x))^2 + f(x)$ no es impar.

d) $\boldsymbol{(f(x))^3 + 1}$

Debe cumplirse que $-[f(x)]^3 - 1 = [f(-x)]^3 + 1$. Empero, $-[f(x)]^3 - 1 \neq [-f(x)]^3 + 1$, pues $-[f(x)]^3 - 1 \neq -[f(x)]^3 + 1$. De esta forma, la función $(f(x))^3 + 1$ no es impar.

e) $\boldsymbol{(f(x))^3 + f(x)}$

A partir de la condición planteada en el problema se cumple que $-[f(x)]^3 - f(x) = [f(-x)]^3 + f(-x)$. Dicha igualdad es verdadera, pues $-[f(x)]^3 - f(x) = [-f(x)]^3 - f(x)$. ***De este modo, solo la función*** $\boldsymbol{(f(x))^3 + f(x)}$ ***es impar.***

PMJ55 – 2. Calcula el valor de $\boldsymbol{log_2(3).log_3(4).log_4(5)\dots log_{126}(127).log_{127}(128)}$.

Para resolver este problema emplearemos la siguiente propiedad de los logaritmos:

$$log_b N = \frac{log_a N}{log_a b} \quad (a > 0, a \neq 1, N > 0)$$

De este modo se tiene que:

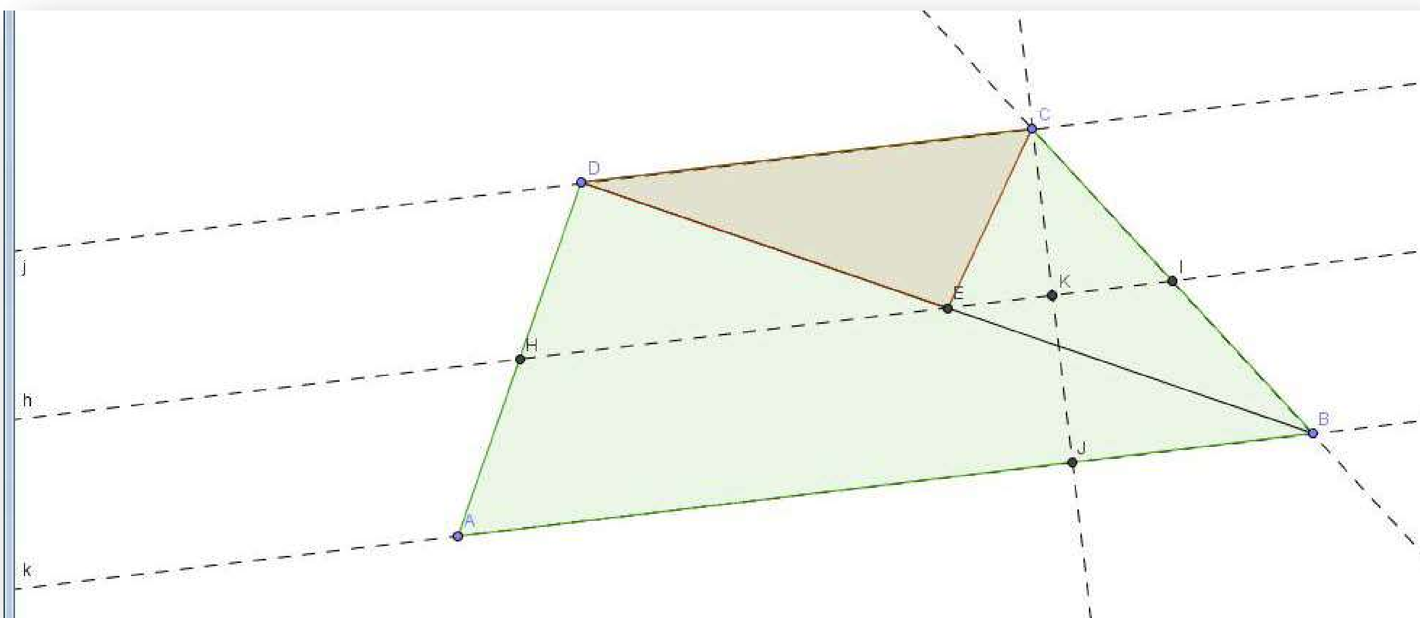
$log_2 3 = \frac{log_{127}3}{log_{127}2};\ log_3 4 = \frac{log_{127}4}{log_{127}3}; \dots;\ log_{127}128 = \frac{log_{127}128}{log_{127}127}.$

Tras sustituir las expresiones equivalentes se concluye que:

$$\left(\frac{log_{127}3}{log_{127}2}\right).\left(\frac{log_{127}4}{log_{127}3}\right)\dots\left(\frac{log_{127}128}{log_{127}127}\right) = \frac{log_{127}128}{log_{127}2} = log_2 128 = 7$$

PMJ55 – 3. En un trapecio ABCD, la base mayor AB es triple de la base menor CD. Si E es el punto medio de BD, hallar la razón entre el área del triángulo CDE y el área del trapecio.

A continuación mostramos una figura que ilustra los razonamientos seguidos para resolver el problema:



El área del trapecio ABCD se obtiene mediante la expresión

$$A_{Trapecio\ ABCD} = \frac{1}{2}h(\overline{AB} + \overline{CD})$$

En la fórmula anterior, h corresponde a la medida de la altura del trapecio, es decir, la longitud del segmento $\overline{CJ}$(en la figura). Así mismo, por dato del problema,$\overline{AB} = 3\overline{CD}$. De este modo, $A_{Trapecio\ ABCD} = 2h\overline{CD}$.

Dado que la mediana del trapecio $\overline{HI}$biseca a ambas diagonales (es decir, el punto E pertenece al segmento $\overline{HI}$), el problema pasa por averiguar si el punto K (intersección de $\overline{CJ}$ con $\overline{HI}$) corresponde a la mitad de la altura del trapecio. Aquí se aplica el siguiente teorema: *si tres rectas paralelas* (como $\overleftrightarrow{J}$, $\overleftrightarrow{h}$ y $\overleftrightarrow{k}$,) *determinan segmentos congruentes en una secante* (como $\overleftrightarrow{CB}$, a la que pertenece el lado $\overline{CB}$ del trapecio), *entonces determinan segmentos congruentes en cualquier otra secante* (como, por ejemplo $\overleftrightarrow{CJ}$, a la que pertenece la altura $\overline{CJ}$ del trapecio).

En línea con el teorema anterior, como $\overline{CI} = \overline{CB}$ (pues I es punto medio de $\overline{CB}$), se concluye que $\overline{CK} = \overline{KJ}$, es decir, que, efectivamente, el punto K corresponde a la mitad de la altura $\overline{CJ}$. Entonces, con relación al triángulo CDE se tiene lo siguiente:

$$A_{Triángulo\ CDE} = \frac{\overline{CD}.\frac{h}{2}}{2} = \frac{\overline{CD}.h}{4}$$

De este modo, la razón entre el área del triángulo CDE y el área del trapecio ABCD se obtiene mediante la siguiente expresión:

$$\frac{A_{Triángulo\ CDE}}{A_{Trapecio\ ABCD}} = \frac{\overline{CD}.\frac{h}{4}}{2h\overline{CD}} = \frac{1}{8}$$

Así se concluye, entonces, que la razón presente entre el área del triángulo CDE y el área del trapecio ABCD equivale a $\frac{1}{8}$.

PMJ55 – 5. Si n es un número natural con 6 divisores enteros positivos, ¿cuántos divisores enteros positivos tiene n^2?

Sea la descomposición canónica del número *n* en factores primos la siguiente:

$$\boldsymbol{n = a_1^{\alpha_1}.a_2^{\alpha_2}\ldots a_k^{\alpha_k}.}$$

La cantidad de divisores del número *n*,$\tau(n)$, se obtiene de la siguiente forma:

$$\boldsymbol{\tau(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)\ldots(\alpha_k + 1)}$$

Donde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k$ son los exponentes de los factores primos en los que se ha descompuesto el número *n*.

De ahí que, si el número de divisores enteros positivos de *n* es 6, el único par de números que puede ser multiplicado para obtener dicho resultado está conformado por 2 y 3, pues de proponerse al par integrado por 6 y 1 se estaría aceptando que uno de los factores de *n* posee exponente 0, lo que originaría un factor que no es primo. Luego:

$$n = {a_1}^2 . {a_2}^3$$

$$n^2 = ({a_1}^2 . {a_2}^3)^2 = {a_1}^4 . {a_2}^6$$

Ante ello, podemos observar que la cantidad de divisores de n^2 está dada por:

$$\tau(n^2) = (4 + 1)(6 + 1) = 35.$$

Luego, la cantidad de divisores enteros positivos de n^2 es 35.

Problemas propuestos 281-285

PROBLEMA 281, propuesto por Francisco Javiér García Capitán, Priego de Córdoba, España.

Sea ABC un triángulo y P un punto. Encontrar dos puntos V y V' sobre CA y otros dos, W y W', sobre AB, de manera que C sea el punto medio de VV' y B sea el punto medio de WW', cumpliéndose además que P sea la intersección de VW y V'W'.

PROBLEMA 282, propuesto por D.M. Batinetu-Giurgiu y N. Stanciu, Bucarest y Buzau, Rumania.

Sean $f,g:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ ***funciones derivables con derivadas continuas, y*** $a,b\in\mathbb{R}^+, a<b$***. Calcular*** $\int_a^b \frac{f(x)g'(x)-f'(x)}{f(x)+e^{g(x)}}dx$***.***

Problema 283, propuesto por el editor

Si ∝ y β son números reales, determinar el número de raíces de la ecuación en la variable compleja z

$$z^{2n}+\alpha^2 z^{2n-1}+\beta^2=0$$

en la región $\Re(z)>0$**.**

PROBLEMA 284, propuesto por el editor

Probar que la ecuación cúbica

$$ax^3+3bx^2+3cx+d=0$$

puede escribirse como

$$\phi(y-\theta)^3=\theta(y-\phi)^3,$$

donde $y=ax+b$**, y los números** ϕ,θ **son las raíces de la ecuación cuadrática**

$$\left(ac-b^2\right)t^2+\left(a^2d-3abc+2b^2\right)t-\left(ac-b^2\right)^2=0.$$

Escribir lass tres raíces en función de ϕ,θ**.**

Expresar la ecuación $5x^3+21x^2+30x+14=0$ **en esa forma y resolverla.**

PROBLEMA 285, propuesto por el editor

Demostrar que el área de la sección de un tetraedro ABCD por un plano paralelo a AB y CD es máxima cuando ese plano biseca la mínima distancia entre AB y CD.

Problema 276, proposto por Laurentiu Modan, Bucarest, Romanía.

i) Considérase a función afín f determinada polos puntos $M(0,4)$ e $N(2,k)$. Se x_A é a abscisa do punto de intersección da gráfica de k co eixo Ox, achar k de maneira que f sexa unha función de densidade dunha variable aleatoria x no intervalo $[0, x_A]$.

ii) Calcular a probabilidade $p = P\left(\left(x \geq \frac{1}{8}\right) / \left(|x| < \frac{1}{4}\right)\right)$.

iii) Colocar en orde crecente: p, a probabilidade de obter a suma 8 cando lanzamos dous dados, e a probabilidade de que 2 libros estean no primeiro estante, se colocamos 3 libros en tres estantes.

Solución enviada por Bruno Salgueiro Fanego, Viveiro, Lugo.

i) f é unha función afín $\Rightarrow$ $\exists a, b \in \mathbb{R}$ / $f(x) = ax + b$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Como a gráfica de f pasa por $M(0,4)$ e $N(2,k)$, $4 = f(0) = a0 + b = b$ e $k = f(2) = a2 + b = 2a + 4 \Rightarrow f(x) = \frac{k-4}{2}x + 4$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Ademais, o intervalo $[0, x_A]$ existirá se $x_A > 0$, co cal debemos ter que $k < 4$.

Notemos tamén que $f(x_A) = 0 \Leftrightarrow x_A = \frac{8}{4-k}$.

f será unha función de densidade dunha variable aleatoria x no intervalo $[0, x_A]$ se e só se $f(x) \geq 0$ $\forall x \in [0, x_A]$ e $\int_0^{x_A} f(x)\,dx = 1$, ou equivalentemente, só e cando a área do triángulo encerrado baixo o segmento MA no primeiro cuadrante é igual a 1, é dicir, se e soamente se $\frac{x_A \cdot 4}{2} = 1$, que equivale a $k = -12$.

ii) $$p = \frac{P\left(\left(x \geq \frac{1}{8}\right) \cap \left(|x| < \frac{1}{4}\right)\right)}{P\left(|x| < \frac{1}{4}\right)} = \frac{P\left(\frac{1}{8} \leq x < \frac{1}{4}\right)}{P\left(-\frac{1}{4} < x < \frac{1}{4}\right)} = \frac{\int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{4}} f(x)\,dx}{\int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}} f(x)\,dx}.$$

O numerador é a área encerrada entre a gráfica da función de densidade da variable aleatoria x, $f(x) = 4(1-2x)$, que é unha recta, as rectas $x = \frac{1}{8}$ e $x = \frac{1}{4}$ e o eixo Ox, ou sexa, a área do trapecio de vértices $\left(\frac{1}{8}, 0\right)$, $\left(\frac{1}{4}, 0\right)$, $\left(\frac{1}{4}, f\left(\frac{1}{4}\right)\right)$ e $\left(\frac{1}{8}, f\left(\frac{1}{8}\right)\right)$, cuxas bases maior e menor teñen lonxitudes $f\left(\frac{1}{8}\right) = 3$ e $f\left(\frac{1}{4}\right) = 2$ respectivamente e cuxa altura é $\frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$, logo dito numerador é $\int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{4}} f(x)\,dx = \frac{(3+2)\frac{1}{8}}{2} = \frac{5}{16}$;

analogamente, o denominador é

$$\int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}} f(x)\,dx=\frac{\left(f\left(-\frac{1}{4}\right)+f\left(\frac{1}{4}\right)\right)\left(\frac{1}{4}-\frac{-1}{4}\right)}{2}=\frac{(6+2)\frac{1}{2}}{2}=2\text{, logo}$$

$$p=\frac{\frac{5}{16}}{2}=\frac{5}{32}.$$

iii) Sexan q a probabilidade de obter a suma 8 cando lanzamos dous dados, e r a probabilidade de que 2 libros estean no primeiro estante, se colocamos 3 libros en tres estantes.

Representemos por $\{(i,j)\}$ o suceso do experimento aleatorio do lanzamento de dous dados que consiste en que o resultado do obtido no primeiro dado é i e o do segundo dado é j, con i, $j \in I=\{1,2,3,4,5,6\}$.

O espazo mostral $\{(i,j): i,j\in I\}$ asociado a dito experimento aleatorio consta de 36 elementos, todos eles equiprobables e independentes entre si, e o suceso $\{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}$ consistente en obter a suma 8 está formado por cinco elementos , segundo a regra de Laplace a probabilidade de dito suceso é igual a $q=\frac{5}{36}$.

Numeremos agora os libros e os estantes do 1 ao 3 e denotemos por L_k e por E_k, $k=1,2,3$, o estante e o libro k-ésimo, respectivamente. O libro L_1 pode ocupar calquera dos tres estantes coa mesma probabilidade, logo a probabilidade de que L_1 ocupe o estante L_k é igual a $\frac{1}{3}$; unha vez colocado dito libro, o libro L_2 tamén pode ocupar calquera deses tres estantes con probabilidade $\frac{1}{3}$, e unha vez colocados nos estantes os libros L_1 e L_2, o libro L_3 pode ocupar calquera deses tres estantes con probabilidade $\frac{1}{3}$.

Se denotamos $K=\{1,2,3\}$, o espazo mostral $\{(E_k,E_l,E_m): k,l,m\in K\}$, onde (E_k,E_l,E_m) indica que o libro L_1 ocupa o estante E_k, o libro L_2 ocupa o estante E_l e o libro L_3 ocupa o estante E_m, consta de $3^3=27$ sucesos equiprobables e independentes entre si, sendo favorables ao suceso de que 2 libros estean no estante E_1 os sucesos que consisten en que E_1 apareza en dous dos tres lugares posibles exactamente son $\{(E_1,E_1,E_2)\}$, $\{(E_1,E_1,E_3)\}$, $\{(E_1,E_2,E_1)\}$, $\{(E_1,E_3,E_1)\}$, $\{(E_2,E_1,E_1)\}$ e $\{(E_3,E_1,E_1)\}$, co cal a probabilidade de dito suceso é, de novo pola regra de Laplace (ou polo teorema das probabilidades totais) $r=\frac{6}{27}=\frac{2}{9}$.

Polo tanto, $q<p<r$ é a ordenación crecente pedida.

Problema 277, propuesto por D.M. Batinetu-Giurgiu, Bucarest, y Neculai Stanciu, Rumania.

Demostrar que, en cualquier triángulo ABC, se verifica la siguiente igualdad:

$$(ab+bc+ca)^2+2(a^2+b^2+c^2)^2 \geq 16\sqrt{3}s^3r$$

Donde a,b,c son los lados, s es el semiperímetro y r el radio de la circunferencia inscrita en el triángulo.

Solución por Javier Cornejo Tejada, Universidad Nacional de Ingeniería, Lima, Perú.

Se sabe que $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$ para cualquier a,b,c reales positivos, por lo que se deduce:

$$(ab+bc+ca)^2+2(a^2+b^2+c^2)^2 \geq 3(ab+bc+ca)^2 \ldots (I)$$

También:

$$a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) \geq 3(ab+bc+ca) \rightarrow (a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$$

En vez de a,b,c se reemplaza a la desigualdad por ab, bc y ca:

$$(ab+bc+ca)^2 \geq 3(ab^2c+bc^2a+ca^2b) = 3abc(a+b+c)$$

$$3(ab+bc+ca)^2 \geq 9abc(a+b+c)$$

En (I):

$$(ab+bc+ca)^2+2(a^2+b^2+c^2)^2 \geq 9abc(a+b+c) \ldots (II)$$

Haciendo uso del siguiente lema, para cualquier triángulo con área T se cumple que:

$$\frac{9abc}{a+b+c} \geq 4\sqrt{3}T$$

Multiplicando ambos lados por 4 veces el semiperímetro al cuadrado ($4s^2=(a+b+c)^2$):

$$9abc(a+b+c) \geq 16\sqrt{3}Ts^2$$

Se sabe que el área de un triángulo es el producto del semiperímetro con el inradio del triángulo:

$$9abc(a+b+c) \geq 16\sqrt{3}s^3r \ldots (III)$$

De (II) y (III) se obtiene lo que se pedía demostrar:

$$(ab+bc+ca)^2+2(a^2+b^2+c^2)^2 \geq 16\sqrt{3}s^3r$$

Problema 278, propuesto por Roberto Bosch Cabrera, Miami, Estados Unidos.
Resolver, en el conjunto de los números reales positivos, la ecuación
$\boldsymbol{\sqrt{x}\,(x+1)+x(x-4)+1=0}$.

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba (España).
Como x>0, entonces si $x=t^2$, y la ecuación anterior es equivalente a esta otra

$$t\,(t^2+1)+t^2(t^2-4)+1=0 \rightarrow \; 1+t-4t^2+t^3+t^4=0 \rightarrow$$

$$(\mathrm{t}-1)^2(1+3t+t^2)=0 \leftrightarrow \mathrm{t}=1.$$

En definitiva, $x=1$ *es la única raíz real positiva.*

Problema 279, propuesto por el editor.

Sea n un número entero positivo y a, b números reales positivos. Calcular la integral:

$$\boldsymbol{I = \int_0^\infty \frac{dx}{(a+bx^2)^n}}$$

Solución de Ignacio Larrosa Cañestro, ex-profesor del IES Rafael Dieste de A Coruña, España (jubilado).

Puede hacerse casi trivialmente utilizando la teoría de residuos, pero sigamos Feynman[1] y utilicemos la derivación parmétrica.[1]

$$\boldsymbol{I(n) = \int_0^\infty \frac{dx}{(a+bx^2)^n} = \frac{1}{b^n}\int_0^\infty \frac{dx}{(m+x^2)^n}}\ , \qquad \boldsymbol{m = \frac{a}{b}}$$

Consideremos la integral $J(m) = \int_0^\infty \frac{dx}{m+x^2} = \frac{1}{\sqrt{m}}\int_0^\infty \frac{\left(dx/\sqrt{m}\right)}{1+\left(x/\sqrt{m}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{m}}\lim_{R\to\infty}\left|arctg\left(x/\sqrt{m}\right)\right|_0^R = \frac{\pi}{2\sqrt{m}}$

Dado que m y x^2 son positivos, la función subintegral es perfectamente continua y derivable en (0, ∞) e integrable respecto de x, por lo que podemos derivar respecto de m bajo el signo integral y

$$\frac{d^kJ(m)}{dm^k} = \int_0^\infty \frac{d^k}{dm^k}\left(\frac{1}{m+x^2}\right)dx = \int_0^\infty \frac{(-1)^k k!}{(m+x^2)^{k+1}} = \frac{d^k}{dm^k}\left(\frac{\pi}{2\sqrt{m}}\right) = \frac{(-1)^k(2k-1)!!\,\pi}{2^{k+1}m^{\frac{2k+1}{2}}}$$

Entonces, poniendo k = n-1

$$I(n) = \frac{1}{b^n}\frac{(2n-3)!!\,\pi}{(n-1)!\,2^n m^{n-\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{\frac{a}{b}}\,(2n-3)!!\,\pi}{(2a)^n(n-1)!},\ \ n > 1$$

Para n = 1$I(1) = \frac{1}{b}J(m) = \frac{\pi}{2\sqrt{ab}}$, que coincide la anterior si se usa la extensión de n!! a los enteros negativos impares utilizando la relación $(n-2)!! = \frac{n!!}{n}$.

[1] Richard P. Feynman, "*QED: The Strange Theory of Light and Matter*". Princenton University Press, 1985.

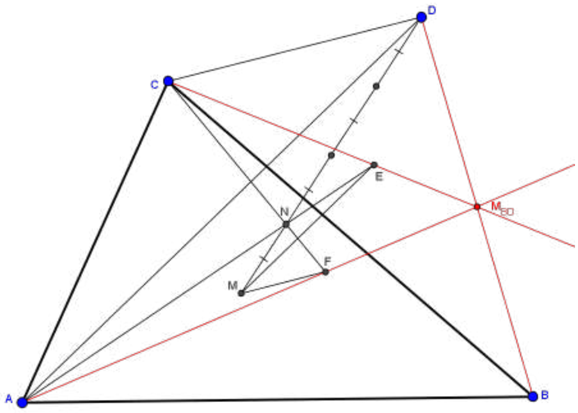
Solución al Problema 280
propuesto en La Revista Escolar
de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática
No. 55 - 2016

enviada por
Andrea Fanchini
Cantù,
Italia.

Julio 4, 2016

Problema 280. *propuesto por el Editor.*
Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo, M el punto de intersección de las medianas del triángulo ABC y N el punto del segmento MD tal que $\frac{MN}{ND} = \frac{1}{3}$. Los puntos E y F se eligen en las rectas AN y CN, respectivamente, de tal manera que ME es paralela a AD y MF paralela a CD. Demostrar que las rectas AF, CE y BD son concurrentes.

Solución 280. *(Andrea Fanchini, Cantú, Italia)*



Usamos coordenadas baricéntricas con el triángulo de referencia ABC y la usual notación de Conway.

El punto D tiene coordenadas absolutas $D(p, q, r)$ donde p, q y r son parámetros tal que $p + q + r = 1$.

• *Las coordenadas de los puntos* M y N.
Es bien conocido que M tiene coordenadas $M(1 : 1 : 1)$. El punto N divide al segmento MD en la razón $\frac{1}{3}$, por tanto tiene coordenadas

$$N(p + 1 : q + 1 : r + 1)$$

• *Las coordenadas del punto* E.
La recta $AD : ry - qz = 0$ tiene punto del infinito $AD_\infty(r + q : -q : -r)$. Por tanto la recta que pasa por M y paralela a AD es

$$MAD_\infty : (q - r)x + (2r + q)y - (2q + r)z = 0$$

siendo la recta $AN : (r + 1)y - (q + 1)z = 0$, el punto E será

$$E = MAD_\infty \cap AN = (p : q + 1 : r + 1)$$

• *Las coordenadas del punto* F.
La recta $CD : qx - py = 0$ tiene punto del infinito $CD_\infty(-p : -q : p + q)$. Por tanto la recta que pasa por M y paralela a CD es

$$MCD_\infty : (p + 2q)x - (2p + q)y + (p - q)z = 0$$

siendo la recta $CN : (q + 1)x - (p + 1)y = 0$, el punto F será

$$F = MCD_\infty \cap CN = (p + 1 : q + 1 : r)$$

• *Las rectas AF, CE y BD.*
Las rectas AF, CE y BD tienen ecuaciónes

$$AF: ry - (q+1)z = 0, \qquad CE: (q+1)x - py = 0, \qquad BD: rx - pz = 0$$

Ahora tres rectas $d_i = p_i x + q_i y + r_i z = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$ son concurrentes si y sólo si

$$\begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{vmatrix} = 0$$

en nuestro caso es

$$\begin{vmatrix} 0 & r & -q-1 \\ q+1 & -p & 0 \\ r & 0 & -p \end{vmatrix} = r(-pq-p) - p(-rq-r) = 0$$

Por tanto las rectas AF, CE y BD son concurrentes y en particular en el punto $M_{BD}(p : q+1 : r)$, que es el punto medio de el lado BD.

Revista de la OIM

Tipo de recurso: página web.
www.oei.es/oim/revistaoim/
Destinatarios: Alumnado desde 2.º de ESO a bachillerato.
Duración de su utilización:
Dependiendo del uso que se vaya a hacer en el aula, puede variar desde los cinco minutos de resolución o comentario de los ejercicios hasta una hora. Para seminarios de preparación o específicos, el tiempo que determine el docente.
Breve descripción
Revista digital de suscripción gratuita (no hace falta estar suscrito, se pueden consultar y descargar los artículos y materiales sin requisito adicional alguno) que intenta dar respuesta a alumnos y profesores ante la falta de materiales publicados para la preparación en la participación de Olimpiadas Matemáticas de diferentes niveles. Se compone de varias secciones:

1. Artículos y notas.
2. Problemas para los más jóvenes (propuestos y resueltos).
3. Problemas de nivel medio (propuestos y resueltos).
4. Problemas de Olimpiadas y del nivel superior.
5. Divertimentos matemáticos.

Así mismo, se indican algunos enlaces muy bien seleccionados (no cantidades inabarcables) relacionados con la resolución de este tipo de ejercicios. Todos los números publicados están accesibles, pudiendo descargarse individualmente por artículos o al completo.

¿Qué aprenderán?

- Amplia colección de ejercicios propuestos y resueltos de diferentes certámenes, competiciones y revistas internacionales matemáticas.
- Distintas técnicas de enfoque en la resolución de ejercicios de matemáticas, en muchos casos, diferentes de la enseñanza convencional marcada en los libros de texto.
- Profundización en temas concretos del currículo de matemáticas.
- Información sobre cursos, congresos, libros… brevemente comentados.

¿Cómo utilizarlo en el aula?

La página es sobre todo un banco de cuestiones y ejercicios que pueden ser utilizados individualmente (alumnos) o como recurso en las clases (profesores), no solo en la preparación de Olimpiadas, sino también en el desarrollo de los temas del currículo de los diferentes cursos. Para ello, se sugiere utilizar alguna dinámica que resulte atractiva a los alumnos en general (los participantes en Olimpiadas suelen estar suficientemente motivados y no necesitan mayor esfuerzo).

Una posibilidad es dividir la clase en grupos de 3 o 4 alumnos y proponer una metodología tipo PBL (*problem based learning*), bien planteando los mismos ejercicios a todos los grupos formados, bien diferentes, según decida el profesor. Tomando la primera de esas opciones, se eligen tres o cuatro ejercicios, procurando que sean de diferentes temas ya tratados o conocidos por los alumnos, a resolver por el grupo en un tiempo concreto (una o dos semanas), de modo que sean los alumnos, guiados por el profesor, los que investiguen, piensen y busquen recursos que permitan resolverlos. Favorecemo»s así el trabajo cooperativo y los alumnos asumen la tarea como un desafío. Recordemos, además, que, si tras la búsqueda personal de información, se dedica un tiempo a la resolución en el aula, cada alumno en cada grupo puede ejercer un rol diferente (líder, dinamizador, organizador, moderador, etc.)

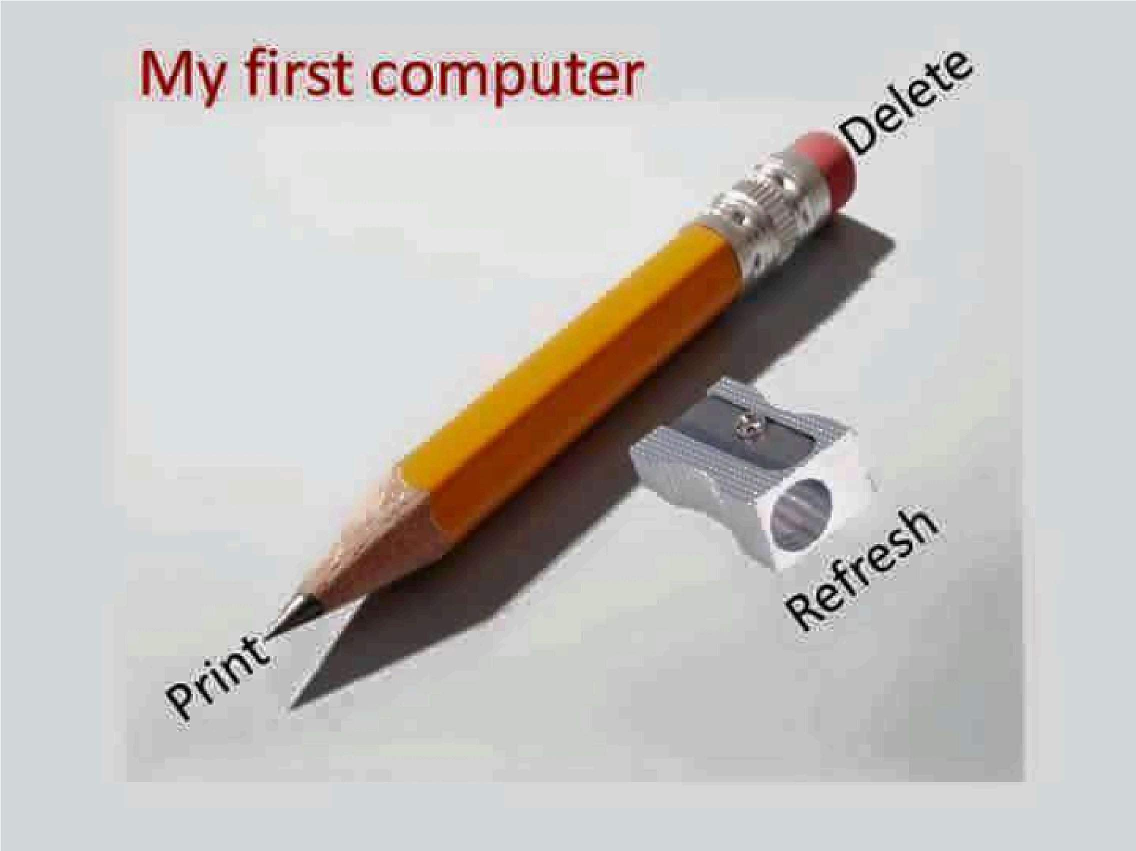
Extraídos de diferentes números de la citada revista de la OIM, podría proponerse a modo de ejemplo, la resolución de los siguientes problemas:

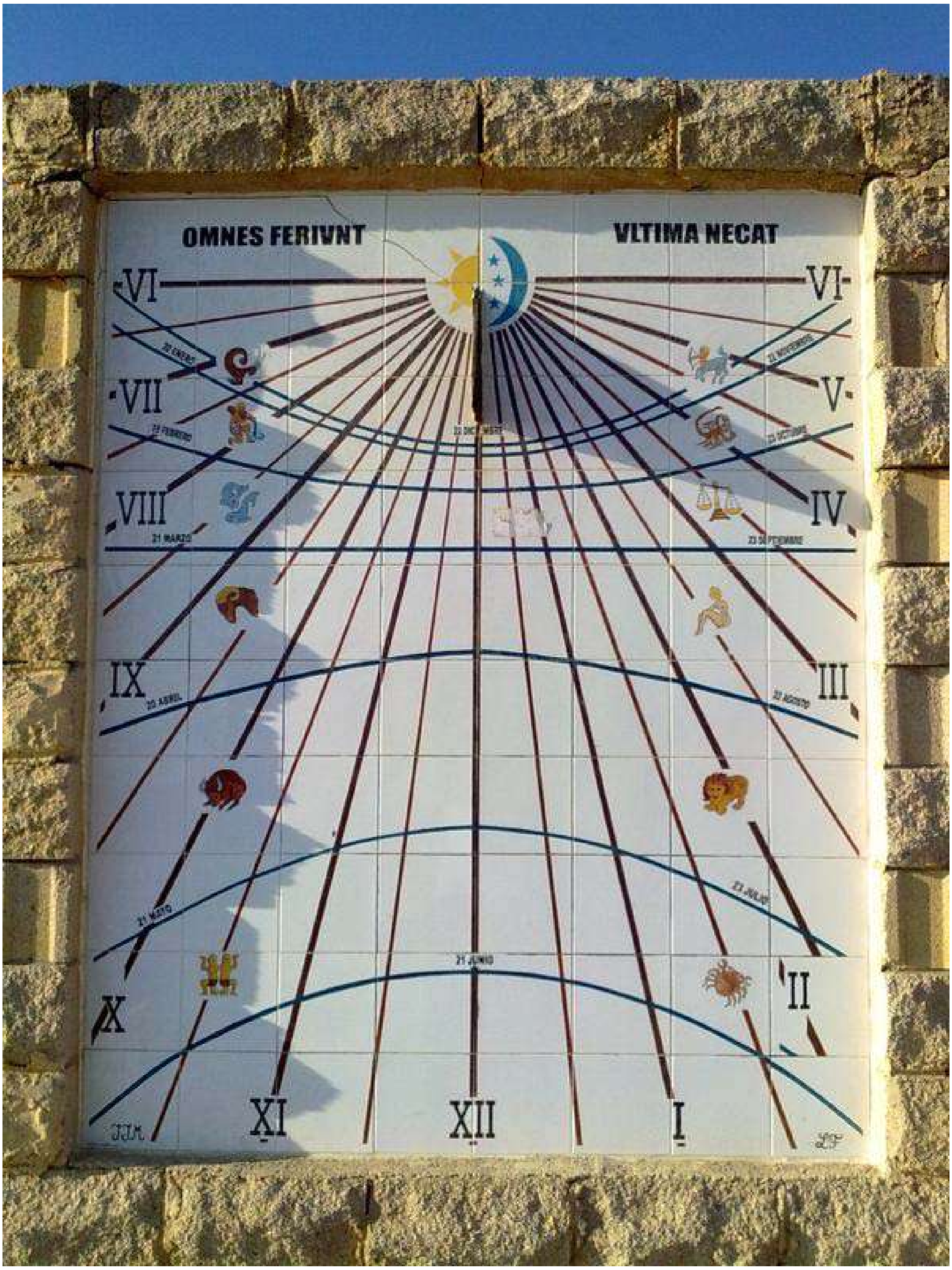
1. A un número natural A lo llamamos «súper 3» si la suma de sus cifras es tres veces mayor que la suma de las cifras del número A + 1. Hallar todos los números «súper 3» que tienen a lo sumo 4 cifras.
2. • Descomponer el número 2012 en suma de números naturales consecutivos.
   • Descomponer el número 2012 en suma de números naturales pares consecutivos.
   • Descomponer el número 2012 en suma de números naturales impares consecutivos.
   Observación: Se consideran 2, 4, 6, 8 números pares consecutivos y 1, 3, 5, 7, 9 números impares consecutivos.
3. El área de un rectángulo es 2 m^2. Si se aumenta la longitud y la anchura en 2 m, el área aumenta en 8 m^2. Hallar el perímetro del rectángulo inicial.
4. Una isla tiene gatos, pájaros y serpientes. Cada día, cada gato desayuna un pájaro; cada serpiente come un gato y cada pájaro cena una serpiente. No hay otras muertes, ni nacimientos. A cierta hora del día *n* del mes, un pájaro se convierte en el único ser viviente de la isla. ¿Después de qué comida ocurrió esto? Encontrar una expresión para el número de pájaros antes del desayuno, en el primer día de ese mes.

