

COMPENDIUM OMP

Olimpiada Matematyczna (Polonia)



Gerard Romo Garrido

Toomates Coolección Vol. 96



Toomates Colección

Los libros de **Toomates** son materiales digitales y gratuitos. Son digitales porque están pensados para ser consultados mediante un ordenador, tablet o móvil. Son gratuitos porque se ofrecen a la comunidad educativa sin coste alguno. Los libros de texto pueden ser digitales o en papel, gratuitos o en venta, y ninguna de estas opciones es necesariamente mejor o peor que las otras. Es más: Suele suceder que los mejores docentes son los que piden a sus alumnos la compra de un libro de texto en papel, esto es un hecho. Lo que no es aceptable, por inmoral y mezquino, es el modelo de las llamadas "licencias digitales", "licencias de uso" y en general cualquier forma de "pago por el acceso a los materiales didácticos", con las que algunas empresas pretenden cobrar a los estudiantes, una y otra vez, por acceder a los mismos contenidos (unos contenidos que, además, son de una bajísima calidad). Este modelo de negocio es miserable, pues impide el compartir un mismo material, incluso entre dos hermanos, pretende convertir a los estudiantes en un mercado cautivo, exige a los estudiantes y a las escuelas costosísimas líneas de Internet, pretende pervertir el conocimiento, que es algo social, público, convirtiéndolo en un producto de propiedad privada, accesible solo a aquellos que se lo puedan permitir, y solo de una manera encapsulada, fragmentada, impidiendo el derecho del alumno de poseer todo el libro, de acceder a todo el libro, de moverse libremente por todo el libro.

Nadie puede pretender ser neutral ante esto: Mirar para otro lado y aceptar el modelo de pago por acceso a los materiales es admitir un mundo más injusto, es participar en la denegación del acceso al conocimiento a aquellos que no disponen de medios económicos, y esto en un mundo en el que las modernas tecnologías actuales permiten, por primera vez en la historia de la Humanidad, poder compartir el conocimiento sin coste alguno, con algo tan simple como es un archivo "pdf". **El conocimiento no es una mercancía.** El proyecto Toomates tiene como objetivo la promoción y difusión entre el profesorado y el colectivo de estudiantes de unos materiales didácticos libres, gratuitos y de calidad, que fuerce a las empresas comerciales a competir ofreciendo alternativas de pago atractivas aumentando la calidad de los materiales que ofrecen, (que son muy mediocres) y no mediante retorcidas técnicas comerciales.

Estos libros se comparten bajo una licencia "**Creative Commons 4.0 (Attribution Non Commercial)**": Se permite, se promueve y se fomenta cualquier uso, reproducción y edición de todos estos materiales siempre que sea sin ánimo de lucro y se cite su procedencia. Todos los libros se ofrecen en dos versiones: En formato "**pdf**" para una cómoda lectura y en el formato "**doc**" de MSWord para permitir y facilitar su edición y generar versiones parcial o totalmente modificadas. **¡Libérate de la tiranía y mediocridad de los productos comerciales! Crea, utiliza y comparte tus propios materiales didácticos.**

Problem Solving (en español):

[Geometría Axiomática](#) [Problemas de Geometría Vol. 1](#) [Vol. 2](#) [Vol. 3](#)
[Introducción a la Geometría](#) [Álgebra](#) [Teoría de números Vol. 1](#) [Vol. 2](#) [Combinatoria](#)
[Probabilidad](#) [Trigonometría](#) [Desigualdades](#) [Números complejos](#) [Calculus & Precalculus](#)

Libros de texto para ESO y bachillerato (en español y en catalán):

[Cálculo infinitesimal ESP](#) [CAT](#) [Álgebra Lineal ESP](#) [CAT](#) [Geometría Lineal ESP](#) [CAT](#)
[Números Complejos ESP](#) [CAT](#) [Combinatoria y probabilidad ESP](#) [CAT](#) [Estadística ESP](#) [CAT](#)
[Programación Lineal ESP](#) [CAT](#) [Álgebra ESP](#) [CAT](#) [Trigonometría ESP](#) [CAT](#)
[Geometría analítica ESP](#) [CAT](#) [Funciones ESP](#) [CAT](#) [Números \(Preálgebra\) ESP](#) [CAT](#)
[Proporcionalidad ESP](#) [CAT](#) [Medidas geométricas ESP](#) [CAT](#) [Mates amb Excel](#)

PAU españolas:

[Cataluña TEC](#) [Cataluña CCSS](#) [Valencia](#) [Galicia](#) [País Vasco](#) [Balears](#)

Reválidas internacionales:

[Portugal](#) [Italia](#) [Francia](#) [Rumanía](#) [Hungría](#) [Polonia](#) [Pearson Edexcel International A Level](#)
[China-Gaokao](#) [China-Zhongkao](#) [Corea-Suneung](#) [Cambridge International A Level](#)
[Cambridge IGCSE](#) [AQA GCSE](#) [International Baccalaureate \(IB\)](#) [Pearson Edexcel IGCSE](#)

Evaluación diagnóstica y pruebas de acceso:

[ACM6EP](#) [ACM4](#) [CFGS](#) [PAP](#)

Competiciones matemáticas:

Canguro: [España](#) [Cataluña](#) [Francia](#) [USA](#) [Reino Unido](#) [Austria](#)
USA: [Mathcounts](#) [AMC 8](#) [10](#) [12](#) [AIME](#) [USAJMO](#) [USAMO](#) [TSTST](#) [TST](#) [ELMO](#) [Putnam](#) [HMMT](#)
España: [OME](#) [OMEFL](#) [OMEEX](#) [OMC](#) [OMEA](#) [OMEM](#) [OMA](#) [CDP](#)
Europa: [OMI](#) [Arquimede](#) [BMO](#) [BalkanMO](#) [JBMO](#) [OPM](#) [OMP](#) [OMJ](#)
Internacional: [IMO](#) [IGO](#) [SMT](#) [INMO](#) [CMO](#) [EGMO](#) [KMO](#) [KJMO](#)
AHSME: [Book 1](#) [2](#) [3](#) [4](#) [5](#) [6](#) [7](#) [8](#) [9](#)

Otros materiales:

Pizzazz! [Book A](#) [B](#) [C](#) [D](#) [E](#) [Pre-Algebra](#) [Algebra](#) , [REOIM](#) , [Llibre3r](#) , [Excalibur](#)

¡Genera tus propias versiones de este documento! Siempre que es posible se ofrecen las versiones editables "MS Word" de todos los materiales para facilitar su edición.

¡Ayuda a mejorar! Envía cualquier duda, observación, comentario o sugerencia a toomates@gmail.com

¡No utilices una versión anticuada! Todos estos libros se revisan y amplían constantemente. Descarga totalmente gratis la última versión de estos documentos en los correspondientes enlaces superiores, en los que siempre encontrarás la versión más actualizada.

Consulta el **catálogo de libros** completo en <http://www.toomates.net>

¿Problemas para descargar algún documento? Descarga toda la biblioteca Toomates [Aquí](#) 

Visita mi **Canal de Youtube**: <https://www.youtube.com/c/GerardRomo> 

Visita mi **blog**: <https://toomatesbloc.blogspot.com/>

Versión de este documento: 12/01/2026

Presentación.

Es la competición más antigua de Polonia. Se celebró por primera vez en el curso escolar 1949/1950 por iniciativa del entonces ministro de Educación, Dr. Stanisław Skrzyszewski, y del presidente de la Sociedad Matemática Polaca, Prof. Dr. Kazimierz Kuratowski.

La Olimpiada está dirigida a estudiantes de secundaria, pero también pueden participar estudiantes de primaria. Pueden participar estudiantes de escuelas polacas y ciudadanos polacos que estudian en el extranjero.

La Olimpiada organiza cada año un campamento científico de dos semanas en Mszana Dolna (antes en Zwardoń), que sirve como forma de preparación para competiciones internacionales.

Las tareas de la Olimpiada Matemática se dividen en cuatro áreas: álgebra, geometría, teoría de números y combinatoria. Ponen a prueba principalmente las habilidades de pensamiento matemático, aunque también requieren amplios conocimientos teóricos.

Al resolver cada problema, se pueden obtener cero, dos, cinco o seis puntos. Se otorgan seis puntos por una solución correcta, posiblemente con errores menores. Una solución de cinco puntos puede contener un error que no invalide la resolución del problema. Se otorgan dos puntos por un problema sin resolver, siempre que se haya resuelto al menos la mitad. Por lo tanto, la escala de calificación es idéntica a la utilizada en la Olimpiada Juvenil de Matemáticas, organizada desde 2005.

La competición de la Olimpiada Matemática se divide en tres etapas :

Competiciones de nivel I (zawody stopnia I)

Constan de tres rondas, cada una de ellas con una duración de aproximadamente un mes y compuestas por cuatro tareas que los participantes resuelven en casa y luego envían al comité del distrito territorial correspondiente a través del sitio web (por correo postal hasta 2022);

Competiciones de nivel II (zawody stopnia II)

Últimos dos días, cada día los participantes tienen cinco horas para resolver tres tareas,

Competiciones de Nivel III (zawody stopnia III)

Constituyen la etapa final de la Olimpiada, se realizan bajo las mismas reglas que las competiciones de Nivel II, seguido de un viaje para los participantes y una ceremonia de clausura con el anuncio de los resultados y la composición de los equipos para las competiciones internacionales.

Los competidores que participan en la tercera etapa de la Olimpiada de Matemáticas tienen garantizada una excelente calificación en matemáticas al final del año, la máxima puntuación en el examen final de matemáticas avanzadas y la oportunidad de estudiar en numerosas universidades (incluyendo departamentos no relacionados con las matemáticas). Los ganadores de la Olimpiada tienen garantizada la admisión gratuita a aún más departamentos.

Además, los mejores participantes participan en un campamento científico y representan a Polonia en competencias internacionales, incluyendo la Olimpiada Internacional de Matemáticas.

Fuente de los documentos.

<https://om.sem.edu.pl/problems/>

Otros Compendiums relacionados.

Compendium OMJ (Olimpiada Matematyczna Juniorów)

<http://www.toomates.net/biblioteca/CompendiumOMJ.pdf>

Pruebas Selectividad de Polonia.

Revalida Bachillerato Nivel Avanzado (2005-2024)

<http://www.toomates.net/biblioteca/Polonia.pdf>

Reválida Bachillerato Nivel Básico (2005-2024)

<http://www.toomates.net/biblioteca/Polonia2.pdf>

Reválida Bachillerato (Básico y avanzado) 2025

<http://www.toomates.net/biblioteca/Polonia3.pdf>

Índice.

	Fase I		Fase II		Fase III	
	Enun	Sol	Enun	Sol	Enun	Sol
XLVII (1995 - 1996)	6		7		8	
XLVIII (1996 - 1997)	9		10	11	15	16
XLIX (1997 - 1998)	20	21	33	34	37	38
L (1998 - 1999)	42	43	54	55		57
LI (1999 - 2000)	61	77		82	83	90
LII (2000 - 2001)	92	95		111	115	117
LIII (2001 - 2002)	121		124	126	130	132
LIV (2002 - 2003)	136	140	148	150	155	157
LV (2003 - 2004)	161	165	175	177	181	183
LVI (2004 - 2005)	189	193	206	208	213	215
LVII (2005 - 2006)	221	225	237	239	242	245
LVIII (2006 - 2007)	253	257	269	271	276	278
LIX (2007 - 2008)	285	289	303	305	310	312
LX (2008 - 2009)	319	323	342	344	351	353
LXI (2009 - 2010)	364	368	388	390	397	399
LXII (2010 - 2011)	405	409	422	424	431	433
LXIII (2011 - 2012)	441	445	459	461	466	468
LXIV (2012 - 2013)	476	480	500	502	510	512
LXV (2013 - 2014)	520	524	535	537	541	543
LXVI (2014 - 2015)	549	553	568	570		
LXVII (2015 - 2016)	575	579	586	587	591	592
LXVIII (2016 - 2017)	596	600	608	609	616	617
LXIX (2017 - 2018)	623	627	637	638	642	643
LXX (2018 - 2019)	650	654	665	666	671	672
LXXI (2019 - 2020)	677	681	695	696		
LXXII (2020 - 2021)	702	704	713	715	719	721
LXXIII (2021 - 2022)	727	731	745	746	752	753
LXXIV (2022 - 2023)	758	762	774	775	779	780
LXXV (2023 - 2024)	786	789	806	807	816	817
LXXVI (2024 - 2025)	832	835	853	854	862	863
LXXVII (2025 - 2026)	871	874				

XLVII Olimpiada Matematyczna

Zawody pierwszego stopnia

Teksty zadań

1. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite n , dla których równanie $2 \sin nx = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$ ma rozwiązania w liczbach rzeczywistych x .
2. Liczbą *palindromiczną* nazywamy taką liczbę naturalną, której zapis dziesiętny czytany od strony lewej do prawej jest taki sam, jak czytany od strony prawej do lewej. Niech (x_n) będzie rosnącym ciągiem wszystkich liczb palindromicznych. Wyznaczyć wszystkie liczby pierwsze, które są dzielnikami co najmniej jednej z różnic $x_{n+1} - x_n$.
3. W pewnej grupie kn osób każda osoba zna więcej niż $(k-1)n$ innych (k, n są liczbami naturalnymi). Wykazać, że można z tej grupy wybrać $k+1$ osób, z których każde dwie się znają.
Uwaga. Jeżeli osoba A zna osobę B , to osoba B zna osobę A .
4. Prosta styczna do okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny ABC przecina boki AB i AC odpowiednio w punktach D i E . Udowodnić, że $\frac{|AD|}{|DB|} + \frac{|AE|}{|EC|} = 1$.
5. Na płaszczyźnie dany jest trójkąt ABC , w którym $|\sphericalangle CAB| = \alpha > 90^\circ$, oraz odcinek PQ , którego środkiem jest punkt A . Dowieść, że
$$\left(|BP| + |CQ|\right) \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \geq |BC|.$$
6. Dane są dwa ciągi liczb całkowitych dodatnich: ciąg arytmetyczny o różnicy $r > 0$ i ciąg geometryczny o ilorazie $q > 1$; liczby naturalne r, q są względnie pierwsze. Udowodnić, że jeśli te ciągi mają jeden wspólny wyraz, to mają nieskończenie wiele wspólnych wyrazów.
7. Liczby nieujemne a, b, c, p, q, r spełniają warunki:
$$a + b + c = p + q + r = 1; \quad p, q, r \leq \frac{1}{2}.$$
Udowodnić, że $8abc \leq pa + qb + rc$ oraz rozstrzygnąć, kiedy zachodzi równość.
8. Ze środka kwadratu wybiega promień świetlny, który odbija się od boków kwadratu zgodnie z zasadą *kąt padania jest równy kątowi odbicia*. Po pewnym czasie promień wraca do środka kwadratu. Promień nigdy nie trafił w wierzchołek, ani nie przeszedł wcześniej przez środek. Dowieść, że liczba odbić od boków kwadratu jest nieparzysta.
9. Wielomian o współczynnikach całkowitych daje przy dzieleniu przez wielomian $x^2 - 12x + 11$ resztę $990x - 889$. Wykazać, że wielomian ten nie ma pierwiastków całkowitych.
10. Wykazać, że równanie $x^x = y^3 + z^3$ ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich x, y, z .
11. W konkursie skoków narciarskich uczestniczy 65 zawodników. Startują oni kolejno, według ustalonego wcześniej porządku. Każdy wykonuje jeden skok. Przyjmujemy, że uzyskane wyniki są różne od zera oraz że każda kolejność końcowa jest jednakowo prawdopodobna. W każdym momencie konkursu liderem nazywamy zawodnika, który do tego momentu uzyskał najlepszy wynik. Oznaczmy przez p prawdopodobieństwo tego, że w czasie całego konkursu dokładnie jeden raz nastąpiła zmiana lidera. Wykazać, że $p > \frac{1}{16}$.
12. Rozstrzygnąć, czy istnieją takie dwa przystające sześciiany o wspólnym środku, że każda ściana pierwszego sześcianu ma punkt wspólny z każdą ścianą drugiego sześcianu.

XLVII Olimpiada Matematyczna

Zawody drugiego stopnia

Teksty zadań

1. Rozstrzygnąć, czy każdy wielomian o współczynnikach całkowitych jest sumą trzecich potęg wielomianów o współczynnikach całkowitych.
2. Okrąg o środku O wpisany w czworokąt wypukły $ABCD$ jest styczny do boków AB, BC, CD, DA odpowiednio w punktach K, L, M, N , przy czym proste KL i MN przecinają się w punkcie S . Dowieść, że proste BD i OS są prostopadłe.

3. Wykazać, że jeśli każda z liczb a, b, c jest nie mniejsza od $-\frac{3}{4}$ oraz $a + b + c = 1$, to

$$\frac{a}{a^2 + 1} + \frac{b}{b^2 + 1} + \frac{c}{c^2 + 1} \leq \frac{9}{10}.$$

4. Dany jest ciąg $a_1, a_2, \dots, a_{99}$ liczb ze zbioru $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Zakładamy, że dla $i = 1, 2, \dots, 98$ zachodzą implikacje:

$$\text{jeśli } a_i = 1, \text{ to } a_{i+1} \neq 2; \quad \text{a jeśli } a_i = 3, \text{ to } a_{i+1} \neq 4.$$

Udowodnić, że dla pewnych dwóch różnych liczb $k, l \in \{1, 2, \dots, 98\}$ zachodzą równości: $a_k = a_l$ oraz $a_{k+1} = a_{l+1}$

5. Znaleźć wszystkie pary liczb całkowitych (x, y) spełniające równanie

$$x^2(y - 1) + y^2(x - 1) = 1.$$

6. Wewnątrz równoległoscianu, którego krawędzie mają długości a, b, c , leży punkt P . Dowieść, że istnieje wierzchołek równoległoscianu, którego odległość od punktu P nie przekracza $\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

XLVII Olimpiada Matematyczna

Zawody trzeciego stopnia

Teksty zadań

1. Wyznaczyć wszystkie pary (n, r) , gdzie n jest liczbą całkowitą dodatnią, r zaś liczbą rzeczywistą, dla których wielomian $(x+1)^n - r$ jest podzielny przez wielomian $2x^2 + 2x + 1$.
2. Wewnątrz danego trójkąta ABC wybrano punkt P spełniający warunki: $|\sphericalangle PBC| = |\sphericalangle PCA| < |\sphericalangle PAB|$. Prosta BP przecina okrąg opisany na trójkącie ABC w punktach B i E . Okrąg opisany na trójkącie APE przecina prostą CE w punktach E i F . Udowodnić, że punkty A, P, E, F są kolejnymi wierzchołkami czworokąta oraz że stosunek pola czworokąta $APEF$ do pola trójkąta ABP nie zależy od wyboru punktu P .
3. Dana jest liczba naturalna $n \geq 2$ oraz liczby dodatnie $a_1, a_2, \dots, a_n$, których suma jest równa się 1

- (a) Dowieść, że dla dowolnych liczb dodatnich $x_1, x_2, \dots, x_n$ o sumie równej 1 zachodzi nierówność

$$2 \sum_{i < j} x_i x_j \leq \frac{n-2}{n-1} + \sum_{i=1}^n \frac{a_i x_i^2}{1-a_i}$$

- (b) Wyznaczyć wszystkie układy liczb dodatnich $x_1, x_2, \dots, x_n$ o sumie równej 1, dla których powyższa nierówność staje się równością.

Uwaga. Symbol $\sum_{i < j} x_i x_j$ oznacza sumę $\binom{n}{2}$ składników odpowiadających wszystkim parom wstażników i, j ze zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ spełniających warunek $i < j$.

4. W czworoscianie $ABCD$ zachodzą następujące równości:

$$|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle ACD| \quad \text{oraz} \quad |\sphericalangle ABD| = |\sphericalangle BDC|.$$

Dowieść, że krawędzie AB i CD mają jednakową długość.

5. Dla liczby naturalnej $k \geq 1$ oznaczmy przez $p(k)$ najmniejszą liczbę pierwszą, która nie jest dzielnikiem liczby k . Jeśli $p(k) > 2$, to przyjmujemy, że $q(k)$ jest iloczynem wszystkich liczb pierwszych mniejszych od $p(k)$; gdy zaś $p(k) = 2$, to przyjmujemy $q(k) = 1$. Określamy ciąg (x_n) wzorami:

$$x_0 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{x_n p(x_n)}{q(x_n)} \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, \dots$$

Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne n , dla których zachodzi równość $x_n = 11111$.

6. Spośród wszystkich permutacji f zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ spełniających warunek

$$f(i) \geq i - 1 \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, n$$

wyberamy jedną (każdy wybór jest jednakowo prawdopodobny). Niech p_n będzie prawdopodobieństwem tego, że wybrana permutacja spełnia warunek

$$f(i) \leq i + 1 \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, n.$$

Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne n , dla których $p_n > \frac{1}{3}$.

XLVIII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego

I seria.

1. Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} x \cdot |x| + y \cdot |y| = 1 \\ [x] + [y] = 1 \end{cases}$$

Uwaga. $[t]$ jest największą liczbą całkowitą nie większą od t .

2. Punkt P leży wewnątrz równoległoboku $ABCD$, przy czym $\sphericalangle ABP = \sphericalangle ADP$. Wykazać, że $\sphericalangle PAB = \sphericalangle PCB$.
3. Udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $a, b \geq 1$, $c \geq 0$ oraz dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ zachodzi nierówność $(ab + c)^n - c \leq ((b + c)^n - c)a^n$.
4. Udowodnić, że liczba naturalna $n \geq 2$ jest złożona wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją liczby naturalne $a, b, x, y \geq 1$ spełniające warunki: $a + b = n$, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

II seria.

5. Dwieścienne kątów wewnętrznych A , B , C trójkąta ABC przecinają przeciwległe boki odpowiednio w punktach D , E , F , a okrąg opisany na trójkącie ABC — odpowiednio w punktach K , L , M . Dowieść, że

$$\frac{AD}{DK} + \frac{BE}{EL} + \frac{CF}{FM} \geq 9.$$

6. Wielomian $P(x)$ stopnia n spełnia warunek

$$P(k) = \frac{1}{k} \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, 4, 8, \dots, 2^n.$$

Obliczyć $P(0)$.

7. Obliczyć kres górny objętości czworościanów zawartych w kuli o danym promieniu R , których jedną z krawędzi jest średnica tej kuli.
8. Niech a_n będzie liczbą wszystkich niepustych podzbiorów zbioru $\{1, 2, \dots, 6n\}$, których suma elementów daje przy dzieleniu przez 6 resztę 5 oraz niech b_n będzie liczbą wszystkich niepustych podzbiorów zbioru $\{1, 2, \dots, 7n\}$, których iloczyn elementów daje przy dzieleniu przez 7 resztę 5. Obliczyć iloraz a_n/b_n .

III seria.

9. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f: (1; \infty) \rightarrow (1; \infty)$ spełniające następujące warunki:

(i) $f(x+1) = \frac{(f(x))^2 - 1}{x}$ dla $x \geq 1$;

(ii) funkcja $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ jest ograniczona.

10. Punkty P, Q leżą wewnątrz trójkąta ostrokątnego ABC , przy czym $\sphericalangle ACP = \sphericalangle BCQ$ oraz $\sphericalangle CAP = \sphericalangle BAQ$. Punkty D , E , F są rzutami prostokątnymi punktu P odpowiednio na boki BC , CA , AB . Dowieść, że kąt DEF jest prosty wtedy i tylko wtedy, gdy punkt Q jest punktem przecięcia wysokości trójkąta BDF .
11. Dana jest liczba naturalna $m \geq 1$ oraz wielomian $P(x)$ stopnia dodatniego o współczynnikach całkowitych mający co najmniej trzy różne pierwiastki całkowite. Dowieść, że wielomian $P(x) + 5^m$ ma co najwyżej jeden pierwiastek całkowity.
12. Grupa złożona z n osób stwierdziła, że codziennie przez pewien okres czasu trzy z nich mogą wspólnie zjeść obiad w restauracji, przy czym każde dwie z nich spotkają się na dokładnie jednym obiedzie. Dowieść, że liczba n przy dzieleniu przez 6 daje resztę 1 lub 3.

XLVIII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia drugiego

Zadania na dzień 21 lutego 1997 r.
(pierwszy dzień zawodów)

1. Dla każdej liczby rzeczywistej a wyznaczyć liczbę uporządkowanych trójek liczb rzeczywistych (x, y, z) spełniających układ równań

$$\begin{cases} x + y^2 + z^2 = a \\ x^2 + y + z^2 = a \\ x^2 + y^2 + z = a \end{cases}$$

2. Punkt P leży wewnątrz trójkąta ABC i spełnia warunki:

$$\sphericalangle PBA = \sphericalangle PCA = \frac{1}{3}(\sphericalangle ABC + \sphericalangle ACB).$$

Udowodnić, że

$$\frac{AC}{AB + PC} = \frac{AB}{AC + PB}.$$

3. Dany jest zbiór n punktów ($n \geq 2$), z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej. Kolorujemy wszystkie odcinki o końcach w tym zbiorze tak, by każde dwa odcinki o wspólnym końcu miały różne kolory. Wyznaczyć najmniejszą liczbę kolorów, dla której istnieje takie pokolorowanie.

Zadania na dzień 22 lutego 1997 r.
(drugi dzień zawodów)

4. Wyznaczyć wszystkie trójki liczb całkowitych dodatnich mających następującą własność: iloczyn dowolnych dwóch z nich daje resztę 1 przy dzieleniu przez trzecią liczbę.
5. Rzucamy k kostkami sześciennymi białymi i m czarnymi. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że reszta z dzielenia przez 7 łącznej liczby oczek wyrzuconych na kostkach białych jest równa reszcie z dzielenia przez 7 łącznej liczby oczek wyrzuconych na kostkach czarnych.
6. W sześciianie o krawędzi długości 1 leży osiem punktów. Wykazać, że pewne dwa z nich są końcami odcinka o długości nie większej niż 1.

XLVIII Olimpiada Matematyczna

Szkice rozwiązań zadań z zawodów drugiego stopnia

1. Podstawienie: $x = u + \frac{1}{2}$, $y = v + \frac{1}{2}$, $z = w + \frac{1}{2}$ sprowadza dany układ równań do postaci:

$$(*) \quad \begin{cases} v^2 + w^2 + u + v + w + 1 = a \\ w^2 + u^2 + u + v + w + 1 = a \\ u^2 + v^2 + u + v + w + 1 = a \end{cases}$$

skąd przez odejmowanie stronami: $u^2 = v^2 = w^2$. Zatem każde rozwiązanie (u, v, w) układu $(*)$ ma dokładnie jedną z następujących postaci:

$$(1) \quad (t, t, t); \quad t \in \mathbb{R};$$

$$(2) \quad (-t, t, t) \text{ lub } (t, -t, t) \text{ lub } (t, t, -t); \quad t \in \mathbb{R}, t \neq 0.$$

Dla $u = v = w = t$ układ $(*)$ sprowadza się do równania

$$(1') \quad 2t^2 + 3t + (1 - a) = 0;$$

gdy zaś dwie z liczb u, v, w są równe t , trzecia $-t$ ($t \neq 0$), układ $(*)$ sprowadza się do równania

$$(2') \quad 2t^2 + t + (1 - a) = 0.$$

Liczba rozwiązań (u, v, w) układu $(*)$ mających postać (1) jest równa liczbie pierwiastków równania $(1')$; oznaczmy ją przez N_1 . Liczba rozwiązań (u, v, w) postaci (2) jest równa $3N_2$, gdzie N_2 oznacza liczbę pierwiastków równania $(2')$ różnych od zera. Obliczamy wyróżniki trójmianów $(1')$ i $(2')$: $\Delta_1 = 8a + 1$, $\Delta_2 = 8a - 7$. Zatem:

$$N_1 = \begin{cases} 0 & \text{gdy } a < -1/8, \\ 1 & \text{gdy } a = -1/8, \\ 2 & \text{gdy } a > -1/8, \end{cases} \quad N_2 = \begin{cases} 0 & \text{gdy } a < 7/8, \\ 1 & \text{gdy } a = 7/8 \text{ lub } a = 1, \\ 2 & \text{gdy } a > 7/8, a \neq 1. \end{cases}$$

Liczba rozwiązań układu $(*)$ jest więc równa:

$$N = N_1 + 3N_2 = \begin{cases} 0 & \text{gdy } a < -1/8, \\ 1 & \text{gdy } a = -1/8, \\ 2 & \text{gdy } -1/8 < a < 7/8, \\ 5 & \text{gdy } a = 7/8 \text{ lub } a = 1, \\ 8 & \text{gdy } a > 7/8, a \neq 1. \end{cases}$$

*

*

*

*

*

2. Oznaczmy przez K punkt przecięcia prostych BP i AC , zaś przez L punkt przecięcia prostych CP i AB . Na mocy warunków zadania mamy:

$$\begin{aligned}\angle KPC &= \angle PBC + \angle PCB = \angle ABC - \angle ABP + \angle ACB - \angle ACP = \\ &= \angle ABC + \angle ACB - 2 \cdot \frac{1}{3}(\angle ABC + \angle ACB) = \\ &= \frac{1}{3}(\angle ABC + \angle ACB) = \angle PCK,\end{aligned}$$

co dowodzi, że $KP = KC$. Analogicznie $LP = LB$. Trójkąty ABK oraz ACL są podobne, więc dostajemy

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AK + KB}{AL + LC} = \frac{AC - KC + KP + PB}{AB - LB + LP + PC} = \frac{AC + PB}{AB + PC},$$

czyli równość, którą należało udowodnić.

* * * * *

3. Przyjmijmy, że dane punkty są wierzchołkami pewnego n -kąta (jeśli $n = 2$, wystarczy oczywiście jeden kolor). Wszystkie odcinki o jednakowym kolorze wyznaczają rozłączne pary wierzchołków wielokąta. Maksymalna liczba rozłącznych podzbiorów dwuelementowych zbioru n -elementowego wynosi $\lfloor n/2 \rfloor$. Zatem liczba kolorów jest nie mniejsza niż

$$\binom{n}{2} \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor^{-1} = \begin{cases} n & \text{dla } n \text{ nieparzystych,} \\ n-1 & \text{dla } n \text{ parzystych.} \end{cases}$$

Wykażemy, że ta liczba kolorów wystarcza do spełnienia żądanego warunku.

Gdy n jest liczbą nieparzystą, bierzemy zbiór wierzchołków n -kąta foremnego i malujemy jednakowym kolorem bok i wszystkie równoległe do niego przekątne; odcinki nierównoległe malujemy różnymi kolorami. Użyliśmy n kolorów.

Gdy n jest liczbą parzystą, bierzemy zbiór wierzchołków $(n-1)$ -kąta foremnego V oraz jeszcze jeden punkt P_0 . Kolorujemy boki i przekątne wielokąta V w sposób opisany powyżej, używając $n-1$ kolorów. Dla każdej rodziny równoległych odcinków jednakowego koloru k_i pozostaje jeden wierzchołek P_i wielokąta V nie będący końcem żadnego z tych odcinków. Malujemy odcinek P_0P_i kolorem k_i . Użyliśmy $n-1$ kolorów, spełniając wymagany warunek.

(mek, wp)

XLVIII Olimpiada Matematyczna

Szkice rozwiązań zadań z zawodów drugiego stopnia

4. Niech a, b, c będą liczbami, jakich szukamy. Z podanych warunków wynika, że są to liczby większe od 1, parami względnie pierwsze. Liczba $bc+ca+ab-1$ dzieli się przez a , przez b i przez c , dzieli się więc także przez iloczyn abc :

$$(1) \quad bc + ca + ab = kabc + 1 \quad (k - \text{liczba całkowita}).$$

Po podzieleniu stronami przez abc :

$$(2) \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = k + \frac{1}{abc}.$$

Suma po lewej stronie równości (1) jest większa od 1, więc $k > 0$. Suma po lewej stronie (2) jest mniejsza od 2, więc $k < 2$. Zatem $k = 1$. Prawa strona (2) jest większa od 1, więc największa z liczb $1/a, 1/b, 1/c$ przekracza $1/3$. Przyjmując, że $a > b > c$ wnosimy stąd, że $c = 2$. Równość (1) przybiera postać $2a + 2b + ab = 2ab + 1$, czyli $(a - 2)(b - 2) = 3$. Stąd $a = 5, b = 3, c = 2$. Te liczby spełniają warunki zadania i są (z dokładnością do permutacji) jego jedynym rozwiązaniem.

* * * * *

5. Zbiorem zdarzeń elementarnych w tym zadaniu jest

$$\Omega = \{(b_1, \dots, b_k, c_1, \dots, c_m) : b_1, \dots, b_k, c_1, \dots, c_m \in \{1, 2, \dots, 6\}\},$$

gdzie wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne. Niech A oznacza zdarzenie, którego prawdopodobieństwa szukamy:

$$A = \{(b_1, \dots, b_k, c_1, \dots, c_m) \in \Omega : 7 \mid (b_1 + \dots + b_k - c_1 - \dots - c_m)\}.$$

Niech zaś B będzie zdarzeniem, że łączna liczba wyrzuconych oczek na wszystkich $k + m$ kostkach jest podzielna przez 7:

$$B = \{(b_1, \dots, b_k, c_1, \dots, c_m) \in \Omega : 7 \mid (b_1 + \dots + b_k + c_1 + \dots + c_m)\}.$$

Przekształcenie dane wzorem

$$(b_1, \dots, b_k, c_1, \dots, c_m) \mapsto (b_1, \dots, b_k, 7 - c_1, \dots, 7 - c_m)$$

jest odwzorowaniem wzajemnie jednoznacznym zbioru A na zbiór B . Zbiory A i B są więc równoliczne, a zatem prawdopodobieństwa zdarzeń A i B są jednakowe.

Oznaczmy przez $p_{n,r}$ ($n \geq 1, r = 0, 1, \dots, 6$) prawdopodobieństwo tego, że przy rzucie n kostkami reszta przy dzieleniu przez 7 łącznej liczby wyrzuconych oczek jest równa r . Wówczas $p_{1,0} = 0, p_{1,1} = p_{1,2} = \dots = p_{1,6} = 1/6$.

Ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite dostajemy dla $n = 1, 2, 3, \dots$ równość:

$$(*) \quad p_{n+1,0} = p_{1,0} \cdot p_{n,0} + \sum_{r=1}^6 p_{1,7-r} \cdot p_{n,r} = \frac{1}{6} \sum_{r=1}^6 p_{n,r} = \frac{1}{6}(1 - p_{n,0}).$$

Wprowadzając oznaczenie $q_n = p_{n,0} - \frac{1}{7}$, ze wzoru (*) otrzymujemy równość

$$q_{n+1} = q_n \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) \quad \text{dla } n \geq 1.$$

Stąd przez łatwą indukcję

$$q_n = q_1 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1} = \frac{(-1)^n}{7 \cdot 6^{n-1}} \quad \text{dla } n \geq 1.$$

Ostatecznie więc

$$P(A) = P(B) = p_{k+m,0} = \frac{1}{7} + q_{k+m} = \frac{1}{7} + \frac{(-1)^{k+m}}{7 \cdot 6^{k+m-1}}.$$

* * * * *

6. Oznaczmy wierzchołki danego sześciianu $\mathcal{C}$ przez $A_1, \dots, A_8$. Oznaczmy przez $\mathcal{C}_i$ sześciian o krawędzi długości $\frac{1}{2}$, mający jeden wierzchołek w punkcie A_i oraz trzy ściany zawarte w ścianach sześciianu $\mathcal{C}$. Niech $P_1, \dots, P_8$ będą ośmioma danymi punktami.

Każdy sześciian $\mathcal{C}_i$ ma średnicę $\frac{1}{2}\sqrt{3} < 1$. Jeśli więc pewne dwa różne punkty P_k, P_l leżą w którymś z sześciianów $\mathcal{C}_i$, to $P_k P_l < 1$; wymagany warunek jest spełniony.

Załóżmy zatem, że każdy z tych sześciianów zawiera dokładnie jeden punkt P_i . Ustalmy numerację tak, by $P_i \in \mathcal{C}_i$ dla $i = 1, \dots, 8$. Sześciian $\mathcal{C}_i$ ma dokładnie trzy ściany wspólne z powierzchnią sześciianu $\mathcal{C}$; punkt P_i jest odległy od każdej z tych trzech ścian o nie więcej niż $1/2$. Oznaczmy te trzy odległości przez a_i, b_i, c_i . Niech d będzie największą spośród 24 liczb: $a_1, b_1, c_1, \dots, a_8, b_8, c_8$. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $d = P_1 Q$, gdzie Q jest rzutem prostokątnym punktu P_1 na pewną ścianę sześciianu $\mathcal{C}$, oraz że $A_1 A_2$ jest krawędzią sześciianu $\mathcal{C}$ równoległą do prostej $P_1 Q$.

Niech R będzie rzutem prostokątnym punktu P na prostą $A_1 A_2$. Weźmy pod uwagę prostopadłościan, którego jedną krawędzią jest odcinek $A_2 R$, a jedną ze ścian prostopadłych do $A_2 R$ jest kwadrat o wierzchołku A_2 i boku długości d , zawarty w ścianie sześciianu $\mathcal{C}$. Z określenia liczby d wynika, że ów prostopadłościan zawiera punkty P_1 i P_2 . Jego średnica jest równa

$$\sqrt{d^2 + d^2 + (1-d)^2} = \sqrt{d(3d-2) + 1} \leq 1,$$

gdyż $0 \leq d \leq \frac{1}{2} < \frac{2}{3}$. Zatem $P_1 P_2 \leq 1$, co kończy dowód.

(mek, wp)

XLVIII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia trzeciego

Zadania na dzień 4 kwietnia 1997 r.
(pierwszy dzień zawodów)

1. Liczby całkowite dodatnie $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$ spełniają warunki:

$$x_6 = 144 \quad \text{oraz} \quad x_{n+3} = x_{n+2}(x_{n+1} + x_n) \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, 3, 4.$$

Wyznaczyć x_7 .

2. Znaleźć wszystkie trójki liczb rzeczywistych x, y, z spełniające układ równań

$$\begin{cases} 3(x^2 + y^2 + z^2) = 1 \\ x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 = xyz(x + y + z)^3. \end{cases}$$

3. Środkowe ścian bocznych ABD, ACD, BCD ostrosłupa $ABCD$ poprowadzone z wierzchołka D tworzą równe kąty z krawędziami, do których zostały poprowadzone. Wykazać, że pole każdej ściany bocznej jest mniejsze od sumy pól pozostałych dwóch ścian bocznych.

Zadania na dzień 5 kwietnia 1997 r.
(drugi dzień zawodów)

4. Ciąg $a_1, a_2, a_3, \dots$ jest określony wzorami

$$a_1 = 0, \quad a_n = a_{[n/2]} + (-1)^{n(n+1)/2} \quad \text{dla} \quad n > 1.$$

Dla każdej liczby całkowitej $k \geq 0$ wyznaczyć liczbę numerów n spełniających warunki

$$2^k \leq n < 2^{k+1}, \quad a_n = 0.$$

Uwaga. $[n/2]$ jest największą liczbą całkowitą nie przekraczającą $n/2$.

5. Dany jest pięciokąt wypukły $ABCDE$, w którym $DC = DE$ oraz $\sphericalangle DCB = \sphericalangle DEA = 90^\circ$. Niech F będzie punktem boku AB wyznaczonym przez warunek $AF:BF = AE:BC$. Udowodnić, że $\sphericalangle FCE = \sphericalangle ADE$ oraz $\sphericalangle FEC = \sphericalangle BDC$.
6. Na okręgu o promieniu 1 leży n różnych punktów ($n \geq 2$). Niech q będzie liczbą odcinków o końcach w tych punktach i długości większej niż $\sqrt{2}$. Dowieść, że $3q \leq n^2$.

Szkice rozwiązań zadań z zawodów trzeciego stopnia

1. Oznaczmy: $a = x_1 + x_2$, $b = x_3$, $c = x_2 + x_3$. Wówczas $x_2 = c - b$, $x_1 = a - x_2 = a + b - c$. Są to z założenia liczby dodatnie. Tak więc

$$(1) \quad 0 < b < c < a + b.$$

Dalej, $x_4 = ab$, $x_5 = abc$, $x_6 = abc(ab + b) = a(a + 1)b^2c$. Z nierówności (1) wynika, że $a > 1$. Jedynymi dzielnikami liczby 144 mającymi postać $a(a + 1)$ (gdzie $a > 1$) są liczby 6, 12, 72, odpowiadające wartościom $a = 2$, $a = 3$, $a = 8$. Iloczyn b^2c powinien mieć — odpowiednio — wartość: 24, 12, 2. Pierwsza możliwość prowadzi do sprzeczności z warunkiem (1). Druga i trzecia możliwość daje (w połączeniu z warunkiem (1)) rozwiązania $(a, b, c) = (3, 2, 3)$ oraz $(a, b, c) = (8, 1, 2)$. W każdym przypadku $x_7 = x_6(x_5 + x_4) = 144ab(c + 1) = 144 \cdot 24 = 3456$.

* * * * *

2. Przypuśćmy, że liczby x, y, z spełniają dany układ; z drugiego równania wynika, że

$$(1) \quad xyz(x+y+z) \geq 0.$$

Dalej mamy

$$(2) \quad 0 \leq (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 = 3(x^2 + y^2 + z^2) - (x+y+z)^2,$$

co na mocy pierwszego równania układu daje:

$$(3) \quad (x + y + z)^2 \leq 1.$$

Zachodzi też nierówność

$$\begin{aligned} 0 &\leq (xy - yz)^2 + (yz - zx)^2 + (zx - xy)^2 = \\ &= 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) - 2xyz(x + y + z), \end{aligned}$$

czyli

$$(4) \quad xy z(x+y+z) \leq x^2 y^2 + y^2 z^2 + z^2 x^2.$$

Dzięki własności (1) możemy pomnożyć nierówności (3) i (4) stronami:

$$(5) \quad xyz(x+y+z)^3 \leq x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2.$$

Zgodnie z drugim równaniem układu, nierówność (5) ma być równością. To znaczy, że albo obie mnożone nierówności (3) i (4) są równościami, albo wyrażenia po obu stronach (4) są równe zero. W pierwszym przypadku znak równości w związkach (2) i (3) prowadzi do wniosku, że $x = y = z = \pm 1/3$. W drugim przypadku iloczyny xy , yz , zx są równe zero, czyli pewne dwie spośród liczb x , y , z są równe zero; trzecia musi być równa $\pm 1/\sqrt{3}$, zgodnie

z pierwszym równaniem układu. Daje to osiem trójek (x, y, z) spełniających dany układ równań:

$$(\varepsilon \cdot \frac{1}{3}, \varepsilon \cdot \frac{1}{3}, \varepsilon \cdot \frac{1}{3}), \quad (\varepsilon \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}, 0, 0), \quad (0, \varepsilon \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}, 0), \quad (0, 0, \varepsilon \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}),$$

gdzie $\varepsilon = \pm 1$.

* * * * *

3. Udowodnimy nierówność

$$(1) \quad \text{pole}(ABD) < \text{pole}(BCD) + \text{pole}(CAD)$$

(pozostałe dwie nierówności dostaniemy analogicznie). Oznaczmy przez K, L, M odpowiednio środki krawędzi BC, CA, AB . Odcinki DK, DL, DM tworzą równe kąty odpowiednio z krawędziami BC, CA, AB ; oznaczmy ten wspólny kąt przez α . Niech DH będzie wysokością trójkąta ABD . Mamy:

$$(2) \quad \text{pole}(ABD) = \frac{1}{2}AB \cdot DH = \frac{1}{2}AB \cdot DM \cdot \sin \alpha = KL \cdot DM \cdot \sin \alpha.$$

Analogicznie:

$$(3) \quad \text{pole}(BCD) = LM \cdot DK \cdot \sin \alpha \quad \text{oraz} \quad \text{pole}(CAD) = MK \cdot DL \cdot \sin \alpha.$$

Ponieważ $\sin \alpha \neq 0$, więc wykorzystując równości (2) i (3) możemy zapisać nierówność (1) w następującej równoważnej postaci:

$$(4) \quad KL \cdot DM < LM \cdot DK + MK \cdot DL.$$

Rozważmy czworokąt $KLMD$. Niech N będzie takim punktem płaszczyzny KL , że $KN = KD, LN = LD$ oraz punkty M i N leżą po przeciwnych stronach prostej KL . Oznaczmy przez P punkt przecięcia prostej KL z odcinkiem MN . Ponieważ trójkąty KLD i KLN są przystające, więc $DP = NP$. Dla czworokąta $MKNL$ zachodzi nierówność Ptolemeusza:

$$KL \cdot NM \leq LM \cdot NK + MK \cdot NL.$$

Stąd otrzymujemy

$$\begin{aligned} KL \cdot DM &< KL \cdot (DP + PM) = KL \cdot (NP + PM) = KL \cdot NM \leq \\ &\leq LM \cdot NK + MK \cdot NL = LM \cdot DK + MK \cdot DL, \end{aligned}$$

czyli nierówność (4), która jest równoważna nierówności (1).

(mek, wp)

XLVIII Olimpiada Matematyczna

Szkice rozwiązań zadań z zawodów trzeciego stopnia

4. Każdej liczbie całkowitej $n \geq 1$ przyporządkowujemy skończony ciąg symboli dwóch rodzajów: kropki i przecinków. Zapisujemy liczbę n w systemie dwójkowym. Pomiędzy każde dwie kolejne cyfry wstawiamy kropkę, gdy te cyfry są jednakowe, a przecinek, gdy są różne. Jeżeli n spełnia nierówność $2^k \leq n < 2^{k+1}$, czyli jest (w systemie dwójkowym) liczbą $(k+1)$ -cyfrową, to wstawione w opisany sposób kropki i przecinki tworzą ciąg k -wyrazowy. Będziemy go nazywali *kodelem*, liczby n . Każdy taki ciąg kropek i przecinków jest kodem dokładnie jednej liczby n : na początku ma ona jedynekę, a dalsze cyfry są wyznaczone przez kolejne symbole kodu. Kod k -wyrazowy wyznacza liczbę $(k+1)$ -cyfrową.

Oznaczmy przez b_n liczbę kropek, a przez c_n liczbę przecinków w kodzie liczby n i przyjmijmy $d_n = b_n - c_n$.

Niech n będzie dowolną liczbą $(k+1)$ -cyfrową ($k \geq 1$). Skreślając jej ostatnią cyfrę otrzymujemy zapis dwójkowy liczby $[n/2]$. Jeśli ostatnie dwie cyfry liczby n są równe, to $b_n = b_{[n/2]} + 1$, $c_n = c_{[n/2]}$. Jeśli ostatnie dwie cyfry liczby n są różne, to $b_n = b_{[n/2]}$, $c_n = c_{[n/2]} + 1$. Pierwsza z tych sytuacji ma miejsce, gdy $n \equiv 0$ lub $n \equiv 3 \pmod{4}$, druga — gdy $n \equiv 1$ lub $n \equiv 2 \pmod{4}$. Różnica $d_n - d_{[n/2]}$ wynosi 1 w pierwszym przypadku, zaś -1 w drugim przypadku.

Dokładnie takie same wartości przybiera różnica $a_n - a_{[n/2]}$. Dla $n = 1$ mamy $a_1 = b_1 = c_1 = d_1 = 0$. Stąd wniosek, że $a_n = d_n$, czyli $a_n = b_n - c_n$, dla $n = 1, 2, 3, \dots$. Zatem dla $(k+1)$ -cyfrowej liczby n równość $a_n = 0$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy w jej k -wyrazowym kodzie jest tyle samo symboli każdego rodzaju. Liczba takich k -wyrazowych ciągów wynosi $\binom{k}{k/2}$, gdy k jest liczbą parzystą, oraz 0, gdy k jest liczbą nieparzystą. Tyle jest więc numerów n spełniających zadane warunki.

* * * * *

5. Na przedłużeniu odcinka BC odkładamy odcinek $CP = AE$. Z warunków zadania wynika, że trójkąty prostokątne PCD i AED są przystające. Stąd $AD = DP$ oraz

$$\sphericalangle ADP = \sphericalangle PDC + \sphericalangle ADC = \sphericalangle ADE + \sphericalangle ADC = \sphericalangle EDC.$$

Ponieważ również $ED = DC$, więc trójkąty ADP i EDC są podobne. Oznaczając przez Q punkt przecięcia prostych AP i EC dostajemy równość

$$\sphericalangle DEQ = \sphericalangle DEC = \sphericalangle DAP = \sphericalangle DAQ,$$

która dowodzi, że punkty A, Q, D, E leżą na jednym okręgu. Zatem

$$(1) \qquad \qquad \qquad \sphericalangle ADE = \sphericalangle AQE.$$

Ze związków

$$\frac{AF}{BF} = \frac{AE}{BC} = \frac{PC}{BC}$$

wynika, że proste AP i FC są równoległe. Stąd $\sphericalangle AQE = \sphericalangle FCE$, co w połączeniu ze wzorem (1) daje pierwszą równość tezy. Druga jest analogiczna.

* * * * *

6. Odcinek o końcach w rozważanym zbiorze będziemy nazywać *długim*, jeśli jego długość jest większa niż $\sqrt{2}$, a *krótkim* w przeciwnym przypadku. Tak więc q jest liczbą długich odcinków. W dany okrąg wpisujemy kwadrat $ABCD$ tak, by żaden z danych n punktów nie był jego wierzchołkiem. Przyjmijmy, że na łukach AB , BC , CD , DA leży odpowiednio a punktów, b punktów, c punktów, d punktów. Weźmy pod uwagę zbiór wszystkich czworokątów mających wierzchołki w danych punktach, po jednym na każdym z czterech łuków. Jest $abcd$ takich czworokątów. Każdy czworokąt wpisany w dany okrąg ma co najmniej jeden bok krótki.

Przyporządkujemy każdemu czworokątowi (z rozważanego zbioru) jeden z jego krótkich boków i pomalujmy ten wybrany bok na zielono. Ustalony zielony odcinek mający końce na łukach AB i BC mógł zostać przyporządkowany co najwyżej $c \cdot d$ czworokątom, a więc co najwyżej m czworokątom, gdzie m jest największą z liczb ab , bc , cd , da . Tak samo da się oszacować liczbę czworokątów, którym został przyporządkowany dowolnie ustalony zielony odcinek (o końcach w którychkolwiek dwóch sąsiednich łukach). Stąd wniosek, że łączna liczba zielonych odcinków jest nie mniejsza niż $(abcd)/m$.

Wszystkie zielone odcinki są krótkie. Oczywiście takie wszystkie odcinki mające oba końce w jednym łuku są krótkie. Zatem liczba krótkich odcinków, równa $\binom{n}{2} - q$, spełnia oszacowanie:

$$\binom{n}{2} - q \geq \frac{abcd}{m} + \binom{a}{2} + \binom{b}{2} + \binom{c}{2} + \binom{d}{2}.$$

Można przyjąć (przesuwając w razie potrzeby oznaczenia), że $m = ab$. Otrzymała nierówność przybiera po przekształceniu postać:

$$\begin{aligned} q &\leq \frac{1}{2}(n(n-1) - a(a-1) - b(b-1) - c(c-1) - d(d-1)) - cd = \\ &= \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - cd \end{aligned}$$

(skorzystaliśmy z tego, że $a + b + c + d = n$). A zatem

$$\begin{aligned} n^2 - 3q &\geq -\frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + 3cd = \\ &= \left(\frac{1}{2}(a+b) - (c+d)\right)^2 + \frac{3}{4}(a-b)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

(mek, wp)

XLIX Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego

I seria (okres od 11 września do 10 października 1997 r.)

1. Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} |x-y| - \frac{|x|}{x} = -1 \\ |2x-y| + |x+y-1| + |x-y| + y-1 = 0. \end{cases}$$

2. Proste zawierające wysokości trójkąta ABC , wpisanego w okrąg o środku O , przecinają się w punkcie H , przy czym $AO = AH$. Obliczyć miarę kąta CAB .
3. Ciągi (a_n) , (b_n) , (c_n) są określone przez warunki: $a_1 = 4$, $a_{n+1} = a_n(a_n - 1)$, $2^{b_n} = a_n$, $2^{n-c_n} = b_n$ dla $n = 1, 2, 3, \dots$. Wykazać, że ciąg (c_n) jest ograniczony.
4. Dana jest liczba dodatnia a . Wyznaczyć wszystkie liczby rzeczywiste c mające następującą własność: dla każdej pary liczb dodatnich x, y spełniona jest nierówność

$$(c-1)x^{a+1} \leq (cy-x)y^a.$$

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu) mają być wysłane pod adresem właściwego komitetu okręgowego Olimpiady najpóźniej dnia

10 października 1997 r.

Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.

II seria (okres od 11 października do 10 listopada 1997 r.)

5. Dana jest liczba całkowita $n \geq 1$. Rozwiązać równanie

$$|\operatorname{tg}^n x - \operatorname{ctg}^n x| = 2n|\operatorname{ctg} 2x|.$$

6. W trójkącie ABC punkt D jest środkiem boku BC , punkt E leży na boku AC . Punkty P i Q są odpowiednio rzutami prostokątnymi punktów B i E na prostą AD . Udowodnić, że $BE = AE + AC$ wtedy i tylko wtedy, gdy $AD = PQ$.
7. Dane są liczby naturalne $m, n \geq 1$. Niech $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$. Wyznaczyć liczbę funkcji $f: A \rightarrow A$ przyjmujących dokładnie m wartości oraz spełniających warunek

$$\text{jeżeli } k, \ell \in A, k \leq \ell, \text{ to } f(f(k)) = f(k) \leq f(\ell).$$

8. Rozstrzygnąć, czy istnieje wielościan wypukły mający k krawędzi oraz płaszczyzna nie przechodząca przez żaden z jego wierzchołków i przecinająca r krawędzi, przy czym $3r > 2k$.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu) mają być wysłane pod adresem właściwego komitetu okręgowego Olimpiady najpóźniej dnia

10 listopada 1997 r.

Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.

III seria (okres od 11 listopada do 10 grudnia 1997 r.)

9. Niech $a_0 = 0,91$ oraz $a_k = 0, \underbrace{99 \dots 9}_{2^k} \underbrace{00 \dots 0}_{2^k-1} 1$ dla $k = 1, 2, 3, \dots$. Obliczyć $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_0 a_1 \dots a_n)$.

10. Środkowe AD , BE , CF , trójkąta ABC przecinają się w punkcie G . Na czworokątach $AFGE$ i $BDGF$ można opisać okręgi. Wykazać, że trójkąt ABC jest równoboczny.
11. W turnieju tenisowym uczestniczyło n graczy. Każdy rozegrał z każdym innym jeden mecz; nie było remisów. Udowodnić, że istnieje taki gracz A , który każdego innego gracza B pokonał bezpośrednio lub pośrednio, tzn. A wygrał z B lub A pokonał pewnego zawodnika C , który wygrał z B .
12. Niech $g(k)$ będzie największym dzielnikiem pierwszym liczby całkowitej k , gdy $|k| \geq 2$, oraz niech $g(-1) = g(0) = g(1) = 1$. Rozstrzygnąć, czy istnieje taki wielomian W stopnia dodatniego o współczynnikach całkowitych, dla którego zbiór liczb postaci $g(W(x))$ (x — całkowite) jest skończony.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu) mają być wysłane pod adresem właściwego komitetu okręgowego Olimpiady najpóźniej dnia

10 grudnia 1997 r.

Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.

XLIX OLIMPIADA MATEMATYCZNA

Do Pani/Pana Dyrektora Szkoły
Do Pani/Pana Profesora Matematyki

Komitet Główny Olimpiady Matematycznej uprzejmie prosi o zapoznanie uczniów i nauczycieli zainteresowanych zadaniami Olimpiady z podanymi tu szkicami rozwiązań zadań konkursowych stopnia pierwszego XLIX Olimpiady Matematycznej.

W dalszej części niniejszego druku podajemy teksty zadań z zawodów międzynarodowych: XXXVIII Międzynarodowej Olimpiady Matematycznej i XX Austriacko-Polskich Zawodów Matematycznych, a także z VIII Zawodów Matematycznych Państw Bałtyckich (*Baltic Way '97*).

Zawody pierwszego stopnia XLIX Olimpiady Matematycznej są zakończone. Zawody stopnia drugiego odbędą się w dniach 27 i 28 lutego 1998 r.

Zawiadomienia o dokładnym terminie i miejscu zawodów stopnia drugiego wyślą komitety okręgowe zakwalifikowanym zawodnikom w terminie do dnia 10 lutego 1998 r.

Komitet Główny Olimpiady Matematycznej

Szkice rozwiązań zadań konkursowych
zawodów pierwszego stopnia XLIX Olimpiady Matematycznej

1. Przypuśćmy, że liczby x, y spełniają podany układ równań. Z pierwszego równania wynika, że $x \neq 0$ oraz że iloraz $|x| : x$ nie może być równy -1 ; jest więc równy 1 , co oznacza, że x jest liczbą dodatnią. Pierwsze równanie mówi zatem, że $|x - y| = 0$. Podstawiając $y = x$ do drugiego równania (i pamiętając, że $x > 0$) otrzymujemy zależność $2x - 1 + |2x - 1| = 0$, równoważną temu, że $2x - 1 \geq 0$. Tak więc każde rozwiązanie (x, y) danego układu równań ma postać $0 < x = y \leq 1/2$. Na odwrót, każda para (x, y) takiej postaci spełnia oba równania układu.

2. Oznaczmy przez M środek boku BC . Rozwiązanie zadania będzie oparte na równości $AH = 2 \cdot OM$ (która zachodzi w każdym trójkącie, niezależnie od założenia, że $AO = AH$). Oto jej dowód:

Można przyjąć, że $AB \perp AC$; kąt ABC jest więc ostry. Gdy kąt CAB jest prosty, wówczas $AH = OM = 0$. Gdy kąt CAB jest ostry lub rozwarty, prowadzimy średnicę okręgu opisanego na trójkącie ABC . Odcinek OM łączy środki boków CX i CB trójkąta prostokątnego CBX , a zatem $2 \cdot OM = BX$. Proste AX i HB są równoległe (każda z nich jest prostopadła do AC); także proste BX i HA są równoległe (jako prostopadłe do BC). Wobec tego czworokąt $AHBX$ jest równoległobokiem i $AH = BX = 2 \cdot OM$.

Jeśli teraz, zgodnie z treścią zadania, długość odcinka AH jest równa promieniowi okręgu opisanego na trójkącie ABC , to punkt M jest środkiem promienia prostopadłego do BC . Stąd wynika, że $\angle BOC = 120^\circ$. Wniosek: kąt CAB , jako kąt wpisany oparty albo na krótszym albo na dłuższym łuku BC , ma miarę 60° lub 120° .

3. Wykażemy przez indukcję, że

$$(1) \quad 2^{2^{n-1}} + 1 < a_n \leq 2^{2^n}.$$

Dla $n = 1$ nierówności $3 < a_1 \leq 4$ są spełnione. Zakładając, że oszacowania (1) zachodzą dla pewnej liczby naturalnej n , otrzymujemy dla $n+1$ analogiczne oszacowania:

$$a_{n+1} = a_n(a_n - 1) \begin{cases} < a_n^2 \leq (2^{2^n})^2 = 2^{2^{n+1}} \\ > (2^{2^{n-1}} + 1) \cdot 2^{2^{n-1}} = 2^{2^n} + 2^{2^{n-1}} > 2^{2^n} + 1. \end{cases}$$

Na podstawie zasady indukcji wnosimy o prawdziwości związków (1) dla wszystkich liczb naturalnych $n \geq 1$. Ze związków tych wynika oczywiście, że $2^{2^{n-1}} < a_n \leq 2^{2^n}$. Zastępując a_n przez 2^{b_n} , a następnie b_n przez 2^{c_n} , dostajemy kolejno nierówności: $2^{n-1} < b_n \leq 2^n$; następnie: $n-1 < c_n \leq n$; i wreszcie: $0 \leq c_n < 1$. Ciąg (c_n) jest więc ograniczony.

4. Ustalmy liczbę rzeczywistą c . Podstawiając w podanej nierówności $y = tx$ i dzieląc stronami przez x^{a+1} otrzymujemy warunek równoważny

$$(1) \quad ct^{a+1} - t^a \geq c - 1 \quad \text{dla } t > 0.$$

Mówiąc wyraźniej: rozważana w zadaniu nierówność zachodzi dla każdej pary liczb dodatnich x, y wtedy i tylko wtedy, gdy nierówność (1) zachodzi dla każdej liczby dodatniej t .

Oznaczając lewą stronę (1) przez $f(t)$ stwierdzamy, że $f(1) = c - 1$ oraz $f'(t) = c(a+1)t^a - at^{a-1}$. Jeżeli warunek (1) jest spełniony, to funkcja f ma w punkcie $t = 1$ minimum, a więc $f'(1) = c(a+1) - a = 0$, skąd $c = a/(a+1)$. Na odwrót, jeśli $c = a/(a+1)$, to

$$f'(t) = at^a - at^{a-1} = at^{a-1}(t-1) \begin{cases} > 0 & \text{dla } t > 1, \\ < 0 & \text{dla } t < 1; \end{cases}$$

a zatem najmniejszą wartością funkcji f w przedziale $(0; \infty)$ jest $f(1) = c - 1$, czyli spełniony jest warunek (1).

Wniosek: dla danej liczby dodatniej a jedynie liczba $c = a/(a+1)$ ma postulowaną własność.

5. Ponieważ $2 \operatorname{ctg} 2x = 2 \cdot \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x \cos x} = \operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x$, dane równanie jest równoważne następującemu:

$$(1) \quad |\operatorname{tg}^n x - \operatorname{ctg}^n x| = n |\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x|.$$

Gdy $n = 1$, równanie (1) jest spełnione tożsamościowo w zbiorze liczb, które nie są całkowitymi wielokrotnościami $\pi/2$.

Dalej rozważamy przypadek, gdy $n \geq 2$. Równanie (1) jest oczywiście spełnione, gdy $\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x$, czyli dla liczb postaci $x = m\pi/4$, gdzie m jest dowolną liczbą całkowitą nieparzystą. Wykażemy, że dla $n \geq 2$ równanie (1) nie ma innych rozwiązań.

Przypuśćmy więc, że istnieje liczba x spełniająca równanie (1) i taka, że liczby $a = \operatorname{tg} x$, $b = \operatorname{ctg} x$ nie są równe; warunek $a \neq b$ jest równoważny temu, że $|a| \neq 1$. Dzieląc (1) stronami przez $|a - b|$ dostajemy związek

$$|a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}| = n.$$

Wszystkie składniki są jednocześnie dodatnie lub ujemne; moduł sumy jest więc równy sumie modułów. Uwzględniając zależność $b = 1/a$ otrzymujemy:

$$(2) \quad |a|^{n-1} + |a|^{n-3} + \dots + |a|^{-n+3} + |a|^{-n+1} = n.$$

Dla każdej liczby dodatniej $t \neq 1$ prawdziwa jest nierówność $t + t^{-1} > 2$ (równoważna, po prostym przekształceniu, nierówności $(t-1)^2 > 0$). Zatem dla każdej liczby całkowitej k mamy

$$|a|^k + |a|^{-k} \begin{cases} > 2 & \text{gdy } k \neq 0, \\ = 2 & \text{gdy } k = 0. \end{cases}$$

Podstawiając za k kolejno liczby $n-1, n-3, \dots, -n+3, -n+1$ i dodając stronami otrzymane n nierówności stwierdzamy, że podwojona wartość sumy napisanej po lewej stronie związku (2) jest większa od $2n$. (W tym miejscu ma znaczenie warunek, że $n \nmid 2$.) Zatem równość (2) nie jest w rozważanym przypadku możliwa, co oznacza, że równanie (1) nie ma innych rozwiązań niż te, które zostały znalezione na początku.

6. Oznaczmy przez X punkt przecięcia odcinków BE i AD , a przez F punkt symetryczny do C względem A ; prosta FB jest równoległa do AD . Przyjmijmy oznaczenia kątów:

$$\sphericalangle CAD = \sphericalangle EFB = \varphi, \quad \sphericalangle DXB = \sphericalangle EBF = \psi.$$

Przy założeniu, że $AB > AC$ (podanym w poprawionej wersji zadania, rozesłanej w *Erratach*) punkt D leży między punktami A i P , i mamy oszacowanie: $\psi = \sphericalangle BXP < \sphericalangle BDP < 90^\circ$; wynika z niego, że $PQ = BE \cdot \cos \psi$.

Odcinek AD łączy środki boków trójkąta FCB ; tak więc $BF = 2 \cdot AD$. Stąd oraz z twierdzenia sinusów dla trójkąta EFB otrzymujemy zależności:

$$\begin{aligned} \frac{AD}{PQ} &= \frac{2 \cdot AD}{2 \cdot BE} \cdot \frac{BE}{PQ} = \frac{BF}{2 \cdot BE} \cdot \frac{1}{\cos \psi} = \frac{\sin \sphericalangle BEF}{\sin \sphericalangle BFE} \cdot \frac{1}{2 \cos \psi} = \\ &= \frac{\sin(\varphi + \psi)}{2 \sin \varphi \cos \psi} = \frac{1 + \operatorname{ctg} \varphi \operatorname{tg} \psi}{2}. \end{aligned}$$

Zatem równość $AD = PQ$ jest równoważna temu, że $\operatorname{tg} \psi = \operatorname{tg} \varphi$, czyli $\varphi = \psi$. Ta ostatnia równość jest zaś równoważna temu, że trójkąt BEF jest równoramienny: $BE = EF$. A skoro $EF = AE + AC$, dostajemy tezę zadania.

7. Funkcję f spełniającą podane warunki będziemy nazywać *dobrą*. Przypuśćmy, że liczby $k_1 < \dots < k_m$ są wszystkimi wartościami przyjmowanymi przez dobrą funkcję f . Niech

$$(1) \quad l_i = \max\{j \in A: f(j) = k_i\} \quad \text{dla } i = 1, \dots, m;$$

oczywiście $l_m = n$. Z określenia (1) oraz z warunków definiujących funkcję dobre wynika, że $f(k_i) = f(f(l_i)) = f(l_i) = k_i$ dla $i = 1, \dots, m$, i wobec tego

$$(2) \quad 0 < k_1 \leq l_1 < k_2 \leq l_2 < \dots < k_{m-1} \leq l_{m-1} < k_m \leq n.$$

Na odwrót, jeżeli $(k_1, l_1, k_2, l_2, \dots, k_{m-1}, l_{m-1}, k_m)$ jest dowolnym ciągiem liczb naturalnych spełniającym warunki (2), to wzór

$$f(j) = \begin{cases} k_1 & \text{gdy } 0 < j \leq l_1 \\ k_2 & \text{gdy } l_1 < j \leq l_2 \\ \dots & \dots \\ k_m & \text{gdy } l_{m-1} < j \leq n \end{cases}$$

określa dobrą funkcję $f: A \rightarrow A$, której wartościami są liczby k_i , a warunek (1) wyznacza zadane liczby l_i (trzeba tylko przyjąć $l_m = n$). Dobrych funkcji f jest więc tyle, ile ciągów typu (2).

Każdemu ciągowi liczb naturalnych spełniającemu warunki (2) przyporządkujemy ciąg $(a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_{m-1}, b_{m-1}, a_m)$ o wyrazach

$$(3) \quad \begin{aligned} a_i &= k_i + i - 1 & \text{dla } i = 1, \dots, m, \\ b_i &= l_i + i & \text{dla } i = 1, \dots, m-1. \end{aligned}$$

Z układu nierówności (2) wynika, że wówczas

$$(4) \quad 0 < a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \dots < a_{m-1} < b_{m-1} < a_m < n + m.$$

Na odwrót, mając dany dowolny ciąg spełniający warunki (4) możemy odtworzyć ciąg $(k_1, l_1, k_2, l_2, \dots, k_{m-1}, l_{m-1}, k_m)$ przyjmując

$$(5) \quad \begin{aligned} k_i &= a_i - i + 1 & \text{dla } i = 1, \dots, m, \\ l_i &= b_i - i & \text{dla } i = 1, \dots, m-1; \end{aligned}$$

nierówności (2) będą spełnione. Wzajemnie odwrotne układy równań (3) i (5) ustalają wzajemnie jednoznaczność odpowiednio między ciągami typu (2) i ciągami typu (4).

Wniosek: dobrych funkcji $f: A \rightarrow A$ jest tyle, ile $(2m-1)$ -wyrazowych ciągów liczb naturalnych spełniających warunki (4) — czyli tyle, ile $(2m-1)$ -elementowych podzbiorów ma zbiór $\{1, 2, \dots, n+m-1\}$. Ta szukana liczba jest równa $\binom{n+m-1}{2m-1}$.

8. Niech k będzie liczbą krawędzi, a s — liczbą ścian wielościanu wypukłego W . Brzeg każdej ściany zawiera co najmniej trzy krawędzie, a każda krawędź jest wspólnym bokiem dokładnie dwóch ścian. Zatem $2k \leq 3s$. Jeśli płaszczyzna nie przechodząca przez żaden wierzchołek przecina r krawędzi, to przekrój wielościanu tą płaszczyzną jest wielokątem wypukłym mającym r wierzchołków, a więc także r boków. Każdy jego bok jest zawarty w pewnej ścianie wielościanu W , i to każdy w innej. Wobec tego $s \leq r$, i w konsekwencji $2k \leq 3r$. Nie istnieje więc wielościan o rozważanej w zadaniu własności.

9. W myśl podanego określenia,

$$a_k = 1 - \left(\frac{1}{10}\right)^{2^k} + \left(\frac{1}{10}\right)^{2^{k+1}} \quad \text{dla } k = 0, 1, 2, \dots$$

Oznaczmy liczbę $\frac{1}{10}$ przez β oraz przyjmijmy $\alpha = 1 + \beta + \beta^2 = 1,11$. Zachodzą równości

$$\begin{aligned} \alpha \cdot a_0 &= (1 + \beta^1 + \beta^2)(1 - \beta^1 + \beta^2) = 1 + \beta^2 + \beta^4, \\ \alpha \cdot a_0 a_1 &= (1 + \beta^2 + \beta^4)(1 - \beta^2 + \beta^4) = 1 + \beta^4 + \beta^8, \\ \alpha \cdot a_0 a_1 a_2 &= (1 + \beta^4 + \beta^8)(1 - \beta^4 + \beta^8) = 1 + \beta^8 + \beta^{16}, \end{aligned}$$

i ogólnie (indukcja)

$$\alpha \cdot a_0 a_1 \dots a_n = 1 + \beta^{2^{n+1}} + \beta^{2^{n+2}} \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, \dots$$

Gdy n dąży do nieskończoności, wartość otrzymanego wyrażenia dąży do 1. Zatem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_0 a_1 \dots a_n) = \frac{1}{\alpha} = \frac{100}{111}.$$

10. Oznaczmy miary kątów CAB , ABC , BCA przez α, β, γ , a miary kątów FGE , DGF , EGD odpowiednio przez α', β', γ' . Na czworokątach $AFGE$ i $BDGF$ można opisać okręgi, więc $\alpha + \alpha' = 180^\circ$ oraz $\beta + \beta' = 180^\circ$. Zatem także $\gamma + \gamma' = 180^\circ$ (bowiem $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, $\alpha' + \beta' + \gamma' = 360^\circ$); a to oznacza, że również na czworokącie $CEGD$ można opisać okrąg.

Z istnienia pierwszej wymienionej pary okręgów opisanych wynika ponadto, że $\sphericalangle AFE = \sphericalangle AGE = \sphericalangle DGB = \sphericalangle DFB$. Odcinki FE i DF są odpowiednio równoległe do BC i CA ; wobec tego $\sphericalangle AFE = \beta$, $\sphericalangle DFB = \alpha$, i otrzymujemy równość $\alpha = \beta$.

Wykorzystując istnienie okręgu opisanego na czworokącie $CEGD$ dowodzimy analogicznie, że $\beta = \gamma$. Trójkąt ABC jest więc równoboczny.

11. Niech A będzie tym uczestnikiem turnieju, który pokonał największą liczbę przeciwników. (Jeśli kilku zawodników odniosło jednakową maksymalną liczbę zwycięstw, wybieramy któregośkolwiek z nich.) Twierdzimy, że wybrany w ten sposób gracz A pokonał bezpośrednio lub pośrednio wszystkich innych zawodników.

Niech B będzie dowolnym graczem, który wygrał z A . Należy wykazać, że wśród wszystkich graczy $C_1, \dots, C_m$ pokonanych przez A istnieje taki, który wygrał z B . Gdyby to nie było prawdą, wynikałoby stąd, że zawodnik B pokonał graczy $C_1, \dots, C_m$ oraz jeszcze gracza A — miałby więc na swoim koncie więcej zwycięstw niż zawodnik A , wbrew wyborowi tego ostatniego. Sprzeczność kończy dowód.

12. Niech $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7, \dots$ będzie rosnącym ciągiem wszystkich liczb pierwszych i niech W będzie wielomianem stopnia dodatniego o współczynnikach całkowitych. Ustalmy liczbę całkowitą a , dla której $W(a) \neq 0$, oraz ustalmy liczbę naturalną n .

Weźmy pod uwagę liczbę $c = W(a) \cdot p_1 p_2 \dots p_n$. Znajdujemy liczbę naturalną m , $m \geq 2$, dla której $W(a + mc) \neq W(a)$; liczba taka istnieje, bo wartość $W(a)$ jest przez wielomian W przyjmowana tylko w skończenie wielu punktach.

Dla danej liczby całkowitej $b \neq a$ różnica $W(b) - W(a)$ dzieli się przez $b - a$ (jeśli bowiem $W(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_l x^l$, to $W(b) - W(a)$ jest sumą składników $\alpha_j (b^j - a^j)$ dla $j = 1, \dots, l$, a każdy z nich dzieli się przez $b - a$). W szczególności różnica $W(a + mc) - W(a)$ dzieli się przez mc . Zatem dla pewnej liczby całkowitej $q \neq 0$ zachodzi równość

$$W(a + mc) = W(a) + qmc = W(a)(1 + qmp_1 p_2 \dots p_n).$$

Skoro $m \nmid 2$, liczba w nawiasie ma moduł większy od 1. Liczba ta nie dzieli się przez $p_1, p_2, \dots, p_n$; ma więc co najmniej jeden dzielnik pierwszy większy od p_n . Jest on także dzielnikiem liczby $W(a+mc)$ (która również ma moduł większy od 1). To znaczy, że $g(W(a+mc)) > p_n$.

Wykazaliśmy w ten sposób, że dla dowolnie ustalonej liczby naturalnej n zbiór liczb postaci $g(W(x))$ zawiera liczbę większą od p_n . Nie istnieje więc wielomian, dla którego zbiór ten byłby skończony.

(mek)

Zadania z XXXVIII Międzynarodowej Olimpiady Matematycznej

Mar del Plata (Argentyna), 24–25 lipca 1997 r.

1. Na płaszczyźnie punkty o współrzędnych całkowitych są wierzchołkami kwadratów jednostkowych. Kwadraty te pomalowano na przemian na czarno i białe (tak, jak na szachownicy).

Dla każdej pary liczb całkowitych dodatnich m i n rozważamy trójkąt prostokątny, którego wierzchołki mają współrzędne całkowite, a przyprostokątne długości m i n leżą na liniach wyznaczonych przez boki kwadratów. Niech S_1 będzie polem czarnej części trójkąta, a S_2 — polem części białej oraz niech $f(m, n) = |S_1 - S_2|$.

(a) Obliczyć $f(m, n)$ dla wszystkich liczb całkowitych m i n , które są albo obie parzyste, albo obie nieparzyste.

(b) Udowodnić, że $f(m, n) \leq \frac{1}{2} \max\{m, n\}$ dla wszystkich m i n .

(c) Wykazać, że nie istnieje taka stała C , że $f(m, n) < C$ dla wszystkich m i n .

2. Kąt A jest najmniejszym kątem trójkąta ABC . Punkty B i C dzielą okrąg opisany na trójkącie na dwa łuki. Niech U będzie punktem wewnętrznym tego łuku o końcach B i C , który nie zawiera punktu A . Symetralne odcinków AB i AC przecinają prostą AU odpowiednio w punktach V i W . Proste BV i CW przecinają się w punkcie T . Udowodnić, że $AU = TB + TC$.

3. Niech $x_1, x_2, \dots, x_n$ będą liczbami rzeczywistymi spełniającymi warunki:

$$|x_1 + x_2 + \dots + x_n| = 1 \quad \text{oraz} \quad |x_i| \leq \frac{n+1}{2} \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, n.$$

Dowieść, że istnieje permutacja $y_1, y_2, \dots, y_n$ liczb $x_1, x_2, \dots, x_n$, dla której

$$|y_1 + 2y_2 + \dots + ny_n| \leq \frac{n+1}{2}.$$

4. Macierz $n \times n$ (tablicę kwadratową mającą n wierszy i n kolumn) o wyrazach ze zbioru $S = \{1, 2, \dots, 2n-1\}$ będziemy nazywać macierzą *srebrzystą*, jeżeli dla każdego $i = 1, 2, \dots, n$ wiersz i -ty oraz i -ta kolumna zawierają łącznie wszystkie elementy zbioru S . Dowieść, że

(a) nie istnieje macierz srebrzysta dla $n = 1997$;

(b) istnieją macierze srebrzyste dla nieskończenie wielu wartości n .

5. Wyznaczyć wszystkie pary (a, b) liczb całkowitych $a \geq 1$, $b \geq 1$, które spełniają równanie $a^{b^2} = b^a$.

6. Dla liczby całkowitej dodatniej n niech $f(n)$ oznacza liczbę sposobów przedstawienia n w postaci sumy potęg liczby 2 o wykładnikach całkowitych nieujemnych. Nie rozróżniamy takich przedstawień, które różnią się jedynie порядkiem składników. Na przykład $f(4) = 4$, gdyż liczbę 4 można przedstawić na cztery sposoby: 4; $2+2$; $2+1+1$; $1+1+1+1$. Udowodnić, że

$$2^{n^2/4} < f(2^n) < 2^{n^2/2}$$

dla każdej liczby całkowitej $n \geq 3$.

Zadania z XX Austriacko-Polskich Zawodów Matematycznych

Salzburg (Austria), 25 – 27 czerwca 1997 r.

1. Proste l_1 i l_2 przecinają się w punkcie P . Okręgi S_1 i S_2 są styczne zewnętrznie w punkcie P i prosta l_1 jest ich wspólną styczną w tym punkcie. Podobnie, okręgi T_1 i T_2 są styczne zewnętrznie w punkcie P i prosta l_2 jest ich wspólną styczną w tym punkcie. Okręgi S_1 i T_1 przecinają się w punktach P i A . Podobnie, okręgi S_1 i T_2 przecinają się w punktach P i B , okręgi S_2 i T_2 w punktach P i C oraz okręgi S_2 i T_1 w punktach P i D . Udowodnić, że punkty A , B , C i D leżą na okręgu wtedy i tylko wtedy, gdy proste l_1 i l_2 są prostopadłe.

2. Dana jest szachownica mająca m kolumn i n wierszy. Każde pole ma współrzędne (x, y) , gdzie x jest numerem kolumny ($1 \leq x \leq m$), a y jest numerem wiersza ($1 \leq y \leq n$). Niech p i q będą liczbami całkowitymi dodatnimi. Pionek stojący na polu (x, y) może poruszyć się na pole (x', y') wtedy i tylko wtedy, gdy $|x - x'| = p$ i $|y - y'| = q$.

Na każdym polu stoi jeden pionek. Chcemy jednocześnie wykonać ruch wszystkimi pionkami tak, by znów na każdym polu stał tylko jeden pionek. Na ile sposobów można to zrobić?

3. Na tablicy napisano 97 liczb: 48, 24, 16, ..., 48/97, tzn. liczby wymierne $48/k$ dla $k = 1, 2, 3, \dots, 97$. W każdym kroku wybieramy dowolnie dwie liczby a i b napisane na tablicy, usuwamy je i wpisujemy liczbę $2ab - a - b + 1$. Po 96 krokach na tablicy pozostanie dokładnie jedna liczba. Wyznaczyć zbiór liczb, które mogą pozostać na tablicy.

4. W czworokącie wypukłym $ABCD$ boki AB i CD są równoległe. Przekątne AC i BD przecinają się w punkcie E . Punkt F jest punktem przecięcia wysokości trójkąta EBC , a punkt G jest punktem przecięcia wysokości trójkąta EAD . Udowodnić, że środek odcinka GF leży na prostej przechodzącej przez punkt E i prostopadłej do AB .

5. Niech p_1, p_2, p_3, p_4 będą czterema różnymi liczbami pierwszymi. Udowodnić, że nie istnieje wielomian trzeciego stopnia $Q(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ o współczynnikach całkowitych taki, że

$$|Q(p_1)| = |Q(p_2)| = |Q(p_3)| = |Q(p_4)| = 3.$$

6. Udowodnić, że nie istnieje funkcja $f: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$ spełniająca równanie $f(x + f(y)) = f(x) - y$ dla wszystkich liczb całkowitych x, y .

Uwaga. $\mathbf{Z}$ jest zbiorem liczb całkowitych.

7. (a) Udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych p, q zachodzi nierówność: $p^2 + q^2 + 1 > p(q + 1)$.

(b) Wyznaczyć największą liczbę rzeczywistą b taką, że dla wszystkich liczb rzeczywistych p, q zachodzi nierówność: $p^2 + q^2 + 1 \leq bp(q + 1)$.

(c) Wyznaczyć największą liczbę rzeczywistą c taką, że dla wszystkich liczb całkowitych p, q zachodzi nierówność: $p^2 + q^2 + 1 \leq cp(q + 1)$.

8. Niech n będzie liczbą naturalną i niech M będzie zbiorem n -elementowym. Wyznaczyć największą liczbę naturalną k o następującej własności:

Istnieje k -elementowa rodzina $\mathcal{K}$ trójelementowych podzbiorów zbioru M taka, że każde dwa zbiory należące do $\mathcal{K}$ mają niepuste przecięcie.

9. Dany jest równoległoscian P . Niech V_P będzie jego objętością, S_P polem jego powierzchni i L_P sumą długości jego krawędzi. Dla liczby rzeczywistej $t \geq 0$ niech P_t będzie bryłą złożoną ze wszystkich punktów X , których odległość od P jest nie większa niż t . Udowodnić, że objętość bryły P_t wyraża się wzorem:

$$V(P_t) = V_P + S_P \cdot t + (\pi/4) \cdot L_P \cdot t^2 + (4/3) \cdot \pi \cdot t^3.$$

Wyjaśnienie: Odległość punktu X od równoległoscianu P jest nie większa niż t , jeśli istnieje punkt Y należący do równoległoscianu P taki, że $|XY| \leq t$.

Zadania z VIII Zawodów Matematycznych Państw Bałtyckich
Baltic Way '97

Kopenhaga (Dania), 9 listopada 1997 r.

1. Wyznaczyć wszystkie funkcje f ze zbioru liczb rzeczywistych do zbioru liczb rzeczywistych, różne od funkcji zerowej i takie, że $f(x)f(y) = f(x-y)$ dla wszystkich liczb rzeczywistych x i y .

2. Dany jest ciąg $a_1, a_2, a_3, \dots$ liczb całkowitych dodatnich, w którym każda liczba całkowita dodatnia występuje dokładnie raz. Dowieść, że istnieją liczby całkowite ℓ i m , $1 < \ell < m$, takie, że $a_1 + a_m = 2a_\ell$.

3. Niech $x_1 = 1$ oraz $x_{n+1} = x_n + \left\lceil \frac{x_n}{n} \right\rceil + 2$ dla $n = 1, 2, 3, \dots$ ($\lceil x \rceil$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą niż x). Wyznaczyć x_{1997} .

4. Niech a będzie średnią arytmetyczną liczb $x_1, \dots, x_n$. Udowodnić nierówność

$$(x_1 - a)^2 + \dots + (x_n - a)^2 \geq \frac{1}{2} (|x_1 - a| + \dots + |x_n - a|)^2.$$

5. Dany jest ciąg $u_0, u_1, \dots$ liczb całkowitych dodatnich o dowolnym wyrażeniu początkowym u_0 . Dla każdej liczby całkowitej dodatniej n :

$$u_{n+1} = \begin{cases} u_n/2 & \text{gdy liczba } u_n \text{ jest parzysta,} \\ a + u_n & \text{gdy liczba } u_n \text{ jest nieparzysta;} \end{cases}$$

a jest ustaloną dodatnią liczbą całkowitą nieparzystą. Dowieść, że ciąg ten od pewnego miejsca jest okresowy.

6. Znaleźć wszystkie trójki (a, b, c) liczb całkowitych nieujemnych takie, że $a \nmid b$, $b \nmid c$ oraz $1 \cdot a^3 + 9 \cdot b^2 + 9 \cdot c + 7 = 1997$.

7. Niech P i Q będą wielomianami o współczynnikach całkowitych. Przypuśćmy, że liczby całkowite a i $a + 1997$ są pierwiastkami wielomianu P oraz że $Q(1998) = 2000$. Dowieść, że równanie $Q(P(x)) = 1$ nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych.

8. Gdy dodajemy liczby 1996 i 1997, to najpierw dodajemy cyfry jedności 6 i 7. Otrzymujemy 13, zapisujemy 3 i „przenosimy” 1 do następnej kolumny. W ten sposób wykonujemy *przeniesienie*. Kontynuując, wykonamy łącznie trzy przeniesienia:

$$\begin{array}{r} 111 \\ 1996 \\ + 1997 \\ \hline 3993 \end{array}$$

Czy istnieje taka liczba całkowita dodatnia k , że przy dodawaniu $1996 \cdot k$ do $1997 \cdot k$ nie będzie ani jednego przeniesienia?

9. Na Sferze Światów światy są ponumerowane $1, 2, 3, \dots$ i połączone tak, że dla każdej liczby naturalnej n i 1 czarodziej Gandalf może poruszać się w obu kierunkach pomiędzy światami o numerach n , $2n$ i $3n+1$. Czy zaczynając od dowolnego świata Gandalf może dotrzeć do każdego innego świata?

10. Dowieść, że w dowolnym ciągu 79 kolejnych liczb całkowitych dodatnich, zapisanych w systemie dziesiętnym, istnieje liczba całkowita dodatnia, której suma cyfr jest podzielna przez 13.

11. Na dwóch równoległych prostych wybrano odpowiednio różne punkty $A_1, A_2, A_3, \dots$ oraz $B_1, B_2, B_3, \dots$ w taki sposób, że $|A_i A_{i+1}| = 1$ oraz $|B_i B_{i+1}| = 2$ dla $i = 1, 2, 3, \dots$, przy czym wektory $\overrightarrow{A_i A_{i+1}}$ i $\overrightarrow{B_i B_{i+1}}$ są jednakowo skierowane. Wiedząc, że $\sphericalangle A_1 A_2 B_1 = \alpha$, obliczyć wartość nieskończonej sumy

$$\sphericalangle A_1 B_1 A_2 + \sphericalangle A_2 B_2 A_3 + \sphericalangle A_3 B_3 A_4 + \dots$$

12. Dwa okręgi C_1 i C_2 przecinają się w punktach P i Q . Prosta przechodząca przez P przecina ponownie C_1 i C_2 odpowiednio w punktach A i B . Punkt X jest środkiem odcinka AB . Prosta przechodząca przez Q i X przecina ponownie C_1 i C_2 odpowiednio w punktach Y i Z . Udowodnić, że X jest środkiem odcinka YZ .

13. Pięć różnych punktów A, B, C, D i E leży na prostej, przy czym $|AB| = |BC| = |CD| = |DE|$. Punkt F nie leży na tej prostej. Punkt G jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ADF , zaś H jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie BEF . Dowieść, że proste GH i FC są prostopadłe.

14. Dany jest trójkąt ABC , w którym $|AC|^2$ jest średnią arytmetyczną liczb $|BC|^2$ i $|AB|^2$. Udowodnić, że $\operatorname{ctg}^2 B \leq \operatorname{ctg} A \cdot \operatorname{ctg} C$.

15. W trójkącie ostrokątnym ABC dwusieczne kątów $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$ i $\sphericalangle C$ przecinają okrąg opisany odpowiednio w punktach A_1 , B_1 i C_1 . Niech M będzie punktem przecięcia prostych AB i $B_1 C_1$, a N punktem przecięcia prostych BC i $A_1 B_1$. Dowieść, że MN przechodzi przez środek okręgu wpisanego w trójkąt ABC .

16. Dwaj gracze grają na szachownicy 5×5 w następującą grę. Pierwszy gracz stawia skoczka na wybranym polu. Następnie gracze na przemian (zaczynając od gracza drugiego) przesuwają skoczka według reguł szachowych. Nie wolno przesunąć skoczka na pole, na którym już był. Przegrywa gracz, który nie może wykonać ruchu. Który z dwóch graczy ma strategię wygrywającą?

17. Prostokąt można podzielić na n równych kwadratów. Ten sam prostokąt można również podzielić na $n+76$ równych kwadratów. Wyznaczyć n .

18. (a) Udowodnić, że istnieją dwa nieskończone zbiory liczb całkowitych nieujemnych A i B (niekoniecznie rozłączne) takie, że każdą liczbę całkowitą nieujemną n można jednoznacznie przedstawić w postaci $n = a + b$, gdzie $a \in A$, $b \in B$.

(a) Udowodnić, że dla każdej takiej pary (A, B) zbiór A lub zbiór B zawiera tylko wielokrotności pewnej liczby całkowitej $k > 1$.

19. W puszczy każde z n zwierząt ($n \geq 3$) mieszka w swojej grotcie. Przed wyborami Króla Puszczy niektóre zwierzęta organizują kampanię wyborczą. Każde zwierzę organizujące kampanię odwiedza każdą z pozostałych grot dokładnie raz. Porusza się tylko po ścieżkach prowadzących od grotty do grotty; nie przechodzi przy tym z jednej ścieżki na inną pomiędzy grotami i wraca do swojej własnej grotty na końcu kampanii. Przez żadną ścieżkę łączącą dwie grotty nie przechodzi więcej niż jedno zwierzę organizujące kampanię.

(a) Udowodnić, że dla każdej liczby pierwszej n maksymalna możliwa liczba zwierząt organizujących kampanię równa się $(n-1)/2$.

(b) Wyznaczyć maksymalną liczbę zwierząt organizujących kampanię dla $n = 9$.

20. W rzędzie leży dwanaście kart. Karty są trzech rodzajów: mają obie strony białe, obie strony czarne lub jedną stronę białą i jedną czarną. Początkowo dziewięć z tych kart leży czarną stroną do góry. Następnie odwracamy karty 1–6, po czym cztery karty leżą czarną stroną do góry. Potem odwracamy karty 4–9, w rezultacie czego sześć kart leży czarną stroną do góry. W końcu odwracamy karty 1–3 i 10–12, po czym pięć kart leży czarną stroną do góry. Ile jest kart każdego rodzaju?

XLIX Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia drugiego

Zadania na dzień 27 lutego 1998 r.
(pierwszy dzień zawodów)

1. Niech $A_n = \{1, 2, \dots, n\}$. Rozstrzygnąć, czy dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$ istnieją funkcje $f: A_n \rightarrow A_n$, $g: A_n \rightarrow A_n$, spełniające warunki:
 $f(f(k)) = g(g(k)) = k$ dla $k = 1, 2, \dots, n$;
 $g(f(k)) = k + 1$ dla $k = 1, 2, \dots, n-1$.

2. W trójkącie ABC kąt BCA jest rozwarty oraz $\sphericalangle BAC = 2\sphericalangle ABC$. Prosta przechodząca przez punkt B i prostopadła do BC przecina prostą AC w punkcie D . Punkt M jest środkiem boku AB . Dowieść, że $\sphericalangle AMC = \sphericalangle BMD$.

3. (a) Liczby nieujemne a, b, c, d, e, f , których suma jest równa 1, spełniają zależność

$$ace + bdf \geq \frac{1}{108}.$$

Udowodnić, że

$$abc + bcd + cde + def + efa + fab \leq \frac{1}{36}.$$

- (b) Rozstrzygnąć, czy istnieje sześć różnych liczb dodatnich a, b, c, d, e, f o sumie równej 1, dla których obie napisane wyżej nierówności stają się równościami.

Zadania na dzień 28 lutego 1998 r.
(drugi dzień zawodów)

4. Znaleźć wszystkie pary liczb całkowitych x, y spełniające równanie $x^2 + 3y^2 = 1998x$.

5. Liczby nieujemne $a_1, a_2, \dots, a_7, b_1, b_2, \dots, b_7$ spełniają warunek

$$a_i + b_i \leq 2 \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, 7.$$

Wykazać, że dla pewnych dwóch różnych liczb $k, m \in \{1, 2, \dots, 7\}$ zachodzi nierówność $|a_k - a_m| + |b_k - b_m| \leq 1$.

6. Dany jest czworościan $ABCD$. Dowieść, że krawędzie AB i CD są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje w przestrzeni taki równoległobok $CDPQ$, że $PA = PB = PD$ oraz $QA = QB = QC$.

XLIX Olimpiada Matematyczna

Szkice rozwiązań zadań z zawodów drugiego stopnia

1. Dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$ istnieją funkcje o wymaganych własnościach. Oto przykład:

$$f(k) = \begin{cases} n-k & \text{dla } k < n, \\ n & \text{dla } k = n, \end{cases} \quad g(k) = n+1-k.$$

2. Niech prosta równoległa do AB i przechodząca przez punkt C przecina odcinek BD w punkcie E . Oznaczmy przez N środek odcinka CE . Wówczas punkty M , N , D są współliniowe. Trójkąt BCE jest prostokątny, więc N jest środkiem okręgu opisanego na nim. Stąd wynika, że trójkąt BCN jest równoramienny, co daje następujące równości:

$$\sphericalangle BAC = 2\sphericalangle ABC = \sphericalangle ABC + \sphericalangle BCN = \sphericalangle ABC + \sphericalangle CBN = \sphericalangle ABN.$$

Czworokąt $ABNC$ jest więc trapezem równoramiennym, nie będącym równoległobokiem. Zatem punkt N jest obrazem punktu C w symetrii względem symetralnej odcinka AB . To oznacza, że $\sphericalangle AMC = \sphericalangle BMN = \sphericalangle BMD$.

3. (a) Oznaczmy $A = ace + bdf$, $B = abc + bcd + cde + def + efa + fab$. Korzystając z nierówności pomiędzy średnią geometryczną i arytmetyczną otrzymujemy

$$A + B = (a+d)(b+e)(c+f) \leq \left(\frac{(a+d) + (b+e) + (c+f)}{3} \right)^3 = \frac{1}{27}.$$

Stąd $B \leq \frac{1}{27} - A \leq \frac{1}{27} - \frac{1}{108} = \frac{1}{36}$.

(b) Takie liczby istnieją. Aby dane w zadaniu nierówności stały się równościami potrzeba i wystarcza, aby

$$A + B = \frac{1}{27}, \quad A = \frac{1}{108}.$$

Pierwsza z powyższych równości zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy liczby $a+d$, $b+e$, $c+f$ są równe $\frac{1}{3}$. Obliczając $b = \frac{1}{3} - e$, $d = \frac{1}{3} - a$, $f = \frac{1}{3} - c$ i podstawiając te wartości do drugiej równości otrzymujemy

$$ace + \left(\frac{1}{3} - e\right)\left(\frac{1}{3} - a\right)\left(\frac{1}{3} - c\right) = \frac{1}{108}.$$

Stąd dane nierówności stają się równościami wtedy i tylko wtedy, gdy

$$ac + ce + ae + \frac{1}{12} = \frac{1}{3}(a + c + e), \quad \text{gdzie } 0 < a, c, e < \frac{1}{3}.$$

Pozostaje znaleźć takie liczby a , c , żeby po wyznaczeniu z powyższej równości liczby e — a następnie liczb b , d , f — otrzymać sześć różnych liczb dodatnich. Rozwiązań jest dużo, oto przykład jednego z nich:

$$a = \frac{1}{4}, \quad b = \frac{1}{5}, \quad c = \frac{2}{9}, \quad d = \frac{1}{12}, \quad e = \frac{2}{15}, \quad f = \frac{1}{9}.$$

(mek, wp)

Szkice rozwiązań zadań z zawodów stopnia pierwszego, zadania z poprzednich olimpiad matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w internecie pod adresem: <http://www.impan.gov.pl/~olimp/>

XLIX Olimpiada Matematyczna

Szkice rozwiązań zadań z zawodów drugiego stopnia

4. Przyjmijmy, że liczby całkowite x, y spełniają zadane równanie i że $y \neq 0$; wówczas także $x \neq 0$. Liczba x jest jednym z pierwiastków trójmianu kwadratowego $t^2 - 1998t + 3y^2$; niech z będzie drugim pierwiastkiem. Ze wzorów $x + z = 1998$, $xz = 3y^2$ wynika, że z też jest liczbą całkowitą oraz że $x, z > 0$. Oznaczmy największy wspólny dzielnik liczb x, z przez d ; tak więc $x = ud$, $z = wd$,

$$(1) \quad (u + w)d = 1998 = 2 \cdot 3^3 \cdot 37, \quad uwd^2 = 3y^2.$$

Liczby u, w są względnie pierwsze, więc z drugiego wzoru widać, że

$$(2) \quad u = 3a^2, \quad w = b^2 \quad \text{lub} \quad w = 3a^2, \quad u = b^2$$

dla pewnych liczb naturalnych a, b , przy czym b nie dzieli się przez 3. Z pierwszego wzoru (1) wnosimy teraz, że d dzieli się przez 3^3 . Przyjmijmy $d = 3^3c$. Dostajemy równanie $(3a^2 + b^2)c = 2 \cdot 37$. Czynnik $(3a^2 + b^2)$, jako większy od 3, musi być równy 37 lub $2 \cdot 37$. Druga możliwość łatwo prowadzi do sprzeczności. Zatem $c = 2$ (czyli $d = 54$) i mamy równanie $3a^2 + b^2 = 37$, z jednym rozwiązaniem w liczbach naturalnych $a = 2, b = 5$. Wracając do alternatywy (2) stwierdzamy, że $u = 12$ lub $u = 25$, wobec czego

$$x = 12 \cdot 54 = 648 \quad \text{lub} \quad x = 25 \cdot 54 = 1350.$$

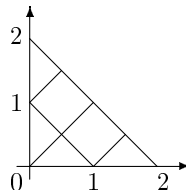
Drugi wzór (1) daje w obu przypadkach wartości $y = \pm 540$.

Pozostał przypadek, gdy $y = 0$; wtedy $x = 0$ lub $x = 1998$. Następujące pary (x, y) stanowią zatem pełne rozwiązanie równania: $(0, 0)$, $(1998, 0)$, $(648, 540)$, $(648, -540)$, $(1350, 540)$, $(1350, -540)$.

* * * * *

5. Zaznaczmy w układzie współrzędnych punkty $P_i = (a_i, b_i)$ ($i = 1, 2, \dots, 7$).

Z warunków zadania wynika, że punkty te leżą wewnątrz lub na obwodzie trójkąta o wierzchołkach $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 2)$. Podzielmy ten trójkąt na sześć obszarów: dwa kwadraty i cztery trójkąty prostokątne, jak na rysunku. Punktów jest siedem, więc pewne dwa z nich — na przykład P_k i P_m — leżą w tym samym obszarze $\mathcal{O}$ danego podziału.



Jeśli obszarem $\mathcal{O}$ jest kwadrat, to przez $Q = (u, w)$ oznaczmy jego środek; jeśli zaś obszarem $\mathcal{O}$ jest trójkąt prostokątny, to niech $Q = (u, w)$ będzie środkiem jego przeciwprostokątnej. W obu przypadkach $|x - u| + |y - w| \leq \frac{1}{2}$ dla punktów (x, y) należących do obszaru $\mathcal{O}$. W szczególności

$$|a_k - u| + |b_k - w| \leq \frac{1}{2} \quad \text{oraz} \quad |a_m - u| + |b_m - w| \leq \frac{1}{2}.$$

Stąd dostajemy

$$\begin{aligned}
|a_k - a_m| + |b_k - b_m| &= |(a_k - u) + (u - a_m)| + |(b_k - w) + (w - b_m)| \leq \\
&\leq |a_k - u| + |u - a_m| + |b_k - w| + |w - b_m| = \\
&= (|a_k - u| + |b_k - w|) + (|a_m - u| + |b_m - w|) \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.
\end{aligned}$$

*

*

*

*

*

6. Oznaczmy przez k prostą prostopadłą do płaszczyzny trójkąta ABC i przechodzącą przez środek okręgu opisanego na trójkącie ABC . Analogicznie, przez ℓ oznaczmy prostą prostopadłą do płaszczyzny trójkąta ABD i przechodzącą przez środek okręgu opisanego na trójkącie ABD . Proste k , ℓ przecinają się w przestrzeni (w środku sfery opisanej na czworoscianie $ABCD$) oraz obie są prostopadłe do krawędzi AB . Zatem płaszczyzna π , zawierająca proste k i ℓ jest prostopadła do krawędzi AB czworoscianiu $ABCD$.

Założmy najpierw, że istnieje taki równoległobok $CDPQ$, że $PA = PB = PD$ oraz $QA = QB = QC$. Wówczas punkt P leży na prostej ℓ , punkt Q leży na prostej k . Prosta PQ leży w płaszczyźnie π , co oznacza, że jest ona prostopadła do krawędzi AB . A ponieważ $CD \parallel PQ$, więc $CD \perp AB$.

Założmy teraz, że krawędzie AB i CD są prostopadłe. Wtedy prosta CD jest równoległa do płaszczyzny π . Przesuwając prostą k o wektor $\overrightarrow{CD}$ otrzymamy prostą k' leżącą także w płaszczyźnie π (i nie równoległą do ℓ). Istnieje więc punkt wspólny prostych k' i ℓ , który oznaczmy przez P . Niech Q będzie obrazem punktu P w translacji o wektor $\overrightarrow{DC}$. Wówczas punkt Q leży na prostej k . Punkt P leży na prostej ℓ . Czworokąt $CDPQ$ jest równoległobokiem, w którym $PA = PB = PD$ oraz $QA = QB = QC$.

(mek, wp)

Szkice rozwiązań zadań z zawodów stopnia pierwszego, zadania z poprzednich olimpiad matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w internecie pod adresem: <http://www.impan.gov.pl/~olimp/>

XLIX Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia trzeciego

Zadania na dzień 24 kwietnia 1998 r.
(pierwszy dzień zawodów)

1. Znaleźć wszystkie układy liczb całkowitych (a, b, c, x, y, z) spełniające układ równań

$$\begin{cases} a + b + c = xyz \\ x + y + z = abc \end{cases}$$

oraz warunki $a \geq b \geq c \geq 1, x \geq y \geq z \geq 1$.

2. Ciąg Fibonacciego (F_n) jest dany wzorami:

$$F_0 = F_1 = 1, \quad F_{n+2} = F_n + F_{n+1} \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, \dots$$

Wyznaczyć wszystkie pary (k, m) liczb całkowitych $m > k \geq 0$, dla których w ciągu (x_n) określonym wzorami

$$x_0 = \frac{F_k}{F_m}, \quad x_{n+1} = \begin{cases} \frac{2x_n - 1}{1 - x_n} & \text{gdzie } x_n \neq 1, \\ 1 & \text{gdzie } x_n = 1 \end{cases} \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

występuje liczba 1.

3. Pięciokąt wypukły $ABCDE$ jest podstawą ostrosłupa $ABCDES$. Płaszczyzna przecina krawędzie SA, SB, SC, SD, SE odpowiednio w punktach A', B', C', D', E' (różnych od wierzchołków ostrosłupa). Udowodnić, że punkty przecięcia przekątnych czworokątów $ABB'A', BCC'B', CDD'C', DEE'D', EAA'E'$ leżą na jednej płaszczyźnie.

Zadania na dzień 25 kwietnia 1998 r.
(drugi dzień zawodów)

4. Dowieść, że w ciągu (a_n) określonym wzorami

$$a_1 = 1, \quad a_n = a_{n-1} + a_{[n/2]} \quad \text{dla } n = 2, 3, 4, \dots$$

występuje nieskończenie wiele liczb podzielnych przez 7.

Uwaga: $[n/2]$ jest największą liczbą całkowitą nie przekraczającą $n/2$.

5. Punkty D i E leżą na boku AB trójkąta ABC i spełniają warunek

$$\frac{AD}{DB} \cdot \frac{AE}{EB} = \left(\frac{AC}{CB} \right)^2.$$

Udowodnić, że $\sphericalangle ACD = \sphericalangle BCE$.

6. Rozważamy na płaszczyźnie kwadraty jednostkowe, których wierzchołki mają obie współrzędne całkowite. Niech S będzie szachownicą, której polami są wszystkie kwadraty jednostkowe zawarte w kole określonym nierównością $x^2 + y^2 \leq 1998^2$. Na wszystkich polach szachownicy piszemy liczbę $+1$. Wykonujemy ciąg operacji. Każda z nich polega na wybraniu dowolnego rzędu poziomego, pionowego lub ukośnego i zmianie znaków wszystkich liczb napisanych na polach wybranego rzędu. (Rząd ukośny tworzą wszystkie pola szachownicy S , których środki leżą na pewnej prostej przecinającej oś układu współrzędnych pod kątem 45° .)

Rozstrzygnąć, czy w ten sposób można doprowadzić do sytuacji, w której na jednym polu będzie napisana liczba -1 , a na pozostałych $+1$.

XLIX Olimpiada Matematyczna

Szkice rozwiązań zadań z zawodów trzeciego stopnia

1. Dodając równania danego układu stronami i przekształcając otrzymujemy równość $A + B + X + Y = 4$, gdzie

$$\begin{aligned} A &= (ab - 1)(c - 1), & B &= (a - 1)(b - 1), \\ X &= (xy - 1)(z - 1), & Y &= (x - 1)(y - 1). \end{aligned}$$

Liczby A, B, X, Y są liczbami całkowitymi nieujemnymi. Jeśli $c \geq 2$, to $A \geq 3$, $B \geq 1$ i w konsekwencji $A = 3, B = 1, X = 0, Y = 0$, co daje rozwiązanie

$$(a, b, c, x, y, z) = (2, 2, 2, 6, 1, 1).$$

Analogicznie, założenie $z \geq 2$ prowadzi do rozwiązania

$$(a, b, c, x, y, z) = (6, 1, 1, 2, 2, 2).$$

Pozostaje możliwość $c = z = 1$. Wówczas $A = X = 0$, więc $B + Y = 4$. W wyniku prostego rozumowania otrzymujemy dalszych pięć układów (a, b, c, x, y, z) spełniających zadane równania:

$$(3, 2, 1, 3, 2, 1), (3, 3, 1, 7, 1, 1), (5, 2, 1, 8, 1, 1), (7, 1, 1, 3, 1, 1), (8, 1, 1, 5, 2, 1).$$

* * * * *

2. Załóżmy, że dla pewnej liczby całkowitej $r \geq 0$ zachodzi równość: $x_r = 1$, przy czym r jest najmniejszym numerem o tej własności. Jeśli $r = 0$, to $F_k = F_m$, skąd $k = 0, m = 1$. Dalej zakładamy, że $r \geq 1$. W podanym wzorze rekurencyjnym podstawiamy $n = r - 1$ i wyznaczamy $x_{r-1} = 2/3$. Zgadujemy, że $x_{r-j} = F_{2j}/F_{2j+1}$ dla $j = 0, 1, \dots, r$ i dowodzimy słuszności tego przypuszczenia przez łatwą indukcję. Dla $j = r$ otrzymujemy

$$(1) \quad x_0 = \frac{F_{2r}}{F_{2r+1}} = \frac{F_k}{F_m}.$$

Wykażemy teraz, że $m = k + 1$ oraz że k jest liczbą parzystą. (Nietrudno wykazać, że nawet $k = 2r$.) Gdyby zachodziła nierówność $m \geq k + 2$, mielibyśmy

$$\frac{F_m}{F_k} - 1 \geq \frac{F_{k+2}}{F_k} - 1 = \frac{F_{k+1}}{F_k} \geq 1 > \frac{F_{2r-1}}{F_{2r}} = \frac{F_{2r+1}}{F_{2r}} - 1,$$

wbrew równości (1). Zatem $m = k + 1$, czyli $x_0 = F_k/F_{k+1}$. Gdy wyraz początkowy x_0 ma tę postać, z rekurencyjnej definicji ciągu (x_n) , otrzymujemy przez łatwą indukcję wzór

$$(2) \quad x_n = \frac{F_{k-2n}}{F_{k+1-2n}} \quad \text{dla } n \leq \frac{k}{2}.$$

Przypuśćmy, że k jest liczbą nieparzystą i przyjmijmy $\ell = (k-1)/2$. Wówczas, na mocy wzoru (2), $x_n < 1$ dla $n < \ell$ oraz $x_\ell = F_1/F_2 = 1/2$, skąd $x_{\ell+1} = 0$,

$x_{\ell+2} = -1$ i wszystkie dalsze wyrazy są ujemne. W ciągu (x_n) nie występuje więc liczba 1, wbrew temu, że $x_r = 1$. Liczba k musi więc być parzysta.

Wykazaliśmy zatem, że jeśli w rozważanym ciągu występuje liczba 1, to para (k, m) jest postaci $(2r, 2r + 1)$ dla pewnej liczby całkowitej $r \geq 0$.

Na odwrót: jeśli $k = 2r$, $m = 2r + 1$, gdzie r jest dowolną liczbą całkowitą nieujemną, to $x_0 = F_k/F_{k+1}$, skąd na mocy wzoru (2) widzimy, że ciąg (x_n) zawiera wyraz $x_r = F_0/F_1 = 1$.

* * * * *

3. Oznaczmy przez π i π' płaszczyzny zawierające odpowiednio punkty A, B, C, D, E oraz A', B', C', D', E' . Ponadto niech K, L, M, N, O będą punktami przecięcia przekątnych czworokątów $ABB'A', BCC'B', CDD'C', DEE'D', EAA'E'$ (odpowiednio).

Załóżmy najpierw, że płaszczyzny π i π' są równoległe. Wówczas stosunek odległości tych płaszczyzn od każdego z punktów K, L, M, N, O jest taki sam. Punkty te leżą więc na jednej płaszczyźnie, równoległej do płaszczyzn π i π' .

Załóżmy teraz, że płaszczyzny π i π' nie są równoległe. Oznaczmy przez ℓ ich wspólną prostą. Niech σ będzie płaszczyzną zawierającą prostą ℓ i przechodzącą przez punkt K . Ponieważ punkty A, C, A', C' są współpłaszczyznowe, więc proste AC i $A'C'$ są albo równoległe, albo przecinają się w punkcie X należącym do prostej ℓ .

W pierwszym przypadku, zarówno prosta KL (część wspólna płaszczyzn $AB'C, A'BC'$) jak i prosta ℓ (część wspólna płaszczyzn $ABC, A'B'C'$) są równoległe do prostych AC i $A'C'$. Proste KL i ℓ są więc równoległe.

W drugim przypadku, punkty K, L, X należą do obu płaszczyzn $AB'C$ i $A'BC'$. Stąd wnioskujemy, że punkty te leżą na jednej prostej, czyli proste KL i ℓ mają punkt wspólny. Zatem w obu przypadkach punkt L należy do płaszczyzny σ .

Rozważając płaszczyzny $BC'D, B'CD'$ oraz korzystając z tego, że $L \in \sigma$, poprzez rozumowanie analogiczne do powyższego dowodzimy, że punkt M leży na płaszczyźnie σ . Wnioskując tak jak wyżej jeszcze dwukrotnie dostajemy, że punkty N, O również leżą na płaszczyźnie σ . Zatem punkty K, L, M, N, O leżą na płaszczyźnie σ , co kończy dowód.

(mek, wp)

Szkice rozwiązań zadań z zawodów stopnia pierwszego i drugiego, zadania z poprzednich olimpiad matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w internecie pod adresem: <http://www.impan.gov.pl/~olimp/>

XLIX Olimpiada Matematyczna

Szkice rozwiązań zadań z zawodów trzeciego stopnia

4. W ciągu (a_n) są wyrazy podzielne przez 7 (na przykład $a_5 = 7$). Przypuśćmy, że jest ich skończenie wiele; niech a_k będzie ostatnim z tych wyrazów. Oznaczmy: $a_k = x$, $a_{2k-1} = y$, $a_{4k-3} = z$; liczba x dzieli się przez 7, a liczby y i z — nie. Zachodzą równości:

$$\begin{aligned} a_{2k} &= a_{2k-1} + a_k = x + y, & a_{2k+1} &= a_{2k} + a_k = 2x + y, \\ a_{4k-2} &= a_{4k-3} + a_{2k-1} = y + z, & a_{4k-1} &= a_{4k-2} + a_{2k-1} = 2y + z, \\ a_{4k} &= a_{4k-1} + a_{2k} = x + 3y + z, & a_{4k+1} &= a_{4k} + a_{2k} = 2x + 4y + z, \\ a_{4k+2} &= a_{4k+1} + a_{2k+1} = 4x + 5y + z, & a_{4k+3} &= a_{4k+2} + a_{2k+1} = 6x + 6y + z. \end{aligned}$$

Przy dzieleniu przez 7 liczby $a_{4k-3}, a_{4k-2}, \dots, a_{4k+3}$ dają więc takie same reszty jak liczby $z, z + y, \dots, z + 6y$. Ponieważ y nie dzieli się przez 7, wszystkie te reszty są różne. Zatem jedna z tych siedmiu liczb jest podzielna przez 7, wbrew przypuszczeniu, że a_k jest ostatnim takim wyrazem. Sprzeczność kończy dowód.

* * * * *

5. Oznaczmy przez ℓ prostą przechodzącą przez punkt A i równoległą do BC . Proste CD i CE przecinają prostą ℓ odpowiednio w punktach P i Q .

Z warunków danych w zadaniu otrzymujemy

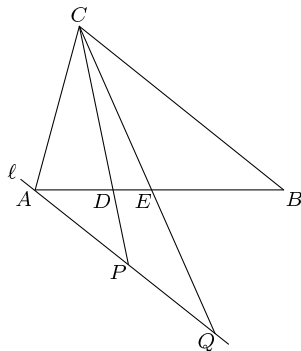
$$\left(\frac{AC}{CB}\right)^2 = \frac{AD}{DB} \cdot \frac{AE}{EB} = \frac{AP}{PB} \cdot \frac{AQ}{QB},$$

skąd

$$\frac{AP}{AC} = \frac{AC}{AQ}.$$

Ponieważ $\angle CAP = \angle QAC$, więc z powyższej równości wynika, że trójkąty CAP i QAC są podobne. Zatem

$$\angle ACD = \angle ACP = \angle AQC = \angle BCE.$$



* * * * *

6. Odpowiedź: nie można.

Przypuśćmy, że da się uzyskać konfigurację z dokładnie jednym polem P_1 , na którym jest napisana liczba -1 . Z uwagi na standardowe symetrie szachownicy S można założyć, że pole P_1 ma środek $(a - \frac{1}{2}, b - \frac{1}{2})$, gdzie $a \geq b \geq 1$ (a, b — liczby całkowite). Punkt (a, b) jest wierzchołkiem pola P_1 , więc $a^2 + b^2 \leq 1998^2$.

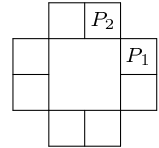
Wykażemy, że kwadrat jednostkowy P_2 o środku $(a-\frac{3}{2}, b+\frac{1}{2})$ także jest polem szachownicy S .

Jeżeli $a > b$, to $(a-1)^2 + (b+1)^2 \leq a^2 + b^2 \leq 1998^2$. Jeśli zaś $a = b$, to nierówność $a^2 + b^2 = 2a^2 \leq 1998^2$ na pewno nie jest równością; stąd wynika, że

$$(a-1)^2 + (b+1)^2 = 2a^2 + 2 \leq 1998^2.$$

Zatem punkt $(a-1, b+1)$, czyli prawy górny wierzchołek kwadratu P_2 , należy do koła, o którym mowa w zadaniu. W konsekwencji cały kwadrat P_2 zawiera się w tym kole, czyli jest polem szachownicy S .

Rozważmy teraz osiem kwadratów jednostkowych, z których dwa są polami P_1 i P_2 , ułożonych tak jak na rysunku obok. Ponieważ kwadraty P_1 i P_2 są polami szachownicy S , więc pozostałe sześć kwadratów również.



Zauważmy, że każdy rząd pionowy, poziomy lub ukośny zawiera albo dokładnie dwa spośród ośmiu danych pól, albo nie zawiera żadnego z nich. Iloczyn liczb napisanych na tych ośmiu polach nie ulega wobec tego zmianie w wyniku wykonywanych operacji i stale jest równy 1. Nie jest więc możliwe, by w pewnym momencie na polu P_1 znalazła się liczba -1 , a na pozostałych $+1$.

(mek, wp)

Szkice rozwiązań zadań z zawodów stopnia pierwszego i drugiego, zadania z poprzednich olimpiad matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w internecie pod adresem: <http://www.impan.gov.pl/~olimp/>

L Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego

I seria.

1. Dowieść, że wśród liczb postaci $50^n + (50n + 1)^{50}$, gdzie n jest liczbą naturalną, występuje nieskończenie wiele liczb złożonych.
2. Wykazać, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c, d zachodzi nierówność
$$(a + b + c + d)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + 6ab.$$
3. W trójkącie równoramiennym ABC kąt BAC jest prosty. Punkt D leży na boku BC , przy czym $BD = 2 \cdot CD$. Punkt E jest rzutem prostokątnym punktu B na prostą AD . Wyznaczyć miarę kąta CED .
4. Dane są takie liczby rzeczywiste x, y , że liczby $x + y, x^2 + y^2, x^3 + y^3$ i $x^4 + y^4$ są całkowite. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n liczba $x^n + y^n$ jest liczbą całkowitą.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu) mają być wysłane pod adresem właściwego komitetu okręgowego Olimpiady najpóźniej dnia

12 października 1998 r.

Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.

II seria.

5. Znaleźć wszystkie pary liczb całkowitych dodatnich x, y spełniające równanie $y^x = x^{50}$.
6. Przekątne AC i BD czworokąta wypukłego $ABCD$ przecinają się w punkcie P . Punkt M jest środkiem boku AB . Prosta MP przecina bok CD w punkcie Q . Dowieść, że stosunek pól trójkątów BCP i ADP jest równy stosunkowi długości odcinków CQ i DQ .
7. Dana jest liczba naturalna $n \geq 2$. Wyznaczyć wszystkie wielomiany $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ mające dokładnie n pierwiastków nie większych niż -1 oraz spełniające warunek

$$a_0^2 + a_1a_n = a_n^2 + a_0a_{n-1}.$$

Uwaga: Pierwiastki są liczone z uwzględnieniem krotności: jeśli liczba x_0 jest pierwiastkiem k -krotnym wielomianu $P(x)$ (tzn. jeśli wielomian $P(x)$ jest podzielny przez wielomian $(x - x_0)^k$, ale nie przez $(x - x_0)^{k+1}$), wówczas liczba x_0 jest traktowana jak k pierwiastków wielomianu $P(x)$.

8. Dana jest liczba naturalna $n \geq 2$ oraz zbiór n -elementowy S . Wyznaczyć najmniejszą liczbę naturalną k , dla której istnieją podzbiory $A_1, A_2, \dots, A_k$ zbioru S o następującej własności:
dla dowolnych dwóch różnych elementów $a, b \in S$, istnieje taka liczba $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, że zbiór $A_j \cap \{a, b\}$ jest jednoelementowy.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu) mają być wysłane pod adresem właściwego komitetu okręgowego Olimpiady najpóźniej dnia

12 listopada 1998 r.

Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.

III seria.

9. Punkty D, E, F leżą odpowiednio na bokach BC, CA, AB trójkąta ABC . Okręgi wpisane w trójkąty AEF, BFD, CDE są styczne do okręgu wpisanego w trójkąt DEF . Udowodnić, że proste AD, BE, CF przecinają się w jednym punkcie.
10. Dana jest liczba $x_1 > 0$. Ciąg (x_n) jest zdefiniowany wzorem:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n^2} \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots$$

Udowodnić, że istnieje granica $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{\sqrt[3]{n}}$ i obliczyć ją.

11. W urnie znajdują się dwie kule: biała i czarna. Ponadto mamy do dyspozycji 50 kul białych i 50 czarnych. Wykonujemy 50 razy następującą czynność: losujemy z urny kulę, a następnie wrzucamy ją z powrotem do urny oraz dokładamy jedną kulę tego samego koloru, co wylosowana kula. Po zakończeniu tych czynności mamy więc w urnie 52 kule. Jaka liczba kul białych znajdujących się w urnie jest najbardziej prawdopodobna?
12. Wszystkie wierzchołki sześcianu o krawędzi a leżą na powierzchni czworościanu foremnego o krawędzi 1. Wyznaczyć możliwe wartości a .

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu) mają być wysłane pod adresem właściwego komitetu okręgowego Olimpiady najpóźniej dnia

10 grudnia 1998 r.

Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.

L OLIMPIADA MATEMATYCZNA

Do Pani/Pana Dyrektora Szkoły
Do Pani/Pana Profesora Matematyki

Komitet Główny Olimpiady Matematycznej uprzejmie prosi o zapoznanie uczniów i nauczycieli zainteresowanych zadaniami Olimpiady z podanymi tu szkicami rozwiązań zadań konkursowych stopnia pierwszego L Olimpiady Matematycznej.

W dalszej części niniejszego druku podajemy teksty zadań z zawodów międzynarodowych: XXXIX Międzynarodowej Olimpiady Matematycznej i XXI Austriacko-Polskich Zawodów Matematycznych, a także z IX Zawodów Matematycznych Państw Bałtyckich (*Baltic Way '98*).

Zawody pierwszego stopnia L Olimpiady Matematycznej są zakończone. Zawody stopnia drugiego odbędą się w dniach 26 i 27 lutego 1999 r. Zawody stopnia trzeciego odbędą się w dniach 14 i 15 kwietnia 1999 r.

Zawiadomienia o dokładnym terminie i miejscu zawodów stopnia drugiego wyślą komitety okręgowe zakwalifikowanym zawodnikom w terminie do dnia 10 lutego 1999 r.

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w internecie pod adresem:

<http://www.impan.gov.pl/~olimp/>

Komitet Główny Olimpiady Matematycznej

Szkiecy rozwiązań zadań konkursowych zawodów pierwszego stopnia L Olimpiady Matematycznej

1. I sposób: Jeżeli n jest liczbą nieparzystą, to liczba 50^n przy dzieleniu przez 3 daje resztę 2. Jeśli ponadto n dzieli się przez 3, to $(50n+1)^{50}$ przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1. Stąd wynika, że liczba $50^n + (50n+1)^{50}$ jest podzielna przez 3 dla liczb n postaci $6k+3$.

II sposób: Dla n podzielnych przez 5 liczba $50^n + (50n+1)^{50}$ jest sumą piątych potęg. Zatem liczba ta, na mocy tożsamości

$$x^5 + y^5 = (x+y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4),$$

jest złożona.

2. I sposób: Tezę dostajemy natychmiast z następującej równości:

$$3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + 6ab - (a+b+c+d)^2 = \frac{(2a+2b-c-d)^2}{2} + \frac{3(c-d)^2}{2}.$$

II sposób: Na mocy nierówności pomiędzy średnią kwadratową a arytmetyczną otrzymujemy $3((a+b)^2 + c^2 + d^2) \geq ((a+b) + c + d)^2$, czyli nierówność, którą należało udowodnić.

