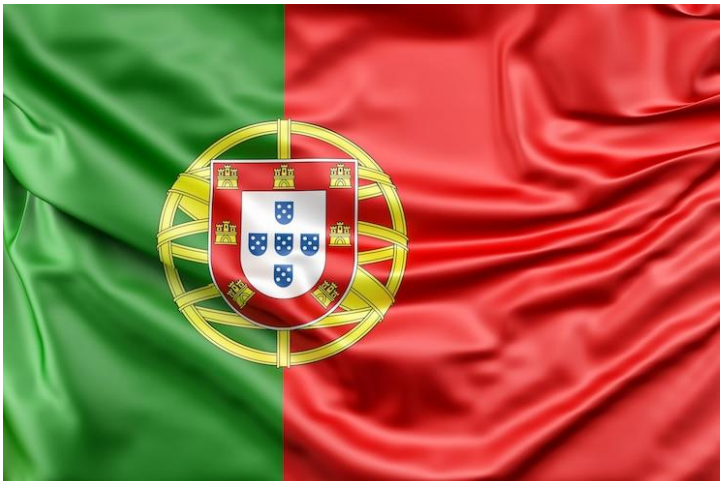
COMPENDIUM OPM

Olimpíadas Portuguesas de Matemática



Gerard Romo Garrido

Toomates Coolección vol. 87

TooMates Coolección

Toomates Coolección

Los libros de **Toomates** son materiales digitales y gratuitos. Son digitales porque están pensados para ser consultados mediante un ordenador, tablet o móvil. Son gratuitos porque se ofrecen a la comunidad educativa sin coste alguno. Los libros de texto pueden ser digitales o en papel, gratuitos o en venta, y ninguna de estas opciones es necesariamente mejor o peor que las otras. Es más: Suele suceder que los mejores docentes son los que piden a sus alumnos la compra de un libro de texto en papel, esto es un hecho. Lo que no es aceptable, por inmoral y mezquino, es el modelo de las llamadas "**licencias digitales**" con las que las editoriales pretenden cobrar a los estudiantes, una y otra vez, por acceder a los mismos contenidos (unos contenidos que, además, son de una bajísima calidad). Este modelo de negocio es miserable, pues impide el compartir un mismo libro, incluso entre dos hermanos, pretende convertir a los estudiantes en un mercado cautivo, exige a los estudiantes y a las escuelas costosísimas líneas de Internet, pretende pervertir el conocimiento, que es algo social, público, convirtiéndolo en un producto de propiedad privada, accesible solo a aquellos que se lo puedan permitir, y solo de una manera encapsulada, fragmentada, impidiendo el derecho del alumno de poseer todo el libro, de acceder a todo el libro, de moverse libremente por todo el libro.
Nadie puede pretender ser neutral ante esto: Mirar para otro lado y aceptar el modelo de licencias digitales es admitir un mundo más injusto, es participar en la denegación del acceso al conocimiento a aquellos que no disponen de medios económicos, y esto en un mundo en el que las modernas tecnologías actuales permiten, por primera vez en la historia de la Humanidad, poder compartir el conocimiento sin coste alguno, con algo tan simple como es un archivo "pdf".

El conocimiento no es una mercancía.

El proyecto Toomates tiene como objetivo la promoción y difusión entre el profesorado y el colectivo de estudiantes de unos materiales didácticos libres, gratuitos y de calidad, que fuerce a las editoriales a competir ofreciendo alternativas de pago atractivas aumentando la calidad de unos libros de texto que actualmente son muy mediocres, y no mediante retorcidas técnicas comerciales.
 Todos los libros se ofrecen en dos versiones: En formato "**pdf**" para una cómoda lectura y en el formato "**doc**" de MSWord para permitir y facilitar su edición y generar versiones parcial o totalmente modificadas. **¡Libérate de la tiranía y mediocridad de las editoriales! Crea, utiliza y comparte tus propios materiales didácticos.**

Problem Solving (en español):
Geometría Axiomática Problemas de Geometría 1 Problemas de Geometría 2
Introducción a la Geometría Álgebra Teoría de números Combinatoria Probabilidad
Trigonometría Desigualdades Números complejos Calculus & Precalculus
Libros de texto (en catalán):
Nombres (Preàlgebra) Àlgebra Proporcionalitat Mesures geomètriques
Geometria analítica Combinatòria i Probabilitat Estadística Trigonometria Funcions
Nombres Complexos Àlgebra Lineal Geometria Lineal Càlcul Infinitesimal
Programació Lineal Mates amb Excel
PAU españolas:
Cataluña TEC Cataluña CCSS Valencia Galicia País Vasco Baleares
PAU y reválidas internacionales:
Portugal Italia Francia Rumanía Hungría Polonia Pearson Edexcel International A Level China Gaokao
Pearson Edexcel IGCSE Cambridge International A Level Cambridge IGCSE
AQA GCSE International Baccalaureate (IB)
Evaluación diagnóstica y pruebas de acceso:
ACM6EP ACM4 CFGS PAP
Competiciones matemáticas:
Canguro: España Cataluña Francia USA Reino Unido Austria
USA: Mathcounts AMC 8 10 12 AIME USAJMO USAMO TSTST TST ELMO Putnam
España: OME OMEFL OMEC OMEA OMEM CDP
Europa: OMI Arquimede HMMT BMO Balkan MO JBMO OPM
Internacional: IMO IGO SMT INMO CMO HMMT EGMO
AHSME: Book 1 Book 2 Book 3 Book 4 Book 5 Book 6 Book 7 Book 8 Book 9
Otros materiales:
Pizzazz!: Book A Book B Book C Book D Book E Pre-Algebra Algebra , REOIM , Llibre3r

¡Genera tus propias versiones de este documento! Siempre que es posible se ofrecen las versiones editables "MS Word" de todos los materiales para facilitar su edición.

¡Ayuda a mejorar! Envía cualquier duda, observación, comentario o sugerencia a **toomates@gmail.com**
¡No utilices una versión anticuada! Todos estos libros se revisan y amplían constantemente. Descarga totalmente gratis la última versión de estos documentos en los correspondientes enlaces superiores, en los que siempre encontrarás la versión más actualizada.
Consulta el **catálogo de libros** completo en **http://www.toomates.net**
Descarga toda la biblioteca Toomates en un solo archivo **Aquí** MEGA
Visita mi **Canal de Youtube**: **https://www.youtube.com/c/GerardRomo**
Visita mi **blog:** **https://toomatesbloc.blogspot.com/**

Versión de este documento: **05/06/2025**

Niveles de la Olimpiada Portuguesa de matemáticas en el contexto del sistema educativo

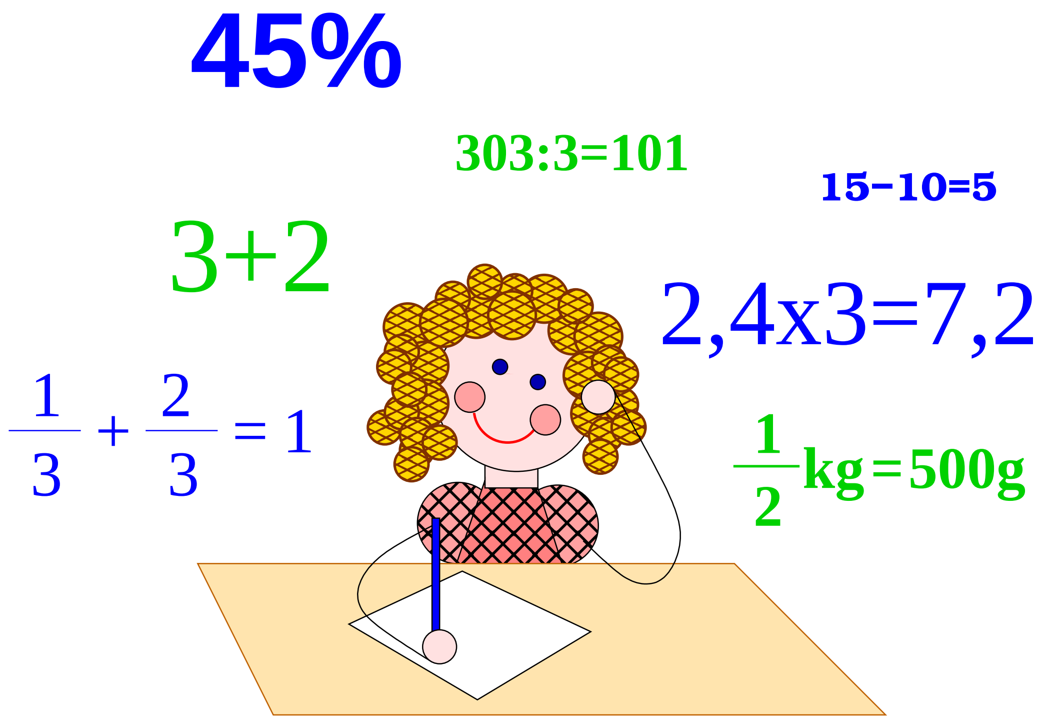
EDAD	ESPAÑA		PORTUGAL		OPM
6-7	PRIMARIA	1º	ENSINO BÁSICO 1º CICLO	1º	
7-8		2º		2º	
8-9		3º		3º	3º ano
9-10		4º		4º	4º ano
10-11		5º	ENSINO BÁSICO 2º CICLO	5º	Pré-Olimpíadas
11-12		6º		6º	junior
12-13	ESO	1º	ENSINO BÁSICO 3º CICLO	7º	
13-14		2º		8º	Categoría A
14-15		3º		9º	
15-16		4º	ENSINO SECUNDÁRIO	10º	Categoría B
16-17	BACHILLERATO	1º		11º	
17-18		2º		12º	

Índice.

Olimpíadas Portuguesas de Matemática

Mini-Olimpíadas

Ano Letivo 2017/2018
1º Ciclo do Ensino Básico
3º ano



Tem atenção: **Duração: 1 hora**

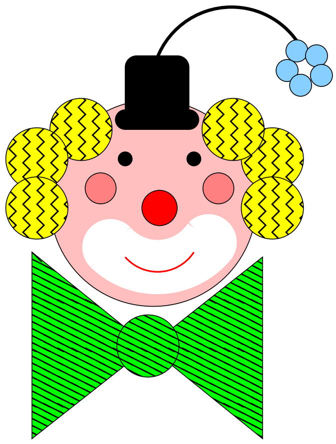
- Lê todas as perguntas com muito cuidado.
- Não apagues as contas, os esquemas e os desenhos que utilizares nas tuas respostas.
- Se acabares antes do tempo previsto, deverás aproveitar para rever a tua prova.

Bom trabalho e diverte-te!

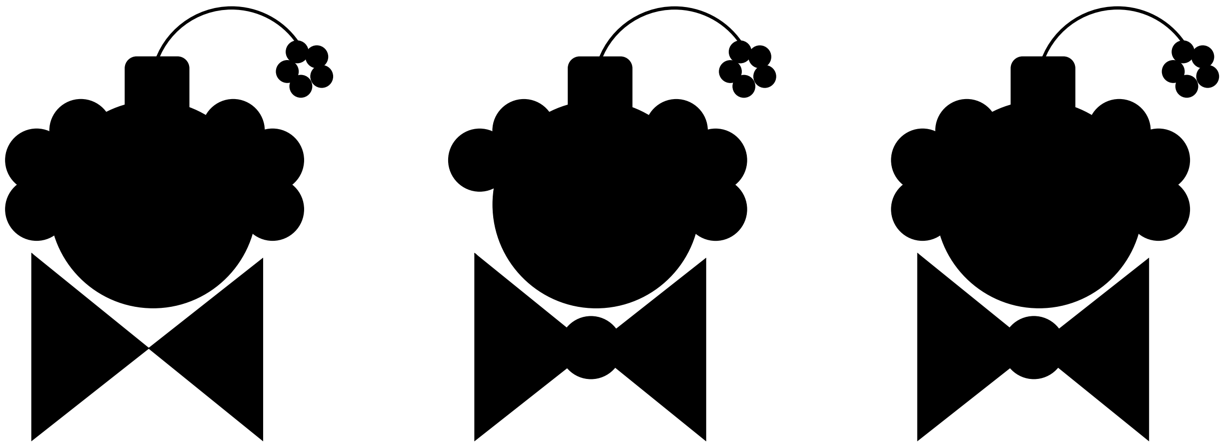
Nome do aluno: ____

Pontuação:_______________

1. Descobre qual destas sombras corresponde ao Palhaço Mel.



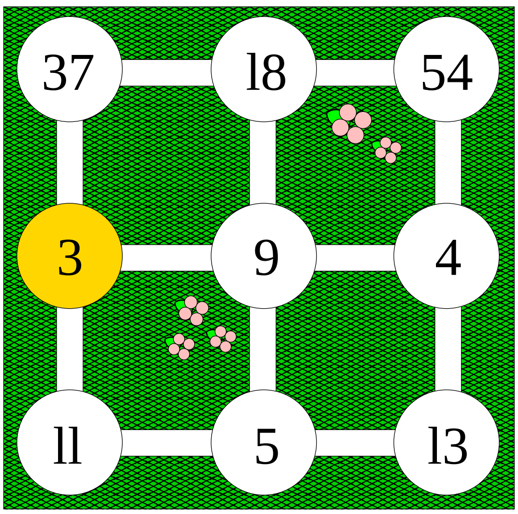
Rodeia a sombra correta.



2. A Professora desafiou o Jonas a resolver este enigma.

Passo a passo, vais percorrendo um caminho.
Em cada passo tens de prestar atenção,
Tomar muito cuidado na escolha da direção.

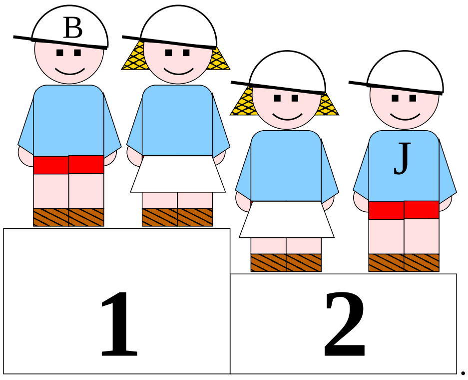
Ou vais à direita (→) para o triplo,
Ou à esquerda (←) para duplicar,
Ou sobes (↑) para um múltiplo,
Ou desces (↓) para um par.



O Jonas encontrou o caminho certo! Desenha o percurso que ele efetuou, sabendo que começou no 3 e deu 4 passos.

3. A Mati (M), o Jonas (J), a Zé (Z) e o Tico (T) jogam badminton a pares todos os sábados. O último jogo foi no sábado passado. Cada um trazia um boné de cor diferente: azul (A), branco (B), vermelho (V) e preto (P).

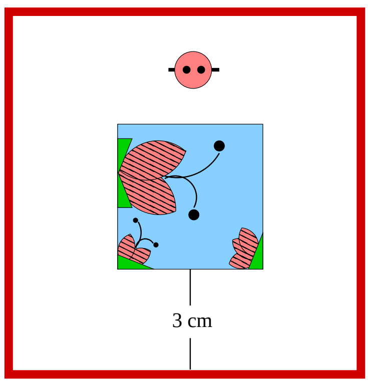
- O Jonas não estava na equipa vencedora.
- Havia um rapaz na equipa vencedora com boné branco.
- O rapaz de boné azul era o parceiro da Mati.
- O boné da Zé não era vermelho.



Descobre os jogadores de cada equipa e a cor dos seus bonés, escrevendo, nas camisolas, as iniciais dos nomes e, nos bonés, as iniciais das cores.

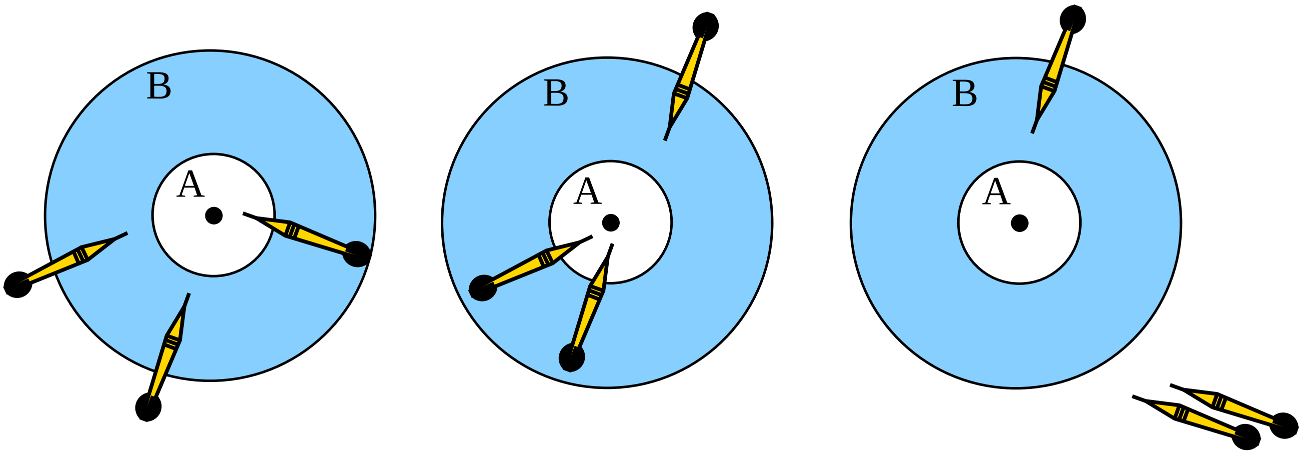
4. A mãe da Mati deu-lhe um porta-moedas. No centro tem um quadrado colorido com 4 cm de lado, contornado por uma barra branca com 3 cm de largura.

O porta-moedas tem a forma de um quadrado e está decorado a toda a volta com um fio colorido. Qual é o comprimento do fio?



Resposta:____

5. No jogo do tiro ao alvo, o Jonas lançou três setas ao alvo; uma caiu na zona A e duas na zona B e obteve 15 pontos. A Zé também lançou três setas; duas caíram na zona A e uma na zona B e obteve 18 pontos. A Mati lançou três setas, mas apenas uma acertou no alvo, na zona B.



Jonas	Zé	Mati
15 pontos	18 pontos	___ pontos

Preenche a tabela com a pontuação da Mati.

6. No dia do aniversário da Luísa, os amigos fizeram-lhe um jantar surpresa. Pagaram ao restaurante 72 euros no total. A prenda da Luísa custou 18 euros. Cada um dos amigos pagou o seu jantar e mais dois euros pela prenda da Luísa.

Sabendo que o restaurante ofereceu o jantar à Luísa, quanto gastou cada amigo?

Resposta:____

Mini-Olimpíadas

Ano Letivo 2017/2018
1º Ciclo do Ensino Básico
3º ano

Critérios de Classificação

Cotações

1- 10 pontos
2- 10 pontos
3- 10 pontos
4- 10 pontos
5- 10 pontos
6- 10 pontos

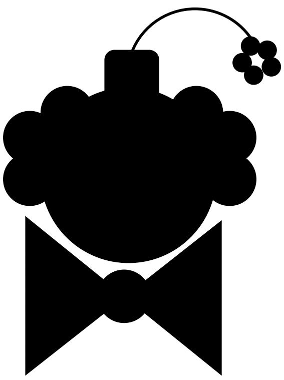
Total: 60 pontos

Critérios de Classificação

- **Se surgirem resoluções diferentes das apresentadas, a classificação ficará ao critério do professor corretor.**
- **Devem ser valorizados os raciocínios corretos (atribuindo classificações parciais) em detrimento dos cálculos efetuados.**

Exercício 1

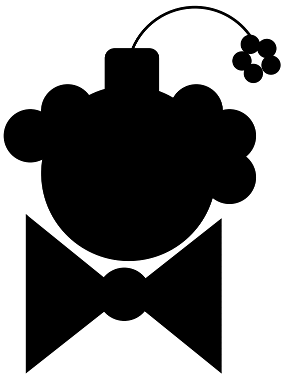
Solução:



10 pontos

Caso a resposta não seja a correta deve ser atribuída a cotação parcial seguinte.

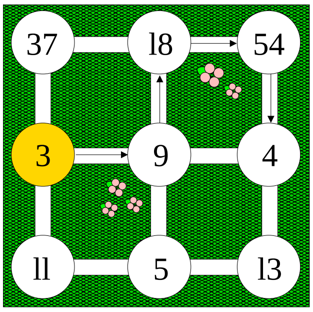
Escolhe a seguinte sombra



2 pontos

Exercício 2

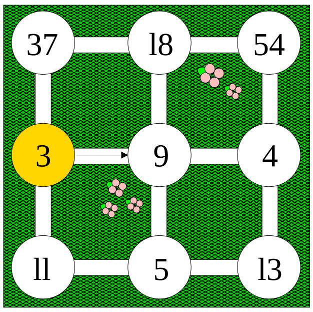
Solução:



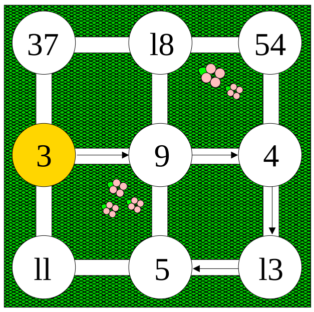
10 pontos

Caso a resposta não seja a correta, devem atribuir-se as seguintes cotações parciais (não acumuláveis).

Desenha um percurso com um passo correto, que tenha quando muito 4 passos. Por exemplo,

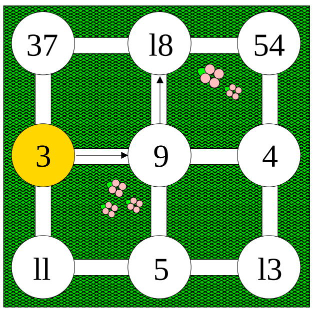


ou

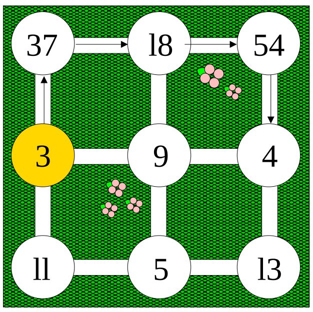


2 pontos

Desenha um percurso com dois passos consecutivos corretos, que tenha quando muito 4 passos. Por exemplo,

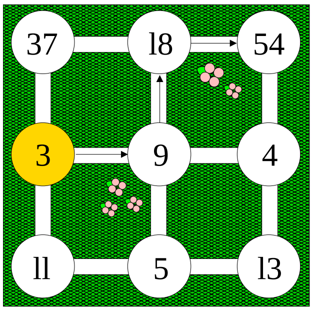


ou



4 pontos

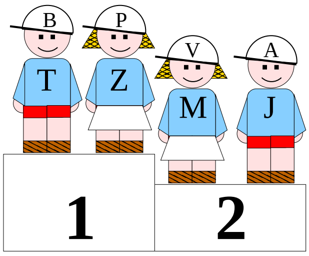
Desenha o seguinte percurso



6 pontos

Exercício 3

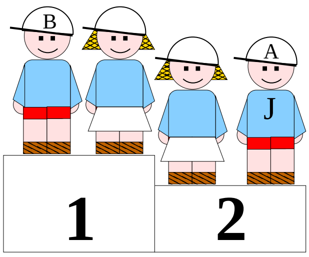
Solução:



10 pontos

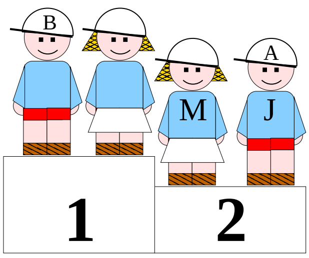
Caso a resposta não seja a correta devem atribuir-se as cotações parciais seguintes (não acumuláveis).

Coloca uma inicial na posição correta. Por exemplo,



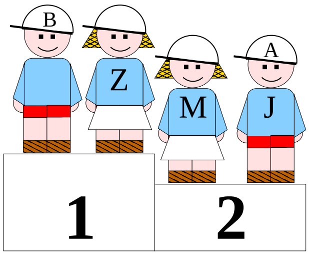
3 pontos

Coloca duas iniciais nas posições corretas. Por exemplo,

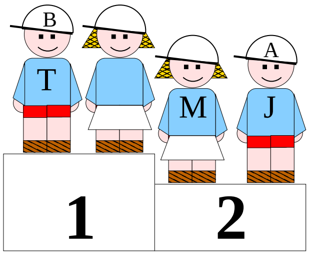


5 pontos

Coloca três iniciais nas posições corretas. Por exemplo,

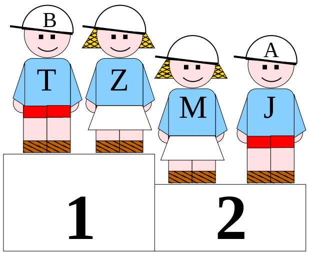


ou



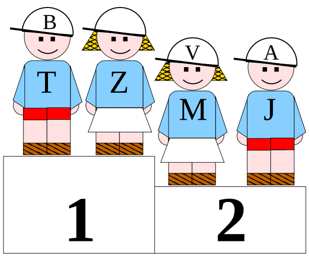
7 pontos

Coloca quatro iniciais nas posições corretas. Por exemplo,



8 pontos

Coloca cinco iniciais nas posições corretas. Por exemplo,



9 pontos

Exercício 4

Solução: 40 cm **10 pontos**

Caso a resposta não seja a correta deve atribuir-se cotação parcial. Para esse efeito, indicam-se, em seguida, as cotações parciais de uma proposta de resolução.

Proposta de resolução:

Calcula o comprimento do lado do quadrado maior

$4 + 3 + 3 = 10$ cm **6 pontos**

Calcula a quantidade de fio necessário

$4 \times 10 = 40$ cm **4 pontos**

Devem ser cotados os cálculos efetuados utilizando valores errados calculados anteriormente.

Exercício 5

Solução: 4 pontos **10 pontos**

Caso a resposta não seja a correta deve atribuir-se cotação parcial. Para esse efeito, indicam-se, em seguida, as cotações parciais de duas propostas de resolução.

Proposta de resolução 1:

Efetua o cálculo

$18 - 15 = 3$ **4 pontos**

Indica a pontuação total obtida no caso das três setas cairem na zona B (ou A)

$15 - 3 = 12$ (ou $18 + 3 = 21$) **4 pontos**

Indica a pontuação da Mati

$12 : 3 = 4$ (ou $21 : 3 = 7$ e $7 - 3 = 4$) **2 pontos**

Proposta de resolução 2:

Atribui valores às pontuações de uma seta em cada zona e confirma a pontuação total do Jonas e da Zé

$7 + 2 \times 4 = 15$ e $2 \times 7 + 4 = 18$ **10 pontos**

Caso a resposta não seja a correta, devem ser atribuídas as cotações parciais seguintes (acumuláveis).

Atribui valores errados às pontuações de uma seta em cada zona e confirma a pontuação total do Jonas ou da Zé

Por exemplo, $2 \times 3 + 9 = 15$ ou $2 \times 8 + 2 = 18$ **3 pontos**

Usando os valores atribuídos anteriormente, averigua se a pontuação total da Zé ou do Jonas é a correta

$3 + 2 \times 9 = 21$ ou $8 + 2 \times 2 = 12$ **3 pontos**

Exercício 6

Solução: 10 euros

Proposta de resolução:

Calcula o número de amigos da Luísa

$18 : 2 = 9$ **4 pontos**

Calcula o preço de cada jantar

$72 : 9 = 8$ **4 pontos**

Calcula quanto gastou cada amigo da Luísa

$8 + 2 = 10$ **2 pontos**

Caso a resposta não seja a correta, deve ser atribuída a cotação parcial seguinte.

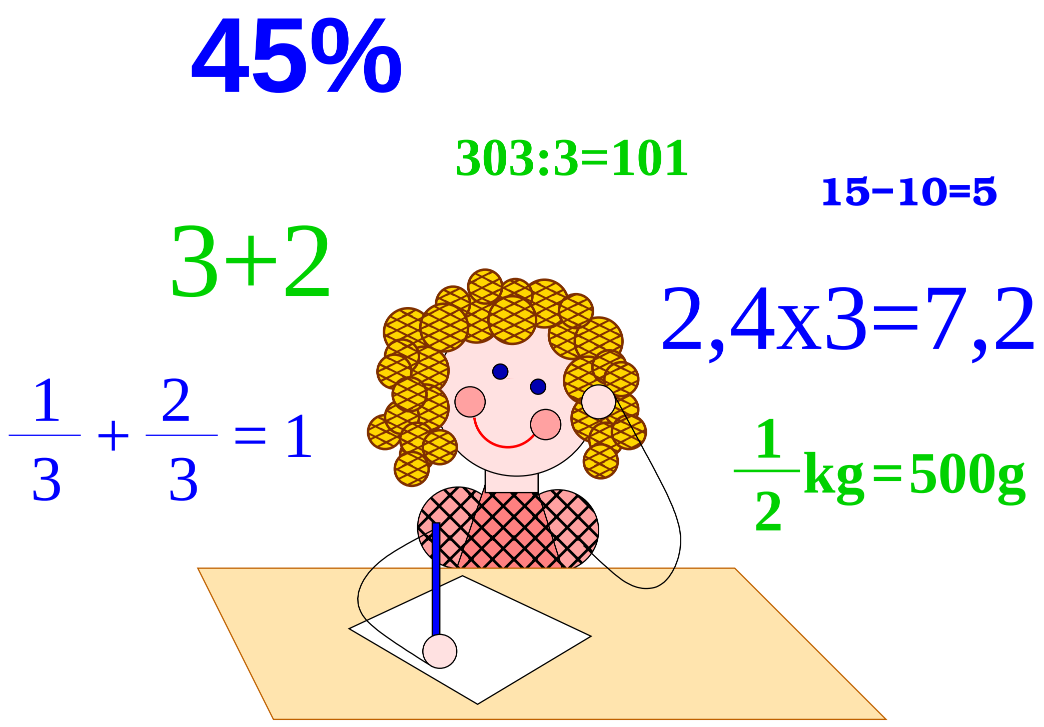
Atribui um valor errado ao número de amigos e efetua cálculos que evidenciem uma correta interpretação de uma parte do enunciado.

Por exemplo, $72 : 6 = 12$ e $12 + 2 = 14$ **2 pontos**

Devem ser cotados os cálculos efetuados utilizando valores errados calculados anteriormente.

Mini-Olimpíadas

Ano Letivo 2017/2018
1º Ciclo do Ensino Básico
4º ano



Tem atenção: **Duração: 1 hora**

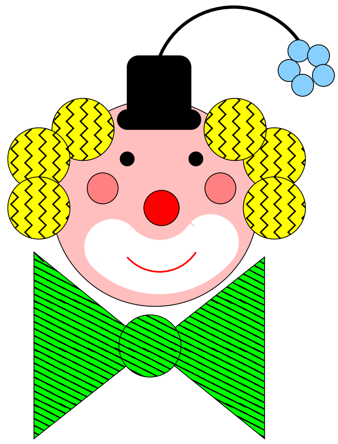
- Lê todas as perguntas com muito cuidado.
- Não apagues as contas, os esquemas e os desenhos que utilizares nas tuas respostas.
- Se acabares antes do tempo previsto, deverás aproveitar para rever a tua prova.

Bom trabalho e diverte-te!

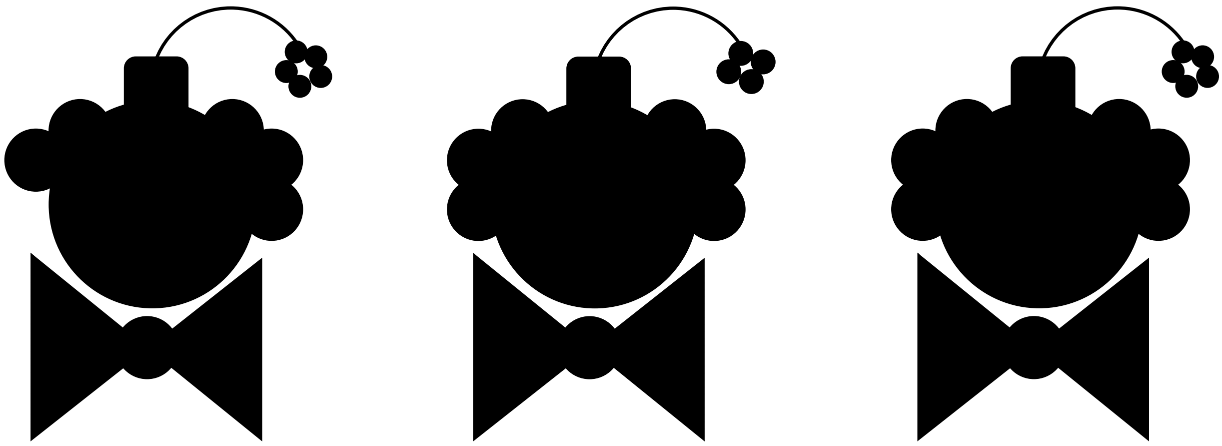
Nome do aluno: ____

Pontuação:______________

1. Descobre qual destas sombras corresponde ao Palhaço Mel.



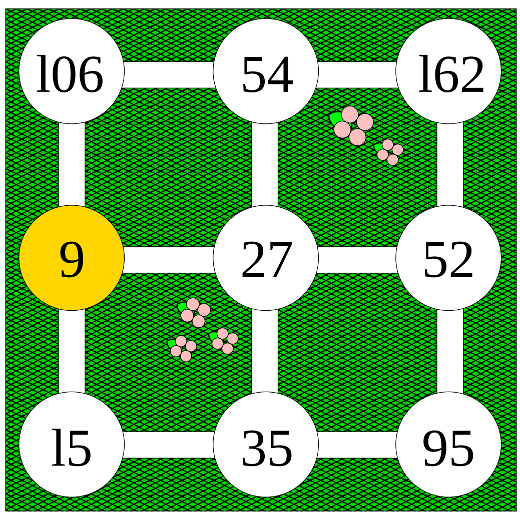
Rodeia a sombra correta.



2. A Professora desafiou o Jonas a resolver este enigma.

Passo a passo, vais percorrendo um caminho.
Em cada passo tens de prestar atenção,
Tomar muito cuidado na escolha da direção.

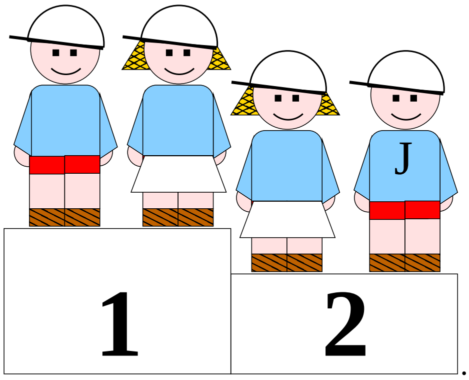
Ou sobes (↑) para um múltiplo,
Ou desces (↓) para um par,
Ou vais à direita (→) para o triplo,
Ou à esquerda (←) para duplicar.



O Jonas encontrou o caminho certo! Desenha o percurso que ele efetuou, sabendo que começou no 9 e deu 4 passos.

3. A Mati (M), o Jonas (J), a Zé (Z) e o Tico (T) jogam badminton a pares todos os sábados. O último jogo foi no sábado passado. Cada um trazia um boné de cor diferente: azul (A), branco (B), vermelho (V) e preto (P).

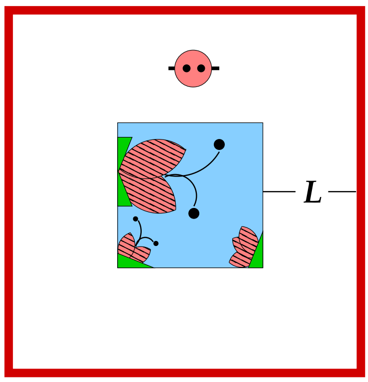
- O Jonas não estava na equipa vencedora.
- Havia um rapaz na equipa vencedora com boné branco.
- O rapaz de boné azul era o parceiro da Mati.
- O boné da Zé não era vermelho.



Descobre os jogadores de cada equipa e a cor dos seus bonés, escrevendo, nas camisolas, as iniciais dos nomes e, nos bonés, as iniciais das cores.

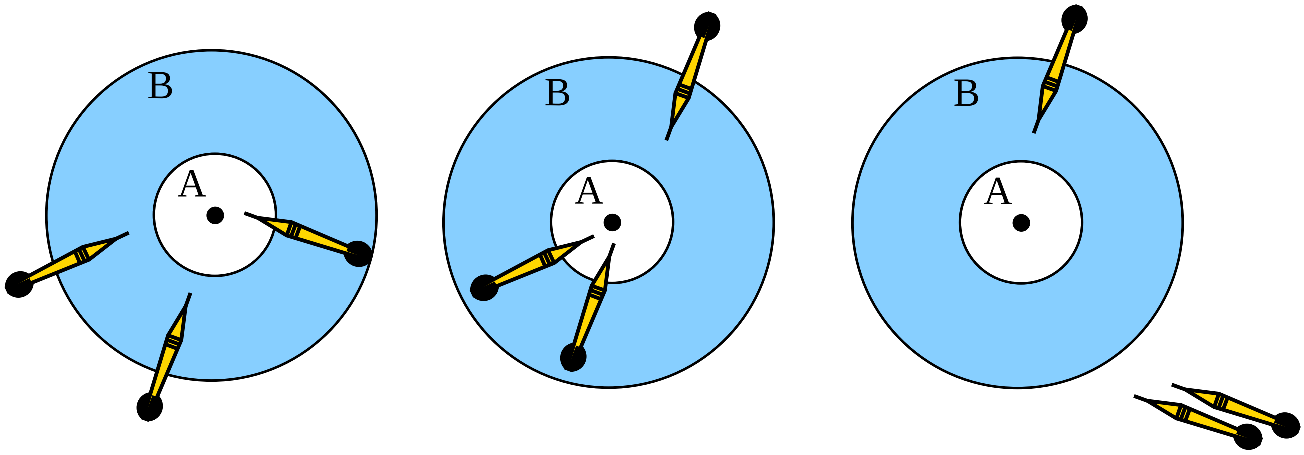
4. A mãe da Mati deu-lhe um porta-moedas. No centro tem um quadrado colorido com 16 cm de perímetro, contornado por uma barra branca.

Sabendo que o porta-moedas é um quadrado com 40 cm de perímetro, qual é a largura (L) da barra branca?



Resposta:____

5. No jogo do tiro ao alvo, o Jonas lançou três setas ao alvo; uma caiu na zona A e duas na zona B e obteve 45 pontos. A Zé também lançou três setas; duas caíram na zona A e uma na zona B e obteve 54 pontos. A Mati lançou três setas, mas apenas uma acertou no alvo, na zona B.



Jonas	Zé	Mati
45 pontos	54 pontos	___ pontos

Preenche a tabela com a pontuação da Mati.

6. No dia de aniversário da Luísa, os amigos fizeram-lhe um jantar surpresa. Pagaram ao restaurante 210 euros no total. Cada um dos amigos pagou o seu jantar e mais um euro pelo jantar da Luísa.

Quantos amigos da Luísa foram ao jantar?

Resposta:____

Mini-Olimpíadas

Ano Letivo 2017/2018
1º Ciclo do Ensino Básico
4º ano

Critérios de Classificação

Cotações

1- 10 pontos
2- 10 pontos
3- 10 pontos
4- 10 pontos
5- 10 pontos
6- 10 pontos

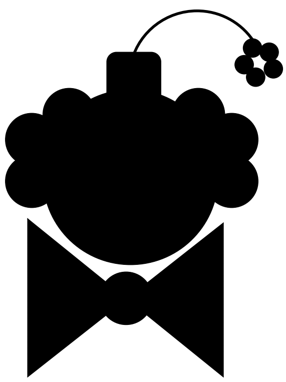
Total: 60 pontos

Critérios de Classificação

- **Se surgirem resoluções diferentes das apresentadas, a classificação ficará ao critério do professor corretor.**
- **Devem ser valorizados os raciocínios corretos (atribuindo classificações parciais) em detrimento dos cálculos efetuados.**

Exercício 1

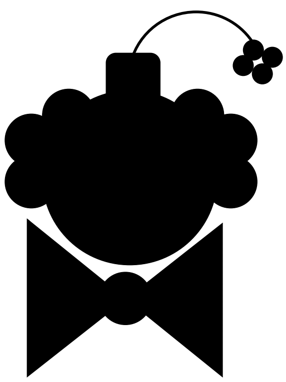
Solução:



10 pontos

Caso a resposta não seja a correta deve ser atribuída a cotação parcial seguinte.

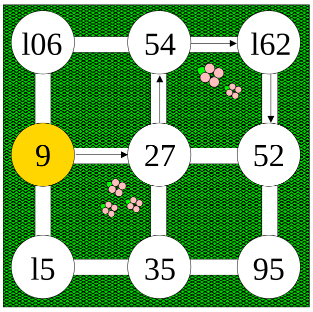
Escolhe a seguinte sombra



2 pontos

Exercício 2

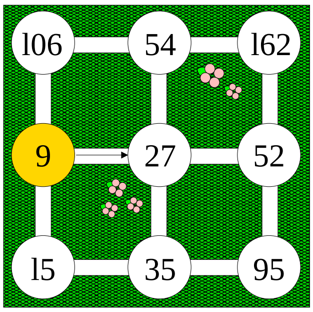
Solução:



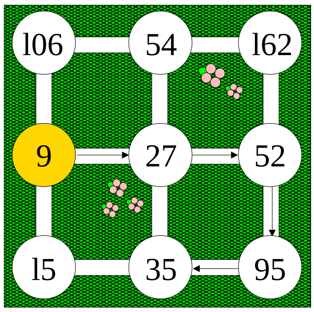
10 pontos

Caso a resposta não seja a correta, devem atribuir-se as seguintes cotações parciais (não acumuláveis).

Desenha um percurso com um passo correto, que tenha quando muito 4 passos. Por exemplo,

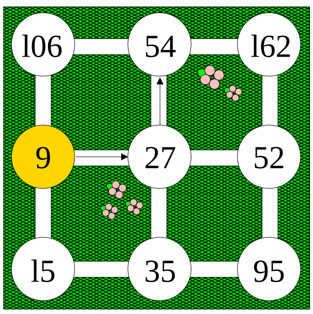


ou

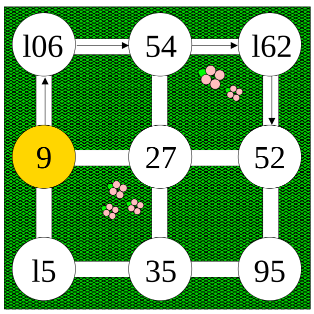


2 pontos

Desenha um percurso com dois passos consecutivos corretos, que tenha quando muito 4 passos. Por exemplo,

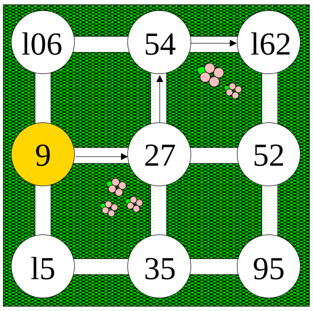


ou



4 pontos

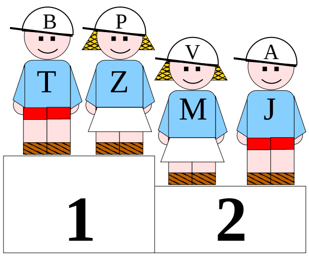
Desenha o seguinte percurso



6 pontos

Exercício 3

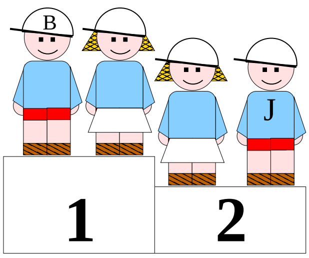
Solução:



10 pontos

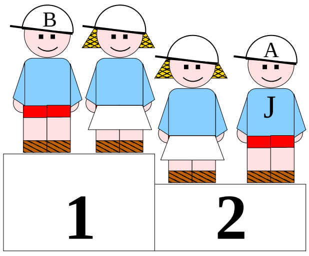
Caso a resposta não seja a correta devem atribuir-se as cotações parciais seguintes (não acumuláveis).

Coloca uma inicial na posição correta. Por exemplo,



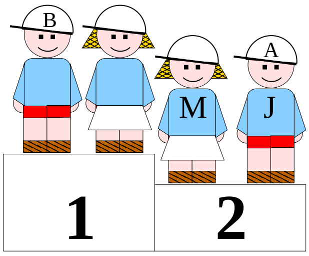
1 ponto

Coloca duas iniciais nas posições corretas. Por exemplo,



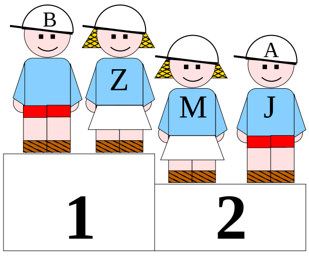
3 pontos

Coloca trêss iniciais nas posições corretas. Por exemplo,

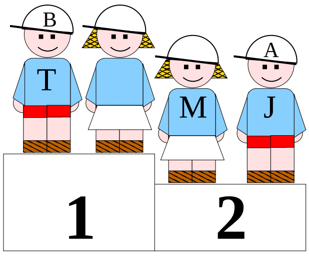


6 pontos

Coloca quatro iniciais nas posições corretas. Por exemplo,

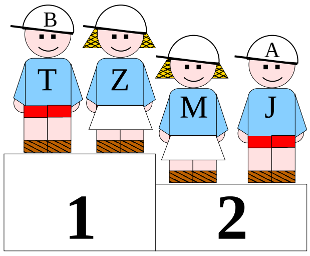


ou



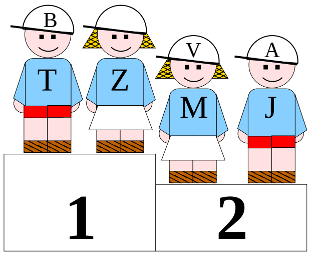
7 pontos

Coloca cinco iniciais nas posições corretas. Por exemplo,



8 pontos

Coloca seis iniciais nas posições corretas. Por exemplo,



9 pontos

Exercício 4

Solução: 3 cm **10 pontos**

Caso a resposta não seja a correta deve atribuir-se cotação parcial. Para esse efeito, indicam-se, em seguida, as cotações parciais de duas propostas de resolução.

Proposta de resolução 1:

Calcula o comprimento do lado do quadrado mais pequeno

$16 : 4 = 4$ cm **3 pontos**

Calcula o comprimento do lado do quadrado maior

$40 : 4 = 10$ cm **3 pontos**

Efetua o cálculo

$10 - 4 = 6$ cm **2 pontos**

Calcula a largura da barra

$6 : 2 = 3$ cm **2 pontos**

Proposta de resolução 2:

Atribui valores à largura da barra e ao comprimento do lado do quadrado pequeno e verifica que satisfazem as condições do enunciado

$4 \times 4 = 16$ cm, $3 + 4 + 3 = 10$ cm e $4 \times 10 = 40$ cm **10 pontos**

Caso a resposta não seja a correta, devem ser atribuídas as cotações parciais seguintes (não acumuláveis).

Atribui valores errados à largura da barra (por exemplo, 2 cm) ou ao comprimento do lado do quadrado pequeno (por exemplo, 6 cm) e averigua se satisfazem uma das condições do enunciado.

Por exemplo, $6 + 2 + 2 = 10$ cm **2 pontos**

Devem ser cotados os cálculos efetuados utilizando valores errados calculados anteriormente.

Exercício 5

Solução: 12 pontos **10 pontos**

Caso a resposta não seja a correta deve atribuir-se cotação parcial. Para esse efeito, indicam-se, em seguida, as cotações parciais de duas propostas de resolução.

Proposta de resolução 1:

Efetua o cálculo

$54 - 45 = 9$ **4 pontos**

Indica a pontuação total obtida no caso das três setas cairem na zona B (ou A)

$45 - 9 = 36$ (ou $54 + 9 = 63$) **4 pontos**

Indica a pontuação da Mati

$36 : 3 = 12$ (ou $63 : 3 = 21$ e $21 - 9 = 12$) **2 pontos**

Proposta de resolução 2:

Atribui valores às pontuações de uma seta em cada zona e confirma a pontuação total do Jonas e da Zé

$21 + 2 \times 12 = 45$ e $2 \times 21 + 12 = 54$ **10 pontos**

Caso a resposta não seja a correta, devem ser atribuídas as cotações parciais seguintes (acumuláveis).

Atribui valores errados às pontuações de uma seta em cada zona e confirma a pontuação total do Jonas ou da Zé

Por exemplo, $2 \times 10 + 25 = 45$ ou $2 \times 25 + 4 = 54$ **3 pontos**

Usando os valores atribuídos anteriormente, averigua se a pontuação total da Zé ou do Jonas é a correta

$10 + 2 \times 25 = 60$ ou $25 + 2 \times 4 = 33$ **3 pontos**

Exercício 6

Solução: 14 amigos **10 pontos**

Proposta de resolução:

Conclui que o número de amigos da Luísa é igual ao preço de um jantar e é um divisor de 210. Indica a solução, podendo eventualmente apresentar uma das seguintes tabelas (ou apenas as últimas linhas).

nº amigos	preço de um jantar	o que cada um pagou	Total
1	1	2 (1+1)	2 (1×2)
2	2	3 (2+1)	6 (2×3)
3	3	4 (3+1)	12 (3×4)
4	4	5 (4+1)	20 (4×5)
5	5	6 (5+1)	30 (5×6)
6	6	7 (6+1)	42 (6×7)
8	8	9 (8+1)	72 (8×9)
9	9	10 (9+1)	90 (9×10)
10	10	11 (10+1)	110 (10×11)
11	11	12 (11+1)	132 (11×12)
12	12	13 (12+1)	156 (12×13)
13	13	14 (13+1)	182 (13×14)
14	14	15 (14+1)	210 (14×15)

ou

divisores de 210 inferiores a 15	o que cada um pagou	preço de um jantar
1	210 (210:1)	209 (210-1)
2	105 (210:2)	104 (105-1)
3	70 (210:3)	69 ($70 - 1$)
5	42 (210:5)	41 ($42 - 1$)
6	35 (210:6)	34 ($35 - 1$)
7	40 (210:7)	39 ($40 - 1$)
10	21 (210:10)	20 ($21 - 1$)
14	15 (210:14)	14 ($15 - 1$)

10 pontos

Caso a resposta não seja a correta, deve atribuir-se cotação parcial. Para esse efeito, indicam-se as seguintes cotações parciais (não acumuláveis).

Atribui valores errados ao número de amigos da Luísa e ao que cada um pagou e verifica que os valores escolhidos correspondem a 210 euros.

Por exemplo, $7 \times 30 = 210$ **2 pontos**

Atribui valores errados ao número de amigos e ao que cada um pagou, escolhendo números consecutivos e averiguando se os valores escolhidos correspondem a 210 euros.

Por exemplo, $11 \times 12 = 132$ **4 pontos**

Devem ser cotados os cálculos efetuados utilizando valores errados calculados anteriormente.

XXXVI OPM - 8.11.2017 - Pré-Olimpíadas - 5º ano

Duração: 2 horas
Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3: 10 pontos cada

Na questão 1 escolhe, em cada alínea, a opção correta.
Justifica convenientemente as tuas respostas às questões 2 e 3.
Não é permitido o uso de calculadoras.

1. (a) Uma empresa de jogos didáticos produz um baralho de cartas com várias operações diferentes. Das seguintes cartas, quantas têm um resultado ímpar?

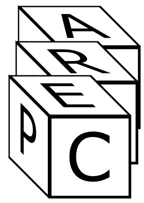
$20-17$ | $20+17$ | 20×17 | 201×7

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 0

(b) Noutro jogo, há diversos berlindes numerados. Quando um jogador acerta com um berlinde com o número a num berlinde com o número b, recebe um novo berlinde com a soma de todos os números inteiros entre a e b. Por exemplo, quando se acerta com um berlinde com o número 5 num berlinde com o número 8, recebe-se um berlinde com o número $5+6+7+8=26$. Numa jogada, o João acertou com um berlinde com o número 1 num berlinde com o número 4. Na jogada seguinte, a Maria acertou com um berlinde com o número 6 no novo berlinde do João. Qual é o número do novo berlinde da Maria?

A) 11 B) 16 C) 40 D)120 E) 225

(c) A empresa produz dados com uma letra em cada face. O João pegou em três desses dados e reparou que as 18 letras das seis faces eram todas diferentes. O João lançou os três dados várias vezes e, em cada lançamento, formou as seguintes palavras com as letras que ficaram na face de cima:

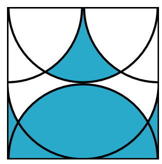


ERA, UMA, VEZ, QUE, LER, LEI, SUL, TER, GEL, SOL, FIM

Qual das seguintes letras está no mesmo dado que tem a letra N?

A) I B) M C) Q D) T E) Z

(d) O logotipo da empresa é formado por três semicircunferências e dois quartos de circunferência, todas de raio $5\,cm$, dentro de um quadrado, como representado na figura. Quanto mede a área da região pintada do logotipo?

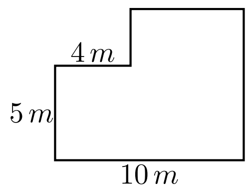


A) $40\,cm^2$ B) $45\,cm^2$ C) $48\,cm^2$ D) $50\,cm^2$ E) $60\,cm^2$

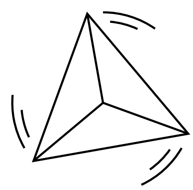
(e) O Pedro e o Rui, trabalham nessa empresa e, em cada dia, ambos têm que produzir o mesmo número de peças. O Pedro entra às 8h, produz uma peça a cada 6 minutos e sai às 12h30m. O Rui entra às 9h e produz 9 peças por hora. A que horas sai o Rui?

A) 12h B) 12h30m C) 13h D) 13h30m E) 14h

2. O Sr. José tinha um terreno retangular do qual vendeu uma parte retangular mais pequena, ficando o seu terreno com uma área de 68m^2 e as medidas indicadas na figura. O Sr. José pretende comprar uma rede para cercar o terreno. Sabendo que o metro de rede custa 50€, quanto terá de gastar o Sr. José?



3. O André recebeu um pião e quer pintar cada uma das três regiões com uma das seguintes cores: amarelo, castanho e verde. Se quiser, o André pode pintar regiões diferentes com a mesma cor. Ajuda o André a encontrar o número total de maneiras diferentes de pintar o seu pião.



OLIMPÍADAS PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA

http://www.spm.pt/olimpiadas

XXXVI OPM - 8.11.2017 - Pré-Olimpíadas - 5° ano

Sugestões para a resolução dos problemas

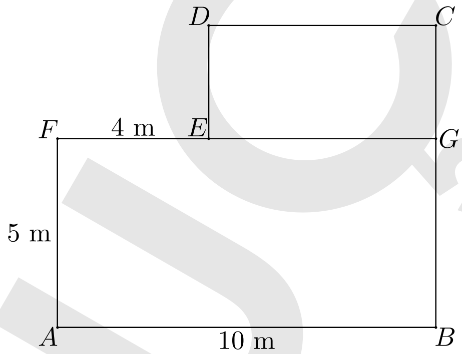
Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3: 10 pontos cada

1. (a) Opção B. *(Têm todas um resultado ímpar, exceto 20×17)*
   (b) Opção C. *(O número do novo berlinde da Maria é $6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 40$)*
   (c) Opção B. *(As letras do dado são N,E,P,C,M,S)*
   (d) Opção D. *(A zona pintada da metade superior preenche as zonas não pintadas da metade inferior)*
   (e) Opção E. *(Cada um dos trabalhadores produz 45 peças)*

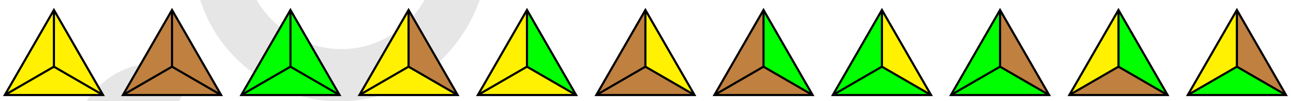
2. Observe-se que a área do retângulo $[ABGF]$ mede $5 \times 10 = 50m^2$, logo a área do retângulo $[EGCD]$ mede $68 - 50 = 18m^2$. Além disso, $\overline{EG} = 10 - 4 = 6m$, por isso, $\overline{DE} = 18/6 = 3m$. Portanto, o perímetro do terreno é

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{DC} + \overline{DE} + \overline{EF} + \overline{FA} = 10 + (5 + 3) + 6 + 3 + 4 + 5 = 36\,m.$$

Assim, o Sr José terá de gastar $50 \times 36 = 1800$€ em rede para cercar o terreno.



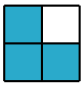
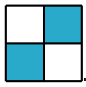
3. Temos três possibilidades quanto ao número de cores diferentes usadas. No caso de as três faces serem todas pintadas da mesma cor, temos apenas 3 piões diferentes. No caso de haver duas faces da mesma cor e a outra face ter uma cor diferente, temos 3 cores possíveis para a cor que se usa em duas faces e 2 cores possíveis para a que se usa na outra face. Note-se que só há um pião com duas faces pintadas de amarelo e a outra face pintada de castanho e o mesmo se verifica para qualquer uma das outras 5 combinações possíveis de duas cores diferentes. Temos, assim, um total de 6 piões diferentes neste caso. Se as três faces têm todas cores diferentes, temos, neste caso, 2 piões diferentes, dependendo da ordem como se usam as cores no pião. Há, assim, $3 + 6 + 2 = 11$ maneiras diferentes de pintar o pião, indicadas na figura.



XXXVI OPM - 1ª Eliminatória - 8.11.2017 - Categoria Júnior - 6º/7º anos

Duração: 2 horas
Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3, 4: 8 pontos cada

Na questão 1 escolhe, em cada alínea, a opção correta.
Justifica convenientemente as tuas respostas às questões 2, 3 e 4.
Não é permitido o uso de calculadoras.

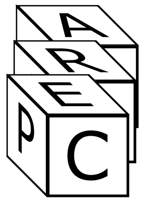
1. (a) O João criou uma figura colando, sem sobreposições, 10 autocolantes do tipo  e 5 do tipo . Qual é a proporção pintada na figura criada pelo João?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{7}{12}$ C) $\frac{5}{8}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{3}{4}$

(b) Outra figura criada pelo João, com autocolantes quadrados de lado $2\,cm$, tem a forma de um retângulo de área $260\,cm^2$ e perímetro inferior a $2\,m$. Sabendo que os autocolantes cobrem todo o retângulo sem sobreposições, quanto mede o perímetro do retângulo?

A) 36 cm B) 65 cm C) 72 cm D) 108 cm E) 130 cm

(c) O João tem três dados com uma letra em cada uma das 6 faces, sendo as 18 letras todas diferentes. O João lançou os três dados várias vezes e, em cada lançamento, formou as seguintes palavras com as letras que ficaram na face de cima: ERA, UMA, VEZ, QUE, LER, LEI, SUL, TER, GEL, SOL, FIM. Qual das seguintes letras está no mesmo dado que tem a letra N?

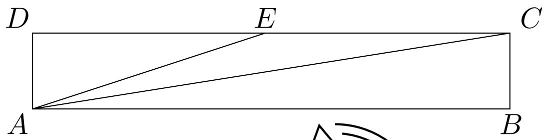


A) I B) M C) Q D) T E) Z

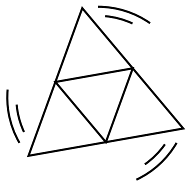
(d) O João vai participar num torneio de lançamentos composto por 10 voltas. Em cada volta decide se quer lançar ou não. Se não lançar, mantém os seus pontos. Se lançar e acertar no alvo, recebe 3 pontos; se lançar e falhar, perde 1 ponto. Cada jogador começa com 10 pontos. No fim do torneio, todos os participantes tiveram pontuações diferentes. Quantos jogadores, no máximo, podem ter participado no torneio?

A) 37 B) 38 C) 39 D) 40 E) 41

2. Num retângulo $[ABCD]$, o ponto E pertence ao lado $[DC]$ e está equidistante dos pontos A e C.
Sabendo que $D\hat{A}E = 7\,C\hat{A}B$, determina $A\hat{E}C$.

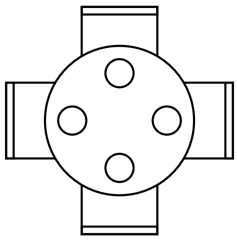


3. O André recebeu um pião e quer pintar cada uma das quatro regiões com uma das seguintes cores: amarelo, castanho e verde. Ajuda o André a encontrar o número total de maneiras diferentes de pintar o seu pião.



4. O David e três dos seus melhores amigos foram jantar a um restaurante. Quando chegaram, sentaram-se numa mesa redonda. Sabemos que:

- o Ferreira estava sentado em frente do amigo que pediu iscas;
- o apelido do Afonso não é Ferreira;
- o Afonso sentou-se à esquerda do amigo que pediu massa à bolonhesa;
- o Gonçalves sentou-se à esquerda do amigo que comeu lulas grelhadas;
- quem pediu jardineira sentou-se à esquerda do Carlos;
- o Bernardo estava sentado em frente do Esteves.



Indica o primeiro nome do Henriques e o prato que ele escolheu para jantar.

OLIMPÍADAS
PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA

http://www.spm.pt/olimpiadas

XXXVI OPM - 1ª Eliminatória - 8.11.2017 - Categoria Júnior - 6°/7° anos

Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3, 4: 8 pontos cada

Sugestões para a resolução dos problemas

1. (a) Opção D. *(Tem-se* $10 \times 3 + 5 \times 2 = 40$ *casas pintadas, num total de* $15 \times 4 = 60$ *casas e* $\dfrac{40}{60} = \dfrac{2}{3}$*)*

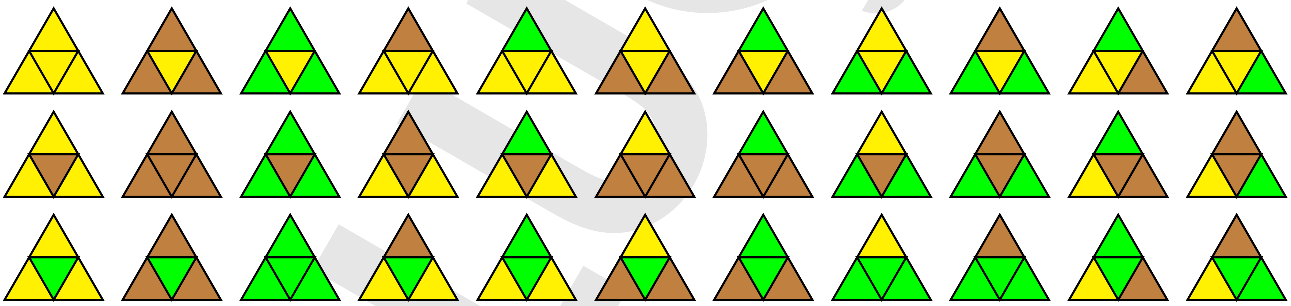
   (b) Opção C. *(Há* $260/4 = 65$ *autocolantes num quadriculado* 13×5*, que tem perímetro* 72 *cm)*

   (c) Opção B. *(As letras do dado são N,E,P,C,M,S)*

   (d) Opção B. *(Todas as pontuações de* 0 *a* 40 *pontos são possíveis, exceto* 39*,* 38 *e* 35 *pontos)*

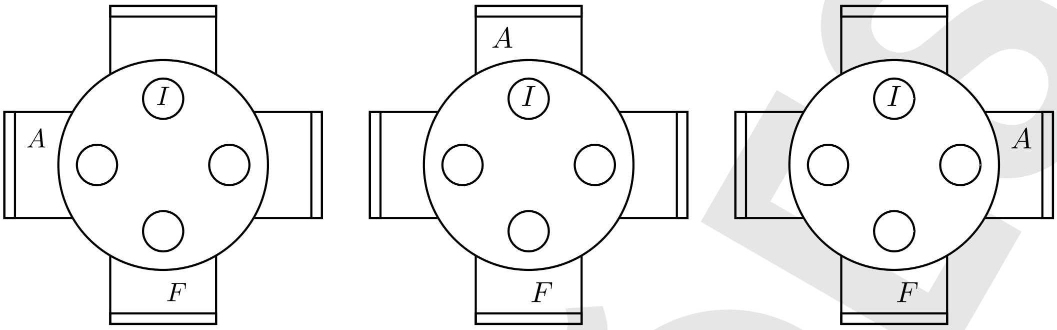
2. Seja $C\hat{A}B = a$. Os ângulos CAB e ECA são alternos internos, logo têm a mesma amplitude, ou seja, $E\hat{C}A = a$. Observe-se agora que o triângulo $[ACE]$ é isósceles, pois $\overline{AE} = \overline{EC}$, por isso, $E\hat{A}C = E\hat{C}A = a$. Uma vez que $D\hat{A}E = 7a$ e $D\hat{A}E + E\hat{A}C + C\hat{A}B = 90°$, é possível concluir que $9a = 90°$, ou seja, $a = 10°$. Assim, $A\hat{E}C = 180° - 2a = 180° - 20° = 160°$.

3. Há três formas de pintar a face central, logo o número de maneiras de pintar o pião é o triplo do número de maneiras diferentes de pintar as três faces exteriores do pião. Determinemos, então, este último número. Temos três possibilidades quanto ao número de cores diferentes usadas. No caso de as três faces serem todas pintadas da mesma cor, temos apenas 3 piões diferentes. No caso de haver duas faces da mesma cor e a outra face ter uma cor diferente, temos 3 cores possíveis para a cor que se usa em duas faces e 2 cores possíveis para a que se usa na outra face. Note-se que só há um pião com duas faces pintadas de amarelo e a outra face pintada de castanho e o mesmo se verifica para qualquer uma das outras 5 combinações possíveis de duas cores diferentes. Temos, assim, um total de 6 piões diferentes neste caso. Se as três faces têm todas cores diferentes, temos, neste caso, 2 piões diferentes, dependendo da ordem como se usam as cores nas faces do pião. Há, assim, $3 + 6 + 2 = 11$ maneiras diferentes de pintar as faces exteriores do pião. Logo o número de maneiras diferentes de pintar o pião todo é $3 \times 11 = 33$, indicadas na figura.

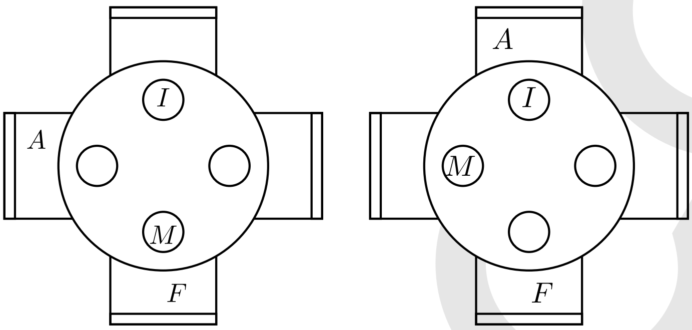


4. Vamos analisar as informações dadas, representando num esquema os nomes próprios (Afonso, Bernardo, Carlos e David) por A, B, C, D, os apelidos (Esteves, Ferreira, Gonçalves e Henriques) por E, F, G, H e os pratos (iscas, jardineira, lulas e massa) por I, J, L, M, respetivamente.

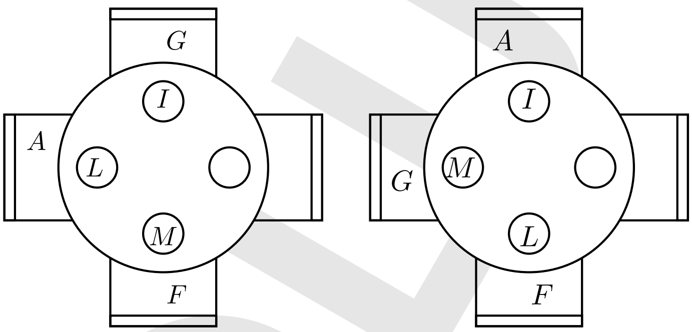
   - O Ferreira estava sentado em frente do amigo que pediu iscas e o apelido do Afonso não é Ferreira. Temos três possibilidades para o lugar do Afonso:



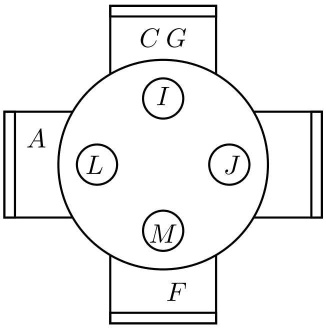
   - O Afonso sentou-se à esquerda do amigo que pediu massa à bolonhesa. Esta informação exclui a terceira possibilidade, porque nesse caso o Afonso está à esquerda de quem comeu iscas.



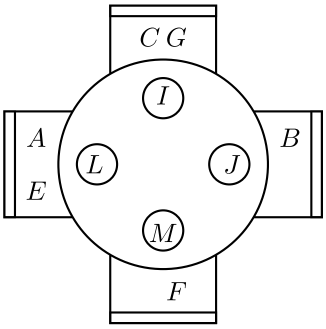
   - O Gonçalves sentou-se à esquerda do amigo que comeu lulas grelhadas. Para cada uma das possibilidades, o Gonçalves poderia estar em dois lugares, um dos quais já está ocupado pelo Ferreira.



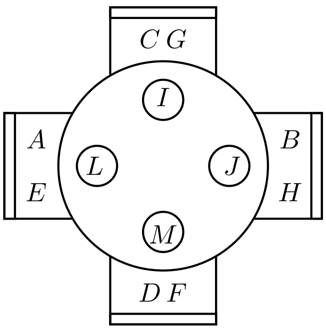
- Quem pediu jardineira sentou-se à esquerda do Carlos. Só há um lugar possível para quem comeu jardineira, logo o Carlos comeu iscas. Isto exclui a segunda possibilidade, pois nesse caso, foi o Afonso que comeu iscas.



- O Bernardo estava sentado em frente do Esteves. Só há um lugar possível para o Bernardo.



Portanto, o primeiro nome do Henriques é Bernardo e ele escolheu jardineira. A disposição completa dos amigos e dos pratos escolhidos está indicada no esquema seguinte.

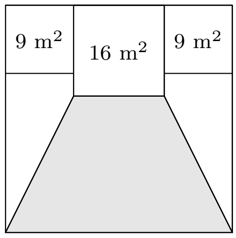


XXXVI OPM - 2ª Eliminatória - 10.01.2018 - Categoria Júnior - 6º/7º anos

Duração: 2 horas
Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3, 4: 8 pontos cada

Na questão 1 escolhe, em cada alínea, a opção correta.
Justifica convenientemente as tuas respostas às questões 2, 3 e 4.
Não é permitido o uso de calculadoras.

1. (a) O Paulo é dono de um terreno quadrangular, representado na figura, que está dividido em seis lotes: três quadrados e três trapézios. A área dos lotes quadrados está indicada na figura. Quanto vale o lote sombreado, sabendo que o preço de cada m^2 é 1000 euros?



A) 12000 euros B) 16000 euros C) 34000 euros D) 42000 euros E) 100000 euros

(b) Considera a seguinte lista de afirmações:

1- Nesta lista há exatamente uma afirmação falsa.
2- Nesta lista há exatamente duas afirmações falsas.
3- Nesta lista há exatamente três afirmações falsas.
4- Nesta lista há exatamente quatro afirmações falsas.

Qual das afirmações é verdadeira?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) Nenhuma

(c) Em quantos zeros termina o número $8^7 \times 25^5$?

A) 5 B) 7 C) 10 D) 11 E) 12

(d) Um número de três algarismos diz-se *quadrifã* se for múltiplo de quatro e todos os números obtidos por uma permutação dos seus algarismos também forem múltiplos de quatro. Por exemplo, 408 é quadrifã pois 408, 084, 480, 048, 840 e 804 são todos múltiplos de quatro. Quantos quadrifãs existem?

A) 9 B) 18 C) 27 D) 48 E) 81

2. A Paula tem quatro irmãs, é a irmã do meio e tem 7 anos. As idades das quatro irmãs da Paula são quatro números pares distintos, não nulos, cuja média é 7. Sabendo que a Ana tem o dobro da idade da Eduarda e que a Sandra é dois anos mais velha do que a Rosa, será possível descobrir a idade das irmãs da Paula?

3. No triângulo $[CDE]$, o ponto A, no lado $[CD]$, está a 4 cm do vértice C e a 8 cm do vértice D. O ponto B pertence ao lado $[CE]$ e dista 6 cm do vértice C e 2 cm do vértice E. A área do triângulo $[ABC]$ mede 3 cm^2. Quanto mede a área do triângulo $[CDE]$?

4. Sete amigos sentaram-se numa mesa redonda para jantar. De quantas formas podemos escolher um grupo, com pelo menos um elemento, de entre os sete amigos, de modo que nesse grupo não estejam duas pessoas que tenham estado sentadas lado a lado durante o jantar?

Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3, 4: 8 pontos cada

Sugestões para a resolução dos problemas

1. (a) Opção D.
   (b) Opção C.
   (c) Opção C.
   (d) Opção B.

2. A média das idades das irmãs da Paula é 7, o que significa que a soma das idades das suas quatro irmãs é $4 \times 7 = 28$. Duas das suas irmãs têm menos do que 7 anos e as suas idades são números pares não nulos. Existem portanto três hipóteses, as duas irmãs mais novas têm: 4 e 6 anos, 2 e 6 anos ou 2 e 4 anos.

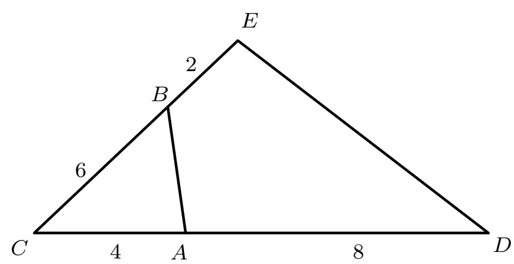
   Se tiverem 4 e 6 anos, a soma das idades das duas restantes irmãs é $28 - 4 - 6 = 18$, portanto uma delas tem 10 anos e a outra 8 anos. O dobro de 4 é 8 mas a diferença entre 10 e 6 é igual 4, logo esta não é uma solução possível.

   Se tiverem 2 e 6 anos, a soma das idades das duas restantes irmãs é $28 - 2 - 6 = 20$, portanto uma delas tem 12 anos e a outra 8 anos. O dobro de 6 é 12 mas a diferença entre 8 e 2 é igual a 6, logo esta também não é uma solução possível.

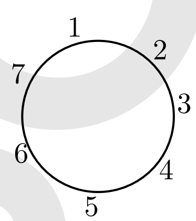
   Resta verificar o caso em que uma das irmãs tem 2 anos e outra tem 4 anos. A soma das idades das duas restantes irmãs é $28 - 4 - 2 = 22$, portanto neste caso temos que considerar duas hipóteses: as duas irmãs mais velhas têm 12 e 10 anos, ou têm 14 e 8 anos. No primeiro caso temos que 4 é o dobro de 2 e que $12 - 10 = 2$, o que significa que esta é uma solução possível. No segundo caso teríamos que as quatro irmãs têm $2, 4, 8$ e 14 anos e destes números apenas 2 e 4 estão a uma diferença de duas unidades, mas 14 não é o dobro de 8.

   Conclui-se que é possível descobrir a idade das irmãs: a Eduarda tem 2 anos, a Ana tem 4 anos, a Rosa tem 10 anos e a Sandra tem 12 anos.

3. Os triângulos $[ABC]$ e $[ADB]$ têm a mesma altura relativamente ao vértice B. Como a base de $[ADB]$ é o dobro do base de $[ABC]$, a área do triângulo $[ADB]$ mede o dobro da área do triângulo $[ABC]$, logo mede 6 cm^2. Assim, a área do triângulo $[BCD]$ mede $3+6 = 9$ cm^2. Por outro lado, os triângulos $[BCD]$ e $[BDE]$ têm a mesma altura relativamente ao vértice D. Como a base de $[BDE]$ é a terça parte da base de $[BCD]$, a área do triângulo $[BDE]$ mede um terço da área do triângulo $[BCD]$, logo mede 3 cm^2. Finalmente, a área do triângulo $[CDE]$ mede $3 + 6 + 3 = 12$ cm^2.



4. Designem-se os sete amigos por $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, e considere-se que eles estão sentados de acordo com a figura:



   O número máximo de amigos que o grupo pode ter é 3. Para haver um grupo com 4 pessoas seriam necessárias pelo menos 8 pessoas uma vez que por cada pessoa escolhida a pessoa à sua esquerda não pode ser escolhida. A lista seguinte indica todos os possíveis grupos com um ou dois elementos. O sinal $\times$ identifica um grupo em que os seus elementos estão sentados lado a lado. O sinal $-$ identifica um grupo já considerado numa linha anterior da tabela.

	1	2	3	4	5	6	7
1	$\{1\}$	$\times$	$\{1,3\}$	$\{1,4\}$	$\{1,5\}$	$\{1,6\}$	$\times$
2	$-$	$\{2\}$	$\times$	$\{2,4\}$	$\{2,5\}$	$\{2,6\}$	$\{2,7\}$
3	$-$	$-$	$\{3\}$	$\times$	$\{3,5\}$	$\{3,6\}$	$\{3,7\}$
4	$-$	$-$	$-$	$\{4\}$	$\times$	$\{4,6\}$	$\{4,7\}$
5	$-$	$-$	$-$	$-$	$\{5\}$	$\times$	$\{5,7\}$
6	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$\{6\}$	$\times$
7	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$\{7\}$

No total há $7+4+4+3+2+1=21$ possibilidades.

Observe-se que escolher um grupo de três amigos, nas condições do problema, equivale a escolher os dois amigos sentados lado a lado que não pertencem ao grupo. Por exemplo o grupo $\{2,4,6\}$ corresponde à escolha do par $\{1,7\}$. Portanto, há 7 possibilidades para os grupos com três amigos: $\{1,3,5\}$, $\{1,3,6\}$, $\{1,4,6\}$, $\{2,4,6\}$, $\{2,4,7\}$, $\{2,5,7\}$ e $\{3,5,7\}$.

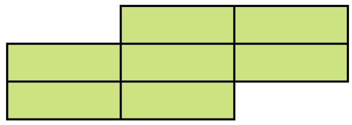
No total há 28 grupos nas condições indicadas.

XXXVI OPM - Final - 1º Dia - 23.03.2018 - Categoria Júnior - 6º/7º anos

Duração: 2 horas
Questão 1: 16 pontos
Questões 2 e 3: 7 pontos cada

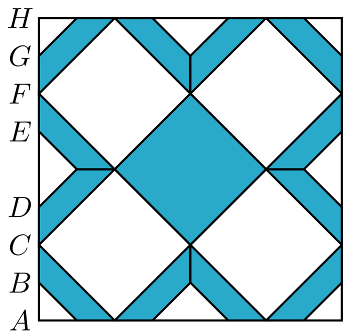
Justifica convenientemente as tuas respostas e indica os principais cálculos.
Não é permitido o uso de calculadoras.

1. (a) O Artur juntou sete borrachas retangulares iguais e formou o padrão representado na figura ao lado. Quantos retângulos é possível distinguir nessa figura?



A) 16 B) 17 C) 18 D) 19 E) 20

(b) Num quadrado de lado 8 cm, o Artur traçou segmentos de reta e coloriu um quadrado e 12 trapézios, como se pode ver na figura ao lado. O ponto B é o ponto médio de $[AC]$, C é o ponto médio de $[BD]$ e D é o ponto médio de $[BE]$. Da mesma forma, G é o ponto médio de $[FH]$, F é o ponto médio de $[EG]$, E é o ponto médio de $[DG]$ e do mesmo modo para os outros lados do quadrado. Quanto mede, em cm^2, a área colorida?



A) 24 B) 26 C) 28 D) 30 E) 32

(c) O Artur vai a um parque temático com a sua escola. O grupo é composto por 120 pessoas e o número de crianças é o triplo dos restantes. Nesse parque, há três tipos de bilhetes: o bilhete normal custa 50€, o bilhete com desconto custa 20€ e o bilhete para crianças custa 10€. Sabendo que o montante gasto em bilhetes para crianças representa metade do total gasto em bilhetes, quantas pessoas compraram um bilhete com desconto?

A) 10 B) 15 C) 20 D) 25 E) 30

(d) Numa das longas filas de espera dentro do parque temático, o Artur tenta substituir cada uma das 10 letras que aparecem na adição seguinte por um algarismo.

$$\begin{array}{rcccccc} & & J & U & N & H & O \\ + & & J & U & L & H & O \\ \hline & A & G & O & S & T & O \end{array}$$

De quantas formas pode ele realizar essa tarefa de modo que a adição seja verdadeira e que letras diferentes correspondam a algarismos diferentes?

A) 0 B) 2 C) 4 D) 6 E) 8

2. O João recebeu um total de 2018 amêndoas de chocolate nesta Páscoa. Sabendo que vinham em sacos de 18 ou 20 amêndoas, quantos sacos de 18 amêndoas pode ele ter recebido? Indica todas as possibilidades.

3. O Saltão e o Pulão são dois gafanhotos que gostam de participar em corridas de saltos. A estratégia do Saltão é dar sempre o mesmo salto de 2018 mm de comprimento. Por outro lado, o Pulão gosta de começar com saltos pequenos e ir progressivamente aumentando o comprimento dos saltos. Assim, o primeiro salto do Pulão mede 3 mm, o segundo 16 mm, o terceiro 29 mm, e assim sucessivamente, com cada salto a medir mais 13 mm do que o anterior. Sabendo que os gafanhotos partem da mesma posição e saltam sempre ao mesmo tempo, ao fim de quantos saltos o Pulão alcança o Saltão?

OLIMPÍADAS
PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA

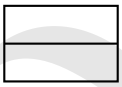
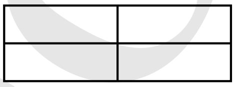
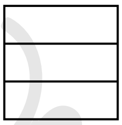
http://www.spm.pt/olimpiadas

XXXVI OPM - Final - 1° Dia - 23.03.2018 - Categoria Júnior - 6°/7° anos

Duração: 2 horas
Questão 1: 16 pontos
Questões 2 e 3: 7 pontos cada

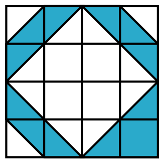
Sugestões para a resolução dos problemas

1. (a) Vamos contar os retângulos de diferentes tamanhos que podemos distinguir na figura:

altura × comprimento	desenho	número
1×1		7
1×2		4
2×1		4
1×3		1
2×2		2
3×1		1
	Total	19

Opção correta: D).

(b) Consideremos um quadrado de lado 4 cm, parcialmente colorido, e dividido em 16 quadradinhos de lado 1 cm, como se vê na figura ao lado.
A área colorida ocupa 13 metades destes quadradinhos e, portanto, mede $\frac{13}{2}\ \mathrm{cm}^2$. Dado que a figura original corresponde a quatro cópias deste quadrado, a área colorida na figura do enunciado mede $4 \times \frac{13}{2} = 26\ \mathrm{cm}^2$.



Opção correta: B).

(c) Como o número de crianças é o triplo dos restantes temos 90 crianças e 30 adultos. Os bilhetes para as 90 crianças custaram $90 \times 10 = 900$€, o que corresponde a metade do total gasto em bilhetes. Então os 30 bilhetes para adultos também custaram 900€. Se os 30 bilhetes de adulto fossem comprados com desconto teriam custado $30 \times 20 = 600$€. Dado que a diferença entre o preço do bilhete normal e o do bilhete com desconto é $50 - 20 = 30$€, concluímos que 10 adultos tiveram de comprar o bilhete normal porque $600 + 10 \times 30 = 900$€. Verifica-se de facto que a compra de 10 bilhetes normais e 20 bilhetes com desconto totalizam 900€: $10 \times 50 + 20 \times 20 = 500 + 400 = 900$€.
Opção correta: C).

(d) Aparecem 10 letras diferentes nessa adição: A, G, H, I, J, L, N, O, S e T, logo, como letras diferentes correspondem a algarismos diferentes, temos de usar os 10 algarismos $0, 1, 2, \ldots, 9$. Tem-se $\mathsf{O} = 0$ e, como $99999 + 99999 < 200000$, tem-se $\mathsf{A} = 1$.

Como O e U + U são pares, então não há transporte para a coluna $\mathsf{U} + \mathsf{U} = \mathsf{O}$, ou seja, logo $\mathsf{U} + \mathsf{U} = 0$ ou $\mathsf{U} + \mathsf{U} = 10$. Como todas as letras correspondem a números diferentes, tem-se $\mathsf{U} = 5$. Assim, a adição pode ser separada em duas partes:

$$\begin{array}{rr} & \mathsf{J}\ 5 \\ + & \mathsf{J}\ 5 \\ \hline & 1\ \mathsf{G}\ 0 \end{array} \qquad \text{e} \qquad \begin{array}{rr} & \mathsf{N}\ \mathsf{H}\ 0 \\ + & \mathsf{L}\ \mathsf{H}\ 0 \\ \hline & \mathsf{S}\ \mathsf{T}\ 0 \end{array} \quad .$$

Como $\mathsf{J} + \mathsf{J} + 1 > 9$, temos $\mathsf{J} \geq 5$. Dado que $\mathsf{U} = 5$, há quatro hipóteses para J:

$$\begin{array}{lllll} \mathsf{J} = 6 & \Longrightarrow & 6 + 6 + 1 = 13 & \Longrightarrow & \mathsf{G} = 3 \\ \mathsf{J} = 7 & \Longrightarrow & 7 + 7 + 1 = 15 & \Longrightarrow & \mathsf{G} = 5 \quad (\text{Impossível porque } \mathsf{U} = 5 \text{ e } \mathsf{U} \neq \mathsf{G}) \\ \mathsf{J} = 8 & \Longrightarrow & 8 + 8 + 1 = 17 & \Longrightarrow & \mathsf{G} = 7 \\ \mathsf{J} = 9 & \Longrightarrow & 9 + 9 + 1 = 19 & \Longrightarrow & \mathsf{G} = 9 \quad (\text{Impossível porque } \mathsf{J} \neq \mathsf{G}) \end{array}$$

<u>$1^{\underline{o}}$ caso</u> – $\mathsf{J} = 6$ e $\mathsf{G} = 3$:

Na adição

$$\begin{array}{rr} & \mathsf{N}\ \mathsf{H}\ \mathsf{O} \\ + & \mathsf{L}\ \mathsf{H}\ \mathsf{O} \\ \hline & \mathsf{S}\ \mathsf{T}\ \mathsf{O} \end{array}$$

falta atribuir um valor às letras J, L, N, S e T de entre os valores $2, 4, 7, 8$ e 9. Como T tem de ser par, só pode tomar os valores $2, 4$ ou 8. A análise dos diferentes casos é feita abaixo.

$$\mathsf{T} = 2 \implies \left\langle \begin{array}{ll} \mathsf{H} = 1 & (\text{Impossível porque } \mathsf{A} = 1) \\[1em] \mathsf{H} = 6 & (\text{Impossível porque } \mathsf{J} = 6) \end{array} \right.$$

$$\mathsf{T} = 4 \implies \left\langle \begin{array}{llll} \mathsf{H} = 2 & \Longrightarrow & \begin{array}{l} \mathsf{N} + \mathsf{L} = \mathsf{S} \\ \text{com } 7, 8, 9 \end{array} & (\text{Impossível}) \\[1.5em] \mathsf{H} = 7 & \Longrightarrow & \begin{array}{l} \mathsf{N} + \mathsf{L} + 1 = \mathsf{S} \\ \text{com } 2, 8, 9 \end{array} & (\text{Impossível}) \end{array} \right.$$

$$\mathsf{T} = 8 \implies \left\langle \begin{array}{llll} \mathsf{H} = 4 & \Longrightarrow & \begin{array}{l} \mathsf{N} + \mathsf{L} = \mathsf{S} \\ \text{com } 2, 7, 9 \end{array} & \left\langle \begin{array}{l} \mathsf{N} = 2, \mathsf{L} = 7, \mathsf{S} = 9 \\[1em] \mathsf{N} = 7, \mathsf{L} = 2, \mathsf{S} = 9 \end{array} \right. \\[1.5em] \mathsf{H} = 9 & \Longrightarrow & \begin{array}{l} \mathsf{N} + \mathsf{L} + 1 = \mathsf{S} \\ \text{com } 2, 4, 7 \end{array} & \left\langle \begin{array}{l} \mathsf{N} = 2, \mathsf{L} = 4, \mathsf{S} = 7 \\[1em] \mathsf{N} = 4, \mathsf{L} = 2, \mathsf{S} = 7 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$\underline{2^{\underline{o}}\text{ caso}}$ – $\mathsf{J} = 8$ e $\mathsf{G} = 7$:

Analogamente ao caso anterior, falta atribuir um valor às letras H, L, N, S e T de entre os valores $2, 3, 4, 6$ e 9. Como T tem de ser par, só pode tomar os valores $2, 4$ ou 6. A análise dos diferentes casos é feita abaixo.

$$\mathsf{T} = 2 \implies \begin{cases} \mathsf{H} = 1 & \text{(Impossível porque } \mathsf{A} = 1) \\ \mathsf{H} = 6 \implies \begin{array}{l} \mathsf{N} + \mathsf{L} + 1 = \mathsf{S} \\ \text{com } 3, 4, 9 \end{array} & \text{(Impossível)} \end{cases}$$

$$\mathsf{T} = 4 \implies \begin{cases} \mathsf{H} = 2 \implies \begin{array}{l} \mathsf{N} + \mathsf{L} = \mathsf{S} \\ \text{com } 3, 6, 9 \end{array} & \begin{cases} \mathsf{N} = 3, \mathsf{L} = 6, \mathsf{S} = 9 \\ \mathsf{N} = 6, \mathsf{L} = 3, \mathsf{S} = 9 \end{cases} \\ \mathsf{H} = 7 & \text{(Impossível porque } \mathsf{G} = 7) \end{cases}$$

$$\mathsf{T} = 6 \implies \begin{cases} \mathsf{H} = 3 \implies \begin{array}{l} \mathsf{N} + \mathsf{L} = \mathsf{S} \\ \text{com } 2, 4, 9 \end{array} & \text{(Impossível)} \\ \mathsf{H} = 8 & \text{(Impossível porque } \mathsf{J} = 8) \end{cases}$$

Logo, há 6 formas diferentes de o Artur escrever a adição do enunciado.

Opção correta: D).

2. Como $2018 = 18 \times 1 + 20 \times 100$, o João pode ter recebido 1 saco de 18 amêndoas e 100 de 20. O mínimo múltiplo comum de 18 e 20 é $180 = 9 \times 20 = 10 \times 18$. Assim, 9 sacos de 20 amêndoas podem ser trocados por 10 sacos de 18, 2×9 sacos de 20 amêndoas por 2×10 sacos de 18, ..., 11×9 sacos de 20 amêndoas podem ser trocados por 11×10 sacos de 18. Portanto o João pode ter recebido $1, 11, \ldots, 111$ sacos de 18 amêndoas.

3. No primeiro salto, o Pulão percorreu 3 mm, no segundo salto percorreu $3 + 13$ mm, no terceiro percorreu $3 + 2 \times 13$ mm, e assim sucessivamente, tendo no n-ésimo salto percorrido $3 + (n - 1) \times 13$ mm. Uma vez que $2018 = 3 + (156 - 1) \times 13$, concluímos que no 156° salto o Pulão percorreu 2018 mm, igualando o comprimento dos saltos do Saltão.

   A partir do 156° salto, o Pulão começou a recuperar terreno em cada salto. No 157° salto, o Pulão recuperou o que perdeu no 155° salto, no 158° salto, o Pulão recuperou o que perdeu no 154° salto, e assim sucessivamente, até ao salto número $156 + 155 = 311$, em que recuperou o que perdeu no 1° salto.

XXXVI OPM - Final - 2º Dia - 24.03.2018 - Categoria Júnior - 6º/7º anos

Duração: 2 horas
Questão 4: 16 pontos
Questões 5 e 6: 7 pontos cada

Justifica convenientemente as tuas respostas e indica os principais cálculos.
Não é permitido o uso de calculadoras.

4. (a) A Zulmira e o Alfredo vão participar numa prova de Olimpíadas de Matemática na Escola Secundária de Mirandela. A ficha de inscrição é um retângulo de papel. A Zulmira reparou que se dividisse a ficha em dois retângulos iguais, cada um dos novos retângulos teria 70 cm de perímetro. O Alfredo também dividiu a ficha em dois retângulos iguais, mas obteve dois retângulos com perímetro igual a 50 cm. Qual é o perímetro, em cm, da ficha de inscrição?

A) 80 B) 90 C) 100 D) 110 E) 120

(b) Na prova participaram 9 rapazes do ensino básico e 9 rapazes do ensino secundário. De entre os alunos participantes, 14 moram em Mirandela, e desses, 6 são rapazes. Na prova participaram 7 raparigas que não moram em Mirandela. Quantos participantes teve a prova?

A) 18 B) 25 C) 32 D) 33 E) 45

(c) Enquanto esperavam pelo início da prova, a Zulmira e o Alfredo repararam que o número 2018 tem 4 algarismos diferentes cuja soma é 11. Quantos números têm estas propriedades?

A) 6 B) 24 C) 60 D) 114 E) 164

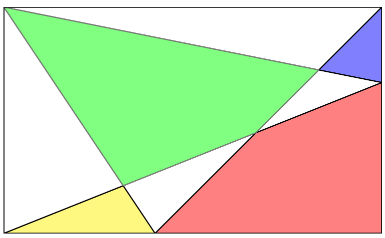
(d) Num dos problemas da prova aparecem os seguintes três números:

- $x = 2016 \times (1 + 2 + \cdots + 2016 + 2017 + 2018)$;
- $y = 2017 \times (1 + 2 + \cdots + 2016 + 2017 + 2016)$;
- $z = 2018 \times (1 + 2 + \cdots + 2016 + 2017 + 2017)$.

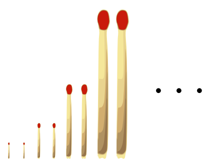
Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

A) $x > y > z$ B) $x > z > y$ C) $y > z > x$ D) $z > x > y$ E) $z > y > x$

5. A bandeira da Miralândia está representada na figura. A área azul mede 3 dm^2, a área vermelha mede 25 dm^2 e a área amarela mede 5 dm^2. Quanto mede a área verde?



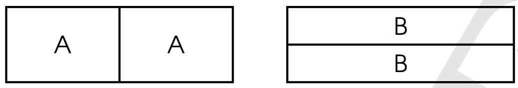
6. O João tem 22 fósforos cujos comprimentos em mm são potências de 2, tendo dois fósforos de cada comprimento. Os fósforos mais pequenos medem $2^1 = 2$ mm e os maiores medem $2^{11} = 2048$ mm. Quantos triângulos diferentes pode o João formar usando um fósforo para cada lado?



Duração: 2 horas
Questão 1: 16 pontos
Questões 2 e 3: 7 pontos cada

Sugestões para a resolução dos problemas

4. (a) Podemos dividir o retângulo das duas formas seguintes:



Solução 1: A soma do perímetro de um retângulo A com um retângulo B é igual ao perímetro do retângulo original, mais a soma de metade de todos os seus lados. Ou seja, $50 + 70 = 120$ cm é igual a uma vez e meia o perímetro da ficha de inscrição, o que significa que perímetro da ficha de inscrição é 80 cm.

Solução 2: Se designarmos por x e y os lados do retângulo inicial, temos $2x + y = 50$ e $2y + x = 70$, e portanto $3x + 3y = 120$, donde se conclui que o perímetro da ficha é $2x + 2y = 80$ cm.

Opção correta: A).

(b) Participaram na prova um total de 18 rapazes, sendo 9 do ensino básico e 9 do ensino secundário. Resta descobrir quantas raparigas participaram na prova. Como há 14 participantes de Mirandela, e desses 6 são rapazes, há 8 raparigas de Mirandela. Sabemos ainda que há 7 raparigas que não moram em Mirandela, e portanto o número total de raparigas é $8 + 7 = 15$. A prova teve $18 + 15 = 33$ participantes.

Opção correta: D).

(c) Há 6 possibilidades de escolher quatro algarismos diferentes de modo a que a sua soma seja igual a 11:

- $11 = 8 + 2 + 1 + 0$,
- $11 = 7 + 3 + 1 + 0$,
- $11 = 6 + 4 + 1 + 0$,
- $11 = 6 + 3 + 2 + 0$,
- $11 = 5 + 4 + 2 + 0$,
- $11 = 5 + 3 + 2 + 1$.

Com cada um destes conjuntos de algarismos podemos formar vários números diferentes. Se um dos algarismos for 0 então, para esse conjunto de algarismos, há três hipóteses para escolher o primeiro algarismo, uma vez que um número não pode começar por 0. O segundo algarismo pode ser qualquer um dos outros três, e para terceiro algarismo escolhemos entre os dois que ainda não foram usados. Portanto, em cada um dos cinco primeiros casos, há $3 \times 3 \times 2 = 18$ números possíveis. Por exemplo, com os algarismos $0, 1, 2, 8$ temos os seguintes números: $8210, 8201, 8120, 8102, 8021, 8012, 2810, 2801, 2180, 2108, 2081, 2018, 1820, 1802, 1280, 1208, 1082, 1028$.

O conjunto $\{1, 2, 3, 5\}$ não tem o algarismo 0. Neste caso, podemos formar com estes algarismos é $4 \times 3 \times 2 = 24$ números diferentes, uma vez que todos os quatro algarismos podem estar na primeira posição. Portanto, existem $5 \times 18 + 24 = 114$ números nas condições do enunciado.

Opção correta: D).

(d) Uma vez que $2017 < 2018$ e $(1+2+\cdots+2016+2017+2016) < (1+2+\cdots+2016+2017+2017)$, conclui-se que $2017(1+2+\cdots+2016+2017+2016) < 2018(1+2+\cdots+2016+2017+2017)$, ou seja, $y < z$.

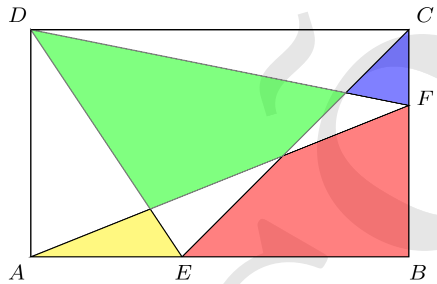
Vamos agora reescrever os números x e y para melhor os podermos comparar.

- $x = 2016(1+2+\cdots+2016+2017+2018) = 2016(1+2+\cdots+2016+2017)+2016\times 2018 = 2016(1+2+\cdots+2016+2017)+2016\times 2017+2016$
- $y = 2017(1+2+\cdots+2016+2017+2016) = 2017(1+2+\cdots+2016+2017)+2016\times 2017 = 2016(1+2+\cdots+2016+2017)+2016\times 2017+(1+2+\cdots+2016+2017)$

É imediato que $2016 < 1+2+\cdots+2016+2017$, e portanto
$2016(1+2+\cdots+2016+2017)+2016\times 2017+2016 < 2016(1+2+\cdots+2016+2017)+2016\times 2017+(1+2+\cdots+2016+2017)$, ou seja $x < y$.

Opção correta: E).

5. Observe-se que a área do retângulo $[ABCD]$ é o dobro da área do triângulo $[AFD]$ e o dobro da área do triângulo $[CDE]$.



Assim,

$$\text{área } [ABCD] = \text{ área } [AFD] + \text{área } [CDE].$$

Por um lado,

$$\text{área } [ABCD] = \text{ área azul + área vermelha + área amarela + área verde +área branca.}$$

Por outro lado, área $[AFD]$ + área $[CDE] = 2\times$ área verde + área branca. Portanto, a área verde é igual à soma das áreas azul, vermelha e amarela, ou seja, $25+5+3=33$ dm^2.

6. Comecemos por observar que se escolhermos três fósforos com tamanhos diferentes $2^x < 2^y < 2^z$, então $2^x+2^y < 2^y+2^y = 2\times 2^y = 2^{y+1} \leq 2^z$. Logo, pela desigualdade triangular, não podemos formar um triângulo com lados diferentes.

Assim, temos de escolher dois fósforos com o mesmo tamanho 2^x e um fósforo de tamanho diferente 2^y, uma vez que só há dois fósforos de cada tamanho. Pela desigualdade triangular, temos $2^x+2^x = 2^{x+1} > 2^y$, logo $x+1 > y$, ou seja, $x \geq y$. Como $x \neq y$, temos $x > y$.

Portanto temos de escolher dois números diferentes no conjunto $\{1,2,\ldots,11\}$. Se $x=11$, há 10 hipóteses para y, se $x=10$, há 9 hipóteses para y, e assim por diante, até ao caso $x=2$, em que há só uma hipótese para y. Logo há $10+9+8+\cdots+2+1=55$ formas de escolher tais fósforos.

XXXVI OPM - 1ª Eliminatória - 08.11.2017 - Categoria A - 8º/9º anos

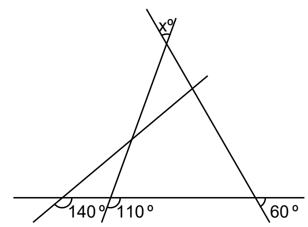
Duração: 2 horas
Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3, 4: 8 pontos cada

Na questão 1 escolhe, em cada alínea, a opção correta.
Justifica convenientemente as tuas respostas às questões 2, 3 e 4.
Não é permitido o uso de calculadoras.

1. (a) Para o magusto da escola, a associação de estudantes preparou rifas. Um grupo de alunos esteve seis horas a enrolar um certo número de rifas. No dia seguinte, com mais dois colegas, enrolaram o mesmo número de rifas do primeiro dia, em quatro horas. Quantas horas demoraria uma pessoa sozinha a enrolar esse mesmo número de rifas?

   A) 10 B) 12 C) 16 D)20 E) 24

   (b) No recreio da escola o João encontrou a seguinte figura. Qual o valor de x?



   A) 60 B) 50 C) 45 D) 40 E) 30

   (c) O código do cadeado da bicicleta do João é um número com três algarismos. O João comentou com o seu amigo Tiago que esse número tinha exatamente dois algarismos iguais. Só com esta informação, quantos códigos diferentes existem?

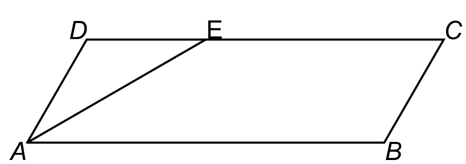
   A) 90 B) 99 C) 180 D) 270 E) 540

   (d) No dia do magusto, a associação de estudantes promoveu um concurso de atirar bolas às latas. Nos dez primeiros lançamentos o João acertou cinco vezes nas latas, nos restantes, ele foi certeiro em três quartos dos lançamentos. No final dos lançamentos, ele observou que acertou nas latas em 70% dos lançamentos. Quantas bolas lançou o João?

   A) 30 B) 35 C) 40 D) 50 E) 60

2. Um comboio percorre uma linha com 10 estações: A, B, C, D, E, F, G, H, I, J. Ele começa em A, pára pela 1^{a} vez em B e depois em todas as estações sucessivamente até J, onde faz a 9ª paragem e inicia o caminho de volta, sendo a 10ª paragem em I e assim sucessivamente. O comboio faz o percurso de ida e volta consecutivamente parando sempre em todas as estações. Em que estação efetua a 2017ª paragem?

3. No paralelogramo $[ABCD]$, a bissetriz do ângulo em A interseta o lado $[CD]$ no ponto E. Sabendo que a área do trapézio $[ABCE]$ é cinco vezes a área do triângulo $[ADE]$ e que $\overline{AB} = 6$ cm, qual é o comprimento do outro lado do paralelogramo?



4. Na torre da Universidade de Coimbra as visitas podem ser feitas em grupos de 4 pessoas para o público em geral, ou de 7 pessoas para visitas escolares. O Pedro, que é estudante de Matemática, trabalha em *part-time* na entrada da torre e reparou que numa manhã o número de grupos de 4 pessoas que visitaram a torre é primo com o número de grupos de 7 pessoas que a visitaram, e que o número total de visitantes foi de 198. Quantos grupos de visitas escolares visitaram a torre nessa manhã?

XXXVI OPM - 1ª Eliminatória - 8.11.2017 - Categoria A - 8°/9° anos

Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3, 4: 8 pontos cada

Sugestões para a resolução dos problemas

1. (a) Opção E.
   (b) Opção B.
   (c) Opção D.
   (d) Opção D.

2. Começando na estação A, o comboio para de novo na A na 18^{a} paragem, 9 paragens até J e 9 paragens no regresso. Sendo assim, o comboio estará na estação A nas paragens com número da forma $18k$, com k inteiro positivo.

   Como $2017 = 18 \times 112 + 1$, o comboio efetua a 2017^{a} paragem na estação B.

3. Como $[DE]$ é paralelo a $[AB]$, $B\hat{A}E = D\hat{E}A$ pois correspondem a ângulos alternos internos. Por outro lado $B\hat{A}E = E\hat{A}D$ porque $[AE]$ bisseta o ângulo BAD. Assim $D\hat{E}A = E\hat{A}D$ pelo que o triângulo $[ADE]$ é isósceles.

   A área do triângulo $[ADE]$ é igual a $\frac{\overline{DE}\times h}{2} = \frac{\overline{AF}\times h}{2}$, onde h é a altura do paralelogramo. A área do trapézio $[ABCE]$ é $\frac{\overline{AB}+\overline{EC}}{2} \times h$ e, como $\overline{DC} = \overline{AB} = 6$, isto é o mesmo que $\frac{6+6-\overline{DE}}{2} \times h$. Temos então

$$5\frac{\overline{DE}\times h}{2} = 6 \times h - \frac{\overline{DE}\times h}{2}$$

   o que implica $\overline{AD} = \overline{DE} = 2$.

4. Comecemos por descobrir todas as maneiras de dividir 198 pessoas em grupos com 4 pessoas, ou com 7 pessoas. Temos que $198 = 46 \times 4 + 2 \times 7$, o que significa que podemos dividir 198 pessoas em 46 grupos com 4 pessoas e 2 grupos com 7 pessoas. Como $mmc(4,7) = 28$ qualquer outra maneira de dividir as 198 pessoas em grupos de 4 ou de 7 pessoas, consiste em acrescentar 4 grupos de 7 pessoas e retirar 7 grupos de 4 pessoas, e assim sucessivamente. Na tabela seguinte mostramos todas as hipóteses, com o respetivo máximo divisor comum.

grupos de 4	grupos de 7	mdc
46	2	2
39	6	3
32	10	2
25	14	1
18	18	18
11	22	11
4	26	2

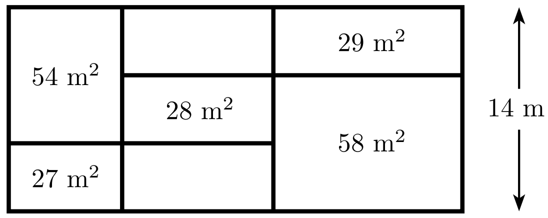
   Portanto a única hipótese em que o máximo divisor comum é igual a 1 é com 25 grupos de 4 pessoas e 14 grupos de 7 pessoas. Ou seja, nessa manhã a torre foi visitada por 14 grupos de visitas escolares.

XXXVI OPM - 2ª Eliminatória - 10.01.2018 - Categoria A - 8°/9° anos

Duração: 2 horas
Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3, 4: 8 pontos cada

Na questão 1 escolhe, em cada alínea, a opção correta.
Justifica convenientemente as tuas respostas às questões 2, 3 e 4.
Não é permitido o uso de calculadoras.

1. (a) A casa do João tem sete divisões retangulares. Na figura ao lado está representada uma planta da casa onde estão indicadas as áreas de cinco das divisões e o comprimento de um dos lados da casa. Quanto mede, em m^2, a área da casa do João?



A) 210 B) 224 C) 240 D) 252 E) 260

(b) Quantos algarismos tem o número $8^7 \times 25^5$?

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

(c) O João nasceu entre 1989 e 1999 e sabe-se que apenas uma das seguintes afirmações é falsa: "O João nasceu num ano par", "O João nasceu num ano divisível por 3" e "O João nasceu num ano múltiplo de 5". Qual é o número de tentativas necessárias para adivinhar, com certeza, o ano de nascimento do João?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

(d) No seu baralho de cartas de "MateMagic", o João tem muitas cópias da mesma carta e decidiu distribuir 12 dessas cartas pelos seus amigos Alfredo, Bernardo e Carlos. Sabe-se que o Alfredo ficou com pelo menos quatro cartas, o Bernardo e o Carlos com pelo menos duas e o Carlos não ficou com mais do que cinco cartas. De quantas formas pode o João distribuir as 12 cartas?

A) 11 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15

2. No triângulo $[CDE]$, o ponto A, no lado $[CD]$, está a 4 cm do vértice C e a 8 cm do vértice D. O ponto B pertence ao lado $[CE]$ e dista 6 cm do vértice C e 2 cm do vértice E. A área do triângulo $[ABC]$ mede 3 cm^2. Quanto mede a área do triângulo $[CDE]$?

3. O João usa no seu telemóvel apenas códigos de acesso constituídos por quatro algarismos diferentes de zero em que o primeiro algarismo é igual à soma dos restantes três. Se o João quiser mudar o código todos os dias, ao fim de quantos dias será obrigado a repetir o código?

4. Num jogo de dardos, um jogador pode obter 7 ou 11 pontos, em cada lançamento. A pontuação de cada jogador é a soma dos pontos obtidos nos seus lançamentos. Quantos múltiplos de 5 são impossíveis de obter como pontuação neste jogo, se não houver limite para o número de lançamentos?

OLIMPÍADAS
PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA

http://www.spm.pt/olimpiadas

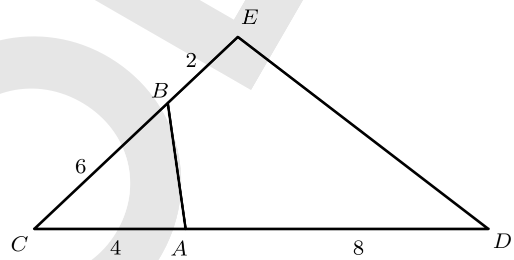
XXXVI OPM - 2ª Eliminatória - 10.01.2018 - Categoria A - 8º/9º anos

Sugestões para a resolução dos problemas

Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3, 4: 8 pontos cada

1. (a) Opção D.
   (b) Opção E.
   (c) Opção D.
   (d) Opção D.

2. Solução 1: Os triângulos $[ABC]$ e $[ADB]$ têm a mesma altura relativamente ao vértice B. Como a base de $[ADB]$ é o dobro do base de $[ABC]$, a área do triângulo $[ADB]$ mede o dobro da área do triângulo $[ABC]$, logo mede 6 cm^2. Assim, a área do triângulo $[BCD]$ mede $3 + 6 = 9$ cm^2. Por outro lado, os triângulos $[BCD]$ e $[BDE]$ têm a mesma altura relativamente ao vértice D. Como a base de $[BDE]$ é a terça parte da base de $[BCD]$, a área do triângulo $[BDE]$ mede um terço da área do triângulo $[BCD]$, logo mede 3 cm^2. Finalmente, a área do triângulo $[CDE]$ mede $3 + 6 + 3 = 12$ cm^2.



Solução 2: Os triângulos $[ECD]$ e $[ACB]$ têm um par de lados proporcionais

$$\frac{\overline{EC}}{\overline{AC}} = \frac{8}{4} = 2 \quad \text{e} \quad \frac{\overline{CD}}{\overline{CB}} = \frac{12}{6} = 2$$

e o ângulo por eles formado comum. Pelo critério de semelhança LAL, os triângulos são semelhantes com razão de semelhança 2. Portanto, a área do triângulo $[ECD]$ mede quatro vezes a área do triângulo $[ACB]$, logo mede 12 cm^2.

3. Um código do João é um número com quatro algarismos diferentes de zero $abcd$ onde $a = b+c+d$. Se $abcd$ é um código então qualquer reordenação dos algarismos b, c e d ainda gera um código. Se os algarismos b, c, d forem todos distintos, há 6 códigos diferentes: $abcd$, $abdc$, $acbd$, $adbc$, $acdb$ e $adcb$. Se exatamente dois dos três algarismos forem iguais, digamos $b = c \neq d$, há 3 códigos diferentes: $abbd$, $abdb$ e $adbb$. Se os três algarismos forem iguais $b = c = d$, há apenas um código $abbb$.

   Como todos os algarismos são diferentes de zero, o primeiro algarismo a tem de ser um número maior ou igual a 3.

   A tabela seguinte indica o número de códigos gerados por cada uma das partições.

Partição	Número de códigos		Partição	Número de códigos
$3 = 1+1+1$	1		$8 = 6+1+1$	3
$4 = 2+1+1$	3		$8 = 5+2+1$	6
$5 = 3+1+3$	3		$8 = 4+3+1$	6
$5 = 2+2+1$	3		$8 = 4+2+2$	3
$6 = 4+1+1$	3		$8 = 3+3+2$	3
$6 = 3+2+1$	6		$9 = 7+1+1$	3
$6 = 2+2+2$	1		$9 = 6+2+1$	6
$7 = 5+1+1$	3		$9 = 5+3+1$	6
$7 = 4+2+1$	6		$9 = 5+2+2$	3
$7 = 3+3+1$	3		$9 = 4+4+1$	3
$7 = 3+2+2$	3		$9 = 4+3+2$	6
			$9 = 3+3+3$	1

Conclui-se que há $7 \times 6 + 13 \times 3 + 3 = 84$ códigos diferentes.

4. Os números que se podem obter como pontuação neste jogo escrevem-se na forma $7x + 11y$, onde x e y representam o número de vezes que o jogador obteve 7 e 11 pontos, respetivamente. A tabela seguinte indica todas as pontuações possíveis até 46.

$x \setminus y$	0	1	2	3	4
0	0	11	22	33	44
1	7	18	29	40	$\bullet$
2	14	25	36	$\bullet$	$\bullet$
3	21	32	43	$\bullet$	$\bullet$
4	28	39	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$
5	35	46	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$
6	42	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$

Observe-se que 25 é o menor múltiplo de 5 que é possível obter. Por outro lado, a soma de duas pontuações possíveis ainda é uma pontuação possível. Assim, se entre as pontuações possíveis houver cinco múltiplos consecutivos de cinco, todos os múltiplos de cinco seguintes também são pontuações possíveis. Como $50 = 25 + 25$, $55 = 5 \times 11$, $60 = 35 + 25$, $65 = 40 + 25$ e $70 = 35 + 35$ conclui-se que todos os múltiplos de cinco maiores ou iguais a 50 são pontuações possíveis. Portanto, há apenas seis múltiplos de 5 que são impossíveis de obter como pontuação deste jogo: 5, 10, 15, 20, 30 e 45.

XXXVI OPM - Final - 1° Dia - 23.03.2018 - Categoria A - 8°/9° anos

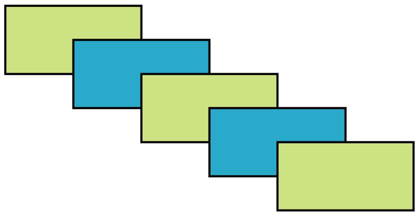
Duração: 3 horas
Questão 1: 16 pontos
Questões 2 e 3: 7 pontos cada

Justifica convenientemente as tuas respostas e indica os principais cálculos.
Não é permitido o uso de calculadoras.

1. (a) O código do cacifo do David no balneário do Tuadela é uma sequência de quatro algarismos. Cada um destes algarismos ou é 0, ou é 1, ou é 2 e a soma dos quatro algarismos é um número par. Quantos códigos diferentes é possível definir?