Alfonso J. Población Sáez
alfonso@mat.uva.es

DIVERTIMENTOS MATEMÁTICOS 56

Algunas capturas de Internet, de diversas fuentes



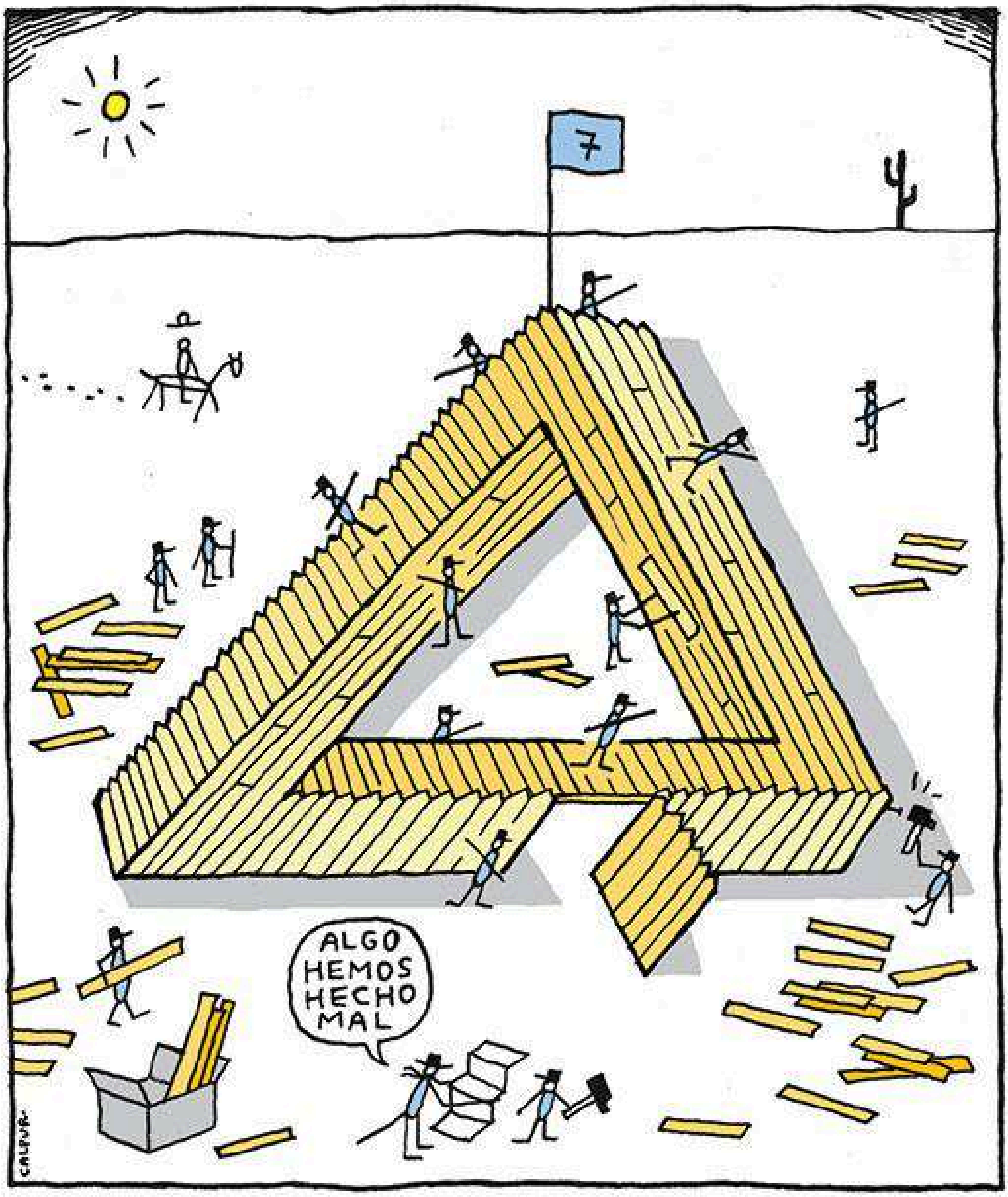


Reloj de Sol en Vejer de la Frontera

REDUCE 32/56

$$\frac{32}{56} = \frac{32}{56} = \frac{32}{56} = \frac{32}{56} = \frac{32}{56} = \frac{32}{56} = \frac{32}{56}$$

Estas cosas pasan cuando se pregunta mal (y no se sabe inglés)



El fuerte imposible

Número

57

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

Número 57 (enero – junio 2017)

ISSN – 1698-277X

VIII CIBEM Madrid 2017 CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ÍNDICE

Recibidas soluciones del problema 4, de: Jesús Dueñas Pamplona, estudiante, Valladolid, España; Joaquín Nadal Vidal, LLagostera, Gerona, España; Andrés Sáez Schwedt, León, España; y Cristóbal Sánchez-Rubio García, Benicassim, Castellón, España. Presentamos la solución de Dueñas.

Solución del Problema 5, por Joaquín Nadal Vidal, LLagostera, Gerona, España.

El problema 6 sigue abierto.

Problemas 57

Nota del editor: el autor de las soluciones calificadas como "anónimas" a los problemas 277, 278 y 280 del Num. 56 es Samael Gamboa Quezada, de Trujillo (Perú).

Se han recibido soluciones de los problemas 277 y 279 de Joaquim Nadal Vidal, de Llagostera, Gerona, España. Acusamos así recibo de ambas.

Problemas resueltos

Problema 281, propuesto por F.J. García Capitán

Se ha recibido una solución analítica abreviada. A la espera de que recibamos soluciones sintéticas, este problema continúa abierto.

Problema 282, propuesto por D.M. Batinetu-Giurgiu y N. Stanciu

Recibidas soluciones (muy similares) de: Florentino Damián Aranda Ballesteros, Córdoba, España; Gabriel Augusto Correia, Brasil; Joaquim Nadal Vidal, LLagostera, Gerona, España; Paolo Perfetti, Dep. Matematica, Universitá degli Studi di Tor Vergata, Roma, Italia; Angel Plaza, Las Palmas de Gran Canaria, España; y Albert Stadler, Herrliberg, Suiza. Presentamos la solución de Plaza.

No se han recibido soluciones al problema 283, que naturalmente sigue abierto.

Problema 284, propuesto por el editor

Recibidas soluciones de Florentino Damián Aranda Ballesteros, de Córdoba, España, de Francisco Javier García Capitán, de Priego de Córdoba, España; y de Joaquim Nadal Vidal, de Llagostera, Gerona, España.

Presentamos las soluciones de Aranda y de García Capitán.

Problema 285, propuesto por el editor

Recibida la solución (que presentamos) de Joaquim Nadal Vidal, de LLagostera, Gerona, España

Problemas propuestos 286-290

Reseña de Congresos, libros y páginas web 57

La página web del CIBEM 2017 en Madrid, España

Divertimentos Matemáticos 57

En esta ocasión hacemos un llamamiento para que los lectores nos remitan materiales para esta sección. Nos parece que es una sección que cumple una interesante función y que puede ser un excelente momento para muchos lectores puedan iniciar su participación en la Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de matemática. Para mandar las propuestas pueden usar el correo revistaoim@oei.es

Realizado en el marco del **Instituto Iberoamericano de Enseñanza de las Ciencias y la Matemática (IBERCIENCIA)** con la colaboración de la **Consejería de Economía y Conocimiento de la Junta de Andalucía**

ALGUNAS HOMOGRAFÍAS EN EL TRIÁNGULO

FRANCISCO JAVIER GARCÍA CAPITÁN

RESUMEN. Hacemos una introducción a las homografías entre puntos de una recta y entre rectas de un haz y aplicamos dichos conceptos a algunos casos en el ámbito del triángulo.

1. HOMOGRAFÍAS ENTRE RECTAS

1.1. Homografía. Una homografía entre dos rectas o entre dos haces de rectas es una biyección que conserva las razones dobles. Nosotros aquí no usaremos la razón doble, sólo que una homografía queda determinada por tres elementos y sus imágenes. [1]

Dadas dos ternas A, B, C y A', B', C' de puntos alineados sobre dos rectas distintas, existe una única homografía entre las dos rectas tal que $h(A) = A'$, $h(B) = B'$ y $h(C) = C'$.

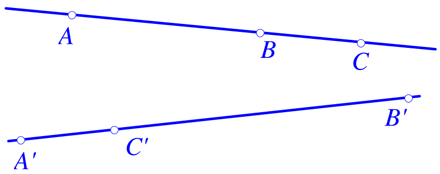


FIG. 1: Homografía.

1.2. Eje de homografía. Si (M, M') y (N, N') son dos pares de puntos homólogos, el lugar de los puntos $MN' \cap M'N$ es una recta, llamada eje de la homografía. En particular, los puntos de intersección $X = BC' \cap B'C$, $Y = CA' \cap C'A$ y $Z = AB' \cap A'B$, que están alineados por el teorema de Pappus, son puntos del eje de homografía.

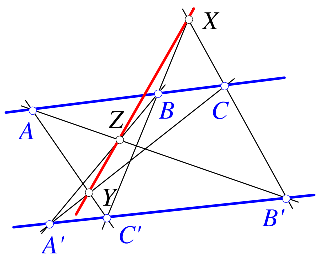


FIG. 2: Eje de homografía.

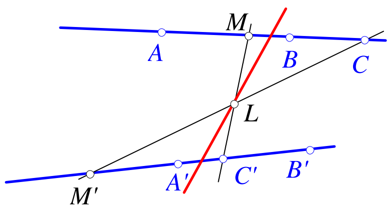


FIG. 3: Imagen de un punto.

[1]Se aconseja leer este documento usando un programa de geometría dinámica como *Cabri* o *Geogebra* e ir creando sobre la marcha las figuras que aparecen en el texto.

1.3. Imagen de un punto. Si conocemos el eje de homografía y un par de puntos homólogos, podemos hallar la imagen M' de cualquier punto M: basta hallar la intersección L de $C'M$ con el eje de homografía, y luego la intersección M' de CL y la recta $A'B'$.

2. Dualidad

En Geometría Proyectiva, al incluir los puntos del infinito, son totalmente válidos, sin excepciones, los axiomas

1. Por cada dos puntos pasa una y sólo una recta.
2. Cada dos rectas se cortan en un y sólo un punto.

Una consecuencia bella y útil de esto es que cualquier enunciado que se exprese en términos de intersecciones de rectas y de rectas que pasan por dos puntos, puede traducirse a otro enunciado en el que intercambiamos los dos conceptos, obteniendo así otro enunciado igualmente válido.

Por ejemplo, consideremos el teorema de Desargues y su dual.

Teorema de Desargues. *Dados dos triángulos ABC y $A'B'C'$, sean los puntos $X = BC \cap B'C'$, $Y = CA \cap C'A'$,$Z = AB \cap A'B'$. Entonces las dos condiciones siguientes son equivalentes:*

1. *Los puntos X, Y y Z están alineados.*
2. *Las rectas AA', BB' y CC' son concurrentes.*

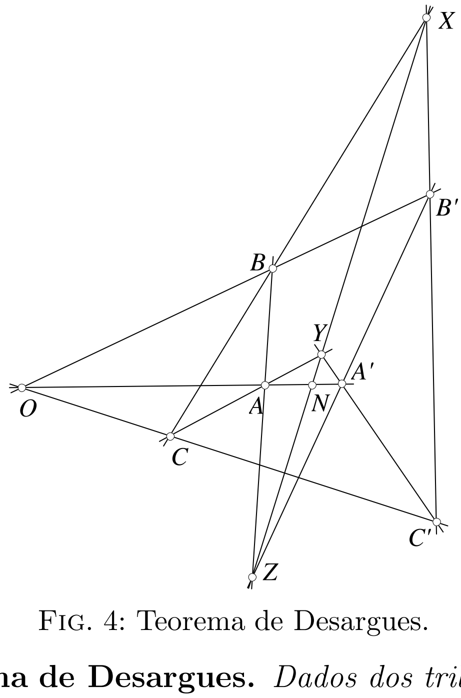


Fig. 4: Teorema de Desargues.

Dual del teorema de Desargues. *Dados dos triláteros abc y $a'b'c'$, sean las rectas $x = (b\cap c)(b'\cap c')$, $y = (c\cap a)(c'\cap a')$ y $z = (a\cap b)(a'\cap b')$. Entonces las dos condiciones siguientes son equivalentes:*

$1'$. *Las rectas x, y, z son concurrentes.*
$2'$. *Los puntos $a \cap a'$, $b \cap b'$ y $c \cap c'$ están alineados.*

En este caso, la dualidad permite que si demostramos que $1 \Rightarrow 2$, entonces no tenemos que buscar una demostración de que $2 \Rightarrow 1$, ya que si $1 \Rightarrow 2$ entonces también será cierto, por el principio de dualidad, que $1' \Rightarrow 2'$, que en este caso equivale esencialmente a que $2 \Rightarrow 1$.

$$\begin{tikzcd} \boxed{1 \Rightarrow 2} \arrow[r, "\text{dual}"'] \arrow[d] & \boxed{1' \Rightarrow 2'} \arrow[d] \\ \boxed{2' \Rightarrow 1'} \arrow[r, "\text{dual}"'] & \boxed{2 \Rightarrow 1} \end{tikzcd}$$

Demostración de $1 \Rightarrow 2$. Si las rectas AA', BB' y CC' son concurrentes (Figura 4), la homografía $\pi : AA' \to CC'$, compuesta por la proyección $\pi_1 : AA' \to BB'$ desde Z y la proyección $\pi_2 : BB' \to CC'$ desde X es también una proyección. De $C = \pi(A)$ y $C' = \pi(C)$, se deduce que $Y = AC \cap A'C'$ es el centro de π. Por construcción, los puntos $N = XZ \cap AA'$ y $\pi(N)$ pertenecen a la recta XZ; como la recta $N\pi(N)$ pasa por Y, el punto Y pertenece a la recta XZ.

3. Homografías entre haces de rectas

Haciendo uso de la dualidad, podemos expresar todo lo dicho en la sección 1 sobre homografías entre rectas en términos de homografías entre haces de rectas.

Dadas dos ternas a, b, c y a', b', c' de rectas concurrentes en dos puntos distintos, existe una única homografía h^* entre los dos haces O^* y O'^* tal que $h^*(a) = a'$, $h^*(b) = b'$ y $h^*(c) = c'$.

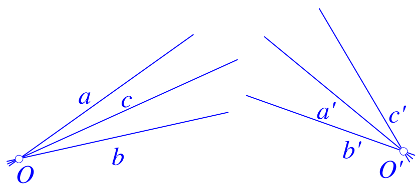


Fig. 5: Homografía entre haces.

3.1. Centro de homografía. Si (m, m') y (n, n') son dos pares de rectas homólogas por la homografía, todas las rectas $(m \cap n')(m' \cap n)$ pasan por un punto fijo S, llamado centro de la homografía.

En particular, las rectas $x = (b \cap c')(b' \cap c)$, $y = (c \cap a')(a' \cap b)$ y $z = (a \cap b')(a' \cap b)$ pasan por S.

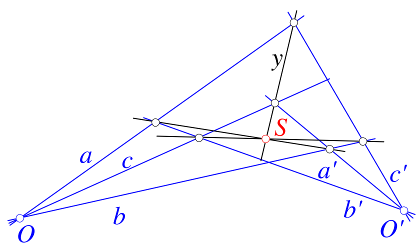


Fig. 6: Centro de homografía.

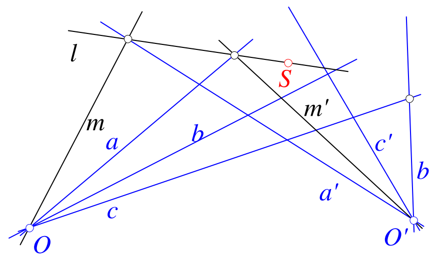


Fig. 7: Imagen de una recta.

3.2. Imagen de una recta. Si conocemos el centro S y un par de rectas homólogas, por ejemplo (a, a'), para hallar la imagen de una recta m, hallamos la recta $l = S(a' \cap m)$, y la imagen de m será $m' = O'(l \cap a)$.

4. Proyecciones

Una homografía h entre dos rectas es una proyección si la recta MM' que une dos puntos homólogos pasa siempre por un punto fijo Q, llamado centro de la proyección.

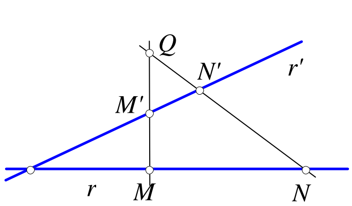


Fig. 8: Proyección entre rectas.

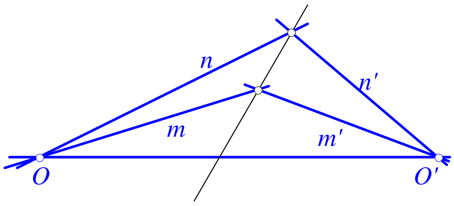


Fig. 9: Proyección entre haces.

De forma dual, una homografía h entre dos haces rectas es una proyección si el punto de intersección $m \cap m'$ de dos rectas homólogas está siempre sobre una misma recta, llamada eje de la proyección.

Esta es una caracterización muy sencilla y útil de de las proyecciones:

Teorema. *Una homografía entre rectas es una proyección si y solo si el punto de intersección de las dos rectas se transforma en sí mismo. Una homografía entre haces de rectas es una proyección si y solo si la recta que une los puntos base de los haces se transforma en sí misma.*

5. El teorema de Chasles-Steiner

El teorema de Chasles-Steiner nos dice cuándo los haces homólogos de una homografía entre haces se cortan en puntos de una cónica:

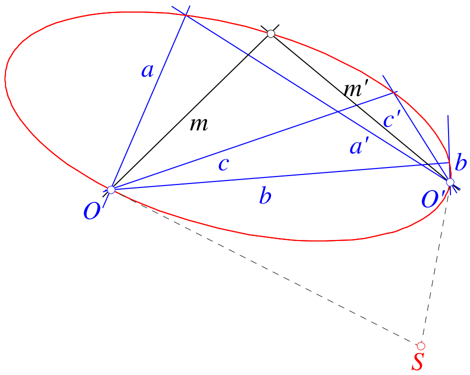


Fig. 10: El teorema de Chasles-Steiner.

Teorema. *Sea h^* una homografía entre dos haces de rectas O^* y O'^* con centro de homografía S. Si h^* no es una proyección, el lugar geométrico de los puntos $m \cap h^*(m)$ es una cónica que pasa por O y O', y cuyas tangentes en dichos puntos son las rectas SO y SO'.*

Cuando las rectas m y m' sean paralelas, el punto de la cónica estará en el infinito.

6. Homografías en un triángulo

Sean ABC un triángulo y P un punto con triángulo ceviano UVW. Nos olvidamos por ahora del punto U y a cambio consideramos el conjugado armónico U' de U respecto de B y C:

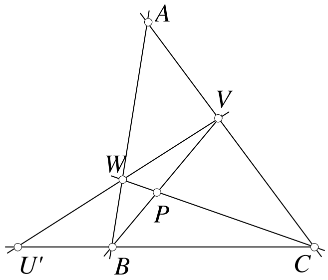


Fig. 11: Un triángulo y un punto.

En la recta AB podemos considerar la terna de puntos A, B, W, y en la recta AC podemos considerar la terna de puntos A, C, V.

Es natural considerar las seis homografías de la recta AB en la recta AC que transforman los puntos A, B, W de AB en una permutación de los puntos A, C, V de AC.

	1	2	3	4	5	6
A	A	A	C	C	V	V
B	C	V	A	V	A	C
W	V	C	V	A	C	A

Para cada una de estas homografías $h : AB \to AC$, consideramos la homografía $h^* : C^* \to B^*$ definida por $h^*(m) = Bh(m \cap AB)$, es decir, para cada Z sobre AB, se calcula $Y = h(Z)$ y entonces es $h^*(CZ) = BY$.

Cuando h^* es una proyección el lugar $\mathcal{L}_h$ de los puntos de la forma $m \cap h^*(m)$ será una recta y en caso contrario será una cónica.

Nos planteamos las siguientes cuestiones:

I ¿Es h una proyección? En caso afirmativo, ¿cuál es el centro de proyección de h?
II ¿Cuál es el eje de homografía de h?
III ¿Cuál es el centro de homografía de h^*?
IV ¿Es h^* una proyección? En caso afirmativo, ¿cuál es eje de proyección de h^*?
V $\mathcal{L}_h$ puede ser una recta o una cónica que pasa por B y C.
VI Si $\mathcal{L}_h$ es una cónica,
- ¿Conocemos cinco puntos para trazar la cónica $\mathcal{L}_h$?
- ¿Podemos trazar fácilmente el centro de $\mathcal{L}_h$?
- Si $\mathcal{L}$? es una hipérbola o parábola, ¿podemos obtener sus puntos del infinito?
- ¿Qué tipo de cónica es $\mathcal{L}_h$ dependiendo de P?

7. La proyección $\pi_{U'} : ABW \to ACV$

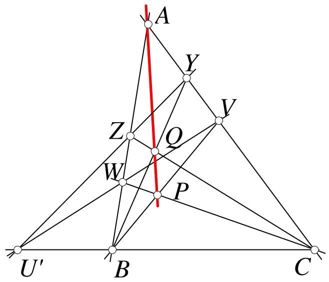


FIG. 12: La proyección $\pi_{U'}$.

I La homografía $\pi_{U'}$ que transforma A, B, W en A, C, V respectivamente es la proyección con centro U' (Figura 11).

II Usando los pares de puntos homólogos, el eje de la homografía de $\pi_{U'}$ pasa por el punto $BV \cap WC = P$, y usando los pares (A, A) y (B, C), el eje de homografía también pasa por el punto $AC \cap BA = A$, por lo tanto el eje de homografía es la recta AP.

III Como $\pi_{U'}(B) = C$, se cumple que $\pi^*_{U'}(CB) = BC$ y por tanto $\pi^*_{U'}$ es una proyección.

IV El centro de homografía de $\pi^*_{U'}$ es U'. En efecto, usando los pares de rectas homólogas (CA, BA) y (CW, BV), éste debe estar sobre la recta $(CA \cap BV)(CW \cap BA) = VW$, y, usando los pares (CB, BC) y (CW, BV), debe también estar sobre la recta $(CB \cap BV)(CW \cap BC) = BC$.

V Usando los pares (CA, BA) y (CW, BV) de rectas homólogas de la proyección $\pi^*_{U'}$, la recta $\mathcal{L}_{U'}$ pasa por los puntos $A = CA \cap BA$ y $P = CW \cap BV$, por lo que $\mathcal{L}_{U'}$ es la recta AP.

8. La proyección $\pi_P : ABW \to AVC$

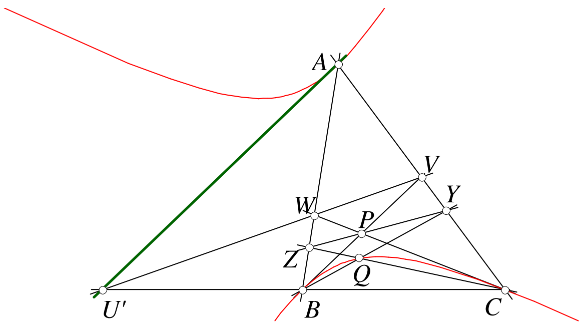


FIG. 13: La proyección π_P.

I La homografía π_P que transforma A, B, W en A, V, C respectivamente es la proyección con centro P (Figura 12).

II Usando los pares de puntos homólogos (A, A) y (B, V), el eje de homografía de π_P pasa por el punto $AV \cap BA = A$, y usando los pares (B, V) y (W, C), también pasa por $BC \cap VW = U'$, por lo que el eje de homografía es la recta AU'.

III Como $\pi_P(B) = V$, la homografía π_P^* cumple que $\pi_P^*(CB) = BV$ y por tanto no es una proyección. En consecuencia, $\mathcal{L}_P$ es una cónica.

IV Usando los pares de rectas homólogas (CA, BA) y (CB, BV), el centro de homografía de π_P^* debe estar contenido en la recta $(CA \cap BV)(CB \cap BA) = VB$, y usando el par de rectas homólogas (CB, BV) y (CW, BC), también debe estar contenido en la recta $(CB \cap BC)(CW \cap BV) = CP$, por lo que el centro de homografía de π_P^* es P.

V La cónica $\mathcal{L}_P$ pasa por B y C y sus tangentes en B y C son las rectas BP y CP respectivamente.

VI Usando coordenadas baricéntricas, si $P = (u : v : w)$ podemos comprobar algunas propiedades de esta cónica:

- La ecuación de $\mathcal{L}_P$ es $-uyz+vzx+wxy = 0$, la circuncónica con perspector $A' = (-u : v : w)$, siendo $A'B'C'$ el triángulo anticeviano de P.
- El centro de $\mathcal{L}_P$ es el complemento del conjugado isotómico del anticomplemento de A', el punto con coordenadas $(u(u + v + w) : v(u + v - w) : w(u - v + w))$.
- La recta que une los conjugados isogonales de los puntos del infinito de $\mathcal{L}_P$ es la recta $b^2c^2ux - a^2c^2vy - a^2b^2wz = 0$, que es la polar respecto de la circunferencia circunscrita del conjugado isogonal de A'.
- El discriminante de $\mathcal{L}_P$ es $(u + v + w)^2 - 4vw$. La cónica $\mathcal{H}_a$ con ecuación $(x + y + z)^2 - 4yz = 0$ es la hipérbola inscrita al triángulo con perspector $(-1 : 1 : 1)$. Esta hipérbola tiene por centro A, y por asíntotas las rectas AB y AC. En particular, si P está sobre $\mathcal{H}_a$, entonces $\mathcal{L}_P$ es una parábola.

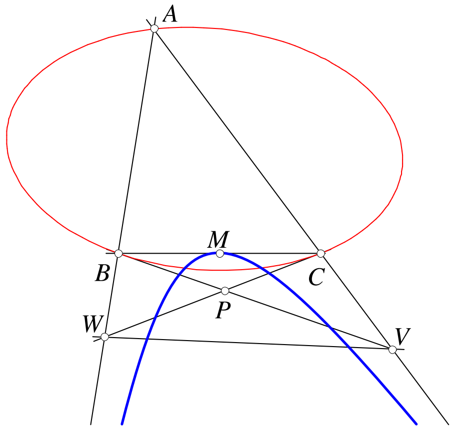


FIG. 14: La hipérbola $\mathcal{H}_a$.

En la figura vemos un caso en el que $\mathcal{L}_P$ es una elipse.

9. La homografía $h_{BC} : ABW \to CAV$

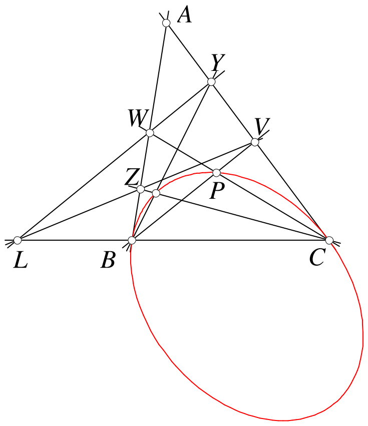


Fig. 15: La homografía h_{BC}.

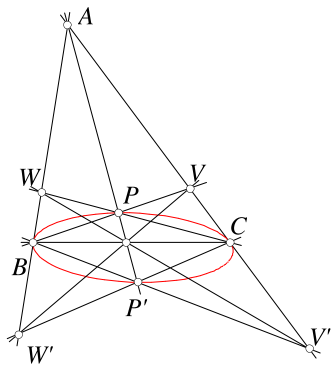


Fig. 16: $\mathcal{L}_{BC}$ pasa por P'.

I Sea $h_{BC} : AB \to AC$ la homografía que aplica A, B, W en C, A, V. No se trata de una proyección.

II Usando los pares de puntos homólogos (B, A) y (W, V), el eje de homografía pasa por $BV \cap AW = B$, y usando los pares de puntos homólogos (A, C) y (W, V), también pasa por el punto $AV \cap WC = C$, por lo que el eje de homografía de h_{BC} es BC.

III Como $h^*_{BC}(CB) = BA$, la homografía h^*_{BC} no es una proyección.

IV Teniendo en cuenta los pares de rectas homólogas (CA, BC), (CB, BA) y (CW, BV), el centro de la homografía h^*_{BC} está sobre la recta $(CA \cap BV)(CW \cap BC) = VC$ y también sobre la recta $(CB \cap BV)(CW \cap BA) = WB$, por lo que es el punto $VC \cap WB = A$.

V La cónica $\mathcal{L}_{BC}$ pasa por B, C, P, y las tangentes en B y C son las rectas AB y AC respectivamente. Algunas propiedades más de la cónica $\mathcal{L}_{BC}$.

- La segunda intersección de $\mathcal{L}_{BC}$ con la recta AP es el conjugado armónico P' de P respecto de AL, siendo L la intersección de AP y BC.
- La ecuación de $\mathcal{L}_{BC}$ es $vwx^2 - u^2yz = 0$.
- Su centro está en el punto $(-u^2 : 2vw : 2vw)$, sobre la mediana que pasa por A.
- El discriminante de $\mathcal{L}_{BC}$ es $\frac{1}{4}u^2(u^2 - 4vw)$. La cónica $\mathcal{P}_a$ de ecuación $x^2 - 4yz = 0$ es una parábola que pasa por B y C y que es tangente a la paralela media a BC en su punto medio. Aquí mostramos una construcción por cinco puntos de la parábola $\mathcal{P}_a$: Sean $A'B'C'$ el triángulo medial de ABC, D el punto que dividen BC en las razón $BD : DC = 1 : 4$ y E el punto que divide BC en la razón $BE : EC = 4 : 1$. Entonces los puntos $BB' \cap AE$ y $CC' \cap AD$ están sobre $\mathcal{P}_a$.

- Cuando P está sobre $\mathcal{P}_a$, la cónica $\mathcal{L}_{BC}$, que es una parábola, coincide con $\mathcal{P}_a$.

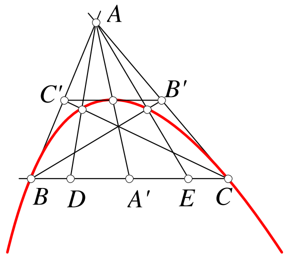


FIG. 17: Construcción de $\mathcal{P}_a$.

10. LA HOMOGRAFÍA $h_{CP} : ABW \to CVA$

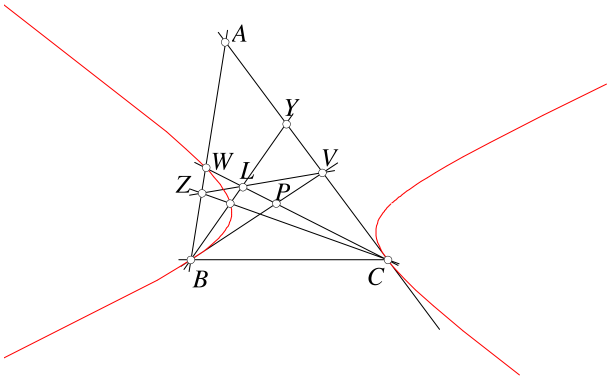


FIG. 18: La homografía h_{CP}.

I La homografía h_{CP} que transforma A en C y que tiene a la recta CP como eje de homografía también transforma B en V y W en A.

II El eje de homografía es, por construcción, la recta CP.

III El centro de la homografía h^*_{CP} es el punto V.

IV Como $h^*_{CP}(CB) = BA$, la homografía h_{CP} no es una proyección.

V La cónica $\mathcal{L}_{CP}$ pasa por B y C, siendo VB y VC las tangentes en B y C. La cónica $\mathcal{L}_{CP}$ también pasa por W, ya que $h_{CP}(CW) = BA$. El discriminante de $\mathcal{L}_{CP}$ es $\frac{1}{4}u^2(u^2 + +w^2 + 2uw + 4vw)$.

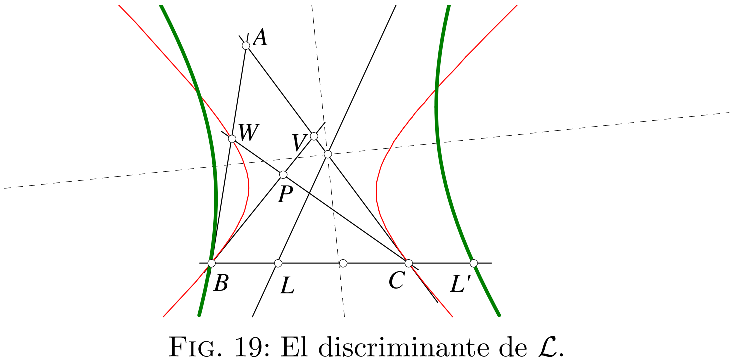


FIG. 19: El discriminante de $\mathcal{L}$.

VI Sobre la cónica $x^2 + 2xz + z^2 + 4yz = 0$:

- Es una hipérbola que pasa por B tangente a la recta AB.
- Su centro es el punto medio de CA.
- Una asíntota es el lado CA. La otra asíntota corta a BC en el punto L tal que $BL : LC = 1 : 2$.
- Vuelve a cortar a BC en L' tal que $BC : CL' = 3 : 1$, es decir tal que $CL' = BL$.

11. La homografía $h_{BP} : ABW \to VAC$

I Sea $h_{BP} : AB \to AC$ la homografía que transforma A, B, W en V, A, C, respectivamente. Como $h_{BP}(A) \neq A$, la homografía no es una proyección.

II Usando los pares de puntos homólogos (B, A) y (W, C), el eje de homografía de h_{BP} pasa por el punto $BC \cap WA = B$, y usando los pares (A, V) y (W, C), el eje debe pasar por el punto $AC \cap WV = V$, por lo que el eje de homografía de h_{BP} es BP.

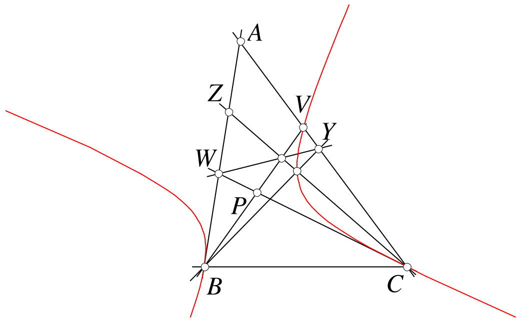


Fig. 20: La homografía h_{BP}.

III Como $h^*_{BP}(CB) = BA \neq BC$, la homografía h^*_{BP} no es una proyección.