3. Uzupełnijmy trójkąt ABC do kwadratu $ABFC$. Załóżmy, że prosta AD przecina bok CF w punkcie P , zaś prosta BE przecina bok AC w punkcie Q . Ponieważ

$$\frac{CP}{AB} = \frac{CD}{DB} = \frac{1}{2},$$

więc $CP = \frac{1}{2}CF$. Wykorzystując prostokątność prostych AP i BQ oraz powyższą równość dostajemy $CQ = \frac{1}{2}AC$, i w konsekwencji $CP = CQ$. Punkty C , Q , E , P leżą na jednym okręgu, skąd $\sphericalangle CED = \sphericalangle CEP = \sphericalangle CQP = 45^\circ$.

4. Ponieważ $2xy = (x+y)^2 - (x^2 + y^2)$ oraz $2x^2y^2 = (x^2 + y^2)^2 - (x^4 + y^4)$, więc liczby $2xy$ i $2x^2y^2$ są całkowite. Gdyby przy tym liczba xy nie była całkowita, to $2xy$ byłaby nieparzysta. Ale wówczas liczba $2x^2y^2 = (2xy)^2/2$ nie byłaby całkowita. Wniosek stąd, że liczba xy jest całkowita.

Całkowitość liczby $x^n + y^n$ dowodzimy indukcyjnie korzystając z tożsamości $x^n + y^n = (x^{n-1} + y^{n-1})(x+y) - xy(x^{n-2} + y^{n-2})$.

5. Dane równanie zapisujemy w postaci $y = x^{50/x}$. Ponieważ dla każdego x będącego dzielnikiem 50 liczba po prawej stronie jest całkowita, otrzymujemy rozwiązania równania dla $x \in \{1, 2, 5, 10, 25, 50\}$. Inne rozwiązania tego równania otrzymamy tylko wtedy, gdy $x \geq 2$ oraz dla pewnego $k \geq 2$ liczba x jest jednocześnie k -tą potęgą pewnej liczby naturalnej oraz dzielnikiem liczby $50k$. Jeśli p jest dzielnikiem pierwszym takiej liczby x , to $p^k | 50k$. Ponieważ $p^k > k$, więc nie może być $p^k | k$, skąd $p \in \{2, 5\}$. Jeżeli $p = 2$, to $2^k | 2k$, skąd $k = 2$. Jeżeli zaś $p = 5$, to $5^k | 25k$, skąd znowu $k = 2$. Zatem x musi jednocześnie być kwadratem pewnej liczby naturalnej oraz dzielnikiem liczby 100.

Otrzymujemy dwie nowe wartości x w tym przypadku: $x = 4$ oraz $x = 100$.
Zatem dane równanie ma 8 rozwiązań:

$$(1,1), (2,2^{25}), (4,2^{25}), (5,5^{10}), (10,10^5), (25,625), (50,50), (100,10).$$

6. Przez $[XYZ]$ będziemy oznaczać pole trójkąta XYZ . Niech K będzie punktem przecięcia odcinków DP i AQ , zaś niech L będzie punktem przecięcia odcinków CP i BQ . Ponieważ punkt M jest środkiem odcinka AD , więc (na mocy twierdzenia Cevy)

$$\frac{BL}{LQ} = \frac{AK}{KQ}, \quad \text{skąd} \quad \frac{[BCP]}{[CQP]} = \frac{[ADP]}{[DQP]}.$$

Dostajemy zatem

$$\frac{[BCP]}{[ADP]} = \frac{[CQP]}{[DQP]} = \frac{CQ}{DQ}.$$

7. Niech $-p_1 \leq -p_2 \leq \dots \leq -p_n$ będą pierwiastkami wielomianu spełniającego warunki zadania. Wówczas $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_n \geq 1$ oraz $a_n \neq 0$. Ponadto

$$a_{n-1} = a_n(p_1 + p_2 + \dots + p_n), \quad a_1 = a_n p_1 p_2 \dots p_n \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_n} \right),$$

oraz $a_0 = a_n p_1 p_2 \dots p_n$. Warunek $a_0^2 + a_1 a_n = a_n^2 + a_0 a_{n-1}$ można więc przepisać w postaci

$$p_1 p_2 \dots p_n + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_n} = \frac{1}{p_1 p_2 \dots p_n} + p_1 + p_2 + \dots + p_n.$$

Udowodnimy indukcyjnie, że dla $n \geq 2$ oraz dla dowolnych liczb rzeczywistych $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_n \geq 1$ zachodzi nierówność

$$p_1 p_2 \dots p_n + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_n} \geq \frac{1}{p_1 p_2 \dots p_n} + p_1 + p_2 + \dots + p_n \quad (1)$$

oraz, że

$$\text{równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy } p_2 = p_3 = \dots = p_n = 1. \quad (2)$$

Dla $n = 2$ nierówność (1) przybiera postać

$$p_1 p_2 + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \geq \frac{1}{p_1 p_2} + p_1 + p_2. \quad (3)$$

Jest ona równoważna nierówności

$$p_1^2 p_2^2 - p_1^2 p_2 - p_1 p_2^2 + p_1 p_2 \geq p_1 p_2 - p_1 - p_2 + 1,$$

czyli $p_1 p_2 (p_1 - 1)(p_2 - 1) \geq (p_1 - 1)(p_2 - 1)$, co przy założeniu $p_1 \geq p_2 \geq 1$ jest spełnione. Równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $p_2 - 1 = 0$.

Założmy teraz prawdziwość nierówności (1) oraz stwierdzenia (2) dla pewnego $n \geq 2$. Niech ponadto dane będą liczby $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_n \geq p_{n+1} \geq 1$.

Wówczas $p_1 p_2 \geq p_3 \geq \dots \geq p_{n+1} \geq 1$, skąd na mocy założenia indukcyjnego

$$\begin{aligned} (p_1 p_2) p_3 \dots p_n p_{n+1} + \frac{1}{p_1 p_2} + \frac{1}{p_3} + \dots + \frac{1}{p_n} + \frac{1}{p_{n+1}} &\geq \\ &\geq \frac{1}{(p_1 p_2) p_3 \dots p_n p_{n+1}} + p_1 p_2 + p_3 + \dots + p_n + p_{n+1} \end{aligned} \quad (4)$$

oraz równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $p_3 = \dots = p_n = p_{n+1} = 1$.

Dodanie nierówności (3) i (4) stronami daje

$$\begin{aligned} p_1 p_2 p_3 \dots p_n p_{n+1} + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \dots + \frac{1}{p_n} + \frac{1}{p_{n+1}} &\geq \\ &\geq \frac{1}{p_1 p_2 p_3 \dots p_n p_{n+1}} + p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n + p_{n+1}. \end{aligned}$$

Równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $p_2 = p_3 = \dots = p_n = p_{n+1} = 1$.

Ze stwierdzenia (2) wynika zatem, że wielomiany spełniające warunki zadania mają postać $P(x) = a(x+1)^{n-1}(x+b)$, gdzie a jest dowolną niezerową liczbą rzeczywistą, zaś $b \geq 1$.

8. Wykażemy, że $k = [\log_2(n-1) + 1]$, tzn. $2^{k-1} < n \leq 2^k$.

Mając liczbę k określoną jak wyżej, konstruujemy zbiory A_j następująco: numerujemy elementy zbioru S liczbami k -cyfrowymi w układzie dwójkowym (dopuszczamy zera początkowe). Mamy więc do dyspozycji $2^k \geq n$ liczb. Następnie za A_i bierzemy zbiór tych elementów zbioru S , których numer ma na i -tym miejscu jedynekę. Dowolne różne elementy a i b zbioru S mają wówczas przypisane różne numery, które różnią się, powiedzmy, na j -tym miejscu. Wtedy do zbioru A_j należy dokładnie jeden z elementów a, b .

Tak znaleziona liczba k jest najmniejsza. Załóżmy bowiem, że istnieją zbiory $A_1, A_2, \dots, A_k$ spełniające warunki zadania dla $2^k < n$. Każdemu elementowi x zbioru S przypisujemy układ k liczb $(c_1, c_2, \dots, c_k)$ według następującej zasady:

$$c_i = \begin{cases} 0 & \text{gdy } x \notin A_i \\ 1 & \text{gdy } x \in A_i \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, k).$$

Ponieważ $2^k < n$, więc istnieją takie dwa różne elementy $a, b \in S$, które mają przypisany ten sam układ liczb. To zaś oznacza, że element a należy do dokładnie tych samych zbiorów spośród $A_1, A_2, \dots, A_k$, co element b .

9. Oznaczmy przez c_1 okrąg wpisany w trójkąt DEF , zaś przez c_2 okrąg wpisany w trójkąt ABC . Ponieważ okręgi wpisane w trójkąty AEF i DEF są styczne, więc $AF + DE = AE + DF$. To oznacza, że w czworokąt $AEDF$ można wpisać okrąg; oznaczmy ten okrąg przez c_A . Punkt D jest środkiem jednokładności j_1 , o skali dodatniej, przekształcającej okrąg c_1 na c_A ; punkt A jest środkiem jednokładności j_2 , o skali dodatniej, przekształcającej okrąg c_A na c_2 . Zatem jednokładność j , o skali dodatniej, przekształcająca okrąg c_1

na c_2 jest złożeniem jednokładności j_1 i j_2 — jej środek leży więc na prostej AD . Analogicznie dowodzimy, że środek jednokładności j leży na prostych BE i CF .

Wniosek: proste AD , BE , CF mają punkt wspólny, będący środkiem jednokładności okręgów c_1 i c_2 .

10. W rozwiązaniu skorzystamy z następującego twierdzenia:

Jeżeli ciąg (a_n) jest zbieżny do granicy g , to ciąg (b_n) , określony wzorem

$$b_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n},$$

jest również zbieżny i jego granica wynosi g .

Podstawmy $y_n = x_n^3$. Wtedy

$$y_{n+1} = y_n \left(1 + \frac{1}{y_n}\right)^3 = y_n + 3 + \frac{3}{y_n} + \frac{1}{y_n^2}.$$

Skoro $y_{n+1} > y_n + 3$, to ciąg (y_n) jest rozbieżny do nieskończoności. Zatem na mocy powyższej równości $(y_{n+1} - y_n) \rightarrow 3$. Z ostatniej zbieżności oraz z cytowanego wyżej twierdzenia dostajemy $\frac{y_n}{n} \rightarrow 3$, skąd $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{\sqrt[3]{n}} = \sqrt[3]{3}$.

11. Niech $P(k, n)$, gdzie $1 \leq k \leq n-1$, oznacza prawdopodobieństwo zdarzenia, że gdy w urnie jest n kul, to dokładnie k z nich ma kolor biały. Wówczas

$$P(1, 2) = 1 \quad \text{oraz} \quad P(k, n+1) = \frac{n-k}{n} P(k, n) + \frac{k-1}{n} P(k-1, n).$$

Korzystając z powyższych związków dowodzimy indukcyjnie (ze względu na n), że $P(k, n) = 1/(n-1)$ dla $k = 1, 2, \dots, n-1$. W szczególności

$$P(k, 52) = \frac{1}{51} \quad \text{dla } k = 1, 2, \dots, 51.$$

Zatem każda możliwa liczba kul białych po 50 losowaniach (od 1 do 51) jest jednakowo prawdopodobna.

12. Z warunków zadania wynika, że dany sześcián $ABCD A' B' C' D'$ leży wewnątrz danego czworościanu $KLMN$. Możliwe są dwa przypadki:

(a) Istnieje ściana czworościanu $KLMN$ (na przykład KLM), na której leżą co najmniej trzy wierzchołki sześciánu;

(b) Na każdej ścianie czworościanu $KLMN$ leżą dokładnie dwa wierzchołki sześciánu.

Rozważmy najpierw przypadek (a). Trzy wierzchołki sześciánu, które leżą na ścianie KLM , muszą być wierzchołkami jednej ściany tego sześciánu. To oznacza, że pewna ściana sześciánu, powiedzmy $ABCD$, leży wewnątrz trójkąta KLM ; pozostałe cztery wierzchołki A' , B' , C' , D' znajdują się na ścianach KLN , LMN , MKN . Bez straty ogólności możemy przyjąć, że ściana KLN zawiera któreś dwa spośród punktów A' , B' , C' , D' . Muszą

one być dwoma kolejnymi wierzchołkami kwadratu $A'B'C'D'$. Nie tracąc ogólności rozważań, możemy przyjąć, że punkty A' , B' leżą na ścianie KLN , punkt C' leży na ścianie LMN , zaś punkt D' znajduje się na ścianie MKN .

Warunek (a) wyznacza więc jednoznacznie (z dokładnością do przyjętych oznaczeń) położenie danego sześcienu wewnątrz czworościanu foremnego o krawędzi 1. Przystępujemy do wyznaczenia długości krawędzi a .

Oznaczmy przez K' , L' , M' , odpowiednio punkty przecięcia krawędzi KN , LN , MN z płaszczyzną $A'B'C'D'$. Czworościan $K'L'M'N$ jest foremny. Oznaczmy jego krawędź przez b . Wtedy $K'A' = B'L' = \frac{\sqrt{3}}{3}a$, skąd

$$b = a + \frac{2\sqrt{3}}{3}a. \quad (1)$$

Wysokość czworościanu foremnego o krawędzi λ wyraża się wzorem $h = \frac{\sqrt{6}}{3}\lambda$. Porównując wysokości czworościanów $KLMN$ oraz $K'L'M'N$ otrzymujemy równość $\frac{\sqrt{6}}{3}b + a = \frac{\sqrt{6}}{3}$, skąd wykorzystując równość (1) mamy

$$a = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6} + 2\sqrt{2} + 3}.$$

Pozostał do rozpatrzenia przypadek (b).

Każdy z czterech odcinków łączących wierzchołki danego sześcienu, leżące na tej samej ścianie czworościanu $KLMN$, jest krawędzią tego sześcienu. Odcinki te nie mają wspólnych końców. Przypuśćmy, że krawędź AB leży na ścianie KLM . Wówczas jedna z krawędzi $A'B'$ lub CD leży na jednej ze ścian KLN , LMN , MKN . Bez straty ogólności przyjmijmy, że $A'B'$ leży na KLN . Wtedy proste AB i $A'B'$ są równoległe do krawędzi KL , a co za tym idzie, proste CD i $C'D'$, są prostopadłe do krawędzi MN ; nie mogą więc one leżeć na ścianach LMN i KMN . Możemy zatem założyć, że odcinek CC' leży na ścianie LMN , zaś odcinek DD' znajduje się na ścianie KMN .

Oznaczmy przez X , Y , Z , T odpowiednio środki krawędzi KN , NL , LM , MK . Wówczas kwadraty $A'B'BA$ oraz $D'C'CD$ mają boki równoległe odpowiednio do boków kwadratu $XYZT$. Stąd istnieje (w przestrzeni) środek jednokładności P kwadratów $A'B'BA$ i $XYZT$, leżący na krawędzi KL oraz środek jednokładności Q kwadratów $D'C'CD$ i $XYZT$, leżący na krawędzi MN . Skale jednokładności w obu przypadkach są równe i wynoszą $2a$. Odległości od punktów P i Q do płaszczyzny $XYZT$ są równe i wynoszą $\sqrt{2}/4$. Stąd wynika, że odległości od płaszczyzn $A'B'BA$ i $D'C'CD$ do płaszczyzny $XYZT$ są równe — a więc każda z nich wynosi $a/2$. Te trzy wielkości są związane ze sobą zależnością

$$1 - 2a = \frac{a/2}{\sqrt{2}/4}, \quad \text{skąd otrzymujemy} \quad a = \frac{1}{2 + \sqrt{2}}.$$

Pozostaje zauważyć, że powyższą wartość można zrealizować biorąc za P i Q środki krawędzi KL i MN .

Reasumując: możliwe wartości a wynoszą

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}+2\sqrt{2}+3} \quad \text{oraz} \quad \frac{1}{2+\sqrt{2}}.$$

(wp, jwr)

Zadania z XXXIX Międzynarodowej Olimpiady Matematycznej

Taipei (Tajwan), 15–16 lipca 1998 r.

1. W czworokącie wypukłym $ABCD$ przekątne AC i BD są prostopadłe, a przeciwległe boki AB i DC nie są równoległe. Zakładamy, że symetralne boków AB i DC przecinają się w punkcie P leżącym wewnątrz czworokąta $ABCD$. Udowodnić, że czworokąt $ABCD$ da się wpisać w okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy trójkąty ABP i CDP mają równe pola.

2. W konkursie bierze udział a uczestników, ocenianych przez b egzaminatorów, gdzie $b \geq 3$ jest liczbą całkowitą nieparzystą. Każdy egzaminator ocenia każdego uczestnika, wydając werdykt „zdał” lub „nie zdał”. Załóżmy, że k jest liczbą o własności: dla każdych dwóch egzaminatorów, ich oceny są zgodne dla co najwyżej k uczestników. Dowieść, że

$$\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}.$$

3. Dla każdej dodatniej liczby całkowitej n oznaczmy przez $d(n)$ liczbę jej dodatnich dzielników (włącznie z 1 oraz n). Wyznaczyć wszystkie dodatnie liczby całkowite k takie, że

$$\frac{d(n^2)}{d(n)} = k$$

dla pewnego n .

4. Wyznaczyć wszystkie pary (a, b) liczb całkowitych dodatnich takie, że liczba $a^2b + a + b$ jest podzielna przez $ab^2 + b + 7$.

5. Niech I będzie środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC . Okrąg ten jest styczny do boków BC , CA i AB odpowiednio w punktach K , L i M . Prosta przechodząca przez B i równoległa do MK przecina proste LM i LK odpowiednio w punktach R i S . Wykazać, że kąt RIS jest ostry.

6. Rozważamy wszystkie funkcje f ze zbioru $\mathbb{N}$ wszystkich liczb całkowitych dodatnich do tego samego zbioru, spełniające warunek

$$f(t^2 f(s)) = s(f(t))^2$$

dla wszystkich $s, t \in \mathbb{N}$. Wyznaczyć najmniejszą możliwą wartość $f(1998)$.

Zadania z XXI Austriacko-Polskich Zawodów Matematycznych

Przysiek (Polska), 29 czerwca – 1 lipca 1998 r.

1. Niech x_1, x_2, y_1, y_2 będą takimi liczbami rzeczywistymi, że $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$. Udowodnić nierówność

$$(x_1 y_1 + x_2 y_2 - 1)^2 \geq (x_1^2 + x_2^2 - 1)(y_1^2 + y_2^2 - 1).$$

2. Rozważamy n punktów $P_1, P_2, \dots, P_n$ położonych w tej kolejności na jednej linii prostej. Malujemy każdy z tych n punktów na jeden z następujących kolorów: biały, czerwony, zielony, niebieski, fioletowy. Kolorowanie nazwiemy *dopuszczalnym*, jeśli dla dowolnych dwóch kolejnych punktów P_i, P_{i+1} ($i = 1, 2, \dots, n-1$) oba są tego samego koloru lub co najmniej jeden z nich jest biały. Ile jest dopuszczalnych kolorowań?

3. Wyznaczyć wszystkie pary liczb rzeczywistych (x, y) spełniające następujący układ równań:

$$\begin{cases} 2 - x^3 = y \\ 2 - y^3 = x. \end{cases}$$

4. Niech m, n będą danymi liczbami całkowitymi dodatnimi. Niech

$$S_m(n) = \sum_{k=1}^n \left[k^2 \sqrt{k^m} \right]$$

($[x]$ jest największą liczbą całkowitą nie większą od x). Udowodnić, że

$$S_m(n) \leq n + m \cdot (\sqrt[m]{2^m} - 1).$$

5. Wyznaczyć wszystkie pary (a, b) liczb całkowitych dodatnich takich, że równanie $x^3 - 17x^2 + ax - b^2 = 0$ ma trzy pierwiastki całkowite (niekoniecznie różne).

6. Różne punkty A, B, C, D, E, F są położone na okręgu k w tej kolejności. Proste styczne do okręgu k w punktach A i D oraz proste BF i CE przecinają się w jednym punkcie P . Udowodnić, że proste AD, BC i EF są równoległe lub przecinają się w jednym punkcie.

7. Rozważamy pary (a, b) liczb naturalnych takich, że iloczyn $a^a \cdot b^b$ w zapisie dziesiętnym kończy się dokładnie 98 zerami. Wyznaczyć parę (a, b) o tej własności, dla której iloczyn ab jest najmniejszy.

8. Niech $n > 2$ będzie daną liczbą naturalną. Rozważamy siatkę kwadratową na płaszczyźnie. W każdym kwadracie jednostkowym siatki wpisana jest liczba naturalna. Wielokąty o polu równym n , których boki są zawarte w prostych tworzących siatkę, nazwiemy wielokątami *dopuszczalnymi*. Wartością wielokąta dopuszczalnego nazwiemy sumę wszystkich liczb wpisanych w kwadraty zawarte w tym wielokącie. Udowodnić, że jeśli wartości

dowolnych dwóch przystających wielokątów dopuszczalnych są równe, to wszystkie liczby wpisane w kwadraty siatki są równe.

Uwaga. Przypominamy, że obraz symetryczny Q wielokąta P jest wielokątem przystającym do P .

9. Niech K , L , M będą środkami boków BC , AC , AB trójkąta ABC . Punkty A , B , C dzielą okrąg opisany na trójkącie ABC na trzy łuki: AB , BC , CA . Niech X będzie takim punktem łuku BC , że $BX = XC$. Analogicznie, niech Y będzie takim punktem łuku AC , że $AY = YC$, zaś Z takim punktem łuku AB , że $AZ = ZB$. Niech R będzie promieniem okręgu opisanego na trójkącie ABC i niech r będzie promieniem okręgu wpisanego w trójkąt ABC . Udowodnić, że $r + KX + LY + MZ = 2R$.

Zadania z IX Zawodów Matematycznych Państw Bałtyckich Baltic Way '98

Warszawa, 8 listopada 1998 r.

1. Znaleźć wszystkie funkcje dwóch zmiennych f , których argumenty x , y i wartości $f(x, y)$ są liczbami całkowitymi dodatnimi, spełniające następujące warunki (dla wszystkich dodatnich liczb całkowitych x i y):

$$\begin{aligned}f(x, x) &= x, \\f(x, y) &= f(y, x), \\(x + y)f(x, y) &= yf(x, x + y).\end{aligned}$$

2. Trójkę liczb całkowitych dodatnich (a, b, c) nazywamy *quasi-pitagorejską*, jeśli istnieje trójkąt o bokach długości a , b , c , w którym miara kąta naprzeciwko boku c wynosi 120° . Udowodnić, że jeśli (a, b, c) jest trójką quasi-pitagorejską, to c ma dzielnik pierwszy większy od 5.

3. Znaleźć wszystkie pary liczb całkowitych dodatnich x, y , które spełniają równanie

$$2x^2 + 5y^2 = 11(xy - 11).$$

4. Niech P będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych. Załóżmy, że dla $n = 1, 2, \dots, 1998$ wartości $P(n)$ są liczbami naturalnymi trzycyfrowymi. Udowodnić, że wielomian P nie ma pierwiastków całkowitych.

5. Niech a będzie cyfrą nieparzystą, zaś b cyfrą parzystą. Udowodnić, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n istnieje liczba całkowita dodatnia, podzielna przez 2^n , w której zapisie dziesiętnym nie występują cyfry inne niż a i b .

6. Niech P będzie wielomianem stopnia 6 i niech a , b będą liczbami rzeczywistymi takimi, że $0 < a < b$. Załóżmy, że $P(a) = P(-a)$, $P(b) = P(-b)$, $P'(0) = 0$. Udowodnić, że $P(x) = P(-x)$ dla wszystkich liczb rzeczywistych x .

7. Niech $\mathbb{R}$ oznacza zbiór wszystkich liczb rzeczywistych. Znaleźć wszystkie funkcje $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ równanie

$$f(x) + f(y) = f(f(x)f(y)).$$

8. Niech $P_k(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^{k-1}$. Wykazać, że

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} P_k(x) = 2^{n-1} P_n\left(\frac{1+x}{2}\right)$$

dla każdej liczby rzeczywistej x i każdej liczby całkowitej dodatniej n .

9. Liczby α, β spełniają $0 < \alpha < \beta < \pi/2$. Niech γ, δ będą liczbami określonymi przez warunki:

- (i) $0 < \gamma < \pi/2$ oraz liczba $\tan \gamma$ jest średnią arytmetyczną liczb $\tan \alpha$ i $\tan \beta$;
- (ii) $0 < \delta < \pi/2$ oraz liczba $\frac{1}{\cos \delta}$ jest średnią arytmetyczną liczb $\frac{1}{\cos \alpha}$ i $\frac{1}{\cos \beta}$.

Udowodnić, że $\gamma < \delta$.

10. Niech $n \geq 4$ będzie parzystą liczbą całkowitą. W okrąg o promieniu 1 wpisane są n -kąt foremny i $(n-1)$ -kąt foremny. Dla każdego wierzchołka n -kąta rozważmy odległość od tego wierzchołka do najbliższego wierzchołka $(n-1)$ -kąta, mierzoną po obwodzie okręgu. Niech S będzie sumą tych n odległości. Udowodnić, że S nie zależy od wzajemnego położenia tych dwóch wielokątów.

11. Niech a, b, c będą długościami boków pewnego trójkąta, zaś R — promieniem okręgu opisanego na nim. Udowodnić, że

$$R \geq \frac{a^2 + b^2}{2\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}}.$$

Kiedy zachodzi równość?

12. W trójkącie ABC zachodzi $\sphericalangle BAC = 90^\circ$. Punkt D leży na boku BC i $\sphericalangle BDA = 2\sphericalangle BAD$. Udowodnić, że

$$\frac{1}{AD} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{BD} + \frac{1}{CD} \right).$$

13. W pięciokącie wypukłym $ABCDE$ boki AE i BC są równoległe oraz $\sphericalangle ADE = \sphericalangle BDC$. Przekątne AC i BE przecinają się w punkcie P . Udowodnić, że $\sphericalangle EAD = \sphericalangle BDP$ oraz $\sphericalangle CBD = \sphericalangle ADP$.

14. Dany jest trójkąt ABC , w którym $AB < AC$. Prosta przechodząca przez B i równoległa do AC przecina dwusieczną kąta zewnętrznego $\sphericalangle BAC$ w punkcie D . Prosta przechodząca przez C i równoległa do AB przecina tę dwusieczną w punkcie E . Punkt F leży na boku AC i spełniona jest równość $FC = AB$. Udowodnić, że $DF = FE$.

15. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC . Punkt D jest spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka A na bok BC . Punkt E leży na odcinku AD i spełnione jest równanie

$$\frac{AE}{ED} = \frac{CD}{DB}.$$

Punkt F jest spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka D na bok BE . Udowodnić, że $\sphericalangle AFC = 90^\circ$.

16. Czy można pokryć szachownicę o wymiarach 13×13 czterdziestoma dwoma klockami o wymiarach 4×1 w taki sposób, że tylko środkowe pole szachownicy pozostanie nie zakryte? (Zakładamy, że każdy klocek zakrywa cztery pełne pola szachownicy.)

17. Niech n i k będą liczbami całkowitymi dodatnimi. Danych jest nk przedmiotów (tych samych rozmiarów) i k pudełek, z których każde pomieści n przedmiotów. Każdy przedmiot jest pokolorowany jednym z k różnych kolorów. Wykazać, że można rozmieścić te przedmioty w pudełkach w taki sposób, że w każdym pudełku znajdują się przedmioty w co najwyżej dwóch kolorach.

18. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite dodatnie n , dla których istnieje zbiór S o następujących własnościach:

- (i) S składa się z n liczb całkowitych dodatnich, z których wszystkie są mniejsze od 2^{n-1} ;
- (ii) dla dowolnych dwóch różnych niepustych podzbiorów A i B zbioru S suma elementów zbioru A jest różna od sumy elementów zbioru B .

19. Rozważmy mecz ping-ponga między dwiema drużynami, z których każda składa się z 1000 graczy. Każdy gracz grał przeciwko każdemu z graczy przeciwnej drużyny dokładnie raz (w ping-pongu nie ma remisów). Udowodnić, że istnieje dziesięciu graczy z jednej drużyny, takich że każdy z graczy drużyny przeciwnej przegrał z co najmniej jednym z tych dziesięciu graczy.

20. Powiemy, że liczba całkowita dodatnia m *pokrywa* liczbę 1998, jeśli 1, 9, 9, 8 pojawiają się w tej właśnie kolejności jako cyfry m . (Na przykład 1998 jest pokrywana przez 215993698, ale nie przez 213326798.) Niech $k(n)$ oznacza liczbę tych liczb całkowitych dodatnich, które pokrywają 1998 i mają dokładnie n cyfr ($n \geq 5$), z których wszystkie są różne od 0. Jaką resztę z dzielenia przez 8 daje $k(n)$?

L Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia drugiego

Zadania na dzień 26 lutego 1999 r.
(pierwszy dzień zawodów)

1. Dana jest funkcja $f: \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ taka, że $f(\frac{1}{n}) = (-1)^n$ dla $n = 1, 2, \dots$. Wykazać, że nie istnieją takie funkcje rosnące $g: \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, $h: \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, że $f = g - h$.
2. Sześcian S o krawędzi 2 jest zbudowany z ośmiu sześciątów jednostkowych. *Klockiem* nazwiemy bryłę otrzymaną przez usunięcie z sześcianu S jednego spośród ośmiu sześciątów jednostkowych. Sześcian T o krawędzi 2^n jest zbudowany z $(2^n)^3$ sześciątów jednostkowych. Udowodnić, że po usunięciu z sześcianu T dowolnego spośród $(2^n)^3$ sześciątów jednostkowych powstaje bryła, którą daje się szczelnie wypełnić klockami.
3. Czworokąt wypukły $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Punkty E i F leżą odpowiednio na bokach AB i CD , przy czym $AE:EB = CF:FD$. Punkt P leży na odcinku EF i spełnia warunek $EP:PF = AB:CD$. Udowodnić, że stosunek pól trójkątów APD i BPC nie zależy od wyboru punktów E i F .

Zadania na dzień 27 lutego 1999 r.
(drugi dzień zawodów)

4. Punkt P leży wewnątrz trójkąta ABC i spełnia warunki: $\sphericalangle PAB = \sphericalangle PCA$ oraz $\sphericalangle PAC = \sphericalangle PBA$. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC . Dowieść, że jeżeli $O \neq P$, to kąt APO jest prosty.
5. Niech $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Wyznaczyć liczbę funkcji $f: S \rightarrow S$ spełniających równość $f^{50}(x) = x$ dla wszystkich $x \in S$.
Uwaga: $f^{50}(x) = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{50}(x)$.
6. Dana jest liczba naturalna $k \geq 2$ oraz liczby całkowite $a_1, a_2, \dots, a_n$ spełniające warunki
$$a_1 + 2^i a_2 + 3^i a_3 + \dots + n^i a_n = 0 \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, k-1.$$
Dowieść, że liczba $a_1 + 2^k a_2 + 3^k a_3 + \dots + n^k a_n$ jest podzielna przez $k!$.

L Olimpiada Matematyczna

Szkice rozwiązań zadań z zawodów stopnia drugiego Pierwszy dzień (26 lutego 1999 r.)

1. Przypuśćmy, że istnieją funkcje g i h spełniające warunki zadania. Ponieważ funkcje te są rosnące, więc dla każdego $k \in \mathbb{N}$ mamy

$$\begin{aligned} g\left(\frac{1}{2k+1}\right) &= f\left(\frac{1}{2k+1}\right) + h\left(\frac{1}{2k+1}\right) = -1 + h\left(\frac{1}{2k+1}\right) < \\ &< -1 + h\left(\frac{1}{2k}\right) = 1 + h\left(\frac{1}{2k}\right) - 2 = f\left(\frac{1}{2k}\right) + h\left(\frac{1}{2k}\right) - 2 = g\left(\frac{1}{2k}\right) - 2 < g\left(\frac{1}{2k-1}\right) - 2. \end{aligned}$$

Z monotoniczności funkcji g oraz powyższych nierówności dostajemy

$$g(0) < g\left(\frac{1}{2k+1}\right) < g\left(\frac{1}{2k-1}\right) - 2 < g\left(\frac{1}{2k-3}\right) - 4 < \dots < g\left(\frac{1}{3}\right) - 2(k-1) < g(1) - 2k.$$

Zatem $g(1) - g(0) > 2k$ dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$, co nie jest możliwe.

* * * * *

2. Przeprowadzimy dowód indukcyjny. Dla $n = 1$ teza zadania jest oczywiście prawdziwa. Załóżmy więc, że teza jest prawdziwa dla pewnego n i rozważmy sześcián C o krawędzi 2^{n+1} z wyróżnionym sześciánem jednostkowym D . Sześcián C dzielimy na osiem przys-tających sześciánów $C_1, C_2, \dots, C_8$, każdy o krawędzi 2^n . W jednym z nich (przyjmijmy, że w C_8) znajduje się sześcián jednostkowy D . Połóżmy klocek w samym środku sześciánu C tak, aby jego część wspólna z każdym z sześciánów $C_1, C_2, \dots, C_7$ była sześciánem jednos-tkowym. Wówczas pozostanie nam do wypełnienia klocekmi osiem sześciánów $C_1, C_2, \dots, C_8$, każdy z usuniętym sześciánem jednostkowym. To zaś, na mocy założenia indukcyjnego, jest wykonalne. Dowód indukcyjny jest więc zakończony.

* * * * *

3. Załóżmy najpierw, że proste AD i BC nie są równoległe i przecinają się w punkcie S . Wówczas trójkąty ASB i CSD są podobne. Ponieważ $AE:EB = CF:FD$, więc podobne są również trójkąty ASE i CSF . Stąd $\sphericalangle DSE = \sphericalangle CSF$. Ponadto

$$\frac{SE}{SF} = \frac{SA}{SC} = \frac{AB}{CD} = \frac{PE}{PF},$$

skąd dostajemy $\sphericalangle ESP = \sphericalangle FSP$. Zatem punkt P jest równoodległy od prostych AD i BC . Stosunek pól trójkątów APD i BPC jest więc równy stosunkowi długości odcinków AD i BC , czyli nie zależy od wyboru punktów E i F .

Założmy teraz, że proste AD i BC są równoległe. Wtedy $ABCD$ jest trapezem równo-ramiennym, gdzie $AB = CD$. Punkt P jest środkiem odcinka EF oraz $BE = DF$. Punkty E i F są więc jednakowo odległe odpowiednio od prostych BC i AD . Ponadto punkt P jest równoodległy od prostych przechodzących przez punkty E , F i równoległych do podstaw trapezu $ABCD$. Zatem również w tym przypadku odległości od punktu P do prostych AD i BC są jednakowe. Powtarzając końcówkę rozumowania z poprzedniego przypadku dostajemy tezę.

(wp, jwr)

L Olimpiada Matematyczna

Szkice rozwiązań zadań z zawodów stopnia drugiego

Drugi dzień (27 lutego 1999 r.)

4. Oznaczmy przez K , L , M odpowiednio punkty przecięcia prostych AP , BP , CP z okręgiem opisanym na trójkącie ABC . Na mocy równości $\sphericalangle BAK = \sphericalangle ACM$ długości łuków BK i AM są równe. Analogicznie, długości łuków KC i LA są równe. Odcinki LC , AK , MB są więc równoległe oraz mają wspólną symetralną, przechodzącą przez punkt O . Na tej symetralnej leży również punkt P , jako punkt przecięcia przekątnych MC i BL trapezu równoramiennego $MBCL$. Zatem w szczególności $\sphericalangle APO = 90^\circ$.

* * * * *

5. Niech f będzie funkcją spełniającą warunki zadania. Dla liczb $x \neq y$ dostajemy $f^{49}(f(x)) = x \neq y = f^{49}(f(y))$, skąd $f(x) \neq f(y)$. Zatem f jest permutacją zbioru S . Oznaczmy przez $r(x)$ ($x \in S$) najmniejszą liczbę całkowitą dodatnią taką, że $f^{r(x)}(x) = x$. Wówczas $r(x) \leq 5$ oraz $r(x) \mid 50$, skąd $r(x) \in \{1, 2, 5\}$.

Jeżeli istnieje taka liczba $a \in S$, że $r(a) = 5$, to liczby a , $f(a)$, $f^2(a)$, $f^3(a)$, $f^4(a)$ są różne; wyczerpują więc zbiór S . Wtedy dla dowolnej liczby $x \in S$, $r(x) = 5$. Funkcja f jest więc jednoznacznie wyznaczona przez permutację $(f(1), f^2(1), f^3(1), f^4(1))$ zbioru $\{2, 3, 4, 5\}$; zatem może być określona na $4! = 24$ sposoby.

Jeżeli dla wszystkich $x \in S$ zachodzi $r(x) = 1$, to f jest funkcją identycznościową. Taka funkcja jest **jedna**.

Pozostał do rozpatrzenia przypadek, w którym największa wartość osiągnięta przez funkcję r wynosi 2. Niech więc a będzie takim elementem zbioru S , że $r(a) = 2$. Wtedy także $r(b) = 2$, gdzie $b = f(a)$.

Jeżeli $r(x) = 1$ dla wszystkich $x \in S \setminus \{a, b\}$, to f jest wyznaczona przez wybór dwuelementowego podzbioru $\{a, b\}$ zbioru S , co można uczynić na $\binom{5}{2} = 10$ sposobów.

Jeżeli natomiast istnieje taka liczba $c \in S \setminus \{a, b\}$, że $r(c) = 2$, to przyjmując $d = f(c)$ oraz oznaczając przez e jedyny element zbioru $S \setminus \{a, b, c, d\}$, mamy

$$f(a) = b, \quad f(b) = a, \quad f(c) = d, \quad f(d) = c, \quad f(e) = e. \quad (1)$$

Taka funkcja f jest wyznaczona przez wybór liczby e (można to zrobić na 5 sposobów) oraz podział zbioru $S \setminus \{e\}$ na dwa podzbiory dwuelementowe $\{a, b\}$ i $\{c, d\}$ (istnieją 3 takie podziały). Dostajemy więc **15** funkcji postaci (1).

łącznie istnieje **50** funkcji spełniających warunki zadania.

* * * * *

6. Dla dowolnej liczby całkowitej $m \geq k$ liczba $\binom{m}{k}$ jest całkowita. Stąd dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej m liczba $m(m-1)(m-2)\dots(m-k+1)$ jest podzielna przez $k!$. Istnieją więc takie liczby całkowite $b_1, b_2, \dots, b_{k-1}$, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej m ,

$$m^k \equiv b_1 m + b_2 m^2 + \dots + b_{k-1} m^{k-1} \pmod{k!}.$$

Mnożąc powyższą kongruencję przez a_m , a następnie dodając stronami od $m = 1$ do $m = n$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} a_1 + 2^k a_2 + \dots + n^k a_n &\equiv b_1(a_1 + 2a_2 + \dots + na_n) + b_2(a_1 + 2^2 a_2 + \dots + n^2 a_n) + \dots \\ &\quad \dots + b_{k-1}(a_1 + 2^{k-1} a_2 + \dots + n^{k-1} a_n) = \\ &= 0 \pmod{k!}. \end{aligned}$$

(wp, jwr)

L Olimpiada Matematyczna

Zawody stopnia trzeciego

14 kwietnia 1999 r. – pierwszy dzień zawodów

Zadanie 1. Punkt D leży na boku BC trójkąta ABC , przy czym $AD > BC$. Punkt E leży na boku AC i spełnia warunek

$$\frac{AE}{EC} = \frac{BD}{AD - BC}.$$

Udowodnić, że $AD > BE$.

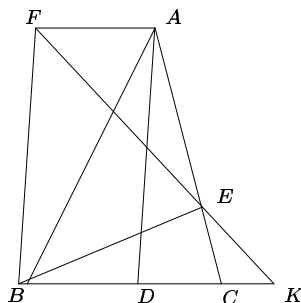
Rozwiązanie:

Uzupełniamy trójkąt BDA do równoległoboku $BDAF$. Na półprostej BC odkładamy odcinek BK o długości AD . Dana w zadaniu zależność przyjmuje teraz postać

$$\frac{AE}{EC} = \frac{AF}{CK}.$$

Z tej równości oraz z równoległości odcinków CK i AF wynika, że punkty F, E, K są współliniowe.

Punkt E leży więc na podstawie KF trójkąta równoramiennego BKF . Stąd dostajemy $BF > BE$, czyli $AD > BE$.



Zadanie 2. Dane są liczby całkowite nieujemne $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{101}$ mniejsze od 5050. Dowieść, że spośród nich można wybrać takie cztery różne a_k, a_l, a_m, a_n , że liczba $a_k + a_l - a_m - a_n$ jest podzielna przez 5050.

Rozwiązanie:

Rozważamy wszystkie wyrażenia postaci $a_k + a_l$, gdzie $1 \leq k < l \leq 101$. Takich wyrażeń jest $\binom{101}{2} = 5050$. Jeżeli znajdziemy wśród nich dwa, powiedzmy $a_k + a_l$ i $a_m + a_n$, których wartości dają tę samą resztę z dzielenia przez 5050, to liczby a_k, a_l, a_m, a_n spełniają warunki zadania — liczby te są bowiem parami różne (jeśli np. $a_k = a_m$, to także $a_l = a_n$, gdyż $0 \leq a_l, a_n < 5050$).

Pozostaje do rozpatrzenia przypadek, w którym wszystkie powyższe sumy dają różne reszty z dzielenia przez 5050. Wykażemy, że ten przypadek zachodzić nie może. Gdyby bowiem tak było, to rozważane sumy dawałyby wszystkie możliwe reszty z dzielenia przez 5050 — każdą jeden raz. Stąd

$$S = \sum_{1 \leq k < l \leq 101} (a_k + a_l) \equiv \sum_{i=0}^{5049} i = \frac{5049 \cdot 5050}{2} \equiv 2525 \pmod{5050},$$

co dowodzi, że S jest liczbą nieparzystą.

Z drugiej strony

$$S = \sum_{1 \leq k < l \leq 101} (a_k + a_l) = 100 \cdot \sum_{k=1}^{101} a_k ,$$

co oznacza, że S jest liczbą parzystą. Otrzymaliśmy sprzeczność.

Zadanie 3. Dowieść, że istnieją takie liczby naturalne $n_1 < n_2 < \dots < n_{50}$, że

$$n_1 + S(n_1) = n_2 + S(n_2) = n_3 + S(n_3) = \dots = n_{50} + S(n_{50}) ,$$

gdzie $S(n)$ jest sumą cyfr liczby n .

Rozwiązanie:

Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$a_1(k) = 10^{10^k+k+1} - 9 \cdot 10^k = \underbrace{9999\dots 99}_{10^k} \underbrace{1\,0000\dots 00}_k ,$$

$$a_2(k) = 10^{10^k+k+1} = \underbrace{1\,0000\dots 00}_{10^k+k+1} .$$

Wówczas $a_1(k) + S(a_1(k)) = a_2(k) + S(a_2(k)) = 10^{10^k+k+1} + 1$. Określamy liczby $k_0, k_1, k_2, \dots$ wzorami:

$$k_0 = 0 \quad \text{oraz} \quad k_{i+1} = 10^{k_i} + k_i + 2 \quad \text{dla} \quad i \geq 0 .$$

Dla dowolnego ciągu $\varepsilon = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_5)$, gdzie $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_5 \in \{1, 2\}$, przyjmijmy

$$n_\varepsilon = \sum_{i=0}^5 a_{\varepsilon_i}(k_i) .$$

Otrzymane w ten sposób 64 liczby n_ε są parami różne. Wykażemy, że dla wszystkich 64 ciągów ε , wielkości $n_\varepsilon + S(n_\varepsilon)$ są jednakowe.

Ponieważ dla $i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ liczba $a_{\varepsilon_i}(k_i)$ jest co najwyżej k_{i+1} -cyfrowa i ma co najmniej k_i zer końcowych, więc żadne dwie z liczb $a_{\varepsilon_i}(k_i)$ i $a_{\varepsilon_j}(k_j)$ (dla $i \neq j$) nie mają niezerowych cyfr na tym samym miejscu dziesiętnym. Stąd

$$S(n_\varepsilon) = \sum_{i=0}^5 S(a_{\varepsilon_i}(k_i)) .$$

Zatem

$$n_\varepsilon + S(n_\varepsilon) = \sum_{i=0}^5 (a_{\varepsilon_i}(k_i) + S(a_{\varepsilon_i}(k_i))) = 6 + \sum_{i=0}^5 10^{10^{k_i}+k_i+1} ,$$

co jest wielkością niezależną od ε .

(wp, jwr)

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{1 \leq i < j \leq n} (|a_j - b_i| + |b_j - a_i|) \leq \\
&\leq \sum_{1 \leq i < j \leq n} (|a_j - b_i| + |a_i - b_j|) + \sum_{1 \leq i \leq n} |a_i - b_i| = \\
&= \sum_{1 \leq i, j \leq n} |a_i - b_j|.
\end{aligned}$$

Zadanie 6. W sześciokącie wypukłym $ABCDEF$ zachodzą równości:

$$\sphericalangle A + \sphericalangle C + \sphericalangle E = 360^\circ, \quad \frac{AB}{BC} \cdot \frac{CD}{DE} \cdot \frac{EF}{FA} = 1.$$

$$\text{Dowieść, że } \frac{AB}{BF} \cdot \frac{FD}{DE} \cdot \frac{EC}{CA} = 1.$$

Rozwiązanie:

Na mocy założenia $\sphericalangle A + \sphericalangle C + \sphericalangle E = 360^\circ$, istnieje taki punkt P , że zachodzą następujące równości kątów (rysunek):

$$(1) \quad \sphericalangle BCP = \sphericalangle BAF, \quad \sphericalangle PCD = \sphericalangle FED, \quad \sphericalangle CDP = \sphericalangle EDF.$$

Trójkąty DEF i DCP są więc podobne, skąd dostajemy

$$(2) \quad \sphericalangle EDC = \sphericalangle FDP \quad \text{oraz} \quad \frac{ED}{DC} = \frac{FD}{DP}.$$

Korzystając z danej w treści zadania równości oraz z podobieństwa trójkątów EDF i CDP otrzymujemy

$$\frac{FA}{AB} = \frac{EF}{DE} \cdot \frac{CD}{BC} = \frac{CP}{CD} \cdot \frac{CD}{BC} = \frac{CP}{BC},$$

co na mocy pierwszej spośród równości (1) dowodzi, że trójkąty BAF i BCP są podobne. Zatem

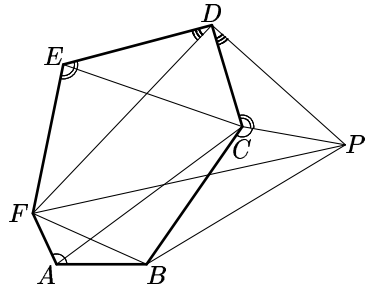
$$(3) \quad \sphericalangle CBA = \sphericalangle PBF \quad \text{oraz} \quad \frac{AB}{BC} = \frac{FB}{BP}.$$

Równości (2) oznaczają, że trójkąty EDC i FDP są podobne; z równości (3) wynika natomiast, że podobne są trójkąty CBA i PBF . Otrzymujemy więc odpowiednio następujące proporcje:

$$\frac{EC}{DE} = \frac{FP}{FD} \quad \text{oraz} \quad \frac{AB}{CA} = \frac{BF}{FP}.$$

Mnożąc stronami powyższe dwie równości dostajemy tezę.

(wp, jwr)



Zadania konkursowe

zawodów stopnia pierwszego

I seria

(okres od 11 września do 11 października 1999r.)

1. Dana jest liczba naturalna $n \geq 3$. Udowodnić, że suma sześciątów wszystkich liczb naturalnych mniejszych od n , względnie pierwszych z n dzieli się przez n .

2. W trójkącie ostrokątnym ABC spełniony jest warunek $\sphericalangle ACB = 2 \sphericalangle ABC$. Punkt D leży na boku BC przy czym $\sphericalangle BAD = \frac{1}{2} \sphericalangle ABC$. Dowieść, że

$$\frac{1}{BD} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}.$$

3. Suma liczb dodatnich a, b, c równa jest 1. Udowodnić, że $a^2 + b^2 + c^2 + 2\sqrt{3abc} \leq 1$.

4. Każdy punkt okręgu jest pomalowany jednym z trzech kolorów. Dowieść, że pewne trzy punkty jednego koloru są wierzchołkami trójkąta równoramiennego.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu) mają być wysłane pod adresem właściwego komitetu okręgowego Olimpiady najpóźniej do dnia

11 października 1999r.

Rozwiązania przesłane w późniejszym terminie nie będą rozpatrywane.

II seria

(okres od 12 października do 10 listopada 1999r.)

5. Wyznaczyć wszystkie pary (a, b) liczb naturalnych, dla których liczby $a^3 + 6ab + 1$ i $b^3 + 6ab + 1$ są sześciątami liczb naturalnych.

6. Punkt X leży wewnątrz lub na brzegu trójkąta ABC , w którym kąt C jest prosty. Punkty P, Q i R są odpowiednio rzutami punktu X na boki BC, CA i AB . Udowodnić, że równość $AR \cdot RB = BP \cdot PC + AQ \cdot QC$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy punkt X leży na boku AB .

7. Wykazać, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n i dowolnej liczby $t \in (\frac{1}{2}, 1)$ istnieją takie liczby $a, b \in (1999, 2000)$, że

$$\frac{1}{2}a^n + \frac{1}{2}b^n < (ta + (1-t)b)^n.$$

8. Liczby $c(n, k)$ są określone dla liczb całkowitych nieujemnych $n \geq k$ w ten sposób, że zachodzą równości:

$$\begin{aligned} c(n, 0) &= c(n, n) = 1 && \text{dla każdej liczby } n \geq 0, \\ c(n+1, k) &= 2^k c(n, k) + c(n, k-1) && \text{dla } n \geq k \geq 1. \end{aligned}$$

Dowieść, że $c(n, k) = c(n, n-k)$ dla $n \geq k \geq 0$.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu) mają być wysłane pod adresem właściwego komitetu okręgowego Olimpiady najpóźniej do dnia

10 listopada 1999r.

Rozwiązania przesłane w późniejszym terminie nie będą rozpatrywane.

III seria

(okres od 11 listopada do 10 grudnia 1999r.)

9. Dane są takie liczby całkowite dodatnie m i n , że $mn|m^2 + n^2 + m$. Wykazać, że m jest kwadratem liczby całkowitej.

10. W przestrzeni dane są trzy wzajemnie prostopadłe wektory jednostkowe $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$. Niech ω będzie płaszczyzną przechodzącą przez punkt O , zaś A' , B' , C' – rzutami punktów A , B , C odpowiednio na płaszczyznę ω . Wyznaczyć zbiór wartości wyrażenia $OA'^2 + OB'^2 + OC'^2$ dla wszystkich płaszczyzn ω .

11. Dana jest liczba całkowita dodatnia n oraz zbiór M , złożony z n^2+1 liczb całkowitych dodatnich i mający następującą własność: wśród $n+1$ liczb dowolnie wybranych ze zbioru M znajduje się para liczb, z których jedna dzieli się przez drugą. Udowodnić, że w zbiorze M istnieją różne liczby $a_1, \dots, a_{n+1}$ spełniające warunek: dla $i = 1, \dots, n$ liczba a_i dzieli się przez a_{i+1} .

12. W trójkącie ostrokątnym ABC punkty D , E , F leżą odpowiednio na bokach BC , CA , AB . Okręgi opisane na trójkątach AEF , BFD , CDE przecinają się w punkcie P . Udowodnić, że jeżeli

$$\frac{PD}{PE} = \frac{BD}{AE}, \quad \frac{PE}{PF} = \frac{CE}{BF}, \quad \frac{PF}{PD} = \frac{AF}{CD},$$

to AD , BE , CF są wysokościami trójkąta ABC .

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu) mają być wysłane pod adresem właściwego komitetu okręgowego Olimpiady najpóźniej do dnia

10 listopada 1999r.

Rozwiązania przesłane w późniejszym terminie nie będą rozpatrywane.

.....



LI OLIMPIADA MATEMATYCZNA

Do Pani/Pana Dyrektora Szkoły
Do Pani/Pana Profesora Matematyki

Komitet Główny Olimpiady Matematycznej uprzejmie prosi o zapoznanie uczniów i nauczycieli zainteresowanych zadaniami Olimpiady z podanymi tu rozwiązaniami zadań konkursowych stopnia pierwszego LI Olimpiady Matematycznej.

W dalszej części niniejszego druku podajemy teksty zadań z zawodów międzynarodowych: XL Międzynarodowej Olimpiady Matematycznej i XXII Austriacko-Polskich Zawodów Matematycznych, a także z X Zawodów Matematycznych Państw Bałtyckich (*Baltic Way '99*).

Zawody pierwszego stopnia LI Olimpiady Matematycznej są zakończone. Zawody stopnia drugiego odbędą się w dniach 25 i 26 lutego 2000 r. Zawody stopnia trzeciego odbędą się w dniach 3 i 4 kwietnia 2000 r.

Zawiadomienia o dokładnym terminie i miejscu zawodów stopnia drugiego wyślą komitety okręgowe zakwalifikowanym zawodnikom w terminie do dnia 10 lutego 2000 r.

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w internecie pod adresem:

www.impan.gov.pl/~olimp/

Komitet Główny Olimpiady Matematycznej

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia pierwszego LI Olimpiady Matematycznej

Zadanie 1. Dana jest liczba naturalna $n \geq 3$. Udowodnić, że suma sześciątów wszystkich liczb naturalnych mniejszych od n , względnie pierwszych z n , dzieli się przez n .

Rozwiązanie

Każda liczba naturalna mniejsza od n i względnie pierwsza z n jest równa k lub $n - k$, gdzie k jest pewną liczbą naturalną mniejszą od $n/2$ i względnie pierwszą z n . Zatem dana w zadaniu suma sześciątów jest równa

$$\sum_{\substack{1 \leq k < n/2 \\ (k, n) = 1}} k^3 + (n - k)^3 = \sum_{\substack{1 \leq k < n/2 \\ (k, n) = 1}} n^3 - 3kn^2 + 3k^2n = n \cdot \sum_{\substack{1 \leq k < n/2 \\ (k, n) = 1}} n^2 - 3kn + 3k^2,$$

a więc jest podzielna przez n .

Zadanie 2. W trójkącie ostrokątnym ABC spełniony jest warunek

$$\sphericalangle ACB = 2 \sphericalangle ABC.$$

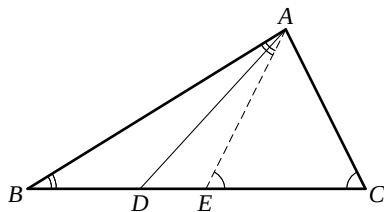
Punkt D leży na boku BC , przy czym $\sphericalangle BAD = \frac{1}{2} \sphericalangle ABC$. Dowieść, że

$$(1) \quad \frac{1}{BD} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}.$$

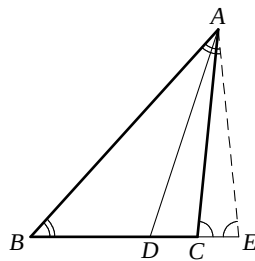
Rozwiązanie

Wykażemy, że równość (1) jest prawdziwa dla dowolnego trójkąta ABC , niekoniecznie ostrokątnego.

Niech E będzie takim punktem półprostej $BC^{\rightarrow}$, że AD jest dwusieczną kąta BAE (rys. 1 i 2).



rys. 1



rys. 2

Wówczas $\sphericalangle EBA = \sphericalangle EAB$. Jeżeli punkt E leży na boku BC (rys. 1), to

$$\sphericalangle AEC = 2 \sphericalangle ABC = \sphericalangle ACE.$$

Jeśli natomiast punkt E nie leży na boku BC (rys. 2), to

$$\sphericalangle AEC = 180^\circ - 2 \sphericalangle ABE = 180^\circ - \sphericalangle ACB = \sphericalangle ACE.$$

Zatem w obu przypadkach $BE = AE = AC$. Na mocy twierdzenia o dwusiecznej otrzymujemy

$$\frac{BD}{AB} + \frac{BD}{AC} = \frac{DE}{AE} + \frac{BD}{AE} = \frac{BE}{AE} = 1,$$

co należało udowodnić.

Zadanie 3. Suma liczb dodatnich a, b, c równa jest 1. Udowodnić, że

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2\sqrt{3abc} \leq 1.$$

Rozwiązanie

Wystarczy dowieść, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c zachodzi nierówność

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2\sqrt{3abc(a+b+c)} \leq (a+b+c)^2.$$

Przekształcając równoważnie powyższą zależność otrzymujemy

$$\sqrt{3abc(a+b+c)} \leq ab + bc + ca.$$

Wykonując podstawienie $x = bc, y = ca, z = ab$, sprowadzamy dowodzoną nierówność do postaci

$$\sqrt{3(xy + yz + zx)} \leq x + y + z.$$

Podnosząc do kwadratu obie strony ostatniej nierówności i przekształcając równoważnie otrzymujemy

$$xy + yz + zx \leq x^2 + y^2 + z^2 \quad \text{lub} \quad (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \geq 0,$$

co jest prawdą.

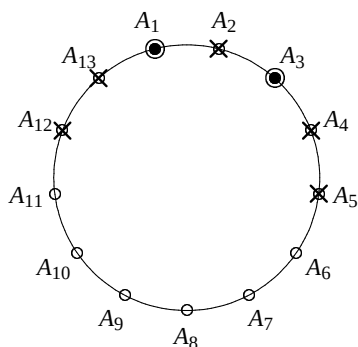
Zadanie 4. Każdy punkt okręgu jest pomalowany jednym z trzech kolorów. Dowieść, że pewne trzy punkty jednego koloru są wierzchołkami trójkąta równoramiennego.

Rozwiązanie

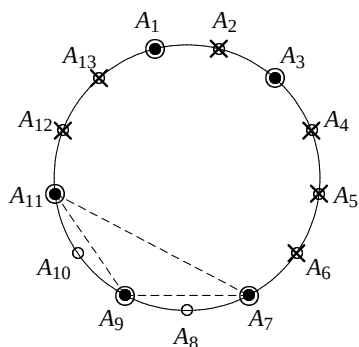
Niech $A_1, A_2, \dots, A_{13}$ będą wierzchołkami dowolnego 13-kąta foremnego wpisanego w dany okrąg. Wykażemy, że wśród dowolnych pięciu wierzchołków tego 13-kąta znajdują się trzy będące wierzchołkami trójkąta równoramiennego. Ponieważ wśród dowolnych trzynastu punktów danego okręgu zawsze znajdzie się pięć pomalowanych tym samym kolorem, zadanie zostanie rozwiązane.

Przypuśćmy więc, że udało się tak wybrać pięć wierzchołków spośród $A_1, A_2, \dots, A_{13}$, że żadne trzy spośród wybranych punktów nie tworzą trójkąta równoramiennego.

Załóżmy najpierw, że wśród wybranych punktów nie ma dwóch sąsiednich wierzchołków 13-kąta $A_1 A_2 \dots A_{13}$. Wówczas wśród wybranych punktów znajdziemy dwa oddzielone dokładnie jednym wierzchołkiem, który nie został wybrany. Bez szkody dla ogólności rozumowania, możemy przyjąć, że są to A_1 i A_3 . Ponieważ żadne trzy wybrane wierzchołki nie tworzą trójkąta równoramiennego, więc nie został wybrany żaden z punktów: $A_{12}, A_{13}, A_2, A_4, A_5$ (rys. 1).



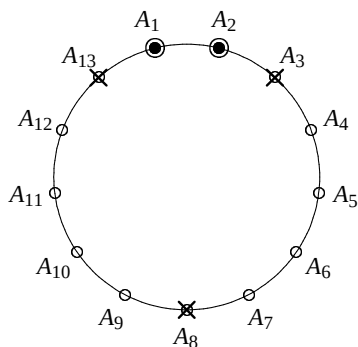
rys. 1



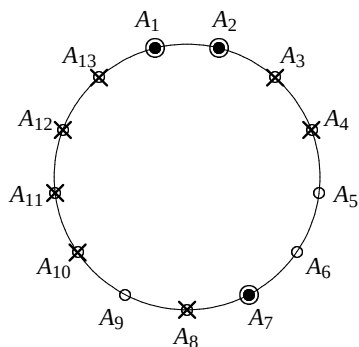
rys. 2

Ponieważ trójkąt $A_1A_6A_{11}$ jest równoramienny, więc co najmniej jeden z wierzchołków A_6 , A_{11} nie został wybrany. Bez straty ogólności rozumowania możemy przyjąć, że tym wierzchołkiem jest A_6 . Zatem spośród pięciu punktów A_7 , A_8 , A_9 , A_{10} , A_{11} dokładnie trzy zostały wybrane, przy czym żadne dwa z nich nie są kolejnymi wierzchołkami 13-kąta $A_1A_2 \dots A_{13}$. Musiały więc zostać wybrane punkty A_7 , A_9 , A_{11} . To jednak nie jest możliwe, gdyż punkty te tworzą trójkąt równoramienny (rys. 2). Otrzymaliśmy sprzeczność.

Pozostał do rozpatrzenia przypadek, w którym wśród wybranych wierzchołków znajdują się dwa sąsiednie, powiedzmy A_1 i A_2 . Oznacza to, że nie został wybrany żaden z wierzchołków: A_{13} , A_3 , A_8 (rys. 3).



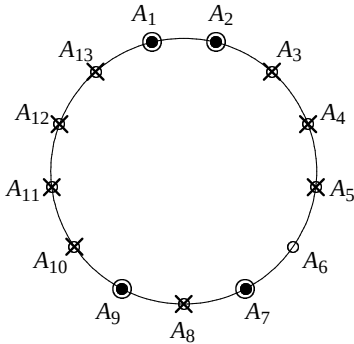
rys. 3



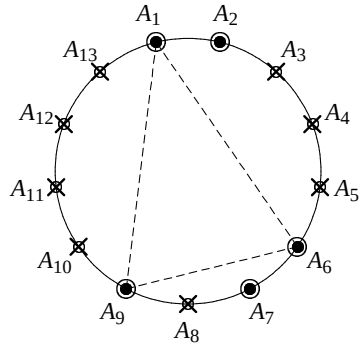
rys. 4

Ponieważ trójkąty $A_2A_4A_6$, $A_1A_6A_{11}$, $A_{11}A_1A_4$ są równoramienne, więc został wybrany co najwyżej jeden z punktów: A_4 , A_6 , A_{11} . Analogicznie stwierdzamy, że został wybrany co najwyżej jeden z punktów: A_5 , A_{10} , A_{12} . Zatem wybrany być musiał co najmniej jeden z punktów A_7 , A_9 . Bez straty ogólności przyjmijmy, że został wybrany punkt A_7 (rys. 4). Równoramiennosc trójkątów: $A_1A_4A_7$, $A_2A_{10}A_7$, $A_2A_{11}A_7$ oraz $A_2A_{12}A_7$ dowodzi, że nie wybrano punktów: A_4 , A_{10} , A_{11} oraz A_{12} .

Zatem wśród wybranych pięciu punktów muszą być dwa spośród A_5, A_6, A_9 . Z uwagi na równoramiennność trójkąta $A_5A_6A_7$ wybrany mógł być tylko jeden z punktów A_5, A_6 . Zatem wybranym punktem jest A_9 (rys. 5). To z kolei oznacza, że nie został wybrany punkt A_5 , gdyż trójkąt $A_5A_7A_9$ jest równoramienny.



rys. 5



rys. 6

Tak więc piątym z wybranych punktów musi być A_6 , co daje sprzeczność, gdyż trójkąt $A_9A_1A_6$ jest równoramienny (rys. 6).

Tym samym wykazaliśmy, że wybór pięciu wierzchołków 13-kąta, z których żadne trzy nie wyznaczają trójkąta równoramiennego, nie jest możliwy, co kończy rozwiązanie zadania.

Zadanie 5. Wyznaczyć wszystkie pary (a, b) liczb naturalnych, dla których liczby $a^3 + 6ab + 1$ i $b^3 + 6ab + 1$ są sześcianami liczb naturalnych.

Rozwiązanie

Niech a i b będą liczbami spełniającymi warunki zadania. Bez szkody dla ogólności rozumowania możemy założyć, że $a \leq b$. Wówczas

$$b^3 < b^3 + 6ab + 1 \leq b^3 + 6b^2 + 1 < b^3 + 6b^2 + 12b + 8 = (b + 2)^3.$$

Skoro liczba $b^3 + 6ab + 1$ jest sześcianem liczby całkowitej, to musi zachodzić równość

$$(1) \quad b^3 + 6ab + 1 = (b + 1)^3,$$

Przekształcając równoważnie powyższy związek otrzymujemy po kolei

$$b^3 + 6ab + 1 = b^3 + 3b^2 + 3b + 1$$

$$2ab = b(b + 1)$$

$$(2) \quad b = 2a - 1$$

Pozostaje rozstrzygnąć, dla jakich par (a, b) spełniających warunek (2) liczba

$$a^3 + 6ab + 1$$

jest sześcianem liczby całkowitej. Na mocy zależności (2) powyższa liczba jest równa $a^3 + 12a^2 - 6a + 1$. Z nierówności

$$a^3 \leq a^3 + 6a^2 - 6a < a^3 + 12a^2 - 6a + 1 < a^3 + 12a^2 + 48a + 64 = (a + 4)^3$$

wynika, że jeżeli liczba $a^3 + 12a^2 - 6a + 1$ jest sześcianem liczby całkowitej, to jest ona równa $(a + 1)^3$, $(a + 2)^3$ lub $(a + 3)^3$. Należy więc rozważyć trzy przypadki:

$$(a) \quad a^3 + 12a^2 - 6a + 1 = (a + 1)^3.$$

Wówczas otrzymujemy $9a^2 - 9a = 0$, skąd $a = 0$ lub $a = 1$.

$$(b) \quad a^3 + 12a^2 - 6a + 1 = (a + 2)^3.$$

Stąd mamy $6a^2 - 18a - 7 = 0$. Uzyskane równanie nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych, gdyż lewa strona nie jest podzielna przez 3, a prawa jest.

$$(c) \quad a^3 + 12a^2 - 6a + 1 = (a + 3)^3.$$

Wtedy uzyskujemy $3a^2 - 33a - 26 = 0$. Podobnie jak w przypadku (b), otrzymane równanie nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych, gdyż lewa strona nie jest podzielna przez 3, a prawa jest równa 0.

Ostatecznie znaleźliśmy tylko jedną parę $(a, b) = (1, 1)$ spełniającą warunki zadania.

Zadanie 6. Punkt X leży wewnątrz lub na brzegu trójkąta ABC , w którym kąt C jest prosty. Punkty P , Q i R są odpowiednio rzutami punktu X na boki BC , CA i AB . Udowodnić, że równość

$$AR \cdot RB = BP \cdot PC + AQ \cdot QC$$

zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy punkt X leży na boku AB .

Rozwiązanie

Wprowadźmy dla zwięzłości zapisu następujące oznaczenie:

$$w = 2 \cdot (AR \cdot RB - BP \cdot PC - AQ \cdot QC).$$

Należy wykazać, że $w = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $XR = 0$.

Na mocy twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy zależność (rys. 1):

$$(AR + RB)^2 = (AQ + QC)^2 + (CP + PB)^2.$$

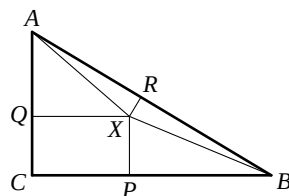
Przekształcając równoważnie powyższą równość uzyskujemy po kolei:

$$w = AQ^2 + QC^2 + CP^2 + PB^2 - AR^2 - RB^2$$

$$w = AQ^2 + PX^2 + QX^2 + PB^2 - AR^2 - RB^2$$

$$w = AX^2 + BX^2 - AR^2 - RB^2$$

$$w = 2XR^2$$



rys. 1

Z ostatniej równości wynika natychmiast, że $w = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $XR = 0$.

Zadanie 7. Wykazać, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n i dowolnej liczby $t \in (\frac{1}{2}, 1)$ istnieją takie liczby $a, b \in (1999, 2000)$, że

$$\frac{1}{2}a^n + \frac{1}{2}b^n < (ta + (1-t)b)^n.$$

Rozwiązanie

Niech $c = 3999/2$. Liczb a, b szukamy w postaci $a = c + x$, $b = c - x$, gdzie $x \in (0, \frac{1}{2})$. Wówczas

$$\begin{aligned} (ta + (1-t)b)^n - \frac{1}{2}a^n - \frac{1}{2}b^n &= \\ &= (ct + tx + (1-t)c - (1-t)x)^n - \frac{1}{2}(c+x)^n - \frac{1}{2}(c-x)^n = \\ &= (c + (2t-1)x)^n - \frac{1}{2}(c+x)^n - \frac{1}{2}(c-x)^n = \\ &= (c + sx)^n - \frac{1}{2}(c+x)^n - \frac{1}{2}(c-x)^n, \end{aligned}$$

gdzie $s = 2t - 1 > 0$. Po rozpisaniu ze wzoru dwumianowego Newtona ostatnie wyrażenie przyjmuje postać

$$(1) \quad w(x) = sx + x^2 p(x),$$

gdzie $p(x)$ jest pewnym wielomianem.

Chcemy wykazać, że dla pewnej liczby $y \in (0, \frac{1}{2})$, liczba $w(y)$ jest dodatnia. Z równości (1) wynika, że

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{w(x)}{x} = s > 0.$$

Zatem istnieje taka liczba $y \in (0, \frac{1}{2})$, że wyrażenie $w(y)/y$, a co za tym idzie również wyrażenie $w(y)$, ma wartość dodatnią. To zaś kończy dowód.

Zadanie 8. Liczby $c(n, k)$ są określone dla liczb całkowitych nieujemnych $n \geq k$ w ten sposób, że zachodzą równości:

$$\begin{aligned} c(n, 0) &= c(n, n) = 1 \quad \text{dla każdej liczby } n \geq 0, \\ c(n+1, k) &= 2^k c(n, k) + c(n, k-1) \quad \text{dla } n \geq k \geq 1. \end{aligned}$$

Dowieść, że $c(n, k) = c(n, n-k)$ dla $n \geq k \geq 0$.

Rozwiązanie

Niech f będzie funkcją określoną na zbiorze liczb całkowitych nieujemnych zdefiniowaną wzorami:

$$f(0) = 1, \quad f(m) = (2^1 - 1)(2^2 - 1) \cdots (2^m - 1) \quad \text{dla } m \geq 1.$$

Niech ponadto

$$a(n, k) = \frac{f(n)}{f(k)f(n-k)} \quad \text{dla } n \geq k \geq 0.$$

Wówczas $a(n, k) = a(n, n-k)$. Wykażemy, że $a(n, k) = c(n, k)$.

Ponieważ warunki dane w treści zadania wyznaczają jednoznacznie liczby $c(n, k)$, więc wystarczy dowieść, że liczby $a(n, k)$ spełniają te same warunki.

Oczywiście $a(n, 0) = a(n, n) = 1$. Ponadto

$$\begin{aligned} 2^k a(n, k) + a(n, k-1) &= \frac{2^k f(n)}{f(k) f(n-k)} + \frac{f(n)}{f(k-1) f(n-k+1)} = \\ &= \frac{2^k f(n)(2^{n-k+1} - 1)}{f(k) f(n-k)(2^{n-k+1} - 1)} + \frac{f(n)(2^k - 1)}{f(k-1)(2^k - 1) f(n-k+1)} = \\ &= f(n) \cdot \frac{2^k(2^{n-k+1} - 1) + (2^k - 1)}{f(k) f(n-k+1)} = \\ &= f(n) \cdot \frac{2^{n+1} - 1}{f(k) f(n+1-k)} = \frac{f(n+1)}{f(k) f(n+1-k)} = a(n+1, k), \end{aligned}$$

co dowodzi, że $a(n, k) = c(n, k)$.

Zadanie 9. Dane są takie liczby całkowite dodatnie m i n , że $mn \mid m^2 + n^2 + m$. Wykazać, że m jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie

Niech d będzie największym wspólnym dzielnikiem liczb m i n . Wówczas $d^2 \mid mn$, a zatem $d^2 \mid m^2 + n^2 + m$. Stąd wobec podzielności $d^2 \mid m^2$ oraz $d^2 \mid n^2$ otrzymujemy $d^2 \mid m$.

Z drugiej strony, $m \mid m^2 + n^2 + m$, skąd uzyskujemy podzielność $m \mid n^2$. Zatem m jest wspólnym dzielnikiem liczb n^2 i m^2 . To oznacza, że największy wspólny dzielnik liczb m^2 i n^2 , który jest równy d^2 , jest podzielny przez m . Wobec wyżej udowodnionej podzielności $d^2 \mid m$ otrzymujemy $m = d^2$.

Zadanie 10. W przestrzeni dane są trzy wzajemnie prostopadłe wektory jednostkowe $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$. Niech ω będzie płaszczyzną przechodzącą przez punkt O , zaś A' , B' , C' – rzutami punktów A , B , C odpowiednio na płaszczyznę ω . Wyznaczyć zbiór wartości wyrażenia

$$(1) \quad (OA')^2 + (OB')^2 + (OC')^2$$

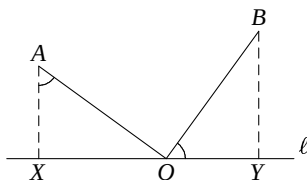
dla wszystkich płaszczyzn ω .

Rozwiązanie

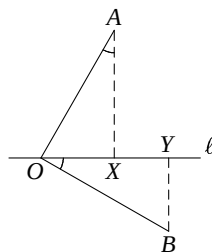
Wykażemy, że wartość wyrażenia (1) jest równa 2, niezależnie od wyboru płaszczyzny ω .

Niech ω będzie dowolną płaszczyzną przechodzącą przez punkt O , zaś π płaszczyzną zawierającą punkty O , A , B . Oznaczmy przez ℓ wspólną prostą płaszczyzn π i ω . Niech X , Y będą rzutami prostokątnymi odpowiednio punktów A , B na prostą ℓ . Wówczas, niezależnie od położenia punktów A , B względem prostej ℓ (rys. 1 i 2),

$$\sphericalangle OAX = 90^\circ - \sphericalangle AOX = \sphericalangle BOY = \alpha.$$



rys. 1



rys. 2

Stąd

$$(2) \quad AX^2 + BY^2 = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1.$$

Ponadto $\sphericalangle AXA' = \sphericalangle BYB' = (\text{ką t pomiędzy płaszczyznami } \pi \text{ i } \omega) = \beta$. Zatem na mocy równości (2),

$$(AA')^2 + (BB')^2 = AX^2 \sin^2 \beta + BY^2 \sin^2 \beta = \sin^2 \beta.$$

Na mocy twierdzenia Pitagorasa oraz powyższej równości otrzymujemy

$$(3) \quad (OA')^2 + (OB')^2 = 2 - (AA')^2 - (BB')^2 = 2 - \sin^2 \beta.$$

Wektor $\overrightarrow{OC'}$ jest prostopadły do płaszczyzny π , skąd $\sphericalangle COC' = 90^\circ - \beta$. Zatem

$$(4) \quad (OC')^2 = \cos^2(90^\circ - \alpha) = \sin^2 \beta.$$

Dodając stronami równości (3) i (4) uzyskujemy

$$(OA')^2 + (OB')^2 + (OC')^2 = 2,$$

niezależnie od wyboru płaszczyzny ω .

Zadanie 11. Dana jest liczba całkowita dodatnia n oraz zbiór M , złożony z n^2+1 różnych liczb całkowitych dodatnich i mający następującą własność: wśród $n+1$ liczb dowolnie wybranych ze zbioru M znajduje się para liczb, z których jedna dzieli się przez drugą. Udowodnić, że w zbiorze M istnieją różne liczby $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$ spełniające warunek: dla $i = 1, 2, \dots, n$ liczba a_i dzieli się przez a_{i+1} .

Rozwiązanie

Niech $k \in M$. Oznaczmy przez $d(k)$ największą liczbę naturalną ℓ , dla której istnieją różne liczby $a_1 = k, a_2, a_3, \dots, a_\ell$ spełniające warunek: dla $i = 1, 2, \dots, \ell-1$ liczba a_i dzieli się przez a_{i+1} .

Przypuśćmy, że teza zadania nie jest spełniona. To oznacza, że dla dowolnego $k \in M$ mamy $1 \leq d(k) \leq n$. Wówczas na mocy zasady szufladkowej, istnieją takie różne liczby $k_1, k_2, \dots, k_{n+1}$, że

$$d(k_1) = d(k_2) = \dots = d(k_{n+1}) = m.$$

Z założeń zadania wynika, że dla pewnych różnych liczb s, t zachodzi podzielność $k_s \mid k_t$. Warunek $d(k_s) = m$ oznacza, że istnieją liczby $a_1 = k_s, a_2,$

$\dots, a_m$ spełniające: dla $i = 1, 2, \dots, m-1$ liczba a_i dzieli się przez a_{i+1} . Jednak wtedy liczby $b_1 = k_t, b_2 = a_1 = k_s, b_3 = a_2, \dots, b_{m+1} = a_m$ spełniają warunek: dla $i = 1, 2, \dots, m$ liczba b_i dzieli się przez b_{i+1} . To dowodzi, że $d(k_t) \geq m+1$ wbrew założeniu, że $d(k_t) = m$.

Otrzymaliśmy sprzeczność.

Zadanie 12. W trójkącie ostrokątnym ABC punkty D, E, F leżą odpowiednio na bokach BC, CA, AB . Okręgi opisane na trójkątach AEF, BFD, CDE przecinają się w punkcie P . Udowodnić, że jeżeli

$$\frac{PD}{PE} = \frac{BD}{AE}, \quad \frac{PE}{PF} = \frac{CE}{BF}, \quad \frac{PF}{PD} = \frac{AF}{CD},$$

to AD, BE, CF są wysokościami trójkąta ABC .

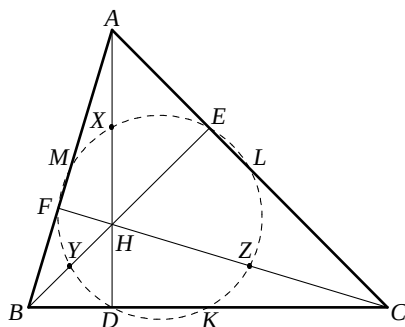
Rozwiązanie

Wykorzystamy następujące

Twierdzenie

Wysokości AD, BE, CF trójkąta ABC przecinają się w punkcie H . Punkty K, L, M są odpowiednio środkami boków BC, CA, AB . Punkty X, Y, Z są odpowiednio środkami odcinków AH, BH, CH . Wówczas następujące punkty: $D, E, F, K, L, M, X, Y, Z$ leżą na jednym okręgu (rys. 1).

Okrąg ten nazywa się *okręgiem dziewięciu punktów* trójkąta ABC .

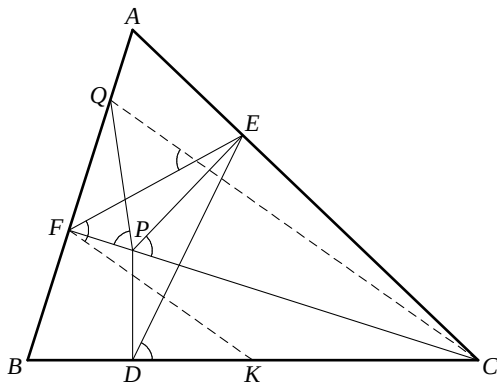


rys. 1

Z powyższego twierdzenia wynika, że jeśli okrąg przechodzący przez środki boków trójkąta ostrokątnego ABC przecina obwód tego trójkąta po raz drugi w punktach D, E, F , to punkty D, E, F są spodkami wysokości trójkąta ABC .

Przystępujemy do rozwiązania zadania.

Na półprostej $FA^{\rightarrow}$ odkładamy taki punkt Q , aby zachodziła następująca równość kątów: $\sphericalangle FPQ = \sphericalangle EPC$ (rys. 2).



rys. 2

Punkty A, E, P, F leżą na jednym okręgu, więc $\sphericalangle QFP = \sphericalangle CEP$. Z powyższych równości wynika, że trójkąty PQF oraz PCE są podobne. Zatem

$$\frac{PF}{PE} = \frac{PQ}{PC}.$$

Ponadto $\sphericalangle FPE = \sphericalangle QPC$. Z dwóch ostatnich równości wynika, że trójkąty PFE oraz PQC są podobne. Z zależności w treści zadania oraz z podobieństwa trójkątów PQF, PCE otrzymujemy

$$\frac{BF}{CE} = \frac{PF}{PE} = \frac{QF}{CE},$$

skąd $BF = QF$. Zatem punkt F jest środkiem odcinka BQ .

Niech K będzie środkiem boku BC . Wówczas proste KF oraz CQ są równoległe. Zatem kąt EFK jest równy kątowi pomiędzy prostymi FE oraz CQ . Natomiast na mocy podobieństwa trójkątów PFE oraz PQC , kąt pomiędzy prostymi FE oraz CQ jest równy kątowi pomiędzy odcinkami PE i PC , czyli kątowi EPC . Punkty E, P, D, C leżą na jednym okręgu, skąd wynika równość $\sphericalangle EPC = \sphericalangle EDC$.

Z powyższych rozważań uzyskujemy zależność $\sphericalangle EFK = \sphericalangle EDC$. Dowodzi ona, że punkty D, K, E, F leżą na jednym okręgu, niezależnie od tego, z której strony punktu K leży punkt D . Jeżeli $K = D$, to okrąg opisany na trójkącie DEF jest styczny do prostej BC w punkcie D .

Innymi słowy: okrąg opisany na trójkącie DEF przechodzi przez punkt D oraz środek boku BC i nigdzie indziej nie przecina prostej BC . Analogicznie dowodzimy, że ten sam okrąg przechodzi przez środki pozostałych boków. Poza punktami D, E, F oraz środkami boków trójkąta ABC okrąg ten nie ma punktów wspólnych z obwodem trójkąta ABC .

Wykazaliśmy więc, że okrąg przechodzący przez środki boków trójkąta ABC przecina jego obwód po raz drugi w punktach D, E, F . To zaś dowodzi, że proste AD, BE, CF są wysokościami trójkąta ABC .

Zadania z XL Międzynarodowej Olimpiady Matematycznej

Bukareszt (Rumunia), 16–17 lipca 1999 r.

1. Wyznaczyć wszystkie zbiory skończone S na płaszczyźnie, złożone z co najmniej trzech punktów i spełniające następujący warunek: Dla każdych dwóch różnych punktów A i B zbioru S , symetralna odcinka AB jest osią symetrii zbioru S .

2. Niech $n \geq 2$ będzie ustaloną liczbą naturalną.

(a) Wyznaczyć najmniejszą stałą C taką, że nierówność

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leq C \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^4$$

zachodzi dla dowolnych liczb rzeczywistych $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$.

(b) Dla tej stałej C ustalić, kiedy zachodzi równość.

3. Rozważmy planszę kwadratową $n \times n$, gdzie n jest daną dodatnią liczbą całkowitą parzystą. Plansza jest podzielona na n^2 kwadratów jednostkowych. Dwa różne kwadraty planszy są *przyległe*, gdy mają wspólny bok. N kwadratów planszy zostało wyróżnionych w taki sposób, by każdy kwadrat planszy (wyróżniony lub nie) był przyległy do co najmniej jednego kwadratu wyróżnionego. Wyznaczyć najmniejszą możliwą wartość N .

4. Wyznaczyć wszystkie takie pary (n, p) liczb całkowitych dodatnich, że: p jest liczbą pierwszą, $n \leq 2p$ oraz $(p-1)^n + 1$ dzieli się przez n^{p-1} .

5. Okręgi Γ_1 i Γ_2 są położone wewnątrz okręgu Γ i są odpowiednio styczne do Γ w różnych punktach M i N . Okrąg Γ_1 przechodzi przez środek okręgu Γ_2 . Prosta przechodząca przez punkty przecięcia okręgów Γ_1 i Γ_2 przecina okrąg Γ w punktach A i B . Proste MA i MB przecinają Γ_1 odpowiednio w punktach C i D . Udowodnić, że prosta CD jest styczna do okręgu Γ_2 .

6. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, że

$$f(x - f(y)) = f(f(y)) + xf(y) + f(x) - 1$$

dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$.

Zadania z XXII Austriacko-Polskich Zawodów Matematycznych

Spittal/Drau (Austria), 30 czerwca–2 lipca 1999 r.

1. Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią i niech $M = \{1, 2, \dots, n\}$. Wyznaczyć liczbę uporządkowanych szóstek zbiorów $(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6)$ spełniających następujące dwa warunki:

(a) zbiory $A_1, A_2, \dots, A_6$ są (niekoniecznie różnymi) podzbiarami zbioru M ;

(b) każdy element zbioru M albo nie należy do żadnego, albo należy do dokładnie trzech, albo należy do wszystkich sześciu zbiorów $A_1, A_2, \dots, A_6$.

2. Wyznaczyć największą liczbę rzeczywistą C_1 i najmniejszą liczbę rzeczywistą C_2 takie, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c, d, e zachodzą następujące nierówności

$$C_1 < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+d} + \frac{d}{d+e} + \frac{e}{e+a} < C_2$$

3. Dana jest liczba naturalna $n \geq 2$. Wyznaczyć wszystkie takie układy n funkcji $(f_1, f_2, \dots, f_n)$, gdzie $f_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dla każdego $i = 1, 2, \dots, n$, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y spełnione są następujące równości:

$$\begin{aligned} f_1(x) - f_2(x)f_2(y) + f_1(y) &= 0 \\ f_2(x^2) - f_3(x)f_3(y) + f_2(y^2) &= 0 \\ \dots\dots\dots \\ f_k(x^k) - f_{k+1}(x)f_{k+1}(y) + f_k(y^k) &= 0 \\ \dots\dots\dots \\ f_n(x^n) - f_1(x)f_1(y) + f_n(y^n) &= 0 \end{aligned}$$

4. Dany jest trójkąt ABC . Przez punkt P leżący wewnątrz trójkąta ABC prowadzimy trzy proste k, l, m w taki sposób, że:

- (a) prosta k przecina proste AB i AC odpowiednio w takich punktach A_1 i A_2 ($A_1 \neq A_2$), że $PA_1 = PA_2$;
- (b) analogicznie prosta l przecina proste BC i BA odpowiednio w takich punktach B_1 i B_2 ($B_1 \neq B_2$), że $PB_1 = PB_2$;
- (c) analogicznie prosta m przecina proste CA i CB odpowiednio w takich punktach C_1 i C_2 ($C_1 \neq C_2$), że $PC_1 = PC_2$.

Udowodnić, że proste k, l, m są przez te warunki wyznaczone jednoznacznie. Wyznaczyć punkt P (i udowodnić, że jest tylko jeden taki punkt), dla którego trójkąty $AA_1A_2, BB_1B_2, CC_1C_2$ mają równe pola.

5. Ciąg liczb całkowitych (a_n) spełnia następującą zależność rekurencyjną:

$$a_{n+1} = a_n^3 + 1999$$

dla $n = 1, 2, \dots$. Udowodnić, że istnieje co najwyżej jedna wartość n , dla której a_n jest kwadratem liczby całkowitej.

6. Rozwiązać następujący układ równań

$$\begin{aligned} x_n^2 + x_n x_{n-1} + x_{n-1}^4 &= 1 \quad (n = 1, 2, \dots, 1999) \\ x_0 &= x_{1999} \end{aligned}$$

w zbiorze liczb rzeczywistych nieujemnych.

7. Wyznaczyć wszystkie takie pary (x, y) liczb całkowitych dodatnich, że

$$x^{x+y} = y^{y-x}.$$

8. Dana jest prosta g i punkty P, Q, S leżące po tej samej stronie tej prostej. Punkty M i N leżą na prostej g , przy czym $PM \perp g$ i $QN \perp g$. Punkt S leży między prostymi PM i QN . Ponadto $PM = PS$ i $QN = QS$. Symetralne odcinków SM i SN przecinają się w punkcie R . Prosta RS przecina okrąg opisany na trójkącie PQR w punkcie T różnym od R . Udowodnić, że punkt S jest środkiem odcinka RT .

9. Punktem kratowym nazywamy punkt płaszczyzny mający obie współrzędne całkowite. Rozważamy następującą grę jednoosobową. Pozycja w grze składa się ze skończonego zbioru zaznaczonych punktów kratowych i ze skończonego zbioru odcinków spełniających następujące warunki:

- (a) końce każdego zaznaczonego odcinka są zaznaczonymi punktami kratowymi;
- (b) każdy zaznaczony odcinek jest równoległy do jednej osi układu współrzędnych lub do jednej z dwóch prostych o równaniach $y = x$, $y = -x$;
- (c) każdy zaznaczony odcinek zawiera dokładnie 5 punktów kratowych i każdy z tych punktów jest zaznaczony;
- (d) dowolne dwa zaznaczone odcinki mają co najwyżej jeden punkt wspólny.

Ruch w grze polega na zaznaczeniu nowego punktu kratowego, a następnie zaznaczeniu odcinka w taki sposób, by powstała nowa pozycja w grze. Rozstrzygnąć, czy istnieje taka pozycja początkowa w grze, że możliwe jest wykonanie nieskończonego ciągu ruchów.

X Zawody Matematyczne Państw Bałtyckich

Reykjavik (Islandia), 6 listopada 1999

1. Wyznaczyć wszystkie liczby rzeczywiste a, b, c, d spełniające układ równań:

$$\begin{cases} abc + ab + bc + ca + a + b + c = 1 \\ bcd + bc + cd + db + b + c + d = 9 \\ cda + cd + da + ac + c + d + a = 9 \\ dab + da + ab + bd + d + a + b = 9 \end{cases}$$

2. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite dodatnie n o tej własności, że pierwiastek trzeciego stopnia z n powstaje przez odrzucenie trzech ostatnich cyfr rozwinięcia dziesiętnego liczby n .

3. Wyznaczyć wszystkie takie liczby całkowite $n \geq 3$, że nierówność

$$a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_{n-1} a_n + a_n a_1 \leq 0$$

zachodzi dla wszystkich liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \dots, a_n$ spełniających równość $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0$.

4. Dla liczb rzeczywistych dodatnich x, y określamy

$$f(x, y) = \min \left(x, \frac{y}{x^2 + y^2} \right).$$

Udowodnić, że istnieją takie liczby x_0, y_0 , że $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ dla wszystkich liczb dodatnich x, y . Wyznaczyć $f(x_0, y_0)$.

5. Styczna w punkcie o współrzędnych (a, b) do okręgu $x^2 + y^2 = 1$ ma z parabolą $y = x^2 + 1$ dokładnie jeden punkt wspólny. Wyznaczyć wszystkie punkty (a, b) o powyższej własności.

6. Jaka jest najmniejsza liczba ruchów, którą potrzebuje skoczek szachowy, aby przejść z jednego narożnika szachownicy $n \times n$ (gdzie $n \geq 4$) do narożnika przeciwnego?

7. Dwa różne pola szachownicy 8×8 nazwiemy *sąsiadującymi*, jeżeli mają wspólny bok lub wspólny wierzchołek. Rozstrzygnąć, czy jest możliwe, aby król szachowy zaczynając od pewnego pola szachownicy 8×8 odwiedził wszystkie pola dokładnie raz według następującej reguły: W każdym etapie podróży (licząc od trzeciego odwiedzonego pola) król stoi na polu sąsiadującym z parzystą liczbą pól, które już odwiedził.

8. Mamy do dyspozycji 1999 monet, z których każde dwie mają różny ciężar. Dysponujemy urządzeniem, które pozwala spośród dowolnych trzech monet wskazać tę, której ciężar zawiera się pomiędzy ciężarami dwóch pozostałych. Dowieść, że moneta tysięczna pod względem ciężaru może być wyznaczona przez nasze urządzenie stosowane nie więcej niż 1 000 000 razy. Udowodnić, że za pomocą tego urządzenia miejsce w ciągu ciężarów można wyznaczyć tylko dla tej monety.

9. Sześcian o krawędzi 3 podzielono na 27 sześcianów jednostkowych, które ponumerowano w sposób dowolny liczbami $1, 2, \dots, 27$. Tworzymy 27 możliwych sum w poszczególnych rzędach (jest dziewięć takich sum w każdym z trzech kierunków równoległych do krawędzi sześcianu, każda suma o trzech składnikach). Co najwyżej ile spośród tych 27 sum może być liczbą nieparzystą?

10. Czy można koło o promieniu 1 (łącznie z brzegiem) rozdzielić na trzy takie podzbiory, że żaden z nich nie zawiera dwóch punktów odległych o 1?

11. Na płaszczyźnie dane są cztery punkty, z których żadne trzy nie są współliniowe. Udowodnić, że istnieje taki okrąg przechodzący przez trzy z tych punktów, że czwarty punkt leży na okręgu lub w jego wnętrzu.

12. W trójkącie ABC zachodzi równość $2AB = AC + BC$. Udowodnić, że następujące cztery punkty: środek okręgu wpisanego w ten trójkąt, środek okręgu opisanego oraz środki boków AC i BC , leżą na jednym okręgu.

13. W trójkącie ABC dwusieczne kątów A i B przecinają boki BC i CA odpowiednio w punktach D i E . Ponadto $AE + BD = AB$. Wyznaczyć miarę kąta C .

14. W trójkącie równoramiennym ABC równe są boki AB i AC . Punkty D i E leżą odpowiednio na bokach AB i AC . Prosta przechodząca przez punkt B i równoległa do AC przecina prostą DE w punkcie F . Prosta przechodząca przez punkt C i równoległa do AB przecina prostą DE w punkcie G . Dowieść, że

$$\frac{[DBCG]}{[FBCE]} = \frac{AD}{AE},$$

gdzie $[PQRS]$ oznacza pole czworokąta $PQRS$.

15. W trójkącie ABC zachodzi $\angle C = 60^\circ$ oraz $AC < BC$. Punkt D leży na boku BC i spełnia $BD = AC$. Bok AC przedłużono do punktu E tak, aby $AC = CE$. Udowodnić, że $AB = DE$.

16. Znaleźć najmniejszą liczbę całkowitą dodatnią k , którą można przedstawić w postaci $k = 19^n - 5^m$ dla pewnych liczb całkowitych dodatnich m, n .

17. Czy istnieje taki skończony ciąg liczb całkowitych $c_1, c_2, \dots, c_n$, że każda z liczb $a + c_1, a + c_2, \dots, a + c_n$ jest pierwsza dla więcej niż jednej, ale tylko dla skończenie wielu różnych liczb całkowitych a ?

18. Liczba całkowita dodatnia m daje z dzielenia przez 4 resztę 2. Dowieść, że istnieje co najwyżej jeden rozkład $m = ab$, gdzie a, b są liczbami całkowitymi dodatnimi spełniającymi

$$0 < a - b < \sqrt{5 + 4\sqrt{4m + 1}}.$$

19. Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele takich liczb całkowitych dodatnich parzystych k , że dla każdej liczby pierwszej p liczba $p^2 + k$ jest złożona.

20. Liczby a, b, c, d są pierwsze oraz spełniają warunki $a > 3b > 6c > 12d$, $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 1749$. Wyznaczyć wszystkie wartości wyrażenia

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$



LI Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia drugiego

25 lutego 2000 r. (pierwszy dzień zawodów)

Zadanie 1. Rozstrzygnąć, czy każdą liczbę wymierną dodatnią można przedstawić w postaci

$$\frac{a^2 + b^3}{c^5 + d^7},$$

gdzie a, b, c, d są liczbami całkowitymi dodatnimi.

Rozwiązanie

Dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich p, q zachodzą następujące równości:

$$\frac{p}{q} = \frac{p}{q} \cdot \frac{p^5 q^4 + p^{14} q^6}{p^5 q^4 + p^{14} q^6} = \frac{p^6 q^4 + p^{15} q^6}{p^5 q^5 + p^{14} q^7} = \frac{(p^3 q^2)^2 + (p^5 q^2)^3}{(pq)^5 + (p^2 q)^7}.$$

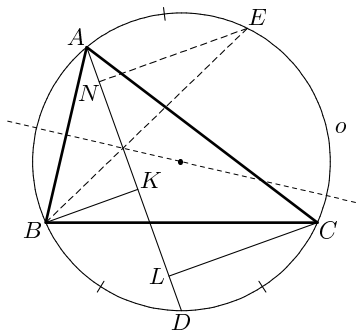
Zatem każdą liczbę wymierną dodatnią można przedstawić w żądanej postaci.

Zadanie 2. Dwusieczna kąta BAC trójkąta ABC przecina okrąg opisany na tym trójkącie w punkcie D różnym od A . Punkty K i L są rzutami prostokątnymi odpowiednio punktów B i C na prostą AD . Dowieść, że

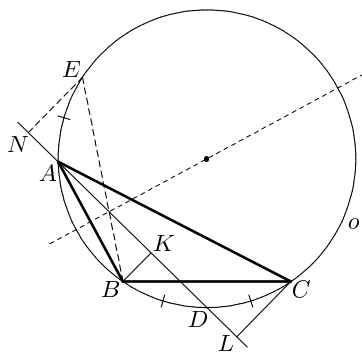
$$AD \geq BK + CL.$$

Rozwiązanie

Oznaczmy przez o okrąg opisany na trójkącie ABC . Z równości kątów BAD i DAC wynika, że długości łuków BD i DC okręgu o są równe (długość łuku XY jest mierzona od punktu X do punktu Y w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara).



rys. 1



rys. 2

Niech E będzie punktem symetrycznym do punktu D względem symetralnej boku AB , zaś niech N będzie rzutem prostokątnym punktu E na prostą AD (rys. 1 i 2). Wówczas $AD = BE$. Ponadto długości łuków DC i EA są równe, co oznacza, że $EN = CL$.

Punkty B i E leżą po dwóch różnych stronach prostej AD . Zatem długość odcinka BE jest nie mniejsza niż suma odległości punktów B i E od prostej AD . Innymi słowy $BE \geq BK + EN$, czyli $AD \geq BK + CL$.

Zadanie 3. Na polach szachownicy $n \times n$ rozmieszczono n^2 różnych liczb całkowitych, po jednej na każdym polu. W każdej kolumnie pole z największą liczbą pomalowano na czerwono. Zbiór n pól szachownicy nazwiemy *dopuszczalnym*, jeżeli żadne dwa z tych pól nie znajdują się w tym samym wierszu, ani w tej samej kolumnie. Spośród wszystkich zbiorów dopuszczalnych wybrano zbiór, dla którego suma liczb umieszczonych na jego polach jest największa.

Wykazać, że w tak wybranym zbiorze jest czerwone pole.

Rozwiązanie

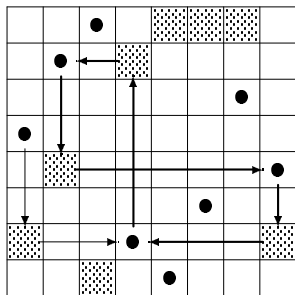
Przeprowadzimy dowód nie wprost.

Założmy, że w wybranym zbiorze dopuszczalnym (oznaczymy go przez A) nie ma czerwonego pola.

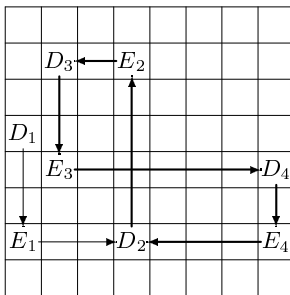
Zdefiniujemy ciąg pól $D_1, E_1, D_2, E_2, \dots$ danej szachownicy według niżej opisanej reguły. (Dla $n = 8$ proces wyboru pól $D_1, E_1, D_2, E_2, \dots$ jest przedstawiony na rysunkach 1 i 2. Pola czerwone są zacieniowane, zaś pola ze zbioru A są oznaczone kółkiem.)

Pole D_1 jest dowolnym polem ze zbioru A . Niech E_1 będzie polem czerwonym leżącym w tej samej kolumnie, co D_1 .

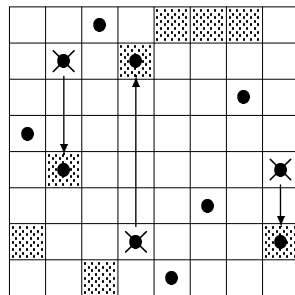
Następnie rozważamy to pole D_2 ze zbioru A , które leży w tym samym wierszu, co E_1 . Przez E_2 oznaczamy pole czerwone leżące w tej samej kolumnie, co D_2 . Postępowanie to kontynuujemy. (Ogólnie: pole czerwone E_i leży w tej samej kolumnie, co D_i , natomiast pole D_{i+1} jest polem ze zbioru A leżącym w tym samym wierszu, co E_i .)



rys. 1



rys. 2



rys. 3

W ten sposób otrzymujemy ciąg pól $D_1, E_1, D_2, E_2, D_3, \dots$, w którym każde pole jednoznacznie wyznacza pole następne. Ponieważ pól czerwonych jest

skończenie wiele, więc znajdziemy takie liczby całkowite dodatnie i, t , dla których $E_i = E_{i+t}$ oraz $E_i \neq E_{i+s}$ dla $s = 1, 2, \dots, t-1$. (W naszym przykładzie przedstawionym na rysunkach 1 i 2, $E_2 = E_5$, a więc $i = 2, t = 3$.)

Usuwamy ze zbioru A pola $D_{i+1}, D_{i+2}, \dots, D_{i+t}$ zastępując je odpowiednio polami $E_{i+1}, E_{i+2}, \dots, E_{i+t}$ (rys. 3). Otrzymany w ten sposób zbiór oznaczmy przez B .

Z określenia ciągu $D_1, E_1, D_2, E_2, D_3, \dots$ wynika, że pola

$$D_{i+1}, D_{i+2}, \dots, D_{i+t}$$

znajdują się odpowiednio w tych samych kolumnach, co pola

$$E_{i+1}, E_{i+2}, \dots, E_{i+t}$$

oraz odpowiednio w tych samych wierszach, co pola

$$E_i = E_{i+t}, E_{i+1}, E_{i+2}, \dots, E_{i+t-1}.$$

Zatem zbiór B jest dopuszczalny. Ponadto liczby, które zostały napisane na polach $E_{i+1}, E_{i+2}, \dots, E_{i+t}$ są *większe* odpowiednio od liczb napisanych na polach $D_{i+1}, D_{i+2}, \dots, D_{i+t}$. Wynika stąd, że suma liczb napisanych na polach zbioru B jest większa od sumy liczb napisanych na polach zbioru A . To jednak przeczy założeniu, że A ma największą sumę liczb spośród wszystkich zbiorów dopuszczalnych.

(wp, jwr)

*

*

*

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w internecie pod adresem:

www.impan.gov.pl/~olimp/



LI Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia drugiego

26 lutego 2000 r. (drugi dzień zawodów)

Zadanie 4. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC , w którym $AB \neq AC$. Proste BI i CI przecinają boki AC i AB odpowiednio w punktach D i E . Wyznaczyć wszystkie miary kąta BAC , dla których może zachodzić równość $DI = EI$.

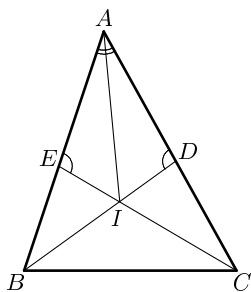
Rozwiązanie

Wykażemy, że jedyną wartością przyjmowaną przez kąt BAC jest 60° .

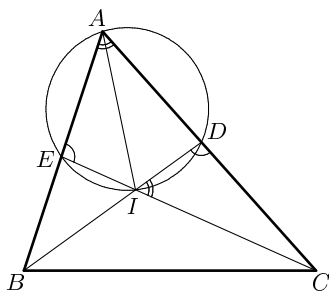
Na mocy twierdzenia sinusów zastosowanego do trójkątów ADI i AEI otrzymujemy $\sin \sphericalangle AEI = \sin \sphericalangle ADI$. Stąd

$$\sphericalangle AEI = \sphericalangle ADI \quad \text{lub} \quad \sphericalangle AEI + \sphericalangle ADI = 180^\circ.$$

Przypuśćmy najpierw, że zachodzi równość $\sphericalangle AEI = \sphericalangle ADI$ (rys. 1). Wtedy również $\sphericalangle AIE = \sphericalangle AID$, co oznacza, że trójkąty AEI oraz ADI są przystające (cecha *kąt-bok-kąt*). Zatem $AD = AE$. To dowodzi, że przystające są także trójkąty ADB i AEC (cecha *kąt-bok-kąt*). Stąd uzyskujemy równość $AB = AC$, co przeczy założeniom poczynionym w treści zadania.



rys. 1



rys. 2

Pozostał do rozpatrzenia przypadek, w którym $\sphericalangle AEI + \sphericalangle ADI = 180^\circ$ (rys. 2). Wtedy punkty A, E, I, D leżą na jednym okręgu. Zatem

$$\sphericalangle BAC = \sphericalangle DIC = \sphericalangle IBC + \sphericalangle ICB = \frac{1}{2} \sphericalangle ABC + \frac{1}{2} \sphericalangle BCA.$$

Stąd otrzymujemy

$$180^\circ = \sphericalangle BAC + \sphericalangle ABC + \sphericalangle BCA = \sphericalangle BAC + 2\sphericalangle BAC = 3\sphericalangle BAC,$$

czyli $\sphericalangle BAC = 60^\circ$.

Do zakończenia rozwiązania pozostało wykazać, że istnieje trójkąt ABC , w którym $AB \neq AC$, $\sphericalangle BAC = 60^\circ$ oraz $DI = EI$. Wykażemy więcej: w każdym trójkącie ABC o kącie BAC równym 60° zachodzi równość $DI = EI$.

Jeżeli $\sphericalangle BAC = 60^\circ$, to

$$\sphericalangle DIC = \frac{1}{2}\sphericalangle ABC + \frac{1}{2}\sphericalangle BCA = 90^\circ - \frac{1}{2}\sphericalangle BAC = 60^\circ = \sphericalangle BAC.$$

Na czworokącie $AEID$ można więc opisać okrąg. Ponieważ AI jest dwusieczną kąta EAD , więc $DI = EI$.

Zadanie 5. Niech $\mathbb{N}$ oznacza zbiór liczb całkowitych dodatnich. Rozstrzygnąć, czy istnieje taka funkcja $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi równość $f(f(n)) = 2n$.

Rozwiązanie

Taka funkcja istnieje. Oto przykład.

Niech A będzie zbiorem tych liczb całkowitych dodatnich, w których rozkładzie na czynniki pierwsze „trójka” występuje nieparzystą liczbę razy. Funkcję f definiujemy wzorem:

$$f(n) = \begin{cases} \frac{1}{3}n & \text{dla } n \in A, \\ 6n & \text{dla } n \in \mathbb{N} \setminus A. \end{cases}$$

Wówczas, jeśli $n \in A$, to $f(n) \in \mathbb{N} \setminus A$, skąd

$$f(f(n)) = f\left(\frac{1}{3}n\right) = 2n \quad \text{dla } n \in A.$$

Podobnie, jeżeli $n \in \mathbb{N} \setminus A$, to $f(n) \in A$, co daje

$$f(f(n)) = f(6n) = 2n \quad \text{dla } n \in \mathbb{N} \setminus A.$$

Zadanie 6. Wielomian $w(x)$ stopnia drugiego o współczynnikach całkowitych przyjmuje dla całkowitych x wartości będące kwadratami liczb całkowitych. Dowieść, że wielomian $w(x)$ jest kwadratem pewnego wielomianu.

Rozwiązanie

Niech $w(x) = ax^2 + bx + c$. Wprowadźmy oznaczenie: $k_n = \sqrt{w(n)}$ dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n . Wówczas k_n może być zerem dla co najwyżej dwóch wartości n . Dla pozostałych n mamy

$$k_{n+1} - k_n = \frac{k_{n+1}^2 - k_n^2}{k_{n+1} + k_n} = \frac{(2n+1)a + b}{\sqrt{a(n+1)^2 + b(n+1) + c} + \sqrt{an^2 + bn + c}}.$$

Dzieląc licznik i mianownik otrzymanego ułamka przez n i przechodząc z n do nieskończoności widzimy, że ciąg $(k_{n+1} - k_n)$ jest zbieżny i jego granica wynosi $\sqrt{a}$. Ponieważ wyrazy ciągu $(k_{n+1} - k_n)$ są całkowite, więc granica tego ciągu, liczba $\sqrt{a}$, jest też całkowita. Ponadto istnieje taka liczba naturalna m , że

$$(1) \quad k_{n+1} - k_n = \sqrt{a} \quad \text{dla } n \geq m.$$

Niech $d = k_m - m\sqrt{a}$. Ze związku (1) wynika, że

$$(2) \quad k_n = n\sqrt{a} + d \quad \text{dla } n \geq m.$$

Przyjmijmy: $p(x) = (x\sqrt{a} + d)^2$. Na mocy definicji liczb k_n oraz równości (2) uzyskujemy równość $p(n) = w(n)$ dla $n \geq m$. To oznacza, że $p(x) = w(x)$, skąd

$$w(x) = (x\sqrt{a} + d)^2.$$

(wp, jwr)

LI Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe

zawodów stopnia trzeciego

Stalowa Wola, 3–4 kwietnia 2000

1. Dana jest liczba całkowita $n \geq 2$. Wyznaczyć liczbę rozwiązań $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ układu równań

$$\left\{ \begin{array}{l} x_2 + x_1^2 = 4x_1 \\ x_3 + x_2^2 = 4x_2 \\ x_4 + x_3^2 = 4x_3 \\ \dots\dots\dots \\ x_n + x_{n-1}^2 = 4x_{n-1} \\ x_1 + x_n^2 = 4x_n \end{array} \right.$$

w liczbach rzeczywistych nieujemnych.

2. Dany jest trójkąt ABC , w którym $AC = BC$. Punkt P leży wewnątrz trójkąta ABC , przy czym $\sphericalangle PAB = \sphericalangle PBC$. Punkt M jest środkiem boku AB . Dowieść, że

$$\sphericalangle APM + \sphericalangle BPC = 180^\circ.$$

3. Ciąg liczb naturalnych (p_n) spełnia następujące warunki:

1° p_1 i p_2 są liczbami pierwszymi,

2° dla $n \geq 3$ liczba p_n jest największym dzielnikiem pierwszym liczby

$$p_{n-1} + p_{n-2} + 2000 \text{ .}$$

Udowodnić, że ciąg (p_n) jest ograniczony.

4. W ostrosłupie prawidłowym o wierzchołku S i podstawie $A_1A_2...A_n$ każda krawędź boczna tworzy z płaszczyzną podstawy kąt 60° . Dla każdej liczby naturalnej $n \geq 3$ rozstrzygnąć, czy można wybrać takie punkty $B_2, B_3, \dots, B_n$ leżące odpowiednio na krawędziach $A_2S, A_3S, \dots, A_nS$, że

$$A_1B_2 + B_2B_3 + B_3B_4 + \dots + B_{n-1}B_n + B_nA_1 < 2A_1S.$$

5. Dla danej liczby naturalnej $n \geq 2$ znaleźć najmniejszą liczbę k o następującej własności. Z dowolnego k -elementowego zbioru pól szachownicy $n \times n$, można wybrać taki niepusty podzbiór, że liczba pól tego podzbioru w każdym wierszu i w każdej kolumnie szachownicy jest parzysta.

6. Stopień wielomianu $P(x)$ o współczynnikach rzeczywistych jest nieparzysty. Ponadto dla każdego x

$$P(x^2 - 1) = (P(x))^2 - 1.$$

Udowodnić, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi równość

$$P(x) = x.$$

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia trzeciego

3 kwietnia 2000 r. (pierwszy dzień zawodów)

Zadanie 1. Dana jest liczba całkowita $n \geq 2$.

Wyznaczyć liczbę rozwiązań $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ układu równań

$$\left\{ \begin{array}{l} x_2 + x_1^2 = 4x_1 \\ x_3 + x_2^2 = 4x_2 \\ x_4 + x_3^2 = 4x_3 \\ \dots\dots\dots \\ x_n + x_{n-1}^2 = 4x_{n-1} \\ x_1 + x_n^2 = 4x_n \end{array} \right.$$

w liczbach rzeczywistych nieujemnych.

Rozwiązanie

Odpowiedź: 2^n .

Z pierwszego równania otrzymujemy

$$x_1(x_1 - 4) = x_1^2 - 4x_1 = -x_2 \leq 0,$$

skąd wynika, że $x_1 \leq 4$. Istnieje więc dokładnie jedna liczba $\alpha \in \langle 0, \pi/2 \rangle$, spełniająca zależność $x_1 = 4 \sin^2 \alpha$.

Wówczas $x_2 = x_1(4 - x_1) = 4\sin^2\alpha \cdot 4\cos^2\alpha = 4\sin^2 2\alpha$. Rozumując analogicznie dostajemy

$$x_k = 4 \sin^2(2^{k-1} \alpha) \quad (k = 3, 4, \dots, n)$$

oraz $x_1 = 4\sin^2(2^n\alpha)$.

Liczba rozwiązań danego układu równań w liczbach nieujemnych jest więc równa liczbie rozwiązań równania

$$\sin^2 \alpha = \sin^2 (2^n \alpha)$$

w liczbach rzeczywistych $\alpha \in \langle 0, \pi/2 \rangle$. Ponieważ równość $\sin \beta = \pm \sin \gamma$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy któraś z liczb $\beta + \gamma$, $\beta - \gamma$ jest całkowitą wielokrotnością π , więc jedna z liczb $(2^n + 1)\alpha$, $(2^n - 1)\alpha$ musi być całkowitą wielokrotnością π . Stąd wynika, że α jest jedną z liczb:

$$0, \quad \frac{k\pi}{2^n+1}, \quad \frac{\ell\pi}{2^n-1}, \quad \text{gdzie } k \in \{1, 2, \dots, 2^{n-1}\}, \quad \ell \in \{1, 2, \dots, 2^{n-1}-1\}.$$

Ponieważ największy wspólny dzielnik liczb $2^n + 1$ i $2^n - 1$ jest równy 1, więc wyżej wypisane możliwe wartości α są różne. Zatem istnieje dokładnie 2^n ciągów liczb nieujemnych $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ spełniających dany układ równań.

Zadanie 2. Dany jest trójkąt ABC , w którym $AC = BC$. Punkt P leży wewnątrz trójkąta ABC , przy czym $\sphericalangle PAB = \sphericalangle PBC$. Punkt M jest środkiem boku AB . Dowieść, że

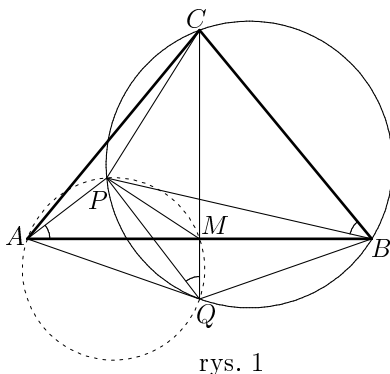
$$\sphericalangle APM + \sphericalangle BPC = 180^\circ.$$

Rozwiązanie

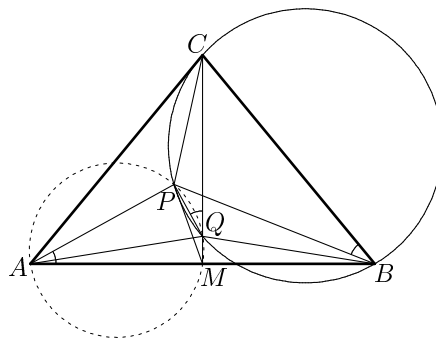
Załóżmy najpierw, że punkt P leży wewnątrz trójkąta AMC lub na odcinku MC .

Niech $Q \neq C$ będzie punktem przecięcia okręgu opisanego na trójkącie BCP z prostą CM (rys. 1 i 2). Ponieważ $\sphericalangle PAM = \sphericalangle PBC = \sphericalangle PQC$, więc punkty A, P, M, Q leżą na jednym okręgu. Ponadto

$$(1) \quad \sphericalangle BPC = \sphericalangle BQC = \sphericalangle AQC.$$



rys. 1



rys. 2

Jeżeli punkt Q znajduje się na zewnątrz trójkąta ABC (rys. 1) lub na odcinku AB , to na mocy zależności (1) otrzymujemy

$$\sphericalangle APM + \sphericalangle BPC = \sphericalangle APM + \sphericalangle AQC = 180^\circ.$$

Jeżeli natomiast punkt Q znajduje się wewnątrz trójkąta ABC (rys. 2), to korzystając raz jeszcze z równości (1) uzyskujemy

$$\sphericalangle APM + \sphericalangle BPC = \sphericalangle AQM + \sphericalangle AQC = 180^\circ.$$

Załóżmy teraz, że punkt P znajduje się wewnątrz trójkąta BCM . Ponieważ $\sphericalangle PBA = \sphericalangle PAC$, więc przeprowadzając rozumowanie analogiczne do powyższego otrzymujemy równość $\sphericalangle BPM + \sphericalangle APC = 180^\circ$. Stąd

$$\sphericalangle APM + \sphericalangle BPC = 180^\circ,$$

co kończy rozwiązanie zadania.

(wp, jwr)

* * *

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje
można znaleźć w internecie pod adresem:

www.impan.gov.pl/~olimp/

LI Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia trzeciego

4 kwietnia 2000 r. (drugi dzień zawodów)

Zadanie 4. W ostrosłupie prawidłowym o wierzchołku S i podstawie $A_1A_2\dots A_n$ każda krawędź boczna tworzy z płaszczyzną podstawy kąt 60° . Dla każdej liczby naturalnej $n \geq 3$ rozstrzygnąć, czy można wybrać takie punkty $B_2, B_3, \dots, B_n$ leżące odpowiednio na krawędziach $A_2S, A_3S, \dots, A_nS$, że

$$A_1B_2 + B_2B_3 + B_3B_4 + \dots + B_{n-1}B_n + B_nA_1 < 2A_1S.$$

Rozwiązanie

Takie punkty istnieją dla dowolnego $n \geq 3$.

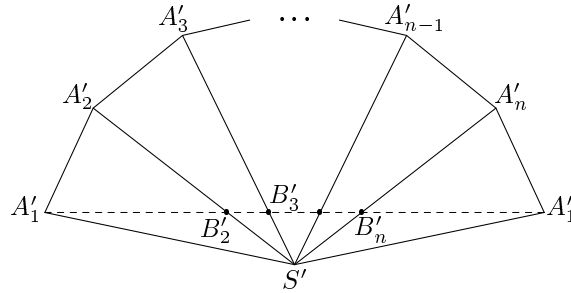
Niech O będzie spodkiem wysokości ostrosłupa, zaś α miarą kąta ściany bocznej przy wierzchołku S . Z równości $A_1S = 2A_1O$ otrzymujemy

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{A_1A_2}{2A_1S} = \frac{1}{2} \cdot \frac{A_1A_2}{2A_1O} = \frac{1}{2} \sin \frac{180^\circ}{n} = \sin \frac{90^\circ}{n} \cos \frac{90^\circ}{n} < \sin \frac{90^\circ}{n},$$

skąd

$$(1) \quad n\alpha < 180^\circ.$$

Rozetnijmy powierzchnię boczną ostrosłupa wzdłuż krawędzi A_1S i rozłóżmy ją na płaszczyźnie. Otrzymamy wtedy wielokąt $S'A'_1A'_2\dots A'_nA''_1$ (rys. 1). Na mocy nierówności (1), $\sphericalangle A'_1S'A''_1 = n\alpha < 180^\circ$.



rys. 1

Niech $B'_2, B'_3, \dots, B'_n$ będą punktami przecięcia odcinka $A'_1A''_1$ odpowiednio z odcinkami $A'_2S', A'_3S', \dots, A'_nS'$. Na mocy nierówności trójkąta,

$$A'_1B'_2 + B'_2B'_3 + B'_3B'_4 + \dots + B'_{n-1}B'_n + B'_nA''_1 < 2A'_1S'.$$

Punkty $B'_2, B'_3, \dots, B'_n$ wyznaczają więc punkty $B_2, B_3, \dots, B_n$ na krawędziach ostrosłupa spełniające warunki zadania.

Zadanie 5. Dla danej liczby naturalnej $n \geq 2$ znaleźć najmniejszą liczbę k o następującej własności. Z dowolnego k -elementowego zbioru pól szachownicy $n \times n$, można wybrać taki niepusty podzbiór, że liczba pól tego podzbioru w każdym wierszu i w każdej kolumnie szachownicy jest parzysta.

Rozwiązanie

Udowodnimy następujące dwa zdania:

1. Z dowolnego zbioru złożonego z $m+n$ pól szachownicy o wymiarach $m \times n$ ($m, n \geq 2$) można wybrać niepusty podzbiór mający w każdym wierszu i w każdej kolumnie szachownicy parzystą liczbę pól.

2. Istnieje zbiór $m+n-1$ pól szachownicy o wymiarach $m \times n$, z którego nie da się wybrać niepustego podzbioru mającego w każdym wierszu i w każdej kolumnie szachownicy parzystą liczbę pól.

Z powyższych zdań zastosowanych dla $m = n$ wnioskujemy, że najmniejszą liczbą spełniającą warunki zadania jest $k = 2n$.

Dowód zdania 1.

Przeprowadzimy dowód indukcyjny względem $m+n$. Dla $m = 2, n = 2$ teza zdania 1 jest prawdziwa.

Ustalmy dwie liczby naturalne m, n o sumie większej niż 4 i założmy, że zdanie 1 jest prawdziwe dla dowolnej szachownicy o sumie wymiarów mniejszej niż $m+n$. Rozważmy dowolny zbiór A złożony z $m+n$ pól szachownicy S o wymiarach $m \times n$. Możliwe są następujące trzy przypadki:

(a) istnieje wiersz lub kolumna szachownicy S nie zawierająca żadnego pola ze zbioru A ;

(b) istnieje wiersz lub kolumna szachownicy S , w której znajduje się dokładnie jedno pole ze zbioru A ;

(c) w każdym wierszu i w każdej kolumnie znajdują się co najmniej dwa pola ze zbioru A .

○	○			○
	○	○		○
⊗	○			

rys. 1

⊗	○			○
	○	⊗		○
	⊗			

rys. 2

	○			○
	○			○

rys. 3

W przypadku (a) usuwamy z szachownicy S tę kolumnę (lub wiersz), która nie zawiera żadnego pola ze zbioru A . Następnie usuwamy ze zbioru A dowolne pole (na rysunku 1 pola zbioru A oznaczone są kółeczkami). W ten sposób otrzymujemy nową szachownicę, która zawiera pewien zbiór A' złożony z $m+n-1$ pól i której suma wymiarów jest równa $m+n-1$ (rys. 2). Stąd wynika, że każdy z wymiarów uzyskanej szachownicy jest nie mniejszy

niż 2. Zatem na mocy założenia indukcyjnego można wybrać ze zbioru A' niepusty podzbiór mający w każdym wierszu i w każdej kolumnie parzystą liczbę pól. Wklejając z powrotem usuniętą kolumnę lub usunięty wiersz na swoje miejsce (rys. 3) otrzymujemy żądany podzbiór zbioru A .