A) 41 B) 42 C) 64 D) 65 E) 81

(b) O David sobrepôs cinco cartas retangulares, do mesmo tamanho, de modo que cada uma tapa exatamente um quarto da área da carta anterior, tal como se apresenta na figura. A área total da figura assim obtida é 8 dm^2. Quantas cartas são necessárias para obter uma figura construída do mesmo modo com 2018 dm^2 de área total?

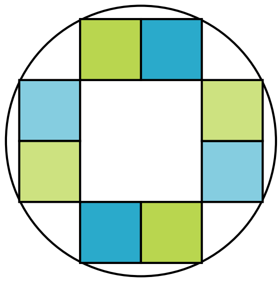


A) 670 B) 675 C) 680 D) 1340 E) 1345

(c) No fim de semana passado, 120 adeptos do Tuadela compraram bilhete para o jogo e o clube arrecadou 270 euros. O preço normal de um bilhete é 5 euros, os maiores de 65 anos pagam 2 euros e as crianças pagam apenas 1 euro. O número de adultos que pagaram bilhete foi o triplo do número de crianças. Quantos adultos pagaram o bilhete normal?

A) 20 B) 25 C) 30 D) 50 E) 70

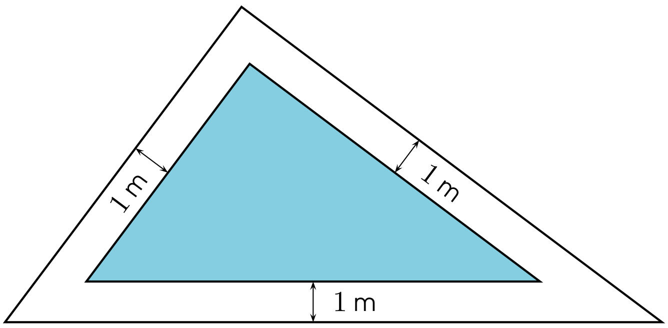
(d) O emblema do Tuadela é um círculo com oito quadrados iguais, dispostos como se apresenta na figura, representando as oito modalidades praticadas. O emblema do clube no casaco do David é um círculo com 2 cm de raio. Qual é a área, em cm^2, de cada um dos oito quadrados coloridos no emblema do David?



A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{4}{5}$ C) $\frac{5}{6}$ D) $\frac{8}{9}$ E) 1

2. O Artur pensou num número inteiro positivo e reparou que a soma dos seus três divisores mais pequenos é 17 e que a soma dos seus três maiores divisores é 3905. Indica todos os números em que o Artur pode ter pensado.

3. A Maria pretende construir no seu jardim uma piscina com a forma de um triângulo retângulo de catetos 12 m e 16 m. Sabendo que é preciso colocar um bordo com 1 m de largura à volta da piscina, determina a área de terreno necessária para a sua construção.



XXXVI OPM - Final - 1º Dia - 23.03.2018 - Categoria A - 8º/9º anos

Duração: 3 horas
Questão 1: 16 pontos
Questões 2 e 3: 7 pontos cada

Sugestões para a resolução dos problemas

1. (a) A soma dos quatro algarismos é um número par, logo terá quatro, dois ou zero algarismos iguais a 1.

   Se houver quatro algarismos iguais a 1, só há uma possibilidade, o código 1111.

   Se houver dois algarismos iguais a 1, há seis formas de colocar os uns $(1\,1*\,*, 1*1*, 1**1, *1\,1*, *1*1, **1\,1)$. Nos outros dois algarismos, podemos colocar ou o algarismo 0 ou o algarismo 1. Assim, há $6 \times 2 \times 2 = 24$ códigos diferentes com dois algarismos iguais a 1.

   Se não houver algarismos iguais a 1, cada um dos quatro algarismos pode ser igual a 0 ou igual a 2, logo haverá $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ códigos diferentes. Portanto há $1 + 24 + 16 = 41$ códigos diferentes.

   Opção correta: A).

   (b) Na figura, em quatro das cinco cartas, um quarto da carta está tapado, logo, no total, há uma carta tapada. Assim, a área de 4 cartas é 8 dm^2, logo cada carta tem $\frac{8}{4} = 2$ dm^2 de área. Em todas as figuras construídas do mesmo modo, há uma carta visível e cada uma das cartas restantes tem $1,5$ dm^2 visíveis. Assim $2018 - 2 = 2016$ dm^2 é a área das cartas que têm um quarto tapado. Como $2016 : 1,5 = 1344$, há 1344 cartas com um quarto tapado e a figura terá $1344 + 1 = 1345$ cartas.

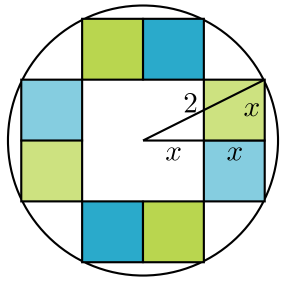
   Opção correta: E).

   (c) O número de adultos que pagou bilhete foi $\frac{3}{4} \times 120 = 90$. O número de crianças que pagou bilhete foi $\frac{1}{4} \times 120 = 30$. Por parte dos adultos, o clube arrecadou $270 - 30 = 240$ euros. Sendo x o número de adultos que pagaram o bilhete normal e y o número de pessoas com mais de 65 anos, tem-se que $x + y = 90$, ou seja, $x = 90 - y$. Por outro lado, atendendo ao valor arrecadado, temos $5x + 2y = 240$, logo $5 \times (90 - y) + 2y = 240$, ou seja, $y = 70$, donde se conclui que $x = 20$. Portanto, houve 20 adultos que pagaram o bilhete normal.

   Opção correta: A).

   (d) Seja x o comprimento do lado de cada quadrado. O triângulo representado na figura é retângulo, a hipotenusa é igual ao raio da circunferência e os catetos medem x e $2x$. Pelo teorema de Pitágoras, $x^2 + (2x)^2 = 2^2$, logo $x^2 = \frac{4}{5}$. Assim, a área de cada quadrado é $\frac{4}{5}$ cm^2.

   Opção correta: B).



2. Seja n um número em que o Artur pode ter pensado. O mais pequeno divisor de n é 1, pelo que os dois divisores seguintes têm de somar 16. O divisor seguinte de n terá de ser primo menor do que 8, pelo que temos as seguintes possibilidades:

   - Se fosse 2, o outro seria 14, mas então 7 também seria um divisor e seria mais pequeno;
   - Se fosse 3, o outro seria 13;
   - Se fosse 5, o outro seria 11;
   - Se fosse 7, o outro seria 9, mas então 3 também seria um divisor e seria mais pequeno.

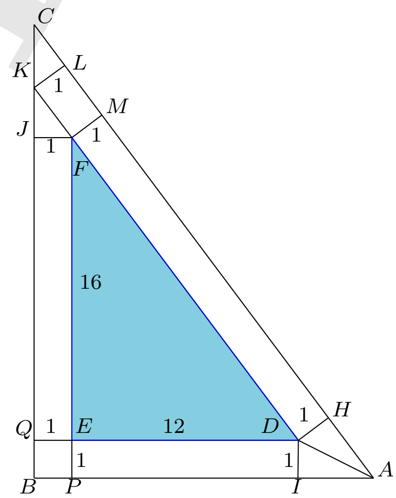
   Assim, as únicas possibilidades para os menores divisores de n são $(1, 3, 13)$ e $(1, 5, 11)$.

   1º caso – $(1, 3, 13)$: Os maiores divisores de n são $(n, n/3, n/13)$ e então $n + n/3 + n/13 = 3905$, pelo que $n = 2769$.

   2º caso – $(1, 5, 11)$: Os maiores divisores de n são $(n, n/5, n/11)$ e então $n + n/5 + n/11 = 3905$, pelo que $n = 3025$.

   Assim, existem duas soluções, 2769 e 3025.

3. O Teorema de Pitágoras permite concluir que o comprimento de $[DF]$, a hipotenusa do triângulo $[EDF]$, é $\sqrt{16^2 + 12^2} = 20$ m.



   Solução 1: Pelo critério AA, pode afirmar-se que os triângulos $[JKF]$ e $[EFD]$ são semelhantes logo,

$$\frac{\overline{ED}}{\overline{JF}} = \frac{\overline{DF}}{\overline{FK}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{JK}},$$

   donde se conclui que $\overline{FK} = \dfrac{5}{3}$ e $\overline{JK} = \dfrac{4}{3}$.

   Da mesma forma, dado que $[KCL]$ e $[DFE]$ são semelhantes e $\overline{KL} = 1$, conclui-se que $\overline{KC} = \dfrac{5}{3}$ e $\overline{LC} = \dfrac{4}{3}$. Assim, $\overline{JC} = \overline{JK} + \overline{KC} = 3$.

   Por fim, também os triângulos $[ABC]$ e $[DEF]$ são semelhantes com razão de semelhança

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{1 + 16 + \overline{JC}}{16} = \frac{5}{4},$$

   portanto,

$$\text{área de } [ABC] = \left(\frac{5}{4}\right)^2 \times \text{ área de } [EFD] = \left(\frac{5}{4}\right)^2 \times \frac{16 \times 12}{2} = 150\, m^2.$$

   (Observação: Em vez de utilizar a semelhança entre $[ABC]$ e $[DEF]$ poder-se-ia calcular $\overline{IA}$, de forma análoga ao cálculo de $\overline{JC}$. Determinados $\overline{JC}$ e $\overline{IA}$, o cálculo da área de $[ABC]$ é imediato.)

   Solução 2: Observe-se que $[AID]$ e $[AHD]$ são congruentes, logo $\overline{IA} = \overline{HA}$. Analogamente, $\overline{MC} = \overline{JC}$. Sejam $a = \overline{IA} = \overline{HA}$ e $b = \overline{MC} = \overline{JC}$. Os triângulos $[ABC]$ e $[DEF]$ são semelhantes pois têm os três lados paralelos, logo,

$$\frac{20 + a + b}{20} = \frac{16 + 1 + b}{16} = \frac{12 + 1 + a}{12},$$

   ou seja, $b - 4a + 5 = 0$ e $-3b + 2a + 5 = 0$.

   Resolvendo o sistema obtém-se $a = 2$ e $b = 3$. Portanto, a área do triângulo $[ABC]$ mede $(16 + 1 + 3) \times (12 + 1 + 2)/2 = 150$ m^2.

XXXVI OPM - Final - 2º Dia - 24.03.2018 - Categoria A - 8º/9º anos

Duração: 3 horas

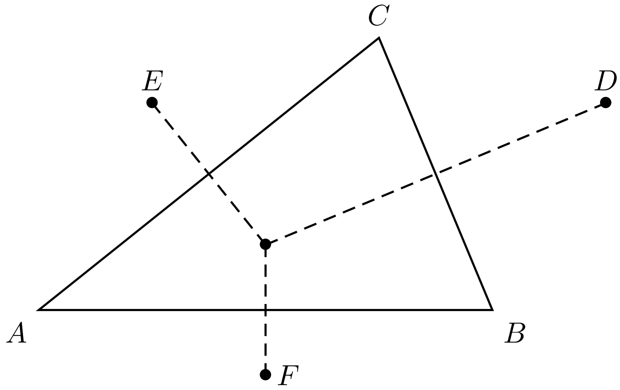
Cada questão vale 10 pontos

Justifica convenientemente as tuas respostas e indica os principais cálculos.
Não é permitido o uso de calculadoras.

4. Encontra todos os pares de números inteiros a e b tais que

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{10}.$$

5. Num triângulo $[ABC]$ traçam-se as mediatrizes dos três lados. Em seguida, reflete-se o ponto de interseção das mediatrizes em relação aos três lados, obtendo-se os pontos D, E e F. Mostra que os triângulos $[ABC]$ e $[DEF]$ são congruentes.



6. Num museu estão em exposição 2018 quadros. Cada quadro está pintado com, exatamente, n cores distintas. Embora não haja nenhuma cor comum a todos os quadros, qualquer conjunto de 7 quadros tem pelo menos uma cor em comum. Qual é o menor valor possível de n?

Sugestões para a resolução dos problemas

4. Podemos reescrever a equação inicial, para a e b inteiros não nulos, na forma $10(a+b) = ab$, ou

$$(a-10)(b-10) = 100.$$

Dado que os divisores de 100 são os elementos do conjunto

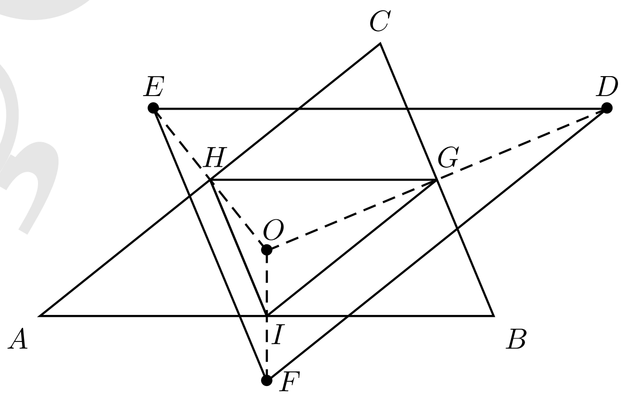
$$\{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 5, \pm 10, \pm 20, \pm 25, \pm 50, \pm 100\}$$

os pares (a, b) podem assumir os seguintes valores

$$(-90,9), (-40,8), (-15,6), (-10,5), (11,110), (12,60), (14,35), (15,30), (20,20),$$

$$(9,-90), (8,-40), (6,-15), (5,-10), (110,11), (60,12), (35,14), (30,15).$$

5. Sejam O o ponto de interseção das mediatrizes e G, H e I os pontos de interseção das mediatrizes com os lados $[BC]$, $[AC]$ e $[AB]$, respetivamente.
O triângulo $[AIH]$ é semelhante a $[ABC]$ pelo critério LAL, uma vez que têm o ângulo em A comum e $\frac{\overline{AI}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{AC}} = \frac{1}{2}$, já que I e H são pontos médios dos lados. De modo análogo se pode justificar a semelhança dos triângulos $[HGC]$ e $[IBG]$ com o triângulo $[ABC]$.
Destas três semelhanças vem que $\frac{\overline{HI}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{IG}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{HG}}{\overline{AB}} = \frac{1}{2}$, logo, pelo critério LLL, o triângulo $[GHI]$ é semelhante ao triângulo $[ABC]$ com razão de semelhança $\frac{1}{2}$.



Logo, os triângulos $[AIH]$, $[IBG]$, $[HGC]$ e $[GHI]$ são congruentes, uma vez que são todos semelhantes ao triângulo $[ABC]$ com razão de semelhança $\frac{1}{2}$.
Tendo agora em atenção os triângulos $[HIG]$ e $[EDF]$, uma vez que $\overline{OI} = \overline{IF}$, $\overline{GD} = \overline{OG}$ e $\overline{OH} = \overline{HE}$, há três pares de triângulos semelhantes pelo critério LAL: $[OHI]$ e $[OEF]$, $[OIG]$ e $[OFD]$, $[OHG]$ e $[OED]$, todos com o respetivo ângulo em O comum, e com razão de semelhança igual a $\frac{1}{2}$. Finalmente tem-se $\overline{ED} = 2\overline{HG} = \overline{AB}$, $\overline{EF} = 2\overline{HI} = \overline{CB}$ e $\overline{FD} = 2\overline{IG} = \overline{AC}$, portanto os triângulos $[ABC]$ e $[DEF]$ são congruentes pelo critério LLL.

6. O menor valor possível de n é 7.

Em primeiro lugar, mostremos que é possível pintar cada um dos 2018 quadros do museu com 7 cores distintas. Consideremos 8 cores $c_1, \ldots, c_8$. O primeiro quadro do museu pode ser pintado com as cores $c_2, \ldots, c_8$, o segundo quadro com as cores $c_1, c_3, \ldots, c_8$, etc..., o sétimo quadro com as cores $c_1, \ldots, c_6, c_8$ e o oitavo quadro, bem como os restantes 2010 quadros, com as cores $c_1, \ldots, c_7$. Com esta coloração, ambas as condições do problema são satisfeitas.

Mostremos agora que é sempre necessário usar pelo menos 7 cores distintas em cada quadro. Sejam $c_1, \ldots, c_n$ as cores do primeiro quadro, Q_1, do museu. Tem de existir um segundo quadro, Q_2, que não tem a cor c_1. Como quaisquer 7 quadros têm uma cor em comum, em particular Q_1 e Q_2 também têm de ter uma cor em comum. Essa cor não pode ser c_1. Admitamos, sem perda de generalidade, que é c_2. Tem de existir um quadro, Q_3, que não tem a cor c_2. Como quaisquer 7 quadros têm uma cor em comum, em particular Q_1, Q_2 e Q_3 também têm de ter uma cor em comum. Essa cor não pode ser c_1 nem c_2. Admitamos, sem perda de generalidade, que é c_3. Argumentando, sucessivamente, da mesma forma, é possível garantir a existência de um quadro Q_4 que tem a cor c_4 mas não tem a cor c_3, um quadro Q_5 que tem a cor c_5 mas não tem a cor c_4, um quadro Q_6 que tem a cor c_6 mas não tem a cor c_5 e um quadro Q_7 que tem a cor c_7 mas não tem a cor c_6. Logo $n \geq 7$.

XXXVI OPM - 1ª Eliminatória - 08.11.2017 - Categoria B - 10º/12º anos

Duração: 2 horas
Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3, 4: 8 pontos cada

Na questão 1 escolhe, em cada alínea, a opção correta.
Justifica convenientemente as tuas respostas às questões 2, 3 e 4.
Não é permitido o uso de calculadoras.

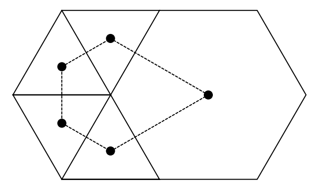
1. (a) Num caderno antigo o André encontrou a seguinte igualdade com uma parte tapada.

$$2^5 \times 11^4 \times 3^8 = \blacksquare \times 66^4$$

Que parte pode ser essa?

A) 32 B) 66 C) $2^4 \times 3^4$ D) 162 E) $2^4 \times 3^4 \times 11^4$

(b) Num dos vértices de um hexágono regular, a Beatriz desenhou quatro triângulos equiláteros, como mostra a figura. Sabendo que a área do hexágono inicial é de 72 cm^2, qual é a área do pentágono obtido unindo os centros das cinco figuras?



A) 24 cm^2 B) 27 cm^2 C) 28 cm^2 D) 32 cm^2 E) 36 cm^2

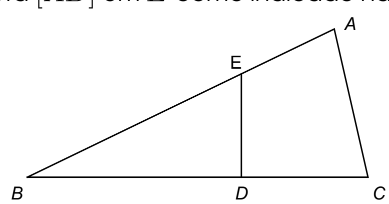
(c) Usando apenas os algarismos $0, 1, 2, 3, 7$ e sem repetir nenhum, o Carlos decidiu escrever números maiores que 2017. Quantos números consegue ele escrever?

A) 96 B) 120 C) 144 D) 166 E) 168

(d) O André, a Beatriz, o Carlos, a Daniela e a Elisa estão, por esta ordem, numa fila, quando decidem contar em voz alta. O André começa por dizer o 1, a Beatriz o 2 e assim sucessivamente até a Elisa dizer o 5. De seguida a direção da contagem muda e é a Daniela a dizer o 6, o Carlos a dizer o 7 até ao André dizer o 9. Se continuam a contar assim, mudando de direção sempre que chegam a um dos extremos da fila, quem é que diz o número 2017?

A) André B) Beatriz C) Carlos D) Daniela E) Elisa

2. Seja $[ABC]$ um triângulo acutângulo isósceles com $\overline{AB} = \overline{BC}$. A partir de um ponto D em $[BC]$ traça-se uma perpendicular a $[BC]$ que interseta $[AB]$ em E como indicado na figura. Sabendo que $\overline{AE} = \overline{DE}$, qual é a amplitude do ângulo DAC?



3. Na torre da Universidade de Coimbra as visitas podem ser feitas em grupos de 4 pessoas para o público em geral, ou de 7 pessoas para visitas escolares. O Pedro, que é estudante de Matemática, trabalha em *part-time* na entrada da torre e reparou que numa manhã o número de grupos de 4 pessoas que visitaram a torre é primo com o número de grupos de 7 pessoas que a visitaram, e que o número total de visitantes foi de 198. Quantos grupos de visitas escolares visitaram a torre nessa manhã?

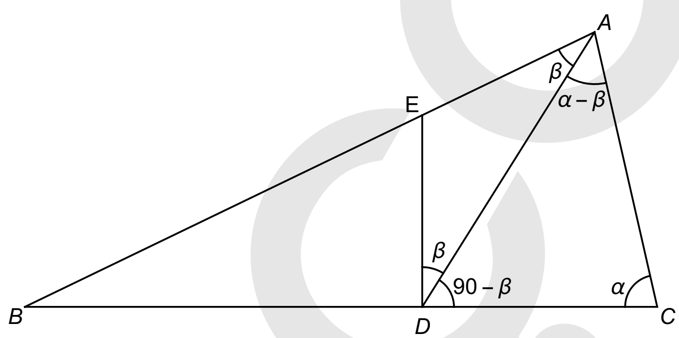
4. Num torneio de ténis de mesa, cada jogador joga contra todos os outros uma e uma só vez. A vitória vale um ponto, a derrota zero e não existem empates. No final um dos jogadores venceu isolado o torneio com mais pontos que qualquer um dos outros. Curiosamente, cada um dos restantes jogadores venceu pelo menos um jogo contra um jogador que acabou o torneio com mais pontos que ele. Qual o número mínimo possível de participantes no torneio para que isto possa acontecer?

Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3, 4: 8 pontos cada

Sugestões para a resolução dos problemas

1. (a) Opção D.
   (b) Opção C.
   (c) Opção D.
   (d) Opção A.

2. Note-se que o triângulo $[DEA]$ é isósceles pelo que os ângulos em D e A têm a mesma amplitude, seja ela β. Por outro lado, como o triângulo $[ABC]$ também é isósceles, os seus ângulos em A e C têm a mesma amplitude que designaremos por α. Como o ângulo CDE é reto, temos que a amplitude do ângulo CDA é $90 - \beta$. Por outro lado a amplitude do ângulo ADC é $\alpha - \beta$. Temos então a situação ilustrada na figura abaixo.



Fazendo a soma dos ângulos internos de $[ADC]$ obtemos $2\alpha - 2\beta + 90 = 180$ o que nos dá $\alpha - \beta = 45$. Mas a amplitude do ângulo ADC é precisamente $\alpha - \beta$ pelo que o ângulo procurado mede 45º.

3. Comecemos por descobrir todas as maneiras de dividir 198 pessoas em grupos com 4 pessoas, ou com 7 pessoas. Temos que $198 = 46 \times 4 + 2 \times 7$, o que significa que podemos dividir 198 pessoas em 46 grupos com 4 pessoas e 2 grupos com 7 pessoas. Como $mmc(4, 7) = 28$ qualquer outra maneira de dividir as 198 pessoas em grupos de 4 ou de 7 pessoas, consiste em acrescentar 4 grupos de 7 pessoas e retirar 7 grupos de 4 pessoas, e assim sucessivamente. Na tabela seguinte mostramos todas as hipóteses, com o respetivo máximo divisor comum.

grupos de 4	grupos de 7	mdc
46	2	2
39	6	3
32	10	2
25	14	1
18	18	18
11	22	11
4	26	2

Portanto a única hipótese em que o máximo divisor comum é igual a 1 é com 25 grupos de 4 pessoas e 14 grupos de 7 pessoas. Ou seja, nessa manhã a torre foi visitada por 14 grupos de visitas escolares.

4. A resposta é sete jogadores. Uma solução possível é a seguinte

×	A	B	C	D	E	F	G	Pontos
A		P	V	V	V	V	V	5
B	V		P	P	V	V	V	4
C	P	V		P	V	V	P	3
D	P	V	V		P	P	V	3
E	P	P	P	V		V	P	2
F	P	P	P	V	P		V	2
G	P	P	V	P	V	P		2

Temos o primeiro com 5 pontos, o segundo com 4, o terceiro e quartos com 3 e todos os outros com 2.

Mostremos que com menos jogadores não é possível. Primeiro algumas observações gerais. Note-se que o vencedor perdeu pelo menos um jogo com cada um dos segundos classificados. Isto implica que se o vencedor perder um jogo, há apenas um segundo classificado que perdeu pelo menos 2, se o vencedor perdeu mais do que um, todos os outros perderam mais do que dois. Isto significa que independentemente dos resultados um jogador perdeu pelo menos 1, outro pelo menos 2 e todos os outros pelo menos 3.

Analisemos então as possibilidades para todo o número de jogadores menor ou igual que 6, notando que com k jogadores haverá $k(k-1)/2$ jogos e, portanto, $k(k-1)/2$ pontos totais a distribuir.

- $[\mathbf{k = 2{,}3}]$ O segundo teria de perder dois jogos em no máximo dois jogos realizados, o que é impossível pois todos ganham pelo menos um.
- $[\mathbf{k = 4}]$ O terceiro teria de perder três jogos em três, o que contraria as hipóteses.
- $[\mathbf{k = 5}]$ O máximo de pontos seria $(3, 2, 1, 1, 1)$ o que dá apenas 8 jogos totais e não 10.
- $[\mathbf{k = 6}]$ Para atingir os 15 pontos teríamos de distribuir segundo o máximo previsto $(4, 3, 2, 2, 2, 2)$, mas para isso acontecer, todos os que terminam com 2 vitórias teriam de ganhar ao segundo classificado, que tem apenas duas derrotas, pelo que é impossível.

OLIMPÍADAS
PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA
http://www.spm.pt/olimpiadas

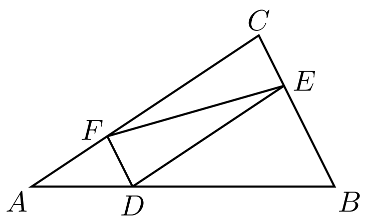
XXXVI OPM - 2ª Eliminatória - 10.01.2018 - Categoria B - 10º/12º anos

Duração: 2 horas
Cada questão vale 10 pontos

Justifica convenientemente as tuas respostas e indica os principais cálculos.
Não é permitido o uso de calculadoras.

1. Qual é o maior múltiplo de 3 que não pode ser escrito na forma $7a + 11b$, onde a e b são números naturais?

2. Sejam $[ABC]$ um triângulo de área 9 e D, E, F pontos nos lados $[AB]$, $[BC]$ e $[AC]$, respetivamente, tais que DE é paralelo a AC e DF é paralelo a BC. Sabendo que a área de $[DEB]$ é o quádruplo da área de $[AFD]$, qual é a area de $[CFE]$?



3. As reuniões do ClubeMat efetuam-se sempre em mesas redondas nas quais não há duas pessoas com exatamente três lugares entre elas (vazios ou não). Qual é o número máximo de membros do ClubeMat que se podem sentar numa mesa com 22 lugares?

4. O *centro* de um número natural é a soma do quádruplo do seu algarismo das unidades com o número que obtém quando se apaga o algarismo das unidades. Para cada número natural n, pode-se formar uma sucessão que começa em n e cada termo é o centro do termo anterior. Por exemplo, a sucessão que começa em 2018 é $2018, 233, 35, 23, 14, 17, \ldots$

   Um número natural n diz-se *centrado* se na sucessão que começa em n existe algum termo que é centro de si próprio.

   Determina todos os números centrados.

Cada questão vale 10 pontos

Sugestões para a resolução dos problemas

1. Se $3n$ é da forma $7a + 11b$, com $b \geq 2$, então $3(n + 1) = 3n + 3 = 7a + 11b + 3 = 7a + 11b + 14 - 11 = 7(a + 2) + 11(b - 1)$ também é da forma pretendida.

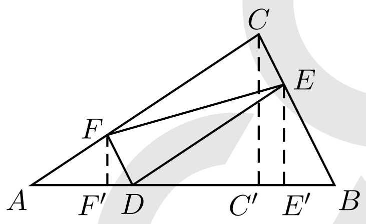
   Deste modo, como $69 = 7 \times 2 + 11 \times 5$ é da forma pretendida, então também 72, 75, 78 e 81 o são.

   Se $3n$ é da forma $7a + 11b$, então $3n + 18 = 7a + 11b + 18 = 7(a + 1) + 11(a + 1)$ também é dessa forma. Portanto, todos os múltiplos de 3 maiores que 66 são da forma pretendida .

   Por outro lado, se tivéssemos $66 = 7a + 11b$, então $11(6 - b) = 7a$ seria um múltiplo comum de 7 e 11, ou seja, seria pelo menos 77.

   Logo o maior múltiplo de 3 que não é da forma $7a + 11b$ é 66.

2. Sejam F', C' e E' as projeções ortogonais de F, C e E na reta AB.



   Temos então que

$$\text{Área}_{[ABC]} = \frac{\overline{AB} \times \overline{C'C}}{2}, \qquad \text{Área}_{[AFD]} = \frac{\overline{AD} \times \overline{F'F}}{2} \quad \text{e} \quad \text{Área}_{[DEB]} = \frac{\overline{DB} \times \overline{E'E}}{2}.$$

   Como $AB \parallel AD \parallel DB$, $BC \parallel DF \parallel BE$ e $CA \parallel FA \parallel ED$, então $[ABC]$, $[ADF]$ e $[DBE]$ são semelhantes.

   Como $\text{Área}_{[DEB]} = 4 \times \text{Área}_{[AFD]}$, então $\frac{\overline{DB} \times \overline{E'E}}{2} = 4 \times \frac{\overline{AD} \times \overline{F'F}}{2}$, ou seja,

$$\frac{\overline{DB} \times \overline{E'E}}{\overline{AD} \times \overline{F'F}} = 4$$

   Pela semelhança $[ADF] \sim [DBE]$, temos $\left(\frac{\overline{DB}}{\overline{AD}}\right)^2 = 4$, ou seja, $\overline{DB} = 2 \times \overline{AD}$.

   Assim, $\overline{AB} = \overline{AD} + \overline{DB} = 3 \times \overline{AD}$.

   Como $[ABC] \sim [ADF]$, com razão de semelhança 3, então $\text{Área}_{[ADF]} = \frac{1}{9}\text{Área}_{[ABC]} = 1$, pelo que $\text{Área}_{[DEB]} = 4\text{Área}_{[AFD]} = 4$.

   Finalmente tem-se $\text{Área}_{[ABC]} = \text{Área}_{[ADF]} + \text{Área}_{[DEB]} + \text{Área}_{[CFE]} + \text{Área}_{[DFE]} \Leftrightarrow 9 = 1 + 4 + 2 \times \text{Área}_{[CFE]} \Leftrightarrow \text{Área}_{[CFE]} = 2$.

3. Numeremos os lugares da mesa de 1 a 22. Dos lugares 1 e 5 só um pode estar ocupado, já que há três cadeiras entre eles. O mesmo entre 5 e 9, 9 e 13, 13 e 17, 17 e 21, 21 e 3, 3 e 7, 7 e 11, 11 e 15, 15 e 19 e 19 e 1. Obtemos assim um ciclo de 11 lugares $(1, 5, 9, 13, 17, 21, 3, 7, 11, 15, 19, 1)$ em que não se podem ocupar dois lugares consecutivos, pelo que podemos apenas ocupar 5 deles. Se começarmos o mesmo processo no lugar 2 obtemos um segundo ciclo de 11 lugares $(2, 6, 10, 14, 18, 22, 3, 8, 12, 16, 20, 2)$ com a mesma propriedade, pelo que apenas 5 destes podem estar ocupados. Então podem sentar-se no máximo 10, por exemplo nos lugares $1, 2, 3, 4, 9, 10, 11, 12, 17$ e 18.

4. Vejamos primeiro quais são os números que são centro de si próprios.

   Seja $n = 10a + b$, com $0 \leq b \leq 9$. O centro de n é $a + 4b$. Tem-se $10a + b = a + 4b \Leftrightarrow b = 3a$. Logo os únicos números que são centro de si próprios são 13, 26 e 39.

   Temos n múltiplo de 13 se e só se $n + 39b$ é múltiplo de 13, ou seja, $10a + 40b$ é múltiplo de 13. Como 10 é primo com 13, então n é múltiplo de 13 se e só se $a + 4b$ é múltiplo de 13. Assim, se uma sucessão começa com um número n que não é múltiplo de 13, nenhum dos termos seguintes é múltiplo de 13 e portanto não é centro de si próprio. Logo n não é centrado.

   Se n é múltiplo de 13, então $(a + 4b) - (10a + b) = 3(b - 3a) \leq 0$, logo a sucessão que começa em n é decrescente até chegar a um termo que é centro de si próprio, ou seja n é centrado.

   Portanto, os números centrados são os múltiplos de 13.

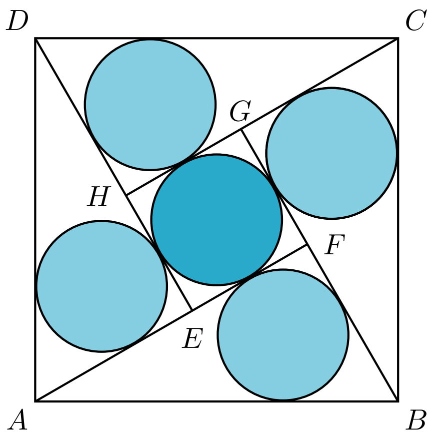
XXXVI OPM - Final - 1º Dia - 23.03.2018 - Categoria B - 10º/12º anos

Duração: 3 horas
Cada questão vale 10 pontos

Justifica convenientemente as tuas respostas e indica os principais cálculos.
Não é permitido o uso de calculadoras.

1. O Artur pensou num número inteiro positivo e reparou que a soma dos seus três divisores mais pequenos é 17 e que a soma dos seus três maiores divisores é 3905. Indica todos os números em que o Artur pode ter pensado.

2. Na figura, $[ABCD]$ é um quadrado de lado 1. Os pontos E, F, G e H são tais que $[AFB]$, $[BGC]$, $[CHD]$ e $[DEA]$ são triângulos retângulos. Sabendo que as circunferências inscritas em cada um destes triângulos e a circunferência inscrita no quadrado $[EFGH]$ têm todas o mesmo raio, quanto mede o raio das circunferências?



3. Quantas formas há de pintar um tabuleiro $m \times n$, de modo que cada casa seja pintada de azul, branco, castanho ou dourado, e em cada quadrado 2×2 haja uma casa de cada cor?

XXXVI OPM - Final - 1º Dia - 23.03.2018 - Categoria B - 10º/12º anos

Duração: 3 horas
Cada questão vale 10 pontos

Sugestões para a resolução dos problemas

1. Seja n um número em que o Artur pode ter pensado. O mais pequeno divisor de n é 1, pelo que os dois divisores seguintes têm de somar 16. O divisor seguinte de n terá de ser primo menor do que 8, pelo que temos as seguintes possibilidades:

   - Se fosse 2, o outro seria 14, mas então 7 também seria um divisor e seria mais pequeno;
   - Se fosse 3, o outro seria 13;
   - Se fosse 5, o outro seria 11;
   - Se fosse 7, o outro seria 9, mas então 3 também seria um divisor e seria mais pequeno.

   Assim, as únicas possibilidades para os menores divisores de n são $(1, 3, 13)$ e $(1, 5, 11)$.

   1º caso – $(1, 3, 13)$: Os maiores divisores de n são $(n, n/3, n/13)$ e então $n + n/3 + n/13 = 3905$, pelo que $n = 2769$.

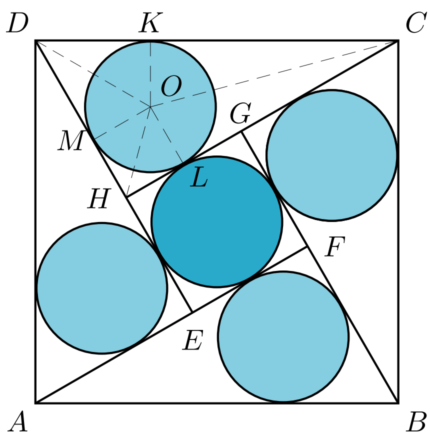
   2º caso – $(1, 5, 11)$: Os maiores divisores de n são $(n, n/5, n/11)$ e então $n + n/5 + n/11 = 3905$, pelo que $n = 3025$.

   Assim, existem duas soluções, 2769 e 3025.

2. Considerando os pontos de tangência K, L e M da circunferência inscrita no triângulo $[DCH]$ aos lados $[DC]$, $[CH]$ e $[HD]$, respetivamente, concluímos que a área de $[DCH]$ é dada por

$$A_{[DCH]} = \frac{r \cdot \overline{DC}}{2} + \frac{r \cdot \overline{CL}}{2} + \frac{r \cdot \overline{HL}}{2} + \frac{r \cdot \overline{HM}}{2} + \frac{r \cdot \overline{MD}}{2} = \frac{r}{2}(1 + \overline{CL} + r + r + \overline{MD}) = r(1+r)$$

   uma vez que $\overline{CL} + \overline{MD} = \overline{CK} + \overline{KD} = 1$.



   Os triângulos $[ADE]$, $[DCH]$, $[CBG]$ e $[BAF]$ são congruentes pois são triângulos retângulos semelhantes com a mesma hipotenusa. Assim, tem-se que

$$A_{[ABCD]} = 4 \cdot A_{[DCH]} + A_{[EFGH]},$$

   ou seja,

$$1^2 = 4 \cdot r(1+r) + (2r)^2.$$

   .
   Temos, então, $8r^2 + 4r - 1 = 0$, ou seja, $r = \frac{\sqrt{3}-1}{4}$ ou $r = \frac{-\sqrt{3}-1}{4}$.
   Como $\frac{-\sqrt{3}-1}{4}$ é um número negativo o valor de r é $\frac{\sqrt{3}-1}{4}$.

3. Comecemos por observar que, se uma coluna tiver apenas duas cores, digamos A e B, então as colunas adjacentes têm apenas as cores C e D, e, repetindo o raciocínio, concluimos que todas as colunas têm apenas duas cores. Do mesmo modo, se uma linha tiver apenas duas cores, então todas as linhas têm apenas duas cores.

   Além disso, todas as colunas têm apenas duas cores ou todas as linhas têm apenas duas cores. De facto, se uma coluna tem três ou mais cores, existem três casas consecutivas nessa coluna com cores diferentes, digamos A, B e C. Então as casas correspondentes nas colunas adjacentes têm as cores C, D e A, respetivamente. Do mesmo modo, as casas correspondentes nas colunas adjacentes a essas têm as cores A, B e C, respetivamente, e assim sucessivamente. Logo cada uma dessas três linhas tem apenas duas cores, pelo que todas as linhas têm apenas duas cores.

$\cdots$	A	C	A	C	A	$\cdots$
$\cdots$	B	D	B	D	B	$\cdots$
$\cdots$	C	A	C	A	C	$\cdots$

   Vamos contar quantas possibilidades de pintar o tabuleiro há em cada caso.

   - **Todas as colunas têm duas cores.** Há $4 \times 3 = 12$ formas de escolher as cores das primeiras duas casas da primeira coluna. Para cada uma das $n-1$ colunas seguintes, há 2 formas de escolher as cores das primeiras duas casas. Estas escolhas definem as cores de todas as casas do tabuleiro, logo ao todo há $12 \times 2^{n-1} = 6 \times 2^n$ formas de pintar o tabuleiro.
   - **Todas as linhas têm duas cores.** De modo análogo se conclui que há 6×2^m formas de pintar o tabuleiro.

   Os dois casos podem acontecer em simultâneo. Se todas as colunas e todas as linhas tiverem duas cores, a escolha das primeiras duas casas das primeiras duas linhas e colunas define a coloração de todo o tabuleiro, logo há 24 formas de pintar o tabuleiro.

   Assim, ao todo há $6 \times 2^n + 6 \times 2^m - 24$ formas de pintar o tabuleiro.

Duração: 3 horas
Cada questão vale 10 pontos

Justifica convenientemente as tuas respostas e indica os principais cálculos.
Não é permitido o uso de calculadoras.

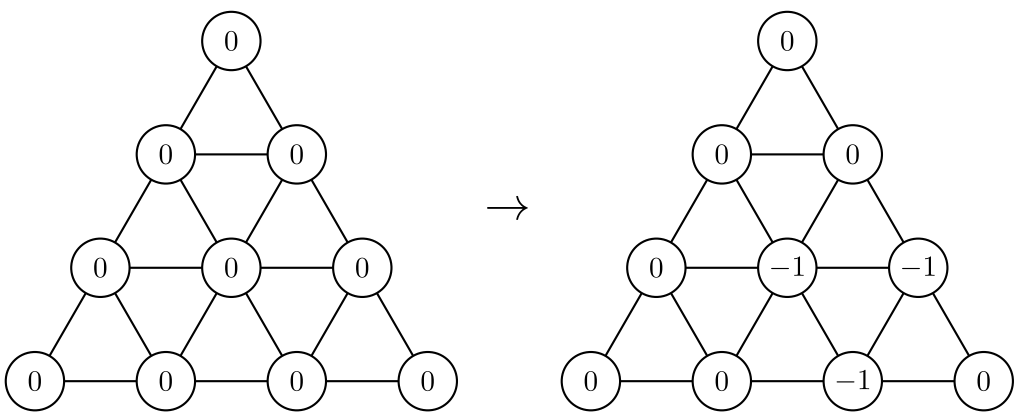
4. Seja $[ABC]$ um triângulo qualquer e sejam D, E e F as reflexões do circuncentro em relação aos três lados. Mostra que os triângulos $[ABC]$ e $[DEF]$ são congruentes.

5. Um museu quer proteger a sua peça mais valiosa, mantendo-a sob vigilância constante. Para isso, quer colocar guardas a vigiar a peça, em turnos de 7 horas consecutivas. Cada guarda começa o seu turno todos os dias à mesma hora. Um guarda é $indispensável$ se houver algum momento do dia em que esteja sozinho a vigiar a peça. Indica todas as possibilidades para o número de guardas que vigiam a peça, de modo que todos sejam indispensáveis.

6. Um triângulo está dividido em nove triângulos menores, onde estão colocados contadores com o número zero em cada um dos dez vértices. Um movimento consiste em escolher um dos nove triângulos e aplicar aos três contadores desse triângulo a mesma operação: adicionar uma unidade ou subtrair uma unidade. Na figura está ilustrado um possível movimento.

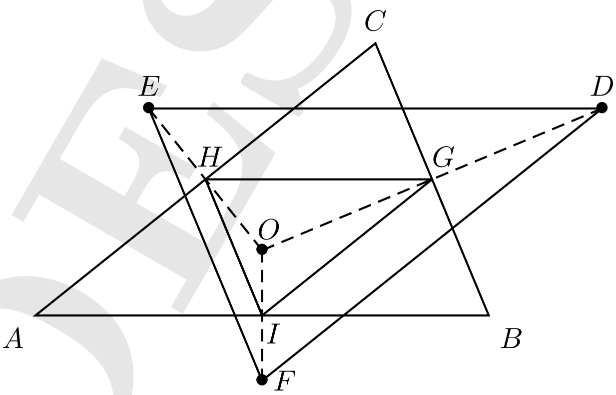
   Diz-se que o número inteiro n é $dominante$ se for possível, ao fim de alguns movimentos, obter uma configuração em que os números dos contadores são todos consecutivos e o maior desses números é n.

   Determina todos os números dominantes.



Sugestões para a resolução dos problemas

4. Sejam O o ponto de interseção das mediatrizes e G, H e I os pontos de interseção das mediatrizes com os lados $[BC]$, $[AC]$ e $[AB]$, respetivamente.
O triângulo $[AIH]$ é semelhante a $[ABC]$ pelo critério LAL, uma vez que têm o ângulo em A comum e $\frac{\overline{AI}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{AC}} = \frac{1}{2}$, já que I e H são pontos médios dos lados. De modo análogo se pode justificar a semelhança dos triângulos $[HGC]$ e $[IBG]$ com o triângulo $[ABC]$.
Destas três semelhanças vem que $\frac{\overline{HI}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{IG}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{HG}}{\overline{AB}} = \frac{1}{2}$, logo, pelo critério LLL, o triângulo $[GHI]$ é semelhante ao triângulo $[ABC]$ com razão de semelhança $\frac{1}{2}$.



Logo, os triângulos $[AIH]$, $[IBG]$, $[HGC]$ e $[GHI]$ são congruentes, uma vez que são todos semelhantes ao triângulo $[ABC]$ com razão de semelhança $\frac{1}{2}$.
Tendo agora em atenção os triângulos $[HIG]$ e $[EDF]$, uma vez que $\overline{OI} = \overline{IF}$, $\overline{GD} = \overline{OG}$ e $\overline{OH} = \overline{HE}$, há três pares de triângulos semelhantes pelo critério LAL: $[OHI]$ e $[OEF]$, $[OIG]$ e $[OFD]$, $[OHG]$ e $[OED]$, todos com o respetivo ângulo em O comum, e com razão de semelhança igual a $\frac{1}{2}$. Finalmente tem-se $\overline{ED} = 2\overline{HG} = \overline{AB}$, $\overline{EF} = 2\overline{HI} = \overline{CB}$ e $\overline{FD} = 2\overline{IG} = \overline{AC}$, portanto os triângulos $[ABC]$ e $[DEF]$ são congruentes pelo critério LLL.

5. Comecemos por observar que, se todos os guardas são indispensáveis, então em qualquer momento do dia há no máximo dois guardas a vigiar a peça. De facto, suponhamos que num determinado momento estão três guardas a vigiar a peça. Destes, seja A o guarda que começou primeiro o seu turno, B o guarda que terminou por último o seu turno e C o guarda restante. Então C está sempre acompanhado de A ou B, logo não é indispensável.
Assim, o número total de horas de vigia durante um dia é no máximo $24 \times 2 = 48$ horas. Como cada guarda trabalha 7 horas por dia e $7 \times 7 = 49 > 48$, há no máximo 6 guardas a vigiar a peça.
Por outro lado, como $7 \times 3 = 21 < 24$ e a peça tem vigilância constante, há pelo menos 4 guardas a vigiar a peça.
Falta verificar que é possível vigiar a peça com 4, 5 e 6 guardas:
   - É possível vigiar a peça com 4 guardas cujos turnos sejam $[0, 7]$, $[6, 13]$, $[12, 20]$ e $[17, 24]$.
   - É possível vigiar a peça com 5 guardas cujos turnos sejam $[0, 7]$, $[3, 10]$, $[9, 16]$, $[15, 22]$ e $[17, 24]$.
   - É possível vigiar a peça com 6 guardas cujos turnos sejam $[0, 7]$, $[1, 8]$, $[8, 15]$, $[9, 16]$, $[16, 23]$ e $[17, 24]$.

6. Subdividam-se os vértices em três tipos da seguinte forma

$$\begin{array}{ccccccc} & & & A & & & \\ & & B & & C & & \\ & C & & A & & B & \\ A & & B & & C & & A \end{array}$$

Cada adição ou subtração afetará um vértice de cada tipo, pelo que as somas dos quatro números correspondentes a A's, dos três correspondentes a B's e dos três correspondentes a C's terão de ser iguais. Queremos então dez números consecutivos $(k, k+1, ..., k+9)$ tais que quatro deles somados são iguais a metade dos restantes seis somados, ou seja,

$$4k + i_0 + i_1 + i_2 + i_3 = 3k + (i_4 + i_5 + i_6 + i_7 + i_8 + i_9)/2$$

com $\{i_0, ..., i_9\} = \{0, 1, 2, ..., 9\}$. Escrevendo $I = i_0 + i_1 + i_2 + i_3$, temos $k = \dfrac{45 - I}{2} - I = 3 \times \dfrac{15 - I}{2}$.
Para k ser mínimo, queremos I tão grande quanto possível. A escolha $I = 9 + 8 + 7 + 6 = 30$ não funciona pois k não seria um inteiro. Escolhendo $I = 9 + 8 + 7 + 5 = 29$, obtém-se $k = -21$. Para k ser máximo, queremos I tão pequeno quanto possível. A escolha $I = 0 + 1 + 2 + 3 = 6$ não funciona pois k não seria um inteiro. Escolhendo $I = 0 + 1 + 2 + 4 = 7$, obtém-se $k = 12$. Portanto, k é um múltiplo de 3 entre -21 e 12.

- Para $k = 12$ há uma partição que funciona: $16 + 14 + 13 + 12 = 21 + 19 + 15 = 20 + 18 + 17 = 55$
- Para $k = 9$ há três partições que funcionam, uma das quais é: $15 + 11 + 10 + 9 = 18 + 14 + 13 = 17 + 16 + 12 = 45$
- Para $k = 6$ há seis partições que funcionam, uma das quais é: $14 + 8 + 7 + 6 = 15 + 11 + 9 = 13 + 12 + 10 = 35$
- Para $k = 3$ há nove partições que funcionam, uma das quais é: $12 + 6 + 4 + 3 = 11 + 9 + 5 = 10 + 8 + 7 = 25$
- Para $k = 0$ há doze partições que funcionam, uma das quais é: $9+5+1+0 = 8+4+3 = 7+6+2 = 15$
- Para $k = -3$ há catorze partições que funcionam, uma das quais é: $6+4+(-2)+(-3) = 5+1+(-1) = 3 + 2 + 0 = 5$
- Para os restantes valores de k, basta verificar que substituindo, nas partições anteriores, cada número pelo seu simétrico, obtêm-se partições de $-5, -15, -25, -35, -45$ e -55.

Para mostrar que podemos obter esta distribuição nos triângulos, basta ver que podemos obter qualquer configuração que verifique a propriedade de ter a mesma soma nos três tipos de vértices. Notemos que sempre que temos uma configuração em losango

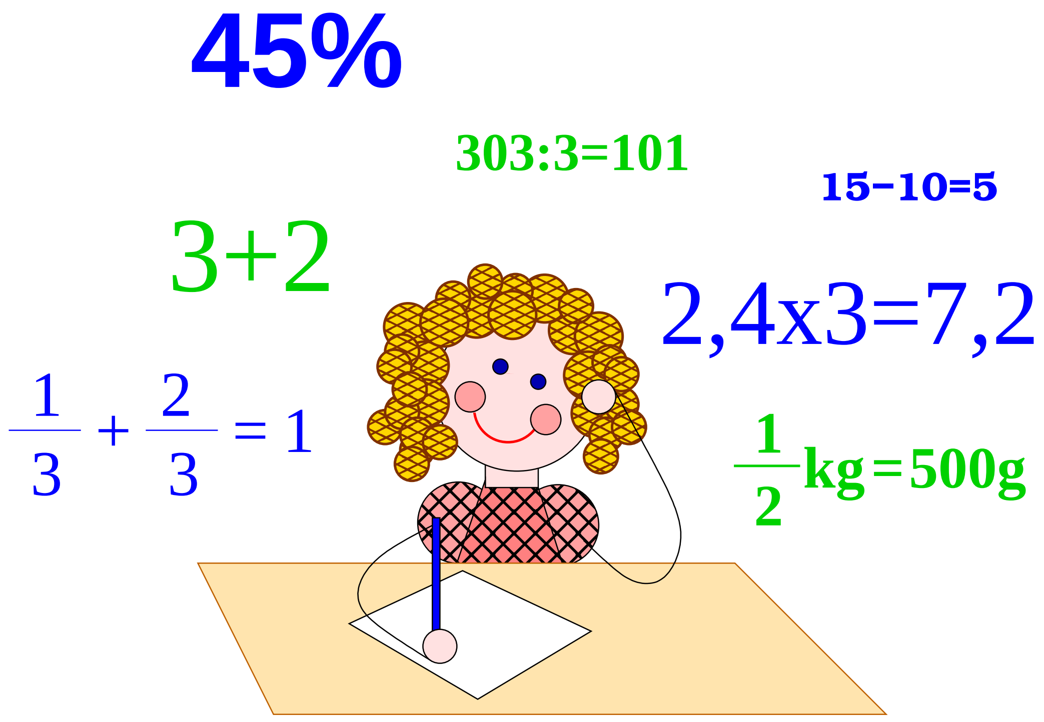
$$\begin{array}{ccc} & X & \\ Y & & Z \\ & W & \end{array}$$

podemos subtrair uma unidade de X e adicioná-la a W sem alterar mais vértices, subtraindo 1 ao triângulo de vértices X, Y, Z e adicionando 1 ao triângulo de vértices Y, Z, W. Deste modo, podemos "transferir" unidades dentro do mesmo conjunto. Como os vértices de cada um dos subconjuntos da partição estão todos ligados por losangos, podemos transferir à vontade unidades dentro do mesmo subconjunto, pelo que podemos obter a configuração pretendida a partir de qualquer uma que tenha soma de cada classe igual a $4k + I$ (por exemplo o mesmo triângulo adicionado $4k + I$ vezes).

spm

Mini-Olimpíadas

Ano Letivo 2018/2019
1º Ciclo do Ensino Básico
3º ano



Tem atenção: **Duração: 1 hora**

- Lê todas as perguntas com muito cuidado.
- Não apagues as contas, os esquemas e os desenhos que utilizares nas tuas respostas.
- Se acabares antes do tempo previsto, deverás aproveitar para rever a tua prova.

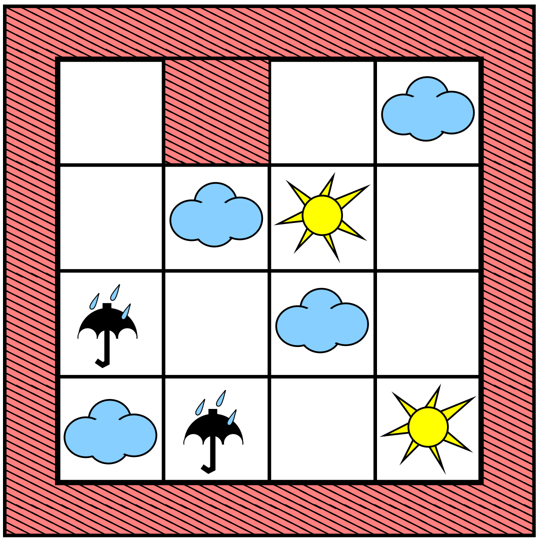
Bom trabalho e diverte-te!

Nome do aluno: ____

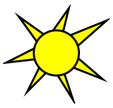
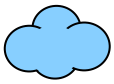
Pontuação:______________

1. A Mati convidou o Tico para jogar o seu passatempo preferido.

QUEBRA-CABEÇAS



Cada linha e cada coluna do tabuleiro tem de ter exatamente três imagens:

Um Sol  (S), uma nuvem  (N) e um chapéu de chuva  (C).

O Tico já preencheu a quarta linha.

Ajuda-o a completar o tabuleiro, respeitando as regras do jogo. Para isso desenha as imagens ou coloca as iniciais nos espaços em branco.

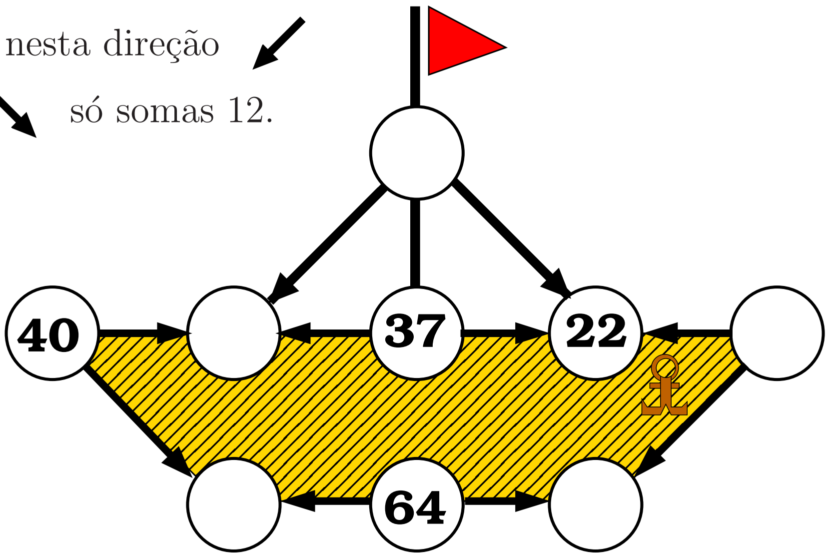
2. Embarca com a Zé numa viagem pelo mundo dos números.

Se vais para a direita → tens de subtrair 15,

Se vais à esquerda ← tens de subtrair 12,

Somas 15 se segues nesta direção ↙

E se segues nesta ↘ só somas 12.



No final da viagem a Zé estava radiante. Tinha acertado tudo!

Preenche agora tu os espaços em branco.

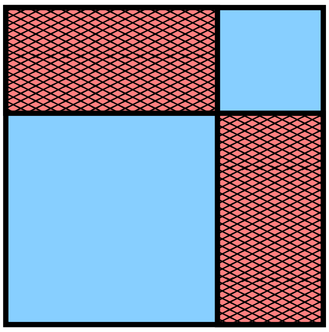
3. No jantar de Natal estavam 56 pessoas distribuídas por mesas de 4 e 6 lugares. Todos os lugares estavam ocupados. O número de mesas de 4 era o dobro do número de mesas de 6.

   Quantas mesas de 6 lugares havia? E de 4?

Resposta:____

4. O tapete da sala da Zé é quadrado e tem 90 cm de lado. Está dividido em dois retângulos iguais e dois quadrados de tamanhos diferentes. O comprimento de cada retângulo é o dobro da largura.

   Quanto mede o lado do quadrado maior?

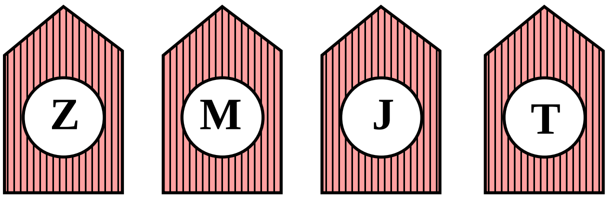


Resposta:____

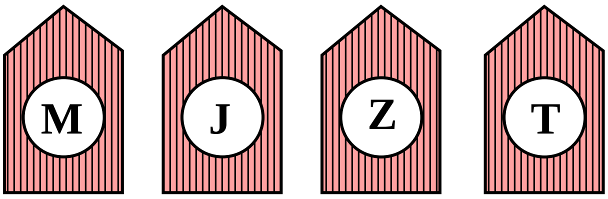
5. A Mati (M), o Jonas (J), a Zé (Z) e o Tico (T) passaram as férias de verão na praia com a família. De manhã, quando chegavam à praia, ocupavam as quatro barracas indicadas na figura.

   - No primeiro dia, só um dos quatro se sentou na barraca da sua família. Era um rapaz.
   - No segundo dia, apenas um dos quatro se sentou na barraca certa, mas desta vez era uma rapariga.

Primeiro Dia:

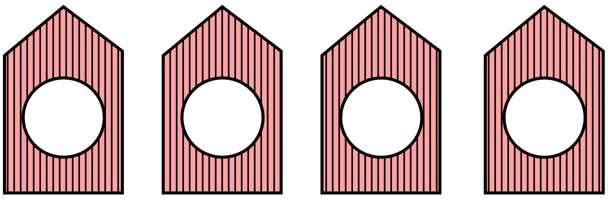


Segundo Dia:

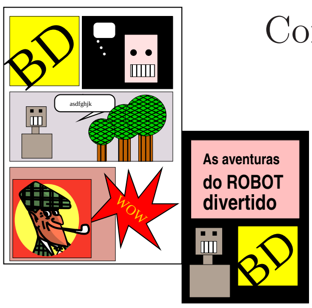


Descobre a barraca de cada família, escrevendo as iniciais dos nomes de cada um na respetiva barraca.

Resposta:



6. No Natal, a tia da Zé deu a cada um dos seus sobrinhos 30 revistas de banda desenhada. A Zé não se lembra quantas revistas já tinha, mas o irmão mais novo sabe que tinha menos 9 do que ela e agora tem o dobro do que ela tinha.



Com quantas revistas ficou a Zé?

Resposta:______________________________

Mini-Olimpíadas

Ano Letivo 2018/2019
1º Ciclo do Ensino Básico
3º ano

Critérios de Classificação

Cotações

1- 10 pontos
2- 10 pontos
3- 10 pontos
4- 10 pontos
5- 10 pontos
6- 10 pontos

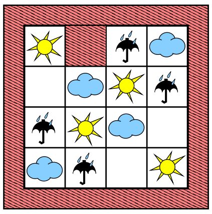
Total: 60 pontos

Critérios de Classificação

- **Se surgirem resoluções diferentes das apresentadas, a classificação ficará ao critério do professor corretor.**
- **Devem ser valorizados os raciocínios corretos (atribuindo classificações parciais) em detrimento dos cálculos efetuados.**

Exercício 1

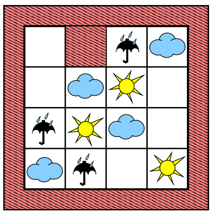
Solução:



10 pontos

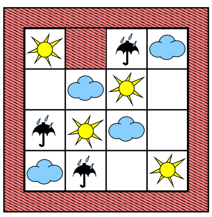
Caso a resposta não seja a correta devem ser atribuídas as cotações parciais seguintes.

Não completa o tabuleiro, colocando apenas duas imagens, nos locais corretos, esquecendo-se de colocar duas imagens. Por exemplo,



1 ponto

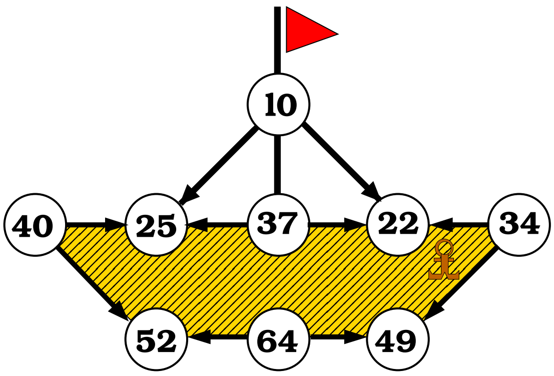
Não completa o tabuleiro, colocando apenas três imagens, nos locais corretos, esquecendo-se de colocar uma imagem. Por exemplo,



2 pontos

Exercício 2

Solução:



10 pontos

Caso a resposta não seja a correta, por cada círculo preenchido corretamente devem ser atribuídos **2 pontos**.

Devem ser cotados os cálculos efetuados utilizando valores errados calculados anteriormente.

Exercício 3

Solução: 4 mesas de 6 e 8 mesas de 4 **10 pontos**

Caso a resposta não seja a correta deve atribuir-se cotação parcial. Para esse efeito, indicam-se, em seguida, as cotações de duas propostas de resolução.

Proposta de resolução 1:

Atribui valores para o número de mesas de 6 e 4 lugares e confirma se satisfazem as condições do enunciado

$4 \times 6 + 8 \times 4 = 56$ **10 pontos**

Proposta de resolução 2:

Efetua o cálculo

$6 + 4 + 4 = 14$ **4 pontos**

Efetua o cálculo

$14 \times 4 = 56$ **4 pontos**

Indica o número de mesas de 6 e de 4 **2 pontos**

Caso a resposta não seja a correta, deve ser atribuída a cotação parcial seguinte.

Atribui valores errados para o número de mesas de 6 e 4 lugares, escolhendo para o número de mesas de 4 o dobro do número de mesas de 6, e averigua se satisfazem as condições do enunciado

Por exemplo, $3 \times 6 + 6 \times 4 = 42$ **5 pontos**

Exercício 4

Solução: 60 cm **10 pontos**

Caso a resposta não seja a correta deve atribuir-se cotação parcial. Para esse efeito, indicam-se, em seguida, as cotações parciais de uma proposta de resolução.

Proposta de resolução:

Calcula o comprimento do lado do quadrado mais pequeno

$90 : 3 = 30$ cm **6 pontos**

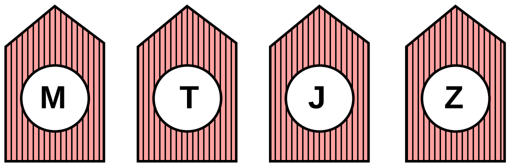
Calcula o comprimento do lado do quadrado maior

$2 \times 30 = 60$ cm **4 pontos**

Devem ser cotados os cálculos efetuados utilizando valores errados calculados anteriormente.

Exercício 5

Solução:



10 pontos

Exercício 6

Solução: 51 revistas

Proposta de resolução 1:

Calcula o número de revistas que a Zé tinha, verificando que o valor obtido satisfaz as condições do enunciado

$30 - 9 = 21, \quad 21 \times 2 = 42, \quad 21 - 9 = 12 \;$ e $\; 12 + 30 = 42$ **6 pontos**

Calcula o número de revistas que a Zé tem no final

$21 + 30 = 51$ **4 pontos**

Proposta de resolução 2:

Indica o número de revistas que a Zé tinha (21 revistas), podendo eventualmente apresentar a seguinte tabela ou apenas os seguintes cálculos.

$21 \times 2 = 42$, $\; 21 - 9 = 12 \;$ e $\; 12 + 30 = 42$ **6 pontos**

nº de revistas que a Zé tinha	dobro do nº de revistas que a Zé tinha	nº de revistas que o irmão tinha	nº de revistas que o irmão tem
10	20	1 (=10-9)	31 ($= 1 + 30$)
11	22	2 (=11-9)	32 ($= 2 + 30$)
12	24	3 (=12-9)	33 ($= 3 + 30$)
13	26	4 (=13-9)	34 ($= 4 + 30$)
14	28	5 (=14-9)	35 ($= 5 + 30$)
15	30	6 (=15-9)	36 ($= 6 + 30$)
16	32	7 (=16-9)	37 ($= 7 + 30$)
17	34	8 (=17-9)	38 ($= 8 + 30$)
18	36	9 (=18-9)	39 ($= 9 + 30$)
19	38	10 (=19-9)	40 ($= 10 + 30$)
20	40	11 (=20-9)	41 ($= 11 + 30$)
21	42	12 (=21-9)	42 ($= 12 + 30$)
22	44	13 (=22-9)	43 ($= 13 + 30$)

Calcula o número de revistas que a Zé tem no final

$21 + 30 = 51$ **4 pontos**

Proposta de resolução 3:

Calcula o número de revistas que o irmão da Zé tinha

$2 \times 9 = 18$ e $30 - 18 = 12$ **2 pontos**

Calcula o número de revistas que a Zé tinha, verificando que o valor obtido satisfaz as condições do enunciado

$12 + 9 = 21$, $21 \times 2 = 42$ e $12 + 30 = 42$ **4 pontos**

Calcula o número de revistas que a Zé tem no final

$21 + 30 = 51$ **4 pontos**

Caso a resposta não seja a correta, deve ser atribuída a cotação parcial seguinte.

Atribui um valor errado ao número de revistas que o irmão da Zé tinha e efetua cálculos que evidenciem uma correta interpretação do enunciado.

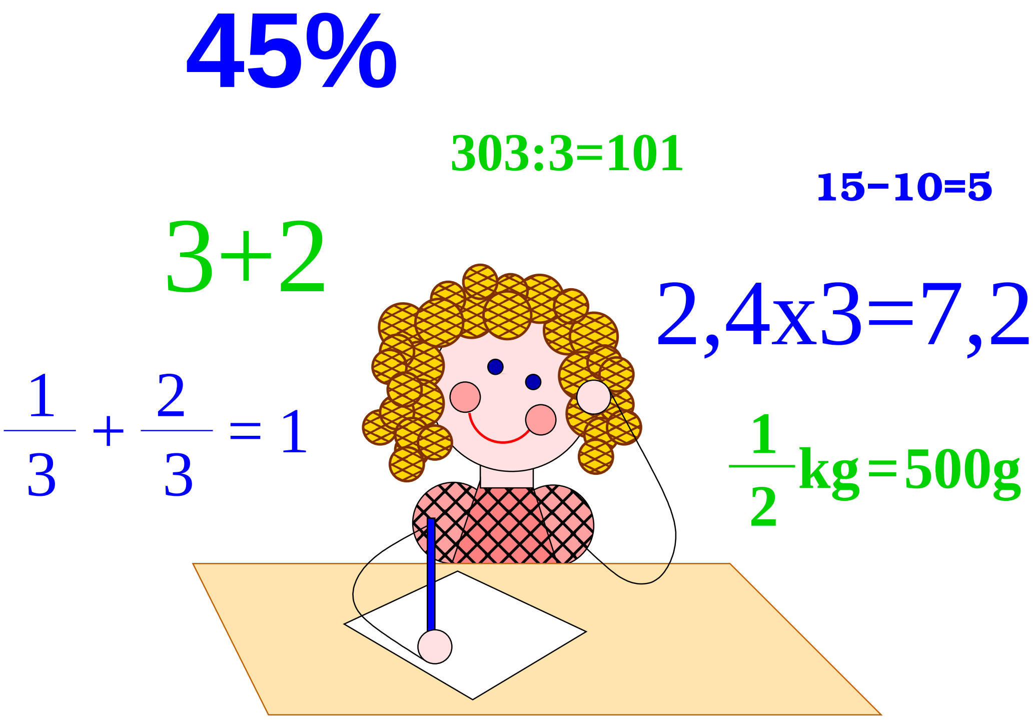
Por exemplo, $10 + 9 = 19$, $10 + 30 = 40$ e $19 \times 2 = 38$ **5 pontos**

Devem ser cotados os cálculos efetuados utilizando valores errados calculados anteriormente.

OLIMPÍADAS
PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA

Mini-Olimpíadas

Ano Letivo 2018/2019
1º Ciclo do Ensino Básico
4º ano



Tem atenção: **Duração: 1 hora**

- Lê todas as perguntas com muito cuidado.
- Não apagues as contas, os esquemas e os desenhos que utilizares nas tuas respostas.
- Se acabares antes do tempo previsto, deverás aproveitar para rever a tua prova.

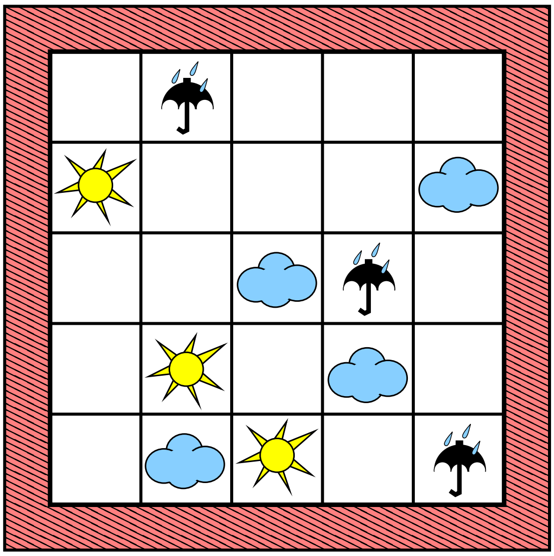
Bom trabalho e diverte-te!

Nome do aluno: ____

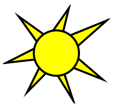
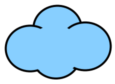
Pontuação:______________

1. A Mati convidou o Tico para jogar o seu passatempo preferido.

QUEBRA-CABEÇAS



Cada linha e cada coluna do tabuleiro tem de ter exatamente três imagens:

Um Sol  (S), uma nuvem  (N) e um chapéu de chuva  (C).

O Tico já preencheu a quinta linha.

Ajuda-o a completar o tabuleiro, respeitando as regras do jogo. Para isso desenha as imagens ou coloca as iniciais nos espaços em branco.

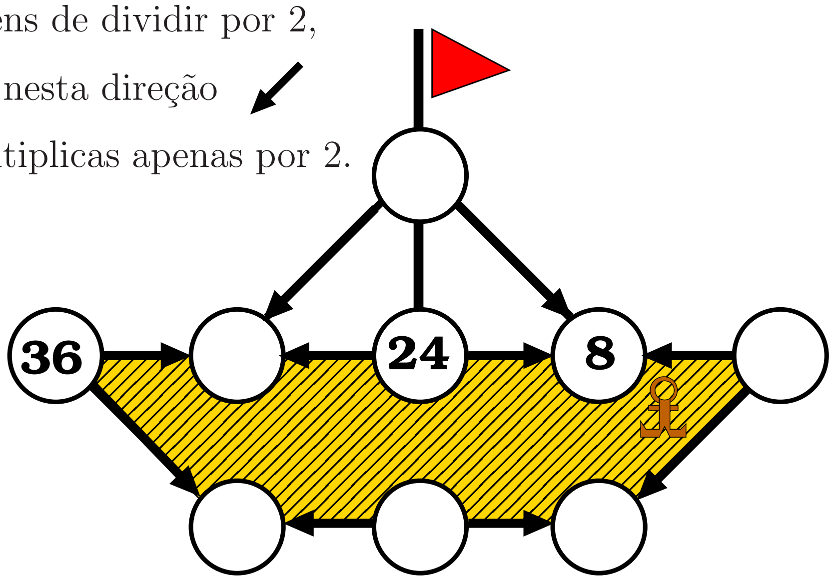
2. Embarca com a Zé numa viagem pelo mundo dos números.

Se vais para a direita → tens de dividir por 3,

Se vais à esquerda ← tens de dividir por 2,

Multiplicas por 3 se segues nesta direção ↙

E se segues nesta ↘ multiplicas apenas por 2.

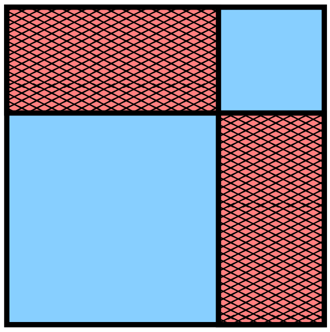


No final da viagem a Zé estava radiante. Tinha acertado tudo!

Preenche agora tu os espaços em branco.

3. O tapete da sala da Zé é quadrado e tem 360 cm de perímetro. Está dividido em dois retângulos iguais e dois quadrados de diferentes tamanhos. O comprimento de cada retângulo é o dobro da largura.

   Quanto mede o lado do quadrado maior?



Resposta:____

4. No Natal, a tia da Zé deu a cada um dos seus sobrinhos 30 revistas de banda desenhada. A Zé não se lembra quantas revistas já tinha, mas o irmão mais novo sabe que tinha menos 9 do que ela e agora tem o dobro do que ela tinha.

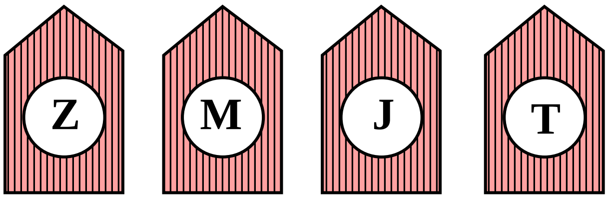
   Com quantas revistas ficou a Zé?

Resposta:____

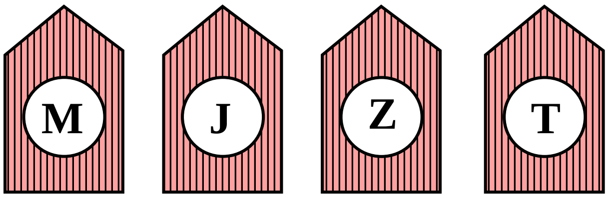
5. A Mati (M), o Jonas (J), a Zé (Z) e o Tico (T) passaram as férias de verão na praia com a família. De manhã, quando chegavam à praia, ocupavam as quatro barracas indicadas na figura.

   - Nos dois primeiros dias, apenas um dos quatro se sentou na barraca da sua família.
   - No primeiro dia, não havia nenhuma rapariga na barraca certa.
   - No segundo dia, havia uma rapariga na barraca certa.

   Primeiro Dia:

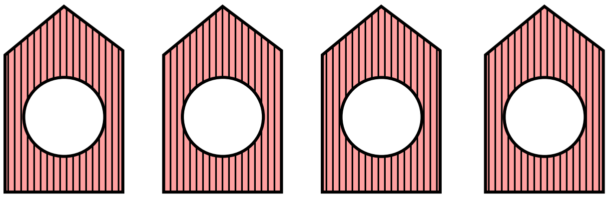
   

   Segundo Dia:

   Descobre a barraca de cada família, escrevendo as iniciais dos nomes de cada um na respetiva barraca.

   Resposta:

6. No jantar de Natal estavam 113 pessoas distribuídas por mesas de 4, 5 e 6 lugares. O número total de mesas era 22 e todos os lugares estavam ocupados. O número de mesas de 6 era o dobro do número de mesas de 5.

   Quantas mesas de 4 lugares havia?

Resposta:____

Mini-Olimpíadas

Ano Letivo 2018/2019
1º Ciclo do Ensino Básico
4º ano

Critérios de Classificação

Cotações

1- 10 pontos
2- 10 pontos
3- 10 pontos
4- 10 pontos
5- 10 pontos
6- 10 pontos

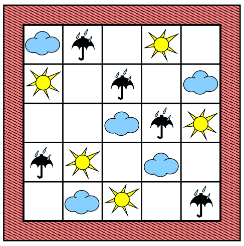
Total: 60 pontos

Critérios de Classificação

- **Se surgirem resoluções diferentes das apresentadas, a classificação ficará ao critério do professor corretor.**
- **Devem ser valorizados os raciocínios corretos (atribuindo classificações parciais) em detrimento dos cálculos efetuados.**

Exercício 1

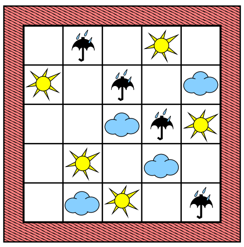
Solução:



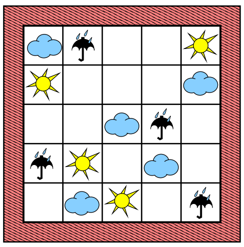
10 pontos

Caso a resposta não seja a correta devem ser atribuídas as cotações parciais seguintes.

Não completa o tabuleiro, colocando apenas três imagens que evidenciem uma correta interpretação do enunciado. Por exemplo,

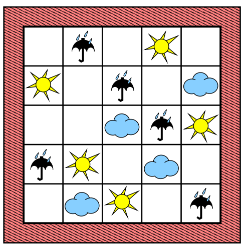


ou

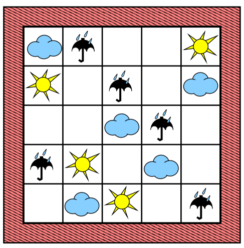


1 ponto

Não completa o tabuleiro, colocando apenas quatro imagens que evidenciem uma correta interpretação do enunciado. Por exemplo,

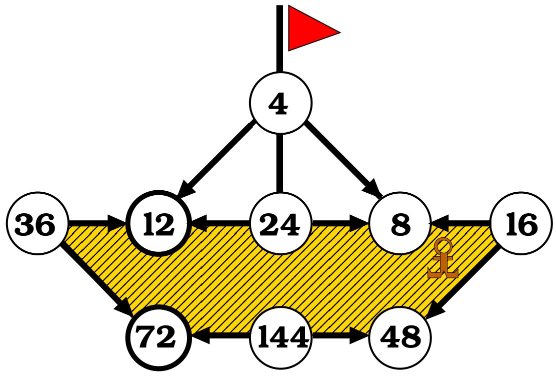


ou



2 pontos

Exercício 2



10 pontos

Caso a resposta não seja a correta, devem atribuir-se as seguintes cotações parciais (acumuláveis).

Preenche corretamente cada um dos círculos assinalados a negrito na figura **1 ponto**

Preenche corretamente cada um dos restantes círculos **2 pontos**

Devem ser cotados os cálculos efetuados utilizando valores errados calculados anteriormente.

Exercício 3

Solução: 60 cm **10 pontos**

Caso a resposta não seja a correta deve atribuir-se cotação parcial. Para esse efeito, indicam-se, em seguida, as cotações parciais de uma proposta de resolução.

Proposta de resolução:

Calcula o comprimento do lado do tapete

$360 : 4 = 90$ cm **3 pontos**

Calcula o comprimento do lado do quadrado mais pequeno

$90 : 3 = 30$ cm **5 pontos**

Calcula o comprimento do lado do quadrado maior

$2 \times 30 = 60$ cm **2 pontos**

Caso a resposta não seja a correta, deve ser atribuída a cotação parcial seguinte.

Atribui valores errados aos comprimentos dos lados dos quadrados e do retângulo, considerando o comprimento do retângulo o dobro do lado do quadrado mais pequeno, e averigua se satisfazem as condições do enunciado **3 pontos**

Devem ser cotados os cálculos efetuados utilizando valores errados calculados anteriormente.

Exercício 4

Solução: 51 revistas

Proposta de resolução 1:

Calcula o número de revistas que a Zé tinha, verificando que o valor obtido satisfaz as condições do enunciado

$30 - 9 = 21$, $21 \times 2 = 42$, $21 - 9 = 12$ e $12 + 30 = 42$ **6 pontos**

Calcula o número de revistas que a Zé tem no final

$21 + 30 = 51$ **4 pontos**

Proposta de resolução 2:

Indica o número de revistas que a Zé tinha (21 revistas), podendo eventualmente apresentar a seguinte tabela ou apenas os seguintes cálculos.

$21 \times 2 = 42$, $21 - 9 = 12$ e $12 + 30 = 42$ **6 pontos**

nº de revistas que a Zé tinha	dobro do nº de revistas que a Zé tinha	nº de revistas que o irmão tinha	nº de revistas que o irmão tem
10	20	1 (=10-9)	31 $(= 1 + 30)$
11	22	2 (=11-9)	32 $(= 2 + 30)$
12	24	3 (=12-9)	33 $(= 3 + 30)$
13	26	4 (=13-9)	34 $(= 4 + 30)$
14	28	5 (=14-9)	35 $(= 5 + 30)$
15	30	6 (=15-9)	36 $(= 6 + 30)$
16	32	7 (=16-9)	37 $(= 7 + 30)$
17	34	8 (=17-9)	38 $(= 8 + 30)$
18	36	9 (=18-9)	39 $(= 9 + 30)$
19	38	10 (=19-9)	40 $(= 10 + 30)$
20	40	11 (=20-9)	41 $(= 11 + 30)$
21	42	12 (=21-9)	42 $(= 12 + 30)$
22	44	13 (=22-9)	43 $(= 13 + 30)$

Calcula o número de revistas que a Zé tem no final

$21 + 30 = 51$ **4 pontos**

Proposta de resolução 3:

Calcula o número de revistas que o irmão da Zé tinha

$2 \times 9 = 18$ e $30 - 18 = 12$ **2 pontos**

Calcula o número de revistas que a Zé tinha, verificando que o valor obtido satisfaz as condições do enunciado

$12 + 9 = 21$, $21 \times 2 = 42$ e $12 + 30 = 42$ **4 pontos**

Calcula o número de revistas que a Zé tem no final

$21 + 30 = 51$ **4 pontos**

Caso a resposta não seja a correta, deve ser atribuída a cotação parcial seguinte.

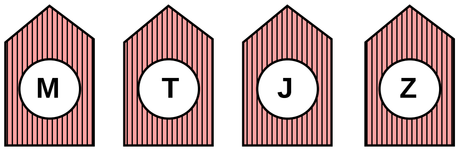
Atribui um valor errado ao número de revistas que o irmão da Zé tinha e efetua cálculos que evidenciem uma correta interpretação do enunciado.

Por exemplo, $10 + 9 = 19$, $10 + 30 = 40$ e $19 \times 2 = 38$ **4 pontos**

Devem ser cotados os cálculos efetuados utilizando valores errados calculados anteriormente.

Exercício 5

Solução:



10 pontos

Exercício 6

Solução: 7 mesas de 4 lugares **10 pontos**

Caso a resposta não seja a correta deve atribuir-se cotação parcial. Para esse efeito, indicam-se, em seguida, as cotações parciais de quatro propostas de resolução.

Proposta de resolução 1:

Atribui valores para o número de mesas de 4, 5 e 6 lugares, confirmando se satisfazem as condições do enunciado ou apresentando uma tabela (como por exemplo a indicada abaixo)

$7 \times 4 + 5 \times 5 + 10 \times 6 = 113$

nº de mesas de 5	nº total de mesas de 5 e 6	nº total de lugares em mesas de 5 e 6	nº total de lugares com 22 mesas
1	3(=1+2)	$17\ (= 2 \times 6 + 5)$	$93\ (= 17 + 19 \times 4)$
2	6(=2+4)	$34\ (= 4 \times 6 + 2 \times 5)$	$98\ (= 34 + 16 \times 4)$
3	9(=3+6)	$51\ (= 6 \times 6 + 3 \times 5)$	$103\ (= 51 + 13 \times 4)$
4	12(=4+8)	$68\ (= 8 \times 6 + 4 \times 5)$	$108\ (= 68 + 10 \times 4)$
5	15(=5+10)	$85\ (= 10 \times 6 + 5 \times 5)$	$113\ (= 85 + 7 \times 4)$

10 pontos

Proposta de resolução 2:

Efetua o cálculo

$6 + 6 + 5 = 17$ **2 pontos**

Indica o número de mesas de 4 lugares, podendo eventualmente apresentar os seguintes cálculos ou uma tabela (ou apenas algumas linhas)

$5 \times 17 = 85, \quad 113 - 85 = 28$ e $28 : 4 = 7$ ou

$113 = 17 \times 5 + 7 \times 4$ ou

nº grupos de 17 pessoas	o que sobrou	análise do resultado
1	96 (=113-17)	$96 : 4 = 24$ e $24 > 22$
2	79 (=96-17)	79 não é divisível por 4
3	62 (=79-17)	62 não é divisível por 4
4	45 (=62-17)	45 não é divisível por 4
5	28 (=45-17)	$28 : 4 = 7$
6	11 (=28-17)	11 não é divisível por 4

6 pontos

Indica o número de mesas de 4 lugares **2 pontos**

Proposta de resolução 3:

Verifica que 22 não é divisível por 4

$$\begin{array}{r|l} 22 & 4 \\ \cline{2-2} 2 & 5 \end{array}$$

2 pontos

Dá os valores 5 ou 6 ao número de mesas de 4 lugares e verifica se satisfazem as condições do enunciado

$5 \times 4 + 5 \times 5 + 10 \times 6 = 105$ ou $6 \times 4 + 6 \times 5 + 12 \times 6 = 126$ **4 pontos**

Altera os valores de modo a obter a solução

$7 \times 4 + 5 \times 5 + 10 \times 6 = 113$ **4 pontos**

Proposta de resolução 4:

Supondo que o número de mesas de 4 é igual ao número de mesas de 5, efetua o cálculo

$4 + 5 + 2 \times 6 = 21$ **1 ponto**

Verifica que 113 não é divisível por 21, efetuando a divisão

$$\begin{array}{r|l} 113 & 21 \\ \cline{2-2} 08 & 5 \end{array}$$ **1 ponto**

Dá os valores 5 ou 6 ao número de mesas de 4 lugares e verifica se satisfazem as condições do enunciado

$5 \times 4 + 5 \times 5 + 10 \times 6 = 105$ ou $6 \times 4 + 6 \times 5 + 12 \times 6 = 126$ **4 pontos**

Altera os valores de modo a obter a solução

$7 \times 4 + 5 \times 5 + 10 \times 6 = 113$ **4 pontos**

Caso a resposta não seja a correta, deve ser atribuída a cotação parcial seguinte.

Atribui valores errados para o número de mesas de 4, 5 e 6 lugares, escolhendo para o número de mesas de 6 o dobro do número de mesas de 5, e averigua se satisfazem as condições do enunciado

Por exemplo, $5 \times 4 + 6 \times 5 + 12 \times 6 = 126$ e $5 + 6 + 12 = 23$ **5 pontos**

Devem ser cotados os cálculos efetuados utilizando valores errados calculados anteriormente.

OLIMPÍADAS
PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA

www.olimpiadas.spm.pt

XXXVII OPM - 7.11.2018 - Pré-Olimpíadas - 5º ano

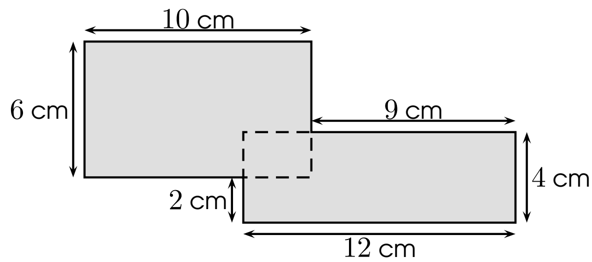
Na questão 1 escolhe, em cada alínea, a opção correta.
Justifica convenientemente as tuas respostas às questões 2 e 3.
Não é permitido o uso de calculadoras.

Duração: 2 horas
Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3: 10 pontos cada

1. (a) O João e a Rita foram ver o espetáculo do Grande Mágico Pedrágoras. O João reparou que o número do seu bilhete era o maior número possível com quatro algarismos ímpares todos distintos. Por sua vez, a Rita reparou que o número do seu bilhete era o menor número possível com quatro algarismos ímpares todos distintos. A primeira magia do Grande Pedrágoras foi adivinhar a diferença entre os números dos bilhetes do João e da Rita. Qual é o número que ele anunciou?

A) 2222 B) 6596 C) 8396 D) 8888 E) 11110

(b) De seguida, o Grande Mágico Pedrágoras transformou dois lenços retangulares diferentes num novo lenço, como indicado na figura. Qual é a área total do novo lenço, em cm^2?



A) 48 B) 60 C) 102 D) 106 E) 108

(c) Durante o espetáculo, o Grande Mágico Pedrágoras distribuiu pelos seus admiradores todos os números cuja soma dos algarismos é 2018 e o produto dos algarismos é 2. Quantos números foram distribuídos?

A) 1 B) 1009 C) 2016 D) 2017 E) 2018

(d) Para festejar um dos truques do Pedrágoras, os seus admiradores lançaram $8 + 18 + 28 + 38 + \ldots + 1998 + 2008 + 2018$ confetis para o palco. O Pedrágoras disse imediatamente qual foi o algarismo das unidades do número total de confetis lançados. Que número disse o Pedrágoras?

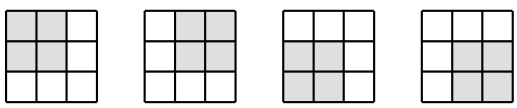
A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 0

(e) O Grande Pedrágoras pegou numa corda, cortou-a em pedaços de 20 cm, sobrando um pedaço com 14 cm de comprimento. Depois de colocar todos os pedaços de corda dentro do seu chapéu, o mágico retirou uma só corda com o triplo do comprimento da corda original. Novamente, resolveu cortá-la em pedaços de 20 cm. Desta vez, quanto media, em cm, o pedaço de corda que lhe sobrou?

A) 0 B) 2 C) 14 D) 22 E) 42

2. O João juntou alguns cubinhos brancos de 1cm de lado para formar um cubo maior. Depois pintou cada uma das faces do cubo grande de azul. Em seguida, derrubou o cubo e reparou que havia 68 cubinhos com mais do que uma face azul. Quanto media o lado do cubo grande?

3. Num tabuleiro 3×3, a Rita quer colocar um algarismo de 1 a 9 em cada casa, de modo que sejam todos diferentes e que a soma dos números em cada um das regiões assinaladas seja 20.



A Rita já colocou os algarismos 3 e 5, como na figura seguinte. Indica todas as formas possíveis de a Rita completar o tabuleiro.

		3
	5	

OLIMPÍADAS
PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA

www.olimpiadas.spm.pt

XXXVII OPM - 7.11.2018 - Pré-Olimpíadas - 5º ano

Sugestões para a resolução dos problemas

Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3: 10 pontos cada

1. (a) Opção C. $(9753 - 1357 = 8396)$
   (b) Opção C. $(10 \times 6 + 12 \times 4 - 3 \times 2 = 60 + 48 - 6 = 102)$
   (c) Opção D. $(Os\ números\ são\ 111 \cdots 112, 111 \cdots 121, \ldots, 121 \cdots 111, 211 \cdots 111)$
   (d) Opção A. $(O\ algarismo\ das\ unidades\ é\ o\ mesmo\ de\ 8+8+8+8+\ldots+8+8+8 = 202 \times 8 = 1616)$
   (e) Opção B. $(O\ pedaço\ de\ 42\ cm\ pode\ ser\ cortado\ em\ dois\ pedaços\ de\ 20\ cm\ e\ um\ pedaço\ de\ 2\ cm)$

2. Como um cubo tem 8 vértices, há 8 cubinhos com três faces azuis. Os restantes 60 cubinhos têm duas faces azuis.

   Como um cubo tem 12 arestas, cada aresta é formada por $60/12 = 5$ cubinhos (mais os cantos).

   Portanto o lado do cubo grande mede $5 + 2 = 7$ cm.

3. As únicas formas de completar o quadrado de modo que a soma do canto inferior direito seja 20 usam os algarismos 4 e 8, logo são:

	4	3
	5	8

ou

	8	3
	5	4

No primeiro caso, os algarismos que faltam no canto inferior esquerdo são o 2 eo 9, e no segundo caso são o 1 e o 6. Logo temos as possibilidades:

2	4	3
9	5	8

9	4	3
2	5	8

1	8	3
6	5	4

6	8	3
1	5	4

O primeiro caso é impossível porque no canto superior esquerdo seria necessário usar um 8 ou um 9. O quarto caso é impossível porque no canto superior esquerdo seria necessário usar um 4 ou um 5. Os restantes casos são possíveis e dão origem às duas possibilidades seguintes:

1	6	7
9	4	3
2	5	8

9	2	7
1	8	3
6	5	4

XXXVII OPM - 1ª Eliminatória - 7.11.2018 - Categoria Júnior - 6°/7° anos

Duração: 2 horas
Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3, 4: 8 pontos cada

Na questão 1 escolhe, em cada alínea, a opção correta.
Justifica convenientemente as tuas respostas às questões 2, 3 e 4.
Não é permitido o uso de calculadoras.

1. (a) Para um projeto da escola, a Vânia usou dois novelos de lã: um de cor vermelha e outro de cor preta. O novelo de lã preta tinha o triplo do comprimento do novelo de lã vermelha. A Vânia cortou toda a lã, de ambos os novelos, em pedaços de 20 cm de comprimento. No novelo de lã vermelha, sobrou-lhe um pedaço de 14 cm. Quantos centímetros sobraram no novelo de lã preta?

A) 0 B) 2 C) 14 D) 22 E) 42

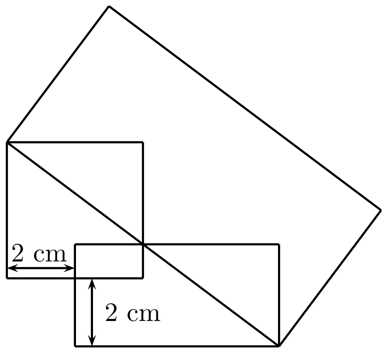
(b) A Vânia tem muitos novelos de lã. Hoje decidiu contá-los e o número total de novelos é tal que a soma dos seus algarismos é 7 e o produto dos seus algarismos é 6. Quantos números inteiros existem com ambas essas características?

A) 2 B) 4 C) 6 D) 14 E) 26

(c) A Vânia inscreveu-se no clube de crochê e tricô da escola. O clube tem 9 membros e a idade média dos membros é de 12 anos. Seis dos membros preferem o tricô e a idade média desses 6 membros é de 10 anos. Qual é a idade média dos três membros que preferem o crochê?

A) 14 B) 15 C) 16 D) 17 E) 18

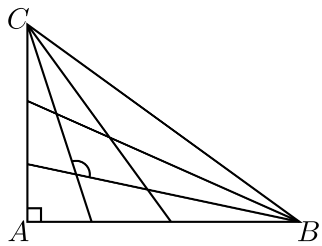
(d) A Vânia quer realizar um trabalho composto por um quadrado de lado 4 cm, um retângulo pequeno com as dimensões de 3 cm por 6 cm e um retângulo maior com as dimensões de 5 cm por 10 cm. Os três quadriláteros ficam sobrepostos como se pode ver na figura. Quanto mede, em cm^2, a área total do trabalho que a Vânia quer realizar?



A) 70 B) 72 C) 76 D) 78 E) 82

2. Um número diz-se *quadradão* se o número formado por quaisquer dois algarismos consecutivos é um quadrado perfeito. Por exemplo, 25 é um quadradão e 364 também é um quadradão porque 36 e 64 são quadrados perfeitos. Quantos quadradões existem?

3. Na figura ao lado está representado um triângulo $[ABC]$ com um ângulo reto em A. Os ângulos em B e C foram divididos em três partes iguais cada um. Determina a amplitude do ângulo assinalado.



4. O João gosta de brincar com números da seguinte forma. Ele começa por escolher um número e, de seguida, escreve aquele que se obtém substituindo os últimos dois algarismos desse número pelo seu produto (este produto pode ter apenas um algarismo) repetindo esta operação até obter um número formado por apenas um algarismo. Por exemplo, começando com o número 629 ele escreve, sucessivamente, 618, 68, 48, 32, 6. Indica todos os números de três algarismos com que o João pode começar, de modo a terminar com o número 5.

XXXVII OPM - 1ª Eliminatória - 7.11.2018 - Categoria Júnior - 6º/7º anos

Sugestões para a resolução dos problemas

Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3, 4: 8 pontos cada

1. (a) Opção B. *(O pedaço de* 42 *cm pode ser cortado em dois pedaços de* 20 *cm e um pedaço de* 2 *cm)*
   (b) Opção D. $(16,\ 61,\ 1123,\ 1132,\ 1213,\ 1312,\ 1231,\ 1321,\ 2113,\ 3112,\ 2131,\ 3121,\ 2311,\ 3211)$
   (c) Opção C. *(A soma das idades dos três membros é* $9\times 12-6\times 10=48$*, logo a média é* $48/3=16$*)*
   (d) Opção A. $(10\times 5+4\times 4+3\times 6-1\times 2-4\times 3=50+16+18-2-12=70)$

2. Os quadrados perfeitos com 2 algarismos são 16, 25, 36, 49, 64 e 81. Para formar quadradões com mais algarismos temos de colocar estes números em cadeia.

   Com 3 algarismos obtemos os números 164, 364, 649 e 816.

   Com 4 algarismos obtemos os números 1649, 3649 e 8164.

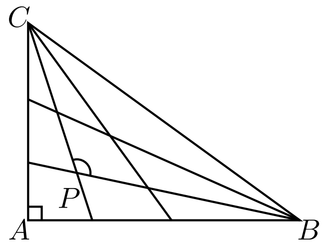
   Com 5 algarismos obtemos apenas o número 81649 e com mais algarismos não há quadradões.

   Assim ao todo há 14 quadradões.

3. Seja P o vértice do ângulo assinalado. Então $P\widehat{C}B=\frac{2}{3}A\widehat{C}B$ e $P\widehat{B}C=\frac{2}{3}A\widehat{B}C$.

   Logo $P\widehat{C}B+P\widehat{B}C=\frac{2}{3}(A\widehat{C}B+A\widehat{B}C)=\frac{2}{3}\times 90^\circ=60^\circ$.

   Portanto, $C\widehat{P}B=180^\circ-60^\circ=120^\circ$.



4. Para o último número ser 5, o penúltimo tem de ser 15 ou 51.
   Se o penúltimo número for 15, o anterior pode ser 115, 151, 35 ou 53; se o penúltimo número for 51, o anterior só pode ser 511.
   Continuando a procurar os números que antecedem os números obtidos, obtemos as sequências no esquema ao lado.
   Portanto há 23 números de três algarismos com que o João pode começar:
   $115, 135, 151, 153, 157, 175,$
   $315, 335, 351, 353, 357, 375,$
   $511, 513, 517, 531, 571,$
   $715, 735, 751, 753, 757, 775.$

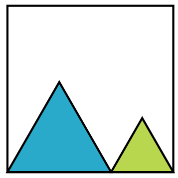
$$5\left\{\begin{array}{l}15\left\{\begin{array}{l}115\left\{\begin{array}{l}135\left\{\begin{array}{l}157\\175\end{array}\right.\\153\end{array}\right.\\151\\35\left\{\begin{array}{l}57\left\{\begin{array}{l}517\\571\end{array}\right.\\75\left\{\begin{array}{l}715\left\{\begin{array}{l}735\left\{\begin{array}{l}757\\775\end{array}\right.\\753\end{array}\right.\\751\end{array}\right.\\315\left\{\begin{array}{l}335\left\{\begin{array}{l}357\\375\end{array}\right.\\353\end{array}\right.\\351\end{array}\right.\\53\left\{\begin{array}{l}513\\531\end{array}\right.\end{array}\right.\\51-511\end{array}\right.$$

XXXVII OPM - 2ª Eliminatória - 9.1.2019 - Categoria Júnior - 6º/7º anos

Na questão 1 escolhe, em cada alínea, a opção correta.
Justifica convenientemente as tuas respostas às questões 2, 3 e 4.
Não é permitido o uso de calculadoras.

Duração: 2 horas
Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3, 4: 8 pontos cada

1. (a) A loja "Picos ao Quadrado" vende equipamentos para desportos radicais e o seu logotipo é composto por um quadrado e dois triângulos equiláteros, como se pode ver na figura. A soma dos perímetros dos triângulos é 18 cm. Quanto mede, em cm^2, a área do quadrado?



A) 4 B) 16 C) 25 D) 36 E) 49

(b) Devido a um erro na impressora, os preços de três equipamentos foram impressos num pedaço de papel, sem espaços entre eles, da seguinte forma:

$$2581953764$$

Sem saber quais eram os preços originais, o vendedor decidiu cortar o pedaço de papel em três, de forma a obter a menor soma possível para os três preços. Em quanto ficou a soma dos preços dos três equipamentos?

A) 2675€ B) 2975€ C) 2978€ D) 4217€ E) 4298€

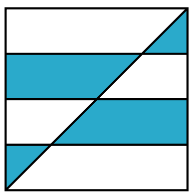
(c) Na loja "Picos ao Quadrado" ficou decidido que a receita das vendas da véspera de Natal seria dividida pelos 15 funcionários. Assim, no fim desse dia, dividiram a receita $1+6+11+16+\cdots+96+101$ por 15. Cada funcionário recebeu um número inteiro de euros como prémio, e o resto da divisão foi entregue ao proprietário da loja. Quantos euros recebeu o proprietário?

A) 0 B) 1 C) 3 D) 5 E) 6

(d) Nos quatro dias que antecederam o Ano Novo, a receita da loja, em euros, foram quatro números inteiros consecutivos. Qual dos seguintes números **não** pode ser a soma da receita desses quatro dias?

A) 5398 B) 6322 C) 6534 D) 7244 E) 9562

2. No quadrado da figura, de área 40 cm^2, dividido em quatro retângulos iguais, foi traçada uma diagonal. Quanto mede a área pintada?



3. O Alfredo vive sozinho e gasta uma embalagem de pasta de dentes a cada 72 dias, um frasco de champô a cada 60 dias e um sabonete a cada 40 dias. Hoje, o Alfredo abriu um novo frasco de champô, enquanto que a pasta de dentes foi estreada há 36 dias e o sabonete foi estreado há 20 dias. Dentro de quantos dias, terá o Alfredo de abrir, simultaneamente, uma nova embalagem de cada um dos três produtos?

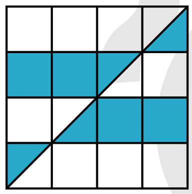
4. A professora de matemática deu um livro com 100 problemas ao grupo formado pela Ana, pela Beatriz e pela Catarina. O grupo conseguiu resolver todos os problemas do livro. A professora marcou a encarnado os problemas resolvidos apenas por uma amiga, a amarelo os problemas resolvidos por apenas duas amigas e a verde os problemas resolvidos pelas três amigas. Cada uma das amigas conseguiu resolver 60 problemas e apenas 35 problemas foram marcados a encarnado. Quantos problemas foram marcados a verde?

Sugestões para a resolução dos problemas

Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3, 4: 8 pontos cada

1. (a) Opção D.
   (b) Opção B.
   (c) Opção E.
   (d) Opção D.

2. Dividindo o quadrado em 16 quadrículas iguais, verifica-se que a área pintada mede o mesmo que 4 quadrículas e 4 meias quadrículas, ou seja, 6 quadrículas.



Logo a área pintada mede

$$\frac{6}{16} \times 40 = 15 \text{ cm}^2.$$

3. O Alfredo estreará um novo frasco de champô daqui a $60, 120, 180, \ldots$ dias, um novo sabonete daqui a $20, 60, 100, 140, 180, \ldots$ dias e uma nova pasta de dentes daqui a $36, 108, 180, \ldots$ dias. Portanto o primeiro dia em que o Alfredo abrirá uma nova embalagem de cada um dos três produtos é daqui a 180 dias.

4. **Solução 1:** Ao analisar o número de vezes que cada problema foi resolvido pelas três amigas, verifica-se que os problemas encarnados foram resolvidos uma vez, os problemas amarelos duas vezes e os problemas verdes três vezes. Assim, $3 \times 60 - 100 = 80$ é a soma do número de problemas amarelos com duas vezes o número de problemas verdes.

   Por outro lado, como 35 problemas são encarnados, o número de problema marcados a verde ou a amarelo é $100 - 35 = 65$.

   Portanto, o número de problemas marcados a verde é $80 - 65 = 15$.

   Solução 2:

   Sejam a o número de problemas encarnados resolvido pela Ana e b o número de problemas encarnados resolvido pela Beatriz. Então a Catarina resolveu $35 - a - b$ problemas encarnados.

   Por outro lado, o número de problemas marcados a amarelo ou a verde é $100 - 35 = 65$. Como a Ana resolveu 60 problemas, conclui-se que $65 + a - 60 = 5 + a$ problemas amarelos foram resolvidos pela Beatriz e pela Catarina. Da mesma forma, como a Beatriz resolveu 60 problemas, conclui-se que $5 + b$ problemas amarelos foram resolvidos pela Ana e pela Catarina.

   Portanto a Catarina resolveu $10 + a + b$ problemas amarelos e $35 - a - b$ problemas encarnados. Como ela resolveu 60 problemas, conclui-se que o número de problemas verdes é $60 - 45 = 15$.

OLIMPÍADAS
PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA

www.olimpiadas.spm.pt

XXXVII OPM - Final - 1º Dia - 05.04.2019 - Categoria Júnior - 6º/7º anos

Duração: 3 horas
Questão 1: 16 pontos
Questões 2 e 3: 7 pontos cada

Justifica convenientemente as tuas respostas e indica os principais cálculos.
Não é permitido o uso de calculadoras.

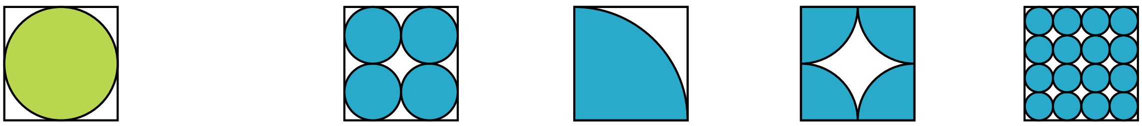
1. (a) O José desenhou num papel um quadrado cuja medida da área é 5^4 mm^2. De seguida, desenhou outro quadrado, cujo lado mede mais 1 mm do que o quadrado anterior. Ele desenhou sucessivamente quadrados, aumentando 1 mm de cada vez o comprimento do lado do quadrado, até desenhar um quadrado com 4^5 mm^2 de área. Quantos quadrados desenhou o José?

A) 4 B) 8 C) 16 D) 40 E) 400

(b) O José gosta muito de fazer contas e, num certo dia, calculou 11^{2019}. Qual é o algarismo das dezenas deste número?

A) 0 B) 1 C) 3 D) 5 E) 9

(c) O José pintou a verde um círculo inscrito num quadrado e, noutros quatro quadrados iguais, pintou a azul outros desenhos usando apenas círculos ou quartos de círculos, como na figura seguinte. Em quantas dessas figuras a área da zona pintada a azul mede o mesmo que a área do círculo pintado a verde no primeiro quadrado?

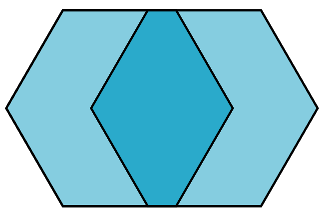


A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

(d) Uma capicua é um número cuja leitura é a mesma quando feita da esquerda para a direita ou da direita para a esquerda. Por exemplo, 3223 e 67176 são capicuas. Um número diz-se $especial$ se, for uma capicua, for um múltiplo de 5, tiver resto 2 na divisão por 3 e tiver resto 3 na divisão por 4. Quantos números especiais de 5 algarismos existem?

A) 5 B) 12 C) 15 D) 16 E) 18

2. Na sua festa de aniversário, a Maria utilizou duas toalhas iguais com a forma de um hexágono regular que teve de sobrepor para cobrir uma mesa hexagonal, como representado na figura. Sabendo que os lados das toalhas mediam 80 cm e que a parte sobreposta tinha metade da área de cada toalha, determina o comprimento do lado maior da mesa.



3. Um tabuleiro quadriculado diz-se $mágico$ se o seu número de quadrículas tiver 3 algarismos, cuja soma é igual ao número de colunas. Por exemplo, um tabuleiro com 64 linhas e 13 colunas é mágico porque tem $64 \times 13 = 832$ quadrículas e $8 + 3 + 2 = 13$. Qual é o menor número de linhas que um tabuleiro mágico pode ter?

Duração: 3 horas
Questão 1: 16 pontos
Questões 2 e 3: 7 pontos cada

Sugestões para a resolução dos problemas

1. (a) Um quadrado com medida da área igual a $5^4 = \left(5^2\right)^2 = 25^2\,\mathrm{mm}^2$, tem a medida do lado igual a $25\,\mathrm{mm}$. Do mesmo modo, um quadrado com área de $4^5 = \left(2^2\right)^5 = \left(2^5\right)^2 = 32^2\,\mathrm{mm}^2$ tem $32\,\mathrm{mm}$ de lado. O José desenhou quadrados com $25, 26, 27, 28, 29, 30, 31$ e $32\,\mathrm{mm}$ de lado, e portanto desenhou 8 quadrados.

   Opção correta: B).

   (b) Começamos por observar que o algarismo das unidades de uma potência de 11 é sempre 1. Se multiplicarmos uma dessas potências novamente por 11, o algarismos das dezenas da nova potência é igual ao da potência anterior mais uma unidade, caso esse algarismo não seja 9, ou igual a 0, caso contrário. Uma vez que o algarismos das dezenas de 11^1 é igual a 1, podemos concluir que o algarismo das dezenas de 11^a é igual ao algarismo das unidades de a. Portanto, o algarismo das dezenas de 11^{2019} é 9.

   Opção correta: E).

   (c) Designemos por r o raio do círculo verde, e portanto cada quadrado tem lado $2r$. A área do círculo verde é $\pi\, r^2$. Calculemos agora a área de cada uma das quatro regiões pintadas a azul.

   A primeira é composta por quatro círculos iguais com raio $\frac{r}{2}$, e portanto a área total é $4 \times \pi \left(\frac{r}{2}\right)^2 = 4\pi\frac{r^2}{4} = \pi\, r^2$. De modo idêntico, a última figura é composta por 16 círculos de raio $\frac{r}{4}$ e a sua área total é $16 \times \pi \left(\frac{r}{4}\right)^2 = \pi\, r^2$.

   As restantes duas figuras são compostas por quartos de círculo. A segunda figura azul é um quarto de círculo com raio igual a $2r$ e portanto a sua área é $\frac{1}{4}\pi(2r)^2 = \pi\, r^2$. A terceira figura é composta por quatro quartos de círculo com raio igual à do círculo verde, tendo assim exatamente a mesma área do que esse círculo.

   Concluímos assim que todas as figuras têm a mesma área pintada.

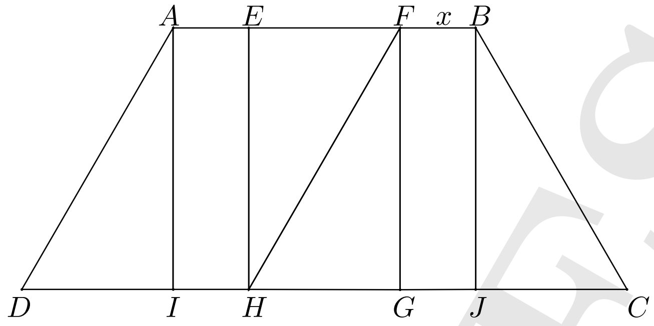
   Opção correta: E).

   (d) Um número é múltiplo de 5 se terminar em 0 ou em 5. Como o primeiro algarismo é igual ao último, e não pode ser 0, o último algarismo (e o primeiro) de um número especial é 5. Como o resto da divisão de um número especial por 4 é igual a 3, o mesmo acontece para o número composto pelos seus dois últimos algarismos, ou seja um número especial acaba em: 15, 35, 55, 75 ou 95. Só falta descobrir o algarismo do meio da capicua, mas como o resto da divisão por 3 é igual a 2, a soma dos cinco algarismos de um número especial também tem essa propriedade. Sendo assim, para cada escolha possível dos dois últimos algarismos há três ou quatro números especiais, conforme o caso: 51215, 51515, 51815; 53135, 53435, 53735; 55055, 55355, 55655, 55955; 57275, 57575, 57875; 59195, 59495, 59795.

   Opção correta: D).

2. A figura seguinte representa apenas metade de uma das toalhas. O trapézio $[BCHF]$ representa a parte da toalha que está sobreposta com a outra toalha. Os segmentos $[AI]$, $[EH]$, $[FG]$ e $[BJ]$ são alturas do trapézio $[ABCD]$. Designando por x o comprimento de $[FB]$, o lado maior da mesa mede

$$2 \times 80 - x = 160 - x.$$



Observe-se que $[AFHD]$ é um paralelogramo e $\overline{AE} = \overline{IH}$, por isso $\overline{EF} = \overline{DI}$.

Como o hexágono é regular, os triângulos $[BCJ]$ e $[ADI]$ são congruentes, logo $\overline{DI} = \overline{JC}$. Além disso, $\overline{DC} = 2 \times 80 = 160$. Assim,

$$\overline{DC} = \overline{DI} + \overline{IJ} + \overline{JC} = 160$$

e, como $\overline{IJ} = 80$, conclui-se que $\overline{DI} + \overline{JC} = 80$. Tendo em conta que $\overline{DI} = \overline{IJ}$, tem-se $\overline{DI} = 40$. Ou seja,

$$\overline{DI} = \overline{EF} = \overline{HG} = \overline{JC} = 40.$$

Tendo em conta que a área de $[AFHD]$ é igual à área de $[FBCH]$, observa-se que os quadriláteros $[AEHI]$ e $[FBJG]$ têm a mesma área e assim conclui-se que $\overline{AE} = \overline{FB} = x$.

Olhando para uma das bases do trapézio $[ABCD]$, conclui-se que $x + x = 40$, ou seja, $x = 20$. Portanto, o lado maior da mesa mede $160 - x = 160 - 20 = 140\,cm$.

3. **Solução 1:** Um tabuleiro com 11 linhas e 18 colunas é mágico porque tem $11 \times 18 = 198$ quadrículas e $1 + 9 + 8 = 18$.

   Suponhamos agora que um tabuleiro mágico tem 10 ou menos linhas.

   Esse tabuleiro tem no máximo $9 + 9 + 9 = 27$ colunas, portanto tem no máximo $10 \times 27 = 270$ quadrículas.

   Assim, esse tabuleiro tem no máximo $1 + 9 + 9 = 19$ colunas, logo tem no máximo $10 \times 19 = 190$ quadrículas.

   Assim, esse tabuleiro tem no máximo $1 + 8 + 9 = 18$ colunas, logo tem no máximo $10 \times 18 = 180$ quadrículas.