IV Usando los pares de rectas homólogas (CA, BV) y (CB, BA), el centro de la homografía h^*_{BP} debe estar situado sobre la recta $(CA \cap BA)(CB \cap BV) = AB$, y usando los pares (CA, BV) y (CW, BC), también debe estar sobre $(CA \cap BC)(CW \cap BV) = CP$, por lo que el centro es el punto $AB \cap CP = W$.

V Al no ser h^*_{BP} una proyección, el lugar $\mathcal{L}_{BP}$ de los puntos de la forma $m \cap h^*_{BP}(m)$ es una cónica que pasa por B y C, siendo las tangentes en B y C las rectas BW y $CW = CP$. Teniendo en cuenta que $h^*_{BP}(CA) = BV$, el punto $CA \cap BV = V$ también está sobre $\mathcal{L}_{BP}$.

12. La homografía $h_{VW} : ABW \to VCA$

I Sea h_{VW} la homografía que transforma A, B, W en V, C, A, respectivamente. Como $h_{VW}(A) \neq A$, la homografía no es una proyección.

II El eje de homografía es la recta VW. En efecto, usando los pares (B, C) y (W, A), el eje de homografía pasa por $BA \cap CW = W$, y usando los pares (A, V) y (B, C), el eje también debe pasar por $AC \cap VB = V$.

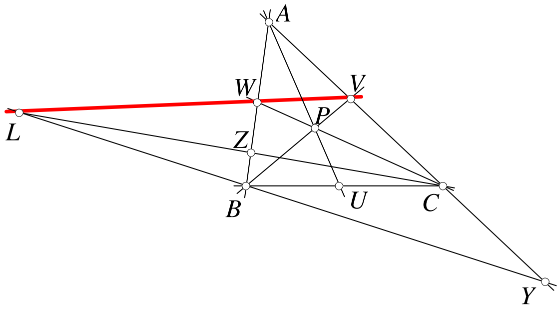


FIG. 21: La homografía h_{VW}.

III Usando los pares de rectas homólogas (CA, BV), (CB, BC), (CW, BA) de la homografía h^*_{VW}, el centro de la homografía h^*_{VW} es el punto $U = AP \cap BC$.

IV Como $h^*_{VW}(CB) = BC$, la homografía h^*_{VW} es una proyección.

V En este caso $\mathcal{L}_{VW}$ es una recta, la recta VW.

13. PRAXIS

Proponemos practicar lo aprendido aquí estudiando las homografías entre las rectas AP y BC que transforman los puntos AUP en una permutación de los puntos BCU.

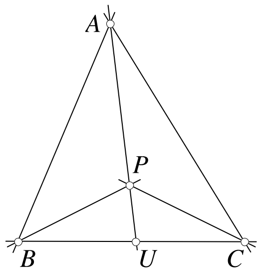


FIG. 22: Otras seis homografías.

REFERENCIAS

[1] José María Pedret: *Curso de Geometría Proyectiva para un amigo*. Disponible en `http://garciacapitan.esy.es/pedret`

[2] Jean Claude Sidler: *Géométrie Projective*. Dunod, 2000.

A la memoria de Darío Durán

La Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas cumple con el penoso deber de comunicar que en la madrugada del día 11 de diciembre ha fallecido, en la ciudad de Maracaibo, el Profesor Darío Durán.

Darío nos acompañó desde nuestra fundación en la tarea de difundir las matemáticas entre los jóvenes del país, así como en el entrenamiento de estudiantes y profesores en las artes de resolver problemas de Geometría, actividad que realizaba a la perfección, contagiándonos a todos con su alegría y su risa inolvidable.

Hacemos llegar nuestras más sentidas condolencias a su viuda, la Profesora Judith Aular de Durán, a sus hijos y nietos.

Su ejemplo de dedicación y constancia queda para todos nosotros, sus alumnos, colegas y amigos.

Adiós amigo, siempre te tendremos presente.

Rafael Sánchez Lamoneda
Presidente ACM.

Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas
Escuela de Matemáticas. Facultad de Ciencias. Universidad Central de Venezuela. Caracas 102-A.
www.acm.ciens.ucv.ve

Corrección de un error en la solución publicada del problema PMJ55-5

El Prof. Jorge Tipe Villanueva nos ha advertido de un error en la solución del problema PMJ55-5, por lo que agradecemos su observación y pedimos disculpas a los lectores del número 56 de la REOIM.

El enunciado del problema era el siguiente:

Si *n* es un número natural con 6 divisores enteros positivos, ¿cuántos divisores enteros positivos tiene n^2?

Una solución correcta es la siguiente:

El número de divisores *d(n)* del entero positivo *n está dado por*

$$d(n) = (\alpha_1 + 1)\cdots(\alpha_k + 1),$$

donde $\alpha_i, i = 1, \cdots, k$ son los exponentes de los factores primos en la descomposición del número *n* en potencias de factores primos.

En este caso, *d(n) = 6 = 3x2=6x1 son las únicas maneras posibles de descomponer 6 en dos factores.*

En el primer caso, tenemos

$$n = (a_1)^2 \cdot (a_2)^1 \Rightarrow n^2 = (a_1)^4 \cdot (a_2)^2 \Rightarrow d(n^2) = (4+1)(2+1) = 15.$$

En el segundo caso, se trata de un número primo p elevado a 5, lo que da para los divisores de n: 1, p, p^2, p^3, p^4, p^5 (6 divisores). Entonces

$$n = p^5 \Rightarrow n^2 = (p^5)^2 = p^{10} \Rightarrow d(n^2) = 11. \blacksquare$$

Problemas para los más jóvenes 57

PMJ57-1

Se tiene una jarra de 3 litros y otra de 5 litros. ¿Es posible medir exactamente 7 litros de agua?

PMJ57-2

¿Es posible encontrar una sucesión de números enteros consecutivos cuya suma sea 1000?

PMJ57-3

¿Cuántos enteros positivos de 5 cifras se pueden formar utilizando las cifras 1, 2 y 3?

PMJ57-4

Se eligen 5 puntos en la circunferencia de un círculo, y se trazan cuerdas entre ellos de manera que no haya 3 cuerdas con un punto común. ¿En cuántas regiones queda dividido el círculo?

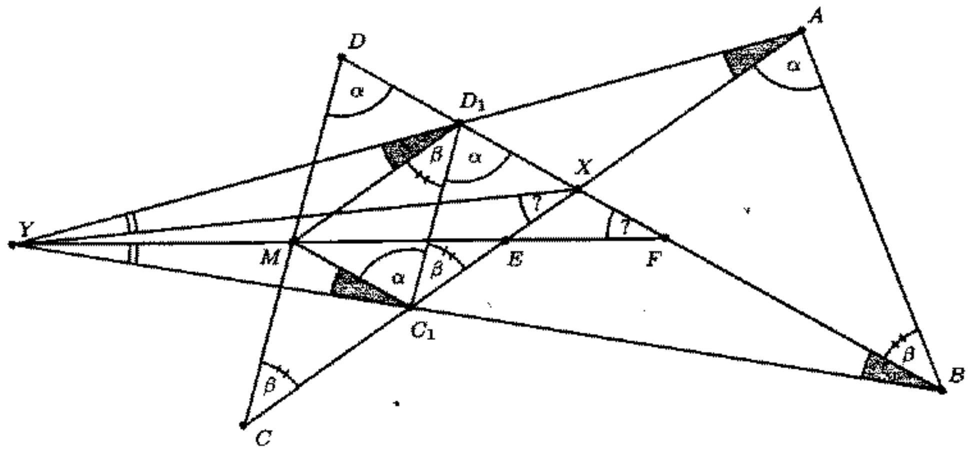
PMJ57-5

De un trozo de queso con forma de cubo de 10 cm de arista se deben cortar tres lonchas de anchura 1 cm cada una. ¿Cómo hacer los cortes de manera que el resto del trozo tenga el mayor volumen posible?

Solución del Problema 2 de la EGMO 2016

Andrés Sáez Schwedt, Universidad de León

Incluimos en una figura los elementos del enunciado.



Para establecer la condición de tangencia pedida debe probarse que la recta YX forma con XE un ángulo igual al inscrito en esa cuerda en la circunferencia circunscrita, esto es, debemos ver la igualdad de los ángulos marcados como '?'.

Razonando con las paralelas medias del triángulo CDX vemos que se forma un paralelogramo MC_1D_1D, lo cual combinado con igualdades de ángulos inscritos en el cuadrilátero cíclico $ABCD$ permite asegurar las igualdades entre los cuatro ángulos denotados por α en la figura, y de forma similar los cuatro β son iguales entre sí.

En particular, la igualdad $\angle C_1D_1B = \angle C_1AB$ prueba que el cuadrilátero ABC_1D_1 es cíclico, y en consecuencia $\angle D_1AC_1 = \angle D_1BC_1$, ángulo que denotamos como γ, y que se propaga por paralelas obteniendo $\angle YD_1M = \angle MC_1Y = \gamma$.

A continuación, observamos que los triángulos YAB e YC_1D_1 tienen los mismos ángulos, luego son correspondientes en una semejanza que llamamos f. Además, también son semejantes ABX y C_1D_1M, por tener ambos un ángulo α y otro β.

Nótese que es posible "pegar" las dos semejanzas observadas en una. En efecto: X se corresponde con M por la transformación f ya que X es interior al triángulo YAB, M es interior a YC_1D_1 y las rectas XA, XB forman con AB los mismos ángulos que forman MC_1, MD_1 con C_1D_1. En consecuencia, por ser X, M correspondientes se tiene la igualdad $\angle XYA = \angle MYC_1$, la cual sumada a $\angle YAX = \angle FBY$ permite deducir que $\angle YXE = \angle XFE$, como queríamos demostrar.

Problemas de la 5ª Olimpiada Matemática europea femenina. Abril 2016. Rumania

Problema nº 3 (*Propuesto por México)*

Sea m entero positivo. Se considera un tablero de 4m x 4m casillas cuadradas. Dos casillas diferentes están relacionadas si están ya en la misma fila o en la misma columna. Ninguna casilla está relacionada con ella misma. Algunas casillas se colorean de azul de manera que cada casilla está relacionada al menos con dos casillas azules. Determinar el mínimo número de casillas azules.

Solución: *(propuesta por Joaquim Nadal Vidal. LLagostera, Girona)*

Una casilla azul A_1 debe estar relacionada, como mínimo, con otras dos azules A_2 y A_3

Esto puede conseguirse situando A_2y A_3 en la misma fila que A_1,en la misma columna o una en su fila y otra en su columna.

Esta tercera opción hace aumentar el número de azules necesario pues A_2 y A_3 necesitarán cada una de ellas una segunda casilla azul con la que relacionarse.

Así pues lo mejor es que las casillas azules estén alineadas en una misma fila o columna.

Ahora bien, si sólo hay una alineación de azules las casillas blancas no podrán tener dos relaciones. Para conseguir esto basta poner una fila y una columna de azules. Dejando blanca la casilla de cruce tendremos $8m – 2$ casillas azules y $16m^2 – 8m + 2$ casillas blancas

Cada casilla azul está relacionada con 4m-2 casillas azules

Cada casilla blanca, excepto la de cruce, está relacionada con dos casillas azules

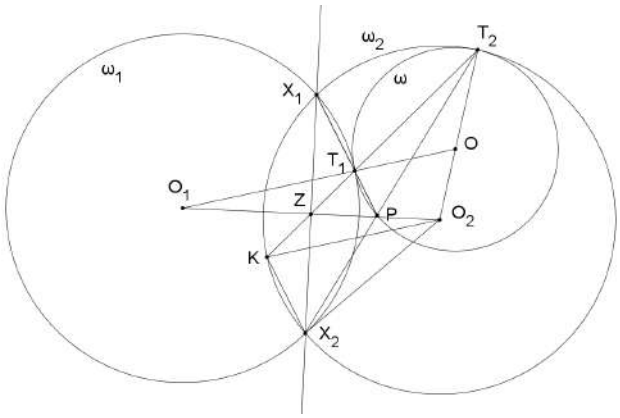
La casilla blanca situada en el cruce está relacionada con 8m-2 casillas azules

Para m=2 tendríamos la siguiente tabla con 14 casillas azules

			A				
			A				
			A				
A	A	A		A	A	A	A
			A				
			A				
			A				
			A				

Problema 4 Olimpiada Matemática Europea Femenina

Problema 4. Dos circunferencias ω_1 y ω_2 del mismo radio se intersecan en dos puntos distintos X_1 y X_2. Se considera una circunferencia ω, tangente exteriormente a ω_1 en un punto T_1, y tangente interiormente a ω_2 en un punto T_2. Demostrar que las rectas X_1T_1 y X_2T_2 se cortan en un punto que pertenece a ω.



Solución. Sean O, O_1 y O_2 los centros de ω, ω_1 y ω_2 respectivamente. Véase que al ser ω tangente a ω_1 y a ω_2, los centros tienen que estar alineados con el punto de tangencia, es decir, $O \in O_1 + T_1$ y $O \in O_2 + T_2$.

Consideramos la homotecia de centro T_2 que lleva ω en ω_2, y que lleva $T_1 \to K$, siendo $K = (T_1+T_2) \cap \omega_2$, y $O \to O_2$, por lo que los triángulos T_2T_1O y T_2KO_2 son semejantes, y al compartir vértice T_2 y lados T_2+O_2 y T_2+K tenemos que T_1+O y $K+O_2$ son paralelas.

Si consideramos el punto Z como el punto medio del segmento O_1O_2 y la simetría central respecto de Z tenemos que $O_1 \to O_2$, y como las simetrías centrales respecto de un punto transforman rectas en rectas paralelas, tenemos que $O_1 + T_1 \to O_2 + K$, luego $T_1 \to K$ por esta simetría central.

Ahora bien, como ambas circunferencias tienen el mismo radio, tenemos que Z está en el eje radical de ω_1 y ω_2, que es $X_1 + X_2$, luego $X_1 \to X_2$ por la simetría central respecto de Z. De aquí que $X_1 + T_1$ y $X_2 + K$ sean paralelas, porque son la imagen la una de la otra por esta simetría.

Sea $P = (X_1+T_1) \cap (X_2+T_2)$, el punto que queremos ver que está sobre ω. Volviendo a la homotecia de centro T_2 que lleva ω en ω_2 tenemos que por el paralelismo entre $X_1 + T_1 = T_1 + P$ y $X_2 + K$, se da $P \to X_2$ por la dicha homotecia, ya que $T_1 \to K$ por lo visto antes, y de aquí la semejanza entre T_2PO y $T_2X_2O_2$. Como $T_2X_2O_2$ es isósceles porque dos de sus lados son radios de ω_2, T_2PO también es isósceles y tenemos que $T_2O = PO$, por tanto $P \in \omega$, como queríamos probar.

Solución por Jesús Dueñas Pamplona

5ª Olimpiada Matemática Europea Femenina, abril 2016, Rumania.

Problema nº 5 *(propuesto por Holanda)*

Sean k y n enteros tales que $2\leq k \leq n \leq 2k-1$

Se ponen piezas rectangulares de tamaño 1xk o kx1 en un tablero de nxn casillas cuadradas de manera que cada pieza cubra exactamente k casillas del tablero y no haya dos piezas superpuestas. Se hace esto hasta que no se puedan colocar más piezas. Para n y k en las condiciones anteriores, determinar el mínimo número de piezas que puede contener el tablero.

Solución: *(Propuesta por Joaquim Nadal Vidal. LLagostera, Girona)*

Siendo la longitud de una pieza k y el lado del tablero no superior a 2k-1, es claro que en una fila (o columna) podremos colocar en posición horizontal (o vertical) únicamente una pieza.

Es siempre posible colocar una pieza en cada fila y hacerlo escalonadamente a fin de evitar que en las casillas no ocupadas pueda situarse una pieza en posición vertical

Por ejemplo para k=3 , los posibles valores de n son 3,4,5 y entonces tenemos

A	A	A
B	B	B
C	C	C

A	A	A	
	B	B	B
C	C	C	
	D	D	D

A	A	A		
	B	B	B	
		C	C	C
D	D	D		
	E	E	E	

Es evidente que la construcción puede extenderse para otros valores de k y n.

En todos los casos tendremos que el mínimo de piezas que contendrá el tablero es n

Ninguna otra disposición de las piezas permite rebajar este mínimo

PROBLEMA 282, propuesto por D.M. Batinetu-Giurgiu y N. Stanciu, Bucarest y Buzau, Rumania. Sean $f, g: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ funciones derivables con derivadas continuas, y$a, b \in \mathbb{R}^+$. Calcular $\int_a^b \frac{f(x)g\prime(x)-f\prime(x)}{f(x)+e^{g(x)}}dx$.

Solutionby Ángel Plaza, Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, España.

Basta hacer el cociente en el integrando para obtener

$$\int_a^b \frac{f(x)g'(x)-f'(x)}{f(x)+e^{g(x)}}dx = \int_a^b g'(x)\,dx - \int_a^b \frac{f'(x)+g'^{(x)}e^{g(x)}}{f(x)+e^{g(x)}}dx,$$

de donde se obtiene inmediatamente el resultado:

$$\int_a^b \frac{f(x)g'(x)-f(x)}{f(x)+e^{g(x)}}dx = g(b)-g(a) - Ln\frac{f(b)+e^{g(b)}}{f(a)+e^{g(a)}}$$

Problema 284, propuesto por el editor.

Probar que la ecuación cúbica $ax^3+3bx^2+3cx+d=0$, puede escribirse como $\alpha(y-\beta)^3=\beta(y-\alpha)^3$, donde $y=ax+b$, y los números α,β son las raíces de la ecuación cuadrática:

$$(ac-b^2)t^2+(a^2d-3abc+2b^3)t-(ac-b^2)^2=0.$$

Escribir las tres raíces en función de α,β.

Expresar la ecuación $5x^3+21x^2+30x+14=0$ en esa forma y resolverla.

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba (España).

La ecuación cúbica inicial, $ax^3+3bx^2+3cx+d=0 \quad (a\neq 0)$, podemos expresarla del modo:

$$x^3+3\frac{b}{a}x^2+3\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}=0 \ \ (I)$$

y haciendo el cambio sugerido, $y=ax+b$, podemos llegar a la ecuación siguiente:

$$y^3-3(b^2-ac)y+(a^2d-3abc+2b^3)=0 \quad (II)$$

Si desarrollamos la expresión $\alpha(y-\beta)^3=\beta(y-\alpha)^3$, determinaremos los valores de $\alpha \ y \ \beta$ que permitirán así, obtener una ecuación equivalente a (II).

Para ello, observamos que si $\alpha\neq\beta$, la ecuación:

$$(\alpha-\beta)y^3-3(\alpha^2\beta-\alpha\beta^2)y+(\alpha^3\beta-\alpha\beta^3)=0$$

será equivalente a esta otra:

$$y^3-3\alpha\beta y+\alpha\beta(\alpha+\beta)=0 \ \ (III)$$

Para ello, deberá suceder que:

$$\begin{cases} b^2-ac=\alpha\beta \\ a^2d-3abc+2b^3=\alpha\beta(\alpha+\beta)\end{cases}$$

Por tanto, pueden suceder dos casos:

Caso 1. $\quad b^2-ac=0\rightarrow y^3+(a^2d-3abc+2b^3)=0 \quad (II)\rightarrow Ecuación\ trivial.$

Caso 2. $\quad b^2-ac\neq 0\rightarrow \begin{cases} b^2-ac=\alpha\beta \\ \frac{a^2d-3abc+2b^3}{b^2-ac}=\alpha+\beta\end{cases} \rightarrow \alpha\ y\ \beta\ son\ las\ raíces\ de\ la\ ecuación\ de\ segundo\ grado$:

$$t^2+\frac{a^2d-3abc+2b^3}{ac-b^2}t+b^2-ac=0.$$

Por tanto, en función de α,β, las raíces de la ecuación cúbica se expresarán del siguiente modo.

$$\alpha(y-\beta)^3=\beta\big(y-\alpha\big)^3\rightarrow(\sqrt[3]{\alpha}-\sqrt[3]{\beta})y=\sqrt[3]{\alpha}\beta-\alpha\sqrt[3]{\beta}\rightarrow y=\frac{\sqrt[3]{\alpha}\beta-\alpha\sqrt[3]{\beta}}{\sqrt[3]{\alpha}-\sqrt[3]{\beta}}.$$

Ahora bien, en esta última expresión debemos considerar las tres raíces cúbicas de $\alpha\ y\ \beta$.

Sean estas raíces cúbicas $\{\sqrt[3]{\alpha},w\sqrt[3]{\alpha},w^2\sqrt[3]{\alpha}\}\ y\ \{\sqrt[3]{\beta},w\sqrt[3]{\beta},w^2\sqrt[3]{\beta}\}$, donde $w\ y\ w^2$ son las raíces cúbicas de la unidad, distintas de 1.

Observamos que sólo hay tres posibilidades de valores distintos para y.

$$y_1 = \frac{\sqrt[3]{\alpha}\beta - \alpha\sqrt[3]{\beta}}{\sqrt[3]{\alpha} - \sqrt[3]{\beta}}; \quad y_2 = \frac{\sqrt[3]{\alpha}w\beta - \alpha\sqrt[3]{\beta}}{\sqrt[3]{\alpha}w - \sqrt[3]{\beta}}; \quad y_3 = \frac{\sqrt[3]{\alpha}w^2\beta - \alpha\sqrt[3]{\beta}}{\sqrt[3]{\alpha}w^2 - \sqrt[3]{\beta}}$$

Las otras posibilidades conducen cíclicamente a alguna de los valores anteriores.
Observamos esto último, con mayor detalle:

$$y'_1 = \frac{\sqrt[3]{\alpha}\beta - \alpha\sqrt[3]{\beta}w}{\sqrt[3]{\alpha} - \sqrt[3]{\beta}w} = y_3; \quad y'_2 = \frac{\sqrt[3]{\alpha}\beta - \alpha\sqrt[3]{\beta}w^2}{\sqrt[3]{\alpha} - \sqrt[3]{\beta}w^2} = y_2;$$

$$y''_1 = \frac{\sqrt[3]{\alpha}w\beta - \alpha\sqrt[3]{\beta}w}{\sqrt[3]{\alpha}w - \sqrt[3]{\beta}w} = y_1; \quad y''_2 = \frac{\sqrt[3]{\alpha}w\beta - \alpha\sqrt[3]{\beta}w^2}{\sqrt[3]{\alpha}w - \sqrt[3]{\beta}w^2} = y_3;$$

$$y'''_1 = \frac{\sqrt[3]{\alpha}w^2\beta - \alpha\sqrt[3]{\beta}w}{\sqrt[3]{\alpha}w^2 - \sqrt[3]{\beta}w} = y_2; \quad y'''_2 = \frac{\sqrt[3]{\alpha}w^2\beta - \alpha\sqrt[3]{\beta}w^2}{\sqrt[3]{\alpha}w^2 - \sqrt[3]{\beta}w^2} = y_1;$$

Vamos ahora a desarrollar y simplificar las soluciones $y_i, \ i = 1,2,3.$

$$y_1 = \frac{\sqrt[3]{\alpha}\beta - \alpha\sqrt[3]{\beta}}{\sqrt[3]{\alpha} - \sqrt[3]{\beta}} = \frac{\left(\sqrt[3]{\alpha}\beta - \alpha\sqrt[3]{\beta}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{\alpha^2} + \sqrt[3]{\alpha\beta} + \sqrt[3]{\beta^2}\right)}{\alpha - \beta} = -\sqrt[3]{\alpha\beta}\cdot\left(\sqrt[3]{\alpha} + \sqrt[3]{\beta}\right)$$

$$y_2 = \frac{\sqrt[3]{\alpha}w\beta - \alpha\sqrt[3]{\beta}}{\sqrt[3]{\alpha}w - \sqrt[3]{\beta}} = \frac{\left(\sqrt[3]{\alpha}w\beta - \alpha\sqrt[3]{\beta}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{\alpha^2}w^2 + \sqrt[3]{\alpha\beta}w + \sqrt[3]{\beta^2}\right)}{\alpha - \beta} = -\sqrt[3]{\alpha\beta}w\cdot\left(\sqrt[3]{\alpha}w + \sqrt[3]{\beta}\right)$$

$$y_3 = \frac{\sqrt[3]{\alpha}w^2\beta - \alpha\sqrt[3]{\beta}}{\sqrt[3]{\alpha}w^2 - \sqrt[3]{\beta}} = \frac{\left(\sqrt[3]{\alpha}w^2\beta - \alpha\sqrt[3]{\beta}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{\alpha^2}w + \sqrt[3]{\alpha\beta}w^2 + \sqrt[3]{\beta^2}\right)}{\alpha - \beta} = -\sqrt[3]{\alpha\beta}w\cdot\left(\sqrt[3]{\alpha} + \sqrt[3]{\beta}w\right)$$

Como quiera que $x = \frac{y-b}{a}$, así de esta forma, obtenemos las tres raíces cúbicas de la ecuación inicial $ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{y_1 - b}{a} = \dfrac{-\sqrt[3]{\alpha\beta}\cdot\left(\sqrt[3]{\alpha} + \sqrt[3]{\beta}\right) - b}{a} \\ x_2 = \dfrac{y_2 - b}{a} = \dfrac{-\sqrt[3]{\alpha\beta}w\cdot\left(\sqrt[3]{\alpha}w + \sqrt[3]{\beta}\right) - b}{a} \\ x_3 = \dfrac{y_3 - b}{a} = \dfrac{-\sqrt[3]{\alpha\beta}w\cdot\left(\sqrt[3]{\alpha} + \sqrt[3]{\beta}w\right) - b}{a} \end{cases} \quad (IV)$$

Aplicamos este método para resolver la ecuación cúbica $5x^3 + 21x^2 + 30x + 14 = 0.$
Sabemos que $5x^3 + 21x^2 + 30x + 14 = (x + 1)(5x^2 + 16x + 14)$
La ecuación $5x^3 + 21x^2 + 30x + 14 = 0$ tendrá como raíces, $\left\{x = -1, x = \frac{1}{5}\left(-8 - i\sqrt{6}\right), \mathrm{x} = \frac{1}{5}\left(-8 + i\sqrt{6}\right)\right\}$.
Según nuestro método, reducimos la ecuación $5x^3 + 21x^2 + 30x + 14 = 0$ haciendo el cambio de variable $y = 5x + 7$, a esta otra, $y^3 + 3y - 14 = 0$. Observamos que una de las raíces de esta ecuación es $y = 2$.
Sean $\alpha\ y\ \beta$, son raíces de la ecuación

$$t^2 + \frac{a^2d - 3abc + 2b^3}{ac - b^2}t + b^2 - ac = 0.$$

Por tanto, sustituyendo los coeficientes $a, b, c\ y\ d$, obtendremos $\alpha\ y\ \beta$, como las raíces de la ecuación $t^2 - 14t - 1 = 0$. En definitiva, $\alpha = 7 + 5\sqrt{2}$, $\beta = 7 - 5\sqrt{2}$.

Sustituyendo ahora los valores obtenidos en (IV), hallamos por fin, las soluciones de la ecuación cúbica propuesta:

$$x_1 = \frac{-\sqrt[3]{\alpha\beta} \cdot \left(\sqrt[3]{\alpha} + \sqrt[3]{\beta}\right) - b}{a} = \frac{\sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}} - 7}{5}$$

Vamos a hallar el valor real de $P = \sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}}$.

Sean $M = \sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}}\ y\ N = \sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}}$, entonces $P = M + N$.

Como quiera que $P^3 = (M+N)^3 = M^3 + 3M^2N + 3MN^2 + N^3 = 14 + 3MN(M+N) = 14 - 3(M+N)$.

En definitiva, $P^3 + 3P - 14 = 0$.

Y como quiera que $P = 2$ es raíz de dicha ecuación, podemos factorizar dicha polinomio del modo,

$$P^3 + 3P - 14 = (P-2)(P^2 + 2P + 7) = 0.$$

Como quiera que no existe raíz real alguna para el segundo factor $P^2 + 2P + 7$, necesariamente $P = 2$.

Por tanto,

$$x_1 = \frac{\sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}} - 7}{5} = \frac{2-7}{5} = -1.$$

Análogamente, hallaremos las otras dos raíces $x_2\ y\ x_3$.

$$x_2 = \frac{y_2 - b}{a} = \frac{-\sqrt[3]{\alpha\beta}w \cdot \left(\sqrt[3]{\alpha}w + \sqrt[3]{\beta}\right) - b}{a}$$

$$x_3 = \frac{y_3 - b}{a} = \frac{-\sqrt[3]{\alpha\beta}w \cdot \left(\sqrt[3]{\alpha} + \sqrt[3]{\beta}w\right) - b}{a}$$

Vamos a comprobar que $\begin{cases} x_2 + x_3 = -\frac{16}{5} \\ x_2 \cdot x_3 = \frac{14}{5} \end{cases}$.

En efecto,

$$x_2 + x_3 = \frac{-\sqrt[3]{\alpha\beta}w \cdot \left(\sqrt[3]{\alpha}w + \sqrt[3]{\beta} + \sqrt[3]{\alpha} + \sqrt[3]{\beta}w\right) - 2b}{a}$$

$$x_2 + x_3 = \frac{-\sqrt[3]{\alpha\beta}w \cdot (\sqrt[3]{\alpha} + \sqrt[3]{\beta})(w+1) - 2b}{a} = \frac{\sqrt[3]{\alpha\beta} \cdot (\sqrt[3]{\alpha} + \sqrt[3]{\beta}) - 2b}{a} = \frac{(-1) \cdot 2 - 14}{5} = -\frac{16}{5}$$

$$x_2 \cdot x_3 = \frac{-\sqrt[3]{\alpha\beta}w \cdot \left(\sqrt[3]{\alpha}w + \sqrt[3]{\beta}\right) - b}{a} \cdot \frac{-\sqrt[3]{\alpha\beta}w \cdot \left(\sqrt[3]{\alpha} + \sqrt[3]{\beta}w\right) - b}{a}$$

$$x_2 \cdot x_3 = \frac{\sqrt[3]{(\alpha\beta)^2} \cdot \left[\left(\sqrt[3]{\alpha} + \sqrt[3]{\beta}\right)^2 - 3\sqrt[3]{\alpha\beta}\right] - b\sqrt[3]{\alpha\beta}\left(\sqrt[3]{\alpha} + \sqrt[3]{\beta}\right) + b^2}{a^2} = \frac{[4+3] + 2b + b^2}{a} = \frac{70}{25} = \frac{14}{5}$$

Por tanto, en efecto, las raíces cúbicas de la ecuación inicial son $\left\{-1,\ \frac{1}{5}\left(-8 - i\sqrt{6}\right),\ \frac{1}{5}\left(-8 + i\sqrt{6}\right)\right\}$.

Problema 284. *Probar que la ecuación cúbica*

$$ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0 \tag{1}$$

puede escribirse como

$$\phi(y-\theta)^3 = \theta(y-\phi)^3, \tag{2}$$

donde $y = ax + b$ *y los números* ϕ, θ *son las raíces de la ecuación cuadrática*

$$(ac - b^2)t^2 + (a^2d - 3abc + 2b^2)t - (ac - b^2)^2 = 0. \tag{3}$$

Escribir las tres raíces en función de ϕ, θ.

Expresar la ecuación $5x^3+21x^2+30x+14 = 0$ *en esa forma y resolverla.*

Propuesto por el editor.

Solución de Francisco Javier García Capitán.

Haciendo en (1) la sustitución $x = \frac{y-b}{a}$ obtenemos la expresión

$$y^3 + 3(ac - b^2)y + (a^2d - 3abc + 2b^2) = 0. \tag{4}$$

Por otro lado, usando la identidad

$$\phi(y-\theta)^3 - \theta(y-\phi)^3 = (\phi-\theta)(y^3 - 3\phi\theta y + \phi\theta(\phi+\theta)),$$

resulta que, suponiendo $\phi \neq \theta$, (2) es equivalente a

$$y^3 - 3\phi\theta y + \phi\theta(\phi+\theta) = 0. \tag{5}$$

Comparando (4) y (5), tenemos

$$\begin{cases} \phi\theta = -(ac-b^2) \\ \phi\theta(\phi+\theta) = a^2d - 3abc + 2b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \phi\theta = -(ac-b^2) \\ \phi+\theta = -\dfrac{a^2d - 3abc + 2b^2}{ac-b^2} \end{cases},$$

por lo que ϕ, θ son soluciones de la ecuación

$$t^2 + \frac{a^2d - 3abc + 2b^2}{ac-b^2}t - (ac-b^2) = 0,$$

equivalente a (3).

A partir de (2),

$$\left(\frac{y-\theta}{y-\phi}\right)^3 = \frac{(y-\theta)^3}{(y-\phi)^3} = \frac{\theta}{\phi} \Rightarrow \frac{y-\theta}{y-\phi} = \lambda\omega,$$

siendo $\lambda = \sqrt[3]{\theta/\phi}$ y ω una raíz cúbica de la unidad. A partir de aquí obtenemos

$$y = \frac{\phi\lambda\omega - \theta}{\lambda\omega - 1} \Rightarrow x = \frac{\frac{\phi\lambda\omega-\theta}{\lambda\omega-1} - b}{a}.$$

Aplicando el método a $5x^3 + 21x^2 + 30x + 14 = 0$, tenemos $a = 5$, $b = 7$, $c = 10$, $c = 14$, por lo que $ac - b^2 = 1$ y $a^2d - 3abc + 2b^2 = -14$ por lo que θ y ϕ son las soluciones de la ecuación $t^2 - 4t + 1 = 0$, es decir podemos considerar

$$\theta = 7 - 5\sqrt{2} = (1 - \sqrt{2})^3,$$
$$\phi = 7 + 5\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^3.$$

¡Es un golpe de suerte que θ y ϕ tengan raíces cúbicas sencillas! Entonces en este caso resulta

$$\lambda = \frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} = -\left(1 - \sqrt{2}\right)^2 = 2\sqrt{2} - 3.$$

Las soluciones de y son de la forma

$$y = \frac{\phi\lambda\omega - \theta}{\lambda\omega - 1} = \frac{(7 + 5\sqrt{2})(2\sqrt{3} - 2)\omega - (7 - 5\sqrt{2})}{(2\sqrt{3} - 2)\omega - 1},$$

siendo ω uno de los números complejos

$$\omega_1 = 1, \quad \omega_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad \omega_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Así obtenemos los valores

$$y_1 = 2, \quad y_2 = -1 + \sqrt{6}i, \quad y_3 = -1 + \sqrt{6}i,$$

y teniendo en cuenta que $x = (y - 7)/5$, obtenemos los valores de x:

$$x_1 = -1, \quad x_2 = -\frac{8}{5} + \frac{\sqrt{6}}{5}i, \quad x_3 = -\frac{8}{5} - \frac{\sqrt{6}}{5}i.$$

Problema 285*(propuesto por el editor)*

Demostrar que el área de la sección de un tetraedro ABCD por un plano paralelo a AB y CD es máxima cuando ese plano biseca la mínima distancia entre AB y CD

Solución: (*propuesta por Joaquim Nadal Vidal. Llagostera, Girona)*

Vamos a resolver el problema analíticamente. Éste es un método de resolución seguro, meramente técnico, y frecuentemente poco elegante por la pesadez de los cálculos que exige.