Podobnie postępujemy w przypadku (b): znajdujemy najpierw kolumnę (lub wiersz), w której znajduje się dokładnie jedno pole ze zbioru A , a następnie usuwamy tę kolumnę z szachownicy S (rys. 4). W rezultacie otrzymujemy nową szachownicę, która zawiera pewien zbiór A' złożony z $m+n-1$ pól i której suma wymiarów jest równa $m+n-1$ (rys. 5). Tak jak wyżej, stosujemy założenie indukcyjne, po czym wklejamy z powrotem usuniętą kolumnę lub usunięty wiersz (rys. 6).

	○			
○			○	○
○	○	⊗		○

rys. 4

	⊗			
○		⊗	○	
○	⊗		○	

rys. 5

○				○
○				○

rys. 6

Rozpatrzmy przypadek (c). Niech $k_1, k_2, \dots, k_n, w_1, w_2, \dots, w_m$ oznaczają odpowiednio liczby pól zbioru A w poszczególnych kolumnach i wierszach. Wówczas

$$(k_1 + k_2 + \dots + k_n) + (w_1 + w_2 + \dots + w_m) = 2(m+n).$$

Ponadto $k_i, w_j \geq 2$ dla wszystkich i, j . Stąd wynika, że $k_i = w_j = 2$. Zatem zbiór A ma w każdej kolumnie i w każdym wierszu dokładnie dwa pola. To oznacza, że liczba pól zbioru A w każdym wierszu i w każdej kolumnie jest parzysta.

Dowód indukcyjny, a tym samym dowód zdania 1, został zakończony.

Dowód zdania 2.

Rozważmy zbiór A złożony ze wszystkich $m+n-1$ pól szachownicy o wymiarach $m \times n$ znajdujących się w dolnym wierszu i pierwszej kolumnie (rys. 7). Aby otrzymać parzystą liczbę pól w kolumnach od drugiej do ostatniej musimy usunąć ze zbioru A pola, które się w tych kolumnach znajdują. Po ich usunięciu widzimy, że z tego samego powodu musimy usunąć pozostałe pola zbioru A . To kończy dowód zdania 2.

○				
○				
○				
○				
○	⊗	⊗	⊗	⊗

rys. 7

Zadanie 6. Stopień wielomianu $P(x)$ o współczynnikach rzeczywistych jest nieparzysty. Ponadto dla każdego x

$$P(x^2 - 1) = (P(x))^2 - 1.$$

Udowodnić, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi równość

$$P(x) = x.$$

Rozwiązanie

Dla dowolnej liczby rzeczywistej x prawdziwe są zależności

$$(P(-x))^2 = P(x^2 - 1) + 1 = (P(x))^2.$$

Stąd wynika, że dla każdego x zachodzi jedna z równości: $P(-x) = P(x)$ lub $P(-x) = -P(x)$.

Przypuśćmy, że dla nieskończenie wielu x zachodzi równość $P(-x) = P(x)$. Wówczas równość ta musi być prawdziwa dla dowolnej liczby rzeczywistej x , co przeczy założeniu, że stopień wielomianu P jest liczbą nieparzystą.

Zatem dla nieskończenie wielu x zachodzi równość $P(-x) = -P(x)$, skąd wynika, że równość ta jest prawdziwa dla wszystkich liczb rzeczywistych x .

Dowolną liczbę rzeczywistą $x \geq -1$ możemy zapisać w postaci $x = y^2 - 1$, dla pewnej liczby rzeczywistej y . Stąd

$$(1) \quad P(x) = P(y^2 - 1) = (P(y))^2 - 1 \geq -1.$$

Określamy rekurencyjnie ciąg (x_n) wzorami:

$$x_1 = 1 \quad \text{oraz} \quad x_n = \sqrt{x_{n-1} + 1} \quad \text{dla} \quad n \geq 2.$$

Udowodnimy indukcyjnie, że

$$(2) \quad P(x_n) = x_n \quad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Z zależności $P(-x) = -P(x)$ otrzymujemy $P(0) = 0$. Kładąc $x = 0$ do danej w treści zadania tożsamości otrzymujemy $P(-1) = -1$, skąd $P(1) = 1$. To dowodzi równości (2) dla $n = 1$.

Ze związku $P(x_{n-1}) = x_{n-1}$ wynika, że

$$(P(x_n))^2 = P(x_n^2 - 1) + 1 = P(x_{n-1}) + 1 = x_{n-1} + 1 = x_n^2.$$

Ponieważ $x_n > 1$ dla $n \geq 2$, więc nierówność (1) wyklucza prawdziwość równości $P(x_n) = -x_n$. Zatem $P(x_n) = x_n$, co kończy dowód zależności (2).

Ciąg (x_n) jest rosnący, więc równość $P(x) = x$ zachodzi dla nieskończenie wielu x . Z tego zaś wynika, że $P(x) = x$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$.

(wp, jwr)

* * *

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w internecie pod adresem:

www.impan.gov.pl/~olimp/

LII OLIMPIADA MATEMATYCZNA
ZADANIA KONKURSOWE
ZAWODÓW I STOPNIA

I SERIA

1. Rozwiązać w liczbach całkowitych równanie

$$x^{2000} + 2000^{1999} = x^{1999} + 2000^{2000}.$$

2. Punkty D i E leżą odpowiednio na bokach BC i AC trójkąta ABC . Odcinki AD i BE przecinają się w punkcie P . Punkty K i L leżą odpowiednio na bokach BC i AC , przy czym czworokąt $CLPK$ jest równoległobokiem. Dowieść, że

$$\frac{AE}{EL} = \frac{BD}{DK}.$$

3. Znaleźć wszystkie takie liczby naturalne $n \geq 2$, że nierówność

$$x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n \leq \frac{n-1}{n} (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)$$

zachodzi dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich

$x_1, x_2, \dots, x_n$.

4. Rozstrzygnąć, czy w sześciennym pudełku o krawędzi 4 można umieścić 65 kul o średnicy 1.

*Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać pod adresem komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia **10 października 2000 r.** (decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.*

II SERIA

5. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geq 2$ i dowolnej liczby pierwszej p liczba

$$n^{p^p} + p^p$$

jest złożona.

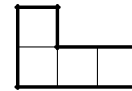
6. Liczby całkowite a, b, x, y spełniają równanie

$$a + b\sqrt{2001} = (x + y\sqrt{2001})^{2000}.$$

Udowodnić, że $a \geq 44b$.

7. Dany jest trójkąt równoramienny ABC o kącie prostym przy wierzchołku A . Punkty D i E leżą na przeciwprostokątnej BC , przy czym $\angle DAE = 45^\circ$. Okrąg opisany na trójkącie ADE przecina boki AB i AC odpowiednio w punktach P i Q .
Dowieść, że $BP + CQ = PQ$.

8. Rozstrzygnąć, dla jakich par liczb naturalnych m i n prostokąt o bokach długości m i n można pociąć na części przystające do figury na rysunku. Każdy z czterech kwadratów na rysunku ma bok długości 1.



*Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać pod adresem komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia **10 listopada 2000 r.** (decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.*

III SERIA

9. Dowieść, że wśród dowolnych 12 kolejnych liczb całkowitych dodatnich istnieje liczba nie będąca sumą 10 czwartych potęg liczb całkowitych.
10. Dowieść, że wewnątrz dowolnego trójkąta ABC istnieje punkt P o następującej własności:
Każda prosta przechodząca przez punkt P dzieli obwód trójkąta ABC w takim samym stosunku, w jakim dzieli ona jego pole.
11. Układ liczb całkowitych dodatnich $c_1, c_2, \dots, c_n$ nazwiemy dopuszczalnym, gdy za pomocą wagi szalkowej i dwóch kompletów odważników o ciężarach $c_1, c_2, \dots, c_n$ można zważyć dowolny przedmiot o ciężarze będącym liczbą naturalną nie przekraczającą $2(c_1 + c_2 + \dots + c_n)$.
Dla każdej liczby n wyznaczyć maksymalną sumę n liczb tworzących układ dopuszczalny.
- Uwaga:** Odważniki można kłaść na obie szalki wagi.
12. Rozpatrujemy ciągi liczb całkowitych $x_0, x_1, \dots, x_{2000}$ spełniające warunki

$$x_0 = 0 \quad \text{ i } \quad |x_n| = |x_{n-1} + 1| \quad \text{ dla } n = 1, 2, \dots, 2000.$$

Znaleźć najmniejszą wartość wyrażenia

$$|x_1 + x_2 + \dots + x_{2000}|.$$

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać pod adresem komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia 11 grudnia 2000 r. (decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w internecie pod adresem:

www.impan.gov.pl/~olimp/



LII OLIMPIADA MATEMATYCZNA

Do Pani/Pana Dyrektora Szkoły
Do Pani/Pana Profesora Matematyki

Komitety Główne Olimpiady Matematycznej uprzejmie prosi o zapoznanie uczniów i nauczycieli zainteresowanych zadaniami Olimpiady z podanymi tu rozwiązaniami zadań konkursowych stopnia pierwszego LII Olimpiady Matematycznej.

W dalszej części niniejszego druku podajemy teksty zadań z zawodów międzynarodowych: XLI Międzynarodowej Olimpiady Matematycznej i XXIII Austriacko-Polskich Zawodów Matematycznych, a także z XI Zawodów Matematycznych Państw Bałtyckich (*Baltic Way* 2000).

Zawody pierwszego stopnia LII Olimpiady Matematycznej są zakończone. Zawody stopnia drugiego odbędą się w dniach 23 i 24 lutego 2001 r. Zawody stopnia trzeciego odbędą się w dniach 2 i 3 kwietnia 2001 r.

Zawiadomienia o dokładnym terminie i miejscu zawodów stopnia drugiego wyślą komitety okręgowe zakwalifikowanym zawodnikom w terminie do dnia 10 lutego 2001 r.

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w internecie pod adresem:

www.impan.gov.pl/~olimp/

Komitety Główne Olimpiady Matematycznej

**Rozwiązania zadań konkursowych
zawodów stopnia pierwszego LII Olimpiady Matematycznej¹**

Zadanie 1. Rozwiązać w liczbach całkowitych równanie

$$x^{2000} + 2000^{1999} = x^{1999} + 2000^{2000}.$$

Rozwiązanie

Dane równanie sprowadzamy do postaci $f(x) = f(2000)$, gdzie

$$f(x) = x^{2000} - x^{1999} = (x-1)x^{1999}.$$

Ponieważ f jest funkcją rosnącą na przedziale $\langle 1, \infty \rangle$, więc dane równanie ma w tym przedziale tylko jedno rozwiązanie, którym jest $x = 2000$. Na zbiorze $(-\infty, 0)$ funkcja f jest malejąca, więc istnieje co najwyżej jedna liczba całkowita ujemna a , dla której $f(a) = f(2000)$. Jednakże

$$f(-1999) = 2000 \cdot 1999^{1999} < 1999 \cdot 2000^{1999} = f(2000) = f(a)$$

oraz

$$f(-2000) = 2001 \cdot 2000^{1999} > 1999 \cdot 2000^{1999} = f(2000) = f(a).$$

Zatem $a \in (-2000, -1999)$, co przeczy temu, że a jest liczbą całkowitą.

Odpowiedź:

Dane równanie ma jedno rozwiązanie w liczbach całkowitych: $x = 2000$.

Zadanie 2. Punkty D i E leżą odpowiednio na bokach BC i AC trójkąta ABC . Odcinki AD i BE przecinają się w punkcie P . Punkty K i L leżą odpowiednio na bokach BC i AC , przy czym czworokąt $CLPK$ jest równoległobokiem. Dowieść, że

$$\frac{AE}{EL} = \frac{BD}{DK}.$$

Rozwiązanie

Ponieważ $KD \parallel LP$, $DP \parallel PA$ oraz $PK \parallel AL$, więc trójkąty KDP i LPA są podobne (rys. 1). Zatem

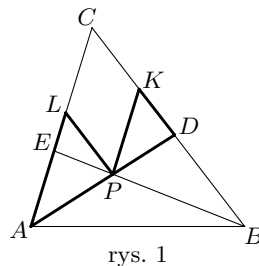
$$\frac{DK}{PL} = \frac{PK}{AL}, \quad \text{czyli} \quad AL \cdot DK = PK \cdot PL.$$

Analogicznie, korzystając z podobieństwa trójkątów LEP i KPB dowodzimy, że $BK \cdot EL = PL \cdot PK$. Na mocy dwóch ostatnich równości otrzymujemy

$$AL \cdot DK = BK \cdot EL, \quad \text{czyli} \quad \frac{AL}{EL} = \frac{BK}{DK}.$$

Stąd

$$\frac{AE + EL}{EL} = \frac{BD + DK}{DK}, \quad \text{a więc} \quad \frac{AE}{EL} = \frac{BD}{DK}.$$



rys. 1

¹Opracowali Waldemar Pompe i Jarosław Wróblewski.

Zadanie 3. Znaleźć wszystkie takie liczby naturalne $n \geq 2$, że nierówność

$$(1) \quad x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n \leq \frac{n-1}{n} (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)$$

zachodzi dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Rozwiązanie

Odpowiedź: Jediną liczbą spełniającą warunki zadania jest $n = 2$.

Dla $n = 2$ dana nierówność przyjmuje postać

$$x_1x_2 \leq \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2), \quad \text{co sprowadza się do} \quad 0 \leq \frac{1}{2}(x_1 - x_2)^2.$$

Zatem liczba $n = 2$ spełnia warunki zadania.

Jeśli $n \geq 3$, to nierówność (1) nie jest prawdziwa dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich. Liczby

$$(2) \quad x_1 = 3, \quad x_2 = x_3 = \dots = x_{n-1} = 4, \quad x_n = 3$$

stanowią kontrprzykład. Istotnie: wstawiając powyższe wartości do nierówności (1) uzyskujemy

$$12 + \underbrace{16 + 16 + \dots + 16}_{n-3} + 12 \leq \frac{n-1}{n} (9 + \underbrace{16 + 16 + \dots + 16}_{n-2} + 9).$$

Przekształcając równoważnie powyższą nierówność otrzymujemy $3n \leq 7$, co nie jest prawdą, gdy $n \geq 3$.

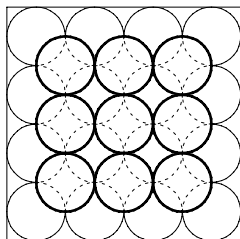
Zadanie 4. Rozstrzygnąć, czy w sześciennym pudełku o krawędzi 4 można umieścić 65 kul o średnicy 1.

Rozwiązanie

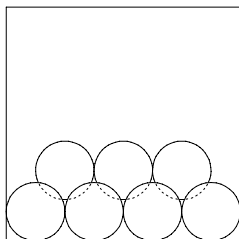
Odpowiedź: Można.

Sposób umieszczenia kul jest następujący.

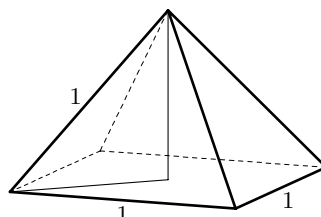
Na dnie pudełka umieszczamy warstwę złożoną z 16 kul. Następnie kładziemy warstwę złożoną z 9 kul, z których każda jest styczna do czterech kul pierwszej warstwy (rys. 1 i 2). Trzecia warstwa składa się z 16 kul stycznych do kul drugiej warstwy (rys. 4 i 5). Podobnie umieszczamy dwie następne warstwy (rys. 6).



rys. 1 (widok z góry)

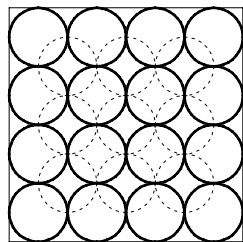


rys. 2 (widok z boku)

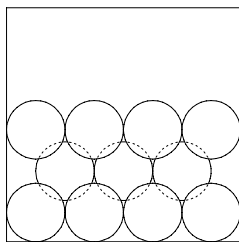


rys. 3

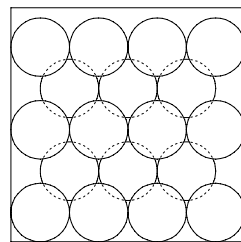
Łącznie umieściliśmy więc $16 + 9 + 16 + 9 + 16 = 66$ kul. Pozostaje obliczyć, jak wysoko sięga piąta warstwa.



rys. 4 (widok z góry)



rys. 5 (widok z boku)



rys. 6 (widok z boku)

Wybermy dowolną kulę drugiej warstwy; kula ta jest styczna do czterech kul pierwszej warstwy. Środki tych pięciu kul są wierzchołkami ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, którego każda krawędź ma długość 1 (rys. 3). Na mocy twierdzenia Pitagorasa wysokość tego ostrosłupa wynosi $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Stąd wynika, że najwyższy punkt, do którego sięga piąta warstwa, jest odległy od płaszczyzny podstawy o $\frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} = 1 + 2\sqrt{2} < 4$. Umieszczone w ten sposób 66 kul mieści się w sześciennym pudełku o krawędzi 4.

Zadanie 5. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geq 2$ i dowolnej liczby pierwszej p liczba $n^{p^p} + p^p$ jest złożona.

Rozwiązanie

Jeżeli p jest liczbą pierwszą nieparzystą, to na mocy tożsamości

$$(1) \quad x^p + y^p = (x + y)(x^{p-1} - x^{p-2}y + x^{p-3}y^2 - \dots - xy^{p-2} + y^{p-1}),$$

w której kładziemy $x = n^{p^{p-1}}$ i $y = p$, liczba $n^{p^p} + p^p$ jest złożona. (Dla powyższych wartości x, y zachodzą nierówności $x^p + y^p > x + y > 1$, więc każdy z czynników stojących po prawej stronie wzoru (1) jest większy od 1).

Natomiast dla $p = 2$ otrzymujemy $n^4 + 4 = (n^2 + 2n + 2)(n^2 - 2n + 2)$. Ponieważ $n \geq 2$, więc oba czynniki są większe od 1. Stąd wynika, że dla $n \geq 2$ liczba $n^4 + 4$ jest złożona.

Zadanie 6. Liczby całkowite a, b, x, y spełniają równanie

$$a + b\sqrt{2001} = (x + y\sqrt{2001})^{2000}.$$

Udowodnić, że $a \geq 44b$.

Rozwiązanie

Wykażemy najpierw, że zachodzi następująca równość:

$$(1) \quad a - b\sqrt{2001} = (x - y\sqrt{2001})^{2000}.$$

Istotnie: ze wzoru dwumianowego Newtona otrzymujemy

$$(x + y\sqrt{2001})^{2000} = \sum_{k=0}^{2000} \binom{2000}{k} y^k 2001^{k/2} x^{2000-k} = c + d\sqrt{2001},$$

gdzie liczby całkowite c, d są dane przez:

$$(2) \quad c = \sum_{\ell=0}^{1000} \binom{2000}{2\ell} y^{2\ell} 2001^{\ell} x^{2000-2\ell}, \quad d = \sum_{\ell=0}^{999} \binom{2000}{2\ell+1} y^{2\ell+1} 2001^{\ell} x^{1999-2\ell}.$$

Korzystając z danej w treści zadania równości uzyskujemy

$$(a-c) + (b-d)\sqrt{2001} = 0.$$

Z niewymierności liczby $\sqrt{2001}$ wynika, że $b=d$, co z kolei pociąga za sobą $a=c$. Zatem na mocy związków (2) otrzymujemy

$$\begin{aligned} a - b\sqrt{2001} &= c - d\sqrt{2001} = \\ &= \sum_{k=0}^{2000} \binom{2000}{k} (-y)^k 2001^{k/2} x^{2000-k} = (x - y\sqrt{2001})^{2000}, \end{aligned}$$

co dowodzi równości (1).

Z zależności (1) wynika, że $a \geq b\sqrt{2001}$. Ponadto

$$2a = (x + y\sqrt{2001})^{2000} + (x - y\sqrt{2001})^{2000} \geq 0.$$

Jeżeli $b < 0$, to nierówność podana w tezie zadania jest spełniona, gdyż $a \geq 0$.

Jeśli zaś $b \geq 0$, to

$$a \geq b\sqrt{2001} \geq 44b.$$

Zadanie 7. Dany jest trójkąt równoramienny ABC o kącie prostym przy wierzchołku A . Punkty D i E leżą na przeciwprostokątnej BC , przy czym $\sphericalangle DAE = 45^\circ$. Okrąg opisany na trójkącie ADE przecina boki AB i AC odpowiednio w punktach P i Q . Dowieść, że $BP + CQ = PQ$.

Rozwiązanie

Punkty A, P, E, D leżą na jednym okręgu, więc $\sphericalangle ADE = \sphericalangle BPE$ (rys. 1). Ponadto $\sphericalangle DAE = 45^\circ = \sphericalangle PBE$. Z powyższych równości wynika, że trójkąty ADE i BPE są podobne, skąd w szczególności

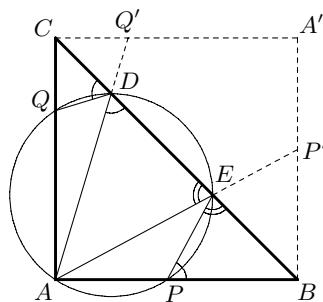
$$(1) \quad \sphericalangle AED = \sphericalangle BEP.$$

Analogicznie dowodzimy, że

$$(2) \quad \sphericalangle ADE = \sphericalangle CDQ.$$

Niech A', P', Q' będą odpowiednio punktami symetrycznymi do A, P, Q względem prostej BC . Na mocy równości (1) punkty A, E, P' są współliniowe; z równości (2) wynika, że punkty A, D, Q' są współliniowe.

Pozostaje wykazać, że $BP' + CQ' = P'Q'$, przy założeniu, że punkty P' i Q' leżą odpowiednio na bokach BA' i CA' kwadratu $ABA'C$ oraz spełniony jest warunek $\sphericalangle P'AQ' = 45^\circ$ (rys. 2).



rys. 1

Niech K będzie punktem symetrycznym do punktu B względem prostej AP' . Wówczas

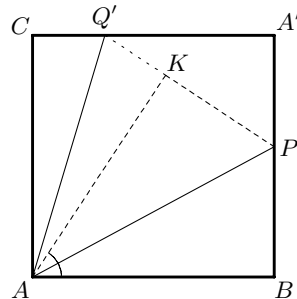
$$(3) \quad AC = AK \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle AKP' = 90^\circ.$$

Ponadto

$$\begin{aligned} \sphericalangle CAQ' &= 45^\circ - \sphericalangle P'AB = \\ &= 45^\circ - \sphericalangle P'AK = \sphericalangle KAQ'. \end{aligned}$$

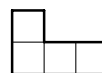
Z ostatniej zależności oraz z pierwszej równości (3) wynika, że trójkąty CAQ' i KAQ' są przystające (cecha *bok-kąt-bok*).

Zatem $\sphericalangle AKQ' = 90^\circ$, co w połączeniu z drugą równością (3) dowodzi, że punkty P' , K , Q' leżą na jednej prostej. Stąd $BP' + CQ' = KP' + KQ' = P'Q'$, co należało wykazać.



rys. 2

Zadanie 8. Rozstrzygnąć, dla jakich par liczb naturalnych m i n prostokąt o bokach długości m i n można pociąć na części przystające do figury na rysunku. Każdy z czterech kwadratów na rysunku ma bok długości 1.



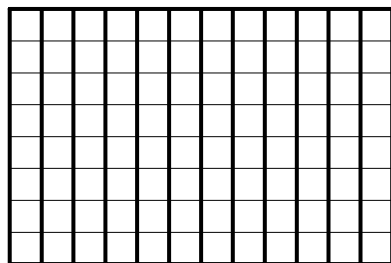
Rozwiązanie

Odpowiedź: Żądany podział jest możliwy wtedy i tylko wtedy, gdy $m, n > 1$ oraz iloczyn mn jest podzielny przez 8.

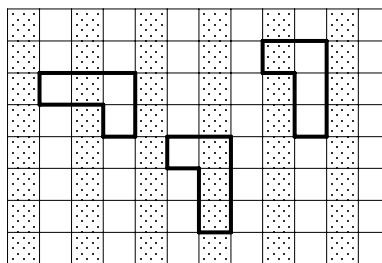
Żałóżmy najpierw, że udało nam się pociąć prostokąt $m \times n$ na części przystające do danej figury (które w dalszej części rozwiązania będziemy nazywać *klockami*). Oczywiście $m, n > 1$. Wykażemy, że $8 \mid mn$.

Każdy klocek składa się z czterech kwadratów jednostkowych, zatem iloczyn mn (pole prostokąta) musi być liczbą podzielną przez 4. Stąd w szczególności wynika, że długość jednego z boków prostokąta $m \times n$ jest liczbą parzystą. Przyjmijmy więc, bez straty ogólności, że szerokość prostokąta, np. wielkość m , jest parzysta.

Podzielmy dany prostokąt na mn kwadratów jednostkowych (które będziemy dalej nazywać *kratkami*). Wówczas prostokąt składa się z m (a więc parzystej liczby) kolumn, z których każda zawiera n krater (rys. 1).



rys. 1

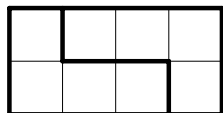


rys. 2

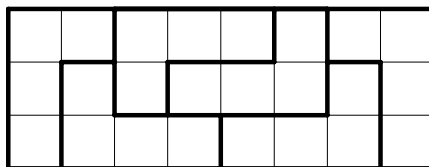
Pomalujmy kolumny prostokąta na przemian na czarno i biało (rys. 2). Każdy klocek wycięty z tak pomalowanego prostokąta zawiera trzy kratki jednego koloru i jedną kratkę drugiego koloru. Ponieważ liczba kratek białych danego prostokąta jest równa liczbie krater czarnych, więc klocków zawierających trzy kratki białe musi być tyle samo, co klocków zawierających trzy kratki czarne. Liczba klocków, na które składa się cały prostokąt, jest więc parzysta, co oznacza, że iloczyn mn jest podzielny przez 8.

Założmy teraz, że $m, n > 1$ oraz $8 \mid mn$. Wykażemy, że prostokąt $m \times n$ da się pociąć na klocki.

Zauważmy, że prostokąty 4×2 oraz 8×3 da się pociąć na klocki (rys. 3, 4). Zatem wystarczy wykazać, że prostokąt $m \times n$ da się pociąć na prostokąty 4×2 oraz 8×3 .

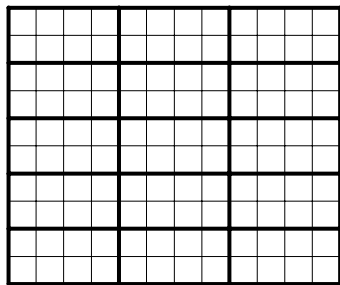


rys. 3

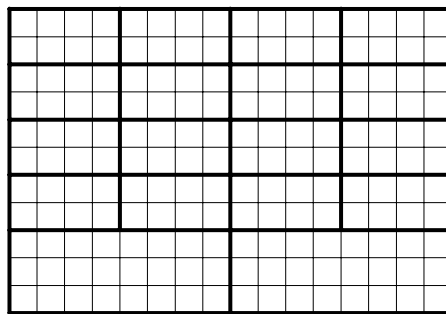


rys. 4

Jeśli jedna z liczb m, n jest podzielna przez 4, a druga parzysta, to prostokąt $m \times n$ da się pociąć na prostokąty 4×2 (rys. 5), bez konieczności używania prostokątów 8×3 .



rys. 5



rys. 6

Pozostał do rozpatrzenia przypadek, w którym jedna z liczb m, n jest podzielna przez 8 (bez straty ogólności przyjmijmy, że jest nią m), zaś druga (czyli n) jest nieparzysta i nie mniejsza niż 3. Prostokąt $m \times n$ dzielimy wówczas na dwa prostokąty $m \times (n-3)$ i $m \times 3$, z których pierwszy dzielimy na prostokąty 4×2 , a drugi na prostokąty 8×3 (rys. 6). Zatem również i w tym przypadku żądany podział jest możliwy.

Zadanie 9. Dowieść, że wśród dowolnych 12 kolejnych liczb całkowitych dodatnich istnieje liczba nie będąca sumą 10 czwartych potęg liczb całkowitych.

Rozwiązanie

Liczba będąca czwartą potęgą liczby całkowitej daje z dzielenia przez 16 resztę 0 lub 1. Istotnie: dla liczb parzystych postaci $2k$ mamy $(2k)^4 = 16k^4$, natomiast dla liczb nieparzystych $2k+1$ uzyskujemy

$$(2k+1)^4 = 16\left(k^4 + 2k^3 + \frac{1}{2}k(3k+1)\right) + 1.$$

(Liczba $\frac{1}{2}k(3k+1)$ jest całkowita dla dowolnej liczby całkowitej k).

Stąd wynika, że liczba, która jest sumą 10 czwartych potęg liczb całkowitych, daje z dzielenia przez 16 jedną z *jedenastu* reszt: $0, 1, 2, 3, \dots, 10$. Wśród 12 kolejnych liczb całkowitych żadne dwie nie dają tej samej reszty z dzielenia przez 16. Zatem któraś z tych 12 liczb nie daje z dzielenia przez 16 reszty ze zbioru $\{0, 1, 2, 3, \dots, 10\}$. Ta liczba nie może być więc sumą 10 czwartych potęg liczb całkowitych.

Zadanie 10. Dowieść, że wewnątrz dowolnego trójkąta ABC istnieje punkt P o następującej własności:

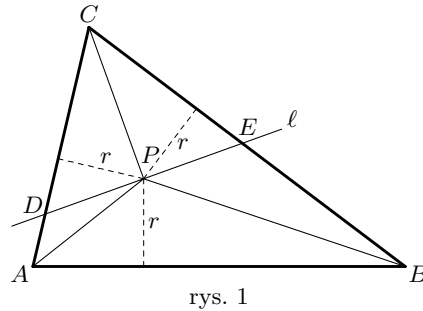
Każda prosta przechodząca przez punkt P dzieli obwód trójkąta ABC w takim samym stosunku, w jakim dzieli ona jego pole.

Rozwiązanie

Wykażemy, że własność opisaną w treści zadania ma środek okręgu wpisanego.

Niech ℓ będzie dowolną prostą przechodzącą przez punkt P będący środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC (rys. 1). Bez straty ogólności przyjmijmy, że prosta ℓ przecina boki AC i BC odpowiednio w punktach D i E . Należy wykazać, że

$$(1) \quad \frac{[ABED]}{[DEC]} = \frac{DA + AB + BE}{EC + CD},$$



rys. 1

gdzie $[\mathcal{F}]$ jest polem figury $\mathcal{F}$. Oznaczając przez r promień okręgu wpisanego w trójkąt ABC otrzymujemy

$$(2) \quad [ABED] = [DAP] + [ABP] + [BEP] = \frac{1}{2}DA \cdot r + \frac{1}{2}AB \cdot r + \frac{1}{2}BE \cdot r = \\ = \frac{1}{2}(DA + AB + BE) \cdot r$$

oraz

$$(3) \quad [DEC] = [ECP] + [CDP] = \frac{1}{2}EC \cdot r + \frac{1}{2}CD \cdot r = \frac{1}{2}(EC + CD) \cdot r.$$

Dzieląc stronami równości (2) i (3) uzyskujemy równość (1).

Zadanie 11. Układ liczb całkowitych dodatnich $c_1, c_2, \dots, c_n$ nazwiemy dopuszczalnym, gdy za pomocą wagi szalkowej i dwóch kompletów odważników o ciężarach $c_1, c_2, \dots, c_n$ można zważyć dowolny przedmiot o ciężarze będącym liczbą naturalną nie przekraczającą $2(c_1 + c_2 + \dots + c_n)$. Dla każdej liczby n wyznaczyć maksymalną sumę n liczb tworzących układ dopuszczalny.

Uwaga: Odważniki można kłaść na obie szalki wagi.

Rozwiązanie

Niech $p_1, p_2, \dots, p_n$ oraz $q_1, q_2, \dots, q_n$ będą dwoma zestawami odważników o ciężarach odpowiednio $c_1, c_2, \dots, c_n$. Wykażemy najpierw, że za pomocą tych dwóch zestawów możemy zważyć co najwyżej $\frac{1}{2}(5^n - 1)$ przedmiotów, niezależnie od tego, czy liczby $c_1, c_2, \dots, c_n$ tworzą układ dopuszczalny, czy nie.

Ustawienie odważników na szalkach wagi nazwiemy *optymalnym*, jeśli dla każdego $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ ciężarki p_k i q_k nie znajdują się na dwóch różnych szalkach wagi.

Aby otrzymać ustawienie optymalne, dwa odważniki p_k i q_k możemy ustawić na szalkach wagi na 5 sposobów (zob. tabela obok). Zatem liczba wszystkich optymalnych ustawień odważników jest równa 5^n . W tej liczbie mieści się jedno ustawienie „puste”, w którym na żadną szalkę nie kładziemy odważników. Pozostałe ustawienia można połączyć w pary symetryczne, w których jedno ustawienie powstaje z drugiego przez zamianę zawartości obydwu szalek wagi.

lewa szalka	prawa szalka
0	0
1	0
2	0
0	1
0	2

Tak więc liczba niepustych, istotnie różnych optymalnych ustawień odważników wynosi $\frac{1}{2}(5^n - 1)$, co oznacza, że możemy zważyć co najwyżej $\frac{1}{2}(5^n - 1)$ przedmiotów o różnych ciężarach.

Założmy, że liczby $c_1, c_2, \dots, c_n$ tworzą układ dopuszczalny. Wówczas masa najcięższego przedmiotu, jaki można zważyć, wynosi $2(c_1 + c_2 + \dots + c_n)$. Ponieważ nie da się zważyć więcej niż $\frac{1}{2}(5^n - 1)$ przedmiotów,

$$(1) \quad 2(c_1 + c_2 + \dots + c_n) \leq \frac{1}{2}(5^n - 1).$$

Wykażemy teraz, że liczby $c_1 = 1, c_2 = 5, c_3 = 5^2, \dots, c_n = 5^{n-1}$ tworzą układ dopuszczalny. Dla tych wartości c_i zachodzi równość

$$(2) \quad 2(c_1 + c_2 + \dots + c_n) = \frac{1}{2}(5^n - 1).$$

Należy więc udowodnić, że za pomocą dwóch kompletów odważników o ciężarach $1, 5, 5^2, \dots, 5^{n-1}$ można zważyć każdy przedmiot o ciężarze będącym liczbą naturalną nie przekraczającą $\frac{1}{2}(5^n - 1)$. Dowód tego faktu przeprowadzimy na dwa sposoby.

Sposób I

Indukcja. Dla $n = 1$ mamy dwa odważniki o ciężarze 1 każdy i za ich pomocą można zważyć przedmiot o ciężarze 1 lub $2 = \frac{1}{2}(5^1 - 1)$.

Założmy, że dysponujemy dwoma zestawami odważników o ciężarach 1, 5, 5^2 , ..., 5^{n-1} i za ich pomocą umiemy zważyć każdy przedmiot o ciężarze nie przekraczającym $\frac{1}{2}(5^n-1)$. Oto jak zważyć przedmiot p o ciężarze c , gdy:

(a) $c \in \langle \frac{1}{2}(5^n-1)+1, 5^n-1 \rangle$.

Korzystając z założenia indukcyjnego ważymy najpierw przedmiot q o ciężarze $5^n - c$ kładąc go na prawą szalkę wagi. Następnie kładziemy dodatkowy ciężarek o masie 5^n na *prawą* szalkę wagi, zdejmujemy przedmiot q i kładziemy przedmiot p na *lewą* szalkę.

(b) $c \in \langle 5^n+1, \frac{1}{2}(3 \cdot 5^n-1) \rangle$.

Podobnie jak w przypadku (a), ważymy najpierw przedmiot q o ciężarze $c - 5^n$ kładąc go na prawą szalkę wagi. Następnie kładziemy dodatkowy ciężarek o masie 5^n na *lewą* szalkę wagi, zdejmujemy przedmiot q i kładziemy przedmiot p na *prawą* szalkę.

(c) $c \in \langle \frac{1}{2}(3 \cdot 5^n-1)+1, 2 \cdot 5^n-1 \rangle$.

Ważymy najpierw przedmiot q o ciężarze $2 \cdot 5^n - c$ kładąc go na prawą szalkę wagi. Następnie kładziemy dwa ciężarki o masie 5^n na *prawą* szalkę wagi, zdejmujemy przedmiot q , po czym kładziemy przedmiot p na *lewą* szalkę.

(d) $c \in \langle 2 \cdot 5^n+1, \frac{1}{2}(5^{n+1}-1) \rangle$.

Ważymy najpierw przedmiot q o ciężarze $c - 2 \cdot 5^n$ kładąc go na prawą szalkę wagi. Następnie kładziemy dwa ciężarki o masie 5^n na *lewą* szalkę wagi, zdejmujemy przedmiot q , po czym kładziemy przedmiot p na *prawą* szalkę.

Przedmioty o masach 5^n i $2 \cdot 5^n$ można zważyć używając jedynie dwóch odważników o masie 5^n . Dowód indukcyjny został więc zakończony.

Sposób II

Niech c będzie dowolną liczbą naturalną nie przekraczającą $\frac{1}{2}(5^n-1)$. Wówczas liczba $c + \frac{1}{2}(5^n-1)$ jest mniejsza od 5^n . Liczbę tę można zatem zapisać w systemie piątkowym przy użyciu co najwyżej n cyfr. Innymi słowy

$$c + \frac{1}{2}(5^n-1) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i 5^i, \quad \text{gdzie } a_i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}.$$

Ponieważ $\frac{1}{2}(5^n-1) = 2(1+5+5^2+\dots+5^{n-1})$, więc

$$c = \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_i 5^i, \quad \text{gdzie } \varepsilon_i \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}.$$

Powyższa równość oznacza, że przedmiot o ciężarze c można zważyć za pomocą dwóch kompletów odważników o ciężarach 1, 5, 5^2 , ..., 5^{n-1} , co kończy dowód.

Z równości (1) i (2) wynika, że maksymalna suma zbioru n liczb dopuszczalnych wynosi $\frac{1}{4}(5^n-1)$.

Zadanie 12. Rozpatrujemy ciągi liczb całkowitych $x_0, x_1, \dots, x_{2000}$ spełniające warunki

$$x_0 = 0 \quad \text{oraz} \quad |x_n| = |x_{n-1} + 1| \quad \text{dla } n = 1, 2, \dots, 2000.$$

Znaleźć najmniejszą wartość wyrażenia $|x_1 + x_2 + \dots + x_{2000}|$.

Rozwiązanie

Odpowiedź: Najmniejsza wartość danego wyrażenia wynosi **12**.

Wykażemy indukcyjnie, że dla dowolnego ciągu (x_n) spełniającego warunki zadania zachodzi równość

$$(1) \quad x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_n = \frac{1}{2}(x_n^2 + 2x_n - n) \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots, 2000).$$

Dla $n = 0$ obie strony powyższej równości są równe 0. Załóżmy więc, że zależność (1) jest prawdziwa dla pewnego n . Wówczas

$$\begin{aligned} x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_n + x_{n+1} &= \frac{1}{2}(x_n^2 + 2x_n - n) + x_{n+1} = \\ &= \frac{1}{2}((x_n + 1)^2 - (n + 1)) + x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_{n+1}^2 - (n + 1)) + x_{n+1} = \\ &= \frac{1}{2}(x_{n+1}^2 + 2x_{n+1} - (n + 1)), \end{aligned}$$

co kończy dowód indukcyjny wzoru (1).

Zatem

$$|x_1 + x_2 + \dots + x_{2000}| = \frac{1}{2}|x_{2000}^2 + 2x_{2000} - 2000| = \frac{1}{2}|(x_{2000} + 1)^2 - 2001|.$$

Liczbą kwadratową leżącą najbliżej liczby 2001 jest $2025 = 45^2$. Stąd oraz z powyższej równości wnioskujemy, że wyrażenie $|x_1 + x_2 + \dots + x_{2000}|$ nie może przyjąć wartości mniejszej niż $\frac{1}{2}|2025 - 2001| = 12$.

Pozostaje zauważyć, że wartość 12 można zrealizować przyjmując

$$x_n = \begin{cases} n & \text{dla } n \leq 44; \\ -45 & \text{dla } n > 44, n \text{ nieparzyste}; \\ 44 & \text{dla } n > 44, n \text{ parzyste}. \end{cases}$$

Powyższy ciąg spełnia warunki zadania. Ponadto $x_{2000} = 44$, co na mocy równości (1) daje $|x_1 + x_2 + \dots + x_{2000}| = 12$.

Zadania z XLI Międzynarodowej Olimpiady Matematycznej

Taejon (Korea Południowa), 19 i 20 lipca 2000 r.

1. Dwa okręgi Γ_1 i Γ_2 przecinają się w punktach M i N . Niech l będzie taką wspólną prostą styczną do Γ_1 i Γ_2 , że punkt M znajduje się bliżej prostej l niż punkt N . Prosta l jest styczna do Γ_1 w punkcie A oraz do Γ_2 w punkcie B . Prosta równoległa do l przechodząca przez M przecina Γ_1 ponownie w punkcie C oraz Γ_2 ponownie w punkcie D . Proste CA i DB przecinają się w punkcie E ; proste AN i CD przecinają się w punkcie P ; proste BN i CD przecinają się w punkcie Q . Wykazać, że $EP = EQ$.

2. Niech a, b, c będą takimi liczbami rzeczywistymi dodatnimi, że $abc = 1$. Udowodnić, że

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right) \left(b - 1 + \frac{1}{c}\right) \left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leq 1.$$

3. Niech $n \geq 2$ będzie liczbą naturalną. Na danej poziomej prostej znajduje się n pcheł, nie wszystkie w tym samym punkcie. Dla liczby rzeczywistej dodatniej λ definiujemy *ruch* następująco:

- (i) wybieramy dwie pchły, w punktach A i B , przy czym A znajduje się na lewo od B ;
- (ii) pchła z punktu A skacze na punkt C , znajdujący się na danej prostej na prawo od B i taki, że $BC/AB = \lambda$.

Wyznaczyć wszystkie takie wartości λ , że dla dowolnego punktu M na prostej i dowolnego początkowego położenia n pcheł istnieje skończony ciąg ruchów, który przeprowadza wszystkie pchły na prawo od M .

4. Iluzjonista ma sto kart ponumerowanych od 1 do 100. Wkłada je do trzech pudełek, czerwonego, białego i niebieskiego tak, że każde z nich zawiera przynajmniej jedną kartę. Ktoś z widzów wybiera dwa z tych trzech pudełek, wyciąga po jednej karcie z każdego z wybranych pudełek i podaje sumę liczb na wyciągniętych kartach. Mając daną tę sumę, iluzjonista wskazuje to pudełko, z którego nie została wyciągnięta żadna karta.

Na ile sposobów można włożyć wszystkie karty do pudełek tak, by ta sztuka zawsze się udała? (Dwa sposoby uważa się za różne, gdy przynajmniej jedna karta znajdzie się za każdym razem w innym pudełku).

5. Rozstrzygnąć, czy istnieje taka liczba całkowita dodatnia n , że

- (i) n jest podzielna przez dokładnie 2000 różnych liczb pierwszych oraz
- (ii) liczba $2^n + 1$ jest podzielna przez n .

6. Niech AH_1, BH_2, CH_3 będą wysokościami trójkąta ostrokątnego ABC . Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do BC, CA, AB odpowiednio w punktach T_1, T_2, T_3 . Niech proste l_1, l_2, l_3 będą symetrycznymi obrazami prostych H_2H_3, H_3H_1, H_1H_2 odpowiednio względem prostych T_2T_3, T_3T_1, T_1T_2 . Udowodnić, że proste l_1, l_2, l_3 wyznaczają trójkąt, którego wierzchołki leżą na okręgu wpisanym w trójkąt ABC .

Zadania z XXIII Austriacko-Polskich Zawodów Matematycznych

Baranów Sandomierski, 28–30 czerwca 2000 r.

1. Wyznaczyć wszystkie wielomiany $P(x)$ o współczynnikach rzeczywistych, dla których istnieje taka dodatnia liczba całkowita n , że dla nieskoń-

$$\sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^k \left[\frac{k}{2} \right] P(x+k) = 0.$$

3. Dla każdej liczby naturalnej $n \geq 3$ rozwiązać w liczbach rzeczywistych następujący układ równań:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^3 = x_2 + x_3 + 1 \\ \dots\dots\dots \\ x_k^3 = x_{k+1} + x_{k+2} + 1 \\ \dots\dots\dots \\ x_{n-1}^3 = x_n + x_1 + 1 \\ x_n^3 = x_1 + x_2 + 1 \end{array} \right.$$

5. Dla jakich liczb naturalnych $n \geq 5$ możliwe jest pokolorowanie wierzchołków n -kąta foremnego nie więcej niż sześcioma kolorami, w ten sposób, aby w każdej grupie pięciu kolejnych wierzchołków wystąpiło pięć różnych kolorów?

7. Na płaszczyźnie dany jest trójkąt $A_0B_0C_0$. Rozważamy trójkąty ABC spełniające następujące warunki:

- Wyznaczyć miejsce geometryczne środków okręgów opisanych na wszystkich takich trójkątach ABC .

13

o boku długości 1, a pozostałe 23 leżą wewnątrz tego kwadratu. Udowodnić, że pewne trzy spośród danych punktów są wierzchołkami trójkąta o polu nie większym niż $\frac{1}{48}$.

9. Udowodnić, że jeśli a, b, c są nieujemnymi liczbami rzeczywistymi, przy czym $a + b + c = 1$, to mają miejsce nierówności:

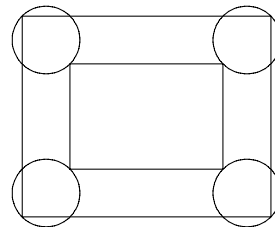
$$2 \leq (1 - a^2)^2 + (1 - b^2)^2 + (1 - c^2)^2 \leq (1 + a)(1 + b)(1 + c).$$

Dla każdej z tych nierówności rozstrzygnąć, kiedy zachodzi równość.

10. Plan zamku w Baranowie Sandomierskim można w przybliżeniu przedstawić jako graf o 16 węzłach, narysowany poniżej:

Nocny strażnik planuje zamkniętą trasę obchodu wzdłuż krawędzi tego grafu.

- (a) Ile istnieje takich tras (bez uwzględniania kierunku), które przechodzą przez każdy węzeł dokładnie raz?
- (b) Ile istnieje takich tras (z uwzględnieniem kierunku), które przechodzą przez każdą krawędź dokładnie raz i nie krzyżują się same ze sobą?



Zadania z XI Zawodów Matematycznych Państw Bałtyckich

Oslo (Norwegia), 4 listopada 2000 r.

1. Niech K będzie punktem leżącym wewnątrz trójkąta ABC . Niech M i N będą takimi punktami, że M i K leżą po przeciwnych stronach prostej AB , oraz N i K leżą po przeciwnych stronach prostej BC . Załóżmy, że $\sphericalangle MAB = \sphericalangle MBA = \sphericalangle NBC = \sphericalangle NCB = \sphericalangle KAC = \sphericalangle KCA$. Udowodnić, że $MBNK$ jest równoległobokiem.

2. Dany jest trójkąt równoramienny ABC o kącie $\sphericalangle A = 90^\circ$. Niech M będzie środkiem boku AB . Prosta przechodząca przez punkt A i prostopadła do prostej CM przecina bok BC w punkcie P . Dowieść, że

$$\sphericalangle AMC = \sphericalangle BMP.$$

3. Dany jest trójkąt ABC , w którym $\sphericalangle A = 90^\circ$ oraz $AB \neq AC$. Punkty D, E, F leżą odpowiednio na bokach BC, CA, AB , w taki sposób, że $AFDE$ jest kwadratem. Wykazać, że prosta BC , prosta FE oraz styczna w punkcie A do okręgu opisanego na trójkącie ABC przecinają się w jednym punkcie.

4. Dany jest trójkąt ABC , w którym $\sphericalangle A = 120^\circ$. Punkty K i L leżą odpowiednio na bokach AB i AC . Niech BKP i CLQ będą trójkątami równobocznymi zbudowanymi na zewnątrz trójkąta ABC . Udowodnić, że $PQ \geq \frac{\sqrt{3}}{2}(AB + AC)$.

5. Niech ABC będzie takim trójkątem, że

$$\frac{BC}{AB - BC} = \frac{AB + BC}{AC}.$$

Wyznaczyć iloraz $\sphericalangle A : \sphericalangle C$.

6. Fredek prowadzi pensjonat. Twierdzi on, że za każdym razem, gdy jego pensjonat odwiedza $n \geq 3$ gości, potrafi wskazać takich dwóch, którzy wśród pozostałych gości mają taką samą liczbę znajomych oraz wspólnego znajomego lub wspólnego nieznanego. Dla jakich wartości n Fredek ma rację?

7. Tablica kontrolna o wymiarach 40×50 składa się z 2000 guzików, z których każdy jest w pozycji: włączony lub wyłączony. Naciśnięcie guzika powoduje zmianę jego pozycji oraz pozycji wszystkich guzików w tej samej kolumnie i w tym samym wierszu. Wykazać, że przyciskając guziki można tablicę z początkowo wyłączonymi guzikami doprowadzić do tablicy, w której wszystkie guziki są włączone. Wyznaczyć najmniejszą potrzebną do tego liczbę naciśnień.

8. Na przyjęciu spotkało się czternastu kolegów. Jeden z nich, Fredek, chciał wcześniej położyć się spać. Pożegnał się więc z 10 kolegami, zapominając o trzech pozostałych i poszedł spać. Po chwili wrócił na przyjęcie, pożegnał się z 10 kolegami (niekoniecznie tymi samymi co poprzednio) i poszedł spać. Fredek powracał jeszcze wielokrotnie i za każdym razem żegnał się z 10 kolegami, po czym szedł spać. Kiedy tylko pożegnał się z każdym ze swoich kolegów co najmniej raz, to już nie wrócił. Rano Fredek uświadomił sobie, że z każdym z trzynastu kolegów pożegnał się inną liczbę razy. Ile co najmniej razy powracał Fredek?

9. Po szachownicy $2k \times 2k$ złożonej z jednostkowych kwadratów skacze żaba. Skoki żaby są długości $\sqrt{1+k^2}$ i przenoszą ją ze środka jednego kwadratu do środka innego kwadratu. Pewnych m kwadratów szachownicy zaznaczono krzyżykiem. Wszystkie kwadraty, do których może skoczyć żaba z pól oznaczonych krzyżykiem, oznaczono kółkiem (nawet, jeśli na którymś z tych pól jest już krzyżyk). Kółkiem oznaczono n kwadratów. Dowieść, że $n \geq m$.

10. Na tablicy napisano dwie liczby całkowite dodatnie. Początkowo, jedna z nich jest równa 2000, a druga jest mniejsza niż 2000. Jeśli średnia arytmetyczna m dwóch liczb napisanych na tablicy jest liczbą całkowitą, możemy wykonać następującą procedurę: ścieramy jedną z liczb zastępując ją przez m . Dowieść, że ta procedura nie może być wykonana więcej niż dziesięć razy. Podać przykład, w którym powyższa procedura jest wykonywana dziesięć razy.

11. Dany jest taki ciąg liczb całkowitych dodatnich $a_1, a_2, \dots$, że dla dowolnych m i n zachodzi: jeśli m jest dzielnikiem liczby n oraz $m < n$, to a_m

jest dzielnikiem liczby a_n oraz $a_m < a_n$. Znaleźć najmniejszą możliwą wartość liczby a_{2000} .

12. Niech $x_1, x_2, \dots, x_n$ będą takimi liczbami całkowitymi dodatnimi, że żadna z nich nie jest początkowym fragmentem żadnej innej (na przykład 12 jest początkowym fragmentem liczb 12, 125 oraz 12405). Dowieść, że

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} < 3.$$

13. Niech $a_1, a_2, \dots, a_n$ będzie takim ciągiem arytmetycznym liczb całkowitych, że $i \mid a_i$ dla $i = 1, 2, \dots, n-1$ oraz $n \nmid a_n$. Udowodnić, że n jest potęgą liczby pierwszej.

14. Znaleźć wszystkie takie dodatnie liczby całkowite n , że n równa się liczbie dodatnich dzielników liczby n pomnożonej przez 100.

15. Niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą niepodzielną ani przez 2, ani przez 3. Wykazać, że dla wszystkich liczb całkowitych k liczba

$$(k+1)^n - k^n - 1$$

jest podzielna przez $k^2 + k + 1$.

16. Udowodnić, że dla wszystkich dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c zachodzi nierówność

$$\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{b^2 - bc + c^2} \geq \sqrt{a^2 + ac + c^2}.$$

17. Znaleźć wszystkie rozwiązania w liczbach rzeczywistych następującego układu równań:

$$\begin{cases} x + y + z + t = 5 \\ xy + yz + zt + tx = 4 \\ xyz + yzt + ztx + txy = 3 \\ xyzt = -1. \end{cases}$$

18. Wyznaczyć wszystkie dodatnie liczby rzeczywiste x i y spełniające równanie

$$x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + 4 = 2 \cdot (\sqrt{2x+1} + \sqrt{2y+1}).$$

19. Niech $t \geq \frac{1}{2}$ będzie liczbą rzeczywistą, a n dodatnią liczbą całkowitą. Dowieść, że $t^{2n} \geq (t-1)^{2n} + (2t-1)^n$.

20. Dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n , niech

$$x_n = \frac{(2n+1)(2n+3) \dots (4n-1)(4n+1)}{(2n)(2n+2) \dots (4n-2)(4n)}.$$

Dowieść, że

$$\frac{1}{4n} < x_n - \sqrt{2} < \frac{2}{n}.$$

LII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia drugiego

23 lutego 2001 r. (pierwszy dzień zawodów)

Zadanie 1. Dane są liczby naturalne k, n większe od 1, przy czym liczba $p = 2k - 1$ jest pierwsza. Dowieść, że jeżeli liczba

$$\binom{n}{2} - \binom{k}{2}$$

jest podzielna przez p , to jest ona podzielna przez p^2 .

Rozwiązanie

Liczba p jest dzielnikiem liczby

$$a = \frac{n(n-1)}{2} - \frac{k(k-1)}{2} = \frac{(4n^2 - 4n + 1) - (4k^2 - 4k + 1)}{8} = \frac{(2n-1)^2 - p^2}{8}.$$

Zatem p , jako liczba nieparzysta, jest dzielnikiem liczby $(2n-1)^2 - p^2$. Liczba p jest pierwsza, skąd $p \mid (2n-1)$. Z podzielności tej wynika, że $p^2 \mid (2n-1)^2$, czyli $p^2 \mid a$.

Zadanie 2. Punkty A, B, C leżą w tej właśnie kolejności na jednej prostej, przy czym $AB < BC$. Punkty D, E są wierzchołkami kwadratu $ABDE$. Okrąg o średnicy AC przecina prostą DE w punktach P i Q , przy czym punkt P należy do odcinka DE . Proste AQ i BD przecinają się w punkcie R . Udowodnić, że $DP = DR$.

Rozwiązanie

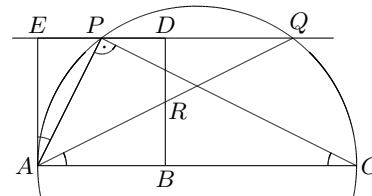
Kąt APC jest prosty jako kąt wpisany oparty na średnicy (rys. 1). Stąd

$$\sphericalangle EAP = 90^\circ - \sphericalangle PAC = \sphericalangle ACP.$$

Z kolei z równości łuków AP i CQ wynika równość kątów ACP i CAQ , skąd

$$\sphericalangle EAP = \sphericalangle BAR.$$

Trójkąty PAE i RBA są więc przystające (cecha *kąt-bok-kąt*), co dowodzi, że $EP = BR$. Stąd $DP = DR$.



rys. 1

Zadanie 3. Niech $n \geq 3$ będzie liczbą naturalną. Dowieść, że dowolny wielomian postaci

$$x^n + a_{n-3}x^{n-3} + a_{n-4}x^{n-4} + a_{n-5}x^{n-5} + \dots + a_1x + a_0,$$

gdzie co najmniej jeden ze współczynników rzeczywistych $a_0, a_1, \dots, a_{n-3}$ jest różny od zera, ma mniej niż n pierwiastków rzeczywistych (każdy pierwiastek liczymy tyle razy, ile wynosi jego krotność).

Rozwiązanie

Przypuśćmy, że dany w treści zadania wielomian ma n pierwiastków rzeczywistych $x_1, x_2, \dots, x_n$. Ze wzorów Viéte'a wynika, że

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = -a_{n-1} = 0 \quad \text{oraz} \quad \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j = a_{n-2} = 0.$$

Zatem $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = a_{n-1}^2 - 2a_{n-2} = 0$, skąd $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$. Jednak powyższa równość pociąga za sobą $a_0 = a_1 = \dots = a_{n-3} = 0$, co przeczy założeniu.

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że dany wielomian stopnia n nie może mieć n pierwiastków rzeczywistych, zatem musi ich mieć mniej niż n .

(wp, jwr)

* * *

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w internecie pod adresem:

www.impan.gov.pl/~olimp/

LII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia drugiego

24 lutego 2001 r. (drugi dzień zawodów)

Zadanie 4. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne $n \geq 3$, dla których prawdziwe jest następujące zdanie:
W dowolnym n -wyrazowym ciągu arytmetycznym $a_1, a_2, \dots, a_n$, dla którego liczba $1 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 + \dots + n \cdot a_n$ jest wymierna, istnieje wyraz będący liczbą wymierną.

Rozwiązanie

Odp.: Rozpatrywane zdanie jest prawdziwe jedynie dla liczb $n \geq 3$ dających z dzielenia przez 3 resztę 1.

Niech $a_i = a + ir$ ($i = 1, 2, \dots, n$) będzie ciągiem arytmetycznym. Korzystając ze wzorów

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{oraz} \quad 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

stwierdzamy, że dana w treści zadania suma jest równa

$$S = \frac{n(n+1)}{2}a + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}r.$$

Stąd uzyskujemy

$$(1) \quad \frac{2S}{n(n+1)} = a + \frac{2n+1}{3}r.$$

Założmy najpierw, że liczba n daje z dzielenia przez 3 resztę 1. Wówczas liczba $k = \frac{1}{3}(2n+1)$ jest całkowita. Z równości (1) oraz z faktu, że S jest liczbą wymierną wynika, że wyraz a_k jest liczbą wymierną. Zatem rozpatrywane zdanie jest w tym przypadku prawdziwe.

Założmy z kolei, że liczba n nie daje z dzielenia przez 3 reszty 1 (innymi słowy, liczba $\frac{1}{3}(2n+1)$ nie jest całkowita). Skonstruujemy ciąg arytmetyczny a_i , dla którego rozpatrywane zdanie nie jest prawdziwe. Przyjmijmy:

$$r = \sqrt{2} \quad \text{oraz} \quad a = -\frac{1}{3}(2n+1)\sqrt{2}.$$

Ze związku (1) otrzymujemy $S = 0$, jednak dla dowolnego $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ liczba

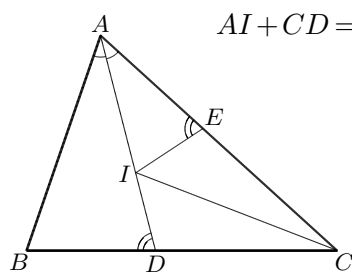
$$a_i = \left(i - \frac{1}{3}(2n+1)\right)\sqrt{2}$$

jest niewymierna. Rozpatrywane zdanie nie jest więc prawdziwe, jeśli n nie daje z dzielenia przez 3 reszty 1.

Zadanie 5. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC . Prosta AI przecina bok BC w punkcie D . Dowieść, że $AI + CD = AC$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\sphericalangle B = 60^\circ + \frac{1}{3}\sphericalangle C$.

Rozwiązanie

Niech E będzie takim punktem leżącym na boku AC , że $AI = AE$ (rys. 1). Wówczas



rys. 1

$$\begin{aligned}
 AI + CD = AC &\Leftrightarrow CE = CD \\
 &\Leftrightarrow \text{trójkąty } CDI \text{ i } CEI \text{ są przystające} \\
 &\Leftrightarrow \sphericalangle AEI = \sphericalangle ADB \\
 &\Leftrightarrow \text{trójkąty } AIE \text{ i } ABD \text{ są podobne} \\
 &\Leftrightarrow \sphericalangle B = \sphericalangle ADB \\
 &\Leftrightarrow \sphericalangle B = \frac{1}{2}\sphericalangle A + \sphericalangle C \\
 &\Leftrightarrow \sphericalangle B = 60^\circ + \frac{1}{3}\sphericalangle C.
 \end{aligned}$$

Zadanie 6. Dla danej liczby całkowitej dodatniej n rozstrzygnąć, czy podzbiorów n -elementowych zbioru $\{1, 2, 3, \dots, 2n-1, 2n\}$ mających sumę elementów parzystą jest tyle samo, co podzbiorów n -elementowych mających nieparzystą sumę elementów. Jeśli nie, to rozstrzygnąć, których jest więcej i o ile.

Rozwiązanie

Połączmy liczby ze zbioru $S = \{1, 2, 3, \dots, 2n-1, 2n\}$ w pary:

$$(1, 2), (3, 4), \dots, (2n-1, 2n).$$

Niech X będzie dowolnym n -elementowym podzbiorem zbioru S . Wybierzmy (jeśli jest to możliwe) najmniejszą liczbę x ze zbioru X o tej własności, że liczba y występująca w parze z liczbą x nie należy do zbioru X . Następnie usuńmy ze zbioru X element x zastępując go elementem y . Otrzymany zbiór nazwijmy $f(X)$. Zbiory X i $f(X)$ mają sumy elementów różnej parzystości.

W dalszej części rozwiązania rozpatrzmy dwa przypadki:

(a) Liczba n jest nieparzysta.

Odwzorowanie f jest określone dla dowolnego n -elementowego podzbioru zbioru S i łączy ono w pary $(X, f(X))$ wszystkie podzbiory n -elementowe o nieparzystej sumie elementów ze wszystkimi n -elementowymi podzbiórmi o sumie elementów parzystej. To dowodzi, że n -elementowych podzbiorów o parzystej sumie elementów jest tyle samo, co n -elementowych podzbiorów o nieparzystej sumie elementów.

(b) Liczba n jest parzysta.

W tym przypadku odwzorowania f nie da się określić jedynie na tych n -elementowych podzbiórach zbioru S , które są złożone z pełnych par. Zbiorów tych jest $\binom{n}{n/2}$ i wszystkie one mają sumę elementów o takiej samej parzystości, jak parzystość liczby $n/2$. Pozostałe podzbiory możemy połączyć w pary $(X, f(X))$. Jeżeli n dzieli się przez cztery, to n -elementowych podzbiorów o parzystej sumie elementów jest o $\binom{n}{n/2}$ więcej niż n -elementowych podzbiorów o nieparzystej sumie elementów. Jeśli natomiast n nie dzieli się przez cztery, to podzbiorów o nieparzystej sumie elementów jest o $\binom{n}{n/2}$ więcej.

(wp, jwr)



LII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia trzeciego

2 kwietnia 2001 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$ i dowolnych liczb rzeczywistych nieujemnych $x_1, x_2, \dots, x_n$ zachodzi nierówność

$$\sum_{i=1}^n i x_i \leq \binom{n}{2} + \sum_{i=1}^n x_i^i.$$

2. Dowieść, że suma odległości dowolnego punktu leżącego wewnątrz czworościanu foremnego o krawędzi 1 od jego wierzchołków jest nie większa niż 3.

3. Rozważamy ciąg (x_n) określony rekurencyjnie wzorami

$$x_1 = a, \quad x_2 = b \quad \text{oraz} \quad x_{n+2} = x_{n+1} + x_n \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots,$$

gdzie a i b są liczbami rzeczywistymi.

Liczbę c będziemy nazywać *wartością wielokrotną* ciągu (x_n) , jeżeli istnieją co najmniej dwie różne liczby całkowite dodatnie k i l takie, że $x_k = x_l = c$. Wykazać, że można tak dobrać liczby a i b , aby ciąg (x_n) miał więcej niż 2000 wartości wielokrotnych, ale nie można tak dobrać a i b , aby miał on nieskończenie wiele wartości wielokrotnych.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Przed rozpoczęciem rozwiązywania należy przepisać tekst każdego zadania na oddzielnym arkuszu.
3. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
4. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu czekać na podeście dyżurującego.
5. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
6. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów.



Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia trzeciego

kwietnia 2001 r. (drugi dzień zawodów)

4. Dane są takie liczby całkowite a i b , że dla każdej liczby całkowitej nieujemnej n liczba $2^n a + b$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Dowieść, że $a = 0$.

5. Punkty K i L leżą odpowiednio na bokach BC i CD równoległoboku $ABCD$, przy czym $BK \cdot AD = DL \cdot AB$. Odcinki DK i BL przecinają się w punkcie P . Wykazać, że $\sphericalangle DAP = \sphericalangle BAC$.

6. Dane są liczby całkowite dodatnie $n_1 < n_2 < \dots < n_{2000} < 10^{100}$. Dowieść, że ze zbioru $\{n_1, n_2, \dots, n_{2000}\}$ można wybrać niepuste rozłączne podzbiory A i B mające tyle samo elementów, taką samą sumę elementów i taką samą sumę kwadratów elementów.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Przed rozpoczęciem rozwiązywania należy przepisać tekst każdego zadania na oddzielnym arkuszu.
3. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
4. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu czekać na podejście dyżurującego.
5. W przypadku stwierdzenia niesamodzielnosci pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
6. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów.



LII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia trzeciego

2 kwietnia 2001 r. (pierwszy dzień zawodów)

Zadanie 1. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$ i dowolnych liczb rzeczywistych nieujemnych $x_1, x_2, \dots, x_n$ zachodzi nierówność

$$\sum_{i=1}^n ix_i \leq \binom{n}{2} + \sum_{i=1}^n x_i^i.$$

Rozwiązanie

Z nierówności między średnią geometryczną i średnią arytmetyczną zastosowanej do liczb

$$y_1 = x_i^i, \quad y_2 = y_3 = \dots = y_i = 1 \quad (2 \leq i \leq n)$$

otrzymujemy

$$x_i = \sqrt[i]{y_1 y_2 y_3 \dots y_i} \leq \frac{y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_i}{i} = \frac{x_i^i + (i-1)}{i}.$$

Zatem

$$\sum_{i=1}^n ix_i \leq \sum_{i=1}^n (i-1) + \sum_{i=1}^n x_i^i, \quad \text{czyli} \quad \sum_{i=1}^n ix_i \leq \binom{n}{2} + \sum_{i=1}^n x_i^i.$$

Uwaga

W nierówności (1) równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie liczby $y_1, y_2, \dots, y_i$ są równe. Zatem w danej w zadaniu nierówności równość zachodzi tylko przy $x_2 = x_3 = \dots = x_n = 1$.

Zadanie 2. Dowieść, że suma odległości dowolnego punktu leżącego wewnątrz czworościanu foremnego o krawędzi 1 od jego wierzchołków jest nie większa niż 3.

Rozwiązanie

Niech $A_1 A_2 A_3 A_4$ będzie danym czworościanem, a P dowolnym punktem w jego wnętrzu. Załóżmy, że prosta $A_i P$ przecina przeciwległą ścianę czworościanu $A_1 A_2 A_3 A_4$ w punkcie B_i . Niech $\mathcal{C}_i$ będzie czworościanem, którego jedną ścianą jest ta ściana czworościanu $A_1 A_2 A_3 A_4$, która zawiera punkt B_i , zaś przeciwległym wierzchołkiem punkt P . Wtedy

$$\sum_{i=1}^4 \frac{PB_i}{A_i B_i} = \sum_{i=1}^4 \frac{V(\mathcal{C}_i)}{V(A_1 A_2 A_3 A_4)} = 1, \quad \text{skąd} \quad \sum_{i=1}^4 \frac{A_i P}{A_i B_i} = 3.$$

($V(\mathcal{T})$ oznacza objętość czworościanu $\mathcal{T}$.) Z nierówności $A_i B_i < 1$ oraz z powyższej zależności wynika teza.

Zadanie 3. Rozważamy ciąg (x_n) określony rekurencyjnie wzorami

$$x_1 = a, \quad x_2 = b \quad \text{oraz} \quad x_{n+2} = x_{n+1} + x_n \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots,$$

gdzie a i b są liczbami rzeczywistymi.

Liczbę c będziemy nazywać *wartością wielokrotną* ciągu (x_n) , jeżeli istnieją co najmniej dwie różne liczby całkowite dodatnie k i l takie, że $x_k = x_l = c$. Wykazać, że można tak dobrać liczby a i b , aby ciąg (x_n) miał więcej niż 2000 wartości wielokrotnych, ale nie można tak dobrać a i b , aby miał on nieskończenie wiele wartości wielokrotnych.

Rozwiązanie

Ciąg (x_n) spełnia taką samą rekurencję, jak ciąg Fibonacciego

$$F_1 = F_2 = 1, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots$$

Niech dodatkowo $F_0 = 0$ oraz $F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n$ dla $n = 1, 2, 3, \dots$. Wówczas równość $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ zachodzi dla dowolnej liczby całkowitej n .

Przyjmijmy $a = F_{-4001}$ oraz $b = F_{-4000}$. Wtedy $x_n = F_{n-4002}$. Ponadto dla $n = 1, 3, 5, 7, \dots, 4001$ uzyskujemy $x_n = F_{n-4002} = F_{4002-n} = x_{8004-n}$. Stąd wynika, że liczby $F_1, F_3, F_5, \dots, F_{4001}$ są wartościami wielokrotnymi ciągu (x_n) ; są one różne i jest ich więcej niż 2000.

Dla dowolnego ciągu (x_n) spełniającego warunek

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots$$

istnieją takie liczby rzeczywiste A i B , że

$$x_n = A\alpha^n + B\beta^n \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots,$$

gdzie $\alpha = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$, $\beta = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$ są pierwiastkami wielomianu $x^2 - x - 1$.

Jeżeli $A = B = 0$, to wszystkie wyrazy ciągu (x_n) są zerami i liczba 0 jest jedyną wartością wielokrotną ciągu (x_n) .

Jeżeli $A = 0$ oraz $B \neq 0$, to wszystkie wyrazy ciągu (x_n) są różne i ciąg (x_n) nie ma wartości wielokrotnych.

Jeżeli natomiast $A \neq 0$, to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \begin{cases} +\infty & \text{gdy } A > 0, \\ -\infty & \text{gdy } A < 0. \end{cases}$$

Zatem istnieje taka liczba naturalna N , że dla wszystkich $n \geq N$, $x_n \neq 0$. Ponadto

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{A\alpha^{n+1} + B\beta^{n+1}}{A\alpha^n + B\beta^n} = \frac{A\alpha + B\beta\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n}{A + B\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n} \quad (n \geq N),$$

a zatem $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \alpha > 1$.

Stąd wynika, że ciąg (x_n) od pewnego miejsca jest rosnący i w związku z tym nie może mieć nieskończenie wielu wartości wielokrotnych.



III Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia trzeciego

3 kwietnia 2001 r. (drugi dzień zawodów)

Zadanie 4. Dane są takie liczby całkowite a i b , że dla każdej liczby całkowitej nieujemnej n liczba $2^n a + b$ jest kwadratem liczby całkowitej. Dowieść, że $a = 0$.

Rozwiązanie

Jeżeli $b = 0$, to $a = 0$, gdyż dla $a \neq 0$ liczby a i $2a$ nie mogą być jednocześnie kwadratami liczb całkowitych.

Gdyby liczba a była ujemna, to dla pewnej, dużej liczby naturalnej n , liczba $2^n a + b$ też byłaby ujemna, nie mogłaby więc być kwadratem liczby całkowitej.

Pozostaje do rozpatrzenia przypadek, gdy $a \geq 0$ oraz $b \neq 0$.

Dla każdej liczby całkowitej dodatniej k , liczby

$$2^{2k}a + b \quad \text{oraz} \quad 4(2^{2k-2}a + b) = 2^{2k}a + 4b$$

są kwadratami różnych liczb całkowitych nieujemnych, powiedzmy

$$2^{2k}a + b = x_k^2 \quad \text{oraz} \quad 2^{2k}a + 4b = y_k^2.$$

Wówczas $x_k + y_k \leq (x_k + y_k)|x_k - y_k| = |x_k^2 - y_k^2| = |3b|$, skąd

$$2^{2k}a + b = x_k^2 \leq (x_k + y_k)^2 \leq 9b^2 \quad \text{dla każdego } k.$$

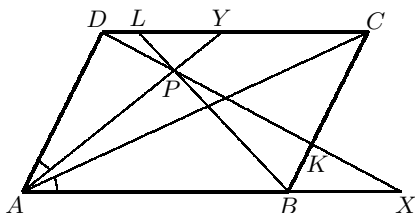
Zatem ciąg (x_k) jest ograniczony, co jest możliwe tylko wtedy, gdy $a = 0$.

Zadanie 5. Punkty K i L leżą odpowiednio na bokach BC i CD równoległoboku $ABCD$, przy czym $BK \cdot AD = DL \cdot AB$. Odcinki DK i BL przecinają się w punkcie P . Wykazać, że $\angle DAP = \angle BAC$.

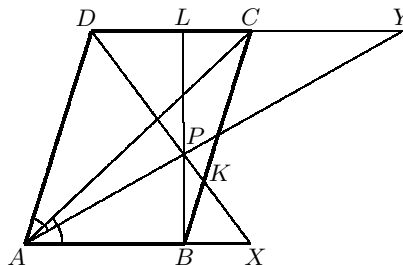
Rozwiązanie

Niech Y będzie punktem przecięcia prostych AP i CD oraz niech X będzie punktem przecięcia prostych DK i AB (rys. 1 i 2). Wówczas

$$\frac{DL}{DY} = \frac{BX}{AX} = \frac{BK}{AD}.$$



rys. 1



rys. 2

Stąd oraz z równości danej w treści zadania otrzymujemy:

$$\frac{DY}{AD} = \frac{DL}{BK} = \frac{AD}{AB} = \frac{BC}{AB}.$$

To dowodzi, że trójkąty ABC i ADY są podobne, skąd wynika teza.

Zadanie 6. Dane są liczby całkowite dodatnie $n_1 < n_2 < \dots < n_{2000} < 10^{100}$. Dowieść, że ze zbioru $\{n_1, n_2, \dots, n_{2000}\}$ można wybrać niepuste rozłączne podzbiory A i B mające tyle samo elementów, taką samą sumę elementów i taką samą sumę kwadratów elementów.

Rozwiązanie

Dla zbioru $X \subseteq \{n_1, n_2, \dots, n_{2000}\}$ niech $s_0(X)$, $s_1(X)$ i $s_2(X)$ oznaczają odpowiednio liczbę elementów, sumę elementów i sumę kwadratów elementów zbioru X .

Wystarczy udowodnić, że istnieją takie dwa *różne* podzbiory C i D zbioru $\{n_1, n_2, \dots, n_{2000}\}$, dla których $s_i(C) = s_i(D)$ dla $i = 0, 1, 2$. Wówczas zbiory $A = C \setminus D$ oraz $B = D \setminus C$ są niepuste i spełniają warunki zadania.

Dla dowolnego podzbioru X zbioru $\{n_1, n_2, \dots, n_{2000}\}$ mamy

$$(1) \quad s_0(X) < 10^4, \quad s_1(X) < 2000 \cdot 10^{100} < 10^{104}, \quad s_2(X) < 2000 \cdot 10^{200} < 10^{204}.$$

Oznaczając $S(X) = s_0(X) + 10^4 s_1(X) + 10^{108} s_2(X)$ uzyskujemy

$$S(X) < 10^{313} < (10^3)^{105} < 2^{1050} < 2^{2000}.$$

Stąd istnieją takie dwa różne podzbiory C , D zbioru $\{n_1, n_2, \dots, n_{2000}\}$, że $S(C) = S(D)$. Z nierówności (1) wynika, że $s_i(C) = s_i(D)$ dla $i = 0, 1, 2$, co kończy rozwiązanie zadania.

(wp, jur)

* * *

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w internecie pod adresem:

www.impan.gov.pl/~olimp/

LIII OLIMPIADA MATEMATYCZNA

ZADANIA KONKURSOWE

ZAWODÓW I STOPNIA

I SERIA

1. Rozwiązać w liczbach rzeczywistych równanie

$$\begin{aligned} &|x| - |x+2| + |x+4| - |x+6| + \dots - |x+998| = \\ &= |x+1| - |x+3| + |x+5| - |x+7| + \dots - |x+999|. \end{aligned}$$

2. Na bokach AB i AC trójkąta ABC zbudowano, po jego zewnętrznej stronie, kwadraty $ABDE$ i $ACFG$. Punkty M i N są odpowiednio środkami odcinków DG i EF . Wyznaczyć możliwe wartości wyrażenia $MN:BC$.

3. Wykazać, że liczba

$$\sum_{n=0}^{10^{10}} \binom{2 \cdot 10^{10}}{2n} 5^n$$

jest podzielna przez $2^{2 \cdot 10^{10} - 1}$.

4. Dowieść, że wykres wielomianu $W(x)$ stopnia większego od 1 ma oś symetrii wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją takie wielomiany $F(x)$ i $G(x)$, że $W(x) = F(G(x))$, przy czym $G(x)$ jest stopnia 2.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać pod adresem komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia 10 października 2001 r. (decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.

II SERIA

5. Wykazać, że dla każdej liczby naturalnej k istnieje taka liczba naturalna m , że każda z liczb $m, 2m, 3m, \dots, m^2$ w rozwinięciu dwójkowym ma dokładnie k jedynek.
6. Okrąg dzieli każdy bok rombu na 3 odcinki. Malujemy otrzymane odcinki kolejno na czerwono, zielono i białło, zaczynając od wierzchołka rombu i poruszając się po jego obwodzie w ustalonym kierunku. Wykazać, że suma długości odcinków czerwonych jest równa sumie długości odcinków białych.
7. W grupie $n \geq 3$ osób każda ma parzystą (być może zerową) liczbę znajomych. Dowieść, że istnieją trzy osoby mające tę samą liczbę znajomych.
Uwaga: Zakładamy, że nikt nie zalicza siebie samego do grona swoich znajomych, oraz że osoba A zna osobę B wtedy i tylko wtedy, gdy B zna A .
8. Niech $S(n)$ oznacza sumę cyfr liczby n . Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n liczba $S(2n^2 + 3)$ nie jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać pod adresem komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia 12 listopada 2001 r. (decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.

III SERIA

9. Płaszczyzna przecina krawędzie boczne graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego tworząc w przekroju sześciokąt wypukły $D_1D_2\dots D_6$. Niech d_i ($1 \leq i \leq 6$) będzie odległością punktu D_i od płaszczyzny ustalonej podstawy graniastosłupa. Dowieść, że

$$d_1^2 + d_3^2 + d_5^2 = d_2^2 + d_4^2 + d_6^2.$$

10. Dana jest szachownica 2000×2000 . Na każdym polu leży kamień. Wykonujemy następujące ruchy: jeżeli na pierwszym i trzecim z trzech kolejnych pól leżących w jednym wierszu lub kolumnie leży kamień, to możemy oba te kamienie przełożyć na drugie z tych pól (niezależnie od tego, czy jakiś kamień leży na środkowym polu, i czy ruch opróżni jakiekolwiek pole).

Rozstrzygnąć, czy można wykonując takie ruchy przełożyć wszystkie kamienie na jedno pole.

11. Dany jest trójkąt ABC , w którym $\sphericalangle B > \sphericalangle C$. Punkt D leży na odcinku BC i spełnia równość $\sphericalangle DAC = \frac{1}{2}(\sphericalangle B - \sphericalangle C)$. Okrąg styczny w punkcie A do prostej AC i przechodzący przez punkt D przecina prostą AB w punkcie $P \neq A$. Dowieść, że

$$\frac{BP}{AC} = \frac{BD}{DC}.$$

12. W niemalejącym ciągu $a_1, a_2, a_3, \dots$ wszystkie wyrazy są liczbami całkowitymi dodatnimi, a ponadto dla każdego k dokładnie k wyrazów jest równych k . Wyznaczyć wszystkie liczby pierwsze postaci

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać pod adresem komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia 10 grudnia 2001 r. (decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w internecie pod adresem:

www.impan.gov.pl/~olimp/

LIII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia drugiego

22 lutego 2002 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Dana jest taka funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzą równości

$$f(x) = f(2x) = f(1-x).$$

Dowieść, że funkcja f jest okresowa.

2. W czworokącie wypukłym $ABCD$ zachodzą równości

$$\sphericalangle ADB = 2\sphericalangle ACB \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle BDC = 2\sphericalangle BAC.$$

Udowodnić, że $AD = CD$.

3. W n -osobowym stowarzyszeniu działa sześć komisji. W skład każdej z nich wchodzi nie mniej niż $n/4$ osób. Dowieść, że istnieją dwie komisje oraz grupa licząca nie mniej niż $n/30$ osób, należących do obu tych komisji.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Przed rozpoczęciem rozwiązywania należy przepisać tekst każdego zadania na oddzielnym arkuszu.
3. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
4. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podjęcie dyżurującego.
5. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
6. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów.

LIII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia drugiego

23 lutego 2002 r. (drugi dzień zawodów)

4. Wyznaczyć wszystkie takie trójki liczb pierwszych $p \leq q \leq r$, że liczby

$$pq+r, \quad pq+r^2, \quad qr+p, \quad qr+p^2, \quad rp+q, \quad rp+q^2$$

są pierwsze.

5. Trójkąt ABC , w którym $\sphericalangle BAC = 90^\circ$, jest podstawą ostrosłupa $ABCD$. Ponadto zachodzą równości

$$AD = BD \quad \text{oraz} \quad AB = CD.$$

Udowodnić, że $\sphericalangle ACD \geq 30^\circ$.

6. Wyznaczyć wszystkie takie liczby naturalne n , że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$ zachodzi nierówność

$$x_1 x_2 \dots x_n + y_1 y_2 \dots y_n \leq \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2} \cdot \dots \cdot \sqrt{x_n^2 + y_n^2}.$$

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Przed rozpoczęciem rozwiązywania należy przepisać tekst każdego zadania na oddzielnym arkuszu.
3. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
4. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu czekać na podejście dyżurującego.
5. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
6. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów.

LIII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia drugiego

22 lutego 2002 r. (pierwszy dzień zawodów)

Zadanie 1. Dana jest taka funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzą równości

$$f(x) = f(2x) = f(1-x).$$

Dowieść, że funkcja f jest okresowa.

Rozwiązanie

Na mocy danych w treści zadania równości, otrzymujemy dla dowolnej liczby rzeczywistej x :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(2x) = f(1-2x) = \\ &= f\left(\frac{1}{2}(1-2x)\right) = f\left(\frac{1}{2}-x\right) = f\left(1-\left(\frac{1}{2}-x\right)\right) = f\left(x+\frac{1}{2}\right), \end{aligned}$$

co dowodzi, że funkcja f jest okresowa o okresie $\frac{1}{2}$.

Zadanie 2. W czworokącie wypukłym $ABCD$ zachodzą równości

$$\sphericalangle ADB = 2\sphericalangle ACB \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle BDC = 2\sphericalangle BAC.$$

Udowodnić, że $AD = CD$.

Rozwiązanie

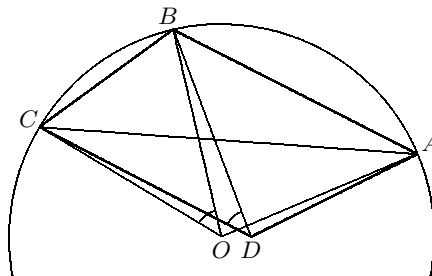
Z danych w zadaniu równości kątów oraz z nierówności $\sphericalangle ADC < 180^\circ$ wynika, że

$$\sphericalangle ACB + \sphericalangle BAC = \frac{1}{2}(\sphericalangle ADB + \sphericalangle BDC) = \frac{1}{2}\sphericalangle ADC < 90^\circ.$$

Kąty ACB i BAC są więc ostre, co oznacza, że środek O okręgu opisanego na trójkącie ABC leży wewnątrz kąta ABC (rys. 1). Stąd w szczególności wynika, że punkty O i D leżą po tej samej stronie prostej BC . Ponadto

$$\sphericalangle BDC = 2\sphericalangle BAC = \sphericalangle BOC.$$

Zatem punkty B, C, O, D leżą na jednym okręgu o_1 .



rys. 1

Analogicznie dowodzimy, że punkty A, B, O, D leżą na jednym okręgu o_2 . Okręgi o_1 i o_2 są różne — w przeciwnym razie okrąg opisany na trójkącie ABC przechodziłby przez punkt O , czyli swój środek. Okręgi o_1 i o_2 mają jednak trzy punkty wspólne: B, D i O . Ponieważ $B \neq D$, więc musi być $O = D$, czyli $AD = CD$.

Zadanie 3. W n -osobowym stowarzyszeniu działa sześć komisji. W skład każdej z nich wchodzi nie mniej niż $n/4$ osób. Dowieść, że istnieją dwie komisje oraz grupa licząca nie mniej niż $n/30$ osób, należących do obu tych komisji.

Rozwiązanie

Ponumerujemy komisje liczbami $1, 2, \dots, 6$ i oznaczmy przez K_i liczbę tych członków i -tej komisji, którzy **nie są** członkami żadnej komisji o numerze mniejszym od i .

K_1 to liczba wszystkich członków komisji nr 1, co daje $K_1 \geq n/4$.

Przypuśćmy, że część wspólna dowolnych dwóch komisji liczy mniej niż $n/30$ osób.

Ponieważ w skład komisji nr 2 wchodzi co najmniej $n/4$ osób, więc liczba tych członków komisji nr 2, którzy nie są w komisji nr 1 musi być większa od $n/4 - n/30$. Stąd

$$K_2 > \frac{n}{4} - \frac{n}{30}.$$

Analogicznie stwierdzamy, że

$$K_i > \frac{n}{4} - (i-1)\frac{n}{30} \quad \text{dla } i = 3, 4, 5, 6.$$

Dodając stronami powyższe nierówności uzyskujemy

$$K_1 + K_2 + K_3 + K_4 + K_5 + K_6 > \frac{6n}{4} - (1+2+3+4+5)\frac{n}{30} = n.$$

Otrzymaliśmy sprzeczność, gdyż wielkość $K_1 + K_2 + \dots + K_6$ jest nie większa od liczby wszystkich członków stowarzyszenia, czyli n . Zatem do części wspólnej pewnych dwóch komisji należy co najmniej $n/30$ osób.

(wp, jwr)

* * *

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w internecie pod adresem:

www.impan.gov.pl/~olimp/

LIII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia drugiego

23 lutego 2002 r. (drugi dzień zawodów)

Zadanie 4. Wyznaczyć wszystkie takie trójki liczb pierwszych $p \leq q \leq r$, że liczby
 $pq+r$, $pq+r^2$, $qr+p$, $qr+p^2$, $rp+q$, $rp+q^2$
są pierwsze.

Rozwiązanie

Gdyby wszystkie trzy liczby pierwsze p, q, r były większe od 2, to liczba $pq+r$ jako liczba parzysta większa od 2 byłaby złożona. Zatem co najmniej jedna z liczb p, q, r jest równa 2, co na mocy nierówności $p \leq q \leq r$ daje $p=2$.

Ponadto $q > 2$, gdyż przy $q=2$ mielibyśmy $qr+p=2(r+1)$, co jest liczbą złożoną.

Gdyby obie liczby pierwsze q, r były większe od 3, to liczba qr byłaby niepodzielna przez 3, a zatem jedna z liczb $qr+2, qr+4$ byłaby podzielna przez 3 i większa od 3, czyli złożona. Stąd wynika, że jedna z liczb q, r jest równa 3, co na mocy nierówności $2 < q \leq r$ daje $q=3$.

Pozostało wyznaczyć wszystkie takie liczby pierwsze $r \geq 3$, aby liczby

$$(1) \quad 6+r, \quad 6+r^2, \quad 3r+2, \quad 3r+4, \quad 2r+3, \quad 2r+9$$

były pierwsze.

Gdyby liczba pierwsza r była różna od 5, to przez 5 dzieliłaby się jedna z liczb $r+1, r+2, r+3, r+4$, a co za tym idzie, również jedna z liczb

$$\begin{aligned} 6+r &= (r+1)+5, & 2r+9 &= 2(r+2)+5, \\ 3r+4 &= 3(r+3)-5, & 2r+3 &= 2(r+4)-5. \end{aligned}$$

Zatem musi być $r=5$. Wtedy liczby (1) przyjmują odpowiednio wartości 11, 31, 17, 19, 13, 19 i wszystkie one są pierwsze.

Odp.: Warunki zadania spełnia jedna trójka $(p, q, r) = (2, 3, 5)$.

Zadanie 5. Trójkąt ABC , w którym $\sphericalangle A = 90^\circ$, jest podstawą ostrosłupa $ABCD$. Ponadto zachodzą równości

$$AD = BD \quad \text{oraz} \quad AB = CD.$$

Udowodnić, że $\sphericalangle ACD \geq 30^\circ$.

Rozwiązanie

Trójkąt BAC uzupełniamy do prostokąta $BACE$. Wówczas z równości $AD = BD$ wynika, że $CD = ED$. To w połączeniu z $AB = CD$ dowodzi, że trójkąt CDE jest równoboczny. Zatem

$$\sphericalangle ACD \geq \sphericalangle ACE - \sphericalangle DCE = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ.$$

Zadanie 6. Wyznaczyć wszystkie takie liczby naturalne n , że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$ zachodzi nierówność

$$(1) \quad x_1 x_2 \dots x_n + y_1 y_2 \dots y_n \leq \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2} \cdot \dots \cdot \sqrt{x_n^2 + y_n^2}.$$

Rozwiązanie

Dla $n = 1$ dana nierówność przybiera postać

$$x_1 + y_1 \leq \sqrt{x_1^2 + y_1^2},$$

co nie dla dowolnych liczb rzeczywistych x_1, y_1 jest prawdą — wystarczy przyjąć $x_1 = y_1 = 1$.

Wykażemy, że nierówność (1) jest prawdziwa, jeśli $n \geq 2$.

Jeśli któryś z czynników stojących po prawej stronie nierówności (1), np.

$$\sqrt{x_k^2 + y_k^2}$$

jest równy 0, to obie liczby x_k i y_k muszą być zerami. Wtedy nierówność (1) jest spełniona.

Przyjmijmy więc, że liczba stojąca po prawej stronie nierówności (1) jest różna od 0, a zatem dodatnia. Wówczas dowodzoną nierówność możemy sprowadzić do postaci

$$(2) \quad \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} \cdot \dots \cdot \frac{x_n}{\sqrt{x_n^2 + y_n^2}} + \frac{y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} \cdot \dots \cdot \frac{y_n}{\sqrt{x_n^2 + y_n^2}} \leq 1.$$

Podstawmy:

$$a_k = \frac{x_k^2}{x_k^2 + y_k^2}, \quad b_k = \frac{y_k^2}{x_k^2 + y_k^2} \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Liczby $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ należą do przedziału $\langle 0, 1 \rangle$ oraz $a_k + b_k = 1$. Stąd oraz z nierówności pomiędzy średnią geometryczną a średnią arytmetyczną uzyskujemy

$$\begin{aligned} \sqrt{a_1 a_2 \dots a_n} + \sqrt{b_1 b_2 \dots b_n} &\leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} + \sqrt[n]{b_1 b_2 \dots b_n} \leq \\ &\leq \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \dots + a_n) + \frac{1}{n}(b_1 + b_2 + \dots + b_n) = 1, \end{aligned}$$

czyli

$$(3) \quad \frac{|x_1|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} \cdot \dots \cdot \frac{|x_n|}{\sqrt{x_n^2 + y_n^2}} + \frac{|y_1|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} \cdot \dots \cdot \frac{|y_n|}{\sqrt{x_n^2 + y_n^2}} \leq 1.$$

Lewa strona nierówności (2) jest nie większa niż lewa strona nierówności (3). To oznacza, że udowodniona właśnie nierówność (3) pociąga za sobą nierówność (2), a tym samym dowodzi nierówności (1).

(wp, jwr)

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w internecie pod adresem:

www.impan.gov.pl/~olimp/

LIII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia trzeciego

3 kwietnia 2002 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Wyznaczyć wszystkie takie trójki liczb naturalnych a , b , c , że liczby $a^2 + 1$ i $b^2 + 1$ są pierwsze oraz

$$(a^2 + 1)(b^2 + 1) = c^2 + 1.$$

2. Na bokach AC i BC trójkąta ostrokątnego ABC zbudowano, po jego zewnętrznej stronie, prostokąty $ACPQ$ i $BKLC$ o równych polach. Udowodnić, że środek odcinka PL , punkt C oraz środek okręgu opisanego na trójkącie ABC leżą na jednej prostej.

3. Na tablicy są napisane trzy nieujemne liczby całkowite. Wybieramy z tej trójki dwie liczby k , m i zastępujemy je liczbami $k + m$ i $|k - m|$, a trzecia liczba pozostaje bez zmiany. Z otrzymaną trójką postępujemy tak samo. Rozstrzygnąć, czy z każdej początkowej trójki liczb całkowitych nieujemnych, kontynuując to postępowanie, można otrzymać trójkę, w której co najmniej dwie liczby są zerami.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Przed rozpoczęciem rozwiązywania należy przepisać tekst każdego zadania na oddzielnym arkuszu.
3. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
4. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu poczekać na podejście dyżurującego.
5. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
6. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów.

LIII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia trzeciego

4 kwietnia 2002 r. (drugi dzień zawodów)

4. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 3$ i dla każdego ciągu liczb dodatnich $x_1, x_2, \dots, x_n$ zachodzi co najmniej jedna z nierówności

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{x_{i+1} + x_{i+2}} \geq \frac{n}{2}, \quad \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{x_{i-1} + x_{i-2}} \geq \frac{n}{2}$$

(przyjmujemy $x_{n+1} = x_1$, $x_{n+2} = x_2$ oraz $x_0 = x_n$, $x_{-1} = x_{n-1}$).

5. W przestrzeni dany jest trójkąt ABC oraz sfera s rozłączna z płaszczyzną ABC . Przez każdy z punktów A , B , C poprowadzono prostą styczną do tej sfery. Punkty styczności oznaczono odpowiednio K , L , M . Punkt P leży na sferze s i spełnia warunki

$$\frac{AK}{AP} = \frac{BL}{BP} = \frac{CM}{CP}.$$

Udowodnić, że sfera opisana na czworokącie $ABCP$ jest styczna do sfery s .

6. Dana jest liczba naturalna k . Określamy ciąg (a_n) wzorami

$$a_1 = k + 1, \quad a_{n+1} = a_n^2 - ka_n + k \text{ dla } n \geq 1.$$

Wykazać, że jeżeli $m \neq n$, to liczby a_m i a_n są względnie pierwsze.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Przed rozpoczęciem rozwiązywania należy przepisać tekst każdego zadania na oddzielnym arkuszu.
3. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
4. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu czekać na podejście dyżurującego.
5. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
6. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów.

LIII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia trzeciego

3 kwietnia 2002 r. (pierwszy dzień zawodów)

Zadanie 1. Wyznaczyć wszystkie takie trójki liczb naturalnych a, b, c , że liczby $a^2 + 1$ i $b^2 + 1$ są pierwsze oraz

$$(a^2 + 1)(b^2 + 1) = c^2 + 1.$$

Rozwiązanie

Bez szkody dla ogólności rozwiązania możemy założyć, że $a \leq b$. Niech $p = b^2 + 1$. Wówczas liczba $(c^2 + 1) - (b^2 + 1) = (c - b)(c + b)$ dzieli się przez p . Z danej w treści zadania równości wynika, że $b < c$. Ponadto

$$c = \sqrt{(a^2 + 1)(b^2 + 1) - 1} \leq \sqrt{(b^2 + 1)^2 - 1} < b^2 + 1 = p.$$

Stąd $c - b < p$ oraz $c + b < 2p$. Skoro $p \mid (c - b)(c + b)$, więc musi być $c + b = p$, czyli

$$(1) \quad c = b(b - 1) + 1.$$

Liczby $a = b = 1$ nie spełniają warunków zadania; możemy więc przyjąć, że $b > 1$. Wówczas p jest liczbą pierwszą nieparzystą. Z zależności (1) wynika, że c jest nieparzyste, a to dowodzi kolejno parzystości liczb $c^2 + 1$ oraz $a^2 + 1$. Liczba $a^2 + 1$ jest pierwsza, a więc $a^2 + 1 = 2$, skąd $a = 1$. Zatem dane w zadaniu równanie przybiera postać

$$(2) \quad 2(b^2 + 1) = c^2 + 1.$$

Łącząc równości (1) i (2) uzyskujemy $2b^2 + 2 = b^2(b - 1)^2 + 2b(b - 1) + 2$, czyli $2b = b(b - 1)^2 + 2b - 2$. Stąd b jest dzielnikiem liczby 2, a ponieważ $b > 1$, więc musi być $b = 2$. To pociąga za sobą $c = 3$.

Pozostaje stwierdzić, że trójka $(a, b, c) = (1, 2, 3)$ spełnia warunki zadania.

Uwalniając się od założenia $a \leq b$ otrzymujemy dwie trójki (a, b, c) spełniające warunki zadania. Są nimi: $(1, 2, 3)$ oraz $(2, 1, 3)$.

Zadanie 2. Na bokach AC i BC trójkąta ostrokątnego ABC zbudowano, po jego zewnętrznej stronie, prostokąty $ACPQ$ i $BKLC$ o równych polach. Udowodnić, że środek odcinka PL , punkt C oraz środek okręgu opisanego na trójkącie ABC leżą na jednej prostej.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez O środek okręgu opisanego na trójkącie ABC (rys. 1). Uzupełnijmy trójkąt PCL do równoległoboku $PCLX$. Wystarczy udowodnić, że punkty X, C, O są współliniowe.

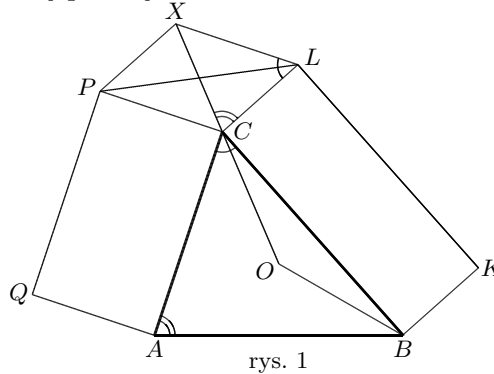
Z równości pól danych prostokątów otrzymujemy

$$\frac{XL}{LC} = \frac{PC}{LC} = \frac{BC}{CA}.$$

Ponadto $\sphericalangle XLC = 180^\circ - \sphericalangle PCL = \sphericalangle BCA$. Uzyskane zależności dowodzą, że trójkąty XLC oraz BCA są podobne. Stąd oraz z równości $BO = CO$ wynika kolejno, że

$$\sphericalangle XCL = \sphericalangle BAC = \frac{1}{2} \sphericalangle BOC = 90^\circ - \sphericalangle BCO,$$

czyli $\sphericalangle XCL + \sphericalangle LCB + \sphericalangle BCO = 180^\circ$. Ostatnia równość oznacza, że punkty X, C, O leżą na jednej prostej.



Zadanie 3. Na tablicy są napisane trzy nieujemne liczby całkowite. Wybieramy z tej trójki dwie liczby k, m i zastępujemy je liczbami $k + m$ i $|k - m|$, a trzecia liczba pozostaje bez zmiany. Z otrzymaną trójką postępujemy tak samo. Rozstrzygnąć, czy z każdej początkowej trójki liczb całkowitych nieujemnych, kontynuując to postępowanie, można otrzymać trójkę, w której co najmniej dwie liczby są zerami.

Rozwiązanie

Każdą trójkę liczb całkowitych nieujemnych można przedstawić w postaci

$$(1) \quad (2^p a, 2^q b, 2^r c)$$

gdzie p, q, r są liczbami całkowitymi nieujemnymi, zaś każda z liczb a, b, c jest nieparzysta lub równa 0. Wagą trójki przedstawionej w postaci (1) nazwiemy wielkość $a + b + c$.

Wykażemy, że z każdej trójki liczb całkowitych nieujemnych o co najmniej dwóch liczbach niezerowych, wykonując operacje opisane w treści zadania, da się uzyskać trójkę o *mniejszej* wadze. Tym samym udowodnimy, że zawsze można otrzymać trójkę, w której co najmniej dwie liczby są zerami.

Założmy więc, że w trójce $(2^p a, 2^q b, 2^r c)$ co najmniej dwie liczby są różne od 0. Bez straty ogólności przyjmijmy, że $b, c \neq 0$ oraz $q \leq r$.

Wykonując $2(r - q)$ -krotnie operację $(k, l, m) \mapsto (k + l, |k - l|, m)$ przeprowadzamy trójkę $(2^p a, 2^q b, 2^r c)$ na trójkę $(2^{p+r-q} a, 2^r b, 2^r c)$, którą następnie przekształcamy na $(2^{p+r-q} a, 2^r |b - c|, 2^r (b + c))$. Liczby b i c są nieparzyste, więc waga ostatniej trójki nie przekracza

$$a + \frac{1}{2}|b - c| + \frac{1}{2}(b + c) = a + \max(b, c),$$

co jest mniejsze od $a + b + c$, czyli od wagi trójki $(2^p a, 2^q b, 2^r c)$. (wp, jwr)

LIII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia trzeciego

4 kwietnia 2002 r. (drugi dzień zawodów)

Zadanie 4. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 3$ i dla każdego ciągu liczb dodatnich $x_1, x_2, \dots, x_n$ zachodzi co najmniej jedna z nierówności

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{x_{i+1} + x_{i+2}} \geq \frac{n}{2}, \quad \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{x_{i-1} + x_{i-2}} \geq \frac{n}{2}$$

(przyjmujemy $x_{n+1} = x_1$, $x_{n+2} = x_2$ oraz $x_0 = x_n$, $x_{-1} = x_{n-1}$).

Rozwiązanie

Gdyby żadna z podanych nierówności nie zachodziła, to po dodaniu stronami mielibyśmy $\sum_{i=1}^n \frac{x_{i-1} + x_{i+2}}{x_i + x_{i+1}} < n$. Wystarczy zatem udowodnić, że

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_{i-1} + x_{i+2}}{x_i + x_{i+1}} \geq n, \quad \text{albo, że} \quad \sum_{i=1}^n \frac{x_{i-1} + x_i + x_{i+1} + x_{i+2}}{x_i + x_{i+1}} \geq 2n.$$

Po podstawieniu $a_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{x_i + x_{i+1}}$ ostatnia nierówność przybiera postać

$$\sum_{i=1}^n a_i + \frac{1}{a_{i+1}} \geq 2n, \quad \text{czyli} \quad \sum_{i=1}^n a_i + \frac{1}{a_i} \geq 2n,$$

a to jest prawda, gdyż $a + \frac{1}{a} \geq 2$ dla dowolnej liczby dodatniej a .

Zadanie 5. W przestrzeni dany jest trójkąt ABC oraz sfera s rozłączna z płaszczyzną ABC . Przez każdy z punktów A, B, C poprowadzono prostą styczną do tej sfery. Punkty styczności oznaczono odpowiednio K, L, M . Punkt P leży na sferze s i spełnia warunki

$$\frac{AK}{AP} = \frac{BL}{BP} = \frac{CM}{CP}.$$

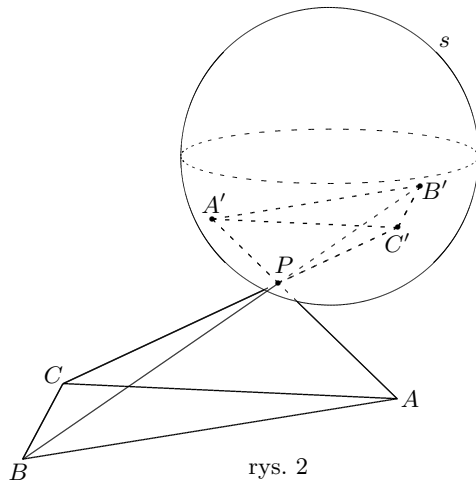
Udowodnić, że sfera opisana na czworościanie $ABCP$ jest styczna do sfery s .

Rozwiązanie

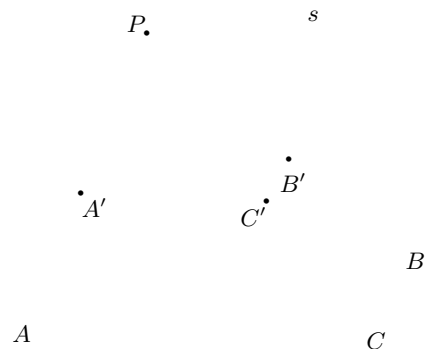
Oznaczmy przez λ wspólną wartość danych w treści zadania ułamków. Niech A', B', C' będą odpowiednio drugimi punktami przecięcia prostych PA, PB, PC ze sferą s (rys. 2 i 3). Jeśli któraś z tych prostych, powiedzmy PA , jest styczna do sfery s , to przyjmujemy $A' = P$. Wówczas $AK^2 = AP \cdot AA'$, a więc

$$(1) \quad \frac{AA'}{AP} = \left(\frac{AK}{AP} \right)^2 = \lambda^2. \quad \text{Zatem} \quad \frac{AA'}{AP} = \frac{BB'}{BP} = \frac{CC'}{CP} = \lambda^2.$$

Stąd wynika, że jednokładność j o środku P przekształcającą punkt A na A' , przeprowadza punkt B na B' oraz punkt C na C' . Ponadto każdy z punktów A' , B' , C' jest różny od P — w przeciwnym razie równości (1) implikują, że proste PA , PB , PC są styczne do sfery s w punkcie P , a więc P jest punktem wspólnym płaszczyzny ABC i sfery s , co przeczy założeniom.



rys. 2



rys. 3

Sfera opisana na czworokącie $ABCP$ jest zatem obrazem sfery s przy jednokładności j^{-1} , której środek (punkt P) leży na sferze s . Stąd teza.

Zadanie 6. Dana jest liczba naturalna k . Określamy ciąg (a_n) wzorami

$$a_1 = k + 1, \quad a_{n+1} = a_n^2 - ka_n + k \text{ dla } n \geq 1.$$

Wykazać, że jeżeli $m \neq n$, to liczby a_m i a_n są względnie pierwsze.

Rozwiązanie

Udowodnimy najpierw indukcyjnie, że dla $n \geq 1$ zachodzi równość

$$(1) \quad a_{n+1} = a_1 a_2 \dots a_n + k.$$

Z danej w treści zadania zależności rekurencyjnej obliczamy

$$a_2 = (k+1)^2 - k(k+1) + k = 2k+1 = a_1 + k,$$

co dowodzi prawdziwości zdania (1) dla $n=1$, natomiast krok indukcyjny sprowadza się do ciągu równości:

$$a_{n+1} = a_n^2 - ka_n + k = a_n(a_1 a_2 \dots a_{n-1} + k) - ka_n + k = a_1 a_2 \dots a_n + k.$$

Przypuśćmy teraz, że p jest wspólnym dzielnikiem pierwszym liczb a_l i a_m , przy czym $l > m$. Wówczas z zależności (1) dla $n=l-1$ wynika, że $p \mid k$, a więc $p \nmid a_1$. Niech r będzie najmniejszą liczbą naturalną, dla której $p \mid a_r$ (taka liczba r istnieje). Wtedy $1 < r \leq m$. Stosując ponownie równość (1), lecz tym razem dla $n=r-1$ wnioskujemy, że p jest dzielnikiem jednej z liczb $a_1, a_2, \dots, a_{r-1}$, wbrew temu, że r jest najmniejszą liczbą o własności $p \mid a_r$.

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że liczby a_l i a_m są względnie pierwsze.

(wp, jwr)

LIV OLIMPIADA MATEMATYCZNA

Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego

I seria

1. Znaleźć wszystkie pary liczb całkowitych dodatnich x, y spełniających równanie

$$(x+y)^2 - 2(xy)^2 = 1.$$

2. Dana jest liczba rzeczywista $a_1 > 1$. Definiujemy ciąg (a_n) wzorem

$$a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1 \quad \text{dla } n \geq 1.$$

Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n} < \frac{1}{a_1 - 1}.$$

3. Trzy różne punkty A, B, C leżą na okręgu o . Proste styczne do okręgu o w punktach A i B przecinają się w punkcie P . Prosta styczna do okręgu o w punkcie C przecina prostą AB w punkcie Q . Udowodnić, że

$$PQ^2 = PB^2 + QC^2.$$

4. Rozpatrujemy zbiór wszystkich k -wyrazowych ciągów o wyrazach ze zbioru $\{1, 2, 3, \dots, m\}$. Z każdego takiego ciągu wybieramy wyraz najmniejszy i sumujemy wybrane wyrazy. Udowodnić, że otrzymana suma jest równa

$$1^k + 2^k + 3^k + \dots + m^k.$$

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać pod adresem komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

10 października 2002 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.

LIV OLIMPIADA MATEMATYCZNA

Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego

II seria

5. Liczba naturalna n_1 zapisana jest w układzie dziesiętnym za pomocą 333 cyfr, z których żadna nie jest zerem. Dla $i = 1, 2, 3, \dots, 332$ liczba n_{i+1} powstaje z liczby n_i przez przeniesienie cyfry jedności na początek. Dowieść, że albo wszystkie liczby $n_1, n_2, n_3, \dots, n_{333}$ są podzielne przez 333, albo żadna z nich.

6. Punkty A, B, C, D leżą w tej właśnie kolejności na okręgu o . Punkt M jest środkiem tego łuku AB okręgu o , który nie zawiera punktów C i D ; punkt N jest środkiem tego łuku CD okręgu o , który nie zawiera punktów A i B . Dowieść, że

$$\frac{AN^2 - BN^2}{AB} = \frac{DM^2 - CM^2}{CD}.$$

7. U cioci Reni spotkało się (łącznie z ciocią) $n \geq 4$ osób. Każdy z obecnych podarował co najmniej jednej z pozostałych osób co najmniej jeden prezent. Okazało się, że każdy podarował trzykrotnie więcej prezentów niż sam otrzymał, z jednym wyjątkiem: ciocia Renia podarowała zaledwie $\frac{1}{6}$ liczby prezentów, które dostała. Wyznaczyć, w zależności od n , najmniejszą możliwą liczbę prezentów, które mogła otrzymać ciocia Renia.

8. W czworoscianie $ABCD$ punkty M i N są odpowiednio środkami krawędzi AB i CD . Punkt P leży na odcinku MN , przy czym $MP = CN$ oraz $NP = AM$. Punkt O jest środkiem sfery opisanej na czworoscianie $ABCD$. Dowieść, że jeżeli $O \neq P$, to $OP \perp MN$.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać pod adresem komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

12 listopada 2002 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.

LIV OLIMPIADA MATEMATYCZNA

Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego

III seria

9. Znaleźć wszystkie wielomiany W o współczynnikach rzeczywistych, mające następującą własność: jeśli $x + y$ jest liczbą wymierną, to $W(x) + W(y)$ jest liczbą wymierną.

10. Mamy talię 52 kart. Tasowaniem będziemy nazywać wykonanie następujących czynności: dowolny podział talii na część górną i dolną, a następnie dowolne zmieszanie kart z zachowaniem porządku w obrębie każdej części. Mówiąc formalnie, tasowaniem jest dowolne przemieszanie kart, w którym i -ta karta od wierzchu przechodzi na pozycję p_i , przy czym istnieje takie $m \in \{1, 2, 3, \dots, 51\}$, że $p_i < p_{i+1}$ dla $i < m$ oraz dla $i > m$.

Rozstrzygnąć, czy rozpoczynając od ustalonego początkowego uporządkowania kart, można uzyskać każde inne uporządkowanie wykonując pięć tasowań.

11. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Punkty P i Q , różne od wierzchołków czworokąta, leżą odpowiednio na bokach BC i CD , przy czym $\sphericalangle BAP = \sphericalangle DAQ$. Udowodnić, że trójkąty ABP i ADQ mają równe pola wtedy i tylko wtedy, gdy ich ortocentra leżą na prostej prostopadłej do AC .

Uwaga: Ortocentrum trójkąta to punkt przecięcia wysokości.

12. Dla liczb dodatnich a, b, c, d określamy

$$A = a^3 + b^3 + c^3 + d^3, \quad B = bcd + cda + dab + abc.$$

Udowodnić nierówność

$$(a + b + c + d)^3 \leq 4A + 24B.$$

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać pod adresem komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

10 grudnia 2002 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.

Adresy Komitetów Okręgowych Olimpiady Matematycznej

Dla województwa pomorskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Instytut Matematyczny PAN, Oddział w Gdańsku, ul. Abrahama 18, 81–825 Sopot.

Dla województwa śląskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Instytut Matematyki Uniwersytetu Śląskiego, ul. Bankowa 14, 40–005 Katowice.

Dla województwa małopolskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Instytut Matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego, ul. Reymonta 4, 30–059 Kraków.

Dla województwa lubelskiego i podkarpackiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Oddział Lubelski Polskiego Towarzystwa Matematycznego, pl. Marii Skłodowskiej-Curie 1, pok. 223, 20–031 Lublin.

Dla województwa łódzkiego i świętokrzyskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Wydział Matematyki Uniwersytetu Łódzkiego, ul. Banacha 22, 90-238 Łódź.

Dla województwa wielkopolskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Instytut Geologii Uniwersytetu Adama Mickiewicza, ul. Maków Polnych 16, 61–606 Poznań.

Dla województwa lubuskiego i zachodniopomorskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – ul. Wielkopolska 15, 70–251 Szczecin.

Dla województwa kujawsko-pomorskiego i warmińsko-mazurskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, ul. Chopina 12/18, 87–100 Toruń.

Dla województwa mazowieckiego i podlaskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Instytut Matematyczny PAN, ul. Śniadeckich 8, 00–656 Warszawa.

Dla województwa dolnośląskiego i opolskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, pl. Grunwaldzki 2/4, 50–384 Wrocław.

LIV Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia pierwszego

11 września 2002 r. – 10 grudnia 2002 r.

Zadanie 1. Znaleźć wszystkie pary liczb całkowitych dodatnich x, y spełniających równanie

$$(x+y)^2 - 2(xy)^2 = 1.$$

Rozwiązanie

Dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \geq 2$ mamy

$$(1) \quad xy = x \cdot \frac{y}{2} + y \cdot \frac{x}{2} \geq x + y.$$

Zatem dla liczb rzeczywistych $x, y \geq 2$ prawdziwe są nierówności

$$2(xy)^2 + 1 > (xy)^2 \geq (x+y)^2,$$

co oznacza, że dane równanie nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych (a nawet rzeczywistych) $x, y \geq 2$.

Wobec tego, jeśli para (x, y) liczb całkowitych dodatnich spełnia dane w treści zadania równanie, to jedna z liczb x, y musi być równa 1. Przyjmijmy ze względu na symetrię, że tą liczbą jest x . Dane równanie przyjmuje wówczas postać $(y+1)^2 - 2y^2 = 1$. Po uproszczeniu dostajemy $y^2 - 2y = 0$, skąd $y = 2$.

Równanie ma więc dwa rozwiązania: $x = 1, y = 2$ oraz $x = 2, y = 1$.

Uwaga

Kluczem do rozwiązania zadania jest nierówność $xy \geq x + y$ prawdziwa dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \geq 2$. Jej krótki dowód został przedstawiony w powyższym rozwiązaniu w linii (1). Inny, równie krótki dowód to:

$$x, y \geq 2 \quad \Rightarrow \quad (x-1)(y-1) \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad xy \geq x + y.$$

Zadanie 2. Dana jest liczba rzeczywista $a_1 > 1$. Definiujemy ciąg (a_n) wzorem

$$a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1 \quad \text{dla} \quad n \geq 1.$$

Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n} < \frac{1}{a_1 - 1}.$$

Rozwiązanie

Niech $b_n = a_n - 1$. Wówczas daną w treści zadania zależność rekurencyjną możemy przepisać w postaci

$$b_{n+1} = b_n(b_n + 1) \quad \text{dla} \quad n \geq 1.$$

Z powyższego wzoru oraz z nierówności $b_1 > 0$ uzyskujemy przez indukcję nierówność $b_n > 0$ dla dowolnego $n \geq 1$. Ponadto

$$\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_{n+1}} = \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_n(b_n+1)} = \frac{b_n+1-1}{b_n(b_n+1)} = \frac{1}{b_n+1} = \frac{1}{a_n}.$$

Stąd otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n} &= \\ &= \left(\frac{1}{b_1} - \frac{1}{b_2} \right) + \left(\frac{1}{b_2} - \frac{1}{b_3} \right) + \left(\frac{1}{b_3} - \frac{1}{b_4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_{n+1}} \right) = \\ &= \frac{1}{b_1} - \frac{1}{b_{n+1}} = \frac{1}{a_1 - 1} - \frac{1}{b_{n+1}} < \frac{1}{a_1 - 1}, \end{aligned}$$

czego należało dowieść.

Zadanie 3. Trzy różne punkty A, B, C leżą na okręgu o . Proste styczne do okręgu o w punktach A i B przecinają się w punkcie P . Prosta styczna do okręgu o w punkcie C przecina prostą AB w punkcie Q . Udowodnić, że

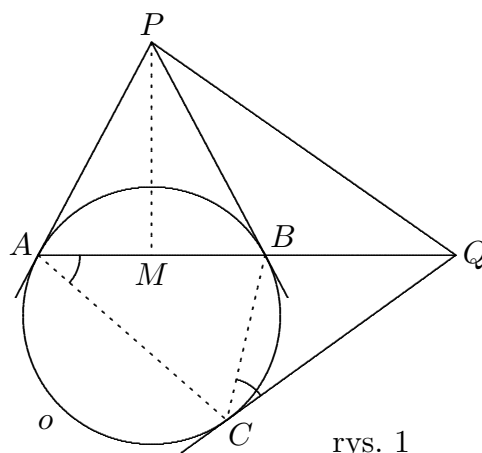
$$PQ^2 = PB^2 + QC^2.$$

Rozwiązanie

Niech M będzie środkiem odcinka AB (rys. 1). Wówczas trójkąt PMQ jest prostokątny. Na mocy twierdzenia Pitagorasa oraz podobieństwa trójkątów QBC i QCA otrzymujemy

$$\begin{aligned} PQ^2 &= PM^2 + QM^2 = \\ &= PB^2 - MB^2 + QM^2 = \\ &= PB^2 + (QM - MB)(QM + MB) = \\ &= PB^2 + QB \cdot QA = PB^2 + QC^2, \end{aligned}$$

co należało udowodnić.



rys. 1

Zadanie 4. Rozpatrujemy zbiór wszystkich k -wyrazowych ciągów o wyrazach ze zbioru $\{1, 2, 3, \dots, m\}$. Z każdego takiego ciągu wybieramy wyraz najmniejszy i sumujemy wybrane wyrazy. Udowodnić, że otrzymana suma jest równa

$$1^k + 2^k + 3^k + \dots + m^k.$$

Rozwiązanie

Oznaczmy przez L_i ($i = 1, 2, \dots, m$) liczbę tych k -wyrazowych ciągów o wyrazach ze zbioru $\{1, 2, 3, \dots, m\}$, których każdy wyraz jest nie mniejszy niż i . Ciągi takie to k -wyrazowe ciągi o wyrazach z $(m-i+1)$ -elementowego zbioru

$$\{i, i+1, i+2, \dots, m\}.$$

Stąd wynika, że $L_i = (m-i+1)^k$. Zatem liczba ciągów o najmniejszym wyrazie równym i wynosi $L_i - L_{i+1} = (m-i+1)^k - (m-i)^k$.

Suma wszystkich wyrazów najmniejszych jest więc równa

$$\begin{aligned} & 1 \cdot (m^k - (m-1)^k) + 2 \cdot ((m-1)^k - (m-2)^k) + 3 \cdot ((m-2)^k - (m-3)^k) + \dots \\ & \dots + (m-1) \cdot (2^k - 1^k) + m \cdot 1^k = \\ & = 1^k + 2^k + 3^k + \dots + m^k, \end{aligned}$$

czego należało dowieść.

Zadanie 5. Liczba naturalna n_1 zapisana jest w układzie dziesiętnym za pomocą 333 cyfr, z których żadna nie jest zerem. Dla $i = 1, 2, 3, \dots, 332$ liczba n_{i+1} powstaje z liczby n_i przez przeniesienie cyfry jedności na początek. Dowieść, że albo wszystkie liczby $n_1, n_2, n_3, \dots, n_{333}$ są podzielne przez 333, albo żadna z nich.

Rozwiązanie

Niech j_i ($i = 1, 2, 3, \dots, 333$) oznacza cyfrę jedności liczby n_i . Wówczas dla $i = 1, 2, \dots, 332$ mamy

$$(1) \quad n_{i+1} = \frac{n_i + 10^{333} j_i - j_i}{10}, \quad \text{skąd} \quad 10n_{i+1} = n_i + (10^{333} - 1)j_i.$$

Liczba $10^{333} - 1 = (10^3 - 1) \cdot (10^{330} + 10^{327} + 10^{324} + \dots + 10^3 + 1)$ jest podzielna przez 333 oraz liczby 10 i 333 są względnie pierwsze. Z drugiej równości (1) wynika zatem, że *liczba n_i jest podzielna przez 333 wtedy i tylko wtedy, gdy liczba n_{i+1} jest podzielna przez 333.*

Jeśli liczba n_1 jest podzielna przez 333, to na mocy powyższego stwierdzenia uzyskujemy (indukcyjnie) podzielność przez 333 każdej z liczb $n_2, n_3, \dots, n_{333}$. Jeżeli natomiast liczba n_1 nie dzieli się przez 333, to analogicznie jak wyżej wnioskujemy, że żadna z liczb $n_2, n_3, \dots, n_{333}$ nie dzieli się przez 333.

Zadanie 6. Punkty A, B, C, D leżą w tej właśnie kolejności na okręgu o . Punkt M jest środkiem tego łuku AB okręgu o , który nie zawiera punktów C i D ; punkt N jest środkiem tego łuku CD okręgu o , który nie zawiera punktów A i B . Dowieść, że

$$\frac{AN^2 - BN^2}{AB} = \frac{DM^2 - CM^2}{CD}.$$

Rozwiązanie

Z twierdzenia Ptolemeusza (zob. *LI Olimpiada Matematyczna, Sprawozdanie Komitetu Głównego*, Dodatek D, str. 112) zastosowanego do czworokąta $AMBN$ uzyskujemy równość $BM \cdot (AN + BN) = MN \cdot AB$. Stąd

$$\frac{AN^2 - BN^2}{AB} = \frac{(AN - BN) \cdot MN}{BM}.$$

Zatem zadanie sprowadza się do wykazania, że

$$(1) \quad \frac{AN - BN}{BM} = \frac{DM - CM}{CN}.$$

Bez straty ogólności przyjmijmy, że $AN < BN$; wtedy $DM < CM$. Niech A' będzie punktem symetrycznym do A względem prostej MN (rys. 2). Ponieważ MN jest dwusieczną kąta ANB , punkt A' leży na odcinku BN . Ponadto $BM = AM = A'M$.