   Repetindo sucessivamente este raciocínio, concluímos que o tabuleiro tem no máximo 100 quadrículas, o que é impossível com 10 ou menos linhas.

   Portanto, o número mínimo de linhas de um tabuleiro mágico é 11.

   Solução 2: Um tabuleiro com 11 linhas e 18 colunas é mágico porque tem $11 \times 18 = 198$ quadrículas e $1 + 9 + 8 = 18$.

   Suponhamos agora que um tabuleiro mágico tem $n \leq 10$ linhas.

   Sejam a, b e c os algarismos do número de quadrículas de um tabuleiro mágico. Então

$$100a + 10b + c = n(a + b + c) \leq 10a + 10b + 10c.$$

   Logo $90 \leq 90a \leq 9c \leq 81$, contradição.

   Portanto, o número mínimo de linhas de um tabuleiro mágico é 11.

OLIMPÍADAS
PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA

www.olimpiadas.spm.pt

XXXVII OPM - Final - 2º Dia - 06.04.2019 - Categoria Júnior - 6º/7º anos

Duração: 3 horas
Questão 4: 16 pontos
Questões 5 e 6: 7 pontos cada

Justifica convenientemente as tuas respostas e indica os principais cálculos.
Não é permitido o uso de calculadoras.

4. (a) Na ida para a escola a Luísa reparou que o conta quilómetros do carro da mãe mostrava um número com cinco algarismos diferentes em que o primeiro algarismo (o das dezenas de milhar) era igual à soma dos outros quatro. Quantos números existem com estas propriedades?

   A) 96 B) 100 C) 120 D) 144 E) 168

   (b) A Luísa conseguiu escrever o número 33^{33} como soma de 33 números ímpares consecutivos. Qual foi o maior número que ela escreveu na soma?

   A) $33^{31} - 32$ B) $33^{31} + 32$ C) $33^{32} - 32$ D) $33^{32} + 32$ E) $33^{33} - 33$

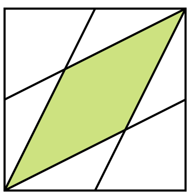
   (c) A professora da Luísa colocou-lhe o seguinte desafio: Se a, b e c podem tomar qualquer valor inteiro de 1 até 100, qual é o maior valor possível de $\dfrac{a+b+c}{a-b-c}$? Ajuda a Luísa a encontrar a solução.

   A) 89 B) 99 C) 100 D) 199 E) 201

   (d) A Luísa inventou um problema de outro planeta. No planeta Cubouesfera há cubos e esferas, ou azuis ou verdes. No final de cada dia, 40% dos cubos de cada cor transformam-se em esferas e 40% das esferas de cada cor transformam-se em cubos. De seguida, 30% dos cubos e 30% das esferas, de cada cor, mudam de cor (os azuis passam a verdes e os verdes a azuis). No início de um determinado dia havia 1400 cubos azuis, 1200 cubos verdes, 800 esferas azuis e 400 esferas verdes. Quantos cubos verdes haverá no dia seguinte?

   A) 504 B) 848 C) 868 D) 964 E) 984

5. Ao visitar uma exposição de João Mirão, o António tirou uma fotografia ao quadro representado na figura. Em casa, o António reparou que o quadro era um quadrado de lado 60 cm e que a região pintada obtinha-se unindo dois vértices aos pontos médios dos lados opostos. Qual é a área da região pintada do quadro?



6. O João tem todos os números inteiros de 1 a 15 esculpidos em latão e quer distribui-los por quatro caixas iguais, usando a seguinte regra: se uma caixa contém um número, ela não pode conter nenhum múltiplo desse número. De quantas formas pode o João distribuir os quinze números pelas quatro caixas?

Duração: 3 horas
Questão 1: 16 pontos
Questões 2 e 3: 7 pontos cada

Sugestões para a resolução dos problemas

4. (a) Uma vez que a soma dos últimos quatro algarismos (todos diferentes) tem de ser igual ao algarismo das dezenas de milhar, a menor soma possível é 6, utilizando os algarismos $0, 1, 2$ e 3. Estes quatro algarismos podem ser distribuídos de qualquer maneira pelas casas das unidades, dezenas, centenas e milhares. Como o número de maneiras de o fazer é $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$, temos 24 números com primeiro algarismo 6. Agora só é preciso encontrar, quatro algarismos distintos cuja soma seja um número de 6 a 9.

Soma	Algarismos	Soma	Algarismos
6	$0+1+2+3$	9	$0+1+3+5$
7	$0+1+2+4$	9	$0+2+3+4$
8	$0+1+3+4$	9	$0+1+2+6$
8	$0+1+2+5$		

Para cada um destes 7 conjuntos existem 24 possibilidades, portanto existem $7 \times 24 = 168$ números com estas propriedades.
Opção correta: E).

(b) Observemos primeiro que qualquer potência de base 33 é um número ímpar, e que se subtrairmos a um número ímpar um número par continuamos com um número ímpar. Uma vez que $33^{33} = 33 \times 33^{32} = 33^{32} + 33^{32} + 33^{32} + 33^{32} + \cdots + 33^{32} + 33^{32} = (33^{32} - 32) + (33^{32} - 30) + (33^{32} - 28) + \cdots + (33^{32} - 2) + 33^{32} + (33^{32} + 2) + (33^{32} + 4) + \cdots + (33^{32} + 30) + (33^{32} + 32)$, o maior número que se escreveu foi $33^{32} + 32$.
Opção correta: D).

(c) O maior valor de uma fração é obtido dividindo o maior valor possivel no numerador (que é sempre positivo neste caso) pelo menor valor possível (positivo) no denominador. No denominador, o menor valor positivo é 1 obtido, por exemplo, fazendo $a = 100$, $b = 50$ e $c = 49$, e neste caso a fração tem o valor 199. Uma vez que a tem de ser maior que $b + c$ para que o denominador não seja negativo, verificamos que o valor máximo do numerador é 199, logo o maior valor possível da fração é 199.
Opção correta: D).

(d) Após a primeira transformação, apenas de formas, relativamente ao número de cubos de cada cor, teremos o número inicial menos o número de cubos que se transformaram em esferas mais o número de esferas que se transformaram em cubos. Assim, o número de cubos verdes é

$$1200 - 0,4 \times 1200 + 0,4 \times 400 = 1200 - 480 + 160 = 880$$

e o número de cubos azuis é

$$1400 - 0,4 \times 1400 + 0,4 \times 800 = 1400 - 560 + 320 = 1160.$$

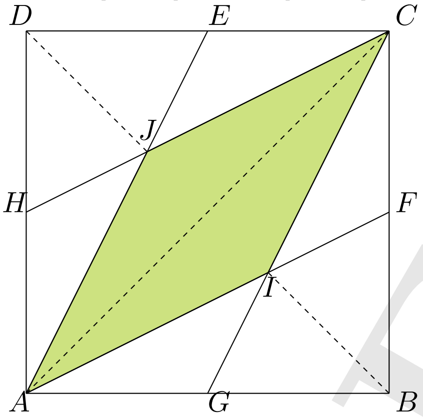
De seguida, vamos subtrair ao número de cubos verdes o número de cubos verdes que mudaram de cor e adicionar o número de cubos azuis que mudaram de cor, ou seja

$$880 - 0,3 \times 880 + 0,3 \times 1160 = 880 - 264 + 348 = 964.$$

Opção correta: D).

5. Os triângulos $[DEJ]$ e $[ECJ]$ têm a mesma área, pois $\overline{ED} = \overline{EC} = 30$. Analogamente conclui-se que a área de $[DJH]$ e a área de $[HJA]$ são iguais. Por outro lado, pelo critério LAL, os triângulos $[DEJ]$ e $[DHJ]$ são congruentes, portanto

$$\text{área }[ECJ] = \text{área }[DEJ] = \text{área }[DHJ] = \text{área }[HJA].$$



A área do triângulo $[DEA]$ é a quarta parte da área do quadrado $[ABCD]$, logo mede $\frac{60 \times 60}{4} = 900$. Por outro lado,

$$\text{área }[DEA] = \text{área }[DEJ] + \text{área }[DJH] + \text{área }[HJA] = 3 \times \text{área }[ECJ],$$

logo área $[ECJ] = 300$. Portanto,

$$\text{área }[AJCI] = \text{área }[ABCD] - 8 \times \text{área }[ECJ] = 3600 - 8 \times 300 = 1200\,cm^2.$$

6. Uma vez que todos os números são múltiplos de 1, o número 1 tem de ficar sozinho numa caixa e as potências de 2 ($2, 4$ e 8) têm de ficar em caixas diferentes. Além disso, o número 3 tem necessariamente de ficar na caixa do número 2, pois caso contrário o 6 teria de ficar na caixa restante e não haveria lugar para o 12, que é múltiplo de 2, 3, 4 e 6. De igual forma, o 6 terá necessariamente de ficar na caixa com o número 4 e o 12 na caixa com o 8. Uma vez que 5 e 7 são números primos, podem ficar em qualquer uma das caixas com exceção da que contém o 1. Temos então nove casos possíveis:

(a)	1	2 3 5 7	4 6	8 12
(b)	1	2 3 5	4 6 7	8 12
(c)	1	2 3 5	4 6	8 12 7
(d)	1	2 3 7	4 6 5	8 12
(e)	1	2 3	4 6 5 7	8 12
(f)	1	2 3	4 6 5	8 12 7
(g)	1	2 3 7	4 6	8 12 5
(h)	1	2 3	4 6 7	8 12 5
(i)	1	2 3	4 6	8 12 5 7

Para cada um dos nove casos acima, vamos distribuir os números $10, 14$ e 15. Uma vez que 10 é múltiplo de 2 e 5, 14 é múltiplo de 2 e 7 e 15 é múltiplo de 3 e 5, temos que no caso: (a) há 2 caixas possíveis para o 10, 2 caixas possíveis para o 15 e 2 caixas possíveis para o 14; (b) e (c): há 2 caixas possíveis para o 10, 2 caixas possíveis para o 15 e 1 caixa possível para o 14; (d) e (g): há 1 caixa possível para o 10, 1 caixa possível para o 15 e 2 caixas possíveis para o 14; nos restantes casos há uma única possibilidade para colocar os números $10, 14$ e 15.

Portanto, há um total de 24 possíveis distribuições para os números $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12, 14$ e 15. Para cada uma destas distribuições, podemos colocar o número 9 em duas caixas, e cada um dos números primos 11 e 13 em três caixas. Há assim, $24 \times 2 \times 3 \times 3 = 432$ possíveis distribuições para os números de 1 a 15.

OLIMPÍADAS
PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA

www.olimpiadas.spm.pt

XXXVII OPM - 1ª Eliminatória - 07.11.2018 - Categoria A - 8º/9º anos

Duração: 2 horas
Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3, 4: 8 pontos cada

Na questão 1 escolhe, em cada alínea, a opção correta.
Justifica convenientemente as tuas respostas às questões 2, 3 e 4.
Não é permitido o uso de calculadoras.

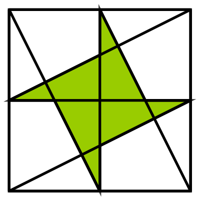
1. (a) No jantar organizado pelo clube Estrela Verde ocuparam-se, por completo, várias mesas de sete lugares. Entretanto os empregados do clube foram buscar mais quatro mesas e as pessoas presentes redistribuíram-se de tal modo que em cada uma das mesas ficaram exatamente seis pessoas. Quantas pessoas estiveram presentes no jantar?

A) 84 B) 126 C) 168 D) 210 E) 234

(b) O clube estava a vender rifas. Levaram para o jantar as rifas que ainda não tinham sido vendidas, tendo vendido durante o jantar um quarto destas. No final do jantar restavam metade do número total de rifas emitidas. Que parte das rifas tinha sido vendida antes do jantar?

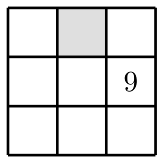
A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{2}{4}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{3}{4}$

(c) O símbolo do Estrela Verde é uma estrela construída num quadrado unindo o ponto médio de cada lado do quadrado com o ponto médio do lado oposto e com um vértice, tal como se apresenta na figura. Se o quadrado tem 12cm de lado, qual é a área, em cm^2, da estrela verde?



A) 32 B) 36 C) 48 D) 64 E) 72

(d) O jantar do clube termina sempre com um desafio. No tabuleiro apresentado, pretende colocar-se um algarismo diferente em cada casa, de modo que a soma dos algarismos na segunda linha seja o dobro da soma dos algarismos na primeira e a soma dos algarismos na terceira linha seja o triplo da soma dos números na primeira. As somas das colunas devem verificar as mesmas propriedades. O algarismo 9 já foi colocado. Qual é o número que se vai colocar na casa sombreada?



A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

2. Este ano, a corrida anual do dia São Martinho contou com quatro participantes: a Ana, o Bruno, a Constança e o Daniel. No final da corrida, três deles prestaram duas declarações cada ao jornal da escola, uma delas verdadeira e a outra falsa. As declarações foram as seguintes:

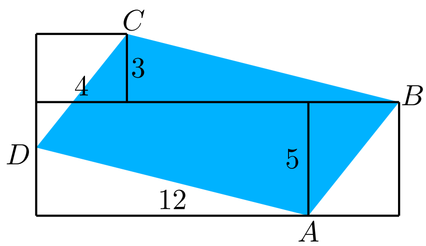
Ana: O Bruno ficou em segundo lugar e a Constança em terceiro.

Bruno: A Constança foi a última classificada e o Daniel o segundo.

Daniel: O Bruno ganhou a corrida e a Ana ficou em segundo lugar.

Qual foi a classificação dos quatro participantes na corrida?

3. Na figura estão representados três retângulos e o paralelogramo $[ABCD]$, onde os vértices A, B e C são também vértices de algum dos retângulos. As medidas dos lados dos retângulos maior e menor estão indicadas na figura. Qual é a área do paralelogramo?



4. Numa rua há nove casas em fila. As casas têm de ser pintadas com uma de quatro cores: azul, branco, castanho ou rosa. Além disso, cada casa tem de ter pelo menos uma casa adjacente pintada da mesma cor. De quantas maneiras diferentes podem as casas ser pintadas?

Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3, 4: 8 pontos cada

Sugestões para a resolução dos problemas

1. (a) Opção C. (24×7, *uma vez que de cada uma das mesas saiu uma pessoa.*)

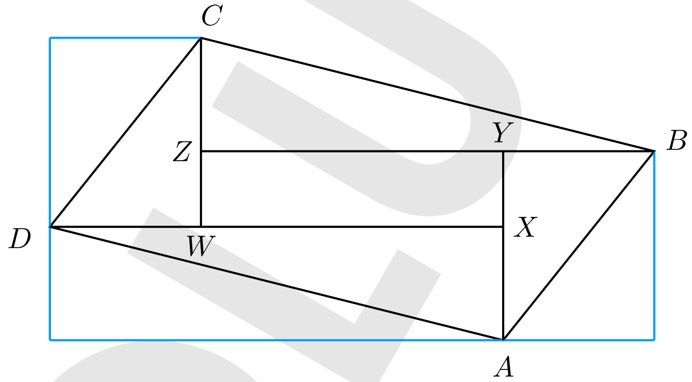
   (b) Opção B. (*No jantar venderam-se* $\frac{1}{4}$ *dos* $\frac{2}{3}$ *de rifas ainda disponíveis.*)

   (c) Opção B. (*A estrela é composta por quatro triângulos com* 6cm *de comprimento e* 3cm *de altura.*)

   (d) Opção C. (*Uma solução por linhas é: (1,2,4), (0,5,9), (6,7,8).*)

2. Se a primeira afirmação da Ana for verdadeira, então nenhuma das afirmações do Daniel pode ser verdadeira. Assim, a primeira afirmação da Ana tem de ser falsa e a segunda verdadeira. Portanto, a Constança ficou em terceiro lugar na prova. Isto também significa que a primeira afirmação do Bruno é falsa, sendo a segunda correta, ou seja, o Daniel ficou em segundo lugar. Analisando agora as afirmações do Daniel, concluímos que a sua segunda afirmação tem de ser falsa, pelo que a primeira é verdadeira. Portanto, o Bruno ganhou a corrida, o Daniel ficou em segundo lugar, a Constança em terceiro e a Ana terminou em último lugar.

3. Utilizando segmentos de reta paralelos aos lados dos retângulos da figura divide-se o paralelogramo $[ABCD]$ em quatro triângulos retângulos e no retângulo $[XYZW]$. Os triângulos $[ABY]$ e $[CDW]$ são iguais uma vez que os seus lados são, dois a dois, paralelos e as medidas dos lados $[AB]$ e $[CD]$ são iguais por serem dois dos lados do paralelogramo. Como do enunciado vem que $\overline{DW} = 4$ e que $\overline{AY} = 5$, a área de cada um destes triângulos é $\frac{4\times5}{2} = 10$. De igual modo se deduz que os triângulos $[BCZ]$ e $[DAX]$ são iguais e têm área igual a $\frac{12\times3}{2} = 18$. Finalmente, para calcular a área do retângulo, deduzimos que $\overline{WX} = \overline{DX} - \overline{DW} = 12 - 4 = 8$ e que $\overline{YX} = \overline{YA} - \overline{XA} = 5 - 3 = 2$, logo a área do retângulo é 16. Conclui-se então que a área do paralelogramo é $2 \times 10 + 2 \times 18 + 16 = 72$.



4. Cada maneira de pintar dividirá a rua em blocos de casas consecutivas pintadas da mesma cor, cada qual com pelo menos duas casas. Vamos dividir a contagem em casos, dependendo do número de blocos monocromáticos formados.

   Temos no máximo quatro blocos monocromáticos, sendo que nesse caso o tamanho dos blocos tem de ser 3,2,2,2 por alguma ordem, ou seja, há quatro formas de o fazer: $(3, 2, 2, 2)$, $(2, 3, 2, 2)$, $(2, 2, 3, 2)$ e $(2, 2, 2, 3)$. A distribuição de cores por blocos segue apenas a regra de não pintar blocos consecutivos da mesma cor. Temos portanto 4 possibilidades para o primeiro bloco, e 3 para cada um dos restantes, num total de 108 possibilidades. O número total de maneiras válidas de pintar com quatro blocos é $4 \times 108 = 432$.

   Para três blocos temos $(5, 2, 2)$, com três ordenações possíveis, $(4, 3, 2)$, com seis ordenações possíveis e $(3, 3, 3)$ com uma única ordenação, para um total de dez possibilidades. As formas de os pintar são agora $4 \times 3 \times 3 = 36$, dando um total de $10 \times 36 = 360$ possibilidades.

Finalmente, para dois blocos temos $(7,2)$, ou $(6,3)$, ou $(5,4)$, cada um com duas odenações possíveis, para seis possibilidades totais. Cada um tem 12 maneiras de ser pintado logo temos 72 formas válidas.

Há ainda a possibilidade de todas as casas serem pintadas da mesma cor. Adicionando todas as possibilidades temos $432 + 360 + 72 + 4 = 868$ maneiras diferentes de pintar as casas da rua.

XXXVII OPM - 2ª Eliminatória - 09.01.2019 - Categoria A - 8º/9º anos

Duração: 2 horas
Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3, 4: 8 pontos cada

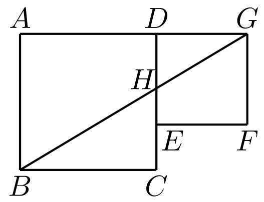
Na questão 1 escolhe, em cada alínea, a opção correta.
Justifica convenientemente as tuas respostas às questões 2, 3 e 4.
Não é permitido o uso de calculadoras.

1. No dia do aniversário da biblioteca da escola, os funcionários e professores organizaram uma festa.

(a) Foi preparado um jarro com um litro de sumo que tinha exatamente 50% de concentrado de laranja e 50% de água, para ser servido em copos de $100ml$. O primeiro aluno que chegou à festa bebeu um copo de sumo e encheu-se de novo o jarro com $100ml$ de concentrado. O aluno seguinte bebeu também um copo de sumo, e no final o jarro foi cheio com $100ml$ de água. De seguida chegou um grupo de cinco alunos, e, cada um, bebeu um copo de sumo. No final os funcionários encheram o jarro com concentrado de laranja e água de modo que o jarro voltasse a ter um litro de sumo com exatamente 50% de concentrado de laranja e 50% de água. Qual foi a quantidade de concentrado de laranja, em ml, que juntaram?

A) 250 B) $252,5$ C) 255 D) 275 E) 500

(b) Numa das salas da biblioteca existe um *puzzle* composto por dois quadrados $[ABCD]$ e $[DEFG]$, como se apresenta na figura. A soma das medidas dos seus lados é 10 e a diferença entre essas medidas é 2. Sabendo que o ponto H é a interseção dos segmentos $[BG]$ e $[DE]$, qual é a área do trapézio $[ABHD]$?



A) $\frac{108}{5}$ B) 24 C) $\frac{126}{5}$ D) $\frac{54}{2}$ E) 30

(c) Numa estante da biblioteca com prateleiras todas iguais estão arrumados os livros de duas coleções: *Mais Matemática* e *Conhecer Ciência*. Os livros de cada uma das coleções têm todos exatamente a mesma grossura de lombada. Os livros da coleção *Mais Matemática* têm a lombada mais grossa. Numa das prateleiras da estante foram arrumados 9 livros de *Mais Matemática*, mas não foi possível arrumar 10. Do mesmo modo, noutra prateleira foram arrumados 15 livros de *Conhecer Ciência*, mas não foi possível arrumar 16. Numa terceira prateleira estão arrumados 5 livros da coleção *Conhecer Ciência*, quantos livros de *Mais Matemática* pode a bibliotecária ainda arrumar nessa prateleira?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

(d) Num dos livros da biblioteca estão escritos os números inteiros positivos desde 1 até 1000, todos seguidos e sem espaços, ou seja, a sequência $123456789101112\cdots 9989991000$. Durante a sua pausa, a D. Teresa contou os algarismos até encontrar três algarismos 9 seguidos, no fim dos quais parou de contar. Quantos algarismos contou a D. Teresa?

A) 899 B) 1798 C) 2590 D) 2698 E) 2889

2. Seja $[ABC]$ um triângulo com $\hat{B} = 35^\circ$ e $\hat{C} = 30^\circ$. A reta r passa por A e é paralela ao lado $[BC]$. A mediatriz de $[AC]$ interseta r no ponto D e a mediatriz de $[AB]$ interseta r no ponto E. Determina os ângulos internos do quadrilátero $[BEDC]$.

3. Qual é o resto da divisão de $\underbrace{111\cdots11}_{2019 \text{ algarismos}}$ por 1001?

4. A Anabela, o Belmiro, a Catarina e o Daniel escrevem números naturais de cinco algarismos distintos formados pelos algarismos $1, 2, 3, 4$ e 5. A Anabela faz a lista daqueles cujo primeiro algarismo é 1. O Belmiro faz a lista daqueles cujos primeiros dois algarismos são 1 e 2, por qualquer ordem. A Catarina faz a lista daqueles cujos primeiros três algarismos são $1, 2$ e 3, por qualquer ordem. O Daniel faz a lista daqueles cujos primeiros quatro algarismos são $1, 2, 3$ e 4, por qualquer ordem. Existem números naturais de cinco algarismos distintos, formados pelos algarismos $1, 2, 3, 4$ e 5, que não aparecem em nenhuma das quatro listas. Quantos são os números que não aparecem em nenhuma lista?

Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3, 4: 8 pontos cada

Sugestões para a resolução dos problemas

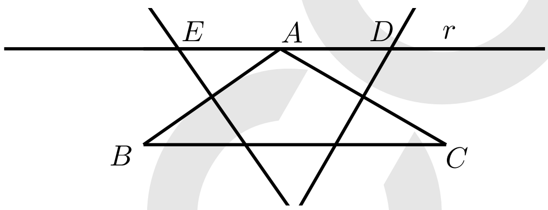
1. (a) Opção B. (*No fim de se reencher duas vezes, o sumo tem* $495ml$ *de concentrado e* $505ml$ *de água.*)

   (b) Opção C. (*Os triângulos* $[ABG]$ *e* $[DHG]$ *são semelhantes.*)

   (c) Opção C. (5 *livros finos ocupam menos de* $1/3$ *da prateleira e* 6 *livros grossos menos de* $2/3$.)

   (d) Opção C. (*A contagem termina no final do primeiro algarismo do número* 900.)

2. Como D pertence à mediatriz de $[AC]$, D é equidistante de A e C, ou seja $\overline{AD} = \overline{DC}$. O triângulo $[ADC]$ é isóceles e os ângulos em A e em C são iguais. Uma vez que r é paralela a BC, os ângulos DAC e ACB são iguais (porque são ângulos alternos internos). Portanto $D\hat{A}C = D\hat{C}A = A\hat{C}B = 30^\circ$, logo $B\hat{C}D = 60^\circ$ e $A\hat{D}C = 120^\circ$. Com argumentos análogos pode-se verificar que $E\hat{A}B = E\hat{B}A = 35^\circ$ e portanto $E\hat{B}C = 70^\circ$ e $B\hat{E}D = 110^\circ$.



3. Comecemos por notar que o número $111111 = 1001 \times 111$ é divisível por 1001.
   Além disso, como $2019 = 336 \times 6 + 3$,

$$\begin{aligned}\underbrace{111\cdots 11}_{2019\ \text{vezes}} &= 111111 \times 10^{2013} + 111111 \times 10^{2007} + \cdots + 111111 \times 10^{9} + 111111 \times 10^{3} + 111 \\ &= 1001 \times \left(111 \times 10^{2013} + 111 \times 10^{2007} + \cdots + 111 \times 10^{9} + 111 \times 10^{3}\right) + 111 \\ &= 1001 \times \left(\underbrace{111000111\cdots 111000}_{2016\ \text{algarismos}}\right) + 111\,,\end{aligned}$$

   concluímos que o resto da divisão de $\underbrace{111\cdots 11}_{2019\ \text{vezes}}$ por 1001 é 111.

4. **Solução 1**

   A lista da Anabela, sendo constituída por números que começam com o algarismo 1, tem $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ números. Os números da lista do Belmiro que não aparecem na lista da Anabela, são da forma $21 * * *$, e há $3 \times 2 \times 1 = 6$ números desses. Os números da lista da Catarina, que não aparecem nem na lista da Anabela nem na lista do Belmiro, são da forma $312 * *$, $321 * *$ ou $231 * *$. Estes são, no total, $3 \times (2 \times 1) = 6$ números.

   Na lista do Daniel, os números que não aparecem em nenhuma das listas anteriores podem-se dividir em três tipos: os da forma $4 * * * 5$, da forma $*4 * * 5$ ou da forma $* * 4 * 5$. Todos os da forma $4 * * * 5$ estão na lista do Daniel e não estão nas restantes. São $3 \times 2 \times 1 = 6$ no total. Dos números da forma $*4 * * 5$, apenas aqueles que começam com 1 têm de ser eliminados pois estão na lista da Anabela. São, por isso, $2 \times 2 \times 1 = 4$ números. Por fim, apenas temos 3 números da forma $* * 4 * 5$: 23415, 31425 e 32415, que não estão nas listas anteriores.

O conjunto de números que aparece em pelo menos uma das listas tem, assim, $24+6+6+13 = 49$ elementos. Como no total temos $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ números de cinco algarismos distintos formados pelos algarismos $1, 2, 3, 4$ e 5, os números que não aparecem em nenhuma das listas são $120 - 49 = 71$.

Solução 2

Agrupemos os números que não estão em nenhuma das listas de acordo com a posição do algarismo 5.

Nenhum número da forma $5 * * * *$ está em alguma das listas. Temos $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ destes números. Os números da forma $* 5 * * *$ que não estão em nenhuma das listas são aqueles que não começam por 1. Temos, assim, $3 \times 3 \times 2 \times 1 = 18$ destes números.

Quanto aos números da forma $* * 5 * *$ consideramos dois casos:

- se o algarismo 1 estiver à esquerda do algarismo 5, então o número é da forma $*15**$ pois, caso contrário, estaria na lista da Anabela. Como o algarimo 2 não pode ocupar a primeira posição (pois, nesse caso, estaria na lista do Belmiro), temos no total $2 \times 2 \times 1 = 4$ números desta forma que não aparecem em nenhuma das listas.
- se o algarismo 1 estiver à direita do algarismo 5, ele tem duas posições possíveis. Em qualquer dos casos, nenhum dos números desta forma estará em qualquer das listas. Temos, portanto, $2 \times 3 \times 2 \times 1 = 12$ destes números.

Relativamente aos números da forma $* * * 5 *$ consideramos os três casos seguintes:

- O número é da forma $4 * * 5 *$. Neste caso, nenhum destes números está em qualquer das listas. Temos $3 \times 2 \times 1 = 6$ desses números.
- O número é da forma $*4*5*$. Se algum destes números pertencer a alguma das listas é à lista da Anabela. Teremos, então, $2 \times 2 \times 1 = 4$ números desta forma que não pertencem a nenhuma das listas.
- O número é da forma $* * 45*$. Temos apenas 3 números desta forma: 23451, 31452 e 32451, que não pertencem a nenhuma das listas.

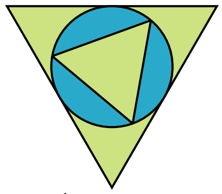
Podemos então concluir que os números de cinco algarismos distintos, formados pelos algarismos $1, 2, 3, 4$ e 5, que não aparecem em nenhuma das listas são $24 + 18 + 4 + 12 + 6 + 4 + 3 = 71$.

XXXVII OPM - Final - 1° Dia - 05.04.2019 - Categoria A - 8°/9° anos

Duração: 3 horas
Questão 1: 16 pontos
Questões 2 e 3: 7 pontos cada

Justifica convenientemente as tuas respostas e indica os principais cálculos.
Não é permitido o uso de calculadoras.

1. (a) O José criou uma página da internet chamada "A Matemática é fixe", onde ele apresenta problemas, desafios e notícias interessantes sobre a matemática. Para o logótipo da sua página, ele criou a seguinte figura composta por um círculo e dois triângulos equiláteros. Qual é a razão entre os lados dos dois triângulos?



A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{3}{8}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{5}{8}$ E) $\frac{3}{4}$

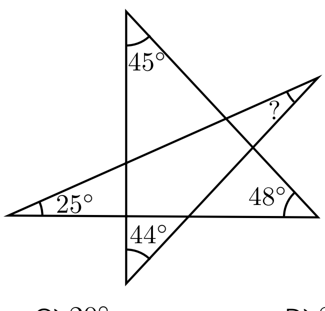
(b) Os visitantes da página podem registar-se e recebem uma senha de utilizador. Cada senha, criada pelo José, é uma sequência de 10 algarismos diferentes tal que cada escolha de 3 algarismos consecutivos é um múltiplo de 3. Quantas senhas de utilizador diferentes podem ser criados pelo José?

A) $2^3 3^3$ B) $2^4 3^3$ C) $2^3 3^4$ D) $2^4 3^4$ E) $2^6 3^3$

(c) O José criou uma secção na sua página sobre *capicuas*. Uma capicua é um número cuja leitura é a mesma quando feita da esquerda para a direita ou da direita para a esquerda. Por exemplo, 3223 e 67176 são capicuas. Nessa secção, o José diz que um número é *especial* se satisfizer as cinco condições seguintes: tem 5 algarismos, é uma capicua, é múltiplo de 5, tem resto 2 na divisão por 3 e tem resto 3 na divisão por 4. No fim da secção, o José lança o seguinte desafio: quantos números especiais existem?

A) 5 B) 12 C) 15 D) 16 E) 18

(d) Para aceder a uma área restrita da página "A Matemática é fixe", é preciso determinar quanto mede o quinto ângulo da estrela de 5 pontas representada na figura. Escolhe a opção que permite aceder à área restrita.



A) $15°$ B) $18°$ C) $20°$ D) $21°$ E) $24°$

2. Um tabuleiro quadriculado diz-se *mágico* se o seu número de quadrículas tiver 3 algarismos, cuja soma é igual ao número de colunas. Por exemplo, um tabuleiro com 64 linhas e 13 colunas é mágico porque tem $64 \times 13 = 832$ quadrículas e $8 + 3 + 2 = 13$. Qual é o menor número de linhas que um tabuleiro mágico pode ter?

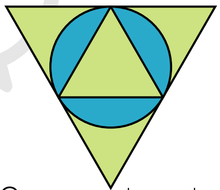
3. Um número inteiro de cinco algarismos diz-se *equilibrado* se a soma de quaisquer três dos seus algarismos é divisível por qualquer um dos outros dois. Quantos números equilibrados existem?

XXXVII OPM - Final - 1º Dia - 05.04.2019 - Categoria A - 8º/9º anos

Duração: 3 horas
Questão 1: 16 pontos
Questões 2 e 3: 7 pontos cada

Sugestões para a resolução dos problemas

1. (a) O lado do triângulo do logótipo do José é o mesmo do da figura ao lado, onde é claro que o triângulo menor tem metade do lado do triângulo maior.
Opção correta: C).



(b) Sejam a_1, a_2, $\ldots$, a_{10} os algarismos da senha, pela ordem em que aparecem. Como $a_1 + a_2 + a_3$ e $a_2 + a_3 + a_4$ são ambos múltiplos de 3, então a sua diferença $a_4 - a_1$ também é. Logo a_1 e a_4 têm o mesmo resto na divisão por 3. Do mesmo modo se conclui que a_1, a_4, a_7 e a_{10} têm o mesmo resto na divisão por 3. Como são algarismos, têm que ser $0, 3, 6$ e 9. Como a ordem destes algarismo é qualquer, temos $4 \times 3 \times 2 = 2^3 \times 3$ possibilidades.

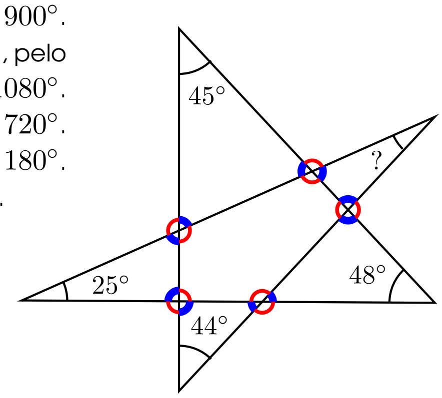
Também $\{a_2, a_5, a_8\}$ e $\{a_3, a_6, a_9\}$ são conjuntos onde os elementos têm o mesmo resto na divisão por 3, logo são $\{1, 4, 7\}$ e $\{2, 5, 8\}$ (por uma ordem qualquer). Portanto, ao todo há $2 \times (3 \times 2)^2 = 2^3 \times 3^2$ possibilidades. Assim, ao todo, há $(2^3 \times 3) \times (3^2 \times 2^3) = 2^6 \times 3^3$ possibilidades.

Opção correta: E).

(c) Um número é múltiplo de 5 se terminar em 0 ou em 5. Como o primeiro algarismo é igual ao último, e não pode ser 0, o último algarismo (e o primeiro) de um número especial é 5. Como o resto da divisão de um número especial por 4 é igual a 3, o mesmo acontece para o número composto pelos seus dois últimos algarismos, ou seja um número especial acaba em: 15, 35, 55, 75 ou 95. Só falta descobrir o algarismo do meio da capicua, mas como o resto da divisão por 3 é igual a 2, a soma dos cinco algarismos de um número especial também tem essa propriedade. Sendo assim, para cada escolha possível dos dois últimos algarismos há três ou quatro números especiais, conforme o caso: 51215, 51515, 51815; 53135, 53435, 53735; 55055, 55355, 55655, 55955; 57275, 57575, 57875; 59195, 59495, 59795.

Opção correta: D).

(d) A soma dos ângulos dos cinco triângulos da figura é $5 \times 180 = 900°$. Por outro lado, a soma dos ângulos internos do pentágono é $540°$, pelo que a soma dos ângulos assinalados a vermelho é $2 \times 540 = 1080°$. Logo, a soma dos ângulos assinalados a azul é $5 \times 360 - 1080 = 720°$. Portanto, a soma dos ângulos dos vértices da estrela é $900 - 720 = 180°$. Logo, a amplitude pretendida é $180 - 45 - 25 - 44 - 48 = 18°$.
Opção correta: B).



2. **Solução 1:** Um tabuleiro com 11 linhas e 18 colunas é mágico porque tem $11 \times 18 = 198$ quadrículas e $1+9+8=18$.

   Suponhamos agora que um tabuleiro mágico tem 10 ou menos linhas.

   Esse tabuleiro tem no máximo $9+9+9=27$ colunas, portanto tem no máximo $10 \times 27 = 270$ quadrículas.

   Assim, esse tabuleiro tem no máximo $1+9+9=19$ colunas, logo tem no máximo $10 \times 19 = 190$ quadrículas.

   Assim, esse tabuleiro tem no máximo $1+8+9=18$ colunas, logo tem no máximo $10 \times 18 = 180$ quadrículas.

   Repetindo sucessivamente este raciocínio, concluímos que o tabuleiro tem no máximo 100 quadrículas, o que é impossível com 10 ou menos linhas.

   Portanto, o número mínimo de linhas de um tabuleiro mágico é 11.

   Solução 2: Um tabuleiro com 11 linhas e 18 colunas é mágico porque tem $11 \times 18 = 198$ quadrículas e $1+9+8=18$.

   Suponhamos agora que um tabuleiro mágico tem $n \leq 10$ linhas.

   Sejam a, b e c os algarismos do número de quadrículas de um tabuleiro mágico. Então

$$100a + 10b + c = n(a+b+c) \leq 10a + 10b + 10c.$$

   Logo $90 \leq 90a \leq 9c \leq 81$, contradição.

   Portanto, o número mínimo de linhas de um tabuleiro mágico é 11.

3. Nenhum dos algarismos de um número equilibrado pode ser 0. Suponhamos que os algarismos a, b, c, d e e de um número equilibrado estão ordenados por ordem não-decrescente $1 \leq a \leq b \leq c \leq d \leq e$. Como

$$d - a = (b+c+d) - (a+b+c) \text{ é divisível por } e$$

   e

$$d - a < d \leq e$$

   então, necessariamente, $d-a=0$. Logo $a \leq b \leq c \leq d = a$, pelo que

$$a = b = c = d.$$

   Ou seja, num número equilibrado há, no máximo, 2 algarismos distintos sendo que o menor deles aparece pelo menos 4 vezes. Se os 5 algarismos forem todos iguais, o número é claramente equilibrado e temos 9 números equilibrados desta forma: $11111, \ldots, 99999$. Se os algarismos do número forem a, a, a, a e e, com $a < e$, então o número é equilibrado se e só se

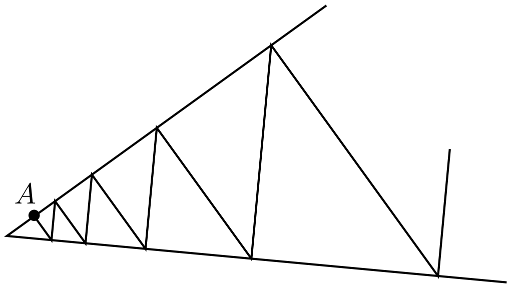
$$\begin{cases} a \text{ divide } 3a = a+a+a \\ a \text{ divide } 2a+e = a+a+e \\ a \text{ divide } a+2e = a+e+e \\ e \text{ divide } 3a = a+a+a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \text{ divide } e \\ a \text{ divide } 2e \\ e \text{ divide } 3a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \text{ divide } e \\ e \text{ divide } 3a \end{cases}$$

   Assim, o algarismo e tem de ser um múltiplo de a que divide $3a$. De $a < e$ vem que $e = 3a$ e os valores possíveis para o algarismo a são 1, 2 e 3 a que correspondem os valores 3, 6 e 9, respetivamente, para o algarismo e. Deste modo, concluímos que os números 11113, 22226 e 33339 e todos os que se obtêm destes por permutação dos seus algarismos são os números equilibrados com dois algarismos distintos.

   Existem, no total, $9 + 15 = 24$ números equilibrados.

Justifica convenientemente as tuas respostas e indica os principais cálculos.
Não é permitido o uso de calculadoras.

4. O Sebastião traçou, começando em A, uma linha poligonal alternadamente perpendicular a cada um dos lados de um ângulo, como indicado na figura. Os dois primeiros segmentos mediam 2 cm e 6 cm. Quanto media o vigésimo segmento?

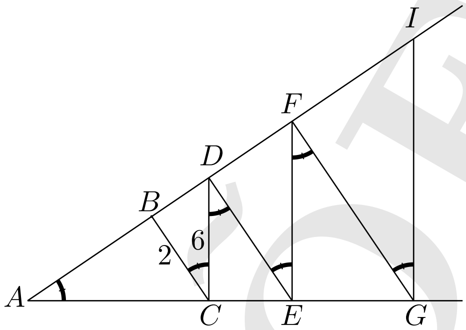


5. Num tabuleiro com 3 colunas e 4 linhas, cada um dos 12 quadrados vai ser pintado de verde ou de branco. Na primeira e na última linha, o número de quadrados pintados de verde tem de ser igual. Além disso, na primeira e na última coluna, o número de quadrados pintados de verde também tem de ser igual. De quantas maneiras diferentes é possível pintar o tabuleiro?

6. Se começarmos a escrever por ordem crescente todos os números inteiros cuja soma dos algarismos é 2019, qual será o $2019^{\underline{o}}$ número escrito nessa lista?

Sugestões para a resolução dos problemas

4. A figura indica os primeiros seis segmentos desenhados pelo Sebastião.



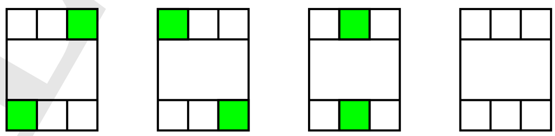
À medida que vai traçando segmentos alternadamente perpendiculares aos lados do ângulo, o Sebastião vai criando triângulos retângulos todos semelhantes entre si, com razão de semelhança igual a

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{BC}} = 3.$$

Assim, o terceiro segmento media $\overline{DE} = \frac{\overline{DC}}{\overline{BC}} \times \overline{DC} = 3 \times 6 = 3^2 \times 2$, o quarto media $\overline{EF} = \frac{\overline{DC}}{\overline{BC}} \times \overline{DE} = 3^3 \times 2$, e assim sucessivamente. Portanto o vigésimo segmento media $3^{20-1} \times 2 = 3^{19} \times 2$ cm.

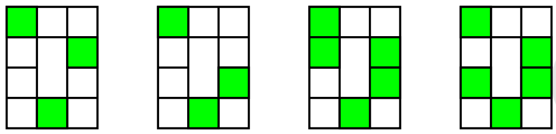
5. Vamos dividir as maneiras de pintar a primeira linha em dois casos: ou há mais casas pintadas de branco ou há mais casas pintadas de verde. O número de maneiras de pintar o tabuleiro é igual em cada caso. Por isso, vamos contar as maneiras de pintar o tabuleiro em que na primeira linha há zero ou um quadrados verdes.

   (a) Se depois de pintarmos a primeira e a última linha, o número de quadrados verdes da primeira e da última coluna também for igual, então há 4 maneiras de pintar a primeira e a última linha.

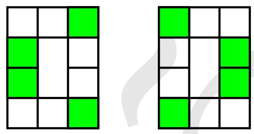
   

   Para cada um destes casos, há seis maneiras diferentes de pintar os dois quadrados restantes da primeira coluna e os dois quadrados restantes da última coluna: todos de verde, todos de branco e quatro maneiras de pintar um quadrado na primeira e um quadrado na última coluna de cada cor. Há assim $4 \times 6 = 24$ maneiras de colorir o bordo do tabuleiro nestas condições.

(b) Se depois de pintarmos a primeira e a última linha, o número de quadrados verdes na primeira e na última coluna diferem em uma unidade, então há 4 maneiras de pintar a primeira e a última linha. Estas quatro maneiras correspondem a pintar um dos cantos do tabuleiro e o quadrado central da linha oposta de verde, e os restantes quadrados da primeira e da última linha de branco. Para cada um destes casos, há quatro maneiras diferentes de pintar os dois quadrados restantes da primeira coluna e os dois quadrados restantes da última coluna. A figura mostra essas quatro manieras quando o canto superior esquerdo está pintado de verde. Temos assim $4 \times 4 = 16$ maneiras de colorir o bordo do tabuleiro nestas condições.



(c) Se depois de pintarmos a primeira e a última linha, o número de quadrados verdes na primeira e na última coluna diferem em duas unidades, então há apenas duas maneiras de pintar a primeira e a última linha: pintar dois cantos do mesmo lado de verde. Em cada um destes dois casos, só existe uma maneira de pintar os quadrados centrais da primeira e da última coluna.



Os dois quadrados centrais do tabuleiro podem ser pintados de verde ou de branco livremente. Portanto, cada coloração dos restantes quadrados corresponde a quatro maneiras diferentes de pintar o tabuleiro.

Finalmente, podemos concluir que há $4 \times 2 \times (24 + 16 + 2) = 336$ maneiras diferentes de pintar o tabuleiro.

6. Uma vez que $2019 = 224 \times 9 + 3$, o primeiro número da lista é $3\underbrace{9\cdots9}_{224\times}$, que possui 225 algarismos. Não existe mais nenhum número com 225 algarismos na lista com primeiro algarismo 3. Assim, o segundo número da lista é $48\underbrace{9\cdots9}_{223\times}$. Permutando a posição do algarismo 8, obtemos os seguintes 223 números da forma $4\underbrace{9\cdots9}_{N\times}8\underbrace{9\cdots9}_{M\times}$, com $N \geq 1$, $M \geq 0$ e $N + M = 223$. Ou seja, o número na posição $1 + 224$ da nossa lista é $4\underbrace{9\cdots9}_{223\times}8$. Não existe mais nenhum número com 225 algarismos na lista com primeiro algarismo 4. Assim, o número na posição 226 é o $57\underbrace{9\cdots9}_{223\times}$, que é seguido pelos 223 números da forma $58\underbrace{9\cdots9}_{N\times}8\underbrace{9\cdots9}_{M\times}$, com $N, M \geq 0$ e $N + M = 222$, pelo que o número situado na posição $(1+224)+(1+223)$ é o $58\underbrace{9\cdots9}_{222\times}8$. O número seguinte é o $597\underbrace{9\cdots9}_{222\times}$, seguido pelos 222 números da forma $598\underbrace{9\cdots9}_{N\times}8\underbrace{9\cdots9}_{M\times}$, com $N, M \geq 0$ e $N + M = 221$. Ou seja, o número situado na posição $(1 + 224) + (1 + 223) + (1 + 222)$ é o $598\underbrace{9\cdots9}_{221\times}8$.

Repetindo o processo o número de vezes necessário, obtemos uma lista de

$$(1 + 224) + (1 + 223) + (1 + 222) + \cdots + (1 + 216) = 1989$$

números com 225 algarismos cuja soma é 2019, sendo que o $1989^{\underline{o}}$ número é o $5\underbrace{9\cdots9}_{7\times}8\underbrace{9\cdots9}_{215\times}8$. O $1990^{\underline{o}}$ número é $5\underbrace{9\cdots9}_{8\times}7\underbrace{9\cdots9}_{215\times}$, seguido por $5\underbrace{9\cdots9}_{8\times}88\underbrace{9\cdots9}_{214\times}$, pelo que o $2019^{\underline{o}}$ número da lista é

$$5\underbrace{9\cdots9}_{8\times}8\underbrace{9\cdots9}_{28\times}8\underbrace{9\cdots9}_{186\times}.$$

XXXVII OPM - 1ª Eliminatória - 07.11.2018 - Categoria B - 10º/12º anos

Duração: 2 horas
Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3, 4: 8 pontos cada

Na questão 1 escolhe, em cada alínea, a opção correta.
Justifica convenientemente as tuas respostas às questões 2, 3 e 4.
Não é permitido o uso de calculadoras.

1. (a) Nas eleições para a associação de estudantes da escola da Manuela concorreram 4 listas e votaram 200 alunos. A soma dos votos nas listas A e C foi igual à soma dos votos nas listas B e D. A lista vencedora obteve mais 20 votos que a segunda classificada e o triplo dos votos da terceira. Quantos votos teve a lista vencedora?

   A) 60 B) 66 C) 75 D) 81 E) 90

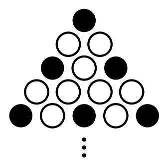
   (b) No final das eleições a Manuela perguntou os resultados a três amigas. Cada uma delas deu-lhe duas respostas, uma certa e outra errada:

   - a lista A ficou em segundo e a lista B em terceiro;
   - a lista A ficou em último e a lista C ficou em segundo;
   - a lista B ganhou e a lista D ficou em segundo.

   Qual foi a lista vencedora?

   A) A B) B C) C D) D E) Não é possível saber.

   (c) Na aula de Educação Física o professor colocou bolas brancas e pretas em triângulo de modo que as linhas ímpares tenham bolas pretas e brancas alternadamente, começando numa preta, e as linhas pares tenham apenas bolas brancas. Sabendo que no triângulo estão 165 bolas brancas, quantas bolas pretas há? A figura mostra as cinco primeiras linhas.

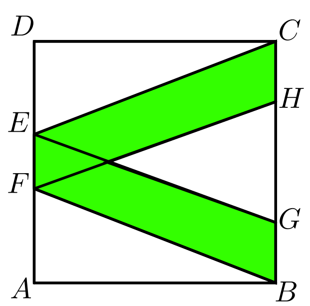


   A) 55 B) 66 C) 72 D) 110 E) 165

   (d) O símbolo da lista vencedora das eleições é um polígono regular. Nesse polígono está desenhado um retângulo que tem dois lados em comum com o polígono. Sabendo que o retângulo tem área 8 e o polígono área 80, quantos vértices tem o polígono?

   A) 10 B) 15 C) 30 D) 36 E) 40

2. O quadrado $[ABCD]$ tem 16 cm de lado. Os pontos E e F no lado $[AD]$ satisfazem $\overline{ED} = 6$cm e $\overline{AF} = 6$cm e os pontos H e G no lado $[BC]$ são tais que $\overline{CH} = 4$cm e $\overline{BG} = 4$cm, tal como se apresenta na figura. Qual é a área da figura sombreada?



3. Numa rua há nove casas em fila. As casas têm de ser pintadas com uma de quatro cores: azul, branco, castanho ou rosa. Além disso, cada casa tem de ter pelo menos uma casa adjacente pintada da mesma cor. De quantas maneiras diferentes podem as casas ser pintadas?

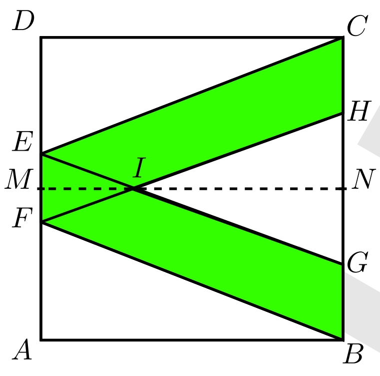
4. Determine o menor inteiro positivo n tal que n^n tem pelo menos um milhão de divisores positivos.

Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3, 4: 8 pontos cada

Sugestões para a resolução dos problemas

1. (a) Opção E. (*A votação das listas foi:* 90, 70, 30 *e* 10.)
   (b) Opção C. (*A classificação final foi:* C, D, B, A.)
   (c) Opção B. (*São precisas* 21 *filas, e o número de bolas pretas é* $1+2+\cdots+11$.)
   (d) Opção E. (*Cada triângulo formado por um dos lados do polígono e pelo seu centro tem área* 2.)

2. Sejam M e N os pontos médios dos lados $[AD]$ e $[BC]$, respetivamente. O ponto I pertence a $[MN]$. A área pedida será igual ao dobro da área do polígono $[MIGBF]$. Os triângulos $[NIG]$ e $[ABF]$ são semelhantes uma vez que têm lados paralelos. Assim,
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{NI}}=\frac{\overline{AF}}{\overline{NG}}$$
e como $\overline{AB}=16$cm, $\overline{AF}=6$cm e $\overline{NG}=4$cm, tem-se $\overline{NI}=\frac{32}{3}$cm. A área do polígono $[MIGBF]$, área$_{[MIGBF]}$, será
$$\begin{aligned}\text{área}_{[MIGBF]} &= \text{área}_{[ABNM]}-\text{área}_{[NIG]}-\text{área}_{[ABF]}\\ &= \frac{16\times 16}{2}-\frac{4\times\frac{32}{3}}{2}-\frac{16\times 6}{2}\\ &= \frac{176}{3}\end{aligned}$$
Portanto a área da figura sombreada é $2\times\frac{176}{3}=\frac{352}{3}$cm^2.



3. Cada maneira de pintar dividirá a rua em blocos de casas consecutivas pintadas da mesma cor, cada qual com pelo menos duas casas. Vamos dividir a contagem em casos, dependendo do número de blocos monocromáticos formados.

   Temos no máximo quatro blocos monocromáticos, sendo que nesse caso o tamanho dos blocos tem de ser 3,2,2,2 por alguma ordem, ou seja, há quatro formas de o fazer: $(3,2,2,2)$, $(2,3,2,2)$, $(2,2,3,2)$ e $(2,2,2,3)$. A distribuição de cores por blocos segue apenas a regra de não pintar blocos consecutivos da mesma cor. Temos portanto 4 possibilidades para o primeiro bloco, e 3 para cada um dos restantes, num total de 108 possibilidades. O número total de maneiras válidas de pintar com quatro blocos é $4\times 108=432$.

   Para três blocos temos $(5,2,2)$, com três ordenações possíveis, $(4,3,2)$, com seis ordenações possíveis e $(3,3,3)$ com uma única ordenação, para um total de dez possibilidades. As formas de os pintar são agora $4\times 3\times 3=36$, dando um total de $10\times 36=360$ possibilidades.

Finalmente, para dois blocos temos $(7,2)$, ou $(6,3)$, ou $(5,4)$, cada um com duas odenações possíveis, para seis possibilidades totais. Cada um tem 12 maneiras de ser pintado logo temos 72 formas válidas.

Há ainda a possibilidade de todas as casas serem pintadas da mesma cor. Adicionando todas as possibilidades temos $432+360+72+4=868$ maneiras diferentes de pintar as casas da rua.

4. Se $n=p_1^{a_1}\cdots p_\ell^{a_\ell}$, com $a_i\geq 1$ para $i=1,\ldots,\ell$, é a decomposição de n em fatores primos, então a decomposição de n^n em fatores primos é dada por $n^n=p_1^{na_1}\cdots p_\ell^{na_\ell}$. Portanto, n^n possui $(na_1+1)\cdots(na_\ell+1)$ divisores positivos. Como $a_i\geq 1$ para $i=1,\ldots,\ell$, segue-se que n^n possui pelo menos $(n+1)^\ell$ divisores positivos. Assim, se $n\geq 99$ e $\ell\geq 3$, concluí-se que n^n possui pelo menos 100^3 divisores positivos.

   Vejamos se existe algum inteiro positivo $n<99$ com pelo menos 100^3 divisores positivos. Tal número $n=p_1^{a_1}\cdots p_\ell^{a_\ell}$ tem de satisfazer $a_i\leq 6$ para $i=1,\ldots,\ell$, uma vez que $p_i^7\geq 2^7>100$ para qualquer número primo p_i. Além disso, devemos ter $\ell\leq 3$ pois o produto de quaisquer quatro primos distintos é superior a 100.

   Se $\ell=1$, ou seja se $n=p_1^{a_1}$ então o número de divisores positivos de n^n é inferior a $6n+1<601<100^3$.

   Se $\ell=2$, ou seja, se $n=p_1^{a_1}p_2^{a_2}$ então o número de divisores positivos de n^n é inferior a $(6n+1)^2<601^2<100^3$.

   Consideremos então o caso $\ell=3$, *i.e.* $n=p_1^{a_1}p_2^{a_2}p_3^{a_3}$. Não podemos ter $a_1=a_2=a_3=1$, pois neste caso o número de divisores positivos de n^n é $(n+1)^3\leq 99^3<100^3$. Vejamos o caso em que $a_1=2$ e $a_2=a_3=1$. Os menores inteiros positivos nestas condições são $60=2^2\cdot 3\cdot 5$ e $84=2^2\cdot 3\cdot 7$. O número de divisores positivos de $60^{60}=2^{120}\cdot 3^{60}\cdot 5^{60}$ é igual a $121\cdot 61\cdot 61<100^3$, mas o número número de divisores positivos de $84^{84}=2^{168}\cdot 3^{84}\cdot 7^{84}$ é igual a $169\cdot 85\cdot 85>100^3$. Portanto, 84 é o menor inteiro positivo n tal que n^n possui pelo menos um milhão de divisores positivos.

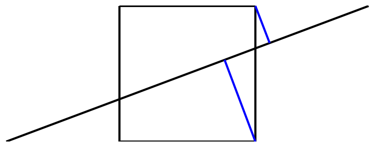
XXXVII OPM - 2ª Eliminatória - 09.01.2019 - Categoria B - 10º/12º anos

Duração: 2 horas
Cada questão vale 10 pontos

Justifica convenientemente as tuas respostas e indica os principais cálculos.
Não é permitido o uso de calculadoras.

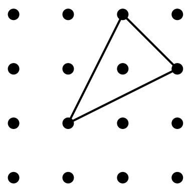
1. Qual é o resto da divisão de $\underbrace{111\cdots11}_{2019 \text{ algarismos}}$ por 1001?

2. Dado um quadrado de lado 1, traça-se uma reta que passa no centro do quadrado e dois segmentos perpendiculares a essa reta, que unem a reta a dois vértices consecutivos, como se vê na figura. Sabendo que um desses segmentos mede $\frac{1}{4}$, quanto mede o outro?



3. Na figura estão representados 16 pontos distribuídos por quatro linhas e quatro colunas. Quaisquer duas linhas ou duas colunas consecutivas estão à mesma distância.

   Quantos triângulos isósceles é possível desenhar com vértices nos pontos da figura? (Na figura está desenhado um desses triângulos.)



4. Se n é um número natural, define-se $n!$ como o produto de todos os inteiros de 1 até n. Por exemplo $1! = 1$ e $5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$. Determina todos os triplos (a, b, c) de números naturais que satisfazem a igualdade $a!b! = a! + b! + c!$.

Cada questão vale 10 pontos

Sugestões para a resolução dos problemas

1. Comecemos por notar que o número $111111 = 1001 \times 111$ é divisível por 1001.
Além disso, como $2019 = 336 \times 6 + 3$,

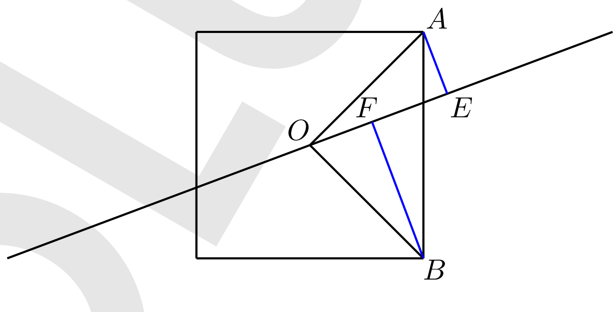
$$\begin{aligned}\underbrace{111\cdots 11}_{2019 \text{ vezes}} =& 111111 \times 10^{2013} + 111111 \times 10^{2007} + \cdots + 111111 \times 10^9 + 111111 \times 10^3 + 111\\ =& 1001 \times \left(111 \times 10^{2013} + 111 \times 10^{2007} + \cdots + 111 \times 10^9 + 111 \times 10^3\right) + 111\\ =& 1001 \times \left(\underbrace{111000111\cdots 111000}_{2016 \text{ algarismos}}\right) + 111\,,\end{aligned}$$

concluímos que o resto da divisão de $\underbrace{111\cdots 11}_{2019 \text{ vezes}}$ por 1001 é 111.

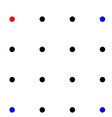
2. Na figura O é o centro do quadrado. O triângulo $[AOB]$ é isósceles (pois $\overline{OA} = \overline{OB}$) e retângulo em O. Assim, $A\hat{O}E = 90 - B\hat{O}F = F\hat{B}O$ e os triângulos $[AEO]$ e $[BFO]$, sendo retos em E e F, respetivamente, são semelhantes. Como $\overline{OA} = \overline{OB}$, eles são congruentes e $\overline{OE} = \overline{FB}$.
Pelo Teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo $[AOB]$, temos que

$$\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 = \overline{AB}^2 \Leftrightarrow 2\overline{OA}^2 = 1 \Leftrightarrow \overline{OA}^2 = \frac{1}{2}.$$

Por outro lado, aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo $[OAE]$ temos que $\overline{OA}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{OE}^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \overline{AE}^2 + \overline{FB}^2$.
Como um dos comprimentos $\overline{AE}$ ou $\overline{FB}$ é $\frac{1}{4}$, o outro é $\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$.



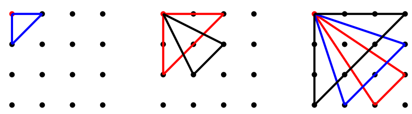
3. Vamos contar, para cada ponto da figura, o conjunto de triângulos isósceles que têm esse ponto como vértice comum a dois lados iguais. Tendo em conta as simetrias da figura, esta contagem pode ser dividida em três casos, de acordo com a posição do vértice. Esse vértice poderá estar:
Caso 1: num "canto" do quadrado. Por exemplo, o ponto assinalado a vermelho ou os pontos assinalados a azul na figura.



A tabela seguinte indica as distâncias dos restantes pontos da figura ao vértice do canto assinalado. Cada triângulo isósceles fica definido pela escolha de dois pontos à mesma distância do vértice e não colineares com este.

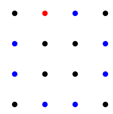
●	1	2	3
1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{10}$
2	$\sqrt{5}$	$\sqrt{8}$	$\sqrt{13}$
3	$\sqrt{10}$	$\sqrt{13}$	$\sqrt{18}$

Organizando as escolhas pelo comprimento dos lados iguais, há um triângulo com lados de comprimento igual a cada um dos seguintes valores : 1 (primeira figura); 2 e $\sqrt{5}$ (segunda figura); 3, $\sqrt{10}$ e $\sqrt{13}$ (terceira figura).



Como há quatro cantos para este vértice, há $6 \times 4 = 24$ triângulos isósceles.

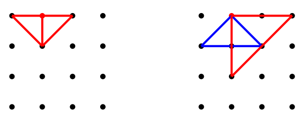
Caso 2: entre dois cantos do quadrado. Por exemplo, o ponto assinalado a vermelho ou os pontos assinalados a azul na figura.



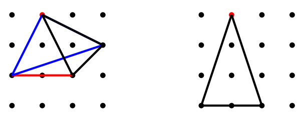
A tabela seguinte indica as distâncias dos restantes pontos da figura ao vértice assinalado a vermelho.

1	●	1	2
$\sqrt{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{5}$
$\sqrt{5}$	2	$\sqrt{5}$	$\sqrt{8}$
$\sqrt{10}$	3	$\sqrt{10}$	$\sqrt{13}$

Organizando as escolhas pelo comprimento dos lados iguais, há dois triângulos com lados de comprimento igual a 1 (primeira figura), um triângulo com dois lados iguais a $\sqrt{2}$ e outro com dois lados iguais a 2 (segunda figura).

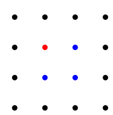


Depois há três triângulos com dois lados de comprimento igual a $\sqrt{5}$ (primeira figura) e um triângulo com dois lados iguais a $\sqrt{10}$ (segunda figura).



Portanto, como há oito vértices vermelhos possíveis e para cada um há oito triângulos isósceles, há, neste caso, $8 \times 8 = 64$ triângulos.

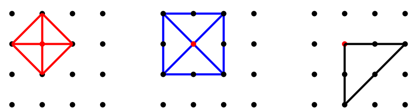
Caso 3: no "meio" do quadrado. Por exemplo, o ponto assinalado a vermelho ou os pontos assinalados a azul na figura.



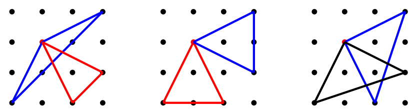
A tabela seguinte indica as distâncias dos restantes pontos da figura ao vértice assinalado a vermelho.

$\sqrt{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{5}$
1	●	1	2
$\sqrt{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{5}$
$\sqrt{5}$	2	$\sqrt{5}$	$\sqrt{8}$

Organizando as escolhas pelo comprimento dos lados iguais, há quatro triângulos com lados de comprimento igual a 1 (primeira figura), quatro triângulos com dois lados iguais a $\sqrt{2}$ (segunda figura) e um triângulo com dois lados iguais a 2 (terceira figura).



Depois há seis triângulos com dois lados de comprimento igual a $\sqrt{5}$.



Para cada um dos vértices do centro do quadrado há 15 triângulos isósceles, logo há $4 \times 15 = 60$ triângulos isósceles neste caso.

Pelas figuras e pela análise dos comprimentos dos lados dos triângulos, observa-se que não há triângulos equiláteros nesta lista e, por isso, não há repetições na contagem.

Portanto, há no total $24 + 64 + 60 = 148$ triângulos isósceles.

4. Sem perda de generalidade, vamos supor que $a \geq b$. Dividindo ambos os membros da expressão $a!b! = a! + b! + c!$ por $b!$ obtemos

$$a! = \frac{a!}{b!} + 1 + \frac{c!}{b!},$$

pelo que necessariamente $c \geq b$. É claro que se $a = b = c$, obtemos $a! = 3$, mas este número não conduz a uma solução. Portanto, pelo menos um dos números a, c deve ser estritamente superior a b.

Se ambos os números a e c forem estritamente superiores a b, então $b + 1$ divide $a!$, $\frac{a!}{b!}$ e $\frac{c!}{b!}$. Como $b + 1$ não divide 1, não podemos ter simultaneamente $a > b$ e $c > b$.

Se $a > b$ e $b = c$, obtemos, por um lado, que $a! = \frac{a!}{c!} + 2$, e portanto $c \geq 2$, e, por outro, que $c + 1$ divide $a!$ e $\frac{a!}{c!}$. Como $c + 1$ não divide 2, não podemos ter simultaneamente $a > b$ e $b = c$. Concluímos assim que temos de ter $a = b$ e $c > b$, donde se segue que

$$a! = 2 + \frac{c!}{a!},$$

e portanto $a \geq 3$. Notemos que se $c \geq a + 3$, então 3 divide $\frac{c!}{a!}$. Como 3 também divide $a!$ mas não divide 2, conclui-se que $a = b < c < a + 3$. Se $c = a + 1$, então $a! = 2 + (a + 1) = a + 3$ e o termo $a + 3$ é divisível por a apenas se $a = 3$. Neste caso obtemos a solução $a = b = 3$ e $c = 4$ da igualdade $a!b! = a! + b! + c!$.

Por outro lado, se $c = a + 2$, então $a! = 2 + (a + 1)(a + 2) = a^2 + 3a + 4$. Como $a!$ é divisível por a, o segundo membro desta igualdade também é divisível por a, o que implica que a divide 4. Como $a \geq 3$, temos que $a = 4$ e este número não conduz a uma solução.

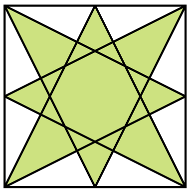
Concluímos que a única solução do problema é o triplo $(3, 3, 4)$.

XXXVII OPM - Final - 1º Dia - 05.04.2019 - Categoria B - 10º/12º anos

Duração: 3 horas
Cada questão vale 10 pontos

Justifica convenientemente as tuas respostas e indica os principais cálculos.
Não é permitido o uso de calculadoras.

1. Num quadrado de lado 10 cm, unem-se os vértices aos pontos médios dos lados opostos, como representado na figura. Quanto mede a área da região colorida?

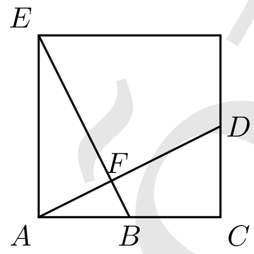


2. Um número inteiro de cinco algarismos diz-se $equilibrado$ se a soma de quaisquer três dos seus algarismos é divisível por qualquer um dos outros dois. Quantos números equilibrados existem?

3. O $fatorial$ de um número natural n, representado por $n!$, é o produto de todos os inteiros positivos menores ou iguais a n, ou seja,
$$1 \times 2 \times \cdots \times (n-1) \times n.$$
Determina todos os números naturais n tais que é possível substituir, na expressão anterior, um ou mais fatores k por $k!$, de modo que o resultado seja um quadrado perfeito.

Sugestões para a resolução dos problemas

1. Como os triângulos $[ABE]$ e $[CDA]$ da figura são congruentes, então $A\hat{B}E = C\hat{D}A$. Logo os triângulos $[ABF]$ e $[ADC]$ têm dois ângulos iguais, pelo que são semelhantes, com razão de semelhança $\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}}$.



Pelo Teorema de Pitágoras, temos $\overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CD}^2 = 10^2 + 5^2 = 125$, logo a razão de semelhança anterior é $\frac{5}{\sqrt{125}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Assim,

$$\text{área}[ABF] = \frac{\text{área}[ADC]}{5} = \frac{25}{5} = 5\,\text{cm}^2.$$

Portanto, a área colorida mede $10^2 - 8 \times 5 = 60$ cm^2.

2. Nenhum dos algarismos de um número equilibrado pode ser 0. Suponhamos que os algarismos a, b, c, d e e de um número equilibrado estão ordenados por ordem não-decrescente $1 \leq a \leq b \leq c \leq d \leq e$. Como

$$d - a = (b + c + d) - (a + b + c) \text{ é divisível por } e$$

e

$$d - a < d \leq e$$

então, necessariamente, $d - a = 0$. Logo $a \leq b \leq c \leq d = a$, pelo que

$$a = b = c = d.$$

Ou seja, num número equilibrado há, no máximo, 2 algarismos distintos sendo que o menor deles aparece pelo menos 4 vezes. Se os 5 algarismos forem todos iguais, o número é claramente equilibrado e temos 9 números equilibrados desta forma: $11111, \ldots, 99999$. Se os algarismos do número forem a, a, a, a e e, com $a < e$, então o número é equilibrado se e só se

$$\begin{cases} a \text{ divide } 3a = a+a+a \\ a \text{ divide } 2a+e = a+a+e \\ a \text{ divide } a+2e = a+e+e \\ e \text{ divide } 3a = a+a+a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \text{ divide } e \\ a \text{ divide } 2e \\ e \text{ divide } 3a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \text{ divide } e \\ e \text{ divide } 3a \end{cases}$$

Assim, o algarismo e tem de ser um múltiplo de a que divide $3a$. De $a < e$ vem que $e = 3a$ e os valores possíveis para o algarismo a são 1, 2 e 3 a que correspondem os valores 3, 6 e 9, respetivamente, para o algarismo e. Deste modo, concluímos que os números 11113, 22226 e 33339 e todos os que se obtêm destes por permutação dos seus algarismos são os números equilibrados com dois algarismos distintos.

Existem, no total, $9 + 15 = 24$ números equilibrados.

3. Seja N um número obtido de $n!$ pela substituição de um ou mais fatores k por $k!$. O número N é um quadrado perfeito se e só se na fatorização de N em números primos, o expoente de cada número primo é par.

   Se n é um número primo, então, para qualquer número N obtido pela substituição de um ou mais fatores k por $k!$, o expoente de n na fatorização de N em números primos é 1, logo N não é um quadrado perfeito.

   Se n é um número composto, seja $N = n!$ e p o maior número primo com expoente ímpar na decomposição de N em números primos.

   Como n é composto, tem-se $p + 1 \leq n$ e substituindo o fator $p + 1$ por $(p + 1)!$, adiciona-se 1 ao expoente de p. Logo o expoente de p na nova expressão é par. Como o expoente de cada primo maior que p não é alterado, se a nova expressão N não for um quadrado perfeito, o maior número primo com expoente ímpar na decomposição de N em números primos é inferior a p.

   Repetindo sucessivamente este procedimento, eventualmente todos os expoentes ficam pares, obtendo-se um quadrado perfeito.

   Portanto os naturais n nas condições do enunciado são os números compostos.

XXXVII OPM - Final - 2º Dia - 06.04.2019 - Categoria B - 10º/12º anos

Duração: 3 horas
Cada questão vale 10 pontos

Justifica convenientemente as tuas respostas e indica os principais cálculos.
Não é permitido o uso de calculadoras.

4. Num tabuleiro com 3 colunas e 4 linhas, cada um dos 12 quadrados vai ser pintado de verde ou de branco. Na primeira e na última linha, o número de quadrados pintados de verde tem de ser igual. Além disso, na primeira e na última coluna, o número de quadrados pintados de verde também tem de ser igual. De quantas maneiras diferentes é possível pintar o tabuleiro?

5. Seja $[ABC]$ um triângulo acutângulo e Γ a sua circunferência circunscrita. Seja D o ponto da reta AB tal que A é o ponto médio do segmento $[DB]$ e P o ponto de interseção de CD com Γ. Os pontos W e L estão nos arcos menores $\overset{\frown}{BC}$ e $\overset{\frown}{AB}$, respetivamente, e são tais que $\overset{\frown}{BW}=\overset{\frown}{LA}=\overset{\frown}{AP}$. As retas LC e AW intersetam-se em Q. Mostra que $\overline{LQ} = \overline{BQ}$.

6. Uma rede de metro com $n \geq 2$ estações, onde cada estação está ligada a cada uma das restantes por uma linha de sentido único, diz-se $dispersa$ se existirem duas estações A e B tais que não é possível ir de A a B através da rede.

   Se uma rede é dispersa, mas for possível escolher uma estação A e inverter o sentido de todas as linhas de e para A de modo a que a nova rede já não seja dispersa, diz-se que a rede é $corrigível$.

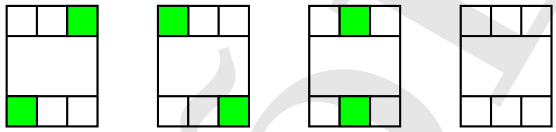
   Indica todos os inteiros n para os quais existe uma rede com n estações, dispersa e não corrigível.

Duração: 3 horas
Cada questão vale 10 pontos

Sugestões para a resolução dos problemas

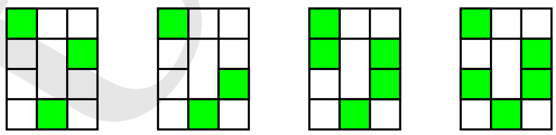
4. Vamos dividir as maneiras de pintar a primeira linha em dois casos: ou há mais casas pintadas de branco ou há mais casas pintadas de verde. O número de maneiras de pintar o tabuleiro é igual em cada caso. Por isso, vamos contar as maneiras de pintar o tabuleiro em que na primeira linha há zero ou um quadrados verdes.

   (a) Se depois de pintarmos a primeira e a última linha, o número de quadrados verdes da primeira e da última coluna também for igual, então há 4 maneiras de pintar a primeira e a última linha.

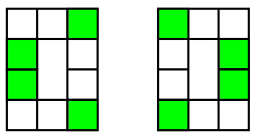
   

   Para cada um destes casos, há seis maneiras diferentes de pintar os dois quadrados restantes da primeira coluna e os dois quadrados restantes da última coluna: todos de verde, todos de branco e quatro maneiras de pintar um quadrado na primeira e um quadrado na última coluna de cada cor. Há assim $4 \times 6 = 24$ maneiras de colorir o bordo do tabuleiro nestas condições.

   (b) Se depois de pintarmos a primeira e a última linha, o número de quadrados verdes na primeira e na última coluna diferem em uma unidade, então há 4 maneiras de pintar a primeira e a última linha. Estas quatro maneiras correspondem a pintar um dos cantos do tabuleiro e o quadrado central da linha oposta de verde, e os restantes quadrados da primeira e da última linha de branco. Para cada um destes casos, há quatro maneiras diferentes de pintar os dois quadrados restantes da primeira coluna e os dois quadrados restantes da última coluna. A figura mostra essas quatro manieras quando o canto superior esquerdo está pintado de verde. Temos assim $4 \times 4 = 16$ maneiras de colorir o bordo do tabuleiro nestas condições.

   (c) Se depois de pintarmos a primeira e a última linha, o número de quadrados verdes na primeira e na última coluna diferem em duas unidades, então há apenas duas maneiras de pintar a primeira e a última linha: pintar dois cantos do mesmo lado de verde. Em cada um destes dois casos, só existe uma maneira de pintar os quadrados centrais da primeira e da última coluna.

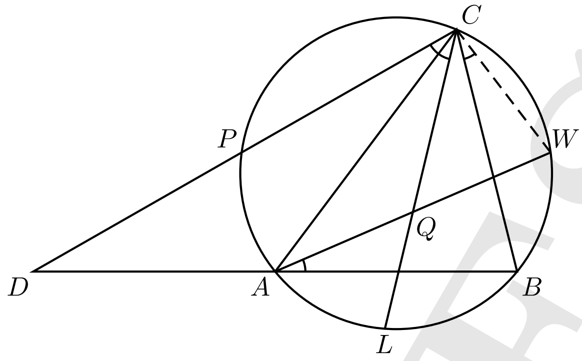
   

Os dois quadrados centrais do tabuleiro podem ser pintados de verde ou de branco livremente. Portanto, cada coloração dos restantes quadrados corresponde a quatro maneiras diferentes de pintar o tabuleiro.

Finalmente, podemos concluir que há $4 \times 2 \times (24 + 16 + 2) = 336$ maneiras diferentes de pintar o tabuleiro.

5. De $W\hat{C}Q = W\hat{C}B + B\hat{C}Q = L\hat{C}A + B\hat{C}L = B\hat{C}A$ e $C\hat{W}Q = C\hat{W}A = C\hat{B}A$. obtemos a semelhança de triângulos

$$[WCQ] \sim [BCA]\,.$$



Em particular,

$$W\hat{Q}C = B\hat{A}C.$$

De $D\hat{C}A = P\hat{C}A = A\hat{C}L = A\hat{C}Q$ e $A\hat{Q}C = 180 - W\hat{Q}C = 180 - B\hat{A}C = D\hat{A}C$ obtemos a semelhança de triângulos

$$[DAC] \sim [AQC]\,.$$

Destas duas semelhanças de triângulos podemos concluir que

$$\frac{\overline{QW}}{\overline{QA}} = \frac{\frac{\overline{QW}}{\overline{QC}}}{\frac{\overline{QA}}{\overline{QC}}} = \frac{\frac{\overline{BA}}{\overline{AC}}}{\frac{\overline{DA}}{\overline{AC}}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{DA}} = 1.$$

Assim, $\overline{QA} = \overline{QW}$ e Q é o ponto médio de $[AW]$. De $\overset{\frown}{BW} = \overset{\frown}{LA}$ vem que $[ALBW]$ é um trapézio isósceles. Uma vez que as mediatrizes dos lados paralelos de um trapézio isósceles coincidem, temos que

$$\overline{LQ} = \overline{BQ}.$$

6. Usaremos a notação $A > B$ para indicar que existe uma linha de A para B e a notação $A \gg B$ se existir um caminho de A para B através da rede. Se $A_1 > A_2 > \cdots > A_k > A_1$, dizemos que $(A_1, \ldots, A_k)$ é um $ciclo$. Dada uma estação A, definimos o $bairro$ de A como o conjunto das estações B tais que $A \gg B \gg A$ (incluindo A). Note-se que se B está no bairro de A, então A está no bairro de B.

   Consideremos uma rede dispersa e não corrigível, com n estações. Como a rede é dispersa, tem mais do que um bairro. Sejam $A > B$ estações em bairros diferentes. Se C está no bairro de A e D está no bairro de B, então $C > D$, pois em caso contrário teríamos $A > B \gg D > C \gg A$, pelo que A e B estariam no mesmo bairro.

Suponhamos que a rede tem 3 estações A, B e C em bairros diferentes, com $A > B$. Então $C > A > B$, $A > C > B$ ou $A > B > C$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que é o último caso. Então $A > C$, pois em caso contrário, seria $A > B > C > A$, logo A, B e C estariam no mesmo bairro. Assim, existem estações A e C tais que, para qualquer estação B de outro bairro, se tem $A > B > C$. Então, invertendo as ligações de e para B, obtém-se uma rede tal que $A > C > B > A$ e, para qualquer outra estação D se tem $A \gg D \gg C > B > A$. Deste modo, a rede seria corrigível.

Concluímos assim que uma rede dispersa e não corrigível tem exatamente dois bairros. Suponhamos que um desses bairros tem 4 ou mais estações. Como, dadas duas estações A e B nesse bairro se tem $A \gg B \gg A$, então existe, nesse bairro, um ciclo $(A_1, \cdots, A_k)$. Suponhamos que o ciclo passa por todas as estações do bairro. Então, se $A_{k-1} > A_1$, $(A_1, \ldots, A_{k-1})$ é um ciclo; se $A_1 > A_{k-1}$, (A_1, A_{k-1}, A_k) é um ciclo. Portanto, em qualquer caso, existe nesse bairro um ciclo que não passa por todas as estações do bairro.

Dado um ciclo $(A_1, \cdots, A_k)$ num bairro que não passe por todas as estações, se existe uma estação B nesse bairro tal que $A_i > B > A_j$, então existe um i tal que $A_i > B > A_{i+1}$ (ou $A_k > B > A_1$). Assim, $(A_1, \ldots, A_i, B, A_{i+1}, \ldots, A_k)$ é um ciclo com mais uma estação. Se não existir tal estação, então existem estações B e C nesse bairro tal que $A_i > B > C > A_j$ para quaisquer $1 \leq i, j \leq k$. Assim, $(A_1, \ldots, A_{k-1}, B, C)$ é um ciclo com mais uma estação.

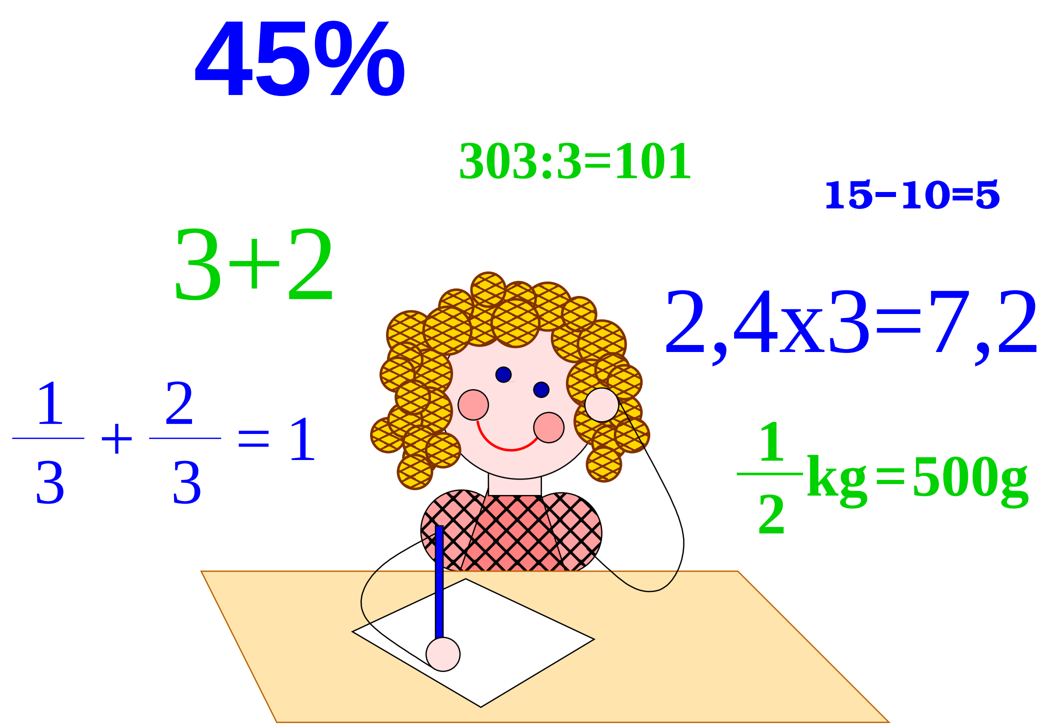
Concluímos assim que podemos juntar uma estação a cada ciclo, pelo que existe um ciclo $(A_1, \ldots, A_k)$ que passa por todas as estações de um bairro, exceto uma, digamos B. Suponhamos, sem perda de generalidade, que para cada estação C do outro bairro, se tem $B > C$ e seja i tal que $A_{i+1} > B > A_i$ (ou $A_1 > B > A_k$). Invertendo as ligações de e para B, obtém-se uma rede tal que $B > A_{i+1} > \cdots > A_i > C > B$, logo na nova rede só há um bairro, ou seja, a rede é corrigível.

Deste modo, se uma rede é dispersa e não corrigível, tem exatamente dois bairros, cada um com menos de 4 estações, isto é, cada um com 1 ou 3 estações. Logo $n = 2$, $n = 4$ ou $n = 6$. Para cada um destes valores, existe uma rede dispersa e não corrigível: para $n = 2$, consideremos a rede $\{A, B\}$ com $A > B$; para $n = 4$ consideremos a rede $\{A_1, A_2, A_3, B\}$ com o ciclo (A_1, A_2, A_3) e cada $A_i > B$; para $n = 6$ consideremos a rede $\{A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3\}$ com os ciclos (A_1, A_2, A_3), (B_1, B_2, B_3) e cada $A_i > B_j$.

OLIMPÍADAS
PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA

Mini-Olimpíadas

Ano Letivo 2019/2020
1º Ciclo do Ensino Básico
3º ano



Tem atenção: **Duração: 1 hora**

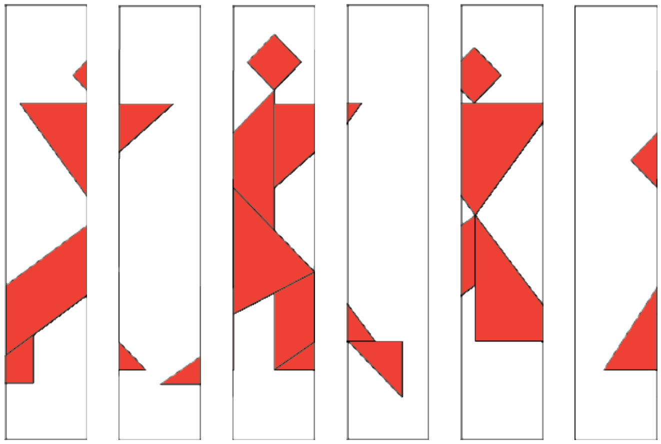
- Lê todas as perguntas com muito cuidado.
- Não apagues as contas, os esquemas e os desenhos que utilizares nas tuas respostas.
- Se acabares antes do tempo previsto, deverás aproveitar para rever a tua prova.

Bom trabalho e diverte-te!

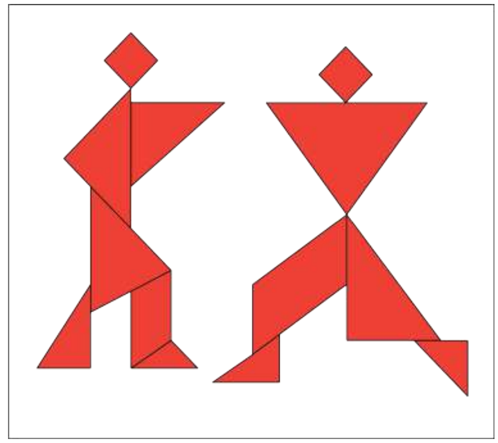
Nome do aluno: ____

Pontuação:______________

1. A Mati construiu este puzzle com as peças **A**, **B**, **C**, **D**, **E** e **F** abaixo indicadas.



A **B** **C** **D** **E** **F**



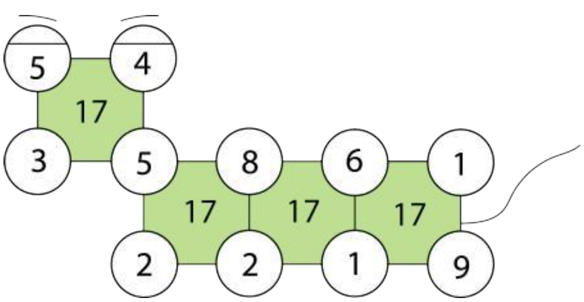
F ___ ___ ___ ___ ___

Coloca as peças pela ordem correta de modo a formar um puzzle igual ao da Mati.
A primeira peça já está colocada.

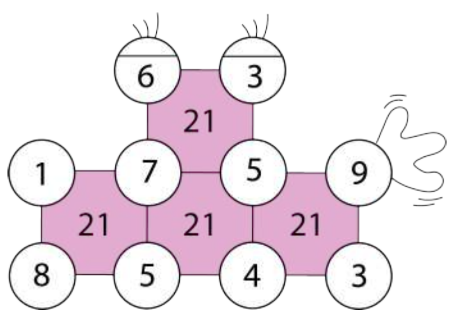
2. Os Quadradóides N tomam formas muito estranhas mas seguem sempre a regra:

A soma dos vértices de cada um dos seus quadrados dá sempre o mesmo número N.

É o que acontece com o Quadradóide 17 e com o Quadradóide 21.

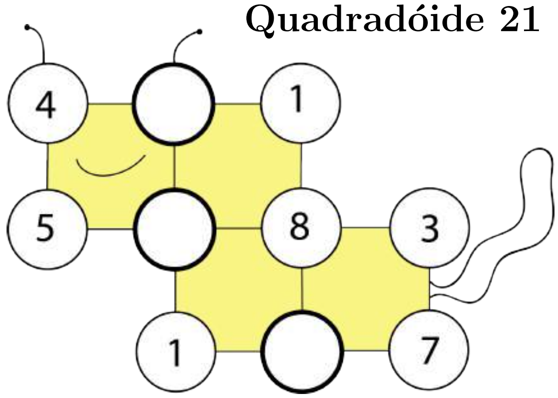


Quadradóide 17



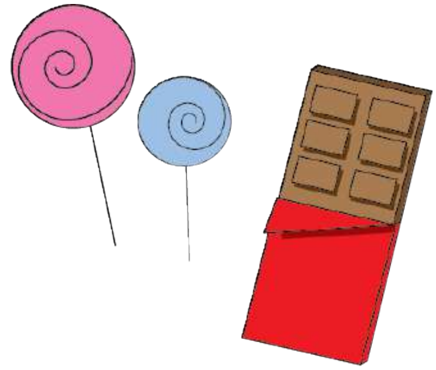
Quadradóide 21

Completa o Quadradóide 20.



Quadradóide 20

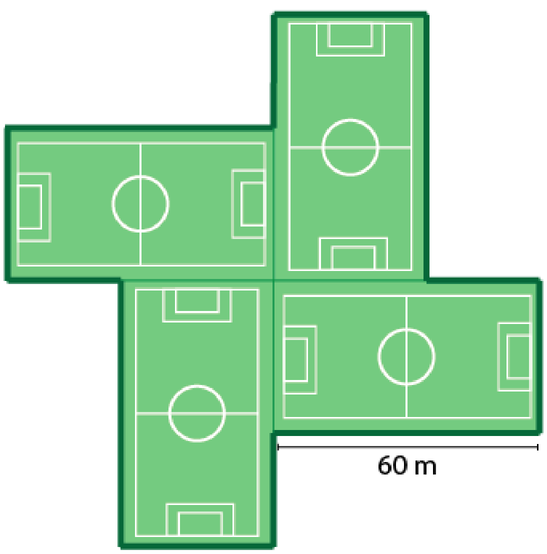
3. Na festa da turma do Jonas há chocolates e chupa-chupas.



- A turma tem 20 alunos.
- Dez gostam de chocolates.
- Doze gostam de chupa-chupas.
- Todos gostam de uma destas guloseimas.

Quantos alunos é que gostam das duas guloseimas?

Resposta:____

4. 

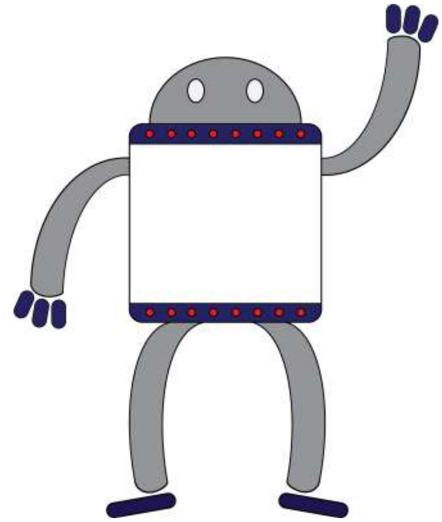
O recreio da escola da Zé está dividido em quatro campos de jogos retangulares iguais, como se indica na figura. O lado maior de cada campo mede 60 metros.

Qual é o comprimento do muro que está à volta do recreio?

Resposta:____

5. O Jonas e o irmão mais novo construíram um robô com peças de Lego. Todos os dias o Jonas colocava três peças e o irmão colocava duas. Quando terminaram, o robô tinha no total 100 peças.

   Quantas peças colocou cada um?

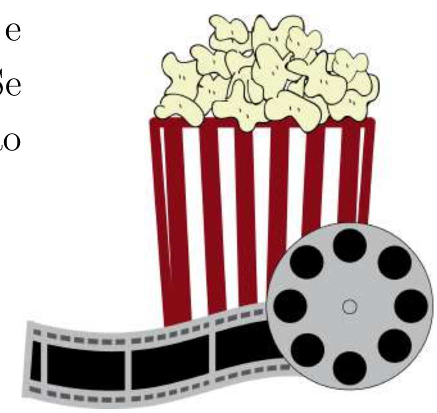


Resposta:____

6. Quatro amigos vão ao cinema duas vezes por mês e comem sempre um pacote de pipocas cada um. Se não comessem pipocas, os quatro amigos podiam ir ao cinema três vezes por mês.

   Sabendo que cada pacote de pipocas custa 3 €,

   descobre o preço de cada bilhete de cinema.



Resposta:____

Mini-Olimpíadas

Ano Letivo 2019/2020
1º Ciclo do Ensino Básico
3º ano

Critérios de Classificação

Cotações

1- 10 pontos
2- 10 pontos
3- 10 pontos
4- 10 pontos
5- 10 pontos
6- 10 pontos

Total: 60 pontos

Critérios de Classificação

- **Se surgirem resoluções diferentes das apresentadas, a classificação ficará ao critério do professor corretor.**
- **Devem ser valorizados os raciocínios corretos (atribuindo classificações parciais) em detrimento dos cálculos efetuados.**

Exercício 1

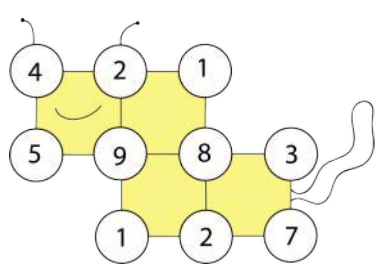
Solução: F C B A E D **10 pontos**

Caso a resposta não seja a correta devem ser atribuídas as cotações parciais (não acumuláveis) seguintes.

Coloca quatro peças na posição correta	**7 pontos**
Coloca três peças na posição correta	**5 pontos**
Coloca duas peças na posição correta	**3 pontos**
Coloca uma peça na posição correta	**1 ponto**

Exercício 2

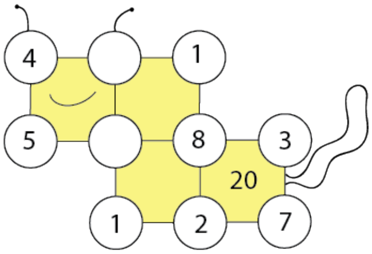
Solução:



10 pontos

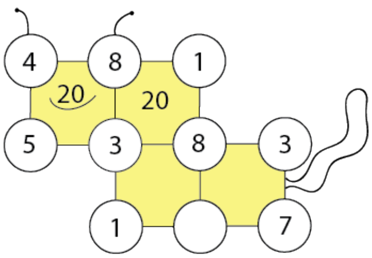
Caso a resposta não seja a correta, devem ser atribuídas as cotações parciais (não acumuláveis) seguintes.

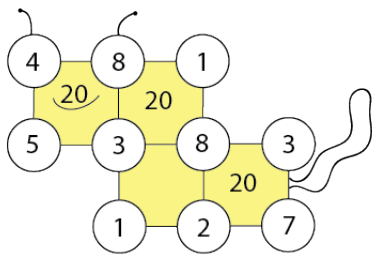
Preenche um ou mais círculos obtendo apenas um quadrado que some 20. Por exemplo



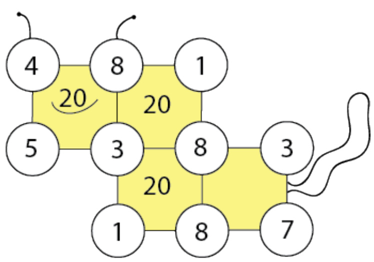
4 pontos

Preenche dois ou mais círculos obtendo dois ou três quadrados que somem 20. Por exemplo





ou



7 pontos

Exercício 3

Solução: Há dois alunos que gostam das duas guloseimas. **10 pontos**

Caso a resposta não seja a correta deve atribuir-se cotação parcial. Para esse efeito, indicam-se, em seguida, as cotações de três propostas de resolução.

Proposta de resolução 1:

Efetua o cálculo

$10 + 12 = 22$ **5 pontos**

Efetua o cálculo

$22–20 = 2$ **5 pontos**

Proposta de resolução 2:

Efetua o cálculo

$20 - 10 = 10$ **5 pontos**

Efetua o cálculo

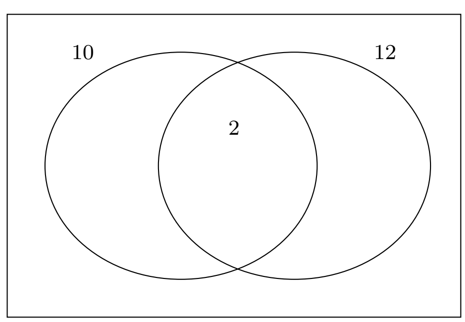
$12 - 10 = 2$ **5 pontos**

Proposta de resolução 3:

Apresenta a tabela ou o diagrama de Venn seguintes e conclui que há dois alunos que gostam das duas guloseimas **10 pontos**

aluno 1	chocolate		
aluno 2	chocolate		
aluno 3	chocolate		
aluno 4	chocolate		
aluno 5	chocolate		
aluno 6	chocolate		
aluno 7	chocolate		
aluno 8	chocolate		
aluno 9	**chocolate**	**chupa-chupa**	2
aluno 10	**chocolate**	**chupa-chupa**	
aluno 11		chupa-chupa	
aluno 12		chupa-chupa	
aluno 13		chupa-chupa	
aluno 14		chupa-chupa	
aluno 15		chupa-chupa	
aluno 16		chupa-chupa	
aluno 17		chupa-chupa	
aluno 18		chupa-chupa	
aluno 19		chupa-chupa	
aluno 20		chupa-chupa	

ou



Pode atribuir-se ainda a cotação parcial (não acumulável com as anteriores) seguinte.

Representa as crianças, colocando pelo menos uma guloseima no número correto de crianças.

3 pontos

Exercício 4

Solução: O muro do recreio mede 480 m. **10 pontos**

Caso a resposta não seja a correta deve atribuir-se cotação parcial. Para esse efeito, indicam-se, em seguida, as cotações parciais de duas propostas de resolução.

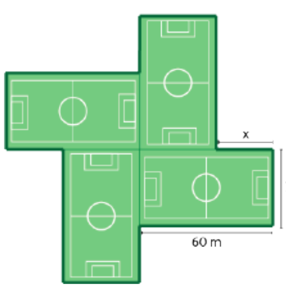
Proposta de resolução 1:

Efetua o cálculo

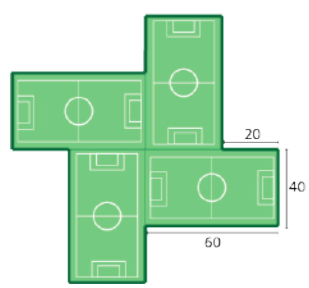
$8 \times 60 = 480$ m **10 pontos**

Proposta de resolução 2:

Atribui valores aos comprimentos x e y satisfazendo a condição $x + y = 60$



por exemplo



5 pontos

Calcula o comprimento do muro usando os valores x e y atribuídos

$4 \times 60 + 4 \times x + 4 \times y = 480$ m, por exemplo, $4 \times 60 + 4 \times 20 + 4 \times 40 = 480$ m

5 pontos

Devem ser cotados os cálculos efetuados utilizando valores errados calculados anteriormente.

Exercício 5

Solução: O Jonas colocou 60 peças e o irmão colocou 40. **10 pontos**

Caso a resposta não seja a correta deve atribuir-se cotação parcial. Para esse efeito, indicam-se, em seguida, as cotações parciais de duas propostas de resolução.

Proposta de resolução 1:

Efetua o cálculo

$100 : 5 = 20$ **6 pontos**

Efetua o cálculo

$20 \times 3 = 60$ **2 pontos**

Efetua o cálculo

$20 \times 2 = 40$ ou $100 - 60 = 40$ **2 pontos**

Proposta de resolução 2:

Apresenta uma tabela, por exemplo,

Dias	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Jonas	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
Irmão	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
Total de peças	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100

e conclui que demoraram 20 dias **6 pontos**

Indica o número de peças colocadas pelo Jonas **2 pontos**

Indica o número de peças colocadas pelo irmão **2 pontos**

Caso a resposta não seja a correta deve atribuir-se a cotação parcial (não acumulável com as anteriores) seguinte.

Apresenta parte da tabela anterior ou efetua cálculos que indiquem que interpretou corretamente uma parte do enunciado, por exemplo,

$3 \times 5 = 15$, $2 \times 5 = 10$ e $15 + 10 = 25$ **3 pontos**

Exercício 6

Solução: Cada bilhete de cinema custa 6€. **10 pontos**

Caso a resposta não seja a correta deve atribuir-se cotação parcial. Para esse efeito, indicam-se, em seguida, as cotações de duas propostas de resolução.

Proposta de resolução 1:

Calcula o dinheiro gasto em pipocas

$4 \times 3 = 12$€ e $2 \times 12 = 24$€

ou $8 \times 3 = 24$€ **5 pontos**

Calcula o preço de cada bilhete

$24 : 4 = 6$€ **5 pontos**

Proposta de resolução 2:

Calcula o dinheiro que cada um gasta em pipocas

$2 \times 3 = 6$€ **3 pontos**

Conclui que cada bilhete custa 6€ **7 pontos**

Pode atribuir-se ainda a cotação parcial (não acumulável com as anteriores) seguinte.

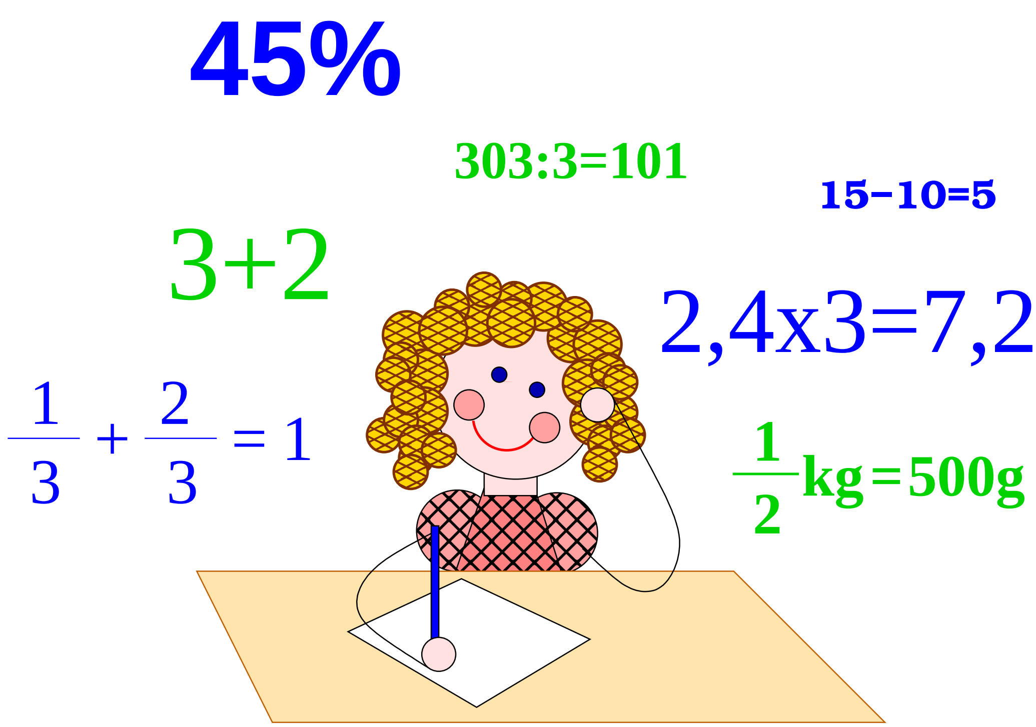
Calcula o dinheiro gasto em pipocas numa ida ao cinema

$4 \times 3 = 12$€ em pipocas. **3 pontos**

Devem ser cotados os cálculos efetuados utilizando valores errados calculados anteriormente.

Mini-Olimpíadas

Ano Letivo 2019/2020
1º Ciclo do Ensino Básico
4º ano



Tem atenção: **Duração: 1 hora**

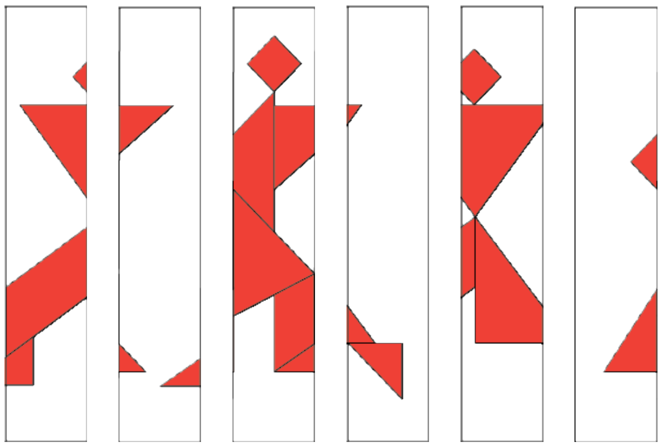
- Lê todas as perguntas com muito cuidado.
- Não apagues as contas, os esquemas e os desenhos que utilizares nas tuas respostas.
- Se acabares antes do tempo previsto, deverás aproveitar para rever a tua prova.

Bom trabalho e diverte-te!

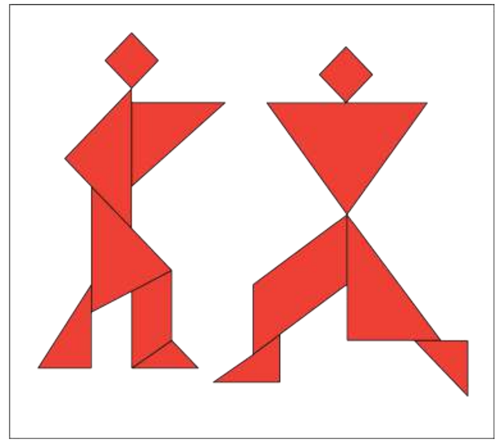
Nome do aluno: ____

Pontuação:_______________

1. A Mati construiu este puzzle com as peças **A**, **B**, **C**, **D**, **E** e **F** abaixo indicadas.



A **B** **C** **D** **E** **F**



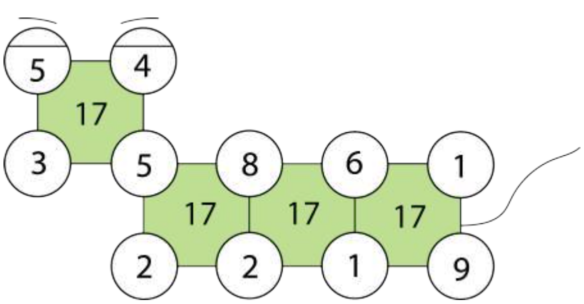
__ __ __ __ __ __

Coloca as peças pela ordem correta de modo a formar um puzzle igual ao da Mati.

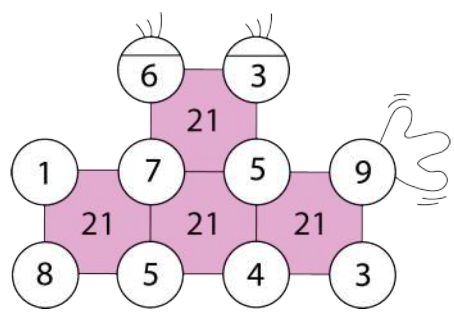
2. Os Quadradóides N tomam formas muito estranhas mas seguem sempre a regra:

A soma dos vértices de cada um dos seus quadrados dá sempre o mesmo número N.

É o que acontece com o Quadradóide 17 e com o Quadradóide 21.

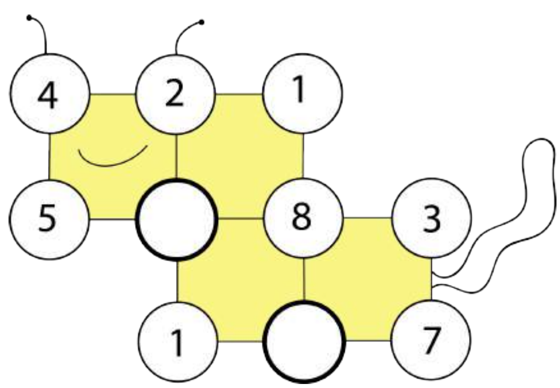


Quadradóide 17



Quadradóide 21

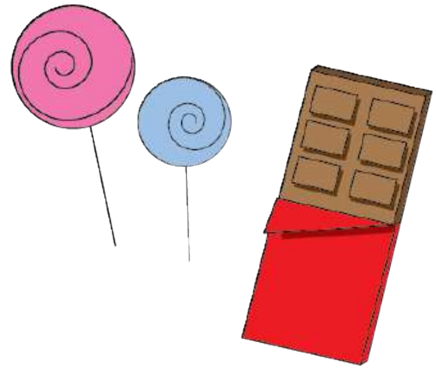
Completa este quadradóide e descobre o seu número.



Quadradóide __

3. Na festa da turma do Jonas há chocolates, gomas e chupa-chupas.

- A turma tem 20 alunos e todos gostam de chocolates.
- Dez alunos gostam de gomas.
- Sete gostam de chupa-chupas.
- Dos alunos que gostam de chupa-chupas, só dois gostam de gomas.



Quantos alunos é que só gostam de chocolates?

Resposta:____

4. 

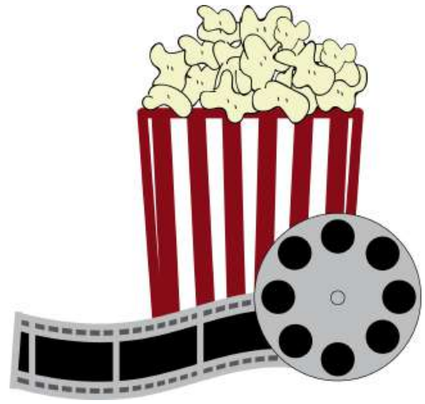
O recreio da escola da Zé está dividido em quatro campos de jogos retangulares iguais, como se indica na figura. O muro que está à volta do recreio tem 480 metros de comprimento.

Quanto mede o lado maior de cada campo?

Resposta:____

5. Quatro amigos vão ao cinema duas vezes por mês e comem sempre um pacote de pipocas cada um. Se não comessem pipocas, os quatro amigos podiam ir ao cinema três vezes por mês.

   Sabendo que cada pacote de pipocas custa 3,50 €, descobre o preço de cada bilhete de cinema.



Resposta:____

6. No clube de ténis, à segunda-feira, treinam três turmas como indica a tabela.

Hora	Turma	Nº de alunos
16:00–17:00	Iniciados	9
17:00–18:00	Juvenis	6
18:00–19:00	Júniores	5

- As bolas de ténis do clube estão guardadas num saco.
- Em cada aula, as bolas do saco são distribuídas igualmente por todos os alunos da turma e nunca sobram bolas.
- O número de bolas é inferior a 150.

Quantas bolas há no saco?

Resposta:____

Mini-Olimpíadas

Ano Letivo 2019/2020
1º Ciclo do Ensino Básico
4º ano

Critérios de Classificação

Cotações

1- 10 pontos
2- 10 pontos
3- 10 pontos
4- 10 pontos
5- 10 pontos
6- 10 pontos

Total: 60 pontos

Critérios de Classificação

- **Se surgirem resoluções diferentes das apresentadas, a classificação ficará ao critério do professor corretor.**
- **Devem ser valorizados os raciocínios corretos (atribuindo classificações parciais) em detrimento dos cálculos efetuados.**

Exercício 1

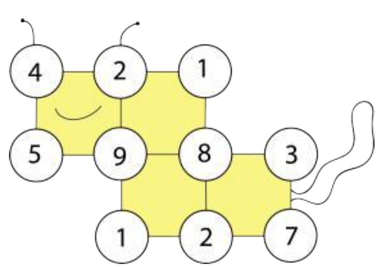
Solução: **F** **C** **B** **A** **E** **D** — **10 pontos**

Caso a resposta não seja a correta devem ser atribuídas as cotações parciais (não acumuláveis) seguintes.

Coloca cinco peças na posição correta	**7 pontos**
Coloca quatro peças na posição correta	**5 pontos**
Coloca três peças na posição correta	**3 pontos**
Coloca duas peças na posição correta	**2 pontos**
Coloca uma peça na posição correta	**1 ponto**

Exercício 2

Solução:

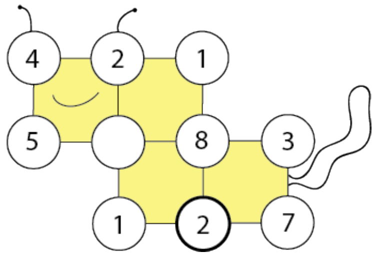


Quadradóide 20

10 pontos

Caso a resposta não seja a correta, devem ser atribuídas as cotações parciais (não acumuláveis) seguintes.

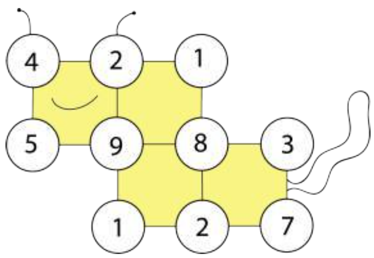
Preenche apenas o círculo indicado a bold corretamente não indicando o número do quadradóide



Quadradóide __

3 pontos

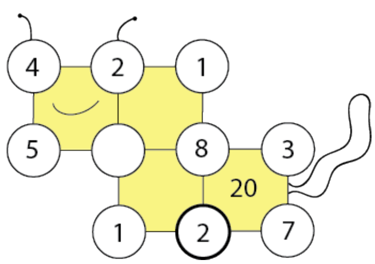
Preenche os dois círculos corretamente não indicando o número do quadradóide



Quadradóide __

8 pontos

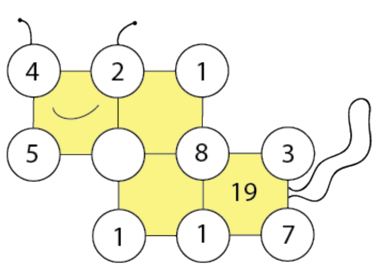
Preenche o círculo indicado a bold corretamente indicando o número do quadradóide



Quadradóide <u>20</u>

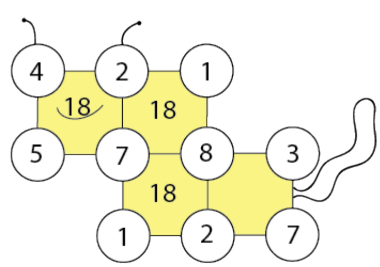
4 pontos

Atribui um valor errado ao número do quadradóide e preenche um ou mais círculos de acordo com o valor atribuído. Por exemplo



Quadradóide <u>19</u>

ou



Quadradóide <u>18</u>

3 pontos

Exercício 3

Solução: Há cinco alunos que só gostam de chocolates. **10 pontos**

Caso a resposta não seja a correta deve atribuir-se cotação parcial. Para esse efeito, indicam-se, em seguida, as cotações de três propostas de resolução.

