

COMPENDIUM ONM

*Olimpiada Națională de Matematică, Etapa Națională
Rumanía*



Gerard Romo Garrido

Toomates Coolección vol. 99



Toomates Colección

Los libros de **Toomates** son materiales digitales y gratuitos. Son digitales porque están pensados para ser consultados mediante un ordenador, tablet o móvil. Son gratuitos porque se ofrecen a la comunidad educativa sin coste alguno. Los libros de texto pueden ser digitales o en papel, gratuitos o en venta, y ninguna de estas opciones es necesariamente mejor o peor que las otras. Es más: Suele suceder que los mejores docentes son los que piden a sus alumnos la compra de un libro de texto en papel, esto es un hecho. Lo que no es aceptable, por inmoral y mezquino, es el modelo de las llamadas "licencias digitales", "licencias de uso" y en general cualquier forma de "pago por el acceso a los materiales didácticos", con las que algunas empresas pretenden cobrar a los estudiantes, una y otra vez, por acceder a los mismos contenidos (unos contenidos que, además, son de una bajísima calidad). Este modelo de negocio es miserable, pues impide el compartir un mismo material, incluso entre dos hermanos, pretende convertir a los estudiantes en un mercado cautivo, exige a los estudiantes y a las escuelas costosísimas líneas de Internet, pretende pervertir el conocimiento, que es algo social, público, convirtiéndolo en un producto de propiedad privada, accesible solo a aquellos que se lo puedan permitir, y solo de una manera encapsulada, fragmentada, impidiendo el derecho del alumno de poseer todo el libro, de acceder a todo el libro, de moverse libremente por todo el libro.

Nadie puede pretender ser neutral ante esto: Mirar para otro lado y aceptar el modelo de pago por acceso a los materiales es admitir un mundo más injusto, es participar en la denegación del acceso al conocimiento a aquellos que no disponen de medios económicos, y esto en un mundo en el que las modernas tecnologías actuales permiten, por primera vez en la historia de la Humanidad, poder compartir el conocimiento sin coste alguno, con algo tan simple como es un archivo "pdf". **El conocimiento no es una mercancía.** El proyecto Toomates tiene como objetivo la promoción y difusión entre el profesorado y el colectivo de estudiantes de unos materiales didácticos libres, gratuitos y de calidad, que fuerce a las empresas comerciales a competir ofreciendo alternativas de pago atractivas aumentando la calidad de los materiales que ofrecen, (que son muy mediocres) y no mediante retorcidas técnicas comerciales.

Estos libros se comparten bajo una licencia "**Creative Commons 4.0 (Attribution Non Commercial)**": Se permite, se promueve y se fomenta cualquier uso, reproducción y edición de todos estos materiales siempre que sea sin ánimo de lucro y se cite su procedencia. Todos los libros se ofrecen en dos versiones: En formato "**pdf**" para una cómoda lectura y en el formato "**doc**" de MSWord para permitir y facilitar su edición y generar versiones parcial o totalmente modificadas. **¡Libérate de la tiranía y mediocridad de los productos comerciales! Crea, utiliza y comparte tus propios materiales didácticos.**

Problem Solving (en español):

[Geometría Axiomática](#) [Problemas de Geometría Vol. 1](#) [Vol. 2](#) [Vol. 3](#)
[Introducción a la Geometría](#) [Álgebra](#) [Teoría de números Vol. 1](#) [Vol. 2](#) [Combinatoria](#)
[Probabilidad](#) [Trigonometría](#) [Desigualdades](#) [Números complejos](#) [Calculus & Precalculus](#)

Libros de texto para ESO y bachillerato (en español y en catalán):

[Cálculo infinitesimal ESP](#) [CAT](#) [Álgebra Lineal ESP](#) [CAT](#) [Geometría Lineal ESP](#) [CAT](#)
[Números Complejos ESP](#) [CAT](#) [Combinatoria y probabilidad ESP](#) [CAT](#) [Estadística ESP](#) [CAT](#)
[Programación Lineal ESP](#) [CAT](#) [Álgebra ESP](#) [CAT](#) [Trigonometría ESP](#) [CAT](#)
[Geometría analítica ESP](#) [CAT](#) [Funciones ESP](#) [CAT](#) [Números \(Preálgebra\) ESP](#) [CAT](#)
[Proporcionalidad ESP](#) [CAT](#) [Medidas geométricas ESP](#) [CAT](#) [Mates amb Excel](#)

PAU españolas:

[Cataluña TEC](#) [Cataluña CCSS](#) [Valencia](#) [Galicia](#) [País Vasco](#) [Balears](#)

Reválidas internacionales:

[Portugal](#) [Italia](#) [Francia](#) [Rumanía](#) [Hungría](#) [Polonia](#) [Pearson Edexcel International A Level](#)
[China-Gaokao](#) [China-Zhongkao](#) [Corea-Suneung](#) [Israel-Bagrut](#) [Cambridge Int A Level](#)
[Cambridge IGCSE](#) [AQA GCSE](#) [International Baccalaureate \(IB\)](#) [Pearson Edexcel IGCSE](#)

Evaluación diagnóstica y pruebas de acceso:

[ACM6EP](#) [ACM4](#) [CFGS](#) [PAP](#)

Competiciones matemáticas:

Canguro: [España](#) [Cataluña](#) [Francia](#) [USA](#) [Reino Unido](#) [Austria](#)
USA: [Mathcounts](#) [AMC 8](#) [10](#) [12](#) [AIME](#) [USAJMO](#) [USAMO](#) [TSTST](#) [TST](#) [ELMO](#) [Putnam](#) [HMMT](#)
España: [OME](#) [OMEFL](#) [OMEEX](#) [OMC](#) [OMEA](#) [OMEM](#) [OMA](#) [CDP](#) [OFEM](#)
Europa: [OMI](#) [Arquimede](#) [BMO](#) [BalkanMO](#) [JBMO](#) [OPM](#) [OMP](#) [OMJ](#) [ONM](#)
Internacional: [IMO](#) [IGO](#) [SMT](#) [INMO](#) [CMO](#) [EGMO](#) [KMO](#) [KJMO](#)
AHSME: [Book 1](#) [2](#) [3](#) [4](#) [5](#) [6](#) [7](#) [8](#) [9](#)

Otros materiales:

Pizzazz! ([Book A](#) [B](#) [C](#) [D](#) [E](#) [Pre-Algebra](#) [Algebra](#)), [REOIM](#) , [Llibre3r](#) , [Excalibur](#)

¡Genera tus propias versiones de este documento! Siempre que es posible se ofrecen las versiones editables "MS Word" de todos los materiales para facilitar su edición.

¡Ayuda a mejorar! Envía cualquier duda, observación, comentario o sugerencia a toomates@gmail.com

¡No utilices una versión anticuada! Todos estos libros se revisan y amplían constantemente. Descarga totalmente gratis la última versión de estos documentos en los correspondientes enlaces superiores, en los que siempre encontrarás la versión más actualizada.

Consulta el **catálogo de libros** completo en <http://www.toomates.net>

¿Problemas para descargar algún documento? Descarga toda la biblioteca Toomates [Aquí](#) 

Visita mi **Canal de Youtube**: <https://www.youtube.com/c/GerardRomo> 

Visita mi **blog**: <https://toomatesbloc.blogspot.com/>

Versión de este documento: 10/02/2026

Índice.

	Gymnaziu				Licee			
	V (5º PR)	VI (6º PR)	VII (1º ESO)	VIII (2º ESO)	IX (3º ESO)	X (4º ESO)	XI (1º bac)	XII (2º bac)
2013	4	7	10	14	18	21	24	28
2014	33	33	40	44	48	52	56	60
2015	63	65	67	69	71	73	75	78
2016	80	81	84	86	89	91	95	99
2017	104	106	108	111	113	116	118	121
2018	124	126	128	130	133	135	138	141
2019	145	148	151	154	158	162	163	166
2021 (II)	169	172	175	178	181	185	189	193
2021 (III)	198	202	206	209	213	217	221	225
2022	230	233	236	240	245	249	252	258
2023	262	264	266	269	272	275	279	283
2024	288	290	292	296	299	304	308	313
2025	317	321	325	327	329	334	339	344
Temario para las pruebas V- VIII (Gimnaziu)					351			
Temario para las pruebas IX- XII (Licee)					354			

Fuente.

<https://ssmr.ro/onm2025>

Olimpiada Națională de Matematică
Etapă Națională, Sighișoara, 2 Aprilie 2013

CLASA a V-a

SUBIECTELE

Problema 1. Un număr natural de patru cifre, diferite două câte două, având forma $\overline{abcd}$, se numește *interesant* dacă $a \cdot d + b \cdot c = 33$. Arătați că suma tuturor numerelor interesante de patru cifre este multiplu de 11.

Problema 2. Considerăm o descompunere a tablei de șah 8×8 în p dreptunghiuri care nu se suprapun, astfel încât fiecare dreptunghi să conțină un număr întreg de pătrățele, dintre care jumătate să fie albe și să nu existe două dreptunghiuri având același număr de pătrățele. Determinați valoarea maximă a lui p .

Problema 3. Fie a, b, c, d, x, y, z, t cifre astfel încât $0 < a < b \leq c < d$ și

$$\overline{dcba} = \overline{abcd} + \overline{xyzt}.$$

Determinați toate valorile posibile ale sumei

$$S = \overline{xyzt} + \overline{tzyx}.$$

Problema 4. Elevii unei clase merg pe o potecă de munte, unul în spatele celuilalt. Când Andrei a ajuns la cabană, în cabană se aflau deja jumătate din numărul elevilor aflați încă pe traseu. Bianca a sosit a zecea după Andrei, iar după ea au rămas de două ori mai puțini elevi decât cei ajunși înaintea ei la cabană. Câți elevi sunt în acea clasă?

*Timp de lucru 2 ore. Se acordă în plus 30 de minute pentru întrebări.
Fiecare problemă este notată de la 0 la 7 puncte.*



Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Națională, Sighișoara, 2 Aprilie 2013

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE, CLASA a V-a

Problema 1. Un număr natural de patru cifre diferite două câte două, având forma $\overline{abcd}$, se numește *interesant* dacă $a \cdot d + b \cdot c = 33$. Arătați că suma tuturor numerelor interesante de patru cifre este multiplu de 11.

Soluție. Dacă $\overline{abcd}$ este număr interesant, atunci și numerele $\overline{badc}$, $\overline{cdab}$, $\overline{acbd}$, $\overline{bdac}$, $\overline{cadb}$, $\overline{dbca}$ și $\overline{dcba}$ sunt numere interesante..... **2 p**

Din observația de mai sus deducem că numerele interesante se pot grupa, după această regulă, câte opt..... **2 p**

Avem

$$\overline{abcd} + \overline{badc} + \overline{cdab} + \overline{dcba} + \overline{acdb} + \overline{bdac} + \overline{cadb} + \overline{dbca} = 2222 \cdot (a + b + c + d)$$

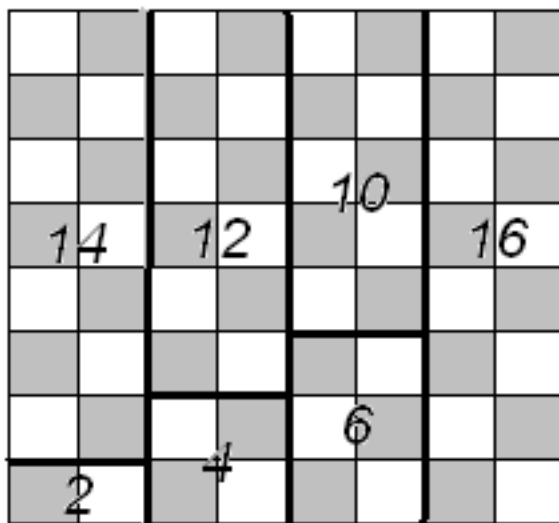
care este multiplu de 11. În concluzie, suma tuturor numerelor interesante de patru cifre este multiplu de 11..... **3p**

Problema 2. Considerăm o descompunere a tablei de șah 8×8 în p dreptunghiuri care nu se suprapun, astfel încât fiecare dreptunghi să conțină un număr întreg de pătrățele, dintre care jumătate să fie albe și să nu existe două dreptunghiuri având același număr de pătrățele. Determinați valoarea maximă a lui p .

Soluție. Dacă $p \geq 8$, dreptunghiurile vor conține, în total, cel puțin $2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 = 72$ pătrățele, ceea ce este imposibil, tabla de șah având numai 64 de pătrățele. **4 p**

Pentru $p = 7$ avem posibilitatea să descompunem tabla.

Iată un exemplu: **3 p**



Problema 3. Fie a, b, c, d, x, y, z, t cifre astfel încât $0 < a < b \leq c < d$ și

$$\overline{dcba} = \overline{abcd} + \overline{xyzt}.$$

Determinați toate valorile posibile ale sumei

$$S = \overline{xyzt} + \overline{tzyx}.$$

Soluție. Cum $\overline{xyzt} = \overline{dcba} - \overline{abcd}$ rezultă $t = 10 + a - d$ **1 p**
Cazul I.

Dacă $b = c$, atunci $z = y = 9$ și $x = d - a - 1$ **1 p**
Cazul II.

Dacă $b < c$, atunci $z = 9 + b - c$, $y = c - b - 1$ și $x = d - a$ **1 p**

Avem $\overline{xyzt} + \overline{tzyx} = 1001(x + t) + 110(y + z)$ **2 p**

În cazul I

$x + t = 9$ și $y + z = 18$, de unde $S = 9009 + 1980 = 10989$ **1 p**

În cazul II

$x + t = 10$ și $y + z = 8$, de unde $S = 10010 + 880 = 10890$ **1 p**

Problema 4. Elevii unei clase merg pe o potecă de munte, unul în spatele celuilalt. Când Andrei a ajuns la cabană, în cabană se aflau deja jumătate din numărul elevilor aflați încă pe traseu. Bianca a sosit a zecea după Andrei, iar după ea au rămas de două ori mai puțini elevi decât cei ajunși înaintea ei la cabană. Câți elevi sunt în acea clasă?

Soluție. Să presupunem că Andrei se află pe poziția n . Atunci înaintea lui sunt $n - 1$, iar în urma lui sunt $2n - 2$ elevi. **1 p**

Bianca se află pe poziția $n + 10$. Înaintea ei sunt $n + 9$, iar în urma ei sunt $\frac{n+9}{2}$ **2 p**

Numărul elevilor, raportat la Andrei, este $n + 2n - 2 = 3n - 2$.

Numărul elevilor, raportat la Bianca, este $n + 10 + \frac{n+9}{2}$.

Obținem ecuația

$$3n - 2 = n + 10 + \frac{n + 9}{2}$$

cu soluția $n = 11$ **3 p**

Numărul de copii este 31. **1 p**



MINISTERUL
EDUCAȚIEI
NAȚIONALE

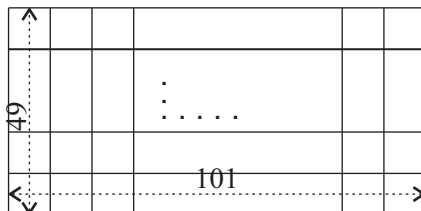
Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Națională, Sighișoara, 2 Aprilie 2013

CLASA a VI-a
SUBIECTELE

Problema 1. Ana, Barbu, Carmen și Dan au de rezolvat 60 de probleme. Ana a rezolvat 45 dintre ele, Barbu a rezolvat 48, Carmen a rezolvat 44, iar Dan a rezolvat 47 de probleme. Arătați că probabilitatea ca o problemă din cele 60 să fie rezolvată de toți cei patru este cel puțin egală cu $\frac{1}{15}$.

Problema 2. Dreptunghiul din figura de mai jos este împărțit în 49×101 pătrate egale. În pătratul din stânga jos se află o monedă. Doi copii imaginează următorul joc: pe rând, fiecare dintre ei mută moneda din locul în care se află pe un pătrat oarecare situat la dreapta, pe aceeași linie sau pe un pătrat oarecare situat deasupra, pe aceeași coloană. Câștigă jucătorul care plasează moneda în pătratul din dreapta sus.

Arătați că primul jucător poate câștiga, oricum ar juca cel de-al doilea.



Problema 3. Se consideră numerele prime $p < q < r$ și numărul natural nenul $a < p$. Numărul n este cel mai mic număr natural nenul care împărțit la p , q și r dă, de fiecare dată, restul cu a mai mic decât împărțitorul.

- Determinați, în funcție de p , q , r și a , numărul n .
- Dacă $n = 1000$, determinați valorile posibile ale lui a .

Problema 4. Se consideră triunghiul ABC cu $AB = AC$ și $m(\widehat{BAC}) = 90^\circ$. Fie $D \in (BC)$ astfel încât $AD \perp BC$. Bisectoarea unghiului ABC intersectează dreapta AD în punctul I .

Demonstrați că $BA + AI = BC$.

*Timp de lucru 2 ore. Se acordă în plus 30 de minute pentru întrebări.
Fiecare problemă este notată de la 0 la 7 puncte.*



Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Națională, Sighișoara, 2 Aprilie 2013

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE, CLASA a VI-a

Problema 1. Ana, Barbu, Carmen și Dan au de rezolvat 60 de probleme. Ana a rezolvat 45 dintre ele, Barbu a rezolvat 48, Carmen a rezolvat 44, iar Dan a rezolvat 47 de probleme. Arătați că probabilitatea ca o problemă din cele 60 să fie rezolvată de toți cei patru este cel puțin egală cu $\frac{1}{15}$.

Soluție. Ana nu rezolvă 15 probleme, Barbu nu rezolvă 12 probleme, Carmen nu rezolvă 16 probleme, Dan nu rezolvă 13 probleme. **2 p**

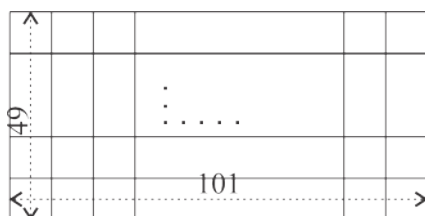
În total, pot rămâne cel mult $15 + 12 + 16 + 13 = 56$ de probleme care să fie nerezolvate de cel puțin un copil. **2 p**

Cum sunt 60 de probleme, există cel puțin 4 probleme rezolvate de toți copiii. **2 p**

De aici probabilitatea ca o problemă să fie rezolvată de toți copiii este de cel puțin $\frac{4}{60}$, adică $\frac{1}{15}$ **1 p**

Problema 2. Dreptunghiul din figura de mai jos este împărțit în 49×101 pătrate egale. În pătratul din stânga jos se află o monedă. Doi copii imaginează următorul joc: pe rând, fiecare dintre ei mută moneda din locul în care se află pe un pătrat oarecare situat la dreapta, pe aceeași linie sau pe un pătrat oarecare situat deasupra, pe aceeași coloană. Câștigă jucătorul care plasează moneda în pătratul din dreapta sus.

Arătați că primul jucător poate câștiga, oricum ar juca cel de-al doilea.



Soluție.

Câștigă jucătorul care ocupă primul un pătrățel situat pe diagonala cu capetele în pozițiile (53, 1) și (101, 49). **2 p**

Primul jucător mută moneda pe orizontală la dreapta până la poziția 53. Moneda se va afla în pătratul (53, 1). **3 p**

Mai departe, la orice mutare efectuată de cel de-al doilea jucător pe o direcție (orizontală sau verticală) cu un anumit număr de căsuțe, primul jucător mută pe cealaltă direcție un număr identic de căsuțe, astfel încât să ajungă pe poziția $(53 + i, i + 1)$ cu $1 \leq i \leq 48$, adică pe diagonala pătratului de latură 49 și cu unul dintre vârfuri în colțul din dreapta sus, de poziție (101, 49). **2 p**

Problema 3. Se consideră numerele prime $p < q < r$ și numărul natural nenul $a < p$. Numărul n este cel mai mic număr natural nenul care împărțit la p , q și r dă, de fiecare dată, restul cu a mai mic decât împărțitorul.

a) Determinați, în funcție de p , q , r și a , numărul n .

b) Dacă $n = 1000$, determinați valorile posibile ale lui a .

Soluție: a) Din enunț $n = pc_1 + p - a$ sau $n + a = p(c_1 + 1)$, de unde deducem că $p \mid n + a$.

Analog deducem $q \mid n + a$ și $r \mid n + a$ **2 p**

Cum p , q , r sunt numere prime diferite rezultă că $pqr \mid n + a$, de unde $n = pqr - a$ **1 p**

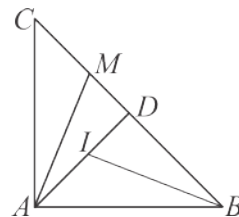
b) $n = 1000$ implică $pqr - a = 1000$. Din $a < p$ rezultă că $pqr - p < 1000$ sau $p(qr - 1) < 1000$ **1 p**

Dacă $p \geq 11$, atunci $q \geq 13$ și $r \geq 17$, de unde $p(qr - 1) \geq 11 \cdot (13 \cdot 17 - 1)$, adică $p(qr - 1) \geq 1000$. Deducem că $p \in \{2, 3, 5, 7\}$ **1 p**

Deoarece $a < p$ avem $a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Dacă $a = 1$ obținem soluția $p = 7, q = 11, r = 13$ **1 p**

Justificarea faptului că celelalte cazuri nu sunt posibile. **1 p**

Problema 4. Se consideră triunghiul ABC cu $AB = AC$ și $m(\widehat{BAC}) = 90^\circ$. Fie $D \in (BC)$ astfel încât $AD \perp BC$. Bisectoarea unghiului ABC intersectează dreapta AD în punctul I . Demonstrați că $BA + AI = BC$.



Soluție. Triunghiul ABC isoscel de bază $[BC]$ și $m(\widehat{BAC}) = 90^\circ$ implică $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{ACB}) = 45^\circ$.

Din $[BI]$ bisectoarea unghiului ABC rezultă $m(\widehat{ABI}) = m(\widehat{CBI}) = 22^\circ 30'$ **2 p**

Considerăm punctul $M \in (BC)$ astfel încât $AB = BM$ și atunci triunghiul ABM este isoscel de bază $[AM]$, de unde $m(\widehat{BAM}) = m(\widehat{BMA}) = \frac{180^\circ - m(\widehat{ABM})}{2} = \frac{135^\circ}{2} = 67^\circ 30'$ **2 p**

Avem $m(\widehat{CAM}) = m(\widehat{BAC}) - m(\widehat{BAM}) = 90^\circ - 67^\circ 30' = 22^\circ 30'$.

În triunghiul isoscel ABC , de bază $[BC]$, cum AD este înălțime rezultă $[AD]$ bisectoarea unghiului BAC , de unde $m(\widehat{BAD}) = 45^\circ$.

Din $AB = AC$, $m(\widehat{ABI}) = m(\widehat{CAM}) = 22^\circ 30'$ și $m(\widehat{BAI}) = m(\widehat{ACM}) = 45^\circ$, conform cazului de congruență U.L.U. obținem $\triangle ABI \equiv \triangle CAM$, de unde $AI = CM$.

Avem $BC = BM + MC = AB + AI$ **3 p**



Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Națională, Brașov, 2 aprilie 2013

CLASA a VII-a

Problema 1. În triunghiul ABC , bisectoarea AD ($D \in BC$) și mediana BE ($E \in AC$) se intersectează în punctul P . Dreptele AB și CP se întâlnesc în punctul F . Paralela prin B la CF intersectează dreapta DF în punctul M . Demonstrați că $DM = BF$.

Problema 2. Un zar este un cub de muchie 1, având înscrise pe fețe cifrele de la 1 la 6, astfel încât suma cifrelor de pe oricare două fețe opuse este 7.

Folosind 27 de zaruri, construim un cub cu muchia 3.

Stabiliți ce valori poate lua suma tuturor cifrelor de pe cele șase fețe ale cubului de muchie 3.

Problema 3. Fie $ABCD$ un dreptunghi cu $5AD < 2AB$. Pe latura AB se consideră punctele S și T astfel încât $AS = ST = TB$. Notăm cu M , N și P proiecțiile punctelor A , S respectiv T pe dreptele DS , DT respectiv DB .

Arătați că punctele M , N și P sunt coliniare dacă și numai dacă $15AD^2 = 2AB^2$.

Problema 4. Fie n un număr natural nenul; considerăm mulțimea $M = \{1, 2, \dots, 2n + 1\}$.

Stabiliți în câte moduri se poate partiționa mulțimea M în trei submulțimi nevide A, B, C ($A \cup B \cup C = M$, $A \cap B = B \cap C = C \cap A = \emptyset$) astfel încât să fie satisfăcute simultan condițiile:

- (i) pentru orice $a \in A$ și orice $b \in B$, restul împărțirii lui a la b aparține mulțimii C ;
- (ii) pentru oricare $c \in C$, există $a \in A$ și $b \in B$ astfel încât c este restul împărțirii lui a la b .

Timp de lucru 4 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.



Olimpiada Națională de Matematică
Etapă finală, Brașov, 2 aprilie 2013

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE – CLASA a VII-a

Problema 1. În triunghiul ABC , bisectoarea AD ($D \in BC$) și mediana BE ($E \in AC$) se intersectează în punctul P . Dreptele AB și CP se întâlnesc în punctul F . Paralela prin B la CF intersectează dreapta DF în punctul M . Demonstrați că $DM = BF$.

Soluție. Din teorema lui Ceva rezultă că $\frac{BF}{FA} \cdot \frac{AE}{EC} \cdot \frac{CD}{DB} = 1$, de unde $\frac{BF}{FA} = \frac{BD}{DC}$. Folosind reciproca teoremei lui Thales, obținem că $DF \parallel AC$ **3p**

Deoarece $\triangle BFD \sim \triangle BAC$, deducem că $\frac{BF}{BA} = \frac{FD}{AC}$, așadar
 $BF = \frac{AB}{AC} \cdot FD$ **1p**

Cum $\triangle BDM \sim \triangle CDF$, rezultă că $\frac{DM}{FD} = \frac{BD}{DC}$. Însă, din teorema bisectoarei, $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$, prin urmare $DM = \frac{AB}{AC} \cdot FD$.

În concluzie, $DM = BF$ **3p**

Problema 2. Un zar este un cub de muchie 1, având înscrise pe fețe cifrele de la 1 la 6, astfel încât suma cifrelor de pe oricare două fețe opuse este 7.

Folosind 27 de zaruri, construim un cub cu muchia 3.

Stabiliți ce valori poate lua suma tuturor cifrelor de pe cele șase fețe ale cubului de muchie 3.

Soluție. Numim *zaruri de tip I* pe cele care au o singură față vizibilă (acele zaruri din centrele fețelor cubului mare), *de tip II* pe cele cu două fețe vizibile (acelea din mijloacele muchiilor) și *de tip III* pe cele cu trei fețe vizibile (zarurile din colțuri). Orice cub de muchie 3 conține 6 zaruri de tip I, 12 zaruri de tip II și 8 zaruri de tip III.

Suma minimă pe cele șase fețe se obține în cazul în care pe zarurile de tip I se vede 1, pe zarurile de tip II sunt vizibile cifrele 1 și 2, iar pe zarurile de tip III sunt vizibile 1, 2 și 3. Suma minimă este $6 \cdot 1 + 12 \cdot 3 + 8 \cdot 6 = 90$.

Maximul se obține când pe zarurile de tip I se vede 6, pe zarurile de tip II sunt vizibile 5 și 6, iar pe zarurile de tip III sunt vizibile 4, 5 și 6. Suma maximă este $6 \cdot 6 + 12 \cdot 11 + 8 \cdot 15 = 288$.

..... **2p**

Vom arăta că suma totală poate lua orice valoare intermediară între 90 și 288. Pentru aceasta, vom pleca de la cubul în care se realizează minimul sumei și vom roti zarurile, pas cu pas, astfel încât să mărim suma cu 1 la fiecare pas.

Rotind un zar de tip I, putem mări suma totală de pe fețele cubului mare cu câte o unitate la fiecare pas, până când pe acest zar apare 6. Continuăm acest procedeu, astfel încât pe toate zarurile de tip I să devină vizibilă fața 6. **1p**

Rotim acum un zar de tip II de la 1 + 2 la 5 + 6 și, în același timp, rotim două dintre zarurile de tip I la 1, respectiv 4; astfel am mărit suma totală cu 1. În următorii pași rotim acele două zaruri de tip I asupra cărora am acționat, măbind suma totală cu câte o unitate de fiecare dată; în final, pe ele va apărea din nou cifra 6. Continuăm acest procedeu, astfel încât pe toate zarurile de tip II să devină vizibile fețele 5 și 6. **2p**

Apoi, rotim un zar de tip III de la 1 + 2 + 3 la 4 + 5 + 6, rotind în același timp două dintre zarurile de tip I la 2; astfel, am mărit suma totală cu 1. În următorii pași rotim acele două zaruri de tip I asupra cărora am acționat, măbind suma totală cu câte o unitate de fiecare dată; în final, pe ele va apărea din nou cifra 6. Continuăm acest procedeu, astfel încât pe toate zarurile de tip III să devină vizibile fețele 4, 5 și 6.

Am obținut cubul de muchie 3 având suma cifrelor de pe fețe 288. În concluzie, suma de pe fețe poate lua toate valorile de la 90 la 288. **2p**

Problema 3. Fie $ABCD$ un dreptunghi cu $5AD < 2AB$. Pe latura AB se consideră punctele S și T astfel încât $AS = ST = TB$. Notăm cu M , N și P proiecțiile punctelor A , S respectiv T pe dreptele DS , DT respectiv DB . Arătați că punctele M , N și P sunt coliniare dacă și numai dacă $15AD^2 = 2AB^2$.

Soluție. Fie $AB = 3a$ și $AD = b$, cu $b < \frac{6}{5}a$.

Folosind teorema catetei în triunghiul dreptunghic ADS , obținem că $DM = \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $MS = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Exprimând în două moduri aria triunghiului DST , deducem că $SN \cdot DT = AD \cdot ST$, de unde $SN = \frac{ab}{\sqrt{4a^2+b^2}}$. Cu teorema lui Pitagora în triunghiurile dreptunghice NSD și NST , obținem că $DN = \frac{2a^2+b^2}{\sqrt{4a^2+b^2}}$, respectiv $NT = \frac{2a^2}{\sqrt{4a^2+b^2}}$.

Procedând analog, rezultă că $TP = \frac{ab}{\sqrt{9a^2+b^2}}$, $DP = \frac{6a^2+b^2}{\sqrt{9a^2+b^2}}$, $BP = \frac{3a^2}{\sqrt{9a^2+b^2}}$ **2p**

Distanța de la M la AB este $\frac{a^2b}{a^2+b^2}$. Distanța de la N la AB este $\frac{NS \cdot NT}{ST} = \frac{2a^2b}{4a^2+b^2}$. Distanța de la P la AB este $\frac{3a^2b}{9a^2+b^2}$.

Condiția $b < \frac{6}{5}a$ implică $d(M, AB) > d(N, AB) > d(P, AB)$; atunci punctele $\{Q\} = MN \cap AB$ și $\{Q'\} = NP \cap AB$ sunt situate pe semidreapta $(AB$ cu $T \in [AQ]$ și $T \in [AQ']$). **1p**

Aplicăm teorema lui Menelaus în triunghiurile DST și DTB , cu transversarele $M - N - Q$, respectiv $N - P - Q'$. Obținem că $\frac{SQ}{QT} = \frac{2a^2+b^2}{2b^2}$, iar $\frac{TQ'}{Q'B} = \frac{12a^2+2b^2}{6a^2+3b^2}$.

De aici, $QT = \frac{2ab^2}{2a^2-b^2}$ și $Q'T = \frac{a(12a^2+2b^2)}{6a^2-b^2}$

Atunci: $M - N - P$ coliniare $\Leftrightarrow Q = Q' \Leftrightarrow TQ = TQ' \Leftrightarrow \frac{2ab^2}{2a^2-b^2} = \frac{a(12a^2+2b^2)}{6a^2-b^2} \Leftrightarrow 5b^2 = 6a^2 \Leftrightarrow 15AD^2 = 2AB^2$ **4p**

Problema 4. Fie n un număr natural nenul; considerăm mulțimea $M = \{1, 2, \dots, 2n+1\}$.

Stabiliți în câte moduri se poate partiționa mulțimea M în trei submulțimi nevide A, B, C ($A \cup B \cup C = M$, $A \cap B = B \cap C = C \cap A = \emptyset$) astfel încât să fie satisfăcute simultan condițiile:

- (i) pentru orice $a \in A$ și orice $b \in B$, restul împărțirii lui a la b aparține mulțimii C ;
- (ii) pentru oricare $c \in C$, există $a \in A$ și $b \in B$ astfel încât c este restul împărțirii lui a la b .

Soluție. Observăm că $a > b$, oricare ar fi $a \in A$ și $b \in B$. Într-adevăr, în caz contrar, restul împărțirii lui a la b este 0 sau a , contradicție. Rezultă că mulțimea A este alcătuită din numere naturale consecutive și $2n + 1 \in A$ **2p**

Dacă $c \in C$, atunci există $a \in A$ și $b \in B$ astfel încât $a = bq + c \geq 2c + 1$, prin urmare $2n + 1 \geq 2c + 1 \Leftrightarrow n \geq c$ **1p.**

Presupunând că $n + 1 \notin B$, rezultă $n + 1 \in A$, de unde $\{n + 1, n + 2, \dots, 2n + 1\} \subset A$. Dacă $b \in B$, atunci $b \leq n$ și, cum în A sunt $n + 1$ numere consecutive, se obține că A conține cel puțin un multiplu al lui b , contradicție.

Ca urmare, $n + 1 \in B$, deci există $k \in \{n + 1, n + 2, \dots, 2n\}$ astfel încât $A = \{2n + 1, 2n, \dots, k + 1\}$. Din faptul că $c \leq n$ pentru orice $c \in C$, rezultă că $\{n + 1, n + 2, \dots, k\} \subset B$ **3p**

Resturile împărțirilor elementelor din A la elementele din $\{n + 1, n + 2, \dots, k\}$ sunt numerele $\{1, 2, \dots, n\}$. Deci $B = \{n + 1, n + 2, \dots, k\}$ și $C = \{1, 2, \dots, n\}$. k parcurge mulțimea $\{n + 1, n + 2, \dots, 2n\}$, deci avem n moduri de partiționare..... **1p**



Olimpiada Națională de Matematică
Etape Națională, Brașov, 2 aprilie 2013

CLASA a VIII-a

Problema 1. Prisma regulată dreaptă $ABCA'B'C'$, cu $AB = a$, are proprietatea că există un unic punct $M \in (BB')$ astfel încât $m(\angle AMC') = 90^\circ$.

Determinați măsura unghiului format de dreapta AM cu planul (ACC') .

Problema 2. Pe o tablă de șah de dimensiuni infinite se mută o tură, alternativ pe orizontală și pe verticală. Tura se deplasează un pătrățel la prima mutare, două pătrățele la a doua mutare și, în general, n pătrățele la a n -a mutare, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Fie T mulțimea numerelor naturale n cu proprietatea că există un șir de n mutări după care tura revine la poziția inițială.

a) Arătați că $2013 \notin T$.

b) Determinați numărul elementelor mulțimii $T \cap \{1, 2, \dots, 2012\}$.

Problema 3. Determinați numărul real $x > 0$ și numărul natural nenul n pentru care

$$[x] + \left\{ \frac{1}{x} \right\} = 1,005 \cdot n.$$

Notă: $[a]$ este partea întreagă, iar $\{a\}$ partea fracționară a numărului real a .

Problema 4. Numim *specială* o mulțime M de numere reale cu proprietățile:

(i) pentru orice $x, y \in M$, $x \neq y$, numerele $x + y$ și xy sunt nenule, exact unul dintre ele fiind rațional;

(ii) pentru orice $x \in M$, numărul x^2 este irațional.

Aflați numărul maxim de elemente ale unei mulțimi speciale.

Timp de lucru 4 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.



Olimpiada Națională de Matematică
Etapa finală, Brașov, 2 aprilie 2013
CLASA a VIII-a
SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Problema 1. Prisma regulată dreaptă $ABCA'B'C'$, cu $AB = a$, are proprietatea că există un unic punct $M \in (BB')$ astfel încât $m(\angle AMC') = 90^\circ$.

Determinați măsura unghiului format de dreapta AM cu planul (ACC') .

Soluție. Vom arăta mai întâi că M este mijlocul muchiei $[BB']$. Presupunând contrariul, fie $M' \in (BB')$ simetricul lui M față de mijlocul muchiei $[BB']$; atunci $M' \neq M$. Deoarece $\triangle MAB \equiv \triangle M'C'B'$ și $\triangle M'AB \equiv \triangle MC'B'$, rezultă că $[MA] \equiv [M'C']$ și $[M'A] \equiv [MC']$. Prin urmare, $\triangle MAC' \equiv \triangle M'C'A$, deci $m(\angle AMC') = m(\angle AM'C') = 90^\circ$, contradicție cu unicitatea alegerii lui M **3 puncte**

Notând $BB' = h$, calculând AM , MC' și AC' și aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic MAC' , rezultă $h = a\sqrt{2}$ **2 puncte**

Dacă O este centrul feței $(ACC'A')$, rezultă $MO \perp (ACC')$, deci unghiul format de dreapta AM cu planul (ACC') este unghiul MAO .

Cum $MO = OA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, triunghiul MOA este dreptunghic isoscel, deci $m(\angle MAO) = 45^\circ$. . **2 puncte**

Problema 2. Pe o tablă de șah de dimensiuni infinite se mută o tură, alternativ pe orizontală și pe verticală. Tura se deplasează un pătrățel la prima mutare, două pătrățele la a doua mutare și, în general, n pătrățele la a n -a mutare, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Fie T mulțimea numerelor naturale n cu proprietatea că există un șir de n mutări după care tura revine la poziția inițială.

a) Arătați că $2013 \notin T$.

b) Determinați numărul elementelor mulțimii $T \cap \{1, 2, \dots, 2012\}$.

Soluție. Putem considera pătrățelele tablei de șah ca o rețea de puncte cu coordonate numere întregi (puncte laticiale), în care poziția inițială o presupunem a fi $(0, 0)$. Atunci, după fiecare mutare, una dintre coordonate va fi de forma $\pm 1 \pm 3 \pm 5 \pm \dots$, iar cealaltă de forma $\pm 2 \pm 4 \pm 6 \pm \dots$.

a) Presupunând $2013 \in T$, atunci există o alegere a semnelor $+$ și $-$ pentru care au loc simultan relațiile $\pm 1 \pm 3 \pm 5 \pm \dots \pm 2013 = 0$ și $\pm 2 \pm 4 \pm 6 \pm \dots \pm 2012 = 0$.

Pentru orice combinație de semne, $\pm 1 \pm 3 \pm \dots \pm 2013$ are aceeași paritate cu $1 + 3 + \dots + 2013 = 1007^2$, deci, în ipoteza că $2013 \in T$, ar rezulta că 0 și 1007^2 au aceeași paritate, absurd **2 puncte**

Observație. Concluzia $2013 \notin T$ se obține și astfel: scriind $\pm 2 \pm 4 \pm \dots \pm 2012 = 2 \cdot (\pm 1 \pm 2 \pm \dots \pm 1006)$ și observând că numărul $\pm 1 \pm 2 \pm \dots \pm 1006$ are aceeași paritate cu $1 + 2 + \dots + 1006 = 503 \cdot 1007$, în ipoteza că $2013 \in T$, ar rezulta că 0 și $503 \cdot 1007^2$ au aceeași paritate, fals.

b) Condiția $n \in T$ implică existența unor alegeri a semnelor $+$ și $-$ pentru care să aibă loc simultan egalitățile:

$$\pm 1 \pm 3 \pm 5 \pm \dots \pm \left(2 \cdot \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor - 1\right) = 0 \quad (*)$$

$$\pm 2 \pm 4 \pm 6 \pm \dots \pm \left(2 \cdot \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) = 0 \quad (**)$$

..... **1 punct**

Din (*) rezultă că 0 are aceeași paritate cu $1 + 3 + \dots + \left(2 \cdot \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor - 1\right) = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor^2$, deci $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$ trebuie să fie număr par. Acest lucru se întâmplă dacă $4 \mid n$ sau $4 \mid n+1$ **(1)**

Din (**) rezultă că 0 are aceeași paritate cu $1 + 2 + \dots + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \frac{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \cdot \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1\right)}{2}$, adică $4 \mid \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ sau $4 \mid \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$. Se obține că 8 divide unul dintre numerele $n-1$, n , $n+1$ sau $n+2$ **(2)**

Din **(1)** și **(2)** rezultă că este necesar ca n să aibă forma $8k$ sau $8k-1$, unde $k \in \mathbb{N}^*$ **2 puncte**
Pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$ avem $n = 8k \in T$, deoarece

$$(1 - 3 - 5 + 7) + (9 - 11 - 13 + 15) + \dots + [(8k - 7) - (8k - 5) - (8k - 3) + (8k - 1)] = 0$$

$$(2 - 4 - 6 + 8) + (10 - 12 - 14 + 16) + \dots + [(8k - 6) - (8k - 4) - (8k - 2) + (8k)] = 0$$

.....

De asemenea, pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$ avem $n = 8k - 1 \in T$, deoarece

$$(1 - 3 - 5 + 7) + (9 - 11 - 13 + 15) + \dots + [(8k - 7) - (8k - 5) - (8k - 3) + (8k - 1)] = 0$$

$$(2 + 4 - 6) + (8 - 10 - 12 + 14) + \dots + [(8k - 8) - (8k - 6) - (8k - 4) + (8k - 2)] = 0$$

.....

Se obține că $T \cap \{1, 2, \dots, 2012\}$ are 502 elemente **2 puncte**

Problema 3. Determinați numărul real $x > 0$ și numărul natural nenul n pentru care

$$[x] + \left\{ \frac{1}{x} \right\} = 1,005 \cdot n.$$

Soluție. Ecuația se scrie $[x] + \left\{ \frac{1}{x} \right\} = \frac{201}{200}n = n + \frac{n}{200}$. Notând cu q , respectiv r , câtul și restul împărțirii lui n la 200, rezultă că

$$[x] + \left\{ \frac{1}{x} \right\} = n + q + \frac{r}{200}.$$

Partea întreagă a expresiei din membrul stâng este egală cu $[x]$, iar partea întreagă a expresiei din membrul drept este $n + q$, deci $[x] = 201q + r$ și $\left\{ \frac{1}{x} \right\} = \frac{r}{200}$ **2 puncte**

Dacă $x < 1$, atunci $[x] + \left\{ \frac{1}{x} \right\} = \left\{ \frac{1}{x} \right\} < 1 < 1,005 \cdot n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Dacă $x = 1$, se obține $1 = 1,005 \cdot n$, imposibil. Ca urmare, $x > 1$, deci $0 < \frac{1}{x} < 1$, adică $\left\{ \frac{1}{x} \right\} = \frac{1}{x}$. Rezultă $\frac{1}{x} = \frac{r}{200}$, deci $r \neq 0$ și $x = \frac{200}{r}$ **2 puncte**

Folosind faptul că $[x] \leq x < [x] + 1$, rezultă $201q + r \leq \frac{200}{r} < 201q + r + 1$, deci $201qr + r^2 \leq 200 < 201qr + r(r + 1)$. Cum $q, r \in \mathbb{N}$, inegalitățile de mai sus nu pot avea loc pentru $qr \geq 1$, deci $qr = 0$. Deoarece $r \neq 0$, rezultă $q = 0$, deci $r^2 \leq 200 < r(r + 1)$, de unde se obține $r = 14$, $n = 14$ și $x = \frac{100}{7}$ **3 puncte**

Problema 4. Numim *specială* o mulțime M de numere reale cu proprietățile:

(i) pentru orice $x, y \in M$, $x \neq y$, numerele $x + y$ și xy sunt nenule, exact unul dintre ele fiind rațional;

(ii) pentru orice $x \in M$, numărul x^2 este irațional.

Aflați numărul maxim de elemente ale unei mulțimi *speciale*.

Soluție. Numărul maxim cerut este 4, un exemplu de mulțime *specială* cu 4 elemente fiind $M = \{\sqrt{2} - 1, \sqrt{2} + 1, 2 - \sqrt{2}, -2 - \sqrt{2}\}$ **2 puncte**

Vom arăta că nu există mulțimi *speciale* cu cel puțin 5 elemente. Evident, toate elementele unei mulțimi *speciale* M sunt iraționale (rezultă din a doua condiție). Vom utiliza următoarele observații:

O1. Dacă x, y, z sunt trei elemente distincte ale lui M , atunci $x + y$, $x + z$ și $y + z$ nu pot fi toate raționale.

Presupunând contrariul, rezultă $2(x + y + z) \in \mathbb{Q}$, de unde $x + y + z \in \mathbb{Q}$ și $x \in \mathbb{Q}$, absurd. .. **1 punct**

O2. Dacă x, y, z sunt trei elemente distincte ale lui M , atunci xy , xz și yz nu pot fi toate raționale.

Presupunând contrariul, rezultă $x^2yz = (xy) \cdot (xz) \in \mathbb{Q}$ și, cum $yz \in \mathbb{Q}$, rezultă $x^2 \in \mathbb{Q}$, absurd. **1 punct**

O3. Dacă $x, y \in M$ și $xy \in \mathbb{Q}$, atunci, pentru orice $z \in M$, avem $x + z \in \mathbb{Q}$ și $y + z \in \mathbb{Q}$.

În caz contrar, din ipoteză și observațiile anterioare, rezultă că $x + z \in \mathbb{Q}$ și $yz \in \mathbb{Q}$ sau $y + z \in \mathbb{Q}$ și $xz \in \mathbb{Q}$. În primul caz, din $xy \in \mathbb{Q}$ și $yz \in \mathbb{Q}$, rezultă $xy + yz = y(x + z) \in \mathbb{Q}$ și, cum $x + z \in \mathbb{Q}$ și $x + z \neq 0$ (din ipoteză!), rezultă $y \in \mathbb{Q}$, contradicție. Celălalt caz este identic. **1 punct**

Să presupunem acum că există o mulțime *specială* cu cel puțin 5 elemente a, b, c, d, e . Din **O1**, cel puțin două elemente au suma număr irațional; fie acestea a și b . Atunci $ab \in \mathbb{Q}$, iar din **O3** se obține că $a + c$, $a + d$, $a + e$ sunt raționale. Conform **O1**, numerele $c + d$, $c + e$ și $d + e$ nu pot fi raționale, iar din ipoteză rezultă că cd , ce și de sunt raționale, ceea ce contrazice **O2** **2 puncte**



Olimpiada Națională de Matematică
Etapă Națională, Brașov, 2 aprilie 2013

CLASA a IX-a

Problema 1. Un șir de numere este numit *complet* dacă are termeni naturali nenuli și orice număr natural nenul are cel puțin un multiplu printre termenii șirului.

Arătați că o progresie aritmetică este șir *complet* dacă și numai dacă rația sa divide primul termen.

Problema 2. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție arbitrară și $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție de gradul al doilea, având proprietatea:

pentru orice numere reale m și n , ecuația $f(x) = mx + n$ are soluții dacă și numai dacă ecuația $g(x) = mx + n$ are soluții.

Arătați că funcțiile f și g sunt egale.

Problema 3. Fie P un punct în interiorul unui triunghi ascuțitunghic ABC și D, E, F intersecțiile dreptelor AP, BP, CP cu $[BC], [CA]$, respectiv $[AB]$.

a) Arătați că aria triunghiului DEF este cel mult un sfert din aria triunghiului ABC .

b) Arătați că raza cercului înscris în triunghiul DEF este cel mult un sfert din raza cercului circumscris triunghiului ABC .

Problema 4. Considerăm un număr natural nenul n și funcția

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{dacă } x \text{ este par} \\ \frac{x-1}{2} + 2^{n-1}, & \text{dacă } x \text{ este impar} \end{cases}.$$

Determinați mulțimea

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid (\underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{\text{de } n \text{ ori } f})(x) = x\}.$$

Timp de lucru 4 ore.

Fiecare problemă este notată de la 0 la 7 puncte.



**Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Națională, Brașov, 2 aprilie 2013**

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE, CLASA a IX-a

Problema 1. Un șir de numere este numit *complet* dacă are termeni naturali nenuli și orice număr natural nenul are cel puțin un multiplu printre termenii șirului.

Arătați că o progresie aritmetică este șir *complet* dacă și numai dacă rația sa divide primul termen.

Soluție. Dacă rația r divide primul termen a_1 , atunci $a_1 = dr$, $d \in \mathbb{N}$ și $a_n = (d + n - 1)r$, iar un multiplu al numărului natural nenul k se obține luând $d + n - 1$ multiplu de $k \dots$ **3p**

Reciproc, dacă $r = 0$, atunci șirul nu poate fi complet $\dots$ **1p**

Deoarece $r \neq 0$ și, conform ipotezei, există un multiplu al lui r de forma $a_1 + (n - 1)r$, $n \in \mathbb{N}^*$, reiese că $r \mid a_1 \dots$ **3p**

Problema 2. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție arbitrară și $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție de gradul al doilea, având proprietatea:

pentru orice numere reale m și n , ecuația $f(x) = mx + n$ are soluții dacă și numai dacă ecuația $g(x) = mx + n$ are soluții.

Arătați că funcțiile f și g sunt egale.

Soluție. Observăm că, dacă graficul funcției $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = mx + n$ este tangent la graficul funcției $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = ax^2 + bx + c$, atunci ecuația $ax^2 + bx + c = mx + n$, $a, b, c, m, n \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ are discriminantul nul, deci funcția $k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $k(x) = ax^2 + bx + c - mx - n$ se anulează într-un punct și are semn constant în celelalte puncte (*) $\dots$ **1p**

Putem presupune, fără a restrânge generalitatea, că $g(x) = ax^2 + bx + c$, $a > 0$.

Să presupunem că există x_0 astfel încât $f(x_0) < g(x_0)$. Alegem m și n astfel încât graficul funcției $h(x) = mx + n$ să fie tangent la graficul lui g în punctul $(x_0, g(x_0))$. Fie $n' = n - g(x_0) + f(x_0)$. Atunci ecuația $f(x) = mx + n'$ are soluția x_0 iar ecuația $g(x) = mx + n'$ nu are soluții, deoarece, conform (*), $g(x) \geq mx + n > mx + n'$, $\forall x \in \mathbb{R}$ - fals $\dots$ **3p**

Rezultă $f(x) \geq g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (**). Dacă presupunem acum că există x_0 astfel încât $f(x_0) > g(x_0)$, atunci alegem din nou m și n astfel încât graficul funcției $h(x) = mx + n$ să fie tangent la graficul lui g în punctul $(x_0, g(x_0))$. În acest caz, din (**) și (*) rezultă că $f(x) > mx + n$, $\forall x \in \mathbb{R}$, pe când ecuația $g(x) = mx + n$ are soluția x_0 - fals $\dots$ **3p**

Problema 3. Fie P un punct în interiorul unui triunghi ascuțitunghic ABC și D, E, F intersecțiile dreptelor AP, BP, CP cu $[BC], [CA]$, respectiv $[AB]$.

a) Arătați că aria triunghiului DEF este cel mult un sfert din aria triunghiului ABC .

b) Arătați că raza cercului înscris în triunghiul DEF este cel mult un sfert din raza cercului circumscris triunghiului ABC .

Soluție. a) Fie $\frac{BD}{CD} = x$, $\frac{CE}{AE} = y$, $\frac{AF}{BF} = z$. Atunci $\frac{S_{AEF}}{S_{ABC}} = \frac{AF}{AB} \cdot \frac{AE}{AC} = \frac{z}{(z+1)(y+1)}$ și analogele $\dots$ **1p**

Deducem $\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}} = 1 - \sum_{\text{cic}} \frac{z}{(z+1)(y+1)} = \frac{xyz+1}{(x+1)(y+1)(z+1)} = \frac{2}{(x+1)(y+1)(z+1)}$, deoarece, conform teoremei lui Ceva, $xyz = 1 \dots$ **1p**

Folosind acum inegalitatea mediilor, $\frac{2}{(x+1)(y+1)(z+1)} \leq \frac{2}{8\sqrt{xyz}} = \frac{1}{4} \dots$ **1p**

- b) Se știe că perimetrul triunghiului DEF este mai mare sau egal decât perimetrul triunghiului ortic $A'B'C'$ **1p**
 Rezultă $r_{DEF} = \frac{S_{DEF}}{p_{DEF}} \leq \frac{S_{ABC}}{4p_{A'B'C'}}$ **1p**
 Din $A'B' = c \cos C = R \sin 2C$, $p_{A'B'C'} = \frac{1}{2}R \sum \sin 2A = 2R \sin A \sin B \sin C$ și $S_{ABC} = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$ reiese acum concluzia **2p**

Problema 4. Considerăm un număr natural nenul n și funcția

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{dacă } x \text{ este par} \\ \frac{x-1}{2} + 2^{n-1}, & \text{dacă } x \text{ este impar} \end{cases}.$$

Determinați mulțimea

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid (\underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{\text{de } n \text{ ori } f})(x) = x\}.$$

- Soluție.* Observăm că $f(x) < x$ pentru $x \geq 2^n$, deci $A \subset \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$ **2p**
 Arătăm că $A = \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$. Din $f(2^n - 1) = 2^n - 1$ deducem $2^n - 1 \in A$.
 Apoi, $2f(x) \in \{x, x + 2^n - 1\}$, deci $2f(x)$ este congruent cu x modulo $2^n - 1$ **2p**
 Rezultă inductiv că $x \equiv 2^n f^{[n]}(x) \equiv f(x) \pmod{2^n - 1}$. Cum $f(x) < 2^n - 1$ pentru $x < 2^n - 1$, deducem $f^{[n]}(x) = x$ dacă $x \in \{0, 1, \dots, 2^n - 2\}$ (am notat $f^{[n]} = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{\text{de } n \text{ ori } f}$). **3p**

- Altă soluție.* Ca mai sus, $A \subset \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$ **2p**
 Pentru $x \in \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$, îl scriem pe x în baza 2 cu n cifre, punând, dacă este cazul, zerouri la început **2p**
 Atunci $f(x)$ se obține din x prin mutarea ultimei cifre a lui x pe prima poziție; după n compuneri cifrele lui x apar pe aceleași locuri ca la început, deci $f^{[n]}(x) = x$ **3p**



Olimpiada Națională de Matematică
Etapă Națională, Brașov, 2 aprilie 2013

CLASA a X-a

Problema 1. Să se rezolve ecuația:

$$2^{\sin^4 x - \cos^2 x} - 2^{\cos^4 x - \sin^2 x} = \cos 2x.$$

Problema 2. Se consideră numerele complexe distincte a, b, c, d . Să se demonstreze că următoarele afirmații sunt echivalente:

- i) Pentru orice $z \in \mathbb{C}$ are loc inegalitatea $|z - a| + |z - b| \geq |z - c| + |z - d|$;
- ii) Există $t \in (0, 1)$ astfel încât $c = ta + (1 - t)b$ și $d = (1 - t)a + tb$.

Problema 3. Să se determine toate funcțiile injective $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ care satisfac relația

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|,$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{Z}$.

Problema 4. a) Să se arate că

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^m} < m,$$

pentru orice $m \in \mathbb{N}^*$.

b) Fie $p_1, p_2, \dots, p_n$ numerele prime mai mici decât 2^{100} . Să se arate că

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_n} < 10.$$

Timp de lucru 4 ore.

Fiecare problemă este notată de la 0 la 7 puncte.



**Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Națională, Brașov, 2 aprilie 2013**

CLASA a X-a

Soluții și bareme

Problema 1. Să se rezolve ecuația: $2^{\sin^4 x - \cos^2 x} - 2^{\cos^4 x - \sin^2 x} = \cos 2x$.

Soluție. Ecuația se scrie echivalent $2^{\sin^4 x + \sin^2 x} - 2^{\cos^4 x + \cos^2 x} = 2 \cos 2x$. Să observăm că

$$\begin{aligned} \cos^4 x + \cos^2 x - \sin^4 x - \sin^2 x &= (\cos^2 x + \sin^2 x) (\cos^2 x - \sin^2 x) + \cos^2 x - \sin^2 x \\ &= 2 \cos 2x, \end{aligned}$$

..... 3 puncte
și ecuația devine $2^{\sin^4 x + \sin^2 x} + \sin^4 x + \sin^2 x = 2^{\cos^4 x + \cos^2 x} + \cos^4 x + \cos^2 x$.

..... 1 punct
Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = 2^t + t$ este strict crescătoare, deci injectivă.

..... 2 puncte
așadar obținem $\sin^4 x + \sin^2 x = \cos^4 x + \cos^2 x$, adică $2 \cos 2x = 0$, cu soluțiile $x \in \left\{ \frac{(2k+1)\pi}{4} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$. . . 1 punct

Problema 2. Se consideră numerele complexe distincte a, b, c, d . Să se demonstreze că următoarele afirmații sunt echivalente:

- i) Pentru orice $z \in \mathbb{C}$ are loc inegalitatea $|z - a| + |z - b| \geq |z - c| + |z - d|$;
- ii) Există $t \in (0, 1)$ astfel încât $c = ta + (1 - t)b$ și $d = (1 - t)a + tb$.

Soluție. ii) $\Rightarrow$ i) Avem

$$|z - c| = |z - ta - (1 - t)b| \leq t|z - a| + (1 - t)|z - b|.$$

Analog,

$$|z - d| \leq (1 - t)|z - a| + t|z - b|.$$

Prin adunare se obține concluzia. 2 puncte

i) $\Rightarrow$ ii) Pentru $z = a$, rezultă

$$|a - b| \geq |a - c| + |a - d|,$$

iar pentru $z = b$

$$|a - b| \geq |b - c| + |b - d|.$$

..... 2 puncte

Prin adunare,

$$2|a - b| \geq |a - c| + |a - d| + |b - c| + |b - d|.$$

Dar

$$|a - c| + |b - c| \geq |a - b|,$$

$$|a - d| + |b - d| \geq |a - b|,$$

și deducem că toate inegalitățile devin egalități.....1 punct
În particular, din

$$|a - c| + |b - c| = |a - b|$$

rezultă că există $t_1 \in (0, 1)$ astfel ca $c = t_1 a + (1 - t_1) b$. Analog, există $t_2 \in (0, 1)$ astfel ca $d = t_2 a + (1 - t_2) b$ 1 punct

Arătăm că $t_1 + t_2 = 1$. Avem $|a - c| + |b - c| = |a - b| = |b - c| + |b - d|$, deci $|a - c| = |b - d|$. Înlocuind, obținem

$$(1 - t_1) |a - b| = t_2 |b - a|,$$

de unde concluzia..... 1 punct

Problema 3. Să se determine toate funcțiile injective $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ care satisfac relația

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|,$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{Z}$.

Soluție. Din relația dată deducem

$$|f(x + 1) - f(x)| \leq 1,$$

deci $f(x + 1) - f(x) \in \{-1, 0, 1\}$ 1 punct

Cum f e injectivă, rezultă $f(x + 1) - f(x) \in \{-1, 1\}$, pentru orice x .

Observăm că dacă f verifică ipoteza, atunci și $-f$ o verifică. Prin urmare, putem presupune că $f(1) - f(0) = 1$.

Avem $f(2) - f(1) = \pm 1$. Dacă $f(2) - f(1) = -1$, atunci $f(2) = f(0)$, contradicție, deci $f(2) = f(0) + 2$ 2 puncte

Rezultă imediat prin inducție că $f(n) = f(0) + n$, pentru orice n natural.

..... 1 punct

Tot inductiv rezultă $f(-n) = f(0) - n$, pentru orice n natural..... 1 punct

În concluzie, funcțiile căutate nu pot fi decât de forma $f(x) = \pm x + k$, pentru orice x , k fiind un întreg arbitrar..... 1 punct

Se verifică ușor că aceste funcții verifică relația din ipoteză..... 1 punct

Problema 4. a) Să se arate că

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^m} < m,$$

pentru orice $m \in \mathbb{N}^*$.

b) Fie $p_1, p_2, \dots, p_n$ numerele prime mai mici decât 2^{100} . Să se arate că

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_n} < 10.$$

Soluție. a) Inegalitatea se obține prin inducție..... 2 puncte

b) Numerele $p_i p_j p_k p_l$, unde $1 \leq i \leq j \leq k \leq l \leq n$, sunt distincte două câte două și mai mici decât 2^{400} .

Avem atunci

$$\left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_n} \right)^4 \leq 4! \sum_{1 \leq i \leq j \leq k \leq l \leq n} \frac{1}{p_i p_j p_k p_l} < 24 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^{400}} \right).$$

..... 3 puncte

Folosind inegalitatea de la a), deducem că

$$24 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^{400}} \right) < 24 \cdot 400 < 10000,$$

de unde concluzia..... 2 puncte



Olimpiada Națională de Matematică
Etapă Națională, Brașov, 2 aprilie 2013

CLASA a XI-a

Problema 1. Fie A o matrice neinvertibilă de ordin n cu elemente reale, $n \geq 2$, și fie A^* adjuncta matricei A . Arătați că $\text{tr}(A^*) \neq -1$ dacă și numai dacă matricea $I_n + A^*$ este invertibilă.

Problema 2. Fie m și n numere naturale, $m, n \geq 2$. Considerăm matricele $A_1, A_2, \dots, A_m \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, nu toate nilpotente. Demonstrați că există un număr întreg $k > 0$ astfel încât $A_1^k + A_2^k + \dots + A_m^k \neq O_n$.

Notă: Numim nilpotentă o matrice pătratică având o putere nulă.

Problema 3. O funcție $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ se numește *contractibilă* dacă, pentru orice numere $x, y \in (0, \infty)$, avem $\lim_{n \rightarrow \infty} (f^n(x) - f^n(y)) = 0$, unde $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{\text{de } n \text{ ori } f}$.

a) Considerăm $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ o funcție contractibilă, continuă, cu proprietatea că are un punct fix, adică există $x_0 \in (0, \infty)$ astfel încât $f(x_0) = x_0$. Arătați că $f(x) > x$, oricare ar fi $x \in (0, x_0)$ și $f(x) < x$, oricare ar fi $x \in (x_0, \infty)$.

b) Arătați că funcția $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ dată prin $f(x) = x + \frac{1}{x}$ este contractibilă, dar nu are puncte fixe.

Problema 4. a) Fie $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ o funcție derivabilă și convexă. Arătați că dacă $f(x) \leq x$, oricare ar fi $x \geq 0$, atunci $f'(x) \leq 1$, oricare ar fi $x \geq 0$.

b) Determinați funcțiile $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ derivabile și convexe care au proprietatea că $f(0) = 0$ și $f'(x) \cdot f(f(x)) = x$, oricare ar fi $x \geq 0$.

Timp de lucru 4 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.



Olimpiada Națională de Matematică
Etapă Națională, Brașov, 2 aprilie 2013

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE – CLASA a XI-a

Problema 1. Fie A o matrice neinvertibilă de ordin n cu elemente reale, $n \geq 2$, și fie A^* adjuncta matricei A . Arătați că $\text{tr}(A^*) \neq -1$ dacă și numai dacă matricea $I_n + A^*$ este inversabilă.

Soluție. Deoarece matricea A este neinvertibilă, avem $\text{rang}(A) \leq n-1$. Distingem cazurile:

i. $\text{rang}(A) \leq n-2$. Atunci $A^* = O_n$ și echivalența este evidentă.

..... **1p**

ii. $\text{rang}(A) = n-1$. Atunci $AA^* = O_n$ și, din inegalitatea lui Sylvester, $0 \geq \text{rang}(A) + \text{rang}(A^*) - n$, de unde $\text{rang}(A^*) \leq 1$.

..... **2p**

Atunci există o matrice linie $L \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ și o matrice coloană $C \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ astfel încât $A = CL$. Observăm că $LC = (a) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$, cu $a = \text{tr}(A^*)$ și $(A^*)^2 = CLCL = C(a)L = aA^*$.

..... **2p**

Notăm $B = I_n + A^*$. Atunci $(B - I_n)^2 = a(B - I_n)$ se scrie $B((a+2)I_n - B) = (a+1)I_n$, de unde rezultă că $a \neq -1$ implică B inversabilă.

..... **1p**

În plus, dacă B este inversabilă dar $a = -1$, atunci $B(I_n - B) = O_n$ atrage $B = I_n$ și apoi $A^* = O_n$. Atunci $-1 = \text{tr}(A^*) = 0$, fals.

..... **1p**

Problema 2. Fie m și n numere naturale, $m, n \geq 2$. Considerăm matricele $A_1, A_2, \dots, A_m \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, nu toate nilpotente. Demonstrați că există un număr întreg $k > 0$ astfel încât $A_1^k + A_2^k + \dots + A_m^k \neq O_n$.

Soluție. Notăm cu $\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \dots, \lambda_{in}$ valorile proprii ale matricei A_i , $i = 1, 2, \dots, m$. Presupunem prin absurd că $A_1^k + A_2^k + \dots + A_m^k = O_n$, oricare ar fi $k \geq 1$. Atunci $\text{tr}(A_1^k) + \text{tr}(A_2^k) + \dots + \text{tr}(A_m^k) = 0$,

..... **2p**

de unde $\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \lambda_{ij}^k = 0$.

..... **2p**

Din relațiile lui Newton, egalitățile $\sum_{ij} \lambda_{ij}^k = 0$, $k \geq 1$, implică $\lambda_{ij} = 0$, oricare ar fi $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$.

..... **2p**

Atunci $A_i^n = O_n$, $i = 1, 2, \dots, m$, contradicție.

..... **1p**

Problema 3. O funcție $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ se numește *contractibilă* dacă, pentru orice numere $x, y \in (0, \infty)$, avem $\lim_{n \rightarrow \infty} (f^n(x) - f^n(y)) = 0$, unde $f^n = f \circ f \circ \dots \circ f$.

a) Considerăm $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ o funcție contractibilă, continuă, cu proprietatea că are un punct fix, adică există $x_0 \in (0, \infty)$ astfel încât $f(x_0) = x_0$. Arătați că $f(x) > x$, oricare ar fi $x \in (0, x_0)$ și $f(x) < x$, oricare ar fi $x \in (x_0, \infty)$.

b) Arătați că funcția $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ dată prin $f(x) = x + 1/x$ este contractibilă, dar nu are puncte fixe.

Soluție. a) Presupunem prin reducere la absurd că f ar admite ar admite un al doilea punct fix $x_1 \in (0, \infty) \setminus \{x_0\}$. Atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} (f^n(x_0) - f^n(x_1)) = x_0 - x_1 \neq 0$, contradicție. În acest caz, din continuitatea lui f (proprietatea Darboux) deducem $f(x) < x$, $\forall x \in (0, x_0)$ sau $f(x) > x$, $\forall x \in (x_0, \infty)$.

..... **1p**

În primul caz obținem inductiv că $0 < f^{n+1}(x) < f^n(x) < x$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$ și $x \in (0, x_0)$. Deducem că șirul $a_n = (f^n(x))_{n \geq 1}$ converge; fie a limita sa. Dacă $a > 0$, atunci din $a_{n+1} = f(a_n)$ rezultă $a = f(a)$, fals. Atunci $a = 0$, de unde rezultă $\lim_{n \rightarrow \infty} (f^n(x_0) - f^n(x)) = x_0 \neq 0$, $\forall x \in (0, x_0)$, contradicție. Rămâne $f(x) > x$, oricare ar fi $x \in (0, x_0)$.

..... **1p**

Analog, $f(x) > x$, $\forall x \in (x_0, \infty)$ sau $f(x) < x$, $\forall x \in (x_0, \infty)$. În prima situație deducem inductiv că $f^{n+1}(x) > f^n(x) > x$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, de unde rezultă $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = \infty$ și apoi $\lim_{n \rightarrow \infty} (f^n(x) - f^n(x_0)) = \infty$, $\forall x \in (x_0, \infty)$, contradicție. Ca urmare, $f(x) < x$, oricare ar fi $x \in (x_0, \infty)$.

..... **1p**

b) Fie $x, y \in (0, \infty)$. Putem presupune $f(x) < f(y)$. Notăm $x_n = f^n(x)$, $n \in \mathbb{N}^*$, respectiv $y_n = f^n(y)$, $n \in \mathbb{N}^*$. Avem $2 \leq x_n < y_n$, $n > 1$, deoarece f este strict crescătoare pe $[1, \infty)$. Demonstrăm prin inducție proprietatea $y_n < y_1 + 2\sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Proprietatea este verificată pentru $n = 1$. Presupunem $y_n < y_1 + 2\sqrt{n}$, pentru un număr natural nenul n . Atunci, din monotonia funcției f , obținem:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= f(y_n) < f(y_1 + 2\sqrt{n}) = y_1 + 2\sqrt{n} + \frac{1}{y_1 + 2\sqrt{n}} < \\ &< y_1 + 2\sqrt{n} + \frac{1}{2\sqrt{n}} < y_1 + 2\sqrt{n+1}. \end{aligned}$$

..... **1p**

Rezultă $2 \leq x_n < y_n < y_1 + 2\sqrt{n} < 3\sqrt{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n > y_1^2$. Din

inegalitatea clasică $1 - x < e^{-x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, deducem:

$$\begin{aligned} 0 < y_{n+1} - x_{n+1} &= f(y_n) - f(x_n) = (y_n - x_n) \left(1 - \frac{1}{x_n y_n} \right) < \\ &< (y_n - x_n) \left(1 - \frac{1}{9n} \right) < (y_n - x_n) e^{-\frac{1}{9n}}, \end{aligned}$$

pentru $n \geq p := [y_1^2] + 1$.

Obținem $0 < y_n - x_n < (y_p - x_p) e^{-\frac{1}{9} \sum_{k=p}^{n-1} \frac{1}{k}}$, $\forall n > p$.

..... **2p**

Cum $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=p}^{n-1} \frac{1}{k} = \infty$, găsim $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{1}{9} \sum_{k=p}^{n-1} \frac{1}{k}} = 0$, de unde rezultă că $\lim_{n \rightarrow \infty} (f^n(y) - f^n(x)) = 0$. Rezultă că funcția f este contractibilă, evident fără puncte fixe.

..... **1p**

Problema 4. a) Fie $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ o funcție derivabilă și convexă. Arătați că dacă $f(x) \leq x$, oricare ar fi $x \geq 0$, atunci $f'(x) \leq 1$, oricare ar fi $x \geq 0$.

b) Determinați funcțiile $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ derivabile și convexe care au proprietatea că $f(0) = 0$ și $f'(x) \cdot f(f(x)) = x$, oricare ar fi $x \geq 0$.

Soluție. a) Presupunem contrariul. Există $a \geq 0$ cu $f'(a) > 1$, deci, cum $\lim_{x \searrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 1$, există $b > a$ cu $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} > 1$.

..... **1p**

Pentru orice $x > b$, din convexitatea funcției f rezultă $\frac{f(x) - f(b)}{x - b} \geq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = m > 1$.

..... **1p**

Atunci $f(x) \geq mx - mb + f(b)$, de unde $f(x) > x$ pentru x suficient de mare. Contradicție.

..... **1p**

b) Vom demonstra că $f(x) = x$, oricare ar fi $x \geq 0$. Cum $f'(x) = \frac{x}{f(f(x))} > 0$, oricare ar fi $x > 0$, deducem că f este strict crescătoare. Cum f este convexă și derivabilă, rezultă că f' este crescătoare.

Presupunem prin absurd că există $f(a) < a$. Atunci $f(f(a)) < f(a) < a$, deci $f'(a) > 1$. Conform primului punct deducem că există $b > a$ cu $f(b) = b$. Atunci $f(f(b)) = b$ și apoi $f'(b) = 1 < f'(a)$, în contradicție cu monotonia funcției f' .

..... **2p**

Rămâne $f(x) \geq x$, oricare ar fi $x \geq 0$. Atunci $f(f(x)) \geq f(x) \geq x$, de unde $f'(x) \leq 1$, oricare ar fi $x \geq 0$.

Aplicând teorema lui Lagrange avem $f(x) - f(0) = x f'(c_x) \leq x$, oricare ar fi $x > 0$, de unde $f(x) = x$.

..... **2p**

MINISTERUL
EDUCAȚIEI
NAȚIONALE

Olimpiada Națională de Matematică
Etape Națională, Brașov, 2 aprilie 2013

Clasa a XII-a

Problema 1. Să se determine funcțiile continue $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$(a^2 + ab + b^2) \int_a^b f(x) dx = 3 \int_a^b x^2 f(x) dx,$$

oricare ar fi $a, b \in \mathbb{R}$.

Problema 2. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel care îndeplinește simultan următoarele două condiții:

- (1) A nu este corp,
- (2) oricare ar fi x un element neinversabil al lui A , există un număr întreg $m \geq 1$, care depinde de x , astfel încât

$$x = x^2 + x^3 + \cdots + x^{2^m}.$$

Să se arate că:

- (a) $x + x = 0$, oricare ar fi $x \in A$,
- (b) $x^2 = x$, oricare ar fi elementul neinversabil $x \in A$.

Problema 3. Fie $a \in (0, 1)$ și $\mathcal{C}$ mulțimea funcțiilor crescătoare

$f: [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$, astfel încât $\int_0^1 f(x) dx = 1$. Să se determine:

- (a) $\max_{f \in \mathcal{C}} \int_0^a f(x) dx$,
- (b) $\max_{f \in \mathcal{C}} \int_0^a (f(x))^2 dx$.

Problema 4. Fie $n \geq 2$ un număr natural, $(K, +, \cdot)$ un corp comutativ cu proprietatea că $\underbrace{1 + \cdots + 1}_{m \text{ ori}} \neq 0$, $m = 2, \dots, n$, $f \in K[X]$ un polinom de grad

n și G un subgrup al grupului aditiv $(K, +)$, $G \neq K$. Să se arate că există $a \in K$, astfel încât $f(a) \notin G$.

Timp de lucru 4 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.



Clasa a XII-a — Soluții și barem orientativ

Problema 1. Să se determine funcțiile continue $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$(a^2 + ab + b^2) \int_a^b f(x) dx = 3 \int_a^b x^2 f(x) dx,$$

oricare ar fi $a, b \in \mathbb{R}$.

Soluție. Alegem $a = 0$ și $b = t > 0$. Atunci

$$t^2 F(t) = 3 \int_0^t x^2 f(x) dx,$$

unde $F(t) = \int_0^t f(x) dx$ **1 punct**

Prin derivare rezultă $2tF(t) + t^2 f(t) = 3t^2 f(t)$, deci $2t(tf(t) - F(t)) = 0$, adică $\left(\frac{F(t)}{t}\right)' = 0$, pentru orice $t \in (0, \infty)$ **3 puncte**

Rezultă că funcția $g(t) = \frac{F(t)}{t}$ este constantă pe intervalul $(0, \infty)$, deci $F(t) = kt$, adică $f(t) = k$, $t \in (0, \infty)$ **1 punct**

Procedând similar pe intervalul $(-\infty, 0)$, rezultă că există constantele k_1, k_2, k astfel încât

$$f(t) = \begin{cases} k_1, & t < 0, \\ k_2, & t = 0, \\ k, & t > 0 \end{cases}$$

..... **1 punct**

Cum f este continuă, rezultă $k_1 = k_2 = k$, deci $f(t) = k$, pentru orice $t \in \mathbb{R}$. Se verifică imediat că funcțiile constante pe $\mathbb{R}$ satisfac relația din enunț. **1 punct**

Problema 2. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel care îndeplinește simultan următoarele două condiții:

(1) A nu este corp,

(2) oricare ar fi x un element neinvertibil al lui A , există un număr întreg $m \geq 1$, care depinde de x , astfel încât

$$x = x^2 + x^3 + \cdots + x^{2^m}.$$

Să se arate că:

(a) $x + x = 0$, oricare ar fi $x \in A$,

(b) $x^2 = x$, oricare ar fi elementul neinvertibil $x \in A$.

Soluție. (a) Este suficient să demonstrăm că $1 + 1 = 0$. Fie x un element neinversabil, fie $m \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $x = x^2 + x^3 + \dots + x^{2^m}$, și $y = x + x^2 + \dots + x^{2^m - 1}$. În mod evident, $xy = x$, deci $xy^k = x$, oricare ar fi $k \in \mathbb{N}^*$. Întrucât x este neinversabil, y este neinversabil, deci există $p \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $-y = (-y)^2 + (-y)^3 + \dots + (-y)^{2^p - 1} + (-y)^{2^p} = y^2 - y^3 + \dots - y^{2^p - 1} + y^{2^p}$. Prin urmare, $-x = -xy = xy^2 - xy^3 + \dots - xy^{2^p - 1} + xy^{2^p} = x - x + \dots - x + x = x$, i.e., $x + x = 0$ **2 puncte**

Fie x un element nenul și neinversabil. Cum $2x = 0$, rezultă că 2 este neinversabil, deci $2 + 2 = 0$ și $2 = 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2^m}$, unde $m \in \mathbb{N}^*$. Relația $2 + 2 = 0$ implică $2^2 = 0$, deci $2^k = 0$, oricare ar fi $k \geq 2$. Prin urmare, $2 = 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2^m} = 0$ **1 punct**

(b) Fie x un element neinversabil al lui A și $m \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $x = x^2 + x^3 + \dots + x^{2^m}$. Atunci $x^2 = x^3 + x^4 + \dots + x^{2^{m+1}}$. Întrucât $1 + 1 = 0$, prin adunarea celor două relații obținem $x^{2^{m+1}} = x$ **1 punct**

Relațiile $1 + 1 = 0$ și $x^{2^{m+1}} = x$ implică $(x^2 + x)^{2^m} = x^{2^{m+1}} + x^{2^m} = x^{2^{m+1}} \cdot x^{2^m - 1} + x^{2^m} = x \cdot x^{2^m - 1} + x^{2^m} = x^{2^m} + x^{2^m} = 0$ **1 punct**

Vom arăta că $x^2 + x = 0$, de unde concluzia. Fie $y = x^2 + x$ și k cel mai mic număr natural nenul, astfel încât $y^k = 0$ — un astfel de k există, deoarece $y^{2^m} = 0$. În cazul în care $k > 1$, elementul y^{k-1} este neinversabil în A și există $n \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $y^{k-1} = (y^{k-1})^{2^n + 1} = y^{(k-1)(2^n + 1)}$. Întrucât $(k-1)(2^n + 1) \geq k$, rezultă că $y^{(k-1)(2^n + 1)} = 0$, deci $y^{k-1} = 0$ — în contradicție cu minimalitatea lui k . Prin urmare, $k = 1$ și $y = 0$ **2 puncte**

Problema 3. Fie $a \in (0, 1)$ și $\mathcal{C}$ mulțimea funcțiilor crescătoare $f: [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$, astfel încât

$$\int_0^1 f(x) dx = 1. \text{ Să se determine:}$$

(a) $\max_{f \in \mathcal{C}} \int_0^a f(x) dx,$

(b) $\max_{f \in \mathcal{C}} \int_0^a (f(x))^2 dx.$

Soluția 1. (a) Fie f o funcție din mulțimea $\mathcal{C}$. Arătăm că

$$\int_0^a f(x) dx \leq a.$$

Într-adevăr,

$$\begin{aligned} a - \int_0^a f(x) dx &= a \int_0^1 f(x) dx - \int_0^a f(x) dx = a \int_a^1 f(x) dx - (1 - a) \int_0^a f(x) dx \\ &\geq a \int_a^1 f(a) dx - (1 - a) \int_0^a f(a) dx = 0. \end{aligned}$$

Cum pentru funcția constantă $f \equiv 1$ are loc egalitatea, rezultă că maximumul cerut este egal cu a **2 puncte**

(b) Maximumul cerut este a , dacă $a \leq 1/2$, și $1/(4(1 - a))$, dacă $a > 1/2$; aceste valori sunt atinse, de exemplu, pentru $f \equiv 1$, în primul caz, și

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } 0 \leq x \leq 2a - 1, \\ 1/(2(1 - a)), & \text{dacă } 2a - 1 < x \leq 1, \end{cases}$$

în al doilea caz. **2 puncte**

În continuare, vom arăta că

$$\int_0^a (f(x))^2 dx \leq \begin{cases} a, & \text{dacă } a \leq 1/2, \\ 1/(4(1-a)), & \text{dacă } a > 1/2. \end{cases}$$

În acest scop, fie f o funcție din mulțimea $\mathcal{C}$. Ținând cont de condițiile din enunț,

$$\begin{aligned} \int_0^a (f(x))^2 dx &\leq f(a) \int_0^a f(x) dx \leq \left(\frac{1}{1-a} \int_a^1 f(x) dx \right) \left(\int_0^a f(x) dx \right) \\ &= \frac{1}{1-a} \left(1 - \int_0^a f(x) dx \right) \left(\int_0^a f(x) dx \right). \end{aligned}$$

..... **1 punct**

Să observăm că

$$\max \{t(1-t) : t \leq a\} = \begin{cases} a(1-a), & \text{dacă } a \leq 1/2, \\ 1/4, & \text{dacă } a > 1/2; \end{cases}$$

în ambele cazuri, maximumul este atins într-un singur punct: în $t = a$, în primul caz, și în $t = 1/2$, în al doilea.

Prin urmare,

$$\int_0^a (f(x))^2 dx \leq \begin{cases} a, & \text{dacă } a \leq 1/2, \\ 1/(4(1-a)), & \text{dacă } a > 1/2. \end{cases}$$

..... **2 puncte**

Soluția 2. (b) Ținând cont de exemplele din prima soluție, este suficient să arătăm că

$$\int_0^a (f(x))^2 dx \leq \begin{cases} a, & \text{dacă } a \leq 1/2, \\ 1/(4(1-a)), & \text{dacă } a > 1/2. \end{cases}$$

Fie f o funcție din mulțimea $\mathcal{C}$. Dacă $f(a) < 1$, atunci

$$\int_0^a (f(x))^2 dx \leq \int_0^a (f(a))^2 dx = a(f(a))^2 < a.$$

Dacă $f(a) \geq 1$, considerăm funcția $\varphi: [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$,

$$\varphi(t) = \int_0^t f(x) dx + (1-t)f(a).$$

Această funcție este evident continuă, descrescătoare pe intervalul închis $[0, a]$ și crescătoare pe intervalul închis $[a, 1]$. Întrucât $\varphi(1) = 1$, rezultă că $\varphi(a) \leq 1$ (acest lucru poate fi demonstrat și în mod direct). Pe de altă parte, $\varphi(0) = f(a) \geq 1$, deci există un punct b în intervalul închis $[0, a]$, astfel încât $\varphi(b) = 1$, i.e.,

$$\int_0^b f(x) dx = 1 - (1-b)f(a).$$

Fie $g: [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$,

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{dacă } 0 \leq x \leq b, \\ f(a), & \text{dacă } b < x \leq 1. \end{cases}$$

Este ușor de verificat că g aparține mulțimii $\mathcal{C}$; în plus, dacă $0 \leq x \leq a$, atunci $g(x) \geq f(x) \geq 0$, deci

$$\int_0^a (g(x))^2 dx \geq \int_0^a (f(x))^2 dx.$$

Pe de altă parte,

$$\begin{aligned} \int_0^a (g(x))^2 dx &\leq g(a) \int_0^a g(x) dx = f(a) \left(\int_0^b f(x) dx + (a-b)f(a) \right) \\ &= f(a) (1 - (1-b)f(a) + (a-b)f(a)) = f(a)(1 - (1-a)f(a)). \end{aligned}$$

Să observăm că

$$\max \{t(1 - (1-a)t) : t \geq 1\} = \begin{cases} a, & \text{dacă } a \leq 1/2, \\ 1/(4(1-a)), & \text{dacă } a > 1/2; \end{cases}$$

în ambele cazuri, maximumul este atins într-un singur punct: în $t = 1$, în primul caz, și în $t = 1/(2(1-a))$, în al doilea.

Prin urmare,

$$\int_0^a (f(x))^2 dx \leq \int_0^a (g(x))^2 dx \leq \begin{cases} a, & \text{dacă } a \leq 1/2, \\ 1/(4(1-a)), & \text{dacă } a > 1/2. \end{cases}$$

Remarcă. Se poate arăta că, exceptând punctele $x = 0$ și $x = 1$ — cărora li se adaugă la **(b)** punctul $x = 2a-1$, în cazul în care $a > 1/2$ —, funcțiile care realizează maximumul integralelor din enunț sunt unic determinate; în punctele menționate, plajele valorice admisibile rezultă din monotonie.

Problema 4. Fie $n \geq 2$ un număr natural, $(K, +, \cdot)$ un corp comutativ cu proprietatea că $\underbrace{1 + \dots + 1}_{m \text{ ori}} \neq 0$, $m = 2, \dots, n$, $f \in K[X]$ un polinom de grad n și G un subgrup al grupului aditiv $(K, +)$, $G \neq K$. Să se arate că există $a \in K$, astfel încât $f(a) \notin G$.

Soluție. Fie $g \in K[X]$ un polinom de grad $m \in \{2, \dots, n\}$. Polinomul $h(X) = g(X+1) - g(X)$ are gradul $m-1$ și, în plus, dacă $\text{Im } g \subseteq G$, atunci și $\text{Im } h \subseteq G$ **3 puncte**

Presupunem că $\text{Im } f \subseteq G$. Considerăm polinoamele $f_0, f_1, \dots, f_{n-1}$, definite astfel:

$$f_0 = f \quad \text{și} \quad f_k(X) = f_{k-1}(X+1) - f_{k-1}(X), \quad k = 1, \dots, n-1.$$

Din remarcă anterioară, $\deg f_k = n-k$ și $\text{Im } f_k \subseteq G$. În particular, $\deg f_{n-1} = 1$ și $\text{Im } f_{n-1} \subseteq G$ **3 puncte**

Cum funcția polinomială $\tilde{f}_{n-1}: K \rightarrow K$ este surjectivă, rezultă că $\text{Im } f_{n-1} = K$, deci $G = K$ — fals. **1 punct**

Remarcă. Problema arată că, în condițiile din enunț, grupul aditiv al lui K este generat de imaginea funcției polinomiale $\tilde{f}$.

În caracteristică zero, $\deg f$ poate să fie oricât de mare. În caracteristică p , unde p este prim, condiția $\deg f < p$ este însă esențială. De exemplu, în cazul în care $K = \mathbb{F}_4$, corpul cu patru elemente, iar $f = X^2 + X + 1$, grupul aditiv generat de $\text{Im } f$ este $\{0, 1\} \neq \mathbb{F}_4$.



Olimpiada Națională de Matematică
Etape Națională, Sibiu, 8 Aprilie 2014

CLASA a V-a

Problema 1. Demonstrați că produsul oricăror trei numere naturale impare consecutive se poate scrie ca suma a trei numere naturale consecutive.

Problema 2. Spunem că unui număr natural n i se aplică o transformare *interesantă* dacă n se înmulțește cu 2, apoi rezultatul se mărește cu 4; spunem că lui n i se aplică o transformare *deosebită* dacă n se înmulțește cu 3, apoi rezultatul se mărește cu 9; spunem că lui n i se aplică o transformare *minunată* dacă n se înmulțește cu 4, apoi rezultatul se mărește cu 16.

- a) Arătați că există un singur număr natural care, prin trei transformări succesive, una *interesantă*, una *deosebită* și una *minunată*, aplicate în această ordine, devine 2020.
- b) Determinați numerele naturale care, după exact două transformări succesive diferite, dintre cele trei tipuri, devine 2014.

Problema 3. Arătați că există un multiplu al numărului 2013 care se termină în 2014.

Problema 4. O sută de cutii sunt numerotate de la 1 la 100. Fiecare cutie conține cel mult 10 bile. Numerele bilelor din oricare două cutii numerotate cu numere consecutive diferă prin 1. Cutiile numerotate cu numerele 1, 4, 7, 10, ..., 100 conțin, în total, 301 bile. Care este numărul maxim de bile din cele 100 de cutii?

*Timp de lucru 2 ore. Se acordă în plus 30 de minute pentru întrebări.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.*

Olimpiada Națională de Matematică
Etapă Națională, Sibiu, 8 Aprilie 2014

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE, CLASA a V-a

Problema 1. Demonstrați că produsul oricăror trei numere naturale impare consecutive se poate scrie ca suma a trei numere naturale consecutive.

Soluție. Justificarea faptului că dintre oricare trei numere naturale impare consecutive unul dintre ele este multiplu de trei. **3p**

Deducem că produsul celor trei numere este multiplu de 3 **2p**

Orice număr de forma $3k, k \in \mathbb{N}^*$ se scrie $3k = (k-1) + k + (k+1)$ **2p**

Problema 2. Spunem că unui număr natural n i se aplică o transformare *interesantă* dacă n se înmulțește cu 2, apoi rezultatul se mărește cu 4; spunem că lui n i se aplică o transformare *deosebită* dacă n se înmulțește cu 3, apoi rezultatul se mărește cu 9; spunem că lui n i se aplică o transformare *minunată* dacă n se înmulțește cu 4, apoi rezultatul se mărește cu 16.

a) Arătați că există un singur număr natural care, prin trei transformări succesive, una *interesantă*, una *deosebită* și una *minunată*, aplicate în această ordine, devine 2020.

b) Determinați numerele naturale care, după exact două transformări succesive diferite, dintre cele trei tipuri, devine 2014.

Soluție. a) Fie n numărul căutat. Se obține relația $4[3(2n+4)+9]+16=2020$ **3p**

Rezultă $n=80$ **1p**

b) Deoarece o transformare deosebită duce la un multiplu de 3, iar una minunată duce la un multiplu de 4, ultima transformare nu poate fi decât interesantă. **1p**

Numărul obținut după prima transformare este 1005. **1p**

Deoarece 1005 este impar, prima transformare nu poate fi decât deosebită, iar numărul inițial este 332. **1p**

Problema 3. Arătați că există un multiplu al numărului 2013 care se termină în 2014.

Soluție. Considerăm numerele $n_1 = 2014$, $n_2 = 20142014$, $n_3 = 201420142014$, ..., $n_{2014} = \underbrace{20142014\dots 2014}_{2014 \text{ ori}}$ **2p**

Conform principiului cutiei, există cel puțin două dintre cele 2014 numere care dau același rest la împărțirea cu 2013, deci diferența lor se divide cu 2013. **2p**

Fie aceste numere $n_i, n_j, i > j, i, j \in \{1, 2, 3, \dots, 2014\}$.

Obținem $n_i - n_j = \underbrace{20142014\dots 2014}_{(i-j) \text{ ori}} \underbrace{00\dots 0}_{4j \text{ ori}}$ **1p**

Cum orice putere a lui 10 este relativ primă cu 2013, rezultă că $n = \underbrace{20142014\dots 2014}_{(i-j) \text{ ori}}$ se divide cu 2013. **2p**

Problema 4. O sută de cutii sunt numerotate de la 1 la 100. Fiecare cutie conține cel mult 10 bile. Numerele bilelor din oricare două cutii numerotate cu numere consecutive diferă prin 1. Cutiile numerotate cu numerele 1, 4, 7, 10, ..., 100 conțin, în total, 301 bile. Care este numărul maxim de bile din cele 100 de cutii?

Soluție.

Numerele de bile din două cutii vecine diferă prin 1, deci două cutii vecine pot conține, n total, cel mult $10+9=19$ bile. **1p**

Cutiile $(2, 3), (5, 6), \dots, (98, 99)$ pot conține, în total, cel mult $33 \cdot 19 = 627$ bile, deci numărul total de bile din cele 100 de cutii nu poate depăși $627 + 301 = 928$ **3p**

Există o modalitate de așezare a 928 bile astfel încât să fie satisfăcute cerințele problemei. De exemplu, este convenabilă următoarea modalitate de distribuție a bilelor:

$$\underbrace{[9\ 10\ 9\ 8\ 9\ 10] \dots [9\ 10\ 9\ 8\ 9\ 10]}_{10 \text{ grupe}} \quad \underbrace{[9\ 10\ 9\ 10\ 9\ 10] \dots [9\ 10\ 9\ 10\ 9\ 10]}_{6 \text{ grupe}} \quad [9\ 10\ 9\ 8]$$

..... **3p**

*Timp de lucru 2 ore. Se acordă în plus 30 de minute pentru întrebări.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.*



Olimpiada Națională de Matematică
Etapă Națională, Sibiu, 8 Aprilie 2014

CLASA a VI-a

Problema 1. Se consideră mulțimea A a numerelor de patru cifre cel mult egale cu 2014. Determinați numărul maxim de elemente al unei submulțimi a lui A care conține numai pătrate perfecte, oricare două prime între ele.

Problema 2. Un număr natural $n > 1$ se numește p -periodic dacă $\frac{1}{n}$ se poate scrie sub forma unei fracții zecimale periodice simple, a cărei cea mai scurtă perioadă este formată din p cifre. Spre exemplu, numărul 9 este 1-periodic, deoarece $\frac{1}{9} = 0, (1)$, iar numărul 11 este 2-periodic, întrucât $\frac{1}{11} = 0, (09)$.

- a) Determinați numerele naturale p -periodice n care au proprietatea că prima cifră a perioadei numărului $\frac{1}{n}$ este nenulă.
- b) Determinați cel mai mare număr prim care este 4-periodic.

Problema 3. Pentru un număr natural n spunem că tripletul de numere naturale nenule (x, y, z) (nu neapărat distincte) este de tip n dacă $x + y + z = n$. Notăm cu $s(n)$ numărul tripletelor de tip n .

- a) Arătați că nu există niciun număr natural n pentru care $s(n) = 14$.
- b) Determinați cel mai mic număr natural n pentru care $s(n) > 2014$.

Problema 4. În triunghiul ABC considerăm punctele $M, N \in (AB)$, $P, Q \in (BC)$ și $S, R \in (AC)$ astfel încât $AM = CR$, $AN = CS$, $\angle MQB \equiv \angle RQC$ și $\angle NPB \equiv \angle SPC$. Arătați că dacă $MQ + QR = NP + PS$, atunci triunghiul ABC este isoscel.

*Timp de lucru 2 ore. Se acordă în plus 30 de minute pentru întrebări.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.*

Olimpiada Națională de Matematică
Etapă Națională, Sibiu, 8 Aprilie 2014

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE, CLASA a VI-a

Problema 1.

Se consideră mulțimea A a numerelor de patru cifre cel mult egale cu 2014. Determinați numărul maxim de elemente al unei submulțimi a lui A care conține numai pătrate perfecte, oricare două prime între ele.

Soluție. Dacă $n^2 \in A$, atunci $n \in \{32, 33, 34, \dots, 44\}$ **3p**

Pentru a îndeplini condițiile din enunț, dintre elementele pătrate perfecte ale lui A , vom păstra un pătrat perfect multiplu de 4, un pătrat perfect multiplu de 9, dar nu și de 4, un pătrat perfect multiplu de 25, care nu este multiplu de 4 sau 9 etc **3p**

Un exemplu poate fi: $32^2, 33^2, 35^2, 37^2, 41^2$ și 43^2 .

Numărul maxim de elemente este 6 **1p**

Problema 2. Un număr natural $n > 1$ se numește *p-periodic* dacă $\frac{1}{n}$ se poate scrie sub forma unei fracții zecimale periodice simple, a cărei cea mai scurtă perioadă este formată din p cifre. Spre exemplu, numărul 9 este 1-periodic, deoarece $\frac{1}{9} = 0, (1)$, iar numărul 11 este 2-periodic, $\frac{1}{11} = 0, (09)$.
întrucât

a) Determinați numerele naturale p -periodice n care au proprietatea că prima cifră a perioadei numărului $\frac{1}{n}$ este nenulă.

b) Determinați cel mai mare număr prim care este 4-periodic.

Soluție. a) Deoarece $\frac{1}{n} \geq \frac{1}{10}$, rezultă $n \leq 10$ și $(n, 10) = 1$ **2p**

Înseamnă că $n \in \{3, 7, 9\}$ **1p**

b) $\frac{1}{n} = \frac{m}{9999}$, unde $1 \leq m \leq 9998$ **1p**

Deci $n \cdot m = 9999 = 3^2 \cdot 11 \cdot 101$

n este număr prim și cel mai mare în condițiile date, rezultă $n = 101$

Într-adevăr, $\frac{1}{101} = \frac{99}{9999} = 0, (0099)$ **3p**

Problema 3. Se consideră un număr natural n . Spunem că un triplet de numere naturale nenule, nu neapărat distincte (x, y, z) este de tip n dacă $x + y + z = n$ și notăm cu $s(n)$ numărul tripletelor de tip n .

a) Arătați că nu există niciun număr natural n pentru care $s(n) = 14$.

b) Determinați cel mai mic număr natural n pentru care $s(n) > 2014$.

Soluție. a) Trei numere diferite două câte două generează 6 triplete. Dacă numai două dintre numerele tripletului sunt egale se pot forma 3 astfel de triplete. Nu se poate forma decât cel mult un triplet cu toate componentele egale. Rezultă că numărul tripletelor este de forma $3k$ sau $3k + 1$, $k \in \mathbb{N}$, iar 14 este de forma $3k + 2$. În concluzie nu există numere naturale care să verifice condiția **3p**

b) Pentru $x = 1$ rezultă $y + z = n - 1$ și avem $n - 2$ triplete.

Pentru $x = 2$ rezultă $y + z = n - 2$ și avem $n - 3$ triplete.

.....

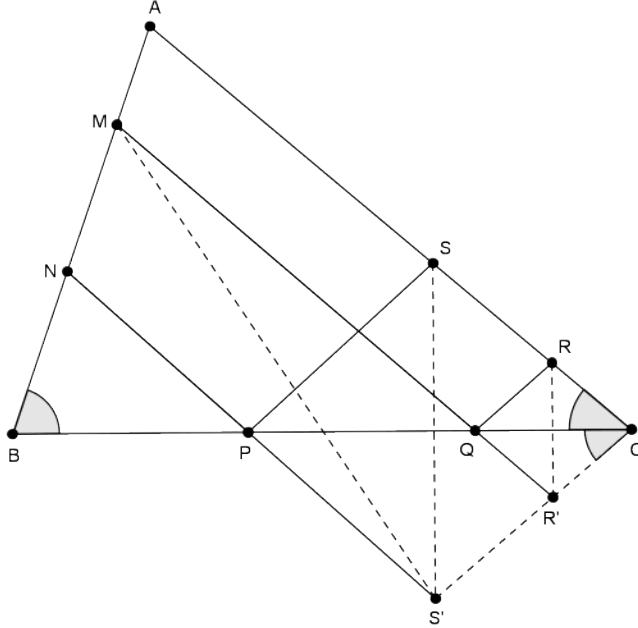
Pentru $x = n - 2$ rezultă $y + z = 2$ și avem 1 triplet. **2p**

Numărul total de triplete este $1 + 2 + \dots + (n - 2) = \frac{(n-2)(n-1)}{2}$

Din condiția $(n - 2)(n - 1) \geq 4030$ și n cel mai mic număr natural, rezultă $n = 65$ **2p**

Problema 4. În triunghiul ABC considerăm punctele $M, N \in (AB)$, $P, Q \in (BC)$ și $S, R \in (AC)$ astfel încât $AM = CR$, $AN = CS$, $\angle MQB \equiv \angle RQC$ și $\angle NPB \equiv \angle SPC$. Arătați că dacă $MQ + QR = NP + PS$, atunci triunghiul ABC este isoscel.

Soluție.



Fie R' simetricul punctului R în raport cu dreapta BC . Rezultă că $\triangle QRC \equiv \triangle QR'C$. Deducem că $CR' = CR$, $\widehat{QCR'} \equiv \widehat{QCR}$ și $\widehat{R'QC} \equiv \widehat{RQC}$ **1p**

Deoarece $\widehat{R'QC} \equiv \widehat{MQB}$ rezultă că punctele M, Q, R' sunt coliniare, prin urmare $MR' = MQ + QR' = MQ + QR$ (1) **1p**

Analog, dacă S' este simetricul punctului S în raport cu dreapta BC , punctele N, P, S' sunt coliniare și $NS' = NP + PS' = NP + PS$ (2).

Din (1) și (2) rezultă $MR' = NS'$ **2p**

Deoarece $\widehat{R'CQ} \equiv \widehat{RCQ} \equiv \widehat{PCS'}$ rezultă că punctele C, R', S' sunt coliniare. Prin urmare $S'R' = S'C - R'C = SC - RC = AN - AM = MN$ **1p**

$\triangle MNS' \equiv \triangle S'R'M$ (L.L.L.) implică $\widehat{NMS'} \equiv \widehat{MS'R'}$, de unde $AB \parallel S'C$. Înseamnă că $\widehat{ABC} \equiv \widehat{BCS'} \equiv \widehat{ACB}$, așadar $\triangle ABC$ este isoscel **2p**



Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Națională, Sibiu, 8 aprilie 2014

CLASA a VII-a

Problema 1. Determinați numerele prime p și q , cu $p \leq q$, pentru care are loc egalitatea:

$$p(2q + 1) + q(2p + 1) = 2(p^2 + q^2).$$

Problema 2. În exteriorul pătratului $ABCD$ se construiește rombul $BCMN$, cu unghiul BCM obtuz. Se notează cu P punctul de intersecție a dreptelor BM și AN . Arătați că $DM \perp CP$ și că triunghiul DPM este dreptunghic isoscel.

Problema 3. Determinați numerele naturale n pentru care are loc egalitatea:

$$17^n + 9^{n^2} = 23^n + 3^{n^2}.$$

Problema 4. În exteriorul pătratului $ABCD$ se construiește triunghiul dreptunghic isoscel ABE , cu ipotenuza $[AB]$. Fie N mijlocul laturii $[AD]$ și $\{M\} = CE \cap AB$, $\{P\} = CN \cap AB$, $\{F\} = PE \cap MN$. Pe dreapta FP se consideră punctul Q astfel încât $[CE]$ este bisectoarea unghiului QCB . Arătați că $MQ \perp CF$.

Timp de lucru 4 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.



**Olimpiada Națională de Matematică
Etapă Națională, Sibiu, 8 aprilie 2014**

CLASA a VII-a

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Problema 1. Determinați numerele prime p și q , cu $p \leq q$, pentru care are loc egalitatea:

$$p(2q + 1) + q(2p + 1) = 2(p^2 + q^2).$$

Soluția 1. Egalitatea se scrie sub forma $p + q = 2(p - q)^2$. (*) . **2p**

Ca urmare, numerele p și q sunt impare distincte. Pentru $p \geq 5$, numerele p și q dau restul 1 sau 2 la împărțirea cu 3. Vom arăta că în acest caz egalitatea (*) nu poate avea loc.

Dacă p și q dau același rest la împărțirea cu 3, atunci $3 \mid 2(p - q)^2$ și $3 \nmid p + q$, contradicție **2p**

Dacă p și q dau resturi diferite la împărțirea cu 3, atunci $3 \nmid 2(p - q)^2$ și $3 \mid p + q$, din nou contradicție **2p**

Pentru $p = 3$, rezultă $q = 5$ **1p**

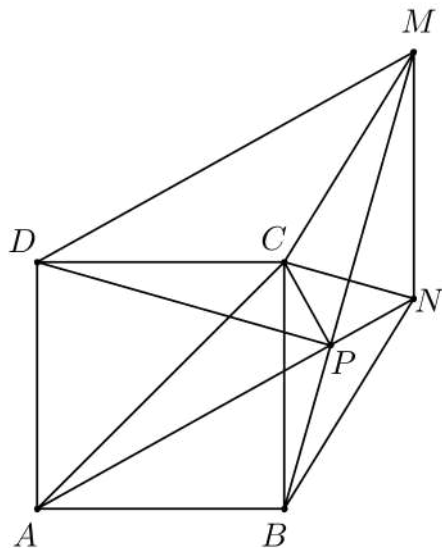
Soluția 2. Ca mai înainte, $p + q = 2(p - q)^2$, cu $p < q$ impare ... **2p**

Notând $d = q - p$, rezultă $d + 2p = 2d^2$, adică $2p = d(2d - 1)$. Atunci $2 \mid d$, deci $d = 2k$, $k \in \mathbb{N}^*$, de unde $p = k(4k - 1)$ și $q = k(4k + 1)$ **4p**

Numerele p și q sunt prime atunci și numai atunci când $k = 1$, de unde $p = 3$ și $q = 5$ **1p**

Problema 2. În exteriorul pătratului $ABCD$ se construiește rombul $BCMN$. Se notează cu P punctul de intersecție a dreptelor BM și AN . Arătați că $DM \perp CP$ și că triunghiul DPM este dreptunghic isoscel.

Soluție.



Triunghiurile CDM și CBM sunt isoscele, deci $\widehat{CMD} \equiv \widehat{CDM}$ și $\widehat{CMB} \equiv \widehat{CBM}$ **1p**

Calculând suma măsurilor unghiurilor triunghiului MBD , avem:

$$\begin{aligned} 180^\circ &= m(\widehat{DMB}) + m(\widehat{BDM}) + m(\widehat{DBM}) = \\ &= m(\widehat{DMB}) + 45^\circ + m(\widehat{CDM}) + 45^\circ + m(\widehat{CBM}) = 90^\circ + 2m(\widehat{DMB}), \end{aligned}$$

de unde $m(\widehat{DMB}) = 45^\circ$ **2p**

Deoarece $ADMN$ este paralelogram, avem $DM \parallel AN$, de unde rezultă $m(\widehat{MPN}) = m(\widehat{DMB}) = 45^\circ$ **1p**

Întrucât P se află pe mediatoarea segmentului $[CN]$, rezultă $\widehat{MPN} \equiv \widehat{MPC}$, deci $m(\widehat{NPC}) = 90^\circ$, adică $CP \perp AN$, de unde $CP \perp DM$ **1p**

Deoarece triunghiul CDM este isoscel, rezultă că perpendiculara din C pe DM , adică dreapta CP , este mediatoarea segmentului $[DM]$. Ca urmare, triunghiul DPM este isoscel de bază $[DM]$. Cum $m(\widehat{DMP}) = 45^\circ$, rezultă că $m(\widehat{DPM}) = 90^\circ$ **2p**

Problema 3. Determinați numerele naturale n pentru care are loc egalitatea:

$$17^n + 9^{n^2} = 23^n + 3^{n^2}.$$

Soluția 1. Se observă că $n = 0$ și $n = 1$ sunt soluții **1p**

Pentru $n \geq 2$, avem $n^2 \geq 2n$, de unde rezultă că
 $9^{n^2} - 3^{n^2} = 3^{n^2} (3^{n^2-1} - 1) \geq 3^{2n} (3^{2n-1} - 1) = 81^n - 9^n \dots\dots\dots 4p$
 Deoarece $81^n - 9^n > 23^n - 17^n$, ecuația nu are soluții $n \geq 2 \dots\dots\dots 2p$

Soluția 2. Se observă că $n = 0$ și $n = 1$ sunt soluții $\dots\dots\dots 1p$

Pentru $n \geq 2$, scriind ecuația sub forma $23^n - 17^n = 9^{n^2} - 3^{n^2}$, rezultă $A = B$, unde

$$A = 23^{n-1} + 17 \cdot 23^{n-2} + 17^2 \cdot 23^{n-3} + \dots + 17^{n-2} \cdot 23 + 17^{n-1}$$

$$B = 9^{n^2-1} + 9^{n^2-2} \cdot 3 + 9^{n^2-3} \cdot 3^2 + \dots + 9 \cdot 3^{n^2-2} + 3^{n^2-1} \dots\dots\dots 2p$$

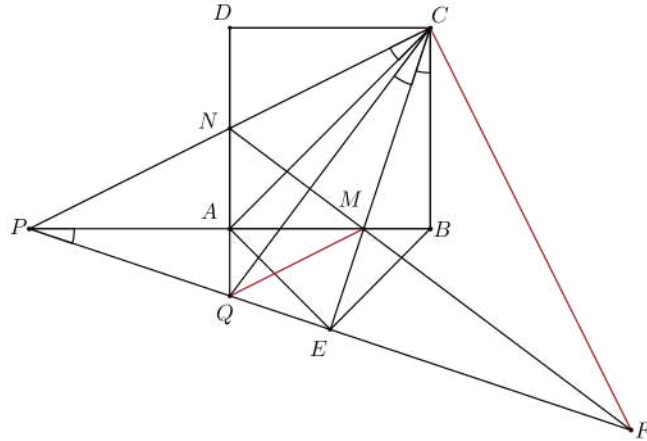
Suma A conține n termeni, deci $A < n \cdot 23^{n-1}$, iar suma B conține n^2 termeni, deci $B > n^2 \cdot 3^{n^2-1} \dots\dots\dots 2p$

Deoarece $n^2 - 1 = (n+1)(n-1) \geq 3(n-1)$, pentru orice $n \geq 2$, rezultă că

$$B > n^2 \cdot 3^{n^2-1} \geq n^2 \cdot 3^{3(n-1)} = n^2 \cdot 27^{n-1} > n \cdot 23^{n-1} = A,$$

deci ecuația nu are soluții naturale $n \geq 2 \dots\dots\dots 2p$

Problema 4. În exteriorul pătratului $ABCD$ se construiește triunghiul dreptunghic isoscel ABE , cu ipotenuza $[AB]$. Fie N mijlocul laturii $[AD]$ și $\{M\} = CE \cap AB$, $\{P\} = CN \cap AB$, $\{F\} = PE \cap MN$. Pe dreapta FP se consideră punctul Q astfel încât $[CE$ este bisectoarea unghiului QCB . Arătați că $MQ \perp CF$.



Soluție. $\triangle APE \equiv \triangle BCE$ (L.U.L.), de unde $CE = PE$ și $\widehat{BEC} \equiv \widehat{AEP}$. Cum $m(\widehat{BEC}) + m(\widehat{AEC}) = 90^\circ$, rezultă $m(\widehat{AEC}) + m(\widehat{AEP}) = 90^\circ$, adică $m(\widehat{CEP}) = 90^\circ$ (1). Obținem că triunghiul ECP este dreptunghic și isoscel, adică $m(\widehat{CPE}) = 45^\circ$ (2) $\dots\dots\dots 2p$

De asemenea, $\triangle CEQ \equiv \triangle PEM$ (C.U.), adică $EQ = EM$, deci $\triangle EMQ$ este dreptunghic și isoscel. Obținem $m(\widehat{EQM}) = 45^\circ = m(\widehat{EPC})$, de unde rezultă că $MQ \parallel CP$ **(3)** **1p**

Aplicând teorema lui Menelaus în triunghiul CPE cu transversala NF avem $\frac{CN}{NP} \cdot \frac{FP}{FE} \cdot \frac{ME}{MC} = 1$ **1p**

Notând cu R piciorul perpendicularei din E pe AB , atunci $\triangle CBM \sim \triangle ERM$, de unde obținem $\frac{ME}{MC} = \frac{ER}{BC} = \frac{1}{2}$ **1p**

Deoarece $NP = CN$, rezultă $\frac{FP}{FE} = 2$, deci $PE = EF$, și conform (1), CE este înălțime și mediană în triunghiul CFP , adică acesta este isoscel. Folosind (2), rezultă $m(\widehat{FCP}) = 90^\circ$, adică $CP \perp CF$, de unde, ținând cont de (3), obținem $MQ \perp CF$ **2p**



**Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Națională, Sibiu, 8 aprilie 2014**

CLASA a VIII-a

Problema 1. Fie $a, b, c \in (0, \infty)$. Demonstrați inegalitatea:

$$\frac{a - \sqrt{bc}}{a + 2(b + c)} + \frac{b - \sqrt{ca}}{b + 2(c + a)} + \frac{c - \sqrt{ab}}{c + 2(a + b)} \geq 0.$$

Problema 2. Fie $AB C D A' B' C' D'$ un cub cu latura $AB = a$. Considerăm punctele $E \in (AB)$ și $F \in (BC)$ astfel încât $AE + CF = EF$.

- Determinați măsura unghiului format de planele $(D'DE)$ și $(D'DF)$.
- Calculați distanța de la D' la dreapta EF .

Problema 3. Se consideră mulțimea $A = \{n, n + 1, n + 2, \dots, 2n\}$, unde $n \geq 4$ este un număr natural. Determinați cea mai mică valoare a lui n pentru care A conține cinci elemente $a < b < c < d < e$ astfel încât

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{c}{e}.$$

Problema 4. a) Demonstrați că suprafața unui pătrat de latură 2 nu se poate acoperi cu trei discuri de rază 1.

b) Demonstrați că folosind trei discuri de rază 1 se poate acoperi mai mult de 99,75% din suprafața unui pătrat de latură 2.

Timp de lucru 4 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.



Olimpiada Națională de Matematică
Etapă Națională, Sibiu, 8 aprilie 2014

CLASA a VIII-a
SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Problema 1. Fie $a, b, c \in (0, \infty)$. Demonstrați inegalitatea:

$$\frac{a - \sqrt{bc}}{a + 2(b + c)} + \frac{b - \sqrt{ca}}{b + 2(c + a)} + \frac{c - \sqrt{ab}}{c + 2(a + b)} \geq 0.$$

Soluție. Din inegalitatea mediilor avem $\sqrt{bc} \leq \frac{b+c}{2}$, deci

$$\frac{a - \sqrt{bc}}{a + 2(b + c)} \geq \frac{a - \frac{b+c}{2}}{a + 2(b + c)} = \frac{2a - b - c}{2(a + 2b + 2c)}$$

Atunci membrul stâng al inegalității din enunț este mai mare sau egal cu

$$\frac{2a - b - c}{2(a + 2b + 2c)} + \frac{2b - c - a}{2(2a + b + 2c)} + \frac{2c - a - b}{2(2a + 2b + c)} \stackrel{\text{not}}{=} S \dots\dots\dots \mathbf{2p}$$

Notând $a + 2b + 2c = 5x$, $2a + b + 2c = 5y$ și $2a + 2b + c = 5z$, obținem

$$a = -3x + 2y + 2z, \quad b = 2x - 3y + 2z \text{ și } c = 2x + 2y - 3z. \text{ Atunci}$$

$$\frac{2a - b - c}{2(a + 2b + 2c)} = \frac{-10x + 5y + 5z}{10x} = \frac{1}{2} \left(\frac{y}{x} + \frac{z}{x} - 2 \right) \dots\dots\dots \mathbf{3p}$$

Scriind relațiile analoage și sumând avem:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \left(\frac{y}{x} + \frac{z}{x} - 2 \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{y} + \frac{z}{y} - 2 \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{z} + \frac{y}{z} - 2 \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x} \right) + \left(\frac{z}{y} + \frac{y}{z} \right) - 6 \right] \geq 0, \end{aligned}$$

ceea ce conduce la concluzia problemei $\dots\dots\dots \mathbf{2p}$

Problema 2. Fie $ABCD A'B'C'D'$ un cub cu muchia $AB = a$. Considerăm punctele $E \in (AB)$ și $F \in (BC)$ astfel încât $AE + CF = EF$.

- a) Determinați măsura unghiului format de planele $(D'DE)$ și $(D'DF)$.
b) Calculați distanța de la D' la dreapta EF .

Soluție. a) Segmentul $[BA]$ îl prelungim cu segmentul $[AH] \equiv [FC]$. Atunci $\triangle DAH \equiv \triangle DCF$ (C.C.), de unde $\widehat{HDA} \equiv \widehat{FDC}$, deci $m(\widehat{HDF}) = 90^\circ$.

Apoi, $[DH] \equiv [DF]$, de unde $\triangle DHE \equiv \triangle DFE$ (L.L.L.) și de aici $m(\widehat{FDE}) = m(\widehat{HDE}) = 45^\circ$ **3p**

Deoarece $FD \perp DD'$ și $ED \perp DD'$, rezultă $m(\widehat{(D'DE)}, \widehat{(D'DF)}) = m(\widehat{FDE}) = 45^\circ$ **1p**

b) Notăm cu P proiecția punctului D pe dreapta EF . Conform teoremei celor trei perpendiculare obținem $D'P \perp EF$, deci $d(D', EF) = D'P$.. **1p**

Din congruența $\triangle DHE \equiv \triangle DFE$, obținem $DP = AD = a$ **1p**

Teorema lui Pitagora ne conduce la $D'P = a\sqrt{2}$ **1p**

Problema 3. Se consideră mulțimea $A = \{n, n+1, n+2, \dots, 2n\}$, unde $n \geq 4$ este un număr natural. Determinați cea mai mică valoare a lui n pentru care A conține cinci elemente $a < b < c < d < e$ astfel încât

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{c}{e}.$$

Soluție. Fie $p, q \in \mathbb{N}^*$, $(p, q) = 1$ astfel încât $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{c}{e} = \frac{p}{q}$. Evident $p < q$. Cum numerele a, b și c se divid cu p , iar numerele c, d și e se divid cu q , rezultă că există $m \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $c = mpq$ **1p**

Deoarece $e - a \leq 2n - n = n$, iar n trebuie să fie minim, trebuie ca numerele a, b și c să fie multipli consecutivi ai lui p , iar c, d și e să fie multipli consecutivi ai lui q . Prin urmare, $a = mpq - 2p$ și $e = mpq + 2q$ **1p**

Deoarece $n \leq a < e \leq 2n \leq 2a$, rezultă $2a \geq e$, adică $2mpq - 4p \geq mpq + 2q$, sau $mpq \geq 4p + 2q$. (*)

Cum $\frac{c}{e} = \frac{mpq}{mpq + 2q} = \frac{p}{q}$, obținem $m(q - p) = 2$, deci $m \in \{1, 2\}$... **1p**

Dacă $m = 1$, atunci $q - p = 2$, deci $q = p + 2$. Înlocuind în (*) obținem: $(p - 2)^2 \geq 8$, de unde $p \geq 5$. Pentru $p = 5$ și $q = 7$, avem $a = 25$, $b = 30$, $c = 35$, $d = 42$, $e = 49$ și, deoarece $n \leq a < e \leq 2n$, rezultă $n = 25$ **2p**

Dacă $m = 2$, atunci $q - p = 1$, deci $q = p + 1$. Înlocuind în (*) obținem: $(p - 1)^2 \geq 2$, de unde $p \geq 3$. Pentru $p = 3$ și $q = 4$, avem $a = 18$, $b = 21$,

$c = 24, d = 28, e = 30$ și, deoarece $n \leq a < e \leq 2n$, rezultă $n \in \{16, 17, 18\}$.
Prin urmare, $n_{\min} = 16$ **2p**

Problema 4. a) Demonstrați că suprafața unui pătrat de latură 2 nu se poate acoperi cu trei discuri de rază 1.

b) Demonstrați că folosind trei discuri de rază 1 se poate acoperi mai mult de 99,75% din suprafața unui pătrat de latură 2.

Soluție. Fie $ABCD$ un pătrat de latură 2 și S_1, S_2 și S_3 trei discuri de rază 1.

a) Presupunem prin reducere la absurd că S_1, S_2 și S_3 acoperă suprafața pătratului. Deoarece latura pătratului este egală cu diametrul unui disc, este necesar ca două vârfuri alăturate ale pătratului, fie acestea A și B , să fie acoperite de un același disc S_1 , adică $[AB]$ este diametrul lui S_1 **1p**

Fie $M \in (AD)$. Cum $MC > 2$, atunci M și C sunt în discuri diferite. Putem presupune $C \in S_2$ și $(AD) \subset C_3$. Analog $D \in S_3$ și $(BC) \subset C_2$. Atunci $(BC) \subset S_2$ și $(AD) \subset S_3$.

Fie acum $P \in (BC)$, $N \in (AD)$ astfel încât $CP = DN = 1,8$. Fie Q mijlocul lui $[CD]$. Atunci $PQ > 2$, deci $Q \notin S_2$. Analog $QN > 2$, deci $Q \notin S_3$. Cum, evident $Q \notin S_1$, obținem o contradicție **3p**

b) Fie $M \in (AC)$ astfel încât $AM = 2$. Notăm cu P și R proiecțiile lui M pe AB și AD . Fie $T \in BC$ astfel încât ca $PT = 2$ și $U \in DC$ astfel ca $RU = 2$. Considerăm discurile de diametre AM, PT și RU . Suprafața neacoperită de acestea este inclusă în interiorul pătratului format cu punctele C, U, X și T unde $X \in (MC)$.

Este suficient să arătăm că $\mathcal{A}_{CUXT} < 0,25\% \cdot \mathcal{A}_{ABCD}$, ceea ce este echivalent cu $CT < \frac{1}{20}BC = 0,1$ sau $BT > 1,9$.

Avem $AP = \sqrt{2}, BP = 2 - \sqrt{2}, BT^2 = 4 - (2 - \sqrt{2})^2 = 4\sqrt{2} - 2$.

Relația de demonstrat $BT > 1,9$ revine la $4\sqrt{2} - 2 > 1,9^2 \Leftrightarrow 4\sqrt{2} > 5,61 \Leftrightarrow \sqrt{2} > 1,4025$, ceea ce este adevărat **3p**



**Olimpiada Națională de Matematică
Etapă Națională, Sibiu, 8 aprilie 2014**

CLASA a IX-a

Problema 1. Fie n un număr natural. Să se afle numerele întregi x, y, z cu proprietatea

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2^n (x + y + z).$$

Problema 2. Fie a un număr natural impar care nu este pătrat perfect. Să se arate că dacă m și n sunt numere naturale nenule, atunci

a) $\{m(a + \sqrt{a})\} \neq \{n(a - \sqrt{a})\};$

b) $[m(a + \sqrt{a})] \neq [n(a - \sqrt{a})].$

Prin $\{x\}$ și $[x]$ s-a notat partea fracționară respectiv partea întreagă a numărului real x .

Problema 3. Fie P și Q mijloacele diagonalelor BD și AC ale patrulaterului $ABCD$. Se consideră punctele $M \in (BC)$, $N \in (CD)$, $R \in (PQ)$ și $S \in (AC)$ astfel încât

$$\frac{BM}{MC} = \frac{DN}{NC} = \frac{PR}{RQ} = \frac{AS}{SC} = k.$$

Să se arate că centrul de greutate al triunghiului AMN este situat pe segmentul $[RS]$.

Problema 4. Fie $ABCD$ un patrulater înscris în cercul de diametru AC . Se știe că există punctele $E \in (CD)$ și $F \in (BC)$ astfel încât dreapta AE e perpendiculară pe DF , iar AF e perpendiculară pe BE .

Să se arate că $AB = AD$.

Timp de lucru 4 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Olimpiada Națională de Matematică
8 Aprilie 2014

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE
CLASA a IX-a

Problema 1. Fie n un număr natural. Să se afle numerele întregi x, y, z cu proprietatea

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2^n (x + y + z).$$

Soluție. Dacă $n = 0$, folosind inegalitățile evidente $x^2 \geq x$ și analogele, deducem că $x, y, z \in \{0, 1\}$ 1 punct

Dacă $n \geq 1$, atunci 2 divide $x^2 + y^2 + z^2$, deci ori cele trei numere sunt pare, ori unul e par și două impare. În acest ultim caz, luând, de exemplu, $x = 2x_1 + 1, y = 2y_1 + 1, z = 2z_1$, obținem

$$4(x_1^2 + x_1 + y_1^2 + y_1 + z_1^2) + 2 = 4(x_1 + y_1 + z_1 + 1),$$

contradicție..... 2 puncte

Rămâne cazul în care x, y, z sunt pare. Pentru $x = 2x_1, y = 2y_1, z = 2z_1$, obținem

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 2^{n-1}(x_1 + y_1 + z_1),$$

deci, dacă $n = 1, x, y, z \in \{0, 2\}$ 2 puncte

Pentru $n > 1$, repetând raționamentul, deducem că dacă $x = 2^n x_n, y = 2^n y_n, z = 2^n z_n$, atunci $x_n, y_n, z_n \in \mathbb{Z}$ și

$$x_n^2 + y_n^2 + z_n^2 = x_n + y_n + z_n,$$

de unde $x_n, y_n, z_n \in \{0, 1\}$, deci $x, y, z \in \{0, 2^n\}$ 2 puncte

Problema 2. Fie a un număr natural impar care nu este pătrat perfect. Să se arate că dacă m și n sunt numere naturale nenule, atunci

a) $\{m(a + \sqrt{a})\} \neq \{n(a - \sqrt{a})\}$;

b) $[m(a + \sqrt{a})] \neq [n(a - \sqrt{a})]$.

Soluție. a) Cum ma, na sunt numere naturale, egalitatea ar atrage $\{m\sqrt{a}\} = \{-n\sqrt{a}\}$ 1 punct

Două numere au aceeași parte fracționară doar dacă diferența lor este număr întreg, de unde $(m + n)\sqrt{a} \in \mathbb{Z}$, absurd..... 1 punct

b) Din nou prin absurd, fie N natural nenul pentru care există m, n diferite nenule cu $N = [m(a + \sqrt{a})] = [n(a - \sqrt{a})]$. Prin urmare

$$N \leq m(a + \sqrt{a}) < N + 1, \quad N \leq n(a - \sqrt{a}) < N + 1$$

iar inegalitățile sunt stricte căci termenii din centru sunt iraționali 1 punct

Inegalitățile se rescriu

$$\frac{N}{a + \sqrt{a}} < m < \frac{N + 1}{a + \sqrt{a}}, \quad \frac{N}{a - \sqrt{a}} < n < \frac{N + 1}{a - \sqrt{a}},$$

de unde prin adunare

$$N \frac{2}{a - 1} < m + n < (N + 1) \frac{2}{a - 1}.$$

..... 2 puncte

De aici, $N < \frac{a-1}{2}(m + n) < N + 1$, în contradicție cu faptul că numărul din mijloc este natural (a impar) 2 puncte

Observație. Problema poate fi considerată ca parte din teorema Beatty care afirmă că mulțimile de tipul $[na]$ și $[nb]$ determină o partiție a lui $\mathbb{N}$ dacă și numai dacă a și b sunt iraționale și $1/a + 1/b = 1$.

Problema 3. Fie P și Q mijloacele diagonalelor BD și AC ale patrulaterului $ABCD$. Se consideră punctele $M \in (BC)$, $N \in (CD)$, $R \in (PQ)$ și $S \in (AC)$ astfel încât

$$\frac{BM}{MC} = \frac{DN}{NC} = \frac{PR}{RQ} = \frac{AS}{SC} = k.$$

Să se arate că centrul de greutate al triunghiului AMN este situat pe segmentul $[RS]$.

Soluție. Fie G centrul de greutate al triunghiului AMN . Avem

$$\overline{GR} = \frac{\overline{GP} + k\overline{GQ}}{1+k} = \frac{\overline{GB} + \overline{GD} + k(\overline{GA} + \overline{GC})}{2(1+k)}$$

și

$$\overline{GS} = \frac{\overline{GA} + k\overline{GC}}{1+k}.$$

..... 2 puncte

Pe de altă parte,

$$0 = \overline{GA} + \overline{GM} + \overline{GN} = \overline{GA} + \frac{\overline{GB} + k\overline{GC}}{1+k} + \frac{\overline{GD} + k\overline{GC}}{1+k},$$

..... 1 punct
de unde deducem

$$(1+k)\overline{GA} + \overline{GB} + 2k\overline{GC} + \overline{GD} = 0,$$

de unde rezultă imediat

$$\overline{GS} + 2\overline{GR} = 0,$$

așdar punctele G , R și S sunt coliniare. 4 puncte

Problema 4. Fie $ABCD$ un patrulater înscris în cercul de diametru AC . Se știe că există punctele $E \in (CD)$ și $F \in (BC)$ astfel încât dreapta AE e perpendiculară pe DF , iar AF e perpendiculară pe BE .