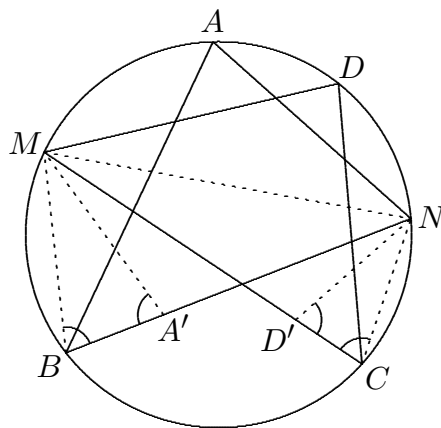
Analogicznie, oznaczając przez D' punkt symetryczny do D względem prostej MN wnioskujemy, że punkt D' leży na odcinku CM oraz $CN = D'N$. Na mocy równości

$$\sphericalangle MBN = \sphericalangle MCN,$$

trójkąty równoramienne BMA' i CND' są podobne. Stąd

$$\frac{BA'}{BM} = \frac{CD'}{CN},$$

co jest równoważne dowodzonej równości (1).



rys. 2

Zadanie 7. U cioci Reni spotkało się (łącznie z ciocią) $n \geq 4$ osób. Każdy z obecnych podarował co najmniej jednej z pozostałych osób co najmniej jeden prezent. Okazało się, że każdy podarował trzykrotnie więcej prezentów niż sam otrzymał, z jednym wyjątkiem: ciocia Renia podarowała zaledwie $\frac{1}{6}$ liczby prezentów, które dostała. Wyznaczyć, w zależności od n , najmniejszą możliwą liczbę prezentów, które mogła otrzymać ciocia Renia.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez x_i ($i = 1, 2, \dots, n-1$) liczbę prezentów otrzymanych przez i -tego gościa cioci Reni oraz niech x_R oznacza liczbę prezentów, które otrzymała ciocia Renia. Wówczas łączna liczba prezentów wynosi

$$(1) \quad \sum_{i=1}^{n-1} x_i + x_R = \sum_{i=1}^{n-1} 3x_i + \frac{1}{6}x_R, \quad \text{skąd} \quad \sum_{i=1}^{n-1} x_i = \frac{5}{12}x_R.$$

Zatem liczba x_R jest podzielna przez 12, powiedzmy $x_R = 12k$, gdzie k jest pewną liczbą całkowitą nieujemną.

Ponieważ każda osoba podarowała co najmniej jeden prezent, więc musiała ona także otrzymać przynajmniej jeden upominek. Stąd wnioskujemy, że $x_i \geq 1$ dla $i = 1, 2, \dots, n-1$, co na mocy drugiej równości (1) daje $5k \geq n-1$. Ponieważ liczba k jest całkowita, więc ostatnia nierówność jest równoważna nierówności $k \geq [(n-1+4)/5]$, gdzie $[a]$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą niż a . Zatem

$$x_R \geq 12 \left\lceil \frac{n+3}{5} \right\rceil.$$

Pozostaje wykazać, że przy spełnieniu warunków zadania możliwe jest, aby ciocia Renia dostała dokładnie $12[(n+3)/5]$ prezentów.

Założmy, że $n-1 = 5k-r$, gdzie $r=0, 1, 2, 3, 4$, zaś k jest pewną liczbą całkowitą dodatnią. Podzielmy $n-1$ gości cioci Reni na (co najwyżej) trzy rozłączne

grupy:

$$A_1, A_2, \dots, A_{3k-r}, \quad B_1, B_2, \dots, B_{2k-r}, \quad C_1, C_2, \dots, C_r.$$

(Ponieważ $n \geq 4$, więc $2k-r \geq 0$.) Następnie posadźmy wszystkie osoby A_i oraz C_i przy okrągłym stole i przyjmijmy, że:

1. Każda osoba A_i, C_i daje 1 prezent osobie siedzącej po jej prawej stronie;
2. Każda osoba A_i daje 2 prezenty cioci Reni;
3. Każda osoba B_i daje 3 prezenty cioci Reni;
4. Każda osoba C_i daje 5 prezentów cioci Reni;
5. Ciocia Renia daje po 1 prezencie każdej osobie B_i oraz C_i .

W ten sposób każda osoba A_i oraz B_i podarowała 3 prezenty, zaś otrzymała jeden, natomiast każda osoba C_i dała 6 prezentów, a sama dostała dwa. Zatem każdy gość cioci Reni podarował trzykrotnie więcej prezentów niż sam dostał. Z kolei ciocia Renia otrzymała

$$2(3k-r) + 3(2k-r) + 5r = 12k = 12[(n+3)/5]$$

prezentów, sama zaś podarowała $2k$ upominków, czyli sześciokrotnie mniej.

Odp.: Ciocia Renia mogła otrzymać co najmniej $12[(n+3)/5]$ prezentów.

Zadanie 8. W czworościanie $ABCD$ punkty M i N są odpowiednio środkami krawędzi AB i CD . Punkt P leży na odcinku MN , przy czym $MP = CN$ oraz $NP = AM$. Punkt O jest środkiem sfery opisanej na czworościanie $ABCD$. Dowieść, że jeżeli $O \neq P$, to $OP \perp MN$.

Rozwiązanie

Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$\alpha = \angle OPM, \quad a = AM = MB = NP, \quad b = CN = ND = MP, \quad x = OP.$$

Wówczas na mocy twierdzenia cosinusów mamy

$$(1) \quad OM^2 = b^2 + x^2 + 2bx \cos \alpha \quad \text{oraz} \quad ON^2 = a^2 + x^2 - 2ax \cos \alpha.$$

Ponadto korzystając z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy

$$(2) \quad OM^2 + a^2 = OA^2 = OD^2 = ON^2 + b^2.$$

Odejmując stronami równości (1) oraz wykorzystując zależność (2) uzyskujemy $2(a+b)x \cos \alpha = 0$. Stąd $\alpha = 90^\circ$, czyli $OP \perp MN$.

Zadanie 9. Znaleźć wszystkie wielomiany W o współczynnikach rzeczywistych, mające następującą własność: jeśli $x+y$ jest liczbą wymierną, to

$$W(x) + W(y)$$

jest liczbą wymierną.

Rozwiązanie

Zauważmy najpierw, że warunki zadania są spełnione przez każdy wielomian postaci $W(x) = ax + b$, gdzie a i b są liczbami wymiernymi.

Udowodnimy, że są to wszystkie wielomiany o własności podanej w zadaniu.

Niech W będzie wielomianem spełniającym warunki zadania. Dla liczby wymiernej q rozważamy wielomian $P(x) = W(q+x) + W(q-x)$. Wielomian P przyjmuje wartości wymierne dla wszystkich argumentów rzeczywistych x , jest więc wielomianem stałym równym $P(0) = 2W(q)$. Stąd wynika, że dla dowolnej liczby całkowitej n zachodzi równość $W(n-1) + W(n+1) = 2W(n)$, czyli

$$W(n) - W(n-1) = W(n+1) - W(n).$$

Niech $V(x) = W(x) - ax - b$, gdzie $a = W(1) - W(0)$ oraz $b = W(0)$. Wówczas $V(0) = V(1) = 0$ oraz dla dowolnej liczby całkowitej n zachodzi równość

$$V(n) - V(n-1) = V(n+1) - V(n).$$

Zatem wielomian V przyjmuje wartość 0 dla wszystkich argumentów całkowitych, musi więc być wielomianem zerowym, a w konsekwencji $W(x) = ax + b$.

Zadanie 10. Mamy talię 52 kart. Tasowaniem będziemy nazywać wykonanie następujących czynności: dowolny podział talii na część górną i dolną, a następnie dowolne zmieszanie kart z zachowaniem porządku w obrębie każdej części. Mówiąc formalnie, tasowaniem jest dowolne przemieszanie kart, w którym i -ta karta od wierzchu przechodzi na pozycję p_i , przy czym istnieje takie $m \in \{1, 2, 3, \dots, 51\}$, że $p_i < p_{i+1}$ dla $i < m$ oraz dla $i > m$. Rozstrzygnąć, czy rozpoczynając od ustalonego początkowego uporządkowania kart, można uzyskać każde inne uporządkowanie wykonując pięć tasowań.

Rozwiązanie

Udowodnimy, że po pięciu tasowaniach nie można uzyskać porządku odwrotnego do wyjściowego.

Zauważmy, że karty, które podczas pewnego tasowania znalazły się w tej samej części, nie zmieniają wzajemnego porządku po tym tasowaniu.

Spośród 52 kart podczas pierwszego tasowania w jednej z części znajdzie się co najmniej 26 kart. Spośród tych 26 kart co najmniej 13 znajdzie się w jednej części także podczas drugiego tasowania.

Rozumując podobnie dalej wnioskujemy, że istnieje co najmniej 7 kart, które będą się znajdowały w tej samej części przez pierwsze trzy tasowania. Co najmniej 4 z nich będą w tej samej części także przy czwartym tasowaniu, a pewne dwie po wszystkich pięciu tasowaniach. Zatem zawsze będą istniały dwie karty, które przez pięć tasowań nie zmienią wzajemnego położenia.

Nie można więc uzyskać kart w porządku odwrotnym do wyjściowego, gdyż wtedy każde dwie karty musiałyby zmienić wzajemną kolejność.

Zadanie 11. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Punkty P i Q , różne od wierzchołków czworokąta, leżą odpowiednio na bokach BC i CD , przy czym $\sphericalangle BAP = \sphericalangle DAQ$. Udowodnić, że trójkąty ABP i ADQ mają równe pola wtedy i tylko wtedy, gdy ich ortocentra leżą na prostej prostopadłej do AC .

Uwaga: Ortocentrum trójkąta to punkt przecięcia wysokości.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez K, L rzuty prostokątne punktów A, B odpowiednio na proste BC, AP (rys. 3). Niech ponadto H oznacza ortocentrum trójkąta ABP oraz niech X będzie rzutem prostokątnym punktu H na prostą AC .

Korzystając z podobieństwa trójkątów prostokątnych AHL i APK otrzymujemy

$$\frac{AH}{AL} = \frac{AP}{AK}.$$

Analogicznie, z podobieństwa trójkątów prostokątnych AHX i ACK uzyskujemy zależność

$$\frac{AH}{AX} = \frac{AC}{AK}.$$

Wprowadźmy następujące oznaczenie:

$$\alpha = \sphericalangle BAP = \sphericalangle DAQ.$$

Z nierówności $\sphericalangle BAD < 180^\circ$ wynika, że $\alpha < 90^\circ$. Zatem

$$(1) \quad AC \cdot AX = AH \cdot AK = AP \cdot AL = AP \cdot BL \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 2[ABP] \cdot \operatorname{ctg} \alpha,$$

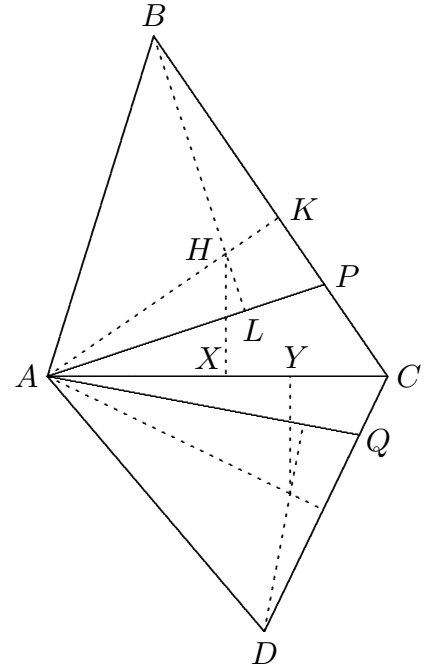
gdzie $[TUV]$ oznacza pole trójkąta TUV .

Oznaczmy przez Y rzut prostokątny ortocentrum trójkąta ADQ na prostą AC . Wówczas, analogicznie jak wyżej, otrzymujemy zależność

$$(2) \quad AC \cdot AY = 2[ADQ] \cdot \operatorname{ctg} \alpha.$$

Porównując równości (1) oraz (2) wnioskujemy, że $[ABP] = [ADQ]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $AX = AY$. Ostatnia równość jest równoważna stwierdzeniu, że ortocentra trójkątów ABP i ADQ leżą na prostej prostopadłej do AC , jeśli przekonamy się, że punkty X i Y leżą na prostej AC po tej samej stronie punktu A .

W tym celu wykażemy, że punkt X leży na półprostej $AC^{\rightarrow}$. Ponieważ $\alpha < 90^\circ$, więc punkt H leży na półprostej $AK^{\rightarrow}$. Ponadto trójkąt AKC jest prostokątny (lub $K=C$), więc rzut prostokątny półprostej $AK^{\rightarrow}$ na prostą AC pokrywa się z półprostą $AC^{\rightarrow}$. Stąd bezpośrednio wynika, że punkt X leży na półprostej $AC^{\rightarrow}$. Analogicznie dowodzimy, że punkt Y leży na półprostej $AC^{\rightarrow}$, co kończy rozwiązanie zadania.



rys. 3

Uwaga

Rysunek 3 przedstawia przypadek, w którym trójkąty ABP i ADQ są ostrokątne. Zaprezentowane rozwiązanie pozostaje jednak w mocy dla każdej innej konfiguracji spełniającej warunki zadania.

Zadanie 12. Dla liczb dodatnich a, b, c, d określamy

$$A = a^3 + b^3 + c^3 + d^3, \quad B = bcd + cda + dab + abc.$$

Udowodnić nierówność

$$(a + b + c + d)^3 \leq 4A + 24B.$$

Rozwiązanie

Niech $S = a + b + c + d$. Wtedy $S^3 = A + 6B + 3Q$, gdzie

$$\begin{aligned} Q &= a^2(b + c + d) + b^2(c + d + a) + c^2(d + a + b) + d^2(a + b + c) = \\ &= a^2(S - a) + b^2(S - b) + c^2(S - c) + d^2(S - d) = \\ &= a(Sa - a^2) + b(Sb - b^2) + c(Sc - c^2) + d(Sd - d^2). \end{aligned}$$

Korzystając z nierówności

$$0 \leq \left(x - \frac{S}{2}\right)^2 = x^2 - Sx + \frac{S^2}{4}$$

prawdziwej dla dowolnej liczby rzeczywistej x otrzymujemy

$$Sa - a^2 \leq \frac{S^2}{4}, \quad Sb - b^2 \leq \frac{S^2}{4}, \quad Sc - c^2 \leq \frac{S^2}{4} \quad \text{oraz} \quad Sd - d^2 \leq \frac{S^2}{4}.$$

Zatem

$$Q \leq (a + b + c + d) \cdot \frac{S^2}{4} = \frac{S^3}{4}, \quad \text{skąd} \quad S^3 \leq A + 6B + \frac{3S^3}{4},$$

co daje $S^3 \leq 4A + 24B$, czyli nierówność, którą należało udowodnić.

(wp, jwr)

* * *

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w internecie pod adresem:

www.om.edu.pl

LIV Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia drugiego

21 lutego 2003 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Dowieść, że istnieje taka liczba całkowita $n > 2003$, że w ciągu

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{2003}$$

każdy wyraz jest dzielnikiem wszystkich wyrazów po nim następujących.

2. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg o . Dwusieczne kątów DAB i ABC przecinają się w punkcie P , a dwusieczne kątów BCD i CDA przecinają się w punkcie Q . Punkt M jest środkiem tego łuku BC okręgu o , który nie zawiera punktów D i A . Punkt N jest środkiem tego łuku DA okręgu o , który nie zawiera punktów B i C . Dowieść, że punkty P i Q leżą na prostej prostopadłej do MN .

3. Dany jest wielomian $W(x) = x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 9x$. Wyznaczyć wszystkie pary różnych liczb całkowitych a, b spełniających równanie

$$W(a) = W(b).$$

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Przed rozpoczęciem rozwiązywania należy przepisać tekst każdego zadania na oddzielnym arkuszu.
3. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
4. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu czekać na podejście dyżurującego.
5. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
6. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów.

LIV Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia drugiego

22 lutego 2003 r. (drugi dzień zawodów)

4. Wykazać, że dla każdej liczby pierwszej $p > 3$ istnieją liczby całkowite x , y , k spełniające warunki: $0 < 2k < p$ oraz

$$kp + 3 = x^2 + y^2.$$

5. Punkt A leży na zewnątrz okręgu o o środku O . Z punktu A poprowadzono dwie proste styczne do okręgu o odpowiednio w punktach B i C . Pewna styczna do okręgu o przecina odcinki AB i AC odpowiednio w punktach E i F . Proste OE i OF przecinają odcinek BC odpowiednio w punktach P i Q . Udowodnić, że z odcinków BP , PQ i QC można zbudować trójkąt podobny do trójkąta AEF .

6. Każdej parze liczb całkowitych nieujemnych (x, y) jest przyporządkowana liczba $f(x, y)$ zgodnie z warunkami:

$$f(0, 0) = 0;$$

$$f(2x, 2y) = f(2x + 1, 2y + 1) = f(x, y),$$

$$f(2x + 1, 2y) = f(2x, 2y + 1) = f(x, y) + 1 \quad \text{dla } x, y \geq 0.$$

Niech n będzie ustaloną liczbą całkowitą nieujemną i niech a , b będą takimi liczbami całkowitymi nieujemnymi, że $f(a, b) = n$. Rozstrzygnąć, ile jest liczb x spełniających równanie

$$f(a, x) + f(b, x) = n.$$

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Przed rozpoczęciem rozwiązywania należy przepisać tekst każdego zadania na oddzielnym arkuszu.
3. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
4. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu poczekać na podejsze dyżurującego.
5. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
6. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów.

LIV Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia drugiego

21 lutego 2003 r. (pierwszy dzień zawodów)

Zadanie 1. Dowieść, że istnieje taka liczba całkowita $n > 2003$, że w ciągu

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{2003}$$

każdy wyraz jest dzielnikiem wszystkich wyrazów po nim następujących.

Rozwiązanie

Liczba $\binom{n}{k+1}$ jest podzielna przez $\binom{n}{k}$ wtedy i tylko wtedy, gdy liczba

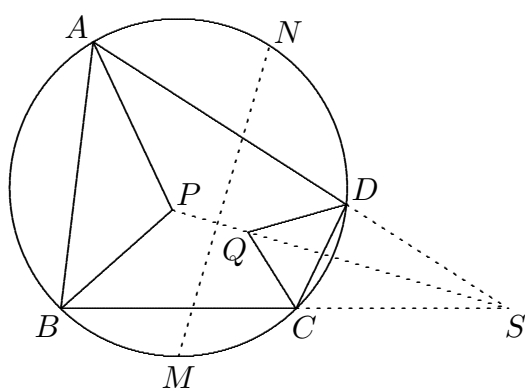
$$\frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}} = \frac{n!}{(k+1)! \cdot (n-k-1)!} \cdot \frac{k! \cdot (n-k)!}{n!} = \frac{n-k}{k+1} = \frac{n+1}{k+1} - 1$$

jest całkowita. Zatem liczba n spełnia warunki zadania wtedy i tylko wtedy, gdy liczba $n+1$ jest podzielna przez każdą z liczb $1, 2, 3, 4, \dots, 2003$. Taką liczbą jest na przykład $n = 2003! - 1$.

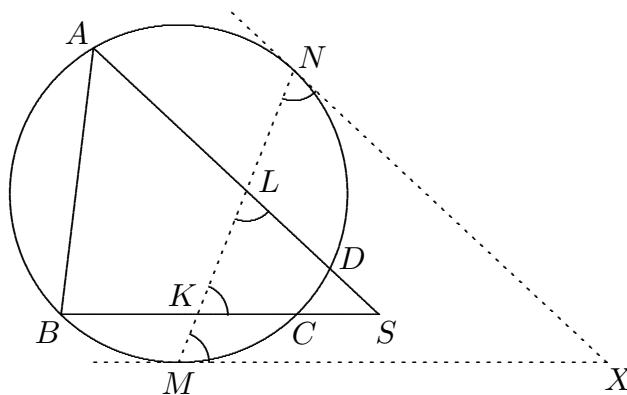
Zadanie 2. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg o . Dwieścienne kątów DAB i ABC przecinają się w punkcie P , a dwieścienne kątów BCD i CDA przecinają się w punkcie Q . Punkt M jest środkiem tego łuku BC okręgu o , który nie zawiera punktów D i A . Punkt N jest środkiem tego łuku DA okręgu o , który nie zawiera punktów B i C . Dowieść, że punkty P i Q leżą na prostej prostopadłej do MN .

Rozwiązanie

Założmy najpierw, że proste AD i BC są równoległe. Wówczas czworokąt $ABCD$ jest trapezem równoramiennym. Jego podstawy BC i AD są prostopadłe do prostej MN . Ponadto punkty P i Q leżą na prostej równoległej do podstaw trapezu i równoodległej od nich. Stąd teza.



rys. 1



rys. 2

Przyjmijmy z kolei, że proste AD i BC nie są równoległe i przecinają się w punkcie S (rys. 1). Punkt P jest środkiem okręgu stycznego do odcinków

AB , BC , DA , zaś punkt Q jest środkiem okręgu stycznego do odcinków CD , BC , DA . Stąd wynika, że punkty P , Q leżą na dwusiecznej kąta ASB . Należy zatem wykazać, że dwusieczna ta jest prostopadła do prostej MN .

Oznaczmy przez K , L odpowiednio punkty przecięcia odcinka MN z prostymi BC , AD (rys. 2). Zadanie będzie rozwiązane, jeśli wykazemy, że trójkąt SKL jest równoramienny.

Przez punkty M i N poprowadźmy proste styczne do danego okręgu. Proste te są równoległe odpowiednio do prostych BC i AD oraz wyznaczają – razem z prostą MN – trójkąt równoramienny MNX . Stąd

$$\sphericalangle SKL = \sphericalangle XMN = \sphericalangle XNM = \sphericalangle SLK.$$

Otrzymana równość dowodzi, że trójkąt SKL jest równoramienny, co kończy rozwiązanie zadania.

Zadanie 3. Dany jest wielomian $W(x) = x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 9x$. Wyznaczyć wszystkie pary różnych liczb całkowitych a , b spełniających równanie

$$W(a) = W(b).$$

Rozwiązanie

Zauważmy, że $W(x) = (x-1)(x-2)(x^2+3) - 6$. Dla $n > 3$ zachodzą więc nierówności

$$\begin{aligned} W(n) + 6 &= (n-1)(n-2)(n^2+3) = (n^2-3n+2)(n^2+3) < \\ &< (n^2-2n+4)(n^2+n) = n(n+1)((n-1)^2+3) = \\ &= W(-n+1) + 6, \end{aligned}$$

a ponadto

$$\begin{aligned} W(-n+1) + 6 &< (n^2-n)(n^2+2n+4) = n(n-1)((n+1)^2+3) = \\ &= W(n+1) + 6. \end{aligned}$$

Stąd otrzymujemy

$$(1) \quad W(3) < W(-2) < W(4) < W(-3) < W(5) < W(-4) < W(6) \dots$$

Zatem wartości wielomianu W w punktach $-2, \pm 3, \pm 4, \dots$ są parami różne. Bezpośrednio obliczamy, że

$$W(-1) = 18, \quad W(0) = 0, \quad W(1) = -6, \quad W(2) = -6, \quad W(3) = 18,$$

zaś z nierówności (1) wnioskujemy, że wartości wielomianu W w pozostałych punktach całkowitych są większe od $W(3) = 18$. Stąd otrzymujemy łącznie cztery pary liczb spełniających warunki zadania:

$$(-1, 3), \quad (3, -1), \quad (1, 2), \quad (2, 1).$$

(wp, jwr)

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w internecie pod adresem: www.om.edu.pl

LIV Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia drugiego

22 lutego 2003 r. (drugi dzień zawodów)

Zadanie 4. Wykazać, że dla każdej liczby pierwszej $p > 3$ istnieją liczby całkowite x, y, k spełniające warunki: $0 < 2k < p$ oraz

$$kp + 3 = x^2 + y^2.$$

Rozwiązanie

Niech A będzie zbiorem liczb postaci x^2 , gdzie $0 \leq x < p/2$, natomiast B zbiorem liczb postaci $3 - y^2$, gdzie $0 \leq y < p/2$; liczby x, y są całkowite. Wykażemy, że liczby ze zbioru A dają różne reszty z dzielenia przez p .

Przypuśćmy, że liczby x_1^2, x_2^2 ze zbioru A dają taką samą resztę z dzielenia przez p . Wtedy

$$p \mid x_1^2 - x_2^2,$$

skąd mamy podzielność

$$p \mid (x_1 - x_2)(x_1 + x_2).$$

Ponieważ $0 \leq x_1, x_2 < p/2$, więc $-p/2 < x_1 - x_2 < p/2$ oraz $0 \leq x_1 + x_2 < p$. Stąd oraz z powyższej podzielności wnioskujemy, że $x_1 = x_2$.

Zatem liczby ze zbioru A dają różne reszty z dzielenia przez p . Analogicznie dowodzimy, że liczby ze zbioru B dają różne reszty z dzielenia przez p .

Ponieważ zbiory A i B mają łącznie $p + 1$ elementów, więc istnieją dwie liczby – jedna ze zbioru A , druga ze zbioru B – dające z dzielenia przez p tę samą resztę. Niech x^2 i $3 - y^2$ będą tymi liczbami. Wówczas liczba $x^2 + y^2 - 3$ jest podzielna przez p , mamy więc

$$kp + 3 = x^2 + y^2$$

dla pewnej liczby całkowitej k . Ponieważ $p > 3$, więc k jest liczbą dodatnią oraz

$$k = \frac{x^2 + y^2 - 3}{p} < \frac{(p/2)^2 + (p/2)^2}{p} = \frac{p}{2}.$$

Warunki podane w treści zadania są więc spełnione.

Zadanie 5. Punkt A leży na zewnątrz okręgu o o środku O . Z punktu A poprowadzono dwie proste styczne do okręgu o odpowiednio w punktach B i C . Pewna styczna do okręgu o przecina odcinki AB i AC odpowiednio w punktach E i F . Proste OE i OF przecinają odcinek BC odpowiednio w punktach P i Q . Udowodnić, że z odcinków BP, PQ i QC można zbudować trójkąt podobny do trójkąta AEF .

Rozwiązanie

Oznaczmy przez X punkt styczności okręgu o z prostą EF (rys. 3). Z równości

$$EB = EX \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle BEP = \sphericalangle XEP$$

wynika, że trójkąty BEP oraz XEP są przystające. Zatem $BP = XP$.

Analogicznie dowodzimy równość $CQ = XQ$. To oznacza, że trójkąt PQX jest zbudowany z odcinków BP , PQ oraz QC .

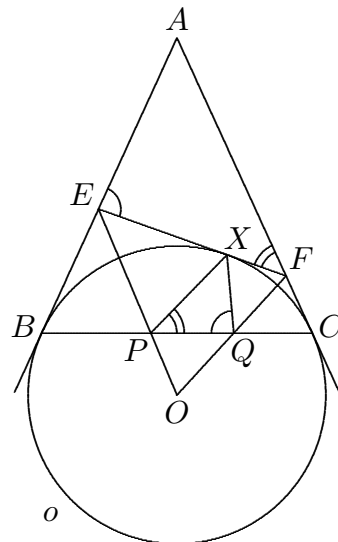
Pozostaje wykazać, że trójkąt PQX jest podobny do trójkąta FEA . Oznaczmy: $\sphericalangle FEA = \alpha$, $\sphericalangle EFA = \beta$. Trójkąt ABC jest równoramienny, skąd obliczamy, że $\sphericalangle ABC = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$. Ponadto $\sphericalangle BEP = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$. Dwie ostatnie równości implikują

$$\sphericalangle BPE = 90^\circ - \frac{1}{2}\beta,$$

co daje w rezultacie

$$\sphericalangle XPQ = 180^\circ - 2\sphericalangle BPE = \beta.$$

Analogicznie dowodzimy, że $\sphericalangle XQP = \alpha$, co kończy rozwiązanie zadania.



rys. 3

Zadanie 6. Każdej parze liczb całkowitych nieujemnych (x, y) jest przyporządkowana liczba $f(x, y)$ zgodnie z warunkami:

$$f(0, 0) = 0;$$

$$f(2x, 2y) = f(2x + 1, 2y + 1) = f(x, y),$$

$$f(2x + 1, 2y) = f(2x, 2y + 1) = f(x, y) + 1 \quad \text{dla } x, y \geq 0.$$

Niech n będzie ustaloną liczbą całkowitą nieujemną i niech a, b będą takimi liczbami całkowitymi nieujemnymi, że $f(a, b) = n$. Rozstrzygnąć, ile jest liczb x spełniających równanie

$$f(a, x) + f(b, x) = n.$$

Rozwiązanie

Udowodnimy następujący lemat dający inny opis funkcji f .

Lemat

Niech k będzie liczbą całkowitą dodatnią oraz niech x, y będą liczbami całkowitymi nieujemnymi mniejszymi od 2^k . Niech

$$\overline{c_{k-1}c_{k-2}\dots c_2c_1c_0(2)} \quad \text{oraz} \quad \overline{d_{k-1}d_{k-2}\dots d_2d_1d_0(2)}$$

będą zapisami dwójkowymi odpowiednio liczb x i y , przy czym dopuszczamy zera początkowe. Wówczas

$$f(x, y) = \sum_{i=0}^{k-1} |c_i - d_i|.$$

(Zatem $f(x, y)$ jest liczbą miejsc dwójkowych, na których liczby x i y mają różne cyfry.)

Dowód lematu

Przeprowadzimy dowód indukcyjny ze względu na k . Dla $k=1$ teza lematu wynika bezpośrednio z równości

$$f(0, 0) = f(1, 1) = 0 \quad \text{oraz} \quad f(0, 1) = f(1, 0) = 1.$$

Niech k będzie taką liczbą całkowitą, dla której teza lematu jest prawdziwa oraz niech x, y będą dowolnymi liczbami całkowitymi nieujemnymi mniejszymi od 2^{k+1} . Zapiszmy liczby x, y w układzie dwójkowym:

$$x = \overline{c_k c_{k-1} c_{k-2} \dots c_2 c_1 c_0}_{(2)}, \quad y = \overline{d_k d_{k-1} d_{k-2} \dots d_2 d_1 d_0}_{(2)}.$$

Z założenia indukcyjnego wynika, że teza lematu jest spełniona dla liczb

$$x_0 = \overline{c_k c_{k-1} c_{k-2} \dots c_2 c_1}_{(2)}, \quad y_0 = \overline{d_k d_{k-1} d_{k-2} \dots d_2 d_1}_{(2)},$$

mamy więc $f(x_0, y_0) = |c_1 - d_1| + |c_2 - d_2| + \dots + |c_k - d_k|$. Ponadto $x = 2x_0 + c_0$ oraz $y = 2y_0 + d_0$, skąd na mocy warunków podanych w treści zadania wynika, że $f(x, y) = f(x_0, y_0) + |c_0 - d_0|$. Zatem

$$f(x, y) = \sum_{i=0}^k |c_i - d_i|.$$

Dowód lematu został zakończony.

Przechodzimy teraz do rozwiązywania zadania. Niech

$$a = \overline{a_{k-1} a_{k-2} \dots a_2 a_1 a_0}_{(2)}, \quad b = \overline{b_{k-1} b_{k-2} \dots b_2 b_1 b_0}_{(2)}, \quad x = \overline{c_{k-1} c_{k-2} \dots c_2 c_1 c_0}_{(2)}.$$

Wówczas równość $f(a, x) + f(b, x) = f(a, b)$ jest równoważna równości

$$\sum_{i=0}^{k-1} |c_i - a_i| + |c_i - b_i| - |b_i - a_i| = 0.$$

Ponieważ liczby $|c_i - a_i| + |c_i - b_i| - |b_i - a_i|$ mogą przyjmować tylko wartości 0 (gdy $a_i \neq b_i$ lub $a_i = b_i = c_i$) lub 2 (gdy $a_i = b_i \neq c_i$), zatem dla $i = 0, 1, 2, \dots, k-1$ zachodzi warunek

$$a_i \neq b_i \quad \text{lub} \quad a_i = b_i = c_i.$$

Możemy więc przy ustalonych a i b opisać wszystkie liczby x spełniające równanie $f(a, x) + f(b, x) = f(a, b)$. Na tych pozycjach zapisu dwójkowego, na których liczby a i b mają różne cyfry, liczba x może mieć cyfrę dowolną. Na tych pozycjach, na których cyfry liczb a i b są takie same, liczba x musi mieć cyfrę taką jak liczby a i b . Przy konstrukcji liczby x możemy więc dowolnie dobrać cyfry na $f(a, b)$ pozycjach.

Liczba rozwiązań danego w zadaniu równania jest więc równa 2^n .

(wp, jwr)



LIV Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia trzeciego

14 kwietnia 2003 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. W trójkącie ostrokątnym ABC odcinek CD jest wysokością. Przez środek M boku AB poprowadzono taką prostą przecinającą półproste CA i CB odpowiednio w punktach K i L , że $CK = CL$. Punkt S jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie CKL . Wykazać, że $SD = SM$.

2. Liczba a jest dodatnia i mniejsza od 1. Dowieść, że dla każdego skończonego, ściśle rosnącego ciągu nieujemnych liczb całkowitych $(k_1, \dots, k_n)$ zachodzi nierówność

$$\left(\sum_{i=1}^n a^{k_i} \right)^2 < \frac{1+a}{1-a} \sum_{i=1}^n a^{2k_i}.$$

3. Wyznaczyć wszystkie wielomiany W o współczynnikach całkowitych, spełniające następujący warunek: dla każdej liczby naturalnej n liczba $2^n - 1$ jest podzielna przez $W(n)$.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Przed rozpoczęciem rozwiązywania należy przepisać tekst każdego zadania na oddzielnym arkuszu.
3. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
4. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu poczekać na podejście dyżurującego.
5. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
6. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów.



LIV Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia drugiego

22 lutego 2003 r. (drugi dzień zawodów)

4. Dana jest liczba pierwsza p oraz takie liczby całkowite x, y, z , że

$$0 < x < y < z < p.$$

Wykazać, że jeśli liczby x^3, y^3, z^3 dają takie same reszty przy dzieleniu przez p , to liczba $x^2 + y^2 + z^2$ jest podzielna przez $x + y + z$.

5. Sfera wpisana w czworościan $ABCD$ jest styczna do ściany ABC w punkcie H . Druga sfera jest styczna do ściany ABC w punkcie O oraz jest styczna do płaszczyzn zawierających pozostałe ściany tego czworościanu w punktach, które do czworościanu nie należą. Dowieść, że jeżeli O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC , to H jest punktem przecięcia wysokości tego trójkąta.

6. Niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą parzystą. Udowodnić, że istnieje permutacja $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$, spełniająca dla każdego $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ warunek:

$$x_{i+1} \text{ jest jedną z liczb } 2x_i, 2x_i-1, 2x_i-n, 2x_i-n-1,$$

przy czym $x_{n+1} = x_1$.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Przed rozpoczęciem rozwiązywania należy przepisać tekst każdego zadania na oddzielnym arkuszu.
3. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
4. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu czekać na podejsze dyżurującego.
5. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
6. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów.



LIV Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia trzeciego

14 kwietnia 2003 r. (pierwszy dzień zawodów)

Zadanie 1. W trójkącie ostrokątnym ABC odcinek CD jest wysokością. Przez środek M boku AB poprowadzono taką prostą przecinającą półproste CA i CB odpowiednio w punktach K i L , że $CK = CL$. Punkt S jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie CKL . Wykazać, że $SD = SM$.

Rozwiązanie

Z twierdzenia Menelausa zastosowanego do trójkąta ABC otrzymujemy

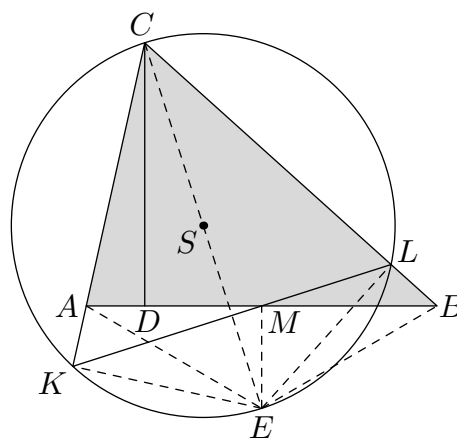
$$\frac{CK}{AK} \cdot \frac{AM}{MB} \cdot \frac{BL}{CL} = 1, \quad \text{skąd} \quad AK = BL.$$

Niech E będzie drugim punktem przecięcia prostej CS z okręgiem opisanym na trójkącie CKL (rys. 1). Z równości $CK = CL$ wynika, że

$$EK = EL. \quad \text{Ponadto} \quad \angle AKE = 90^\circ = \angle BLE.$$

Zatem trójkąty prostokątne AKE oraz BLE są przystające. Stąd uzyskujemy $AE = BE$, czyli $EM \perp AB$, a to daje $CD \parallel EM$.

Ponieważ S jest środkiem odcinka CE , więc jego rzut prostokątny na prostą AB pokrywa się ze środkiem odcinka DM . Stąd $SD = SM$.



rys. 1

Zadanie 2. Liczba a jest dodatnia i mniejsza od 1. Dowieść, że dla każdego skończonego, ściśle rosnącego ciągu nieujemnych liczb całkowitych $(k_1, \dots, k_n)$ zachodzi nierówność

$$\left(\sum_{i=1}^n a^{k_i} \right)^2 < \frac{1+a}{1-a} \sum_{i=1}^n a^{2k_i}.$$

Rozwiązanie

Stosujemy indukcję względem n . Dla $n = 1$ nierówność ma postać

$$1 < \frac{1+a}{1-a}$$

i oczywiście jest spełniona. Ustalmy $n \geq 2$ i założmy, że nierówność jest spełniona dla każdego rosnącego ciągu długości $n-1$. Weźmy pod uwagę dowolny rosnący ciąg długości n : $0 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_n$. Dzieląc dowodzoną nierówność stronami przez a^{2k_1} możemy bez straty ogólności przyjąć, że $k_1 = 0$. Wówczas

$$(1) \quad \left(\sum_{i=1}^n a^{k_i} \right)^2 = \left(1 + \sum_{i=2}^n a^{k_i} \right)^2 = 1 + 2 \sum_{i=2}^n a^{k_i} + \left(\sum_{i=2}^n a^{k_i} \right)^2.$$

Z nierówności $0 < k_2 < k_3 < \dots < k_n$ oraz $0 < a < 1$ wynika, że

$$\sum_{i=2}^n a^{k_i} \leq \sum_{j=1}^{k_n} a^j < \frac{a}{1-a}.$$

Stąd, z równości (1) oraz z założenia indukcyjnego uzyskujemy

$$\left(\sum_{i=1}^n a^{k_i}\right)^2 < 1 + \frac{2a}{1-a} + \frac{1+a}{1-a} \sum_{i=2}^n a^{2k_i} = \frac{1+a}{1-a} \left(1 + \sum_{i=2}^n a^{2k_i}\right) = \frac{1+a}{1-a} \sum_{i=1}^n a^{2k_i}.$$

To kończy krok indukcyjny i rozwiązanie zadania.

Zadanie 3. Wyznaczyć wszystkie wielomiany W o współczynnikach całkowitych, spełniające następujący warunek: dla każdej liczby naturalnej n liczba $2^n - 1$ jest podzielna przez $W(n)$.

Rozwiązanie

Niech $W(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_rx^r$ będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych, spełniającym rozważany warunek. Przypuśćmy, że dla pewnej liczby naturalnej k wartość $W(k)$ jest różna od 1 i od -1 ; ma więc dzielnik pierwszy p . Niech $m = k + p$. Różnica $W(m) - W(k)$ jest sumą różnic postaci $a_j(m^j - k^j)$, które są liczbami podzielными przez $m - k$, czyli przez p . Zatem $W(m)$ dzieli się przez p .

Z warunku zadania wynika, że p jest dzielnikiem liczb $2^k - 1$ oraz $2^m - 1$; jest więc nieparzystym dzielnikiem pierwszym liczby $2^m - 2^k = 2^k(2^p - 1)$, czyli jest dzielnikiem liczby $2^p - 1$. To jednak nie jest możliwe, bowiem

$$2^p - 1 = 1 + \binom{p}{1} + \binom{p}{2} + \dots + \binom{p}{p-1},$$

a wartości symbolu Newtona $\binom{p}{i}$ są dla $i = 1, \dots, p-1$ liczbami podzielными przez p .

Sprzeczność dowodzi, że $W(n) = \pm 1$ dla każdej liczby naturalnej n . Stąd wniosek, że W jest wielomianem równym tożsamościowo 1 lub równym tożsamościowo -1 . Oczywiście każdy z tych dwóch wielomianów spełnia postulowany warunek.

(mek, wp, jwr)

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w internecie pod adresem: www.om.edu.pl



LIV Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia trzeciego

15 kwietnia 2003 r. (drugi dzień zawodów)

Zadanie 4. Dana jest liczba pierwsza p oraz takie liczby całkowite x, y, z , że

$$0 < x < y < z < p.$$

Wykazać, że jeśli liczby x^3, y^3, z^3 dają takie same reszty przy dzieleniu przez p , to liczba $x^2 + y^2 + z^2$ jest podzielna przez $x + y + z$.

Rozwiązanie

Ponieważ liczba $y^3 - x^3 = (y - x)(x^2 + xy + y^2)$ jest podzielna przez p oraz $0 < y - x < p$, więc liczba $x^2 + xy + y^2$ jest podzielna przez p . Podobnie liczby $y^2 + yz + z^2$ oraz $x^2 + xz + z^2$ są podzielne przez p . Zatem liczba

$$(x^2 + xy + y^2) - (y^2 + yz + z^2) = (x - z)(x + y + z).$$

jest również podzielna przez p , co implikuje podzielność przez p liczby $x + y + z$. Liczba ta jako mniejsza od $3p$ jest więc równa p lub $2p$.

Z podzielności przez p liczb $x^2 + xy + y^2, y^2 + yz + z^2$ oraz $x^2 + xz + z^2$ wynika podzielność przez p ich sumy pomnożonej przez 2, czyli liczby

$$2(2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + xy + yz + xz) = 3(x^2 + y^2 + z^2) + (x + y + z)^2.$$

Z danych w treści zadania nierówności wnioskujemy, że $p > 3$, co w połączeniu z powyższą równością dowodzi podzielności przez p liczby $x^2 + y^2 + z^2$.

Zatem w przypadku $x + y + z = p$ zadanie zostało rozwiązane. Jeśli zaś $x + y + z = 2p$, to z równości $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + xz)$ wynika, że liczba $x^2 + y^2 + z^2$ jest parzysta. Jest ona również podzielna przez p , a zatem dzieli się także przez $x + y + z$.

Zadanie 5. Sfera wpisana w czworościan $ABCD$ jest styczna do ściany ABC w punkcie H . Druga sfera jest styczna do ściany ABC w punkcie O oraz jest styczna do płaszczyzn zawierających pozostałe ściany tego czworościanu w punktach, które do czworościanu nie należą. Dowiedzieć, że jeżeli O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC , to H jest punktem przecięcia wysokości tego trójkąta.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez K i L punkty styczności sfery wpisanej w czworościan $ABCD$ odpowiednio ze ścianami ACD i BCD . Niech ponadto P i Q będą punktami styczności drugiej rozważanej w treści zadania sfery, odpowiednio z płaszczyznami ACD i BCD . Wówczas trójkąty KCP i LCQ są przystające (cecha *bok-bok-bok*). Obróćmy trójkąt KCP wokół prostej AC tak, aby punkt K przeszedł na punkt H ; niech przy tym obrocie P przejdzie na P' . Podobnie, obróćmy trójkąt LCQ wokół prostej BC tak, aby punkt L przeszedł na punkt H ; niech przy tym obrocie Q przejdzie na Q' .

Dalsza część rozwiązania rozgrywa się w płaszczyźnie trójkąta ABC : Trójkąty HCP' i HCQ' są przystające, więc $P'Q' \perp CH$. Ponadto czworokąty $AOC P'$ i $BOC Q'$ są rombami, co implikuje $AB \parallel P'Q'$. Zatem $CH \perp AB$.

Analogicznie dowodzimy, że $BH \perp AC$, a to oznacza, że H jest punktem przecięcia wysokości trójkąta ABC .

Zadanie 6. Niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą parzystą. Udowodnić, że istnieje permutacja $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$, spełniająca dla każdego $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ warunek:

$$x_{i+1} \text{ jest jedną z liczb } 2x_i, 2x_i-1, 2x_i-n, 2x_i-n-1,$$

przy czym $x_{n+1} = x_1$.

Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia: $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{gdy } x \leq n/2, \\ 2x-n & \text{gdy } x > n/2, \end{cases} \quad g(x) = f(x) - 1.$

Rozważamy graf skierowany o n wierzchołkach ponumerowanych $1, 2, \dots, n$, w którym z punktu (wierzchołka) x wychodzą dwie zorientowane krawędzie: do punktu $f(x)$ i do $g(x)$. Teza sprowadza się do istnienia zamkniętej ścieżki, przechodzącej przez każdy wierzchołek dokładnie jeden raz (*cyklu Hamiltona*).

Startując od wierzchołka o numerze 1 i działając funkcjami f, g , możemy uzyskać: w jednym kroku – punkty 1 i 2; w dwóch krokach – punkty 1, 2, 3, 4; w trzech krokach – punkty od 1 do 8; itd. Widać, że każdy punkt jest osiągalny z wierzchołka 1.

Niech $S: x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \dots \rightarrow x_m$ będzie najdłuższą ścieżką, przechodzącą przez różne wierzchołki, wśród których jest wierzchołek o numerze 1. Obie wychodzące z punktu x_m krawędzie trafiają w pewne punkty ścieżki S (w przeciwnym razie ścieżkę dałoby się przedłużyć). Mamy więc krawędzie $x_m \rightarrow x_k, x_m \rightarrow x_\ell$ ($k, \ell \leq m, k \neq \ell$); niech np. $f(x_m) = x_k, g(x_m) = x_\ell$.

Przypuśćmy, że $k, \ell > 1$. Wówczas

$$x_k \in \{f(x_{k-1}), g(x_{k-1})\}, \quad x_\ell \in \{f(x_{\ell-1}), g(x_{\ell-1})\}.$$

Funkcja f przyjmuje tylko wartości parzyste, a g wartości nieparzyste. Ponadto każda z równości $f(x) = f(y)$ i $g(x) = g(y)$ implikuje $x \equiv y \pmod{n/2}$. Zatem

$$x_k = f(x_{k-1}) = f(x_m), \quad x_\ell = g(x_{\ell-1}) = g(x_m),$$

skąd $x_m \equiv x_{k-1} \equiv x_{\ell-1} \pmod{n/2}$ – sprzeczność, bo $x_m, x_{k-1}, x_{\ell-1}$ są trzema różnymi liczbami ze zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$.

Zatem $k = 1$ lub $\ell = 1$, co oznacza, że $x_m \rightarrow x_1$ jest krawędzią grafu. Uzupełnia ona ścieżkę S do zamkniętego cyklu. Załóżmy, że poza nią pozostały jakieś wierzchołki grafu. Są one osiągalne z wierzchołka o numerze 1 (leżącego na ścieżce S). Zatem z pewnego punktu tej ścieżki, x_p , musi wychodzić krawędź do punktu y leżącego poza nią. Wtedy $x_{p+1} \rightarrow \dots \rightarrow x_m \rightarrow x_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_p \rightarrow y$ jest ścieżką przechodzącą przez $m+1$ różnych wierzchołków (wśród których jest punkt 1), wbrew maksymalności m .

Wniosek: ścieżka S , uzupełniona krawędzią $x_m \rightarrow x_1$, jest cyklem przechodzącym przez wszystkie wierzchołki grafu. (mek, wp, jwr)



LV Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego

I seria (11 września 2003 r. – 10 października 2003 r.)

1. Dany jest wielokąt o bokach długości wymiernej, w którym wszystkie kąty wewnętrzne są równe 90° lub 270° . Z ustalonego wierzchołka wypuszczamy promień świetlny do wnętrza wielokąta w kierunku dwusiecznej kąta wewnętrznego przy tym wierzchołku. Promień odbija się zgodnie z zasadą: kąt padania jest równy kątowi odbicia. Udowodnić, że promień trafi w jeden z wierzchołków wielokąta.

2. Rozstrzygnąć, czy istnieje liczba pierwsza p oraz liczby całkowite nieujemne x, y, z spełniające równanie

$$(12x + 5)(12y + 7) = p^z.$$

3. Niech $\mathbb{Q}$ oznacza zbiór wszystkich liczb wymiernych. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ spełniające warunek

$$f(x^2 + y) = xf(x) + f(y)$$

dla każdej pary liczb wymiernych x, y .

4. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC . Rozważamy wszystkie takie trójkąty równoboczne XYZ , że punkty A, B, C są odpowiednio punktami wewnętrznymi odcinków YZ, ZX, XY . Dowieść, że środki ciężkości wszystkich rozważanych trójkątów XYZ leżą na jednym okręgu.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać pod adresem komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

10 października 2003 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.



IV Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego

II seria (11 października 2003 r. – 12 listopada 2003 r.)

5. Dla liczb całkowitych dodatnich m, n niech $N(m, n)$ oznacza liczbę m -wyrazowych ciągów niemalejących o wyrazach ze zbioru $\{1, 2, 3, \dots, n\}$. Dowieść, że $N(m, n+1) = N(n, m+1)$.

6. Niech c będzie taką liczbą rzeczywistą, że wielomian

$$P(x) = x^5 - 5x^3 + 4x - c$$

ma pięć różnych pierwiastków rzeczywistych x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 . Wyznaczyć, w zależności od c , sumę wartości bezwzględnych współczynników wielomianu

$$Q(x) = (x - x_1^2)(x - x_2^2)(x - x_3^2)(x - x_4^2)(x - x_5^2).$$

7. Znaleźć wszystkie takie rozwiązania równania

$$a^2 + b^2 = c^2$$

w liczbach całkowitych dodatnich, że liczby a i c są pierwsze, a liczba b jest iloczynem co najwyżej czterech liczb pierwszych.

8. Punkt P leży wewnątrz czworoboku $ABCD$. Dowieść, że

$$\angle APB + \angle BPC + \angle CPD + \angle DPA > 360^\circ.$$

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać pod adresem komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

12 listopada 2003 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.



LV Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego

III seria (13 listopada 2003 r. – 10 grudnia 2003 r.)

9. Dane są wielomiany $W_1(x), W_2(x), W_3(x), \dots, W_n(x)$ stopnia co najmniej 1, o współczynnikach całkowitych. Wykazać, że dla pewnej liczby całkowitej a wszystkie liczby

$$W_1(a), W_2(a), W_3(a), \dots, W_n(a)$$

są złożone.

10. Dany jest wielokąt wypukły o parzystej liczbie boków. Każdy bok wielokąta ma długość 2 lub 3, przy czym liczba boków każdej z tych długości jest parzysta. Dowieść, że istnieją dwa wierzchołki wielokąta, które dzielą jego obwód na dwie części jednakowej długości.

11. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trapezie równoramiennym $ABCD$ o podstawach AB i CD . Punkty K, L, M, N leżą odpowiednio na bokach AB, BC, CD, DA , przy czym czworokąt $KLMN$ jest rombem. Udowodnić, że punkt O leży na prostej KM .

12. Dana jest liczba całkowita $n \geq 5$. Wyznaczyć liczbę rozwiązań w liczbach rzeczywistych $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ układu równań

$$x_{i-2}^3 + x_{i-1}^3 + x_i^3 = x_i^4 + x_{i+1}^3 + x_{i+2}^2 \quad \text{dla } i = 1, 2, 3, \dots, n,$$

gdzie $x_{-1} = x_{n-1}$, $x_0 = x_n$, $x_1 = x_{n+1}$, $x_2 = x_{n+2}$.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać pod adresem komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

10 grudnia 2003 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.

Adresy Komitetów Okręgowych Olimpiady Matematycznej

- Dla województwa pomorskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Gdańskiego, ul. Wita Stwosza 57, 80-952 Gdańsk

- Dla województwa śląskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Śląskiego, ul. Bankowa 14, 40-005 Katowice.

- Dla województwa małopolskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego, ul. Reymonta 4, 30-059 Kraków.

- Dla województwa lubelskiego i podkarpackiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Oddział Lubelski Polskiego Towarzystwa Matematycznego, pl. Marii Skłodowskiej-Curie 1, pok. 223, 20-031 Lublin.

- Dla województwa łódzkiego i świętokrzyskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki Uniwersytetu Łódzkiego, ul. Banacha 22, 90-238 Łódź.

- Dla województwa wielkopolskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Adama Mickiewicza, ul. Umultowska 87, 61-614 Poznań

- Dla województwa lubuskiego i zachodniopomorskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — ul. Wielkopolska 15, 70-251 Szczecin.

- Dla województwa kujawsko-pomorskiego i warmińsko-mazurskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, ul. Chopina 12/18, 87-100 Toruń.

- Dla województwa mazowieckiego i podlaskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyczny PAN, ul. Śniadeckich 8, skr. poczt. 21, 00-956 Warszawa 10

- Dla województwa dolnośląskiego i opolskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, pl. Grunwaldzki 2/4, 50-384 Wrocław.

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w internecie pod adresem: www.om.edu.pl



LV Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia pierwszego

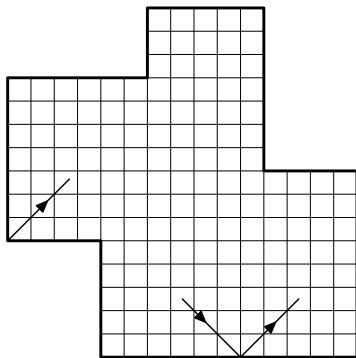
(11 września 2003 r. – 10 grudnia 2003 r.)

Zadanie 1. Dany jest wielokąt o bokach długości wymiernej, w którym wszystkie kąty wewnętrzne są równe 90° lub 270° . Z ustalonego wierzchołka wypuszczamy promień świetlny do wnętrza wielokąta w kierunku dwusiecznej kąta wewnętrznego przy tym wierzchołku. Promień odbija się zgodnie z zasadą: kąt padania jest równy kątowi odbicia. Udowodnić, że promień trafi w jeden z wierzchołków wielokąta.

Rozwiązanie

Ponieważ każdy kąt wewnątrz rozpatrywanego wielokąta $\mathcal{W}$ wynosi 90° lub 270° , więc wszystkie boki tego wielokąta (po odpowiednim jego obrocie) są ustawione poziomo lub pionowo (rys. 1). Niech $p_1/q_1, p_2/q_2, \dots, p_n/q_n$ będą długościami kolejnych boków wielokąta $\mathcal{W}$, przy czym każda z liczb $p_1, p_2, \dots, p_n, q_1, q_2, \dots, q_n$ jest całkowita dodatnia.

Rozpatrzmy kwadratową kratę, w której każdy mały kwadracik ma bok długości $1/(q_1 q_2 \dots q_n)$. Wówczas wielokąt $\mathcal{W}$ można tak umieścić na tej kratce, by każdy jego bok był zawarty w pewnej prostej wyznaczającej kratę (rys. 1). Promień świetlny wypuszczony z wierzchołka wielokąta $\mathcal{W}$ zgodnie z podanymi zasadami porusza się wtedy wzdłuż przekątnych kwadratów kraty i odbija od boków wielokąta $\mathcal{W}$ w punktach kratowych.



rys. 1

Przypuśćmy, że promień świetlny nie trafił w żaden wierzchołek wielokąta $\mathcal{W}$. Odbijał się on zatem od boków wielokąta dowolnie wiele razy. Stąd wynika, że promień trafił co najmniej trzykrotnie w pewien punkt P leżący na obwodzie wielokąta $\mathcal{W}$. Zatem co najmniej dwukrotnie promień trafił w punkt P poruszając się z tego samego kierunku. To oznacza, że trajektoria

promienia jest okresowa, co nie jest możliwe, gdyż promień rozpoczął swój bieg z wierzchołka wielokąta $\mathcal{W}$.

Zadanie 2. Rozstrzygnąć, czy istnieje liczba pierwsza p oraz liczby całkowite nieujemne x, y, z spełniające równanie

$$(12x+5)(12y+7)=p^z.$$

Rozwiązanie

Przypuśćmy, że istnieją liczby p, x, y, z spełniające dane w zadaniu równanie. Skoro p jest liczbą pierwszą, to dzielnikami liczby p^z są tylko potęgi liczby p . Zatem istnieją takie liczby całkowite nieujemne a, b , że $12x+5=p^a$ oraz $12y+7=p^b$. Stąd widać, że liczba p jest nieparzysta i niepodzielna przez 3, jest więc postaci $6k+1$ lub $6k-1$, gdzie k jest liczbą całkowitą dodatnią. Wówczas

$$p^2 = 36k^2 \pm 12k + 1 = 12(3k^2 \pm k) + 1,$$

skąd wynika, że

$$(*) \quad p^n \equiv \begin{cases} 1 \pmod{12}, & \text{gdy } n \text{ jest liczbą parzystą,} \\ p \pmod{12}, & \text{gdy } n \text{ jest liczbą nieparzystą.} \end{cases}$$

Z drugiej strony, $p^a \equiv 5 \pmod{12}$ oraz $p^b \equiv 7 \pmod{12}$. Ale na mocy zależności (*) obie te kongruencje nie mogą zachodzić jednocześnie. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że nie istnieją liczby spełniające podane warunki.

Zadanie 3. Niech $\mathbb{Q}$ oznacza zbiór wszystkich liczb wymiernych. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ spełniające warunek

$$(1) \quad f(x^2 + y) = xf(x) + f(y)$$

dla każdej pary liczb wymiernych x, y .

Rozwiązanie

Sposób I.

Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią. Wykażemy indukcyjnie, że dla dowolnej liczby wymiernej y oraz dowolnej liczby całkowitej dodatniej k zachodzi równość

$$(2) \quad f\left(\frac{k}{n^2} + y\right) = \frac{k}{n} \cdot f\left(\frac{1}{n}\right) + f(y).$$

Dla $k=1$ równość (2) uzyskujemy bezpośrednio z zależności (1) podstawiając $x=1/n$. Załóżmy teraz, że równość (2) jest spełniona dla liczby k oraz wszystkich liczb wymiernych y . Wówczas

$$\begin{aligned} f\left(\frac{k+1}{n^2} + y\right) &= f\left(\frac{k}{n^2} + \left(\frac{1}{n^2} + y\right)\right) = \frac{k}{n} \cdot f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{1}{n^2} + y\right) = \\ &= \frac{k}{n} \cdot f\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} \cdot f\left(\frac{1}{n}\right) + f(y) = \frac{k+1}{n} \cdot f\left(\frac{1}{n}\right) + f(y), \end{aligned}$$

co kończy dowód indukcyjny zależności (2).

Kładąc w równaniu (1) $x=y=-1$ dostajemy $f(0)=-f(-1)+f(-1)=0$. Podstawiając następnie $y=0$ i $k=n^2$ do zależności (2) otrzymujemy

$$(3) \quad f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{f(1)}{n} \quad \text{dla } n=1, 2, 3, \dots$$

Przyjmując z kolei w równości (2) $k=m \cdot n$, gdzie m jest pewną liczbą całkowitą dodatnią, oraz wykorzystując zależność (3) mamy

$$(4) \quad f\left(\frac{m}{n} + y\right) = m \cdot f\left(\frac{1}{n}\right) + f(y) = f(1) \cdot \frac{m}{n} + f(y)$$

dla wszystkich liczb całkowitych dodatnich m i n oraz wymiernych y . Podstawiając wreszcie $y=0$ oraz $y=-m/n$ w równości (4) uzyskujemy odpowiednio

$$(5) \quad f\left(\frac{m}{n}\right) = f(1) \cdot \frac{m}{n} \quad \text{oraz} \quad f\left(-\frac{m}{n}\right) = -f(1) \cdot \frac{m}{n}$$

dla wszystkich liczb całkowitych dodatnich m, n . Niech $a=f(1)$. Ze związków (5) oraz z równości $f(0)=0$ wynika, że $f(x)=ax$ dla wszystkich liczb wymiernych x .

Bezpośrednio sprawdzamy, że każda funkcja określona wzorem $f(x)=ax$, gdzie a jest liczbą wymierną, spełnia warunki zadania.

Sposób II.

Niech $a=f(1)$. Wówczas dla dowolnej liczby wymiernej x mamy

$$\begin{aligned} f(-x) &= f(x^2 - x) - xf(x) = f((x-1)^2 + (x-1)) - xf(x) = \\ &= (x-1)f(x-1) + f(x-1) - xf(x) = \\ &= x(f(x-1) - f(1^2 + (x-1))) = -xf(1) = -ax, \end{aligned}$$

skąd $f(x)=ax$ dla dowolnej liczby wymiernej x .

Bezpośrednio sprawdzamy, że każda funkcja określona wzorem $f(x)=ax$, gdzie a jest liczbą wymierną, spełnia warunki zadania.

Zadanie 4. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC . Rozważamy wszystkie takie trójkąty równoboczne XYZ , że punkty A, B, C są odpowiednio punktami wewnętrznymi odcinków YZ, ZX, XY . Dowieść, że środki ciężkości wszystkich rozważanych trójkątów XYZ leżą na jednym okręgu.

Rozwiązanie

Jeśli trójkąt ABC jest równoboczny, to środki ciężkości wszystkich rozważanych trójkątów XYZ pokrywają się ze środkiem ciężkości trójkąta ABC . Punkt ten leży oczywiście na każdym okręgu, który przezeń przechodzi.

Załóżmy więc, że trójkąt ABC nie jest równoboczny. Wtedy bez straty ogólności możemy przyjąć, że $\sphericalangle ACB > 60^\circ$. Niech P i Q będą takimi punktami leżącymi wewnątrz kąta wypukłego ACB , że

$$\sphericalangle PBC = \sphericalangle PCB = \sphericalangle QAC = \sphericalangle QCA = 30^\circ.$$

Niech ponadto R będzie takim punktem leżącym po tej samej stronie prostej PQ , co punkt C , że trójkąt PQR jest równoboczny (rys. 2, 3). Wykażemy, że środki ciężkości wszystkich rozpatrywanych trójkątów XYZ leżą na okręgu opisanym na trójkącie PQR , co zakończy rozwiązanie zadania.

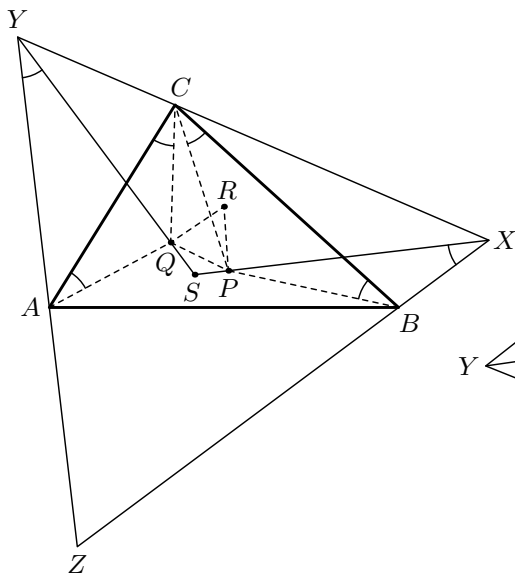
Z równości $\sphericalangle BPC + \sphericalangle BXC = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ$ wnioskujemy, że na czworokącie $BXCP$ można opisać okrąg. Stąd $\sphericalangle PXB = \sphericalangle PCB = 30^\circ$ co oznacza, że prosta XP przechodzi przez środek ciężkości S trójkąta XYZ . Analogicznie dowodzimy, że prosta YQ przechodzi przez S . Pozostaje zatem wykazać, że punkt S leży na okręgu opisanym na trójkącie PQR .

Ponieważ $\sphericalangle ACB > 60^\circ$, więc możliwe są następujące dwa przypadki:

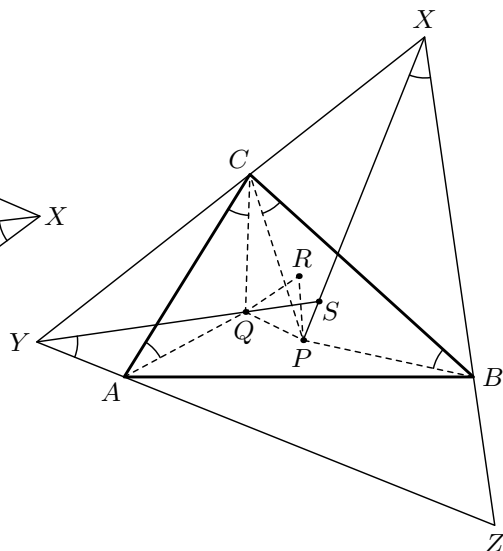
(i) Punkt S nie należy do odcinków XP i YQ (rys. 2). Wówczas

$$\sphericalangle PSQ = \sphericalangle XSY = 120^\circ = 180^\circ - \sphericalangle PRQ,$$

co oznacza, że punkt S leży na okręgu opisanym na trójkącie PQR .



rys. 2



rys. 3

(ii) Punkt S leży na jednym z odcinków XP lub YQ . Bez straty ogólności przyjmijmy, że punkt S należy do odcinka XP (rys. 3). Wówczas

$$\sphericalangle PSQ = \sphericalangle PSY = 60^\circ = \sphericalangle PRQ,$$

co dowodzi, że punkty P, Q, R, S leżą na jednym okręgu.

Zadanie 5. Dla liczb całkowitych dodatnich m, n niech $N(m, n)$ oznacza liczbę m -wyrazowych ciągów niemalejących o wyrazach ze zbioru

$$\{1, 2, 3, \dots, n\}.$$

Dowieść, że $N(m, n+1) = N(n, m+1)$.

Rozwiązanie

Dowolnemu ciągowi niemalejącemu $a_1, a_2, \dots, a_m$ o wyrazach ze zbioru $\{1, 2, 3, \dots, n+1\}$ przypisujemy ciąg $b_1, b_2, \dots, b_n$ określony następująco: dla $\ell = 1, 2, \dots, n$,

(1) $b_\ell = 1 + (\text{liczba wyrazów ciągu } a_1, a_2, \dots, a_m \text{ mniejszych lub równych } \ell)$.

W ten sposób określony ciąg $b_1, b_2, \dots, b_n$ ma wyrazy ze zbioru $\{1, 2, \dots, m+1\}$ i jest niemalejący. Ponadto, każdy ciąg niemalejący $b_1, b_2, \dots, b_n$ o wyrazach należących do zbioru $\{1, 2, \dots, m+1\}$ można otrzymać za pomocą wzoru (1) z dokładnie jednego ciągu niemalejącego $a_1, a_2, \dots, a_m$ o wyrazach należących do zbioru $\{1, 2, \dots, n+1\}$. Istotnie: znając wartości $b_1, b_2, \dots, b_n$, znamy również liczbę $c_1 = b_1 - 1$ oraz liczby

$$c_\ell = b_\ell - b_{\ell-1} \quad \text{dla } \ell = 2, 3, \dots, n.$$

Liczba c_ℓ dla $\ell = 1, 2, \dots, n$ jest, na mocy wzoru (1), liczbą wszystkich wyrazów ciągu $a_1, a_2, \dots, a_m$ równych ℓ . Z kolei wyrazów ciągu $a_1, a_2, \dots, a_m$ równych $n+1$ jest

$$c_{n+1} = m - (c_1 + c_2 + \dots + c_n) = m + 1 - b_n.$$

Ponieważ ciąg $b_1, b_2, \dots, b_n$ jest niemalejący, $b_1 \geq 1$ oraz $b_n \leq m+1$, więc wszystkie liczby $c_1, c_2, \dots, c_{n+1}$ są nieujemne. Liczby te wyznaczają zatem jednoznacznie ciąg niemalejący $a_1, a_2, \dots, a_m$ o wyrazach ze zbioru $\{1, 2, \dots, n+1\}$.

Wykazaliśmy tym samym, że wzór (1) opisuje wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość pomiędzy m -wyrazowymi ciągami niemalejącymi o wyrazach ze zbioru $\{1, 2, \dots, n+1\}$, a n -wyrazowymi ciągami niemalejącymi o wyrazach ze zbioru $\{1, 2, \dots, m+1\}$. Stąd $N(m, n+1) = N(n, m+1)$.

Zadanie 6. Niech c będzie taką liczbą rzeczywistą, że wielomian

$$P(x) = x^5 - 5x^3 + 4x - c$$

ma pięć różnych pierwiastków rzeczywistych x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 . Wyznaczyć, w zależności od c , sumę wartości bezwzględnych współczynników wielomianu

$$Q(x) = (x - x_1^2)(x - x_2^2)(x - x_3^2)(x - x_4^2)(x - x_5^2).$$

Rozwiązanie

Z równości

$$\begin{aligned} Q(x^2) &= (x^2 - x_1^2)(x^2 - x_2^2)(x^2 - x_3^2)(x^2 - x_4^2)(x^2 - x_5^2) = \\ &= (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)(x - x_5) \\ &\quad \cdot (x + x_1)(x + x_2)(x + x_3)(x + x_4)(x + x_5) = \\ &= P(x) \cdot (-P(-x)) = (x^5 - 5x^3 + 4x - c) \cdot (x^5 - 5x^3 + 4x + c) = \\ &= (x^5 - 5x^3 + 4x)^2 - c^2 = x^{10} - 10x^8 + 33x^6 - 40x^4 + 16x^2 - c^2 \end{aligned}$$

wnioskujemy, że

$$Q(x) = x^5 - 10x^4 + 33x^3 - 40x^2 + 16x - c^2 \quad \text{dla wszystkich } x \geq 0.$$

Wyrażenia po obu stronach tej równości są wielomianami. Stąd wynika, że uzyskany wzór jest prawdziwy dla dowolnej liczby rzeczywistej x . Zatem suma wartości bezwzględnych współczynników wielomianu $Q(x)$ wynosi:

$$1 + 10 + 33 + 40 + 16 + c^2 = 100 + c^2.$$

Zadanie 7. Znaleźć wszystkie takie rozwiązania równania

$$a^2 + b^2 = c^2$$

w liczbach całkowitych dodatnich, że liczby a i c są pierwsze, a liczba b jest iloczynem co najwyżej czterech liczb pierwszych.

Rozwiązanie

Odp.: Istnieją trzy rozwiązania (a, b, c) : $(3, 4, 5)$, $(5, 12, 13)$, $(11, 60, 61)$.

Niech a , b , c będą liczbami spełniającymi warunki zadania. Wówczas

$$a^2 = c^2 - b^2 = (c - b)(c + b),$$

skąd wobec założenia, że liczba a jest pierwsza, otrzymujemy $c = b + 1$. Zatem $a^2 = 2b + 1$, skąd wynika, że liczba a jest nieparzysta.

Niech $a = 2n + 1$. Wtedy

$$b = \frac{1}{2}(a^2 - 1) = 2n(n + 1) \quad \text{oraz} \quad c = 2n^2 + 2n + 1.$$

Jeśli liczba n daje przy dzieleniu przez 3 resztę 1, to liczba a jest podzielna przez 3. Zatem jest ona złożona, poza przypadkiem $n = 1$, który daje rozwiązanie $(a, b, c) = (3, 4, 5)$. Jeśli z kolei liczba n daje przy dzieleniu przez 5 resztę 2, to liczba a jest podzielna przez 5. Zatem jest ona złożona, poza przypadkiem, gdy $n = 2$. Przypadek ten daje drugie rozwiązanie $(a, b, c) = (5, 12, 13)$.

Jeśli natomiast liczba n daje przy dzieleniu przez 5 resztę 1 lub 3, to liczba c jest podzielna przez 5. Zatem jest ona złożona poza przypadkiem $n = 1$, który już rozpatrzyliśmy.

Pozostał jeszcze do rozpatrzenia przypadek, gdy liczba n daje przy dzieleniu przez 3 resztę 0 lub 2, a przy dzieleniu przez 5 resztę 0 lub 4. Wówczas liczba b jest podzielna przez $2 \cdot 6 \cdot 5 = 60$. Z drugiej strony, liczba b jest iloczynem co najwyżej czterech liczb pierwszych, skąd wynika, że $b = 60$. Przypadek ten prowadzi do trzeciego rozwiązania: $(a, b, c) = (11, 60, 61)$.

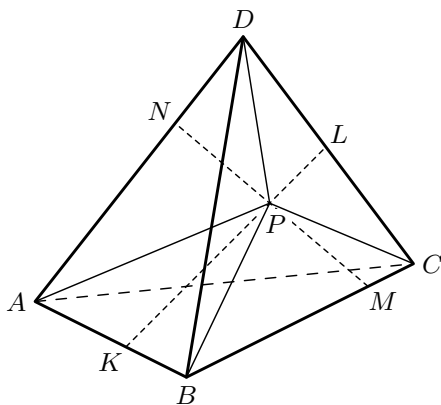
Zadanie 8. Punkt P leży wewnątrz czworościanu $ABCD$. Dowieść, że

$$\sphericalangle APB + \sphericalangle BPC + \sphericalangle CPD + \sphericalangle DPA > 360^\circ.$$

Rozwiązanie

Oznaczmy przez K punkt przecięcia płaszczyzny CDP z krawędzią AB oraz przez L punkt przecięcia płaszczyzny ABP z krawędzią CD (rys. 4).

Analogicznie, niech M będzie punktem przecięcia płaszczyzny ADP i krawędzi BC oraz niech N oznacza punkt wspólny płaszczyzny BCP i krawędzi AD .



rys. 4

Punkty K , P i L należą do części wspólnej płaszczyzn ABP i CDP , leżą więc na jednej prostej. Analogicznie, punkty M , P i N leżą na jednej prostej. Stąd wynika, że punkty K , L , M , N i P leżą w jednej płaszczyźnie. Zatem

$$\begin{aligned} \sphericalangle APB + \sphericalangle BPC + \sphericalangle CPD + \sphericalangle DPA &= \\ &= \sphericalangle KPB + \sphericalangle BPM + \sphericalangle MPC + \sphericalangle CPL \\ &\quad + \sphericalangle LPD + \sphericalangle DPN + \sphericalangle NPA + \sphericalangle APK > \\ &> \sphericalangle KPM + \sphericalangle MPL + \sphericalangle LPN + \sphericalangle NPK = 360^\circ, \end{aligned}$$

co kończy rozwiązanie zadania.

Zadanie 9. Dane są wielomiany $W_1(x), W_2(x), W_3(x), \dots, W_n(x)$ stopnia co najmniej 1, o współczynnikach całkowitych. Wykazać, że dla pewnej liczby całkowitej a wszystkie liczby

$$W_1(a), W_2(a), W_3(a), \dots, W_n(a)$$

są złożone.

Rozwiązanie

Dane wielomiany mają stopień co najmniej 1, więc istnieje taka liczba naturalna x_0 , że dla $i = 1, 2, \dots, n$ liczby $c_i = |W_i(x_0)|$ są większe od 1 oraz $|W_i(x)| > c_i$ dla wszystkich $x > x_0$.

Niech $a = x_0 + c_1 c_2 \dots c_n$. Wykażemy, że liczby

$$W_1(a), W_2(a), W_3(a), \dots, W_n(a)$$

są złożone, co zakończy rozwiązanie zadania.

Z zależności $a \equiv x_0 \pmod{c_i}$ wynika, że $W_i(a) \equiv W_i(x_0) \pmod{c_i}$. Ponieważ $c_i = |W_i(x_0)|$, więc liczba $W_i(a)$ jest podzielna przez c_i . Ponadto $a > x_0$,

co daje $|W_i(a)| > c_i$. Zatem dla $i = 1, 2, \dots, n$ liczba $W_i(a)$ jest złożona.

Zadanie 10. Dany jest wielokąt wypukły o parzystej liczbie boków. Każdy bok wielokąta ma długość 2 lub 3, przy czym liczba boków każdej z tych długości jest parzysta. Dowieść, że istnieją dwa wierzchołki wielokąta, które dzielą jego obwód na dwie części jednakowej długości.

Rozwiązanie

Niech liczba boków wielokąta będzie równa $2n$. Oznaczmy wierzchołki wielokąta kolejno $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{2n}$. Dla $i = 1, 2, \dots, 2n$ niech

$$f(i) = A_i A_{i+1} + A_{i+1} A_{i+2} + A_{i+2} A_{i+3} + \dots + A_{i+n-1} A_{i+n} + \\ - A_{i+n} A_{i+n+1} - A_{i+n+1} A_{i+n+2} - A_{i+n+2} A_{i+n+3} - \dots - A_{i+2n-1} A_i,$$

gdzie $A_{k+2n} = A_k$ dla $k = 1, 2, \dots, 2n-1$. Innymi słowy, $f(i)$ jest różnicą długości części, na które dzieli obwód wielokąta punkty A_i oraz A_{i+n} .

Wówczas dla $i = 1, 2, \dots, 2n$ liczba $f(i)$ jest całkowita parzysta oraz

$$|f(i+1) - f(i)| = |2 \cdot A_{i+n} A_{i+n+1} - 2 \cdot A_i A_{i+1}| = \\ = 2 \cdot |A_{i+n} A_{i+n+1} - A_i A_{i+1}| \leq 2.$$

Ponadto $f(i) = -f(i+n)$. Stąd wynika, że ciąg liczb

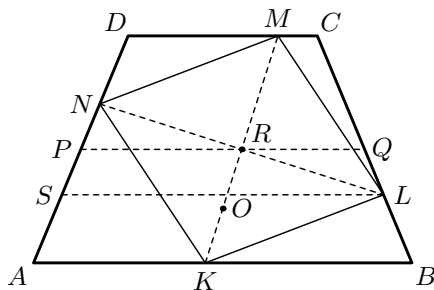
$$f(1), f(2), \dots, f(n+1) = -f(1)$$

składa się z liczb parzystych, a jego kolejne wyrazy różnią się o nie więcej niż 2. Zatem istnieje takie i , że $f(i) = 0$, a to właśnie należało udowodnić.

Zadanie 11. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trapezie równoramiennym $ABCD$ o podstawach AB i CD . Punkty K, L, M, N leżą odpowiednio na bokach AB, BC, CD, DA , przy czym czworokąt $KLMN$ jest rombem. Udowodnić, że punkt O leży na prostej KM .

Rozwiązanie

Oznaczmy przez P, Q, R odpowiednio środki odcinków AD, BC, KM (rys. 5). Wówczas punkty P, Q i R leżą na jednej prostej – równoległej do podstaw trapezu $ABCD$. Przez punkt L poprowadźmy prostą równoległą do podstaw trapezu $ABCD$, przecinającą odcinek AD w punkcie S .



rys. 5

Ponieważ punkt R jest środkiem przekątnej KM rombu $KLMN$, więc jest on również środkiem drugiej przekątnej tego rombu, czyli odcinka NL . Zatem z równoległości prostych PR i SL wnioskujemy, że $NP = PS$. Punkt P jest środkiem odcinka AD , więc $OP \perp AD$. Ta własność, równość $NP = PS$ oraz fakt, iż punkt O leży na symetralnej odcinków AB , CD i LS dają

$$ON = OS = OL.$$

Stąd wynika, że punkt O leży symetralnej odcinka NL , czyli na prostej KM .

Zadanie 12. Dana jest liczba całkowita $n \geq 5$. Wyznaczyć liczbę rozwiązań w liczbach rzeczywistych $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ układu równań

$$x_{i-2}^3 + x_{i-1}^3 + x_i^3 = x_i^4 + x_{i+1}^3 + x_{i+2}^2 \quad \text{dla } i = 1, 2, 3, \dots, n,$$

gdzie $x_{-1} = x_{n-1}$, $x_0 = x_n$, $x_1 = x_{n+1}$, $x_2 = x_{n+2}$.

Rozwiązanie

Dodając równania stronami otrzymujemy

$$3 \sum_{i=1}^n x_i^3 = \sum_{i=1}^n x_i^4 + \sum_{i=1}^n x_i^3 + \sum_{i=1}^n x_i^2, \quad \text{czyli} \quad \sum_{i=1}^n x_i^2 (x_i - 1)^2 = 0.$$

Zatem liczby $x_1, x_2, \dots, x_n$ przyjmują wartości 0 lub 1. Zadanie sprowadza się zatem do wyznaczenia liczby rozwiązań układu równań

[illegible]

w liczbach należących do zbioru $\{0, 1\}$.

Zauważmy, że układ równań (1) jest spełniony, gdy $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1$ lub gdy $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$.

Założmy, że liczba n nie jest podzielna przez 3. Wówczas uzyskujemy

$$x_1 + x_2 = x_4 + x_5 = x_7 + x_8 = \dots = x_n + x_1,$$

skąd $x_n = x_2$. Analogicznie dowodzimy, że $x_i = x_{i+2}$ dla $i = 1, 2, \dots, n-1$. Zatem jeżeli n jest liczbą nieparzystą i niepodzielną przez 3, to jedynymi rozwiązaniami $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ układu (1) są $(0, 0, 0, \dots, 0)$ i $(1, 1, 1, \dots, 1)$. Natomiast dla liczb parzystych n , niepodzielnych przez 3, otrzymujemy dwa dodatkowe rozwiązania $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, a mianowicie

$$(0, 1, 0, 1, \dots, 0, 1) \quad \text{oraz} \quad (1, 0, 1, 0, \dots, 1, 0).$$

Założmy teraz, że liczba n jest podzielna przez 3. Wówczas układ równań (1) ma co najmniej 8 rozwiązań: niewiadome mogą się powtarzać okresowo z okresem 3.

Zbadajmy istnienie rozwiązań $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$, które nie są okresowe z okresem 3. Bez szkody dla ogólności przyjmijmy, że $x_1 \neq x_4$. Wówczas równość $x_1 + x_2 = x_4 + x_5$ jest możliwa tylko wtedy, gdy $x_1 + x_2 = 1$. Stąd $x_1 \neq x_2$ oraz $x_2 \neq x_5$.

Powtarzając rozumowanie stwierdzamy, że $x_2 \neq x_3$ oraz $x_3 \neq x_6$, skąd dla dowolnego i mamy $x_i \neq x_{i+1}$. Zatem niewiadome muszą być na przemian równe 0 i 1, co jest możliwe tylko dla n parzystego.

Podsumowując: liczba rozwiązań danego układu równań wynosi:

- 2** dla n względnie pierwszych z 6;
- 4** dla n parzystych niepodzielnych przez 3;
- 8** dla n nieparzystych podzielnych przez 3;
- 10** dla n podzielnych przez 6.

(*wp, jur*)

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w internecie pod adresem: www.om.edu.pl



LV Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia drugiego

20 lutego 2004 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Liczby dodatnie a, b, c, d spełniają układ równań

$$\begin{cases} a^3 + b^3 + c^3 = 3d^3 \\ b^4 + c^4 + d^4 = 3a^4 \\ c^5 + d^5 + a^5 = 3b^5. \end{cases}$$

Udowodnić, że $a = b = c = d$.

2. W sześciokącie wypukłym $ABCDEF$ wszystkie boki są równej długości oraz

$$\sphericalangle A + \sphericalangle C + \sphericalangle E = \sphericalangle B + \sphericalangle D + \sphericalangle F.$$

Dowieść, że przekątne AD , BE i CF przecinają się w jednym punkcie.

3. Wyznaczyć liczbę ciągów nieskończonych $a_1, a_2, a_3, \dots$, o wyrazach równych $+1$ i -1 , spełniających równanie

$$a_{mn} = a_m a_n \quad \text{dla } m, n = 1, 2, 3, \dots$$

oraz warunek: w każdej trójce kolejnych wyrazów (a_n, a_{n+1}, a_{n+2}) występuje zarówno $+1$, jak i -1 .

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Przed rozpoczęciem rozwiązywania należy przepisać tekst każdego zadania na oddzielnym arkuszu.
3. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
4. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
5. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
6. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów i telefonów.



LV Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia drugiego

21 lutego 2004 r. (drugi dzień zawodów)

4. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite dodatnie n , mające dokładnie $\sqrt{n}$ dzielników dodatnich.

5. Punkty D i E leżą odpowiednio na bokach BC i CA trójkąta ABC , przy czym $BD = AE$. Odcinki AD i BE przecinają się w punkcie P . Dwusieczna kąta ACB przecina odcinki AD i BE odpowiednio w punktach Q i R . Wykazać, że

$$\frac{PQ}{AD} = \frac{PR}{BE}.$$

6. Na przyjęciu spotkało się n osób ($n \geq 5$). Wiadomo, że wśród dowolnych trzech osób pewne dwie znają się. Dowieść, że spośród uczestników przyjęcia można wybrać nie mniej niż $n/2$ osób i posadzić przy okrągłym stole tak, aby każdy siedział między dwoma swoimi znajomymi.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Przed rozpoczęciem rozwiązywania należy przepisać tekst każdego zadania na oddzielnym arkuszu.
3. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
4. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
5. W przypadku stwierdzenia niesamodzielnosci pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
6. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów i telefonów.



LV Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia drugiego

20 lutego 2004 r. (pierwszy dzień zawodów)

Zadanie 1. Liczby dodatnie a, b, c, d spełniają układ równań

$$\begin{cases} a^3 + b^3 + c^3 = 3d^3 \\ b^4 + c^4 + d^4 = 3a^4 \\ c^5 + d^5 + a^5 = 3b^5 \end{cases}$$

Udowodnić, że $a = b = c = d$.

Rozwiązanie

Niech $\langle p, q \rangle$ będzie najmniejszym przedziałem zawierającym liczby a, b, c, d . Wówczas co najmniej jedna z liczb d, a, b pokrywa się z końcem (lewym lub prawym) przedziału $\langle p, q \rangle$.

Jeśli $d = p$, to na mocy pierwszej równości mamy $3d^3 = a^3 + b^3 + c^3 \geq 3d^3$. Stąd wynika, że każda z liczb a, b, c musi być równa d , czyli $a = b = c = d$. Jeśli natomiast $d = q$, to otrzymujemy $3d^3 = a^3 + b^3 + c^3 \leq 3d^3$, co podobnie jak wyżej daje $a = b = c = d$.

Analogicznie, korzystając z drugiego lub trzeciego równania dowodzimy, że $a = b = c = d$, gdy któraś z liczb a, b jest równa p lub q . To kończy rozwiązanie zadania.

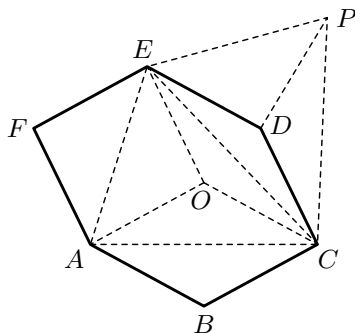
Zadanie 2. W sześciokącie wypukłym $ABCDEF$ wszystkie boki są równej długości oraz

$$\sphericalangle A + \sphericalangle C + \sphericalangle E = \sphericalangle B + \sphericalangle D + \sphericalangle F.$$

Dowieść, że przekątne AD, BE i CF przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązanie

Z danej w treści zadania równości kątów wynika, że $\sphericalangle B + \sphericalangle D + \sphericalangle F = 360^\circ$. Długości wszystkich boków danego sześciokąta są równe, więc z trójkątów ABC, CDE oraz EFA można złożyć trójkąt PCE przystający do trójkąta ACE (rys. 1). Punkt D jest wówczas środkiem okręgu opisanego na trójkącie PCE . Niech O będzie środkiem okręgu opisanego na trójkącie ACE . Trójkąty ACE i PCE są przystające, więc promienie okręgów opisanych na tych trójkątach są równe.



rys. 1

Stąd wynika, że czworokąty $AOEF$ i $COED$ są rombami, a więc odcinki AF, OE i CD są równe i równoległe. Zatem czworokąt $ACDF$ jest

równoległobokiem, co oznacza, że środki odcinków AD i CF pokrywają się. Analogicznie, środki odcinków AD i BE pokrywają się. Stąd wniosek, że proste AD , BE i CF mają punkt wspólny, będący środkiem każdej z przekątnych AD , BE i CF .

Zadanie 3. Wyznaczyć liczbę ciągów nieskończonych $a_1, a_2, a_3, \dots$, o wyrazach równych $+1$ i -1 , spełniających równanie

$$a_{mn} = a_m a_n \quad \text{dla } m, n = 1, 2, 3, \dots$$

oraz warunek: w każdej trójce kolejnych wyrazów (a_n, a_{n+1}, a_{n+2}) występuje zarówno $+1$, jak i -1 .

Rozwiązanie

Niech (a_n) będzie takim ciągiem. Rozpocniemy od wykazania, że

$$(1) \quad a_{3k+1} \neq a_{3k+2} \quad \text{dla } k = 1, 2, 3, \dots$$

Przypuśćmy, że $a_{3k+1} = a_{3k+2} = a$. Wówczas musi być $a_{3k} = a_{3k+3} = b$ oraz $b \neq a$. Mnożąc powyższe równości przez a_2 uzyskujemy $a_{6k+2} = a_{6k+4} = c$ oraz $a_{6k} = a_{6k+6} = d$, przy czym $c \neq d$. W trójce $(a_{6k+2}, a_{6k+3}, a_{6k+4})$ występuje $+1$ oraz -1 , skąd wynika, że $a_{6k+3} = d$. Zatem $a_{6k} = a_{6k+3} = a_{6k+6}$. Dzieląc równości te stronami przez a_3 otrzymujemy $a_{2k} = a_{2k+1} = a_{2k+2}$. Sprzeczność.

Następnie udowodnimy przez indukcję, że

$$(2) \quad a_{3k+1} = 1, \quad a_{3k+2} = -1 \quad \text{dla } k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Oczywiście $a_1 = a_1^2 = 1$; a z własności (1) wynika, że $a_{50} \neq a_{49} = a_7^2 = 1$, czyli $a_{50} = -1$; ale $a_{50} = a_2 a_5^2 = a_2$, więc $a_2 = -1$; równości (2) zachodzą dla $k = 0$.

Ustalmy $k \geq 1$ i przyjmijmy, że $a_{3i+1} = 1$, $a_{3i+2} = -1$ dla $i < k$. Zapiszmy liczbę k w postaci $2j$ lub $2j+1$. Jeśli $k = 2j$, to $3k+2 = 2(3j+1)$, i w konsekwencji $a_{3k+2} = a_2 a_{3j+1} = -1$; jeśli zaś $k = 2j+1$, to $3k+1 = 2(3j+2)$, więc $a_{3k+1} = a_2 a_{3j+2} = 1$. W obu przypadkach została wykazana jedna z równości (2); druga jest wtedy wnioskiem z zależności (1). To kończy indukcyjny dowód tezy (2).

Niech $a_3 = c$. Każda liczba naturalna n ma jednoznaczne przedstawienie w postaci $n = 3^r m$, gdzie $r \geq 0$, a m nie dzieli się przez 3. Z warunku mnożliwości wynika, że $a_n = a_3^r a_m = c^r a_m$, i w myśl związków (2):

$$(3) \quad a_n = \begin{cases} c^r & \text{dla } n = 3^r(3k+1), \\ -c^r & \text{dla } n = 3^r(3k+2). \end{cases}$$

Zatem ciąg (a_n) jest wyznaczony przez wartość $c = a_3$, która może być równa 1 lub -1 . Na odwrót, zarówno dla $c = 1$, jak i dla $c = -1$, wzór (3) określa ciąg (a_n) , spełniający zadane warunki. Są więc dwa takie ciągi.

(mek, wp, jur)

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w internecie pod adresem: www.om.edu.pl



LV Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia drugiego

21 lutego 2004 r. (drugi dzień zawodów)

Zadanie 4. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite dodatnie n , mające dokładnie $\sqrt{n}$ dzielników dodatnich.

Rozwiązanie

Liczba $n = 1$ spełnia warunki zadania. Załóżmy więc w dalszej części rozwiązania, że $n > 1$.

Z warunków zadania wynika, że $n = k^2$ dla pewnej liczby całkowitej dodatniej k . Liczba dzielników dodatnich liczby n , mniejszych od k , jest równa liczbie jej dzielników większych od k . Istotnie: każdemu dzielnikowi $d < k$ liczby n odpowiada dzielnik n/d liczby n , który jest większy od k . Dodatkowo sama liczba k jest dzielnikiem liczby n , skąd wynika, że n ma nieparzystą liczbę dzielników. Zatem k , a więc również n , jest liczbą nieparzystą.

Zadanie sprowadza się zatem do wyznaczenia takich liczb nieparzystych $n = k^2$ ($n > 1$), których liczba dzielników mniejszych od k jest równa $\frac{1}{2}(k-1)$.

Ponieważ k^2 jest liczbą nieparzystą, więc żadna liczba parzysta nie jest dzielnikiem liczby k^2 . Aby więc liczba dzielników mniejszych od k liczby k^2 była równa $\frac{1}{2}(k-1)$, każda liczba nieparzysta mniejsza od k musi być dzielnikiem liczby k^2 . W szczególności k^2 ma się dzielić przez $k-2$. Ponieważ $k^2 = (k-2)(k+2) + 4$, więc liczba $k-2$ jest nieparzystym dzielnikiem liczby 4. To oznacza, że $k-2 = 1$, czyli $k = 3$.

Bezpośrednio sprawdzamy, że liczba $n = 3^2 = 9$ spełnia warunki zadania. Zatem szukanymi liczbami są $n = 1$ i $n = 9$.

Zadanie 5. Punkty D i E leżą odpowiednio na bokach BC i CA trójkąta ABC , przy czym $BD = AE$. Odcinki AD i BE przecinają się w punkcie P . Dwusieczna kąta ACB przecina odcinki AD i BE odpowiednio w punktach Q i R . Wykazać, że

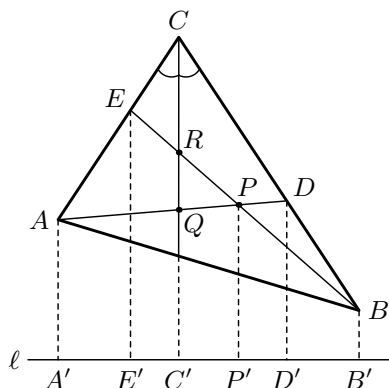
$$\frac{PQ}{AD} = \frac{PR}{BE}.$$

Rozwiązanie

Niech ℓ będzie dowolną prostą prostopadłą do dwusiecznej kąta ACB (rys. 2). Oznaczmy przez A' , B' , C' , D' , E' , P' odpowiednio rzuty prostokątne punktów A , B , C , D , E , P na prostą ℓ .

Proste AC i BC tworzą równe kąty z prostą ℓ , zatem na mocy równości $AE = BD$ mamy $A'E' = B'D'$. Wobec tego $A'D' = B'E'$. Stąd korzystając z twierdzenia Talesa uzyskujemy dowodzoną równość:

$$\frac{PQ}{AD} = \frac{C'P'}{A'D'} = \frac{C'P'}{B'E'} = \frac{PR}{BE}.$$



rys. 2

Zadanie 6. Na przyjęciu spotkało się n osób ($n \geq 5$). Wiadomo, że wśród dowolnych trzech osób pewne dwie znają się. Dowieść, że spośród uczestników przyjęcia można wybrać nie mniej niż $n/2$ osób i posadzić przy okrągłym stole tak, aby każdy siedział między dwoma swoimi znajomymi.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez X zbiór osób obecnych na przyjęciu. Niech k będzie największą liczbą naturalną o własności: Istnieje k osób $A_1, A_2, \dots, A_k$ takich, że dla $i = 1, 2, \dots, k-1$ osoby A_i oraz A_{i+1} znają się. Oznaczmy:

$$S = X \setminus \{A_1, A_2, \dots, A_k\}.$$

W dalszym ciągu rozwiązania rozpatrzmy trzy przypadki:

(i) $k \leq n/2$. Wówczas zbiór S liczy co najmniej $n/2$ osób. Osoba A_k nie zna żadnej osoby ze zbioru S , więc każde dwie osoby w tym zbiorze muszą się znać. Jeśli osoby te usiądą dowolnie przy okrągłym stole, to każda z nich będzie siedzieć obok dwóch swoich znajomych.

(ii) $n/2 < k \leq n-1$. Wówczas zbiór S jest niepusty i żadna osoba z tego zbioru nie zna ani A_1 , ani A_k . Stąd wynika, że osoby A_1 i A_k się znają. Zatem osoby $A_1, A_2, \dots, A_k$ można posadzić przy okrągłym stole zgodnie z warunkami opisanymi w treści zadania.

(iii) $k = n$. Niech $\ell = \lceil (n+1)/2 \rceil$. Wiemy, że wśród osób A_1, A_ℓ, A_n pewne dwie się znają. Stąd wynika, że osoby należące do co najmniej jednego spośród zbiorów

$$\{A_1, A_2, \dots, A_\ell\}, \quad \{A_\ell, A_{\ell+1}, \dots, A_n\}, \quad \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$$

mogą usiąść przy okrągłym stole zgodnie z warunkami zadania. Pozostaje zauważyć, że każdy z tych trzech zbiorów liczy co najmniej $n/2$ osób.

(mek, wp, jur)

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w internecie pod adresem: www.om.edu.pl



LV Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia trzeciego

15 kwietnia 2004 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Punkt D leży na boku AB trójkąta ABC . Okręgi styczne do prostych AC i BC odpowiednio w punktach A i B przechodzą przez punkt D i przecinają się po raz drugi w punkcie E . Niech F będzie punktem symetrycznym do punktu C względem symetralnej odcinka AB . Wykazać, że punkty D , E i F leżą na jednej prostej.

2. Niech W będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych, przyjmującym dla pewnych dwóch różnych liczb całkowitych wartości względnie pierwsze. Dowieść, że istnieje nieskończony zbiór liczb całkowitych, dla których wielomian W przyjmuje wartości parami względnie pierwsze.

3. W pewnym turnieju wzięło udział n zawodników ($n \geq 3$). Każdy grał z każdym dokładnie jeden raz, nie było remisów. Trójelementowy zbiór zawodników nazwiemy *trójką remisową*, jeśli można tak ponumerować tych trzech zawodników, że pierwszy wygrał z drugim, drugi z trzecim, a trzeci z pierwszym. Wyznaczyć największą liczbę trójek remisowych, jaka mogła się pojawić w turnieju.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Przed rozpoczęciem rozwiązywania należy przepisać tekst każdego zadania na oddzielnym arkuszu.
3. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
4. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
5. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
6. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów i telefonów.



LV Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia trzeciego

16 kwietnia 2004 r. (drugi dzień zawodów)

4. Udowodnić, że jeżeli a, b, c są liczbami rzeczywistymi, to

$$\sqrt{2(a^2+b^2)} + \sqrt{2(b^2+c^2)} + \sqrt{2(c^2+a^2)} \geq \sqrt{3(a+b)^2 + 3(b+c)^2 + 3(c+a)^2}.$$

5. Wyznaczyć największą liczbę prostych w przestrzeni, przechodzących przez ustalony punkt i takich, że każde dwie przecinają się pod jednakowym kątem.

6. Dana jest liczba całkowita $m > 1$. Nieskończony ciąg liczb całkowitych $x_0, x_1, x_2, \dots$ jest określony przez warunki

$$x_i = \begin{cases} 2^i & \text{dla } i < m, \\ x_{i-1} + x_{i-2} + \dots + x_{i-m} & \text{dla } i \geq m. \end{cases}$$

Wyznaczyć największą liczbę naturalną k , dla której istnieje k kolejnych wyrazów tego ciągu podzielnych przez m .

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Przed rozpoczęciem rozwiązywania należy przepisać tekst każdego zadania na oddzielnym arkuszu.
3. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
4. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu czekać na podejście dyżurującego.
5. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
6. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów i telefonów.



LV Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia trzeciego

15 kwietnia 2004 r. (pierwszy dzień zawodów)

Zadanie 1. Punkt D leży na boku AB trójkąta ABC . Okręgi styczne do prostych AC i BC odpowiednio w punktach A i B przechodzą przez punkt D i przecinają się po raz drugi w punkcie E . Niech F będzie punktem symetrycznym do punktu C względem symetralnej odcinka AB . Wykazać, że punkty D , E i F leżą na jednej prostej.

Rozwiązanie

Przypuśćmy, że punkt E leży wewnątrz trójkąta ABC . Wówczas

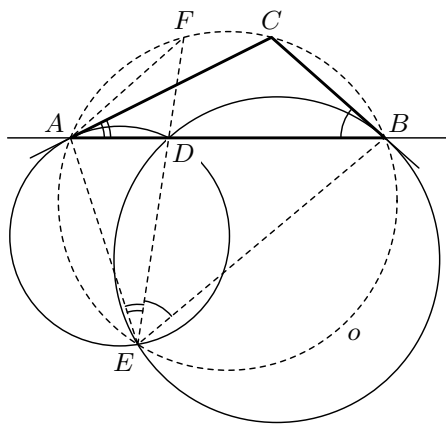
$$\sphericalangle AED = 180^\circ - \sphericalangle BAC \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle BED = 180^\circ - \sphericalangle ABC.$$

Dodając równości te stronami mamy $180^\circ > \sphericalangle AEB = 180^\circ + \sphericalangle ACB > 180^\circ$. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że punkty C i E leżą po przeciwnych stronach prostej AB (rys. 1).

Z równości $\sphericalangle AEB = \sphericalangle AED + \sphericalangle DEB = \sphericalangle BAC + \sphericalangle ABC = 180^\circ - \sphericalangle ACB}$ wynika zatem, że punkty A , E , B , C leżą, w tej właśnie kolejności, na jednym okręgu o . Stąd wniosek, że punkt F leży również na okręgu o , czyli

$$\sphericalangle FEB = \sphericalangle FAB = \sphericalangle CBD = \sphericalangle BED.$$

Równość ta oznacza, że punkty D , E i F leżą na jednej prostej.



rys. 1

Zadanie 2. Niech W będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych, przyjmującym dla pewnych dwóch różnych liczb całkowitych wartości względnie pierwsze. Dowieść, że istnieje nieskończony zbiór liczb całkowitych, dla których wielomian W przyjmuje wartości parami względnie pierwsze.

Rozwiązanie

Ciąg różnych liczb całkowitych $x_0, x_1, x_2, \dots$ taki, że wartości $W(x_i)$ są parami względnie pierwsze, zbudujemy indukcyjnie. Dwa początkowe wyrazy $x_0 = a$, $x_1 = b$ to liczby, których istnienie jest dane w założeniach.

Przyjmijmy, że zostały już określone różne liczby $x_0, x_1, \dots, x_n$, dla których wartości $y_i = W(x_i)$ są parami względnie pierwsze. Liczba y_0 jest względnie pierwsza z iloczynem $y_1 y_2 \dots y_n$; istnieją zatem takie liczby całkowite k, m , że $ky_0 + my_1 y_2 \dots y_n = 1$. Określamy kolejny wyraz ciągu:

$$x_{n+1} = b + (a - b)ky_0 + zy_0 y_1 \dots y_n,$$

gdzie z jest liczbą naturalną tak dużą, żeby liczba x_{n+1} była różna od liczb $x_0, x_1, \dots, x_n$. Oczywiście

$$x_{n+1} \equiv b \pmod{y_0};$$

a z przekształcenia $x_{n+1} = b + (a - b)(1 - my_1 y_2 \dots y_n) + zy_0 y_1 \dots y_n$ widać, że

$$x_{n+1} \equiv a \pmod{y_1 y_2 \dots y_n}.$$

Stosując do obu stron każdej z tych dwóch kongruencji wielomian W (co jest dozwolone, skoro kongruencje o wspólnym module można dodawać i mnożyć), dostajemy związki

$$W(x_{n+1}) \equiv W(b) \pmod{y_0}, \quad W(x_{n+1}) \equiv W(a) \pmod{y_1 y_2 \dots y_n}.$$

To znaczy, że dla pewnych liczb całkowitych s, t zachodzą równości

$$W(x_{n+1}) = W(b) + sy_0, \quad W(x_{n+1}) = W(a) + ty_1 y_2 \dots y_n.$$

A ponieważ wartość $W(b) = y_1$ jest względnie pierwsza z y_0 , zaś wartość $W(a) = y_0$ jest względnie pierwsza z iloczynem $y_1 y_2 \dots y_n$, zatem z uzyskanych równości wynika, że wartość $W(x_{n+1}) = y_{n+1}$ jest względnie pierwsza zarówno z y_0 , jak i z $y_1 y_2 \dots y_n$.

Kontynuując to postępowanie otrzymujemy nieskończony ciąg (x_i) dający wartości $y_i = W(x_i)$ parami względnie pierwsze.

Zadanie 3. W pewnym turnieju wzięło udział n zawodników ($n \geq 3$). Każdy grał z każdym dokładnie jeden raz, nie było remisów. Trójelementowy zbiór zawodników nazwiemy *trójką remisową*, jeśli można tak ponumerować tych trzech zawodników, że pierwszy wygrał z drugim, drugi z trzecim, a trzeci z pierwszym. Wyznaczyć największą liczbę trójków remisowych, jaka mogła się pojawić w turnieju.

Rozwiązanie

Zamiast wyznaczać największą liczbę trójków remisowych, wyznaczymy najmniejszą liczbę trójków, które nie są remisowe.

Ponumerujemy zawodników liczbami od 1 do n i przyjmijmy, że zawodnik o numerze i wygrał x_i razy. Wówczas liczba wszystkich rozgrywek wynosi

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = \binom{n}{2}.$$

Każda nieremisowa trójka jest wyznaczona jednoznacznie przez zawodnika, który wygrał z dwoma innymi zawodnikami tej trójki. Zatem zawodnik o numerze i wyznacza $\binom{x_i}{2}$ nieremisowych trójek, a liczba wszystkich nieremisowych trójek w turnieju wynosi

$$\binom{x_1}{2} + \binom{x_2}{2} + \dots + \binom{x_n}{2} = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n x_i \right) = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - \binom{n}{2} \right).$$

W dalszej części rozwiązania rozpatrzmy dwa przypadki:

(a) Liczba n jest nieparzysta, tzn. $n = 2k + 1$. Wówczas na mocy nierówności pomiędzy średnią kwadratową a średnią arytmetyczną uzyskujemy

$$(1) \quad \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - \binom{n}{2} \right) \geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 - \binom{n}{2} \right) = \frac{n(n-1)(n-3)}{8}.$$

Zatem liczba trójek remisowych nie przekracza

$$\binom{n}{3} - \frac{n(n-1)(n-3)}{8} = \frac{n(n^2-1)}{24}.$$

Powyższa liczba trójek remisowych wystąpi jedynie wtedy, gdy każdy zawodnik wygra dokładnie k razy (w nierówności (1) zachodzi wtedy równość). Taki układ wyników rozgrywek możemy uzyskać w następujący sposób. Siedzimy zawodników przy okrągłym stole i zakładamy, że każdy z nich wygrał tylko z tymi zawodnikami, którzy siedzą po jego prawej stronie w odległości nie większej niż k miejsc. Przy takim układzie rozgrywek każdy zawodnik wygrał dokładnie k razy.

(b) Liczba n jest parzysta, tzn. $n = 2k$. Wówczas $(x_i - k)(x_i - k + 1) \geq 0$ dla $i = 1, 2, \dots, n$, skąd otrzymujemy $x_i^2 \geq (2k-1)x_i - k(k-1)$. Zatem

$$(2) \quad \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - \binom{n}{2} \right) \geq \frac{1}{2} \left((2k-1) \sum_{i=1}^n x_i - nk(k-1) - \binom{n}{2} \right) = \frac{n(n-2)^2}{8}.$$

Stąd wynika, że liczba trójek remisowych nie przekracza

$$\binom{n}{3} - \frac{n(n-2)^2}{8} = \frac{n(n^2-4)}{24}.$$

Powyższa liczba trójek remisowych wystąpi jedynie wtedy, gdy każdy zawodnik wygra k lub $k-1$ razy (w nierówności (2) zachodzi wtedy równość). Taki układ wyników rozgrywek możemy uzyskać w następujący sposób. Tak jak wyżej, sadzamy zawodników przy okrągłym stole i przyjmujemy, że każdy z nich wygrał z zawodnikami, którzy siedzą po jego prawej stronie w odległości nie większej niż $k-1$ miejsc. Wynik rozgrywki pomiędzy zawodnikami siedzącymi naprzeciwko siebie ustalamy dowolnie. W ten sposób każdy zawodnik wygrał k lub $k-1$ razy.

Reasumując: największa liczba trójek remisowych, jaka może się pojawić w turnieju wynosi $\frac{1}{24}n(n^2-1)$, jeśli n jest liczbą nieparzystą oraz $\frac{1}{24}n(n^2-4)$, jeśli n jest liczbą parzystą.



LV Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia trzeciego

16 kwietnia 2004 r. (drugi dzień zawodów)

Zadanie 4. Udowodnić, że jeżeli a, b, c są liczbami rzeczywistymi, to

$$\begin{aligned} \sqrt{2(a^2+b^2)} + \sqrt{2(b^2+c^2)} + \sqrt{2(c^2+a^2)} &\geq \\ &\geq \sqrt{3(a+b)^2 + 3(b+c)^2 + 3(c+a)^2}. \end{aligned}$$

Rozwiązanie

Podnosząc zadaną nierówność stronami do kwadratu, dostajemy do udowodnienia nierówność równoważną, której lewa strona jest równa

$$4(a^2+b^2+c^2) + 4\sqrt{(a^2+b^2)(b^2+c^2)} + 4\sqrt{(b^2+c^2)(c^2+a^2)} + 4\sqrt{(c^2+a^2)(a^2+b^2)},$$

natomiast prawa wynosi $6(a^2+b^2+c^2) + 6(ab+bc+ca)$. Po redukcji wyrazów podobnych i podzieleniu stronami przez 2 pozostaje do wykazania, że

$$\begin{aligned} 2\sqrt{(a^2+b^2)(b^2+c^2)} + 2\sqrt{(b^2+c^2)(c^2+a^2)} + 2\sqrt{(c^2+a^2)(a^2+b^2)} &\geq \\ &\geq a^2 + b^2 + c^2 + 3(ab+bc+ca). \end{aligned}$$

Na mocy nierówności $\sqrt{2x^2+2y^2} \geq |x+y|$, prawdziwej dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y (sprawdzenie przez podniesienie do kwadratu), dostajemy

$$2\sqrt{(a^2+b^2)(b^2+c^2)} \geq |(a+b)(b+c)| \geq b^2 + (ab+bc+ca).$$

Analogicznie uzyskujemy

$$2\sqrt{(b^2+c^2)(c^2+a^2)} \geq c^2 + (ab+bc+ca), \quad 2\sqrt{(c^2+a^2)(a^2+b^2)} \geq a^2 + (ab+bc+ca).$$

Sumując stronami trzy ostatnie nierówności otrzymujemy tezę.

Zadanie 5. Wyznaczyć największą liczbę prostych w przestrzeni, przechodzących przez ustalony punkt i takich, że każde dwie przecinają się pod jednakowym kątem.

Rozwiązanie

Niech $\ell_1, \dots, \ell_n$ będą prostymi, o jakich mowa, przechodzącymi przez wspólny punkt O . Para przecinających się prostych wyznacza na zawierającej je płaszczyźnie cztery kąty: dwa kąty wierzchołkowe o mierze $\alpha \leq 90^\circ$ i pozostałe dwa kąty o mierze $180^\circ - \alpha$. Zgodnie z założeniem, wartość α jest dla każdej pary ℓ_i, ℓ_j taka sama.

Weźmy pod uwagę sferę S o środku O i dowolnym promieniu, i oznaczmy przez A_i, B_i punkty przecięcia prostej ℓ_i z tą sferą. Każdy z odcinków A_iA_j, A_iB_j, B_iB_j (dla $i \neq j$) jest cięciwą sfery S , wyznaczoną przez kąt środkowy

o mierze α lub $180^\circ - \alpha$. Zatem te odcinki mają co najwyżej dwie różne długości a i b .

Ustalmy oznaczenia tak, by $\sphericalangle A_i O A_n = \alpha$ dla $i = 1, \dots, n-1$. Wówczas punkty $A_1, \dots, A_{n-1}$ leżą na jednym okręgu (położonym w płaszczyźnie prostopadłej do prostej ℓ_n). Niech $A_1 C$ będzie średnicą tego okręgu. Każdy z punktów $A_2, \dots, A_{n-1}$ leży w odległości a lub b od punktu A_1 ; wobec tego na każdym z dwóch półokręgów o końcach A_1 i C leżą co najwyżej dwa punkty ze zbioru $\{A_2, \dots, A_{n-1}\}$. Stąd wniosek, że jest to zbiór co najwyżej czteroelementowy; a to znaczy, że $n \leq 6$.

Z drugiej strony, jeśli $n = 6$, to możemy umieścić punkty $A_1, A_2, \dots, A_5$ w wierzchołkach pięciokąta foremnego, zaś płaszczyznę tego pięciokąta umieścić w takiej odległości od punktu A_6 , aby te sześć punktów, wraz z antypodycznymi do nich punktami $B_1, \dots, B_6$, były wierzchołkami dwudziestościanu foremnego. Odcinki $A_i B_i$ (średnice sfery S) łączą przeciwległe wierzchołki tego dwudziestościanu i każde dwa z nich tworzą jednakowy kąt. Zatem $n = 6$ jest największą możliwą liczbą prostych ℓ_i .

Zadanie 6. Dana jest liczba całkowita $m > 1$. Nieskończony ciąg liczb całkowitych $x_0, x_1, x_2, \dots$ jest określony przez warunki

$$x_i = \begin{cases} 2^i & \text{dla } i < m, \\ x_{i-1} + x_{i-2} + \dots + x_{i-m} & \text{dla } i \geq m. \end{cases}$$

Wyznaczyć największą liczbę naturalną k , dla której istnieje k kolejnych wyrazów tego ciągu podzielnych przez m .

Rozwiązanie

Wzór rekurencyjny

$$(1) \quad x_i - x_{i-1} - x_{i-2} - \dots - x_{i-m} = 0 \quad \text{dla } i \geq m$$

działa zarówno „do przodu”, jak i „do tyłu”; to znaczy, że każdy odcinek m kolejnych wyrazów ciągu (x_i) wyznacza zarówno wszystkie wyrazy późniejsze, jak i wszystkie wyrazy wcześniejsze. Ta sama uwaga odnosi się też do ciągu $r_0, r_1, r_2, \dots$, gdzie r_i jest resztą z dzielenia x_i przez m ; wzór (1) implikuje wzór

$$(2) \quad r_i - r_{i-1} - r_{i-2} - \dots - r_{i-m} \equiv 0 \pmod{m} \quad \text{dla } i \geq m.$$

W ciągu (r_i) każdy odcinek długości m jest układem złożonym z m liczb ze zbioru $\{0, 1, \dots, m-1\}$. Ponieważ jest tylko skończenie wiele takich układów, muszą się one powtarzać: istnieją numery s, t ($s < t$) takie, że

$$(r_t, r_{t+1}, r_{t+2}, \dots, r_{t+m-1}) = (r_s, r_{s+1}, r_{s+2}, \dots, r_{s+m-1}).$$

Każdy z tych dwóch odcinków ciągu (r_i) jednoznacznie wyznacza wyraz bezpośrednio go poprzedzający; na mocy wzoru (2) te wyrazy też są równe: $r_{t-1} = r_{s-1}$. Zatem

$$(r_{t-1}, r_t, r_{t+1}, \dots, r_{t+m-2}) = (r_{s-1}, r_s, r_{s+2}, \dots, r_{s+m-2}).$$

Cofając się w ten sposób dojdziemy do odcinka identycznego z odcinkiem początkowym:

$$(r_d, r_{d+1}, r_{d+2}, \dots, r_{d+m-1}) = (r_0, r_1, r_2, \dots, r_{m-1}),$$

gdzie $d = t - s$. Tak więc

$$r_d = 1, r_{d+1} = 2, r_{d+2} = 4, \dots, r_{d+m-1} = (2^{m-1} \bmod m).$$

Cofając się dalej, zgodnie ze wzorem (2), stwierdzamy kolejno, że

$$r_{d-1} = 1, r_{d-2} = 0, r_{d-3} = 0, \dots, r_{d-m} = 0,$$

i mamy $m - 1$ kolejnych wyrazów $x_{d-m}, \dots, x_{d-2}$ podzielnych przez m .

Oczywiście nie istnieje m kolejnych wyrazów x_i podzielnych przez m , bo wówczas, w myśl wzoru (1), cały ciąg (x_i) składałby się z liczb podzielnych przez m , wbrew temu, że $x_0 = 1$. Zatem szukana maksymalna wartość k wynosi $m - 1$.

(mek, wp)

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w internecie pod adresem: www.om.edu.pl



LVI Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego

I seria (11 września 2004 r. – 11 października 2004 r.)

1. Rozwiązać w liczbach rzeczywistych x, y, z układ równań

$$\begin{cases} x^2 = yz + 1 \\ y^2 = zx + 2 \\ z^2 = xy + 4 \end{cases}$$

2. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne $n > 1$, dla których wartość sumy $2^2 + 3^2 + \dots + n^2$ jest potęgą liczby pierwszej o wykładniku naturalnym.

3. W trójkącie ostrokątnym ABC punkt D jest rzutem prostokątnym punktu C na prostą AB . Punkt E jest rzutem prostokątnym punktu D na prostą BC . Punkt F leży na odcinku DE , przy czym

$$\frac{EF}{FD} = \frac{AD}{DB}.$$

Wykazać, że proste CF i AE są prostopadłe.

4. Dana jest dodatnia liczba całkowita n oraz dodatnie liczby rzeczywiste a, b . Wyznaczyć największą możliwą wartość sumy

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n,$$

gdy $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$ są liczbami z przedziału $\langle 0; 1 \rangle$, spełniającymi warunki

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq a, \quad y_1 + y_2 + \dots + y_n \leq b.$$

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

11 października 2004 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.



LVI Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego

II seria (12 października 2004 r. – 10 listopada 2004 r.)

5. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg, a okręgi wpisane w trójkąty ABC i BCD mają równe promienie. Rozstrzygnąć, czy z tych założeń wynika, że także okręgi wpisane w trójkąty CDA i DAB mają równe promienie.

6. Rozstrzygnąć, czy istnieje nieskończony ciąg liczb naturalnych $a_1, a_2, a_3, \dots$ spełniający równanie

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{a_{n+2}} \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots$$

7. Trzy sfery, parami styczne zewnętrznie, są styczne do pewnej płaszczyzny w punktach A, B, C . Znając długości odcinków $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, obliczyć promień tych sfer.

8. Na okręgu jest umieszczonych n lampek; każda może być włączona albo wyłączona. Wykonujemy serię ruchów; w każdym ruchu wybieramy k kolejnych lampek i zmieniamy ich stan: wyłączone włączamy, a włączone wyłączamy (liczba k nie zmienia się w trakcie tego postępowania). Na początku wszystkie lampki są wyłączone.

Dla ustalonej liczby naturalnej n wyznaczyć wszystkie liczby naturalne $k \leq n$, dla których jest możliwe uzyskanie stanu z dokładnie jedną lampką włączoną.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

10 listopada 2004 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.



LVI Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego

III seria (11 listopada 2004 r. – 10 grudnia 2004 r.)

9. Wyznaczyć wszystkie liczby rzeczywiste a , dla których ciąg (x_n) określony wzorami

$$x_0 = \sqrt{3}, \quad x_{n+1} = \frac{1 + ax_n}{a - x_n} \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, \dots$$

spełnia warunek $x_{n+8} = x_n$ dla $n = 0, 1, 2, \dots$.

10. Spośród wszystkich podzbiorów ustalonego zbioru n -elementowego X losujemy kolejno ze zwracaniem trzy zbiory A, B, C . Za każdym razem wylosowanie każdego spośród 2^n podzbiorów zbioru X jest jednakowo prawdopodobne. Wyznaczyć najbardziej prawdopodobną liczbę elementów zbioru $A \cap B \cap C$.

11. Okrąg o środku I jest wpisany w czworokąt wypukły $ABCD$, przy czym punkt I nie leży na prostej AC . Przekątne AC i BD przecinają się w punkcie E . Prosta przechodząca przez punkt E oraz prostopadła do prostej BD przecina proste AI, CI odpowiednio w punktach P, Q . Wykazać, że $PE = EQ$.

12. Dane są funkcje

$$f(x) = 2^x \quad \text{oraz} \quad g(x) = f(f(f(f(f(f(f(x)))))))$$

(siedmiokrotna iteracja funkcji f). Rozstrzygnąć, czy liczba $g(3) - g(0)$ jest podzielna przez liczbę $g(2) - g(0)$.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

10 grudnia 2004 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.

Adresy Komitetów Okręgowych Olimpiady Matematycznej

- Dla województwa pomorskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Gdańskiego, ul. Wita Stwosza 57, 80-952 Gdańsk

- Dla województwa śląskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Śląskiego, ul. Bankowa 14, 40-005 Katowice.

- Dla województwa małopolskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego, ul. Reymonta 4, 30-059 Kraków.

- Dla województwa lubelskiego i podkarpackiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Oddział Lubelski Polskiego Towarzystwa Matematycznego, pl. Marii Skłodowskiej-Curie 1, pok. 223, 20-031 Lublin.

- Dla województwa łódzkiego i świętokrzyskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki Uniwersytetu Łódzkiego, ul. Banacha 22, 90-238 Łódź.

- Dla województwa wielkopolskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Adama Mickiewicza, ul. Umultowska 87, 61-614 Poznań

- Dla województwa lubuskiego i zachodniopomorskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — ul. Wielkopolska 15, 70-251 Szczecin.

- Dla województwa kujawsko-pomorskiego i warmińsko-mazurskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, ul. Chopina 12/18, 87-100 Toruń.

- Dla województwa mazowieckiego i podlaskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyczny PAN, ul. Śniadeckich 8, skr. poczt. 21, 00-956 Warszawa 10

- Dla województwa dolnośląskiego i opolskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, pl. Grunwaldzki 2/4, 50-384 Wrocław.

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w internecie pod adresem: www.om.edu.pl



LVI Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia pierwszego

(11 września 2004 r. – 10 grudnia 2004 r.)

Zadanie 1. Rozwiązać w liczbach rzeczywistych x, y, z układ równań

$$\begin{cases} x^2 = yz + 1 \\ y^2 = zx + 2 \\ z^2 = xy + 4 \end{cases}$$

Rozwiązanie

Pierwsze równanie danego układu równań mnożymy przez y , drugie przez z , a trzecie przez x . W ten sposób uzyskane równania dodajemy stronami otrzymując

$$(1) \quad 0 = y + 2z + 4x.$$

Następnie mnożymy pierwsze równanie danego w treści zadania układu równań przez z , drugie przez x , a trzecie przez y . Po dodaniu stronami dostajemy

$$(2) \quad 0 = z + 2x + 4y.$$

Równanie (2) mnożymy przez -2 i dodajemy stronami do równania (1). W efekcie otrzymujemy $0 = -7y$, czyli $y = 0$.

Wstawiając $y = 0$ do pierwszego równania uzyskujemy $x^2 = 1$, skąd $x = 1$ lub $x = -1$. Wykorzystując po raz kolejny zależność (2) mamy $z = -2x$, czyli odpowiednio $z = -2$ lub $z = 2$.

Wykazaliśmy zatem, że jeśli trójka (x, y, z) spełnia podany układ równań, to jest nią $(1, 0, -2)$ lub $(-1, 0, 2)$. Z drugiej strony, bezpośrednie sprawdzenie pokazuje, że obie uzyskane trójki (x, y, z) są rozwiązaniami danego układu równań.