Proposta de resolução 1:

Efetua o cálculo

$20 - 10 = 10$ ou $20 - 7 = 13$ **3 pontos**

Efetua o cálculo

$7 - 2 = 5$ ou $10 - 2 = 8$ **3 pontos**

Efetua o cálculo

$10 - 5 = 5$ ou $13 - 8 = 5$ **4 pontos**

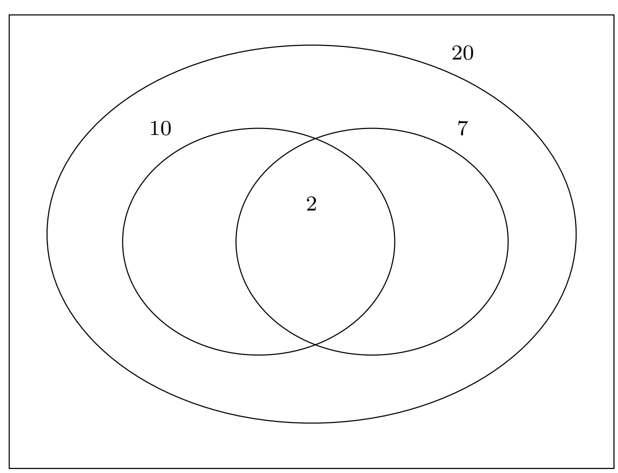
Proposta de resolução 2:

Apresenta a tabela ou o diagrama de Venn seguintes e conclui que há cinco alunos que só gostam de chocolates **10 pontos**

aluno 1	chocolate	gomas	
aluno 2	chocolate	gomas	
aluno 3	chocolate	gomas	
aluno 4	chocolate	gomas	
aluno 5	chocolate	gomas	
aluno 6	chocolate	gomas	
aluno 7	chocolate	gomas	
aluno 8	chocolate	gomas	
aluno 9	chocolate	gomas	chupa-chupa
aluno 10	chocolate	gomas	chupa-chupa
aluno 11	chocolate		chupa-chupa
aluno 12	chocolate		chupa-chupa
aluno 13	chocolate		chupa-chupa
aluno 14	chocolate		chupa-chupa
aluno 15	chocolate		chupa-chupa
aluno 16	**chocolate**		
aluno 17	**chocolate**		
aluno 18	**chocolate**		
aluno 19	**chocolate**		
aluno 20	**chocolate**		

5

ou



Proposta de resolução 3:

Efetua o cálculo

$10 + 7 - 2 = 15$ **6 pontos**

Efetua o cálculo

$20 - 15 = 5$ **4 pontos**

Podem atribuir-se ainda as cotações parciais (não acumuláveis) seguintes.

Representa as crianças, colocando pelo menos uma das guloseimas no número correto de crianças **2 pontos**

Representa as crianças, colocando pelo menos duas das guloseimas no número correto de crianças **3 pontos**

Exercício 4

Solução: O lado maior do campo mede 60 m. **10 pontos**

Caso a resposta não seja a correta deve atribuir-se cotação parcial. Para esse efeito, indicam-se, em seguida, as cotações parciais de duas propostas de resolução.

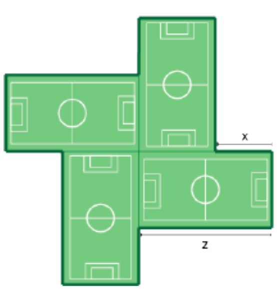
Proposta de resolução 1:

Efetua o cálculo

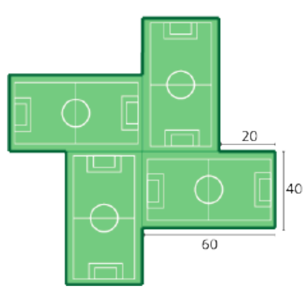
$480 : 8 = 60$ m **10 pontos**

Proposta de resolução 2:

Atribui valores aos comprimentos x, y e z satisfazendo a condição $x + y = z$



por exemplo



5 pontos

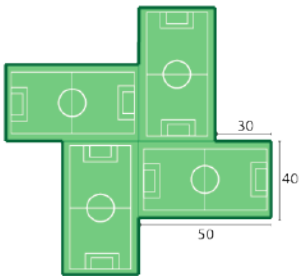
Verifica que os valores atribuídos satisfazem as condições do enunciado efetuando o cálculo

$4 \times (x + y + z) = 480$ m, por exemplo, $4 \times 60 + 4 \times 20 + 4 \times 40 = 480$ m

5 pontos

Pode atribuir-se ainda a cotação parcial (não acumulável com as anteriores) seguinte.

Atribui valores aos comprimentos x, y e z que não satisfazem a condição $x + y = z$, mas verifica que satisfazem $4 \times (x + y + z) = 480$ m, por exemplo,



$4 \times 30 + 4 \times 40 + 4 \times 50 = 480$ m **5 pontos**

Devem ser cotados os cálculos efetuados utilizando valores errados calculados anteriormente.

Exercício 5

Solução: Cada bilhete de cinema custa 7€. **10 pontos**

Caso a resposta não seja a correta deve atribuir-se cotação parcial. Para esse efeito, indicam-se, em seguida, as cotações de duas propostas de resolução.

Proposta de resolução 1:

Calcula o dinheiro gasto em pipocas

$4 \times 3,5 = 14$€ e $2 \times 14 = 28$€

ou $8 \times 3,5 = 28$€ **5 pontos**

Calcula o preço de cada bilhete

$28 : 4 = 7$€ **5 pontos**

Proposta de resolução 2:

Calcula o dinheiro que cada um gasta em pipocas

$2 \times 3,5 = 7$€ **3 pontos**

Conclui que cada bilhete custa 7€ **7 pontos**

Pode atribuir-se ainda a cotação parcial (não acumulável com as anteriores) seguinte.

Calcula o dinheiro gasto em pipocas numa ida ao cinema

$4 \times 3,5 = 14$€ em pipocas. **3 pontos**

Devem ser cotados os cálculos efetuados utilizando valores errados calculados anteriormente.

Exercício 6

Solução: O saco tem 90 bolas.

Caso a resposta não seja a correta deve atribuir-se cotação parcial. Para esse efeito, indicam-se, em seguida, as cotações de três propostas de resolução.

Proposta de resolução 1:

Apresenta os múltiplos de 9 inferiores a 150

9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90, 99, 108, 117, 126, 135, 144 **4 pontos**

Indica, dos múltiplos de 9 inferiores a 150, os que são múltiplos de 5

$45, 90, 135$ **3 pontos**

Verifica que 90 é múltiplo de 6 **3 pontos**

Proposta de resolução 2:

Apresenta os números inferiores a 150 que são múltiplos de 9 e de 5

$45 = 9 \times 5$, $90 = 2 \times 9 \times 5$ e $135 = 3 \times 9 \times 5$ **7 pontos**

Verifica que 90 é múltiplo de 6 **3 pontos**

Proposta de resolução 3:

Observa que o número de bolas do saco é múltiplo de 9, de 5 e de 6 **2 pontos**

Calcula o menor número nessas condições

$3 \times 3 \times 2 \times 5 = 90$ **8 pontos**

Podem atribuir-se ainda as cotações parciais (não acumuláveis) seguintes.

Apresenta uma tabela com os múltiplos de 5 ou de 6 inferiores a 150 **4 pontos**

Apresenta apenas alguns múltiplos de 5, 6 ou 9 inferiores a 150 **2 pontos**

Efetua o cálculo

$9 \times 6 \times 5 = 270$ **3 pontos**

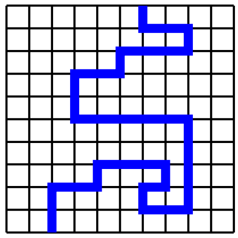
Devem ser cotados os cálculos efetuados utilizando valores errados calculados anteriormente.

XXXVIII OPM - 6.11.2019 - Pré-Olimpíadas - 5º ano

Na questão 1 escolhe, em cada alínea, a opção correta.
Justifica convenientemente as tuas respostas às questões 2 e 3.
Não é permitido o uso de calculadoras.

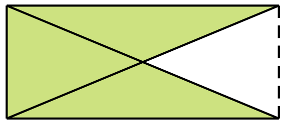
Duração: 2 horas
Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3: 10 pontos cada

1. (a) A Laura recortou um quadrado de lado 10, como o representado na figura, ao longo da linha assinalada. Qual é a diferença entre os perímetros das duas figuras que ela obteve?



A) 0 B) 4 C) 8 D) 34 E) 52

(b) De seguida, a Laura pegou num retângulo de lados 5 dm e 12 dm e recortou um triângulo, tendo obtido a bandeirola da figura. Sabendo que a diagonal do retângulo mede 13 dm, qual é o perímetro da bandeirola, em decímetros?



A) 29 B) 34 C) 42 D) 55 E) 60

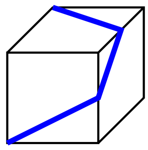
(c) A Laura escreveu as cinco frações seguintes. Qual dessas frações representa o maior número?

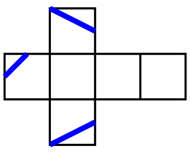
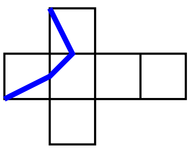
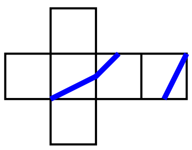
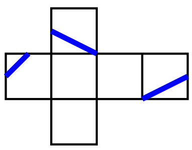
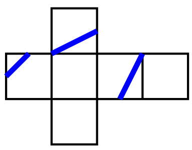
A) $\dfrac{2016}{2015}$ B) $\dfrac{2017}{2016}$ C) $\dfrac{2018}{2017}$ D) $\dfrac{2019}{2018}$ E) $\dfrac{2020}{2019}$

(d) Qual é o maior número que é possível escrever utilizando cada um dos números 1, 2 e 3 uma única vez e duas operações elementares $(+, -, \times, :)$? Por exemplo, o número 4 pode ser escrito como $(3-1)\times 2$.

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

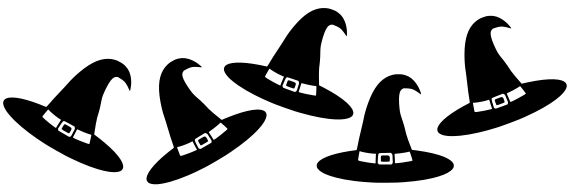
(e) A Laura desenhou três linhas num cubo, como na figura. Qual das seguintes opções corresponde à planificação do cubo?



A)  B)  C)  D)  E) 

2. Na turma do João há 28 alunos, que têm todos 9, 10 ou 11 anos. Na turma, $\dfrac{3}{4}$ dos alunos têm menos de 11 anos e $\dfrac{5}{7}$ dos alunos têm mais de 9 anos. Quantos alunos têm 10 anos?

3. Um grupo de alunos reuniu-se com o professor de artes numa sala para fazer os chapéus para a festa do dia das bruxas da escola. Na sala já estavam 23 chapéus feitos e cada aluno fez mais 2 chapéus. De seguida, o professor dividiu igualmente todos os chapéus pelos alunos e por si próprio. Quantos alunos poderiam estar na sala? Indica todas as possibilidades.



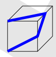
OLIMPÍADAS
PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA

www.olimpiadas.spm.pt

XXXVIII OPM - 6.11.2019 - Pré-Olimpíadas - 5º ano

Sugestões para a resolução dos problemas

Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3: 10 pontos cada

1. (a) Opção B. (*A diferença entre os perímetros das figuras é* $(4+8)-(6+2)=4$)
   (b) Opção C. (*As diagonais intersetam-se nos pontos médios. O perímetro é* $12+5+12+13/2+13/2$)
   (c) Opção A. (*Os números são* $1+\dfrac{1}{2015},\dots,1+\dfrac{1}{2019}$ *sendo o primeiro o maior*)
   (d) Opção D. ($9=(2+1)\times 3$ *e os maiores* n^{os} *possíveis obtêm-se multiplicando* n^{os} *maiores que* 1)
   (e) Opção D. (A, C *e* E *dão origem a linhas separadas;* B *dá origem à linha* )

2. A turma tem $28\times\dfrac{3}{4}=21$ alunos com menos de 11 anos, logo tem $28-21=7$ alunos com 11 anos.

   Por outro lado, a turma tem $28\times\dfrac{5}{7}=20$ alunos com mais de 9 anos (ou seja, com 10 e 11 anos).

   Portanto, a turma tem $20-7=13$ alunos com 10 anos.

3. Após distribuirmos 2 chapéus por cada aluno e pelo professor, sobram 21 chapéus. Como estes 21 chapéus podem ser divididos pelas pessoas presentes, então o número de pessoas presentes é um divisor de 21, maior do que 1.

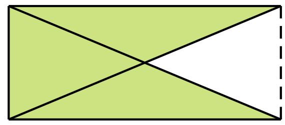
   Os divisores positivos de 21 são 1, 3, 7 e 21, logo na sala podiam estar 3, 7 ou 21 pessoas. Assim, podiam estar na sala 2, 6 ou 20 alunos.

XXXVIII OPM - 1ª Eliminatória - 6.11.2019 - Categoria Júnior - 6º/7º anos

Duração: 2 horas
Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3, 4: 8 pontos cada

Na questão 1 escolhe, em cada alínea, a opção correta.
Justifica convenientemente as tuas respostas às questões 2, 3 e 4.
Não é permitido o uso de calculadoras.

1. (a) O João pegou num retângulo de lados 5 dm e 12 dm e recortou um triângulo, tendo obtido a bandeirola da figura. Sabendo que a diagonal do retângulo mede 13 dm, qual é o perímetro da bandeirola, em decímetros?

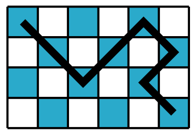


A) 29 B) 34 C) 42 D) 55 E) 60

(b) O João gosta muito de múltiplos de 5 e, num certo dia, contou todos os múltiplos de 5 que existem entre 1 e 2019. Qual foi o número que o João obteve?

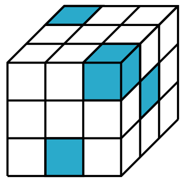
A) 125 B) 375 C) 376 D) 403 E) 404

(c) Usando um tabuleiro quadriculado de dimensão 4×6, o João inventou um jogo que consiste em traçar um caminho desde um canto colorido até ao canto oposto, só usando as casas coloridas e sem repetir casas, como indicado na figura. Quantos caminhos diferentes pode o João traçar?



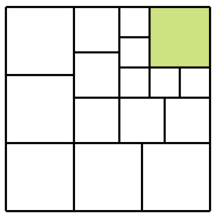
A) 6 B) 9 C) 12 D) 15 E) 18

(d) O João tem 23 cubos brancos e 4 coloridos, todos do mesmo tamanho, e decidiu usá-los para montar um cubo maior de dimensão $3 \times 3 \times 3$. Na figura está uma das montagem que o João fez, em que nenhuma face é totalmente branca. Qual é o número máximo de faces totalmente brancas que o João pode obter num destes cubos?

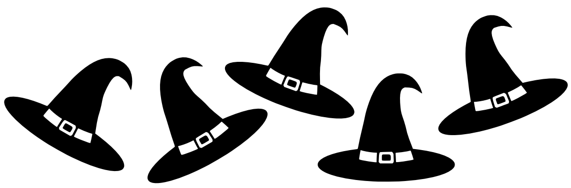


A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

2. Um quadrado com 27 cm de lado foi dividido em quadrados mais pequenos, como se representa na figura. Quanto mede a área do quadrado colorido?



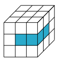
3. Um grupo de alunos reuniu-se com o professor de artes numa sala para fazer os chapéus para a festa do dia das bruxas da escola. Na sala já estavam 23 chapéus feitos e cada aluno fez mais 2 chapéus. De seguida, o professor dividiu igualmente todos os chapéus pelos alunos e por si próprio. Quantos alunos poderiam estar na sala? Indica todas as possibilidades.



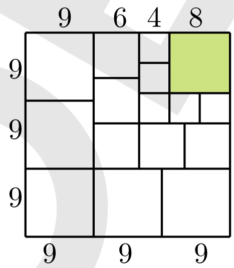
4. Num jogo de andebol entre o Avanca e o Boa-Hora havia um número igual de adeptos de cada equipa. No intervalo, 40% dos adeptos foram lanchar. De entre aqueles que lancharam, 75% eram adeptos do Avanca. Qual a percentagem de pessoas que assistiram ao jogo que são adeptos do Boa-Hora e não lancharam?

Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3, 4: 8 pontos cada

Sugestões para a resolução dos problemas

1. (a) Opção C. (*As diagonais intersetam-se nos pontos médios. O perímetro é* $12+5+12+13/2+13/2$)
   (b) Opção D. ($2019 = 5 \times 403 + 4$)
   (c) Opção B. (*Ao chegar à* 2^a *casa colorida há* 3 *opções e cada uma origina* 3 *caminhos diferentes*)
   (d) Opção D. (*A montagem* , *com o cubo interior colorido, tem* 4 *faces brancas*)

2. Na figura indicam-se as medidas dos comprimentos dos lados de cada um dos quadrados mais pequenos. A área do quadrado colorido mede $8 \times 8 = 64$ cm^2.



3. Após distribuirmos 2 chapéus por cada aluno e pelo professor, sobram 21 chapéus. Como estes 21 chapéus podem ser divididos pelas pessoas presentes, então o número de pessoas presentes é um divisor de 21, maior do que 1.

   Os divisores positivos de 21 são 1, 3, 7 e 21, logo na sala podiam estar 3, 7 ou 21 pessoas. Assim, podiam estar na sala 2, 6 ou 20 alunos.

4. Como 75% dos 40% de adeptos que foram lanchar são do Avanca, podemos concluir que 30% dos adeptos foram lanchar e são do Avanca:

	Avanca	Boa-Hora
lanchou	30%	?
não lanchou	?	?

Como sabemos existir um número igual de adeptos de cada equipa, a soma das percentagens de cada coluna tem que ser 50%, e por outro lado, como sabemos que 40% dos adeptos foram lanchar, sabemos que a soma das percentagens da primeira linha tem que ser 40%, e a soma das percentagens da segunda linha tem que ser 60%. Esta informação é suficiente para completar a tabela acima:

	Avanca	Boa-Hora
lanchou	30%	10%
não lanchou	20%	40%

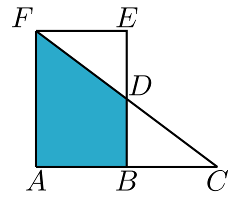
Conclui-se assim que 40% dos adeptos são do Boa-Hora e não lancharam.

XXXVIII OPM - 2ª Eliminatória - 8.1.2020 - Categoria Júnior - 6°/7° anos

Duração: 2 horas
Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3, 4: 8 pontos cada

Na questão 1 escolhe, em cada alínea, a opção correta.
Justifica convenientemente as tuas respostas às questões 2, 3 e 4.
Não é permitido o uso de calculadoras.

1. (a) Na figura ao lado está representado um retângulo $[ABEF]$ de lados $\overline{AB} = 6$ cm e $\overline{AF} = 8$ cm. Sabendo que $3/4$ da área do retângulo está pintada, quanto mede a área de $[ACDEF]$?



A) 12 cm^2 B) 24 cm^2 C) 48 cm^2 D) 60 cm^2 E) 72 cm^2

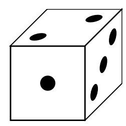
(b) O João registou numa folha, por ordem crescente, todos os números que se escrevem alternando dois algarismos diferentes, começando por $101, 121, \ldots$ e terminando em 2020. Quantos números registou o João?

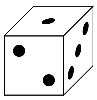
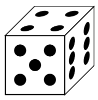
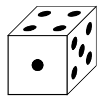
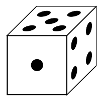
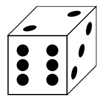
A) 18 B) 81 C) 90 D) 91 E) 100

(c) Numa loja de doces há bombons de quatro tipos de chocolate: branco, leite, negro e rubi. O João quer comprar três desses bombons. De quantas maneiras diferentes pode fazê-lo?

A) 20 B) 24 C) 32 D) 40 E) 64

(d) Na figura está representado um dado, em que o número total de pintas em cada par de faces opostas é 7. Qual das opções representa o dado da figura?

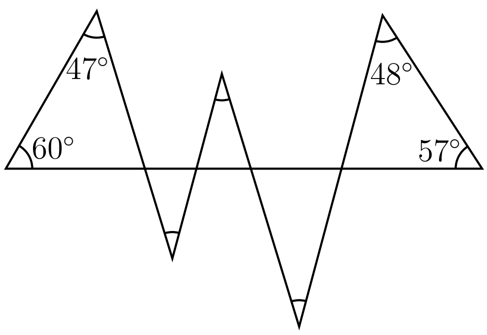


A)  B)  C)  D)  E) 

2. Na semana da Matemática, o Professor Pedro afixou na sala de aula uma tabela igual à da figura, e propôs o seguinte desafio: os alunos deveriam preencher cada um dos cinco quadrados vazios com um número. No final, a soma dos três números de cada coluna teria que ser igual à soma dos três números de cada linha e também igual à soma dos três números de cada diagonal. Sabendo que os alunos foram bem sucedidos no desafio, de que forma foi preenchida a tabela?

6	$\frac{4}{3}$	
	4	$\frac{16}{3}$

3. O Euclides foi visitar o Museu de Arte Matemática e reparou na obra representada na figura, a qual é constituída por sete segmentos de reta. Ficou intrigado com o facto de estarem assinalados sete ângulos, mas apenas quatro das suas amplitudes. Sabendo que as restantes três são iguais, descobre a sua medida.



4. O Ricardo e a Sara estão a ouvir as suas músicas preferidas. Cada uma dura exatamente um minuto e, quando a última música de cada um termina, volta ao início. Ao fim de 2 horas, o Ricardo e a Sara começam a ouvir ao mesmo tempo as músicas com que tinham iniciado. Qual é o número mínimo de músicas que, no total, o Ricardo e a Sara estão a ouvir?

OLIMPÍADAS
PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA

www.olimpiadas.spm.pt

XXXVIII OPM - 1ª Eliminatória - 8.1.2020 - Categoria Júnior - 6º/7º anos

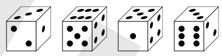
Sugestões para a resolução dos problemas

Questão 1: cada opção correta: 4 pontos cada opção errada: -1 ponto Questões 2, 3, 4: 8 pontos cada

1. (a) Opção D. ($\textit{Área } [ABEF] = 48\ cm^2$ *e* $\textit{área } [BCD] = 12\ cm^2$)

   (b) Opção D. (*O João registou* $9\times9 = 81$ *números com* 3 *algarismos e* 10 *números com* 4 *algarismos.*)

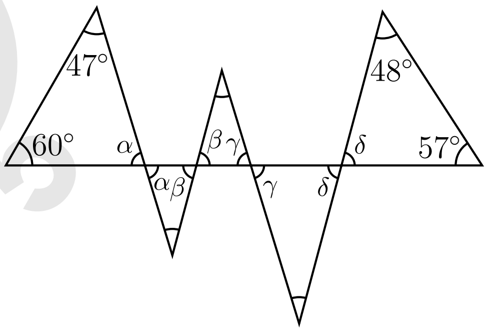
   (c) Opção A. (*Há* 4 *escolhas com* 1 *tipo,* $4 \times 3 = 12$ *escolhas com* 2 *tipos e* 4 *escolhas com* 3 *tipos.*)

   (d) Opção D. (*O dado da figura pode ser representado das seguintes formas:* )

2. A soma dos três números da primeira linha tem que ser igual à soma dos três números da coluna da direita, ou seja, $6+\frac{4}{3}$ tem que ser igual à soma de $\frac{16}{3}$ com o número que fica no canto inferior direito. Logo, esse número tem que ser 2. Somando os três números da diagonal já completa (6, 4 e 2), ficamos a saber que a soma dos números de cada linha, de cada coluna, e de cada diagonal é 12, o que permite preencher o resto da tabela da seguinte forma: os números em falta na primeira e segunda linhas são, respetivamente, $\frac{14}{3}$ e $\frac{8}{3}$ e os números em falta nas primeira e segunda colunas são, respetivamente, são $\frac{10}{3}$ e $\frac{20}{3}$. Ao lado está indicada a tabela completa.

6	$\frac{4}{3}$	$\frac{14}{3}$
$\frac{8}{3}$	4	$\frac{16}{3}$
$\frac{10}{3}$	$\frac{20}{3}$	2

3. Sejam α, β, γ e δ as amplitudes dos quatro ângulos indicados nos três triângulos de cima na figura. Como a amplitude de ângulos verticalmente opostos é igual, os ângulos indicados nos dois triângulos de baixo têm as mesmas amplitudes α, β, γ e δ.
   Como a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é $180°$, pode-se concluir que $\alpha = 180° - 60° - 47° = 73°$ e $\delta = 180° - 57° - 48° = 75°$.
   Uma vez que os três triângulos do meio têm um ângulo com a mesma amplitude, pode-se concluir que $\alpha + \beta = \beta + \gamma = \gamma + \delta$, donde $\alpha = \gamma = 73°$ e $\beta = \delta = 75°$. Logo a amplitude do ângulo que se pretende calcular é $180° - 73° - 75° = 32°$.



4. Sejam a o número de músicas do Ricardo e b o número de músicas da Sara. Ao fim de 120 minutos, as duas playlists repetem-se pela primeira vez em simultâneo, logo $120 = mmc(a, b)$. Se a soma $a + b$ for mínima então a e b não têm fatores em comum, isto é, são números primos entre si. Como $120 = 2^3 \times 3 \times 5$, há quatro casos possíveis:

   Caso 1: $a = 2^3 \times 3 \times 5$ e $b = 1$ (ou vice versa). Neste caso $a + b = 121$.

   Caso 2: $a = 2^3 \times 3$ e $b = 5$ (ou vice versa). Neste caso $a + b = 29$.

   Caso 3: $a = 2^3 \times 5$ e $b = 3$ (ou vice versa). Neste caso $a + b = 43$.

   Caso 4: $a = 2^3$ e $b = 3 \times 5$ (ou vice versa). Neste caso $a + b = 23$.

   Portanto, o número mínimo de músicas que o Ricardo e a Sara podem estar a ouvir é $a + b = 23$.

XXXVIII OPM - Final - 12.09.2020 - Categoria Júnior - 6°/7° anos

Duração: 3 horas
Questão 1: 16 pontos
Questões 2, 3 e 4: 8 pontos cada

Justifica convenientemente as tuas respostas e indica os principais cálculos.
Não é permitido o uso de calculadoras.

1. O Diogo gosta de jogos e desafios matemáticos. Estes são os desafios que ele pretende resolver hoje. Podes ajudá-lo a encontrar as soluções?

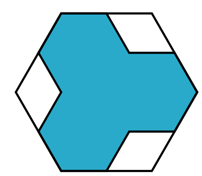
   (a) O Diogo tem cinco cartas diferentes, cada uma com uma das letras A, B, C, D ou E. Inicialmente as cartas estavam por ordem alfabética. No primeiro movimento, o Diogo passou a carta do meio para o início, ficando com a sequência CABDE e, no segundo movimento, passou a carta do final para o meio, ficando com CAEBD. De seguida repetiu sucessivamente os dois primeiros movimentos. No final de 2020 movimentos, qual foi a carta que ficou no ínicio?

   A) Letra A B) Letra B C) Letra C D) Letra D E) Letra E

   (b) Quantos números entre 1 e 2020 têm o produto dos seus algarismos igual a 12?

   A) 30 B) 34 C) 37 D) 40 E) 42

   (c) O hexágono regular da figura tem 36 cm^2 de área. O Diogo pintou de azul um polígono com todos os lados paralelos a lados do hexágono e usando como vértices trés vértices do hexágono, seis pontos médios de lados do hexágono e três pontos interiores do hexágono, como indicado na figura. Quanto mede a área desse polígono azul, em cm^2?

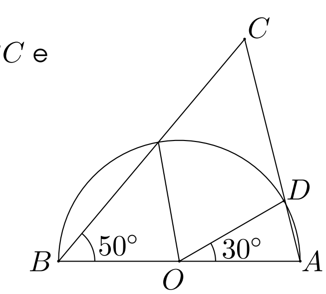
   

   A) 27 B) 28 C) 29 D) 30 E) 32

   (d) No elevador do prédio do Diogo cabem 68 caixas grandes ou 102 caixas pequenas. O Diogo colocou no elevador 42 caixas pequenas. Quantas caixas grandes ainda pode colocar?

   A) 34 B) 36 C) 40 D) 42 E) 60

2. Na figura ao lado, O é o centro da semicircunferência e os ângulos OBC e AOD medem $50°$ e $30°$, respetivamente. Determina $B\widehat{C}A$.



3. O Álvaro tem o hábito de dizer mentiras durante dois dias consecutivos e, de seguida, dizer a verdade durante cinco dias consecutivos, repetindo isto todas as semanas. O Bruno e o César têm o mesmo hábito, mas mentem em dias diferentes, de modo que em nenhum dia da semana há dois amigos a mentir.

   Numa terça-feira, o Álvaro afirmou: "Ontem menti" e na quarta-feira o Bruno também disse: "Ontem menti".

   Qual é o dia da semana em que todos os amigos dizem a verdade?

4. A Joana tem um telemóvel que, quando não é utilizado, demora 2 horas a carregar totalmente a sua bateria. Quando está a carregar e a ser usado em simultâneo, o telemóvel da Joana gasta 40% da energia que recebe.

   A Joana chegou a casa às 18h00 com a bateria do telemóvel completamente gasta e às 20h30 tem de sair novamente. Durante quanto tempo, no máximo, pode a Joana usar o telemóvel, garantindo que a bateria fica totalmente carregada quando sair de casa?

Duração: 3 horas
Questão 1: 16 pontos
Questões 2, 3 e 4: 8 pontos cada

Sugestões para a resolução dos problemas

1. (a) Analisem-se as sequências obtidas nos primeiros movimentos realizados

ABCDE $\longrightarrow$ CABDE $\longrightarrow$ CAEBD $\longrightarrow$ ECABD $\longrightarrow$ ECDAB $\longrightarrow$ DECAB $\longrightarrow$ DEBCA $\longrightarrow$ BDECA $\longrightarrow$ BDAEC $\longrightarrow$ ABDEC $\longrightarrow$ ABCDE

Ao fim de 10 movimentos, repete-se a sequência inicial. Como $2020 = 10 \times 202$, a carta que ficou no início após 2020 movimentos foi a carta com a letra A.

Opção correta: E)

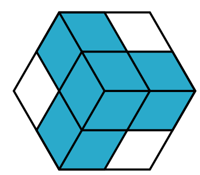
(b) O número não pode ter apenas um algarismo. Com dois algarismos, eles têm de ser $2, 6$ ou $3, 4$. Há quatro números com dois algarismos que verificam o pretendido ($26, 62, 34, 43$). Com três algarismos, estes têm de ser $1, 2, 6$ ou $1, 3, 4$ ou $2, 2, 3$. Nos dois primeiros casos há $3 \times 2 = 6$ números (três possibilidades para a escolha do primeiro algarismo e duas possibilidades para a escolha do segundo) e no terceiro caso apenas três números (escolher a posição do número 3). Portanto, com três algarismos há 15 números que verificam o pretendido.

Com quatro algarismos, estes têm de ser $1,\ 1,\ 2,\ 6$ ou $1,\ 1,\ 3,\ 4$ ou $1,\ 2,\ 2,\ 3$. Em todos estes casos o primeiro algarismo tem de ser 1, caso contrário o número seria maior que 2020. Nos dois primeiros casos, temos três possibilidades para o segundo algarismo e duas para o terceiro, logo há 6 números possíveis em cada. Com os algarismos $1, 2, 2, 3$, o primeiro será 1, e depois há três possibilidades para colocar o 3 (os restantes algarismos são 2). Portanto, com quatro algarismos há $6 + 6 + 3 = 15$ possibilidades.

No total há $15 + 15 + 4 = 34$ números que verificam o pretendido.

Opção correta: B)

(c) Dividindo o hexágono em losangos, do modo indicado na figura, a área de cada losango mede $\frac{36}{12} = 3$ cm^2. O polígono azul ocupa 9 losangos, logo a sua área mede $9 \times 3 = 27$ cm^2.
Opção correta: A)



(d) O elevador ainda poderia levar 60 caixas pequenas, ou seja a parte do elevador vazia é representada pela fração $\frac{60}{102}$. Sendo assim, queremos que esta parte seja ocupada por caixas grandes. Se x for o número de caixas grandes, a parte do elevador ocupada por x caixas grandes é $\frac{x}{68}$. Igualando estas duas expressões, tem-se

$$\frac{x}{68} = \frac{60}{102} \iff x = \frac{60 \times 68}{102} \iff x = 40$$

O Diogo ainda pode colocar 40 caixas grandes.

Opção correta: C)

2. Sendo O o centro da semicircunferência, observa-se que $[OD]$ e $[OA]$ são raios da mesma semicircunferência e por isso o triângulo $[AOD]$ é isósceles. Assim, $O\widehat{A}D = A\widehat{D}O = \dfrac{180° - 30°}{2} = 75°$ e, portanto,

$$B\widehat{C}A = 180° - (50° + 75°) = 55°.$$

3. Se às quartas-feiras o Bruno dissesse a verdade, então às terças-feiras mentiria. Como o Bruno mente em dois dias consecutivos, então às segundas-feiras também mentiria.

   Como em nenhum dia há dois amigos a mentir, então, às terças-feiras, o Álvaro diria a verdade. Logo, às segundas-feiras, o Álvaro mentiria. Portanto, às segundas-feiras haveria dois amigos a mentir, o que sabemos que não acontece.

   Assim, concluímos que o Bruno mente às quartas e quintas-feiras. Se às terças-feiras o Álvaro mentisse, então às segundas-feiras diria a verdade. Como o Álvaro mente em dois dias consecutivos, então às quartas-feiras também mentiria. Portanto, às quartas-feiras haveria dois amigos a mentir, o que sabemos que não acontece.

   Assim, concluímos que o Álvaro mente aos domingos e às segundas-feiras. Finalmente, como o César mente em dois dias seguidos, que são diferentes dos dias em que o Álvaro e o Bruno mentem, concluímos que o César mente às sextas-feiras e aos sábados.

   Portanto, todos os amigos dizem a verdade às terças-feiras.

4. A Joana tem $2h30m = 2,5$ horas para carregar totalmente a bateria do telemóvel.

   Se não utilizasse o telemóvel, a bateria ficaria completamente carregada em 2 horas e, ao fim de uma hora, teria apenas metade (50%) da bateria carregada. Por isso, ao fim de x horas ($x \leq 2$) de carregamento sem utilização, a Joana teria $x.50\%$ de bateria carregada.

   Por outro lado, se carregasse e utilizasse em simultâneo o telemóvel durante 2 horas, então ficaria apenas com 60% da bateria carregada. Se carregasse e utilizasse em simultâneo o telemóvel durante uma hora, apenas ficaria com 30% da bateria carregada. Por isso, ao fim de x horas de carregamento e utilização simultâneos, o telemóvel ficaria com $x.30\%$ de bateria carregada.

   Assim, se a Joana quer a bateria completamente carregada ao fim de $2h30m$ utilizando o telemóvel durante x horas (e, portanto, não utilizando durante $2,5 - x$ horas), então

$$0,3.x + 0,5(2,5 - x) = 1 \quad (ou \quad 30\%x + 50\%(2,5 - x) = 100\%)$$

   ou seja, $0,2 \times x = 0,25$, logo $x = 1,25$ horas $= 75$ mins.

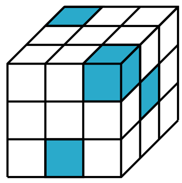
   Assim, a Joana pode utilizar o telemóvel durante 75 mins.

XXXVIII OPM - 1ª Eliminatória - 6.11.2019 - Categoria A - 8º/9º anos

Duração: 2 horas
Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3, 4: 8 pontos cada

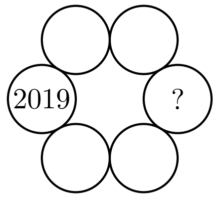
Na questão 1 escolhe, em cada alínea, a opção correta.
Justifica convenientemente as tuas respostas às questões 2, 3 e 4.
Não é permitido o uso de calculadoras.

1. (a) O João tem 23 cubos brancos e 4 coloridos, todos do mesmo tamanho, e decidiu usá-los para montar um cubo maior de dimensão $3 \times 3 \times 3$. Na figura está uma das montagem que o João fez, em que nenhuma face é totalmente branca. Qual é o número máximo de faces totalmente brancas que o João pode obter num destes cubos?



A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

(b) O João quer escrever números nos seis círculos da figura, cumprindo a seguinte regra: o número de cada círculo é a soma dos números que estão nos dois círculos que lhe tocam. O João começou por escrever o número 2019. Que número deve o João escrever no círculo oposto?

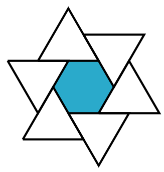


A) -2019 B) 0 C) 2019 D) não é possível cumprir a regra com nenhum número E) é possível cumprir a regra com qualquer número

(c) O João convidou alguns amigos para a sua festa de aniversário. Ele queria comprar um chocolate, que custava 2 €, para cada amigo. Apercebeu-se que não tinha dinheiro suficiente: faltavam-lhe $5,50$ €. Por isso, comprou um gelado para cada um, que apenas custava $1,50$ € cada, tendo sobrado $5,50$ €. Quantos amigos convidou o João para a sua festa?

A) 20 B) 22 C) 24 D) 26 E) 28

(d) A figura ao lado é composta por seis triângulos equiláteros e um hexágono regular, que está pintado. Sabendo que o comprimento dos lados de cada um dos triângulos é 2 cm e o comprimento dos lados do hexágono é 1 cm, qual é a fração da figura que está pintada?



A) $1/2$ B) $1/3$ C) $1/4$ D) $1/5$ E) $1/6$

2. A professora da Luísa pediu-lhe para escrever todos os números de três algarismos. Depois disse-lhe para pintar de amarelo todos os que são iguais a 25 vezes a soma dos seus algarismos. Quantos números pintou a Luísa de amarelo? Por exemplo, o número 328, que é diferente de $25 \times (3 + 2 + 8)$, não ficou pintado de amarelo.

3. A Elsa escreveu três números inteiros positivos diferentes num papel. De seguida, o José escreveu noutro papel as somas dos três pares de números da Elsa. Por exemplo, se a Elsa tivesse escrito os números 8, 10 e 15, o José teria escrito os números $8 + 10 = 18$, $8 + 15 = 23$ e $10 + 15 = 25$. Sabe-se que:

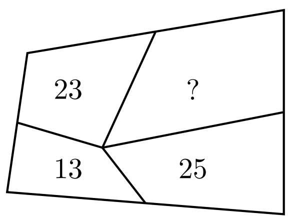
(a) um dos números da Elsa é o 3;

(b) um dos números do José é o 5;

(c) exatamente um dos números da Elsa é igual a um dos números do José.

Quais são os três números que a Elsa pode ter escrito? Indica todas as possibilidades.

4. Um ponto no interior de um quadrilátero está unido aos pontos médios dos quatro lados, como se indica na figura, determinando quatro quadriláteros. As medidas das áreas de três desses quadriláteros são 23, 13 e 25. Quanto mede a área do quarto quadrilátero?



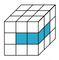
OLIMPÍADAS PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA

www.olimpiadas.spm.pt

XXXVIII OPM - 1ª Eliminatória - 6.11.2019 - Categoria A - 8º/9º anos

Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3, 4: 8 pontos cada

Sugestões para a resolução dos problemas

1. (a) Opção D. (*A montagem* , *com o cubo interior colorido, tem* 4 *faces brancas*)
   (b) Opção A. (*Colocando* n *na* 3^a *casa, a sequência é* $2019,\ 2019+n,\ n,\ -2019,\ -2019-n,\ -n$)
   (c) Opção B. (*O João poupou* $0,50$€ *por amigo, num total de* 11€.)
   (d) Opção D. (*A área do hexágono é igual a* $1,5$ *vezes a área de cada triângulo*)

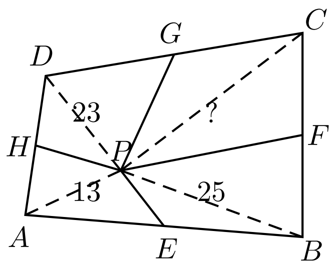
2. Um múltiplo de 25 termina em 00, 25, 50 ou 75. Se um número de três algarismos termina em 00, então é igual a 100 vezes a soma dos seus algarismos, e portanto não ficou pintado de amarelo. A soma dos algarismos de um número de três algarismos, que seja múltiplo de 25, é no máximo igual a $9+7+5=21$. Como $25\times 21=525$, e $5+2+5$ não é igual a 21, os números que ficaram pintados de amarelo só podem ser números entre 125 e 475 terminados em 25, 50 e 75. Ao lado apresenta-se uma tabela para testar os 12 números nessas condições. A Luísa pintou de amarelo três números: 150, 225 e 375.

número	$25\times$ soma dos algarismos	amarelo
125	$25\times 8=200$	Não
150	$25\times 6=150$	Sim
175	$25\times 13=325$	Não
225	$25\times 9=225$	Sim
250	$25\times 7=175$	Não
275	$25\times 14=350$	Não
325	$25\times 10=250$	Não
350	$25\times 8=200$	Não
375	$25\times 15=375$	Sim
425	$25\times 11=275$	Não
450	$25\times 9=225$	Não
475	$25\times 16=400$	Não

3. Suponhamos que os três números escritos pela Elsa são 3, a e b, com $a<b$. Então os três números escritos pelo José são $3+a$, $3+b$ e $a+b$. Um destes números é 5, pelo que temos três casos:

   - Se $3+a=5$, então $a=2$, logo a Elsa escreveu os números 2, 3 e b e o José escreveu os números 5, $2+b$ e $3+b$. Como $b>2$ e a Elsa e o José têm um número igual, tem que ser $b=5$. Neste caso a Elsa escreveu os números 2, 3 e 5 (e o José escreveu os números 5, 7 e 8).
   - Se $3+b=5$, então $b=2$, logo $a=1$. Neste caso a Elsa escreveu os números 1, 2 e 3 (e o José escreveu os números 3, 4 e 5).
   - Se $a+b=5$, então $a=1$ e $b=4$. Neste caso a Elsa escreveu os números 1, 3 e 4 (e o José escreveu os números 4, 5 e 7).

   Portanto a Elsa escreveu os números $\{1,2,3\}$, $\{1,3,4\}$ ou $\{2,3,5\}$.



4. A área do quarto quadrilátero é igual à soma das áreas dos triângulos $[PGC]$ e $[PFC]$. Uma vez que E, F, G e H são pontos médios dos lados, os triângulos

   - $[AEP]$ e $[PEB]$
   - $[BFP]$ e $[PFC]$
   - $[GCP]$ e $[PGD]$
   - $[DHP]$ e $[PHA]$

   têm a mesma área (têm a mesma altura e bases com o mesmo comprimento).
   Logo

$$\text{Área}_{[PEAH]}+\text{Área}_{[PGCF]}=\text{Área}_{[PEBF]}+\text{Área}_{[PGDH]}$$

ou seja, $13+\text{Área}_{[PGCF]}=25+23$. Logo a área de $[PGCF]$ é $25+23-13=35$.

OLIMPÍADAS
PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA

www.olimpiadas.spm.pt

XXXVIII OPM - 2ª Eliminatória - 8.1.2020 - Categoria A - 8º/9º anos

Duração: 2 horas
Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3, 4: 8 pontos cada

Na questão 1 escolhe, em cada alínea, a opção correta.
Justifica convenientemente as tuas respostas às questões 2, 3 e 4.
Não é permitido o uso de calculadoras.

1. (a) Ao passear no jardim com o seu irmão Rui, a Luísa descobre, inscrito numa árvore, o quadrado indicado na figura. Imediatamente a Luísa preenche os espaços vazios, de modo que a soma dos números em cada linha, em cada coluna e em cada diagonal seja sempre a mesma. Qual é essa soma?

6	$\frac{4}{3}$	
	4	$\frac{16}{3}$

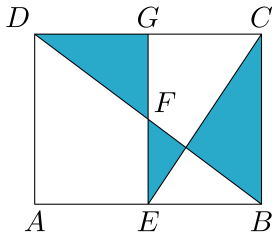
A) 0 B) $22/3$ C) $26/3$ D) 12 E) $43/3$

(b) Mais à frente encontram um senhor que dispunha os algarismos 3, -8, e 5 em triângulo, como indicado na figura. O senhor precisava saber qual é a soma de todos os números quando terminasse de escrever 2020 linhas continuando a seguir o mesmo padrão. A Luísa explica-lhe que não é necessário escrever todos os números para descobrir a resposta. Qual é a resposta à dúvida do senhor?

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 3 & & & \\ & & 3 & & -8 & & \\ & 3 & & -8 & & 5 & \\ 3 & & -8 & & 5 & & 3 \\ & & & \cdots & & & \end{array}$$

A) -2692 B) -2689 C) -1343 D) 0 E) 3

(c) Desenhado no chão, os dois irmãos encontram um retângulo $[ABCD]$ de lados $\overline{AD} = 6$ cm e $\overline{AB} = 8$ cm, dividido por segmentos de reta em várias regiões. Ao reparar que a área da região $[AEFD]$ media $3/4$ da área do retângulo $[AEGD]$, o Rui conseguiu descobrir quanto media a área da região pintada. Quanto media a área da região pintada?



A) 12 cm^2 B) 16 cm^2 C) 18 cm^2 D) 32 cm^2 E) 36 cm^2

(d) Antes de regressarem a casa, a Luísa propõe o seguinte desafio ao Rui:
"Com dois algarismos distintos a e b, ambos diferentes de 0, podes formar dois números ab e ba e calcular o quociente $\dfrac{ab}{ba}$. Repara que, por exemplo, os quocientes $\dfrac{12}{21}$ e $\dfrac{36}{63}$ são iguais. Quantos quocientes diferentes podes obter desta maneira?"

A) 52 B) 54 C) 55 D) 72 E) 81

2. Um número de três algarismos diz-se *lendário* se o produto do seu algarismo das centenas pelo número formado pelos outros dois algarismos tem uma unidade a menos do que o produto do seu algarismo das dezenas pelo número formado pelos outros dois algarismos. Por exemplo, o número 341 é lendário, uma vez que $3 \times 41 = 4 \times 31 - 1$. Quais são os números lendários de três algarismos?

3. A Luísa desenhou um retângulo cujos lados mediam 24 cm e 36 cm. Ela pintou o lado maior de vermelho e o lado menor de amarelo. De seguida pintou de amarelo todos os pontos dentro do retângulo mais próximos do lado menor. Quanto mede a área da região pintada de amarelo?

4. O João colocou 16 copos numa mesa. Uma jogada consiste em virar 3 copos diferentes ao contrário (os que estão virados para cima ficam virados para baixo e vice-versa). Inicialmente todos os copos estão virados para baixo. Qual é o número mínimo de jogadas que o João precisa de efetuar para que os copos fiquem todos virados para cima?

Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3, 4: 8 pontos cada

Sugestões para a resolução dos problemas

1. (a) Opção D. (*Os números que faltam são* $\frac{14}{3}, \frac{8}{3}, \frac{10}{3}, \frac{20}{3}, 2$.)

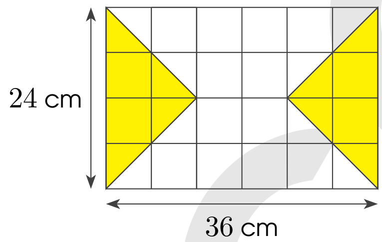
   (b) Opção C. (*Somando por linhas, observa-se que a soma total é* $3-5+0+3-5+0+\cdots+3=-1343$.)

   (c) Opção B. (*As áreas dos três triângulos são* $6\ cm^2$, $2\ cm^2$, $8\ cm^2$.)

   (d) Opção B. (*Há* 54 *pares* (a,b) *em que* a *e* b *são diferentes e primos entre si.*)

2. Seja $n = a \times 100 + b \times 10 + c$ um número lendário com algarismo das centenas a, algarismo das dezenas b e algarismo das unidades c. Então $a \times (10b + c) + 1 = b \times (10a + c)$, ou seja, $ac + 1 = bc$, ou ainda, $(b - a) \times c = 1$. Assim conclui-se que $b - a = 1$ e $c = 1$, logo os números lendários são 121, 231, 341, 451, 561, 671, 781 e 891.

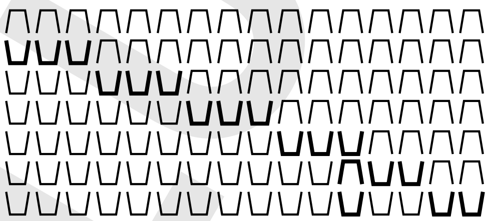
3. Ao dividir-se o retângulo em quadrados de lado 6 cm, observa-se que a região pintada de amarelo é composta por dois triângulos de base 24 e altura 12 cm.



Assim, a área da região pintada de amarelo mede $2 \times \frac{24 \times 12}{2} = 288\, cm^2$.

4. Em 5 ou menos movimentos é possível virar no máximo $3 \times 5 = 15$ copos.

   No entanto, é possível virar todos os copos para cima em 6 movimentos. Na figura seguinte são indicados esses movimentos, onde estão assinalados os copos que se invertem:



OLIMPÍADAS
PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA

www.olimpiadas.spm.pt

XXXVIII OPM - Final - 12.09.2020 - Categoria A - 8º/9º anos

Duração: 3 horas
Questão 1: 16 pontos
Questões 2, 3 e 4: 8 pontos cada

Justifica convenientemente as tuas respostas e indica os principais cálculos.
Não é permitido o uso de calculadoras.

1. (a) Distribuem-se oito fichas numeradas de 1 a 8 por dois montes de modo que nenhuma ficha seja a média de duas outras fichas do mesmo monte. Qual dos seguintes conjuntos não pode estar no mesmo monte?

   A) $\{1,2\}$ B) $\{1,7\}$ C) $\{2,4\}$ D) $\{3,8\}$ E) $\{5,8\}$

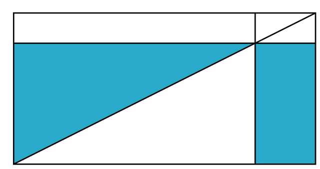
   (b) Numa fila de pinheiros, o Gonçalo estava ao lado de um dos pinheiros e disse: "Tenho à minha frente o dobro dos pinheiros que tenho atrás." Depois, o Gonçalo avançou 15 pinheiros e disse: "Agora tenho à minha frente um terço dos pinheiros que tenho atrás." Quantos pinheiros há nesta fila?

   A) 36 B) 37 C) 90 D) 180 E) 181

   (c) O Gonçalo pediu à sua irmã Maria que escolhesse pelo menos dois algarismos entre 1 e 9, distintos, cujo produto fosse múltiplo de 4 mas não de 8. De quantas maneiras diferentes a Maria pode fazer essa escolha?

   A) 31 B) 32 C) 48 D) 63 E) 64

   (d) Na figura ao lado, a área do triângulo azul é 16 cm^2 e a área do retângulo azul é 8 cm^2. Qual é a área do retângulo maior, em cm^2?

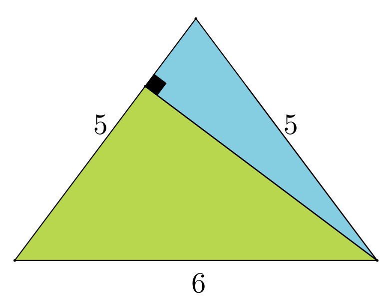


   A) 50 B) 52 C) 54 D) 56 E) 58

2. A Joana tem um telemóvel que, quando não é utilizado, demora 2 horas a carregar totalmente a sua bateria. Quando está a carregar e a ser usado em simultâneo, o telemóvel da Joana gasta 40% da energia que recebe.

   A Joana chegou a casa às $18\text{h}00$ com a bateria do telemóvel completamente gasta e às $20\text{h}30$ tem de sair novamente. Durante quanto tempo, no máximo, pode a Joana usar o telemóvel, garantindo que a bateria fica totalmente carregada quando sair de casa?

3. O João tem um terreno triangular, representado na figura ao lado, cujos lados medem 5, 5 e 6 metros. O terreno está dividido em dois triângulos retângulos: uma piscina azul e uma área relvada verde. Qual é a área da piscina?



4. O João começou a escrever num quadro os primeiros números inteiros: $1, 2, 3, \ldots$

   Quando ficou sem espaço, parou, apagou um dos números e calculou a média dos números que ficaram no quadro. Sabendo que o João obteve o resultado $40,75$, determina o número que o João apagou. Indica todas as possibilidades.

XXXVIII OPM - Final - 12.09.2020 - Categoria A - 8°/9° anos

Duração: 3 horas
Questão 1: 16 pontos
Questões 2, 3 e 4: 8 pontos cada

Sugestões para a resolução dos problemas

1. (a) Se as fichas numeradas com 1 e 7 estiverem no primeiro monte, então a ficha 4 está no segundo monte. Notemos que as fichas 4 e 6 não estão juntas, pois isso implica que as fichas 2, 5 e 8 estejam no outro monte, e 5 é a média de 2 e 8. Logo a ficha 6 está no mesmo monte que as fichas 1 e 7.

   Como as fichas 6 e 7 estão no primeiro monte, as fichas 5 e 8 estão no segundo monte, o que por sua vez implica que a ficha 2 esteja no primeiro monte com as fichas $1, 6$ e 7.

   Só falta colocar a ficha 3, que não pode ir para o primeiro monte por estarem lá as fichas 1 e 2, nem para o segundo monte por estarem lá as fichas 4 e 5. Logo as fichas 1 e 7 não podem estar juntas.

   As distribuições de fichas $1256/3478$, $1458/2367$ e $1368/2457$ mostram que os restantes pares podem estar juntos.

   Opção correta: B).

   (b) Seja x o número de pinheiros atrás do Gonçalo no momento inicial e y o número de pinheiros à frente do Gonçalo, após este andar 15 pinheiros para a frente. Então temos que $x + 15 = 3y$ e $2x - 15 = y$. Duplicando a primeira equação e subtraindo à segunda, temos $2x - 15 - 2(x + 15) = y - 2 \times 3y$, o que dá $y = 9$. O número total de pinheiros é a soma do número de pinheiros atrás do Gonçalo com o número de pinheiros à frente do Gonçalo com o pinheiro ao lado dele, ou seja, $3y + y + 1 = 37$.

   Opção correta: B).

   (c) Notemos que a existência ou não de números ímpares no subconjunto não afeta a divisibilidade por 4 ou 8. Olhando para os números pares, 8 não pode existir no subconjunto, se 4 existir num conjunto então é o único par, e 2 e 6 ou estão simultaneamente no subconjunto ou não estão de todo.

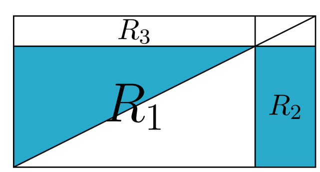
   Se 2 e 6 existirem no subconjunto, qualquer subconjunto de ímpares pode também existir no subconjunto. Como existem 5 ímpares no conjunto $\{1, \ldots 9\}$, existem $2^5 = 32$ subconjuntos nestas condições.

   Se 4 existir no subconjunto, tem que também existir no subconjunto um subconjunto não vazio de ímpares, para este ter no mínimo dois elementos. Como existem 5 ímpares no conjunto $\{1, \ldots 9\}$, existem $2^5 - 1 = 31$ subconjuntos nestas condições.

   O número de subconjuntos nas condições do enunciado é $32 + 31 = 63$.

   Opção correta: D).

   (d) Seja R_1 o retângulo que completa o triângulo azul. R_1 tem área 32 e como R_1 tem a mesma altura que o retângulo azul (R_2), tem que ter o quádruplo da largura. Logo, os triângulos pequenos em cima de R_2 são semelhantes ao triângulo azul com razão $1/4$. Logo a área destes é de 1 cada. Os triângulos pequenos têm $1/4$ da altura de R_1, logo o rectângulo R_3 da figura tem um quarto da área de R_1, 8, pois tem a mesmo largura. Logo a área do rectângulo grande é $16 + 16 + 8 + 8 + 1 + 1 = 50$. Opção correta: A).



2. A Joana tem $2h30m = 2,5$ horas para carregar totalmente a bateria do telemóvel.

   Se não utilizasse o telemóvel, a bateria ficaria completamente carregada em 2 horas e, ao fim de uma hora, teria apenas metade (50%) da bateria carregada. Por isso, ao fim de x horas ($x \leq 2$) de carregamento sem utilização, a Joana teria $x.50\%$ de bateria carregada.

   Por outro lado, se carregasse e utilizasse em simultâneo o telemóvel durante 2 horas, então ficaria apenas com 60% da bateria carregada. Se carregasse e utilizasse em simultâneo o telemóvel durante uma hora, apenas ficaria com 30% da bateria carregada. Por isso, ao fim de x horas de carregamento e utilização simultâneos, o telemóvel ficaria com $x.30\%$ de bateria carregada.

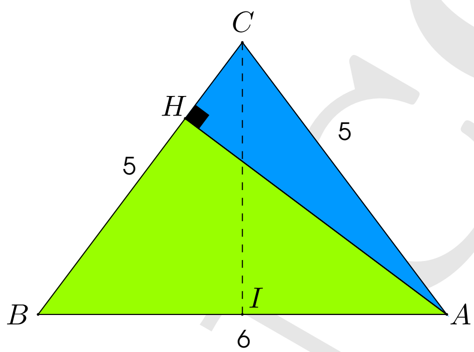
   Assim, se a Joana quer a bateria completamente carregada ao fim de $2h30m$ utilizando o telemóvel durante x horas (e, portanto, não utilizando durante $2,5 - x$ horas), então

$$0,3.x + 0,5(2,5 - x) = 1 \quad (ou \quad 30\%x + 50\%(2,5 - x) = 100\%)$$

   ou seja, $0,2 \times x = 0,25$, logo $x = 1,25$ horas $= 75$ mins.

   Assim, a Joana pode utilizar o telemóvel durante 75 mins.

3. Seja I o pé da perpendicular relativa ao lado $[AB]$.



   Como o triângulo $[ABC]$ é isósceles, pois $\overline{CB} = \overline{CA} = 5$, tem-se $\overline{AI} = \overline{BI} = 3$. O triângulo $[CIA]$ é retângulo e o Teorema de Pitágoras garante que

$$\overline{CI}^2 = \overline{CA}^2 - \overline{IA}^2 = 4^2,$$

   ou seja, $\overline{CI} = 4$. Pelo critério AA observa-se que os triângulos $[CIB]$ e $[AHB]$ são semelhantes e

$$\frac{\overline{AH}}{\overline{CI}} = \frac{\overline{HB}}{\overline{IB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CB}},$$

   ou seja,

$$\frac{\overline{AH}}{4} = \frac{\overline{HB}}{3} = \frac{6}{5}.$$

   Assim conclui-se que $\overline{AH} = \dfrac{24}{5}$ e $\overline{HB} = \frac{18}{5}$. Portanto $\overline{CH} = 5 - \dfrac{18}{5} = \dfrac{7}{5}$ e

$$\text{área de } [CHA] = \frac{1}{2}\overline{CH} \times \overline{HA} = \frac{1}{2}.\frac{7}{5} \times \frac{24}{5} = \frac{84}{25}\,\text{m}^2.$$

4. Seja n o maior número que o João escreveu e k o número que o João apagou.

Como $1 \leq k \leq n$, então a média calculada pelo João está entre a média dos números $1, 2, \ldots, n-1$ e a média dos números $2, 3, \ldots, n$, ou seja, está entre $n/2$ e $n/2+1$. Assim,

$$\frac{n}{2} \leq 40.75 \leq \frac{n}{2}+1,$$

ou seja,

$$79.5 \leq n \leq 81.5.$$

Portanto temos $n = 80$ ou $n = 81$.

Para $n = 80$, temos que a soma dos números do quadro é $40,75 \times 79 = 3219,25$, que não é um número inteiro.

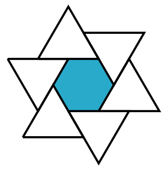
Para $n = 81$, temos que a soma dos números do quadro é $40,75 \times 80 = 3260$. Como $1+2+\cdots+81 = 3321$, então o número apagado é $3321 - 3260 = 61$ e esta é a única possibilidade.

XXXVIII OPM - 1ª Eliminatória - 6.11.2019 - Categoria B - 10º/12º anos

Duração: 2 horas
Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3, 4: 8 pontos cada

Na questão 1 escolhe, em cada alínea, a opção correta.
Justifica convenientemente as tuas respostas às questões 2, 3 e 4.
Não é permitido o uso de calculadoras.

1. (a) A figura ao lado é composta por seis triângulos equiláteros e um hexágono regular, que está pintado. Sabendo que o comprimento dos lados de cada um dos triângulos é 2 e o comprimento dos lados do hexágono é 1, qual é a fração da figura que está pintada?



A) $1/2$ B) $1/3$ C) $1/4$ D) $1/5$ E) $1/6$

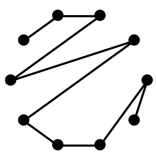
(b) O Manuel foi à mercearia comprar maçãs e peras. Com o dinheiro que tinha, poderia ter comprado 2Kg de maçãs ou 3Kg de peras. Ele decidiu comprar a mesma quantidade de cada uma das frutas e gastou todo o dinheiro. Quantos gramas de cada uma delas comprou?

A) 1000 B) 1100 C) 1200 D) 1400 E) 1800

(c) Uma família de quatro pessoas vai fazer uma viagem de avião. O avião tem 30 filas com quatro lugares em cada fila (A, B, C e D). A família pediu para que se sentassem todos na mesma fila, ou em duas filas consecutivas. Por exemplo, a família poderia ter ficado com os lugares $18C$, $18D$, $19A$ e $19C$. De quantas maneiras diferentes podem ser escolhidos os quatro lugares para a família?

A) 59 B) 117 C) 515 D) 1074 E) 2002

(d) No quadro da sala de aula do Manuel estão marcados 10 pontos de uma circunferência. O Manuel quer desenhar uma linha formada por 9 segmentos de reta com extremidades nesses pontos, sem cruzamentos, como na figura. De quantas maneiras diferentes é possível desenhar essa linha?

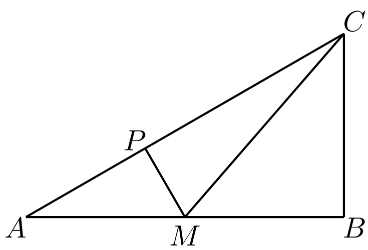


A) 55 B) 1024 C) 1280 D) 362880 E) 3628800

2. Quais são os números de três algarismos que são iguais a 34 vezes a soma dos seus algarismos?

Por exemplo, o número 436, que é diferente de $34 \times (4 + 3 + 6)$, não é um dos desses números.

3. Num triângulo $[ABC]$, retângulo em B, o lado $[AB]$ mede 6. Sejam M o ponto médio de $[AB]$ e P o pé da perpendicular a AC que passa por M. Sabendo que $[PM]$ mede $\frac{3}{2}$, determina a distância de M a C.



4. Num saco estão berlindes azuis, brancos e castanhos. Sabe-se que:

- existem pelo menos tantos berlindes azuis como metade do número de berlindes brancos;
- o número de berlindes azuis é no máximo um terço do número de berlindes castanhos;
- no total, o número de berlindes azuis e brancos é maior do que 54.

Qual é o menor número possível de berlindes castanhos no saco?

Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3, 4: 8 pontos cada

Sugestões para a resolução dos problemas

1. (a) Opção D. (*A área do hexágono é igual a* $1,5$ *vezes a área de cada triângulo*)
   (b) Opção C. (*O Manuel gastou* $2/5$ *do dinheiro em peras e* $3/5$ *do dinheiro em maçãs*)
   (c) Opção E. (*Há* 30 *formas de ficarem numa fila e* $29 \times (4^2 + 6^2 + 4^2) = 1972$ *de ficarem em duas*)
   (d) Opção C. (*Há* 10 *escolhas para o* $1°$ *vértice e* 2 *para cada um dos seguintes:* $\frac{10 \times 2^8}{2} = 1280$)

2. Qualquer número de três algarismos, abc, se escreve como $100a + 10b + c$, onde a, b, c são algarismos e $a \neq 0$. O número de três algarismos, abc, é igual a 34 vezes a soma dos seus algarismos se

$$100a + 10b + c = 34(a + b + c) \;\Leftrightarrow\; 66a - 33c = 24b \;\Leftrightarrow\; 3 \times 11(2a - c) = 24b\,.$$

Como 11 é um número primo, e não é divisor de 24, teria que ser divisor de b, o que é impossível pois $b \leq 9$. Isto implica que $b = 0 = 2a - c$, e portanto as soluções do problema acontecem quando $b = 0$ e $c = 2a$. Temos então quatro soluções: 102, 204, 306 e 408.

3. **Solução 1:** Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo $[APM]$ obtém-se $\overline{AP} = \sqrt{3^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{27}}{2}$.

Os triângulos $[ABC]$ e $[APM]$ são semelhantes porque têm o ângulo em A em comum e um ângulo reto, logo

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{PM}}{\overline{BC}} \Longleftrightarrow \frac{\frac{\sqrt{27}}{2}}{6} = \frac{\frac{3}{2}}{\overline{BC}}.$$

Portanto, $\overline{CB} = 2\sqrt{3}$. Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo $[BMC]$ tem-se $\overline{CM} = \sqrt{3^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{21}$.

Logo, a distância de M a C é $\sqrt{21}$.

Solução 2: Como $[APC]$ é um triângulo retângulo, tem-se

$$\sin \widehat{A} = \frac{\overline{PM}}{\overline{AM}} = \frac{1}{2}$$

pelo que $\widehat{A} = 30°$. Como $[ABC]$ é um triângulo retângulo, tem-se

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \tan \widehat{A} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BC}}{6}$$

pelo que $\overline{BC} = 2\sqrt{3}$. Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo $[BMC]$ tem-se $\overline{CM} = \sqrt{3^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{21}$.

4. Sejam a, b e c os números de berlindes azuis, brancos e castanhos, respetivamente. Pela primeira condição, sabemos que $a \geq \dfrac{b}{2}$, ou seja, $b \leq 2a$. Pela terceira condição, sabemos que $a + b > 54$, ou seja, $b > 54 - a$. Logo, $54 - a < b \leq 2a$, pelo que $3a > 54$. Como a é inteiro, temos $a \geq 19$.

Pela segunda condição, $a \leq \dfrac{c}{3}$, ou seja, $c \geq 3a \geq 57$.

Finalmente, se tomarmos $a = 19$, $b = 36$ e $c = 57$, as três condições do enunciado são satisfeitas, logo, o menor número possível de berlindes castanhos no saco é 57.

XXXVIII OPM - 2ª Eliminatória - 8.01.2020 - Categoria B - 10º/12º anos

Duração: 2 horas
Cada questão vale 10 pontos

Justifica convenientemente as tuas respostas e indica os principais cálculos.
Não é permitido o uso de calculadoras.

1. Quantas sequências de inteiros consecutivos existem cuja soma dos seus termos é igual a 100?

2. O número 8437 tem a propriedade de se escrever como soma de um número de quatro algarismos não nulos com o número escrito pela ordem inversa, uma vez que $8437 = 3674 + 4763$. Quantos números de quatro algarismos existem com esta propriedade?

3. Considera um paralelogramo $[ABCD]$. Uma circunferência que passa por A interseta os lados $[AB]$, $[AD]$ e a diagonal $[AC]$ pela segunda vez nos pontos E, F e G, respetivamente. A reta FG interseta o lado $[BC]$ no ponto H e a reta EG interseta o lado $[CD]$ em I. Prova que HI é paralelo a EF.

4. Um professor deu a alguns dos seus alunos um teste com seis questões cujas respostas eram Verdadeiro ou Falso. Quando os alunos entregaram os testes, ele reparou que cada par de alunos tinha, pelo menos, três respostas diferentes (e todos responderam às seis questões). Quantos alunos podem, no máximo, ter feito o teste?

Cada questão vale 10 pontos

Sugestões para a resolução dos problemas

1. Se a é o primeiro termo e $n \geq 1$ é o número de termos da sequência, então a soma dos seus termos é

$$100 = a + (a+1) + (a+2) + \cdots + (a+n-1) = an + (1+2+\cdots+(n-1)) = an + \frac{n(n-1)}{2},$$

ou seja, $200/n = 2a + n - 1$.

Portanto, n é um divisor de $200 = 2^3 \cdot 5^2$, logo $n \in \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 25, 40, 50, 100, 200\}$.

Note-se que, se $n \in \{2, 4, 10, 20, 50, 100\}$, então $200/n$ é par e $2a+n-1$ é ímpar, pelo que não é possível ter $200/n = 2a+n-1$. Analisem-se as restantes hipóteses para n. Se $n = 1$, ou $n = 5$, ou $n = 8$, ou $n = 25$, ou $n = 40$, ou $n = 200$, então da equação $200/n = 2a+n-1$ segue-se que $a = 100$, ou $a = 18$, ou $a = 9$, ou $a = -8$, ou $a = -17$, ou $a = -99$, respetivamente. Obtem-se assim as sequências (100), $(18, 19, 20, 21, 22)$, $(9, 10, \ldots, 16)$, $(-8, -7, \ldots, 16)$, $(-17, -60, \ldots, 22)$ e $(-99, -98, \ldots, 99, 100)$, pelo que existem 6 sequências de inteiros consecutivos cuja soma dos seus termos é igual a 100.

2. Sejam a, b, c, d inteiros positivos. A soma do número $1000 \cdot a + 100 \cdot b + 10 \cdot c + d$ com o número $1000 \cdot d + 100 \cdot c + 10 \cdot b + a$ é igual a

$$N = 1000 \cdot (a+d) + 110 \cdot (b+c) + (a+d),$$

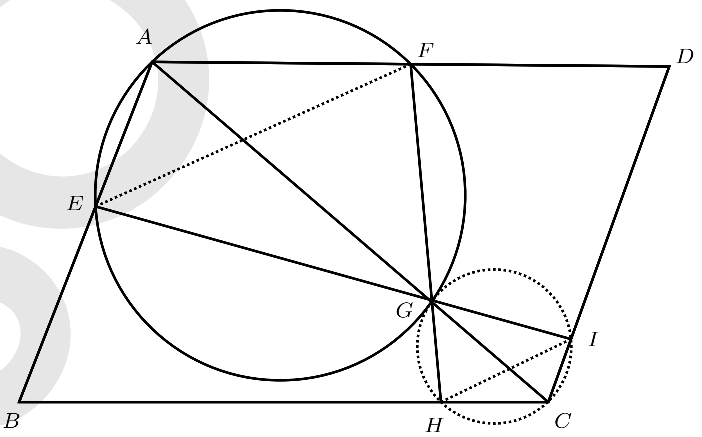
com $2 \leq a+d \leq 18$ e $2 \leq b+c \leq 18$. Para que N tenha 4 algarismos é necessário que $2 \leq a+d \leq 9$. Além disso, note-se que, se $b+c \leq 9$ então $110 \cdot (b+c) \leq 990$ e se $10 \leq b+c \leq 18$ então $1100 \leq 110 \cdot (b+c) \leq 1980$.

Portanto, se $2 \leq a+d \leq 8$, o número N tem 4 algarismos, qualquer que seja a soma $b+c$. Neste caso, há 7 possibilidades para a soma $a+d$ e 17 possibilidades para a soma $b+c$, perfazendo $7 \times 17 = 119$ possíveis números N. Por outro lado, se $a+d = 9$, então para que o número N tenha 4 dígitos é necessário que $2 \leq b+c \leq 9$. Há então neste caso 8 possíveis números N. Assim há um total de $119 + 8 = 127$ números nas condições pretendidas.

3. No quadrilátero $[AEGF]$ inscrito na circunferência referida no enunciado, tem-se $E\hat{G}F = 180^\circ - B\hat{A}D$. O quadrilátero $[CIGH]$ também está inscrito na circunferência que passa por G, I, H e C, uma vez que

$$H\hat{G}I = E\hat{G}F = 180^\circ - B\hat{A}D = 180^\circ - B\hat{C}D = 180^\circ - H\hat{C}I.$$

Por serem ângulos inscritos no mesmo arco, tem-se $G\hat{H}I = G\hat{C}I$ e $G\hat{A}E = G\hat{F}E$. Por serem ângulos alternos internos relativamente às retas paralelas CD e AB, tem-se $G\hat{C}I = G\hat{A}E$. Portanto, $G\hat{H}I = G\hat{F}E$ logo EF é paralela a HI.



4. Sem perda de generalidade, suponhamos que um dos alunos respondeu Falso(F) a todas as questões. Portanto, qualquer um dos outros alunos respondeu Verdadeiro(V) a no mínimo três questões.

   Vamos começar por provar que houve, no máximo, 4 alunos que responderam ao teste com $3V$ e $3F$. Mais uma vez, sem perda de generalidade, podemos supor que um desses alunos respondeu V às três primeiras questões, ou seja respondeu $VVVFFF$, por esta ordem. Se outro aluno respondeu a três perguntas com V e três com F, então respondeu V a uma ou nenhuma das três primeiras questões. Se algum deles respondeu $FFFVVV$ e outro respondeu V a apenas uma das três primeiras questões, por exemplo $VFFVVF$, então estes dois alunos só teriam duas respostas diferentes. Pelo que já foi dito, se dois alunos responderam com $3V$ e $3F$, as suas respostas só podem coincidir num V e logo também só num F. Neste caso, um deles respondeu V à primeira questão, outro V à segunda e outro V à terceira; e o mesmo com F nas quarta, quinta e sexta questões, não necessariamente pela mesma ordem. Temos assim que no máximo houve 4 alunos que responderam com $3V$ e $3F$, por exemplo: $VVVFFF$, $VFFVVF$, $FVFVFV$ e $FFVFVV$.

   De seguida vamos provar que houve, no máximo, 3 alunos que responderam com $4V$ e $2F$. Se dois alunos responderam deste modo, então as duas perguntas a que responderam F têm que ser diferentes; e portanto há no máximo $6 : 2 = 3$ alunos que responderam $4V$ e $2F$.

   Vamos concluir que houve no máximo 8 alunos que fizeram o teste. Continuamos com a suposição que um deles respondeu F a todas as questões. Se algum respondeu V a todas as questões, então todos os outros responderam com $3V$ e $3F$, ou seja haveria no máximo 6 alunos a responder ao teste. Se algum aluno respondeu F a apenas uma questão, então houve no máximo dois alunos que responderam com $4V$ e $2F$, por um raciocínio idêntico ao que foi usado para mostrar que só pode haver 3 alunos que responderam com $4V$ e $2F$, e os outros terão que ter respondido com $3V$ e $3F$. Ou seja, além do aluno que respondeu Falso a todas as questões, há no máximo 4 alunos que responderam com $3V$ e $3F$, e 3 alunos que responderam com $4V$ e $2F$ (ou um deles com $5V$ e $1F$).

   Finalmente, vamos exibir oito conjuntos de respostas, em que cada par de conjuntos difere em pelo menos três respostas, provando assim que o teste poderia ter sido feito por 8 alunos.

$6F$	F	F	F	F	F	F
	V	V	V	F	F	F
$3V + 3F$	V	F	F	V	V	F
	F	V	F	V	F	V
	F	F	V	F	V	V
	V	V	F	F	V	V
$4V + 2F$	V	F	V	V	F	V
	F	V	V	V	V	F

XXXVIII OPM - Final - 12.09.2020 - Categoria B - 10º/12º anos

Duração: 4 horas
Cada questão vale 10 pontos

Justifica convenientemente as tuas respostas e indica os principais cálculos.
Não é permitido o uso de calculadoras.

1. Diz-se que um número inteiro positivo n é BOM, se existe uma permutação dos inteiros de 1 a n, $(a_1, a_2, ..., a_n)$ tal que, para todo o k, $k + a_k$ é um quadrado perfeito. Por exemplo 5 é um número BOM, uma vez que a permutação $(3, 2, 1, 5, 4)$ verifica a condição: $1 + 3 = 2^2$, $2 + 2 = 2^2$, $3 + 1 = 2^2$; $4 + 5 = 3^2$ e $5 + 4 = 3^2$.

   Descobre todos os números BONS até 12.

2. Num triângulo $[ABC]$, o ângulo em C é o dobro do ângulo em A. Marca-se um ponto D no lado $[AC]$ de tal modo que $A\hat{B}D = D\hat{B}C$. Sabendo que $\overline{AB} = 10$ e $\overline{CD} = 3$, qual é o comprimento do lado $[BC]$?

3. Dado um subconjunto de $\{1, 2, \ldots, n\}$, definimos a sua soma alternada da seguinte forma: ordenamos os elementos do subconjunto por ordem decrescente e, começando com o maior, somamos e subtraímos alternadamente os números sucessivos. Por exemplo, a soma alternada do conjunto $\{1, 3, 4, 6, 8\}$ é $8-6+4-3+1 = 4$. Determina a soma das somas alternadas de todos os subconjuntos de $\{1, 2, \ldots, 10\}$ com um número ímpar de elementos.

4. Determina a soma de todas as frações da forma $\frac{1}{ab}$, onde $0 < a < b \leq 200$ são números naturais primos entre si tais que $a + b > 200$.

XXXVIII OPM - Final - 12.09.2020 - Categoria B - 10º/12º anos

Duração: 4 horas
Cada questão vale 10 pontos

Sugestões para a resolução dos problemas

1. Comecemos por observar que todos os números da forma a^2-1 são BONS, uma vez que a permutação. $(a^2-1, a^2-2, \cdots, 2, 1)$ está nas condições do enunciado do problema. Portanto os números 3 e 8 são números BONS.

   De modo semelhante conseguimos concluir que se um número $t < \frac{a^2}{2}$ é BOM, então o número $a^2-(t+1)$ também é um número BOM. Seja $(a_1, \cdots, a_t)$ uma permutação dos números de 1 a t que faz com que t seja um número BOM, ou seja $k + a_k$ é um quadrado perfeito. Isto significa que a permutação $(a_1, \cdots, a_t, a^2-(t+1), a^2-(t+2), \cdots, t+1)$ também verifica a condição do enunciado, e por isso $a^2-(t+1)$ é um número BOM. Usando este resultado, concluímos que $5 = 9-3-1$, $12 = 16-3-1$ e $10 = 16-5-1$ são números BONS.

   Não é difícil verificar que 1 e 2 não são números BONS. Não existe nenhum número a_4 menor ou igual do que 4 tal que $4 + a_4$ seja um quadrado perfeito, portanto 4 também não é um número BOM.

   Se 6 fosse um número BOM, existiria um permutação $(a_1, a_2, \cdots, a_6)$ tal que $1 + a_1$ e $6 + a_6$ seriam quadrados perfeitos. Neste caso a única escolha possível, tanto para a_1 como para a_6, seria o número 3, e portanto 6 não é um número BOM. De igual modo se conclui que 7 não é um número BOM. Um raciocínio idêntico permite verificar que o único número entre 1 e 11 que somado com o número 11 dá um quadrado perfeito é o 5, que também é o único número entre 1 e 11 que somado com 4 dá um quadrado perfeito.

   Falta apenas verificar se 9 é um número BOM. A permutação $(8, 2, 6, 5, 4, 3, 9, 1, 7)$ faz com que 9 seja um número BOM.

2. Seja E uma ponto do lado $[AB]$ tal que $E\hat{D}B = B\hat{D}C$. Os triângulos $[BDC]$ e $[BDE]$ são congruentes, através da relação ala, uma vez que $A\hat{B}D = D\hat{B}C$. Podemos então concluir que $\overline{EB} = \overline{BC}$, $\overline{ED} = \overline{DC} = 3$, e que

   $$B\hat{E}D = B\hat{C}D = 2\,E\hat{A}D\,. \tag{1}$$

   Por um lado sabemos que $D\hat{E}A + A\hat{D}E + E\hat{A}D = 180^o$, uma vez que é a soma dos ângulos internos do triângulo, e por outro lado também sabemos que $D\hat{E}A = B\hat{E}D = 180^o$, donde se conclui que

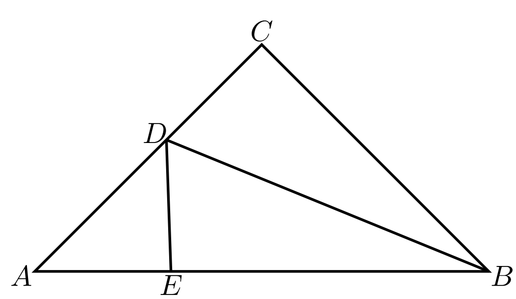
   $$B\hat{E}D = A\hat{D}E + E\hat{A}D\,. \tag{2}$$

   De 1 e de 2, vem que $2E\hat{A}D = A\hat{D}E + E\hat{A}D \Leftrightarrow E\hat{A}D = A\hat{D}E$, e portanto o triângulo $[AED]$ é isósceles com $\overline{DE} = \overline{AE}$.

   Finalmente

   $$10 = \overline{AB} = \overline{AE} + \overline{EB} = \overline{DE} + \overline{BC} = \overline{DC} + \overline{BC} = 3 + \overline{BC},$$

   implica que $\overline{BC} = 7$.



3. A soma alternada do conjunto vazio é igual a 0. Seja n um inteiro maior do que 1. Existem 2^{n-1} subconjuntos de $\{1, 2, \ldots, n\}$ com um número ímpar de elementos. Denotemos o conjunto de todos estes subconjuntos por I. O conjunto I pode ser dividido em quatro subconjuntos $I = I_1 \cup I_n \cup I_{1n} \cup I'$, onde I_1 é constituído pelos subconjuntos de I que contêm o número 1 e não contêm o número n, I_n é constituído pelos subconjuntos de I que contêm o número n e não contêm o número 1, I_{1n} é constituído pelos subconjuntos de I que contêm os números 1 e n, e I' é constituído pelos subconjuntos de I que não contêm os números 1 e n. Podemos estabelecer uma correspondência bijetiva entre I' e I_{1n}, pondo

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_k\} \leftrightarrow \{1, a_1, a_2, \ldots, a_k, n\}.$$

Além disso, assumindo que $a_1 < a_2 < \cdots < a_k$, a soma das somas alternadas para cada um destes pares é

$$(n - a_k + a_{k-1} - \cdots + a_2 - a_1 + 1) + (a_k - a_{k-1} + \cdots - a_2 + a_1) = n + 1.$$

Como I' tem $2^{n-2}/2$ subconjuntos, a soma das somas alternadas de todos estes pares é igual a $(n+1)2^{n-3}$. De forma análoga, podemos estabelecer uma correspondência bijetiva entre I_1 e I_n, pondo

$$\{1, a_1, a_2, \ldots, a_k\} \leftrightarrow \{a_1, a_2, \ldots, a_k, n\}.$$

Assumindo que $a_1 < a_2 < \cdots < a_k$, a soma das somas alternadas para cada um destes pares é

$$(n - a_k + a_{k-1} - \cdots - a_2 + a_1) + (a_k - a_{k-1} + \cdots + a_2 - a_1 + 1) = n + 1.$$

Como I_1 tem $2^{n-2}/2$ subconjuntos, a soma das somas alternadas de todos estes pares é igual a $(n+1)2^{n-3}$.

Concluímos que a soma das somas alternadas de todos os subconjuntos de $\{1, 2, \ldots, n\}$ com um número ímpar de elementos é igual a $(n+1)2^{n-3} + (n+1)2^{n-3} = (n+1)2^{n-2}$. Fazendo $n = 10$ obtemos $11 \cdot 2^8 = 2816$.

4. Vamos resolver o problema para um inteiro $n \geq 2$. Denotemos por P_n o conjunto de todos os pares de inteiros (a, b) tais que $0 < a < b \leq n$, $mdc(a, b) = 1$ e $a + b > n$, e seja S_n a soma

$$S_n = \sum_{(a,b) \in P_n} \frac{1}{ab}.$$

Se $(a, b) \in P_n$ então $(a, b) \in P_{n+1}$ exceto quando $a + b = n + 1$, e se $(a, b) \in P_{n+1}$, então $(a, b) \in P_n$ exceto quando $b = n + 1$. Assim, temos $S_{n+1} - S_n = T - Q$, onde T é a soma de todas as frações $\frac{1}{ab}$ com $(a, b) \in I_{n+1}$ e $b = n + 1$, e Q é a soma de todas as frações $\frac{1}{ab}$ com $(a, b) \in I_n$ e $a + b = n + 1$. Calculemos T:

$$T = \sum_{\substack{1 \leq a < n+1 \\ mdc(a, n+1) = 1}} \frac{1}{(n+1)a} = \sum_{\substack{1 \leq a < \frac{n+1}{2} \\ mdc(a, n+1) = 1}} \frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{n+1-a} \right) = \sum_{\substack{1 \leq a < \frac{n+1}{2} \\ mdc(a, n+1) = 1}} \frac{1}{a(n+1-a)}.$$

Calculemos agora Q, notando que se $(a, b) \in P_n$ e $a + b = n + 1$, então $b = n + 1 - a$ e $a < \frac{n+1}{2}$, uma vez que $n + 1 = a + b > 2a$:

$$Q = \sum_{\substack{1 \leq a < \frac{n+1}{2} \\ mdc(a, n+1-a) = 1}} \frac{1}{a(n+1-a)} = \sum_{\substack{1 \leq a < \frac{n+1}{2} \\ mdc(a, n+1) = 1}} \frac{1}{a(n+1-a)},$$

onde a última igualdade resulta de se ter que se $mdc(x, y) = 1$ então $mdc(y - x, y) = 1$.

Concluímos assim que $T = Q$, ou seja $P_n = P_{n+1}$ pra todo o $n \geq 2$. Segue-se que $S_{200} = S_2 = \frac{1}{2}$.

Nota: Se a, b são inteiros positivos tais que $mdc(a, b) = 1$, então $mdc(a - b, b) = 1$.

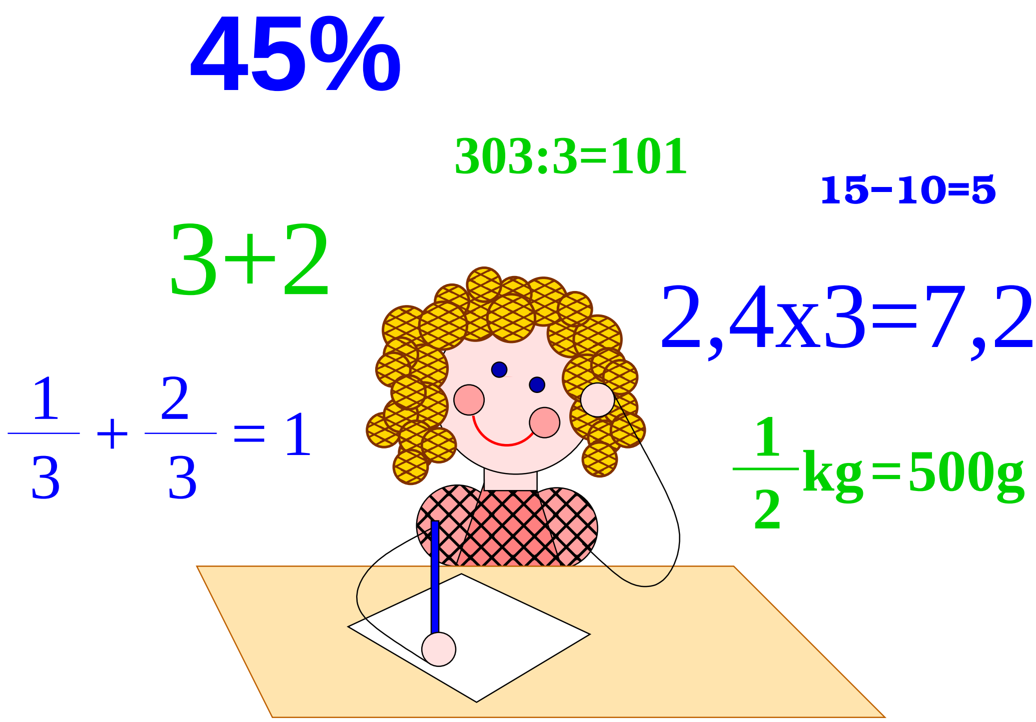
Prova: Suponhamos que $d|b$ e que $d|(a - b)$. Então, existem inteiros j, k tais que $b = jd$ e $a - b = kd$, pelo que $a = b + kd = (j + k)d \quad \text{ou seja} \quad d|a$. Segue-se que $mdc(a - b, b)$ é um divisor de $mdc(a, b) = 1$, donde se obtém que $mdc(a - b, b) = 1$.

spm

OLIMPÍADAS PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA

Mini-Olimpíadas

Ano Letivo 2020/2021
1º Ciclo do Ensino Básico
3º ano



Tem atenção: **Duração: 1 hora**

- Lê todas as perguntas com muito cuidado.
- Não apagues as contas, os esquemas e os desenhos que utilizares nas tuas respostas.
- Se acabares antes do tempo previsto, deverás aproveitar para rever a tua prova.

Bom trabalho e diverte-te!

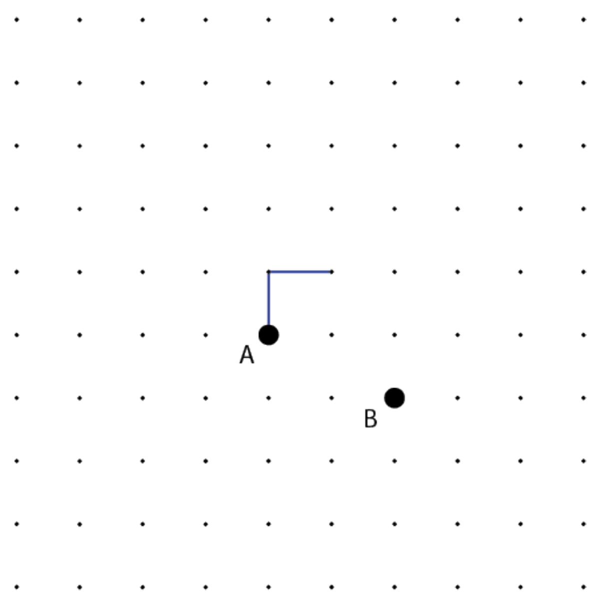
Nome do aluno: ____

Pontuação:_______________

1. Para desenhares o labirinto usa as seguintes instruções:

$$A \uparrow \rightarrow \downarrow \downarrow \leftarrow \leftarrow \uparrow \uparrow \uparrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \downarrow \downarrow \downarrow B$$

Cada seta representa um passo do labirinto. Os dois primeiros passos já foram desenhados. **Completa o desenho do labirinto.**



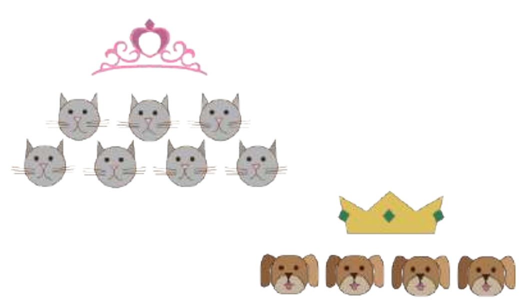
A Mati e o Jonas vão percorrer o labirinto que tu desenhaste. O Jonas parte do ponto A e a Mati do ponto B. Enquanto a Mati dá um passo, o Jonas dá dois.

Marca com um X o ponto onde se vão encontrar.

2. Num reino imaginado pela Mati, cada princesa tem 7 gatos e cada príncipe tem 4 cães. O rei contou 29 animais.

No reino há 2 príncipes.

Quantas princesas há?



Resposta:____

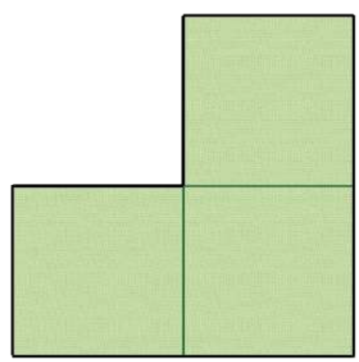
3. Este ano, na sala de aula da Mati há apenas quatro alunos na fila da frente: a Mati, o Jonas, o Zeca e o Chico.

    - O Chico não está em nenhuma das pontas.
    - O rapaz que está à frente da professora não é o Jonas.
    - O Zeca tem uma rapariga ao seu lado.

    Descobre onde está cada aluno e escreve o seu nome na respetiva mesa.

4. O jardim da casa do Zeca está dividido em três quadrados iguais como se indica na figura. O muro à volta do jardim tem 56 metros de comprimento.

    Quanto mede o lado de cada quadrado?



Resposta:____

5. A Alice fez bombons de chocolate com recheio de laranja, morango e cereja. Colocou os bombons numa caixa pela seguinte ordem: dois de laranja, um de cereja e dois de morango, repetindo sempre esta sequência.

A Alice conseguiu colocar 48 bombons na caixa.

Quantos bombons de cereja colocou?

Resposta:____

6. No dia 26 de dezembro, a Zé começou a ler o livro que o avô lhe ofereceu no Natal. Leu todos os dias cinco páginas como tinha prometido ao avô.
O livro tem 78 páginas. No dia do seu aniversário, antes de começar a ler, contou as páginas. Ainda tinha 23 páginas para ler.

Em que dia é que a Zé faz anos?

Resposta:____

Mini-Olimpíadas

Ano Letivo 2020/2021
1º Ciclo do Ensino Básico
3º ano

Critérios de Classificação

Cotações

1- 10 pontos
2- 10 pontos
3- 10 pontos
4- 10 pontos
5- 10 pontos
6- 10 pontos

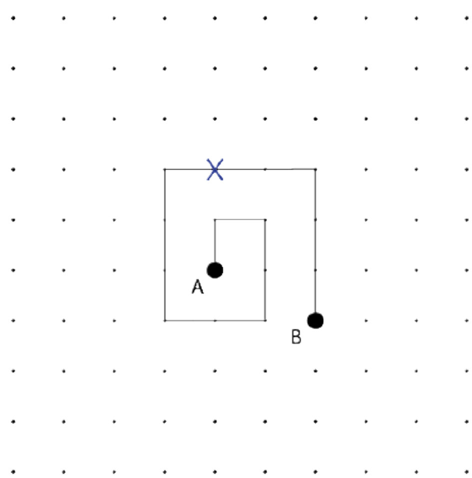
Total: 60 pontos

Critérios de Classificação

- **Se surgirem resoluções diferentes das apresentadas, a classificação ficará ao critério do professor corretor.**
- **Devem ser valorizados os raciocínios corretos (atribuindo classificações parciais) em detrimento dos cálculos efetuados.**

Exercício 1

Solução:



10 pontos

Caso a resposta não seja a correta deve ser atribuída cotação parcial conforme indicado em seguida.

Para o desenho do labirinto indicam-se as cotações parciais seguintes.

Desenha o labirinto corretamente **5 pontos**

Se o desenho do labirinto não for o correto ou não estiver completo, por cada instrução (seta) que tenha sido bem interpretada, deve ser atribuída a cotação parcial de **0,4 pontos**.

As cotações parciais para a marcação do ponto de encontro são as seguintes (e não são acumuláveis).

Com base no labirinto desenhado, marca corretamente o ponto de encontro **5 pontos**

Não marca corretamente o ponto, mas depreeende-se da resposta apresentada que sabe o número de passos que um dos dois terá de dar, efetuando, por exemplo, o seguinte cáculo.

$15 : 3 = 5$ **4 pontos**

Não marca corretamente o ponto onde se encontram, mas indica o número de passos necessários para percorrer todo o labirinto **1 ponto**

Exercício 2

Solução: Há 3 princesas. **10 pontos**

Caso a resposta não seja a correta deve atribuir-se cotação parcial. Para esse efeito, indicam-se, em seguida, as cotações de uma proposta de resolução.

Proposta de resolução:

Há $2 \times 4 = 8$ cães. **3 pontos**

Logo, há $29 - 8 = 21$ gatos. **4 pontos**

Portanto há $21 : 7 = 3$ princesas. **3 pontos**

Devem ser cotados os cálculos efetuados utilizando valores errados calculados anteriormente.

Exercício 3

Solução: Zeca - Mati - Chico - Jonas **10 pontos**

Caso a resposta não esteja correta, mas evidencie uma interpretação correta de parte do enunciado deverá ser atribuída a cotação parcial de **4 pontos**.

Exercício 4

Solução: O lado de cada quadrado mede 7 m. **10 pontos**

Caso a resposta não seja a correta deve atribuir-se cotação parcial. Para esse efeito, indicam-se, em seguida, as cotações de uma proposta de resolução.

Proposta de resolução:

Efetua o cálculo

$56 : 8 = 7$ **10 pontos**

Exercício 5

Solução: Colocou 10 bombons de cereja na caixa. **10 pontos**

Caso a resposta não seja a correta deve atribuir-se cotação parcial. Para esse efeito, indicam-se, em seguida, as cotações de duas propostas de resolução.

Proposta de resolução:

$$\begin{array}{r|l} 48 & 5 \\ \cline{2-2} 3 & 9 \end{array}$$

Há 9 blocos completos de cinco bombons e um bloco imcompleto de três bombons. **4 pontos**

Há 1 bombom de cereja em cada bloco completo de bombons. **2 pontos**

Também há 1 bombom de cereja no bloco imcompleto de bombons. **1 ponto**

Há $9 \times 1 + 1 = 10$ bombons de cereja na caixa. **3 pontos**

Devem ser cotados os cálculos efetuados utilizando valores errados calculados anteriormente.

Exercício 6

Solução: A Zé faz anos a 6 de janeiro. **10 pontos**

Caso a resposta não seja a correta deve atribuir-se cotação parcial. Para esse efeito, indicam-se, em seguida, as cotações de uma proposta de resolução.

Proposta de resolução:

Calcula o número de páginas que já leu

$78 - 23 = 55$ **3 pontos**

Calcula o número de dias de leitura

$55 : 5 = 11$ **3 pontos**

Identifica o dia do aniversário apresentando um calendário ou efetuando cálculos

$26 + 11 = 37$ e $37 - 31 = 6$ **4 pontos**

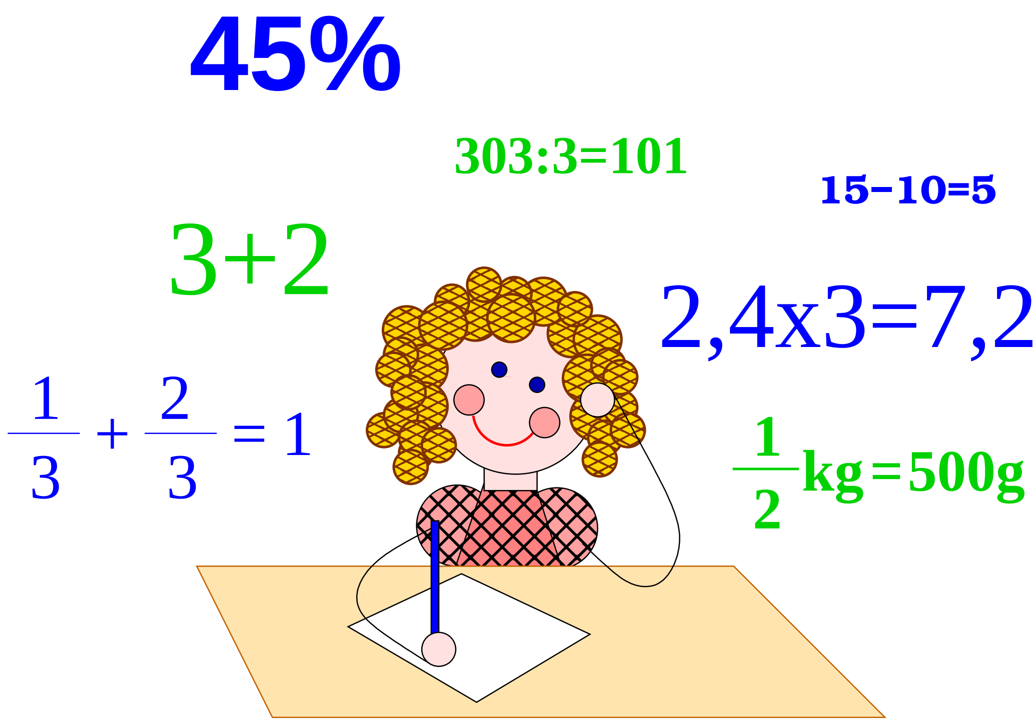
Caso indique 5 de janeiro como dia do aniversário, da cotação parcial relativa a identificar o dia do aniversário devem ser atribuídos apenas **2 pontos**.

Devem ser cotados os cálculos efetuados utilizando valores errados calculados anteriormente.

Olimpíadas Portuguesas de Matemática

Mini-Olimpíadas

Ano Letivo 2020/2021
1º Ciclo do Ensino Básico
4º ano



Tem atenção: **Duração: 1 hora**

- Lê todas as perguntas com muito cuidado.
- Não apagues as contas, os esquemas e os desenhos que utilizares nas tuas respostas.
- Se acabares antes do tempo previsto, deverás aproveitar para rever a tua prova.

Bom trabalho e diverte-te!

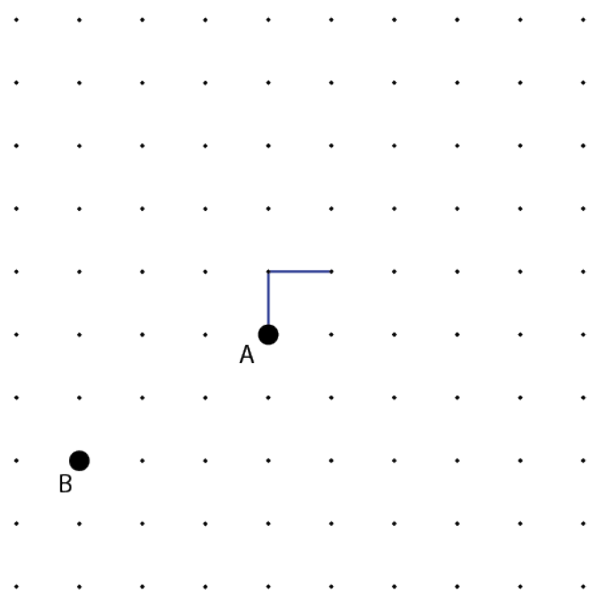
Nome do aluno: ____

Pontuação:______________

1. Para desenhares o labirinto usa as seguintes instruções:

$$\mathbf{A} \uparrow \rightarrow \downarrow \downarrow \leftarrow \leftarrow \uparrow \uparrow \uparrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \leftarrow \leftarrow \leftarrow \leftarrow \leftarrow \mathbf{B}$$

   Cada seta representa um passo do labirinto. Os dois primeiros passos já foram desenhados. **Completa o desenho do labirinto.**

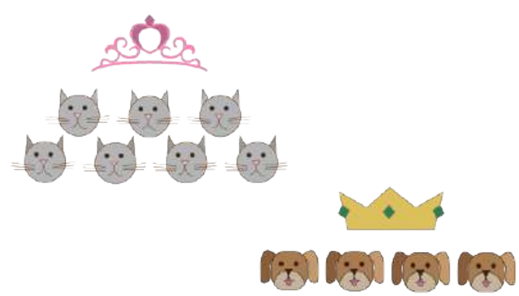


   A Mati e o Jonas vão percorrer o labirinto que tu desenhaste. O Jonas parte do ponto A e a Mati do ponto B. Enquanto a Mati dá um passo, o Jonas dá dois.

   Marca com um X o ponto onde se vão encontrar.

2. Num reino imaginado pela Mati, cada princesa tem 7 gatos e cada príncipe tem 4 cães. O rei contou 29 animais.

   Quantas princesas há no reino?

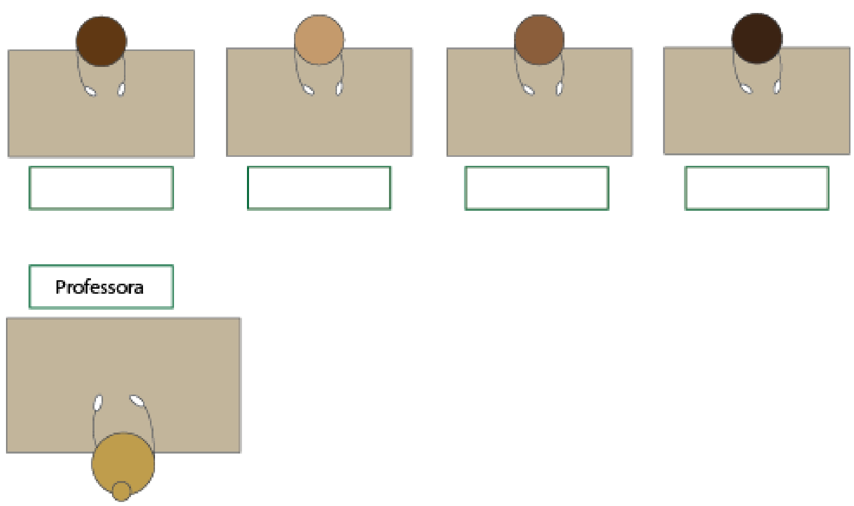


Resposta:____

3. Este ano, na sala de aula da Mati há apenas quatro alunos na fila da frente: a Mati, o Jonas, o Zeca e o Chico.

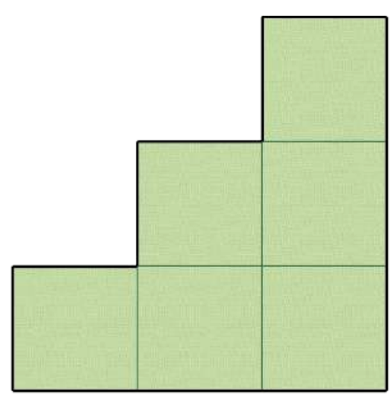
   - O primo do Jonas não está em nenhuma das pontas.
   - O Jonas é primo do Chico.
   - O rapaz que está à frente da professora não é o Jonas.
   - O Zeca tem uma rapariga ao seu lado.

   Descobre onde está cada aluno e escreve o seu nome na respetiva mesa.



4. O jardim da casa do Zeca está dividido em seis quadrados iguais como se indica na figura. O muro à volta do jardim tem 60 metros de comprimento.

   Quanto mede o lado de cada quadrado?



Resposta:____

5. A Alice fez bombons de chocolate com recheio de laranja, morango e cereja. Colocou os bombons numa caixa pela seguinte ordem: dois de laranja, um de cereja e dois de morango, repetindo sempre esta sequência.

A Alice conseguiu colocar 94 bombons na caixa.

Quantos bombons de morango colocou?

Resposta:____

6. No dia 26 de dezembro, a Zé começou a ler o livro que o avô lhe ofereceu no Natal. Leu todos os dias cinco páginas como tinha prometido ao avô.
O livro tem 136 páginas. No dia do seu aniversário, antes de começar a ler, ainda lhe faltavam 13 páginas para ler metade do livro.

Em que dia é que a Zé faz anos?

Resposta:____

Mini-Olimpíadas

Ano Letivo 2020/2021
1º Ciclo do Ensino Básico
4º ano

Critérios de Classificação

Cotações

1- 10 pontos
2- 10 pontos
3- 10 pontos
4- 10 pontos
5- 10 pontos
6- 10 pontos

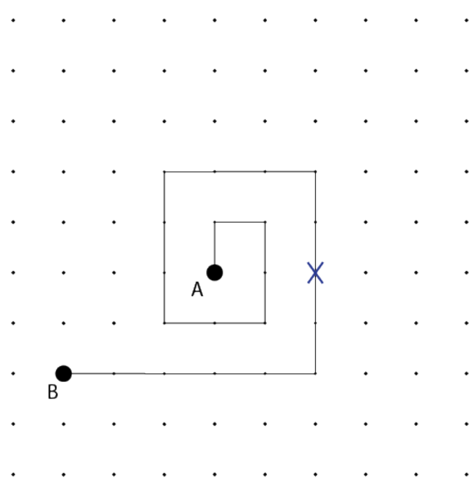
Total: 60 pontos

Critérios de Classificação

- **Se surgirem resoluções diferentes das apresentadas, a classificação ficará ao critério do professor corretor.**
- **Devem ser valorizados os raciocínios corretos (atribuindo classificações parciais) em detrimento dos cálculos efetuados.**

Exercício 1

Solução:



10 pontos

Caso a resposta não seja a correta deve ser atribuída cotação parcial conforme indicado em seguida.

Para o desenho do labirinto indicam-se as cotações parciais seguintes.

Desenha o labirinto corretamente **5 pontos**

Se o desenho do labirinto não for o correto ou não estiver completo, por cada instrução (seta) que tenha sido bem interpretada, deve ser atribuída a cotação parcial de **0,25 pontos**.

As cotações parciais para a marcação do ponto de encontro são as seguintes (e não são acumuláveis).

Com base no labirinto desenhado, marca corretamente o ponto de encontro **5 pontos**

Não marca corretamente o sítio, mas depreeende-se da resposta apresentada que sabe o número de passos que um dos dois terá de fazer, efetuando, por exemplo, o seguinte cáculo.

$21 : 3 = 7$ **4 pontos**

Não marca corretamente o ponto onde se encontram, mas indica o número de passos necessários para percorrer todo o labirinto **1 ponto**

Exercício 2

Solução: Há 3 princesas. **10 pontos**

Caso a resposta não seja a correta deve atribuir-se cotação parcial. Para esse efeito, indicam-se, em seguida, as cotações de duas propostas de resolução.

Proposta de resolução 1:

Apresenta a tabela

N.º de princesas	1	2	**3**	4
N.º de gatos	7	14	**21**	28
N.º de cães	22	15	**8**	1
O n.º de cães é um n.º múltiplo de 4?	não	não	**sim**	não

8 pontos

Conclui que há 3 princesas (e 2 príncipes). **2 pontos**

Proposta de resolução 2:

Efetua o cálculo

$7 \times 3 + 4 \times 2 = 29$ **8 pontos**

Conclui que há 3 princesas (e 2 príncipes). **2 pontos**

Caso a resposta não seja a correta, mas evidencie uma interpretação correta do enunciado através de um cálculo ou esquema, deve ser atribuída cotação parcial. Por exemplo,

$7 \times 2 + 4 = 18$ **3 pontos**

Exercício 3

Solução: Zeca - Mati - Chico - Jonas **10 pontos**

Caso a resposta não esteja correta, mas evidencie uma interpretação correta de parte do enunciado deverá ser atribuída a cotação parcial de **4 pontos**.

Exercício 4

Solução: O lado de cada quadrado mede 5 m. **10 pontos**

Caso a resposta não seja a correta deve atribuir-se cotação parcial. Para esse efeito, indicam-se, em seguida, as cotações parciais de uma proposta de resolução.

Proposta de resolução:

Efetua o cálculo

$60 : 12 = 5$ **10 pontos**

Exercício 5

Solução: Colocou 37 bombons de morango na caixa. **10 pontos**

Caso a resposta não seja a correta deve atribuir-se cotação parcial. Para esse efeito, indicam-se, em seguida, as cotações de uma proposta de resolução.

Proposta de resolução:

$$\begin{array}{r|l} 94 & 5 \\ \cline{2-2} 4 & 18 \end{array}$$

Há 18 blocos completos de cinco bombons e um bloco imcompleto de quatro bombons.
4 pontos

Há 2 bombons de morango em cada bloco completo de bombons. **1 ponto**

Também há 1 bombom de morango no bloco imcompleto de bombons. **2 pontos**

Há $18 \times 2 + 1 = 37$ bombons de morango na caixa. **3 pontos**

Devem ser cotados os cálculos efetuados utilizando valores errados calculados anteriormente.

Exercício 6

Solução: A Zé faz anos a 6 de janeiro. **10 pontos**

Caso a resposta não seja a correta deve atribuir-se cotação parcial. Para esse efeito, indicam-se, em seguida, as cotações de uma proposta de resolução.

Proposta de resolução:

Calcula o número de páginas que já leu

$136 : 2 = 68$ e $68 - 13 = 55$ **4 pontos**

Calcula o número de dias de leitura

$55 : 5 = 11$ **2 pontos**

Identifica o dia do aniversário apresentando um calendário ou efetuando cálculos

$26 + 11 = 37$ e $37 - 31 = 6$ **4 pontos**

Caso indique 5 de janeiro como dia do aniversário, da cotação parcial relativa a identificar o dia do aniversário devem ser atribuídos apenas **2 pontos**.

Devem ser cotados os cálculos efetuados utilizando valores errados calculados anteriormente.

OLIMPÍADAS
PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA

www.olimpiadas.spm.pt

XXXIX OPM - 11.11.2020 - Pré-Olimpíadas - 5º ano

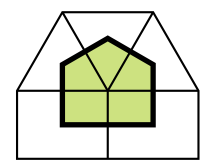
Duração: 2 horas
Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3: 10 pontos cada

Na questão 1 escolhe, em cada alínea, a opção correta.
Justifica convenientemente as tuas respostas às questões 2 e 3.
Não é permitido o uso de calculadoras.

1. (a) O João encontrou no supermercado a seguinte promoção: "Compre três pacotes de bolachas e leve o quarto pacote por apenas 6 cêntimos." O João aproveitou a promoção e pelos quatro pacotes de bolachas pagou 3 euros. Qual é o preço de um pacote de bolachas?

A) 94 cêntimos B) 96 cêntimos C) 97 cêntimos D) 98 cêntimos E) 1 euro

(b) O João uniu dois retângulos e três triângulos equiláteros, como se mostra na figura. Unindo os centros dos cinco polígonos, criou o pentágono colorido da figura. Se a área de cada retângulo é 9 cm^2 e a área de cada triângulo é 5 cm^2, qual é a área, em cm^2, do pentágono?



A) $\frac{19}{2}$ B) $\frac{21}{2}$ C) $\frac{23}{2}$ D) 12 E) 14

(c) O João disse a um amigo: "A metade do triplo da minha idade é o dobro da terça parte da tua idade." Qual é o quociente entre a idade do mais velho dos dois e a idade do outro?

A) 1 B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{9}{4}$ D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{9}{2}$

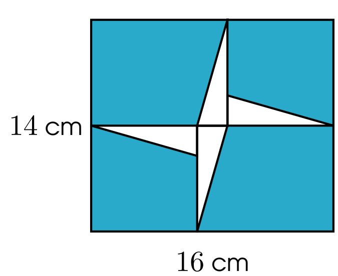
(d) O João partilhou as suas bolachas com os amigos. O Afonso comeu metade das bolachas que o Bruno comeu, o Carlos comeu mais três bolachas do que o Afonso, o David só comeu uma bolacha e o João comeu tantas bolachas como as que os seus amigos comeram juntos. Ao todo comeram 80 bolachas. Quantas bolachas comeu o Carlos?

A) 9 B) 12 C) 15 D) 16 E) 18

(e) O João comprou 120 selos nos correios, alguns com o valor de 3 cêntimos e os restantes de 6 cêntimos. O João pagou com uma nota de 5€. Qual é que poderia ter sido o troco?

A) 0€ B) $0,74$€ C) $1,05$€ D) $1,52$€ E) $1,70$€

2. O Luís vai restaurar um vitral retangular com 16 cm de comprimento e 14 cm de largura. O vitral é formado por quatro triângulos retângulos iguais de cor branca, e quatro quadriláteros de cor azul, como mostra a figura. Sabendo que ele deverá substituir toda a parte azul, qual é a área de vidro que será substituída?