La Geometría clásica proporciona demostraciones mucho más vistosas pero también más difíciles de encontrar. No he conseguido hallar la solución por este camino.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que A(0,0,0) B(n,0,0) C(p.q.0) y D(r,s,t)

Sea π' el plano que contiene a AB y es paralelo a BD. Su ecuación es:

$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ r-p & s-q & t \end{vmatrix} = 0$ ===>π': -ty + (s-q) z = 0

Distancia (AB,CD) = d(CD,π') = d(C,π') = $\left|\frac{-tq}{\sqrt{t^2+(s-q)^2}}\right|$

El haz de planos paralelos a AB y CD es $\pi'': -ty+(s-q)z+e=0$

La recta AC en paramétricas es (x,y,z) = (0,0,0) + f(p,q,0) ; su intersección con π'' es F$\left(\frac{pe}{tq},\frac{qe}{tq},0\right)$

La recta AD es (x,y,z) = (0,0,0) + g(r,s,t) ; su intersección con π'' es G$\left(\frac{re}{tq},\frac{se}{tq},\frac{te}{tq}\right)$

La recta BC es (x,y,z9 0 (n,0,0) + h(p-n,q,0) ; su intersección con π'' es H$\left(\frac{ntq-ne+pe}{tq},\frac{qe}{tq},0\right)$

La recta BD es (x,y,z) = ((n.0.0) + i(r-n, s,t) ; su intersección con π'' es I$\left(\frac{ntq-ne+re}{tq},\frac{se}{tq},\frac{te}{tq}\right)$

(nota: se han omitido los detalles de cálculo porque son pesados ,no aportan nada y están al alcance de cualquier lector)

Tenemos pues que la sección es el cuadrilátero FGHI cuya área es la suma de las áreas de los triángulos FGH y HIF

De los puntos obtenidos, haciendo extremo – origen, podemos hallar las componentes vectores $\overrightarrow{GF}=\left(\frac{pe-re}{tq},\frac{qe-se}{tq},\frac{-te}{tq}\right)$; $\overrightarrow{GH}=\left(\frac{ntq-ne+pe-re}{tq},\frac{qe-se}{tq},\frac{-te}{tq}\right)$;

$$\overrightarrow{IH}=\left(\frac{pe-re}{tq},\frac{qe-se}{tq},\frac{-te}{tq}\right) ;\ \overrightarrow{IF}=\left(\frac{pe-re+ne-ntq}{tq},\frac{qe-se}{tq},\frac{-te}{tq}\right)$$

Multiplicando vectorialmente tenemos:

$\overrightarrow{GF}\, x\, \overrightarrow{GH} = \frac{en(e-tq)}{(tq)^2}\cdot\ (0,t,q-s)$; $\overrightarrow{IH}\, x\, \overrightarrow{IF} = \frac{en(e-tq)}{(tq)^2}\cdot(0,-t,-(q-s))$

Área triángulo FGH = $\frac{|\overrightarrow{GF}\, x\, \overrightarrow{GH}|}{2}$ = $\left|\frac{en(e-tq)\sqrt{t^2+(q-s)^2}}{2(tq)^2}\right|$= $\frac{|\overrightarrow{IH}\, x\, \overrightarrow{IF}|}{2}$ = área triángulo HIF

Así pues área de la sección = $\left|\frac{en(e-tq)\sqrt{t^2+(q-s)^2}}{(tq)^2}\right|$

Siendo f<1, tendremos $\frac{e}{qt}$< 1 ===>e <qt ===> e – qt< 0

El valor absoluto que aparece en la expresión del área la hace positiva y con ello tendremos:

Área de la sección = $\frac{n\sqrt{t^2+(q-s)^2}}{(tq)^2}$ ·e(tq-e) .

Para maximizar el área basta maximizar e(tq – e) = tqe – e^2

Derivando tq-2e =0 tenemos e = $\frac{tq}{2}$

Así pues de todos los planes del haz π'' el que maximiza la sección es$\boldsymbol{\pi}$: **–ty + (s-q)z +** $\boldsymbol{\frac{tq}{2} = 0}$

Veamos que este plano biseca la mínima distancia entre AB y CD

$$d(AB, \pi) = d(A, \pi) = \left|\frac{\frac{tq}{2}}{\sqrt{t^2+(q-s)^2}}\right| = \frac{\left|\frac{-tq}{\sqrt{t^2+(s-q)^2}}\right|}{2} = \frac{d(AB,CD)}{2}$$

$$d(CD, \pi) = d(C, \pi) = \left|\frac{-tq+(s-q)0+\frac{tq}{2}}{\sqrt{t^2+(q-s)^2}}\right| = \left|\frac{-\frac{tq}{2}}{\sqrt{t^2+(q-s)^2}}\right| = \frac{\left|\frac{-tq}{\sqrt{t^2+(s-q)^2}}\right|}{2} = \frac{d(AB,CD)}{2}$$

Con esto hemos terminado.

Problemas 286-290

Problema 286, propuesto por D.M.Batinetu-Giurgiu y N. Stanciu, Rumania

Si $A_1A_2\cdots A_n$ es un polígono convexo de área S y lados $[A_k, A_{k+1}]$ de longitudes a_k, donde *k* varía de 1 a n, y $a_{n+1} = a_1$, *demostrar que*

$$\sum_{cyclic}\left(\left(a_k^{\,4}+1\right)\left(a_{k+1}^{\,4}+1\right)\right)^{\frac{m+1}{2}} \geq \frac{2^{3(m+1)}S^{m+1}}{n^m}\tan^{m+1}\frac{\pi}{n}.$$

Problema 287, propuesto por Laurentiu Modan, Bucarest, Rumania

Hallar la probabilidad de que al lanzar dos dados, la suma de sus resultados pueda ser igual a la última cifra del número 2017^{2017}.

Problema 288, propuesto por Pierre Lapôtre, Calais, Francia

Se considera un punto fijo P y dos rectas r y r' (concurrentes o paralelas). Una secante variable que pasa por P corta a r en A y a r' en B.

1) Demostrar que los lugares geométricos de los puntos M y N tales que $(PABM) = (PBAN) = -1$ son rectas D y D' del mismo haz que r y r'.
2) Demostrar que P tiene la misma polar con respecto a (r,r') y con respecto a (d,D')

Problema 289, propuesto por Andrés Sáez Schwedt, León, España

ABC es un triángulo acutángulo con circuncentro O, y D es el pie de la altura desde A. Las rectas por D perpendiculares a AB y a AC cortan a OB y OC en los puntos P y Q, respectivamente.

Suponiendo que O, P y Q son distintos, probar que la circunferencia que los contiene es tangente a la circunferencia circunscrita de ABC.

Problema 290, propuesto por Samael Gamboa Quezada, Trujillo, Perú.

Sean x e y números reales positivos tales que $x^3 + y^3 = 2xy$.

Demostrar que $x + y \geq x^7 + y^7$.

Número

58

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

Número 58 (julio – diciembre 2017)

ISSN – 1698-277X

VIII CIBEM CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA Madrid 2017

ÍNDICE

Nota del editor: por un error de archivo, en el número 57 de la REOIM no se incluyó a Mardónio Luz do Amaral, de Pernambuco (Brasil), entre los resolventes del problema número 282, por lo que le pedimos disculpas.

Problema 286 **:** Recibidas soluciones de Bruno Salgueiro Fanego, (Vivero, España) y del proponente. Presentamos la solución de **Salgueiro**.

Problema 287 : Recibidas soluciones de: Luis Maraví Zavaleta (Huamachuco, Perú), Joaquim Nadal Vidal (LLagostera, España), Bruno Salgueiro Fanego (Vivero, España), y del proponente. Presentamos la solución de **Salgueiro** .

Problema 288 : Recibidas soluciones de Jesús Dueñas Pamplona (estudiante, Valladolid, España), Bruno Salgueiro Fanego (Vivero, España) y del proponente. Presentamos las soluciones de **Dueñas** y de **Salgueiro.**

Problema 289 : Recibidas soluciones de Miguel Amengual Covas (3 soluciones; Santanyi, España), Florentino Damián Aranda Ballesteros (Córdoba, España), Jesús Dueñas Pamplona (estudiante, Valladolid, España), Joaquín Nadal Vidal (LLagostera, España), Cristóbal Sánchez-Rubio García (Benicassim, España), Bruno Salgueiro Fanego (Vivero, España), y el proponente. Presentamos las soluciones de **Amengual.**

Problema 290: Recibidas soluciones de: Joaquín Nadal Vidal (LLagostera, España), Paolo Perfetti (Universitá degli Studi Tor Vergata, Roma, Italia), Bruno Salgueiro Fanego (Vivero, España), Albert Stadler (Herrliberg, Suiza), Neculai Stanciu & Titu Zvonaru (Buzau y Comanesti, Rumania), y del proponente. Presentamos la solución de **Salgueiro.**

Comentario de libros, reseña de páginas web y noticia de congresos 58

Comentario de libros
"La Vía Láctea" de María Victoria Veguín Casas

Congresos

15ª Conferencia Internacional de The Mathematics Education for the Future Project Theory and Practice: An Interface or A Great Divide?

XVII Congreso de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas cuyo lema es: "Matemáticas en tierra de cine"

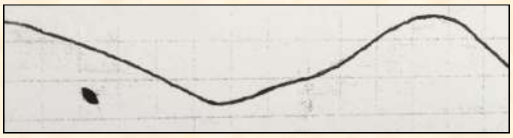
Divertimentos matemáticos 58

En esta ocasión reiteramos un llamamiento para que los lectores nos remitan materiales para esta sección. Nos parece que es una sección que cumple una interesante función y que puede ser un excelente momento para muchos lectores puedan iniciar su participación en la Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de matemática. Para mandar las propuestas pueden usar el correo revistaoim@oei.es

Realizado en el marco del **Instituto Iberoamericano de Enseñanza de las Ciencias y la Matemática (IBERCIENCIA)** con la colaboración de la **Consejería de Economía y Conocimiento de la Junta de Andalucía**

C'EST ÉVIDENT,

SI SEULEMENT NOUS ÉVOQUIONS QUE



LE THÉOREÈME DE REIM

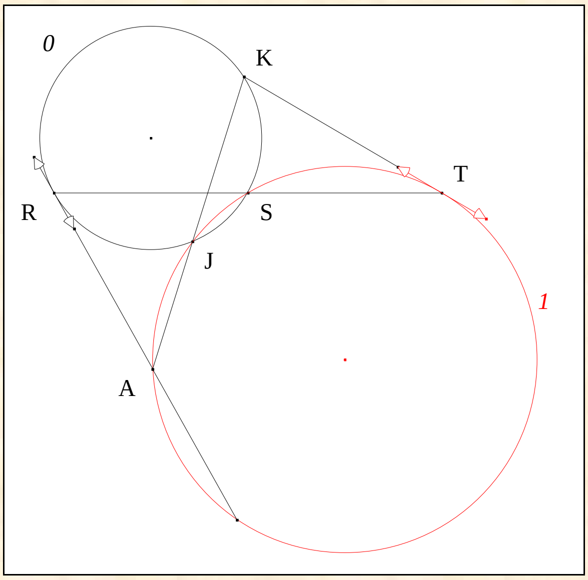
VOYAGE...

RIO DE JANEIRO - BRAZIL

58th International Mathematical Olympiad (12-23 July 2017)

Day **2**, Problem **4**

Jean-Louis AYME [1]



Résumé. L'auteur présente une preuve originale du Problème **4** des O.I.M de 2017 basés sur son théorème favori i.e. le théorème de Reim.

[1] St-Denis, Île de la Réunion (Océan Indien, France), le 31/10/2017 ; jeanlouisayme@yahoo.fr

Abstract. The author presents an original proof of problem **4** of the O.I.M of 2017 based on his theorem favourite theorem i.e. the Reim's theorem.

Resumen. El autor presenta una prueba original del problema **4** de la O.I.M 2017 basado en su favorita teorema es decir el Teorema de Reim.

Zusammenfassung. Der Autor zeigt ein origineller Beweis für das Problem **4** von den O.I.M 2017 basierend auf seine Lieblings-Theorem d. h. der Reim Theorem.

Communication privée du professeur Francisco Bellot Rosado

*Pendant le passé mois de juillet je suis à Rio de Janeiro comme correcteur du problème **4** de l'Olympiade Internationale de Math.*
*Dans un certain moment, le capitaine du problème m'a demandé si je connaissais "un théorème de JAIME" et en réalité était le théorème **0** de Reim que nous avons trouvé dans votre site, et avec lequel on pouvait résoudre le problème!*

Archives

IMO 2017
RIO DE JANEIRO - BRAZIL
58th International Mathematical Olympiad

English (eng), day 2

Wednesday, July 19, 2017

Problem 4. Let R and S be different points on a circle Ω such that RS is not a diameter. Let ℓ be the tangent line to Ω at R. Point T is such that S is the midpoint of the line segment RT. Point J is chosen on the shorter arc RS of Ω so that the circumcircle Γ of triangle JST intersects ℓ at two distinct points. Let A be the common point of Γ and ℓ that is closer to R. Line AJ meets Ω again at K. Prove that the line KT is tangent to Γ.

[2]

Day 2	
4	Let R and S be different points on a circle Ω such that RS is not a diameter. Let ℓ be the tangent line to Ω at R. Point T is such that S is the midpoint of the line segment RT. Point J is chosen on the shorter arc RS of Ω so that the circumcircle Γ of triangle JST intersects ℓ at two distinct points. Let A be the common point of Γ and ℓ that is closer to R. Line AJ meets Ω again at K. Prove that the line KT is tangent to Γ.

[3]

Informations générales

Rio de Janeiro, Brazil (12-23 July 2017)
Nombre de pays participants: 111.
Nombre de compétiteurs: 615; 62♀.

Prix

Points possibles maximums par concurrent: 7+7+7+7+7+7=42.

---

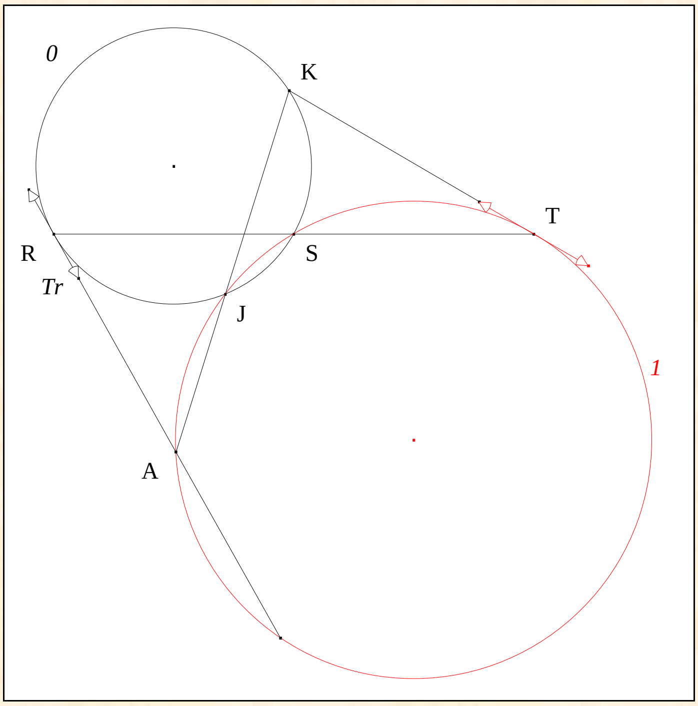
[2] https://www.imo2017.org.br/ ; https://www.imo-official.org/year_info.aspx?year=2017
[3] https://artofproblemsolving.com/community/c481799_2017_imo
IMO 2017 Problem 4 , AoPS du 19/07/2017 ;
https://artofproblemsolving.com/community/c6h1480682p8639236

Médailles d'or :	48 (score $\geq$ 25 points).
Médailles d'argent :	90 (score $\geq$ 19 points).
Médailles de bronze :	153 (score $\geq$ 16 points).
Mentions honorables :	222.

LE PROBLÈME 4

VISION

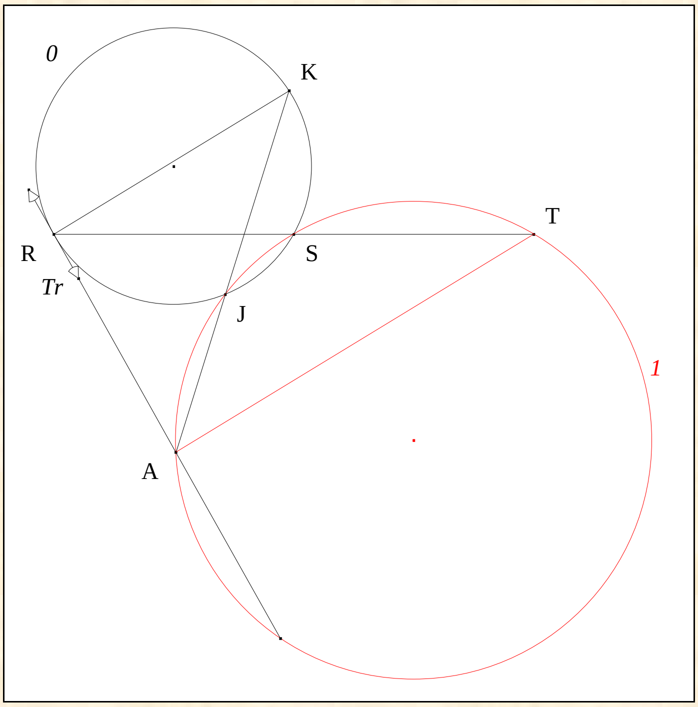
Figure :



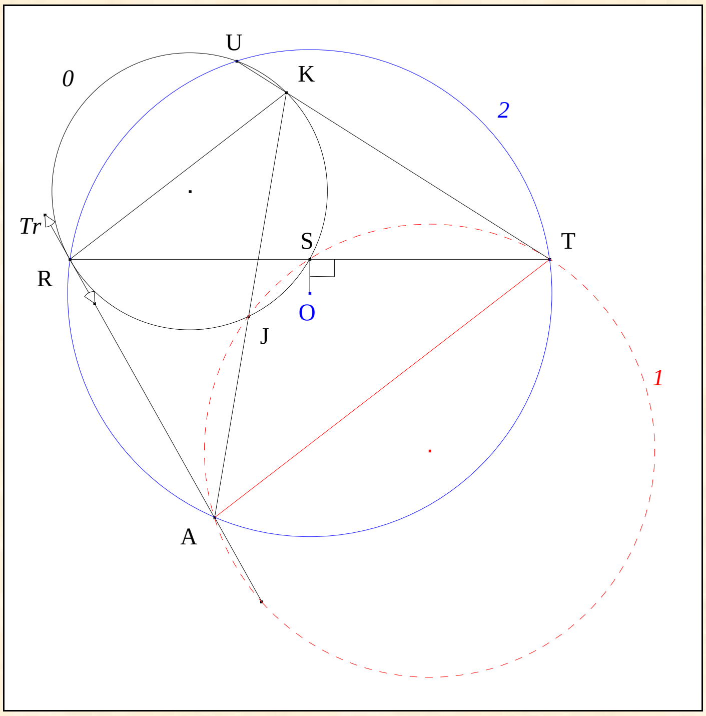
Traits : *0* un cercle,
R, S deux points de *0* tel que (RS) n'est pas une droite diamétrale de *0*,
Tr la tangente à *0* en R,
T le symétrique de R par rapport à S,
J un point du petit arc RS de (O),
1 le cercle passant par J, T, S,
A le point d'intersection le plus proche de R de *1* avec *Tr*
et K le second point d'intersection de (AJ) avec *0*.

Donné : (TK) est tangente à *1* en T.

VISUALISATION



- Les cercles *0* et *1*, les points de base J et S, les moniennes (KJA) et (RST), conduisent au théorème **0** de Reim [4] ; il s'en suit que (KR) // (AT).



- Notons U le second point d'intersection de (KT) avec *0*.

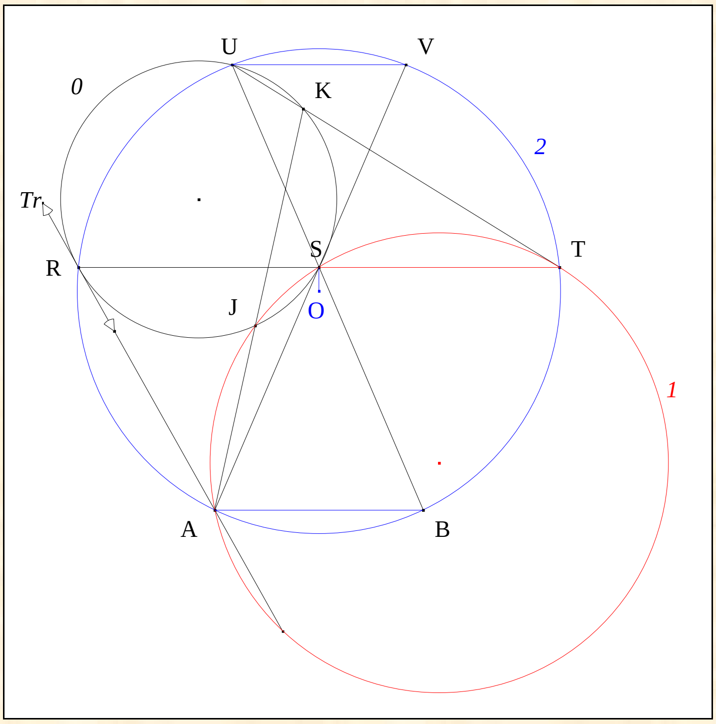
- Le cercle *0*, les points de base U et V, les moniennes naissantes (KUT) et (RRA), les parallèles (KR) et (TA), conduisent au théorème **3''** de Reim [5] ; en conséquence, U, R, T et A sont cocycliques.

- Notons *2* ce cercle
  et O le centre de *2*.

---

4 http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/Docs/0.pdf
5 http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/Docs/3'.pdf

- S étant le milieu de [RT], (OS) est la médiatrice de [RT].



- Notons B, V les seconds points d'intersection de *2* resp. avec (US), (AS).

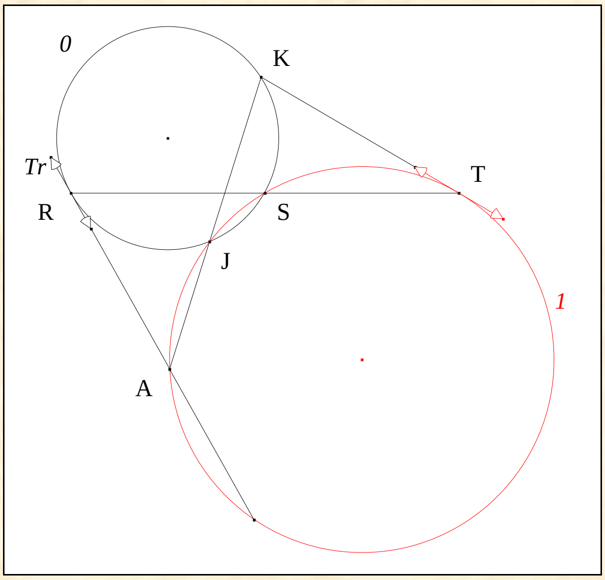
- **Scolie :** (OS) étant la médiatrice de [RT], (VU) // (AB)

- Les cercles *2* et *0*, les points de base R et U, les moniennes (ARR) et (BUS), conduisent au théorème **0** de Reim [6] ; il s'en suit que (AB) // (RS) ;

  par hypothèse, (RS) // (ST) ;
  par transitivité de =, (VU) // (ST).

- Les cercles *2* et *1*, les points de base A et T, la monienne (VAS), les parallèles (VU) et (ST), conduisent au théorème **3''** de Reim [7] ; en conséquence, (TU) est la tangente à *1* en T.

[6] http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/Docs/0.pdf
[7] http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/Docs/3'.pdf



- **Conclusion :** (TK) est tangente à *1* en T.

MÁXIMOS SIN DERIVADAS

FRANCISCO JAVIER GARCÍA CAPITÁN

Resumen. Este artículo reune varios ejemplos de cómo calcular extremos sin necesidad de usar el cálculo diferencial. Solo usaremos conocidas desigualdades entre las medias geométrica, aritmética y cuadrática.

1. Desigualdades entre medias

Dados tres números positivos x, y, z definimos su medias geométrica G, su media aritmética M y su media cuadrática Q como

$$G = \sqrt[3]{xyz}, \qquad M = \frac{x+y+z}{3}, \qquad Q = \sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}}.$$

Probaremos que siempre es $G \leqslant M \leqslant Q$, cumpliéndose la igualdad si y solo si $x = y = z$. Lo mismo es cierto para cualquier número de variables, pero aquí nos centramos en el caso de tres números x, y, z.

2. La desigualdad $G \leqslant M$

Para demostrar que $G \leqslant M$ demostramos primero la versión para el caso de dos números, es decir:

Proposición 1. *Si $x, y \geqslant 0$ se cumple $\sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2}$ y la igualdad es cierta si y solo si $x = y$.*

Demostración. Es inmediato de la desigualdad

$$\frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} = \frac{\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2}{2} \geqslant 0.$$

Ahora demostramos la versión para cuatro números.

Proposición 2. *Si $x, y, z, t \geqslant 0$ se cumple $\sqrt[4]{xyzt} \leqslant \frac{x+y+z+t}{4}$.*

Demostración. Usamos dos veces la versión para dos números,

$$\sqrt[4]{xyzt} = \sqrt{\sqrt{xy}\sqrt{zt}} \leqslant \frac{\sqrt{xy} + \sqrt{zt}}{2} \leqslant \frac{\frac{x+y}{2} + \frac{z+t}{2}}{2} = \frac{x+y+z+t}{4}.$$

Ahora ya podemos demostrar la versión para tres números.

Proposición 3. *Si $x, y, z \geqslant 0$ se cumple $\sqrt[3]{xyz} \leqslant \frac{x+y+z}{3}$.*

Demostración. Dados $x, y, z \geqslant 0$, aplicando la Proposición 2,

$$\sqrt[4]{xyzM} \leqslant \frac{x+y+z+M}{4} \Rightarrow \sqrt[4]{G^3M} \leqslant \frac{3M+M}{4} = M$$
$$\Rightarrow G^3M \leqslant M^4 \Rightarrow G \leqslant M.$$

Proposición 4. *Se cumple que* $G \leqslant M$ *y la iguladad es cierta si y solo si* $x = y = z$.

3. La desigualdad $M \leqslant Q$

Es posible dar una demostración directa de esta desigualdad:

Proposición 5. *Si* $x, y, z \geqslant 0$ *entonces* $\frac{x+y+z}{3} \leqslant \sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}}$, *cumpliéndose la igualdad si y solo si* $x = y = z$.

Demostración. Evidentemente tenemos:

$$\begin{aligned}
&\frac{x+y+z}{3} \leqslant \sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}} \Leftrightarrow (x+y+z)^2 \leqslant 3(x^2+y^2+z^2) \\
&\Leftrightarrow 3x^2+3y^2+3z^2-(x^2+y^2+z^2-2xy-2xz-2yz) \geqslant 0 \\
&\Leftrightarrow 2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2xz-2yz \geqslant 0 \\
&\Leftrightarrow (x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2 \geqslant 0
\end{aligned}$$

cumpliéndose la igualdad si y solo si $x = y = z$.

4. Los problemas

Vamos a usar las desigualdades entre las medias para resolver algunos problemas de optimización:

1. Hallar las dimensiones y el volumen máximo de un cilindro inscrito en una esfera de radio R.
2. Hallar las dimensiones y el volumen máximo de un cilindro inscrito en un octaedro regular de arista a.
3. Hallar las dimensiones y el volumen máximo de un cilindro inscrito en un tetraedro regular de arista a.
4. Hallar las dimensiones y el volumen máximo de un cono inscrito en una esfera de radio R.
5. Hallar las dimensiones y el volumen máximo de un cono inscrito en una octaedro regular de arista a.

5. Las soluciones

Problema 1. *Hallar las dimensiones y el volumen máximo de un cilindro inscrito en una esfera de radio* R.

Solución. Llamando r al radio de la base del cilindro y h a su altura, debemos maximizar $V = \pi r^2 h$ cumpliéndose que $(\frac{h}{2})^2 + r^2 = R^2$. En lugar de usar el cálculo diferencial, usaremos la desigualdad entre la media geométrica y la media cuadrática, a saber,

$$\sqrt[3]{xyz} \leqslant \sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}} \Leftrightarrow xyz \leqslant \left(\frac{x^2+y^2+z^2}{3}\right)^{3/2},$$

cumpliéndose la igualdad si y solo si $x = y = z$. Entonces

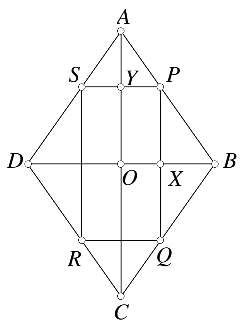
$$\begin{aligned} V =&\pi r^2 h = 4\pi \frac{r}{\sqrt{2}}\frac{r}{\sqrt{2}}\frac{h}{2} \leqslant 4\pi \left(\frac{\frac{r^2}{2}+\frac{r^2}{2}+\frac{h^2}{4}}{3}\right)^{3/2} \\ =&4\pi\left(\frac{R^2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}R^3 \end{aligned}$$

cumpliéndose la igualdad cuando $h = \sqrt{2}r$ y

$$\pi r^2\cdot\sqrt{2}r = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}R^3 \Rightarrow r^3 = \frac{4}{3\sqrt{6}}R^3 = \frac{8}{6\sqrt{6}}R^3 \Rightarrow r = \frac{2}{\sqrt{6}}R, h = \frac{2}{\sqrt{3}}R.$$

Problema 2. *Hallar las dimensiones y el volumen máximo de un cilindro inscrito en un octaedro regular de arista a.*

Solución. En la figura de la derecha $ABCD$ y $PQRS$ son las secciones del octaedro y el cilindro respectivamente con $AB = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, $PQ = h$ y $QR = 2r$. Por tanto, $OA = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ y, usando los triángulos semejantes PXB y OAB, obtenemos $\frac{\frac{h}{2}}{\frac{a}{2}-r} = \sqrt{2}$, de donde resulta la relación $r + \frac{h}{2\sqrt{2}} = \frac{a}{2}$ (1). La misma relación puede obtenerse usando la ecuación segmentaria de la recta AB con $A = (0, \frac{\sqrt{2}a}{2})$ y $B = (\frac{a}{2}, 0)$ sobre la que está el punto $P = (r, \frac{h}{2})$.



Tenemos que maximizar el volumen $V = \pi r^2 h$ cuando se cumple (1).

Usando la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica, es decir, la desigualdad $\sqrt[3]{xyz} \leqslant \frac{x+y+z}{3}$, cumpliéndose la igualdad si y solo si $x = y = z$, tenemos

$$V = 8\sqrt{2}\pi\cdot\frac{r}{2}\cdot\frac{r}{2}\cdot\frac{h}{2\sqrt{2}} \leqslant 8\sqrt{2}\pi\cdot\left(\frac{\frac{r}{2}+\frac{r}{2}+\frac{h}{2\sqrt{2}}}{3}\right)^3 = 8\sqrt{2}\pi\cdot\left(\frac{a}{6}\right)^3 = \frac{\sqrt{2}\pi a^3}{27},$$

cumpliéndose la igualdad si y solo si $h = \sqrt{2}r$ y

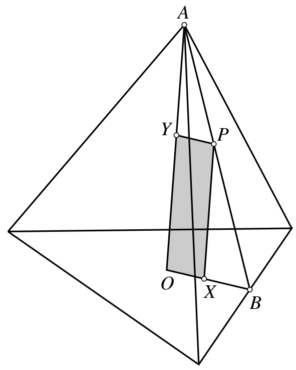
$$\pi r^2\cdot\sqrt{2}r = \frac{\sqrt{2}\pi a^3}{27} \Leftrightarrow r = \frac{a}{3}, h = \frac{\sqrt{2}a}{3}.$$

Problema 3. *Hallar las dimensiones y el volumen máximo de un cilindro inscrito en un tetraedro regular de arista a.*

Solución. En la figura de la derecha O es el centro de una de las caras del tetraedro y AB es la altura de otra cara.

El cuadrilátero $PXOY$ representa la sección de medio cilindro inscrito en el tetraedro, donde $PX = h$, $PY = r$, $AB = \frac{\sqrt{3}a}{2}$, $OB = \frac{\sqrt{3}a}{6}$. Entonces,

$$OA = \sqrt{AB^2 - OB^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{3a^2}{36}} = \frac{\sqrt{6}a}{3}.$$



El radio r y la altura h del cilindro inscrito deben cumplir la relación

$$\frac{r}{\frac{a\sqrt{3}}{6}}+\frac{h}{\frac{a\sqrt{6}}{3}}=1\Leftrightarrow r+\frac{h}{2\sqrt{2}}=\frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

El volumen del cilindro inscrito es por tanto

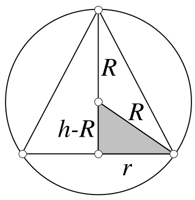
$$\begin{aligned}V=\pi r^2h=8\sqrt{2}\pi\cdot\frac{r}{2}\cdot\frac{r}{2}\cdot\frac{h}{2\sqrt{2}}\leqslant&8\sqrt{2}\pi\cdot\left(\frac{\frac{r}{2}+\frac{r}{2}+\frac{h}{2\sqrt{2}}}{3}\right)^3\\=&8\sqrt{2}\pi\cdot\left(\frac{\sqrt{3}a}{18}\right)^3=\frac{\sqrt{6}\pi a^3}{243},\end{aligned}$$

cumpliéndose la igualdad cuando $h=\sqrt{2}r$ y

$$\pi r^2\cdot\sqrt{2}r=\frac{\sqrt{6}\pi a^3}{243}\Rightarrow r=\frac{a}{3\sqrt{3}},h=\frac{\sqrt{6}a}{9}.$$

Problema 4. *Hallar las dimensiones y el volumen máximo de un cono inscrito en una esfera de radio R.*

Solución. En primer lugar, usamos el teorema de Pitágoras para obtener la relación $(h-R)^2+r^2=R^2$, o bien, $r^2=2Rh-h^2$.



Entonces, buscamos hacer máxima la expresión $V=\frac{\pi}{3}r^2h=\frac{\pi}{3}h^2(2R-h)$.

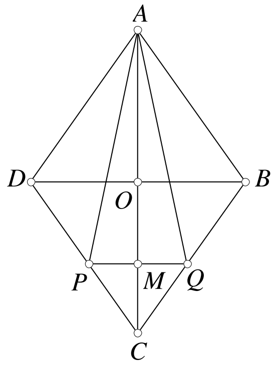
Usando la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica,

$$\begin{aligned}V=\frac{\pi}{3}h^2(2R-h)=\frac{4\pi}{3}\cdot\frac{h}{2}\cdot\frac{h}{2}\cdot(2R-h)\leqslant&\frac{4\pi}{3}\left(\frac{\frac{h}{2}+\frac{h}{2}+2R-h}{3}\right)^3\\=&\frac{4\pi}{3}\left(\frac{2R}{3}\right)^3=\frac{32\pi R^3}{81},\end{aligned}$$

cumpliéndose la igualdad cuando $h=\frac{4R}{3}$ y $r^2=\frac{8}{9}R^2\Rightarrow r=\frac{2\sqrt{2}}{3}R$.

Problema 5. *Hallar las dimensiones y el volumen máximo de un cono inscrito en una octaedro regular de arista a.*

Solución. En la figura de la derecha $ABCD$ y APQ son las secciones del octaedro y el cono respectivamente, y O y M los puntos medios de PQ y DB, cumpliéndose que $OB = \frac{a}{2}$, AB es la altura de una de las caras del octaedro, por tanto, $AB = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, y por último, $MQ = r$ y $AM = h$ son el radio de la base y la altura del cono.