Să se arate că $AB = AD$.

Soluție.

Din condițiile de perpendicularitate avem

$$\overline{AE} \cdot \overline{DF} = 0 \Leftrightarrow \overline{AE} \cdot (\overline{AF} - \overline{AD}) = 0,$$

$$\overline{AF} \cdot \overline{BE} = 0 \Leftrightarrow \overline{AF} \cdot (\overline{AE} - \overline{AB}) = 0,$$

..... 1 punct
de unde

$$\overline{AE} \cdot \overline{AF} = \overline{AE} \cdot \overline{AD},$$

$$\overline{AE} \cdot \overline{AF} = \overline{AF} \cdot \overline{AB},$$

deci

$$\overline{AE} \cdot \overline{AD} = \overline{AF} \cdot \overline{AB}.$$

..... 2 puncte

Echivalent, putem scrie

$$(\overline{AD} + \overline{DE}) \cdot \overline{AD} = (\overline{AB} + \overline{BF}) \cdot \overline{AB} \Leftrightarrow AD^2 + \overline{AD} \cdot \overline{DE} = AB^2 + \overline{AB} \cdot \overline{BF}.$$

..... 2 puncte
Dar $\angle ADE = \angle ABF = 90^\circ$, deci

$$\overline{AD} \cdot \overline{DE} = \overline{AB} \cdot \overline{BF} = 0,$$

aşadar $AB = AD$ 2 puncte



Olimpiada Națională de Matematică
Etape Națională, Sibiu, 8 aprilie 2014

CLASA a X-a

Problema 1. Fie n un număr natural nenul. Pentru fiecare număr natural k notăm cu $a(k, n)$ numărul divizorilor naturali d ai lui k astfel încât $k \leq d^2 \leq n^2$. Să se calculeze $\sum_{k=1}^{n^2} a(k, n)$.

Problema 2. Considerăm funcția $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ cu proprietățile:

- a) $f(1) = 1$,
- b) $f(p) = 1 + f(p - 1)$ pentru orice număr prim p ,
- c) $f(p_1 p_2 \cdots p_n) = f(p_1) + f(p_2) + \cdots + f(p_n)$ pentru orice numere prime, nu neapărat distincte.

Să se arate că $2^{f(n)} \leq n^3 \leq 3^{f(n)}$ pentru orice număr natural n , $n \geq 2$.

Problema 3. Fie n un număr natural nenul și $A = \{1, 2, \dots, n\}$. Să se determine numărul funcțiilor crescătoare $f : A \rightarrow A$ cu proprietatea că $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$ pentru orice $x, y \in A$.

Problema 4. Fie n un număr întreg, $n \geq 2$, și fie numerele complexe $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ cu $a_n \neq 0$. Să se arate că sunt echivalente afirmațiile:

- P. $|a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0| \leq |a_n + a_0|$ pentru orice număr complex z de modul 1,
- Q. $a_1 = a_2 = \cdots = a_{n-1} = 0$ și $a_0/a_n \in [0, \infty)$.

Timp de lucru 4 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Olimpiada Națională de Matematică
Etapă finală, 8 Aprilie 2014

CLASA a X-a

Problema 1. Fie n un număr natural nenul. Pentru fiecare număr natural k notăm cu $a(k, n)$ numărul divizorilor naturali d ai lui k astfel încât $k \leq d^2 \leq n^2$. Să se calculeze $\sum_{k=1}^{n^2} a(k, n)$.

Soluție. ¹Pentru $1 \leq k \leq n^2$, fie $A(k, n)$ mulțimea divizorilor naturali d ai lui k astfel încât $k \leq d^2 \leq n^2$. Un număr natural $d \in \{1, 2, \dots, n\}$ aparține mulțimilor

$$A(d, n), A(2d, n), \dots, A(d^2, n)$$

și numai acestora.

.....**3 puncte**

Prin urmare, contribuția fiecărui d în suma $\sum_{k=1}^{n^2} a(k, n) = \sum_{k=1}^{n^2} |A(k, n)|$ este $\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{d \text{ ori}} = d$.

.....**2 puncte**

$$\text{Așadar } \sum_{k=1}^{n^2} a(k, n) = \sum_{d=1}^n d = n(n+1)/2.$$

.....**2 puncte**

Problema 2. Considerăm funcția $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ cu proprietățile:

- a) $f(1) = 1$,
- b) $f(p) = 1 + f(p-1)$ pentru orice număr prim p ,
- c) $f(p_1 p_2 \dots p_n) = f(p_1) + f(p_2) + \dots + f(p_n)$ pentru orice numere prime, nu neapărat distincte.

Să se arate că $2^{f(n)} \leq n^3 \leq 3^{f(n)}$ pentru orice număr natural n , $n \geq 2$.

Soluție. Cum 2 este număr prim, avem $f(2) = 1 + f(1) = 2$, de unde $2^2 \leq 2^3 \leq 3^2$. Vom demonstra dubla inegalitate $3 \log_3 n \leq f(n) \leq 3 \log_2 n$ prin inducție după n .

.....**1 punct**

¹Cerința este echivalentă cu dubla numărare a cardinalului mulțimii $S(n) = \{(k, d) \mid d \mid k, k \leq d^2 \leq n^2, 1 \leq k \leq n^2\}$.

Fie n un număr natural, $n \geq 3$, și fie $n = p_1 p_2 \cdots p_k$ descompunerea sa în factori primi, nu neapărat distincți.

..... **1 punct**

Dacă n nu este prim, i.e. $k \geq 2$, din ipoteza de inducție avem $f(n) = f(p_1) + f(p_2) + \cdots + f(p_k) \geq 3 \sum_{i=1}^k \log_3 p_i = 3 \log_3 n$ și

..... **1 punct**

$$f(n) \leq 3 \sum_{i=1}^k \log_2 p_i = 3 \log_2 n.$$

..... **1 punct**

Dacă n este prim, i.e. $k = 1$, atunci $n - 1$ este număr par și $f(n) = 1 + f(n - 1) = 1 + f(2 \frac{n-1}{2}) = 1 + f(2) + f(\frac{n-1}{2}) = 3 + f(\frac{n-1}{2})$.

..... **1 punct**

$$\text{Atunci } f(n) = 3 + f(\frac{n-1}{2}) \leq 3 + 3 \log_2 \frac{n-1}{2} = 3 \log_2 (n - 1) \leq 3 \log_2 n$$

..... **1 punct**

$$\text{și } f(n) = 3 + f(\frac{n-1}{2}) \geq 3 + 3 \log_3 \frac{n-1}{2} = 3 \log_3 \frac{3(n-1)}{2} \geq 3 \log_3 n.$$

..... **1 punct**

Problema 3. Fie n un număr natural nenul și $A = \{1, 2, \dots, n\}$. Să se determine numărul funcțiilor crescătoare $f : A \rightarrow A$ cu proprietatea că $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$ pentru orice $x, y \in A$.

Soluție. Observăm că $f(k+1) - f(k) \stackrel{\text{not}}{=} a_k \in \{0, 1\}$, $k = 1, 2, \dots, n-1$.

..... **1 punct**

Mai mult, dacă $a_k \in \{0, 1\}$, atunci $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$ pentru orice $x, y \in A$.²

..... **1 punct**

Fixând $f(0) = a$ și $f(n) = b$, avem $b - a = a_1 + \cdots + a_{n-1}$, deci numărul funcțiilor f cu proprietatea cerută este egal cu numărul de alegeri a $b - a$ termeni egali cu 1 în suma $a_1 + \cdots + a_{n-1}$, adică $n(a, b) = C_{n-1}^{b-a}$.

..... **2 puncte**

$$\text{Prin urmare, numărul funcțiilor este } \sum_{0 \leq a \leq b \leq n} n(a, b) = \sum_{0 \leq a \leq b \leq n} C_{n-1}^{b-a} =$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} (n-k) C_{n-1}^k.$$

..... **2 puncte**

$$\text{În total sunt } \sum_{k=0}^{n-1} n C_{n-1}^k - \sum_{k=1}^{n-1} k C_{n-1}^k = n 2^{n-1} - \sum_{k=1}^{n-1} (n-1) C_{n-2}^{k-1} = n 2^{n-1} - (n-1) 2^{n-2} = (n+1) 2^{n-2} \text{ funcții.}$$

..... **1 punct**

Problema 4. Fie n un număr întreg, $n \geq 2$, și fie numerele complexe $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ cu $a_n \neq 0$. Să se arate că sunt echivalente afirmațiile:

²Prin urmare, o funcție f cu proprietățile cerute este complet determinată de n -uplul $(f(0), a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) \in A \times \{0, 1\} \times \cdots \times \{0, 1\}$ ce respectă condiția $f(0) + a_1 + \cdots + a_{n-1} \leq n$.

P. $|a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0| \leq |a_n + a_0|$ pentru orice număr complex z de modul 1,

Q. $a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1} = 0$ și $a_0/a_n \in [0, \infty)$.

Soluție. Q. $\implies$ P. Dacă $a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1} = 0$ și $a_0/a_n \in [0, \infty)$, atunci $|a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0| = |a_n z^n + a_0| \leq |a_n z^n| + |a_0| = |a_n| + |a_0| = |a_n + a_0|$, pentru orice număr complex z de modul 1.

..... **2 puncte**

P. $\implies$ Q. Fie $g(z) = a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z$, $z \in \mathbb{C}$ și $w = a_0 + a_n$. Pentru fiecare $\varepsilon \in U_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$ avem $|a_n + g(\varepsilon) + a_0| \leq |a_n + a_0|$, adică $|w + g(\varepsilon)| \leq |w|$ sau $|g(\varepsilon)|^2 + w \overline{g(\varepsilon)} + \bar{w} g(\varepsilon) \leq 0$.

..... **2 puncte**

Cum $\sum_{\varepsilon \in U_n} \varepsilon^k = 0$, $k = 1, 2, \dots, n-1$, avem $\sum_{\varepsilon \in U_n} g(\varepsilon) = 0$,

..... **1 punct**

de unde, prin sumare, $\sum_{\varepsilon \in U_n} |g(\varepsilon)|^2 + w \overline{g(\varepsilon)} + \bar{w} g(\varepsilon) = \sum_{\varepsilon \in U_n} |g(\varepsilon)|^2 \leq 0$, ceea ce implică $g(\varepsilon) = 0$, oricare ar fi $\varepsilon \in U_n$. De aici obținem $a_k = \frac{1}{n} \sum_{\varepsilon \in U_n} g(\varepsilon)/\varepsilon^k = 0$, $k = 1, 2, \dots, n-1$.

..... **1 punct**

Obținem $|a_n z^n + a_0| \leq |a_n + a_0|$ pentru orice număr complex z de modul 1. Notând $c = a_0/a_n$ și $t = z^n$, avem $|t + c| \leq |1 + c|$ pentru orice număr complex t de modul 1. Fie P , M , A punctele din planul complex de afixe t , $-c$, respectiv 1. Atunci $PM \leq MA$, oricare ar fi P pe cercul unitate, prin urmare cercul de centru M și raza MA conține cercul unitate. Cum cele două cercuri au punctul comun A , deducem că sunt tangente în A , deci M și O sunt coliniare cu A și $MA \geq OA = 1$. Deducem că $-c \leq 0$, deci $c \in [0, \infty)$.

..... **1 punct**



Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Națională, Sibiu, 8 aprilie 2014

CLASA a XI-a

Problema 1. Dacă n este un număr natural, iterata de ordin n a unei funcții $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este funcția

$$f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_n,$$

unde f^0 este identitatea. Determinați funcțiile continue $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, care îndeplinesc simultan următoarele două condiții:

- (a) Funcția $f^0 + f^1$ este crescătoare; și
- (b) Există un număr natural nenul m , astfel încât funcția $f^0 + \cdots + f^m$ este descrescătoare.

Problema 2. Determinați funcțiile derivabile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, care îndeplinesc condiția $f \circ f = f$.

Problema 3. Fie n un număr natural nenul și A, B două matrice din $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, astfel încât $A^2 + B^2 = 2AB$. Arătați că:

- (a) Matricea $AB - BA$ este singulară; și
- (b) Dacă rangul matricei $A - B$ este 1, atunci matricele A și B comută.

Problema 4. Fie A o matrice inversabilă din $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, astfel încât $\text{tr } A = \text{tr } A^* \neq 0$, unde A^* este adjuncta matricei A . Arătați că matricea $A^2 + I_4$ este singulară dacă și numai dacă există o matrice nenulă B în $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, astfel încât $AB = -BA$.

Timp de lucru 4 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Clasa a XI-a — Soluții și barem orientativ

Problema 1. Dacă n este un număr natural, iterata de ordin n a unei funcții $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este funcția

$$f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_n,$$

unde f^0 este identitatea. Determinați funcțiile continue $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, care îndeplinesc simultan următoarele două condiții:

- (a) Funcția $f^0 + f^1$ este crescătoare; și
- (b) Există un număr natural nenul m , astfel încât funcția $f^0 + \cdots + f^m$ este descrescătoare.

Soluție. Funcțiile cerute sunt de forma $f(x) = -x + c$, unde c este o constantă reală. Aceste funcții verifică în mod evident condițiile din enunț.

Arătăm mai întâi că f este injectivă. Fie x și y două numere reale, astfel încât $f(x) = f(y)$, și fie $g_n = f^0 + \cdots + f^n$, $n \in \mathbb{N}$. Întrucât g_1 este crescătoare, g_m este descrescătoare, iar $g_1(x) - g_1(y) = x - y = g_m(x) - g_m(y)$, rezultă că $(x - y)^2 = (g_1(x) - g_1(y))(g_m(x) - g_m(y)) \leq 0$, deci $x = y$.

..... **2 puncte**

Întrucât f este injectivă și continuă (proprietatea valorii intermediare (Darboux) este suficientă), f este strict monotonă, deci toate iteratele sale de ordin par, f^{2k} , sunt strict crescătoare.

..... **1 punct**

Funcția g_1 fiind crescătoare, din paragraful precedent și relația

$$g_n = \begin{cases} \sum_{k=0}^{n/2-1} g_1 \circ f^{2k} + f^n, & \text{dacă } n \text{ este par,} \\ \sum_{k=0}^{(n-1)/2} g_1 \circ f^{2k}, & \text{dacă } n \text{ este impar,} \end{cases}$$

rezultă că g_n este strict crescătoare, dacă n este par, și crescătoare, dacă n este impar.

..... **2 puncte**

Funcția g_m fiind descrescătoare, rezultă că m este impar și g_m constantă. În fine, g_1 fiind crescătoare și toate iteratele de ordin par ale lui f fiind (strict) crescătoare, deducem că g_1 este constantă, de unde rezultă concluzia.

..... **2 puncte**

Problema 2. Determinați funcțiile derivabile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, care îndeplinesc condiția $f \circ f = f$.

Soluție. Funcțiile cerute sunt funcțiile constante și identitatea, funcții care verifică în mod evident condițiile din enunț.

Întrucât f este continuă, imaginea sa, $\{f(x): x \in \mathbb{R}\}$, este un interval $I \subseteq \mathbb{R}$. Dacă I este un singleton, atunci f este constantă.

..... **1 punct**

Dacă I este nedegenerat, fie $a = \inf I < \sup I = b$, unde $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$. Din condiția din enunț rezultă că restricția lui f la intervalul deschis (a, b) este identitatea:

$$f(x) = x, \quad a < x < b. \tag{1}$$

..... 1 punct

Vom arăta că $a = -\infty$ și $b = +\infty$, i.e., $I = \mathbb{R}$ și f este identitatea. Să presupunem că a este real. Continuitatea lui f în a și (1) implică $f(a) = a$, deci

$$f'(a) = f'_a(a) = \lim_{x \rightarrow a, x > a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a, x > a} \frac{x - a}{x - a} = 1. \quad (2)$$

Pe de altă parte, f are un minimum în a , deoarece $f(a) = a = \inf I = \inf \{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$, deci, conform teoremei lui Fermat, $f'(a) = 0$, în contradicție cu (2). Prin urmare, $a = -\infty$. În mod analog, $b = +\infty$.

..... 5 puncte

Problema 3. Fie n un număr natural nenul și A, B două matrice din $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, astfel încât $A^2 + B^2 = 2AB$. Arătați că:

- (a) Matricea $AB - BA$ este singulară; și
- (b) Dacă rangul matricei $A - B$ este 1, atunci matricele A și B comută.

Soluție. (a) Relația din enunț este echivalentă cu fiecare dintre următoarele două relații:

$$(A - B)^2 = AB - BA, \quad (1)$$

$$A(A - B) = (A - B)B. \quad (2)$$

Să presupunem că matricea $AB - BA$ este nesară. Conform (1), și $A - B$ este nesară, deci $B = (A - B)^{-1}A(A - B)$, conform (2). Așadar, $A - B = A - (A - B)^{-1}A(A - B)$, de unde, $I_n = A(A - B)^{-1} - (A - B)^{-1}A$. Trecând la urmă, obținem o contradicție: $n = \text{tr } I_n = \text{tr } (A(A - B)^{-1} - (A - B)^{-1}A) = 0$. Prin urmare, matricea $AB - BA$ este singulară; în plus, din relația (1) rezultă că și matricea $A - B$ este singulară.

..... 4 puncte

(b) Reamintim că, dacă X este o matrice de rang 1 din $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, atunci $X^2 = (\text{tr } X)X$ — aceasta rezultă din faptul că fiecare linie a lui X este proporțională cu o linie nenulă a lui X .

Conform relației (1) și rezultatului amintit mai sus,

$$AB - BA = (A - B)^2 = (\text{tr } (A - B))(A - B),$$

deci $0 = \text{tr } (AB - BA) = (\text{tr } (A - B))^2$, i.e., $\text{tr } (A - B) = 0$. Prin urmare, $AB - BA = O_n$, i.e., $AB = BA$.

..... 3 puncte

Problema 4. Fie A o matrice inversabilă din $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, astfel încât $\text{tr } A = \text{tr } A^* \neq 0$, unde A^* este adjuncta matricei A . Arătați că matricea $A^2 + I_4$ este singulară dacă și numai dacă există o matrice nenulă B în $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, astfel încât $AB = -BA$.

Soluție. Arătăm mai întâi că, dacă A este o matrice din $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, astfel încât $A^2 + I_n$ este singulară, atunci există o matrice nenulă B în $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, astfel încât $AB = -BA$.

Întrucât $A^2 + I_n$ este singulară, i este o valoare proprie a lui A , iar $-i$ este o valoare proprie a transpusei A^T . Există deci doi vectori nenuli $\mathbf{x}$ și $\mathbf{y}$ în $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, astfel încât $A\mathbf{x} = i\mathbf{x}$ și $A^T\mathbf{y} = -i\mathbf{y}$. Întrucât $\mathbf{x}$ și $\mathbf{y}$ sunt nenuli, $B = \mathbf{xy}^T$ este o matrice nenulă din $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Matricele A și B anticomută:

$$AB = A\mathbf{x}\mathbf{y}^T = i\mathbf{x}\mathbf{y}^T = -\mathbf{x}(-i\mathbf{y})^T = -\mathbf{x}(A^T\mathbf{y})^T = -\mathbf{x}\mathbf{y}^T A = -BA.$$

Trecând la conjugate și ținând cont de faptul că A este în $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, rezultă că și conjugata $\bar{B}$ a lui B anticomută cu A . Deci orice combinație liniară cu coeficienți complecși a matricelor B și $\bar{B}$ anticomută cu A . Prin urmare, B sau $i(B - \bar{B})$ este o matrice nenulă din $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, care anticomută cu A . În particular, am demonstrat una dintre implicațiile problemei.

..... **4 puncte**

Arătăm acum că, în condițiile din enunț, este adevărată și reciproca. Fie B o matrice nenulă din $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, care anticomută cu A . Atunci

$$A^k B = (-1)^k B A^k, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (*)$$

Considerăm polinomul caracteristic f al matricei A ,

$$f = \lambda^4 - (\text{tr } A)\lambda^3 + a\lambda^2 - (\text{tr } A^*)\lambda + \det A = \lambda^4 - (\text{tr } A)\lambda^3 + a\lambda^2 - (\text{tr } A)\lambda + \det A,$$

unde a este un număr real; cea de a doua expresie a lui f rezultă din ipoteza $\text{tr } A = \text{tr } A^*$.

Conform teoremei Hamilton-Cayley, $f(A) = O_4$. Ținând cont de $(*)$, obținem succesiv:

$$\begin{aligned} O_4 &= f(A)B = B(A^4 + (\text{tr } A)A^3 + aA^2 + (\text{tr } A)A + (\det A)I_4) \\ &= B(f(A) + 2(\text{tr } A)(A^2 + I_4)A) = 2(\text{tr } A)B(A^2 + I_4)A. \end{aligned}$$

Întrucât $\text{tr } A \neq 0$, iar A este inversabilă, rezultă că $B(A^2 + I_4) = O_4$. Matricea B fiind nenulă, conchidem că $A^2 + I_4$ este singulară.

..... **3 puncte**



Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Națională, Sibiu, 8 aprilie 2014

CLASA a XII-a

Problema 1. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel. Pentru fiecare $a \in A$ definim funcțiile $s_a : A \rightarrow A$ și $d_a : A \rightarrow A$ prin $s_a(x) = ax$, $d_a(x) = xa$, oricare ar fi $x \in A$.

a) Să se arate că, dacă A este mulțime finită, atunci s_a este injectivă dacă și numai dacă d_a este injectivă.

b) Dați exemplu de inel care conține un element a pentru care exact una dintre funcțiile s_a și d_a este injectivă.

Problema 2. Fie I, J două intervale, fie $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă care nu se anulează în niciun punct din J și fie $f, g : I \rightarrow J$ două funcții derivabile astfel încât $f' = \varphi \circ f$ și $g' = \varphi \circ g$.

Să se arate că, dacă există $x_0 \in I$ astfel încât $f(x_0) = g(x_0)$, atunci funcțiile f și g coincid.

Problema 3. Fie $f : [1, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ o funcție continuă, având proprietățile:

(i) funcția $g : [1, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ dată de $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ are limită la $+\infty$;

(ii) funcția $h : [1, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ dată de $h(x) = \frac{1}{x} \int_1^x f(t) dt$ are limită finită la $+\infty$.

a) Să se arate că $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.

b) Să se arate că $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} \int_1^x f^2(t) dt = 0$.

Problema 4. Fie $(G, \cdot)$ un grup finit cu elementul neutru notat e . Presupunem că există $a \in G \setminus \{e\}$ și un număr natural prim p cu proprietatea $x^{p+1} = a^{-1}xa$, oricare ar fi $x \in G$.

a) Să se arate că există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\text{ord}(G) = p^k$.

b) Să se arate că mulțimea $\{x \in G \mid x^p = e\}$ este un subgrup H al lui G și $(\text{ord}(H))^2 > \text{ord}(G)$.

Timp de lucru 4 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.



**Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Națională, Sibiu, 8 aprilie 2014**

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE, CLASA a XII-a

Problema 1. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel. Pentru $a \in A$ definim funcțiile $s_a : A \rightarrow A$ și $d_a : A \rightarrow A$ prin $s_a(x) = ax$, $d_a(x) = xa$, oricare ar fi $x \in A$.

a) Presupunem că A este mulțime finită. Să se arate că: pentru orice $a \in A$, s_a este injectivă dacă și numai dacă d_a este injectivă.

b) Dați exemplu de inel care conține un element a pentru care exact una dintre funcțiile s_a și d_a este injectivă.

Soluție. a) Să presupunem că s_a este injectivă. Deoarece A este finită s_a este bijectivă, deci există $b \in A$ astfel încât $ab = 1$ **3p**

Astfel, dacă $d_a(x) = d_a(y)$, atunci $(x - y)a = 0$, de unde $(x - y)ab = 0$, adică $x - y = 0$, ceea ce demonstrează injectivitatea funcției d_a **2p**

Implicația inversă se demonstrează asemănător.

b) Pentru un exemplu putem considera mulțimea $S = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid x_n \in \mathbb{R}\}$ și inelul funcțiilor aditive $f : S \rightarrow S$, cu operațiile de adunare și compunere a funcțiilor. Ca element a se poate lua funcția dată prin $a((x_n)_n) = (x_{n+1})_n$. Deoarece a este surjectivă, d_a este injectivă; pe de altă parte, s_a nu este injectivă..... **2p**

Problema 2. Fie I, J două intervale, fie $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă care nu se anulează în niciun punct din J și fie $f, g : I \rightarrow J$ două funcții derivabile astfel încât $f' = \varphi \circ f$ și $g' = \varphi \circ g$.

Să se arate că, dacă există $x_0 \in I$ astfel încât $f(x_0) = g(x_0)$, atunci funcțiile f și g coincid.

Soluție. Deoarece φ nu se anulează și este continuă, funcția $\frac{1}{\varphi}$ este corect definită și are o primitivă $F : J \rightarrow \mathbb{R}$ **1p**

Ipoteza devine $(F \circ f)'(x) = 1$, $\forall x \in I$, deci există $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $F(f(x)) = x + a$, $\forall x \in I$, analog există $b \in \mathbb{R}$ astfel încât $F(g(x)) = x + b$, $\forall x \in I$ **2p**

Deducem $x_0 + a = F(f(x_0)) = F(g(x_0)) = x_0 + b$, deci $a = b$. Rezultă $F(f(x)) = F(g(x))$, $\forall x \in J$ (*) **2p**

Pe de altă parte, din $F'(x) \neq 0$, $\forall x \in J$ rezultă că F' are semn constant pe J , deci este strict monotonă. Astfel F este injectivă, iar din (*) reiese $f = g$ **2p**

Problema 3. Fie $f : [1, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ o funcție continuă, având proprietățile:

(i) funcția $g : [1, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ dată de $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ are limită la $+\infty$;

(ii) funcția $h : [1, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ dată de $h(x) = \frac{1}{x} \int_1^x f(t) dt$ are limită finită la $+\infty$.

a) Să se arate că $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.

b) Să se arate că $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} \int_1^x f^2(t) dt = 0$.

Soluție. a) Fie $\ell = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$. Dacă $\ell \in (0, +\infty)$, atunci există $a > 0$ astfel încât $g(x) > \ell/2$ pentru $x \geq a$, de unde

$$h(x) = \frac{1}{x} \left(\int_1^a f(t) dt + \int_a^x f(t) dt \right) \geq \frac{1}{x} \int_1^a f(t) dt + \frac{\ell}{2x} \int_a^x t dt = \frac{1}{x} \int_1^a f(t) dt + \frac{\ell(x^2 - a^2)}{4x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty,$$

ceea ce contrazice (ii). La fel arătăm că presupunerea $\ell = +\infty$ contrazice (ii), deci $\ell = 0 \dots$ **2p**

b) Observăm că $\int_1^x f(t) dt > 0, \forall x > 1$, deci

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} \int_1^x f^2(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\int_1^x f^2(t) dt}{x \int_1^x f(t) dt} \cdot \frac{\int_1^x f(t) dt}{x} \right) = \lambda \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x f^2(t) dt}{x \int_1^x f(t) dt} = \lambda \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{u(x)}{v(x)},$$

unde $\lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$, $u(x) = \int_1^x f^2(t) dt$, $v(x) = x \int_1^x f(t) dt \dots \dots \dots$ **1p**

Pentru $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{u(x)}{v(x)}$ folosim regula lui l'Hospital pentru $\frac{\infty}{\infty}$: u și v definesc funcții derivabile,
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = +\infty$ (avem $v(x) \geq m(x-1)$ pentru $x \geq 2$, unde $m = \inf_{x \in [1,2]} f(x)$) $\dots \dots \dots$ **1p**

$v'(x) = \int_1^x f(t) dt + xf(x) \neq 0, \forall x \geq 1 \dots \dots \dots$ **1p**

iar $\frac{u'(x)}{v'(x)} = \frac{f^2(x)}{xf(x) + \int_1^x f(t) dt} = g(x) \cdot \frac{f(x)}{f(x) + h(x)} \in (0, g(x))$ și $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ implică

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{u'(x)}{v'(x)} = 0$, deci $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{u(x)}{v(x)} = 0$, de unde concluzia $\dots \dots \dots$ **2p**

Problema 4. Fie $(G, \cdot)$ un grup finit cu elementul neutru notat e . Presupunem că există $a \in G \setminus \{e\}$ și un număr prim p cu proprietatea $x^{p+1} = a^{-1}xa$, oricare ar fi $x \in G$.

a) Să se arate că există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\text{ord}(G) = p^k$.

b) Să se arate că mulțimea $\{x \in G \mid x^p = e\}$ este un subgrup H al lui G și $(\text{ord}(H))^2 > \text{ord}(G)$.

Soluție. a) Dacă $x, y \in G$, atunci $(xy)^{p+1} = a^{-1}xya = a^{-1}xaa^{-1}ya = x^{p+1}y^{p+1}$. Relația obținută se poate scrie $x(yx)^py = x^{p+1}y^{p+1}$, deci $(yx)^p = x^py^p \dots \dots \dots$ **1p**

Pentru $x = a$ obținem din ipoteză $a^p = e$ deci, folosind relația precedentă, $(ya)^p = y^p$. Prin înmulțire cu ya la stânga reiese $yay^p = (ya)^{p+1} = y^{p+1}a$, deci $ay^p = y^pa, \forall y \in G \dots \dots \dots$ **1p**

Din ipoteză rezultă $y^{p(p+1)} = a^{-1}y^pa = y^p$, deci $y^{p^2} = e, \forall y \in G$. Deoarece p este prim reiese că orice element al grupului are ordinul 1, p sau p^2 și, folosind teorema lui Cauchy, deducem că $\text{ord}(G) = p^k, k \in \mathbb{N}^* \dots \dots \dots$ **1p**

b) Dacă $x, y \in H$, atunci $(xy)^p = y^px^p = e$, deci $xy \in H$. Astfel H este parte stabilă și, cum H este finit, rezultă că H este subgrup $\dots \dots \dots$ **1p**

Considerăm funcția $f: G \rightarrow G, f(x) = x^p$. Cum $e = x^{p^2} = (x^p)^p$, deducem că imaginea funcției este inclusă în H . În plus, $x, y \in G$ și $f(x) = f(y)$ implică $x^p(y^{-1})^p = e$, deci $(y^{-1}x)^p = e$, adică $y^{-1}x \in H$, de unde $x \in Hy$. Reiese astfel că, pentru orice element din $\text{Im}f$, numărul preimaginilor sale din G este chiar $\text{ord}(H)$, deci $|\text{Im}f| = \frac{\text{ord}(G)}{\text{ord}(H)} \dots \dots \dots$ **1p**

Din $a \neq e$ reiese $a \notin \text{Im}f$: în caz contrar $a = b^p$ pentru un $b \in G$, de unde ar rezulta $b^{p+1} = b^{-p}bb^p$, deci $e = b^p = a$ - fals. Cum $a \in H$, rezultă că $\text{ord}(H) > |\text{Im}f| = \frac{\text{ord}(G)}{\text{ord}(H)}$, ceea ce duce imediat la concluzie $\dots \dots \dots$ **2p**



Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Județeană și a Municipiului București, 14 martie 2015

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE – CLASA a V-a

Problema 1. Determinați toate numerele naturale de două cifre $\overline{ab}$, cu $a < b$, care sunt egale cu suma numerelor naturale cel puțin egale cu a și cel mult egale cu b .

Soluție

Conform relației din enunț, avem $\overline{ab} = a + (a + 1) + \dots + b$ și, cum $a + (a + 1) + \dots + b \leq 1 + 2 + \dots + 9 = 45$, rezultă $a \leq 4$ **3p**

Pentru $a = 4$, rezultă $\overline{ab} \geq 45 = 1 + 2 + \dots + 9$, deci ar trebui ca $a = 1$ (și $b = 9$), nu convine **1p**

Dacă $a = 3$ obținem $3 + 4 + \dots + (b - 1) + b = \overline{3b} = 30 + b$. Scăzând b și adunând $1 + 2$ în ambii membri, rezultă $1 + 2 + \dots + (b - 1) = 32$, de unde $(b - 1) \cdot b = 64$, egalitate care nu se realizează pentru nicio valoare $b \in \{4, 5, \dots, 9\}$ **1p**

Dacă $a = 2$, atunci $2 + 3 + \dots + (b - 1) + b = \overline{2b} = 20 + b$. Scăzând b și adunând 1 în ambii membri, rezultă $1 + 2 + \dots + (b - 1) = 21$, de unde $(b - 1) \cdot b = 42$.

Cum $6 \cdot 7 = 42$, egalitatea are loc pentru $b = 7$, deci un număr care satisface condiția din enunț este $\overline{ab} = 27$ **1p**

Pentru $a = 1$ obținem $1 + 2 + \dots + (b - 1) + b = \overline{1b} = 10 + b$, de unde $1 + 2 + \dots + (b - 1) = 10$ sau $(b - 1) \cdot b = 20$.

Egalitatea precedentă se verifică pentru $b = 5$, deci și $\overline{ab} = 15$ satisface condiția din enunț **1p**

Problema 2. La un concurs de matematică, la care participă 50 de elevi, se oferă spre rezolvare 3 probleme. Știind că fiecare elev a rezolvat cel puțin o problemă și că numărul de soluții corecte ale tuturor concurenților este 100, arătați că numărul celor care au rezolvat corect toate cele trei probleme este cel mult 25.

Soluție

Fie a, b, c numărul elevilor care au rezolvat corect exact una, două, respectiv trei probleme.

Atunci $a + b + c = 50$ și $a + 2b + 3c = 100$ **2p**

Rezultă $b + 2c = 50$ **2p**

Atunci $2c \leq 50$, deci $c \leq 25$ **3p**

Problema 3. Mulțimea numerelor naturale nenule se împarte în submulțimi astfel:

$$\{1, 2\}, \{3, 4, 5\}, \{6, 7, 8, 9\}, \dots$$

a) Aflați cel mai mic element din cea de-a 100-a submulțime.

b) Este 2015 cel mai mare element al unei astfel de submulțimi?

Gazeta Matematică

Soluție

a) Primele 99 de submulțimi conțin $2 + 3 + \dots + 100 = 5049$ de elemente **2p**

În primele 99 de submulțimi sunt scrise numerele de la 1 la 5049, deci cel mai mic element al celei de-a 100-a submulțimi este 5050 **1p**

b) 2015 este cel mai mare element al celei de-a n -a submulțimi dacă $2 + 3 + \dots + (n + 1) = 2015$.. **1p**

Adunând 1 în ambii membri rezultă $(n + 1)(n + 2) = 2 \cdot 2016 = 4032$ **2p**

Cum $63 \cdot 64 = 4032$, rezultă că 2015 este cel mai mare element al celei de-a 62-a submulțimi **1p**

Problema 4. a) Arătați că ultimele trei cifre ale numărului 1038^2 sunt egale cu 4.

b) Arătați că există o infinitate de pătrate perfecte ale căror ultime trei cifre sunt egale cu 4.

c) Demonstrați că nu există pătrate perfecte care să aibă ultimele patru cifre egale cu 4.

Soluție

a) $1038^2 = 1077444$ **1p**

b) Ridicând la pătrat un număr ale cărui ultime trei cifre sunt 038 se obține un număr care se termină cu trei cifre de 4, după cum se vede din înmulțirea de mai jos **1p**

$$\begin{array}{r} \dots \dots \dots 0 \ 3 \ 8 \times \\ \dots \dots \dots 0 \ 3 \ 8 \\ \hline \dots \dots \dots 3 \ 0 \ 4 \\ \dots \dots \dots 1 \ 4 \\ \hline \dots \dots \dots 4 \ 4 \ 4 \end{array}$$

Sunt o infinitate de numere care se termină în 038, deci sunt o infinitate de pătrate perfecte terminate cu trei cifre de 4 **1p**

c) Fie a un număr natural al cărui pătrat se termină în patru cifre de 4; atunci a este par, $a = 2b$. În plus, a^2 are forma $10000k + 4444$, $k \in \mathbb{N}$, deci $4b^2 = a^2 = 4(2500k + 1111)$, de unde rezultă că ultimele două cifre ale lui b^2 sunt egale cu 1 **1p**

Ultima cifră a lui b este 1 sau 9 **1p**

Analizând înmulțirile

$$\begin{array}{r} \dots \dots \dots n \ 1 \times \\ \dots \dots \dots n \ 1 \\ \hline \dots \dots \dots n \ 1 \\ \dots \dots \dots n \\ \hline \dots \dots \dots u \ 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \dots \dots \dots m \ 9 \times \\ \dots \dots \dots m \ 9 \\ \hline \dots \dots \dots p \ 1 \\ \dots \dots \dots p \\ \hline \dots \dots \dots v \ 1 \end{array}$$

rezultă că u este ultima cifră a lui $2n$, iar v este ultima cifră a lui $2p$, deci sunt cifre pare **1p**

Așadar, penultima cifră a lui b^2 este pară, deci nu poate fi egală cu 1. Ca urmare, nu există pătrate perfect terminate în patru cifre de 4 **1p**



Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Județeană și a Municipiului București, 14 martie 2015

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE – CLASA a VI-a

Problema 1. Pe o tablă sunt scrise la început numerele 11 și 13. Un pas înseamnă scrierea pe tablă a unui număr nou, egal cu suma a două numere oarecare scrise deja pe tablă. Arătați că:

- indiferent câți pași s-ar efectua, pe tablă nu se poate scrie numărul 86;
- este posibil ca, după mai mulți pași, pe tablă să fie scris numărul 2015.

Gazeta Matematică

Soluție

a) Orice număr care poate fi scris pe tablă este de forma $11a + 13b$, unde $a, b \in \mathbb{N}^*$ **1p**

Dacă ar exista $a, b \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $86 = 11a + 13b$, atunci $b \leq 6$ **1p**

Atunci $13b \in \{13, 26, 39, 52, 65, 78\}$, deci $11a = 86 - 13b \in \{73, 60, 47, 34, 21, 8\}$ **1p**

Niciunul dintre aceste numere nu se divide cu 11, deci 86 nu se poate scrie pe tablă **1p**

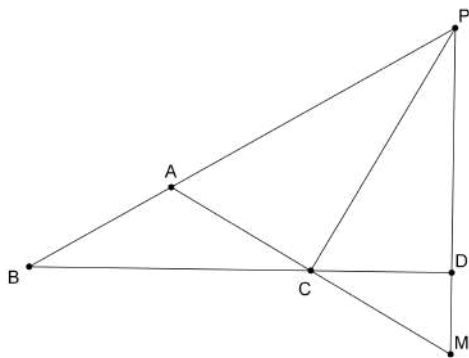
b) $2015 = 11 \cdot 182 + 13$ **1p**

Putem obține numărul 2015 prin 182 de pași astfel:

$13 + 11 = 24 \xrightarrow{+11} 13 + 2 \cdot 11 = 35 \xrightarrow{+11} 13 + 3 \cdot 11 = 46 \xrightarrow{+11} \dots \xrightarrow{+11} 13 + 182 \cdot 11 = 2015$.. **2p**

Problema 2. Fie triunghiul ABC obtuzunghic cu $AB = AC$. Notăm cu M simetricul punctului A față de punctul C și cu P intersecția dreptei AB cu mediatoarea segmentului $[AM]$. Știind că dreapta PM este perpendiculară pe BC , arătați că triunghiul APM este echilateral.

Soluție



Fie $\{D\} = BC \cap PM$. Notăm $m(\angle ABC) = x$. Atunci $m(\angle MCD) = m(\angle ACB) = m(\angle ABC) = x$, de unde $m(\angle PMC) = 90^\circ - x$ **2p**

Cum PC este mediatoarea segmentului $[AM]$, triunghiul PAM este isoscel, deci $\angle PMC \equiv \angle PAC$ **2p**

Dar $m(\angle PAC) = 180^\circ - m(\angle BAC) = m(\angle ABC) + m(\angle ACB) = 2x$.

Rezultă $90^\circ - x = 2x$, de unde $x = 30^\circ$ **2p**
 Atunci $m(\sphericalangle PMC) = m(\sphericalangle PAC) = 60^\circ$, deci triunghiul APM este echilateral..... **1p**

Problema 3. Determinați pătratele perfecte de cinci cifre, cu primele două cifre identice, care au răsturnatul pătrat perfect de cinci cifre.

Soluție

Fie $\overline{aabcd}$ un pătrat perfect cu $a \neq 0, d \neq 0$, astfel încât $\overline{dcbaa}$ este pătrat perfect.

Deoarece $\overline{dcbaa}$ este pătrat perfect, rezultă $a \in \{1, 4, 5, 6, 9\}$ **1p**

Numerele de forma $\overline{dcb55}$ sunt divizibile cu 5 și nu sunt divizibile cu 25, deci nu pot fi pătrate perfecte **1p**

Numerele de forma $\overline{dcb66}$ sunt divizibile cu 2 și nu sunt divizibile cu 4, deci nu pot fi pătrate perfecte **1p**

Numerele de forma $\overline{dcb11}$ sau $\overline{dcb99}$ nu pot fi pătrate perfecte deoarece dau restul 3 la împărțirea cu 4 **2p**

Studiem cazul $a = 4$. Întrucât $209^2 < 44000$ și $213^2 > 45000$, rezultă că $\overline{aabcd} \in \{210^2, 211^2, 212^2\}$.

Cum $210^2 = 44100$ nu are răsturnatul de 5 cifre, $211^2 = 44521$ și $12544 = 112^2$, $212^2 = 44944$, numerele căutate sunt 44521 și 44944 **2p**

Problema 4. Determinați numerele naturale nenule A și B , care au același număr de cifre, știind că

$$2 \cdot A \cdot B = \overline{AB},$$

unde $\overline{AB}$ este numărul obținut prin scrierea cifrelor lui B după cifrele lui A .

Soluție Fie n numărul de cifre ale lui A și B . Din relația din enunț avem $(2A - 1)B = 10^n A$, de unde $2A - 1 \mid 10^n A$ **1p**

Cum $(2A - 1, A) = 1$ și $(2, 2A - 1) = 1$, rezultă $2A - 1 \mid 5^n$, deci $2A - 1 \leq 5^n$ **2p**

Deoarece A are n cifre, rezultă $A \geq 10^{n-1}$, deci $2 \cdot 10^{n-1} - 1 \leq 2A - 1 \leq 5^n$. Obținem

$$2 \cdot 2^{n-1} \cdot 5^{n-1} \leq 5 \cdot 5^{n-1} + 1 \leq 6 \cdot 5^{n-1},$$

deci $2^n \leq 6$, de unde $n \in \{1, 2\}$ **2p**

Pentru $n = 1$, din $2A - 1 \mid 5$, rezultă $2A - 1 \in \{1, 5\}$, deci $A \in \{1, 3\}$. Dacă $A = 1$, avem $B = 10$, care nu convine, deoarece B are o cifră. Dacă $A = 3$, avem $B = 6$ **1p**

Pentru $n = 2$, din $2A - 1 \mid 25$, rezultă $2A - 1 \in \{1, 5, 25\}$, deci $A \in \{1, 3, 13\}$; dar A are două cifre, deci $A = 13$ și $25B = 1300$, deci $B = 52$ **1p**



Olimpiada Națională de Matematică
Etapă Județeană și a Municipiului București, 14 martie 2015

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE – CLASA a VII-a

Problema 1. a) Arătați că numărul $a = \sqrt{9 - \sqrt{77}} \cdot \sqrt{2} \cdot (\sqrt{11} - \sqrt{7}) \cdot (9 + \sqrt{77})$ este natural.
b) Se consideră numerele reale x și y astfel încât $xy = 6$. Dacă $x > 2$ și $y > 2$, arătați că $x + y < 5$.

Gazeta Matematică

Soluție

a) Numărul a se poate rescrie $\sqrt{18 - 2\sqrt{77}} \cdot (\sqrt{11} - \sqrt{7}) \cdot (9 + \sqrt{77})$ **1p**
 $18 - 2\sqrt{77} = (\sqrt{11} - \sqrt{7})^2$ **2p**
 Ca urmare, $a = (\sqrt{11} - \sqrt{7})^2 \cdot (9 + \sqrt{77}) = (18 - 2\sqrt{77})(9 + \sqrt{77}) = 8 \in \mathbb{N}$ **1p**
 b) Dacă $x > 2$, $y > 2$, atunci $(x - 2)(y - 2) > 0$ **2p**
 Rezultă $xy - 2(x + y) + 4 > 0$, de unde $x + y < \frac{1}{2}(xy + 4) = 5$ **1p**

Problema 2. a) Arătați că dacă există două numere naturale p și q astfel încât $\sqrt{2p - q}$ și $\sqrt{2p + q}$ sunt numere naturale, atunci q este par.

b) Determinați câte numere naturale p au proprietatea că $\sqrt{2p - 4030}$ și $\sqrt{2p + 4030}$ sunt simultan numere naturale.

Soluție

a) Din ipoteză, există numerele naturale k și r astfel încât $2p - q = k^2$, $2p + q = r^2$; atunci $r^2 - k^2 = 2q$ **1p**
 Atunci $(r - k)(r + k) = 2q$, iar concluzia se obține din faptul că $r - k$ și $r + k$ au aceeași paritate **2p**
 b) Notând ca mai sus, avem $(r - k)(r + k) = 2 \cdot 4030 = 2^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 31$ **1p**
 Cum $r - k$ și $r + k$ au aceeași paritate, iar $r - k < r + k$, perechea $(r - k, r + k)$ poate fi $(2, 4030)$, $(10, 806)$, $(26, 310)$ sau $(62, 130)$.
 Se obține $r \in \{2016, 408, 168, 96\}$, iar $p \in \{2030113, 81217, 12097, 2593\}$, deci există 4 numere cu proprietatea din enunț **3p**

Problema 3. În triunghiul ABC , fie M mijlocul laturii $[AC]$ și punctul $N \in (AM)$. Paralela prin N la AB intersectează dreapta BM în P , paralela prin M la BC intersectează dreapta BN în Q , iar paralela prin N la AQ intersectează dreapta BC în S .

Demonstrați că dreptele PS și AC sunt paralele.

Soluție

Notând $MQ \cap AB = \{E\}$ și $\{D\} = NP \cap ME$, obținem $EA = EB$ și $ND = DP$ **2p**
 Cum $ANPB$ este trapez, punctele A, Q, P sunt coliniare **2p**
 $\triangle ADP \equiv \triangle SDN$ (U.L.U.) **1p**
 Rezultă $[AP] \equiv [SN]$ și, cum $AP \parallel SN$, patrulaterul $ANSP$ este paralelogram, deci $PS \parallel AC$ **2p**

Problema 4. În exteriorul pătratului $ABCD$ se construiește triunghiul isoscel ABE , cu $m(\angle ABE) = 120^\circ$. Se notează cu M piciorul perpendicularei din B pe bisectoarea unghiului EAB , cu N piciorul perpendicularei din M pe AB , iar cu P intersecția dreptelor CN și MB .

Fie G centrul de greutate al triunghiului ABE . Demonstrați că dreptele PG și AE sunt paralele.

Soluție

$m(\angle BAM) = 15^\circ$ implică $MN = \frac{1}{4}AB$ **2p**

Din $MN \parallel BC$ rezultă $\triangle PMN \sim \triangle PBC$, deci $\frac{PM}{PB} = \frac{MN}{BC} = \frac{1}{4}$ și, notând $\{Q\} = BM \cap AE$, rezultă $\frac{PM}{BQ} = \frac{1}{6}$,
 de unde $PB = PM + \frac{1}{2}BQ = \frac{2}{3}BQ$ **3p**

Dacă F este mijlocul segmentului $[AE]$, atunci $\frac{BG}{BF} = \frac{2}{3}$ și, conform reciprocei teoremei lui Thales, rezultă că
 $PG \parallel AE$ **2p**



Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Județeană și a Municipiului București, 14 martie 2015

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE – CLASA a VIII-a

Problema 1. Dacă a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi, arătați că are loc inegalitatea:

$$\sqrt{\frac{a}{-a+b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a-b+c}} + \sqrt{\frac{c}{a+b-c}} \geq 3.$$

Soluție

Deoarece a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi, numerele $-a+b+c$, $a-b+c$ și $a+b-c$ sunt strict pozitive. Aplicând inegalitatea dintre media geometrică și media armonică avem

$$\sqrt{\frac{a}{-a+b+c}} = \sqrt{1 \cdot \frac{a}{-a+b+c}} \geq \frac{2}{1 + \frac{a}{-a+b+c}} = \frac{2a}{b+c}$$

și analoagele **3p**

Este suficient să demonstrăm că $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$.

Notând $b+c = x$, $a+c = y$, $b+c = z$, obținem $a = \frac{-x+y+z}{2}$, $b = \frac{x-y+z}{2}$ și $c = \frac{x+y-z}{2}$, iar inegalitatea de demonstrat se scrie echivalent:

$$\frac{-x+y+z}{2x} + \frac{x-y+z}{2y} + \frac{x+y-z}{2z} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{y}{x} + \frac{z}{x} - 1 + \frac{x}{y} + \frac{z}{y} - 1 + \frac{x}{z} + \frac{y}{z} - 1 \geq 3$$

care este adevărată, deoarece $u + \frac{1}{u} \geq 2$, pentru orice $u > 0$ **4p**

Problema 2. Pentru orice număr natural a definim mulțimea

$$A_a = \left\{ n \in \mathbb{N} \mid \sqrt{n^2 + an} \in \mathbb{N} \right\}.$$

a) Arătați că mulțimea A_a este finită dacă și numai dacă $a \neq 0$.

b) Determinați cel mai mare element al mulțimii A_{40} .

Gazeta Matematică

Soluție

a) Dacă $a = 0$ atunci $A = \mathbb{N}$, care este infinită **1p**

Dacă $a \neq 0$ atunci există $p \in \mathbb{N}$ astfel încât $n^2 + an = p^2$ **1p**

Obținem $4n^2 + 4an + a^2 = 4p^2 + a^2$, de unde $(2n+a-2p)(2n+a+2p) = a^2$ **1p**

Ca urmare, $2n+a+2p$ este divizor al lui a^2 (care este nenul), deci $2n < 2n+a+2p \leq a^2$, de unde rezultă că n poate lua un număr finit de valori, adică A este finită **2p**

b) Trebuie să găsim cel mai mare număr natural n pentru care $n^2 + 40n$ este pătrat perfect. Fie $p \in \mathbb{N}$ astfel încât $p^2 = n^2 + 40n$.

Obținem $p^2 + 400 = (n+20)^2$, de unde $(n+20-p)(n+20+p) = 400$. Numerele $p-n-20$ și $p+n+20$ au aceeași paritate, deci vor fi pare. Avem $2 \cdot 200 = 4 \cdot 100 = 8 \cdot 50 = 400$, de unde $n \in \{81, 32, 9\}$. Elementul căutat este 81. **2p**

Problema 3. Determinați numărul de elemente ale mulțimii

$$M = \left\{ (x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \mid \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{2016}} \right\}.$$

Soluție Fie $(x, y) \in M$. Cum $\sqrt{2016} = 12\sqrt{14}$, avem

$$\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{1}{12\sqrt{14}} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{14x}} - \frac{1}{\sqrt{14y}} = \frac{1}{2016} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{14x}} = \frac{1}{\sqrt{14y}} + \frac{1}{2016}.$$

Prin ridicare la pătrat obținem $\frac{1}{14x} = \frac{1}{14y} + \frac{1}{2016} + \frac{1}{1008\sqrt{14y}}$, de unde $\sqrt{14y} \in \mathbb{Q}$ și, ca urmare $\sqrt{14x} \in \mathbb{Q}$.

Atunci există numerele naturale nenule a, b pentru care $x = 14a$ și $y = 14b$ **3p**

Înlocuind în relația $\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{1}{12\sqrt{14}}$, obținem $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{12}$, de unde $a = \frac{12b}{b+12}$ **2p**

Din $\frac{12b}{b+12} \in \mathbb{N}$ rezultă $b+12 \mid 144$, deci $b \in \{4, 6, 12, 24, 36, 60, 132\}$, de unde $a \in \{3, 4, 6, 8, 9, 10, 11\}$.

În concluzie, mulțimea M admite 7 elemente. **2p**

Problema 4. Fie $ABCD A' B' C' D'$ un paralelipiped dreptunghic și $AB' \cap A'B = \{O\}$. Pe muchia $[BC]$ se consideră un punct N astfel încât $A'C \parallel (B'AN)$. Știind că $D'O \perp (B'AN)$ demonstrați că $ABCD A' B' C' D'$ este cub.

Soluție

Din $D'A' \perp (ABB')$ și $D'O \perp AB'$ obținem $A'O \perp AB'$, deci $ABB'A'$ este pătrat. **2p**

Apoi $A'C \parallel (ANB')$ și $(ANB') \cap (A'BC) = ON$, deci $A'C \parallel ON$. Cum O este mijlocul segmentului $[A'B]$ atunci N este mijlocul segmentului $[BC]$ **1p**

În dreptunghiul $A'BCD'$, avem $m(\sphericalangle D'ON) = 90^\circ$, de unde $\triangle D'A'O \sim \triangle OBN$. Atunci $\frac{D'A'}{A'O} = \frac{OB}{ON}$, ceea ce conduce la $\frac{A'B^2}{4} = \frac{A'D'^2}{2}$, deci $A'B = A'D'\sqrt{2}$. Obținem $A'D = A'A$, deci $AA'D'D$ este pătrat. **3p**

Concluzia se obține remarcând că $ABCD A' B' C' D'$ este un paralelipiped dreptunghic cu toate fețele laterale pătrate, deci este cub. **1p**



MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI
CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Județeană și a Municipiului București, 14 martie 2015

CLASA a IX-a
Soluții

Problema 1. Se consideră paralelogramul $ABCD$, ale cărui diagonale se intersectează în O . Bisectoarele unghiurilor DAC și DBC se intersectează în T . Se știe că $\overrightarrow{TD} + \overrightarrow{TC} = \overrightarrow{TO}$. Determinați măsurile unghiurilor triunghiului ABT .

Soluție.

Din ipoteză rezultă că $DOCT$ este paralelogram..... **2p**

Din $AO \parallel DT$ deducem $\angle DTA \equiv \angle OAT \equiv \angle DAT$, deci $DA = DT$ **2p**

Astfel $DA = DT = OC$; analog $BC = CT = OD$, de unde $BD = AC$. Astfel $ABCD$ este dreptunghi, $AOTD$ este romb, triunghiul AOD este echilateral și triunghiul ABT este echilateral, deci are unghiurile de 60° **3p**

Problema 2. Determinați numerele reale a și b pentru care egalitatea

$$[ax + by] + [bx + ay] = (a + b)[x + y]$$

este adevărată oricare ar fi numerele reale x și y (unde $[t]$ desemnează partea întreagă a numărului real t).

Soluție.

Pentru $y = -x$ și $d = a - b$ obținem $[dx] + [-dx] = 0, \forall x \in \mathbb{R} (*)$ **1p**

Dacă $d \neq 0$, atunci $(*)$ este falsă pentru $x = 1/(2d)$, deci $d = 0$ **2p**

Apoi, pentru $x + y = 1$ avem $2[a] = 2a$, deci a este întreg..... **1p**

Dacă $a = 0$ relația se verifică, deci o soluție este $a = b = 0$ **1p**

Dacă $a \neq 0$, în relația $2a[x + y] = 2[a(x + y)] \leq 2a(x + y)$ luăm $x + y = 1/2$ și obținem $a \geq 0$, deci $a \geq 1$ **1p**

Pentru $x + y = 1/a$ obținem $1 = a[1/a]$, ceea ce conduce la $a = b = 1$, care este cea de-a doua soluție..... **1p**

Problema 3. Fie m și n numere naturale, cu $m \geq 2$ și $n \geq 3$. Demonstrați că există m numere naturale nenule distincte $a_1, a_2, a_3, \dots, a_m$, toate divizibile cu $n - 1$, astfel încât

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} - \dots + (-1)^{m-1} \frac{1}{a_m}.$$

Gazeta Matematică

Soluția 1.

Dacă $(a_n)_{n \geq 1}$ este o progresie geometrică având rația $q = n - 1$, atunci

$$\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \dots + (-1)^{p-1} \frac{1}{a_p} = \frac{1/a_1 + 1/q \cdot (-1)^{p-1} 1/a_p}{1 + 1/q}, \forall p \in \mathbb{N}^* \dots \dots \dots \mathbf{3p}$$

Relația precedentă se scrie

$$\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \dots + (-1)^{p-1} \frac{1}{a_p} = \frac{n-1}{na_1} + \frac{(-1)^{p-1}}{na_p} \dots \dots \dots \mathbf{2p}$$

Pentru $a_1 = n - 1$, $m = p + 1$ și $a_m = na_p$ obținem numerele cerute **2p**

Soluția 2.

Demonstrăm prin inducție după m **1p**

Pentru $m = 2$ concluzia se verifică: $\frac{1}{n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n(n-1)}$ **2p**

Astfel, $\frac{1}{n} = \frac{1}{n-1} \left(\frac{1}{b_1} - \frac{1}{b_2} \right)$, cu $b_1 < b_2 - 1$. Apoi, dacă

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{(n-1)b_1} - \frac{1}{(n-1)b_2} + \dots + (-1)^{m-1} \frac{1}{(n-1)b_m},$$

cu $1 \leq b_1 < \dots < b_m$ numere întregi și $b_{m-1} < b_m - 1$, atunci punem $b'_i = b_i$, $i = 1, m-1$, $b'_m = b_m - 1$, $b'_{m+1} = b_m(b_m - 1)$ și obținem

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{(n-1)b'_1} - \frac{1}{(n-1)b'_2} + \dots + (-1)^{m-1} \frac{1}{(n-1)b'_m} + (-1)^m \frac{1}{(n-1)b'_{m+1}},$$

cu $1 \leq b'_1 < \dots < b'_m < b'_{m+1}$ numere întregi și $b'_m < b'_{m+1} - 1$ **4p**

Problema 4. Determinați toate funcțiile $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ care verifică relația

$$d(x, f(y)) \cdot m(f(x), y) = d(x, y) \cdot m(f(x), f(y)), \text{ oricare ar fi } x, y \in \mathbb{N}^*,$$

unde $d(a, b)$ și $m(a, b)$ desemnează cel mai mare divizor comun, respectiv cel mai mic multiplu comun al numerelor naturale a și b .

Soluție.

Pentru $x = 1$ avem $m(a, y) = m(a, f(y))$, $\forall y \in \mathbb{N}^*$, unde $a = f(1)$ **1p**

Cu alegerea $y = 1$ rezultă $d(x, a)f(x) = m(a, f(x))$, $\forall x \in \mathbb{N}^*$ **1p**

Rezultă $d(x, a)f(x) = m(x, a)$, $\forall x \in \mathbb{N}^*$ (*) **1p**

Din relația (*) $af(a) = a$, deci $f(a) = 1$; de asemenea $af(a^2) = a^2$, deci $f(a^2) = a$ **1p**

Ipoteza duce, pentru $x = a^2$ și $y = a$, la $1 \cdot a = a \cdot f(a^2)$, de unde obținem $a = f(a^2) = 1$ **1p**

Din (*) rezultă $f(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{N}^*$ **1p**

Funcția identică verifică **1p**



Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Județeană și a Municipiului București, 14 martie 2015
CLASA a X-a
Soluții și barem de notare

Problema 1. Să se arate că pentru orice $n \geq 2$ natural, are loc inegalitatea

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{\sqrt[k]{(2k)!}} \geq \frac{n-1}{2n+2}.$$

..... *Gazeta Matematică*

Soluție. Demonstrăm inegalitatea prin inducție. În cazul $n = 2$ avem egalitate (1 p)

Să observăm că, la pasul de inducție, în trecerea de la $n - 1$ la n , membrul drept crește cu

$$\frac{n-1}{2n+2} - \frac{n-2}{2n} = \frac{1}{n(n+1)},$$

deci e suficient să demonstrăm că

$$\frac{1}{\sqrt[n]{(2n)!}} \geq \frac{1}{n(n+1)},$$

..... (2p)

ceea ce rezultă imediat prin înmulțirea inegalităților

$$k(2n-k+1) \leq n(n+1),$$

pentru $k = 1, 2, \dots, n$ (4p)

Problema 2. Să se determine numerele întregi x, y , pentru care

$$5^x - \log_2(y+3) = 3^y \quad \text{și} \quad 5^y - \log_2(x+3) = 3^x.$$

Soluție. Scăzând egalitățile, se obține

$$5^x + 3^x + \log_2(x+3) = 5^y + 3^y + \log_2(y+3).$$

..... (1p)

Cum funcția $f(t) = 5^t + 3^t + \log_2(t+3)$ este strict crescătoare, rezultă $x = y$ (2p)

Pentru rezolvarea în $\mathbb{Z}$ a ecuației

$$5^x = 3^x + \log_2(x+3),$$

se observă că $x \in \{-2, -1, 0\}$ nu verifică, iar $x = 1$ este soluție. (1p)

Pentru $x \geq 2$, se arată că

$$5^x \geq 3^x + 4^x,$$

folosind monotonia funcției $g(t) = \left(\frac{3}{5}\right)^t + \left(\frac{4}{5}\right)^t$, (1p)

iar apoi se demonstrează prin inducție matematică inegalitatea

$$4^x > \log_2(x+3).$$

..... (2p)

Problema 3. Să se determine numerele complexe z pentru care are loc relația

$$|z| + |z - 5i| = |z - 2i| + |z - 3i|.$$

Soluție. Avem

$$|z - 2i| = \left| \frac{2}{5}(z - 5i) + \frac{3}{5}z \right| \leq \frac{2}{5}|z - 5i| + \frac{3}{5}|z|.$$

..... (3p)

Analog

$$|z - 3i| = \left| \frac{3}{5}(z - 5i) + \frac{2}{5}z \right| \leq \frac{3}{5}|z - 5i| + \frac{2}{5}|z|,$$

de unde

$$|z| + |z - 5i| \geq |z - 2i| + |z - 3i|.$$

..... (1p)

Egalitatea are loc atunci când există $\lambda \geq 0$ astfel ca $z - 5i = \lambda z$, de unde deducem că $z = ai$, cu $a \in (-\infty, 0] \cup [5, +\infty)$. (3p)

Problema 4. Fie $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ o funcție neconstantă care are proprietatea

$$f(x^y) = (f(x))^{f(y)},$$

pentru orice $x, y > 0$. Să se arate că

$$f(xy) = f(x)f(y) \text{ și } f(x+y) = f(x) + f(y),$$

pentru orice $x, y > 0$.

Soluție. Fie $a > 0$ astfel ca $f(a) \neq 1$. Avem, pentru x, y arbitrari,

$$f(a^{xy}) = f(a)^{f(xy)},$$

dar

$$f(a^{xy}) = f((a^x)^y) = f(a^x)^{f(y)} = \left(f(a)^{f(x)}\right)^{f(y)} = f(a)^{f(x)f(y)},$$

de unde $f(xy) = f(x)f(y)$ (3p)

Apoi

$$f(a^{x+y}) = f(a)^{f(x+y)},$$

dar

$$f(a^{x+y}) = f(a^x a^y) = f(a^x)f(a^y) = f(a)^{f(x)}f(a)^{f(y)} = f(a)^{f(x)+f(y)},$$

deci $f(x+y) = f(x) + f(y)$ (4p)

Observație. Se poate arăta că singura funcție neconstantă care verifică condiția din enunț este identitatea.

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Județeană și a Municipiului București, 14 Martie 2015

CLASA a XI-a
Soluții și bareme

Problema 1. Fie $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ o funcție cu proprietatea că pentru oricare $y \in [0, 1]$ și oricare $\varepsilon > 0$ există $x \in [0, 1]$ astfel încât $|f(x) - y| < \varepsilon$.
a) Demonstrați că dacă f este continuă pe $[0, 1]$ atunci f este surjectivă.
b) Dați un exemplu de funcție f cu proprietatea din enunț, care să nu fie surjectivă.

Soluție.

a) Considerăm o funcție continuă $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ având proprietatea din enunț. Fie $y \in [0, 1]$. Din ipoteză deducem că există un șir $(x_n)_{n \geq 1}$, cu termenii în $[0, 1]$, astfel încât $|f(x_n) - y| < 1/n$, $\forall n \geq 1$. (**2 puncte**)

Șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este mărginit, deci admite un subșir convergent $(x_{i_n})_{n \geq 1}$, cu $x := \lim_{n \rightarrow \infty} x_{i_n} \in [0, 1]$. (**1 punct**)

Prin trecere la limită în inegalitatea $|f(x_{i_n}) - y| < 1/i_n$, $\forall n \geq 1$, obținem (pe baza continuității lui f în punctul x) $|f(x) - y| \leq 0$, deci $f(x) = y$. Rezultă că f este surjectivă. (**1 punct**)

b) Definim funcția $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$,

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \\ 0, & x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \quad (\mathbf{2 \text{ puncte}})$$

$f([0, 1]) = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$, deci f nu este surjectivă.

Avem $|f(y) - y| = 0$, $\forall y \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$. Pentru $y \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$ și $\varepsilon > 0$, există $x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ astfel ca $|x - y| < \varepsilon$, sau $|f(x) - y| < \varepsilon$. (**1 punct**)

Problema 2. Fie două matrice $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $(A - B)^2 = O_2$.
a) Arătați că $\det(A^2 - B^2) = (\det(A) - \det(B))^2$.
b) Demonstrați că $\det(AB - BA) = 0$ dacă și numai dacă $\det(A) = \det(B)$.

Soluție.

a) Din $(A - B)^2 = O_2$ obținem $\det(A - B) = 0$. (**1 punct**)

De asemenea, deducem $\text{Tr}(A - B) = 0$, deci $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(B) =: a$. (**1 punct**)

Notăm $b = \det(A) - \det(B)$. Conform relației lui Cayley, avem

$$\begin{cases} A^2 - aA + \det(A)I_2 = O_2 \\ B^2 - aB + \det(B)I_2 = O_2 \end{cases} \quad ,$$

de unde $\det(A^2 - B^2) = \det(a(A - B) - bI_2)$. (**1 punct**)

Dar $\det(a(A - B) - bI_2) = a^2 \det(A - B) - ab \text{Tr}(A - B) + b^2 = b^2$.

Rezultă $\det(A^2 - B^2) = (\det(A) - \det(B))^2$. (**1 punct**)

b) Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funcția definită prin

$$f(x) = \det(A^2 - B^2 + x(AB - BA)), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Funcția f se poate reprezenta sub forma

$$f(x) = \det(A^2 - B^2) + cx + \det(AB - BA)x^2, \quad x \in \mathbb{R},$$

unde c este o constantă reală. **(1 punct)**

Din $f(1) = f(-1) = \det(A - B) \det(A + B) = 0$ obținem $c = 0$ și

$$\det(A^2 - B^2) + \det(AB - BA) = 0. \quad \textbf{(1 punct)}$$

Atunci, conform a), $(\det(A) - \det(B))^2 = -\det(AB - BA)$, de unde concluzia. **(1 punct)**

Problema 3. Determinați toate numerele naturale $k \geq 1$ și $n \geq 2$ cu proprietatea că există $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ astfel încât $A^3 = O_n$ și $A^k B + BA = I_n$.

Soluție. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ astfel încât $A^3 = O_n$ și $A^k B + BA = I_n$.

Dacă $k \geq 3$, atunci $BA = I_n$ (deoarece $A^k = O_n$), deci A este inversabilă, în contradicție cu $A^3 = O_n$. **(1 punct)**

Dacă $k = 2$ atunci din $A^2 B + BA = I_n$, prin înmulțire la stânga cu A și apoi la dreapta cu A^2 , rezultă $ABA = A$ și $A^2 B A^2 = A^2$. Scriind ultima egalitate sub forma $A(ABA)A = A^2$, obținem $A^3 = A^2$, deci $A^2 = O_n$. Atunci $BA = I_n$, în contradicție cu $A^3 = O_n$. **(1 punct)**

Prin urmare, dacă există k și n ca în enunț, atunci $k = 1$. Din $Tr(AB) = Tr(BA) \in \mathbb{Z}$ și $AB + BA = I_n$ rezultă $2Tr(AB) = n$, deci n este un număr natural par. **(1 punct)**

Arătăm în continuare că, pentru orice număr natural par $n \geq 2$, există $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ astfel încât $A^3 = O_n$ și $AB + BA = I_n$.

Pentru $n = 2$, putem alege matricele $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, care satisfac condițiile $AB + BA = I_2$ și $A^2 = B^2 = O_2$. **(2 puncte)**

Pentru $n = 2k$, cu $k \geq 2$, matricele bloc diagonale A și B , de dimensiune $2k$, care au pe diagonala principală k matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ și respectiv k matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, iar restul coeficienților nuli, satisfac relațiile $AB + BA = I_n$ și $A^2 = B^2 = O_n$. **(2 puncte)**

Problema 4. Fie $(x_n)_{n \geq 1}$ un șir de numere reale din intervalul $[1, \infty)$. Presupunem că șirul $(y_n^{(k)})_{n \geq 1}$, definit prin $y_n^{(k)} = [x_n^k]$, $n \geq 1$, este convergent pentru oricare $k \in \mathbb{N}^*$. Să se demonstreze că șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este convergent. (Prin $[a]$ se notează partea întreagă a numărului real a .)

Soluție. Pentru $k \in \mathbb{N}^*$, $(y_n^{(k)})_{n \geq 1}$ este un șir convergent de numere naturale nenule. Atunci există $n_k, a_k \in \mathbb{N}^*$ astfel ca $y_n^{(k)} = a_k$, $\forall n \geq n_k$. Ca urmare, $x_n^k \in [a_k, a_k + 1)$, $\forall n \geq n_k$. **(2 puncte)**
În particular, $x_n \in [a_1, a_1 + 1)$, $\forall n \geq n_1$. Rezultă că șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este mărginit. **(1 punct)**

Presupunem, prin reducere la absurd, că șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ admite două puncte

limită a și b , cu $1 \leq a < b$. Atunci există două subșiruri $(x_{i_n})_{n \geq 1}$ și $(x_{j_n})_{n \geq 1}$ ale șirului $(x_n)_{n \geq 1}$ astfel încât $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{i_n} = a$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{j_n} = b$.

Fie $k \in \mathbb{N}^*$. Deoarece $i_n, j_n \geq n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, avem $x_{i_n}^k, x_{j_n}^k \in [a_k, a_k + 1)$, $\forall n \geq n_k$. Rezultă $x_{j_n}^k - x_{i_n}^k < 1$, $\forall n \geq n_k$. Prin trecere la limită ($n \rightarrow \infty$) obținem $b^k - a^k \leq 1$. Prin urmare, $b^k - a^k \leq 1$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$. **(2 puncte)**

Dar $1 \leq a < b$ implică $\lim_{k \rightarrow \infty} (b^k - a^k) = \infty$, în contradicție cu inegalitatea precedentă. În concluzie, șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este convergent. **(2 puncte)**



Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Județeană și a Municipiului București, 14 martie 2015

CLASA a XII-a

Problema 1. (a) Rezolvați ecuația $x^2 - x + \hat{2} = \hat{0}$, $x \in \mathbb{Z}_7$.

(b) Determinați numerele naturale $n \geq 2$, pentru care ecuația $x^2 - x + \hat{2} = \hat{0}$, $x \in \mathbb{Z}_n$, are soluție unică.

Gazeta Matematică

Soluție. (a) Cum 4 și 7 sunt coprime, iar $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$ este corp, ecuația dată este echivalentă cu $\hat{4}x^2 - \hat{4}x + \hat{1} = \hat{0}$, adică, $(\hat{2}x - \hat{1})^2 = \hat{0}$, deci $\hat{2}x = \hat{1}$, de unde $x = \hat{4}$ **2 puncte**

(b) Fie $n \geq 2$ un număr natural pentru care ecuația dată are soluție unică și fie $a \in \mathbb{Z}_n$ soluția respectivă. Atunci $(\hat{1} - a)^2 - (\hat{1} - a) + \hat{2} = a^2 - a + \hat{2} = \hat{0}$, deci $\hat{1} - a$ este soluție a ecuației date. **3 puncte**

Prin urmare, $a = \hat{1} - a$, deci $\hat{2}a = \hat{1}$. În particular, $\hat{2}$ este inversabil în inelul $\mathbb{Z}_n$ și $a = \hat{2}^{-1}$. Rezultă că $\hat{2}^{-2} - \hat{2}^{-1} + \hat{2} = \hat{0}$, de unde $\hat{1} - \hat{2} + \hat{8} = \hat{0}$, i.e., $\hat{7} = \hat{0}$. Prin urmare, n este un divizor al lui 7, deci $n = 7$ **2 puncte**

Problema 2. (a) Calculați

$$\int_0^1 x \sin(\pi x^2) dx.$$

(b) Calculați

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} k \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \sin(\pi x^2) dx.$$

Soluție. (a) Făcând substituția $t = \pi x^2$, integrala devine

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \sin t dt = \frac{1}{2\pi} (-\cos t) \Big|_0^\pi = \frac{1}{\pi}.$$

..... **2 puncte**

(b) Fie $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(\pi x^2)$, și $F: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^x f(t) dt$.
Atunci

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} k \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x) dx &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(kF\left(\frac{k+1}{n}\right) - kF\left(\frac{k}{n}\right) \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left((k+1)F\left(\frac{k+1}{n}\right) - kF\left(\frac{k}{n}\right) - F\left(\frac{k+1}{n}\right) \right) \\ &= \frac{1}{n} \left(nF(1) - \sum_{k=1}^n F\left(\frac{k}{n}\right) \right) = F(1) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n F\left(\frac{k}{n}\right) \end{aligned}$$

..... **3 puncte**

Limita cerută este

$$F(1) - \int_0^1 F(x) \, dx = \int_0^1 xF'(x) \, dx = \int_0^1 xf(x) \, dx = \frac{1}{\pi}.$$

..... **2 puncte**

Problema 3. Determinați funcțiile continue și crescătoare $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, care îndeplinesc condiția

$$\int_0^{x+y} f(t) \, dt \leq \int_0^x f(t) \, dt + \int_0^y f(t) \, dt,$$

oricare ar fi $x, y \in [0, \infty)$.

Soluție. Inegalitatea din enunț este echivalentă cu $\int_x^{x+y} f(t) \, dt \leq \int_0^y f(t) \, dt$, de unde $\int_0^y f(t+x) \, dt \leq \int_0^y f(t) \, dt$, oricare ar fi $x \geq 0$ și $y \geq 0$ **2 puncte**

Cum $f(t+x) \geq f(t)$, oricare ar fi $t \in [0, y]$ și oricare ar fi $x \geq 0$, rezultă că $\int_0^y f(t+x) \, dt \geq \int_0^y f(t) \, dt$, deci $\int_0^y f(t+x) \, dt = \int_0^y f(t) \, dt$, oricare ar fi $x \geq 0$ și $y \geq 0$ **2 puncte**

Din continuitatea lui f deducem că $f(x+y) = f(y)$, oricare ar fi $x \geq 0$ și oricare ar fi $y \geq 0$. În particular, $f(x) = f(0)$, oricare ar fi $x \geq 0$, deci f este constantă. **2 puncte**

Evident, orice funcție constantă verifică condițiile din enunț. **1 punct**

Problema 4. Fie m și n două numere naturale, $n \geq 2$, fie A un inel care are exact n elemente și fie a un element al lui A , astfel încât $1 - a^k$ este inversabil, oricare ar fi $k \in \{m+1, m+2, \dots, m+n-1\}$. Arătați că a este nilpotent (i.e., există un număr natural nenul p , astfel încât $a^p = 0$).

Soluție. Fie $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. Există $p \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, astfel încât $m+p$ este divizibil cu k , deci $m+p = k\ell$. Cum $1 - a^{m+p} = (1 - a^k)(1 + a^k + \dots + a^{k(\ell-1)})$ și $1 - a^{m+p} \in U(A)$, rezultă că $1 - a^k \in U(A)$ **2 puncte**

Din $1 - a^k = (1 - a)(1 + a + \dots + a^{k-1})$, $k = 1, 2, \dots, n-1$, cu convenția $a^0 = 1$, rezultă că $b_k = 1 + a + \dots + a^{k-1} \in U(A)$, $k = 1, 2, \dots, n-1$ **2 puncte**

Dacă b_k -urile ar fi distincte două câte două, atunci A ar fi corp, deci $a^{n-1} = 1$ și $0 = 1 - a^{n-1} \in U(A)$ — contradicție. **1 punct**

Prin urmare, există $1 \leq p < q \leq n-1$, astfel încât $b_p = b_q$. Atunci $0 = b_q - b_p = a^p b_{q-p}$. Cum $b_{q-p} \in U(A)$, rezultă că $a^p = 0$ **2 puncte**



Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Finală, Sovata, 20 aprilie 2016
CLASA a V-a

Enunțuri

Problema 1. Două numere naturale x și y au proprietatea că $\frac{2010}{2011} < \frac{x}{y} < \frac{2011}{2012}$. Determinați cea mai mică valoare a sumei $x + y$.

Problema 2. Determinați numerele naturale a, b, c care au proprietatea că $a + b + c = abc$.

Problema 3. O mulțime $X \subset \mathbb{N}^*$ are proprietatea ($\mathcal{P}$) dacă oricare submulțime nevidă a sa are suma elementelor număr compus. Arătați că mulțimea $Y = \{113! + 2, 113! + 3, \dots, 113! + 15\}$ are proprietatea ($\mathcal{P}$). (Dacă n este număr natural nenul, notația $n!$ reprezintă produsul $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$)

Problema 4. Pe un cerc se scriu la întâmplare elementele mulțimii $\{1, 2, \dots, 21\}$ în ordinea $a_1, a_2, \dots, a_{21}$ (vezi figura alăturată). Se consideră sumele

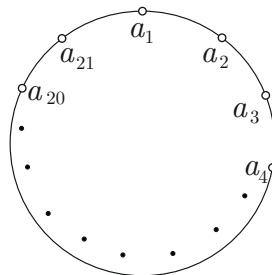
$$S_1 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5,$$

$$S_2 = a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6,$$

$\dots$

$$S_{17} = a_{17} + a_{18} + a_{19} + a_{20} + a_{21},$$

$$S_{18} = a_{18} + a_{19} + a_{20} + a_{21} + a_1.$$



Arătați că cel puțin două dintre cele 18 sume dau resturi diferite la împărțirea cu 5.

Timp de lucru 2 ore și 30 de minute.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Problema 1.5 Două numere naturale x și y au proprietatea că $\frac{2010}{2011} < \frac{x}{y} < \frac{2011}{2012}$. Determinați cea mai mică valoare a sumei $x + y$.

Soluție Frația $\frac{x}{y}$ este subunitară, prin urmare $x < y$ sau $x = y - d$, unde d este un număr natural nenul. 1p
 Relația dată se mai scrie $\frac{2011-1}{2011} < \frac{y-d}{y} < \frac{2012-1}{2012}$ sau $1 - \frac{1}{2011} < 1 - \frac{d}{y} < 1 - \frac{1}{2012}$, de unde $\frac{1}{2011} > \frac{d}{y} > \frac{1}{2012}$ sau $\frac{d}{2011d} > \frac{d}{y} > \frac{d}{2012d}$ (1)
 Din (1) deducem $2011d < y < 2012d$ (2) 3p
 Pentru $d = 1$ relația (2) este imposibilă.
 Pentru $d = 2$ obținem $4022 < y < 4024$, de unde $y = 4023$. Obținem $x = 4021$ și $x + y = 8044$.

Pentru $d \geq 3$ avem $4021d \geq 12063$.
 Avem $x + y = 2y - d$. Din $y > 2011d$ obținem $2y - d > 4021d \geq 12063$.
 Prin urmare valoarea minimă a sumei se obține când $d = 2$ și $x + y = 8044$ 3p

Problema 2.5 Determinați numerele naturale a, b, c cu proprietatea că $a + b + c = abc$.

Soluție Observăm că dacă unul dintre numere este 0, atunci toate numerele sunt egale cu 0. 1p

Dacă $abc \neq 0$, atunci relația se scrie $\frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{ab} = 1$. Cum relația este simetrică în a, b, c putem presupune $a \leq b \leq c$ de unde $ab \leq ac \leq bc$.

Dacă $ab > 3$, atunci $\frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{ab} < 1$ 2p

Dacă $ab = 2$, atunci $a = 1$ și $b = 2$, de unde obținem $\frac{1}{2c} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2}$ și atunci $c = 3$.

Dacă $ab = 3$, atunci $a = 1$ și $b = 3$, de unde obținem $\frac{1}{3c} + \frac{1}{c} = \frac{2}{3}$ și atunci $c = 2$, care nu convine pentru că am presupus $b < c$ 4p

Problema 3.5 O mulțime $X \subset \mathbb{N}^*$ are proprietatea ($\mathcal{P}$) dacă oricare submulțime nevidă a sa are suma elementelor număr compus.

Arătați că mulțimea $Y = \{113! + 2, 113! + 3, \dots, 113! + 15\}$ are proprietatea ($\mathcal{P}$). (Dacă n este număr natural nenul, notația $n!$ reprezintă produsul $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$)

Soluție O submulțime nevidă a lui Y are suma elementelor egală cu $S = \mathcal{M}113! + s$, unde $2 \leq s \leq 2 + 3 + \dots + 15$, de unde $2 \leq s \leq 119$ 2p

Pentru $2 \leq s \leq 113$ avem $S = \mathcal{M}113! + s = \mathcal{M}s$, de unde concluzia că S este număr compus. 2p

Pentru $s \in \{114, 116, 118\}$ avem S număr par, prin urmare S este număr compus.

Dacă $s = 115$, atunci $S = \mathcal{M}5$

Dacă $s = 117$, atunci $S = \mathcal{M}3$

Dacă $s = 119$, atunci $S = \mathcal{M}7$ 3p

Problema 4.5 Pe un cerc se scriu la întâmplare elementele mulțimii $\{1, 2, \dots, 21\}$ în ordinea $a_1, a_2, \dots, a_{21}$ (vezi figura alăturată). Se consideră sumele

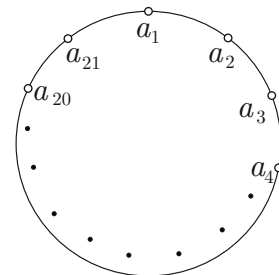
$$S_1 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5,$$

$$S_2 = a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6,$$

...

$$S_{17} = a_{17} + a_{18} + a_{19} + a_{20} + a_{21},$$

$$S_{18} = a_{18} + a_{19} + a_{20} + a_{21} + a_1.$$



Arătați că cel puțin două dintre cele 18 sume dau resturi diferite la împărțirea cu 5.

Soluție Presupunem că $S_1, S_2, \dots, S_{18}$ dau același rest la împărțirea cu 5. Deoarece $S_1 = a_1 + (a_2 + a_3 + a_4 + a_5)$ și $S_2 = (a_2 + a_3 + a_4 + a_5) + a_6$, dacă S_1 și S_2 dau același rest la împărțirea cu 5, deducem că a_1 și a_6 dau același rest la împărțirea cu 5. În același fel deducem

1. a_1, a_6, a_{11}, a_{16} și a_{21} dau același rest, x , la împărțirea cu 5.

2. a_2, a_7, a_{12}, a_{17} dau același rest, a , la împărțirea cu 5.

3. a_3, a_8, a_{13}, a_{18} dau același rest, b , la împărțirea cu 5.

4. a_4, a_9, a_{14}, a_{19} dau același rest, c , la împărțirea cu 5.

5. $a_5, a_{10}, a_{15}, a_{20}$ dau același rest, d , la împărțirea cu 5. 2p

Cum $\{a_1, a_2, \dots, a_{21}\} = \{1, 2, \dots, 21\}$ avem 5 resturi egale cu 1 și câte 4 resturi egale cu 2, 3, 4 sau 0.

Rezultă $x = 1$ și $\{a, b, c, d\} = \{0, 2, 3, 4\}$ 1p

Avem $S_1 = \mathcal{M}5 + 1 + 0 + 2 + 3 + 4 = \mathcal{M}5$ și $S_{18} = \mathcal{M}5 + b + \mathcal{M}5 + c + \mathcal{M}5 + d + \mathcal{M}5 + 1 + \mathcal{M}5 + 1 = \mathcal{M}5 + 2 + (a + b + c + d) - a = \mathcal{M}5 + 11 - a$

Cum S_1 și S_{18} dau același rest la împărțirea cu 5 deducem că $11 - a = \mathcal{M}5$, de unde $a = 1$; contradicție. Rezultă că cel puțin două sume dau resturi diferite la împărțirea cu 5. 4p



Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Finală, Sovata, 20 aprilie 2016
CLASA a VI-a

Enunțuri

Problema 1. Un număr natural se numește *superb* dacă este multiplul numărului divizorilor săi (spre exemplu 12 este superb deoarece are 6 divizori și 12 este multiplu al lui 6).

- a) Determinați cel mai mare număr superb de două cifre.
- b) Demonstrați că nu există numere superbe care să aibă ultima cifră 3.

Problema 2. Determinați numerele naturale nenule a și b pentru care $\frac{a+1}{b}$ și $\frac{b+2}{a}$ sunt simultan numere naturale.

Problema 3. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A . Bisectoarea unghiului ACB intersectează latura AB în punctul D și perpendiculara în B pe BC în punctul E . Notăm cu F simetricul lui E față de B și cu P intersecția dreptelor DF și BC . Demonstrați că $EP \perp CF$.

Problema 4. Fie a, b numere naturale nenule pentru care există p număr prim cu proprietatea că $[a, a+p] = [b, b+p]$. Arătați că $a = b$.

Am notat $[x, y]$ cel mai mic multiplu comun al numerelor naturale x și y .

Timp de lucru 2 ore și 30 de minute.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Problema 1.6 Un număr natural se numește *superb* dacă este multiplul numărului divizorilor săi (spre exemplu 12 este superb deoarece are 6 divizori și 12 este multiplu al lui 6).

- Determinați cel mai mare număr superb de două cifre.
- Demonstrați că nu există numere superbe care să aibă ultima cifră 3.

Soluție a) $99 = 3^2 \cdot 11$. 99 are 6 divizori și $6 \nmid 99$.

$98 = 2 \cdot 7^2$. 98 are 6 divizori și $6 \nmid 98$.

$97 = 97$. 97 are 2 divizori și $2 \nmid 97$.

$96 = 2^5 \cdot 3$. 96 are 12 divizori și $12 \mid 96$.

Cel mai mare număr superb de două cifre este 96.2p

b) Fie X un număr natural cu $u(X) = 3$ ($u(X)$ - ultima cifră a lui X).

Dacă $u(X) = 3$, atunci X este impar.2p

Pe de altă parte $u(X) = 3$ implică X nu este pătrat perfect, iar un număr care nu este pătrat perfect are un număr par de divizori.2p

Cum un număr impar nu poate fi multiplul unui număr par deducem că X nu este superb. ...1p

Problema 2.6 Determinați numerele naturale nenule a și b pentru care $\frac{a+1}{b}$ și $\frac{b+2}{a}$ sunt simultan numere naturale.

Soluție $\frac{a+1}{b}$ număr natural nenul implică $b \mid a+1$, de unde $b \leq a+1$ și de aici $b+2 \leq a+3$.

Acum $\frac{b+2}{a} \leq \frac{a+3}{a} = 1 + \frac{3}{a} \leq 4$. Cum $\frac{b+2}{a}$ este număr natural nenul rezultă $\frac{b+2}{a} \in \{1, 2, 3, 4\}$.
3p

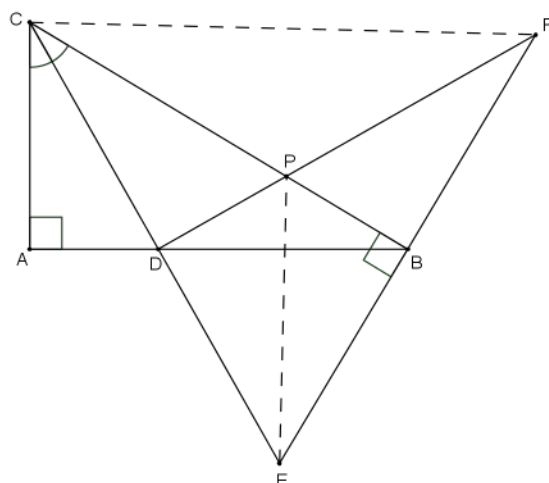
Dacă $\frac{b+2}{a} = 1$, atunci din $b+2 = a$ rezultă $b = a-2$. Atunci $\frac{a+1}{b}$ număr natural nenul implică $\frac{a+1}{a-2} = 1 + \frac{3}{a-2}$ număr natural nenul, de unde $a \in \{3, 5\}$. Obținem soluțiile $a = 3, b = 1$ și $a = 5, b = 3$.

Dacă $\frac{b+2}{a} = 2$, atunci din $b+2 = 2a$ rezultă $b = 2a-2$. Atunci $\frac{a+1}{b}$ este număr natural nenul, sau $\frac{2a+2}{2a-2} = 1 + \frac{4}{2a-2}$ este număr natural par, de unde $a \in \{2, 3\}$. Obținem soluția $a = 3, b = 4$; varianta $a = 2, b = 2$ nu verifică condițiile inițiale.

Dacă $\frac{b+2}{a} = 3$, atunci din $b+2 = 3a$ rezultă $b = 3a-2$. Atunci $\frac{a+1}{b}$ este număr natural nenul, sau $\frac{3a+3}{3a-2} = 1 + \frac{5}{3a-2}$ este număr natural, de unde $a \in \{1\}$. Obținem soluția $a = 1, b = 1$.

Dacă $\frac{b+2}{a} = 4$, atunci $b+2 = 4a$ rezultă $b = 4a-2$. Atunci $\frac{a+1}{b}$ este număr natural nenul, sau $\frac{4a+4}{4a-2} = 1 + \frac{6}{4a-2}$ este număr natural par, de unde $a \in \{1, 2\}$. Obținem soluția $a = 1, b = 2$; varianta $a = 2, b = 6$ nu verifică condițiile inițiale.4p

Problema 3.6. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A . Bisectoarea unghiului ACB intersectează latura AB în punctul D și perpendiculara în B pe BC în punctul E . Notăm cu F simetricul lui E față de B și cu P intersecția dreptelor DF și BC . Demonstrați că $EP \perp CF$.



Soluție

În $\triangle BEC$, $m(\angle CEB) = 180^\circ - m(\angle EBC) - m(\angle ECB) = 90^\circ - m(\angle ECB)$

În $\triangle ADC$, $m(\angle ADC) = 180^\circ - m(\angle DAC) - m(\angle ACD) = 90^\circ - m(\angle ACD)$

Cum $m(\angle ACD) = m(\angle ECB)$, rezultă $\angle ADC \equiv \angle CEB$ (1) 3p

Dar $\angle ADC \equiv \angle EDB$. De aici și din (1) rezultă $[BD] \equiv [BE]$. Cum $[BE] \equiv [BF]$ deducem că $[BD] \equiv [BE] \equiv [BF]$ și atunci $\triangle DEF$ este dreptunghic în D 2p

În $\triangle CEF$, CB și FD înălțimi implică P ortocentrul. În concluzie, EP este înălțime, adică $EP \perp CF$ 2p

Problema 4.6 Fie a , b numere naturale nenule pentru care există p număr prim cu proprietatea că $[a, a + p] = [b, b + p]$. Arătați că $a = b$.

Am notat $[x, y]$ cel mai mic multiplu comun al numerelor naturale x și y .

Soluție Din $(x, y) \cdot [x, y] = xy$ deducem $[xy] = \frac{xy}{(x, y)}$. Am notat (x, y) cel mai mare divizor comun pentru x și y . Cu aceasta egalitatea din enunț devine $\frac{a(a + p)}{(a, a + p)} = \frac{b(b + p)}{(b, b + p)}$. (1) 1p

Notăm $d_1 = (a, a + p) \in \{1, p\}$ și $d_2 = (b, b + p) \in \{1, p\}$.

Dacă $d_1 = d_2$ relația (1) conduce la $a(a + p) = b(b + p)$, de unde $a = b$.

Presupunând $a \neq b$ putem avea $a < b$. Atunci $a + p < b + p$, de unde deducem $a(a + p) < b(b + p)$; contradicție. Dacă $a > b$, atunci $a + p > b + p$, de unde deducem $a(a + p) > b(b + p)$; contradicție. 2p

Dacă $d_1 = 1$ și $d_2 = p$ relația (1) devine $a(a + p) = \frac{b(b + p)}{p}$ sau $pa(a + p) = b(b + p)$. (2)

Din $d_1 = 1$ deducem că $p \nmid a$ și $p \nmid a + p$, iar din $d_2 = p$ deducem că $p \mid b$ sau $b = px$, cu x număr natural.

Cu aceasta, relația (2) devine $pa(a + p) = p^2x(x + 1)$ sau $a(a + p) = px(x + 1)$, de unde deducem că $p \mid a(a + p)$ și cum p este număr prim rezultă $p \mid a$; contradicție.

Aceasta arată că situația $d_1 = 1$ și $d_2 = p$ nu este posibilă.

Analog se tratează cazul $d_1 = p$ și $d_2 = 1$ 4p

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Finală, Târgu Mureș, 20 aprilie 2016

CLASA a VII-a - Soluții și bareme orientative

Problema 1. Determinați numerele naturale n pentru care numărul

$$\sqrt{n+3} + \sqrt{n + \sqrt{n+3}}$$

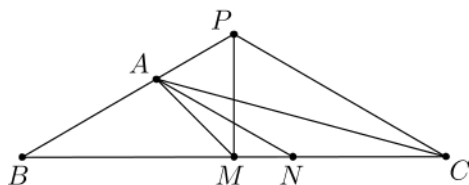
este natural.

Soluție. Notând $m = \sqrt{n+3} + \sqrt{n + \sqrt{n+3}}$, rezultă $n + \sqrt{n+3} = (m - \sqrt{n+3})^2$, de unde $(2m+1)\sqrt{n+3} = m^2 + 3$. Atunci există $p \in \mathbb{N}$ astfel încât $n+3 = p^2$, și, întrucât $p + \sqrt{n+p} \in \mathbb{N}$, există $q \in \mathbb{N}$ astfel încât: $n+p = q^2$ **3p**

Eliminând pe n , rezultă $p^2 - 3 = q^2 - p$, adică $4p^2 + 4p - 12 = 4q^2$, sau $(2p+1)^2 - (2q)^2 = 13$, echivalent cu $(2p+1-2q)(2p+1+2q) = 13$ **3p**

Se obține $p = 3$, pentru care $n = 6$ **1p**

Problema 2. Se consideră triunghiul ABC , în care $m(\sphericalangle B) = 30^\circ$, $m(\sphericalangle C) = 15^\circ$, iar M este mijlocul laturii $[BC]$. Fie punctul $N \in (BC)$ astfel încât $[NC] \equiv [AB]$. Arătați că $[AN]$ este bisectoarea unghiului MAC .



Soluție. Fie P punctul de intersecție al mediatoarei segmentului $[BC]$ cu AB . Atunci $m(\sphericalangle PCB) = 30^\circ$, $m(\sphericalangle PCA) = 15^\circ$ și $m(\sphericalangle MPC) = 60^\circ$.

Cu teorema bisectoarei, aplicată în triunghiul CPB , avem $\frac{AP}{AB} = \frac{CP}{CB}$.

Cum $PC = PB$ și $NC = AB$, rezultă $\frac{AP}{NC} = \frac{BP}{BC}$, adică $\frac{PA}{PB} = \frac{CN}{CB}$, de unde, conform reciprocei teoremei lui Thales, $AN \parallel PC$ **3p**

Deoarece $PC = 2PM$ (triunghiul MPC este dreptunghic cu un unghi de 30°), avem $\frac{PA}{AB} = \frac{PC}{BC} = \frac{2PM}{2BM} = \frac{PM}{BM}$, deci, conform reciprocei teoremei bisectoarei, rezultă că $[MA]$ este bisectoarea unghiului BMP **2p**

Atunci $45^\circ = m(\sphericalangle AMB) = m(\sphericalangle ANB) + m(\sphericalangle MAN)$, și, cum din $AN \parallel PC$ rezultă $m(\sphericalangle ANB) = 30^\circ$, obținem $m(\sphericalangle MAN) = 15^\circ$. Dar $m(\sphericalangle BAN) = m(\sphericalangle BPC) = 120^\circ$ și, cum $m(\sphericalangle BAC) = 135^\circ$, conchidem că $m(\sphericalangle CAN) = 15^\circ = m(\sphericalangle MAN)$, adică $[AN]$ este bisectoarea unghiului MAC **2p**

Problema 3. Determinați numerele naturale p cu proprietatea că suma primelor p numere naturale nenule este un număr natural de patru cifre având descompunerea în factori primi $2^m \cdot 3^n \cdot (m+n)$, unde $m, n \in \mathbb{N}^*$.

Soluție. Evident, $m+n \geq 5$. Dacă $m+n = 5$, cea mai mare valoare pe care o poate lua numărul $N = 2^m \cdot 3^n \cdot (m+n)$ este $2^1 \cdot 3^4 \cdot 5 = 810$, care nu are patru cifre, contradicție .. **2p**

Presupunând că $m+n \geq 11$, atunci $N \geq 2^{10} \cdot 3 \cdot 11 > 10000$, deci N nu poate avea patru cifre, contradicție **2p**

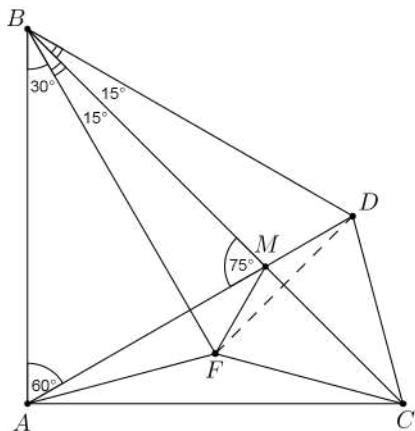
Prin urmare, $m+n = 7$. În acest caz, numere de patru cifre sunt :

$2^6 \cdot 3^1 \cdot 7 = 1344$, $2^5 \cdot 3^2 \cdot 7 = 2016$, $2^4 \cdot 3^3 \cdot 7 = 3024$, $2^3 \cdot 3^4 \cdot 7 = 4536$ și $2^2 \cdot 3^5 \cdot 7 = 6804$.

Ținând cont că $N = \frac{p(p+1)}{2}$, analizând cazurile, convine doar $N = 2016$, pentru care se obține $p = 63$ **3 p**

Problema 4. Se consideră triunghiul dreptunghic isoscel ABC , cu $m(\sphericalangle A) = 90^\circ$ și punctul $M \in (BC)$ astfel încât $m(\sphericalangle AMB) = 75^\circ$. Pe bisectoarea interioară a unghiului MAC se ia un punct F astfel încât $BF = AB$. Arătați că:

- dreptele AM și BF sunt perpendiculare;
- triunghiul CFM este isoscel.



Soluție. a) Deoarece AMB este unghi exterior triunghiului AMC , rezultă $m(\sphericalangle MAC) = 30^\circ$, de unde $m(\sphericalangle BAM) = 60^\circ$ și $m(\sphericalangle MAF) = 15^\circ$ **1p**

Triunghiul BAF este isoscel, cu $m(\sphericalangle AFB) = m(\sphericalangle BAF) = 75^\circ$, deci $m(\sphericalangle ABF) = 30^\circ$, de unde, ținând cont că $m(\sphericalangle BAM) = 60^\circ$, rezultă că $AM \perp BF$ **1p**

b) Fie punctul D în semiplanul determinat de BC care nu conține pe A astfel încât $BD = BF$ și $m(\sphericalangle MBD) = 15^\circ$. Atunci triunghiul ABD este echilateral, iar punctele A , M și D sunt coliniare **1p**

Triunghiul ADC este isoscel, cu $m(\sphericalangle DAC) = 30^\circ$, de unde $m(\sphericalangle ADC) = 75^\circ = m(\sphericalangle CMD)$. Ca urmare, triunghiul CDM este isoscel, deci $[CM] \equiv [CD]$ **2p**

În triunghiul isoscel BDF , bisectoarea BC este mediatoarea segmentului $[DF]$, deci triunghiul CFD este și el isoscel, de unde $[CF] \equiv [CD] \equiv [CM]$, adică triunghiul CFM este isoscel **2p**



Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Finală, Târgu Mureș, 20 aprilie 2016
CLASA a VIII-a

Problema 1. Vârfurile unei prisme se colorează cu două culori astfel încât capetele fiecărei muchii laterale să fie colorate diferit. Se consideră toate segmentele care unesc câte două vârfuri ale prisme, altele decât muchiile laterale. Arătați că numărul segmentelor cu capetele colorate diferit coincide cu numărul segmentelor cu capetele colorate la fel.

Problema 2. Într-un cub $ABCD A'B'C'D'$ se consideră două puncte $M \in (CD')$ și $N \in (DA')$. Arătați că MN este perpendiculara comună a dreptelor CD' și DA' dacă și numai dacă $\frac{D'M}{D'C} = \frac{DN}{DA'} = \frac{1}{3}$.

Problema 3. Dacă a , b și c sunt lungimile laturilor unui triunghi, arătați că

$$\frac{3}{2} \leq \frac{b+c}{b+c+2a} + \frac{a+c}{a+c+2b} + \frac{a+b}{a+b+2c} < \frac{5}{3}.$$

Problema 4. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ spunem că numerele naturale $x_1, x_2, \dots, x_n$ au proprietatea $(\mathcal{P})$, dacă

$$x_1 x_2 \cdots x_n = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + nx_n.$$

a) Arătați că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ există n numere naturale nenule cu proprietatea $(\mathcal{P})$.

b) Determinați numerele naturale $n \geq 2$ pentru care există n numere naturale $x_1, x_2, \dots, x_n$, cu $x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n$, care au proprietatea $(\mathcal{P})$.

Timp de lucru 4 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Finală, Târgu Mureș, 20 aprilie 2016

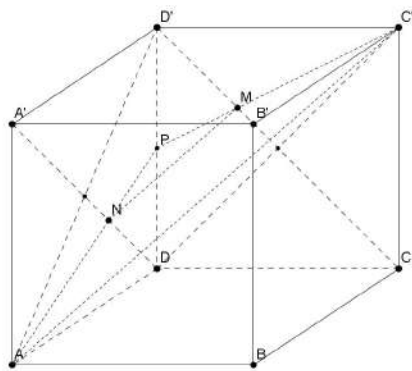
CLASA a VIII-a - Soluții și bareme orientative

Problema 1. Vârfurile unei prisme se colorează cu două culori astfel încât capetele fiecărei muchii laterale să fie colorate diferit. Se consideră toate segmentele care unesc câte două vârfuri ale prisme, altele decât muchiile laterale. Arătați că numărul segmentelor cu capetele colorate diferit coincide cu numărul segmentelor cu capetele colorate la fel.

Soluție. Fie n numărul de laturi ale unei baze a prisme. Atunci numărul de segmente luate în considerare este $\frac{2n(2n-1)}{2} - n = 2(n^2 - n)$ **1p**
Fie a numărul vârfurilor bazei superioare colorate cu prima culoare, iar $b = n - a$ numărul vârfurilor bazei superioare colorate cu a doua culoare. Pe baza inferioară vor fi atunci b puncte colorate cu prima culoare și a puncte colorate cu a doua culoare. **1p**
Numărul segmentelor cu capetele diferit colorate și pe baze diferite este $a^2 + b^2 - n$.
Numărul segmentelor cu capetele diferit colorate aflate pe o aceeași bază este $2ab$.
Numărul total de segmente cu capetele colorate diferit este atunci $(a + b)^2 - n = n^2 - n$ **3p**
Numărul segmentelor cu capetele colorate la fel este atunci $2(n^2 - n) - (n^2 - n) = n^2 - n$ și este egal cu cel al segmentelor cu capetele colorate diferit. **2p**

Problema 2. Într-un cub $ABCD A' B' C' D'$ se consideră două puncte $M \in (CD')$ și $N \in (DA')$. Arătați că MN este perpendiculara comună a dreptelor CD' și DA' dacă și numai dacă $\frac{D'M}{D'C} = \frac{DN}{DA'} = \frac{1}{3}$.

Soluție.



Dacă $\frac{D'M}{D'C} = \frac{DN}{DA'} = \frac{1}{3}$, atunci M și N sunt centrele de greutate ale triunghiurilor $DD'C$ și, respectiv, ADD' , deci punctele C', M, P și A, N, P sunt coliniare, unde P este mijlocul muchiei DD' .

..... **2p**

În triunghiul APC' avem $\frac{PM}{PC'} = \frac{PN}{PA}$, deci $MN \parallel AC'$. Iar $AC' \perp D'C$ și $AC' \perp A'D$ ($(AC'D)$ este planul mediator al segmentului $D'C$, iar $(AD'C')$ este planul mediator al segmentului $A'D$.) Deci MN este perpendiculara comună a dreptelor CD' și DA'

..... **3p**

Reciproc, dacă MN este perpendiculara comună a celor două drepte, acesta fiind unică, este cea din punctul anterior, deci

$$\frac{D'M}{D'C} = \frac{DN}{DA'} = \frac{1}{3} \quad \dots\dots\dots \mathbf{2p}$$

Problema 3. Dacă a, b și c sunt lungimile laturilor unui triunghi, arătați că

$$\frac{3}{2} \leq \frac{b+c}{b+c+2a} + \frac{a+c}{a+c+2b} + \frac{a+b}{a+b+2c} < \frac{5}{3}.$$

Soluție.

Inegalitatea $\frac{3}{2} \leq \frac{b+c}{b+c+2a} + \frac{a+c}{a+c+2b} + \frac{a+b}{a+b+2c}$ este inegalitatea Nesbitt pentru tripletul de numere pozitive $(b+c, a+c, a+b)$ **2p**

Din inegalitatea triunghiului avem

$$b+c > a \Leftrightarrow 3a+3b+3c > 4a+2b+2c \Leftrightarrow \frac{2}{3(a+b+c)} < \frac{1}{2a+b+c} \Leftrightarrow \frac{4a}{3(a+b+c)} < \frac{2a}{2a+b+c} \Leftrightarrow \frac{4a}{3(a+b+c)} < 1 - \frac{b+c}{2a+b+c} \dots\dots\dots \mathbf{3p}$$

Analog se arată că $\frac{4b}{3(a+b+c)} < 1 - \frac{a+c}{2b+a+c}$ și $\frac{4c}{3(a+b+c)} < 1 - \frac{a+b}{2c+a+b}$. Adunând ultimele trei inegalități obținem $\frac{4}{3} < 3 - \left(\frac{b+c}{b+c+2a} + \frac{a+c}{a+c+2b} + \frac{a+b}{a+b+2c} \right)$ echivalentă cu inegalitatea de demonstrat. $\mathbf{2p}$

Problema 4. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ spunem că numerele naturale $x_1, x_2, \dots, x_n$ au proprietatea (P), dacă

$$x_1 x_2 \cdots x_n = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + nx_n. \quad (1)$$

a) Arătați că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ există n numere naturale nenule cu proprietatea (P).

b) Determinați numerele naturale $n \geq 2$ pentru care există n numere naturale $x_1, x_2, \dots, x_n$, cu $x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n$, care au proprietatea (P).

Soluție. a) Pentru $n = 1$ orice număr natural x_1 verifică proprietatea (P).

Pentru $n = 2$ egalitatea (1) este echivalentă cu $(x_1 - 2)(x_2 - 1) = 2$ și perechile (x_1, x_2) de numere naturale nenule care au proprietatea (P) sunt $(3, 3)$ și $(4, 2)$.

Pentru $n \geq 3$, alegând $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-2} = 1$, egalitatea (1) se reduce la $(x_{n-1} - n)(x_n - (n-1)) = n(n-1) + \frac{(n-2)(n-1)}{2}$ și este verificată de numerele $x_{n-1} = n+1$ și $x_n = n-1 + n(n-1) + \frac{(n-2)(n-1)}{2} = \frac{3n(n-1)}{2}$ $\mathbf{2p}$

b) Evident, $x_1 \neq 0$, deoarece altfel $x_1 x_2 \dots x_n = 0 < 0 + 2x_2 + \cdots + nx_n = x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n$.

Împărțind egalitatea (1) prin $x_1 x_2 \dots x_n$, aceasta devine

$$1 = \frac{1}{x_2 x_3 \dots x_n} + \frac{2}{x_1 x_3 \dots x_n} + \frac{3}{x_1 x_2 x_4 \dots x_n} + \cdots + \frac{n}{x_1 x_2 \dots x_{n-1}}.$$

Deoarece $x_2 x_3 \dots x_n > x_1 x_3 \dots x_n > \cdots > x_1 x_2 \dots x_{n-1} \geq (n-1)!$, rezultă că

$$1 < \frac{1+2+\cdots+n}{(n-1)!} = \frac{n(n+1)}{2(n-1)!}$$

Pentru $2 \leq n \leq 4$, inegalitatea de mai sus are loc.

Pentru $n \geq 5$, scriind $n(n+1) = (n-1)(n-2) + 4(n-1) + 2$, aceasta devine

$$\begin{aligned} 1 &< \frac{n(n+1)}{2(n-1)!} = \frac{(n-1)(n-2) + 4(n-1) + 2}{2(n-1)!} = \frac{1}{2(n-3)!} + \frac{2}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!} \leq \\ &\leq \frac{1}{2 \cdot 2!} + \frac{2}{3!} + \frac{1}{4!} = \frac{1}{4} + \frac{2}{6} + \frac{1}{24} = \frac{5}{8} < 1. \end{aligned}$$

Rezultă că $n \in \{2, 3, 4\}$ $\mathbf{3p}$

Pentru $n = 2$ am văzut că perechile (x_1, x_2) de numere naturale nenule care au proprietatea (P) sunt $(3, 3)$ și $(4, 2)$. Prin urmare nu există perechi care să satisfacă și inegalitatea $x_1 < x_2$.

Pentru $n = 3$ putem alege $x_1 = 1$, $x_2 = 4$ și $x_3 = 9$ (ca în exemplul de la a)), care verifică inegalitatea $x_1 < x_2 < x_3$ și au proprietatea (P).

Pentru $n = 4$, alegând $x_1 = 1$ și $x = 2$, egalitatea (1) se reduce la $(2x_3 - 4)(2x_4 - 3) = 22$ și este verificată de $x_3 = 3$ și $x_4 = 7$.

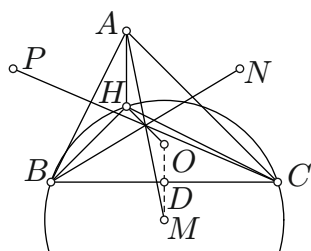
Prin urmare numerele naturale $n \geq 2$ care satisfac condiția cerută sunt $n = 3$ și $n = 4$ $\mathbf{2p}$



Olimpiada Națională de Matematică
Etapă Finală, Târgu Mureș, 20 aprilie 2016
CLASA a 9-a

Soluții și bareme orientative

Problema 1. Un triunghi ABC are ortocentrul H diferit de vârfuri și de centrul O al cercului circumscris. Notăm M, N, P centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor HBC, HCA , respectiv HAB . Demonstrați că dreptele AM, BN, CP și OH sunt concurente.



Soluție. Cercul HBC este simetricul cercului C circumscris triunghiului, deci M este simetricul lui O față de BC**2p**

Dacă D este mijlocul lui $[BC]$, atunci $\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AH}$, deci $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AH}$**3p**

Rezultă că $AHMO$ este paralelogram, deci AM trece prin mijlocul segmentului $[OH]$, analog BN și CP **2p**

Problema 2. Fie $n \geq 2$ un număr natural și $a_1, a_2, \dots, a_n$ numere reale strict pozitive astfel încât $a_1 \leq a_2, a_1 + a_2 \leq a_3, a_1 + a_2 + a_3 \leq a_4, \dots, a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} \leq a_n$. Arătați că

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \frac{a_3}{a_4} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n} \leq \frac{n}{2}.$$

Când are loc egalitatea ?

Soluție. Notăm $x_1 = a_1, x_k = a_k - (a_{k-1} + \dots + a_1), k = \overline{2, n}$**2p**

Observăm că $x_{k+1} - x_k = a_{k+1} - 2a_k, k = \overline{1, n-1}$**1p**

Rezultă $2 \left(\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \frac{a_3}{a_4} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n} \right) = \sum_{i=1}^{n-1} \left(1 - \frac{x_{i+1} - x_i}{a_{i+1}} \right)$ **1p**

Ultima sumă este $n - \frac{x_1}{a_1} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{x_{i+1} - x_i}{a_{i+1}} = n - \frac{x_n}{a_n} - \sum_{i=1}^{n-1} x_i \left(\frac{1}{a_i} - \frac{1}{a_{i+1}} \right) \leq$

n , deoarece $x_i \geq 0, \forall i = \overline{1, n}$ și $a_i \leq a_{i+1}, \forall i = \overline{1, n-1}$**2p**

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x_2 = x_3 = \dots = x_n = 0$, adică $a_2 = a_1, a_3 = 2a_1, \dots, a_n = 2^{n-2}a_1$**1p**

Problema 3. a) Demonstrați că 7 nu poate fi scris ca sumă de trei pătrate de numere raționale.

b) Fie a un număr rațional care poate fi scris ca sumă de trei pătrate de numere raționale. Arătați că a^m poate fi scris ca sumă de trei pătrate de numere raționale, oricare ar fi numărul natural nenul m .

Soluție. a) Să presupunem că există numerele raționale x, y, z astfel ca $7 = x^2 + y^2 + z^2$. Scriind x, y, z ca fracții și eliminând numitorii, obținem o egalitate de tipul

$$7n^2 = a^2 + b^2 + c^2, \quad (*)$$

unde n, a, b, c sunt numere naturale, nu toate nule.

Dacă n este par, atunci a, b, c sunt toate pare (nu pot fi toate trei impare, iar dacă exact două sunt impare, suma pătratelor dă restul 2 la împărțirea cu 4, în timp ce $7n^2$ se divide cu 4). Împărțind cu 4, obținem

$$7n_1^2 = a_1^2 + b_1^2 + c_1^2,$$

și evident, $0 < a_1 + b_1 + c_1 < a + b + c$.

Dacă n_1 este tot par, repetăm procedeul precedent (aceasta se poate întâmpla de un număr finit de ori).

Dacă n este impar, $n = 2k + 1$, atunci $7n^2 = 7 \cdot 4k(k + 1) + 7 = 8M + 7$. Cum restul unui pătrat la împărțirea cu 8 este 0, 1 sau 4, deducem că egalitatea (*) de mai sus este imposibilă **3p**

b) Vom demonstra afirmația prin inducție după m . Cazul $m = 1$ rezultă din ipoteză. Să presupunem afirmația adevărată pentru orice $m \leq n$ și să o demonstrăm pentru $n + 1$.

Dacă $n + 1 = 2k$, atunci $k \leq n$, deci a^k se scrie ca o sumă de trei pătrate de numere raționale, de exemplu $a^k = x^2 + y^2 + z^2$, unde $x \geq y \geq z$. Atunci

$$a^{2k} = (x^2 + y^2 + z^2)^2 = (x^2 + y^2 - z^2) + (2xz)^2 + (2yz)^2,$$

și numerele $x^2 + y^2 - z^2, 2xz, 2yz$ sunt evident raționale **2p**

Dacă $n + 1 = 2k + 1$, scriind $a = x^2 + y^2 + z^2$, avem

$$a^{n+1} = a^{2k} \cdot a = a^{2k} (x^2 + y^2 + z^2) = (a^k x)^2 + (a^k y)^2 + (a^k z)^2.$$

..... **2p**

Problema 4. Determinați toate funcțiile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care au proprietatea

$$f(a^2) - f(b^2) \leq (f(a) + b)(a - f(b)), \quad \text{oricare ar fi } a, b \in \mathbb{R}.$$

Soluție. Pentru $a = b = 0$ obținem $f^2(0) \leq 0$, deci $f(0) = 0$ **1p**

Luând în ipoteză $b = 0$, apoi $a = 0$, reiese $f(a^2) \leq af(a), \forall a \in \mathbb{R}$ și $f(b^2) \geq bf(b), \forall b \in \mathbb{R}$, deci $f(x^2) = xf(x), \forall x \in \mathbb{R} (*)$ **1p**

Înlocuind (*) în ipoteză obținem $f(a)f(b) \leq ab, \forall a, b \in \mathbb{R}$ **1p**

Avem și $-xf(-x) = f((-x)^2) = f(x^2) = xf(x)$, de unde reiese că f este impară..... **1p**

Din ultimele două relații reiese $f(a)f(b) = -f(a)f(-b) \geq -(-ab) = ab$, deci $f(a)f(b) = ab, \forall a, b \in \mathbb{R}$ **1p**

Astfel $f^2(1) = 1$, ceea ce implică $f(1) = \pm 1$ și $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$, sau $f(x) = -x, \forall x \in \mathbb{R}$ **1p**

Ambele funcții verifică **1p**

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Finală, Târgu Mureș, 20 aprilie 2016
CLASA a X-a

Enunțuri și bareme

Problema 1.

Fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ și numerele reale $a_1, a_2, \dots, a_n \in (0, \infty)$ astfel încât $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = 1$. Demonstrați că funcția

$$f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = (1 + a_1^x) \cdot (1 + a_2^x) \cdot \dots \cdot (1 + a_n^x)$$

este crescătoare.

Soluție și barem.

După înmulțiri obținem

$$f(x) = (1 + a_1^x) \cdot (1 + a_2^x) \cdot \dots \cdot (1 + a_n^x) = 1 + \sum_{1 \leq i \leq n} a_i^x + \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i^x a_j^x + \dots + a_1^x a_2^x \dots a_n^x \dots \dots \dots \mathbf{1p}$$

Deoarece $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = 1$, expresia funcției f poate fi scrisă ca o sumă de expresii de forma $a^x + \frac{1}{a^x}$, unde $a = a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k}$, cu $k \leq n$. $\dots \dots \dots \mathbf{2p}$

Pentru orice $a > 0$, considerăm funcția $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = a^x + a^{-x}$. Fie $t > 0$. Atunci $g(x+t) - g(x) = \frac{a^{2x+2t} + 1}{a^{x+t}} - \frac{a^{2x} + 1}{a^x} = \frac{a^{2x+2t} - a^{2x+t} - a^t + 1}{a^{x+t}} = \frac{(a^{2x+t} - 1)(a^t - 1)}{a^{x+t}} \geq 0$, deci funcția g este crescătoare $\dots \dots \dots \mathbf{3p}$

Atunci funcția f este crescătoare ca o sumă de funcții crescătoare. $\dots \dots \mathbf{1p}$

Problema 2.

Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție cu proprietățile

$$(P1) \quad f(x+y) \leq f(x) + f(y),$$

$$(P2) \quad f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y),$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ și $t \in [0, 1]$.

a) Demonstrați că oricare ar fi $a \leq b \leq c \leq d$, astfel încât $d - c = b - a$, are loc inegalitatea

$$f(b) + f(c) \leq f(a) + f(d).$$

b) Demonstrați că

$$f(x_1 + x_2 + \dots + x_n) + (n-2)(f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)) \geq \sum_{1 \leq i < j \leq n} f(x_i + x_j),$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$, și $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$.

Soluție și barem. a) Ipoteza conduce la existența unui număr $t \in [0, 1]$, astfel încât $b = ta + (1-t)d$ și $c = (1-t)a + td$ **2p**
Aplicăm (P2) și obținem

$$f(b) = f(ta + (1-t)d) \leq t(f(a)) + (1-t)f(d).$$

Analog, $f(c) \leq (1-t)f(a) + tf(d)$. Adunăm cele două inegalități și obținem concluzia. **1p**

b) Pentru început, demonstrăm cazul $n = 3$. Două dintre numerele x, y, z sunt simultan pozitive sau simultan negative. Fie x, y acestea. Dacă $x \geq 0$ atunci $z + (x + y + z) = (x + z) + (y + z)$ și $z \leq x + z, y + z \leq x + y + z$. Punctul anterior conduce la

$$f(x + z) + f(y + z) \leq f(z) + f(x + y + z).$$

Concluzia se obține prin adunarea inegalității anterioare cu inegalitatea $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$. Dacă $x < 0$, atunci $x + y + z \leq y + z, z + x \leq z$ și calculele sunt similare. **2p**

Presupunem acum inegalitatea adevărată pentru n și o demonstrăm pentru $n + 1$. Ipoteza de inducție aplicată numerelor $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ și $x_n + x_{n+1}$ conduce la:

$$\begin{aligned} & f(x_1 + \dots + x_n + x_{n+1}) + (n-2)(f(x_1) + \dots + f(x_{n-1}) + f(x_n + x_{n+1})) \\ & \geq \sum_{1 \leq i < j \leq n-1} f(x_i + x_j) + \sum_{1 \leq i \leq n-1} f(x_i + x_n + x_{n+1}). \end{aligned}$$

Concluzia se deduce dacă folosim inegalitatea

$$f(x_i + x_n + x_{n+1}) \geq f(x_i + x_n) + f(x_i + x_{n+1}) + f(x_n + x_{n+1}) - f(x_i) - f(x_n) - f(x_{n+1})$$

și însumăm. **2p**

Problema 3.

a) În planul complex de origine O , considerăm punctele A și B , de afixe nenule a și respectiv b . Arătați că $S_{[OAB]} = \frac{1}{4} |\overline{a}b - a\overline{b}|$, unde $S_{[OAB]}$ reprezintă aria triunghiului OAB .

b) Fie ABC un triunghi echilateral înscris într-un cerc $\mathcal{C}$ de centru O . Pentru un punct P interior cercului $\mathcal{C}$, notăm cu $S(P)$ aria triunghiului având lungimile

laturilor egale cu distanțele de la P la vârfurile triunghiului. Fie P_1 și P_2 două puncte distincte interioare cercului $\mathcal{C}$. Arătați $S(P_1) = S(P_2)$ dacă și numai dacă $OP_1 = OP_2$.

Soluție și barem. a) Presupunem că triunghiul OAB este orientat în sens trigonometric. Atunci $m(\angle AOB) = \arg \frac{b}{a}$, iar dacă este invers orientat obținem $m(\angle AOB) = \arg \frac{a}{b}$. Atunci $\sin(\angle AOB) = \left| \frac{|a|}{2|b|} \left(\frac{b}{a} - \frac{\bar{b}}{\bar{a}} \right) \right| = \frac{|\bar{a}b - a\bar{b}|}{2|a||b|}$ și deci $S_{[OAB]} = \frac{1}{2}OA \cdot OB \cdot \sin(\angle AOB)$, de unde obținem concluzia. **2p**

b) Fie $\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$. Putem presupune că afixele punctelor A, B și C sunt $1, \varepsilon$, respectiv ε^2 . Fie P , un punct de afix p , interior cercului. Atunci $(p-1) + \varepsilon(p-\varepsilon) + \varepsilon^2(p-\varepsilon^2) = 0$. Fie punctele $D(p-1)$, $E(\varepsilon(p-\varepsilon))$ și $F(\varepsilon^2(p-\varepsilon^2))$. În plus, $OD = PA$, $OE = PB$ și $OF = PC$.

Fie J , astfel încât $ODJF$ este paralelogram. Obținem că punctul J are afixul opus afixului lui F . Atunci $OJ = PC$, iar triunghiul ODJ are laturile de lungimi PA, PB, PC **2p**

$$\begin{aligned} \text{Dar } S_{[ODJ]} &= S_{[ODE]} = \frac{1}{4} |(\bar{p}-1) \cdot \varepsilon \cdot (p-\varepsilon) - (p-1) \cdot \bar{\varepsilon} \cdot (\bar{p}-\bar{\varepsilon})| \\ &= \frac{1}{4} ((\varepsilon - \varepsilon^2) |p|^2 - (\varepsilon - \varepsilon^2)) = \frac{\sqrt{3}}{4} ||p|^2 - 1|. \end{aligned}$$

Dar $|p| < 1$, deci $S_{[ODE]} = S(P) = \frac{\sqrt{3}}{4} (1 - |p|^2)$ **2p**

Revenind la punctele P_1 și P_2 din ipoteză, notăm cu p_1 , respectiv p_2 , afixele lor. Atunci $S(P_1) = \frac{\sqrt{3}}{4} (1 - |p_1|^2)$, și $S(P_2) = \frac{\sqrt{3}}{4} (1 - |p_2|^2)$. Atunci $S(P_1) = S(P_2)$ dacă și numai dacă $|p_1| = |p_2|$, adică $OP_1 = OP_2$ **1p**

Problema 4.

Oamenii unui trib străvechi foloseau o limbă în care cuvintele erau formate doar cu literele A și B . Cercetătorii au descoperit că pentru oricare două cuvinte de lungimi egale, există cel puțin trei poziții corespondente în care literele sunt diferite. De exemplu, cuvintele $ABBAA$ și $AAAAB$ diferă în pozițiile 2, 3 și 5, adică în trei poziții.

Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Demonstrați că în această limbă nu pot exista mai mult de $\left\lceil \frac{2^n}{n+1} \right\rceil$ cuvinte de lungime n ($[a]$ este partea întreagă a numărului real a).

Soluție și barem. Notăm cu C , mulțimea tuturor cuvintelor de lungime n , care s-ar putea forma (pot fi și cuvinte care nu fac partea neapărat din limba tribului). Atunci $\text{Card}(C) = 2^n$ **1p**

Pentru două cuvinte oarecare x și y , din C , notăm $d(x, y)$, numărul de poziții în care literele sunt diferite. Evident $d(x, x) = 0$ și $d(x, y) = d(y, x)$. Pentru

orice $x \in C$, definim mulțimea $C_x = \{y \in C \mid d(x, y) \leq 1\}$.

Atunci $\text{Card}(C_x) = n + 1$ **2p**

Dacă a, b sunt cuvinte de lungime n din limbă, atunci $d(a, b) \geq 3$, deci $C_a \cap C_b = \emptyset$ **2p**

Fie D mulțimea tuturor cuvintelor de lungime n din limbă. Atunci $\bigcup_{a \in D} C_a \subset$

C , de unde $\text{Card}\left(\bigcup_{a \in D} C_a\right) \leq \text{Card}(C)$. Dar $\text{Card}\left(\bigcup_{a \in D} C_a\right) = (n + 1) \cdot \text{Card}(D)$,

deci $(n + 1) \cdot \text{Card}(D) \leq 2^n$, de unde $\text{Card}(D) \leq \frac{2^n}{n + 1}$. Deoarece $\text{Card}(D) \in \mathbb{N}$,

obținem concluzia. **2p**



Olimpiada Națională de Matematică
Etapă Finală, Târgu Mureș, 20 aprilie 2016
CLASA a 11-a

Soluții și bareme orientative

Problema 1. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ o matrice care satisface următoarele condiții:
 $\det(A^{2014} - I_2) = \det(A^{2014} + I_2)$ și $\det(A^{2016} - I_2) = \det(A^{2016} + I_2)$.
Demonstrați că $\det(A^n - I_2) = \det(A^n + I_2)$, pentru orice număr natural
nenul n .