3. Numa árvore estão três pássaros em cada ramo e há um pássaro a voar por cima. De repente, os pássaros levantam voo e, de seguida, pousam todos, quatro por ramo, ficando um ramo sem nenhum pássaro. Quantos ramos tem a árvore?

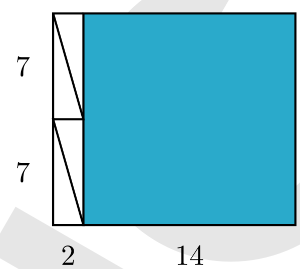
XXXIX OPM - 11.11.2020 - Pré-Olimpíadas - 5º ano

Sugestões para a resolução dos problemas

Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3: 10 pontos cada

1. (a) Opção D. (*Os três pacotes custaram* $3 - 0,06 = 2,94$€, *logo cada pacote custa* $\frac{2,94}{3} = 0,98$€)
   (b) Opção A. (*A área ocupa um triângulo equilátero e meio retângulo, ou seja,* $5 + \frac{9}{2} = \frac{19}{2}$ *cm*^{2}.)
   (c) Opção C. (*Multiplicando a idade do João por* $\frac{3}{2}$ *e novamente por* $\frac{3}{2}$, *obtemos a idade do amigo.*)
   (d) Opção B. (*O Afonso, Bruno, Carlos e João comeram respetivamente* 9, 18, 12 *e* 40 *bolachas.*)
   (e) Opção B. (*O troco pode variar entre* 0€ *e* $1,40$€ *e, em cêntimos, tem resto* 2 *na divisão por* 3.)

2. Começamos por calcular as medidas dos catetos dos triângulos retângulos. Como no lado menor do retângulo, que mede 14 cm, cabem dois catetos iguais, estes medem 7 cm cada um. Por sua vez, no lado maior do retângulo, que mede 16 cm, cabem dois catetos dos já calculados, e um cateto menor. Logo, o cateto menor mede 2 cm. Assim sendo, a área total dos triângulos retângulos é a área de um retângulo de lados 2 e 14. Subtraindo esta área ao retângulo maior, podemos concluir que a área da parte azul é a área de um quadrado com 14 cm de lado, ou seja, mede 196 cm^2.



3. Para passar da primeira distribuição para a segunda, três pássaros que estavam num dos ramos e o pássaro que estava a voar vão pousar na árvore. Como cada ramo já contém três pássaros, só necessitamos de colocar um novo pássaro em cada um dos ramos já ocupados, logo haverá quatro ramos com quatro pássaros. Uma vez que um ramo ficou vazio, a árvore tem cinco ramos.

XXXIX OPM - 1ª Eliminatória - 11.11.2020 - Categoria Júnior - 6º/7º anos

Duração: 2 horas
Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3, 4: 8 pontos cada

Na questão 1 escolhe, em cada alínea, a opção correta.
Justifica convenientemente as tuas respostas às questões 2, 3 e 4.
Não é permitido o uso de calculadoras.

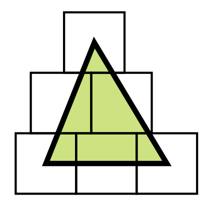
1. (a) A Ana aguarda ansiosamente pelas férias de Natal e passa os seus dias a observar o movimento dos ponteiros do seu relógio. Quantas vezes se cruzam os ponteiros das horas e dos minutos do relógio da Ana ao longo de um dia completo, desde as 0h01 até às 23h59?

   A) 12 B) 21 C) 22 D) 23 E) 24

   (b) Numa árvore estão três pássaros em cada ramo e há um pássaro a voar por cima. De repente, os pássaros levantam voo e, de seguida, pousam todos, quatro por ramo, ficando um ramo sem nenhum pássaro. Quantos ramos tem a árvore?

   A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

   (c) Na figura estão desenhados seis quadrados iguais e um triângulo cujos vértices são os centros de três dos quadrados. O triângulo tem 30 cm^2 de área. Qual é a área de cada quadrado?

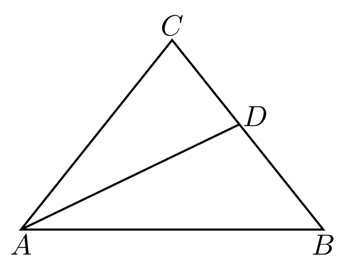


   A) 5 cm^2 B) 15 cm^2 C) 30 cm^2 D) 45 cm^2 E) 60 cm^2

   (d) Para escrever as medidas das amplitudes dos três ângulos de um triângulo, em graus, utilizaram-se seis algarismos: $7, 7, 7, 6, 5$ e 4. Além disso, um dos ângulos mede menos $20°$ que outro. Quanto mede o ângulo menor?

   A) $45°$ B) $46°$ C) $56°$ D) $64°$ E) $74°$

2. Na figura seguinte, $[ABC]$ é um triângulo e D é o ponto de interseção da bissetriz do ângulo BAC com $[CB]$. Sabendo que $\overline{CA} = \overline{CB} = \overline{AD}$, determina a amplitude do ângulo ACB.



3. Um número chama-se *repetitivo* se for formado por um conjunto de algarismos que se repete da esquerda para a direita. Por exemplo, 222222, 232323 e 747747 são repetitivos, mas 245642 não é. Quantos números de seis algarismos são repetitivos?

4. Numa rua há dez casas. As casas estão em fila, lado a lado. De quantas maneiras é possível pintar todas as casas de azul, branco e castanho de modo que cada casa tenha um único vizinho com a casa pintada da mesma cor?

XXXIX OPM - 1ª Eliminatória - 11.11.2020 - Categoria Júnior - 6º/7º anos

Sugestões para a resolução dos problemas

Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3, 4: 8 pontos cada

1. (a) Opção B. (*Cruzam-se uma vez a cada* $\frac{12}{11}$ *horas.*)
   (b) Opção C. (*Há* 16 *pássaros e* 5 *ramos.*)
   (c) Opção B. (*O triângulo tem o dobro da área de um quadrado.*)
   (d) Opção B. (*As amplitudes são* $46°$, $57°$ *e* $77°$.)

2. Sendo $\dot{A}D$ a bissetriz de $\angle BAC$, tem-se que $B\widehat{A}D = D\widehat{A}C = \beta$. Como $\overline{CA} = \overline{CB}$, tem-se que $C\widehat{B}A = B\widehat{A}C = 2\beta$, portanto, $A\widehat{C}B = 180° - 4\beta$.

   Por outro lado, também o triângulo $\overline{AC} = \overline{AD}$, logo $A\widehat{D}C = A\widehat{C}D = A\widehat{C}B$ e, por isso, $\beta = 180° - 2A\widehat{C}B$.

   Portanto, $A\widehat{C}B = 180° - 4\beta = 180° - 4(180° - 2A\widehat{C}B)$, ou seja, $A\widehat{C}B = \frac{3}{7} \times 180°$.

3. **Solução 1:** Um número repetitivo que usa apenas um algarismo é da forma $AAAAAA$, onde há 9 escolhas possíveis para A. Portanto, neste caso, há 9 números repetitivos.

   Um número repetitivo que usa dois algarismos é da forma $ABABAB$, $AABAAB$, $ABBABB$ ou $ABAABA$, onde há 9 escolhas possíveis para A e 9 escolhas possíveis para B. Portanto, neste caso, há $4 \times 9 \times 9 = 324$ números repetitivos.

   Um número repetitivo que usa três algarismos é da forma $ABCABC$, onde há 9 escolhas possíveis para A, 9 escolhas possíveis para B e 8 escolhas possíveis para C. Portanto, neste caso, há $9 \times 9 \times 8 = 648$ números repetitivos.

   Portanto, ao todo há $9 + 324 + 648 = 981$ números repetitivos.

   Solução 2: Um número repetitivo que repete um conjunto de três algarismos é da forma $ABCABC$ onde A, B e C podem ser iguais e o número ABC está entre 100 e 999. Portanto, neste caso há 900 números repetitivos.

   Um número repetitivo que repete um conjunto de dois algarismos, que não esteja já contabilizado, é da forma $ABABAB$ onde A e B são diferentes. Logo há 9 possibilidades para A e 9 possibilidades para B. Portanto, neste caso há $9 \times 9 = 81$ números repetitivos.

   Os números repetitivos que repetem um conjunto de apenas um algarismo já foram contabilizados no primeiro caso.

   Portanto, ao todo há $900 + 81 = 981$ números repetitivos.

4. A primeira casa tem um único vizinho, por isso a segunda casa tem que ser pintada da mesma cor que a primeira. Há três escolhas para a cor dessas duas casas. Como as duas primeiras são da mesma cor, a terceira tem que ser pintada de uma cor diferente (portanto há duas escolhas) para que a segunda casa não tenha dois vizinhos com a casa da mesma cor. Agora a quarta casa tem que ser pintada da mesma cor que a terceira. Da mesma maneira se vê que as quinta e sexta casas, sétima e oitava, nona e décima têm que ser da mesma cor, respetivamente. Para cada um destes pares temos duas escolhas para a sua cor. Assim, há $3 \times 2^4 = 48$ maneiras de pintar as casas.

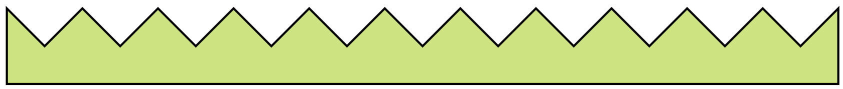
OLIMPÍADAS
PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA
www.olimpiadas.spm.pt

XXXIX OPM - 2ª Eliminatória - 28.04.2021 - Categoria Júnior - 6º/7º anos

Duração: 2 horas
Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3, 4: 8 pontos cada

Na questão 1 escolhe, em cada alínea, a opção correta.
Justifica convenientemente as tuas respostas às questões 2, 3 e 4.
Não é permitido o uso de calculadoras.

1. (a) Com um retângulo de cartolina, o Belchior fez uma coroa de rei, recortando triângulos isósceles iguais até metade da altura da cartolina, como na figura. Que fração do retângulo inicial ocupa a coroa?



A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{4}{5}$ E) $\frac{5}{6}$

(b) Um número de dois algarismos chama-se $mago$ se tiver um algarismo par e outro ímpar. Por exemplo, 50 é um número mago. Quantos números magos existem?

A) 25 B) 35 C) 36 D) 40 E) 45

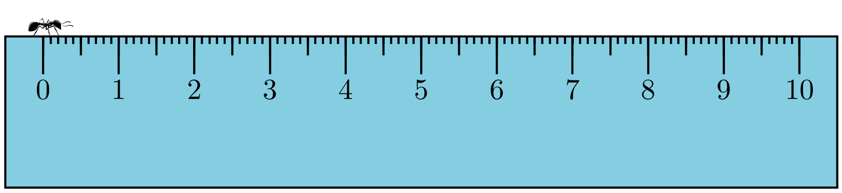
(c) O Baltazar somou o comprimento de três lados de um retângulo e obteve como resultado 44 cm. O Gaspar também somou os comprimentos de três lados do mesmo retângulo e obteve 40 cm. Quantos centímetros mede o perímetro desse retângulo?

A) 42 B) 48 C) 56 D) 64 E) 84

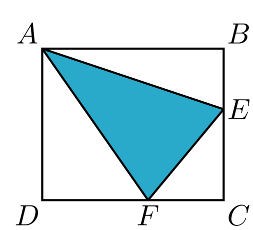
(d) No clube dos Magos do Oriente, todos os sócios podem votar para escolher o presidente. Nas últimas eleições havia dois candidatos. O vencedor obteve o dobro dos votos do adversário. Os sócios Belchior, Baltazar e Gaspar não estavam presentes e foram os únicos sócios que não votaram. Sabendo que 64% dos sócios votaram no vencedor, quantos sócios tem o clube?

A) 64 B) 75 C) 96 D) 100 E) 133

2. Uma formiga desloca-se ao longo de uma régua graduada, com marcações de 0 a 10 cm, como na figura. A formiga começa o seu trajeto sobre o número 0. Em cada segundo, a formiga desloca-se 1 cm. Sempre que a formiga chega ao número 0 ou ao número 10, volta-se e começa a deslocar-se no sentido contrário. Este processo demora 1 segundo. Sobre que número da régua estará a formiga passados 2021 segundos?



3. Na figura seguinte, o retângulo $[ABCD]$ tem área 60 cm^2. A área do triângulo $[ABE]$ é um quinto da área de $[ABCD]$ e a área do triângulo $[EFC]$ é um oitavo da área do retângulo. Qual é a área do triângulo sombreado?



4. O alfabeto do idioma Cinquês tem cinco letras: A, B, C, D, E. O idioma é composto por todas as palavras de quatro letras que têm exatamente um par de letras consecutivas iguais. Por exemplo, CCAC é uma palavra do idioma Cinquês. Quantas palavras tem o idioma Cinquês?

XXXIX OPM - 2ª Eliminatória - 28.04.2021 - Categoria Júnior - 6º/7º anos

Questão 1: cada opção correta: 4 pontos cada opção errada: -1 ponto Questões 2, 3, 4: 8 pontos cada

Sugestões para a resolução dos problemas

1. (a) Como se pode observar na figura, os triângulos que o Belchior recortou ocupam $\frac{1}{4}$ da área do retângulo inicial. Portanto a coroa ocupa $\frac{3}{4}$ do retângulo inicial. Opcão C)

   (b) Se o primeiro algarismo do número mago é par, poderá ser $2, 4, 6$ ou 8, logo temos 4 possibilidades. O segundo algarismo, neste caso, terá de ser ímpar ($1, 3, 5, 7$ ou 9), logo temos 5 possibilidades. Assim, haverá $4 \times 5 = 20$ números magos deste tipo. Se o primeiro algarismo do número mago é ímpar, poderá ser $1, 3, 5, 7$ ou 9, logo temos 5 possibilidades. O segundo algarismo, neste caso, terá de ser par ($0, 2, 4, 6$ ou 8), logo temos 5 possibilidades. Assim, haverá $5 \times 5 = 25$ números magos deste tipo. Portanto, no total, haverá $20 + 25 = 45$ números magos. Opcão E)

   (c) Ao somarmos o resultado obtido pelo Baltazar com o resultado obtido pelo Gaspar obtém-se o triplo da soma do comprimento com a largura do retângulo. Assim, a soma do comprimento com a largura é $\frac{1}{3}(44 + 40) = 28$. O perímetro do retângulo mede $2 \times 28 = 56$ cm. Opção C)

   (d) Como o vencedor obteve o dobro dos votos do adversário e 64% votaram no vencedor, 32% votaram no outro candidato. Assim $100 - (64 + 32) = 4\%$ dos sócios não votaram. Sabemos que foram 3 sócios que não votaram, se x é o número de sócios do clube, tem-se

$$\begin{array}{c} 4 - 100 \\ 3 - x \end{array}$$

   logo $x = \frac{300}{4}$. O clube tem 75 sócios. Opção B)

2. A formiga demora $10 + 1 + 10 + 1 = 22$ segundos a dar uma volta completa e virar-se até ficar na posição original. Como $2021 = 91 \times 22 + 19$, então, ao fim de 2021 segundos, a formiga deu 91 voltas completas e gastou 19 segundos na última volta. Nesta última volta, gastou 11 segundos na primeira metade e mais 8 segundos, pelo que a formiga terminou no número $10 - 8 = 2$.

3. Do enunciado vem diretamente que:

   (a) Área$[ABCD] = \overline{AB} \times \overline{BC} = 60$;

   (b) Área$[ABE] = \frac{\overline{AB} \times \overline{BE}}{2} = 12$;

   (c) Área$[ECF] = \frac{\overline{EC} \times \overline{CF}}{2} = 7,5$.

   Das duas primeiras igualdades deduzimos que $\overline{AB} = \dfrac{60}{\overline{BC}} = \dfrac{24}{\overline{BE}} \Rightarrow \overline{BE} = \dfrac{2}{5}\overline{BC}$, donde se deduz que $\overline{EC} = \frac{3}{5}\overline{BC}$, e portanto $\overline{EC} = \dfrac{36}{\overline{AB}}$. Usando agora a terceira igualdade, sabemos que $\overline{EC} = \dfrac{15}{\overline{CF}}$ donde podemos concluir que $\dfrac{36}{\overline{AB}} = \dfrac{15}{\overline{CF}}$ e que $\overline{DF} = \overline{AB} - \dfrac{15}{36}\overline{AB} = \dfrac{21}{36}\overline{AB}$.

   Finalmente podemos calcular que Área$[AFD] = \dfrac{\overline{AD} \times \overline{DF}}{2} = \dfrac{1}{2}\overline{BC} \times \dfrac{21}{36}\overline{AB} = \dfrac{1}{2}\dfrac{60 \times 21}{36} = 17,5$.

   Área$[AEF]$ =Área$[ABCD]$-(Área$[ABE]$+Área$[ECF]$+Área$[EFD]$)$= 60 - (12 + 7,5 + 17,5) = 23$cm^2.

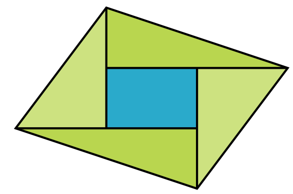
4. Há 5 escolhas possíveis para a letra do par de letras consecutivas iguais e 3 escolhas possíveis para a posição desse par (no início, no meio ou no fim da palavra). Para cada uma das restantes letras há 4 escolhas possíveis. Assim, ao todo há $5 \times 3 \times 4 \times 4 = 240$ palavra no idioma Cinquês.

XXXIX OPM - Final - 11.09.2021 - Categoria Júnior - 6º/7º anos

Duração: 3 horas
Questão 1: 16 pontos
Questões 2, 3 e 4: 8 pontos cada

Justifica convenientemente as tuas respostas e indica os principais cálculos.
Não é permitido o uso de calculadoras.

1. (a) O convite da festa de anos do Filipe contém um retângulo central com 17 cm^2 de área. Prolongando cada lado deste retângulo para o dobro, obtém-se um vértice do convite, como na figura. Qual é a área total do convite, em cm^2?



A) 34 B) 51 C) 68 D) 85 E) 102

(b) Para a sua festa, o Filipe preparou cinco jarros cheios de sumo de laranja, respetivamente com 15 dl, 16 dl, 19 dl, 20 dl, 31 dl de bebida. Cada copo que serviu aos amigos levava 30 cl de sumo. No final da festa, ficou com quatro jarros vazios e um cheio. Qual é capacidade do jarro que ficou cheio?

A) 15 dl B) 16 dl C) 19 dl D) 20 dl E) 31 dl

(c) O Filipe organizou uma competição com os amigos. Um dos desafios era descobrir o algarismo das unidades do número $2^{2021} + 0^{2021} + 2^{2021} + 1^{2021}$. Qual é a solução deste desafio?

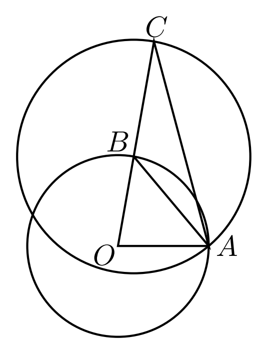
A) 1 B) 3 C) 5 D) 7 E) 9

(d) No final da competição, o Filipe entregou um prémio a cada um dos seus 21 amigos. O prémio por uma medalha de ouro era de 20 rebuçados, por uma de prata 10 rebuçados, por uma de bronze 5 rebuçados e por uma menção honrosa 2 rebuçados. A quem não recebeu nenhum deste prémios, o Filipe deu um rebuçado. O número de amigos medalhados foi um sexto do número de amigos que não recebeu nenhuma medalha. Ao todo, o Filipe entregou 54 rebuçados. Sabendo que não houve medalhas de prata, quantas menções honrosas houve?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

2. A Ana, o Bruno e o Carlos jogaram um jogo de cartas. Em cada ronda, há sempre dois vencedores e um perdedor e cada um dos vencedores recebe do perdedor tantas fichas como as que já tem, ficando assim com o dobro das fichas. Após três rondas, cada um dos jogadores perdeu uma única vez e, no final, cada um ficou com 24 fichas. Quantas fichas tinha cada um dos jogadores no início do jogo?

3. Na figura ao lado, $[AB]$ é uma corda da circunferência de centro O. O ponto C está na interseção do prolongamento do raio $[OB]$ com a circunferência de centro em B que passa por A. Sabendo que $A\hat{O}B = 80°$, qual é o valor de $O\hat{C}A$?



4. No final de umas Olimpíadas de Matemática, a Mariana e a Sofia estavam a conversar. Ao olhar em volta, a Mariana reparou que os outros 8 participantes também estavam a conversar em pares. A Mariana perguntou então a cada participante com quantos participantes é que tinha conversado e obteve 9 respostas diferentes. Qual foi a resposta da Sofia?

XXXIX OPM - Final - 11.09.2021 - Categoria Júnior - 6°/7° anos

Duração: 3 horas
Questão 1: 16 pontos
Questões 2, 3 e 4: 8 pontos cada

Sugestões para a resolução dos problemas

1. (a) Um cateto de cada triângulo mede o dobro do comprimento do retângulo e o outro cateto mede o mesmo que a largura. Logo cada triângulo tem a mesma área do retângulo, ou seja, 17 cm2. Portanto, a área total do convite é $5 \times 17 = 85$ cm^2.

   Opção correta: D)

   (b) A quantidade total de sumo é $15 + 16 + 19 + 20 + 31 = 101$ dl. Como cada copo servido leva 3 dl de sumo, a quantidade total de sumo dá para 33 copos, sobrando 2 dl de sumo. Portanto, a quantidade de sumo final foi um múltiplo de 3 mais 2 dl. Portanto, o único jarro possível é o de $20 = 6 \times 3 + 2$ dl.

   Opção correta: D)

   (c) O algarismo das unidades das potências de 2 repete-se de quatro em quatro: $2, 4, 8, 6, 2, \ldots$

   Como $2021 = 505 \times 4 + 1$, então o algarismo das unidades de 2^{2021} é 2.

   Logo a algarismo das unidades de $2^{2021} + 0^{2021} + 1^{2021} + 2^{2021}$ é $2 + 0 + 1 + 2 = 5$.

   Opção correta: C)

   (d) O número de medalhados é um sexto do número de não medalhados, logo é um sétimo do total. Portanto, houve $21/7 = 3$ amigos medalhados e $3 \times 6 = 18$ amigos não medalhados.

   Os amigos não medalhados receberam entre 18 e $18 \times 2 = 36$ rebuçados, logo os amigos medalhados receberam entre $54 - 36 = 18$ e $54 - 18 = 36$ rebuçados.

   Como não houve medalhas de prata, houve 1 medalha de ouro e 2 de bronze. Assim, os amigos medalhados receberam $20 + 2 \times 5 = 30$ rebuçados e os não medalhados receberam $54 - 30 = 24$ rebuçados, dos quais $24 - 18 = 6$ menções honrosas.

   Opção correta: A)

2. Na última ronda, os vencedores duplicaram as suas fichas, logo no início dessa ronda tinham $24/2 = 12$ fichas. Portanto, o perdedor tinha $24 + 12 + 12 = 48$ fichas.

   No início da segunda ronda, os vencedores tinham $48/2 = 24$ e $12/2 = 6$ fichas e o perdedor tinha $12 + 24 + 6 = 42$ fichas.

   No início da primeira ronda, os vencedores tinham $24/2 = 12$ e $42/2 = 21$ fichas e o perdedor tinha $6 + 12 + 21 = 39$ fichas.

3. Como $\overline{OB} = \overline{OA}$, então $O\hat{A}B = O\hat{B}A = \dfrac{180 - 80}{2} = 50°$, uma vez que a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é $180°$.

   Como $\overline{BA} = \overline{BC}$, então $B\hat{C}A = B\hat{A}C = 50/2 = 25°$, uma vez que a amplitude de um ângulo externo de um triângulo é igual à soma das amplitudes dos ângulos internos não adjacentes.

4. Como todos os participantes estavam a conversar, as respostas obtidas foram $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ e 9.

   A pessoa que estava a conversar com a pessoa que respondeu 1 é a única que conversou com ela, logo é a única que pode ter respondido 9.

   A pessoa que estava a conversar com a pessoa que respondeu 2 é, para além da pessoa que respondeu 9, a única que conversou com ela, logo é a única que pode ter respondido 8.

   Repetindo o raciocínio, concluimos que a pessoa que respondeu 3 estava a falar com a pessoa que respondeu 7 e a pessoa que respondeu 4 estava a falar com a pessoa que respondeu 6.

   Portanto, a Sofia respondeu 5.

Olimpíadas Portuguesas de Matemática

www.olimpiadas.spm.pt

XXXIX OPM - 1ª Eliminatória - 11.11.2020 - Categoria A - 8º/9º anos

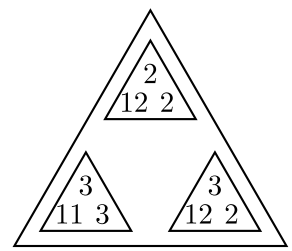
Duração: 2 horas
Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3, 4: 8 pontos cada

Na questão 1 escolhe, em cada alínea, a opção correta.
Justifica convenientemente as tuas respostas às questões 2, 3 e 4.
Não é permitido o uso de calculadoras.

1. (a) A Maria faz coleção de moedas. Ele tinha as moedas guardadas em caixas, com 17 moedas em cada caixa. O avô deu-lhe uma moeda nova, e a Maria decidiu agora guardar 20 moedas em cada caixa e ficou com uma caixa vazia. Quantas caixas tem a Maria?

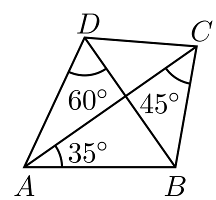
   A) 1 B) 3 C) 5 D) 7 E) 9

   (b) Para passar o tempo, a Maria e os seus vizinhos inventaram uma operação triangular. Quando escrevem os números a, b e c num triângulo $\triangle\begin{smallmatrix} c \\ a\ \ b \end{smallmatrix}$ esse triângulo toma o valor do número $\dfrac{a+b\times c}{a-b\times c}$. Por exemplo, o valor do triângulo $\triangle\begin{smallmatrix} 1 \\ 3\ \ 2 \end{smallmatrix}$ é 5. Qual é o valor do triângulo maior da figura ao lado?



   A) 2 B) 4 C) 9 D) 12 E) 15

   (c) A Maria desenhou um quadrilátero $[ABCD]$ de tal modo que $B\hat{A}C = 35°$, $A\hat{C}B = 45°$, $A\hat{D}B = 60°$ e a reta BD divide o ângulo ABC em dois ângulos iguais. Quanto mede $D\hat{A}C$?



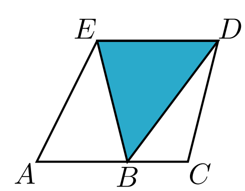
   A) $15°$ B) $20°$ C) $25°$ D) $30°$ E) $35°$

   (d) Na rua da Maria há dez casas. As casas estão em fila lado a lado. De quantas maneiras é possível pintar todas as casas de azul, branco e castanho de modo que cada casa tenha um único vizinho com a casa pintada da mesma cor.

   A) 3 B) 6 C) 24 D) 40 E) 48

2. O João tem vários lápis e canetas. Ele começou a formar grupos com duas canetas e um lápis, mas as canetas acabaram quando restavam cinco lápis. Depois juntou tudo de novo e começou a formar grupos de três lápis e uma caneta, mas os lápis acabaram quando restavam 25 canetas. Quanto lápis e quantas canetas tem o João?

3. O Guilherme desenhou um trapézio $[ACDE]$, com área 18 cm^2, tal que $\overline{ED} = 4$ cm. Sabe-se que, em cm, a altura do trapézio é um número inteiro e o comprimento de $[AC]$ é um número inteiro ímpar. Quanto mede a área de $[EDB]$?



4. Determina todas as possibilidades para a, b, c e d, onde estes são inteiros positivos com $a \leq b \leq c \leq d$ e tais que

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)\left(1+\frac{1}{d}\right) = 10.$$

XXXIX OPM - 1ª Eliminatória - 11.11.2020 - Categoria A - 8º/9º anos

Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3, 4: 8 pontos cada

Sugestões para a resolução dos problemas

1. (a) Opção D. (*Há* 120 *moedas e* 7 *caixas, uma vez que* $7 \times 17 + 1 = 6 \times 20$.)
   (b) Opção B. (*Os três triângulos pequenos têm o valor de* 10, 3 *e* 2.)
   (c) Opção E. ($D\widehat{B}A = 50^\circ$ *e* $B\widehat{A}D = 70^\circ$.)
   (d) Opção E. (*Cada par de casas consecutivas está pintado da mesma cor, logo há* 3×2^4 *escolhas*.)

2. Seja x o número de lápis do João. Como, ao formar grupos com duas canetas e um lápis, as canetas acabaram quando restavam cinco lápis, então o João tem $2\times(x-5) = 2x-10$ canetas. Por outro lado, ao formar grupos de três lápis e uma caneta, os lápis acabaram quando restavam 25 canetas, logo, $x = 3 \times ((2x-10)-25))$, ou seja, $x = 6x - 105$. Logo o João tem $x = 21$ lápis e $2x - 10 = 32$ canetas.

3. Seja h a altura do trapézio. Usando a fórmula da área de um trapézio e os dados do enunciado, sabemos que
$$18 = \frac{4+\overline{AC}}{2} \times h,$$
ou equivalentemente,
$$36 = (4+\overline{AC}) \times h.$$
Como $\overline{AC}$ é um inteiro ímpar e h é um inteiro, para determinar estes valores, precisamos de analisar as fatorizações inteiras de 36 como produto de dois inteiros, tais que um deles $(4+\overline{AC})$ é ímpar e maior do que 4. Ora, a única possibilidade é $36 = 9 \times 4$. Daí concluímos que $\overline{AC} = 9 - 4 = 5$ e $h = 4$. Como as alturas do trapézio e do triângulo azul coincidem, temos que a área de $[EDB]$ mede $\frac{4\times 4}{2} = 8$ cm^2 .

4. Comecemos por notar que $1 + \dfrac{1}{a}$ diminui quando a aumenta. Se $a \geq 2$, então cada um dos fatores é menor ou igual a $1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$. Assim teríamos $\left(1+\dfrac{1}{a}\right)\left(1+\dfrac{1}{b}\right)\left(1+\dfrac{1}{c}\right)\left(1+\dfrac{1}{d}\right) \leq \left(\dfrac{3}{2}\right)^4 = \dfrac{81}{16} < 10$. Logo $a = 1$ e, portanto,
$$\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)\left(1+\frac{1}{d}\right) = 5.$$
Se $b \geq 2$, então cada um dos fatores é menor ou igual a $\dfrac{3}{2}$, pelo que $\left(1+\dfrac{1}{b}\right)\left(1+\dfrac{1}{c}\right)\left(1+\dfrac{1}{d}\right) \leq \left(\dfrac{3}{2}\right)^3 = \dfrac{27}{8} < 5$. Logo $b = 1$ e, portanto,
$$\left(1+\frac{1}{c}\right)\left(1+\frac{1}{d}\right) = \frac{5}{2}.$$
De modo idêntico, se $c \geq 2$, teríamos $\left(1+\dfrac{1}{c}\right)\left(1+\dfrac{1}{d}\right) \leq \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{9}{4} < \dfrac{5}{2}$. Logo $c = 1$ e, portanto, $\left(1+\dfrac{1}{d}\right) = \dfrac{5}{4}$, o que implica $d = 4$.
Logo $(a, b, c, d) = (1, 1, 1.4)$ é a única solução.

OLIMPÍADAS
PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA
www.olimpiadas.spm.pt

XXXIX OPM - 2ª Eliminatória - 28.04.2021 - Categoria A - 8º/9º anos

Duração: 2 horas
Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3, 4: 8 pontos cada

Na questão 1 escolhe, em cada alínea, a opção correta.
Justifica convenientemente as tuas respostas às questões 2, 3 e 4.
Não é permitido o uso de calculadoras.

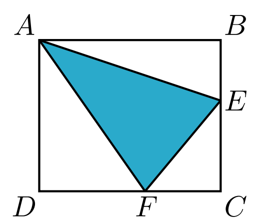
1. (a) O João começou a escrever os números $1, 4, 7, 10$, e assim sucessivamente, somando sempre 3 unidades ao número anterior. Só parou quando reparou que iria escrever um número de 5 algarismos. Quantos números escreveu o João?

A) 999 B) 1234 C) 3000 D) 3333 E) 9999

(b) Um número de quatro algarismos chama-se *superímpar* se tiver um número ímpar de algarismos ímpares. Por exemplo, 2021 é um número superímpar. Quantos números superímpares existem?

A) 2500 B) 3000 C) 3500 D) 4000 E) 4500

(c) Na figura seguinte, o retângulo $[ABCD]$ tem área 60 cm^2. A área do triângulo $[ABE]$ é um quinto da área de $[ABCD]$ e a área do triângulo $[EFC]$ é um oitavo da área do retângulo. Qual é a área do triângulo sombreado?



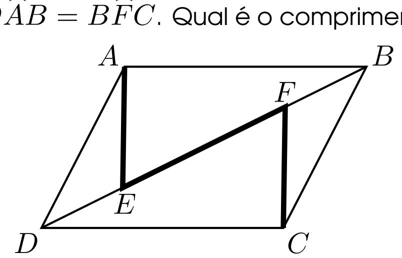
A) 22 cm^2 B) 23 cm^2 C) 24 cm^2 D) 25 cm^2 E) 26 cm^2

(d) Um canguru sobe uma escada da seguinte forma: começa por saltar para o degrau 3, e depois salta 1 degrau para baixo, depois 5 para cima, depois 3 para baixo, depois 7 para cima, depois 5 para baixo, 9 para cima e assim sucessivamente (cada salto é dois degraus mais longo que o salto anterior no mesmo sentido). Um dos degraus está partido e o canguru cai se saltar para ele. O canguru vai conseguir subir a escada sem cair, se o degrau partido for o:

A) 200 B) 201 C) 202 D) 203 E) 204

2. O alfabeto do idioma Cinquês tem cinco letras: A, B, C, D, E. O idioma é composto por todas as palavras de quatro letras que têm exatamente um par de letras consecutivas iguais. Por exemplo, CCAC é uma palavra do idioma Cinquês. Quantas palavras tem o idioma Cinquês?

3. Na figura está representado um paralelogramo $[ABCD]$ tal que $\overline{AB} = 8$, $\overline{AD} = 6$ e $\overline{BD} = 12$. Os pontos E e F de $[BD]$ são tais que $A\hat{E}D = D\hat{A}B = B\hat{F}C$. Qual é o comprimento da linha poligonal $AEFC$?



4. Na escola do João e da Ana há quatro desportos à escolha. Cada aluno tem de se inscrever pelo menos num desporto. O João só quer praticar desportos em que a Ana também esteja. No entanto, a Ana quer inscrever-se em pelo menos um desporto sem o João. De quantas formas podem eles escolher os seus desportos de modo que isto aconteça?

Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3, 4: 8 pontos cada

Sugestões para a resolução dos problemas

1. (a) Opção D. $(1 + 3 \times 3333 = 10000)$
   (b) Opção E. $(5^4 + 3 \times (4 \times 5^3) + 4 \times 5^3 + 3 \times 5^4 = 4500)$
   (c) Opção B. $(\overline{BE} = \frac{2}{5}\overline{BC},\ \overline{CF} = \frac{15}{36}\overline{AB},$ Área$[ADF] = 17,5)$
   (d) Opção B. $(\textit{Atinge todos os degraus pares, e todos os degraus da forma } 4n + 3.)$

2. Há 5 escolhas possíveis para a letra do par de letras consecutivas iguais e 3 escolhas possíveis para a posição desse par (no ínicio, no meio ou no fim da palavra). Para cada uma das restantes letras há 4 escolhas possíveis.

   Assim, ao todo há $5 \times 3 \times 4 \times 4 = 240$ palavra no idioma Cinquês.

3. Observe-se que $\overline{AD} = \overline{BC}$, $A\widehat{D}E = F\widehat{B}C$ e $A\widehat{E}D = B\widehat{F}C$, por isso, os triângulos $[AED]$ e $[CFB]$ são congruentes e $\overline{DE} = \overline{FB}$.

   Por outro lado, $D\widehat{A}B = A\widehat{E}D$ e $A\widehat{D}E = A\widehat{D}B$, logo o critério AA garante que os triângulos $[AED]$ e $[BAD]$ são semelhantes. Assim,
   $$\frac{\overline{AE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{ED}}{\overline{AD}}$$
   donde se conclui que $\overline{AE} = 4$ e $\overline{ED} = 3$.

   Portanto, a linha poligonal $AEFC$ mede:
   $$\overline{AE} + \overline{EF} + \overline{FC} = \overline{AE} + (\overline{DB} - 2\,\overline{DE}) + \overline{AE} = 4 + 12 - 2 \times 3 + 4 = 14.$$

4. Como a Ana tem de se inscrever em pelo menos um desporto onde o João não esteja inscrito, o João pode escolher 1, 2 ou 3 desportos diferentes. Se optar por 1 desporto apenas, pode fazê-lo de 4 formas. Neste caso, a Ana tem de praticar o desporto escolhido pelo João e escolher pelo menos mais um desporto. Como ainda há 3 desportos disponíveis, a Ana tem 3 possibilidades se optar por apenas mais um desporto; 3 possibilidades se optar por 2 desportos; e 1 possibilidade apenas se optar pelos 3 desportos. Há portanto
   $$4 \times (3 + 3 + 1) = 28$$
   possibilidades.

   Se o João optar por praticar 2 desportos, pode escolhê-los de 6 formas diferentes. A Ana pode então escolher praticar mais 1 ou 2 desportos. Tem 2 possibilidades de escolher mais 1 desporto e tem 1 possibilidade de escolher praticar todos os desportos. Neste caso, há
   $$6 \times (2 + 1) = 18$$
   possibilidades.

   Finalmente, se o João optar por praticar 3 desportos, pode escolhê-los de 4 formas diferentes, enquanto que a Ana tem forçosamente de escolher todos os desportos. Há 4 possibilidades neste caso.

   Assim, há um total de $28 + 18 + 4 = 50$ possíveis escolhas.

XXXIX OPM - Final - 11.09.2021 - Categoria A - 8º/9º anos

Duração: 3 horas
Questão 1: 16 pontos
Questões 2, 3 e 4: 8 pontos cada

Justifica convenientemente as tuas respostas e indica os principais cálculos.
Não é permitido o uso de calculadoras.

1. (a) O Filipe escreveu uma lista de números, começando por 1 e 2 e, a partir daí, cada novo número obtém-se somando o dobro do último número escrito com o penúltimo. Por exemplo, os números seguintes da lista foram $5 = 2 \times 2 + 1$ e $12 = 2 \times 5 + 2$. Qual é o algarismo das unidades do $2021^{\underline{o}}$ número da lista?

   A) 1 B) 3 C) 5 D) 7 E) 9

   (b) Numa competição desportiva em que participaram 21 alunos da turma do Filipe, o prémio por uma medalha de ouro era de 20 rebuçados, por uma de prata 10 rebuçados, por uma de bronze 5 rebuçados e por uma menção honrosa 2 rebuçados. Quem não recebeu nenhum deste prémios, recebeu apenas um rebuçado. O número de participantes medalhados foi um sexto dos restantes. Ao todo, foram entregues 54 rebuçados. Sabendo que não houve medalhas de prata, quantas menções honrosas houve?

   A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

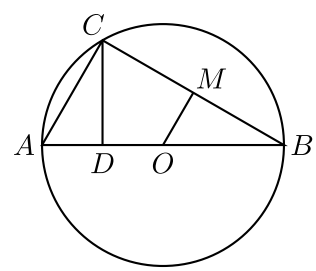
   (c) Num teste na turma do Filipe, a média dos alunos que tiveram positiva é 65, a média dos alunos que tiveram negativa é 35 e a média de todos os alunos é 53. Qual é a proporção de alunos que teve positiva?

   A) $2/3$ B) $2/5$ C) $3/5$ D) $4/5$ E) $2/7$

   (d) De quantas maneiras diferentes pode o Filipe colocar 99 moedas num tabuleiro 2×100, uma em cada quadrícula, de modo que não haja duas quadrículas com moeda com um lado em comum?

   A) 198 B) 200 C) 396 D) 398 E) 400

2. Seja $[ABC]$ um triângulo inscrito numa circunferência de centro O. Sejam D o pé da altura que passa em C e M o ponto médio de $[BC]$. Sabendo que $\overline{OM} = \overline{OD} = 7$, qual é o raio da circunferência?



3. Na sua loja de botões, o Luís tem à venda apenas caixas com a botões azuis, caixas com b botões brancos e caixas com c botões castanhos. O Luís só vende caixas completas. Sabe-se que:

   - se um cliente quiser comprar tantos botões azuis como brancos, tem que comprar pelo menos dois milhares de botões;
   - se um cliente quiser comprar tantos botões brancos como castanhos, tem que comprar pelo menos cinquenta centenas de botões;
   - se um cliente quiser comprar tantos botões castanhos como azuis, tem que comprar pelo menos mil dezenas de botões.

   Quantos botões tem cada caixa? Indica todas as possibilidades.

4. Consideram-se todas as sequências de três elementos (a, b, c), onde cada a, b, c pertence ao conjunto $\{1, 2, \ldots, 2021\}$. Qual é a soma dos menores elementos de todas estas sequências?

Duração: 3 horas
Questão 1: 16 pontos
Questões 2, 3 e 4: 8 pontos cada

Sugestões para a resolução dos problemas

1. (a) Os algarismos das unidades dos primeiros números da lista são $1, 2, 5, 2, 9, 0, 9, 8, 5, 8, 1, 0, 1, 2$. Como a sequência apenas depende dos dois últimos números, a sequência repete-se em ciclos de comprimento 12. Uma vez que $2021 = 12 \times 168 + 5$, então o último algarismo do 2021^{o} número da lista é 9.

   Opção correta: E).

   (b) O número de medalhados é um sexto do número de não medalhados, logo é um sétimo do total. Portanto, houve $21/7 = 3$ amigos medalhados e $3 \times 6 = 18$ amigos não medalhados.

   Os amigos não medalhados receberam entre 18 e $18 \times 2 = 36$ rebuçados, logo os amigos medalhados receberam entre $54 - 36 = 18$ e $54 - 18 = 36$ rebuçados.

   Como não houve medalhas de prata, houve 1 medalha de ouro e 2 de bronze. Assim, os amigos medalhados receberam $20 + 2 \times 5 = 30$ rebuçados e os não medalhados receberam $54 - 30 = 24$ rebuçados, dos quais $24 - 18 = 6$ menções honrosas.

   Opção correta: A).

   (c) Num teste na turma do Filipe, a m´edia dos alunos que tiveram positiva ´e 65, a m´edia dos alunos que tiveram negativa ´e 35 e a m´edia de todos os alunos ´e 53. Qual ´e a proporc¸ ?ao de alunos que teve positiva?

   Sejam P o número de alunos que tiveram positiva e N o número de alunos que tiveram negativa. Então $\dfrac{65 \times P + 35 \times N}{P + N} = 53$, ou seja, $65P + 35N = 53P + 53N$. Logo $12P = 18N$, donde $N = \dfrac{2}{3}P$. Assim $\dfrac{P}{P + N} = \dfrac{P}{P + \frac{2}{3}P} = \dfrac{3}{5}$.

   Opção correta: C).

   (d) Como não pode haver duas quadrículas com moeda com um lado em comum, então em cada coluna, exceto uma, há exatamente uma moeda.

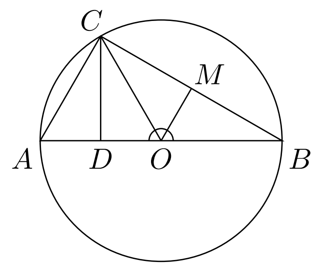
   Se a coluna sem moeda for a primeira ou a última, as moedas em colunas consecutivas estão alternadamente em cima e em baixo. Há 2 escolhas para a coluna sem moeda e 2 escolhas para a posição da moeda mais à esquerda, logo, neste caso, temos $2 \times 2 = 4$ possibilidades.

   Se a coluna sem moeda estiver no interior do tabuleiro, à esquerda e à direita desta coluna as moedas estão alternadamente em cima e em baixo. Há 98 escolhas para a coluna sem moeda e 2×2 escolhas para a posição da moeda mais à esquerda e mais à direita, logo, neste caso, temos $98 \times 2 \times 2 = 392$ possibilidades.

   Ao todo há $392 + 4 = 396$ possibilidades.

   Opção correta: C).

2. Como $\overline{OC} = \overline{OB}$ e M é o ponto médio de $[BC]$, então os triângulos $[OMB]$ e $[OMC]$ são congruentes. Os triângulos $[ODC]$ e $[OMC]$ têm um ângulo reto, um cateto igual e a hipotenusa igual, logo são congruentes. Logo $B\widehat{O}M = C\widehat{O}M = C\widehat{O}D = 60°$.



Os triângulos $[BAC]$ e $[BOM]$ são semelhantes, logo

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BM}} = 2$$

ou seja, $\overline{AC} = 2 \times \overline{OM} = 14$.

Como $\overline{OA} = \overline{OC}$ e $C\widehat{O}A = 60°$, então $[OAC]$ é equilátero, logo o raio da circunferência é igual a $\overline{AC} = 14$.

3. Para o Luís comprar tantos botões azuis como brancos, tem que comprar pelo menos $\mathrm{mmc}(a,b)$ botões. Logo $\mathrm{mmc}(a,b) = 2000 = 2^4 \times 5^3$.

Da mesma forma, concluímos que $\mathrm{mmc}(b,c) = 5000 = 2^3 \times 5^4$ e $\mathrm{mmc}(a,c) = 10000 = 2^4 \times 5^4$.

Então b é um divisor de 2000 e de 5000, logo é um divisor de $\mathrm{mdc}(2000, 5000) = 1000$.

Se $b = 2^3 \times 5^3 = 1000$, então obtemos as possibilidades $a = 16, 80, 400, 2000$ e $c = 625, 1250, 2500, 5000$.

Se $b = 2^x \times 5^3$, com $x < 3$, ou seja, se $b = 125, 250, 500$, então $a = 16, 80, 400, 2000$ e $c = 5000$.

Se $b = 2^3 \times 5^y$, com $y < 3$, ou seja, se $b = 8, 40, 200$, então $a = 2000$ e $c = 625, 1250, 2500, 5000$.

Se $b = 2^x \times 5^y$, com $x, y < 3$, ou seja, se $b = 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100$, então $a = 2000$ e $c = 5000$.

4. Seja S a soma pretendida e consideremos o conjunto T das sequências (a,b,c,d), onde cada a,b,c,d pertence ao conjunto $\{1, 2, \ldots, 2021\}$ e $d \leq a, b, c$.

A sequência (a,b,c) contribui com uma parcela $\min(a,b,c)$ para S e dá origem a $\min(a,b,c)$ sequências de T: (a,b,c,d), com $d = 1, 2, \ldots, \min(a,b,c)$.

Portanto S coincide com o número de elementos de T.

Para cada valor de d, os elementos a, b, c podem variar entre d e 2021, ou seja, há $(2022-d)^3$ sequências de T com esse valor de d.

Assim, o número total de elementos de T é $S = 2021^3 + 2020^3 + \cdots + 3^3 + 2^3 + 1$.

OLIMPÍADAS
PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA
www.olimpiadas.spm.pt

XXXIX OPM - 1ª Eliminatória - 11.11.2020 - Categoria B - 10º/12º anos

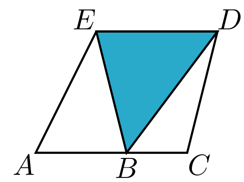
Duração: 2 horas
Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3, 4: 8 pontos cada

Na questão 1 escolhe, em cada alínea, a opção correta.
Justifica convenientemente as tuas respostas às questões 2, 3 e 4.
Não é permitido o uso de calculadoras.

1. (a) O Francisco começou a escrever, por ordem crescente, os números naturais. Ao fim de algum tempo, escreveu o algarismo 1 pela 2020^a vez. Qual foi o algarismo que o Francisco escreveu logo a seguir?

A) 0 B) 2 C) 4 D) 6 E) 8

(b) Na figura está representado um trapézio $[ACDE]$, com área 18, tal que $\overline{ED} = 4$. Sabe-se que a altura do trapézio é um número inteiro e que o comprimento de $[AC]$ é um número inteiro ímpar. Quanto mede a área de $[EDB]$?



A) 8 B) 9 C) 10 D) 12 E) 14

(c) Um número diz-se *superduplex* se a soma dos seus algarismos for maior do que a soma dos algarismos do seu dobro. Por exemplo, 286 é superduplex, porque $286 \times 2 = 572$ e $2+8+6 > 5+7+2$. Quantos números naturais menores do que 500 são superduplex?

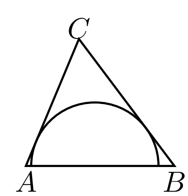
A) 110 B) 130 C) 150 D) 180 E) 200

(d) Na rua do Francisco há dez casas. As casas estão em fila lado a lado. De quantas maneiras é possível pintar todas as casas de azul, branco e castanho de modo que cada casa tenha pelo menos um vizinho com a casa pintada da mesma cor?

A) 32 B) 96 C) 465 D) 513 E) 1024

2. O Miguel escreveu o número 13845 no quadro e reparou que este número e o seu dobro, 27690, usam cada um dos algarismos $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ exatamente uma vez. De seguida, o Tiago escreveu um número maior com a mesma propriedade. Qual é o maior número que o Tiago pode ter escrito?

3. Na figura seguinte, a semicircunferência está inscrita no triângulo $[ABC]$ e tem o diâmetro sobre o lado $[AB]$. Sabendo que $\overline{AC} = 13$, $\overline{CB} = 15$ e a altura relativamente ao lado $[AB]$ mede 12, determina o raio da semicircunferência.



4. Uma rua de sentido único tem 4 lugares de estacionamento, numerados de 1 a 4. Nesta rua conduzem 4 condutores à procura de estacionamento. Cada um dos condutores tem o seu lugar de estacionamento favorito, respetivamente x_1, x_2, x_3 e x_4, e estaciona nele, se estiver livre. Caso contrário estaciona no primeiro lugar livre após o seu lugar favorito. Se não há lugares livres após o seu lugar favorito o condutor desiste de estacionar e vai-se embora.

Por exemplo, se o primeiro condutor prefere o lugar $x_1 = 2$, o segundo condutor prefere o lugar $x_2 = 4$, o terceiro condutor prefere o lugar $x_3 = 2$ e o quarto condutor prefere o lugar $x_4 = 1$, conseguem todos estacionar: o primeiro no lugar 2, o segundo no lugar 4, o terceiro no lugar 3 e o quarto no lugar 1. Dizemos então que $(2, 4, 2, 1)$ é uma lista de preferências *adequada*.

Quantas listas (x_1, x_2, x_3, x_4) de preferências adequadas existem?

Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3, 4: 8 pontos cada

Sugestões para a resolução dos problemas

1. (a) Opção E. (*O* 2020^o *algarismo* 1 *aparece no número* 3181.)
   (b) Opção A. (*A altura do trapézio mede* 4 *e* $\overline{AC} = 5$.)
   (c) Opção B. (*Há* 4 *números superduplex com um algarismo,* 40 *com dois e* 86 *com três.*)
   (d) Opção D. (*Tem-se* $3 \times \left(2^4 + 10 \times 2^3 + 15 \times 2^2 + 7 \times 2 + 1\right) = 513$.)

2. Seja n o número escrito pelo Tiago. Se $n \geq 50000$ então $2n$ terá 6 ou mais algarismos, logo haverá alguma repetição nos algarismo de n e $2n$, pois existirão no mínimo 11 algarismos.

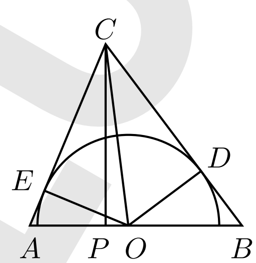
   De forma a maximizar o número escrito pelo Tiago, vamos supor que este começa por 49, isto é $49000 \leq n \leq 49999$. Neste caso, $98000 < 2n < 99998$, o que implica haver repetição do algarismo 9. Supomos então que $48000 \leq n \leq 48999$, logo $96000 \leq 2n \leq 97998$. Neste caso os algarismos $4, 8$ e 9 já estão utilizados.

   Para maximizar n, supomos $48700 \leq n \leq 48799$, o que implica $97400 \leq n \leq 97598$, obrigando a repetir-se o algarismo 7. Suponhamos então que $48600 \leq n \leq 48699$, o que implica $97200 \leq n \leq 97398$, fixando assim a posição de $4, 8, 6, 9$ e 7.

   Para maximizar n, supomos $48650 \leq n \leq 48659$. Neste caso temos que o algarismo das unidades é $0, 1, 2$ ou 3, mas não pode ser 2 ou 3, porque isso obrigaria $2n$ a ter como algarismos das unidades 4 ou 6, respetivamente, forçando uma repetição de algarismos.

   Finalmente, basta notar que o número 48651 tem a propriedade enunciada, pois ele e o seu dobro, 97302, contêm todos os algarismos sem repetições.

3. Seja P o pé da altura do triângulo $[ABC]$ relativamente ao lado $[AB]$.
   Pelo Teorema de Pitágoras, temos $\overline{PA} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$ e $\overline{PB} = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$.



   Logo a área de $[ABC]$ é $\dfrac{\overline{AB} \times \overline{PC}}{2} = \dfrac{(5+9) \times 12}{2} = 84$.

   Sejam O o centro da semicircunferência, r o seu raio e D e E os pontos de tangência dos segmentos $[CB]$ e $[AC]$ com a semicircunferência, respetivamente.

   Então temos área de $[ABC]$ =área de $[AOC]$+ área de $[BOC] = \dfrac{\overline{AC} \times r}{2} + \dfrac{\overline{BC} \times r}{2} = 14r$.

   Logo $14r = 84$, ou seja, $r = 6$.

4. **Solução 1:** Notemos que para uma lista (x_1, x_2, x_3, x_4) não ser adequada tem que ocorrer exatamente um dos seguintes três casos:

   (a) todos as preferências x_1, x_2, x_3, x_4 estão em $\{2, 3, 4\}$ – neste caso há 3 escolhas para cada preferência, logo ao todo há $3^4 = 81$ listas possíveis.

   (b) existe uma preferência igual a 1 e três preferências estão em $\{3, 4\}$ – neste caso, temos 4 possibilidades para a preferência igual a 1 e para as restantes há 2 escolhas, logo ao todo há $4 \times 2^3 = 32$ listas possíveis.

   (c) existe uma preferência igual a 1, outra em $\{1, 2\}$ e duas preferências iguais a 4 – neste caso, temos 6 possibilidades para as preferências iguais a 4 e 3 possibilidades para as restantes, nomeadamente, $1 - 1$, $1 - 2$ ou $2 - 1$. Logo, ao todo, há $6 \times 3 = 18$ listas possíveis.

   Assim, há $81 + 32 + 18 = 131$ listas não adequadas. Como o número total de listas sem restrições é $4^4 = 256$, então há $256 - 131 = 125$ listas adequadas.

   Solução 2: Adicionemos um lugar extra após o $4.^\circ$ lugar, designado por lugar 5, e rearranjemos os lugares de estacionamento num circulo. É claro que agora todos os condutores podem estacionar e haverá exatamente um lugar de estacionamento livre após todos os condutores estacionarem. Nesta situação, uma lista de preferências é adequada se e só se o lugar 5 é o lugar livre após todos os condutores estacionarem. Por simetria, apenas $1/5$ das 5^4 listas de preferências (a_1, a_2, a_3, a_4), com $a_i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ para $i = 1, 2, 3, 4$, leva a que o lugar 5 fique livre, pelo que há exatamente $5^3 = 125$ listas de preferências adequadas.

XXXIX OPM - 2ª Eliminatória - 28.04.2021 - Categoria B - 10º/12º anos

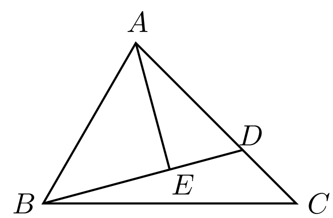
Duração: 2 horas
Cada questão vale 10 pontos

Justifica convenientemente as tuas respostas e indica os principais cálculos.
Não é permitido o uso de calculadoras.

1. Na escola do João e da Ana há quatro desportos à escolha. Cada aluno tem de se inscrever pelo menos num desporto. O João só quer praticar desportos em que a Ana também esteja. No entanto, a Ana quer inscrever-se em pelo menos um desporto sem o João. De quantas formas podem eles escolher os seus desportos de modo que isto aconteça?

2. Quantos números naturais menores do que 200 são tais que o produto dos seus divisores é igual ao seu quadrado?

3. No triângulo $[ABC]$, tem-se $\overline{AD} = 2$, $\overline{DC} = 1$, $A\widehat{C}B = 45°$ e $A\widehat{D}B = 60°$. Prova que o pé E da altura de A sobre BD é o circuncentro de $[ABC]$.



4. Na turma do Francisco, os 30 alunos organizaram uma festa de troca de presentes. Para isso, colocaram papéis num saco com os números de 1 a 30 e cada aluno tirou um papel. O aluno que retirou o número 1 ficou com um dos presentes.

   De seguida, colocaram-se no saco os números de 1 a 29 e cada aluno que ainda não tinha recebido presentes retirou um número. O aluno que retirou o número 1 ficou com outro dos presentes.

   O processo foi realizado 30 vezes, de cada vez com os alunos ainda sem presentes, até todos os alunos terem recebido um presente. No final, repararam que nenhum aluno recebeu o mesmo número mais do que uma vez.

   No primeiro sorteio, o Francisco tinha recebido o número 21. Indica todas as possibilidades para o número que o Francisco pode ter recebido na oitavo sorteio.

XXXIX OPM - 2ª Eliminatória - 28.04.2021 - Categoria B - 10°/12° anos

Cada questão vale 10 pontos

Sugestões para a resolução dos problemas

1. Como a Ana tem de se inscrever em pelo menos um desporto onde o João não esteja inscrito, o João pode escolher 1, 2 ou 3 desportos diferentes. Se optar por 1 desporto apenas, pode fazê-lo de 4 formas. Neste caso, a Ana tem de praticar o desporto escolhido pelo João e escolher pelo menos mais um desporto. Como ainda há 3 desportos disponíveis, a Ana tem 3 possibilidades se optar por apenas mais um desporto; 3 possibilidades se optar por 2 desportos; e 1 possibilidade apenas se optar pelos 3 desportos. Há portanto $4 \times (3+3+1) = 28$ possibilidades. Se o João optar por praticar 2 desportos, pode escolhê-los de 6 formas diferentes. A Ana pode então escolher praticar mais 1 ou 2 desportos. Tem 2 possibilidades de escolher mais 1 desporto e tem 1 possibilidade de escolher praticar todos os desportos. Neste caso, há $6 \times (2+1) = 18$ possibilidades. Finalmente, se o João optar por praticar 3 desportos, pode escolhê-los de 4 formas diferentes, enquanto que a Ana tem forçosamente de escolher todos os desportos. Há 4 possibilidades neste caso.

   Assim, há um total de $28 + 18 + 4 = 50$ possíveis escolhas.

2. Se n não tem fatores primos, então $n = 1$, que é solução do problema.

   Se n só tem um fator primo, então n é da forma p^r. Os seus divisores são $1, p, \ldots, p^r$ e o seu produto é $p^{1+\cdots+r} = p^{r(r+1)/2}$. Então $p^{r(r+1)/2} = p^{2r}$, pelo que $r = 3$.

   Se n tem mais do que um fator primo, então n é da forma $p^r a$, com p e a primos entre si. Se $r \geq 2$, então o produto dos divisores de n é maior do que $p^r \times a \times n = n^2$, pelo que n não é solução. Portanto, se n é uma solução com mais do que um fator primo, então n é da forma $p_1 \ldots p_k$, com p_i primos distintos.

   Se $n = p_1 p_2$, então o produto dos fatores de n é $1 \times p_1 \times p_2 \times n = n^2$, logo n é solução.

   Se n tem mais de dois fatores primos distintos, então n é o produto de três números a, b, c, maiores que 1 e primos entre si. Assim, ab, ac, bc e abc são três fatores de n e $(ab)(ac)(bc)(abc) > n^2$, logo n não é solução.

   Portanto os números procurados são o 1 e os números da forma p^3 ou pq, com p, q primos distintos.

   Observando a lista dos números primos menores do que 100 ($2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97$), concluímos que no caso $n = p^3$ há três soluções ($p \in \{2, 3, 5\}$) e no caso $n = pq$ há 56 soluções ($(p = 2, 3 \leq q \leq 97), (p = 3, 5 \leq q \leq 61), (p = 5, 7 \leq q \leq 37), (p = 7, 11 \leq q \leq 23), (p = 11, 13 \leq q \leq 17)$). Portanto ao todo há 60 soluções.

3. Uma vez que $A\hat{D}E = 60°$ e o triângulo $[AED]$ é retângulo, podemos concluir que $E\hat{A}D = 30°$, $\overline{EA} = \sqrt{3}$ e $\overline{ED} = 1$. O comprimento do segmento $[DC]$ também mede 1, por isso o triângulo $[EDC]$ é isósceles e tem-se que $D\hat{C}E = D\hat{E}C = 30°$. Por outro lado, sendo $[EDC]$ isósceles e $\overline{DC} = 1$, pode concluir-se que $\overline{EC} = 2 \times \cos 30° = \sqrt{3}$, ou seja, $\overline{EA} = \overline{EC}$. Agora observe-se que $B\hat{D}C = 120°$ e $D\hat{C}B = 45°$, portanto $D\hat{B}C = 15°$ e o triângulo $[EBC]$ é isósceles, com $\overline{EB} = \overline{EC}$. Portanto $\overline{EB} = \overline{EC} = \overline{EA}$, o que significa que E é o circuncentro de $[ABC]$.

4. Designemos o aluno que recebeu um presente no n-ésimo sorteio por aluno n. Assim, no n-ésimo sorteio participam os alunos $n, \ldots, 30$. No 30^{o} sorteio, o aluno 30 recebeu o número 1. No 29^{o} sorteio, como não recebeu o mesmo número, recebeu o número 2. Da mesma forma, no 28^{o} sorteio recebeu o número 3 e assim por diante, tendo recebido no n-ésimo sorteio o número $31 - n$. No 29^{o} sorteio, o aluno 29 recebeu o número 1 e, de forma análoga ao caso anterior, conclui-se que recebeu no n-ésimo sorteio o número $30 - n$. Procedendo de forma semelhante para os restante alunos, conclui-se que o aluno k recebeu no n-ésimo sorteio o número $k + 1 - n$. Se o Francisco é o aluno k, então, como recebeu no primeiro sorteio o número 21, temos $k + 1 - 1 = 21$, ou seja, $k = 21$. Logo no oitavo sorteio, o Francisco recebeu o número $21 + 1 - 8 = 14$.

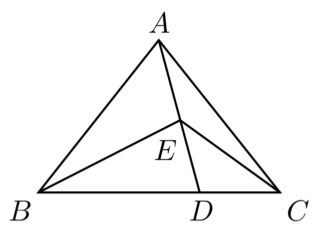
XXXIX OPM - Final - 11.09.2021 - Categoria B - 10º/12º anos

Duração: 4 horas
Cada questão vale 10 pontos

Justifica convenientemente as tuas respostas e indica os principais cálculos.
Não é permitido o uso de calculadoras.

1. A Joana dividiu 365 por todos os inteiros desde 1 a 365 e somou todos os restos. Depois dividiu 366 por todos os inteiros desde 1 a 366 e também somou todos os restos. Qual das duas somas é maior e qual é a diferença entre elas?

2. Seja $[ABC]$ um triângulo tal que $\overline{AB} = \overline{AC}$. Seja D um ponto em $[BC]$ e E um ponto em $[AD]$ tais que $B\hat{E}D = B\hat{A}C = 2 \times D\hat{E}C$. Mostra que $\overline{DB} = 2\overline{CD}$.



3. Consideram-se todas as sequências de k elementos $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, onde cada a_i pertence ao conjunto $\{1, 2, \ldots, 2021\}$. Qual é a soma dos menores elementos de todas estas sequências?

4. O Pedro e o Tiago vão jogar um jogo com um baralho com n cartas, numeradas de 1 a n.

   Começando pelo Pedro, eles vão escolhendo cartas alternadamente, e recebem o número de pontos indicado pelas carta. No entanto, sempre que o jogador escolhe a carta com maior número entre as que restam no baralho, ele é obrigado a passar a sua vez seguinte, não escolhendo nenhuma carta. Quando o baralho terminar, ganha o jogador com mais pontos.

   Sabendo que o Tiago consegue pelo menos empatar, independentemente das jogadas do Pedro, quantas cartas tem o baralho? Indica todas as possibilidades,

Duração: 3 horas
Questão 1: 16 pontos
Questões 2, 3 e 4: 8 pontos cada

Sugestões para a resolução dos problemas

1. Sejam S a soma dos restos das divisões de 365 pelos inteiros de 1 a 365 e S' a soma dos restos das divisões de 366 pelos inteiros de 1 a 366. Como a divisão de 366 por 366 tem resto 0, podemos considerar que, em ambas as somas, temos restos de divisão por inteiros de 1 a 365.

   Seja n um inteiro de 1 a 365 e consideremos as divisões de 365 e 366 por n:

$$qn + r = 365 \qquad q'n + r' = 366.$$

   Logo, $(q - q')n + (r - r') = -1$.

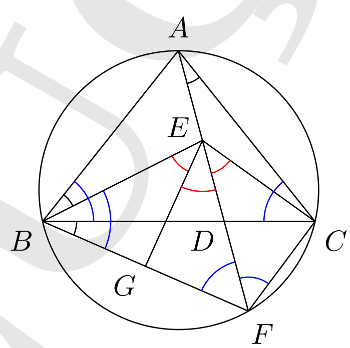
   Se $q' = q$, então $r - r' = -1$; se $q' = q + 1$, então $r - r' = n - 1$.

   Portanto, cada n contribui com -1 para a diferença $S - S'$ e os divisores n de 366 contribuem adicionalmente n para essa diferença.

   Os divisores n de 366 entre 1 e 365 são: $1, 2, 3, 6, 61, 122$ e 183, cuja soma é 378.

   Portanto, $S - S' = 378 - 365 = 13$. Logo $S > S'$, ou seja, a soma dos restos das divisões de 365 pelos inteiros de 1 a 365 é maior do que a soma dos restos das divisões de 366 pelos inteiros de 1 a 366.

2. Sejam $F \neq A$ a intersecção de AD com a circunferência circunscrita a $[ABC]$ e G o ponto médio de $[BF]$.



   Como $\angle CBF$ e $\angle CAF$ estão inscritos no mesmo arco, então

$$C\widehat{B}F = C\widehat{A}F = C\widehat{A}B - E\widehat{A}B = D\widehat{E}B - E\widehat{A}B = E\widehat{B}A.$$

   Logo $E\widehat{B}F = E\widehat{B}D + D\widehat{B}F = E\widehat{B}D + E\widehat{B}A = D\widehat{B}A = B\widehat{C}A = B\widehat{F}E = A\widehat{F}C$, pelo que $\overline{EB} = \overline{EF}$.

   Assim, a bissetriz de $\angle BEF$ é a mediatriz de $[BF]$.

   Portanto, os triângulos $[EBG]$, $[EFG]$ e $[EFC]$ são congruentes, pelo que $\overline{BF} = 2 \times \overline{FC}$. Pelo teorema da bissetriz aplicado ao ângulo em F de $[BFC]$, tem-se $\dfrac{\overline{BD}}{\overline{BC}} = \dfrac{\overline{BF}}{\overline{FC}} = 2$.

3. Seja S a soma pretendida e consideremos o conjunto T das sequências $(a_0, a_1, \ldots, a_k)$, onde cada a_i pertence ao conjunto $\{1, 2, \ldots, 2021\}$ e $a_0 \leq a_i$, para cada $i = 1, \ldots, k$.

   A sequência $(a_1, \ldots, a_k)$ contribui com uma parcela $\min(a_1, \ldots, a_k)$ para S e dá origem a $\min(a_1, \ldots, a_k)$ sequências de T: $(a_0, a_1, \ldots, a_k)$, com $a_0 = 1, 2, \ldots, \min(a_1, \ldots, a_k)$.

   Portanto S coincide com o número de elementos de T.

   Para cada valor de a_0, os elementos $a_1, \ldots, a_k$ podem variar entre a_0 e 2021, ou seja, há $(2022 - a_0)^k$ sequências de T com esse valor de a_0.

   Assim, o número total de elementos de T é $S = 2021^k + 2020^k + \cdots + 3^k + 2^k + 1$.

4. Vamos assumir que ambos os jogadores são perfeitos, e como tal vão sempre tentar maximizar a sua soma. Com isto em mente, a qualquer momento, qualquer jogada que não seja retirar uma das duas maiores cartas disponíveis é não optimal, logo não acontece.

   Logo, o conjunto de cartas restantes na i-ésima jogada é totalmente caracterizado por k_i e m_i, $k_i > m_i$, onde k_i é o valor da maior carta disponível, m_i é o valor da segunda maior carta disponível na i-ésima jogada e para todo o inteiro positivo menor que m_i, a carta com esse valor ainda está disponível. Se só houver uma carta no baralho, dizemos que $m_i = 0$. Também vamos considerar que o par de jogadas consecutivas de um mesmo jogador, que se sucedem após o outro jogador ter tirado a maior carta, como se fosse uma só jogada. Temos então que $k_0 = n$, $m_0 = n - 1$, e que o Pedro só joga quando i é par e o Tiago quando i é ímpar.

   Comecemos por notar que, para $n = 3$, o Tiago consegue sempre empatar. Vamos provar que $n = 3$ é o maior número para o qual o Tiago consegue empatar. Para isso vamos definir uma estratégia para o Pedro e ver que é vencedora para os restantes casos. Seja D_i a diferença entre a soma das cartas do Pedro e a soma das cartas do Tiago após a i-ésima jogada. No início do jogo, $D_0 = 0$.

   A estratégia que definimos para o Pedro é a seguinte: Se $k_i < 2m_i - 1$, o Pedro escolhe a carta m_i, caso contrário, o Pedro escolhe a carta k_i. Quando o Pedro tem duas jogadas seguidas, devido ao Tiago ter tirado a maior carta no turno anterior, então ele começa por retirar m_i e depois, se $k_i < 2m_i - 3$, o Pedro escolhe a carta $m_i - 1$, caso contrário, o Pedro escolhe a carta k_i (a condição é a mesma, mas atualiza o m_i entre as suas jogadas).

   Se, num par de jogadas Pedro-Tiago, nenhum dos dois jogadores retirou a carta maior, então $D_{i+2} = D_i + 1$, isto é, a diferença entre as somas aumenta.

   Notemos que, se nenhum jogador tirou a maior carta, quando um jogador volta a jogar, a maior carta manteve--se igual, mas a segunda maior carta diminuiu 2 unidades.

   Se, na sua estratégia, o Pedro tira a maior carta, então $k_i = 2m_i - 1$ ou $k_i = 2m_i - 2$. Logo $k_{i+1} = m_i$ e $m_{i+1} = m_i - 1$. Se na sua vez, o Tiago não retira a maior carta disponível, então ele tira no máximo $2m_i - 3$, que é menor que k_i, logo $D_{i+2} \geq D_i + 1$. Se o Tiago retira somente a maior carta disponível, então a diferença aumenta e ele perde a vantagem da jogada extra. Se o Tiago retirou as duas maiores cartas disponíveis, o que é possível se ele começar pela segunda maior, então ele somou $2m_i - 1$, podendo ter recuperado um valor na diferença das somas, mas à custa do Pedro ter uma jogada extra. Aqui, se o Pedro retira m_{i+2} (assumindo $m_{i+2} > 0$) já recuperou qualquer diferença perdida e a partir daqui o jogo continua normalmente, começando Pedro. Para as nossas contas, vamos considerar uma parcela $-m_{i+2}$ na última jogada do Tiago, e assim temos que a diferença continuou a aumentar. Se $m_{i+2} = 0$, o Pedro tira a última carta disponível, o que anula a perda do último par de jogadas. Isto só não pode acontecer se o Tiago tirou as últimas duas cartas, mas neste caso o Tiago teve de ter tirado as cartas 1 e 2, o que implica a que na jogada anterior o Pedro tenha tirado pelo menos 3, logo não houve diminuição da diferença.

Resta então ver o caso em que é o Tiago a tirar a maior carta, sem o Pedro o ter feito na jogada anterior.

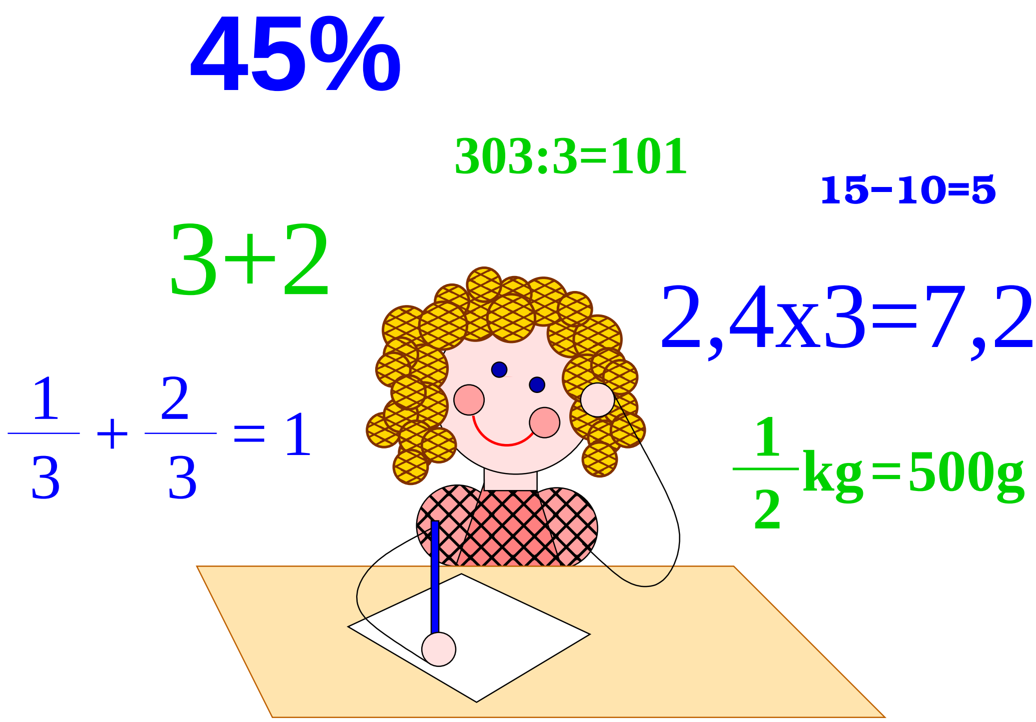
Contando a jogada do Pedro anterior à do Tiago, e a primeira das duas seguidas a que ele tem direito, temos então que o Pedro retira m_i e $m_{i+2} = m_i - 2$ e o Tiago retira k_i, que é menor ou igual a $2m_i - 2$ (caso contrário o Pedro teria escolhido k_i quando escolheu m_i). Logo, antes da segunda jogada do Pedro, se contarmos a primeira jogada como uma parcela $-m_{i+2}$ na jogada do Tiago, temos que $D_i \leq D_{i+2}$, e o Pedro começa a jogar com $k_{i+2} = m_i - 1$ e $m_{i+2} = m_i - 3$ (o m_{i+2} já está atualizado tendo em conta a primeira jogada do Pedro.).

Logo, em todos os pares de jogadas Pedro-Tiago, a diferença das somas nunca diminui (em alguns casos, a próxima jogada do Pedro é uma jogada dupla, e é precisar considerar a primeira dessas jogadas neste par), sendo que só em casos especiais é que não aumenta (k tem de estar perto de $2m_i$ ou m_i perto de 1). Em particular, para $n > 3$, após o primeiro par de jogadas temos uma diferença das somas já positiva. Logo, para $n > 3$, o Pedro consegue ganhar sempre.

OLIMPÍADAS PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA

Mini-Olimpíadas

Ano Letivo 2021/2022
1.º Ciclo do Ensino Básico
3.º ano



Tem atenção: **Duração: 1 hora**

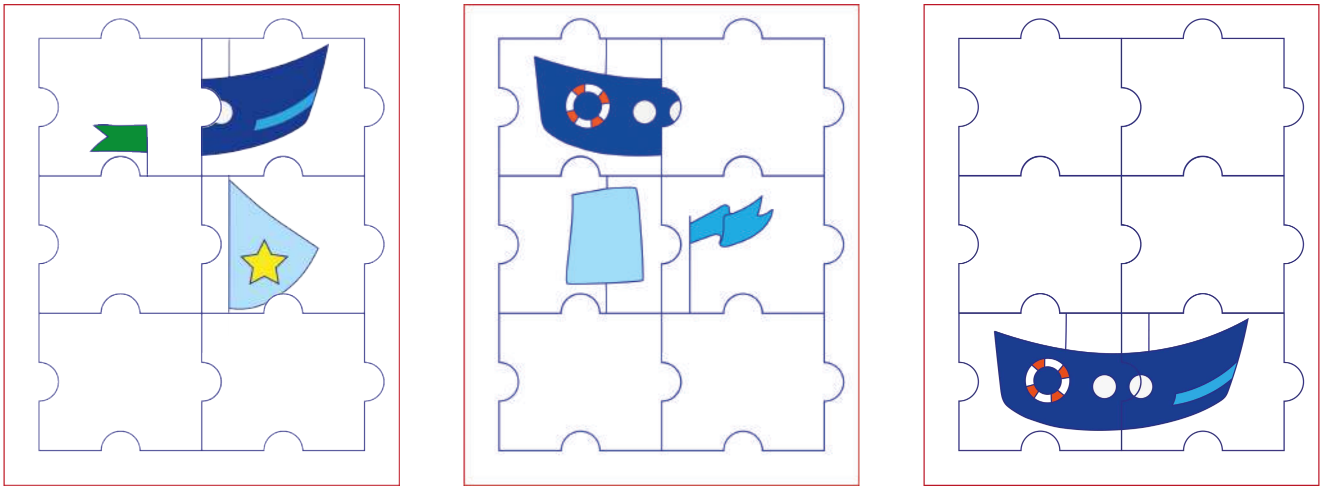
- Lê todas as perguntas com muito cuidado.
- Não apagues as contas, os esquemas e os desenhos que utilizares nas tuas respostas.
- Se acabares antes do tempo previsto, deverás aproveitar para rever a tua prova.

Bom trabalho e diverte-te!

Nome do aluno: ____

Pontuação:______________

1. A Mati, a Zé e o Jonas estão a fazer puzzles iguais. Já colocaram algumas peças.

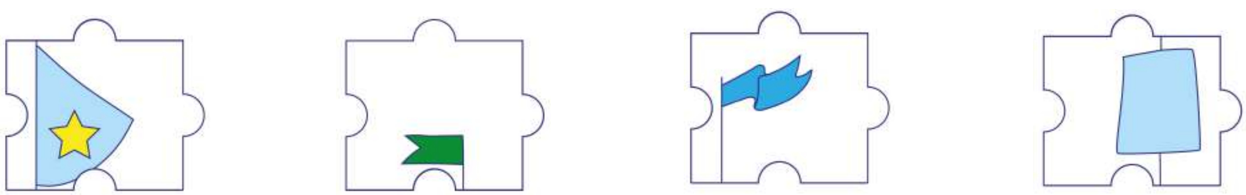


Puzzle da Mati **Puzzle do Jonas** **Puzzle da Zé**

As peças do puzzle da Zé estão todas na posição correta.

A Mati tem uma peça fora do sítio e o Jonas tem duas.

No puzzle da Zé faltam as seguintes peças.



Peça A **Peça B** **Peça C** **Peça D**

Completa o puzzle da Zé, colocando no lugar de cada peça a letra que lhe corresponde.

2. Nesta adição, cada símbolo representa um algarismo.

Preenche cada símbolo com um algarismo

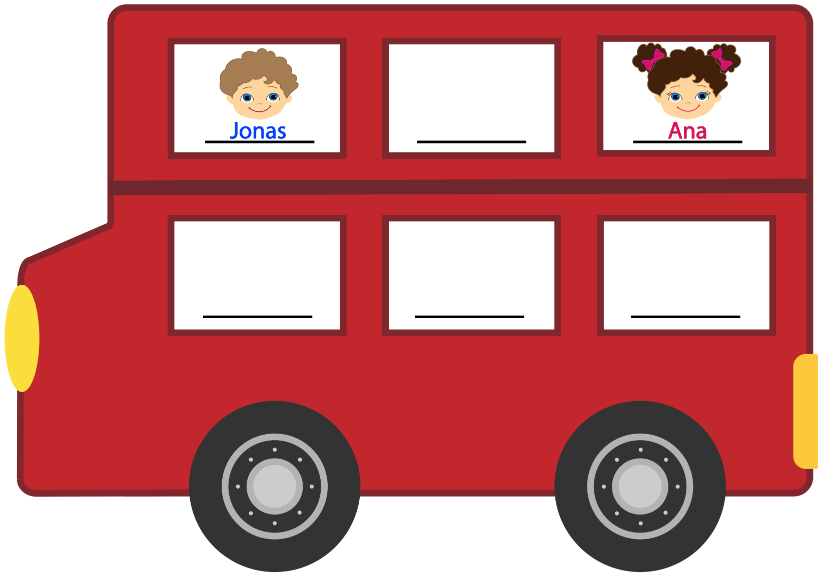
de modo que a adição fique correta.

Não te esqueças!

Símbolos iguais representam o mesmo algarismo.

$$\begin{array}{r} \square\ 5 \\ +\ 3\ \square \\ \hline 1\ \triangle\ 3 \end{array}$$

3. O Jonas e os colegas estão neste autocarro de dois andares, com seis lugares.

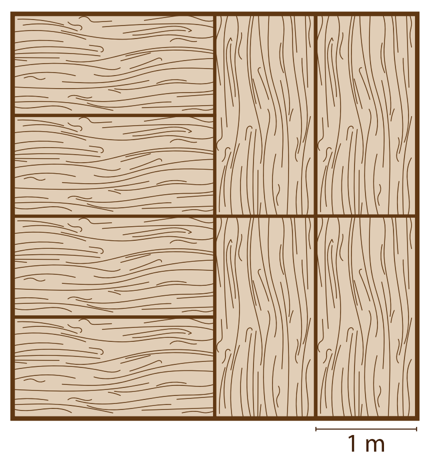


- A Mati está no lugar por cima da Zé.
- A Zé está ao pé do Luís.
- A Ana não está no lugar por cima do Rui.

Descobre onde está cada menino e escreve o seu nome na respetiva janela.

4. Com oito mesas retangulares iguais, a professora fez uma mesa quadrada para trabalhar em grupo, como se indica na figura.

   Cada mesa retangular tem 1 metro de largura. Quanto mede o lado da mesa quadrada?



Resposta:____________________________________

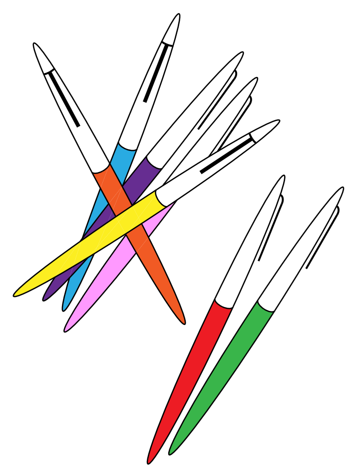
5. Na biblioteca da escola há 30 lugares sentados. Antes do toque de saída para intervalo, estavam 10 lugares livres e não estava ninguém de pé. No intervalo, saíram 7 alunos, entraram 21 e os lugares ficaram todos ocupados.

   Quantos alunos ficaram de pé?

Resposta:____

6. Na feira do livro, as canetas estavam todas ao mesmo preço e os livros também. O Luís comprou dois livros e duas canetas e gastou 56 euros. A Ana comprou um livro e cinco canetas e também pagou 56 euros.

   Quanto custou cada livro?



Resposta:____

Mini-Olimpíadas

Ano Letivo 2021/2022
1º Ciclo do Ensino Básico
3º ano

Critérios de Classificação

Cotações

1- 10 pontos
2- 10 pontos
3- 10 pontos
4- 10 pontos
5- 10 pontos
6- 10 pontos

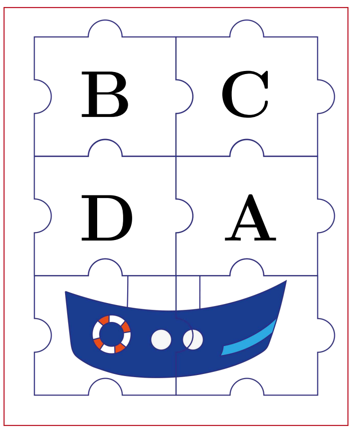
Total: 60 pontos

Critérios de Classificação

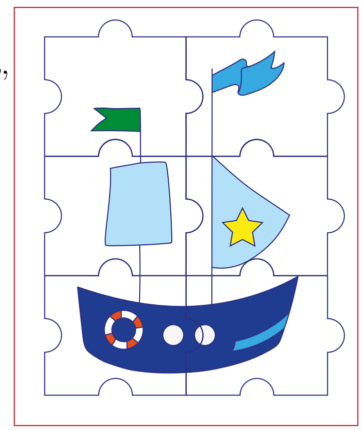
- **Se surgirem resoluções diferentes das apresentadas, a classificação ficará ao critério do professor corretor.**
- **Devem ser valorizados os raciocínios corretos (atribuindo classificações parciais) em detrimento dos cálculos efetuados.**

Exercício 1

Solução:



, ou seja,



10 pontos

Caso a resposta não seja a correta devem ser atribuídas as seguintes cotações parciais (não acumuláveis).

Coloca uma peça na posição correta **2 pontos**

Coloca duas peças nas posições corretas **4 pontos**

Coloca três peças nas posições corretas **8 pontos**

Exercício 2

Solução:

$$\begin{array}{r} \boxed{8}\ 5 \\ +\ 3\ \boxed{8} \\ \hline 1\ 2\ 3 \end{array}$$

10 pontos

Caso a resposta não seja a correta devem ser atribuídas as seguintes cotações parciais (não acumuláveis).

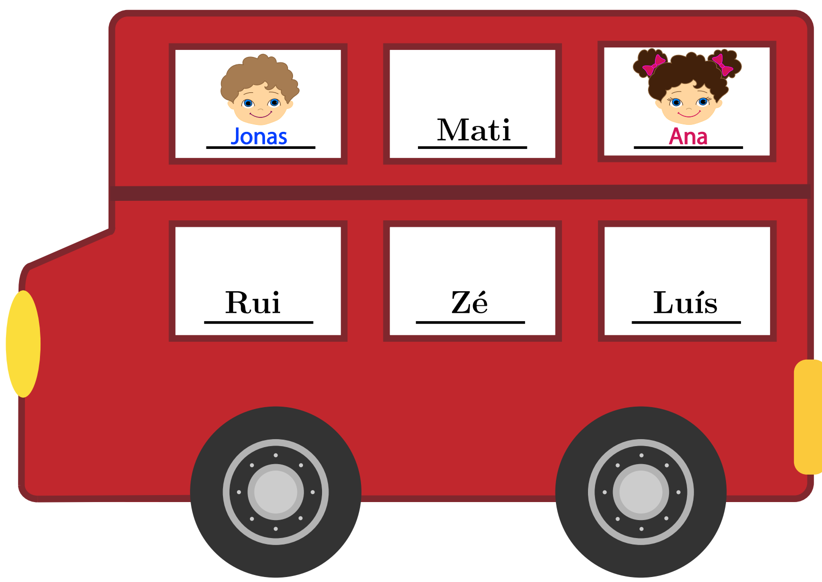
Calcula corretamente o algarismo correspondente ao quadrado **6 pontos**

Calcula corretamente o algarismo correspondente ao quadrado, mas calcula o algarismo correspondente ao triângulo sem efetuar o transporte **8 pontos**

Calcula corretamente o algarismo correspondente ao triângulo, utilizando para o quadrado um dos algarismos 6, 7 ou 9 **4 pontos**

Exercício 3

Solução:



10 pontos

Caso a resposta não seja a correta devem ser atribuídas as seguintes cotações parciais (não acumuláveis).

Coloca um menino na posição correta **3 pontos**

Coloca dois meninos nas posições corretas **6 pontos**

Coloca três meninos nas posições corretas **9 pontos**

Exercício 4

Solução: O lado da mesa quadrada mede 4 m. **10 pontos**

Caso a resposta não seja a correta deve atribuir-se cotação parcial. Para esse efeito, indicam-se, em seguida, as cotações de uma proposta de resolução.

Proposta de resolução:

Calcula o comprimento de uma mesa retangular

$1 + 1 = 2$ m **4 pontos**

Calcula o comprimento do lado da mesa quadrada

$2 + 2 = 4$ m **6 pontos**

Exercício 5

Solução: Ficaram 4 alunos de pé. **10 pontos**

Caso a resposta não seja a correta deve atribuir-se cotação parcial. Para esse efeito, indicam-se, em seguida, as cotações de três propostas de resolução.

Proposta de resolução 1:

Efetua o cálculo seguinte para concluir que, após a saída dos 7 alunos, ficaram 17 lugares livres

$10 + 7 = 17$ **4 pontos**

Tendo em conta que entraram 21 alunos para ocupar os 17 lugares livres, efetua o cálculo seguinte para concluir que 4 alunos ficaram de pé

$21 - 17 = 4$ **6 pontos**

Proposta de resolução 2:

Efetua o cálculo seguinte para concluir que, depois do toque, ficaram **mais** 14 alunos na biblioteca

$21 - 7 = 14$ **4 pontos**

Efetua o cálculo seguinte para concluir que, havendo 14 alunos para ocupar 10 lugares livres, 4 ficaram de pé

$14 - 10 = 4$ **6 pontos**

Proposta de resolução 3:

Efetua o cálculo seguinte para contar os alunos que estavam na biblioteca antes do toque

$30 - 10 = 20$ **2 pontos**

Efetua o cálculo seguinte para concluir que, após a saída de 7 alunos, ficaram 13 alunos na biblioteca

$20 - 7 = 13$ **3 pontos**

Efetua o cálculo seguinte para contar os alunos que ficaram na biblioteca depois do intervalo

$13 + 21 = 34$ **3 pontos**

Para concluir que 4 alunos ficaram de pé, efetua o seguinte cálculo

$34 - 30 = 4$ **2 pontos**

Devem ser cotados os cálculos efetuados utilizando valores errados calculados anteriormente.

Exercício 6

Solução: Cada livro custou 21 euros. **10 pontos**

Caso a resposta não seja a correta deve atribuir-se cotação parcial. Para esse efeito, indicam-se, em seguida, as cotações de uma proposta de resolução.

Proposta de resolução:

Percebe que 1 livro custa o mesmo que 3 canetas. Por exemplo, faz a representação

	L	L	C	C					
custam tanto como		L	C	C	C	C	C.		
Logo,	L		e		C	C	C	custam o mesmo.	**3 pontos**

Percebe que 8 canetas custam 56 euros e uma caneta custa 7 euros, efetuando o cálculo

$56 : 8 = 7$ **5 pontos**

ou fazendo uma representação. Por exemplo,

L	C	C	C	C	C	custam 56 euros;
(C C C)	C	C	C	C	C	custam 56 euros;
					C	custa 7 euros.

Calcula o preço do livro. Por exemplo, efetua o cálculo

$3 \times 7 = 21$ **2 pontos**

Podem ainda ser atribuídas as cotações parciais seguintes (não acumuláveis).

Atribui valores aos preços dos livros e das canetas e verifica que esses valores satisfazem uma das condições. Por exemplo,

$2 \times 25 + 2 \times 3 = 56$ **2 pontos**

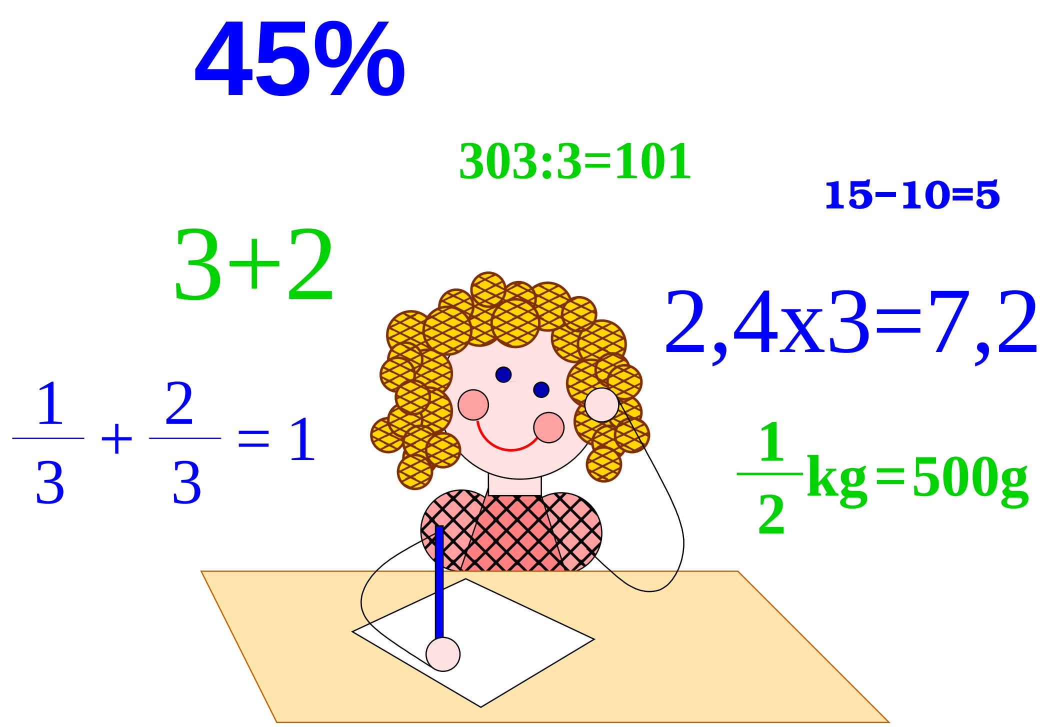
Para além de verificar que os valores atribuídos aos preços dos livros e das canetas satisfazem uma das condições, constata que não satisfazem a outra. Por exemplo,

$2 \times 25 + 2 \times 3 = 56$, mas $25 + 5 \times 3 = 40$, em vez de 56 **4 pontos**

Devem ser cotados os cálculos efetuados utilizando valores errados calculados anteriormente.

Mini-Olimpíadas

Ano Letivo 2021/2022
1.º Ciclo do Ensino Básico
4.º ano



Tem atenção: **Duração: 1 hora**

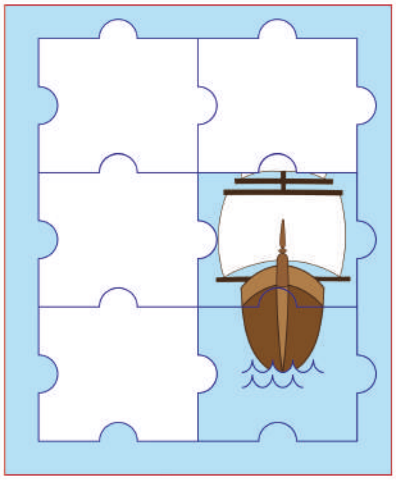
- Lê todas as perguntas com muito cuidado.
- Não apagues as contas, os esquemas e os desenhos que utilizares nas tuas respostas.
- Se acabares antes do tempo previsto, deverás aproveitar para rever a tua prova.

Bom trabalho e diverte-te!

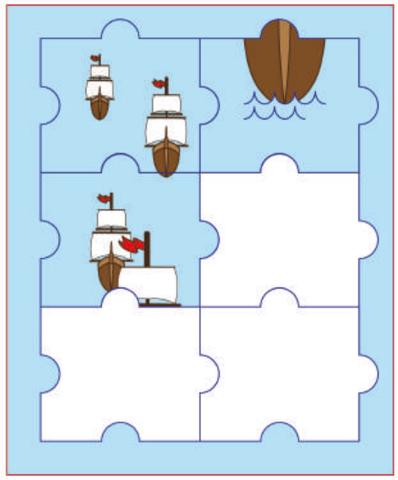
Nome do aluno: ____

Pontuação:_______________

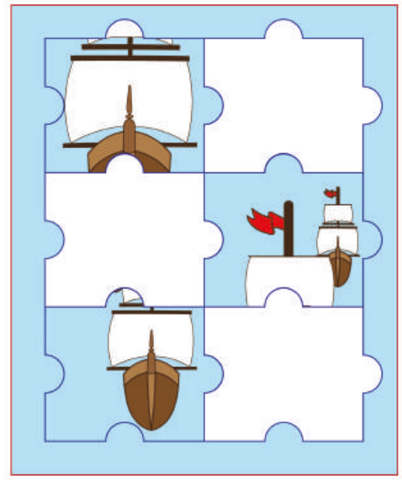
1. A Mati, a Zé e o Jonas estão a fazer puzzles iguais. Já colocaram algumas peças.



Puzzle da Zé



Puzzle da Mati

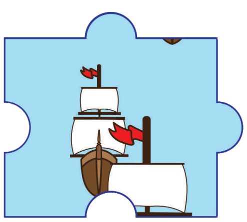


Puzzle do Jonas

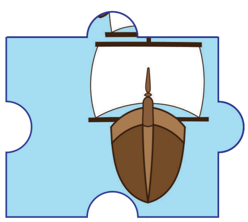
As peças do puzzle da Zé estão todas na posição correta.

A Mati tem uma peça fora do sítio e o Jonas tem duas.

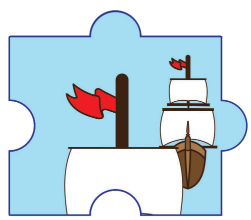
No puzzle da Zé faltam as seguintes peças.



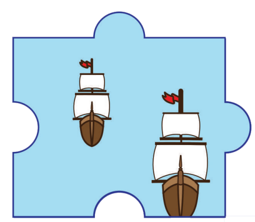
Peça A



Peça B



Peça C



Peça D

Completa o puzzle da Zé, colocando no lugar de cada peça a letra que lhe corresponde.

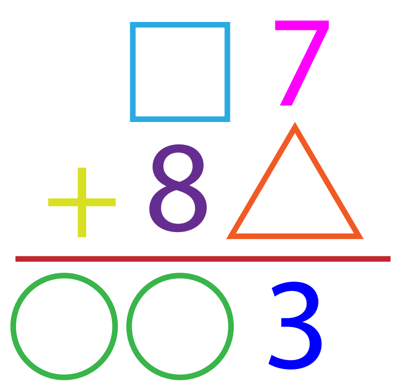
2. Nesta adição, cada símbolo representa um algarismo.

Preenche cada símbolo com um algarismo

de modo que a adição fique correta.

Não te esqueças!

Símbolos iguais representam o mesmo algarismo.



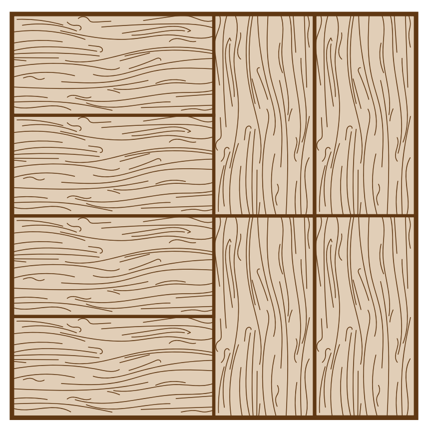
3. A Zé e os colegas estão neste autocarro de dois andares, com seis lugares.

- A Mati está no lugar por cima da Zé.
- A Zé está ao pé do Luís.
- A Ana não está no lugar por cima do Rui.
- O Jonas está à frente da Mati.

Descobre onde está cada menino e escreve o seu nome na respetiva janela.

4. Com oito mesas retangulares iguais, a professora fez uma mesa quadrada para trabalhar em grupo, como se indica na figura.

   A mesa quadrada tem 8 metros de perímetro. Qual é o perímetro de cada mesa retangular?



Resposta:____

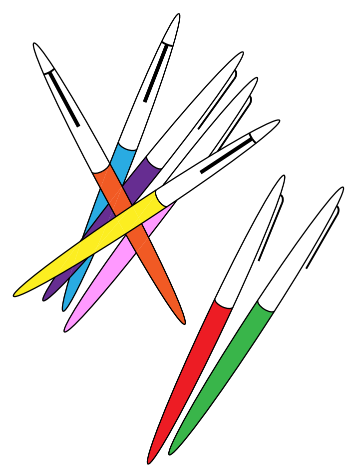
5. Na biblioteca da escola há 30 lugares sentados. Antes do toque de saída para intervalo, estavam 12 lugares livres e 5 alunos estavam de pé. No intervalo saíram 6 alunos, entraram 14 e os lugares ficaram todos ocupados.

   Quantos alunos ficaram de pé?

Resposta:____

6. Na feira do livro, as canetas estavam todas ao mesmo preço e os livros também. O Luís comprou três livros e sete canetas e pagou 86 euros. A Ana comprou dois livros e cinco canetas e pagou 59 euros.

   Quanto custou cada livro?



Resposta:____

Mini-Olimpíadas

Ano Letivo 2021/2022
1º Ciclo do Ensino Básico
4º ano

Critérios de Classificação

Cotações

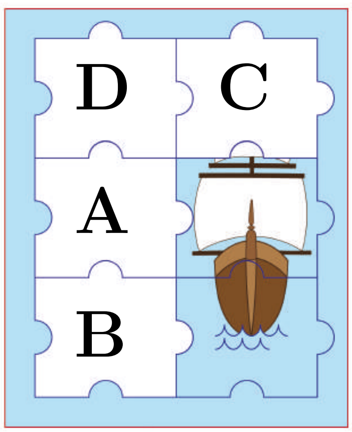
1- 10 pontos
2- 10 pontos
3- 10 pontos
4- 10 pontos
5- 10 pontos
6- 10 pontos

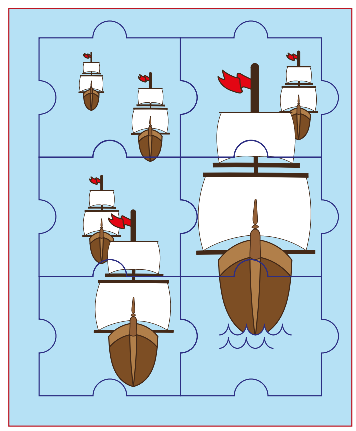
Total: 60 pontos

Critérios de Classificação

- **Se surgirem resoluções diferentes das apresentadas, a classificação ficará ao critério do professor corretor.**
- **Devem ser valorizados os raciocínios corretos (atribuindo classificações parciais) em detrimento dos cálculos efetuados.**

Exercício 1

Solução: 

, ou seja, 

10 pontos

Caso a resposta não seja a correta devem ser atribuídas as seguintes cotações parciais (não acumuláveis).

Coloca uma peça na posição correta	**2 pontos**
Coloca duas peças nas posições corretas	**4 pontos**
Coloca três peças nas posições corretas	**8 pontos**

Exercício 2

$$\begin{array}{rccc} & & \boxed{2} & 7 \\ + & & 8 & 6 \\ \hline & 1 & 1 & 3 \end{array}$$

10 pontos

Caso a resposta não seja a correta devem ser atribuídas as cotações parciais seguintes (acumuláveis).

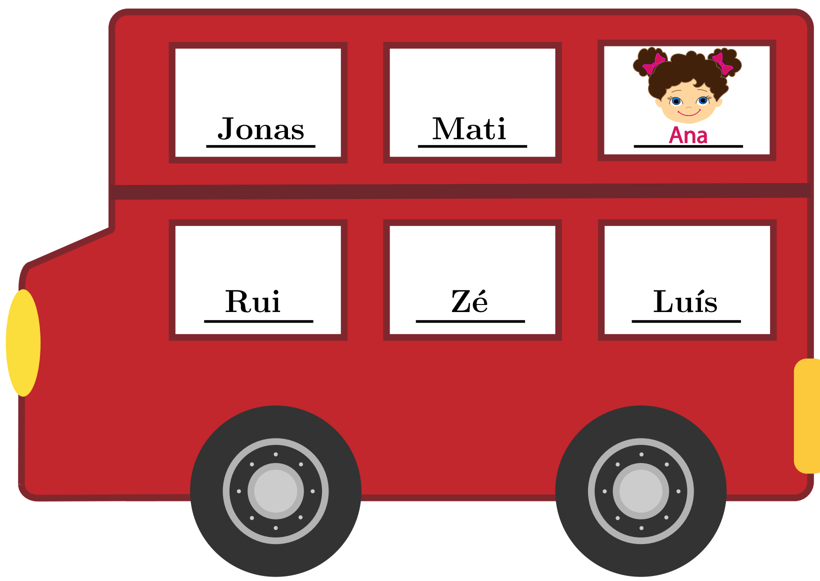
Coloca o algarismo 6 no triângulo **4 pontos**

Atribui o algarismo 1 ao círculo **3 pontos**

Tendo atribuído o algarismo 1 ao círculo, se coloca o algarismo 2 no quadrado, acumula mais **3 pontos**.

Exercício 3

Solução:



10 pontos

Caso a resposta não seja a correta devem ser atribuídas as seguintes cotações parciais (não acumuláveis).

Coloca um menino na posição correta **2 pontos**

Coloca dois meninos nas posições corretas **4 pontos**

Coloca três meninos nas posições corretas **6 pontos**

Coloca quatro meninos nas posições corretas **9 pontos**

Exercício 4

Solução: O perímetro de cada mesa retangular é 3 m. **10 pontos**

Caso a resposta não seja a correta deve atribuir-se cotação parcial. Para esse efeito, indicam-se, em seguida, as cotações parciais de uma proposta de resolução.

Proposta de resolução:

Calcula a medida do lado da mesa quadrada

$8 : 4 = 2$ m **3 pontos**

Calcula a medida do comprimento de cada mesa retangular (1 m) **2 pontos**

Calcula a medida da largura de cada mesa retangular ($0,5$ m) **2 pontos**

Calcula o perímetro de cada mesa retangular

$1 + 1 + 0,5 + 0,5 = 3$ m **3 pontos**

Exercício 5

Solução: Ficou 1 aluno de pé. **10 pontos**

Caso a resposta não seja a correta deve atribuir-se cotação parcial. Para esse efeito, indicam-se, em seguida, as cotações de três propostas de resolução.

Proposta de resolução 1:

Efetua o cálculo seguinte para saber o número total de alunos que podiam ocupar os 12 lugares livres.

$14 - 6 + 5 = 8 + 5 = 13$ **5 pontos**

Conclui que 1 aluno ficou de pé, efetuando o cálculo seguinte

$13 - 12 = 1$ **5 pontos**

Proposta de resolução 2:

Efetua o cálculo seguinte para concluir que haveria 7 lugares livres se todos os alunos se sentassem

$12 - 5 = 7$ **4 pontos**

Efetua o cálculo seguinte e conclui que, depois do toque, ficaram **mais** 8 alunos na biblioteca

$14 - 6 = 8$ **4 pontos**

Conclui que 1 aluno ficou de pé efetuando o cálculo

$8 - 7 = 1$ **2 pontos**

Proposta de resolução 3:

Efetua o cálculo seguinte para contar os alunos que antes do toque estavam na biblioteca

$30 - 12 + 5 = 23$ **3 pontos**

Efetua o cálculo seguinte e conclui que, após a saída dos 6 alunos, ficaram 17 alunos na biblioteca

$23 - 6 = 17$ **3 pontos**

Efetua o cálculo seguinte para contar os alunos que ficaram na biblioteca depois do toque

$17 + 14 = 31$ **2 pontos**

Conclui que 1 aluno ficou de pé efetuando o cálculo seguinte

$31 - 30 = 1$ **2 pontos**

Devem ser cotados os cálculos efetuados utilizando valores errados calculados anteriormente.

Exercício 6

Solução: Cada livro custou 17 euros. **10 pontos**

Caso a resposta não seja a correta deve atribuir-se cotação parcial. Para esse efeito, indicam-se, em seguida, as cotações de uma proposta de resolução.

Proposta de resolução:

Percebe que 1 livro e 2 canetas custam 27 euros, efetuando o cálculo

$86 - 59 = 27$ **3 pontos**

ou fazendo uma representação que lhe permita concluir. Por exemplo,

L	L	L	C	C	C	C	C	C	C	custam	86 euros;
	L	L	C	C	C	C	C			custam	59 euros;
L								C	C	custam	27 euros.

Percebe que 1 caneta custa 5 euros, efetuando os cálculos

$2 \times 27 = 54$ e $59 - 54 = 5$ **4 pontos**

ou fazendo uma representação que lhe permita concluir. Por exemplo,

(L C C) (L C C) C custam $59 = 27 + 27 + 5$ euros, logo 1 caneta custa 5 euros.

Efetua um cálculo para concluir que cada livro custa 17 euros **3 pontos**

Por exemplo, $2 \times 5 = 10$ e $27 - 10 = 17$ ou

$7 \times 5 = 35$, $86 - 35 = 51$ e $51 : 3 = 17$ ou

$5 \times 5 = 25$, $59 - 25 = 34$ e $34 : 2 = 17$.

Podem ainda ser atribuídas as cotações parciais seguintes (não acumuláveis).

Dá valores aos preços dos livros e das canetas e verifica que esses valores satisfazem uma das condições. Por exemplo,

$2 \times 22 + 5 \times 3 = 59$ ou $3 \times 24 + 7 \times 2 = 86$ **2 pontos**

Para além de verificar que os valores escolhidos satisfazem uma das condições, constata que não satisfazem a outra. Por exemplo,

$2 \times 22 + 5 \times 3 = 59$, mas $3 \times 22 + 7 \times 3 = 87$, em vez de 86 **4 pontos**

Devem ser cotados os cálculos efetuados utilizando valores errados calculados anteriormente.

XL OPM - 10.11.2021 - Pré-Olimpíadas - 5º ano

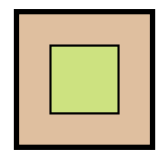
Duração: 2 horas
Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3: 10 pontos cada

Na questão 1 escolhe, em cada alínea, a opção correta.
Justifica convenientemente as tuas respostas às questões 2 e 3.
Não é permitido o uso de calculadoras.

1. (a) O Bruno tem muitos berlindes azuis, brancos, verdes e vermelhos. O Bruno quer oferecer ao irmão três berlindes, usando duas cores diferentes (por exemplo, o Bruno poderia oferecer ao irmão dois berlindes azuis e um berlinde branco). De quantas maneiras pode o Bruno escolher os berlindes?

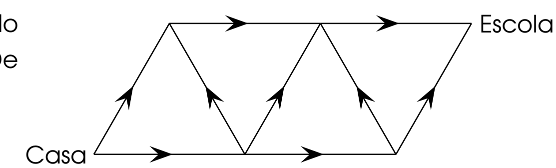
A) 3 B) 6 C) 8 D) 12 E) 16

(b) No quarto do Bruno está um quadro com uma fotografia dos dois irmãos. Tanto o quadro como a fotografia são quadrados e a fotografia tem 9 cm de lado. Sabendo que o perímetro da fotografia mede metade do perímetro do quadro, qual é a área total do quadro?



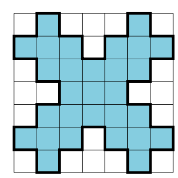
A) 64 cm^2 B) 72 cm^2 C) 96 cm^2 D) 216 cm^2 E) 324 cm^2

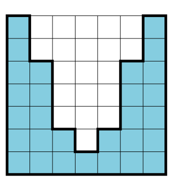
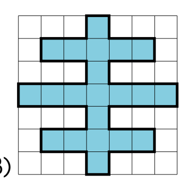
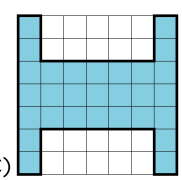
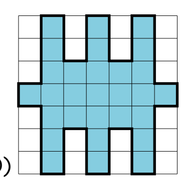
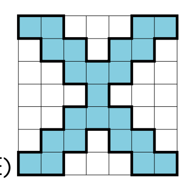
(c) O Bruno vai de casa até à escola de bicicleta, por ruas de sentido único. Na figura está representado o sentido de cada rua. De quantas formas pode o Bruno escolher o trajeto?



A) 1 B) 3 C) 5 D) 7 E) 9

(d) Na escola do Bruno estão dois painéis formados por azulejos de tamanho igual. O Bruno reparou que as partes pintadas dos dois painéis tinham a mesma área e o mesmo perímetro. Um dos painéis está representado na figura ao lado. Qual das seguintes figuras poderá representar o outro painel?



A)  B)  C)  D)  E) 

(e) Por baixo dos painéis está a inscrição $123456789101112\cdots9899100$, formada pelos números inteiros de 1 a 100, colocados lado a lado. Quantos algarismos tem esta inscrição?

A) 192 B) 195 C) 198 D) 200 E) 201

2. A turma do Tiago está distribuída na sala por filas de 5 mesas individuais. As filas da frente estão completas e a última tem apenas 2 alunos. Na sala de Educação Visual, as filas são de 7 mesas; todas estão completas exceto a última, onde ficaram 3 mesas livres. Qual é o número mínimo de alunos que a turma pode ter?

3. A Alice, a Beatriz e a Carolina são irmãs. Sabe-se o seguinte:

a) a soma das idades das três irmãs é 42;

b) a Alice tem o dobro da idade da Beatriz;

c) a Carolina é dois anos mais nova do que a Beatriz.

Qual é a idade de cada uma das irmãs?

XL OPM - 10.11.2021 - Pré-Olimpíadas - 5° ano

Sugestões para a resolução dos problemas

Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3: 10 pontos cada

1. (a) Opção D. (*Há* 4 *escolhas para a cor que aparece duas vezes e* 3 *escolhas para a outra cor.*)
   (b) Opção E. (*O lado do quadro mede* $9 \times 2 = 18$ *cm.*)
   (c) Opção C. (*O Bruno tem de escolher um dos cinco caminhos ascendentes.*)
   (d) Opção D. (*O painel tem área* 29 *quadrículas e perímetro* 44 *lados de quadrícula.*)
   (e) Opção A. ($9 \times 1 + 90 \times 2 + 1 \times 3 = 192$.)

2. O número de alunos da turma é simultaneamente um múltiplo de 5 mais duas unidades (7, 12, 17, 22, 27, 32, 37, 42, etc.) e um múltiplo de 7 mais quatro unidades (11, 18, 25, 32, 39, etc.).

   O primeiro número que verifica ambas as condições é o 32, logo o número mínimo de alunos que a turma pode ter é 32.

3. Tomemos a idade da Beatriz como referência.

   Temos então que a Alice tem o dobro da idade da Beatriz e a Carolina tem menos dois anos que a Beatriz.

   Isto significa que a soma das três idades equivale a somar 2 vezes a idade da Beatriz (idade da Alice), com a idade da Beatriz (idade da própria Beatriz), com a idade da Beatriz e subtrair 2 (idade da Carolina).

   Temos então que a soma das idades mais 2 ($42 + 2 = 44$) é o quádruplo da idade da Beatriz.

   Logo a Beatriz tem $44/4 = 11$ anos.

   Finalmente, vemos que a Carolina tem $11 - 2 = 9$ anos e que a Alice tem $11 \times 2 = 22$ anos.