Odp.: $(x, y, z) = (1, 0, -2)$ lub $(x, y, z) = (-1, 0, 2)$.

Zadanie 2. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne $n > 1$, dla których wartość sumy $2^2 + 3^2 + \dots + n^2$ jest potęgą liczby pierwszej o wykładniku naturalnym.

Rozwiązanie

Ze wzoru $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$, prawdziwego dla dowolnej liczby naturalnej n , otrzymujemy

$$2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}(n(n+1)(2n+1) - 6) = \frac{1}{6}(n-1)(2n^2 + 5n + 6).$$

Zadanie sprowadza się zatem do wyznaczenia wszystkich liczb naturalnych $n > 1$, liczb pierwszych p oraz liczb całkowitych dodatnich k , dla których spełniona jest równość

$$(1) \quad (n-1)(2n^2 + 5n + 6) = 6p^k.$$

Ponieważ czynnik $2n^2 + 5n + 6$ jest większy od 6, więc z równości (1) wynika, że jest on podzielny przez p . Wykażemy, że z kolei czynnik $n-1$ nie jest podzielny przez p .

Przypuścimy, że $p \mid n-1$. Ponieważ także liczba

$$(2) \quad M = 2n^2 + 5n + 6 = 2(n-1)^2 + 9(n-1) + 13$$

jest podzielna przez p , więc p jest dzielnikiem pierwszym liczby 13. Zatem $p = 13$. Stąd $n-1 \geq 13$, co pociąga nierówność $M \geq 36 \cdot 13$. Z równości (1) wnioskujemy, że M jest dzielnikiem liczby $6 \cdot 13^k$, a skoro $M > 6 \cdot 13$, to musi zachodzić podzielność $13^2 \mid M$. Z zależności (2) uzyskujemy zatem, że liczba $9(n-1) + 13$ jest podzielna przez 13^2 , a więc

$$(3) \quad \text{liczba } 9 \cdot \frac{1}{13}(n-1) + 1 \text{ dzieli się przez } 13.$$

Liczba $\frac{1}{13}(n-1)$ jest — na mocy równości (1) — dzielnikiem liczby $6 \cdot 13^{k-1}$ i jednocześnie nie jest — na mocy podzielności (3) — podzielna przez 13. Stąd wynika, że liczba $\frac{1}{13}(n-1)$ jest równa 1, 2, 3 lub 6. Jednak w żadnym z tych czterech przypadków nie jest spełniona podzielność (3). Otrzymaliśmy sprzeczność, która dowodzi, że czynnik $n-1$ nie jest podzielny przez p .

Z równości (1) wnioskujemy zatem, że czynnik $n-1$ musi być jedną z liczb: 1, 2, 3 lub 6. Stąd liczba n jest równa 2, 3, 4 lub 7. Bezpośrednie sprawdzenie pokazuje, że istotnie każda z tych liczb spełnia warunki zadania:

$$2^2 = 2^2, \quad 2^2 + 3^2 = 13^1, \quad 2^2 + 3^2 + 4^2 = 29^1, \quad 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 = 139^1.$$

Odp.: Liczba n jest równa 2, 3, 4 lub 7.

Zadanie 3. W trójkącie ostrokątnym ABC punkt D jest rzutem prostokątnym punktu C na prostą AB . Punkt E jest rzutem prostokątnym punktu D na prostą BC . Punkt F leży na odcinku DE , przy czym

$$\frac{EF}{FD} = \frac{AD}{DB}.$$

Wykazać, że proste CF i AE są prostopadłe.

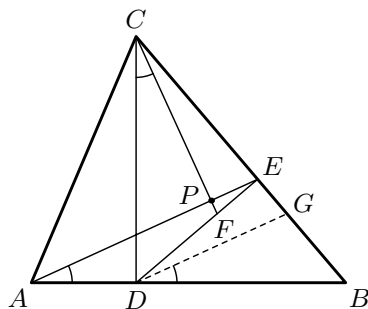
Rozwiązanie

Przez punkt D poprowadźmy prostą równoległą do prostej AE , która przecina bok BC w punkcie G (rys. 1). Na mocy twierdzenia Talesa uzyskujemy proporcje

$$\frac{EF}{FD} = \frac{AD}{DB} = \frac{EG}{GB},$$

skąd wynika, że proste FG i DB są równoległe. Stąd oraz z podobieństwa trójkątów prostokątnych CDE i DBE otrzymujemy równości

$$\frac{FD}{GB} = \frac{ED}{EB} = \frac{CD}{DB}.$$



rys. 1

Powyższa zależność wraz z równością $\sphericalangle CDF = \sphericalangle DBG$ dowodzi, że trójkąty CDF i DBG są podobne. Zatem $\sphericalangle DAE = \sphericalangle BDG = \sphericalangle DCF$. Jeśli przez P oznaczymy punkt przecięcia prostych CF i AE , to z ostatniej zależności wynika, że punkty A, D, C, P leżą na jednym okręgu. Ostatecznie mamy $\sphericalangle APC = \sphericalangle ADC = 90^\circ$.

Zadanie 4. Dana jest dodatnia liczba całkowita n oraz dodatnie liczby rzeczywiste a, b . Wyznaczyć największą możliwą wartość sumy

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n,$$

gdy $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$ są liczbami z przedziału $\langle 0; 1 \rangle$, spełniającymi warunki

$$(1) \quad x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq a, \quad y_1 + y_2 + \dots + y_n \leq b.$$

Rozwiązanie

Dla dowolnych liczb $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$ spełniających warunki zadania zachodzą nierówności

$$\sum_{i=1}^n x_iy_i \leq n, \quad \sum_{i=1}^n x_iy_i \leq \sum_{i=1}^n x_i \leq a, \quad \sum_{i=1}^n x_iy_i \leq \sum_{i=1}^n y_i \leq b.$$

Zatem

$$(2) \quad x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n \leq \min(a, b, n).$$

Wykażemy najpierw, że jeśli $a, b \geq n$ lub $[a] \neq [b]$ (symbol $[x]$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od x), to liczba $\min(a, b, n)$ jest największą wartością rozpatrywanej sumy.

Jeżeli bowiem $a, b \geq n$, to przyjmujemy $x_i = y_i = 1$ dla $i = 1, 2, \dots, n$. Wówczas nierówności (1) są spełnione, a rozpatrywana suma przyjmuje wartość $n = \min(a, b, n)$, która — na mocy nierówności (2) — jest jej wartością największą.

W przypadku gdy $A = [a] \neq [b] = B$, przyjmijmy bez straty ogólności, że $A < B$. Aby nie rozpatrywać ponownie przypadku $a, b \geq n$, możemy również założyć, że $A < n$. Przyjmijmy

$$\begin{aligned} x_1 = x_2 = \dots = x_A = 1, \quad x_{A+1} = a - A, \quad x_i = 0 \quad \text{dla } i > A + 1; \\ y_1 = y_2 = \dots = y_{A+1} = 1, \quad y_i = 0 \quad \text{dla } i > A + 1. \end{aligned}$$

Tak wybrane liczby x_i, y_i należą do przedziału $\langle 0; 1 \rangle$, nierówności (1) są dla nich spełnione, a rozpatrywane wyrażenie przyjmuje wartość $a = \min(a, b, n)$, która — na mocy uzyskanej nierówności (2) — jest wartością największą rozpatrywanej sumy.

Pozostał do rozpatrzenia przypadek $A = B < n$. Wykażemy, że wówczas największą wartością rozpatrywanej sumy jest liczba $A + (a - A)(b - A)$, którą

można uzyskać przyjmując

$$\begin{aligned} x_1 = x_2 = \dots = x_A = 1, \quad x_{A+1} = a - A, \quad x_i = 0 \quad \text{dla } i > A + 1; \\ y_1 = y_2 = \dots = y_A = 1, \quad y_{A+1} = b - A, \quad y_i = 0 \quad \text{dla } i > A + 1. \end{aligned}$$

Pozostało zatem wykazać, że

$$(3) \quad x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n \leq A + (a - A)(b - A).$$

Jeśli $x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq A$, to

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n \leq A \leq A + (a - A)(b - A).$$

Analogicznie dowodzimy nierówności (3) jeśli $y_1 + y_2 + \dots + y_n \leq A$. Przyjmijmy więc w dalszej części rozumowania, że

$$A < x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq a \quad \text{oraz} \quad A < y_1 + y_2 + \dots + y_n \leq b.$$

Przypuśćmy, że pewne dwie liczby x_k, x_l należą do przedziału $(0; 1)$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $y_k \leq y_l$. Zdefiniujemy $\delta = \min(x_k, 1 - x_l)$ oraz zmodyfikujemy ciąg $x_1, x_2, \dots, x_n$ przyjmując

$$x'_k = x_k - \delta, \quad x'_l = x_l + \delta, \quad x'_i = x_i \quad \text{dla } i \neq k, l.$$

Wówczas $x'_k = 0$ lub $x'_l = 1$, liczby $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$ należą do przedziału $\langle 0; 1 \rangle$, $x'_1 + x'_2 + \dots + x'_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ oraz

$$\sum_{i=1}^n x'_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i y_i = (x_k - \delta) y_k + (x_l + \delta) y_l - x_k y_k - x_l y_l = \delta (y_l - y_k) \geq 0.$$

Wykazaliśmy zatem, że zmodyfikowany ciąg $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$ zawiera *mniej* wyrazów różnych od 0 lub 1 niż wyjściowy ciąg $x_1, x_2, \dots, x_n$, a przy tym wartość rozpatrywanej sumy nie zmalała. Jeśli uzyskany ciąg $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$ zawiera co najmniej dwa wyrazy różne od 0 lub 1, to modyfikujemy go ponownie zgodnie z opisaną wyżej procedurą. Po co najwyżej $n-1$ krokach uzyskujemy ciąg $a_1, a_2, \dots, a_n$, który zawiera nie więcej niż jeden wyraz różny od 0 lub 1, a przy tym zachodzi nierówność

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n \leq a_1 y_1 + a_2 y_2 + \dots + a_n y_n.$$

Następnie, ustalając liczby $a_1, a_2, \dots, a_n$, przeprowadzamy analogiczną modyfikację ciągu $y_1, y_2, \dots, y_n$. W efekcie otrzymujemy ciąg $b_1, b_2, \dots, b_n$, który zawiera nie więcej niż jeden wyraz różny od 0 lub 1, a ponadto

$$a_1 y_1 + a_2 y_2 + \dots + a_n y_n \leq a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n.$$

W każdym kroku suma modyfikowanych liczb nie ulega zmianie, więc

$$(4) \quad A < a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq a \quad \text{oraz} \quad A < b_1 + b_2 + \dots + b_n \leq b.$$

Niech $a'_1, a'_2, \dots, a'_n$ będzie taką permutacją ciągu $a_1, a_2, \dots, a_n$, że ciągi $a'_1, a'_2, \dots, a'_n$ oraz $b_1, b_2, \dots, b_n$ są *jednakowo uporządkowane*, tzn.

$$(a'_i - a'_j)(b_i - b_j) \geq 0 \quad \text{dla wszystkich } 1 \leq i, j \leq n.$$

Wówczas zachodzi nierówność

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \leq a'_1 b_1 + a'_2 b_2 + \dots + a'_n b_n.$$

(zob. *Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej*, Zwardoń 2003, Dodatek C, str. 38*). Bez straty ogólności przyjmijmy zatem, że $a'_1 \geq a'_2 \geq \dots \geq a'_n$ oraz $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$. Z nierówności (4) wynika więc, że

$$a'_i = b_i = 1 \quad \text{dla } i < A+1 \quad \text{oraz} \quad a'_i = b_i = 0 \quad \text{dla } i > A+1,$$

a ponadto $a_p \leq a - A$ oraz $b_p \leq b - A$ dla $p = A+1$. Ostatecznie otrzymujemy

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \sum_{i=1}^n a'_i b_i = A + a_p b_p \leq A + (a - A)(b - A),$$

co kończy dowód nierówności (3).

Reasumując: Największa wartość rozpatrywanego wyrażenia wynosi

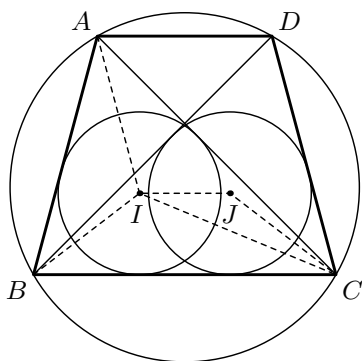
$$\begin{cases} \min(a, b, n), & \text{jeśli } a, b \geq n \text{ lub } [a] \neq [b]; \\ [a] + (a - [a])(b - [a]), & \text{jeśli } [a] = [b] < n. \end{cases}$$

Zadanie 5. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg, a okręgi wpisane w trójkąty ABC i BCD mają równe promienie. Rozstrzygnąć, czy z tych założeń wynika, że także okręgi wpisane w trójkąty CDA i DAB mają równe promienie.

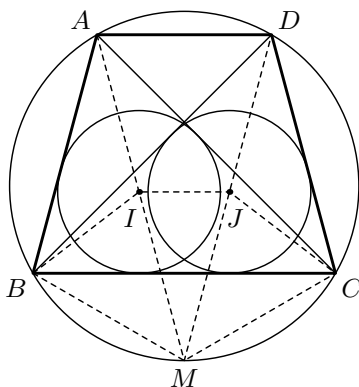
Rozwiązanie

Odpowiedź postawiona na pytanie w treści zadania jest twierdząca.

Niech I, J będą środkami okręgów wpisanych odpowiednio w trójkąty ABC i BCD (rys. 2).



rys. 2



rys. 3

Z równości promieni okręgów wpisanych w trójkąty ABC i BCD wynika, że proste BC i IJ są równoległe. Ponadto

$$\sphericalangle BIC = 180^\circ - \left(\frac{1}{2}\sphericalangle CBA + \frac{1}{2}\sphericalangle BCA\right) = 90^\circ + \frac{1}{2}\sphericalangle BAC.$$

* Broszura ta jest dostępna na stronie internetowej Olimpiady: www.om.edu.pl

Analogicznie dowodzimy, że $\sphericalangle BJC = 90^\circ + \frac{1}{2}\sphericalangle BDC$. Z uzyskanych zależności oraz z równości $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BDC$ wnioskujemy, że na czworokącie $BCJI$ można opisać okrąg. Zatem $BCJI$ jest trapezem równoramiennym. Stąd używamy równości

$$\sphericalangle ABC = 2\sphericalangle IBC = 2\sphericalangle JCB = \sphericalangle DCB.$$

W efekcie otrzymujemy, że czworokąt $ABCD$ jest trapezem równoramiennym o podstawach BC i AD . Stąd wynika, że trójkąty CDA i DAB są przystające, a więc okręgi wpisane w te trójkąty mają równe promienie.

Uwaga

W rozwiązaniu wykazaliśmy, że punkty B, I, J, C leżą na jednym okręgu. Nietrudno wyznaczyć środek tego okręgu: jest nim punkt M przecięcia prostych AI i DJ , czyli środek łuku BC okręgu opisanego na czworokącie $ABCD$ (rys. 3). Dowód tego faktu można znaleźć w broszurze *LI Olimpiada Matematyczna, Sprawozdanie Komitetu Głównego*, Warszawa 2001, Dodatek E, str. 113.

Zadanie 6. Rozstrzygnąć, czy istnieje nieskończony ciąg liczb naturalnych $a_1, a_2, a_3, \dots$ spełniający równanie

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{a_{n+2}} \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots$$

Rozwiązanie

Wykażemy, że ciąg (a_n) spełniający warunki zadania nie istnieje.

Przypuścmy, że ciąg (a_n) spełnia warunki zadania. Rozumowanie przeprowadzimy na dwa sposoby.

Sposób I

Z podanej równości wynika, że ciąg (a_n) jest rosnący, a ponadto

$$(1) \quad a_{n+2}(a_{n+1} - a_n) = a_n a_{n+1}.$$

Liczba $a_{n+1} - a_n$ jest podzielna przez największy wspólny dzielnik liczb a_n i a_{n+1} . Z równości (1) wynika zatem, że liczba a_{n+2} jest dzielnikiem liczby

$$\frac{a_n a_{n+1}}{\text{NWD}(a_n, a_{n+1})} = \text{NWW}(a_n, a_{n+1}).$$

Niech $k = \text{NWW}(a_1, a_2)$. Wykażemy indukcyjnie, że dla każdego $n \geq 1$, liczba a_n jest dzielnikiem liczby k .

Dla $n = 1$ i $n = 2$ jest to prawda na mocy określenia liczby k .

Jeśli z kolei $a_n | k$ oraz $a_{n+1} | k$ dla pewnej liczby $n \geq 1$, to liczba k jest wspólną wielokrotnością liczb a_n, a_{n+1} , jest więc podzielna przez najmniejszą wspólną wielokrotność liczb a_n, a_{n+1} . Stąd, skoro $a_{n+2} | \text{NWW}(a_n, a_{n+1})$, uzyskujemy podzielność $a_{n+2} | k$. Dowód indukcyjny jest zakończony.

Wcześniej stwierdziliśmy, że ciąg (a_n) jest rosnący. Liczba dodatnia k ma zatem nieskończenie wiele dzielników. Uzyskana sprzeczność dowodzi, że nie istnieje ciąg (a_n) o żądanych własnościach.

Sposób II

Niech $x_n = 1/a_n$. Wówczas ciąg (x_n) jest zbieżny do 0, a daną w treści zadania równość możemy przepisać w postaci $x_{n+2} = -x_{n+1} + x_n$. Stosując metodę rozwiązywania rekurencji liniowych (zob. *L Olimpiada Matematyczna, Sprawozdanie Komitetu Głównego*, Warszawa 2000, Dodatek A, str. 103) uzyskujemy równość

$$x_n = a \cdot \left(\frac{-\sqrt{5}-1}{2} \right)^n + b \cdot \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^n,$$

gdzie a, b są ustalonymi liczbami rzeczywistymi zależnymi tylko od dwóch początkowych wartości x_1 i x_2 .

Wartość bezwzględna liczby $\frac{1}{2}(-\sqrt{5}-1)$ jest większa od 1, a wartość bezwzględna liczby $\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$ jest mniejsza od 1. Zatem ciąg (x_n) jest zbieżny do 0 wtedy i tylko wtedy, gdy $a=0$. Stąd uzyskujemy

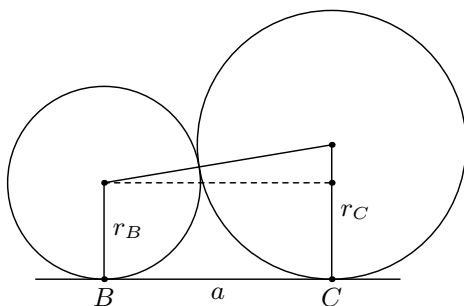
$$x_n = b \cdot \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^n, \quad \text{a więc} \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{x_2}{x_1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Otrzymaliśmy sprzeczność, gdyż liczba a_1/a_2 jest wymierna, a $\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$ — niewymierna.

Zadanie 7. Trzy sfery, parami styczne zewnętrznie, są styczne do pewnej płaszczyzny w punktach A, B, C . Znając długości odcinków $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, obliczyć promienie tych sfer.

Rozwiązanie

Z warunków zadania wynika, że rozpatrywane sfery leżą po jednej stronie płaszczyzny, do której są styczne.



rys. 4

Oznaczmy przez r_A, r_B i r_C promienie rozważanych sfer, styczne do danej płaszczyzny odpowiednio w punktach A, B i C . Wówczas na mocy

twierdzenia Pitagorasa mamy (rys. 4)

$$(1) \quad a^2 = (r_B + r_C)^2 - (r_B - r_C)^2 = 4r_B r_C.$$

Analogicznie uzyskujemy $b^2 = 4r_C r_A$ oraz $c^2 = 4r_A r_B$. Mnożąc stronami dwie ostatnie równości oraz wykorzystując równość (1) otrzymujemy

$$b^2 c^2 = (4r_B r_C) \cdot (4r_A^2) = 4a^2 r_A^2,$$

skąd obliczamy $r_A = bc/(2a)$. Analogicznie dostajemy równości

$$r_B = \frac{ca}{2b} \quad \text{oraz} \quad r_C = \frac{ab}{2c}.$$

Zadanie 8. Na okręgu jest umieszczonych n lampek; każda może być włączona albo wyłączona. Wykonujemy serię ruchów; w każdym ruchu wybieramy k kolejnych lampek i zmieniamy ich stan: wyłączone włączamy, a włączone wyłączamy (liczba k nie zmienia się w trakcie tego postępowania). Na początku wszystkie lampki są wyłączone.

Dla ustalonej liczby naturalnej n wyznaczyć wszystkie liczby naturalne $k \leq n$, dla których jest możliwe uzyskanie stanu z dokładnie jedną lampką włączoną.

Rozwiązanie

Założmy najpierw, że k jest liczbą parzystą. Udowodnimy indukcyjnie, że po każdej zmianie stanu k kolejnych lampek pali się parzysta liczba lampek.

Niech x_n oznacza liczbę zapalonych lampek po wykonaniu n -tego ruchu. Wówczas $x_1 = k$. Założmy, że x_{n-1} jest liczbą parzystą. Jeżeli wykonując n -ty ruch włączamy a lampek, a wyłączamy b , to $a + b = k$, więc

$$x_n = x_{n-1} + a - b = x_{n-1} + k - 2b.$$

Skoro x_{n-1} i k są liczbami parzystymi, to również x_n jest liczbą parzystą. Dowód indukcyjny jest zakończony.

Zatem jeśli k jest liczbą parzystą, to nie jest możliwe uzyskanie stanu z dokładnie jedną włączoną lampką.

Przyjmijmy następnie, że liczby n i k mają wspólny dzielnik $d > 1$ i pomalujmy lampki cyklicznie używając d kolorów. (Ścisłej mówiąc, postępujemy następująco: numerujemy lampki kolejno liczbami od 1 do n poruszając się po okręgu w ustalonym kierunku, a następnie malujemy je używając d kolorów, przy czym jednakowym kolorem malujemy te lampki, których numery dają z dzielenia przez d taką samą resztę.)

Przypuśćmy, że po wykonaniu pewnego ruchu świeci się dokładnie s_i lampek i -tego koloru ($i = 1, 2, \dots, d$). W każdym ruchu zmieniamy stan dokładnie $l = k/d$ lampek i -tego koloru. Jeśli włączamy a_i lampek i -tego koloru, a b_i lampek i -tego koloru wyłączamy, to liczba s_i wzrasta o dokładnie $a_i - b_i = l - 2b_i$. Skoro na początku żadna lampka nie jest włączona, to po każdym ruchu liczby $s_1, s_2, \dots, s_d$ dają z dzielenia przez 2 taką samą resztę. Nie

jest zatem możliwe uzyskanie dokładnie jednej lampki włączonej (mielibyśmy wtedy $s_j = 1$ dla pewnej liczby j oraz $s_i = 0$ dla wszystkich $i \neq j$).

Pozostał do rozpatrzenia przypadek, gdy k jest taką liczbą nieparzystą, że $\text{NWD}(k, n) = 1$. Warunek ten jest równoważny równości $\text{NWD}(k, 2n) = 1$. Wykażemy, że przy pomocy rozpatrywanych ruchów można doprowadzić do sytuacji, gdy dokładnie jedna lampka jest włączona.

Stosując algorytm Euklidesa dla liczb k i $2n$ wnioskujemy, że istnieje taka liczba całkowita dodatnia x oraz liczba całkowita nieujemna y , że

$$(1) \quad kx - (2n)y = 1.$$

Wybieramy blok k kolejnych lampek i zmieniamy ich stan na przeciwny. Następnie wybieramy blok złożony z k lampek przyległy do poprzedniego i zmieniamy stan tych lampek na przeciwny. Procedurę kontynuujemy poruszając się po danym okręgu w ustalonym kierunku i wykonując łącznie x ruchów.

Z równości (1) wynika, że stan jednej lampki zmieni się dokładnie $2y + 1$ razy, a stan każdej innej dokładnie $2y$ razy. W efekcie dokładnie jedna lampka będzie włączona, a pozostałe wyłączone.

Zadanie 9. Wyznaczyć wszystkie liczby rzeczywiste a , dla których ciąg (x_n) określony wzorami

$$x_0 = \sqrt{3}, \quad x_{n+1} = \frac{1 + ax_n}{a - x_n} \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, \dots$$

spełnia warunek $x_{n+8} = x_n$ dla $n = 0, 1, 2, \dots$.

Rozwiązanie

Sposób I

Aby ciąg (x_n) był poprawnie określony, musi być $x_n \neq a$ dla każdego $n \geq 0$. Niech $\alpha \in (0; \pi)$ będzie taką liczbą, że $a = \text{ctg } \alpha$. Wykażemy indukcyjnie, że

$$(1) \quad x_n = \text{ctg}\left(\frac{1}{6}\pi - n\alpha\right) \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, \dots$$

Dla $n = 0$ równość (1) jest spełniona. Przyjmijmy, że zachodzi ona dla pewnego n . Jeśli $\text{ctg } x \neq \text{ctg } y$, to

$$\text{ctg}(y - x) = \frac{1 + \text{ctg } x \cdot \text{ctg } y}{\text{ctg } x - \text{ctg } y}.$$

Warunek $x_n \neq a$ implikuje, że $\text{ctg}(\frac{1}{6}\pi - n\alpha) \neq \text{ctg } \alpha$. Na mocy powyższego wzoru uzyskujemy

$$x_{n+1} = \frac{1 + ax_n}{a - x_n} = \frac{1 + (\text{ctg } \alpha) \cdot (\text{ctg}(\frac{1}{6}\pi - n\alpha))}{\text{ctg } \alpha - \text{ctg}(\frac{1}{6}\pi - n\alpha)} = \text{ctg}(\frac{1}{6}\pi - (n+1)\alpha),$$

co kończy dowód indukcyjny zależności (1).

Funkcja $f(x) = \text{ctg } x$ jest π -okresowa. Korzystając z równości (1) wnioskujemy, że $x_{n+8} = x_n$ dla wszystkich $n \geq 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka liczba całkowita k , że $8\alpha = k\pi$. Stąd uzyskujemy $\alpha = \frac{1}{8}k\pi$, a ponieważ

liczba α należy do przedziału $(0; \pi)$, więc k jest jedną z liczb: $1, 2, \dots, 7$. Zatem równość $x_{n+8} = x_n$ jest prawdziwa dla $n = 0, 1, 2, \dots$ wtedy i tylko wtedy, gdy a jest jedną z liczb:

$$\operatorname{ctg}(\tfrac{1}{8}\pi), \operatorname{ctg}(\tfrac{1}{4}\pi), \operatorname{ctg}(\tfrac{3}{8}\pi), \operatorname{ctg}(\tfrac{1}{2}\pi), \operatorname{ctg}(\tfrac{5}{8}\pi), \operatorname{ctg}(\tfrac{3}{4}\pi), \operatorname{ctg}(\tfrac{7}{8}\pi),$$

czyli odpowiednio: $\sqrt{2}+1$, 1 , $\sqrt{2}-1$, 0 , $-\sqrt{2}+1$, -1 , $-\sqrt{2}-1$.

Bezpośrednio sprawdzamy, że dla powyższych siedmiu wartości a , ciąg (x_n) jest poprawnie określony, tzn. $x_n \neq a$ dla $n = 0, 1, 2, \dots, 7$.

Sposób II

Korzystając z danego wzoru rekurencyjnego obliczamy:

$$x_{n+2} = \frac{1 + ax_{n+1}}{a - x_{n+1}} = \frac{1 + a \cdot \frac{1 + ax_n}{a - x_n}}{a - \frac{1 + ax_n}{a - x_n}} = \frac{2a + (a^2 - 1)x_n}{(a^2 - 1) - 2ax_n}.$$

Stąd uzyskujemy

$$\begin{aligned} x_{n+4} &= \frac{2a + (a^2 - 1)x_{n+2}}{(a^2 - 1) - 2ax_{n+2}} = \frac{2a + (a^2 - 1) \cdot \frac{2a + (a^2 - 1)x_n}{(a^2 - 1) - 2ax_n}}{(a^2 - 1) - 2a \cdot \frac{2a + (a^2 - 1)x_n}{(a^2 - 1) - 2ax_n}} = \\ &= \frac{4a(a^2 - 1) + ((a^2 - 1)^2 - 4a^2)x_n}{((a^2 - 1)^2 - 4a^2) - 4a(a^2 - 1)x_n} = \frac{A + Bx_n}{B - Ax_n}, \end{aligned}$$

gdzie $A = 4a(a^2 - 1)$ oraz $B = (a^2 - 1)^2 - 4a^2$. Wówczas

$$x_{n+8} = \frac{A + Bx_{n+4}}{B - Ax_{n+4}} = \frac{A + B \cdot \frac{A + Bx_n}{B - Ax_n}}{B - A \cdot \frac{A + Bx_n}{B - Ax_n}} = \frac{2AB + (B^2 - A^2)x_n}{(B^2 - A^2) - 2ABx_n}.$$

Zatem $x_{n+8} = x_n$ dla wszystkich $n \geq 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{2AB + (B^2 - A^2)x_n}{(B^2 - A^2) - 2ABx_n} = x_n, \quad \text{czyli} \quad 2AB(1 + x_n^2) = 0.$$

Ostatnia równość jest spełniona dla każdej liczby całkowitej $n \geq 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A = 0$ lub $B = 0$. Równość $A = 0$ oznacza, że a jest jedną z liczb 0 , 1 , -1 , natomiast równość $B = 0$ implikuje, że a równa się $\sqrt{2}-1$, $\sqrt{2}+1$, $-\sqrt{2}-1$ lub $-\sqrt{2}+1$.

Tak jak w sposobie I pozostało sprawdzić, że ciąg (x_n) jest dla uzyskanych wartości a poprawnie określony.

Zadanie 10. Spośród wszystkich podzbiorów ustalonego zbioru n -elementowego X losujemy kolejno ze zwracaniem trzy zbiory A , B , C . Za każdym razem wylosowanie każdego spośród 2^n podzbiorów zbioru X jest jednakowo prawdopodobne. Wyznaczyć najbardziej prawdopodobną liczbę elementów zbioru $A \cap B \cap C$.

Rozwiązanie

Zbiór zdarzeń elementarnych Ω składa się ze wszystkich trójek (A, B, C) , gdzie A, B i C są podzbiórmi danego zbioru n -elementowego S . Wylosowanie każdej z $(2^n)^3 = 8^n$ trójek (A, B, C) jest jednakowo prawdopodobne. Niech X_k ($k=0, 1, 2, \dots, n$) oznacza zdarzenie polegające na tym, że trójka zbiorów (A, B, C) spełnia warunek $|A \cap B \cap C| = k$, gdzie $|F|$ oznacza liczbę elementów zbioru F . Szukamy takiej liczby naturalnej k , dla której prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia X_k jest największe.

Ustalmy liczbę $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$. Obliczymy liczbę trójek (A, B, C) , dla których $|A \cap B \cap C| = k$.

Jeśli (A, B, C) jest trójką podzbiorów zbioru S , to każdy element zbioru S znajduje się w dokładnie jednym spośród następujących ośmiu zbiorów

$$(1) \quad \begin{aligned} &A \cap B \cap C, \quad (A \cap B) \setminus C, \quad (B \cap C) \setminus A, \quad (C \cap A) \setminus B, \\ &A \setminus (B \cup C), \quad B \setminus (C \cup A), \quad C \setminus (A \cup B), \quad S \setminus (A \cup B \cup C). \end{aligned}$$

Aby uzyskać trójkę zbiorów (A, B, C) , dla których $|A \cap B \cap C| = k$, wybieramy najpierw k elementów zbioru S , które umieścimy w zbiorze $A \cap B \cap C$ — możemy to uczynić na $\binom{n}{k}$ sposobów. Każdemu z pozostałych $n-k$ elementów przyporządkowujemy jedną z pozostałych siedmiu możliwości występujących w (1) — możemy to zrobić na 7^{n-k} sposobów. Opisane postępowanie określa jednoznacznie trójkę (A, B, C) . Zatem liczba trójek (A, B, C) , dla których $|A \cap B \cap C| = k$ wynosi $\binom{n}{k} \cdot 7^{n-k}$. Stąd uzyskujemy

$$P(X_k) = \frac{\binom{n}{k} \cdot 7^{n-k}}{8^n}.$$

Aby wyznaczyć taką liczbę k , dla której prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia X_k jest największe, obliczamy iloraz

$$\frac{P(X_{k+1})}{P(X_k)} = \frac{n-k}{7k+7}.$$

Stąd wynika, że

$$\begin{cases} P(X_{k+1}) > P(X_k), & \text{jeśli } k < \frac{1}{8}(n-7); \\ P(X_{k+1}) < P(X_k), & \text{jeśli } k > \frac{1}{8}(n-7); \\ P(X_{k+1}) = P(X_k), & \text{jeśli } k = \frac{1}{8}(n-7). \end{cases}$$

Oznaczając $\lambda = [(n-7)/8]$, gdzie $[x]$ jest największą liczbą całkowitą nie większą od x , otrzymujemy

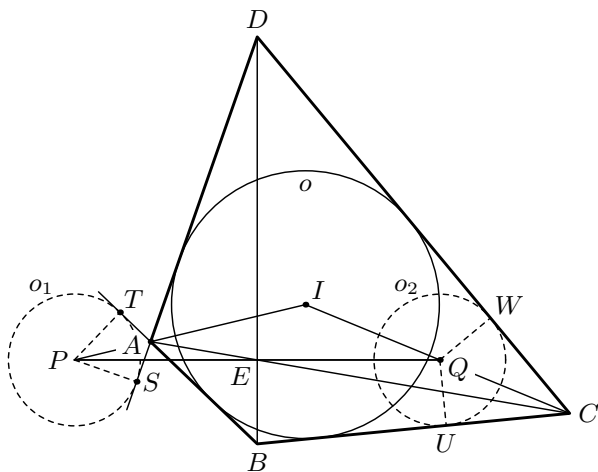
$$\begin{aligned} P(X_0) &< P(X_1) < P(X_2) < \dots < P(X_\lambda) \leq P(X_{\lambda+1}), \\ P(X_{\lambda+1}) &> P(X_{\lambda+2}) > \dots > P(X_n). \end{aligned}$$

Zatem prawdopodobieństwo $P(X_k)$ jest największe dla $k = \lambda + 1 = [\frac{1}{8}(n+1)]$. Jeśli $\frac{1}{8}(n-7)$ jest liczbą całkowitą, to istnieją dwie wartości k , dla których liczba $P(X_k)$ jest największa, a mianowicie $k = \frac{1}{8}(n-7)$ oraz $k = \frac{1}{8}(n+1)$.

Zadanie 11. Okrąg o środku I jest wpisany w czworokąt wypukły $ABCD$, przy czym punkt I nie leży na prostej AC . Przekątne AC i BD przecinają się w punkcie E . Prosta przechodząca przez punkt E oraz prostopadła do prostej BD przecina proste AI , CI odpowiednio w punktach P , Q . Wykazać, że $PE = EQ$.

Rozwiązanie

Niech o_1 będzie okręgiem o środku P i stycznym do prostych AD i AB odpowiednio w punktach S i T . Analogicznie, niech o_2 będzie okręgiem o środku Q i stycznym do prostych CB i CD odpowiednio w punktach U i W (rys. 5). Oznaczmy przez o okrąg wpisany w czworokąt $ABCD$. Bez straty ogólności przyjmijmy, że punkt Q leży na odcinku CI .



rys. 5

Korzystając z twierdzenia Menelausa dla trójkąta PIQ uzyskujemy

$$\frac{PE}{EQ} = \frac{CI}{CQ} \cdot \frac{AP}{AI} = \frac{r}{r_2} \cdot \frac{r_1}{r} = \frac{r_1}{r_2},$$

gdzie r , r_1 i r_2 są odpowiednio promieniami okręgów o , o_1 i o_2 . Stąd

$$(1) \quad \frac{PE}{r_1} = \frac{EQ}{r_2} = \lambda.$$

Wprowadźmy następujące oznaczenia: $a = BT$, $b = DS$, $c = BU$, $d = DW$. Wówczas otrzymujemy zależności:

$$(2) \quad \begin{aligned} a - b &= AB - AD = CB - CD = c - d, \\ a^2 - b^2 &= PB^2 - PD^2 = BE^2 - DE^2 = QB^2 - QD^2 = c^2 - d^2. \end{aligned}$$

Zatem jeśli $a = b$, to $AB = AD$ oraz $CB = CD$; w tym przypadku punkt I leży na przekątnej AC , co przeczy założeniom. Stąd mamy $a \neq b$, a więc również $c \neq d$. Z równości (2) otrzymujemy wówczas $a + b = c + d$, co w połączeniu

z zależnością $a - b = c - d$ daje $a = c$ i $b = d$. Zatem

$$(3) \quad PE^2 - EQ^2 = PD^2 - QD^2 = (r_1^2 + b^2) - (r_2^2 + d^2) = r_1^2 - r_2^2.$$

Równości (1) i (3) pociągają zależność $(\lambda^2 - 1)(r_1^2 - r_2^2) = 0$.

Przypuśćmy, że $\lambda = 1$. Wówczas $EQ = r_2$, a więc okrąg o_2 jest wpisany w trójkąt BCD . Ponieważ w czworokąt $ABCD$ można wpisać okrąg, więc okrąg ω wpisany w trójkąt ABD jest styczny do okręgu o_2 . Stąd wynika, że punkty Q , E oraz środek okręgu ω leżą na jednej prostej. To jednak nie jest możliwe, gdyż punkty te znajdują się odpowiednio na bokach IC , CA , AI trójkąta AIC i są różne od jego wierzchołków. Otrzymaliśmy sprzeczność, która dowodzi, że $\lambda \neq 1$.

Z uzyskanej wyżej równości wynika zatem, że $r_1 = r_2$, czyli $PE = EQ$.

Zadanie 12. Dane są funkcje

$$f(x) = 2^x \quad \text{oraz} \quad g(x) = f(f(f(f(f(f(x))))))$$

(7-krotna iteracja funkcji f). Rozstrzygnąć, czy liczba $g(3) - g(0)$ jest podzielna przez liczbę $g(2) - g(0)$.

Rozwiązanie

Liczby $g(0)$, $g(2)$ i $g(3)$ są odpowiednio wyrazami a_7 , b_7 i c_7 ciągów (a_n) , (b_n) i (c_n) określonych rekurencyjnie wzorami

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_{n+1} = 2^{a_n}, \end{cases} \quad \begin{cases} b_0 = 2 \\ b_{n+1} = 2^{b_n}, \end{cases} \quad \begin{cases} c_0 = 3 \\ c_{n+1} = 2^{c_n}. \end{cases}$$

Wykażemy, że liczba $c_7 - a_7 = g(3) - g(0)$ nie dzieli się przez $b_7 - a_7 = g(2) - g(0)$. W dowodzie skorzystamy z następującego lematu:

Lemat

Dane są takie liczby całkowite dodatnie k i l , że liczba $2^l - 1$ jest podzielna przez $2^k - 1$. Wówczas liczba l jest podzielna przez k .

Dowód

Niech $l = kq + r$, gdzie $r \in \{0, 1, 2, \dots, k-1\}$. Liczby $2^l - 1$ i $2^{kq} - 1$ są podzielne przez $2^k - 1$, zatem różnica tych liczb, czyli liczba $2^l - 2^{kq} = 2^{kq}(2^r - 1)$ jest podzielna przez $2^k - 1$. Liczby 2^{kq} i $2^k - 1$ są względnie pierwsze, skąd wynika, że liczba $2^r - 1$ jest podzielna przez $2^k - 1$. Ponieważ $r < k$, więc podzielność ta ma miejsce jedynie wtedy, gdy $r = 0$. To oznacza, że liczba l jest podzielna przez k .

Przystępujemy do rozwiązania zadania.

Przypuśćmy, że $b_7 - a_7 \mid c_7 - a_7$. Wtedy $2^{b_6} - 2^{a_6} \mid 2^{c_6} - 2^{a_6}$, skąd wynika, że $2^{b_6 - a_6} - 1 \mid 2^{c_6 - a_6} - 1$. Korzystając z lematu uzyskujemy $b_6 - a_6 \mid c_6 - a_6$.

Kontynuując to rozumowanie dochodzimy do podzielności $b_0 - a_0 \mid c_0 - a_0$, czyli $2 \mid 3$, co nie jest prawdą.

(wp)

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w internecie pod adresem: www.om.edu.pl



LVI Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia drugiego

25 lutego 2005 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Wyznaczyć wszystkie dodatnie liczby całkowite n , dla których

$$n^n + 1 \quad \text{oraz} \quad (2n)^{2n} + 1$$

są liczbami pierwszymi.

2. W czworokącie wypukłym $ABCD$ punkt M jest środkiem przekątnej AC . Wykazać, że jeżeli

$$\sphericalangle BAD = \sphericalangle BMC = \sphericalangle CMD,$$

to na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg.

3. W przestrzeni danych jest n punktów ($n \geq 2$), z których żadne cztery nie leżą w jednej płaszczyźnie. Niektóre z tych punktów zostały połączone odcinkami. Niech K będzie liczbą poprowadzonych odcinków ($K \geq 1$), a T liczbą powstałych trójkątów. Udowodnić, że

$$9T^2 < 2K^3.$$

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów i telefonów.



LVI Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia drugiego

26 lutego 2005 r. (drugi dzień zawodów)

4. Dany jest wielomian $W(x) = x^2 + ax + b$, o współczynnikach całkowitych, spełniający warunek:

Dla każdej liczby pierwszej p istnieje taka liczba całkowita k , że liczby $W(k)$ oraz $W(k+1)$ są podzielne przez p .

Dowieść, że istnieje liczba całkowita m , dla której

$$W(m) = W(m+1) = 0.$$

5. Dany jest romb $ABCD$, w którym $\sphericalangle BAD > 60^\circ$. Punkty E i F leżą odpowiednio na bokach AB i AD , przy czym $\sphericalangle ECF = \sphericalangle ABD$. Proste CE i CF przecinają przekątną BD odpowiednio w punktach P i Q . Wykazać, że

$$\frac{PQ}{EF} = \frac{AB}{BD}.$$

6. Liczby a , b , c należą do przedziału $\langle 0; 1 \rangle$. Udowodnić, że

$$\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ca+1} + \frac{c}{ab+1} \leq 2.$$

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podeście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów i telefonów.



LVI Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia drugiego

25 lutego 2005 r. (pierwszy dzień zawodów)

Zadanie 1. Wyznaczyć wszystkie dodatnie liczby całkowite n , dla których

$$n^n + 1 \quad \text{oraz} \quad (2n)^{2n} + 1$$

są liczbami pierwszymi.

Rozwiązanie

Niech $a \geq 2$, $m \geq 1$ będą liczbami całkowitymi. Wykażemy najpierw, że jeśli liczba m ma dzielnik nieparzysty większy od 1, to liczba $a^m + 1$ jest złożona. Istotnie: jeśli l jest dzielnikiem nieparzystym liczby m , to $m = ld$ dla pewnej liczby całkowitej dodatniej d oraz

$$a^m + 1 = (a^d)^l + 1 = (a^d + 1) \cdot ((a^d)^{l-1} - (a^d)^{l-2} + \dots - a^d + 1).$$

Z powyższego wzoru wynika, że liczba $a^d + 1$ jest dzielnikiem liczby $a^m + 1$. Dla $l > 1$ dzielnik ten jest większy od 1 i mniejszy od $a^m + 1$. Zatem liczba $a^m + 1$ jest złożona.

Liczba $n = 1$ spełnia warunki zadania: liczby $1^1 + 1 = 2$, $2^2 + 1 = 5$ są liczbami pierwszymi. Załóżmy więc w dalszej części rozumowania, że $n \geq 2$.

Jeśli liczba $n^n + 1$ jest liczbą pierwszą, to n nie ma dzielników nieparzystych większych od 1. Stąd wynika, że $n = 2^k$ dla pewnej liczby całkowitej dodatniej k . Wówczas

$$(1) \quad n^n + 1 = 2^{k \cdot 2^k} + 1 \quad \text{oraz} \quad (2n)^{2n} + 1 = 2^{(k+1) \cdot 2^{k+1}} + 1.$$

Dla $k \geq 2$ co najmniej jedna z liczb $k \cdot 2^k$, $(k+1) \cdot 2^{k+1}$ ma dzielnik nieparzysty większy od 1, a więc co najmniej jedna z liczb (1) jest złożona. Wobec tego musi być $k = 1$, czyli $n = 2$.

Pozostało upewnić się, że liczba $n = 2$ spełnia warunki zadania: liczby $2^2 + 1 = 5$ oraz $4^4 + 1 = 257$ są liczbami pierwszymi.

Odp.: $n = 1$ lub $n = 2$.

Zadanie 2. W czworokącie wypukłym $ABCD$ punkt M jest środkiem przekątnej AC . Wykazać, że jeżeli

$$\sphericalangle BAD = \sphericalangle BMC = \sphericalangle CMD,$$

to na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg.

Rozwiązanie

Oznaczmy: $\alpha = \sphericalangle BAD$.

Jeśli $\alpha = 90^\circ$, to punkty B , M , D leżą na jednej prostej. Wtedy punkty A i C są symetryczne względem prostej BD . Stąd $\sphericalangle BCD = \sphericalangle BAD = 90^\circ$, czyli na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg.

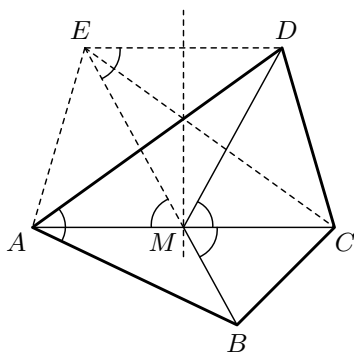
W dalszym ciągu przyjmijmy, że $\alpha \neq 90^\circ$. Niech E będzie punktem symetrycznym do punktu D względem symetralnej odcinka AC (rys. 1, 2). Wówczas $\sphericalangle BMC = \sphericalangle CMD = \sphericalangle AME$, skąd wynika, że punkty B, M, E leżą na jednej prostej. Proste AC i ED są równoległe. Zatem gdy $\alpha < 90^\circ$ (rys. 1), to

$$\sphericalangle BAD = \sphericalangle BMC = \sphericalangle BED;$$

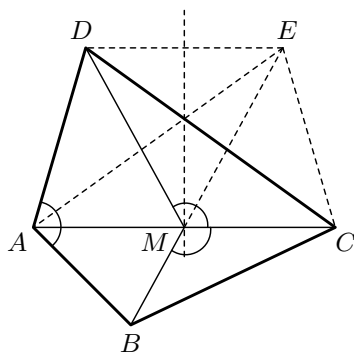
natomiast jeśli $\alpha > 90^\circ$ (rys. 2), to

$$\sphericalangle BAD = \sphericalangle BMC = 180^\circ - \sphericalangle BMA = 180^\circ - \sphericalangle BED.$$

W obu przypadkach otrzymana równość oznacza, że punkty A, B, D, E leżą na jednym okręgu. Ponadto czworokąt o wierzchołkach A, C, D, E jest trapezem równoramiennym, a więc również punkty A, C, D, E leżą na jednym okręgu. Zatem punkty A, B, C, D leżą na jednym okręgu, co należało wykazać.



rys. 1



rys. 2

Zadanie 3. W przestrzeni danych jest n punktów ($n \geq 2$), z których żadne cztery nie leżą w jednej płaszczyźnie. Niektóre z tych punktów zostały połączone odcinkami. Niech K będzie liczbą poprowadzonych odcinków ($K \geq 1$), a T liczbą powstałych trójkątów. Udowodnić, że

$$9T^2 < 2K^3.$$

Rozwiązanie

Ponumerujmy liczbami od 1 do m te punkty, z których wychodzi co najmniej jeden odcinek i przyjmijmy, że z punktu o numerze i ($i = 1, 2, \dots, m$) wychodzi dokładnie k_i odcinków. Wtedy $k_i > 0$. Oznaczmy ponadto przez t_i ($i = 1, 2, \dots, m$) liczbę tych trójkątów, których jednym z wierzchołków jest punkt o numerze i . Wówczas

$$(1) \quad k_1 + k_2 + \dots + k_m = 2K \quad \text{oraz} \quad t_1 + t_2 + \dots + t_m = 3T.$$

Zbiór A_i tych punktów, które zostały połączone odcinkiem z punktem o numerze i zawiera dokładnie k_i elementów. Ponadto trójkątów mających wierzchołek w punkcie o numerze i jest tyle samo, ile poprowadzonych odcinków

o wierzchołkach w zbiorze A_i . Zatem

$$(2) \quad t_i \leq \binom{k_i}{2} = \frac{k_i^2 - k_i}{2} < \frac{k_i^2}{2}.$$

Z drugiej strony, liczba tych odcinków jest mniejsza niż liczba wszystkich poprowadzonych odcinków. Wobec tego

$$(3) \quad t_i < K.$$

Mnożąc stronami nierówności (2) i (3) uzyskujemy $t_i^2 < \frac{1}{2}k_i^2 K$. Stąd oraz z równości (1) otrzymujemy

$$3T = \sum_{i=1}^m t_i < \sum_{i=1}^m \frac{k_i \cdot \sqrt{K}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{K}}{\sqrt{2}} \cdot \sum_{i=1}^m k_i = \frac{2K\sqrt{K}}{\sqrt{2}}.$$

Podnosząc ostatnią nierówność stronami do kwadratu dostajemy tezę.

(wp)

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w internecie pod adresem: www.om.edu.pl



LVI Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia drugiego

26 lutego 2005 r. (drugi dzień zawodów)

Zadanie 4. Dany jest wielomian $W(x) = x^2 + ax + b$, o współczynnikach całkowitych, spełniający warunek:
Dla każdej liczby pierwszej p istnieje taka liczba całkowita k , że liczby $W(k)$ oraz $W(k+1)$ są podzielne przez p .
Dowieść, że istnieje liczba całkowita m , dla której

$$W(m) = W(m+1) = 0.$$

Rozwiązanie

Warunek $W(m) = W(m+1) = 0$ oznacza, że $W(x) = (x-m)(x-m-1)$, czyli $W(x) = x^2 - (2m+1)x + m^2 + m$. Należy zatem wykazać, że istnieje taka liczba całkowita m , że

$$a = -2m - 1 \quad \text{oraz} \quad b = m^2 + m.$$

Ustalmy liczbę pierwszą p . Wówczas dla pewnej liczby całkowitej k liczby

$$A = W(k) = k^2 + ak + b,$$

$$B = W(k+1) = k^2 + (a+2)k + (a+b+1).$$

są podzielne przez p . Przez p dzieli się więc kolejno następujące liczby:

$$C = B - A = 2k + (a+1),$$

$$D = 2A - kC = (a-1)k + 2b,$$

$$E = (a-1)C - 2D = a^2 - 4b - 1.$$

Liczba E jest wyznaczona przez współczynniki wielomianu W i nie zależy od k . Przeprowadzając to rozumowanie dla każdej liczby pierwszej p stwierdzamy, że liczba E jest podzielna przez każdą liczbę pierwszą p i w konsekwencji $E=0$. Stąd wynika, że liczba a jest nieparzysta, tzn. $a = -2m - 1$ dla pewnej liczby całkowitej m , oraz $b = \frac{1}{4}(a^2 - 1) = m^2 + m$.

Zadanie 5. Dany jest romb $ABCD$, w którym $\sphericalangle BAD > 60^\circ$. Punkty E i F leżą odpowiednio na bokach AB i AD , przy czym $\sphericalangle ECF = \sphericalangle ABD$. Proste CE i CF przecinają przekątną BD odpowiednio w punktach P i Q . Wykazać, że

$$\frac{PQ}{EF} = \frac{AB}{BD}.$$

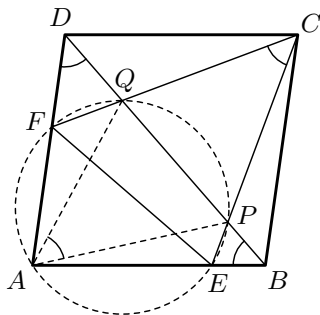
Rozwiązanie

Z równości $\sphericalangle FDQ = \sphericalangle PCQ$ wynika, że trójkąty FDQ i PCQ są podobne. Ponieważ punkty A i C są symetryczne względem prostej BD , więc

trójkąty PCQ i PAQ są przystające oraz

$$\sphericalangle APQ = \sphericalangle CPQ = \sphericalangle DFQ = 180^\circ - \sphericalangle AFQ.$$

Równość ta oznacza, że punkty A, P, Q, F leżą na jednym okręgu. Podobnie dowodzimy, że punkty A, P, Q, E leżą na jednym okręgu. Istnieje więc okrąg przechodzący przez punkty A, P, Q, E i F .



Z zależności $\sphericalangle CPQ = \sphericalangle CFE$ wnioskujemy, że trójkąty CPQ i CFE są podobne. Analogicznie uzyskujemy podobieństwo trójkątów DQF i DAP . Ponadto podobne są trójkąty PAQ i ABQ . Stąd

$$\frac{EF}{PQ} = \frac{FC}{PC} = \frac{FQ + AQ}{PC} = \frac{FQ}{PA} + \frac{AQ}{PA} = \frac{DQ}{AD} + \frac{BQ}{AB} = \frac{BD}{AB},$$

co należało wykazać.

Zadanie 6. Liczby a, b, c należą do przedziału $\langle 0; 1 \rangle$. Udowodnić, że

$$\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ca+1} + \frac{c}{ab+1} \leq 2.$$

Rozwiązanie

Wykażemy, że dla dowolnych liczb a, b, c należących do przedziału $\langle 0; 1 \rangle$ zachodzi nierówność

$$(1) \quad \frac{a}{bc+1} \leq \frac{2a}{a+b+c}.$$

Istotnie: jeśli $a=0$, to powyższa nierówność jest spełniona. Dla $a>0$ zależność (1) jest równoważna nierówności $a+b+c \leq 2bc+2$, którą można zapisać jako

$$a \leq 1 + bc + (b-1)(c-1).$$

Ostatnia nierówność jest spełniona — wynika ona bezpośrednio z zależności $a \leq 1, 0 \leq bc, 0 \leq (b-1)(c-1)$. To kończy dowód własności (1).

Analogicznie dowodzimy, że

$$(2) \quad \frac{b}{ca+1} \leq \frac{2b}{a+b+c} \quad \text{oraz} \quad \frac{c}{ab+1} \leq \frac{2c}{a+b+c}.$$

Dodając stronami nierówności (1) oraz (2) uzyskujemy tezę.

(wp)



LVI Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia trzeciego

13 kwietnia 2005 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Wyznaczyć wszystkie trójki (x, y, n) liczb całkowitych dodatnich spełniające równanie

$$(x - y)^n = xy.$$

2. Punkty A, B, C, D leżą, w tej właśnie kolejności, na okręgu o . Punkt S leży wewnątrz okręgu o i spełnia warunki

$$\sphericalangle SAD = \sphericalangle SCB \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle SDA = \sphericalangle SBC.$$

Prosta zawierająca dwusieczną kąta ASB przecina okrąg o w punktach P i Q . Dowieść, że $PS = QS$.

3. W kwadratowej tablicy o wymiarach $2n \times 2n$, gdzie n jest liczbą naturalną, znajduje się $4n^2$ liczb rzeczywistych o sumie równej 0 (na każdym polu tablicy jedna liczba). Wartość bezwzględna każdej z tych liczb jest nie większa od 1. Dowieść, że wartość bezwzględna sumy wszystkich liczb z pewnego rzędu (poziomego lub pionowego) nie przekracza n .

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów i telefonów.



LVI Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia trzeciego

14 kwietnia 2005 r. (drugi dzień zawodów)

4. Dana jest liczba rzeczywista $c > -2$. Dowieść, że jeżeli liczby $x_1, x_2, \dots, x_n$ ($n \geq 2$) są dodatnie oraz

$$\begin{aligned} \sqrt{x_1^2 + cx_1x_2 + x_2^2} + \sqrt{x_2^2 + cx_2x_3 + x_3^2} + \dots + \sqrt{x_n^2 + cx_nx_1 + x_1^2} = \\ = \sqrt{c+2} (x_1 + x_2 + \dots + x_n), \end{aligned}$$

to $c = 2$ lub $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

5. Niech k będzie liczbą naturalną większą od 1 i niech $m = 4k^2 - 5$. Wykazać, że istnieją takie liczby całkowite dodatnie a, b , że każdy wyraz ciągu (x_n) określonego wzorami

$$x_1 = a, \quad x_2 = b, \quad x_{n+2} = x_{n+1} + x_n \quad \text{dla } n \geq 1$$

jest względnie pierwszy z liczbą m .

6. Udowodnić, że każdy wielokąt wypukły o polu 1 zawiera sześciokąt wypukły o polu nie mniejszym niż $3/4$.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów i telefonów.



LVI Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia trzeciego

13 kwietnia 2005 r. (pierwszy dzień zawodów)

Zadanie 1. Wyznaczyć wszystkie trójki (x, y, n) liczb całkowitych dodatnich spełniające równanie

$$(x - y)^n = xy.$$

Rozwiązanie

Dla $n = 1$ podane równanie ma postać $(x + 1)(y - 1) = -1$, więc nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich. Przyjmijmy zatem, że $n \geq 2$.

Niech $z = x - y$. Dane równanie przybiera postać $x^2 - xz = z^n$. Po przemnożeniu przez 4 i prostym przekształceniu uzyskujemy

$$(1) \quad (2x - z)^2 = z^2(1 + 4z^{n-2}).$$

Stąd wynika, że czynnik $1 + 4z^{n-2}$ jest kwadratem liczby całkowitej. Ponieważ jest to liczba nieparzysta większa od 1, więc dla pewnej liczby całkowitej dodatniej t mamy $1 + 4z^{n-2} = (2t + 1)^2$, czyli

$$z^{n-2} = t(t + 1).$$

Dla $n = 2$ uzyskujemy $1 = t(t + 1)$, co nie może być spełnione, gdyż liczba $t(t + 1)$ jest parzysta dla każdej liczby całkowitej t . Zatem jeśli $n = 2$, to dane równanie nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich.

Dla $n = 3$ mamy $z = t(t + 1)$. Wstawiając to wyrażenie do równania (1) wyznaczamy niewiadomą x . Po kilku przekształceniach otrzymujemy

$$x = t(t + 1)^2 \quad \text{lub} \quad x = -t^2(t + 1).$$

Ponieważ $t > 0$, a x jest liczbą dodatnią, to druga z wyznaczonych wartości x odpada. Ponadto $y = x - z = t(t + 1)^2 - t(t + 1) = t^2(t + 1)$. Znaleźliśmy w ten sposób następujące trójki:

$$(2) \quad (x, y, n) = (t(t + 1)^2, t^2(t + 1), 3), \quad \text{gdzie } t = 1, 2, 3, \dots$$

Bezpośrednio sprawdzamy, że są one rozwiązaniami danego równania.

Pozostał do rozpatrzenia przypadek $n \geq 4$. Ponieważ liczby $t, t + 1$ są względnie pierwsze, a ich iloczyn jest $(n - 2)$ -gą potęgą liczby całkowitej dodatniej, to każda z tych liczb musi być $(n - 2)$ -gą potęgą liczby całkowitej dodatniej. Jednak dla $n \geq 4$ nie istnieją dwie kolejne liczby całkowite dodatnie będące $(n - 2)$ -gimi potęgami liczb całkowitych. Zatem jeśli $n \geq 4$, to dane równanie nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich.

Reasumując: dane równanie ma rozwiązanie (x, y) w liczbach całkowitych dodatnich tylko dla $n = 3$. Wszystkie rozwiązania są dane wzorem (2).

Zadanie 2. Punkty A, B, C, D leżą, w tej właśnie kolejności, na okręgu o . Punkt S leży wewnątrz okręgu o i spełnia warunki

$$\sphericalangle SAD = \sphericalangle SCB \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle SDA = \sphericalangle SBC}.$$

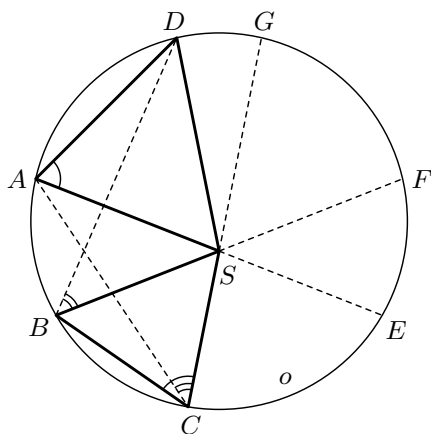
Prosta zawierająca dwusieczną kąta ASB przecina okrąg o w punktach P i Q . Dowieść, że $PS = QS$.

Rozwiązanie

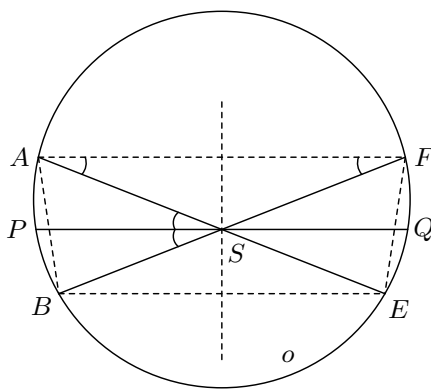
Przyjmijmy, że proste AS, BS, CS przecinają okrąg o po raz drugi odpowiednio w punktach E, F, G (rys. 1). Z danych w zadaniu równości wynika podobieństwo trójkątów ASD i CSB , a stąd

$$\frac{AS}{CS} = \frac{DS}{BS} \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle BSC = \sphericalangle DSA,$$

więc i $\sphericalangle ASC = \sphericalangle DSB$. Równości te dowodzą, że trójkąty ASC i DSB są podobne, skąd w szczególności dostajemy $\sphericalangle ACS = \sphericalangle DBS$. Stąd wniosek, że łuki GA i FD okręgu o są równe (pisząc „łuk XY ” mamy na myśli łuk biegnący wzdłuż okręgu o od punktu X do punktu Y w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara). Analogicznie, z równości $\sphericalangle SAD = \sphericalangle SCB$ wnioskujemy, że łuki GB i ED są równe. Zatem także łuki AB i EF są równe.



rys. 1



rys. 2

Czworokąt $ABEF$ jest więc trapezem równoramiennym, a punkt S jest punktem przecięcia jego przekątnych (rys. 2). Przyjmijmy, że punkt P leży na tym łuku AB okręgu o , który nie zawiera punktów C i D . Z równości

$$\sphericalangle PSA = \frac{1}{2} \sphericalangle ASB = \frac{1}{2} (\sphericalangle FAS + \sphericalangle AFS) = \sphericalangle FAS$$

wynika, że prosta PQ jest równoległa do prostych BE i AF . Stąd wniosek, że punkty A, P, B są odpowiednio obrazami punktów F, Q, E w symetrii względem symetralnej odcinków AF i BE . Zatem $PS = QS$.

Zadanie 3. W kwadratowej tablicy o wymiarach $2n \times 2n$, gdzie n jest liczbą naturalną, znajduje się $4n^2$ liczb rzeczywistych o sumie równej 0 (na każdym polu tablicy jedna liczba). Wartość bezwzględna każdej z tych liczb jest nie większa od 1. Dowieść, że wartość bezwzględna sumy wszystkich liczb z pewnego rzędu (poziomego lub pionowego) nie przekracza n .

Rozwiązanie

Ponumerujemy wiersze i kolumny danej tablicy liczbami $1, 2, \dots, 2n$.

Niech $r_1, r_2, \dots, r_{2n}$ będą sumami liczb napisanych w wierszach o numerach $1, 2, \dots, 2n$, a $c_1, c_2, \dots, c_{2n}$ sumami liczb znajdujących się w kolumnach o numerach $1, 2, \dots, 2n$. Zmieniając numerację wierszy oraz kolumn możemy założyć, że $r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_{2n}$ oraz $c_1 \geq c_2 \geq \dots \geq c_{2n}$.

Oznaczmy przez A, B, C, D sumy liczb w czterech ćwiartkach tablicy, jak pokazuje rysunek 3.

Wówczas $A + B + C + D = 0$, skąd wynika, że w ciągu (A, B, C, D, A) istnieją dwie kolejne liczby, z których jedna jest nieujemna, a druga niedodatnia. Przyjmijmy na przykład, że $AB \leq 0$. Rozumowanie w pozostałych przypadkach jest analogiczne.

	1	2	...	n	$n+1$	...	$2n$
1	A						B
2							
$\vdots$							
n							
$n+1$	D						C
$n+2$							
$\vdots$							
$2n$							

rys. 3

Liczby A i B powstały z sumowania n^2 liczb rzeczywistych o wartości bezwzględnej nie większej niż 1, a więc $|A| \leq n^2$ oraz $|B| \leq n^2$. Jedna z liczb A, B jest nieujemna, a druga niedodatnia, więc $|A + B| \leq \max(|A|, |B|) \leq n^2$. Stąd otrzymujemy również $|C + D| = |A + B| \leq n^2$.

Jeżeli $r_n \geq 0$, to liczby $r_1, r_2, \dots, r_n$ są nieujemne. Wtedy ich suma $A + B$ jest też nieujemna, skąd uzyskujemy $r_1 + r_2 + \dots + r_n = A + B \leq n^2$. Zatem co najmniej jedna z (nieujemnych) liczb $r_1, r_2, \dots, r_n$ nie przekracza n .

Jeżeli natomiast $r_n < 0$, to liczby $r_{n+1}, r_{n+2}, \dots, r_{2n}$ są ujemne i ich suma wynosi $C + D$. Wtedy $|r_{n+1}| + |r_{n+2}| + \dots + |r_{2n}| = |C + D| \leq n^2$. Stąd wynika, że co najmniej jedna z liczb $|r_{n+1}|, |r_{n+2}|, \dots, |r_{2n}|$ nie przekracza n .

To dowodzi zadania.

(wp)

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w internecie pod adresem: www.om.edu.pl



LVI Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia trzeciego

14 kwietnia 2005 r. (drugi dzień zawodów)

Zadanie 4. Dana jest liczba rzeczywista $c > -2$. Dowieść, że jeżeli liczby $x_1, x_2, \dots, x_n$ ($n \geq 2$) są dodatnie oraz

$$\begin{aligned} \sqrt{x_1^2 + cx_1x_2 + x_2^2} + \sqrt{x_2^2 + cx_2x_3 + x_3^2} + \dots + \sqrt{x_n^2 + cx_nx_1 + x_1^2} = \\ = \sqrt{c+2}(x_1 + x_2 + \dots + x_n), \end{aligned}$$

to $c = 2$ lub $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Rozwiązanie

Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$a_i = \sqrt{c+2}(x_i + x_{i+1})$ oraz $b_i = 2\sqrt{x_i^2 + cx_ix_{i+1} + x_{i+1}^2}$ dla $i = 1, 2, \dots, n$, przyjmując $x_{n+1} = x_1$. Liczby a_i są dodatnie. Redukując wyrazy podobne otrzymujemy zależność $a_i^2 - b_i^2 = (c-2)(x_i - x_{i+1})^2$. Stąd oraz z danej w treści zadania równości dostajemy

$$0 = \sum_{i=1}^n (a_i - b_i) = \sum_{i=1}^n \frac{a_i^2 - b_i^2}{a_i + b_i} = (c-2) \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - x_{i+1})^2}{a_i + b_i}.$$

Prawa strona powyższej równości jest równa 0 jedynie wtedy, gdy $c = 2$ lub $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Zadanie 5. Niech k będzie liczbą naturalną większą od 1 i niech $m = 4k^2 - 5$. Wykazać, że istnieją takie liczby całkowite dodatnie a, b , że każdy wyraz ciągu (x_n) określonego wzorami

$$x_1 = a, \quad x_2 = b, \quad x_{n+2} = x_{n+1} + x_n \quad \text{dla } n \geq 1$$

jest względnie pierwszy z liczbą m .

Rozwiązanie

Wykażemy, że warunki zadania spełniają liczby $a = 1$, $b = 2k^2 + k - 2$. Udowodnimy indukcyjnie, że $x_n \equiv b^{n-1} \pmod{m}$ dla $n = 1, 2, 3, \dots$. Dla $n = 1$ i $n = 2$ zależność ta jest oczywiście spełniona.

Korzystając ze związku $4k^2 \equiv 5 \pmod{m}$ uzyskujemy kolejno:

$$2b = 4k^2 + 2k - 4 \equiv 2k + 1 \pmod{m},$$

$$4b^2 \equiv 4k^2 + 4k + 1 \equiv 4k + 6 \equiv 4b + 4 \pmod{m}.$$

Liczby 4 i m są względnie pierwsze, więc $b^2 \equiv b + 1 \pmod{m}$. Stąd i z założenia indukcyjnego dostajemy

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n \equiv b^n + b^{n-1} \equiv b^{n+1} \pmod{m}.$$

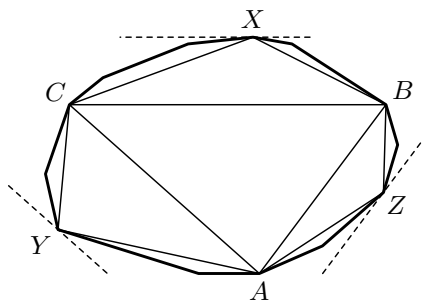
Dowód indukcyjny jest zakończony.

Z uzyskanej w tym dowodzie zależności $b^2 \equiv b+1 \pmod{m}$ wynika, że liczby b i m są względnie pierwsze. Skoro zaś $x_n \equiv b^{n-1} \pmod{m}$, wnosimy stąd, że (dla każdego n) liczby x_n i m są względnie pierwsze.

Zadanie 6. Udowodnić, że każdy wielokąt wypukły o polu 1 zawiera sześciokąt wypukły o polu nie mniejszym niż $3/4$.

Rozwiązanie

Spośród wierzchołków danego wielokąta $\mathcal{W}$ wybieramy trzy A , B i C będące wierzchołkami trójkąta o największym polu, równym s . Niech X będzie punktem wielokąta $\mathcal{W}$, leżącym po przeciwnej stronie prostej BC niż punkt A i oddalonym najdalej od prostej BC (rys. 4). Analogicznie definiujemy punkty Y i Z .



rys. 4

Wykażemy, że pole sześciokąta $AZBXCXY$ jest nie mniejsze niż $3/4$, co zakończy rozwiązanie zadania.

Przez punkty A , B i C poprowadźmy proste równoległe odpowiednio do prostych BC , CA i AB wyznaczające trójkąt o wierzchołkach D , E , F (rys. 5). Z faktu, iż trójkąt ABC ma największe pole spośród wszystkich trójkątów o wierzchołkach w wierzchołkach wielokąta $\mathcal{W}$ wynika, że wielokąt $\mathcal{W}$ jest zawarty w trójkącie DEF .

Przez punkty X , Y , Z prowadzimy proste równoległe odpowiednio do prostych BC , CA , AB przecinające boki trójkąta DEF w punktach K , L , M , N , P , Q , jak na rysunku 5. Z określenia punktów X , Y , Z wynika, że wielokąt $\mathcal{W}$ jest zawarty w sześciokącie o wierzchołkach K , L , M , N , P , Q .

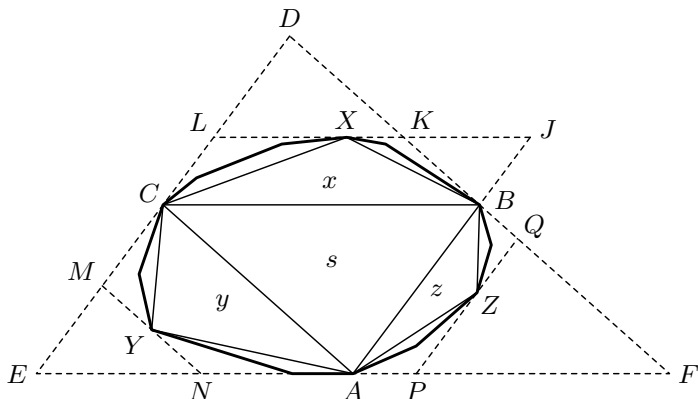
Oznaczmy przez s pole trójkąta ABC . Wówczas każdy z trójkątów BCD , CAE i ABF ma pole równe s . Niech ponadto x , y , z oznaczają odpowiednio pola trójkątów BCX , CAY i ABZ . Należy wykazać, że $x+y+z+s \geq 3/4$.

Niech J będzie takim punktem, że czworokąt $CBJL$ jest równoległobokiem. Wówczas trójkąty CBD i JKB są podobne. Oznaczając przez $[\mathcal{F}]$ pole figury $\mathcal{F}$, mamy zależności

$$\frac{[JKB]}{[CBD]} = \left(\frac{KB}{BD}\right)^2 = \left(\frac{[CBK]}{[CBD]}\right)^2 = \left(\frac{[CBX]}{[CBD]}\right)^2 = \frac{x^2}{s^2},$$

czyli $[JKB] = x^2/s$. Stąd otrzymujemy

$$[CBKL] = [CBJL] - [JKB] = 2x - [JKB] = 2x - \frac{x^2}{s}.$$



rys. 5

Analogicznie wyrażamy pola trapezów $ACMN$ i $BAPQ$. Zatem pole sześciokąta o wierzchołkach K, L, M, N, P, Q wynosi

$$s + \left(2x - \frac{x^2}{s}\right) + \left(2y - \frac{y^2}{s}\right) + \left(2z - \frac{z^2}{s}\right) = s + 2x + 2y + 2z - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{s}.$$

Ponieważ sześciokąt ten zawiera dany wielokąt $\mathcal{W}$, więc

$$s + 2x + 2y + 2z - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{s} \geq 1.$$

Wystarczy zatem wykazać, że

$$s + x + y + z \geq \frac{3}{4} \left(s + 2x + 2y + 2z - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{s} \right).$$

Mnożąc obie strony tej nierówności przez $12s$ oraz redukując wyrazy podobne uzyskujemy jej równoważną postać:

$$(3x - s)^2 + (3y - s)^2 + (3z - s)^2 \geq 0,$$

a ta ostatnia nierówność jest oczywiście spełniona.

(wp)

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w internecie pod adresem: www.om.edu.pl



LVII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego

I seria (12 września 2005 r. – 10 października 2005 r.)

1. Wyznaczyć wszystkie nieujemne liczby całkowite n , dla których liczba $2^n + 105$ jest kwadratem liczby całkowitej.

2. Rozwiązać w liczbach rzeczywistych nieujemnych x równanie $\sqrt[5]{x} = \lfloor \sqrt[5]{3x} \rfloor$.

Uwaga: $\lfloor t \rfloor$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od t .

3. Trójkąt ostrokątny ABC jest wpisany w okrąg o środku O . Punkt D jest rzutem prostokątnym punktu C na prostą AB , a punkty E i F są rzutami prostokątnymi punktu D odpowiednio na proste AC i BC . Wykazać, że pole czworokąta $EOFC$ jest równe połowie pola trójkąta ABC .

4. Uczestnicy zawodów matematycznych rozwiązywali sześć zadań, każde oceniane jedną z ocen 6, 5, 2, 0. Okazało się, że dla każdej pary uczestników A, B można wskazać takie dwa zadania, że w każdym z nich A uzyskał inną ocenę niż B .

Wyznaczyć największą liczbę uczestników, dla której taka sytuacja jest możliwa.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

10 października 2005 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.



LVII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego

II seria (11 października 2005 r. – 7 listopada 2005 r.)

5. Niech a, b będą liczbami rzeczywistymi. Rozważamy funkcje

$$f(x) = ax + b|x| \quad \text{oraz} \quad g(x) = ax - b|x|.$$

Wykazać, że jeśli

$$f(f(x)) = x \quad \text{dla każdej liczby rzeczywistej } x,$$

to również

$$g(g(x)) = x \quad \text{dla każdej liczby rzeczywistej } x.$$

6. W trójkącie ostrokątnym ABC wysokości przecinają się w punkcie H . Prosta przechodząca przez H przecina odcinki AC i BC odpowiednio w punktach D i E . Prosta przechodząca przez H i prostopadła do prostej DE przecina prostą AB w punkcie F . Dowieść, że

$$\frac{DH}{HE} = \frac{AF}{FB}.$$

7. Dana jest liczba pierwsza $p > 3$ oraz takie liczby całkowite dodatnie a, b, c , że $a + b + c = p + 1$ oraz liczba $a^3 + b^3 + c^3 - 1$ jest podzielna przez p . Udowodnić, że co najmniej jedna z liczb a, b, c jest równa 1.

8. Czworościan $ABCD$ jest opisany na kuli o środku S i promieniu 1, przy czym $SA \geq SB \geq SC$. Wykazać, że $SA > \sqrt{5}$.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

7 listopada 2005 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.



LVII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego

III seria (8 listopada 2005 r. – 5 grudnia 2005 r.)

9. Dane są nieujemne liczby całkowite $k_1 < k_2 < \dots < k_m$. Niech $n = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \dots + 2^{k_m}$. Wyznaczyć liczbę nieparzystych współczynników wielomianu $P(x) = (x+1)^n$.

10. Liczby rzeczywiste dodatnie a, b, c spełniają warunek

$$ab + bc + ca = 3.$$

Dowieść, że

$$a^3 + b^3 + c^3 + 6abc \geq 9.$$

11. W czworokącie $ABCD$ miara kąta wewnętrznego przy wierzchołku A jest większa od 180° oraz zachodzi równość

$$AB \cdot CD = AD \cdot BC.$$

Punkt P jest symetryczny do punktu A względem prostej BD . Udowodnić, że $\sphericalangle PCB = \sphericalangle ACD$.

12. Niech a_0 będzie liczbą całkowitą dodatnią i niech

$$a_{i+1} = \begin{cases} a_i/2, & \text{gdy } a_i \text{ jest liczbą parzystą,} \\ 3a_i - 1, & \text{gdy } a_i \text{ jest liczbą nieparzystą} \end{cases}$$

dla $i = 0, 1, 2, \dots$.

Wykazać, że jeśli n jest liczbą całkowitą dodatnią spełniającą warunek $a_n = a_0$, to $2^n > a_0$.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

5 grudnia 2005 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.

Adresy Komitetów Okręgowych Olimpiady Matematycznej

- Dla województwa pomorskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Gdańskiego, ul. Wita Stwosza 57, 80-952 Gdańsk

- Dla województwa śląskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Śląskiego, ul. Bankowa 14, 40-005 Katowice.

- Dla województwa małopolskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego, ul. Reymonta 4, 30-095 Kraków.

- Dla województwa lubelskiego i podkarpackiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki UMCS, pl. Marii Skłodowskiej-Curie 1, 20-031 Lublin.

- Dla województwa łódzkiego i świętokrzyskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki Uniwersytetu Łódzkiego, ul. Banacha 22, 90-238 Łódź.

- Dla województwa wielkopolskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Adama Mickiewicza, ul. Umultowska 87, 61-614 Poznań

- Dla województwa lubuskiego i zachodniopomorskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Uniwersytet Szczeciński, Instytut Matematyki, ul. Wielkopolska 15, 70-451 Szczecin.

- Dla województwa kujawsko-pomorskiego i warmińsko-mazurskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, ul. Chopina 12/18, 87-100 Toruń.

- Dla województwa mazowieckiego i podlaskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyczny PAN, ul. Śniadeckich 8, skr. poczt. 21, 00-956 Warszawa 10

- Dla województwa dolnośląskiego i opolskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Politechniki Wrocławskiej, ul. Janiszewskiego 14a, 50-370 Wrocław.

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w internecie pod adresem: www.om.edu.pl



LVII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia pierwszego

(12 września 2005 r. – 5 grudnia 2005 r.)

Zadanie 1. Wyznaczyć wszystkie nieujemne liczby całkowite n , dla których liczba $2^n + 105$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie

Jeśli n jest liczbą nieparzystą, to liczba $2^n + 105$ daje z dzielenia przez 3 resztę 2. Ponieważ liczba będąca kwadratem liczby całkowitej nie może dawać reszty 2 z dzielenia przez 3, więc liczba n spełniająca warunki zadania musi być parzysta.

Przyjmijmy więc, że $n = 2k$ dla pewnej liczby całkowitej nieujemnej k . Chcemy rozwiązać równanie $2^{2k} + 105 = m^2$ w liczbach całkowitych nieujemnych k i m . Równanie to przepisujemy w postaci $(m - 2^k)(m + 2^k) = 105$.

Z uzyskanej równości wynika, że $m - 2^k > 0$. Oczywiście również spełniona jest nierówność $m + 2^k > m - 2^k$. Ponieważ $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$, więc wyznaczenie liczb całkowitych nieujemnych m i k spełniających zależność $(m - 2^k)(m + 2^k) = 105$ sprowadza się do rozwiązania czterech układów równań:

$$\begin{cases} m - 2^k = 7 \\ m + 2^k = 15 \end{cases} \quad \begin{cases} m - 2^k = 5 \\ m + 2^k = 21 \end{cases} \quad \begin{cases} m - 2^k = 3 \\ m + 2^k = 35 \end{cases} \quad \begin{cases} m - 2^k = 1 \\ m + 2^k = 105 \end{cases}$$

Odejmując stronami pierwsze równanie od drugiego dochodzimy do wniosku, że liczba $2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$ równa się 8, 16, 32 lub 104. Stąd uzyskujemy trzy możliwe wartości k ; są nimi: 2, 3 lub 4. Tym samym możliwe wartości liczby n wynoszą 4, 6 lub 8.

Bezpośrednio sprawdzamy, że dla uzyskanych trzech wartości n liczba $2^n + 105$ jest kwadratem liczby całkowitej:

$$\begin{aligned} 2^4 + 105 &= 121 = 11^2, \\ 2^6 + 105 &= 169 = 13^2, \\ 2^8 + 105 &= 361 = 19^2. \end{aligned}$$

Zadanie 2. Rozwiązać w liczbach rzeczywistych nieujemnych x równanie

$$\sqrt[5]{x} = \left\lceil \sqrt[5]{3x} \right\rceil.$$

Uwaga: $[t]$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od t .

Rozwiązanie

Niech x będzie liczbą spełniającą dane równanie. Wtedy liczba $y = \sqrt[5]{x}$ jest całkowita. Ponadto $y \geq 0$, gdyż $x \geq 0$. Podstawiając więc $x = y^5$ do rozpatrywanego równania otrzymujemy

$$y = \left\lceil \sqrt[5]{3} \cdot y \right\rceil.$$

Zależność ta oznacza, że

$$y \leq \sqrt[5]{3} \cdot y < y + 1.$$

Pierwsza z tych nierówności jest prawdziwa dla dowolnej liczby nieujemnej y . Druga natomiast jest równoważna nierówności

$$(1) \quad y < \frac{1}{\sqrt[5]{3}-1}.$$

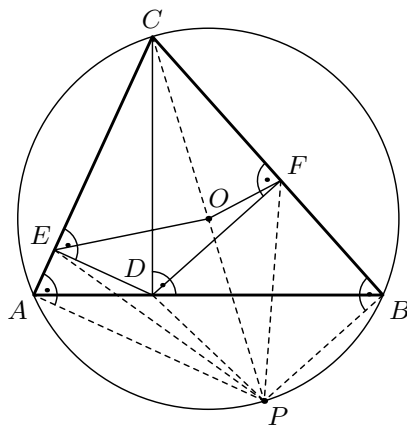
Ponieważ liczba $1/(\sqrt[5]{3}-1)$ należy do przedziału $(4,5)$, więc spośród liczb całkowitych nieujemnych tylko liczby 0, 1, 2, 3, 4 spełniają zależność (1). Tym samym niewiadoma x przyjmuje jedną z pięciu wartości: 0, 1, 2^5 , 3^5 lub 4^5 .

Bezpośrednie sprawdzenie pokazuje, że każda z tych pięciu liczb spełnia wyjściowe równanie.

Zadanie 3. Trójkąt ostrokątny ABC jest wpisany w okrąg o środku O . Punkt D jest rzutem prostokątnym punktu C na prostą AB , a punkty E i F są rzutami prostokątnymi punktu D odpowiednio na proste AC i BC . Wykazać, że pole czworokąta $EOFC$ jest równe połowie pola trójkąta ABC .

Rozwiązanie

Niech P będzie punktem symetrycznym do punktu C względem punktu O (rys. 1). Ponieważ trójkąt ABC jest ostrokątny, więc punkty A , P , B i C leżą na okręgu o środku O w tej właśnie kolejności.



rys. 1

Pola trójkątów COE i POE są równe, gdyż trójkąty te mają wspólną wysokość opuszczoną z wierzchołka E , a odcinki CO i OP są równej długości. Analogicznie, pola trójkątów COF i POF są równe. Stąd otrzymujemy $[EOFC] = \frac{1}{2} \cdot [EPFC]$, gdzie symbolem $[F]$ oznaczyliśmy pole figury F .

Aby dokończyć rozwiązanie należy dowieść, że $[EPFC] = [ABC]$.

Odcinek CP jest średnicą okręgu opisanego na trójkącie ABC , więc proste AP i AC są prostopadłe. Prosta DE jest prostopadła do prostej AC , więc równoległa do prostej AP . Stąd wynika, że pola trójkątów DEA i DEP są równe. Podobnie, pola trójkątów DFB i DFP są równe. Zatem

$$\begin{aligned}[EPFC] &= [EDFC] + [DEP] + [DFP] = \\ &= [EDFC] + [DEA] + [DFB] = [ABC],\end{aligned}$$

co kończy rozwiązanie zadania.

Zadanie 4. Uczestnicy zawodów matematycznych rozwiązywali sześć zadań, każde oceniane jedną z ocen 6, 5, 2, 0. Okazało się, że dla każdej pary uczestników A , B można wskazać takie dwa zadania, że w każdym z nich A uzyskał inną ocenę niż B .

Wyznaczyć największą liczbę uczestników, dla której taka sytuacja jest możliwa.

Rozwiązanie

Wykażemy, że największą liczbą uczestników, dla której taka sytuacja jest możliwa, jest 1024. W dalszym ciągu przyjmiemy, że dopuszczalnymi ocenami są liczby 0, 1, 2, 3 (zamiast 5 punktów stawiamy 4, a następnie każdą ocenę dzielimy przez 2).

Niech $P = \{0, 1, 2, 3\}$ i rozważmy zbiór

$$X = \{(a_1, a_2, \dots, a_6) : a_1, a_2, \dots, a_6 \in P\}.$$

Zbiór X ma oczywiście 4096 elementów. Będziemy rozważać podzbiory A zbioru X o następującej własności (*):

(*) jeśli $(a_1, a_2, \dots, a_6), (b_1, b_2, \dots, b_6) \in A$ to istnieją i, j takie, że

$$1 \leq i, j \leq 6, \quad i \neq j, \quad \text{oraz} \quad a_i \neq b_i, \quad a_j \neq b_j.$$

Wystarczy pokazać, że największa liczba elementów zbioru A o własności (*) wynosi 1024.

Najpierw pokazujemy, że jeśli zbiór A ma własność (*), to ma co najwyżej 1024 elementy. Załóżmy zatem, że mamy dany podzbiór A zbioru X mający własność (*) i przypuśćmy, że ma on co najmniej 1025 elementów. Ponieważ istnieją dokładnie 1024 ciągi długości 5 o wyrazach ze zbioru czteroelementowego P , więc z zasady szufladkowej Dirichleta wynika, że w zbiorze A istnieją co najmniej dwa ciągi, mające te same wyrazy od pierwszego do piątego. Te ciągi różnią się więc tylko jednym wyrazem – szóstym, co jest sprzeczne z własnością (*). Zatem zbiór A ma co najwyżej 1024 elementy.

Teraz pokazujemy, że istnieje zbiór A mający co najmniej 1024 elementy i mający własność (*). Wystarczy mianowicie wziąć następujący zbiór:

$$A = \{(a_1, a_2, \dots, a_6) \in X : 4 \mid a_1 + a_2 + \dots + a_6\}.$$

Najpierw pokazujemy, że zbiór A ma co najmniej 1024 elementy. Weźmy dowolne liczby $a_1, a_2, \dots, a_5 \in P$. Takiego wyboru możemy dokonać na 1024

sposoby. Niech r będzie resztą z dzielenia przez 4 sumy $a_1 + a_2 + \dots + a_5$ i przyjmijmy $a_6 = 4 - r$. Wtedy oczywiście $(a_1, a_2, \dots, a_6) \in A$, a więc wskazaliśmy w zbiorze A co najmniej 1024 różne ciągi. Wreszcie pokazujemy, że zbiór A ma własność (*). Przypuśćmy, że

$$(a_1, a_2, \dots, a_6), (b_1, b_2, \dots, b_6) \in A$$

oraz ciągi $(a_1, a_2, \dots, a_6)$ i $(b_1, b_2, \dots, b_6)$ różnią się tylko jednym wyrazem, np. wyrazem o indeksie k : $a_k \neq b_k$, gdzie $1 \leq k \leq 6$ oraz $a_i = b_i$ dla $i \neq k$. Ponieważ liczby $a_1 + a_2 + \dots + a_6$ i $b_1 + b_2 + \dots + b_6$ są podzielne przez 4, więc ich różnica też jest podzielna przez 4. Ale

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_6) - (b_1 + b_2 + \dots + b_6) = a_k - b_k.$$

Zatem liczba $a_k - b_k$ jest podzielna przez 4. Ponieważ $a_k, b_k \in P$, więc

$$a_k - b_k \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}.$$

W zbiorze $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ jest tylko jedna liczba podzielna przez 4, mianowicie 0. Zatem $a_k = b_k$, wbrew założeniu, że ciągi $(a_1, a_2, \dots, a_6)$ oraz $(b_1, b_2, \dots, b_6)$ różnią się wyrazem o indeksie k . Ta sprzeczność dowodzi, że zbiór A ma własność (*), co kończy dowód.

Zadanie 5. Niech a, b będą liczbami rzeczywistymi. Rozważamy funkcje

$$f(x) = ax + b|x| \quad \text{oraz} \quad g(x) = ax - b|x|.$$

Wykazać, że jeśli

$$f(f(x)) = x \quad \text{dla każdej liczby rzeczywistej } x,$$

to również

$$g(g(x)) = x \quad \text{dla każdej liczby rzeczywistej } x.$$

Rozwiązanie

Zauważmy, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x mamy

$$g(x) = ax - b|x| = -(a \cdot (-x) + b \cdot |-x|) = -f(-x).$$

Zatem dla każdej liczby rzeczywistej x otrzymujemy

$$g(g(x)) = -f(-g(x)) = -f(f(-x)) = -(-x) = x,$$

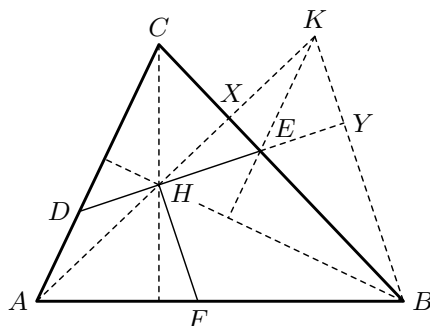
co należało udowodnić.

Zadanie 6. W trójkącie ostrokątnym ABC wysokości przecinają się w punkcie H . Prosta przechodząca przez H przecina odcinki AC i BC odpowiednio w punktach D i E . Prosta przechodząca przez H i prostopadła do prostej DE przecina prostą AB w punkcie F . Dowieść, że

$$\frac{DH}{HE} = \frac{AF}{FB}.$$

Rozwiązanie

Niech K będzie punktem przecięcia prostej AH z prostą przechodzącą przez punkt B i równoległą do prostej FH (rys. 2). Oznaczmy przez X rzut prostokątny punktu A na prostą BC , zaś przez Y punkt przecięcia prostych prostopadłych DE i BK .



rys. 2

Odcinki BX i HY są wysokościami w trójkącie BHK , a zatem prosta KE zawiera trzecią wysokość tego trójkąta. Zatem prosta KE jest prostopadłą do prostej BH , czyli równoległą do prostej AC . Stąd

$$\frac{DH}{HE} = \frac{AH}{HK} = \frac{AF}{FB}.$$

Zadanie 7. Dana jest liczba pierwsza $p > 3$ oraz takie liczby całkowite dodatnie a, b, c , że $a + b + c = p + 1$ oraz liczba $a^3 + b^3 + c^3 - 1$ jest podzielna przez p . Udowodnić, że co najmniej jedna z liczb a, b, c jest równa 1.

Rozwiązanie

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} (a+b+c)^3 &= a^3 + b^3 + c^3 + 3(a^2b + b^2a + b^2c + c^2b + c^2a + a^2c + 2abc) = \\ &= a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)(b+c)(c+a). \end{aligned}$$

Zgodnie z warunkami zadania liczby $a+b+c$ oraz $a^3+b^3+c^3$ dają z dzielenia przez p resztę 1, a więc na mocy powyższej tożsamości liczba

$$3(a+b)(b+c)(c+a)$$

jest podzielna przez p . Skoro p jest liczbą pierwszą różną od 3, to któryś z czynników $a+b$, $b+c$ lub $c+a$ jest podzielny przez p . Przyjmijmy, bez straty ogólności, że $p \mid a+b$.

Liczby a, b, c są całkowite dodatnie, więc $0 < a+b < a+b+c = p+1$. Stąd wynika, że $a+b = p$, czyli $c = 1$.

Zadanie 8. Czworokąt $ABCD$ jest opisany na kuli o środku S i promieniu 1, przy czym $SA \geq SB \geq SC$. Wykazać, że $SA > \sqrt{5}$.

Rozwiązanie

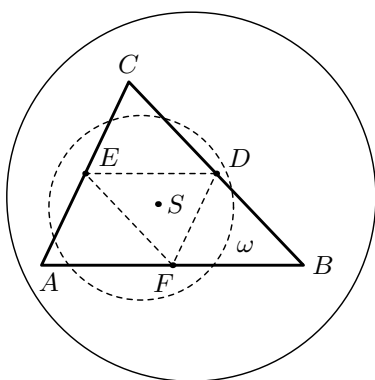
Udowodnimy najpierw następujący lemat.

Lemat

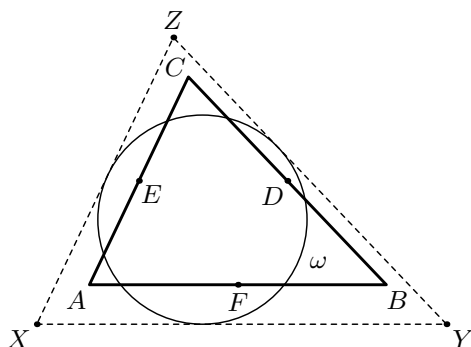
Trójkąt ABC jest zawarty w kole o promieniu R . Okrąg o promieniu r jest wpisany w trójkąt ABC . Wówczas $R \geq 2r$.

Dowód

Niech D, E, F będą odpowiednio środkami boków BC, CA, AB (rys. 3). Oznaczmy ponadto przez S punkt przecięcia środkowych AD, BE i CF . Rozpatrzmy dalej jednokładność o środku S i skali $-1/2$. Jednokładność ta przeprowadza punkty A, B i C odpowiednio na punkty D, E i F , natomiast okrąg o promieniu R zawierający trójkąt ABC na okrąg ω o promieniu $R/2$ zawierający trójkąt DEF .



rys. 3



rys. 4

Poprowadźmy styczną k_A do okręgu ω , która jest równoległa do boku BC i która leży po przeciwnej stronie prostej BC niż punkt A . Taka prosta istnieje, gdyż okrąg ω przecina prostą BC . Analogicznie konstruujemy styczne k_B i k_C równoległe odpowiednio do prostych CA i AB . Proste k_A, k_B, k_C wyznaczają boki trójkąta XYZ podobnego do trójkąta ABC (rys. 4). Ponadto okrąg ω jest wpisany w trójkąt XYZ . Ponieważ trójkąt ABC jest zawarty w trójkącie XYZ , więc promień okręgu wpisanego w trójkąt ABC nie przekracza promienia okręgu wpisanego w trójkąt XYZ . Stąd $r \leq R/2$, czyli $R \geq 2r$. To kończy dowód lematu.

Przystępujemy do rozwiązania zadania.

Rozpatrzmy płaszczyznę π przechodzącą przez punkt S i równoległą do płaszczyzny ABC . Płaszczyzna π przecina krawędzie AD, BD, CD odpowiednio w punktach A', B', C' i jej przekrój ze sferą wpisaną w czworoscian $ABCD$ jest okręgiem ω o promieniu 1, zawartym w trójkącie $A'B'C'$. Jednokładność o środku D , która przeprowadza trójkąt $A'B'C'$ na trójkąt ABC odwzorowuje okrąg ω na okrąg o promieniu większym niż 1 i zawartym w tró-

kącie ABC . Stąd wniosek, że promień okręgu wpisanego w trójkąt ABC jest większy od 1.

Niech T będzie punktem styczności sfery wpisanej w czworościan $ABCD$ ze ścianą ABC i przypuśćmy, że $SA \leq \sqrt{5}$. Wtedy również $SB \leq \sqrt{5}$ oraz $SC \leq \sqrt{5}$. Ponadto

$$TA = \sqrt{SA^2 - 1} \leq 2$$

i analogicznie $TB \leq 2$ oraz $TC \leq 2$. Zatem trójkąt ABC leży wewnątrz okręgu o środku T i promieniu 2, co oznacza (na mocy lematu), że promień okręgu wpisanego w trójkąt ABC jest mniejszy lub równy 1. Otrzymaliśmy sprzeczność, gdyż jak udowodniliśmy wyżej promień ten jest większy od 1. Sprzeczność ta dowodzi, że $SA > \sqrt{5}$.

Zadanie 9. Dane są nieujemne liczby całkowite $k_1 < k_2 < \dots < k_m$. Niech

$$n = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \dots + 2^{k_m}.$$

Wyznaczyć liczbę nieparzystych współczynników wielomianu

$$P(x) = (x+1)^n.$$

Rozwiązanie

Na początku udowodnimy następujący lemat:

Lemat

Jeśli $1 \leq t \leq 2^k$, to liczba $\binom{2^k}{t}$ jest parzysta.

Dowód

Zauważmy, że

$$\binom{2^k}{t} = \frac{2^k \cdot (2^k - 1) \cdot (2^k - 2) \cdot \dots \cdot (2^k - (t-2)) \cdot (2^k - (t-1))}{t \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (t-2) \cdot (t-1)}.$$

Następnie, dla dowolnych liczb j i p takich, że $1 \leq j \leq k$ oraz $1 \leq p < t$ zachodzi następująca równoważność

$$2^j \mid p \Leftrightarrow 2^j \mid 2^k - p.$$

Stąd wynika, że w rozkładzie liczb p i $2^k - p$ na czynniki pierwsze, liczba 2 występuje w tej samej potędze. Zatem liczba 2 występuje w tej samej potędze w liczniku i mianowniku ułamka

$$\frac{(2^k - 1) \cdot (2^k - 2) \cdot \dots \cdot (2^k - (t-2)) \cdot (2^k - (t-1))}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (t-2) \cdot (t-1)}.$$

Ponieważ $t < 2^k$, więc liczba 2 występuje w rozkładzie liczby t w potęgę o wykładniku mniejszym od k . Zatem w liczniku ułamka $\frac{2^k}{t}$ występuje więcej dwójek niż w mianowniku, co dowodzi, że ułamek

$$\frac{2^k \cdot (2^k - 1) \cdot (2^k - 2) \cdot \dots \cdot (2^k - (t-2)) \cdot (2^k - (t-1))}{t \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (t-2) \cdot (t-1)}$$

(po skróceniu) jest liczbą parzystą. To kończy dowód lematu.

Z lematu wynika, że wielomian

$$(x+1)^{2^k} = x^{2^k} + \binom{2^k}{1} x^{2^k-1} + \dots + \binom{2^k}{2^k-1} x + 1$$

ma dokładnie dwa współczynniki nieparzyste: przy x w najwyższej potęgę oraz jedynek. Stąd wynika, że w wielomianie

$$(x+1)^n = (x+1)^{2^{k_1}} \cdot (x+1)^{2^{k_2}} \cdot \dots \cdot (x+1)^{2^{k_m}}$$

jedyne współczynniki nieparzyste mogą wystąpić przy iloczynach postaci $x^{2^{k_{i_1}}} \cdot \dots \cdot x^{2^{k_{i_j}}}$ (a także przy iloczynie jedynek). Takich iloczynów (łącznie z iloczynem jedynek) jest 2^m . Musimy tylko udowodnić, że nie nastąpi redukcja wyrazów podobnych zmniejszająca liczbę współczynników nieparzystych. Wynika to z następującego lematu:

Lemat

Jeśli $k_1 < k_2 < \dots < k_m$, $j_1 < j_2 < \dots < j_s$ oraz ciągi $(k_1, \dots, k_m)$ i $(j_1, \dots, j_s)$ są różne, to $2^{k_1} + \dots + 2^{k_m} \neq 2^{j_1} + \dots + 2^{j_s}$.

Dowód

Przypuścimy, że

$$2^{k_1} + \dots + 2^{k_m} = 2^{j_1} + \dots + 2^{j_s}.$$

Jeśli $2^{k_m} = 2^{j_s}$, to w powyższej równości możemy skrócić najwyższe potęgi. Bez zmniejszenia ogólności możemy więc założyć, że najwyższe potęgi są różne, np. $2^{k_m} > 2^{j_s}$. Mamy wtedy:

$$\begin{aligned} 2^{k_1} + \dots + 2^{k_m} &\geq 2^{k_m} > 2^{k_m} - 1 = 2^{k_m-1} + 2^{k_m-2} + \dots + 2^2 + 2^1 + 1 \geq \\ &\geq 2^{j_1} + \dots + 2^{j_s}. \end{aligned}$$

To kończy dowód lematu i tym samym dowodzi, że wielomian $(x+1)^n$ ma 2^m współczynników nieparzystych.

Zadanie 10. Liczby rzeczywiste dodatnie a, b, c spełniają warunek

$$ab + bc + ca = 3.$$

Dowieść, że

$$a^3 + b^3 + c^3 + 6abc \geq 9.$$

Rozwiązanie

Wykażemy najpierw, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c spełniona jest nierówność

$$(1) \quad a^3 + b^3 + c^3 + 6abc \geq (a+b+c)(ab+bc+ca).$$

Wymnażając nawiasy przepisujemy nierówność (1) w postaci

$$a^3 + b^3 + c^3 - (a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2) + 3abc \geq 0,$$

po czym grupując odpowiednie wyrazy sprowadzamy ją do zależności

$$a(a-b)(a-c) + b(b-c)(b-a) + c(c-a)(c-b) \geq 0.$$

Bez straty ogólności przyjmijmy, że $a \leq b \leq c$ oraz zapiszmy ostatnią nierówność jako

$$a(b-a)(c-a) + (c-b)(c(c-a) - b(b-a)) \geq 0.$$

Oba składniki powyższej sumy są nieujemne. To kończy dowód nierówności (1).

Udowodnimy następnie, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c spełniona jest nierówność

$$(2) \quad (a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca).$$

Istotnie: nierówność (2) jest równoważna zależności $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$, która z kolei po pomnożeniu stronami przez 2 sprowadza się do zależności $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0$. Dowód nierówności (2) jest więc zakończony.

Korzystając z nierówności (1), (2) oraz uwzględniając dany w treści zadania warunek $ab+bc+ca=3$ otrzymujemy

$$a^3+b^3+c^3+6abc \geq \sqrt{3(ab+bc+ca)} \cdot (ab+bc+ca) = 9.$$

Zadanie 11. W czworokącie $ABCD$ miara kąta wewnętrznego przy wierzchołku A jest większa od 180° oraz zachodzi równość

$$AB \cdot CD = AD \cdot BC.$$

Punkt P jest symetryczny do punktu A względem prostej BD . Udowodnić, że $\sphericalangle PCB = \sphericalangle ACD$.

Rozwiązanie

Jeśli $AB=AD$, to z danej równości wynika, że $CD=BC$. Wtedy punkty A i P leżą na dwusiecznej kąta BCD , skąd bezpośrednio wnioskujemy, że $\sphericalangle PCB = \sphericalangle ACD$.

Przyjmijmy więc w dalszej części rozwiązania, że $AB \neq AD$ oraz niech dla ustalenia uwagi $AB < AD$ (rys. 5).

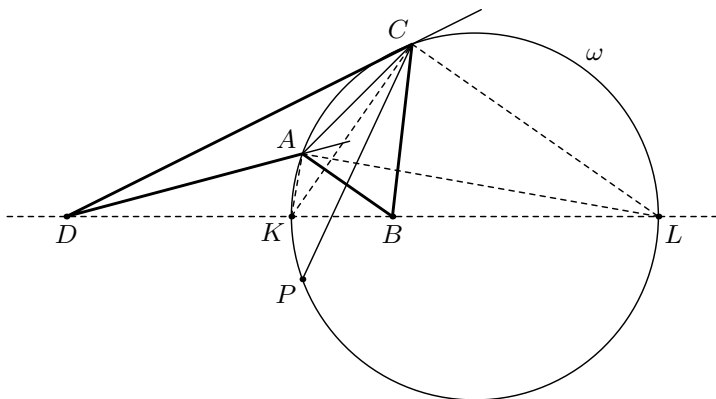
Załóżmy, że dwusieczna kąta DAB przecina odcinek BD w punkcie K . Wówczas na mocy twierdzenia o dwusiecznej otrzymujemy

$$\frac{KB}{KD} = \frac{AB}{AD} = \frac{BC}{CD},$$

skąd wynika, że punkt K leży również na dwusiecznej kąta BCD . Innymi słowy, dwusieczne kątów BAD i BCD przecinają się w punkcie K leżącym na prostej BD . Analogicznie, korzystając z twierdzenia o dwusiecznej kąta zewnętrznego dowodzimy, że dwusieczne kątów *zewnątrznych* BAD i BCD przecinają się w punkcie L , który leży na prostej BD . Ponadto

$$\sphericalangle KAL = \sphericalangle KAB + \sphericalangle BAL = 90^\circ,$$

$$\sphericalangle KCL = \sphericalangle KCB + \sphericalangle BCL = 90^\circ.$$



rys. 5

Stąd wynika, że punkty A i C leżą na okręgu ω o średnicy KL . Punkt P — symetryczny do punktu A względem prostej KL — również leży na okręgu ω . Ponadto łuki AK i KP okręgu ω (nie zawierające punktu C) są równej długości, a więc $\sphericalangle ACK = \sphericalangle KCP$. Stąd

$$\sphericalangle ACD = \sphericalangle DCK - \sphericalangle ACK = \sphericalangle KCB - \sphericalangle KCP = \sphericalangle PCB,$$

co należało wykazać.

Zadanie 12. Niech a_0 będzie liczbą całkowitą dodatnią i niech

$$a_{i+1} = \begin{cases} a_i/2, & \text{gdy } a_i \text{ jest liczbą parzystą,} \\ 3a_i - 1, & \text{gdy } a_i \text{ jest liczbą nieparzystą} \end{cases}$$

dla $i = 0, 1, 2, \dots$

Wykazać, że jeśli n jest liczbą całkowitą dodatnią spełniającą warunek $a_n = a_0$, to $2^n > a_0$.

Rozwiązanie

Niech a_ℓ będzie największym spośród wyrazów $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$. Wówczas ciąg $b_i = a_{\ell+i}$ dla $i = 0, 1, 2, \dots$ także spełnia dany w treści zadania warunek rekurencyjny oraz równość $b_n = b_0$. Ponadto b_0 jest największą liczbą spośród $b_0, b_1, \dots, b_{n-1}$.

Możemy więc bez straty ogólności przyjąć, że a_0 jest największą liczbą spośród $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$. Stąd w szczególności wynika, że a_0 jest liczbą parzystą.

Oznaczmy: $f(x) = x/2$ oraz $g(x) = 3x - 1$. Wówczas równość $a_0 = a_n$ możemy przypisać w postaci

$$(1) \quad a_0 = (f_n \circ f_{n-1} \circ \dots \circ f_1)(a_0),$$

gdzie każda z funkcji $f_1, f_2, \dots, f_n$ jest równa funkcji f lub funkcji g . Przyjmijmy w dalszej części rozwiązania, że w złożeniu występującym z prawej strony równości (1) znajduje się dokładnie r funkcji f oraz dokładnie s funkcji g . Wtedy oczywiście $r + s = n$ oraz $r, s \geq 1$.

Odwzorowanie g przeprowadza wyraz nieparzysty a_i na wyraz parzysty $3a_i - 1$. Stąd wynika, że jeśli dla pewnego i mamy $f_i = g$, to $f_{i-1} = f$. Wyraz a_0 jest parzysty, więc $f_1 = f$. Z obserwacji tych wynika, że $r \geq s$.

Niech $p(x) = 3x$. Wtedy dla dowolnej liczby rzeczywistej x spełniona jest zależność $g(x) < p(x)$. Obie funkcje p i q są rosnące, więc zastępując każdą funkcję g znajdującą się w równości (1) przez funkcję p powiększamy wartość wyrażenia stojącego z prawej stronie równości (1). Innymi słowy

$$(2) \quad a_0 < (\tilde{f}_n \circ \tilde{f}_{n-1} \circ \dots \circ \tilde{f}_1)(a_0),$$

gdzie tym razem każda z funkcji $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \dots, \tilde{f}_n$ jest równa funkcji f lub funkcji p . Nierówność (2) jest równoważna zależności

$$a_0 < \frac{a_0 \cdot 3^s}{2^r},$$

czyli $3^s > 2^r$.

Niech

$$h(x) = g(f(x)) = \frac{3}{2}x - 1.$$

Jak zauważyliśmy wyżej, w równości (1) mamy $f_1 = f$. Ponadto jeśli dla pewnego $i \geq 2$ spełniona jest zależność $f_i = g$, to $f_{i-1} = f$. Zatem związek (1) możemy przepisać w postaci

$$(3) \quad a_0 = (g_r \circ g_{r-1} \circ \dots \circ g_1)(a_0),$$

gdzie każda z funkcji $g_1, g_2, \dots, g_r$ jest równa f lub h . Ponadto z prawej strony równości (3) występuje dokładnie s funkcji h oraz $r - s$ funkcji f .

Dalej zauważmy, że $h(f(x)) = \frac{3}{4}x - 1 < \frac{3}{4}x - \frac{1}{2} = f(h(x))$ dla dowolnej liczby rzeczywistej x . Obie funkcje f i h są rosnące, zatem wymieniając w równości (3) dowolne złożenie $f \circ h$ na złożenie $h \circ f$ zmniejszamy wartość wyrażenia stojącego po prawej stronie równości (3). Przy pomocy skończonej liczby takich zamian możemy doprowadzić prawą stronę związku (3) do postaci

$$\underbrace{(h \circ h \circ \dots \circ h)}_{s \text{ razy}} \circ \underbrace{(f \circ f \circ \dots \circ f)}_{r-s \text{ razy}}(a_0) = (h^s \circ f^{r-s})(a_0).$$

A zatem

$$(4) \quad a_0 \geq (h^s \circ f^{r-s})(a_0).$$

Udowodnimy indukcyjnie, że $h^s(x) = (\frac{3}{2})^s(x-2) + 2$ dla $s = 1, 2, \dots$ (gdzie h^s oznacza s -krotne złożenie funkcji h). Istotnie: Dla $s = 1$ powyższa równość jest spełniona, a krok indukcyjny wygląda następująco:

$$\begin{aligned} h^{s+1}(x) &= h(h^s(x)) = h\left(\left(\frac{3}{2}\right)^s(x-2) + 2\right) = \\ &= \frac{3}{2} \cdot \left(\left(\frac{3}{2}\right)^s(x-2) + 2\right) - 1 = \left(\frac{3}{2}\right)^{s+1}(x-2) + 2. \end{aligned}$$

Korzystając z udowodnionej właśnie zależności przepisujemy nierówność (4) jako

$$a_0 \geq \left(\frac{3}{2}\right)^s \left(\frac{a_0}{2^{r-s}} - 2\right) + 2.$$

Mnożąc ją stronami przez 2^r i przegrupowując wyrazy uzyskujemy

$$(3^s - 2^r)a_0 \leq 3^s \cdot 2^{r-s+1} - 2^{r+1}.$$

Wyżej udowodniliśmy, że $3^s > 2^r$, a więc $3^s - 2^r \geq 1$. Zatem

$$a_0 \leq (3^s - 2^r)a_0 \leq 2^{r+1} \left(\left(\frac{3}{2}\right)^s - 1 \right) = 2^{n+1} \left(\left(\frac{3}{4}\right)^s - \left(\frac{1}{2}\right)^s \right).$$

Aby dokończyć rozwiązanie zadania wystarczy wykazać, że

$$\left(\frac{3}{4}\right)^s - \left(\frac{1}{2}\right)^s < \frac{1}{2} \quad \text{dla } s = 1, 2, 3, \dots$$

Bezpośrednio sprawdzamy, że dla $s = 1$ i dla $s = 2$ powyższa nierówność jest spełniona. Jeśli natomiast $s \geq 3$, to

$$\left(\frac{3}{4}\right)^s - \left(\frac{1}{2}\right)^s < \left(\frac{3}{4}\right)^s \leq \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64} < \frac{1}{2}.$$

Tym samym rozwiązanie zadania zostało zakończone.

(wg, wp)

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w internecie pod adresem: www.om.edu.pl



LVII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia drugiego

24 lutego 2006 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Liczby całkowite dodatnie a, b, c, x, y, z spełniają równości

$$a^2 + b^2 = c^2, \quad x^2 + y^2 = z^2$$

oraz nierówności

$$|x - a| \leq 1, \quad |y - b| \leq 1.$$

Wykazać, że zbiory $\{a, b\}$ oraz $\{x, y\}$ są równe.

2. Dany jest trójkąt ABC , w którym $AC + BC = 3AB$. Okrąg o środku I wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków BC i CA odpowiednio w punktach D i E . Niech K i L będą punktami symetrycznymi odpowiednio do punktów D i E względem punktu I . Udowodnić, że punkty A, B, K, L leżą na jednym okręgu.

3. Liczby dodatnie a, b, c spełniają warunek $ab + bc + ca = abc$.
Dowieść, że

$$\frac{a^4 + b^4}{ab(a^3 + b^3)} + \frac{b^4 + c^4}{bc(b^3 + c^3)} + \frac{c^4 + a^4}{ca(c^3 + a^3)} \geq 1.$$

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podeście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielnosci pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów i telefonów.



LVII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia drugiego

25 lutego 2006 r. (drugi dzień zawodów)

4. Niech c będzie ustaloną liczbą całkowitą dodatnią. Ciąg (a_n) jest określony przez warunki

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = d(a_n) + c \quad \text{dla } n = 1, 2, \dots,$$

gdzie $d(m)$ oznacza liczbę dodatnich dzielników liczby m . Wykazać, że istnieje taka liczba całkowita dodatnia k , że ciąg $a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots$ jest okresowy.

5. Punkt C jest środkiem odcinka AB . Okrąg o_1 przechodzący przez punkty A i C przecina okrąg o_2 przechodzący przez punkty B i C w różnych punktach D i E . Punkt P jest środkiem tego łuku AD okręgu o_1 , który nie zawiera punktu C . Punkt Q jest środkiem tego łuku BE okręgu o_2 , który nie zawiera punktu C . Dowieść, że proste PQ i CD są prostopadłe.

6. Dana jest liczba pierwsza p oraz liczba całkowita n , przy czym $p \geq n \geq 3$. Zbiór A składa się z n -wyrazowych ciągów o wyrazach ze zbioru $\{0, 1, 2, \dots, p-1\}$ i ma następującą własność:

Dla dowolnych dwóch ciągów $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ oraz $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ ze zbioru A istnieją takie różne liczby k, l, m , że

$$x_k \neq y_k, \quad x_l \neq y_l, \quad x_m \neq y_m.$$

Wyznaczyć największą możliwą liczbę elementów zbioru A .

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu czekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielnosci pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów i telefonów.



LVII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia drugiego

24 lutego 2006 r. (pierwszy dzień zawodów)

Zadanie 1. Liczby całkowite dodatnie a, b, c, x, y, z spełniają równości

$$a^2 + b^2 = c^2, \quad x^2 + y^2 = z^2$$

oraz nierówności

$$|x - a| \leq 1, \quad |y - b| \leq 1.$$

Wykazać, że zbiory $\{a, b\}$ oraz $\{x, y\}$ są równe.

Rozwiązanie

Wobec symetrii ról trójek (a, b, c) oraz (x, y, z) można przyjąć, że $z \geq c$. Patrząc na punkty $A = (a, b)$, $X = (x, y)$ na płaszczyźnie z początkiem układu współrzędnych $O = (0, 0)$ widzimy, że

$$z - c = OX - OA \leq AX = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} \leq \sqrt{2}.$$

Mamy więc dwie możliwości: $z = c + 1$ lub $z = c$.

1. Jeśli $z = c + 1$, to wtedy $x^2 + y^2 > a^2 + b^2$. Wobec tego $x > a$ lub $y > b$. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $x > a$, czyli $x = a + 1$. Wówczas

$$y^2 = z^2 - x^2 = (c + 1)^2 - (a + 1)^2 = b^2 + 2c - 2a.$$

Zatem liczby b i y są jednakowej parzystości. Ponadto $c > a$, więc powyższa równość implikuje również, że $y > b$. Uzyskaliśmy sprzeczność z warunkiem $|y - b| \leq 1$.

2. Jeśli $z = c$, to mamy równość $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$, czyli

$$(x - a)(x + a) = (b - y)(b + y).$$

Albo obie strony tego równania są równe zeru i wtedy mamy tezę ($x = a$, $y = b$), albo są różne od zera i wtedy

$$\frac{x + a}{b + y} = \frac{b - y}{x - a} = \pm \frac{|b - y|}{|x - a|} = \pm 1.$$

Wartość -1 wykluczamy, bo liczby a, b, x, y są dodatnie. Z ostatniej równości uzyskujemy zatem $a + x = b + y$ oraz $b - y = x - a$. Stąd dostajemy $x = b$ oraz $y = a$, czyli tezę zadania.

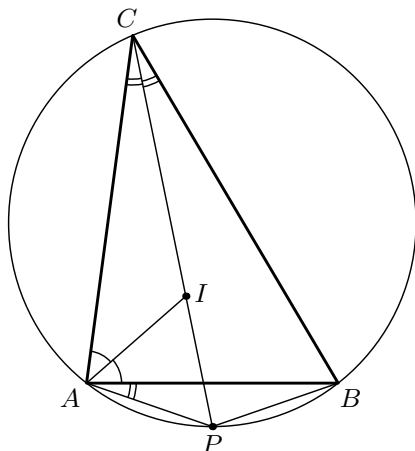
Zadanie 2. Dany jest trójkąt ABC , w którym $AC + BC = 3AB$. Okrąg o środku I wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków BC i CA odpowiednio w punktach D i E . Niech K i L będą punktami symetrycznymi odpowiednio do punktów D i E względem punktu I . Udowodnić, że punkty A, B, K, L leżą na jednym okręgu.

Rozwiązanie

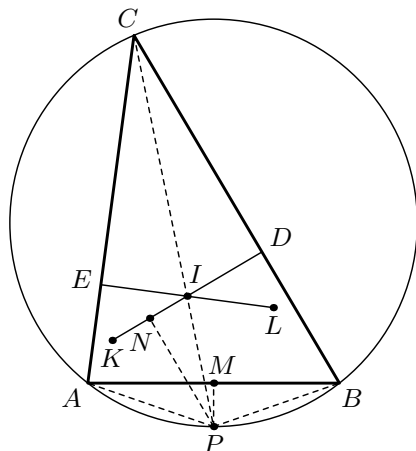
Oznaczmy przez P punkt przecięcia dwusiecznej kąta ACB z okręgiem opisanym na trójkącie ABC (rys. 1). Wówczas $AP = BP$. Ponadto

$$\begin{aligned}\sphericalangle PAI &= \sphericalangle PAB + \sphericalangle BAI = \sphericalangle PCB + \sphericalangle CAI = \\ &= \sphericalangle ACI + \sphericalangle CAI = \sphericalangle CIA,\end{aligned}$$

skąd wynika, że $AP = IP$.



rys. 1



rys. 2

Punkty A , B oraz I leżą więc na okręgu o środku P . Wykażemy, że na tym okręgu leżą również punkty K i L .

Punkty D i E są punktami styczności okręgu wpisanego w trójkąt ABC z bokami BC i AC , a więc $CD = CE = \frac{1}{2}(AC + BC - AB)$. Ponadto dana w treści zadania równość jest równoważna zależności $AB = \frac{1}{2}(AC + BC - AB)$. Stąd wynika, że $CD = AB$.

Oznaczmy przez M środek odcinka AB , a przez N rzut prostokątny punktu P na prostą DI (rys. 2). Wówczas proste PN i BC są równoległe, wobec czego $\sphericalangle PAM = \sphericalangle PCB = \sphericalangle IPN$. To w połączeniu z równością $AP = IP$ dowodzi, że trójkąty prostokątne APM i PIN są przystające. Stąd otrzymujemy $PN = AM$.

Proste CD i PN są równoległe, więc

$$\frac{ID}{IN} = \frac{CD}{PN} = \frac{AB}{AM} = 2,$$

skąd dostajemy $ID = 2 \cdot IN$. Zależność ta w połączeniu z równością $ID = IK$ implikuje, że $IN = KN$. Zatem punkt K jest symetryczny do punktu I względem prostej PN . Wobec tego $IP = KP$.

Analogicznie dowodzimy, że $IP = LP$. Z uzyskanych zależności wynika, że punkty A , B , K , L oraz I leżą na okręgu o środku P , co kończy rozwiązanie zadania.

Zadanie 3. Liczby dodatnie a, b, c spełniają warunek $ab+bc+ca=abc$. Dowieść, że

$$\frac{a^4+b^4}{ab(a^3+b^3)} + \frac{b^4+c^4}{bc(b^3+c^3)} + \frac{c^4+a^4}{ca(c^3+a^3)} \geq 1.$$

Rozwiązanie

Dzieląc równość $ab+bc+ca=abc$ stronami przez abc otrzymujemy

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1.$$

Podstawmy zatem: $x=1/a, y=1/b, z=1/c$. Wtedy liczby x, y, z są dodatnie, a ich suma wynosi 1. Ponadto

$$\frac{a^4+b^4}{ab(a^3+b^3)} = \frac{\frac{1}{x^4} + \frac{1}{y^4}}{\frac{1}{xy} \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} \right)} = \frac{x^4+y^4}{x^3+y^3}.$$

Zatem dowodzona nierówność przybiera postać

$$(1) \quad \frac{x^4+y^4}{x^3+y^3} + \frac{y^4+z^4}{y^3+z^3} + \frac{z^4+x^4}{z^3+x^3} \geq 1.$$

Wykażemy, że dla dowolnych liczb dodatnich x, y spełniona jest zależność

$$(2) \quad \frac{x^4+y^4}{x^3+y^3} \geq \frac{x+y}{2}.$$

Przekształcając równoważnie powyższą nierówność dostajemy kolejno

$$\begin{aligned} 2x^4+2y^4 &\geq x^4+x^3y+xy^3+y^4, \\ x^4-x^3y+y^4-xy^3 &\geq 0, \\ (x^3-y^3)(x-y) &\geq 0. \end{aligned}$$

Uzyskaliśmy zależność prawdziwą dla dowolnych liczb dodatnich x i y , a zatem nierówność (2) jest spełniona.