Soluție. Pentru $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ are loc relația

$$\det(M - xI_2) = x^2 - \operatorname{tr}(M)x + \det(M), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ o matrice care satisface condițiile din enunț. Din (1)
obținem

$$\operatorname{tr}(A^{2014}) = \operatorname{tr}(A^{2016}) = 0. \quad (2)$$

..... **1 punct**
Conform teoremei Cayley-Hamilton, avem

$$A^2 - \operatorname{tr}(A)A + \det(A)I_2 = O_2. \quad (3)$$

..... **1 punct**

1) Dacă $\operatorname{tr}(A) = 0$, atunci din (3) obținem $A^2 = -\det(A)I_2$, de unde
 $A^{2014} = -\det^{1007}(A)I_2$. Din (2) rezultă $\det(A) = 0$ **1 punct**

2) Dacă $\det(A) = 0$, atunci din (3) obținem $A^2 = \operatorname{tr}(A)A$. Prin inducție,
 $A^{n+1} = \operatorname{tr}^n(A)A$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Rezultă $\operatorname{tr}(A^n) = \operatorname{tr}^n(A)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. În particu-
lar, conform (2), $0 = \operatorname{tr}(A^{2014}) = \operatorname{tr}^{2014}(A)$, deci $\operatorname{tr}(A) = 0$ **1 punct**

Presupunem, prin reducere la absurd, $\operatorname{tr}(A) \neq 0$ și $\det(A) \neq 0$. Din (3),
 $A^{2016} - \operatorname{tr}(A)A^{2015} + \det(A)A^{2014} = O_2$. Atunci $\operatorname{tr}(A^{2016}) - \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(A^{2015}) +$
 $\det(A)\operatorname{tr}(A^{2014}) = 0$. Conform (2) și presupunerii, obținem $\operatorname{tr}(A^{2015}) = 0$.

Din (3), deducem $\operatorname{tr}(A^n) = \frac{1}{\det(A)} [\operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(A^{n+1}) - \operatorname{tr}(A^{n+2})]$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Astfel, pornind de la $\operatorname{tr}(A^{2014}) = \operatorname{tr}(A^{2015}) = 0$, obținem, în mod recurent,
 $\operatorname{tr}(A^{2013}) = 0$, $\operatorname{tr}(A^{2012}) = 0, \dots, \operatorname{tr}(A) = 0$. Contradicție.

În concluzie $\operatorname{tr}(A) = 0$ și $\det(A) = 0$ **2 puncte**

Din (3) rezultă $A^2 = O_2$, de unde obținem $A^n = O_2$, $\forall n \geq 2$. Atunci, pen-
tru $n \geq 2$, avem $\det(A^n - I_2) = \det(-I_2) = 1 = \det(I_2) = \det(A^n + I_2)$.
Pentru $n = 1$, conform (1), $\det(A - I_2) = 1 = \det(A + I_2)$ **1 punct**

Problema 2. Pornind de la o matrice inversabilă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ având liniile $L_1, L_2, \dots, L_n$, construim matricele $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ cu liniile $O, L_2, \dots, L_n$ și $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ cu liniile $L_2, \dots, L_n, O$, unde O desemnează o linie cu toate elementele nule. Fie matricele $D = A^{-1} \cdot B$ și $E = A^{-1} \cdot C$. Arătați că:

a) $\text{rang}(D) = \text{rang}(D^2) = \dots = \text{rang}(D^n)$;

b) $\text{rang}(E) > \text{rang}(E^2) > \dots > \text{rang}(E^n)$.

Soluție. a) Considerăm matricea $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Avem $D = A^{-1}PA$ **1 punct**

Cum $P^2 = P$, obținem $P^k = P$, $k \in \mathbb{N}^*$ (inducție). **1 punct**

Atunci $D^k = (A^{-1}PA)^k = A^{-1}P^kA = A^{-1}PA = D$, $k \in \mathbb{N}^*$. Prin urmare, $\text{rang}(D^k) = \text{rang}(D) = \text{rang}(P) = n - 1$, $k = \overline{1, n}$ **1 punct**

b) Fie matricea $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Avem $E = A^{-1}QA$ **1 punct**

Se verifică inductiv că matricea Q^k se reprezintă în blocuri $\begin{pmatrix} O_{n-k,k} & I_{n-k} \\ O_{k,n} & \end{pmatrix}$

(unde $I_p \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ este matricea unitate, iar $O_{p,q} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ este matricea nulă), pentru $k = \overline{1, n-1}$. Apoi, $Q^n = O_n$ **2 puncte**

Din $E^k = (A^{-1}QA)^k = A^{-1}Q^kA$, $k \in \mathbb{N}^*$, rezultă

$$\text{rang}(E^k) = \text{rang}(Q^k) = n - k, \quad k = \overline{1, n},$$

de unde concluzia. **1 punct**

Problema 3. Fie $a \in \mathbb{R}$. Considerăm o funcție $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$. Arătați că următoarele două afirmații sunt echivalente:

(i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^{a+\varepsilon}} = 0$ și $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^{a-\varepsilon}} = \infty$, pentru orice $\varepsilon > 0$;

$$(ii) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln f(x)}{\ln x} = a.$$

Soluție.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Fie $\varepsilon > 0$. Conform (i), există $m_1 > 0$ astfel ca $\frac{f(x)}{x^{a+\varepsilon}} < 1, \forall x > m_1$

și există $m_2 > 0$ astfel ca $\frac{f(x)}{x^{a-\varepsilon}} > 1, \forall x > m_2$. Notăm $m = \max\{m_1, m_2, 1\}$.

Atunci $x^{a-\varepsilon} < f(x) < x^{a+\varepsilon}, \forall x > m$. Prin logaritmare, obținem inegalitatea $a - \varepsilon < \frac{\ln f(x)}{\ln x} < a + \varepsilon, \forall x > m$. Cum $\varepsilon > 0$ este arbitrar, rezultă

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln f(x)}{\ln x} = a. \dots\dots\dots \mathbf{3 \text{ puncte}}$$

(ii) $\Rightarrow$ (i). Fie $\varepsilon > 0$. Conform (ii), există $m > 1$ astfel ca

$$a - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\ln f(x)}{\ln x} < a + \frac{\varepsilon}{2}, \forall x > m.$$

Obținem $x^{a-\varepsilon/2} < f(x) < x^{a+\varepsilon/2}, \forall x > m$. Ca urmare, $\frac{f(x)}{x^{a+\varepsilon}} < \frac{1}{x^{\varepsilon/2}}, \forall x > m$

și $\frac{f(x)}{x^{a-\varepsilon}} > x^{\varepsilon/2}, \forall x > m$. Dar $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\varepsilon/2} = \infty$ și $f(x) > 0, \forall x > 0$. Conform criteriilor clește și al majorării se obțin limitele de la (i). $\dots\dots\dots \mathbf{4 \text{ puncte}}$

Problema 4. Determinați funcțiile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că f^2 este derivabilă pe $\mathbb{R}$ și $(f^2)' = f$.

Soluție.

Funcția identic nulă verifică cerințele. $\dots\dots\dots \mathbf{1 \text{ punct}}$

Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție neidentic nulă care verifică condițiile din enunț. Există deci $x_0 \in \mathbb{R}$ astfel ca $f(x_0) \neq 0$. Cum f^2 este derivabilă, deci continuă, $f^2 > 0$ pe o vecinătate a lui x_0 . Notăm

$$a = \inf \{t \in (-\infty, x_0) | f^2(x) > 0, \forall x \in [t, x_0]\},$$

$$b = \sup \{t \in (x_0, \infty) | f^2(x) > 0, \forall x \in [x_0, t]\}.$$

Avem $-\infty \leq a < x_0 < b \leq \infty$ și $f(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$. Cum $f = (f^2)'$ are proprietatea lui Darboux (conform teoremei lui Darboux), deducem că f păstrează semn constant pe (a, b) . $\dots\dots\dots \mathbf{1 \text{ punct}}$

1) Presupunem $f(x) > 0, \forall x \in (a, b)$. Atunci $f = \sqrt{f^2}$ pe (a, b) , deci f este derivabilă pe (a, b) . Conform ipotezei, avem $2f(x)f'(x) = f(x), \forall x \in (a, b)$. Rezultă $f'(x) = \frac{1}{2}, \forall x \in (a, b)$. Deducem că există $c \in \mathbb{R}$ astfel ca $f(x) = \frac{x}{2} + c, x \in (a, b)$. Cum $f(x) > 0, \forall x \in (a, b)$, obținem $a \geq -2c$ (deci a este finit), În acest caz, din definiția lui a și continuitatea lui f^2 rezultă $f^2(a) = 0$. Atunci $c = -\frac{a}{2}$, deci $f(x) = \frac{x-a}{2}, x \in [a, b)$. Dacă b ar fi finit,

am obține $0 = f^2(b) = \lim_{x \uparrow b} \left(\frac{x-a}{2} \right)^2 = \frac{(b-a)^2}{4}$; contradicție. Deci $b = \infty$

și prin urmare $f(x) = \frac{x-a}{2}$, $x \in [a, \infty)$.

Mai mult, $f(x) \leq 0$, $\forall x \in (-\infty, a)$. Astfel, dacă ar exista $x_1 < a$ astfel ca $f(x_1) > 0$, atunci $f(a) > 0$; contradicție. **2 puncte**

2) Presupunem $f(x) < 0$, $\forall x \in (a, b)$. Raționând analog, obținem b finit, $f(x) = \frac{x-b}{2}$, $x \in (-\infty, b]$ și $f(x) \geq 0$, $\forall x \in (b, \infty)$ **1 punct**

Din cele de mai sus deducem că, pe lângă funcția nulă, următoarele tipuri de funcții $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfac condițiile din enunț:

$$1. f(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{2}, & x \geq a \end{cases}, \quad a \in \mathbb{R};$$

$$2. f(x) = \begin{cases} \frac{x-b}{2}, & x \leq b \\ 0, & x > b \end{cases}, \quad b \in \mathbb{R};$$

$$3. f(x) = \begin{cases} \frac{x-b}{2}, & x \leq b \\ 0, & x \in (b, a) \\ \frac{x-a}{2}, & x \geq a \end{cases}, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad b < a;$$

$$4. f(x) = \frac{x}{2} + c, \quad x \in \mathbb{R}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

..... **2 puncte**



MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE
ȘI CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Finală, Târgu Mureș și Sovata, 20 aprilie 2016
CLASA a 12-a

Soluții și barem orientativ

Problema 1. Arătați că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ există un unic $c_n \in (0, 1)$, astfel încât

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx = \frac{1}{1+(c_n)^n}$$

și calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} n(c_n)^n$.

Radu Pop

Soluție. Existența lui c_n este asigurată de teorema de medie aplicată funcției continue $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = (1+x^n)^{-1}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Din injectivitatea lui f_n rezultă unicitatea lui c_n **1 punct**

Fie $I_n = \int_0^1 (1+x^n)^{-1} dx$. Cum $n(c_n)^n = n(1/I_n - 1)$, iar $|I_n - 1| = \left| \int_0^1 \frac{-x^n}{1+x^n} dx \right| \leq \int_0^1 x^n dx = 1/(n+1)$, deci $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 1$, este suficient să calculăm $\lim_{n \rightarrow \infty} n(1 - I_n)$ **2 puncte**

Avem $n(1 - I_n) = n \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx = \int_0^1 x \cdot (\ln(1+x^n))' dx = \ln 2 - \int_0^1 \ln(1+x^n) dx$ **2 puncte**

Din $0 \leq \int_0^1 \ln(1+x^n) dx \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$, **1 punct**
rezultă $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \ln(1+x^n) dx = 0$, deci $\lim_{n \rightarrow \infty} n(c_n)^n = \ln 2$ **1 punct**

Problema 2. Fie A un inel și fie D mulțimea elementelor sale neinvertibile. Știind că $a^2 = 0$ oricare ar fi $a \in D$, să se arate că:

- (a) $axa = 0$ oricare ar fi $a \in D$ și $x \in A$;
(b) dacă D este mulțime finită cu cel puțin două elemente, atunci există $a \in D$, $a \neq 0$, astfel încât $ab = ba = 0$, oricare ar fi $b \in D$.

Ioan Băetu

Soluție. (a) Fie $a \in D$ și $x \in U(A)$. Cum $ax \in D$ rezultă că $axax = 0$, deci $axa = 0$ **1 punct**

Dacă $x \in D$, atunci $1+x \in U(A)$, deci $a+ax = a(1+x) \in D$. Obținem $0 = (a+ax)^2 = a^2 + a^2x + axa + axax = axa(1+x)$, deci $axa = 0$ **1 punct**

(b) Fie P mulțimea produselor finite și nenule de elemente din D . Cum $|D| \geq 2$, P este nevidă. **2 puncte**

Dacă $x = a_1 a_2 \cdots a_k \in P$, atunci $a_i \neq a_j$ pentru $i \neq j$. Într-adevăr, dacă există $i < j$ cu $a_i = a_j$, atunci $x = a_1 a_2 \cdots a_i (a_{i+1} \cdots a_{j-1}) a_i \cdots a_k = 0$, fals. Rezultă că P este finită. **2 puncte**

Fie $a = a_1 a_2 \cdots a_k \in P$ pentru care k este maxim. Dacă b este unul dintre factorii lui a atunci $ab = ba = 0$, conform (a). În caz contrar, cuvintele ab și ba au lungimea strict mai mare decât k , deci nu aparțin lui P și prin urmare $ab = ba = 0$ **1 punct**

Problema 3. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție crescătoare și $a \in \mathbb{R}$. Să se arate că f este continuă în a dacă și numai dacă există un șir $(a_n)_{n \geq 1}$, cu $a_n > 0$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, astfel încât

$$\int_a^{a+a_n} f(x)dx + \int_a^{a-a_n} f(x)dx \leq \frac{a_n}{n},$$

oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

Dan Marinescu

Soluție. Fie $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Cum f este continuă în a , atunci F este derivabilă în a și $F'(a) = f(a)$. Rezultă că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, există $\delta_n > 0$ astfel încât $|F(x)/(x-a) - f(a)| \leq 1/(2n)$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ cu $|x-a| < \delta_n$. Fie $a_n = \delta_n/2$, $n \geq 1$.

Pentru $x = a + a_n$ obținem $F(a + a_n)/a_n - f(a) \leq 1/(2n)$, iar pentru $x = a - a_n$ obținem $f(a) - F(a - a_n)/(-a_n) \leq 1/(2n)$. Prin adunarea celor două inegalități obținem $F(a + a_n) + F(a - a_n) \leq a_n/n$, deci inegalitatea cerută. **3 puncte**

Reciproc, deoarece f este crescătoare, rezultă că $g : \mathbb{R} \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = F(x)/(x-a)$, este crescătoare pe $\mathbb{R} \setminus \{a\}$. Într-adevăr, fie $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$, $a < x < y$. Cum $(x-a)F(y) = (x-a) \int_a^x f(t)dt + (x-a) \int_x^y f(t)dt \geq (x-a) \int_a^x f(t)dt + (x-a)(y-x)f(x) \geq (x-a) \int_a^x f(t)dt + (y-x) \int_a^x f(t)dt = (y-a)F(x)$, deducem $g(y) \geq g(x)$. Analog pentru $x < y < a$ și $x < a < y$.

..... **1 punct**

Fie $x_n \in (0, a_n)$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, cu $x_n \rightarrow 0$. Din monotonie lui g rezultă că $g(a + x_n) - g(a - x_n) \leq g(a + a_n) - g(a - a_n) \leq \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Prin trecere la limită obținem $g(a+0) \leq g(a-0)$. Cum $g(a-0) \leq g(a+0)$ rezultă că $g(a+0) = g(a-0) \in \mathbb{R}$, deci F este derivabilă în a și de aici concluzia.

..... **3 puncte**

Problema 4. Fie K un corp finit cu q elemente, $q \geq 3$. Notăm cu M mulțimea polinoamelor de grad $q-2$ din $K[X]$ care au toți coeficienții nenuli și distincți doi câte doi. Determinați numărul polinoamelor din M care au $q-2$ rădăcini distincte în K .

Marian Andronache

Soluție. Cum orice polinom g din M este asociat în divizibilitate cu un unic polinom f din M , astfel încât $f(0) = 1$, vom determina numărul polinoamelor de forma $f = 1 + a_1X + \dots + a_{q-2}X^{q-2}$, care au proprietatea din enunț.

Fie f un astfel de polinom, fie $x_1, \dots, x_{q-2}$ rădăcinile sale și fie

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_{q-3} & a_{q-2} \\ a_{q-2} & 1 & a_1 & \dots & a_{q-4} & a_{q-3} \\ a_{q-3} & a_{q-2} & 1 & \dots & a_{q-5} & a_{q-4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & 1 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{q-2} & 1 \end{pmatrix}$$

și

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ y & x_1 & x_2 & \dots & x_{q-3} & x_{q-2} \\ y^2 & x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_{q-3}^2 & x_{q-2}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ y^{q-3} & x_1^{q-3} & x_2^{q-3} & \dots & x_{q-3}^{q-3} & x_{q-2}^{q-3} \\ y^{q-2} & x_1^{q-2} & x_2^{q-2} & \dots & x_{q-3}^{q-2} & x_{q-2}^{q-2} \end{pmatrix},$$

unde $K^* = \{y, x_1, x_2, \dots, x_{q-2}\}$. Cum $x^{q-1} = 1$, oricare ar fi x în K^* , obținem

$$AB = \begin{pmatrix} f(y) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ yf(y) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ y^2f(y) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ y^{q-3}f(y) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ y^{q-2}f(y) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

..... **2 puncte**

Deoarece $f(y) \neq 0$ și B este inversabilă în $\mathcal{M}_{q-1}(K)$, rezultă că rangul lui A este 1, deci toți minorii săi de ordin 2 sunt nuli. În particular,

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ 1 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} = \dots = \begin{vmatrix} a_1 & a_{q-2} \\ 1 & a_{q-3} \end{vmatrix} = 0,$$

i.e., $a_2 = a_1^2, a_3 = a_1^3, \dots, a_{q-2} = a_1^{q-2}$, deci mulțimea coeficienților lui f este $\{1, a_1, a_1^2, \dots, a_1^{q-2}\}$. Cum această mulțime este egală cu K^* , rezultă că a_1 este un generator al grupului multiplicativ $(K^*, \cdot)$ și $f = 1 + a_1X + a_1^2X^2 + \dots + a_1^{q-2}X^{q-2}$ **2 puncte**

Reciproc, orice polinom $f = 1 + aX + a^2X^2 + \dots + a^{q-2}X^{q-2}$, unde a este un generator al grupului multiplicativ $(K^*, \cdot)$, are proprietatea din enunț, deoarece $f(a^{-1}X) = 1 + X + X^2 + \dots + X^{q-2} = \prod_{\alpha \in K^* \setminus \{1\}} (X - \alpha)$, deci f are rădăcinile $a\alpha$, unde $\alpha \in K^* \setminus \{1\}$ **2 puncte**

Întrucât K^* are $\phi(q-1)$ generatori, rezultă că numărul cerut este $(q-1)\phi(q-1)$ **1 punct**

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Națională, Timișoara, 20 aprilie 2017

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE – CLASA a V-a

Problema 1. Fie numărul natural $n = 7 + 7^2 + 7^3 + \dots + 7^{2017}$.

- a) Arătați că 7^{2018} dă prin împărțire la 6 și prin împărțire la 48 același rest.
b) Aflați ultimele două cifre ale numărului $6n$.

Soluție.

a) $7n = 7^2 + 7^3 + 7^4 + \dots + 7^{2017} + 7^{2018}$, de unde $6n = 7n - n = 7^{2018} - 7$ **1p**

Rezultă $7^{2018} = 6n + 7 = 6(n + 1) + 1$, ceea ce arată că restul împărțirii la 6 a numărului 7^{2018} este 1 **1p**

Avem $n = 7 + 7^2(1+7) + 7^4(1+7) + \dots + 7^{2016}(1+7) = 7 + 8 \cdot (7^2 + 7^4 + \dots + 7^{2016}) = 7 + 8p$, unde $p = 7^2 + 7^4 + \dots + 7^{2016}$. Cu aceasta $7^{2018} = 6(8p + 7) + 7 = 48p + 42 + 7 = 48p + 49 = 48(p + 1) + 1$, de unde deducem că restul împărțirii lui 7^{2018} la 48 este 1. **2p**

b) Avem $6n = 7^{2018} - 7$. Dacă notăm $u_2(x)$ ultimele două cifre ale numărului x , avem $u_2(7^{4k}) = 01$, $u_2(7^{4k+1}) = 07$, $u_2(7^{4k+2}) = 49$, $u_2(7^{4k+3}) = 43$ **2p**

Atunci $u_2(7^{2018}) = u_2(7^{4 \cdot 504 + 2}) = 49$. Rezultă $u_2(6n) = u_2(49 - 7) = 42$ **1p**

Problema 2. Aflați câte numere naturale scrise în baza zece îndeplinesc simultan condițiile:

- i) Numărul are șase cifre.
ii) Produsul cifrelor nenule ale numărului este 84.
iii) Patru dintre cifrele numărului sunt 2, 0, 1, 7.

Soluție.

Cum $\frac{84}{2 \cdot 1 \cdot 7} = 6$, deosebim următoarele cazuri: **1p**

(1) Cifrele sunt 2, 0, 1, 7, 0, 6.

Dacă prima cifră este 1, atunci cele 5 cifre rămase pot fi aranjate în 60 de moduri; analog dacă prima cifră este 2, 6 sau 7. În acest caz sunt 240 de numere. **2p**

(2) Cifrele sunt 2, 0, 1, 7, 1, 6

Dacă prima cifră este 2, atunci cele 5 cifre rămase pot fi aranjate în 60 de moduri; analog dacă prima cifră este 6 sau 7. Dacă prima cifră este 1 se obțin 120 de numere. În total, în acest caz sunt 300 de numere. **2p**

(3) Cifrele sunt 2, 0, 1, 7, 2, 3

Dacă prima cifră este 1, 3 sau 7, se obțin $3 \cdot 60 = 180$ de numere, iar dacă prima cifră este 2 se obțin 120 de numere. În total, în acest caz sunt 300 de numere. **1p**

Așadar, în total sunt 840 de numere. **1p**

Problema 3. Fie $n \geq 2$ un număr natural. Spunem că numărul natural $\overline{a_1 a_2 \dots a_n}$ are proprietatea (P) dacă

$$\overline{a_1 a_2 \dots a_n} = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n + a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

Găsiți toate numerele naturale $\overline{a_1 a_2 \dots a_n}$ care au proprietatea (P).

Soluție.

Dacă $n = 2$, avem $\overline{a_1 a_2} = a_1 \cdot a_2 + a_1 + a_2$ echivalent cu $9a_1 = a_1 \cdot a_2$, de unde $a_2 = 9$. Avem numerele 19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89, 99. **3p**

Dacă $n \geq 3$, vom arăta că $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n + a_1 + a_2 + \dots + a_n < \overline{a_1 a_2 \dots a_n}$ **1p**

Relația $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n + a_1 + a_2 + \dots + a_n < \overline{a_1 a_2 \dots a_n}$ este echivalentă cu $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n < a_1 \cdot \underbrace{99 \dots 9}_{n-1 \text{ cifre}} + a_2 \cdot \underbrace{99 \dots 9}_{n-2 \text{ cifre}} + \dots + a_{n-1} \cdot 9$. Avem $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n \leq a_1 \cdot \underbrace{9 \cdot 9 \cdot \dots \cdot 9}_{n-1 \text{ factori}} < a_1 \cdot 9 \cdot \underbrace{10 \cdot 10 \cdot \dots \cdot 10}_{n-2 \text{ factori}} = a_1 \cdot 9 \cdot \underbrace{00 \dots 0}_{n-2 \text{ cifre}} < a_1 \cdot \underbrace{99 \dots 9}_{n-1 \text{ cifre}} < a_1 \cdot \underbrace{99 \dots 9}_{n-1 \text{ cifre}} + a_2 \cdot \underbrace{99 \dots 9}_{n-2 \text{ cifre}} + \dots + a_{n-1} \cdot 9$ **3p**

Problema 4. Se consideră cifrele a, b, c, d, e, f nenule distincte. Determinați numerele naturale x cu proprietatea că x divide oricare număr de șase cifre distincte scris cu cifrele a, b, c, d, e, f .

Soluție.

Oricum am alege 6 cifre nenule diferite, cel puțin două dintre ele sunt consecutive.

Presupunem că nu sunt două cifre diferite consecutive. Dacă $a < b < c < d < e < f$, avem $b \geq a + 2$, $c \geq b + 2 \geq a + 4$, $d \geq c + 2 \geq a + 6$, $e \geq d + 2 \geq a + 8$ și $f \geq e + 2 \geq a + 10$, ceea ce nu este posibil deoarece f este cifră. **2p**

Notăm cu m și n , $m > n$ două cifre consecutive dintre cifrele a, b, c, d, e, f , iar cu p, q, r, s cele patru cifre rămase.

Avem $x \mid \overline{pqrs mn}$ și $x \mid \overline{pqrs nm}$, de unde $x \mid \overline{pqrs mn} - \overline{pqrs nm}$, adică $x \mid 9(m - n)$. Dar $m - n = 1$ și atunci $x \mid 9$ **3p**

Dacă $3 \nmid a + b + c + d + e + f$, atunci $x = 1$. Dacă $3 \mid a + b + c + d + e + f$ și $9 \nmid a + b + c + d + e + f$, atunci $x = 1$ sau $x = 3$. Dacă $9 \mid a + b + c + d + e + f$, atunci $x = 1$, $x = 3$ sau $x = 9$ **2p**

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Națională, Timișoara, 20 aprilie 2017

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE – CLASA a 6-a

Problema 1. Doi copii, Alex și Cristi, joacă de mai multe ori un joc în urma căruia câștigătorul primește x puncte, iar cel care pierde primește y puncte (x și y sunt numere naturale nenule cu $x > y$, iar la fiecare joc unul dintre copii câștigă și celălalt pierde). Scorul final este 147 la 123 în favoarea lui Alex. Cristi a câștigat 6 partide. Aflați numerele x și y .

Soluție. Notăm cu a numărul jocurilor câștigate de Alex. Atunci $ax + 6y = 147$ și $6x + ay = 123$ **1p**
 De unde, prin scădere, obținem $ax + 6y - 6x - ay = 24$, adică $(a - 6)(x - y) = 24$ **1p**
 $a - 6$ și $x - y$ sunt numere naturale, deoarece x, y naturale cu $x > y$ și $a > 6$ pentru că Alex a câștigat mai multe jocuri. **1p**
 Din $ax + 6y = 147$ rezultă că ax este număr impar, deci a este impar, astfel $a - 6$ este divizor impar al lui 24.

Avem două cazuri:

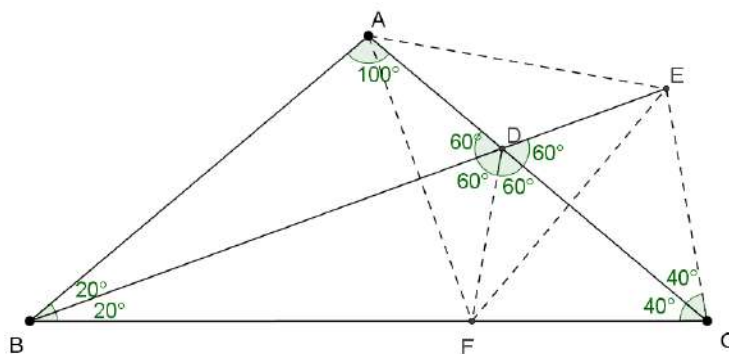
- $a - 6 = 1$ și $x - y = 24$, de unde $7(y + 24) + 6y = 147$, adică $13y = -21$ nu convine.
- $a - 6 = 3$ și $x - y = 8$, de unde $9(y + 8) + 6y = 147$, adică $15y = 75$, de unde $y = 5$ și $x = 13$.

..... **4p**

Notă: Fără observația de paritate (sau altă restrângere a cazurilor) tratarea fiecărui caz $(a - 6, x - y) \in \{(1, 24), (2, 12), (3, 8), (4, 6), (6, 4), (8, 3), (12, 2), (24, 1)\}$ se notează cu câte **0.5** puncte.

Problema 2. Considerăm triunghiul isoscel ABC cu $m(\angle BAC) = 100^\circ$. Fie BD bisectoarea unghiului ABC cu $D \in (AC)$, punctul $E \in BD$ astfel încât $D \in (BE)$ și $BE = BC$ și $F \in (BC)$ astfel încât $AB = BF$. Demonstrați că dreptele AC și EF sunt perpendiculare.

Soluție



În triunghiul ABD avem $m(\angle ABD) = \frac{m(\angle ABF)}{2} = 20^\circ$, $m(\angle BAD) = 100^\circ$, deci $m(\angle ADB) = 60^\circ$, de unde rezultă că $m(\angle EDC) = 60^\circ$ (fiind opuse la vârf) **2p**
 Triunghiurile ABD și FBD sunt congruente (L.U.L.), deci $m(\angle FDB) = m(\angle ADB) = 60^\circ$, de unde $m(\angle FDC) = 60^\circ$ **2p**
 Triunghiul EBC este isoscel ($BE = BC$) cu $m(\angle EBC) = 20^\circ$, deci $m(\angle BCE) = 80^\circ$, iar din ipoteză avem $m(\angle ACB) = 40^\circ$, deci $\angle FCD \equiv \angle DCE$ **1p**
 Astfel triunghiurile FCD și ECD sunt congruente (U.L.U.), deci triunghiul FCE este isoscel. CD este bisectoare, deci și înălțime. Deci $CD \perp FE$ **2p**

Problema 3. Dacă pentru numerele naturale nenule a, b, c sunt adevărate inegalitățile $a > b > c$ și $12b > 13c > 11a$, arătați că $a + b + c \geq 56$.

Soluție. Deoarece $a, b, c \in \mathbb{N}$, din $a > b > c$ rezultă $a \geq b + 1 \geq c + 2$, deci $a - c \geq 2$ **2p**

Dacă $a - c \geq 4$, atunci $13c > 11a \geq 11(c + 4)$ deci $c \geq 22$. Rezultă că $a + b + c > c + c + c > 66 > 56$.

..... **1p**

Deci rămân de discutat cazurile $a - c = 2$ și $a - c = 3$.

Dacă $a - c = 2$, atunci din $a \geq b + 1 \geq c + 2$ rezultă $a = b + 1 = c + 2$, deci $12(c + 1) > 13c > 11(c + 2)$, de unde $12 > c$ și $c > 11$ contradicție, deci $a - c \neq 2$ **2p**

Dacă $a - c = 3$, atunci $a = c + 3$ și $b = c + 1$ sau $b = c + 2$.

Pentru $b = c + 1$, avem $12(c + 1) > 13c > 11(c + 3)$, de unde $12 > c$ și $c > \frac{33}{2}$ contradicție.

Pentru $b = c + 2$, avem $12(c + 2) > 13c > 11(c + 3)$, de unde $24 > c$ și $c > \frac{33}{2}$, deci $c \geq 17$, astfel $b \geq 19$ și $a \geq 20$. De unde $a + b + c \geq 56$ **2p**

Problema 4. Pe fiecare dintre laturile unui triunghi considerăm câte 9 puncte distincte, diferite de vârfurile triunghiului. Determinați numărul de triunghiuri care au vârfurile în câte trei din cele 3×9 puncte.

Soluție. Triunghiurile pot fi de două tipuri: cu vârfurile pe laturi diferite sau cu 2 vârfuri pe o latură și al treilea vârf pe a treia latură. **1p**

În cazul în care vârfurile sunt pe laturi diferite, fiecare vârf se poate alege în 9 moduri, deci sunt în total $9^3 = 729$ astfel de triunghiuri. **2p**

Putem alege două vârfuri de pe o latură în $\frac{9 \cdot 8}{2} = 36$ moduri. Al treilea vârf se poate alege în $2 \cdot 9$ moduri de pe celelalte două laturi, deci sunt în total $2 \cdot 9 \cdot 36 = 648$ astfel de triunghiuri pentru fiecare latură, adică în total $3 \cdot 648 = 1944$ de triunghiuri. **3p**

Deci în total sunt $729 + 1944 = 2673$ de triunghiuri. **1p**

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Națională, Timișoara, 20 aprilie 2017

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE – CLASA a 7-a

Problema 1. Se consideră mulțimea $M = \left\{ \frac{a}{ba} + \frac{b}{ab} \mid a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \right\}$.

- a) Arătați că mulțimea M nu conține niciun număr natural.
 b) Determinați cel mai mic și cel mai mare element din mulțimea M .

Soluție. a) $0 < \frac{a}{ba} + \frac{b}{ab} = \frac{a}{10b+a} + \frac{b}{10a+b} < \frac{a}{b+a} + \frac{b}{a+b} = 1$, deci M nu conține niciun număr natural **2p**

b) $\frac{a}{ba} + \frac{b}{ab} = \frac{10(a^2 + b^2) + 2ab}{10(a^2 + b^2) + 101ab} = 1 - \frac{99ab}{10(a^2 + b^2) + 101ab} = 1 - \frac{99}{101 + 10\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)}$ **2p**

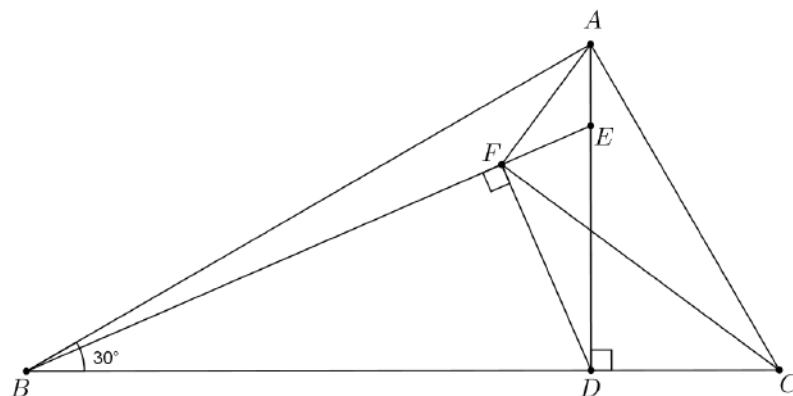
Întrucât unul dintre numerele $\frac{a}{b}$ și $\frac{b}{a}$ este mai mare sau egal cu 1, fără a restrânge generalitatea, putem presupune $a \geq b$. Notând $p = \frac{a}{b}$, problema revine la a determina valorile extreme ale sumei $p + \frac{1}{p}$, unde $p \geq 1$.

Deoarece $p + \frac{1}{p} \geq 2$, cu egalitate pentru $p = 1$ (adică $a = b$), rezultă că $\min M = 1 - \frac{99}{101 + 10 \cdot 2} = \frac{2}{11}$ **1p**

Considerând $p > q \geq 1$, avem $\left(p + \frac{1}{p}\right) - \left(q + \frac{1}{q}\right) = \frac{(p-q)(pq-1)}{pq} > 0$, deci $p + \frac{1}{p} > q + \frac{1}{q}$.
 Ca urmare, maximul sumei $p + \frac{1}{p}$ se atinge dacă p este maxim, ceea ce se obține când $a = 9$, $b = 1$, pentru care $\max M = 1 - \frac{99}{101 + 10\left(9 + \frac{1}{9}\right)} = \frac{838}{1729}$ **2p**

Problema 2. Se consideră triunghiul ABC , în care $m(\sphericalangle A) = 90^\circ$, $m(\sphericalangle B) = 30^\circ$, iar D este piciorul înălțimii din A . Fie punctul $E \in (AD)$ astfel încât $DE = 3AE$ și F piciorul perpendicularei din D pe dreapta BE .

- a) Arătați că $AF \perp FC$.
 b) Determinați măsura unghiului AFB .



Soluție. a) Avem $AC = \frac{1}{2}BC$ și $CD = \frac{1}{2}AC$, deci $CD = \frac{1}{4}BC$ **1p**

Din $\triangle BDE \sim \triangle DFE$ rezultă $\frac{BD}{DF} = \frac{DE}{FE} \Rightarrow \frac{DE}{BD} = \frac{EF}{FD}$. Cum $\frac{DC}{DB} = \frac{1}{3} = \frac{AE}{DE}$, rezultă $\frac{DE}{BD} = \frac{AE}{DC}$, deci $\frac{AE}{CD} = \frac{EF}{DF}$ **2p**

Dar $m(\widehat{AEF}) = 180^\circ - m(\widehat{DEF}) = 180^\circ - (90^\circ - m(\widehat{ADF})) = 90^\circ + m(\widehat{ADF}) = m(\widehat{FDC})$ **1p**

Rezultă că $\triangle AEF \sim \triangle CDF$ (cazul LUL), de unde $\widehat{AFE} \equiv \widehat{CFD}$. Atunci

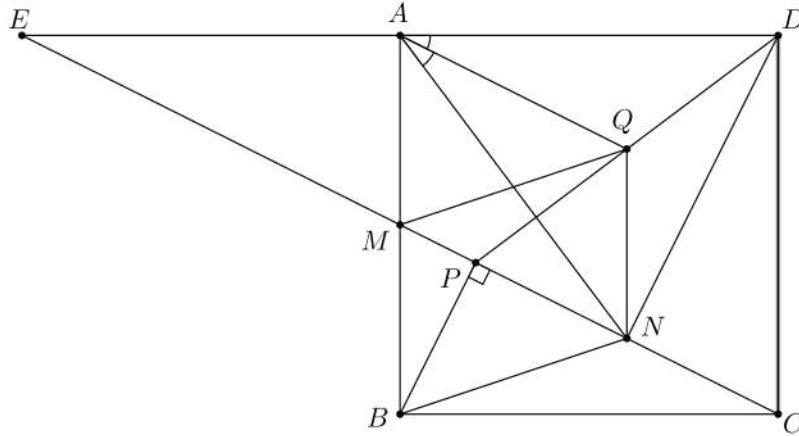
$$m(\widehat{AFC}) = m(\widehat{AFE}) + m(\widehat{EFC}) = m(\widehat{CFD}) + m(\widehat{EFC}) = m(\widehat{EFD}) = 90^\circ,$$

deci $AF \perp FC$ **1p**

b) Deoarece $m(\widehat{AFC}) = 90^\circ = m(\widehat{ADC})$, patrulaterul $AFDC$ este inscriptibil, deci $m(\widehat{DFC}) = m(\widehat{DAC}) = 30^\circ$ **1p**

Atunci $m(\widehat{AFB}) = 360^\circ - m(\widehat{BFD}) - m(\widehat{DFC}) - m(\widehat{CFA}) = 150^\circ$ **1p**

Problema 3. În pătratul $ABCD$ se notează cu M mijlocul laturii $[AB]$, cu P proiecția punctului B pe dreapta CM și cu N mijlocul segmentului $[CP]$. Bisectoarea unghiului DAN intersectează dreapta DP în punctul Q . Arătați că patrulaterul $BMQN$ este paralelogram.



Soluție. $\triangle BMC \sim \triangle PBC \Rightarrow \frac{BM}{PB} = \frac{BC}{PC} \Rightarrow CP = 2BP \Rightarrow [BP] \equiv [PN] \equiv [NC]$... **1p**

$\triangle NCD \equiv \triangle PBC$ (LUL) $\Rightarrow \widehat{DNC} \equiv \widehat{BPC} \Rightarrow DN \perp CP$, deci $[DN]$ este înălțime și mediană în triunghiul DPC . Ca urmare, triunghiul DPC este isoscel, cu $[DP] \equiv [DC]$ **1p**

Notând cu E intersecția dreptelor CM și AD , rezultă că A este mijlocul lui $[DE]$, deci $[NA]$ este mediană în triunghiul dreptunghic NDE . Obținem $[NA] \equiv [AD]$, deci triunghiul ADN este isoscel. Cum AQ este bisectoare, ea este și înălțime, deci $AQ \perp DN$. Dar $DN \perp CM$, deci $AQ \parallel MN$ (1) **2p**

Deoarece triunghiurile ANE și DPC sunt isoscele, rezultă

$$m(\widehat{ANP}) + m(\widehat{DPN}) = m(\widehat{DEC}) + m(\widehat{DCE}) = 90^\circ,$$

de unde obținem $DP \perp AN$. Cum $AQ \perp DN$, rezultă că Q este ortocentrul triunghiului ADN , deci $NQ \perp AD$ **2p**

Ca urmare, $NQ \parallel AM$, iar din (1) rezultă că $AMNQ$ este paralelogram. Segmentele $[AM]$ și $[NQ]$ sunt paralele și congruente, deci $[BM]$ și $[NQ]$ sunt paralele și congruente, adică $BMQN$ este paralelogram **1p**

Problema 4. Determinați numerele prime scrise cu $n \geq 3$ cifre care au proprietatea că, pentru fiecare $k \in \{1, 2, \dots, n-2\}$, prin eliminarea oricăror k cifre ale sale se obține un număr prim.

Soluție. Vom arăta că soluțiile problemei sunt 113, 131, 137, 173, 179, 197, 311, 317, 431, 617 și 719. Fie $N = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}$ un număr ca în enunț. Au loc următoarele afirmații:

A1: N conține cel mult o cifră multiplu de 3, deoarece dacă ar conține cel puțin două, eliminând celelalte cifre, s-ar obține un număr compus (multiplu de 3). La fel, N nu poate avea trei cifre care dau resturi identice la împărțirea cu 3, deoarece numărul format prin eliminarea celorlalte cifre ar fi multiplu de 3 **1p**

A2: N are exact trei cifre. Într-adevăr, presupunând că N are 4 cifre sau mai multe, atunci trei dintre cifrele sale dau resturile 1 sau 2 la împărțirea cu 3, și, ținând cont de (A1), două dintre cifre dau resturi diferite (1 și 2) la împărțirea cu 3, iar numărul format cu aceste cifre este divizibil cu 3, contradicție **1p**

A3: N are cel mult o cifră pară, iar aceasta poate fi doar a_n , deoarece, în caz contrar, eliminând toate cifrele aflate la dreapta cifrei pare, se obține un număr compus (par) **1p**

A4: N nu poate conține cifra 5. Evident, N nu ar putea avea decât cel mult o cifră egală cu 5, iar aceasta ar putea fi doar a_n , iar din (A3) rezultă că N nu are cifre pare. Cum N conține cel mult o cifră dintre 3 și 9, N are cel puțin una dintre cifrele 1 și 7. Prin eliminări convenabile, se poate obține un număr format cu cifrele 5 și 1 sau cu 5 și 7, care nu este prim **1p**

Dacă N este format cu trei cifre impare, atunci N are trei cifre din mulțimea $\{1, 3, 7, 9\}$, dintre care una este 3 sau 9, iar celelalte două sunt din mulțimea $\{1, 7\}$. Verificând combinațiile și condițiile enunțului, obținem soluțiile: 113, 131, 137, 173, 179, 197, 311, 317, 719 **2p**

Dacă N are prima cifră pară, atunci, ținând cont de (A1) și (A4), aceasta nu poate fi egală cu 2 sau cu 8, deoarece N ar trebui să mai aibă cel puțin o cifră egală cu 1 sau cu 7, iar prin eliminări convenabile, se obține un multiplu de 3. Dacă prima cifră este 6, celelalte două cifre sunt din mulțimea $\{1, 7\}$, iar dacă prima cifră este 4, una dintre celelalte două cifre este 1 sau 7, iar cealaltă este 3 sau 9. Se obțin soluțiile 617 și 431 **1p**

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Națională, Timișoara, 20 aprilie 2017

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE – CLASA a 8-a

Problema 1. Demonstrați următoarele afirmații:

a) Dacă $ABCA'B'C'$ este o prismă dreaptă și $M \in (BC)$, $N \in (CA)$, $P \in (AB)$ sunt astfel încât $A'M$, $B'N$ și $C'P$ sunt perpendiculare două câte două și concurente, atunci prisma $ABCA'B'C'$ este regulată.

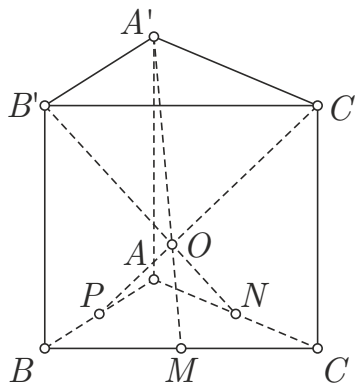
b) Dacă $ABCA'B'C'$ este o prismă regulată și $\frac{AA'}{AB} = \frac{\sqrt{6}}{4}$, atunci există $M \in (BC)$, $N \in (CA)$, $P \in (AB)$ astfel încât dreptele $A'M$, $B'N$ și $C'P$ să fie perpendiculare două câte două și concurente.

Soluție. a) Fie $\{O\} = A'M \cap B'N \cap C'P$. Planul $(B'N, C'P)$ intersectează planele paralele (ABC) și $(A'B'C')$ după drepte paralele, deci $NP \parallel B'C'$. Rezultă că $PN \parallel BC$. Analog $MP \parallel AC$, $NM \parallel AB$. Atunci $PNCM$ și $PNMB$ sunt paralelograme, deci M este mijlocul lui $[BC]$. Similar, N și P sunt mijloacele laturilor $[AC]$ și $[AB]$ **2p**

Dreapta $C'P$ este perpendiculară pe $A'M$ și pe $B'N$, deci pe orice dreaptă aflată în planul determinat de ele, în particular pe $A'B'$. Deducem că $AB \perp C'P$ și $AB \perp CC'$, deci $AB \perp (PCC')$, de unde $AB \perp PC$. Așadar în triunghiul ABC , $[CP]$ este mediană și înălțime, deci $AC = BC$. Analog rezultă $AB = AC$, deci ABC este echilateral, iar prisma regulată. **2p**

b) Fie M, N, P mijloacele laturilor. Atunci $A'B'MN$ este un trapez ale cărui diagonale se intersectează într-un punct O astfel încât $\frac{A'O}{OM} = \frac{B'O}{ON} = 2$. Analog $A'C'MP$ este un trapez ale cărui diagonale se intersectează într-un punct O' astfel încât $\frac{A'O'}{O'M} = \frac{B'O'}{O'N} = 2$. Așadar punctele O' și O coincid, deci $A'M$, $B'N$ și $C'P$ sunt concurente.

Notând $AA' = h$, $AB = \ell$, avem $BN = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$, $A'M^2 = B'N^2 = h^2 + \frac{3\ell^2}{4}$, $A'O^2 = B'O^2 = \frac{4h^2}{9} + \frac{\ell^2}{3}$. Atunci $A'O \perp B'O \Leftrightarrow A'O^2 + B'O^2 = A'B'^2 \Leftrightarrow \frac{8h^2}{9} + \frac{2\ell^2}{3} = \ell^2 \Leftrightarrow \frac{h}{\ell} = \frac{\sqrt{6}}{4}$ **3p**



Problema 2. Arătați că pentru orice număr natural $n \geq 3$, există numerele naturale nenule $x_1, x_2, \dots, x_n$, diferite două câte două, astfel încât $\{2, n\} \subset \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ și

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} = 1.$$

Soluție

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} + \frac{1}{n} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} = 1, \dots \dots \dots \mathbf{2p}$$

Dacă n nu este de forma $k(k+1)$, ($k \in \mathbb{N}$), atunci numerele $x_1 = 2$, $x_2 = 2 \cdot 3$, $\dots$, $x_{n-1} = (n-1)n$, $x_n = n$ sunt distincte două câte două, deci satisfac condițiile din enunț. **1p**

Dacă $n = k(k+1)$, $k \in \mathbb{N}$, (cel mai mic $n \geq 3$ de această formă este $n = 6$) atunci pornind de la scrierea $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-2)(n-1)} + \frac{1}{n-1} = 1$, putem obține scrierea $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-3)(n-2)} + \frac{1}{(n-2)(n-1)+1} + \frac{1}{(n-2)(n-1)[(n-2)(n-1)+1]} + \frac{1}{n-1} = 1$ **3p**
 Numerele $x_1 = 2$, $x_2 = 2 \cdot 3$, $\dots$, $x_{n-3} = (n-3)(n-2)$, $x_{n-2} = (n-2)(n-1)+1$, $x_{n-1} = (n-2)(n-1)[(n-2)(n-1)+1]$, $x_n = n-1$ sunt diferite două câte două. În plus, $n \leq (n-3)(n-2)$, $\forall n \geq 6$, deci $n \in \{x_2, x_3, \dots, x_{n-3}\}$, prin urmare numerele $x_1, x_2, \dots, x_n$ satisfac condițiile din enunț. **1p**

Problema 3. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, și $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ numere reale pozitive astfel încât

$$\frac{a_1}{b_1} \leq \frac{a_2}{b_2} \leq \dots \leq \frac{a_n}{b_n}.$$

Determinați cea mai mare valoare a numărului real c pentru care este satisfăcută inegalitatea

$$(a_1 - b_1 c)x_1 + (a_2 - b_2 c)x_2 + \dots + (a_n - b_n c)x_n \geq 0$$

pentru orice $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ cu $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$.

Soluție. Notând $y_1 = x_1$, $y_{k+1} = x_{k+1} - x_k$, pentru $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, avem $x_k = y_1 + y_2 + \dots + y_k$, cu $y_1 > 0$, $y_k \geq 0$, $\forall k = \overline{2, n}$.

Cu aceste notații, inegalitatea din enunț revine la $(a_1 + a_2 + \dots + a_n - c(b_1 + b_2 + \dots + b_n))y_1 + (a_2 + a_3 + \dots + a_n - c(b_2 + b_3 + \dots + b_n))y_2 + \dots + (a_n - cb_n)y_n \geq 0$. (*) **1p**

Pentru $y_1 = 1$, $y_2 = \dots = y_n = 0$, observăm că este necesar ca $c \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n}$ **2p**

Arătăm că, reciproc, pentru orice $c \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n}$ are loc inegalitatea cerută, deci aceasta este valoarea maximă căutată a lui c .

$$\text{Avem } c \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n} \leq \frac{a_2 + a_3 + \dots + a_n}{b_2 + b_3 + \dots + b_n} \leq \dots \leq \frac{a_n}{b_n}.$$

Într-adevăr, inegalitatea $\frac{a_k + a_{k+1} + \dots + a_n}{b_k + b_{k+1} + \dots + b_n} \leq \frac{a_{k+1} + \dots + a_n}{b_{k+1} + \dots + b_n}$ se scrie echivalent

$a_k(b_{k+1} + \dots + b_n) \leq b_k(a_{k+1} + \dots + a_n)$ și rezultă din inegalitățile

$$\frac{a_k}{b_k} \leq \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}, \frac{a_k}{b_k} \leq \frac{a_{k+2}}{b_{k+2}}, \dots, \frac{a_k}{b_k} \leq \frac{a_n}{b_n}. \dots \dots \dots \textbf{3p}$$

Inegalitatea (*) este satisfăcută: fiecare termen din membrul stâng este nenegativ. **1p**

Problema 4. Fie $a, b, c, d \in [0, 1]$. Demonstrați inegalitatea

$$\frac{a}{1+b} + \frac{b}{1+c} + \frac{c}{1+d} + \frac{d}{1+a} + abcd \leq 3.$$

Soluție.

$$\frac{a}{1+b} + \frac{b}{1+c} + \frac{c}{1+d} + \frac{d}{1+a} + abcd \leq \frac{a}{1+abcd} + \frac{b}{1+abcd} + \frac{c}{1+abcd} + \frac{d}{1+abcd} + abcd = \frac{a+b+c+d}{1+abcd} + abcd. \dots \dots \dots \textbf{2p}$$

Folosind succesiv inegalitatea $x + y \leq 1 + xy$, $\forall x, y \in [0, 1]$ (echivalentă cu $(1-x)(1-y) \geq 0$), avem $a + b + c + d \leq 1 + ab + 1 + cd = ab + cd + 2 \leq 1 + abcd + 2 = abcd + 3$ **3p**

Notând $x = abcd \in [0, 1]$, este suficient să demonstrăm că $1 + \frac{2}{1+x} + x \leq 3$, ceea ce revine la $2 + x^2 + x \leq 2x + 2$, deci la $x^2 \leq x$ **2p**

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Națională, Timișoara, 20 aprilie 2017

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE – CLASA a IX-a

Problema 1. Fie ABC un triunghi neisoscel, cu centrul de greutate G și centrul cercului înscris I . Arătați că $GI \perp BC$ dacă și numai dacă $AB + AC = 3BC$.

Soluție. Cu notațiile uzuale au loc egalitățile

$$\begin{aligned}\overline{GI} &= \overline{AI} - \overline{AG} = \left(\frac{b}{a+b+c} - \frac{1}{3} \right) \overline{AB} - \left(\frac{c}{a+b+c} - \frac{1}{3} \right) \overline{AC} = \\ &= \frac{1}{3(a+b+c)} ((2b-a-c)\overline{AB} + (2c-a-b)\overline{AC}).\end{aligned}$$

..... **2p**
 Atunci $GI \perp BC \iff \overline{GI} \cdot \overline{BC} = 0 \iff ((2b-a-c)\overline{AB} + (2c-a-b)\overline{AC}) \cdot (\overline{AC} - \overline{AB}) = 0$
 **2p**
 Deoarece $\overline{AB} \cdot \overline{AB} = c^2$, $\overline{AC} \cdot \overline{AC} = b^2$ și $2\overline{AB} \cdot \overline{AC} = b^2 + c^2 - a^2$, ultima relație este echivalentă cu $3(b-c)(b^2 + c^2 - a^2) - 2(2b-a-c)c^2 + 2(2c-a-b)b^2 = 0$, sau $(b-c)(a+b+c)(-3a+b+c) = 0$
 **2p**
 Cum $b \neq c$ și $a+b+c > 0$, rezultă că $GI \perp BC \iff b+c = 3a$ **1p**

Problema 2. Fie $ABCD$ un pătrat. Considerăm punctele $E \in (AB)$, $N \in (CD)$ și $F, M \in (BC)$, astfel încât triunghiurile AMN și DEF să fie echilaterale. Arătați că

$$PQ = FM,$$

unde $\{P\} = AN \cap DE$ și $\{Q\} = AM \cap EF$.

Soluție. Deoarece $\triangle ABM \equiv \triangle ADN$ (IC) și $\triangle DAE \equiv \triangle DCF$ (IC), rezultă că $m(\widehat{BAM}) = m(\widehat{DAN}) = m(\widehat{ADE}) = m(\widehat{CDF}) = 15^\circ$ **1p**
 Atunci $\triangle ABM \equiv \triangle ADN \equiv \triangle DAE \equiv \triangle DCF$ (CU) și $\triangle AMN \equiv \triangle DEF$ **1p**
 Rezultă că $ADNE$ este un dreptunghi, deci P este mijlocul comun al segmentelor $[AN]$ și $[DE]$. În triunghiul echilateral DEF avem atunci $PF \perp DE$ **2p**
 Deoarece $m(\widehat{DAM}) + m(\widehat{ADE}) = m(\widehat{DAM}) + m(\widehat{BAM}) = 90^\circ$, rezultă că $AM \perp DE$. Astfel, $AM \parallel PF$ **1p**
 Deoarece $m(\widehat{PAQ}) = m(\widehat{PEQ}) = 60^\circ$, patrulaterul $PAEQ$ este inscriptibil, astfel că $m(\widehat{FPQ}) = m(\widehat{EPF}) - m(\widehat{EPQ}) = 75^\circ$. Cum $m(\widehat{MFP}) = 180^\circ - m(\widehat{CFD}) - m(\widehat{DFP}) = 75^\circ$, **1p**
 rezultă că patrulaterul $MQPF$ este un trapez isoscel, deci $[PQ] \equiv [FM]$ **1p**

Problema 3. Fie a și n două numere naturale nenule fixate.

a) Arătați că există n numere naturale nenule $a_1, a_2, \dots, a_n$ astfel încât

$$1 + \frac{1}{a} = \left(1 + \frac{1}{a_1}\right) \left(1 + \frac{1}{a_2}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{a_n}\right).$$

b) Demonstrați că numărul reprezentărilor de forma de mai sus ale lui $1 + \frac{1}{a}$ este finit.

Soluție. a) Dacă $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ sunt numere naturale nenule consecutive, rezultă că

$$\left(1 + \frac{1}{a_1}\right) \left(1 + \frac{1}{a_2}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{a_n}\right) = \frac{a_n + 1}{a_1}.$$

Alegând $a_k = an + k - 1, \forall k = \overline{1, n}$, obținem

$$\left(1 + \frac{1}{a_1}\right) \left(1 + \frac{1}{a_2}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{a_n}\right) = \frac{an + n}{an} = 1 + \frac{1}{a}.$$

..... **3p**

b) Este suficient să demonstrăm prin inducție după $n \in \mathbb{N}^*$ proprietatea

$P(n)$: "Pentru orice număr rațional $q > 1$ există cel mult un număr finit de alegeri a n numere

naturale nenule $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ astfel ca $\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{a_k}\right) = q$."

Propoziția $P(1)$ este evident adevărată. **1p**

Presupunem că propoziția $P(n)$ este adevărată pentru un număr natural nenul n .

Fie $q \in \mathbb{Q}, q > 1$. Considerăm că există $n+1$ numere naturale nenule $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{n+1}$ astfel

încât $\prod_{k=1}^{n+1} \left(1 + \frac{1}{a_k}\right) = q$. Atunci, din inegalitățile $1 + \frac{1}{a_1} < q \leq \left(1 + \frac{1}{a_1}\right)^{n+1}$, obținem $a_1 \in A$,

unde $A = \left(\frac{1}{q-1}, \frac{1}{\frac{1}{n+1}\sqrt[n+1]{q-1}}\right] \cap \mathbb{N}^*$ este o mulțime finită. Pentru $a_1 \in A$, fixat, notăm $q_1 = \frac{q}{1+1/a_1}$.

Avem $q_1 \in \mathbb{Q}, q_1 > 1$. Conform $P(n)$, numărul de alegeri a n numere naturale $a_2 \leq \dots \leq a_{n+1}$,

cu proprietatea $\prod_{k=2}^{n+1} \left(1 + \frac{1}{a_k}\right) = q_1$, este cel mult finit. Deducem că numărul de alegeri a $n+1$

numere naturale nenule $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{n+1}$, cu proprietatea $\prod_{k=1}^{n+1} \left(1 + \frac{1}{a_k}\right) = q$, este finit.

Rezultă că propoziția $P(n+1)$ este adevărată. **3p**

Problema 4. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, cu $0 < a < b$, iar $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție care satisface proprietatea

$$f(x^2 + ay) \geq f(x^2 + by), \text{ pentru orice } x, y \in \mathbb{R}. \quad (*)$$

a) Arătați că $f(s) \leq f(0) \leq f(t)$, pentru orice $s < 0$ și $t > 0$.

b) Demonstrați că f este constantă pe intervalul $(0, \infty)$.

c) Dați un exemplu de funcție nemonotonă $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea $(*)$.

Soluție. Pentru $u, v \in \mathbb{R}$, condiția necesară și suficientă ca sistemul de ecuații

$$\begin{cases} x^2 + ay = u \\ x^2 + by = v \end{cases}$$

să admită soluții este $av \leq bu$, o soluție fiind $\left(x = \sqrt{\frac{bu-av}{b-a}}, y = \frac{v-u}{b-a}\right)$. În acest caz, rezultă că $f(u) \geq f(v)$.

a) Pentru $s < 0$, alegând $x = \sqrt{\frac{-as}{b-a}}$ și $y = \frac{s}{b-a}$, avem $f(0) = f(x^2 + ay) \geq f(x^2 + by) = f(s)$.

Pentru $t > 0$, alegând $x = \sqrt{\frac{bt}{b-a}}$ și $y = \frac{-t}{b-a}$, avem $f(t) = f(x^2 + ay) \geq f(x^2 + by) = f(0)$.

..... **2p**

b) Fie $c = f(1)$. Vom demonstra prin inducție după $n \in \mathbb{N}^*$ că $f(u) = c, \forall u \in \left[\left(\frac{a}{b}\right)^n, \left(\frac{b}{a}\right)^n\right]$.

Pentru orice $u \in \left[\frac{a}{b}, \frac{b}{a}\right]$, sistemele

$$\begin{cases} x^2 + ay = 1 \\ x^2 + by = u \end{cases}$$

și

$$\begin{cases} x^2 + ay = u \\ x^2 + by = 1 \end{cases}$$

admit soluții, de unde rezultă că $c = f(1) \geq f(u) \geq f(1) = c$. Atunci $f(u) = c, \forall u \in \left[\frac{a}{b}, \frac{b}{a}\right]$.

Presupunem acum că pentru un $n \in \mathbb{N}^*$ are loc $f(u) = c, \forall u \in \left[\left(\frac{a}{b}\right)^n, \left(\frac{b}{a}\right)^n\right]$. Pentru orice $u \in \left[\left(\frac{a}{b}\right)^{n+1}, \left(\frac{b}{a}\right)^{n+1}\right]$, sistemele

$$\begin{cases} x^2 + ay = \left(\frac{b}{a}\right)^n \\ x^2 + by = u \end{cases}$$

și

$$\begin{cases} x^2 + ay = u \\ x^2 + by = \left(\frac{a}{b}\right)^n \end{cases}$$

admit soluții, astfel că $c = f\left(\left(\frac{b}{a}\right)^n\right) \geq f(u) \geq f\left(\left(\frac{a}{b}\right)^n\right) = c$.

Rezultă $f(u) = c, \forall u \in \left[\left(\frac{a}{b}\right)^{n+1}, \left(\frac{b}{a}\right)^{n+1}\right]$ **2p**

Pentru orice $t > 0$ există $n \in \mathbb{N}^*$ cu proprietatea că $t \in \left[\frac{1}{1+n\frac{b-a}{a}}, 1+n\frac{b-a}{a}\right]$. Din inegalitatea lui

Bernoulli avem $\left[\frac{1}{1+n\frac{b-a}{a}}, 1+n\frac{b-a}{a}\right] \subset \left[\left(\frac{a}{b}\right)^n, \left(\frac{b}{a}\right)^n\right]$, deci $t \in \left[\left(\frac{a}{b}\right)^n, \left(\frac{b}{a}\right)^n\right]$.

Obținem $\bigcup_{n \geq 1} \left[\left(\frac{a}{b}\right)^n, \left(\frac{b}{a}\right)^n\right] = (0, \infty)$, de unde rezultă că f este constantă pe $(0, \infty)$ **1p**

c) Fie $t < 0$ oarecare. Dacă $x, y \in \mathbb{R}$ au proprietatea că $x^2 + ay < t$, atunci $y < \frac{t}{a}$ și rezultă că $x^2 + by = x^2 + ay + (b-a)y < t\left(1 + \frac{b-a}{a}\right) = \frac{bt}{a}$. Funcția $f_t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$f_t(x) = \begin{cases} 1 & , \text{dacă } x \in [t, \infty) \\ \frac{a(t-x)}{t(a-b)} & , \text{dacă } x \in \left(\frac{tb}{a}, t\right) \\ 0 & , \text{dacă } x \in \left(-\infty, \frac{tb}{a}\right] \end{cases}$$

satisface condiția din enunț și nu este monotonă..... **2p**

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Națională, Timișoara, 20 aprilie 2017

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE – CLASA a 10-a

Problema 1. Fie $a \in (0, 1)$. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația

$$a^{[x]} + \log_a \{x\} = x.$$

Soluție. Evident, $x \notin \mathbb{Z}$ și cum $a^{[x]} > 0$, $\log_a \{x\} > 0$, trebuie ca $x > 0$. Dacă $x \in (0, 1)$, avem $0 < \log_a x = x - 1 < 0$, absurd. Prin urmare $x \in (0, \infty) \setminus \mathbb{N}$ **1p**

Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$, $f(x) = a^x$, evident bijectivă și descrescătoare. Ecuația se scrie echivalent $f([x]) + f^{-1}(\{x\}) = [x] + \{x\}$ **1p**

Să notăm $f^{-1}(\{x\}) = y$. Atunci $\{x\} = f(y)$ și relația precedentă devine $f([x]) + y = [x] + f(y) \Leftrightarrow f([x]) - [x] = f(y) - y$.

Cum funcția $g(t) = f(t) - t$ e strict descrescătoare, deci injectivă, deducem că $[x] = y$, deci $f([x]) = \{x\}$ **3p**

În fine, dacă $[x] = n \in \mathbb{N}$, deducem $a^n = x - n$, deci soluțiile ecuației sunt numerele $x_n = n + a^n$, pentru $n \in \mathbb{N}^*$ **2p**

Problema 2. Spunem că o funcție $f : \mathbb{Q}_+^* \rightarrow \mathbb{Q}$ are proprietatea P dacă

$$f(xy) = f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{Q}_+^*.$$

a) Demonstrați că nu există funcții injective cu proprietatea P.

b) Există funcții surjective cu proprietatea P?

Soluție. a) Pentru $x = y = 1$ deducem că $f(1) = 0$. Pentru $x = y$ obținem $f(x^2) = 2f(x)$, și apoi rezultă că $f(x^n) = nf(x)$, $\forall n \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{Q}_+^*$ **1p**

Fie p și q două numere prime distincte. Există atunci $a, b, c \in \mathbb{Z}^*$ astfel ca $f(p) = \frac{a}{c}$, $f(q) = \frac{b}{c}$. Atunci

$$f(p)f(q) = f(p) \cdot \frac{b}{c} = \frac{f(p^b)}{c} = \frac{a}{c} \cdot f(q) = \frac{f(q^a)}{c}.$$

Dacă f ar fi injectivă, ar rezulta $p^b = q^a$, deci $a = b = 0$, contradicție. **3p**

b) Dacă $x > 0$ e număr rațional, există unic numerele prime distincte $p_1, p_2, \dots, p_n$ și numerele întregi $a_1, a_2, \dots, a_n$, astfel ca $x = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_n^{a_n}$. Se verifică ușor că

$$f(x) = a_1 f(p_1) + a_2 f(p_2) + \dots + a_n f(p_n),$$

deci e suficient să definim f pe mulțimea numerelor prime. Definim, pentru p prim, $f(p) = \frac{1}{p!}$. Astfel, pentru $a \in \mathbb{Z}$, avem $f(p^a) = \frac{a}{p!}$. Să arătăm că f e surjectivă. Fie $y \in \mathbb{Q}$, $y = \frac{a}{b}$, cu $a, b \in \mathbb{Z}$; alegem p prim, suficient de mare astfel ca b să dividă $p!$. Atunci $p!y = p! \frac{a}{b} \in \mathbb{Z}$, așadar $f(p^{p!y}) = \frac{p!y}{p!} = y$ **3p**

Problema 3. Demonstrați inegalitatea

$$\sin \frac{\pi}{4n} \geq \frac{\sqrt{2}}{2n},$$

unde n este un număr natural nenul.

Soluție. Dacă $a = \cos \frac{\pi}{2n} + i \sin \frac{\pi}{2n}$, atunci $|a| = 1$ și $a^n = i$. Deducem

$$i - 1 = a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + 1),$$

de unde $\sqrt{2} \leq |a - 1| \cdot n \dots \dots \dots$ **4p**

Pe de altă parte, $|a - 1| = |-2 \sin^2 \frac{\pi}{4n} + 2i \sin \frac{\pi}{4n} \cos \frac{\pi}{2n}| = 2 \sin \frac{\pi}{4n}$, de unde concluzia... **3p**

Problema 4. Fie A și B două mulțimi finite. Să se determine numărul de funcții $f : A \rightarrow A$ cu proprietatea că există două funcții $g : A \rightarrow B$ și $h : B \rightarrow A$ astfel încât $g(h(x)) = x, \forall x \in B$ și $h(g(x)) = f(x), \forall x \in A$.

Soluție. Fie f, g, h funcții cu proprietățile din enunț. Din condiția $g \circ h = 1_B$, deducem că g e surjectivă și h e injectivă. Cum și $f = h \circ g$, rezultă că $|B| = |\text{Im} f| \leq |A| \dots \dots \dots$ **2p**

Observăm că $f(f(x)) = h(g(h(g(x)))) = h(g(x)) = f(x)$, deci, pentru $y \in \text{Im} f$, $f(y) = y$. Astfel, orice funcție cu proprietatea din enunț are forma

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \in \text{Im} f \\ \phi(x), & \text{dacă } x \in A \setminus \text{Im} f \end{cases}$$

unde $\phi : A \setminus \text{Im} f \rightarrow \text{Im} f$ e o funcție arbitrară.

Fie $A' \subseteq A$, astfel ca $|A'| = |B|$ (în ipoteza $|B| \leq |A|$). Definim

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \in A' \\ \phi(x), & \text{dacă } x \in A \setminus A' \end{cases}$$

unde $\phi : A \setminus A' \rightarrow A'$ e o funcție arbitrară. **2p**

Observăm că $\text{Im} f = A'$ și arătăm că f are proprietatea din enunț. Fie $h : B \rightarrow A' \subseteq A$ o bijecție arbitrară și $g : A \rightarrow B$ definită prin

$$g(x) = \begin{cases} h^{-1}(x), & \text{dacă } x \in A' \\ h^{-1}(\phi(x)), & \text{dacă } x \in A \setminus A'. \end{cases}$$

Se verifică ușor că $g(h(x)) = x, \forall x \in B$ și $h(g(x)) = f(x), \forall x \in A \dots \dots \dots$ **2p**

Submulțimea A' poate fi aleasă în $\binom{|A|}{|B|}$ moduri, iar funcția ϕ în $|B|^{|A|-|B|}$ moduri, astfel încât numărul funcțiilor cerute este $\binom{|A|}{|B|} |B|^{|A|-|B|} \dots \dots \dots$ **1p**

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Națională, Timișoara, 20 aprilie 2017

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE – CLASA a 11-a

Problema 1. Spunem că o funcție $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ are proprietatea (P) dacă oricare ar fi un șir de numere reale $(x_n)_{n \geq 1}$ cu proprietatea că șirul $(f(x_n))_{n \geq 1}$ este convergent, rezultă că șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este convergent. Demonstrați că o funcție surjectivă cu proprietatea (P) este continuă.

Soluție. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(a) = f(b)$. Șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ definit prin formula următoare

$$x_n = \begin{cases} a, & n \text{ par} \\ b, & n \text{ impar} \end{cases}$$
 este convergent deoarece șirul $(f(x_n))_{n \geq 1}$ este convergent. Rezultă f injectivă. Cum f este presupusă surjectivă, este de fapt inversabilă **2p**

Fie $x_0 \in \mathbb{R}$ și $(x_n)_{n \geq 1}$ un șir convergent la x_0 . Șirul $(f(f^{-1}(x_n)))_{n \geq 1}$ este convergent, prin urmare șirul $(f^{-1}(x_n))_{n \geq 1}$ este convergent. Șirul $(y_n)_{n \geq 1}$ dat de formula $y_n = \begin{cases} x_k, & n = 2k \\ x_0, & n = 2k - 1 \end{cases}$ converge la x_0 **2p**

Rezultă că șirul $(f^{-1}(y_n))_{n \geq 1}$ este convergent, deci $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{-1}(y_{2n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{-1}(y_{2n-1})$, adică $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{-1}(x_n) = f(x_0)$. Deoarece x_0 a fost ales arbitrar, rezultă că f^{-1} este continuă pe $\mathbb{R}$. **2p**

Cum inversa unei bijecții continue este funcție continuă, f rezultă continuă pe pe $\mathbb{R}$ **1p**

Problema 2. Fie $A_1, A_2, \dots, A_k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ matrice simetrice. Demonstrați că următoarele afirmații sunt echivalente:

1) $\det(A_1^2 + A_2^2 + \dots + A_k^2) = 0$;

2) pentru orice matrice $B_1, B_2, \dots, B_k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ are loc relația

$$\det(A_1 B_1 + A_2 B_2 + \dots + A_k B_k) = 0.$$

(O matrice X este simetrică dacă ea coincide cu transpusa sa X^t).

Soluție. Demonstrăm **1) $\Rightarrow$ 2)**. Din $\det(A_1^2 + A_2^2 + \dots + A_k^2) = 0$ rezultă că există o matrice $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X \neq O_{n,1}$, astfel ca $(A_1^2 + A_2^2 + \dots + A_k^2)X = O_{n,1}$ (sistemul omogen atașat are soluție nebanală). **2p**

Rezultă $X^t(A_1^2 + A_2^2 + \dots + A_k^2)X = O_n$, deci $X^t A_1^t A_1 X + X^t A_2^t A_2 X + \dots + X^t A_k^t A_k X = O_n$. Dacă notăm $A_i X = Y_i$, $i = 1, 2, \dots, k$, obținem $Y_1^t Y_1 + Y_2^t Y_2 + \dots + Y_k^t Y_k = O_n$. Rezultă astfel $A_i X = O_{n,1}$, adică $A_i^t X = O_{n,1}$, $i = 1, 2, \dots, k$ **3p**

Pentru orice matrice $B_1, B_2, \dots, B_k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avem $(B_1^t A_1^t + B_2^t A_2^t + \dots + B_k^t A_k^t)X = O_{n,1}$, adică sistemul $(B_1^t A_1^t + B_2^t A_2^t + \dots + B_k^t A_k^t)X = O_{n,1}$ are soluție nebanală și deci $\det(B_1^t A_1^t + B_2^t A_2^t + \dots + B_k^t A_k^t) = \det(A_1 B_1 + A_2 B_2 + \dots + A_k B_k) = 0$.

Implicația **2) $\Rightarrow$ 1)** este evidentă. **2p**

Problema 3. Fie $n \geq 2$ întreg și $A, B \in M_n(\mathbb{C})$. Dacă $(AB)^3 = O_n$, rezultă oare că $(BA)^3 = O_n$? Justificați răspunsul.

Soluție. Vom arăta că răspunsul este afirmativ pentru $n \leq 3$ și negativ pentru $n \geq 4$. Matricele $C = AB$ și $D = BA$ au aceeași urmă și determinatul fiecăreia este nul. Dacă $C^2 = O_n$, atunci $D^3 = BC^2A = O_n$ **2p**

Pentru $n = 2$, matricele C și D au același polinom caracteristic $P_C(X) = P_D(X) = X^2 - aX$, cu $a = \text{tr } C = \text{tr } D$. Din ipoteză și teorema Cayley-Hamilton se obține $O_n = C^3 = aC^2$, astfel că $a = 0$ sau $C^2 = 0$. Ambele variante conduc la concluzia $D^2 = aD = O_n$ **1p**

În continuare putem presupune că $C^2 \neq O_n$.

Pentru $n = 3$, polinoamele caracteristice sunt $P_C(X) = X^3 - aX^2 + bX$ și respectiv $P_D(X) = X^3 - aX^2 + cX$. Din $aC^2 = bC$ rezultă $bC^2 = O_n$, încât $b = 0$. Prin urmare, avem $aC^2 = O_n$, de unde $a = 0$ **1p**

Aplicând încă o dată teorema Cayley-Hamilton, se obține $D^4 = -cD^2$. Cum $D^4 = BC^3A = O_n$, rezultă $cD^2 = O_n$, astfel că fie $D^2 = O_n$, fie $c = 0$. Ambele variante conduc la concluzia $D^3 = O_n$ **1p**

Fie acum $n = 4$. Exemplul

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

arată că este posibil să avem $(AB)^3 = O_n$ și $(BA)^3 \neq O_n$ **1p**

Pentru $n \geq 5$ construim un exemplu punând în colțul din stânga-sus al matricei nule O_n matricele A, B de ordin 4 de mai sus **1p**

Problema 4. Fie $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ o funcție derivabilă cu f' continuă și strict pozitivă. Demonstrați că există $c \in (a, b)$ astfel încât

$$f(f(b)) - f(f(a)) = (f'(c))^2(b - a).$$

Soluție. Se observă că funcția f este strict crescătoare.

Aplicând teorema de medie, pe intervalul $[f(a), f(b)]$ găsim $c_1 \in (f(a), f(b))$

$$f(f(b)) - f(f(a)) = f'(c_1)(f(b) - f(a)).$$

..... **2p**

Aplicând din nou teorema lui Lagrange pe intervalul $[a, b]$ găsim $c_2 \in (a, b)$ astfel încât

$$f(b) - f(a) = f'(c_2)(b - a).$$

Din relațiile precedente rezultă

$$f(f(b)) - f(f(a)) = f'(c_1)f'(c_2)(b - a).$$

..... **2p**

Cum $f' > 0$ rezultă că $\sqrt{f'(c_1)f'(c_2)}$ este cuprins între $f'(c_1)$ și $f'(c_2)$. Cum f' are proprietatea lui Darboux există c între c_1 și c_2 astfel încât $f'(c) = \sqrt{f'(c_1)f'(c_2)}$, ceea ce este echivalent cu

$$f'(c_1)f'(c_2) = f'(c)^2.$$

În concluzie

$$f(f(b)) - f(f(a)) = f'(c)^2(b - a), c \in (a, b).$$

..... **3p**

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Națională, Timișoara, 20 aprilie 2017

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE – CLASA a 12-a

Problema 1. Fie $f: [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ o funcție continuă. Arătați că:

(a) Există un număr natural n_0 , astfel încât oricare ar fi numărul natural $n > n_0$, există un unic număr real $x_n > 0$ pentru care

$$n \int_0^{x_n} f(t) dt = 1;$$

(b) Șirul $(nx_n)_{n>n_0}$ este convergent și determinați limita sa.

Soluție. (a) Fie $F: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^x f(t) dt$. Rezultă că F este derivabilă și strict crescătoare, în particular, injectivă. Dacă $\alpha = \sup_{x \geq 0} F(x) \in \bar{\mathbb{R}}$, alegem $n_0 \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $n_0 \alpha \geq 1$ **2 puncte**

Dacă $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$, atunci $F(0) = 0 < 1/n < 1/n_0 \leq \alpha$ și cum F este continuă și injectivă, există un unic $x_n > 0$, astfel încât $F(x_n) = 1/n$ **1 punct**

(b) Cum $F(x_{n+1}) = 1/(n+1) < 1/n = F(x_n)$, $n > n_0$, și F este strict crescătoare, rezultă că șirul $(x_n)_{n>n_0}$ este strict descrescător, deci convergent. **1 punct**

Din continuitatea lui F rezultă că $F(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = 0 = F(0)$, iar din injectivitatea lui F obținem $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ **1 punct**

Din teorema de medie, aplicată funcției f pe intervalul $[0, x_n]$, există $t_n \in (0, x_n)$, astfel încât $F(x_n) = x_n f(t_n)$, deci $nx_n = 1/f(t_n)$. Cum $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 0$, din continuitatea lui f rezultă că $\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n = 1/f(0)$ **2 puncte**

Problema 2. Fie n un număr natural nenul, fie $a_1 < \dots < a_n$ numere reale și fie $b_1, \dots, b_n$ numere reale arbitrare. Arătați că:

(a) Dacă toate numerele b_i sunt strict pozitive, atunci există un polinom f cu coeficienți reali, care nu are nicio rădăcină reală, astfel încât $f(a_i) = b_i$, $i = 1, \dots, n$;

(b) Există un polinom f de grad cel puțin 1, care are toate rădăcinile reale, astfel încât $f(a_i) = b_i$, $i = 1, \dots, n$.

Soluție. (a) Dacă $a_1, \dots, a_n$ sunt numere reale distincte două câte două și $b_1, \dots, b_n$ sunt numere reale arbitrare, polinomul de interpolare

$$g = \sum_{i=1}^n b_i \frac{\prod_{j \neq i} (X - a_j)}{\prod_{j \neq i} (a_i - a_j)}$$

are gradul cel mult $n - 1$ și $g(a_i) = b_i$, $i = 1, \dots, n$ **1 punct**

Fie $b = \min(b_1, \dots, b_n)$, fie $b'_i = \sqrt{b_i - b/2}$, $i = 1, \dots, n$, și fie g polinomul de interpolare pentru punctele $a_1, \dots, a_n$ și valorile $b'_1, \dots, b'_n$. Polinomul $f = g^2 + b/2$ are proprietatea din enunț. **2 puncte**

(b) Procedăm prin inducție după n . Dacă $n = 1$, polinomul $f = X - a_1 + b_1$ îndeplinește condiția din enunț. Fie $n \geq 2$ și presupunem proprietatea adevărată oricare ar fi numerele reale $a_1 < \dots < a_{n-1}$ și oricare ar fi numerele reale $b_1, \dots, b_{n-1}$.

Dacă există un $b_i = 0$, din ipoteza de inducție există un polinom h , care are toate rădăcinile reale, astfel încât $h(a_j) = b_j/(a_j - a_i)$, oricare ar fi indicele $j \neq i$. Polinomul $f = (X - b_i)h$ satisface condițiile din enunț. **2 puncte**

Dacă toate numerele b_i sunt nenule, fie $I = \{i = 1, \dots, n - 1 \mid b_i b_{i+1} > 0\}$.

Dacă mulțimea I este vidă, polinomul de interpolare g satisface condițiile cerute.

Dacă I are k elemente, $k \geq 1$, pentru fiecare indice i din I , alegem numerele reale a'_i și b'_i , astfel încât $a_i < a'_i < a_{i+1}$ și $b_i b'_i < 0$. Polinomul de interpolare pentru punctele $a_1, \dots, a_n, a'_1, \dots, a'_k$ și valorile $b_1, \dots, b_n, b'_1, \dots, b'_k$ are gradul cel mult $n + k - 1$ și cel puțin $n - k - 1 + 2k = n + k - 1$ rădăcini reale, deci îndeplinește condiția cerută. **2 puncte**

Problema 3. Fie G un grup finit care are următoarea proprietate: pentru orice automorfism f al lui G , există un număr natural m , astfel încât $f(x) = x^m$, oricare ar fi $x \in G$. Arătați că G este comutativ.

Soluție. Fie a și b două elemente din G , astfel încât $\text{ord } a \mid \text{ord } b$, fie $f: G \rightarrow G$, $f(x) = bxb^{-1}$, și fie $m \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $f(x) = x^m$, oricare ar fi $x \in G$. Cum $b = f(b) = b^m$, rezultă că $b^{m-1} = e$, deci $\text{ord } b \mid m - 1$. Atunci și $a^{m-1} = e$, deci $a = a^m = f(a) = bab^{-1}$, de unde $ab = ba$ **2 puncte**

(1) Fie $|G| = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ descompunerea canonică în factori primi distincți a ordinului lui G și fie $G_i = \{x: x \in G, x^{p_i^{\alpha_i}} = e\}$, $i = 1, \dots, k$. Cum $\text{ord } a \mid \text{ord } b$ sau $\text{ord } b \mid \text{ord } a$, oricare ar fi $a, b \in G_i$, rezultă că $ab = ba$, oricare ar fi $a, b \in G_i$. Dacă $a, b \in G_i$, atunci $(ab)^{p_i^{\alpha_i}} = a^{p_i^{\alpha_i}} b^{p_i^{\alpha_i}} = e$, deci $ab \in G_i$. Rezultă că G_i este subgrup comutativ al lui G , $i = 1, \dots, k$ **2 puncte**

(2) Dacă $a \in G_i$ și $x \in G$, atunci $(xax^{-1})^{p_i^{\alpha_i}} = xa^{p_i^{\alpha_i}}x^{-1} = e$, deci $xax^{-1} \in G_i$. Prin urmare, dacă $a \in G_i$ și $b \in G_j$, $i \neq j$, atunci $aba^{-1}b^{-1} = a(ba^{-1}b^{-1}) = (aba^{-1})b^{-1} \in G_i \cap G_j = \{e\}$, deci $ab = ba$ **1 punct**

(3) Fie $n_i = |G|/p_i^{\alpha_i}$. Cum $(n_1, \dots, n_k) = 1$, există $\beta_1, \dots, \beta_k$ în $\mathbb{Z}$, astfel încât $\sum_{i=1}^k \beta_i n_i = 1$. Atunci, pentru orice $x \in G$, rezultă că $x = x^1 = x^{\beta_1 n_1 + \dots + \beta_k n_k} = x^{\beta_1 n_1} \cdots x^{\beta_k n_k} = x_1 \cdots x_k$, unde $x_i = x^{\beta_i n_i} \in G_i$, $i = 1, \dots, k$.

Din (1), (2) și (3) rezultă cerința. **2 puncte**

Problema 4. (a) Dați un exemplu de funcție continuă $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, astfel încât

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} \int_0^x f(t) dt = 1,$$

dar $f(x)/x$ nu are limită când $x \rightarrow \infty$.

(b) Fie $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție crescătoare, astfel încât

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} \int_0^x f(t) dt = 1.$$

Arătați că $f(x)/x$ are limită când $x \rightarrow \infty$ și determinați valoarea acesteia.

Soluție. (a) Fie $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4x(\cos x)^2$. Evident, $f(x)/x = 4(\cos x)^2$ nu are limită când $x \rightarrow \infty$ și

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} \int_0^x f(t) dt = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} \left(x^2 + x \sin 2x + \frac{1}{2} \cos 2x \right) = 1.$$

Un alt exemplu de astfel de funcție este $x \mapsto 2x + 2x \cos x^2$, $x \geq 0$; verificările sunt evidente.

..... **1 punct**

(b) Fie $\epsilon \in (0, 1)$ și fie $a_\epsilon > 0$, astfel încât

$$(1 - \epsilon^2)x^2 < \int_0^x f(t) dt < (1 + \epsilon^2)x^2, \quad (1)$$

oricare ar fi $x > a_\epsilon$ **1 punct**

Fie $b_\epsilon = a_\epsilon/(1 - \epsilon)$ și $x > b_\epsilon$. Cum $x - \epsilon x$, x și $x + \epsilon x$ sunt strict mai mari decât a_ϵ , rezultă că

$$\int_0^{x-\epsilon x} f(t) dt < (1 + \epsilon^2)(1 - \epsilon)^2 x^2 \quad \text{și} \quad \int_0^{x+\epsilon x} f(t) dt < (1 + \epsilon^2)(1 + \epsilon)^2 x^2. \quad (2)$$

..... **1 punct**

Din (1) și (2) rezultă că

$$\begin{aligned} \int_{x-\epsilon x}^x f(t) dt &= \int_0^x f(t) dt - \int_0^{x-\epsilon x} f(t) dt > (1 - \epsilon^2)x^2 - (1 + \epsilon^2)(1 - \epsilon)^2 x^2 \\ &= x^2 \epsilon (1 - \epsilon) (2 - \epsilon + \epsilon^2) \quad \text{și} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \int_x^{x+\epsilon x} f(t) dt &= \int_0^{x+\epsilon x} f(t) dt - \int_0^x f(t) dt < (1 + \epsilon^2)(1 + \epsilon)^2 x^2 - (1 - \epsilon^2)x^2 \\ &= x^2 \epsilon (1 + \epsilon) (2 + \epsilon + \epsilon^2). \end{aligned}$$

..... **1 punct**

Cum f este crescătoare, rezultă că

$$\int_{x-\epsilon x}^x f(t) dt \leq \epsilon x f(x) \quad \text{și} \quad \int_x^{x+\epsilon x} f(t) dt \geq \epsilon x f(x),$$

deci

$$\frac{1}{\epsilon x} \int_{x-\epsilon x}^x f(t) dt \leq f(x) \leq \frac{1}{\epsilon x} \int_x^{x+\epsilon x} f(t) dt.$$

..... **2 puncte**

Ținând cont de (3), obținem $2 - 3\epsilon + 2\epsilon^2 - \epsilon^3 < f(x)/x < 2 + 3\epsilon + 2\epsilon^2 + \epsilon^3$, oricare ar fi $x > b_\epsilon$, i.e., $f(x)/x \rightarrow 2$ când $x \rightarrow \infty$ **1 punct**

Olimpiada Națională de Matematică
Etapă Națională, Negrești Oaș, 4 aprilie 2018
SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE – CLASA a V-a

Problema 1. Determinați numerele prime $a > b > c$ pentru care $a - b$, $b - c$ și $a - c$ sunt numere prime diferite.

Soluție. Dacă $a - b$, $b - c$, $a - c$ sunt numere prime diferite, atunci a, b, c nu pot fi toate impare. Rezultă $c = 2$ și $a - b = 2$ **2p**

Avem $a - b = 2$, $b - 2 = x$, $a - 2 = y$, unde x și y sunt numere prime și de aici numerele $a = b + 2$, $x = b - 2$ și $y = b$ sunt numere prime. **2p**

Numerele prime $b - 2, b, b + 2$ sunt numere impare consecutive, deci unul multiplu de 3, de unde $b - 2 = 3$, pentru care $b = 5$ și $b + 2 = 7$ sunt prime. **2p**

Deci $a = 7, b = 5, c = 2$ sunt numerele căutate. **1p**

Problema 2. Determinați numerele naturale nenule a, b, c pentru care

$$\frac{a+b}{2} + \frac{a^2+b^2}{2} = \frac{7c+1}{c+1}.$$

Soluție. Fie $M = \frac{a+b}{2} + \frac{a^2+b^2}{2} = \frac{a+b+a^2+b^2}{2} = \frac{a(1+a)+b(1+b)}{2} \in \mathbb{N}$, întrucât $a(1+a)$ și $b(1+b)$ sunt produse de numere naturale consecutive, deci pare. **1p**

Pe de altă parte $M = \frac{7c+1}{c+1} = 7 - \frac{6}{c+1} \in \mathbb{N}$, deci $\frac{6}{c+1} \in \{1, 2, 3, 6\}$ **2p**

Dacă $\frac{6}{c+1} = 1$, atunci $M = 6$, deci $a(1+a) + b(1+b) = 12$ cu soluția $a = b = 2$ și $c = 5$.

Dacă $\frac{6}{c+1} = 2$, atunci $M = 5$, deci $a(1+a) + b(1+b) = 10$ fără soluție.

Dacă $\frac{6}{c+1} = 3$, atunci $M = 4$, deci $a(1+a) + b(1+b) = 8$ cu soluțiile $a = 1, b = 2, c = 1$ și $a = 2, b = 1, c = 1$.

Dacă $\frac{6}{c+1} = 6$, atunci $c = 0$ nu convine. **4p**

Problema 3. Pe o tablă sunt scrise numerele: $1, 2, 3, \dots, 27$. Un *pas* înseamnă ștergerea a trei numere a, b, c de pe tablă și scrierea în locul lor a numărului $a + b + c + n$, unde n este un număr natural nenul fixat. Determinați numărul natural n știind că, după 13 pași, pe tablă este scris numărul n^2 .

Soluție.

Remarcăm mai întâi că după fiecare pas, dispar de pe tablă două numere de fapt, așadar după 13 pași dispar 26 de numere, deci rămâne un singur număr. **1p**

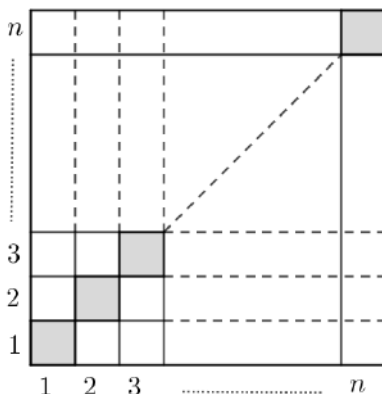
După fiecare pas suma numerelor se mărește cu n , așadar după 13 pași suma de pe tablă (adică numărul rămas pe tablă) este $1 + 2 + \dots + 27 + 13n = \frac{27 \cdot 28}{2} + 13n = 378 + 13n$ **3p**

Din $378 + 13n = n^2$ rezultă $378 = n(n - 13)$. Divizorii lui 378 sunt $D_{378} = \{1, 2, 3, 6, 7, 9, 14, 18, 21, 27, 42, 54, 63, 126, 189, 378\}$ dintre care $n = 27$ verifică proprietatea din enunț. **3p**

Problema 4. Se consideră un număr natural $n \geq 2$ și un pătrat $n \times n$ (vezi figura alăturată). *Diagonala principală* a acestui pătrat este formată din câmpurile hașurate. Completăm câmpurile aflate sub diagonala principală cu zerouri, iar în restul câmpurilor (inclusiv cele hașurate) scriem numere naturale nenule. După completarea tuturor câmpurilor calculăm suma numerelor aflate pe fiecare linie și fiecare coloană, obținând astfel $2n$ sume. Pătratul se numește *norocos* dacă valorile celor $2n$ sume sunt egale, într-o anumită ordine, cu numerele $1, 2, \dots, 2n$.

a) Arătați că, pentru $n = 5$, nu există pătrat norocos.

b) Dacă $n = 4$, determinați cel mai mare număr natural care apare în completarea unui pătrat norocos.



Soluție. a) Presupunem că există un pătrat norocos 5×5 . Suma tuturor sumelor va fi $1 + 2 + \dots + 10 = 55$. Suma sumelor pe linii este egală cu suma sumelor pe coloane, deci suma tuturor sumelor este pară. Dar 55 este impar, așadar nu există pătrat norocos 5×5 **3p**

b) Presupunem că un câmp este ocupat de un număr $m \geq 7$, acesta nu poate fi pe prima sau a doua linie sau coloană, alfel suma ar fi cel puțin egală cu $m + 2 \geq 9 > 8$. Iar în restul câmpurilor se află zerouri, deci $m \leq 6$ **2p**

Un pătrat norocos pentru $m = 6$ este în figura alăturată. Deci cel mai mare număr natural care apare în completarea unui pătrat norocos este 6. **2p**

1	1	1	3
2	1	1	0
1	6	0	0
1	0	0	0

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Națională, Negrești Oaș, 4 aprilie 2018
SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE – CLASA a VI-a

Problema 1. Arătați că există o infinitate de numere naturale a și b care verifică egalitatea

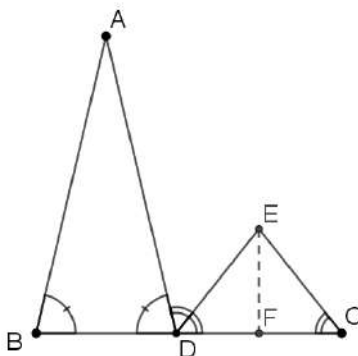
$$a \cdot (a, b) = b + [a, b],$$

unde cu (a, b) am notat cel mai mare divizor comun al numerelor a și b și cu $[a, b]$ am notat cel mai mic multiplu comun al numerelor a și b .

Soluție. Dacă $(a, b) = d$ și $[a, b] = m$, atunci $a = a_1 \cdot d$, $b = b_1 \cdot d$ și $m = a_1 \cdot b_1 \cdot d$, unde $(a_1, b_1) = 1$ **2p**
 Deci $a_1 \cdot d \cdot d = b_1 \cdot d + a_1 \cdot b_1 \cdot d$, adică $a_1 \cdot d = b_1 + a_1 \cdot b_1$, **2p**
 de unde $a_1 | b_1$, dar $(a_1, b_1) = 1$, deci $a_1 = 1$, **1p**
 deci $d = b_1 + b_1 = 2b_1$, $a = 2b_1$ și $b = 2b_1^2$ **1p**
 Pentru orice număr natural b_1 , obținem o pereche de numere naturale cu proprietatea din enunț, deci sunt o infinitate de astfel de numere. **1p**

Problema 2. Se consideră segmentele congruente AB , BC și AD , unde $D \in (BC)$. Arătați că mediatoarea segmentului DC , bisectoarea unghiului $\widehat{ADC}$ și dreapta AC sunt concurente.

Soluție



Fie F mijlocul segmentului DC și E intersecția bisectoarei unghiului $\widehat{ADC}$ și a mediatoarei segmentului DC .

În triunghiul isoscel DEC avem $\widehat{EDC} \equiv \widehat{DCE}$. Pe de altă parte $\widehat{EDC} \equiv \widehat{ADE}$, DE fiind bisectoarea unghiului $\widehat{ADC}$ **2p**

Astfel în triunghiul isoscel ABD avem $m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{ADB}) = 180^\circ - 2 \cdot m(\widehat{ADE})$ **2p**

Deci în triunghiul isoscel ABC măsurile unghiurilor congruente sunt $m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{ACB}) = \frac{180^\circ - m(\widehat{ABC})}{2} = m(\widehat{ECD})$ **2p**

Deci $m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{ECD})$, de unde punctele A , E și C sunt coliniare, adică dreptele din cerință sunt concurente. **1p**

Problema 3. Fie numerele naturale $a \neq 0$, $b = 2a + 1000$, $c = a + 1$ și $d = 2a + 1002$.

a) Arătați că $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$.

b) Pentru $a = 9$, determinați cel mai mic număr natural n pentru care $\frac{a+n}{b+n} > \frac{c+n}{d+n}$.

Soluție.

a) $\frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{a+1}{2a+1002} - \frac{a}{2a+1000} = \frac{1000}{(2a+1002)(2a+1000)} > 0$ de unde rezultă concluzia. **3p**

b) $\frac{a+n}{b+n} - \frac{c+n}{b+n} = \frac{9+n}{1018+n} - \frac{10+n}{1020+n} = \frac{n-1000}{(1018+n)(1020+n)} > 0$, rezultă $n > 1000$, iar cel mai mic număr natural cu această proprietate este $n = 1001$ **4p**

Problema 4. Fie n un număr natural nenul. Vom spune că o mulțime A de numere naturale este *completă de mărime n* dacă elementele ei sunt nenule, iar mulțimea tuturor resturilor obținute la împărțirea unui element din A la un element din A este $\{0, 1, 2, \dots, n\}$. De exemplu, mulțimea $\{3, 4, 5\}$ este o mulțime completă de mărime 4.

Determinați numărul minim de elemente ale unei mulțimi complete de mărime 100.

Soluție. Răspuns: 27.

Un exemplu de mulțime completă de mărime 100 cu 27 de elemente este

$$\{76, 77, 78, \dots, 100\} \cup \{51, 152\}.$$

Într-adevăr, la împărțirile $100 : x$, $76 \leq x \leq 100$, obținem resturile $0, 1, 2, \dots, 24$, la împărțirile $x : 51$, $76 \leq x \leq 100$, obținem resturile $25, 26, \dots, 49$, la împărțirile $152 : x$, $77 \leq x \leq 100$, obținem resturile $52, 53, \dots, 75$, la împărțirile $x : 152$, $76 \leq x \leq 100$, obținem resturile $76, 77, \dots, 100$, la împărțirea $51 : 152$ obținem restul 51 și la împărțirea $152 : 51$ obținem restul 50. **4p**

Arătăm acum că orice mulțime completă de mărime 100 are cel puțin 27 de elemente.

Observăm că dacă $A = \{a_1 < a_2 < \dots < a_n\}$ este o mulțime de tipul cerut, atunci cel mai mare rest care se obține la împărțirea a două elemente din A este a_{n-1} , obținut la împărțirea $a_{n-1} : a_n$. Deducem că $a_{n-1} = 100$.

Să urmărim acum resturile ≥ 50 . Aceste resturi se obțin sigur când împărțim elemente ≥ 51 la elemente mai mari decât ele și se mai pot obține doar când împărțim a_n la elemente ≥ 51 . Astfel, numărul resturilor ≥ 50 obținute este cel mult dublul numărului elementelor lui A cuprinse între 51 și 100. Deoarece numărul resturilor ≥ 50 care trebuie obținute este 51, rezultă că A trebuie să conțină cel puțin 26 de numere dintre 51, 52, 53, ..., 100. Cum A conține și elementul $a_n > 100$, reiese că A are cel puțin 27 de elemente. **3p**

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Națională, Satu Mare, 4 aprilie 2018

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE - CLASA a VII-a

Problema 1. Determinați numerele naturale nenule distincte a, b, c, d , care au simultan proprietățile:

- (1) Exact trei din cele patru numere sunt prime;
- (2) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2018$.

Soluție. $2018 = 4\mathcal{M} + 2$, două numere sunt pare și două impare, un număr este 2 1 punct.
 $2018 = 3\mathcal{M} + 2$, două numere sunt multipli de 3 și două $\mathcal{M}3 \pm 1$, un număr este 3 1 punct.
 Dacă $a < b < c < d$, atunci $a = 2, b = 3, c^2 + d^2 = 2005, c = 6k$ sau $d = 6k$ 2 puncte.
 $k \leq 7$, analiza cazurilor 2 puncte.
 $k = 3, a = 2, b = 3, c = 18, d = 41$ și permutările lor circulare 1 punct.

Problema 2. În pătratul $ABCD$ punctul E este situat pe latura $[AB]$, iar F este piciorul perpendicularei din B pe dreapta DE . Punctul L aparține dreptei DE astfel încât F este între E și L , iar $FL = BF$. Dacă N și P sunt simetricele punctelor A și F față de dreptele DE , respectiv BL , demonstrați că:

- a) Patrulaterul $BFLP$ este pătrat și patrulaterul $ALND$ este romb.
- b) Aria rombului $ALND$ este egală cu diferența dintre ariile pătratelor $ABCD$ și $BFLP$.

Soluție.

a) $\triangle FLB$ dreptunghic isoscel, $BFLP$ pătrat 1 punct.
 $m(\widehat{DAB}) = m(\widehat{BFD}) = 90^\circ$, $AFBD$ patrulater inscriptibil, $m(\widehat{AFB}) = 135^\circ$,
 $m(\widehat{AFL}) = 360^\circ - 135^\circ - 90^\circ = 135^\circ$ 1 punct.
 $\triangle AFL \equiv \triangle AFB$ (LUL), $AL = AB = AD$, $ALND$ romb 1 punct.
 b) LN intersectează AB și CD în Q respectiv R , $RQ \perp AB$, $AQRD$ dreptunghi,
 $\triangle ALQ \equiv \triangle DNR$ (IC), $A_{ALND} = A_{AQRD}$ 1 punct.
 $m(\widehat{BFL}) = m(\widehat{LQB}) = 90^\circ$, $BQFL$ patrulater inscriptibil, $m(\widehat{FQB}) = 135^\circ$ 1 punct.
 $\triangle AFL \sim \triangle AFB$ (UU), $\frac{AB}{FB} = \frac{BF}{BQ}$, $AB \cdot BQ = BF^2 = BC \cdot BQ$,
 $A_{BCRQ} = A_{BFLP}$, $A_{ALND} = A_{ABCD} - A_{BFLP}$ 2 puncte.

Problema 3. Pe laturile $[AB]$ și $[BC]$ ale paralelogramului $ABCD$ se construiesc triunghiurile echilaterale ABE și BCF , astfel încât punctele D și E sunt de aceeași parte a dreptei AB , iar F și D de o parte și de alta a dreptei BC . Dacă punctele E, D și F sunt coliniare, atunci demonstrați că $ABCD$ este romb.

Soluție. AC și DF sunt concurente, $AC \cap DF = \{T\}$ 1 punct.
Cazul 1 $m(\widehat{BAD}) \leq 60^\circ$, ordinea punctelor $E - D - T - F$ sau

$60^\circ < m(\widehat{BAD}) \leq 120^\circ$, ordinea punctelor $D - E - T - F$:

Dacă $D = E$, atunci $ABCD$ romb;

$\triangle ABC \equiv \triangle EBF$ (LUL), $\widehat{BAT} \equiv \widehat{BEF}$ 1 punct.

$AETB$ patrulater inscriptibil, $m(\widehat{BTA}) = m(\widehat{ATE}) = 60^\circ$, $[TA]$ bisectoarea lui $\widehat{DTB}$, TA este mediatoarea lui $[BD]$, $ABCD$ romb 2 puncte.

Cazul 2 $m(\widehat{BAD}) \geq 120^\circ$, ordinea punctelor $D - T - E - F$:

Dacă $T = E$, atunci $ABCD$ romb;

$T \neq E, C \in (AT)$, $\triangle ABC \equiv \triangle EBF$ (LUL), $\widehat{BEF} \equiv \widehat{BAT}, \widehat{BFE} \equiv \widehat{BCA}$... 1 punct.

$ATEB$ patrulater inscriptibil, $m(\widehat{ATB}) = m(\widehat{BTE}) = 60^\circ = m(\widehat{DTC})$,

$[TC]$ bisectoarea lui $\widehat{DTB}$, TC este mediatoarea lui $[BD]$, $ABCD$ romb ... 2 puncte.

Problema 4. Determinați numerele naturale n pentru care numărul $\sqrt{\frac{20^n - 18^n}{19}}$ este număr rațional.

Soluție. $n = 0$ este soluție 1 punct.

pentru $n \geq 1$, $\frac{20^n - 18^n}{19}$ pătrat perfect, $20^n - 18^n = 19x^2$, $2^n(10^n - 9^n) = 19x^2$, x natural nenul; n par, $n = 2m$, m natural nenul 1 punct.

$2^{2m}(10^{2m} - 9^{2m}) = 19x^2$, x natural nenul, $x = 2^m y$, y impar, $10^{2m} - 9^{2m} = 19y^2$, $(10^m - 9^m) \cdot (10^m + 9^m) = 19y^2$, $(10^m - 9^m, 10^m + 9^m) = 1$ 1 punct.

Cazul 1: Există a, b naturale impare, $(a, b) = 1$, $a \cdot b = y$ cu $10^m + 9^m = 19a^2$ și

$10^m - 9^m = b^2$; $10^m = 9^m + b^2 = \mathcal{M}4 + 1 + \mathcal{M}4 + 1 = \mathcal{M}4 + 2$,

$m = 1, b = 1, a = 1, y = 1, x = 2, n = 2$ 2 puncte.

Cazul 2: Există a, b naturale impare, $(a, b) = 1$, $a \cdot b = y$ cu $10^m + 9^m = a^2$ și

$10^m - 9^m = 19b^2$; $10^m = 9^m + 19b^2 = \mathcal{M}8 + 1 + 19(\mathcal{M}8 + 1) = \mathcal{M}8 + 4$,

$m = 2, b = 1, a^2 = 181$, contradicție

$S = \{0, 2\}$ 2 puncte.

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Națională, Satu Mare, 4 aprilie 2018

CLASA a VIII-a - Soluții și barem

Problema 1. Demonstrați că există o infinitate de mulțimi formate din patru numere naturale nenule care au proprietatea că suma oricăror trei elemente ale mulțimii este pătrat perfect.

Soluție:

Evident, dacă $\{a, b, c, d\}$ este o mulțime cu proprietatea din enunț, atunci și mulțimea $\{n^2a, n^2b, n^2c, n^2d\}$ este, pentru orice număr natural nenul n , o mulțime cu proprietatea dorită, deci este suficient să găsim o asemenea mulțime. **1p**

Cum putem găsi o asemenea mulțime?

Dacă $a+b+c = x^2$, $a+b+d = y^2$, $a+c+d = z^2$, $b+c+d = t^2$, cu $x, y, z, t \in \mathbb{N}$, atunci prin

adunare obținem $3(a+b+c+d) = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$, de unde $a = \frac{x^2 + y^2 + z^2 + t^2}{3} - t^2$,

$b = \frac{x^2 + y^2 + z^2 + t^2}{3} - z^2$, $c = \frac{x^2 + y^2 + z^2 + t^2}{3} - y^2$, $d = \frac{x^2 + y^2 + z^2 + t^2}{3} - x^2$. .. **2p**

Pentru ca aceste numere să fie naturale și nenule, trebuie să alegem x, y, z, t astfel încât $3 \mid x^2 + y^2 + z^2 + t^2$ și $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 > 3 \max\{x^2, y^2, z^2, t^2\}$. Există multe alegeri convenabile pentru x, y, z, t . De exemplu $\{x, y, z, t\} = \{8, 9, 10, 11\}$ conduce la $\{a, b, c, d\} = \{1, 22, 41, 58\}$ **4p**

Notă: Găsirea unei mulțimi cu proprietatea dorită, chiar și fără a indica modul de găsire a ei va fi punctată cu **6p**.

Problema 2. Fie a, b, c, d numere naturale astfel încât $a + b + c + d = 2018$. Aflați valoarea minimă a expresiei

$$E = (a-b)^2 + 2(a-c)^2 + 3(a-d)^2 + 4(b-c)^2 + 5(b-d)^2 + 6(c-d)^2.$$

Soluție:

Arătăm că minimul căutat este 14.

Această valoare într-adevăr atinsă, de exemplu dacă $a = b = 505$ și $c = d = 504$ **1p**
Deoarece 2018 nu este divizibil cu 4, numerele a, b, c, d nu pot fi toate egale.

Dacă trei dintre ele sunt egale, atunci trei dintre pătrate sunt 0, iar celelalte trei sunt nenule. În plus, cele patru numere trebuie să aibă aceeași paritate, deci celelalte pătrate sunt cel puțin 4. Astfel $E \geq 4 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 4 > 14$ **2p**

Dacă două dintre numere sunt egale, iar celelalte două sunt diferite (de acestea două și diferite între ele), atunci $E \geq 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 > 14$ **1p**

Dacă două dintre numere sunt egale, iar celelalte două sunt și ele egale, atunci:

$a = b$, $c = d$ implică $E \geq 2 + 3 + 4 + 5 = 14$, $a = c$, $b = d$ implică $E \geq 1 + 3 + 4 + 6 = 14$, iar $a = d$, $b = c$ implică $E \geq 1 + 2 + 5 + 6 = 14$ **2p**

În fine, dacă a, b, c, d sunt diferite două câte două atunci $E \geq 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 > 14$ **1p**

Problema 3. Fie $a, b, c \geq 0$ astfel încât $ab + bc + ca = 3$. Demonstrați că

$$\frac{a}{a^2+7} + \frac{b}{b^2+7} + \frac{c}{c^2+7} \leq \frac{3}{8}.$$

Soluție:

Scriem $\frac{a}{a^2 + 7} = \frac{a}{a^2 + ab + bc + ca + 4} = \frac{a}{(a + b)(a + c) + 4}$ **2p**

Din inegalitatea mediilor, $(a+b)(a+c)+4 \geq 2\sqrt{(a+b)(a+c)} \cdot 4 = 4\sqrt{(a+b)(a+c)}$.

..... 2p

Deoarece $a + b > 0$, $a + c > 0$ ($a + b = 0$ ar implica $a = b = 0$ și ar contrazice $ab + bc + ca = 3$), putem scrie $\frac{a}{a^2 + 7} \leq \frac{1}{4} \cdot \frac{a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{\frac{a}{a+b} \cdot \frac{a}{a+c}}$.

Aplicând din nou inegalitatea mediilor obținem $\frac{a}{a^2+7} \leq \frac{1}{8} \left(\frac{a}{a+b} + \frac{a}{a+c} \right)$. Analog se

obțin relațiile $\frac{b}{b^2+7} \leq \frac{1}{8} \left(\frac{b}{b+c} + \frac{b}{b+a} \right)$ și $\frac{c}{c^2+7} \leq \frac{1}{8} \left(\frac{c}{c+a} + \frac{c}{c+b} \right)$2p

Prin adunarea acestor trei inegalități se obține inegalitatea din enunț. **1p**

(Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c = 1$.)

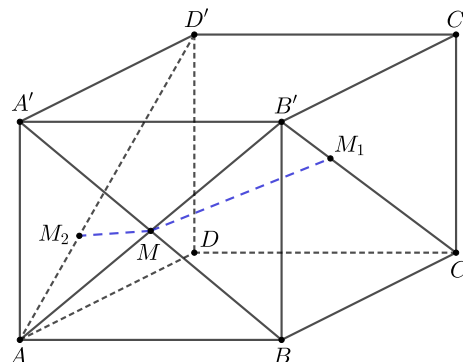
Problema 4. În paralelipipedul dreptunghic $ABCD A' B' C' D'$ notăm cu M centrul feței $ABB' A'$. Notăm cu M_1 și M_2 proiecțiile lui M pe dreptele $B' C$ și respectiv AD' . Demonstrați că:

- a)** $[MM_1] \equiv [MM_2];$

- b)** dacă $(MM_1M_2) \cap (ABC) = d$, atunci $d \parallel AD$;

- c) $m(\angle((MM_1M_2), (ABC))) = 45^\circ \Leftrightarrow \frac{BC}{AB} = \frac{BB'}{BC} + \frac{BC}{BB'}.$

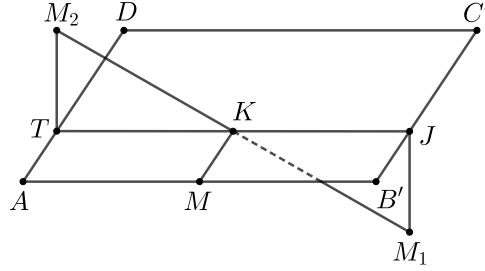
Soluție:



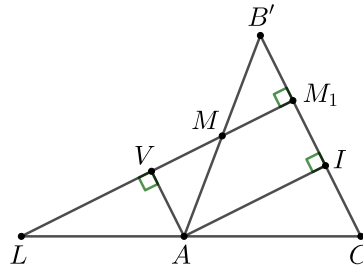
- a)** Triunghiurile $AB'C$ și $B'AD'$ sunt congruente (L.L.L.), deci $\angle AB'C \equiv \angle B'AD'$. Cum $[MB'] \equiv [MA]$, $\angle MB'M_1 \equiv \angle MAM_2$ și $\angle MM_1B' \equiv \angle MM_2A$, triunghiurile MM_2A și MM_1B' sunt congruente (I.U.) și de aici $[MM_1] \equiv [MM_2]$ **1p**

- b) Construim $M_1J \perp B'C'$, $J \in B'C'$ și $M_2T \perp AD$, $T \in AD$. Atunci $M_1J \parallel M_2T$

(ambele perpendiculare pe (ABC)). În plus, $B'M_1 = AM_2$ și $\angle M_1B'J \equiv \angle M_2AT$ implică $\Delta M_1B'J \equiv \Delta M_2AT$ (I.U.), deci $M_1J = M_2T$. Rezultă că M_1JM_2T este paralelogram. Fie K punctul de intersecție a diagonalelor sale. Dar $AT = B'J$ și $AT \parallel B'J$ implică $ATJB'$ - paralelogram, deci $MK \parallel AT$. Cum $MK \subset (MM_1M_2)$ și $AT \subset (ABC)$, rezultă că $d \parallel AD$ **3p**



c) Fie $MM_1 \cap AC = \{L\}$ și $MM_2 \cap (ABC) = \{S\}$. Atunci $AS \parallel BD \parallel B'D'$ deoarece $B'D' \subset (AB'D')$, $B'D' \parallel BD$ și $BD \subset (ABC)$. Deci $d = LS$. Fie $AV \perp LM_1$. Atunci triunghiurile AVM și $B'M_1M$ sunt congruente (I.U.), deci $AV = B'M_1 = AM_2$. Din $AV \parallel B'C$ rezultă că $\angle LAV \equiv \angle ACB' \equiv \angle AD'B' \equiv \angle SAM_2$ (alterne interne deoarece $AS \parallel B'D'$). Atunci triunghiurile AVL și AM_2S sunt congruente (C.U.), deci $AL = AS$. Dacă U este mijlocul lui $[LS]$, cum $AU \perp LS$ și $AB \perp LS$ rezultă A, B, U coliniare. Planul (MAB) este planul mediator al lui $[LS]$, deci $MU \perp LS$ și $AU \perp LS$. Cum $MU \subset (MM_1M_2)$ și $AU \subset (ABC)$, deducem că $m(\angle((MM_1M_2), (ABC))) = m(\angle MUA)$. Atunci $m(\angle MUA) = 45^\circ \Leftrightarrow \frac{BB'}{2} = \frac{AB}{2} + AU \Leftrightarrow BB' - AB = 2AU$. Dacă $BI \perp B'C$, $I \in B'C$, din teorema celor trei perpendiculare rezultă $AI \perp B'C$. În triunghiul $BB'C$ avem $BI = \frac{BB' \cdot BC}{B'C}$, deci $AI^2 = AB^2 + \frac{BC^2 \cdot B'B^2}{BC^2 + B'B^2}$, $CI^2 = AB^2 + BC^2 - AI^2$, adică $CI = \frac{BC^2}{\sqrt{BC^2 + B'B^2}}$. În triunghiul LM_1C , $AI \parallel LM_1$, $M_1I = B'M_1$, deci $\frac{LA}{AC} = \frac{M_1I}{CI} = \frac{B'M_1}{CI}$. Cum $B'M_1 = \frac{B'B^2}{2\sqrt{BC^2 + B'B^2}}$, rezultă $LA = \frac{B'B^2}{2BC^2} \cdot \sqrt{AB^2 + BC^2}$. Deoarece $\Delta AUL \sim \Delta CDA$ deducem că $\frac{AU}{AL} = \frac{AB}{\sqrt{AB^2 + BC^2}}$, deci $AU = \frac{AB \cdot B'B^2}{2BC^2}$. Atunci $m(\angle MUA) = 45^\circ \Leftrightarrow 2AU = \frac{AB \cdot B'B^2}{BC^2} = B'B - AB \Leftrightarrow AB \cdot B'B^2 + AB \cdot BC^2 = BC^2 \cdot B'B \Leftrightarrow \frac{BC}{AB} = \frac{BB'}{BC} + \frac{BC}{BB'}$ **3p**



Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Națională, Satu Mare, 4 aprilie 2018

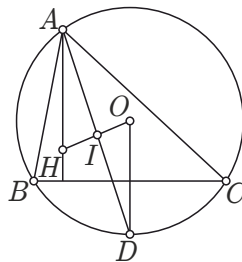
CLASA a IX-a

Problema 1. Arătați că dacă într-un triunghi ortocentrul H , centrul de greutate G și centrul I al cercului înscris sunt coliniare, atunci triunghiul este isoscel.

Soluție. Dacă triunghiul este echilateral, concluzia este verificată.

Dacă triunghiul este dreptunghic, atunci o bisectoare este și mediană, deci concluzia este valabilă.

În caz contrar, deoarece G , H și centrul O al cercului circumscris triunghiului sunt coliniare, deducem că I este pe OH **3p**



Bisectoarea din A trece prin mijlocul D al arcului $\widehat{BC}$ din cercul circumscris triunghiului, care nu-l conține pe A . Dacă triunghiul nu este isoscel, O , I și H sunt distincte, iar $OD \parallel AH$ implică $\frac{AH}{OD} = \frac{HI}{OI}$, de unde $AH = \frac{HI}{OI}R$, unde R este raza cercului circumscris. În mod analog deducem $BH = \frac{HI}{OI}R$, $CH = \frac{HI}{OI}R$, deci H coincide cu O , ceea ce contrazice ipoteza din acest caz **4p**

Problema 2. Demonstrați că, dacă $a, b, c \geq 0$ și $a + b + c = 3$, atunci

$$\frac{a}{1+b} + \frac{b}{1+c} + \frac{c}{1+a} \geq \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c}.$$

Soluție. Eliminând numitorii obținem inegalitatea echivalentă $a^2c + b^2a + c^2b + \sum a^2 + \sum ab + \sum a \geq 3 + 2\sum a + \sum ab$, adică $a^2c + b^2a + c^2b + \sum a^2 \geq 6$ **2p**

Avem $a^2c \geq 2ac - c$ și analoagele **3p**

Este deci suficient să arătăm că $\sum a^2 + 2\sum ab - \sum a \geq 6$, adică $(\sum a)^2 - \sum a \geq 6$, ceea ce reiese imediat din ipoteză **2p**

Problema 3. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ două funcții de gradul 2 cu proprietatea: pentru orice număr real r , dacă $f(r)$ este număr întreg, atunci și $g(r)$ este număr întreg.

Demonstrați că există două numere întregi m și n astfel încât $g(x) = mf(x) + n$, oricare ar fi numărul real x .

Soluție. Înlocuind, eventual, f cu $-f$, putem presupune $f(x) = ax^2 + bx + c$, $g(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, cu $a > 0$. Pentru t întreg, $t \geq \min f$, fie r'_t, r''_t soluțiile ecuației $f(x) = t$. Atunci $g(r'_t) = \frac{\alpha}{a}(t - br'_t - c) + \beta r'_t + \gamma = mt + pr'_t + n$, unde $m = \frac{\alpha}{a}$, $p = \beta - \frac{\alpha b}{a}$, $n = \gamma - \frac{\alpha c}{a}$; analog pentru $g(r''_t)$ **1p**

Numărul $h(t) = |g(r'_t) - g(r''_t)| = |p||r'_t - r''_t| = \frac{|p|}{a} \sqrt{b^2 - 4ac + 4at}$ este întreg pentru orice $t \geq \min f$ și avem

$$h(t+1) - h(t) = \frac{4|p|}{\sqrt{b^2 - 4ac + 4at} + \sqrt{b^2 - 4ac + 4a(t+1)}}.$$

Dacă $p \neq 0$, pentru t ales astfel încât $b^2 - 4ac + 4at > 4p^2$ obținem $0 < h(t+1) - h(t) < 1$ și $h(t+1) - h(t) \in \mathbb{Z}$ - fals. Rezultă $p = 0$, adică $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{b}{a}$ **3p**

Obținem astfel $g(r'_t) = mt + n$ pentru orice t întreg, $t \geq \min f$, deci $g(r'_{t+1}) - g(r'_t) = m$ este întreg, adică $\alpha = ma$, cu m întreg **2p**

În sfârșit $\gamma = n + cm$, cu n întreg, deci $g(x) = max^2 + mbx + cm + n = mf(x) + n$, cu m, n numere întregi **1p**

Problema 4. Considerăm un număr natural nenul n , un cerc de lungime $6n$ și $3n$ puncte care împart cercul în $3n$ arce mici, astfel încât n dintre aceste arce au lungimea 1, alte n dintre aceste arce au lungimea 2, iar cele n arce rămase au lungimea 3.

Arătați că printre punctele considerate există două care sunt diametral opuse.

Soluție. Punctele considerate sunt o parte dintre vârfurile unui poligon cu $6n$ laturi, înscris în cercul dat.

Presupunem contrariul. Atunci capetele fiecărui arc de lungime 1 au ca puncte diametral opuse două puncte situate în interiorul unui arc de lungime 3. Astfel, fiecărui arc de lungime 1 i se asociază un arc „diametral opus” de lungime 3 **2p**

Fixăm un arc de lungime 1 și arcul „diametral opus” de lungime 3. Capetele lor determină două arce mici $\widehat{AB}$ și $\widehat{CD}$ de lungimi $\frac{1}{2}(6n - 4) = 3n - 2$. Fie p și q numărul arcelor de lungime 1, respectiv 3, conținute de $\widehat{AB}$. Atunci $\widehat{CD}$ conține p arce de lungime 3 și q arce de lungime 1. Fie r numărul arcelor de lungime 2 conținute de $\widehat{AB}$. Deoarece $\widehat{AB} + \widehat{CD}$ au împreună $n - 1$ arce de lungime 1 și $n - 1$ arce de lungime 3, obținem $p + q = n - 1$, de unde $3n - 2 = \widehat{AB} = p + 3q + 2r = n - 1 + 2(q + r)$, ceea ce conduce la $2n - 11 = 2(q + r)$ - imposibil **5p**

Olimpiada Națională de Matematică
Etapă Națională, 4 aprilie 2018
Clasa a X-a

Soluții și bareme orientative

Problema 1. Fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ și numerele $a_1, a_2, \dots, a_n \in (1, \infty)$. Demonstrați că funcția $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin relația

$$f(x) = (a_1 a_2 \dots a_n)^x - a_1^x - a_2^x - \dots - a_n^x,$$

pentru orice $x \in [0, \infty)$, este strict crescătoare.

Soluție și barem: Vom realiza demonstrația prin inducție matematică.

Pentru $n = 2$, fie $a_1, a_2 \in (1, \infty)$. Avem

$$f(x) = (a_1 a_2)^x - a_1^x - a_2^x = (a_1^x - 1)(a_2^x - 1) - 1.$$

Deoarece funcțiile $f_1, f_2 : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, definite prin relațiile $f_1(x) = a_1^x - 1$ și $f_2(x) = a_2^x - 1$, oricare ar fi $x \in [0, \infty)$, sunt strict crescătoare și pozitive, rezultă că f este strict crescătoare. **3p**

Presupunem proprietatea este adevărată pentru oricare n numere din $(1, \infty)$ și o demonstrăm pentru $n + 1$ numere $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1} \in (1, \infty)$. Avem

$$\begin{aligned} f(x) &= (a_1 a_2 \dots a_n a_{n+1})^x - a_1^x - a_2^x - \dots - a_n^x - a_{n+1}^x \\ &= ((a_1 a_2 \dots a_n a_{n+1})^x - (a_1 a_2 \dots a_n)^x - a_{n+1}^x) + ((a_1 a_2 \dots a_n)^x - a_1^x - a_2^x - \dots - a_n^x). \end{aligned}$$

Funcția $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = (a_1 a_2 \dots a_n a_{n+1})^x - (a_1 a_2 \dots a_n)^x - a_{n+1}^x$ este strict crescătoare deoarece $a_1 a_2 \dots a_n > 1$ și $a_{n+1} > 1$ (cazul $n = 2$).

Funcția $h : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = (a_1 a_2 \dots a_n)^x - a_1^x - a_2^x - \dots - a_n^x$ este strict crescătoare conform ipotezei de inducție. Atunci $f = g + h$ este strict crescătoare.

Rezultă că proprietatea din enunț este demonstrată. **4p**

Problema 2. Triunghiul ABC este înscris în cercul $\mathcal{C}(O, 1)$. Fie G_1, G_2, G_3 centrele de greutate ale triunghiurilor OBC, OAC și respectiv OAB . Demonstrați că triunghiul ABC este echilateral dacă și numai dacă $AG_1 + BG_2 + CG_3 = 4$.

Soluție și barem: Dacă triunghiul ABC este echilateral, avem $AG_1 = BG_2 = CG_3 = \frac{4}{3}$, de unde obținem $AG_1 + BG_2 + CG_3 = 4$ **1p**

Reciproc, considerăm planul complex ABC cu originea în O . Notăm cu p afixul unui punct P din planul complex considerat. Avem $g_1 = \frac{b+c}{3}, g_2 = \frac{c+a}{3}$ și $g_3 = \frac{a+b}{3}$ **1p**

Egalitatea $AG_1 + BG_2 + CG_3 = 4$ este echivalentă cu $\sum \left| a - \frac{b+c}{3} \right| = 4$, sau $\sum |3a - b - c| = 12$.

Fie H ortocentrul triunghiului ABC . Deoarece $h = a + b + c$, conform teoremei lui Sylvester, egalitatea precedentă este echivalentă cu $\sum |4a - h| = 12$ **2p**

Atunci

$$\begin{aligned} 144 &= \left(\sum |4a - h| \right)^2 \leq 3 \sum |4a - h|^2 = 3 \sum (16|a|^2 - 4a\bar{h} - 4\bar{a}h + |h|^2) \\ &= 144 - 12\bar{h} \sum a - 12h \sum \bar{a} + 3|h|^2 = 144 - 21|h|^2. \end{aligned}$$

Obținem $|h|^2 \leq 0$, deci $|h| = 0$. Rezultă $O = H$, deci triunghiul ABC este echilateral. **3p**

Problema 3. Fie $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$. Demonstrați că, pentru orice numere complexe $a_1, a_2, \dots, a_n$ și $b_1, b_2, \dots, b_n$, următoarele afirmații sunt echivalente:

a) $\sum_{k=1}^n |z - a_k|^2 \leq \sum_{k=1}^n |z - b_k|^2$, pentru orice $z \in \mathbb{C}$;

b) $\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n b_k$ și $\sum_{k=1}^n |a_k|^2 \leq \sum_{k=1}^n |b_k|^2$.