Olimpíadas Portuguesas de Matemática

www.olimpiadas.spm.pt

XL OPM - 1ª Eliminatória - 10.11.2021 - Categoria Júnior - 6º/7º anos

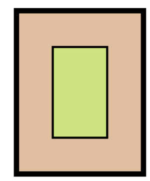
Duração: 2 horas
Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3, 4: 8 pontos cada

Na questão 1 escolhe, em cada alínea, a opção correta.
Justifica convenientemente as tuas respostas às questões 2, 3 e 4.
Não é permitido o uso de calculadoras.

1. (a) A Alice, a Beatriz e a Carolina são irmãs. A soma das idades das três irmãs é 42. A Alice tem o dobro da idade da Beatriz. A Carolina é dois anos mais nova do que a Beatriz. Qual é a idade da Beatriz?

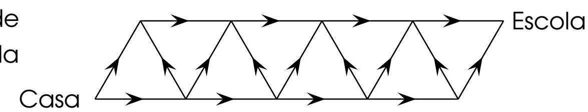
   A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

   (b) No quarto da Alice está um quadro com uma fotografia das três irmãs. A fotografia é um retângulo de largura 3 dm e altura 5 dm e a moldura tem largura constante, como na figura. Sabendo que o perímetro da fotografia mede metade do perímetro do quadro, qual é a área total do quadro?

   A) 20 dm^2 B) 30 dm^2 C) 42 dm^2 D) 56 dm^2 E) 63 dm^2

   (c) A Carolina vai de casa até à escola de bicicleta, por ruas de sentido único. Na figura está representado o sentido de cada rua. De quantas formas pode a Carolina escolher o trajeto?

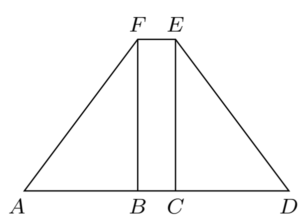
   

   A) 1 B) 7 C) 9 D) 16 E) 20

   (d) Na parede da escola da Carolina está a inscrição $123456789101112\cdots201920202021$, formada pelos números inteiros de 1 a 2021, colocados lado a lado. Quantos algarismos tem esta inscrição?

   A) 4042 B) 5555 C) 6063 D) 6977 E) 8084

2. Na figura seguinte, B e C são pontos do segmento $[AD]$. O retângulo $[BCEF]$ tem 100 cm^2 de área e $[BDEF]$ tem 70 cm de perímetro. Os triângulos $[ABF]$ e $[DCE]$ têm cada um 60 cm de perímetro. Qual é o perímetro de $[ADEF]$?



3. O João pintou um número em cada face de duas moedas. Atirou as moedas ao chão e as faces visíveis tinham os números 5 e 8, cuja soma é 13. Depois, atirou as moedas ao chão mais três vezes e obteve as somas 10, 11 e 14. Determina todas as possibilidades para os números que o João pintou nas outras faces das moedas.

4. O professor de artes quer que os seus alunos decorem a escola com lanternas de abóboras alusivas ao Halloween. Quando distribuiu as abóboras pelos seus alunos, cada um recebeu 15 abóboras e sobrou uma. Se 2 alunos se juntarem à turma de artes, e as abóboras forem redistribuídas, cada aluno recebe 11 abóboras e sobram 3. Determina o número total de abóboras.

XL OPM - 1ª Eliminatória - 10.11.2021 - Categoria Júnior - 6º/7º anos

Sugestões para a resolução dos problemas

Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3, 4: 8 pontos cada

1. (a) Opção B. (*A Alice tem* 22 *anos, a Beatriz tem* 11 *anos e a Carolina tem* 9 *anos.*)
   (b) Opção E. (*O quadro tem largura* $3 + 4 = 7$ *dm e altura* $5 + 4 = 9$ *dm.*)
   (c) Opção C. (*A Carolina tem de escolher um dos nove caminhos ascendentes.*)
   (d) Opção D. ($9 \times 1 + 90 \times 2 + 900 \times 3 + 1022 \times 4 = 6977.$)

2. Observe-se que
$$\text{Perímetro}[BDEF] - \text{Perímetro}[CDE] = 70 - 60 = 10.$$
   Por outro lado,
$$\text{Perímetro}[BDEF] - \text{Perímetro}[CDE] = \overline{BC} + \overline{FE} = 2 \times \overline{BC}$$
   e, por isso, $\overline{BC} = 5$.

   Uma vez que a área de $[BCEF]$ é 100, conclui-se que $\overline{BF} = \dfrac{100}{\overline{BC}} = 20$.

   Portanto, o perímetro de $[ADEF]$ é
$$\text{Perímetro}[BDEF] + \text{Perímetro}[ABF] - 2 \times \overline{BF} = 70 + 60 - 40 = 90\,\text{cm}.$$

3. Notemos que o número de cada face aparece exatamente 2 vezes como somando, nas somas de resultado 10, 11, 13 e 14. Logo a soma destes 4 valores ($10 + 11 + 13 + 14 = 48$) é o dobro da soma dos 4 números pintados nas moedas. Logo a soma dos 4 números pintados é $48/2 = 24$. Podemos concluir que a soma das duas faces que desconhecemos é $24 - 13 = 11$.

   Se 10 for a soma de 5 com a face que desconhecemos da segunda moeda, isto obriga esta a ser 5, logo a restante face tem o número $11 - 5 = 6$.

   Se 10 é a soma de 8 com a face desconhecida da primeira moeda, isto obriga esta a ser 2, logo a restante face tem o número $11 - 2 = 9$.

   Portanto as moedas têm os números $(5, 6)$ e $(8, 5)$ ou as moedas têm os números $(5, 2)$ e $(8, 9)$.

4. Quando se juntam dois alunos à turma, cada aluno inicial tem que lhes dar 4 das suas abóboras, sobrando mais 2 abóboras.

   Como os novos alunos receberam $11 \times 2 = 22$ abóboras, então os alunos iniciais deram $22 + 2 = 24$ abóboras.

   Logo havia inicialmente $24/4 = 6$ alunos. Assim, há $15 \times 6 + 1 = 91$ abóboras.

OLIMPÍADAS
PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA

www.olimpiadas.spm.pt

XL OPM - 2ª Eliminatória - 12.01.2022 - Categoria Júnior - 6º/7º anos

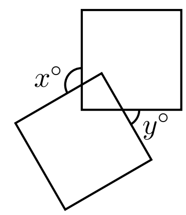
Duração: 2 horas
Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3, 4: 8 pontos cada

Na questão 1 escolhe, em cada alínea, a opção correta.
Justifica convenientemente as tuas respostas às questões 2, 3 e 4.
Não é permitido o uso de calculadoras.

1. (a) No dia de Reis, o Pedro recebeu um saco de berlindes dos avós. O saco continha 15 berlindes azuis, 12 verdes, 9 brancos, 30 dourados e 2 vermelhos. Quantos berlindes ele deve retirar do saco, de olhos fechados, para ter a certeza que retira berlindes de 3 cores diferentes?

A) 4 B) 12 C) 28 D) 32 E) 46

(b) O Pedro sobrepôs dois quadrados, como se mostra na figura. Qual é o valor de $x + y$?

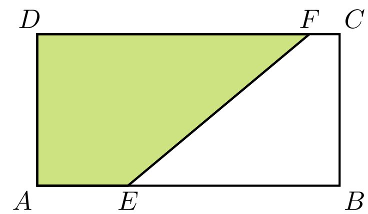


A) 100 B) 120 C) 150 D) 180 E) 300

(c) O Pedro escreveu todos os algarismos do número $5^8 \times 8^5$. Quantos algarismos foram escritos pelo Pedro?

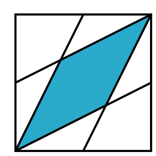
A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

(d) O Pedro dividiu o retângulo $[ABCD]$ da figura em duas regiões. A área da região colorida mede $3/2$ da área da outra região.
Sabendo que $\overline{AD} = 10$ cm, $\overline{AE} = 6$ cm e $\overline{DF} = 18$ cm, quanto mede $[EB]$?

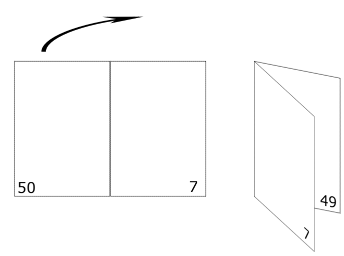


A) 12 cm B) 14 cm C) 16 cm D) 17 cm E) 18cm

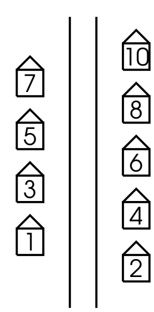
2. Num quadrado com 6 cm de lado, foram traçados alguns segmentos de reta unindo vértices e pontos médios de lados, tal como se mostra na figura.
Qual é a área do paralelogramo sombreado?



3. No dia de Reis, o João fez um livro para oferecer ao irmão. Ele pegou num monte de folhas $A4$, dobrou-o ao meio e agrafou-o de modo a formar um livro $A5$. As páginas foram numeradas por ordem crescente, começando na capa com o número 1.
Sabendo que existe um lado de uma das folhas $A4$, representada na figura, que tem o número 50 no canto inferior esquerdo e o número 7 no canto inferior direito, quantas folhas $A4$ usou o João para fazer o livro?



4. No reino da Matemática existe uma rua em que as casas do lado esquerdo estão numeradas com os números ímpares de 1 a 7, e as do lado direito com os números pares de 2 a 10.
O rei pretende remodelar o aspeto da rua, pintando cada uma das casas de azul ou de branco. Além disso, ele não quer que haja 3 casas seguidas, no mesmo lado, pintadas da mesma cor (por exemplo, as casas 2, 4 e 6 não podem ter a mesma cor), e quer que a soma dos números das casas azuis seja igual à soma dos números das casas brancas.
De quantas maneiras pode o rei mandar pintar as casas daquela rua?



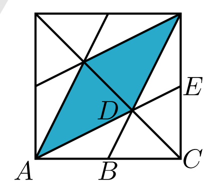
XL OPM - 2ª Eliminatória - 12.01.2022 - Categoria Júnior - 6º/7º anos

Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3, 4: 8 pontos cada

Sugestões para a resolução dos problemas

1. (a) Opção E. $(30 + 15 + 1 = 46.)$
   (b) Opção D. (*Os ângulos na interseção têm amplitudes* $x°$, $y°$, $90°$ *e* $90°$, *cuja soma é* $360°$.)
   (c) Opção B. $(5^8 \times 8^5 = 5^8 \times 2^{15} = 10^8 \times 2^7 = 128 \times 10^8.)$
   (d) Opção B. (*Área de* $[ADFE] = 120\ cm^2$; *Área de* $[ABCD] = 200\ cm^2$; $\overline{AB} = 20\ cm$.)

2. Considerando a seguinte divisão da figura, como $[BDC]$ é congruente a $[EDC]$ e tem a mesma base e a mesma altura que $[ABD]$ então estes triângulos têm todos a mesma área. Como a área de $[ACE]$ é $6 \times 3/2 = 9$ cm^2, então cada triângulo branco tem área 3 cm^2. Portanto a área do paralelogramo é $6^2 - 8 \times 3 = 12$ cm^2.



3. O livro tem 6 páginas antes da página 7, logo tem também 6 páginas depois da página 50. Assim, o livro tem 56 páginas, ou seja, foi feito com $56/4 = 14$ folhas A4.

4. Como a soma de todos os números das casas é $1 + 2 + \cdots + 7 + 8 + 10 = 46$, sabemos que a soma dos números das casas azuis e dos números das casas brancas tem que ser $\frac{46}{2} = 23$. Como 23 é ímpar, temos que pintar um número ímpar de casas do lado esquerdo de cada cor. Logo, no lado esquerdo da rua, há uma casa de uma cor e três de outra cor. Vamos supor que uma casa é azul e três são brancas, sendo o outro caso simétrico. Como não há três casas seguidas da mesma cor, temos apenas dois casos a considerar:

   Caso 1: A casa com o número 5 é azul e as restantes são brancas;
   Caso 2: A casa com o número 3 é azul e as restantes são brancas.

   No primeiro caso, a soma dos números das casas do lado direito a pintar de azul deve ser $23-5 = 18$ e a pintar de branco deve ser $23-(1+3+7) = 12$. Como não há três casas seguidas da mesma cor e $8+6+2 < 18$, a casa número 10 tem que ser pintada de azul. Analogamente, como não há três casas seguidas da mesma cor e $6+4 < 12$, a casa número 8 tem que ser pintada de branco. É então fácil concluir que as casas números 2 e 6 serão azuis e que a casa número 4 será branca. Logo, no primeiro caso existe apenas uma maneira de pintar as casas.

   No segundo caso, a soma dos números das casas do lado direito a pintar de azul deve ser $23 - 5 = 20$ e a pintar de branco deve ser $23 - (1 + 3 + 7) = 10$. Seguindo um raciocínio análogo ao do caso precedente, podemos concluir que a casa número 10 tem que ser pintada de azul. Ficam a faltar pintar as casas com os números $2, 4, 6$, e 8, sendo que a soma dos números das casas pintadas de cada uma das cores deve ser 10. Claramente existem duas formas de fazer isso: ou se pintam as casas com os números 2 e 8 de azul e as restantes de branco, ou se pintam as casas com os números 2 e 8 de branco e as restantes de azul. Como ambas as escolhas respeitam a restrição de não haver três casas seguidas pintadas com a mesma cor, podemos concluir que há duas maneiras possíveis de pintar as casas no segundo caso.

   Logo, o rei pode mandar pintar as casas de $2 \times (1 + 2) = 6$ formas distintas.

XL OPM - Final - 1º Dia - 08.04.2022 - Categoria Júnior - 6º/7º anos

Duração: 3 horas
Questão 1: 16 pontos
Questões 2 e 3: 7 pontos cada

Justifica convenientemente as tuas respostas e indica os principais cálculos.
Não é permitido o uso de calculadoras.

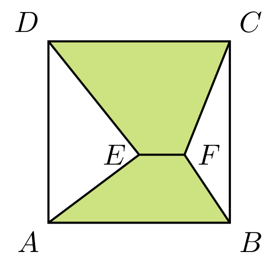
1. (a) Numa viagem pelo mundo, enquanto explorava a Terra dos Enigmas, o Zacarias perdeu-se num belo e enigmático castelo. A porta da sala onde se encontrava, tinha nela escrita a seguinte lista de números: $7, 28, 35, 37, 65$. Para que esta se abra, o Zacarias deve riscar um conjunto de números cuja soma perfaça 100. De quantas formas o pode fazer?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

(b) Do outro lado da porta, encontrou o guardião Xavier que lhe disse:

"Já reparaste bem no teto desta sala? Tem desenhado um quadrado $[ABCD]$ cuja área mede 16 m^2. O segmento $[EF]$ que vês traçado, tem 1 metro de comprimento e é paralelo ao lado $[AB]$. Só sairás daqui se adivinhares qual é a área da região pintada."

O que deverá responder o Zacarias?



A) 4 m^2 B) 6 m^2 C) 10 m^2 D) 12 m^2 E) 16 m^2

(c) Mais um enigma resolvido, e o Zacarias encontra o seu velho amigo Vítor que lhe diz: "Estás a ver este livro? Se me disseres quantas páginas tem, eu ajudo-te a sair daqui. Dou-te uma dica: o algarismo 3 aparece 22 vezes."

Qual é o número máximo de páginas que pode ter o livro do Vítor?

A) 22 B) 111 C) 113 D) 114 E) 122

(d) Quase à saída do magnífico castelo, os dois amigos deparam-se com o Grande Mestre Ulisses que tinha acabado de calcular a soma $4 + 44 + 444 + \cdots + \underbrace{4\ldots4}_{2022 \text{ algarismos}}$.

Qual é o número formado pelos últimos três algarismos do número que ele obteve?

A) 088 B) 768 C) 816 D) 928 E) 968

2. O Luís e a Mafalda começaram agora a estudar na *Escola Secundária Raul Proença* e enviaram o seguinte convite aos seus novos colegas de turma:

> *Gostaríamos muito que nos fossem visitar.*
> *Os números das portas das nossas casas têm dois algarismos, sendo os das dezenas iguais.*
> *Se somarem os algarismos do número da porta da Mafalda obtêm o algarismo das unidades da porta do Luís.*
> *O produto dos números das nossas portas é múltiplo de 9 e a sua soma é múltipla de 10.*

Quais são os números das portas das casas dos dois amigos?

3. O Raul escreveu o número 235689741 e reparou que o número é uma *montanha*, pois utiliza todos os algarismos de 1 a 9 exatamente uma vez, começa por ter os algarismos ordenados de forma crescente, depois de forma decrescente e não começa nem termina em 9. Quantos números *montanha* existem?

Duração: 3 horas
Questão 1: 16 pontos
Questões 2 e 3: 7 pontos cada

Sugestões para a resolução dos problemas

1. (a) Se o Zacarias riscar o número 65, então, para que a soma dos números riscados seja 100, ele deverá riscar, além do 65, um conjunto de números cuja soma seja 35. Ora, ele tem duas possibilidades para isso: ou risca o 35 ou o 7 e o 28. Se, pelo contrário, o Zacarias não riscar o número 65, então, como a soma dos restantes números é $7+28+35+37=107$, ele terá necessariamente que riscar os números 28, 35 e 37. Logo, o Zacarias terá que riscar os números de um dos seguintes conjuntos: $\{35,65\}$, $\{7,28,65\}$, ou $\{28,35,37\}$.
   Opção correta: D).

   (b) Como a área do quadrado mede 16 m^2, o seu lado mede 4 m. Logo, a área a branco é a área de dois triângulos cujas alturas somam $4-1=3$ m, ou seja, mede $\frac{4\times 3}{2}=6$ m^2. Podemos então concluir que a área da região sombreada é de $16-6=10$ m^2.
   Opção correta: C).

   (c) Repare-se que o algarismo 3 ocorre 22 vezes entre os números 1 e 122. Como o número 123 usa o algarismo 3, o livro do Vítor tem, no máximo, 122 páginas.
   Opção correta: E).

   (d) Começamos por observar que para os últimos três algarismos da soma indicada apenas contribuem os últimos três algarismos de cada uma das parcelas. Logo, o número procurado é o número formado pelos últimos três algarismos de $4+44+444\times 2020=896928$, ou seja, o 928.
   Opção correta: D).

2. Sejam $m=ab$ o número da porta da casa da Mafalda e $l=ac$ o número da porta da casa do Luís.

   Sabendo que $m+l$ é múltiplo de 10, pode afirmar-se que $b+c=0$ ou $b+c=10$. Como $a>0$ e $a+b=c$, conclui-se que $c>b$ e temos os casos:

   - $b=1$, $c=9$ e $a=8$;
   - $b=2$, $c=8$ e $a=6$;
   - $b=3$, $c=7$ e $a=4$;
   - $b=4$, $c=6$ e $a=2$.

   Por fim, tendo em conta que $m\times l$ é múltiplo de 9, conclui-se que $b=1$, $c=9$ e $a=8$, ou seja, $m=81$ e $l=89$.

3. Comecemos por notar que o algarismo 9 é maior que os restantes, logo será o cume da montanha. Cada um dos restantes 8 algarismos pode estar à esquerda ou à direita do 9, logo há 2^8 possibilidades. Para cada uma delas, os algarismos ficam automaticamente ordenados, logo não há mais escolhas a fazer. Temos apenas que retirar os casos 123456789 e 987654321, que não são montanhas. Logo há $2^8-2=254$ montanhas.

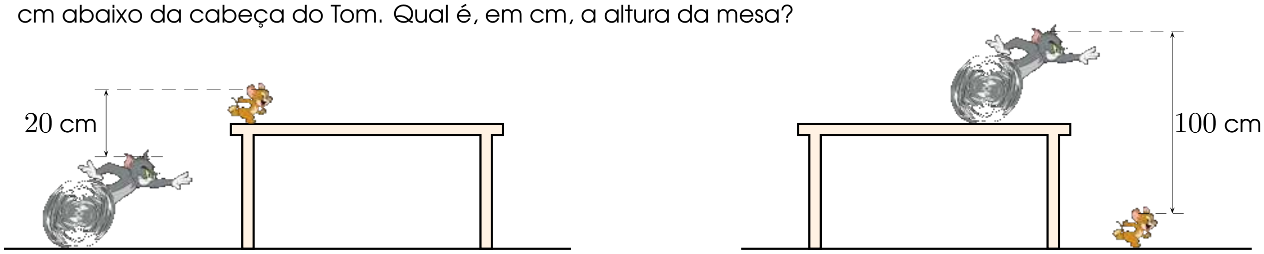
Duração: 3 horas
Questão 4: 16 pontos
Questões 5 e 6: 7 pontos cada

Justifica convenientemente as tuas respostas e indica os principais cálculos.
Não é permitido o uso de calculadoras.

4. (a) O visor duma calculadora está avariado e só é possível, em qualquer operação, ver o algarismo das unidades. A sucessão $8, 6, 4, 0, 4, 4, 8, 2, \ldots$ foi construída da seguinte forma: a partir do terceiro, cada termo é a soma dos dois anteriores, tal como aparece na calculadora avariada. Qual é o 2022^{o} termo desta sucessão?

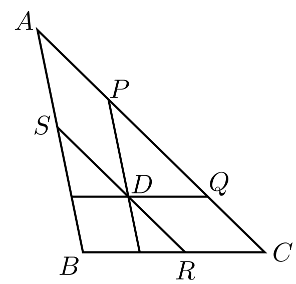
A) 0 B) 2 C) 4 D) 6 E) 8

(b) O Tom e o Jerry trocaram de posições relativamente a uma mesa. Nas posições da figura à esquerda, a cabeça do Jerry está 20 cm acima da cabeça do Tom e, na figura à direita, a cabeça do Jerry está 100 cm abaixo da cabeça do Tom. Qual é, em cm, a altura da mesa?



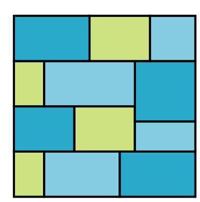
A) 40 B) 60 C) 65 D) 70 E) 80

(c) Seja $[ABC]$ um triângulo tal que $\overline{AB} = 5$ cm, $\overline{AC} = 7$ cm e $\overline{BC} = 4$ cm. Pelo ponto D, no interior do triângulo, traçam-se retas paralelas aos três lados que os intersetam nos pontos P, Q, R e S, tal como se mostra na figura. Qual é a medida, em cm, de $\overline{PQ} + \overline{RS}$?



A) 4 B) 5 C) $5,5$ D) 6 E) 7

(d) Com doze azulejos retangulares formou-se uma parede quadrangular, tal como se mostra na figura. Se a soma dos perímetros dos azulejos é 4200 cm, quantos centímetros mede o lado da parede?



A) 105 B) 210 C) 300 D) 350 E) 380

5. Na Terra das Figuras Geométricas, o Tiago viu a subtração $\triangle\bigcirc\square - \bigcirc\square\triangle = 126$ escrita numa parede. Sabendo que cada símbolo representa um algarismo de 0 a 9, quais são os valores possíveis para $\bigcirc\square\triangle$?

6. O João escreveu um número inteiro positivo em cada uma das faces de um cubo. De seguida, para cada vértice do cubo, o João calculou o produto dos números das três faces adjacentes a esse vértice. A soma destes 8 produtos é 165. Determina a soma dos seis números escritos nas faces do cubo.

XL OPM - Final - 2º Dia - 09.04.2022 - Categoria Júnior - 6º/7º anos

Duração: 3 horas
Questão 1: 16 pontos
Questões 2 e 3: 7 pontos cada

Sugestões para a resolução dos problemas

4. (a) Escrevendo mais alguns termos da sucessão, tem-se

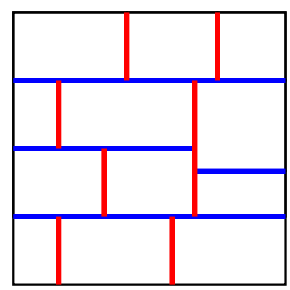
$$\mathbf{8}, \mathbf{6}, 4, 0, 4, 4, 8, 2, 0, 2, 2, 4, 6, 0, 6, 6, 2, 8, 0, 8, \mathbf{8}, \mathbf{6}, \ldots$$

ou seja, a sucessão repete-se de 20 em 20 termos. Como $2022 = 101 \times 20 + 2$, o termo 2022 vai ser 6.
Opção correta: D)

(b) Se não houvesse a mesa, a soma da diferença de alturas entre o Tom e o Jerry com a diferença de alturas entre o Jerry e o Tom era zero. Como a cada uma das diferenças adicionamos a altura da mesa, vem que o dobro da altura da mesa é a soma das diferenças das alturas, logo $20 + 100 = 120$. Assim, a altura da mesa é 60 cm.
Opção correta: B)

(c) Por construção, os quadriláteros $[APDS]$ e $[DQCR]$ são paralelogramos, logo $\overline{AP} = \overline{SD}$ e $\overline{DR} = \overline{QC}$. Então $\overline{PQ} + \overline{RS} = \overline{PQ} + \overline{SD} + \overline{DR} = \overline{PQ} + \overline{AP} + \overline{QC} = \overline{AC} = 7$ cm.
Opção correta E).

(d) A soma dos perímetros de todos os retângulos contém a medida de 4 lados da parede no perímetro do quadrado; no interior há mais 3 conjuntos de segmentos horizontais que formam um lado (que se têm de contar duas vezes por terem sobreposições de dois lados de perímetros de azulejos) e 2 conjuntos de segmentos verticais que formam um lado (que se têm de contar duas vezes por terem sobreposições de dois lados de perímetros de azulejos). Portanto, a soma dos perímetros de todos os retângulos é igual a $4 + 2 \times 6 + 2 \times 2 = 14$ vezes o lado da parede, logo o lado mede $4200/14 = 300$ cm.
Opção correta C)



5. Comecemos por notar que ter-se $\Diamond\bigcirc\Box - \bigcirc\Box\Diamond = 126$ equivale a ter-se $\bigcirc\Box\Diamond + 126 = \Diamond\bigcirc\Box$. Fica então claro que:

- $\Box$ é o algarismo das unidades de $6 + \Diamond$;
- $\bigcirc$ é o algarismo das unidades da soma de $2 + \Box$ com o algarismo das dezenas de $6 + \Diamond$ (que se considera 0 se esta soma for inferior a 10);
- $\Diamond$ é a soma de $1 + \bigcirc$ com o algarismo das centenas de $26 + \Box\Diamond$. Em particular, devemos ter $\Diamond \geq 1$ e $\bigcirc \leq 8$.

Ou seja, para cada valor possível de $\Diamond$, existe no máximo uma solução.

Solução 1: Analisamos então cada uma das possibilidades, começando por escolher $\triangle$:

$\triangle$	$\square$	$\bigcirc$	É solução?
1	7	9	Não, porque devemos ter $\bigcirc \leq 8$
2	8	0	Sim: $\bigcirc\square\triangle = 082$
3	9	1	Sim: $\bigcirc\square\triangle = 193$
4	0	3	Sim: $\bigcirc\square\triangle = 304$
5	1	4	Sim: $\bigcirc\square\triangle = 415$
6	2	5	Sim: $\bigcirc\square\triangle = 526$
7	3	6	Sim: $\bigcirc\square\triangle = 637$
8	4	7	Sim: $\bigcirc\square\triangle = 748$
9	5	8	Sim: $\bigcirc\square\triangle = 859$

Solução 2: Observando que, se $\bigcirc\square\triangle$ é uma solução, então $\bigcirc\square\triangle + 111$ também é, e que $\bigcirc\square\triangle = 082$ é uma solução, encontramos imediatamente as soluções 193, 304, 415, 526, 637, 748 e 859. Fica-nos a faltar considerar o caso em que $\triangle = 1$. Se $\triangle = 1$, então necessariamente $\square = 7$ e $\bigcirc = 9$. Mas esta atribuição não conduz a uma solução uma vez que, como já observado, devemos ter $\bigcirc \leq 8$.

Resposta: O número $\bigcirc\square\triangle$ pode tomar os seguintes valores: 082, 193, 304, 415, 526, 637, 748 e 859.

6. Sejam a, b, c, d, e, f os números escritos nas faces do cubo tais que a e f estejam em faces opostas, e o mesmo aconteça com o par b e e e com o par c e d. Então, temos

$$\begin{aligned}165 &= abc + ace + aed + adb + fbc + fce + fed + fdb \\ &= a(bc + ce + ed + db) + f(bc + ce + ed + db) \\ &= (a + f)(bc + ce + ed + db) \\ &= (a + f)(b + e)(c + d)\end{aligned}$$

Como cada fator $a + f$, $b + e$ e $c + d$ é um inteiro positivo maior do que 1, segue-se da unicidade da decomposição em primos de $165 = 3 \times 5 \times 11$ que os conjuntos $\{a + f, b + e, c + d\}$ e $\{3, 5, 11\}$ são iguais. Assim, a soma pretendida é $(a + f) + (b + e) + (c + d) = 3 + 5 + 11 = 19$.

XL OPM - 1ª Eliminatória - 10.11.2021 - Categoria A - 8º/9º anos

www.olimpiadas.spm.pt

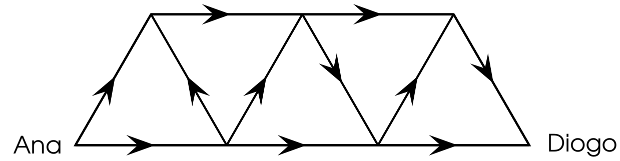
Duração: 2 horas
Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3, 4: 8 pontos cada

Na questão 1 escolhe, em cada alínea, a opção correta.
Justifica convenientemente as tuas respostas às questões 2, 3 e 4.
Não é permitido o uso de calculadoras.

1. (a) A Ana, o Bernardo, a Carla e o Diogo têm a mesma idade. Qual dos seguintes algarismos não pode ser o algarismo das unidades do produto das idades dos quatro amigos?

   A) 0 B) 1 C) 5 D) 6 E) 9

   (b) Para ir da sua casa até à casa do Diogo, a Ana tem de percorrer ruas com sentido único, como indicado na figura. Quantos caminhos diferentes a Ana tem à escolha para ir da sua casa até à casa do Diogo?



   A) 1 B) 7 C) 11 D) 16 E) 20

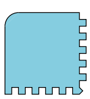
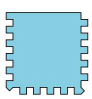
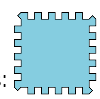
   (c) A Carla pediu ao Bernardo que escrevesse todos os números entre 100 e 1000, constituídos apenas pelos algarismos $0, 1, 2, 3$ ou 5, sem repetição. Quantos destes números são divisíveis por 6?

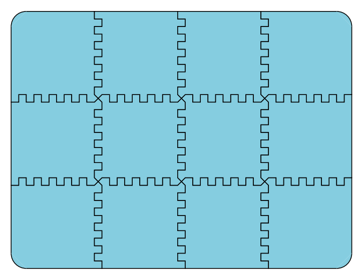
   A) 7 B) 8 C) 10 D) 12 E) 13

   (d) A Ana escolheu o número $A = 50^6$, o Bernardo o número $B = 10^{10}$ e a Carla o número $C = 6^{15}$. Por que ordem deve o Diogo colocar os números escolhidos de modo que fiquem por ordem crescente?

   A) $A < B < C$ B) $B < A < C$ C) $C < B < A$ D) $A < C < B$ E) $B < C < A$

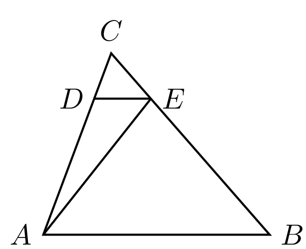
2. A Adriana gosta de montar tapetes com os seguintes tipos de peças:

   Cantos:  Laterais:  Interiores: 



   Ao lado está um tapete que a Adriana montou com 4 cantos, 6 laterais e 2 interiores.
   De seguida, a Adriana decidiu montar um tapete com 30 peças, das quais 4 eram cantos, 14 laterais e as restantes interiores.
   Quantas peças tem cada um dos lados do tapete?

3. Na figura seguinte está representado um triângulo $[ABC]$. Sejam D um ponto de $[AC]$ e E um ponto de $[BC]$ tais que $[DE]$ é paralela a $[AB]$. Sabendo que $[DEC]$ tem área 2 e que $[ADE]$ tem área 6, qual é a área de $[ABE]$?



4. A soma de 11 inteiros positivos distintos é igual a 100. Quantas parcelas ímpares deverá ter, no mínimo, esta soma?

Sugestões para a resolução dos problemas

Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3, 4: 8 pontos cada

1. (a) Opção E. (*O algarismo das unidades de* 10^4 *é* 0, *o de* 11^4 *é* 1, *o de* 12^4 *é* 6 *e o de* 15^4 *é* 5.)

   (b) Opção C. (*Há* 3×3 *trajetos que passam pelo vértice central e* 2 *trajetos que não passam.*)

   (c) Opção A. (*O Bernardo escreveu os números* 102, 120, 132, 150, 210, 312 *e* 510.)

   (d) Opção B. ($10^{10} = 2^4 \times 5^4 \times 10^6 < 5^2 \times 5^4 \times 10^6 = 50^6 = (2^2 \times 5^4)^3 < (2^2 \times 3^2 \times 6^3)^3 = (6^5)^3 = 6^{15}$.)

2. **Solução 1**: Como há 30 peças, então as dimensões do tapete podem ser 1×30, 2×15, 3×10 ou 5×6. No primeiros dois casos, não haveria peças interiores; no terceiro caso, haveria apenas 8 peças interiores; no último caso, de facto, existem 12 peças interiores. Logo as dimensões do tapete são 5×6.

   Solução 2: Como há $30 - 14 - 4 = 12$ peças interiores, então as dimensões do interior podem ser 1×12, 2×6 ou 3×4. No primeiro caso, o tapete teria dimensões 3×14, ou seja, 42 peças; no segundo caso, o tapete teria dimensões 4×8, ou seja, 32 peças; no terceiro caso, de facto, o tapete tem dimensões 5×6, ou seja, 30 peças. Logo as dimensões do tapete são 5×6.

3. Como área $[CAE] = 4\times$ área $[DEC]$ e estes triângulos têm a mesma altura em relação a E, então $\overline{CA} = 4 \times \overline{CD}$.

   (Em alternativa, como área $[ADE] = 3\times$ área $[DEC]$, e estes triângulos têm a mesma base $[DE]$, então a altura de $[ADE]$ é o triplo da altura de $[DEC]$. Portanto, a altura de $[ABC]$ é o quádruplo da altura de $[DEC]$.)

   Como $[DE]$ é paralelo a $[AB]$, então $[ABC]$ é semelhante a $[DEC]$, com razão de semelhança 4.

   Portanto, área$[ABC] = 4^2\times$ área $[DEC] = 4^2 \times 2 = 32$.

   Logo área $[ABE] =$ área $[ABC]-$ área $[DEC]-$ área $[ADE] = 32 - 2 - 6 = 24$.

4. Como a soma dos onze inteiros é par, então há um número par de parcelas ímpares.

   A soma dos primeiros 11 inteiros pares positivos é maior do que 100, uma vez que

   $$2+4+6+\cdots+20+22 = (2+22)+(4+20)+(6+18)+(8+16)+(10+14)+12 = 24\times 5+12 = 132\,.$$

   Então há pelo menos duas parcelas ímpares.

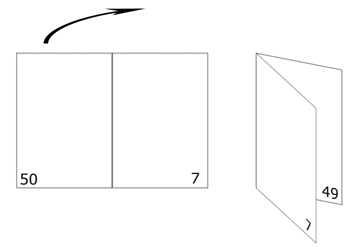
   Retirando os dois maiores números da soma anterior, obtém-se $2+4+\cdots+18 = 132-20-22 = 90$, faltando 10 para a soma ser 100. Esta soma pode ser obtida, por exemplo, acrescentando os dois números ímpares 1 e 9.

XL OPM - 2ª Eliminatória - 12.01.2022 - Categoria A - 8°/9° anos

Duração: 2 horas
Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3, 4: 8 pontos cada

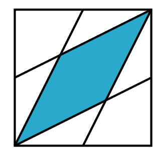
Na questão 1 escolhe, em cada alínea, a opção correta.
Justifica convenientemente as tuas respostas às questões 2, 3 e 4.
Não é permitido o uso de calculadoras.

1. (a) No dia de Reis, o Pedro fez um livro para oferecer ao irmão. Ele pegou num monte de folhas $A4$, dobrou-o ao meio e agrafou-o de modo a formar um livro $A5$. As páginas foram numeradas por ordem crescente, começando na capa com o número 1. Sabendo que existe um lado de uma das folhas $A4$, representada na figura, que tem o número 50 no canto inferior esquerdo e o número 7 no canto inferior direito, quantas folhas $A4$ usou o Pedro para fazer o livro?



A) 7 B) 8 C) 12 D) 14 E) 16

(b) Num quadrado com 6 cm de lado, o Pedro traçou alguns segmentos de reta unindo vértices e pontos médios de lados, tal como se mostra na figura. Qual é, em cm^2, a área do paralelogramo sombreado?



A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 12

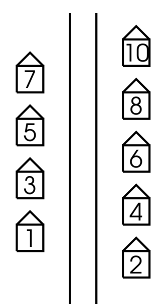
(c) O Pedro escreveu todos os números de seis algarismos começados por 20210 e reparou que apenas um deles é um número primo. Qual é o último algarismo desse número?

A) 1 B) 3 C) 4 D) 7 E) 9

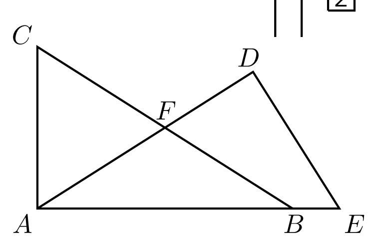
(d) Para cada número real x, define-se o valor de $f(x)$ como sendo o mínimo dos números $\{4x+1, x+2, -2x+4\}$. Por exemplo, $f(\mathbf{3}) =$ mínimo$\{4\times\mathbf{3}+1, \mathbf{3}+2, -2\times\mathbf{3}+4\} =$ mínimo$\{13, 5, -2\} = -2$. Qual é o maior valor possível para $f(x)$?

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{5}{3}$ D) $\frac{8}{3}$ E) $\frac{11}{3}$

2. No reino da Matemática existe uma rua em que as casas do lado esquerdo estão numeradas com os números ímpares de 1 a 7, e as do lado direito com os números pares de 2 a 10. O rei pretende remodelar o aspeto da rua, pintando cada uma das casas de azul ou de branco. Além disso, ele não quer que haja 3 casas seguidas no mesmo lado, pintadas da mesma cor (por exemplo, as casas 2, 4 e 6 não podem ter a mesma cor), e quer que a soma dos números das casas azuis seja igual à soma dos números das casas brancas. De quantas maneiras pode o rei mandar pintar as casas daquela rua?



3. Na figura ao lado, os triângulos $[ABC]$ e $[DAE]$ são congruentes e retângulos, com A, B e E colineares, e F é a interseção de $[AD]$ com $[CB]$. Sabendo que $\overline{AE} = 20$ cm, quanto mede $[CF]$?



4. A Mafalda contou o número de soluções inteiras positivas (a, b) da equação $a + b = 30$. Já a Laura decidiu contar o número de soluções inteiras positivas (a, b) da equação $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{30}$. Qual das duas amigas encontrou mais soluções?

Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3, 4: 8 pontos cada

Sugestões para a resolução dos problemas

1. (a) Opção D. (*O livro tem* $50 + 6 = 56$ *páginas, logo foi feito com* $56/4 = 14$ *folhas A4.*)
   (b) Opção E. (*O paralelogramo tem um terço da área do quadrado, ou seja,* 12 *cm*^{2}*.*)
   (c) Opção E. (202101 *e* 202107 *são múltiplos de* 3*;* 202103 *é múltiplo de* 11*;* 2020104 *é par.*)
   (d) Opção D. ($f(\frac{2}{3}) = \frac{8}{3}$*; se* $x < \frac{2}{3}$, $x + 2 < \frac{8}{3}$*; se* $x > \frac{2}{3}$, $-2x + 4 < \frac{8}{3}$)

2. Como a soma de todos os números das casas é $1 + 2 + \cdots + 7 + 8 + 10 = 46$, sabemos que a soma dos números das casas azuis e dos números das casas brancas tem que ser $\frac{46}{2} = 23$. Como 23 é ímpar, temos que pintar um número ímpar de casas do lado esquerdo de cada cor. Logo, no lado esquerdo da rua, há uma casa de uma cor e três de outra cor. Vamos supor que uma casa é azul e três são brancas, sendo o outro caso simétrico. Como não há três casas seguidas da mesma cor, temos apenas dois casos a considerar:

   Caso 1: A casa com o número 5 é azul e as restantes são brancas;
   Caso 2: A casa com o número 3 é azul e as restantes são brancas.

   No primeiro caso, a soma dos números das casas do lado direito a pintar de azul deve ser $23 - 5 = 18$ e a pintar de branco deve ser $23 - (1 + 3 + 7) = 12$. Como não há três casas seguidas da mesma cor e $8 + 6 + 2 < 18$, a casa número 10 tem que ser pintada de azul. Analogamente, como não há três casas seguidas da mesma cor e $6 + 4 < 12$, a casa número 8 tem que ser pintada de branco. É então fácil concluir que as casas números 2 e 6 serão azuis e que a casa número 4 será branca. Logo, no primeiro caso existe apenas uma maneira de pintar as casas.

   No segundo caso, a soma dos números das casas do lado direito a pintar de azul deve ser $23 - 5 = 20$ e a pintar de branco deve ser $23 - (1 + 3 + 7) = 10$. Seguindo um raciocínio análogo ao do caso precedente, podemos concluir que a casa número 10 tem que ser pintada de azul. Ficam a faltar pintar as casas com os números 2, 4, 6, e 8, sendo que a soma dos números das casas pintadas de cada uma das cores deve ser 10. Claramente existem duas formas de fazer isso: ou se pintam as casas com os números 2 e 8 de azul e as restantes de branco, ou se pintam as casas com os números 2 e 8 de branco e as restantes de azul. Como ambas as escolhas respeitam a restrição de não haver três casas seguidas pintadas com a mesma cor, podemos concluir que há duas maneiras possíveis de pintar as casas no segundo caso.

   Logo, o rei pode mandar pintar as casas de $2 \times (1 + 2) = 6$ formas distintas.

3. Seja $\alpha = D\widehat{A}E$. Como $[ABC]$ e $[DAE]$ são congruentes, temos que $\overline{CB} = \overline{AE} = 20$ e $A\widehat{B}C = \alpha$. Logo $[ABF]$ é isósceles, o que implica $\overline{AF} = \overline{FB}$. Temos $F\widehat{A}C = C\widehat{A}B - D\widehat{A}E = 90 - \alpha$ e, como $[ABC]$ é retângulo em A, também $A\widehat{C}B = 180 - C\widehat{A}B - A\widehat{B}C = 90 - \alpha$. Logo $[ACF]$ também é isósceles, o que implica $\overline{CF} = \overline{FA}$. Logo $\overline{CF} = \overline{FB}$. Finalmente, temos $20 = \overline{CB} = \overline{CF} + \overline{FB} = 2\overline{CF}$, logo $\overline{CF} = 10$.

4. A equação da Mafalda é $a + b = 30 \Leftrightarrow a = 30 - b$, logo há 29 soluções inteiras positivas desta equação: $(30 - b, b)$, com $b = 1, \ldots, 29$.

   A equação da Laura é $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{30} \Leftrightarrow a = 30 + \frac{900}{b-30}$, logo as soluções inteiras positivas da equação são dadas por $\left(30 + \frac{900}{b-30}, b\right)$, onde b é um divisor de 900. Como $900 = 2^2 \times 3^2 \times 5^2$ possui 27 divisores positivos (os números da forma $2^x \times 3^y \times 5^z$, com $x, y, z \in \{0, 1, 2\}$), então a equação da Laura possui 27 soluções inteiras positivas e, portanto, a Mafalda contou um maior número de soluções.

XL OPM - Final - 1º Dia - 08.04.2022 - Categoria A - 8º/9º anos

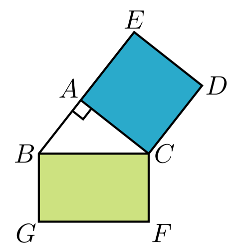
Duração: 3 horas
Questão 1: 16 pontos
Questões 2 e 3: 7 pontos cada

Justifica convenientemente as tuas respostas e indica os principais cálculos.
Não é permitido o uso de calculadoras.

1. (a) O Raul tem um grande caderno em que as páginas não estão numeradas. Ele tem autocolantes com os algarismos de 0 a 9, e decidiu numerar as páginas do caderno. O Raul tem autocolantes suficientes de cada algarismo, mas tem apenas 22 autocolantes do algarismo 2. Começando na página 1, quantas páginas consecutivas é que o Raul consegue numerar?

   A) 22 B) 99 C) 112 D) 119 E) 199

   (b) Na capa do caderno do Raul está representado um triângulo retângulo $[ABC]$, um quadrado $[ACDE]$ e um retângulo $[BCFG]$.
   Sabendo que $\overline{AB} = \overline{BG} = 2$ cm e que a área do quadrado é igual à área do retângulo, quanto mede, em cm, o lado $[BC]$?

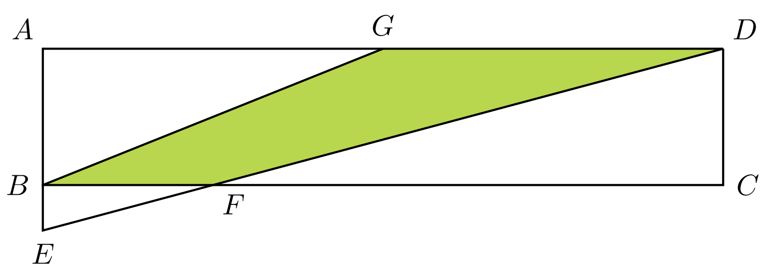


   A) $\sqrt{5}-2$ B) $\sqrt{5}-1$ C) $\sqrt{5}$ D) $\sqrt{5}+1$ E) $\sqrt{5}+2$

   (c) O Raul escreveu no seu caderno todos os 120 números com 4 algarismos que contêm apenas os algarismos $1, 2, 3, 4, 5$ e em que cada um deles aparece no máximo uma vez. Depois calculou a soma de todos esses 120 números. Qual foi o resultado dessa soma?

   A)16665 B)33330 C) 166650 D) 199980 E) 399960

   (d) Na contra-capa do caderno está um retângulo $[ABCD]$, cujas medidas dos lados são $\overline{AB} = 6$ cm e $\overline{AD} = 30$ cm. O ponto G é o ponto médio de $[AD]$ e o ponto E pertence ao prolongamento de $[AB]$ e é tal que $\overline{BE} = 2$ cm. Se F é o ponto de interseção de $[ED]$ com $[BC]$, qual é a área do quadrilátero $[BFDG]$ em cm^2?



   A) 60 B) $67,5$ C) 75 D) $82,5$ E) 90

2. O Raul escreveu o número 235689741 e reparou que o número é uma $montanha$, pois utiliza todos os algarismos de 1 a 9 exatamente uma vez, começa por ter os algarismos ordenados de forma crescente, depois de forma decrescente e não começa nem termina em 9. Quantos números $montanha$ existem?

3. O Alberto, o Bernardo e o César pintaram uma casa com quatro quartos iguais. Cada um deles pintou sempre ao mesmo ritmo. O Alberto e o Bernardo pintaram um dos quartos em 5 horas. O Bernardo e o César pintaram outro quarto em 4 horas. O Alberto e o César pintaram o terceiro quarto em 10 horas. Os três pintores começaram a pintar o último quarto, mas, ao fim de 3 horas, o Bernardo e o César tiveram que sair. Quanto tempo demorou o Alberto a pintar o resto do quarto?

XL OPM - Final - 1º Dia - 08.04.2022 - Categoria A - 8º/9º anos

Duração: 3 horas
Questão 1: 16 pontos
Questões 2 e 3: 7 pontos cada

Sugestões para a resolução dos problemas

1. (a) Entre 1 e 99 há dez números em que o algarismo das unidades é o 2 e dez números em que o algarismo das dezenas é o 2. Para numerar as páginas até 100, o Raul precisa de usar 20 autocolantes com o algarismo 2, ficando a sobrar apenas dois autocolantes. Os próximos números com o algarismo 2 são 102, 112 e 120, e portanto a última página que o Raul consegue numerar é o 119.

   Opção correta: D).

   (b) Seja x a medida do lado $[BC]$, e consequentemente a área do retângulo $[BCFG]$, e do quadrado $[ACDE]$, é $\overline{BG} \times \overline{BC} = 2x$. Usando o Teorema de Pitágoras, obtemos que

$$\overline{AB}^2 + \overline{CA}^2 = \overline{BC}^2 \Leftrightarrow 2^2 + 2x = x^2 \Leftrightarrow x^2 = 4 + 2x\,.$$

   O lado $[BC]$ é a hipotenusa do triângulo retângulo $[ABC]$, e portanto a sua medida é maior do que $\overline{AB}$. A resposta certa é assim uma das opções: C, D ou E. Fazendo $x = \sqrt{5} + 1$, verificamos que a igualdade $x^2 = 2x + 4$ é satisfeita.

   - $x^2 = \left(\sqrt{5}+1\right)^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2 + 1^2 + 2\sqrt{5} = 6 + 2\sqrt{5}$
   - $4 + 2x = 4 + 2\left(\sqrt{5}+1\right) = 6 + 2\sqrt{5}$

   Opção correta: D).

   (c) Cada um dos cinco dígitos aparece um número igual de vezes como algarismo das unidades, das dezenas, das centenas e dos milhares, ou seja cada um dos dígitos é usado $\frac{120}{5} = 24$ vezes em cada uma das posições. A soma dos algarismos das unidades é portanto $24\times(1+2+3+4+5) = 24\times 15 = 360$. De igual modo a soma dos algarismos das dezenas, das centenas e dos milhares é 360, donde se conclui que a soma dos 120 números é igual a:

$$360 + 10 \times 360 + 100 \times 360 + 1000 \times 360 = 1111 \times 360 = 399960\,.$$

   Opção correta: E).

   (d) Os triângulos retângulos $[BEF]$ e $[CDF]$ são semelhantes, uma vez que os ângulos $E\widehat{F}B$ e $D\widehat{F}C$ são iguais, por serem verticalmente opostos. Como $\frac{\overline{BE}}{\overline{CD}} = \frac{1}{3}$, pela semelhança dos triângulos $\frac{\overline{BF}}{\overline{CF}} = \frac{1}{3}$ e consequentemente $\overline{BF} = \frac{1}{4}\overline{BC} = 7,5$.

   A área do paralelogramo $[BFDG]$ é $\dfrac{\overline{BF}+\overline{DG}}{2} \times \overline{AB} = \dfrac{7,5+15}{2} \times 6 = 67,5$.

   Opção correta: B).

2. Comecemos por notar que o algarismo 9 é maior que os restantes, logo será o cume da montanha. Cada um dos restantes 8 algarismos pode estar à esquerda ou à direita do 9, logo há 2^8 possibilidades. Para cada uma delas, os algarismos ficam automaticamente ordenados, logo não há mais escolhas a fazer. Temos apenas que retirar os casos 123456789 e 987654321, que não são montanhas. Logo há $2^8 - 2 = 254$ montanhas.

3. **Solução 1:** Como os três pintores pintaram o último quarto durante 3 horas, cada um pintou o mesmo que teria pintado se cada um dos pares Alberto/Bernardo, Bernardo/César e Alberto/César tivessem pintado o quarto durante $1,5$ horas. Assim, no total pintaram $\dfrac{1,5}{5} + \dfrac{1,5}{4} + \dfrac{1,5}{10} = \dfrac{33}{40}$ do quarto. Portanto, o Alberto pintou $1 - \dfrac{33}{40} = \dfrac{7}{40}$ do quarto depois o Bernardo e o César saírem.

   Como o Bernardo e o César pintam um quarto em 4 horas, em 3 horas pintaram $\dfrac{3}{4}$ de um quarto. Logo, o Alberto pintou $1 - \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{4}$ do quarto. Assim, o Alberto pintou $\dfrac{1}{4} - \dfrac{7}{40} = \dfrac{3}{40}$ do quarto antes o Bernardo e o César saírem.

   Como demorou 3 horas para pintar $\dfrac{3}{40}$ do quarto, conclui-se que demorou 7 horas para pintar $\dfrac{7}{40}$ do quarto.

   Solução 2: Sejam a, b e c o número de quartos que o Alberto, o Bernardo e o César pintam numa hora, respetivamente. Então tem-se

$$\begin{cases} 5a + 5b = 1 \\ 4b + 4c = 1 \\ 10a + 10c = 1 \end{cases}$$

   Portanto, pela primeira igualdade, $b = \dfrac{1}{5} - a$ e, pela terceira igualdade, $c = \dfrac{1}{10} - a$.

   Substituindo na segunda igualdade, temos $\left(\dfrac{4}{5} - 4a\right) + \left(\dfrac{4}{10} - 4a\right) = 1$, ou seja, $8a = \dfrac{2}{10}$, donde $a = \dfrac{1}{40}$.

   Deduz-se agora que $b = \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{40} = \dfrac{7}{40}$ e $c = \dfrac{1}{10} - \dfrac{1}{40} = \dfrac{3}{40}$.

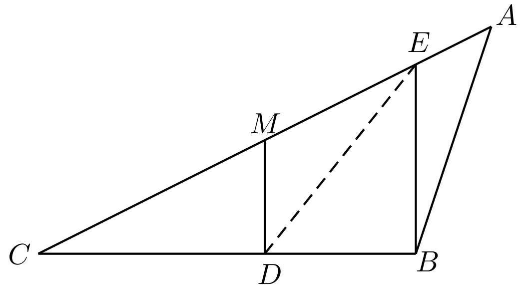
   Assim, ao fim de 3 horas, os três pintores pintaram $3 \times \left(\dfrac{1}{40} + \dfrac{7}{40} + \dfrac{3}{40}\right) = \dfrac{33}{40}$ do quarto, faltando ainda pintar $1 - \dfrac{33}{40} = \dfrac{7}{40}$. Portanto, o Alberto demorou $\dfrac{\frac{7}{40}}{\frac{1}{40}} = 7$ horas a pintar o resto do quarto.

Duração: 3 horas
Cada questão vale 10 pontos

Justifica convenientemente as tuas respostas e indica os principais cálculos.
Não é permitido o uso de calculadoras.

4. Considere-se a sucessão $1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, \ldots, 1, 2, \ldots, n, \ldots$, onde após os inteiros consecutivos de 1 até n, aparecem como termos os inteiros consecutivos de 1 até $n+1$, e assim sucessivamente. Qual é o 2022° termo desta sucessão?

5. No triângulo obtusângulo $[ABC]$ representado na figura, M é o ponto médio do lado $[AC]$ e MD e EB são perpendiculares a BC. Se a área do triângulo $[ABC]$ é 24, qual é a área do triângulo $[EDC]$?



6. O Raul encontrou um saco com moedas antigas e quer partilhar 99 destas moedas com alguns colegas da sua turma, da seguinte forma: o colega número 1 recebe uma, duas ou três moedas; o colega número 2 recebe mais uma ou menos uma moeda do que o colega número 1; o colega número 3 recebe mais uma ou menos uma moeda do que o colega número 2 e assim sucessivamente.

   Determina o menor número de colegas da turma do Raul para o qual é possível repartir as moedas desta forma.

   Para esse número, determina de quantas formas diferentes se pode fazer a repartição.

XL OPM - Final - 2º Dia - 09.04.2022 - Categoria A - 8º/9º anos

Duração: 3 horas
Cada questão vale 10 pontos

Sugestões para a resolução dos problemas

4. Uma vez que $1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ e $\frac{63\times 64}{2} = 2016 < 2022 < 2080 = \frac{64\times 65}{2}$, o 2022° termo é o número $2022-2016=6$.

5. Comece-se por observar que, sendo M o ponto médio do lado $[AC]$, tem-se que $[MD]$ mede metade da altura de A relativamente ao lado $[BC]$, logo

$$\text{área de } [ABC] = \overline{MD}\times\overline{BC}.$$

Por outro lado, os triângulos $[MDC]$ e $[EBC]$ são semelhantes e, por isso,

$$\frac{\overline{EB}}{\overline{MD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{CD}}, \text{ ou seja, } \overline{CD}\times\overline{EB} = \overline{MD}\times\overline{BC}.$$

Assim,

$$\text{área de } [CDE] = \frac{\overline{CD}\times\overline{EB}}{2} = \frac{\overline{MD}\times\overline{BC}}{2} = \frac{1}{2}\text{ área de } [ABC]$$

e, portanto, área de $[CDE]=12$.

6. Seja n o número de alunos com quem o João vai partilhar as moedas e seja a_i o número de moedas que o aluno número i recebe. Então $a_i = a_{i-1}\pm 1$ para $i=2,\ldots,n$. O João não consegue repartir as moedas por $n\leq 11$ colegas, uma vez que

$$a_1+a_2+\cdots+a_n \leq 3+4+\cdots+13 = 88 < 99.$$

O mesmo ocorre quando $n=12$ e $a_1=1$ ou $a_1=2$, uma vez que

$$a_1+a_2+\cdots+a_{12} \leq 2+3+\cdots+13 = 90 < 99.$$

Consideremos agora o caso $n=12$ e $a_1=3$. Se o aluno número i recebe uma moeda a mais do que o aluno número $i-1$, para todo o i, temos

$$a_1+a_2+\cdots+a_{12} = 3+4+\cdots+14 = 102 > 99.$$

Por outro lado, se um e apenas um aluno, digamos o número k, recebe uma moeda a menos do que o colega que o precede, então o número de moedas a distribuir é igual a $102-2j$, onde $j=12-(k+1)$. Se mais um aluno, digamos o número $k'\neq k$, recebe uma moeda a menos do que o colega que o precede, então o número de moedas a distribuir é igual a $102-2j-2j'$, onde $j'=12-(k'+1)$. Ou seja, por cada aluno que recebe menos uma moeda do que o colega que o precede, o número total de moedas a distribuir diminui por um múltiplo de 2. Como $102-2\ell$ é um número par, não é possível distribuir as 99 moedas por 12 colegas quando o primeiro recebe 3 moedas.

Consideremos agora o caso $n = 13$. Se $a_1 = 1$ temos $1 + 2 + \cdots + 13 = 91 < 99$ e se $a_1 = 2$ o número $2 + 3 + \cdots + 14 = 104$ é par. Usando o raciocínio anterior, concluímos que não é possível distribuir as 99 moedas nestes dois casos. Suponhamos agora que $a_3 = 3$. Neste caso, temos

$$3 + 4 + \cdots + 15 = 117 > 99.$$

Como vimos atrás, por cada aluno que recebe menos uma moeda do que o colega que o precede, o número total de moedas a distribuir diminui 2ℓ unidades, para certo inteiro ℓ. Queremos $99 = 117 - 2\ell$, o que implica $\ell = 9$. Portanto, cada partição do inteiro 9 em parcelas positivas e distintas dá origem a uma distribuição das 99 moedas por 13 pessoas. Temos as seguintes partições: $9, 8 + 1, 7 + 2, 6 + 3, 5 + 4, 6 + 2 + 1, 5 + 3 + 2$ e $4 + 3 + 2$, que correspondem às seguintes distribuições das moedas:

$$(3, 4, 5, 6, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13),\ (3, 4, 5, 6, 7, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 11),$$

$$(3, 4, 5, 6, 7, 8, 7, 8, 9, 10, 11, 10, 11),\ (3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 8, 9, 10, 9, 10, 11),$$

$$(3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 9, 8, 9, 10, 11),\ (3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 10, 9),$$

$$(3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 9, 10, 9, 10, 9),\ (3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 10, 9, 8, 9).$$

Portanto, 13 é o menor número de colegas do João para os quais é possível fazer a distribuição das 99 moedas e há 8 formas diferentes de fazer esta distribuição.

OLIMPÍADAS
PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA

www.olimpiadas.spm.pt

XL OPM - 1ª Eliminatória - 10.11.2021 - Categoria B - 10º/12º anos

Duração: 2 horas
Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3, 4: 8 pontos cada

Na questão 1 escolhe, em cada alínea, a opção correta.
Justifica convenientemente as tuas respostas às questões 2, 3 e 4.
Não é permitido o uso de calculadoras.

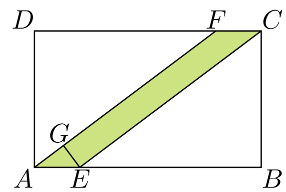
1. (a) Qual é a ordenação dos números $x = 50^6$, $y = 10^{10}$ e $z = 6^{15}$ por ordem crescente?

A) $x < y < z$ B) $y < x < z$ C) $y < z < x$ D) $z < y < x$ E) $z < x < y$

(b) Tanto o número 122 como o número 2021 têm exatamente dois algarismos iguais a 2. Quantos números inteiros positivos menores do que 10000 têm esta propriedade?

A) 171 B) 180 C) 486 D) 513 E) 627

(c) O retângulo da figura tem lados de comprimento 6 e 10. O paralelogramo $[AECF]$ tem área 12 e o segmento de reta $[GE]$ é perpendicular ao segmento de reta $[AF]$. Quando mede o segmento de reta $[GE]$?



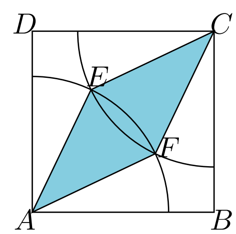
A) $\dfrac{3}{4}$ B) $\dfrac{4}{5}$ C) 1 D) $\dfrac{6}{5}$ E) $\dfrac{4}{3}$

(d) Quantos pares (x, y) de números inteiros positivos são soluções da equação

$$x^2y^5 = 6^{12}?$$

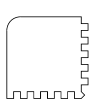
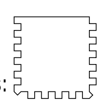
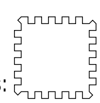
A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

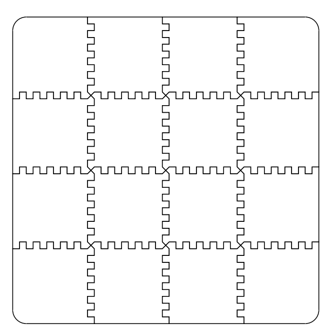
2. O quadrado $[ABCD]$ tem 48 cm de perímetro. Com centro nos vértices A e C, traçam-se dois arcos de circunferência, de raio 9 cm, que se intersetam nos pontos E e F, como se mostra na figura. Qual é a área do quadrilátero $[AFCE]$?



3. A soma de 16 inteiros positivos distintos é igual a 200. Quantas parcelas ímpares deverá ter, no mínimo, esta soma?

4. O Artur está a montar um tapete, como representado na figura, usando as seguintes peças:

Cantos:  Laterais:  Interiores: 



Há um canto amarelo, dois azuis e um cinzento; há duas peças laterais amarelas, duas azuis e quatro cinzentas; há uma peça interior amarela, duas azuis e uma cinzenta. O Artur pretende que no seu tapete não haja duas peças da mesma cor com um lado em comum (embora possam ter um vértice em comum).

De quantas formas distintas pode o Artur montar o seu tapete?

Nota: Duas configurações que se podem obter uma da outra por rotação são consideradas iguais.

Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3, 4: 8 pontos cada

Sugestões para a resolução dos problemas

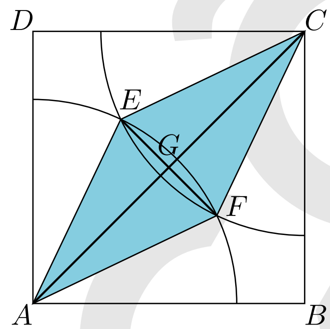
1. (a) Opção B. $(10^{10} = 2^4 \times 5^4 \times 10^6 < 5^2 \times 5^4 \times 10^6 = 50^6 = (2^2 \times 5^4)^3 < (2^2 \times 3^2 \times 6^3)^3 = (6^5)^3 = 6^{15}.)$

   (b) Opção C. (*Há* 6 *escolhas para a posição dos algarismos* 2 *e* 9^2 *escolhas para os outros algarismos.*)

   (c) Opção D. (*Tem-se* $\overline{EC} = \sqrt{6^2+8^2} = 10$ *e a área de* $[AECF]$ *é* $12 = \overline{EC} \times \overline{GE}$.)

   (d) Opção E. (*As soluções* (x, y) *são* $(2 \times 3, 2^2 \times 3^2)$, $(2^6 \times 3, 3^2)$, $(2 \times 3^6, 2^2)$, $(2^6 \times 3^6, 1)$.)

2. Uma vez que o perímetro é 48 cm, o lado do quadrado mede 12 cm. Seja G o ponto de interseção de $[AC]$ com $[EF]$. Usando o Teorema de Pitágoras no triângulo $[ABC]$, vem $\overline{AC}^2 = 12^2 + 12^2$, logo $\overline{AC} = 12\sqrt{2}$ cm.



Como $[AFCE]$ é um losango, então $[AC]$ e $[EF]$ são perpendiculares e intersetam-se nos seus pontos médios. Logo, tem-se $\overline{AG} = 6\sqrt{2}$ cm.

De novo pelo Teorema de Pitágoras, agora aplicado ao triângulo retângulo $[AGE]$, vem $(6\sqrt{2})^2 + \overline{EG}^2 = 9^2$, logo $\overline{EG} = 3$ cm. Então a área de $[AFCE]$ é

$$4 \times \text{área}[AGE] = 4 \times \frac{3 \times 6\sqrt{2}}{2} = 36\sqrt{2}\text{cm}^2.$$

3. Como a soma dos 16 inteiros é par, então há um número par de parcelas ímpares.

   A soma dos primeiros 16 números pares positivos é maior do que 200, uma vez que

   $2+4+\cdots+30+32 = (2+32)+(4+30)+(6+28)+(8+26)+(10+24)+(12+22)+(14+20)+(16+18) = 34 \times 8 = 272\,.$

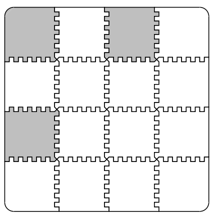
   Então há pelo menos duas parcelas ímpares. No entanto a soma dos primeiros 14 números pares positivos é igual a $272 - 32 - 30 = 210$ que ainda é maior do que 200, e portanto têm que existir pelo menos quatro parcelas ímpares.

   Finalmente basta mostrar que é possível escolher doze números pares positivos e quatro números ímpares positivos cuja soma é 200, por exemplo, da seguinte forma:

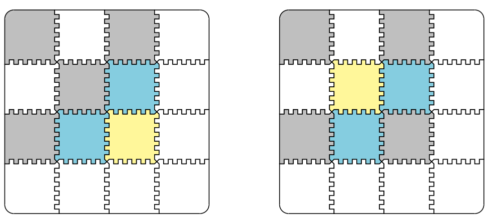
$$(2+4+6+\cdots+24) + (1+3+5+35) = 156 + 44 = 200\,.$$

4. Como duas configurações que se podem obter uma da outra por rotação são consideradas iguais, podemos contar apenas as configurações em que o canto superior esquerdo é cinzento.

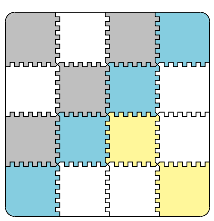
   Uma vez que há quatro peças laterais cinzentas e não pode haver duas com um lado em comum, então há uma em cada lado do tapete. Portanto qualquer configuração é da forma:

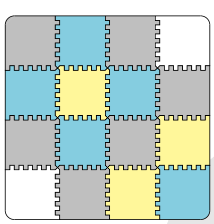
   A peça interior cinzenta não pode ter um lado comum com as laterais, logo só tem duas posições possíveis, que definem a posição das restantes peças interiores:

   - No primeiro caso, se o canto inferior direito fosse azul, as laterais com um lado em comum com esse canto seriam cinzentas e as seguintes seriam amarelas, o que impossibilitaria a colocação do canto amarelo. Portanto, o canto inferior direito é amarelo e os restantes cantos são azuis:

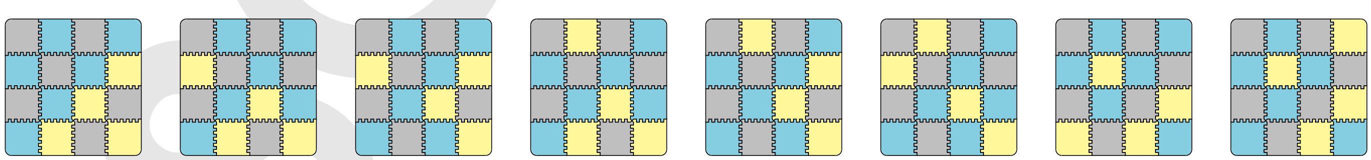
     

     Há 6 formas de escolher os lados em que vão ficar as 2 peças laterais azuis, e cada forma determina as posições das peças restantes, logo, neste caso, há 6 configurações.
   - No segundo caso, ficam definidas as posições das peças laterais e do canto inferior direito:

     O canto amarelo pode ser colocado numa das duas posições restantes, logo, neste caso, há 2 configurações.

   Assim, ao todo há 8 configurações:

XL OPM - 2ª Eliminatória - 12.01.2022 - Categoria B - 10º/12º anos

Duração: 2 horas
Cada questão vale 10 pontos

Justifica convenientemente as tuas respostas e indica os principais cálculos.
Não é permitido o uso de calculadoras.

1. Para cada número real x, define-se o valor de $f(x)$ como sendo o mínimo dos números $\{4x+1, x+2, -2x+4\}$. Por exemplo:

$$f(\mathbf{3}) = \text{mínimo}\{4 \times \mathbf{3} + 1, \mathbf{3} + 2, -2 \times \mathbf{3} + 4\} = \text{mínimo}\{13, 5, -2\} = -2.$$

   Qual é o maior valor possível para $f(x)$?

2. A Mafalda contou o número de soluções inteiras positivas (a, b) da equação $a + b = 30$. Já a Laura decidiu contar o número de soluções inteiras positivas (a, b) da equação $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{30}$. Qual das duas amigas encontrou mais soluções?

3. No triângulo $[ABC]$, o lado $[AB]$ e a mediatriz de $[BC]$ intersetam-se no ponto D. Sabendo que $\dot{C}D$ é a bissetriz de $\angle ACB$, $\overline{AD} = 9$ e $\overline{DB} = 7$, determina a área do triângulo $[ADC]$.

4. Na televisão estão a decorrer debates entre $n \geq 4$ partidos políticos. Cada partido debate com cada um dos outros exatamente uma vez, e em cada dia são transmitidos simultaneamente dois debates. Pretende-se calendarizar os debates de modo que cada partido tenha pelo menos um dia de descanso entre cada dois debates. Qual é o menor número de partidos para o qual isto é possível?

XL OPM - 2ª Eliminatória - 12.01.2022 - Categoria B - 10º/12º anos

Cada questão vale 10 pontos

Sugestões para a resolução dos problemas

1. Tem-se

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \text{mínimo}\left\{4 \times \frac{2}{3} + 1, \frac{2}{3} + 2, -2 \times \frac{2}{3} + 4\right\} = \text{mínimo}\left\{\frac{11}{3}, \frac{8}{3}, \frac{8}{3}\right\} = \frac{8}{3}.$$

Se $x < \frac{2}{3}$, tem-se $x + 2 < \frac{8}{3}$, logo $f(x) < \frac{8}{3}$.

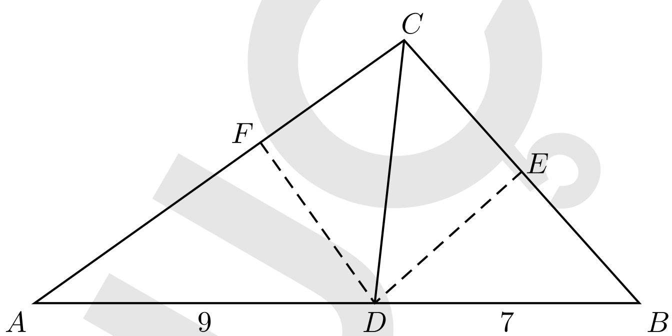
Se $x > \frac{2}{3}$, tem-se $-2x + 4 < \frac{8}{3}$, logo $f(x) < \frac{8}{3}$.

Portanto o valor máximo de $f(x)$ é $\dfrac{8}{3}$.

2. A equação da Mafalda é $a + b = 30 \Leftrightarrow a = 30 - b$, logo há 29 soluções inteiras positivas desta equação: $(30 - b, b)$, com $b = 1, \ldots, 29$.

A equação da Laura é $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{30} \Leftrightarrow a = 30 + \frac{900}{b-30}$, logo as soluções inteiras positivas da equação são dadas por $\left(30 + \frac{900}{b-30}, b\right)$, onde b é um divisor de 900. Como $900 = 2^2 \times 3^2 \times 5^2$ possui 27 divisores positivos (os números da forma $2^x \times 3^y \times 5^z$, com $x, y, z \in \{0, 1, 2\}$), então a equação da Laura possui 27 soluções inteiras positivas e, portanto, a Mafalda contou um maior número de soluções.

3. Seja E o ponto médio de $[BC]$ e F o pé da altura em $[AC]$ do triângulo $[ADC]$.



Sendo DE a mediatriz de $[BC]$, o triângulo $[DBC]$ é isósceles e os triângulos $[DBE]$ e $[DCE]$ são congruentes.

Como $\dot{C}D$ é a bissetriz de $\angle ACB$, observa-se que os triângulos retângulos $[DEC]$ e $[DFC]$ têm dois ângulos iguais. Pelo critério ALA conclui-se que estes triângulos são congruentes.

Logo $\overline{FC} = \overline{CE} = \overline{EB} = \frac{\overline{BC}}{2}$ e $\overline{DE} = \overline{DF}$.

Por outro lado, considerando h' a altura do triângulo $[ABC]$ relativamente ao lado $[AB]$, tem-se

$$\frac{h'}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{7} \qquad \text{e} \qquad \frac{h'}{\overline{DF}} = \frac{\overline{AC}}{9}.$$

Como $\overline{DE} = \overline{DF}$ conclui-se que

$$\overline{AC} = \frac{9}{7}\overline{BC}.$$

Observação: a relação $\overline{AC} = \frac{9}{7}\overline{BC}$ é consequência imediata do Teorema da bissetriz.

Como $\overline{FC} = \frac{\overline{BC}}{2}$, tem-se $\overline{AF} = \frac{11}{14}\overline{BC}$. Assim, pelo Teorema de Pitágoras, tem-se

$$9^2 - \left(\frac{11}{14}\overline{BC}\right)^2 = \overline{DF}^2 = 7^2 - \left(\frac{\overline{BC}}{2}\right)^2$$

donde se conclui que $\overline{BC} = \frac{4\times 7}{3}$ e $\overline{DF} = \frac{7}{3}\sqrt{5}$. Portanto,

$$\text{área de } [ADC] = \frac{9}{7}\overline{BC} \times \frac{\overline{DF}}{2} = 14\sqrt{5}.$$

4. Seja n o número de partidos. Cada partido debate com os restantes $n-1$ partidos e descansa pelo menos $n-2$ dias. Logo ao todo tem que haver pelo menos $n-1+n-2 = 2n-3$ dias de debates.

   Por outro lado, os $\dfrac{n(n-1)}{2}$ debates ocupam $\dfrac{n(n-1)}{4}$ dias. Logo $\dfrac{n(n-1)}{4} \geq 2n-3$, ou seja, $n \geq 8$.

   No entanto, para $n = 8$, não é possível calendarizar os debates. Neste caso, haveria $\dfrac{8\times 7}{4} = 14$ dias de debates, e os partidos que tivessem o primeiro debate no dia 2 teriam necessariamente todos os debates nos dias pares; da mesma forma, os partidos que tivessem o primeiro debate no dia 1 teriam necessariamente todos os debates nos dias ímpares. Logo não poderia haver debates entre esses partidos.

   Para $n = 9$, é possível calendarizar os debates com as condições pretendidas, por exemplo, da seguinte forma:

	Debates	
Dia 1	$1 \leftrightarrow 2$	$3 \leftrightarrow 4$
Dia 2	$5 \leftrightarrow 6$	$7 \leftrightarrow 8$
Dia 3	$1 \leftrightarrow 3$	$2 \leftrightarrow 4$
Dia 4	$5 \leftrightarrow 7$	$6 \leftrightarrow 9$
Dia 5	$1 \leftrightarrow 4$	$2 \leftrightarrow 8$
Dia 6	$3 \leftrightarrow 5$	$7 \leftrightarrow 9$
Dia 7	$1 \leftrightarrow 6$	$4 \leftrightarrow 8$
Dia 8	$2 \leftrightarrow 3$	$5 \leftrightarrow 9$
Dia 9	$1 \leftrightarrow 7$	$4 \leftrightarrow 6$
Dia 10	$2 \leftrightarrow 9$	$5 \leftrightarrow 8$
Dia 11	$3 \leftrightarrow 6$	$4 \leftrightarrow 7$
Dia 12	$1 \leftrightarrow 5$	$8 \leftrightarrow 9$
Dia 13	$2 \leftrightarrow 6$	$3 \leftrightarrow 7$
Dia 14	$1 \leftrightarrow 8$	$4 \leftrightarrow 9$
Dia 15	$2 \leftrightarrow 5$	$6 \leftrightarrow 7$
Dia 16	$1 \leftrightarrow 9$	$3 \leftrightarrow 8$
Dia 17	$2 \leftrightarrow 7$	$4 \leftrightarrow 5$
Dia 18	$3 \leftrightarrow 9$	$6 \leftrightarrow 8$

   Portanto, o número mínimo de partidos para o qual é possível calendarizar os debates é 9.

   Observação: Para 9 partidos, há $7906 \times 9!$ formas de calendarizar os debates.

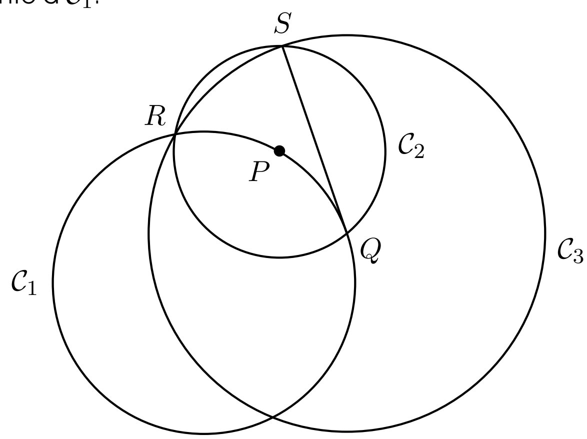
XL OPM - Final - 1º Dia - 08.04.2022 - Categoria B - 10º/12º anos

Duração: 3 horas
Cada questão vale 10 pontos

Justifica convenientemente as tuas respostas e indica os principais cálculos.
Não é permitido o uso de calculadoras.

1. A turma do Raul tem 15 alunos, todos com alturas diferentes. A professora de Matemática quer colocá-los em fila de modo que, no início da fila, estejam ordenados por ordem crescente de alturas, a partir daí, estejam ordenados por ordem decrescente e o Raul, que é o mais alto da turma, não pode ficar nos extremos. De quantas maneiras diferentes é possível formar esta fila?

2. Seja P um ponto sobre uma circunferência $\mathcal{C}_1$ e seja $\mathcal{C}_2$ uma circunferência de centro P que interseta $\mathcal{C}_1$ em dois pontos Q e R. A circunferência $\mathcal{C}_3$, de centro Q e que passa por R, interseta $\mathcal{C}_2$ noutro ponto S, como na figura. Mostra que QS é tangente a $\mathcal{C}_1$.



3. O Proença tem um novo tabuleiro de xadrez 8×8 e quer decompô-lo em n retângulos que não se sobrepõem, de modo que:

   (i) cada retângulo tenha tantos quadrados brancos como pretos;

   (ii) não haja dois retângulos com o mesmo número de quadrados.

   Determina o valor máximo de n para o qual uma tal decomposição é possível.

   Para este valor de n, determina todos os possíveis conjuntos $\{A_1, \ldots, A_n\}$, onde A_i é o número de quadrados do retângulo i, para os quais uma decomposição do tabuleiro nas condições pretendidas é possível.

Duração: 3 horas
Cada questão vale 10 pontos

Sugestões para a resolução dos problemas

1. Cada um dos 14 colegas do Raul pode estar à sua esquerda ou à sua direita, logo há 2^{14} possibilidades. Para cada uma destas possibilidades, os alunos ficam automaticamente ordenados, logo não há mais escolhas a fazer. Temos apenas que retirar os casos em que o Raul está nos extremos. Logo há $2^{14} - 2$ maneiras de formar a fila.

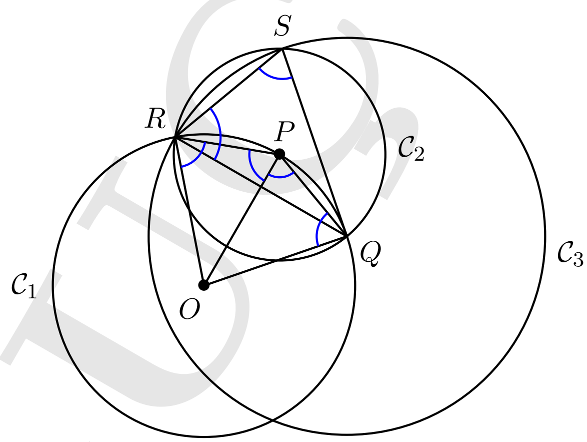
2. **Solução 1:** Sejam O o centro de $\mathcal{C}_1$ e $\alpha = O\widehat{Q}P$. Como $\overline{OP} = \overline{OQ}$, então também $O\widehat{P}Q = \alpha$.

   Como $\overline{PR} = \overline{PQ}$, então $[OPQ]$ e $[OPR]$ são congruentes, logo $O\widehat{R}P = O\widehat{P}R = \alpha$.

   Como $\angle RSQ$ está inscrito em $\mathcal{C}_3$, então, pelo teorema do arco capaz, $R\widehat{S}Q = \dfrac{R\widehat{P}Q}{2} = \dfrac{2\alpha}{2} = \alpha$.

   Como $\overline{QS} = \overline{QR}$, então $Q\widehat{R}S = R\widehat{S}Q = \alpha$.

   Portanto, todos os ângulos assinalados na figura são congruentes.



Logo, $R\widehat{Q}S = 180° - 2\alpha$ e $P\widehat{Q}R = 180° - \dfrac{2\alpha}{2} = 90° - \alpha$, pelo que $P\widehat{Q}S = R\widehat{Q}S - P\widehat{Q}R = (180° - 2\alpha) - (90° - \alpha) = 90° - \alpha$.

Portanto, $O\widehat{Q}S = O\widehat{Q}P + P\widehat{Q}S = \alpha + (90° - \alpha) = 90°$.

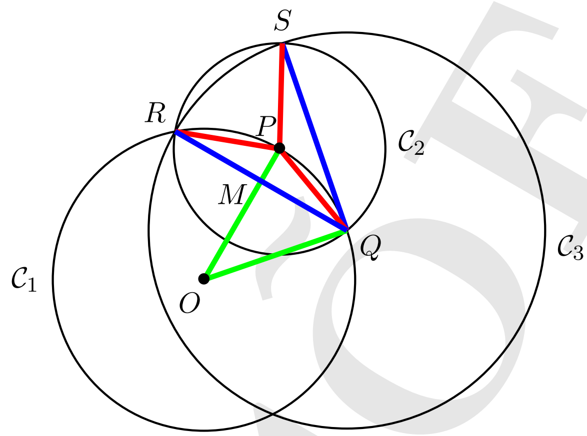
Solução 2: Sejam O o centro de $\mathcal{C}_1$ e M o ponto de interseção de OP com QR.

Como $\overline{QR} = \overline{QS}$ e $\overline{PR} = \overline{PQ} = \overline{PS}$, então $[PQR]$ e $[PQS]$ são congruentes. Logo, $P\widehat{Q}R = P\widehat{Q}S$.

Como $\overline{OP} = \overline{OQ}$, então $O\widehat{P}Q = O\widehat{Q}P$.

Portanto, $O\widehat{Q}S = O\widehat{Q}P + P\widehat{Q}S = O\widehat{P}Q + P\widehat{Q}R = 180° - P\widehat{M}Q$.

Uma vez que $[OP]$ é a mediatriz de $[QR]$, tem-se $P\widehat{M}Q = 90°$, pelo que $O\widehat{Q}S = 90°$.



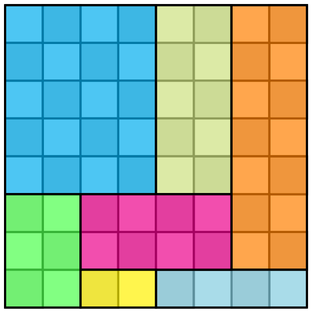
3. Como todos os retângulos têm um número diferente de quadrados, podemos assumir que $A_1 < A_2 < \cdots < A_n$.

   Vamos começar por mostrar que $n \leq 7$. Por absurdo, suponhamos que $n \geq 8$. Como a condição (i) implica que cada A_i é um número par, o número de quadrados cobertos pelos retângulos na decomposição é:

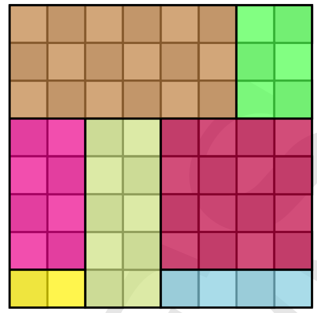
$$A_1 + A_2 + \cdots + A_n \geq 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 = 72,$$

   o que é impossível uma vez que o tabuleiro só tem 64 quadrados. Portanto temos de ter $n \leq 7$. Além disso, temos necessariamente $A_7 < 24$, pois caso contrário teríamos $A_1+A_2+\cdots+A_7 \geq 2+4+6+8+10+12+24 = 66 > 64$. Portanto, para $n = 7$ obtemos as seguintes 5 possibilidades para $\{A_1, A_2, \ldots, A_7\}$: $\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 22\}$, $\{2, 4, 6, 8, 10, 14, 20\}$, $\{2, 4, 6, 8, 10, 16, 18\}$, $\{2, 4, 6, 8, 12, 14, 18\}$ e $\{2, 4, 6, 10, 12, 14, 16\}$.

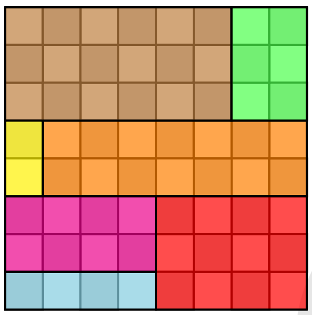
   A primeira sequência não é possível de ser obtida uma vez que não é possível ter um retângulo no tabuleiro com dimensão 1×22 ou 2×11. Cada uma das outras 4 sequências correspondem a decomposições possíveis do tabuleiro, como se ilustra em baixo.



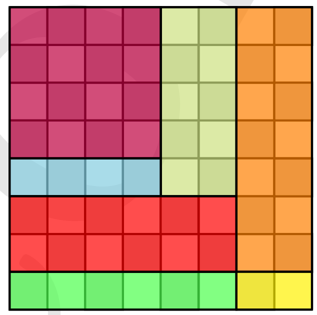
$\{2,4,6,8,10,14,20\}$



$\{2,4,6,8,10,16,18\}$



$\{2,4,6,8,12,14,18\}$



$\{2,4,6,10,12,14,16\}$

Portanto, o máximo valor de n é 7 e há 4 diferentes decomposições do tabuleiro em 7 retângulos que satisfazem as condições pedidas.

Duração: 3 horas
Cada questão vale 10 pontos

Justifica convenientemente as tuas respostas e indica os principais cálculos.
Não é permitido o uso de calculadoras.

4. Seja $[AD]$ uma mediana do triângulo $[ABC]$. Sabendo que $A\widehat{D}B = 45°$ e $A\widehat{C}B = 30°$, mostra que $B\widehat{A}D = 30°$.

5. Numa competição de badminton participam 16 jogadores, dos quais 10 são profissionais e 6 são amadores. Numa primeira fase, são sorteados oito jogos. Entre os oito vencedores destes jogos, são sorteados quatro jogos. Os quatro vencedores ficam qualificados para as meias-finais da competição.

   Supondo que, sempre que um jogador profissional e um amador jogam entre si, o profissional ganha o jogo, qual é a probabilidade de um jogador amador conseguir chegar às meias-finais da competição?

6. Dados dois números naturais $a < b$, o Xavier e o Zé jogam o seguinte jogo.

   Primeiro, o Xavier escreve a números consecutivos à sua escolha; depois, repete alguns deles, também à sua escolha, até ter b números, com a condição de que a soma dos b números escritos seja um número par.

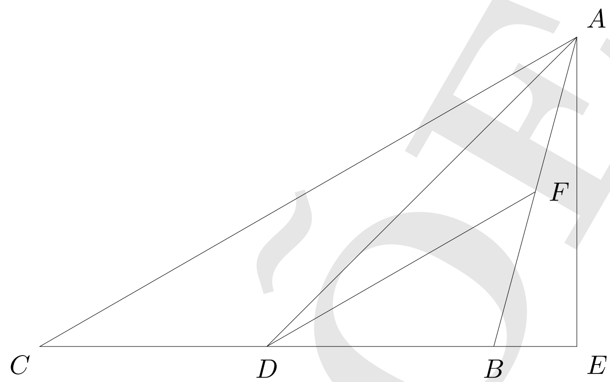
   O Zé ganha o jogo se conseguir separar os números em dois grupos com a mesma soma. Caso contrário, ganha o Xavier.

   Por exemplo, para $a = 4$ e $b = 7$, se o Xavier escrevesse os números $3, 4, 5, 6, 3, 3, 4$, o Zé poderia ganhar, separando estes números nos grupos $3, 3, 4, 4$ e $3, 5, 6$.

   Para que valores de a e b é que o Xavier consegue garantir a vitória?

Sugestões para a resolução dos problemas

4. **Solução 1:** Seja $[AE]$ a altura do triângulo $[ABC]$ relativa ao lado $[BC]$ e seja F um ponto de $[AB]$ tal que $[DF]$ é paralelo a $[AC]$.



Como $A\hat{D}E = A\hat{D}B = 45°$, o triângulo retângulo $[AED]$ é isósceles e, pelo Teorema de Pitágoras, $\overline{AD} = \sqrt{2}\,\overline{AE}$. Além disso, sendo $A\hat{C}B = 30°$, tem-se $\overline{AC} = 2\overline{AE}$.

Por outro lado, $[DF]$ é paralelo a $[AC]$ logo $C\hat{A}D = A\hat{D}F$ e, sendo D o ponto médio de $[CB]$, tem-se $\overline{DF} = \frac{1}{2}\overline{AC} = \overline{AE}$.

Assim, $\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \sqrt{2}$ e $\frac{\overline{AD}}{\overline{DF}} = \sqrt{2}$ e, tendo em conta que $C\hat{A}D = A\hat{D}F$, podemos concluir pelo critério LAL (de semelhança de triângulos) que os triângulos $[AFD]$ e $[CDA]$ são semelhantes, ou seja, $D\hat{A}F = A\hat{C}D = 30°$.

Solução 2: Seja $\alpha = D\hat{A}B$. Aplicando a Lei dos senos ao triângulo $[ACD]$ tem-se

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{CD}} = \frac{\sin 30°}{\sin 15°} = \frac{1}{2\sin 15°}.$$

A Lei dos senos aplicada ao triângulo $[ADB]$ garante que

$$\begin{aligned}\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} &= \frac{\sin(180° - (45° + \alpha))}{\sin\alpha} = \frac{\sin(45° + \alpha)}{\sin\alpha} \\ &= \frac{\sin 45° \cos\alpha + \cos 45° \sin\alpha}{\sin\alpha} \\ &= \sin 45° \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \cos 45°.\end{aligned}$$

Tendo em conta que $\overline{CD} = \overline{DB}$, tem-se

$$\sin 45^\circ \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \cos 45^\circ = \frac{1}{2\sin 15^\circ},$$

ou seja,

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{2\sin 45^\circ \sin 15^\circ} - 1.$$

Ora $2\sin 45^\circ \sin 15^\circ = \cos 30^\circ - \cos 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$, logo

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{2}{\sqrt{3}-1} - 1 = \sqrt{3},$$

ou seja $\tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ e, por isso conclui-se que $\alpha = 30^\circ$.

5. **Solução 1:** A probabilidade é a proporção entre o número de sorteios em que um dos jogadores amadores é apurado para as meias-finais (*casos favoráveis*) e o número total de sorteios (*casos possíveis*).

   Num sorteio, começa-se por escolher um dos 16 jogadores, depois sorteia-se um dos restantes 15 jogadores para seu adversário. De seguida sorteia-se o segundo jogo, escolhendo um dos 14 jogadores ainda disponíveis e o seu adversário entre os restantes 13 jogadores. Sem perda de generalidade, podemos supor que os vencedores destes dois jogos se defrontam na eliminatória seguinte. Há assim $16 \times 15 \times 14 \times \cdots \times 2 \times 1 = 16!$ sorteios possíveis.

   Para que um jogador amador se qualifique para as meias-finais, é necessário que haja, pelo menos, dois jogos da primeira eliminatória entre jogadores amadores e que os vencedores desses jogos joguem entre si nos quartos-de-final. Para isso acontecer, tem que haver quatro jogadores amadores a serem sorteados nas posições $1-4$, ou, equivalentemente, nas posições $5-8$, nas posições $9-12$, ou ainda, nas posições $13-16$. Para cada um destes casos, há $6 \times 5 \times 4 \times 3$ hipóteses. Para sortear as restantes 12 equipas há $12 \times 11 \cdots \times 2 \times 1 = 12!$ hipóteses. O números de sorteios favoráveis é portanto: $4 \times (6 \times 5 \times 4 \times 3) \times 12!$

   A probabilidade que pretendemos calcular é:

$$\frac{4 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 12!}{16 \times 15 \times 14 \times 13 \times 12!} = \frac{3}{7 \times 13} \approx 3,3\%$$

   Solução 2: Os 16 jogadores são divididos em quatro grupos de 4 jogadores, e só é possível que um jogador amador esteja nas meias-finais se um destes grupos tiver apenas jogadores amadores.

   Há um total de $\binom{16}{4}$ conjuntos de quatro equipas, e $\binom{6}{4}$ conjuntos de quatro equipas amadoras. Como não é possível sortear dois grupos só com equipas amadoras, a probabilidade é:

$$4 \times \frac{\binom{6}{4}}{\binom{16}{4}} = \frac{4 \times 6! \times 12! \times 4!}{16! \times 4! \times 2!} = \frac{3}{7 \times 13} \approx 3,3\%$$

6. Se o Xavier escolher números cuja soma é o número par $2S$, então o Zé pretende formar dois grupos com soma S.

Vamos mostrar que o Xavier consegue garantir a vitória se e só se b for ímpar (independentemente de a).

- Se b for ímpar, o Xavier consegue garantir a vitória.

  Para isso, sendo N um inteiro qualquer maior do que $\dfrac{(a-1)(b-1)}{2}$, basta escolher números entre N e $N+a-1$.

  Se o Zé formar um grupo com $\dfrac{b-1}{2}$ números (ou menos), terá uma soma no máximo de $\dfrac{b-1}{2}\times(N+a-1)$.

  Se o Zé formar um grupo com $\dfrac{b+1}{2}$ números (ou mais), terá uma soma no mínimo de $\dfrac{b+1}{2}\times N$.

  Como $\left(\dfrac{b+1}{2}\times(N+a-1)\right)-\left(\dfrac{b-1}{2}\times N\right)=N-\dfrac{(a-1)(b-1)}{2}>0$, então o Zé não consegue formar um grupo cuja soma seja S.

- Se b for par, o Xavier não consegue garantir a vitória:

  Solução 1: Suponhamos que o Xavier conseguia escolher números com os quais não seria possível formar dois grupos com soma S.

  Consideremos um grupo A com $\frac{b}{2}$ elementos cuja soma seja o maior possível, mas menor que S. Seja B o grupo formado pelos números restantes.

  Se em A houvesse algum número n tal que em B estivesse o número $n+1$, então, trocando estes números, obter-se-ia um grupo com soma maior do que a de A e menor do que S, contradizendo a definição do grupo A.

  Assim, concluímos que em A não está nenhum número cujo número seguinte esteja em B, ou seja, A contém os $\frac{b}{2}$ maiores números escolhidos pelo Xavier. Isto contradiz o facto de que a soma dos números de A é menor do que S.

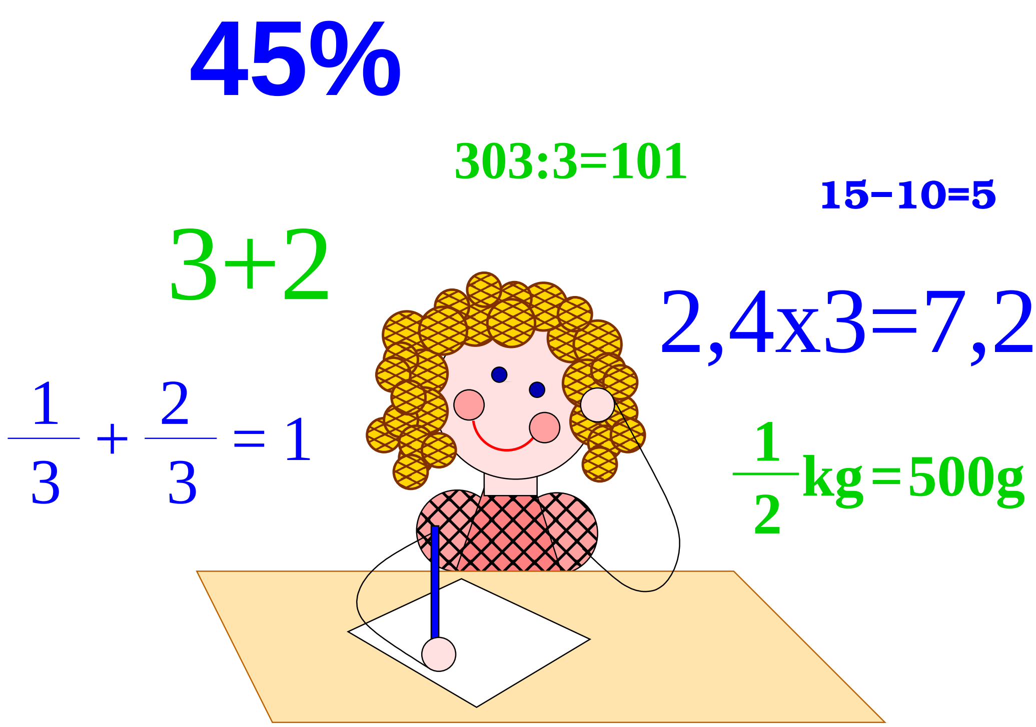
  Solução 2: O Zé consegue ganhar usando a seguinte estratégia. Ele começa por ordenar os b números de forma crescente $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_b$. A diferença entre dois números consecutivos ou é 0 ou é 1. O Zé vai dividir os números por dois conjuntos A e B, com o mesmo número de elementos, da seguinte maneira:

  (a) x_1 fica no conjunto A e x_2 fica no conjunto B;
  (b) quando cada conjunto já tiver k elementos, se as somas dos elementos de A e de B forem iguais, coloca x_{2k+1} no conjunto A e x_{2k+2} no conjunto B;
  (c) se a soma dos elementos de A e de B forem diferentes, coloca x_{2k+1} no conjunto B e x_{2k+2} no conjunto A.

  Em cada passo a soma de cada um dos conjuntos ou é igual ou difere em uma unidade. No final de distribuídos os b números a soma total é par, e por isso a soma de cada um dos conjuntos A e B tem que ser igual.

Mini-Olimpíadas

Ano Letivo 2022/2023
1º Ciclo do Ensino Básico
3º ano



Tem atenção: **Duração: 1 hora**

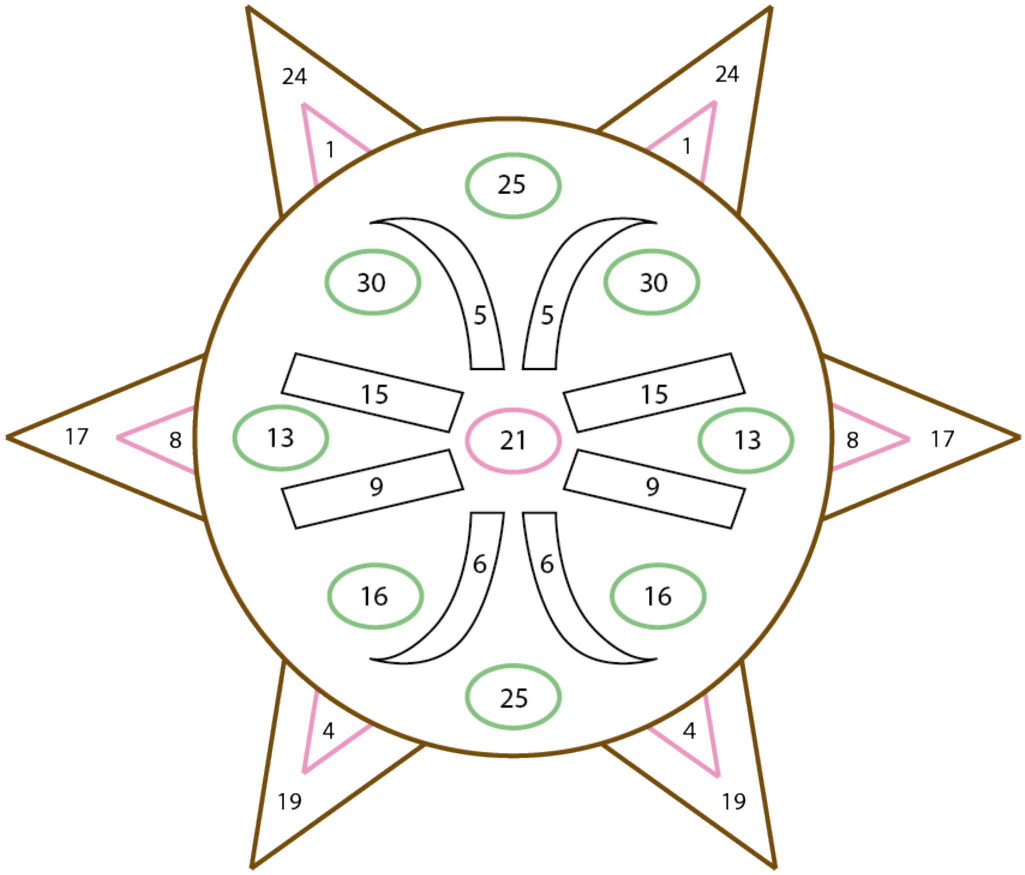
- Lê todas as perguntas com muito cuidado.
- Não apagues as contas, os esquemas e os desenhos que utilizares nas tuas respostas.
- Se acabares antes do tempo previsto, deverás aproveitar para rever a tua prova.

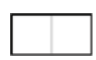
Bom trabalho e diverte-te!

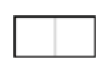
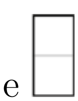
Nome do aluno: ____

Pontuação:_______________

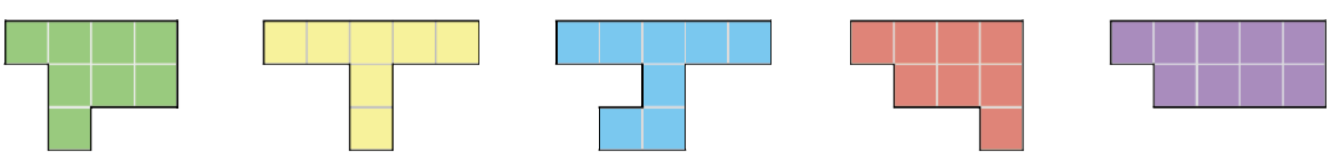
1. No desenho, pinta todas as partes que têm números que são múltiplos de 3 e descobre a imagem escondida.



2. A Zé preencheu a figura A com peças do tipo  segundo as seguintes regras.

- As peças podem ser colocadas em duas posições diferentes:  e 
- Todas as quadrículas têm de estar preenchidas.
- Não pode haver peças sobrepostas.

Seleciona as figuras que consegues prencher seguindo as mesmas regras. A Zé já selecionou a figura A.

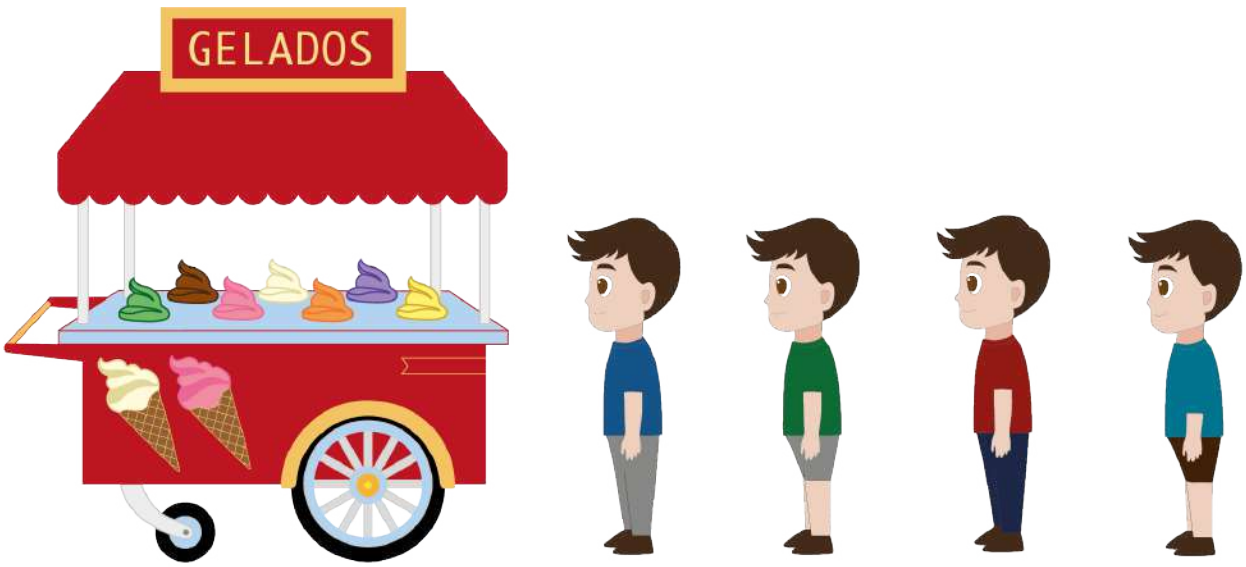


A B C D E

3. O Artur, o Bernardo, o Carlos e o Daniel estão na fila para comprar gelados.

   - O Carlos não é o primeiro da fila.
   - O Artur está depois do Carlos e antes do Daniel.

   Descobre onde está cada menino e escreve o seu nome na respetiva posição.



________ ________ ________ ________

4. No Dia da Criança a D. Amélia organizou um teatro de marionetas. Assistiram ao espetáculo trinta pessoas. O número de crianças que assistiu foi o dobro do número de adultos. Os bilhetes de criança custaram 3 euros e os de adulto 6 euros.

   Quanto dinheiro conseguiu a D. Amélia com a venda de todos os bilhetes?

Resposta:____

5. Para abrir o cacifo a Vera tem de digitar um código no quadro indicado na figura.

O código é um número par maior que 195.

Tem três algarismos, todos diferentes.

O algarismo das dezenas não está na linha 1 do quadro.

A soma dos três algarismos é 10.

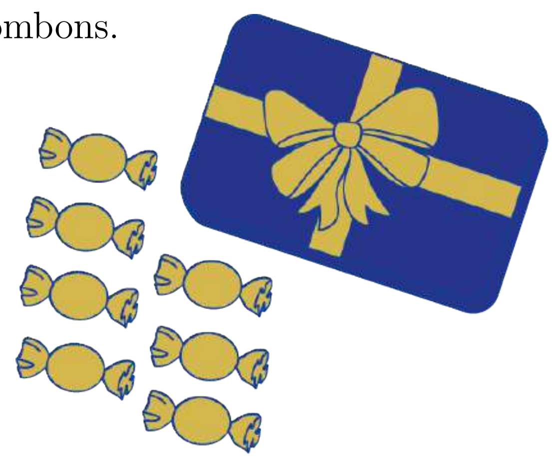
Descobre o código.

Código: ____ ____ ____

6. No dia de Natal, o João e a Matilde receberam uma caixa de bombons cada um. As duas caixas tinham o mesmo número de bombons.

O João comeu logo metade nesse dia e, no último dia do ano, comeu mais 5 bombons. A Matilde foi comendo 2 bombons todos os dias, durante 7 dias. No início do novo ano tinham o mesmo número de bombons.

Quantos bombons recebeu cada um?



Resposta:____

Mini-Olimpíadas

Ano Letivo 2022/2023
1º Ciclo do Ensino Básico
3º ano

Critérios de Classificação

Cotações

1- 10 pontos
2- 10 pontos
3- 10 pontos
4- 10 pontos
5- 10 pontos
6- 10 pontos

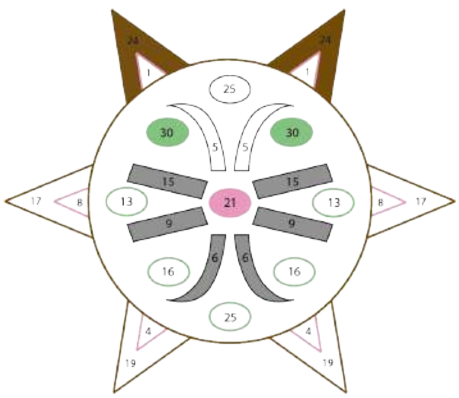
Total: 60 pontos

Critérios de Classificação

- **Se surgirem resoluções diferentes das apresentadas, a classificação ficará ao critério do professor corretor.**
- **Devem ser valorizados os raciocínios corretos (atribuindo classificações parciais) em detrimento dos cálculos efetuados.**

Exercício 1

Solução:



10 pontos

Caso a resposta não seja a correta deve ser atribuída a cotação parcial seguinte (acumulável).

A cotação de **1 ponto** por identicar cada um dos números 6 e 9.

A cotação de **2 pontos** por identicar cada um dos restantes múltiplos de 3.

A cotação de **-1 ponto** por cada número selecionado que não seja múltiplo de 3.

Cada número selecionado deve ser cotado apenas uma vez, independentemente do número de regiões que lhe correspondam.

Exercício 2

Solução: C e **D**. **10 pontos**

Caso a resposta não seja a correta devem ser atribuídas as seguintes cotações parciais (não acumuláveis).

Seleciona apenas uma figura, sendo essa uma das corretas **5 pontos**

Seleciona duas figuras, sendo uma delas correta **2 pontos**

Seleciona três figuras, sendo duas delas corretas **2 pontos**

Exercício 3

Solução: **Bernardo** **Carlos** **Artur** **Daniel** **10 pontos**

Caso a resposta não seja a correta devem ser atribuídas as seguintes cotações parciais (não acumuláveis).

Apresenta uma resposta que satisfaz a primeira condição **2 pontos**

Apresenta uma resposta que satisfaz a segunda condição **2 pontos**

Exercício 4

Solução: 120 euros **10 pontos**

Caso a resposta não seja a correta deve atribuir-se cotação parcial. Para esse efeito, indicam-se, em seguida, as cotações de duas propostas de resolução.

Proposta de resolução 1:

Indica o número de crianças e o número de adultos, apresentando, por exemplo, os seguintes cálculos

$30 : 3 = 10$ e $2 \times 10 = 20$ (ou $10 + 2 \times 10 = 30$) **5 pontos**

Calcula o dinheiro obtido com a venda dos bilhetes

$3 \times 20 = 60$, $6 \times 10 = 60$ e $60 + 60 = 120$ **5 pontos**

Proposta de resolução 2:

Conclui que 2 crianças correspondem a 1 adulto e calcula o dinheiro correspondente à venda de bilhetes de 20 adultos

$20 \times 6 = 120$ **10 pontos**

Devem ser cotados os cálculos efetuados utilizando valores errados calculados anteriormente.

Exercício 5

Solução: 352 **10 pontos**

Caso a resposta não seja a correta devem ser atribuídas as seguintes cotações parciais (não acumuláveis).

Considere as quatro condições do enunciado:

1. O código é um número par maior que 195.
2. Tem 3 algarismos (dos 9 algarismos do quadro), todos diferentes.
3. O algarismo das dezenas não está na linha 1 do quadro.
4. A soma dos algarismos é 10.

Apresenta uma resposta que satisfaz três das quatro condições, sendo uma delas a quarta **5 pontos**

Apresenta uma resposta que satisfaz duas das quatro condições, sendo uma delas a quarta **3 pontos**

Coloca um número par na posição das unidades **1 ponto**

Exercício 6

Solução: 18 bombons **10 pontos**

Caso a resposta não seja a correta deve atribuir-se cotação parcial. Para esse efeito, indicam-se, em seguida, as cotações de duas propostas de resolução.

Proposta de resolução 1:

Calcula o número de bombons que a Mati comeu nos 7 dias

$2 \times 7 = 14$ **2 pontos**

Calcula o valor que corresponde a metade dos bombons de cada caixa

$14 - 5 = 9$ ou $14 = 5 + 9$ **4 pontos**

Calcula o número de bombons de cada caixa

$2 \times 9 = 18$ **4 pontos**

Proposta de resolução 2:

Apresenta a decomposição

$$\overbrace{9 + 5}^{14}\!\!\underbrace{+4}_{9} = 18$$

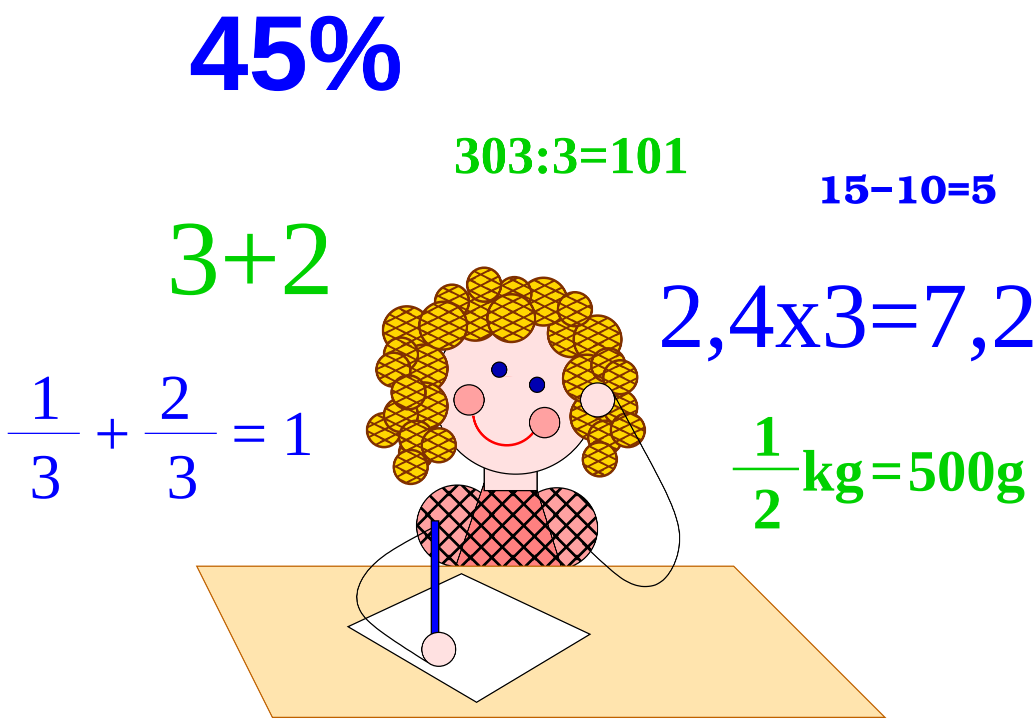
10 pontos

Devem ser cotados os cálculos efetuados utilizando valores errados calculados anteriormente.