Analogicznie dowodzimy, że

$$(3) \quad \frac{y^4+z^4}{y^3+z^3} \geq \frac{y+z}{2} \quad \text{oraz} \quad \frac{z^4+x^4}{z^3+x^3} \geq \frac{z+x}{2}.$$

Dodając stronami związki (2), (3) oraz wykorzystując warunek $x+y+z=1$ otrzymujemy dowodzoną nierówność (1).

(wp)

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w internecie pod adresem: www.om.edu.pl



LVII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia drugiego

25 lutego 2006 r. (drugi dzień zawodów)

Zadanie 4. Niech c będzie ustaloną liczbą całkowitą dodatnią. Ciąg (a_n) jest określony przez warunki

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = d(a_n) + c \quad \text{dla } n = 1, 2, \dots,$$

gdzie $d(m)$ oznacza liczbę dodatnich dzielników liczby m . Wykazać, że istnieje taka liczba całkowita dodatnia k , że ciąg $a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots$ jest okresowy.

Rozwiązanie

Wykażemy, że $n = 1, 2, 3, \dots$ zachodzą nierówności $1 \leq a_n \leq 2c + 2$.

Pierwsza z nich jest oczywiście spełniona. Drugą wykażemy indukcyjnie.

Dla $n = 1$ mamy $a_1 = 1 \leq 2c + 2$, co jest prawdą. Ustalmy więc $n > 1$ i przyjmijmy, że $a_n \leq 2c + 2$.

Jeśli $k \geq 3$ jest liczbą całkowitą, to żadna liczba całkowita z przedziału $(\frac{1}{2}k, k)$ nie jest dzielnikiem liczby k . Wobec tego liczba k nie może mieć więcej niż $\frac{1}{2}k + 1$ dzielników dodatnich. Zatem

$$d(k) \leq \frac{k}{2} + 1 \quad \text{dla } k = 3, 4, \dots$$

Bezpośrednio sprawdzamy, że powyższa nierówność jest również spełniona dla $k = 1$ oraz dla $k = 2$. Stąd oraz z założenia indukcyjnego uzyskujemy

$$a_{n+1} = d(a_n) + c \leq \frac{a_n}{2} + 1 + c \leq \frac{2c+2}{2} + 1 + c = 2c + 2,$$

co kończy dowód indukcyjny postulowanej nierówności.

Ciąg (a_n) jest więc ograniczony, a zatem istnieją takie liczby całkowite dodatnie $k < l$, że $a_k = a_l$.

Każdy wyraz a_n danego ciągu wyznacza wyraz następny a_{n+1} , a więc ciąg $a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots$ jest okresowy o okresie równym $l - k$.

Zadanie 5. Punkt C jest środkiem odcinka AB . Okrąg o_1 przechodzący przez punkty A i C przecina okrąg o_2 przechodzący przez punkty B i C w różnych punktach D i E . Punkt P jest środkiem tego łuku AD okręgu o_1 , który nie zawiera punktu C . Punkt Q jest środkiem tego łuku BE okręgu o_2 , który nie zawiera punktu C . Dowieść, że proste PQ i CD są prostopadłe.

Rozwiązanie

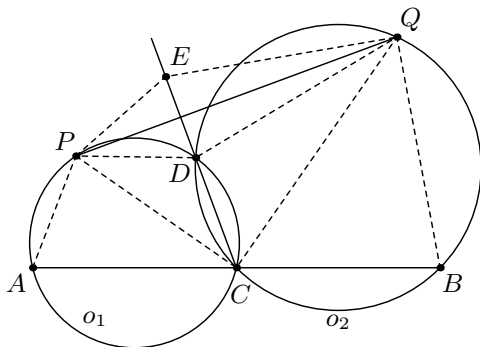
Jeśli $AC = CD$, to również $BC = CD$. Wtedy odcinki PC i QC są odpowiednio średnicami okręgów o_1 i o_2 . Zatem $\angle CDP = \angle CDQ = 90^\circ$, skąd wynika, że punkt D leży na odcinku PQ , a proste PQ i CD są prostopadłe.

Przyjmijmy więc w dalszej części rozwiązania, że $AC \neq CD$.

Niech E będzie takim punktem leżącym na półprostej CD , że $CE = AC$ (rys. 3). Wtedy również $CE = BC$.

Z zależności $CE = AC$ oraz $\sphericalangle ACP = \sphericalangle ECP$ wynika, że trójkąty ACP oraz ECP są przystające (cecha *bok-kąt-bok*). Wobec tego $EP = AP = DP$.

Analogicznie dowodzimy, że $EQ = DQ$.



rys. 3

Z uzyskanych równości wynika, że punkty D i E są symetryczne względem prostej PQ . Prosta DE jest więc prostopadła do prostej PQ , co kończy rozwiązanie zadania.

Zadanie 6. Dana jest liczba pierwsza p oraz liczba całkowita n , przy czym $p \geq n \geq 3$. Zbiór A składa się z n -wyrazowych ciągów o wyrazach ze zbioru $\{0, 1, 2, \dots, p-1\}$ i ma następującą własność:

Dla dowolnych dwóch ciągów $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ oraz $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ ze zbioru A istnieją takie różne liczby k, l, m , że

$$x_k \neq y_k, \quad x_l \neq y_l, \quad x_m \neq y_m.$$

Wyznaczyć największą możliwą liczbę elementów zbioru A .

Rozwiązanie

Odpowiedź: p^{n-2} .

Każde dwa różne ciągi zbioru A muszą różnić się na co najmniej jednej z początkowych $n-2$ pozycji. Wobec tego liczba ciągów w tym zbiorze nie przekracza liczby wszystkich ciągów $(n-2)$ -wyrazowych o wyrazach ze zbioru p -elementowego, czyli liczby p^{n-2} .

Skonstruujemy p^{n-2} ciągów o wyrazach ze zbioru $S = \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$ mających postulowaną własność. W tym celu rozpatrzmy wszystkie ciągi $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ o wyrazach ze zbioru S spełniające warunki

$$(1) \quad x_{n-1} \equiv \sum_{i=1}^{n-2} x_i \pmod{p} \quad \text{oraz} \quad x_n \equiv \sum_{i=1}^{n-2} ix_i \pmod{p}.$$

Ciągów takich jest p^{n-2} , ponieważ każdy ciąg $(x_1, x_2, \dots, x_{n-2})$ o wyrazach ze zbioru p -elementowego S wyznacza jednoznacznie wartości x_{n-1} i x_n .

Każde dwa różne ciągi spełniające zależności (1) różnią się na co najmniej jednej z początkowych $n-2$ pozycji. Chcemy zaś dowieść, że każde dwa takie ciągi $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ oraz $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ różnią się na co najmniej trzech pozycjach.

Jeśli ciągi te różnią się na co najmniej trzech miejscach o numerach $1, 2, \dots, n-2$, to nie ma czego dowodzić. Pozostaje zatem rozpatrzyć następujące dwa przypadki.

1. Odcinki początkowe $(x_1, x_2, \dots, x_{n-2})$ oraz $(y_1, y_2, \dots, y_{n-2})$ różnią się na dokładnie dwóch pozycjach o numerach i, j ($1 \leq i < j \leq n-2$).

Wtedy $x_i \neq y_i$ oraz $x_j \neq y_j$. Z zależności (1) otrzymujemy

$$\begin{cases} x_{n-1} - y_{n-1} \equiv (x_i - y_i) + (x_j - y_j) \pmod{p} \\ x_n - y_n \equiv i(x_i - y_i) + j(x_j - y_j) \pmod{p}. \end{cases}$$

Stąd $(x_n - y_n) - i(x_{n-1} - y_{n-1}) \equiv (j-i)(x_j - y_j) \pmod{p}$.

Liczba p jest pierwsza, a liczby x_j i y_j są różne i należą do zbioru S . Ponadto $1 \leq j-i < n \leq p$. Stąd wynika, że liczba $(x_n - y_n) - i(x_{n-1} - y_{n-1})$ nie jest podzielna przez p . Zatem któraś z liczb $x_{n-1} - y_{n-1}$ lub $x_n - y_n$ nie jest podzielna przez p . Wobec tego $x_{n-1} \neq y_{n-1}$ lub $x_n \neq y_n$. Rozpatrywane ciągi różnią się więc na pozycji o numerze $n-1$ lub n , czyli łącznie na co najmniej trzech pozycjach.

2. Odcinki początkowe $(x_1, x_2, \dots, x_{n-2})$ oraz $(y_1, y_2, \dots, y_{n-2})$ różnią się na dokładnie jednej pozycji o numerze i ($1 \leq i \leq n-2$).

Wtedy $x_i \neq y_i$ i podobnie korzystając z zależności (1) mamy

$$\begin{cases} x_{n-1} - y_{n-1} \equiv x_i - y_i \pmod{p} \\ x_n - y_n \equiv i(x_i - y_i) \pmod{p} \end{cases}$$

Stąd wynika, że liczby $x_{n-1} - y_{n-1}$ oraz $x_n - y_n$ nie są podzielne przez p . Zatem $x_{n-1} \neq y_{n-1}$ oraz $x_n \neq y_n$, czyli i w tym przypadku rozpatrywane ciągi różnią się na co najmniej trzech pozycjach.

(kd, wp)

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w internecie pod adresem: www.om.edu.pl



LVII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia trzeciego

5 kwietnia 2006 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Rozwiązać w liczbach rzeczywistych a, b, c, d, e układ równań

$$\begin{cases} a^2 = b^3 + c^3 \\ b^2 = c^3 + d^3 \\ c^2 = d^3 + e^3 \\ d^2 = e^3 + a^3 \\ e^2 = a^3 + b^3 \end{cases}$$

2. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite dodatnie k , dla których liczba $3^k + 5^k$ jest potęgą liczby całkowitej o wykładniku naturalnym większym od 1.

3. Dany jest sześciokąt wypukły $ABCDEF$, w którym $AC = DF$, $CE = FB$ oraz $EA = BD$. Dowieść, że proste łączące środki przeciwległych boków tego sześciokąta przecinają się w jednym punkcie.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów i telefonów.



LVII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia trzeciego

6 kwietnia 2006 r. (drugi dzień zawodów)

4. Na trójce liczb wykonujemy następującą operację. Wybieramy dwie spośród tych liczb i zastępujemy je ich sumą oraz ich iloczynem, pozostała liczba nie ulega zmianie. Rozstrzygnąć, czy rozpoczynając od trójki $(3, 4, 5)$ i wykonując tę operację możemy ponownie uzyskać trójkę liczb będących długościami boków trójkąta prostokątnego.

5. Dany jest czworościan $ABCD$, w którym $AB = CD$. Sfera wpisana w ten czworościan jest styczna do ścian ABC i ABD odpowiednio w punktach K i L . Dowieść, że jeżeli punkty K i L są środkami ciężkości ścian ABC i ABD , to czworościan $ABCD$ jest foremny.

6. Wyznaczyć wszystkie pary liczb całkowitych a, b , dla których istnieje taki wielomian $P(x)$ o współczynnikach całkowitych, że iloczyn $(x^2 + ax + b) \cdot P(x)$ jest wielomianem postaci

$$x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \dots + c_1x + c_0,$$

gdzie każda z liczb $c_0, c_1, \dots, c_{n-1}$ jest równa 1 lub -1 .

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów i telefonów.



LVII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia trzeciego

5 kwietnia 2006 r. (pierwszy dzień zawodów)

Zadanie 1. Rozwiązać w liczbach rzeczywistych a, b, c, d, e układ równań

$$\begin{cases} a^2 = b^3 + c^3 \\ b^2 = c^3 + d^3 \\ c^2 = d^3 + e^3 \\ d^2 = e^3 + a^3 \\ e^2 = a^3 + b^3 \end{cases}$$

Rozwiązanie

Przyjmijmy, że liczby a, b, c, d, e spełniają podany układ równań i że b jest największą z nich (nie tracimy ogólności, bo układ jest cykliczny). Wykażemy, że wówczas $b = d$.

Przypuśćmy, przeciwnie, że $b > d$. Odejmując drugie równanie od równania pierwszego dostajemy $a^2 - b^2 = b^3 - d^3 > 0$, czyli

$$(a - b)(a + b) > 0.$$

Liczba a nie jest większa od liczby b ; w takim razie $a - b < 0$ oraz $a + b < 0$. Ta ostatnia nierówność daje jednak wniosek, że $a^3 + b^3 < 0$, w sprzeczności z równaniem $e^2 = a^3 + b^3$.

Zatem istotnie $b = d$, co oznacza, że także d ma maksymalną wartość wśród pięciu niewiadomych. Powtarzając to rozumowanie stwierdzamy kolejno, że $d = a = c = e$.

Dany w zadaniu układ równań sprowadza się zatem do rozwiązania równania $a^2 = 2a^3$, skąd otrzymujemy $a = 0$ lub $a = \frac{1}{2}$.

Odpowiedź: Układ równań ma dwa rozwiązania (a, b, c, d, e) :

$$(0, 0, 0, 0, 0) \quad \text{oraz} \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Zadanie 2. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite dodatnie k , dla których liczba $3^k + 5^k$ jest potęgą liczby całkowitej o wykładniku naturalnym większym od 1.

Rozwiązanie

Jeżeli k jest liczbą parzystą, to liczby 3^k i 5^k są kwadratami liczb nieparzystych, dającymi resztę 1 z dzielenia przez 4. Stąd wniosek, że liczba $3^k + 5^k$ daje resztę 2 z dzielenia przez 4, a więc dzieli się przez 2 i nie dzieli się przez 2^2 . Taka liczba nie może być potęgą liczby całkowitej o wykładniku większym od 1.

Jeżeli k jest liczbą nieparzystą, to

$$3^k + 5^k = (3 + 5)(3^{k-1} - 3^{k-2} \cdot 5 + 3^{k-3} \cdot 5^2 - 3^{k-4} \cdot 5^3 + \dots - 3 \cdot 5^{k-2} + 5^{k-1}).$$

Drugi czynnik po prawej stronie powyższej zależności zawiera nieparzystą (równą k) liczbę nieparzystych składników. Stąd wynika, że liczba $3^k + 5^k$ dzieli się przez 8 i nie dzieli się przez 16. Jeśli więc liczba ta jest potęgą liczby całkowitej o wykładniku większym od 1, to musi być ona sześcianem liczby całkowitej.

Jeżeli $k = 1$, to rozpatrywana liczba jest sześcianem liczby całkowitej: $3^1 + 5^1 = 2^3$. Przyjmijmy więc w dalszej części rozumowania, że $k \geq 3$.

Z zależności

$$\begin{aligned} 0^3 &\equiv 0 \pmod{9}, & (\pm 1)^3 &\equiv \pm 1 \pmod{9}, & (\pm 2)^3 &\equiv \mp 1 \pmod{9}, \\ (\pm 3)^3 &\equiv 0 \pmod{9}, & (\pm 4)^3 &\equiv \pm 1 \pmod{9} \end{aligned}$$

wynika, że sześciany liczb całkowitych dają z dzielenia przez 9 jedynie reszty 0, 1, 8. Dla $k \geq 3$ mamy $9 \mid 3^k$, więc $3^k + 5^k \equiv 5^k \pmod{9}$.

Reszty z dzielenia przez 9 liczb $5, 5^2, 5^3, 5^4, 5^5, 5^6$ są odpowiednio równe 5, 7, 8, 4, 2, 1. Wobec tego jeżeli $3^k + 5^k$ jest sześcianem liczby całkowitej przy $k \geq 3$, to $3 \mid k$. Wcześniej wykazaliśmy, że k nie może być liczbą parzystą. Zatem liczba k jest postaci $6l + 3$, gdzie l jest liczbą całkowitą nieujemną.

Z zależności $3^3 \equiv 5^3 \equiv 6 \pmod{7}$ oraz $3^6 \equiv 5^6 \equiv 1 \pmod{7}$ wynika, że

$$3^k + 5^k = 3^{6l+3} + 5^{6l+3} \equiv 3^3 + 5^3 \equiv 5 \pmod{7}.$$

Jednakże z bezpośredniego sprawdzenia otrzymujemy, że sześcian liczby całkowitej daje z dzielenia przez 7 resztę 0, 1 lub 6:

$$\begin{aligned} 0^3 &\equiv 0 \pmod{7}, & (\pm 1)^3 &\equiv \pm 1 \pmod{7}, \\ (\pm 2)^3 &\equiv \pm 1 \pmod{7}, & (\pm 3)^3 &\equiv \mp 1 \pmod{7}. \end{aligned}$$

Zatem rozpatrywana liczba dla $k \geq 3$ nie może być sześcianem liczby całkowitej, co kończy rozwiązanie zadania.

Odpowiedź: $k = 1$.

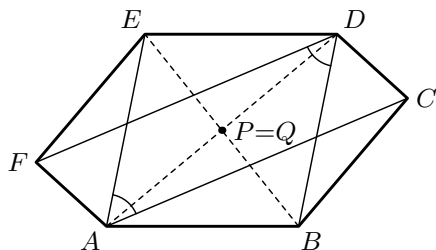
Zadanie 3. Dany jest sześciokąt wypukły $ABCDEF$, w którym $AC = DF$, $CE = FB$ oraz $EA = BD$. Dowieść, że proste łączące środki przeciwległych boków tego sześciokąta przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązanie

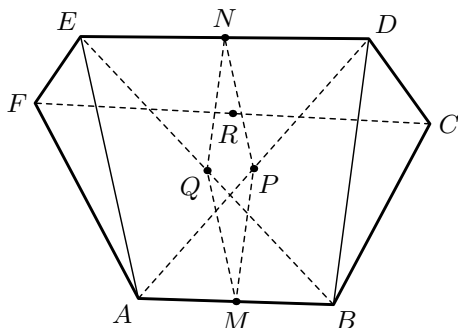
Oznaczmy przez P, Q, R odpowiednio środki przekątnych AD, BE, CF .

Przyjmijmy najpierw, że dwa spośród punktów P, Q, R pokrywają się; niech na przykład $P = Q$ (rys. 1). Wtedy czworokąt $ABDE$ jest równoległobokiem. Ponadto trójkąt ACE jest przystający do trójkąta DFB , skąd wynika, że $\sphericalangle EAC = \sphericalangle BDF$. Równość ta wraz z uzyskaną zależnością $BD \parallel EA$ dowodzi, że odcinki AC i DF są równoległe. Ponadto odcinki te są równej długości, a zatem czworokąt $ACDF$ jest równoległobokiem. Punkt R pokrywa się więc z punktami P i Q , skąd wynika, że jest on środkiem symetrii sześciokąta $ABCDEF$. Pozostaje zauważyć, że wówczas proste łączące środki

przeciwnych boków sześciokąta $ABCDEF$ przechodzą przez jego środek symetrii.



rys. 1



rys. 2

Przyjmijmy z kolei, że punkty P , Q i R są różne. Niech M i N będą odpowiednio środkami odcinków AB i DE (rys. 2).

Z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa wynika, że odcinki PN i AE są równoległe, a ponadto $PN = \frac{1}{2}AE$. Analogicznie uzyskujemy związki $QM = \frac{1}{2}AE$, $PM = \frac{1}{2}BD$ oraz $QN = \frac{1}{2}BD$. Z zależności tych oraz z równości $AE = BD$ wnioskujemy, że $PN = QM = PM = QN$, co oznacza, że czworokąt $MPNQ$ jest rombem. Zatem prosta MN jest symetralną odcinka PQ .

Analogicznie dowodzimy, że pozostałe dwie proste łączące środki przeciwnych boków danego sześciokąta są symetralnymi odcinków QR i RP . Stąd proste łączące środki przeciwnych boków sześciokąta $ABCDEF$ mają punkt wspólny, będący środkiem okręgu opisanego na trójkącie PQR .

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w internecie pod adresem: www.om.edu.pl



LVII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia trzeciego

6 kwietnia 2006 r. (drugi dzień zawodów)

Zadanie 4. Na trójce liczb wykonujemy następującą operację. Wybieramy dwie spośród tych liczb i zastępujemy je ich sumą oraz ich iloczynem, pozostała liczba nie ulega zmianie. Rozstrzygnąć, czy rozpoczynając od trójki $(3, 4, 5)$ i wykonując tę operację możemy ponownie uzyskać trójkę liczb będących długościami boków trójkąta prostokątnego.

Rozwiązanie

Jeżeli w pierwszym kroku wybierzemy liczby 3 i 5, to otrzymamy trójkę $(4, 8, 15)$, w której dokładnie jedna liczba jest nieparzysta. Wybierając z takiej trójki dwie liczby parzyste zamieniamy je na liczby parzyste, natomiast decydując się na jedną liczbę parzystą, a drugą nieparzystą dostajemy liczby różnych parzystości. Zatem z trójki, w której dokładnie jedna liczba jest nieparzysta, otrzymamy trójkę, która ma tę samą własność.

Jeżeli jednak wśród liczb naturalnych a, b, c dokładnie jedna jest nieparzysta, to równość $a^2 + b^2 = c^2$ nie może zachodzić — jedna ze stron tej równości jest nieparzysta, a druga parzysta. Nie otrzymamy więc trójki liczb będących długościami boków trójkąta prostokątnego.

Z kolei wybierając w pierwszym kroku liczby 3 i 4 otrzymamy trójkę $(5, 7, 12)$, a biorąc 4 i 5 uzyskamy trójkę $(3, 9, 20)$. W obu tych trójkach jest dokładnie jedna liczba parzysta i jest ona największą liczbą w trójce. Jeżeli w takiej trójce wybierzemy dwie liczby nieparzyste, to otrzymamy trójkę, w której dokładnie jedna liczba jest nieparzysta. Z takiej trójki, jak już wiemy, nie otrzymamy trójki liczb będących długościami boków trójkąta prostokątnego.

Jeżeli natomiast będziemy konsekwentnie wybierać liczby różnych parzystości, to w każdym kroku otrzymamy trójkę z dokładnie jedną liczbą parzystą, a z nierówności $xy > x + y$ (prawdziwej dla liczb $x, y > 2$) wynika, że ta liczba parzysta będzie największą liczbą w trójce.

Pozostaje zauważyć, że jeżeli liczby naturalne a, b są nieparzyste, a liczba c jest parzysta, to $a^2 + b^2 \equiv 1 + 1 \pmod{4}$, więc równość $a^2 + b^2 = c^2$ nie może być spełniona.

Odpowiedź: Ponowne uzyskanie trójki liczb będących długościami boków trójkąta prostokątnego nie jest możliwe.

Zadanie 5. Dany jest czworościan $ABCD$, w którym $AB = CD$. Sfera wpisana w ten czworościan jest styczna do ścian ABC i ABD odpowiednio w punktach K i L . Dowieść, że jeżeli punkty K i L są środkami ciężkości ścian ABC i ABD , to czworościan $ABCD$ jest foremny.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez s sferę wpisaną w czworościan $ABCD$. Rozpocznijmy od wykazania, że trójkąty ABC i ABD są przystające.

Niech E będzie środkiem krawędzi AB . Ponieważ K i L są punktami styczności sfery s do czworościanu $ABCD$, to $AK = AL$ i $BK = BL$, skąd wynika, że trójkąty AKB i ALB są przystające. Ich środkowe KE i LE mają jednakową długość, skąd $CE = 3 \cdot KE = 3 \cdot LE = DE$. Ale

$$\sphericalangle CEB = \sphericalangle KEB = \sphericalangle LEB = \sphericalangle DEB,$$

więc trójkąty BEC i BED są przystające.

Analogicznie dowodzimy, że trójkąty AEC i AED są przystające. Zatem trójkąty ABC i ABD są przystające.

Niech M i N będą punktami styczności sfery s odpowiednio ze ścianami BCD i CDA . Otrzymujemy następujące pary trójkątów przystających: BKC i BMC ; BLD i BMD ; AKC i ANC ; ALD i AND ; CMD i CND .

Oznaczmy: $\alpha = \sphericalangle AKC$, $\beta = \sphericalangle BKC$. Wtedy $\sphericalangle ALD = \alpha$ oraz $\sphericalangle BLD = \beta$, gdyż trójkąty ABC i ABD są przystające. Zatem

$$\sphericalangle ANC = \sphericalangle AKC = \alpha, \quad \sphericalangle AND = \sphericalangle ALD = \alpha,$$

$$\sphericalangle BMC = \sphericalangle BKC = \beta, \quad \sphericalangle BMD = \sphericalangle BLD = \beta.$$

Stąd otrzymujemy $\sphericalangle DNC = 360^\circ - \sphericalangle ANC - \sphericalangle AND = 360^\circ - 2\alpha$, jak również $\sphericalangle DMC = 360^\circ - \sphericalangle BMC - \sphericalangle BMD = 360^\circ - 2\beta$. Ale $\sphericalangle DMC = \sphericalangle DNC$, skąd $\alpha = \beta$. Zatem $\sphericalangle AKE = \sphericalangle BKE$, więc KE jest jednocześnie dwusieczną i środkową w trójkącie AKB . Stąd $AK = BK$, a więc $AC = BC$. Ostatecznie otrzymujemy więc $AC = BC = AD = BD$.

Przez każdą krawędź czworościanu $ABCD$ poprowadźmy płaszczyznę równoległą do przeciwległej krawędzi czworościanu. Płaszczyzny te wyznaczają równoległościan. W każdej z jego ścian jedna przekątna jest krawędzią czworościanu $ABCD$, a druga przekątna jest równa i równoległa do przeciwległej krawędzi tego czworościanu. Ponieważ przeciwległe krawędzie czworościanu $ABCD$ są równe, więc wszystkie ściany otrzymanego równoległościanu są prostokątami. A zatem równoległościan ten jest prostopadłościanem. Wynika stąd w szczególności, że prosta łącząca środki krawędzi AD i BC jest prostopadłą do tych krawędzi.

Rozpatrzmy przekształcenie będące obrotem o kąt 180° wokół prostej łączącej środki krawędzi AD i BC . W wyniku tego przekształcenia czworościan $ABCD$ przechodzi na siebie, więc sfera s też musi przejść na siebie. Ponadto ściany ABC i ABD przechodzą odpowiednio na ściany DCB i DCA , a zatem środki ciężkości ścian DCB i DCA pokrywają się z punktami M i N .

Analogicznie jak wyżej wykazujemy, że $AB=BD=DC=CA$, skąd wnioskujemy, że wszystkie krawędzie czworokąta $ABCD$ są równej długości. To oznacza, że czworokąt $ABCD$ jest foremny.

Zadanie 6. Wyznaczyć wszystkie pary liczb całkowitych a, b , dla których istnieje taki wielomian $P(x)$ o współczynnikach całkowitych, że iloczyn $(x^2+ax+b) \cdot P(x)$ jest wielomianem postaci

$$x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \dots + c_1x + c_0,$$

gdzie każda z liczb $c_0, c_1, \dots, c_{n-1}$ jest równa 1 lub -1 .

Rozwiązanie

Jeżeli trójmian x^2+ax+b jest dzielnikiem pewnego wielomianu $Q(x)$ o współczynnikach całkowitych, to oczywiście wyraz wolny b jest dzielnikiem wyrazu wolnego wielomianu $Q(x)$. Wobec tego (w rozważanej sytuacji) $b=\pm 1$.

Żaden wielomian $Q(x)$ postaci $x^n \pm x^{n-1} \pm x^{n-2} \pm \dots \pm x \pm 1$ nie ma pierwiastków rzeczywistych o wartości bezwzględnej większej lub równej 2. Przypuśćmy bowiem, że liczba r o module $|r| \geq 2$ spełnia zależność $Q(r)=0$. Wtedy

$$\begin{aligned} |r|^n &= |r^n| = |r^{n-1} \pm r^{n-2} \pm \dots \pm r \pm 1| \leq \\ &\leq |r|^{n-1} + |r|^{n-2} + \dots + |r| + 1 = \frac{|r|^n - 1}{|r| - 1} < \frac{|r|^n}{|r| - 1}, \end{aligned}$$

skąd wynika, że $|r| < 2$. Sprzeczność.

Z drugiej strony, każdy pierwiastek trójmianu $T(x)=x^2+ax+b$ jest też pierwiastkiem wielomianu $T(x) \cdot P(x)$. Stąd wynika, że trójmian $T(x)$ nie ma pierwiastków w zbiorze $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$. Zatem $T(-2) > 0$ oraz $T(2) > 0$, czyli $4-2a+b > 0$ oraz $4+2a+b > 0$.

Jeśli $b=1$, to mamy $5 > 2a$ i $5 > -2a$, skąd wynika, że a jest jedną z liczb $-2, -1, 0, 1, 2$. Jeżeli natomiast $b=-1$, to $3 > 2a$ i $3 > -2a$ i do rozpatrzenia pozostają przypadki, gdy a jest jedną z liczb $-1, 0, 1$.

Bezpośrednie sprawdzenie dowodzi, że wszystkie uzyskane pary (a, b) spełniają warunki zadania:

$$\begin{aligned} (x^2-2x+1) \cdot (x+1) &= x^3-x^2-x+1, & (x^2+1) \cdot (x+1) &= x^3+x^2+x+1, \\ (x^2+2x+1) \cdot (x-1) &= x^3+x^2-x-1, & (x^2-1) \cdot (x+1) &= x^3+x^2-x-1, \\ (x^2-x+1) \cdot 1 &= x^2-x+1, & (x^2+x+1) \cdot 1 &= x^2+x+1, \\ (x^2-x-1) \cdot 1 &= x^2-x-1, & (x^2+x-1) \cdot 1 &= x^2+x-1. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Warunki zadania spełnia następujących osiem par (a, b) : $(-2, 1), (-1, -1), (-1, 1), (0, -1), (0, 1), (1, -1), (1, 1), (2, 1)$.

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w internecie pod adresem: www.om.edu.pl



LVIII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego

I seria (11 września 2006 r. – 9 października 2006 r.)

1. Rozwiązać w liczbach rzeczywistych x, y, z układ równań

$$\begin{cases} x^2 + 2yz + 5x = 2 \\ y^2 + 2zx + 5y = 2 \\ z^2 + 2xy + 5z = 2 \end{cases}$$

2. Wyznaczyć wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych k, m , dla których każda z liczb $k^2 + 4m$, $m^2 + 5k$ jest kwadratem liczby całkowitej.

3. W czworokącie wypukłym $ABCD$, nie będącym równoległobokiem, zachodzi równość $AB = CD$. Punkty M i N są odpowiednio środkami przekątnych AC i BD . Dowieść, że rzuty prostokątne odcinków AB i CD na prostą MN są odcinkami o jednakowej długości, równej długości odcinka MN .

4. Dla każdej liczby naturalnej $n \geq 3$ wyznaczyć liczbę ciągów $(c_1, c_2, \dots, c_n)$, gdzie $c_i \in \{0, 1, \dots, 9\}$, o następującej własności: w każdej trójce kolejnych wyrazów są co najmniej dwa wyrazy równe.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

9 października 2006 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.



LVIII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego

II seria (10 października 2006 r. – 6 listopada 2006 r.)

5. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC , w którym $\sphericalangle ACB = 45^\circ$. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC , punkt H jest punktem przecięcia wysokości trójkąta ABC . Prosta przechodząca przez punkt O i prostopadła do prostej CO przecina proste AC i BC odpowiednio w punktach K i L . Wykazać, że

$$OK + KH = OL + LH.$$

6. Wykazać, że jeżeli liczby a, b, c są dodatnie, to

$$\frac{1}{a+ab+abc} + \frac{1}{b+bc+ba} + \frac{1}{c+ca+cab} \leq \frac{1}{3\sqrt[3]{abc}} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right).$$

7. Dany jest czworościan $ABCD$. Dwusieczna kąta ABC przecina krawędź AC w punkcie Q . Punkt P jest symetryczny do D względem punktu Q . Punkt R leży na krawędzi AB , przy czym $BR = \frac{1}{2}BC$. Udowodnić, że z odcinków o długościach BP , CD oraz $2 \cdot QR$ można zbudować trójkąt.

8. Niech p będzie liczbą pierwszą. Dowieść, że istnieje taka permutacja $(x_1, x_2, \dots, x_{p-1})$ zbioru $\{1, 2, \dots, p-1\}$, że liczby

$$x_1, \quad x_1x_2, \quad x_1x_2x_3, \quad \dots, \quad x_1x_2\dots x_{p-1}$$

dają różne reszty przy dzieleniu przez p .

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

6 listopada 2006 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.



LVIII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego

III seria (7 listopada 2006 r. – 4 grudnia 2006 r.)

9. Niech $F(k)$ będzie iloczynem wszystkich dodatnich dzielników liczby całkowitej dodatniej k . Rozstrzygnąć, czy istnieją różne liczby całkowite dodatnie m, n , dla których $F(m) = F(n)$.

10. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC . Punkty P i U leżą na boku BC , punkty Q i S leżą na boku CA , punkty R i T leżą na boku AB , przy czym

$$\begin{aligned} PR \perp BC, \quad QP \perp CA, \quad RQ \perp AB, \\ US \perp BC, \quad ST \perp CA, \quad TU \perp AB. \end{aligned}$$

Dowieść, że trójkąty PQR i STU są przystające.

11. Dla każdej liczby całkowitej dodatniej n wyznaczyć liczbę permutacji $(x_1, x_2, \dots, x_{6n-1})$ zbioru $\{1, 2, \dots, 6n-1\}$, spełniających warunki:

$$\begin{aligned} \text{jeśli } i - j = 2n + 1, \text{ to } x_i > x_j; \\ \text{jeśli } i - j = 4n, \text{ to } x_i < x_j. \end{aligned}$$

12. Wielomian W o współczynnikach rzeczywistych przyjmuje w przedziale $\langle a; b \rangle$ (gdzie $a < b$) tylko wartości dodatnie. Udowodnić, że istnieją takie wielomiany P oraz $Q_1, Q_2, \dots, Q_m$, że

$$W(x) = (P(x))^2 + (x-a)(b-x) \sum_{i=1}^m (Q_i(x))^2$$

dla każdej liczby rzeczywistej x .

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

4 grudnia 2006 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.

Adresy Komitetów Okręgowych Olimpiady Matematycznej

- Dla województwa pomorskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Gdańskiego, ul. Wita Stwosza 57, 80-952 Gdańsk

- Dla województwa śląskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Śląskiego, ul. Bankowa 14, 40-005 Katowice.

- Dla województwa małopolskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego, ul. Reymonta 4, 30-059 Kraków.

- Dla województwa lubelskiego i podkarpackiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki UMCS, pl. Marii Skłodowskiej-Curie 1, 20-031 Lublin.

- Dla województwa łódzkiego i świętokrzyskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki Uniwersytetu Łódzkiego, ul. Banacha 22, 90-238 Łódź.

- Dla województwa wielkopolskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Adama Mickiewicza, ul. Umultowska 87, 61-614 Poznań

- Dla województwa lubuskiego i zachodniopomorskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Uniwersytet Szczeciński, Instytut Matematyki, ul. Wielkopolska 15, 70-451 Szczecin.

- Dla województwa kujawsko-pomorskiego i warmińsko-mazurskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, ul. Chopina 12/18, 87-100 Toruń.

- Dla województwa mazowieckiego i podlaskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyczny PAN, ul. Śniadeckich 8, skr. poczt. 21, 00-956 Warszawa 10

- Dla województwa dolnośląskiego i opolskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Politechniki Wrocławskiej, ul. Janiszewskiego 14a, 50-370 Wrocław.

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w internecie pod adresem: www.om.edu.pl



LVIII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia pierwszego

(11 września 2006 r. – 4 grudnia 2006 r.)

Zadanie 1. Rozwiązać w liczbach rzeczywistych x, y, z układ równań

$$\begin{cases} x^2 + 2yz + 5x = 2 \\ y^2 + 2zx + 5y = 2 \\ z^2 + 2xy + 5z = 2 \end{cases}$$

Rozwiązanie

Założmy najpierw, że istnieją trzy różne liczby rzeczywiste spełniające dany układ równań. Odejmując stronami drugie równanie od pierwszego otrzymujemy

$$\begin{aligned} 0 &= (x^2 + 2yz + 5x) - (y^2 + 2zx + 5y) = (x^2 - y^2) + 2z(y - x) + 5(x - y) = \\ &= (x - y)(x + y - 2z + 5). \end{aligned}$$

Ponieważ przyjęliśmy założenie $x \neq y$, więc z powyższej równości wnioskujemy, że $x + y - 2z + 5 = 0$. Analogicznie uzasadniamy, iż $x - 2y + z + 5 = 0$ oraz $-2x + y + z + 5 = 0$. Jednakże sumując te trzy równości stronami uzyskamy fałszywą równość $15 = 0$, toteż przypadek ten jest niemożliwy.

Zatem wśród liczb x, y, z pewne dwie muszą być równe. Dla ustalenia uwagi będziemy szukać rozwiązań spełniających warunek $x = y$. Pozostałe rozwiązania rozpatrywanego układu równań otrzymamy przez permutacje zmiennych.

Jeżeli $x = y = z$, to dany układ równań sprowadza się do równania kwadratowego $3x^2 + 5x = 2$, które ma dwa rozwiązania: $x = -2$ oraz $x = \frac{1}{3}$. Otrzymujemy stąd trójki $(-2, -2, -2)$ i $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, które oczywiście spełniają dany w treści zadania układ.

Rozważmy z kolei przypadek, gdy $x = y \neq z$. Wykonując rachunek analogiczny do już przeprowadzonego na początku rozwiązania uzyskujemy zależność $0 = (y - z)(y + z - 2x + 5)$, co wobec $y \neq z$ daje $-5 = y + z - 2x = -x + z$ i $z = x - 5$. Zatem pierwsze równanie danego układu przybiera postać

$0 = x^2 + 2yz + 5x - 2 = x^2 + 2x(x - 5) + 5x - 2 = 3x^2 - 5x - 2 = (3x + 1)(x - 2)$, co daje wartości $x = y = -\frac{1}{3}$, $z = x - 5 = -\frac{16}{3}$ oraz $x = y = 2$, $z = x - 5 = -3$. Bezpośrednio sprawdzamy, że trójki $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{16}{3})$ i $(2, 2, -3)$ są rozwiązaniami badanego układu równań.

Dokonując permutacji zmiennych otrzymamy wszystkie rozwiązania.

Odpowiedź: Rozwiązaniami (x, y, z) danego układu równań są:

$$\begin{aligned} &(-2, -2, -2), \quad (2, -3, 2), \quad \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \quad \left(-\frac{1}{3}, -\frac{16}{3}, -\frac{1}{3}\right), \\ &(2, 2, -3), \quad (-3, 2, 2), \quad \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{16}{3}\right), \quad \left(-\frac{16}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right). \end{aligned}$$

Zadanie 2. Wyznaczyć wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych k, m , dla których każda z liczb $k^2 + 4m$, $m^2 + 5k$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie

Przypuścmy, że para (k, m) spełnia warunki zadania.

Jeżeli prawdziwa jest nierówność $m \geq k$, to

$$(m+3)^2 = m^2 + 6m + 9 > m^2 + 5m \geq m^2 + 5k > m^2,$$

a ponieważ $m^2 + 5k$ jest kwadratem liczby całkowitej, więc wynika stąd, że musi zachodzić jedna z równości $m^2 + 5k = (m+1)^2$ lub $m^2 + 5k = (m+2)^2$.

Jeżeli $m^2 + 5k = (m+1)^2 = m^2 + 2m + 1$, to $2m = 5k - 1$ i na mocy warunków zadania liczba $k^2 + 4m = k^2 + 2(5k - 1) = k^2 + 10k - 2$ ma być kwadratem liczby całkowitej. Mamy $k^2 + 10k - 2 < k^2 + 10k + 25 = (k+5)^2$, zatem spełniona jest zależność

$$k^2 + 10k - 2 \leq (k+4)^2 = k^2 + 8k + 16,$$

z której otrzymujemy $2k \leq 18$ i $k \leq 9$. Uwzględniając równość $2m = 5k - 1$ widzimy, że k musi być liczbą nieparzystą. Bezpośrednim rachunkiem sprawdzamy, że wartości wyrażenia $k^2 + 10k - 2$ dla $k = 1, 3, 5, 7, 9$ są odpowiednio równe 9, 37, 73, 117, 169. Uzyskujemy kwadraty liczb całkowitych jedynie dla $k = 1$ i $k = 9$; odpowiadające wartości $m = \frac{1}{2}(5k - 1)$ wynoszą 2 i 22.

Jeżeli $m^2 + 5k = (m+2)^2 = m^2 + 4m + 4$, to $4m = 5k - 4$, zatem liczba $k^2 + 4m = k^2 + 5k - 4$ jest kwadratem liczby całkowitej. Nierówność

$$k^2 + 5k - 4 < k^2 + 6k + 9 = (k+3)^2$$

dowodzi, że $k^2 + 5k - 4 \leq (k+2)^2 = k^2 + 4k + 4$, co daje $k \leq 8$. Ponadto liczba $m = \frac{5}{4}k - 1$ jest całkowita, więc liczba k jest podzielna przez 4. Wyrażenie $k^2 + 5k - 4$ dla wartości $k = 4, 8$ przyjmuje odpowiednio wartości 32, 100 i tylko dla $k = 8$ otrzymujemy kwadrat liczby całkowitej; odpowiadającą wartością $m = \frac{5}{4}k - 1$ jest 9.

Pozostał do rozpatrzenia przypadek $m < k$. Wówczas możemy napisać

$$(k+2)^2 = k^2 + 4k + 4 > k^2 + 4k > k^2 + 4m > k^2$$

i z uwagi na to, że $k^2 + 4m$ jest kwadratem liczby całkowitej, uzyskujemy zależność $k^2 + 4m = (k+1)^2 = k^2 + 2k + 1$, czyli $2k = 4m - 1$. Ta równość nie może jednak być prawdziwa, bowiem jej lewa strona jest liczbą parzystą, a prawa — nieparzystą. Wobec tego w tym przypadku nie ma rozwiązań.

Wystarczy już tylko wykonać bezpośrednie sprawdzenie, że otrzymane pary istotnie spełniają warunki zadania.

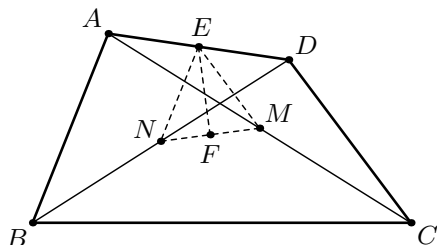
Odpowiedź: Żądaną własność mają następujące pary (k, m) :

$$(1, 2), \quad (8, 9), \quad (9, 22).$$

Zadanie 3. W czworokącie wypukłym $ABCD$, nie będącym równoległobokiem, zachodzi równość $AB=CD$. Punkty M i N są odpowiednio środkami przekątnych AC i BD . Dowieść, że rzuty prostokątne odcinków AB i CD na prostą MN są odcinkami o jednakowej długości, równej długości odcinka MN .

Rozwiązanie

Niech punkt E będzie środkiem boku AD , zaś punkt F — środkiem odcinka MN (rys. 1).



rys. 1

Z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa wynika, że $EM \parallel DC$ oraz $EM = \frac{1}{2}DC$. Analogicznie uzyskujemy zależności $EN \parallel AB$ i $EN = \frac{1}{2}AB$. Stąd i z równości $DC = AB$ otrzymujemy $EM = EN$. Trójkąt MEN jest zatem równoramienny, co oznacza, że $EF \perp MN$. Wobec tego rzutem prostokątnym odcinka EN na prostą MN jest odcinek FN ; a ponieważ odcinek AB jest równoległy do odcinka EN i ma dwukrotnie większą długość, więc rzutem odcinka AB na prostą MN będzie odcinek o długości $2 \cdot FN = MN$.

Analogicznie dowodzimy, że rzut prostokątny odcinka CD na prostą MN jest odcinkiem o długości MN , co kończy rozwiązanie zadania.

Zadanie 4. Dla każdej liczby naturalnej $n \geq 3$ wyznaczyć liczbę ciągów $(c_1, c_2, \dots, c_n)$, gdzie $c_i \in \{0, 1, \dots, 9\}$, o następującej własności: w każdej trójce kolejnych wyrazów są co najmniej dwa wyrazy równe.

Rozwiązanie

Niech z_n będzie liczbą ciągów n -wyrazowych mających żądane własności (będziemy je dalej nazywać *dobrymi* ciągami). Niech x_n będzie liczbą dobrych ciągów $(c_1, c_2, \dots, c_n)$, których dwa ostatnie wyrazy c_{n-1} i c_n są równe, natomiast y_n niech oznacza liczbę dobrych ciągów $(c_1, c_2, \dots, c_n)$, w których $c_{n-1} \neq c_n$. Oczywiście spełniona jest równość $z_n = x_n + y_n$.

Każdy dobry ciąg $(n+1)$ -wyrazowy $(c_1, c_2, \dots, c_{n+1})$, w którym dwa ostatnie wyrazy c_n i c_{n+1} są równe, powstaje z dokładnie jednego dobrego ciągu $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ przez dodanie warunku $c_{n+1} = c_n$. Prawdziwa jest zatem zależność

$$(1) \quad x_{n+1} = z_n = x_n + y_n.$$

Natomiast dobry ciąg $(n+1)$ -wyrazowy $(c_1, c_2, \dots, c_{n+1})$, w którym dwa ostatnie wyrazy c_n i c_{n+1} są różne, możemy otrzymać na dwa sposoby. W pierwszym sposobie należy wziąć dobry n -wyrazowy ciąg $(c_1, c_2, \dots, c_n)$, w którym $c_{n-1} = c_n$, zaś za c_{n+1} przyjąć dowolną liczbę ze zbioru $\{0, 1, \dots, 9\}$ różną od c_n . Tak postępując otrzymamy $9x_n$ różnych dobrych ciągów (długości $n+1$). W drugim sposobie wybieramy dobry n -wyrazowy ciąg $(c_1, c_2, \dots, c_n)$, w którym $c_{n-1} \neq c_n$ i przyjmujemy $c_{n+1} = c_{n-1}$. Tym razem uzyskamy y_n różnych ciągów. Ponadto żaden ciąg nie może być otrzymany oboma sposobami. Wynika stąd równość

$$(2) \quad y_{n+1} = 9x_n + y_n.$$

Ze związków (1) i (2) dostajemy

$$3x_{n+1} + y_{n+1} = 12x_n + 4y_n, \quad 3x_{n+1} - y_{n+1} = -6x_n + 2y_n.$$

Przyjmując oznaczenia $u_n = 3x_n + y_n$, $v_n = 3x_n - y_n$ mamy więc

$$(3) \quad u_{n+1} = 4u_n, \quad v_{n+1} = -2v_n \quad \text{dla } n = 3, 4, 5, \dots$$

Liczba dobrych ciągów (c_1, c_2, c_3) , w których $c_2 = c_3$, wynosi $10^2 = 100$, gdyż wartości c_1, c_2 możemy wybrać dowolnie, natomiast liczba dobrych ciągów (c_1, c_2, c_3) , w których $c_2 \neq c_3$, wynosi $2 \cdot 10 \cdot 9 = 180$, bowiem parę różnych liczb (c_2, c_3) można wybrać dowolnie i c_1 musi być równe c_2 lub c_3 .

Zatem $x_3 = 100$, $y_3 = 180$, $u_3 = 480$, $v_3 = 120$ i z zależności (3) przez indukcję otrzymujemy wzory

$$u_n = 480 \cdot 4^{n-3} = 15 \cdot 2^{2n-1}, \quad v_n = 120 \cdot (-2)^{n-3} = -15 \cdot (-2)^n.$$

Stąd ostatecznie

$$z_n = x_{n+1} = \frac{u_{n+1} + v_{n+1}}{6} = \frac{15 \cdot (2^{2n+1} - (-2)^{n+1})}{6} = 5 \cdot (4^n + (-2)^n).$$

Odpowiedź: Szukana liczba dobrych ciągów wynosi $5 \cdot (4^n + (-2)^n)$.

Zadanie 5. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC , w którym $\sphericalangle ACB = 45^\circ$. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC , punkt H jest punktem przecięcia wysokości trójkąta ABC . Prosta przechodząca przez punkt O i prostopadła do prostej CO przecina proste AC i BC odpowiednio w punktach K i L . Wykazać, że

$$OK + KH = OL + LH.$$

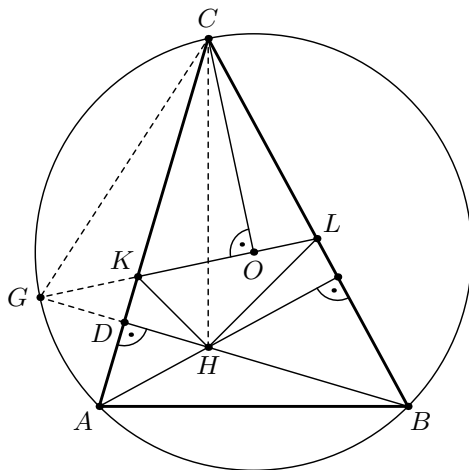
Rozwiązanie

Niech D będzie spodkiem wysokości poprowadzonej z wierzchołka B i niech G będzie punktem symetrycznym do punktu H względem prostej AC (rys. 2); odcinki BG i AC przecinają się w punkcie D .

Zauważmy, że punkt G leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC . Rzeczywiście, ze względu na prostokąt $BH \perp AC$, $CH \perp AB$ mamy

$$\sphericalangle ACG = \sphericalangle ACH = \sphericalangle ABG,$$

a więc punkty A, B, C, G leżą na jednym okręgu.



rys. 2

W trójkącie BCD zachodzą równości $\sphericalangle BCD = 45^\circ$ i $\sphericalangle BDC = 90^\circ$, skąd wyznaczamy $\sphericalangle CBG = 45^\circ$. Zatem $\sphericalangle GOC = 2\sphericalangle GBC = 90^\circ$. Stąd $GO \perp CO$, toteż punkty G, K, O leżą na jednej prostej w tej właśnie kolejności. Wobec tego

$$OK + KH = OK + KG = OG,$$

czyli wielkość $OK + KH$ jest równa promieniowi okręgu opisanego na trójkącie ABC . Analogicznie dowodzimy, że temu promieniowi jest równa wielkość $OL + LH$, co kończy rozwiązanie.

Zadanie 6. Wykazać, że jeżeli liczby a, b, c są dodatnie, to

$$\frac{1}{a+ab+abc} + \frac{1}{b+bc+bca} + \frac{1}{c+ca+cab} \leq \frac{1}{3\sqrt[3]{abc}} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right).$$

Rozwiązanie

Korzystając z nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną otrzymujemy

$$a + ab + abc \geq 3\sqrt[3]{a \cdot ab \cdot abc} = 3\sqrt[3]{abc} \sqrt[3]{a^2b}$$

i analogicznie $b + bc + bca \geq 3\sqrt[3]{abc} \sqrt[3]{b^2c}$ oraz $c + ca + cab \geq 3\sqrt[3]{abc} \sqrt[3]{c^2a}$. Stąd wynika, że

$$\frac{1}{a+ab+abc} + \frac{1}{b+bc+bca} + \frac{1}{c+ca+cab} \leq \frac{1}{3\sqrt[3]{abc}} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{a^2b}} + \frac{1}{\sqrt[3]{b^2c}} + \frac{1}{\sqrt[3]{c^2a}} \right).$$

Zatem zadanie będzie rozwiązane, jeżeli wykażemy nierówność

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a^2b}} + \frac{1}{\sqrt[3]{b^2c}} + \frac{1}{\sqrt[3]{c^2a}} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Wprowadzając oznaczenia $x = 1/\sqrt[3]{a}$, $y = 1/\sqrt[3]{b}$, $z = 1/\sqrt[3]{c}$ zapisujemy powyższą nierówność w postaci

$$x^2y + y^2z + z^2x \leq x^3 + y^3 + z^3,$$

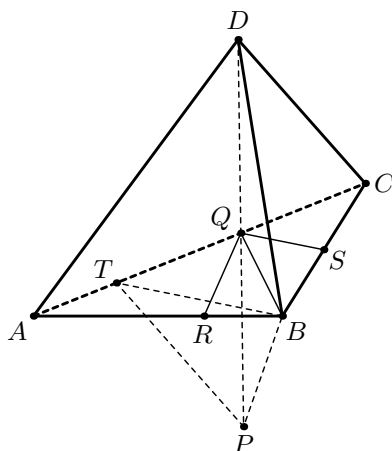
a ta nierówność jest prawdziwa na mocy nierówności średnich, gdyż

$$\begin{aligned} x^2y + y^2z + z^2x &= \sqrt[3]{x^3 \cdot x^3 \cdot y^3} + \sqrt[3]{y^3 \cdot y^3 \cdot z^3} + \sqrt[3]{z^3 \cdot z^3 \cdot x^3} \leq \\ &\leq \frac{x^3 + x^3 + y^3}{3} + \frac{y^3 + y^3 + z^3}{3} + \frac{z^3 + z^3 + x^3}{3} = x^3 + y^3 + z^3. \end{aligned}$$

Zadanie 7. Dany jest czworościan $ABCD$. Dwusieczna kąta ABC przecina krawędź AC w punkcie Q . Punkt P jest symetryczny do D względem punktu Q . Punkt R leży na krawędzi AB , przy czym $BR = \frac{1}{2}BC$. Udowodnić, że z odcinków o długościach BP , CD oraz $2 \cdot QR$ można zbudować trójkąt.

Rozwiązanie

Niech S będzie środkiem krawędzi BC , zaś T — punktem symetrycznym do punktu C względem punktu Q (rys. 3).



rys. 3

Ponieważ $BS = \frac{1}{2}BC = BR$, więc punkty R i S leżą symetrycznie względem dwusiecznej BQ kąta ABC , a zatem $QR = QS$. Ponadto trójkąt CTB jest obrazem trójkąta CQS w jednokładności o środku w punkcie C i skali 2, co daje $BT = 2 \cdot QS = 2 \cdot QR$. Wreszcie końce odcinków TP i CD są odpowiednio symetryczne do siebie względem punktu Q , skąd $PT = CD$.

Z wyprowadzonych zależności otrzymujemy, że trójkąt BTP jest zbudowany z odcinków o długościach BP , $BT = 2 \cdot QR$ oraz $PT = CD$, skąd wynika teza (punkty B , T , P nie są współliniowe, bo punkt P leży poza płaszczyzną BCT).

Zadanie 8. Niech p będzie liczbą pierwszą. Dowieść, że istnieje taka permutacja $(x_1, x_2, \dots, x_{p-1})$ zbioru $\{1, 2, \dots, p-1\}$, że liczby

$$x_1, x_1x_2, x_1x_2x_3, \dots, x_1x_2\dots x_{p-1}$$

dają różne reszty przy dzieleniu przez p .

Rozwiązanie

Przyjmijmy $x_1 = 1$ oraz dla $i = 2, 3, \dots, p-1$ niech x_i będzie taką liczbą ze zbioru $\{1, 2, \dots, p-1\}$, że liczba $(i-1)x_i - i$ jest podzielna przez p .

Oczywiście musimy najpierw wykazać, że podane określenie liczby x_i jest poprawne, czyli że taka liczba x_i istnieje. W tym celu dla ustalonej wartości $i \in \{2, 3, \dots, p-1\}$ rozpatrzmy liczby

$$(i-1) - i, 2(i-1) - i, 3(i-1) - i, \dots, (p-1)(i-1) - i.$$

Żadna z tych liczb nie daje reszty $p-i$ przy dzieleniu przez p ; gdyby bowiem dla pewnego $k \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ liczba $k(i-1) - i$ dawała resztę $p-i$, to liczba $k(i-1)$ byłaby podzielna przez p , co jest niemożliwe wobec nierówności $0 < k < p$, $0 < i-1 < p-1$ oraz faktu, iż p jest liczbą pierwszą. Analogicznie dowodzimy, że jeśli k, l są liczbami całkowitymi spełniającymi nierówności $1 \leq k < l \leq p-1$, to liczba

$$(l(i-1) - i) - (k(i-1) - i) = (l-k)(i-1)$$

nie jest podzielna przez p . To oznacza, że wśród wypisanych $p-1$ liczb żadne dwie nie dają tej samej reszty z dzielenia przez p oraz żadna nie daje reszty $p-i \neq 0$. Wynika stąd, że dokładnie jedna z tych liczb daje resztę 0, czyli dzieli się przez p .

Udowodnimy teraz, że otrzymane w ten sposób liczby $x_1, x_2, \dots, x_{p-1}$ są parami różne. Żadna z liczb $x_2, x_3, \dots, x_{p-1}$ nie jest równa $x_1 = 1$, gdyż liczba $(i-1) \cdot 1 - i = -1$ nie jest podzielna przez p . Przypuśćmy z kolei, że dla pewnych wskaźników $2 \leq i < j \leq p-1$ zachodzi równość $x_i = x_j$. Wtedy liczby $(j-1)x_i - j$ oraz $(i-1)x_i - i$ są podzielne przez p , a więc różnica

$$((j-1)x_i - j) - ((i-1)x_i - i) = (j-i)(x_i - 1)$$

dzieli się przez liczbę pierwszą p , co jest niemożliwe, gdyż $0 < j-i < p-1$, jak również $0 < x_i - 1 < p-1$.

Pozostaje wykazać, że skonstruowane liczby spełniają warunki zadania. W tym celu wykażemy indukcyjnie, że dla $i = 1, 2, \dots, p-1$ liczba $x_1x_2\dots x_i$ daje resztę i z dzielenia przez p . Dla $i = 1$ jest to prawda. Załóżmy teraz prawdziwość tej własności dla $i-1$. Liczba $x_1x_2\dots x_{i-1} - (i-1)$ jest zatem podzielna przez p , a więc i liczba $x_1x_2\dots x_{i-1}x_i - (i-1)x_i$ dzieli się przez p . Ale z określenia liczby x_i wynika, że liczba $(i-1)x_i$ daje resztę i przy dzieleniu przez p . Wobec tego liczba $x_1x_2\dots x_i$ daje resztę i z dzielenia przez p , co kończy dowód indukcyjny i rozwiązanie zadania.

Uwaga

Znajomość podstawowych własności arytmetyki liczb $(\text{mod } p)$ pozwala znacznie uprościć zapis powyższego rozumowania. Mianowicie przyjmujemy

$$x_1 = 1 \quad \text{oraz} \quad (i-1)x_i \equiv i \pmod{p} \quad \text{dla } i = 2, 3, \dots, p-1.$$

Ponieważ p jest liczbą pierwszą, więc określenie liczby x_i jest poprawne. Jest jasne, że liczby $x_2, x_3, \dots, x_{p-1}$ są różne od $x_1 = 1$; ponadto równość $x_i = x_j$ dla pewnych $2 \leq i < j \leq p-1$ prowadziłaby do zależności

$$ij - i \equiv i(j-1) \equiv (i-1)(j-1)x_i \equiv (i-1)(j-1)x_j \equiv (i-1)j \equiv ij - j \pmod{p},$$

co daje oczywistą sprzeczność $i \equiv j \pmod{p}$. Pozostaje sprawdzić, że dla $i = 2, 3, \dots, p-1$ mamy

$$(i-1)! \cdot x_1 x_2 \dots x_i \equiv x_2 \cdot 2x_3 \cdot 3x_4 \cdot \dots \cdot (i-1)x_i \equiv 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot i = (i-1)! \cdot i \pmod{p},$$

a więc $x_1 x_2 \dots x_i \equiv i \pmod{p}$.

Zadanie 9. Niech $F(k)$ będzie iloczynem wszystkich dodatnich dzielników liczby całkowitej dodatniej k . Rozstrzygnąć, czy istnieją różne liczby całkowite dodatnie m, n , dla których $F(m) = F(n)$.

Rozwiązanie

Odpowiedź: Takie liczby m i n nie istnieją.

Niech $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_k = n$ będą wszystkimi dodatnimi dzielnikami ustalonej liczby całkowitej dodatniej n . Wówczas $n/d_1, n/d_2, \dots, n/d_k$ także są wszystkimi dodatnimi dzielnikami liczby n , zatem możemy napisać

$$F(n) = d_1 \cdot d_2 \cdot \dots \cdot d_k = \frac{n}{d_1} \cdot \frac{n}{d_2} \cdot \dots \cdot \frac{n}{d_k}.$$

Stąd wynika, że

$$F(n) = \sqrt{d_1 \cdot d_2 \cdot \dots \cdot d_k \cdot \frac{n}{d_1} \cdot \frac{n}{d_2} \cdot \dots \cdot \frac{n}{d_k}} = \sqrt{n^k} = n^{k/2} = n^{d(n)/2},$$

gdzie $d(n)$ oznacza liczbę wszystkich dodatnich dzielników liczby n .

Przypuśćmy teraz, że dla pewnych liczb całkowitych dodatnich m, n zachodzi równość $F(m) = F(n)$. Wtedy $m^{d(m)/2} = n^{d(n)/2}$, a więc uzyskujemy zależność $m^{d(m)} = n^{d(n)}$. Zatem (patrz: *Uwaga*) liczby m, n są potęgami tej samej liczby całkowitej dodatniej: $m = w^c$ i $n = w^b$ dla pewnych liczb całkowitych dodatnich w, b, c .

Załóżmy, że $c < b$. Wtedy m jest potęgą tej samej liczby całkowitej dodatniej co n , ale o mniejszym wykładniku. Stąd wynika, że $m < n$ oraz — ponieważ każdy dzielnik liczby m jest także dzielnikiem liczby n — zachodzi $d(m) \leq d(n)$. Wobec tego $m^{d(m)} < n^{d(n)}$ i otrzymaliśmy sprzeczność. Podobna sprzeczność powstaje przy założeniu $c > b$. Musi więc być $c = b$, skąd otrzymujemy $m = w^c = w^b = n$.

Uwaga

W powyższym rozwiązaniu skorzystaliśmy z następującego faktu: jeżeli liczby całkowite dodatnie k, l, r, s spełniają równość $k^r = l^s$, to k i l są potęgami tej samej liczby całkowitej dodatniej.

Ażeby to udowodnić, weźmy $a = \text{NWD}(r, s)$ i niech $r = ab$, $s = ac$; liczby całkowite dodatnie b i c są względnie pierwsze. Ponadto z równości $k^r = l^s$ otrzymujemy $k^b = l^c$. Stąd wynika, że jeżeli p jest dowolnym dzielnikiem pierwszym liczby k oraz t jest taką liczbą całkowitą dodatnią, że k dzieli się przez p^t i nie dzieli się przez p^{t+1} , to liczba k^b dzieli się przez p^{bt} i nie dzieli się przez p^{bt+1} .

Jednakże k^b jest jednocześnie c -tą potęgą liczby całkowitej l , zatem c musi być dzielnikiem iloczynu bt . Skoro zaś b i c są względnie pierwsze, liczba c musi być dzielnikiem liczby t . Tak więc każdy dzielnik pierwszy liczby k wchodzi do jej rozkładu na czynniki pierwsze z wykładnikiem podzielny przez c , przeto k jest c -tą potęgą liczby całkowitej. Wobec tego z równości $k^b = l^c$ wynika, że $l = (\sqrt[c]{k})^b$, czyli k i l są potęgami liczby całkowitej $\sqrt[c]{k}$.

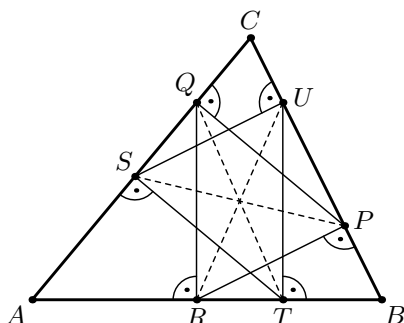
Zadanie 10. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC . Punkty P i U leżą na boku BC , punkty Q i S leżą na boku CA , punkty R i T leżą na boku AB , przy czym

$$\begin{aligned} PR \perp BC, \quad QP \perp CA, \quad RQ \perp AB, \\ US \perp BC, \quad ST \perp CA, \quad TU \perp AB. \end{aligned}$$

Dowieść, że trójkąty PQR i STU są przystające.

Rozwiązanie

Skoro $PR \perp BC$ oraz $US \perp BC$, to $PR \parallel US$. Analogicznie $QP \parallel ST$ oraz $RQ \parallel TU$. Trójkąty PQR i TUS są więc podobne, jako trójkąty o odpowiednich bokach równoległych (rys. 4).



rys. 4

Z trójkątów prostokątnych PUS i RPU odczytujemy zależności

$$PS^2 - US^2 = PU^2 = RU^2 - PR^2.$$

Zachodzi więc równość

$$(1) \quad PR^2 - US^2 = RU^2 - PS^2.$$

Podobnie rozważając trójkąty prostokątne QST i PQS oraz RTU i QRT uzyskujemy analogiczne równości

$$(2) \quad QP^2 - ST^2 = PS^2 - QT^2,$$

$$(3) \quad RQ^2 - TU^2 = QT^2 - RU^2.$$

Dodając równości (1), (2), (3) stronami otrzymujemy zależność

$$(4) \quad (PR^2 + QP^2 + RQ^2) - (US^2 + ST^2 + TU^2) = 0.$$

Jeśli przez k oznaczymy skalę podobieństwa trójkątów PQR i TUS , tzn. $PR = k \cdot ST$, $QP = k \cdot TU$, $RQ = k \cdot US$, to z równości (4) wynika natychmiast, że $k = 1$. A to znaczy, że trójkąty PQR i TUS są przystające.

Zadanie 11. Dla każdej liczby całkowitej dodatniej n wyznaczyć liczbę permutacji $(x_1, x_2, \dots, x_{6n-1})$ zbioru $\{1, 2, \dots, 6n-1\}$, spełniających warunki:

jeśli $i - j = 2n+1$, to $x_i > x_j$;

jeśli $i - j = 4n$, to $x_i < x_j$.

Rozwiązanie

Odpowiedź: Szukaną liczbą jest $\binom{6n-1}{3n+1}$.

Dla dowolnej permutacji spełniającej warunki zadania zachodzą następujące ciągi nierówności

$$(1) \quad \begin{aligned} x_{2n} < x_{4n+1} < x_1 < x_{2n+2} < x_{4n+3} < x_3 < x_{2n+4} < x_{4n+5} < \dots \\ < x_{2n-3} < x_{4n-2} < x_{6n-1} < x_{2n-1} < x_{4n}, \end{aligned}$$

$$(2) \quad \begin{aligned} x_{2n+1} < x_{4n+2} < x_2 < x_{2n+3} < x_{4n+4} < x_4 < x_{2n+5} < x_{4n+6} < \dots \\ < x_{2n-4} < x_{4n-3} < x_{6n-2} < x_{2n-2} < x_{4n-1}. \end{aligned}$$

Zauważmy, że każdy z elementów $x_1, x_2, \dots, x_{6n-1}$ został w rozważanych wierszach wypisany dokładnie raz. Rzeczywiście, w nierównościach (1) pojawiły się wszystkie wskaźniki nieparzyste z przedziału $\langle 1; 2n-1 \rangle$, parzyste z przedziału $\langle 2n; 4n \rangle$ i nieparzyste z przedziału $\langle 4n+1; 6n-1 \rangle$, w nierównościach (2) zaś — wszystkie wskaźniki parzyste z przedziału $\langle 2; 2n-2 \rangle$, nieparzyste z przedziału $\langle 2n+1; 4n-1 \rangle$ i parzyste z przedziału $\langle 4n+2; 6n-2 \rangle$. Badając ilość liczb parzystych i nieparzystych w odpowiednich przedziałach obliczamy, że w związku (1) występuje $n + (n+1) + n = 3n+1$ liczb, a w związku (2) występuje $(n-1) + n + (n-1) = 3n-2$ liczb.

Nietrudno spostrzec, że każda nierówność postaci $x_i < x_j$ lub $x_i > x_j$ dająca się wywnioskować z warunków zadania znajduje się w zależności (1) lub (2). To oznacza, że jeżeli dla pewnej permutacji oba te ciągi nierówności

są spełnione, to permutacja ta ma postulowane własności. Wobec tego każda permutacja spełniająca warunki zadania jest jednoznacznie wyznaczona przez podanie $3n+1$ liczb wypisanych w nierównościach (1) — należy bowiem uszeregować je rosnąco, za x_{2n} przyjąć najmniejszą z tych liczb, za x_{4n+1} liczbę bezpośrednio po niej następującą itd., co pozwala jednoznacznie określić wyrazy permutacji znajdujące się w związkach (1); pozostałe $3n-2$ liczb po ustawieniu w kolejności rosnącej analogicznie określają wyrazy permutacji znajdujące się w związkach (2).

Zatem liczba permutacji mających żadaną własność jest równa liczbie $(3n+1)$ -elementowych podzbiorów zbioru $(6n-1)$ -elementowego, czyli liczbie

$$\binom{6n-1}{3n+1}.$$

Zadanie 12. Wielomian W o współczynnikach rzeczywistych przyjmuje w przedziale $\langle a; b \rangle$ (gdzie $a < b$) tylko wartości dodatnie. Udowodnić, że istnieją takie wielomiany P oraz $Q_1, Q_2, \dots, Q_m$, że

$$W(x) = P(x)^2 + (x-a)(b-x) \sum_{i=1}^m Q_i(x)^2$$

dla każdej liczby rzeczywistej x .

Rozwiązanie

Dowód przeprowadzimy indukcyjnie ze względu na stopień wielomianu W .

Jeżeli $W(x) \equiv c$ jest wielomianem stałym, to oczywiście $c > 0$ i w tym przypadku można przyjąć $P(x) \equiv \sqrt{c}$, $m = 1$ i $Q_1(x) \equiv 0$.

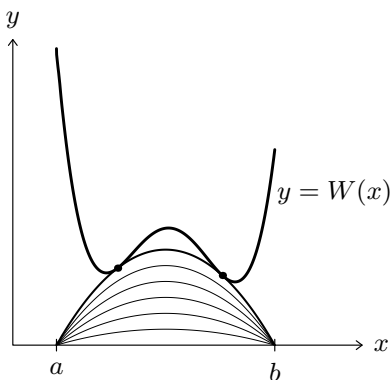
Przypuśćmy teraz, że teza zadania jest prawdziwa dla wszystkich wielomianów stopnia mniejszego niż n i niech W będzie wielomianem stopnia n .

Funkcja

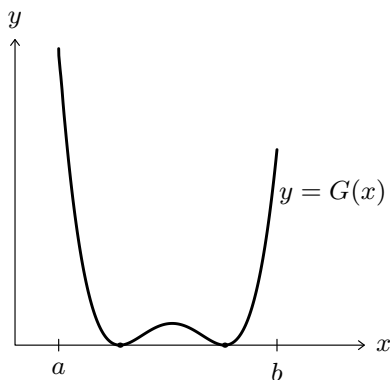
$$f(x) = \frac{W(x)}{(x-a)(b-x)},$$

rozważana w przedziale $\langle a; b \rangle$, jest ciągła i przyjmuje w nim wartości dodatnie, które przy końcach przedziału dążą do nieskończoności. Zatem w pewnym punkcie (niekoniecznie jednym) funkcja f osiąga swoją wartość minimalną c ; jest to liczba dodatnia.

Zachodzi wobec tego nierówność $f(x) \geq c$, czyli $W(x) \geq c(x-a)(b-x)$ dla $x \in \langle a; b \rangle$, która w pewnym punkcie (punktach) staje się równością. Mówiąc obrazowo, c jest liczbą, dla której parabola $y = c(x-a)(b-x)$ w przedziale $\langle a; b \rangle$ jest „styczna od dołu” do wykresu wielomianu W na tym przedziale, być może w kilku punktach (rys. 5). Tak więc wielomian $G(x) = W(x) - c(x-a)(b-x)$ w badanym przedziale przyjmuje wartości nieujemne i posiada przynajmniej jeden pierwiastek (rys. 6).



rys. 5



rys. 6

Zauważmy, że $G(a) = W(a)$ i $G(b) = W(b)$, a więc wielomian G na końcach przedziału przybiera wartości dodatnie. Zatem pierwiastki wielomianu G w przedziale $(a; b)$ mają parzystą krotność. Istnieją zatem takie liczby (niekoniecznie różne) $g_1, g_2, \dots, g_k \in (a; b)$, że wielomian G ma postać

$$G(x) = (x - g_1)^2(x - g_2)^2 \dots (x - g_k)^2 H(x),$$

przy czym wielomian H w przedziale $\langle a; b \rangle$ przyjmuje tylko wartości dodatnie. Oznaczmy $B(x) = (x - g_1)(x - g_2) \dots (x - g_k)$; mamy więc $G(x) = B(x)^2 H(x)$.

Jeśli m jest stopniem wielomianu G , to $m \leq n$, z wyjątkiem sytuacji, gdy $n = 1$, kiedy to $m = 2$. Ponadto wielomian H ma stopień nie większy niż $m - 2$. Zatem w każdym przypadku H jest wielomianem stopnia niższego niż W . Wobec tego na mocy założenia indukcyjnego istnieje przedstawienie postaci

$$H(x) = P(x)^2 + (x - a)(b - x) \sum_{i=1}^m Q_i(x)^2.$$

Stąd otrzymujemy

$$\begin{aligned} W(x) &= G(x) + c(x - a)(b - x) = B(x)^2 H(x) + c(x - a)(b - x) = \\ &= B(x)^2 \left(P(x)^2 + (x - a)(b - x) \sum_{i=1}^m Q_i(x)^2 \right) + c(x - a)(b - x) = \\ &= (B(x)P(x))^2 + (x - a)(b - x) \left((\sqrt{c})^2 + \sum_{i=1}^m (B(x)Q_i(x))^2 \right) \end{aligned}$$

i jest to żądane przedstawienie wielomianu W . Tym samym rozwiązanie zadania zostało zakończone.

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w Internecie pod adresem: www.om.edu.pl



LVIII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia drugiego

23 lutego 2007 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Wielomian $P(x)$ ma współczynniki całkowite. Udowodnić, że jeżeli wielomiany $P(x)$ oraz $P(P(P(x)))$ mają wspólny pierwiastek rzeczywisty, to mają także wspólny pierwiastek całkowity.

2. Dany jest pięciokąt wypukły $ABCDE$, w którym

$$BC = CD, \quad DE = EA, \quad \sphericalangle BCD = \sphericalangle DEA = 90^\circ.$$

Udowodnić, że z odcinków o długościach AC , CE , EB można zbudować trójkąt. Wyznaczyć miary jego kątów, znając miarę α kąta ACE i miarę β kąta BEC .

3. Z n^2 płytek w kształcie trójkąta równobocznego o boku 1 ułożono trójkąt równoboczny o boku n . Każda płytka jest z jednej strony biała, a z drugiej czarna. Ruch polega na wykonaniu następujących czynności: Wybieramy płytkę P mającą wspólne boki z co najmniej dwiema płytkami, których widoczne strony mają kolor inny niż widoczna strona płytki P . Następnie odwracamy płytkę P na drugą stronę.

Dla każdego $n \geq 2$ rozstrzygnąć, czy istnieje początkowe ułożenie płytek, pozwalające wykonać nieskończony ciąg ruchów.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.



LVIII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia drugiego

24 lutego 2007 r. (drugi dzień zawodów)

4. Udowodnić, że jeżeli a, b, c, d są liczbami całkowitymi dodatnimi oraz $ad = b^2 + bc + c^2$, to liczba

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

jest złożona.

5. Czworokąt wypukły $ABCD$, w którym $AB \neq CD$, jest wpisany w okrąg. Czworokąty $AKDL$ i $CMBN$ są rombami o bokach długości a . Dowieść, że punkty K, L, M, N leżą na jednym okręgu.

6. Liczby dodatnie a, b, c, d spełniają warunek

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 4.$$

Wykazać, że

$$\sqrt[3]{\frac{a^3 + b^3}{2}} + \sqrt[3]{\frac{b^3 + c^3}{2}} + \sqrt[3]{\frac{c^3 + d^3}{2}} + \sqrt[3]{\frac{d^3 + a^3}{2}} \leq 2(a + b + c + d) - 4.$$

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu czekać na podeście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.



LVIII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia drugiego

23 lutego 2007 r. (pierwszy dzień zawodów)

Zadanie 1. Wielomian $P(x)$ ma współczynniki całkowite. Udowodnić, że jeżeli wielomiany $P(x)$ oraz $P(P(P(x)))$ mają wspólny pierwiastek rzeczywisty, to mają także wspólny pierwiastek całkowity.

Rozwiązanie

Niech liczba rzeczywista a będzie wspólnym pierwiastkiem wielomianów $P(x)$ i $P(P(P(x)))$. Z równości $P(a) = 0$ oraz $P(P(P(a))) = 0$ otrzymujemy $P(P(0)) = 0$. Liczba całkowita $m = P(0)$ spełnia zatem warunki

$P(m) = P(P(0)) = 0$ oraz $P(P(P(m))) = P(P(P(P(0)))) = P(P(0)) = 0$,
co oznacza, że m jest żądanym wspólnym pierwiastkiem całkowitym.

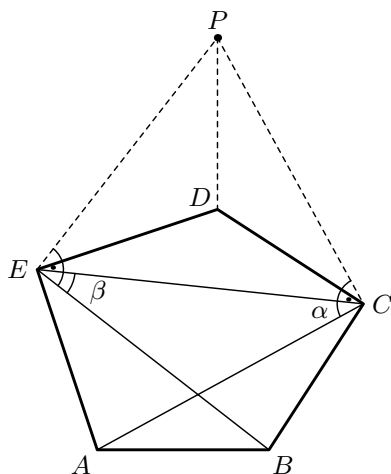
Zadanie 2. Dany jest pięciokąt wypukły $ABCDE$, w którym

$$BC = CD, \quad DE = EA, \quad \sphericalangle BCD = \sphericalangle DEA = 90^\circ.$$

Udowodnić, że z odcinków o długościach AC , CE , EB można zbudować trójkąt. Wyznaczyć miary jego kątów, znając miarę α kąta ACE i miarę β kąta BEC .

Rozwiązanie

Niech P będzie obrazem punktu B przy obrocie o kąt 90° wokół punktu E (rys. 1); wtedy oczywiście proste BE i EP są prostopadłe oraz $BE = EP$. Przy tym obrocie punkt A przechodzi na punkt D , a zatem trójkąty ABE oraz EDP są przystające. Stąd wynika, że $AB = DP$ oraz $\sphericalangle EAB = \sphericalangle EDP$.



rys. 1

W każdym pięciokącie suma kątów wewnętrznych wynosi 540° , a więc $\sphericalangle EAB + \sphericalangle ABC + \sphericalangle CDE = 360^\circ$. Wobec tego

$$\sphericalangle PDC = 360^\circ - \sphericalangle EDC - \sphericalangle EDP = 360^\circ - \sphericalangle EDC - \sphericalangle EAB = \sphericalangle ABC.$$

Stąd oraz z zależności $AB = DP$ oraz $BC = DC$ wynika, że trójkąty PDC i ABC są przystające. A skoro punkt D przy obrocie o kąt 90° wokół punktu C przechodzi na punkt B , więc punkt P przy tym obrocie musi przejść na punkt A . Stąd wynika, że proste AC i PC są prostopadłe oraz $AC = PC$. Trójkąt EPC jest zatem zbudowany z odcinków o długościach AC , CE , EB .

Ponieważ proste BE i PE są prostopadłe, więc $\sphericalangle PEC = 90^\circ - \beta$. Analogicznie uzyskujemy $\sphericalangle ECP = 90^\circ - \alpha$. Wobec tego miary kątów trójkąta zbudowanego z odcinków AC , CE , EB wynoszą: $90^\circ - \beta$, $\alpha + \beta$, $90^\circ - \alpha$.

Zadanie 3. Z n^2 płytek w kształcie trójkąta równobocznego o boku 1 ułożono trójkąt równoboczny o boku n . Każda płytka jest z jednej strony biała, a z drugiej czarna. Ruch polega na wykonaniu następujących czynności: Wybieramy płytkę P mającą wspólne boki z co najmniej dwiema płytkami, których widoczne strony mają kolor inny niż widoczna strona płytki P . Następnie odwracamy płytkę P na drugą stronę.

Dla każdego $n \geq 2$ rozstrzygnąć, czy istnieje początkowe ułożenie płytek, pozwalające wykonać nieskończony ciąg ruchów.

Rozwiązanie

Nazwijmy *odcinkiem granicznym* wspólny bok dwóch płytek, których widoczne strony mają różne kolory. Oczywiście liczba odcinków granicznych jest nieujemna i nie przekracza liczby m wszystkich odcinków będących wspólnym bokiem dwóch płytek. Zbadamy, jak zmienia się liczba odcinków granicznych w wyniku wykonania dozwolonego ruchu.

Każda z n^2 płytek ma wspólne boki z co najwyżej trzema innymi płytkami. Odwrócenie płytki jest dopuszczalne, jeżeli co najmniej dwa z takich boków są odcinkami granicznymi. Przypuśćmy, że odwracamy płytkę P . Wówczas odcinki graniczne mogą pojawić się albo zniknąć jedynie na bokach płytki P . Ponadto bok płytki P jest po odwróceniu odcinkiem granicznym wtedy i tylko wtedy, gdy przed odwróceniem nie był on odcinkiem granicznym. Wynika stąd, że w wyniku wykonania dozwolonego ruchu liczba odcinków granicznych zmniejsza się.

Udowodniliśmy w ten sposób, że z dowolnego początkowego ułożenia płytek można wykonać nie więcej niż m ruchów.

Odpowiedź: Dla żadnego $n \geq 2$ nie istnieje ułożenie pozwalające wykonać nieskończony ciąg ruchów.

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w Internecie pod adresem: www.om.edu.pl



LVIII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia drugiego

24 lutego 2007 r. (drugi dzień zawodów)

Zadanie 4. Udowodnić, że jeżeli a, b, c, d są liczbami całkowitymi dodatnimi oraz $ad = b^2 + bc + c^2$, to liczba

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

jest złożona.

Rozwiązanie

Z warunków zadania otrzymujemy równość $2ad = b^2 + c^2 + (b+c)^2$, a więc

$$(a+d)^2 - (b+c)^2 = (a+d)^2 - 2ad + b^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

Z drugiej strony, z rozkładu różnicy kwadratów na czynniki mamy

$$(a+d)^2 - (b+c)^2 = (a+d+b+c)(a+d-b-c).$$

Łącząc powyższe zależności uzyskujemy

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = (a+b+c+d)(a+d-b-c).$$

Czynnik $a+b+c+d$ jest liczbą całkowitą większą od 1. Gdyby był on równy $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, to na mocy nierówności $k^2 > k$ (prawdziwej dla $k > 1$) otrzymalibyśmy równości $a = b = c = d = 1$, jednakże liczby te nie spełniają warunków zadania. Zatem $a+b+c+d$ jest właściwym dzielnikiem liczby $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, skąd wynika teza zadania.

Zadanie 5. Czworokąt wypukły $ABCD$, w którym $AB \neq CD$, jest wpisany w okrąg. Czworokąty $AKDL$ i $CMBN$ są rombami o bokach długości a . Dowieść, że punkty K, L, M, N leżą na jednym okręgu.

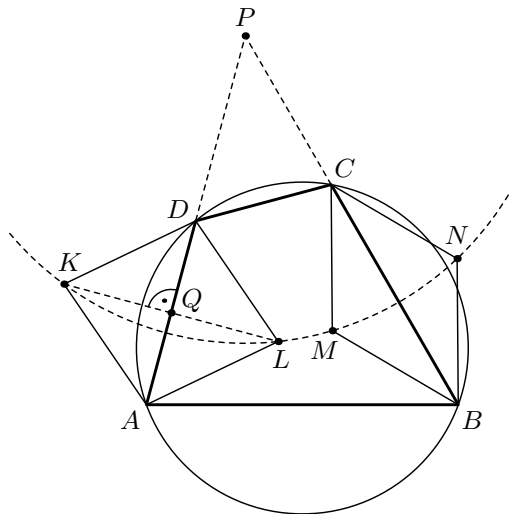
Rozwiązanie

Ponieważ cięciwy AB i CD są różnej długości, więc proste AD i BC nie są równoległe. Oznaczmy punkt ich przecięcia przez P (rys. 2). Wykażemy, że punkty K, L, M i N leżą na okręgu o środku P .

Prosta AD jest symetralną odcinka KL , a więc $PK = PL$. Analogicznie $PM = PN$. Wystarczy zatem wykazać, że $PK = PN$.

Oznaczmy przez Q punkt przecięcia przekątnych rombu $AKDL$. Wówczas na mocy twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy

$$\begin{aligned} AP \cdot DP &= (PQ + AQ)(PQ - AQ) = PQ^2 - AQ^2 = \\ &= PK^2 - KQ^2 - AQ^2 = PK^2 - AK^2. \end{aligned}$$



rys. 2

Analogicznie dowodzimy, że

$$BP \cdot CP = PN^2 - BN^2.$$

Punkty A, B, C, D leżą na jednym okręgu, więc $AP \cdot DP = BP \cdot CP$. W takim razie $PK^2 - AK^2 = PN^2 - BN^2$; a skoro $AK = BN = a$, więc w efekcie uzyskujemy równość $PK = PN$, która kończy rozwiązanie zadania.

Zadanie 6. Liczby dodatnie a, b, c, d spełniają warunek

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 4.$$

Wykazać, że

$$\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}} + \sqrt[3]{\frac{b^3+c^3}{2}} + \sqrt[3]{\frac{c^3+d^3}{2}} + \sqrt[3]{\frac{d^3+a^3}{2}} \leq 2(a+b+c+d) - 4.$$

Rozwiązanie

Wykażemy, że dla dowolnych liczb dodatnich x, y zachodzi nierówność

$$(1) \quad \sqrt[3]{\frac{x^3+y^3}{2}} \leq \frac{x^2+y^2}{x+y}.$$

Rzeczywiście, przekształcając równoważnie powyższą nierówność mamy

$$\begin{aligned} (x^3+y^3)(x+y)^3 &\leq 2(x^2+y^2)^3, \\ (x^3+y^3)(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3) &\leq 2x^6+6x^4y^2+6x^2y^4+2y^6, \\ 3x^5y+2x^3y^3+3xy^5 &\leq x^6+3x^4y^2+3x^2y^4+y^6, \\ 0 &\leq (x^3-y^3)^2-3xy(x-y)(x^3-y^3), \\ 0 &\leq (x^3-y^3)(x-y)^3. \end{aligned}$$

Ostatnia nierówność jest spełniona, gdyż liczby $x - y$ oraz $x^3 - y^3$ mają jednakowy znak.

Korzystając z zależności (1) widzimy, że zadanie będzie rozwiązane, jeżeli udowodnimy nierówność

$$\frac{a^2+b^2}{a+b} + \frac{b^2+c^2}{b+c} + \frac{c^2+d^2}{c+d} + \frac{d^2+a^2}{d+a} \leq 2(a+b+c+d) - 4.$$

Lewa strona powyższej nierówności jest równa

$$2(a+b+c+d) - \frac{2ab}{a+b} - \frac{2bc}{b+c} - \frac{2cd}{c+d} - \frac{2da}{d+a}.$$

Aby dokończyć rozwiązanie, wystarczy zatem dowieść, że

$$(2) \quad \frac{2ab}{a+b} + \frac{2bc}{b+c} + \frac{2cd}{c+d} + \frac{2da}{d+a} \geq 4.$$

Jednakże na mocy łatwej do sprawdzenia nierówności $x + y \geq \frac{4}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$ mamy

$$\begin{aligned} \frac{2ab}{a+b} + \frac{2cd}{c+d} &\geq \frac{8}{\frac{a+b}{ab} + \frac{c+d}{cd}} = \frac{8}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}} = 2, \\ \frac{2bc}{b+c} + \frac{2da}{d+a} &\geq \frac{8}{\frac{b+c}{bc} + \frac{d+a}{da}} = \frac{8}{\frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{a}} = 2. \end{aligned}$$

To uzasadnia nierówność (2), do której wcześniej został sprowadzony dowód tezy zadania.

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w Internecie pod adresem: www.om.edu.pl



LVIII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia trzeciego

18 kwietnia 2007 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. W trójkącie ostrokątnym ABC punkt O jest środkiem okręgu opisanego, odcinek CD jest wysokością, punkt E leży na boku AB , a punkt M jest środkiem odcinka CE . Prosta prostopadła do prostej OM i przechodząca przez punkt M przecina proste AC , BC odpowiednio w punktach K , L . Dowieść, że

$$\frac{LM}{MK} = \frac{AD}{DB}.$$

2. Liczbę całkowitą dodatnią nazwiemy *białą*, jeżeli jest równa 1 lub jest iloczynem parzystej liczby liczb pierwszych (niekoniecznie różnych). Pozostałe liczby całkowite dodatnie nazwiemy *czarnymi*.

Zbadać, czy istnieje taka liczba całkowita dodatnia, że suma jej białych dzielników jest równa sumie jej czarnych dzielników.

3. Płaszczyznę podzielono prostymi poziomymi i pionowymi na kwadraty jednostkowe. W każdy kwadrat należy wpisać liczbę całkowitą dodatnią tak, by każda liczba całkowita dodatnia wystąpiła na płaszczyźnie dokładnie raz. Rozstrzygnąć, czy można to uczynić w taki sposób, aby każda napisana liczba była dzielnikiem sumy liczb wpisanych w cztery kwadraty sąsiednie.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.



LVIII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia trzeciego

19 kwietnia 2007 r. (drugi dzień zawodów)

4. Dana jest liczba całkowita $n \geq 1$. Wyznaczyć liczbę możliwych wartości iloczynu $k \cdot m$, gdzie k, m są liczbami całkowitymi spełniającymi nierówność

$$n^2 \leq k \leq m \leq (n+1)^2.$$

5. W czworóścianie $ABCD$ spełnione są zależności

$$\sphericalangle BAC + \sphericalangle BDC = \sphericalangle ABD + \sphericalangle ACD,$$

$$\sphericalangle BAD + \sphericalangle BCD = \sphericalangle ABC + \sphericalangle ADC.$$

Udowodnić, że środek sfery opisanej na tym czworóścianie leży na prostej przechodzącej przez środki krawędzi AB i CD .

6. Ciąg $a_0, a_1, a_2, \dots$ jest określony przez warunki: $a_0 = -1$ oraz

$$a_n + \frac{a_{n-1}}{2} + \frac{a_{n-2}}{3} + \dots + \frac{a_1}{n} + \frac{a_0}{n+1} = 0 \quad \text{dla } n \geq 1.$$

Wykazać, że $a_n > 0$ dla $n \geq 1$.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.



LVIII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia trzeciego

18 kwietnia 2007 r. (pierwszy dzień zawodów)

Zadanie 1. W trójkącie ostrokątnym ABC punkt O jest środkiem okręgu opisanego, odcinek CD jest wysokością, punkt E leży na boku AB , a punkt M jest środkiem odcinka CE . Prosta prostopadła do prostej OM i przechodząca przez punkt M przecina proste AC , BC odpowiednio w punktach K , L . Dowieść, że

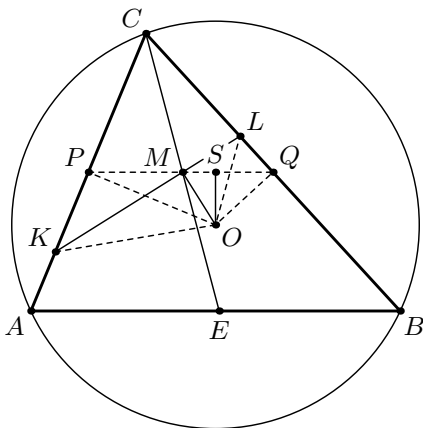
$$\frac{LM}{MK} = \frac{AD}{DB}.$$

Rozwiązanie

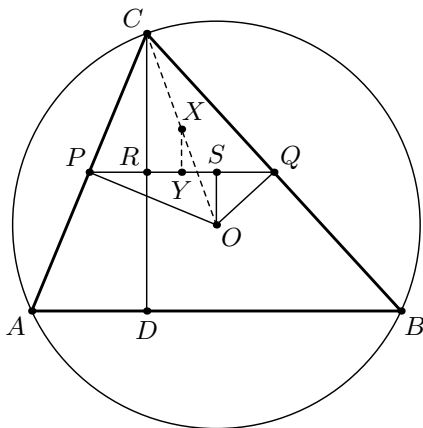
Poprowadźmy przez punkt M prostą równoległą do boku AB , która przecina odcinki AC i BC odpowiednio w punktach P i Q (rys. 1). Wówczas punkty P i Q są odpowiednio środkami boków AC i BC . Ponieważ punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC , więc $\angle APO = 90^\circ$. Ponadto $\angle KMO = 90^\circ$. Stąd wynika, że punkty K , P , M , O leżą na jednym okręgu, którego średnicą jest odcinek KO . Wobec tego $\angle OKM = \angle OPM$.

Analogicznie dowodzimy, że $\angle OLM = \angle OQM$. Z równości tych wynika, że trójkąty OKL i OPQ są podobne. Oznaczając zatem przez S rzut prostokątny punktu O na prostą PQ uzyskujemy

$$(1) \quad \frac{LM}{MK} = \frac{QS}{SP}.$$



rys. 1



rys. 2

Oznaczmy przez X środek odcinka OC oraz niech Y , R będą odpowiednio rzutami prostokątnymi punktów X i C na prostą PQ (rys. 2). Ponieważ $\angle OPC = \angle OQC = 90^\circ$, więc punkty C , P , O , Q leżą na jednym okręgu,

którego środkiem jest punkt X . Zatem $PX = XQ$, a więc $PY = YQ$. Ponadto punkt X jest środkiem odcinka OC , więc $RY = YS$. Stąd uzyskujemy $PR = QS$. Wobec tego

$$(2) \quad \frac{QS}{SP} = \frac{PR}{RQ} = \frac{AD}{DB}.$$

Łącząc równości (1) i (2) uzyskujemy tezę.

Zadanie 2. Liczbę całkowitą dodatnią nazwiemy *białą*, jeżeli jest równa 1 lub jest iloczynem parzystej liczby liczb pierwszych (niekoniecznie różnych). Pozostałe liczby całkowite dodatnie nazwiemy *czarnymi*. Zbadać, czy istnieje taka liczba całkowita dodatnia, że suma jej białych dzielników jest równa sumie jej czarnych dzielników.

Rozwiązanie

Dla liczby całkowitej $k > 1$ oznaczmy

$$\begin{aligned} B(k) &= \text{suma białych dzielników liczby } k, \\ C(k) &= \text{suma czarnych dzielników liczby } k, \\ D(k) &= B(k) - C(k). \end{aligned}$$

Udowodnimy, że dla dowolnych względnie pierwszych liczb całkowitych dodatnich l, m prawdziwa jest równość

$$(1) \quad D(lm) = D(l) \cdot D(m).$$

Istotnie, każdy dodatni dzielnik d iloczynu lm ma jednoznaczne przedstawienie w postaci $d = ab$, gdzie a jest dzielnikiem liczby l , zaś b jest dzielnikiem liczby m . Ponadto d jest dzielnikiem białym wtedy i tylko wtedy, gdy liczby a, b mają ten sam kolor.

Suma wszystkich iloczynów postaci ab , gdzie a, b są odpowiednio białymi dzielnikami liczb l, m , jest równa $B(l) \cdot B(m)$, natomiast suma wszystkich takich iloczynów, w których dzielniki a, b są czarne, wynosi $C(l) \cdot C(m)$. Mamy zatem

$$(2) \quad B(lm) = B(l) \cdot B(m) + C(l) \cdot C(m).$$

Analogicznie uzasadniamy równość

$$(3) \quad C(lm) = B(l) \cdot C(m) + C(l) \cdot B(m).$$

Ze związków (2) i (3) wynika, że

$$\begin{aligned} D(lm) &= B(l) \cdot B(m) + C(l) \cdot C(m) - B(l) \cdot C(m) - C(l) \cdot B(m) = \\ &= (B(l) - C(l))(B(m) - C(m)) = D(l) \cdot D(m), \end{aligned}$$

co kończy dowód zależności (1).

Przypuśćmy teraz, że suma białych dzielników pewnej liczby całkowitej $n > 1$ jest równa sumie jej czarnych dzielników. Mamy więc $D(n) = 0$. Rozłóżmy liczbę n na iloczyn potęg różnych liczb pierwszych:

$$n = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdot \dots \cdot p_j^{r_j}.$$

Na mocy wzoru (1) zachodzi równość

$$D(n) = D(p_1^{r_1}) \cdot D(p_2^{r_2}) \cdot \dots \cdot D(p_j^{r_j}) = 0.$$

Wobec tego istnieje liczba pierwsza p i liczba całkowita dodatnia r , dla których $D(p^r) = 0$. Jest to jednak niemożliwe: wszystkimi białymi dzielnikami liczby p^r są liczby $1, p^2, p^4, \dots$, a wszystkimi czarnymi dzielnikami — liczby $p, p^3, p^5, \dots$, i w konsekwencji zachodzi równość

$$D(p^r) = 1 - p + p^2 - p^3 + \dots + (-1)^r p^r,$$

zaś liczba stojąca po prawej stronie powyższej równości daje resztę 1 z dzielenia przez p , jest więc różna od zera. Doszliśmy zatem do sprzeczności.

Odpowiedź: Nie istnieje.

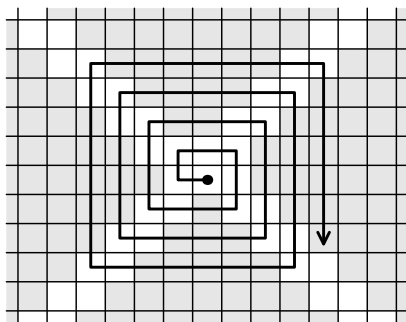
Zadanie 3. Płaszczyznę podzielono prostymi poziomymi i pionowymi na kwadraty jednostkowe. W każdy kwadrat należy wpisać liczbę całkowitą dodatnią tak, by każda liczba całkowita dodatnia wystąpiła na płaszczyźnie dokładnie raz. Rozstrzygnąć, czy można to uczynić w taki sposób, aby każda napisana liczba była dzielnikiem sumy liczb wpisanych w cztery kwadraty sąsiednie.

Rozwiązanie

Udowodnimy, że istnieje postulowany sposób wpisania liczb.

Zacieniujemy niektóre kwadraty jednostkowe oraz narysujmy drogę przechodzącą przez każdy kwadrat dokładnie raz tak, jak pokazuje rys. 3. W kolejne kwadraty zaznaczonej drogi wpisujemy liczby według następujących zasad:

Startujemy z kwadratu zaznaczonego grubą kropką.



rys. 3

		29	37	40	43	30	32	34	
		27	13	15	19	14	16	45	
		33	12	3	4	5	21	46	
		31	11	2	1	6	17	57	
		28	10	9	8	7	18	64	
		26	22	25	23	24	20	35	

rys. 4

A) Jeżeli dany kwadrat nie jest zacieniowany, wpisujemy najmniejszą liczbę całkowitą dodatnią, która nie została jeszcze napisana na płaszczyźnie.

B) Jeżeli dany kwadrat K jest zacieniowany, ma on bok wspólny z pewnym kwadratem H , w który jest już wpisana liczba. Wówczas wpisujemy w K najmniejszą taką liczbę całkowitą dodatnią m nie występującą jesz-

cze na płaszczyźnie, że liczba wpisana w kwadrat H jest dzielnikiem sumy czterech liczb znajdujących się w kwadratach sąsiadujących z kwadratem H . (Por. rys. 4, gdzie przedstawiono rezultat wykonywania kroków A) i B) dla kilkudziesięciu początkowych kwadratów na drodze.)

Zauważmy przede wszystkim, że liczba m zgodna z wymaganiami warunku B) zawsze istnieje. Rzeczywiście, ze sposobu zacieniowania kwadratów wynika, że w trzech kwadratach sąsiadujących z kwadratem K są już napisane liczby, powiedzmy a , b , c . Jeżeli zatem w kwadracie K znajduje się liczba d , to liczbę m musimy wybrać w taki sposób, by liczba $a + b + c + m$ dzieliła się przez d . Jest to możliwe, bowiem na płaszczyźnie wpisano dotąd skończenie wiele liczb.

Zatem postępując we wskazany sposób wpisujemy liczbę całkowitą dodatnią w każdy kwadrat na płaszczyźnie. Pozostaje wykazać, że ów sposób wpisania spełnia warunki zadania.

Ponieważ nieskończenie wiele kwadratów jest niezacieniowanych, krok A) zapewnia, że każda liczba całkowita w pewnym momencie pojawi się na płaszczyźnie. Ponadto w krokach A) i B) wybieramy za każdym razem liczbę, która dotąd nie została napisana. Wobec tego każda liczba całkowita dodatnia będzie wpisana w dokładnie jeden kwadrat. Na koniec, dla dowolnego kwadratu K , spośród czterech kwadratów sąsiadujących z K , kwadrat występujący na zaznaczonej drodze jako ostatni jest zacieniowany, a więc wpisanie liczby w ten kwadrat następuje na podstawie procedury B). Z treści tej procedury wnioskujemy, że liczba znajdująca się w kwadracie K jest dzielnikiem sumy czterech liczb wpisanych w kwadraty sąsiadujące z kwadratem K .

Wykazaliśmy tym samym, że opisany sposób rozmieszczania liczb w kwadratach spełnia warunki zadania.

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w Internecie pod adresem: www.om.edu.pl



LVIII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia trzeciego

19 kwietnia 2007 r. (drugi dzień zawodów)

Zadanie 4. Dana jest liczba całkowita $n \geq 1$. Wyznaczyć liczbę możliwych wartości iloczynu $k \cdot m$, gdzie k, m są liczbami całkowitymi spełniającymi nierówności

$$(1) \quad n^2 \leq k \leq m \leq (n+1)^2.$$

Rozwiązanie

Przypuśćmy, że dwie różne pary (k, m) i (k', m') , spełniające zadany warunek, dają jednakowy iloczyn $km = k'm' = q$. Oznaczmy

$$m + k = s, \quad m - k = r, \quad m' + k' = s', \quad m' - k' = r'.$$

Wówczas $4q = s^2 - r^2$, czyli $r = \sqrt{s^2 - 4q}$; różnica r' wyraża się analogicznie. Gdyby zachodziła równość $s = s'$, wynikałaby stąd także równość $r = r'$. To jednak nie jest możliwe, skoro pary (k, m) i (k', m') są różne. Zatem $s \neq s'$; nie tracąc ogólności przyjmijmy, że $s' \leq s - 1$. Tak więc

$$(1) \quad s^2 - r^2 = 4q = 4k'm' \leq (k' + m')^2 \leq (s - 1)^2 = s^2 - 2s + 1,$$

wobec czego

$$r^2 + 1 \geq 2s = 2(k + m) = 2(2k + r) = 4k + 2r$$

i w konsekwencji $(r - 1)^2 \geq 4k \geq 4n^2$. Widać stąd, że r nie może być zerem. Zatem $r - 1$ jest liczbą nieujemną i z ostatniej nierówności wynika, że $r - 1 \geq 2n$. To znaczy, że

$$(2) \quad r \geq 2n + 1.$$

Różnica liczb m, k z przedziału $\langle n^2; (n+1)^2 \rangle$ nie może być większa niż jego długość, równa $2n + 1$. Nierówność (2) musi więc być równością, a liczby k, m muszą pokrywać się z końcami tego przedziału.

Muszą ponadto zachodzić równości we wszystkich wcześniejszych nierównościach, z których zależność (2) została wyprowadzona. Równość w związkach (1) oznacza zaś, że $k' = m' = (s - 1)/2$. Ostatecznie więc

$$k = n^2, \quad m = (n+1)^2, \quad k' = m' = n^2 + n.$$

Znalezione pary (k, m) i (k', m') istotnie mają równe iloczyny $km = k'm'$; a z przeprowadzonego rozumowania wynika, że są to jedyne takie dwie różne pary.

W zbiorze $\{n^2, n^2 + 1, \dots, (n+1)^2\}$ jest $2n + 2$ liczb. Można z nich utworzyć $\binom{2n+2}{2}$ par (k, m) , w których $k < m$, oraz $2n + 2$ par, w których $k = m$; łącznie $2n^2 + 5n + 3$ par. Wśród wyznaczonych przez nie wartości iloczynu

km występuje *dokładnie jedno* powtórzenie. Tak więc liczba możliwych wartości iloczynu km jest o jeden mniejsza i wynosi $2n^2 + 5n + 2$.

Zadanie 5. W czworościanie $ABCD$ spełnione są zależności

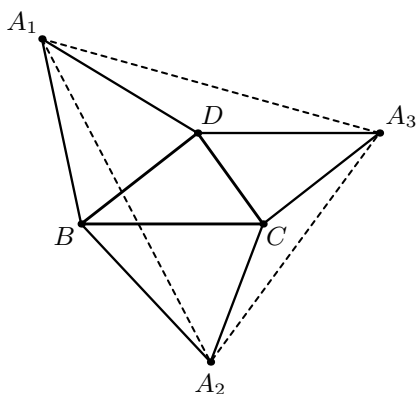
$$\sphericalangle BAC + \sphericalangle BDC = \sphericalangle ABD + \sphericalangle ACD,$$

$$\sphericalangle BAD + \sphericalangle BCD = \sphericalangle ABC + \sphericalangle ADC.$$

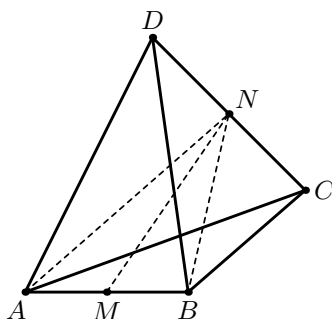
Udowodnić, że środek sfery opisanej na tym czworościanie leży na prostej przechodzącej przez środki krawędzi AB i CD .

Rozwiązanie

Rozpatrzmy sześciokąt $A_1BA_2CA_3D$ będący siatką czworościanu $ABCD$ (rys. 5).



rys. 5



rys. 6

Przepisując pierwszą z danych w treści zadania równości jako

$$\sphericalangle A_1BD + \sphericalangle A_3CD = \sphericalangle BDC + \sphericalangle BA_2C$$

widzimy, że suma miar kątów A_1BA_2 i A_2CA_3 (traktowanych jako kąty wewnętrzne sześciokąta ABA_2CA_3D , a zatem niekoniecznie wypukłych) jest równa sumie miar kątów wewnętrznych trójkątów BDC i BA_2C , co daje

$$(1) \quad \sphericalangle A_1BA_2 + \sphericalangle A_2CA_3 = 360^\circ.$$

Ponieważ $BA_1 = BA_2$ oraz $CA_2 = CA_3$ (gdyż odpowiednie odcinki pochodzą z rozklejenia jednej krawędzi czworościanu), więc na mocy równości (1) trójkąty równoramienne A_1BA_2 i A_2CA_3 są podobne (przy czym mogą być zdegenerowane do odcinka). Wobec tego

$$(2) \quad \frac{A_2A_1}{A_2B} = \frac{A_2A_3}{A_2C}.$$

Ponadto $\sphericalangle BA_2A_1 = \sphericalangle CA_2A_3$, przy czym oba kąty są jednakowo zorientowane, skąd otrzymujemy

$$(3) \quad \sphericalangle BA_2C = \sphericalangle A_1A_2A_3.$$

Z zależności (2) i (3) wynika, że trójkąty BA_2C oraz $A_1A_2A_3$ są podobne. Analogicznie korzystając z drugiej równości danej w treści zadania dowodzimy, iż trójkąty A_1BD i $A_1A_2A_3$ są podobne. Wobec tego podobne są trójkąty BA_2C i A_1BD ; ze względu na równość $A_1B = BA_2$ są one przystające. Zatem

$$(4) \quad A_2C = BD \quad \text{oraz} \quad BC = A_1D.$$

Niech teraz punkty M , N będą odpowiednio środkami krawędzi AB , CD w czworościanie $ABCD$ (rys. 6). Na mocy (4) trójkąty BDC i ACD są przystające. Wobec tego odcinki BN i AN , będące odpowiednio środkowymi w tych trójkątach, mają równe długości. Innymi słowy, $AN = BN$, zatem w trójkącie równoramiennym ANB środkowa NM jest prostopadła do boku AB . Analogicznie rozpatrując trójkąt CMD dowodzimy, że $MN \perp CD$.

Prosta MN jest więc krawędzią przecięcia płaszczyzn symetralnych krawędzi AB i CD czworościanu $ABCD$. Środek sfery opisanej na czworościanie leży na każdej z tych płaszczyzn, zatem leży na prostej MN , co dowodzi tezy zadania.

Zadanie 6. Ciąg $a_0, a_1, a_2, \dots$ jest określony przez warunki: $a_0 = -1$ oraz

$$a_n + \frac{a_{n-1}}{2} + \frac{a_{n-2}}{3} + \dots + \frac{a_1}{n} + \frac{a_0}{n+1} = 0 \quad \text{dla } n \geq 1.$$

Wykazać, że $a_n > 0$ dla $n \geq 1$.

Rozwiązanie

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

Liczba $a_1 = \frac{1}{2}$ jest dodatnia. Przypuśćmy z kolei, że dla pewnego wskaźnika n liczby $a_1, a_2, \dots, a_n$ są dodatnie. Udowodnimy, że liczba a_{n+1} również jest dodatnia. W tym celu zauważmy, że prawdziwa jest zależność

$$\frac{1}{k+1} \leq \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{k} \quad \text{dla } k = 1, 2, \dots, n,$$

gdyż jest ona równoważna nierówności $(n+1)k = nk + k \leq (k+1)n = nk + n$. Zatem korzystając z założenia indukcyjnego oraz z danej w treści zadania równości otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+2} &= a_{n+1} + \frac{a_n}{2} + \frac{a_{n-1}}{3} + \dots + \frac{a_2}{n} + \frac{a_1}{n+1} \leq \\ &\leq a_{n+1} + \frac{n}{n+1} \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{2} + \dots + \frac{a_2}{n-1} + \frac{a_1}{n} \right) = \\ &= a_{n+1} + \frac{n}{n+1} \cdot \frac{-a_0}{n+1} = a_{n+1} + \frac{n}{(n+1)^2}. \end{aligned}$$

Wobec tego spełniona jest nierówność

$$a_{n+1} \geq \frac{1}{n+2} - \frac{n}{(n+1)^2} = \frac{1}{(n+1)^2(n+2)} > 0,$$

która kończy dowód indukcyjny i rozwiązanie zadania.



LIX Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego

I seria (10 września 2007 r. – 8 października 2007 r.)

1. Rozwiązać w liczbach rzeczywistych x, y, z układ równań

$$\begin{cases} x^5 = 5y^3 - 4z \\ y^5 = 5z^3 - 4x \\ z^5 = 5x^3 - 4y \end{cases}$$

2. Dany jest kąt wypukły o wierzchołku P i punkt A leżący wewnątrz tego kąta. Punkty X i Y leżą na różnych ramionach tego kąta, przy czym $PX = PY$ oraz wartość sumy $AX + AY$ jest najmniejsza. Wykazać, że

$$\sphericalangle XAP = \sphericalangle YAP.$$

3. Ciąg liczb całkowitych $a_1, a_2, a_3, \dots$ jest określony przez warunki: $a_1 = 1, a_2 = 2$,

$$a_n = 3a_{n-1} + 5a_{n-2} \quad \text{dla } n = 3, 4, 5, \dots$$

Rozstrzygnąć, czy istnieje taka liczba całkowita $k \geq 2$, że liczba a_k jest dzielnikiem iloczynu $a_{k+1}a_{k+2}$.

4. Dana jest liczba całkowita $n \geq 1$. Każdemu niepustemu podzbirowi A zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ przyporządkowujemy liczbę $w(A)$ w następujący sposób: Jeżeli $a_1 > a_2 > \dots > a_k$ są wszystkimi elementami zbioru A , to

$$w(A) = a_1 - a_2 + a_3 - \dots + (-1)^{k+1} a_k.$$

Obliczyć sumę wszystkich $2^n - 1$ otrzymanych liczb $w(A)$.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

8 października 2007 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.



LIX Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego

II seria (9 października 2007 r. – 12 listopada 2007 r.)

5. Znaleźć wszystkie takie trójki liczb pierwszych (p, q, r) , że liczby

$$pq + qr + rp \quad \text{oraz} \quad p^3 + q^3 + r^3 - 2pqr$$

są podzielne przez $p + q + r$.

6. Wyznaczyć wszystkie takie wielomiany $W(x)$ o współczynnikach rzeczywistych, że dla każdej liczby rzeczywistej x spełniona jest równość

$$W(x^2) \cdot W(x^3) = (W(x))^5.$$

7. W n -osobowym stowarzyszeniu działa $2^n - 1$ komisji (każdy niepusty zbiór członków stowarzyszenia tworzy komisję). W każdej komisji należy wybrać przewodniczącego. Wymagany jest przy tym warunek: Jeżeli komisja C jest sumą $C = A \cup B$ dwóch komisji A i B , to przewodniczący komisji C jest też przewodniczącym co najmniej jednej z komisji A , B .

Wyznaczyć liczbę możliwych wyborów przewodniczących.

8. Dany jest ostrosłup czworokątny $ABCD$ o podstawie czworokąta wypukłego $ABCD$. Sfera wpisana w ten ostrosłup jest styczna do ściany $ABCD$ w punkcie P . Dowieść, że

$$\sphericalangle APB + \sphericalangle CPD = 180^\circ.$$

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

12 listopada 2007 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.



LIX Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego

III seria (13 listopada 2007 r. – 10 grudnia 2007 r.)

9. Wyznaczyć najmniejszą liczbę rzeczywistą a o następującej własności:

Dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y, z \geq a$ spełniających warunek $x + y + z = 3$ prawdziwa jest nierówność

$$x^3 + y^3 + z^3 \geq 3.$$

10. Dana jest liczba pierwsza p . Ciąg liczb całkowitych dodatnich $a_1, a_2, a_3, \dots$ spełnia warunek

$$a_{n+1} = a_n + p \left[\sqrt[p]{a_n} \right] \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots$$

Wykazać, że pewien wyraz tego ciągu jest p -tą potęgą liczby całkowitej. (*Uwaga:* Symbol $[x]$ oznacza największą liczbę całkowitą nie przekraczającą x .)

11. Punkty $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7$ leżą odpowiednio na bokach $BC, CA, AB, BC, CA, AB, BC$ trójkąta ABC , przy czym spełnione są równości

$$\sphericalangle P_1 P_2 C = \sphericalangle A P_2 P_3 = \sphericalangle P_3 P_4 B = \sphericalangle C P_4 P_5 = \sphericalangle P_5 P_6 A = \sphericalangle B P_6 P_7 = 60^\circ.$$

Dowieść, że $P_1 = P_7$.

12. Dana jest liczba całkowita $m \geq 2$. Wyznaczyć najmniejszą taką liczbę całkowitą $n \geq m$, że dla każdego rozbitcia zbioru $\{m, m+1, \dots, n\}$ na dwa podzbiory, przynajmniej jeden z tych podzbiorów zawiera takie liczby a, b, c (niekoniecznie różne), że $ab = c$.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

10 grudnia 2007 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.

Adresy Komitetów Okręgowych Olimpiady Matematycznej

- Dla województwa pomorskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Gdańskiego, ul. Wita Stwosza 57, 80-952 Gdańsk

- Dla województwa śląskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Śląskiego, ul. Bankowa 14, 40-007 Katowice.

- Dla województwa małopolskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego, ul. Reymonta 4, 30-059 Kraków.

- Dla województwa lubelskiego i podkarpackiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Oddział Lubelski Polskiego Towarzystwa Matematycznego, pl. Marii Skłodowskiej-Curie 1 (Wieżowiec Fizyki), 20-031 Lublin.

- Dla województwa łódzkiego i świętokrzyskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki Uniwersytetu Łódzkiego, ul. Banacha 22, 90-238 Łódź.

- Dla województwa wielkopolskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Adama Mickiewicza, ul. Umultowska 87, 61-614 Poznań

- Dla województwa lubuskiego i zachodniopomorskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Uniwersytet Szczeciński, Instytut Matematyki, ul. Wielkopolska 15, 70-451 Szczecin.

- Dla województwa kujawsko-pomorskiego i warmińsko-mazurskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, ul. Chopina 12/18, 87-100 Toruń.

- Dla województwa mazowieckiego i podlaskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyczny PAN, ul. Śniadeckich 8, 00-956 Warszawa

- Dla województwa dolnośląskiego i opolskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego pl. Grunwaldzki 2/4, 50-384 Wrocław

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w Internecie pod adresem: www.om.edu.pl



LIX Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia pierwszego

(10 września 2007 r. – 10 grudnia 2007 r.)

Zadanie 1. Rozwiązać w liczbach rzeczywistych x, y, z układ równań

$$\begin{cases} x^5 = 5y^3 - 4z \\ y^5 = 5z^3 - 4x \\ z^5 = 5x^3 - 4y \end{cases}$$

Rozwiązanie

Jeżeli trójka liczb (x, y, z) spełnia dany układ równań, to spełniają go również trójki liczb (y, z, x) i (z, x, y) . Zatem bez ograniczenia ogólności rozumowania możemy przyjąć, że x jest najmniejszą wśród liczb x, y, z (pozostałe rozwiązania otrzymamy przez cykliczne przestawienie zmiennych).

Rozpatrzmy dwa przypadki.

1. $y \leq z$. Mamy więc $x \leq y \leq z$. Funkcja $f(t) = t^5$ jest ściśle rosnąca, zatem z drugiego i trzeciego równania danego układu otrzymujemy

$$5z^3 = y^5 + 4x \leq z^5 + 4y = 5x^3.$$

Funkcja $f(t) = t^3$ również jest ściśle rosnąca. Wobec tego powyższa nierówność implikuje, że $z \leq x$. W konsekwencji $x = y = z$. Stąd wynika, że rozwiązania danego układu równań w tym przypadku mają postać $x = y = z = t$, gdzie t jest rozwiązaniem równania $t^5 = 5t^3 - 4t$. To równanie jest równoważne równaniu $0 = t^5 - 5t^3 + 4t = t(t^4 - 5t^2 + 4) = t(t^2 - 1)(t^2 - 4) = t(t - 1)(t + 1)(t - 2)(t + 2)$, które ma rozwiązania $t = -2, -1, 0, 1, 2$. Otrzymujemy więc 5 rozwiązań danego układu równań: $x = y = z \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

2. $y > z$. W tym przypadku $x \leq z < y$. Rozumując podobnie jak poprzednio uzyskujemy

$$5y^3 = x^5 + 4z < z^5 + 4y = 5x^3,$$

czyli $y < x$. Zatem $x \leq z < y < x$, co nie może mieć miejsca.

Uwalniając się od założenia, że x jest najmniejszą wśród liczb x, y, z , widzimy, że jedynymi rozwiązaniami układu są rozwiązania otrzymane w przypadku 1.

Odpowiedź: Rozwiązaniami (x, y, z) danego układu równań są:

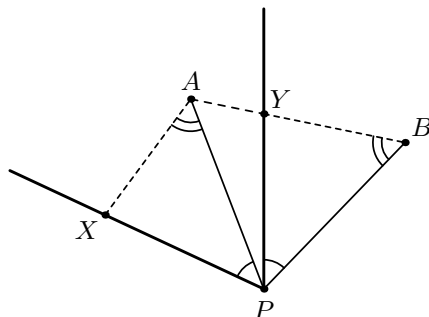
$$(-2, -2, -2), \quad (-1, -1, -1), \quad (0, 0, 0), \quad (1, 1, 1), \quad (2, 2, 2).$$

Zadanie 2. Dany jest kąt wypukły o wierzchołku P i punkt A leżący wewnątrz tego kąta. Punkty X i Y leżą na różnych ramionach tego kąta, przy czym $PX = PY$ oraz wartość sumy $AX + AY$ jest najmniejsza. Wykazać, że

$$\sphericalangle XAP = \sphericalangle YAP.$$

Rozwiązanie

Niech B będzie takim punktem płaszczyzny, dla którego $PB = PA$ oraz $\sphericalangle BPA = \sphericalangle YPX$ (rys. 1).



rys. 1

Mamy wówczas $\sphericalangle BPY = \sphericalangle APX$, zatem trójkąty BPY i APX są przystające (cecha *bok-kąt-bok*). Stąd otrzymujemy równość $BY = AX$. Wartość wyrażenia $AX + AY = BY + AY$ jest najmniejsza, więc stosując nierówność trójkąta dochodzimy do wniosku, że punkt Y leży na odcinku AB . Ponieważ zaś trójkąt BPA jest równoramienny, uzyskujemy

$$\sphericalangle YAP = \sphericalangle BAP = \sphericalangle ABP = \sphericalangle YBP = \sphericalangle XAP,$$

co kończy rozwiązanie.

Zadanie 3. Ciąg liczb całkowitych $a_1, a_2, a_3, \dots$ jest określony przez warunki:
 $a_1 = 1, a_2 = 2,$

$$(1) \quad a_n = 3a_{n-1} + 5a_{n-2} \quad \text{dla } n = 3, 4, 5, \dots$$

Rozstrzygnąć, czy istnieje taka liczba całkowita $k \geq 2$, że liczba a_k jest dzielnikiem iloczynu $a_{k+1}a_{k+2}$.

Rozwiązanie

Z danego w treści zadania warunku (1) wynika, że

$$a_{k+1}a_{k+2} = a_{k+1}(3a_k + 5a_{k+1}) = 3a_k a_{k+1} + 5a_{k+1}^2$$

dla $k \geq 2$. Wobec tego liczba a_k jest dzielnikiem iloczynu $a_{k+1}a_{k+2}$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest dzielnikiem liczby $5a_{k+1}^2$.

Zauważmy, że żaden wyraz ciągu $a_1, a_2, a_3, \dots$ nie jest liczbą podzielną przez 5. W istocie, dla każdego wskaźnika $n \geq 3$ z równości $a_n - 3a_{n-1} = 5a_{n-2}$ wynika, że liczby a_n, a_{n-1} są obie podzielne przez 5 lub też żadna z nich.

Ponieważ jednak $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ są liczbami niepodzielnymi przez 5, więc przez prostą indukcję otrzymujemy żądany wniosek. Analogicznie dowodzimy, że dla dowolnego $n \geq 3$ liczby a_n , a_{n-2} są obie podzielne albo obie niepodzielne przez 3, zatem w danym ciągu nie występują liczby podzielne przez 3.

Pozostaje więc zbadać, czy istnieje taka liczba całkowita $k \geq 2$, że liczba a_{k+1}^2 jest podzielna przez a_k . Ponieważ $a_k \geq 2$, więc oznacza to, że liczby a_k i a_{k+1} muszą mieć wspólny dzielnik pierwszy p . Jak wykazaliśmy wyżej, liczba p jest różna od 3 i 5. Ponadto istnieje najmniejsza taka liczba całkowita dodatnia m , że liczby a_m i a_{m+1} są podzielne przez p . Mamy oczywiście $m \geq 2$, więc zachodzi równość $5a_{m-1} = a_{m+1} - 3a_m$, z której wnioskujemy, że liczba a_{m-1} jest podzielna przez p . To jednak przeczy określeniu liczby m .

Uzyskana sprzeczność dowodzi, że taka liczba k nie istnieje.

Zadanie 4. Dana jest liczba całkowita $n \geq 1$. Każdemu niepustemu podzbirowi A zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ przyporządkowujemy liczbę $w(A)$ w następujący sposób: Jeżeli $a_1 > a_2 > \dots > a_k$ są wszystkimi elementami zbioru A , to

$$(1) \quad w(A) = a_1 - a_2 + a_3 - \dots + (-1)^{k+1} a_k.$$

Obliczyć sumę wszystkich $2^n - 1$ otrzymanych liczb $w(A)$.