Soluție și barem: b) $\Rightarrow$ a) Avem

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |z - a_k|^2 &= n|z|^2 - z \sum_{k=1}^n \bar{a}_k - \bar{z} \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n |a_k|^2 \\ &\leq n|z|^2 - z \sum_{k=1}^n \bar{b}_k - \bar{z} \sum_{k=1}^n b_k + \sum_{k=1}^n |b_k|^2 \\ &= \sum_{k=1}^n |z - b_k|^2, \end{aligned}$$

pentru orice $z \in \mathbb{C}$ **1p**

a) $\Rightarrow$ b) Alegând $z = 0$, obținem $\sum_{k=1}^n |a_k|^2 \leq \sum_{k=1}^n |b_k|^2$ **1p**

Notăm $a = \sum_{k=1}^n a_k$ și $b = \sum_{k=1}^n b_k$. Presupunem, prin reducere la absurd, că $a \neq b$. Fie $z = (1 - t)a + tb$, unde $t \in \mathbb{R}$. Atunci

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |z - a_k|^2 &= n|z|^2 - z \sum_{k=1}^n \bar{a}_k - \bar{z} \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n |a_k|^2 \\ &= (n - 1)|z|^2 + |z|^2 - z\bar{a} - \bar{z}a + |a|^2 + \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^2 - |a|^2 \right) \\ &= (n - 1)|z|^2 + |z - a|^2 + \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^2 - |a|^2 \right) \\ &= (n - 1)|z|^2 + t^2|b - a|^2 + \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^2 - |a|^2 \right). \end{aligned}$$

Analog avem $\sum_{k=1}^n |z - b_k|^2 = (n - 1)|z|^2 + (1 - t)^2|b - a|^2 + \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^2 - |b|^2 \right)$ **2p**

Atunci

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^n |z - a_k|^2 - \sum_{k=1}^n |z - b_k|^2 \\ &= 2t|b - a|^2 + \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^2 - |a|^2 \right) - \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^2 - |b|^2 \right) - |b - a|^2. \end{aligned}$$

Pentru

$$t > \frac{|b-a|^2 + \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^2 - |b|^2\right) - \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^2 - |a|^2\right)}{2|b-a|^2},$$

este contrazisă ipoteza. Atunci $a = b$ **3p**

Problema 4. Fie $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$. Pentru numerele reale $a_1, a_2, \dots, a_n$, notăm $S_0 = 1$ și

$$S_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k},$$

suma tuturor produselor de câte k numere alese dintre $a_1, a_2, \dots, a_n$, $k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Determinați numărul n -uplurilor $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ pentru care are loc relația:

$$(S_n - S_{n-2} + S_{n-4} - \dots)^2 + (S_{n-1} - S_{n-3} + S_{n-5} - \dots)^2 = 2^n S_n.$$

Soluție și barem: Are loc identitatea

$$\prod_{k=1}^n (a_k + i) = (S_n - S_{n-2} + S_{n-4} - \dots) + i(S_{n-1} - S_{n-3} + S_{n-5} - \dots).$$

..... **1p**

Rezultă

$$\begin{aligned} & (S_n - S_{n-2} + S_{n-4} - \dots)^2 + (S_{n-1} - S_{n-3} + S_{n-5} - \dots)^2 \\ &= \left| \prod_{k=1}^n (a_k + i) \right|^2 = \prod_{k=1}^n |a_k + i|^2 = \prod_{k=1}^n (a_k^2 + 1). \end{aligned}$$

Relația din enunț este echivalentă cu

$$\prod_{k=1}^n (a_k^2 + 1) = 2^n a_1 a_2 \dots a_n.$$

..... **2p**

Din inegalitățile $a_k^2 + 1 \geq 2|a_k|$, pentru orice $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, rezultă că egalitatea în relația din enunț are loc dacă și numai dacă $|a_1| = |a_2| = \dots = |a_n| = 1$, iar numărul de valori egale cu -1 este par. **2p**

Prin urmare, numărul n -uplurilor $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ pentru care are loc relația din enunț este

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots = 2^{n-1}.$$

..... **2p**

Olimpiada Națională de Matematică
Etapă Finală, 4 aprilie 2018

CLASA a XI-a

Soluții și barem orientativ

Problema 1. Pentru orice număr natural nenul n și orice matrice coloană

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{Z}),$$

notăm cu $\delta(\mathbf{X})$ cel mai mare divizor comun al numerelor $x_1, x_2, \dots, x_n$. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, și $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Arătați că următoarele două afirmații sunt echivalente:

- (a) $|\det \mathbf{A}| = 1$ și
 (b) $\delta(\mathbf{AX}) = \delta(\mathbf{X})$, oricare ar fi $\mathbf{X} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{Z})$.

(Cel mai mare divizor comun al unor numere întregi este număr natural.)

Soluție. Arătăm că (a) implică (b). Fie $\mathbf{B} = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, fie $\mathbf{X} = (x_j) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{Z})$ și fie $\mathbf{BX} = (y_i) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{Z})$. Cum $y_i = \sum_{j=1}^n b_{ij}x_j$, $i = 1, 2, \dots, n$, rezultă că $\delta(\mathbf{X})$ divide fiecare y_i , deci $\delta(\mathbf{X}) \leq \delta(\mathbf{BX})$ **2p**

Cum $\mathbf{A}$ este inversabilă în $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, rezultă că $\delta(\mathbf{X}) \leq \delta(\mathbf{AX}) \leq \delta(\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{AX})) = \delta(\mathbf{X})$, oricare ar fi $\mathbf{X}$ din $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{Z})$ **1p**

Arătăm că (b) implică (a). Fie $d = \det \mathbf{A}$. Dacă $d = 0$, atunci sistemul omogen $\mathbf{AX} = \mathbf{O}_{n,1}$ are soluții nenule în $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{Q})$ și, prin înmulțirea uneia dintre aceste soluții cu produsul numitorilor componentelor sale nenule, obținem un $\mathbf{X} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{Z})$, $\mathbf{X} \neq \mathbf{O}_{n,1}$, astfel încât $\mathbf{AX} = \mathbf{O}_{n,1}$. Deci $0 < \delta(\mathbf{X}) = \delta(\mathbf{AX}) = \delta(\mathbf{O}_{n,1}) = 0$, o contradicție. Prin urmare, $d \neq 0$ **1p**

Fie $\mathbf{X}_i$ coloana i a matricei $\mathbf{A}^*$, $i = 1, 2, \dots, n$. Cum matricea coloană $\mathbf{AX}_i$ are toate componentele nule, cu excepția componentei i , care este egală cu d , rezultă că $d = \delta(\mathbf{AX}_i) = \delta(\mathbf{X}_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, deci toate elementele lui $\mathbf{A}^*$ sunt divizibile cu d . Prin urmare, $\det \mathbf{A}^*$ este divizibil cu d^n . Cum $\det \mathbf{A}^* = d^{n-1}$ și $d \neq 0$, rezultă că $d = \pm 1$ **3p**

Remarcă. O matrice pătrată cu elemente întregi și determinant ± 1 se numește *unimodulară*. Evident, produsul a două matrice unimodulare este unimodular și orice matrice unimodulară este inversabilă, iar inversa ei este și ea unimodulară. Prima parte a soluției 1 arată că singura dificultate constă în a deduce unimodularitatea lui $\mathbf{A}$ din condiția $\delta(\mathbf{AX}) = \delta(\mathbf{X})$, oricare ar fi $\mathbf{X}$ din $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{Z})$.

Conform unei teoreme a lui Frobenius, pentru orice matrice $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Z})$, există un număr natural $r \leq \min(m, n)$ și două matrice unimodulare $\mathbf{P}$ și $\mathbf{Q}$, astfel încât $\mathbf{PAQ} = \text{diag}(d_1, \dots, d_r, 0, \dots, 0)$, unde toți d_i sunt numere naturale și fiecare d_i îl divide pe d_{i+1} .

Fie $m = n$ și fie $\delta(\mathbf{AX}) = \delta(\mathbf{X})$ oricare ar fi $\mathbf{X}$ în $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{Z})$. Unimodularitatea lui $\mathbf{Q}$ implică $\delta(\mathbf{X}) = \delta(\mathbf{QX})$; prin ipoteză, $\delta(\mathbf{QX}) = \delta(\mathbf{AQX})$, iar unimodularitatea lui

$\mathbf{P}$ implică $\delta(\mathbf{A}\mathbf{Q}\mathbf{X}) = \delta(\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{Q}\mathbf{X})$. Deci $\delta(\mathbf{X}) = \delta(\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{Q}\mathbf{X})$, oricare ar fi $\mathbf{X}$ în $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{Z})$. Întrucât $\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{Q}$ are forma diagonală de mai sus, rezultă că $r = n$ și toți $d_i = 1$, deci $\mathbf{A} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q}^{-1}$ este unimodulară.

Problema 2. Arătați că $2^{-x} + 2^{-1/x} \leq 1$, oricare ar fi numărul real $x > 0$.

Soluție. Fie $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2^{-x} + 2^{-1/x}$. Cum $f(x) = f(1/x)$, este suficient să arătăm că $f(x) \leq 1$, oricare ar fi $x \in (0, 1]$ **1p**

Cum f este derivabilă și $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 = f(1)$, pentru a demonstra inegalitatea din enunț, este suficient să arătăm că valoarea lui f în orice zero al derivatei f' din $(0, 1)$ este cel mult 1. **2p**

Fie $a \in (0, 1)$, astfel încât $f'(a) = 0$. Rezultă că $2^{-1/a}/a^2 = 2^{-a}$, deci $2^{-1/a} = 2^{-a}a^2$. Cum $f(a) = 2^{-a} + 2^{-1/a} = 2^{-a}(1 + a^2)$, inegalitatea $f(a) \leq 1$ este echivalentă cu $1 \leq 2^a - a^2$ **2p**

Fie $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 2^x - x^2$. Cum g este de două ori derivabilă și $g''(x) = 2^x(\ln 2)^2 - 2 \leq 2((\ln 2)^2 - 1) \leq 0$, oricare ar fi x în $[0, 1]$, rezultă că g este concavă, deci $g(x) = g((1-x) \cdot 0 + x \cdot 1) \geq (1-x)g(0) + xg(1) = 1$ **2p**

Problema 3. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție care are proprietatea lui Darboux. Arătați că, dacă f este injectivă pe mulțimea numerelor iraționale, atunci f este continuă pe $\mathbb{R}$.

Soluție. Vom arăta că f este injectivă pe $\mathbb{R}$. Atunci, cum f are proprietatea lui Darboux, f este (strict) monotonă și, prin urmare, continuă. **1p**

Presupunem că f nu este injectivă. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, astfel încât $f(a) = f(b)$. Cum în intervalul (a, b) există cel puțin două numere iraționale, iar f este injectivă pe mulțimea numerelor iraționale, există $c \in (a, b)$, astfel încât $f(c) \neq f(a)$. Fără să restrângem generalitatea, putem presupune că $f(c) > f(a)$.

Fie $A = (a, b) \cap \mathbb{Q}$. Cum A este numărabilă, rezultă că $f(A)$ este cel mult numărabilă, și cum $(f(a), f(c))$ este nenumerabilă, rezultă că $(f(a), f(c)) \setminus f(A)$ este nevidă. ... **4p**

Fie $d \in (f(a), f(c)) \setminus f(A)$. Cum f are proprietatea lui Darboux, există $x_1 \in (a, c)$ și $x_2 \in (c, b)$, astfel încât $f(x_1) = d = f(x_2)$. Din alegerea lui d , rezultă că x_1 și x_2 sunt iraționale, ceea ce contrazice injectivitatea lui f pe mulțimea numerelor iraționale. .. **2p**

Problema 4. Fie n un număr întreg, $n \geq 2$, și fie $\mathbf{A}$ o matrice din $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, astfel încât $\mathbf{A}$ și $\mathbf{A}^2$ să aibă ranguri diferite. Arătați că există o matrice nenulă $\mathbf{B}$ în $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, astfel încât $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{B}^2 = \mathbf{O}_n$.

Soluție. Întrucât $\mathbf{A}$ și $\mathbf{A}^2$ au ranguri diferite, $\mathbf{A}$ este o matrice singulară nenulă.

Dacă $n = 2$, atunci $\mathbf{A}^2 = (\text{tr} \mathbf{A})\mathbf{A}$, conform teoremei Hamilton-Cayley. Deoarece $\mathbf{A}$ și $\mathbf{A}^2$ au ranguri diferite, rezultă că $\text{tr} \mathbf{A} = 0$, deci $\mathbf{A}^2 = \mathbf{O}_2$ și putem lua $\mathbf{B} = \mathbf{A}$ **1p**

Fie $n \geq 3$. Întrucât $\mathbf{A}$ este singulară, 0 este o valoare proprie a lui $\mathbf{A}$.

Dacă toate valorile proprii ale lui $\mathbf{A}$ sunt nule, atunci $\mathbf{A}$ este nilpotentă, și putem lua $\mathbf{B} = \mathbf{A}^k$, unde k este cel mai mare număr întreg pentru care $\mathbf{A}^k$ este nenulă. **1p**

Dacă $\mathbf{A}$ are și valori proprii nenule, fie $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, unde $1 \leq m \leq n-1$, valorile sale proprii nenule (nu neapărat distincte) și fie

$$f = X \prod_{i=1}^m (X - \lambda_i) = X^{m+1} + a_m X^m + \dots + a_1 X,$$

unde $a_1 = (-1)^m \lambda_1 \dots \lambda_m \neq 0$. Atunci $f(\mathbf{A}) \neq \mathbf{O}_n$, deoarece, în caz contrar, $\text{rang } \mathbf{A} = \text{rang } (-a_1 \mathbf{A}) = \text{rang } (a_2 \mathbf{A}^2 + \dots + \mathbf{A}^{m+1}) \leq \text{rang } \mathbf{A}^2 < \text{rang } \mathbf{A}$, contradicție. **2p**

Fie $f_{\mathbf{A}}$ polinomul caracteristic al lui $\mathbf{A}$. Conform teoremei Hamilton-Cayley, $f_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = \mathbf{O}_n$. Cum f este un factor al lui $f_{\mathbf{A}}$ și $f(\mathbf{A}) \neq \mathbf{O}_n$, rezultă că $n = \deg f_{\mathbf{A}} > \deg f = m+1$.

Deci $\mathbf{A} \prod_{i=1}^m (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}_n) = f(\mathbf{A}) \neq \mathbf{O}_n$ și $\mathbf{A}^{n-m} \prod_{i=1}^m (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}_n) = f_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = \mathbf{O}_n$. Prin urmare, există un număr natural nenul $k < n-m$, astfel încât $\mathbf{A}^k \prod_{i=1}^m (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}_n) \neq \mathbf{O}_n$ și $\mathbf{A}^{k+1} \prod_{i=1}^m (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}_n) = \mathbf{O}_n$. Evident, $\mathbf{B} = \mathbf{A}^k \prod_{i=1}^m (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}_n)$ îndeplinește condițiile cerute în enunțul problemei. **3p**

Remarcă. Întrucât $\mathbf{A}$ și $\mathbf{A}^2$ au ranguri diferite, există o celulă Jordan de dimensiune cel puțin 2 corespunzătoare valorii proprii 0. Prin urmare, polinomul minimal g al lui $\mathbf{A}$ are în 0 o rădăcină de multiplicitate cel puțin 2, deci $g = X^{k+1}h$, unde k este un număr natural nenul, iar h este un polinom care nu se anulează în 0. Atunci $\mathbf{B} = \mathbf{A}^k h(\mathbf{A})$ este nenul și $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{B}^2 = \mathbf{O}_n$.

Fie $n \geq 3$. Dacă $\mathbf{A}$ și $\mathbf{A}^2$ au același rang, existența unei matrice nenule $\mathbf{B}$, astfel încât $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{B}^2 = \mathbf{O}_n$, este condiționată de multiplicitatea valorii proprii 0 în polinomul caracteristic al lui $\mathbf{A}$.

De exemplu, dacă $\mathbf{A} = \text{diag}(0, a_1, \dots, a_{n-1})$, unde $a_1, \dots, a_{n-1}$ sunt numere complexe nenule, distincte două câte două, atunci $\mathbf{A}$ și $\mathbf{A}^2$ au rangul $n-1$. În acest caz, polinomul caracteristic al lui $\mathbf{A}$ are o rădăcină simplă în 0. Întrucât singurele matrice din $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, care comută cu $\mathbf{A}$, sunt cele diagonale, rezultă că nu există matrice nenule $\mathbf{B}$ în $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, astfel încât $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{B}^2 = \mathbf{O}_n$.

Pe de altă parte,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{O}_2 & \mathbf{O}_{2,n-2} \\ \mathbf{O}_{n-2,2} & \mathbf{I}_{n-2} \end{pmatrix}$$

este o matrice idempotentă, $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$, de rang $n-2$ și orice matrice $\mathbf{B} = (b_{ij})$ din $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, al cărei unic element nenul este b_{12} , satisface condiția $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{B}^2 = \mathbf{O}_n$. În acest caz, polinomul caracteristic al lui $\mathbf{A}$ are o rădăcină dublă în 0.

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Națională, Satu Mare, 4 aprilie 2018

CLASA a XII-a - Soluții și barem

1. Fie A un inel finit și $a, b \in A$ cu proprietatea că $(ab - 1)b = 0$. Arătați că $b(ab - 1) = 0$.

Soluție:

Egalitatea din ipoteză este echivalentă cu $ab^2 = b$, iar cea de demonstrat cu $bab = b$.

Dacă elementul b este idempotent (i.e., $b^2 = b$), atunci $bab = bab^2 = b \cdot b = b^2 = b$.

Dacă $b^m = b$, cu $m > 2$, atunci $bab = bab^m = bab^2b^{m-2} = b \cdot b \cdot b^{m-2} = b^m = b$.

..... **2p**

Este suficient să arătăm că există $m \geq 2$ cu proprietatea că $b^m = b$ **1p**

Inelul A fiind finit, există $1 \leq k < m$ numere naturale, cu k minim, cu proprietatea că $b^k = b^m$ **1p**

Arătăm că $k = 1$.

Dacă $k > 1$, atunci $ab^k = ab^m = ab^2b^{m-2} = b^{m-1}$ **1p**

Dacă $k = 2$, rezultă că $b = ab^2 = b^{m-1}$, contrazicând minimalitatea. **1p**

Dacă $k > 2$, atunci $b^{k-1} = b \cdot b^{k-2} = ab^2b^{k-2} = ab^k = b^{m-1}$, contrazicând de asemenea minimalitatea. **1p**

Observație: Nu se acordă puncte pentru discutarea cazului unui inel comutativ.

2. Fie $\mathcal{F}$ mulțimea funcțiilor continue $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care satisfac condiția

$$e^{f(x)} + f(x) \geq x + 1,$$

pentru orice x număr real. Determinați valoarea minimă pe care o poate lua integrala

$$I(f) = \int_0^e f(x) dx,$$

atunci când f parcurge $\mathcal{F}$.

Soluție:

Vom arăta că valoarea minimă este $\frac{3}{2}$.

Considerăm funcția $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = e^x + x - 1$.

Aceasta este strict crescătoare și continuă, cu $Im(g) = \mathbb{R}$, deci inversabilă, **1p**

cu inversa de asemenea continuă și strict crescătoare. **1p**

Inegalitatea din enunț se scrie sub forma $g(f(x)) \geq x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, de unde

$f(x) \geq g^{-1}(x), \forall x \in \mathbb{R}$ **1p**

Cum $g^{-1} \in \mathcal{F}$, și $I(f) \geq I(g^{-1}), \forall f \in \mathcal{F}$, valoarea minimă este $I(g^{-1})$ **2p**

Cu substituția $t = g^{-1}(x)$, avem

$$I(g^{-1}) = \int_0^e g^{-1}(x) dx = \int_0^1 t g'(t) dt = \left((t-1)e^t + \frac{t^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{3}{2}.$$

..... **2p**

Observație: Ultimul calcul reface demonstrația teoremei lui Young, care se poate de asemenea invoca pentru obținerea concluziei.

3. Fie $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcție integrabilă, iar $(a_n)_{n \geq 1}$ un șir de numere reale strict pozitive cu proprietatea că $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

a) Dacă $A = \{m \cdot a_n \mid m, n \in \mathbb{N}^*\}$, arătați că orice interval deschis de numere strict pozitive conține elemente din A .

b) Dacă pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ și orice $x, y \in [a, b]$ cu $|x - y| = a_n$ are loc inegalitatea

$$\left| \int_x^y f(t) dt \right| \leq |x - y|, \text{ arătați că:}$$

$$\left| \int_x^y f(t) dt \right| \leq |x - y|, \quad \forall x, y \in [a, b].$$

Soluție:

a) Deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, pentru orice $c, d > 0$, cu $c < d$, există $n \in \mathbb{N}^*$ cu $a_n < d - c$.

Pentru $m = \left\lfloor \frac{c}{a_n} \right\rfloor + 1$ rezultă atunci că $m \cdot a_n \in (c, d) \cap A$ **1p**

b) Funcția f fiind integrabilă, este marginită. Fie $M > 0$, cu $Im(f) \subseteq [-M, M]$.

Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$ fixate și $x, y \in [a, b]$ cu $|x - y| = m \cdot a_n$. Arătăm că

$$\left| \int_x^y f(t) dt \right| \leq |x - y|.$$

Definim, pentru $k = \overline{0, m}$, numerele $z_k \in [a, b]$ prin

$$z_k = x + \frac{k}{m} \cdot (y - x) = \left(1 - \frac{k}{m}\right) \cdot x + \frac{k}{m} \cdot y.$$

Rezultă că $|z_k - z_{k-1}| = a_n$, pentru orice $k = \overline{1, m}$, și

$$\left| \int_x^y f(t) dt \right| = \left| \int_{z_0}^{z_m} f(t) dt \right| = \left| \sum_{k=1}^m \int_{z_{k-1}}^{z_k} f(t) dt \right| \leq \sum_{k=1}^m \left| \int_{z_{k-1}}^{z_k} f(t) dt \right| \leq \sum_{k=1}^m |z_k - z_{k-1}| = |x - y|.$$

..... **2p**

Fie acum $x, y \in [a, b]$ oarecare și $d = |x - y|$. Pentru $d = 0$, inegalitatea cerută este evidentă. Presupunem în continuare $d > 0$. Cum A este densă în $[0, \infty)$, există un șir $(d_n)_{n \geq 1} \subset A$ cu proprietatea că $d_n \nearrow d$. Considerăm

$$y_n = x + \frac{d_n}{d} \cdot (y - x) = \left(1 - \frac{d_n}{d}\right) \cdot x + \frac{d_n}{d} \cdot y.$$

Atunci $y_n \in [a, b]$, $|y_n - x| \in A$ și $y_n \rightarrow y$ **2p**

Rezultă că

$$\left| \int_{y_n}^y f(t) dt \right| \leq M \cdot |y - y_n| \rightarrow 0.$$

..... **1p**

Obținem atunci că

$$\left| \int_x^y f(t) dt \right| = \left| \int_x^{y_n} f(t) dt + \int_{y_n}^y f(t) dt \right| \leq \left| \int_x^{y_n} f(t) dt \right| + \left| \int_{y_n}^y f(t) dt \right| \leq |x - y_n| + \left| \int_{y_n}^y f(t) dt \right|.$$

Trecând la limită în ultima inegalitate, obținem inegalitatea cerută.

..... **1p**

4. Pentru $k \in \mathbb{Z}$ definim polinomul $F_k = X^4 + 2(1 - k)X^2 + (1 + k)^2$. Să se determine toate valorile $k \in \mathbb{Z}$, astfel încât F_k să fie ireductibil peste $\mathbb{Z}$ și reductibil peste $\mathbb{Z}_p$ pentru orice p prim.

Soluție:

Vom arăta că numerele care satisfac condiția cerută sunt toate numerele $k \in \mathbb{Z}$ care nu sunt de forma $\pm l^2$, cu $l \in \mathbb{Z}$.

Arătăm că F_k este reductibil peste $\mathbb{Z}$ dacă și numai dacă F_k se descompune ca produs de două polinoame monice de grad 2.

Într-adevăr, dacă F_k are o rădăcină întreagă m , atunci

a) dacă $m = 0$, atunci $k = -1$, și $F_{-1} = X^2(X^2 + 4)$.

b) dacă $m \neq 0$, atunci $-m$ este de asemenea rădăcină, și $X^2 - m^2$ divide F_k .

..... **1p**

Deci F_k este reductibil peste $\mathbb{Z}$ dacă și numai dacă $F_k = (X^2 + aX + b)(X^2 + cX + d)$, cu $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Prin identificarea coeficienților, avem că $a + c = 0$, $ac + b + d = 2(1 - k)$, $ad + bc = 0$ și $bd = (1 + k)^2$.

Dacă $a = 0$, atunci $c = 0$, $b + d = 2(1 - k)$, $bd = (1 + k)^2$, de unde obținem $(b - d)^2 = 4(1 - k)^2 - 4(1 + k)^2 = -16k$, astfel că $k = -l^2$, cu $l \in \mathbb{Z}$.

Dacă $a \neq 0$, atunci $c = -a$, $b = d$, $b^2 = (1 + k)^2$, $2b - a^2 = 2(1 - k)$.

Dacă $b = -1 - k$, rezultă $a^2 = -4$, imposibil. Deci $b = 1 + k$ și $a^2 = 4k$, de unde $k = l^2$, cu $l \in \mathbb{Z}$.

Prin urmare, F_k este reductibil peste $\mathbb{Z}$ dacă și numai dacă $k = \pm l^2$, cu $l \in \mathbb{Z}$ **2p**

Arătăm că F_k este reductibil peste $\mathbb{Z}_p$ cu p prim, pentru orice $k \in \mathbb{Z}$.

Pentru $p = 2$ avem că $F_k = X^4$ sau $F_k = X^4 + \hat{1} = (X + \hat{1})^4$, deci F_k este reductibil. . **1p**

Fie p număr prim impar. Putem presupune că $k \not\equiv 0 \pmod{p}$ și $k \not\equiv -1 \pmod{p}$.

Ca mai sus, F_k este reductibil peste $\mathbb{Z}_p$ dacă și numai dacă $F_k = (X^2 + \hat{a}X + \hat{b})(X^2 + \hat{c}X + \hat{d})$, cu $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, care verifică condițiile $a + c \equiv 0 \pmod{p}$, $ac + b + d \equiv 2(1 - k) \pmod{p}$, $ad + bc \equiv 0 \pmod{p}$ și $bd \equiv (1 + k)^2 \pmod{p}$.

Dacă $a \equiv 0 \pmod{p}$, avem că $c \equiv 0 \pmod{p}$ și $(b - d)^2 \equiv -16k \pmod{p}$. **(1)**

Dacă $a \not\equiv 0 \pmod{p}$, atunci $c \equiv -a \pmod{p}$, $b \equiv d \pmod{p}$, $b^2 \equiv (1 + k)^2 \pmod{p}$ și $2b - a^2 \equiv 2(1 - k) \pmod{p}$.

Pentru $b \equiv -1 - k \pmod{p}$ avem că $a^2 \equiv -4 \pmod{p}$. **(2)**

Pentru $b \equiv 1 + k \pmod{p}$ avem că $a^2 \equiv 4k \pmod{p}$. **(3)**

..... **1p**

Cum $-16k = -4 \cdot 4k$, cel puțin unul dintre elementele $\widehat{-16k}$, $\widehat{-4}$ și $\widehat{4k}$ este rest pătratic modulo p , astfel că cel puțin una dintre ecuațiile (1), (2) sau (3) are soluții..... **1p**

Cum $F_k = (X^2 + (1 - k))^2 - (-16k) = (X^2 - (1 + k))^2 - (-4)X^2 = (X^2 + (1 + k)) - (4k)X^2$, rezultă că F_k este reductibil peste $\mathbb{Z}_p$, pentru orice $k \in \mathbb{Z}$ **1p**



MINISTERUL
EDUCAȚIEI
NAȚIONALE



INSPECTORATUL
ȘCOLAR
JUDEȚEAN
HUNEDOARA



Societatea
de Științe
Matematice
din România

Olimpiada Națională de Matematică Etapa Națională, Hunedoara, 23 aprilie, 2019

CLASA a V-a, Subiecte

Problema 1. Determinați numerele de trei cifre $\overline{abc}$ al căror pătrat are cifra sutelor a , cifra zecilor b și cifra unităților c .

Problema 2. Fie $n \geq 2$ un număr natural. Care este numărul maxim $m \leq n$ (m depinde de n), pentru care putem alege m numere dintre $1, 2, \dots, n$ cu proprietatea că pentru oricare două dintre acestea, a, b , cu $a > b$, numărul $a - b$ nu divide numărul $a + b$?

Problema 3. Pentru fiecare număr natural $n \geq 2$, notăm cu $s(n)$ numărul de perechi (x, y) de numere naturale, alese dintre $1, 2, \dots, n$, cu $x > y$, astfel încât x și y să aibă exact $x - y$ divizori comuni.

a) Există n astfel încât $s(n) = 2019$?

b) Există n astfel încât $s(n) = 2020$?

Justificați răspunsurile.

Problema 4. Numerele naturale de la 1 la 49 sunt așezate la întâmplare, câte unul în fiecare căsuță a unei table de șah 7×7 . Arătați că există un pătrat 2×2 al tablei, format din patru căsuțe vecine, astfel încât suma celor patru numere din interior să fie cel puțin 81.

*Timp de lucru 2 ore. Se adaugă 60 de minute pentru întrebări.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.*

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Națională, Hunedoara, 23 aprilie, 2019

CLASA a V-a, Soluții și Baremuri

Problema 1. Determinați numerele de trei cifre $\overline{abc}$ al căror pătrat are cifra sutelor a , cifra zecilor b și cifra unităților c .

Soluție și barem. Fie $n = \overline{abc}$. Avem $n^2 = M \cdot 1000 + n \dots \dots \dots$ 1 punct
Rezultă $n(n-1) = M \cdot 1000$ deci $n(n-1)$ este divizibil cu 2^3 și cu 5^3 . Cum numerele n și $n-1$ sunt relativ prime, atunci n sau $n-1$ se divide cu 5^3 , respectiv n sau $n-1$ se divide cu $2^3 \dots \dots \dots$ 3 puncte

Din divizibilitatea cu 125, n poate fi unul dintre numerele 125, 126, 250, 251, 375, 376, 500, 501, 625, 626, 750, 751, 875, 876. În fiecare caz n sau $n-1$ trebuie să se dividă cu 8. Prin verificare rămân doar soluțiile 376 și 625. $\dots \dots \dots$ 3 puncte

Problema 2. Fie $n \geq 2$ un număr natural. Care este numărul maxim $m \leq n$ (m depinde de n), pentru care putem alege m numere dintre $1, 2, \dots, n$ cu proprietatea că pentru oricare două dintre acestea, a, b , cu $a > b$, numărul $a-b$ nu divide numărul $a+b$?

Soluție și barem. Să notăm cu A o astfel de familie de numere, alese dintre $1, 2, \dots, n$. Pentru $a > b$ din A , deducem că $a-b$ nu poate fi 1 sau 2. Altfel 1 ar divide $a+b$, respectiv 2 ar divide $a+b = 2 + 2 + 2b \dots \dots \dots$ 2p

Rezultă că diferența minimă dintre două numere consecutive din A este 3. În plus, dacă $a-b = 3k$ și b nu se divide cu 3, atunci $a+b = 2b + 3k$ nu se divide cu $a-b \dots \dots \dots$ 2p

În funcție de restul împărțirii lui n la 3, vom avea următoarele secvențe de numere din $1, 2, \dots, n$, cu număr maxim de elemente:

Dacă $n = 3k$, A cu număr maxim poate fi $1, 4, 7, \dots, 3k-2$ deci $m = k \dots \dots \dots$ 1p

Dacă $n = 3k+1$, A poate fi $1, 4, \dots, 3k-2, 3k+1$ deci $m = k+1 \dots \dots \dots$ 1p

Dacă $n = 3k+2$ o astfel de mulțime este $1, 4, 7, \dots, 3k-2, 3k+1$ deci $m = k+1$ 1p

Problema 3. Pentru fiecare număr natural $n \geq 2$, notăm cu $s(n)$ numărul de perechi (x, y) de numere naturale, alese dintre $1, 2, \dots, n$, cu $x > y$, astfel încât x și y să aibă exact $x-y$ divizori comuni.

a) Există n astfel încât $s(n) = 2019$?

b) Există n astfel încât $s(n) = 2020$?

Justificați răspunsurile.

Soluție și barem. Observăm că dacă $d|y$ și $d|x$ atunci $d|x-y \dots \dots \dots$ 1p

Prin urmare dacă (x, y) , $x > y$, este o pereche cu proprietatea din enunț, atunci $x-y$ are exact $x-y$ divizori, deci toate numerele $1, 2, \dots, x-y$. Dacă $x-y = 1$ atunci x și y au un singur divizor, adică 1 $\dots \dots \dots$ 1p

Altfel $x-y \geq 2$, deci $x-y-1 \geq 1$, iar $x-y-1|x-y$ implică $x-y-1 = 1$, adică $x-y = 2$. Prin urmare x și y au aceeași paritate. Pentru ca x și y să aibă în comun 2 divizori, ele nu pot fi impare, deci sunt ambele pare. Așadar perechile de acest tip sunt de forma $(y+1, y)$ și $(2y+2, 2y)$, cu y natural nenul $\dots \dots \dots$ 2p

Rezultă că pentru $n = 2k$, k număr natural, avem $s(n) = (2k - 1) + (k - 1) = 3k - 2$, iar dacă $n = 2k + 1$, $k \geq 1$ avem $s(n) = 2k + (k - 1) = 3k - 1$. Cum $s(n)$ nu poate fi multiplu de 3, răspunsul la a) este nu. **2p**

Cum $2020 = 3 \cdot 674 - 2$ obținem că $s(1348) = 3 \cdot 674 - 2 = 2020$, așadar „da” pentru b)..... **1p**

Problema 4. Numerele naturale de la 1 la 49 sunt așezate la întâmplare, câte unul în fiecare căsuță a unei table de șah 7×7 . Arătați că există un pătrat 2×2 al tablei, format din patru căsuțe vecine, astfel încât suma celor patru numere din interior să fie cel puțin 81.

Soluție și barem. Există 6×6 pătrate de tipul celor din enunț. **1p**

Fie $s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_{36}$, sumele numerelor scrise în interiorul acestora. Deducem că $s = s_1 + s_2 + \dots + s_{36} \leq 36s_{36}$ **1p**

Pe de altă parte, în suma de mai sus, pătrățelele din colțuri sunt numărate o dată, cele de pe margini, dar nu în colțuri, de două ori, iar celelalte de patru ori. Avem deci $s \geq 49 + 48 + 47 + 46 + 2(45 + \dots + 26) + 4(25 + 24 + \dots + 1)$ **3p**

Calculând sumele, deducem $s \geq 2910$. Așadar $36s_{36} \geq 2910$, deci $s_{36} \geq \frac{2910}{36} > 80,8$ și, cum s_{36} e întreg, rezultă $s_{36} \geq 81$ **2p**



Olimpiada Națională de Matematică

Etapa națională, Hunedoara, 23 aprilie 2019

CLASA a VI-a – subiecte

Problema 1. Se consideră un număr rațional r și numerele naturale $a_1, a_2, \dots, a_6, b_1, b_2, \dots, b_6$ astfel încât $1 \leq b_1 < b_2 < \dots < b_6 \leq 11$ și

$$r = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \frac{a_4}{b_4} = \frac{a_5}{b_5} = \frac{a_6}{b_6}.$$

Arătați că r este număr întreg.

Problema 2. Determinați toate perechile (a, b) de numere naturale pentru care fracțiile

$$\frac{3a + 8b + 2}{10a + 2b + 1} \quad \text{și} \quad \frac{8a + b + 3}{2a + 7b + 3}$$

reprezintă, simultan, numere naturale.

Problema 3. Determinați cel mai mare număr natural n pentru care este îndeplinită condiția

există n semidrepte distincte două câte două, cu aceeași origine, astfel încât măsura oricărui unghi format de aceste semidrepte este un număr natural care nu este prim.

Problema 4. În interiorul unghiului propriu $\widehat{AOD}$ considerăm punctele B și C astfel încât $OA = OB$, $OD = OC$, segmentele AC și BD se intersectează în punctul P , iar semidreapta $(PO$ este bisectoarea unghiului $\widehat{APD}$. Arătați că unghiurile $\widehat{AOB}$ și $\widehat{COD}$ sunt congruente.

*Timp de lucru 2 ore. Se adaugă 60 de minute pentru întrebări.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.*

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa națională, Hunedoara, 23 aprilie 2019

CLASA a VI-a – soluții

Problema 1. Se consideră un număr rațional r și numerele naturale $a_1, a_2, \dots, a_6, b_1, b_2, \dots, b_6$ astfel încât $1 \leq b_1 < b_2 < \dots < b_6 \leq 11$ și

$$r = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \frac{a_4}{b_4} = \frac{a_5}{b_5} = \frac{a_6}{b_6}.$$

Arătați că r este număr întreg.

Soluție. Dacă $b_1 = 1$, atunci $r = a_1 \in \mathbb{N}$ **2p**

În caz contrar, printre cele 6 numere naturale distincte $b_1, b_2, \dots, b_6$, făcând parte din mulțimea $\{2, 3, 4, \dots, 11\}$, există două consecutive **2p**

În acest caz, din $b_{i+1} = 1 + b_i$ rezultă $r = \frac{a_i}{b_i} = \frac{a_{i+1}}{b_{i+1}} = \frac{a_{i+1} - a_i}{b_{i+1} - b_i} \in \mathbb{N}$ **3p**

Problema 2. Determinați toate perechile (a, b) de numere naturale pentru care fracțiile

$$\frac{3a + 8b + 2}{10a + 2b + 1} \quad \text{și} \quad \frac{8a + b + 3}{2a + 7b + 3}$$

reprezintă, simultan, numere naturale.

Soluție. Pentru ca ambele fracții să fie, simultan, numere naturale este necesar ca $3a + 8b + 2 \geq 10a + 2b + 1$ și $8a + b + 3 \geq 2a + 7b + 3$, de unde, prin adunare, $11a + 9b + 5 \geq 12a + 9b + 4$, ceea ce implică $a \in \{0, 1\}$ **2p**

Pentru $a = 0$ a doua fracție este $\frac{b+3}{7b+3}$; pentru ca ea să fie număr natural trebuie ca $b \geq 7b$, deci $b = 0$, caz în care și prima fracție este număr natural **2p**

Pentru $a = 1$ a doua fracție este $\frac{b+11}{7b+5}$; pentru ca ea să fie număr natural trebuie ca $b + 11 \geq 7b + 5$, deci $b \in \{0, 1\}$ și convine doar $b = 1$, caz în care și prima fracție este număr natural **2p**

Așadar, perechile cerute sunt $a = 0, b = 0$ și $a = 1, b = 1$ **1p**

Problema 3. Determinați cel mai mare număr natural n pentru care este îndeplinită condiția

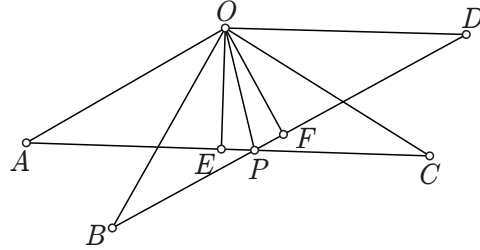
există n semidrepte distincte două câte două, cu aceeași origine, astfel încât măsura oricărui unghi format de aceste semidrepte este un număr natural care nu este prim.

Soluție. Dacă luăm 90 de unghiuri de 4° , formate în jurul unui punct, obținem 90 de semidrepte care fac între ele unghiuri cu măsuri întregi, multiplu de 4 **2p**

Să arătăm că, dacă luăm 91 sau mai multe semidrepte, condiția nu este îndeplinită. Notăm unghiurile formate în jurul originii comune a semidreptelor, în sensul mișcării acelor de ceas, începând cu un unghi oarecare, $u_1, u_2, \dots, u_n$, $n \geq 91$. Atunci sumele $u_1 + u_2$, $u_3 + u_4, \dots, u_{89} + u_{90}$ au, împreună, cel mult 359° . Deoarece sunt 45 de sume și $8 \cdot 45 = 360$, există o sumă $S < 8^\circ$. Cum $S \geq 2$, rezultă că S este număr prim sau $S = 4 = 2 + 2$, sau $S = 6 = 2 + 4 = 3 + 3$; în toate cazurile deducem că S sau unul dintre termenii săi este număr prim **4p**

Așadar, numărul cerut este 90 **1p**

Problema 4. În interiorul unghiului propriu $\widehat{AOD}$ considerăm punctele B și C astfel încât $OA = OB$, $OD = OC$, segmentele AC și BD se intersectează în punctul P , iar semidreapta $(PO$ este bisectoarea unghiului $\widehat{APD}$. Arătați că unghiurile $\widehat{AOB}$ și $\widehat{COD}$ sunt congruente.



Soluție. Cerința este echivalentă cu $\widehat{AOC} = \widehat{BOD}$ **1p**

Fie E și F picioarele perpendicularelor duse din O pe AC respectiv BD . Atunci $OE = OF$ (deoarece PO este bisectoarea unghiului $\widehat{APD}$) și $AO = BO$ (din ipoteză), deci triunghiurile dreptunghice OAE și OBF sunt congruente. Astfel $\widehat{OAE} = \widehat{OBF}$. Analog arătăm că $\widehat{OCE} = \widehat{ODF}$ **4p**

Deoarece segmentele AC și BD se intersectează, unghiurile $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$ și $\widehat{COD}$ sunt adiacente, iar punctele O și B sunt pe părți diferite ale dreptei AC . Deducem $\widehat{OAC} < \widehat{OAB} < 90^\circ$, ultima inegalitate având loc deoarece unghiul $\widehat{OAB}$ este unghi de la baza triunghiului isoscel OAB . Cum PO este bisectoarea unghiului $\widehat{APD}$, unghiurile $\widehat{APO}$ și $\widehat{OPD}$ sunt ascuțite, iar unghiul $\widehat{OPD}$ este unghi exterior triunghiului OBP , deci $\widehat{OPD} > \widehat{OBP}$, de unde rezultă că $\widehat{OBP}$ este unghi ascuțit. Analog se arată că unghiurile $\widehat{ODB}$ și $\widehat{OCA}$ sunt ascuțite. Astfel E și F sunt în interiorul segmentelor AC , respectiv BD , deci $\widehat{OAC} = \widehat{OAE}$, $\widehat{OCA} = \widehat{OCE}$, $\widehat{OBD} = \widehat{OBP}$ și $\widehat{ODB} = \widehat{ODP}$. Deducem că unghiurile triunghiurilor OAC , OBD sunt respectiv congruente și, folosind observația inițială, obținem concluzia..... **2p**

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Națională, Deva, 23 aprilie 2019

CLASA a VII-a

Problema 1. a) Demonstrați că, dacă $x, y \geq 1$, atunci $x + y - \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \geq 2\sqrt{xy} - \frac{2}{\sqrt{xy}}$.

b) Demonstrați că, dacă $a, b, c, d \geq 1$ și $abcd = 16$, atunci $a + b + c + d - \frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c} - \frac{1}{d} \geq 6$.

Soluție și barem de corectare

a) Inegalitatea se scrie echivalent $(xy - 1)(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$ **3p**

b) Scriind inegalitatea de la a) mai întâi pentru a și b , apoi pentru c și d , obținem $a + b - \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \geq 2\sqrt{ab} - \frac{2}{\sqrt{ab}}$ și $c + d - \frac{1}{c} - \frac{1}{d} \geq 2\sqrt{cd} - \frac{2}{\sqrt{cd}}$. Adunând aceste două

inegalități obținem $a + b + c + d - \frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c} - \frac{1}{d} \geq 2\left(\sqrt{ab} + \sqrt{cd} - \frac{1}{\sqrt{ab}} - \frac{1}{\sqrt{cd}}\right)$. **2p**

Aplicând acum inegalitatea de la a) pentru $x = \sqrt{ab} \geq 1$ și $y = \sqrt{cd} \geq 1$ se obține că

$a + b + c + d - \frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c} - \frac{1}{d} \geq 2\left(2\sqrt{\sqrt{ab} \cdot \sqrt{cd}} - \frac{2}{\sqrt{\sqrt{ab} \cdot \sqrt{cd}}}\right) = 6$ **2p**

Problema 2. Fie $ABCD$ un pătrat și E un punct oarecare pe latura (CD) . În exteriorul triunghiului ABE se construiesc pătratele $ENMA$ și $EBQP$. Demonstrați că:

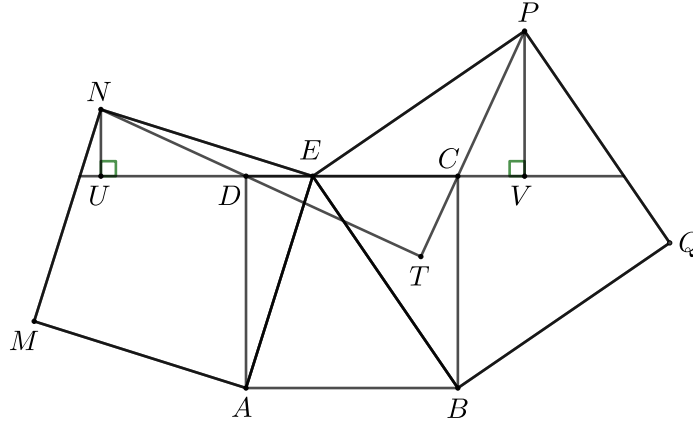
a) $ND = PC$;

b) $ND \perp PC$.

Soluție și barem de corectare:

a) Fie U și V proiecțiile punctelor N și P pe dreapta CD . Triunghiurile dreptunghice NUE și EDA sunt congruente (IU), deci, dacă notăm $DE = x$, $CE = y$, deducem că $NU = x$, $EU = AD = CD = x + y$ și $DU = y$. Analog, triunghiurile EPV și BEC sunt congruente, deci $PV = EC = y$ și $CV = EV - EC = (x + y) - y = x$. Deducem că triunghiurile NUD și CVP sunt congruente (CC), prin urmare $ND = PC$ **4p**

b) Dacă $\{T\} = ND \cap PC$, $m(\angle CDT) + m(\angle DCT) = m(\angle NDU) + m(\angle PCV) = m(\angle NDU) + m(\angle DNU) = 90^\circ$, de unde concluzia. **3p**



Schiță de soluție alternativă:

- a) Dacă $DE = x$, $CE = y$, atunci $NE^2 = AE^2 = x^2 + (x+y)^2$, $PE^2 = BE^2 = y^2 + (x+y)^2$.
Din teorema cosinusului în triunghiurile NDE și ECP rezultă $ND^2 = PC^2 = x^2 + y^2$.
b) Tot din teorema cosinusului, dacă $\{T\} = ND \cap PC$, atunci $\cos^2(\angle CDT) + \cos^2(\angle DCT) =$
 $\cos^2(\angle NDE) + \cos^2(\angle ECP) = \frac{y^2}{x^2 + y^2} + \frac{x^2}{x^2 + y^2} = 1$, de unde rezultă că $DT \perp CT$.

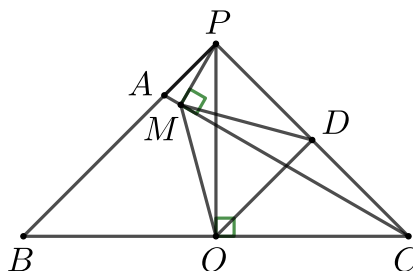
Problema 3. Fie ABC un triunghi în care $m(\angle ABC) = 45^\circ$ și $m(\angle BAC) > 90^\circ$.
Fie O mijlocul laturii $[BC]$. Considerăm punctul $M \in (AC)$ astfel încât $m(\angle COM) =$
 $m(\angle CAB)$. Perpendiculara în M pe AC intersectează dreapta AB în punctul P .

- a) Aflați măsura unghiului $\angle BCP$.
b) Arătați că, dacă $m(\angle BAC) = 105^\circ$, atunci $PB = 2MO$.

Soluție și barem de corectare:

- a) Fie P' punctul în care mediatoarea laturii $[BC]$ intersectează dreapta AB și M' proiecția
punctului P' pe dreapta AC . Atunci triunghiul $P'BC$ este dreptunghic isoscel. Din
teorema catetei obținem că $P'C^2 = CM' \cdot CA$ și $P'C^2 = CO \cdot CB$.

Avem așadar $\frac{CM'}{CB} = \frac{CO}{CA}$ și $\angle OCM' = \angle ACB$, deci triunghiurile OCM' și ACB sunt
asemenea. Deducem că $\angle M'OC \equiv \angle BAC \equiv \angle MOC$, ceea ce arată că punctele M și M'
coincid. Atunci și punctele P și P' coincid, deci $m(\angle BCP) = m(\angle BCP') = 45^\circ$ **5p**
b) Fie D mijlocul segmentului $[PC]$. Dacă $m(\angle BAC) = 105^\circ$, atunci obținem succesiv:
 $m(\angle ACB) = 30^\circ$, $m(\angle MCP) = 15^\circ$, $m(\angle MDP) = 30^\circ$ și $m(\angle MDO) = 60^\circ$. În plus,
 $MD = OD = CD$, deci triunghiul MDO este echilateral, de unde $MO = MD = CD =$
 $\frac{PB}{2}$ **2p**



Problema 4. O bucată de hârtie dreptunghiulară 20×19 , împărțită în pătrățele unitate, este tăiată în mai multe bucăți de formă pătrată, tăieturile făcându-se de-a lungul laturilor pătrățelelor unitate. O astfel de bucată pătrată se numește *pătrat impar* dacă lungimea laturii sale este un număr impar.

- Care este numărul minim posibil de pătrate impare?
- Care este cea mai mică valoare pe care o poate lua suma perimetrelor pătratelor impare?

Soluție și barem de corectare:

a) Dacă notăm cu k numărul bucăților pătrate obținute și cu $x_1, x_2, \dots, x_k$ dimensiunile lor, atunci scriind în două moduri aria dreptunghiului obținem $19 \cdot 20 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2$. Deoarece $19 \cdot 20 = 380$ este divizibil cu 4, pătratul unui număr par este un multiplu de 4, iar pătratul unui număr impar este un număr care dă restul 1 la împărțirea cu 4, deducem că numărul bucăților pătrate de dimensiune impară trebuie să fie multiplu de 4. **1p**

Să observăm în continuare că acest număr nu poate fi 0: la latura de dimensiune 19 nu pot contribui numai pătrate de dimensiune pară. (Alt argument: dacă am colora bucata de hârtie pe coloane, alternativ cu alb și negru astfel încât prima și ultima coloană să fie negre, am avea cu 20 mai multe pătrățele negre decât albe, ori un pătrat de dimensiune pară ocupă la fel de multe pătrățele albe ca și negre, deci nu putem avea numai din acestea.) **1p**

Un exemplu cu 4 pătrate de dimensiune impară este ușor de dat: de exemplu decupăm din ultimele 5 coloane 4 bucăți pătrate 5×5 (acestea sunt cele 4 pătrate de dimensiune impară). Rămâne o bucată dreptunghiulară 20×14 care se poate tăia în bucăți 2×2 . **1p**

b) Colorăm bucata de hârtie pe coloane, alternativ cu alb și negru astfel încât prima și ultima coloană să fie negre. Vom avea cu 20 mai multe pătrățele negre decât albe, iar un pătrat de dimensiune pară ocupă la fel de multe pătrățele albe ca și negre. Un pătrat de dimensiune ℓ impară ocupă fie cu ℓ mai multe pătrățele albe decât negre, fie cu ℓ mai multe pătrățele negre decât albe. Așadar suma dimensiunilor pătratelor care acoperă mai multe pătrățele negre decât albe trebuie să fie cu 20 mai mare decât suma dimensiunilor pătratelor care acoperă mai multe pătrate albe decât negre. Rezultă că suma lungimilor pătratelor care acoperă mai multe pătrățele negre decât albe trebuie să fie cel puțin 20, deci suma dimensiunilor pătratelor de dimensiune impară trebuie să fie cel puțin 20, așadar suma perimetrelor pătratelor impare este cel puțin 80. **3p**

Un exemplu în care suma cerută este chiar 80 este cel dat la a). **1p**

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Națională, Deva, 23 aprilie 2019

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE - CLASA a VIII-a

Problema 1. Considerăm A , mulțimea numerelor naturale cu exact 2019 divizori naturali, și pentru fiecare $n \in A$, notăm

$$S_n = \frac{1}{d_1 + \sqrt{n}} + \frac{1}{d_2 + \sqrt{n}} + \dots + \frac{1}{d_{2019} + \sqrt{n}},$$

unde $d_1, d_2, \dots, d_{2019}$ sunt divizorii naturali ai lui n .

Determinați valoarea maximă a lui S_n când n parcurge mulțimea A .

Soluție. Deoarece $2019 = 3 \cdot 673$ și 673 este prim, rezultă că orice număr din A are una din formele: p^{2018} , cu p număr prim, sau $p^2 \cdot q^{672}$, cu p, q prime distincte. Astfel, cel mai mic număr din mulțimea A este $3^2 \cdot 2^{672}$ **2p**

Deoarece d_i divizor al lui $n \Leftrightarrow \frac{n}{d_i}$ divizor al lui n obținem că

$$2 \cdot S_n = \sum_{i=1}^{2019} \left(\frac{1}{d_i + \sqrt{n}} + \frac{1}{\frac{n}{d_i} + \sqrt{n}} \right) = \sum_{i=1}^{2019} \left(\frac{1}{d_i + \sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{d_i}{d_i + \sqrt{n}} \right) = \frac{2019}{\sqrt{n}}$$

..... **4p**

Rezultă $S_n = \frac{2019}{2 \cdot \sqrt{n}} \leq \frac{3 \cdot 673}{2 \cdot \sqrt{3^2 \cdot 2^{672}}} = \frac{673}{2^{337}}$, valoarea maximă a lui S_n , când n parcurge A . Egalitatea se atinge pentru $n = 3^2 \cdot 2^{672}$.

..... **1p**

Problema 2. Arătați că dacă numerele $a, b, c \in (0, \infty)$ verifică relația $a + b + c = 3$, atunci:

$$\frac{a}{3a + bc + 12} + \frac{b}{3b + ca + 12} + \frac{c}{3c + ab + 12} \leq \frac{3}{16}.$$

Soluție. $3a + bc + 12 = (a + b + c)a + bc + 4 + 8 = a^2 + ab + bc + ca + 4 + 8 = (a + b)(a + c) + 4 + 8 \geq 2\sqrt{(a + b)(a + c)} \cdot 4 + 8 = 4\sqrt{(a + b)(a + c)} + 8$ **2p**

Folosind inegalitatea $\frac{1}{x+y} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)$, urmează că

$$\frac{a}{3a + bc + 12} \leq \frac{a}{4\sqrt{(a + b)(a + c)} + 8} = \frac{a}{4} \frac{1}{\sqrt{(a + b)(a + c)} + 2} \leq \frac{a}{16} \left(\frac{1}{\sqrt{(a + b)(a + c)}} + \frac{1}{2} \right)$$

..... **2p**

Deoarece $\frac{a}{\sqrt{(a + b)(a + c)}} = \sqrt{\frac{a}{a + b} \cdot \frac{a}{a + c}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{a}{a + b} + \frac{a}{a + c} \right)$, rezultă

$$\frac{a}{3a+bc+12} \leq \frac{1}{32} \left(\frac{a}{a+b} + \frac{a}{a+c} + a \right)$$

și analoagele

$$\frac{b}{3b+ca+12} \leq \frac{1}{32} \left(\frac{b}{b+c} + \frac{b}{b+a} + b \right),$$

$$\frac{c}{3c+ab+12} \leq \frac{1}{32} \left(\frac{c}{c+a} + \frac{c}{c+b} + c \right)$$

care prin adunare conduc la inegalitatea cerută..... **3p**

Problema 3. În prisma hexagonală regulată $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, construim P, Q , proiecțiile punctului A pe dreptele $A_1 B$ respectiv $A_1 C$ și R, S , proiecțiile punctului D_1 pe dreptele $A_1 D$ respectiv $C_1 D$.

a) Determinați măsura unghiului dintre planele (AQP) și $(D_1 RS)$.

b) Arătați că $\widehat{AQP} \equiv \widehat{D_1 RS}$.

Soluție. a) Fie T , proiecția punctului A pe dreapta $A_1 D$. Din proprietățile hexagonului regulat, $DB \perp AB$, iar din $AA_1 \perp (ABC)$ avem $DB \perp AA_1$, deci $DB \perp (A_1 AB)$, plan ce include dreapta AP . Rezultă că AP este perpendiculară pe DB și $A_1 B$, deci pe planul lor, $(A_1 BD)$. Conform reciprocei întâi a teoremei celor trei perpendiculare obținem că $PT \perp A_1 D$.

Analog, $DC \perp (A_1 AC)$, $AQ \subset (A_1 AC)$ deci $DC \perp AQ$. Deoarece $AQ \perp A_1 C$ obținem $AQ \perp (A_1 DC)$. Conform reciprocei întâi a teoremei celor trei perpendiculare rezultă că $QT \perp A_1 D$.

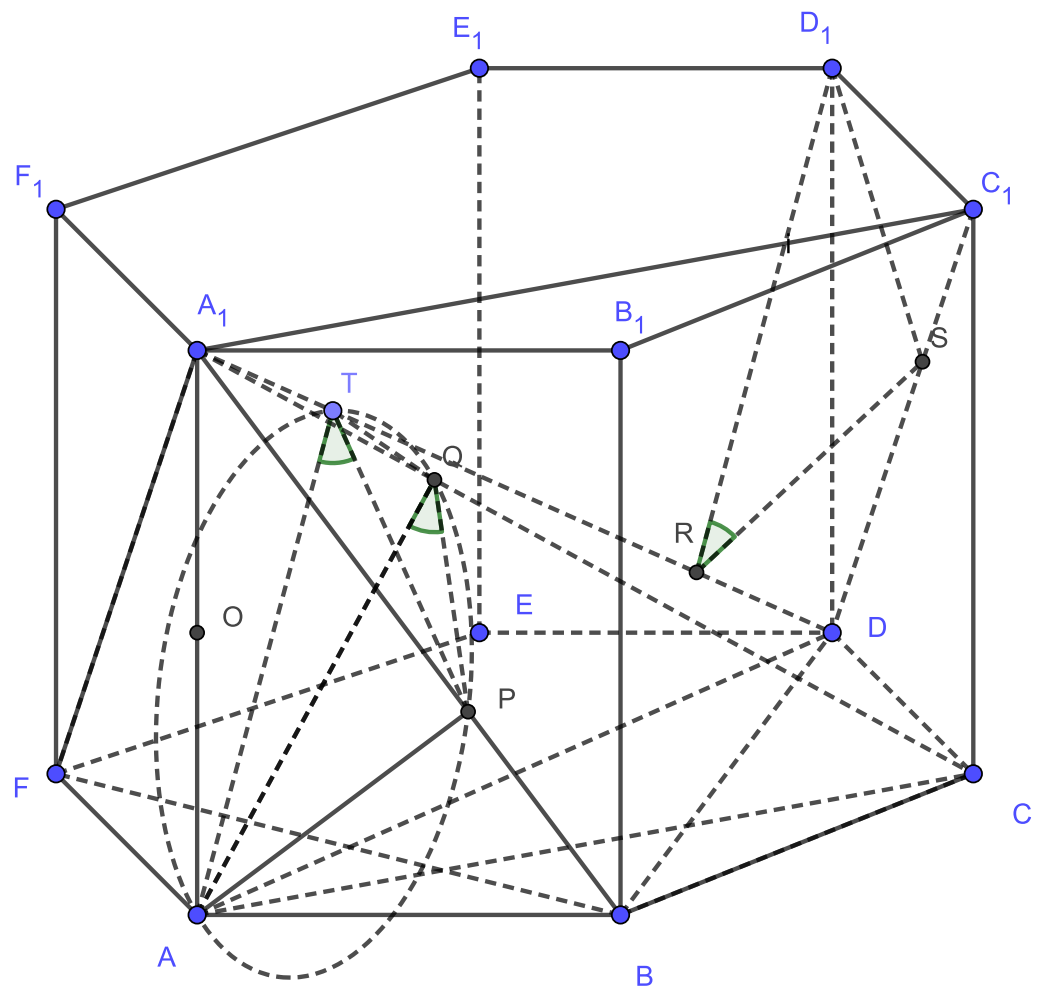
Întrucât dreptele TA , TP , TQ sunt toate perpendiculare pe $A_1 D$, ele sunt incluse în unicul plan dus prin T , perpendicular pe $A_1 D$ **3p**

Analog $A_1 C_1 \perp (CDC_1 D_1)$, deci $A_1 C_1$ este perpendiculară și pe dreapta $D_1 S$, ca dreaptă inclusă în acest plan. Așadar $D_1 S$ este perpendiculară pe două drepte concurente, DC_1 și $A_1 C_1$, incluse în planul $(DA_1 C_1)$, deci este perpendiculară pe el și apoi pe $A_1 D$, ca dreapta inclusă în el. Așadar $A_1 D$ este perpendiculară pe $D_1 R$ și $D_1 S$ deci pe planul lor, $(D_1 RS)$.

În concluzie planele (AQP) și $(D_1 RS)$ sunt perpendiculare pe $A_1 D$, deci vor fi paralele și vor forma un unghi de 0° **2p**

b) Mijlocul O al muchiei AA_1 este egal depărtat de punctele A , P , Q , T , deci este centrul sferei ce conține aceste puncte. Din coplanaritatea demonstrată la punctul anterior, rezultă că punctele A , P , Q , T sunt conciclice deci $\widehat{AQP} \equiv \widehat{ATP}$. Însă triunghiurile $D_1 SR$ și APT sunt dreptunghice în S respectiv P și au $D_1 S = AP$ și $D_1 R = AT$, deci sunt congruente, rezultând $\widehat{D_1 RS} \equiv \widehat{ATP}$. Din egalitățile de mai sus deducem $\widehat{AQP} \equiv \widehat{D_1 RS}$.

..... **2p**



Problema 4. Aflați numerele naturale x, y, z care verifică ecuația:

$$2^x + 3 \cdot 11^y = 7^z.$$

Soluție. Dacă $x = 0, 1 + 3 \cdot 11^y = 7^z$, imposibil din motive de paritate.

Deoarece $7^z = \mathcal{M}3 + 1, 3 \cdot 11^y = \mathcal{M}3$ deducem că x este par **1p**

Dacă z este impar atunci $x = 2$, altfel, dacă prin absurd $x \geq 4$ obținem $2^x = \mathcal{M}8$, și în funcție de paritatea lui $y, 3 \cdot 11^y = \mathcal{M}8 + 3$ sau $3 \cdot 11^y = \mathcal{M}8 + 1$, imposibil căci $7^z = \mathcal{M}8 - 1$.

Dacă $x = 2$ atunci $4 + 3 \cdot 11^y = 7^z \Rightarrow y = 0$, altfel dacă $y \geq 1 \Rightarrow 7^z \equiv 4 \pmod{11}$, imposibil pentru z impar, căci $7^{10k} \equiv 1 \pmod{11}, 7^{10k+1} \equiv 7 \pmod{11}, 7^{10k+2} \equiv 5 \pmod{11}, 7^{10k+3} \equiv 2 \pmod{11}, 7^{10k+4} \equiv 3 \pmod{11}, 7^{10k+5} \equiv 10 \pmod{11}, 7^{10k+6} \equiv 4 \pmod{11}, 7^{10k+7} \equiv 6 \pmod{11}, 7^{10k+8} \equiv 9 \pmod{11}, 7^{10k+9} \equiv 8 \pmod{11}$.

Obținem astfel soluția $x = 2, y = 0, z = 1$ **2p**

Dacă z este par, $z = 2z_1, z_1 \geq 1$ și $x = 4x_1, x_1 \geq 1$ obținem $3 \cdot 11^y = 7^{2z_1} - 2^{4x_1} = (7^{z_1} - 2^{2x_1}) \cdot (7^{z_1} + 2^{2x_1})$.

Deoarece $(7^{z_1} - 2^{2x_1}, 7^{z_1} + 2^{2x_1}) = 1$ și $7^{z_1} + 2^{2x_1} = \mathcal{M}3 + 2$, obținem sistemul de ecuații $7^{z_1} - 2^{2x_1} = 3, 7^{z_1} + 2^{2x_1} = 11^y$. Dacă z_1 ar fi par, $z_1 = 2z_2$, din prima ecuație am obține $(7^{z_2} - 2^{x_1}) \cdot (7^{z_2} + 2^{x_1}) = 3$, ceea ce este imposibil. Deducem că z_1 este impar și trecând în a doua ecuație, $2^{2x_1} = 11^y - 7^{z_1}$ este fie $\mathcal{M}8 + 2$ fie $\mathcal{M}8 + 4$. Concluzionăm că $x_1 = 1, z_1 = 1$ și de aici soluția $x = 4, y = 1, z = 2$.

Dacă z este par, $z = 2z_1, z_1 \geq 1$ și $x = 4x_1 + 2, x_1 \geq 0$, obținem analog descompunerea, $3 \cdot 11^y = 7^{2z_1} - 2^{4x_1+2} = (7^{z_1} - 2^{2x_1+1}) \cdot (7^{z_1} + 2^{2x_1+1})$, și cum $7^{z_1} - 2^{2x_1+1} = \mathcal{M}3 + 2$ și $(7^{z_1} - 2^{2x_1+1}, 7^{z_1} + 2^{2x_1+1}) = 1$ rezultă sistemul de ecuații $7^{z_1} - 2^{2x_1+1} = 11^y, 7^{z_1} + 2^{2x_1+1} = 3$ care evident nu are soluție. **4p**



MINISTERUL
EDUCAȚIEI
NAȚIONALE



INSPECTORATUL
ȘCOLAR
JUDEȚEAN
HUNEDOARA



Societatea
de Științe
Matematice
din România

Olimpiada Națională de Matematică Etapa Națională, Deva, 23 aprilie 2019

Clasa a IX-a

Soluții și bareme orientative

Problema 1. Fie ABC un triunghi oarecare și P un punct interior astfel încât $BP = AC$. Notăm cu M mijlocul segmentului AP și cu R mijlocul segmentului BC . Fie $BP \cap AC = \{E\}$. Demonstrați că bisectoarea unghiului $\angle BEA$ este perpendiculară pe MR .

Soluție și barem: Fie N mijlocul lui AB . Atunci MN este linie mijlocie în triunghiul APB , deci $MN = \frac{PB}{2}$. De asemenea NR este linie mijlocie în triunghiul ABC , deci $NR = \frac{AC}{2}$. Atunci triunghiul NMR este isoscel în N . Obținem $\angle NMR \equiv \angle NRM$ **3p**

Fie $Q \in BC$ astfel încât $MQ \parallel AC$. Atunci $MQ \parallel NR$, deci $\angle QMR \equiv \angle NRM$, adică $\angle QMR \equiv \angle NMR$, de unde rezultă că MR este bisectoarea unghiului $\angle NMQ$ **2p**

Unghiurile $\angle BEC$ și $\angle NMQ$ au laturile paralele și sunt congruente, prin urmare, bisectoarele lor sunt paralele. Cum bisectoarele unghiurilor $\angle BEC$ și $\angle BEA$ sunt perpendiculare, se obține concluzia. **2p**

Observație: Alternativ se poate demonstra vectorial. Se arată că $2\overrightarrow{MR} = 2\overrightarrow{MP} + 2\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{EX} + \overrightarrow{EY} = 2\overrightarrow{EZ}$, unde $X \in (EB$ cu $\overrightarrow{EX} = \overrightarrow{PB}$, $Y \in (EC$ cu $\overrightarrow{EY} = \overrightarrow{AC}$, iar Z este mijlocul segmentului XY . Triunghiul EXY este isoscel cu vârful în E , deci $MR \parallel EZ$, iar EZ este bisectoarea unghiului $\angle BEC$. Se finalizează ca mai sus.

Problema 2. Determinați toate numerele naturale n , $n \geq 3$, pentru care există o mulțime M , formată din n vectori diferiți, nenuli și cu module egale astfel încât $\sum_{\vec{u} \in M} \vec{u} = \vec{0}$, știind că oricare ar fi $\vec{v}, \vec{w} \in M$ avem $\vec{v} + \vec{w} \neq \vec{0}$.

Soluție și barem: Cazul n impar este convenabil. De exemplu considerăm un poligon regulat $A_1A_2...A_n$. Atunci mulțimea $M_n = \{\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_2A_3}, ..., \overrightarrow{A_{n-1}A_n}, \overrightarrow{A_nA_1}\}$ satisface condițiile. **2p**

Demonstrăm că n nu poate fi egal cu 4. Presupunem contrariul. Atunci $M = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{z}\}$. Fie O un punct din plan. Atunci există U, V, W, Z astfel încât $\vec{u} = \overrightarrow{OU}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OV}$, $\vec{w} = \overrightarrow{OW}$ și $\vec{z} = \overrightarrow{OZ}$. Cum vectorii au același modul, deducem că aceste patru puncte sunt vârfurile unui patrulater inscriptibil. Fără a restrânge generalitatea, fie $UVZW$ acest patrulater. Fie P, Q simetricele lui V și Z față de O . Din $\overrightarrow{OU} + \overrightarrow{OV} + \overrightarrow{OW} + \overrightarrow{OZ} = \vec{0}$ obținem $\overrightarrow{OU} + \overrightarrow{OW} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$, deci $UPWQ$ este paralelogram, eventual degenerat, deci dreptunghi. Atunci $\overrightarrow{OU} + \overrightarrow{OW} = \vec{0}$, ceea ce nu convine. **2p**

În continuare demonstrăm că orice număr natural par, mai mare sau egal cu 6, este convenabil. Considerăm o mulțime de puncte $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ astfel încât $A_1A_2A_3$ este triunghi echilateral, $A_3A_4\dots A_n$ este poligon regulat cu $n-3$ laturi de aceeași lungime cu a triunghiului anterior și măsura în radiani a unghiului $A_2A_3A_n$ este de forma $\alpha \cdot \pi$, unde α este număr irațional (spre exemplu măsura unghiului sa fie $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$). Atunci mulțimea $M = \{\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_2A_3}, \overrightarrow{A_3A_1}, \overrightarrow{A_3A_4}, \dots, \overrightarrow{A_{n-1}A_n}, \overrightarrow{A_nA_3}\}$ satisface condiția din problemă, iraționalitatea lui α asigurându-ne că nu există vectori de aceeași direcție. În concluzie $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2, 4\}$ **3p**

Observație: Alternativ se poate demonstra pentru n impar și $n = 4$ ca mai sus. Se arată apoi că dacă n convine atunci $n + 3$ convine. Pentru aceasta, fie n vectori care respectă condițiile $\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}, \dots, \overrightarrow{OA_n}$. Dreptele $OA_1, OA_2, \dots, OA_n$ împreună cu cele $2n$ care fac unghiuri de $\frac{\pi}{3}$, respectiv $\frac{2\pi}{3}$ cu primele n drepte, intersectează cercul pe care se află punctele $A_1, A_2, \dots, A_n$ în cel mult $6n$ puncte. Alegem un punct A_{n+1} diferit de acestea, situat pe cerc și considerăm triunghiul echilateral $A_{n+1}A_{n+2}A_{n+3}$ înscris în acest cerc. Vectorii $\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}, \dots, \overrightarrow{OA_{n+3}}$ sunt $n + 3$ vectori ce respectă condițiile. Pentru $n \geq 6$ par, avem că $n - 3 \geq 3$ este impar și convine, deci n convine.

Problema 3. Pentru orice număr natural nenul n definim mulțimea

$$A_n = \left\{ (x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \sqrt{x^2 + y + n} + \sqrt{y^2 + x + n} \in \mathbb{N} \right\}.$$

Demonstrați că pentru orice $n \geq 1$ mulțimea A_n este nevidă și finită.

Soluție și barem: Din $\sqrt{x^2 + y + n} + \sqrt{y^2 + x + n} \in \mathbb{N}$ demonstrăm că $x^2 + y + n$ și $y^2 + x + n$ sunt pătrate perfecte. **2p**

Perechea $(n - 1, n - 1) \in A_n$, deci A_n este nevidă. **1p**

Dacă $(x, y) \in A_n$ atunci $x^2 + y + n > x^2$. Dacă presupunem că $x^2 + y + n < (x + 1)^2$, atunci $x^2 + y + n$ nu mai poate fi pătrat perfect, ceea ce nu convine. Rămâne $x^2 + y + n \geq (x + 1)^2$. **2p**

Analog avem și $y^2 + x + n \geq (y + 1)^2$. Adunând cele două relații obținem $2n - 2 \geq x + y$, ceea ce implică A_n finită. **2p**

Problema 4. Determinați toate funcțiile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care satisfac relația

$$f(x + y) \leq f(x^2 + y),$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

Soluție și barem: Vom demonstra că singurele funcții convenabile sunt cele constante.

Cu alegerea $y = -x$, obținem $f(0) \leq f(x^2 - x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Deoarece imaginea funcției $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 - x$ este $[-\frac{1}{4}, \infty)$, atunci $f(0) \leq f(t)$, pentru orice $t \geq -\frac{1}{4}$. Apoi, alegerea $y = -x^2$ conduce la $f(x - x^2) \leq f(0)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Similar obținem $f(t) \leq f(0)$, pentru orice $t \leq \frac{1}{4}$. Obținem $f(t) = f(0)$, pentru orice $t \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$ **3p**

Prin inducție, demonstrăm că, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, $f(t) = f(0)$, pentru orice $t \in [-\frac{n}{4}, \frac{n}{4}]$. Pentru $n = 1$ este verificat, presupunem adevărat pentru n și demonstrăm pentru $n + 1$. Alegem $y = -x - \frac{n}{4}$. Atunci $f(-\frac{n}{4}) \leq f(x^2 - x - \frac{n}{4})$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Cum imaginea funcției

$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = x^2 - x - \frac{n}{4}$ este $[-\frac{n+1}{4}, \infty)$, obținem $f(0) \leq f(t)$, pentru orice $t \geq -\frac{n+1}{4}$. Similar, alegerea $y = -x^2 + x + \frac{n}{4}$, conduce la $f(-x^2 + x + \frac{n}{4}) \leq f(\frac{n}{4})$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Suntem conduși la $f(t) \leq f(0)$, pentru orice $t \leq \frac{n+1}{4}$ și inducția este finalizată.**3p**

Acum, fie $x \in \mathbb{R}$. Fie $n = [4|x|] + 1 > 4|x|$. Atunci $-\frac{n}{4} \leq x \leq \frac{n}{4}$. Obținem $f(x) = f(0)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$**1p**



Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Națională, Deva, 23 aprilie 2019

CLASA a X-a

Problema 1. Fie a, b, c numere reale strict pozitive. Să se arate că

$$\frac{1}{abc} + 1 \geq 3 \left(\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{a + b + c} \right).$$

Soluție. Folosind inegalitățile $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$ și $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$, 2p
obținem

$$3 \left(\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{a + b + c} \right) \leq \frac{1}{\sqrt[3]{a^2b^2c^2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{abc}}.$$

..... 2p
Notând $\frac{1}{\sqrt[3]{abc}} = t$, este suficient să arătăm că $t^3 + 1 \geq t^2 + t$, sau $(t - 1)^2(t + 1) \geq 0$, ceea ce
este evident. 3p

Problema 2. Fie $A_1A_2 \dots A_n$ un poligon regulat. Să se determine numărul de submulțimi
 $\{A_i, A_j, A_k, A_l\}$ ale căror elemente sunt vârfurile unui trapez (patrulaterul cu două laturi paralele
și inegale).

Soluție. Dacă n este impar și $A_iA_j \parallel A_kA_l$, atunci un diametru al cercului circumscris
poligonului care trece printr-un vârf al acestuia va fi mediatore a celor două segmente. 1p

Acesta poate fi ales în n moduri, iar apoi perechea de segmente în $\binom{(n-1)/2}{2}$ moduri. Seg-
mente nu pot fi congruente, altfel patrulaterul determinat de acestea ar fi dreptunghi, deci
poligonul ar conține puncte diametral opuse, imposibil. Așadar numărul căutat este $n \binom{(n-1)/2}{2} =$
 $\frac{n(n-1)(n-3)}{8}$ 2p

Dacă n este par, perechile de segmente paralele sunt de 2 tipuri: paralele cu o latură a
poligonului, respectiv perpendiculare pe un diametru care trece printr-un vârf al poligonului.
Numărul de alegeri (numărând de două ori perechile de segmente congruente) este, în primul
caz, $\frac{n}{2} \binom{n/2}{2}$, iar în al doilea caz, $\frac{n}{2} \binom{(n-2)/2}{2}$ 2p

Numărul de perechi de segmente congruente este $\binom{n/2}{2}$. În concluzie, numărul cerut este
 $\frac{n}{2} \binom{n/2}{2} + \frac{n}{2} \binom{(n-2)/2}{2} - 2 \binom{n/2}{2} = \frac{n(n-2)(n-4)}{8}$ 2p

Problema 3. Determinați numerele naturale $n \geq 4$ pentru care este adevărată proprietatea:
orice numere complexe distincte, nenule a, b, c care verifică

$$(a - b)^n + (b - c)^n + (c - a)^n = 0,$$

sunt afixe vârfurilor unui triunghi echilateral.

Soluție. Vom arăta că $n \in \{4, 5, 7\}$. Fie $x = a - b$, $y = b - c$. Evident, $x, y \neq 0$, $\alpha = \frac{x}{y} \neq -1$.
Relația din enunț devine

$$x^n + y^n + (-x - y)^n = 0.$$

..... 1p

Dacă n este impar, obținem $x^n + y^n - (x + y)^n = 0$, sau $\alpha^n + 1 - (\alpha + 1)^n = 0$. Cum $\alpha \neq -1$,
deducem

$$\alpha^{n-1} - \alpha^{n-2} + \dots + 1 - (\alpha + 1)^{n-1} = 0,$$

echivalent cu

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left(\binom{n-1}{k} + (-1)^{k+1} \right) \alpha^k = 0.$$

Cum $\alpha \neq 0$, obținem

$$P(\alpha) = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\binom{n-1}{k} + (-1)^{k+1} \right) \alpha^{k-1} = 0.$$

Pentru ca a, b, c să fie afixele vârfurilor unui triunghi echilateral, trebuie ca α să fie o rădăcină primitivă de ordinul 3 a unității, deci $P(\alpha) = n(\alpha^2 + \alpha + 1)^{\frac{n-3}{2}}$. Identificând coeficienții lui α^{n-5} deducem $n \in \{5, 7\}$. Pentru $n = 5$ obținem $P(\alpha) = 5(\alpha^2 + \alpha + 1)$, iar pentru $n = 7$, $P(\alpha) = 7(\alpha^2 + \alpha + 1)^2$ 3p

Dacă n este par, obținem similar că polinomul

$$Q(\alpha) = \alpha^n + 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2} \binom{n}{k} \alpha^k$$

trebuie să coincidă cu $(\alpha^2 + \alpha + 1)^{\frac{n}{2}}$, de unde obținem $n = 4$, iar $Q(\alpha) = (\alpha^2 + \alpha + 1)^2$ 3p

Problema 4. Fie $A, B \subset \mathbb{N}$ două mulțimi finite, nevide. Notăm cu $\mathcal{F}$ mulțimea funcțiilor $f : \mathcal{P}(A) \rightarrow B$ cu proprietatea

$$f(X \cap Y) = \min(f(X), f(Y)), \quad \forall X, Y \subset A,$$

și cu $\mathcal{G}$ mulțimea funcțiilor $g : \mathcal{P}(A) \rightarrow B$ cu proprietatea

$$g(X \cup Y) = \max(g(X), g(Y)), \quad \forall X, Y \subset A.$$

Să se arate că mulțimile $\mathcal{F}$ și $\mathcal{G}$ au același număr de elemente și să se determine acest număr.

Soluție. Definim o bijecție $\Phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ prin formula $\Phi(f) = g$, unde $f \in \mathcal{F}$ iar $g(X) = |B| + 1 - f(\overline{X})$, $X \subset A$, unde $\overline{X} = A - X$ 2p

Arătăm că funcția este bine definită: dacă $f \in \mathcal{F}$, atunci

$$\begin{aligned} g(X \cup Y) &= |B| + 1 - f(\overline{X \cup Y}) = |B| + 1 - f(\overline{X} \cap \overline{Y}) = |B| + 1 - \min(f(\overline{X}), f(\overline{Y})) \\ &= \max(|B| + 1 - f(\overline{X}), |B| + 1 - f(\overline{Y})) = \max(g(X), g(Y)). \end{aligned}$$

..... 2p

Funcția Φ este bijectivă și avem, pentru $g \in \mathcal{G}$, $\Phi^{-1}(g) = f$, unde $f(X) = |B| + 1 - g(\overline{X})$. Deducem că $|\mathcal{F}| = |\mathcal{G}|$. Să observăm că dacă $g \in \mathcal{G}$ și $X \subset Y$, atunci $g(Y) = g(X \cup Y) = \max(g(X), g(Y))$, deci $g(X) \leq g(Y)$, adică funcția $g : (\mathcal{P}, \subset) \rightarrow (B, \leq)$ este crescătoare. Fie

$$A = \{a_1 < a_2 < \dots < a_n\}, \quad B = \{b_1 < b_2 < \dots < b_m\}.$$

Dacă valoarea minimă a unei funcții $g \in \mathcal{G}$ este b_i , atunci $g(\emptyset) = b_i$. Considerăm $\mathcal{G} = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_m$, unde $G_i = \{g \in \mathcal{G} \mid g(\emptyset) = b_i\}$. O funcție $g \in G_i$ este unic determinată de valorile luate în mulțimile $\{a_1\}, \{a_2\}, \dots, \{a_n\}$, unde g poate lua arbitrar valorile $\{b_i, b_{i+1}, \dots, b_m\}$, rezultând $(m - i + 1)^n$ funcții. În rest,

$$g(\{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}\}) = \max(g(\{a_{i_1}\}), g(\{a_{i_2}\}), \dots, g(\{a_{i_k}\})).$$

În concluzie, $|\mathcal{G}| = 1^n + 2^n + \dots + m^n$ 3p

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Națională, Deva, 23 aprilie 2019

Soluții și barem orientativ de corectare la CLASA a XI-a

Problema 1. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, și $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ cu proprietatea că există o matrice idempotentă $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, astfel încât $C^* = AB - BA$. Arătați că $(AB - BA)^2 = O_n$.

(C se numește idempotentă dacă $C^2 = C$; matricea C^* este adjuncta matricei C .)

Soluție și barem:

Arătăm că matricea C nu poate fi inversabilă. Dacă C ar fi inversabilă, din idempotență rezultă că $C = I_n$. Dar atunci $AB - BA = C^* = I_n^* = I_n$, egalitate imposibilă deoarece $\text{tr}(AB - BA) = 0 \neq n = \text{tr}(I_n)$ 2p

Matricea C fiind neinvertibilă, are rangul $\text{rang}(C) \leq n - 1$. Distingem cazurile:

i) $\text{rang}(C) \leq n - 2$. Atunci $AB - BA = C^* = O_n$, deci $(AB - BA)^2 = O_n$ 1p

ii) $\text{rang}(C) = n - 1$. Atunci $C^* \neq O_n$ și cum $C \cdot C^* = O_n$, din inegalitatea lui Sylvester rezultă că $1 \leq \text{rang}(C^*) = \text{rang}(C) + \text{rang}(C^*) - n + 1 \leq \text{rang}(CC^*) + 1 = 1$, deci $\text{rang}(C^*) = 1$.

..... 2p

Dar atunci, $(AB - BA)^2 = \text{tr}(AB - BA) \cdot (AB - BA) = O_n$ 2p

Problema 2. Fie $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă, constantă pe $\mathbb{N}$.

Dacă pentru orice numere reale $0 \leq a < b < c < d$, pentru care $f(a) = f(c)$ și $f(b) = f(d)$ are loc $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{c+d}{2}\right)$, arătați că f este constantă.

Soluție și barem:

Fie $k = f(0)$ și pentru orice $n \in \mathbb{N}$ mulțimea $A_n = \frac{1}{2^n} \cdot \mathbb{N}$. Arătăm prin inducție după $n \in \mathbb{N}$ că $f(x) = k$, pentru orice $x \in A_n$.

Pentru $n = 0$, $f(m) = k$, $\forall m \in \mathbb{N}$, conform ipotezei. 1p

Fie acum $n \in \mathbb{N}$ pentru care $f(x) = k$, $\forall x \in A_n$. Dacă $x \in A_{n+1} \setminus A_n$, există $m \in \mathbb{N}$, astfel încât $x = \frac{2m+1}{2^{n+1}}$ 1p

Alegând $a = \frac{m}{2^n}$, $b = \frac{m+1}{2^n}$, $c = (m+2)/2^n$ și $d = (m+4)/2^n$, avem $0 \leq a < b < c < d$, cu $f(a) = f(b) = f(c) = f(d) = k$. Atunci $x = \frac{a+b}{2}$ și

$$f(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{c+d}{2}\right) = f(m+3)/2^n = k.$$

Rezultă că $f(x) = k$, $\forall x \in A_{n+1}$ 3p

Cum mulțimea $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ este densă în $[0, \infty)$, iar f este continuă și constantă pe A , rezultă că f este constantă pe $[0, \infty)$ 2p

Problema 3. a) Arătați că există funcții derivabile $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ cu proprietatea că $f(f'(x)) = x$, pentru orice $x > 0$.

b) Arătați că nu există funcții derivabile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că $f(f'(x)) = x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Soluție și barem:

a) Fie φ soluția pozitivă a ecuației $r^2 - r - 1 = 0$. Atunci funcția

$$f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty) : x \mapsto f(x) = \left(\frac{1}{\varphi}\right)^{\frac{1}{\varphi}} \cdot x^{\varphi}$$

satisface condiția din enunț: $f'(x) = \varphi^{1-\frac{1}{\varphi}} \cdot x^{\varphi-1}$ și $f(f'(x)) = \varphi^{\varphi-1-\frac{1}{\varphi}} \cdot x^{\varphi(\varphi-1)} = x, \forall x > 0$.

..... 2p.

b) Să presupunem că ar exista o funcție derivabilă $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că $f(f'(x)) = x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Atunci f este surjectivă, iar f' este injectivă..... 1p

Cum f' are proprietatea valorilor intermediare (proprietatea lui Darboux), rezultă că f' este strict monotonă (și continuă)..... 1p

Dacă există $a \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că $f'(a) = 0$, atunci fie $f'(x) < 0 < f'(y)$ pentru orice $x < a < y$, de unde $f(x) \geq f(a)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, fie $f'(x) > 0 > f'(y)$ pentru orice $x < a < y$, și deci $f(x) \leq f(a)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Rezultă că funcția f nu este surjectivă, contradicție. 1p

Dacă f' nu se anulează, atunci f' are semn constant, astfel că intervalul $J = \text{Im}(f')$ este inclus fie în $(0, \infty)$, fie în $(-\infty, 0)$. Rezultă că f este strict monotonă, deci injectivă. 1p

Obținem că $f(J) = \mathbb{R} = f(\mathbb{R})$, contrazicând injectivitatea lui f 1p

Problema 4. Fie p un număr prim. Pentru orice permutare $\sigma \in S_p$ considerăm matricea $A_{\sigma} = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,p}} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{Z})$, cu elementele $a_{ij} = \sigma^{i-1}(j)$, pentru orice $i, j = \overline{1,p}$, unde σ^0 este permutarea identică, iar $\sigma^k = \underbrace{\sigma \circ \sigma \circ \dots \circ \sigma}_{\text{de } k \text{ ori}}$, pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$.

Arătați că mulțimea $D = \{|\det(A_{\sigma})| : \sigma \in S_p\}$ are cel mult $1 + (p-2)!$ elemente.

Soluție și barem:

Arătăm că $\det(A_{\sigma}) = 0$, pentru orice permutare care nu este un ciclu de lungime p .

Notăm cu C_i coloana cu numărul i din matricea A_{σ} . Cum fiecare linie a matricei conține toate numerele $1, 2, \dots, p$, avem

$$C_1 + C_2 + \dots + C_p = \frac{p(p+1)}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

..... 1p

Dacă σ nu este un ciclu de lungime p , descompunerea sa în cicluri disjuncte conține un ciclu

de lungime k , pentru un $k \in \mathbb{N}$, cu $1 \leq k < p$. Fie $c = (i_1, i_2, \dots, i_k)$ un astfel de ciclu din descompunerea lui σ . La intersecția fiecărei linii a matricei A_σ cu coloanele $C_{i_1}, C_{i_2}, \dots, C_{i_k}$ ale sale se găsesc toate numerele din mulțimea $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$, astfel că

$$C_{i_1} + C_{i_2} + \dots + C_{i_k} = (i_1 + i_2 + \dots + i_k) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

..... 1p
 Coloanele matricei A_σ sunt atunci liniar dependente, astfel că $\det(A_\sigma) = 0$ 1p
 Fie acum σ o permutare ciclică de ordin p . Deoarece p este prim, pentru orice $k = \overline{1, p-1}$ avem

$$\{\sigma^{kl} \mid l = \overline{0, p-1}\} = \{\sigma^l \mid l = \overline{0, p-1}\},$$

astfel că liniile matricei A_{σ^k} sunt aceleași cu cele ale matricei A_σ , permutate într-o anumită ordine. Rezultă că $|\det(A_{\sigma^k})| = |\det(A_\sigma)|$, pentru orice $k = \overline{1, p-1}$ 1p
 Pentru orice număr $k \in \mathbb{N}^* \cap D$ vor exista deci cel puțin $p-1$ permutări ciclice diferite $\sigma \in S_p$ astfel încât $k = |\det(A_\sigma)|$ 1p
 Numărul permutărilor ciclice de ordin p este $(p-1)!$ 1p
 Fie $d = |D|$. Atunci $(d-1)(p-1) \leq (p-1)!$, de unde obținem inegalitatea din enunț. 1p



Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Finală, Deva, 23 aprilie 2019

CLASA a XII-a — Soluții și barem orientativ

Problema 1. Fie a un număr real strict pozitiv. Determinați valoarea minimă a expresiei

$$\left(\int_0^1 f(x) dx \right)^2 - (a+1) \int_0^1 x^{2a} f(x) dx,$$

când f parcurge mulțimea funcțiilor concave $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, cu $f(0) = 1$.

Soluție. Fie $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție concavă, astfel încât $f(0) = 1$. Cum

$$x^a f(x) + 1 - x^a = x^a f(x) + (1 - x^a) f(0) \leq f(x^a \cdot x + (1 - x^a) \cdot 0) = f(x^{a+1}),$$

prin înmulțire cu $(a+1)x^a$, rezultă

$$(a+1)x^{2a} f(x) + (a+1)(x^a - x^{2a}) \leq (a+1)x^a f(x^{a+1}),$$

oricare ar fi x în $[0, 1]$ **2p**

Integrând pe intervalul $[0, 1]$, obținem

$$(a+1) \int_0^1 x^{2a} f(x) dx + (a+1) \int_0^1 (x^a - x^{2a}) dx \leq (a+1) \int_0^1 x^a f(x^{a+1}) dx,$$

deci

$$(a+1) \int_0^1 x^{2a} f(x) dx + \frac{a}{2a+1} \leq \int_0^1 f(x) dx.$$

..... **2p**

Cum $\int_0^1 f(x) dx \leq \left(\int_0^1 f(x) dx \right)^2 + \frac{1}{4}$, obținem

$$\left(\int_0^1 f(x) dx \right)^2 - (a+1) \int_0^1 x^{2a} f(x) dx \geq \frac{a}{2a+1} - \frac{1}{4} = \frac{2a-1}{8a+4}.$$

..... **1p**

Cum funcția $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - x$, este concavă, $f(0) = 1$ și

$$\left(\int_0^1 f(x) dx \right)^2 - (a+1) \int_0^1 x^{2a} f(x) dx = \frac{2a-1}{8a+4},$$

rezultă că minimumul cerut este $(2a-1)/(8a+4)$ **2p**

Problema 2. Fie n un număr întreg par, $n \geq 4$, și fie G un subgrup de ordin n al grupului multiplicativ al matricelor inversabile din $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Arătați că G are un subgrup H , astfel încât $\{I_2\} \subsetneq H \subsetneq G$ și $XYX^{-1} \in H$, oricare ar fi $X \in G$ și oricare ar fi $Y \in H$.

Soluție. Mulțimea $H = \{X \mid X \in G, \det X = 1\}$ conține matricea unitate I_2 și este multiplicativ stabilă, deci este un subgrup al lui G **1p**

Dacă $\{I_2\} \subsetneq H \subsetneq G$, atunci subgrupul H are proprietatea cerută. **1p**

Dacă $H = \{I_2\}$, atunci oricare două matrice X și Y din G comută, deoarece determinantul comutatorului $XYX^{-1}Y^{-1}$ este 1. Considerând o matrice X de ordin 2 în G , subgrupul format din I_2 și X are proprietatea cerută. **2p**

În fine, dacă $H = G$, considerând din nou o matrice X de ordin 2 în G , rezultă $(\operatorname{tr} X) \cdot X = 2I_2$, deci $(\operatorname{tr} X)^2 = 4$. Cum $X \neq I_2$, rezultă $\operatorname{tr} X = -2$, deci $X = -I_2$. În mod evident, subgrupul lui G format din $\pm I_2$ are proprietatea cerută. **3p**

*Simpla afirmație că, dacă $-I_2$ este în G , atunci subgrupul format din $\pm I_2$ are proprietatea cerută în enunțul problemei, este notată **1 punct**.*

Problema 3. Fie $f: [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ o funcție crescătoare și fie $g: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție de două ori derivabilă, astfel încât g'' este continuă și $g''(x) + f(x)g(x) = 0$, oricare ar fi numărul real $x \geq 0$.

(a) Dați un exemplu de funcții f și g , care îndeplinesc condițiile din enunț și g este neidentic nulă.

(b) Arătați că funcția g este mărginită.

Soluție. (a) Funcțiile $f: [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, $f(x) = 1$, și $g: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \sin x$, îndeplinesc condițiile din enunț. **1p**

(b) Rescriem condiția din enunț sub forma $g'(x)g''(x)/f(x) + g(x)g'(x) = 0$, oricare ar fi $x \geq 0$. Fie $t > 0$. Integrând pe intervalul închis $[0, t]$, obținem

$$2 \int_0^t \frac{g'(x)g''(x)}{f(x)} dx + (g(t))^2 - (g(0))^2 = 0.$$

..... **2p**

Funcția $x \mapsto 1/f(x)$, $x \geq 0$, este descrescătoare și ia valori strict pozitive. Conform teoremei de medie, există un punct θ între 0 și t , astfel încât

$$\int_0^t \frac{g'(x)g''(x)}{f(x)} dx = \frac{1}{f(0)} \int_0^\theta g'(x)g''(x) dx = \frac{(g'(\theta))^2 - (g'(0))^2}{2f(0)}.$$

..... **3p**

Prin urmare,

$$(g(t))^2 = (g(0))^2 + \frac{(g'(0))^2}{f(0)} - \frac{(g'(\theta))^2}{f(0)} \leq (g(0))^2 + \frac{(g'(0))^2}{f(0)},$$

deci g este mărginită. **1p**

Problema 4. Fie n un număr întreg, $n \geq 3$, și fie $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ numere complexe nenule, astfel încât $|a_i| < 1$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, și toți coeficienții polinomului $\prod_{i=1}^n (X - a_i)$ să fie întregi. Arătați că:

- (a) Numerele $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ sunt distincte două câte două;
- (b) Dacă a_i, a_j, a_k sunt în progresie geometrică, atunci $i = j = k$.

Soluție. (a) Fie $f = \prod_{i=1}^n (X - a_i)$. Cum $a_1 a_2 \dots a_n = (-1)^n f(0)$, rezultă că $f(0) \neq 0$ și $|a_1 a_2 \dots a_n| \geq 1$, deci $|a_n| > 1$ **1p**

Presupunem că $f = gh$, unde g și h sunt polinoame monice neconstante cu coeficienți întregi. Cum a_n este rădăcină simplă lui f , putem presupune că $g(a_n) = 0$ și $h(a_n) \neq 0$. Fie $m = \deg h$ și fie $a_{i_1}, \dots, a_{i_m}$ rădăcinile lui h . Cum h este monic, rezultă că $|h(0)| = |a_{i_1} \dots a_{i_m}| < 1$, deci $h(0) = 0$, în contradicție cu $f(0) \neq 0$. Așadar, f este ireductibil în $\mathbb{Z}[X]$, deci și în $\mathbb{Q}[X]$, de unde rezultă că f nu are rădăcini multiple. **2p**

(b) Presupunem că există a_p, a_q, a_r în progresie geometrică, nu toate egale. Cum $|a_n| > 1$ și $|a_i a_n| > 1$, $i = 1, 2, \dots, n$, rezultă că $p, q, r < n$.

Fie $g = \prod_{1 \leq i \leq j \leq n} (X - a_i a_j)$. Coeficienții lui g sunt expresii simetrice în $a_1, a_2, \dots, a_n$, deci sunt întregi. Dacă $a_q^2 = a_p a_r$, atunci $q \neq p$ și $q \neq r$, deci a_q^2 este rădăcină dublă a lui g **2p**

Cum g este monic și are toți coeficienții întregi, există un polinom monic h de grad minim cu coeficienți întregi, astfel încât $h(a_q^2) = 0$. Rezultă că g este divizibil cu h^2 .

Cum $|a_q^2| < 1$ și $|h(0)| \geq 1$, rezultă că h are o rădăcină complexă a de modul strict mai mare decât 1. **1p**

Din $h^2 | g$, rezultă că a este rădăcină dublă lui g , în contradicție cu faptul că singurele rădăcini ale lui g de modul supraunitar sunt $a_i a_n$, $i = 1, 2, \dots, n$, care sunt rădăcini simple. **1p**

Olimpiada Națională GAZETA MATEMATICĂ
Etapa II - 20 martie 2021

Timp de lucru 120 de minute

Fiecare problemă se punctează cu 1 punct

Alegeți varianta de răspuns. Pentru fiecare întrebare, un singur răspuns este cel corect.

1. Fie $\overline{abc}$ cel mai mic număr natural format cu trei cifre distincte, pentru care pătratul unei cifre este egal cu suma pătratelor celorlalte două cifre. Atunci suma $a + b + c$ este egală cu:

- A 12 B 8 C 16 D 19 E 14

R: A.

2. Dacă restul împărțirii numărului natural n la 9 este 7, iar restul împărțirii numărului natural n la 8 este 5, atunci restul împărțirii lui n la 72 este egal cu:

- A 13 B 11 C 31 D 61 E 36

R: D

3. Câte numere naturale de patru cifre conțin cifrele 2 și 3 alăturate, în această ordine?

- A 280 B 279 C 300 D 243 E 100

R: B

4. Zece numere naturale consecutive se împart la 6 și se adună resturile obținute. Cea mai mare valoare posibilă a sumei acestor resturi este egală cu:

- A 26 B 27 C 28 D 29 E 50

R: D

5. Ordinea crescătoare a numerelor $a = 2^{85}$, $b = 3^{51}$ și $c = 5^{34}$ este:

- A $a < b < c$ B $a < c < b$ C $c < b < a$ D $b < a < c$ E $c < a < b$

R: C.

6. Numărul $N = 10^{n+2} \cdot 13 + 2^{n+2} \cdot 5^{n+3} + 2^{n+2} \cdot 5^{n+1} \cdot 11 + 10^n$, unde n este număr natural nenul, este divizibil cu:

- A 2020 B 45 C 46 D 47 E 2022

R: D.

7. Se consideră numerele prime a și b astfel încât $a + a^2 + a^3 + a^4 + 73b = 2021$. Atunci $a + b$ este

- A 44 B 28 C 26 D 22 E 20

R: D.

8. Dacă elevii unei clase se așază câte doi într-o bancă, atunci rămân doi elevi în picioare, iar dacă se așază câte trei elevi într-o bancă rămân trei bănci libere, iar într-o bancă stau doi elevi. Suma dintre numărul elevilor și numărul băncilor din clasă este egală cu:

- A 40 B 42 C 38 D 37 E 36

R: C.

9. Suma cifrelor numărului $N = 9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{999\dots9}_{2021 \text{ cifre}}$ este:

- A 2043 B 2034 C 2022 D 2021 E 2020

R: A

10. Vom spune că un număr de forma $\overline{abc}$ este *simpatice* dacă cifrele a , b , c sunt (în această ordine) numere pare consecutive. Suma tuturor numerelor simpatice este egală cu:

A 700 B 2220 C 2640 D 1926 E 3542

R: C.

11. Vom spune că un număr natural A este *ciudat* dacă, scris în baza 10, are 20 de cifre, iar suma oricăror două cifre alăturate ale lui A este un număr impar. Numărul de numere ciudate este egal cu:

A 5^{20} B $2 \cdot 5^{20}$ C $2 \cdot 5^{20} - 1$ D $5^{20} - 5^{19}$ E $2 \cdot 5^{20} - 5^{19}$

R: E.

12. 7 creioane și 5 pixuri costă 130 de lei, iar 8 creioane și 7 pixuri costă 173 de lei. Cu cât ar trebui să se ieftinească un pix pentru a putea cumpăra, cu suma de 160 de lei, 5 creioane și 9 pixuri?

A 3 B 4 C 2 D 6 E 1

R: B.

13. Se consideră toate cele 100 de numere naturale $A = 2^a + 5^b$, unde a și b sunt cifre. Notăm cu $u(A)$ ultima cifră a unui număr A . Suma tuturor numerelor $u(A)$ este egală cu:

A 477 B 530 C 500 D 53 E 752

R: B.

14. Cifrele x și y verifică relația $4^x \cdot 3^y = \overline{y30x}$. Atunci diferența numerelor x, y este egală cu:

A 1 B 2 C 3 D 4 E 5

R: B.

15. Numerele prime x, y și z verifică relația $43x^2 + 129y + 10z = 1720$. Numărul $x + y + z$ este egal cu:

A 12 B 43 C 63 D 53 E 23

R: D.

16. Suma numerelor prime p și q pentru care $p + q = 8p^2 - q^2$ este egală cu:

A 5 B 8 C 9 D 7 E 10

R: D.

17. Vom spune că un număr natural de patru cifre este *echilibrat* dacă prima sau ultima sa cifră este egală cu suma celorlalte cifre ale sale. Dacă $\overline{abcd}$ și $\overline{abcd} + 1$ sunt numere echilibrate, atunci suma $a + d$ este egală cu:

A 15 B 10 C 11 D 13 E 14

R: E.

18. Se așază în ordine crescătoare numerele naturale care se scriu numai cu cifrele 2 sau 7 (primele numere sunt 2, 7, 22, 27, 72, 77, 222, ...). Suma cifrelor celui de-al 120-lea număr din șir este egală cu:

A 37 B 32 C 29 D 30 E 42

R: B.

19. Se consideră numărul $S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{119}$. Cel mai mic număr natural compus, de trei cifre, care este divizor al lui S este egal cu:

A 101 B 111 C 105 D 123 E 103

R: C.

20. Scriem toate numerele de patru cifre care se pot forma cu cifrele 1, 3, 4 și 7 (un astfel de număr este, de exemplu, 3347). Împărțind fiecare dintre aceste numere la 3 obținem un rest. Suma tuturor resturilor obținute este

A 0 B 128 C 137 D 201 E 256

R: D

21. Pe o tablă sunt scrise numerele 2, 3, 4, 5, 8, 10, 11, 14, 16 și 17. O persoană A șterge niște numere, iar o persoană B șterge alte numere astfel încât pe tablă rămâne un singur număr. Dacă suma numerelor șterse de A este jumătate din suma numerelor șterse de B, atunci pe tablă rămâne numărul

A 10 B 4 C 3 D 17 E 5

R: C.

22. Suma cifrelor numărului $\overline{abcd}$ pentru care $4 \cdot \overline{abcd} = \overline{dcba}$ este egală cu:
A 18 **B** 22 **C** 16 **D** 24 **E** 20

R: A.

23. Se consideră șirul $8^1 + 10^1, 8^3 + 10^2, 8^5 + 10^3, \dots, 8^{33} + 10^{17}$. Pentru fiecare termen din șir se calculează suma cifrelor, apoi suma cifrelor numărului obținut și tot așa până când obținem ca rezultat un număr de o singură cifră. Suma tuturor numerelor obținute în acest mod este egală cu

A 2021 **B** 17 **C** 153 **D** 105 **E** 43

R: C.

24. Vom spune că un număr natural p este *special* dacă este prim și există un număr natural nenul n și numerele naturale prime x, y astfel încât $x > y$ și $p = x^{2^n} + y$. Numărul numerelor naturale speciale, mai mici ca 1000, este

A 5 **B** 4 **C** 3 **D** 2 **E** 1

R: D.

Olimpiada Națională GAZETA MATEMATICĂ
Etapa II - 20 martie 2021
clasa a VI-a

Timp de lucru 120 de minute

Fiecare problemă se punctează cu 1 punct

Alegeți varianta de răspuns. Pentru fiecare întrebare, un singur răspuns este cel corect.

1. Într-o școală de muzică sunt 45 de elevi. Dintre aceștia, 10 elevi studiază numai flautul, 29 elevi studiază vioara și 18 elevi studiază pianul. Câți elevi studiază și pianul și vioara?

A 11 B 16 C 21 D 6 E 12

R: E.

2. Într-un grup de elevi, raportul dintre numărul fetelor și numărul băieților este $\frac{6}{5}$. Dacă numărul fetelor este cu 4 mai mare decât numărul băieților, aflați câți elevi sunt în grup.

A 44 B 48 C 55 D 56 E 66

R: A.

3. Un obiect se scumpește cu 25%. Cu cât la sută ar trebui să se ieftinească, pentru a ajunge la prețul inițial?

A 25% B 10% C 24% D 20% E 22%

R: D.

4. În interiorul unghiului $\angle AOB$ cu măsura de 75° este inclusă semidreapta OC , iar punctul D nu aparține interiorului unghiului $\angle AOB$. Dacă măsura unghiului $\angle AOC$ este egală cu 30° , semidreapta OB este bisectoarea unghiului $\angle COD$, OE este semidreapta opusă semidreptei OA și OF este semidreapta opusă semidreptei OD , atunci măsura unghiului $\angle EOF$ este egală cu:

A 75° B 90° C 120° D 135° E 45°

R: C.

5. În triunghiul ascuțitunghic ABC , punctul H este ortocentrul său. Dacă măsura unghiului $\angle BHC$ este 130° , iar $\frac{\angle ABC}{5} = \frac{\angle ACB}{8}$, atunci măsura unghiului $\angle ABC$ este:

A 40° B 50° C 90° D 80° E 130°

R: B.

6. La un concurs de matematică participă elevi din clasele a IV-a, a V-a și a VI-a. Dacă 60% nu sunt în clasa a IV-a și 65% nu sunt în clasa a V-a, atunci procentul elevilor de clasa a VI-a care participă la concurs este egal cu:

A 65% B 35% C 40% D 25% E 60%

R: D.

7. Se consideră triunghiul ABC cu $AB = AC$ și $\angle BAC = 120^\circ$. Dacă $AP \perp BC$, punctul P aparține laturii BC , $CQ \perp AB$ și punctul Q aparține dreptei AB , atunci măsura unghiului $\angle APQ$ este egală cu:

A 30° B 60° C 90° D 120° E 15°

R: A.

8. Care este cel mai mare număr natural n , pentru care 3^n divide numărul $19 \cdot 18 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 - 18 \cdot 17 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$?

A 8 B 10 C 12 D 6 E 2

R: B.

9. Fie mulțimea $M = \left\{ \overline{abc} \mid \frac{a+b}{b+c} = \frac{a-b}{c-b}, a > b, c > b \right\}$. Numărul de elemente ale mulțimii M este:

A 36 B 126 C 45 D 117 E 153

R: D.

10. Mulțimea numerelor naturale impare se împarte în grupe, astfel:

$$\underbrace{\{1\}}_{\text{grupa 1}}, \underbrace{\{3, 5\}}_{\text{grupa 2}}, \underbrace{\{7, 9, 11\}}_{\text{grupa 3}}, \underbrace{\{13, 15, 17, 19\}}_{\text{grupa 4}}, \dots$$

Grupele încep cu numărul:

A 9901 B 101 C 4951 D 5051 E 10101

R: A.

11. Determinați numărul mulțimilor de patru elemente $\{a, b, c, d\}$, care sunt submulțimi ale mulțimii $\{1, 2, 3, \dots, 2021\}$ și au proprietatea $a + b = c + d = 2021$.

A $2020 \cdot 2021$ C $1010 \cdot 2021$ B $1010 \cdot 1011$ D $1009 \cdot 1010$ E $505 \cdot 1009$

R: E.

12. Mulțimea A este inclusă în mulțimea numerelor întregi și produsul elementelor sale este 330. Numărul maxim de elemente ale mulțimii A este egal cu:

A 4 B 5 C 6 D 11 E 22

R: C.

13. Pe segmentul AB se consideră punctele C și D astfel încât $AC = CD = DB$. Dacă cercurile cu centrele în punctele C și D și lungimea razei egală cu $\frac{AB}{3}$ se intersectează în punctele E și F , atunci măsura unghiului $\angle EAF$ este egală cu:

A 30° B 60° C 90° D 120° E 150°

R: B.

14. Numerele naturale x, y, z sunt direct proporționale cu numerele prime p, q, r . Dacă $p \cdot q \cdot r = 30$ și $x + y + z = 100$, atunci suma ultimelor 2021 de cifre ale numărului $A = x^{2020} + y^{2020} + z^{2020}$ este egală cu:

A 2021 B 2020 C 6 D 4 E 2

R: E.

15. Câte perechi de numere întregi (n, k) au proprietatea $\frac{4}{n^2 + 2} = \frac{k^2}{51}$?

A 2 B 4 C 6 D 8 E 16

R: B.

16. Câte fracții reducibile sunt în șirul $\frac{100}{1}, \frac{102}{3}, \frac{104}{5}, \frac{106}{7}, \dots, \frac{160}{61}$?

A 10 B 12 C 13 D 9 E 14

R: B.

17. Ana își pregătește în fiecare dimineață o băutură miraculoasă în felul următor: toarnă într-un vas gradat, care are capacitatea de 350 ml, 100 ml de miere de albine, după care toarnă 200 ml de ceai, apoi completează cu 50 ml dintr-un lichid care este ingredientul secret și amestecă. Într-o dimineață nu a fost atentă când a adăugat ceaiul și a turnat până s-a umplut vasul, dar fără să verse pe jos. Care este cantitatea minimă de amestec ceai - miere care trebuie vărsată astfel ca, după ce va adăuga cantitatea de miere conținută în amestecul aruncat, ceai și 50 ml din ingredientul secret, să obțină 350 ml de băutură după rețeta stabilită?

A 50 ml B 55 ml C 65 ml D 70 ml E 75 ml

R: D.

18. Vom spune că un număr natural se numește *interesant* dacă suma pătratelor cifrelor sale este un pătrat perfect. Dacă N este cel mai mic număr interesant de 4 cifre distincte atunci:

A $N < 1010$ B $1010 \leq N < 2000$ C $2000 \leq N < 3000$ D $3000 \leq N < 4000$ E $N \geq 4000$

R: B

19. Fie mulțimea $A = \left\{ (x, y) \mid \frac{x^2 + y^2}{26} = \frac{x \cdot y}{[x, y]}, x, y \in \mathbb{N}^* \right\}$ unde $[x, y]$ reprezintă cel mai mic multiplu comun al numerelor x și y . Numărul de elemente ale mulțimii A este:

A 2 **B** 6 **C** 3 **D** 4 **E** 5

R: E.

20. Dacă s este suma numerelor naturale nenule n cu proprietatea că numărul n^2 are exact n divizori numere naturale, atunci:

A $3 \leq s \leq 5$ **B** $5 < s \leq 10$ **C** $10 < s \leq 100$ **D** $100 < s \leq 1000$ **E** $s > 1000$

R: A.

21. O firmă intenționează să construiască, de aceeași parte a unei străzi, 8 case care vor purta numerele $1, 2, 3, \dots, 8$. Casele pot fi din cărămidă sau din lemn. Normele prevăd că se pot construi oricâte case din lemn, dar nu pot exista mai mult de trei case de lemn cu numere consecutive. Dacă n este numărul de variante pe care le are la dispoziție firma de construcții pentru a construi cele 8 case, atunci n este egal cu:

A 256 **B** 232 **C** 208 **D** 156 **E** 128

R: C.

22. Cel mai mare număr natural p pentru care există numerele naturale consecutive $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_p$ astfel încât $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_p = 5^7$ este:

A 164 **B** 188 **C** 242 **D** 250 **E** 625

R: D.

23. Fie unghiul propriu $\angle AOB$ și punctele M, N astfel încât M este în interiorul unghiului $\angle AOB$, iar N în exteriorul unghiului $\angle AOB$. Considerăm semidreapta OP , unde P aparține interiorului unghiului $\angle AOM$, astfel încât măsurile unghiurilor $\angle AOP$ și $\angle POM$ sunt direct proporționale cu 2 și 3, iar $\angle POB = 60^\circ$. Dacă $\angle BOM = 3 \cdot \angle BON$, iar OQ este bisectoarea unghiului $\angle AOP$, atunci măsura unghiului $\angle NOQ$ este:

A 110° **B** 120° **C** 100° **D** 90° **E** 80°

R: E

24. Dacă numărul natural n este divizibil cu 15 și n^2 are exact 91 divizori naturali, atunci numărul divizorilor naturali ai lui n este:

A 18 **B** 41 **C** 40 **D** 28 **E** 13

R: D.

Olimpiada Națională GAZETA MATEMATICĂ

Etapa II - 20 martie 2021

Clasa a VII-a

Timp de lucru 120 de minute**Fiecare problemă se punctează cu 1 punct****Alegeți varianta de răspuns. Pentru fiecare întrebare, un singur răspuns este cel corect.**1. Valoarea sumei $|\pi - \sqrt{10}| + |\pi + \sqrt{10}|$ este egală cu:

- A $2\sqrt{10}$ B 0 C 2π D π E $\pi - 10$

R: A2. Soluția ecuației $\frac{x+2}{1011} + \frac{x}{1010} + \frac{x-2}{1009} + \frac{x-4}{1008} + \dots + \frac{x-2016}{2} = 2020$ este egală cu:

- A 2021 B 2020 C 2019 D 2022 E 1011

R: B3. Partea întreagă a numărului $a = \sqrt{2} - 3\sqrt{3}$ este egală cu:

- A -6 B -5 C -4 D -3 E -2

R: C4. Dacă $a = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 2021$, atunci rădăcina pătrată a lui a este egală cu:

- A 2021 B 2020 C 1010 D 1011 E 1012

R: D

5. Doi bicicliști pornesc, în același moment, din două orașe A și B, situate la o distanță de 165 de km unul de celălalt. Un biciclist merge din A spre B cu viteza constantă de 30 de km pe oră, iar celălalt biciclist merge din B spre A cu viteza constantă de 25 de km pe oră. Distanța dintre cei doi bicicliști, cu 12 minute înainte de a se întâlni, este egală cu:

- A 12 km B 9 km C 11 km D 10 km E 13 km

R: C

6. Laturile AB, BC, CD, DA ale unui patrulater convex au mijloacele M, N, P , respectiv R . Atunci :
 A MP și NR au același mijloc B $MP \perp NR$ C $MP = NR$ D $MP \perp AB$ E $MP \parallel BC$

R: A

7. Un trapez isoscel cu diagonalele perpendiculare are lungimea liniei mijlocii egală cu a . Aria trapezului este egală cu:

- A $a^2\sqrt{2}$ B $2a^2$ C a^2 D $\frac{a^2}{4}$ E $a^2\sqrt{5}$

R: C

8. Fie triunghiul ABC cu $\angle BAC = 60^\circ$ și $AI = 4$ cm, unde I este centrul cercului înscris în triunghi. Distanța de la I la dreapta BC este egală cu:

- A 4 cm B 2 cm C $\sqrt{2}$ cm D $4\sqrt{2}$ cm E $\sqrt{5}$ cm

R: B

9. Considerăm mulțimea $A = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{N}^*, a + b = 2021 \right\}$. Numărul fracțiilor din A , ireductibile și supraunitare, este egal cu:

- A 1923 B 2020 C 1932 D 1011 E 966

R: E

10. Numărul perechilor de numere naturale nenule (a, b) , prime între ele, cu proprietatea că $\frac{13a - 12b}{a + b}$ este un număr întreg, este egal cu:

- A 20 B 24 C 28 D 22 E 26

R: B

11. Cel mai mic număr real $x > 0$, pentru care $x \cdot (3\sqrt{5} - 4\sqrt{3})$ este număr întreg, este egal cu:

- A $\frac{4}{3}\sqrt{3} + \sqrt{5}$ B $3\sqrt{5} + 4\sqrt{3}$ C $-3\sqrt{5} + 4\sqrt{3}$ D $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ E $\sqrt{5} - \sqrt{3}$

R: A

12. Se consideră expresia $E = [\{x\} + \{2x\} + \{3x\}]$, unde x este un număr real ($\{a\}$ și $[a]$ reprezintă partea fracționară, respectiv partea întreagă a numărului real a). Mulțimea valorilor posibile ale lui E este egală cu:

- A $\{0, 2\}$ B $\{0, 1\}$ C $\{1, 2\}$ D $\{0, 1, 2\}$ E $\{0, 1, 2, 3\}$

R: D

13. Într-un triunghi oarecare ABC considerăm punctele $D \in (AB)$ și $E \in (AC)$, astfel încât $3AD = 2AB$ și $DE \parallel BC$. Dacă M este mijlocul lui (AC) , F este simetricul punctului E față de M , iar $\{Q\} = BM \cap DE$, atunci punctul Q este:

- A centrul cercului înscris în $\triangle ABC$ B centrul cercului circumscris $\triangle ABC$
C centrul cercului înscris în $\triangle BEF$ D centrul de greutate al $\triangle DCF$
E centrul de greutate al $\triangle BEF$

R: E

14. Fie ABC un triunghi oarecare și $D \in (BC)$ piciorul bisectoarei din A . Atunci:

- A $AD < \sqrt{AB \cdot AC}$ B $AD = \frac{AB + AC}{2}$ C $AD = \frac{AB^2}{2 \cdot AC} + \frac{AC^2}{2 \cdot AB}$
D $AD = \sqrt{\frac{AB^2 + AC^2}{2}}$ E $AD^2 = AB \cdot AC$

R: A

15+16. Considerăm pătratul $ABCD$ și punctele E pe (BC) și F pe (CD) , astfel încât triunghiul AEF să fie echilateral. Notăm cu M, N, P mijloacele segmentelor (AE) , (CE) , și respectiv (DF) . Atunci:

- A $\angle AEB = 70^\circ$ B $FE \parallel PM$ C $FE = MN$ D $FE \perp MN$ E $PM \perp AE$
A $PM = AF$ B $PN = NB$ C $PM = PN$ D $FE = AB$ E $FN = AE$

R1: D R2: C

17. Numărul soluțiilor în $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ale ecuației $x^2 \cdot (y - 1) + y^2 \cdot (x - 1) = 1$ este:

- A 0 B 1 C 2 D 3 E 4

R: E

18. Cel mai mare număr natural n , pentru care există $a_1, a_2, \dots, a_n \in \{1, 2, \dots, 1000\}$, numere naturale distincte, astfel încât suma oricăror trei dintre ele să fie divizibilă cu 15, este:

- A 66 B 67 C 68 D 111 E 200

R: B

19. Numerele reale nenule a, b, c satisfac relațiile $a < b < c$, $a \cdot b \cdot c = 1$ și $a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Atunci:

- A $a + b > 2$ B $a + c < 2$ C $\frac{1}{2} < b < 2$ D $c < 2$ E $a + c = 2b$

R: C

20. Fie a, b, c, d patru numere raționale. Definim numerele $x = |a - b||c - d|$, $y = |a - c||b - d|$, $z = |a - d||b - c|$. Atunci produsul $(x + y - z)(y + z - x)(z + x - y)$ este egal cu:

$$\begin{array}{llll} \mathbf{A} & (a+b-c-d)^6 & \mathbf{B} & (a-b+c-d)^6 & \mathbf{C} & (a+d-b-c)^6 & \mathbf{D} & 0 \\ & & \mathbf{E} & (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d) \end{array}$$

R: D

21+22. Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC cu $AB < AC$, O centrul cercului său circumscris, H ortocentrul său și înălțimile AE , BF și CG ($E \in BC$, $F \in AC$, $G \in AB$). Fie I mijlocul lui AH și J mijlocul lui BC . Presupunem că $IE = FJ$. Atunci:

$$\begin{array}{llllll} \mathbf{A} & FJ = BG & \mathbf{B} & CH = AB & \mathbf{C} & EF = BG & \mathbf{D} & FE \parallel AB & \mathbf{E} & IJ = BG \\ \mathbf{A} & \angle AOB = 120^\circ & \mathbf{B} & \angle AOC = 120^\circ & \mathbf{C} & \angle ACG = \angle OCB & \mathbf{D} & \angle ACG = \angle HCB & \mathbf{E} & \angle COB = 120^\circ \end{array}$$

R1: B R2: C

23. Triunghiul ABC are vârfurile A și B fixe, iar vârful C se deplasează astfel încât mediana AM , $M \in BC$, să aibă lungimea de 1 cm. Fie $\mathcal{P}$ mulțimea pozițiilor posibile ale lui C . Atunci $\mathcal{P}$ este inclusă:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{A} & \text{într-o dreaptă } d \parallel AB & \mathbf{B} \text{ într-un romb} & \mathbf{C} & \text{într-o dreaptă } d \perp AB \\ \mathbf{D} & \text{în reuniunea a două segmente} & \mathbf{E} & \text{într-un cerc} \end{array}$$

R: E

24. În triunghiul ABC se consideră bisectoarea AE , $E \in BC$ și mijlocul D al segmentului AB . Dreptele CD și AE se intersectează în F . Se știe că $BC = 3CE$ și $AB = 4FC$. Dacă $\angle CAB = x \cdot \angle ABC$, $x \in \mathbb{R}$, atunci:

$$\begin{array}{lllll} \mathbf{A} & x = 1 & \mathbf{B} & x = \frac{4}{3} & \mathbf{C} & x = \frac{3}{2} & \mathbf{D} & x = 2 & \mathbf{E} & x = 5 \end{array}$$

R: D

Olimpiada Națională GAZETA MATEMATICĂ
Etapa II - 20 martie 2021

Timp de lucru 120 de minute

Fiecare problemă se punctează cu 1 punct

Alegeți varianta de răspuns. Pentru fiecare întrebare, un singur răspuns este cel corect.

Tip I

1. Considerăm x soluția ecuației

$$\frac{x}{1 \cdot 2} + \frac{x}{2 \cdot 3} + \frac{x}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{x}{2020 \cdot 2021} = \frac{2020}{43}.$$

Suma cifrelor lui x este:

- A** 5 **B** 8 **C** 11 **D** 12 **E** 21

Răspuns **C**

2. Fie x și y numere reale care satisfac ecuația $5x^2 + y^2 + 20 = 2x + 3xy + 6y$. Atunci $x + y$ este egal cu:

- A** 5 **B** 8 **C** 9 **D** 14 **E** 16

Răspuns **B**

3. Notăm cu $[x]$ partea întreagă a numărului x . Mulțimea $A = \{x \in \mathbb{R} \mid [x]^2 - 5[x] + 6 = 0\}$ este egală cu:

- A** $[2, 4]$ **B** $(2, 4)$ **C** $(2, 3) \cup (3, 4)$ **D** $[2, 3) \cup (3, 4)$ **E** $[2, 4)$

Răspuns **E**

4. Dacă $a, b \in \mathbb{N}$ astfel încât $a + b = 101$, iar valoarea sumei $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ este maximă, atunci $a \cdot b$ este egal cu:

- A** 1050 **B** 2500 **C** 2000 **D** 2550 **E** 1010

Răspuns **D**

5. Numărul elementelor mulțimii $M = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x^4 + x^2 + 1 = 2^y\}$ este:

- A** 0 **B** 1 **C** 2 **D** 4 **E** 8

Răspuns **B**

6. Fie $VABC$ un tetraedru regulat de muchie $l = \sqrt{3} + \sqrt{6} - 3$, M mijlocul segmentului BC , $VO \perp (ABC)$, $O \in (ABC)$ și P mijlocul segmentului VO . Perimetrul triunghiului APM este egal cu:

- A** $\sqrt{6}$ **B** $\frac{2(\sqrt{3} + \sqrt{6} - 3)}{3}$ **C** $\sqrt{3} + \sqrt{6} + 3$ **D** $\sqrt{2}$ **E** $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{6} + 3}{2}$

Răspuns : **A**

7. În tetraedrul regulat $ABCD$ notăm cu A_1 , B_1 , C_1 și D_1 centrele de greutate ale fețelor BCD , ACD , ABD , respectiv ABC . Atunci măsura unghiului dintre dreptele A_1C_1 și B_1D_1 este:

- A** 0° **B** 60° **C** 90° **D** 30° **E** 75°

Răspuns : **C**

8. Pentru $n \in \mathbb{N}$, definim $A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid |x + n + 4| \leq 3n - 4\}$. Numărul natural n pentru care mulțimea A_n conține exact 323 numere întregi este:

- A** 20 **B** 60 **C** 55 **D** 120 **E** 64

Răspuns : **C**

9. Numărul perechilor (x, y) de numere naturale, care sunt soluții ale ecuației $2^x - 5^y = 39$ este:

- A** 0 **B** 1 **C** 2 **D** 3 **E** 4

Răspuns : **B**

10. Cel mai mare divizor comun al numerelor $2^{2^{2019}} - 1$ și $2^{2^{2021}} - 4$ este:

- A** 1 **B** 2 **C** 3 **D** 2021 **E** 2^{2021}

Răspuns : C

11. Se consideră un plan α , o dreaptă $d \parallel \alpha$, cinci puncte A, B, C, D, E , oricare 3 necoliniare, situate în planul α și punctele $P_1, P_2, \dots, P_{20}$, distincte două câte două, situate pe d . Care este numărul maxim de plane distincte determinate de câte trei dintre cele 25 de puncte, exceptând planul α ?