Olimpíadas Portuguesas de Matemática

Mini-Olimpíadas

Ano Letivo 2022/2023
1º Ciclo do Ensino Básico
4º ano



Tem atenção: **Duração: 1 hora**

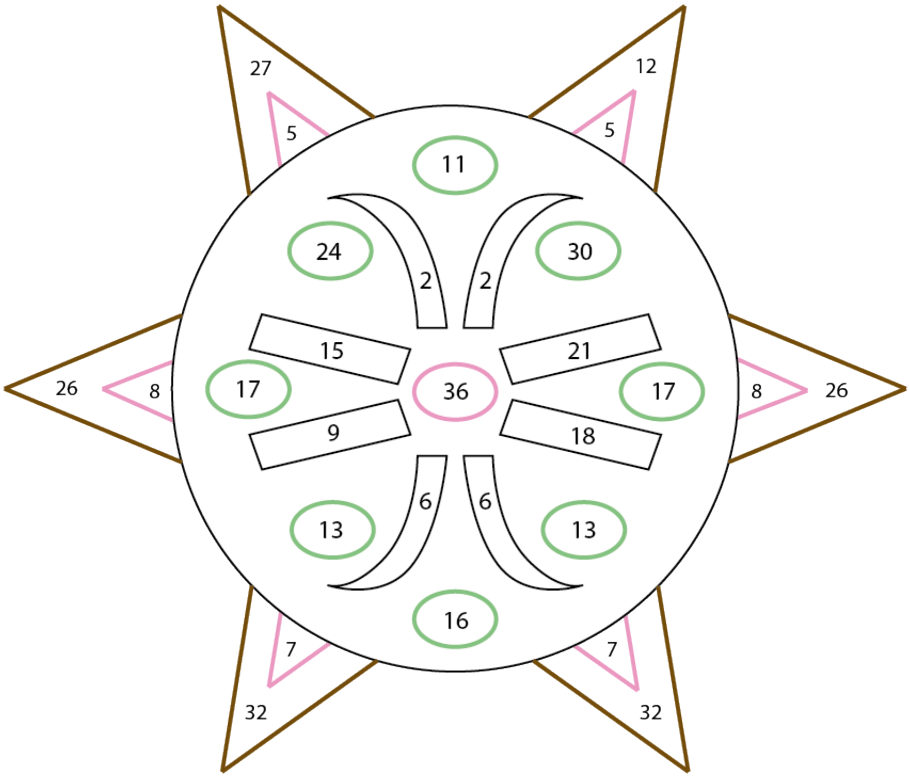
- Lê todas as perguntas com muito cuidado.
- Não apagues as contas, os esquemas e os desenhos que utilizares nas tuas respostas.
- Se acabares antes do tempo previsto, deverás aproveitar para rever a tua prova.

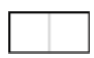
Bom trabalho e diverte-te!

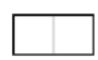
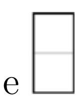
Nome do aluno: ____

Pontuação:______________

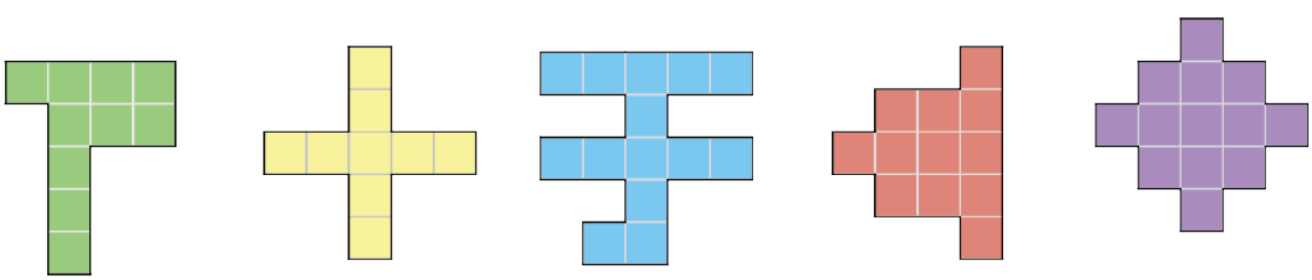
1. No desenho, pinta todas as partes que têm números que são múltiplos de 3 e descobre a imagem escondida.



2. A Zé preencheu a figura A com peças do tipo  segundo as seguintes regras.

- As peças podem ser colocadas em duas posições diferentes:  e 
- Todas as quadrículas têm de estar preenchidas.
- Não pode haver peças sobrepostas.

Seleciona as figuras que consegues prencher seguindo as mesmas regras. A Zé já selecionou a figura A.

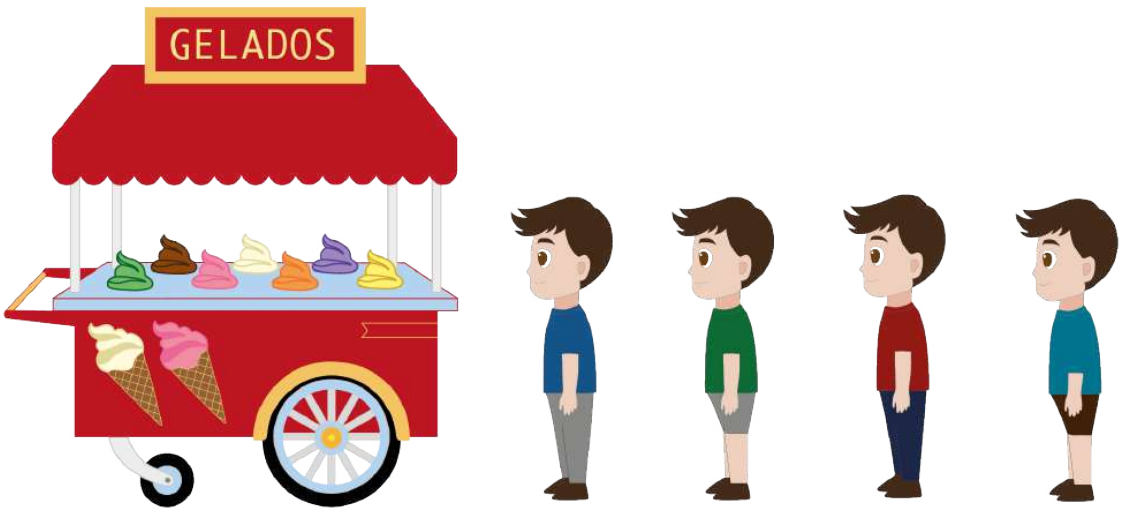


A B C D E

3. O Artur, o Bernardo, o Carlos e o Daniel estão na fila para comprar gelados.

- O Carlos não é o primeiro da fila.
- O Artur está depois do Carlos.
- O Daniel não está antes do Artur.

Descobre onde está cada menino e escreve o seu nome na respetiva posição.



_______ _______ _______ _______

4. Para abrir o cacifo a Vera tem de digitar um código no quadro indicado na figura.

O código é um número par maior que 195.

Tem três algarismos, todos diferentes.

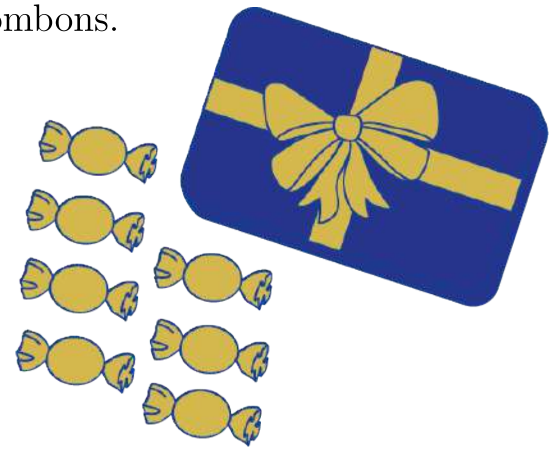
O algarismo das dezenas não está na linha 1 do quadro.

A soma dos três algarismos é 10.

Descobre o código.

Código: ____ ____ ____

5. No dia de Natal, o João e a Matilde receberam uma caixa de bombons cada um. As duas caixas tinham o mesmo número de bombons.

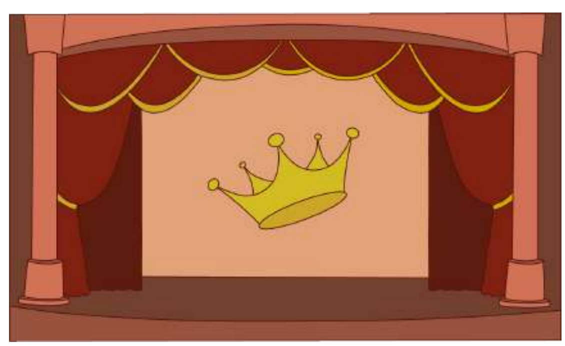


O João comeu logo metade nesse dia e, no último dia do ano, comeu mais 5 bombons. A Matilde foi comendo 2 bombons todos os dias, durante 7 dias. No início do novo ano tinham o mesmo número de bombons.

Quantos bombons recebeu cada um?

Resposta:____

6. Para o concerto do Dia dos Reis venderam-se 55 bilhetes. Havia bilhetes verdes, amarelos e cinzentos. Os bilhetes verdes custaram 3 euros, os amarelos 6 e os cinzentos 9. A quantia apurada com a venda dos bilhetes de cada cor foi exatamente a mesma.



Quanto dinheiro se conseguiu obter com a venda de todos os bilhetes?

Resposta:____

Mini-Olimpíadas

Ano Letivo 2022/2023
1º Ciclo do Ensino Básico
4º ano

Critérios de Classificação

Cotações

1- 10 pontos
2- 10 pontos
3- 10 pontos
4- 10 pontos
5- 10 pontos
6- 10 pontos

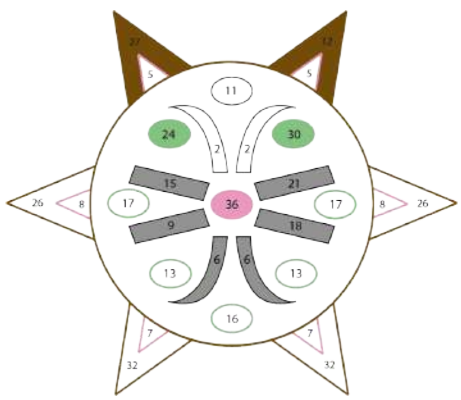
Total: 60 pontos

Critérios de Classificação

- **Se surgirem resoluções diferentes das apresentadas, a classificação ficará ao critério do professor corretor.**
- **Devem ser valorizados os raciocínios corretos (atribuindo classificações parciais) em detrimento dos cálculos efetuados.**

Exercício 1

Solução:



10 pontos

Caso a resposta não seja a correta deve ser atribuída a cotação parcial seguinte (acumulável).

A cotação de **1 ponto** por identicar cada um dos múltiplos de 3.

A cotação de **-1 ponto** por cada número selecionado que não seja múltiplo de 3.

Cada número selecionado deve ser cotado apenas uma vez, independentemente do número de regiões que lhe correspondam.

Exercício 2

Solução: C e **D**. **10 pontos**

Caso a resposta não seja a correta devem ser atribuídas as seguintes cotações parciais (não acumuláveis).

Seleciona apenas uma figura, sendo essa uma das corretas **5 pontos**

Seleciona duas figuras, sendo uma delas correta **2 pontos**

Seleciona três figuras, sendo duas delas corretas **2 pontos**

Exercício 3

Solução: **Bernardo** **Carlos** **Artur** **Daniel** **10 pontos**

Caso a resposta não seja a correta devem ser atribuídas as seguintes cotações parciais (não acumuláveis).

Apresenta uma resposta que satisfaz a primeira condição **2 pontos**

Apresenta uma resposta que satisfaz a segunda e a terceira condições **2 pontos**

Exercício 4

Solução: 352 **10 pontos**

Caso a resposta não seja a correta devem ser atribuídas as seguintes cotações parciais (não acumuláveis).

Considere as quatro condições do enunciado:

1. O código é um número par maior que 195.
2. Tem 3 algarismos (dos 9 algarismos do quadro), todos diferentes.
3. O algarismo das dezenas não está na linha 1 do quadro.
4. A soma dos algarismos é 10.

Apresenta uma resposta que satisfaz três das quatro condições, sendo uma delas a quarta **5 pontos**

Apresenta uma resposta que satisfaz duas das quatro condições, sendo uma delas a quarta **3 pontos**

Coloca um número par na posição das unidades **1 ponto**

Exercício 5

Solução: 18 bombons **10 pontos**

Caso a resposta não seja a correta deve atribuir-se cotação parcial. Para esse efeito, indicam-se, em seguida, as cotações de duas propostas de resolução.

Proposta de resolução 1:

Calcula o número de bombons que a Mati comeu nos 7 dias

$2 \times 7 = 14$ **2 pontos**

Calcula o valor que corresponde a metade dos bombons de cada caixa

$14 - 5 = 9$ ou $14 = 5 + 9$ **4 pontos**

Calcula o número de bombons de cada caixa

$2 \times 9 = 18$ **4 pontos**

Proposta de resolução 2:

Apresenta a decomposição

$$\overbrace{9 + 5}^{14} + 4 = 18 \qquad 9 + \underbrace{5 + 4}_{9} = 18$$

10 pontos

Devem ser cotados os cálculos efetuados utilizando valores errados calculados anteriormente.

Exercício 6

Solução: 270 euros **10 pontos**

Caso a resposta não seja a correta deve atribuir-se cotação parcial. Para esse efeito, indicam-se, em seguida, as cotações de duas propostas de resolução.

Proposta de resolução 1:

Calcula o menor múltiplo comum de 3, 6 e 9, efetuando os cálculos

$6 \times 3 = 3 \times 6 = 2 \times 9 = 18$ **3 pontos**

Calcula o número de bilhetes correspondente ao valor obtido anteriormente

$6 + 3 + 2 = 11$ **3 pontos**

Efetua cálculos para identificar o múltiplo de 3, 6 e 9 que corresponde aos 55 bilhetes

$55 : 11 = 5$ e $18 \times 5 = 90$ **3 pontos**

Calcula o valor total obtido pela venda dos bilhetes

$3 \times 90 = 270$ **1 ponto**

Proposta de resolução 2:

Apresenta a decomposição

$$\underbrace{30}_{\text{verdes}} + \overbrace{15}^{\text{amarelos}} + \underbrace{10}_{\text{cinzentos}} = 55$$ **4 pontos**

Verifica que o valor da venda dos bilhetes de cada cor é o mesmo

$30 \times 3 = 15 \times 6 = 10 \times 9 = 90$ **4 pontos**

Calcula o valor total obtido pela venda dos 55 bilhetes

$3 \times 90 = 270$ **2 pontos**

Podem ainda ser atribuídas as cotações parciais seguintes (não acumuláveis).

Dá valores ao número de bilhetes verdes, amarelos e cinzentos e verifica que a soma desses valores é 55. Por exemplo,

$25 + 18 + 12 = 55$ **2 pontos**

Para além de verificar que os valores escolhidos satisfazem a condição anterior, constata que não satisfazem a outra condição do enunciado. Por exemplo,

$25 + 18 + 12 = 55$, $12 \times 9 = 108$, $18 \times 6 = 108$, mas $25 \times 3 = 75$ **4 pontos**

Devem ser cotados os cálculos efetuados utilizando valores errados calculados anteriormente.

OLIMPÍADAS
PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA

www.olimpiadas.spm.pt

XLI OPM - 9.11.2022 - Pré-Olimpíadas - 5º ano

Duração: 2 horas
Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3: 10 pontos cada

Na questão 1 escolhe, em cada alínea, a opção correta.
Justifica convenientemente as tuas respostas às questões 2 e 3.
Não é permitido o uso de calculadoras.

1. (a) De cada vez que o Pinóquio mente, o seu nariz aumenta para o dobro do comprimento. Num belo dia de sol, o Pinóquio acordou e reparou que o seu nariz media 5 cm. Pela hora do lanche, ele tinha mentido quatro vezes. Qual era o comprimento do seu nariz à hora do lanche?

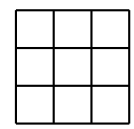
   A) 2 dm B) 4 dm C) 8 dm D) 20 dm E) 80 dm

   (b) Vendo o Pinóquio aborrecido por estar com o nariz tão grande, o Geppetto mostrou-lhe a figura ao lado e prometeu-lhe esculpir o seu nariz se ele descobrisse o valor correto de $\square$. O que teve que responder o Pinóquio para ter o seu nariz de volta?

   $$\bigstar + 4 = 7$$
   $$\square + \bigstar = 9$$

   A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 11

   (c) Todo contente por ter o seu nariz de volta, o Pinóquio encontrou o Grilo Falante, que tentava contar quantos retângulos tinha o tabuleiro da figura. Entusiasmado com o desafio, resolveu ajudá-lo. A que valor chegaram?

   A) 6 B) 9 C) 12 D) 27 E) 36

   (d) Resolvido o desafio, o Pinóquio encontrou-se com o João Honesto. Matreiro como sempre, ele disse-lhe: "Vi um tabuleiro igual a esse a ser vendido por 25 moedas de ouro. Como bem sabes, cada moeda de ouro vale 3 de prata, e cada moeda de prata vale 36 de bronze. Dás-me esse tabuleiro em troca de 25 moedas de bronze?". Prontamente, o Pinóquio respondeu-lhe que isso estaria fora de questão! Quantas moedas de bronze deve o Pinóquio aceitar para não ficar a perder?

   A) 36 B) 64 C) 900 D) 2570 E) 2700

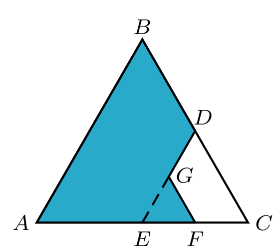
   (e) Já de regresso a casa, o Pinóquio encontrou a Fada Azul, que adora fazer contas. Sempre que lhe dão três números, ela multiplica cada número por si próprio e, com os resultados obtidos, subtrai os dois menores números ao maior. Por exemplo, com os números 8, 10 e 4, obtém os números $64 = 8 \times 8$, $100 = 10 \times 10$ e $16 = 4 \times 4$, e depois faz $100 - 64 - 16$, ou seja, obtém 20. Ela fica muito feliz quando o resultado dá zero. Pediu então ao Pinóquio que lhe sugerisse quatro conjuntos de três números. O Pinóquio apresentou-lhe os conjuntos $\{9, 4, 8\}$, $\{3, 4, 5\}$, $\{13, 12, 5\}$, e $\{9, 12, 15\}$. Para quantos o resultado é zero?

   A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

2. A última surpresa do dia deu-se na chegada a casa, onde o Pinóquio encontrou o Geppetto reunido com o seu peixe-fêmea Cleo e o seu gato Fígaro: cada um com um chapéu na cabeça! Dizia o Geppetto: "Já repararam que os nossos chapéus têm os números 4, 6, e 8, mas nenhum de nós tem um chapéu com o número de letras do seu nome?". Quem tinha o chapéu com o número 4, respondeu: "É verdade!".

   Qual é o número do chapéu da Cleo?

3. O triângulo $[ABC]$ tem os lados todos iguais e o seu perímetro mede 132 metros. O ponto E é o ponto médio de $[AC]$, F é o ponto médio de $[EC]$, D é o ponto médio de $[BC]$ e G é o ponto médio de $[DE]$. Sabendo que o triângulo $[EFG]$ também tem os lados todos iguais, quanto mede o perímetro de $[ABDGF]$?



XLI OPM - 9.11.2022 - Pré-Olimpíadas - 5º ano

Sugestões para a resolução dos problemas

Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3: 10 pontos cada

1. (a) Opção C. (*Pela hora do lanche, o nariz do Pinóquio mede* $5 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 80$ *cm*$=$ 8 *dm.*)
   (b) Opção D. (*Da primeira igualdade sabemos que* $\bigstar = 3$ *e, da segunda, concluimos que* $\square = 6$.)
   (c) Opção E. (*Há* 14 *quadrados e* 22 *retângulos que não são quadrados.*)
   (d) Opção E. (25 *moedas de ouro valem* $25 \times 3 \times 36 = 2700$ *moedas de bronze.*)
   (e) Opção D. (*A Fada Azul apenas não obtém zero com o conjunto* $\{9, 4, 8\}$.)

2. Como o nome do Geppetto tem 8 letras e sabemos que este não tem o chapéu com o número 4, podemos concluir que o seu chapéu tem o número 6. Logo, a Cleo, cujo nome tem 4 letras, terá que ter o chapéu com o número 8.

3. Como o perímetro de $[ABC]$ mede 132 metros e os lados do triângulo são todos iguais, conclui-se que

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC} = \frac{132}{3} = 44\,\text{m}.$$

Sendo E o ponto médio de $[AC]$, tem-se $\overline{AE} = \overline{EC} = 22$ m. Da mesma forma se observa que $\overline{BD} = \overline{DC} = 22$ m. Assim, sendo F o ponto médio de $[EC]$, tem-se $\overline{EF} = \overline{FC} = 11$ m. Por outro lado, os lados de $[EFG]$ são todos iguais, logo $\overline{GE} = \overline{GF} = \overline{EF} = 11$ m e assim se pode concluir que também $\overline{GD} = 11$ m.

Portanto, o perímetro de $[AFGDB]$ mede

$$\overline{AE} + \overline{EF} + \overline{FG} + \overline{GD} + \overline{DB} + \overline{AB} = 22 + 11 + 11 + 11 + 22 + 44 = 121\,\text{m}.$$

XLI OPM - 1ª Eliminatória - 9.11.2022 - Categoria Júnior - 6º/7º anos

Duração: 2 horas
Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3, 4: 8 pontos cada

Na questão 1 escolhe, em cada alínea, a opção correta.
Justifica convenientemente as tuas respostas às questões 2, 3 e 4.
Não é permitido o uso de calculadoras.

1. (a) O André quer visitar a Bruna, mas apenas se lembra que o número do prédio dela tem quatro algarismos, todos pares e menores que 3 (como, por exemplo, o número 2022). Quantas possibilidades há para o número do prédio da Bruna?

   A) 4 B) 6 C) 8 D) 10 E) 12

   (b) No prédio da Bruna há uma padaria, onde vendem pão de água a 4 euros por quilo e pãezinhos a 20 cêntimos cada um. A Bruna comprou pães de água e quatro pãezinhos e pagou 2 euros. Qual o peso dos pães de água que comprou?

   A) 100g B) 200g C) 250g D) 300g E) 500 g

   (c) O prédio da Bruna tem seis casas. Num certo dia, o carteiro trouxe cartas para todas as casas, mas colocou um número diferente de cartas em cada caixa de correio. Qual é o número mínimo de cartas que o carteiro pode ter trazido?

   A) 15 B) 18 C) 21 D) 23 E) 25

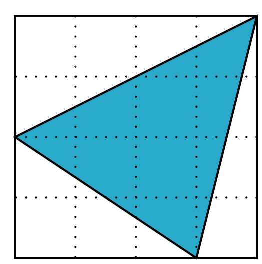
   (d) Cada um dos três andares do prédio da Bruna tem duas casas, uma no lado direito e outra no lado esquerdo. A padaria fica no R/C esquerdo, onde não mora ninguém. Todas as outras casas estão habitadas, num total de seis pessoas: António, Bruna, Carlos, Dora, Eurico e Fernanda.

   A Bruna mora com o pai, o António, e no mesmo andar mora também a sua avó Fernanda. A Dora mora do mesmo lado do Carlos e por cima da Fernanda.

   Em que casa mora o Eurico?

   A) R/C Direito B) $1^{\underline{o}}$ Esquerdo C) $1^{\underline{o}}$ Direito D) $2^{\underline{o}}$ Esquerdo E) $2^{\underline{o}}$ Direito

2. Um azulejo quadrado com 4 dm de lado, está dividido em 16 quadrados iguais. Nesse azulejo foi pintado um triângulo azul, como se vê na figura. Qual é a medida da área do triângulo pintado de azul?



3. A Sofia comprou um frigorífico em promoção, que estava com um desconto de 100 euros, tendo gasto apenas 660 euros. Passados uns dias, a Beatriz decidiu comprar o mesmo modelo de frigorífico. Como a promoção já tinha chegado ao fim, a Beatriz acordou com a loja o seguinte plano de pagamento: pagaria 90 euros no momento da compra, 210 euros no momento de entrega ao domicílio, e o restante valor seria pago em quatro mensalidades iguais. Quanto é que a Beatriz terá de pagar por cada mensalidade?

4. A Genoveva quer escolher um conjunto de três inteiros diferentes, de 1 a 9, cujo produto seja divisível por 4 mas não seja divisível por 8. Por exemplo, a Genoveva poderá escolher o conjunto $\{2, 6, 7\}$, mas não o conjunto $\{2, 4, 5\}$.

   Quantos conjuntos diferentes poderá escolher a Genoveva?

XLI OPM - 1ª Eliminatória - 9.11.2022 - Categoria Júnior - 6º/7º anos

Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3, 4: 8 pontos cada

Sugestões para a resolução dos problemas

1. (a) Opção C. (*As possibilidades são* 2000, 2002, 2020, 2022, 2200, 2202, 2220 *e* 2222.)
   (b) Opção D. (*Os pães de água custaram* $0,3 \times 4 = 1,2$€ *e os pãezinhos custaram* $4 \times 0,2 = 0,8$€.)
   (c) Opção C. (*O carteiro trouxe no mínimo* $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$ *cartas*.)
   (d) Opção D. (*RC: Padaria/Carlos; 1º andar: António,Bruna/Fernanda; 2º andar: Eurico/Dora.*)

2. A área do azulejo, em dm^2, é igual a $4^2 = 16$. Por outro lado, a região que não está pintada está dividida em três triângulos, cujas áreas são: $\frac{4\times2}{2} = 4$, $\frac{3\times2}{2} = 3$ e $\frac{4\times1}{2} = 2$, respetivamente.

   A área do triângulo azul é a diferença entre a área do quadrado e a soma das áreas dos triângulos que não estão pintados, ou seja, a sua área é $16 - (4 + 3 + 2) = 7$ dm^2.

3. Como a Sofia pagou 660 euros, e teve um desconto de 100 euros, o preço do frigorífico sem descontos é 760 euros. A Beatriz vai pagar, no total das quatro mensalidades, $760 - 90 - 210 = 460$ euros. Como as mensalidades são todas iguais, a Beatriz pagará em cada uma $460/4 = 115$ euros.

4. Para que o produto dos números seja múltiplo de 4, é necessário escolher números pares.

   Como queremos que o produto dos números não seja divisível por 8, nenhum dos subconjuntos pretendidos pode ter o número 8.

   Se escolhermos o número 4, não podemos escolher o 2 nem o 6. Os restantes dois números têm que pertencer ao conjunto $\{1, 3, 5, 7, 9\}$. Há dez possíveis escolhas para esses números: $\{1, 3\}$, $\{1, 5\}$, $\{1, 7\}$, $\{1, 9\}$, $\{3, 5\}$, $\{3, 7\}$, $\{3, 9\}$, $\{5, 7\}$, $\{5, 9\}$ e $\{7, 9\}$.

   Se não escolhermos o número 4, temos de escolher os números 2 e 6. O terceiro número tem de pertencer ao conjunto $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ e, portanto, há 5 subconjuntos nas condições pretendidas.

   Obtemos assim um total de $10 + 5 = 15$ subconjuntos.

OLIMPÍADAS
PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA

www.olimpiadas.spm.pt

XLI OPM - 2ª Eliminatória - 11.01.2023 - Categoria Júnior - 6°/7° anos

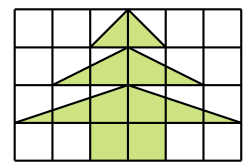
Duração: 2 horas
Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3, 4: 8 pontos cada

Na questão 1 escolhe, em cada alínea, a opção correta.
Justifica convenientemente as tuas respostas às questões 2, 3 e 4.
Não é permitido o uso de calculadoras.

1. (a) Na noite de fim de ano, enquanto aguardava pela meia-noite, a família do Luís divertia-se a calcular expressões numéricas com aspeto engraçado. A certa altura, o Luís propôs que se calculasse o valor de $(2-0+2-3)\times(2^2-0^2+2^2-3^2)^2$. Quanto vale esta expressão?

   A) -1 B) 1 C) 4 D) 81 E) 2023

   (b) Antes de desmontarem a árvore de Natal, a mãe do Luís pediu-lhe que fizesse um desenho do seu pinheiro. O Luís fez o desenho da figura ao lado. Sabendo que a área do pinheiro da figura mede 2023 cm^2, quanto mede, em cm^2, a área branca?



   A) 8 B) 16 C) 2023 D) 3032 E) 4046

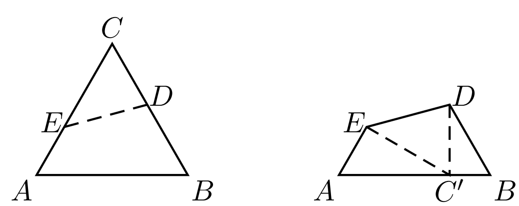
   (c) Quando foi guardar a árvore e os enfeites na arrecadação, o Luís encontrou um cofre que abria com um código de 4 algarismos. Perguntou à mãe se sabia o código, mas ela lembrava-se apenas que tinha exatamente um algarismo 1, exatamente um algarismo 2 e era ímpar. Quantas tentativas deve o Luís fazer para garantir que consegue abrir o cofre?

   A) 192 B) 294 C) 384 D) 432 E) 768

   (d) No dia de Reis, a mãe do Luís organizou uma festa em casa. Enquanto preparava a salada de fruta, reparou que não tinha fruta suficiente e pediu ao Luís que fosse comprar bananas, maçãs e laranjas. Sabendo que as bananas e as maçãs pesavam, em conjunto, 5 quilos, que as bananas e as laranjas pesavam 7 quilos, e que as maçãs e as laranjas pesavam 8 quilos, quantos quilos de fruta comprou o Luís?

   A) 5 B) 7 C)10 D) 20 E) 35

2. No triângulo equilátero $[ABC]$, os pontos D e E pertencem aos lados $[BC]$ e $[AC]$ respetivamente, e ao dobrar o triângulo segundo o segmento $[DE]$, o ponto C fica coincidente com o ponto C' do lado $[AB]$ e o ângulo $DC'B$ é reto, tal como se indica na figura. Determina as amplitudes dos ângulos internos do triângulo $[CED]$.



3. Na cidade Verde só circulam bicicletas e trotinetas, todas elétricas. Um quinto dos habitantes tem uma bicicleta e destes, a quarta parte também tem uma trotineta. Um oitavo dos habitantes que têm trotineta também têm bicicleta. Há 2023 habitantes que têm os dois tipos de transporte, bicicleta e trotineta. Quantos habitantes da cidade não têm nem bicicleta, nem trotineta?

4. A Margarida tem 5 amigos na sua turma e outros 6 amigos no seu clube desportivo.

   Ela quer fazer uma festa com 5 ou 6 destes amigos. Destes, a Margarida quer que 2 sejam da escola. Além disso, dois dos amigos do clube são irmãos, portanto a Margarida quer convidar os dois, ou não convidar nenhum.

   De quantas formas diferentes a Margarida pode escolher os amigos que vai convidar?

XLI OPM - 2ª Eliminatória - 11.01.2023 - Categoria Júnior - 6°/7° anos

Sugestões para a resolução dos problemas

Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3, 4: 8 pontos cada

1. (a) Opção B. $((2-0+2-3)\times(2^2-0^2+2^2-3^2)^2 = 1\times(-1)^2 = 1.)$
   (b) Opção E. (*A área branca mede o dobro da área do pinheiro, ou seja,* 4046 cm^2.)
   (c) Opção C. (*Existem* $4\times 3\times 8\times 8 = 768$ *códigos de quatro algarismos que têm exatamente um* 1 *e exatamente um* 2. *Como metade desses códigos é ímpar,* 384 *deles são ímpares.*)
   (d) Opção C. (*Somando os três pesos dados* $(5+7+8=20)$ *obtém-se o dobro do peso total da fruta comprada. Logo, o Luís comprou* 10 *quilos de fruta.*)

2. Uma vez que o triângulo $[ABC]$ é equilátero, tem-se $E\widehat{C}D = A\widehat{C}B = 60°$. Os triângulos $[CED]$ e $[C'ED]$ são iguais, logo, $C\widehat{D}E = E\widehat{D}C'$. No triângulo retângulo $[C'BD]$, tem-se que $C'\widehat{B}D = 60°$ e como a soma dos ângulos internos de um triângulo é um ângulo raso, $B\widehat{D}C' = 30°$.

   Mas como $C\widehat{D}E + E\widehat{D}C' + C'\widehat{B}D = 2\,C\widehat{D}E + 30 = 180°$, vem $C\widehat{D}E = 75°$. Finalmente, de novo usando que a soma dos ângulos internos de um triângulo é um ângulo raso, $C\widehat{E}D = 180 - 60 - 75 = 45°$.

3. Um quinto dos habitantes tem bicicleta e $\frac{1}{4}\times\frac{1}{5} = \frac{1}{20}$ dos habitantes tem bicicleta e trotineta. Assim, apenas $\frac{1}{5} - \frac{1}{20} = \frac{3}{20}$ dos habitantes tem só bicicleta. Se um oitavo dos habitantes que têm trotineta também têm bicicleta, $8\times\frac{1}{20} = \frac{8}{20}$ dos habitantes têm trotineta, e $\frac{7}{20}$ dos habitantes têm apenas trotineta. Conclui-se assim que $\frac{9}{20} = 1 - \frac{3}{20} - \frac{7}{20} - \frac{1}{20}$ dos habitantes não tem nem bicicleta nem trotineta. Como 2023 é o número de habitantes que têm os dois tipos de transporte (que sabemos ser $\frac{1}{20}$ dos habitantes e queremos $\frac{9}{20}$), resta multiplicar este número por 9, ou seja $9\times 2023 = 18207$ habitantes não têm nem bicicleta nem trotineta.

4. Designemos os amigos da escola por A, B, C, D, E. Para escolher dois destes amigos, a Margarida tem 10 possibilidades: $AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE$ e DE.

   Designemos os amigos do clube por F, G, H, I, J, L, dos quais F e G são irmãos. A Margarida quer escolher 3 ou 4 destes amigos.

   Para escolher três destes amigos, a Margarida tem as seguintes possibilidades: se escolher F e G, ainda tem que escolher um dos restantes 4 amigos, ou seja, tem as possibilidades FGH, FGI, FGJ, FGL; se não escolher F nem G, tem as possibilidades HIJ, HIL, HJL, IJL. Logo, neste caso, a Margarida tem 8 possibilidades.

   Para escolher quatro destes amigos, a Margarida tem as seguintes possibilidades: se escolher F e G, ainda tem que escolher dois dos restantes 4 amigos, ou seja, tem as possibilidades $FGHI$, $FGHJ$, $FGHL$, $FGIJ$, $FGIL$, $FGJL$; se não escolher F nem G, só tem a possibilidade $HIJL$. Logo, neste caso, a Margarida tem 7 possibilidades.

   Portanto, a Margarida tem $8+7=15$ possibilidades para escolher os amigos do clube.

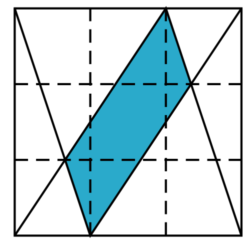
   Assim, ao todo, a Margarida tem $10\times 15 = 150$ formas de escolher os amigos para a festa.

XLI OPM - Final - 1º Dia - 31.03.2023 - Categoria Júnior - 6º/7º anos

Duração: 3 horas
Questão 1: 16 pontos
Questões 2 e 3: 7 pontos cada

Justifica convenientemente as tuas respostas e indica os principais cálculos.
Não é permitido o uso de calculadoras.

1. (a) O logótipo do supermercado $Ossónoba$ é formado por um paralelogramo pintado sobre um quadrado dividido em 9 quadrículas, como na figura ao lado.
Qual é a razão entre a área do paralelogramo pintado e a área do quadrado grande?



A) $\frac{1}{12}$ B) $\frac{2}{9}$ C) $\frac{2}{7}$ D) $\frac{1}{6}$ E) $\frac{2}{5}$

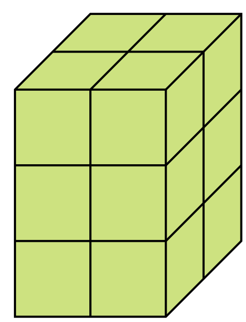
(b) O supermercado $Ossónoba$ vende diariamente 600 caixas de ovos, a $3{,}00$€ cada. O supermercado quer mudar o preço das caixas de ovos. Por cada 3 cêntimos que o preço aumente, o supermercado vende menos 4 caixas e por cada 3 cêntimos que o preço diminua, o supermercado vende mais 4 caixas.
Com qual dos seguintes preços a receita do supermercado será maior?

A) $2{,}70$€ B) $3{,}00$€ C) $3{,}30$€ D) $3{,}75$€ E) $3{,}90$€

(c) Numa prateleira deste supermercado há 30 embalagens, algumas azuis e outras verdes.
Qual dos números seguintes não pode ser o quociente entre o número de embalagens verdes e o número de embalagens azuis?

A) $\dfrac{2}{3}$ B) $\dfrac{1}{4}$ C) $\dfrac{1}{5}$ D) $\dfrac{3}{4}$ E) $\dfrac{3}{7}$

(d) Neste supermercado as embalagens são arrumadas, sempre que possível, num paralelepípedo com lados maiores que 1. Por exemplo, quando há 12 embalagens para arrumar, pode-se formar um paralelepípedo $2 \times 2 \times 3$, isto é, com 2 filas, 2 colunas e 3 camadas.
O supermercado quer arrumar quatro paletes, respetivamente com 2022, 2023, 2024 e 2025 embalagens.
Quantas destas paletes é possível arrumar num paralelepípedo com lados maiores que 1?



A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

2. De quantas formas é possível separar os números $1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 21$ em dois conjuntos, de maneira a que o produto dos números de cada conjunto seja igual?

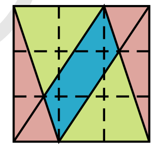
3. A Ana, o Bruno e a Carolina jogaram ténis de mesa entre si. Em cada partida, somente dois dos amigos jogaram, ficando o terceiro a descansar. De cada vez que um dos amigos ganhou uma partida, ficou a descansar durante a partida seguinte. A Ana jogou 12 partidas, o Bruno jogou 21 partidas e a Carolina descansou durante 8 partidas.

Quem descansou na última partida?

Duração: 3 horas
Questão 1: 16 pontos
Questões 2 e 3: 7 pontos cada

Sugestões para a resolução dos problemas

1. (a) Na figura ao lado, se cada quadrícula tiver área 1, o quadrado tem área $3 \times 3 = 9$, os triângulos verdes têm área $\dfrac{2 \times 2}{2} = 2$ e os triângulos rosa têm área $\dfrac{3 \times 1}{2} = \dfrac{3}{2}$.



Logo a área do paralelogramo é $9 - 2 \times 2 - 2 \times \dfrac{3}{2} = 2$.

Portanto, a razão entre a área do paralelogramo e a área do quadrado é $\dfrac{2}{9}$.

Opção correta: B).

(b) Se o preço de cada caixa for 3€, então o supermercado vende 600 caixas. Logo a receita é $3 \times 600 = 1800$€.

Se o preço de cada caixa for $2,70 = 3 - 10 \times 0,3$, então o supermercado vende $600 + 10 \times 4 = 640$ caixas. Logo a receita é $2,70 \times 640 = 1728$€.

Se o preço de cada caixa for $3,30 = 3 + 10 \times 0,3$, então o supermercado vende $600 - 10 \times 4 = 560$ caixas. Logo a receita é $3,30 \times 560 = 1848$€.

Se o preço de cada caixa for $3,75 = 3 + 25 \times 0,3$, então o supermercado vende $600 - 25 \times 4 = 500$ caixas. Logo a receita é $3,75 \times 500 = 1875$€.

Se o preço de cada caixa for $3,90 = 3 + 30 \times 0,3$, então o supermercado vende $600 - 30 \times 4 = 480$ caixas. Logo a receita é $3,90 \times 480 = 1872$€.

Opção correta: D).

(c) Se o quociente fosse $\dfrac{3}{4}$, então o número de embalagens verdes seria $\dfrac{3}{7}$ do total, que não é um número inteiro.

Os quocientes $\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{5}$ e $\dfrac{3}{7}$ são possíveis, respetivamente se houver $12, 6, 5$ e 9 embalagens verdes.

Opção correta: D).

(d) Como $2022 = 2 \times 3 \times 337$, $2023 = 3 \times 17 \times 17$, $2024 = 2 \times 2 \times 506$ e $2025 = 5 \times 5 \times 81$, então é possível arrumar todas as paletes em paralelepípedo com lados maiores que 1.

Opção correta: E).

2. O produto dos números $1, 2, 2^2, 5, 2 \times 3, 7, 2^3, 3^2, 2 \times 5$ e 3×7 é

$$2^8 \times 3^4 \times 5^2 \times 7^2.$$

Assim, o produto dos números de cada conjunto é $2^4 \times 3^2 \times 5 \times 7$. Consideremos o conjunto S que não tem o 1. Para ter o fator 5, este conjunto tem o 5 ou o 10, e para ter o fator 7, tem o 7 ou o 21.

- Se S tem o 5 e o 7, então para ter o fator 3^2 tem que ter o 9 e para ter o fator 3^4 tem que ter o 2 e o 8, logo $S = \{2, 5, 7, 8, 9\}$;
- Se S tem o 5 e o 21, então para ter o fator 3^2 tem que ter o 6 e para ter o fator 3^4 tem que ter o 8, ou então o 2 e o 4, logo $S = \{5, 6, 8, 21\}$ ou $S = \{2, 4, 5, 6, 21\}$;
- Se S tem o 10 e o 7, então para ter o fator 3^2 tem que ter o 9 e para ter o fator 3^4 tem que ter o 8, ou então o 2 e o 4, logo $S = \{7, 8, 9, 10\}$ ou $S = \{2, 4, 7, 9, 10\}$;
- Se S tem o 10 e o 21, então para ter o fator 3^2 tem que ter o 6 e para ter o fator 3^4 tem que ter o 4, logo $S = \{4, 6, 10, 21\}$;

Portanto, é possível separar os números de 6 formas diferentes.

3. A Ana ou o Bruno jogaram em todas partidas, porque só há 3 amigos no total, e jogaram juntos o número de vezes que a Carolina descansou. Logo houve $12 + 21 - 8 = 25$ partidas no total.

Para a Ana só ter jogado 12 partidas, teve de ter começado a descansar e ganhar sempre que jogou, logo ganhou todas as partidas de ordem par, incluindo a $24^{\underline{a}}$ partida, ficando a descansar na última.

XLI OPM - Final - 2º Dia - 01.04.2023 - Categoria Júnior - 6º/7º anos

Duração: 3 horas
Questão 4: 16 pontos
Questões 5 e 6: 7 pontos cada

Justifica convenientemente as tuas respostas e indica os principais cálculos.
Não é permitido o uso de calculadoras.

4. (a) Na $Cidade\ dos\ Números$ há casas numeradas de 1 a 2023. Numa das casas há um cofre. O detetive Cabreira apenas sabe que a soma dos algarismos do número da casa é par. Em quantas casas vai ter que procurar o cofre para ter a certeza que o encontra?

   A) 120 B) 1010 C) 1011 D) 1012 E) 2023

   (b) O relógio da torre da igreja da $Cidade\ dos\ Números$ está estragado, e ficou parado às 3h15m. Qual é o ângulo formado pelos dois ponteiros do relógio?

   A) $0°$ B) $2°$ C) $3°\,15'$ D) $5°\,45'$ E) $7°\,30'$

   (c) Num dos bairros da cidade as casas estão numeradas de 100 a 999. Neste bairro há dez ruas, e em cada rua, o número de todas as casas termina no mesmo algarismo. Se somarmos todos os números de cada uma das dez ruas, qual é diferença entre a maior e a menor soma?

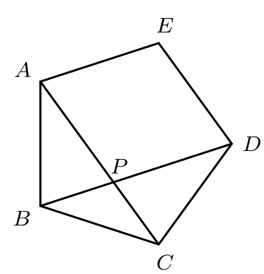
   A) 90 B) 180 C) 540 D) 810 E) 900

   (d) O detetive Cabreira finalmente encontrou o cofre. O código do cofre é uma capicua com quatro algarismos, maior do que 1000, cujo dobro também é uma capicua. Quantas possibilidades existem para o código do cofre?

   A) 10 B) 20 C) 30 D) 45 E) 90

5. Considera um pentágono regular $[ABCDE]$ e seja P o ponto de interseção das diagonais $[AC]$ e $[BD]$, como na figura.

   Determina a amplitude do ângulo APB.



6. O João e a Ana têm de mover 10 caixas pequenas e 10 caixas grandes. A Ana demora 1 minuto a mover uma caixa pequena e 6 minutos a mover uma caixa grande. O João demora 3 minutos a mover uma caixa pequena e 5 minutos a mover uma caixa grande. O João e a Ana começam a mover as caixas às 9h da manhã.

   Qual é a menor hora a que o trabalho pode estar concluído?

Duração: 3 horas
Questão 1: 16 pontos
Questões 2 e 3: 7 pontos cada

Sugestões para a resolução dos problemas

4. (a) Em cada conjunto de números consecutivos em que o primeiro termina em 0 e o último termina em 9 há exatamente metade dos números cuja soma dos algarismos é par. Assim, entre 10 e 2019 há 1005 números nestas condições. A estes há que juntar os números: $2, 4, 6, 8, 2020$ e 2022. A resposta correta é $1005 + 6 = 1011$.

   Opção correta: C)

   (b) O ponteiro dos minutos está exatamente em cima do número 3, ou seja, no mesmo sítio onde o ponteiro das horas estava $\frac{1}{4}$ de hora antes de parar. Portanto basta calcular qual o ângulo que o ponteiro das horas se deslocou nesse tempo. Em doze horas ele desloca-se 360°. Usando uma regra de três simples deduzimos que ele se deslocou, em graus, $\frac{360}{12} \times \frac{1}{4} = 7 + \frac{1}{2}$, que é igual a $7^\circ 30'$.

   Opção correta: E)

   (c) Os números apenas diferem no algarismo das unidades. Por isso, basta calcular a diferença da soma dos algarismos unidades de cada uma das ruas. Cada rua tem 90 casas e na rua com maior soma o algarismo das unidades de todas as casas é o 9, enquanto na rua com menor soma o algarismo das unidades de todas as casas é o 0. Podemos então concluir que a diferença pretendida é $9 \times 90 = 810$.

   Opção correta D).

   (d) Seja $n = abba$ o código do cofre onde a e b são dois algarismos. Se $a \geq 5$, então o dobro é um número de cinco algarismos que começa por 1 e portanto tem de acabar em 1, o que é impossível porque $2n$ é um número par. Portanto, a é um algarismo entre 1 e 4. Se b for um algarismo menor do que 5, é fácil verificar que $2n$ também é uma capicua com os algarismos $2a$ e $2b$. Se b for maior do que 4, então o algarismo das unidades de $2n$ é $2a$, mas o algarismo dos milhares é $2a + 1$, uma vez que $2b \geq 10$. Podemos então concluir que há quatro escolhas possíveis para a e cinco escolhas possíveis para b, ou seja, há $4 \times 5 = 20$ códigos possíveis.

   Opção correta B).

5. Como $[ABCDE]$ é um pentágono regular, cada ângulo externo mede $360/5 = 72^\circ$, pelo que cada ângulo interno mede $180 - 72 = 108^\circ$.

   Como $\overline{AB} = \overline{BC}$, o triângulo $[ABC]$ é isósceles e, portanto, $P\widehat{A}B = B\widehat{C}P = \frac{1}{2}(180 - 108) = 36^\circ$. De forma análoga, concluímos que $D\widehat{B}C = 36^\circ$, pelo que $A\widehat{B}P = 108 - 36 = 72^\circ$.

   Uma vez que a soma das amplitudes dos ângulos internos de $[ABP]$ é 180°, segue-se que $A\widehat{P}B = 180 - 36 - 72 = 72^\circ$.

6. Comecemos por notar que é possível eles moverem as 20 caixas em 33 minutos, acabando às 9h33. Para isso, o João move 6 caixas grandes e 1 pequena, demorando exatamente $6 \times 5 + 1 \times 3 = 33$ minutos, e a Ana move 4 caixas grandes e 9 caixas pequenas, demorando $4 \times 6 + 9 \times 1 = 33$ minutos.

   Resta ver que não é possível acabarem o trabalho antes das 9h33. Comecemos por notar que, apesar do João ser mais rápido a mover as caixas grandes, não é o mais eficiente ele mover as caixas grandes todas pois demoraria 50 minutos, que é mais do que 33 minutos. Logo a Ana tem de levar caixas grandes.

Se o João se encarregar de mover 2 (ou mais) caixas pequenas, como a Ana move pelo menos uma caixa grande, é eficiente o João trocar duas caixas pequenas por uma grande da Ana, pois em vez de demorarem 6 minutos cada um a mover as três caixas, a Ana demoraria somente 2 minutos e o João somente 5. Logo, o João move no máximo uma caixa pequena.

Se o João mover 0 caixas pequenas, antes das 9h33 consegue mover no máximo 6 caixas grandes, ficando o resto a cargo da Ana. Mas para a Ana mover 4 caixas grandes e 10 pequenas, demoraria 34 minutos, fazendo com que acabassem o trabalho às 9h34.

Se o João mover 1 caixa pequena, antes das 9h33 consegue mover no máximo 5 caixas grandes e 1 caixa pequena, ficando o resto a cargo da Ana. Mas para a Ana mover 5 caixas grandes e 9 pequenas, demoraria 41 minutos, fazendo com que acabassem o trabalho às 9h41.

Logo a menor hora a que conseguem terminar o trabalho é às 9h33.

XLI OPM - 1ª Eliminatória - 9.11.2022 - Categoria A - 8º/9º anos

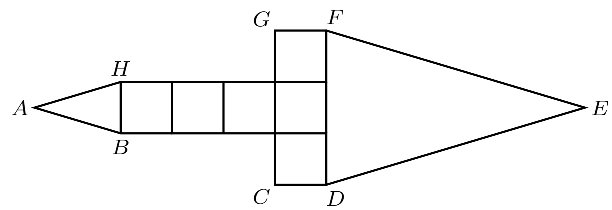
Duração: 2 horas
Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3, 4: 8 pontos cada

Na questão 1 escolhe, em cada alínea, a opção correta.
Justifica convenientemente as tuas respostas às questões 2, 3 e 4.
Não é permitido o uso de calculadoras.

1. (a) O Pedro tem vários cubos, que colocou em dez sacos. Nenhum dos sacos ficou vazio e todos os sacos ficaram com um número diferente de cubos. Qual é o número mínimo de cubos que o Pedro pode ter?

A) 15 B) 25 C) 35 D) 45 E) 55

(b) O Pedro desenhou uma planificação de um dos seus cubos, e o irmão dele completou o desenho com dois triângulos isósceles, como na figura. O perímetro de todo o desenho é 96 cm e o perímetro de $[CDEFG]$ é 62 cm. Sabendo ainda que $[DEF]$ tem o triplo do perímetro de $[ABH]$, quanto mede $[CD]$?



A) 3 cm B) 4 cm C) 5 cm D) 6 cm E) 7 cm

(c) Cinco dos cubos do Pedro são coloridos e têm escritos os seguintes números:

$$72 \qquad 69 \qquad 80 \qquad 95 \qquad 70$$

O cubo castanho tem um número maior do que o verde, mas menor do que o encarnado. A diferença entre os números do cubo azul e do preto é 8. Qual é o número no cubo castanho?

A) 72 B) 69 C) 80 D) 95 E) 70

(d) Um dos cubos do Pedro é feito de plasticina. O Pedro retirou 5 cm^3 a esse cubo e com o volume restante formou um paralelepípedo com um lado igual ao cubo original, outro lado 1 cm maior e o terceiro lado 1 cm menor. Quanto media o lado do cubo original?

A) 3 cm B) 4 cm C) 5 cm D) 6 cm E) 7 cm

2. Para fazer um trabalho de Educação Visual, o João cortou uma folha de papel em 8 pedaços. Depois pegou em 7 desses pedaços e cortou cada um em 6 pedaços. De seguida, pegou em 5 pedaços e cortou cada um em 4 pedaços. Finalmente, pegou em 3 pedaços e cortou cada um em 2 pedaços. Com quantos pedaços de papel ficou o João?

3. A Ana, a Bea, o Cadó e o Dani são quatro amigos que jogam ao berlinde. Após lançarem os seus berlindes, repararam que os quatro berlindes eram os vértices de um quadrilátero. O berlinde da Ana estava a 5 metros do berlinde da Bea e a 9 metros do berlinde do Dani. Por sua vez, o berlinde do Cadó encontrava-se a 5 metros do berlinde do Dani e a 17 metros do berlinde da Bea. Qual era a distância entre os berlindes da Bea e do Dani, sabendo que era um número inteiro de metros?

4. O Ricardo joga xadrez numa aplicação do seu telemóvel. Ao fim de alguns jogos, a aplicação mostrou que o Ricardo tinha ganho 73% dos seus jogos. Sabendo que esta percentagem está arredondada às unidades, em quantos jogos participou, no mínimo, o Ricardo?

Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3, 4: 8 pontos cada

Sugestões para a resolução dos problemas

1. (a) Opção E. (*O Pedro tem no mínimo* $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=55$ *cubos.*)
   (b) Opção B. (*Tem-se* $\overline{AB}=7$ *cm*, $\overline{CD}=4$ *cm e* $\overline{EF}=21$ *cm.*)
   (c) Opção E. (*Verde:* 69, *castanho:* 70, *encarnado:* 95, *azul e preto:* 80 *e* 72.)
   (d) Opção C. (*O cubo tem volume* $5^3=125$ *cm*^{3} *e o paralelepípedo* $5\times6\times4=120$ *cm*^{3}.)

2. Depois do João efetuar os primeiros cortes (escolher 7 pedaços dos iniciais e cortar cada um em 6 pedaços), obteve $1+7\times6=43$ pedaços de papel. Entre estes ele escolheu (retirou do conjunto) cinco pedaços e cortou cada um destes 5 em 4 pedaços cada, obtendo assim $43-5+5\times4=58$ pedaços. Por fim, ele escolheu 3 pedaços (retirou do conjunto) e cortou cada um destes em 2 pedaços, obtendo portanto $58-3+3\times2=61$ pedaços. O João ficou com 61 pedaços de papel.

3. Seja $[ABCD]$ o quadrilátero que representa a localização dos berlindes tal que:
$$\overline{AB}=5,\quad \overline{AD}=9,\quad \overline{BC}=17 \text{ e } \overline{CD}=5.$$
Uma vez que $[ABD]$ é um triângulo, a desigualdade triangular permite concluir que
$$\overline{BD}<\overline{AD}+\overline{AB}=9+5=14$$
Por outro lado, a desigualdade triangular aplicada ao triângulo $[BCD]$ implica que
$$\overline{BD}>\overline{BC}-\overline{CD}=17-5=12.$$
Portanto $\overline{BD}$ é um número inteiro entre 12 e 14, ou seja, $\overline{BD}=13$.
Assim, a distância entre os berlindes da Bea e do Dani é 13 metros.

4. Fixado um número de jogos, se existir uma possibilidade para o número de vitórias tal que a taxa de vitórias é menor que 73%, mas se o Ricardo tivesse ganho mais um jogo a taxa de vitórias já seria superior a 73%, então este não pode ter sido o número de jogos do Ricardo. Começando com um jogo, vamos ver que isto acontece, e vamos aumentar o número de jogos até tal deixar de acontecer.

   - 1 jogo: 0 vitórias, 0% de vitórias; 1 vitória, 100% de vitórias.
   - 2 jogos: 1 vitória, 50% de vitórias; 2 vitórias, 100% de vitórias.
   - 3 jogos: 2 vitórias, 66% de vitórias; 3 vitórias, 100% de vitórias.
   - 4 jogos: 2 vitórias, 50% de vitórias; 3 vitórias, 75% de vitórias.
   - 5 jogos: 3 vitórias, 60% de vitórias; 4 vitórias, 80% de vitórias.
   - 6 jogos: 4 vitórias, 67% de vitórias; 5 vitórias, 83% de vitórias.
   - 7 jogos: 5 vitórias, 71% de vitórias; 6 vitórias, 86% de vitórias.
   - 8 jogos: 5 vitórias, 63% de vitórias; 6 vitórias, 75% de vitórias.
   - 9 jogos: 6 vitórias, 67% de vitórias; 7 vitórias, 78% de vitórias.
   - 10 jogos: 7 vitórias, 70% de vitórias; 8 vitórias, 80% de vitórias.
   - 11 jogos: 8 vitórias, 73% de vitórias.

   Portanto, se o Ricardo jogar 11 jogos e ganhar 8 tem uma taxa de vitórias de 73% e este número de jogos jogados é o mínimo.

OLIMPÍADAS
PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA

www.olimpiadas.spm.pt

XLI OPM - 2ª Eliminatória - 11.01.2023 - Categoria A - 8º/9º anos

Duração: 2 horas
Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3, 4: 8 pontos cada

Na questão 1 escolhe, em cada alínea, a opção correta.
Justifica convenientemente as tuas respostas às questões 2, 3 e 4.
Não é permitido o uso de calculadoras.

1. (a) O Rafael e o Gonçalo são avançados da mesma equipa e os dois juntos já marcaram 15 golos. Cada um marcou o mesmo número de golos com o pé. Sabendo que apenas o Gonçalo marcou golos de cabeça e que exatamente $1/3$ dos seus golos foram marcados de cabeça, quantos golos marcou o Rafael?

   A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

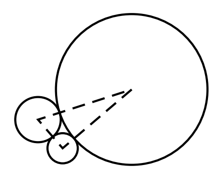
   (b) Para um exercício do treino, o Rafael, o Gonçalo, o Bruno, o Diogo e o João trouxeram uma bola assinada por si. No final do exercício, todos tinham uma bola, mas apenas dois deles ficaram com a bola com o seu nome. De quantas maneiras diferentes podem ter ficado distribuídas as bolas no final?

   A) 2 B) 6 C) 10 D) 15 E) 20

   (c) O Diogo, o Bruno e o João jogam com as camisolas com os números: 2, 8 e 17. Eles repararam que se somassem os números das suas camisolas dois a dois, obteriam os números das camisolas do Bernardo, do Nuno e do Otávio. Como acharam este procedimento engraçado, somaram novamente os números que obtiveram dois a dois. Se fizerem este procedimento 2023 vezes, qual será a diferença entre os dois maiores números obtidos?

   A) 6 B) 9 C) 15 D) 126 E) 1237

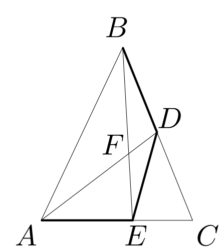
   (d) O treinador da equipa usa bolas de tamanhos diferentes, com raios de 2, 3 e 10 dm. O Bernardo colocou-as no chão de modo que as três esferas fossem tangentes entre si. Quanto mede, em dm^2, a área do triângulo cujos vértices são os centros das esferas?



   A) 15 B) 20 C) 25 D) 30 E) 35

2. Enquanto arrumava o quarto, o Bruno encontrou um antigo jogo de tabuleiro com 3 linhas e 3 colunas, juntamente com peças numeradas de 1 a 8. Infelizmente o quadrado de um dos cantos do tabuleiro estava partido. O Bruno quer arrumar o jogo, colocando uma única peça em cada uma das oito posições que restam no tabuleiro, de forma a que a soma dos algarismos em cada linha e em cada coluna seja a mesma. De quantas formas pode o Bruno colocar as peças no tabuleiro?

3. No triângulo $[ABC]$, o ponto D pertence ao lado $[BC]$, o ponto E pertence ao lado $[AC]$ e F é a interseção de $[EB]$ e $[AD]$.
Sabendo que $\overline{EA} = \overline{ED} = \overline{DB}$ e $A\widehat{C}B = 68°$, determina $A\widehat{F}B$.



4. Durante as últimas férias, o Bruno perdeu muitas cartas do seu baralho favorito. Restam apenas o 2 e 3 do naipe de Copas, o $2, 3$ e 4 de Espadas, o $2, 3, 4$ e 5 de Ouros e o $2, 3, 4, 5$ e 6 de Paus. De quantas formas pode o Bruno escolher 4 destas cartas de forma a que não haja cartas do mesmo naipe e que estejam numeradas com, pelo menos, três números diferentes?

XLI OPM - 2ª Eliminatória - 11.01.2023 - Categoria A - 8º/9º anos

Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3, 4: 8 pontos cada

Sugestões para a resolução dos problemas

1. (a) Opção D. (*Ambos marcaram 6 golos com o pé e o Gonçalo marcou 3 golos de cabeça.*)

   (b) Opção E. (*Há 10 maneiras de escolher os dois jogadores que ficam com a mesma bola e duas maneiras de trocar as bolas entre os outros três.*)

   (c) Opção A. (*A diferença entre os dois maiores números alterna entre 6 e 9.*)

   (d) Opção D. (*O triângulo é retângulo, com catetos $2+3$ e $2+10$ e hipotenusa $3+10$ dm.*)

2. Sem perda de generalidade, suponhamos que o canto em falta é o canto superior esquerdo. Vamos numerar as linhas de cima para baixo e as colunas da esquerda para a direita.

   Notemos que a soma de todos os algarismos é $1+2+\cdots+8=36$, pelo que a soma dos algarismos de cada linha e de cada coluna deve ser $36/3=12$.

   Como só há uma possibilidade de escrever 12 como a soma de 8 com dois outros números distintos, $12 = 1+3+8$, a peça 8 tem de ficar na primeira linha ou na primeira coluna. Há assim 4 possibilidades para colocar a peça 8. Se esta peça for colocada na primeira linha, temos obrigatoriamente de colocar a peça 4 na restante casa desta linha. Por outro lado, na coluna que contém a peça 8 temos de colocar as peças 1 e 3 que podem ser colocadas de duas formas. Para cada uma das outras posições para a peça 8 também obtemos duas possibilidades, logo temos $4\times 2=8$ formas de colocar as peças $1,3,4,8$.

   É fácil verificar que após colocarmos estas peças, só existe uma forma de colocar as restantes de forma a que a soma dos algarismos em cada linha e cada coluna seja 12. O Bruno tem assim 8 formas de colocar as peças no tabuleiro.

3. O triângulo $[EDB]$ é isósceles com $D\hat{B}E = D\hat{E}B$. Também o triângulo $[EDA]$ é isósceles e $E\hat{A}D = E\hat{D}A$.

   Por outro lado, $\angle DEC$ é ângulo externo ao triângulo $[EDA]$, assim como $\angle CDE$ é ângulo externo ao triângulo $[EDB]$, logo $C\hat{E}D = 2\times E\hat{D}A$ e $C\hat{D}E = 2\times D\hat{E}B$.

   Dado que $C\hat{E}D + C\hat{D}E = 180^\circ - 68^\circ = 112^\circ$, conclui-se que

   $$A\hat{F}B = E\hat{F}D = 180^\circ - (E\hat{D}A + D\hat{E}B) = 180^\circ - \frac{C\hat{E}D + C\hat{D}E}{2} = 180^\circ - \frac{112^\circ}{2} = 124^\circ.$$

4. Vamos dividir o problema em dois casos: no primeiro caso as 4 cartas têm todas números diferentes e no segundo caso as 4 cartas têm exatamente 3 números diferentes.

   No primeiro caso, podemos escolher uma carta de Copas de duas formas. Escolhida esta carta, restam duas possibilidades para a escolha da carta de Espadas. Escolhidas as de Copas e de Espadas, restam duas possibilidades para a escolha da carta de Ouros e, de forma análoga, temos duas possibilidades para a escolha da carta de Paus. Há no total, $2^4=16$ formas de escolher as cartas neste caso.

   No segundo caso, temos exatamente 3 números diferentes, pelo que teremos duas cartas com naipes diferentes mas com o mesmo valor numérico, que pode ser $2,3,4$ ou 5. Se este número for o 5, então as cartas com este valor têm de ser a de Ouros e a de Paus. Podemos agora escolher a carta de Copas de duas formas e, após esta escolha, temos duas possibilidades para a escolha da carta de Espadas, perfazendo 4 possibilidades.

Se o número comum a duas cartas for o 4, estas cartas podem ser a de Espadas e a de Ouros, a de Espadas e a de Paus, ou a de Ouros e a de Paus. Em cada um dos casos, temos respetivamente 2×3, 2×2 e 2×1 formas diferentes de escolher as restantes cartas, perfazendo um total de $6 + 4 + 2 = 12$ escolhas diferentes

Se o número comum for 3 (resp. 2), temos 6 formas de escolher as duas cartas que têm o mesmo valor numérico. Analisando estas 6 possibilidades, Copas e Espadas, ou Copas e Ouros, ou Copas e Paus, ou Espadas e Ouros, ou Espadas e Paus, ou Ouros e Paus, concluímos que há, respetivamente, $3 \times 3, 2 \times 3, 2 \times 2, 1 \times 3, 1 \times 2, 1 \times 1$ formas de escolher as restantes cartas. Portanto, há no total, $9 + 6 + 4 + 3 + 2 + 1 = 25$ formas de escolher as cartas se a repetida tiver valor numérico 3 (resp. 2).

Concluímos assim que o Bruno tem $16 + 4 + 12 + 25 + 25 = 82$ formas de escolher as cartas.

spm

XLI OPM - Final - 1º Dia - 31.03.2023 - Categoria A - 8º/9º anos

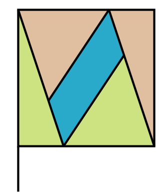
Duração: 3 horas
Questão 1: 16 pontos
Questões 2 e 3: 7 pontos cada

Justifica convenientemente as tuas respostas e indica os principais cálculos.
Não é permitido o uso de calculadoras.

1. (a) O Tomás tem um plano de treino com três amigos: joga uma partida de xadrez com o seu amigo Tiago, de 3 em 3 dias, com o Pedro joga duas partidas de xadrez, de 6 em 6 dias, e com a Mariana joga três partidas de xadrez de 8 em 8 dias. Hoje o Tomás jogou com os três amigos. Quantas partidas de xadrez ele irá jogar com os três amigos, até ao final do dia em que voltará a jogar de novo com os três?

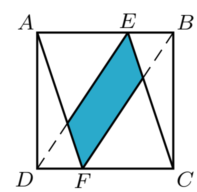
   A) 17 B) 21 C) 25 D) 41 E) 46

   (b) O clube de xadrez do Tomás tem uma bandeira. O Tomás tem quatro cores para pintar a bandeira, mas não quer que regiões adjacentes tenham a mesma cor. Por exemplo, o Tomás poderia pintar a bandeira como na figura ao lado. Quantas bandeiras pintadas diferentes o Tomás pode criar?



   A) 24 B) 48 C) 72 D) 96 E) 144

   (c) A bandeira do clube é um quadrado $[ABCD]$. Os vértices do quadrado pertencem às retas que contêm os lados do paralelogramo pintado, como na figura. Os pontos E e F são tais que $\overline{AE} = 2\overline{EB}$ e $\overline{FC} = 2\overline{DF}$.
   Qual é o quociente entre a área do paralelogramo pintado e a área do quadrado $[ABCD]$?

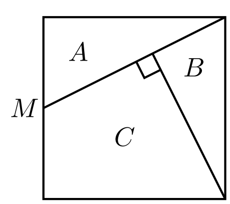


   A) $\frac{1}{12}$ B) $\frac{2}{9}$ C) $\frac{2}{7}$ D) $\frac{1}{6}$ E) $\frac{2}{5}$

   (d) O número preferido do Tomás é o 9, porque nasceu a 9 de setembro de 2009. O Tomás escreveu inteiros da seguinte forma: primeiro escreveu o número 1 uma vez, depois o número 2 duas vezes, depois o número 3 três vezes, e assim sucessivamente, até escrever um total de 2023 algarismos. Quantos algarismos 9 escreveu o Tomás?

   A) 79 B) 86 C) 88 D) 96 E) 99

2. Um quadrado tem 2 dm de lado e está dividido em três regiões A, B, C, como na figura. A região C tem dois ângulos retos. O ponto M é o ponto médio de um dos lados do quadrado.
   Quanto mede a área da região C?



3. A Ana e a Beatriz escreveram as suas idades uma a seguir à outra, formando um número de quatro algarismos, e ficaram surpreendidas por este número ser um quadrado perfeito. Se elas repetirem este procedimento daqui a 31 anos, irão obter um número de quatro algarismos, que é também um quadrado perfeito.
   Sabendo que a Ana é mais nova do que a Beatriz, determina as idades atuais das duas amigas.

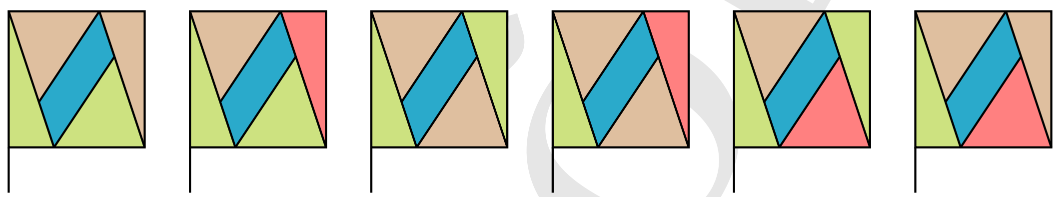
Duração: 3 horas
Questão 1: 16 pontos
Questões 2 e 3: 7 pontos cada

Sugestões para a resolução dos problemas

1. (a) Uma vez que m.m.c$(3, 6, 8) = 24$, ele volta a jogar com todos no mesmo dia daqui a 24 dias. Até lá jogou 8 vezes com o Tiago, logo 8 partidas, 4 vezes com o Pedro, logo $4 \times 2 = 8$ partidas e 3 vezes com a Mariana, logo $3 \times 3 = 9$ partidas. No total, ele jogou $8 + 8 + 9 = 25$ partidas.

   Opção correta: C).

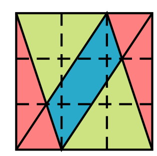
   (b) Há seis hipóteses diferentes de distribuir as cores:



   Como podemos permutar as 4 cores de 24 formas diferentes, há $6 \times 24 = 144$ bandeiras diferentes.

   Opção correta: E).

   (c) Na figura ao lado, se cada quadrícula tiver área 1, o quadrado tem área $3 \times 3 = 9$, os triângulos verdes têm área $\dfrac{2 \times 2}{2} = 2$ e os triângulos rosa têm área $\dfrac{3 \times 1}{2} = \dfrac{3}{2}$.



   Logo a área do paralelogramo é $9 - 2 \times 2 - 2 \times \dfrac{3}{2} = 2$.

   Portanto, a razão entre a área do paralelogramo e a área do quadrado é $\dfrac{2}{9}$.

   Opção correta: B).

   (d) Uma vez que $1 + 2 + \cdots + 9 = 45$ escrevem-se 45 algarismos, dos quais 9 algarismos são iguais a 9. Uma vez que $10 + 11 + \cdots + 19 = \frac{10+19}{2} \times 10 = 145$, escrevem-se $145 \times 2 = 290$ algarismos, dos quais 19 são iguais a 9. Uma vez que $20 + 21 + \cdots + 29 = \frac{20+29}{2} \times 10 = 245$, escrevem-se $245 \times 2 = 490$ algarismos, dos quais 29 são iguais a 9. Uma vez que $30 + 31 + \cdots + 39 = \frac{30+39}{2} \times 10 = 345$, escrevem-se $345 \times 2 = 790$ algarismos dos quais 39 são iguais a 9. Até aqui já se escreveram $45 + 290 + 490 + 790 = 1615$ algarismos. Uma vez que $40 + 41 + \cdots + 45 = \frac{40+45}{2} \times 6 = 85 \times 3 = 255$, e $1615 + 510 > 2023$, já não se escreveram mais algarismos 9. No total, o Tomás escreveu $9 + 19 + 29 + 39 = 96$ algarismos 9.

   Opção correta: D).

2. Comecemos por notar que o triângulo A tem $\frac{1\times 2}{2} = 1$ dm^2 de área. Por outro lado, como os lados de um quadrado são paralelos dois a dois, os triângulos A e B são semelhantes. Além disso, uma vez que, pelo Teorema de Pitágoras, a hipotenusa do triângulo A mede $\sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$ dm e, por se tratar de um dos lados do quadrado, a hipotenusa do triângulo B mede 2 dm, a razão de semelhança entre os dois é $\frac{2}{\sqrt{5}}$. Logo, a área do triângulo B mede $1 \times \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{4}{5}$ dm^2, e portanto, a região C mede $2^2 - 1 - \frac{4}{5} = \frac{11}{5}$ dm^2.

3. Como o número formado pelas idades atuais da Ana e da Beatriz tem quatro algarismos, temos duas possibilidades: cada uma das idades é um número entre 10 e 99 ou a Ana tem menos de 10 anos e a Beatriz pelo menos 100 anos. No entanto, se somarmos 31 a cada um uma das idades, voltamos a obter um número de quatro algarismos, pelo a segunda hipótese não se verifica e concluímos que cada uma das idades é um número entre 10 e 69.

   Seja N o número formado pelas idades atuais da Ana e da Beatriz. Como N é um quadrado perfeito, existe um número inteiro n tal que $N = n^2$. Uma vez que cada uma das idades é um número entre 10 e 69, o número obtido somando 31 a cada uma das idades e juntando os resultados equivale a somar N com 3131. Mais uma vez, existe um número inteiro m tal que $N + 3131 = m^2$. Subtraindo as duas equações obtidas, vem $3131 = m^2 - n^2 = (m+n)(m-n)$. Como a decomposição em primos de 3131 é $3131 = 31 \cdot 101$, concluimos que $101 = m + n$ e que $31 = m - n$. Resolvendo este sistema de duas equações, obtemos a sua única solução: $n = 35$ e $m = 66$. Concluimos que $N = (35)^2 = 1225$ e, portanto, a Ana tem 12 anos e a Beatriz tem 25 anos.

XLI OPM - Final - 2º Dia - 01.04.2023 - Categoria A - 8º/9º anos

Duração: 3 horas
Cada questão vale 10 pontos

Justifica convenientemente as tuas respostas e indica os principais cálculos.
Não é permitido o uso de calculadoras.

4. O código de um cofre é uma capicua com quatro algarismos, maior do que 1000, cujo dobro também é uma capicua. Quantas possibilidades existem para o código do cofre?

5. Uma circunferência é tangente a um dos lados de um quadrado e passa por dois dos seus vértices. Determina a razão entre o lado do quadrado e o raio da circunferência.

6. A Adriana e a Beatriz vão jogar um jogo com berlindes. Elas têm duas caixas, uma preta e uma branca, e puseram 20 berlindes na caixa preta e 23 berlindes na branca. A Adriana começa a jogar e, alternadamente, fazem uma jogada cada uma. Em cada jogada, ou passam um berlinde da caixa preta para a branca, ou tiram dois berlindes da mesma caixa. Quem, na sua vez, não conseguir jogar, perde.

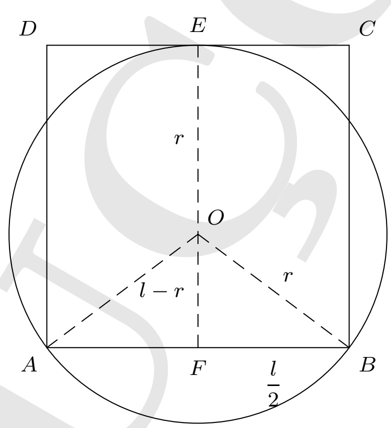
   Mostra que, independentemente de como joguem, ganha sempre a mesma jogadora e identifica-a.

Duração: 3 horas
Cada questão vale 10 pontos

Sugestões para a resolução dos problemas

4. Seja $n = abba$ o código do cofre onde a e b são dois algarismos. Se $a \geq 5$, então o dobro é um número de cinco algarismos que começa por 1 e portanto tem de acabar em 1, o que é impossível porque $2n$ é um número par. Portanto, a é um algarismo entre 1 e 4. Se b for um algarismo menor do que 5, é fácil verificar que $2n$ também é uma capicua com os algarismos $2a$ e $2b$. Se b for maior do que 4, então o algarismo das unidades de $2n$ é $2a$, mas o algarismo dos milhares é $2a + 1$, uma vez que $2b \geq 10$. Podemos então concluir que há quatro escolhas possíveis para a e cinco escolhas possíveis para b, ou seja, há $4 \times 5 = 20$ códigos possíveis.

5. Seja l o comprimento do lado do quadrado $[ABCD]$, r o raio da circunferência e O o seu centro. A circunferência é tangente ao lado $[DC]$ no ponto E e passa pelos vértices A e B. Considere-se ainda o ponto F, interserção da reta OE com $[AB]$.



Os segmentos $[OB]$ e $[OA]$ são raios da circunferência. Além disso, $[OE]$ é perpendicular a $[DC]$, logo $[OF]$ é perpendicular a $[AB]$. Por isso $[OF]$ é altura do triângulo isósceles $[ABO]$ e $\overline{FB} = \frac{l}{2}$.

Observe-se ainda que $\overline{OF} = \overline{EF} - \overline{OE} = l - r$.

Portanto, o Teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo $[FBO]$ garante que

$$\left(\frac{l}{2}\right)^2 + (l - r)^2 = r^2,$$

ou seja,

$$\frac{5}{4}l - 2r = 0,$$

donde se conclui que $\frac{l}{r} = \frac{8}{5}$.

6. Primeiro notemos que uma jogadora não consegue jogar quando, na sua vez, a caixa preta estiver vazia e a caixa branca tiver apenas um berlinde. Além disso, é claro que o jogo termina pois, em cada jogada, uma das caixas fica com menos berlindes e a caixa preta nunca aumenta o número de berlindes.

   Ora, para que dois berlindes da caixa preta saiam do jogo são necessárias uma ou três jogadas (ou uma das jogadoras tira os dois berlindes da caixa preta, ou estes são primeiro passados para a caixa branca e depois são tirados do jogo) e para que dois berlindes da caixa branca saiam do jogo é necessária uma jogada (a única forma de o fazer é tirando os dois berlindes numa das jogadas).

   Logo, o jogo termina após um número ímpar de jogadas, pelo que, independentemente de como jogarem, a Adriana sai vencedora.

XLI OPM - 1ª Eliminatória - 9.11.2022 - Categoria B - 10º/12º anos

Duração: 2 horas
Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3, 4: 8 pontos cada

Na questão 1 escolhe, em cada alínea, a opção correta.
Justifica convenientemente as tuas respostas às questões 2, 3 e 4.
Não é permitido o uso de calculadoras.

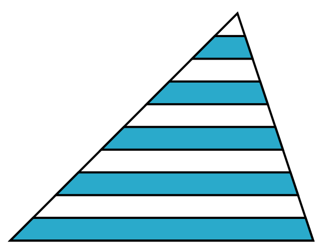
1. (a) O Pedro retirou 5 cm^3 a um cubo de plasticina e com o volume restante formou um paralelepípedo com um lado igual ao cubo original, outro lado 1 cm maior e o terceiro lado 1 cm menor. Quanto media o lado do cubo original?

A) 3 cm B) 4 cm C) 5 cm D) 6 cm E) 7 cm

(b) Três números inteiros positivos a, b e c são tais que $\mathrm{mdc}(a,16) = b$, $\mathrm{mdc}(b,12) = c$ e $\mathrm{mdc}(a,c) = 4$. Qual é o menor valor possível para b?

A) 1 B) 2 C) 4 D) 8 E) 16

(c) Uma escultura de forma triangular, como na figura, tem 5 faixas azuis e 5 faixas brancas todas com a mesma largura. Sabendo que a área total da escultura é 100, qual é a área da região branca?



A) 25 B) $37,5$ C) $43,75$ D) 45 E) 50

(d) Qual é o menor inteiro positivo n para o qual existe um outro inteiro positivo m tal que $\frac{2}{3} < \frac{m}{n} < \frac{7}{10}$?

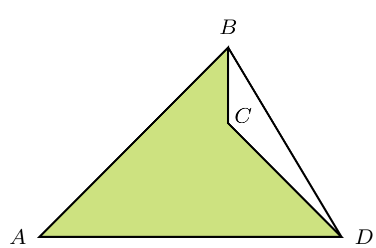
A) 7 B) 11 C) 13 D) 17 E) 31

2. A Genoveva quer escolher um conjunto de três inteiros diferentes, de 1 a 9, cujo produto seja divisível por 4 mas não seja divisível por 8. Por exemplo, a Genoveva poderá escolher o conjunto $\{2,6,7\}$, mas não o conjunto $\{2,4,5\}$.

Quantos conjuntos diferentes poderá escolher a Genoveva?

3. Na figura seguinte, tem-se $D\widehat{A}B = A\widehat{B}C = C\widehat{D}A = 45°$ e $\overline{BD} = 8$.

Determina a área de $[ABCD]$.



4. Um número de seis algarismos diz-se *superquadrado* se for igual ao quadrado do número formado pelos seus três últimos algarismos. Encontra todos os números superquadrados.

OLIMPÍADAS
PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA

www.olimpiadas.spm.pt

XLI OPM - 1ª Eliminatória - 9.11.2022 - Categoria B - 10º/12º anos

Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3, 4: 8 pontos cada

Sugestões para a resolução dos problemas

1. (a) Opção C. (*O cubo tem volume* $5^3 = 125\ cm^3$ *e o paralelepípedo* $5 \times 6 \times 4 = 120\ cm^3$.)

   (b) Opção C. (*Tem-se* $a \geq b \geq c \geq 4$. *Uma solução possível é* $a = b = c = 4$.)

   (c) Opção D. (*A área da região branca é* $1 + (2+3) + (4+5) + (6+7) + (8+9) = 45$.)

   (d) Opção C. ($\frac{2}{3} < \frac{9}{13} < \frac{7}{10}$.)

2. Para que o produto dos números seja múltiplo de 4, é necessário escolher números pares.

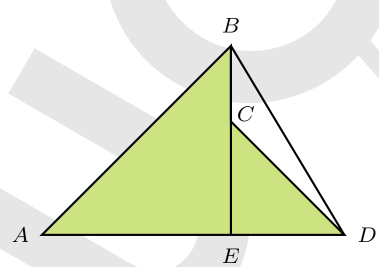
   Como queremos que o produto dos números não seja divisível por 8, nenhum dos subconjuntos pretendidos pode ter o número 8.

   Se escolhermos o número 4, não podemos escolher o 2 nem o 6. Os restantes dois números têm que pertencer ao conjunto $\{1, 3, 5, 7, 9\}$. Há dez possíveis escolhas para esses números: $\{1, 3\}$, $\{1, 5\}$, $\{1, 7\}$, $\{1, 9\}$, $\{3, 5\}$, $\{3, 7\}$, $\{3, 9\}$, $\{5, 7\}$, $\{5, 9\}$ e $\{7, 9\}$.

   Se não escolhermos o número 4, temos de escolher os números 2 e 6. O terceiro número tem de pertencer ao conjunto $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ e, portanto, há 5 subconjuntos nas condições pretendidas.

   Obtemos assim um total de $10 + 5 = 15$ subconjuntos.

3. Considere-se o ponto E, interseção da reta CB com $[AD]$. Como $B\hat{A}D = A\hat{B}C = 45°$, conclui-se que $A\hat{E}C = 90°$ e $\overline{EB} = \overline{AE}$. Uma vez que $A\hat{D}C = 45°$, observa-se que $E\hat{C}D = 45°$ e, por isso, $\overline{ED} = \overline{EC}$.



   Ora,

$$\begin{aligned}
\text{Área de } [ABCD] &= \text{Área de } [ABE] + \text{Área de } [ECD] \\
&= \frac{\overline{AE} \times \overline{EB}}{2} + \frac{\overline{ED} \times \overline{EC}}{2} \\
&= \frac{\overline{EB}^2}{2} + \frac{\overline{ED}^2}{2}
\end{aligned}$$

   Sendo o triângulo $[EBD]$ retângulo, o Teorema de Pitágoras garante que $\overline{EB}^2 + \overline{ED}^2 = 8^2$, portanto

$$\text{Área de } [ABCD] = \frac{8^2}{2} = 32.$$

4. **Solução 1:** Suponhamos que os últimos três algarismos de um número superquadrado N são a, b e c. Assim, o algoritmo da multiplicação de abc por ele próprio é:

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & a & b & c \\
 & & \times & a & b & c \\
\hline
 & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\
\hline
\cdot & \cdot & \cdot & a & b & c
\end{array}$$

Então o algarismo das unidades de c^2 é c, pelo que $c = 0, 1, 5$ ou 6.

Se $c = 0$ ou $c = 1$, então $b = 0$, o que obriga a que $a = 0$, pelo que estes casos não dão origem a números superquadrados.

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & a & b & 0 \\
 & & \times & a & b & 0 \\
\hline
 & & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\
\hline
\cdot & \cdot & \cdot & a & b & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccccc}
 & & & a & b & 1 \\
 & & \times & a & b & 1 \\
\hline
 & & & a & b & 1 \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & b & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\
\hline
\cdot & \cdot & \cdot & a & b & 1
\end{array}$$

Se $c = 5$, então $10b + 2$ termina no algarismo b, logo $b = 2$. Portanto, $10a + 6$ termina no algarismo a, ou seja, $a = 6$. De facto, $625^2 = 390625$ é um número superquadrado.

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & a & b & 5 \\
 & & \times & a & b & 5 \\
\hline
 & & \cdot & \cdot & 5b+2 & 5 \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & 5b & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\
\hline
\cdot & \cdot & \cdot & a & b & 5
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccccc}
 & & & a & 2 & 5 \\
 & & \times & a & 2 & 5 \\
\hline
 & & \cdot & 5a+1 & 2 & 5 \\
 & \cdot & \cdot & 5 & 0 & \\
\cdot & \cdot & \cdot & 5a & & \\
\hline
\cdot & \cdot & \cdot & a & 2 & 5
\end{array}$$

Se $c = 6$, então $12b + 3$ termina no algarismo b, logo $b = 7$. Portanto, $12a + 7$ termina no algarismo a, ou seja, $a = 3$. De facto, $376^2 = 141376$ é um número superquadrado.

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & a & b & 6 \\
 & & \times & a & b & 6 \\
\hline
 & & \cdot & \cdot & 6b+3 & 6 \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & 6b & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\
\hline
\cdot & \cdot & \cdot & a & b & 6
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccccc}
 & & & a & 7 & 6 \\
 & & \times & a & 7 & 6 \\
\hline
 & & \cdot & 6a+4 & 5 & 6 \\
 & \cdot & \cdot & 3 & 2 & \\
\cdot & \cdot & \cdot & 6a & & \\
\hline
\cdot & \cdot & \cdot & a & 7 & 6
\end{array}$$

Solução 2: Se $N = n^2$ é superquadrado, então n^2 e n coincidem nos três últimos algarismos, logo $n^2 - n$ é múltiplo de 1000.

Então $n(n-1)$ é múltiplo de $2^3 \times 5^3$. Como n e $n-1$ são primos entre si, então não têm fatores comuns. Logo n é múltiplo de 5^3 e $n-1$ é múltiplo de 2^3 ou vice-versa.

No primeiro caso, $n = 125$, 250, 375, 500, 625, 750 ou 875 e apenas quando $n = 625$ é que se tem $n-1$ múltiplo de 8. De facto, $625^2 = 390625$ é um número superquadrado.

No segundo caso, $n = 126$, 251, 376, 501, 626, 751 ou 876 e apenas $n = 376$ é múltiplo de 8. De facto, $376^2 = 141376$ é um número superquadrado.

Portanto, os números superquadrados são 141376 e 390625.

XLI OPM - 2ª Eliminatória - 11.01.2023 - Categoria B - 10º/12º anos

Duração: 2 horas
Cada questão vale 10 pontos

Justifica convenientemente as tuas respostas e indica os principais cálculos.
Não é permitido o uso de calculadoras.

1. O Diogo, o Bruno e o João são jogadores da mesma equipa e jogam com as camisolas 2, 8 e 17. Eles repararam que se somassem os números das suas camisolas dois a dois, obteriam os números das camisolas do Bernardo, do Nuno e do Otávio. Como acharam este procedimento engraçado, somaram novamente os números que obtiveram dois a dois. Se fizerem este procedimento 2023 vezes, qual será a diferença entre os dois maiores números obtidos?

2. Quantos pares de números inteiros positivos (x, y) verificam a desigualdade

$$2^{2x^2} + 4^{4y^4} < 8^{43}?$$

3. No triângulo $[ABC]$, M é o ponto médio de $[AC]$ e P é a interseção da bissetriz de $\angle BAC$ com o lado $[BC]$. Sabendo que AP e BM são perpendiculares, mostra que $\overline{CP} = 2\overline{PM}$.

4. Num torneio de xadrez participaram 10 jogadores e cada par de jogadores jogou entre si exatamente uma vez. Após cada jogo, cada jogador recebeu 1 ponto se ganhou, $\frac{1}{2}$ em caso de empate e 0 se tiver perdido. No final do torneio, quantos jogadores, no máximo, podem ter ficado com exatamente 2 pontos?

Cada questão vale 10 pontos

Sugestões para a resolução dos problemas

1. Sejam $a < b < c$ três números. A diferença entre os dois maiores é $c - b$. Se somarmos os números dois a dois, obtemos os números $a + b < a + c < b + c$, e a diferença entre os dois maiores é $(b + c) - (a + c) = b - a$. Se voltarmos a fazer o mesmo procedimento, obtemos que a diferença entre os dois maiores números é igual a $(a+b+2c)-(a+2b+c) = c-b$, que é igual à diferença entre os dois maiores números da lista inicial. Assim, uma vez que $a < b < c$ são quaisquer, a diferença entre os dois maiores números de cada trio de números da lista alterna entre $c - b$ e $b - a$. Neste caso, como 2023 é ímpar, a diferença entre os dois maiores números é igual à diferença que obtemos no fim de efetuar o procedimento uma vez, ou seja, é $25 - 19 = 6$.

2. Como $2^{2x^2} + 4^{4y^4} < 8^{43}$, então $2^{2x^2} < 8^{43} = 2^{129}$. Portanto $2x^2 < 129$, ou seja, $1 \leq x \leq 8$.

   Também $4^{4y^4} < 8^{43}$, logo $2^{8y^4} < 2^{129}$. Portanto $8y^4 < 129$, ou seja, $1 \leq y \leq 2$.

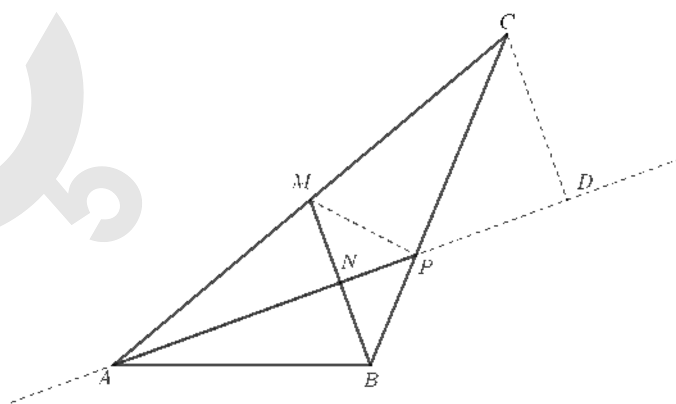
   Há 16 pares de inteiros (x, y) tais que $1 \leq x \leq 8$ e $1 \leq y \leq 2$.

   Destes pares, temos que eliminar o par $(8, 2)$, uma vez que

$$2^{2\times 8^2} + 4^{4\times 2^4} = 2^{128} + 4^{64} = 2^{128} + 2^{128} = 2^{129} = 8^{43}.$$

   Logo, há 15 pares que verificam a desigualdade.

3. Seja N a interseção de $[AP]$ e $[BM]$ e considere-se D o ponto em AP tal que $CD \perp AP$.
   Como $[MB] \perp [PA]$ e AN é a bissetriz de $\angle MAB$, conclui-se que N é o ponto médio de $[MB]$. Sendo N o pé da altura de $[MPB]$ relativa a $[MB]$, observa-se que $[MPB]$ é isósceles e $\overline{PB} = \overline{PM}$.
   Os triângulos $[ACD]$ e $[AMN]$ são semelhantes com razão de semelhança igual a 2, pois M é o ponto médio de $[AC]$. Assim, $\overline{CD} = 2\overline{MN} = 2\overline{NB}$. Uma vez que os triângulos $[PBN]$ e $[PCD]$ são semelhantes, conclui-se que a sua razão de semelhança também é igual a 2 e, portanto, $\overline{PC} = 2\overline{PB} = 2\overline{PM}$.



4. Comecemos por notar que, no final do torneio, é possível haver 5 jogadores com exatamente 2 pontos. Para isto acontecer, basta que 5 jogadores empatem todos os jogos entre si, e percam todos os restantes jogos. Assim, cada um destes 5 jogadores ganha $\frac{1}{2}$ ponto em cada um dos 4 empates que obteve, e 0 pontos nos restantes jogos, acabando com 2 pontos.

   Vamos agora ver que, no final do torneio, não pode haver 6 jogadores com exatamente 2 pontos. No total realizaram-se 45 jogos, havendo 45 pontos a distribuir pelos jogadores. Se existirem 6 jogadores com 2 pontos, temos que os restantes $45 - 2 \times 6 = 33$ pontos têm de ser distribuídos pelos restantes $10 - 6 = 4$ jogadores. Mas isto é impossível, porque estes 4 jogadores ganharam no máximo $6 \times 4 = 24$ pontos aos 6 jogadores empatados e dividiram os 6 pontos dos 6 jogos disputados entre si, fazendo no máximo $24 + 6 = 30$ pontos.

   Logo, no final do torneio, no máximo 5 jogadores ficaram com exatamente 2 pontos.

Duração: 3 horas
Cada questão vale 10 pontos

Justifica convenientemente as tuas respostas e indica os principais cálculos.
Não é permitido o uso de calculadoras.

1. A Ana, o Bruno e a Carolina jogaram ténis de mesa entre si. Em cada partida, somente dois dos amigos jogaram, ficando o terceiro a descansar. De cada vez que um dos amigos ganhou uma partida, ficou a descansar durante a partida seguinte. A Ana jogou 12 partidas, o Bruno jogou 21 partidas e a Carolina descansou durante 8 partidas.

   Quem descansou na última partida?

2. Seja $[AB]$ um diâmetro de uma circunferência de centro O e raio 1. Considere-se P um ponto da circunferência diferente de A e de B e seja Q o ponto médio do arco AP. A reta paralela a PQ que passa por O interseta a reta PB no ponto S.

   Determina $\overline{PS}$.

3. Um caixote de base 4×2 e altura 2 está aberto no topo. O Tomás quer encher completamente o caixote com alguns dos seus cubos. Ele tem 16 cubos iguais de volume 1 e dois cubos iguais de volume 8. Um cubo de volume 1 apenas pode ser colocado na camada superior se o cubo da camada inferior já tiver sido colocado.

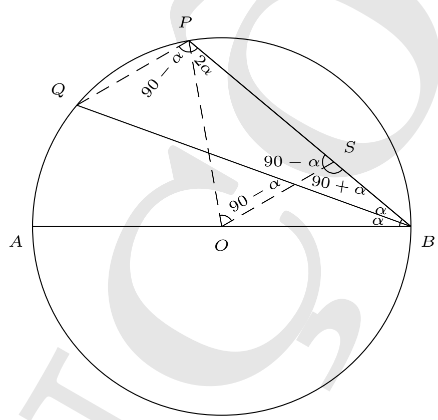
   De quantas formas pode o Tomás encher o caixote com cubos, colocando-os um a um?

Duração: 3 horas
Cada questão vale 10 pontos

Sugestões para a resolução dos problemas

1. A Ana ou o Bruno jogaram em todas as partidas, porque só há 3 amigos no total, e jogaram juntos o número de vezes que a Carolina descansou. Logo houve $12+21-8=25$ partidas no total. Para a Ana só ter jogado 12, teve de ter começado a descansar e ganhar sempre que jogou, logo ganhou todas as partidas de ordem par, incluindo a $24^{\underline{a}}$ partida, ficando a descansar na última.

2. Como o ponto Q é o ponto médio do arco AP, BQ é a bissetriz de ABP, ou seja, $A\widehat{B}Q = Q\widehat{B}P = \frac{A\widehat{B}P}{2} = \alpha$.



O triângulo $[BPO]$ é isósceles com $\overline{OB} = \overline{OP}$, logo $O\widehat{P}B = O\widehat{B}P = 2\alpha$.

Por outro lado, o ângulo BPQ é um ângulo inscrito que compreende o arco QAB que mede $180° + 2\alpha$, logo $Q\widehat{P}B = \frac{180°+2\alpha}{2} = 90° + \alpha$. Logo, $Q\widehat{P}O = 90° + \alpha - 2\alpha = 90° - \alpha$.

Uma vez que a reta OS é paralela à reta QP, conclui-se que $P\widehat{O}S = O\widehat{P}Q = 90 - \alpha$ e $O\widehat{S}B = Q\widehat{P}B = 90° + \alpha$ e, por isso, $O\widehat{S}P = 90° - \alpha$.

Logo, o triângulo $[SPO]$ é isósceles. Portanto, $\overline{PS} = \overline{PO} = 1$.

3. Comecemos por contar os casos em que há 16 cubos de volume 1.

   Designemos cada um dos cubos da camada superior por $1, 2, \ldots, 8$, e cada um dos cubos da camada inferior pelo mesmo número do cubo que está por cima. Cada forma de colocar os cubos do caixote é equivalente a uma permutação dos 16 números $1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 8, 8$. Há $16!$ formas de permutar 16 números, mas como há 8 pares de números iguais, cada um destes pares origina 2 permutações iguais. Obtemos assim,

$$\frac{16!}{2^8}$$

   formas distintas de colocar todos os cubos no caixote.

   Vamos contar agora os casos em que há um cubo de volume 8 e 8 cubos de volume 1. O cubo maior tem 3 posições possíveis. Para cada uma delas, temos, de forma análoga ao caso anterior, que permutar os números $1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5$, onde 5 corresponde ao cubo maior. Neste caso obtemos

$$3 \times \frac{9!}{2^4}$$

   formas distintas de colocar todos os cubos no caixote.

   Finalmente, quando há dois cubos de volume 8, só há duas formas distintas de os colocar.

   Portanto, ao todo há

$$\frac{16!}{2^8} + 3 \times \frac{9!}{2^4} + 2$$

   formas distintas de colocar todos os cubos no caixote.

Duração: 3 horas
Cada questão vale 10 pontos

Justifica convenientemente as tuas respostas e indica os principais cálculos.
Não é permitido o uso de calculadoras.

4. Seja $[ABC]$ um triângulo equilátero e P um ponto de AC tal que $\overline{PC} = 7$. A reta que passa por P e é perpendicular a AC interseta CB no ponto M e interseta AB no ponto Q. O ponto médio N de $[MQ]$ é tal que $\overline{BN} = 14$.

   Determina o lado do triângulo $[ABC]$.

5. Na aldeia dos números as casas estão numeradas de 1 a n. Entretanto uma das casas foi demolida. O Duarte calculou que a média dos números das casas que ainda existem é $\frac{202}{3}$. Quantas casas existiam na aldeia e qual é o número da casa demolida?

6. Um tabuleiro retangular, onde em cada quadrícula está um símbolo, diz-se $magnífico$ se, para cada linha L e para cada par de colunas C e D, existe no tabuleiro outra linha M exatamente igual a L, exceto nas colunas C e D, onde M tem símbolos diferentes dos de L.

   Qual é o menor número possível de linhas de um tabuleiro magnífico com 2023 colunas?

Duração: 3 horas
Cada questão vale 10 pontos

Sugestões para a resolução dos problemas

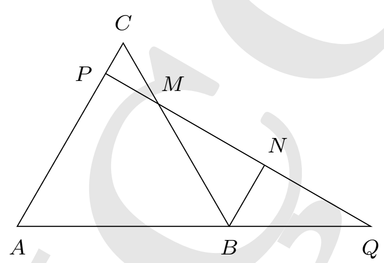
4. Como $\overline{BN} > \overline{PC}$, então P pertence à semi-reta $\dot{A}C$.

O triângulo $[CPM]$ é retângulo e $P\widehat{C}M = 60°$, logo $C\widehat{M}P = 30°$ e $\overline{CM} = \frac{\overline{PC}}{\sin 30°} = 2 \times \overline{PC} = 14$.

Por outro lado, também o triângulo $[QPA]$ é retângulo e $P\widehat{A}Q = 60°$, logo $B\widehat{Q}M = 30°$. Assim conclui-se que o triângulo $[BQM]$ é isósceles e N, sendo o ponto médio de $[MQ]$, é o pé da altura relativamente ao vértice B e $B\widehat{N}M = 90°$. Sendo assim, $[BNM]$ e $[CPM]$ são semelhantes com razão de semelhança 2, pelo que

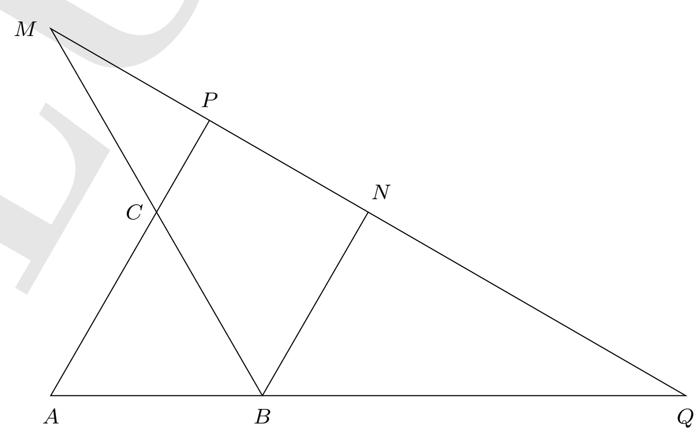
$$\overline{MB} = 2 \times \overline{MC}.$$

<u>Caso 1</u>: P pertence a $[AC]$.



Neste caso, M pertence a $[CB]$ e $\overline{CB} = 3 \times \overline{CM} = 3 \times 14 = 42$.

<u>Caso 2</u>: P não pertence a $[AC]$.



Neste caso, M não pertence a $[CB]$ e $\overline{CB} = \overline{BM} - \overline{CM} = \overline{CM} = 14$.

5. A média das $n-1$ casas existentes na aldeia está entre os números

$$\frac{1+2+\cdots+(n-1)}{n-1}=\frac{n}{2} \quad \text{e} \quad \frac{2+\cdots+(n-1)+n}{n-1}=\frac{n}{2}+1=\frac{n+2}{2}\ .$$

Ou seja,

$$\frac{n}{2}\leq\frac{202}{3}\leq\frac{n+2}{2}\Leftrightarrow\frac{404}{3}\geq n\geq\frac{398}{3}$$

Só existem dois inteiros nestas condições, 133 e 134. Mas $n-1$ tem que ser divisível por 3 porque $\frac{202}{3}\times(n-1)$ é um número inteiro, e portanto $n-1=132$, e $n=133$.

Seja k o número da casa que foi demolida. Sabemos que $\dfrac{1+2+\cdots+133-k}{132}=\dfrac{202}{3}$. Desenvolvendo esta igualdade, obtém-se que

$$\frac{133\times 134}{2}=\frac{202}{3}\times 132+k\Leftrightarrow k=23\ .$$

A aldeia tinha 133 casas e casa que foi demolida tinha o número 23.

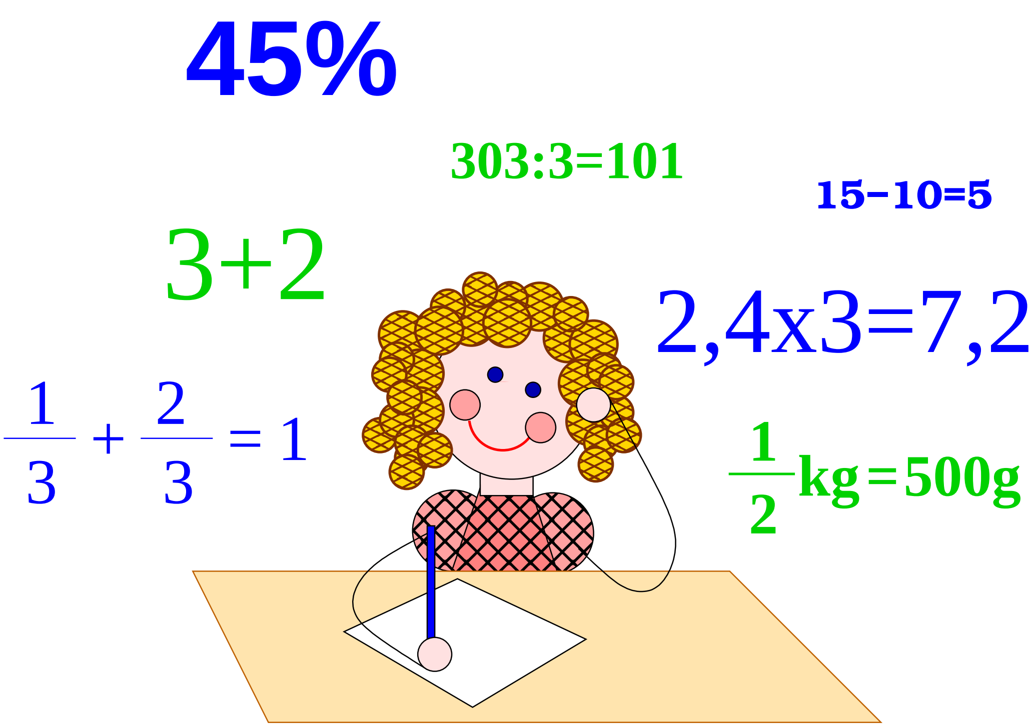
6. Seja L_0 a primeira linha do tabuleiro. Consideremos um conjunto $S=S_1\cup\ldots\cup S_n$, onde os S_i são pares disjuntos de colunas. Por hipótese, existe uma linha L_i que difere de L_{i-1} nas colunas de S_i. Então L_n difere de L_0 nas colunas de S.

Como há 2^{2023} conjuntos de colunas e metade destes conjuntos têm um número par de colunas, então o tabuleiro tem, no mínimo, 2^{2022} linhas.

Pode-se ver que existe um tabuleiro magnífico com 2023 colunas e 2^{2022} linhas: basta considerar as linhas formadas por 2023 algarismos binários, dos quais um número par deles é 1.

Mini-Olimpíadas

Ano Letivo 2023/2024
1º Ciclo do Ensino Básico
3º ano



Tem atenção: **Duração: 1 hora**

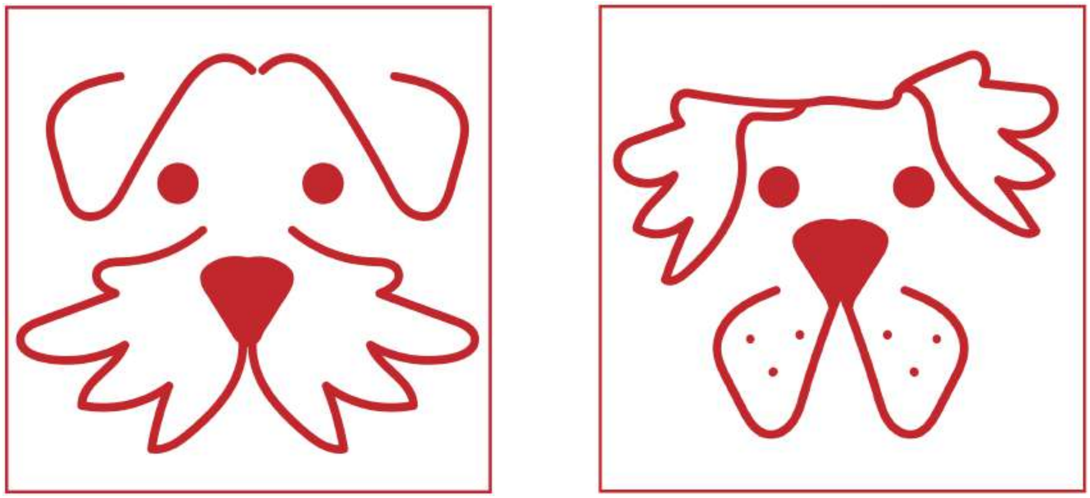
- Lê todas as perguntas com muito cuidado.
- Não apagues as contas, os esquemas e os desenhos que utilizares nas tuas respostas.
- Se acabares antes do tempo previsto, deverás aproveitar para rever a tua prova.

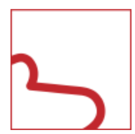
Bom trabalho e diverte-te!

Nome do aluno: ____

Pontuação:______________

1. A Mati tem estes dois puzzles.



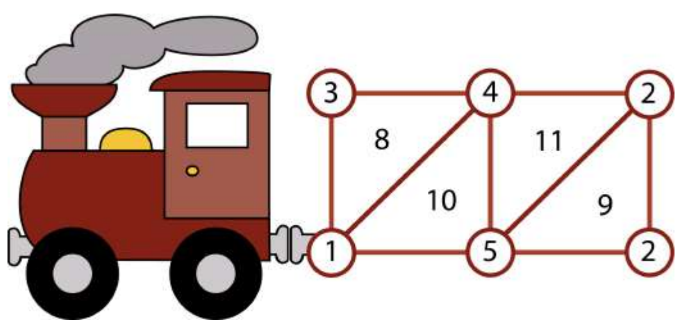
Esta peça pertence a um dos puzzles. 

Marca com uma cruz a posição da peça no puzzle.

2. Os Triangulados são comboios que seguem sempre a regra:

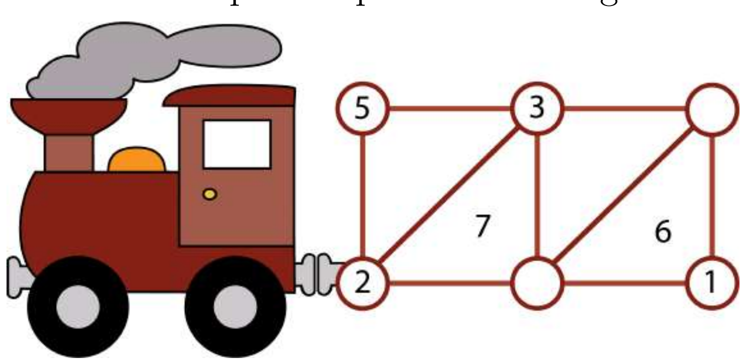
No centro de cada um dos triângulos está a soma dos números dos seus vértices.

É o que acontece com o Triangulado Amarelo.



TRIANGULADO AMARELO

Coloca os quatro números que completam o Triangulado Laranja.



TRIANGULADO LARANJA

3. O código para abrir o diário da Mati tem três dos seguintes símbolos:

♣ ● ■ ★ ♦ ♥

A Mati esqueceu-se do código e fez as seguintes tentativas:

1ª tentativa: ♣ ■ ♦

2ª tentativa: ● ★ ♦

3ª tentativa: ♦ ♥ ♣

Na 1ª tentativa, não há nenhum símbolo do código.

Na 2ª tentativa, há dois símbolos certos na posição certa.

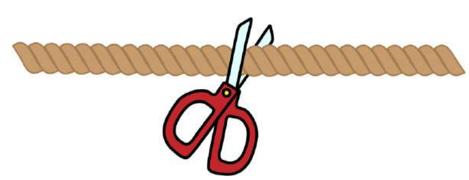
Na 3ª tentativa, há um símbolo certo na posição errada.

Descobre o código.

Código: ☐ ☐ ☐

4. O Manuel cortou uma corda ao meio e ficou com duas cordas. Escolheu uma dessas cordas e cortou-a outra vez ao meio. Repetiu o processo uma terceira vez e ficou com uma corda de 1 metro.

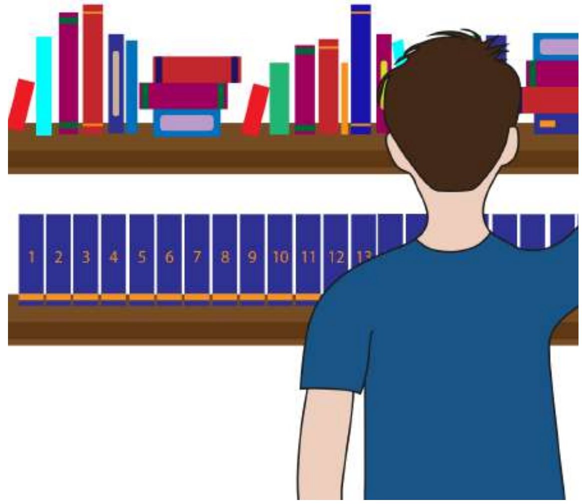
Qual era o comprimento da corda inicial?



Resposta:____

5. Na biblioteca da escola da Mati os livros da coleção *Uma Aventura* foram numerados e colocados por ordem numa estante. A soma dos números dos dois últimos livros da estante é 121.

   Quantos livros tem a coleção?



Resposta:____

6. A avó Mimi comprou 90 ovos por 18 euros para vender no mercado. Ganhou 9 euros na venda dos ovos.

   A que preço vendeu cada dezena?

Resposta:____

Mini-Olimpíadas

Ano Letivo 2023/2024
1º Ciclo do Ensino Básico
3º ano

Critérios de Classificação

Cotações

1- 10 pontos
2- 10 pontos
3- 10 pontos
4- 10 pontos
5- 10 pontos
6- 10 pontos

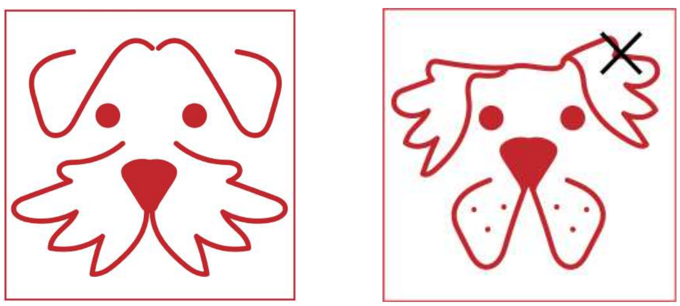
Total: 60 pontos

Critérios de Classificação

- **Se surgirem resoluções diferentes das apresentadas, a classificação ficará ao critério do professor corretor.**
- **Devem ser valorizados os raciocínios corretos (atribuindo classificações parciais) em detrimento dos cálculos efetuados.**

Exercício 1

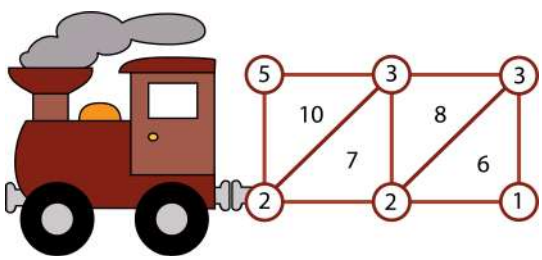
Solução:



10 pontos

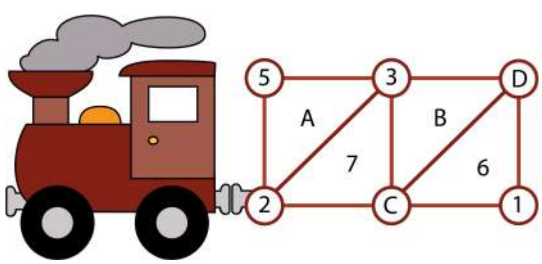
Exercício 2

Solução:



10 pontos

Caso a resposta não seja a correta devem ser atribuídas as seguintes cotações parciais (acumuláveis).