En consecuencia, tenemos $OA = \frac{\sqrt{2}}{2}a$

Usando los triángulos semejantes CMQ y COB tenemos la relación

$$\frac{CM}{MQ} = \frac{CO}{OB} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}a - h}{r} = \frac{\frac{\sqrt{2}a}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{2},$$

es decir $h = \sqrt{2}(a - r)$. El volumen del cono es

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi\sqrt{2}r^2(a-r)}{3} = \frac{4\pi\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{r}{2}\cdot\frac{r}{2}\cdot(a-r) \leqslant \frac{4\pi\sqrt{2}}{3}\left(\frac{a}{3}\right)^3 = \frac{4\pi\sqrt{2}a^3}{81},$$

cumpliéndose la igualdad si y solo si $a - r = \frac{r}{2} \Rightarrow r = \frac{2a}{3}, h = \frac{\sqrt{2}a}{3}$.

Una nueva demostración de la desigualdad de Euler $R \geq 2r$

por *D.M. Bătinețu-Giurgiu*, Bucharest, Romania
y
***Neculai Stanciu*, Buzău, Romania**

Sea ABC un triángulo con ángulos A, B, C en radianes, R circumradio e inradio r.
Consideramos la función $f : (0,\pi) \to R$, $f(x) = \ln\left(\sin\frac{x}{2}\right) - \ln x$.

$$f'(x) = \frac{1}{2} ctg\frac{x}{2} - \frac{1}{x},\ f''(x) = -\frac{1}{4\sin^2\frac{x}{2}} + \frac{1}{x^2} = \frac{\left(\sin\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right)\left(\sin\frac{x}{2} - \frac{x}{2}\right)}{x^2\sin^2\frac{x}{2}}.$$

Ya que $0 < \sin\frac{x}{2} < \frac{x}{2}$, $\forall x \in (0,\pi)$ resulta $f''(x) < 0$, y f es cóncava en $(0,\pi)$.
De la desigualdad de *Jensen* deducimos que

$$f(A) + f(B) + f(C) \leq 3f\left(\frac{A+B+C}{3}\right) = 3f\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}}{ABC}\right) \leq \ln\left(\frac{3}{2\pi}\right)^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ABC \geq \frac{8\pi^3\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{27}.$$

Usando $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \frac{r}{4R}$ obtenemos $ABC \geq \frac{2\pi^3 r}{27R}$.

De aquí, $\pi = A + B + C \geq 3\cdot\sqrt[3]{ABC} \geq 3\cdot\sqrt[3]{\frac{2\pi^3 r}{27R}} = \pi\sqrt[3]{\frac{2r}{R}} \Leftrightarrow 1 \geq \sqrt[3]{\frac{2r}{R}} \Leftrightarrow R \geq 2r$,

i.e. la drsigualdad de *Euler*, $R \geq 2r$.

ALGUNAS SOLUCIONES

Luis Miguel Maraví Zavaleta
C. P. El Pallar, Huamachuco, La Libertad, Perú

****

PMJ57-2

¿Es posible encontrar una sucesión de números enteros consecutivos cuya suma sea 1000?

Respuesta.

Al indicarse que se trata de una sucesión de números enteros consecutivos, nos estamos refiriendo a una progresión aritmética con razón r= 1, en la que también intervienen números negativos. Dado que la suma es 1000, se emplea la relación

$$\frac{n(a_1+a_n)}{2}=1000$$

En dicha relación $a_1\ y\ a_n$ representan, respectivamente, al primer y al último término de la progresión aritmética. Como se sabe que $a_n=a_1+(n-1)r$, la relación anterior queda como:

$$\frac{(2a_1+n-1)n}{2}=1000$$

$$a_1n+\frac{n^2}{2}-\frac{n}{2}=1000$$

$$\frac{n^2}{2}+n\left(a_1-\frac{1}{2}\right)-1000=0$$

Para que esta ecuación cuadrática, en la que *n* es la variable, posea solución, se necesita que su discriminante sea positivo o igual a cero. Es decir:

$$\left(a_1-\frac{1}{2}\right)^2-4\left(\frac{1}{2}\right)(-1000)\geq 0$$

$$\left(a_1-\frac{1}{2}\right)^2\geq -2000$$

De la última expresión se indica que, para cualquier valor entero de a_1 se obtiene el discriminante positivo. Ello permite afirmar, entonces, que la ecuación $\frac{n^2}{2}+n\left(a_1-\frac{1}{2}\right)-1000=0$ posee solución. De este modo se concluye que sí es posible encontrar una sucesión de números enteros consecutivos cuya suma sea 1000.

PMJ57-3

¿Cuántos enteros positivos de 5 cifras se pueden formar utilizando las cifras 1, 2 y 3?

Respuesta.

Sea el número de cinco cifras $\overline{abcde}$. Hay 3 alternativas (1, 2 y 3) para ocupar el lugar de la cifra a, así como hay 3 alternativas para ocupar los lugares de b, c, d y e, respectivamente. Dado que las cifras pueden repetirse, el número de enteros positivos de cinco cifras que se pueden formar con las cifras 1, 2 y 3 es de $3^5 = 243$.

POlimp58

Cinco problemas de la Competición Matemática Mediterránea

La Competición Matemática Mediterránea, a iniciativa del editor de la REOIM, comenzó en 1998, y sigue desarrollándose hoy. Presentamos 5 problemas de la lista corta de varias de sus ediciones.

POlimp58-1

Hallar todos los enteros *n* **para los que el polinomio** $P(x)=x^5-nx-n-2$ **se puede expresar como el producto de dos polinomios no constantes con coeficientes enteros.**

POlimp58-2

Sean *a* **y** *b* **números positivos. Probar que, cualesquiera que sean los números reales** *x* e *y*, **se verifica**

$$\sqrt{x^2-\sqrt{3}bx+b}+\sqrt{y^2-\sqrt{3}ay+a}+\sqrt{x^2-\sqrt{3}xy+y^2}\geq\sqrt{a+b}\,.$$

POlimp58-3

Se considera un polígono regular de 2004 lados, con vértices $A_1A_2\cdots A_{2004}$**. Demostrar que las rectas** A_2A_{1005} , $A_{670}A_{671}$, y $A_{1338}A_{1340}$ **son concurrentes.**

POlimp58-4

Demostrar que, cualquiera que sea $n\in\mathbb{N}^*$**,** $2^{(3^n)}+1\equiv 0 \bmod 3^n$**.**

POlimp58-5

Se considera la sucesión (c_n) **definida por** $c_0=1, c_1=3$ y $(n+1)c_{n+1}=(2n+3)c_n-(n-1)c_{n-1}$ para n>1**.**

Demostrar que esta sucesión es creciente.

Problema 286, proposto por D. M. Batinetu-Giurgiu e N. Stanciu, Romanía.

Se $A_1A_2\cdots A_n$ é un polígono convexo de área S e lados $[A_k, A_{k+1}]$ de lonxitudes a_k, onde k varía de 1 a n, e $a_{n+1}=a_1$, demostrar que

$$\sum_{\text{cíclica}} \left(\left(a_k^{\ 4}+1\right)\left(a_{k+1}^{\ 4}+1\right)\right)^{\frac{m+1}{2}} \geq \frac{2^{3(m+1)}S^{m+1}}{n^m}\tan^{m+1}\frac{\pi}{n}.$$

Solución enviada por Bruno Salgueiro Fanego, Viveiro, Lugo.

Notemos en primeiro lugar que $\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)=\left(x+y\right)^2+\left(xy-1\right)^2\geq\left(x+y\right)^2$, con igualdade se e só se $xy=1$.
Sexa k un número natural comprendido entre 1 e n.
Tomando $x=a_k^{\ 2}$ e $y=a_{k+1}^{\ 2}$ na desigualdade anterior, resulta
$\left(a_k^{\ 4}+1\right)\left(a_{k+1}^{\ 4}+1\right)\geq\left(a_k^{\ 2}+a_{k+1}^{\ 2}\right)^2$ e, polo tanto,
$\left(\left(a_k^{\ 4}+1\right)\left(a_{k+1}^{\ 4}+1\right)\right)^{\frac{m+1}{2}}\geq\left(a_k^{\ 2}+a_{k+1}^{\ 2}\right)^{m+1}$, dándose a igualdade só e cando $a_ka_{k+1}=1$.
Entón $\sum\limits_{\text{cíclica}}\left(\left(a_k^{\ 4}+1\right)\left(a_{k+1}^{\ 4}+1\right)\right)^{\frac{m+1}{2}}\geq\sum\limits_{\text{cíclica}}\left(a_k^{\ 2}+a_{k+1}^{\ 2}\right)^{m+1}$, con igualdade se e só se $a_1a_2=a_2a_3=\ldots=a_na_{n+1}=1$.
Supoñendo que $m>0$ e aplicándolle a desigualdade de Jensen á función estritamente convexa $(0,+\infty)\ni x\mapsto f(x)=x^{m+1}$ e á suma $\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(a_k^{\ 2}+a_{k+1}^{\ 2}\right)$ do membro dereito da desigualdade anterior, resulta

$$\sum_{\text{cíclica}}\left(\left(a_k^{\ 4}+1\right)\left(a_{k+1}^{\ 4}+1\right)\right)^{\frac{m+1}{2}}\geq nf\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\left(a_k^{\ 2}+a_{k+1}^{\ 2}\right)}{n}\right)=nf\left(\frac{2\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^{\ 2}}{n}\right)$$

$=n\dfrac{2^{m+1}}{n^{m+1}}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^{\ 2}\right)^{m+1}$, obténdose a igualdade só e cando $a_1a_2=a_2a_3=\ldots=a_na_{n+1}=1$ e $a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}=a_2^{\ 2}+a_3^{\ 2}=\ldots=a_n^{\ 2}+a_{n+1}^{\ 2}$, é dicir, se e soamente se $a_1=a_2=\ldots=a_n=1$.
O resultado dedúcese agora da desigualdade 16.6 da páxina 138 do libro *Geometric inequalities*, Bottema, O., Djordjević, R. Ž., Janić, R. R., Mitrinović, D. S. & Vasić, P. M., Wolters-Noordhoff, Groningen, 1969: $\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^{\ 2}\geq 4S\tan\dfrac{\pi}{n}$, pois nese caso

$$n\frac{2^{m+1}}{n^{m+1}}\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^{\ 2}\right)^{m+1}\geq\frac{2^{m+1}}{n^m}\left(2^2S\tan\frac{\pi}{n}\right)^{m+1}=\frac{2^{3(m+1)}S^{m+1}}{n^m}\tan^{m+1}\frac{\pi}{n}.$$

Polo tanto, a desigualdade do enunciado está probada e que nela se obtén a igualdade se e só se $A_1A_2\cdots A_n$ é un polígono regular cuxos lados teñen todos lonxitude 1.

Problema 287, proposto por Laurentiu Modan, Bucarest, Romanía.

Achar a probabilidade de que ao lanzar dous dados, a suma dos seus resultados poida ser igual á última cifra do número 2017^{2017}.

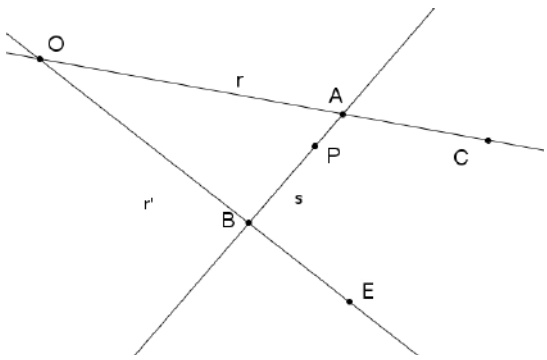
Solución enviada por Bruno Salgueiro Fanego, Viveiro, Lugo.

Atopemos primeiramente a última cifra de 2017^{2017}.
Se φ denota a función indicatriz de Euler, aplicándolle o teorema de Euler aos números naturais coprimos 2017 e 10, resulta que $2017^{\varphi(10)} \equiv 1\left(\text{mód}10\right)$, é dicir, $2017^4 \equiv 1\left(\text{mód}10\right)$, co cal $\left(2017^4\right)^{54} \equiv 1^{54}\left(\text{mód}10\right)$ e, polo tanto, $\left(2017^4\right)^{54} \cdot 2017 \equiv 1^{54} \cdot 2017\left(\text{mód}10\right)$, ou equivalentemente, $2017^{2017} \equiv 2017\left(\text{mód}10\right)$ e, como $2017 \equiv 7\left(\text{mód}10\right)$, tense que $2017^{2017} \equiv 7\left(\text{mód}10\right)$, co cal a cifra das unidades ou última cifra do número 2017^{2017} é 7.
Polo tanto, o problema consiste en achar a probabilidade de que ao lanzar dous dados, a suma dos resultados obtidos sexa igual a 7.
Consideremos o espazo mostral $E = \left\{\left(i, j\right) / i, j \in \left\{1, 2, 3, 4, 5, 6\right\}\right\}$, onde a primeira compoñente i denota o resultado obtido ao lanzar o primeiro dado e a segunda compoñente j o que aparece na cara superior do segundo dado.
Como todos os resultados son equiprobables, podemos aplicar a regra de Laplace: dos 6^2 casos posibles (número de elementos de E), hai exactamente 6 casos favorables, que son os pares da forma $\left(i, 7-i\right)$ con $i \in \left\{1, 2, 3, 4, 5, 6\right\}$, co cal a probabilidade pedida é igual ao número de casos favorables dividido polo número de casos posibles, é dicir, $\dfrac{6}{6^2} = \dfrac{1}{6}$.

Problema 288, propuesto por Pierre Lapôtre, Calais, Francia

Problema 4. Se considera un punto fijo P y dos rectas r y r' (concurrentes o paralelas). Una secante variable que pasa por P corta a r en A y a r' en B.

1. Demostrar que los lugares geométricos de los puntos M y N tales que $(PABM) = (PBAN) = -1$ son rectas D y D' del mismo haz que r y r'.
2. Demostrar que P tiene la misma polar con respecto a (r, r') y con respecto a (D, D').



Solución. Consideramos el plano proyectivo $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$, con la relación de equivalencia usual sobre $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ de vectores proporcionales para definir los puntos de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ como las clases de equivalencia. De esta manera ambos casos (paralelas o concurrentes) son el mismo.

Introducimos un sistema de referencia $\mathcal{R} = \{O, C, E; P\}$ como se describe a continuación. Denotamos $O = [1, 0, 0]$ el punto de intersección de r y r', $P = [1, 1, 1]$ el punto fijo, y $C = [0, 1, 0]$ y $E = [0, 0, 1]$ dos puntos arbitrarios distintos de O sobre las rectas r y r' respectivamente, garantizando así que $\mathcal{R}$ es una referencia proyectiva ya que cualquiera tres de ellos son linealmente independientes. De esta forma las ecuaciones de las rectas se obtienen inmediatamente, ya que r pasa por O y C y r' pasa por O y E (siendo las coordenadas $[x_0, x_1, x_2]$):

$$r := \{x_2 = 0\} \qquad r' := \{x_1 = 0\}$$

Para construir la recta s, secante variable, tomamos un punto sobre r distinto de O. Sea $A = [\alpha, 1, 0]$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ dicho punto. Calculamos la ecuación de la recta que pasa por A y por P para hallar dónde corta a r', que lo llamaremos B.

$$0 = \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 1 & 1 & 1 \\ \alpha & 1 & 0 \end{vmatrix} = -x_0 + \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \Longrightarrow s := \{-x_0 + \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 = 0\}$$

Y por tanto el punto B intersección de r' y s se obtendrá con $x_1 = 0$ y $-x_0 + \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 = 0$, luego $B = [1-\alpha, 0, 1]$. Procedemos pues a construir M y N conociendo las razones dobles aportadas. Para ello utilizamos que dados A_1, A_2, A_3 y A_4 la razón doble

$(A_1A_2A_3A_4) = x_0/x_1$ siendo $[x_0, x_1]$ las coordenadas de A_4 en el sistema de referencia proyectivo de la recta $\{A_1, A_2; A_3\}$. Por tanto consideramos la referencia $\mathcal{R}' = \{P, A; B\}$ de s con base normalizada asociada $\{(1, 1, 1), (-\alpha, -1, 0)\}$. Por lo dicho tenemos que M tendrá coordenadas $[1, -1]_{\mathcal{R}'}$ en dicha referencia, luego en $\mathcal{R}$ será $[1 + \alpha, 2, 1]$ teniendo en cuenta la base normalizada. Comprobemos que el lugar geométrico de estos puntos verifica las propiedades indicadas. Sean $[1+\beta_1, 2, 1]$ y $[1+\beta_2, 2, 1]$ dos puntos M obtenidos para distintos valores del parámetro que hace variar la secante variable ($\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$). La ecuación de la recta D que pasa por esos dos puntos es:

$$0 = \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 1+\beta_1 & 2 & 1 \\ 1+\beta_2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (\beta_2 - \beta_1)x_1 + 2(\beta_1 - \beta_2)x_2 \Longrightarrow D := \{x_1 - 2x_2 = 0\}$$

Y efectivamente se verifica que el punto $O = [1, 0, 0]$ está sobre esa recta, luego es una recta del haz de r y r', y además cualquier otro punto $[1 + \alpha, 2, 1]$ para otro valor del parámetro verifica que está sobre la recta, y cualquier punto de la recta (salvo O) se puede escribir de esa manera. Por tanto, es el lugar geométrico que queríamos probar.

Análogamente para la otra cuaterna armónica propuesta. Consideramos la referencia $\mathcal{R}'' = \{P, B; A\}$ de s con base normalizada asociada $\{(1, 1, 1), (\alpha - 1, 0, -1)\}$. De aquí que $N = [1, -1]_{\mathcal{R}''}$ y por tanto $N = [2 - \alpha, 1, 2]$ en $\mathcal{R}$. Tomando dos puntos para distintos valores del parámetro γ_1, γ_2 formamos la recta y comprobamos que es una recta del haz y que todos los puntos están, como antes:

$$0 = \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 2-\gamma_1 & 1 & 2 \\ 2-\gamma_2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2(\gamma_1 - \gamma_2)x_1 + (\gamma_2 - \gamma_1)x_2 \Longrightarrow D' := \{2x_1 - x_2 = 0\}$$

Que verifica que $[1, 0, 0]$ está en la recta y también todos los puntos de la forma $[2-\alpha, 1, 2]$, y que son los únicos que están salvo O. Por tanto hemos acabado con el apartado 1).

La polar de un punto respecto de dos rectas es el lugar geométrico de los puntos que forman cuaternas armónicas al trazar secantes variables. Veamos que dada la secante variable para un valor determinado del parámetro α se tiene que si se construyen P' y P'' tales que $(PP'AB) = -1$ y $(PP''MN) = -1$ y si tuviéramos que $P' = P''$ habríamos terminado, ya que si lo tenemos para cualquier valor del parámetro tendremos que sus polares son iguales. Para realizar dicha construcción utilizamos que si $(A_1A_2A_3A_4) = \lambda$, entonces $(A_1A_3A_4A_2) = 1/(1 - \lambda)$, luego $(PABP') = 1/2$. Utilizando la referencia $\mathcal{R}'$ de s usada antes tenemos que $P' = [1, 2]_{\mathcal{R}'}$, luego $P' = [1 - 2\alpha, -1, 1]$.

De la misma manera construimos P'': $(PMNP'') = 1/2$, luego consideramos la referencia $\mathcal{R}''' = \{P, M; N\}$ de s con base normalizada asociada $\{(3, 3, 3), (1 - \alpha, -2, -1)\}$. Tenemos que $P'' = [1, 2]_{\mathcal{R}''''}$, luego $P'' = [1 - 2\alpha, -1, 1]$, conque $P' = P''$ para cada valor del parámetro α, luego las polares coinciden, como se pedía probar. $\square$

Solución por Jesús Dueñas Pamplona

Problema 288, proposto por Pierre Lapôtre, Calais, Francia.

Considéranse un punto fixo P e dúas rectas r e r' (concorrentes ou paralelas). Unha secante variable que pasa por P corta a r en A e a r' en B.
1) Demostrar que os lugares geométricos dos puntos M e N tales que $(PABM)=(PBAN)=-1$ son rectas d e d' do mesmo feixe ca r e r'.
2) Demostrar que P ten a mesma polar con respecto a (r,r') e con respecto a (d,d').

Solución enviada por Bruno Salgueiro Fanego, Viveiro, Lugo.

Tómense unha referencia cartesiana rectangular de orixe P cuxo eixo de abscisas non sexa perpendicular a r nin a r'; entón $P(0,0)$ e as ecuacións das rectas r, r' e $PA\equiv PB$ son da forma $r:\alpha x-y=-\beta$, $r':\alpha' x-y=-\beta'$ e $PA: px=y$ ou $PA: x=0$.
Identificaranse as coordenadas dun punto calquera $C(x_C,y_C)$ nesa referencia coas do vector $\overrightarrow{PC}$ na base da mesma, co cal denotarase $C=\overrightarrow{PC}$.

Supóñase primeiro que $PA: px=y$.
As coordenadas do punto $A(x_A,y_A)$ obtéñense como intersección das rectas PA e r, logo $px_A=y_A=\alpha x_A+\beta$ e, polo tanto, $A\left(\dfrac{\beta}{p-\alpha},\dfrac{p\beta}{p-\alpha}\right)$ e analogamente $B\left(\dfrac{\beta'}{p-\alpha'},\dfrac{p\beta'}{p-\alpha'}\right)$.
Para calcular as coordenadas do punto M tal que $(PABM)=-1$, é dicir, do conxugado harmónico, M, de B con respecto a P e A, denótense $a=\left\|\overrightarrow{PA}\right\|$, $b=\left\|\overrightarrow{PB}\right\|$, $m=\left\|\overrightarrow{PM}\right\|$ e considérese o vector unitario $\vec{u}=\dfrac{1}{a}\overrightarrow{PA}=\dfrac{1}{b}\overrightarrow{PB}=\dfrac{1}{m}\overrightarrow{PM}$. Tense entón que $\overrightarrow{PB}=c\overrightarrow{PA}$, onde $c=\dfrac{b}{a}$ e $-1=(PABM)=\dfrac{(PAB)}{(PAM)}$, sendo $\overrightarrow{BP}=(PAB)\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{MP}=(PAM)\overrightarrow{MA}$.
Así, $-b\vec{u}=-\overrightarrow{PB}=(PAB)\left(\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB}\right)=(PAB)(a-b)\vec{u}$, logo $(PAB)=\dfrac{b}{b-a}$ e $-m\vec{u}=-\overrightarrow{PM}=(PAM)\left(\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PM}\right)=(PAM)(a-m)\vec{u}$, co cal $(PAM)=\dfrac{m}{m-a}$ e, polo tanto, $-1=(PABM)=\dfrac{(PAB)}{(PAM)}=\dfrac{\frac{b}{b-a}}{\frac{m}{m-a}}$, que conduce a

$m=\dfrac{ab}{2b-a}=\dfrac{ca^2}{2ca-a}=\dfrac{c}{2c-1}a$, é dicir,

$M=\overrightarrow{PM}=m\vec{u}=\frac{c}{2c-1}a\vec{u}=\frac{c}{2c-1}\overrightarrow{PA}=\frac{c}{2c-1}A$.

Nótese agora que $A=\frac{\beta}{p-\alpha}(1,p)$ e $B=\frac{\beta'}{p-\alpha'}(1,p)$, co cal $cA=B=\frac{\beta'}{p-\alpha'}\frac{p-\alpha}{\beta}A$ e, por conseguinte, $c=\frac{(p-\alpha)\beta'}{(p-\alpha')\beta}$,

$$\frac{c}{2c-1}=\frac{\frac{(p-\alpha)\beta'}{(p-\alpha')\beta}}{\frac{2(p-\alpha)\beta'-(p-\alpha')\beta}{(p-\alpha')\beta}}=\frac{(p-\alpha)\beta'}{2(p-\alpha)\beta'-(p-\alpha')\beta}$$ e

$M=\frac{c}{2c-1}A=\frac{\beta'}{2(p-\alpha)\beta'-(p-\alpha')\beta}(p-\alpha)A=\frac{\beta\beta'}{2(p-\alpha)\beta'-(p-\alpha')\beta}(1,p)$, ou sexa, $M(x_M,y_M)$ con $x_M=\frac{\beta\beta'}{2(p-\alpha)\beta'-(p-\alpha')\beta}$ e $y_M=\frac{p\beta\beta'}{2(p-\alpha)\beta'-(p-\alpha')\beta}$.

Así, $\left(2(p-\alpha)\beta'-(p-\alpha')\beta\right)x_M=\beta\beta'$ e $\left(2(p-\alpha)\beta'-(p-\alpha')\beta\right)y_M=p\beta\beta'$.

Resultan así as ecuacións $p(2\beta'-\beta)x_M=\beta\beta'+(2\alpha\beta'-\alpha'\beta)x_M$ e $(2\alpha\beta'-\alpha'\beta)y_M=p\left((2\beta'-\beta)y_M-\beta\beta'\right)$ que, multiplicadas termo a termo, proporcionan a igualdade

$$p(2\beta'-\beta)x_M(2\alpha\beta'-\alpha'\beta)y_M=p\left(\beta\beta'+(2\alpha\beta'-\alpha'\beta)x_M\right)\left((2\beta'-\beta)y_M-\beta\beta'\right).$$

Conclúese entón que, cando $p\neq 0$,

$$(2\beta'-\beta)(2\alpha\beta'-\alpha'\beta)x_My_M=\beta\beta'(2\beta'-\beta)y_M-(\beta\beta')^2$$
$$+(2\alpha\beta'-\alpha'\beta)(2\beta'-\beta)x_My_M-(2\alpha\beta'-\alpha'\beta)\beta\beta'x_M$$, ou sexa,

$(2\alpha\beta'-\alpha'\beta)x_M=(2\beta'-\beta)y_M-\beta\beta'$, se $\beta\beta'\neq 0$, o cal proba que a ecuación do lugar xeométrico descrito polo punto M é a recta d de ecuación

$$d:(2\alpha\beta'-\alpha'\beta)x-(2\beta'-\beta)y_M=\beta\beta'.$$

No caso de que r e r' sexan concorrentes, o seu punto de corte $Q\left(\frac{\beta'-\beta}{\alpha-\alpha'},\frac{\alpha\beta'-\alpha'\beta}{\alpha-\alpha'}\right)$ pertence á recta anteriormente obtida, xa que

$(2\alpha\beta'-\alpha'\beta)\frac{\beta'-\beta}{\alpha-\alpha'}-(2\beta'-\beta)\frac{\alpha\beta'-\alpha'\beta}{\alpha-\alpha'}=\beta\beta'$, e se r e r' son paralelas non coincidentes, $\alpha=\alpha'$ e a ecuación de tal lugar xeométrico é a recta $d:\alpha(\beta-2\beta')x+(2\beta'-\beta)y=\beta\beta'$, cuxa pendente coincide coas de r e r'.

Por outra banda, se $PA: x=0$, tense que $A(0,\beta)$, $B(0,\beta')$ e $M\left(0,\frac{\beta\beta'}{2\beta'-\beta}\right)$, que pertence á recta de ecuación $(2\alpha\beta'-\alpha'\beta)x-(2\beta'-\beta)y_M=\beta\beta'$. Logo se $PA: x=0$, M tamén pertence ao lugar xeométrico d.

Polo tanto, o lugar xeométrico dos puntos M é unha recta que pertence ao mesmo feixe

de rectas que as rectas r e r'.
Por analoxía, o lugar xeométrico dos puntos N que son conxugados harmónicos de A con respecto a B obterase cambiando $(\alpha,\beta,\alpha',\beta')$ por $(\alpha',\beta',\alpha,\beta)$ no lugar xeométrico $d:(2\alpha\beta'-\alpha'\beta)x-(2\beta'-\beta)y_M=\beta\beta'$, é dicir, o lugar xeométrico dos puntos N tales que $(PBAN)=-1$ é a recta d' de ecuación $d':(2\alpha'\beta-\alpha\beta')x-(2\beta-\beta')y_M=\beta'\beta$, que tamén pertence ao mesmo feixe de rectas que as rectas r e r' (e d).

2) O par de rectas (r,r') pode considerarse como unha cónica dexenerada de ecuación $(r,r'):(\alpha x-y+\beta)(\alpha' x-y-\beta')=0$, é dicir,
$(r,r'):\alpha\alpha' x^2-(\alpha+\alpha')xy+y^2+(\alpha\beta'+\alpha'\beta)x-(\beta+\beta')y+\beta\beta'=0$, ou sexa,

$$(r,r'):(1\quad x\quad y)\begin{pmatrix}\beta\beta' & (\alpha\beta'+\alpha'\beta)/2 & (\beta+\beta')/2\\ (\alpha\beta'+\alpha'\beta)/2 & \alpha\alpha' & (\alpha+\alpha')/2\\ (\beta+\beta')/2 & (\alpha+\alpha')/2 & \alpha\alpha'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ x\\ y\end{pmatrix}=0.$$

A polar da orixe de coordenadas P con respecto a esta cónica é a recta de ecuación

$$s:(1\quad 0\quad 0)\begin{pmatrix}\beta\beta' & (\alpha\beta'+\alpha'\beta)/2 & (\beta+\beta')/2\\ (\alpha\beta'+\alpha'\beta)/2 & \alpha\alpha' & (\alpha+\alpha')/2\\ (\beta+\beta')/2 & (\alpha+\alpha')/2 & \alpha\alpha'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ x\\ y\end{pmatrix}=0,$$ ou sexa,

$s:(\alpha\beta'+\alpha'\beta)x-(\beta+\beta')y=-2\beta\beta'$.
Analogamente, o par de rectas (d,d') é a cónica dexenerada que ten por ecuación $(d,d'):\big((\alpha'\beta-2\alpha\beta')x+(2\beta'-\beta)y-\beta\beta'\big)\big((\alpha\beta'-2\alpha'\beta)x+(2\beta-\beta')y-\beta\beta'\big)=0$, ou equivalentemente,

$$\begin{aligned}(d,d')&:(\alpha'\beta-2\alpha\beta')(\alpha\beta'-2\alpha'\beta)x^2+\big((\alpha'\beta-2\alpha\beta')(2\beta-\beta')+(\alpha\beta'-2\alpha'\beta)(2\beta'-\beta)\big)xy\\ &+(2\beta-\beta')(2\beta'-\beta)y^2+\beta\beta'(2\alpha'\beta-\alpha'\beta+2\alpha\beta'-\alpha\beta')x+\beta\beta'(\beta-2\beta'+\beta'-2\beta)y\\ &+(\beta\beta')^2=0\end{aligned}$$

e, razoando coma para a polar anterior, obtense que a polar, s', de P respecto a dita cónica ten por ecuación
$s':\beta\beta'\big((2\alpha'\beta-\alpha'\beta+2\alpha\beta'-\alpha\beta')x+(\beta-2\beta'+\beta'-2\beta)y+2\beta\beta'\big)=0$, ou sexa, cando $\beta\beta'\neq 0$, $s':(\alpha\beta'+\alpha'\beta)x-(\beta+\beta')y=-2\beta\beta'$.
En definitiva, $s\equiv s'$, como se quería demostrar.

Problema 289

Miguel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca, España.

Primera solución. Sea $J \neq B$ el extremo del diámetro de la circunferencia circunscrita a $\triangle ABC$ que pasa por B. Entonces $\angle JAB = 90^\circ$ y, si $\{U\} = \overline{BJ} \cap \overline{AD}$, tenemos

$$\angle UBD = \angle JBC = \angle JAC = \angle JAB - \angle CAB = 90^\circ - \angle CAB. \tag{1}$$

Se sigue que

$$\overline{UD} = \overline{BD} \cdot \tan(\angle UBD) = \left(\overline{AB}\cos B\right) \cdot \tan(90^\circ - \angle CAB) = \left(\overline{AB}\cos B\right) \cdot \cot A.$$

Indicamos por R el radio de la circunferencia circunscrita a $\triangle ABC$ y sustituimos en la igualdad anterior $\overline{AB}$ por $2R\sin C$. Obtenemos

$$\overline{UD} = \frac{2R\sin C\cos A\cos B}{\sin A}. \tag{2}$$

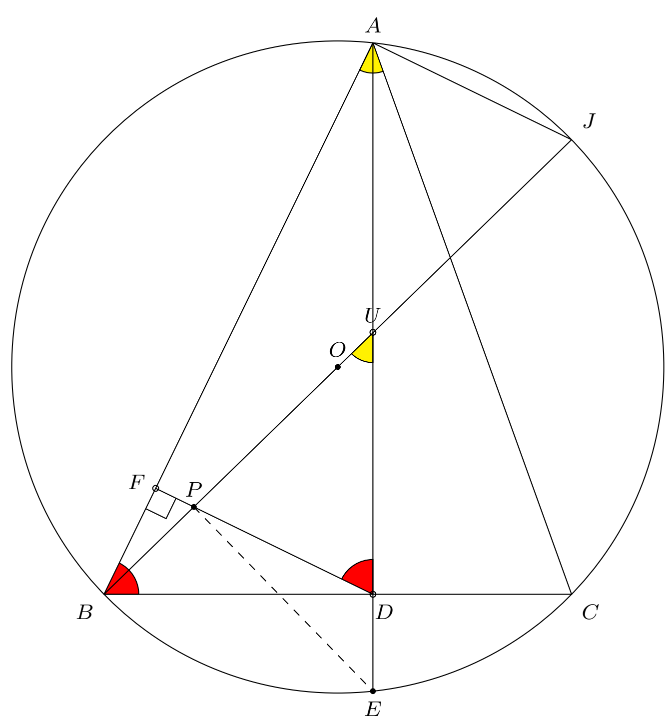
Sea E el segundo punto de intersección de la recta AD con la circunferencia circunscrita al triángulo ABC. Pues A, B, E y C son concíclicos, se tiene

$$\overline{AD} \cdot \overline{DE} = \overline{BD} \cdot \overline{DC}$$

y

$$\overline{DE} = \frac{\overline{BD} \cdot \overline{DC}}{\overline{AD}} = \frac{\left(\overline{AB}\cos B\right)\left(\overline{CA}\cos C\right)}{\overline{AB}\sin B} = 2R\cos B\cos C, \tag{3}$$

pues $\overline{CA} = 2R\sin B$.