A 1150 B 205 C 206 D 201 E 200

Răspuns : B

12. Fie $ABCD A'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic și H ortocentrul triunghiului $A'BD$. Valoarea expresiei $\sin^2 \widehat{HAB} + \sin^2 \widehat{HAD} + \sin^2 \widehat{HAA'}$ este:

A 0 B $\frac{1}{2}$ C 1 D $\frac{3}{2}$ E 2

Răspuns : E

13. Dacă $x > 0$ este număr real și $x + \frac{1}{x} \leq 7$, atunci valoarea maximă a expresiei $x^2 - \frac{1}{x^2}$ este:

A $7\sqrt{5}$ B 45 C $21\sqrt{5}$ D 47 E 0

Răspuns : C

14. Fie $A = \left\{ \frac{1}{1 \cdot 2}, \frac{1}{2 \cdot 3}, \frac{1}{3 \cdot 4}, \frac{1}{4 \cdot 5}, \dots, \frac{1}{2021 \cdot 2022} \right\}$ și $B = \left\{ \frac{1}{2 \cdot 4}, \frac{1}{3 \cdot 5}, \frac{1}{4 \cdot 6}, \dots, \frac{1}{2020 \cdot 2022} \right\}$. Cardinalul mulțimii $A \cup B$ este:

A 0 B 2020 C 2021 D 4039 E 4040

Răspuns : E

15. Suma a trei numere raționale strict pozitive x, y, z este 3, iar suma inverselor lor este 5. Știind că unul dintre numere este întreg, atunci numărul tripletelor (x, y, z) ce satisfac condițiile de mai sus este:

A 1 B 2 C 3 D 4 E 6

Răspuns : E

16. Se consideră paralelipipedul dreptunghic $ABCD A'B'C'D'$, cu $AB = a$, $BC = b$, $AA' = c$, astfel încât $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{ac}} + \frac{1}{\sqrt{bc}}$. Fie u unghiul dreptei BD' cu planul (ACC') . Atunci sinusul unghiului u este egal cu:

A 0 B $\frac{1}{2}$ C $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D $\frac{\sqrt{6}}{3}$ E $\frac{1}{3}$

Răspuns : D

17. Notăm partea fracționară a numărului x cu $\{x\}$. Suma soluțiilor ecuației $25\{x\}^2 - 10x + 1 = 0$ este:

A $\frac{1}{5}$ B $\frac{6 + \sqrt{5}}{5}$ C $\frac{7 + \sqrt{5}}{5}$ D $\frac{18 + 3\sqrt{5}}{5}$ E 3

Răspuns : C

18. Dacă n este număr natural, notăm cu a_n numărul întregilor din intervalul $[n\sqrt{2}, n\sqrt{3}]$. Cel mai mic element al mulțimii $\{a_n \mid n \geq 7\}$ este

A 0 B 1 C 2 D 3 E 4

Răspuns : C

19. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC cu catetele $AB = 40$ cm și $AC = 30$ cm. Pe planul (ABC) se ridică perpendicularele AA' și CC' , de aceeași parte a planului, astfel încât $AA' = AB$ și $CC' = \frac{5}{4}BC$. Tangenta unghiului planelor (ABC) și $(A'BC')$ este egală cu:

A $\frac{5}{4}$ B $\frac{3}{2}$ C $\frac{4}{3}$ D $\frac{6}{5}$ E $\frac{7}{6}$

Răspuns : A

20. Pe un cerc sunt dispuse 2014 numere reale, fiecare având modulul 1. Se face suma celor 2014 produse de câte patru numere dispuse consecutiv pe cerc. Atunci suma poate fi:

A -100 B 1606 C 2018 D -8 E -51

Răspuns : B

21. Se consideră mulțimea $A = \{1, 2, \dots, 2021\}$. Numărul maxim de submulțimi ale lui A ce pot fi alese, astfel încât intersecția oricăror două submulțimi distincte să aibă exact 2019 elemente este:

A 3 **B** 4042 **C** 2019 **D** 1011 **E** 2021

Răspuns : **E**

22. Fie $ABCA'B'C'$ o prismă triunghiulară regulată cu muchia bazei $AB = 2\sqrt{3}$ cm și înălțimea $AA' = 1$ cm. Dacă M este un punct din planul triunghiului $A'B'C'$, atunci valoarea minimă a sumei pătratelor distanțelor de la M la dreptele AB , AC și BC este:

A 2 **B** 4 **C** 6 **D** 8 **E** 12

Răspuns : **C**

23. Fie a un număr natural și $A(a) = \{\sqrt{a^2 + 1}, \sqrt{a^2 + 2}, \sqrt{a^2 + 3}, \dots, \sqrt{a^2 + 29a + 201}\}$. Valoarea lui a pentru care suma elementelor mulțimii $A(a) \cap \mathbb{N}$ este 203 este:

A 2 **B** 5 **C** 7 **D** 9 **E** 11

Răspuns : **C**

24. Pe latura BC a triunghiului ABC se consideră punctele D și E astfel încât $BD = DE = EC$. Fie M mijlocul segmentului AD , $BM \cap AE = \{P\}$, $CM \cap AE = \{Q\}$. Se construiesc RM și TD perpendiculare pe planul (ABC) , de aceeași parte a acestuia, astfel încât $TD = 2RM$. Raportul dintre aria triunghiului PRQ și aria triunghiului ETA are valoarea:

A $\frac{1}{2}$ **B** $\frac{1}{3}$ **C** $\frac{1}{4}$ **D** $\frac{2}{3}$ **E** $\frac{1}{6}$

Răspuns : **E**

Olimpiada Națională GAZETA MATEMATICĂ

Etapa II - 20 martie 2021

Clasa a IX-a

Timp de lucru 180 de minute**Fiecare problemă se punctează cu 1 punct****Alegeți varianta de răspuns. Pentru fiecare întrebare, un singur răspuns este cel corect.**1. Suma $1 - 4 + 9 - 16 + \dots + 99^2 - 100^2$ este egală cu:

- A -5050 B -4950 C -5000 D -5150 E -5100

2. Mulțimea valorilor reale ale lui m pentru care ecuația $|x - 1| + |x - 3| = m$ are cel puțin o soluție reală este egală cu:

- A $(0, \infty)$ B $[0, \infty)$ C $[2, \infty)$ D $[1; 3]$ E $(2, \infty)$

Problemele 3-5 se referă la următorul enunț.

În planul triunghiului ABC considerăm punctele M, N, P și Q astfel încât: $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AB}$, $2\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{5} \overrightarrow{AB}$ și $3\overrightarrow{QA} + 2\overrightarrow{QB} + \overrightarrow{QC} = \overrightarrow{0}$.

3. Dacă $x, y \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $x\overrightarrow{QM} = y\overrightarrow{QN}$, atunci valoarea raportului $\frac{x}{y}$ este:

- A 3 B -1 C -2 D 2 E 1

4. Dacă $\overrightarrow{CQ} = \alpha \overrightarrow{QP}$ atunci α este egal cu:

- A 4 B 9 C 5 D 6 E 8

5. Dacă $AQ \cap BC = \{R\}$, valoarea raportului $\frac{QA}{QR}$ este:

- A $\frac{4}{3}$ B $\frac{5}{4}$ C $\frac{4}{5}$ D $\frac{3}{4}$ E 1

6. Cel mai mic element al mulțimii $\{ab \mid a, b \in \mathbb{R} \text{ și } a^2 + 2b^2 = 1\}$ este egal cu:

- A 0 B -1 C $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ D $-\frac{1}{2}$ E $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$

7. Dacă $[a]$ și $\{a\}$ reprezintă partea întreagă, respectiv partea fracționară a numărului real a , atunci numărul elementelor mulțimii $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \left[\frac{x+1}{5}\right] = \left\{\frac{x-1}{2}\right\}\right\}$ este egal cu:

- A 2 B 1 C 3 D 0 E 4

8. Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ascuțitunghic ABC și punctele M, N, P în planul triunghiului astfel încât $\overrightarrow{OM} = 2 \cdot \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{ON} = 2 \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OP} = 2 \cdot \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}$. Dacă punctul Q este centrul de greutate al triunghiului MNP , atunci:

- A $AQ \parallel BC$ B $AQ \perp BC$ C $BQ = |\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}|$ D $AQ \perp AB$ E $MN \geq AB + AC$

9. Valoarea minimă a expresiei $|x + 1| + |x + 2| + \dots + |x + 2021|$, când x parcurge mulțimea numerelor reale, este egală cu:

- A 0 B $2021 \cdot 1011$ C $1010 \cdot 1011$ D 1011^2 E 1010^2

10. Împărțim un pătrat prin paralele la laturi în 100 de pătrate congruente. Care este numărul pătratelor de diferite dimensiuni care apar în figura obținută?

- A 385 B 1000 C 200 D 220 E alt răspuns

11. Fie $ABCDEF$ un hexagon regulat, P mijlocul laturii (BC) și punctele $M \in (AP)$, $N \in (CE)$ astfel încât $\frac{AM}{AP} = \frac{CN}{CE} = r$. Dacă punctele B, M, N sunt coliniare, atunci r este egal cu:

- A $\frac{1}{\sqrt{5}}$ B $\frac{2}{5}$ C $\frac{1}{\sqrt{3}}$ D $\frac{1}{\sqrt{2}}$ E $\frac{1}{3}$

12. Dacă $[a]$ și $\{a\}$ reprezintă partea întreagă, respectiv partea fracționară a numărului real a , atunci mulțimea $\left\{ \left[\frac{3}{2x} \right] \mid x \in \mathbb{R} \text{ și } \frac{1}{[x]} + \frac{1}{\{x\}} = 2x \right\}$ este egală cu:

- A $\{0, 1, 2\}$ B $\{0\}$ C $\{1, 2\}$ D $\{0, 1, 2, 3\}$ E $\{0, 1\}$.

13. Fie M mulțimea tripletelor (a, b, c) de numere reale nenule cu proprietatea că a, b, c sunt în progresie aritmetică, ab, bc, ca sunt în progresie geometrică iar $a + b + c = ab + bc + ca$. Atunci $\sum_{(a,b,c) \in M} (|a| + |b| + |c|)$ este:

- A $\frac{3}{2}$ B $\frac{5}{2}$ C $\frac{7}{2}$ D $\frac{11}{2}$ E $\frac{13}{2}$

14. Produsul dintre cel mai mic și cel mai mare element al mulțimii $\left\{ \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$ este egal cu:

- A 3 B $\frac{7}{3}$ C $\frac{1}{3}$ D 1 E $\frac{10}{3}$

15. Considerăm șirul $(a_n)_{n \geq 1}$, $a_1 = 2$; $a_2 = 6$ și $a_{n+1} = \frac{a_n}{a_{n-1}}$, pentru orice $n \geq 2$. Atunci a_{2021} este egal cu:

- A 2 B 6 C $\frac{1}{2}$ D $\frac{1}{3}$ E $\frac{1}{6}$

16. Pentru câte numere întregi k are loc inegalitatea $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + kabcd \geq 0$, pentru orice numere reale a, b, c, d ?

- A 1 B 2 C 5 D 9 E alt răspuns

17. Dacă șirul $(a_n)_{n \geq 0}$, este definit prin $a_0 = 2021$ și $a_{n+1} = 2a_n + 1$ pentru orice număr natural n , atunci:

- A $47 \mid a_{48}$ B $47 \mid a_{47}$ C $47 \mid a_{46}$ D $43 \mid a_{43}$ E $43 \mid a_{44}$

18. Se consideră funcția $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ care satisface condițiile $f(1) = 1$; $f(2n) = 2f(n)$ și $f(2n+1) = 4f(n)$, pentru orice număr natural nenul n . Pentru câte valori ale lui n este îndeplinită condiția $f(n) = 16$?

- A 3 B 4 C 5 D 6 E 7

19. Suma soluțiilor reale ale ecuației $2^{[x]} = x + \{x\}$, unde $[x]$ și $\{x\}$ reprezintă partea întreagă, respectiv partea fracționară a numărului real x , este egală cu:

- A 0 B 1 C 1,5 D 1,75 E 2

20. Dacă numerele reale x, y, z, t îndeplinesc condițiile $(x - 3y + 6z - t)^2 \geq 2021$ și $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \leq 43$, atunci $|x + y + z + t|$ este un număr din intervalul:

- A $(0, 1)$ B $(1, 2)$ C $(2, 3)$ D $(3, 4)$ E $(4, 5)$

21. Două dintre medianele unui triunghi au lungimile 2 și 3. Dacă aria triunghiului este egală cu 4, care este lungimea celei de-a treia mediane?

- A $2\sqrt{2}$ B $\sqrt{13}$ C $2\sqrt{3}$ D $\sqrt{10}$ E $3\sqrt{2}$

22. Suma elementelor mulțimii

$$\{n \in \mathbb{N}^* \mid \text{există } a, b, c \in \mathbb{N}^* \mid \text{cu } n = a + b + c \text{ și } n^2 = a^3 + b^3 + c^3\}$$

este egală cu:

- A 23 B 15 C 14 D 19 E 16

23. Cardinalul mulțimii $M = \left\{ n \in \mathbb{Z} \mid \sqrt{\frac{4n-2}{n+5}} \in \mathbb{Q} \right\}$ este egal cu:

- A 0 B 1 C 2 D 3 E alt răspuns

24. Din punctul M exterior cercului $\mathcal{C}(O, r)$ ducem tangentele MA și MB la cerc, unde $A, B \in \mathcal{C}(O, r)$. Paralelele prin A și B la MB , respectiv MA , intersectează cercul a doua oară în C , respectiv D , iar dreptele MC și MD intersectează cercul a doua oară în E , respectiv F . Fie $\{Q\} = BF \cap MA$ și $\{P\} = AE \cap MB$. Dacă $x \cdot \overrightarrow{AB} + y \cdot \overrightarrow{AC} + z \cdot \overrightarrow{AQ} + t \cdot \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{0}$, unde $x, y, z, t \in \mathbb{R}^*$, atunci:

$$\textbf{A } 2x + z = 1 \qquad \textbf{B } x + z = 0 \qquad \textbf{C } \frac{z - t}{y} = \frac{AC}{MP} \qquad \textbf{D } \frac{z + t}{y} = \frac{AC}{PB} \qquad \textbf{E } \frac{z - t}{y} = \frac{4AC}{MB}$$

Clasa a IX-a - Răspunsuri corecte

1. A
2. C
3. B
4. C
5. E
6. E
7. C
8. B
9. C
10. A
11. D
12. E
13. E
14. D
15. E
16. D
17. C
18. C
19. D
20. C
21. B
22. B
23. B
24. C

Olimpiada Națională GAZETA MATEMATICĂ

Etapa II - 20 martie 2021

Clasa a X-a

Timp de lucru 180 de minute**Fiecare problemă se punctează cu 1 punct****Alegeți varianta de răspuns. Pentru fiecare întrebare, un singur răspuns este cel corect.**1. Numărul rațional r pentru care este adevărată egalitatea:

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{2}{3} + \operatorname{arctg} \frac{3}{r} = \operatorname{arctg} 5$$

este egal cu:

- A $\frac{3}{4}$ B $\frac{6}{5}$ C 9 D 4 E $\frac{25}{3}$

2. Funcția $f : (-3, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + \log_2(3+x) + 4^x$ este inversabilă, inversa ei fiind funcția g . Numărul $A = g\left(\frac{1}{4}\right) + g(7)$ este egal cu:

- A 0 B 2 C $\frac{29}{4}$ D $\frac{7}{4}$ E $\frac{4}{7}$

3. Dacă z este un număr complex pentru care $z + \frac{1}{z} = \sqrt{2}$, atunci numărul $w = z^{2021} + \frac{1}{z^{2021}}$ este egal cu:

- A $i\sqrt{2}$ B $-i$ C $-\sqrt{2}$ D $\sqrt{2}$ E 1

4. Se consideră o funcție injectivă $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că:

$$f(x) \cdot f(y) = x \cdot f(y) + y \cdot f(x) - f(xy), \text{ pentru orice } x, y \in \mathbb{R}.$$

Dacă $f(1) \neq 1$, atunci numărul $f(2021)$ este egal cu:

- A 2022 B 2020 C 1010 D 1011 E 4042

5. Se consideră mulțimea $B = \{x \in \mathbb{R} \mid \log_x(3x^2 + 4x) + \log_{x^2}(3x + 4) = 4\}$. Stabiliți care dintre următoarele relații este adevărată:

- A $B \subset \left(0, \frac{9}{4}\right)$ B $B \subset \left(\frac{5}{2}, \frac{10}{3}\right)$ C $B \subset \left(\frac{7}{2}, \frac{29}{7}\right)$ D $B \subset \left(\frac{21}{5}, \frac{37}{6}\right)$ E $B \subset \left(\frac{19}{3}, \frac{17}{2}\right)$

6. Suma inverselor elementelor mulțimii $C = \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt[3]{x+17} - \sqrt[3]{x-2} = 1\}$ este egală cu:

- A $\frac{3}{25}$ B $\frac{1}{10}$ C $\frac{1}{25}$ D $\frac{3}{10}$ E $\frac{3}{50}$

7. Fie $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ o funcție cu proprietatea că $f(x) + f(\alpha x) = x, \forall x \in \mathbb{C}$, unde $\alpha \in \mathbb{C}$ astfel încât $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$. Numărul $f(\alpha^2)$ este egal cu:

- A 1 B i C 0 D -1 E $-i$

8. Se consideră expresia $E(x) = x^2 - x \cdot \log_2 y + 2 \cdot \log_2 y - 3$. Numărul numerelor naturale y pentru care $E(x) > 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, este egal cu:

- A 61 B 42 C 3 D 59 E 43

9. Dacă $x, y \in (0, +\infty)$ și $\log_4 x = \log_6 y = \log_9(x+y)$, atunci numărul $a = \frac{x}{x+y}$ este egal cu:

- A $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ B $\frac{3-\sqrt{5}}{4}$ C $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ D $\frac{2-\sqrt{3}}{4}$ E $\frac{3-\sqrt{3}}{2}$

10. Pentru orice număr real a se notează cu $[a]$ partea sa întreagă. Numărul elementelor mulțimii $A = \{n = \overline{2, 2021} \mid 1 + [\log_2(n-1)] = [\log_2 n]\}$ este egal cu:

A 11 **B 1010** **C 1001** **D 1009** **E 10**

11. Se consideră mulțimea $M = \{x \in \mathbb{R} | x^{\log_3(x-1)} + 2(x-1)^{\log_3 x} \leq 3x^2\}$. Numărul elementelor mulțimii $M \cap \mathbb{N}$ este egal cu:

A 9 **B 10** **C 4** **D 8** **E 7**

12. Dacă $S = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)\}, n \in \mathbb{N}^*, x_k, y_k \in \mathbb{N}^*$, este mulțimea soluțiilor sistemului de ecuații $\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = \frac{x+y}{2} \\ 2^x - 2^y = y^2 - x^2 \end{cases}$, atunci numărul $t = \sum_{k=1}^n x_k + \sum_{k=1}^n y_k$ este egal cu:

A 4 **B 8** **C 12** **D 6** **E 10**

13. Pentru $n \in \mathbb{N}$ și $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$, se notează $x_k = (\sqrt{2})^{n-k} \cdot (\sqrt[4]{5})^k$. Suma numerelor naturale n pentru care mulțimea $X = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ conține exact 10 numere raționale, este egală cu:

A 36 **B 74** **C 38** **D 78** **E 70**

14. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ un șir de numere reale pozitive cu $a_1 = 1$ și $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{a_k + a_{k+1}} = a_n - 1, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Dacă $s_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{\log_k a_k}$, atunci numărul s_{2021} este egal cu:

A 1052 **B 4038** **C 4042** **D 1050** **E 4040**

15.

Fie $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție injectivă astfel încât mulțimea

$$A = \{a \in (0, \infty) \mid \text{funcția } g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = f(2^x) + f(a^x) \text{ este constantă}\},$$

este nevidă.

Atunci:

A A este finită și $\prod_{a \in A} a = \frac{1}{4}$ **B** A este finită și $\prod_{a \in A} a = \frac{1}{2}$ **C** A este finită și $\prod_{a \in A} a = 1$
D A este finită și $\prod_{a \in A} a = 2$ **E** A este infinită

16. Fie $a, b \in \mathbb{N}, 1 \leq a, b \leq 100$. Numărul funcțiilor $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pentru care funcțiile $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = f(ax + b - 1)$ și $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} h(x) = f(bx + a - 1)$ sunt strict monotone, de monotonii diferite, este egal cu:

A 9801 **B 10000** **C 9900** **D 4950** **E 0**

17. Numărul soluțiilor, din intervalul $[0, 4\pi]$, ale ecuației $\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} = 0$, este egal cu:

A 3 **B 6** **C 4** **D 5** **E 7**

18. Se notează cu A mulțimea punctelor $M_k(x_k, y_k)$ dintr-un reper xOy , ale căror afixe z_k verifică inegalitățile $|z_k - i| \leq 2$ și $|z_k - 4 + 2i| \leq 3$. Numărul $T = \sum_{M_k \in A} (x_k + y_k)$ este egal cu:

A $\frac{9}{5}$ **B** $\frac{19}{10}$ **C** $\frac{13}{10}$ **D** $\frac{7}{5}$ **E** $\frac{22}{15}$

19. Se consideră numerele $a, b, c \in (2, +\infty)$ astfel încât $\frac{1}{a-1} + \frac{1}{b-1} + \frac{1}{c-1} = 1$. Valoarea minimă a produsului $p = abc$ este egală cu:

A $\frac{27}{8}$ **B 8** **C 64** **D 27** **E** $\frac{125}{3}$

20. Numărul numerelor întregi m pentru care există $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ astfel încât: $\cos 4x + (m+3) \cdot (\sin x + \cos x)^2 - 3m - 2 = 0$, este egal cu:

A 3 **B 5** **C 2** **D 0** **E 1**

21. Produsul soluțiilor ecuației $2\sqrt[3]{2x-1} = x^3 + 1$ este egal cu:

A 0 **B 1** **C -1** **D $-\sqrt{3}$** **E $\sqrt[3]{4}$**

22. Pentru orice numere naturale $m, n \geq 2$ și orice număr real $x > 0$ se notează

$$F(x) = \sqrt[3]{x^m \cdot \sqrt[n]{x}} \cdot \sqrt{x^n \cdot \sqrt[m]{x}}.$$

Numărul perechilor (m, n) pentru care $F(x) = x^3, \forall x \in (0, +\infty)$ este egal cu:

A 3 **B** 6 **C** 2 **D** 4 **E** 1

23. Se consideră numerele complexe z_1, z_2, z_3 cu $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 2$, $z_1 + z_2 + z_3 \neq 0$ și $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$. Numărul $|z_1 + z_2 + z_3|$ este egal cu:

A 1 **B** 6 **C** 2 **D** 4 **E** 8

24. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție surjectivă cu proprietatea că $f(f(x) + y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$. Dacă $f^2(2) - f^2(1) = 2003$, numărul $f(2021)$ este egal cu:

A 1021 **B** 3021 **C** 4042 **D** 4021 **E** 6063

Olimpiada Națională GAZETA MATEMATICĂ
Etapa II - 20 martie 2021
Clasa a X-a

Răspunsuri

1. C
2. A
3. C
4. B
5. C
6. E
7. D
8. D
9. A
10. E
11. A
12. C
13. B
14. E
15. B
16. E
17. D
18. D
19. C
20. A
21. C
22. E
23. D
24. B

Olimpiada Națională GAZETA MATEMATICĂ
Etapa II - 20 martie 2021
CLASA a XI-a

Timp de lucru 180 de minute

Fiecare problemă se punctează cu 1 punct

Alegeți varianta de răspuns. Pentru fiecare întrebare, un singur răspuns este cel corect.

1. Șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ are proprietatea că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n-1} = a$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = b$, unde $a, b \in \mathbb{R}$, $a > b > 0$.
Notăm $u_n = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$, $n \geq 1$. Atunci:

- A** $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a$ **B** $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = b$ **C** $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a + b$ **D** $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \frac{a+b}{2}$ **E** $(u_n)_{n \geq 1}$ nu are limită

2. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea că șirul $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent, pentru orice șir convergent $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Atunci funcția f este:

- A** continuă **B** crescătoare **C** descrescătoare **D** mărginită **E** constantă

3. Dacă funcția continuă $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisface relația

$$5 + n^4 \left[f\left(\frac{n-1}{n}\right) + f\left(\frac{n+1}{n}\right) - f\left(\frac{n-1}{n}\right) f\left(\frac{n+1}{n}\right) \right] = (n^2 + 2)^2,$$

pentru orice număr natural nenul n , atunci numărul $f(1)$ este egal cu:

- A** -2 **B** -1 **C** 0 **D** 1 **E** 2

4. Șirul $x_n = n - \sum_{k=1}^n \cos \frac{\pi}{n+k}$, $n \in \mathbb{N}^*$, are limita:

- A** ∞ **B** 1 **C** $\pi^2/4$ **D** $\pi^2/2$ **E** 0

Problemele 5 și 6 se referă la următorul enunț:

Fie M mulțimea matricelor pătrate de ordinul 3 cu elementele egale cu -1 sau 1.

5. Numărul elementelor mulțimii M este egal cu:

- A** 8 **B** 9 **C** 81 **D** 256 **E** 512

6. Fie $D = \{\det(A) \mid A \in M\}$. Numărul elementelor mulțimii D este egal cu:

- A** 2 **B** 3 **C** 8 **D** 9 **E** 13

7. Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $\det(A + 2B) = \det(B + 2A)$, iar matricea A este inversabilă. Atunci:

- A** $\det(B) = 0$ **B** $\det(B) = \det(A)$ **C** $\det(B) = -\det(A)$
D $B^2 = \text{Tr}(B) \cdot B$ **E** $|\det(B) - \det(A)| = 2$

8. Pentru $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, definim matricea $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Atunci:

- A** există $n \geq 2$ astfel ca $\det(A_n) = 0$ **B** există $n \geq 2$ astfel ca $\text{Tr}(A_n) = 3$
C există $n \geq 2$ astfel ca A_n să fie neinvertibilă **D** $A_{1010}^2 = A_{2020}$
E suma elementelor matricei A_{20} este 212

9. Fie $n \geq 2$ și $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o matrice inversabilă cu proprietatea că suma elementelor fiecărei linii este egală cu 1. Notăm cu E matricea coloană din $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ cu toate elementele egale cu 1. Atunci

$$\mathbf{A} \det(A - I_n) > 0$$

$$\mathbf{C} \text{ suma elementelor matricei } A^3 \text{ este } n^3$$

$$\mathbf{B} \text{ suma elementelor matricei } A^{-1} \text{ este } 2n$$

$$\mathbf{D} \det(A^T - I_n) \neq 0$$

$$\mathbf{E} AE = E$$

10. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$, notăm cu x_n unica soluție pozitivă a ecuației $x^n + nx = 1$. Atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$ este egală cu:

$$\mathbf{A} 0$$

$$\mathbf{B} 1$$

$$\mathbf{C} 2$$

$$\mathbf{D} e$$

$$\mathbf{E} \infty$$

11. Se consideră mulțimea de matrice $\left\{ X(a) = \begin{pmatrix} 1+2a & 2a \\ -a & 1-a \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R} \right\}$.

Fie $P = X(1) \cdot X(2) \cdot \dots \cdot X(2021)$, $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Atunci:

$$\mathbf{A} \text{ există } t \in (10^{500}, 10^{1000}] \text{ astfel încât } P = X(t)$$

$$\mathbf{B} \text{ există } t \in (10^{1000}, 10^{2000}] \text{ astfel încât } P = X(t)$$

$$\mathbf{C} \text{ există } t \in (10^{2000}, 10^{4000}] \text{ astfel încât } P = X(t)$$

$$\mathbf{D} \text{ există } t \in \mathbb{R}, t > 10^{4000}, \text{ astfel încât } P = X(t)$$

$$\mathbf{E} \text{ nu există } t \in \mathbb{R} \text{ astfel încât } P = X(t)$$

12. Fie matricele inversabile $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, unde $n \geq 2$, astfel încât $A + B$ este inversabilă, cu $(A + B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$. Atunci $\text{Tr}(A^{-1}B + AB^{-1})$ este:

$$\mathbf{A} 0$$

$$\mathbf{B} 1$$

$$\mathbf{C} 2$$

$$\mathbf{D} n$$

$$\mathbf{E} -n$$

13. Numărul funcțiilor $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care au proprietatea lui Darboux și verifică relația $f^2(x) = x^2$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, este:

$$\mathbf{A} \text{ infinit}$$

$$\mathbf{B} 1$$

$$\mathbf{C} 2$$

$$\mathbf{D} 3$$

$$\mathbf{E} 4$$

14. Pentru orice matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, cu proprietățile $\det(A) = 1$ și $\text{Tr}(A) = -1$, are loc relația:

$$\mathbf{A} \det(I_3 - A) \geq 0$$

$$\mathbf{B} \det(I_3 + A) \geq 0$$

$$\mathbf{C} \text{Tr}(A^{-1}) \geq 0$$

$$\mathbf{D} \text{Tr}(A^3) \geq 0$$

$$\mathbf{E} \det(I_3 - A^2) \geq 0$$

15. Valoarea limitei $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+2^2} + \dots + \frac{1}{n+2^n} \right)$ este:

$$\mathbf{A} 0$$

$$\mathbf{B} 1/2$$

$$\mathbf{C} \ln 2$$

$$\mathbf{D} 1$$

$$\mathbf{E} \infty$$

16. Fie $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \setminus \{-I_3, I_3\}$ cu proprietatea $A^6 = I_3$. Notăm cu A^* adjuncta matricei A . Atunci:

$$\mathbf{A} A^{2021} = I_3$$

$$\mathbf{B} \det[A^2 - (A^*)^2] = 0$$

$$\mathbf{C} \det[A^2 - (A^*)^2] < 0$$

$$\mathbf{D} \det[A^2 - (A^*)^2] > 0$$

$$\mathbf{E} \text{matricea } A^{2022} - I_3 \text{ este inversabilă}$$

17. Fie $f : [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ o funcție continuă, cu $f(0) = 2$. Considerăm un șir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, cu $x_0 > 0$, definit prin relația de recurență $x_{n+1} = x_n + f\left(\frac{1}{x_n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$. Notăm $y_n = \frac{x_n}{n}$, $n \geq 1$. Atunci:

$$\mathbf{A} \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \infty$$

$$\mathbf{B} \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$$

$$\mathbf{C} \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 1$$

$$\mathbf{D} \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 2$$

$$\mathbf{E} (y_n)_{n \geq 1} \text{ nu are limită}$$

18. Fie $a > 0$ și funcțiile $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, cu proprietatea $ax \leq f(x) + g(y) \leq ay$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$, $x \leq y$. Rezultă că funcțiile f și g satisfac condiția:

$$\mathbf{A} \text{sunt de monotonii diferite}$$

$$\mathbf{B} \text{sunt ambele mărginite}$$

$$\mathbf{C} \text{sunt ambele monoton crescătoare}$$

$$\mathbf{D} \text{sunt ambele monoton descrescătoare}$$

$$\mathbf{E} \text{una dintre funcții este constantă}$$

19. Fie șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definit prin $x_0 = \frac{1}{2}$ și $x_{n+1} = x_n^3 - x_n^2 + 1$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Atunci șirul $y_n = (x_0 x_1 \cdots x_n) \sqrt[n]{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, are limita:

$$\mathbf{A} 1$$

$$\mathbf{B} \sqrt{2}$$

$$\mathbf{C} 2$$

$$\mathbf{D} 2 + \sqrt{2}$$

$$\mathbf{E} \infty$$

20. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & -a & d & -c \\ c & -d & -a & b \\ d & c & -b & -a \end{pmatrix}$, având elementele numere reale nenule.

Dacă $(36a + 8b + 6c + 25d)^2 = 2021 \sqrt{|\det(A)|}$ atunci raportul $\frac{a+b+c}{d}$ este egal cu:

A 2021/75**B** 5**C** 3**D** 2**E** 1/2

21. Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel ca $AB = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}$. Știind că există $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, astfel încât $(AB)^k = (BA)^k$, atunci matricea BA este:

A $\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}$

B $\begin{pmatrix} 8 & 9 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$

C $\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$

D I_2

E O_2

22. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă cu proprietatea $f(f(x)) = x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Dacă $f(1) = 2021$, atunci limita $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ este egală cu:

A 0

B 2021

C 1

D ∞

E $-\infty$

Problemele **23** și **24** se referă la următorul enunț:

Fie $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Presupunem că $G = \{A_1, A_2, \dots, A_k\} \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ este o mulțime de k matrice inversabile de ordinul n , cu proprietățile $A_i A_j \in G$, pentru oricare $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$, și

$$\sum_{i=1}^k \text{Tr}(A_i) = 0.$$

23. Are loc relația:

A $O_n \in G$

B $A_1^{-1} \notin G$

C $I_n \in G$

D $A_1 A_2 \cdots A_k \notin G$

E alt răspuns

24. Notăm $A = \sum_{i=1}^k A_i$. Atunci:

A $A = O_n$

B $A = I_n$

C $A^2 = 2I_n$

D $A^2 = kI_n$

E alt răspuns

Olimpiada Națională GAZETA MATEMATICĂ
Etapa II - 20 martie 2021
CLASA a XI-a

Grila de răspunsuri

1. D
2. A
3. D
4. E
5. E
6. B
7. B
8. E
9. E
10. D
11. D
12. E
13. E
14. E
15. A
16. B
17. D
18. C
19. A
20. D
21. A
22. E
23. C
24. A

Olimpiada Națională GAZETA MATEMATICĂ

Etapă II - 20 martie 2021

Clasa a XII-a

Timp de lucru 180 de minute**Fiecare problemă se punctează cu 1 punct****Alegeți varianta de răspuns. Pentru fiecare întrebare, un singur răspuns este cel corect.**

1. Fie operația ” $*$ ” definită prin $x * y = xy - 5x - 5y + m$. Mulțimea tuturor valorilor posibile ale numărului real m pentru care operația ” $*$ ” este lege de compoziție pe mulțimea $A = [5, \infty)$ este:

A $\{30\}$ B $(-\infty, 30]$ C $[30, \infty)$ D $\mathbb{R} \setminus \{30\}$ E $\emptyset$.

2. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ o funcție continuă și F primitiva ei cu proprietatea că $F(0) = 0$. Valoarea limitei $\lim_{x \rightarrow \infty} xF\left(\frac{1}{x}\right)$ este:

A 0 B $f(1)$ C Nu există limita D $f(0)$ E ∞

3. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție bijectivă. Pe $\mathbb{R}$ definim legea ” $*$ ” prin $x * y = f(2021 \cdot f^{-1}(x) \cdot f^{-1}(y))$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Elementul neutru al acestei legi este:

A $f(0)$ B $f(2021)$ C $f(1)$ D $f\left(\frac{1}{2021}\right)$ E Nu există

4. Fie $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2 + 2x + 3} dx$, unde $n \in \mathbb{N}^*$. Atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n$ este egală cu:

A 0 B ∞ C $\frac{1}{6}$ D $\frac{1}{3}$ E $\frac{1}{2}$

5. Fie $(G, \circ)$ și $(H, *)$ două grupuri cu câte trei elemente. Numărul izomorfismelor de grupuri $f : G \rightarrow H$ este:

A 2 B 1 C 9 D 6 E 0

6. Fie A mulțimea tuturor funcțiilor continue $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că $\int_0^1 f^2(x) dx \leq 1$. Dacă

$M = \max \left\{ \int_0^1 x f(x) dx \mid f \in A \right\}$, valoarea lui M este:

A 1 B $\frac{1}{3}$ C $\frac{1}{\sqrt{3}}$ D $\frac{1}{\sqrt{2}}$ E Nu există

7. O lege de compoziție ” $\circ$ ” definită pe o mulțime $M \subset \mathbb{R}$ se numește *autodistributivă* dacă $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ (x \circ z)$, oricare ar fi $x, y, z \in M$. Fie $a, b \in \mathbb{R}^*$. O condiție necesară și suficientă ca legea de compoziție ” $\circ$ ” definită pe $\mathbb{R}$ prin $x \circ y = ax + by$ să fie autodistributivă este:

A $a + b = 1$ B $a = b$ C $a = -b$ D $a = b^2$ E $a^2 = b$

8. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă și F o primitivă a ei astfel încât $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \infty$. Se știe că există $a \in \mathbb{R}^*$ și $b \in \mathbb{R}$ astfel încât $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$ și $\lim_{x \rightarrow \infty} (F(x) - xf(x)) = b$. Valoarea limitei $\lim_{x \rightarrow \infty} (F(x) - ax)$ este:

- A** 0 **B** a **C** b **D** $a + b$ **E** $a - b$

9. Fie mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Numărul legilor de compoziție comutative care se pot defini pe A este:

- A** 15^5 **B** 5^5 **C** 15^{15} **D** 5^{15} **E** 5^3

10. Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă, strict crescătoare, astfel încât $\int_a^b f(x) dx = 0$. Fie $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o primitivă a lui f . Pentru fiecare $k \in \mathbb{N}$ definim mulțimea

$$A_k = \{m \in \mathbb{R} \mid \text{ecuația } F(x) = m \text{ are exact } k \text{ soluții reale distincte}\}.$$

Care dintre următoarele propoziții este falsă?

- A** $A_2 \neq \emptyset$ **B** $A_0 \neq \emptyset$ **C** $A_1 \neq \emptyset$ **D** A_1 are cel puțin două elemente **E** $A_3 = \emptyset$

11. Fie $(G, \cdot)$ un grup cu 63 elemente, iar $f : G \rightarrow G$ un endomorfism cu proprietatea că $(f \circ f \circ f)(x) = x$, pentru orice $x \in G$. Fie mulțimea $M = \{x \in G \mid f(x) = x\}$. Considerăm propozițiile:

E1: $M \neq \emptyset$.

E2: M are exact un element.

E3: M poate avea exact 3 elemente.

E4: M poate avea 63 elemente.

Numărul de propoziții adevărate este egal cu:

- A** 3 **B** 1 **C** 2 **D** 0 **E** 4

12. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă și strict descrescătoare, iar F o primitivă a ei. Fie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, cu $a < b < c < d$ și $a + d = b + c$. Care dintre următoarele propoziții este adevărată?

A $F''(x) > 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

B $F(b) \leq \max\{F(a), F(d)\}$.

C $F(c) \leq \max\{F(a), F(d)\}$.

D $F(a) + F(d) \leq F(b) + F(c)$.

E $F(a) + F(d) \geq F(b) + F(c)$.

13. Fie $\mathcal{D} = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ este derivabilă}\}$ și $\mathcal{P} = \{g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid g \text{ admite primitive}\}$. Se știe că $(\mathcal{D}, +)$ și $(\mathcal{P}, +)$ sunt grupuri abeliene. Definim aplicația $T : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{P}$ prin relația $T(f) = f'$. Fie propozițiile:

E1: T este morfism de grupuri.

E2: T este morfism surjectiv.

E3: T este morfism injectiv.

E4: T este izomorfism de grupuri.

Câte dintre aceste propoziții sunt adevărate?

- A** 0 **B** 1 **C** 2 **D** 3 **E** 4

14. Numărul numerelor reale x care verifică egalitatea $\int_0^x \sin\left(\frac{2t}{t^2 + 1}\right) dt = 0$ este

- A** 0 **B** 1 **C** 2 **D** 3 **E** 4

15. Pe $\mathbb{R}$ definim legea de compoziție asociativă " $\perp$ " prin $x \perp y = xy - 2x - 2y + 6$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Definim șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ prin $a_n = \frac{5}{2} \perp \frac{8}{3} \perp \frac{11}{4} \perp \dots \perp \frac{3n+2}{n+1}$, pentru orice $n \geq 1$. Valoarea limitei $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ este

A 1 B 2 C 3 D ∞ E Alt răspuns

16. Fie $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^n x} dx$, $n \in \mathbb{N}^*$. Fie $L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Valoarea lui L este:

A 0 B $\sqrt{2}$ C $+\infty$ D $\frac{\pi}{2}$ E Limita nu există.

17. Fie A mulțimea tuturor valorilor posibile ale numărului natural $n \geq 3$, pentru care ecuația $x^2 = x + 1$ admite soluție unică în $\mathbb{Z}_n$. Atunci:

A $A = \emptyset$.
 B A are exact două elemente.
 C A are o infinitate de elemente.
 D A conține doar numere pare.
 E A are un singur element.

18. Valoarea integralei $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x + \sin^2 x + \cos x}{1 + \sin x + \cos x} dx$ este

A $\frac{\pi}{4}$ B $\frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2}$ C $\frac{\pi}{4} (1 + \ln 2)$ D $2 \ln 2$ E Alt răspuns

19. Fie $(G, \cdot)$ un grup abelian cu elementul neutru e . Pentru un număr $n \in \mathbb{N}^*$, notăm $H_n = \{x \in G \mid x^n = e\}$. Fiind date două numere $m, n \in \mathbb{N}^*$, definim mulțimea

$$H_m H_n = \{ab \mid a \in H_m, b \in H_n\}.$$

Care dintre următoarele propoziții este adevărată în orice grup abelian G ?

A $H_m H_n = H_{(m,n)}$, unde (m, n) reprezintă cel mai mare divizor comun al numerelor m și n .
 B $H_m H_n = H_{\min\{m,n\}}$.
 C $H_m H_n = H_{\max\{m,n\}}$.
 D $H_m H_n = H_{[m,n]}$, unde $[m, n]$ reprezintă cel mai mic multiplu comun al numerelor m și n .
 E Niciuna de mai înainte.

20. Fie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ patru numere reale distincte, $M = \{a, b, c, d\}$, iar funcția $F : M^6 \rightarrow \mathbb{R}$ fie definită prin $F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1 + x_4 + x_5 + x_6$. Numărul maxim posibil de elemente ale imaginii $\text{Im}(F)$ este:

A 240. B 360. C 400. D 480. E 720.

21. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel cu proprietatea $\underbrace{1 + 1 + 1 + \dots + 1}_{2021 \text{ de } 1} = 0$. Fie $a, b \in A$ două elemente, astfel încât

$ab = ba$, pentru care există $m, n \in \mathbb{N}$, impare, cu $a^m = b^n = 1$. Fie propozițiile:

E1: $1 + 1$ este inversabil.

E2: $a + b$ este inversabil.

Atunci:

A Ambele propoziții sunt false.

B Doar E1 este adevărată.

C Doar E2 este adevărată.

D Ambele propoziții sunt adevărate.

E Ipotezele problemei sunt insuficiente pentru a stabili cu exactitate valorile de adevăr ale propozițiilor

E1 și E2.

22. Fie $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sin x - x \cos x}{x^2 + \sin^2 x}$. Notăm cu F o primitivă a acestei funcții. Atunci $F(\pi) - F\left(\frac{\pi}{2}\right)$ este egal cu

- A** 0 **B** $-\arctg \frac{2}{\pi}$ **C** $\arcsin \frac{2}{\pi}$ **D** $\arctg \frac{2}{\pi}$ **E** $-\arcsin \frac{2}{\pi}$

23. Fie $\mathcal{D} = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ este derivabilă}\}$. Se știe că $(\mathcal{D}, +, \cdot)$ este inel. Fie S un subinel cu proprietatea că orice element al lui S este fie funcție convexă, fie funcție concavă. Fie $g \in S$. Atunci:

A Dacă g este constantă, atunci $g(x) = 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

B g este o funcție constantă.

C Funcția g poate fi strict crescătoare.

D Funcția g poate fi strict descrescătoare.

E Nu există un astfel de subinel.

24. Fie funcțiile continue $f, g, h : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât $\int_0^{x+y} f(t) dt = \int_0^x g(t) dt + \int_0^y h(t) dt$, pentru orice

$x, y \geq 0$. Care dintre următoarele enunțuri este fals?

A Există funcții f, g, h care îndeplinesc condițiile din ipoteză.

B Toate cele trei funcții pot fi constante.

C Printre funcțiile f, g, h pot exista și funcții neconstante.

D Funcțiile f, g, h sunt mărginite.

E $f(x) = g(x) = h(x)$, pentru orice $x \geq 0$.

Olimpiada Națională GAZETA MATEMATICĂ
Etapa II - 20 martie 2021
Clasa a XII-a

Răspunsuri

1. **C**
2. **D**
3. **D**
4. **C**
5. **A**
6. **C**
7. **A**
8. **C**
9. **D**
10. **D**
11. **A**
12. **D**
13. **C**
14. **B**
15. **B**
16. **C**
17. **E**
18. **C**
19. **D**
20. **D**
21. **D**
22. **D**
23. **B**
24. **C**



Societatea de Științe Matematice din România

Olimpiada Națională GAZETA MATEMATICĂ

Etapa a III-a, 23 mai 2021

Subiect - Clasa a V-a

Problema 1

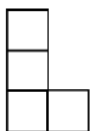
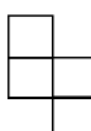
Aflați ultima cifră a numărului natural n , știind că penultima cifră a lui n^2 este 9.

Problema 2

Dacă numărul natural a are n cifre, iar numărul natural a^4 are m cifre, arătați că suma $m+n$ nu poate fi egală cu 2021.

Problema 3

Se poate pava o tablă dreptunghiulară de 48 de pătrățele ($m \times n$, unde m și n sunt numere naturale mai mari sau egale cu 2), utilizând piese de 4 pătrățele,

de forma  (tip 1), respectiv  (tip 2), astfel încât să folosim un

număr egal de piese din fiecare tip?

Prin pavare înțelegem acoperirea completă, cu piese, a tuturor pătrățelelor tablei, astfel încât să nu existe piese care se suprapun sau care ies parțial în afara tablei.

Problema 4

Aflați numerele naturale $x < y < z$ având suma 2021, știind că îndeplinesc simultan următoarele condiții:

- Fiecare număr are cifrele distincte;
- Există 3 cifre distincte a, b, c astfel încât fiecare cifră a numerelor x, y și z este a, b sau c .

Timp de lucru: 3 ore

Fiecare subiect valorează 7 puncte.



Societatea de Științe Matematice din România

Olimpiada Națională GAZETA MATEMATICĂ

Etapa a III-a, 23 mai 2021

Barem - Clasa a V-a

1. Aflați ultima cifră a numărului natural n știind că penultima cifră a lui n^2 este 9.

Ultima cifră a lui n^2 nu poate fi 2,3,7,8, astfel încât ultimele două cifre ale lui n^2 ar putea fi 90,91,94,95,96 sau 99	1p
n^2 nu poate avea ultimele 2 cifre 95 pentru că un pătrat perfect impar, divizibil cu 5, trebuie să se termine în 25 (sau $5 n$ și $25 \nmid n \Rightarrow n^2$ nu este pătrat perfect)	1p
Cum $90=M_4+2$, $94=M_4+2 \Rightarrow n^2=M_4+2$, dar un pătrat perfect nu poate fi M_4+2	1p
Cum $91=M_4+3$ și $99=M_4+3 \Rightarrow n^2=M_4+3$, dar un pătrat perfect nu poate fi M_4+3	1p
În concluzie rămâne singura variantă ca n^2 să aibă ultimele 2 cifre 96 $\Rightarrow$ ultima cifră a lui n poate fi 4 sau 6	1p
Ambele variante sunt corecte, de exemplu $14^2=196$ și $36^2=1296$	2p

Obs. 1: Pentru justificarea „ $95=M_4+3 \Rightarrow n^2$ nu este pătrat perfect” se acordă **1p**.

La fel pentru $2|n$ și $4 \nmid n \Rightarrow n^2$ nu este pătrat perfect, în situațiile în care ultimele două cifre ale lui n^2 sunt 90, respectiv 94 se acordă tot **1p**

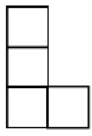
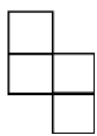
Obs. 2

Dacă elevii obțin ultimele două cifre posibile ale lui n^2 prin analiza ultimei cifre a lui n se acordă **1p**.

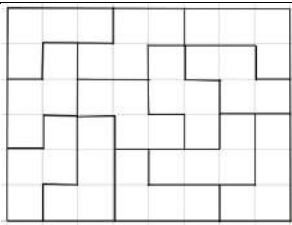
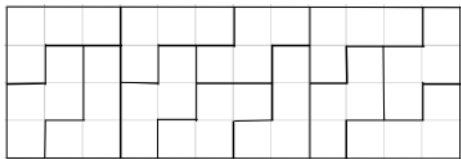
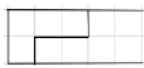
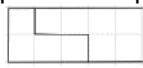
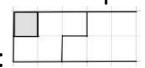
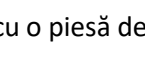
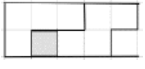
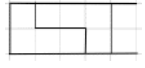
2. Dacă numărul natural a are n cifre, iar numărul natural a^4 are m cifre, arătați că suma $m+n$ nu poate fi egală cu 2021.

a are n cifre $\Leftrightarrow 10^{n-1} \leq a < 10^n$	1p
Atunci $10^{4n-4} \leq a^4 < 10^{4n} \Rightarrow$	1p
numărul a^4 poate avea $4n-3$, $4n-2$, $4n-1$ sau $4n$ cifre	1p
Deci $m+n$ este egal cu $5n-3$, $5n-2$, $5n-1$ sau $5n$,	1p
adică este de forma M_5+2 , M_5+3 , M_5+4 sau M_5	1p
Cum $2021=M_5+1 \Rightarrow$ suma $m+n$ nu poate fi egală cu 2021	2p

3. Se poate pava o tablă dreptunghiulară de 48 de pătrățele ($m \times n$, unde m și n sunt numere naturale mai mari sau egale cu 2), utilizând piese de 4 pătrățele,

de forma  (tip 1), respectiv  (tip 2), astfel încât să folosim un număr egal de piese din fiecare tip?

Prin pavare înțelegem acoperirea completă, cu piese, a tuturor pătrățelelor tablei, astfel încât să nu existe piese care se suprapun sau care ies parțial în afara tablei.

48:4=12 (piese de ambele tipuri), deci trebuie folosite 6 piese de tipul 1 și 6 piese de tipul 2. O tablă dreptunghiulară cu 48 de pătrățele poate avea următoarele dimensiuni: 8x6, 12x4, 16x3 sau 24x2, deci avem de analizat următoarele 4 cazuri:		
I.	Pentru tabla de forma 8x6 răspunsul este DA și se punctează orice exemplu corect. 	2p
II.	Pentru tabla de forma 12x4 răspunsul este DA și se punctează orice exemplu corect. 	2p
III.	Pentru tabla de forma 16x3, vom demonstra că NU se poate. Colorăm tabla în felul următor: prima linie cu negru, a doua cu alb și cea de-a treia tot cu negru. Vom avea astfel 32 de pătrățele negre și 16 albe. O piesă de tipul 1 poate acoperi fie 3 pătrățele albe și una neagră, fie 3 pătrățele negre și una albă, iar o piesă de tipul 2, indiferent cum este așezată, va acoperi 2 pătrățele albe și 2 pătrățele negre. Cele 6 piese de tipul 1 pot acoperi cel mult 18 pătrățele negre, iar cele 6 piese de tipul 2 acoperă 12 pătrățele negre, deci, în total, putem acoperi cel mult 30 de pătrățele negre. Cum noi avem de acoperit 32 de pătrățele negre, rezultă că tabla nu se poate pava.	2p
IV.	Pentru tabla de forma 24x2, putem începe fie cu o piesă de tipul 1, după cum urmează  sau , fie cu o piesă de tipul 2, , situație în care va rămâne o pătrățică neacoperită:  (sau analog). Dacă am început cu piesa de tipul 1 și continuăm cu o piesă de tipul 2, iarăși rămâne o pătrățică neacoperită:  (sau analog). Dacă vom continua tot cu o piesă de tipul 1,  revenim în situația de la început. În concluzie, nu putem pune pe tablă piese de tipul 2 fără să rămână pătrățele neacoperite, prin urmare tabla nu se poate pava.	1p



Societatea de Științe Matematice din România

4. Aflați numerele naturale $x < y < z$ având suma 2021, știind că îndeplinesc simultan următoarele condiții:
- Fiecare număr are cifrele distincte;
 - Există 3 cifre distincte a, b, c astfel încât fiecare cifră a numerelor x, y și z este a, b sau c .

Deoarece $99+99+999 < 2017 \Rightarrow$ trebuie să avem cel puțin 2 numere de 3 cifre	1p
Dacă toate cele 3 numere vor fi de 3 cifre $\Rightarrow$ aceste cifre vor fi a, b, c , deci numerele vor avea aceleași cifre (dar în altă ordine) $\Rightarrow$ numerele vor avea același rest la împărțirea cu 3 $\Rightarrow$ suma numerelor va fi divizibilă cu 3. Cum $3 \nmid 2021 \Rightarrow$ nu se poate $\Rightarrow$ exact 2 numere vor fi de 3 cifre.	2p
Deoarece $98+897+987 < 2021 \Rightarrow$ cele două numere de 3 cifre trebuie să aibă amândouă prima cifră egală cu 9	1p
Avem de rezolvat ecuația $x + \overline{9bc} + \overline{9cb} = 2021$, unde $b < c < 9$ cifre și $x \leq 98$, $\Leftrightarrow 11(b+c)+x=221$ Cum $x \leq 98 \Rightarrow 11(b+c) \geq 123 \Rightarrow b+c \geq 12 \Rightarrow b+c \in \{12, 13, 14, 15\}$	1p
$b+c=12 \Rightarrow x=89 \Rightarrow c=8 \Rightarrow b=4 \Rightarrow 89+948+984=2021$, deci avem soluția $x=89, y=948, z=984$	1p
$b+c=13 \Rightarrow x=78$, dar $7+8 \neq 13$ $b+c=14 \Rightarrow x=67$, dar $6+7 \neq 14$ $b+c=15 \Rightarrow x=56$, dar $5+6 \neq 15$, deci soluția găsită anterior este unică	1p



Societatea de Științe Matematice din România



Olimpiada Națională GAZETA MATEMATICĂ

Etapa a III-a, 23 mai 2021

Subiect - Clasa a VI-a

Problema 1

- a) Scrieți numărul 2021 ca sumă de puteri distincte cu baza (-2) .
- b) Arătați că numărul 2021 nu se poate scrie ca sumă de puteri distincte cu baza (-3) .

Problema 2

Pe o tablă sunt scrise numerele de forma $n(n+1)$, cu $n=1,2,3,\dots,2020$. Un copil alege trei numere a , b și c de pe tablă, le șterge și scrie pe tablă numărul $\frac{abc}{ab+ac+bc}$.

După 1009 astfel de operații, unul dintre numerele rămase pe tablă este 47.

- a) Calculați suma inverselor numerelor scrise inițial pe tablă.
- b) Aflați celelalte numere rămase pe tablă.

Problema 3

Fie $\triangle ABC$ cu $m(\angle A) > 90^\circ$. Considerăm (BE bisectoarea $\angle ABC$, $E \in AC$ și (CF bisectoarea $\angle ACB$, $F \in AB$, $BE \cap CF = \{I\}$. Știind că $IE = IF$, arătați că $\triangle ABC$ este isoscel.

Problema 4

Se consideră n unghiuri în jurul unui punct având măsurile în grade exprimate prin n numere prime distincte. Știind că unghiurile formate de bisectoarele oricăror două unghiuri adiacente dintre cele n unghiuri date inițial au măsurile în grade exprimate prin numere prime, să se determine valorile posibile ale lui n .

Timp de lucru: 3 ore

Fiecare subiect valorează 7 puncte.



Societatea de Științe Matematice din România

Olimpiada Națională GAZETA MATEMATICĂ

Etapa a III-a, 23 mai 2021

Barem - Clasa a VI-a

1. a) Scrieți numărul 2021 ca sumă de puteri distincte cu baza (-2).
b) Arătați că numărul 2021 nu se poate scrie ca sumă de puteri distincte cu baza (-3).

a) $2021 = (-2)^{12} + (-2)^{11} + (-2)^5 + (-2)^2 + (-2)^0$	3p
b) $(-3)^k = M_3$, pentru orice $k \geq 1$	1p
O sumă de puteri distincte cu baza (-3) ar putea avea ca termen pe $(-3)^0$ sau nu. Prin urmare, o suma de puteri distincte cu baza (-3) poate avea următoarele forme: M_3 sau $M_3 + (-3)^0 = M_3 + 1$	2p
Cum $2021 = M_3 + 2 \Rightarrow 2021$ nu se poate scrie ca sumă de puteri distincte cu baza (-3)	1p

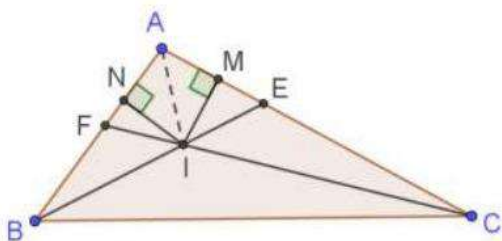
2. Pe o tablă sunt scrise numerele de forma $n(n+1)$, cu $n=1,2,3,\dots,2020$. Un copil alege trei numere a, b și c de pe tablă, le șterge și scrie pe tablă numărul $\frac{abc}{ab+ac+bc}$.
După 1009 astfel de operații, unul dintre numerele rămase pe tablă este 47.
a) Calculați suma inverselor numerelor scrise inițial pe tablă.
b) Aflați celelalte numere rămase pe tablă.

a) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{2020 \cdot 2021} = \frac{2-1}{1 \cdot 2} + \frac{3-2}{2 \cdot 3} + \frac{4-3}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{2021-2020}{2020 \cdot 2021}$ $= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2020} - \frac{1}{2021} = 1 - \frac{1}{2021} = \frac{2020}{2021}$	2p
b) La fiecare operație se șterg 3 numere și se adaugă 1, deci după 1009 operații se pierd $1009 \cdot 2 = 2018$ numere din cele 2020 scrise inițial $\Rightarrow$ pe tablă rămân 2 numere	1p
Deoarece $\frac{ab+ac+bc}{abc} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \Rightarrow$ inversul numărului scris pe tablă după ștergerea numerelor a, b, c este egal cu suma inverselor celor 3 numere $\Rightarrow$	2p
suma inverselor numerelor scrise pe tablă în orice moment este constantă, fiind egală cu suma inverselor numerelor scrise inițial și anume cu $\frac{2020}{2021}$	1p
În concluzie, obținem că $\frac{1}{47} + \frac{1}{x} = \frac{2020}{2021}$, unde x este celălalt număr rămas pe tablă $\Rightarrow$ $43x + 2021 = 2020x \Rightarrow x = \frac{2021}{1977}$, deci pe tablă au rămas numerele 47 și $\frac{2021}{1977}$.	1p



Societatea de Științe Matematice din România

3. Fie $\triangle ABC$ cu $m(\angle A) > 90^\circ$. Considerăm (BE bisectoarea $\angle ABC$, $E \in AC$ și (CF bisectoarea $\angle ACB$, $F \in AB$, $BE \cap CF = \{I\}$. Știind că $IE = IF$ arătați că $\triangle ABC$ este isoscel.



Fie $IN \perp AB$ și $IM \perp AC$ Deoarece I este centrul cercului înscris $\triangle ABC \Rightarrow (AI$ bisectoarea $\angle BAC \Rightarrow IN = IM$	2p
$[IF] \equiv [IE]$ și $[IN] \equiv [IM] \xRightarrow{I.C.} \Rightarrow \triangle IFN \equiv \triangle IEM \Rightarrow \angle IFN \equiv \angle IEM \Rightarrow \angle IFB \equiv \angle IEC$	2p
$\left\{ \begin{array}{l} \angle IFB \equiv \angle IEC \\ [IF] \equiv [IE] \\ \angle FIB \equiv \angle EIC \end{array} \right\} \xRightarrow{U.L.U.} \Rightarrow \triangle IFB \equiv \triangle IEC \Rightarrow$	2p
$\Rightarrow [IB] \equiv [IC] \Rightarrow [BE] \equiv [CF] \Rightarrow \triangle ABC$ isoscel	1p

4. Se consideră n unghiuri în jurul unui punct având măsurile în grade exprimate prin n numere prime distincte. Știind că unghiurile formate de bisectoarele oricăror două unghiuri adiacente dintre cele n unghiuri date inițial au măsurile în grade exprimate prin numere prime, să se determine valorile posibile ale lui n .

Notăm $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ cele n măsuri care sunt numere prime distincte $\Rightarrow$ $\frac{p_1 + p_2}{2}, \frac{p_2 + p_3}{2}, \dots, \frac{p_n + p_1}{2}$ sunt numere prime	1p
Dacă $p_i = 2 \Rightarrow p_{i+1}$ impar (pentru că numerele sunt distincte) $\Rightarrow \frac{p_i + p_{i+1}}{2} \notin \mathbf{N}$, deci $p_i > 2$, iar toate $\frac{p_i + p_{i+1}}{2} > 2$ și sunt prime, deci impare	1p
Numerele prime impare sunt fie 3, fie de forma $M_{12} + r$, unde $r \in \{1, 5, 7, 11\}$ Dacă există două numere $p_i = M_{12} + r_1$ și $p_{i+1} = M_{12} + r_2$, $r_1 \neq r_2$, cu $r_1, r_2 \in \{1, 5, 7, 11\}$ atunci $\frac{M_{12} + r_1 + M_{12} + r_2}{2} \in \{M_{12} + 2; M_{12} + 3\}$ contradicție $\Rightarrow$ toate numerele p_i sunt de forma $M_{12} + r$, cu $r \in \{1, 5, 7, 11\}$ sau, eventual, unul dintre numere este 3.	1p
Dacă toate numerele prime sunt diferite de 3 $\Rightarrow 360 = M_{12} + nr \Rightarrow n : 12$ Dar cea mai mică sumă a 12 numere distincte de forma $M_{12} + r$, cu $r \in \{1, 5, 7, 11\}$ este $12 + 12 \cdot (0 + 1 + \dots + 11) = 12 \cdot 67 > 360$, ceea ce nu se poate	1p
Dacă unul dintre numerele prime p_i este 3, atunci, deoarece $\frac{3 + 1}{2} = 2$ și $\frac{5 + 1}{2} = 3$, $\Rightarrow r \in \{7, 11\}$, iar $3 + M_{12} + (n - 1)r = 360 \Rightarrow n - 1 : 3$ și n par $\Rightarrow n \in \{4, 10, \dots\}$	1p
Dacă $n \geq 10$, cea mai mică sumă a 9 numere distincte de forma $M_{12} + r$, cu $r \in \{7, 11\}$ este $63 + 12 \cdot (0 + 1 + \dots + 8) = 495 > 357$, nu se poate $\Rightarrow n$ poate fi doar 4	1p
Pentru $n=4$ avem, de exemplu, unghiurile cu măsurile de 3, 59, 167 și 131, iar măsurile unghiurilor formate de bisectoare vor fi de 31, 113, 149, respectiv 67 de grade.	1p



Societatea de Științe Matematice din România

Barem alternativ

Notăm $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ cele n măsuri care sunt numere prime distincte $\Rightarrow \frac{p_1 + p_2}{2}, \frac{p_2 + p_3}{2}, \dots, \frac{p_n + p_1}{2}$ sunt numere prime	1p
Dacă $p_i=2 \Rightarrow p_{i+1}$ impar (pentru că numerele sunt distincte) $\Rightarrow \frac{p_i + p_{i+1}}{2} \notin \mathbf{N}$, deci $p_i > 2$, iar $\frac{p_i + p_{i+1}}{2} > 2$ și prim, deci impar $\Rightarrow p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ sunt fie toate M_4+1 , fie toate M_4+3	1p
Cum $p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n = 360^0 = M_4 \Rightarrow n$ trebuie să fie M_4	1p
Cum $\frac{p_i + p_{i+1}}{2} \neq 3$, prim $\Rightarrow p_i$ și p_{i+1} trebuie să aibă fie amândouă aceeași formă $(M_3 + 1$ sau $M_3 + 2)$, fie unul dintre ele să fie M_3 , adică 3, iar celălalt $M_3 + 1$ sau $M_3 + 2$	1p
Cele mai mici 12 numere prime distincte de forma M_4+1 au suma $5+13+17+29+37+41+53+61+73+89+97+101 > 360$, iar suma celor mai mici nr. prime distincte de forma M_4+3 este $3+7+11+19+23+31+43+47+59+67+71+79 > 360 \Rightarrow n \leq 8$.	1p
Dacă $n=8$, atunci putem avea fie unul dintre numerele $p_i=3$, iar toate celelalte de aceeași formă $(M_3 + 1$ sau $M_3 + 2)$, fie toate cele 8 numere de aceeași formă $(M_3 + 1$ sau $M_3 + 2) \Rightarrow$ suma celor 8 numere este de forma $M_3 + 1$ sau $M_3 + 2$ Cum $360=M_3 \Rightarrow$ nu se poate $\Rightarrow n=4$ este singura variantă posibilă.	1p
Pentru $n=4$ avem, de exemplu, unghiurile cu măsurile de 3, 59, 167 și 131, iar măsurile unghiurilor formate de bisectoare vor fi de 31, 113, 149, respectiv 67 de grade.	1p



Olimpiada Națională GAZETA MATEMATICĂ
Etapă III - 24 aprilie 2021

Subiect – clasa a VII-a

Problema 1.

Se consideră cercul $\mathcal{C}$ de centru O și punctul A în interiorul său, $A \neq O$. Mediatorea segmentului OA intersectează $\mathcal{C}$ în punctele B și C . Dreptele AB și AC retaie $\mathcal{C}$ în D , respectiv E . Demonstrați că cercurile circumscrise triunghiurilor OBC și ADE sunt concentrice.

Problema 2.

Determinați toate perechile (a, b) de numere reale nenule care verifică relația

$$\frac{5-b}{a} = \frac{4-a}{b} = \frac{10}{a^2+b^2}.$$

Problema 3.

Considerăm triunghiul neisoscel ABC , cu $\angle BAC > 90^\circ$. Pe latura BC a triunghiului luăm punctele D și E , astfel încât $\angle BAD \equiv \angle ACB$ și $\angle CAE \equiv \angle ABC$. Bisectoarea unghiului $\angle ABC$ taie AE în M , iar bisectoarea unghiului $\angle ACB$ taie AD în N . Știm că $MN \parallel BC$.

Determinați măsura unghiului dreptelor BM și CN .

Problema 4.

Determinați cel mai mic număr natural n pentru care numărul

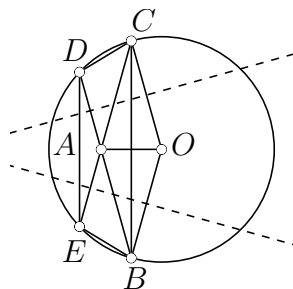
$$\sqrt{(6n+11)(6n+14)(20n+19)}$$

este rațional.

Olimpiada Națională GAZETA MATEMATICĂ
Etapa III - 24 aprilie 2021
Soluții – clasa a VII-a

Problema 1.

Se consideră cercul $\mathcal{C}$ de centru O și punctul A în interiorul său, $A \neq O$. Mediatoarea segmentului OA intersectează $\mathcal{C}$ în punctele B și C . Dreptele AB și AC rețeaua $\mathcal{C}$ în D , respectiv E . Demonstrați că cercurile circumscrise triunghiurilor OBC și ADE sunt concentrice.



Soluție. Deoarece centrul cercului circumscris unui triunghi este la intersecția a două mediatore ale laturilor acestuia, este suficient să arătăm că două mediatore ale laturilor triunghiului OBC coincid cu două mediatore ale laturilor triunghiului AED **2p**

Arătăm că segmentele AD și CO au aceeași mediană ($\dagger$); prin simetrie, rezultă că și segmentele AE și BO au aceeași mediană **2p**

Pentru a demonstra ($\dagger$), arătăm că $AOCD$ este trapez isoscel. Aceasta rezultă din:

- $AC = OC = OB = AB$, deci $ACOB$ este romb, de unde $AD \parallel OC$ **1p**
- $\angle COA = \frac{1}{2}\angle COB = \frac{1}{2}\widehat{BC}_{\text{mic}}$ și $\angle OCD = 180^\circ - \angle ADC = 180^\circ - \frac{1}{2}\widehat{BC}_{\text{mare}} = \frac{1}{2}\widehat{BC}_{\text{mic}}$, deci $\angle AOC \equiv \angle DCO$, ceea ce încheie demonstrația **2p**

Problema 2.

Determinați toate perechile (a, b) de numere reale nenule care verifică relația

$$\frac{5-b}{a} = \frac{4-a}{b} = \frac{10}{a^2+b^2}.$$

Soluție. Din ipoteză și o proprietate a proporțiilor obținem

$$\frac{10}{a^2+b^2} = \frac{5-b}{a} = \frac{4-a}{b} = \frac{(5-b)a}{a^2} = \frac{(4-a)b}{b^2} = \frac{(5-b)a + (4-a)b}{a^2+b^2} \dots\dots\dots \mathbf{1p}$$

Reiese $10 = 5a + 4b - 2ab$, sau $(a-2)(2b-5) = 0$, de unde $a = 2$ sau $b = \frac{5}{2}$. **2p**

Dacă $a = 2$ rezultă $b(5-b) = 4$, sau $b^2 - 4b - b + 4 = 0$, adică $(b-1)(b-4) = 0$, ceea ce duce la soluțiile $(2, 1)$ și $(2, 4)$ **2p**

Dacă $b = \frac{5}{2}$ rezultă $a(4-a) = \frac{25}{4}$, sau $a^2 - 4a + 4 + \frac{9}{4} = 0$, adică $(a-2)^2 + \frac{9}{4} = 0$, ecuație care nu are soluții reale **2p**

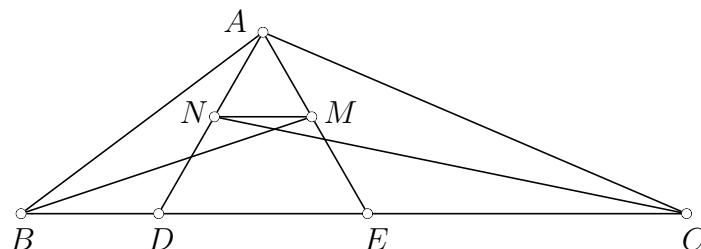
Așadar, perechile cerute sunt $(2, 1)$ și $(2, 4)$.

Problema 3.

Considerăm triunghiul neisoscel ABC , cu $\angle BAC > 90^\circ$. Pe latura BC a triunghiului luăm punctele D și E , astfel încât $\angle BAD \equiv \angle ACB$ și $\angle CAE \equiv \angle ABC$. Bisectoarea unghiului $\angle ABC$ taie AE în M , iar bisectoarea unghiului $\angle ACB$ taie AD în N . Știm că $MN \parallel BC$.

Determinați măsura unghiului dreptelor BM și CN .

Soluție. Folosind proprietatea unghiului exterior pentru triunghiul delimitat de BM , CN și BC , unghiul dreptelor BM și CN are măsura $\angle NCB + \angle MBC = \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB) = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BAC) \dots\dots\dots 1p$



Din teorema lui Thales și teorema bisectoarei obținem șirul de egalități $\frac{AC}{DC} = \frac{NA}{ND} = \frac{MA}{ME} = \frac{AB}{BE}$, de unde $AC \cdot BE = CD \cdot AB$. $(\dagger\dagger) \dots\dots\dots 2p$

Apoi $\triangle ABD \sim \triangle CBA$ (UU), deci $\frac{AB}{CB} = \frac{BD}{AB}$, de unde $BD = \frac{AB^2}{BC}$. Analog obținem $CE = \frac{AC^2}{BC} \dots\dots\dots 1p$

Fie a, b, c lungimile laturilor triunghiului ABC . Din $(\dagger\dagger)$, $b(a - \frac{b^2}{a}) = c(a - \frac{c^2}{a})$. Aceasta duce la $a^2(b - c) = b^3 - c^3$, sau $a^2(b - c) = (b - c)(b^2 + bc + c^2)$ și, cum $b - c \neq 0$, rezultă $a^2 = b^2 + bc + c^2 \dots\dots\dots 2p$

Conform teoremei cosinusului, aceasta arată că $\angle BAC = 120^\circ$, deci unghiul dreptelor BM și CN are măsura $30^\circ \dots\dots\dots 1p$

Problema 4.

Determinați cel mai mic număr natural n pentru care numărul

$$\sqrt{(6n + 11)(6n + 14)(20n + 19)}$$

este rațional.

Soluție. Pentru ca numărul în cauză să fie rațional, este necesar și suficient ca numărul $N = (6n + 11)(6n + 14)(20n + 19)$ să fie pătrat perfect. Numerele naturale pot fi de forma $\mathcal{M}_6$, $\mathcal{M}_6 \pm 1$, $\mathcal{M}_6 \pm 2$, $\mathcal{M}_6 + 3$. Astfel, pătratele lor pot fi de forma $\mathcal{M}_6$, $\mathcal{M}_6 + 1$, $\mathcal{M}_6 + 4$, $\mathcal{M}_6 + 3$. Rezultă că $A = 6n + 11 = \mathcal{M}_6 + 5$ și $B = 6n + 14 = \mathcal{M}_6 + 2$ nu pot fi pătrate perfecte pentru niciun număr natural n . $\dots\dots\dots 1p$

De aici reiese că A și B au în descompunerea lor cel puțin un factor prim la o putere impară; acest factor prim trebuie să apară la una dintre celelalte paranteze. $\dots\dots\dots 1p$

Dacă $p \mid A$ și $p \mid B$, atunci $p \mid B - A = 3$. Dar $3 \nmid A$, deci A și B nu au factori primi comuni.

Dacă $p \mid A$ și $p \mid C = 20n + 19$, atunci $p \mid 10A - 3C = 53$, iar dacă $p \mid B$ și $p \mid C$, atunci $p \mid 10B - 3C = 83$. Astfel, pentru ca N să poată fi pătrat perfect, este necesar ca numărul C să fie divizibil cu $83 \cdot 53 \dots\dots\dots 3p$

Cel mai mic n pentru care se poate întâmpla acest lucru corespunde situației $20n + 19 = 83 \cdot 53$, adică $n = 219 \dots\dots\dots 1p$

Pentru $n = 219$ avem $N = (53 \cdot 25) \cdot (83 \cdot 16) \cdot (53 \cdot 83) = 83^2 \cdot 53^2 \cdot 4^2 \cdot 5^2$, deci $n = 219$ convine. Așadar, numărul cerut este $219 \dots\dots\dots 1p$

Observație. Deoarece nici $C = \mathcal{M}_4 + 3$ nu este pătrat perfect pentru nicio valoare a lui n , raționamentul decurge la fel dacă pornim de la oricare doi dintre cei trei factori ai lui N .

Olimpiada Națională GAZETA MATEMATICĂ
Etapa III - 24 aprilie 2021

Subiectul – clasa a VIII-a

Problema 1.

În paralelipipedul dreptunghic $ABCD A'B'C'D'$ cu dimensiunile $AB = a$, $AD = b$, $AA' = c$, unde $a > b > c > 0$, E și F sunt proiecțiile lui A pe $A'D$, respectiv pe $A'B$, iar M și N sunt proiecțiile lui C pe $C'D$, respectiv pe $C'B$. Fie $DF \cap BE = \{G\}$ și $DN \cap BM = \{P\}$.

a) Demonstrați că planele $(A'AG)$ și $(C'CP)$ sunt paralele și aflați distanța dintre cele două plane.

b) Demonstrați că dreapta GP este paralelă cu planul (ABC) și aflați distanța de la dreapta GP la planul (ABC) .

Problema 2.

Arătați că, pentru orice numere reale $a, b, c > 0$, are loc inegalitatea

$$(a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq \frac{2(a^2 + b^2 + c^2)}{ab + bc + ca} + 7.$$

Când are loc egalitatea?

Problema 3.

Determinați numerele reale x și y care verifică relațiile

$$(x + \sqrt{x^2 + 1})(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 2022 \text{ și } x + y = \frac{2021}{\sqrt{2022}}.$$

Problema 4.

Elevii dintr-o clasă de $n \geq 2$ elevi au avut de rezolvat 2^{n-1} probleme ca temă de vacanță. La verificare, profesorul constată că, pentru orice pereche de probleme diferite:

- există cel puțin un elev care le-a rezolvat pe amândouă și
- există cel puțin un elev care a rezolvat una dintre ele, dar nu și pe cealaltă.

Arătați că există o problemă rezolvată de toți elevii clasei.

Olimpiada Națională GAZETA MATEMATICĂ
Etapă III - 24 aprilie 2021

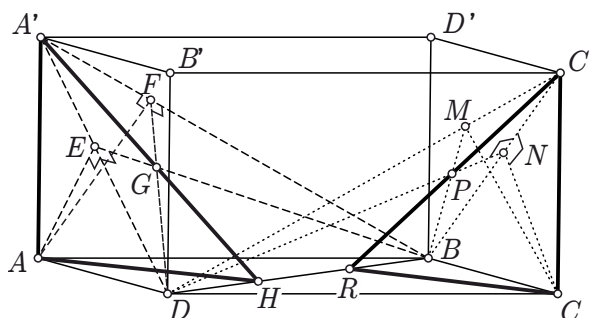
Soluții și barem – clasa a VIII-a

Problema 1.

În paralelipipedul dreptunghic $ABCD A' B' C' D'$ cu dimensiunile $AB = a$, $AD = b$, $AA' = c$, unde $a > b > c > 0$, E și F sunt proiecțiile lui A pe $A'D$, respectiv pe $A'B$, iar M și N sunt proiecțiile lui C pe $C'D$, respectiv pe $C'B$. Fie $DF \cap BE = \{G\}$ și $DN \cap BM = \{P\}$.

a) Demonstrați că planele $(A'AG)$ și $(C'CP)$ sunt paralele și aflați distanța dintre cele două plane.

b) Demonstrați că dreapta GP este paralelă cu planul (ABC) și aflați distanța de la dreapta GP la planul (ABC) .



Soluție: a) Din $AB \perp (ADA')$ și $AE \perp A'D$ reiese $BE \perp A'D$; analog $DF \perp A'B$. Astfel, G este ortocentrul $\triangle A'BD$, deci $A'G \perp BD$. Pe de altă parte, $AA' \perp (ABD)$ implică $AA' \perp BD$. Astfel, $BD \perp (A'AG)$ (1).

Analog rezultă $BD \perp (C'CP)$ (2). Din (1) și (2) rezultă $(A'AG) \parallel (C'CP)$.

Intersecția planului $(A'AG)$ cu BD este $\{H\} = A'G \cap BD$, intersecția planului $(C'CP)$ cu BD este $\{R\} = C'P \cap BD$ iar distanța dintre cele două plane este HR .

Din $A'G \perp BD$ și $AA' \perp (ABD)$ rezultă $AH \perp BD$; analog $CR \perp BD$. Cu teorema catetei avem $DH = \frac{DA^2}{DB} = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} = BR$, deci $HR = \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

b) Fie $GG' \parallel AA'$, $G' \in AH$ (3) și $PP' \parallel CC'$, $P' \in CR$ (4). Atunci $\frac{GG'}{AA'} = \frac{HG}{HA'}$ și $\frac{PP'}{CC'} = \frac{RP}{RC'}$. Dar, deoarece $\triangle A'BD \equiv \triangle C'DB$ (LLL) și G , respectiv P sunt ortocentrele acestor triunghiuri, $\frac{HG}{HA'} = \frac{RP}{RC'}$. Rezultă astfel $GG' = PP'$. Pe de altă parte, din (3) și (4) reiese că G' , P' sunt proiecțiile lui G , respectiv P pe planul (ABC) . De aici reiese că G și P sunt egal distanțate de planul (ABC) și de aceeași parte a acestuia, deci $GP \parallel (ABC)$, iar distanța de la GP la (ABC) este GG' .

Din $AE \perp A'D$ și $BE \perp A'D$ obținem $A'D \perp (ABE)$; cum $A'D \subset (A'BD)$, obținem $(ABE) \perp (A'BD)$. Analog obținem $(ADF) \perp (A'BD)$, deci AG – dreapta de intersecție a planelor (ABE) , (ADF) – este perpendiculară pe $(A'BD)$. Din

triunghiurile dreptunghice formate obținem

$$AH = \frac{AD \cdot AB}{BD} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad AG = \frac{AH \cdot AA'}{A'H}, \quad GH = \frac{AH^2}{A'H}$$

$$GG' = \frac{AG \cdot GH}{AH} = \frac{AG \cdot AH}{A'H} = \frac{AH^2 \cdot AA'}{A'H^2} = \frac{a^2 b^2 c}{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}.$$

Barem de corectare:

- a) $(A'AG) \parallel (C'CP)$ **2p**
distanța dintre plane **1p**
b) $GP \parallel (ABC)$ **2p**
distanța dintre dreapta GP și planul (ABC) **2p**

Problema 2.

Arătați că, pentru orice numere reale $a, b, c > 0$, are loc inegalitatea

$$(a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq \frac{2(a^2 + b^2 + c^2)}{ab + bc + ca} + 7.$$

Când are loc egalitatea?

Soluția 1: Scăzând 9 din ambii membri, inegalitatea revine la

$$\sum \frac{(a-b)^2}{ab} \geq \sum \frac{(a-b)^2}{ab + bc + ca},$$

ceea ce este evident. Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a = b = c$.

Barem de corectare:

- scade 9 din ambii membri **2p**
rescrie membrul stâng **2p**
rescrie membrul drept **1p**
concluzia **1p**
deduce cazul de egalitate **1p**

Soluția 2: Eliminând numitorii se ajunge la $a^3 b^2 + a^2 b^3 - 2a^2 b^2 c + a^3 c^2 - 2a^2 b c^2 - 2ab^2 c^2 + b^3 c^2 + a^2 c^3 + b^2 c^3 \geq 0$. Această inegalitate rezultă imediat din inegalitatea lui Muirhead: $[3, 2, 0] \geq [2, 2, 1]$ sau din inegalitatea mediilor, adunând relația $a^3 b^2 + a^3 b^2 + c^3 b^2 \geq 3a^2 b^2 c$ cu cele cinci relații analoage ei și împărțind apoi la 3.

Barem de corectare:

- elimină corect numitorii **1p**
aplică inegalitatea Muirhead (sau altfel) și demonstrează inegalitatea obținută **5p**
deduce cazul de egalitate **1p**

Notă: Nu se va acorda niciun punct pentru simpla ghicire a cazului de egalitate.

Problema 3.

Determinați numerele reale x și y care verifică relațiile

$$(x + \sqrt{x^2 + 1})(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 2022 \text{ și } x + y = \frac{2021}{\sqrt{2022}}.$$

Soluție. Dacă notăm $z = x + \sqrt{x^2 + 1}$ și $t = y + \sqrt{y^2 + 1}$, atunci avem $z \neq 0$ și $\frac{1}{z} = \sqrt{x^2 + 1} - x$. Rezultă că $2x = z - \frac{1}{z}$ și, analog, $2y = t - \frac{1}{t}$. Avem $zt = 2022$ și $z + t - \frac{1}{z} - \frac{1}{t} = \frac{2 \cdot 2021}{\sqrt{2022}}$, adică $(z+t) \cdot \frac{zt-1}{zt} = \frac{2 \cdot 2021}{\sqrt{2022}}$. Deducem că $z+t = 2\sqrt{2022}$. Atunci $z + \frac{2022}{z} = 2\sqrt{2022}$ revine la $\frac{(z - \sqrt{2022})^2}{z} = 0$. Deducem că $z = \sqrt{2022}$, apoi că $t = \sqrt{2022}$, deci că $x = y = \frac{2021}{2\sqrt{2022}}$, valori care verifică într-adevăr sistemul.

Barem de corectare:

cu sau fără notație, consideră z și conjugata lui z **1p**
 deduce în mod corect unica soluție a sistemului **5p**
 demonstrează (sau afirmă) că perechea găsită satisface sistemul **1p**

Notă: Dacă elevul folosește inegalitatea mediilor fără ca din demonstrația sa să fie evident că variabilele sunt pozitive, el va fi depunctat cu **1p**.

Problema 4.

Elevii dintr-o clasă de $n \geq 2$ elevi au avut de rezolvat 2^{n-1} probleme ca temă de vacanță. La verificare, profesorul constată că, pentru orice pereche de probleme diferite:

- există cel puțin un elev care le-a rezolvat pe amândouă și
- există cel puțin un elev care a rezolvat una dintre ele, dar nu și pe cealaltă.

Arătați că există o problemă rezolvată de toți elevii clasei.

Soluție. Numerotăm problemele de la 1 la 2^{n-1} . Pentru orice $k \in \{1, 2, \dots, 2^{n-1}\}$, notăm cu A_k mulțimea elevilor care au rezolvat problema cu numărul k . Atunci ipoteza ne spune că mulțimile A_k sunt două câte două distincte și că $A_k \cap A_p \neq \emptyset$, $\forall \{k, p\} \subset \{1, 2, \dots, 2^{n-1}\}$.

Considerăm cele 2^n submulțimi ale mulțimii, E , a tuturor elevilor din clasă și le grupăm în perechi de forma $\{M, E \setminus M\}$. Aceste 2^{n-1} perechi sunt disjuncte. Mulțimile $A_1, A_2, \dots, A_{2^{n-1}}$ sunt 2^{n-1} submulțimi distincte ale lui E , dar printre ele nu putem avea două submulțimi dintr-o aceeași pereche deoarece acestea ar fi disjuncte. Așadar, în fiecare pereche putem avea cel mult una din mulțimile A_k . Deoarece sunt 2^{n-1} perechi și tot atâtea mulțimi A_k , în fiecare pereche vom avea exact una din mulțimile A_k . Astfel, în perechea $\{\emptyset, E\}$, cum $A_k \neq \emptyset$, $\forall k$, mulțimea E este cea care trebuie să fie egală cu un A_ℓ , cu $\ell \in \{1, 2, \dots, 2^{n-1}\}$. Atunci problema cu numărul ℓ a fost rezolvată de toți elevii.

Barem de corectare:

consideră, pentru fiecare problemă, mulțimea elevilor care au rezolvat-o **1p**
 consideră perechile de forma $\{M, E \setminus M\}$ **2p**
 deduce că în fiecare pereche avem exact un A_k **2p**
 finalizează uitându-se la perechea $\{\emptyset, E\}$ **2p**



Olimpiada Națională GAZETA MATEMATICĂ
Etapa a III-a - 24 aprilie 2021

Subiecte – clasa a IX-a

Problema 1.

Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC . Fie O centrul cercului circumscris acestuia și D piciorul înălțimii din A . Știind că $OD \parallel AB$, arătați că $\sin 2B = \operatorname{ctg} C$.

Problema 2.

Fie $P_0, P_1, \dots, P_{2021}$ puncte pe cercul trigonometric, de centru O și rază 1, astfel încât, pentru orice $n \in \{1, 2, \dots, 2021\}$, lungimea arcului de cerc parcurs în sens trigonometric de la P_{n-1} la P_n aparține intervalului $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

Aflați lungimea maximă a vectorului

$$\overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{OP_1} + \dots + \overrightarrow{OP_{2021}}.$$

Problema 3.

Fie a, b, c numere strict pozitive, astfel încât $a + b + c = 1$. Arătați că

$$\frac{1}{abc} + \frac{4}{a^2 + b^2 + c^2} \geq \frac{13}{ab + bc + ca}.$$

Problema 4.

Fie A o mulțime finită de numere naturale. Determinați toate funcțiile $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ cu proprietatea că $f(|x - y|) = |f(x) - f(y)|$, pentru orice $x, y \in \mathbb{N}$.

Soluții și bareme – clasa a IX-a

Problema 1. Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC . Fie O centrul cercului circumscris acestuia și D piciorul înălțimii din A . Știind că $OD \parallel AB$, arătați că $\sin 2B = \operatorname{ctg} C$.

Soluție.

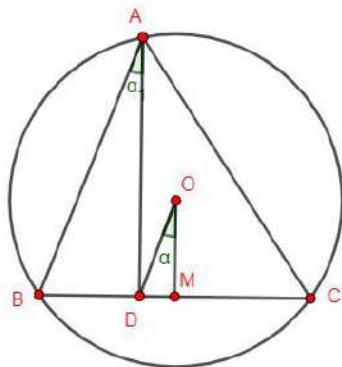


Figura 1

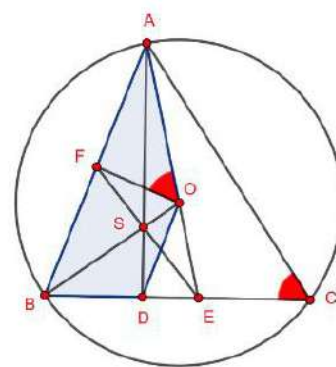


Figura 2

Avem (Figura 1) $\operatorname{tg} \angle DOM = \operatorname{tg} \angle BAD = \operatorname{ctg} B$. Dar

$$DM = BM - BD = a/2 - c \cos B = R \sin A - 2R \sin C \cos B,$$

iar $OM = R \cos A$, deci

$$\frac{\sin A - 2 \sin C \cos B}{\cos A} = \frac{\cos B}{\sin B}.$$

..... 4p

Eliminând numitorii și transformând produsele în sume, ajungem la

$$\cos(2B + C) - \cos(2B - C) = -2 \cos C,$$

sau

$$-2 \sin 2B \sin C = -2 \cos C \Leftrightarrow \sin 2B = \operatorname{ctg} C.$$

..... 3p

Soluție alternativă. Din ipoteză, $ABDO$ este trapez (Figura 2). Se știe că dreapta care trece prin punctul de intersecție a diagonalelor (punctul S) și prin punctul de intersecție a laturilor neparalele (punctul E) trece prin mijloacele bazelor, așadar F este mijlocul lui AB . Deducem că $OF \perp AB$ și cum triunghiul AOB este isoscel, obținem și $\angle AOF = C$ 3p

Egalitatea $\sin 2B = \operatorname{ctg} C$, sau $2 \sin B \cos B = \operatorname{ctg} C$ se scrie echivalent

$$2 \cdot \frac{AD}{AB} \cdot \frac{BD}{AB} = \frac{OF}{AF} \Leftrightarrow \frac{AD}{AB} \cdot \frac{BD}{AB} = \frac{OF}{AB} \Leftrightarrow AD \cdot BD = OF \cdot AB,$$

..... 2p

relație care exprimă egalitatea ariilor triunghiurilor ABD și AOB și este evidentă deoarece $ABDO$ este trapez. 2p

Problema 2. Fie $P_0, P_1, \dots, P_{2021}$ puncte pe cercul trigonometric, de centru O și rază 1, astfel încât, pentru orice $n \in \{1, 2, \dots, 2021\}$, lungimea arcului de cerc parcurs în sens trigonometric de la P_{n-1} la P_n

apartine intervalului $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.
 Aflați lungimea maximă a vectorului

$$\overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{OP_1} + \dots + \overrightarrow{OP_{2021}}.$$

Soluție. Vom arăta că $|\overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2}| \leq 1$.

Fie $\alpha = m(\angle P_0OP_1)$ și $\beta = m(\angle P_1OP_2)$. Avem $m(\angle P_2OP_0) = 2\pi - \alpha - \beta$ și

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2}|^2 &= (\overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2}) \cdot (\overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2}) \\ &= 3 + 2(\cos \alpha + \cos \beta + \cos(2\pi - \alpha - \beta)) \\ &= 1 + 2(\cos \alpha + \cos \beta + 1 + \cos(\alpha + \beta)) \\ &= 1 + 8 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}, \end{aligned}$$

deci

$$|\overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2}| \leq 1 \Leftrightarrow \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \leq 0,$$

ceea ce este adevărat, pentru că $\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2} \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ și $\frac{\alpha + \beta}{2} \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$3p

Analog se arată că $|\overrightarrow{OP_{3k}} + \overrightarrow{OP_{3k+1}} + \overrightarrow{OP_{3k+2}}| \leq 1$, pentru orice k , $0 \leq k \leq 673$.

Așadar,

$$\left| \sum_{n=0}^{2021} \overrightarrow{OP_n} \right| \leq \sum_{k=0}^{673} |\overrightarrow{OP_{3k}} + \overrightarrow{OP_{3k+1}} + \overrightarrow{OP_{3k+2}}| \leq 674.$$

.....2p

Putem obține egalitatea luând, de exemplu, P_0, P_1, P_2 puncte pe cerc astfel încât arcele de cerc parcurse în sens trigonometric P_0P_1 și P_1P_2 să aibă măsura $\frac{\pi}{2}$, apoi

$$P_n = \begin{cases} P_0, & n = 3k, k \in \{1, \dots, 673\} \\ P_1, & n = 3k + 1, k \in \{1, \dots, 673\} \\ P_2, & n = 3k + 2, k \in \{1, \dots, 673\}. \end{cases}$$

.....2p

Problema 3. Fie a, b, c numere strict pozitive, astfel încât $a + b + c = 1$. Arătați că

$$\frac{1}{abc} + \frac{4}{a^2 + b^2 + c^2} \geq \frac{13}{ab + bc + ca}.$$

Soluție. Inegalitatea este echivalentă cu

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{4(ab + bc + ca)}{a^2 + b^2 + c^2} \geq 13,$$

sau

$$(a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) + \frac{4(ab + bc + ca)}{a^2 + b^2 + c^2} \geq 13.$$

.....1p

Să observăm că

$$(a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = 3 + \sum \frac{a^2 + b^2}{ab} = 9 + \sum \frac{(a - b)^2}{ab}.$$

.....2p

Avem însă

$$\frac{(a - b)^2}{ab} \geq \frac{2(a - b)^2}{a^2 + b^2} \geq \frac{2(a - b)^2}{a^2 + b^2 + c^2},$$

.....2p

așadar

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9 + \frac{2\sum(a-b)^2}{a^2+b^2+c^2} = 9 + \frac{4(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)}{a^2+b^2+c^2} = 13 - \frac{4(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2},$$

de unde concluzia.....2p

Problema 4. Fie A o mulțime finită de numere naturale. Determinați toate funcțiile $f: \mathbb{N} \rightarrow A$ cu proprietatea că $f(|x-y|) = |f(x)-f(y)|$, pentru orice $x, y \in \mathbb{N}$.

Soluție.

Pentru $x=y$, rezultă $f(0)=0$, deci dacă $0 \notin A$, nu există astfel de funcții.....1p

Considerăm în continuare $0 \in A$.

Fie $a \in \mathbb{N}^*$. Vom arăta că $f(2a)=0$.

Numerele din șirul $f(a), f(2a), \dots, f(na), \dots$ aparțin lui A , care e finită, deci există $1 \leq i < j$ astfel ca $f(ia)=f(ja)$. Pentru $x=ia, y=ja$, rezultă $f((j-i)a)=0$.

Deci există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel ca $f(ka)=0$. Alegem $k \in \mathbb{N}^*$ minim cu această proprietate.

Dacă $k \geq 3$, atunci luăm $x=ka, y=a$ și obținem $f((k-1)a)=f(a)$. Apoi, pentru $x=(k-1)a, y=a$, găsim că $f((k-2)a)=0$, ceea ce contrazice minimalitatea lui k .

Deci $k \leq 2$, adică $f(a)=0$ sau $f(2a)=0$. Să presupunem că $f(2a) \neq 0$. Atunci $f(a)=0$. Pentru $x=2a, y=a$, obținem că $f(a)=|f(2a)-f(a)| \Leftrightarrow f(2a)=0$, contradicție.

Deci $f(2a)=0$. Cum $a \in \mathbb{N}^*$ a fost ales arbitrar, rezultă că $f(n)=0$ pentru orice număr par n4p

Fie acum x, y impare. Desigur, $|x-y|$ este par, deci $f(|x-y|)=0$. Rezultă că $|f(x)-f(y)|=0$, așadar $f(x)=f(y)$ pentru orice x, y impare.

Găsim că

$$f(n) = \begin{cases} c, & \text{dacă } x \text{ este impar} \\ 0, & \text{dacă } x \text{ este par} \end{cases},$$

pentru $c \in A$, arbitrar.....1p

Toate aceste funcții verifică condiția din enunț.....1p



Olimpiada Națională GAZETA MATEMATICĂ
Etapa a III-a - 24 aprilie 2021

Subiectele – clasa a X-a

Problema 1.

Determinați numerele complexe x, y, z , de același modul, știind că numerele $x + y + z$ și $x^3 + y^3 + z^3$ sunt reale.

Problema 2.

Fie $a, b, c, d \in \mathbb{N}$, $d \neq 0$ și fie funcția $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, definită prin

$$f(n) = \left[\frac{an + b}{cn + d} \right], \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N},$$

unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x . Demonstrați că următoarele afirmații sunt echivalente:

1° f este surjectivă.

2° $c = 0$, $b < d$ și $0 < a \leq d$.

Problema 3.

Fie $n \geq 2$ un număr natural cu proprietatea că mulțimea rădăcinilor de ordin n ale unității are mai puțin de $2^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} - 1$ submulțimi cu suma elementelor nulă. Arătați că n este prim. (Am notat cu $[x]$ partea întreagă a numărului real x .)

Problema 4.

Determinați numerele întregi nenule a pentru care există funcțiile $f, g : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ care verifică ecuația funcțională:

$$f(x + g(y)) = g(x) + f(y) + ay, \text{ oricare ar fi } x, y \in \mathbb{Q}.$$

Determinați toate aceste funcții.

Olimpiada Națională GAZETA MATEMATICĂ
Etapa a III-a - 24 aprilie 2021

Subiectele și baremele – clasa a X-a

Problema 1.

Determinați numerele complexe x, y, z , de același modul, știind că numerele $x + y + z$ și $x^3 + y^3 + z^3$ sunt reale.

Soluție și barem. Din ipoteză avem $x = r(\cos a + i \sin a), y = r(\cos b + i \sin b), z = r(\cos c + i \sin c)$, $r, a, b, c \in \mathbb{R}, r \geq 0$ și $\sum \sin a = \sum \sin 3a = 0$. Cum $\sin 3a = 3 \sin a - 4 \sin^3 a$, obținem $\sum \sin^3 a = 0$ **2 puncte**
Cum $\sin a, \sin b, \sin c$ sunt soluțiile ecuației $t^3 + \alpha t - \beta = 0$, unde $\alpha = \sum \sin a \sin b$, $\beta = \sin a \sin b \sin c$, rezultă $\sum \sin^3 a + \alpha \sum \sin a - 3\beta = 0$, deci $\beta = 0$ **3 puncte**
Presupunând $\sin a = 0$, rezultă $\sin b = -\sin c$ și obținem $\cos a = \pm 1$, $\cos b = \pm \cos c$.
În concluzie, $(x, y, z) = (\pm|u|, u, -u)$ sau $(x, y, z) = (\pm|u|, u, \bar{u})$ și permutările, unde $u \in \mathbb{C}$ **2 puncte**

Soluție alternativă. O soluție este $x = y = z = 0$. Presupunând că $|x| = |y| = |z| = r > 0$, pentru $a = \frac{x}{r}, b = \frac{y}{r}, c = \frac{z}{r}$ avem $|a| = |b| = |c| = 1$ și $a + b + c, a^3 + b^3 + c^3 \in \mathbb{R}$. Atunci $a + b + c \in \mathbb{R} \iff a + b + c = \overline{a + b + c} \iff a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \iff abc(a + b + c) = ab + bc + ca$ **1 punct**

Pe de altă parte, $(a + b + c)^3 - (a^3 + b^3 + c^3) = 3(a + b)(b + c)(c + a) \in \mathbb{R}$ de unde $(a + b)(b + c)(c + a) = \overline{(a + b)(b + c)(c + a)} \iff (a + b)(b + c)(c + a)((abc)^2 - 1) = 0$ **2 puncte**

Dacă $(a + b)(b + c)(c + a) = 0$ se obțin soluțiile $(a, b, c) = (\pm|u|, u, -u)$, $u \in \mathbb{C}^*$. și permutările. **1 punct**

Dacă $abc = 1$ rezultă că a, b, c sunt soluțiile ecuației $t^3 - st^2 + st - 1 = 0$, unde $s = a + b + c$, de unde obținem $(a, b, c) = (|u|, u, \bar{u})$, $u \in \mathbb{C}^*$ și permutările.

..... **1 punct**
Dacă $abc = -1$ rezultă că a, b, c sunt soluțiile ecuației $t^3 - st^2 - st + 1 = 0$, unde $s = a + b + c$, de unde obținem $(a, b, c) = (-|u|, u, \bar{u})$, $u \in \mathbb{C}^*$ și permutările.

..... **1 punct**
În concluzie, $(x, y, z) = (\pm|u|, u, -u)$ sau $(x, y, z) = (\pm|u|, u, \bar{u})$ și permutările, unde $u \in \mathbb{C}$ **1 punct**

Problema 2.

Fie $a, b, c, d \in \mathbb{N}$, $d \neq 0$ și fie funcția $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, definită prin

$$f(n) = \left[\frac{an + b}{cn + d} \right], \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N},$$

unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x . Demonstrați că următoarele afirmații sunt echivalente:

1° f este surjectivă.

2° $c = 0$, $b < d$ și $0 < a \leq d$.

Soluție și barem. $1^\circ \Rightarrow 2^\circ$ Admitem că f este surjectivă. Dacă am avea $c \neq 0$, atunci pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ am avea $\frac{an+b}{cn+d} \leq \frac{an+b}{cn} = \frac{a}{c} + \frac{b}{cn} \leq \frac{a+b}{c} \Rightarrow f(n) \leq \left\lfloor \frac{a+b}{c} \right\rfloor$, în contradicție cu surjectivitatea lui f . Prin urmare, trebuie să avem $c = 0$, deci $f(n) = \left\lfloor \frac{an+b}{d} \right\rfloor$ oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$ **2 puncte**

Se constată imediat că f este crescătoare. Dacă am avea $b \geq d$, atunci pentru orice $n \in \mathbb{N}$ am avea $f(n) \geq f(0) = \left\lfloor \frac{b}{d} \right\rfloor \geq 1$, de unde $0 \notin \text{Im } f$, în contradicție cu surjectivitatea lui f . Drept urmare, trebuie să avem $b < d$. Evident, avem $a > 0$ (altfel, f ar fi constantă și nu ar fi surjectivă). Deoarece $f(d) = \left\lfloor a + \frac{b}{d} \right\rfloor = a$, f este crescătoare și surjectivă, trebuie ca $\{0, 1, \dots, a\} \subseteq \{f(0), f(1), \dots, f(d)\}$, de unde $a \leq d$ **2 puncte**

$2^\circ \Rightarrow 1^\circ$ Avem $f(0) = \left\lfloor \frac{b}{d} \right\rfloor = 0$ și $0 \leq f(n+1) - f(n) = \left\lfloor \frac{a(n+1)+b}{d} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{an+b}{d} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{an+b}{d} + \frac{a}{d} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{an+b}{d} \right\rfloor \leq 1$, de unde $f(n+1) - f(n) \in \{0, 1\}$ oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

Dacă f nu ar fi surjectivă, ar exista un $n_0 \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că $f(n) = \left\lfloor \frac{an+b}{d} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{an_0+b}{d} \right\rfloor = f(n_0)$ oricare ar fi $n \geq n_0$. Dar atunci ar trebui ca pentru orice $n \geq n_0$ să avem $\frac{an+b}{d} < M := \frac{an_0+b}{d} + 1$, ceea ce este absurd. Contradicția obținută arată că f este surjectivă. **3 puncte**

Problema 3.

Fie $n \geq 2$ un număr natural cu proprietatea că mulțimea rădăcinilor de ordin n ale unității are mai puțin de $2^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} - 1$ submulțimi cu suma elementelor nulă. Arătați că n este prim. (Am notat cu $[x]$ partea întreagă a numărului real x .)

Soluție și barem. Fie $\gamma = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$, atunci $\gamma^n = 1$. Dacă n este compus, există o scriere $n = ab$ cu $a, b \geq 2$. Presupunem că $a \geq b$. Fie $A = \{\gamma^0, \gamma^a, \gamma^{2a}, \dots, \gamma^{(b-1)a}\}$. Suma elementelor acestei mulțimi este $S(A) = \sum_{x \in A} x =$

$$\sum_{k=0}^{b-1} (\gamma^a)^k = \frac{(\gamma^a)^b - 1}{\gamma^a - 1} = 0. \dots\dots\dots \mathbf{2 \text{ puncte}}$$

Considerăm mulțimile $A_i = \gamma^i A = \{\gamma^i x | x \in A\}$, $i = 0, 1, \dots, a-1$. Afirmăm că acestea sunt disjuncte două câte două și fiecare are suma 0. Într-adevăr, $S(A_i) = \sum_{x \in A_i} x = \gamma^i \sum_{x \in A} x = 0$. Existența unui $x \in A_i \cap A_j$, $i \neq j$ implică $x = \gamma^i \gamma^{ak} = \gamma^j \gamma^{ap}$ pentru $i, j \in 0, 1, \dots, a-1$ și $k, p \in 0, 1, \dots, b-1$. Atunci $\gamma^{i+ak-j-ap} = 1$, deci $n | i+ak-j-ap$. Cum $|i+ak-j-ap| \leq |i-j| + a|k-p| \leq a-1 + a(b-1) = ab-1 = n-1$ rezultă că $i+ak = j+ap$, deci $a | i-j$. Dar cum $|i-j| \leq a-1$ rezultă $i = j$, contradicție. **3 puncte**

Atunci mulțimile din setul $S = \{\bigcup_{k \in M} A_k | M \subset \{0, 1, \dots, a-1\}\}$ sunt diferite două câte două și au suma elementelor 0. Acestea sunt în număr de $2^a - 1$, dar cum $a \geq b \Rightarrow a^2 \geq n$, deci $a \geq \sqrt{n}$ iar $2^a - 1 \geq 2^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} - 1$, contradicție. Deci n este prim.

..... **2 puncte**

Problema 4.

Determinați numerele întregi nenule a pentru care există funcțiile $f, g : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ care verifică ecuația funcțională:

$$f(x + g(y)) = g(x) + f(y) + ay, \text{ oricare ar fi } x, y \in \mathbb{Q}. \quad (1)$$

Determinați toate aceste funcții.

Soluție și barem. Arătăm că a este produs de doi întregi consecutivi nenuli.

Observăm că dacă (f, g) este soluție și $c \in \mathbb{Q}$, atunci $(f + c, g)$ este soluție, astfel că putem presupune $f(0) = 0$.

Dacă în (1) punem $(x, y) \mapsto (-g(0), 0)$ rezultă $g(-g(0)) = 0$.

Dacă în (1) punem $(x, y) \mapsto (-g(0), -g(0))$ rezultă $ag(0) = 0$ deci $a = 0$ sau $g(0) = 0$. În cazul $a \neq 0$ continuăm cu $g(0) = 0$, $f(0) = 0$.

Dacă în (1) punem $y = 0$ rezultă $f(x) = g(x)$, $x \in \mathbb{Q}$ și revenind în (1) obținem:

$$f(x + f(y)) = f(x) + f(y) + ay, \quad x, y \in \mathbb{Q}. \quad (2)$$

..... **2 puncte**

Punem în (2), $(x, y) \mapsto (x - f(x), x)$ și obținem $f(x - f(x)) = -ax$, $x \in \mathbb{Q}$, deci f este surjectivă.

Punem în (2), $x = 0$ și obținem: $f(f(y)) = f(y) + ay$, $y \in \mathbb{Q}$. Folosind (2) rezultă $f(x + f(y)) = f(x) + f(f(y))$ și cum f este surjectivă rezultă $f(x + z) = f(x) + f(z)$, $\forall x, z \in \mathbb{Q}$. Deci f este aditivă, prin urmare $f(x) = \alpha x$, $\forall x \in \mathbb{Q}$, $\alpha \in \mathbb{Q}^*$.

..... **3 puncte**

Revenind în (2) obținem: $\alpha(x + \alpha y) = \alpha x + \alpha y + ay$, $\forall x, y \in \mathbb{Q}$ deci $\alpha^2 - \alpha - a = 0$.

Avem $\alpha_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4a}}{2} \in \mathbb{Q} \iff \sqrt{1 + 4a} \in \mathbb{Z}$, prin urmare $a = k(k + 1)$, $k \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_1 = k + 1$, $\alpha_2 = -k$.

În concluzie, $a = k(k + 1)$, $k \in \mathbb{N}^*$ iar perechile de funcții sunt $f(x) = (k + 1)x + c$, $g(x) = (k + 1)x$ și $f(x) = -kx + c$, $g(x) = -kx$ unde $k \in \mathbb{N}^*$, $c \in \mathbb{Q}$.

..... **1 punct**

Aceste funcții verifică relația din enunț. **1 punct**

Observație. Pentru găsirea, fără argumentare, a tuturor numerelor întregi a și a funcțiilor asociate, se va acorda 1 punct.

Olimpiada Națională GAZETA MATEMATICĂ
Etapa III - 24 aprilie 2021

Subiectele – clasa a XI-a

Problema 1.

Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea lui Darboux astfel ca $f(a) \cdot f(b) < 0$. Arătați că există α, β astfel ca $a < \alpha < \beta < b$ și $f(\alpha) + f(\beta) = f(\alpha) \cdot f(\beta)$.

Problema 2.

Pentru $n \geq 2$ numere reale nenule $a_1, a_2, \dots, a_n$, nu neapărat distincte, definim matricea $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$ prin $a_{ij} = \max\{a_i, a_j\}, \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Arătați că $\text{rang}(A) = \text{card}\{a_k \mid k = 1, 2, \dots, n\}$.

Problema 3.

Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă de ordinul $n \geq 2$, astfel încât

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \text{ și } \lim_{x \rightarrow \infty} f^{(n)}(x) = 0.$$

Demonstrați că $\lim_{x \rightarrow \infty} f^{(k)}(x) = 0$, pentru orice $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, unde $f^{(k)}$ reprezintă derivata de ordinul k a funcției f .

Problema 4.

Fie $n \geq 2$ și matricele $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Presupunem că există $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$ astfel încât $xAB + (1-x)BA = I_n$. Arătați că $(AB - BA)^n = O_n$.

Olimpiada Națională GAZETA MATEMATICĂ
Etapa III - 24 aprilie 2021

Soluții-Bareme – clasa a XI-a

Problema 1.

Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea lui Darboux astfel ca $f(a) \cdot f(b) < 0$. Arătați că există α, β astfel ca $a < \alpha < \beta < b$ și $f(\alpha) + f(\beta) = f(\alpha) \cdot f(\beta)$.

Soluție.

Conform ipotezei, există $c \in (a, b)$ astfel ca $f(c) = 0$ 1 punct
Presupunem $f(a) < 0$ și $f(b) > 0$. (Cazul $f(a) > 0$ și $f(b) < 0$ se tratează analog.)
Fie $m = \min \left\{ \frac{1}{2}, f(b) \right\} \in (0, 1/2]$. Conform proprietății lui Darboux a funcției f , au loc incluziunile: $[f(a), 0] \subset f([a, c])$ și $[0, m] \subset [0, f(b)] \subset f([c, b])$ 2 puncte
Funcția $g : [0, m] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{x}{x-1}$, este strict decrescătoare și continuă, deci are imaginea $g([0, m]) = \left[\frac{m}{m-1}, 0 \right] \subset (-\infty, 0]$ 2 puncte
Alegem $y \in (f(a), 0) \cap \left(\frac{m}{m-1}, 0 \right)$. Atunci există $\alpha \in (a, c)$ astfel ca $f(\alpha) = y$ și există $x \in (0, m)$ astfel ca $g(x) = y$, deci există $\beta \in (c, b)$ astfel ca $f(\beta) = x$. Rezultă $a < \alpha < \beta < b$ și $f(\alpha) = \frac{f(\beta)}{f(\beta)-1}$, deci $f(\alpha) + f(\beta) = f(\alpha) \cdot f(\beta)$ 2 puncte

Problema 2.

Pentru $n \geq 2$ numere reale nenule $a_1, a_2, \dots, a_n$, nu neapărat distincte, definim matricea $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$ prin $a_{ij} = \max\{a_i, a_j\}, \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Arătați că $\text{rang}(A) = \text{card}\{a_k \mid k = 1, 2, \dots, n\}$.

Soluție.

Pentru $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, dacă $a_i = a_j$, atunci linia (coloana) i a matricei A este egală cu linia (coloana) j a matricei A 1 punct
Presupunem că printre numerele reale nenule $a_1, a_2, \dots, a_n$ există $r \leq n$ numere distincte $a_{k_1} < a_{k_2} < \dots < a_{k_r}$. Rangul unei matrice este egal cu numărul de linii (coloane) liniar independente și este invariant la permutarea liniilor (coloanelor). Rezultă $\text{rang}(A) = \text{rang}(B)$, unde $B = (a_{k_i k_j})_{1 \leq i, j \leq r} \in M_r(\mathbb{R})$ 3 puncte
Avem

$$\det(B) = \begin{vmatrix} a_{k_1 k_1} & a_{k_1 k_2} & \dots & a_{k_1 k_{r-1}} & a_{k_1 k_r} \\ a_{k_2 k_1} & a_{k_2 k_2} & \dots & a_{k_2 k_{r-1}} & a_{k_2 k_r} \\ & & \dots & & \\ a_{k_{r-1} k_1} & a_{k_{r-1} k_2} & \dots & a_{k_{r-1} k_{r-1}} & a_{k_{r-1} k_r} \\ a_{k_r k_1} & a_{k_r k_2} & \dots & a_{k_r k_{r-1}} & a_{k_r k_r} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{k_1} & a_{k_2} & \dots & a_{k_{r-1}} & a_{k_r} \\ a_{k_2} & a_{k_2} & \dots & a_{k_{r-1}} & a_{k_r} \\ & & \dots & & \\ a_{k_{r-1}} & a_{k_{r-1}} & \dots & a_{k_{r-1}} & a_{k_r} \\ a_{k_r} & a_{k_r} & \dots & a_{k_r} & a_{k_r} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{k_1} - a_{k_2} & a_{k_2} - a_{k_3} & \dots & a_{k_{r-1}} - a_{k_r} & a_{k_r} \\ 0 & a_{k_2} - a_{k_3} & \dots & a_{k_{r-1}} - a_{k_r} & a_{k_r} \\ & & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & a_{k_{r-1}} - a_{k_r} & a_{k_r} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{k_r} \end{vmatrix} = a_{k_r} \prod_{i=1}^{r-1} (a_{k_i} - a_{k_{i+1}}) \neq 0.$$

Rezultă $\text{rang}(A) = \text{rang}(B) = r = \text{card}\{a_k \mid k = 1, 2, \dots, n\}$ 3 puncte

Problema 3.

Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă de ordinul $n \geq 2$, astfel încât

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \text{ și } \lim_{x \rightarrow \infty} f^{(n)}(x) = 0.$$

Demonstrați că $\lim_{x \rightarrow \infty} f^{(k)}(x) = 0$, pentru orice $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, unde $f^{(k)}$ reprezintă derivata de ordinul k a funcției f .

Soluție.

Definim funcțiile $g_k : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g_k(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{k^i}{i!} f^{(i)}(x)$, $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. Fie $x > 0$ și $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. Din formula lui Taylor cu rest Lagrange, există $c_k(x) \in (x, x+k)$ astfel ca $g_k(x) = f(x+k) - f(x) - \frac{k^n}{n!} f^{(n)}(c_k(x))$ 2 puncte
 Avem $\lim_{x \rightarrow \infty} c_k(x) = \infty$, $k = 1, 2, \dots, n-1$. Atunci, conform ipotezei, rezultă $\lim_{x \rightarrow \infty} g_k(x) = 0$, pentru oricare $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ 1 punct

Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 1 & 2^2 & \dots & (n-1)^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2^{n-1} & \dots & (n-1)^{n-1} \end{pmatrix} \in M_{n-1}(\mathbb{R})$. Pentru orice $x > 0$, avem

$$(g_1(x) \ g_2(x) \ \dots \ g_{n-1}(x)) = \left(\frac{f^{(1)}(x)}{1!} \ \frac{f^{(2)}(x)}{2!} \ \dots \ \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} \right) \cdot A. \dots \dots \dots 2 \text{ puncte}$$

Matricea A este inversabilă deoarece $\det(A) = (n-1)! \prod_{1 \leq i < j \leq n-1} (j-i) \neq 0$.

Fie $A^{-1} = (a_{ik})_{1 \leq i, k \leq n-1}$. Obținem $f^{(k)}(x) = k! \sum_{i=1}^{n-1} g_i(x) a_{ik}$, $x > 0$, $k = \overline{1, n-1}$.

Rezultă $\lim_{x \rightarrow \infty} f^{(k)}(x) = k! \sum_{i=1}^{n-1} a_{ik} \lim_{x \rightarrow \infty} g_i(x) = 0$, $\forall k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ 2 puncte

Problema 4.

Fie $n \geq 2$ și matricele $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Presupunem că există $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$ astfel încât $xAB + (1-x)BA = I_n$. Arătați că $(AB - BA)^n = O_n$.

Soluție.

Fie $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ valorile proprii comune ale matricelor AB și BA 1 punct
 Atunci matricea $(1-x)BA$ are valorile proprii $(1-x)\lambda_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, iar matricea $I_n - xAB$ are valorile proprii $1 - x\lambda_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ 1 punct
 Cum matricele $(1-x)BA$ și $I_n - xAB$ sunt egale, ele au aceleași valori proprii, deci

$$(1) \quad \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} (1-x)^k \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \dots \lambda_{i_k} = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} (1-x\lambda_{i_1})(1-x\lambda_{i_2}) \dots (1-x\lambda_{i_k}),$$

pentru $k = 1, 2, \dots, n$ 1 punct

Notăm $S_k = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \dots \lambda_{i_k}$, $k = 1, 2, \dots, n$. Demonstrăm $S_k = C_n^k$.

Pentru $k = 1$, avem $(1-x) \sum_{i=1}^n \lambda_i = n - x \sum_{i=1}^n \lambda_i$, de unde $S_1 = n = C_n^1$.

Fie $k \in \{2, \dots, n\}$. Presupunem $S_i = C_n^i$, $i = 1, \dots, k-1$. Atunci, conform (1),
 $(1-x)^k S_k = C_n^k - x C_{n-1}^{k-1} S_1 + x^2 C_{n-2}^{k-2} S_2 + \dots + (-1)^{k-1} x^{k-1} C_{n-(k-1)}^1 S_{k-1} + (-1)^k x^k S_k =$
 $= C_n^k - x C_{n-1}^{k-1} C_n^1 + x^2 C_{n-2}^{k-2} C_n^2 + \dots + (-1)^{k-1} x^{k-1} C_{n-(k-1)}^1 C_n^{k-1} + (-1)^k x^k S_k =$
 $= C_n^k - x C_n^k C_k^1 + x^2 C_n^k C_k^2 + \dots + (-1)^{k-1} x^{k-1} C_n^k C_k^{k-1} + (-1)^k x^k S_k =$

$$= C_n^k [(1-x)^k - (-1)^k x^k] + (-1)^k x^k S_k.$$

Obținem $[(1-x)^k - (-1)^k x^k] (S_k - C_n^k) = 0$. Avem $(1-x)^k - (-1)^k x^k \neq 0$, deoarece $x \neq \frac{1}{2}$. Atunci $S_k = C_n^k$. Conform principiului al II-lea al inducției matematice, rezultă $S_k = C_n^k, \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$ 2 puncte
Fie $p_{AB}(x) = \det(xI_n - AB)$ polinomul caracteristic al matricei AB . Avem:

$$p_{AB}(x) = \prod_{i=1}^n (x - \lambda_i) = x^n - S_1 x^{n-1} + S_2 x^{n-2} + \dots + (-1)^n S_n =$$

$$= x^n - C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} + \dots + (-1)^n C_n^n = (x-1)^n.$$

Atunci $(AB - I_n)^n = p_{AB}(AB) = O_n$. Cum $AB - I_n = (1-x)(AB - BA)$ și $x \neq 1$, obținem $(AB - BA)^n = \frac{1}{(1-x)^n} (AB - I_n)^n = O_n$ 2 puncte

Olimpiada Națională GAZETA MATEMATICĂ
Etapă a 3-a - 24 aprilie 2021

Subiectele – clasa a XII-a

Problema 1.

Determinați funcțiile continue $f : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ care verifică relația

$$\int_0^1 f(x) \, dx \cdot \int_0^1 f^2(x) \, dx \cdots \int_0^1 f^{2020}(x) \, dx = \left(\int_0^1 f^{2021}(x) \, dx \right)^{1010}.$$

Problema 2.

Să se determine inelele nenule finite, cu unitate, în care suma tuturor elementelor este un element inversabil.

Problema 3.

Fie $a \in \mathbb{N}$, $a > 2$. Să se arate că

- a) Există un număr $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, care nu este prim, astfel încât $a^n \equiv 1 \pmod{n}$.
- b) Dacă p este cel mai mic număr din $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ pentru care $a^p \equiv 1 \pmod{p}$, atunci p este prim.
- c) Nu există numere $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ pentru care $2^n \equiv 1 \pmod{n}$.

Problema 4.

Fie $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ o funcție continuă și bijectivă, cu proprietatea că $f(0) = 0$. Arătați că pentru orice $\alpha \geq 0$ are loc inegalitatea

$$(\alpha + 2) \cdot \int_0^1 x^\alpha (f(x) + f^{-1}(x)) \, dx \leq 2.$$

Olimpiada Națională GAZETA MATEMATICĂ
Etapă a 3-a - 24 aprilie 2021

Subiectele – clasa a XII-a

Problema 1.

Determinați funcțiile continue $f : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ care verifică relația

$$\int_0^1 f(x) dx \cdot \int_0^1 f^2(x) dx \cdots \int_0^1 f^{2020}(x) dx = \left(\int_0^1 f^{2021}(x) dx \right)^{1010}.$$

Soluție: Dacă $f : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ este o funcție constantă, cu $f(x) = c$ pentru orice $x \in [0, 1]$, atunci

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx \cdot \int_0^1 f^2(x) dx \cdots \int_0^1 f^{2020}(x) dx &= c \cdot c^2 \cdots c^{2020} = c^{2021 \cdot 1010} = \\ &= (c^{2021})^{1010} = \left(\int_0^1 f^{2021}(x) dx \right)^{1010}. \end{aligned}$$

Fie $f : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ o funcție continuă oarecare. Conform inegalității lui Hölder, pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$ avem

$$\left(\int_0^1 (f^k(x))^{\frac{k+1}{k}} dx \right)^{\frac{k}{k+1}} \cdot \left(\int_0^1 1 dx \right)^{\frac{1}{k+1}} \geq \int_0^1 f^k(x) dx,$$

..... 2p
de unde rezultă că

$$\left(\int_0^1 f^{k+1}(x) dx \right)^k \geq \left(\int_0^1 f^k(x) dx \right)^{k+1},$$

cu egalitate dacă și numai dacă f este o funcție constantă. 1p

Notând $a_k = \left(\int_0^1 f^{k+1}(x) dx \right)^k$, rezultă atunci că

$$a_k \geq a_{k-1} \cdot \left(\int_0^1 f^k(x) dx \right)^2, \text{ pentru orice } k \in \mathbb{N}^*.$$

..... 1p
Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ rezultă atunci că

$$\begin{aligned} a_n &\geq a_{n-1} \cdot \left(\int_0^1 f^n(x) dx \right)^2 \geq a_{n-2} \cdot \left(\int_0^1 f^{n-1}(x) dx \right)^2 \cdot \left(\int_0^1 f^n(x) dx \right)^2 \geq \dots \\ &\dots \geq a_1 \cdot \left(\int_0^1 f^2(x) dx \right)^2 \cdots \left(\int_0^1 f^n(x) dx \right)^2 \geq \\ &\geq \left(\int_0^1 f(x) dx \right)^2 \cdot \left(\int_0^1 f^2(x) dx \right)^2 \cdots \left(\int_0^1 f^n(x) dx \right)^2. \end{aligned}$$

Atunci

$$\left(\int_0^1 f^{n+1}(x) dx \right)^{\frac{n}{2}} \geq \int_0^1 f(x) dx \cdot \int_0^1 f^2(x) dx \cdots \int_0^1 f^n(x) dx,$$

cu egalitate dacă și numai dacă f este o funcție constantă. 2p
 Pentru $n = 2020$, o funcție care verifică egalitatea din enunț este o funcție constantă.
 Prin urmare, funcțiile care verifică proprietatea din enunț sunt funcțiile constante.
 1p

Problema 2.

Să se determine inelele nenule finite, cu unitate, în care suma tuturor elementelor este un element inversabil.

Soluție: Fie $(A, +, \cdot)$ un inel nenul unitar finit cu proprietatea că suma tuturor elementelor sale este un element inversabil $u \in U(A)$.

Deoarece funcția $f : A \rightarrow A$, $f(x) = -x$, este bijectivă, notând $2 = 1 + 1$, avem

$$2 \cdot u = u + u = \sum_{x \in A} x + \sum_{x \in A} (-x) = \sum_{x \in A} (x + (-x)) = 0.$$

..... 3p
 Atunci $2 = 2 \cdot u \cdot u^{-1} = 0$, astfel că $a + a = 2 \cdot a = 0$ pentru orice element $a \in A$.

..... 1p
 Dăm două variante de continuare - punctajele nu se cumulează
 var.1

Inelul A fiind nenul, există un număr natural nenul n și o mulțime de elemente $\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subseteq A$ cu proprietățile

$$a_1 \neq 0, \quad a_{k+1} \in A \setminus A_k, \text{ pentru orice } k = \overline{1, n-1},$$

unde $A_k = \{\sum_{x \in B} x \mid B \subseteq \{a_1, a_2, \dots, a_k\}\}$ 1p

Pentru fiecare element $a \in A$ există atunci o submulțime unică $M_a \subseteq \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, cu proprietatea că

$$a = \sum_{x \in M_a} x.$$

..... 1p
 Atunci $|A| = 2^n$ și

$$0 \neq u = \sum_{a \in A} a = 2^{n-1} \sum_{k=1}^n a_k,$$

astfel că $n = 1$, $|A| = 2$ și $A \simeq \mathbb{Z}_2$ 1p
 var.2

Cu teorema lui Cauchy rezultă atunci că există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $|A| = 2^n$.

..... 1p
 Definim pe A relația

$$x \sim y \stackrel{\text{def}}{\iff} x = y \text{ sau } x + 1 = y.$$

Această relație este o relație de echivalență, astfel că A se partiționează în 2^{n-1} clase de echivalență de forma $\{x, 1+x\}$ 1p

Considerând un sistem R de reprezentanți ai claselor de echivalență, avem:

$$0 \neq u = \sum_{a \in A} a = \sum_{x \in R} (x + 1 + x) = \sum_{x \in R} 1 = 2^{n-1} \cdot 1.$$

Rezultă că $n = 1$, $|A| = 2$ și $A \simeq \mathbb{Z}_2$ 1p
 în concluzie:

Singurul inel care verifică condiția din enunț este $\mathbb{Z}_2$.

Problema 3.

Fie $a \in \mathbb{N}$, $a > 2$. Să se arate că

a) Există un număr $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, care nu este prim, astfel încât $a^n \equiv 1 \pmod{n}$.

- b) Dacă p este cel mai mic număr din $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ pentru care $a^p \equiv 1 \pmod{p}$, atunci p este prim.
 c) Nu există numere $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ pentru care $2^n \equiv 1 \pmod{n}$.

Soluție: a) Fie $d > 1$ un divizor al numărului $a - 1$ și $q = \frac{a-1}{d}$. Dacă $n = d^2$, atunci n nu este prim și

$$a^n = (1 + qd)^n = 1 + nqd + \mathcal{M}d^2 \equiv 1 \pmod{n}.$$

..... 1p
 b) Fie p cel mai mic număr natural, cu $p > 1$ și $a^p \equiv 1 \pmod{p}$. Rezultă că $(a, p) = 1$ și $\hat{a}$ este un element inversabil al inelului $\mathbb{Z}_p$ 1p
 În grupul multiplicativ $U(\mathbb{Z}_p)$ avem atunci că $\hat{a}^p = 1 = \hat{a}^{\varphi(p)}$ și $\text{ord}(\hat{a}) | (p, \varphi(p))$.

..... 1p
 Dacă $\text{ord}(\hat{a}) = q > 1$, atunci $q \leq \varphi(p) < p$ și

$$a^q = 1 + \mathcal{M}p \equiv 1 \pmod{q},$$

ceea ce contrazice minimalitatea lui p 1p
 Dacă $\text{ord}(\hat{a}) = 1$, atunci $a \equiv 1 \pmod{p}$, de unde $a \equiv 1 \pmod{q}$ și $a^q \equiv 1 \pmod{q}$ pentru orice divizor $q > 1$ al lui p . Minimalitatea lui p implică deci că p nu are divizori proprii $q > 1$, deci p este prim. 1p

c) Dacă ar exista $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, cu $2^n \equiv 1 \pmod{n}$, fie p cel mai mic număr natural cu $p > 1$ și $2^p \equiv 1 \pmod{p}$. Proprietatea de minimalitate a lui p implică că în grupul $U(\mathbb{Z}_p)$ $\text{ord}(\hat{2}) = 1$, adică

$$2 \equiv 1 \pmod{p},$$

ceea ce este absurd. Rezultă că nu există numere naturale n , cu $n > 1$, astfel încât $2^n \equiv 1 \pmod{n}$ 2p

Problema 4.