Atribui **2 pontos** por cada um dos valores corretos a colocar em A e B.

Atribui **3 pontos** por cada um dos valores corretos a colocar em C e D.

Devem ser cotados os cálculos efetuados utilizando valores errados calculados anteriormente.

Exercício 3

Solução:  **10 pontos**

Caso a resposta não seja a correta devem ser atribuídas as seguintes cotações parciais (acumuláveis).

Por cada símbolo correto na posição certa **3 pontos**

Exercício 4

Solução: 8 metros **10 pontos**

Caso a resposta não seja a correta deve atribuir-se cotação parcial. Para esse efeito, indicam-se, em seguida, as cotações de duas propostas de resolução.

Proposta de resolução 1:

Calcula o comprimento de um quarto da corda

$1 + 1 = 2$ **2 pontos**

Calcula o comprimento de metade da corda

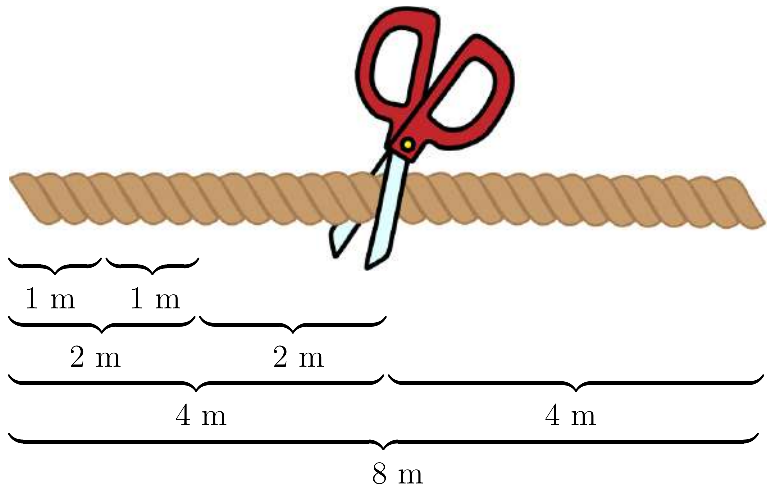
$2 + 2 = 4$ **4 pontos**

Calcula o comprimento total da corda

$4 + 4 = 8$ **4 pontos**

Proposta de resolução 2:

Apresenta um desenho com as divisões da corda e os respetivos valores do comprimento de cada parte da corda



2 pontos

4 pontos

4 pontos

Exercício 5

Solução: 61 livros **10 pontos**

Caso a resposta não seja a correta deve atribuir-se cotação parcial. Para esse efeito, indicam-se, em seguida, as cotações de três propostas de resolução.

Proposta de resolução 1:

Decompõe o número 121 da seguinte forma

$121 = 2 \times 60 + 1.$ **5 pontos**

Calcula o número de livros da coleção

$60 + 1 = 61$ **5 pontos**

Proposta de resolução 2:

Decompõe o número 121 na soma de dois números consecutivos

$120 = 60 + 61$ **6 pontos**

Indica o número de livros da coleção **4 pontos**

Proposta de resolução 3:

Calcula metade de 122

$121 + 1 = 122$ e $122 : 2 = 61$ **6 pontos**

Indica o número de livros da coleção **4 pontos**

Pode ainda ser atribuída a cotação parcial seguinte.

Atribui um valor ao número de livros da coleção e verifica se satisfaz as condições do enunciado. Por exemplo,

$50 + 51 = 101$ **3 pontos**

Devem ser cotados os cálculos efetuados utilizando valores errados calculados anteriormente.

Exercício 6

Solução: 3 euros **10 pontos**

Caso a resposta não seja a correta deve atribuir-se cotação parcial. Para esse efeito, indicam-se, em seguida, as cotações de uma proposta de resolução.

Proposta de resolução 1:

Calcula o número de dezenas de ovos

$90 : 10 = 9$ **3 pontos**

Calcula o preço a que vendeu os 90 ovos

$9 + 18 = 27$ **3 pontos**

Calcula o preço a que vendeu cada dezena

$27 : 9 = 3$ euros **4 pontos**

Proposta de resolução 2:

Calcula o número de dezenas de ovos

$90 : 10 = 9$ **3 pontos**

Calcula quanto pagou por cada dezena

$18 : 9 = 2$ **3 pontos**

Calcula quanto ganhou com cada dezena

$9 : 9 = 1$ **2 pontos**

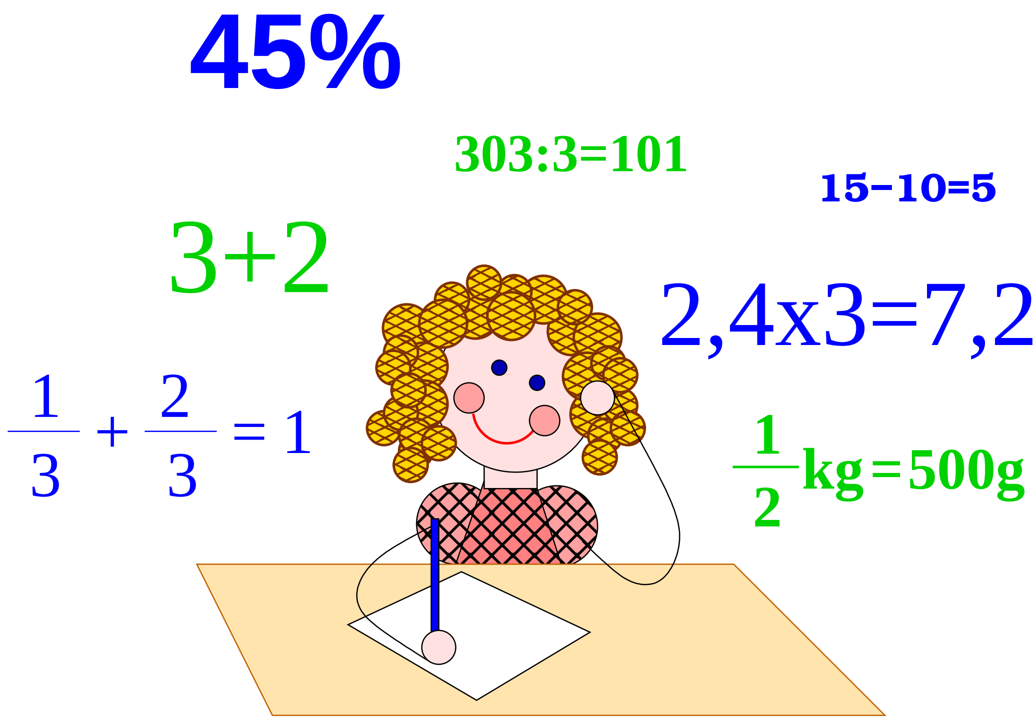
Calcula o preço a que vendeu cada dezena

$2 + 1 = 3$ euros **2 pontos**

Devem ser cotados os cálculos efetuados utilizando valores errados calculados anteriormente.

Mini-Olimpíadas

Ano Letivo 2023/2024
1º Ciclo do Ensino Básico
4º ano



Tem atenção: **Duração: 1 hora**

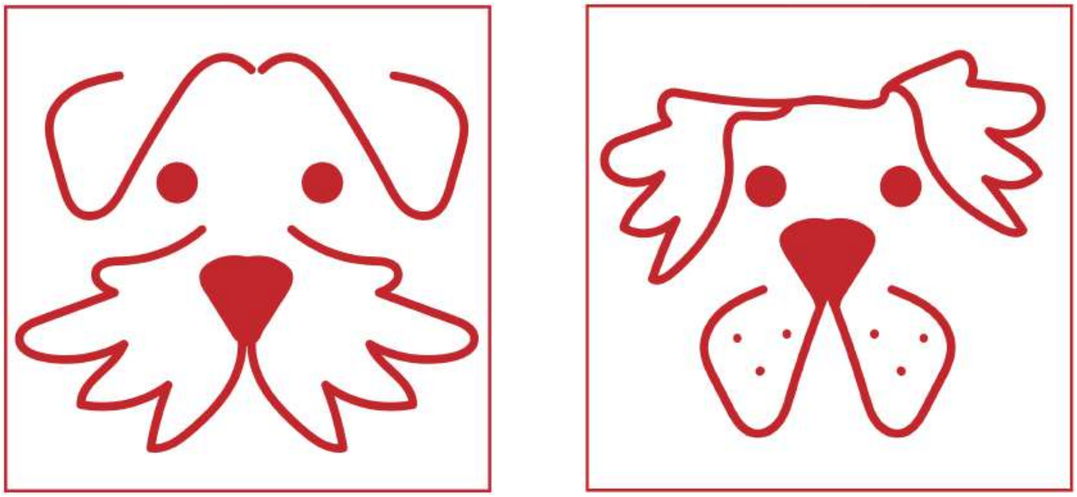
- Lê todas as perguntas com muito cuidado.
- Não apagues as contas, os esquemas e os desenhos que utilizares nas tuas respostas.
- Se acabares antes do tempo previsto, deverás aproveitar para rever a tua prova.

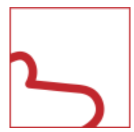
Bom trabalho e diverte-te!

Nome do aluno: ____

Pontuação:______________

1. A Mati tem estes dois puzzles.



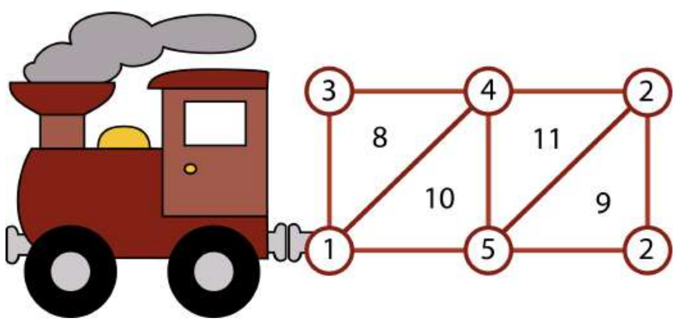
Esta peça pertence a um dos puzzles. 

Marca com uma cruz a posição da peça no puzzle.

2. Os Triangulados são comboios que seguem sempre a regra:

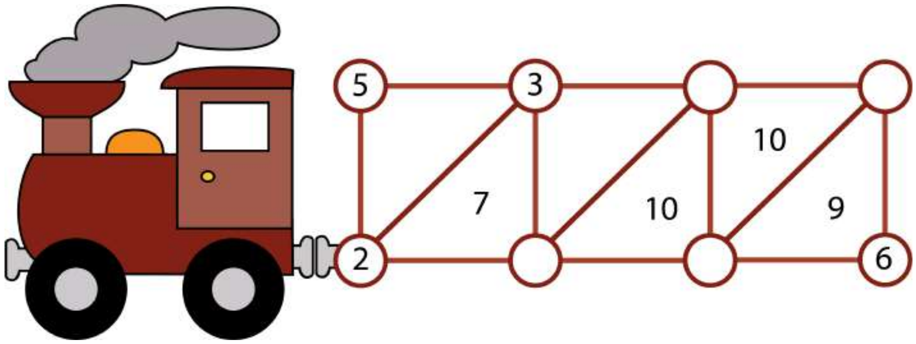
No centro de cada um dos triângulos está
a soma dos números dos seus vértices.

É o que acontece com
o Triangulado Amarelo.



TRIANGULADO AMARELO

Coloca os seis números que completam o Triangulado Laranja.



TRIANGULADO LARANJA

3. O código para abrir o diário da Mati tem três dos seguintes símbolos:

♣ ● ■ ★ ♦ ♥

A Mati esqueceu-se do código e fez as seguintes tentativas:

1ª tentativa: ♣ ■ ♦

2ª tentativa: ♦ ♥ ♣

3ª tentativa: ● ★ ♦

Na 1ª tentativa, não há nenhum símbolo do código.

Na 2ª tentativa, há um símbolo certo na posição errada.

Na 3ª tentativa, há dois símbolos certos na posição certa.

Descobre o código.

Código:

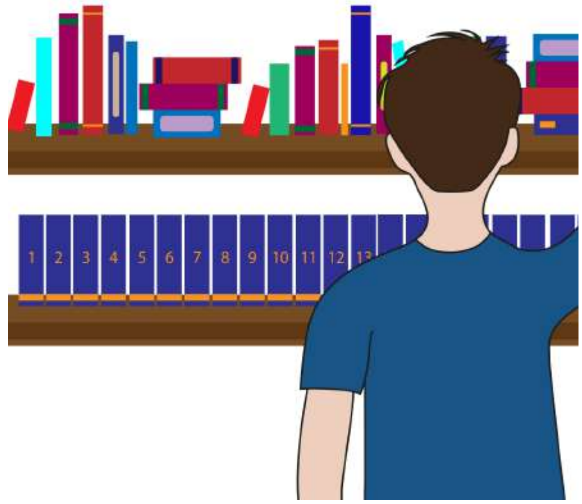
4. O Manuel dobrou uma tira de papel retangular ao meio e obteve um retângulo com a mesma largura do retângulo inicial. Dobrou o novo retângulo ao meio e obteve outro retângulo com a mesma largura. Repetiu o processo uma terceira vez e ficou com um quadrado com 1 cm de lado.

Qual era o perímetro da tira de papel?

Resposta:____

5. Na biblioteca da escola da Mati os livros da coleção *Uma Aventura* foram numerados e colocados por ordem numa estante. A soma dos números dos dois últimos livros da estante é 125.

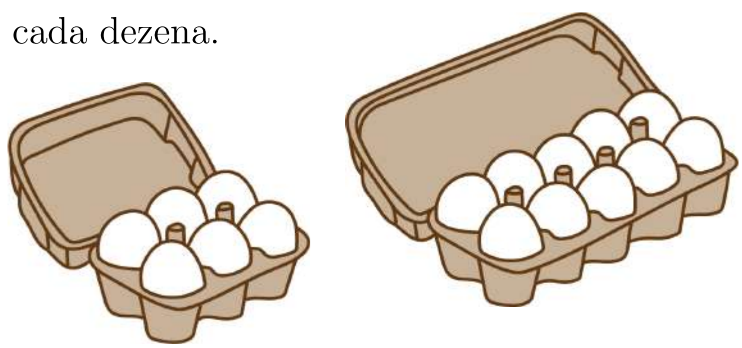
   Quantos livros tem a coleção?



Resposta:____

6. A avó Mimi comprou 90 ovos por 18 euros para vender no mercado. Vendeu cada meia dúzia ao preço a que comprou cada dezena.

   Quanto dinheiro ganhou?



Resposta:____

Mini-Olimpíadas

Ano Letivo 2023/2024
1º Ciclo do Ensino Básico
4º ano

Critérios de Classificação

Cotações

1- 10 pontos
2- 10 pontos
3- 10 pontos
4- 10 pontos
5- 10 pontos
6- 10 pontos

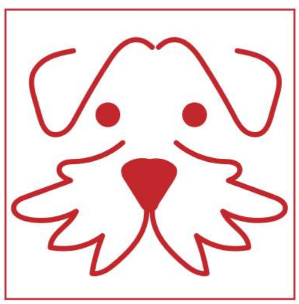
Total: 60 pontos

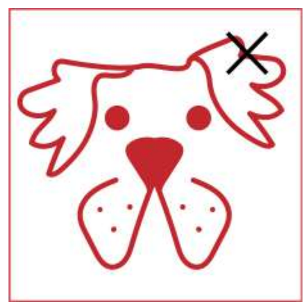
Critérios de Classificação

- **Se surgirem resoluções diferentes das apresentadas, a classificação ficará ao critério do professor corretor.**
- **Devem ser valorizados os raciocínios corretos (atribuindo classificações parciais) em detrimento dos cálculos efetuados.**

Exercício 1

Solução:

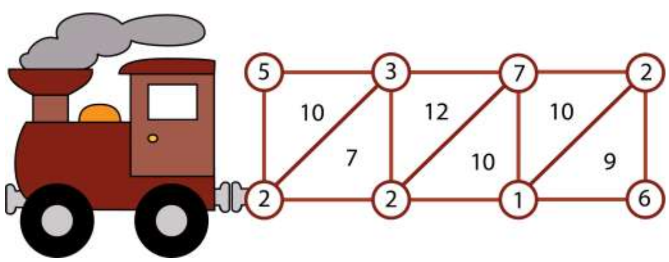




10 pontos

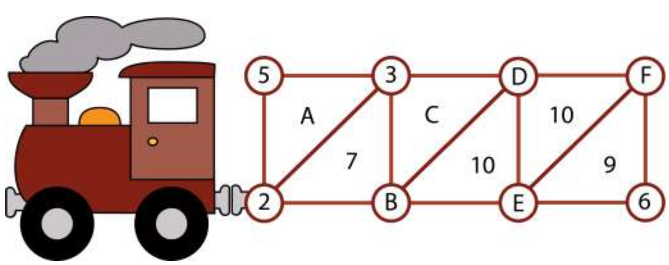
Exercício 2

Solução:



10 pontos

Caso a resposta não seja a correta devem ser atribuídas as seguintes cotações parciais (acumuláveis).



Atribui **1 ponto** por cada um dos valores corretos a colocar em A e B.

Atribui **2 pontos** por cada um dos valores corretos a colocar em C, D, E e F.

Devem ser cotados os cálculos efetuados utilizando valores errados calculados anteriormente.

Exercício 3

Solução:  **10 pontos**

Caso a resposta não seja a correta devem ser atribuídas as seguintes cotações parciais (acumuláveis).

Por cada símbolo correto na posição certa **3 pontos**

Exercício 4

Solução: 18 cm **10 pontos**

Caso a resposta não seja a correta deve atribuir-se cotação parcial. Para esse efeito, indicam-se, em seguida, as cotações de duas propostas de resolução.

Proposta de resolução 1:

Calcula o comprimento do 3º retângulo

$1 + 1 = 2$ **2 pontos**

Calcula o comprimento do 2º retângulo

$2 + 2 = 4$ **3 pontos**

Calcula o comprimento do 1º retângulo

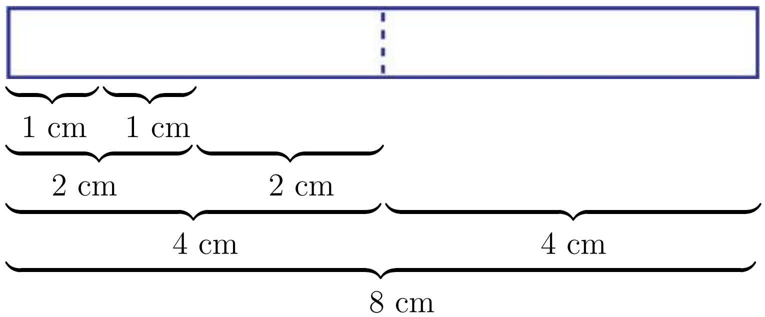
$4 + 4 = 8$ **3 pontos**

Calcula o perímetro do 1º retângulo

$8 + 8 + 1 + 1 = 18$ **2 pontos**

Proposta de resolução 2:

Apresenta um desenho com as divisões da tira de papel e os respetivos valores do comprimento de cada parte da tira de papel



2 pontos

3 pontos

3 pontos

Calcula o perímetro da tira de papel

$8 + 8 + 1 + 1 = 18$ **2 pontos**

Pode ainda ser atribuída a cotação parcial seguinte (acumulável com cotações parciais já atribuídas).

Calcula o perímetro de um dos outros retângulos **2 pontos**

Exercício 5

Solução: 63 livros **10 pontos**

Caso a resposta não seja a correta deve atribuir-se cotação parcial. Para esse efeito, indicam-se, em seguida, as cotações de três propostas de resolução.

Proposta de resolução 1:

Decompõe o número 125 da seguinte forma

$125 = 2 \times 62 + 1.$ **5 pontos**

Calcula o número de livros da coleção

$62 + 1 = 63$ **5 pontos**

Proposta de resolução 2:

Decompõe o número 125 na soma de dois números consecutivos.

$125 = 62 + 63.$ **6 pontos**

Indica o número de livros da coleção **4 pontos**

Proposta de resolução 3:

Calcula metade de 126

$125 + 1 = 126 \quad \text{e} \quad 126 : 2 = 63$ **6 pontos**

Indica o número de livros da coleção **4 pontos**

Pode ainda ser atribuída a cotação parcial seguinte.

Atribui um valor ao número de livros da coleção e verifica se satisfaz as condições do enunciado. Por exemplo,

$60 + 61 = 121$ **3 pontos**

Devem ser cotados os cálculos efetuados utilizando valores errados calculados anteriormente.

Exercício 6

Solução: 12 euros **10 pontos**

Caso a resposta não seja a correta deve atribuir-se cotação parcial. Para esse efeito, indicam-se, em seguida, as cotações de três propostas de resolução.

Proposta de resolução 1:

Calcula o número de dezenas

$90 : 10 = 9$ **1 ponto**

Calcula o número de meias dúzias

$90 : 6 = 15$ **1 ponto**

Calcula o preço que pagou por cada dezena

$18 : 9 = 2$ **2 pontos**

Calcula o preço a que vendeu os 90 ovos

$2 \times 15 = 30$ **3 pontos**

Calcula o lucro obtido

$30 - 18 = 12$ **3 pontos**

Proposta de resolução 2:

Decompõe os 90 ovos em 9 grupos de 10 e em 15 grupos de 6

$90 = 9 \times 10 = 15 \times 6$ **2 pontos**

Calcula o preço que pagou por cada dezena

$18 : 9 = 2$ **2 pontos**

Conclui que há mais 6 grupos de 6 ovos do que grupos de 10 ovos

$15 - 9 = 6$ **3 pontos**

Calcula o lucro obtido

$6 \times 2 = 12$ **3 pontos**

Proposta de resolução 3:

Calcula o número de dezenas

$90 : 10 = 9$ **1 ponto**

Calcula o preço que pagou por cada dezena

$18 : 9 = 2$ **2 pontos**

Calcula a diferença entre uma dezena e uma meia dúzia

$10 - 6 = 4$ **1 ponto**

Conclui que, como resultado de cada uma dessas diferenças, há 9 grupos de 4 ovos, que correspondem a 6 meias dúzias

$9 \times 4 = 36$ e $36 : 6 = 6$ **3 pontos**

Calcula o lucro obtido

$6 \times 2 = 12$ **3 pontos**

Devem ser cotados os cálculos efetuados utilizando valores errados calculados anteriormente.

OLIMPÍADAS PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA

www.olimpiadas.spm.pt

XLII OPM - 8.11.2023 - Pré-Olimpíadas - 5º ano

Duração: 2 horas
Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3: 10 pontos cada

Na questão 1 escolhe, em cada alínea, a opção correta.
Justifica convenientemente as tuas respostas às questões 2 e 3.
Não é permitido o uso de calculadoras.

1. (a) Num chuvoso dia de novembro, o Martinho regressava a casa para celebrar o Magusto. Ele não sabia ainda como conseguiria arranjar castanhas para todos os amigos que o esperavam. No seu saco, trazia apenas entre 40 e 50 castanhas. Ainda assim, não se podia queixar muito, pois tinha o triplo das castanhas do seu melhor amigo, que nem sequer 15 tinha. Quantas castanhas tinha o Martinho?

   A) 40 B) 42 C) 45 D) 48 E) 50

   (b) Estava imerso nos seus pensamentos, quando percebeu que era o seu dia de sorte: à sua frente, estava um vendedor de castanhas! Pediu tantas quanto precisava e, no final, pagou 20€ em moedas de 50 cêntimos e 90€ em moedas de dois euros. Quantas moedas é que o Martinho entregou ao vendedor?

   A) 40 B) 45 C) 55 D) 85 E) 110

   (c) Uns metros mais à frente, o Martinho encontrou um mendigo quase sem roupa. Bondoso como era, parou à beira dele para o ajudar. Como ele estava cheio de frio, pegou no cobertor que trazia para o aquecer, cortou-o e deu metade ao mendigo. Sabendo que o cobertor era quadrado e que o Martinho o cortou em dois retângulos iguais, cada um com 72 decímetros de perímetro, qual era a área do cobertor?

   A) 81 dm^2 B) 96 dm^2 C) 144 dm^2 D) 576 dm^2 E) 676 dm^2

   (d) Perante um gesto tão bonito, a tempestade desapareceu e um sol radioso começou a brilhar. O sol era tão magnífico que, durante a semana que se seguiu, o número de flores que havia num campo nas redondezas, duplicou pelas 17h de cada dia, começando na sexta-feira. No final da terça-feira seguinte havia 480 flores. Quantas flores havia na manhã de sexta-feira?

   A) 7 B) 15 C) 30 D) 60 E) 120

   (e) O Martinho convidou o mendigo para se juntar aos festejos que o aguardavam. O mendigo prontamente aceitou. A viagem era tão longa que tiveram tempo para inventar uma linguagem secreta. Nessa linguagem, as palavras CASTANHA, VENDEDOR, MARTINHO e NOVEMBRO escrevem-se, não necessariamente por esta ordem:

   ⊛ ⋓ ⋈ ◀ ♣ ⋇ ≖ ⊡   ⋇ ⊡ ≬ ☺ ⊛ ⤊ ⋈ ⊡
   ≬ ☺ ⋇ ☼ ☺ ☼ ⊡ ⋈   🔔 ⋓ ⋌ ◀ ⋓ ⋇ ≖ ⋓

   Nessa linguagem, como é que se escreve a palavra inglesa MATH?

   A) 🔔 ⋓ ◀ ≖ B) 🔔 ⋓ ⋇ ≖ C) ⊛ ⋓ ⋇ ≖ D) ≬ ⋓ ◀ ≖ E) ⊛ ⋓ ◀ ≖

2. Um elevador parte do rés-do-chão de um prédio com 16 pessoas. O elevador para em todos os andares até ao décimo. Em cada andar saem 2 pessoas. Em cada andar ímpar entra uma pessoa e em cada andar par não entra ninguém. Quantas pessoas estão no elevador antes que se abra a porta no décimo andar?

3. O Jorge, a Joana e o Joel estão todos a usar um chapéu, cada chapéu com um número diferente entre 1 e 9. Cada um dos amigos não consegue ver o número presente no próprio chapéu, mas vê os números que estão nos chapéus dos amigos. A soma dos números que a Joana vê é 6 e o produto dos números que o Jorge vê é 10. Quais são os possíveis números do chapéu do Jorge?

XLII OPM - 8.11.2023 - Pré-Olimpíadas - 5º ano

Sugestões para a resolução dos problemas

Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3: 10 pontos cada

1. (a) Opção B). (*42 é o único múltiplo de 3 entre 40 e 50 que, dividido por 3, fica inferior a 15.*)
   (b) Opção D). (*O Martinho entregou 40 moedas de 50 cêntimos e 45 moedas de 2 euros.*)
   (c) Opção D). (*O lado do quadrado mede 24 dm e, portanto, a sua área mede $24^2 = 576$ dm^2.*)
   (d) Opção B). (*O número de flores duplicou 5 vezes. Logo, inicialmente havia 15 flores.*)
   (e) Opção E). (*O código é*

A	B	C	D	E	H	I	M	N	O	R	S	T	V
⋓	⤊	🔔	☼	☺	⧟	♣	⊛	⋇	⊡	⋈	⋌	◀	≬

.)

2. O elevador partiu do rés-do-chão com 16 pessoas. Como 1 é ímpar, o elevador partiu do primeiro andar com $16 - 2 + 1 = 15$ pessoas. Como 2 é par, o elevador partiu do segundo andar com $15 - 2 = 13$ pessoas. O número de pessoas no elevador quando partiu dos andares seguintes foi $13 - 2 + 1 = 12$, $12 - 2 = 10$, $10 - 2 + 1 = 9$, $9 - 2 = 7$, $7 - 2 + 1 = 6$, $6 - 2 = 4$, $4 - 2 + 1 = 3$ pessoas. Portanto, ao chegar ao décimo andar, antes de se abrir a porta, o elevador tinha 3 pessoas.

3. Como o produto dos números que o Jorge vê é 10, então a Joana e o Joel têm os números 2 e 5 nos chapéus. Se o Joel tem o número 2 no seu chapéu, como a soma dos números que a Joana vê é 6, o Jorge tem o número $6 - 2 = 4$ no seu chapéu. Se o Joel tem o número 5 no chapéu, como a soma dos números que a Joana vê é 6, o Jorge tem o número $6 - 5 = 1$ no seu chapéu. Logo, o Jorge só pode ter os números 1 ou 4 no chapéu.

XLII OPM - 1ª Eliminatória - 8.11.2023 - Categoria Júnior - 6°/7° anos

Duração: 2 horas
Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3, 4: 8 pontos cada

Na questão 1 escolhe, em cada alínea, a opção correta.
Justifica convenientemente as tuas respostas às questões 2, 3 e 4.
Não é permitido o uso de calculadoras.

1. (a) O João tem um irmão. Eles plantaram algumas flores no seu jardim e repararam que, em cada dia, o número de flores duplicava pelas 17h, começando na sexta-feira. No final da terça-feira seguinte havia 480 flores. Quantas flores havia na manhã de sexta-feira?

   A) 7 B) 15 C) 30 D) 60 E) 120

   (b) O João tem um irmão. Ele reparou que, no bairro onde moram, cada família tem uma ou duas crianças. Sabendo que 40% das crianças tem um irmão, qual é a percentagem de famílias com duas crianças?

   A) 20% B) 25% C) 30% D) 35% E) 40%

   (c) O João escreveu num papel todos os números de 3 algarismos com os algarismos $1, 2, 3$ (possivelmente repetidos), como, por exemplo, 312 ou 223. Qual é a soma de todos estes números?

   A) 999 B) 1998 C) 2997 D) 4995 E) 5994

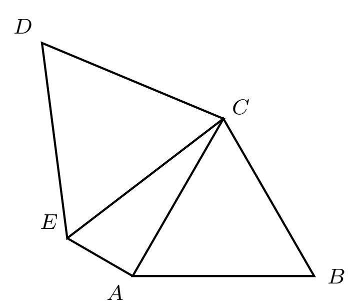
   (d) No bairro do João há uma equipa de rugby. Num jogo de rugby é possível marcar pontos de três maneiras diferentes: com um pontapé aos postes, que vale 3 pontos, com um ensaio, que vale 5 pontos, e com um ensaio convertido, que vale 7 pontos. Num jogo, a equipa do bairro marcou 24 pontos. De quantas maneiras diferentes é possível fazê-lo? (Por exemplo, com 4 pontapés, 1 ensaio e 1 ensaio convertido.)

   A) 3 B) 4 C) 5 D) 7 E) 11

   (e) Os pais do João deram algumas moedas ao João e ao irmão. Se o João receber duas moedas do irmão, eles ficarão com o mesmo número de moedas. Se o irmão receber uma moeda do João, ele ficará com o triplo de moedas do João. Quantas moedas deram os pais aos dois irmãos?

   A) 8 B) 12 C) 16 D) 20 E) 24

2. Na figura, os triângulos $[ABC]$ e $[CDE]$ são equiláteros.
   O perímetro de $[ABC]$ é 36 cm, o perímetro de $[CDE]$ é 39 cm e o perímetro de $[ABCDE]$ é 55 cm.
   Qual é o perímetro do triângulo $[ACE]$?



3. A turma do $7.^\circ$B vai participar numa prova de triatlo por estafetas composto por natação, ciclismo e corrida. A Ana, o Bernardo e a Gabriela nadam bem. O Manuel e a Paula são bons ciclistas. A Sandra, o Tiago e a Gabriela são bons corredores. De quantas maneiras pode a turma formar uma equipa composta por três alunos, se quiser escolher para cada modalidade os melhores atletas da turma?

4. A Joana tem 5000 peças quadradas de lado 1cm. A Joana pretende construir um quadrado usando um número de peças múltiplo de 7.

   De quantas maneiras diferentes ela o poderá fazer?

XLII OPM - 1ª Eliminatória - 8.11.2023 - Categoria Júnior - 6°/7° anos

Sugestões para a resolução dos problemas

Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3, 4: 8 pontos cada

1. (a) Opção B). $(O\ número\ de\ flores\ duplicou\ 5\ vezes.\ Logo,\ inicialmente\ havia\ 15\ flores.)$

   (b) Opção B). $(\dfrac{40:2}{100-40:2} = \frac{20}{80} = 25\%.)$

   (c) Opção E). $(Há\ 3\times 3\times 3 = 27\ números\ com\ um\ valor\ médio\ de\ 222.\ O\ total\ é\ 27\times 222 = 5994.)$

   (d) Opção C). $(As\ cinco\ soluções\ são{:}\ 3\times\mathbf{7}+\mathbf{3},\ 2\times\mathbf{7}+2\times\mathbf{5},\ \mathbf{7}+\mathbf{5}+4\times\mathbf{3},\ 3\times\mathbf{5}+3\times\mathbf{3},\ 8\times\mathbf{3}.)$

   (e) Opção B). $(O\ João\ tem\ 4\ moedas\ e\ o\ irmão\ 8.)$

2. O lado de $[ABC]$ mede $36/3 = 12$ cm. O lado de $[CDE]$ mede $39/3 = 13$ cm.

   O perímetro de $[ABCDE]$ mede $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DE}+\overline{EA} = 12+12+13+13+\overline{EA} = 50+\overline{EA}$. Como este perímetro mede 55 cm, então $\overline{EA} = 5$ cm.

   Logo o perímetro de $[ACE]$ é $\overline{AC}+\overline{CE}+\overline{AE} = 12+13+5 = 30$ cm.

3. Como a Gabriela não pode participar em duas modalidades diferentes, comecemos por selecioná-la para a prova de natação. Há então duas possíveis escolhas para a prova de ciclismo e duas escolhas para a prova de corrida, perfazendo um total de $2\times 2 = 4$ possíveis equipas.

   Se a Gabriela não for a escolha para a prova de natação, há duas escolhas possíveis para esta prova, duas escolhas para a prova de ciclismo e três escolhas para a corrida, perfazendo um total de $2\times 2\times 3 = 12$ possíveis equipas.

   Há assim, um total de $4+12 = 16$ formas de escolher a equipa.

4. **Solução 1:** O número de peças utilizadas na construção do quadrado será múltiplo de $49 = 7\times 7$. Os múltiplos de 49 menores do que 5000 são

   $$1\times 49,\ 2\times 49,\ 3\times 49,\ \ldots\ ,\ 102\times 49\ =\ 4998.$$

   Destes, apenas os números

   $$\begin{array}{cccc} 49 = 7\times 7, & 4\times 49 = 14\times 14, & 9\times 49 = 21\times 21, & 16\times 49 = 28\times 28,\\ 25\times 49 = 35\times 35, & 36\times 49 = 42\times 42, & 49\times 49, & 64\times 49 = 56\times 56,\\ 81\times 49 = 63\times 63, & 100\times 49 = 70\times 70 & & \end{array}$$

   poderão ser o número de peças utilizadas na construção dos quadrados.

   Portanto, a Joana conseguirá construir 10 quadrados diferentes com um número de peças múltiplo de 7 e menor do que 5000.

   Solução 2: Observe-se que

   $$70\times 70 = 4900 < 5000 < 5041 = 71\times 71.$$

   Assim, o maior quadrado que a Joana conseguirá construir terá $10\times 7 = 70$ peças de lado, ou seja, $4900 = 7\times 10\times 7\times 10$ peças ao todo. Todos os múltiplos de 7 menores ou iguais do que 70 são:

   $$1\times 7 = 7,\ 2\times 7 = 14, 3\times 7 = 21,\ \ldots 10\times 7 = 70.$$

   Qualquer um destes múltiplos de 7 pode ser o número de peças do lado de um quadrado maior, em que se utilizou menos de 5000 peças ao todo.

   Portanto, a Joana conseguirá construir 10 quadrados diferentes com um número de peças múltiplo de 7 e menor do que 5000.

OLIMPÍADAS
PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA

www.olimpiadas.spm.pt

XLII OPM - 2ª Eliminatória - 10.01.2024 - Categoria Júnior - 6º/7º anos

Duração: 2 horas
Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3, 4: 8 pontos cada

Na questão 1 escolhe, em cada alínea, a opção correta.
Justifica convenientemente as tuas respostas às questões 2, 3 e 4.
Não é permitido o uso de calculadoras.

1. (a) Uma capicua é um número que é igual quando é lido ao contrário. Por exemplo, 212 e 15351 são capicuas. O João gosta de formar capicuas e, ao ler no jornal da escola o número $N = 35798642$, determinou a maior capicua A inferior a N e a menor capicua B superior a N. Quanto vale $B - A$?

   A) 1000 B) 11000 C) 111000 D) 1111000 E) 11011000

   (b) O João descobriu um algarismo a para o qual o número $20210a$ é primo. Qual é esse algarismo?

   A) 1 B) 3 C) 5 D) 7 E) 9

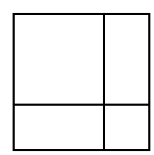
   (c) Na escola do João realizou-se uma festa de dia de Reis. Na entrada da festa estava uma torre composta por dois paralelepípedos empilhados, cada um com volume 128 cm^3. Duas das faces de um paralelepípedo têm áreas iguais a 4 cm^2 e a 32 cm^2. Duas das faces do outro paralelepípedo têm área igual a 16 cm^2 e a 64 cm^2. A torre era a mais alta possível construída com estes dois sólidos, e, entre as torres com esta altura, a área da superfície exposta da torre era a menor possível. Quanto mede, em cm^2, a área da superfície exposta desta torre?

   A) 172 B) 256 C) 384 D) 496 E) 520

   (d) O João numerou todos os vértices do seu cubo preferido com os números de 1 a 8, de forma a que na mesma aresta não haja dois números consecutivos. O João colocou os números 1 e 2 em vértices da mesma face. Qual é maior soma dos quatro algarismos dessa face que ele pode ter obtido?

   A) 14 B) 15 C)16 D) 17 E) 18

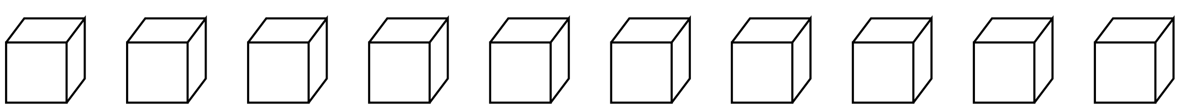
2. Um quadrado de 9 cm de lado foi dividido em dois quadrados e dois retângulos, como na figura. Se juntarmos os dois retângulos podemos obter um quadrado. Quanto mede a área do quadrado mais pequeno?



3. O Luís foi ao cinema com os seus pais e com os seus dois irmãos. Eles têm bilhetes para cinco lugares consecutivos na mesma fila.

   De quantas maneiras se podem sentar os cinco, de forma a que o Luís fique sentado ao lado do pai e da mãe?

4. O Romeu quer colocar uma etiqueta com um dos algarismos 0, 1 ou 2 em cada uma das seguintes dez caixas.



   Cada algarismo colocado em cada uma das oito caixas do meio, deverá ser igual à diferença entre os algarismos colocados nas caixas vizinhas.

   De quantas maneiras diferentes o Romeu consegue fazer esta etiquetação?

Sugestões para a resolução dos problemas

Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3, 4: 8 pontos cada

1. (a) Opção B. (*As capicuas são* $A = 35788753$ *e* $B = 35799753$.)

   (b) Opção E. (202101 *é divisível por* 3, 202103 *é divisível por* 11, 202105 *é divisível por* 5 *e* 202107 *é divisível por* 3.)

   (c) Opção D. (*As dimensões dos paralelepípedos são* $1, 4, 32$ *e* $2, 8, 8$, *respetivamente, logo a área da superfície exposta é* $2 \times (128 + 32 + 4 + 64 + 16 + 16) - 16 - 2 \times 4 = 496$.)

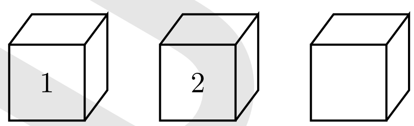
   (d) Opção C. (*A maior soma da face é obtida com os números* $1, 2, 5, 8$.)

2. Uma vez que se pode formar um quadrado com os retângulos, o comprimento de cada retângulo é o dobro da sua largura, e esta coincide com o lado do quadrado mais pequeno. Assim, o comprimento de cada retângulo é igual $\frac{2}{3}$ do lado do quadrado maior e o lado do quadrado mais pequeno é $\frac{1}{3}$ desse valor, ou seja, 3 cm. Portanto, a área do quadrado mais pequeno é $3 \times 3 = 9$ cm^2.

3. Como o Luís fica sentado ao lado do pai e da mãe, não pode ficar numa das extremidades, logo há três escolhas para o lugar do Luís. O pai e mãe podem sentar-se de duas maneiras diferentes, com o pai à direita ou à esquerda. Os irmãos do Luís podem sentar-se nos dois lugares restantes também de duas maneiras diferentes.

   Assim, ao todo há $3 \times 2 \times 2 = 12$ maneiras de se sentarem os cinco.

4. Observe-se que se o Romeu colocar o algarismo 1 numa caixa que tenha duas caixas à sua direita, então não poderá colocar o algarismo 2 na caixa vizinha à direita. Ou seja, a configuração

   não aparece.

   Assim, apenas há dez formas de etiquetar as caixas:

0000000000	1011011011	2022022022
0110110110	1101101101	2110110110
0110110112		2110110112
0220220220		2202202202

XLII OPM - Final - 1º Dia - 22.03.2024 - Categoria Júnior - 6º/7º anos

Duração: 3 horas
Questão 1: 16 pontos
Questões 2 e 3: 7 pontos cada

Justifica convenientemente as tuas respostas e indica os principais cálculos.
Não é permitido o uso de calculadoras.

1. (a) A Inês e a Mariana estavam a brincar com 2024 berlindes, numerados de 1 a 2024. A Inês propôs à Mariana que escolhesse alguns berlindes, mas sem escolher dois que estivessem numerados com inteiros consecutivos. Quantos berlindes pode, no máximo, a Mariana escolher?

   A) 2 B) 1012 C) 1013 D) 2023 E) 2024

   (b) Pegando no berlinde que tinha o número 2024, a Inês reparou que a soma dos seus algarismos é 8. Quantos números com essa propriedade existem entre 2000 e 3000?

   A) 7 B) 21 C) 28 D) 42 E) 125

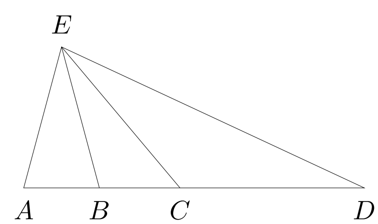
   (c) Por altura da Páscoa, o António dinamizou uma caça aos ovos no seu grupo de escuteiros. Para isso, escondeu 48 ovos de chocolate e pediu aos colegas que se organizassem em pares e os procurassem. Ao fim de meia hora, cada equipa tinha encontrado um ovo. Percebendo que ainda havia ovos escondidos, o António pediu aos colegas que formassem grupos de quatro e voltassem a procurar. Cada equipa voltou a encontrar um ovo, e o António constatou que já não havia ovos escondidos. Quantos colegas tem o António no seu grupo de escuteiros?

   A) 24 B) 36 C) 48 D) 64 E) 128

   (d) A Maria decidiu oferecer à sua madrinha um quadro feito por si. Ela desenhou 230 figuras geométricas: 80 estrelas, 70 quadrados, 40 círculos, 16 pentágonos, 12 hexágonos, 8 triângulos e 4 octógonos. A Maria pretende pintar cada figura de verde ou de vermelho, de modo que duas figuras do mesmo tipo tenham a mesma cor e que a maioria das figuras seja verde. De quantas formas pode a Maria pintar o seu quadro?

   A) 64 B) 65 C) 126 D) 127 E) 128

2. Na figura ao lado, $\overline{AE} = \overline{BE}$, $\overline{EC} = \overline{CD}$ e $C\hat{D}E = 25°$. Sabendo que EC divide o ângulo BED em dois ângulos geometricamente iguais, determina $A\hat{E}D$.



3. A Ana, o Bernardo, o Carlos, a Daniela, a Eva e o Francisco participaram num torneio, em que cada par de jogadores se defrontou exatamente uma vez. Sabe-se que:

   - Houve um único participante a ganhar todos os jogos, mas não houve nenhum a perder todos os jogos;
   - A Ana e a Eva ganharam o mesmo número, ímpar, de jogos, com a Ana a ganhar à Eva.
   - O Carlos só ganhou um jogo, ao único outro jogador que também só ganhou um jogo;
   - O Bernardo e o Francisco, juntos, ganharam 7 jogos;
   - A Daniela ganhou ao Bernardo;
   - Não houve empates.

   A que adversários ganhou a Ana?

Duração: 3 horas
Questão 1: 16 pontos
Questões 2 e 3: 7 pontos cada

Sugestões para a resolução dos problemas

1. (a) A Mariana maximiza o número de berlindes escolhidos se escolher todos os berlindes com um número par, ou todos os berlindes com um número ímpar, ou seja, 1012 berlindes.
Opção correta: B)

(b) Claramente, 3000 não satisfaz a propriedade desejada. Como todos os números entre 2000 e 2999 começam por 2, pretendemos saber quantas sequências existem com 3 algarismos cuja soma é 6. Ora, usando os algarismos de 0 a 9, podemos obter 6 das seguintes formas:

$$\begin{array}{cccc} 0+0+6, & 0+1+5, & 0+2+3, & 0+3+3, \\ 1+1+4, & 1+2+3, & 2+2+2. & \end{array}$$

Em cada caso em que há três algarismos diferentes, há 6 possibilidades; em cada caso em que há dois algarismos diferentes, há 3 possibilidades; e no caso em que há três algarismos iguais, só há 1 possibilidade. Portanto, ao todo há $3+6+6+3+3+6+1=28$ sequências de 3 algarismos cuja soma é 6.
Opção correta: C)

(c) *Solução 1:* Como na segunda ronda do jogo, o número de equipas a participar foi metade do número de equipas a participar na primeira, na segunda ronda foi encontrado um terço do número total de ovos, ou seja, foram encontrados $16=\frac{48}{3}$ ovos. Como cada equipa tinha 4 elementos, podemos concluir que o António tinha um total de $16\times 4=64$ colegas.
Solução 2: Observe-se que cada grupo de 4 pessoas encontrou 3 ovos. Como foram escondidos $48=3\times 16$ ovos, o António tinha um total de $4\times 16=64$ colegas.
Opção correta: D)

(d) Obedecendo à regra de cada tipo de figuras geométricas ser pintada de uma só cor, existem 2^7 formas de colorir o quadro de verde e vermelho. Como metade de 230 é um número ímpar e cada tipo de figura geométrica foi desenhada um número par de vezes, em nenhuma dessas colorações se tem exatamente metade das figuras pintadas da mesma cor. Logo, em exatamente metade das colorações, mais de metade das figuras é verde. Assim, a Maria pode pintar o quadro de $2^6=64$ maneiras diferentes.
Opção correta: A)

2. Uma vez que $\overline{CD}=\overline{EC}$, o triângulo $[ECD]$ é isósceles e, por isso, $C\widehat{E}D=C\widehat{D}E=25^\circ$.
Assim, também $B\widehat{E}C=25^\circ$ e $E\widehat{C}B=C\widehat{E}D+C\widehat{D}E=50^\circ$, pois é ângulo externo de $[ECD]$.
Sendo ângulo externo de $[BCE]$, $E\widehat{B}A=B\widehat{E}C+B\widehat{C}E=75^\circ$ e, tendo em conta que $[AEB]$ é isósceles, tem-se $E\widehat{A}B=75^\circ$. Logo, $A\widehat{E}B=180^\circ-2\times 75^\circ=30^\circ$.
Portanto, $A\widehat{E}D=A\widehat{E}B+B\widehat{E}C+C\widehat{E}D=30^\circ+25^\circ+25^\circ=80^\circ$.

3. Como cada jogador participou em 5 jogos, o Bernardo e o Francisco têm pelo menos 2 vitórias cada. Como só houve um jogador, para além do Carlos, a acabar com uma vitória, este não foi nem a Ana nem a Eva. Logo o Carlos só pode ter ganhado à Daniela, que por sua vez só ganhou ao Bernardo. Logo a Ana e a Eva têm 3 vitórias cada, pois é impossível ambas terem 5.
Portanto, a Ana ganhou à Eva, ao Carlos e à Daniela.

XLII OPM - Final - 2º Dia - 23.03.2024 - Categoria Júnior - 6º/7º anos

Duração: 3 horas
Questão 4: 16 pontos
Questões 5 e 6: 7 pontos cada

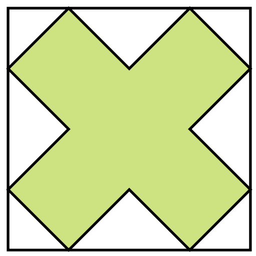
Justifica convenientemente as tuas respostas e indica os principais cálculos.
Não é permitido o uso de calculadoras.

4. A professora do Pedro, no dia Internacional da Matemática, lançou à turma alguns desafios. Tenta ajudar o Pedro a encontrar a solução de cada um deles.

   (a) Seis bolas numeradas de um a seis são colocadas num saco. Retiram-se, ao acaso, três bolas do saco e determina-se a soma dos três números. Quantos valores diferentes se podem obter?

   A) 9 B) 10 C) 12 D) 14 E) 16

   (b) Na figura a cruz verde foi construída, dentro de um quadrado grande, usando 5 quadrados iguais e tem 24 cm de perímetro. Qual é, em cm^2, a área do quadrado grande?



   A) 24 B) 32 C) 36 D) 40 E) 48

   (c) O mínimo múltiplo comum entre todos os números naturais de 1 até 15 é múltiplo de que número?

   A) $2^3 \times 3^3 \times 5$ B) $2^2 \times 3^2 \times 5^2$ C) $2 \times 3^3 \times 5$ D) $2^2 \times 3^2 \times 5$ E) 100

   (d) Quantos números de 3 algarismos, todos distintos, são múltiplos de 9 e também de 6 ?

   A) 38 B) 42 C) 44 D) 46 E) 55

5. Quantos algarismos iguais a 1 tem o número

$$9 + 99 + 999 + 9999 + \cdots + \overbrace{999\cdots99}^{2024 \text{ algarismos}}$$

   onde cada parcela da soma tem um algarismo 9 a mais do que a parcela imediatamente à sua esquerda e a última parcela tem 2024 algarismos 9?

6. No segundo jogo em casa do União de Santarém, no Campo Chã das Padeiras, estiveram apenas metade dos espetadores que estiveram no primeiro jogo. Como consequência, o número de lugares vazios foi três vezes maior. No terceiro jogo em casa, vieram mais 500 espetadores do que no segundo e o Campo Chã das Padeiras teve exatamente metade da lotação total preenchida. Quantos lugares tem o Campo Chã das Padeiras?

Duração: 3 horas
Questão 1: 16 pontos
Questões 2 e 3: 7 pontos cada

Sugestões para a resolução dos problemas

4. (a) A soma mais pequena que se pode obter é $1+2+3=6$ e a maior é $4+5+6=15$. Resta verificar que se podem obter todas as somas entre 6 e 15. Tem-se $7=1+2+4$, $8=1+2+5$, $9=1+2+6$, $10=2+3+5$, $11=2+3+6$, $12=3+4+5$, $13=3+4+6$, $14=3+5+6$. Portanto, há 10 somas diferentes que se podem obter. Opção correta: B)

   (b) A cruz verde é constituída por 5 quadrados pequenos. Além da cruz, no quadrado grande há mais 3 quadrados pequenos (quatro metades e quatro quartos), logo o quadrado grande tem 8 quadrados pequenos..

   O perímetro da cruz é igual a 12 vezes o lado de um dos quadrados pequenos, por isso o lado de cada quadrado pequeno mede 2 cm. Portanto, a área do quadrado grande é $8\times 2\times 2=32$ cm^2. Opção correta: B)

   (c) O mínimo múltiplo comum entre todos os números naturais desde 1 até 15 é $2^3\times 3^2\times 5\times 7\times 11\times 13$, pelo que das opções apresentadas só pode ser múltiplo de $2^2\times 3^2\times 5$. Opção correta: D)

   (d) Um número é múltiplo de 9 se a soma dos seus algarismos for múltipla de 9. Se o número também tem de ser múltiplo de 6 terá de ser um número par (porque sendo múltiplo de 9 já é múltiplo de 3). Vamos procurar os números pares (terminam em 0, 2, 4, 6 ou 8) múltiplos de 9 com três algarismos distintos.

   Para números que terminam em 0, a soma dos outros dois algarismos (que não podem ser 0) tem de ser 9 (não pode ser 18 porque seriam ambos 9 logo não eram distintos). Temos as seguintes possibilidades para os algarismos das centenas e dezenas: 18, 81, 27, 72, 36, 63, 45, 54. Ou seja, temos 8 números nestas condições.

   Para números que terminam em 2, a soma dos outros dois algarismos (distintos de dois) tem de ser 7 ou 16. Se a soma é 7, temos as seguintes possibilidades para os algarismos das centenas e dezenas: 70, 16, 61, 34, 43. Se a soma é 16, temos as seguintes possibilidades para os algarismos das centenas e dezenas: 79, 97. Ou seja, temos 7 números nestas condições.

   Para números que terminam em 4, a soma dos outros dois algarismos (distintos de quatro) tem de ser 5 ou 14. Se a soma é 5, temos as seguintes possibilidades para os algarismos das centenas e dezenas: 50, 23, 32. Se a soma é 14, temos as seguintes possibilidades para os algarismos das centenas e dezenas: 95, 59, 86, 68. Ou seja, temos 7 números nestas condições.

   Para números que terminam em 6, a soma dos outros dois algarismos (distintos de seis) tem de ser 3 ou 12. Se a soma é 3, temos as seguintes possibilidades para os algarismos das centenas e dezenas: 30, 12, 21. Se a soma é 12, temos as seguintes possibilidades para os algarismos das centenas e dezenas: 39, 93, 48, 84, 57, 75. Ou seja, temos 9 números nestas condições.

   Para números que terminam em 8, a soma dos outros dois algarismos (distintos de oito) tem de ser 1 ou 10. Se a soma é 1, temos a seguinte possibilidade para os algarismos das centenas e dezenas: 10. Se a soma é 10, temos as seguintes possibilidades para os algarismos das centenas e dezenas: 91, 19, 73, 37, 64, 46. Ou seja, temos 7 números nestas condições.

   Portanto, há $8+7+7+9+7=38$ números nestas condições. Opção correta A)

5. Podemos escrever

$$\begin{aligned}
9+99+999+9999+\cdots+\overbrace{999\cdots99}^{2024 \text{ algarismos}} &= (10-1)+(100-1)+(1000-1)+\cdots+(10^{2024}-1)\\
&= (10+100+1000+\cdots+10^{2024})-(1+1+1+\cdots+1)\\
&= \overbrace{11\cdots11}^{2024 \text{ dígitos}}0-2024=\\
&= \overbrace{11\cdots11}^{2020 \text{ dígitos}}09086.
\end{aligned}$$

Portanto, o número indicado tem 2020 dígitos iguais a 1.

6. Como com metade dos espetadores do primeiro jogo, o número de lugares vazios foi três vezes maior, então, no primeiro jogo, metade dos espetadores foi o mesmo que o dobro dos lugares vazios, ou seja, o número de espetadores foi o quádruplo dos lugares vazios.

   Logo, no primeiro jogo, o estádio tinha $4/5$ dos lugares ocupados e $1/5$ dos lugares vazios. No segundo jogo, o estádio tinha $2/5$ dos lugares ocupados e $3/5$ dos lugares vazios.

   No terceiro jogo, houve mais 500 espetadores, que corresponde a $1/2-2/5=1/10$ da lotação.

   Logo, o estádio tem 5000 lugares.

XLII OPM - 1ª Eliminatória - 8.11.2023 - Categoria A - 8º/9º anos

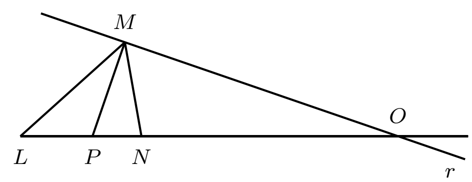
Duração: 2 horas
Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3, 4: 8 pontos cada

Na questão 1 escolhe, em cada alínea, a opção correta.
Justifica convenientemente as tuas respostas às questões 2, 3 e 4.
Não é permitido o uso de calculadoras.

1. (a) A Ana, no degrau de uma escada, reparou que o número de degraus acima dela é o dobro do número de degraus que tem abaixo (sem contar o degrau onde ela está). Após subir mais 5 degraus, tem tantos degraus acima como abaixo. Quantos degraus terá a Ana de subir para que o número de degraus abaixo dela seja igual a 4 vezes o número de degraus que tem acima?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

(b) No triângulo $[LMN]$ os ângulos internos com vértices em L e N têm amplitudes $42°$ e $80°$, respetivamente. Seja P um ponto no lado $[LN]$ tal que os ângulos LMP e PMN têm a mesma amplitude. A reta r, que é perpendicular à reta MP e passa em M, interseta a reta LN no ponto O. Qual é a amplitude, em graus, do ângulo MON?

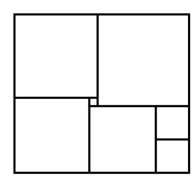


A) 17 B) 19 C) 21 D) 23 E) 29

(c) Um quadrado perfeito é um inteiro que pode ser escrito como o quadrado de outro número inteiro. Por exemplo, 25 e 36 são quadrados perfeitos, uma vez que $25 = 5^2$ e $36 = 6^2$.
Quantos múltiplos de 7 entre 1 e 5000 são quadrados perfeitos?

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

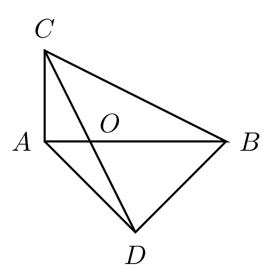
(d) Na figura dividiu-se um retângulo em 7 quadrados. O quadrado mais pequeno tem 1 cm^2 de área.
Qual é a área, em cm^2, do retângulo?



A) 289 B) 299 C) 360 D) 380 E) 399

2. Num jogo de rugby é possível marcar pontos de três maneiras diferentes: com um pontapé aos postes, que vale 3 pontos, com um ensaio, que vale 5 pontos, e com um ensaio convertido, que vale 7 pontos. Num jogo do campeonato do mundo Portugal marcou 24 pontos. De quantas maneiras diferentes é possível fazê-lo? (Por exemplo, com 4 pontapés, 1 ensaio e 1 ensaio convertido.)

3. Sejam $[ABC]$ e $[ABD]$ dois triângulos com o lado $[AB]$ comum. O triângulo $[ABC]$ é retângulo em A e $\overline{AB} = 2\,\overline{AC} = 8$. O triângulo $[ABD]$ é retângulo em D e $\overline{AD} = \overline{BD}$. O segmento $[CD]$ interseta $[AB]$ no ponto O. Determina $\overline{BO}$.



4. O Francisco está a passar o algarismo mais à esquerda de um número para a direita. Por exemplo, a partir do número 1234, ele obtém o número 2341. O Francisco quer fazer esta operação com um número começado por 6 e obter um número que seja um quarto do número inicial.
Qual é o menor número com que ele pode fazer isto?

XLII OPM - 1ª Eliminatória - 8.11.2023 - Categoria A - 8º/9º anos

Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3, 4: 8 pontos cada

Sugestões para a resolução dos problemas

1. (a) Opção E. (*No início há* 10 *degraus abaixo e* 20 *acima. Subindo* 9*, fica com* 24 *abaixo e* 6 *acima.*)
   (b) Opção B. ($L\widehat{M}N = 58^\circ$, $P\widehat{M}N = 29^\circ$, $M\widehat{P}N = 71^\circ$, $M\widehat{O}N = 180 - (90 + 71) = 19^\circ$.)
   (c) Opção D. (*Há* 10 *quadrados perfeitos* 7^2, $2^2 \times 7^2$, $3^2 \times 7^2, \ldots, 10^2 \times 7^2 = 4900$.)
   (d) Opção E. (*Os lados dos quadrados são* 1, 4, 8, 9, 10 *e* 11*; o retângulo tem área* $19 \times 21 = 399$.)

2. Se a equipa não conseguir nenhum ensaio convertido, então para atingir 24 pontos pode marcar ou zero ou três ensaios de 5 pontos. Sobram 24 e 9 pontos, respetivamente, que têm de ser atingidos com 8 ou 3 pontapés de 3 pontos.

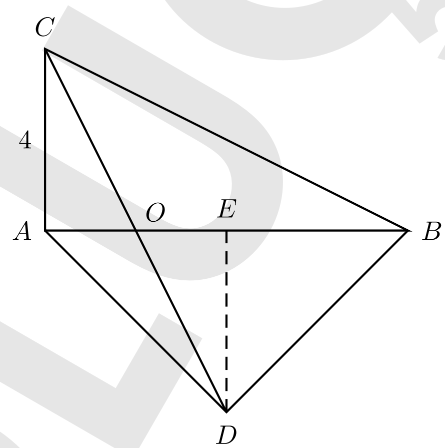
   Se a equipa conseguir um único ensaio convertido de 7 pontos, então os restantes 17 pontos têm necessariamente de vir de um único ensaio de 5 pontos e de quatro pontapés de 3 pontos.

   Se a equipa conseguir exatamente dois ensaios convertidos de 7 pontos, então os restantes 10 pontos têm necessariamente de vir de 2 ensaios de 5 pontos.

   Finalmente, se a equipa conseguir exatamente três ensaios convertidos de 7 pontos, os restantes 3 pontos têm de vir de um pontapé de 3 pontos.

   Há assim um total de $2 + 1 + 1 + 1 = 5$ formas da equipa conseguir 24 pontos.

3. Seja E o ponto médio de $[AB]$. Como o triângulo $[ADB]$ é retângulo e isósceles, tem-se $B\widehat{A}D = 45^\circ$ e $A\widehat{E}D = 90^\circ$. Assim, conclui-se que $[AED]$ é triângulo retângulo e isósceles com $\overline{ED} = \overline{AE} = \frac{\overline{AB}}{2} = 4$.



   Pelo critério de congruência ALA, os triângulos $[AOC]$ e $[EOD]$ são congruentes e, por isso, $\overline{AO} = \overline{OE}$.

   Assim, conclui-se que $\overline{OE} = \frac{\overline{AE}}{2} = 2$ e, portanto,

$$\overline{BO} = \overline{BE} + \overline{OE} = 4 + 2 = 6.$$

4. Se multiplicarmos por 4 o número obtido pelo Francisco, ficamos com o número inicial. Portanto, o algarismo das unidades do número inicial é 4.

$$\begin{array}{rr} \cdots & 6 \\ \times & 4 \\ \hline \cdots & 4 \end{array}$$

Então a multiplicação pode escrever-se como indicado abaixo. Portanto, o algarismo das dezenas do número inicial é 8.

$$\begin{array}{rrr} \cdots & 4 & 6 \\ & \times & 4 \\ \hline \cdots & 8 & 4 \end{array}$$

Repetindo o processo, obtemos sucessivamente:

$$\begin{array}{rrrr} \cdots & 8 & 4 & 6 \\ & & \times & 4 \\ \hline \cdots & 3 & 8 & 4 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrrr} \cdots & 3 & 8 & 4 & 6 \\ & & & \times & 4 \\ \hline \cdots & 5 & 3 & 8 & 4 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrrrr} \cdots & 5 & 3 & 8 & 4 & 6 \\ & & & & \times & 4 \\ \hline \cdots & 1 & 5 & 3 & 8 & 4 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrrrr} 1 & 5 & 3 & 8 & 4 & 6 \\ & & & & \times & 4 \\ \hline 6 & 1 & 5 & 3 & 8 & 4 \end{array}$$

Logo, o menor número que o Francisco pode usar é o 615384.

XLII OPM - 2ª Eliminatória - 10.01.2024 - Categoria A - 8º/9º anos

Duração: 2 horas
Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3, 4: 8 pontos cada

Na questão 1 escolhe, em cada alínea, a opção correta.
Justifica convenientemente as tuas respostas às questões 2, 3 e 4.
Não é permitido o uso de calculadoras.

1. (a) Na escola do Delfim realizou-se uma festa de dia de Reis. Na entrada da festa estava uma torre composta por dois paralelepípedos empilhados, cada um com volume 128 cm^3. Duas das faces de um paralelepípedo têm áreas iguais a 4 cm^2 e a 32 cm^2. Duas das faces do outro paralelepípedo têm área igual a 16 cm^2 e a 64 cm^2. A torre era a mais alta possível construída com estes dois sólidos, e, entre as torres com esta altura, a área da superfície exposta da torre era a menor possível. Quanto mede, em cm^2, a área da superfície exposta desta torre?

   A) 172 B) 256 C) 384 D) 496 E) 520

   (b) Um dos bolos que foi servido na festa tinha a forma de um pentágono. O Delfim reparou que não era possível construir um pentágono com mais ângulos retos do que os que tinha o pentágono do bolo. Quantos ângulos retos tinha esse pentágono?

   A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

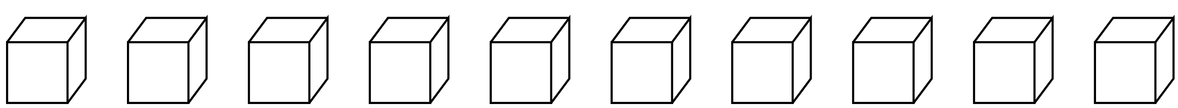
   (c) Num dos jogos que foram feitos na festa, a Beatriz teve que andar para a frente e para trás de olhos vendados. Primeiro deu um passo para a frente, e saltou para cima. Depois deu dois passos para trás e saltou para cima. Depois deu três passos para a frente, saltou, deu quatro passos para trás, saltou e assim sucessivamente até que ficou 30 metros afastada do ponto de partida e saltou. Cada passo da Beatriz mede 60 cm. Quantos saltos deu a Beatriz?

   A) 10 B) 59 C) 60 D) 99 E) 100

   (d) A Alice, a Beatriz, a Carla, o Delfim e o Eurico fizeram uma troca de prendas. Cada um colocou uma prenda num saco e depois cada um deles tirou uma prenda. No final, dois deles ficaram com a prenda que tinham levado, e os outros três com prendas diferentes. De quantas maneiras é possível as prendas terem sido distribuídas?

   A) 10 B) 20 C) 30 D) 60 E) 120

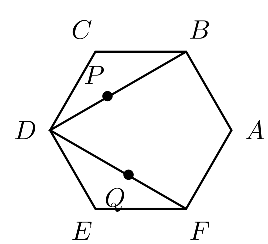
2. O Romeu quer colocar uma etiqueta com um dos algarismos 0, 1 ou 2 em cada uma das seguintes dez caixas.



Cada algarismo colocado em cada uma das oito caixas do meio, deverá ser igual à diferença entre os algarismos colocados nas caixas vizinhas.

De quantas maneiras diferentes o Romeu consegue fazer esta etiquetação?

3. Seja $[ABCDEF]$ um hexágono regular. Os pontos P e Q pertencem às diagonais $[BD]$ e $[DF]$, respetivamente, e $\overline{BP} = \overline{DQ} = \overline{EF}$. Mostra que os pontos C, P e Q são colineares.



4. O João lançou três dados, cada um deles com os números de 1 a 6. Quantas possibilidades há para o produto dos três números?

Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3, 4: 8 pontos cada

Sugestões para a resolução dos problemas

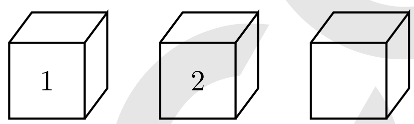
1. (a) Opção D. (*As dimensões dos paralelepípedos são* $1, 4, 32$ *e* $2, 8, 8$, *respetivamente, logo a área da superfície exposta é* $2 \times (128 + 32 + 4 + 64 + 16 + 16) - 16 - 2 \times 4 = 496$.)

   (b) Opção C. (*Se um pentágono tivesse quatro ângulos retos (consecutivos), então o primeiro e o quinto lado seriam paralelos. É fácil construir um pentágono com três ângulos retos.*)

   (c) Opção D. (*Para estar afastada* $30m$, *ela tem que estar a* 50 *passos da partida. Ela salta pela primeira vez quando está afastada um passo, e depois salta duas vezes por cada passo que se afasta mais,* $99 = 1 + 2 \times 49$.)

   (d) Opção B. (*Há* 10 *maneiras de escolher as duas crianças que recebem as próprias prendas, e duas maneiras de trocar as prendas entre as outras três.*)

2. Observe-se que se o Romeu colocar o algarismo 1 numa caixa que tenha duas caixas à sua direita, então não poderá colocar o algarismo 2 na caixa vizinha à direita. Ou seja, a configuração



não aparece.

Assim, apenas há dez formas de etiquetar as caixas:

0000000000	1011011011	2022022022
0110110110	1101101101	2110110110
0110110112		2110110112
0220220220		2202202202

3. Seja X o ponto de interseção da reta CP com a diagonal $[DF]$. Pretende-se provar que X coincide com o ponto Q e portanto C, P e Q são colineares.

   Os triângulos isósceles $[BCD]$ e $[DEF]$ têm um ângulo igual a $120°$ (ângulo em C e em E, respetivamente) e cada um dos outros ângulos mede $30°$. No triângulo $[CBP]$, também isósceles, uma vez que $CBP = 30°$, então cada um dos outros dois ângulos mede $75°$. Portanto, o ângulo DCP mede $120 - 75 = 45°$ e o ângulo CDX mede $120 - 30 = 90°$. O triângulo $[CDX]$ é retângulo em D e o ângulo em C é $45°$, logo o outro ângulo também mede $45°$. Portanto este triângulo é isósceles e tem-se $\overline{DX} = \overline{CD} = \overline{EF} = \overline{DQ}$. Logo os pontos X e Q coincidem.

4. Vamos começar por ver o número de produtos possíveis com 2 dados, sem repetições:

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2				8	10	12
3			9		15	18
4				16	20	24
5					25	30
6						36

Para ver os produtos possíveis com 3 dados, podemos substituir a linha de cima pelos 18 números diferentes da tabela anterior, obtendo:

	1	2	3	4	5	6	8	9	10	12	15	16	18	20	24	25	30	36
1	1	2	3	4	5	6	8	9	10	12	15	16	18	20	24	25	30	36
2												32		40	48	50	60	72
3								27			45		54			75	90	108
4												64		80	96	100	120	144
5																125	150	180
6																		216

Logo temos 40 possibilidades para o produto de 3 dados.

XLII OPM - Final - 1º Dia - 22.03.2024 - Categoria A - 8º/9º anos

Duração: 3 horas
Questão 1: 16 pontos
Questões 2 e 3: 7 pontos cada

Justifica convenientemente as tuas respostas e indica os principais cálculos.
Não é permitido o uso de calculadoras.

1. (a) O príncipe da Luzilândia convidou os amigos para um passeio no jardim real. Os seus empregados levaram 30 pizzas para as crianças comerem. Ao almoço repartiram uma pizza para cada grupo de duas crianças. No final de mais uma brincadeira, foram comer as pizzas que sobraram, e cada grupo de três crianças comeu uma pizza. Sabendo que no final não sobrou nenhuma pizza, quantas crianças eram?

   A) 24 B) 25 C) 30 D) 36 E) 45

   (b) Ao almoço, as crianças comeram em duas mesas que existiam no jardim. Uma das mesas tem a forma de um hexágono regular e a outra de um triângulo equilátero. Um dos amigos do príncipe reparou que as mesas têm exatamente o mesmo perímetro. Qual é a razão entre as áreas do hexágono e do triângulo?

   A) $\frac{1}{1}$ B) $\frac{4}{3}$ C) $\frac{3}{2}$ D) $\frac{5}{3}$ E) $\frac{2}{1}$

   (c) O jardineiro real fez um canteiro em frente ao poste onde se hasteia a bandeira real. O canteiro $[ABCD]$ tem forma quadrangular e foi colocado de tal modo que a posição do poste fosse o ponto simétrico de A relativamente a B. O protocolo real impõe que a distância do poste ao ponto mais distante do canteiro seja de 90 dm. Qual é a área, em dm^2, do canteiro?

   A) 324 B) 1620 C) 1800 D) 2025 E) 2700

   (d) O parlamento da Luzilândia tem 230 lugares e estão representados 7 grupos diferentes que têm $75, 70, 40, 16, 13, 11$ e 5 representantes. Para uma lei ser aprovada é preciso que se forme uma maioria, ou seja, que mais de metade dos representantes vote a favor dessa lei.

   Na Luzilândia, em cada votação, cada um dos grupos vota todo a favor ou vota todo contra. De quantas maneiras diferentes se pode formar uma maioria?

   A) 8 B) 24 C) 61 D) 62 E) 64

2. Um número inteiro positivo diz-se $escalabitano$ se a soma dos seus algarismos for um múltiplo de 17 e a soma dos algarismos do seu sucessor também for múltipla de 17. Qual é o menor número escalabitano?

3. Uma distribuição de números por dois conjuntos é considerada válida se nenhum dos conjuntos contém dois números e a sua soma. Por exemplo, os conjuntos $\{1, 3\}$ e $\{2, 4, 5\}$ formam uma distribuição válida dos inteiros $1, 2, 3, 4, 5$. Qual é o maior número inteiro positivo n para o qual existe uma distribuição válida dos inteiros de 1 a n?

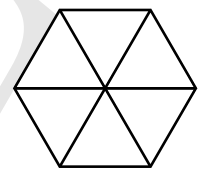
XLII OPM - Final - 1º Dia - 22.03.2024 - Categoria A - 8º/9º anos

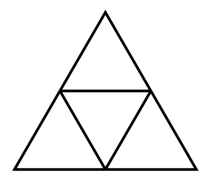
Duração: 3 horas
Questão 1: 16 pontos
Questões 2 e 3: 7 pontos cada

Sugestões para a resolução dos problemas

1. (a) Cada criança comeu $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$ de pizza. Portanto, o número de crianças é $30/\frac{5}{6}=30\times\frac{6}{5}=36$.
Opção correta: D)

(b) O comprimento de cada lado do triângulo equilátero é um terço do seu perímetro, e o comprimento de cada lado do hexágono regular é um sexto do seu perímetro e portanto mede metade do comprimento do lado do triângulo. Um hexágono regular é composto por seis triângulos equiláteros. Cada um desses triângulos tem um lado de comprimento igual a metade do lado da mesa triangular, e portanto a sua área é igual a um quarto da área da mesa triangular. Como a mesa hexagonal tem seis vezes a área de cada um dos seis triângulos que a compõem, deduzimos que a mesa hexagonal tem uma área $6\times\frac{1}{4}=\frac{3}{2}$ maior do que a mesa triangular.
Opção correta: C)

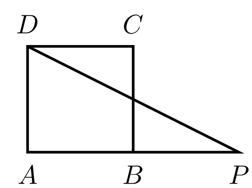




(c) Seja P o ponto onde está colocado o poste. Seja ℓ a medida do lado do quadrado. Temos $\overline{AD}=\ell$ e por simetria $\overline{AP}=2\overline{AB}=2\ell$.
Pelo Teorema de Pitágoras, sabemos que $\overline{AP}^2+\overline{AD}^2=\overline{DP}^2$. Logo,

$$(2\ell)^2+\ell^2=90^2 \Leftrightarrow 4\ell^2+\ell^2=8100 \Leftrightarrow \ell^2=1620\,.$$

Podemos assim concluir que área do quadrado $[ABCD]$ é 1620 dm^2.
Opção correta: B)



(d) Se dividirmos os sete grupos em dois conjuntos disjuntos, então um deles forma uma maioria ou então há um empate. Comecemos por fixar a votação de um dos grupos, por exemplo o maior. A divisão que pretendemos depende de cada um dos outros seis grupos decidir se vota no mesmo sentido ou sentido contrário. Se não houvesse empates, então haveria $2^6=64$ maiorias possíveis. Falta-nos apenas contar quantos empates podem existir, ou seja contar de quantas maneiras se pode dividir os números $75, 70, 40, 16, 13, 11$ e 5 em dois conjuntos de modo que a soma de cada conjunto dê 115. Há duas possibilidades $75+40=115=70+16+13+11+5$ e $75+16+13+11=115=70+40+5$. O número de maneiras de formar uma maioria é igual a $64-2=62$.
Opção correta: D)

2. Designemos por N o menor número escalabitano e por $s(n)$ a soma dos algarismos de um número inteiro n.

   Seja a o algarismo das unidades de N. Se fosse $a < 9$, então $s(N+1) = s(N)+1$, logo N e $N+1$ não poderiam ser ambos múltiplos de 17. Logo $a = 9$.

   Seja b o algarismo das dezenas de N. Se fosse $b < 9$, então $s(N+1) = s(N)-8$, logo N e $N+1$ não poderiam ser ambos múltiplos de 17. Logo $b = 9$.

   Portanto $s(N) \geq 18$ e como $s(N)$ é múltiplo de 17, temos $s(N) \geq 34$.

   Assim, os menores números n terminados em 99, com $s(n)$ múltiplo de 17, são 7999 e 8899.

   Para $n = 7999$, temos $s(n+1) = s(8000) = 8$.

   Para $n = 8899$, temos $s(n+1) = s(8900) = 17$.

   Portanto, $N = 8899$.

3. O maior inteiro é 8. Comecemos por notar que os conjuntos $\{1,2,4,8\}$ e $\{3,5,6,7\}$ formam uma distribuição válida dos números inteiros de 1 a 8.

   Vamos mostrar que não é possível uma distribuição válida dos números de 1 a 9. Suponhamos por absurdo que A e B formam uma distribuição válida dos inteiros de 1 a 9, com $1 \in A$. Temos duas possibilidades:

   - A tem um número $a \in \{6,7,8\}$
     Temos $a-1, a+1 \in B$. Como $2+(a-1) = a+1$, então $2 \in A$. Como $2+(a-2) = a$, temos $a-2 \in B$.
     Mas $1+2 = 3$ e $(a-2)+3 = a+1$, logo não conseguimos colocar o 3.
   - $6, 7, 8 \in B$
     Como $2+6 = 8$, então $2 \in A$. Como $1+2 = 3$, então $3 \in B$. Como $3+4 = 7$, então $4 \in A$.
     Mas $1+4 = 5$ e $3+5 = 8$, logo não conseguimos colocar o 5.

   Concluímos assim que não existe uma distribuição válida dos números de 1 a 9.

XLII OPM - Final - 2º Dia - 23.03.2024 - Categoria A - 8º/9º anos

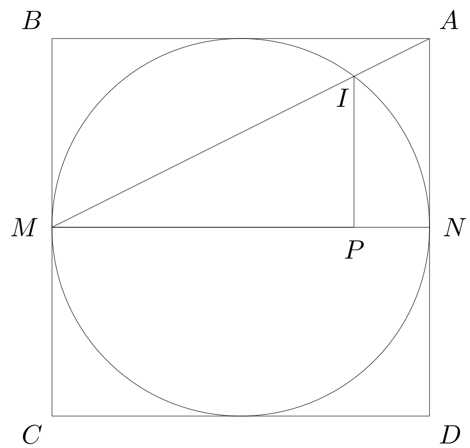
Duração: 3 horas
Cada questão vale 10 pontos

Justifica convenientemente as tuas respostas e indica os principais cálculos.
Não é permitido o uso de calculadoras.

4. No segundo jogo em casa do União de Santarém, no Campo Chã das Padeiras, estiveram apenas metade dos espetadores que estiveram no primeiro jogo. Como consequência, o número de lugares vazios foi três vezes maior. No terceiro jogo em casa, vieram mais 500 espetadores do que no segundo e o Campo Chã das Padeiras teve exatamente metade da lotação total preenchida.

   Quantos lugares tem o Campo Chã das Padeiras?

5. A circunferência inscrita no quadrado $[ABCD]$, de lado 10 cm, interseta os lados $[BC]$ e $[AD]$ nos pontos M e N, respetivamente. O ponto I é o ponto de interseção de $[AM]$ com a circunferência, diferente de M, e P é o pé da perpendicular a MN que passa por I. Determina $\overline{PI}$.



6. Dado um inteiro n, seja $\bar{n}$ o inteiro n escrito de trás para a frente. Um número n é mágico se $n + \bar{n}$ e $n - \bar{n}$ forem números positivos e também capicuas. Por exemplo, o número $n = 231$ é mágico uma vez que $231 + 132 = 363$ e $231 - 132 = 99$ são capicuas, ou seja, são o mesmo número quando lidos da esquerda para a direita, ou da direita para a esquerda.

   Determina todos os possíveis valores de $n - \bar{n}$, quando n é um número mágico com 4 algarismos.

Duração: 3 horas
Cada questão vale 10 pontos

Sugestões para a resolução dos problemas

4. Sejam x e y o número de espetadores e de lugares vazios no segundo jogo, respetivamente. Então, a lotação do estádio é $x+y$.

   No primeiro jogo houve $2x$ espetadores e $\frac{y}{3}$ lugares vazios. No terceiro jogo houve $x+500$ espetadores. Logo,

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & 2x+\frac{y}{3} \\ x+500 & = & \frac{x+y}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 3x+3y & = & 6x+y \\ 2x+1000 & = & x+y \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 2y & = & 3x \\ x+1000 & = & y \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 2000 \\ y & = & 3000 \end{array}\right.$$

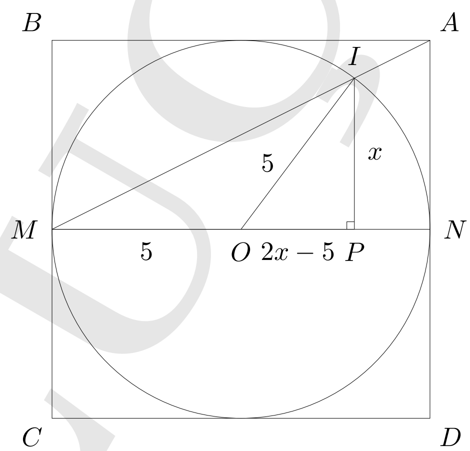
   Logo, o estádio tem $2000+3000=5000$ lugares.

5. Sejam $x=\overline{PI}$ e O o centro da circunferência circunscrita ao quadrado $[ABCD]$.

   Os triângulos $[AMN]$ e $[IMP]$ são semelhantes, logo

$$\frac{\overline{MP}}{x}=\frac{\overline{MN}}{\overline{AN}}=2, \text{ ou seja, } \overline{MP}=2x.$$

   Tendo em conta que $\overline{OI}=5$, tem-se $\overline{OP}=\overline{MP}-5=2x-5$.



   Por outro lado, o triângulo $[OPI]$ é retângulo em P e, pelo Teorema de Pitágoras, tem-se

$$\overline{PI}^2+\overline{OP}^2=\overline{OI}^2$$

   Logo

$$x^2+(2x-5)^2=5^2, \text{ ou seja, } 5x^2-20x=0,$$

   de onde se conclui que $\overline{IP}=4$.

6. Sejam $n = abcd$ e $\bar{n} = dcba$. Como $n - \bar{n}$ é positivo, temos $a \geq d$ e podemos escrever

$$n + \bar{n} = 1000(a + d) + 100(b + c) + 10(b + c) + (a + d)$$

e

$$n - \bar{n} = 1000(a - d) + 100(b - c) + 10(c - b) + (d - a)$$

Se $a = d$, então $n - \bar{n} = 100(b - c) + 10(c - b) = 90(b - c)$ não é uma capicua, pois termina em 0. Se $a + d$ tem dois algarismos, então o primeiro algarismo de $n + \bar{n}$ é 1. Se $n + \bar{n}$ é uma capicua, então $a + d = 11$. Além disso,

$$n + \bar{n} = 10000 + 1000 + 100(b + c) + 10(b + c + 1) + 1$$

é uma capicua apenas se $b = c = 0$. Neste caso, $n - \bar{n} = 1000(a - d) + (d - a)$ é uma capicua se e só se $a = 6$ e $d = 5$ e obtemos $n - \bar{n} = 999$.

Consideremos agora $a + d \leq 9$ e $d < a$. Então, se $b + c > 9$, o número $n + \bar{n}$ não é uma capicua pois o primeiro e último algarismos são diferentes. Temos assim de ter $b + c \leq 9$. Nestas condições, $n + \bar{n}$ é sempre uma capicua. Vamos analisar o número $n - \bar{n}$.

Seja $a - d = f \leq 9$. Então, $n - \bar{n} = 1000f + 100(b - c) + 10(c - b) - f$. Se $b = c$, então $n - \bar{n}$ é uma capicua se e só se $f = 1$ e obtemos $n - \bar{n} = 999$.

Suponhamos que $b - c = m \in \{1, 2, \ldots, 9\}$. Então, $n - \bar{n} = 1000f + 100(m - 1) + 10(9 - m) + (10 - f)$ e, portanto, temos de ter $f = a - d = 5$ e $m = b - c = 5$. Neste caso, temos $n - \bar{n} = 5445$.

Por fim, suponhamos que $c - b = m \in \{1, 2, \ldots, 9\}$. Então, $n - \bar{n} = 1000f - 100m + 10m - f = 1000(f - 1) + 100(10 - m) + 10(m - 1) + (10 - f)$ e, portanto, temos de ter $f = 1$ e $m = 1$. Neste caso, temos $n - \bar{n} = 909$.

Portanto, os possíveis valores para $n - \bar{n}$ são $909, 999$ e 5445.

OLIMPÍADAS
PORTUGUESAS DE MATEMÁTICA

www.olimpiadas.spm.pt

XLII OPM - 1ª Eliminatória - 8.11.2023 - Categoria B - 10º/12º anos

Duração: 2 horas
Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3, 4: 8 pontos cada

Na questão 1 escolhe, em cada alínea, a opção correta.
Justifica convenientemente as tuas respostas às questões 2, 3 e 4.
Não é permitido o uso de calculadoras.

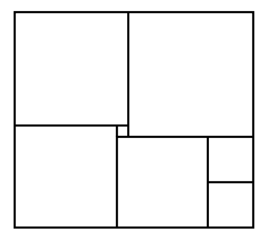
1. (a) Uma tartaruga demora 11 segundos a nadar 100 metros, e o João demora 1 minuto e 50 segundos a nadar a mesma distância. Os dois querem partir do mesmo local, nadar 10 quilómetros, e chegar ao mesmo tempo às Ilhas Berlengas. Que distância deve a tartaruga deixar o João avançar antes de iniciar o trajeto?

   A) 1 km B) 3 km C) 5 km D) 7 km E) 9 km

   (b) Qual é o algarismo das unidades de 2023^{2023}?

   A) 1 B) 3 C) 5 D) 7 E) 9

   (c) Um retângulo está dividido em sete quadrados, como na figura ao lado.
   A área do quadrado mais pequeno é 1.
   Qual é a área do retângulo?

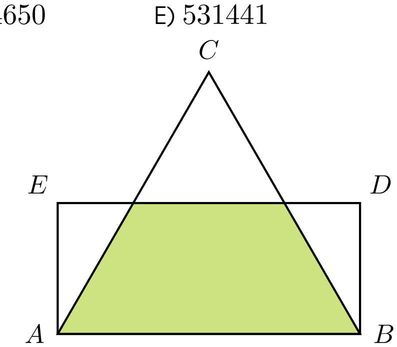


   A) 255 B) 288 C) 323 D) 360 E) 399

   (d) Seis rapazes e seis raparigas organizaram uma festa do Dia das Bruxas. Há quatro disfarces de abóbora, quatro de bruxa e quatro de caveira. De quantas formas podem os amigos disfarçar-se de modo que cada tipo de disfarce seja escolhido por dois rapazes e duas raparigas?

   A) 720 B) 1956 C) 8100 D) 34650 E) 531441

2. Sejam $[ABC]$ um triângulo equilátero e $[ABDE]$ um retângulo tais que ambas as figuras têm a mesma área. Os pontos C, D e E estão do mesmo lado da recta AB. Qual é a razão entre a área da região formada pela interseção de ambas as figuras e a área de $[ABC]$?



3. Com os algarismos de um número de três algarismos N formam-se todos os possíveis números de dois algarismos. De seguida, somam-se todos estes números de dois algarismos e obtemos o número S. Encontra todas as possibilidades para N, sabendo que $S = 2N$.

4. De quantas formas é possível distribuir nove bolas, numeradas de 1 a 9, por três caixas diferentes, de modo a que a soma dos números das bolas em cada caixa seja um múltiplo de três?

XLII OPM - 1ª Eliminatória - 8.11.2023 - Categoria B - 10º/12º anos

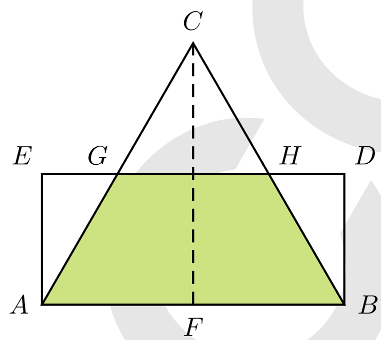
Questão 1:
cada opção correta: 4 pontos
cada opção errada: -1 ponto
Questões 2, 3, 4: 8 pontos cada

Sugestões para a resolução dos problemas

1. (a) Opção E. (*A tartaruga nada* 10 *km no mesmo tempo que o João nada* 1 *km.*)
   (b) Opção D. ($2023^{2023} = (2023^4)^{505} \times 2023^3$; 2023^4 *termina em* 1 *e* 2023^3 *termina em* 7.)
   (c) Opção E. (*Os lados dos quadrados são* 1, 4, 8, 9, 10 *e* 11, *logo o retângulo tem área* $19 \times 21 = 399$.)
   (d) Opção C. (*Há* $15 \times 6 = 90$ *maneiras de distribuir os rapazes (e as raparigas);* $90 \times 90 = 8100$.)

2. Sejam F o pé da altura de $[ABC]$ relativamente ao lado $[AB]$, e G e H as interseções de $[DE]$ com $[CA]$ e $[CB]$, respetivamente.

Solução 1:



Dado que as áreas de $[ABC]$ e $[ABDE]$ são iguais, conclui-se que

$$\overline{DB} = \overline{EA} = \frac{1}{2}\overline{CF}.$$

Observa-se assim que os triângulos $[GHC]$ e $[ABC]$ são semelhantes com razão de semelhança 2. Desta forma, tem-se

$$\overline{AB} = 2 \times \overline{GH} \text{ e } \overline{GE} + \overline{HD} = \frac{1}{2}\overline{AB}.$$

Assim, a área da região formada pela interseção de ambas as figuras é

$$\begin{aligned}
&\text{área de } [ABDE] \text{ - área de } [GEA] \text{- área de } [HDB] = \\
&= \overline{AB} \times \overline{DB} - \frac{\overline{GE} \times \overline{EA}}{2} - \frac{\overline{HD} \times \overline{DB}}{2} \\
&= \overline{AB} \times \overline{DB} - \frac{(\overline{GE} + \overline{HD}) \times \overline{DB}}{2} \\
&= \overline{AB} \times \overline{DB} - \frac{\overline{AB}}{2} \times \frac{\overline{DB}}{2} \\
&= \frac{3}{4} \times \text{área de } [ABDE] = \frac{3}{4} \times \text{área de } [ABC].
\end{aligned}$$

Portanto, a razão entre a área da região formada pela interseção de ambas as figuras e a área de $[ABC]$ é $\frac{3}{4}$.

Solução 2: Seja x o comprimento do lado de $[ABC]$. Pelo Teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo $[AFC]$, tem-se

$$x^2 = \overline{FC}^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2$$

pelo que $\overline{FC} = \frac{\sqrt{3}}{2}x$. Logo a área de $[ABC]$ é $\frac{x \times \frac{\sqrt{3}}{2}x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$.

Dado que as áreas de $[ABC]$ e $[ABDE]$ são iguais, conclui-se que $\overline{DB} = \frac{\sqrt{3}}{4}x$.

Observa-se assim que os triângulos $[GHC]$ e $[ABC]$ são semelhantes com razão de semelhança 2, logo a área de $[GHC]$ é um quarto da área de $[ABC]$, ou seja, $\frac{\sqrt{3}}{16}x^2$.

Assim, a área da região formada pela interseção de ambas as figuras é $\frac{\sqrt{3}}{4}x^2 - \frac{\sqrt{3}}{16}x^2 = \frac{3\sqrt{3}}{16}x^2$.

Portanto, a razão entre a área da região formada pela interseção de ambas as figuras e a área de $[ABC]$ é

$$\frac{\frac{3\sqrt{3}}{16}x^2}{\frac{\sqrt{3}}{4}x^2} = \frac{3}{4}.$$

3. Sejam A, B e C os algarismos de N, isto é, $N = 100A + 10B + C$. Como N é pelo menos 100, S tem de ser pelo menos 200, e como S é soma de parcelas de números de 2 algarismos, a soma que origina S tem pelo menos 3 parcelas. Logo N tem 3 algarismos distintos ou 2 algarismos distintos e nenhum deles é 0.

   No segundo caso, S é soma de exatamente 3 parcelas. Notemos que $N - (10B + C) \geq 100$, logo $2N - (10B + C) \geq 200 > S - (10B + C)$, onde a última desigualdade resulta do facto de se estar a remover uma das parcelas da soma de S, logo é a soma de dois números de dois algarismos, sendo então menor que 200.

   Resta ver o caso em que todos os algarismos são distintos.

   Se A, B e C não forem 0, então existem 6 números possíveis, e cada algarismo aparece duas vezes nas unidades e duas vezes nas dezenas. Logo $S = 2 \times (10A + A + 10B + B + 10C + C) = 2 \times 11 \times (A + B + C)$. Como $S = 2N$, temos que $2 \times 11 \times (A + B + C) = 2 \times (100A + 10B + C)$, logo $B + 10C = 89A$, o que implica $A = 1$, $B = 9$ e $C = 8$.

   Se B ou C forem 0, comparando com S do caso anterior, podemos subtrair $A + B + C$, pois uma das parcelas é 0, e as outras são as parcelas da soma S que deixam de ser de dois algarismos. Logo $S = 21 \times (A + B + C)$. Como $S = 2N$ então $179A = B + 19C$, que por sua vez implica $A = 1$, $B = 8$ e $C = 9$, o que contradiz B ou C serem 0.

   Logo a única hipótese é $N = 198$.

4. Os números de 1 a 9 podem ser agrupados consoante o seu resto na divisão por 3:

   - $3, 6$ e 9 têm resto 0;
   - $1, 4$ e 7 têm resto 1;
   - $2, 5$ e 8 têm resto 2.

   Os números do primeiro grupo podem colocados em qualquer caixa, havendo um total de $3^3 = 27$ maneiras diferentes de o fazer.

   Suponhamos que os números do segundo grupo ficam na mesma caixa. Então os elementos do terceiro grupo também têm que ficar juntos. Neste caso, temos $3 \times 3 = 9$ maneiras de escolher as caixas respetivas.

   Suponhamos agora que os números do segundo grupo ficam em duas caixas. Um dos elementos fica sozinho e na sua caixa tem de ficar um elemento do terceiro grupo. Os outros dois elementos do segundo grupo ficam juntos e na sua caixa têm de ficar os outros dois elementos do terceiro grupo. Neste caso, temos $3 \times 3 = 9$ maneiras de escolher os elementos de cada grupo que ficam sozinhos e $3 \times 2 = 6$ maneiras de escolher as caixas, num total de $9 \times 6 = 54$ maneiras.

   Suponhamos finalmente que os números do segundo grupo ficam em três caixas. Em cada caixa tem de ficar um elemento do terceiro grupo. Neste caso, temos $3 \times 2 = 6$ maneiras de escolher as caixas para cada grupo, num total de $6 \times 6 = 36$ maneiras.

   Assim, ao todo, há $27 \times (9 + 54 + 36) = 27 \times 99 = 2673$ maneiras diferentes de colocar os números nas caixas.

XLII OPM - 2ª Eliminatória - 10.01.2024 - Categoria B - 10º/12º anos

Duração: 2 horas
Cada questão vale 10 pontos

Justifica convenientemente as tuas respostas e indica os principais cálculos.
Não é permitido o uso de calculadoras.

1. A Alice, a Beatriz, a Carla, o Delfim e o Eurico fizeram uma troca de prendas. Cada um colocou uma prenda num saco e depois cada um deles tirou uma prenda. No final, dois deles ficaram com a prenda que tinham levado, e os outros três com prendas diferentes.

   De quantas maneiras é possível as prendas terem sido distribuídas?

2. Determina todos os pares (x, y) de números reais tais que
$$xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{xy} + x + y$$

3. Seja $[ABCD]$ um losango com o ângulo BAD agudo. A circunferência com centro em A e que passa por D interseta a reta CD de novo no ponto E. As retas BE e AC intersetam-se no ponto S.

   Mostra que existe uma circunferência que contém os pontos A, S, D e E.

4. Um número diz-se $indiferente$ se cada um dos seus algarismos interiores (isto é, nem o primeiro nem o último) for igual à diferença dos seus dois vizinhos. Por exemplo, 20224 é um número indiferente com 3 algarismos distintos.

   Qual é o maior número de algarismos distintos que um número indiferente pode ter?

Cada questão vale 10 pontos

Sugestões para a resolução dos problemas

1. Primeiro vamos escolher as duas crianças que ficaram a própria prenda. Existem dez maneiras de escolher duas crianças deste grupo $\{AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE\}$, onde cada criança é representada pela inicial do seu nome.

   Depois de fixarmos as duas crianças que ficaram com a prenda que levaram, por exemplo a Alice e a Beatriz, há apenas duas maneiras de trocar as prendas entre os outras três crianças: a Carla recebe a prenda do Delfim, o Delfim recebe a prenda do Eurico e o Eurico recebe a prenda da Carla; ou exatamente o oposto.

   Como este raciocínio não depende das duas crianças que fixámos inicialmente, é possível distribuir as prendas de $10 \times 2 = 20$ maneiras diferentes.

2. Comecemos por multiplicar ambos os lados de expressão por xy:

$$x^2y^2 + y + x = 1 + x^2y + y^2x$$

   Passando todos os termos para o lado esquerdo e agrupando os termos com o mesmo expoente em x obtemos:

$$x^2y^2 + y + x - 1 - x^2y - y^2x = 0$$
$$x^2(y^2 - y) + x(1 - y^2) + y - 1 = 0$$

   Então $y - 1$ é um fator do primeiro membro, pelo que podemos colocá-lo em evidência e agrupar os termos com o mesmo expoente em y

$$(y-1)(x^2y - x(1+y) + 1) = 0$$
$$(y-1)((x^2 - x)y - x + 1) = 0$$

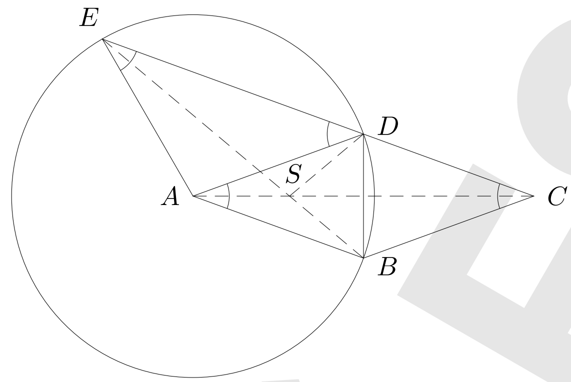
   Então $x - 1$ é um fator do primeiro membro, pelo que podemos colocá-lo em evidência

$$(y-1)(x-1)(xy-1) = 0$$

   Logo obtemos as três famílias de soluções:

   - $x = 1$ e $y \neq 0$;
   - $y = 1$ e $x \neq 0$;
   - $x \neq 0$ e $y = \frac{1}{x}$.

3. Como $[ABCD]$ é um losango, então $D\hat{A}C = C\hat{A}B = D\hat{C}A = B\hat{C}A = \alpha$.



Observe-se que o ângulo EDA é externo ao triângulo $[DAC]$, logo $E\hat{D}A = 2\alpha$. Uma vez que $\overline{EA} = \overline{AD}$, o triângulo $[EDA]$ é isósceles, temos $A\hat{E}D = A\hat{D}E = 2\alpha$ e $E\hat{A}D = 180° - 4\alpha$. Assim, $E\hat{A}B = 180° - 2\alpha$ e, como $[EAB]$ é isósceles, tem-se $A\hat{E}B = A\hat{B}E = \alpha$.

Por outro lado, S pertence a AC, a mediatriz de $[DB]$, logo $\overline{SB} = \overline{SD}$ e os triângulos $[ABS]$ e $[ADS]$ são congruentes. Então $A\hat{D}S = A\hat{B}S = \alpha$ e conclui-se que $A\hat{S}D = 180° - 2\alpha$.

Como os ângulos opostos do quadrilátero $[EASD]$ são suplementares podemos concluir que este quadrilátero é cíclico.

4. Consideremos um número N com o maior número possível de algarismos distintos. Seja a o menor dos seus algarismos e $b > a$ um algarismo distinto à sua direita.

Suponhamos primeiro que $a > 0$. Como cada algarismo interior é igual à diferença dos seus dois vizinhos, então os algarismos seguintes, se existirem, são os da sequência seguinte:

$$a, \quad b, \quad a+b, \quad a+2b, \quad 2a+3b, \quad 3a+5b$$

Como $3a + 5b \geq 3 \times 1 + 5 \times 2 = 13$, esta sequência tem no máximo 5 algarismos. Isto acontece no caso em que $a = 1$, $b = 2$, obtendo-se a sequência 12358.

Repetindo o mesmo raciocínio à esquerda de a, concluimos que a maior sequência é 85321, obtendo-se $N = 8532112358$. No entanto, esta sequência não tem novos algarismos. Para maximizar a quantidade de novos algarismos, à esquerda de a devemos escolher a alternativa $b = 3$, obtendo-se $N = 74312358$, que tem 7 algarismos distintos.

Se $a = 0$, este algarismo pode aparecer várias vezes em N, uma vez que podemos ter sequências

$$0, \quad b, \quad b, \quad 0$$

No entanto, estas sequências são todas iguais e, para além delas, só pode haver sequências (à direita ou à esquerda)

$$0, \quad b, \quad b, \quad 2b, \quad 3b, \quad 5b, \quad 8b$$

O número máximo de algarismos distintos neste caso é 6, como por exemplo, no número 8532110110112358.

Portanto, o número máximo de algarismos distintos num número indiferente é 7.

XLII OPM - Final - 1º Dia - 22.03.2024 - Categoria B - 10º/12º anos

Duração: 3 horas
Cada questão vale 10 pontos

Justifica convenientemente as tuas respostas e indica os principais cálculos.
Não é permitido o uso de calculadoras.

1. Um número inteiro positivo diz-se $escalabitano$ se a soma dos seus algarismos for um múltiplo de 17 e a soma dos algarismos do seu sucessor também for múltipla de 17. Qual é o menor número escalabitano?

2. Consideremos um triângulo $[ABC]$. Os pontos médios de $[BC]$, $[CA]$ e $[AB]$ são D, E e F, respetivamente. As medianas $[AD]$ e $[BE]$ são perpendiculares, com $\overline{AD} = 12$ e $\overline{BE} = 9$. Qual é o comprimento de $[CF]$?

3. Considera sequências de 0's e 1's de tal modo que há no máximo dois zeros consecutivos. Quantas sequências deste tipo existem com comprimento 10?

Duração: 3 horas
Cada questão vale 10 pontos

Sugestões para a resolução dos problemas

1. Designemos por N o menor número escalabitano e por $s(n)$ a soma dos algarismos de um número inteiro n.

   Seja a o algarismo das unidades de N. Se fosse $a < 9$, então $s(N+1) = s(N)+1$, logo N e $N+1$ não poderiam ser ambos múltiplos de 17. Logo $a = 9$.

   Seja b o algarismo das dezenas de N. Se fosse $b < 9$, então $s(N+1) = s(N) - 8$, logo N e $N+1$ não poderiam ser ambos múltiplos de 17. Logo $b = 9$.

   Portanto $s(N) \geq 18$ e como $s(N)$ é múltiplo de 17, temos $s(N) \geq 34$.

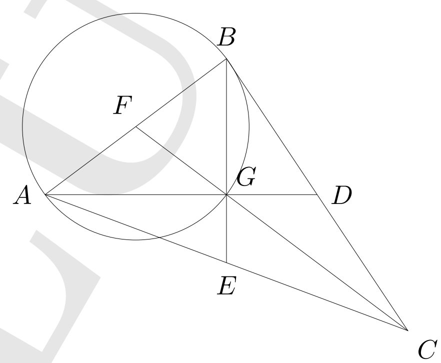
   Assim, os menores números n terminados em 99, com $s(n)$ múltiplo de 17, são 7999 e 8899.

   Para $n = 7999$, temos $s(n+1) = s(8000) = 8$.

   Para $n = 8899$, temos $s(n+1) = s(8900) = 17$.

   Portanto, $N = 8899$.

2. Seja G o baricentro de $[ABC]$, isto é, a interseção das medianas. Os triângulos $[BGF]$ e $[AFG]$ têm a mesma área (têm igual base, pois $\overline{BF} = \overline{FA}$ e a mesma altura relativamente a essa base). De igual modo, $[AFC]$ e $[BFC]$ têm a mesma área, e removendo $[BGF]$ e $[AFG]$, temos que $[AGC]$ e $[BGC]$ também têm áreas iguais. Repetindo este argumento para os restantes vértices, temos que os 3 triângulos $[AGB]$, $[BGC]$ e $[CGA]$ têm um terço da área de $[ABC]$.



   Como $[ABC]$ e $[BGC]$ partilham a base $[BC]$ e as medianas relativas a este lado estão sob a mesma resta e são proporcionais à altura relativas a este lado, temos que $\overline{AD} = 3\overline{GD}$. Analogamente, $\overline{CF} = 3\overline{FG}$ e $\overline{BE} = 3\overline{GE}$.

   Logo $\overline{AG} = \overline{AD} - \overline{GD} = \overline{AD} - \frac{\overline{AD}}{3} = 8$ e $\overline{BG} = \overline{BE} - \overline{ED} = \overline{BE} - \frac{\overline{BE}}{3} = 6$.

   Como $[AGB]$ é um triângulo retângulo em G, pelo Teorema de Pitágoras temos que $\overline{BA} = 10$. Notemos que este triângulo está inscrito numa semicircunferência centrada em F, logo $\overline{FG} = \overline{FA} = \frac{\overline{BA}}{2} = 5$.

   Logo $\overline{CF} = 3\overline{FG} = 15$.

3. Seja $p(n)$ o número de sequências legais com n algarismos, e $p_1(n)$ o número de sequências legais com n algarismos, acabadas em 1.

   Então, para todo o $n > 2$, temos que $p(n) = p_1(n) + p_1(n-1) + p_1(n-2)$, pois cada sequência acaba em "1", "10" ou "100".

   Temos também que, para todo o $n > 3$, $p_1(n) = p_1(n-1) + p_1(n-2) + p_1(n-3)$, pois cada sequência acabada em "1" acaba em "11", "101" ou "1001".

   Então:

$$\begin{array}{rcccccc} p(10) & = & p_1(10) & + & p_1(9) & + & p_1(8) \\ & = & 2p_1(9) & + & 2p_1(8) & + & p_1(7) \\ & = & 4p_1(8) & + & 3p_1(7) & + & 2p_1(6) \\ & = & 7p_1(7) & + & 6p_1(6) & + & 4p_1(5) \\ & = & 13p_1(6) & + & 11p_1(5) & + & 7p_1(4) \\ & = & 24p_1(5) & + & 20p_1(4) & + & 13p_1(3) \\ & = & 44p_1(4) & + & 37p_1(3) & + & 24p_1(2) \\ & = & 81p_1(3) & + & 68p_1(2) & + & 44p_1(1) \end{array}$$

   Finalmente resta ver que $p_1(1) = 1$, pois só existe a sequência "1", $p_1(2) = 2$, pois só existem as sequências "01" e "11", e $p_1(3) = 4$, pois só existem as sequências "111", "101", "011" e "001".

   Logo $p(10) = 81 \times 4 + 68 \times 2 + 44 \times 1 = 504$.

Duração: 3 horas
Cada questão vale 10 pontos

Justifica convenientemente as tuas respostas e indica os principais cálculos.
Não é permitido o uso de calculadoras.

4. A circunferência inscrita no quadrado $[ABCD]$, de lado 10 cm, interseta os lados $[BC]$ e $[AD]$ nos pontos M e N, respetivamente. O ponto I é o ponto de interseção de $[AM]$ com a circunferência, diferente de M, e P é o pé da perpendicular a MN que passa por I. Determina $\overline{PI}$.

5. Num campeonato desportivo participam dez equipas, cinco portuguesas e cinco espanholas. Cada equipa joga com quatro equipas diferentes: um jogo em casa e outro jogo fora contra equipas portuguesas; e um jogo em casa e outro jogo fora contra equipas espanholas.

   De quantas maneiras diferentes é possível escolher os jogos deste campeonato?

6. O Alexandre e o Bernardo estão a jogar o seguinte jogo. No início têm n ervilhas num saco. Na primeira jogada, o Alexandre pode tirar uma ervilha; na segunda jogada, o Bernardo pode tirar uma ou duas ervilhas, e assim por diante, ou seja, jogam alternadamente e na jogada k, podem tirar qualquer número de ervilhas de 1 a k. Ganha aquele que deixar o saco vazio.

   Para cada valor de n, quem tem uma estratégia vencedora, isto é, quem pode garantir que ganha o jogo, independentemente das jogadas do outro jogador?

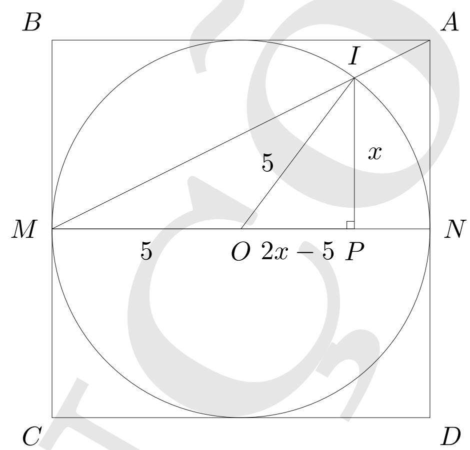
Sugestões para a resolução dos problemas

4. Sejam $x = \overline{PI}$ e O o centro da circunferência circunscrita ao quadrado $[ABCD]$.

   Os triângulos $[AMN]$ e $[IMP]$ são semelhantes, logo

$$\frac{\overline{MP}}{x} = \frac{\overline{MN}}{\overline{AN}} = 2, \text{ ou seja, } \overline{MP} = 2x.$$

   Tendo em conta que $\overline{OI} = 5$, tem-se $\overline{OP} = \overline{MP} - 5 = 2x - 5$.



   Por outro lado, o triângulo $[OPI]$ é retângulo em P e, pelo Teorema de Pitágoras, tem-se

$$\overline{PI}^2 + \overline{OP}^2 = \overline{OI}^2$$

   Logo

$$x^2 + (2x-5)^2 = 5^2, \text{ ou seja, } 5x^2 - 20x = 0,$$

   de onde se conclui que $\overline{IP} = 4$.

5. Começamos por fixar uma das equipas portuguesas A. Para o jogo em casa desta equipa contra outra equipa portuguesa há 4 hipótese de escolha. Essa equipa vai jogar em casa contra uma das outras 3 equipas portuguesas. A terceira equipa C não pode jogar em casa contra A, porque sobrariam apenas duas equipas portuguesas que teriam que jogar entre si duas vezes. Sendo assim, C joga em casa contra uma das duas equipas que faltam, e esta recebe a última, que finalmente recebe a equipa A que fixámos originalmente. Este raciocínio não depende da equipa que escolhemos em primeiro lugar. Há assim $4 \times 3 \times 2 = 24$ escolhas para os jogos entre equipas portuguesas. De igual modo, há 24 escolhas para os jogos entre equipas espanholas.

Para os jogos entre equipas dos dois países, temos duas maneiras diferentes de organizar os jogos.

(a) Existem duas equipas portuguesas A e B e duas equipas espanholas X e Y tais que A e B jogam contra X e Y. Neste caso, é preciso apenas escolher se A joga em casa com X ou com Y, ou seja, há duas hipóteses. Neste cenário, as restantes $3+3$ equipas terão que jogar entre si. A "primeira" equipa portuguesa recebe uma das 3 espanholas e esta recebe uma das duas restantes portuguesas e assim sucessivamente, num total de $3 \times 2 \times 2 = 12$ escolhas diferentes.

Nesta maneira de organizar os jogos, é preciso ainda escolher as duas equipas portuguesas A e B de entre as cinco participantes, e as duas equipas espanholas X e Y. Em cada um dos casos, há 10 maneiras diferentes de escolher as duas equipas. Para este caso, temos um total de $2 \times 12 \times 10 \times 10 = 2400$ escolhas.

(b) Se a hipótese anterior não ocorrer, então a primeira equipa portuguesa recebe uma das 5 equipas espanholas, que recebe uma das 4 portuguesas que ainda não foi escolhida, e assim sucessivamente até a última equipa espanhola receber a primeira equipa portuguesa. Temos então $5 \times 4^2 \times 3^2 \times 2^2 = 2880$ escolhas.

Em conclusão, há $24 \times 24 \times (2400 + 2880) = 3041280$ maneiras diferentes de escolher os jogos deste campeonato.

6. Comecemos por ver que, se $n = i^2, i^2+1, \ldots, i^2+(i-1)$, para $i \geq 1$, o Alexandre tem uma estratégia ganhadora.

Na primeira jogada, o Alexandre tira $1 = 1^2$ ervilha.

Se o Bernardo tirar $1 \leq b \leq 2i-2$ ervilhas na jogada $2i-2$, para $i \geq 2$, o Alexandre pode tirar $1 \leq 2i-1-b \leq 2i-2$ ou $2 \leq 2i-b \leq 2i-1$ ervilhas na jogada $2i-1$, num total de $2i-1$ ou $2i$ ervilhas nestas duas jogadas. Designemos este total por $2i-1+\varepsilon_i$, com $\varepsilon_i = 0, 1$.

Assim, o Alexandre consegue garantir retirar um total de

$$1 + (3+\varepsilon_2) + (5+\varepsilon_3) + \cdots + (2i-1+\varepsilon_i) = i^2 + r,$$

onde $r = 0, \ldots, i-1$.

Vejamos agora que, se $n = i^2+i, i^2+(i+1), \ldots, i^2+2i$, para $i \geq 1$, o Bernardo tem uma estratégia ganhadora.

Se o Alexandre tirar $1 \leq a \leq 2i-1$ ervilhas na jogada $2i-1$, para $i \geq 1$, o Bernardo pode tirar $1 \leq 2i-a \leq 2i-1$ ou $2 \leq 2i+1-a \leq 2i$ ervilhas na jogada $2i$, num total de $2i$ ou $2i+1$ ervilhas nestas duas jogadas. Designemos este total por $2i+1-\varepsilon_i$, com $\varepsilon_i = 0, 1$.

Assim, o Bernardo consegue garantir retirar um total de

$$(3-\varepsilon_1) + (5-\varepsilon_2) + \cdots + (2i+1-\varepsilon_i) = (i+1)^2 - r - 1 = i^2 + (2i-r),$$

onde $r = 0, \ldots, i$.