Sumando (2) y (3),

$$\begin{aligned} \overline{UE} &= \overline{UD}+\overline{DE} \\ &= 2R\cos B\left(\tfrac{\sin C\cos A}{\sin A}+\cos C\right) \\ &= \tfrac{2R\cos B\sin(C+A)}{\sin A} \\ &= \tfrac{2R\cos B\sin B}{\sin A} \\ &= R\sin 2B\csc A. \end{aligned} \tag{4}$$

A su vez, en $\triangle PDU$,

$$\angle DUP = \angle DUB = 90^\circ - \angle UBD \quad \underbrace{= \angle CAB}_{\text{deducido de (1)}}$$

y, en el triángulo rectángulo ABD, designando por F el pie de la altura relativa a la hipotenusa,

$$\angle PDU = \angle FDA = \angle ABD = \angle ABC.$$

Así, pues, los triángulos ABC y UDP son semejantes; de la proporcionalidad de sus lados,

$$\frac{\overline{UD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{PU}}{\overline{CA}}$$

y

$$\overline{PU} = \frac{\overline{UD}\cdot\overline{CA}}{\overline{AB}}.$$

Sustituyendo en la igualdad anterior $\overline{UD}$ por su igual (2), $\overline{AB}$ por $2R\sin C$ y CA por $2R\sin B$, obtenemos

$$\overline{PU} = R\sin 2B\cot A. \tag{5}$$

Por consiguiente, de (4) y (5),

$$\overline{PU} = \overline{UE}\cdot\cos A.$$

Habida cuenta de que $\angle CAB = \angle DUP = \angle EUP$, la igualdad anterior se escribe

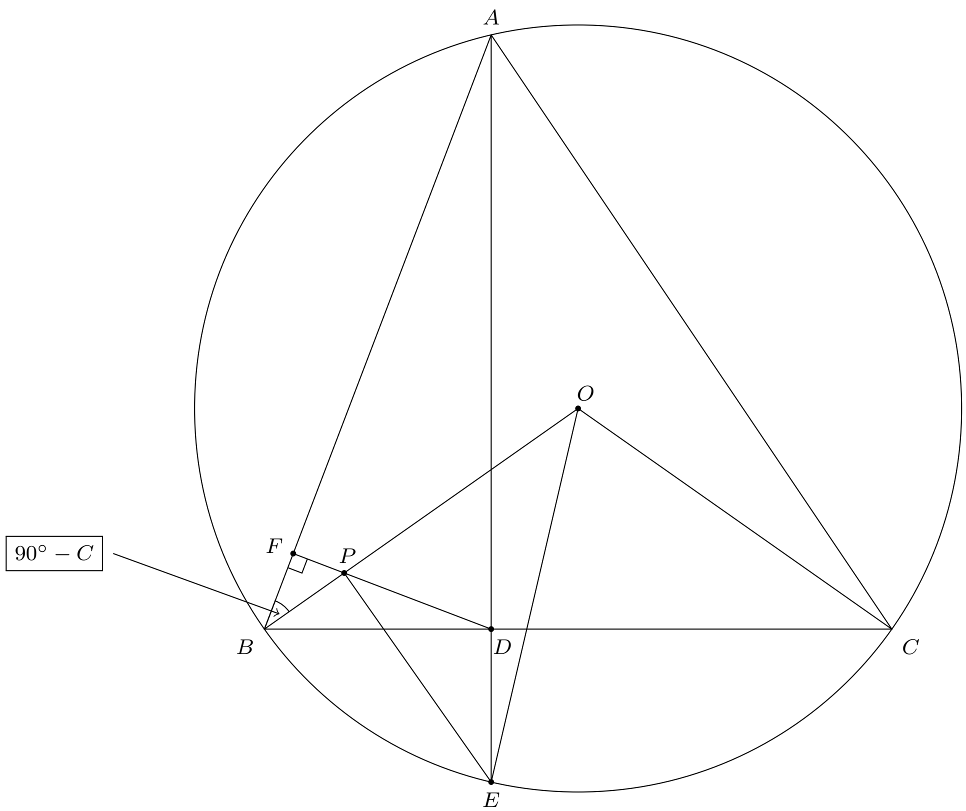
$$\overline{PU} = \overline{UE}\cdot\cos\left(\angle EUP\right),$$

con lo que el triángulo UPE es rectángulo en P. Así, pues,

$$\angle OPE = 90^\circ.$$

Análogamente, $\angle OQE = 90^\circ$. Luego P y Q están sobre la circunferencia construida sobre OE (un radio de la circunferencia circunscrita a $\triangle ABC$) como diámetro, con lo que concluimos.

Segunda solución. Sea E el segundo punto de intersección de la recta AD con la circunferencia circunscrita al triángulo ABC, sea F el pie de la perpendicular desde D a AB y designemos por R el radio de la circunferencia circunscrita a $\triangle ABC$.



Por el teorema del coseno, aplicado a $\triangle PDE$, en el que $\overline{PD} = \overline{FD} - \overline{FP} = 2R\cos A\cos B$, $\overline{DE} = 2R\cos B\cos C$ y $\angle PDE = 180° - B$,

$$\begin{aligned}\overline{PE}^2 &= (2R\cos A\cos B)^2 + (2R\cos B\cos C)^2 + 8R^2\cos A\cos^3 B\cos C\\ &= 4R^2\cos^2 B\left(\cos^2 A + \cos^2 C + 2\cos A\cos B\cos C\right)\end{aligned}$$

y, habida cuenta de que $\overline{OP} = \overline{OB} - \overline{BP} = R\left(1 - 2\cos^2 B\right)$, tenemos

$$\begin{aligned}\overline{OP}^2 + \overline{PE}^2 &= R^2\left(1 - 2\cos^2 B\right)^2 + 4R^2\cos^2 B\left(\cos^2 A + \cos^2 C + 2\cos A\cos B\cos C\right)\\ &= R^2\left(1 + 4R^2\cos^2 B\underbrace{\left(\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A\cos B\cos C - 1\right)}_{=0\quad(\dagger)}\right)\\ &= R^2\\ &= \overline{OE}^2.\end{aligned}$$

Por consiguiente, por el recíproco del teorema de Pitágoras, el triángulo OPE es rectángulo en P. Análogamente, el triángulo OQE es rectángulo en Q.

Luego P y Q están sobre la circunferencia construida sobre OE (un radio de la circunferencia circunscrita a $\triangle ABC$) como diámetro, con lo que concluimos.

($\dagger$) Si A, B, C son los ángulos de un triángulo,

$$\cos C = -\cos(A+B) = -\left(\cos A\cos B - \sin A\sin B\right).$$

Elevamos al cuadrado y obtenemos:

$$\begin{aligned}
\cos^2 C &= \cos^2 A \cos^2 B + \sin^2 A \sin^2 B - 2\cos A \cos B \sin A \sin B \\
&= \cos^2 A \cos^2 B + \left(1-\cos^2 A\right)\left(1-\cos^2 B\right) - 2\cos A \cos B \sin A \sin B \\
&= 1-\cos^2 A - \cos^2 B + 2\cos^2 A \cos^2 B - 2\cos A \cos B \sin A \sin B,
\end{aligned}$$

esto es,

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 + 2\cos A \cos B \underbrace{(\cos A \cos B - \sin A \sin B)}_{=\cos(A+B)=-\cos C},$$

o, equivalentemente,

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A \cos B \cos C - 1 = 0.$$

Tercera solución. Sea E el segundo punto de intersección de la recta AD con la circunferencia circunscrita al triángulo ABC. Pues A, B, E y C son concíclicos, se tiene

$$\overline{AD}\cdot\overline{DE} = \overline{BD}\cdot\overline{DC}$$

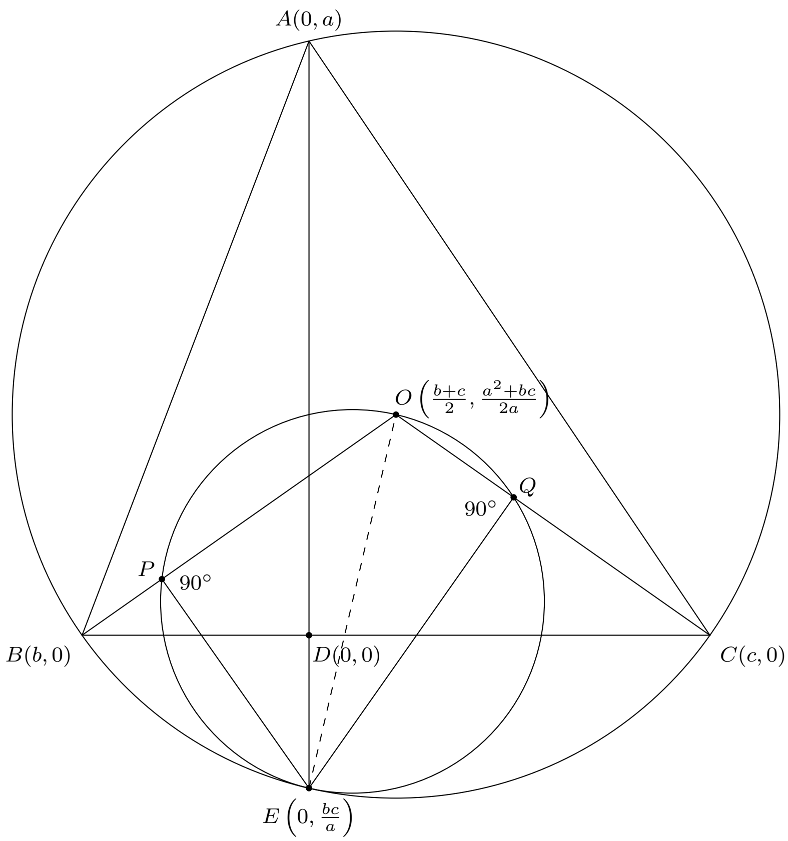
y

$$\overline{DE} = \frac{\overline{BD}\cdot\overline{DC}}{\overline{AD}} \tag{6}$$

Consideremos un sistema de coordenadas rectangulares con origen el punto D y eje de abscisas la recta BC, en el que el punto A tenga coordenadas $(a,0)$ con $a>0$, el punto B tenga coordenadas $(b,0)$ y las de C sean $(c,0)$ (obsérvese que $bc<0$, al ser D un punto interior del segmento BC; en particular, $b\neq c$).

Los puntos O y P son coincidentes si $\overline{BD}=\overline{AD}$. Análogamente, O y Q coinciden si $\overline{AD}=\overline{DC}$. Por consiguiente, supondremos, en todo lo que sigue, $\overline{BD}\neq\overline{AD}\neq\overline{DC}$, es decir,

$$|b|\neq a\neq |c|. \tag{7}$$



En un tal sistema, las coordenadas de los puntos O, P, Q y E son las siguientes, a saber:

$$O\left(\frac{b+c}{2}, \frac{a^2+bc}{2a}\right), \quad P\left(\frac{b\left(a^2+bc\right)}{a^2+b^2}, \frac{b^2\left(a^2+bc\right)}{a\left(a^2+b^2\right)}\right), \quad Q\left(\frac{c\left(a^2+bc\right)}{a^2+c^2}, \frac{c^2\left(a^2+bc\right)}{a\left(a^2+c^2\right)}\right)$$

y, por (6),

$$E\left(0, \frac{bc}{a}\right).$$

Habida cuenta de que las respectivas pendientes de las rectas OP y PE,

$$m_{OP} = \frac{\frac{a^2+bc}{2a} - \frac{b^2\left(a^2+bc\right)}{a\left(a^2+b^2\right)}}{\frac{b+c}{2} - \frac{b\left(a^2+bc\right)}{a^2+b^2}} = -\frac{\left(a^2-b^2\right)\left(a^2+bc\right)}{a\left(a^2-b^2\right)(b-c)} \quad \underbrace{= -\frac{a^2+bc}{a\,(b-c)}}_{\text{pues } a^2-b^2\neq 0, \text{ por (7).}}$$

y

$$m_{PE} = \frac{\frac{bc}{a} - \frac{b^2\left(a^2+bc\right)}{a^2+b^2}}{-\frac{b\left(a^2+bc\right)}{a^2+b^2}} = \frac{a\,(b-c)}{a^2+bc},$$

son inversas y de signo contrario, se tiene $OP \perp PE$ y $\angle OPE = 90°$. Análogamente, $\angle OQE = 90°$.

Luego P y Q están sobre la circunferencia construida sobre OE (un radio de la circunferencia circunscrita a $\triangle ABC$) como diámetro, con lo que concluimos.

Problema 290, proposto por Samael Gamboa Quezada, Trujillo, Perú.

Sexan x e y números reais positivos tales que $x^3+y^3=2xy$.
Demostrar que $x+y\geq x^7+y^7$.

Solución enviada por Bruno Salgueiro Fanego, Viveiro, Lugo.

Se algún dos valores reais x e y é nulo, da hipótese $x^3+y^3=2xy$ dedúcese que a outro de ditos valores tamén se anula, co cal a desigualdade a probar é certa, dándose nela a igualdade $0+0=0^7+0^7$.
Suporemos entón, a partir de agora, que $x>0$ e $y>0$.
Os pares (x,y) de números reais estritamente positivos tales que $x^3+y^3=2xy$ representan, nas coordenadas cartesianas rectangulares, o bucle dunha curva das denominadas *folium de Descartes* situada no primeiro cuadrante aberto. A parametrización $(x,y)=(x(t),y(t))=\left(\frac{2t}{t^3+1},\frac{2t^2}{t^3+1}\right)$, para $t=\frac{y}{x}>0$, de tal bucle, permite reescribir a desigualdade do enunciado como

$$\frac{2t}{t^3+1}+\frac{2t^2}{t^3+1}\geq\left(\frac{2t}{t^3+1}\right)^7+\left(\frac{2t^2}{t^3+1}\right)^7\Leftrightarrow\frac{2t(t+1)}{t^3+1}\geq\frac{128t^7(t^7+1)}{(t^3+1)^7}\underset{t\neq 0}{\Leftrightarrow} t+1\geq\frac{64t^6(t^7+1)}{(t^3+1)^6}$$

$$\Leftrightarrow (t+1)(t^{18}+6t^{15}+15t^{12}+20t^9+15t^6+6t^3+1)-64t^{13}-64t^6\geq 0$$

$$\Leftrightarrow t^{19}+t^{18}+6t^{16}+6t^{15}+15t^{12}-49t^{13}+20t^{10}+20t^9+15t^7-49t^6+6t^4+6t^3+t+1\geq 0$$

$$\Leftrightarrow (t+1)(t-1)^2(t^2+t+1)f(t)\geq 0\underset{t\geq 0}{\Leftrightarrow}(t-1)^2 f(t)\geq 0\Leftrightarrow t=1 \text{ ou } f(t)\geq 0$$

$\Leftrightarrow x=y=1$, caso no cal a desigualdade dada é certa, verificándose ademais a igualdade na mesma, ou $f(t)\geq 0$, onde

$$f(z)=z^{14}+z^{13}+z^{12}+8z^{11}+8z^{10}+8z^9-34z^8+30z^7-34z^6+8z^5+8z^4+8z^3+z^2+z+1$$

é un polinomio palíndromo.

Para $z>0$ e $z\neq 1$, denotando $u=z+\frac{1}{z}$ e tendo en conta que $u^2=z^2+\frac{1}{z^2}+2$,

$u^3=z^3+\frac{1}{z^3}+3\left(z+\frac{1}{z}\right)$, $u^4=z^4+\frac{1}{z^4}+4\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)+6$,

$u^5=z^5+\frac{1}{z^5}+5\left(z^3+\frac{1}{z^3}\right)+10\left(z+\frac{1}{z}\right)$,

$u^6=z^6+\frac{1}{z^6}+6\left(z^4+\frac{1}{z^4}\right)+15\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)+20$ e

$u^7=z^7+\frac{1}{z^7}+7\left(z^5+\frac{1}{z^5}\right)+21\left(z^3+\frac{1}{z^3}\right)+35\left(z+\frac{1}{z}\right)$, dedúcese que

$$\frac{f(z)}{z^7}=z^7+\frac{1}{z^7}+z^6+\frac{1}{z^6}+z^5+\frac{1}{z^5}+8\left(z^4+\frac{1}{z^4}\right)+8\left(z^3+\frac{1}{z^3}\right)+8\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)$$

$$-34\left(z+\frac{1}{z}\right)+30=u^7-7u^5+14u^3-7u+u^6-6u^4+9u^2-2+u^5-5u^3+5u+8\left(u^4-4u^2+2\right)$$
$$+8\left(u^3-3u\right)+8\left(u^2-2\right)-34u+30=u^7+u^6-6u^5+2u^4+17u^3-15u^2-60u+28\,.$$

Notemos agora que, para $z>0$, $u=z+\dfrac{1}{z}>2$ porque $(z-1)^2>0$, co cal a desigualdade a demostrar, $f(t)\geq 0$, para $t>0$ e $t\neq 1$, é equivalente á desigualdade $g(u)\geq 0$, onde $g(v)=v^7+v^6-6v^5+2v^4+17v^3-15v^2-60v+28$.

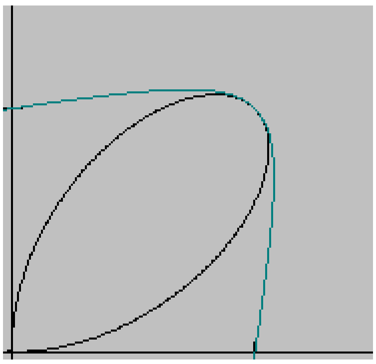
Razoando como na demostración habitual da regra de acoutamento de Newton, ao ser os valores das derivadas desta función en $v=2$, $g^{(k}(2)$, para $k\in\mathbb{N}$, $0\leq k\leq 7$, onde se denotou $g^{(0}(2)=g(2)$, estritamente positivos (para ser exactos, $g^{(0}(2)=16$, $g^{(1}(2)=308$, $g^{(2}(2)=1134$, $g^{(3}(2)=3078$, $g^{(4}(2)=6768$, $g^{(5}(2)=g^{(6}(2)=10800$ e $g^{(7}(2)=5040$), aplicándolle á función g a fórmula de Taylor con resto de Lagrange, deducimos que para calquera $v>2$ existe polo menos un $w\in(2,u)$ tal que

$$g(v)=\sum_{k=0}^{7}\frac{g^{(k}(2)}{k!}(v-2)^k+\frac{g^{(8}(2)}{8!}(w-2)=\sum_{k=0}^{7}\frac{g^{(k}(2)}{k!}(v-2)^k>0,$$ xa que $g^{(k}(2)>0$, $(v-2)^k>0$ para calquera $k\in\mathbb{N}$ con $0\leq k\leq 7$, e $g^{(8}(v)=0$.

Polo tanto, está probado que $g(u)>0$, co cal $f(t)>0$ se $t>0$ e $t\neq 1$.

Isto completa a demostración a desigualdade do enunciado e que nela se alcanza a igualdade se e só se $(x,y)\in\{(0,0),(1,1)\}$, que son os puntos de corte do bucle folium de Descartes de ecuación $x^3+y^3=2xy$ situado no primeiro cuadrante pechado coa bisectriz de dito cuadrante.

Nota: Graficamente, a desigualdade proposta significa que os puntos do bucle do folium de Descartes antes mencionado, en negro na figura que aparece máis abaixo, se atopan na rexión pechada e limitada do primeiro cuadrante pechado cuxa fronteira é a curva de ecuación $x+y=x^7+y^7$ (cuxa gráfica pode obterse utilizando, por exemplo, o método de Newton-Cramer) e que tamén aparece representada en dita figura:



Problemas propuestos 291-295

Problema 291 (Propuesto por Andrés Sáez Schwedt, Universidad de León, España)

ABC es un triángulo acutángulo con circuncentro O y ortocentro H. El punto medio de AH es X. Sean E y F los pies de las alturas desde B y C, respectivamente. XV es un diámetro de una circunferencia que pasa por A y X, y es tangente a la recta AC. Una segunda circunferencia que pasa por A y X y es tangente a la recta AB, tiene a XW como diámetro. Suponiendo que se pueden construir los puntos $G = EF \cap BC,\ I = BV \cap CW$, demostrar que las rectas GI y OH son perpendiculares.

Problema 292 (propuesto por Leonard Giugiuc, Rumania)

Resolver en $\mathbb{R}^4$ el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \hat{a}b + bc + cd + da + ac + bd = 6 \\ abc + abd + acd + bcd = 2\sqrt{2} \\ a + b + c + d = \sqrt{2}(3 + abcd) \end{cases}$$

Problema 293 (propuesto por Laurentiu Modan, Bucarest, Rumania)

Se consideran los sucesos A y B que cumplen las condiciones siguientes:

$$P(\overline{A} - \overline{B}) = \frac{1}{2};\ P(\overline{B} - \overline{A}) = \frac{1}{4};\ P(A \cap B) = \frac{1}{4}; P(A/B) = P(A).$$

donde $\overline{A}$ y $\overline{B}$ son los sucesos complementarios respectivos. Calcular las probabilidades $P(A), P(B)$ y $P(A \cup B)$.

Problema 294 (propuesto por Marius Dragan & Neculai Stanciu, Bucarest y Buzau, Rumania)

Sea ABCD un cuadrilátero bicéntrico de inradio *r*, circunradio *R* y diagonales de longitudes d_1 y d_2. Demostrar que $\frac{R^2}{r^2} \geq \frac{d_1^3 + d_2^3}{2d_1^2 d_2^2}(d_1 + d_2)$.

Problema 295 (propuesto por D.M. Batinetu-Giurgiu & Neculai Stanciu, Bucarest y Buzau, Rumania)

Sean $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ sucesiones de números reales positivos tales que $b_n = a_1 \cdot \sqrt{a_2} \cdot \sqrt[3]{a_3} \cdots \sqrt[n]{a_n}$ y $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n \cdot n} = a$. Calcular $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^2}{b_{n+1}} - \frac{n^2}{\sqrt[n]{b_n}}\right)$.

Comentario de libros, reseña de páginas web y noticia de congresos 58

Comentario de libros

"La Vía Láctea" de María Victoria Veguín Casas

Comentario de F.Bellot Rosado

La Profesora Mª Victoria Veguín Casas, durante varios años colega del departamento de Matemáticas en el Instituto "Emilio Ferrari" de Valladolid, ha publicado en Bohodón Editores su libro *"La Vía Láctea (camino de dioses, almas y peregrinos (Camino de Santiago))", Madrid 2016.*

Aunque pueda parecer una paradoja, esta obra, escrita por una matemática profesional, no es de Matemáticas, no es de Astronomía, no es de Historia... **pero es de todas esas Ciencias y más,** podríamos decir. Acompañada de un centenar de notas, repartidas en sus 9 capítulos, con otras tantas referencias bibliográficas (incluidas varias páginas web) y gran profusión de ilustraciones, ofrece una panorámica completa de la Vía Láctea y de su reflejo en la Tierra, el Camino (Francés) de Santiago, el que va de Roncesvalles a Compostela.

Después de su primer libro (1989), *"Matemáticas y el Camino de Santiago"*, en el que comentamos, como se verá en el índice que reproducimos a continuación, Victoria profundiza de una forma amena (y al mismo tiempo rigurosa) en otros aspectos menos conocidos del Camino.

Como curiosidad, en el capítulo VII se lanza un reto para los lectores (no matemáticos) del libro. *¿Cómo se puede medir el universo tomando como unidad de medida el Camino de Santiago?* Al parecer, algunos lectores han confesado a la autora que les costaba trabajo el cambio de unidades que se proponen en él. Sin embargo, es lo mismo que el cambio de unidades en el sistema métrico decimal... Tal vez esta anécdota debería llevar a alguna reflexión acerca de la formación matemática básica de la población.

En resumen, el libro es muy interesante y recomiendo vivamente su lectura "a todos los públicos".

Valladolid, diciembre de 2017 .

Noticia de Congresos 58

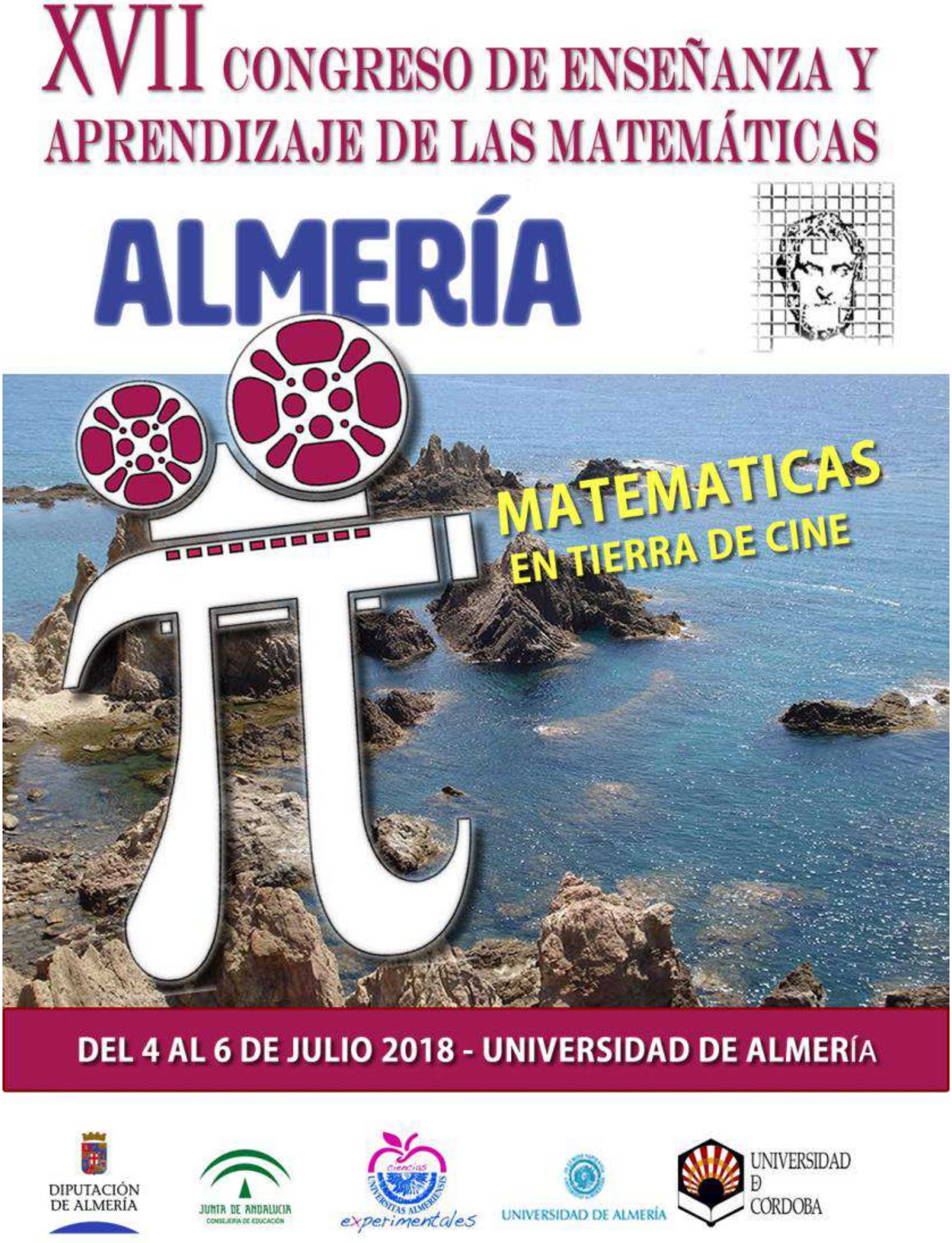
Mi colega Alan Rogerson pide se divulgue el anuncio preliminar de su 15ª Conferencia Internacional cuyos detalles en inglés aparecen a continuación

Dr. Alan Rogerson
D.Phil (Oxon), M.Sc., B.Sc., B.A. (Lon), Dip.Ed., Cert. Ed. (Cantab).
Chairman of the International Program Committee
Co-ordinator of the Mathematics Education for the Future Project

La 15ª Conferencia Internacional de The Mathematics Education for the Future Project *Theory and Practice: An Interface or A Great Divide?* Tundra lugar del 4 al 9 de Agosto, 2019 en la Universidad Maynooth, en Irlanda.

The Mathematics Education for the Future Project was founded in 1986 as an international non-profit body to support and encourage innovation in mathematics, statistics, science and computer education. Since 1999 there have been 14 conferences throughout the world culminating in our Hungary Conference in September 2017, which was attended by 125 people from 22 countries. The conferences are renowned for their friendly and productive atmosphere and attract many of the *movers and shakers* in education world-wide.
The Full Preliminary Announcement and Call for Papers is now available atConference Documents and **Photo albums** of our last three conferences are athttps://alantrogerson.imgur.com/
Dr. Alan Rogerson **alan@cdnalma.poznan.pl**

Para mayores informaciones se pueden seguir los enlaces anteriores.



Del 4 al 6 de Julio de 2018 vamos a celebrar en Almería el XVII Congreso de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas cuyo lema es: “Matemáticas en tierra de cine”. El congreso se realizará en la Universidad de Almería. Es un espacio estupendo para conocer el trabajo que hacen algunos compañeros y para que des a conocer el que tú haces. En esta web publicaremos toda la información de este XVII CEAM, así como las distintas modalidades de inscripción para participar y presentar trabajos.

¡¡¡Os esperamos en Almería!!!

http://thales.cica.es/xviiceam/?q=node/10

Número

59

Revista Escolar
de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

Número 59 (enero – junio 2018)

ISSN – 1698-277X

VIII CIBEM Madrid 2017 CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ÍNDICE

Problema 291. Recibidas soluciones de: Florentino Damián Aranda Ballesteros, Córdoba, España; Andrea Fanchini, Cantú, Italia; Francisco Javier García Capitán, Priego de Córdoba, España; Ercole Suppa, Teramo, Italia y el proponente. **Presentamos la solución de Suppa.**

Problema 292. Recibidas soluciones de: Florentino Damián Aranda Ballesteros, Córdoba, España; Daniel Darío Góngora García, Lima, Perú; Paolo Perfetti, Universitá degli Studi Tor Vergata, Roma, Italia y el proponente. **Presentamos la solución de Aranda.**

Problema 293. Recibida la solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, Córdoba, España y del proponente. **Presentamos la solución de Aranda.**

Problema 294. Recibida la solución de Joaquim Nadal, Llagostera, España, que presentamos, y la de los proponentes.

Problema 295. Recibidas las soluciones de: Joaquim Nadal, Llagostera, España y Paolo Perfetti, Universitá degli Studi Tor Vergata, Roma, Italia, que presentamos. Excepcionalmente la publicamos en inglés, pues tanto la de los proponentes como la de Perfetti están escritas en ese idioma.

Reseña de Congresos, libros y páginas web 59

X Escuela de Educación Matemática "Miguel de Guzmán" La Laguna, Tenerife, España, 11 a 13 de julio de 2018

Divertimentos Matemáticos 59

En esta ocasión hacemos un llamamiento para que los lectores nos remitan materiales para esta sección. Nos parece que es una sección que cumple una interesante función y que puede ser un excelente momento para muchos lectores puedan iniciar su participación en la Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de matemática. Para mandar las propuestas pueden usar el correo revistaoim@oei.es

Otras informaciones 59

Actas del VIII CIBEM

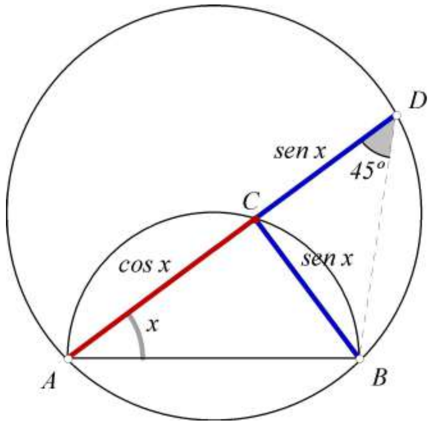
Realizado en el marco del **Instituto Iberoamericano de Enseñanza de las Ciencias y la Matemática (IBERCIENCIA)** con la colaboración de la **Consejería de Economía y Conocimiento de la Junta de Andalucía**

CÁLCULO DE EXTREMOS SIN DERIVADAS

Cristóbal Sánchez-Rubio García

Siguiendo la línea del artículo de Francisco Javier García Capitán del número 58 propongo 6 ejemplos de cálculo de extremos usando solamente recursos de geometría elemental

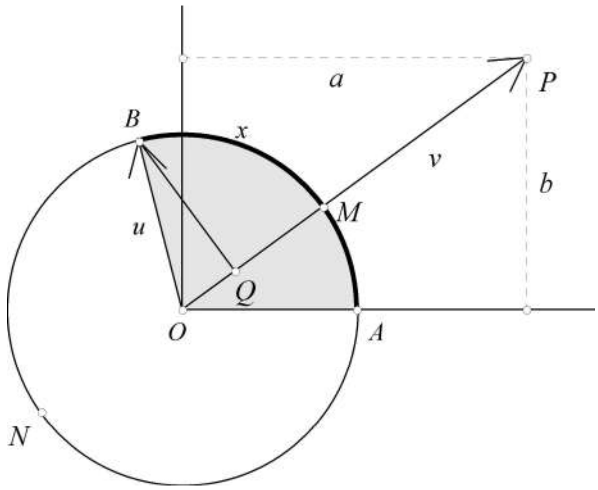
1.- Hallar el máximo de sen *x* + cos *x* en el primer cuadrante
Tomando un punto *C* sobre una semicircunferencia de diámetro $AB = 1$. La figura es muy clara, $\operatorname{sen} x + \cos x = AD$. *D* está en el arco capaz de 45º sobre *AB.*
El máximo se alcanza cuando la cuerda *AD* es un diámetro, entonces $x = 45^{\text{o}}$ y el valor máximo es $\sqrt{2}$.



2.- Extremos de $f(x) = a\cos x + b\operatorname{sen} x$ para *a*, *b* reales cualesquiera.
Si *B* recorre el círculo unidad de modo que $\angle AOB = x$, pongamos

$$\vec{u} = (\cos x, \operatorname{sen} x), \vec{v} = (a, b)$$

Usando el producto escalar



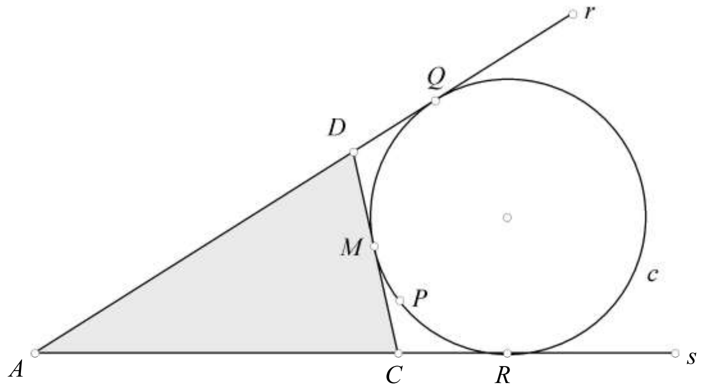
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = a\cos x + b\operatorname{sen} x = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\varphi = OP \cdot OQ$$

Siendo $\varphi = \angle BOQ$. (Los segmentos *OP* y *OQ* son orientados).

Como *OP* es fijo, el máximo se alcanza cuando *B* está en *M* y vale $\sqrt{a^2+b^2}$ y el ángulo del máximo cumple $\tan x = \frac{b}{a}$. Para el mínimo, *B* ha de estar en *N*. El valor de *x* es el anterior más 180º y el mínimo vale $-\sqrt{a^2+b^2}$.

3.- Dos rectas *r* y *s* secantes se cortan en *A*. *P* es un punto que no está en ninguna de las rectas. Trazar una recta que pase por *P* y determine con *r* y *s* un triángulo de perímetro mínimo.

Sea *c* la circunferencia que pasa por *P* y es tangente a *r* y a *s* en *Q* y *R*, Si *M* es un punto



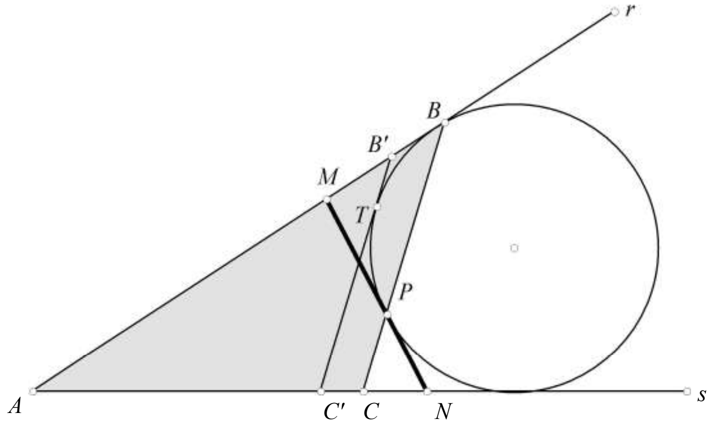
cualquiera del arco *QR*, las tangentes a *c* en *M* determinan triángulos de perímetro constante cuyo valor es 2*AQ*.