Fie $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ o funcție continuă și bijectivă, cu proprietatea că $f(0) = 0$. Arătați că pentru orice $\alpha \geq 0$ are loc inegalitatea

$$(\alpha + 2) \cdot \int_0^1 x^\alpha (f(x) + f^{-1}(x)) \, dx \leq 2.$$

Soluție: Funcția f fiind continuă și bijectivă este strict monotonă, și cum $f(0) = 0$, rezultă că $f(1) = 1$ și f este strict crescătoare. 1p
 Conform inegalității lui Young, avem

$$\int_0^x f(t) \, dt + \int_0^x f^{-1}(t) \, dt \geq x^2 \quad , \text{ pentru orice } x \in [0, 1],$$

cu egalitate dacă și numai dacă $f(x) = x$ 2p
 Inegalitatea de mai sus se mai scrie

$$\int_0^x (f(t) + f^{-1}(t) - 2t) \, dt \geq 0 \quad \text{pentru orice } x \in [0, 1].$$

..... 2p
 Fie $G : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ funcția definită prin $G(x) = \int_0^x (f(t) + f^{-1}(t) - 2t) \, dt$. Atunci $G(1) = G(0) = 0$, $G(x) \geq 0$ pentru orice $x \in [0, 1]$, G este derivabilă și pentru orice $\alpha \geq 0$ avem

$$\int_0^1 x^\alpha (f(x) + f^{-1}(x)) \, dx = 2 \int_0^1 x^{\alpha+1} \, dx + \int_0^1 x^\alpha (f(x) + f^{-1}(x) - 2x) \, dx =$$

$$= \frac{2}{\alpha + 2} + \int_0^1 x^\alpha G'(x) \, dx = \frac{2}{\alpha + 2} + \lim_{a \rightarrow 0} \left(G(1) - G(a) \cdot a^\alpha - \int_a^1 \alpha \cdot x^{\alpha-1} G(x) \, dx \right) \leq \\ \leq \frac{2}{\alpha + 2}.$$

Rezultă că

$$(\alpha + 2) \cdot \int_0^1 x^\alpha (f(x) + f^{-1}(x)) \, dx \leq 2.$$

..... 2p



MINISTERUL EDUCAȚIEI



SOCIETATEA DE ȘTIINȚE
MATEMATICE DIN ROMÂNIA



Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Națională, Constanța, 16 aprilie 2022

CLASA a V-a

Problema 1. Determinați numerele naturale de forma $\overline{ab}$, care au proprietatea că restul împărțirii lui $\overline{ab}$ la $a + b$ este $a \cdot b$.

Problema 2. a) Fie n un număr natural. Demonstrați că, dacă numerele $9 \cdot n + 1$ și $11 \cdot n + 1$ sunt simultan pătrate perfecte, atunci n este divizibil cu 5.

b) Determinați cel mai mic număr natural nenul n pentru care numerele $9 \cdot n + 1$ și $11 \cdot n + 1$ sunt simultan pătrate perfecte.

Problema 3. a) Determinați numerele prime a, b, c , cu $a < b < c$, pentru care

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2022.$$

b) Există cinci numere prime distincte care au suma pătratelor egală cu 2022? Justificați răspunsul!

Problema 4. Determinați perechile (a, b) de numere naturale nenule, care au proprietatea că $2 \cdot b + 1$ divide $3 \cdot a - 1$ și $2 \cdot a + 1$ divide $3 \cdot b - 1$.

*Timp de lucru 2 ore. Se adaugă 30 minute pentru întrebări
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.*



MINISTERUL EDUCAȚIEI



SOCIETATEA DE ȘTIINȚE
MATEMATICE DIN ROMÂNIA



Olimpiada Națională de Matematică Etapa Națională, Constanța, 16 aprilie 2022

CLASA a V-a – soluții și bareme

Problema 1. Determinați numerele naturale de forma $\overline{ab}$, care au proprietatea că restul împărțirii lui $\overline{ab}$ la $a + b$ este $a \cdot b$.

Soluție. Avem condiția $a \cdot b < a + b$. Dacă a și b ar fi mai mari sau egale cu 2, presupunând că $a \geq b$, obținem $a \cdot b \geq 2 \cdot a \geq a + b$, contradicție. La fel pentru $a \leq b$. În concluzie $a \leq 1$ sau $b \leq 1$ **3p**

Cazul I. Pentru $a \leq 1$, deoarece $a \neq 0$ obținem $a = 1$. Conform teoremei împărțirii cu rest avem $\overline{1b} = (1 + b) \cdot C + b$, de unde $10 = (1 + b) \cdot C$, unde am notat cu C câtul împărțirii. Deci $b + 1$ divide pe 10, b putând avea valorile 0, 1, 4 sau 9. Obținem soluțiile 10, 11, 14, 19. **2p**

Cazul II. Pentru $b \leq 1$ avem două subcazuri:

a) Dacă $b = 0$, atunci obținem soluțiile 10, 20, ..., 90.

b) Dacă $b = 1$, din teorema împărțirii cu rest obținem $\overline{a1} = (a + 1) \cdot C + a$, de unde $9 \cdot (a + 1) = (a + 1) \cdot C + 8$. Obținem că $a + 1$ divide pe 8, deci a poate fi 1, 3 sau 7. Se obțin soluțiile 11, 31, 71 **2p**

Problema 2. a) Fie n un număr natural. Demonstrați că, dacă numerele $9 \cdot n + 1$ și $11 \cdot n + 1$ sunt simultan pătrate perfecte, atunci n este divizibil cu 5.

b) Determinați cel mai mic număr natural nenul n pentru care numerele $9 \cdot n + 1$ și $11 \cdot n + 1$ sunt simultan pătrate perfecte.

Soluție. a) Dacă ultima cifră a lui n este 1, 2, 6 sau 7, atunci ultima cifră a lui $11 \cdot n + 1$ este 2, 3, 7, respectiv 8, deci $11 \cdot n + 1$ nu este pătrat perfect. **2p**

Dacă ultima cifră a lui n este 3, 4, 8 sau 9, atunci ultima cifră a lui $9 \cdot n + 1$ este 8, 7, 3, respectiv 2, deci $9 \cdot n + 1$ nu este pătrat perfect. **2p**

Cum numerele $11 \cdot n + 1$ și $9 \cdot n + 1$ sunt simultan pătrate perfecte, deducem că ultima cifră a lui n trebuie să fie 0 sau 5, deci n este divizibil cu 5. **1p**

b) Considerând multiplii de 5 nenuli 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, obținem pentru numărul $9 \cdot n + 1$ valorile 46, 91, 136, 181, 226, 271, 316, care nu sunt pătrate perfecte. **1p**

Pentru $n = 40$ obținem $9 \cdot n + 1 = 361 = 19^2$ și $11 \cdot n + 1 = 441 = 21^2$, deci $n = 40$ este cel mai mic număr natural nenul pentru care $9 \cdot n + 1$ și $11 \cdot n + 1$ sunt simultan pătrate perfecte. **1p**

Problema 3. a) Determinați numerele prime a, b, c , cu $a < b < c$, pentru care

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2022.$$

b) Există cinci numere prime distincte care au suma pătratelor egală cu 2022? Justificați răspunsul!

Soluție. a) Dacă a, b, c ar fi toate impare, atunci $a^2 + b^2 + c^2$ ar fi impar, ceea ce contrazice ipoteza. Deci $a = 2$ **1p**

Din $b^2 + c^2 = 2018$ și c număr prim deducem că $c \leq 43$. Dacă $c \leq 31$, cum $b < c$, obținem $b \leq 29$, deci $b^2 + c^2 \leq 1690 < 2018$. Astfel c poate avea valorile 37, 41 sau 43. **2p**

Pentru $c = 37$ și $c = 41$ nu avem soluție, iar pentru $c = 43$ obținem $b = 13$ **1p**

b) Presupunem că există $a < b < c < d < e$ numere prime cu $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = 2022$. Dacă toate ar fi impare, atunci suma pătratelor lor ar fi impară, ceea ce contrazice relația. Deci $a = 2$ și obținem $b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = 2018$ **1p**

Dacă $b = 3$, atunci $c^2 + d^2 + e^2 = 2009$, și cum c, d, e sunt de forma $\mathcal{M}_3 + 1$ sau $\mathcal{M}_3 + 2$, obținem că $c^2 + d^2 + e^2 = \mathcal{M}_3 \neq 2009$ **1p**

Dacă $b > 3$, atunci $b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = \mathcal{M}_3 + 1 \neq 2018$. În concluzie nu există numere cu proprietatea cerută. **1p**

Problema 4. Determinați perechile (a, b) de numere naturale nenule care au proprietatea că $2 \cdot b + 1$ divide $3 \cdot a - 1$ și $2 \cdot a + 1$ divide $3 \cdot b - 1$.

Soluție. Dacă perechea (a, b) convine, atunci numerele $x = \frac{3a-1}{2b+1}$ și $y = \frac{3b-1}{2a+1}$ sunt naturale **1p**

Avem $x \cdot y < \frac{3a}{2b} \cdot \frac{3b}{2a} = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{2}$ și, cum x și y sunt numere naturale, deducem că sunt posibile doar cazurile $x = y = 1$, $x = 1, y = 2$ și $x = 2, y = 1$ **3p**

În cazul $x = y = 1$ obținem $a = b = 2$ **1p**

În cazul $x = 1, y = 2$ obținem $a = 12, b = 17$ **1p**

În cazul $x = 2, y = 1$ obținem $a = 17, b = 12$ **1p**



MINISTERUL EDUCAȚIEI



SOCIETATEA DE ȘTIINȚE
MATEMATICE DIN ROMÂNIA



Olimpiada Națională de Matematică Etapa Națională, Constanța, 16 aprilie 2022

CLASA a VI-a

Problema 1. Câte numere naturale n au proprietatea $P(n) = S(n) = 8$, unde $P(n)$ și $S(n)$ reprezintă produsul, respectiv suma cifrelor numărului n (scris în baza 10)? Justificați răspunsul!

Problema 2. O mulțime M va fi numită *specială* dacă îndeplinește simultan condițiile:

- este nevidă și are ca elemente doar numere naturale;

- dacă $x \in M$ și x este par, atunci $\frac{x}{2} \in M$;

- dacă $x \in M$ și x este impar, atunci $3 \cdot x + 1 \in M$.

a) Arătați că, dacă M este o mulțime specială și $12 \in M$, atunci M are cel puțin 10 elemente.

b) Arătați că există o infinitate de mulțimi speciale care au exact două elemente impare.

Problema 3. Ana are 200 de monede, având respectiv valorile $1, 2, 2^2, \dots, 2^{199}$. Ea le împarte în 100 de grupe de câte două monede, calculează sumele $s_1, s_2, \dots, s_{100}$ ale valorilor monedelor din fiecare grupă și află cel mai mare divizor comun D al numerelor $s_1, s_2, \dots, s_{100}$.

a) Arătați că D este impar.

b) Determinați valoarea maximă a lui D pe care o poate obține Ana.

Problema 4. a) Arătați că orice triunghi poate fi împărțit în trei triunghiuri cu interioarele disjuncte, unul fiind dreptunghic, unul isoscel și unul ascuțitunghic.

b) Arătați că orice triunghi neisoscel poate fi împărțit în cinci triunghiuri cu interioarele disjuncte: unul isoscel, unul echilateral, unul ascuțitunghic, unul dreptunghic și unul obtuzunghic.

*Timp de lucru 2 ore. Se adaugă 30 minute pentru întrebări
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.*



MINISTERUL EDUCAȚIEI



SOCIETATEA DE ȘTIINȚE
MATEMATICE DIN ROMÂNIA



Olimpiada Națională de Matematică Etapa Națională, Constanța, 16 aprilie 2022

CLASA a VI-a – soluții și bareme

Problema 1. Câte numere naturale n au proprietatea $P(n) = S(n) = 8$, unde $P(n)$ și $S(n)$ reprezintă produsul, respectiv suma cifrelor numărului n (scris în baza 10)? Justificați răspunsul!

Soluție. Sunt posibile numere de trei tipuri.

I. Numere cu o cifră 4, o cifră 2 și două cifre 1. Cifra 4 poate ocupa oricare dintre cele 4 poziții posibile, iar pentru fiecare alegere a poziției lui 4 există câte 3 alegeri a poziției lui 2, restul cifrelor fiind 1. Obținem astfel 12 numere de acest tip **3p**

II. Numere cu trei cifre 2 și două cifre 1. Pozițiile celor două cifre 1 se pot alege în 10 moduri, restul cifrelor fiind 2. Obținem astfel 10 numere de acest tip **3p**

III. Numărul 8. În total obținem 23 de numere **1p**

Problema 2. O mulțime M va fi numită *specială* dacă îndeplinește simultan condițiile:

- este nevidă și are ca elemente doar numere naturale;

- dacă $x \in M$ și x este par, atunci $\frac{x}{2} \in M$;

- dacă $x \in M$ și x este impar, atunci $3 \cdot x + 1 \in M$.

a) Arătați că, dacă M este o mulțime specială și $12 \in M$, atunci M are cel puțin 10 elemente.

b) Arătați că există o infinitate de mulțimi speciale care au exact două elemente impare.

Soluție. a) Din $12 \in M$ reiese că M conține elementele 6, 3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1 **3p**

b) Dacă n este număr natural nenul, atunci $2^{2n} = \mathcal{M}_3 + 1$, deci $x_n = \frac{2^{2n} - 1}{3}$ este număr natural **2p**

Pentru $n > 1$, mulțimea $M = \{x_n, 2^{2n}, 2^{2n-1}, 2^{2n-2}, \dots, 1\}$ este specială și are exact două elemente impare: x_n și 1. Obținem astfel o infinitate de mulțimi speciale care au exact două elemente impare **2p**

Problema 3. Ana are 200 de monede, având respectiv valorile $1, 2, 2^2, \dots, 2^{199}$. Ea le împarte în 100 de grupe de câte două monede, calculează sumele $s_1, s_2, \dots, s_{100}$ ale valorilor monedelor din fiecare grupă și află cel mai mare divizor comun D al numerelor $s_1, s_2, \dots, s_{100}$.

a) Arătați că D este impar.

b) Determinați valoarea maximă a lui D pe care o poate obține Ana.

Soluție. a) Una dintre grupe este de forma $\{1, 2^n\}$, cu $n \geq 1$, deci suma s atașată ei este impară. Deoarece D divide s , rezultă că D este impar **2p**

b) Vom arăta că D maxim este $1 + 2^{100}$ **1p**

Dacă Ana formează grupele $\{2^n, 2^{n+100}\}$, cu $0 \leq n \leq 99$, atunci se obțin sumele $2^n(1 + 2^{100})$ iar în acest caz $D = 1 + 2^{100}$ **2p**

Pe de altă parte, dacă 2^{100} este grupat cu 2^n , $n > 100$, atunci $D \mid 2^n + 2^{100} = 2^{100}(1 + 2^{n-100})$ și D impar duce la $D \leq 1 + 2^{n-100} \leq 1 + 2^{99}$, iar dacă 2^{100} este grupat cu 2^n , $n < 100$, atunci

$D \mid 2^n + 2^{100} = 2^n(1 + 2^{100-n})$ și D impar duce la $D \leq 1 + 2^{100-n} \leq 1 + 2^{100}$, deci nu putem obține $D > 1 + 2^{100}$ **2p**

Problema 4. a) Arătați că orice triunghi poate fi împărțit în trei triunghiuri cu interioarele disjuncte, unul fiind dreptunghic, unul isoscel și unul ascuțitunghic.

b) Arătați că orice triunghi neisoscel poate fi împărțit în cinci triunghiuri cu interioarele disjuncte: unul isoscel, unul echilateral, unul ascuțitunghic, unul dreptunghic și unul obtuzunghic.

Soluție. a) Un triunghi oarecare ABC are cel puțin două unghiuri ascuțite. Dacă, de exemplu, acestea sunt $\angle B$ și $\angle C$, atunci înălțimea AD împarte $\triangle ABC$ în triunghiurile dreptunghice ABD și ACD **1p**

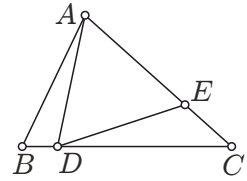
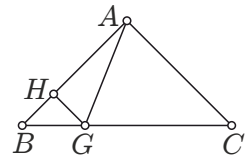
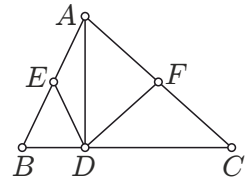
Ducând în $\triangle ABD$ și $\triangle ACD$ medianele DE , respectiv DF , obținem triunghiurile isoscele ADE , BDE , ADF și CDF **1p**

Dacă unul dintre ele este ascuțitunghic, problema este rezolvată. În caz contrar avem $\angle DEA = \angle DEB = \angle DFA = \angle DFC = 90^\circ$, deci $\triangle ABC$ este dreptunghic isoscel. În acest caz putem lua G pe BC astfel încât $\angle CAG > 45^\circ$ și $GH \perp AB$, $H \in AB$ pentru a obține $\triangle ACG$ ascuțitunghic, $\triangle BGH$ isoscel și $\triangle AGH$ dreptunghic **1p**

b) Fără a pierde generalitatea, putem presupune $\angle A > \angle B > \angle C$.

Atunci $\angle A > 60^\circ$ și putem lua D pe segmentul BC astfel încât $\angle CAD = 60^\circ$. Deoarece $\angle ADC > \angle B > \angle C$, avem $AC > AD$, deci putem lua punctul E pe segmentul AC astfel încât $AE = AD$. Obținem astfel $\triangle ADE$ echilateral, situat în interiorul $\triangle ABC$ **2p**

Deoarece $\angle DEC = 120^\circ$, $\triangle DCE$ este obtuzunghic. Apoi, conform a), $\triangle ABD$ poate fi împărțit într-un triunghi dreptunghic, un triunghi ascuțitunghic și un triunghi isoscel **2p**





MINISTERUL EDUCAȚIEI



SOCIETATEA DE ȘTIINȚE
MATEMATICE DIN ROMÂNIA



Olimpiada Națională de Matematică Etapa Națională, Iași, 16 aprilie 2022

CLASA a VII-a

Problema 1. Determinați numerele naturale nenule n cu proprietatea că numărul 6^n se poate scrie ca suma cuburilor a trei numere naturale consecutive.

Problema 2. Pe laturile AB și AC ale triunghiului ascuțitunghic ABC se construiesc, în exteriorul acestuia, triunghiurile ABP și ACQ cu $\angle P = \angle Q = 90^\circ$ și $\angle BAP \equiv \angle CAQ$. Notăm cu M mijlocul laturii BC și cu N piciorul înălțimii din A a triunghiului ABC .

Demonstrați că punctele M, N, P și Q sunt conciclice.

Problema 3. Pe latura BC a paralelogramului $ABCD$ se consideră punctele E și F . Notăm cu G și H punctele în care dreapta CD intersectează dreptele AE , respectiv AF , și cu I punctul de intersecție a dreptelor EH și FG .

Demonstrați că dreptele BD și CI sunt paralele.

Problema 4. Numim *mulțime interesantă* o mulțime de 2022 de numere reale strict pozitive cu proprietatea că, atunci când scriem elementele sale în ordine crescătoare, nu există niciun element care să fie egal cu media aritmetică a vecinilor săi.

Oricărei mulțimi A îi atașăm mulțimea

$$\tilde{A} = \{x + y \mid x, y \in A\}.$$

a) Determinați cardinalul maxim posibil al unei mulțimi $\tilde{A}$ atunci când A parcurge toate mulțimile interesante.

b) Determinați cardinalul minim posibil al unei mulțimi $\tilde{A}$ atunci când A parcurge toate mulțimile interesante.

Timp de lucru 4 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.



MINISTERUL EDUCAȚIEI



SOCIETATEA DE ȘTIINȚE
MATEMATICE DIN ROMÂNIA



Olimpiada Națională de Matematică Etapa Națională, Iași, 16 aprilie 2022

CLASA a VII-a – soluții și bareme

Problema 1. *Determinați numerele naturale nenule n cu proprietatea că numărul 6^n se poate scrie ca suma cuburilor a trei numere naturale consecutive.*

Soluție. Observăm că $n = 1$ nu convine, dar $n = 2$ și $n = 3$ au proprietatea dorită, deoarece $6^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3$, iar $6^3 = 3^3 + 4^3 + 5^3$ **2p**

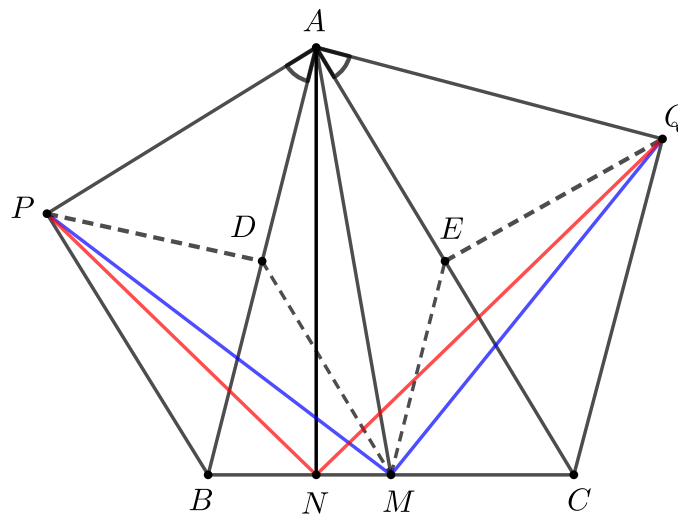
Vom arăta că acestea sunt singurele valori convenabile ale lui n . Presupunem, prin absurd, că există $n \geq 4$ și $m \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $6^n = (m-1)^3 + m^3 + (m+1)^3$. Cum 6^n este număr par, rezultă că m trebuie să fie par, prin urmare $m = 2k$, unde $k \in \mathbb{N}^*$. După calcule obținem că $6^n = 12k(2k^2 + 1)$ **1p**

Atunci $2^{n-2} \cdot 3^{n-1} = k(2k^2 + 1)$. Cum numerele k și $2k^2 + 1$ sunt prime între ele, al doilea fiind impar, rezultă că $2^{n-2} = k$ și $3^{n-1} = 2k^2 + 1$ **2p**

Obținem $3^{n-1} = 2^{2n-3} + 1$. Însă $2^{2n-3} + 1 > 2^{2n-3} = 32 \cdot 4^{n-4} > 27 \cdot 3^{n-4} = 3^{n-1}$ și ajungem la o contradicție. **2p**

Problema 2. *Pe laturile AB și AC ale triunghiului ascuțitunghic ABC se construiesc, în exteriorul acestuia, triunghiurile ABP și ACQ cu $\angle P = \angle Q = 90^\circ$ și $\angle BAP \equiv \angle CAQ$. Notăm cu M mijlocul laturii BC și cu N piciorul înălțimii din A a triunghiului ABC .*

Demonstrați că punctele M, N, P și Q sunt conciclice.



Soluție. Notăm cu a măsura unghiului A și fie $x = \widehat{BAP} = \widehat{CAQ}$.

Cum $\widehat{APB} = \widehat{ANB} = 90^\circ$, punctele A, P, B și N sunt conciclice. Atunci $\widehat{PNA} = \widehat{PBA} = 90^\circ - x$. Analog se arată că $\widehat{QNA} = \widehat{QCA} = 90^\circ - x$, prin urmare $\widehat{PNQ} = 180^\circ - 2x$ **2p**

Fie D și E mijloacele laturilor AB , respectiv AC . Patrulaterul $ADME$ este un paralelogram, așadar $\widehat{DME} = \widehat{A} = a$. PD este mediana corespunzătoare ipotenuzei în triunghiul dreptunghic PAB , deci $PD = DA$. Deducem că $\widehat{PDA} = 180^\circ - 2x$. Analog, $\widehat{AEQ} = 180^\circ - 2x$ **1p**

În cazul în care punctele M, D și P sunt coliniare, avem că $\widehat{PDA} \equiv \widehat{A}$, de unde $a + 2x = 180^\circ$. Rezultă că punctele M, E, Q sunt, și ele, coliniare. Astfel, $\widehat{PMQ} = \widehat{DME} = a = 180^\circ - 2x = \widehat{PNQ}$, așadar punctele M, N, P și Q sunt conciclice. **1p**

Dacă punctele M, D și P sunt necoliniare, atunci $a + 2x \neq 180^\circ$, iar punctele M, E, Q sunt, și ele, necoliniare. În cele ce urmează, presupunem că $a + 2x < 180^\circ$, cealaltă situație tratându-se similar.

Cum $PD = \frac{1}{2}AB = ME$, $DM = \frac{1}{2}AC = QE$ și $\widehat{PDM} = \widehat{MEQ} = a + 2x$, triunghiurile PDM și MEQ sunt congruente și, de aici, $\widehat{PMD} \equiv \widehat{MQE}$.

Rezultă că $\widehat{PMQ} = \widehat{PMD} + \widehat{DME} + \widehat{EMQ} = \widehat{MQE} + a + \widehat{EMQ} = a + 180^\circ - \widehat{MEQ} = a + 180^\circ - (a + 2x) = 180^\circ - 2x = \widehat{PNQ}$, deci punctele M, N, P și Q sunt conciclice. **3p**

Problema 3. Pe latura BC a paralelogramului $ABCD$ se consideră punctele E și F . Notăm cu G și H punctele în care dreapta CD intersectează dreptele AE , respectiv AF , și cu I punctul de intersecție a dreptelor EH și FG .

Demonstrați că dreptele BD și CI sunt paralele.

Soluție. Notăm cu a și b lungimile laturilor AB , respectiv AD , iar x și y vor fi lungimile segmentelor CG , respectiv CH . Presupunem, fără a restrânge generalitatea, că $x < y$.

Din asemănarea triunghiurilor ECG și EBA obținem că $\frac{EC}{EB} = \frac{x}{a}$, deci $EC = \frac{bx}{a+x}$. Analog, din asemănarea triunghiurilor FCH și FBA deducem că $CF = \frac{by}{a+y}$, iar $BF = \frac{ab}{a+y}$.

Atunci $EF = CF - CE = \frac{ab(y-x)}{(a+x)(a+y)}$ **2p**

Fie J punctul de intersecție a dreptelor AF și CI . Folosind teorema lui Ceva în triunghiul CFH și ținând seama de rezultatele de mai înainte, obținem că $\frac{FJ}{JH} = \frac{a}{a+y}$. Însă din asemănarea triunghiurilor ABF și HCF deducem că $FH = \frac{y}{a}AF$, prin urmare $FJ = \frac{y}{2a+y}AF$,

iar $JH = \frac{y(a+y)}{a(2a+y)}AF$ **3p**

Fie K punctul de intersecție a dreptelor AF și BD . Din asemănarea triunghiurilor ADK și BFK obținem $KF = \frac{a}{2a+y}AF$, deci $KJ = KF + FJ = \frac{a+y}{2a+y}AF$ **1p**

Atunci $\frac{HJ}{JK} = \frac{y}{a} = \frac{HC}{CD}$. Folosind reciproca teoremei lui Thales în triunghiul HKD urmează concluzia problemei. **1p**

Problema 4. Numim mulțime interesantă o mulțime de 2022 de numere reale strict pozitive cu proprietatea că, atunci când scriem elementele sale în ordine crescătoare, nu există niciun element care să fie egal cu media aritmetică a vecinilor săi.

Oricărei mulțimi A îi atașăm mulțimea $\tilde{A} = \{x + y \mid x, y \in A\}$.

a) Determinați cardinalul maxim posibil al unei mulțimi $\tilde{A}$ atunci când A parcurge toate mulțimile interesante.

b) Determinați cardinalul minim posibil al unei mulțimi $\tilde{A}$ atunci când A parcurge toate mulțimile interesante.

Soluție. a) Cardinalul maxim al unei mulțimi $\tilde{A}$ se obține atunci când toate sumele $x + y$, unde $x, y \in A$, sunt distincte. În acest caz, $|\tilde{A}| = \frac{2022 \cdot 2023}{2}$ **1p**

Acest maxim se atinge, de exemplu, pentru mulțimea interesantă

$$A = \{1, 3, 3^2, \dots, 3^{2021}\}.$$

..... **1p**

b) Fie $a_1 < a_2 < \dots < a_{2022}$ elementele unei mulțimi interesante A .

Atunci sumele $a_1 + a_2$, $a_2 + a_2$ și $a_1 + a_3$ sunt distincte; notăm cu A_1 mulțimea formată din aceste trei numere. Analog, sumele $a_2 + a_3$, $a_3 + a_3$ și $a_2 + a_4$ sunt distincte; notăm cu A_2 mulțimea formată din aceste numere. Observăm că A_1 și A_2 sunt disjuncte, deoarece $a_2 + a_3$, cel mai mic element al lui A_2 , este mai mare decât orice element al lui A_1 .

În aceeași manieră definim mulțimile $A_3, A_4, \dots, A_{2020}$, disjuncte două câte două. Atunci

$$\{a_1 + a_1\} \cup A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{2020} \cup \{a_{2021} + a_{2022}, a_{2022} + a_{2022}\} \subset \tilde{A}.$$

Rezultă că $|\tilde{A}| \geq 1 + 3 \cdot 2020 + 2 = 6063$ **3p**

Acest minim se atinge, de exemplu, pentru mulțimea interesantă

$$A = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, \dots, 3031, 3032\}.$$

Mulțimea atașată este $\tilde{A} = \{2, 3, 4, 5, \dots, 6064\}$, de cardinal 6063. **2p**



MINISTERUL EDUCAȚIEI



SOCIETATEA DE ȘTIINȚE
MATEMATICE DIN ROMÂNIA



Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Națională, Iași, 16 aprilie 2022

CLASA a VIII-a

Problema 1. a) Arătați că, dacă $a, b \in [1, \infty)$, atunci $\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \geq \frac{2}{1+ab}$.

b) Fie $x, y, z \in [0, \infty)$, cu proprietatea că $2x + 2y + 2z + xy + yz + zx = 9$.
Arătați că:

$$\frac{1}{x^2 + 2x + 2} + \frac{1}{y^2 + 2y + 2} + \frac{1}{z^2 + 2z + 2} \geq \frac{3}{5}.$$

Problema 2. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că $|ax + b| \leq 1$, pentru orice $x \in [-1, 1]$.

a) Arătați că $|a^2 + ab + 2b| \leq 2$.

b) Aflați numerele a și b pentru care $|a^2 + ab + 2b| = 2$.

Problema 3. În interiorul cubului $ABCD A' B' C' D'$ se consideră piramida patrulateră regulată $SABCD$ cu baza $ABCD$, astfel încât $\sphericalangle((SA'B'), (SC'D')) = 30^\circ$. Fie punctul M pe latura $A'D'$ pentru care $\sphericalangle A'B'M = 30^\circ$.

a) Aflați unghiul dintre apotema piramidei $SABCD$ și planul (ABC) .

b) Determinați tangenta unghiului dintre planele (MAB') și (SAB) .

Problema 4. Se consideră numărul natural n , cu $n \geq 2$. Spunem că numărul S este *special*, dacă pentru orice scriere a lui n sub forma $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$, cu $k, n_1, n_2, \dots, n_k \in \mathbb{N}^*$ și $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_k$, există numerele $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{N}$, astfel încât $a_1 < a_2 < \dots < a_k$ și $a_1 n_1 + a_2 n_2 + \dots + a_k n_k = S$.

a) Arătați că numărul $n^2 - 2n$ **nu** este special.

b) Aflați toate numerele speciale.

Timp de lucru 4 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.



MINISTERUL EDUCAȚIEI



SOCIETATEA DE ȘTIINȚE
MATEMATICE DIN ROMÂNIA



**Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Națională, Iași, 16 aprilie 2022**

CLASA a VIII-a – soluții și bareme

Problema 1.

a) Arătați că, dacă $a, b \in [1, \infty)$, atunci $\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \geq \frac{2}{1+ab}$.

b) Fie $x, y, z \in [0, \infty)$ cu proprietatea că $2x + 2y + 2z + xy + yz + zx = 9$.

Arătați că:

$$\frac{1}{x^2 + 2x + 2} + \frac{1}{y^2 + 2y + 2} + \frac{1}{z^2 + 2z + 2} \geq \frac{3}{5}.$$

Soluție. a) Inegalitatea este echivalentă cu $(a-b)^2(ab-1) \geq 0$. Deoarece $ab \geq 1$, inegalitatea din enunț este adevărată. **2p**

b) Egalitatea $2x + 2y + 2z + xy + yz + zx = 9$ este echivalentă cu:

$$(x+1)(y+1) + (y+1)(z+1) + (z+1)(x+1) = 12. \dots\dots\dots \mathbf{1p}$$

Fie $a = x + 1$, $b = y + 1$, $c = z + 1$. Inegalitatea de demonstrat se rescrie

$$\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{1+c^2} \geq \frac{3}{5}, \quad (1)$$

unde numerele reale $a, b, c \geq 1$ verifică relația $ab + bc + ca = 12$.

Folosind punctul a), obținem succesiv:

$$\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \geq \frac{2}{1+ab}, \quad \frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{1+c^2} \geq \frac{2}{1+bc} \quad \text{și} \quad \frac{1}{1+c^2} + \frac{1}{1+a^2} \geq \frac{2}{1+ca}.$$

Adunând membru cu membru inegalitățile precedente, deducem că:

$$\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{1+c^2} \geq \frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ca} \quad (2) \dots\dots\dots \mathbf{2p}$$

Utilizând inegalitatea dintre media aritmetică și media armonică pentru numerele $1 + ab$, $1 + bc$ și $1 + ca$, deducem că:

$$\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ca} \geq \frac{9}{(1+ab) + (1+bc) + (1+ca)} = \frac{3}{5},$$

de unde, ținând cont de (2), obținem inegalitatea (1), adică cerința problemei. **2p**

Problema 2. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că $|ax + b| \leq 1$, pentru orice $x \in [-1, 1]$.

a) Arătați că $|a^2 + ab + 2b| \leq 2$.

b) Aflați numerele a și b pentru care $|a^2 + ab + 2b| = 2$.

Soluție. a) Pentru $x = 0$ în inegalitatea din enunț, rezultă că $|b| \leq 1$ **1p**

Înlocuind $x = 1$ și apoi $x = -1$, din ipoteză obținem $|a + b| \leq 1$ și $|a - b| \leq 1$.

Așadar $|2a| = |(a+b) + (a-b)| \leq |a+b| + |a-b| \leq 2$, deci $|a| \leq 1$ **1p**

Rezultă că și $\frac{a+b}{2} \in [-1, 1]$. Obținem $\left| a \cdot \frac{a+b}{2} + b \right| \leq 1$, adică $|a^2 + ab + 2b| \leq 2$ **1p**

b) Pentru $a = 0$, din $|a^2 + ab + 2b| = 2$ obținem $b \in \{-1, 1\}$. Perechile $(a, b) = (0, 1)$ și $(a, b) = (0, -1)$ verifică proprietatea

$$(\mathcal{P}) : |ax + b| \leq 1, \text{ pentru orice } x \in [-1, 1],$$

deci sunt soluții ale problemei. **1p**

Vom arăta că, pentru $a \neq 0$, nu se obțin alte soluții. Presupunem, prin absurd, că există o pereche (a, b) de numere reale, cu proprietatea $(\mathcal{P})$, astfel încât $a \neq 0$ și $|a^2 + ab + 2b| = 2$.

Considerăm funcția de gradul întâi $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$. Egalitatea $|a^2 + ab + 2b| = 2$ este echivalentă cu $\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| = 1$. Proprietatea $(\mathcal{P})$ se rescrie:

$$|f(x)| \leq 1, \text{ pentru orice } x \in [-1, 1].$$

Singurele valori ale lui x pentru care este posibil ca $|f(x)| = 1$ sunt $x = 1$ și $x = -1$, deci este necesar fie ca $\frac{a+b}{2} = 1$, fie ca $\frac{a+b}{2} = -1$ **2p**

În prima situație, obținem $a = b = 1$, iar în cea de-a doua, deducem $a = b = -1$.

Cu aceste valori ale lui a și b , proprietatea din enunț devine

$$|x + 1| \leq 1, \text{ pentru orice } x \in [-1, 1],$$

ceea ce este absurd, deoarece afirmația precedentă este falsă (un contraexemplu este $x = 1$).

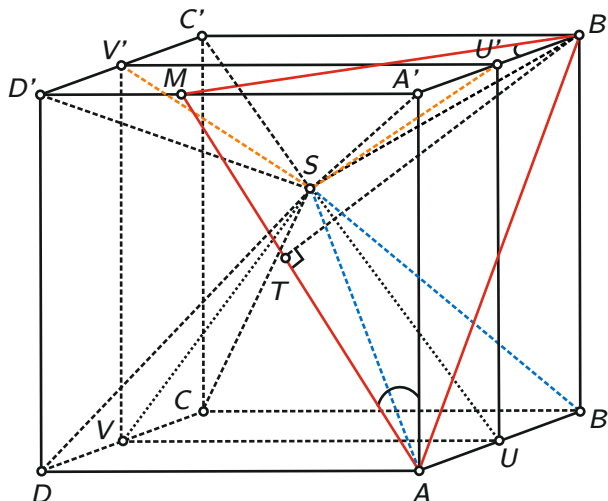
Ca urmare, presupunerea făcută este falsă, deci problema nu are soluții (a, b) , cu $a \neq 0$. **1p**

Problema 3. În interiorul cubului $ABCD A'B'C'D'$ se consideră piramida patrulateră regulată $SABCD$ cu baza $ABCD$, astfel încât $\angle((SA'B'), (SC'D')) = 30^\circ$. Fie punctul M pe latura $A'D'$ pentru care $\angle A'B'M = 30^\circ$.

a) Aflați unghiul dintre apotema piramidei $SABCD$ și planul (ABC) .

b) Determinați tangenta unghiului dintre planele (MAB') și (SAB) .

Soluție.



a) Intersecția dintre suprafața cubului și planul paralel cu $(AA'D'D)$ care conține punctul S este pătratul $UU'V'V$, unde $U \in AB$ și $V \in CD$. Evident, $\sphericalangle((SA'B'), (SC'D')) = \sphericalangle(U'S, V'S)$, în consecință $\sphericalangle U'SV' = 30^\circ$ sau $\sphericalangle U'SV' = 150^\circ$. Punctul S se află în interiorul pătratului $UU'V'V$, deci $\sphericalangle U'SV'$ este interior cercului circumscris pătratului. Așadar obținem $\sphericalangle U'SV' > \frac{1}{2} \widehat{U'V'} = 45^\circ > 30^\circ$, de unde rezultă că $\sphericalangle U'SV' = 150^\circ$ **1p**

Se arată ușor că triunghiul USV este echilateral (alegem punctul S' în interiorul pătratului $UU'V'V$, astfel încât triunghiul UVS' să fie echilateral, și se arată că punctele S și S' coincid), în consecință $\sphericalangle(SU, (ABCD)) = \sphericalangle SUV = 60^\circ$ **1p**

b) Cum triunghiurile $MA'A$ și $MA'B'$ sunt congruente (C.C.), deducem că $\sphericalangle MAA' = 30^\circ$, deci $\sphericalangle MAD = 60^\circ$. Așadar $\sphericalangle(MA, (ABCD)) = \sphericalangle(SU, (ABCD)) = 60^\circ$.

Rezultă că $SU \parallel MA$, deci $SU \parallel (MAB')$ **1p**
Așadar dreapta de intersecție a planelor (MAB') și (SAB) este paralelă cu SU și trece prin A , adică $(MAB') \cap (SAB) = MA$ **1p**

Fie $T \in AM$, astfel încât $B'T \perp AM$.

Deoarece $AB \subset (SAB)$ și $AB \perp AM$, rezultă că $\sphericalangle((MAB'), (SAB)) = \sphericalangle(B'T, AB)$. Cum $A'B' \parallel AB$, rezultă că $\sphericalangle((MAB'), (SAB)) = \sphericalangle(B'T, A'B') = \sphericalangle A'B'T$ **1p**

Egalând aria triunghiului isoscel MAB' scrisă în funcție de două baze, rezultă $B'T = \frac{a\sqrt{5}}{2}$, unde a reprezintă latura cubului. Din triunghiul dreptunghic $TA'B'$, cu $\sphericalangle TA'B' = 90^\circ$, deducem $A'T = \frac{a}{2}$, iar $\text{tg}(\sphericalangle A'B'T) = \frac{A'T}{A'B'} = \frac{1}{2}$ **2p**

Problema 4. Se consideră numărul natural n , cu $n \geq 2$. Spunem că numărul S este special, dacă pentru orice scriere a lui n sub forma $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$, cu $k, n_1, n_2, \dots, n_k \in \mathbb{N}^*$ și $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_k$, există numerele $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{N}$, astfel încât $a_1 < a_2 < \dots < a_k$ și $a_1 n_1 + a_2 n_2 + \dots + a_k n_k = S$.

a) Arătați că numărul $n^2 - 2n$ nu este special.

b) Aflați toate numerele speciale.

Soluție. a) Presupunem că numărul $n^2 - 2n$ este special. Deoarece $n = 1 + (n - 1)$, căutăm $a, b \in \mathbb{N}$, cu $a < b$, astfel încât $n^2 - 2n = a \cdot 1 + b(n - 1)$ **1p**

Cum $a < b$, rezultă că $n^2 - 2n = a + b(n - 1) < b + b(n - 1) = bn$, deci $b > n - 2$, adică $b \geq n - 1$ **1p**

În consecință, $n^2 - 2n = a + b(n - 1) \geq b(n - 1) \geq (n - 1)^2 = n^2 - 2n + 1$, fals.

Așadar numărul $n^2 - 2n$ nu este special. **1p**

b) Dacă S este un număr special, atunci pentru scrierea $n = n$ există $a \in \mathbb{N}$, astfel încât $S = an$, deci S este un multiplu al lui n **1p**

Fie $S = t \cdot n$, cu $t \in \mathbb{N}$. Pentru $k = 2$, $n_1 = 1$ și $n_2 = n - 1$, numărul n se scrie $n = 1 + (n - 1)$, și există $a_1, a_2 \in \mathbb{N}$, cu $a_1 < a_2$, astfel încât $S = t \cdot n = a_1 + a_2(n - 1) < a_2 + a_2(n - 1) = na_2$. Rezultă că $a_2 > t$, deci $a_2 \geq t + 1$.

Din $t \cdot n = a_1 + a_2(n - 1) \geq a_2(n - 1) \geq (t + 1)(n - 1)$, obținem $t \geq n - 1$ **1p**

Arătăm că pentru orice $p \in \mathbb{N}$, cu $p \geq n - 1$, numărul $S_p = pn$ este special.

Fie $k \in \mathbb{N}^*$ și $n_1, n_2, \dots, n_k \in \mathbb{N}^*$, $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_k$, astfel încât $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$.
Avem:

$$S_{n-1} = n^2 - n = (n_1 + n_2 + \dots + n_k)^2 - (n_1 + n_2 + \dots + n_k) = n_1(n_1 - 1) + n_2(2n_1 + n_2 - 1) + \\ + n_3(2n_1 + 2n_2 + n_3 - 1) + \dots + n_k(2n_1 + 2n_2 + \dots + 2n_{k-1} + n_k - 1).$$

Numerele naturale $a_1 = n_1 - 1$, $a_2 = 2n_1 + n_2 - 1$, $\dots$, $a_k = 2n_1 + 2n_2 + \dots + 2n_{k-1} + n_k - 1$ sunt astfel încât $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_k$ și $S_{n-1} = a_1n_1 + a_2n_2 + \dots + a_kn_k$ **1p**

Pentru $p > n-1$, scriem $pn = n(n-1+p-n+1) = n(n-1) + n(p-n+1) = S_{n-1} + n(p-n+1)$. Cu numerele $a_1, a_2, \dots, a_k$ alese anterior, deducem că:

$$S_p = pn = a_1n_1 + a_2n_2 + \dots + a_kn_k + (n_1 + n_2 + \dots + n_k)(p - k + 1),$$

deci $S_p = (a_1 + p - k + 1) \cdot n_1 + (a_2 + p - k + 1) \cdot n_2 + \dots + (a_k + p - k + 1) \cdot n_k$.

Pentru $A_1 = a_1 + p - n + 1, A_2 = a_2 + p - n + 1, \dots, A_k = a_k + p - n + 1$, obținem $0 < A_1 < A_2 < \dots < A_k$ și $S_p = A_1n_1 + a_2n_2 + \dots + a_kn_k$.

Așadar, pentru orice $p \in \mathbb{N}$, cu $p \geq n - 1$, numerele $S_p = pn$ sunt speciale. **1p**



MINISTERUL EDUCAȚIEI



SOCIETATEA DE ȘTIINȚE
MATEMATICE DIN ROMÂNIA



Olimpiada Națională de Matematică
Etape Națională, Piatra-Neamț, 16 aprilie 2022

CLASA a IX-a

Problema 1. Se consideră a și b numere naturale nenule. Demonstrați că ecuația

$$x^2 + (a + b)^2 x + 4ab = 1$$

are soluții raționale dacă și numai dacă $a = b$.

Problema 2. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A , astfel încât A' este mijlocul ipotenuzei, M mijlocul înălțimii AD , $D \in (BC)$ și $\{P\} = BM \cap AA'$.

Dacă notăm $\alpha = m(\widehat{PCB})$, să se demonstreze că

$$\operatorname{tg} \alpha = \sin C \cdot \cos C.$$

Problema 3. Determinați funcțiile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pentru care există funcția $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât

$$f(x) + f(y) = [g(x + y)],$$

oricare ar fi x, y numere reale.

(Am notat cu $[a]$ partea întreagă a numărului real a .)

Problema 4. Fie a, b, c, d numere naturale nenule, cu $a < b < c < d$ și $ad = bc$. Demonstrați că

$$2a + \sqrt{a} + \sqrt{d} < b + c + 1.$$

Timp de lucru 4 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.



MINISTERUL EDUCAȚIEI



SOCIETATEA DE ȘTIINȚE
MATEMATICE DIN ROMÂNIA



Olimpiada Națională de Matematică Etapa Națională, Piatra-Neamț, 16 aprilie 2022

CLASA a IX-a – soluții și bareme

Problema 1. Se consideră a și b numere naturale nenule. Demonstrați că ecuația

$$x^2 + (a + b)^2 x + 4ab = 1$$

are soluții raționale dacă și numai dacă $a = b$.

Soluție. Pentru $a = b$ numere naturale nenule ecuația se scrie $x^2 + 4a^2 x + 4a^2 - 1 = 0$, cu soluțiile $x_1 = -1$ și $x_2 = 1 - 4a^2$ **1p**

Reciproc, să presupunem că ecuația $x^2 + sx + p = 0$, unde $s = (a + b)^2$ și $p = 4ab - 1$, admite soluții raționale. Atunci $\Delta = s^2 - 4p$ va fi pătrat perfect, deci $s^2 - 4p = n^2$, cu $n \in \mathbb{N}$ **1p**

Cum numerele s și n au aceeași paritate și $4p > 0$ deducem că $n < s$, deci $n \leq s - 2$.

..... **3p**

Rezultă că $s^2 - 4p \leq (s - 2)^2 \Leftrightarrow s \leq p + 1$, ceea ce este echivalent cu $(a + b)^2 \leq 4ab$. Deducem că $(a - b)^2 = 0 \Leftrightarrow a = b$ **2p**

Problema 2. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A astfel încât A' este mijlocul ipotenuzei, M mijlocul înălțimii AD , $D \in (BC)$ și $\{P\} = BM \cap AA'$.

Dacă notăm $\alpha = m(\widehat{PCB})$, să se demonstreze că

$$\operatorname{tg} \alpha = \sin C \cdot \cos C.$$

Soluție.

Aplicăm teorema lui Menelaus în triunghiul $AA'D$, cu punctele B , M , P coliniare:

$$\frac{BA'}{BD} \cdot \frac{MD}{MA} \cdot \frac{PA}{PA'} = 1 \Leftrightarrow \frac{PA}{PA'} = \frac{BD}{BA'} = \frac{2BD}{BC} = \frac{2BD \cdot BC}{BC^2} = \frac{2AB^2}{BC^2} = 2 \sin^2 C \quad (1) \dots\dots \mathbf{2p}$$

Din teorema sinusurilor în triunghiurile PCA' și PCA obținem:

$$\frac{PA'}{\sin \alpha} = \frac{PC}{\sin 2B} \quad (2), \text{ respectiv } \frac{PA}{\sin(C - \alpha)} = \frac{PC}{\sin C} \quad (3) \dots\dots \mathbf{1p}$$

Din relațiile (2) și (3) rezultă:

$$\frac{PA}{PA'} = \frac{\sin(C - \alpha)}{\sin \alpha} \cdot \frac{\sin 2B}{\sin C} = \frac{\sin C \cos \alpha - \sin \alpha \cos C}{\sin \alpha} \cdot \frac{\sin 2B}{\sin C} \dots\dots \mathbf{1p}$$

Ținând cont de relația (1) avem:

$$(\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} C) \cdot \sin 2B = 2 \sin^2 C \Leftrightarrow (\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} C) \cdot 2 \sin B \cos B = 2 \sin^2 C \Leftrightarrow$$

$$(\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} C) \cdot \sin B = \sin C. \dots\dots \mathbf{2p}$$

$$\text{Așadar } \operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg} C + \operatorname{tg} C = \frac{1}{\sin C \cos C}, \text{ de unde concluzia. } \dots\dots \mathbf{1p}$$

Problema 3. Determinați funcțiile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pentru care există funcția $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât

$$f(x) + f(y) = [g(x + y)]$$

oricare ar fi x, y numere reale.

Am notat cu $[a]$ partea întreagă a numărului real a .

Soluție. Pentru $x \rightarrow (x + y)$, $y \rightarrow 0$ în relația din enunț deducem

$$f(x + y) + f(0) = [g(x + y)] = f(x) + f(y)$$

..... **1p**

Notând $h(x) = f(x) - f(0)$ obținem $h(x + y) = h(x) + h(y)$ (ecuația lui Cauchy) **1p**

Deducem că, pentru orice $x_0 \in \mathbb{R}$, ales arbitrar și orice n natural, $h(nx_0) = nh(x_0)$.

Rezultă că $h(x_0) = h(n \cdot \frac{x_0}{n}) \Leftrightarrow h(\frac{x_0}{n}) = \frac{h(x_0)}{n}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ **2p**

Cum $2f(x) = [g(2x)] \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2h(x) \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{2h(x_0)}{n} \in \mathbb{Z}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Alegând $n > |2h(x_0)|$ obținem că

$$0 \leq \left| 2 \cdot h\left(\frac{x_0}{n}\right) \right| = \left| \frac{2h(x_0)}{n} \right| < 1$$

de unde $h(\frac{x_0}{n}) = 0$, deci $h(x_0) = 0$. Cum x_0 a fost ales arbitrar obținem $h(x) = 0$ pentru orice x real. Deducem că $f(x) = f(0)$ iar cum $2f(x) = [g(2x)] \in \mathbb{Z}$ rezultă $f(x) = \frac{k}{2}$ pentru orice x real, unde k este un număr întreg fixat..... **3p**

Problema 4. Fie a, b, c, d numere naturale nenule cu $a < b < c < d$ și $ad = bc$.

Demonstrați că

$$2a + \sqrt{a} + \sqrt{d} < b + c + 1$$

.

Soluție. Fie $b = a + x, c = a + y, d = a + z$ cu $0 < x < y < z$ numere naturale.

Atunci relația din enunț se scrie $a(a + z) = (a + x)(a + y)$. Deducem că $z = x + y + \frac{xy}{a} > x + y \Rightarrow z \geq x + y + 1$. Obținem astfel

$$a = \frac{xy}{z - x - y} \leq xy.$$

..... **2p**

Avem că $\frac{xy}{a} + a \leq xy + 1 \Leftrightarrow xy + a^2 \leq xy a + a \Leftrightarrow (xy - a) + a(a - xy) \leq 0 \Leftrightarrow (xy - a)(1 - a) \leq 0$, adevărat.

Obținem astfel $d = a + z = x + y + \frac{xy}{a} + a \leq x + y + xy + 1 = (x + 1)(y + 1)$ **2p**

Inegalitatea din enunț se transcrie $\sqrt{a} + \sqrt{d} < x + y + 1$, iar prin ridicare la pătrat este echivalentă cu

$$a + d + 2\sqrt{ad} < x^2 + y^2 + 1 + 2xy + 2x + 2y \quad (1)$$

Cum

$$a + d \leq xy + x + y + xy + 1,$$

iar din inegalitatea mediilor, întrucât $x < y$, avem:

$$2\sqrt{ad} \leq 2\sqrt{xy(x+1)(y+1)} < x(x+1) + y(y+1),$$

Adunând ultimele două relații, obținem (1). **3p**



MINISTERUL EDUCAȚIEI



SOCIETATEA DE ȘTIINȚE
MATEMATICE DIN ROMÂNIA



Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Națională, Piatra-Neamț, 16 aprilie 2022

CLASA a X-a

Problema 1. Pentru $a \in (0, \infty) \setminus \{1\}$, aflați soluțiile reale ale ecuației

$$a^x = x^x + \log_a(\log_a x).$$

Problema 2. Arătați că, oricare ar fi numerele complexe z_1 și z_2 , are loc inegalitatea

$$|z_1 + z_2| + |z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2| + \max\{|z_1|, |z_2|\}.$$

Problema 3. Fie $Z \subset \mathbb{C}$ o mulțime de n numere complexe, $n \geq 2$. Arătați că pentru orice număr natural nenul $m \leq \frac{n}{2}$ există o submulțime U cu m elemente a mulțimii Z astfel ca

$$\left| \sum_{z \in U} z \right| \leq \left| \sum_{z \in Z \setminus U} z \right|.$$

Problema 4. Fie $M = \{1, 2, \dots, n\}$, unde $n \geq 2$ și $\mathcal{P}(M) = \{P \mid P \subseteq M\}$ mulțimea părților lui M . Determinați numărul funcțiilor $f : \mathcal{P}(M) \rightarrow \mathcal{P}(M)$ care au proprietatea:

$$|f(A) \cap f(B)| = |A \cap B|, \text{ pentru orice } A, B \in \mathcal{P}(M).$$

(Am notat cu $|X|$ numărul de elemente ale mulțimii X .)

Timp de lucru 4 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.



MINISTERUL EDUCAȚIEI



SOCIETATEA DE ȘTIINȚE
MATEMATICE DIN ROMÂNIA



Olimpiada Națională de Matematică
Etapă Națională, Piatra-Neamț, 16 aprilie 2022

CLASA a X-a – soluții și bareme

Problema 1. Pentru $a \in (0, \infty) \setminus \{1\}$, aflați soluțiile reale ale ecuației

$$a^x = x^x + \log_a(\log_a x).$$

Soluție. Fie $t = \log_a x$. Din condițiile de existență avem $x > 0$ și $t > 0$. Ecuația se rescrie $a^x = a^{\log_a(x^x)} + \log_a t$, adică $a^x = a^{xt} + \log_a t$ **2p**
Adunând $\log_a x$ obținem $a^x + \log_a x = a^{xt} + \log_a(xt)$ **2p**
Funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = a^x + \log_a x$ este strict monotonă, deci injectivă, prin urmare obținem $x = xt$, deci $t = 1$ și $x = a$ **3p**

Problema 2. Arătați că, oricare ar fi numerele complexe z_1 și z_2 , are loc inegalitatea

$$|z_1 + z_2| + |z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2| + \max\{|z_1|, |z_2|\}.$$

Soluție. Dacă $z_1 = 0$ sau $z_2 = 0$ avem egalitate. În continuare considerăm $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$. Fără a restrânge generalitatea putem presupune $|z_1| \leq |z_2|$. Astfel, inegalitatea devine $|z_1 + z_2| + |z_1 - z_2| \leq |z_1| + 2|z_2|$. (1) **2p**
Împărțind cu $|z_2|$ și notând $z = \frac{z_1}{z_2}$, inegalitatea (1) se scrie $|z + 1| + |z - 1| \leq |z| + 2$, unde $z \in \mathbb{C}^*$ cu $|z| \leq 1$. (2) **1p**
Ridicând la pătrat și folosind identitatea paralelogramului, $|z + 1|^2 + |z - 1|^2 = 2(|z|^2 + 1)$, inegalitatea (2) devine echivalentă cu $|z|^2 + 2|z|^2 - 1 \leq 4|z| + 2$ **2p**
Cum $|z|^2 - 1 \leq |z|^2 + 1$, este suficient să demonstrăm că $|z|^2 + 2(|z|^2 + 1) \leq 4|z| + 2$, care conduce la $|z|(3|z| - 4) \leq 0$, inegalitate adevărată deoarece $|z| \in (0, 1]$ **2p**

Problema 3. Fie $Z \subset \mathbb{C}$ o mulțime de n numere complexe, $n \geq 2$. Arătați că pentru orice număr natural nenul $m \leq \frac{n}{2}$ există o submulțime U cu m elemente a mulțimii Z astfel ca

$$\left| \sum_{z \in U} z \right| \leq \left| \sum_{z \in Z \setminus U} z \right|.$$

Soluție. Dacă $m = \frac{n}{2}$, deci $n = 2m$ este număr par, partiționăm arbitrar mulțimea Z în două submulțimi Z_1 și Z_2 cu câte m elemente și dacă $\left| \sum_{z_1 \in Z_1} z_1 \right| \leq \left| \sum_{z_2 \in Z_2} z_2 \right|$ alegem $U = Z_1$ iar în caz contrar alegem $U = Z_2$ **1p**

Dacă $m < \frac{n}{2}$, deci $2m < n$, presupunem prin absurd că pentru orice submulțime $U \subset Z$ cu m elemente și $V = Z \setminus U$ avem inegalitatea contrară: $\left| \sum_{u \in U} u \right| > \left| \sum_{v \in V} v \right|$, adică

$$\sum_{u \in U} |u|^2 + \sum_{\substack{u_1 \neq u_2 \\ u_{1,2} \in U}} u_1 \cdot \overline{u_2} > \sum_{v \in V} |v|^2 + \sum_{\substack{v_1 \neq v_2 \\ v_{1,2} \in V}} v_1 \cdot \overline{v_2}. \dots\dots\dots \mathbf{1p}$$

Adunând aceste relații pentru toate cele C_n^m submulțimi U și notând $S_1 = \sum_{z \in Z} |z|^2$, $S_2 = \sum_{\substack{z_1 \neq z_2 \\ z_{1,2} \in Z}} z_1 \cdot \overline{z_2}$, obținem:

$$\frac{C_n^m \cdot m}{n} \cdot S_1 + \frac{C_n^m \cdot A_m^2}{A_n^2} \cdot S_2 > \frac{C_n^m \cdot (n-m)}{n} \cdot S_1 + \frac{C_n^m \cdot A_{n-m}^2}{A_n^2} \cdot S_2.$$

..... **3p**

Deducem că $\frac{n-2m}{n} \cdot S_1 + \frac{A_{n-m}^2 - A_m^2}{A_n^2} \cdot S_2 < 0$, adică $\frac{n-2m}{n} \cdot (S_1 + S_2) < 0$, deci $S_1 + S_2 < 0$,

prin urmare $\left| \sum_{z \in Z} z \right|^2 < 0$, ceea ce este fals. **2p**

Problema 4. Fie $M = \{1, 2, \dots, n\}$, unde $n \geq 2$ și $\mathcal{P}(M) = \{P \mid P \subseteq M\}$ mulțimea părților lui M . Determinați numărul funcțiilor $f: \mathcal{P}(M) \rightarrow \mathcal{P}(M)$ care au proprietatea:

$$|f(A) \cap f(B)| = |A \cap B|, \text{ pentru orice } A, B \in \mathcal{P}(M).$$

(Am notat cu $|X|$ numărul de elemente ale mulțimii X .)

Soluție. Pentru $A = B$ în relația din ipoteză avem $|f(A)| = |f(A) \cap f(A)| = |A \cap A| = |A|$, deci $|f(A)| = |A|$, pentru orice $A \in \mathcal{P}(M)$. În particular, observăm că $f(\emptyset) = \emptyset$.

Pentru orice $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $i \neq j$ avem $|f(\{i\}) \cap f(\{j\})| = |\{i\} \cap \{j\}| = 0$, deci $f(\{i\}) \neq f(\{j\})$. Cum $f(\{i\})$ are un element, pentru orice $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, vom avea $f(\{i\}) = \{a_i\}$, pentru orice $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, unde $a_1, a_2, \dots, a_n$ este o permutare a numerelor $1, 2, \dots, n$.

..... **1p**

Arătăm mai departe că orice funcție cu proprietatea din ipoteză este complet definită de valorile ei pe mulțimile de un element și că pentru orice permutare $a_1, a_2, \dots, a_n$ a numerelor $1, 2, \dots, n$ o astfel de funcție verifică.

Dacă $B \subset A$, atunci $A \cap B = B$, deci $|A \cap B| = |B|$ și atunci $|f(B)| = |B| = |A \cap B| = |f(A) \cap f(B)|$. Cum însă $f(A) \cap f(B) \subset f(B)$, avem $f(B) = f(A) \cap f(B)$, deci $f(B) \subset f(A)$. Fie $A = \{b_1, b_2, \dots, b_k\} \in \mathcal{P}(M)$ o submulțime oarecare. Atunci, pentru orice $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ avem $\{b_i\} \subset A$, deci $\{a_{b_i}\} = f(\{b_i\}) \subset f(A)$. Atunci $\bigcup_{1 \leq i \leq k} \{a_{b_i}\} \subset f(A)$. Dar $k = |f(A)| = |\bigcup_{1 \leq i \leq k} \{a_{b_i}\}|$, deci $f(A) = \bigcup_{1 \leq i \leq k} \{a_{b_i}\} = \{a_{b_i} \mid 1 \leq i \leq k\}$ **3p**

Reciproc, pentru orice astfel de funcție, dată de o permutare oarecare $a_1, a_2, \dots, a_n$ a numerelor $1, 2, \dots, n$, și pentru orice mulțimi $A = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}$ și $B = \{c_1, c_2, \dots, c_p\}$, numărul de elemente comune ale mulțimilor $f(A) = \{a_{b_1}, a_{b_2}, \dots, a_{b_k}\}$ și $f(B) = \{a_{c_1}, a_{c_2}, \dots, a_{c_p}\}$ este egal cu numărul de indici comuni dintre $b_1, b_2, \dots, b_k$ și $c_1, c_2, \dots, c_p$, adică $|A \cap B|$ **2p**

Așadar, numărul de funcții căutate este $p_n = n!$ **1p**



MINISTERUL EDUCAȚIEI



SOCIETATEA DE ȘTIINȚE
MATEMATICE DIN ROMÂNIA



Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Națională, Piatra-Neamț, 16 aprilie 2022

CLASA a XI-a

Problema 1. Fie $f : [0, 1] \rightarrow (0, 1)$ o funcție surjectivă.

- a) Demonstrați că f are cel puțin un punct de discontinuitate.
- b) Arătați că, dacă f admite limită în orice punct din intervalul $[0, 1]$, atunci f are cel puțin două puncte de discontinuitate.

Problema 2. Fie $\mathcal{F}$ mulțimea perechilor de matrice $(A, B) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ cu proprietatea că există $k \in \mathbb{N}^*$ și există matricele $C_1, C_2, \dots, C_k \in \{A, B\}$ astfel încât $C_1 C_2 \cdots C_k = O_2$. Pentru $(A, B) \in \mathcal{F}$, notăm $k(A, B)$ cel mai mic număr $k \in \mathbb{N}^*$ care satisface proprietatea din definiția de mai sus.

a) Fie $(A, B) \in \mathcal{F}$, astfel încât $\det(A) = 0$, $\det(B) \neq 0$ și $k(A, B) = p + 2$, cu $p \in \mathbb{N}^*$. Arătați că $AB^p A = O_2$.

b) Demonstrați că pentru orice $k \geq 3$ există $(A, B) \in \mathcal{F}$ astfel încât $k(A, B) = k$.

Problema 3. Determinați funcțiile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, derivabile în $x = 0$, care verifică inegalitatea

$$f(x + y) + f(xy) \geq f(x) + f(y),$$

pentru oricare $x, y \in \mathbb{R}$.

Problema 4. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel ca $A^2 + B^2 = 2AB$. Arătați că

$$\det(A - xI_n) = \det(B - xI_n),$$

pentru orice $x \in \mathbb{C}$.

Timp de lucru 4 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.



MINISTERUL EDUCAȚIEI



SOCIETATEA DE ȘTIINȚE
MATEMATICE DIN ROMÂNIA



Olimpiada Națională de Matematică Etapa Națională, Piatra-Neamț, 16 aprilie 2022

CLASA a XI-a – soluții și bareme

Problema 1. Fie $f : [0, 1] \rightarrow (0, 1)$ o funcție surjectivă.

a) Demonstrați că f are cel puțin un punct de discontinuitate.

b) Arătați că, dacă f admite limită în orice punct din intervalul $[0, 1]$, atunci f are cel puțin două puncte de discontinuitate.

Soluție.

a) Conform teoremei lui Weierstrass, dacă f este continuă pe intervalul $[0, 1]$, atunci $f([0, 1]) = [m, M]$, unde $m = \min_{x \in [0, 1]} f(x) \in (0, 1)$ și $M = \max_{x \in [0, 1]} f(x) \in (0, 1)$. Prin urmare, $f([0, 1]) \neq (0, 1)$, deci f nu este surjectivă. Contradicție. Deci f are cel puțin un punct de discontinuitate. 2p

b) Presupunem că f are limită în orice punct din $[0, 1]$. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Cum f este surjectivă și $\frac{1}{n+1} \in (0, 1)$, există $a_n \in [0, 1]$ astfel ca $f(a_n) = \frac{1}{n+1}$. Șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ astfel determinat este mărginit. Conform Lemei lui Cesàro, șirul admite un subșir convergent $(a_{k_n})_{n \in \mathbb{N}^*}$, cu $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{k_n} = a \in [0, 1]$. Dacă f ar fi continuă în a , atunci

$$f(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_{k_n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{k_n + 1} = 0.$$

Contradicție. Deci f este discontinuă în a 2p

Analog, pe baza surjectivității lui f , putem construi un șir $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, cu termenii în $[0, 1]$, astfel ca $f(b_n) = 1 - \frac{1}{n+1} \in (0, 1)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, care admite un subșir convergent $(b_{\ell_n})_{n \in \mathbb{N}^*}$, cu $\lim_{n \rightarrow \infty} b_{\ell_n} = b \in [0, 1]$. Dacă f ar fi continuă în b , atunci

$$f(b) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_{\ell_n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{\ell_n + 1}\right) = 1.$$

Contradicție. Deci f este discontinuă în b 2p

Arătăm că $a \neq b$.

Cum $f(a) \in (0, 1)$, există $n_1 \in \mathbb{N}^*$ astfel ca $f(a_{k_n}) = \frac{1}{k_n + 1} < f(a)$, $\forall n \geq n_1$. Rezultă $a_{k_n} \neq a$, $\forall n \geq n_1$. Cum f are limită în punctul a , obținem $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_{k_n}) = 0$.

Cu un raționament analog, deducem $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_{\ell_n}) = 1$.

Rezultă $a \neq b$, deci f are cel puțin două puncte de discontinuitate. 1p

Problema 2. Fie $\mathcal{F}$ mulțimea perechilor de matrice $(A, B) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ cu proprietatea că există $k \in \mathbb{N}^*$ și există matricele $C_1, C_2, \dots, C_k \in \{A, B\}$ astfel încât $C_1 C_2 \cdots C_k = O_2$. Pentru $(A, B) \in \mathcal{F}$, notăm $k(A, B)$ cel mai mic număr $k \in \mathbb{N}^*$ care satisface proprietatea din definiția de mai sus.

a) Fie $(A, B) \in \mathcal{F}$, astfel încât $\det(A) = 0$, $\det(B) \neq 0$ și $k(A, B) = p + 2$, cu $p \in \mathbb{N}^*$. Arătați că $AB^p A = O_2$.

b) Demonstrați că pentru orice $k \geq 3$ există $(A, B) \in \mathcal{F}$ astfel încât $k(A, B) = k$.

Soluție.

a) $k(A, B) > 1$ și $\det(A) = 0$ implică $A \neq O_2$ și $\text{rang}(A) = 1$ 1p
Deoarece $k(A, B) = p + 2$, există matricele $C_1, C_2, \dots, C_{p+2} \in \{A, B\}$ cu proprietatea $C_1 C_2 \cdots C_{p+2} = O_2$. Dacă $C_1 = B$, atunci $C_2 \cdots C_{p+2} = B^{-1}(BC_2 \cdots C_{p+2}) = O_2$, ceea ce contrazice minimalitatea lui $k(A, B)$. Similar, dacă presupunem $C_{p+2} = B$, atunci $C_1 C_2 \cdots C_{p+1} = (C_1 C_2 \cdots C_{p+1} B) B^{-1} = O_2$, în contradicție cu minimalitatea lui $k(A, B)$. Deci $C_1 = C_{p+2} = A$ 1p
Presupunem prin absurd că există $i \in \{2, \dots, p+1\}$ astfel ca $C_i = A$. Fie matricele $X = C_1 \cdots C_{i-1}$ și $Y = C_{i+1} \cdots C_{p+2}$. Avem deci $XAY = O_2$. Din inegalitatea lui Frobenius, obținem

$$\text{rang}(XA) + \text{rang}(AY) \leq \text{rang}(XAY) + \text{rang}(A) = 1.$$

Atunci $XA = O_2$ sau $AY = O_2$, în contradicție cu minimalitatea lui $k(A, B)$. Prin urmare $C_i = B$, $i = 2, \dots, p+1$. Rezultă $AB^p A = O_2$ 2p

b) Fie $k = p + 2$, unde $p \in \mathbb{N}^*$ este arbitrar, fixat. Considerăm matricele din $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 2^p & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ și } M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Definim matricea $B = (2^p - 1)PMP^{-1}$. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, avem

$$\begin{aligned} B^n &= (2^p - 1)^n P M^n P^{-1} = (2^p - 1)^{n-1} \begin{pmatrix} 2^p & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2^p \end{pmatrix} = \\ &= (2^p - 1)^{n-1} \begin{pmatrix} 2^p - 2^n & 2^{p+n} - 2^p \\ 1 - 2^n & 2^{n+p} - 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Rezultă

$$AB^n A = (2^p - 1)^{n-1} \begin{pmatrix} 2^p - 2^n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Atunci $AB^n A = O_2$ dacă și numai dacă $n = p$. Din a), deducem $k(A, B) = p + 2 = k$.

..... 3p

Problema 3. Determinați funcțiile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, derivabile în $x = 0$, care verifică inegalitatea

$$f(x + y) + f(xy) \geq f(x) + f(y),$$

pentru oricare $x, y \in \mathbb{R}$.

Soluție. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție cu proprietățile din enunț. Definim funcția $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ prin $g(x) = f(x) - f(0)$, $x \in \mathbb{R}$. Atunci g este derivabilă în origine, $g(0) = 0$ și

$$g(x + y) + g(xy) \geq g(x) + g(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Din (1) obținem inegalitățile

$$\frac{g(x + y) - g(x)}{y} \geq \frac{g(y)}{y} - \frac{g(xy)}{y}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \forall y > 0; \quad (2)$$

$$\frac{g(x + y) - g(x)}{y} \leq \frac{g(y)}{y} - \frac{g(xy)}{y}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \forall y < 0. \quad (3)$$

.....1p

Din (1) rezultă de asemenea

$$g(x) + g(-y(x + y)) \geq g(x + y) + g(-y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R},$$

de unde obținem

$$\frac{g(x + y) - g(x)}{y} \leq \frac{g(-y(x + y))}{y} - \frac{g(-y)}{y}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \forall y > 0; \quad (4)$$

$$\frac{g(x + y) - g(x)}{y} \geq \frac{g(-y(x + y))}{y} - \frac{g(-y)}{y}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \forall y < 0. \quad (5)$$

.....2p

Din ipoteză, $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t)}{t} = g'(0) \in \mathbb{R}$. Atunci, pentru $x \in \mathbb{R}^*$, au loc limitele

$$\lim_{y \searrow 0} \left(\frac{g(y)}{y} - \frac{g(xy)}{y} \right) = \lim_{y \searrow 0} \frac{g(y)}{y} - x \lim_{y \searrow 0} \frac{g(xy)}{xy} = g'(0)(1 - x)$$

și

$$\lim_{y \searrow 0} \left(\frac{g(-y(x + y))}{y} - \frac{g(-y)}{y} \right) = - \lim_{y \searrow 0} (x + y) \cdot \frac{g(-y(x + y))}{-y(x + y)} + \lim_{y \searrow 0} \frac{g(-y)}{-y} = g'(0)(1 - x).$$

Atunci, din inegalitățile (2) și (4), prin aplicarea criteriului clește, rezultă că funcția g este derivabilă la dreapta în oricare $x \in \mathbb{R}^*$, cu derivata la dreapta $g'_d(x) = g'(0)(1 - x)$. Similar, din inegalitățile (3) și (5), prin aplicarea criteriului clește, rezultă că funcția g este derivabilă la stânga în oricare $x \in \mathbb{R}^*$, cu derivata la stânga $g'_s(x) = g'(0)(1 - x)$. Rezultă că g este derivabilă pe $\mathbb{R}$, cu $g'(x) = g'(0)(1 - x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ 2p

Deducem: $g(x) = -\frac{g'(0)}{2}(x-1)^2 + \frac{g'(0)}{2}$, $x \in \mathbb{R}$1p

Notăm $a = -\frac{g'(0)}{2}$ și $b = f(0) - a$. Atunci $f(x) = g(x) + f(0) = a(x-1)^2 + b$, $\forall x \in \mathbb{R}$. În acest caz, inegalitatea din ipoteză se reduce la $ax^2y^2 \geq 0$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Rezultă că funcțiile f care satisfac condițiile din enunț sunt de forma:

$$f(x) = a(x-1)^2 + b, \quad x \in \mathbb{R},$$

unde $a \geq 0$ și $b \in \mathbb{R}$1p

Notă. Pentru indicarea funcției f de forma de mai sus, fără justificare, se acordă 1p.

Problema 4. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel ca $A^2 + B^2 = 2AB$. Arătați că

$$\det(A - xI_n) = \det(B - xI_n),$$

pentru orice $x \in \mathbb{C}$.

Soluția 1.

Analizăm cazul când matricele A și B sunt inversabile.

Din relația $A^2 + B^2 = 2AB$ obținem $AB^{-1} + A^{-1}B = 2I_n$. Notăm $X = A^{-1}B$. Relația devine $BX^{-1}B^{-1} = 2I_n - X$. Prin urmare, pentru orice $x \in \mathbb{C}$, avem

$$\det(2I_n - X - xI_n) = \det(BX^{-1}B^{-1} - xI_n) = \det(B(X^{-1} - xI_n)B^{-1}) = \det(X^{-1} - xI_n).$$

Rezultă că matricele $2I_n - X$ și X^{-1} au același spectru. Fie $Y = I_n - X$. Atunci avem $2I_n - X = I_n + Y$ și $X^{-1} = (I_n - Y)^{-1}$, deci matricele $I_n + Y$ și $(I_n - Y)^{-1}$ au spectrul comun.....2p

Pentru o matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, notăm cu $\sigma(M)$ mulțimea valorilor sale proprii. Fie $\alpha \in \sigma(Y)$. Atunci $1 + \alpha \in \sigma(I_n + Y) = \sigma[(I_n - Y)^{-1}]$. Rezultă că există $\beta \in \sigma(Y)$ astfel ca $1 + \alpha = (1 - \beta)^{-1}$, deci $\beta = \frac{\alpha}{1 + \alpha}$. Prin urmare, $\frac{\alpha}{1 + \alpha} \in \sigma(Y)$. Prin inducție, obținem $\frac{\alpha}{1 + k\alpha} \in \sigma(Y)$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Dacă presupunem, prin absurd, $\alpha \neq 0$, atunci ar rezulta că Y ar avea o infinitate de valori proprii. Contradicție. Deci $\sigma(Y) = \{0\}$, de unde $\det(X) = \det(I_n - Y) = 1$. Rezultă $\det(A) = \det(B)$3p

Analizăm cazul general. Relația din ipoteză poate fi scrisă

$$(A - xI_n)^2 + (B - xI_n)^2 = 2(A - xI_n)(B - xI_n).$$

Dacă $x \in \mathbb{C}$ nu este valoare proprie pentru A și B , atunci matricele $A - xI_n$ și $B - xI_n$ sunt inversabile. În conformitate rezultatul anterior, obținem $\det(A - xI_n) = \det(B - xI_n)$. Această egalitate polinomială este adevărată pentru o infinitate de numere complexe.

Ca urmare $\det(A - xI_n) = \det(B - xI_n)$, $\forall x \in \mathbb{C}$2p

Soluția 2.

Fie $\lambda \in \mathbb{C}$. Notăm $A_\lambda = A - \lambda I_n$ și $B_\lambda = B - \lambda I_n$. Conform ipotezei, obținem relația $A_\lambda^2 + B_\lambda^2 = 2A_\lambda B_\lambda$ 1p
Prin inducție, se demonstrează relațiile

$$A_\lambda^{i+1} = [(i+1)A_\lambda - iB_\lambda]B_\lambda^i, \quad i \in \mathbb{N}^*,$$

$$B_\lambda^{i+1} = A_\lambda^i[(i+1)B_\lambda - iA_\lambda], \quad i \in \mathbb{N}^*.$$

.....2p
Rezultă $\text{rang}(A_\lambda^{i+1}) \leq \text{rang}(B_\lambda^i)$, $\text{rang}(B_\lambda^{i+1}) \leq \text{rang}(A_\lambda^i)$, $\forall i \in \mathbb{N}^*$ 1p
Dacă λ este o valoare proprie a matricei A , notăm cu a ordinul său de multiplicitate, iar dacă λ nu este o valoare proprie a matricei A , atunci considerăm $a = 0$. Similar, dacă λ este o valoare proprie a matricei B , notăm cu b ordinul său de multiplicitate și alegem $b = 0$ în caz contrar. Pentru $i \in \mathbb{N}^*$ suficient de mare, rangurile matricelor A_λ^i și B_λ^i se stabilizează astfel: $\text{rang}(A_\lambda^i) = n - a$, respectiv $\text{rang}(B_\lambda^i) = n - b$. Rezultă $n - a \leq n - b$ și $n - b \leq n - a$, de unde $a = b$ 2p
Deducem că matricele A și B au aceleași valori proprii, cu ordine de multiplicitate identice, deci au același polinom caracteristic. Astfel, obținem concluzia.....1p



MINISTERUL EDUCAȚIEI



SOCIETATEA DE ȘTIINȚE
MATEMATICE DIN ROMÂNIA



Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Națională, Piatra-Neamț, 16 aprilie 2022

CLASA a 12-a

Problema 1. Fie $\mathcal{F}$ mulțimea funcțiilor $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că $f(2x) = f(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

- a) Determinați toate funcțiile din $\mathcal{F}$ care admit primitive pe $\mathbb{R}$.
b) Dați un exemplu de funcție $f \in \mathcal{F}$, integrabilă pe orice interval $[a, b] \subset \mathbb{R}$, neconstantă, cu proprietatea că pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$ are loc egalitatea $\int_a^b f(x) dx = 0$.

Problema 2. Determinați toate inelele $(A, +, \cdot)$ cu proprietatea că $x^3 \in \{0, 1\}$ pentru orice element $x \in A$.

Problema 3. Fie $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ două funcții crescătoare.

- a) Arătați că pentru orice $a \in \mathbb{R}$ și orice $b \in [f(a-0), f(a+0)]$ are loc inegalitatea

$$\int_a^x f(t) dt \geq b(x-a), \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R}.$$

- b) Dacă $[f(a-0), f(a+0)] \cap [g(a-0), g(a+0)] \neq \emptyset$ pentru orice $a \in \mathbb{R}$, arătați că

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b g(t) dt, \quad \text{pentru orice } a, b \in \mathbb{R}, a < b.$$

(Prin $u(a-0)$ și $u(a+0)$ am notat limitele la stânga, respectiv la dreapta ale unei funcții u în punctul $a \in \mathbb{R}$.)

Problema 4. Fie $(R, +, \cdot)$ un inel, cu centrul $Z = \{a \in R \mid ar = ra, \forall r \in R\}$, cu proprietatea că grupul $U = U(R)$ al elementelor sale inversabile este finit. Dacă G este grupul automorfismelor grupului aditiv $(R, +)$, arătați că

$$|G| \geq \frac{|U|^2}{|Z \cap U|}.$$

($|M|$ reprezintă cardinalul mulțimii M .)

Timp de lucru 4 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.



MINISTERUL EDUCAȚIEI



SOCIETATEA DE ȘTIINȚE
MATEMATICE DIN ROMÂNIA



Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Națională, Piatra-Neamț, 16 aprilie 2022

CLASA a 12-a – soluții și bareme

Problema 1. Fie $\mathcal{F}$ mulțimea funcțiilor $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că $f(2x) = f(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

a) Determinați toate funcțiile din $\mathcal{F}$ care admit primitive pe $\mathbb{R}$.

b) Dați un exemplu de funcție $f \in \mathcal{F}$, integrabilă pe orice interval $[a, b] \subset \mathbb{R}$, neconstantă, cu proprietatea că pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$ are loc egalitatea $\int_a^b f(x) dx = 0$.

Soluție.

a) Vom arăta că singurele funcții din $\mathcal{F}$ care admit primitive sunt funcțiile constante. Orice funcție constantă se găsește în mod evident în mulțimea $\mathcal{F}$ și admite primitive.

..... **1p.**

Fie $f \in \mathcal{F}$ o funcție care admite primitive și F primitiva sa cu proprietatea că $F(0) = 0$. Funcția $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $g(x) = F(2x) - 2F(x)$ este atunci derivabilă, cu $g'(x) = 2f(2x) - 2f(x) = 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, și este deci o funcție constantă. Cum $g(0) = -F(0) = 0$, rezultă că $F(2x) = 2F(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$ **2p.**

Prin inducție după $n \in \mathbb{N}^*$ avem atunci că $F(x) = 2^n F\left(\frac{x}{2^n}\right)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$ și orice $n \in \mathbb{N}^*$, astfel că pentru orice $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x \cdot \frac{F\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\frac{x}{2^n}} = x \cdot f(0).$$

Rezultă că $f(x) = F'(x) = f(0)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$ și funcția f este constantă..... **2p.**

b) Fie $M = \{2^k | k \in \mathbb{Z}\}$ și $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funcția definită prin

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \text{dacă } x \in M \\ 0 & , \text{dacă } x \in \mathbb{R} \setminus M. \end{cases}$$

Deoarece mulțimea punctelor sale de discontinuitate este $M \cup \{0\}$, o mulțime numărabilă, f este o funcție integrabilă..... **1p.**

și cum f este nulă aproape peste tot, rezultă că $\int_a^b f(x) dx = 0$ pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$.

..... **1p.**

Problema 2. Determinați toate inelele $(A, +, \cdot)$ cu proprietatea că $x^3 \in \{0, 1\}$ pentru orice element $x \in A$.

Soluție.

Vom arăta că singurele inele care verifică condiția din enunț sunt corpurile $\mathbb{Z}_2$ și $\mathbb{F}_4$.

Acestea satisfac în mod evident condiția din enunț..... **1p.**

Fie A un inel cu proprietatea din enunț. Orice element $x \in A$ este atunci fie nilpotent, cu

$x^3 = 0$, fie inversabil, cu $x^3 = 1$. Deoarece -1 este inversabil, avem că $(-1)^3 = 1$, deci $-1 = 1$ și $1 + 1 = 0$ **1p.**

Fie x un element neinvertibil al inelului A . Atunci $x^3 = 0$ și $(x + 1)(x^2 - x + 1) = x^3 + 1 = 1$, astfel că $x + 1$ este inversabil. Rezultă că $(x + 1)^3 = 1$, de unde obținem ca $3x^2 + 3x = 0$, sau, echivalent, $x^2 = x$. Atunci $x = x^2 = x^3 = 0$, astfel că $U(A) = A \setminus \{0\}$ și A este un corp, de caracteristică $\text{char}(A) = 2$ **2p**

Dacă $A = \{0, 1\}$, atunci $A \simeq \mathbb{Z}_2$.

Fie în continuare A un corp cu $|A| \geq 4$ care verifică proprietatea din enunț. Pentru $x \in A \setminus \{0, 1\}$ avem atunci că $x + 1 \neq 0$, astfel că $x^3 = 1 = (x + 1)^3$. Obținem atunci că $x^2 - x = x^2 + x = 1$ și $x^2 - x \in Z(A)$ pentru orice $x \in A$, de unde rezultă că corpul A este comutativ. **2p.**

Ecuția $x^3 = 1$ nu poate avea atunci mai mult de 3 soluții în corpul A , astfel că $|A| \leq 4$. Prin urmare, $A = \mathbb{F}_4$, corpul cu 4 elemente. **1p.**

Problema 3. Fie $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ două funcții crescătoare.

a) Arătați că pentru orice $a \in \mathbb{R}$ și orice $b \in [f(a - 0), f(a + 0)]$ are loc inegalitatea

$$\int_a^x f(t) dt \geq b(x - a), \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R}.$$

b) Dacă $[f(a - 0), f(a + 0)] \cap [g(a - 0), g(a + 0)] \neq \emptyset$ pentru orice $a \in \mathbb{R}$, arătați că

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b g(t) dt, \quad \text{pentru orice } a, b \in \mathbb{R}, a < b.$$

(Prin $u(a - 0)$ și $u(a + 0)$ am notat limitele la stânga, respectiv la dreapta ale unei funcții u în punctul $a \in \mathbb{R}$.)

Soluție.

a) Deoarece f este crescătoare, au loc inegalitățile

$$f(t) \leq f(a - 0) \leq b, \quad \text{pentru orice } t < a,$$

respectiv

$$f(t) \geq f(a + 0) \geq b, \quad \text{pentru orice } t > a,$$

de unde rezultă imediat cerința. **2p**

b) Fie $a, b \in \mathbb{R}$, cu $a < b$, oarecare fixate, și $n \in \mathbb{N}^*$ oarecare fixat. Considerăm diviziunea echidistantă $\Delta_n = (a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b)$, cu $x_k = a + k \frac{b-a}{n}$, $k = \overline{0, n}$, și pentru fiecare $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ câte un număr $y_k \in [f(x_k - 0), f(x_k + 0)] \cap [g(x_k - 0), g(x_k + 0)]$. Atunci pentru orice $k \in \{0, 1, \dots, n - 1\}$ avem inegalitățile

$$y_k(x_{k+1} - x_k) \leq \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t) dt, \int_{x_k}^{x_{k+1}} g(t) dt \leq y_{k+1}(x_{k+1} - x_k),$$

..... **1p**

astfel că

$$(y_k - y_{k+1}) \cdot \frac{b-a}{n} \leq \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t) dt - \int_{x_k}^{x_{k+1}} g(t) dt \leq (y_{k+1} - y_k) \cdot \frac{b-a}{n}$$

și prin însumare obținem că

$$\left| \int_a^b f(t) dt - \int_a^b g(t) dt \right| \leq \frac{b-a}{n} (y_n - y_0) \leq \frac{1}{n} \cdot (b-a) (\max(f(b+0), g(b+0)) - \min(f(a-0), g(a-0))).$$

..... **3p**

Cum $n \in \mathbb{N}^*$ este oarecare, rezultă că

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b g(t) dt,$$

pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ **1p**

Problema 4. Fie $(R, +, \cdot)$ un inel, cu centrul $Z = \{a \in R \mid ar = ra, \forall r \in R\}$, cu proprietatea că grupul $U = U(R)$ al elementelor sale inversabile este finit. Dacă G este grupul automorfismelor grupului aditiv $(R, +)$, arătați că

$$|G| \geq \frac{|U|^2}{|Z \cap U|}.$$

($|M|$ reprezintă cardinalul mulțimii M .)

Soluție.

Pentru orice element inversabil $a \in U$ putem defini funcțiile

$$s_a : R \longrightarrow R : x \mapsto s_a(x) = a \cdot x,$$

și

$$d_a : R \longrightarrow R : x \mapsto d_a(x) = x \cdot a.$$

Acestea verifică egalitățile $s_a \circ s_b = s_{ab}$, respectiv $d_{a^{-1}} \circ d_{b^{-1}} = d_{(ab)^{-1}}$, **1p**
astfel că $s_a \circ s_{a^{-1}} = s_{a^{-1}} \circ s_a = d_a \circ d_{a^{-1}} = d_{a^{-1}} \circ d_a = id_R$ și rezultă că s_a și d_a sunt bijective

..... **1p**

De asemenea, $s_a(x+y) = a \cdot (x+y) = ax + ay = s_a(x) + s_a(y)$, respectiv $d_a(x+y) = (x+y) \cdot a = xa + ya = d_a(x) + d_a(y)$, pentru orice $x, y \in R$, astfel că $s_a, d_a \in G$ **1p**

Cum funcțiile $s, d : U \longrightarrow G$, $s(a) = s_a$, respectiv $d(a) = d_{a^{-1}}$ sunt morfisme injective de grupuri, rezultă că $S = Im(s)$ și $D = Im(d)$ sunt subgrupuri ale lui G , izomorfe cu U **1p**

Pentru orice $a, b \in U$ avem că $(s_a \circ d_b)(x) = axb = (d_b \circ s_a)(x)$, pentru orice $x \in R$, astfel că $s_a \circ d_b = d_b \circ s_a$. Rezultă că $SD = DS$ și $H = SD$ este un subgrup al grupului G și deci $|G| \geq |H|$ **1p**

Fie $a, b \in U$ astfel încât $s_a = d_b \in S \cap D$. Atunci $a = s_a(1) = d_b(1) = b$ și pentru orice $x \in R$ avem $ax = s_a(x) = d_a(x) = xa$, astfel că $a \in Z \cap U$. Rezultă că $S \cap D = s(Z \cap U)$ **1p**

Deoarece pentru orice subgrupuri finite ale unui grup avem

$$|SD| = \frac{|S||D|}{|S \cap D|},$$

obținem

$$|G| \geq |H| = |SD| = \frac{|S||D|}{|S \cap D|} = \frac{|U|^2}{|Z \cap U|}.$$

..... **1p**



MINISTERUL EDUCAȚIEI



SOCIETATEA DE ȘTIINȚE
MATEMATICE DIN ROMÂNIA



Olimpiada Națională de Matematică Etapă Națională, Slobozia, 11 aprilie 2023

CLASA a V-a – soluții și bareme

Problema 1. Numărul natural nenul n este pătrat perfect. Prin împărțirea lui 2023 la n se obține restul $223 - \frac{3}{2} \cdot n$. Aflați câtul împărțirii.

Soluție. Notăm cu c câtul împărțirii. Din teorema împărțirii cu rest deducem că are loc egalitatea
 $2023 = n \cdot c + 223 - \frac{3}{2} \cdot n$, (1) **2p**

Deoarece restul $223 - \frac{3}{2} \cdot n$ este număr natural, rezultă că n este par și $0 \leq 223 - \frac{3}{2} \cdot n < n$.

Din $0 \leq 223 - \frac{3}{2} \cdot n$ rezultă că $n \leq \frac{446}{3}$, deci $n \leq 148$ **1p**

iar din $223 - \frac{3}{2} \cdot n < n$ deducem că $n > \frac{446}{5}$, adică $n \geq 90$ **1p**

Deci n este un pătrat perfect par, cuprins între 90 și 148, deci n poate fi 100 sau 144 **1p**

Din relația (1) rezultă că $(2c - 3)n = 3600$. Pentru $n = 100$ obținem $2c - 3 = 36$, nu convine, deoarece $2c - 3$ este impar. Pentru $n = 144$ se obține $c = 14$ **2p**

Problema 2. Spunem că un număr natural este *special* dacă toate cifrele sale sunt nenule și oricare două cifre alăturate din scrierea sa zecimală sunt consecutive (nu neapărat ordonate crescător).

a) Determinați cel mai mare număr special m care are suma cifrelor egală cu 2023.

b) Determinați cel mai mic număr special n care are suma cifrelor egală cu 2022.

Soluție. a) Cel mai mare număr m va avea cât mai multe cifre, astfel că vom alege cele mai mici cifre posibile. Cum lângă o cifră de 1 nu putem pune decât o cifră de 2, iar $2023 = 3 \cdot 674 + 1$, alegem numărul cu 674 cifre de 2 și 675 cifre de 1. Astfel, cel mai mare număr special cu suma cifrelor egală cu 2023 este $m = \underbrace{12121 \dots 121}_{1349 \text{ cifre}}$ **2p**

b) Deoarece $8 + 9 = 17$ și $2022 = 17 \cdot 118 + 16$, dacă în scrierea numărului n am utiliza cel mult 237 de cifre, atunci suma cifrelor lui n ar fi cel mult egală cu $118 \cdot (8 + 9) + 9 < 2022$, deci nu putem folosi mai puțin de $2 \cdot 118 + 2 = 238$ cifre.

Pentru a folosi exact 238 de cifre, trebuie să formăm 118 grupe de cifre 8 și 9 și încă două cifre cu suma 16, adică fie 9 și 7, fie 8 și 8. Dacă cele două cifre sunt 7 și 9, vom avea 120 de cifre impare și 118 cifre pare, iar dacă cele două cifre sunt ambele 8, vom avea 120 de cifre pare și 118 cifre impare.

Niciunul dintre cazuri nu convine, deoarece în scrierea unui număr special cifrele pare alternează cu cele impare, deci numărul de cifre pare fie este egal, fie diferă cu o unitate de numărul cifrelor impare **2p**

În concluzie, în scrierea numărului n se folosesc cel puțin 239 de cifre. Vom căuta trei cifre consecutive, mai mici decât 8, a căror sumă să fie cel puțin egală cu 16, care să fie primele cifre ale

numărului. Încercăm să alegem o primă cifră cât mai mică posibil. Secvențele 123, 234, 345, 456 nu convin, pentru că suma cifrelor este mai mică decât 16.

Secvența 567 conduce la cel mai mic număr special $n = 56787 \underbrace{8989 \dots 89}_{117 \text{ grupe}} \dots$ **3p**

Problema 3. Determinați numerele naturale m și n știind că

$$n \cdot (n + 1) = 3^m + s(n) + 1182,$$

unde $s(n)$ reprezintă suma cifrelor numărului natural n .

Notă. Pentru un număr natural a , scris cu o singură cifră, se consideră $s(a) = a$.

Soluție. Numărul $n - s(n)$ este divizibil cu 9, iar 1182 este divizibil cu 3, dar nu și cu 9.

Dacă $m \geq 2$, din egalitatea $n^2 = 3^m + 1182 - (n - s(n))$, deducem că n^2 se divide cu 3, dar nu se divide cu 9, imposibil. Așadar, $m \leq 1$ **2p**

Pentru $m = 1$ obținem $n^2 = 1185 - (n - s(n))$, de unde rezultă din nou că n^2 se divide cu 3, dar nu se divide cu 9, imposibil **1p**

Pentru $m = 0$ obținem $n^2 + (n - s(n)) = 1183$, (1). Rezultă că $n^2 \leq 1183$ și, cum $34^2 < 1183 < 35^2$, deducem că $n \leq 34$ **1p**

Dacă $n \leq 9$, atunci $s(n) = n$, iar din (1) rezultă că $n^2 = 1183$, nu convine, deoarece 1183 nu este pătratul unui număr natural.

Dacă $n \geq 10$, notând $n = \overline{ab}$, din (1) rezultă că $\overline{ab}^2 + 9a = 1183$. Cum $n \leq 34$, cifra a poate lua doar valorile 1, 2 sau 3. Analizând pe rând cazurile $a = 1$, $a = 2$ și $a = 3$, obținem că singura soluție a problemei este $m = 0$, $n = 34$ **3p**

Problema 4. Spunem că un număr natural $n \geq 2$ are proprietatea (P) dacă în descompunerea sa în factori primi cel puțin unul dintre factori are exponentul egal cu 3.

a) Determinați cel mai mic număr natural N cu proprietatea că, oricum am alege N numere consecutive, cel puțin unul dintre acestea are proprietatea (P).

b) Determinați cele mai mici 15 numere naturale consecutive $a_1, a_2, \dots, a_{15}$, care nu au proprietatea (P), pentru care suma numerelor $5a_1, 5a_2, \dots, 5a_{15}$ este un număr cu proprietatea (P).

Soluție. a) Prin împărțirea a 16 numere naturale consecutive la 16 se obțin resturile 0, 1, 2, 3, $\dots$, 15 (nu neapărat începând cu 0). Ca urmare, printre orice 16 numere naturale consecutive există un număr de forma $16k + 8 = 2^3 \cdot (2k + 1)$, deci un număr cu proprietatea (P). **2p**

Printre cele 15 numere naturale consecutive de la 9 la 23 nu există niciun număr cu proprietatea (P), deci $N = 16$ **1p**

b) Notăm $S = 5a_1 + 5a_2 + \dots + 5a_{15}$. Cum $a_2 = a_1 + 1$, $a_3 = a_1 + 2$, $\dots$, $a_{15} = a_1 + 14$, rezultă $S = 5 \cdot (15a_1 + 1 + 2 + \dots + 14) = 5(15a_1 + 105) = 3 \cdot 5^2 \cdot (a_1 + 7)$ **1p**

Cum numerele consecutive $a_1, a_2, \dots, a_{15}$ nu au proprietatea (P), niciunul dintre acestea nu poate da restul 8 la împărțirea cu 16. Deducem că a_1 are forma $16k + 9$, unde k este un număr natural. **2p**

Ca urmare, $S = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot (k + 1)$. Cel mai mic număr k pentru care S are proprietatea (P) este $k = 4$, pentru care avem $S = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^3$ și $a_1 = 73$. Se verifică imediat că secvența 73, 74, 75, $\dots$, 87 este formată din 15 numere naturale consecutive care nu au proprietatea (P) **1p**



MINISTERUL EDUCAȚIEI



SOCIETATEA DE ȘTIINȚE
MATEMATICE DIN ROMÂNIA



Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Națională, Slobozia, 11 aprilie 2023

CLASA a VI-a – soluții și bareme

Problema 1. Determinați toate șirurile de rapoarte egale de forma

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_3}{a_4} = \frac{a_5}{a_6} = \frac{a_7}{a_8}$$

care îndeplinesc simultan condițiile:

- mulțimea $\{a_1, a_2, \dots, a_8\}$ este mulțimea divizorilor pozitivi ai lui 24;
- valoarea comună a rapoartelor este număr natural.

Soluție. Deoarece $24 = 2^3 \cdot 3$, valoarea comună r a rapoartelor poate fi doar un divizor al lui 24, diferit de 1 **2p**

Pentru $r = 2$ avem $2 = \frac{24}{12} = \frac{8}{4} = \frac{6}{3} = \frac{2}{1}$ **1p**

Pentru $r = 3$ avem $3 = \frac{24}{8} = \frac{12}{4} = \frac{6}{2} = \frac{3}{1}$ **1p**

Pentru $r = 4$ avem $4 = \frac{24}{6} = \frac{12}{3} = \frac{8}{2} = \frac{4}{1}$ **1p**

Pentru $r = 2$, $r = 3$ sau $r = 4$ nu putem avea și alte șiruri, deoarece, dacă ordonăm descrescător divizorii și îi folosim pe rând, trebuie să punem la numărător cel mai mare divizor d neutilizat până atunci, iar la numitor $\frac{d}{r}$, obținând șirurile de mai sus **1p**

Pentru $r \geq 8$, respectiv $r = 6$, nu avem niciun șir, deoarece niciuna dintre egalitățile $\frac{d}{6} = r$ și $\frac{6}{d} = r$, respectiv $\frac{d}{3} = 6$ și $\frac{3}{d} = 6$, nu poate fi îndeplinită **1p**

Astfel, șirurile cerute sunt cele trei de mai sus.

Problema 2. Determinați tripletele (a, b, c) de numere întregi, care verifică simultan relațiile $a^2 + a = b + c$, $b^2 + b = a + c$ și $c^2 + c = a + b$.

Soluție. Prin adunarea relațiilor obținem $a^2 + b^2 + c^2 = a + b + c$ (*) **2p**

Observăm că, dacă x este număr întreg, atunci $x^2 \geq x$, cu egalitate doar pentru $x = 0$ și $x = 1$ **1p**

Justificarea observației precedente este că dacă $x \leq 0$, atunci $x^2 \geq 0 \geq x$, iar dacă $x \geq 1$, atunci $x^2 = x \cdot x \geq x \cdot 1 = x$ **1p**

Astfel, egalitatea (*) este posibilă doar dacă $a^2 = a$, $b^2 = b$ și $c^2 = c$ **1p**

Din $a^2 = a$ reiese $a = 0$ sau $a = 1$. Pentru $a = 0$ obținem $b = c = 0$, iar pentru $a = 1$ obținem $b = c = 1$, deci tripletele cerute sunt $(0, 0, 0)$ și $(1, 1, 1)$ **2p**

Problema 3. Determinați numerele naturale nenule n pentru care numărul

$$N = \frac{1}{n \cdot (n+1)}$$

se reprezintă printr-o fracție zecimală finită.

Soluție. Știm că numărul N se reprezintă printr-o fracție zecimală finită dacă și numai dacă descompunerea numitorului în factori primi este de forma $2^a \cdot 5^b$, cu $a, b \in \mathbb{N} \dots$ **1p**

Deoarece n și $n+1$ sunt prime între ele, sunt posibile cazurile: I) $n = 1, n+1 = 2^a \cdot 5^b$; II) $n = 5^b, n+1 = 2^a$; III) $n = 2^a, n+1 = 5^b \dots \dots \dots$ **1p**

II) În acest caz $2^a = 5^b + 1 = \mathcal{M}_4 + 2$, deci $a = 1, b = 0, n = 1 \dots \dots \dots$ **2p**

III) Obținem $2^a = 5^b - 1$ (*). Deoarece 5^b și 2^a nu sunt divizibile cu 3, egalitatea (*) este posibilă doar dacă $2^a = \mathcal{M}_3 + 1$ și $5^b = \mathcal{M}_3 + 2$. Deoarece $5^{2k} = \mathcal{M}_3 + 1$ pentru $k \in \mathbb{N}$, rezultă că $b = 2k + 1, k \in \mathbb{N}$. În acest caz, pentru $k \geq 1$ avem $5^b - 1 = 5 \cdot 25^k - 1 = \mathcal{M}_8 + 4$ și $5^b - 1 > 8$. Astfel, egalitatea (*) nu este posibilă pentru $b \geq 2$. Rămâne $b = 1$ și $a = 2$, care dă $n = 4 \dots \dots \dots$ **2p**

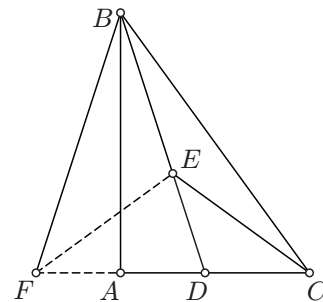
Numerele cerute sunt $n = 1$ și $n = 4 \dots \dots \dots$ **1p**

Observație. Enunțarea și/sau folosirea proprietății „dacă $x^p - y^q = 1, x, y, p, q$ sunt numere naturale și $p, q \geq 2$, atunci $x = 3, y = 2, p = 2$ și $q = 3$ ” nu primesc niciun punct fără demonstrarea acestei afirmații.

Problema 4. Fie triunghiul ABC cu $\sphericalangle BAC = 90^\circ$ și $\sphericalangle ACB = 54^\circ$. Construim bisectoarea BD ($D \in AC$) a unghiului ABC și considerăm punctul E pe segmentul BD astfel încât $DE = DC$. Arătați că $BE = 2 \cdot AD$.

Soluție. Calculând măsuri de unghiuri obținem $\sphericalangle ABC = 90^\circ - 54^\circ = 36^\circ$, apoi $\sphericalangle ABD = \sphericalangle CBD = \frac{1}{2} \sphericalangle ABC = 18^\circ$. Rezultă $\sphericalangle BDA = 90^\circ - \sphericalangle ABD = 72^\circ$, $\sphericalangle BDC = 180^\circ - \sphericalangle BDA = 108^\circ \dots \dots \dots$ **1p**

În triunghiul isoscel CDE obținem $\sphericalangle DCE = \sphericalangle DEC = \frac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle CDE) = 36^\circ$, de unde $\sphericalangle BCE = \sphericalangle BCD - \sphericalangle ECD = 18^\circ = \sphericalangle CBE$, deci triunghiul BCE este isoscel $\dots \dots \dots$ **2p**



Fie F simetricul lui D față de A . Atunci D, A, F sunt coliniare și $\sphericalangle ABF = \sphericalangle ABD = 18^\circ$ (deoarece $\triangle BAF \equiv \triangle BAD$ – caz CC), de unde $\sphericalangle FBC = 54^\circ = \sphericalangle FCB$, deci triunghiul BFC este isoscel, cu $FB = FC \dots \dots \dots$ **2p**

Rezultă $\triangle FEB \equiv \triangle FEC$ (L.L.L.), deci $\sphericalangle EFB = \sphericalangle EFC = \frac{1}{2} \sphericalangle CFB = 36^\circ$. Astfel triunghiul EFC este isoscel, de unde $EF = EC = EB$ (*). De asemenea, $\sphericalangle FED = 180^\circ - \sphericalangle FDE - \sphericalangle FED = 180^\circ - 72^\circ - 36^\circ = 72^\circ = \sphericalangle FDE$, ceea ce arată că $FE = FD = 2 \cdot AD$. Folosind (*) obținem $EB = 2 \cdot AD \dots \dots \dots$ **2p**



MINISTERUL EDUCAȚIEI



SOCIETATEA DE ȘTIINȚE
MATEMATICE DIN ROMÂNIA



Olimpiada Națională de Matematică Etapa Națională, Brașov, 11 aprilie 2023

CLASA a VII-a – soluții și bareme

Problema 1. Pentru n număr natural definim

$$a_n = \{\sqrt{n}\} - \{\sqrt{n+1}\} + \{\sqrt{n+2}\} - \{\sqrt{n+3}\}.$$

a) Arătați că $a_1 > 0,2$.

b) Arătați că $a_n < 0$ pentru o infinitate de valori ale lui n și $a_n > 0$ pentru o infinitate de valori ale lui n . (Notăția $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a numărului real x .)

Soluție. a) $a_1 = 0 - \{\sqrt{2}\} + \{\sqrt{3}\} + 0 = \sqrt{3} - 1 - (\sqrt{2} - 1) = \sqrt{3} - \sqrt{2} \dots\dots\dots 1p$

Cum $\sqrt{3} > 1,7$ și $\sqrt{2} < 1,5$, rezultă cerința $\dots\dots\dots 1p$

b) Observăm că, dacă m este număr natural și $m^2 \leq a < b < (m+1)^2$, atunci $[\sqrt{a}] = [\sqrt{b}] = m$ și $\sqrt{a} < \sqrt{b}$, deci $\{\sqrt{a}\} = \sqrt{a} - m < \sqrt{b} - m = \{\sqrt{b}\} \dots\dots\dots 1p$

Astfel, dacă $m \geq 2$ este un număr natural și $m^2 \leq n < n+1 < n+2 < n+3 < (m+1)^2$, atunci $\{\sqrt{n}\} < \{\sqrt{n+1}\}$ și $\{\sqrt{n+2}\} < \{\sqrt{n+3}\}$, deci $a_n < 0 \dots\dots\dots 2p$

Apoi, dacă $m \geq 2$ este un număr natural și $m^2 < n < n+1 < n+2 < n+3 = (m+1)^2$, atunci $\{\sqrt{n+1}\} < \{\sqrt{n+2}\}$, $\{\sqrt{n}\} \geq 0$ și $\{\sqrt{n+3}\} = 0$, deci $a_n > 0 \dots\dots\dots 2p$

Problema 2. În paralelogramul $ABCD$ punctul O este intersecția diagonalelor sale, iar M este mijlocul laturii AB . Fie P un punct al segmentului OC și Q intersecția dreptelor MP și BC . Paralela prin O la MP intersectează dreapta CD în punctul N . Arătați că punctele A , N și Q sunt coliniare dacă și numai dacă P este mijlocul segmentului OC .

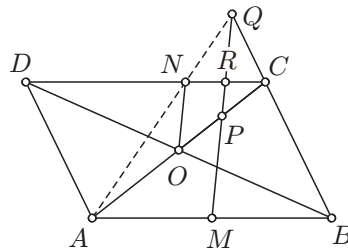
Soluție. Fie R intersecția dreptelor QM și CD .

Dacă A , N , Q sunt coliniare, atunci, cu teorema fundamentală a asemănării, $\frac{CR}{MB} = \frac{QC}{QB} = \frac{CN}{AB}$ și, cum $AB = 2 \cdot MB$, reiese $CN = 2 \cdot CR \dots\dots\dots 2p$

Din $RP \parallel ON$ deducem că RP este linie mijlocie în $\triangle CON$, deci P este mijlocul lui $OC \dots\dots\dots 2p$

Reciproc, dacă P este mijlocul lui OC , atunci RP este linie mijlocie în $\triangle CON$, deci $CN = 2 \cdot CR \dots\dots\dots 1p$

Fie N' intersecția dreptelor AQ și CD . Atunci, ca mai sus, $CN' = 2 \cdot CR = CN$, deci N coincide cu N' , adică A , N , Q sunt coliniare $\dots\dots\dots 2p$

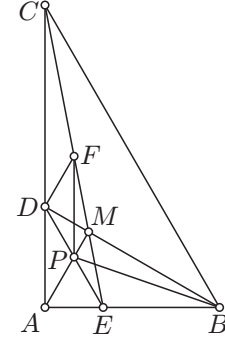


Problema 3. Se consideră un triunghi ABC care are $\sphericalangle BAC = 90^\circ$ și $\sphericalangle ABC = 60^\circ$. Luăm punctele D și E pe laturile AC , respectiv AB , astfel încât $CD = 2 \cdot DA$ și DE este bisectoarea unghiului $\sphericalangle ADB$. Notăm cu M intersecția dreptelor CE și BD , iar cu P intersecția dreptelor DE și AM . Arătați că:

- a) dreptele AM și BD sunt perpendiculare;
- b) $3 \cdot PB = 2 \cdot CM$.

Soluție. a) Fie $AB = a$. Atunci $BC = 2a$ (teorema unghiului de 30°), $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = a\sqrt{3}$, $AD = \frac{a}{3}\sqrt{3}$, $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \frac{2a}{3}\sqrt{3} = 2AD$. Rezultă, conform reciprocei teoremei unghiului de 30° , că $\sphericalangle ABD = 30^\circ$, deci $\sphericalangle ADB = 60^\circ \dots \dots 2p$

Obținem $\sphericalangle ADE = 30^\circ = \sphericalangle ACB$, deci $DE \parallel BC$. Astfel $\triangle DME \sim \triangle BMC$ și $\triangle ADE \sim \triangle ACB$, de unde $\frac{DM}{MB} = \frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AC} = \frac{1}{3}$. Deducem $\frac{DM}{DB} = \frac{1}{4}$, de unde $\frac{DM}{DA} = \frac{DA}{DB} = \frac{1}{2}$, deci $\triangle DMA \sim \triangle DAB$ (L.U.L.), ceea ce implică $\sphericalangle AMD = \sphericalangle BAD = 90^\circ \dots \dots 2p$



- b) Fie $DF \parallel AM$, $F \in CE$. Atunci $\frac{CF}{CE} = \frac{CD}{CA} = \frac{2}{3}$; avem de arătat că $CF = PB$. **1p**

Avem $\sphericalangle DAM = 90^\circ - \sphericalangle ADB = 30^\circ$ și $\sphericalangle ADE = 30^\circ$, deci $DP = AP$. Din $\triangle DPM$ reiese $PM = \frac{1}{2}DP = \frac{1}{2}AP$, de unde $\frac{MP}{MA} = \frac{1}{3} = \frac{MF}{MC}$, ceea ce arată că $PF \parallel AC$. Deducem că $APFD$ este paralelogram, de unde $DF = AP = DP$. Cum $\sphericalangle CDF = \sphericalangle DAM = 30^\circ = \sphericalangle BDP$ și $BD = \frac{2a}{3}\sqrt{3} = CD$, obținem $\triangle CDF \equiv \triangle BDP$ (L.U.L.), deci $CF = BP$, c.c.t.d. **2p**

Problema 4. a) Arătați că există numerele iraționale a , b , c astfel încât numerele $a + b \cdot c$, $b + a \cdot c$ și $c + a \cdot b$ să fie raționale.

b) Arătați că, dacă a , b , c sunt numere reale astfel încât $a + b + c = 1$ și numerele $a + b \cdot c$, $b + a \cdot c$ și $c + a \cdot b$ sunt raționale și nenule, atunci numerele a , b , c sunt raționale.

Soluție. a) Dacă luăm $a = b = c$ astfel încât a să fie irațional și $a^2 + a$ să fie rațional, cerința este demonstrată. Aceasta se întâmplă dacă, de exemplu, $a = \sqrt{2} - \frac{1}{2} \dots \dots 1p$

b) Cum $b + ac$ și $c + ab$ sunt raționale, este rațional și numărul $b + c + ac + ab = (b + c)(1 + a) = (1 - a)(1 + a) = 1 - a^2$, deci a^2 este rațional **2p**

Analog, b^2 și c^2 sunt raționale. Cum $(a + bc)^2 = a^2 + b^2c^2 + 2abc$ este rațional, rezultă că abc este rațional **2p**

Așadar $a(a + bc) = a^2 + abc$ este rațional și, cum $a + bc$ este rațional nenul, deducem că a este rațional. Analog, b și c sunt raționale **2p**

Soluție alternativă la b). Fie $b + ac = r$, $c + ab = q$, cu r și q numere raționale. Atunci $b + ac - a(c + ab) = r - qa$, sau $b(1 - a^2) = r - qa$; analog $c(1 - a^2) = q - ra$. Astfel, dacă a este rațional și $a \neq \pm 1$, atunci $b = \frac{r - qa}{1 - a^2}$ și $c = \frac{q - ra}{1 - a^2}$ sunt raționale **1p**

Dacă $a = 1$, atunci $b + c = 0$, deci $ab + c = 0$ – contradicție cu ipoteza, iar dacă $a = -1$, atunci $b + c = 2$ și $b - c = p$, deci $b = 1 + \frac{p}{2}$ și $c = 1 - \frac{p}{2}$ sunt raționale **1p**

O concluzie similară funcționează dacă, în raționamentul precedent, înlocuim a cu b sau cu c . Astfel, rămâne de eliminat cazul când a , b și c sunt iraționale.

Presupunem că a , b și c sunt iraționale ($\dagger$). Cum $b + ac$ și $c + ab$ sunt raționale, este rațional și numărul $b + c + ac + ab = (b + c)(1 + a) = (1 - a)(1 + a) = 1 - a^2$, deci a^2 este rațional, adică $a = \pm\sqrt{m}$, cu $m \in \mathbb{Q}_+$ și $\sqrt{m} \notin \mathbb{Q} \dots \dots 2p$

Analog, $b = \pm\sqrt{n}$, $c = \pm\sqrt{p}$, cu n, p raționale și $\sqrt{n}, \sqrt{p}$ iraționale.

Din $a + b = 1 - c$ reiese $a^2 + 2ab + b^2 = 1 - 2c + c^2$, adică $m \pm 2\sqrt{mn} + n = 1 \pm 2\sqrt{p} + p$. Cum $\sqrt{p}$ este irațional, egalitatea precedentă este posibilă doar dacă $\sqrt{mn} = \sqrt{p}$ (și cei doi termeni cu radicali au același semn), adică $mn = p$. La fel obținem $mp = n$ și $np = m$, de unde $mnp = m^2 = n^2 = p^2$, deci $m = n = p$, ceea ce duce la $m = n = p = 1$ – contradicție cu (†). Așadar presupunerea (†) este falsă și raționamentul se încheie **2p**



MINISTERUL EDUCAȚIEI



SOCIETATEA DE ȘTIINȚE
MATEMATICE DIN ROMÂNIA



Olimpiada Națională de Matematică Etapa Națională, Brașov, 11 aprilie 2023

CLASA a VIII-a – soluții și bareme

Problema 1. Se consideră numerele reale pozitive a, b, c , astfel încât $a + b + c = 3$.
Demonstrați că $a^2 + b^2 + c^2 + a^2b + b^2c + c^2a \geq 6$.

Soluția 1. Adunând $2ab + 2bc + 2ca$ în ambii membri, inegalitatea din enunț este echivalentă cu $(a + b + c)^2 + a^2b + b^2c + c^2a \geq 6 + 2ab + 2bc + 2ca$, deci problema revine la a demonstra că $a^2b + b^2c + c^2a + 3 \geq 2ab + 2bc + 2ca$ **2p**

Deoarece $a + b + c = 3$, inegalitatea precedentă este echivalentă cu:

$$(b + a^2b) + (c + b^2c) + (a + c^2a) \geq 2ab + 2bc + 2ca. \quad (1) \dots\dots\dots \mathbf{1p}$$

Folosind eventual inegalitatea mediilor, obținem $b + a^2b \geq 2ab$, $c + b^2c \geq 2bc$ și $a + c^2a \geq 2ca$.

Adunând membru cu membru inegalitățile precedente, deducem că (1) este adevărată, așadar are loc inegalitatea din enunț. **4p**

Soluția 2. Adunând $a + b + c$ în ambii membri, inegalitatea de demonstrat este echivalentă cu: $a^2 + b^2 + c^2 + a^2b + b^2c + c^2a + a + b + c \geq 9$ **2p**

Folosind eventual inegalitatea mediilor, obținem inegalitățile: $b + a^2b \geq 2ab$, $c + b^2c \geq 2bc$ și $a + c^2a \geq 2ca$ **4p**

Deducem că $a^2 + b^2 + c^2 + a^2b + b^2c + c^2a + a + b + c \geq a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = (a + b + c)^2 = 9$, adică ceea ce trebuia demonstrat **1p**

Problema 2. Demonstrați că:

a) există o infinitate de perechi (x, y) de numere reale din intervalul $[0, \sqrt{3}]$ care verifică egalitatea $x \cdot \sqrt{3 - y^2} + y \cdot \sqrt{3 - x^2} = 3$;

b) **nu** există nicio pereche (x, y) de numere raționale din intervalul $[0, \sqrt{3}]$, astfel încât să aibă loc egalitatea $x \cdot \sqrt{3 - y^2} + y \cdot \sqrt{3 - x^2} = 3$.

Soluție. a) Orice pereche $(a, \sqrt{3 - a^2})$, cu $a \in [0, 1]$, este soluție. **2p**

b) Ridicând la puterea a doua egalitatea $y \cdot \sqrt{3 - x^2} = 3 - x \cdot \sqrt{3 - y^2}$, deducem că $(\sqrt{3 - y^2} - x)^2 = 0$, deci $x^2 + y^2 = 3$. (1) **1p**

Presupunem că există $x, y \in \mathbb{Q}_+ \cap [0, \sqrt{3}]$ care verifică egalitatea (1). Este evident că x și y nu pot fi egale cu 0. Fie $a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $(a, b) = (c, d) = 1$, iar $x = \frac{a}{b}$ și $y = \frac{c}{d}$.

$$\text{Din (1) obținem } a^2d^2 + b^2c^2 = 3b^2d^2 \quad (2).$$

Cum $(c, d) = 1$ și $d^2 \mid b^2c^2$, deducem că $d^2 \mid b^2$. Din $(a, b) = 1$ și $b^2 \mid a^2d^2$, rezultă $b^2 \mid d^2$. Așadar $b^2 = d^2$. Relația (2) devine $a^2 + c^2 = 3b^2$ **2p**

Dacă a și c nu sunt multipli de 3, atunci $a^2 + c^2 = M_3 + 1$ sau $a^2 + c^2 = M_3 + 2$, contradicție cu $a^2 + c^2 = 3b^2$. Așadar, $3 \mid a$ și $3 \mid c$, de unde $3b^2 = M_9$, adică $3 \mid b$, deci $(a, b) \geq 3$, fals.

În consecință, ecuația nu are soluții $x, y \in \mathbb{Q}_+ \cap [0, \sqrt{3}]$ **2p**

Problema 3. Spunem că un număr natural n este *interesant* dacă poate fi scris sub forma $n = \left\lfloor \frac{1}{a} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{b} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{c} \right\rfloor$, unde a, b și c sunt numere reale pozitive astfel încât $a + b + c = 1$.

Determinați toate numerele interesante. ($[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x .)

Soluție. Fără să restrângem generalitatea, alegem $a \leq b \leq c$.

Cum a, b și c sunt numere reale pozitive cu suma egală cu 1, rezultă că $a, b, c \in (0, 1)$, prin urmare $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c} \in (1, \infty)$. Deducem că $\left\lfloor \frac{1}{a} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{1}{b} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{1}{c} \right\rfloor \in \mathbb{N}^*$, deci $n \geq 3$ **1p**

Dacă $\left\lfloor \frac{1}{a} \right\rfloor \leq 2$, atunci $a, b, c \in \left(\frac{1}{3}, 1\right)$, iar $a + b + c > 1$, fals. Așadar $\left\lfloor \frac{1}{a} \right\rfloor \geq 3$, deci $n \geq 5$.

Dacă 5 ar fi interesant, am avea $\left\lfloor \frac{1}{a} \right\rfloor = 3$ și $\left\lfloor \frac{1}{b} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{c} \right\rfloor = 1$, deci $a + b + c > b + c > 1$, fals.

Dacă 6 ar fi interesant, atunci $\left\lfloor \frac{1}{a} \right\rfloor = 3, \left\lfloor \frac{1}{b} \right\rfloor = 2, \left\lfloor \frac{1}{c} \right\rfloor = 1$. Rezultă $a \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right], b \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$ și $c \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, deci $a + b + c > \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{13}{12}$, fals. **3p**

Demonstrăm că toate numerele naturale $n \geq 7$ sunt interesante.

Fie $k \in \mathbb{N}, k \geq 4$ și numerele reale $a = \frac{1}{k}, b = c = \frac{k-1}{2k}$, cu $a + b + c = 1$.

Atunci, $\left\lfloor \frac{1}{a} \right\rfloor = k, \left\lfloor \frac{1}{b} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{c} \right\rfloor = \left\lfloor 2 + \frac{2}{k-1} \right\rfloor = 2$, prin urmare $\left\lfloor \frac{1}{a} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{b} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{c} \right\rfloor = k + 4$. Rezultă că toate numerele naturale $n \geq 8$ sunt interesante.

Alegând, de exemplu, $a = \frac{8}{30}, b = c = \frac{11}{30}$, avem $\left\lfloor \frac{1}{a} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{b} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{c} \right\rfloor = 3 + 2 + 2 = 7$ și $a + b + c = 1$, așadar și numărul 7 este interesant..... **3p**

Problema 4. Fie $ABCD$ un tetraedru și mijloacele M, N ale muchiilor AC , respectiv BD . Arătați că pentru orice punct P de pe segmentul MN , cu $P \neq M$ și $P \neq N$, există și sunt unice punctele X și Y pe segmentele AB , respectiv CD , astfel încât X, P și Y sunt coliniare.

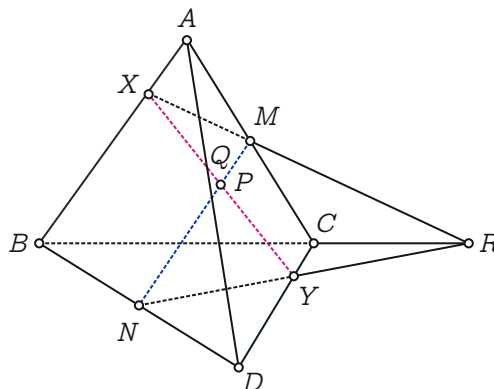
Soluție. Deoarece $P \neq M, P \neq N$, dacă X, Y, P sunt coliniare, avem $X \notin \{A, B\}$ și $Y \notin \{C, D\}$. Într-adevăr, dacă $X = A$, atunci $XY \subset (ACD)$, deci $P \in (ACD)$, fals. Celelalte situații sunt analoge.

Determinăm $X \in (AB)$ și $Y \in (CD)$ cu proprietatea cerută. Observăm că:

$$(XY) \cap (MN) \neq \emptyset \Leftrightarrow X, Y, M, N \text{ coplanare} \Leftrightarrow \frac{XA}{XB} \cdot \frac{NB}{ND} \cdot \frac{YD}{YC} \cdot \frac{MC}{MA} = 1.$$

Deoarece M și N sunt mijloacele muchiilor AC , respectiv BD , obținem:

$$(XY) \cap (MN) \neq \emptyset \Leftrightarrow \frac{XA}{XB} = \frac{YC}{YD}. \quad (1) \quad \dots\dots\dots \mathbf{2p}$$



Arătăm că, dacă există punctele $X \in (AB)$ și $Y \in (CD)$, astfel încât X, P și Y sunt coliniare, atunci acestea sunt unice. Presupunem că există $X_1 \in (AB)$ și $Y_1 \in (CD)$, cu $X_1 \neq X$, astfel încât X_1, P și Y_1 sunt coliniare. Din (1), scriind proporții derivate, obținem $\frac{XA}{YC} = \frac{X_1A}{Y_1C} = \frac{AB}{CD}$. Deoarece $X_1 \neq X$, rezultă că $X_1A \neq XA$, deci $Y_1C \neq YC$, adică $Y_1 \neq Y$. Dreptele X_1Y_1 și XY sunt concurente în P , deci sunt coplanare, așadar și dreptele $AB = XX_1$ și $CD = YY_1$ sunt coplanare, fals. **1p**

I Dacă P este mijlocul lui MN , alegem X și Y mijloacele muchiilor AB , respectiv CD . În acest caz, P este mijlocul diagonalei MN a paralelogramului $MXNY$, deci este și mijlocul diagonalei XY **1p**

II Fie $P \in (MN)$ astfel încât $\frac{PM}{PN} = k < 1$ (cazul $k > 1$ este analog). Alegem $X \in (AB)$ și $Y \in (CD)$, cu $\frac{XA}{XB} = \frac{YC}{YD} = k$. Din (1) rezultă că dreptele XY și MN sunt concurente într-un punct Q . Arătăm că $Q = P$.

Fie $\{R\} = XM \cap BC$. Deoarece $\frac{XA}{XB} = k < 1$, punctul C se află între B și R . Cum $R \in BC \subset (DBC)$ și $R \in XM \subset (QXM)$, deducem că $R \in (DBC) \cap (QXM) = YN$, deci $BC \cap XM \cap YN = \{R\}$.