Rozwiązanie

Sposób I

Dla $n = 1$ rozważana suma jest równa 1. Przyjmijmy więc, że $n \geq 2$.

Niech $B_1, B_2, \dots, B_m$ będą wszystkimi niepustymi podzbiarami zbioru $\{1, 2, \dots, n-1\}$. Wówczas $m = 2^{n-1} - 1$ oraz

$$B_1, B_2, \dots, B_m, \{n\}, B_1 \cup \{n\}, B_2 \cup \{n\}, \dots, B_m \cup \{n\}$$

są wszystkimi niepustymi podzbiarami zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$.

Ustalmy wartość $i \in \{1, 2, \dots, m\}$. Niech $c_1 > c_2 > \dots > c_k$ będą wszystkimi elementami zbioru B_i . Nietrudno spostrzec, że

$$w(B_i) = c_1 - c_2 + c_3 - \dots + (-1)^{k+1} c_k,$$

$$w(B_i \cup \{n\}) = n - c_1 + c_2 - \dots + (-1)^{k+2} c_k,$$

zatem

$$(2) \quad w(B_i) + w(B_i \cup \{n\}) = n.$$

Wypisując równość (2) dla $i = 1, 2, \dots, m$ i sumując stronami uzyskujemy

$$w(B_1) + w(B_1 \cup \{n\}) + \dots + w(B_m) + w(B_m \cup \{n\}) = m \cdot n.$$

Wobec tego suma, którą należy wyznaczyć, jest równa

$$w(\{n\}) + m \cdot n = n + (2^{n-1} - 1) \cdot n = n \cdot 2^{n-1}.$$

Sposób II

Niech $A_1, A_2, \dots, A_m$ ($m = 2^n - 1$) będą wszystkimi niepustymi podzbiórmi zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$. Utwórzmy tabelę o m wierszach i n kolumnach. W każde pole tej tabeli wpisujemy liczbę zgodnie z następującą zasadą: Jeżeli $a_1 > a_2 > \dots > a_k$ są wszystkimi elementami zbioru A_j (gdzie $j = 1, 2, \dots, m$), to w pole znajdujące się w j -tym wierszu oraz a_i -tej kolumnie wpisujemy liczbę $(-1)^{i+1}a_i$. W pozostałe pola tej tabeli wpisujemy zera.

Na mocy warunku (1) suma liczb znajdujących się w j -tym wierszu tabeli wynosi $w(A_j)$. To oznacza, że suma S , która należy obliczyć w zadaniu, jest równa sumie wszystkich liczb w tabeli. Zatem

$$(3) \quad S = k_1 + k_2 + \dots + k_n,$$

gdzie k_i jest sumą liczb znajdujących się w i -tej kolumnie.

Dla każdego ze zbiorów $A_1, A_2, \dots, A_m$ liczba n jest bądź jego największym elementem, bądź też do niego nie należy. Ponadto liczba tych zbiorów, które zawierają liczbę n , jest równa liczbie podzbiorów zbioru $\{1, 2, \dots, n-1\}$, czyli liczbie 2^{n-1} . Wynika stąd, że w n -tej kolumnie tabeli znajduje się 2^{n-1} liczb n , a pozostałe liczby są zerami. Zatem $k_n = n \cdot 2^{n-1}$.

Wykażemy z kolei, że $k_1 = k_2 = \dots = k_{n-1} = 0$.

Ustalmy wartość $j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. Każda liczba występująca w j -tej kolumnie jest równa 0, j albo $-j$. Musimy wykazać, że liczb j jest tyle samo, co liczb $-j$. Zauważmy, że w i -tym wierszu rozważanej kolumny znajduje się liczba j wtedy i tylko wtedy, gdy do zbioru A_i należy liczba j oraz parzysta liczba liczb większych od j (wybranych z $(n-j-1)$ -elementowego zbioru $\{j+1, j+2, \dots, n-1, n\}$); liczby mniejsze od j nie mają na to wpływu. Zatem liczba liczb j w j -tej kolumnie tabeli jest równa

$$(4) \quad 2^{j-1} \cdot \left(\binom{n-j-1}{0} + \binom{n-j-1}{2} + \binom{n-j-1}{4} + \dots \right),$$

przy czym ostatni składnik w powyższej sumie wynosi $\binom{n-j-1}{n-j-1}$ albo $\binom{n-j-1}{n-j-2}$ w zależności od parzystości liczby $n-j-1$. Podobnie dowodzimy, że liczba liczb $-j$ w j -tej kolumnie jest równa

$$(5) \quad 2^{j-1} \cdot \left(\binom{n-j-1}{1} + \binom{n-j-1}{3} + \binom{n-j-1}{5} + \dots \right).$$

Liczy (4) i (5) są równe, gdyż na mocy wzoru dwumianowego ich różnica wynosi $2^{j-1} \cdot (1-1)^{n-j-1} = 0$. To kończy dowód równości $k_j = 0$.

Z udowodnionych zależności otrzymujemy na mocy (3), że $S = n \cdot 2^{n-1}$.

Zadanie 5. Znaleźć wszystkie takie trójki liczb pierwszych (p, q, r) , że liczby

$$pq + qr + rp \quad \text{oraz} \quad p^3 + q^3 + r^3 - 2pqr$$

są podzielne przez $p+q+r$.

Rozwiązanie

Niech liczby pierwsze p, q, r spełniają żądane warunki. Liczba

$$pq + qr + rp = p(p + q + r) - (p^2 - qr)$$

jest podzielna przez $p + q + r$. Wobec tego liczby $p^2 - qr$ oraz $p(p^2 - qr) = p^3 - pqr$ są również podzielne przez $p + q + r$. Analogicznie dowodzimy, że liczby

$$q^3 - pqr \quad \text{oraz} \quad r^3 - pqr$$

są podzielne przez $p + q + r$. Sumując te trzy liczby dostajemy podzielność liczby $p^3 + q^3 + r^3 - 3pqr$ przez $p + q + r$. Zatem na mocy warunków zadania liczba $p + q + r$ jest dzielnikiem liczby pqr .

Liczby p, q, r są pierwsze, więc wszystkimi dodatnimi dzielnikami liczby pqr są: 1, p, q, r, pq, qr, rp, pqr (przy czym niektóre z nich mogą być równe). To oznacza, że $p + q + r$ musi być równe jednemu z tych dzielników. Cztery pierwsze dzielniki są mniejsze od $p + q + r$. Ponadto $pqr > p + q + r$, gdyż ze względu na nierówności $p, q, r \geq 2$ mamy

$$pqr \geq 4 \cdot \max\{p, q, r\} > 3 \cdot \max\{p, q, r\} \geq p + q + r.$$

Zatem liczba $p + q + r$ jest równa pq, qr lub rp . Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że $p + q + r = pq$. Liczba $pq + qr + rp$ jest więc podzielna przez pq . Stąd liczba

$$pq(p + q + 1) - (pq + qr + rp) = (p + q)(pq - r) = (p + q)^2$$

dzieli się przez pq . To oznacza, że liczba $p + q$ jest podzielna przez liczby pierwsze p i q . Musi więc być $p = q$. Ponadto $r = pq - p - q = p^2 - 2p = p(p - 2)$ jest liczbą pierwszą. Wobec $p \geq 2$ iloczyn $p(p - 2)$ może być liczbą pierwszą jedynie wtedy, gdy $p - 2 = 1$. Ostatecznie mamy $p = q = 3$ i $r = 3 \cdot 1 = 3$.

Pozostaje bezpośrednio sprawdzić, że otrzymane liczby spełniają warunki zadania.

Odpowiedź: Jedynym rozwiązaniem są liczby $(p, q, r) = (3, 3, 3)$.

Uwaga

W powyższym rozwiązaniu udowodniliśmy, że liczba $p^3 + q^3 + r^3 - 3pqr$ jest podzielna przez $p + q + r$. Można tę podzielność również wykazać przy użyciu tożsamości

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx).$$

Zadanie 6. Wyznaczyć wszystkie takie wielomiany $W(x)$ o współczynnikach rzeczywistych, że dla każdej liczby rzeczywistej x spełniona jest równość

$$(1) \quad W(x^2) \cdot W(x^3) = (W(x))^5.$$

Rozwiązanie

Sposób I

Zauważmy najpierw, że jedynymi wielomianami stałymi spełniającymi warunki zadania są $W(x) \equiv 0$ oraz $W(x) \equiv 1$. Przyjmijmy więc dalej, że wielomian $W(x)$ nie jest stały.

Jeżeli wielomian $W(x)$ jest postaci $W(x) = cx^n$ dla pewnej liczby rzeczywistej $c \neq 0$ i liczby całkowitej $n \geq 1$, to w warunku (1) mamy

$$W(x^2) \cdot W(x^3) = c^2 x^{5n} = (W(x))^5 = c^5 x^{5n},$$

co implikuje $c^2 = c^5$ i $c = 1$. Wobec tego wśród wielomianów rozważanej postaci tylko wielomiany $W(x) = x^n$ dla $n \geq 1$ spełniają warunki zadania.

Pozostał do rozpatrzenia przypadek, gdy wielomian $W(x)$ jest sumą co najmniej dwóch niezerowych jednomianów. W takim razie możemy napisać

$$W(x) = a_n x^n + a_l x^l + G(x),$$

gdzie $n > l \geq 0$, $a_n \neq 0$, $a_l \neq 0$, a wielomian $G(x)$ jest wielomianem zerowym albo ma stopień najwyżej $l - 1$. Zatem

$$\begin{aligned} W(x^2) \cdot W(x^3) &= (a_n x^{2n} + a_l x^{2l} + G(x^2))(a_n x^{3n} + a_l x^{3l} + G(x^3)) = \\ &= a_n^2 x^{5n} + a_l a_n x^{3n+2l} + a_l a_n x^{2n+3l} + P(x), \end{aligned}$$

gdzie $P(x)$ jest wielomianem stopnia co najwyżej $2n + 3l - 1$, oraz

$$(W(x))^5 = (a_n x^n + a_l x^l + G(x))^5 = a_n^5 x^{5n} + 5a_n a_l x^{4n+l} + Q(x),$$

gdzie $Q(x)$ jest wielomianem stopnia co najwyżej $3n + 2l$. Liczby $2n + 3l$ i $3n + 2l$ są mniejsze od $4n + l$. Wobec tego współczynnik przy potędze x^{4n+l} w wielomianie $W(x^2) \cdot W(x^3)$ jest równy zeru, a w wielomianie $(W(x))^5$ wynosi on $5a_n a_l \neq 0$. Doszliśmy więc do sprzeczności.

Sposób II

Tak jak w sposobie I rozpatrujemy najpierw przypadek, gdy wielomian $W(x)$ jest stały. Otrzymujemy więc rozwiązania $W(x) \equiv 0$ i $W(x) \equiv 1$, a w dalszej części rozwiązania przyjmujemy, że wielomian $W(x)$ nie jest stały.

Podstawiając $x = 0$ w zależności (1) otrzymujemy $(W(0))^2 = (W(0))^5$. Zatem $W(0) = 0$ albo $W(0) = 1$.

Przypuśćmy najpierw, że $W(0) = 1$. Wielomian $W(x) - 1$ nie jest stały i jego pierwiastkiem jest liczba $x = 0$. Wobec tego istnieją taka liczba całkowita dodatnia k oraz taki wielomian $G(x)$, że

$$W(x) = 1 + x^k \cdot G(x), \quad \text{przy czym } G(0) \neq 0.$$

Korzystając ze wzoru dwumianowego obliczamy, że

$$\begin{aligned} W(x^2) \cdot W(x^3) &= (1 + x^{2k} G(x^2))(1 + x^{3k} G(x^3)) = 1 + x^{2k} P(x), \\ (W(x))^5 &= (1 + x^k G(x))^5 = 1 + 5x^k G(x) + x^{2k} Q(x), \end{aligned}$$

gdzie $P(x)$, $Q(x)$ są pewnymi wielomianami o współczynnikach rzeczywistych. Jeżeli więc równość (1) zachodzi dla każdej liczby rzeczywistej x , to

$$(2) \quad x^{2k} (P(x) - Q(x)) = x^k \cdot G(x)$$

dla wszystkich x . Jednakże wielomian występujący po lewej stronie równości (2) jest podzielny przez x^{2k} , a wielomian po prawej stronie zawiera niezerowy współczynnik $G(0)$ przy potędze x^k . Otrzymaliśmy więc sprzeczność.

Pozostaje więc do rozpatrzenia przypadek $W(x) \neq 0$, $W(0) = 0$. Wówczas możemy napisać

$$(3) \quad W(x) = x^m \cdot G(x)$$

dla pewnej liczby całkowitej dodatniej m i wielomianu $G(x)$ spełniającego warunek $G(0) \neq 0$. Na mocy (1) i (3) mamy

$$x^{5m} \cdot G(x^2) \cdot G(x^3) = W(x^2) \cdot W(x^3) = (W(x))^5 = x^{5m} \cdot (G(x))^5,$$

zatem dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi równość

$$G(x^2) \cdot G(x^3) = (G(x))^5.$$

Innymi słowy, wielomian $G(x)$ również spełnia warunki zadania. Ponieważ $G(0) \neq 0$, więc z poprzedniej części rozwiązania wnioskujemy, że $G(x) \equiv 1$. Wobec tego $W(x) = x^m$.

Pozostaje już tylko zauważyć, że każdy taki wielomian $W(x)$ spełnia warunki zadania.

Odpowiedź: $W(x) \equiv 0$, $W(x) \equiv 1$ oraz $W(x) = x^n$ dla $n = 1, 2, 3, \dots$

Zadanie 7. W n -osobowym stowarzyszeniu działa $2^n - 1$ komisji (każdy niepusty zbiór członków stowarzyszenia tworzy komisję). W każdej komisji należy wybrać przewodniczącego. Wymagany jest przy tym warunek: Jeżeli komisja C jest sumą $C = A \cup B$ dwóch komisji A i B , to przewodniczący komisji C jest też przewodniczącym co najmniej jednej z komisji A , B .

Wyznaczyć liczbę możliwych wyborów przewodniczących.

Rozwiązanie

Odpowiedź: $n!$.

Wskażemy wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość między możliwymi wyborami przewodniczących komisji a sposobami przydzielenia członkom stowarzyszenia numerów $1, 2, \dots, n$ (przy czym różnym członkom przydzielone są różne numery). Tych ostatnich jest oczywiście tyle samo, ile permutacji zbioru n -elementowego, czyli $n!$.

Przypuśćmy więc, że w każdej komisji wybrano przewodniczącego zgodnie z założeniami zadania. Przypisujemy członkom stowarzyszenia numery indukcyjnie w następujący sposób:

- Numer 1 otrzymuje przewodniczący komisji, w skład której wchodzi wszyscy członkowie stowarzyszenia.
- Numer 2 otrzymuje przewodniczący komisji, w skład której wchodzi wszyscy członkowie stowarzyszenia oprócz członka o numerze 1.
- Numer 3 otrzymuje przewodniczący komisji, w skład której wchodzi wszyscy członkowie stowarzyszenia oprócz członków o numerach 1 i 2, itd. Wykażemy, że przy takim sposobie przypisania numerów spełniony jest następujący warunek:

(*) Przewodniczącym dowolnej komisji jest ten spośród jej członków, któremu przydzielony jest najmniejszy numer.

Rzeczywiście, rozpatrzmy dowolną komisję A i niech k będzie najmniejszym z numerów przypisanych członkom tej komisji. Niech B będzie komisją złożoną z wszystkich członków stowarzyszenia, którym przydzielono numery nie mniejsze niż k . Ze sposobu rozdzielania numerów wynika, że przewodniczącym komisji B jest członek o numerze k . Ponadto komisja B jest sumą dwóch komisji: A oraz $B \setminus A$. Ponieważ członek o numerze k nie należy do komisji $B \setminus A$, więc zgodnie z warunkami zadania musi on być przewodniczącym komisji A .

Określiliśmy więc odwzorowanie, które wyborowi przewodniczących komisji przyporządkowuje sposób przydzielenia członkom stowarzyszenia liczb $1, 2, \dots, n$. Aby dokończyć rozwiązanie zadania, wskażemy teraz odwzorowanie odwrotne.

Mianowicie, jeżeli członkom stowarzyszenia przypisano liczby $1, 2, \dots, n$, to w każdej komisji wybieramy na przewodniczącego tego jej członka, który ma najmniejszy numer (warunek (*) będzie więc spełniony). Jeżeli komisja C jest sumą $C = A \cup B$ dwóch komisji A, B i członek o numerze k jest przewodniczącym komisji C , to należy on do jednej z komisji A, B , w której jest członkiem o najniższym numerze — a więc jest jej przewodniczącym. Widzimy zatem, że warunek dany w treści zadania jest spełniony. Wobec tego jeżeli rozpoczniemy od wyborów przewodniczących komisji, przyporządkujemy członkom stowarzyszenia numery zgodnie z określoną wcześniej zasadą, a następnie z tych numerów „odtworzymy” przewodniczących komisji, to otrzymamy wyjściowy wybór przewodniczących. Podobnie jeżeli rozdzielimy numery członkom stowarzyszenia, na ich podstawie wybierzemy przewodniczących komisji, a potem zgodnie z opisaną procedurą indukcyjną przypiszemy członkom numery, to będą one tożsame z wyjściowymi numerami. W takim razie określone odwzorowania są wzajemnie odwrotne, co kończy rozwiązanie.

Zadanie 8. Dany jest ostrosłup czworokątny $ABCD$ o podstawie czworokąta wypukłego $ABCD$. Sfera wpisana w ten ostrosłup jest styczna do ścian $ABCD$ w punkcie P . Dowieść, że

$$\sphericalangle APB + \sphericalangle CPD = 180^\circ.$$

Rozwiązanie

Sposób I

Oznaczmy przez K, L, M, N punkty styczności rozpatrywanej sfery odpowiednio ze ścianami SDA, SAB, SBC, SCD . Niech ponadto K', L', M', N' będą odpowiednio punktami przecięcia prostych SK, SL, SM, SN z płaszczyzną $ABCD$.

Z równości $KS = SL$ oraz $AK = AL$ wynika, że trójkąty AKS i ALS są

przystające. A zatem

$$(1) \quad \sphericalangle AKK' = 180^\circ - \sphericalangle AKS = 180^\circ - \sphericalangle ALS = \sphericalangle ALL'.$$

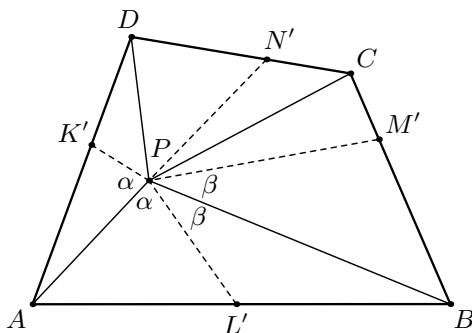
Z kolei z równości $K'K = K'P$ oraz $AK = AP$ wynika, że trójkąty AKK' oraz APK są przystające. Wobec tego $\sphericalangle AKK' = \sphericalangle APK'$. Analogicznie dowodzimy, że $\sphericalangle ALL' = \sphericalangle APL'$.

Łącząc ostatnie dwie równości z zależnością (1) uzyskujemy

$$\sphericalangle APK' = \sphericalangle APL' = \alpha.$$

Rozumując podobnie dostajemy (rys. 2)

$$\sphericalangle BPL' = \sphericalangle BPM' = \beta, \quad \sphericalangle CPM' = \sphericalangle CPN' = \gamma, \quad \sphericalangle DPN' = \sphericalangle DPK' = \delta.$$



rys. 2

Wobec tego

$$2\alpha + 2\beta + 2\gamma + 2\delta = \sphericalangle K'PL' + \sphericalangle L'PM' + \sphericalangle M'PN' + \sphericalangle N'PK' = 360^\circ,$$

czyli $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 180^\circ$. Pozostało zauważyć, że

$$\sphericalangle APB + \sphericalangle CPD = (\alpha + \beta) + (\gamma + \delta) = 180^\circ,$$

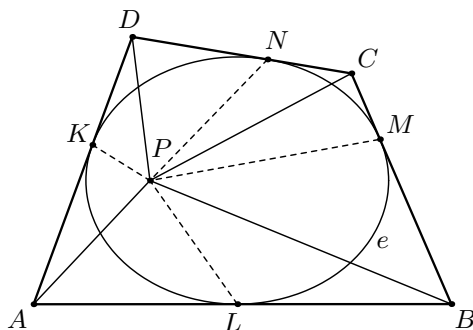
co kończy rozwiązanie zadania.

Sposób II

Poprowadźmy przez punkt S wszystkie proste, które są styczne do danej sfery s . Proste te wyznaczają stożek t , w który wpisana jest sfera s . Część wspólna stożka t oraz płaszczyzny $ABCD$ jest elipsą e wpisaną w czworokąt $ABCD$, której jednym z ognisk jest punkt P (zob. *Szkoła geometrii. Odczyty kaliskie* — praca zbiorowa, Warszawa 1993).

Oznaczmy przez K, L, M, N punkty styczności elipsy e odpowiednio z bokami DA, AB, BC, CD (rys. 3). Wówczas (zob. *LI Olimpiada Matematyczna, Sprawozdanie Komitetu Głównego*, Warszawa 2001, Dodatek B, str. 107, twierdzenie 3) otrzymujemy zależności

$$\sphericalangle APK = \sphericalangle APL, \quad \sphericalangle BPL = \sphericalangle BPM, \quad \sphericalangle CPM = \sphericalangle CPN, \quad \sphericalangle DPN = \sphericalangle DPK,$$



rys. 3

z których analogicznie jak w sposobie I wynika teza zadania.

Zadanie 9. Wyznaczyć najmniejszą liczbę rzeczywistą a o następującej własności:

Dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y, z \geq a$ spełniających warunek $x + y + z = 3$ prawdziwa jest nierówność

$$x^3 + y^3 + z^3 \geq 3.$$

Rozwiązanie

Odpowiedź: $a = -5$.

W rozwiązaniu wykorzystamy następującą tożsamość:

$$(1) \quad t^3 + 2 \cdot \left(\frac{3-t}{2} \right)^3 - 3 = \frac{3(t+5)(t-1)^2}{4}.$$

Przypuśćmy, że liczba $a \leq 1$ ma daną w treści zadania własność. Liczby $x = a, y = z = \frac{1}{2}(3-a)$ spełniają warunki $x, y, z \geq a$ i $x + y + z = 3$, zatem

$$0 \leq x^3 + y^3 + z^3 - 3 = a^3 + 2 \cdot \left(\frac{3-a}{2} \right)^3 - 3 = \frac{3(a+5)(a-1)^2}{4}$$

na mocy (1), skąd wynika nierówność $a \geq -5$.

Wykażemy z kolei, że liczba $a = -5$ spełnia warunki zadania. W tym celu rozpatrzmy takie liczby $x, y, z \geq -5$, że $x + y + z = 3$. Bez ograniczenia ogólności przyjmijmy, że $x \leq y \leq z$. Suma $y + z$ jest liczbą dodatnią, gdyż w przeciwnym razie wobec $y \leq z$ mielibyśmy $x \leq y \leq 0$, skąd wynikałoby, że $x + y + z \leq y + z \leq 0$, co przeczy warunkowi $x + y + z = 3$. Skoro zaś $y + z > 0$, prawdziwa jest nierówność

$$y^3 + z^3 - 2 \left(\frac{y+z}{2} \right)^3 = \frac{3(y^3 - y^2z - yz^2 + z^3)}{4} = \frac{3(y-z)^2(y+z)}{4} \geq 0,$$

skąd na podstawie tożsamości (1) otrzymujemy ostatecznie

$$x^3 + y^3 + z^3 \geq x^3 + 2 \left(\frac{y+z}{2} \right)^3 = x^3 + 2 \left(\frac{3-x}{2} \right)^3 = 3 + \frac{3(x+5)(x-1)^2}{4} \geq 3.$$

Zadanie 10. Dana jest liczba pierwsza p . Ciąg liczb całkowitych dodatnich $a_1, a_2, a_3, \dots$ spełnia warunek

$$(1) \quad a_{n+1} = a_n + p \left[\sqrt[p]{a_n} \right] \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots$$

Wykazać, że pewien wyraz tego ciągu jest p -tą potęgą liczby całkowitej. (*Uwaga:* Symbol $[x]$ oznacza największą liczbę całkowitą nie przekraczającą x .)

Rozwiązanie

Zdefiniujmy ciąg liczb całkowitych nieujemnych $b_1, b_2, b_3, \dots$ oraz $r_1, r_2, r_3, \dots$ w następujący sposób:

$$b_n^p \leq a_n < (b_n + 1)^p \quad \text{oraz} \quad r_n = a_n - b_n^p$$

dla $n = 1, 2, 3, \dots$. Inaczej mówiąc, r_n jest różnicą między wyrazem a_n a największą nie przekraczającą tego wyrazu p -tą potęgą liczby całkowitej. Warunek (1) przepisujemy teraz w postaci

$$(2) \quad a_{n+1} = a_n + pb_n.$$

Zauważmy, że jeżeli $r_n = 0$, to $a_n = b_n^p$ jest p -tą potęgą liczby całkowitej. Zadanie będzie więc rozwiązane, jeśli udowodnimy, że $r_n = 0$ dla pewnej wartości n .

Przypuśćmy, że wszystkie wyrazy ciągu $r_1, r_2, r_3, \dots$ są liczbami całkowitymi dodatnimi. Niech r_m będzie najmniejszym wśród tych wyrazów. Mamy więc $a_m = b_m^p + r_m$. Ponadto $b_{m-1} < b_m$, gdyż w przeciwnym razie mielibyśmy

$$r_{m-1} = a_{m-1} - b_{m-1}^p < a_m - b_{m-1}^p \leq a_m - b_m^p = r_m$$

wbrew określeniu m . Zauważmy dalej, że $a_{m-1} < (b_{m-1} + 1)^p \leq b_m^p \leq a_m$ i wobec tego zachodzi nierówność

$$(3) \quad r_m = a_m - b_m^p < a_m - a_{m-1} = pb_{m-1} < pb_m.$$

Niech ponadto $k > m$ będzie najmniejszym wskaźnikiem, dla którego $b_k > b_m$. Wówczas $b_m = b_{m+1} = \dots = b_{k-1}$, więc na mocy (2) otrzymujemy

$$a_{m+1} = a_m + pb_m,$$

$$a_{m+2} = a_{m+1} + pb_m,$$

...

$$a_k = a_{k-1} + pb_m$$

i sumując stronami dochodzimy do wniosku, że

$$(4) \quad a_k = a_m + pb_m(m - k) = b_m^p + pb_m(m - k) + r_m.$$

Wykażemy z kolei, że $b_k = b_m + 1$. Istotnie, gdyby zachodziła nierówność $b_k \geq b_m + 2 = b_{k-1} + 2$, mielibyśmy $a_{k-1} < (b_{k-1} + 1)^p$, $a_k \geq (b_{k-1} + 2)^p$ oraz

$$(5) \quad pb_{k-1} = a_k - a_{k-1} > (b_{k-1} + 2)^p - (b_{k-1} + 1)^p,$$

ale pisząc $x = b_{k-1} + 2$, $y = b_{k-1} + 1$ mamy $x - y = 1$, $x > y > b_{k-1}$ i widzimy, że

$$x^p - y^p = (x - y)(x^{p-1} + x^{p-2}y + \dots + y^{p-1}) > 1 \cdot py^{p-1} > pb_{k-1}^{p-1} \geq pb_{k-1}.$$

Nierówność (5) jest więc fałszywa, co dowodzi równości $b_k = b_m + 1$.

Na mocy (4) możemy zatem napisać

$$(b_m + 1)^p + r_k = b_k^p + r_k = a_k = b_m^p + pb_m(m - k) + r_m,$$

czyli

$$(6) \quad r_m - r_k = (b_m + 1)^p - b_m^p - pb_m(m - k).$$

Ze wzoru dwumianowego otrzymujemy

$$(b_m + 1)^p - b_m^p = \binom{p}{1} b_m^{p-1} + \binom{p}{2} b_m^{p-2} + \dots + \binom{p}{p-1} b_m + 1.$$

Ponieważ p jest liczbą pierwszą, więc współczynniki dwumianowe $\binom{p}{i}$ są dla $i = 1, 2, \dots, p-1$ liczbami podzielnymi przez p . Zatem liczba $(b_m + 1)^p - b_m^p$ daje resztę 1 z dzielenia przez pb_m . Wobec tego z (6) wynika, że liczba $r_m - r_k$ daje resztę 1 z dzielenia przez pb_m .

W (3) uzyskaliśmy nierówność $r_m < pb_{m-1}$ korzystając jedynie z tego, że $b_{m-1} < b_m$. Analogicznie wyprowadzamy z nierówności $b_{k-1} < b_k$, że $r_k < pb_m$. Liczby r_m i r_k należą więc do przedziału $(0; pb_m)$, a różnica $r_m - r_k$ daje resztę 1 z dzielenia przez pb_m . Wynika stąd, że $r_k = r_m - 1$, co przeczy założeniu, że r_m jest najmniejszym wyrazem w ciągu $r_1, r_2, r_3, \dots$

To oznacza, że $r_n = 0$ dla pewnego wskaźnika n , skąd wynika teza.

Zadanie 11. Punkty $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7$ leżą odpowiednio na bokach $BC, CA, AB, BC, CA, AB, BC$ trójkąta ABC , przy czym spełnione są równości

$$\sphericalangle P_1 P_2 C = \sphericalangle A P_2 P_3 = \sphericalangle P_3 P_4 B = \sphericalangle C P_4 P_5 = \sphericalangle P_5 P_6 A = \sphericalangle B P_6 P_7 = 60^\circ.$$

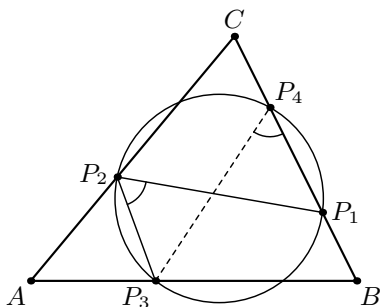
Dowieść, że $P_1 = P_7$.

Rozwiązanie

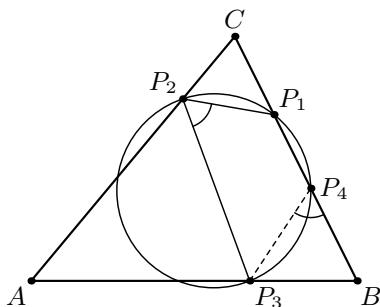
Niech o będzie okręgiem opisanym na trójkącie $P_1 P_2 P_3$.

Z warunków zadania wynika równość $\sphericalangle P_1 P_2 P_3 = 60^\circ$. To w połączeniu z równością $\sphericalangle P_3 P_4 B = 60^\circ$ dowodzi, że punkt P_4 leży na okręgu o , niezależnie od tego, czy leży on na odcinku $P_1 C$ (rys. 4), czy na odcinku $P_1 B$ (rys. 5). Zauważmy ponadto, iż równość $P_1 = P_4$ zachodzi jedynie wtedy, gdy okrąg o jest styczny do boku BC .

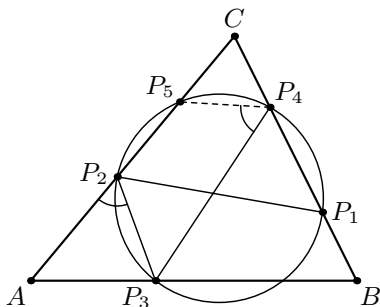
Dalej, na mocy założeń zadania mamy $\sphericalangle P_5 P_4 P_3 = 60^\circ$ i $\sphericalangle A P_2 P_3 = 60^\circ$, skąd wnioskujemy, że punkt P_5 leży na okręgu o , zarówno wtedy, gdy punkt P_5 leży na odcinku $P_2 C$ (rys. 6), jak i wtedy, gdy leży on na odcinku $P_2 A$ (rys. 7). Tak jak poprzednio, równość $P_2 = P_5$ oznacza, że okrąg o jest styczny do boku CA .



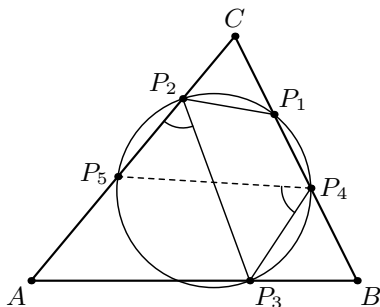
rys. 4



rys. 5



rys. 6



rys. 7

Analogicznie dowodzimy, że punkty P_6 i P_7 leżą na okręgu o . Wynika stąd, że punkty P_1 , P_4 , P_7 leżą jednocześnie na okręgu o i na boku BC . Jeżeli okrąg ten jest styczny do danego boku, to oczywiście $P_1 = P_4 = P_7$. Jeżeli natomiast okrąg o przecina bok BC w dwóch różnych punktach, to z przeprowadzonego rozumowania otrzymujemy $P_1 \neq P_4$ i $P_4 \neq P_7$, zatem równość $P_1 = P_7$ także jest spełniona.

Zadanie 12. Dana jest liczba całkowita $m \geq 2$. Wyznaczyć najmniejszą taką liczbę całkowitą $n \geq m$, że dla każdego rozbitcia zbioru $\{m, m+1, \dots, n\}$ na dwa podzbiory, przynajmniej jeden z tych podzbiorów zawiera takie liczby a, b, c (niekoniecznie różne), że $ab = c$.

Rozwiązanie

Odpowiedź: $n = m^5$.

Założmy, że istnieje rozbitcie zbioru $\{m, m+1, \dots, m^5\}$ na dwa podzbiory S i T , z których żaden nie zawiera dwóch liczb (niekoniecznie różnych) wraz z ich iloczynem. Przypuśćmy przy tym, że $m \in S$. Liczba $m^2 = m \cdot m$ jest iloczynem dwóch elementów zbioru S , zatem musimy mieć $m^2 \in T$. Stąd zaś $m^4 = m^2 \cdot m^2 \in S$. Widzimy, że $m, m^4 \in S$, co oznacza, że liczba $m^5 = m \cdot m^4$ należy do zbioru T . Z drugiej strony, liczby m, m^4 są elementami zbioru S , więc liczba m^5 nie może należeć do tego zbioru. Wobec tego $m^2, m^3 \in T$. Otrzymaliśmy zatem $m^2, m^3, m^5 \in T$, czyli mamy sprzeczność.

Z drugiej strony, jeżeli podzielimy zbiór $\{m, m+1, \dots, m^5-1\}$ na następujące dwa podzbiory:

$$S = \{m, m+1, \dots, m^2-2, m^2-1, m^4, m^4+1, \dots, m^5-2, m^5-1\},$$

$$T = \{m^2, m^2+1, \dots, m^4-2, m^4-1\},$$

to iloczyn dwóch elementów (niekoniecznie różnych) każdego z tych podzbiorów nie jest elementem tego podzbioru. Rzeczywiście, do zbioru T należą liczby nie mniejsze od m^2 , a więc iloczyn dowolnych dwóch z nich jest równy co najmniej m^4 , zaś największym elementem tego zbioru jest liczba m^4-1 . Z kolei do zbioru S należą liczby nie mniejsze od m , więc iloczyn dowolnych dwóch jest równy co najmniej m^2 . Iloczyn ten jest mniejszy od m^4 , jeżeli obie liczby są mniejsze od m^2 , albo jest równy przynajmniej m^5 , jeżeli jedna z liczb wynosi co najmniej m^4 , i w obu przypadkach nie należy do zbioru S .

Widzimy więc, że liczba $n = m^5 - 1$ nie spełnia warunków zadania. Tym bardziej liczby $n < m^5 - 1$ nie spełniają tych warunków, wystarczy bowiem z każdego ze zbiorów S, T utworzonych dla wartości $m^5 - 1$ usunąć liczby większe od n . Wobec tego szukaną najmniejszą wartością jest $n = m^5$.

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w Internecie pod adresem: www.om.edu.pl



LIX Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia drugiego

22 lutego 2008 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Wyznaczyć największą możliwą długość ciągu kolejnych liczb całkowitych, z których każdą można przedstawić w postaci $x^3 + 2y^2$ dla pewnych liczb całkowitych x, y .

2. W pięciokącie wypukłym $ABCDE$ spełnione są zależności

$$\begin{aligned}\sphericalangle ABD &= \sphericalangle ACE, & \sphericalangle ACB &= \sphericalangle ACD, \\ \sphericalangle ADC &= \sphericalangle ADE, & \sphericalangle ADB &= \sphericalangle AEC.\end{aligned}$$

Odcinki BD i CE przecinają się w punkcie S . Dowieść, że proste AS i CD są prostopadłe.

3. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje f , określone na zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych i przyjmujące wartości rzeczywiste, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y zachodzi równość

$$f(f(x) - y) = f(x) + f(f(y) - f(-x)) + x.$$

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podeście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.



LIX Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia drugiego

23 lutego 2008 r. (drugi dzień zawodów)

4. W każdym polu kwadratowej tablicy o rozmiarach $n \times n$ napisana jest liczba całkowita. Możemy wielokrotnie wykonywać następującą operację: Wybieramy dowolne pole tabeli i zmniejszamy wpisaną w niej liczbę o liczbę pól sąsiednich (mających wspólny bok z wybranym polem), zaś każdą z liczb wpisanych w pola sąsiednie zwiększamy o 1.

Dla każdej liczby całkowitej $n \geq 2$ rozstrzygnąć, czy z dowolnej początkowej tabeli, w której suma wszystkich n^2 liczb jest równa zeru, można otrzymać tabelę składającą się z samych zer.

5. Dany jest trójkąt ABC , w którym $AC = BC$. Punkt D leży na boku AB tego trójkąta, przy czym $AD < BD$. Punkt E jest symetryczny do punktu A względem prostej CD . Wykazać, że

$$\frac{AC}{CD} = \frac{BE}{BD - AD}.$$

6. Dana jest liczba całkowita dodatnia n niepodzielna przez 3. Udowodnić, że istnieje liczba m o następującej własności: Każda liczba całkowita nie mniejsza niż m jest sumą cyfr pewnej wielokrotności liczby n .

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejszcie dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.



LIX Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia drugiego

22 lutego 2008 r. (pierwszy dzień zawodów)

Zadanie 1. Wyznaczyć największą możliwą długość ciągu kolejnych liczb całkowitych, z których każdą można przedstawić w postaci $x^3 + 2y^2$ dla pewnych liczb całkowitych x, y .

Rozwiązanie

Ciąg pięciu kolejnych liczb całkowitych $-1, 0, 1, 2, 3$ spełnia warunki zadania: istotnie, mamy

$$\begin{aligned} -1 &= (-1)^3 + 2 \cdot 0^2, & 0 &= 0^3 + 2 \cdot 0^2, & 1 &= 1^3 + 2 \cdot 0^2, \\ 2 &= 0^3 + 2 \cdot 1^2, & 3 &= 1^3 + 2 \cdot 1^2. \end{aligned}$$

Z drugiej strony, wśród dowolnych sześciu kolejnych liczb całkowitych istnieje liczba, powiedzmy m , która daje resztę 4 lub resztę 6 z dzielenia przez 8. Liczba m jest parzysta; gdyby więc istniało przedstawienie w postaci $m = x^3 + 2y^2$ dla pewnych liczb całkowitych x, y , to liczba x byłaby parzysta. Wówczas jednak uzyskalibyśmy podzielność $8 \mid x^3$ i w efekcie liczby m i $2y^2$ dawałyby tę samą resztę (4 lub 6) z dzielenia przez 8. Wobec tego liczba y^2 dawałaby resztę 2 lub 3 z dzielenia przez 4. Jest to niemożliwe: równości

$$(2k)^2 = 4 \cdot k^2, \quad (2k+1)^2 = 4 \cdot (k^2 + k) + 1$$

dowodzą, że kwadrat liczby całkowitej może dawać przy dzieleniu przez 4 tylko resztę 0 lub 1.

Wykazaliśmy tym samym, że wśród dowolnych sześciu kolejnych liczb całkowitych istnieje liczba, której nie da się przedstawić w postaci $x^3 + 2y^2$.

Odpowiedź: Największa możliwa długość takiego ciągu wynosi 5.

Zadanie 2. W pięciokącie wypukłym $ABCDE$ spełnione są zależności

$$\begin{aligned} \sphericalangle ABD &= \sphericalangle ACE, & \sphericalangle ACB &= \sphericalangle ACD, \\ \sphericalangle ADC &= \sphericalangle ADE, & \sphericalangle ADB &= \sphericalangle AEC. \end{aligned}$$

Odcinki BD i CE przecinają się w punkcie S . Dowieść, że proste AS i CD są prostopadłe.

Rozwiązanie

Z równości

$$\sphericalangle ABD = \sphericalangle ACE \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle ADB = \sphericalangle AEC$$

wynika (rys. 1), że trójkąty BAD i CAE są podobne (cecha $k\acute{a}t-k\acute{a}t-k\acute{a}t$). Podobieństwo tych trójkątów pozwala wnioskować, że

$$\sphericalangle BAC = \sphericalangle DAE \quad \text{oraz} \quad \frac{BA}{DA} = \frac{CA}{EA}.$$

Zależności te dowodzą, że trójkąty BAC i DAE są podobne (cecha *bok-kąt-bok*). W konsekwencji otrzymujemy

$$(1) \quad \sphericalangle ABC = \sphericalangle ADE = \sphericalangle ADC.$$

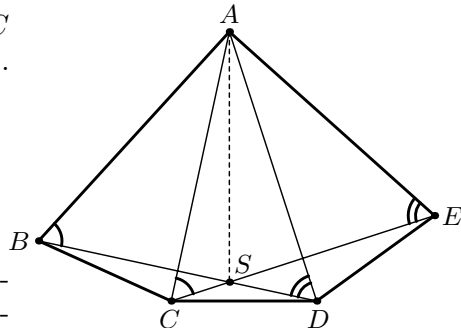
Ponadto prawdziwa jest zależność

$$\sphericalangle ACB = \sphericalangle ACD,$$

która w połączeniu z równością (1) implikuje, że trójkąty ABC i ADC są podobne (cecha *kąt-kąt-kąt*). Mają one jednak wspólny odpowiedni bok AC . Wobec

tego trójkąty te są przystające i symetryczne względem prostej AC . Stąd wniosek, że proste AC i BD są prostopadłe.

Analogicznie dowodzimy, że proste AD i CE są prostopadłe. Zatem S jest punktem przecięcia wysokości trójkąta CAD . To oznacza, że prosta AS zawiera trzecią wysokość tego trójkąta, czyli jest prostopadła do prostej CD .



rys. 1

Zadanie 3. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje f , określone na zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych i przyjmujące wartości rzeczywiste, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y zachodzi równość

$$(1) \quad f(f(x) - y) = f(x) + f(f(y) - f(-x)) + x.$$

Rozwiązanie

Oznaczmy $c = f(0)$. Podstawiając $x = y = 0$ w równości (1) otrzymujemy zależność $f(c) = f(f(0)) = 2f(0) = 2c$. Następnie kładąc $x = 0$ i $y = c$ stwierdzamy, że

$$c = f(0) = f(0) + f(f(c) - c) + 0 = c + f(2c - c) = c + f(c) = 3c.$$

Wynika stąd, że $c = 0$, czyli $f(0) = 0$.

Przyjmując teraz w warunku (1) wartość $x = 0$ widzimy, że

$$(2) \quad f(-y) = f(f(y)) \quad \text{dla każdej liczby rzeczywistej } y.$$

Podstawmy z kolei $y = f(x)$ w równości (1). Wówczas na mocy własności (2) dla dowolnej wartości x dostajemy zależność

$$\begin{aligned} 0 = f(0) &= f(f(x) - f(x)) = f(x) + f(f(f(x)) - f(-x)) + x = \\ &= f(x) + f(f(-x) - f(-x)) + x = f(x) + f(0) + x = f(x) + x. \end{aligned}$$

Stąd $f(x) = -x$ dla każdej liczby rzeczywistej x i pozostaje bezpośrednio sprawdzić, że funkcja dana tym wzorem istotnie ma żądane własności.

Odpowiedź: Jediną funkcją spełniającą warunki zadania jest $f(x) = -x$.

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w Internecie pod adresem: www.om.edu.pl



LIX Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia drugiego

23 lutego 2008 r. (drugi dzień zawodów)

Zadanie 4. W każdym polu kwadratowej tablicy o rozmiarach $n \times n$ napisana jest liczba całkowita. Możemy wielokrotnie wykonywać następującą operację: Wybieramy dowolne pole tabeli i zmniejszamy wpisaną w nim liczbę o liczbę pól sąsiednich (mających wspólny bok z wybranym polem), zaś każdą z liczb wpisanych w pola sąsiednie zwiększamy o 1.

Dla każdej liczby całkowitej $n \geq 2$ rozstrzygnąć, czy z dowolnej początkowej tabeli, w której suma wszystkich n^2 liczb jest równa zeru, można otrzymać tabelę składającą się z samych zer.

Rozwiązanie

Niech P oznacza przekątną tabeli łączącą jej lewy górny róg z prawym dolnym rogiem. Udowodnimy, że w wyniku wykonania opisanej operacji nie zmienia się parzystość sumy liczb znajdujących się na przekątnej P (na rys. 2 pola leżące na przekątnej P są zacieniowane).

	x			
x		x		
			x	
	x			x
			x	
				x

rys. 2

Dla każdego pola na przekątnej P liczba pól sąsiednich wynosi 2 albo 4 i żadne z nich nie leży na przekątnej P . Każde pole sąsiadujące z przekątną P (na rys. 2 takie pola oznaczone są krzyżykami) sąsiaduje z dokładnie dwoma polami leżącymi na przekątnej P . Pozostałe pola tabeli nie leżą na przekątnej P i z nią nie sąsiadują. Jeżeli więc suma liczb na przekątnej P przed wykonaniem operacji wynosiła s , to w wyniku jej wykonania suma ta będzie równa $s - 4$, $s - 2$, s lub $s + 2$, czyli jej parzystość nie zmieni się.

Zatem jeśli na początku wpisujemy do tabeli liczbę 1 w lewym górnym rogu, liczbę -1 w polu leżącym w prawym górnym rogu oraz liczbę 0 w każde z pozostałych pól, to suma wszystkich liczb w tabeli będzie równa zeru, ale po wykonaniu dowolnej ilości operacji suma liczb leżących na przekątnej P będzie nieparzysta. Wobec tego nie jest możliwe, by przekątna P , a tym bardziej — cała tabela, składała się z samych zer.

Odpowiedź: Dla każdego $n \geq 2$ istnieje początkowa tabela o sumie liczb równej zeru, z której nie można otrzymać tabeli złożonej z samych zer.

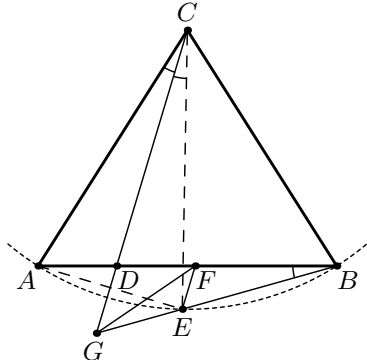
Zadanie 5. Dany jest trójkąt ABC , w którym $AC = BC$. Punkt D leży na boku AB tego trójkąta, przy czym $AD < BD$. Punkt E jest symetryczny do punktu A względem prostej CD . Wykazać, że

$$\frac{AC}{CD} = \frac{BE}{BD - AD}.$$

Rozwiązanie

Oznaczmy przez F punkt symetryczny do A względem punktu D (rys. 3). Na mocy nierówności $AD < BD$ punkt F znajduje się wewnątrz odcinka AB .

Ponieważ $AD = DF$ oraz punkty A i E są symetryczne względem prostej CD , więc stosując twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa stwierdzamy, że $CD \parallel FE$. Stąd w szczególności wynika, że proste CD i BE nie są równoległe, zatem przecinają się one w pewnym punkcie G . Ponadto



rys. 3

$$(1) \quad \sphericalangle BFE = \sphericalangle BDG = \sphericalangle CDA.$$

Dalej, zauważmy, że $CA = CB = CE$, punkty A , B i E leżą więc na okręgu o środku w punkcie C . Wobec tego otrzymujemy

$$(2) \quad \sphericalangle ABE = \frac{1}{2} \sphericalangle ACE = \sphericalangle ACD.$$

Łącząc równości (1) i (2) dochodzimy do wniosku, że trójkąty ACD i EBF są podobne (cecha *kąt-kąt-kąt*). Zatem

$$\frac{AC}{CD} = \frac{BE}{BF} = \frac{BE}{BD - AD}.$$

Zadanie 6. Dana jest liczba całkowita dodatnia n niepodzielna przez 3. Udowodnić, że istnieje liczba m o następującej własności: Każda liczba całkowita nie mniejsza niż m jest sumą cyfr pewnej wielokrotności liczby n .

Rozwiązanie

Przez liczbę *dobrą* będziemy rozumieć taką liczbę całkowitą dodatnią, która jest sumą cyfr pewnej wielokrotności liczby n .

Zauważmy przede wszystkim, że suma dwóch liczb dobrych jest również liczbą dobrą. Rzeczywiście, niech k_1, k_2 będą wielokrotnościami liczby n o sumach cyfr odpowiednio równych s_1, s_2 . Niech t będzie taką liczbą całkowitą, że $10^t > k_2$. Wówczas liczba $k = 10^t \cdot k_1 + k_2$ jest wielokrotnością liczby n , zaś suma cyfr liczby k jest równa $s_1 + s_2$, gdyż przy dodawaniu liczb $10^t \cdot k_1$ i k_2 niezerowe cyfry występują na różnych pozycjach.

Liczba n nie jest podzielna przez 3, zatem jej suma cyfr a także nie jest podzielna przez 3.

Niech teraz b będzie taką liczbą całkowitą, że $10^{3b} > n$. Przyjmijmy, że kolejnymi cyframi zapisu dziesiętnego liczby n są cyfry $c_1, c_2, \dots, c_\ell$. Możemy oczywiście przyjąć, że $c_\ell \neq 0$, gdyż podzielenie liczby n przez 10 nie zmienia warunków zadania. Wówczas kolejnymi cyframi zapisu dziesiętnego liczby

$(10^{3^b} - 1)n = \underbrace{999 \dots 99}_{3^b} \cdot n$, podzielnej przez n , są cyfry:

$$c_1, c_2, \dots, c_{\ell-1}, c_{\ell} - 1, \underbrace{9, 9, \dots, 9, 9}_{3^{b-\ell}}, 9 - c_1, 9 - c_2, \dots, 9 - c_{\ell-1}, 10 - c_{\ell}.$$

Stąd wynika, że suma cyfr liczby $(10^{3^b} - 1)n$ wynosi $9 \cdot 3^b = 3^{b+2}$.

Udowodniliśmy zatem, iż liczbami dobrymi są: liczba a , która nie jest podzielna przez 3, oraz liczba 3^d , gdzie $d = b + 2$.

Wykażemy, że każda liczba całkowita nie mniejsza niż $a \cdot 3^d$ jest dobra. Wyniknie stąd, że liczba $m = a \cdot 3^d$ spełnia tezę zadania.

Niech więc $s \geq a \cdot 3^d$ będzie dowolną liczbą całkowitą. Liczby

$$(*) \quad s, \quad s - a, \quad s - 2a, \quad \dots, \quad s - (3^d - 1)a$$

są wówczas dodatnie. Ponadto żadne dwie z nich nie dają tej samej reszty z dzielenia przez 3^d (gdyż podzielność $3^d \mid (s - ia) - (s - ja) = (j - i)a$ przy pewnych wskaźnikach $0 \leq i, j \leq 3^d - 1$ ze względu na niepodzielność liczby a przez 3 jest możliwa tylko wtedy, gdy $3^d \mid j - i$, co jednak pociąga $i = j$). Liczb wypisanych w ciągu (*) jest 3^d , istnieje więc wśród nich liczba, która jest podzielna przez 3^d . Niech na przykład $s - va = w \cdot 3^d$. Wówczas $v, w \geq 0$ oraz

$$s = \underbrace{a + a + \dots + a}_v + \underbrace{3^d + 3^d + \dots + 3^d}_w.$$

Liczby a i 3^d są dobre. Zatem z powyższego przedstawienia wnioskujemy, że liczba s jako suma liczb dobrych również jest dobra, a tego dowodziliśmy.

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w Internecie pod adresem: www.om.edu.pl



LIX Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia trzeciego

9 kwietnia 2008 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. W pola tablicy rozmiaru $n \times n$ wpisane są liczby $1, 2, \dots, n^2$, przy czym liczby $1, 2, \dots, n$ znajdują się w pierwszym wierszu (od strony lewej do prawej), liczby $n+1, n+2, \dots, 2n$ w drugim, itd.

Wybrano n pól tablicy, z których żadne dwa nie leżą w jednym wierszu ani w jednej kolumnie. Niech a_i będzie liczbą znajdującą się w tym wybranym polu, które leży w wierszu o numerze i . Dowieść, że

$$\frac{1^2}{a_1} + \frac{2^2}{a_2} + \dots + \frac{n^2}{a_n} \geq \frac{n+2}{2} - \frac{1}{n^2+1}.$$

2. Funkcja $f(x, y, z)$ trzech zmiennych rzeczywistych spełnia dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c, d, e zależność

$$f(a, b, c) + f(b, c, d) + f(c, d, e) + f(d, e, a) + f(e, a, b) = a + b + c + d + e.$$

Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x_1, x_2, \dots, x_n$ ($n \geq 5$) prawdziwa jest równość

$$f(x_1, x_2, x_3) + f(x_2, x_3, x_4) + \dots + f(x_n, x_1, x_2) = x_1 + x_2 + \dots + x_n.$$

3. W pięciokącie wypukłym $ABCDE$, w którym $BC = DE$, zachodzą równości

$$\sphericalangle ABE = \sphericalangle CAB = \sphericalangle AED - 90^\circ \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle ACB = \sphericalangle ADE.$$

Dowieść, że czworokąt $BCDE$ jest równoległobokiem.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.



LIX Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia trzeciego

10 kwietnia 2008 r. (drugi dzień zawodów)

4. Każdy punkt płaszczyzny o obu współrzędnych całkowitych pomalowano na biało albo na czarno. Dowieść, że ze zbioru wszystkich pomalowanych punktów można wybrać nieskończony podzbiór, który ma środek symetrii i którego wszystkie punkty mają ten sam kolor.

5. Pola wszystkich przekrojów równoległoscianu $\mathcal{R}$ płaszczyznami przechodzącymi przez środki trzech jego krawędzi, z których żadne dwie nie są równoległe i nie mają punktów wspólnych, są równe. Udowodnić, że równoległoscian $\mathcal{R}$ jest prostopadłościanem.

6. Niech S będzie zbiorem wszystkich dodatnich liczb całkowitych, które można przedstawić w postaci $a^2 + 5b^2$ dla pewnych względnie pierwszych liczb całkowitych a i b . Niech ponadto p będzie liczbą pierwszą dającą resztę 3 z dzielenia przez 4. Wykazać, że jeżeli pewna dodatnia wielokrotność liczby p należy do zbioru S , to również liczba $2p$ należy do zbioru S .

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.



LIX Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia trzeciego

9 kwietnia 2008 r. (pierwszy dzień zawodów)

Zadanie 1. W pola tablicy rozmiaru $n \times n$ wpisane są liczby $1, 2, \dots, n^2$, przy czym liczby $1, 2, \dots, n$ znajdują się w pierwszym wierszu (od strony lewej do prawej), liczby $n+1, n+2, \dots, 2n$ w drugim, itd. Wybrano n pól tablicy, z których żadne dwa nie leżą w jednym wierszu ani w jednej kolumnie. Niech a_i będzie liczbą znajdującą się w tym wybranym polu, które leży w wierszu o numerze i . Dowieść, że

$$\frac{1^2}{a_1} + \frac{2^2}{a_2} + \dots + \frac{n^2}{a_n} \geq \frac{n+2}{2} - \frac{1}{n^2+1}.$$

Rozwiązanie

Udowodnimy najpierw, że

$$(1) \quad a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{1}{2}n(n^2+1).$$

Niech b_i oznacza numer kolumny, w której znajduje się liczba a_i . Wówczas

$$(2) \quad a_i = (i-1)n + b_i \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, n.$$

Z warunków zadania wynika, że ciąg $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ jest permutacją ciągu $(1, 2, \dots, n)$. Wobec tego

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n = 1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

i z uwagi na wzór (2) dowód zależności (1) sprowadza się do rachunku

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \dots + a_n &= (0+1+\dots+(n-1))n + b_1 + b_2 + \dots + b_n = \\ &= \frac{1}{2}(n-1)n^2 + \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{2}n(n^2+1). \end{aligned}$$

Korzystając teraz z równości (1) oraz z nierówności pomiędzy średnią arytmetyczną i harmoniczną otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{1^2}{a_1} + \frac{2^2}{a_2} + \frac{3^2}{a_3} + \dots + \frac{n^2}{a_n} &= \frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_2} + \frac{2}{a_2} + \frac{3}{a_3} + \frac{3}{a_3} + \frac{3}{a_3} + \frac{4}{a_4} + \dots + \frac{n}{a_n} \geq \\ &\geq \frac{(1+2+3+\dots+n)^2}{\frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{2} + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \frac{a_3}{3} + \frac{a_3}{3} + \frac{a_4}{4} + \dots + \frac{a_n}{n}} = \\ &= \frac{\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2}{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n} = \frac{\frac{1}{4}n^2(n+1)^2}{\frac{1}{2}n(n^2+1)} = \\ &= \frac{n(n+1)^2}{2(n^2+1)} = \frac{(n+2)(n^2+1) - 2}{2(n^2+1)} = \\ &= \frac{n+2}{2} - \frac{1}{n^2+1}, \end{aligned}$$

czyli tezę zadania.

Zadanie 2. Funkcja $f(x, y, z)$ trzech zmiennych rzeczywistych spełnia dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c, d, e zależność

$$f(a, b, c) + f(b, c, d) + f(c, d, e) + f(d, e, a) + f(e, a, b) = a + b + c + d + e.$$

Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x_1, x_2, \dots, x_n$ ($n \geq 5$) prawdziwa jest równość

$$f(x_1, x_2, x_3) + f(x_2, x_3, x_4) + \dots + f(x_n, x_1, x_2) = x_1 + x_2 + \dots + x_n.$$

Rozwiązanie

Podstawiając $a = b = c = d = e = 0$ w danym w treści zadania warunku dostajemy $f(0, 0, 0) = 0$.

Niech teraz s, t, u będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Wówczas

$$f(s, t, u) + f(t, u, 0) + f(u, 0, 0) + f(0, 0, s) + f(0, s, t) = s + t + u,$$

$$f(0, t, u) + f(t, u, 0) + f(u, 0, 0) + f(0, 0, 0) + f(0, 0, t) = t + u.$$

Odejmując powyższe dwie równości stronami i wykorzystując udowodnioną wcześniej równość $f(0, 0, 0) = 0$ otrzymujemy

$$(1) \quad f(s, t, u) = s + f(0, 0, t) - f(0, 0, s) + f(0, t, u) - f(0, s, t).$$

Wypisując równość (1) dla trójek $(s, t, u) = (x_k, x_{k+1}, x_{k+2})$ dla $k = 1, 2, \dots, n$ (gdzie przyjmujemy $x_{n+1} = x_1$, $x_{n+2} = x_2$) i sumując stronami uzyskanych w ten sposób n równości dostajemy tezę zadania.

Zadanie 3. W pięciokącie wypukłym $ABCDE$, w którym $BC = DE$, zachodzą równości

$$\sphericalangle ABE = \sphericalangle CAB = \sphericalangle AED - 90^\circ \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle ACB = \sphericalangle ADE.$$

Dowieść, że czworokąt $BCDE$ jest równoległobokiem.

Rozwiązanie

Zauważmy przede wszystkim (rys. 1), że jeżeli punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt XYZ , to zachodzi równość

$$\sphericalangle XIY = 90^\circ + \frac{1}{2} \sphericalangle Z.$$

Dla dowodu wystarczy zobaczyć, że

$$\sphericalangle IXY = \frac{1}{2} \sphericalangle X, \quad \sphericalangle IYX = \frac{1}{2} \sphericalangle Y,$$

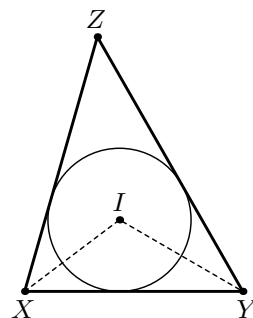
a więc

$$\begin{aligned} \sphericalangle XIY &= 180^\circ - \frac{1}{2} \sphericalangle X - \frac{1}{2} \sphericalangle Y = \\ &= 180^\circ - (90^\circ - \frac{1}{2} \sphericalangle Z) = 90^\circ + \frac{1}{2} \sphericalangle Z. \end{aligned}$$

Przechodzimy do rozwiązania zadania. Oznaczmy

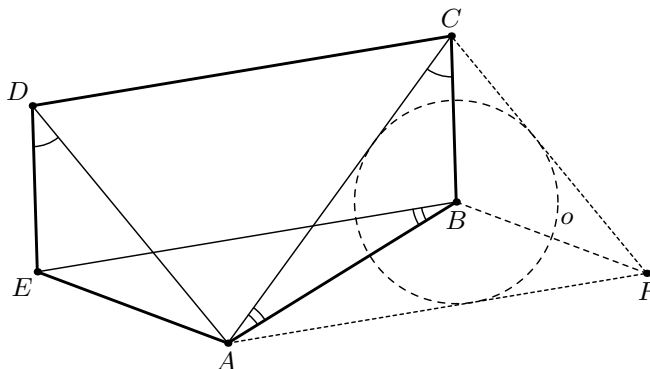
$$\alpha = \sphericalangle ADE = \sphericalangle ACB, \quad \beta = \sphericalangle ABE = \sphericalangle CAB.$$

Niech o oznacza okrąg o środku w punkcie B styczny do prostej AC (rys. 2). Niech ponadto styczne do okręgu o przechodzące przez punkty A i C (różne



rys. 1

od prostej AC) przecinają się w punkcie F . Punkt ten leży po tej samej stronie prostej AC , co punkt B , gdyż $\sphericalangle BAC + \sphericalangle BCA = \alpha + \beta < 90^\circ$ ze względu na to, że α i $90^\circ + \beta$ są kątami wewnętrznymi trójkąta DEA .



rys. 2

Wówczas okrąg o jest wpisany w trójkąt AFC , zatem na mocy początkowej obserwacji mamy

$$\sphericalangle FBC = 90^\circ + \frac{1}{2} \sphericalangle FAC = 90^\circ + \beta = \sphericalangle AED.$$

Ponieważ także $\sphericalangle FCB = \sphericalangle ACB = \alpha = \sphericalangle ADE$ oraz $BC = DE$, więc trójkąty FBC i AED są przystające (cecha *kąt-bok-kąt*) i jednakowo zorientowane. To oznacza, że spełniona jest równość $FB = AE$. Zauważmy następnie, że

$$\sphericalangle BAF = \sphericalangle BAC = \beta = \sphericalangle ABE.$$

W efekcie proste AF i EB są równoległe; wraz z zależnością $FB = AE$ daje to, że czworokąt $AFBE$ jest trapezem równoramiennym albo równoległobokiem.

Pierwsza z tych ewentualności zachodzić jednak nie może, gdyż na podstawie spostrzeżenia z początku rozwiązania oznaczałaby ona, że

$$\sphericalangle AEB = \sphericalangle EBF = \sphericalangle EBA + \sphericalangle ABF = \beta + 90^\circ + \alpha,$$

skąd uzyskalibyśmy

$$90^\circ + \beta = \sphericalangle AED > \sphericalangle AEB = 90^\circ + \beta + \alpha,$$

a to jest oczywista niedorzeczność.

Zatem czworokąt $AFBE$ jest równoległobokiem, czyli proste AE i BF są równoległe. To dowodzi, że trójkąt FBC powstaje z trójkąta AED w wyniku przesunięcia o wektor $\vec{EB}$. Zatem odcinki ED i BC również są równoległe, a to z uwagi na równość ich długości pociąga za sobą tezę zadania.

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w Internecie pod adresem: www.om.edu.pl



LIX Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych
zawodów stopnia trzeciego

10 kwietnia 2008 r. (drugi dzień zawodów)

Zadanie 4. Każdy punkt płaszczyzny o obu współrzędnych całkowitych pomalowano na biało albo na czarno. Dowieść, że ze zbioru wszystkich pomalowanych punktów można wybrać nieskończony podzbiór, który ma środek symetrii i którego wszystkie punkty mają ten sam kolor.

Rozwiązanie

Przypuśćmy, że teza zadania jest fałszywa.

Rozpatrzmy symetrię środkową względem punktu $(0,0)$. Ponieważ nie istnieje nieskończony zbiór symetryczny względem tego punktu i złożony z punktów jednego koloru, więc tylko skończenie wiele punktów o obu współrzędnych całkowitych przechodzi przy tej symetrii na punkty tego samego koloru. Wobec tego istnieje taka liczba całkowita M , że dla każdego punktu o współrzędnych całkowitych (x,y) , przy czym $|y| > M$, punkty $(-x,-y)$ i (x,y) mają różne kolory.

Rozważając analogicznie symetrię środkową względem punktu $(\frac{1}{2},0)$ widzimy, że istnieje taka liczba całkowita N , że dla każdego punktu o współrzędnych całkowitych (x,y) , przy czym $|y| > N$, punkt (x,y) ma inny kolor niż jego obraz przez rozpatrywaną symetrię, czyli punkt $(-x+1,-y)$.

Przyjmijmy $k = \max\{M, N\} + 1$ i rozpatrzmy dowolną liczbę całkowitą s . Wówczas punkt (s,k) przy symetrii względem punktu $(0,0)$ przechodzi na punkt $(-s,-k)$, który jest przeciwnego koloru niż punkt (s,k) . Ponadto punkt $(-s,-k)$ przy symetrii względem punktu $(\frac{1}{2},0)$ przechodzi na punkt $(s+1,k)$, który jest przeciwnego koloru niż punkt $(-s,-k)$. Wobec tego punkty (s,k) i $(s+1,k)$ mają jednakowy kolor. Ponieważ s było dowolną liczbą całkowitą, więc wynika stąd, że wszystkie punkty o pierwszej współrzędnej całkowitej i drugiej współrzędnej równej k mają ten sam kolor. Jednakże punkty te tworzą nieskończony zbiór, którego środkiem symetrii jest punkt $(0,k)$. Otrzymana sprzeczność z założeniem nie wprost kończy rozwiązanie.

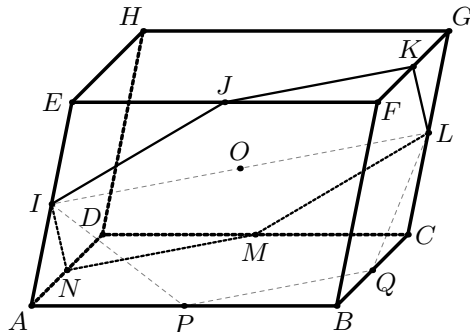
Zadanie 5. Pola wszystkich przekrojów równoległoscianu $\mathcal{R}$ płaszczyznami przechodzącymi przez środki trzech jego krawędzi, z których żadne dwie nie są równoległe i nie mają punktów wspólnych, są równe. Udowodnić, że równoległoscian $\mathcal{R}$ jest prostopadłościanem.

Rozwiązanie

Przyjmijmy, że pola wszystkich przekrojów, o których mowa w treści zadania, są równe S .

Niech $ABCD$ i $EFGH$ będą podstawami równoległoscianu $\mathcal{R}$ (rys. 3), niech O będzie jego środkiem symetrii i niech I, J, K, L, M, N oznaczają

odpowiednio środki krawędzi AE , EF , FG , GC , CD , DA . Wówczas następujące pary punktów: I i L , J i M , K i N , są symetryczne względem punktu O .



rys. 3

Płaszczyzna π przechodząca przez punkty I , K , M w przekroju z równoległościaniem $\mathcal{R}$ wyznacza figurę o polu S . Wykażemy, że figurą tą jest sześciokąt $IJKLMN$.

Oznaczmy przez π' płaszczyznę przechodzącą przez punkty I , N , M . Na mocy twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa mamy $NM \parallel AC \parallel IL$. Prosta NM i punkt I leżą w płaszczyźnie π' , zatem prosta przechodząca przez punkt I i równoległa do prostej NM (czyli prosta IL) również leży w płaszczyźnie π' . Stąd wniosek, że środek O odcinka IL leży w płaszczyźnie π' . To z kolei oznacza, że punkty J i K , symetryczne względem punktu O odpowiednio do punktów M i N , również leżą w płaszczyźnie π' . Skutkiem tego punkty I , J , K , L , M , N leżą w tej płaszczyźnie; tworzą one więc płaski sześciokąt o środku symetrii O .

Ponadto płaszczyzny π i π' mają trzy niewspółliniowe punkty wspólne: I , K oraz M . To dowodzi, że $\pi = \pi'$.

Udowodniliśmy w ten sposób, że punkt O jest środkiem symetrii sześciokąta $IJKLMN$ o polu S . Zatem czworokąt $ILMN$ ma pole równe $\frac{1}{2}S$; jest on ponadto trapezem, gdyż wykazaliśmy wcześniej, że proste IL i MN są równoległe. Jeżeli przez P i Q oznaczmy odpowiednio środki krawędzi AB i BC , to przeprowadzając analogiczne rozumowanie uzasadniamy, że czworokąt $ILQP$ jest trapezem o polu $\frac{1}{2}S$.

Trapezy $ILMN$ i $ILQP$ mają więc równe pola; mają one ponadto wspólną podstawę IL oraz równe drugie podstawy ($NM = PQ = \frac{1}{2}AC$). Wynika stąd, że trapezy te mają równe wysokości. Inaczej mówiąc, odległości prostej IL od prostych NM i PQ są jednakowe.

Jeżeli ℓ_1 , ℓ_2 są różnymi równoległymi prostymi w przestrzeni, to każda prosta do nich równoległa i jednakowo od nich oddalona jest zawarta w płaszczyźnie Π , względem której proste ℓ_1 i ℓ_2 są symetryczne. Płaszczyzna Π jest ponadto prostopadła do płaszczyzny wyznaczonej przez proste ℓ_1 i ℓ_2 .

Wobec tego proste AC i IL , równoodległe od prostych NM i PQ , wyznaczają płaszczyznę prostopadłą do płaszczyzny $MNPQ$. Innymi słowy, płaszczyzna π_1 zawierająca równoległobok $ACGE$ jest prostopadła do podstawy $ABCD$. Analogicznie wykazujemy, że płaszczyzna π_2 zawierająca równoległobok $BFHD$ jest prostopadła do podstawy $ABCD$. Stąd wniosek, że krawędź płaszczyzn π_1 i π_2 , która jest prostą równoległą do AE , jest prostopadła do podstawy $ABCD$. Otrzymujemy stąd równości $\sphericalangle EAB = \sphericalangle EAD = 90^\circ$.

Podobnie dowodzimy, że $\sphericalangle DAB = 90^\circ$. Zatem równoległoscian $\mathcal{R}$ jest prostopadłościaniem.

Zadanie 6. Niech S będzie zbiorem wszystkich dodatnich liczb całkowitych, które można przedstawić w postaci $a^2 + 5b^2$ dla pewnych względnie pierwszych liczb całkowitych a i b . Niech ponadto p będzie liczbą pierwszą dającą resztę 3 z dzielenia przez 4. Wykazać, że jeżeli pewna dodatnia wielokrotność liczby p należy do zbioru S , to również liczba $2p$ należy do zbioru S .

Rozwiązanie

Na mocy warunków zadania liczba $a^2 + 5b^2$ jest podzielna przez p dla pewnych względnie pierwszych liczb całkowitych a i b .

Liczba b nie jest podzielna przez p ; w przeciwnym przypadku z podzielności $p|b$ oraz $p|a^2 + 5b^2$ uzyskalibyśmy bowiem $p|a$, wbrew względnej pierwszości liczb a i b .

Zatem żadna z $p-1$ liczb: $b, 2b, \dots, (p-1)b$ nie jest podzielna przez p . Ponadto liczby te dają różne reszty z dzielenia przez p . Istotnie, jeżeli mamy $p|ib - jb = (i-j)b$ dla pewnych wskaźników $1 \leq i, j \leq p-1$, to liczba pierwsza p jest dzielnikiem różnicy $i-j$, skąd wynika, że $i=j$. W konsekwencji jedna z rozpatrywanych liczb daje resztę 1 z dzielenia przez p . Przyjmijmy, że jest to liczba kb (dla pewnej wartości $k \in \{1, 2, \dots, p-1\}$). Wówczas mamy

$$p|k^2(a^2 + 5b^2) = (ak)^2 + 5(bk)^2, \quad \text{czyli} \quad p|m^2 + 5, \quad \text{gdzie} \quad m = ak.$$

Niech z oznacza największą liczbę całkowitą nie przekraczającą $\sqrt{p}$. Rozpatrzmy zbiór reszt z dzielenia liczb $0, m, 2m, \dots, zm$ przez p . Uporządkujmy te $z+1$ reszt w kolejności niemalejącej otrzymując ciąg $r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_{z+1}$. Wtedy każda z $z+1$ liczb:

$$r_2 - r_1, \quad r_3 - r_2, \quad \dots, \quad r_{z+1} - r_z, \quad p - (r_{z+1} - r_1)$$

jest nieujemna, a ich suma wynosi p . Wynika stąd, że przynajmniej jedna z tych liczb jest nie większa niż

$$\frac{p}{z+1} = \frac{(z+(p-z))^2}{z+1} < \frac{(z+1)^2}{z+1} = z+1.$$

Zatem wśród liczb $r_2 - r_1, r_3 - r_2, \dots, r_{z+1} - r_z, p - (r_{z+1} - r_1)$ można wskazać liczbę nie przekraczającą z . To zaś oznacza, że pewne dwie różne liczby, powiedzmy cm i dm ($0 \leq c, d \leq z$), dają przy dzieleniu przez p reszty różniące

się nie więcej niż o z , albo różniące się przynajmniej o $p - z$. Przyjmijmy $y = |c - d|$; wówczas jedna z liczb ym , $-ym$ daje resztę $x \leq z$ z dzielenia przez p . Ponieważ $p \mid m^2 + 5$, więc liczby

$$x^2 + 5y^2 \quad \text{ i } \quad x^2 - m^2y^2 = (x - my)(x + my)$$

dają taką samą resztę z dzielenia przez p . Jeden z czynników $x - my$, $x + my$ jest jednak podzielny przez p . W efekcie $p \mid x^2 + 5y^2$. Ponadto $0 \leq x \leq z$ oraz $0 \leq y \leq z$, co w połączeniu z nierównością $z < \sqrt{p}$ daje

$$x^2 + 5y^2 \leq 6z^2 < 6(\sqrt{p})^2 = 6p.$$

Stąd wniosek, że $x^2 + 5y^2$ jest jedną z liczb p , $2p$, $3p$, $4p$ lub $5p$.

Równość $x^2 + 5y^2 = p$ oznaczałaby, że liczba $x^2 + 5y^2$ daje resztę 3 z dzielenia przez 4. To jednak nie jest możliwe, gdyż liczby x^2 i $5y^2$ dają reszty 0 lub 1 z dzielenia przez 4. Zatem $x^2 + 5y^2 \neq p$. To dowodzi także, że nie mogą mieć miejsca równości $x^2 + 5y^2 = 4p$ ani $x^2 + 5y^2 = 5p$. Pierwsza z tych równości oznaczałaby bowiem, że liczby x i y są parzyste (w żadnym innym przypadku liczba $x^2 + 5y^2$ nie jest podzielna przez 4) oraz $(\frac{1}{2}x)^2 + 5(\frac{1}{2}y)^2 = p$; druga równość prowadzi natomiast do wniosku, że $5 \mid x$ oraz $y^2 + 5(\frac{1}{5}x)^2 = p$. W obu przypadkach dochodzimy do sprzeczności z udowodnionym wcześniej faktem, że liczba postaci $e^2 + 5f^2$ jest różna od p dla dowolnych całkowitych wartości e i f .

Stwierdziliśmy w ten sposób, że $x^2 + 5y^2 = 2p$ lub $x^2 + 5y^2 = 3p$.

Przypuśćmy, że $x^2 + 5y^2 = 3p$. Wówczas liczby x i y nie są podzielne przez 3 (w przeciwnym razie mielibyśmy $3 \mid x$ oraz $3 \mid y$, jednakże wówczas $3^2 \mid x^2 + 5y^2 = 3p$; co może się zdarzyć jedynie w przypadku $p = 3$, ale wtedy uzyskujemy następującą sprzeczność: $9 = 3p = x^2 + 5y^2 \geq 3^2 + 5 \cdot 3^2 = 54$). Zmieniając ewentualnie znaki liczb x i y możemy przyjąć, że x i y są liczbami całkowitymi dającymi resztę 1 z dzielenia przez 3. Ponadto

$$18p = 6 \cdot 3p = 6(x^2 + 5y^2) = (x + 5y)^2 + 5(x - y)^2.$$

Liczby $x + 5y$ i $x - y$ są podzielne przez 3; jeżeli więc $x + 5y = 3g$ oraz $x - y = 3h$, to z powyższej równości wnioskujemy, że $2p = g^2 + 5h^2$.

Ostatecznie udowodniliśmy, że liczba $2p$ daje się przedstawić w postaci $s^2 + 5t^2$ dla pewnych liczb całkowitych s i t . Pozostaje zauważyć, że w takiej sytuacji liczby s i t są względnie pierwsze; gdyby bowiem miały one wspólny dzielnik pierwszy q , to uzyskalibyśmy $q^2 \mid s^2 + 5t^2 = 2p$, co prowadzi do sprzeczności, gdyż p jest nieparzystą liczbą pierwszą. Zatem dowód relacji $2p \in S$ jest zakończony.

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w Internecie pod adresem: www.om.edu.pl



LX Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego

I seria (4 września 2008 r. – 3 października 2008 r.)

1. Na niektórych polach szachownicy rozmiaru $m \times n$ ustawiono wieże. Wiadomo, że dowolna wieża znajduje się w polu rażenia co najwyżej dwóch innych wież.

Wyznaczyć, w zależności od $m, n \geq 2$, największą liczbę wież na szachownicy, dla której taka sytuacja jest możliwa.

2. Dana jest liczba całkowita $n \geq 2$. Niech $r_1, r_2, r_3, \dots, r_{n-1}$ będą odpowiednio resztami z dzielenia liczb

$$1, \quad 1+2, \quad 1+2+3, \quad \dots, \quad 1+2+\dots+(n-1)$$

przez n . Znaleźć wszystkie takie wartości n , że ciąg $(r_1, r_2, r_3, \dots, r_{n-1})$ jest permutacją ciągu $(1, 2, 3, \dots, n-1)$.

3. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków BC , CA , AB odpowiednio w punktach D , E , F . Punkty M , N , J są odpowiednio środkami okręgów wpisanych w trójkąty AEF , BDF , DEF . Dowieść, że punkty F i J są symetryczne względem prostej MN .

4. Udowodnić, że dla dowolnych nieujemnych liczb rzeczywistych a , b , c prawdziwa jest nierówność

$$4(\sqrt{a^3b^3} + \sqrt{b^3c^3} + \sqrt{c^3a^3}) \leq 4c^3 + (a+b)^3.$$

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

3 października 2008 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.



LX Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego

II seria (4 października 2008 r. – 3 listopada 2008 r.)

5. Dla każdej liczby całkowitej $n \geq 1$ wyznaczyć największą możliwą liczbę różnych podzbiorów zbioru $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ o następującej własności: Dowolne dwa z tych podzbiorów albo są rozłączne, albo jeden z nich zawiera się w drugim.

6. Dany jest trójkąt ABC , w którym $AB = AC$. Na półprostych $AB \rightarrow$ i $AC \rightarrow$ obrano odpowiednio takie punkty K i L leżące poza bokami trójkąta, że

$$4 \cdot BK \cdot CL = BC^2.$$

Punkt M jest środkiem boku BC . Proste KM i LM przecinają po raz drugi okrąg opisany na trójkącie AKL odpowiednio w punktach P i Q . Wykazać, że proste PQ i BC są równoległe.

7. Ciąg liczb całkowitych $f_0, f_1, f_2, \dots$ jest określony przez warunki: $f_0 = 0, f_1 = 1$,

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad \text{dla } n = 2, 3, 4, \dots$$

Znaleźć wszystkie wielomiany W o współczynnikach całkowitych, mające następującą własność: Dla każdego $n = 0, 1, 2, \dots$ istnieje taka liczba całkowita k , że $W(k) = f_n$.

8. Przekątne podstawy $ABCD$ ostrosłupa $ABCD S$ przecinają się pod kątem prostym w punkcie H , będącym spodkiem wysokości ostrosłupa. Niech K, L, M, N będą rzutami prostokątnymi punktu H odpowiednio na ściany ABS, BCS, CDS, DAS . Dowieść, że proste KL, MN i AC są równoległe lub przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

3 listopada 2008 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.



LX Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego

III seria (4 listopada 2008 r. – 3 grudnia 2008 r.)

9. Dana jest tablica 2008×2008 . Dwaj gracze na przemian wykonują ruchy, z których każdy polega na wybraniu białego albo czarnego pionka i postawieniu go na wybranym wolnym polu. Wygrywa ten, którego ruch doprowadził do powstania ciągu 5 kolejnych pionków tego samego koloru w linii pionowej, poziomej lub ukośnej.

Zbadać, czy istnieje strategia dla gracza rozpoczynającego grę zapewniająca mu zwycięstwo.

10. Punkt P jest środkiem krótszego łuku BC okręgu opisanego na trójkącie ABC , w którym $\angle BAC = 60^\circ$. Punkt M jest środkiem odcinka łączącego środki dwóch okręgów dopisanych do danego trójkąta, stycznych odpowiednio do boków AB i AC . Wykazać, że $PM = 2 \cdot BP$.

11. Udowodnić, że dla dowolnych liczb całkowitych $k > m \geq 1$ spełniona jest nierówność

$$\frac{\sqrt[k]{k!}}{\sqrt[m]{m!}} < \frac{k}{m}.$$

12. Dana jest liczba pierwsza p . Po lewej stronie tablicy napisano liczby $1, 2, 3, \dots, p-1$, zaś po prawej stronie liczbę 0 . Wykonujemy ciąg $p-1$ ruchów, z których każdy przebiega następująco: Wybieramy jedną z liczb napisanych po lewej stronie tablicy, dodajemy ją do wszystkich pozostałych liczb na tablicy, po czym wymazujemy wybraną liczbę.

Rozstrzygnąć, dla jakich wartości p można w kolejnych ruchach wybierać liczby w taki sposób, by liczba pozostała na tablicy po wykonaniu wszystkich ruchów była podzielna przez p .

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

3 grudnia 2008 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.

Adresy Komitetów Okręgowych Olimpiady Matematycznej

- Dla województwa pomorskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Gdańskiego, ul. Wita Stwosza 57, 80-952 Gdańsk.

- Dla województwa śląskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Śląskiego, ul. Bankowa 14, 40-005 Katowice.

- Dla województwa małopolskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego, ul. Reymonta 4, 30-059 Kraków.

- Dla województw lubelskiego i podkarpackiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki UMCS, pl. Marii Skłodowskiej-Curie 1, 20-031 Lublin.

- Dla województw łódzkiego i świętokrzyskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Łódzkiego, ul. Banacha 22, 90-238 Łódź.

- Dla województwa wielkopolskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Adama Mickiewicza, ul. Umultowska 87, 61-614 Poznań.

- Dla województw lubuskiego i zachodniopomorskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Uniwersytet Szczeciński, Instytut Matematyki, ul. Wielkopolska 15, 70-451 Szczecin.

- Dla województwa kujawsko-pomorskiego i warmińsko-mazurskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, ul. Chopina 12/18, 87-100 Toruń.

- Dla województwa mazowieckiego i podlaskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyczny PAN, ul. Śniadeckich 8, skr. poczt. 21, 00-956 Warszawa 10.

- Dla województwa dolnośląskiego i opolskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Politechniki Wrocławskiej, ul. Janiszewskiego 14a, 50-370 Wrocław.

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w Internecie pod adresem: www.om.edu.pl



LX Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia pierwszego

(4 września 2008 r. – 3 grudnia 2008 r.)

Zadanie 1. Na niektórych polach szachownicy rozmiaru $m \times n$ ustawiono wieże. Wiadomo, że dowolna wieża znajduje się w polu rażenia co najwyżej dwóch innych wież.

Wyznaczyć, w zależności od $m, n \geq 2$, największą liczbę wież na szachownicy, dla której taka sytuacja jest możliwa.

Rozwiązanie

Odpowiedź: $m + n$ wież.

Udowodnimy najpierw, że na prostokątnej szachownicy $m \times n$ ($m, n \geq 1$) można ustawić najwyżej $m + n$ wież tak, by każda wieża znajdowała się w polu rażenia nie więcej niż dwóch innych. Dowód przeprowadzimy na trzy sposoby.

Sposób I

Nazwijmy wiersz *związanym*, jeżeli w wierszu tym ustawiona jest wieża w znajdująca się w polu rażenia dwóch innych wież stojących w tej samej kolumnie, co wieża w . Analogicznie kolumną *związaną* nazywamy kolumnę, która zawiera wieżę będącą w polu rażenia dwóch wież z tego samego wiersza.

Z warunków zadania wynika, że każda związana linia (wiersz lub kolumna) zawiera dokładnie jedną wieżę. Niech s i t oznaczają odpowiednio liczbę wierszy i kolumn związanych. Wówczas liczba wszystkich wież znajdujących się w związanych liniach nie przekracza $s + t$.

Z drugiej strony, weźmy pod uwagę zbiór pól szachownicy nie znajdujących się w żadnej związanej linii. Pola takie nazwijmy *niezwiązanymi*. Z określenia kolumn związanych wynika, że w każdym wierszu najwyżej dwie wieże rozmieszczone są na polach niezwiązanych — mogą to bowiem być tylko „skrajne” wieże stojące w tym wierszu. Ponadto wszystkie pola niezwiązane zawarte są w $m - s$ niezwiązanych wierszach. Zatem liczba wież znajdujących się na niezwiązanych polach jest nie większa niż $2(m - s)$. Podobnie uzasadniamy, że liczba tych wież nie przekracza $2(n - t)$.

Korzystając z nierówności $2 \cdot \min\{x, y\} \leq x + y$ stwierdzamy ostatecznie, że liczba wszystkich wież na szachownicy jest nie większa niż

$$s + t + 2 \cdot \min\{m - s, n - t\} \leq s + t + (m - s) + (n - t) = m + n.$$

Sposób II

Weźmy pod uwagę *odcinki brzegowe*, czyli boki pól danej szachownicy zawarte w jej brzegu. Liczba odcinków brzegowych jest równa $2(m + n)$.

Wieża stojąca na szachownicy wyznacza cztery odcinki brzegowe: dwa na górnym i dolnym końcu zajętej przez nią kolumny oraz dwa na lewym

i prawym końcu zajętego przez nią wiersza. Odcinek brzegowy wyznaczony przez wieżę znajduje się w polu rażenia tej wieży, jeżeli w linii (pionowej bądź poziomej) pomiędzy wieżą a odcinkiem nie znajduje się żadna inna wieża.

Odcinek brzegowy wyznacza jednoznacznie linię (wiersz albo kolumnę), w którym musi stać wieża mająca ten odcinek w polu rażenia. Jeżeli w linii tej stoją przynajmniej dwie wieże, dany odcinek znajduje się w polu rażenia tylko jednej z nich, a mianowicie wieży najbliższej odcinkowi. Każdy odcinek brzegowy szachownicy znajduje się więc w polu rażenia najwyżej jednej wieży.

Z drugiej strony, zgodnie z warunkami zadania każda wieża znajduje się w polu rażenia najwyżej dwóch innych wież. Oznacza to, że w polu rażenia dowolnej wieży znajdują się przynajmniej dwa odcinki brzegowe. Jak wykazaliśmy wcześniej, odcinki znajdujące się w polu rażenia różnych wież są różne. Ponieważ zaś liczba odcinków brzegowych wynosi $2(m+n)$, liczba wież na szachownicy nie może przekraczać $m+n$.

Sposób III

Tym razem zastosujemy indukcję ze względu na wielkość sumy $m+n$.

Jeżeli przynajmniej jedna z liczb m , n jest równa 1, to rozpatrywana teza jest prawdziwa, gdyż liczba wszystkich pól szachownicy wynosi wówczas $m+n-1$ i tym bardziej liczba wież nie może przekraczać $m+n-1$.

Weźmy teraz pod uwagę szachownicę rozmiaru $m \times n$ (gdzie $m, n \geq 2$) z t wieżami rozmieszczonymi zgodnie z warunkami zadania.

Przypuśćmy najpierw, że w pewnym wierszu znajdują się przynajmniej trzy wieże. W wierszu tym znajdują się zatem dwie wieże „skrajne” oraz co najmniej jedna wieża „środkowa”. Niech w oznacza jedną z wież „środkowych”. Wieża w znajduje się wówczas w polu rażenia dwóch wież stojących w tym samym wierszu, co oznacza, że w kolumnie K zajętej przez wieżę w nie mogą stać żadne inne wieże. Wykreślając z szachownicy kolumnę K otrzymujemy szachownicę rozmiaru $m \times (n-1)$ z $t-1$ wieżami spełniającymi dany w treści zadania warunek. Na mocy założenia indukcyjnego mamy więc

$$t-1 \leq m + (n-1) = m+n-1.$$

To daje $t \leq m+n$, a więc uzyskaliśmy tezę indukcyjną.

Podobne rozumowanie przeprowadzamy, gdy istnieje kolumna zawierająca przynajmniej trzy wieże.

Pozostaje do rozpatrzenia przypadek, gdy w każdym wierszu i w każdej kolumnie znajdują się najwyżej dwie wieże. Wtedy jednak łączna ich liczba nie przekracza $2 \cdot \min\{m, n\} \leq m+n$.

By zakończyć rozwiązanie, należy jeszcze wskazać żądane rozmieszczenie $m+n$ wież na szachownicy rozmiaru $m \times n$, gdzie $m, n \geq 2$. Można je uzyskać stawiając wieże na lewym i górnym brzegu szachownicy oraz w prawym dolnym rogu (rys. 1).

*	*	*	*	*	*	*	*
*							
*							
*							
*							*

rys. 1

Zadanie 2. Dana jest liczba całkowita $n \geq 2$. Niech $r_1, r_2, r_3, \dots, r_{n-1}$ będą odpowiednio resztami z dzielenia liczb

$$1, \quad 1+2, \quad 1+2+3, \quad \dots, \quad 1+2+\dots+(n-1)$$

przez n . Znaleźć wszystkie takie wartości n , że ciąg $(r_1, r_2, \dots, r_{n-1})$ jest permutacją ciągu $(1, 2, \dots, n-1)$.

Rozwiązanie

Odpowiedź: $n = 2^k$ dla $k = 1, 2, 3, \dots$

Wykażemy najpierw, że potęgi dwójki spełniają warunki zadania. W tym celu wystarczy udowodnić, że jeżeli $n = 2^k$ dla pewnego całkowitego $k \geq 1$, to reszty $r_1, r_2, \dots, r_{n-1}$ są parami różne i żadna z nich nie jest równa zeru.

Gdyby któraś z tych reszt, powiedzmy r_m , była równa zeru, to liczba

$$1+2+\dots+m = \frac{m(m+1)}{2}$$

byłaby podzielna przez 2^k . Zatem dla pewnej wartości $m \in \{1, 2, \dots, 2^k - 1\}$ iloczyn $m(m+1)$ byłby podzielny przez 2^{k+1} . Lecz jedna z liczb $m, m+1$ jest parzysta, a druga — nieparzysta. Stąd jedna z nich musiałaby być podzielna przez 2^{k+1} , wbrew temu, że obie te dodatnie liczby nie przekraczają 2^k .

Gdyby z kolei dwie z rozważanych reszt były równe — powiedzmy $r_l = r_m$, gdzie $1 \leq l < m \leq n-1$, wówczas liczba

$$(1+2+\dots+m) - (1+2+\dots+l) = \frac{m(m+1)}{2} - \frac{l(l+1)}{2} = \frac{(m-l)(m+l+1)}{2}$$

byłaby podzielna przez 2^k , a więc iloczyn $(m-l)(m+l+1)$ byłby podzielny przez 2^{k+1} . Suma tych czynników wynosi $2m+1$, jest więc liczbą nieparzystą. Tak jak wcześniej wynika stąd, że jedna z liczb $m-l, m+l+1$ musi być podzielna przez 2^{k+1} . Jednakże liczby l i m są różne, dodatnie i mniejsze od 2^k , i podobnie jak poprzednio otrzymujemy sprzeczność.

Aby dokończyć rozwiązanie zadania, wystarczy dowieść, że gdy liczba n ma nieparzysty dzielnik pierwszy p , to ciąg $(r_1, r_2, \dots, r_{n-1})$ nie jest permutacją ciągu $(1, 2, \dots, n-1)$. Zauważmy w tym celu, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej t liczby

$$1+2+\dots+(tp-2)+(tp-1) = \frac{tp(tp-1)}{2},$$

$$1+2+\dots+(tp-1)+tp = \frac{tp(tp+1)}{2}$$

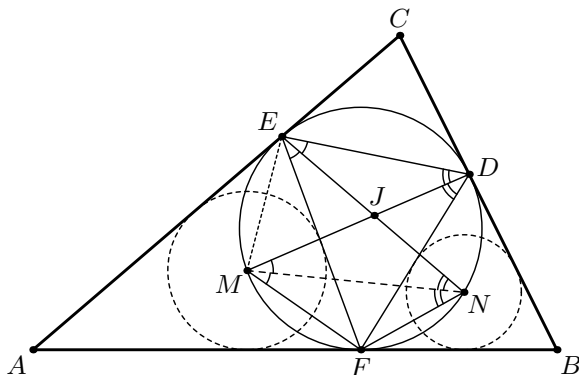
są podzielne przez p , gdyż nieparzysty czynnik pierwszy p w liczniku nie skraca się z mianownikiem. W związku z tym reszty

$$r_{p-1}, \quad r_p, \quad r_{2p-1}, \quad r_{2p}, \quad r_{3p-1}, \quad r_{3p}, \quad \dots, \quad r_{n-p-1}, \quad r_{n-p}, \quad r_{n-1}$$

są podzielne przez p . Zatem w ciągu $(r_1, r_2, \dots, r_{n-1})$ co najmniej $2 \cdot \frac{n}{p} - 1$ liczb jest podzielnych przez p . W ciągu $(1, 2, \dots, n-1)$ występuje zaś jedynie $\frac{n}{p} - 1$ liczb podzielnych przez p . Tak więc liczba n nie ma żądanej własności.

Zadanie 3. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków BC , CA , AB odpowiednio w punktach D , E , F . Punkty M , N , J są odpowiednio środkami okręgów wpisanych w trójkąty AEF , BDF , DEF . Dowieść, że punkty F i J są symetryczne względem prostej MN .

Rozwiązanie



rys. 2

Udowodnimy najpierw, że punkty M i N są odpowiednio środkami krótszych łuków FE i FD okręgu wpisanego w trójkąt ABC .

Rzeczywiście, niech M' będzie środkiem krótszego łuku FE tego okręgu. Prosta AC jest doń styczna w punkcie E , zatem (rys. 2)

$$(1) \quad \sphericalangle AEM' = \sphericalangle EFM'.$$

Ponieważ punkt M' jest środkiem łuku EF , więc trójkąt $EM'F$ jest równoramienny. Wobec tego $\sphericalangle EFM' = \sphericalangle FEM'$, co wraz z równością (1) dowodzi, że punkt M' leży na dwusiecznej kąta $\sphericalangle AEF$. Analogicznie dowodzimy, iż punkt ten leży na dwusiecznej kąta $\sphericalangle AFE$, więc pokrywa się on ze środkiem M okręgu wpisanego w trójkąt AEF . Podobnie rozumujemy dla punktu N .

Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest jednocześnie okręgiem opisanym na trójkącie DEF . Skoro M jest środkiem krótszego łuku EF tego okręgu, prosta DM zawiera dwusieczną kąta $\sphericalangle EDF$. Na tej prostej leży więc punkt J , który jest środkiem okręgu wpisanego w ten kąt. Analogicznie dochodzimy do wniosku, że punkt J leży na prostej EN .

Aby uzasadnić, że punkty J i F są symetryczne względem prostej MN , wystarczy wykazać, iż trójkąty MFN oraz MJN są przystające, gdyż będzie to oznaczało, że są one symetryczne względem prostej MN . Mamy jednak

$$\sphericalangle JMN = \sphericalangle DMN = \sphericalangle FMN,$$

gdzie druga równość wynika z tego, że N jest środkiem łuku FD . Podobnie dostajemy $\sphericalangle JNM = \sphericalangle FNM$. Trójkąty MFN i MJN mają więc równe odpowiednie kąty oraz wspólny bok MN , zatem są przystające (cecha *kąt-bok-kąt*). Kończy to rozwiązanie zadania.

Zadanie 4. Udowodnić, że dla dowolnych nieujemnych liczb rzeczywistych a, b, c prawdziwa jest nierówność

$$4(\sqrt{a^3b^3} + \sqrt{b^3c^3} + \sqrt{c^3a^3}) \leq 4c^3 + (a+b)^3.$$

Rozwiązanie

Korzystając z nierówności $x + y \geq 2\sqrt{xy}$ prawdziwej dla dowolnych liczb nieujemnych x, y otrzymujemy

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b) \geq a^3 + b^3 + 3ab \cdot 2\sqrt{ab} = a^3 + b^3 + 6\sqrt{a^3b^3}.$$

Wobec tego teza zadania wynika z następującego rachunku:

$$\begin{aligned} 4c^3 + (a+b)^3 - 4(\sqrt{a^3b^3} + \sqrt{b^3c^3} + \sqrt{c^3a^3}) &\geq \\ &\geq 4c^3 + a^3 + b^3 + 6\sqrt{a^3b^3} - 4(\sqrt{a^3b^3} + \sqrt{b^3c^3} + \sqrt{c^3a^3}) = \\ &= 4c^3 + a^3 + b^3 + 2\sqrt{a^3b^3} - 4\sqrt{b^3c^3} - 4\sqrt{c^3a^3} = \\ &= (2\sqrt{c^3} - \sqrt{a^3} - \sqrt{b^3})^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Zadanie 5. Dla każdej liczby całkowitej $n \geq 1$ wyznaczyć największą możliwą liczbę różnych podzbiorów zbioru $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ o następującej własności: Dowolne dwa z tych podzbiorów są rozłączne lub jeden z nich zawiera się w drugim.

Rozwiązanie

Odpowiedź: $2n$ podzbiorów.

Oznaczmy szukaną liczbę podzbiorów przez a_n .

Nietrudno spostrzec, że dla $n = 1, 2, 3, \dots$ następujące $2n$ podzbiorów zbioru $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ ma daną w treści zadania własność:

$$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \dots, \{n\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \dots, \{1, 2, 3, \dots, n\}.$$

Rzeczywiście, dowolny z pierwszych $n+1$ zbiorów ma najwyżej jeden element, zatem zawiera się w każdym zbiorze, z którym nie jest rozłączny. Natomiast dla dowolnych dwóch spośród pozostałych $n-1$ zbiorów ten zbiór, który w powyższym ciągu jest wypisany wcześniej, zawiera się w drugim zbiorze.

Udowodniliśmy w ten sposób, że

$$(1) \quad a_n \geq 2n \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots$$

Z drugiej strony, niech $B_1, B_2, \dots, B_t$ będą różnymi podzbiarami zbioru $\{1, 2, \dots, m\}$ o własności opisanej w treści zadania. Jeżeli wśród wypisanych podzbiorów nie występuje zbiór $\{1, 2, \dots, m\}$, to możemy go dopisać zwiększając o 1 liczbę tych podzbiorów i nie naruszając prawdziwości postulowanego warunku. Przyjmijmy więc, że $B_t = \{1, 2, \dots, m\}$.

Spośród zbiorów $B_1, B_2, \dots, B_{t-1}$ wybierzmy ten, który ma najwięcej elementów. Dla ustalenia uwagi niech będzie to B_1 i niech d oznacza liczbę jego elementów. Wówczas $d < n$. Ponadto równość $d = 0$ oznacza, że B_1 jest

zbiorem pustym, co z uwagi na wybór zbioru B_1 jest możliwe jedynie wtedy, gdy $t = 2$. W dalszej części rozumowania przyjmujemy więc, że $0 < d < n$.

Na mocy określenia zbioru B_1 każdy ze zbiorów B_i ($i = 1, 2, \dots, t-1$) albo jest podzbiorem zbioru B_1 , albo też jest z nim rozłączny. Dokonując przenumerowania możemy założyć, iż zbiory $B_1, B_2, \dots, B_r$ są podzbiarami zbioru B_1 , natomiast zbiory $B_{r+1}, B_{r+2}, \dots, B_{t-1}$ są rozłączne z B_1 .

Zbiory $B_1, B_2, \dots, B_r$ są różnymi podzbiarami d -elementowego zbioru B_1 , z których dowolne dwa albo są rozłączne, albo jeden zawiera się w drugim. Wynika stąd nierówność $r \leq a_d$. Wśród $t-r-1$ zbiorów $B_{r+1}, B_{r+2}, \dots, B_{t-1}$ dowolne dwa albo są rozłączne, albo jeden zawiera się w drugim, przy czym są one podzbiarami $(m-d)$ -elementowego zbioru $\{1, 2, \dots, m\} \setminus B_1$, a ponadto nie występuje wśród nich zbiór pusty, jest on bowiem podzbiorem B_1 . Stąd otrzymujemy $t-r-1 \leq a_{m-d}-1$ i w konsekwencji

$$t = r + (t-r-1) + 1 \leq a_d + (a_{m-d}-1) + 1 = a_d + a_{m-d}.$$

Skutkiem tego liczba podzbiorów zbioru $\{1, 2, \dots, m\}$ o żądanej własności nie przekracza liczby $a_d + a_{m-d}$.

Wykazaliśmy zatem, że a_m nie przekracza największej z liczb

$$a_d + a_{m-d} \quad \text{dla } d = 1, 2, \dots, m-1.$$

Jeżeli więc w nierówności (1) równość ma miejsce dla $n = 1, 2, \dots, m-1$, to ma ona miejsce również dla $n = m$. Skoro dla $n = 1$ nierówność (1) staje się równością, stosując indukcję stwierdzamy ostatecznie, że

$$a_n = 2n \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots$$

Zadanie 6. Dany jest trójkąt ABC , w którym $AB = AC$. Na półprostych $AB^{\rightarrow}$ i $AC^{\rightarrow}$ obrano odpowiednio takie punkty K i L leżące poza bokami trójkąta, że

$$(1) \quad 4 \cdot BK \cdot CL = BC^2.$$

Punkt M jest środkiem boku BC . Proste KM i LM przecinają po raz drugi okrąg opisany na trójkącie AKL odpowiednio w punktach P i Q . Wykazać, że proste PQ i BC są równoległe.

Rozwiązanie

Na mocy zależności (1) mamy (rys. 3)

$$(2) \quad \frac{BM}{BK} = \frac{BC}{2 \cdot BK} = \frac{2 \cdot CL}{BC} = \frac{CL}{CM}.$$

Ponadto z założeń zadania wynika, że trójkąt BAC jest równoramienny, skąd uzyskujemy równość kątów $\sphericalangle KBM = \sphericalangle MCL$. Wraz z warunkiem (2) oznacza to, że trójkąty KBM i MCL są podobne (cecha *bok-kąt-bok*). Korzystając z tego podobieństwa otrzymujemy

$$(3) \quad \sphericalangle KML = 180^\circ - \sphericalangle BMK - \sphericalangle LMC = 180^\circ - \sphericalangle BMK - \sphericalangle MKB = \sphericalangle KBM$$

1. Liczby $f_1, f_2, f_3, \dots$ są dodatnie.
2. Ciąg $f_2, f_3, f_4, \dots$ jest ściśle rosnący.
3. Dla $n = 2, 3, 4, \dots$ zachodzi nierówność $f_{n-1} \geq \frac{1}{2}f_n$.
4. Dla $n = 4, 5, 6, \dots$ zachodzi nierówność $f_{n+1} < 3f_{n-1}$.

Rzeczywiście, własność 1. jest oczywista i pociąga za sobą własność 2., gdyż dla $n \geq 3$ mamy $f_{n-2} > 0$, co daje $f_n = f_{n-1} + f_{n-2} > f_{n-1}$. Wreszcie własności 3. i 4. wynikają z własności 2., na mocy wzoru (1) mamy bowiem $2f_{n-1} \geq f_{n-1} + f_{n-2} = f_n$ dla $n \geq 2$ oraz

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1} = 2f_{n-1} + f_{n-2} < 2f_{n-1} + f_{n-1} = 3f_{n-1} \quad \text{dla } n \geq 4.$$

Przechodzimy do zasadniczej części rozwiązania.

Niech W będzie wielomianem spełniającym warunki zadania. Istnieje więc liczba całkowita a , dla której $W(a) = f_0 = 0$, oraz liczba całkowita b , dla której $W(b) = f_1 = 1$. Na podstawie sformułowanego wyżej faktu różnica $W(b) - W(a) = 1$ jest podzielna przez $b - a$. Stąd wniosek, że $b - a = \pm 1$, czyli $b = a + \varepsilon$, gdzie $\varepsilon \in \{1, -1\}$. W tej sytuacji wielomian P określony wzorem

$$(2) \quad P(x) = W(a + \varepsilon x)$$

spełnia zależności $P(0) = W(a) = 0$ i $P(1) = W(a + \varepsilon) = W(b) = 1$. Nietrudno ponadto spostrzec, że zbiory wartości wielomianów W i P przyjmowanych dla całkowitych argumentów są równe. Innymi słowy, dla każdego $n = 0, 1, 2, \dots$ istnieje taka liczba całkowita k , że $P(k) = f_n$.

Niech d i e będą takimi liczbami całkowitymi, że $P(d) = f_3 = 2$ oraz $P(e) = f_4 = 3$. Wówczas

$$d - 1 \mid P(d) - P(1) = 2 - 1 = 1, \quad \text{skąd } d \in \{0, 2\};$$

wartość $d = 0$ wykluczamy, gdyż $P(0) = 0 \neq 2$. Zatem $d = 2$; podobnie

$$e - 2 \mid P(e) - P(2) = 3 - 2 = 1, \quad \text{skąd } e \in \{1, 3\}$$

i w efekcie $e = 3$. Doszliśmy w ten sposób do wniosku, że

$$(3) \quad P(k) = k \quad \text{dla } k = 0, 1, 2, 3.$$

Wykażemy przez indukcję, że

$$(4) \quad P(f_n) = f_n \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, \dots$$

Prawdziwość związku (4) dla $n \leq 4$ wynika wprost z relacji (3). Przyjmijmy z kolei, iż równość (4) jest spełniona dla $n = 0, 1, \dots, m$, gdzie $m \geq 4$; należy dowieść, że $P(f_{m+1}) = f_{m+1}$.

Na podstawie założeń zadania istnieje liczba całkowita k , dla której $P(k) = f_{m+1}$. Przypuśćmy najpierw, że $k < f_{m-1}$; na mocy własności 3. uzasadnionej na początku rozwiązania oraz nierówności $m - 1 > 2$ mamy wtedy

$$f_m - k > f_m - f_{m-1} = f_{m-2} \geq \frac{1}{2}f_{m-1},$$

a ponadto ma miejsce podzielność

$$f_m - k \mid P(f_m) - P(k) = f_m - f_{m+1} = -f_{m-1}.$$

Liczba $f_m - k$ jest więc dzielnikiem liczby f_{m-1} większym od jej połowy, co implikuje równość $f_m - k = f_{m-1}$. Wówczas jednak $k = f_m - f_{m-1} = f_{m-2}$, co nie jest możliwe, gdyż założenie indukcyjne orzeka, że $P(f_{m-2}) = f_{m-2}$, natomiast $P(k) = f_{m+1}$.

Udowodniliśmy tym samym, że $k \geq f_{m-1}$. Ponieważ na mocy własności 4. oraz warunku $m \geq 4$ dostajemy

$$f_{m+1} = f_m + f_{m-1} = 2f_{m-1} + f_{m-2} < 3f_{m-1},$$

wiec nierówność $k \geq f_{m-1}$ pociąga za sobą nierówność $k > \frac{1}{3}f_{m+1}$. Z drugiej strony, spełniona jest podzielność

$$k = k - 0 \mid P(k) - P(0) = f_{m+1} - 0 = f_{m+1}.$$

W konsekwencji liczba k jest dzielnikiem liczby f_{m+1} większym od jej jednej trzeciej. Zatem $k = f_{m+1}$ lub $k = \frac{1}{2}f_{m+1}$. Pierwszy przypadek prowadzi do wniosku, że $P(f_{m+1}) = f_{m+1}$, co jest tożsame z tezą indukcyjną. Natomiast drugi przypadek jest niemożliwy: wynikałoby żeń bowiem, że $k = 1$ lub

$$k - 1 = \frac{1}{2}f_{m+1} - 1 \mid P(k) - P(1) = f_{m+1} - 1 = 2(\frac{1}{2}f_{m+1} - 1) + 1 = 2(k - 1) + 1,$$

a zatem $k - 1 \mid 1$, czyli $k \leq 2$. W rezultacie $f_{m+1} = 2k \leq 4 < f_5$, co przeczy założeniu $m \geq 4$.

To kończy rozumowanie indukcyjne.

Udowodniona właśnie zależność (4) wraz z własnością 2. pozwala stwierdzić, że równość $P(x) = x$ zachodzi dla nieskończenie wielu liczb całkowitych x . Skoro P jest wielomianem, równość ta jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej x . Uwzględniając równość (2) dostajemy teraz

$$(5) \quad W(x) = \varepsilon(x - a)$$

dla każdej liczby rzeczywistej x , gdzie $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ oraz a jest liczbą całkowitą.

By zakończyć rozwiązanie, pozostaje już tylko spostrzec, że każdy wielomian postaci (5) ma żądaną własność.

Zadanie 8. Przekątne podstawy $ABCD$ ostrosłupa $ABCD S$ przecinają się pod kątem prostym w punkcie H , będącym spodkiem wysokości ostrosłupa. Niech K , L , M , N będą rzutami prostokątnymi punktu H odpowiednio na ściany ABS , BCS , CDS , DAS . Dowieść, że proste KL , MN i AC są równoległe lub przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązanie

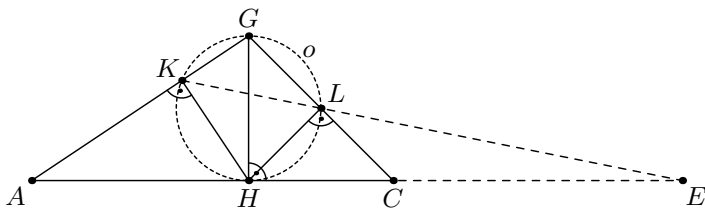
Na początku wykażemy, że proste KL i AC leżą w jednej płaszczyźnie.

Z założeń zadania wynika, że proste AC , BD i HS są wzajemnie prostopadłe. Oznacza to, że dowolna prosta zawarta w płaszczyźnie wyznaczonej przez dwie z tych prostych jest prostopadła do trzeciej. W szczególności prosta SB jest prostopadła do prostej AC i wobec tego istnieje płaszczyzna π przechodząca przez prostą AC i prostopadła do prostej SB .

Niech G oznacza punkt wspólny płaszczyzny π i prostej SB . Wówczas

Punkty K i L leżą więc na okręgu o o średnicy GH , stycznym do prostej AC .

Przyjmijmy zatem, że punkt H nie jest środkiem odcinka AC . Dalsza część rozumowania rozgrywa się w płaszczyźnie π (rys. 5). Dokończymy rozwiązanie zadania dwoma sposobami.



rys. 5

Sposób I

Niech E oznacza punkt przecięcia prostych KL i AC . Z twierdzenia o siecznej i stycznej zastosowanego do okręgu o uzyskujemy wówczas

$$(1) \quad EH^2 = EK \cdot EL.$$

Z drugiej strony, podobieństwo trójkątów prostokątnych GKH i GHA daje

$$(2) \quad \frac{GK}{GH} = \frac{GH}{GA}, \quad \text{czyli} \quad GK \cdot GA = GH^2,$$

zaś z podobieństwa trójkątów prostokątnych GLH i GHC dostajemy

$$(3) \quad \frac{GL}{GH} = \frac{GH}{GC}, \quad \text{czyli} \quad GL \cdot GC = GH^2.$$

Porównując stronami równości (2) i (3) stwierdzamy, że

$$GK \cdot GA = GL \cdot GC.$$

To dowodzi, że punkty A, K, L, C leżą na jednym okręgu, co implikuje, że

$$(4) \quad EK \cdot EL = EA \cdot EC.$$

Łącząc teraz zależności (1) i (4) otrzymujemy warunek

$$(5) \quad EH^2 = EA \cdot EC.$$

Punkt E na prostej AC jest określony jednoznacznie przez równość (5). Wprowadzając bowiem na prostej AC strukturę osi liczbowej i przyjmując, że punktowi X odpowiada liczba x , zapisujemy warunek (5) w postaci

$$(6) \quad (e - h)^2 = (e - a)(e - c),$$

czyli $(a + c - 2h)e = ac - h^2$; skoro zaś punkt H nie jest środkiem odcinka AC , mamy $a + c - 2h \neq 0$ i w efekcie istnieje dokładnie jedna liczba rzeczywista e spełniająca równanie (6).

Sposób II

Pozostając przy oznaczeniach rys. 5 oraz stosując twierdzenie Menelausa (zob. *L Olimpiada Matematyczna, Sprawozdanie Komitetu Głównego*, Warszawa 2000, Dodatek H, str. 122) do trójkąta ACG przeciętego prostą przechodzącą przez punkty E, L, K uzyskujemy równość

$$(7) \quad \frac{AE}{EC} = \frac{AK}{KG} \cdot \frac{GL}{LC} = \frac{AK}{KH} \cdot \frac{KH}{KG} \cdot \frac{GL}{LH} \cdot \frac{LH}{LC}.$$

Ponadto podobieństwo trójkątów prostokątnych AKH , HKG i AHG pozwala wnioskować, że

$$(8) \quad \frac{AK}{KH} = \frac{KH}{KG} = \frac{AH}{GH},$$

zaś podobieństwo trójkątów prostokątnych GLH , HLC i GHC daje

$$(9) \quad \frac{GL}{LH} = \frac{LH}{LC} = \frac{GH}{CH}.$$

Łącząc zależności (7), (8) i (9) widzimy, że

$$(10) \quad \frac{AE}{EC} = \frac{AH}{GH} \cdot \frac{AH}{GH} \cdot \frac{GH}{CH} \cdot \frac{GH}{CH} = \left(\frac{AH}{CH} \right)^2.$$

Podobnie jak w sposobie I równość (10) pozwala stwierdzić, że punkt E na prostej AC jest wyznaczony jednoznacznie. Odpowiednikiem równania (6) będzie w tym przypadku równanie

$$\frac{e-a}{e-c} = \left(\frac{AH}{CH} \right)^2,$$

które ma dokładnie jedno rozwiązanie rzeczywiste e wobec faktu, że jego prawa strona jest różna od 1, jako że punkt H nie jest środkiem odcinka AC .

Przeprowadzając analogiczne rozumowanie dla prostej MN dochodzimy ostatecznie do następującego wniosku: Proste KL , MN i AC

- są równoległe, jeżeli punkt H jest środkiem odcinka AC ;
- przecinają się w punkcie E leżącym na prostej AC i wyznaczonym przez warunek $EH^2 = EA \cdot EC$ (wynikający ze sposobu I), bądź też przez równoważny warunek

$$\frac{AE}{EC} = \left(\frac{AH}{CH} \right)^2$$

(wynikający ze sposobu II), jeżeli punkt H nie jest środkiem odcinka AC .

Zadanie 9. Dana jest tablica 2008×2008 . Dwaj gracze na przemian wykonują ruchy, z których każdy polega na wybraniu białego albo czarnego pionka i postawieniu go na wybranym wolnym polu. Wygrywa ten, którego ruch doprowadził do powstania ciągu 5 kolejnych pionków tego samego koloru w linii pionowej, poziomej lub ukośnej.

Zbadać, czy istnieje strategia dla gracza rozpoczynającego grę zapewniająca mu zwycięstwo.

Rozwiązanie

Odpowiedź: Nie istnieje.

Wskażemy strategię gry dla gracza nie rozpoczynającego (zwanego w dalszej części rozwiązania *drugim* graczem), która uniemożliwi graczowi rozpoczynającemu (*pierwszemu*) zwycięstwo.

Strategię tę można opisać następująco: Jeżeli drugi gracz może wykonać ruch prowadzący do powstania ciągu 5 kolejnych pionków tego samego koloru w jednej linii, wykonuje on taki ruch i wygrywa grę. W przeciwnym razie drugi gracz stawia pionek na polu symetrycznym względem środka szachownicy do pola, które przed chwilą zajął pierwszy gracz, i w kolorze przeciwnym niż pionek postawiony właśnie przez pierwszego gracza.

Rozmiary szachownicy są liczbami parzystymi, więc pole symetryczne względem jej środka do danego pola jest *innym* polem. Opisana strategia jest zatem poprawnie określona: po każdym ruchu drugiego gracza dowolna para pól szachownicy symetrycznych względem jej środka składa się albo z dwóch wolnych, albo z dwóch zajętych pól, wobec czego po ruchu pierwszego gracza pole symetryczne do pola przezeń zajętego jest wolne.

Wykażemy, że nie jest możliwe, by przy takiej strategii drugiego gracza gracz rozpoczynający mógł odnieść zwycięstwo.

Przypuśćmy przeciwnie, że pewien ruch pierwszego gracza zapewnił mu zwycięstwo. Rozpatrzmy pozycję na szachownicy przed wykonaniem tego ruchu. Jak wykazaliśmy, w tej pozycji dowolne pole jest zajęte przez pionek wtedy i tylko wtedy, gdy pole doń symetryczne jest zajęte przez pionek przeciwnego koloru. Zatem układowi 4 pionków jednego koloru k , który pierwszy gracz przez postawienie pionka na polu P powiększył do wygrywającego układu 5 kolejnych pionków koloru k w jednej linii, odpowiada w tej pozycji układ 4 pionków koloru k' przeciwnego do k , a przy tym pole P' symetryczne do pola P jest wolne. Wówczas jednak, zgodnie z opisaną strategią, ostatni ruch drugiego gracza powinien polegać na postawieniu na polu P' pionka w kolorze k' , co prowadzi do powstania ciągu 5 kolejnych pionków koloru k' w jednej linii, i w konsekwencji do wygranej drugiego gracza — wbrew założeniu, że zwycięstwo odniósł pierwszy gracz wykonując kolejny ruch.

Uzyskana sprzeczność dowodzi, że przy takiej strategii drugiego gracza gracz rozpoczynający nie może zapewnić sobie zwycięstwa w grze.

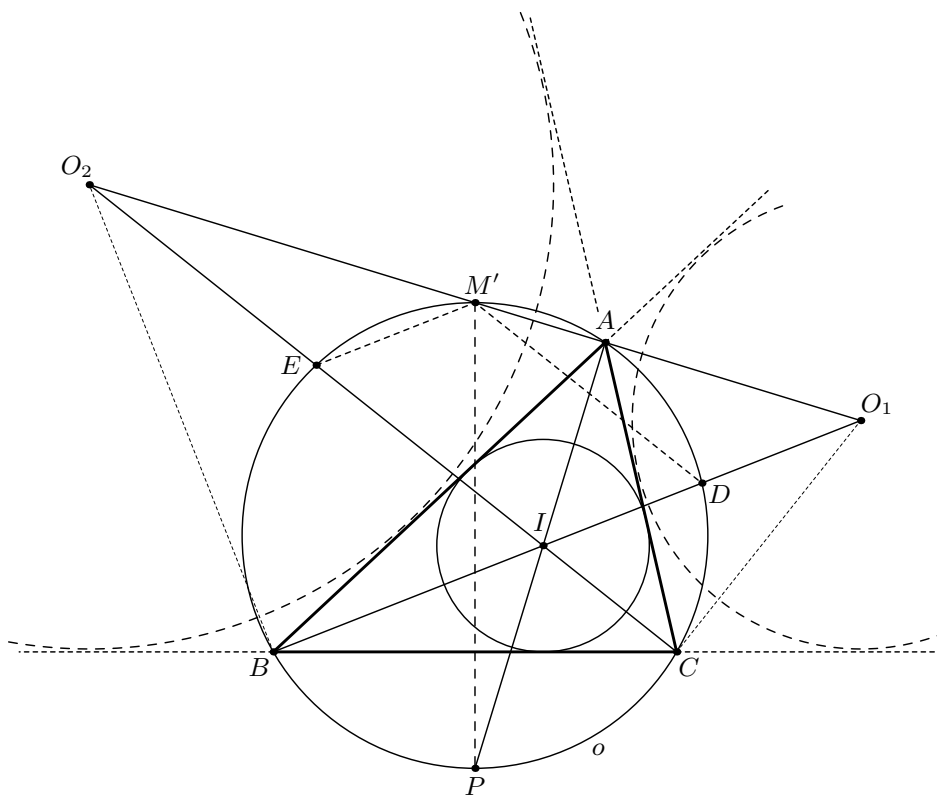
Zadanie 10. Punkt P jest środkiem krótszego łuku BC okręgu opisanego na trójkącie ABC , w którym $\angle BAC = 60^\circ$. Punkt M jest środkiem odcinka łączącego środki dwóch okręgów dopisanych do danego trójkąta, stycznych odpowiednio do boków AB i AC . Wykazać, że $PM = 2 \cdot BP$.

(Uwaga: Okrąg dopisany do trójkąta to okrąg styczny do jednego z boków trójkąta oraz do przedłużeń dwóch pozostałych boków.)

Rozwiązanie

Niech O_1 i O_2 oznaczają środki okręgów dopisanych do trójkąta ABC stycznych odpowiednio do boków AC i AB , niech I będzie środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC oraz niech D i E będą odpowiednio punktami, w których proste BI i CI przecinają po raz drugi okrąg o opisany na trójkącie ABC (rys. 6).

Wówczas zachodzi równość $DI = DC$ (zob. *LI Olimpiada Matematyczna, Sprawozdanie Komitetu Głównego*, Warszawa 2001, Dodatek E, str. 113), zaś z drugiej strony kąt $\angle ICO_1$ jest prosty, gdyż proste CI i CO_1 zawierają dwusieczne kątów odpowiednio wewnętrznego i zewnętrznego trójkąta ABC przy wierzchołku C . Wynika stąd, że punkt D jest środkiem okręgu o średnicy IO_1 opisanego na trójkącie prostokątnym ICO_1 . W szczególności $ID = DO_1$. Podobnie dowodzimy, że $EI = EB$ oraz $IE = EO_2$.



rys. 6

Niech M' oznacza drugi punkt przecięcia prostej O_1O_2 z okręgiem o . (Jeżeli prosta ta jest styczna do okręgu o w punkcie A , to przyjmujemy $M' = A$.) Udowodnimy, że punkty M' i M pokrywają się.