En efecto,

$$AD + AC + DC = AD + AC + DM + CM = AD + AC + DQ + CR = AQ + AR = 2AQ$$

Para una recta cualquiera pasando por *P* como *BC* si trazamos la paralela a *BC* tangente a *c* en *T* , obtenemos un triángulo *AB'C'* de perímetro claramente menor que el perímetro de *ABC* .

Basta entonces trazar la tangente a *c* en *P* para obtener el triángulo de perímetro mínimo.

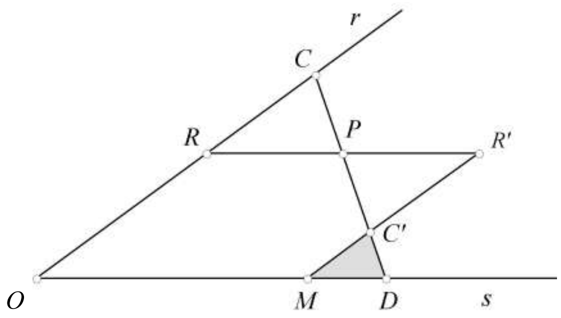


4.- Dos rectas *r* y *s* secantes se cortan en *O*. *P* es un punto que no está en ninguna de las rectas. Trazar una recta que pase por *P* y determine con *r* y *s* un triángulo de área mínima.

Pondremos como es habitual $[XYZ...]$ para designar el área del polígono de vértices $X, Y, Z, \ldots$

La figura está construida trazando la paralela por P a s que corta en R a r. CD es una recta cualquiera que pasa por P. Girando C y R 180º con centro en P obtenemos C' y R'. Finalmente M es la intersección de s con la paralela por R' a r.

Claramente se tiene



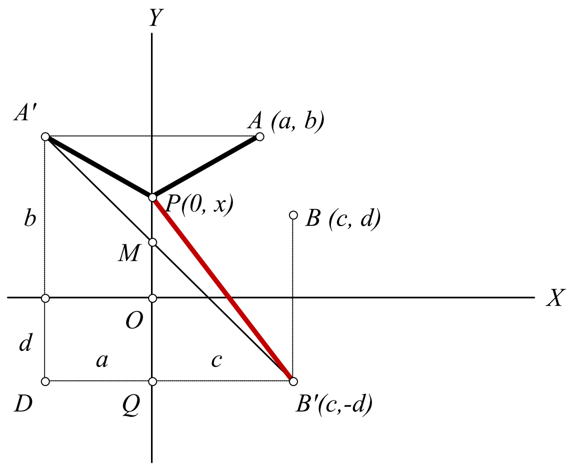
$$[OCD] = [OMR'R] + [MDC']$$

Como el área del paralelogramo $OMRR'$ es constante, el mínimo se alcanza cuando el área del triángulo MDC' es cero y eso sucede cuando D y C' coinciden con M. La recta MP es la buscada.

5.- Hallar el mínimo de $f(x) = \sqrt{a^2 + (b-x)^2} + \sqrt{c^2 + (d+x)^2}$ siendo a, b, c, d reales.

Sean $A(a,b), B(c,d)$, A' el simétrico de A respecto del eje de ordenadas, B' el simétrico de B respecto del eje de abscisas y finalmente $P(0,x)$ un punto sobre el eje de ordenadas a distancia x del origen.

Claramente:



$$AP = A'P = \sqrt{a^2 + (b-x)^2}, PB' = \sqrt{c^2 + (d+x)^2}$$

Por tanto, $f(x) = A'P + PB'$ será mínimo cuando APB' estén alineados.

El valor del mínimo se obtiene fácilmente por semejanza de las triángulos $A'DB'$ y MQB'. Si llamamos m a la ordenada de M resulta

$$\frac{m+d}{c}=\frac{b+d}{a+c}\Rightarrow m=\frac{bc-ad}{a+c}.$$

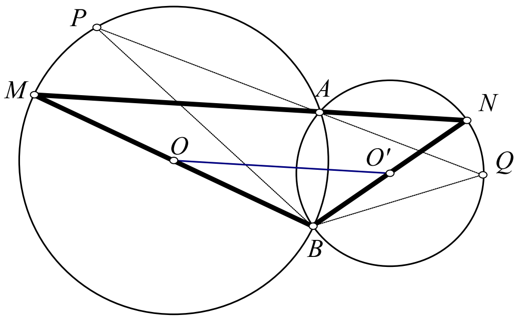
6.- Circunscribir a un triángulo dado *ABC* un triángulo equilátero de área máxima.

Como el triángulo es equilátero bastará conseguir que el lado tenga longitud máxima.

Esto nos lleva a una cuestión previa:

Por uno de los puntos de intersección de dos circunferencias secantes dadas trazar una recta que determine en ambas circunferencias cuerdas de suma máxima.

Para cualquier posición de la recta *PQ*, los ángulos del triángulo *PBQ* no cambian al estar dos de ellos inscritos en el arco *AB* fijo. Por tanto bastará asegurar que un lado cualquiera tenga longitud máxima. Eso se logra cuando los lados *PB* y *QB* son



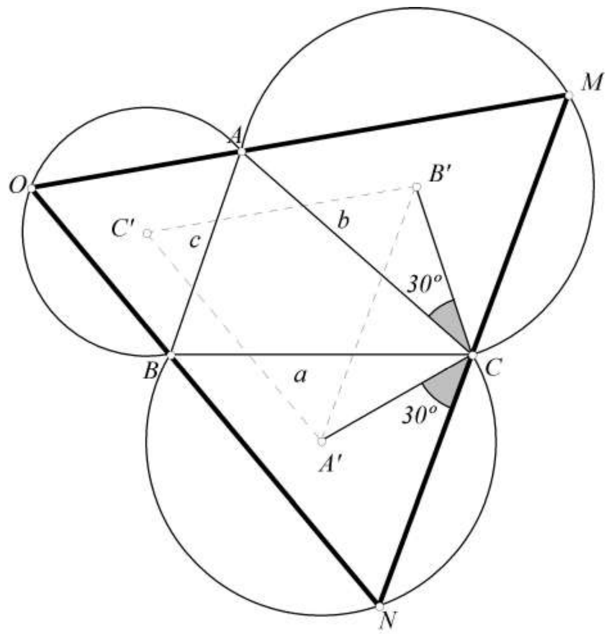
diámetros y entonces *PQ* es paralela a la línea que une los centros como muestra la figura en trazo grueso. La longitud de la recta que determina cuerdas de suma máximas es el doble de la distancia entre los centros de las circunferencias.

Ya podemos abordar el problema enunciado.

Es obvio que cada vértice ha de estar en el arco capaz de 60º construido sobre cada lado hacia el exterior.

Por tanto basta construir los tres arcos capaces y trazar por cada vértice la paralela a los centros de los arcos de los otros dos. Sus intersecciones con esos arcos nos darán los vértices del triángulo equilátero buscado.

Para hallar el área máxima en función de los datos del triángulo *ABC*,



tenemos claramente,

$$CA' = \frac{\sqrt{3}}{3}a, CB' = \frac{\sqrt{3}}{3}b$$

Además, los ángulos sombreados valen 30º, aplicando el teorema del coseno al triángulo *B'CA'*, resulta

$$A'B'^2 = \frac{a^2 + b^2 - 2ab\cos(60^\circ + C)}{3}$$

Finalmente,

$$[NMO] = 4[A'B'C'] = 4\frac{\sqrt{3}}{4}A'B'^2 = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(a^2 + b^2 - 2ab\cos(60^\circ + C)\right)$$

Además hemos probado que la expresión

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos(60^\circ + C)$$

es invariante para permutaciones cíclicas del los vértices.

Una nueva demostración sencilla de la desigualdad de Blundon

Por *Marius Drăgan*, Bucarest, Rumania
y
***Neculai Stanciu*, Buzău, Rumania**

Sea ABC un triángulo con longitudes de los lados a, b y c, semiperímetro p, circumradio R e inradio r.

La desigualdad de *Blundon* (véase W.J. Blundon - *Inequalities associated with the triangle*, Can. Math. Bull **8** (1965), pp. 615-626) es

$$2R^2 + 10Rr - r^2 - 2\sqrt{R(R-2r)^3} \le p^2 \le 2R^2 + 10Rr - r^2 + 2\sqrt{R(R-2r)^3}, \quad \text{(B)}.$$

.Sea *x>0.*

Llamamos $y = \dfrac{tg\frac{B}{2}}{tg\frac{A}{2}}x$, $z = \dfrac{tg\frac{C}{2}}{tg\frac{A}{2}}x$. Usando la formula

$tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2} + tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2} + tg\frac{C}{2}tg\frac{A}{2} = 1$, tenemos $xy + yz + zx = \dfrac{x^2}{\tan^2\frac{A}{2}}$, luego

$$tg\frac{A}{2} = \frac{x}{\sqrt{\sum_{cyc} xy}}, \; tg\frac{B}{2} = \frac{y}{\sqrt{\sum_{cyc} xy}}, \; tg\frac{C}{2} = \frac{z}{\sqrt{\sum_{cyc} xy}}.$$

Sean $\sigma_1 = x + y + z$, $\sigma_2 = xy + yz + zx$, $\sigma_3 = xyz$, $t = \sqrt{\sigma_2}$.

Mediante $\sum_{ciclic} tg\frac{A}{2} = \frac{4R+r}{p}$, $\prod_{ciclic} tg\frac{A}{2} = \frac{r}{p}$, deducimos

$$\sigma_1 = t\sum_{ciclic} tg\frac{A}{2} = \frac{t(4R+r)}{p}, \; \sigma_2 = t^2, \; \sigma_3 = t^3 \cdot \frac{r}{p}.$$

Por lo tanto, x, y y z son las raícess de la ecuación $u^3 - \sigma_1 u^2 + \sigma_2 u - \sigma_3 = 0$.

Por *Cardano-Tartaglia* (ver G. Stoica, *Asupra unui tip de inegalități*, Romanian Mathematical Gazette, no. 1, 2016, pp. 7-9) se tiene $18\sigma_1\sigma_2\sigma_3 - 4\sigma_1^3\sigma_3 + \sigma_1^2\sigma_2^2 - 4\sigma_2^3 - 27\sigma_3^2 \ge 0$.

Entonces obtenemos $(p^2)^2 - 2(2R^2 + 10Rr - r^2)p^2 + r(4R+r)^3 \le 0$ ($\Delta = 16R(R-2r)^3$)

$\Leftrightarrow \left| p^2 - 2R^2 - 10Rr + r^2 \right| \le 2\sqrt{R(R-2r)^3}$, i.e. (B), y la demostración termina.

<u>Problemas para los más jóvenes 59</u>

Cinco problemas de pasadas Olimpiadas Balcánicas junior

Problema MJ59-1 (Propuesto por Albania)

Hallar todos los pares (x,y) de enteros positivos tales que $x^y = y^{x-y}$

Problema MJ59-2 (Propuesto por Grecia)

En el triángulo ABC los lados AC y AB son iguales. Sea D un punto del lado BC tal que BC>BD>DC>0. Se consideran las circunferencias k_1 y k_2 circunscritas respectivamente a los triángulos ABD y ADC. Sea M el punto medio de B'C', donde BB' y CC' son diámetros de k_1 y k_2 , respectivamente.

Probar que el área del triángulo MBC no depende de la posición del punto D.

Problema MJ59-3 (propuesto por Yugoslavia)

Un polígono convexo de 1415 lados tiene un perímetro de 2001 cm. Probar que existen tres vértices de este polígono que forman un triángulo cuya área es menor que 1 cm^2.

Problema MJ59-4 (Propuesto por Chipre)

Sean *a,b,c,x,y* números reales tales que

$$a^3+ax+y=0,\ b^3+bx+y=0,\ c^3+cx+y=0.$$

Probar que si *a, b y c* son números reales distintos y no nulos, entonces

$$a+b+c=0.$$

Problema MJ59-5 (Propuesto por Bulgaria)

Nueve puntos están dentro de un cuadrado unidad. Probar que tres de ellos son los vértices de un triángulo cuya área es mayor que 1/8.

Problemas de nivel medio y de Olimpiadas 59

Problemas de la Olimpiada Asia-Pacífico 2016

Problema APMO2016-1

Se dice que el triángulo ABC es *grande* si se cumple la siguiente condición: Para cualquier punto D en el lado BC, si P y Q son los pies de las perpendiculares desde D a las rectas AB y AC, respectivamente, entonces el simétrico de D respecto de la recta PQ está en el circuncírculo del triángulo ABC.

Probar que el triángulo ABC es grande si y sólo si el ángulo A es de 90º y AB = AC.

Problema APMO2016-2

Un entero positivo es *bonito* si puede expresarse en la forma

$$2^{a_1}+2^{a_2}+\cdots+2^{a_{100}},$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ son enteros no negativos no necesariamente distintos.

Hallar el menor entero positivo n tal que ninguno de sus múltiplos es un número *bonito.*

Problema APMO2016-3

Sean AB y AC dos semirrectas distintas que no están en la misma recta, y sea ω una circunferencia de centro O que es tangente a la semirrecta AC en el punto E y a la semirrecta AB en F. Sea R un punto del segmento EF. La recta por O paralela a EF corta a la recta AB en P. Sea N la intersección de las rectas PR y AC, y sea M la intersección de la recta AB con la recta por R paralela a AC.

Demostrar que la recta MN es tangente a ω.

Problema APMO2016-4

El país Encantado tiene 2016 ciudades. La compañía aérea Starways quiere establecer algunos vuelos de un solo sentido entre pares de ciudades, de tal manera que cada ciudad tenga exactamente un vuelo que despegue de su aeropuerto. Hallar el menor entero positivo k tal que, independientemenet de cómo Starways establezca sus vuelos, las ciudades pueden siempre dividirse en k grupos de modo que desde cualquier ciudad no sea posible llegar a otra ciudad del mismo grupo tomando a lo sumo 28 vuelos.

Problema APMO2016-5

Hallar todas las funciones $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ tales que

$$(z+1)f(x+y) = f(xf(z)+y) + f(yf(z)+x)\,,$$

cualesquiera que sean los números reales positivos x,y,z.

Problemas propuestos 296-300

Problema 296 (propuesto por D.M.Batinetzu-Giurgiu, Bucarest, y Neculai Stanciu, Buzau, Rumania).

Sean $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}, a \in \mathbb{R}, b, c, d, m, p \in \mathbb{R}_+^*, k = \overline{1,n}, X_{n,m} = \sum_{k=1}^{n} x_k^m$, $X_{n,p} = \sum_{k=1}^{n} x_k^p$, tal que $c \cdot X_{n,p} > d \cdot \max\limits_{1 \le k \le n} x_k^p$.

Demostrar que $\sum_{k=1}^{n} \frac{a \cdot X_{n,m} + b \cdot x_k^m}{c \cdot X_{n,p} - d \cdot x_k^p} \ge \frac{n \cdot (an+b)}{cn-d} \cdot \frac{X_{n,m}}{X_{n,p}}$.

Problema 297 (propuesto por Florin Stanescu, Gaesti, Rumania).

Sean *a,b,c* números complejos distintos, de módulo 1, tales que

$$|a-b|^2 + |b-c|^2 + |c-a|^2 > 8 .$$

Demostrar que se verifica la siguiente desigualdad:

$$\prod_{cicl} \left(\frac{\sqrt{\left(2 + \left|a^2 + bc\right|\right)}}{\left|(a+b)\right|} \right) \ge 8 \cdot \left(\sum_{cicl} \frac{1}{\left|(a-b)(b-c)\right|} \right).$$

Problema 298 (Propuesto por Pedro H.O. Pantoja, Natal, Brasil)

Calcular

$$\int_0^{\pi/4} \log\left(\frac{1+\tan x}{\cos^4 x - \sin^4 x} \right) dx .$$

Problema 299 (propuesto por Laurentiu Modan, Bucarest, Rumania)

i) Se considera la función afín *f*, determinada por los puntos M(0,4) y N(2,k). Si x_A es el punto de intersección de la gráfica de *f* con el eje Ox, hallar $k \in \mathbb{R}$ de manera que *f* pueda ser una función de densidad de una variable aleatoria *x*, en el intervalo $[0, x_A]$.

ii) Calcular la probabilidad $p = P\Big((x \ge 1/8) \Big| \big(|x| < 1/4\big)\Big)$.

iii) Escribir en orden creciente: *p,* la probabilidad de obtener la suma 8 cuando se lanzan 2 dados, y, respectivamente, la probabilidad de disponer 3 libros en 3 estantes, de modo que 2 de ellos estén en el primer estante.

Problema 300 (propuesto por el editor)

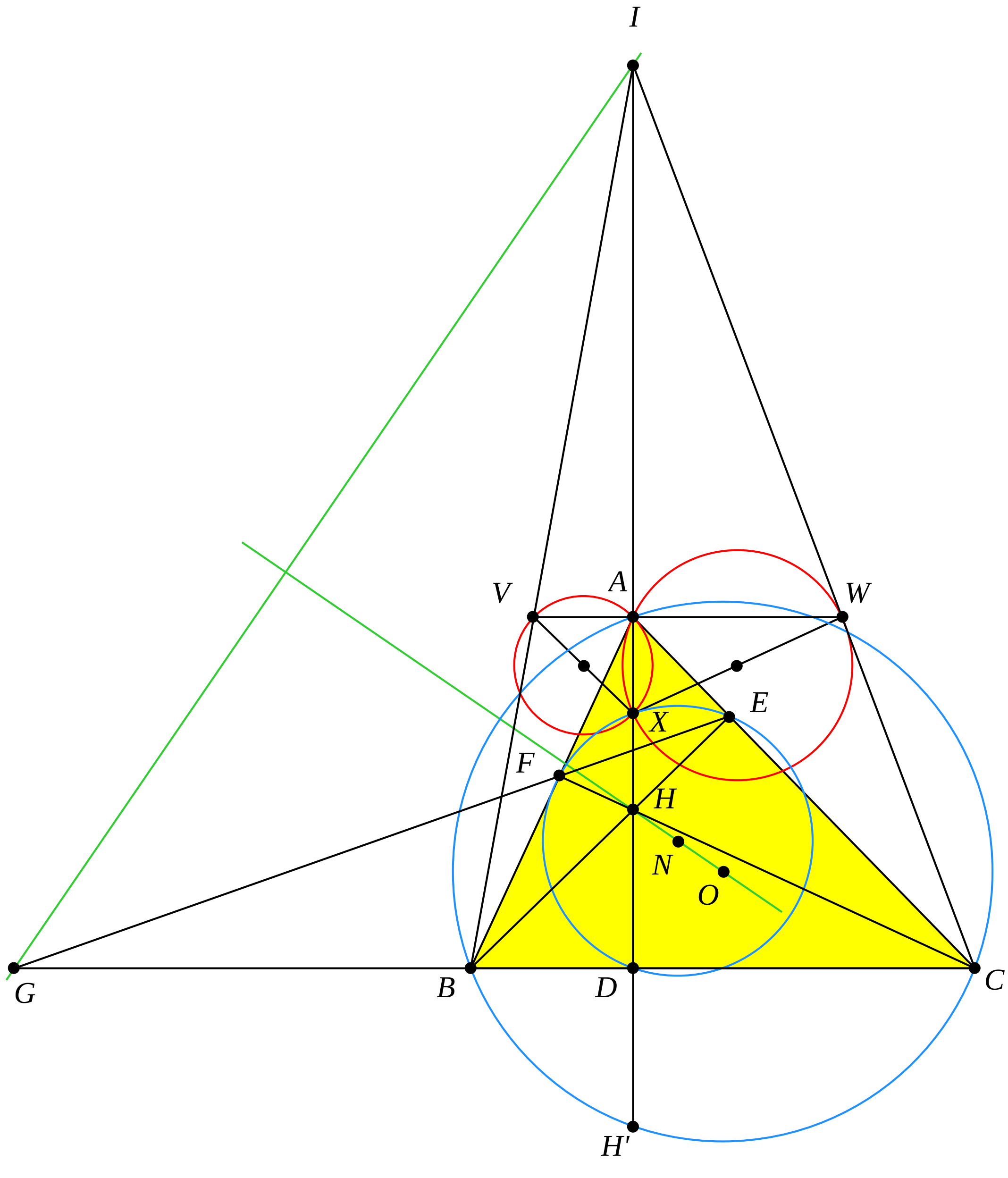
OAB y OCD son dod rectas que se cortan. Las circunferencias (OAC) y (OBD) se cortan nuevamente en P, y las circunferencias (OBC) y (OAD) se cortan nuevamente en Q. La circunferencia (OPQ) corta a la recta OAB en otro punto R, y a la recta (OCD) en S.

Demostrar que R es el punto medio de AB y S el punto medio de CD.

Problem 291. *ABC es un triángulo acutángulo con circuncentro O y ortocentro H. El punto medio de AH es X. Sean E y F los pies de las alturas desde B y C, respectivamente. XV es un diámetro de una circunferencia que pasa por A y X, y es tangente a la recta AC. Una segunda circunferencia que pasa por A y X y es tangente a la recta AB, tiene a XW como diámetro. Suponiendo que se pueden construir los puntos $G = EF \cap BC$, $I = BV \cap CW$, demostrar que las rectas GI y OH son perpendiculares.*

Propuesto por Andrés Sáez Schwedt, Universidad de León, España

Solución de Ercole Suppa. Sea D el pie de la altura trazada desde A sobre BC, sea H' el punto de intersección (distinto de A) de la recta AH con la circunferencia circunscrita (O) y sea N el punto medio de OH, como se indica en la figura.



Recordamos en primer lugar dos resultados clásicos

- N es el centro de la circunferencia de los nueve puntos que pasa por D, E, F;
- el punto H' es el simétrico de H respecto a BC.

Volviendo al problema, para probar que GI y OH son perpendiculares nos basta demostrar que GI es el eje radical de (O) y (N): de hecho, se sigue que $GI \perp ON$ y por lo tanto $GI \perp OH$, dado que O, N, H están alineados.

Proposición 1. El punto G tiene la misma potencia respecto de las circunferencias (O) y (N).

De hecho, en el cuadrilátero cíclico $BCEF$ tenemos:

$$GB \cdot GC = GF \cdot GE$$

Proposición 2. El punto I tiene la misma potencia respecto de las circunferencias (O) y (N).

Si denotamos los ángulos $\angle ABC$ e $\angle ACB$ respectivamente con β y γ tenemos

$$\angle BHC = \angle BHD + \angle DHC = \gamma + \beta$$

Además, dado que AC es tangente a $\odot(AVX)$ y AB es tangente a $\odot(AXW)$, también tenemos

$$\begin{aligned}
&\angle XVW = \angle XVA = \angle XAC = 90^\circ - \gamma = \angle HBC \\
&\angle XWV = \angle XWA = \angle XAB = 90^\circ - \beta = \angle HCB \\
&\angle VXW = 180^\circ - \angle XVA - \angle XWA = 180^\circ - (90^\circ - \gamma) - (90^\circ - \beta) = \beta + \gamma = \angle BHC
\end{aligned}$$

de lo cual se deduce que los triángulos $\triangle XVW$ y $\triangle HBC$ son semejantes.

Por lo tanto, teniendo en cuenta que $VW \parallel BC$ e $\triangle XVW \sim \triangle HBC$, tenemos:

$$\begin{gathered}
\frac{AX}{HD} = \frac{VA}{BD} = \frac{IA}{ID} \quad \Rightarrow \\
AX \cdot ID = IA \cdot HD = IA \cdot DH' \quad \Rightarrow \\
AX \cdot ID + IA \cdot ID = IA \cdot DH' + IA \cdot ID \quad \Rightarrow \\
ID \cdot (IA + AX) = IA \cdot (ID + DH') \quad \Rightarrow \\
IX \cdot ID = IA \cdot IH'
\end{gathered}$$

entonces el punto I tiene la misma potencia respecto de (N) y (O).

Como G y I tienen la misma potencia respecto de (N) y (O), se deduce que IG es el eje radical de (N) y (O) y así hemos terminado. $\square$

Problema 292, propuesto por Leonard Giugiuc, Rumania.

Resolver en el siguiente sistema en R^4:

$$\begin{cases} \boldsymbol{ab+bc+cd+da+ac+bd=6} \\ \boldsymbol{abc+abd+acd+bcd=2\sqrt{2}} \\ \boldsymbol{a+b+c+d=\sqrt{2}(3+abcd)} \end{cases}$$

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba (España).

En primer lugar, observamos que las soluciones reales del sistema se corresponderán con las soluciones reales de la ecuación $q(x)=0 \to q(x)=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$. Desarrollamos esta ecuación, $q(x)=0$:

$x^4-(a+b+c+d)x^3+(ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^2-(abc+abd+acd+bcd)x+abcd=0 \quad (I)$

Sustituyendo las expresiones literales por sus valores, obtenemos:

$x^4-\sqrt{2}(3+abcd)x^3+6x^2-2\sqrt{2}\,x+abcd=0$

Si llamamos $p=abcd$, la ecuación se podrá expresar como: $x^4-\sqrt{2}(3+p)x^3+6x^2-2\sqrt{2}\,x+p=0$

En definitiva, $q(x)=x^4-\sqrt{2}(3+p)x^3+6x^2-2\sqrt{2}\,x+p$.

Consideramos las siguientes funciones reales de variable real:

$f(x)=x^4+6x^2-2\sqrt{2}\,x;\ \ g(x)=\sqrt{2}(3+p)x^3-p\,. \qquad p\in R$

Observamos que $q(x)=0 \leftrightarrow f(x)=g(x)$. Estudiamos ambas funciones.

$f(x)=x^4+6x^2-2\sqrt{2}\,x \to f'(x)=4x^3+12x-2\sqrt{2} \to f''(x)=12x^2+12>0$

Por tanto, la función $y=f(x)$ es siempre cóncava y no presenta ningún punto de Inflexión.

Como quiera que $f(0)=0\ \ y\ \ f'(0)<0 \to x_1=0$ es una raíz de $f(x)=0$ y además ha de existir una segunda raíz $x_2>0$ tal que $f(x_2)=0$.

Por tanto, $y=f(x)$ alcanzará su mínimo absoluto en su punto mínimo local

$M\big(x_m, f(x_m)\big),\ \ siendo\ \ x_1=0<x_m<x_2$.

Sea ahora la función $g(x)=\sqrt{2}(3+p)x^3-p$.

Para el valor de $p=-3 \to g(x)=3$ presenta sólo 2 puntos de corte con la gráfica de $y=f(x)$.

Por tanto, para este valor de p, no pueden existir 4 soluciones reales de la ecuación (I), ya que si así fuera deberían existir entonces 4 puntos de corte entre ambas funciones.

Para los valores de $p\neq -3 \to y=g(x)$ presenta un Punto de Inflexión en $A(0,-p)$.

Por tanto, si $p\neq -3$, las gráficas siempre se cortan en al menos 2 Puntos de corte $B_1\ \ y\ \ B_2$. Sólo cambiaría esta situación cuando alguno de los puntos B_i fuera de contacto con las tangentes correspondientes en ambas funciones. Y si esto ocurriese entonces sí existirían soluciones reales múltiples.

Como quiera que $x=0$ siempre estaría presente, pero como no puede ser múltiple ya que $f'(0)\neq 0$, la única posibilidad sería que $q(x)=x(x-x_2)^3$

Desarrollando esta expresión e igualando coeficientes, obtenemos:

$q(x)=x(x-x_2)^3=x^4-3x_2x^3+3x_2^2x^2-x_2^3x=x^4-\sqrt{2}(3+p)x^3+6x^2-2\sqrt{2}\,x+p$

$$\begin{cases} -3x_2=-\sqrt{2}(3+p) \\ 3x_2^2=6 \\ -x_2^3=-2\sqrt{2} \\ 0=p \end{cases} \to \begin{cases} x_2=\sqrt{2} \\ p=0 \end{cases}$$

Por tanto, solamente en este caso, pueden existir 4 soluciones reales: $\{x_1=0\ (simple) y\ \ x_2=\sqrt{2}\ (triple)\}$.

Por fin, las soluciones del sistema anterior serían:

Casos	a	b	c	d
Sol_1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	0
Sol_2	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$
Sol_3	$\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
Sol_4	0	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$

Problema 293, propuesto por Laurentiu Modan, Bucarest, Rumanía.

Se consideran los sucesos A y B que cumplen las condiciones siguientes:
$p(\bar{A}-\bar{B})=\frac{1}{2};\ \ p(\bar{B}-\bar{A})=\frac{1}{4}; p(A\cap B)=\frac{1}{4}; p(A/B)=p(A),$
donde $\bar{A}\ y\ B$ son los sucesos complementarios respectivos.
Calcular las probabilidades $p(A), p(B) y\ p(A\cup B)$.

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba (España).

El problema no tiene solución y que con los datos dados:

$$p(\bar{A}-\bar{B})=p\left(\bar{A}\cap\bar{\bar{B}}\right)=p(\bar{A}\cap B)=\frac{1}{2}$$

$$p(\bar{B}-\bar{A})=p\left(\bar{B}\cap\bar{\bar{A}}\right)=p(\bar{B}\cap A)=\frac{1}{4}$$

$$p(A\cap B)=\frac{1}{4}$$

Por tanto,

$$p(A\cup B)=\ p(\bar{A}\cap B)+p(\bar{B}\cap A)+p(A\cap B)=1$$

$$p(A)=p(\bar{B}\cap A)+p(A\cap B)=\frac{1}{2}$$

$$p(B)=p(\bar{A}\cap B)+p(A\cap B)=\frac{3}{4}$$

$$p(A/B)=p(A)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}\rightarrow p(A)p(B)=\frac{1}{4}\rightarrow Absurdo$$

Problema 294 *(Propuesto por Marius Dragan y Neculai Stanciu. Rumania)*

Sea ABCD un cuadrilátero bicéntico de inradio r, circumradio R y diagonales p y q

Demostrar que $\frac{R^2}{r^2} \geq \frac{(p^3+q^3)\cdot(p+q)}{2p^2q^2}$

Solución: (propuesta por Joaquim Nadal Vidal. Llagostera . Girona)

Si ABCD es inscribible en una circunferencia de radio R es claro que A+C = B+D = 180º

Considerando los triángulos ABC y ABD inscritos, es conocido que AC = 2R Sen B y BD = 2R Sen A

Tenemos pues p = 2r Sen B y q = 2r Sen A ,

Con esto deberemos probar que $\frac{R^2}{r^2} \geq \frac{(Sen^3A+Sen^3B)\,(Sen\,A+Sen\,B)}{2\,Sen^2A\cdot Sen^2B}$;

Si I es el incentro AI , BI , CI, DI son las bisectrices interiores de A, B, C y D

AB = r (Cotan $\frac{A}{2}$ + Cotan $\frac{B}{2}$) ; BC = r (Cotan $\frac{B}{2}$ + Cotan $\frac{C}{2}$) ; CD = r (Cotan $\frac{C}{2}$ + Cotan $\frac{D}{2}$) ; DA = r (Cotan $\frac{D}{2}$ + Cotan $\frac{A}{2}$)

Siendo A+C = 180, $\frac{A}{2}+\frac{B}{2}$ ===> Cotan $\frac{C}{2} = Tan\ \frac{A}{2}$; Identicamente Cotan $\frac{D}{2} = Tan\ \frac{B}{2}$ ===>

AB = r (Cotan $\frac{A}{2}$ + Cotan $\frac{B}{2}$) ; BC = r (Cotan $\frac{B}{2}$ + Tan $\frac{A}{2}$) ; CD = r (Tan $\frac{A}{2}$ + Tan $\frac{B}{2}$) ; DA = r (Tan $\frac{B}{2}$ + Cotan $\frac{A}{2}$)

$AC^2 = 4R^2sen^2B = BA^2 + BC^2 - 2\cdot BA\cdot BC\cdot Cos\ B$

$BD^2 = 4R^2sen^2A = AB^2 + AD^2 - 2\cdot AB\cdot AD\cdot Cos\ A$

$4R^2sen^2B = r^2\cdot\left[\left(\text{Cotan }\frac{A}{2}+\text{Cotan }\frac{B}{2}\right)^2+\left(\text{Cotan }\frac{B}{2}+\text{Tan }\frac{A}{2}\right)^2-2\cdot\left(\text{Cotan }\frac{A}{2}+\text{Cotan }\frac{B}{2}\right)\cdot\left(\text{Cotan }\frac{B}{2}+\text{Tan }\frac{A}{2}\right).Cos\ B\right]$

$4R^2sen^2A = r^2\cdot\left[\left(\text{Cotan }\frac{A}{2}+\text{Cotan }\frac{B}{2}\right)^2+\left(\text{Tan }\frac{B}{2}+\text{Cotan }\frac{A}{2}\right)^2-2\cdot\left(\text{Cotan }\frac{A}{2}+\text{Cotan }\frac{B}{2}\right)\cdot\left(\text{Tan }\frac{B}{2}+\text{Cotan }\frac{A}{2}\right).Cos\ A\right]$

Aislando $\frac{R^2}{r^2}$ de ambas, igualando y operando nos queda

$$\left[\left(\text{Cotan }\frac{A}{2}+\text{Cotan }\frac{B}{2}\right)^2+\left(\text{Cotan }\frac{B}{2}+\text{Tan }\frac{A}{2}\right)^2-2\cdot\left(\text{Cotan }\frac{A}{2}+\text{Cotan }\frac{B}{2}\right)\cdot\left(\text{Cotan }\frac{B}{2}+\text{Tan }\frac{A}{2}\right).Cos\ B\right]\cdot sen^2A =$$

$$\left[\left(\text{Cotan }\frac{A}{2}+\text{Cotan }\frac{B}{2}\right)^2+\left(\text{Tan }\frac{B}{2}+\text{Cotan }\frac{A}{2}\right)^2-2\cdot\left(\text{Cotan }\frac{A}{2}+\text{Cotan }\frac{B}{2}\right)\cdot\left(\text{Tan }\frac{B}{2}+\text{Cotan }\frac{A}{2}\right).Cos\ A\right]\cdot sen^2B$$

Esta igualdad se verifica en dos casos: cuando A = B y cuando A+B = 180

En el segundo caso $\frac{A}{2}+\frac{B}{2} = 90$ *y por tanto* Cotan $\frac{A}{2} = Tan\ \frac{B}{2}$ y Cotan $\frac{B}{2}$ = Tan $\frac{A}{2}$

Tanto si A y B son iguales como si son suplementarios se obtiene con facilidad al operar que $\frac{R^2}{r^2} = \frac{1+Sen^2A}{Sen^4A}$

Con esto la desigualdad del enunciado quedaría así:

Probar que $\frac{1+Sen^2A}{Sen^4A} \geq \frac{2\,Sen^3A\cdot 2\,Sen\,A}{2\,Sen^4A}$ es decir **probar que** $\boldsymbol{\frac{1+Sen^2A}{Sen^4A} \geq 2}$

Para ello veremos que $1 + Sen^2A - 2\,Sen^4A \geq 0$; si Sen A = x ∈ $[0,1]$ tenemos la función

F(x) = 1 + x^2- $2x^4$ ===> F'(x) = 2x -8x^3 = 0 ===> x = 0 y x = $\frac{1}{2}$

De 0 a ½ F crece y de ½ a 1 F decrece ; siendo F(0) = 1 ; F(1/2) = 9/8 y F(1) = 0

Tenemos que F(x) ≥ 0 y así terminamos

Proposed solution of problem 295, 58 (2018)

Dear Editor of "Rivista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática", I would like to submit the following solution of problem 295

Sean $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ *sucesiones de números reales positivos tale que* $b_n = a_1 \cdot \sqrt{a_2} \cdot \sqrt[3]{a_3} \cdots \sqrt[n]{a_n}$ *y* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n \cdot n} = a$. *Calcular* $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)^2}{b_{n+1}} - \frac{n^2}{\sqrt[n]{b_n}} \right)$

As stated the limit equals $-\infty$.