Aplicăm succesiv teorema lui Menelaus, în $\triangle MNR$ (cu transversala $X-Q-Y$), în $\triangle CMR$ (cu transversala $A-X-B$), în $\triangle BNR$ (cu transversala $D-Y-C$) și în $\triangle ABC$ (cu transversala $R-M-X$) și obținem: $\frac{QM}{QN} = \frac{XM}{XR} \cdot \frac{YR}{YN}$, $\frac{XM}{XR} = \frac{BC}{BR} \cdot \frac{AM}{AC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{BC}{BR}$, $\frac{YR}{YN} = \frac{DB}{DN} \cdot \frac{CR}{CB} = 2 \cdot \frac{CR}{CB}$, $\frac{RC}{RB} = \frac{XA}{XB} \cdot \frac{MC}{MA} = k$. Din egalitățile precedente deducem: $\frac{QM}{QN} = \frac{1}{2} \cdot \frac{BC}{BR} \cdot 2 \cdot \frac{CR}{CB} = \frac{RC}{RB} = k = \frac{PM}{PN}$, așadar $Q = P$ **3p**



MINISTERUL EDUCAȚIEI



SOCIETATEA DE ȘTIINȚE
MATEMATICE DIN ROMÂNIA



Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Națională, Craiova, 11 aprilie 2023

CLASA a IX-a – soluții

Problema 1. Se consideră ecuația $x^2 + (a+b-1)x + ab - a - b = 0$, unde a și b sunt numere naturale nenule cu $a \leq b$.

a) Arătați că ecuația are două soluții reale distincte.

b) Demonstrați că dacă o soluție a ecuației este număr întreg, atunci ambele soluții sunt numere întregi nepozitive și $b < 2a$.

Soluție. a) Discriminantul ecuației este $\Delta = (a+b-1)^2 - 4(ab-a-b) = (a-b)^2 + 2a + 2b + 1 > 0$, deci ecuația are două soluții reale distincte **2p**

b) Dacă $x_1 < x_2$ sunt cele două soluții ale ecuației, din prima relație a lui Viète, $x_1 + x_2 = 1 - a - b \in \mathbb{Z}$, deci $x_1 \in \mathbb{Z} \iff x_2 \in \mathbb{Z}$ **1p**

Fie $f(x) = x^2 + (a+b-1)x + ab - a - b$, $x \in \mathbb{R}$. Întrucât $f(1) = ab > 0$, $f(-a) = -b < 0$, $f(-b) = -a < 0$, folosind semnul funcției de gradul doi deducem că $x_1 < -b \leq -a < x_2 < 1$, deci ambele soluții sunt nepozitive.

..... **1p**

Astfel, $a \geq 1 - x_2$, $b \geq 1 - x_2$ și din $f(x_2) = 0$, deducem $(a-1+x_2) \cdot (b-1+x_2) = 1 - x_2 \geq 1$. Rezultă că $d_1 = a - 1 + x_2$ și $d_2 = b - 1 + x_2$ sunt divizori naturali ai numărului $1 - x_2$ și $d_1 d_2 = 1 - x_2$, $a = d_1 + d_1 d_2$, $b = d_2 + d_1 d_2$. Obținem $2a - b = 2d_1 + d_2(d_1 - 1) \geq 2d_1 > 0$, adică $b < 2a$ **3p**

Problema 2. Determinați funcțiile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, cu proprietatea că

$$f(f(x)) + y \cdot f(x) \leq x + x \cdot f(f(y)),$$

pentru orice x și y numere reale.

Soluție. Pentru $x = 0$ în relația inițială obținem $f(f(0)) + yf(0) \leq 0$, pentru orice $y \in \mathbb{R}$, relație adevărată doar dacă $f(0) = 0$. Într-adevăr dacă $f(0) \neq 0$, atunci $y \leq \frac{-f(f(0))}{f(0)}$ pentru orice $y \in \mathbb{R}$, sau $y \geq \frac{-f(f(0))}{f(0)}$ pentru orice $y \in \mathbb{R}$, imposibil. **1p**

Alegând $y = 0$, va rezulta $f(f(x)) \leq x$, pentru orice x real. (1) **1p**

Pentru $x = 1$ în relația inițială obținem $f(f(1)) + yf(1) \leq 1 + f(f(y))$, și folosind (1) va rezulta $f(f(1)) + yf(1) \leq 1 + y$, deci $y(f(1) - 1) \leq 1 - (f(f(1)))$, pentru orice y real, relație adevărată la fel ca mai sus doar dacă $f(1) - 1 = 0$, adică $f(1) = 1$ **1p**

În aceste condiții relația din ipoteză, pentru $x = 1$, asigură că $y \leq f(f(y))$, pentru orice y real. (2) **1p**

Din (1) și (2) obținem că $f(f(x)) = x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, și, folosind ipoteza reiese că $x + yf(x) \leq x + xy$, deci $yf(x) \leq xy$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ **1p**

Pentru $y = 1$ rezultă $f(x) \leq x$ iar pentru $y = -1$ rezultă $f(x) \geq x$, deci $f(x) = x$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, funcție care verifică relația din ipoteză. **2p**

Problema 3. Fie $n \geq 2$ un număr natural. Considerăm un pătrat de latură $2n - 1$ pe care îl împărțim prin paralele la laturi în $(2n - 1)^2$ pătrate unitate. Ana și Bogdan joacă următorul joc: începând cu Ana, cei doi colorează alternativ, Ana cu roșu iar Bogdan cu albastru, în $2n^2$ ture, cele $4n^2$ vârfuri ale pătratelor unitate. Apoi, începând cu Ana, fiecare unește printr-un vector un punct roșu (care va fi originea) cu un punct albastru (care va fi vârful), rezultând astfel $2n^2$ vectori cu originile și vârfurile distincte. Dacă suma acestor vectori este nulă, Ana câștigă. Altfel, câștigă Bogdan.

Arătați că Bogdan are o strategie câștigătoare.

Soluție.

Fie O centrul pătratului, $A_1, A_2, \dots, A_{2n^2}$ punctele albastre și $R_1, R_2, \dots, R_{2n^2}$ punctele roșii. Ana va câștiga dacă

$$\sum_{i=1}^{2n^2} \overrightarrow{R_i A_{a_i}} = \vec{0} \quad (1),$$

pentru o anumită rearanjare $a_1, a_2, \dots, a_{2n^2}$ a numerelor $1, 2, \dots, 2n^2$.

Relația (1) se scrie echivalent

$$\sum_{i=1}^{2n^2} (\overrightarrow{OA_{a_i}} - \overrightarrow{OR_i}) = \vec{0} \iff \sum_{i=1}^{2n^2} \overrightarrow{OR_i} = \sum_{i=1}^{2n^2} \overrightarrow{OA_{a_i}} \iff \sum_{i=1}^{2n^2} \overrightarrow{OR_i} = \sum_{i=1}^{2n^2} \overrightarrow{OA_i} \quad (2),$$

..... **2p**
Cum O este centru de simetrie pentru mulțimea celor $4n^2$ puncte colorate, avem

$$\sum_{i=1}^{2n^2} \overrightarrow{OR_i} + \sum_{i=1}^{2n^2} \overrightarrow{OA_i} = \vec{0}.$$

Astfel, relația (2) este echivalentă cu

$$\sum_{i=1}^{2n^2} \overrightarrow{OR_i} = \vec{0} \quad (3).$$

Așadar Ana câștigă dacă și numai dacă vectorii cu originea în O și cu vârful în punctele roșii au suma nulă. **2p**

Pentru a câștiga, Bogdan poate proceda astfel: după ce Ana colorează cu roșu un punct în penultima tură, calculează $\vec{s} = \sum_{i=1}^{2n^2-1} \overrightarrow{OR_i}$.

Dacă există punctul încă necolorat X astfel încât $\overrightarrow{OX} = -\vec{s}$, atunci el îl colorează pe X cu albastru. Astfel, el o va împiedica pe Ana să câștige deoarece

$$\sum_{i=1}^{2n^2} \overrightarrow{OR_i} = \overrightarrow{OR_{2n^2}} + \vec{s} = \overrightarrow{OR_{2n^2}} - \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{XR_{2n^2}} \neq \vec{0}.$$

..... **2p**

În caz contrar, Bogdan colorează orice punct rămas, întrucât relația (3) nu se poate îndeplini.
..... **1p**

Problema 4. Fie numerele reale $r, s \in [1, \infty)$ cu proprietatea că pentru orice numere naturale nenule a, b , cu a divide b , rezultă $[ar]$ divide $[bs]$.

- a) Demonstrați că $\frac{s}{r}$ este număr natural.
b) Arătați că r și s sunt numere naturale.

Am notat cu $[x]$ partea întreagă a numărului real x .

Soluție. a) Presupunem prin absurd că $\frac{s}{r} \notin \mathbb{N}$.

Atunci există $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $k < \frac{s}{r} < k + 1 \iff kr < s < (k + 1)r$.

Alegem $b = a \in \mathbb{N}^*$, variabil și obținem că $[ar] \mid [as]$ de unde $[ar] \mid [as] - k[ar]$ (1) **1p**

Din $s > kr$, deducem că există $u > 0$ astfel încât $us > ukr + 2$ și astfel pentru orice $a > u$ avem $as > akr + 2 \implies [as] \geq [akr] + 2 > akr + 1 > k[ar]$, deci $[as] > k[ar]$ **1p**

Din (1) rezultă că $[as] - k[ar] \geq [ar] \iff [as] \geq (k + 1)[ar]$, deci,

$$as > (k + 1)(ar - 1) \iff k + 1 > a((k + 1)r - s),$$

pentru orice $a > u$.

Astfel, $a < \frac{k + 1}{(k + 1)r - s}$, pentru orice $a > u$, contradicție, deci presupunerea făcută este falsă. **1p**

b) Să arătăm că s este natural.

Vom arăta că pentru orice $a \in \mathbb{N}$ astfel încât $ar \geq 2$, rezultă $as \in \mathbb{N}$.

Dacă prin absurd $as \notin \mathbb{N}$, atunci va exista $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\frac{1}{n+1} \leq \{as\} < \frac{1}{n}$, deci

$$1 \leq (n + 1)\{as\} < \frac{n + 1}{n} \leq 2, \text{ adică } [(n + 1)\{as\}] = 1.$$

Obținem $[(n + 1)as] = [(n + 1)[as] + (n + 1)\{as\}] = (n + 1)[as] + [(n + a)\{as\}] = (n + 1)[as] + 1$.

Cum $[ar] \mid [as]$ și $[ar] \mid [(n + 1)as]$, rezultă că $[ar] \mid 1 \implies [ar] = 1$, imposibil.

Așadar $as \in \mathbb{N}$, pentru orice $a \in \mathbb{N}$ cu $ar \geq 2$, de unde $(a + 1)s \in \mathbb{N}$, deci $(a + 1)s - as = s \in \mathbb{N}$.

..... **2p**

Să arătăm în final că r este natural.

Fie p un număr prim oarecare cu $p[r] > s$ și $m = [p\{r\}]$. Cum $p\{r\} < p$, deducem $m < p$.

Dacă prin absurd $m \neq 0$, atunci $(m, p) = 1$. Cum $[pr] \mid ps \implies [p([r] + \{r\})] \mid ps \implies p[r] + m \mid ps$.

Deoarece $(p[r] + m, p) = 1 \implies p[r] + m \mid s$, imposibil, căci $p[r] > s$.

Așadar $m = 0 \implies p\{r\} < 1 \implies \{r\} < \frac{1}{p}$, oricare ar fi p , prim, cu $p > \frac{s}{[r]} \implies \{r\} = 0$ și deci $r \in \mathbb{N}$ **2p**



MINISTERUL EDUCAȚIEI



SOCIETATEA DE ȘTIINȚE
MATEMATICE DIN ROMÂNIA



Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Națională, Craiova, 11 aprilie 2023

CLASA a X-a – soluții și bareme

Problema 1. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația:

$$2(5^x + 6^x - 3^x) = 7^x + 9^x.$$

Soluție.

Observăm că $x = 0$ și $x = 1$ sunt soluții ale ecuației. **1p**

Demonstrăm că acestea sunt unicele soluții. Ecuația din enunț se poate rescrie:

$$5^x \left(\left(\frac{7}{5} \right)^x + \left(\frac{3}{5} \right)^x - 2 \right) + 6^x \left(\left(\frac{9}{6} \right)^x + \left(\frac{3}{6} \right)^x - 2 \right) = 0.$$

..... **1p**

Considerând funcțiile $f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_a(x) = a^x + (2-a)^x - 2$, cu $a \in (0, 2) \setminus \{1\}$, observăm că acestea sunt strict convexe cu $f_a(0) = f_a(1) = 0$ **2p**

Din stricta convexitate a lui f_a avem:

$$f_a(x) = f_a(x \cdot 1 + (1-x) \cdot 0) < x \cdot f_a(1) + (1-x) \cdot f_a(0) = 0, \quad \forall x \in (0, 1),$$

și

$$f_a(1) = f_a\left(\frac{x-1}{x} \cdot 0 + \left(1 - \frac{x-1}{x}\right) \cdot x\right) < \frac{x-1}{x} f_a(0) + \frac{1}{x} f_a(x), \quad \forall x \in (1, \infty),$$

$$f_a(0) = f_a\left(\frac{1}{1-x} \cdot x + \left(1 - \frac{1}{1-x}\right) \cdot 1\right) < \frac{1}{1-x} f_a(x) + \frac{-x}{1-x} f_a(1), \quad \forall x \in (-\infty, 0),$$

de unde putem deduce că $f_a(x) > 0$ pentru orice $x \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ **2p**

Ecuația din enunț se poate rescrie:

$$5^x f_{\frac{7}{5}}(x) + 6^x f_{\frac{9}{6}}(x) = 0,$$

deci membrul stâng este mai mic strict decât 0 pentru $x \in (0, 1)$ și este mai mare strict decât 0 pentru $x \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$, adică ecuația are doar soluțiile $x = 0$ și $x = 1$ **1p**

Problema 2. Determinați cel mai mare număr natural k având proprietatea că există numărul natural n astfel încât:

$$\sin(n+1) < \sin(n+2) < \sin(n+3) < \dots < \sin(n+k).$$

Notă: Aproximarea prin lipsă a lui π la a patra zecimală este 3,1415.

Soluție. Demonstrăm că maximul căutat este $k = 5$.

Diferența a doi termeni consecutivi este:

$$\sin(n+i+1) - \sin(n+i) = 2 \sin \frac{1}{2} \cos \frac{2n+2i+1}{2} > 0 \Leftrightarrow \cos \frac{2n+2i+1}{2} > 0. \quad (*)$$

..... **2p**

Presupunem prin reducere la absurd că pentru $k = 6$ există un număr natural n astfel încât $\sin(n+1) < \sin(n+2) < \sin(n+3) < \sin(n+4) < \sin(n+5) < \sin(n+6)$. Condiția $(*)$ se reduce la:

$$\cos \left(n + \frac{2i+1}{2} \right) > 0, \quad i = \overline{1, 5},$$

care ar implica:

$$\cos \left(n + \frac{3}{2} \right) + \cos \left(n + \frac{11}{2} \right) = 2 \cos 2 \cdot \cos \left(n + \frac{7}{2} \right) > 0 \Rightarrow \cos 2 > 0,$$

ceea ce este o contradicție. Așadar, $k \leq 5$ **2p**

Pentru $k = 5$ trebuie să construim un exemplu care, conform $(*)$, se reduce la a determina un $n \in \mathbb{N}$ pentru care avem $\cos \left(n + \frac{2i+1}{2} \right) > 0, i = \overline{1, 4}$. Funcția $\cos(x)$ este pozitivă pentru $x \in [2m\pi - \frac{\pi}{2}, 2m\pi + \frac{\pi}{2}]$, $m \in \mathbb{Z}$ **1p**

Din condiția:

$$2m\pi - \frac{\pi}{2} < n + \frac{3}{2} < n + \frac{9}{2} < 2m\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow (4m-1) \cdot 10\pi < 20n+30 < 20n+90 < (4m+1) \cdot 10\pi,$$

folosind încadrarea $3, 14 < \pi < 3, 15$, obținem o condiție suficientă:

$$(4m-1) \cdot 31,5 < 20n+30 < 20n+90 < (4m+1) \cdot 31,4 \Rightarrow m \leq 7.$$

..... **1p**

Considerând $m = 7$ obținem următoarea încadrare pentru n :

$$\frac{27\pi-3}{2} < n < \frac{29\pi-9}{2},$$

ceea ce, folosind încadrarea $3, 141 < \pi < 3, 142$, implică $n = 41$. Așadar, pentru $k = 5$ putem considera $n = 41$, de unde obținem că maximul căutat este $k = 5$ **1p**

Notă: Se acordă **3 puncte** pentru orice construcție alternativă pentru $k = 5$.

Problema 3. Se consideră triunghiul ABC oarecare și punctele mobile M pe semidreapta BC , N pe semidreapta CA și P pe semidreapta AB care pornesc simultan din B, C și, respectiv, A și se deplasează cu vitezele constante $v_1, v_2, v_3 > 0$, exprimate prin aceeași unitate de măsură.

(a) Știind că există trei momente distincte în care triunghiul MNP este echilateral, demonstrați că triunghiul ABC este echilateral și, în plus, $v_1 = v_2 = v_3$.

(b) Demonstrați că dacă $v_1 = v_2 = v_3$ și există un moment în care triunghiul MNP este echilateral, atunci triunghiul ABC este echilateral.

Soluție. Fie $a, b, c \in \mathbb{C}$ afixele vârfurilor triunghiului ABC . Pentru $t \geq 0$ avem următoarele expresii pentru afixele punctelor $M(t)$, $N(t)$ și $P(t)$:

$$\begin{cases} m(t) = b \cdot (1 - v_1 \cdot t) + c \cdot v_1 \cdot t; \\ n(t) = c \cdot (1 - v_2 \cdot t) + a \cdot v_2 \cdot t; \\ p(t) = a \cdot (1 - v_3 \cdot t) + b \cdot v_3 \cdot t. \end{cases}$$

..... **1p**

Condiția ca triunghiul MNP să fie echilateral la un moment dat $t \geq 0$ se poate scrie:

$$m(t) + \varepsilon n(t) + \bar{\varepsilon} p(t) = 0,$$

unde $\varepsilon \in \left\{ \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \right\}$. Această relație este echivalentă cu:

$$t(-bv_1 + cv_1 - \varepsilon cv_2 + \varepsilon av_2 - \bar{\varepsilon} av_3 + \bar{\varepsilon} bv_3) + b + \varepsilon c + \bar{\varepsilon} a = 0, \quad (*)$$

pentru orice moment $t \geq 0$ pentru care triunghiul MNP este echilateral. **1p**

a) Deoarece relația (*) are loc pentru trei valori distincte $t_1, t_2, t_3 \geq 0$, conform principiului cutiei, există $\varepsilon \in \left\{ \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \right\}$ pentru care relația (*) se va realiza pentru două momente distincte $t_i, t_j \geq 0, 1 \leq i < j \leq 3$, de unde rezultă că:

$$\begin{cases} (b-c)v_1 + \varepsilon(c-a)v_2 + \bar{\varepsilon}(a-b)v_3 = 0; \\ b + \varepsilon c + \bar{\varepsilon} a = 0. \end{cases}$$

A doua relație de mai sus este echivalentă cu a avea triunghiul ABC echilateral. **1p**

Pe de altă parte, prima relație ne permite să facem o translație a triunghiului ABC astfel încât centrul cercului său circumscris să fie de afix 0. Cum ABC este echilateral, avem $b = \varepsilon a$ și $c = \bar{\varepsilon} a$ sau $b = \bar{\varepsilon} a$ și $c = \varepsilon a$. Fără a pierde generalitatea, considerăm primul caz și obținem:

$$(\varepsilon a - \bar{\varepsilon} a)v_1 + \varepsilon(\bar{\varepsilon} a - a)v_2 + \bar{\varepsilon}(a - \varepsilon a)v_3 = 0 \Rightarrow (\varepsilon - \varepsilon^2)v_1 + (1 - \varepsilon)v_2 + (\varepsilon^2 - 1)v_3 = 0,$$

iar prin împărțire cu $1 - \varepsilon \neq 0$ și ținând cont de $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}$, avem:

$$\varepsilon v_1 + v_2 - v_3 - \varepsilon v_3 = 0 \Rightarrow v_1 = v_2 = v_3.$$

..... **2p**

Remarcă: Alternativ, din a doua relație, folosind $\bar{\varepsilon} = -1 - \varepsilon$, deducem $b - a = \varepsilon(a - c)$ și apoi, înlocuind în prima relație și împărțind cu $c - a \neq 0$, vom obține $v_1 - v_3 = \varepsilon(v_2 - v_1)$. Mai departe, ținând cont că $v_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, 3}$ vom obține $v_1 = v_2 = v_3$.

b) Dacă $v_1 = v_2 = v_3 = v$, relația (*) se poate scrie:

$$t \cdot v \cdot ((c - b) + \varepsilon(a - c) + \bar{\varepsilon}(b - a)) + b + \varepsilon c + \bar{\varepsilon} a = 0,$$

care este invariantă la translații, rotații și omotetii, deci putem fixa $a = 1$ și $c = \bar{\varepsilon}$ și obținem:

$$(b - \varepsilon)(t \cdot v \cdot (\bar{\varepsilon} - 1) + 1) = 0,$$

iar cum a doua paranteză nu poate fi 0, rămâne $b = \varepsilon$, de unde obținem că triunghiul ABC este echilateral, ceea ce încheie problema. **2p**

Problema 4. Într-un muzeu de artă sunt expuse n tablouri, $n \geq 33$, pentru care sunt folosite în total 15 culori astfel încât oricare două tablouri au cel puțin o culoare comună și nu există două tablouri care să aibă exact aceleași culori. Determinați toate valorile posibile ale lui $n \geq 33$ astfel încât oricum am colora tablourile cu proprietățile de mai sus să putem alege patru tablouri distincte pe care să le numerotăm T_1, T_2, T_3 și T_4 , astfel încât orice culoare care este folosită atât în T_1 , cât și în T_2 , se regăsește în T_3 sau în T_4 .

Soluție.

Vom demonstra că orice n pentru care $33 \leq n \leq 2^{14}$ este bun.

Începem prin a observa că dacă avem un tablou T_i în muzeu în care sunt folosite k culori, tabloul în care sunt folosite celelalte $15 - k$ culori nu se poate regăsi în muzeu. Așadar, din cele $2^{15} - 1$ tablouri posibile a fi obținute cu cele 15 culori, avem maxim 2^{14} tablouri în muzeu, iar maximul se poate atinge dacă am considera toate tablourile care folosesc culoarea c_1 împreună cu toate celelalte 2^{14} submulțimi ale culorilor $\{c_2, \dots, c_{15}\}$ **1p**

Demonstrăm acum că pentru orice $33 \leq n \leq 2^{14}$ putem găsi tablourile T_1, T_2, T_3, T_4 cu proprietățile din enunț. Prin $T_i \cap T_j$ și $T_i \cup T_j$ înțelegem mulțimea culorilor comune, respectiv mulțimea tuturor culorilor folosite în tablourile T_i și T_j . Trebuie să demonstrăm că există $i_1, i_2, i_3, i_4 \in \{1, 2, \dots, n\}$ astfel încât:

$$(T_{i_1} \cap T_{i_2}) \subset T_{i_3} \cup T_{i_4}$$

Presupunem prin absurd că oricum am lua $i < j$ și $k < \ell$ din $\{1, 2, \dots, n\}$ cu $\{i, j\} \cap \{k, \ell\} = \emptyset$, avem:

$$|(T_i \cap T_j) \setminus (T_k \cup T_\ell)| \geq 1.$$

Studiind suma:

$$S = \sum_{\substack{1 \leq i < j \leq n \\ 1 \leq k < \ell \leq n \\ \{i, j\} \cap \{k, \ell\} = \emptyset}} |(T_i \cap T_j) \setminus (T_k \cup T_\ell)|,$$

..... **2p**

observăm că aceasta are $C_n^2 \cdot C_{n-2}^2$ termeni, fiecare dintre aceștia fiind mai mari sau egali cu 1, obținem:

$$S \geq \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{(n-2)(n-3)}{2}.$$

..... **1p**

Facem acum numărarea pentru culorile c_m , $m = \overline{1, 15}$ și fie n_m numărul tablourilor T_i care conțin culoarea c_m . Pentru ca $c_m \in (T_i \cap T_j) \setminus (T_k \cup T_\ell)$, trebuie ca $c_m \in T_i, T_j$ și $c_m \notin T_k, T_\ell$. Dacă $n_m \in \{0, 1, n-1, n\}$, atunci nu există tuplet (T_i, T_j, T_k, T_ℓ) pentru care $c_m \in (T_i \cap T_j) \setminus (T_k \cup T_\ell)$. Pentru $2 \leq n_m \leq n-2$ perechea (T_i, T_j) se poate alege în $C_{n_m}^2$ moduri, iar perechea (T_k, T_ℓ) în $C_{n-n_m}^2$ moduri. Așadar, avem:

$$S = \sum_{\substack{m=1 \\ 2 \leq n_m \leq n-2}}^{15} \frac{n_m(n_m-1)}{2} \frac{(n-n_m)(n-n_m-1)}{2}.$$

..... **2p**

Din inegalitatea mediilor avem $n_m(n-n_m) \leq \left(\frac{n}{2}\right)^2$ și $(n_m-1)(n-1-n_m) \leq \left(\frac{n-2}{2}\right)^2$, de unde obținem:

$$S \leq \sum_{\substack{m=1 \\ 2 \leq n_m \leq n-2}}^{15} \frac{1}{4} \left(\frac{n}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{n-2}{2}\right)^2 \leq 15 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{n-2}{2}\right)^2 < \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{(n-2)(n-3)}{2}, \quad \forall n \geq 33,$$

ceea ce este o contradicție. Deci, pentru orice $33 \leq n \leq 2^{14}$ avem patru tablouri cu proprietatea din enunț. **1p**



MINISTERUL EDUCAȚIEI



SOCIETATEA DE ȘTIINȚE
MATEMATICE DIN ROMÂNIA



Olimpiada Națională de Matematică Etapa Națională, Craiova, 11 aprilie 2023

CLASA a XI-a – soluții și bareme

Problema 1. Determinați funcțiile de două ori derivabile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care verifică relația $(f'(x))^2 + f''(x) \leq 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Soluție.

Varianta 1.

Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție care satisface condițiile din enunț. Definim funcția $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ prin $g(x) = e^{f(x)}$, $x \in \mathbb{R}$. Funcția g este de două ori derivabilă. Avem $g'(x) = f'(x)e^{f(x)}$ și $g''(x) = e^{f(x)} \left((f'(x))^2 + f''(x) \right)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ **2p**

Din ipoteză deducem $g''(x) \leq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Atunci funcția g' este descrescătoare, deci există limitele $\ell_1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} g'(x)$ și $\ell_2 = \lim_{x \rightarrow \infty} g'(x)$, cu $\ell_1, \ell_2 \in \overline{\mathbb{R}}$ **1p**

Cu regula lui l'Hôpital obținem $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} g'(x) = \ell_1$ și $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} g'(x) = \ell_2$ **1p**

Din $g(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, rezultă $\ell_1 \leq 0$ și $\ell_2 \geq 0$ **1p**

Cum g' este descrescătoare, cu $\ell_1 \leq 0$ și $\ell_2 \geq 0$, deducem $g'(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Atunci g este o funcție constantă, strict pozitivă, deci și $f = \ln(g)$ este o funcție constantă. Reciproc, orice funcție constantă f satisface condițiile din enunț **2p**

Varianta 2.

Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție care satisface condițiile din enunț. Definim funcția $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ prin $g(x) = e^{f(x)}$, $x \in \mathbb{R}$. Funcția g este de două ori derivabilă. Avem $g'(x) = f'(x)e^{f(x)}$ și $g''(x) = e^{f(x)} \left((f'(x))^2 + f''(x) \right)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ **2p**

Din ipoteză rezultă $g''(x) \leq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Atunci g este concavă pe $\mathbb{R}$, deci satisface inegalitatea $\frac{g(y) - g(x)}{y - x} \geq \frac{g(z) - g(y)}{z - y}$, pentru oricare $x, y, z \in \mathbb{R}$, cu $x < y < z$ **1p**

Arătăm că g este o funcție constantă. Presupunem prin absurd că există $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, astfel încât $g(a) \neq g(b)$ **1p**

Cazul 1. $g(a) < g(b)$. Din inegalitatea $\frac{g(a) - g(x)}{a - x} \geq \frac{g(b) - g(a)}{b - a}$, pentru oricare $x < a$, obținem $g(x) \leq \frac{g(b) - g(a)}{b - a}(x - a) + g(a)$, pentru oricare $x \in (-\infty, a)$. Rezultă $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$.

Cazul 2. $g(a) > g(b)$. Din inegalitatea $\frac{g(b) - g(a)}{b - a} \geq \frac{g(x) - g(b)}{x - b}$, pentru oricare $x > b$, obținem $g(x) \leq \frac{g(b) - g(a)}{b - a}(x - b) + g(b)$, pentru oricare $x \in (b, \infty)$. Rezultă $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = -\infty$.

În ambele cazuri este contrazisă inegalitatea $g(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Prin urmare, g este o funcție constantă, strict pozitivă, deci și $f = \ln(g)$ este o funcție constantă. Reciproc, orice funcție constantă f satisface condițiile din enunț **3p**

Problema 2. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Arătați că $\text{rang}(A) = \text{rang}(B)$ dacă și numai dacă există matricele inversabile $X, Y, Z \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ astfel încât $AX + YB = AZB$.

Soluție.

1. Presupunem că există matricele inversabile $X, Y, Z \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ astfel încât $AX + YB = AZB$. Atunci $\text{rang}(A) = \text{rang}(AX) = \text{rang}((AZ - Y)B) \leq \text{rang}(B)$. Analog, $\text{rang}(B) \leq \text{rang}(A)$. Rezultă $\text{rang}(A) = \text{rang}(B)$ **3p**

2. Presupunem $\text{rang}(A) = \text{rang}(B) = r$. Atunci există matricele inversabile $T, U, V, W \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ astfel încât $TAU = \begin{pmatrix} I_r & O_{r, n-r} \\ O_{n-r, r} & O_{n-r} \end{pmatrix} = VBW$ **1p**

Rezultă $A(UW^{-1}) = (T^{-1}V)B$. Alegem $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât $\det(B - \lambda(UW^{-1})) \neq 0$ și $\det(A + \lambda(T^{-1}V)) \neq 0$. Fie matricele inversabile $X = B - \lambda(UW^{-1})$ și $Y = A + \lambda(T^{-1}V)$. Obținem $AX + YB = 2AB - \lambda A(UW^{-1}) + \lambda(T^{-1}V)B = AZB$, unde $Z = 2I_n$ **3p**

Problema 3. Fie un număr natural $n \geq 2$ și matricele $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, cu proprietatea $A^2B = A$.

a) Demonstrați că $(AB - BA)^2 = O_n$.

b) Arătați că pentru oricare număr natural $k \leq n/2$ există matricele $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ cu proprietatea din enunț astfel încât $\text{rang}(AB - BA) = k$.

Soluție.

a) Varianta 1.

Dacă A este inversabilă sau $A = O_n$ atunci $AB - BA = O_n$. Fie $A \neq O_n$, cu $\det(A) = 0$, iar $P \in \mathbb{C}[X]$ polinomul său minimal. Cum $P(0) = 0$ și $P \neq X$, polinomul P este de forma $P = X^k + a_{k-1}X^{k-1} + \dots + a_1X$, unde $2 \leq k \leq n$. Din relația $P(A)B = O_n$ și ipoteză, obținem

$$A^{k-1} + a_{k-1}A^{k-2} + \dots + a_2A + a_1AB = O_n. \quad (1)$$

Cum P este minimal, avem $a_1 \neq 0$. Ca urmare, $AB = -\frac{1}{a_1}(A^{k-1} + a_{k-1}A^{k-2} + \dots + a_2A)$, deci AB comută cu A . Rezultă $A = A^2B = A(AB) = ABA$ **2p**
Atunci, înmulțind la dreapta relația (1) cu BA , obținem

$$A^{k-1} + a_{k-1}A^{k-2} + \dots + a_2A + a_1AB^2A = O_n. \quad (2)$$

Din (1) și (2) rezultă $a_1(AB^2A - AB) = O_n$. Cum $a_1 \neq 0$, obținem $AB^2A = AB$ **2p**
Ca urmare,

$$(AB - BA)^2 = (ABA)B - AB^2A - B(A^2B) + B(ABA) = AB - AB - BA + BA = O_n.$$

..... **1p**

a) Varianta 2.

Din $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^2B) \leq \text{rang}(A^2) \leq \text{rang}(A)$, obținem $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^2)$ **1p**
Fie $r = \text{rang}(A)$. Există matricele $X \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{C})$ și $Y \in \mathcal{M}_{r,n}(\mathbb{C})$, cu $\text{rang}(X) = \text{rang}(Y) = r$, astfel încât $A = XY$. Avem $YX \in \mathcal{M}_r(\mathbb{C})$ și

$$r = \text{rang}(A) = \text{rang}(A^2) = \text{rang}((XY)^2) = \text{rang}(X(YX)Y) \leq \text{rang}(YX).$$

Rezultă că matricea YX este inversabilă. Multiplicând la stânga cu Y relația din ipoteză $(XY)^2B = XY$, obținem $(YX)^2YB = (YX)Y$. Din inversabilitatea matricei YX , rezultă $YB = (YX)^{-1}Y$, de unde $YBX = I_r$. Atunci $ABA = (XY)B(XY) = X(YBX)Y = XY = A$.
..... **1p**

Pe baza ipotezei și relației $ABA = A$, deducem

$$\begin{aligned}(AB - BA)^2 &= (AB)^2 + (BA)^2 - AB^2A - BA^2B = (ABA)B + B(ABA) - AB^2A - B(A^2B) \\ &= AB + BA - AB^2A - BA = AB(I_n - BA)\end{aligned}$$

Utilizând relațiile $ABA = A$ și $(AB - BA)^2 = AB(I_n - BA)$, demonstrate anterior, obținem

$$\begin{aligned}(AB - BA)^3 &= AB(I_n - BA)(AB - BA) = AB(AB - BA - BA^2B + (BA)^2) \\ &= AB(AB - BA - B(A^2B) + B(ABA)) = AB(AB - BA - BA + BA) = AB(AB - BA) \\ &= (ABA)B - AB^2A = AB - (AB)(BA) = AB(I_n - BA).\end{aligned}$$

Astfel, $(AB - BA)^3 = (AB - BA)^2 \cdot (1)$ **1p**

Fie $\lambda \in \mathbb{C}$ o valoare proprie a matricei $AB - BA$. Din relația (1) obținem $\lambda^3 = \lambda^2$, deci $\lambda \in \{0, 1\}$. Dar $\text{Tr}(AB - BA) = 0$. Atunci matricea $AB - BA$ are toate valorile proprii nule. Ca urmare, $(AB - BA)^n = O_n$. Din relația (1) rezultă $(AB - BA)^2 = O_n$ **2p**

b) Alegem $A = \begin{pmatrix} O_{n-k} & O_{n-k,k} \\ O_{k,n-k} & I_k \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} O_{n-k} & C \\ O_{k,n-k} & I_k \end{pmatrix}$, unde $C \in \mathcal{M}_{n-k,k}(\mathbb{C})$ este o matrice cu $\text{rang}(C) = k \leq n - k$ (pentru $k = 0$, vom înțelege $A = B = O_n$). Avem $A^2B = AB = A$, $BA = B$ și $AB - BA = A - B = \begin{pmatrix} O_{n-k} & -C \\ O_{k,n-k} & O_k \end{pmatrix}$, deci $\text{rang}(AB - BA) = k$.
..... **2p**

Remarcă. Reciproc, pentru oricare $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel ca $A^2B = A$, are loc inegalitatea $\text{rang}(AB - BA) \leq n/2$.

Problema 4. Considerăm o funcție $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pentru care există o funcție derivabilă $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și există un șir $(a_n)_{n \geq 1}$ de numere reale strict pozitive, convergent la 0, astfel încât

$$g'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x + a_n) - f(x)}{a_n},$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

a) Dați un exemplu de o astfel de funcție f care nu este derivabilă în niciun punct $x \in \mathbb{R}$.

b) Arătați că dacă f este continuă pe $\mathbb{R}$ atunci f este derivabilă pe $\mathbb{R}$.

Soluție.

a) Considerăm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$. Fie șirul $(a_n)_{n \geq 1}$, cu termenii strict pozitivi $a_n = 1/n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, convergent la 0. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, avem $x + a_n \in \mathbb{Q}$, $\forall x \in \mathbb{Q}$ și $x + a_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Astfel, $f(x + a_n) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Rezultă

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x + a_n) - f(x)}{a_n} = 0 = g'(x), \forall x \in \mathbb{R}$, unde g este o funcție constantă arbitrară. Funcția

f este discontinuă în orice punct $x \in \mathbb{R}$, deci nederivabilă în orice punct $x \in \mathbb{R}$ **2p**

b) Considerăm funcția $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h = f - g$. Funcția h este continuă ca diferență de funcții continue **1p**

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h(x + a_n) - h(x)}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x + a_n) - f(x)}{a_n} - g'(x) = 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ **1p**

Fie $x, y \in \mathbb{R}$, cu $x < y$. Fie $c > 0$ și $A(c) = \{z \in [x, y] \mid |h(z) - h(x)| \leq c(z - x)\}$. Cum $x \in A(c) \subset [x, y]$, există $s = \sup A(c) \in [x, y]$. Din continuitatea lui h rezultă $s \in A(c)$. Presupunem, prin absurd, $s < y$. Atunci există $n_1 \in \mathbb{N}^*$ astfel ca $s + a_n < y, \forall n \geq n_1$. Din

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h(s + a_n) - h(s)}{a_n} = 0$, rezultă că există $n_2 \geq n_1$ astfel ca $\left| \frac{h(s + a_{n_2}) - h(s)}{a_{n_2}} \right| < c$. Atunci $s < s + a_{n_2} < y$ și au loc inegalitățile

$$|h(s + a_{n_2}) - h(x)| \leq |h(s) - h(x)| + |h(s + a_{n_2}) - h(s)| < c(s - x) + ca_{n_2} = c[(s + a_{n_2}) - x].$$

Rezultă $s + a_{n_2} \in A(c)$, în contradicție cu $s = \sup A(c)$. Prin urmare $y = s \in A(c)$, deci $|h(y) - h(x)| \leq c(y - x)$. Cum $c > 0$ este arbitrar, deducem $h(x) = h(y)$. Rezultă că h este o funcție constantă **2p**

Atunci $f = g + h$ este derivabilă pe $\mathbb{R}$, cu $f' = g'$ **1p**



MINISTERUL EDUCAȚIEI



SOCIETATEA DE ȘTIINȚE
MATEMATICE DIN ROMÂNIA



Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Națională, Craiova, 11 aprilie 2023

CLASA a XII-a – soluții și bareme

Problema 1. Fie $(G, \cdot)$ un grup finit de ordinul $n \in \mathbb{N}^*$, unde $n \geq 2$. Vom spune că grupul $(G, \cdot)$ este aranjabil dacă există o ordonare a elementelor sale, astfel încât

$$G = \{a_1, a_2, \dots, a_k, \dots, a_n\} = \{a_1 \cdot a_2, a_2 \cdot a_3, \dots, a_k \cdot a_{k+1}, \dots, a_n \cdot a_1\}.$$

- a) Determinați toate numerele naturale nenule n pentru care grupul $(\mathbb{Z}_n, +)$ este aranjabil.
b) Dați un exemplu de grup de ordin par care este aranjabil.

Soluție:

a) Vom arăta că grupul $(\mathbb{Z}_n, +)$ este un grup aranjabil dacă și numai dacă n este un număr natural impar.

Dacă $(G, \cdot)$ este un grup aranjabil abelian, atunci considerând aranjarea

$$G = \{a_1, a_2, \dots, a_k, \dots, a_n\} = \{a_1 \cdot a_2, a_2 \cdot a_3, \dots, a_k \cdot a_{k+1}, \dots, a_n \cdot a_1\}, \text{ avem}$$

$$\prod_{g \in G} g = \prod_{k=1}^n a_k = \prod_{k=1}^n (a_k \cdot a_{k+1}) = \left(\prod_{g \in G} g \right)^2,$$

(unde $a_{n+1} = a_1$), astfel că $\prod_{g \in G} g = 1$, unde 1 este elementul neutru al grupului $(G, \cdot)$ **2p**

În orice grup abelian finit avem că produsul tuturor elementelor sale este egal cu produsul elementelor sale de ordin 2.

Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, dacă $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ cu $\text{ord}(\widehat{k}) = 2$, înseamnă că

$$\widehat{k} \neq \widehat{0} = \widehat{k} + \widehat{k} = \widehat{2k},$$

adică n divide $2k$, dar nu divide k . Acest lucru este posibil doar dacă n este par și $n = 2k$. Astfel, dacă n este par, cu $n = 2k$, și $(\mathbb{Z}_n, +)$ ar fi aranjabil, am avea

$$\widehat{0} = \sum_{x \in \mathbb{Z}_n} x = \widehat{k},$$

ceea ce este fals. Prin urmare, dacă n este par, grupul $(\mathbb{Z}_n, +)$ nu este aranjabil. **1p**

Fie acum n un număr natural impar. Considerăm mulțimea $[0, n-1]_{\mathbb{N}} = \{0, 1, \dots, n-1\}$ și funcția $f : [0, n-1]_{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{Z}_n$ definită prin $f(k) = \widehat{2k+1}$. Cum

$$f(k) = f(l) \iff \widehat{2k+1} = \widehat{2l+1} \iff n|(2k-2l) \iff n|(k-l) \iff k = l,$$

funcția f este injectivă și cum $[0, n-1]_{\mathbb{N}}$ și $\mathbb{Z}_n$ sunt mulțimi finite cu același număr de elemente, rezultă că f este bijectivă. Notând $a_k = \widehat{k-1}$ pentru orice $1 \leq k \leq n$ și $a_{n+1} = a_1$,

rezultă atunci că $a_k + a_{k+1} = f(k-1)$ pentru orice $k = \overline{1, n}$, astfel că $\mathbb{Z}_n = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} = \{f(0), f(1), \dots, f(k), \dots, f(n-1)\} = \{a_1 + a_2, a_2 + a_3, \dots, a_{k-1} + a_k, \dots, a_n + a_1\}$, de unde deducem că grupul $(\mathbb{Z}_n, +)$ este aranjabil.

..... **1p**
 Mulțimea numerelor naturale cu proprietatea că grupul $(\mathbb{Z}_n, +)$ este aranjabil este prin urmare mulțimea numerelor naturale impare. **1p**

b) Conform punctului a), nu există grupuri aranjabile ciclice de ordin par. Considerăm $\mathbb{Z}_4 = \{\widehat{0}, \widehat{1}, \widehat{2}, \widehat{3}\}$, $\mathbb{Z}_2 = \{\widehat{0}, \widehat{1}\}$ și grupul $G = \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$ cu operația de adunare pe componente $(\widehat{k}, \widehat{l}) + (\widehat{m}, \widehat{n}) = (\widehat{k+m}, \widehat{l+n})$. Atunci

$$G = \{a_1 = (\widehat{0}, \widehat{0}), a_2 = (\widehat{1}, \widehat{0}), a_3 = (\widehat{1}, \widehat{1}), a_4 = (\widehat{3}, \widehat{1}), a_5 = (\widehat{2}, \widehat{0}), a_6 = (\widehat{2}, \widehat{1}), a_7 = (\widehat{0}, \widehat{1}), a_8 = (\widehat{3}, \widehat{0})\} = \\ = \{a_1 + a_2, a_2 + a_3, a_3 + a_4, a_4 + a_5, a_5 + a_6, a_6 + a_7, a_7 + a_8, a_8 + a_1\},$$

astfel că $(G, +)$ este un grup aranjabil de ordin 8. **2p**

Problema 2. Fie p un număr prim, n un număr natural nedivizibil prin p , iar $\mathbb{K}$ un corp comutativ cu p^n elemente, cu elementul unitate $1_{\mathbb{K}}$ și elementul nul $\widehat{0} = 0_{\mathbb{K}}$. Pentru orice $m \in \mathbb{N}^*$ notăm $\widehat{m} = \underbrace{1_{\mathbb{K}} + 1_{\mathbb{K}} + \dots + 1_{\mathbb{K}}}_{\text{de } m \text{ ori}}$ și definim polinomul

$$f_m = \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \widehat{C_m^k} X^{p^k} \in \mathbb{K}[X].$$

- a) Arătați că mulțimea rădăcinilor polinomului f_1 este $\{\widehat{k} \mid k \in \{0, 1, \dots, p-1\}\}$.
 b) Fie $m \in \mathbb{N}^*$ oarecare. Determinați mulțimea rădăcinilor din corpul $\mathbb{K}$ ale polinomului f_m .

Soluție:

a) Pentru orice polinom $P \in \mathbb{K}[X]$ vom nota cu Z_P mulțimea rădăcinilor sale din $\mathbb{K}$. Deoarece $|\mathbb{K}| = p^n$, caracteristica corpului $\mathbb{K}$ este $\text{char}(\mathbb{K}) = p$. Atunci $\widehat{m} = \widehat{0}$ pentru orice multiplu m al lui p . În particular, cum $k^p \equiv k \pmod{p}$ pentru orice $k \in \mathbb{Z}$, avem că

$$f_1(\widehat{k}) = (\widehat{k})^p - \widehat{k} = \widehat{k^p} - \widehat{k} = \widehat{k^p - k} = \widehat{0},$$

pentru orice $k \in \{0, 1, \dots, p-1\}$. Prin urmare, $\{\widehat{k} \mid k = \overline{0, p-1}\} \subseteq Z_{f_1}$. De asemenea, deoarece $\mathbb{K}$ este un corp comutativ, $|Z_{f_1}| \leq \text{grad}(f_1) = p$. Rezultă că $Z_{f_1} = \{\widehat{k} \mid k = \overline{0, p-1}\}$ **2p**

b) Deoarece $p \mid C_p^k$, pentru orice $k = \overline{1, p-1}$, rezultă că $(a+b)^p = a^p + b^p$, pentru orice $a, b \in \mathbb{K}$, și inductiv $(a+b)^{p^k} = a^{p^k} + b^{p^k}$ pentru orice $a, b \in \mathbb{K}$ și orice $k \in \mathbb{N}$. Atunci pentru orice $m \in \mathbb{N}^*$ avem:

$$f_m(f_1(X)) = \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \widehat{C_m^k} (X^p - X)^{p^k} = \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \widehat{C_m^k} (X^{p^{k+1}} - X^{p^k}) = \\ = \sum_{k=0}^{m+1} (-1)^{m+1-k} (\widehat{C_m^k} + \widehat{C_m^{k-1}}) X^{p^k} = \sum_{k=0}^{m+1} (-1)^{m+1-k} \widehat{C_{m+1}^k} X^{p^k} = f_{m+1}(X).$$

..... **2p**
 Arătăm prin inducție după $m \in \mathbb{N}^*$ că $Z_{f_m} = \{\widehat{k} \mid k = \overline{0, p-1}\}$ pentru orice $m \in \mathbb{N}^*$, ceea ce va rezolva problema. Pentru $m = 1$ am arătat acest lucru la a). Să presupunem acum că proprietatea are loc pentru un $m \in \mathbb{N}^*$ oarecare. Demonstrăm că ea are loc atunci și pentru $m + 1$:

Pentru orice $k \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ avem

$$f_{m+1}(\widehat{k}) = f_m(f_1(\widehat{k})) = f_m(\widehat{0}) = \widehat{0},$$

astfel că $\{\widehat{k} \mid k = \overline{0, p-1}\} \subseteq Z_{f_{m+1}}$ **1p**

Fie $\alpha \in Z_{f_{m+1}}$ oarecare. Atunci $f_m(f_1(\alpha)) = f_{m+1}(\alpha) = \widehat{0}$, deci $f_1(\alpha) \in Z_{f_m}$. Prin urmare, există $k \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ astfel încât $f_1(\alpha) = \widehat{k}$. Obținem că

$$\alpha^p = \alpha + \widehat{k},$$

$$\alpha^{p^2} = (\alpha + \widehat{k})^p = \alpha^p + \widehat{k}^p = (\alpha + \widehat{k}) + \widehat{k} = \alpha + 2 \cdot \widehat{k},$$

și, inductiv, dacă $\alpha^{p^m} = \alpha + m \cdot \widehat{k}$, atunci $\alpha^{p^{m+1}} = (\alpha + m \cdot \widehat{k})^p = \alpha + (m+1) \cdot \widehat{k}$. În grupul multiplicativ $(\mathbb{K}^*, \cdot)$ avem $x^{p^n-1} = 1$ pentru orice $x \in \mathbb{K}^*$, astfel că $x^{p^n} = x$ pentru orice element $x \in \mathbb{K}$. Atunci

$$\alpha = \alpha^{p^n} = \alpha + n \cdot \widehat{k},$$

astfel că $n \cdot \widehat{k} = \widehat{0}$ **1p**

Cum însă n nu se divide prin caracteristica p , rezultă că $\widehat{k} = \widehat{0}$. Dar atunci $f_1(\alpha) = \widehat{0}$ și $\alpha \in Z_{f_1} = \{\widehat{k} \mid k = \overline{0, p-1}\}$. Am obținut deci și incluziunea inversă $Z_{f_{m+1}} \subseteq \{\widehat{k} \mid k = \overline{0, p-1}\}$ și deci are loc egalitatea $Z_{f_{m+1}} = \{\widehat{k} \mid k = \overline{0, p-1}\}$. Proprietatea enunțată are loc atunci pentru orice $m \in \mathbb{N}^*$ **1p**

Problema 3. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, cu $a < b$, două numere reale oarecare. Spunem că o funcție $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ are proprietatea (P) dacă este o funcție integrabilă pe $[a, b]$, cu proprietatea că

$$f(x) - f\left(\frac{x+a}{2}\right) = f\left(\frac{x+b}{2}\right) - f(x) \quad \text{pentru orice } x \in [a, b].$$

Arătați că pentru orice număr real t există o unică funcție $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea (P), astfel încât $\int_a^b f(x) dx = t$.

Soluție:

Vom arăta că funcțiile cu proprietatea (P) sunt exact funcțiile constante pe intervalul $[a, b]$. Egalitatea din enunț se transcrie echivalent

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(f\left(\frac{x+a}{2}\right) + f\left(\frac{x+b}{2}\right) \right) \quad (1)$$

Arătăm că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ și orice $x \in [a, b]$ are loc egalitatea

$$f(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} f\left(\frac{x + (2^n - 1 - k)a + kb}{2^n}\right). \quad (2)$$

Pentru $n = 1$, aceasta este exact relația (1). Dacă presupunem acum egalitatea adevărată pentru un număr natural $n \in \mathbb{N}^*$ și orice $x \in [a, b]$, atunci avem

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} f\left(\frac{x + (2^n - 1 - k)a + kb}{2^n}\right) = \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{1}{2} \left(f\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{x + (2^n - 1 - k)a + kb}{2^n} + \frac{1}{2} \cdot a\right) + f\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{x + (2^n - 1 - k)a + kb}{2^n} + \frac{1}{2} \cdot b\right) \right) = \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} f\left(\frac{x + (2^{n+1} - 1 - k)a + kb}{2^{n+1}}\right). \end{aligned}$$

..... **3p**
 Considerăm pentru $n \in \mathbb{N}^*$ și $x \in [a, b]$ oarecare diviziunea

$$\Delta_n = \left(x_0 = a < x_1 = \frac{(2^n - 1)a + b}{2^n} < \dots < x_k = \frac{(2^n - k)a + kb}{2^n} < \dots < x_{2^n} = b \right)$$

cu norma $|\Delta_n| = \frac{b-a}{2^n}$ și sistemul de puncte intermediare

$$\xi_{(n)}(x) = \left(\xi_k(x) = \frac{x + (2^n - k)a + (k-1)b}{2^n} \mid k = \overline{1, 2^n} \right).$$

Atunci relația (2) se transcrie sub forma

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \cdot \sigma(f; \Delta_n, \xi_{(n)}(x)),$$

unde prin $\sigma(f; \Delta_n, \xi_{(n)}(x))$ am notat suma Riemann asociată funcției f , diviziunii Δ_n și sistemului de puncte intermediare $\xi_{(n)}(x)$. Cum funcția f este integrabilă Riemann pe intervalul $[a, b]$, avem $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(f; \Delta_n, \xi_{(n)}(x)) = \int_a^b f(s) ds$, astfel că $f(x) = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(s) ds$ pentru orice $x \in [a, b]$. Orice funcție cu proprietatea $(\mathcal{P})$ este deci constantă

..... **2p**
 Reciproc, orice funcție constantă pe intervalul $[a, b]$ este integrabilă Riemann și verifică egalitatea din enunț. **1p**
 Pentru orice $t \in \mathbb{R}$ există atunci o unică funcție cu proprietatea $(\mathcal{P})$, anume $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, finită prin $f(x) = \frac{t}{b-a}$ pentru orice $x \in [a, b]$, astfel încât $\int_a^b f(x) dx = t$ **1p**

Problema 4. Fie $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție monoton crescătoare, derivabilă, cu derivata continuă, pentru care $f(0) = 0$. Fie $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ funcția definită prin

$$g(x) = f(x) + (x-1)f'(x) \quad \text{pentru orice } x \in [0, 1].$$

a) Arătați că

$$\int_0^1 g(x) dx = 0.$$

b) Demonstrați că pentru orice funcție $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, convexă și derivabilă, cu $\varphi(0) = 0$ și $\varphi(1) = 1$, are loc inegalitatea

$$\int_0^1 g(\varphi(x)) dx \leq 0.$$

Soluție:

a) Deoarece $g(x) = f(x) + (x - 1)f'(x) = ((x - 1)f(x))'$, rezultă că

$$\int_0^1 g(x) dx = (x - 1)f(x)|_0^1 = 0.$$

.....**2p**

b) Fie $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ o funcție convexă și derivabilă cu $\varphi(0) = 0$ și $\varphi(1) = 1$. Atunci funcția φ' este crescătoare. Funcția f fiind monoton crescătoare și derivabilă, are derivata f' nenegativă. Rezultă că pentru orice $x \in [0, 1]$ avem

$$f(\varphi(x)) = f(\varphi(x)) - f(\varphi(0)) = \int_0^x f'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt \leq \varphi'(x) \cdot \int_0^x f'(\varphi(t)) dt$$

Integrând în inegalitatea de mai sus, obținem

$$\int_0^1 f(\varphi(x)) dx \leq \int_0^1 \left(\varphi'(x) \cdot \int_0^x f'(\varphi(t)) dt \right) dx. \quad (3)$$

.....**2p**

Funcția $f' \circ \varphi$ este continuă, fiind compusă de funcții continue, astfel că este primitivabilă și integrabilă, iar o primitivă a sa este funcția $\Phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $\Phi(x) = \int_0^x f'(\varphi(t)) dt$. Integrând prin părți, avem:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\varphi'(x) \cdot \int_0^x f'(\varphi(t)) dt \right) dx &= \int_0^1 (\varphi'(x) \cdot \Phi(x)) dx = \\ &= (\varphi(x) \cdot \Phi(x))|_0^1 - \int_0^1 (\varphi(x) \cdot \Phi'(x)) dx = \\ &= \varphi(1) \cdot \Phi(1) - \varphi(0) \cdot \Phi(0) - \int_0^1 \varphi(x) \cdot f'(\varphi(x)) dx = \int_0^1 f'(\varphi(x)) dx - \int_0^1 \varphi(x) \cdot f'(\varphi(x)) dx. \end{aligned} \quad (4)$$

.....**1p**

Din definiția funcției g , inegalitatea (3) și identitatea (4) rezultă atunci că

$$\int_0^1 g(\varphi(x)) dx = \int_0^1 f(\varphi(x)) dx + \int_0^1 \varphi(x) \cdot f'(\varphi(x)) dx - \int_0^1 f'(\varphi(x)) dx \leq 0.$$

.....**2p**



MINISTERUL EDUCAȚIEI



SOCIETATEA DE ȘTIINȚE
MATEMATICE DIN ROMÂNIA



Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Națională, Vaslui, 10 mai 2024

CLASA a V-a – soluții

Problema 1. Vom spune despre o fracție zecimală periodică simplă f că are *lungimea redusă* n (unde n este un număr natural nenul) dacă perioada sa are n cifre și f nu poate să fie reprezentată ca fracție zecimală periodică simplă cu o perioadă cu mai puține cifre. De exemplu, $0,(223)$ are lungimea redusă 3, iar $0,(2323)$ are lungimea redusă 2, deoarece $0,(2323) = 0,(23)$.

- Arătați că $f = 0,(2) \cdot 0,(3)$ este fracție periodică simplă de lungime redusă 3.
- Există două fracții periodice simple de lungime redusă 1, al căror produs să fie o fracție periodică simplă de lungime redusă 1?
- Există două fracții periodice simple de lungime redusă 3, al căror produs să fie o fracție periodică simplă de lungime redusă 3?

Soluție. a) $f = 0,(2) \cdot 0,(3) = \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{9} = \frac{2}{27} = 0,(074)$ este fracție de lungime redusă 3 **2p**

b) Da, deoarece, de exemplu, $0,(3) \cdot 0,(6) = 0,(2)$ **2p**

c) Da, deoarece, de exemplu, $0,(270) \cdot 0,(370) = \frac{270}{9 \cdot 3 \cdot 37} \cdot \frac{370}{999} = \frac{100}{999} = 0,(100)$ **3p**

Problema 2. Fie $n \geq 2$ un număr natural. Considerăm numerele $A = 33 \dots 3$, cu n cifre 3 și $B = 20 \cdot A + 6$. Determinați cifrele care apar în scrierea zecimală a numărului $A \cdot B$.

Soluție. Avem $B = 66 \dots 6$, cu $n + 1$ cifre 6 **1p**

Observăm că $3 \cdot A = 99 \dots 9 = 10^n - 1$ **2p**

Rezultă $A \cdot B = (10^n - 1) \cdot \underbrace{22 \dots 2}_{n+1 \text{ cifre}} = \underbrace{22 \dots 200 \dots 0}_{n+1 \text{ cifre } \quad n \text{ cifre}} - \underbrace{22 \dots 2}_{n+1 \text{ cifre}}$ **2p**

Obținem $A \cdot B = \underbrace{22 \dots 2}_{n-1 \text{ cifre}} \underbrace{1977 \dots 78}_{n-1 \text{ cifre}}$, deci în scrierea zecimală a numărului $A \cdot B$ apar cifrele

1, 2, 7, 8 și 9 **2p**

Problema 3. Determinați perechile de numere naturale nenule a și b care verifică relația $a^{4a} = b^b$.

Soluție. Dacă $b \geq 4a$, atunci $b > a$, deci $b^b > a^{4a}$, iar inegalitatea este imposibilă în acest caz **1p**

Pentru $b < 4a$ obținem $b^b = a^{4a} = a^{4a-b} a^b$, deci b^b este divizibil cu a^b , ceea ce arată că b este divizibil cu a **2p**

Rezultă că $b = na$, cu $n = 1$ (I), $n = 2$ (II) sau $n = 3$ (III) **1p**

Obținem $(a^4)^a = ((na)^n)^a$, adică $a^4 = n^n a^n$, sau $a^{4-n} = n^n$. În cazul (I) obținem $a = b = 1$, în cazul (II) avem soluția $a = 2$, $b = 4$, iar în cazul (III) obținem $a = 27$, $b = 81$ **3p**

Observație. Din $a^a \mid b^b$ nu reiese $a \mid b$, după cum arată exemplul $4^4 \mid 10^{10}$, dar $4 \nmid 10$.

Problema 4. Fie n un număr natural nenul. Vom spune că o tablă $n \times n$ este *specială* dacă:

- în fiecare căsuță a tablei este pus un număr natural impar, de două cifre;
- numerele de pe tablă sunt diferite două câte două;
- produsul numerelor de pe fiecare linie și produsul numerelor de pe fiecare coloană este pătrat perfect.

Arătați că cea mai mare valoare a lui n pentru care există o tablă specială este 4.

Soluție. Dacă între factorii primi ai numerelor de pe tablă apare $p \geq 17$ pe linia ℓ și coloana c , atunci trebuie ca pe linia ℓ să mai apară un multiplu de p (pe coloana $c' \neq c$), pe coloana c să mai apară un multiplu de p (pe linia $\ell' \neq \ell$) și pe poziția (ℓ', c') să mai apară un multiplu de p . Astfel, pe tablă ar trebui să apară un număr $N \geq 7p > 100$ – imposibil **1p**

Rezultă că pe tablă nu pot apărea numerele de două cifre care sunt multipli impari de 17 – 3 numere, de 19 – 3 numere, de 23 – 2 numere, de 29 – 2 numere, de 31 – 2 numere și de 37, de 41, de 43, de 47, de 53, de 59, de 61, de 67, de 71, de 73, de 79, de 83, de 89, de 97 – câte un număr; în total, 26 de numere. Cum în total există 45 de numere impare de două cifre, reiese că pe tablă nu pot apărea mai mult de $45 - 26 = 19$ numere, deci $n \leq 4$ **2p**

Pentru $n = 4$ trebuie să folosim pe tablă $13 \cdot 1$, $13 \cdot 3$, $13 \cdot 5$, $13 \cdot 7$ și patru multipli ai lui 11 (de exemplu, $11 \cdot 1$, $11 \cdot 3$, $11 \cdot 5$, $11 \cdot 7$) **1p**

Un exemplu de așezare este cel alăturat **3p**

Observație. Pentru indicarea, fără explicație, a unei table corecte, se acordă 4 puncte.

11	$3 \cdot 11$	3^3	5^2
$5 \cdot 11$	$7 \cdot 11$	$3 \cdot 5$	$3 \cdot 7$
7^2	$3 \cdot 5^2$	13	$3 \cdot 13$
$3^2 \cdot 5$	$3^2 \cdot 7$	$5 \cdot 13$	$7 \cdot 13$



MINISTERUL EDUCAȚIEI



SOCIETATEA DE ȘTIINȚE
MATEMATICE DIN ROMÂNIA



Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Națională, 2024

CLASA a VI-a – soluții

Problema 1. Numerele naturale $1, 2, 3, \dots, 2024$ sunt scrise pe 2024 cartonașe identice, așezate pe o masă cu fața scrisă în jos. Spunem că un cartonaș este *câștigător* dacă numărul scris pe el este divizibil cu 13 sau 100. Care este cel mai mic număr de cartonașe pe care trebuie să le întoarcem, fără a le privi, pentru a fi siguri că am întors un cartonaș câștigător?

Soluție. Pentru a fi siguri că am întors un cartonaș câștigător trebuie să întoarcem cu unul mai mult decât numărul cartonașelor necâștigătoare. **2p**

Multiplii lui 13 mai mici sau egali cu 2024 sunt $13 \cdot 1, 13 \cdot 2, \dots, 13 \cdot 155$, numărul lor fiind 155. **1p**

Multiplii lui 100 mai mici sau egali cu 2024 sunt $100 \cdot 1, 100 \cdot 2, \dots, 100 \cdot 20$, numărul lor fiind 20. **1p**

Există un singur multiplu comun al numerelor 13 și 100 printre numerele $1, 2, 3, \dots, 2024$, numărul 1300. **1p**

În total avem $155 + 20 - 1 = 174$ de numere care sunt multipli ai numerelor 13 sau 100, deci $2024 - 174 = 1850$ de numere care nu au această proprietate. **1p**

Pentru a fi siguri că vom întoarce un cartonaș câștigător va trebui să întoarcem minim 1851 de cartonașe. **1p**

Problema 2. Se consideră mulțimea $A_n = \{1, 3, 5, \dots, 2n - 1\}, n \in \mathbb{N}^*$. Pentru o pereche (a, b) , unde $a, b \in A_n$, se formează numărul $m = \overline{ab}$ obținut prin alipirea (concatenarea) celor două numere a și b . De exemplu, pentru numerele $19, 37 \in A_{30}$, prin alipire se obține numărul $m = 1937$.

a) Care este cel mai mic număr $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care există m pătrat perfect?

b) Determinați cel mai mare pătrat perfect m care se poate obține pentru $n = 50$.

Soluție. a) Din mulțimea $A_{10} = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$ nu putem forma un pătrat perfect prin alipirea a două numere **2p**

Din mulțimea $A_{11} = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21\}$, prin alipirea numerelor 1 și 21, se poate forma pătratul perfect 121, care este cel mai mic. Deci $n = 11$ este numărul căutat... **1p**

b) Avem $A_{50} = \{1, 3, 5, 7, \dots, 97, 99\}$. Putem forma, prin alipirea a două numere din mulțimea A_{50} , pătrate de cel mult 4 cifre. **1p**

Calculăm cele mai mari pătrate perfecte: $99^2 = 9801$, $97^2 = 9407$, $95^2 = 9025$, $93^2 = 8649$, $91^2 = 8281$. Acestea nu convin deoarece dintre cele două numere alipite primul este par, deci nu poate fi din mulțimea A_{50} **2p**

Numărul $89^2 = 7921$ poate proveni prin alipirea numerelor 79 și 21 care fac parte din mulțimea A_{50} . Deci cel mai mare pătrat este 7921. **1p**

Problema 3. Fie ABC un triunghi cu unghiul $\angle BAC = 30^\circ$ și $\angle ABC = 100^\circ$. Fie m mediatoarea segmentului AC , E intersecția dreptei m cu AB și D punctul de pe m , situat în interiorul triunghiului ABC , pentru care $\angle CAD = 10^\circ$. Fie M intersecția dreptelor AD și CE .

a) Arătați că CE este bisectoarea unghiului $\angle BCD$.

b) Arătați că $AM = AB$.

Soluție. a) Deoarece m este mediatoare, avem $DA = DC$ și $EA = EC$. Rezultă $\triangle DEA \equiv \triangle DEC$ **1p**

Din $DA = DC$ reiese $\angle DCA = \angle DAC = 10^\circ$ **1p**

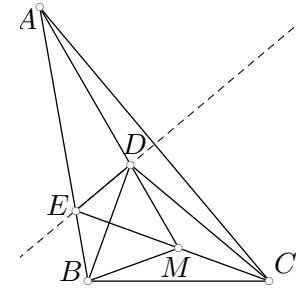
Avem și $\angle DCE = \angle DAE = 20^\circ$, de unde $\angle BCE = 20^\circ$, deci CE este bisectoarea unghiului BCD **1p**

b) Deoarece $\angle CDA = 160^\circ$, rezultă $\angle ADE = \angle CDE = 100^\circ = \angle CBE$ **1p**

Obținem $\angle CEB = \angle CED = 60^\circ$, deci $\triangle CEB = \triangle CED$. (U.L.U.) **1p**

Reiese $BE = BD$ și, cum $\angle MEB = \angle MED$ iar $ME = ME$, obținem $\triangle MEB \equiv \triangle MED$ (L.U.L.) **1p**

Deducem $\angle EBM = \angle EDM = 180^\circ - \angle CED - \angle AME = 180^\circ - 60^\circ - 40^\circ = 80^\circ$. Cum $\angle BAM = 20^\circ$, reiese că $AB = AM$ **1p**



Problema 4. a) Arătați că fiecare dintre numerele 137, 138 și 139 are numărul divizorilor naturali o putere a lui 2.

b) Care este numărul maxim de numere naturale consecutive cu proprietatea că fiecare dintre ele are numărul divizorilor naturali o putere a lui 2?

Soluție. a) Se arată că 137 și 139 sunt numere prime (nu se divid cu numere prime mai mici sau egale cu 13), deci numărul divizorilor fiecăruia este 2^1 **1p**

Descompunând în factori avem $138 = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 23^1$, deci numărul 138 are $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$ divizori naturali **1p**

b) Extindem secvența de numere consecutive, 137, 138, 139, cu numere care au numărul divizorilor o putere a lui 2.

Avem $136 = 2^3 \cdot 17$, $135 = 3^3 \cdot 5$, $134 = 2 \cdot 67$, $133 = 7 \cdot 19$, numere care au 8, 8, 4, respectiv 4 divizori. Obținem astfel o secvență de 7 numere naturale consecutive, 133, 134, 135, 136, 137, 138, 139, care au numărul divizorilor o putere a lui 2. **2p**

Arătăm că nu putem găsi 8 numere naturale consecutive cu această proprietate. Într-adevăr, printre oricare 8 numere naturale consecutive există unul care dă restul 4 la împărțirea cu 8, adică un număr a de forma $8k + 4 = 2^2 \cdot (2k + 1)$. Deoarece $2k + 1$ este impar, în descompunerea în factori primi a lui a factorul prim 2 apare la puterea a doua. Rezultă că numărul divizorilor lui a se divide cu 3, deci nu este o putere a lui 2. **2p**

Așadar numărul maxim de numere naturale consecutive cu numărul divizorilor o putere a lui 2 este 7. **1p**



MINISTERUL EDUCAȚIEI



SOCIETATEA DE ȘTIINȚE
MATEMATICE DIN ROMÂNIA



Olimpiada Națională de Matematică Etapa Națională, Huși, 3 aprilie 2024

CLASA a VII-a – soluții și bareme orientative

Problema 1. Pentru orice număr real x se notează $A(x) = x^2 + 4 \cdot [x]$.

a) Determinați numerele reale x pentru care $A(x) = \{x\}^2$.

b) Determinați numerele reale $y > 0$ pentru care $A(y)$ este pătratul unui număr natural.

($[z]$ și $\{z\}$ reprezintă partea întreagă, respectiv partea fracționară a numărului real z)

Soluție. a) Din $([x] + \{x\})^2 + 4 \cdot [x] = \{x\}^2$ se obține $[x]^2 + 2 \cdot [x] \cdot \{x\} + 4 \cdot [x] = 0$ (*).

Dacă $x \geq 0$, se deduce că $[x] = 0$, așadar orice $x \in [0, 1)$ este soluție a problemei. **1p**

Dacă $x < 0$, egalitatea (*) conduce la $\{x\} = -\frac{[x]^2 + 4 \cdot [x]}{2 \cdot [x]} = -\frac{[x] + 4}{2}$.

Deoarece $\{x\} \in (0, 1)$ ajungem la $[x] \in \{-5, -4\}$ și astfel se obțin soluțiile $x_1 = -\frac{9}{2}, x_2 = -4$, care verifică egalitatea din enunț.

Așadar $x \in \{-\frac{9}{2}, -4\} \cup [0, 1)$ **2p**

b) Pentru $y \in (0, 1)$ avem $A(y) = y^2 \in (0, 1)$, $A(1) = 5$, iar pentru $y \in (1, 2)$ avem $A(y) = y^2 + 4 \in (5, 8)$, așadar $A(y)$ nu este pătrat perfect pentru $y \in (0, 2)$ **1p**

Pentru $y \geq 2$, condiția din enunț conduce la $y^2 \in \mathbb{N}$, așadar $y = \sqrt{m}$, cu $m \in \mathbb{N}, m \geq 4$, de unde se ajunge la $m + 4 \cdot [\sqrt{m}] = p^2$, cu $p \in \mathbb{N}$.

Notând $k = [\sqrt{m}]$, rezultă $k \geq 2$ și $k^2 \leq m < (k+1)^2$, adică $m + 4k = p^2$.

1p

Folosind acum faptul că $k^2 + 4k \leq p^2 < (k+1)^2 + 4k = k^2 + 6k + 1 < (k+3)^2$, se deduce că (1) $p^2 = (k+1)^2 = 1$, pentru $k = 0$ sau (2) $p^2 = 9$ pentru $k = 1$, valori care nu verifică egalitatea din enunț sau (3) $p^2 = (k+2)^2$, pentru $k \geq 2$ **1p**

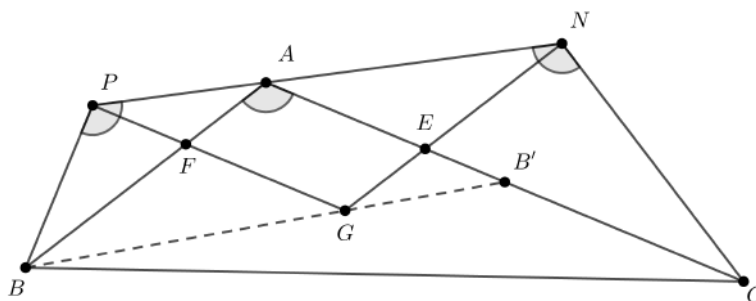
Așadar $p = k + 2$ și $m = (k+2)^2 - 4k = k^2 + 4$. Se obține astfel $y = \sqrt{k^2 + 4}, k \in \mathbb{N}, k \geq 2$, numere care verifică egalitatea din enunț.... **1p**

Problema 2. Se consideră un triunghi ABC cu $\sphericalangle BAC = 120^\circ$ și triunghiurile isoscele PAB și NAC astfel încât $\sphericalangle APB = \sphericalangle ANC = \sphericalangle BAC$,

dreapta AB să separe punctele P și C și dreapta AC să separe punctele N și B .

Arătați că, dacă G este centrul de greutate al triunghiului ABC , atunci $GP = GN = \frac{AB + AC}{3}$.

Soluție. Triunghiurile PAB și NAC fiind isoscele, cu $\angle APB = \angle ANC = \angle BAC = 120^\circ$, rezultă că $\angle PAB = \angle NAC = 30^\circ$, deci punctele P, A, N sunt coliniare. **1p**



Fie $PF \parallel AC, F \in AB$ și $NE \parallel AB, E \in AC$. Avem $\angle APF = \angle NAC = \angle FAP$, prin urmare triunghiul FAP este isoscel, cu $FA = FP$ (1)

Pe de altă parte, din $\angle APB = 120^\circ$ și $\angle APF = 30^\circ$, rezultă că $\angle FPB = 90^\circ$, deci triunghiul PBF este de tipul $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$, de unde $BF = 2 \cdot FP$ (2). Din (1) și (2) obținem $\frac{BF}{FA} = 2$ (3) **2p**

Dacă BB' este mediana din B a triunghiului ABC , cum G este centrul de greutate al triunghiului ABC , avem $\frac{BG}{GB'} = 2$ (4). Relațiile (3) și (4) conduc, conform reciprocei teoremei lui Thales, la $FG \parallel AC$, deci punctele P, F și G sunt coliniare. Obținem $\angle GPN = 30^\circ$ **2p**

Analog rezultă că $\angle GNP = 30^\circ$ și astfel deducem că triunghiul GNP este isoscel, cu $GP = GN$ **1p**

Cum $AFGE$ este paralelogram, $GP = GF + FP = AE + FP = \frac{AB + AC}{3}$, de unde rezultă concluzia. **1p**

Problema 3. Pentru orice număr natural nenul n se consideră mulțimea $A = \{n^2, n^2 + 1, n^2 + 2, \dots, (n + 1)^2\}$.

Determinați numerele $a, b, c \in A, a < b < c$, știind că b este media geometrică a numerelor a și c .

Soluție. Din $b^2 = ac \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{c}{b} = \frac{x}{y}$, unde $x, y \in \mathbb{N}^*$, $(x, y) = 1$ și $x > y$.

Deci, $b = a \cdot \frac{x}{y}$, $c = a \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^2$ **2p**

Cum $c = a \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^2 \in \mathbb{N}^*$ și $(x, y) = 1$, rezultă că $\frac{a}{y^2} \in \mathbb{N}^*$, deci $a = py^2$ unde $p \in \mathbb{N}^*$. Numerele sunt $a = py^2$, $b = pxy$, $c = px^2$, unde $x, y \in \mathbb{N}^*$, $x > y$, $p \in \mathbb{N}^*$ **2p**

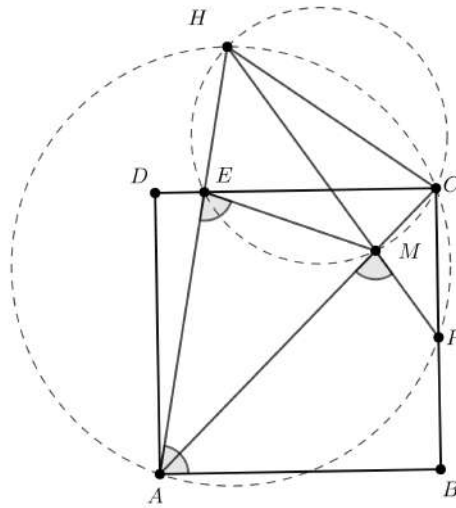
Din $a \in A \Rightarrow \sqrt{p} \cdot y \geq n$ iar din $c \in A \Rightarrow \sqrt{p}x \leq n+1$, deci $\sqrt{p} \cdot (x-y) \leq 1$ și cum $x - y \geq 1$, rezultă $1 \geq \sqrt{p}(x-y) \geq \sqrt{p}$, cum $p \in \mathbb{N}^* \Rightarrow p = 1$... **2p**

Obținem $n \leq y < x \leq n+1$, deci $y = n$, $x = n+1$ și soluția $a = n^2$, $b = n \cdot (n+1)$, $c = (n+1)^2$ **1p**

Problema 4. Se consideră un pătrat $ABCD$ și punctele E pe latura CD , M pe diagonala AC și P pe latura BC , astfel încât $\sphericalangle BAE = \sphericalangle AEM = \sphericalangle AMP$. Arătați că:

- Triunghiul AMP este isoscel.
- $EM = DE + PB$.

Soluție. a) Notăm $\sphericalangle BAE = \sphericalangle AEM = \sphericalangle AMP = \alpha$.



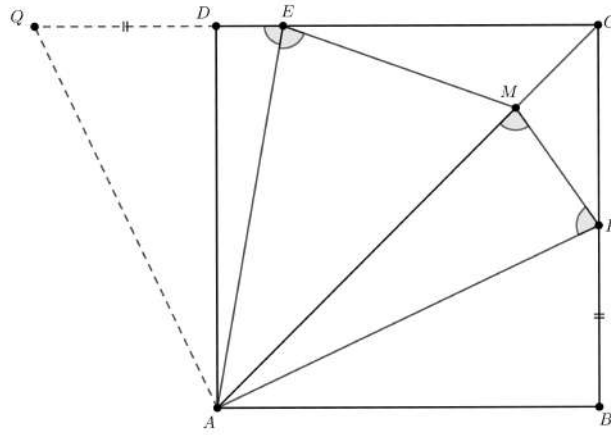
Avem, pe rând, $\sphericalangle DAE = 90^\circ - \alpha$, $\sphericalangle EAC = \alpha - 45^\circ$, $\sphericalangle DEA = \sphericalangle EAB = \alpha$, $\sphericalangle CEM = 180^\circ - 2\alpha$ **1p**

Din triunghiul CPM , rezultă $\sphericalangle PMC = 180^\circ - \sphericalangle AMP = 180^\circ - \alpha$ și apoi $\sphericalangle CPM = \alpha - 45^\circ$. Astfel $\sphericalangle EAC = \sphericalangle CPM = \alpha - 45^\circ$ **1p**

Dacă notăm cu H intersecția dreptelor AE și PM , patrulaterul $HAPC$ având $\sphericalangle HAC = \sphericalangle HPC = \alpha - 45^\circ$ este inscriptibil, deci $\sphericalangle AHP = \sphericalangle ACP = 45^\circ$. Mai mult, $\sphericalangle AHP = \sphericalangle EHM = \sphericalangle ECM = 45^\circ$, astfel că patrulaterul $HEMC$ este inscriptibil, iar $\sphericalangle HCM = \sphericalangle AEM = \alpha$ **1p**

Revenind în patrulaterul inscriptibil $HAPC$, avem $\sphericalangle HPA = \sphericalangle HCA = \alpha$, deci triunghiul AMP este isoscel. **1p**

b) În triunghiul isoscel MAP avem $\sphericalangle MAP = 180^\circ - 2 \cdot \alpha$, astfel că $\sphericalangle PAB = \sphericalangle CAB - \sphericalangle MAP = 45^\circ - (180^\circ - 2 \cdot \alpha) = 2 \cdot \alpha - 135^\circ$ **1p**



Prelungim latura CE cu segmentul $DQ = BP$. Din congruența triunghiurilor ADQ și ABP ($C.C.$) rezultă $\sphericalangle QAD = \sphericalangle PAB = 2 \cdot \alpha - 135^\circ$. $\sphericalangle EAQ = \sphericalangle EAD + \sphericalangle DAQ = \alpha - 45^\circ$, adică $\sphericalangle EAQ = \sphericalangle EAM$ **1p**
 Mai mult, avem congruența triunghiurilor EAQ și EAM ($U.L.U$), de unde rezultă $EM = EQ = ED + DQ = ED + BP$ **1p**



MINISTERUL EDUCAȚIEI



SOCIETATEA DE ȘTIINȚE
MATEMATICE DIN ROMÂNIA



Olimpiada Națională de Matematică Etapa Națională, Huși, 3 aprilie 2024

CLASA a VIII-a – soluții și bareme

Problema 1. Determinați numerele întregi n pentru care există o re-aranjare $a_1, a_2, \dots, a_{1013}$ a numerelor $1012, 1013, \dots, 2024$, astfel încât să aibă loc egalitatea $a_1 \cdot n^{1012} + a_2 \cdot n^{1011} + \dots + a_{1012} \cdot n + a_{1013} = 0$.

Soluție. Dacă $n \in \mathbb{N}$, atunci $a_1 \cdot n^{1012} + a_2 \cdot n^{1011} + \dots + a_{1012} \cdot n + a_{1013} > 0$, deci $n \in \mathbb{N}$ nu convine. **1p**

Dacă $n = -k$, cu $k \geq 2$, atunci $a_1 \cdot n^{1012} + a_2 \cdot n^{1011} + \dots + a_{1012} \cdot n + a_{1013} = k^{1011}(a_1 \cdot k - a_2) + k^{1009}(a_3 \cdot k - a_4) + \dots + k(a_{1011} \cdot k - a_{1012}) + a_{1013} > 0$, deoarece $a_{1013} > 0$ și $a_i \cdot k - a_{i+1} \geq 2a_i - a_{i+1} \geq 2 \cdot 1012 - 2024 = 0$, pentru orice $i \in \{1, 2, \dots, 1011\}$. Așadar, nu există soluții de acest tip **2p**

Arătăm că $n = -1$ este soluție.

Pentru orice $a \in \mathbb{Z}$, $-a + (a - 1) - (a + 1) + (a + 2) = 0$ **2p**
(1012 - 2024 + 1013 - 1015 + 1014) + (-1017 + 1016 - 1018 + 1019) +
... + (-2021 + 2020 - 2022 + 2023) = 0, deci $n = -1$ este unica soluție. **2p**

Problema 2. Spunem că o funcție de gradul întâi $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este *utilă*, dacă are proprietățile:

(i) $|f(x)| \leq 2$, pentru orice număr real x cu $|x| \leq 2$.

(ii) $|f(x)| \geq 1$, pentru orice număr real x cu $|x| \leq 1$.

Fie $x_0 \in \mathbb{R}$. Demonstrați că există o funcție utilă cu $f(x_0) = 0$, dacă și numai dacă $|x_0| \geq 4$.

Soluție. „, $\Rightarrow$ ” Dacă f este utilă, atunci și $-f$ are proprietățile (i) și (ii), deci este utilă. În consecință, putem alege o funcție utilă $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, cu $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$ **1p**

Cum $a > 0$, inegalitatea (i) este echivalentă cu $f(2) \leq 2$ și $f(-2) \geq -2$, deci cu $2a + b \leq 2$ (1) și $2a - b \leq 2$ (2) **1p**

Inegalitatea (ii) conduce la situațiile: **I**) $f(-1) \leq -1$, $f(1) \leq -1$ sau **II**) $f(-1) \geq 1$, $f(1) \geq 1$ (situația $f(-1) < 0 < f(1)$ ar conduce la $-1 < -\frac{b}{a} < 1$ și $f(-\frac{b}{a}) = 0$, în contradicție cu (ii)) **1p**

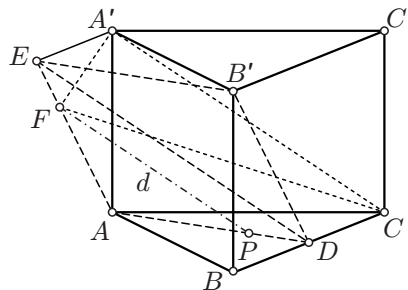
În cazul **I** obținem $-a + b \leq -1$ (3) și $a + b \leq -1$ (4). Înmulțind (4) cu 2 și adunând cu (2) rezultă $4a + b \leq 0$, adică $x_0 = -\frac{b}{a} \geq 4$ **1p**

În cazul **II** obținem $a - b \leq -1$ (5) și $-a - b \leq -1$ (6). Adunând (5) înmulțită cu 2 și (1) rezultă $4a - b \leq 0$, deci $x_0 = -\frac{b}{a} \leq -4$. Din **I**) și **II**) rezultă că $|x_0| \geq 4$ **1p**
 „ $\Leftarrow$ ” Fie $x_0 \in \mathbb{R}$, cu $|x_0| \geq 4$

Dacă $x_0 \geq 4$, alegem $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x_0 - 1} \cdot x + \frac{x_0}{1 - x_0}$ **1p**

Dacă $x_0 \leq -4$ alegem $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{-1}{1 + x_0} \cdot x + \frac{x_0}{x_0 + 1}$ **1p**

Problema 3. Fie $ABCA'B'C'$ o prismă triunghiulară regulată, cu muchiile laterale AA' , BB' , CC' . Considerăm mijlocul D al muchiei BC și construim paralelogramul $ADB'E$. Fie F proiecția ortogonală a punctului A' pe dreapta AE , d dreapta de intersecție a planelor (ADE) și $(A'CF)$ și P intersecția dreptei d cu planul (ABC) . Demonstrați că P este centrul de greutate al triunghiului ABC dacă și numai dacă $AB = AA'\sqrt{2}$.



Soluție. Segmentele BA' , AB' și DE au același mijloc, deci $DBEA'$ este paralelogram. Din $CD = DB = A'E$ și $BD \parallel A'E$ reiese că $A'CDE$ este paralelogram. **2p**

Obținem $CA' \parallel DE$, deci $CA' \parallel (ADE)$ **1p**

Astfel, planul $(A'CF)$ taie planul (ADE) după o paralelă la CA' și la DE , deci $FP \parallel DE$, iar $P \in AD$ **1p**

Cum AD este mediană în $\triangle ABC$, reiese că: punctul P este centrul de greutate al triunghiului ABC dacă și numai dacă $AP = 2PD$. Deoarece $PF \parallel DE$, aceasta este echivalent cu $AF = 2FE$ **1p**

Deoarece $AA' \parallel BB'$, $BD \parallel EA'$ și $BB' \perp BD$, triunghiul AEA' este dreptunghic în A' . Cu teorema catetei în $\triangle AA'E$ obținem $AF = 2FE \iff A'A^2 = 2A'E^2 \iff A'A^2 = \frac{1}{2}BC^2 \iff BC = A'A\sqrt{2}$ **2p**

Problema 4. Fie a și b două numere naturale distincte, mai mari decât 1, astfel încât $D = b^2 + a - 1$ divide $M = a^2 + b - 1$.

a) Arătați că există numere care îndeplinesc condițiile de mai sus.

b) Demonstrați că D are cel puțin doi divizori primi.

Soluție. a) Pentru $b = 2$ căutăm a astfel încât $a + 3 \mid a^2 + 1$. Deoarece $a + 3 \mid a(a + 3) - 3(a + 3) = a^2 - 9$, este necesar și suficient ca $a + 3 \mid a^2 + 1 - a^2 + 9 = 10$, deci putem lua $a = 7$ **1p**

b) Avem $D \mid (b^2 - 1 + a)(b^2 - 1 - a) = (b^2 - 1)^2 - a^2$, deci $D \mid (b^2 - 1)^2 + b - 1 = b^4 - 2b^2 + b = b(b - 1)(b^2 + b - 1)$ **3p**

Din $D \mid M$ reiese că $0 \leq M - D = (a - b)(a + b - 1)$, deci $a > b$. Apoi, numerele b , $b - 1$ și $b^2 + b - 1$ sunt prime între ele două câte două și mai mici decât D . Astfel D are factori primi comuni cu cel puțin două dintre numerele b , $b - 1$, $b^2 + b - 1$, deci D trebuie să aibă cel puțin doi factori primi distincți **3p**



MINISTERUL EDUCAȚIEI



SOCIETATEA DE ȘTIINȚE
MATEMATICE DIN ROMÂNIA



Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Națională, Târgu Mureș, aprilie 2024

CLASA a IX-a – soluții și bareme

Problema 1. Pe latura (BC) a triunghiului ABC se consideră punctele D și E , cu D între B și E .

Despre un punct R al segmentului (AE) vom spune că este *remarcabil* dacă dreptele PQ și BC sunt paralele, unde $\{P\} = DR \cap AC$, iar $\{Q\} = CR \cap AB$. Despre un punct R' al segmentului (AD) vom spune că este *remarcabil* dacă dreptele $P'Q'$ și BC sunt paralele, unde $\{P'\} = BR' \cap AC$, iar $\{Q'\} = ER' \cap AB$.

a) Dacă pe segmentul (AE) există un punct *remarcabil*, arătați că orice punct al segmentului (AE) este *remarcabil*.

b) Dacă fiecare dintre segmentele (AD) și (AE) conține câte un punct *remarcabil*, demonstrați că $BD = CE = \varphi \cdot DE$, unde $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ este numărul de aur.

Soluție. a) Aplicând teorema lui Menelau în triunghiul ABE cu transversala $Q-R-C$, obținem că $\frac{AQ}{QB} \cdot \frac{BC}{CE} \cdot \frac{ER}{RA} = 1$, prin urmare $\frac{AQ}{QB} = \frac{CE}{BC} \cdot \frac{RA}{ER}$. Analog, aplicând teorema lui Menelau în triunghiul AEC cu transversala $P-R-D$, obținem că $\frac{AP}{PC} = \frac{DE}{CD} \cdot \frac{RA}{ER}$. Avem:

$$PQ \parallel BC \Leftrightarrow \frac{AQ}{QB} = \frac{AP}{PC} \Leftrightarrow \frac{CE}{BC} = \frac{DE}{CD}.$$

..... **2p**
Această relație nu depinde de poziția punctului R pe segmentul (AE) , ci doar de pozițiile punctelor D și E pe segmentul (BC) . Rezultă că, dacă pe segmentul (AE) există un punct *remarcabil*, atunci orice punct al segmentului (AE) este *remarcabil*. **2p**

b) Notăm cu x , y și z lungimile segmentelor BD , DE , respectiv EC . Conform celor de mai sus, pe segmentul (AE) există un punct *remarcabil* dacă și numai dacă

$$\frac{x + y + z}{z} = \frac{y + z}{y} \Leftrightarrow \frac{x + y}{z} = \frac{z}{y} \Leftrightarrow z^2 = y^2 + xy.$$

Analog se arată că pe segmentul (AD) există un punct remarcabil dacă și numai dacă $x^2 = y^2 + yz$ **1p**

Scăzând aceste egalități, rezultă că $z^2 - x^2 = y(x - z)$. Pentru a nu avea semne contrare în cei doi membri, se impune condiția $x = z$. Deducem că $x^2 - xy - y^2 = 0$, sau $t^2 - t - 1 = 0$, unde $t = \frac{x}{y} > 0$. Singura soluție pozitivă a acestei ecuații este $t = \varphi$, de unde cerința problemei. **2p**

Problema 2. Fie a și b două numere reale din intervalul $(0, 1)$, astfel încât a este număr rațional și

$$\{na\} \geq \{nb\}, \text{ oricare ar fi numărul natural } n.$$

Demonstrați că $a = b$.

(Am notat cu $\{x\}$ partea fracționară a numărului real x .)

Soluție. Fie $a = \frac{p}{q}$, unde p și q sunt numere naturale nenule, prime între ele, cu $p < q$.

Atunci $0 = \{qa\} \geq \{qb\} \geq 0$, prin urmare qb este un număr natural. Rezultă că $b = \frac{s}{q}$, unde s este un număr natural nenul.

Considerând $n = 1$ în relația din ipoteză, obținem că $\{a\} \geq \{b\}$, de unde $p \geq s$ **2p**

Deoarece numerele p și q sunt prime între ele, există un număr natural nenul k astfel încât $kp \equiv 1 \pmod{q}$.

Pentru acest k avem $\{ka\} = \left\{k \cdot \frac{p}{q}\right\} = \frac{1}{q}$. Atunci $\frac{1}{q} = \{ka\} \geq \{kb\} = \left\{k \cdot \frac{s}{q}\right\}$, de unde rezultă că numărul $\left\{k \cdot \frac{s}{q}\right\}$ este egal fie cu 0, fie cu $\frac{1}{q}$ **3p**

Dacă $\left\{k \cdot \frac{s}{q}\right\} = 0$, atunci $q \mid ks$; cum $(q, k) = 1$, înseamnă că $q \mid s$, fals.

Dacă $\left\{k \cdot \frac{s}{q}\right\} = \frac{1}{q}$, atunci $ks \equiv 1 \pmod{q}$, așadar $q \mid k(p - s)$; cum $(q, k) = 1$, înseamnă că $q \mid p - s$. Însă $0 \leq p - s < q$, așadar $p - s = 0$. Rezultă că $p = s$, prin urmare $a = b$ **2p**

Problema 3. Determinați funcțiile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$(f(x) - y) \cdot f(x + f(y)) = f(x^2) - yf(y),$$

oricare ar fi numerele reale x și y .

Soluția 1. Considerăm afirmația

$$P(x, y) : (f(x) - y) \cdot f(x + f(y)) = f(x^2) - yf(y),$$

adevărată pentru orice valori ale numerelor x și y .

În rezolvarea problemei ne vom baza pe următoarea

Lemă. Dacă există două valori reale distincte $y_1 \neq y_2$ astfel încât $f(y_1) = f(y_2) = k$, atunci f este funcție constantă: $f(x) = k$, pentru orice număr real x .

Într-adevăr, considerând $P(x, y_1)$ și $P(x, y_2)$, obținem relațiile $(f(x) - y_1) \cdot f(x + k) = f(x^2) - ky_1$, respectiv $(f(x) - y_2) \cdot f(x + k) = f(x^2) - ky_2$. Prin scădere, acestea conduc la $(y_1 - y_2)f(x + k) = k(y_1 - y_2)$, adică $f(x + k) = k$, pentru orice număr real x . Astfel, funcția f este constantă. **2p** + Din $P(0, 0)$ deducem că $f(0) \cdot f(f(0)) = f(0)$. Să presupunem că $f(0) = 0$.

În cazul în care există două valori reale distincte $y_1 \neq y_2$ astfel încât $f(y_1) = f(y_2) = k$, atunci f este funcție constantă (conform Lemei): $f(x) = k$, pentru orice număr real x **1p**

În caz contrar, pentru orice $y_1 \neq y_2$ avem că $f(y_1) \neq f(y_2)$. Considerând $P(0, y)$, deducem că $-yf(f(y)) = -yf(y)$, deci $f(f(y)) = f(y)$ pentru orice y real. Din presupunerea făcută conchidem că $f(y) = y$, pentru orice număr real y , așadar f este funcția identică a mulțimii $\mathbb{R}$ **2p**

Dacă $f(0) \neq 0$, rezultă că $f(f(0)) = 1$. Din $P(1, f(1))$ deducem $f(1) = f(1) \cdot f(f(1))$.

Dacă $f(1) = 0$, egalitățile $P(1, f(0))$, $P(2, 1)$ și $P(2, 4)$ conduc la $f(2) = 1$, $f(4) = 0$, respectiv $-3 = 0$, contradicție. Deducem că $f(f(1)) = 1$.

Astfel, atât în cazul $f(0) \neq f(1)$, cât și în cazul $f(0) = f(1)$ putem aplica Lema; obținem că f este funcție constantă: $f(x) = 1$, pentru orice număr real x .

Toate cele trei funcții găsite verifică relația din ipoteză. **2p**

Soluția 2. Considerăm afirmația

$$P(x, y) : (f(x) - y) \cdot f(x + f(y)) = f(x^2) - yf(y),$$

adevărată pentru orice valori ale numerelor reale x și y .

Din $P(0, 0)$ deducem că $f(0) \cdot f(f(0)) = f(0)$.

Dacă $f(0) = 0$, din $P(0, y)$ și $P(x, 0)$ obținem $f(f(y)) = f(y)$ (**1**), respectiv $f^2(x) = f(x^2)$ (**2**), pentru orice numere reale x și y . Apoi, $P(-f(y), y)$

conduce la $yf(y) = f(f^2(y)) \stackrel{(2)}{=} [f(f(y))]^2 \stackrel{(1)}{=} f^2(y)$, deci $yf(y) = f^2(y)$.
Deducem că $f(y) = y$, oricare ar fi numărul real y cu $f(y) \neq 0$ **3p**

Dacă ar exista $a \neq 0$ cu $f(a) = 0$ și $b \neq 0$ cu $f(b) \neq 0$, din $P(b, a)$ obținem $(f(b) - a) \cdot f(b) = f(b^2) \stackrel{(2)}{=} f^2(b)$, deci $(b - a)b = b^2$, adică $-a \cdot b = 0$, contradicție. Deducem că $f(x) = 0$, pentru orice număr real x sau $f(x) = x$, pentru orice număr real x **1p**

Dacă $f(0) \neq 0$, rezultă $f(f(0)) = 1$. Din $P(1, f(1))$ deducem $f(1) = f(1) \cdot f(f(1))$.

În cazul în care $f(1) = 0$, egalitățile $P(1, f(0))$, $P(2, 1)$ și $P(2, 4)$ conduc la $f(2) = 1$, $f(4) = 0$, respectiv $-3 = 0$, contradicție. Așadar $f(f(1)) = 1$.
. **1p**

Din $P(0, 1)$ și $P(-1, 1)$ obținem $f(1) = 1$, respectiv $f(-1) = 1$. Pentru x real, din $P(x, 1)$ deducem $(f(x) - 1) \cdot f(x + 1) = f(x^2) - 1$, iar din $P(x, -1)$ obținem $(f(x) + 1) \cdot f(x + 1) = f(x^2) + 1$. Prin scăderea acestor două relații, rezultă că $f(x + 1) = 1$, pentru orice număr real x . În concluzie, $f(x) = 1$ pentru orice număr real x .

Toate cele trei funcții găsite verifică relația din ipoteză. **2p**

Problema 4. Fie a un număr natural nenul dat. Considerăm șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ definit prin $x_n = \frac{1}{1 + na}$, oricare ar fi numărul natural nenul n .

Demonstrați că, oricare ar fi numărul natural $k \geq 3$, există numere naturale nenule $n_1 < n_2 < \dots < n_k$ astfel încât numerele $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}$ să fie termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

Soluție. Vom demonstra cerința prin inducție după k .

Observăm că

$$\frac{1}{1 + ma} + \frac{1}{(1 + ma)(1 + 2ma)} = \frac{2}{1 + 2ma},$$

prin urmare există o progresie aritmetică formată din trei termeni ai șirului: $x_m, x_{2m}, x_{2m^2a+3m}$ **2p**

Presupunem că există k numere naturale nenule $n_1 < n_2 < \dots < n_k$ astfel încât numerele $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}$ să fie termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice. Considerând $y = 2x_{n_1} - x_{n_2}$, numerele $y, x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}$ sunt în progresie aritmetică (în număr de $k + 1$).

Avem:

$$y = \frac{2}{1 + n_1a} - \frac{1}{1 + n_2a} = \frac{1 + pa}{(1 + n_1a)(1 + n_2a)} = \frac{1 + pa}{1 + (n_1 + n_2 + n_1n_2a)a},$$

unde $p = 2n_2 - n_1$ **2p**

Rezultă că

$$\frac{y}{1+pa}, \frac{x_{n_1}}{1+pa}, \frac{x_{n_2}}{1+pa}, \dots, \frac{x_{n_k}}{1+pa}$$

sunt $k+1$ termeni $x_{m_1}, x_{m_2}, \dots, x_{m_{k+1}}$ ai şirului $(x_n)_{n \geq 1}$.

Aceştia sunt în progresie aritmetică, deoarece atunci când împărţim termenii unei progresii aritmetice printr-un număr real nenul, obţinem tot o progresie aritmetică.

În plus, avem $m_1 < m_2 < \dots < m_{k+1}$, pentru că şirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este strict monoton. Cu aceasta, demonstraţia este completă. **3p**



MINISTERUL EDUCAȚIEI



SOCIETATEA DE ȘTIINȚE
MATEMATICE DIN ROMÂNIA



Olimpiada Națională de Matematică Etapă Națională, Târgu Mureș, 3 aprilie 2024

CLASA a X-a – soluții și bareme

Problema 1. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația

$$3^{\log_5(5x-10)} - 2 = 5^{-1+\log_3 x}.$$

Soluție. Observăm că ecuația are soluțiile $x_1 = 3$ și $x_2 = 27$; arătăm că ea nu mai are și alte soluții **2p**

Continuarea A. Folosind proprietățile logaritmilor, ecuația devine $15 \cdot 3^{\log_5(x-2)} = 10 + 5^{\log_3 x}$, adică $15(x-2)^{\log_5 3} = 10 + x^{\log_3 5}$, cu $x > 2$ **3p**

Deoarece $\log_3 5 > 1$ și $0 < \log_5 3 < 1$, funcția $2 < x \mapsto 15(x-2)^{\log_5 3}$ este strict concavă, iar funcția $0 < x \mapsto 10 + x^{\log_3 5}$ este strict convexă, deci funcția $f : (2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 15(x-2)^{\log_5 3} - 10 - x^{\log_3 5}$ este strict concavă, iar ecuația are cel mult două soluții **2p**

Continuarea B. Din condiția de existență a logaritmilor avem $x > 2$. Observăm că funcția $f : (2, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, $f(x) = 3^{\log_5(5x-10)}$ este inversabilă, având inversa $f^{-1}(x) = \frac{5^{\log_3 x + 10}}{5}$, iar ecuația din enunț devine $f(x) = f^{-1}(x)$ **1p**

Deoarece f este strict crescătoare, ecuația din enunț este echivalentă cu $f(x) = x$, adică $3^{\log_5(5x-10)} = x$, sau $\log_5(5x-10) = \log_3 x$ **1p**

Dacă $\log_5(5x-10) = \log_3 x = t$, atunci $x = 3^t = \frac{1}{5}(5^t + 10)$, ceea ce este echivalent cu a rezolva ecuația $5 \cdot 3^t = 5^t + 10$, sau $5 = \left(\frac{5}{3}\right)^t + 10\left(\frac{1}{3}\right)^t$, cu $t > \log_3 2$ **1p**

Deoarece funcția $g : (\log_3 2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(t) = \left(\frac{5}{3}\right)^t + 10\left(\frac{1}{3}\right)^t$ este strict convexă, fiind sumă de funcții strict convexe, ecuația $g(t) = 5$ admite cel mult două soluții **2p**

Problema 2. Considerăm pentagonul inscriptibil $ABCDE$ în care $AB = BC = CD$ și centrul de greutate al pentagonului coincide cu centrul cercului circumscris. Arătați că pentagonul $ABCDE$ este regulat.

Centrul de greutate al unui pentagon este punctul din planul pentagonului al cărui vector de poziție este egal cu media aritmetică a vectorilor de poziție ai vârfurilor.

Soluție. Considerăm un reper ortonormat cu centrul în centrul O al cercului $\mathcal{C}$ circumscris pentagonului $ABCDE$, cu unitatea de lungime egală cu raza cercului $\mathcal{C}$ și cu axa reală mediatorea segmentului BC . Fie z_X afixul punctului X în acest reper.

Deoarece $AB = BC = CD$, avem $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = 2\alpha \in (0, \frac{2\pi}{3})$. Reiese că afixe vârfurilor pentagonului sunt $z_A = \cos 3\alpha + i \sin 3\alpha$, $z_B = \cos \alpha + i \sin \alpha$, $z_C = \cos \alpha - i \sin \alpha$, $z_D = \cos 3\alpha - i \sin 3\alpha$ și $z_E = \cos \beta + i \sin \beta$, cu $\beta \in (3\alpha, 2\pi - 3\alpha)$ **2p**

Dacă centrul de greutate al pentagonului coincide cu O , atunci $z_A + z_B + z_C + z_D + z_E = 0$, de unde obținem $\cos \beta + 2 \cos 3\alpha + 2 \cos \alpha = 0$ și $\sin \beta = 0$ **1p**

Rezultă $\beta = \pi$, $-\sin \alpha + 2 \sin \alpha \cos 3\alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha = 0$ (prin înmulțire cu $\sin \alpha$) și, prin transformarea sumelor în produse, $\sin 4\alpha = \sin \alpha$ **2p**

Cum $0 < \alpha < 4\alpha < \frac{4\pi}{3}$, deducem $4\alpha = \pi - \alpha$, deci $\alpha = \frac{\pi}{5}$ de unde $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle DOE = \angle EOA = \frac{2\pi}{5}$, adică $ABCDE$ este pentagon regulat **2p**

Altă soluție. Considerăm un reper ortonormat cu centrul în centrul O al cercului $\mathcal{C}$ circumscripșit pentagonului $ABCDE$, cu unitatea de lungime egală cu raza cercului $\mathcal{C}$ și cu axa reală OA . Fie z_X afixul punctului X în acest reper.

Deoarece $AB = BC = CD$, avem $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD$. Reiese că afixele vârfurilor pentagonului sunt $z_A = 1$, $z_B = z$, $z_C = z^2$, $z_D = z^3$ și $z_E = w$, cu $z = \cos \alpha + i \sin \alpha$, $\alpha \in (0, \frac{2\pi}{3})$ și $w = \cos \beta + i \sin \beta$, $\beta \in (3\alpha, 2\pi)$ **2p**

Dacă centrul de greutate al pentagonului coincide cu O , atunci $z_A + z_B + z_C + z_D + z_E = 0$, de unde obținem $1 + z + z^2 + z^3 + w = 0$ **1p**

Obținem $w = \frac{1-z^4}{z-1}$, de unde $\bar{w} = \frac{1-\bar{z}^4}{\bar{z}-1}$ și, folosind $w\bar{w} = z\bar{z} = 1$, deducem relația $\frac{1-z^4}{z-1} \cdot \frac{z^4-1}{z^3(1-z)} = 1$ **2p**

Efectuând calculele, obținem $(z^5 - 1)(z^3 - 1) = 0$. Singura soluție a acestei ecuații având argumentul în $(0, \frac{2\pi}{3})$ este $\cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}$, deci $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle DOE = \angle EOA = \frac{2\pi}{5}$, adică $ABCDE$ este pentagon regulat **2p**

Problema 3. Fie numărul natural $n \geq 2$ și $\mathcal{F}$ mulțimea funcțiilor $f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ pentru care $f(k) \leq f(k+1) \leq f(k) + 1$, pentru orice $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$.

a) Determinați cardinalul mulțimii $\mathcal{F}$.

b) Determinați numărul total al punctelor fixe ale funcțiilor din $\mathcal{F}$.

Un punct fix al funcției f este un număr $x \in \{1, 2, \dots, n\}$ astfel încât $f(x) = x$.

Soluție. a) Numărăm funcțiile din $\mathcal{F}$ cu $f(1) = k$, $k = \overline{1, n}$. Asociem fiecărui $i = \overline{2, n}$ numărul $f(i) - f(i-1) \in \{0, 1\}$, cu restricția că pot fi cel mult $n - k$ de 1. Această asociere este bijectivă, iar posibilitățile de a alege numerele 0 și 1 ca mai sus sunt în număr de $C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + \dots + C_{n-1}^{n-k}$ (sunt posibilitățile de a plasa 0, 1, 2, ..., $n - k$ de 1) **1p**

Rezultă $|\mathcal{F}| = \sum_{k=1}^n (C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + \dots + C_{n-1}^{n-k}) = \sum_{p=0}^{n-1} (n-p) C_{n-1}^p = n \cdot 2^{n-1} - (n -$

$1) \sum_{p=0}^{n-1} C_{n-2}^{p-1} = (n+1)2^{n-2}$ **2p**

b) Numărăm de câte ori apare punctul fix k la funcțiile din $\mathcal{F}$, $k = \overline{1, n}$ (același punct fix poate apărea la mai multe funcții). Asociem fiecărei funcții pentru care $f(k) = k$ numerele $f(i) - f(i-1) \in \{0, 1\}$, $i = \overline{2, n}$ **2p**

Deoarece aceste numere pot fi alese fără restricții, există 2^{n-1} posibilități, deci fiecare punct fix apare la 2^{n-1} funcții, iar $\sum_{f \in \mathcal{F}} |\text{Fix}(f)| = n \cdot 2^{n-1}$ **2p**

Altă soluție. Notăm cu $\mathcal{F}_n$ mulțimea din enunț, cu $k_n = |\mathcal{F}_n|$ și cu $s_n = \sum_{f \in \mathcal{F}_n} |\text{Fix}(f)|$.

Pentru $n = 2$ avem $k_2 = 3$ și $s_2 = 4$.

a) Observăm că dacă $f \in \mathcal{F}_{n+1}$ și $f(n) \leq n$, atunci restricția lui f la $\{1, 2, \dots, n\}$ este o funcție din $\mathcal{F}_n$. Reciproc, orice funcție din $\mathcal{F}_n$ poate fi extinsă la una din $\mathcal{F}_{n+1}$ în două moduri, deoarece $f(n+1) \in \{f(n), f(n)+1\}$ **1p**

Pentru cazul $f(n) = n+1$ avem $f(n+1) = n+1$ și apoi, parcurgând valorile $f(n-1), f(n-2), \dots, f(1)$, observăm că la fiecare pas $f(k+1) - f(k)$ poate fi 0 sau 1, deci putem construi f în 2^{n-1} moduri. Așadar, avem recurența $k_{n+1} = 2k_n + 2^{n-1}$, iar cum $k_2 = 3$, obținem $k_n = (n+1) \cdot 2^{n-2}$ **2p**

b) Fie $a_i(n)$ numărul funcțiilor $f \in \mathcal{F}_n$ pentru care $i \in \text{Fix}(f)$. Atunci avem $s_n = a_1(n) + a_2(n) + \dots + a_n(n)$.

Fie $f \in \mathcal{F}_{n+1}$ o funcție pentru care $f(k) = k$, pentru $k \leq n$. Atunci, folosind relația din ipoteză, avem:

$$f(n) \leq f(n-1) + 1 \leq \dots \leq f(k) + (n-k) = n.$$

Așadar, restricția lui f la $\{1, 2, \dots, n\}$ este o funcție din $\mathcal{F}_n$, adică f se obține dintr-o funcție din $\mathcal{F}_n$, căreia îi este adăugată valoarea $f(n+1)$. Dar, cum $f(n) \leq n$, valoarea lui $f(n+1)$ poate fi aleasă în două moduri, ceea ce implică $a_k(n+1) = 2a_k(n)$, pentru orice $k \leq n \dots \mathbf{1p}$

Pentru a determina $a_{n+1}(n+1)$, observăm că $f(n+1) = n+1$, iar parcurgând valorile $f(n), f(n-1), \dots, f(1)$, observăm că la fiecare pas $f(k+1) - f(k)$ este 0 sau 1, adică f se poate construi în 2^n moduri. Așadar, $a_{n+1}(n+1) = 2^n \dots \mathbf{1p}$

De aici avem recurența $s_{n+1} = 2s_n + 2^n$, iar cum $s_2 = 4$, obținem $s_n = n \cdot 2^{n-1} \dots \mathbf{1p}$

Încă o soluție. Observăm că dacă $f(\ell) = \ell = f(\ell-1)$, atunci nu există puncte fixe ale funcției $f \in \mathcal{F}$ mai mici decât ℓ . De asemenea, dacă $f(\ell) = \ell = f(\ell+1)$, atunci nu există puncte fixe ale lui $f \in \mathcal{F}$ mai mari decât ℓ . De aici deducem că punctele fixe ale unei funcții $f \in \mathcal{F}$ formează o mulțime de k numere consecutive $\{\ell, \ell+1, \dots, \ell+k-1\} \dots \mathbf{1p}$

Caracterizăm funcțiile din $\mathcal{F}$ care au $k \leq n-2$ puncte fixe.

Pentru $2 \leq \ell \leq n-k$ avem $f(\ell-1) = \ell$ și $f(\ell+k) = \ell+k-1$. Acum pentru $\{f(1), f(2), \dots, f(\ell-2)\}$ avem $2^{\ell-2}$ moduri de a construi funcția f , iar pentru $\{f(\ell+k+1), \dots, f(n)\}$ avem $2^{n-\ell-k}$ moduri de a construi funcția f , adică avem în total 2^{n-k-2} moduri de a construi funcția f în acest caz $\dots \mathbf{1p}$

Pentru $\ell = 1$ sau $\ell = n-k+1$ avem fixat doar încă un punct pe lângă cele k puncte fixe, deci f se poate construi în 2^{n-k-1} moduri. Așadar, avem în total $(n-k+3) \cdot 2^{n-k-2}$ funcții în $\mathcal{F}$ având $k \leq n-2$ puncte fixe. Pentru $k = n-1$ puncte fixe avem doar două astfel de funcții în $\mathcal{F}$, iar pentru $k = n$ puncte fixe avem o singură funcție în $\mathcal{F}$. $\dots \mathbf{1p}$

a) Din cele de mai sus deducem

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}| &= 3 + \sum_{k=1}^{n-2} (n-k+3) \cdot 2^{n-k+2} = 3 + \sum_{k=1}^{n-2} 2^{n-k} + \sum_{k=1}^{n-2} (n-k-1) 2^{n-k-2} = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k + \\ &\quad + \sum_{k=0}^{n-3} (k+1) 2^k = 2^n - 1 + (n-1) \cdot 2^{n-2} - 2^{n-1} + 1 = (n+1) \cdot 2^{n-2} \dots \mathbf{2p} \end{aligned}$$

b) În mod similar, deducem:

$$\sum_{f \in \mathcal{F}} |\text{Fix}(f)| = 3n - 2 + \sum_{k=1}^{n-2} k(n-k+3) \cdot 2^{n-k+2} = n \cdot 2^{n-1} \dots \mathbf{2p}$$

Problema 4. Considerăm un număr natural $n \geq 3$, mulțimea $S = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ și mulțimea $\mathcal{F}$ a funcțiilor de la S la S . Vom spune că o mulțime $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ este generatoare pentru mulțimea $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}$ dacă orice funcție din $\mathcal{H}$ se poate reprezenta ca o compunere de funcții din $\mathcal{G}$.

a) Fie funcțiile $a : S \rightarrow S$, $a(n-1) = n$, $a(n) = n-1$ și $a(k) = k$ pentru $k \in S \setminus \{n-1, n\}$ și $b : S \rightarrow S$, $b(n) = 1$ și $b(k) = k+1$ pentru $k \in S \setminus \{n\}$. Arătați că $\{a, b\}$ este o mulțime generatoare pentru mulțimea $\mathcal{B}$ a funcțiilor bijective din $\mathcal{F}$.

b) Demonstrați că numărul minim de elemente pe care le are o mulțime generatoare a lui $\mathcal{F}$ este 3.

Soluție. Vom nota cu fg funcția $f \circ g$ (unde $f, g \in \mathcal{F}$) și cu $(i_1, i_2, \dots, i_p)$ funcția $f : S \rightarrow S$ dată de $f(i_j) = i_{j+1}$, $j = \overline{1, p-1}$, $f(i_p) = i_1$ și $f(x) = x$ pentru $x \neq i_1, \dots, i_p$ (unde $i_1, \dots, i_p$ sunt $p \geq 2$ elemente distincte din S).

a) Raționăm prin inducție după n . Pentru $n = 3$, $\mathcal{B} = \{a, a^2, b, b^2, ab, ba\}$.

Presupunem acum că proprietatea este adevărată pentru un $n \geq 3$ și arătăm că este adevărată și pentru $n + 1$. Fie $f : S \cup \{n + 1\} \rightarrow S \cup \{n + 1\}$, $f(n + 1) = m$ și $a', b' : S \cup \{n + 1\} \rightarrow S \cup \{n + 1\}$ analoagele lui a , respectiv b . Atunci $((b')^{n-m+1}f)(n + 1) = n + 1$, deci restricția lui $g = (b')^{n-m+1}f$ la S se poate scrie ca o compunere de a și b ; avem $f = (b')^m g$
(1) **1p**

Avem $(b'a')(n + 1) = n + 1$ și restricția lui $b'a'$ la S este b . În plus, $((b')^n a'b')(n + 1) = n + 1$ și restricția lui $(b')^n a'b'$ la S este a . Atunci, din (1) reiese că f se poate scrie ca o compunere de a' și b' **1p**

b) Arătăm că, dacă $\mathcal{G}$ este o mulțime generatoare pentru $\mathcal{F}$, atunci $|\mathcal{G}| \geq 3$.

Dacă $\mathcal{G}$ are cel mult două elemente f, g , atunci:

- dacă f și g sunt bijective, atunci $\mathcal{G}$ nu poate genera decât funcții bijective;
- dacă f și g nu sunt bijective, atunci ele nu sunt surjective, deci $\mathcal{G}$ nu poate genera decât funcții nesurjective;

- dacă (de exemplu) f este bijectivă și g nu este bijectivă, atunci funcțiile bijective generate de $\mathcal{G}$ sunt f^n , $n \in \mathbb{N}^*$. În acest caz $\mathcal{G}$ nu poate genera atât a cât și b , deoarece $ab \neq ba$, pe când $f^m f^p = f^p f^m$, $\forall m, p \in \mathbb{N}^*$ **2p**

Arătăm că o mulțime generatoare pentru $\mathcal{F}$ este $\mathcal{G} = \{a, b, c\}$, unde $c : S \rightarrow S$, $c(k) = k$ pentru $k \in S \setminus \{n\}$ și $c(n) = n - 1$ **1p**

Dovedim că orice $f \in \mathcal{F}$ se scrie ca o compunere de a, b, c prin inducție descendentă, după numărul de elemente din imaginea lui f . Dacă $|\text{Im } f| = n$, atunci f este bijectivă și folosim a).

Presupunem că afirmația este adevărată pentru orice f cu $|\text{Im } f| = k$, unde $1 < k \leq n$ și o dovedim pentru un g arbitrar, cu $|\text{Im } g| = k - 1$. Deoarece g nu este injectivă, există $u, v \in S$, $u \neq v$ și o funcție bijectivă r astfel încât $\text{Im } gr = \{1, 2, \dots, k - 1\}$ și $(gr)(u) = (gr)(v) = k - 1$. Fie $s : S \rightarrow S$, $s(n - 1) = u$, $s(n) = v$ și $s(x) = x$ pentru $x \neq u, v$. Considerăm funcția $h : S \rightarrow S$, $h(x) = (grs)(x)$ pentru $x \leq n - 1$ și $h(n) = k$. Atunci $|\text{Im } h| = k$, deci h se scrie ca o compunere a funcțiilor a, b, c , iar $grs = hc$, deci $g = hcs^{-1}r^{-1}$ se scrie ca o compunere a funcțiilor a, b, c **2p**



MINISTERUL EDUCAȚIEI



SOCIETATEA DE ȘTIINȚE
MATEMATICE DIN ROMÂNIA



Olimpiada Națională de Matematică
Etape Națională, Târgu Mureș, 3 aprilie 2024

CLASA a XI-a – soluții și bareme

Problema 1. Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval deschis și $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție de două ori derivabilă pe I , cu proprietatea $f(x) \cdot f''(x) = 0$, pentru orice $x \in I$. Arătați că $f''(x) = 0$, pentru orice $x \in I$.

Soluție. Fie $A = \{x \in I \mid f''(x) \neq 0\}$. Presupunem, prin absurd, $A \neq \emptyset$. Cum $f'' = (f')'$ are proprietatea lui Darboux pe I , mulțimea A nu poate avea un singur element. **2p**
Fie $a, b \in A$, cu $a < b$. Din ipoteză, deducem $f(a) = f(b) = 0$. Funcția $g : I \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x)f'(x)$, $\forall x \in I$, este monoton crescătoare pe I deoarece $g'(x) = (f'(x))^2 + f(x)f''(x) = (f'(x))^2 \geq 0$, $\forall x \in I$. Atunci, din $g(a) = g(b) = 0$, obținem $g(x) = 0$, $\forall x \in [a, b]$, deci $g'(x) = 0$, $\forall x \in [a, b]$. Rezultă $f'(x) = 0$, $\forall x \in [a, b]$. Dar atunci $f''(a) = \lim_{x \searrow a} \frac{f'(x) - f'(a)}{x - a} = 0$, în contradicție cu $a \in A$. Prin urmare $A = \emptyset$, adică $f''(x) = 0$, pentru orice $x \in I$ **5p**

Problema 2. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o matrice inversabilă.

- Arătați că matricea AA^T are valorile proprii reale, strict pozitive.
- Presupunem că există numerele naturale nenule și distincte p și q astfel ca $(AA^T)^p = (A^T A)^q$. Arătați că $A^T = A^{-1}$.
(Notăție: A^T este transpusa matricei A .)

Soluție.

a) *Demonstrația 1.*

Fie $\lambda \in \mathbb{C}$ o valoare proprie a matricei AA^T și $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{O_{n,1}\}$, astfel încât $AA^T X = \lambda X$. Transpunând și conjugând relația anterioară, obținem $\overline{X}^T AA^T = \overline{\lambda} \overline{X}^T$, de unde, prin înmulțire la dreapta cu X , rezultă $\overline{X}^T AA^T X = \overline{\lambda} \overline{X}^T X$. Astfel, $(A^T X)^T (A^T X) = \overline{\lambda} (\overline{X}^T X)$. Dacă

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ și } A^T X = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

atunci egalitatea matriceală anterioară devine $\sum_{i=1}^n |y_i|^2 = \bar{\lambda} \sum_{i=1}^n |x_i|^2$. Cum $X \neq O_{n,1}$ și A este inversabilă, deci $A^T X \neq O_{n,1}$, avem $\sum_{i=1}^n |x_i|^2 > 0$ și $\sum_{i=1}^n |y_i|^2 > 0$. Rezultă $\lambda \in (0, \infty)$.

Demonstrația 2.

Deoarece $(AA^T)^T = AA^T$, matricea reală simetrică AA^T are valorile proprii reale. Cum A^T este inversabilă, avem $A^T X \neq O_{n,1}$, $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{O_{n,1}\}$. Atunci $X^T(AA^T)X = (A^T X)^T(A^T X) > 0$, $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{O_{n,1}\}$, adică matricea AA^T este pozitiv definită. Rezultă că valorile proprii ale matricei AA^T sunt strict pozitive.

..... **2p**

b) Matricele AA^T și $A^T A$ au același polinom caracteristic **1p**

Fie $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ valorile proprii comune ale matricelor AA^T și $A^T A$. Matricele $(AA^T)^p$ și $(A^T A)^q$ au valorile proprii $\lambda_1^p \leq \lambda_2^p \leq \dots \leq \lambda_n^p$ și respectiv $\lambda_1^q \leq \lambda_2^q \leq \dots \leq \lambda_n^q$. Din $(AA^T)^p = (A^T A)^q$ rezultă $\lambda_i^p = \lambda_i^q$, de unde $\lambda_i^{p-q} = 1$, pentru $i = 1, \dots, n$. Atunci $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 1$ **2p**

Notăm $AA^T - I_n = B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$. Matricea B este are valorile proprii nule, deci B^2 are valorile proprii nule. Cum B este simetrică, obținem $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij}^2 = \text{Tr}(BB^T) = \text{Tr}(B^2) = 0$. Rezultă $B = O_n$, adică $AA^T = I_n$.

Rezultă $A^T = A^{-1}$ **2p**

Problema 3. Fie matricele $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Considerăm funcția matriceală $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, definită prin $f(Z) = AZ + B\bar{Z}$, $Z \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, unde $\bar{Z}$ este matricea având ca elemente conjugatele elementelor lui Z . Arătați că următoarele afirmații sunt echivalente:

- (1) funcția f este injectivă;
- (2) funcția f este surjectivă;
- (3) matricele $A + B$ și $A - B$ sunt inversabile.

Soluție. Pentru $Z \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, există $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ astfel ca $Z = X + iY$, iar $\bar{Z} = X - iY$. Rezultă $f(Z) = (A + B)X + i(A - B)Y$ **1p**

(1) $\Rightarrow$ (3). Presupunem, prin absurd, că $A + B$ este neinversabilă sau $A - B$ este neinversabilă. Dacă matricea $A + B$ este neinversabilă, atunci $\det(A + B) = 0$, deci există $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{O_{n,1}\}$ astfel ca $(A + B)C = O_{n,1}$. Definim matricea $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $X \neq O_n$, având cele n coloane egale cu C .

Obținem $f(X) = (A + B)X = O_n = f(O_n)$, în contradicție cu ipoteza (1). Dacă matricea $A - B$ este neinvertibilă, atunci $\det(A - B) = 0$, deci există $D \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{O_{n,1}\}$ astfel ca $(A - B)D = O_{n,1}$. Definim matricea $Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $Y \neq O_n$, având cele n coloane egale cu D . Astfel, avem $f(iY) = i(A - B)Y = O_n = f(O_n)$, în contradicție cu ipoteza (1).

Prin urmare, implicația (1) $\Rightarrow$ (3) este demonstrată..... **2p**

(3) $\Rightarrow$ (1). Fie $Z_1 = X_1 + iY_1$, cu $X_1, Y_1 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, și $Z_2 = X_2 + iY_2$, cu $X_2, Y_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, astfel încât $f(Z_1) = f(Z_2)$. Atunci, are loc relația $(A + B)X_1 + i(A - B)Y_1 = (A + B)X_2 + i(A - B)Y_2$. Rezultă relațiile $(A + B)(X_1 - X_2) = O_n$ și $(A - B)(Y_1 - Y_2) = O_n$. Din ipoteza (3) deducem $X_1 - X_2 = O_n$ și $Y_1 - Y_2 = O_n$. Astfel, $X_1 = X_2$ și $Y_1 = Y_2$, deci $Z_1 = Z_2$.

Rezultă că funcția f este injectivă..... **1p**

(2) $\Rightarrow$ (3). Presupunem, prin absurd, că $A + B$ este neinvertibilă sau $A - B$ este neinvertibilă. Dacă matricea $A + B$ este neinvertibilă, atunci $\det(A + B) = 0$. Pentru $Z = X + iY \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, avem $\det((A + B)X) = 0$. Rezultă $f(Z) \neq I_n$, $\forall Z \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, în contradicție cu ipoteza (2). Dacă matricea $A - B$ este neinvertibilă, atunci $\det(A - B) = 0$. Pentru oricare $Z = X + iY \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, avem $\det((A - B)Y) = 0$, deci $f(Z) \neq iI_n$, în contradicție cu ipoteza (2).

Astfel, implicația (2) $\Rightarrow$ (3) este demonstrată..... **2p**

(3) $\Rightarrow$ (2). Fie $Z = X + iY \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Definim matricele $U = (A + B)^{-1}X$ și $V = (A - B)^{-1}Y$. Atunci avem $f(U + iV) = X + iY = Z$.

Rezultă că funcția f este surjectivă..... **1p**

Notă. Pentru justificarea echivalenței (1) $\Leftrightarrow$ (2) pe baza faptului că f este o aplicație liniară pe spațiul vectorial finit dimensional $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ se acordă **3p**, iar pentru demonstrarea uneia dintre echivalențele (1) $\Leftrightarrow$ (3) sau (2) $\Leftrightarrow$ (3) se acordă **4p**.

Problema 4. Fie funcțiile $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, unde $g(x) = 2f(x) + f(x^2)$, pentru $x \in \mathbb{R}$.

a) Arătați că, dacă f este mărginită într-o vecinătate a originii, iar g este continuă în origine, atunci f este continuă în origine.

b) Dați un exemplu de funcție f , discontinuă în origine, pentru care funcția g este continuă în origine.

Soluția 1.

a) Fie $\varepsilon > 0$, arbitrar. Conform ipotezei, există $\delta_1, M > 0$ astfel încât $|f(x)| < M$, $\forall x \in (-\delta_1, \delta_1)$. Cum g este continuă în origine, există $\delta_2 > 0$,

care depinde de ε , astfel încât $|g(x) - g(0)| < \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall x \in (-\delta_2, \delta_2)$. Definim $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, 1\}$. Din $0 < \delta \leq 1$, deducem $a^2 < \delta$, $\forall a \in (-\delta, \delta)$.

Fie $x \in (-\delta, \delta)$. Deoarece $|x| < \delta \leq \delta_2$, avem

$$\begin{aligned} |f(x) - f(0)| &= \frac{|2f(x) - 2f(0)|}{2} \leq \frac{|2f(x) + f(x^2) - 3f(0)| + |f(x^2) - f(0)|}{2} \\ &= \frac{|g(x) - g(0)|}{2} + \frac{|f(|x|^2) - f(0)|}{2} < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{|f(|x|^2) - f(0)|}{2}. \end{aligned}$$

..... **2p**

Prin inducție, obținem inegalitatea

$$|f(x) - f(0)| < \varepsilon \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}} \right) + \frac{|f(|x|^{2^n}) - f(0)|}{2^n}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Fie $p \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $2^p > \frac{4M}{\varepsilon}$. Avem $|x|^{2^p} < \delta \leq \delta_1$. Atunci

$$|f(x) - f(0)| < \frac{\varepsilon \left(1 - \frac{1}{2^p}\right)}{2} + \frac{|f(|x|^{2^p}) - f(0)|}{2^p} \leq \frac{\varepsilon \left(1 - \frac{1}{2^p}\right)}{2} + \frac{2M}{2^p} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Rezultă că funcția f este continuă în origine **2p**

b) Fie $a \in (0, 1)$ și $A = \{\pm a^{2^n}, n \in \mathbb{Z}\}$. Definim funcția

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} (-1)^n 2^n, & |x| = a^{2^n}, n \in \mathbb{Z} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus A \end{cases}.$$

Deoarece $\lim_{k \rightarrow \infty} a^{2^{2k}} = 0$ și $\lim_{k \rightarrow \infty} f(a^{2^{2k}}) = \lim_{k \rightarrow \infty} 2^{2k} = \infty$, f este discontinuă în origine.

Dacă $x \in \mathbb{R} \setminus A$, atunci $x^2 \in \mathbb{R} \setminus A$ (reducere la absurd). Rezultă $g(x) = 0$.

Dacă $x \in A$, atunci există $n \in \mathbb{Z}$ astfel încât $|x| = a^{2^n}$. Rezultă

$$g(x) = 2f(a^{2^n}) + f(a^{2^{n+1}}) = 2^{n+1}[(-1)^n + (-1)^{n+1}] = 0.$$

Prin urmare, g este funcția nulă, continuă în origine **3p**

Soluția 2

a) Fie limitele $L := \limsup_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} (\sup\{f(x) \mid x \in (-\varepsilon, \varepsilon) \setminus \{0\}\})$

și $\ell := \liminf_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} (\inf\{f(x) \mid x \in (-\varepsilon, \varepsilon) \setminus \{0\}\})$. Deoarece f este mărginită pe o vecinătate a originii, avem $\ell, L \in \mathbb{R}$, cu $\ell \leq L$ **1p**

Există şirurile $(x_n)_{n \geq 1}$ şi $(y_n)_{n \geq 1}$, cu termenii nenuli, convergente la 0, astfel încât $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L$ şi respectiv $\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = \ell \dots \dots \dots \mathbf{1p}$
Din continuitatea lui g în origine şi proprietăţile limitelor superioară şi inferioară, rezultă

$$\begin{aligned} g(0) &= \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (2f(x_n) + f(x_n^2)) = \liminf_{n \rightarrow \infty} (2f(x_n) + f(x_n^2)) \\ &\geq 2 \liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n) + \liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n^2) = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) + \liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n^2) \geq 2L + \ell \end{aligned}$$

şi

$$\begin{aligned} g(0) &= \lim_{n \rightarrow \infty} g(y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (2f(y_n) + f(y_n^2)) = \limsup_{n \rightarrow \infty} (2f(y_n) + f(y_n^2)) \\ &\leq 2 \limsup_{n \rightarrow \infty} f(y_n) + \limsup_{n \rightarrow \infty} f(y_n^2) = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) + \limsup_{n \rightarrow \infty} f(y_n^2) \leq 2\ell + L. \end{aligned}$$

Cum $\ell \leq L$, din inegalitatea $2L + \ell \leq g(0) \leq 2\ell + L$, rezultă $L = \ell = \frac{g(0)}{3}$.

Prim urmare, f este continuă în origine, cu $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{g(0)}{3} = f(0) \dots \dots \mathbf{2p}$

b) A se vedea *Soluţia 1*.



MINISTERUL EDUCAȚIEI



SOCIETATEA DE ȘTIINȚE
MATEMATICE DIN ROMÂNIA



Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Națională, Târgu Mureș, 3 aprilie 2024

CLASA a XII-a – soluții și barem orientativ de corectare

Problema 1. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă, cu proprietatea că $f(x) + \sin(f(x)) \geq x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Arătați că

$$\int_0^\pi f(x) dx \geq \frac{\pi^2}{2} - 2.$$

Soluție.

Fie $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funcția definită prin $g(x) = x + \sin(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Atunci g este o funcție continuă și derivabilă pe $\mathbb{R}$, cu $g'(x) > 0$ pentru orice $x \in ((2k-1)\pi, (2k+1)\pi)$, pentru orice $k \in \mathbb{Z}$. Rezultă că g este strict crescătoare pe fiecare interval $[(2k-1)\pi, (2k+1)\pi]$, cu $k \in \mathbb{Z}$, deci g este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$ **2p**

Cum $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ și $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$, g este bijectivă, cu inversa $g^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de asemenea continuă și strict crescătoare pe $\mathbb{R}$ **1p**

Inegalitatea din ipoteză se transcrie atunci echivalent

$$g(f(x)) \geq x, \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R} \iff f(x) \geq g^{-1}(x), \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R}.$$

..... **1p**
Atunci

$$\int_0^\pi f(x) dx \geq \int_0^\pi g^{-1}(x) dx.$$

..... **1p**
Cum $g(0) = 0$ și $g(\pi) = \pi$, din identitatea lui Young avem

$$\begin{aligned} \int_0^\pi g^{-1}(x) dx &= \pi \cdot g(\pi) - 0 \cdot g(0) - \int_0^\pi g(x) dx = \\ &= \pi^2 - \left(\frac{\pi^2}{2} - \cos(\pi) \right) + (0 - \cos(0)) = \frac{\pi^2}{2} - 2. \end{aligned}$$

..... **1p**
Obținem astfel inegalitatea căutată:

$$\int_0^\pi f(x) dx \geq \frac{\pi^2}{2} - 2.$$

..... **1p**

Problema 2. Fie $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ un corp cu proprietatea că $x^2y = yx^2$, pentru orice $x, y \in \mathbb{K}$. Arătați că corpul $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ este comutativ.

Soluție.

Fie $Z(\mathbb{K}) = \{c \in \mathbb{K} \mid cx = xc, \forall x \in \mathbb{K}\}$ centrul corpului $\mathbb{K}$. Atunci $Z(\mathbb{K})$ este un subcorp al lui $\mathbb{K}$.

..... **1p**

Avem că $2 \cdot a = (a + 1)^2 - a^2 - 1 \in Z(\mathbb{K})$, pentru orice $a \in \mathbb{K}$ **1p**

Dacă caracteristica $\text{char}(\mathbb{K})$ a corpului $\mathbb{K}$ este diferită de 2, atunci $2 \cdot 1$ este un element inversabil, aflat în centrul $Z(\mathbb{K})$, astfel că

$$a = (2 \cdot 1)^{-1} \cdot (2 \cdot a) \in Z(\mathbb{K}), \text{ pentru orice } a \in \mathbb{K},$$

și corpul $\mathbb{K}$ este comutativ. **1p**

Fie în continuare $\text{char}(\mathbb{K}) = 2$.

Pentru orice $a, b \in \mathbb{K}$ avem că $w = ab + ba = (a + b)^2 - a^2 - b^2 \in Z(\mathbb{K})$ **1p**

Cum $w \cdot ab = (ab)^2 + ab^2a = (ab)^2 + a^2b^2 \in Z(\mathbb{K})$, dacă $w \neq 0$, atunci $a, b \neq 0$ și $ab = w^{-1} \cdot ((ab)^2 + a^2b^2) \in Z(\mathbb{K})$. Atunci $a \cdot (ab) = (ab) \cdot a = a \cdot (ba)$, astfel că, simplificând la stânga cu a , obținem că $ab = ba$.

Dacă $w = 0$, cum $1 = -1$, rezultă că $ab = -ba = ba$ **2p**

În concluzie, $ab = ba$ pentru orice $a, b \in \mathbb{K}$ și corpul $\mathbb{K}$ este comutativ. **1p**

Problema 3. Fie $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă, cu $f(1) = 0$. Demonstrați existența și determinați valoarea limitei

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 1 \\ t < 1}} \left(\frac{1}{1-t} \cdot \int_0^1 x(f(tx) - f(x)) dx \right).$$

Soluție.

Fie $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ funcția definită prin $g(x) = xf(x)$ pentru orice $x \in [0, 1]$. Fiind continuă, g admite primitive, și fie $G : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ primitiva funcției g cu $G(0) = 0$. Atunci $g(1) = f(1) = 0$ și

$$\int_0^1 xf(x) dx = \int_0^1 g(x) dx = G(1),$$

..... **1p**

iar

$$\int_0^1 xf(tx) dx = \frac{1}{t^2} \cdot \int_0^1 tg(tx) dx = \frac{1}{t^2} \cdot G(t),$$

pentru orice $t \in (0, 1]$ **2p**

Rezultă că

$$\frac{1}{1-t} \cdot \int_0^1 x(f(tx) - f(x)) dx = \frac{1}{1-t} \cdot \left(\frac{1}{t^2} \cdot G(t) - G(1) \right) = \frac{1}{t^2} \cdot \frac{G(t) - t^2G(1)}{1-t}.$$

.....1p
 Fie $u, v : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ funcțiile definite prin $u(t) = G(t) - t^2G(1)$, respectiv $v(t) = 1 - t$, pentru orice $t \in [0, 1]$. Funcțiile u și v sunt derivabile, cu $u'(t) = g(t) - 2tG(1)$, $v'(t) = -1$, pentru orice $t \in (0, 1)$, și verifică condițiile:

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 1 \\ t < 1}} u(t) = \lim_{\substack{t \rightarrow 1 \\ t < 1}} v(t) = 0 \quad \text{și} \quad \lim_{\substack{t \rightarrow 1 \\ t < 1}} \frac{u'(t)}{v'(t)} = 2G(1) - g(1) = 2G(1).$$

.....1p
 Cu regula lui l'Hôpital rezultă atunci că există limita

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 1 \\ t < 1}} \left(\frac{1}{1-t} \cdot \int_0^1 x(f(tx) - f(x)) dx \right) = \lim_{\substack{t \rightarrow 1 \\ t < 1}} \frac{1}{t^2} \cdot \frac{u(t)}{v(t)} = \lim_{\substack{t \rightarrow 1 \\ t < 1}} \frac{u(t)}{v(t)}$$

și aceasta este egală cu

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 1 \\ t < 1}} \frac{u'(t)}{v'(t)} = 2G(1) = 2 \int_0^1 xf(x) dx.$$

.....2p

Problema 4. Fie $\mathbb{L}$ un corp finit, cu q elemente. Arătați că:

- a) Dacă $q \equiv 3 \pmod{4}$ și $n \in \mathbb{N}$, cu $n \geq 2$, este un număr natural divizibil prin $q - 1$, atunci $x^n = (x^2 + 1)^n$ pentru orice element $x \in \mathbb{L}^*$.
 b) Dacă există un număr natural $n \in \mathbb{N}^*$, cu $n \geq 2$, astfel încât $x^n = (x^2 + 1)^n$ pentru orice $x \in \mathbb{L}^*$, atunci $q \equiv 3 \pmod{4}$ și $q - 1$ divide n .

Soluție.

- a) Deoarece grupul multiplicativ $\mathbb{L}^*$ are ordinul $q - 1$, pentru orice $x \in \mathbb{L}^*$ avem $x^{q-1} = 1$, și cum n este un multiplu al lui $q - 1$, rezultă că $x^n = 1$, pentru orice $x \in \mathbb{L}^*$1p
 Deoarece 4 nu divide ordinul $q - 1$ al grupului $\mathbb{L}^*$, nu există în $\mathbb{L}^*$ elemente de ordin 4, astfel că $x^2 \neq -1$ pentru orice $x \in \mathbb{L}^*$. Rezultă că $x^2 + 1 \neq 0$, deci $(x^2 + 1)^n = 1$, pentru orice $x \in \mathbb{L}^*$.
 Prin urmare, $x^n = (x^2 + 1)^n$, pentru orice $x \in \mathbb{L}^*$1p

- b) Dacă $\text{char}(\mathbb{L}) = 2$, ar rezulta că $1 = 1^n = (1^2 + 1)^n = 0$, ceea ce este fals. Prin urmare, q este impar.

Dacă $q \equiv 1 \pmod{4}$, considerăm un generator a al grupului multiplicativ $\mathbb{L}^*$, și fie $b = a^{\frac{q-1}{4}}$. Atunci b este un element de ordin 4 în $\mathbb{L}^*$, astfel că $b^2 \neq 1 = (b^2)^2$. Rezultă că $b^2 = -1$ și obținem că $b^n = (b^2 + 1)^n = 0$, ceea ce este fals. Prin urmare, $q \equiv 3 \pmod{4}$2p
 Considerăm submulțimile $A = \{x + x^{-1} \mid x \in \mathbb{L}^*\}$ și $H = \{x \in \mathbb{L}^* \mid x^n = 1\}$. Deoarece $\mathbb{L}^*$ este

comutativ, H este un subgrup al lui $\mathbb{L}^*$. Conform ipotezei, pentru orice $y \in A$ există $x \in \mathbb{L}^*$ cu $y = x + x^{-1} = x^{-1}(x^2 + 1)$, astfel că $y^n = x^{-n}(x^2 + 1)^n = 1$. Rezultă că $A \subseteq H$ **1p**
 Fie $f : \mathbb{L}^* \rightarrow A$ funcția definită prin $f(x) = x + x^{-1}$. Din definiția mulțimii A , f este surjectivă, astfel că

$$\mathbb{L}^* = \bigcup_{y \in A} f^{-1}(y)$$

și rezultă că

$$q - 1 = |\mathbb{L}^*| = \sum_{y \in A} |f^{-1}(y)|.$$

..... **1p**
 Fie $u, v \in \mathbb{L}^*$ care verifică egalitatea $f(u) = f(v)$. Echivalent, avem

$$u + u^{-1} = v + v^{-1} \iff u - v = v^{-1} - u^{-1} \iff (u - v)(uv - 1) = 0 \iff v \in \{u, u^{-1}\}.$$

Cum $u = u^{-1} \iff u^2 = 1 \iff u \in \{1, -1\}$, rezultă că

$$|f^{-1}(2 \cdot 1)| = |f^{-1}(f(1))| = 1, \quad |f^{-1}(2 \cdot (-1))| = |f^{-1}(f(-1))| = 1$$

și

$$|f^{-1}(y)| = 2, \quad \text{pentru orice } y \in A \setminus \{2 \cdot 1, 2 \cdot (-1)\}.$$

Obținem că

$$q - 1 = |\mathbb{L}^*| = 1 + 1 + 2 \cdot (|A| - 2) = 2 \cdot |A| - 2,$$

astfel că $|A| = \frac{q+1}{2}$. Cum $A \subseteq H$, avem atunci că $|H| \geq \frac{q+1}{2} > \frac{1}{2} \cdot |\mathbb{L}^*|$. Cum H este un subgrup al lui $\mathbb{L}^*$, rezultă atunci că $H = \mathbb{L}^*$. Prin urmare, $x^n = 1$ pentru orice $x \in \mathbb{L}^*$.

Considerând un generator a al grupului $\mathbb{L}^*$, avem că $\text{ord}(a) = q - 1$ și $a^n = 1$, de unde rezultă că $q - 1$ divide n **1p**



Olimpiada Națională de Matematică Etapa Națională, Buzău, 7 aprilie 2025

CLASA a V-a – soluții și bareme

Problema 1. Un număr natural nenul, mai mic sau egal cu 2025, se numește *interesant* dacă este pătrat perfect și *fantastic* dacă restul împărțirii acelui număr la 45 este 0.

- Determinați numărul numerelor care sunt interesante.
- Determinați numărul numerelor care sunt și interesante și fantastice.
- Determinați numărul numerelor naturale, cel mult egale cu 2025, care nu sunt nici interesante și nici fantastice.

Soluție. a) Din $45^2 = 2025$, rezultă că numerele interesante sunt $1^2, 2^2, 3^2, \dots, 45^2$, deci sunt 45 de numere interesante **2p**

b) Numerele fantastice sunt $1 \cdot 45, 2 \cdot 45, 3 \cdot 45, \dots, 45 \cdot 45$, deci sunt 45 numere fantastice **1p**

Din $45 = 5 \cdot 3^2$, rezultă că numerele fantastice care sunt și interesante sunt $5 \cdot 45 = 15^2, 2^2 \cdot 5 \cdot 45 = 30^2$ și $3^2 \cdot 5 \cdot 45 = 45^2$, deci sunt 3 numere care sunt și interesante și fantastice **2p**

c) Numărul numerelor care sunt interesante sau fantastice este $45 + 45 - 3 = 87$, deci numărul numerelor naturale cel mult egale cu 2025, care nu sunt nici interesante și nici fantastice, este $2026 - 87 = 1939$ **2p**

Problema 2. Alexia are mai multe bile, iar prietena ei Cristina nu are nicio bilă. În fiecare zi a unei săptămâni, începând cu ziua de luni, Alexia dăruiește Cristinei câteva dintre bile. În fiecare zi, Alexia dăruiește mai multe bile decât în ziua precedentă.

Alexia a dăruit luni de cinci ori mai puține bile decât vineri, marți a dăruit de șase ori mai puține bile decât sâmbătă, iar miercuri a dăruit de șapte ori mai puține bile decât duminică.

Duminică, la sfârșitul săptămânii, Cristina are 72 de bile.

Determinați câte bile a dăruit Alexia joi prietenei sale.

Soluție. Notăm $a_1, a_2, \dots, a_7$ numărul de bile dăruite de Alexia de luni până duminică, unde $1 \leq a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6 < a_7$ și $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 72$.

Din datele problemei, rezultă că $a_5 = 5a_1, a_6 = 6a_2, a_7 = 7a_3$, deci $6a_1 + 7a_2 + 8a_3 + a_4 = 72, (1)$ **1p**

Dacă $a_1 \geq 3$, atunci $6a_1 + 7a_2 + 8a_3 + a_4 \geq 6 \cdot 3 + 7 \cdot 4 + 8 \cdot 5 + 6 = 92$, contradicție cu (1). Așadar, $a_1 = 1$ sau $a_1 = 2$ **2p**

Dacă $a_1 = 1$, atunci $a_5 = 5$, iar din $a_1 = 1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 = 5$ deducem că $a_2 = 2$, $a_3 = 3$ și $a_4 = 4$, deci $6a_1 + 7a_2 + 8a_3 + a_4 = 48$, contradicție cu (1). Așadar, $a_1 = 2$ **2p**

Cum $a_5 = 5a_1 = 10$, rezultă că $2 = a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 = 10$. În plus, din (1) obținem $7a_2 + 8a_3 + a_4 = 60$, (2).

Dacă $a_2 \geq 4$, atunci $7a_2 + 8a_3 + a_4 \geq 7 \cdot 4 + 8 \cdot 5 + 6 = 74$, contradicție cu (1), deci $a_2 \leq 3$. Cum $a_2 > a_1 = 2$, rezultă că $a_2 = 3$ **1p**

Din (2) obținem $8a_3 + a_4 = 39$, deci $8a_3 < 39$, de unde rezultă că $a_3 \leq 4$. Dar $a_3 > a_2 = 3$, deci $a_3 = 4$, iar din $8a_3 + a_4 = 39$ rezultă că $a_4 = 7$, care verifică relația $a_4 < 10$. Așadar, joi, Alexia a dăruit Cristinei 7 bile **1p**

Problema 3. Determinați numerele prime a, b, c, d , cu $a \leq b$ și $c \leq d$, care verifică simultan condițiile:

- (1) $a + b = c + d + 1$;
- (2) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 3543$.

Soluție. Întrucât $c + d$ și $a + b$ sunt numere naturale consecutive, sumelor, $a + b + c + d$, este număr impar. Rezultă că fie exact trei dintre numerele a, b, c, d sunt pare, deci, fiind prime, sunt egale cu 2, fie exact unul dintre a, b, c, d este par, egal cu 2.

Dacă trei dintre numerele a, b, c, d sunt egale cu 2, din relația (2) rezultă că pătratul celui de-al patrulea număr este 3531, fals, deoarece 3531 nu este pătrat perfect. Ca urmare, exact unul dintre numerele a, b, c, d este egal cu 2, iar din $a \leq b$ și $c \leq d$, rezultă că fie $a = 2$, fie $c = 2$ **2p**

Renotând cu x, y, z cele trei numere diferite de 2 dintre a, b, c și d , din relația (2) rezultă că $x^2 + y^2 + z^2 = 3539$.

Deoarece un pătrat perfect are forma M_3 sau $M_3 + 1$, iar $3539 = M_3 + 2$, unul dintre numerele x^2, y^2, z^2 este multiplu de 3, iar celelalte două au forma $M_3 + 1$. Așadar, unul dintre numerele x, y, z este multiplu de 3, iar cum x, y, z sunt prime, rezultă că unul dintre aceste numere este egal cu 3. **2p**

Presupunând, de exemplu, că $z = 3$, obținem $x^2 + y^2 = 3530$.

Dacă $x \leq 41$ și $y \leq 41$, atunci $x^2 + y^2 \leq 2 \cdot 41^2 = 3362 < 3530$, nu convine. Deci cel puțin unul dintre ele este mai mare sau egal cu 43, fie acesta x .

Dacă $x \geq 61$, atunci $x^2 + y^2 > 61^2 = 3721 > 3530$, deci $43 \leq x \leq 59$. Așadar, x poate fi doar 43, 47, 53 sau 59. **2p**

Analizând cele patru variante, pentru $x = 47$ și $x = 53$ nu obținem soluții, pentru $x = 43$ obținem $y = 41$, iar pentru $x = 59$ obținem $y = 7$, deci numerele a, b, c, d pot fi 2, 3, 41, 43 sau 2, 3, 7, 59 (nu neapărat în această ordine).

Având în vedere relația (1), deducem că problema are o singură soluție:
 $a = 2, b = 43, c = 3, d = 41$ **1p**

Soluția 2. Ca la soluția 1, se arată că unul dintre numerele a și c este egal cu 2, iar celelalte numere sunt mai mari sau egale cu 3 **2p**

Cazul I: $a = 2$. Din relația (2) obținem $b^2 + c^2 + d^2 = 3539$. Deoarece un pătrat perfect are forma M_3 sau $M_3 + 1$, iar $3539 = M_3 + 2$, deducem că unul dintre numerele b^2, c^2, d^2 este multiplu de 3, iar celelalte două au forma $M_3 + 1$. Așadar, unul dintre numerele b, c, d este multiplu de 3, iar cum b, c, d sunt prime, rezultă că numărul respectiv este egal cu 3. **2p**

Folosind relația (1), pentru $b = 3$ obținem $c = d = 2$, iar pentru $d = 3$, din $d \geq c$, rezultă $c = 3, b = 5$. În ambele cazuri, nu se verifică relația (2).

Dacă $c = 3$, atunci $b = d + 2$, iar din (2) obținem $d^2 + (d + 2)^2 = 3530$, (3). Reiese că $2d^2 < 3530$, de unde $d^2 < 1765 < 43^2$, deci $d \leq 42$. Ținând cont că d este prim, se verifică ușor că pentru $d = 41$ se verifică egalitatea (3), iar pentru $d \leq 37$ nu se verifică, întrucât $d^2 + (d + 2)^2 \leq 37^2 + 39^2 = 2890$.

Așadar, în acest caz, obținem soluția $a = 2, b = 43, c = 3, d = 41$... **2p**

Cazul II: $c = 2$. Din relația (2) obținem $a^2 + b^2 + d^2 = 3539$. Analizând din nou după resturile împărțirii la 3 ale unui pătrat perfect, ca mai sus, deducem că exact unul dintre numerele a, b, d este egal cu 3. (*)

Acest număr nu poate fi b (ar rezulta că și $a = 3$), nici d (deoarece din relația (1) ar reieși că $a + b = 6$, deci $a = b = 3$). Dacă $a = 3$, din (1) obținem $b = d$, iar din (2) rezultă că $2d^2 = 3530$, adică $d^2 = 1765$, imposibil, deoarece 1765 nu este pătrat perfect.

În consecință, în acest caz nu se obțin soluții, deci singura soluție a problemei este $a = 2, b = 43, c = 3, d = 41$ **1p**

Notă. Pentru justificarea afirmației (*) de la cazul II, în situația în care afirmația similară de la cazul I nu a fost justificată, se acordă **2p**.

Problema 4. Spunem că un număr natural nenul este *special* dacă atât suma cifrelor sale, cât și suma cifrelor succesorului său sunt divizibile cu 11.

- Determinați ultimele cinci cifre ale unui număr special.
- Arătați că există o infinitate de numere speciale.

Soluție. a) Notăm cu $s(m)$ suma cifrelor unui număr natural nenul m .
Fie $n = \overline{a_k a_{k-1} \dots a_2 a_1}$ un număr special de $k \geq 1$ cifre. Din ipoteză, $11 \mid s(n)$ și $11 \mid s(n+1)$.

Dacă $a_1 \leq 8$, atunci $n+1 = \overline{a_k a_{k-1} \dots a_2 (a_1 + 1)}$, deci $s(n+1) = s(n) + 1$.
Ca urmare, dacă $s(n) = M_{11}$, atunci $s(n+1) = M_{11} + 1$, fals. În consecință,
 $a_1 = 9$ **1p**

Dacă $a_2 \leq 8$, atunci $n+1 = \overline{a_k a_{k-1} \dots (a_2 + 1) 0}$, deci $s(n+1) = s(n) + 1 - a_1 = s(n) - 8$. Ca urmare, dacă $s(n+1) = M_{11}$, atunci $s(n) = M_{11} + 8$, fals. Deducem că $a_2 = 9$ **1p**

Presupunem că ultimele p cifre ale lui n sunt egale cu 9, iar prima cifră diferită de 9 a lui n , în scrierea de la stânga la dreapta, se află pe poziția $p+1$.
Așadar, $n = \overline{a_k a_{k-1} \dots a_{p+1} 99 \dots 9}$ și $n+1 = \overline{a_k a_{k-1} \dots (a_{p+1} + 1) 00 \dots 0}$, deci $s(n) = a_k + a_{k-1} + \dots + a_{p+1} + 9p$, iar $s(n+1) = a_k + a_{k-1} + \dots + a_{p+1} + 1$.

Deducem că $s(n) = s(n+1) + 9p - 1$, de unde rezultă că $9p - 1$ este multiplu de 11. Cel mai mic astfel de număr p este $p = 5$, deci ultimele cinci cifre ale unui număr special sunt toate egale cu 9 **3p**

b) Conform punctului a), numerele speciale au forma $n = m \cdot 10^5 + 99\,999$, unde m este un număr natural convenabil ales. Deoarece $s(n) = s(m) + 45$ și $45 = M_{11} + 1$, este suficient să găsim numere m , având ultima cifră diferită de 9, cu proprietatea că $s(m) = 11 \cdot t - 1$, unde t este număr natural nenul. În particular, pentru $t = 1$, numerele de forma $m = 2 \cdot 10^q + 8$, cu $q \geq 1$, au suma cifrelor 10.

Așadar, pentru orice $q \geq 1$, numărul natural $n = 2 \cdot 10^{q+5} + 899\,999 = \underbrace{200 \dots 0}_{q-1 \text{ cifre}} 899\,999$ este special, deci există o infinitate de numere speciale **2p**



Olimpiada Națională de Matematică Etapa Națională, Buzău, 7 aprilie 2025

CLASA a VI-a – soluții și bareme

Problema 1. Se consideră mulțimea $A = \{1, 2, 3, \dots, 2025\}$. Spunem că o submulțime B a mulțimii A este *interesantă* dacă are 3 elemente, dintre care unul este media aritmetică a celorlalte două și există $b \in B$ pentru care $5 \cdot b \in B$.

- Calculați câte submulțimi interesante conțin numărul 225.
- Determinați numărul tuturor submulțimilor interesante ale mulțimii A .

Soluție. Fie $B = \{b, 5b, a\}$. Sunt 3 cazuri:

$$\text{I. } a = \frac{b + 5b}{2} \Rightarrow B = \{b, 3b, 5b\}$$

$$\text{II. } 5b = \frac{a + b}{2} \Rightarrow B = \{b, 5b, 9b\};$$

$$\text{III. } b = \frac{a + 5b}{2} \Rightarrow a + 3b = 0, \text{ nu se poate.} \dots\dots\dots \mathbf{2p}$$

a) Deoarece 225 este divizibil cu 3, 5 și 9, el poate fi oricare element al mulțimii B . Obținem astfel următoarele 6 submulțimi interesante:

$$\{225, 675, 1225\}, \{75, 225, 375\}, \{45, 135, 225\}, \{225, 1225, 2025\}, \\ \{45, 225, 405\}, \{25, 125, 225\} \dots\dots\dots \mathbf{2p}$$

b) Pentru cazul I, obținem câte o submulțime interesantă pentru fiecare $b \in \mathbb{N}^*$ cu $5b \leq 2025$, deci $2025 : 5 = 405$ submulțimi $\dots\dots\dots \mathbf{1p}$

Pentru cazul II, obținem câte o submulțime interesantă pentru fiecare $b \in \mathbb{N}^*$ cu $9b \leq 2025$, deci $2025 : 9 = 225$ submulțimi $\dots\dots\dots \mathbf{1p}$

Deoarece $\{x, 3x, 5x\} = \{y, 5y, 9y\}$ implică $x = y$, de unde rezultă $3x = 9y$, obținem o contradicție, așadar nu există submulțimi care să fie simultan și de tip I, și de tip II.

În concluzie, avem $405 + 225 = 630$ submulțimi interesante. $\dots\dots\dots \mathbf{1p}$

Problema 2. Fie numerele naturale $a < b < c$, cu proprietatea că $a + b + 2c$ este multiplu comun pentru b și c .

- Arătați că cel mai mare divizor comun al numerelor $a + b$ și c este numărul c .
- Aflați numerele naturale k mai mici ca 1000, știind că $a \cdot b \cdot c = k^2$.

Soluție. a) Din $c \mid a + b + 2c$, cum $c \mid 2c$, obținem $c \mid a + b$. Dar $a < b < c$ implică $a + b < 2c$, deci $a + b = c$. Atunci $(a + b, c) = c$ **2p**

b) Cum $b \mid a + b + 2c$, din a) obținem $b \mid 3a + 3b$. Dar $b \mid 3b$, deci $b \mid 3a$. Însă $3a < 3b$, așadar $3a \in \{b, 2b\}$ **2p**

Cazul I. $3a = b$. Avem $a = n, b = 3n, c = 4n$, de unde $a \cdot b \cdot c = 12 \cdot n^3$. Căutăm valorile lui n astfel încât $2^2 \cdot 3 \cdot n^3 = k^2, k < 1000$, și găsim $n = 3$ care implică $abc = 18^2$, $n = 3 \cdot 2^2$ care implică $abc = 144^2$ și $n = 3^3$ care implică $abc = 486^2$ **2p**

Cazul II. $3a = 2b$, deci există $p \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $a = 2p, b = 3p$ de unde obținem $c = 5p$. Atunci $a \cdot b \cdot c = 30 \cdot p^3$, care conduce la $p = 30$, deci $abc = 900^2$ **1p**

Am obținut $k \in \{18, 144, 486, 900\}$.

Problema 3. Fie ABC un triunghi cu $\sphericalangle BAC = 40^\circ$ și $\sphericalangle ABC = 80^\circ$. Notăm cu I intersecția bisectoarelor triunghiului. Arătați că $AI = BC$.

Soluție. Fie $\{D\} = BI \cap AC$. Atunci $\sphericalangle BAD = \sphericalangle ABD = 40^\circ$ deci $\triangle ABD$ este isoscel, de unde rezultă că $AD = BD$ (1) **2p**

Construcția 1. Fie $BM, M \in AC$, bisectoarea $\sphericalangle DBA$ **1p**

Atunci $\sphericalangle ABM = \sphericalangle IAB = 20^\circ$ și AB este latură comună, deci $\triangle IAB \equiv \triangle MBA$ (U.L.U.), de unde $AI = BM$ **2p**

Apoi $\sphericalangle CBM = \sphericalangle CBD + \sphericalangle DBM = 60^\circ$ și $\sphericalangle MCB = 60^\circ$, deci triunghiul MBC este echilateral, de unde $BC = BM = AI$ **2p**

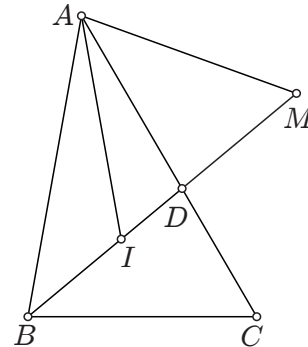
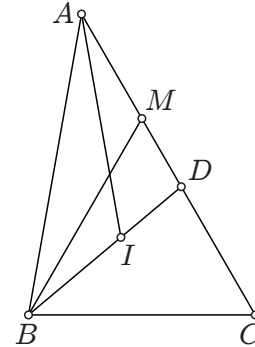
Construcția 2. Fie triunghiul echilateral $\triangle AMI, D \in (IM)$ **1p**

Cum $\sphericalangle MAD = \sphericalangle MAI - \sphericalangle IAD = 60^\circ - 20^\circ = 40^\circ$, obținem $\sphericalangle MAD = \sphericalangle DBC$ (2) . **1p**

Din (1),(2) și $\sphericalangle AMD = \sphericalangle DCB = 60^\circ$ rezultă $\triangle ADM \equiv \triangle BDC$ (U.L.U.) de unde $AM = BC$ **2p**

Dar $\triangle AMI$ echilateral implică $AI = AM$, deci $AI = BC$ **1p**

Observație Următoarele două construcții nu folosesc relația (1). Punctajul obținut pentru fiecare dintre ele nu se cumulează cu punc-



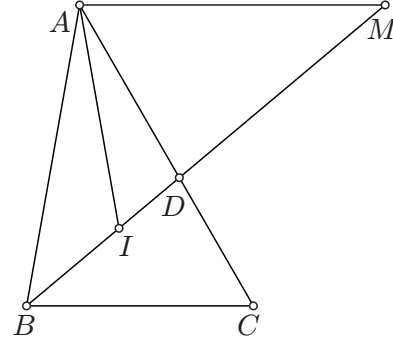
tajul asociat demonstrării relației (1), elevii primind maximum dintre cele două punctaje.

Construcția 3. Fie $AM \parallel BC$, $M \in BI$ **1p**

Atunci $\sphericalangle AMB = \sphericalangle MBC$ (alterne interne), care implică $\sphericalangle ABM = \sphericalangle AMB = 40^\circ$, deci $\triangle ABM$ isoscel, de unde $AB = AM$ (2) **2p**

Cum $\sphericalangle CAM = \sphericalangle ACB = 60^\circ$, fiind unghiuri alterne interne, obținem $\sphericalangle IAM = 20^\circ + 60^\circ = 80^\circ = \sphericalangle ABC$ (3) **1p**

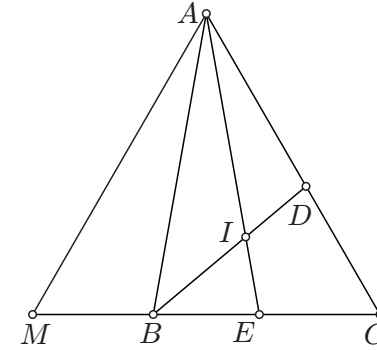
Din (2), (3) și $\sphericalangle AMI = \sphericalangle BAC = 40^\circ$ rezultă $\triangle AMI \equiv \triangle BAC$ (U.L.U.) care implică $AI = BC$ **3p**



Construcția 4. Fie triunghiul echilateral $\triangle ACM$, $B \in (MC)$ **1p**

Din $CA = CM$, $\sphericalangle ICA = \sphericalangle ICM = 30^\circ$ și IC latură comună rezultă $\triangle CIA \equiv \triangle CIM$ (L.U.L.), de unde obținem $IA = IM$ (2) și $\sphericalangle IAC = \sphericalangle IMC = 20^\circ$ **2p**

Fie $\{E\} = AI \cap BC$. Din $\sphericalangle MAB = \sphericalangle MAC - \sphericalangle BAC = 20^\circ$, $AM = MC$ și $\sphericalangle AMB = \sphericalangle ACE = 60^\circ$ obținem $\triangle MAB \equiv \triangle CAE$ (U.L.U.) de unde rezultă $MB = EC$, ceea ce implică $ME = BC$ (3) **2p**



În triunghiul $\triangle AEM$, $\sphericalangle AEM = 180^\circ - 60^\circ - 40^\circ = 80^\circ$, așadar, în triunghiul $\triangle MIE$, $\sphericalangle MIE = 180^\circ - 20^\circ - 80^\circ = 80^\circ = \sphericalangle MEI$, deci $\triangle MIE$ isoscel, de unde rezultă $MI = ME$ (4) **1p**

Din relațiile (2), (3) și (4) obținem $IA = IM = ME = BC$ **1p**

Problema 4. Determinați numerele naturale $n \geq 2$ pentru care toate celulele unui tablou $n \times n$ se pot colora cu diferite culori astfel încât orice celulă are exact alte două celule cu care este vecină și care au aceeași culoare cu ea. Prin celule vecine înțelegem două celule care au o latură comună.

Soluție.

Fixăm una dintre culori. Plecând de la o celulă oarecare a tabloului, putem parcurge un traseu monocolor (întrucât fiecare celulă are exact două celule vecine colorate la fel) astfel încât să ajungem înapoi în celula din care

am plecat. Dacă, prin absurd, am ajunge în altă celulă a traseului, una prin care am trecut deja, atunci aceasta ar avea cel puțin trei celule vecine de aceeași culoare.....**2p**

Orice astfel de traseu reprezintă un ciclu închis. Marcăm alternativ celulele tabloului asemenea unei table de șah. Observăm că, la fiecare pas, marcajul celulei în care ne aflăm se schimbă. Prin urmare, deoarece ne întoarcem în celula din care am plecat, pentru fiecare astfel de ciclu, deducem faptul că lungimea sa va fi pară.....**2p**

Cum fiecare celulă a tabloului face parte dintr-un unic astfel de traseu, rezultă că numărul total de celule este par, deci n este par.....**1p**

Orice tablou $n \times n$, cu n par, se poate împărți în pătrate 2×2 . Pentru fiecare astfel de pătrat alegem o culoare distinctă și colorăm cu această culoare toate cele 4 celule ale sale. Tabloul astfel colorat verifică condițiile problemei, deci n este orice număr natural par nenul.**2p**

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Națională, Buzău, 7 aprilie 2025

CLASA a VII-a – soluții și bareme

Problema 1. Fie r un număr rațional pozitiv, astfel încât numerele r și $\sqrt{r+1}$ să aibă aceeași parte fracționară. Arătați că numărul r este întreg.

Soluție. Ipoteza spune că $\sqrt{r+1} - r = a$, cu a număr întreg..... **2p**

Obținem $r+1 = r^2 + 2ra + a^2$ **2p**

Fie $r = \frac{m}{n}$, cu $m, n \in \mathbb{N}^*$ și $(m, n) = 1$ **1p**

Atunci $mn + n^2 = m^2 + 2mna + a^2n^2$, deci $m^2 = n(m + n - 2ma - a^2n)$. Rezultă că m^2 se divide cu n , ceea ce nu se poate decât dacă $n = 1$. Reiese $r = m \in \mathbb{N}$ **2p**

Problema 2. Considerăm numerele reale strict pozitive m, n, a, b, c astfel încât $m > n$ și

$$|ma - nb| \leq c(m - n), \quad |mb - nc| \leq a(m - n), \quad |mc - na| \leq b(m - n).$$

Demonstrați că $a = b = c$.

Soluție. Prin adunarea relațiilor date rezultă $|ma - nb| + |mb - nc| + |mc - na| \leq (m - n)(a + b + c) = |(m - n)(a + b + c)| = |(ma - nb) + (mb - nc) + (mc - na)|$. Deducem că printre numerele $x = ma - nb$, $y = mb - nc$ și $z = mc - na$ nu există două cu semne opuse, iar inegalitățile din ipoteză sunt egalități **3p**

Dacă $x \leq 0$, $y \leq 0$, $z \leq 0$, atunci $ma \leq nb$, $mb \leq nc$, $mc \leq na$. Prin înmulțire obținem $m^3abc \leq n^3abc$, de unde $m^3 \leq n^3$ – imposibil **1p**

Dacă $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, atunci $ma - nb = c(m - n)$ și analoagele, deci

$$m(a - c) = n(b - c), \quad m(b - a) = n(c - a), \quad m(c - b) = n(a - b) \quad (*).$$

Dacă toate parantezele din (*) au valori nenule, atunci $a - c$ și $b - c$, $b - a$ și $c - a$, $c - b$ și $a - b$ au același semn, în contradicție cu $(a - c)(b - a)(c - b) = -(b - c)(c - a)(a - b)$. Rezultă că măcar una este nulă, de exemplu, $a - c = 0$. Atunci $b - c = 0$, de unde $a = b = c$ **3p**

Altă soluție. Avem $ma - nb \leq |ma - nb| \leq c(m - n)$ și analoagele. Prin adunare rezultă că $(m - n)(a + b + c) \leq |ma - nb| + |mb - nc| + |mc - na| \leq (m - n)(a + b + c)$, deci avem egalitate peste tot **3p**

Atunci avem $(ma - nb)^2 = (mc - nc)^2$ și analoagele. Prin adunarea acestor relații rezultă, în urma efectuării calculelor, $2mn(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = 0$, adică $mn[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2] = 0$, de unde $a = b = c$ **4p**

Problema 3. Fie ABC un triunghi dreptunghic isoscel, O mijlocul ipotenuzei BC , E mijlocul segmentului CO , M mijlocul segmentului AC și D mijlocul segmentului AM . Fie F intersecția dreptelor OD și AE .

a) Arătați că $MF \perp OD$.

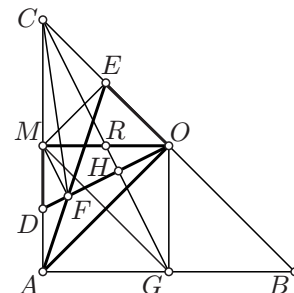
b) Arătați că $FC = OC$.

Soluție. a) *Varianta 1.* Deoarece $ME \perp OC$, avem de arătat că patrulaterul $MEOF$ este inscriptibil, (1) **1p**

Cum $ME \parallel AO$, deci $\angle MEF = \angle OAE$, rămâne de arătat că $\angle MOD = \angle OAE$ **1p**

Această ultimă egalitate rezultă din $\triangle MOD \sim \triangle OAE$:
 $\angle DMO = \angle EOA = 90^\circ$ și $\frac{DM}{MO} = \frac{EO}{OA} = \frac{1}{2}$, (2) **2p**

Varianta 2. Din teorema lui Menelaus în $\triangle CDO$ tăiat de transversala $A - F - E$ rezultă $\frac{DF}{FO} = \frac{AD}{AC} = \frac{1}{4}$ **1p**



Fie $AB = 4a$. În $\triangle MDO$ avem $MD = a$, $MO = 2a$, deci $DO = a\sqrt{5}$ și $DF = \frac{a\sqrt{5}}{5}$ **1p**

Rezultă că $DO \cdot DF = MD^2$ și, din reciproca teoremei catetei, rezultă $MF \perp DO$ **2p**

Varianta 3. $\triangle CAE \sim \triangle AOD$, deoarece $\angle ACE = \angle OAD = 45^\circ$, $\frac{CA}{CE} = 2\sqrt{2} = \frac{OA}{AD}$. Atunci $\angle AOD = \angle CAE = \angle DAF$ **2p**

Atunci $\triangle DAF \sim \triangle DOA$ (U.U.) și deci $MD^2 = DA^2 = DF \cdot DO$. Din reciproca teoremei catetei rezultă concluzia **2p**

b) *Varianta 1.* Fie G , R mijloacele segmentelor AB , respectiv MO . Cum $CMGO$ este paralelogram, R este mijlocul lui CG **1p**

Cum patrulaterul $EMFO$ este inscriptibil, rezultă $\angle EFO = \angle EMO = 45^\circ = \angle OBA$, deci patrulaterul $ABOF$ este inscriptibil, centrul cercului circumscris fiind G . Atunci $GF = GO$ (raze), $RF = RO$ (RF este mediană în triunghiul dreptunghic FOM), deci RG este mediatoarea lui $[OF]$. Cum $C \in RG$, avem $CF = CO$ **2p**

Varianta 2. Fie G mijlocul segmentului AB . Analog cu (2), $\triangle MOD \sim \triangle ACG$, deci $\angle ACG + \angle CDO = \angle MOD + \angle CDO = 90^\circ$, de unde $CG \perp OD$ **1p**

Fie $H = CG \cap OD$. Atunci $OG \parallel CD$ implică $\frac{OH}{HD} = \frac{OG}{CD} = \frac{2}{3}$, deci $\frac{OH}{OD} = \frac{2}{5}$. Pe de altă parte, în triunghiul dreptunghic MOD avem $OM = 2MD$, $OD = MD\sqrt{5}$, $OF = \frac{OM^2}{OD} = \frac{4\sqrt{5}}{5}MD$, deci $\frac{OF}{OD} = \frac{4}{5}$. Rezultă că H este mijlocul segmentului OF , deci CH este înălțime și mediană în $\triangle COF$, de unde concluzia **2p**

Problema 4. Considerăm triunghiul ABC dreptunghic în A și înălțimea sa AD , $D \in BC$. Pe semidreapta $[AD$ luăm punctele E și H astfel încât $AE = AC$ și $AH = AB$. Considerăm pătratele $AEFG$ și $AHJI$ care conțin în interiorul lor punctele C , respectiv B . Dreptele EG și AC se intersectează în K , IH și AB în L , IL și GK în N , iar IB și GC în M . Demonstrați că:

a) $LK \parallel BC$;

b) punctele A , N și M sunt coliniare.

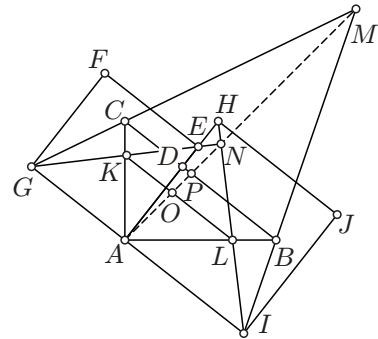
Soluție. a) Avem $\triangle AGK \sim \triangle AHL$, (1), deoarece $\angle AGK = \angle AHL = 45^\circ$ și $\angle GAK = 90^\circ - \angle CAD = \angle HAL$. Rezultă $\frac{AK}{AL} = \frac{AG}{AH}$. Cum $AG = AE = AC$ și $AH = AB$, deducem $\frac{AK}{AC} = \frac{AL}{AB}$, deci $LK \parallel BC$ **3p**

b) *Varianta 1.* Din (1) rezultă că $\angle AKG = \angle ALH$, deci patrulaterul $ALNK$ este inscriptibil. Reiese $\angle NAK = \angle NLK = \angle NIG = 45^\circ$, ceea ce arată că AN este bisectoarea $\angle BAC$ **2p**

Bisectoarea unghiului ABC este paralelă cu bisectoarea unghiului BAI , care este și înălțime în $\triangle BAI$. Rezultă că BM este bisectoarea exterioară din B a triunghiului ABC ; analog, CM este bisectoarea exterioară din C a triunghiului ABC . Rezultă că M este centrul cercului A -exînscriș în triunghiul ABC , deci M se află pe AN .. **2p**

Varianta 2. Fie O intersecția dreptelor KL și AN . Avem A, G, I coliniare, $DA \perp GI$ și $DA \perp BC$, deci $GI \parallel BC \parallel KL$. Rezultă $\frac{OK}{OL} = \frac{AG}{AI} = \frac{AG}{AH} = \frac{AK}{AL}$; conform reciprocei teoremei bisectoarei, $[AO$ este bisectoarea unghiului LAK **2p**

Fie P intersecția dreptelor AM și BC . Atunci $\frac{CP}{PB} = \frac{AG}{AI} = \frac{AC}{AB}$, deci AP este bisectoarea unghiului BAC . Rezultă că M și N se află pe bisectoarea unghiului BAC , ceea ce arată că A , M , N sunt coliniare **2p**



Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Națională, Buzău, 7 aprilie 2025

CLASA a VIII-a – soluții și bareme

Problema 1. Determinați numerele naturale nenule a, b, c pentru care $ab + bc + ca$ este un număr prim p și p divide numărul $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$.

Soluție. Avem $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = (ab + bc + ca)^2 - 2abc(a + b + c) \dots\dots\dots$ **2p**

Astfel, p trebuie să dividă $abc(a + b + c) \dots\dots\dots$ **1p**

Deoarece p este prim, trebuie ca $p \mid a, p \mid b, p \mid c$ sau $p \mid (a + b + c) \dots\dots\dots$ **2p**

Primele trei situații sunt imposibile, deoarece $a, b, c < p$. A patra situație este posibilă doar dacă $a = b = c = 1$. Acest caz convine $\dots\dots\dots$ **2p**

Problema 2. Fie a, b, c numere reale strict pozitive, astfel încât

$$\left\{ \frac{a}{b+c} \right\} = \left\{ \frac{b}{c+a} \right\} = \left\{ \frac{c}{a+b} \right\},$$

unde $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a numărului real x .

a) Arătați că cel puțin două dintre numerele a, b, c sunt egale.

b) Arătați că, dacă a, b, c sunt numere raționale, atunci $a = b = c$.

Soluție. a) Datorită simetriei ipotezei, putem presupune, fără a pierde generalitatea, că $a \leq c$ și $b \leq c$. Atunci $0 < \frac{a}{b+c} < 1$ și $0 < \frac{b}{c+a} < 1$. Obținem $\left\{ \frac{a}{b+c} \right\} = \frac{a}{b+c}$, $\left\{ \frac{b}{c+a} \right\} = \frac{b}{c+a}$, $\frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a}$, $(a-b)(a+b+c) = 0$, $a = b \dots\dots\dots$ **3p**

b) Cu presupunerea de la a), obținem $a = b$, iar ipoteza duce la $\frac{c}{2a} = \frac{a}{a+c} + n$, cu n număr natural $\dots\dots\dots$ **1p**

Ultima relație duce la $c^2 + c(a - 2an) - 2a^2 - 2a^2n = 0$. Discriminantul ecuației este $D = a^2(4n^2 + 4n + 9)$. Deoarece a și c sunt raționale, numărul $4n^2 + 4n + 9$ trebuie să fie un pătrat perfect k^2 , cu k natural. Reiese $8 = k^2 - (2n+1)^2$, $k - (2n+1) = 2$ și $k + (2n+1) = 4$ (singura posibilitate), $n = 0$, $c = a \dots\dots\dots$ **3p**

Problema 3. Fie a un număr real pentru care numărul $a + a^2 + a^3$ este întreg. Arătați că, dacă unul dintre numerele a, a^2 sau a^3 este rațional, atunci a este număr întreg.

Soluție. Fie $a + a^2 + a^3 = n$, cu n număr întreg.

Dacă a este rațional, atunci $a = \frac{p}{q}$, cu p, q numere întregi, coprime. Rezultă $\frac{p}{q} + \frac{p^2}{q^2} + \frac{p^3}{q^3} = n$, de unde $q^2p + qp^2 + p^3 = q^3n$, deci $q \mid p^3$. Aceasta nu se poate decât dacă $q = \pm 1$, ceea ce arată că $a = \pm p$ = număr întreg $\dots\dots\dots$ **2p**

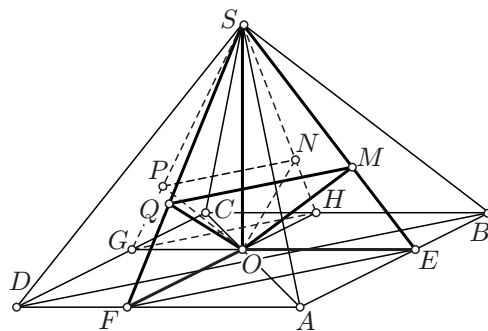
Dacă a^2 este rațional, atunci $a + a^3 = n - a^2$ duce la $a^2 + 2a^4 + a^6 = n^2 - 2a^2n + a^4$, deci $a^2(1 + 2n) + a^4 + a^6 = n^2$. Un raționament analog cu cel din paragraful precedent, aplicat acestei egalități, arată că a^2 este întreg, deci a este întreg $\dots\dots\dots$ **2p**

Dacă $a^3 = r$ este rațional, atunci $a + a^2 = n - a^3$ este rațional. Rezultă că $a^2 + 2a^3 + a^4$ este rațional, deci $a^2 + ra$ este rațional. Deducem că $a^2 + ra - (a^2 + a) = (r - 1)a$ este rațional.

Dacă $r \neq 1$, atunci a este rațional, deci, conform primei părți, a este întreg. Dacă $r = 1$, atunci $a^3 = 1$, deci $a = 1 \in \mathbb{Z} \dots\dots\dots$ **3p**

Problema 4. Într-un punct O din interiorul pătratului $ABCD$ se ridică perpendiculara OS . Fie M, N, P, Q proiecțiile punctului O pe planele $(SAB), (SBC), (SCD)$, respectiv (SDA) . Demonstrați că punctele M, N, P, Q sunt coplanare dacă și numai dacă O se află pe una dintre diagonalele pătratului.

Soluție. Presupunem că O se află, de exemplu, pe diagonala AC . Fie $OE \perp AB, E \in AB$ și $OF \perp AD, F \in AD$. Atunci avem succesiv $OE = OF, \triangle SOE \equiv \triangle SOF$ (C.C.), $SE = SF$. Apoi $M \in SE$ și $OM \perp SE, Q \in SF$ și $OQ \perp SF, \triangle SOM \equiv \triangle SOQ, SM = SQ, \frac{SM}{SE} = \frac{SQ}{SF}, QM \parallel EF$, deci $QM \parallel BD$. Analog avem $NP \parallel BD$, deci $QM \parallel NP$ și punctele M, N, P, Q sunt coplanare **2p**



Reciproc, presupunem că M, N, P, Q sunt coplanare, într-un plan α . Fie $OG \perp CD, G \in CD$ și $OH \perp BC, H \in BC$. Atunci E, O, G sunt coliniare, deci SE, SO, SG sunt coplanare. Rezultă că SO și MP sunt coplanare, iar $SO \cap MP$ coincide cu $SO \cap \alpha$. Analog $NQ \cap SO$ coincide cu $SO \cap \alpha$, deci MP și NQ taie SO în același punct R **1p**

Calculăm raportul în care punctul R împarte OS , în funcție de OS, OE și OG .

Fie $MT \perp OS, PU \perp OS, U, T \in OS$. Din patrulaterul inscriptibil $MOPS$ obținem $\triangle MSR \sim \triangle OPR$, deci $\frac{MS}{OP} = \frac{MR}{OR} = \frac{SR}{PR}$, de

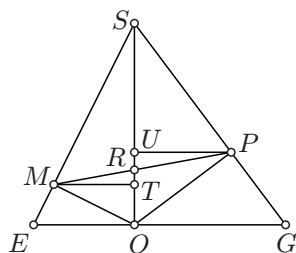
unde $\frac{MS^2}{OP^2} = \frac{SR}{OR} \cdot \frac{MR}{PR} = \frac{SR}{OR} \cdot \frac{MT}{PU}$.

Rezultă $\frac{SR}{OR} = \frac{PU}{MT} \cdot \frac{MS^2}{OP^2} = \frac{PS \cdot PO \cdot MS^2}{MO \cdot MS \cdot PS \cdot PG} = \frac{PO}{PG} \cdot \frac{MS}{MO}$.

Dar $\frac{PO}{PG} = \tan \angle SGO = \frac{SO}{OG}$ și $\frac{MS}{MO} = \cotg \angle MSO = \frac{SO}{OE}$, deci

$$\frac{SR}{OR} = \frac{SO^2}{OE \cdot OG}. \quad \text{..... 2p}$$

Deoarece NQ taie OS tot în R , obținem $OE \cdot OG = OF \cdot OH$. Pe de altă parte, $OE + OG = l = OF + OH$, unde $l = AB = AD$. Rezultă $OE(l - OE) = OF(l - OF)$, apoi $(OE - OF)(l - OE - OF) = 0$, deci $(OE - OF)(OH - OE) = 0$. Astfel $OE = OF$ sau $OE = OH$, ceea ce implică $O \in AC$ sau $O \in BD$ **2p**





Olimpiada Națională de Matematică Etapa Națională, Botoșani, 2 aprilie 2025

CLASA a IX-a – soluții și bareme

Problema 1. Fie $N \geq 1$ un număr natural. Pe o tablă sunt scrise inițial două zerouri, unul cu roșu și unul cu albastru. Definim următorul procedeu: la fiecare pas, se alege un număr natural k (nu neapărat distinct față de valorile alese anterior) și, dacă x este numărul scris cu albastru și y este cel scris cu roșu, le vom înlocui cu $x + k + 1$ și, respectiv cu $y + k^2 + 2$, apoi colorăm $x + k + 1$ cu albastru și $y + k^2 + 2$ cu roșu. Acest procedeu continuă până când numărul albastru este cel puțin N . Determinați valoarea minimă pe care o poate avea numărul roșu la finalul procedurii.

Soluție.

Fie M_k mutarea care mărește numărul albastru cu $k + 1$ și numărul roșu cu $k^2 + 2$. Demonstrăm că mutarea M_k , $k \geq 2$, se poate înlocui cu mutări M_0 și M_1 astfel încât numărul albastru să crească tot cu $k + 1$, dar numărul roșu să crească cu mai puțin de $k^2 + 2$.

..... **1punct**

Pentru cazul $k = 2p + 1$, observăm că M_k se poate înlocui cu $p + 1$ mutări M_1 . Mutarea M_k va crește numărul albastru cu $2p + 2$, iar numărul roșu cu $(2p + 1)^2 + 2$, în timp ce $p + 1$ mutări M_1 vor crește numărul albastru tot cu $2p + 2$, dar numărul roșu va crește doar cu $3(p + 1)$. Cum $(2p + 1)^2 + 2 > 3(p + 1)$, pentru orice $p \geq 1$, atunci mutarea M_{2p+1} se poate înlocui cu $p + 1$ mutări M_1 .

Pentru cazul $k = 2p$, avem că mutarea M_k se poate înlocui cu p mutări M_1 și o mutare M_0 . În felul acesta, mutarea M_k va crește numărul albastru cu $2p + 1$, dar numărul roșu va crește cu $(2p)^2 + 2$. Pe de altă parte, folosind p mutări M_1 și o mutare M_0 , numărul albastru crește tot cu $2p + 1$, dar numărul roșu crește cu $3p + 2$. Deoarece $3p + 2 < (2p)^2 + 2$, pentru orice $p \geq 1$, atunci mutarea M_{2p} se poate înlocui cu p mutări M_1 și o mutare M_0 .

..... **3puncte**

În plus, observăm că două mutări M_0 se pot înlocui cu o mutare M_1 , iar numărul roșu va crește doar cu 3, în loc să crească cu 4.

..... **1punct**

Așadar, strategiile de înlocuire de mai sus sunt optime pentru a minimiza numărul roșu. Dacă N este par, atunci numărul roșu este cel puțin $\frac{3N}{2}$,

iar dacă N este impar, atunci numărul roșu este cel puțin $3 \left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil + 2$. Deci, valoarea minimă a numărului roșu este $N + \left\lceil \frac{N+1}{2} \right\rceil$ **2puncte**

Problema 2. Fie triunghiul ABC ascuțitunghic, înscris în cercul de centru O și rază R , cu ortocentrul în punctul H . Fie A_1 un punct pe latura BC a triunghiului, astfel încât $HA_1 + A_1O = R$. În mod analog considerăm B_1, C_1 pe laturile AC , respectiv AB . Dacă are loc relația $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \vec{0}$, arătați că triunghiul ABC este echilateral.

Soluție.

Fie H_A simetricul lui H față de BC . Acest punct se află pe cercul circumscris triunghiului ABC . Atunci $A_1H_A = A_1H$, de unde $A_1O + A_1H_A = R = OH_A$, adică A_1 este intersecția lui OH_A cu BC , deci este unicul punct de pe BC cu proprietatea dată. **1punct**

Demonstrăm că $\angle BHA_1 = \angle B$ și $\angle CHA_1 = \angle C$. Presupunem că $\angle B \leq \angle C$. Fie A_O punctul diametral opus al punctului A . De aici avem succesiv:

$$\begin{aligned} \angle BHA_1 &= \angle BHH_A - \angle A_1HH_A = \angle C - \angle OH_AA = \\ &= \angle C - \angle A_OAH_A = \angle C - (\angle A - \angle BAA_O - \angle H_AAC) = \\ &= \angle C - (\angle A - (90^\circ - \angle C) - \angle BCA_O) = \\ &= \angle C - (\angle A - (90^\circ - \angle C) - (90^\circ - \angle C)) = \angle B. \end{aligned}$$

..... **2puncte**

De aici obținem că $\angle CHA_1 = \angle C$. Apoi avem:

$$\frac{BA_1}{CA_1} = \frac{\mathcal{A}_{BHA_1}}{\mathcal{A}_{CHA_1}} = \frac{BH \cdot HA_1 \cdot \sin(\angle BHA_1)}{CH \cdot HA_1 \cdot \sin(\angle CHA_1)} = \frac{2R \cos B \sin B}{2R \cos C \sin C} = \frac{\sin(2B)}{\sin(2C)}.$$

..... **1punct**

În mod similar deducem rapoartele $\frac{CB_1}{AB_1}$ și $\frac{AC_1}{BC_1}$, de unde rezultă că AA_1, BB_1 și CC_1 sunt concurente. Dar, cum $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \vec{0}$, avem că AA_1, BB_1 și CC_1 sunt mediane. **2puncte**

De aici $\sin(2A) = \sin(2B) = \sin(2C)$, iar cum triunghiul este ascuțitunghic, avem $\angle A = \angle B = \angle C$, adică triunghiul ABC este echilateral. **1punct**

Problema 3. Fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Se consideră ecuația:

$$\{x\} + \{2x\} + \cdots + \{nx\} = [x] + [2x] + \cdots + [2nx].$$

- a) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația pentru $n = 2$.
b) Demonstrați că ecuația are maxim două soluții reale, oricare ar fi $n \geq 2$.

Soluție. Deoarece $\{kx\} \in [0, 1)$, obținem că și membru drept este nenegativ, deci $x \geq 0$ **1punct**

a) Pentru $n = 2$ ecuația din enunț devine:

$$\{x\} + \{2x\} = [x] + [2x] + [3x] + [4x] \in [0, 2) \cap \mathbb{Z} = \{0, 1\}.$$

Dacă $\{x\} + \{2x\} = 0$, obținem $\{x\} = \{2x\} = 0$, adică $x \in \mathbb{Z}$, de unde avem $10x = 0$, adică $x = 0$, care verifică ecuația dată.

Dacă $\{x\} + \{2x\} = 1$, deoarece $[x] \leq [2x] \leq [3x] \leq [4x]$, obținem că $[x] = [2x] = [3x] = 0$ și $[4x] = 1$, adică $3x < 1 \leq 4x$, de unde avem $x \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{3})$. Dar, din $[x] = [2x] = 0$ și $\{x\} + \{2x\} = 1$, obținem că $x + 2x = 1$, adică $x = \frac{1}{3} \notin [\frac{1}{4}, \frac{1}{3})$. Așadar, pentru $n = 2$ unica soluție este $x = 0$ **2puncte**

b) Analog cu raționamentul de la a), avem $\{x\} + \dots + \{nx\} \in [0, n) \cap \mathbb{Z}$ și $[x] \leq [2x] \leq \dots \leq [nx]$. Dacă $[nx] \geq 1$, atunci membrul drept ar fi $\geq n + 1$, ceea ce este o contradicție. Așadar, $[x] = \dots = [nx] = 0$, deci ecuația din enunț devine:

$$x + 2x + \dots + nx = [(n+1)x] + \dots + [2nx] = k \in \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

..... **2puncte**

De aici obținem că eventualele soluții sunt de forma $x = \frac{2k}{n(n+1)}$, cu $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Pentru $k = 0$ avem soluția $x = 0$ pentru orice $n \geq 2$.

Pentru $k > 0$, din $nx < 1$, obținem că $2nx < 2$, deci avem $[2nx] = [(2n-1)x] = \dots = [(2n-k+1)x] = 1$ și $[(2n-k)x] = \dots = [(n+1)x] = 0$, ceea ce implică

$$(2n-k)\frac{2k}{n(n+1)} < 1 \leq (2n-k+1)\frac{2k}{n(n+1)},$$

adică:

$$n - \sqrt{\frac{n(n-1)}{2}} > k \geq n + \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{2n^2 + 2n + 1}{4}},$$

iar cum $n - \sqrt{\frac{n(n-1)}{2}} - \left(n + \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{2n^2 + 2n + 1}{4}}\right) < 1$, avem cel mult încă o valoare posibilă a lui k , adică cel mult încă o soluție. **2puncte**

Problema 4. Fie $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$ un număr natural fixat și $(a_n)_{n \geq 1}$ un șir de numere reale nenegative astfel încât $a_{n+1} \leq a_n - a_{mn}$, $(\forall) n \geq 1$.

a) Demonstrați că șirul $(b_n)_{n \geq 1}$ cu $b_n = \sum_{k=1}^n a_k$ este mărginit superior.

b) Demonstrați că șirul $(c_n)_{n \geq 1}$ cu $c_n = \sum_{k=1}^n k^2 a_k$ este mărginit superior.

Soluție.

a) Observăm că $(b_n)_{n \geq 1}$ este crescător. De asemenea, șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este descrescător, deoarece $0 \leq a_{mn} \leq a_n - a_{n+1}$. În plus:

$$\sum_{k=1}^n a_{mk} \leq a_1 - a_{n+1} \leq a_1.$$

..... **1 punct**

De asemenea, folosind monotonia lui $(a_n)_{n \geq 1}$ și $(b_n)_{n \geq 1}$, avem:

$$\begin{aligned} b_n \leq b_{mn} &= \sum_{k=1}^{mn} a_k = \sum_{i=1}^{m-1} a_i + \sum_{k=1}^n a_{mk} + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{m-1} a_{mk+j} \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^{m-1} a_i + \sum_{k=1}^n a_{mk} + (m-1) \sum_{k=1}^{n-1} a_{mk} \leq \sum_{i=1}^{m-1} a_i + ma_1, \end{aligned}$$

deci șirul $(b_n)_{n \geq 1}$ este mărginit superior. **2 puncte**

b) Demonstrăm mai întâi că șirul $d_n = \sum_{k=1}^n ka_k$ este mărginit superior.

Evident, șirul $(d_n)_{n \geq 1}$ este crescător. Mai întâi avem:

$$\sum_{k=1}^n ka_{mk} \leq \sum_{k=1}^n k(a_k - a_{k+1}) = a_1 + \sum_{k=2}^n (k - (k-1))a_k - na_{n+1} \leq b_n,$$

deci şirul $\left(\sum_{k=1}^n k a_{mk}\right)_{n \geq 1}$ este mărginit superior. Pe de altă parte, avem:

$$\begin{aligned} d_n \leq d_{mn} &= m \sum_{k=1}^n k a_{mk} + \sum_{k=1}^{m-1} k a_k + \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{k=1}^{n-1} (mk + j) a_{mk+j} \leq \\ &\leq m b_n + d_{m-1} + (m-1) \sum_{k=1}^{n-1} m(k+1) a_{mk} \leq \\ &\leq m b_n + d_{m-1} + m(m-1)(b_{n-1} + a_1), \end{aligned}$$

adică şirul $(d_n)_{n \geq 1}$ este mărginit superior. **2puncte**

Din nou, şirul $(c_n)_{n \geq 1}$ este crescător. În mod similar, avem:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k^2 a_{mk} &\leq \sum_{k=1}^n k^2 (a_k - a_{k+1}) = a_1 + \sum_{k=2}^n (k^2 - (k-1)^2) a_k - n^2 a_{n+1} \leq \\ &\leq a_1 + \sum_{k=2}^n 2k a_k \leq 2d_n, \end{aligned}$$

adică şirul $\left(\sum_{k=1}^n k^2 a_{mk}\right)_{n \geq 1}$ este mărginit superior. Apoi din nou avem:

$$\begin{aligned} c_n \leq c_{mn} &= m^2 \sum_{k=1}^n k^2 a_{mk} + c_{m-1} + \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{k=1}^{n-1} (mk + j)^2 a_{mk+j} \leq \\ &\leq 2m^2 d_n + c_{m-1} + m^2(m-1) \left(\sum_{k=1}^{n-1} k^2 a_{mk} + 2 \sum_{k=1}^{n-1} k a_{mk} + \sum_{k=1}^{n-1} a_{mk} \right), \end{aligned}$$

care este o sumă finită de şiruri mărginite superior, deci $(c_n)_{n \geq 1}$ este mărginit superior. **2puncte**



Olimpiada Națională de Matematică Etapă Națională, Botoșani, 2 aprilie 2025

CLASA a X-a – soluții și bareme

Problema 1. Se consideră un triunghi ABC și un punct M în planul său diferit de A, B și C . Notăm cu N, P și Q simetricele punctului M față de laturile AB, BC , respectiv AC .

a) Demonstrați că punctele N, P și Q sunt coliniare dacă și numai dacă punctul M aparține cercului circumscris triunghiului ABC .

b) Dacă punctul M nu aparține cercului circumscris triunghiului ABC iar triunghiurile ABC și NPQ au același centru de greutate, arătați că triunghiul ABC este echilateral.

Soluție. Raportăm planul la un reper cartezian și notăm cu literă mică afixul unui punct notat, corespunzător, cu litera mare.

Mijlocul S al segmentului MN aparține dreptei AB , prin urmare $\frac{s-a}{b-a} \in \mathbb{R}$.

Dreptele MN și AB sunt perpendiculare, așadar $\frac{n-m}{b-a} \in i\mathbb{R}$.

Presupunem, fără a restrânge generalitatea, că originea reperului este în centrul cercului circumscris triunghiului, iar $|a| = |b| = |c| = 1$. Atunci $\bar{a} = \frac{1}{a}$, $\bar{b} = \frac{1}{b}$, $\bar{c} = \frac{1}{c}$ și, cum $s = \frac{m+n}{2}$, avem:

$$\frac{s-a}{b-a} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{s-a}{b-a} = \frac{\bar{s}-\bar{a}}{\bar{b}-\bar{a}} \Leftrightarrow n+m = 2(a+b) - ab(\bar{n} + \bar{m}),$$

respectiv

$$\frac{n-m}{b-a} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{n-m}{b-a} = -\frac{\bar{n}-\bar{m}}{\bar{b}-\bar{a}} \Leftrightarrow n-m = ab(\bar{n}-\bar{m}).$$

Adunând cele două relații, rezultă că $n = a + b - ab\bar{m}$. Analog se arată că $p = b + c - bc\bar{m}$, iar $q = c + a - ca\bar{m}$ **3p**

a) Punctele N, P și Q sunt coliniare dacă și numai dacă

$$\frac{n-p}{q-p} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{n-p}{q-p} = \frac{\bar{n}-\bar{p}}{\bar{q}-\bar{p}} \Leftrightarrow \frac{(a-c)(1-b\bar{m})}{(a-b)(1-c\bar{m})} = \frac{(\bar{a}-\bar{c})(1-\bar{b}m)}{(\bar{a}-\bar{b})(1-\bar{c}m)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-b\bar{m}}{1-c\bar{m}} = \frac{b}{c} \cdot \frac{1-\bar{b}m}{1-\bar{c}m} \Leftrightarrow \frac{1-b\bar{m}}{1-c\bar{m}} = \frac{b-m}{c-m} \Leftrightarrow c-b = |m|^2(c-b) \Leftrightarrow |m| = 1,$$

deci dacă și numai dacă punctul M aparține cercului circumscris triunghiului ABC **2p**

b) Cum triunghiurile ABC și NPQ au același centru de greutate, înseamnă că $\frac{a+b+c}{3} = \frac{n+p+q}{3} \Leftrightarrow a+b+c = \overline{m}(ab+bc+ca) \Leftrightarrow a+b+c = \overline{m}abc(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c})$.

Trecând la module, deducem că $|a+b+c| = |m| \cdot |a+b+c|$. Punctul M nu este situat pe cercul circumscris triunghiului, prin urmare $|m| \neq 1$; rezultă că $|a+b+c| = 0$. Atunci centrul de greutate al triunghiului ABC coincide cu centrul cercului circumscris acestuia, deci triunghiul ABC este echilateral. **2p**

Problema 2. Fie n un număr natural nenul dat. Pentru o mulțime finită de puncte din plan M , spunem că punctele distincte $A, B \in M$ sunt *conectate* dacă dreapta AB conține exact $n+1$ puncte din M .

Determinați valoarea minimă a numărului natural nenul m pentru care există o mulțime M de m puncte din plan cu proprietatea că orice punct $A \in M$ este conectat cu exact $2n$ alte puncte din M .

Soluția 1.

Fie $M = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ o mulțime de m puncte cu proprietatea din enunț și $A_1 \in M$. Cum A_1 este conectat cu alte puncte, există o dreaptă d_0 care conține exact alte n puncte $A_2, \dots, A_{n+1}$ din mulțimea M . Cum fiecare din punctele $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$ este deja conectat cu n puncte diferite de el, deducem că prin fiecare A_i mai trece exact o dreaptă d_i care conține celelalte $2n - n = n$ puncte din M conectate cu A_i **2p**

Astfel, d_0 conține $n+1$ puncte din M , d_1 conține n puncte noi din M (celelalte în afară de A_1), d_2 conține cel puțin alte $n-1$ puncte din M (celelalte în afară de A_2 și, eventual, intersecția lui d_2 cu d_1) etc. În general, dreapta d_k conține cel puțin alte $n+1-k$ puncte din M (celelalte în afară de A_k și, eventual, intersecțiile lui d_k cu $d_1, d_2, \dots, d_{k-1}$).

Așadar $m \geq (n+1) + n + (n-1) + \dots + 2 + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ **3p**

Pentru a arăta că $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ este minimul căutat, considerăm o configurație de $n+2$ drepte în poziție generală (adică oricare două se intersectează și nu există trei drepte concurente) și M mulțimea celor $\mathbf{C}_{n+2}^2$ puncte de intersecție a acestora. Fiecare dreaptă va conține atunci câte $n+1$

puncte din M și, cum fiecare punct din M va fi situat pe două dintre aceste drepte, el va fi conectat cu exact $2 \cdot (n + 1 - 1) = 2n$ puncte. **2p**

Soluția 2.

Fie $M = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ o mulțime de m puncte cu proprietatea din enunț, $\mathcal{D}_M = \{A_i A_j \mid 1 \leq i < j \leq m\}$ și $\mathcal{D} = \{a \in \mathcal{D}_M \mid |a \cap M| = n + 1\}$.

Notăm cu $d = |\mathcal{D}|$ și cu $I = \{d_1 \cap d_2 \mid d_1, d_2 \in \mathcal{D}, d_1 \neq d_2\}$.

Dacă punctele $A, B \in M$ sunt conectate, atunci A este conectat cu oricare din celelalte n puncte din $M \setminus \{A\}$ care se află pe dreapta AB . Deoarece orice punct $A \in M$ este conectat cu exact $2n$ alte puncte din M , atunci A se află la intersecția a exact două drepte din $\mathcal{D}$, și astfel $m = \frac{d(n+1)}{2}$ **2p**

Deducem că $M \subseteq I$ și numărul punctelor din I este cel mult egal cu numărul de perechi de câte două drepte din $\mathcal{D}$, deci $|I| \leq \mathbf{C}_d^2 = \frac{d(d-1)}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2m(2m-n-1)}{(n+1)^2}$.

Rezultă că $m \leq |I| \leq \frac{m(2m-n-1)}{(n+1)^2}$, de unde $m \geq \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$.

..... **3p**

Pentru a arăta că $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ este minimul căutat, considerăm o configurație de $n+2$ drepte în poziție generală (adică oricare două se intersectează și nu există trei drepte concurente) și M mulțimea celor $\mathbf{C}_{n+2}^2$ puncte de intersecție a acestora. Fiecare dreaptă va conține atunci câte $n+1$ puncte din M și, cum fiecare punct din M va fi situat pe două dintre aceste drepte, el va fi conectat cu exact $2 \cdot (n + 1 - 1) = 2n$ puncte. **2p**

Problema 3. Pentru un număr natural nenul k , considerăm funcția $g_k : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $g_k(x) = x^k$.

Determinați mulțimea M_k a numerelor naturale nenule n cu proprietatea că există funcții injective $f_1, f_2, \dots, f_n : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ astfel încât $g_k = f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_n$.

Soluție. Observăm mai întâi că $x^k = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{\text{de } k \text{ ori } x}$, deci $k \in M_k$.

Fie $n \in M_k$, adică există funcții injective $f_1, f_2, \dots, f_n : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ astfel încât, pentru orice $x \in \mathbb{Z}$, avem $g_k(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \dots \cdot f_n(x)$, **(1)**. Luând $x = 1$, apoi $x = -1$ în relația **(1)**, obținem $1 = f_1(1) \cdot f_2(1) \cdot \dots \cdot f_n(1)$, **(2)**, respectiv $(-1)^k = f_1(-1) \cdot f_2(-1) \cdot \dots \cdot f_n(-1)$, **(3)**. Deoarece $f_i(1)$ și $f_i(-1)$ sunt numere întregi, iar funcțiile f_i sunt injective, rezultă că $\{f_i(1), f_i(-1)\} = \{1, -1\}$ pentru orice $i = \overline{1, n}$, **(4)**. **2p**

Din (1), pentru $x = 2$, obținem $2^k = |f_1(2)| \cdot |f_2(2)| \cdot \dots \cdot |f_n(2)|$. Folosind injectivitatea și (4) deducem $|f_i(2)| \geq 2$ pentru orice $i = \overline{1, n}$. Astfel, $2^k = |f_1(2)| \cdot |f_2(2)| \cdot \dots \cdot |f_n(2)| \geq 2^n$, deci $k \geq n$. Așadar $M_k \subset \{1, 2, \dots, k\}$.

Din (4) și înmulțirea egalităților (2) și (3) deducem $(-1)^k = (-1)^n$, deci n și k au aceeași paritate, adică $M_k \subset \{k, k-2, k-4, \dots\} \subset \mathbb{N}^*$.

..... **3p**

Vom arăta că toate valorile de forma $n = k - 2t$ convin. Pentru aceasta, observăm că $x^k = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{\text{de } k-2t-1 \text{ ori } x} \cdot x^{2t+1}$, deci $f_i(x) = x$ pentru orice $i = \overline{1, n-1}$, $f_n(x) = x^{2t+1}$ sunt injective și $x^n = f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \dots \cdot f_{n-1}(x) \cdot f_n(x)$.

În concluzie $k - 2t \in M_k$ pentru orice $t \in \mathbb{N}$ cu $2t < k$, deci mulțimea căutată este $M_k = \{k, k-2, k-4, \dots, k-2 \cdot \left\lfloor \frac{k-1}{2} \right\rfloor\}$ **2p**

Problema 4. Determinați numerele complexe z și w care au proprietatea că

$$|z^{2n} + z^n w^n + w^{2n}| = 2^{2n} + 2^n + 1,$$

oricare ar fi numărul natural nenul n .

Soluție. Trecând la modul în ambii membri ai identității

$$(z^2 + zw + w^2)(z^2 - zw + w^2) = z^4 + z^2 w^2 + w^4$$

și ținând cont de ipoteza problemei, obținem că $|z^2 - zw + w^2| = \frac{21}{7} = 3$.

Analog, trecând la modul în ambii membri ai identității

$$(z^4 + z^2 w^2 + w^4)(z^4 - z^2 w^2 + w^4) = z^8 + z^4 w^4 + w^8$$

și ținând cont de ipoteza problemei, obținem că $|z^4 - z^2 w^2 + w^4| = \frac{273}{21} = 13$.

Trecând la modul în ambii membri ai identității

$$\frac{1}{2}(z^2 + zw + w^2)^2 + \frac{1}{2}(z^2 - zw + w^2)^2 + (z^4 - z^2 w^2 + w^4) = 2(z^4 + z^2 w^2 + w^4),$$

aplicând inegalitatea modulului și ținând seama de cele de mai sus, obținem că $\frac{1}{2} \cdot 49 + \frac{1}{2} \cdot 9 + 13 \geq 2 \cdot 21$ **3p**

Observăm că se realizează egalitatea, prin urmare există un număr real t astfel încât $(z^2 + zw + w^2)^2 = t^2 (z^2 - zw + w^2)^2$. Trecând la module, găsim $t = \pm \frac{7}{3}$, prin urmare $3(z^2 + zw + w^2) = \pm 7(z^2 - zw + w^2)$.

Pentru $t = \frac{7}{3}$ găsim $2z^2 - 5zw + 2w^2 = 0 \Leftrightarrow (2z - w)(z - 2w) = 0$.

Deducem că $w = 2z$ sau $z = 2w$. Înlocuind în $|z^2 + zw + w^2| = 7$, în primul caz obținem că $|z| = 1$, iar în cel de-al doilea că $|w| = 1$.

În cazul $t = -\frac{7}{3}$ găsim $5z^2 - 2zw + 5w^2 = 0 \Leftrightarrow (\varphi z - w)(z - \varphi w) = 0$, unde $\varphi = \frac{1 + 2\sqrt{6}i}{5}$, $5\varphi^2 - 2\varphi + 5 = 0$, $|\varphi| = 1$.

Deducem că $w = \varphi z$ sau $z = \varphi w$. Înlocuind în $|z^2 + zw + w^2| = 7$, în primul caz obținem că $|z| = \sqrt{5}$, iar în cel de-al doilea că $|w| = \sqrt{5}$.

Niciuna din aceste variante nu convine deoarece se contrazice egalitatea $|z^4 - z^2 w^2 + w^4| = 13$.

.....**3p**

Se verifică ușor că toate perechile de forma $(z, 2z)$ și $(2z, z)$, unde z este un număr complex de modul 1, au proprietatea din enunț.**1p**



Olimpiada Națională de Matematică Etapa Națională, Botoșani, 2 aprilie 2025

CLASA a XI-a – soluții și bareme

Problema 1. Determinați perechile de funcții $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, derivabile de ordinul 2, cu derivatele de ordinul 2 continue pe $\mathbb{R}$, având proprietatea

$$(f(x) - g(y)) \cdot (f'(x) - g'(y)) \cdot (f''(x) - g''(y)) = 0,$$

pentru oricare $x, y \in \mathbb{R}$.

Soluție. Fie (f, g) o pereche de funcții care satisface cerințele din enunț. Arătăm că f'' este o funcție constantă. Presupunem, prin absurd, că f'' este neconstantă **1p**

Atunci, deoarece $(f(x) - g(0)) \cdot (f'(x) - g'(0)) \cdot (f''(x) - g''(0)) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$, iar f'' este continuă, există $a \in \mathbb{R}$ și $r > 0$ astfel încât $f''(x) \notin \{0, g''(0)\}, \forall x \in (a-r, a+r)$. Rezultă $(f(x) - g(0)) \cdot (f'(x) - g'(0)) = 0, \forall x \in (a-r, a+r)$.

..... **1p**
Sunt posibile două cazuri.

Cazul 1. Există $b \in (a-r, a+r)$ astfel ca $f'(b) \neq g'(0)$. Pe baza continuității lui f' , există $s > 0$ astfel ca $(b-s, b+s) \subset (a-r, a+r)$ și $f'(x) \neq g'(0), \forall x \in (b-s, b+s)$. Rezultă $f(x) = g(0), \forall x \in (b-s, b+s)$, de unde $f''(x) = 0, \forall x \in (b-s, b+s)$. Contradicție.

Cazul 2. $f'(x) = g'(0), \forall x \in (a-r, a+r)$. În acest caz, obținem $f''(x) = 0, \forall x \in (a-r, a+r)$. Contradicție.

Prin urmare, funcția f'' este constantă pe $\mathbb{R}$ **2p**

Fie $m \in \mathbb{R}$ astfel ca $f''(x) = 2m, \forall x \in \mathbb{R}$. Din $(f'(x) - 2mx)' = 0, \forall x \in \mathbb{R}$, rezultă că există $n \in \mathbb{R}$ astfel ca $f'(x) - 2mx - n = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Din $(f(x) - mx^2 - nx)' = 0, \forall x \in \mathbb{R}$, rezultă că există $p \in \mathbb{R}$ astfel ca $f(x) = mx^2 + nx + p, \forall x \in \mathbb{R}$ **1p**

Analog, funcția g'' este constantă pe $\mathbb{R}$, deci există $m', n', p' \in \mathbb{R}$ astfel ca $g(x) = m'x^2 + n'x + p', \forall x \in \mathbb{R}$. Dacă $m = m'$, identitatea din enunț este satisfăcută. Dacă $m \neq m'$, identitatea din enunț nu este satisfăcută deoarece ecuația $(f(x) - g(x)) \cdot (f'(x) - g'(x)) = 0$ are cel mult 3 rădăcini reale. În concluzie, perechile de funcții cu proprietățile din enunț sunt de forma $f(x) = mx^2 + nx + p$ și $g(x) = m'x^2 + n'x + p'$, pentru oricare $x \in \mathbb{R}$.

..... **2p**

Problema 2. Fie un număr natural $n \geq 2$ și două numere complexe a și b , astfel încât $a \neq 0$ și $b^k \neq 1$, pentru oricare $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Matricele $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ verifică relația $BA = aI_n + bAB$. Arătați că matricele A și B sunt inversabile.

Soluția 1. Dacă $b = 0$, atunci $BA = aI_n$. Cum $a \neq 0$, matricele A și B sunt inversabile.....1p

Considerăm $b \neq 0$. Notăm $\sigma(X)$ spectrul matricei $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Fie $\lambda \in \sigma(AB)$. Atunci

$$\det(BA - (b\lambda + a)I_n) = \det(bAB - b\lambda I_n) = b^n \det(AB - \lambda I_n) = 0.$$

Rezultă că $b\lambda + a \in \sigma(BA)$1p

Are loc relația $\sigma(AB) = \sigma(BA)$1p

Prin urmare, dacă $\lambda \in \sigma(AB)$, atunci $b\lambda + a \in \sigma(AB)$1p

Definim funcția $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = bz + a$, $\forall z \in \mathbb{C}$. Pentru $k \in \mathbb{N}^*$, notăm $f^{[k]} = \underbrace{f \circ f \circ f \dots \circ f}_{k \text{ ori}}$. Conform proprietății anterioare, dacă $\lambda \in \sigma(AB)$,

atunci $f^{[k]}(\lambda) \in \sigma(AB)$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$ (inducție).....1p

Presupunem $0 \in \sigma(AB)$. Atunci $f(0), f^{[2]}(0), \dots, f^{[n+1]}(0) \in \sigma(AB)$.

Cum $\sigma(AB)$ are cel mult n elemente, există $p, q \in \{1, 2, \dots, n+1\}$, $p < q$, astfel ca $f^{[p]}(0) = f^{[q]}(0)$. Deoarece $f^{[k]}(z) = b^k z + a \frac{b^k - 1}{b - 1}$, $z \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}^*$,

obținem $a \frac{b^p - 1}{b - 1} = a \frac{b^q - 1}{b - 1}$, de unde $b^{q-p} = 1$, în contradicție cu ipoteza.

Prin urmare, $0 \notin \sigma(AB)$, deci $\det(A) \cdot \det(B) = \det(AB) \neq 0$, Rezultă că matricele A și B sunt inversabile.....2p

Soluția 2. Dacă $b = 0$, atunci $BA = aI_n$. Cum $a \neq 0$, matricele A și B sunt inversabile.....1p

Dacă $b \neq 0$, fie $f(X) = \det(XI_n - BA)$ polinomul caracteristic al matricei BA . Pentru oricare $t \in \mathbb{C}$, avem:

$$f(t) = \det(tI_n - BA) = \det((t - a)I_n - bAB) = b^n \det\left(\frac{t - a}{b}I_n - AB\right).$$

Matricele AB și BA au același polinom caracteristic.....1p

Rezultă relația:

$$(1) \quad f(t) = b^n f\left(\frac{t - a}{b}\right), \quad \forall t \in \mathbb{C}. \dots\dots\dots 1p$$

Definim funcția polinomială $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $g(t) = f\left(t - \frac{a}{b-1}\right)$, $\forall t \in \mathbb{C}$.

Din (1) rezultă ecuația polinomială funcțională $g(t) = b^n g\left(\frac{t}{b}\right)$, $\forall t \in \mathbb{C}$.

Atunci, considerând $g(t) = t^n + a_1 t^{n-1} + a_2 t^{n-2} + \dots + a_n$, $t \in \mathbb{C}$, obținem prin identificarea coeficienților relațiile: $a_k = b^k a_k$, pentru orice $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Din ipoteza $b^k \neq 1$, rezultă $a_k = 0$, $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Prin urmare, avem

$g(t) = t^n$, $\forall t \in \mathbb{C}$. Deducem $f(t) = \left(t + \frac{a}{b-1}\right)^n$, $\forall t \in \mathbb{C}$ **2p**

Conform teoremei Cayley-Hamilton, $f(BA) = O_n$, deci are loc relația matriceală $\left(BA + \frac{a}{b-1}I_n\right)^n = O_n$, echivalentă cu $\left(I_n + \frac{b-1}{a}BA\right)^n = O_n$.

..... **1p**

Notăm $C = I_n + \frac{b-1}{a}BA$. Cum $C^n = O_n$, obținem

$$I_n = I_n - C^n = (I_n - C) \sum_{k=0}^{n-1} C^k = \frac{1-b}{a}BA \sum_{k=0}^{n-1} C^k.$$

Rezultă că matricele A și B sunt inversabile **1p**

Problema 3. Arătați că, pentru o funcție $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, următoarele afirmații sunt echivalente:

- (i) f este derivabilă, cu derivata continuă pe $\mathbb{R}$;
- (ii) pentru oricare $a \in \mathbb{R}$ și oricare două șiruri $(x_n)_{n \geq 1}$ și $(y_n)_{n \geq 1}$ convergente la a , astfel încât $x_n \neq y_n$, pentru oricare $n \in \mathbb{N}^*$, șirul $\left(\frac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n}\right)_{n \geq 1}$ este convergent.

Soluție.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă, cu derivata continuă pe $\mathbb{R}$. Considerăm $a \in \mathbb{R}$. Fie șirurile $(x_n)_{n \geq 1}$ și $(y_n)_{n \geq 1}$, convergente la a , astfel încât $x_n \neq y_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Conform Teoremei lui Lagrange, există un punct $a_n \in (\min\{x_n, y_n\}, \max\{x_n, y_n\})$ astfel ca $\frac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n} = f'(a_n)$ **1p**

Prin criteriul cleștelui, deducem că șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ converge la a . Atunci, pe baza continuității lui f' , obținem $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} f'(a_n) = f'(a)$,

deci șirul $\left(\frac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n}\right)_{n \geq 1}$ este convergent **1p**

(ii) $\Rightarrow$ (i). Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea (ii). Pentru $a \in \mathbb{R}$, există $\ell_a = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(a + 1/n) - f(a)}{1/n} \in \mathbb{R}$. Considerăm două șiruri $(x_n)_{n \geq 1}$ și $(y_n)_{n \geq 1}$ convergente la a , astfel încât $x_n \neq y_n$, pentru oricare $n \in \mathbb{N}^*$. Definim șirurile $(z_n)_{n \geq 1}$ și $(t_n)_{n \geq 1}$ prin $z_{2n-1} = x_n$, $z_{2n} = a + 1/n$, $t_{2n-1} = y_n$ și $t_{2n} = a$, pentru $n \in \mathbb{N}^*$. Avem $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = a$ și $z_n \neq t_n$, pentru oricare $n \in \mathbb{N}^*$. Conform ipotezei, șirul $\left(\frac{f(z_n) - f(t_n)}{z_n - t_n} \right)_{n \geq 1}$ este convergent.

Deducem $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(a + 1/n) - f(a)}{1/n} = \ell_a$. În particular, pentru oricare șir $(x_n)_{n \geq 1}$ cu proprietățile $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ și $x_n \neq a$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, avem $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} = \ell_a$. Rezultă $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell_a$. Prin urmare, funcția f este derivabilă pe $\mathbb{R}$, cu $f'(a) = \ell_a$, $\forall a \in \mathbb{R}$ **2p**
Presupunem, prin absurd, că f' este discontinuă într-un punct $a \in \mathbb{R}$.

Atunci există $\varepsilon > 0$ și un șir $(a_n)_{n \geq 1}$ convergent la a , cu $a_n \neq a$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $|f'(a) - f'(a_n)| > \varepsilon$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Cum f este derivabilă în a_n , putem alege $x_n \in (a_n, a_n + 1/n)$ astfel încât $\left| f'(a_n) - \frac{f(x_n) - f(a_n)}{x_n - a_n} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ converge la a (criteriul cleștelui), $x_n \neq a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, dar $\left| f'(a) - \frac{f(x_n) - f(a_n)}{x_n - a_n} \right| \geq |f'(a) - f'(a_n)| - \left| f'(a_n) - \frac{f(x_n) - f(a_n)}{x_n - a_n} \right| > \frac{\varepsilon}{2}$, pentru oricare $n \in \mathbb{N}^*$, în contradicție cu $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(a_n)}{x_n - a_n} = f'(a)$.

În concluzie, f' este continuă pe $\mathbb{R}$ **3p**

Problema 4. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât $A + B = AB + BA$.

Arătați că:

- dacă n este impar, atunci $\det(AB - BA) = 0$;
- dacă $\text{tr}(A) \neq \text{tr}(B)$, atunci $\det(AB - BA) = 0$.

Soluție.

a) Definim matricele $C = 2A - I_n$ și $D = 2B - I_n$. Pe baza ipotezei, obținem $CD - I_n = -(DC - I_n) = 2(AB - BA)$ **2p**
Cum n este impar, avem $\det(CD - I_n) = -\det(DC - I_n)$ **1p**
Din proprietatea cunoscută $\det(XY - I_n) = \det(YX - I_n)$, $\forall X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, rezultă $\det(CD - I_n) = -\det(CD - I_n)$, de unde obținem $\det(CD - I_n) = 0$. Prin urmare, $\det(AB - BA) = 0$ **1p**

b) Notăm $E = AB - BA$. Presupunem, prin absurd, $\det(E) \neq 0$. Avem
 $AE + EA = A^2B - BA^2 = A(A + B - BA) - (A + B - AB)A = AB - BA = E$.

.....**1p**
 Cum E este presupusă inversabilă, obținem $E^{-1}AE + A = I_n$. Atunci, pe baza proprietății $\text{tr}(E^{-1}AE) = \text{tr}(A)$, rezultă $\text{tr}(A) = \frac{n}{2}$. Cum relația din enunț este simetrică, avem de asemenea $\text{tr}(B) = \frac{n}{2}$. Astfel, $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$, în contradicție cu ipoteza b). Rezultă $\det(AB - BA) = 0$ **2p**



Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Națională, Botoșani, 2 aprilie 2025

CLASA a XII-a – soluții și bareme

Problema 1. Spunem că inelul $(A, +, \cdot)$ are proprietatea (P) dacă

$$(P) \quad \begin{cases} \text{mulțimea } A \text{ are cel puțin 4 elemente,} \\ \text{elementul } 1 + 1 \in A \text{ este inversabil,} \\ x + x^4 = x^2 + x^3, \text{ pentru orice } x \in A. \end{cases}$$

a) Demonstrați că dacă un inel $(A, +, \cdot)$ are proprietatea (P), iar $a, b \in A$ sunt elemente distincte, astfel încât a și $a + b$ sunt inversabile, atunci b nu este inversabil, iar $1 + ab$ este inversabil.

b) Dați un exemplu de inel care are proprietatea (P).

Soluție.

Fie $U(A)$ mulțimea elementelor inversabile din inelul A . Pentru orice $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, și $x \in A$, notăm $kx = \underbrace{x + x + \cdots + x}_{k \text{ termeni}}$. În particular, notăm

$k \cdot 1 = k$. Conform ipotezei, $2 \in U(A)$. De asemenea, notăm cu (1) egalitatea din ipoteză $x + x^4 = x^2 + x^3$ pentru orice $x \in A$.

Substituind x cu $-x$ în (1) obținem

$$-x + x^4 = x^2 - x^3, \quad \text{pentru orice } x \in A. \quad (2)$$

Scăzând relațiile (1) și (2) obținem atunci $2x = 2x^3$, de unde, cum $2 \in U(A)$, obținem

$$x = x^3, \quad \text{pentru orice } x \in A. \quad (3)$$

.....**1p**
Pentru $x \in U(A)$, înmulțind (2) cu x^{-1} obținem

$$x^2 = 1, \quad \text{pentru orice } x \in U(A). \quad (4)$$

Ca mulțime a elementelor inversabile în monoidul $(A, \cdot)$, $U(A)$ este un grup. Un grup în care $x^2 = 1$ pentru orice element este comutativ, astfel că $(U(A), \cdot)$ este comutativ.**1p**

Relația (4) ne dă pentru $x = 2 \in U(A)$ că $4 = 1$, deci $3 = 0$, astfel că inelul

A are caracteristica 3. **1p**

Fie $a, b \in A$, cu proprietatea că $a \neq b$ și $a, a + b \in U(A)$. Dacă presupunem că $b \in U(A)$, atunci

$$2ab = (a + b)^2 - a^2 - b^2 = 1 - 1 - 1 = -1 = 2,$$

astfel că $ab = 1 = a^2$ și înmulțind cu inversul elementului a am obține $a = b$, contrazicând ipoteza că $a \neq b$. Prin urmare, $b \notin U(A)$ **1p**

De asemenea,

$$1 + ab = a^2 + ab = a(a + b) \in U(A),$$

ca produs de elemente inversabile. **1p**

b) Fie $A = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$, cu adunarea și înmulțirea definite pe componente:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d), \quad (a, b) \cdot (c, d) = (a \cdot c, b \cdot d),$$

pentru orice $a, b, c, d \in \mathbb{Z}_3$. A este atunci un inel cu 9 elemente, cu elementul unitate $1 = (\hat{1}, \hat{1})$, și cu $1 + 1 = (\hat{2}, \hat{2}) \in U(A)$. De asemenea, $x^3 = x$ pentru orice $x \in A$, astfel că $x^4 = x^2$ și $x + x^4 = x^2 + x^3$ pentru orice $x \in A$. Inelul A are deci proprietatea (P) **2p**

Problema 2. Fie $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă, cu derivata o funcție integrabilă pe $[0, 1]$ și $f(1) = 0$. Arătați că

$$\int_0^1 (xf'(x))^2 dx \geq 12 \cdot \left(\int_0^1 xf(x) dx \right)^2.$$

Soluție.

Fie $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ funcția definită prin $g(x) = xf(x)$ pentru orice $x \in [0, 1]$. Avem atunci că $g(0) = 0 = g(1)$ și $g'(x) = f(x) + xf'(x)$, astfel că

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2(f'(x))^2 dx &= \int_0^1 (g'(x) - f(x))^2 dx = \\ &= \int_0^1 (g'(x))^2 dx - 2 \int_0^1 g'(x)f(x) dx + \int_0^1 (f(x))^2 dx = \\ &= \int_0^1 f^2(x) dx + \int_0^1 (g'(x))^2 dx - 2(f(1)g(1) - f(0)g(0)) + 2 \int_0^1 g(x)f'(x) dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 f^2(x) dx + \int_0^1 (g'(x))^2 dx + \int_0^1 x \cdot (2f(x)f'(x)) dx = \\
&= \int_0^1 f^2(x) dx + \int_0^1 (g'(x))^2 dx + \int_0^1 x \cdot (f^2(x))' dx = \\
&= \int_0^1 f^2(x) dx + \int_0^1 (g'(x))^2 dx + (1 \cdot f^2(1) - 0 \cdot f^2(0)) - \int_0^1 f^2(x) dx = \\
&= \int_0^1 f^2(x) dx + \int_0^1 (g'(x))^2 dx - \int_0^1 f^2(x) dx = \int_0^1 (g'(x))^2 dx.
\end{aligned}$$

.....**3p**
Cu varianta integrală a inegalității Cauchy-Buniakowski-Schwarz avem atunci

$$\begin{aligned}
&\left(\int_0^1 (2x-1) \cdot g'(x) dx \right)^2 \leq \int_0^1 (2x-1)^2 dx \cdot \int_0^1 (g'(x))^2 dx = \\
&= \frac{1}{6} \cdot ((2 \cdot 1 - 1)^3 - (2 \cdot 0 - 1)^3) \cdot \int_0^1 x^2 (f'(x))^2 dx = \frac{1}{3} \cdot \int_0^1 x^2 (f'(x))^2 dx.
\end{aligned}$$

.....**2p**
Rezultă atunci că

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 (xf'(x))^2 dx \geq 3 \cdot \left(\int_0^1 (2x-1) \cdot g'(x) dx \right)^2 = \\
&= 3 \cdot \left((2 \cdot 1 - 1)g(1) - (2 \cdot 0 - 1)g(0) - 2 \int_0^1 g(x) dx \right)^2 = 12 \cdot \left(\int_0^1 xf(x) dx \right)^2,
\end{aligned}$$

ceea ce trebuia arătat.....**2p**

Problema 3. a) Fie $a \in \mathbb{R}$ și $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă pe $\mathbb{R}$, care admite o primitivă $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, pentru care $F(x) + a \cdot f(x) \geq 0$ oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ și $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{F(x)}{e^{|\alpha \cdot x|}} = 0$ pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Arătați că $F(x) \geq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

b) Fie $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $g = X^n + a_1 X^{n-1} + \dots + a_{n-1} X + a_n \in \mathbb{R}[X]$ un polinom cu toate rădăcinile reale și $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție polinomială cu proprietatea că $f(x) + a_1 \cdot f'(x) + a_2 \cdot f^{(2)}(x) + \dots + a_n \cdot f^{(n)}(x) \geq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Arătați că $f(x) \geq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Soluție.

a) Pentru $a = 0$ afirmația este evident adevărată. Considerăm în continuare $a \neq 0$ și fie $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funcția definită prin $g(x) = F(x) \cdot e^{\frac{x}{a}}$. Funcția g este derivabilă, ca produs de funcții derivabile, cu

$$g'(x) = f(x) \cdot e^{\frac{x}{a}} + \frac{1}{a} \cdot F(x) \cdot e^{\frac{x}{a}} = \frac{1}{a} \cdot e^{\frac{x}{a}} \cdot (F(x) + a \cdot f(x)).$$

Pentru $a > 0$ rezultă că $g'(x) \geq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, astfel că funcția g este crescătoare. Cum

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) \cdot e^{\frac{x}{a}} = 0,$$

rezultă că $g(x) \geq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, astfel că $F(x) = g(x) \cdot e^{-\frac{x}{a}} \geq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Pentru $a < 0$, $g'(x) \leq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, astfel că funcția g este descrescătoare, iar cum

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) \cdot e^{\frac{x}{a}} = 0,$$

rezultă că $g(x) \geq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, rezultă că $F(x) = g(x) \cdot e^{-\frac{x}{a}} \geq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$ **3p**

b) Fie $\mathcal{P} = \{f \mid f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f - \text{funcție polinomială}\}$. Pentru fiecare număr real a considerăm funcția $T_a : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$, definită prin $T_a(f) = f + a \cdot f'$, i.e. $T_a(f)(x) = f(x) + a \cdot f'(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Deoarece pentru orice $f \in \mathcal{P}$ și orice $\alpha \in \mathbb{R}$ avem $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{e^{|\alpha \cdot x|}} = 0$, atunci conform punctului a), pentru orice număr real a are loc implicația

$$f \in \mathcal{P} : T_a(f)(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \implies f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Fie $r_1, r_2, \dots, r_n$ rădăcinile polinomului g , iar $s_k = -r_k$ pentru $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ opusele lor, astfel că

$$g = (X - r_1)(X - r_2) \dots (X - r_n) = (X + s_1)(X + s_2) \dots (X + s_n).$$

..... **1p**

Cu relațiile lui Viète avem atunci expresiile coeficienților polinomului g :

$$a_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_k}, \quad \text{pentru orice } k \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Pentru orice $m \in \{1, 2, \dots, n\}$ și orice funcție $f \in \mathcal{P}$ avem

$$\begin{aligned} (T_{s_m} \circ \dots \circ T_{s_2} \circ T_{s_1})(f) &= f + \left(\sum_{i=1}^m s_i \right) f' + \left(\sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq m} s_{i_1} s_{i_2} \right) f'' + \dots \\ &\dots + \left(\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq m} s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_k} \right) f^{(k)} + \dots + (s_1 s_2 \dots s_m) f^{(m)}. \quad (Q(m)) \end{aligned}$$

Afirmația $Q(m)$ rezultă prin inducție după m :

Pentru $m = 1$ avem $T_{s_1}(f) = f + s_1 \cdot f'$ și $Q(1)$ este adevărată.

Presupunând pentru un $m \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ afirmația $Q(m)$ adevărată, avem

$$\begin{aligned} (T_{s_{m+1}} \circ T_{s_m} \circ \dots \circ T_{s_2} \circ T_{s_1})(f) &= T_{s_{m+1}}(T_m \circ \dots \circ T_{s_1})(f) = \\ &= T_{s_{m+1}} \left(\sum_{J \subseteq \{1, 2, \dots, m\}} \left(\prod_{j \in J} s_j \right) f^{(|J|)} \right) = \\ &= \left(\sum_{J \subseteq \{1, 2, \dots, m\}} \left(\prod_{j \in J} s_j \right) f^{(|J|)} \right) + s_{m+1} \cdot \left(\sum_{J \subseteq \{1, 2, \dots, m\}} \left(\prod_{j \in J} s_j \right) f^{(|J|)} \right)' = \\ &= \sum_{J_1 \subseteq \{1, 2, \dots, m, m+1\}} \left(\prod_{j \in J_1} s_j \right) f^{(|J_1|)} \end{aligned}$$

și $Q(m+1)$ este de asemenea adevărată.

Prin urmare, $Q(m)$ este adevărată pentru orice $M \in \{1, 2, \dots, n\}$**1p**

Din $Q(n)$ avem

$$(T_{s_n} \circ \dots \circ T_{s_2} \circ T_{s_1})(f) = f + a_1 \cdot f' + a_2 \cdot f'' + \dots + a_n \cdot f^{(n)}.$$

Conform ipotezei, avem atunci că

$$(T_{s_n} \circ \dots \circ T_{s_2} \circ T_{s_1})(f)(x) = f(x) + a_1 \cdot f'(x) + a_2 \cdot f''(x) + \dots + a_n \cdot f^{(n)}(x) \geq 0$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Aplicând succesiv proprietatea de la a), obținem că pentru orice $m \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$(T_{s_m} \circ \dots \circ T_{s_2} \circ T_{s_1})(f)(x) \geq 0 \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R}.$$

În particular, obținem $f(x) \geq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$ **2p**

Problema 4. Fie p un număr prim, $p \geq 3$, iar k un număr impar nedivizibil cu p . Fie K un corp finit cu $kp+1$ elemente și $A = \{x_1, x_2, \dots, x_t\}$, mulțimea elementelor din $K^* = K \setminus \{0\}$ care nu au ordinul k în grupul multiplicativ $(K^*, \cdot)$. Arătați că polinomul $P(X) = (X + x_1)(X + x_2) \dots (X + x_t)$ are cel puțin p coeficienți egali cu 1.

Soluție.

Deoarece k și p sunt impare, $|K|$ este par, deci o putere a lui 2, iar caracteristica corpului K este 2. Rezultă atunci că $x_1, x_2, \dots, x_t$ sunt rădăcinile polinomului P . Fie $P = \sum_{j=0}^t a_j X^j$.

Grupul multiplicativ $(K^*, \cdot)$ este ciclic de ordin kp și fie $a \in K^*$ un generator al grupului. Pentru orice $s \in \{1, 2, \dots, kp\}$, cu $(s, kp) = 1$ avem atunci

$$\text{ord}(a^s) = \text{ord}(a) = kp. \quad (1)$$

În particular, pentru orice $i \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ avem că $(ik+p, k) = (p, k) = 1$ și $(ik+p, p) = (ik, p) = 1$, astfel că $(ik+p, kp) = 1$ și $\text{ord}(a^{ik+p}) = kp$. Rezultă că

$$P(a^{ik+p}) = 0, \quad \text{pentru orice } i \in \{1, 2, \dots, p-1\}. \quad (2)$$

. **1p**

Pentru $r \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ considerăm suma $A_r = \sum_{i=0}^{p-1} a^{-irk} P(a^{ik+p})$. Ținând cont de (2), rezultă că $A_r = P(a^p)$, și cum $\text{ord}(a^p) = k$, a^p nu este rădăcină a lui P și $A_r \neq 0$. (3) **1p**

De asemenea,

$$\begin{aligned} A_r &= \sum_{i=0}^{p-1} a^{-irk} P(a^{ik+p}) = \sum_{i=0}^{p-1} a^{-irk} \sum_{j=0}^t a_j a^{ikj+pj} = \\ &= \sum_{j=0}^t a_j a^{pj} \sum_{i=0}^{p-1} a^{k(j-r)i}. \end{aligned}$$

Deoarece

$$\sum_{i=0}^{p-1} a^{kmi} = \begin{cases} p & , \text{ dacă } p|m; \\ 0 & , \text{ dacă } p \nmid m, \end{cases}$$

obținem

$$A_r = \sum_{j=0}^t a_j a^{pj} \sum_{i=0}^{p-1} a^{k(j-r)i} = p \cdot \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{t-r}{p} \rfloor} a_{pj+r} a^{p(pj+r)}.$$

Cum $A_r \neq 0$, cel puțin unul dintre coeficienții $a_r, a_{p+r}, a_{2p+r}, \dots$ este nenul. Pentru fiecare $r \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ există cel puțin un coeficient nenul de forma a_{pj+r} **2p**

Pentru fiecare divizor $d|kp$ considerăm mulțimea $U_d = \{x \in K^* | \text{ord}(x) = d\}$ a elementelor de ordin d din grupul multiplicativ $(K^*, \cdot)$ și polinomul

$$Q_d = \prod_{x \in U_d} (X + x).$$

Fie $K_2 = \{0, 1\}$ subcorpul prim al corpului K și $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_n = kp$ divizorii lui kp . Cum $Q_1 = X + 1 \in K_2[X]$ și

$$Q_{d_i} = (X^{d_i} + 1) \cdot \left(\prod_{d_j | d_i, d_j \neq d_i} Q_{d_j} \right)^{-1} \in K_2[X],$$

rezultă că toate polinoamele $Q_{d_i} \in K_2[X]$ au toți coeficienții 0 sau 1. **2p**
 Dar atunci $P = (X^{kp} + 1) \cdot Q_k^{-1} \in K_2[X]$ are toți coeficienții 0 sau 1, dintre care cel puțin p sunt nenuli. Aceasta demonstrează afirmația problemei.

. **1p**



Olimpiada Națională de Matematică

Programa pentru clasele a V-a – a VIII-a

- Pentru fiecare clasă, în programa de olimpiadă sunt incluse, în mod implicit, conținuturile programelor de olimpiadă din clasele anterioare.
- Pentru fiecare clasă, în programa prevăzută pentru etapa județeană/a sectoarelor municipiului București și pentru etapa națională sunt incluse, în mod implicit, și conținuturile programelor de olimpiadă de la etapa/etapele anterioare.
- Pentru fiecare clasă, în programa de olimpiadă sunt incluse, în mod implicit, conținuturile programelor școlare în vigoare.
- Textul *italic* din tabele semnifică acele conținuturi specifice programelor ONM, în completarea conținuturilor prevăzute de programele școlare ale disciplinei Matematică.

Clasa	Etapa locală	Etapa județeană/a sectoarelor municipiului București	Etapa națională
a V-a	○ Numere naturale. Operații cu numere naturale. Factorul comun. Teorema împărțirii cu rest. ○ Reguli de calcul cu puteri. Compararea puterilor. <i>Ultima cifră a unei puteri</i> ○ <i>Pătrate perfecte. Cuburi perfecte</i> ○ Metode aritmetice de rezolvare a problemelor ○ <i>Restul împărțirii unui pătrat perfect la 3, 4, 5, 8, 10; restul împărțirii unui cub perfect la 9</i>	○ Divizibilitatea numerelor naturale. Divizor, multiplu, divizori comuni, multipli comuni ○ Criterii de divizibilitate cu: 2, 5, 2^n, 5^n, 10^n, 3 și 9; <i>Legătura dintre restul împărțirii unui număr la 3, 4, 5, 9 sau 25 și cifrele numărului</i> ○ Numere prime; numere compuse. ○ Scrierea numerelor naturale ca produs de puteri de numere prime ○ Dacă $x = M_d + r$ și $y = M_d + s$, restul împărțirii lui $x + y$ la d este restul împărțirii lui $r + s$ la d, iar restul împărțirii lui xy la d este restul împărțirii lui rs la d	○ Frații ordinare (conținutul programei școlare) ○ Frații zecimale (conținutul programei școlare) ○ Elemente de geometrie și unități de măsură (conținutul programei școlare)
a VI-a	Aritmetică și algebră ○ Mulțimi. <i>Principiul includerii și excluderii. Partiții. Principiul cutiei</i> ○ Divizibilitate. Proprietăți ale divizibilității în $\mathbb{N}$. $[a, b] \cdot (a, b) = a \cdot b$ ○ $(a, b) = d \Rightarrow \exists x, y \in \mathbb{N}$, cu $(x, y) = 1$ și $a = dx$, $b = dy$ ○ $[a, b] = m \Rightarrow \exists x, y \in \mathbb{N}$ cu $(x, y) = 1$ și $m = ax$, $m = by$ ○ Rapoarte și proporții Geometrie ○ Unghiuri. <i>Teorema directă și teorema reciprocă a unghiurilor opuse la vârf</i> ○ Paralelism și perpendicularitate ○ Cercul	Aritmetică și algebră ○ Mulțimea numerelor întregi ○ Divizibilitatea în $\mathbb{Z}$. <i>Proprietăți ale divizibilității în $\mathbb{Z}$</i> ○ $(a + b)^n = M_a + b^n$, unde $a, b \in \mathbb{Z}$ și $n \in \mathbb{N}^*$ Geometrie ○ Linii importante în triunghi ○ Metoda triunghiurilor congruente. <i>Cazul L.L.U.</i> ○ <i>Un triunghi este isoscel dacă și numai dacă două unghiuri ale triunghiului sunt congruente</i>	Aritmetică și algebră ○ Mulțimea numerelor raționale Geometrie ○ Proprietățile triunghiurilor isoscele și echilaterale ○ Proprietățile triunghiurilor dreptunghice. ○ <i>Teorema unghiului de 30°, teorema unghiului de 15°</i> ○ <i>Teorema referitoare la lungimea medianei corespunzătoare ipotenuzei și reciprocele acestora</i> ○ <i>Teorema directă și teorema reciprocă a liniei mijlocii a unui triunghi</i>

Clasa	Etapa locală	Etapa județeană/a sectoarelor municipiului București	Etapa națională
a VII-a	Algebră ○ Mulțimea numerelor reale (conținutul programei școlare) ○ <i>Partea întreagă și partea fracționară a unui număr real</i> ○ Raționalizarea numitorilor ○ <i>Formula radicalilor dubli</i> ○ Dacă $a, b \in \mathbb{Q}^*$ și $p, q \in \mathbb{Q}^*$ astfel încât $p\sqrt{a} + q\sqrt{b} \in \mathbb{Q}$, atunci $\sqrt{a} \in \mathbb{Q}$ și $\sqrt{b} \in \mathbb{Q}$ ○ Dacă $a \in \mathbb{Q}^*$ și $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, atunci $a + x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ și $a \cdot x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ○ <i>Elemente de calcul algebric. Formule de calcul prescurtat: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$, $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$, pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$</i> Geometrie ○ Patrulater (conținutul programei școlare) ○ Cercul (conținutul programei școlare) ○ <i>Patrulater inscriptibile. Patrulater circumscriptibile.</i>	Algebră ○ Ecuații și sisteme de ecuații (conținutul programei școlare) Geometrie ○ Asemănarea triunghiurilor (conținutul programei școlare) ○ <i>Teorema paralelelor neechidistante</i> ○ <i>Teorema bisectoarei (interioare, exterioare) și teorema reciprocă</i> ○ <i>Puterea unui punct față de cerc</i>	Algebră ○ Elemente de organizare a datelor ○ <i>Identități algebrice:</i> a) $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$, pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$ și orice $n \in \mathbb{N}^*$ b) $a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots - ab^{n-2} + b^{n-1})$, pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$ și orice $n \in \mathbb{N}$, n impar c) identitatea lui Lagrange: $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$ ○ <i>Inegalități. Probleme de maxim și de minim</i> a) $a^2 + b^2 \geq 2ab$; $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ b) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$, pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$, $a \cdot b > 0$ c) inegalitatea mediilor: $\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}$, $\forall a_i > 0, i = \overline{1, n}, n \in \mathbb{N}^*$ d) inegalitatea Cauchy – Buniakovski – Schwarz: $(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2$, $\forall a_i, b_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, n}, n \in \mathbb{N}^*$ Geometrie ○ <i>Teorema lui Menelaos. Teorema lui Ceva</i> ○ <i>Relații metrice în triunghiul dreptunghic. Arii</i> ○ <i>Teorema lui Pitagora generalizată. Teorema cosinusului. Teorema sinusurilor.</i> <i>Teorema medianei $m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}$</i> ○ <i>Arii: $A_\Delta = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$; $A_\Delta = \frac{a \cdot b \cdot \sin C}{2}$; $A_\Delta = p \cdot r$; $A_\Delta = \frac{abc}{4R}$;</i> <i>$A_{\text{patrulater convex}} = \frac{d_1 \cdot d_2 \cdot \sin(d_1, d_2)}{2}$</i>



Clasa	Etapa locală	Etapa județeană/a sectoarelor municipiului București	Etapa națională
a VIII-a	Algebră ○ Intervale. Operații cu intervale. Inecuații ○ Calcul algebric în $\mathbb{R}$ Geometrie ○ Puncte, drepte, plane. Corpuri geometrice ○ Paralelism și perpendicularitate (conținutul programei școlare) ○ Proiecții ortogonale pe un plan (conținutul programei școlare) ○ Teorema celor trei perpendiculare	Algebră ○ Ecuația de gradul al II-lea Geometrie ○ Distanțe și măsuri de unghiuri pe fețele sau în interiorul corpurilor geometrice studiate (determinare prin calcul) ○ Calcul de arii și de volume (poliedre)	Algebră ○ Funcții. Elemente de statistică Geometrie ○ Corpuri rotunde ○ <i>Perpendiculara comună a două drepte; reciprocele teoremei celor trei perpendiculare; plan mediator; plan bisector</i> ○ <i>Probleme elementare de loc geometric</i>



Olimpiada Națională de Matematică Programa pentru clasele a IX-a – a XII-a

- o Pentru fiecare clasă, în programa de olimpiadă sunt incluse, în mod implicit, conținuturile programelor de olimpiadă din clasele anterioare.
- o Pentru fiecare clasă, în programa prevăzută pentru etapa județeană/a sectoarelor municipiului București și pentru etapa națională sunt incluse, în mod implicit, și conținuturile programelor de olimpiadă de la etapa/etapele anterioare.
- o Pentru fiecare clasă, în programa de olimpiadă sunt incluse, în mod implicit, conținuturile programelor școlare în vigoare.
- o Cunoștințele suplimentare prevăzute de prezenta programă pot fi folosite fără demonstrație.
- o Textele scrise cu font *italic* sunt conținuturi specifice programelor ONM, în completarea conținuturilor prevăzute de programele școlare ale disciplinei Matematică.

Clasa	Etapa locală	Etapa județeană/a sectoarelor municipiului București	Etapa națională
a IX-a	Algebră - o Mulțimea numerelor reale - o <i>Inegalitatea mediilor</i> - o <i>Inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz</i> - o Mulțimi și elemente de logică matematică Geometrie - o Vectori în plan (conținutul programei școlare) - o Coliniaritate, concurență, paralelism (conținutul programei școlare)	Algebră - o Șiruri (funcții definite pe mulțimea numerelor naturale) - o Progresii aritmetice și geometrice - o <i>Recurențe liniare de ordinul I și II</i> - o <i>Ecuatii în numere întregi :</i> $ax + by = c ; x^2 + y^2 = z^2$ - o <i>Teorema împărțirii cu rest în mulțimea numerelor întregi. Algoritmul lui Euclid</i> - o <i>Congruențe modulo n. Teoremele Fermat, Wilson.</i> - o <i>Inegalitatea lui Holder. Inegalitatea lui Bernoulli. Inegalitatea lui Cebâșev</i> Geometrie - o <i>Teoreme de geometrie clasică. Teorema lui Stewart. Teorema lui Steiner. Dreapta lui Euler. Drepte de tip Simson</i> - o <i>Puncte și linii importante în triunghi. Teoreme de concurență și coliniaritate. Relații metrice</i>	Algebră - o Funcții. Proprietăți ale funcțiilor numerice. Compunerea funcțiilor - o Funcțiile de gradul I și al II-lea - o <i>Densitatea în $\mathbb{R}$ a mulțimilor $\mathbb{Q}$ și $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (orice interval deschis de numere reale conține atât numere iraționale cât și numere raționale)</i> - o <i>Teorema de densitate a lui Kronecker (dacă a este irațional, mulțimea valorilor șirului $(\{na\})_{n \geq 1}$ este densă în $[0,1]$)</i> - o <i>Indicatorul lui Euler: $\varphi(n)$ = numărul numerelor prime cu n, mai mici decât n; teorema lui Euler</i> Geometrie și trigonometrie - o Elemente de trigonometrie - o Aplicații ale trigonometriei și ale produsului scalar a doi vectori în geometria plană



Olimpiada Națională de Matematică Programa pentru clasele a IX-a – a XII-a

Clasa	Etapa locală	Etapa județeană/a sectoarelor municipiului București	Etapa națională
a X-a	Algebră ○ Mulțimea numerelor reale. Radicali. Logaritmi ○ Funcții injective, surjective, bijective ○ Funcții inversabile ○ Numere complexe ○ Aplicații ale numerelor complexe în geometrie	Algebră/Geometrie și trigonometrie ○ Funcții trigonometrice și invers trigonometrice ○ Ecuații trigonometrice ○ Funcții convexe. <i>Convexitatea funcțiilor putere, radical, exponențială, logaritmică, trigonometrice și invers trigonometrice. Inegalitatea lui Jensen</i> ○ Funcții putere, funcții radical. Ecuații cu radicali ○ Funcții și ecuații exponențiale și logaritmice	Algebră/Geometrie și trigonometrie ○ Metode de numărare ○ Geometrie analitică ○ Mulțimi numărabile ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$) și nenumărabile ($\mathbb{R}$) ○ Polinoame * ○ C.m.m.d.c. și c.m.m.m.c. a două polinoame; algoritmul lui Euclid * ○ Teorema fundamentală a algebrei * ○ Teorema lui Bézout. Rădăcini multiple * ○ Relații între rădăcini și coeficienți * ○ Polinoame ireductibile *

Notă. Conținuturile marcate cu * reprezintă cunoștințe care pot fi aplicate în rezolvarea problemelor fără a constitui subiecte de concurs în sine.

Clasa	Etapa locală	Etapa județeană/a sectoarelor municipiului București	Etapa națională
a XI-a	Algebră ○ Permutări. <i>Descompunerea unei permutări în produs de cicluri disjuncte, respectiv transpoziții.</i> ○ Matrice și determinanți. Matrice inversabile ○ Ecuația caracteristică a unei matrice. Teorema Hamilton-Cayley. ○ Aplicații ale determinanților în geometria plană Analiză matematică ○ Mulțimea numerelor reale ○ Șiruri. Limite de șiruri. Limite de funcții ○ Lema Stolz-Cesaro. Criteriul Cauchy-D'Alembert ○ Lema intervalelor închise (Cantor) ○ Mulțimi dense în $\mathbb{R}$	Algebră ○ Rangul unei matrice ○ Inegalitatea lui Sylvester (Frobenius) asupra rangului produsului a două matrice ○ Polinom caracteristic, valori proprii Analiză matematică ○ Funcții continue ○ Discontinuități de prima și a doua speță. ○ Funcții cu proprietatea valorii intermediare (Darboux) ○ Puncte limită pentru șiruri ○ Mulțimi numărabile și nenumărabile	Algebră ○ Sisteme de ecuații liniare Analiză matematică ○ Funcții derivabile. Proprietățile funcțiilor derivabile ○ Teorema lui Darboux. Teorema lui Cauchy ○ Formula lui Taylor cu restul lui Lagrange

Programa pentru etapa locală, etapa județeană/a sectoarelor municipiului București și etapa națională, Olimpiada Națională de Matematică (ONM)

Clasele a IX-a – a XII-a

An școlar 2024-2025



Olimpiada Națională de Matematică Programa pentru clasele a IX-a – a XII-a

Clasa	Etapa locală	Etapa județeană/a sectoarelor municipiului București	Etapa națională
a XII-a	Algebră ○ Grupuri (conținutul programei școlare) ○ Grupuri finite. Grupuri finit generate ○ Subgrupuri clasice (centralizatorul unui element sau al unei mulțimi, centrul unui grup, nucleul și imaginea unui morfism) ○ Teorema lui Lagrange. Teorema lui Cauchy Analiză matematică ○ Primitive ○ Integrala definită	Algebră ○ Inele și corpuri ○ Morfisme de semigrupuri, monoizi ○ Elemente nilpotente și elemente idempotente ○ Orice corp finit este comutativ Analiză matematică ○ Aplicații ale integralei definite	Algebră ○ Inele de polinoame Analiză matematică ○ Sume Darboux, sume Riemann, integrabilitate ○ Mulțimi neglijabile Lebesgue ○ Criteriul lui Lebesgue de integrabilitate