By definition, there exists n' such that $n > n'$ implies $2an \geq \frac{a_{n+1}}{a_n} > na/2$. This in turn implies

$$\frac{a_{n+1}}{a_{n'}} = \frac{a_{n+1}}{a_n}\frac{a_n}{a_{n-1}}\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_{n'+1}}{a_{n'}} \geq \left(\frac{a}{2}\right)^{n+1-n'} \frac{n!}{(n'-1)!}$$

and

$$\frac{a_{n+1}}{a_{n'}} \leq (2a)^{n+1-n'} \frac{n!}{(n'-1)!}$$

We get

$$b_n = \underbrace{a_1 \cdot \sqrt{a_2} \cdot \sqrt[3]{a_3} \cdots \sqrt[n']{a_{n'}}}_{\doteq A} \prod_{k=n'+1}^{n} \left(\frac{a}{2}\right)^{1+\frac{1}{k}-\frac{n'}{k}} \prod_{k=n'+1}^{n} \frac{k!^{\frac{1}{k}}}{((n'-1)!)^{\frac{1}{k}}}$$

We know that $C_1 \ln n \leq \sum_{k=k_0}^{n} \frac{1}{k} \leq C_2 \ln n$ where C_1, C_2 depends of k_0. Thus

$$\prod_{k=n'+1}^{n} \left(\frac{a}{2}\right)^{1+\frac{1}{k}-\frac{n'}{k}} \geq \left(\frac{a}{2}\right)^{n-n'+C(1-n')\ln n} \doteq B_n$$

where $C = C_1$ if $a < 1$ and $C = C_2$ otherwise.

$$\prod_{k=n'+1}^{n} \frac{1}{((n'-1)!)^{\frac{1}{k}}} \geq \frac{1}{(n'-1)^{C_2 \ln n}} \doteq C_n$$

$$\prod_{k=n'+1}^{n} k!^{\frac{1}{k}} \geq \prod_{k=n'+1}^{n} k = \frac{n!}{n'!}$$

The consequence is

$$\frac{(n+1)^2}{b_{n+1}} \leq \frac{(n+1)^2(n'!)}{AB_nC_nn!} \to 0$$

On the other hand it is not difficult to show that $n^2/\sqrt[n]{b_n} \to +\infty$ so the whole limit would be equal to $-\infty$. May be the true limit is

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^2}{\sqrt[n+1]{b_{n+1}}} - \frac{n^2}{\sqrt[n]{b_n}}\right) \tag{1}$$

To prove the divergence of $n^2/\sqrt[n]{b_n}$ we employ Cesaro–Stolz theorem by writing

$$\frac{n^2}{\sqrt[n]{b_n}} = \frac{(n^{2n})^{\frac{1}{n}}}{(b_n)^{\frac{1}{n}}} \tag{2}$$

so we come to the study of the limit

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{2n}(n+1)^2}{n^{2n}}\frac{b_n}{b_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} e^2\frac{(n+1)^2}{\sqrt[n+1]{a_{n+1}}}$$

We know that

$$\prod_{k=n'+1}^{n}(2a)^{1+\frac{1}{k}-\frac{n'}{k}} \leq (2a)^{n-n'+C'(1-n')\ln n} \doteq B'_n$$

where $C = C_1$ if $a > 1$ and $C = C_2$ and

$$\prod_{k=n'+1}^{n}\frac{1}{((n'-1)!)^{\frac{1}{k}}} \leq \frac{1}{(n'-1)^{C_1\ln n}} \doteq C'_n$$

It follows

$$\frac{(n+1)^2}{b_{n+1}} \geq \frac{(n+1)^2}{\sqrt[n+1]{AB'_nC'_nn!}}$$

Now

$$\sqrt[n+1]{AB'_nC'_n} \to 2a$$

while

$$\frac{(n+1)^2}{\sqrt[n+1]{n!}} \to +\infty$$

and this may be seen by using Cesaro–Stolz again.

$$\frac{(n+1)^2}{\sqrt[n+1]{n!}} = \left(\frac{(n+1)^{2(n+1)}}{n!}\right)^{\frac{1}{n+1}}$$

and we consider

$$\frac{(n+2)^{2(n+2)}}{(n+1)^{2(n+1)}}\frac{(n+1)!}{n!} \to +\infty$$

The divergence of the quality in (2) is proven.

Now we come back to (1) by writing

$$\left(\frac{(n+1)^2}{\sqrt[n+1]{b_{n+1}}} - \frac{n^2}{\sqrt[n]{b_n}}\right) = \frac{n^2}{n\sqrt[n]{b_n}} \frac{\frac{(n+1)^2}{n^2}\frac{\sqrt[n]{b_n}}{\sqrt[n+1]{b_{n+1}}} - 1}{\ln\left(\frac{(n+1)^2}{n^2}\frac{\sqrt[n]{b_n}}{\sqrt[n+1]{b_{n+1}}}\right)} \ln\left(\frac{(n+1)^2}{n^2}\frac{\sqrt[n]{b_n}}{\sqrt[n+1]{b_{n+1}}}\right)^n \tag{3}$$

To compute the limit of (3) we employ Cesaro–Stolz.

First limit.

$$\frac{n^2}{n\sqrt[n]{b_n}} = \left(\frac{n^n}{b_n}\right)^{1/n}$$

$$\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}\frac{b_n}{b_{n+1}} = \underbrace{\frac{(n+1)^n}{n^n}}_{\to e}\frac{n+1}{\sqrt[n+1]{a_{n+1}}}$$

Moreover

$$\frac{n+1}{\sqrt[n+1]{a_{n+1}}} = \left(\frac{(n+1)^{n+1}}{a_{n+1}}\right)^{\frac{1}{n+1}}$$

and then we pass to

$$\frac{(n+2)^{n+2}}{(n+1)^{n+1}}\frac{a_{n+1}}{a_{n+2}} = \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}\frac{(n+2)a_{n+1}}{a_{n+2}} \to \frac{e}{a} \implies \left(\frac{n^n}{b_n}\right)^{1/n} \to \frac{e}{a} \tag{4}$$

Second limit.

$$\frac{\sqrt[n]{b_n}}{\sqrt[n+1]{b_{n+1}}} = \frac{\sqrt[n]{b_n}}{\sqrt[n]{b_{n+1}}} b_{n+1}^{\frac{1}{n(n+1)}}$$

$$(AB_nC_nn!)^{\frac{1}{n(n+1)}} \le b_{n+1}^{\frac{1}{n(n+1)}} \le (AB'_nC'_nn!)^{\frac{1}{n(n+1)}} \implies b_{n+1}^{\frac{1}{n(n+1)}} \to 1$$

As for $\dfrac{\sqrt[n]{b_n}}{\sqrt[n]{b_{n+1}}}$ we pass to

$$\frac{b_{n+1}}{b_{n+2}}\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a_{n+1}^{\frac{1}{n+1}}}{a_{n+2}^{\frac{1}{n+2}}} = \frac{a_{n+1}^{\frac{1}{n+1}}}{a_{n+2}^{\frac{1}{n+1}}}\underbrace{a_{k+2}^{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}}_{\to 1}$$

Again Cesaro–Stolz for $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}^{\frac{1}{n+1}}}{a_{n+2}^{\frac{1}{n+1}}}$

$$\frac{a_{k+2}}{a_{k+3}}\frac{a_{k+2}}{a_{k+1}} = \frac{ka_{k+2}}{a_{k+3}}\frac{a_{k+2}}{ka_{k+1}} \to 1$$

This implies that $\dfrac{\sqrt[n]{b_n}}{\sqrt[n]{b_{n+1}}} \to 1$ and then

$$\frac{\frac{(n+1)^2}{n^2}\frac{\sqrt[n]{b_n}}{\sqrt[n+1]{b_{n+1}}} - 1}{\ln\left(\frac{(n+1)^2}{n^2}\frac{\sqrt[n]{b_n}}{\sqrt[n+1]{b_{n+1}}}\right)} \to 1 \tag{5}$$

Third limit.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^2}{n^2}\frac{\sqrt[n]{b_n}}{\sqrt[n+1]{b_{n+1}}}\right)^n \doteq (6)$$

$$\left(\frac{\sqrt[n]{b_n}}{\sqrt[n+1]{b_{n+1}}}\right)^n = \frac{b_n}{b_{n+1}^{\frac{n}{n+1}}} = \frac{b_{n+1}^{\frac{1}{n+1}}}{a_{n+1}^{\frac{1}{n+1}}}$$

thus (Cesaro–Stolz)

$$\frac{b_{n+2}}{nb_{n+1}}\underbrace{\frac{na_{n+1}}{a_{n+2}}}_{\to 1/a} = \left(\frac{a_{n+2}}{n^{n+2}}\right)^{\frac{1}{n+2}}\frac{na_{n+1}}{a_{n+2}}$$

Again Cesaro–Stolz

$$\frac{a_{n+3}}{na_{n+2}}\frac{n^{n+2}}{(n+1)^{n+2}} \to \frac{a}{e} \implies (6) = e^2\frac{a}{e}\frac{1}{a} = e$$

By multiplying (4), (5) and (6) we get

$$\frac{e}{a} \cdot 1 \cdot \ln e = \frac{e}{a}$$

Roma, (Italy) October 13 2017

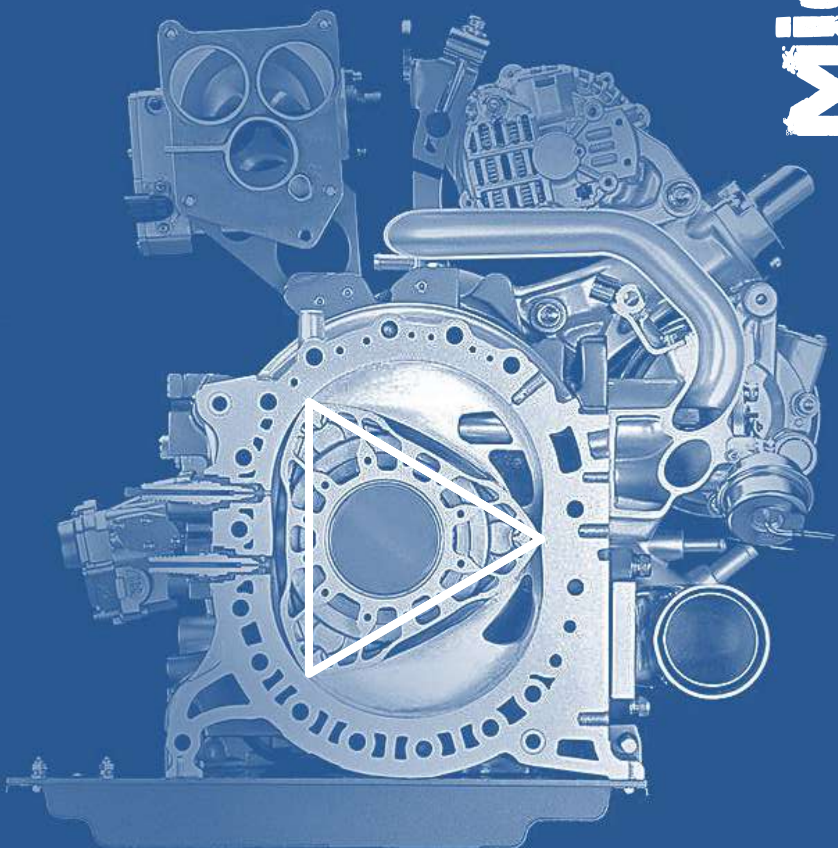
Thank you, Best regards
Paolo Perfetti

Perfetti Paolo, dipartimento di matematica, Università degli studi di Tor Vergata Roma, via della ricerca scientifica, 00133 Roma, Italy – email: perfetti@mat.uniroma2.it

X Escuela de Educación Matemática

Miguel de Guzmán

federación española de sociedades
de profesores de matemáticas fespm
real sociedad matemática española rsme



2018

11, 12 Y 13 DE JULIO

**la resolución de problemas
como parte esencial
del quehacer matemático**

**Sección de matemáticas
Facultad de ciencias
Universidad de La Laguna**

20 horas 2 créditos
inscripción hasta el 20 de junio
www.fespm.es

X ESCUELA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA MIGUEL DE GUZMÁN

La resolución de problemas como parte esencial del quehacer matemático

11, 12 y 13 de julio de 2018

Destinatarios: Profesorado de todos los niveles educativos

Lugar de celebración: Sección de Matemáticas. Facultad de Ciencias de la Universidad de La Laguna. Tenerife.

Fechas de celebración: 11, 12 y 13 de julio de 2018.

Duración en horas: 20

Nº aproximado de participantes: 150

Objetivos de la actividad:

- Analizar el carácter fundamental de la educación matemática como objetivo docente.
- Reflexionar sobre el papel que se le otorga en los nuevos currículos a la Resolución de problemas.
- Desarrollar estrategias para profundizar en la resolución de problemas dentro de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.
- Revelar la resolución de problemas como parte fundamental de la educación matemática.

Contenidos de la actividad:

Ponencias

- Learning Mathematics Through Problem Solving and For Problem Solving. Kaye Christine Stacey. Emeritus Professor. Department of Melbourne Graduate School for Education University of Melbourne, Australia
- Proyecto Newton. Matemáticas para La vida. Manuel García Déniz. Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas «Isaac Newton»
- Algunos ejemplos de soluciones de problemas que no están en el currículo (y que deberían estar). Francisco Bellot Rosado. Real Sociedad Matemática Española.
- Piensa…piensa. El tortuoso camino del pensar. María Nila Pérez Francisco. CEIP Prácticas Aneja. La Laguna.
- La educación matemática y la resolución de problemas. Juana Mª Navas Pleguezuelos. Secretaria de formación de la FESPM.
- La literatura me da problemas… problemas matemáticos para resolver. Marta Macho Stadler. Universidad del País Vasco

Mesa redonda

- Mujeres y Matemáticas. El interés de nuestras alumnas (Secundaria y Universidad) por resolver problemas matemáticos
  - Edith Padron. Universidad de La Laguna.
  - Marta Macho. Universidad del País Vasco.
  - Juan Carlos Toscano. Organización de Estados Iberoamericanos.

  Modera: Juana María Navas Pleguezuelos. FESPM.

Talleres

1. Ideas para implementar ¡de una vez!, la resolución de problemas en las aulas. Aportaciones significativas del profesor observador y creativo a la gestión de la clase. Antonio Ledesma. IES Uno de Requena (Valencia).
2. Resolución de Problemas. Diagramas y estrategias. Proyecto Newton. Manuel García Déniz. Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas «Isaac Newton»
3. Resolución de problemas a través de un proyecto Etwinning. Lluis Bonet. IES Mare Nostrum de'Alicante.
4. Piensa, Carlitos, piensa… Nila María Pérez Francisco (CEIP Prácticas Aneja. La Laguna) y Francisco José Morales Villegas (CEIP San Fernando. Santa Cruz de Tenerife).
5. Designing problems to teach mathematics. Kaye Christine Stacey. Emeritus Professor. Department of Melbourne Graduate School for Education University of Melbourne, Australia.
6. Particiones en figuras geométricas. Buscando estrategias para la resolución de problemas. Guillem Bonet Carbó. INS Santa Coloma de Farners.
7. GeoGebra...problem? Sergio Darias Beautell (Área de Tecnología Educativa de la Consejería de Educación y Universidades de Canarias), Juan Agustín Noda Gómez (IES La Laboral. La Laguna).
8. ESTALMAT. Resolución de problemas. Alicia Acosta Ramírez (IES Cairasco de Figueroa. Tamaraceite, Las Palmas de Gran Canaria) y Luís Francisco López García (IES Arucas-Domingo Rivero. Arucas, Las Palmas de Gran Canaria).

Cuadro horario:

	11 de julio	**12 de julio**	**13 de julio**
9:00 a 14:00	9 - 9:30 Entrega de documentación 9:30 -10:30 Inauguración	9:00 - 10:15 **Ponencia 3** *Algunos ejemplos de soluciones de problemas que no están en el currículo (y que deberían estar).* Francisco Bellot Rosado. Real Sociedad Matemática Española	9:00 -10:15 **Ponencia 5** *La educación matemática y la resolución de problemas*. Juana Mª Navas Pleguezuelos. Secretaria de formación de la FESPM.

<table>
<tr>
<td></td>
<td>10:30 - 12:00
Ponencia 1
Learning Mathematics Through Problem Solving and For Problem Solving.
Kaye Christine Stacey. Emeritus Professor. Department of Melbourne Graduate School for Education University of Melbourne, Australia

12:00
Descanso

12:30 -14:00
Ponencia 2
La literatura me da problemas… problemas matemáticos para resolver.
Marta Macho Stadler. Universidad del País Vasco</td>
<td>10:15 – 10:45
Descanso

10:45 - 12:00
Ponencia 4
Piensa…piensa. El tortuoso camino del pensar.
María Nila Pérez Francisco. CEIP Prácticas Aneja. La Laguna
12:00-14:00
Mesa redonda</td>
<td>10:15 -10:45
Descanso

10:45 - 12:45
Ponencia 6
Proyecto Newton. Matemáticas para La vida.
Manuel García Déniz. Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas «Isaac Newton»

12:45 - 13:15
Clausura</td>
</tr>
<tr>
<td>16,00
a
19,00</td>
<td>Talleres</td>
<td>Talleres</td>
<td></td>
</tr>
</table>

Los talleres se repetirán el miércoles y jueves.

Actividades complementarias

11 de julio. 19,15 horas. Visita matemática a La Laguna. Luis Balbuena Castellano.

12 de julio. 19,15 horas. Visita a la casa de la matemática de la Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas «Isaac Newton».

Inscripción

La inscripción será gratuita para los asociados de la Real Sociedad Matemática Española (RSME) y la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM).

Para el resto de participantes se establecen las siguientes cuotas de inscripción para los no asociados de la FESPM y RSME:

Hasta el 31 de mayo	25 €
Después del 31 de mayo	40 €

La cuota de inscripción se ingresará en la cuenta de la FESPM número ES43 2100 2153 3502 0017 8366, indicando en el concepto "Inscripción Escuela Miguel de Guzmán" en el momento de la reserva de la inscripción.
La asistencia a las ponencias y mesa redonda programadas en esta actividad estarán abiertas.
Para participar en los talleres así como para tener derecho a la certificación será necesario abonar la cuota de inscripción para los no asociados de la RSME o de la FESPM.

Plazo de inscripción:

La inscripción se realizará a través de la Web www.fespm.es
El plazo de inscripción finaliza el 20 de junio de 2018.
El 24 de junio se publicará la relación de admitidos.

Certificación:

La certificación de la Escuela Miguel de Guzmán se emitirá por parte de la FESPM con la correspondiente homologación por el Ministerio de Educación, Cultura y Deportes.

Entidades convocantes:

La Escuela Miguel de Guzmán está convocada por la Real Sociedad Matemática Española (RSME) y la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM).

Entidades colaboradoras:

La X edición de la Escuela Miguel de Guzmán, cuenta con la colaboración de la Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas «Isaac Newton», el Cabildo de Tenerife, la Universidad de La Laguna y la División Educativa de CASIO.

Cualquier consulta se puede realizar a través de correo electrónico a cualquiera de las direcciones siguientes:

RSME: rmallavi@ucm.es
FESPM: formacion@fespm.es

RESÚMENES DE LAS PONENCIAS

Learning Mathematics Through Problem Solving and For Problem Solving"
Kaye Christine Stacey

Problem solving plays two main roles in mathematics education. First problem solving is the main goal of learning mathematics, so mathematics is learned for problem solving. Second, solving problems (working on mathematical tasks) is also an approach to teaching mathematics, so mathematics can be learned through problem solving. I will outline some characteristics of mathematical tasks that make them suitable to be used in both of these ways: principally how mathematical tasks can designed as challenging yet accessible to the wide range of students in any classroom. I will also outline some of the ways in which a knowledge building culture can be created in a classroom, so that students work together to learn mathematics. These ideas will be illustrated with the resources being developed for *reSolve: Mathematics by Inquiry*, a new curriculum development project in Australia. (www.resolve.edu.au).

Algunos ejemplos de soluciones de problemas que no están en el currículo (y que deberían estar).
Francisco Bellot Rosado

El objetivo de la ponencia es mostrar varios ejemplos desarrollados de soluciones de problemas, interesantes a juicio del autor, y que desde hace tiempo no se pueden proponer en clases regulares. Las fuentes de los problemas elegidos son muy variadas: de las centenarias revistas Kömal (1894, de Hungría), Gazeta Matematica serie B (Rumania); de la revista rusa Kvant (1970); la brasileña Revista do Profesor de Matemática (1982)…
En la medida de lo posible se procurará que las soluciones utilicen métodos de Matemáticas Elementales, sin olvidar que no es lo mismo Problemas de Matemáticas Elementales que Problemas elementales de Matemáticas.
Además de las revistas mencionadas, entre otras fuentes bibliográficas empleadas están, por ejemplo : "Mathematical problems and puzles" (1965), de S. Straszewicz; "Paradoxes in probability theory and mathematical statistics" (1986) de G.Székely; "Mathematical problems – How to solve them" (1992, Bratislava) de Thomas Hecht y Zita Sklenáriková; "An introduction to Problem Solving" (Oxford U.P.,1997) de A. Gardiner; "La Via de lla Matematica" (Forencia, 1966), de Emma Castelnuovo.

Proyecto Newton. Matemáticas para la vida
Manuel García Déniz

El Proyecto Newton se genera a partir de los resultados adversos de las evaluaciones sobre competencias matemáticas realizadas en Canarias, que evidenciaron la necesidad de hacer un replanteamiento sobre cómo trabajar eficazmente las matemáticas en la Escuela. El proyecto se propone generar un cambio real, efectivo y generalizable en la enseñanza y en el aprendizaje de las matemáticas centrando la atención en las estrategias de resolución de problemas. La clave del proyecto está en la formación específica del profesorado, que se realiza en los mismos centros, y consigue que cada profesor, así formado, traduzca lo aprendido en nuevos modelos de enseñanza activa de las estrategias de resolución matemática de problemas. A su vez, el proyecto promueve que los profesores ya formados sean formadores de otros, creando así una red de intercambio de saberes didácticos concretos y de innovación entre docentes. Por otro lado, también la familia está contemplada en el Proyecto. Las familias reciben sesiones divulgadoras sobre la resolución de problemas y les ofrece como recurso su propio blog. En este blog tienen a su disposición semanalmente un problema para resolver en familia.

La Resolución de Problemas en el Proyecto Newton trata de cuatro procesos básicos secuenciados: “comprender”, “pensar”, “ejecutar” y “responder” (POLYA, 1987).

La fase de “comprender” consiste primordialmente en la búsqueda de los datos en el enunciado del problema, en su enumeración, análisis y clasificación, así como en la determinación del objetivo que pretende el problema, es decir, la pregunta que plantea.

También debe establecerse la conexión entre el objetivo y los datos (relación), esta conexión permite determinar la coherencia de dichos datos con el objetivo, eliminar así los datos no coherentes (no necesarios) o buscar los que no están explícitos.

En la fase de “pensar” se desarrolla la representación (diagrama de árbol, de doble entrada, de partes/todo, tabla de verdad, diagrama lineal, etc.) y el análisis de lo obtenido en la fase anterior (el objetivo del problema y los datos explícitos o implícitos conexos con el objetivo), obteniendo así la estrategia más conveniente para alcanzar el objetivo del problema, es decir, para responder a la pregunta que formula.

En la fase de “ejecutar” se transforma el diagrama o representación obtenido en la fase anterior, para representar matemáticamente la situación y para desarrollar esa forma matemática inherente a la relación entre datos del problema y objetivo. El uso en esta fase de un procedimiento matemático determinado (lógica, números, álgebra, etc.) dependerá de la estrategia seleccionada para explicitar la estructura de la información inicial (datos) y su relación con el objetivo.

Finalmente, en la fase de “responder” se vuelve a conectar con el contexto (con el planteamiento del problema y con su lenguaje) para verificar la corrección de la respuesta encontrada en la fase anterior y para verificar igualmente la coherencia de la respuesta con el objetivo a alcanzar, es decir, para verificar si realmente se responde a la pregunta que el problema planteaba.

Los desafíos matemáticos planteados a los alumnos por medio de los problemas están siempre relacionados con temas de su interés, con el fin de conectar el aprendizaje de la competencia de resolución de problemas con su vida real.

La dinámica básica de trabajo en el aula consiste en presentar un problema a un grupo de cuatro alumnos para ser resuelto entre todos. Posteriormente se debate el resultado obtenido con los demás grupos. Este procedimiento fuerza a los alumnos a que aporten una fundamentación lógico-matemática de las respuestas obtenidas, así como a que consigan el descubrimiento autónomo de relaciones y tomen decisiones igualmente autónomas.

Esta metodología favorece un escenario de aprendizaje cooperativo, en el cual el profesorado actúa de observador e interviene en situaciones claves para motivar y orientar las respuestas; todo ello con el objetivo de potenciar la autonomía del alumnado.

Piensa…piensa. El tortuoso camino del pensar
María Nila Pérez Francisco

Desde los niveles educativos iniciales hasta el final de la enseñanza obligatoria, saber resolver problemas es un objetivo que los docentes, las más de las veces, vemos difícil de alcanzar con nuestro alumnado. En esta conferencia trataremos de reflexionar sobre esa dificultad y sobre algunas cuestiones que está en nuestras manos modificar en el aula para facilitar al alumnado su andar por el camino del pensar para que éste sea menos tortuoso y más gratificante.

La educación matemática y la resolución de problemas
Juana Mª Navas Pleguezuelos

El año pasado, una de las actividades celebradas por la FESPM fue un Seminario dedicado a la Resolución de Problemas. Se organizaron dos grupos de trabajo: el primero planteó una propuesta curricular de un Bloque de Resolución de Problemas, con apartados como objetivos, contenidos, metodología y evaluación; el otro se estableció en torno a tres niveles de reflexión: con relación a la selección, formulación, creación de problemas singulares o de colecciones de problemas; la organización de la tarea y los recursos externos que ayudan en el proceso de resolución de problemas; y el tercero, el papel del profesorado y herramientas que lo ayudan a tomar el rol adecuado en el diseño y planteamiento en la resolución de problemas.
De todo este trabajo desarrollado se obtienen los planteamientos que se expondrán durante esta escuela.

La literatura me da problemas… problemas matemáticos para resolver.
Marta Macho Stadler

La cultura es un todo; engloba tanto a las llamadas “letras” como a las “ciencias”. En esta conferencia proponemos una serie de problemas para resolver en el aula que surgen de las páginas de los libros que llenan cualquier biblioteca.
Algunos textos tomados de novelas de diferentes géneros nos llevarán a plantear problemas de geometría, álgebra o cálculo… para resolver en casa o en el aula.

RESÚMENES DE LOS TALLERES

Taller 1
Ideas para implementar ¡de una vez!, la resolución de problemas en las aulas. Aportaciones significativas del profesor observador y creativo a la gestión de la clase
Antonio Ledesma

Negacionistas de la teoría de la evolución o del cambio climático siempre los ha habido y los habrá. Pero son tantos los trabajos científicos que cuestionan esa visión, que avalan los cambios biológicos en el acervo genético o la influencia de los deshielos de los polos en el clima que, poco a poco, la preocupación se extiende a la mayoría de las personas. Algo parecido pudiera estar ocurriendo con la Resolución de Problemas en nuestras aulas, en lo sucesivo (RP). Aunque la lucha contra los negacionistas si parece haberse ganado, los numerosos estudios didácticos que ensalzan las bondades de la RP no se plasman en gran parte de nuestras aulas. Los condicionantes curriculares, administrativos, de tiempo, de intereses… resultan una bonita excusa para que la implementación de la RP en las aulas no acabe de cuajar como cabría esperar a la luz de lo que aseguran dichos estudios. Pero, seamos críticos, como profesores podríamos hacer algo más y mejor en ese, tan eficiente y noble, empeño.

Hace ya cuarenta años, por un lado, Paul R. Halmos nos decía que la RP era el corazón de las matemáticas y, por otro, el NCTM en su Agenda para la acción resaltaba la importancia de la RP en el currículo de las enseñanzas no universitarias. Los trabajos de Polya, Schoenfeld y otros muchos pioneros supusieron un halo de frescura en la forma de enfocar el tema como contenido frente a una anterior que lo consideraba como aplicación. Un tercer enfoque, el de la RP como metodología ya se apuntaba a finales de siglo y principios de este, pero creemos que nunca llegó a establecerse del todo, especialmente por los condicionamientos arriba insinuados, por los cambios sociales, por el advenimiento de las nuevas tecnologías… que exigen por parte del profesor una forma distinta de abordar la situación. Programas más recientes como el PBL (Aprendizaje Basado en Problemas) o STEM o STEMA (Ciencia, Tecnología, Ingeniería, Matemáticas y Arte) pretenden aportar, con más o menos éxito, y de nuevo, ideas frescas al respecto.

La teoría y la experiencia durante todos estos años, en distintos sistemas educativos, en distintos entornos de aprendizaje y de distintos profesores nos pueden dar pautas para construir nuestro propio enfoque, donde propio signifique factible, creíble y convencido de sus posibilidades

En el taller veremos como la aguda observación, la creatividad a la hora de diseñar materiales y la forma de gestionar la sesión de aula puede, pese a los contratiempos de ese ambiente hostil mencionado anteriormente, contribuir en cierta medida a que resolver problemas sea parte del quehacer diario de esos ciudadanos pensadores, coherentes y críticos que queremos que lleguen a ser nuestros alumnos.

Taller 2
Resolución de Problemas. Diagramas y estrategias. Proyecto Newton
Manuel García Déniz

Objetivos. Dar a conocer el proceso de resolución de problemas aplicado en el Proyecto Newton, sus fases y los conocimientos involucrados en el mismo.
Contenidos del taller

1. Los Problemas y sus tipos.
2. Proceso de Resolución y sus Fases.
3. Diagramas lógicos como organizadores de la información.
4. Estrategias de Pensamiento y sus clases.

A lo largo del taller se resolverán problemas de varios tipos y analizar cómo se utiliza el método del Proyecto Newton para su resolución.
Destinatarios: Docentes de Secundaria y Tercer ciclo de Primaria.

Taller 3
Resolución de problemas a través de un proyecto Etwinning
Lluis Bonet

En la formación matemática de nuestro alumnado es fundamental aprender con la resolución de problemas relacionados con la vida real y además haciendo uso de les herramientas que hoy en día tenemos a nuestro alcance que nos facilitan los cálculos o las representaciones gráficas y que nos ayuden en la interpretación de los resultados y a llegar más allá. Y si ponemos en valor la creatividad del alumnado y que sean más protagonistas de su aprendizaje, podremos incrementar la motivación para trabajar en equipo investigando cómo dar respuesta a las situaciones que se planteen.

Taller 4
Piensa, Carlitos, piensa…
María Nila Pérez Francisco, Francisco José Morales Villegas

A lo largo de este taller presentaremos las posibilidades de las estrategias básicas: ensayo-error, modelización y organización de la información para la resolución de problemas en primaria. Se realizará un tratamiento especial a la modelización. Enmarcado dentro de la propuesta del Proyecto Matemáticas Newton Canarias (Proyecto Newton, OAOA, Matemáticas Activas, Pensamiento computacional y GeoGebra), junto al trabajo de estas estrategias estará el de los diagramas asociados: tablas, partes-todo, diagramas lineales…
La metodología de trabajo será eminentemente práctica; resolviendo una batería de problemas seleccionados reflexionaremos sobre el trabajo de la resolución de problemas y las dificultades que habitualmente tiene el alumnado. Todo ello desde la doble

perspectiva de aprender matemáticas para resolver problemas y resolver problemas para aprender matemáticas.
Destinatarios: Profesorado de primaria

Taller 5
Designing problems to teach mathematics
Kaye Christine Stacey

In the workshop, participants will examine a wide range of mathematical problems that are appropriate for students aged between about 9 and 16. Participants will solve the problems, analyse how students might solve them, discover where the mathematical challenges lie, consider alternative solutions, and discuss how the problems might be adapted for students who find them too easy or too hard. We will discuss the potential of each problem in teaching for problem solving and in teaching through problem solving, and techniques for establishing a knowledge building culture.

Taller 6
Particiones en figuras geométricas. Buscando estrategias para la resolución de problemas
Guillem Bonet Carbó

Por lo general, cuesta a los profesores de matemáticas enseñar estrategias para resolver problemas. Desde el grupo MatGI (Grupo de profesores de matemáticas de Girona) pensamos que el alumno tiene que buscar sus propias estrategias a través de pequeños retos que le ayuden paulatinamente a adquirir nuevas y más sofisticadas estrategias para aplicar, posteriormente, en la resolución de problemas más complicados.
En este taller os proponemos algunos retos y distintas ideas para trabajar de forma manipulativa, intuitiva y fresca, la activación del razonamiento y la lógica a través de la resolución de problemas en la educación secundaria obligatoria.
Facilitaremos también las pautas, las estrategias y las habilidades que tiene que adquirir el alumno en sus inicios en la resolución de problemas.
La resolución de problemas no tiene que ser el problema de las matemáticas, sino un peldaño más con el que escalar en el propio aprendizaje, con el que adquirir hábitos para investigar, descubrir y maravillarse con la matemática.

Taller 7
GeoGebra...problem?
Sergio Darias Beautell, Juan Agustín Noda Gómez

Dentro de la estrategia general de resolución de problemas del Proyecto Newton está contemplada como estrategia específica la modelización dinámica y organización de la información que ofrece el programa GeoGebra. En este taller, se dará respuesta a diversos problemas a partir de la representación y manipulación de la información de sus enunciados en la aplicación GeoGebra. Un objetivo es ofrecer este software como estrategia para resolver problemas y posteriormente investigar qué relaciones matemáticas se han establecidos para que el programa haya mostrado cierta respuesta. Este enfoque conecta con la perspectiva de resolver problemas para aprender matemáticas.

Además, otro objetivo de este taller es hacer énfasis la Información Matemática y su Comunicación por parte del alumnado y el profesorado. Las herramientas tecnológicas nos facilitarán esta transformación y su posterior comunicación. ¿Tendremos que abordar los problemas propios de la materia de forma diferente? ¿Encaja todo esto en el currículo? ¿Se puede hacer en grupo? ¿Quién CREA, ellos o nosotros? ¿Debemos hacer algunos cambios en nuestra práctica? En este taller, también se utilizará una serie de herramientas TIC que permitirá a los participantes verbalizar su pensamiento matemático y razonamiento seguido en la resolución de problemas planteados para resolver con GeoGebra.

Destinatarios: Profesorado de Secundaria.

Taller 8
ESTALMAT. Resolución de problemas
Alicia Acosta Ramírez y Luís Francisco López García

Desde ESTALMAT Canarias atendemos el talento matemático, abordando aspectos y contenidos que, a pesar de resultar de gran interés para desarrollar la competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología, no se encuentran en el currículo ordinario. Preparamos sesiones de trabajo donde se desarrolla la capacidad de abstracción, de razonamiento lógico, de deducción y de creación. Este taller es una muestra de una de nuestras sesiones. Contendrá un inicio teórico con ejercicios prácticos graduados según complejidad creciente y finalizará con la aplicación en un programa informático específico.