Punkty A, I, P leżą na dwusiecznej kąta wewnętrznego trójkąta ABC przy wierzchołku A , a punkty O_1, A, M', O_2 — na dwusiecznej kąta zewnętrznego przy tym wierzchołku. Dwusieczne te są prostopadłe, zatem kąt $\angle M'AP$ jest prosty. W efekcie odcinek $M'P$ jest średnicą okręgu o . (Nietrudno spostrzec, iż stwierdzenie to zachowuje moc w przypadku, gdy $M' = A$.)

Punkt P jest środkiem krótszego łuku BC okręgu o , więc punkt M' jest środkiem dłuższego łuku BC tego okręgu. Ponadto krótsze łuki CD i DA

mają jednakowe długości (z uwagi na to, że punkt D leży na dwusiecznej kąta $\sphericalangle ABC$) i analogicznie krótsze łuki AE i AB mają jednakowe długości. Te cztery łuki okręgu o tworzą łącznie dłuższy łuk BC , którego środkiem jest punkt M' . Stąd wniosek, że krótsze łuki BE i $M'D$ mają równe długości oraz krótsze łuki CD i $M'E$ mają jednakowe długości. W konsekwencji $M'D = EB = EI$ oraz $M'E = DC = DI$, czyli czworokąt $EIDM'$ jest równoległobokiem. Ponieważ punkty D i E są odpowiednio środkami boków IO_1 i IO_2 trójkąta IO_1O_2 , więc punkt M' jest środkiem trzeciego boku O_1O_2 . Uzyskaliśmy w ten sposób równość $M' = M$.

Pozostaje zauważyć, że skoro odcinek PM jest średnicą okręgu o , to trójkąt BPM ma kąt prosty przy wierzchołku B ; ponieważ zaś

$$\sphericalangle BMP = \sphericalangle BAP = \frac{1}{2} \sphericalangle BAC = 30^\circ,$$

więc trójkąt BPM jest połową trójkąta równobocznego o boku PM i wysokości MB . Stąd bezpośrednio uzyskujemy żadaną równość $PM = 2 \cdot BP$.

Zadanie 11. Udowodnić, że dla dowolnych liczb całkowitych $k > m \geq 1$ spełniona jest nierówność

$$\frac{\sqrt[k]{k!}}{\sqrt[m]{m!}} < \frac{k}{m}.$$

Rozwiązanie

Daną do udowodnienia nierówność możemy przepisać w postaci

$$\frac{\sqrt[k]{k!}}{k} < \frac{\sqrt[m]{m!}}{m}, \quad \text{gdzie } k > m.$$

Zatem teza zadania sprowadza się do wykazania, że ciąg (a_n) dany wzorem $a_n = \sqrt[n]{n!}/n$ jest ściśle malejący. Innymi słowy, wystarczy dowieść nierówności

$$(1) \quad \frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{n+1} < \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots$$

Dalsze rozumowanie przeprowadzimy dwoma sposobami.

Sposób I

Ustalmy liczbę $t = 1, 2, \dots, n$ i zastosujmy nierówność pomiędzy średnią arytmetyczną a średnią geometryczną do następujących n liczb:

$$(2) \quad \underbrace{\frac{t+1}{n+1}, \frac{t+1}{n+1}, \dots, \frac{t+1}{n+1}}_{t \text{ liczb}}, \quad \underbrace{\frac{t}{n+1}, \frac{t}{n+1}, \dots, \frac{t}{n+1}}_{n-t \text{ liczb}}.$$

Średnia arytmetyczna tych liczb jest równa

$$\frac{1}{n} \left(t \cdot \frac{t+1}{n+1} + (n-t) \cdot \frac{t}{n+1} \right) = \frac{1}{n} \cdot \frac{t^2 + t + nt - t^2}{n+1} = \frac{t(1+n)}{n(n+1)} = \frac{t}{n},$$

natomiast średnia geometryczna wynosi

$$\sqrt[n]{\left(\frac{t+1}{n+1}\right)^t \left(\frac{t}{n+1}\right)^{n-t}} = \frac{1}{n+1} \sqrt[n]{(t+1)^t t^{n-t}} = \frac{t}{n+1} \sqrt[n]{\frac{(t+1)^t}{t^t}}.$$

Na podstawie nierówności pomiędzy średnimi uzyskujemy stąd zależności

$$(3) \quad \frac{t}{n} \geq \frac{t}{n+1} \sqrt[n]{\frac{(t+1)^t}{t^t}} \quad \text{dla } t = 1, 2, \dots, n.$$

Mnożąc stronami wszystkie nierówności (3) dochodzimy do wniosku, że

$$\begin{aligned} \frac{n!}{n^n} &= \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdot \dots \cdot \frac{n}{n} \geq \frac{1}{n+1} \cdot \frac{2}{n+1} \cdot \dots \cdot \frac{n}{n+1} \sqrt[n]{\frac{2^1}{1^1} \cdot \frac{3^2}{2^2} \cdot \frac{4^3}{3^3} \cdot \dots \cdot \frac{(n+1)^n}{n^n}} = \\ &= \frac{n!}{(n+1)^n} \cdot \sqrt[n]{\frac{(n+1)^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^n \sqrt[n]{n!}}. \end{aligned}$$

Wyciągając teraz pierwiastek stopnia n otrzymujemy

$$(4) \quad \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \geq \frac{\sqrt[n]{(n+1)!}}{n+1} \cdot \frac{1}{n^2 \sqrt[n]{n!}}$$

i widzimy, że aby z udowodnionej właśnie nierówności (4) wywnioskować zależność (1), wystarczy sprawdzić, że

$$(5) \quad \sqrt[n]{(n+1)!} > {}^{n+1}\sqrt{(n+1)!} \cdot {}^{n^2}\sqrt{n!}.$$

Podnosząc stronami zależność (5) do potęgi $n^3 + n^2$ i wykonując przekształcenia otrzymujemy następujące jej postaci równoważne:

$$\begin{aligned} (n+1)!^{n^2+n} &> (n+1)!^{n^2} \cdot (n!)^{n+1}, \\ (n+1)!^n &> (n!)^{n+1}, \\ (n+1)^n \cdot (n!)^n &> n! \cdot (n!)^n, \\ (n+1)^n &> n!. \end{aligned}$$

Ostatnia nierówność jest spełniona, gdyż jej prawa strona jest iloczynem n liczb mniejszych od $n+1$, zaś lewa strona jest iloczynem n liczb równych $n+1$. W efekcie uzyskujemy kolejno nierówności (5) i (1), co daje tezę zadania.

Sposób II

Podnosząc stronami dowodzoną nierówność (1) do potęgi $n(n+1)$ uzyskujemy równoważną nierówność

$$(6) \quad \frac{(n+1)!^n}{(n!)^{n+1}} < \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n(n+1)}.$$

Lewa strona zależności (6) jest równa

$$\frac{(n!)^n \cdot (n+1)^n}{(n!)^n \cdot n!} = \frac{(n+1)^n}{n!},$$

a więc nierówność (6) możemy przepisać w postaci

$$\frac{(n+1)^n}{n!} < \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n(n+1)},$$

lub równoważnie

$$(7) \quad n! > \frac{n^{n(n+1)}}{(n+1)^{n^2}}.$$

Wystarczy zatem dowieść nierówności (7) dla $n = 1, 2, 3, \dots$. W tym celu zastosujemy indukcję. Dla $n = 1$ zależność (7) przybiera postać $1 > \frac{1}{2}$ i jest prawdziwa. Aby wykonać krok indukcyjny, należy z nierówności (7) wywnioskować nierówność

$$(8) \quad (n+1)! > \frac{(n+1)^{(n+1)(n+2)}}{(n+2)^{(n+1)^2}},$$

a do tego dostateczne będzie sprawdzenie, że dla $n = 1, 2, 3, \dots$ spełniona jest nierówność

$$(9) \quad n+1 > \frac{(n+1)^{(n+1)(n+2)}}{(n+2)^{(n+1)^2}} : \frac{n^{n(n+1)}}{(n+1)^{n^2}} = \frac{(n+1)^{2n^2+3n+2}}{(n+2)^{(n+1)^2} \cdot n^{n(n+1)}},$$

gdyż wówczas mnożąc stronami zależności (7) i (9) uzyskamy nierówność (8).

Pozostaje więc wykazać prawdziwość zależności (9). W tym celu przekształcamy ją równoważnie w następujący sposób:

$$\begin{aligned} (n+2)^{(n+1)^2} \cdot n^{n(n+1)} &> (n+1)^{2n^2+3n+1}, \\ (n+2)^{(n+1)^2} \cdot n^{n(n+1)} &> (n+1)^{(2n+1)(n+1)}, \\ (n+2)^{n+1} \cdot n^n &> (n+1)^{2n+1}, \\ \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^n &> \frac{n+1}{n+2}, \end{aligned}$$

Stosując teraz nierówność Bernoulliego (zob. *LII Olimpiada Matematyczna, Sprawozdanie Komitetu Głównego*, Warszawa 2002, Dodatek A, str. 99) uzyskujemy

$$\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \geq 1 - \frac{n}{(n+1)^2} = \frac{n^2+n+1}{(n+1)^2},$$

Aby zatem zakończyć dowód poprzedniej nierówności, wystarczy już tylko sprawdzić, że

$$\frac{n^2+n+1}{(n+1)^2} > \frac{n+1}{n+2},$$

lecz to sprowadza się do prawdziwej zależności

$$(n^2+n+1)(n+2) = n^3+3n^2+3n+2 > n^3+3n^2+3n+1 = (n+1)^3.$$

Stąd kolejno wynikają nierówności (9), (7), (6) i (1), co kończy rozwiązanie.

Zadanie 12. Dana jest liczba pierwsza p . Po lewej stronie tablicy napisano liczby $1, 2, 3, \dots, p-1$, zaś po prawej stronie liczbę 0 . Wykonujemy ciąg $p-1$ ruchów, z których każdy przebiega następująco: Wybieramy jedną z liczb napisanych po lewej stronie tablicy, dodajemy ją do wszystkich pozostałych liczb na tablicy, po czym wymazujemy wybraną liczbę.

Rozstrzygnąć, dla jakich wartości p można w kolejnych ruchach wybierać liczby w taki sposób, by liczba pozostała na tablicy po wykonaniu wszystkich ruchów była podzielna przez p .

Rozwiązanie

Odpowiedź: Dla wszystkich liczb pierwszych p oprócz 2 i 3 .

Niech t_i dla $i=1, 2, \dots, p-1$ oznacza początkową wartość tej liczby, która została wymazana z tablicy w i -tym ruchu. Zatem ciąg $(t_1, t_2, t_3, \dots, t_{p-1})$ jest permutacją ciągu $(1, 2, 3, \dots, p-1)$ oraz jednoznacznie określa sposób wyboru zmywanych liczb w kolejnych ruchach.

Wprowadźmy oznaczenie

$$s_i = t_i + 2t_{i-1} + 4t_{i-2} + \dots + 2^{i-2}t_2 + 2^{i-1}t_1 \quad \text{dla } i=1, 2, \dots, p-1.$$

Wykażemy indukcyjnie, że po wykonaniu i -tego ruchu wszystkie liczby na tablicy są większe o s_i od swych początkowych wartości.

Istotnie: stwierdzenie to jest prawdą dla $i=1$, gdyż w pierwszym ruchu wymazano liczbę t_1 , zwiększając uprzednio wszystkie pozostałe liczby o $s_1 = t_1$. Jeżeli natomiast po wykonaniu i -tego ruchu wszystkie liczby na tablicy były większe o s_i od początkowych wartości, to w szczególności liczba początkowo równa t_{i+1} po wykonaniu i -tego ruchu miała wartość $t_{i+1} + s_i$. Wobec tego w wyniku $(i+1)$ -szego ruchu dodano do wszystkich pozostałych liczb wielkość $t_{i+1} + s_i$. Ponieważ zaś liczby te po i -tym ruchu były większe o s_i od początkowych wartości, więc po $(i+1)$ -szym ruchu stały się one większe o $t_{i+1} + s_i + s_i$ od swych początkowych wartości. Pozostaje spostrzec, że

$$\begin{aligned} t_{i+1} + 2s_i &= t_{i+1} + 2(t_i + 2t_{i-1} + 4t_{i-2} + \dots + 2^{i-2}t_2 + 2^{i-1}t_1) = \\ &= t_{i+1} + 2t_i + 4t_{i-1} + 8t_{i-2} + \dots + 2^{i-1}t_2 + 2^i t_1 = \\ &= s_{i+1}, \end{aligned}$$

co kończy dowód indukcyjny.

Udowodniliśmy tym samym, że po wykonaniu wszystkich p ruchów liczba pozostała po prawej stronie tablicy wynosi

$$(1) \quad t_{p-1} + 2t_{p-2} + 4t_{p-3} + \dots + 2^{p-3}t_2 + 2^{p-2}t_1.$$

Sprawdziliśmy zatem zadanie do wyznaczenia wszystkich liczb pierwszych p , dla których istnieje taka permutacja $(t_1, t_2, t_3, \dots, t_{p-1})$ ciągu $(1, 2, 3, \dots, p-1)$, że liczba (1) jest podzielna przez p .

Bezpośrednio sprawdzamy, że dla $p=2$ i $p=3$ nie jest możliwe otrzymanie liczby podzielnej przez p : dla $p=2$ liczba (1) wynosi 1 , a dla $p=3$ może ona

być równa $1 + 2 \cdot 2 = 5$ albo $2 + 2 \cdot 1 = 4$.

Wykażemy, że jeśli p jest liczbą pierwszą większą od 3, to dla permutacji

$$(2) \quad (t_1, t_2, t_3, t_4, \dots, t_{p-2}, t_{p-1}) = (p-2, p-1, p-4, p-3, \dots, 5, 6, 3, 4, 2, 1),$$

powstałej z ciągu $(1, 2, 3, 4, \dots, p-2, p-1)$ przez zamianę miejsc w parach $(2j-1, 2j)$ dla $j \geq 2$ i następnie odwrócenie kolejności, liczba (1) jest podzielna przez p .

Rzeczywiście, dla permutacji (2) liczba (1) ma wartość

$$L = 1 + 2 \cdot 2 + 2^2 \cdot 4 + 2^3 \cdot 3 + 2^4 \cdot 6 + 2^5 \cdot 5 + \dots + 2^{p-3}(p-1) + 2^{p-2}(p-2).$$

Dla $j = 2, 3, \dots, \frac{1}{2}(p-1)$ prawdziwa jest zależność

$$\begin{aligned} 2^{2j-2} \cdot 2j + 2^{2j-1}(2j-1) &= 2^{2j-2}(2j-1) + 2^{2j-1} \cdot 2j + 2^{2j-2} - 2^{2j-1} = \\ &= 2^{2j-2}(2j-1) + 2^{2j-1} \cdot 2j - 2^{2j-2}, \end{aligned}$$

z której wynika, że $L = M - N$, gdzie M jest sumą liczb postaci $2^{i-1}i$ dla $i = 1, 2, \dots, p-1$, natomiast $N = 2^2 + 2^4 + 2^6 + \dots + 2^{p-3}$. Korzystając ze wzoru na sumę kolejnych wyrazów ciągu geometrycznego obliczamy, że

$$\begin{aligned} M &= (2^0 + \dots + 2^{p-2}) + (2^1 + \dots + 2^{p-2}) + \dots + (2^{p-3} + 2^{p-2}) + 2^{p-2} = \\ &= 2^0(2^{p-1} - 1) + 2^1(2^{p-2} - 1) + \dots + 2^{p-3}(2^2 - 1) + 2^{p-2}(2^1 - 1) = \\ &= (p-1)2^{p-1} - (2^0 + 2^1 + \dots + 2^{p-3} + 2^{p-2}) = \\ &= (p-1)2^{p-1} - (2^{p-1} - 1) = \\ &= p \cdot 2^{p-1} - 2 \cdot 2^{p-1} + 1 \end{aligned}$$

oraz

$$N = 2^2 \left(4^0 + 4^1 + \dots + 4^{\frac{p-7}{2}} + 4^{\frac{p-5}{2}} \right) = 2^2 \cdot \frac{4^{\frac{p-3}{2}} - 1}{3} = 2^2 \cdot \frac{2^{p-3} - 1}{3} = \frac{2^{p-1} - 4}{3}.$$

W efekcie

$$(3) \quad L = M - N = p \cdot 2^{p-1} + \frac{-6 \cdot 2^{p-1} + 3 - 2^{p-1} + 4}{3} = p \cdot 2^{p-1} - \frac{7(2^{p-1} - 1)}{3}.$$

Na mocy małego twierdzenia Fermata (zob. *LI Olimpiada Matematyczna, Sprawozdanie Komitetu Głównego*, Warszawa 2001, Dodatek A, str. 102) liczba $2^{p-1} - 1$ jest podzielna przez p . Skoro zaś p jest liczbą pierwszą większą od 3, ułamek występujący po prawej stronie zależności (3) jest liczbą podzielną przez p . Zatem prawa strona tej zależności jest liczbą podzielną przez p , co kończy rozwiązanie zadania.

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w Internecie pod adresem: www.om.edu.pl



LX Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia drugiego

13 lutego 2009 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Liczby rzeczywiste $a_1, a_2, \dots, a_n$ ($n \geq 2$) spełniają warunek $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n > 0$. Udowodnić nierówność

$$a_1 a_2 \dots a_{n-1} + (2a_2 - a_1)(2a_3 - a_2) \dots (2a_n - a_{n-1}) \geq 2a_2 a_3 \dots a_n.$$

2. Dane są takie liczby całkowite a i b , że $a > b > 1$ oraz liczba $ab + 1$ jest podzielna przez $a + b$, zaś liczba $ab - 1$ jest podzielna przez $a - b$. Wykazać, że $a < b\sqrt{3}$.

3. Rozłączne okręgi o_1 i o_2 o środkach odpowiednio I_1 i I_2 są styczne do prostej k odpowiednio w punktach A_1 i A_2 oraz leżą po tej samej jej stronie. Punkt C leży na odcinku $I_1 I_2$, przy czym $\angle A_1 C A_2 = 90^\circ$. Dla $i = 1, 2$ niech B_i będzie punktem różnym od A_i , w którym prosta $A_i C$ przecina okrąg o_i . Dowieść, że prosta $B_1 B_2$ jest styczna do okręgów o_1 i o_2 .

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.



LX Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia drugiego

14 lutego 2009 r. (drugi dzień zawodów)

4. Odcinek AB jest średnicą okręgu o opisanego na czworokącie wypukłym $ABCD$, którego przekątne przecinają się w punkcie E . Proste styczne do okręgu o w punktach C i D przecinają się w punkcie P . Udowodnić, że $PC = PE$.

5. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite $n \geq 4$ o następującej własności: Spośród dowolnych n różnych 3-elementowych podzbiorów zbioru n -elementowego można wybrać dwa podzbiory, które mają dokładnie jeden element wspólny.

6. Dla każdej liczby całkowitej $n \geq 3$ wyznaczyć wszystkie ciągi liczb rzeczywistych $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, dla których

$$\sum_{i=1}^n x_i = n \quad \text{oraz} \quad \sum_{i=1}^n (x_{i-1} - x_i + x_{i+1})^2 = n,$$

gdzie przyjmujemy $x_0 = x_n$ i $x_{n+1} = x_1$.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podeście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.



LX Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia drugiego

13 lutego 2009 r. (pierwszy dzień zawodów)

Zadanie 1. Liczby rzeczywiste $a_1, a_2, \dots, a_n$ ($n \geq 2$) spełniają warunek $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n > 0$. Udowodnić nierówność

$$a_1 a_2 \dots a_{n-1} + (2a_2 - a_1)(2a_3 - a_2) \dots (2a_n - a_{n-1}) \geq 2a_2 a_3 \dots a_n.$$

Rozwiązanie

Zastosujemy indukcję matematyczną ze względu na wartość liczby n .

Dla $n = 2$ teza zadania jest prawdziwa, gdyż obie strony dowodzonej zależności są równe $2a_2$.

Przechodząc do kroku indukcyjnego rozpatrzmy liczby rzeczywiste $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$, dla których $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_{n+1} > 0$. Należy udowodnić nierówność

$$(1) \quad a_1 a_2 \dots a_n + (2a_2 - a_1)(2a_3 - a_2) \dots (2a_{n+1} - a_n) \geq 2a_2 a_3 \dots a_n a_{n+1}.$$

Wprowadźmy oznaczenia

$$t = a_1 - a_2, \quad K = a_2 a_3 \dots a_n, \quad L = (2a_3 - a_2) \dots (2a_{n+1} - a_n);$$

wówczas lewą stronę zależności (1) możemy zapisać w postaci

$$(2) \quad a_1 K + (2a_2 - a_1)L = (a_2 + t)K + (a_2 - t)L = a_2(K + L) + t(K - L).$$

Stosując założenie indukcyjne do n liczb $a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_{n+1} \geq 0$ uzyskujemy

$$(3) \quad \begin{aligned} K + L &= a_2 a_3 \dots a_n + (2a_3 - a_2)(2a_4 - a_3) \dots (2a_{n+1} - a_n) \geq \\ &\geq 2a_3 \dots a_n a_{n+1}. \end{aligned}$$

Ponadto dla dowolnych liczb rzeczywistych $x \geq y > 0$ prawdziwa jest podwójna nierówność $-x \leq -x + 2(x - y) = x - 2y < x$, skąd $|x - 2y| \leq x$ i w konsekwencji

$$|L| = |2a_3 - a_2| \cdot |2a_4 - a_3| \cdot \dots \cdot |2a_{n+1} - a_n| \leq a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n = K.$$

Oznacza to, że liczba $K - L$ jest nieujemna. Liczba $t = a_1 - a_2$ jest również nieujemna, zatem kontynuując zależność (2) i wykorzystując (3) dostajemy

$$a_2(K + L) + t(K - L) \geq a_2 \cdot 2a_3 \dots a_n a_{n+1}.$$

Otrzymaliśmy prawą stronę nierówności (1), co kończy dowód indukcyjny.

Zadanie 2. Dane są takie liczby całkowite a i b , że $a > b > 1$ oraz liczba $ab + 1$ jest podzielna przez $a + b$, zaś liczba $ab - 1$ jest podzielna przez $a - b$. Wykazać, że $a < b\sqrt{3}$.

Rozwiązanie

Zauważmy najpierw, że

$$(a + b)b - (ab + 1) = b^2 - 1 \quad \text{oraz} \quad (ab - 1) - b(a - b) = b^2 - 1.$$

Zatem z danych w treści zadania podzielności wynika, że liczba $b^2 - 1$ jest podzielna przez $a + b$ i przez $a - b$.

Liczby a i b są względnie pierwsze. Jeżeli bowiem d jest ich wspólnym dzielnikiem dodatnim, to liczby $a + b$ i ab są podzielne przez d ; z drugiej strony, liczba $ab + 1$ jest podzielna przez liczbę $a + b$ podzielną przez d . Zatem liczby ab i $ab + 1$ są podzielne przez d , skąd wynika, że $d = 1$.

Niech e oznacza największy wspólny dzielnik liczb $a + b$ i $a - b$. Wówczas e jest dzielnikiem sumy i różnicy tych dwóch liczb, równych odpowiednio $2a$ i $2b$. Skoro liczby a i b są względnie pierwsze, otrzymujemy $e = 1$ lub $e = 2$. Stąd wniosek, że jeśli liczba całkowita jest podzielna przez $a + b$ i $a - b$, to dwukrotność tej liczby jest podzielna przez $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

Jak zauważyliśmy wcześniej, liczba $b^2 - 1$ jest podzielna przez $a + b$ i przez $a - b$. Oznacza to, że liczba $2(b^2 - 1)$ jest podzielna przez $a^2 - b^2$. Ponadto $b > 1$, a więc liczba $2(b^2 - 1)$ jest dodatnia i wobec tego jest nie mniejsza niż $a^2 - b^2$. Zapisując nierówność $2(b^2 - 1) \geq a^2 - b^2$ w równoważnej postaci $a^2 \leq 3b^2 - 2$ widzimy, że $a^2 < 3b^2$, co jest równoznaczne z tezą zadania.

Zadanie 3. Rozłączne okręgi o_1 i o_2 o środkach odpowiednio I_1 i I_2 są styczne do prostej k odpowiednio w punktach A_1 i A_2 oraz leżą po tej samej jej stronie. Punkt C leży na odcinku I_1I_2 , przy czym $\sphericalangle A_1CA_2 = 90^\circ$. Dla $i = 1, 2$ niech B_i będzie punktem różnym od A_i , w którym prosta A_iC przecina okrąg o_i . Dowieść, że prosta B_1B_2 jest styczna do okręgów o_1 i o_2 .

Rozwiązanie

Niech prosta styczna do okręgu o_1 w punkcie B_1 przecina prostą A_1A_2 w punkcie D . (Punkt przecięcia istnieje, gdyż punkt C nie leży na prostej A_1I_1 , a więc odcinek A_1B_1 nie jest średnicą okręgu o_1 .) Trójkąt A_1B_1D jest wówczas równoramienny, gdyż dwa jego boki są odcinkami stycznych do okręgu o_1 poprowadzonymi z punktu D . Wobec tego prosta DI_1 jako dwusieczna kąta $\sphericalangle A_1DB_1$ jest prostopadła do cięciwy A_1B_1 , a więc równoległa do prostej CA_2 .

Udowodnimy, że proste A_1B_1 i DI_2 są równoległe.

Jeżeli $A_1A_2 \parallel I_1I_2$, to $A_1A_2 = I_1I_2$ i czworokąt I_1CA_2D jest równoległobokiem. W takim razie $CI_2 = A_1D$ i czworokąt CI_2DA_1 także jest równoległobokiem. W szczególności więc $A_1B_1 \parallel DI_2$.

Jeżeli natomiast proste A_1A_2 i I_1I_2 przecinają się w punkcie E , to stosując dwukrotnie twierdzenie Talesa do kąta $\sphericalangle A_1EI_1$ przeciętego prostymi równoległymi I_1D , CA_2 oraz I_1A_1 , I_2A_2 otrzymujemy

$$\frac{EC}{EI_2} = \frac{EC}{EI_1} \cdot \frac{EI_1}{EI_2} = \frac{EA_2}{ED} \cdot \frac{EA_1}{EA_2} = \frac{EA_1}{ED},$$

co w połączeniu z twierdzeniem odwrotnym do twierdzenia Talesa znowu daje zależność $A_1B_1 \parallel DI_2$.

Wykazana właśnie równoległość wraz z danym w treści zadania warunkiem $\sphericalangle A_1CA_2 = 90^\circ$ pozwala wnioskować, że proste DI_2 i B_2A_2 są prostopadłe. Zauważmy teraz, że prosta DI_2 przechodzi przez środek okręgu o_2 . W efekcie punkty B_2 i A_2 są symetryczne względem prostej DI_2 (gdyż są końcami cięciwy prostopadłej do tej prostej) oraz proste DB_2 i DA_2 są symetryczne względem tej prostej. Skoro zaś prosta DA_2 jest styczna do okręgu o_2 , to również prosta DB_2 jest doń styczna, co kończy rozwiązanie zadania.

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w Internecie pod adresem: www.om.edu.pl



LX Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia drugiego

14 lutego 2009 r. (drugi dzień zawodów)

Zadanie 4. Odcinek AB jest średnicą okręgu o opisanego na czworokącie wypukłym $ABCD$, którego przekątne przecinają się w punkcie E . Proste styczne do okręgu o w punktach C i D przecinają się w punkcie P . Udowodnić, że $PC = PE$.

Rozwiązanie

Niech Q będzie punktem przecięcia prostych AD i BC .

Zauważmy najpierw, że na mocy warunków zadania proste AC i BD są wysokościami trójkąta ABQ . Zatem prosta QE jest jego trzecią wysokością i wobec tego przecina prostą AB w pewnym punkcie F pod kątem prostym.

W trójkącie ECQ kąt przy wierzchołku C jest prosty, a środek P' odcinka QE jest środkiem przeciwprostokątnej. Stąd uzyskujemy zależności $\sphericalangle P'CQ = \sphericalangle P'QC = \sphericalangle FQB$. Ponadto trójkąty prostokątne ACB i QFB mają wspólny kąt ostry przy wierzchołku B , zatem ich pozostałe kąty ostre są równe: $\sphericalangle FQB = \sphericalangle CAB$. Udowodniliśmy tym samym, że

$$\sphericalangle P'CQ = \sphericalangle CAB.$$

To oznacza, że prosta $P'C$ jest styczna do okręgu o w punkcie C .

Podobnie dowodzimy, że prosta $P'D$ jest styczna do okręgu o w punkcie D . Stąd i z określenia punktu P wynika, że $P' = P$. Innymi słowy, punkt P jest środkiem przeciwprostokątnej w trójkącie prostokątnym ECQ , skąd natychmiast wynika żądana równość $PC = PE$.

Zadanie 5. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite $n \geq 4$ o następującej własności: Spośród dowolnych n różnych 3-elementowych podzbiorów zbioru n -elementowego można wybrać dwa podzbiory, które mają dokładnie jeden element wspólny.

Rozwiązanie

Niech $A_1, A_2, \dots, A_k$ będą różnymi 3-elementowymi podzbiorami ustalonego zbioru n -elementowego. Przypuśćmy ponadto, że dowolne dwa z tych zbiorów albo są rozłączne, albo mają dokładnie dwa wspólne elementy.

Oznaczmy $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ i wprowadźmy następujące oznaczenie: $X \sim Y$ wtedy i tylko wtedy, gdy przekrój $X \cap Y$ jest zbiorem niepustym (a więc mającym co najmniej 2 elementy),

dla (niekoniecznie różnych) zbiorów $X, Y \in \mathcal{A}$.

Dla dowolnych zbiorów $X, Y, Z \in \mathcal{A}$ zachodzą następujące własności:

- 1) $X \sim X$;
- 2) jeżeli $X \sim Y$, to $Y \sim X$;

3) jeżeli $X \sim Y$ oraz $Y \sim Z$, to $X \sim Z$.

Istotnie, własności 1) i 2) są oczywiste, a by uzasadnić własność 3), wystarczy spostrzec, że z faktu, iż zbiory X, Y, Z mają 3 elementy, a przekroje $X \cap Y$ i $Y \cap Z$ mają przynajmniej 2 elementy, wynika, iż przekrój $X \cap Z$ jest zbiorem niepustym. Na mocy przyjętego na początku rozwiązania założenia przekrój ten zawiera zatem przynajmniej 2 elementy, co oznacza, że $X \sim Z$.

Własności 1)—3) dowodzą, że zbiory $A_1, A_2, \dots, A_k$ można podzielić na parami rozłączne klasy równoważności w taki sposób, by dowolne dwa zbiory X, Y należące do tej samej klasy spełniały relację $X \sim Y$, natomiast dowolne dwa zbiory należące do różnych klas tej relacji nie spełniały.

Niech $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots, \mathcal{B}_m$ będą tak zadanymi klasami równoważności oraz niech C_i ($i = 1, 2, \dots, m$) będzie sumą wszystkich zbiorów należących do klasy $\mathcal{B}_i$. Wówczas zbiory $C_1, C_2, \dots, C_m$ są parami rozłączne, bowiem zbiory należące do różnych klas są rozłączne. Ponadto każdy z tych zbiorów zawiera przynajmniej 3 elementy, gdyż jest sumą zbiorów 3-elementowych.

Dla każdego zbioru C_i rozpatrzmy następujące trzy możliwości:

1. Zbiór C_i ma dokładnie 3 elementy.
2. Zbiór C_i ma dokładnie 4 elementy.
3. Zbiór C_i ma przynajmniej 5 elementów.

W przypadku 1. rodzina $\mathcal{B}_i$ składa się z jednego zbioru, mianowicie z tego zbioru A_j ($j = 1, 2, \dots, k$), który jest równy zbiorowi C_i .

W przypadku 2. każdy zbiór należący do rodziny $\mathcal{B}_i$ jest 3-elementowym podzbiorem 4-elementowego zbioru C_i . Zatem w rodzinie tej znajdują się najwyżej 4 zbiory.

Rozpatrzmy z kolei przypadek 3.. Wybierzmy różne zbiory $X, Y \in \mathcal{B}_i$. Są to zbiory 3-elementowe, których przekrój $X \cap Y$ ma 2-elementy, a więc suma $X \cup Y$ jest zbiorem 4-elementowym. To oznacza, że w rodzinie $\mathcal{B}_i$ istnieje zbiór Z zawierający element, który nie należy do sumy $X \cup Y$. Stąd wniosek, że 2-elementowe przekroje $X \cap Y, X \cap Z, Y \cap Z$ muszą się pokrywać, a więc można napisać

$$X = \{p, q, x\}, \quad Y = \{p, q, y\}, \quad Z = \{p, q, z\},$$

gdzie elementy p, q, x, y, z są różne. Weźmy teraz pod uwagę dowolny zbiór S należący do rodziny $\mathcal{B}_i$ i różny od zbiorów X, Y, Z . Wówczas S nie jest zbiorem $\{x, y, z\}$, gdyż ten ostatni ma dokładnie jeden element wspólny ze zbiorem X . Wobec tego przynajmniej jeden z elementów x, y, z nie należy do zbioru S . Przyjmijmy, nie zmniejszając ogólności dalszego rozumowania, iż jest to element x . Skoro przekrój $X \cap S$ jest zbiorem 2-elementowym oraz $x \notin S$, musimy mieć $X \cap S = \{p, q\}$. Ale to, wobec dowolności wyboru S , oznacza, że *każdy* zbiór należący do rodziny $\mathcal{B}_i$ zawiera elementy p i q . Stąd wniosek, że liczba elementów tej rodziny nie przekracza liczby elementów zbioru C_i pomniejszonej o 2.

Udowodniliśmy w ten sposób, że każda z rodzin $\mathcal{B}_i$ zawiera najwyżej tyle zbiorów, ile jest elementów w zbiorze C_i , przy czym równość może mieć miejsce tylko wtedy, gdy zbiór C_i ma 4 elementy.

Ponadto zbiory $C_1, C_2, \dots, C_m$ są parami rozłączne, a ich suma zawiera się w ustalonym na początku rozwiązania zbiorze n -elementowym, więc suma liczb elementów tych zbiorów nie przekracza n . Tym bardziej suma liczb elementów rodzin $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots, \mathcal{B}_m$ nie przekracza n , przy czym równość jest możliwa tylko w przypadku, gdy każdy ze zbiorów C_i oraz każda z rodzin $\mathcal{B}_i$ ($i = 1, 2, \dots, m$) ma dokładnie 4 elementy,

Jednakże każdy ze zbiorów $A_1, A_2, \dots, A_k$ należy do dokładnie jednej z tych rodzin. Stąd wniosek, że $k \leq n$, przy czym równość może mieć miejsce tylko wtedy, gdy każda z rodzin $\mathcal{B}_i$ ($i = 1, 2, \dots, m$) ma dokładnie 4 elementy oraz suma ilości elementów tych rodzin jest równa n . Jest to możliwe tylko wtedy, gdy zachodzi równość $n = 4m$. Jeśli zatem istnieje układ n trójelementowych podzbiorów zbioru n -elementowego, z których żadne dwa nie mają dokładnie jednego elementu wspólnego, to liczba n jest podzielna przez 4.

Implikacja odwrotna również jest prawdziwa: jeżeli $n = 4s$ dla pewnej liczby całkowitej $s \geq 1$, to definiujemy zbiory $A_1, A_2, \dots, A_{4s}$ warunkami

$$\begin{aligned} A_{4j-3} &= \{4j-2, 4j-1, 4j\}, & A_{4j-1} &= \{4j-3, 4j-2, 4j\}, \\ A_{4j-2} &= \{4j-3, 4j-1, 4j\}, & A_{4j} &= \{4j-3, 4j-2, 4j-1\} \end{aligned}$$

dla $j = 1, 2, \dots, s$. Wówczas dowolne dwa z określonych wyżej zbiorów albo są rozłączne, albo mają dokładnie dwa wspólne elementy.

Odpowiedź: Liczba $n \geq 4$ spełnia warunki zadania wtedy i tylko wtedy, gdy nie jest podzielna przez 4.

Zadanie 6. Dla każdej liczby całkowitej $n \geq 3$ wyznaczyć wszystkie ciągi liczb rzeczywistych $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, dla których

$$\sum_{i=1}^n x_i = n \quad \text{oraz} \quad \sum_{i=1}^n (x_{i-1} - x_i + x_{i+1})^2 = n,$$

gdzie przyjmujemy $x_0 = x_n$ i $x_{n+1} = x_1$.

Rozwiązanie

Przypuśćmy, że ciąg $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ma żadaną własność. Przyjmijmy

$$(1) \quad y_i = x_{i-1} - x_i + x_{i+1} - 1 \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, n.$$

Wówczas zachodzi równość $y_1 + y_2 + \dots + y_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n - n$, a zatem z danych w treści zadania dwóch równości wynika, że

$$y_1 + y_2 + \dots + y_n = 0 \quad \text{oraz} \quad (1 + y_1)^2 + (1 + y_2)^2 + \dots + (1 + y_n)^2 = n,$$

skąd uzyskujemy

$$\sum_{i=1}^n y_i^2 = \sum_{i=1}^n [(1 + y_i)^2 - 2y_i - 1] = \sum_{i=1}^n (1 + y_i)^2 - 2 \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n 1 = n - 0 - n = 0.$$

Zatem $y_1 = y_2 = \dots = y_n = 0$, co z uwagi na wzór (1) daje

$$(2) \quad x_{i-1} - x_i + x_{i+1} = 1 \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, n.$$

Na odwrót, każdy ciąg $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ spełniający warunek (2) spełnia także równości dane w zadaniu. Pozostaje więc wyznaczyć wszystkie ciągi, dla których zachodzi warunek (2).

Oznaczmy $x_0 = a$ oraz $x_1 = b$. Wówczas stosując zależność (2) w postaci $x_{i+1} = 1 - x_{i-1} + x_i$ dla $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ otrzymujemy

$$x_2 = 1 - a + b, \quad x_3 = 2 - a, \quad x_4 = 2 - b, \quad x_5 = 1 + a - b, \quad x_6 = a, \quad x_7 = b.$$

Kontynuując to postępowanie stwierdzamy, że ciąg $x_0, x_1, x_2, \dots$ jest okresowy: $x_{k+6} = x_k$ dla $k = 0, 1, 2, \dots$. Ponieważ $x_0 = x_n$ oraz $x_1 = x_{n+1}$, więc para (x_0, x_1) pokrywa się z parą (x_r, x_{r+1}) , gdzie r jest resztą z dzielenia liczby n przez 6.

Korzystając z wyliczonych wyżej wartości $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ sprawdzamy bezpośrednio, że dla dowolnej wartości $r = 1, 2, 3, 4, 5$ jedynym rozwiązaniem układu równań $x_0 = x_r, x_1 = x_{r+1}$, czyli odpowiednio układów

$$\begin{cases} a = b \\ b = 1 - a + b \end{cases}, \quad \begin{cases} a = 1 - a + b \\ b = 2 - a \end{cases}, \quad \begin{cases} a = 2 - a \\ b = 2 - b \end{cases}, \quad \begin{cases} a = 2 - b \\ b = 1 + a - b \end{cases}, \quad \begin{cases} a = 1 + a - b \\ b = a \end{cases},$$

są liczby $a = b = 1$. W tej sytuacji oczywiście $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1$ i liczby te mają żądane w treści zadania własności.

Jeżeli natomiast $r = 0$, a więc gdy liczba n jest podzielna przez 6, to możemy wybrać dowolne wartości rzeczywiste $x_0 = x_n$ i x_1 i korzystając ze wzoru (2) wyznaczyć jednoznacznie wartości $x_2, x_3, \dots, x_{n+1}$. Nietrudno spostrzec, że warunek (2) będzie wówczas spełniony.

Odpowiedź: Dla każdej liczby całkowitej $n \geq 3$ rozwiązaniem zadania jest ciąg $(x_1, x_2, \dots, x_n) = (1, 1, \dots, 1)$; ponadto dla liczb n podzielnych przez 6 istnieją rozwiązania o okresie długości 6 następującej postaci:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = (b, 1 - a + b, 2 - a, 2 - b, 1 + a - b, a, b, 1 - a + b, \dots, a).$$

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w Internecie pod adresem: www.om.edu.pl



LX Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia trzeciego

22 kwietnia 2009 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Każdy z wierzchołków sześciokąta wypukłego jest środkiem koła o promieniu równym długości nie dłuższego z boków sześciokąta zawierających ten wierzchołek. Udowodnić, że jeśli część wspólna wszystkich sześciu kół (rozważanych wraz z brzegiem) jest niepusta, to sześciokąt jest foremny.

2. Niech S będzie zbiorem wszystkich punktów płaszczyzny o obu współrzędnych całkowitych. Znaleźć najmniejszą liczbę całkowitą dodatnią k , dla której istnieje 60-elementowy podzbiór zbioru S o następującej własności: *Dla dowolnych dwóch różnych elementów A, B tego podzbioru istnieje taki punkt $C \in S$, że pole trójkąta ABC jest równe k .*

3. Niech P, Q, R będą wielomianami stopnia co najmniej jeden, o współczynnikach rzeczywistych, spełniającymi dla każdej liczby rzeczywistej x równość

$$P(Q(x)) = Q(R(x)) = R(P(x)).$$

Wykazać, że $P = Q = R$.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu czekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.



LX Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia trzeciego

23 kwietnia 2009 r. (drugi dzień zawodów)

4. Niech $x_1, x_2, \dots, x_n$ będą liczbami nieujemnymi, których suma wynosi 1. Udowodnić, że istnieją liczby $a_1, a_2, \dots, a_n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ takie, że $(a_1, a_2, \dots, a_n) \neq (2, 2, \dots, 2)$ oraz

$$2 \leq a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \leq 2 + \frac{2}{3^n - 1}.$$

5. Sfera wpisana w czworościan $ABCD$ jest styczna do jego ścian BCD, ACD, ABD, ABC odpowiednio w punktach P, Q, R, S . Odcinek PT jest średnicą tej sfery, zaś punkty A', Q', R', S' są punktami przecięcia prostych TA, TQ, TR, TS z płaszczyzną BCD . Wykazać, że A' jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie $Q'R'S'$.

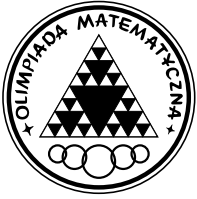
6. Niech $n \geq 3$ będzie liczbą naturalną. Ciąg liczb nieujemnych $(c_0, c_1, \dots, c_n)$ spełnia warunek

$$c_p c_s + c_r c_t = c_{p+r} c_{s+t}$$

dla wszystkich $p, r, s, t \geq 0$ takich, że $p + r + s + t = n$. Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości c_2 , jeśli $c_1 = 1$.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu czekać na podeście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.



LX Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia trzeciego

22 kwietnia 2009 r. (pierwszy dzień zawodów)

Zadanie 1. *Każdy z wierzchołków sześciokąta wypukłego jest środkiem koła o promieniu równym długości nie dłuższego z boków sześciokąta zawierających ten wierzchołek. Udowodnić, że jeśli część wspólna wszystkich sześciu kół (rozważanych wraz z brzegiem) jest niepusta, to sześciokąt jest foremny.*

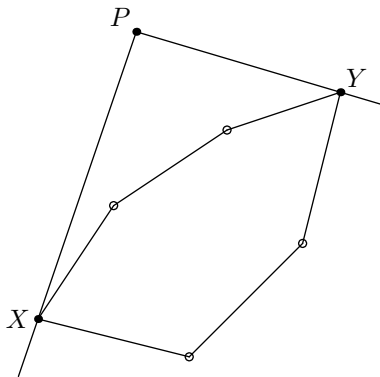
Rozwiązanie

Oznaczmy kolejne wierzchołki danego sześciokąta literami A, B, C, D, E oraz F . Załóżmy, że przecięcie sześciu kół, o których mowa w treści zadania jest niepuste i punkt P należy do tego przecięcia. Rozważmy dowolny bok sześciokąta, dla ustalenia uwagi niech to będzie bok AB . Z warunków zadania wynika, że $AP \leq AB$ oraz $BP \leq AB$, czyli jeśli P nie leży na prostej AB , to odcinek AB jest najdłuższym bokiem trójkąta ABP . Kąt APB jest zatem jego największym kątem, czyli $\sphericalangle APB \geq 60^\circ$. Jeśli natomiast punkt P leży na prostej AB , to leży na odcinku AB (w przeciwnym razie $AP > AB$ lub $BP > AB$). Jeśli dodatkowo nie jest końcem tego odcinka, to $\sphericalangle APB = 180^\circ$. Podsumowując, jeśli $P \neq A$ i $P \neq B$, to $\sphericalangle APB \geq 60^\circ$. Analogiczne rozumowanie można przeprowadzić dla pozostałych boków sześciokąta.

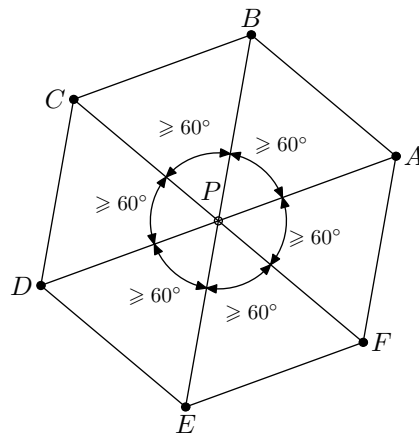
Wykażemy, że punkt P nie leży na zewnątrz sześciokąta $ABCDEF$. Gdyby tak było, to dla pewnych wierzchołków X, Y , kąt wypukły $\sphericalangle XPY < 180^\circ$ pokryłby cały sześciokąt (**rys. 1.**). Wobec wypukłości sześciokąta $ABCDEF$ zachodziłoby

$$2\sphericalangle XPY = \sphericalangle APB + \sphericalangle BPC + \sphericalangle CPD + \sphericalangle DPE + \sphericalangle EPF + \sphericalangle FPA \geq 6 \cdot 60^\circ = 360^\circ,$$

co jest sprzeczne z tym, że $\sphericalangle XPY < 180^\circ$.



Rysunek 1.



Rysunek 2.

Skoro punkt P nie leży poza sześciokątem to leży w jego wnętrzu lub na jego brzegu. Najpierw rozważmy przypadek, gdy P jest jednym z wierzchołków sześciokąta. Bez zmniejszania ogólności rozumowania możemy założyć, że $P = A$. Wówczas, wobec wypukłości sześciokąta, zachodzi $\sphericalangle BAF = \sphericalangle BPF = \sphericalangle BPC + \sphericalangle CPD + \sphericalangle DPE + \sphericalangle EPF \geq 4 \cdot 60^\circ > 180^\circ$, co jest niemożliwe.

Jeśli P leży na brzegu sześciokąta $ABCDEF$, ale nie jest jego wierzchołkiem, to leży pomiędzy pewnymi jego kolejnymi wierzchołkami. Bez zmniejszania ogólności rozumowania możemy założyć, że P leży na boku AB sześciokąta. Wówczas zachodzi $180^\circ = \sphericalangle BPA = \sphericalangle BPC + \sphericalangle CPD + \sphericalangle DPE + \sphericalangle EPF + \sphericalangle FPA \geq 5 \cdot 60^\circ > 180^\circ$, co również jest niemożliwe.

Zatem P leży we wnętrzu sześciokąta. Kąty $\sphericalangle APB$, $\sphericalangle BPC$, $\sphericalangle CPD$, $\sphericalangle DPE$, $\sphericalangle EPF$ oraz $\sphericalangle FPA$ dają wówczas w sumie kąt pełny, a miara każdego z nich jest nie mniejsza, niż 60° . Wynika stąd, że miara każdego z nich wynosi 60° (**rys. 2.**). Ponieważ $\sphericalangle APB = 60^\circ$ jest największym kątem trójkąta ABP , pozostałe kąty również mają miarę 60° . Trójkąt ABP jest więc równoboczny i analogicznie, pozostałe trójkąty o wierzchołku P i podstawie będącej jednym z boków też są równoboczne. Zatem sześciokąt jest foremny.

Zadanie 2. Niech S będzie zbiorem wszystkich punktów płaszczyzny o obu współrzędnych całkowitych. Znaleźć najmniejszą liczbę całkowitą dodatnią k , dla której istnieje 60-elementowy podzbiór zbioru S o następującej własności: Dla dowolnych dwóch różnych elementów A i B tego podzbioru istnieje taki punkt $C \in S$, że pole trójkąta ABC jest równe k .

Rozwiązanie

Niech K będzie podzbiorem zbioru S mającym dla zadanej liczby k własność podaną w treści zadania. Ustalmy dowolne dwa różne punkty $(a, b), (c, d) \in K$. Wtedy dla pewnych liczb całkowitych x, y pole trójkąta o wierzchołkach $(a, b), (c, d), (x, y)$ wynosi k , czyli zachodzi równość $\frac{1}{2} |(a - c)(y - d) - (b - d)(x - c)| = k$. Otrzymujemy stąd warunek, że równanie

$$|(a - c)(y - d) - (b - d)(x - c)| = 2k \quad (1)$$

ma dla dowolnych ustalonych i różnych $(a, b), (c, d) \in K$ rozwiązanie w liczbach całkowitych x, y .

Udowodnimy, że jeśli liczba m nie dzieli $2k$, to zbiór K ma nie więcej niż m^2 elementów. Rozważmy w tym celu pary $(a \bmod m, b \bmod m)$ reszt z dzielenia współrzędnych punktów zbioru K przez m . Jest ich m^2 , więc jeśli $|K| > m^2$, to na mocy zasady szufladkowej znajdziemy dwa różne punkty $(a, b) \in K$ i $(c, d) \in K$, takie że $a \equiv c \pmod m$ i $b \equiv d \pmod m$. Dla takich punktów równanie (1) nie ma rozwiązania, gdyż lewa jego strona dla dowolnych x i y dzieli się przez m , a prawa nie. Zatem $|K| \leq m^2$ dla dowolnego m nie będącego dzielnikiem $2k$.

Z powyższych rozważań wynika, że jeżeli $|K| = 60$, to $2k$ musi być podzielne przez wszystkie liczby $m \leq 7$, bowiem $60 > 7^2$. Łatwo sprawdzić, że najmniejszą liczbą naturalną podzielną przez 2, 3, 4, 5, 6, 7 jest $2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 420$, zatem $210|k$.

Pokażemy, że dla każdego k takiego, że $210|k$, można skonstruować 60-elementowy zbiór K mający własność podaną w treści zadania. Niech K' będzie zbiorem wszystkich tych elementów zbioru S , których obie współrzędne znajdują się w zbiorze $\{0, 1, \dots, 7\}$. Ustalmy dwa dowolne, różne punkty $A = (a, b)$ i $B = (c, d)$ ze zbioru K' . Wtedy $a - c, b - d \in \{-7, -6, \dots, 6, 7\}$, zatem jeśli $a \neq c$, to $a - c|420$ oraz jeśli $b \neq d$, to $b - d|420$. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $b \neq d$. Wówczas $b - d|2k$, gdyż $420|2k$. Punkt $C = (c + \frac{2k}{d - b}, d)$ jest zatem elementem zbioru S , zaś pole trójkąta ABC wynosi

$$\frac{1}{2} \left| (a - c)(d - d) - (b - d) \left(c + \frac{2k}{d - b} - c \right) \right| = k.$$

Ponadto $|K'| = 64 > 60$. Jako zbiór K można wziąć dowolny 60-elementowy podzbiór zbioru K' .

Tym samym pokazaliśmy, że 60-elementowy zbiór mający żadaną własność istnieje tylko dla liczb całkowitych dodatnich k będących wielokrotnościami 210. Najmniejszą taką liczbą jest 210.

Zadanie 3. Niech P, Q, R będą wielomianami stopnia co najmniej jeden, o współczynnikach rzeczywistych, spełniającymi dla każdej liczby rzeczywistej x równość

$$P(Q(x)) = Q(R(x)) = R(P(x)).$$

Wykazać, że $P = Q = R$.

Rozwiązanie

Sposób I.

Udowodnimy najpierw, że jeśli wielomiany W_1, W_2 spełniają dla każdej liczby rzeczywistej x równość

$$W_1(W_1(W_1(x))) = W_2(W_2(W_2(x))), \quad (1)$$

to $W_1 = W_2$.

Łatwo zauważyć, że wielomiany te mają ten sam stopień. Dla wielomianów stopnia 0 (stałych) nie ma czego dowodzić. Załóżmy więc, że ich stopień jest równy co najmniej 1.

Zauważmy, że jeżeli równość (1) jest spełniona, to obydwa te wielomiany są zgodnie monotoniczne na przedziale (x_1, ∞) dla pewnego x_1 oraz są zgodnie monotoniczne na przedziale $(-\infty, x'_1)$ dla pewnego x'_1 . W przeciwnym razie $W_1(W_1(W_1(x)))$ i $W_2(W_2(W_2(x)))$ dla odpowiednio dużych x przyjmowałyby wartości o przeciwnych znakach. Zatem możliwe są następujące sytuacje:

1° W_1, W_2 są ściśle rosnące na przedziale (x_1, ∞) .

2° W_1, W_2 są ściśle rosnące na przedziale $(-\infty, x'_1)$.

3° Nie zachodzi ani pierwszy, ani drugi przypadek, czyli zarówno na $(-\infty, x'_1)$, jak i na (x_1, ∞) , oba wielomiany są malejące.

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że równość (1) jest spełniona, ale $W_1 \neq W_2$. Wówczas równanie $W_1(x) - W_2(x) = 0$ ma skończenie wiele rozwiązań. W przypadku 1° istnieje zatem taka liczba x_2 , że dla wszystkich liczb $x > x_2$ zachodzi $W_1(x) > W_2(x)$ (lub na odwrót, co nie ma znaczenia dla ogólności rozumowania).

Niech $x_3 = \max\{x_1, x_2\}$ i niech x_0 będzie taką liczbą rzeczywistą, że liczby $x_0, W_2(x_0)$ oraz $W_2(W_2(x_0))$ są większe od x_3 . Istnienie takiej liczby x_0 wynika z tego, że W_2 jest wielomianem dodatniego stopnia, co wobec założenia dotyczącego monotoniczności wielomianu W_2 daje $\lim_{x \rightarrow +\infty} W_2(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} W_2(W_2(x)) = +\infty$.

Mamy więc $W_1(x_0) > W_2(x_0) > x_3$. Stąd $W_1(W_1(x_0)) > W_1(W_2(x_0)) > W_2(W_2(x_0)) > x_3$, zatem

$$W_1(W_1(W_1(x_0))) > W_1(W_1(W_2(x_0))) > W_1(W_2(W_2(x_0))) > W_2(W_2(W_2(x_0))).$$

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że $W_1 = W_2$ w przypadku 1°.

W przypadku 2° rozumowanie przebiega podobnie. Pozostaje rozpatrzyć przypadek 3°. Zauważmy, że wtedy wielomiany $W'_1(x) = W_1(W_1(x))$ i $W'_2(x) = W_2(W_2(x))$ dążą do $+\infty$ dla $x \rightarrow +\infty$, więc są rosnące na przedziale (x''_1, ∞) dla pewnego x''_1 . Możemy zatem porzucić dla W'_1 i W'_2 rozumowanie takie samo jak w przypadku 1° i w ten sposób wykazać, że $W'_1 = W'_2$. Stąd $W_1(W'_1(x)) = W_1(W_1(W_1(x))) = W_2(W_2(W_2(x))) = W_2(W'_2(x))$, więc $W_1(W'_1(x)) = W_2(W'_1(x))$. Wynika z tego, że $W_1 = W_2$, gdyż dla nieskończenie wielu y zachodzi $W_1(y) = W_2(y)$. To kończy dowód lematu.

Przejdźmy do rozwiązania zadania. Podstawiając $y = P(x)$ w równości $P(Q(y)) = Q(R(y))$ otrzymujemy $P(Q(P(x))) = Q(R(P(x)))$. Z drugiej strony, równość $P(Q(x)) = R(P(x))$ implikuje równość $Q(P(Q(x))) = Q(R(P(x)))$. Oznacza to, że $P(Q(P(x))) = Q(P(Q(x)))$, a w konsekwencji

$$P(Q(P(Q(P(Q(x)))))) = Q(P(Q(P(Q(P(x)))))).$$

Stosując wcześniej dowiedzioną obserwację dla wielomianów $W_1(x) = P(Q(x))$ i $W_2(x) = Q(P(x))$ otrzymujemy $P(Q(x)) = Q(P(x))$. Stąd $Q(P(x)) = R(P(x))$, zatem $Q = R$, gdyż, ponieważ P nie jest stały, dla nieskończenie wielu y zachodzi $Q(y) = R(y)$. Pozostałych równości dowodzimy w ten sam sposób.

Sposób II.

Niech $p = \deg(P)$, $q = \deg(Q)$ oraz $r = \deg(R)$ będą stopniami wielomianów odpowiednio P , Q oraz R i niech

$$P(x) = \sum_{k=0}^p p_k x^k, \quad Q(x) = \sum_{k=0}^q q_k x^k, \quad R(x) = \sum_{k=0}^r r_k x^k.$$

Niech ponadto

$$P(Q(x)) = Q(R(x)) = R(P(x)) = \sum_{k=0}^m a_k x^k,$$

przy czym $a_m \neq 0$.

Zauważmy, że $P(Q(x))$ jest wielomianem stopnia pq , czyli $m = pq$. Podobnie, rozważając wielomiany $Q(R(x))$ i $R(P(x))$ uzyskujemy $m = qr$ oraz $m = rp$. Skoro $pq = qr = rp$ oraz $p, q, r > 0$, to $p = q = r$. Dla przejrzystości oznaczmy tę wspólną wartość jako n . Wówczas $m = pq = n^2$. Analizując współczynniki $a_m, a_{m-1}, \dots, a_{m-n+1}$, wykażemy kolejno, że dla $i = n, n-1, \dots, 1$ zachodzi $p_i = q_i = r_i$.

Zacznijmy od obserwacji, że jeśli t jest dodatnią liczbą całkowitą, to

$$(Q(x))^t = \left(\sum_{j=0}^q q_j x^j \right)^t = \sum_{j_1, j_2, \dots, j_t \leq q} q_{j_1} q_{j_2} \dots q_{j_t} x^{j_1 + j_2 + \dots + j_t} = \sum_{k=0}^{q \cdot t} x^k \cdot \sum_{\substack{j_1, j_2, \dots, j_t \leq q \\ j_1 + j_2 + \dots + j_t = k}} q_{j_1} q_{j_2} \dots q_{j_t}.$$

Występujące w powyższym wzorze liczby $j_1, j_2, \dots, j_t$ są nieujemnymi liczbami całkowitymi.

Zdefiniujmy wielomian $P'(x) = P(x) - p_n x^n$. Wtedy

$$P(Q(x)) = p_n (Q(x))^n + P'(Q(x)). \quad (2)$$

$P'(x)$ jest wielomianem stopnia co najwyżej $n-1$, stąd $\deg(P'(Q(x))) \leq n(n-1)$. Wynika z tego, że w celu wyznaczenia współczynników a_k dla $k > m - n = n(n-1)$ wystarczy skupić uwagę na współczynnikach wielomianu $p_n (Q(x))^n$, czyli

$$a_k = p_n \sum_{\substack{j_1, j_2, \dots, j_n \leq q \\ j_1 + j_2 + \dots + j_n = k}} q_{j_1} q_{j_2} \dots q_{j_n} \quad \text{gdy } n(n-1) < k \leq n^2. \quad (3)$$

Mamy $a_{n^2} = p_n q_n^n = q_n r_n^n = r_n p_n^n$. Liczby p_n, q_n, r_n są różne od 0, zatem zachodzi równość

$$p_n^{n(n-1)+1} = \frac{(p_n q_n^n)(r_n p_n^n)^n}{p_n^n q_n^n r_n^n} = \frac{(q_n r_n^n)(p_n q_n^n)^n}{p_n^n q_n^n r_n^n} = q_n^{n(n-1)+1}.$$

Identycznie uzyskujemy równość $q_n^{n(n-1)+1} = r_n^{n(n-1)+1}$. Wykładnik $n(n-1)+1$ jest liczbą nieparzystą, więc $p_n = q_n = r_n$.

Niech teraz $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ i założmy, że $p_j = q_j = r_j$ dla $j > i$. Wtedy, korzystając z (3), otrzymujemy

$$\begin{aligned} a_{n(n-1)+i} &= \sum_{\substack{j_1, j_2, \dots, j_n \leq n \\ j_1 + j_2 + \dots + j_n = n(n-1)+i}} p_n q_{j_1} q_{j_2} \dots q_{j_n} = \sum_{\substack{j_1, j_2, \dots, j_n \leq n \\ j_1 + j_2 + \dots + j_n = n(n-1)+i}} q_n r_{j_1} r_{j_2} \dots r_{j_n} = \\ &= \sum_{\substack{j_1, j_2, \dots, j_n \leq n \\ j_1 + j_2 + \dots + j_n = n(n-1)+i}} r_n p_{j_1} p_{j_2} \dots p_{j_n}. \end{aligned} \quad (4)$$

Jedynymi sposobami przedstawienia liczby $n(n-1)+i$ w postaci sumy $j_1+j_2+\dots+j_n$ nieujemnych liczb całkowitych, z których żadna nie przekracza n i nie wszystkie są większe niż i , są te, w których jeden składnik wynosi i , a pozostałe są równe n . Takich przedstawień jest n , gdyż i może być dowolną spośród liczb $j_1, j_2, \dots, j_n$. Założyliśmy, że $p_j = q_j = r_j$ dla $j > i$, więc z równości (4) wynika

$$np_n q_i q_n^{n-1} = nq_n r_i r_n^{n-1} = nr_n p_i p_n^{n-1},$$

co wobec tego, że $p_n = q_n = r_n \neq 0$, pociąga za sobą równość $p_i = q_i = r_i$. To kończy dowód kroku indukcyjnego.

Pokażemy teraz, że $p_0 = q_0 = r_0$. W przypadku gdy $n > 1$, wystarczy w tym celu rozważyć współczynnik $a_{n(n-1)}$. Analizując (2), widzimy, że w wielomianie $P'(Q(x))$ współczynnikiem przy $x^{n(n-1)}$ jest $p_{n-1}q_n^n$, zatem $a_{n(n-1)}$ jest sumą $p_{n-1}q_n^n$ i współczynnika przy $x^{n(n-1)}$ w wielomianie $p_n(Q(x))^n$. Stąd

$$a_{n(n-1)} = p_{n-1}q_n^{n-1} + \sum_{\substack{j_1, j_2, \dots, j_n \leq n \\ j_1 + j_2 + \dots + j_n = n(n-1)}} p_n q_{j_1} q_{j_2} \dots q_{j_n}$$

i analogicznie

$$\begin{aligned} a_{n(n-1)} &= q_{n-1}r_n^{n-1} + \sum_{\substack{j_1, j_2, \dots, j_n \leq n \\ j_1 + j_2 + \dots + j_n = n(n-1)}} q_n r_{j_1} r_{j_2} \dots r_{j_n} \\ &= r_{n-1}p_n^{n-1} + \sum_{\substack{j_1, j_2, \dots, j_n \leq n \\ j_1 + j_2 + \dots + j_n = n(n-1)}} r_n p_{j_1} p_{j_2} \dots p_{j_n}. \end{aligned}$$

Wiemy, że $p_j = q_j = r_j$ dla $j > 0$, więc, podobnie jak poprzednio, dostajemy $np_n q_0 q_n^{n-1} = nq_n r_0 r_n^{n-1} = nr_n p_0 p_n^{n-1}$, skąd $p_0 = q_0 = r_0$. Pokazaliśmy zatem, że gdy $n > 1$, wielomiany P , Q oraz R mają odpowiednie współczynniki równe, więc $P = Q = R$.

Przypadek $n = 1$ wymaga oddzielnego rozważenia. Jeśli wielomiany $P(x) = p_1x + p_0$, $Q(x) = q_1x + q_0$ oraz $R(x) = r_1x + r_0$ spełniają warunki zadania, to, jak pokazaliśmy wcześniej, $p_1 = q_1 = r_1 \neq 0$. Porównując wyrazy wolne wielomianów $P(Q(x))$, $Q(R(x))$ i $R(P(x))$ dostajemy $p_1q_0 + p_0 = p_1r_0 + q_0 = p_1p_0 + r_0$, a stąd łatwo uzyskujemy, że $p_0 = q_0 = r_0$.

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w Internecie pod adresem: www.om.edu.pl



LX Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia trzeciego

23 kwietnia 2009 r. (drugi dzień zawodów)

Zadanie 4. Niech $x_1, x_2, \dots, x_n$ będą liczbami nieujemnymi, których suma wynosi 1. Udowodnić, że istnieją liczby $a_1, a_2, \dots, a_n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ takie, że $(a_1, a_2, \dots, a_n) \neq (2, 2, \dots, 2)$ oraz

$$2 \leq a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \leq 2 + \frac{2}{3^n - 1}.$$

Rozwiązanie

Rozważmy wszystkie możliwe ciągi $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ takie, że $t_1, t_2, \dots, t_n \in \{0, 1, 2\}$. Jest ich 3^n . Dla każdego z nich niech $S_{\mathbf{t}}$ oznacza sumę $t_1x_1 + t_2x_2 + \dots + t_nx_n$. Ponieważ liczby $x_1, x_2, \dots, x_n$ są nieujemne i ich suma wynosi 1, więc zachodzą nierówności

$$0 = 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n \leq S_{\mathbf{t}} \leq 2 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + \dots + 2 \cdot x_n = 2.$$

Z zasady szufladkowej Dirichleta wynika, że istnieją dwa różne ciągi $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ oraz $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ o wyrazach w zbiorze $\{0, 1, 2\}$ takie, że odpowiadające im sumy $S_{\mathbf{b}}$ oraz $S_{\mathbf{c}}$ należą do tego samego spośród $3^n - 1$ przedziałów $[0, \frac{2}{3^n - 1})$, $[\frac{2}{3^n - 1}, \frac{4}{3^n - 1})$, $[\frac{4}{3^n - 1}, \frac{6}{3^n - 1})$, $\dots$, $[\frac{2(3^n - 5)}{3^n - 1}, \frac{2(3^n - 3)}{3^n - 1})$, $[\frac{2(3^n - 3)}{3^n - 1}, 2]$. Bez zmniejszania ogólności rozumowania możemy założyć, że $S_{\mathbf{b}} \leq S_{\mathbf{c}}$ i wówczas

$$0 \leq S_{\mathbf{c}} - S_{\mathbf{b}} \leq \frac{2}{3^n - 1}. \quad (1)$$

Pokażemy, że warunki zadania spełnia ciąg $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ określony wzorem

$$a_i = 2 + c_i - b_i \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, n.$$

Każdy z jego wyrazów jest liczbą ze zbioru $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Ponadto $\mathbf{a} \neq (2, 2, \dots, 2)$, gdyż ciągi $\mathbf{b}$ i $\mathbf{c}$ są różne. Zachodzi także równość

$$S_{\mathbf{a}} = \sum_{i=1}^n (2 + c_i - b_i)x_i = \sum_{i=1}^n 2x_i + \sum_{i=1}^n c_i x_i - \sum_{i=1}^n b_i x_i = 2 + S_{\mathbf{c}} - S_{\mathbf{b}},$$

skąd, wobec (1), dostajemy $2 \leq a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \leq 2 + \frac{2}{3^n - 1}$.

Zadanie 5. Sfera wpisana w czworościan $ABCD$ jest styczna do jego ścian BCD, ACD, ABD, ABC odpowiednio w punktach P, Q, R, S . Odcinek PT jest średnicą tej sfery, zaś punkty A', Q', R', S' są punktami przecięcia prostych TA, TQ, TR, TS z płaszczyzną BCD . Wykazać, że A' jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie $Q'R'S'$.

Rozwiązanie

Sposób I.

Niech Θ będzie sferą wpisaną w czworościan $ABCD$ i niech O będzie środkiem tej sfery. Ponieważ punkty A, T i A' są współliniowe oraz $A \neq T$, więc istnieje jednokładność φ o środku A przekształcająca punkt T na punkt A' . Niech $\Theta_1 = \varphi(\Theta)$ i niech Π będzie taką płaszczyzną, że jej obrazem w jednokładności φ jest płaszczyzna BCD . Wówczas płaszczyzny BCD i Π są równoległe,

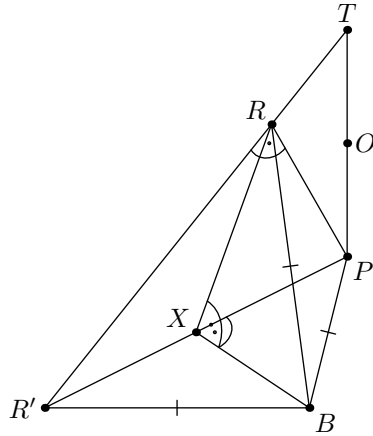
Rozważmy przekrój czworościanu $ABCD$, płaszczyzny Π oraz sfer Θ i Θ_1 płaszczyznę ATQ (rys. 1.).


$$A'Q' = A'Z + ZQ' = Q_1Z + ZQ = Q_1Q = AQ_1 - AQ = k \cdot AQ - AQ = (k - 1) \cdot AQ,$$

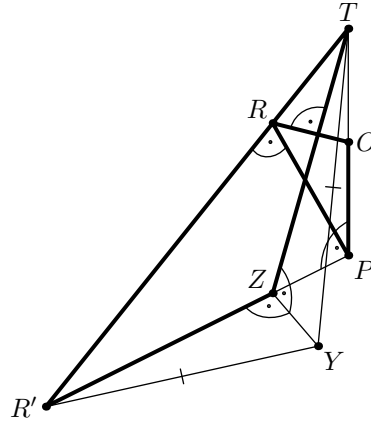
Sposób II.

2

równoodległy od dwóch jego wierzchołków: P i R . Jest więc środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie, czyli środkiem jego przeciwprostokątnej PR' . Punkt X jest także spodkiem wysokości trójkąta PBR' opuszczonej z wierzchołka B . Skoro wysokość ta połowi jego bok PR' , to trójkąt ten jest równoramienny, czyli $BP = BR'$. Analogicznie pokazujemy, że $BP = BS'$. Wynika stąd, że $BR' = BS'$, co oznacza, że punkt B leży na symetralnej odcinka $R'S'$.



Rysunek 2.



Rysunek 3.

Niech Σ będzie płaszczyzną zawierającą punkt T i równoległą do płaszczyzny ABD . Płaszczyzna ABD (a więc także i płaszczyzna Σ) jest prostopadła do prostej OR , gdyż jest w punkcie R styczna do sfery, której środkiem jest punkt O . Wynika stąd, że płaszczyzny Σ i TPR są prostopadłe, gdyż ta ostatnia zawiera prostą OR . Niech Y będzie rzutem punktu T na płaszczyznę BCD w kierunku równoległym do prostej AB , czyli takim punktem płaszczyzny BCD , że $TY \parallel AB$. Ponieważ punkt T nie leży na prostej AB , więc $Y \neq B$. Punkt Y leży na płaszczyznach BCD oraz ABT , więc leży na będącej ich przecięciem prostej BA' . Punkt Y leży także na płaszczyźnie Σ . Niech Z będzie rzutem prostokątnym punktu Y na płaszczyznę TPR (rys. 3.). Ponieważ Y leży na płaszczyźnie BCD , która jest prostopadła do płaszczyzny TPR , więc Z należy do przecięcia tych płaszczyzn, czyli do prostej PR' . Z prostopadłości płaszczyzn TPR i Σ wynika z kolei, że skoro $Y \in \Sigma$, to również $Z \in \Sigma$. Trójkąt POR jest trójkątem równoramiennym, gdyż jego boki OP i OR są promieniami tej samej sfery. Proste zawierające boki trójkąta $R'ZT$ są prostopadłe do prostych zawierających boki trójkąta POR : Prosta PO jest prostopadła do płaszczyzny BCD , a więc również do zawartej w niej prostej $R'Z$. Prosta RP jest prostopadła do prostej TR' , a prosta OR jest prostopadła do prostej ZT , gdyż ta ostatnia zawarta jest w płaszczyźnie Σ , a jak wcześniej zauważyliśmy, płaszczyzna Σ jest prostopadła do prostej OR . Wynika stąd, że trójkąty POR i $R'ZT$ są podobne, w szczególności trójkąt $R'ZT$ jest równoramienny i $ZT = ZR'$. Trójkąty prostokątne YZT i YZR' są przystające, bo mają wspólną przyprostokątną YZ oraz $ZT = ZR'$. Mają więc równe przeciwprostokątne, czyli $YT = YR'$. Analogicznie pokazujemy, że $YT = YS'$. Wynika stąd, że $YR' = YS'$, co oznacza, że punkt Y leży na symetralnej odcinka $R'S'$.

Wskazaliśmy dwa różne punkty leżące na prostej BA' i równoodległe od punktów R' i S' . Zatem prosta BA' jest położoną w płaszczyźnie BCD symetralną boku $R'S'$ trójkąta $Q'R'S'$. Analogiczne rozumowanie pokazuje, że symetralnymi dwóch pozostałych boków tego trójkąta są proste CA' i DA' . Punkt A' jest więc środkiem okręgu opisanego na trójkącie $Q'R'S'$.

Zadanie 6. Niech $n \geq 3$ będzie liczbą naturalną. Ciąg liczb nieujemnych $(c_0, c_1, \dots, c_n)$ spełnia warunek

$$c_p c_s + c_r c_t = c_{p+r} c_{r+s} \quad (1)$$

dla wszystkich $p, r, s, t \geq 0$ takich, że $p+r+s+t = n$. Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości c_2 , jeśli $c_1 = 1$.

Rozwiązanie

Sposób I.

Pokażemy, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 3$ istnieje dokładnie jeden ciąg spełniający warunki zadania, a jedyna możliwa wartość c_2 wynosi $2 \cos(\pi/n)$.

Zauważmy, że dla $p = n$ oraz $r = s = t = 0$ warunek (1) przyjmuje postać $c_n c_0 + c_0^2 = c_n c_0$, skąd dostajemy $c_0 = 0$. Z kolei dla dowolnego $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, z warunku (1) dla $p = 0, r = 1, s = k-1, t = n-k$ wynika, że $c_0 c_{k-1} + c_1 c_{n-k} = c_1 c_k$, czyli $c_{n-k} = c_k$. W szczególności, dla $k = n$ dostajemy $0 = c_0 = c_n$.

Niech d będzie liczbą dodatnią, $\varphi = \frac{\pi}{n}$ oraz niech $c'_k = d \sin(k\varphi)$ dla $k = 0, 1, \dots, n$. Pokażemy, że tak zdefiniowany ciąg $(c'_0, c'_1, \dots, c'_n)$ spełnia warunek (1). W tym celu wystarczy dowieść tożsamości trygonometrycznej

$$\sin \alpha \sin \gamma + \sin \beta \sin \delta = \sin(\alpha + \beta) \sin(\beta + \gamma), \quad (2)$$

dla $\alpha + \beta + \gamma + \delta = \pi$. Przekształcając lewą stronę tożsamości, mamy

$$\begin{aligned} 2 \sin \alpha \sin \gamma + 2 \sin \beta \sin \delta &= \cos(\alpha - \gamma) - \cos(\alpha + \gamma) + \cos(\beta - \delta) - \cos(\beta + \delta) \\ &= \cos(\alpha - \gamma) + \cos(\beta - \delta) \\ &= \cos(\alpha - \gamma) - \cos(\alpha + 2\beta + \gamma) \\ &= 2 \sin(\alpha + \beta) \sin(\beta + \gamma). \end{aligned}$$

Korzystaliśmy tu kilkakrotnie z tożsamości $2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$ oraz z faktu, że $\alpha + \beta + \gamma + \delta = \pi$. Zatem dowiedliśmy (2).

Przyjmując $d = \frac{1}{\sin \varphi}$, otrzymujemy $c'_1 = 1$ oraz $c'_k > 0$ dla $k = 0, 1, \dots, n$, a wtedy ciąg $(c'_0, c'_1, \dots, c'_n)$ spełnia wszystkie warunki zadania. Uzasadnimy, że jest to jedyny taki ciąg.

Przypuśćmy, że $\mathbf{d} = (d_0, d_1, \dots, d_n)$ jest ciągiem liczb nieujemnych spełniającym warunki nałożone na ciąg $\mathbf{c} = (c_0, c_1, \dots, c_n)$, ale $\mathbf{d} \neq \mathbf{c}$. Podstawiając w (1) $p = s = 1$ oraz $t = n - r - 2$ i korzystając z wcześniej udowodnionej zależności $c_{n-k} = c_k$, otrzymujemy $c_{r+1}^2 = 1 + c_r c_{n-r-2} = 1 + c_r c_{r+2}$. Z tego wynika, że $c_{r+1} \geq 1$ oraz

$$\frac{c_{r+2}/c_{r+1}}{c_{r+1}/c_r} = 1 - \frac{1}{c_{r+1}^2} \quad \text{dla } 1 \leq r \leq n-2. \quad (3)$$

Ponadto, jeżeli znamy c_2 , to pozostałe wyrazy c_r , dla $r = 3, \dots, n$, są wyznaczone jednoznacznie. Skoro $\mathbf{d} \neq \mathbf{c}$, możemy zatem założyć, że $d_2 > c_2$ (przypadek $d_2 < c_2$ jest analogiczny). Uzasadnimy indukcyjnie, że wtedy $\frac{d_{r+1}}{d_r} > \frac{c_{r+1}}{c_r}$ oraz $d_{r+1} > c_{r+1}$ dla $0 < r < n$.

Dla $r = 1$ obie nierówności są spełnione, bo $d_1 = c_1 = 1$. Załóżmy, że nierówności te spełnione są dla pewnego $r \geq 1$. Wtedy z zależności (3), analogicznej zależności dla ciągu $\mathbf{d}$ oraz korzystając z założenia indukcyjnego, otrzymujemy

$$\frac{d_{r+2}/d_{r+1}}{d_{r+1}/d_r} = 1 - \frac{1}{d_{r+1}^2} > 1 - \frac{1}{c_{r+1}^2} = \frac{c_{r+2}/c_{r+1}}{c_{r+1}/c_r}.$$

Stąd i z faktu, że wyrazy ciągu $\mathbf{d}$ (poza skrajnymi) są dodatnie, mamy

$$\frac{d_{r+2}}{d_{r+1}} = \frac{d_{r+2}/d_{r+1}}{d_{r+1}/d_r} \cdot \frac{d_{r+1}}{d_r} > \frac{c_{r+2}/c_{r+1}}{c_{r+1}/c_r} \cdot \frac{c_{r+1}}{c_r} > \frac{c_{r+2}}{c_{r+1}}$$

oraz $d_{r+2} = \frac{d_{r+2}}{d_{r+1}} \cdot d_{r+1} > \frac{c_{r+2}}{c_{r+1}} \cdot c_{r+1} = c_{r+2}$, co kończy dowód kroku indukcyjnego.

Uzyskaliśmy $d_{r+1} > c_{r+1}$ dla $0 < r < n$, ale to prowadzi do sprzeczności, bo $d_n = 0 = c_n$. Zatem istnieje najwyżej jeden ciąg spełniający warunki zadania.

Wobec powyższych rozważań, jedyną możliwą wartością c_2 jest $\frac{\sin(2\pi/n)}{\sin(\pi/n)} = 2\cos(\pi/n)$.

Sposób II.

Stosując warunek (1) dla $p = n$ oraz $r = s = t = 0$ otrzymujemy $c_n c_0 + c_0^2 = c_n c_0$, czyli $c_0 = 0$. Następnie w (1) podstawiamy $t = 0$ oraz $p = s = l \leq n/2$, $r = n - 2l$. Otrzymujemy $c_l^2 = c_{n-l}^2$, czyli $c_l = c_{n-l}$, gdyż $c_l, c_{n-l} \geq 0$. Z kolei dla $p = 1$, $r = k - 2$, $s = 1$, $t = n - k$ uzyskujemy tożsamość

$$1 + c_k c_{k-2} = c_{k-1}^2 \quad \text{dla } k = 2, 3, \dots, n. \quad (4)$$

Zatem $c_i \geq 1$ dla $i = 1, 2, \dots, n-1$. Gdyby zachodziła nierówność $c_2 \geq 2$, wówczas prosty argument indukcyjny, oparty na wynikającej z (4) równości $c_k = \frac{c_{k-1}-1}{c_{k-2}}(c_{k-1}+1)$, pokazałby, że $c_k \geq c_{k-1} + 1$ dla $k = 1, 2, \dots, n$, czyli ciąg (c_k) byłby rosnący, co przeczy temu, że $c_0 = c_n$. Zatem $c_2 < 2$. Z warunku (4) płynie jeszcze jeden wniosek: Skoro $c_0 = 0$, $c_1 = 1$ oraz $c_i \geq 1$ dla $i = 1, 2, \dots, n-1$, zatem jeżeli ustalimy liczbę c_2 , to warunek (4) jednoznacznie wyznacza pozostałe wyrazy ciągu.

Narysujmy na płaszczyźnie trójkąt $A_0 A_1 A_2$ o bokach $A_0 A_1 = 1$, $A_1 A_2 = 1$ oraz $A_0 A_2 = c_2$. Taki trójkąt istnieje, gdyż $|1 - 1| = 0 < c_2 < 2 = 1 + 1$. Opiszmy na nim okrąg o o środku O i rozważmy punkty $A_3, A_4, \dots, A_n$ leżące na okręgu o takie, że kąty skierowane $\sphericalangle A_i O A_{i+1}$ są równe. Wykażemy indukcyjnie, że $c_k = A_0 A_k$ dla $k = 0, 1, \dots, n$. Dla $k = 0, 1, 2$ teza zachodzi. Załóżmy, że zachodzi ona dla każdego $l \leq k$. Jeżeli czworokąt $A_0 A_1 A_{k-1} A_k$ jest wypukły, to stosując twierdzenie Ptolemeusza dostajemy $A_0 A_1 \cdot A_{k-1} A_k + A_0 A_k \cdot A_1 A_{k-1} = A_0 A_{k-1} \cdot A_1 A_k$, czyli $1 + A_0 A_k \cdot c_{k-2} = c_{k-1}^2$. Równość ta zachodzi również wtedy, gdy czworokąt $A_0 A_1 A_{k-1} A_k$ jest zdegenerowany i $A_k = A_0$. Zatem gdy czworokąty $A_0 A_1 A_2 A_3, A_0 A_1 A_3 A_4, \dots, A_0 A_1 A_{k-1} A_k$ są wypukłe (lub zdegenerowane) to $c_k = A_0 A_k$.

Rozważmy dwa przypadki ze względu na miarę kąta $A_0 O A_1$.

1. Jeśli $\sphericalangle A_0 O A_1 \leq 2\pi/n$, to czworokąt $A_0 A_1 A_{k-1} A_k$ jest wypukły dla każdego $k \in \{3, 4, \dots, n\}$ (lub $A_k = A_0$, gdy $k = n$ oraz $\sphericalangle A_0 O A_1 = 2\pi/n$) i wtedy $c_k = A_0 A_k$ dla $k = 0, 1, 2, \dots, n$. Jednocześnie $0 = c_0 = c_n = A_0 A_n$, czyli $A_0 = A_n$, co oznacza, że $\sphericalangle A_0 O A_1 = 2\pi/n$, a zatem c_2 jest długością najkrótszej przekątnej w n -kącie foremnym.
2. Jeśli $\sphericalangle A_0 O A_1 > 2\pi/n$, to dla pewnego $m \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ punkt A_0 znajduje się wewnątrz kąta $A_m O A_{m+1}$ lub $A_0 = A_m$. W obydwu tych wypadkach $A_0 A_m < 1$. Wybierzmy najmniejsze takie m . Wówczas dla $k \leq m$ odpowiednie czworokąty $A_0 A_1 A_{k-1} A_k$ są wypukłe, zatem $A_0 A_m = c_m \geq 1$. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że ten przypadek nie zachodzi.

Podsumowując, dla ustalonego n , jeżeli istnieje ciąg spełniający warunki zadania, to jest tylko jeden i wyraża się wzorem $c_k = A_0 A_k$ dla $k = 0, 1, \dots, n$, gdzie $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}$ są wierzchołkami n -kąta foremnego o boku 1. Pozostaje sprawdzić, że tak zdefiniowany ciąg spełnia zależność (1).

Jeżeli liczby całkowite p, r, s, t są dodatnie i $p + r + s + t = n$, to z twierdzenia Ptolemeusza dla czworokąta $A_0 A_p A_{p+r} A_{p+r+s}$, który jest wpisany w okrąg opisany na rozważanym n -kącie, otrzymujemy

$$A_0 A_p \cdot A_{p+r} A_{p+r+s} + A_p A_{p+r} \cdot A_0 A_{p+r+s} = A_0 A_{p+r} \cdot A_p A_{p+r+s},$$

a stąd, ponieważ n -kąt jest foremny,

$$A_0A_p \cdot A_0A_s + A_0A_r \cdot A_0A_t = A_0A_{p+r} \cdot A_0A_{r+s}, \quad (5)$$

czyli warunek (1) jest spełniony dla dodatnich p, r, s, t . Łatwo sprawdzić, że zależność (5) jest prawdziwa również w przypadku, gdy przynajmniej jedna z liczb p, r, s, t jest równa 0. Ponadto każdy wyraz $c_k = A_0A_k$ jest nieujemny, zatem rozważany ciąg spełnia założenia zadania.

Z powyższych rozważań wynika, że c_2 jest długością najkrótszej przekątnej w n -kącie foremnym o boku 1, czyli $c_2 = 2 \cos(\pi/n)$.

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje
można znaleźć w Internecie pod adresem: www.om.edu.pl



LXI Olimpiada Matematyczna

Rozpoczyna się 61 Olimpiada Matematyczna. Zachęcamy uczniów szkół średnich do wzięcia udziału w niej.

Zawody są trójstopniowe. Uczestnikiem Olimpiady staje się każdy uczeń, który przysłał rozwiązanie co najmniej jednego zadania. Do zakwalifikowania się do zawodów drugiego stopnia nie jest konieczne rozwiązanie wszystkich zadań pierwszego stopnia. Zadania należy rozwiązywać samodzielnie, choć można zadawać pytania innym osobom, również nauczycielom, w celu wyjaśnienia wątpliwości. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności komitet okręgowy podejmie odpowiednie kroki aż do dyskwalifikacji włącznie. Rozwiązania zadań należy przesłać listem poleconym do komitetu okręgowego właściwego dla adresu szkoły. Uczestnicy uczący się za granicą przysyłają swe prace do komitetu okręgowego w Warszawie. Zachęcamy do zapoznania się z regulaminem, w którym są pełniejsze informacje o Olimpiadzie. Regulamin i inne informacje o Olimpiadzie, również zadania, można znaleźć na stronie internetowej: <http://www.om.edu.pl>. Tam znajdują się aktualne adresy komitetów okręgowych Olimpiady.

Zawody I stopnia: **1.09–30.09.09, 1.10–31.10.09, 1.11–30.11.09.**

Zawody II stopnia: **19 i 20 lutego 2010 r**

Zawody III stopnia: **21 i 22 kwietnia 2010 r.**

Uczestnicy finału dostaną maksymalną ocenę z matury z matematyki (szczegóły w komunikatach dyrektora Centralnej Komisji Egzaminacyjnej dostępnych na stronie internetowej: <http://www.cke.edu.pl>) i prawo wstępu na wiele wyższych uczelni zgodnie z decyzjami ich senatów.

Najlepsi uczestnicy będą reprezentować Polskę na LI Międzynarodowej Olimpiadzie Matematycznej, IV Środkoeuropejskiej Olimpiadzie Matematycznej i XXI Zawodach Państw Bałtyckich.

Wielu Waszych starszych kolegów, którzy uczestniczyli w zawodach w latach poprzednich, osiąga dziś dzięki Olimpiadzie pomyślne wyniki w studiach wyższych lub w pracy naukowej. Wielu uzyskało tytuł naukowy profesora.



LXI Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego

I seria (1 września - 30 września 2009r.)

1. Wyznaczyć wszystkie pary (x, y) liczb rzeczywistych dodatnich, spełniających równanie

$$(x^{2010} - 1)(y^{2009} - 1) = (x^{2009} - 1)(y^{2010} - 1).$$

2. Dany jest trójkąt ABC , w którym $AC = BC$. Na odcinku AC wybrano punkt D , który nie jest wierzchołkiem trójkąta ABC . Punkt S jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABD . Wykazać, że punkty B, C, D, S leżą na jednym okręgu.
3. Dwa ciągi skończone będziemy nazywać zgodnymi, jeżeli jeden z nich powstał przez usunięcie z drugiego dwóch identycznych, sąsiadujących ze sobą segmentów. Na przykład zgodne są ciągi $(1, 2, 3, 2, 3, 4)$ i $(1, 4)$, jak również (1) i $(1, 1, 1, 1, 1)$, natomiast nie są zgodne ciągi $(2, 2, 2, 2, 2)$ i $(2, 2)$, ani $(1, 4)$ i $(1, 2, 3, 3, 2, 4)$. Operacją segmentowania nazwiemy zastąpienie ciągu przez ciąg z nim zgodny. Dowieść, że z każdego skończonego ciągu liczbowego można otrzymać, za pomocą pewnej liczby operacji segmentowania, ciąg niemalejący.
4. Liczba 2 należy do zbioru A , który spełnia następujący warunek: Dla każdej liczby rzeczywistej $x \in A$, jeżeli $x \neq 0$ i $x \neq 1$, to

$$\frac{x+1}{x} \in A \quad \text{oraz} \quad \frac{2x-1}{x-1} \in A.$$

Dowieść, że A zawiera wszystkie liczby wymierne większe od 1.

*Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać li-
stem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły,
najpóźniej dnia*

30 września 2009r.

*(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpa-
trywane.*



LXI Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego

II seria (1 października - 31 października 2009r.)

5. Dany jest czworościan $ABCD$, którego ściany są trójkątami ostrokątnymi. Na prostej l leży środek sfery wpisanej oraz środek sfery opisanej na czworościanie. Udowodnić, że jeśli prosta l przecina odcinek AB , to $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB$.
6. Dana jest liczba pierwsza $p \neq 5$ oraz takie liczby całkowite a, b, c , że p jest dzielnikiem obu liczb $a + b + c$ i $a^5 + b^5 + c^5$. Wykazać, że co najmniej jedna z liczb $a^2 + b^2 + c^2$, $a^3 + b^3 + c^3$ jest podzielna przez p .
7. Trójkąt ABC , w którym $\sphericalangle ACB > 90^\circ$, wpisany jest w okrąg o środku S . Prosta CS przecina odcinek AB w punkcie D . Udowodnić, że jeżeli

$$AC + BC = 2CS,$$

to okręgi wpisane w trójkąty ADC i BDC mają równe promienie.

8. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c i liczby całkowitej $n \geq 1$ zachodzi nierówność

$$\frac{a^{n+1}}{b+c} + \frac{b^{n+1}}{c+a} + \frac{c^{n+1}}{a+b} \geq \left(\frac{a^n}{b+c} + \frac{b^n}{c+a} + \frac{c^n}{a+b} \right) \sqrt[n]{\frac{a^n + b^n + c^n}{3}}.$$

*Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać **li-stem poleconym** na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia*

31 października 2009r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpa-trywane.



LXI Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego

III seria (1 listopada - 30 listopada 2009r.)

9. Niech $\mathbb{N}_0$ oznacza zbiór liczb całkowitych nieujemnych. Funkcje $f, g: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ spełniają dla każdego $n \in \mathbb{N}_0$ warunek

$$g(f(n)) = g(n) - n.$$

Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości $f(0)$.

10. Znaleźć wszystkie liczby naturalne n , dla których istnieją parami różne liczby całkowite dodatnie

$$a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n,$$

spełniające warunki:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n \quad \text{oraz} \quad a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_n.$$

11. Czworokąty wypukłe $ABCD$ i $PQRS$ mają jednakowe pola. Ponadto spełnione są równości:

$$AB = PQ, \quad BC = QR, \quad CD = RS, \quad DA = SP.$$

Dowieść, że istnieją takie punkty P', Q', R', S' leżące na tej samej płaszczyźnie co czworokąt $ABCD$, że

$$AP' = BQ' = CR' = DS'$$

i czworokąty $P'Q'R'S'$ i $PQRS$ są przystające.

12. Gracze K i F grają w c -fasolki, gdzie c jest liczbą rzeczywistą dodatnią. Gracz K posiada na początku $n \geq 2$ pustych kubków. W każdej rundzie wskazuje dowolne dwa rozłączne, niepuste zbiory kubków. Następnie F wybiera jeden ze zbiorów wskazanych przez K i dokłada po jednej fasolce do każdego z kubków w tym zbiorze. Gra kończy się w momencie wybranym przez K , przy czym liczba rund nie może przekroczyć cn . K wygrywa, gdy po zakończeniu gry w każdym kubku znajduje się inna liczba fasolek, w przeciwnym razie wygrywa F . Wyznaczyć wszystkie liczby c o następującej własności: dla każdego $n \geq 2$ gracz K ma strategię zapewniającą mu zwycięstwo w c -fasolki.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać **li-stem poleconym** na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

30 listopada 2009r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane po tym terminie nie będą oceniane.



LXI Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych
zawodów stopnia pierwszego

I seria (1 września – 30 września 2009r.)

Zadanie 1. Wyznaczyć wszystkie pary (x, y) liczb rzeczywistych dodatnich, spełniających równanie

$$(x^{2010} - 1)(y^{2009} - 1) = (x^{2009} - 1)(y^{2010} - 1). \quad (1)$$

Rozwiązanie

Sposób I.

Równanie (1) jest spełnione, gdy $x = 1$ lub $y = 1$. Dalej będziemy zakładać, że $x, y \neq 1$. W takim razie możemy podzielić obie strony równania przez $(x - 1)(y - 1) \neq 0$. Otrzymujemy wtedy równanie

$$(x^{2009} + \dots + x + 1)(y^{2008} + \dots + y + 1) = (x^{2008} + \dots + x + 1)(y^{2009} + \dots + y + 1),$$

które jest równoważne następującemu:

$$x^{2009}(y^{2008} + \dots + y + 1) = y^{2009}(x^{2008} + \dots + x + 1).$$

Z założenia zadania $x, y > 0$, możemy zatem podzielić obie strony powyższego równania przez $x^{2009}y^{2009}$. Otrzymamy wtedy

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{y^2} + \dots + \frac{1}{y^{2009}} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \dots + \frac{1}{x^{2009}}. \quad (2)$$

Udowodnimy, że jeżeli para (x, y) spełnia równanie (2), to $x = y$. Istotnie, jeżeli $x > y > 0$ to dla każdego n dodatniego $\frac{1}{x^n} < \frac{1}{y^n}$ i w konsekwencji

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{y^2} + \dots + \frac{1}{y^{2009}} > \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \dots + \frac{1}{x^{2009}}.$$

Ta sprzeczność dowodzi, że nie może być $x > y$. W pełni analogicznie dowodzimy, że nierówność $0 < x < y$ także nie może zajść. Stąd $x = y$.

Łatwo sprawdzimy, że jeśli $x = y$, to równanie (1) jest spełnione. Rozwiązaniami są zatem wszystkie pary (x, y) postaci $(1, a)$, $(a, 1)$ lub (a, a) , dla pewnej liczby rzeczywistej dodatniej a .

Sposób II.

Podobnie jak w sposobie I, zakładamy, że $x, y \neq 1$. Rozważmy funkcję f , określoną na zbiorze liczb rzeczywistych dodatnich $\mathbb{R}_+$ następującym wzorem:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{2010}{2009} & \text{dla } t = 1, \\ \frac{t^{2010} - 1}{t^{2009} - 1} & \text{dla } t \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}. \end{cases}$$

Równanie (1) przyjmuje wtedy postać

$$f(x) = f(y). \quad (3)$$

Wykażemy, że funkcja f jest różnowartościowa, co da wniosek, że jedynymi rozwiązaniami równania (3) są pary (x, y) , w których $x = y$.

Zauważmy, że

$$\lim_{t \rightarrow 1} f(t) = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^{2010} - 1}{t^{2009} - 1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^{2009} + \dots + t + 1}{t^{2008} + \dots + t + 1} = \frac{2010}{2009} = f(1),$$

zatem funkcja f jest ciągła. Aby dowieść różnowartościowości tej funkcji, wystarczy wykazać, że jej pochodna ma stały znak na zbiorze $\mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$. Istotnie,

$$\begin{aligned} f'(t) &= \left(\frac{t^{2010} - 1}{t^{2009} - 1} \right)' = \frac{(t^{2010} - 1)'(t^{2009} - 1) - (t^{2010} - 1)(t^{2009} - 1)'}{(t^{2009} - 1)^2} = \\ &= \frac{2010t^{2009}(t^{2009} - 1) - (t^{2010} - 1)2009t^{2008}}{(t^{2009} - 1)^2} = \\ &= \frac{t^{2008}(t^{2010} - 2010(t - 1) - 1)}{(t^{2009} - 1)^2}. \end{aligned}$$

Podstawiając $c = t - 1$ oraz $n = 2010$ do nierówności Bernoulliego

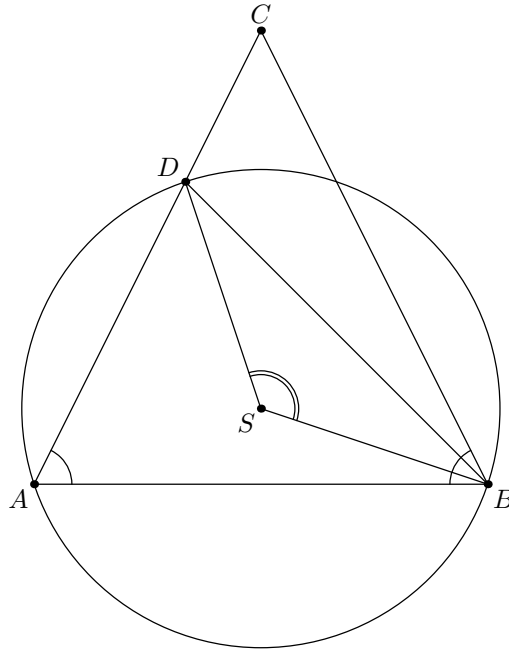
$$(1 + c)^n > 1 + nc,$$

prawdziwej dla $c > -1$, $c \neq 0$ oraz $n > 1$, otrzymujemy $t^{2010} > 1 + 2010(t - 1)$, zatem $f'(t) > 0$ dla $t > 0$, $t \neq 1$. Jedynymi parami spełniającymi równanie (3) są więc pary postaci (a, a) dla $a > 0$, co daje znów odpowiedź $(1, a)$, $(a, 1)$ lub (a, a) , dla dowolnego a rzeczywistego dodatniego.

Zadanie 2. Dany jest trójkąt ABC , w którym $AC = BC$. Na odcinku AC wybrano punkt D , który nie jest wierzchołkiem trójkąta ABC . Punkt S jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABD . Wykazać, że punkty B, C, D, S leżą na jednym okręgu.

Rozwiązanie

Kąt wpisany BAD oraz kąt środkowy BSD są oparte na łuku BD okręgu opisanego na trójkącie ABD . Ponadto kąt BAD jest ostry, więc punkty A i S leżą po tej samej stronie prostej BD . Stąd $\sphericalangle BSD = 2\sphericalangle BAD$.



Widzimy zatem, że

$$\sphericalangle BCD + \sphericalangle BSD = \sphericalangle BCA + 2\sphericalangle BAD = \sphericalangle BCA + \sphericalangle CAB + \sphericalangle ABC = 180^\circ.$$

Skoro punkty A i S leżą po tej samej stronie prostej BD , punkt C leży po innej jej stronie, niż punkt S . To dowodzi, że na czworokącie $BCDS$ można opisać okrąg, czyli punkty B, C, D, S leżą na jednym okręgu. $\square$

Zadanie 3. Dwa ciągi skończone będziemy nazywać zgodnymi, jeżeli jeden z nich powstał przez usunięcie z drugiego dwóch identycznych, sąsiadujących ze sobą segmentów. Na przykład zgodne są ciągi $(1, 2, 3, 2, 3, 4)$ i $(1, 4)$, jak również (1) i $(1, 1, 1, 1, 1)$, natomiast nie są zgodne ciągi $(2, 2, 2, 2, 2)$ i $(2, 2)$, ani $(1, 4)$ i $(1, 2, 3, 3, 2, 4)$. Operacją segmentowania nazwiemy zastąpienie ciągu przez ciąg z nim zgodny. Dowieść, że z każdego skończonego ciągu liczbowego można otrzymać, za pomocą pewnej liczby operacji segmentowania, ciąg niemalejący.

Rozwiązanie

Będziemy w skrócie zapisywać $(\mathbf{a}) \sim (\mathbf{b})$, jeżeli ciągi $(\mathbf{a})$ i $(\mathbf{b})$ są zgodne. Jeżeli natomiast z jednego z nich można otrzymać drugi za pomocą pewnej liczby operacji segmentowania, będziemy pisać $(\mathbf{a}) \leftrightarrow (\mathbf{b})$. Zauważmy, że

$$(\dots, x, y, \dots) \sim (\dots, x, y, y, x, y, x, \dots) \sim (\dots, x, x, y, x, \dots) \sim (\dots, y, x, \dots),$$

Zatem $(\dots, x, y, \dots) \leftrightarrow (\dots, y, x, \dots)$. Innymi słowy, za pomocą trzech operacji segmentowania możemy zamienić miejscami dowolne dwa sąsiednie elementy ciągu.

Dalsze rozumowanie przeprowadzimy indukcyjnie ze względu na liczbę elementów ciągu. Każdy ciąg jednoelementowy jest niemalejący, więc spełnia warunki zadania. Załóżmy, że każdy ciąg n -elementowy można przeprowadzić zgodnie z regułami w ciąg niemalejący.

Rozważmy dowolny ciąg $(n + 1)$ -elementowy $(x_1, x_2, \dots, x_k, M, x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n)$, gdzie M jest największą liczbą w tym ciągu (lub jedną z największych, jeśli takich jest więcej). Na mocy wcześniej dowiedzionego faktu, zachodzą relacje:

$$\begin{aligned}
 (x_1, \dots, x_k, M, x_{k+1}, \dots, x_n) &\leftrightarrow (x_1 \dots, x_k, x_{k+1}, M, x_{k+2}, \dots, x_n) \\
 &\leftrightarrow (x_1 \dots, x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, M, x_{k+3} \dots, x_n) \\
 &\leftrightarrow \dots \\
 &\leftrightarrow (x_1, x_2, \dots, x_n, M)
 \end{aligned}$$

(gdy segment $(x_{k+1}, \dots, x_n)$ jest pusty, rozumowanie jest nadal poprawne). Na mocy założenia indukcyjnego, ciąg $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ można przeprowadzić w ciąg niemalejący, zatem jest to również możliwe dla ciągu $(x_1, x_2, \dots, x_n, M)$, gdyż obecność ostatniego elementu nie ma wpływu na przebieg operacji na ciągu $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. To kończy krok indukcyjny. $\square$

Zadanie 4. Zbiór A spełnia następujący warunek: Dla każdej liczby rzeczywistej $x \in A$, jeżeli $x \neq 0$ i $x \neq 1$, to

$$\frac{x+1}{x} \in A \quad \text{oraz} \quad \frac{2x-1}{x-1} \in A.$$

Udowodnić, że jeżeli $2 \in A$, to A zawiera wszystkie liczby wymierne większe od 1.

Rozwiązanie

Sposób I.

Załóżmy, że teza zadania nie jest spełniona. Przedstawmy wszystkie liczby wymierne większe od 1 i nie należące do A w postaci ułamków. Wybierzmy spośród nich taki, który ma najmniejszy licznik. Niech będzie to $\frac{p}{q}$. Jest jasne, że $\frac{p}{q} \neq 2$, gdyż z warunków zadania $2 \in A$. W takim razie $p - 2q \neq 0$.

Zauważmy, że

$$\frac{\frac{q}{p-q} + 1}{\frac{q}{p-q}} = \frac{p}{q} \quad \text{oraz} \quad \frac{2 \cdot \frac{p-q}{p-2q} - 1}{\frac{p-q}{p-2q} - 1} = \frac{p}{q}.$$

Zatem jeśli $\frac{p}{q} \notin A$, to do zbioru A nie może należeć żadna z liczb $\frac{q}{p-q}$, $\frac{p-q}{p-2q}$ (nietrudno sprawdzić, że obie są różne od 0 i 1). Odnotujmy następujące dwa fakty:

- Jeśli $1 < \frac{p}{q} < 2$, to $\frac{q}{p-q} > 1$ oraz $0 < q < p$.
- Jeśli $\frac{p}{q} > 2$, to $\frac{p-q}{p-2q} > 1$ oraz $0 < p - q < p$.

Wnioskujemy stąd, że jeżeli $\frac{p}{q} > 1$ oraz $\frac{p}{q} \notin A$, to istnieje ułamek o wartości większej niż 1, liczniku mniejszym niż p , którego wartość nie jest elementem zbioru A . Jest to jednak sprzeczne z wcześniejszym założeniem, że p jest najmniejszym możliwym licznikiem takiego ułamka. Otrzymana sprzeczność dowodzi tezy zadania. $\square$

Sposób II.

Jeśli $x \in A$, $x > 1$ to $\frac{x+1}{x} \in A$, $\frac{x+1}{x} > 1$ oraz

$$x+2 = \frac{2 \cdot \frac{x+1}{x} - 1}{\frac{x+1}{x} - 1} \in A.$$

Zatem, na mocy indukcji, dla dowolnego $x > 0$ prawdziwa jest implikacja:

$$x+1, x+2 \in A \Rightarrow x+t \in A \quad \text{dla wszystkich } t = 1, 2, \dots \quad (1)$$

Za pomocą indukcji względem n udowodnimy, że dla dowolnego n całkowitego dodatniego prawdziwe jest następujące zdanie:

$$\frac{k}{n} \in A \quad \text{dla każdego całkowitego } k > n. \quad (2)$$

Zauważmy, że $3 = \frac{2 \cdot 2 - 1}{2 - 1} \in A$. Ponieważ także $2 \in A$, na podstawie (1) wnioskujemy, że zdanie (2) jest prawdziwe dla $n = 1$.

Załóżmy indukcyjnie, że (2) zachodzi dla wszystkich $n < n_0$. Udowodnimy, że jest ono prawdziwe również dla n_0 .

Przy naszym założeniu indukcyjnym $\frac{n_0}{n}, \frac{n_0+n}{n} \in A$ dla $n < n_0$ (wstawiamy $k = n_0 > n$, lub odpowiednio $k = n_0 + n > n$). Wtedy do zbioru A należą również liczby

$$\frac{\frac{n_0}{n} + 1}{\frac{n_0}{n}} = \frac{n}{n_0} + 1 \quad \text{oraz} \quad \frac{2 \cdot \frac{n_0+n}{n} - 1}{\frac{n_0+n}{n} - 1} = \frac{n}{n_0} + 2.$$

Zatem, na mocy (1), dla dowolnego t całkowitego dodatniego (i dla wszystkich $n < n_0$)

$$\frac{n}{n_0} + t = \frac{tn_0 + n}{n_0} \in A.$$

Każda liczba $k > n_0$ niepodzielna przez n_0 może być zapisana w postaci $tn_0 + n$, gdzie $t \geq 1$, $0 < n < n_0$ są liczbami całkowitymi. Jeśli zaś liczba k jest podzielna przez n_0 , to $\frac{k}{n_0}$ jest liczbą całkowitą dodatnią, o której już wiemy, że należy do A . Udowodniliśmy więc tezę indukcyjną, a tym samym dowiedliśmy prawdziwości (2). Zdanie (2) jest równoważne tezie zadania, co kończy dowód. $\square$

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje
można znaleźć w Internecie pod adresem: www.om.edu.pl



LXI Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych
zawodów stopnia pierwszego

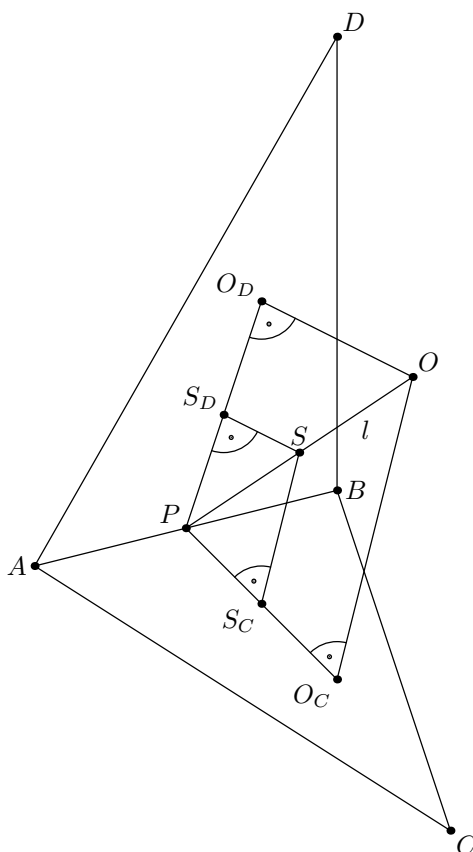
II seria (1 października – 31 października 2009r.)

Zadanie 5. Dany jest czworościan $ABCD$, którego ściany są trójkątami ostrokątnymi. Na prostej l leży środek sfery wpisanej oraz środek sfery opisanej na czworościanie. Udowodnić, że jeśli prosta l przecina odcinek AB , to $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB$.

Rozwiązanie

Sposób I.

Niech S i O oznaczają odpowiednio środek sfery wpisanej i opisanej na czworościanie $ABCD$. Oznaczmy przez P punkt przecięcia prostej l z odcinkiem AB . Punkty S_C i O_C są rzutami prostokątnymi punktów S i O na płaszczyznę ABC , a punkty S_D i O_D – ich rzutami na płaszczyznę ABD . Jest jasne, że S_C, S_D są punktami styczności sfery wpisanej w czworościanie $ABCD$ do ścian ABC i ABD , zaś punkty O_C, O_D są środkami okręgów opisanych na trójkątach ABC i ABD .



Punkty P, S_C, O_C są współliniowe jako rzuty prostopadłe punktów współliniowych. Podobnie

punkty P, S_D, O_D . Wobec tego, na mocy twierdzenia Talesa, zachodzą równości

$$\frac{PO}{OO_C} = \frac{PS}{SS_C} \quad \text{oraz} \quad \frac{PO}{OO_D} = \frac{PS}{SS_D}.$$

Obydwa odcinki SS_C i SS_D są promieniami sfery wpisanej w czworościan $ABCD$, więc mają równą długość. Stąd $OO_C = OO_D$.

Niech R będzie promieniem sfery opisanej na czworościanie $ABCD$ oraz $h = OO_C = OO_D$. Z twierdzenia Pitagorasa, promienie okręgów opisanych na trójkątach ABC oraz ABD mają jednakowe długości, równe $r = \sqrt{R^2 - h^2}$. Stąd, na mocy twierdzenia sinusów,

$$\sin \sphericalangle ACB = \frac{AB}{2r} = \sin \sphericalangle ADB.$$

Z założenia zadania obydwie te kąty są ostre, zatem ich miary są równe. □

Sposób II.

Zdefiniujmy punkty S i O tak jak w sposobie I. Ponieważ prosta l przecina odcinek AB , punkty A, B, S, O leżą na jednej płaszczyźnie. Niech będzie to płaszczyzna Π .

Płaszczyzny ABC i ABD są symetryczne względem Π , ponieważ $S \in \Pi$. Wobec tego Π jest dwusieczną kąta dwuściennego pomiędzy tymi płaszczyznami. Co więcej, $O \in \Pi$, więc sfera opisana na czworościanie jest również symetryczna względem Π .

Okręgi opisane na trójkątach ABC i ABD są odpowiednio częściami wspólnymi płaszczyzn ABC i ABD oraz sfery opisanej na czworościanie, więc również są symetryczne względem Π , czyli są przystające.

Kąty ACB i ADB są ostrymi kątami wpisanymi, opartymi na przystających łukach dwóch przystających okręgów. Stąd wnioskujemy, że $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB$. □

Zadanie 6. Dana jest liczba pierwsza $p \neq 5$ oraz takie liczby całkowite a, b, c , że p jest dzielnikiem obu liczb $a + b + c$ i $a^5 + b^5 + c^5$. Wykazać, że co najmniej jedna z liczb $a^2 + b^2 + c^2$, $a^3 + b^3 + c^3$ jest podzielna przez p .

Rozwiązanie

Sposób I.

Dla dowolnych liczb a, b, c prawdziwa jest następująca tożsamość:

$$\begin{aligned} & 5(a^2 + b^2 + c^2)(a^3 + b^3 + c^3) = \\ & = 6(a^5 + b^5 + c^5) + (2ab^2 + 2a^2b + 2bc^2 + 2b^2c + 2ca^2 + 2c^2a - a^3 - b^3 - c^3 - 6abc)(a + b + c)^2. \end{aligned}$$

Z założenia prawa strona równości jest liczbą podzielną przez p . Ponadto $p \neq 5$, więc liczba $(a^2 + b^2 + c^2)(a^3 + b^3 + c^3)$ dzieli się przez p , z czego wynika teza. □

Sposób II.

Z warunków zadania wynika, że $c \equiv -(a + b) \pmod{p}$, zatem

$$0 \equiv 2(a^5 + b^5 - (a + b)^5) = -5ab(a + b)(a^2 + b^2 + (a + b)^2) \equiv 5abc(a^2 + b^2 + c^2) \pmod{p}.$$

Jeżeli p dzieli $a^2 + b^2 + c^2$, to teza zadania jest spełniona. W przeciwnym przypadku, p dzieli iloczyn $5abc$. A ponieważ $p \neq 5$, to p dzieli przynajmniej jedną z liczb a, b, c . Załóżmy więc, bez straty ogólności, że jest to liczba a . Wtedy liczby a^3 oraz $b + c$ dzielą się przez p . Wobec tego liczba

$$a^3 + (b + c)(b^2 - bc + c^2) = a^3 + b^3 + c^3$$

jest również podzielna przez p , zatem i w tym przypadku teza jest spełniona. $\square$

Zadanie 7. Trójkąt ABC , w którym $\sphericalangle ACB > 90^\circ$, wpisany jest w okrąg o środku S . Prosta CS przecina odcinek AB w punkcie D . Udowodnić, że jeżeli

$$AC + BC = 2CS,$$

to okręgi wpisane w trójkąty ADC i BDC mają równe promienie.

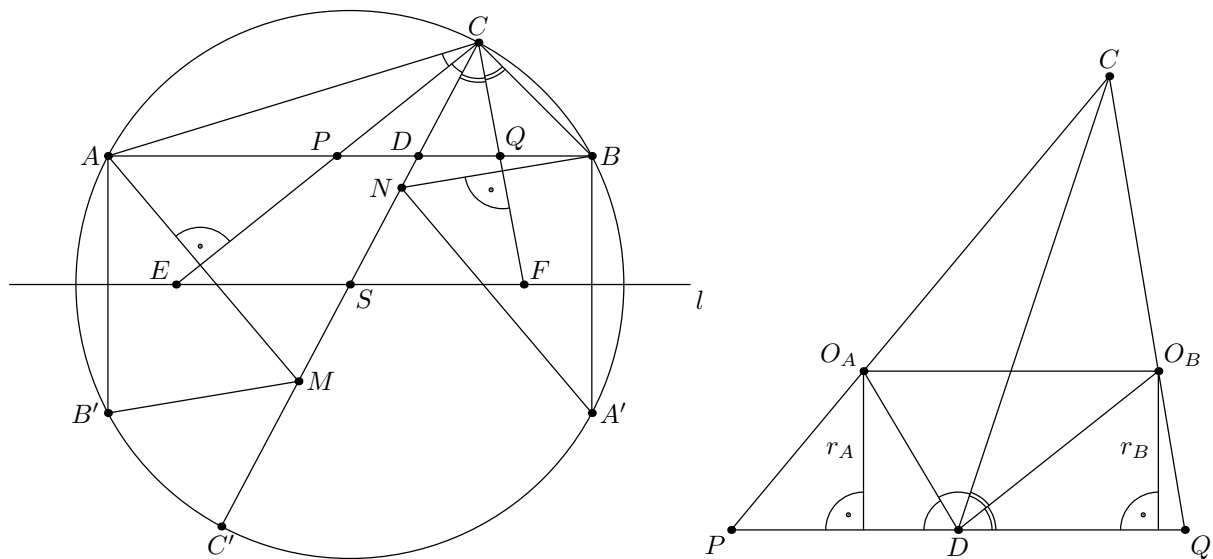
Rozwiązanie

Sposób I.

Rozważmy prostą $l \parallel AB$, przechodzącą przez S . Niech P i Q będą punktami przecięcia prostej AB z dwusiecznymi kątów ACD i BCD , zaś E i F odpowiednio punktami przecięcia prostej l z tymi dwusiecznymi. Przez A', B', C' oznaczmy punkty symetryczne odpowiednio do punktów A, B, C względem punktu S .

Wybermy takie punkty M i N na odcinku CC' , że $CM = AC$ oraz $CN = BC$. Prosta CE jest symetralną odcinka AM , jako dwusieczna kąta ACM trójkąta równoramiennego ACM . Ponadto prosta l jest symetralną odcinka AB' , zatem punkt E jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie $AB'M$. Analogicznie dowodzimy, że punkt F jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie $A'BN$.

Z warunków zadania wynika, że $CM + CN = CC'$. Stąd $SM = SN$, więc trójkąt $A'BN$ jest obrazem trójkąta $AB'M$ w symetrii środkowej względem punktu S . Okręgi opisane na tych trójkątach leżą więc symetrycznie względem S . To dowodzi, że $SE = SF$. Stąd, na mocy twierdzenia Talesa, $DP = DQ$.



Oznaczmy odpowiednio przez O_A i O_B środki okręgów wpisanych w trójkąty ADC i BDC , oraz przez r_A oraz r_B promienie okręgów wpisanych w te trójkąty. Punkt O_A leży na odcinku PC , a O_B leży na odcinku CQ . Na mocy twierdzenia o dwusiecznej, zastosowanego do dwusiecznych kątów CDP i CDQ , zachodzą następujące równości:

$$\frac{CO_A}{PO_A} = \frac{CD}{DP} = \frac{CD}{DQ} = \frac{CO_B}{QO_B}.$$

Z otrzymanych proporcji wynika, że $O_A O_B \parallel PQ$, co prowadzi do wniosku $r_A = r_B$, czyli do tezy. $\square$

Sposób II.

Niech P, Q będą zdefiniowane jak w sposobie I. Oznaczmy $\alpha = \sphericalangle BAC$ i $\beta = \sphericalangle ABC$. Z warunków zadania oraz twierdzenia sinusów, otrzymujemy

$$\sin \alpha + \sin \beta = \frac{BC}{2CS} + \frac{AC}{2CS} = 1. \quad (1)$$

Na mocy twierdzenia o dwusiecznej, zastosowanego do trójkąta ACD ,

$$\frac{CD}{DP} = \frac{CA}{AP} = \frac{CD + CA}{DP + AP} = \frac{CA + CD}{AD}.$$

Niech M będzie środkiem odcinka AC . Wtedy

$$\sphericalangle ACD = 90^\circ - \sphericalangle CSM = 90^\circ - \frac{\sphericalangle ASC}{2} = 90^\circ - \beta.$$

Analogicznie $\sphericalangle BCD = 90^\circ - \alpha$. Na mocy twierdzenia sinusów dla trójkąta ACD , otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{CA + CD}{AD} &= \frac{\sin \sphericalangle ADC + \sin \sphericalangle CAD}{\sin \sphericalangle ACD} = \frac{\sin(90^\circ - \alpha + \beta) + \sin \alpha}{\sin(90^\circ - \beta)} = \\ &= \frac{\cos(\alpha - \beta) + \sin \alpha}{\cos \beta} = \frac{\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta + \sin \alpha}{\cos \beta} = \\ &= \frac{\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha(1 + \sin \beta)}{\cos \beta}. \end{aligned}$$

Po zastosowaniu powyższych równości oraz (1),

$$\frac{CD}{DP} = \frac{\cos \alpha \cos \beta + (1 - \sin \beta)(1 + \sin \beta)}{\cos \beta} = \frac{\cos \alpha \cos \beta + \cos^2 \beta}{\cos \beta} = \cos \alpha + \cos \beta.$$

Analogicznie można udowodnić, że

$$\frac{CD}{DQ} = \cos \beta + \cos \alpha = \frac{CD}{DP}.$$

Stąd $DP = DQ$, a dalej postępujemy tak samo jak w sposobie I. $\square$

Zadanie 8. Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c i liczby całkowitej $n \geq 1$ zachodzi nierówność

$$\frac{a^{n+1}}{b+c} + \frac{b^{n+1}}{c+a} + \frac{c^{n+1}}{a+b} \geq \left(\frac{a^n}{b+c} + \frac{b^n}{c+a} + \frac{c^n}{a+b} \right) \sqrt[n]{\frac{a^n + b^n + c^n}{3}}. \quad (1)$$

Rozwiązanie

Sposób I.

Niech $S_n = \sqrt[n]{\frac{a^n+b^n+c^n}{3}}$. Na mocy nierówności między średnimi potęgowymi, $S_m \geq S_n$ dla $m \geq n$ (patrz np.: Lev Kourliandtchik, *Wędrówki po krainie nierówności*, Wyd. Adamantan, Toruń 2000, Tw. 3.4.1). W szczególności

$$\sqrt[n+1]{\frac{a^{n+1}+b^{n+1}+c^{n+1}}{3}} \geq \sqrt[n]{\frac{a^n+b^n+c^n}{3}}.$$

Po podniesieniu obu stron do potęgi $n(n+1)$ otrzymujemy

$$\left(\frac{a^{n+1}+b^{n+1}+c^{n+1}}{3}\right)^n \geq \left(\frac{a^n+b^n+c^n}{3}\right)^{n+1},$$

czyli

$$\left(\frac{a^{n+1}+b^{n+1}+c^{n+1}}{a^n+b^n+c^n}\right)^n \geq \frac{a^n+b^n+c^n}{3},$$

co jest równoważne nierówności

$$S_n \leq \frac{a^{n+1}+b^{n+1}+c^{n+1}}{a^n+b^n+c^n}. \quad (2)$$

By udowodnić nierówność (1), wystarczy jeszcze wykazać, że

$$\frac{a^{n+1}+b^{n+1}+c^{n+1}}{a^n+b^n+c^n} \leq \frac{\frac{a^{n+1}}{b+c} + \frac{b^{n+1}}{c+a} + \frac{c^{n+1}}{a+b}}{\frac{a^n}{b+c} + \frac{b^n}{c+a} + \frac{c^n}{a+b}},$$

lub równoważnie

$$(a^{n+1}+b^{n+1}+c^{n+1}) \left(\frac{a^n}{b+c} + \frac{b^n}{c+a} + \frac{c^n}{a+b}\right) \leq (a^n+b^n+c^n) \left(\frac{a^{n+1}}{b+c} + \frac{b^{n+1}}{c+a} + \frac{c^{n+1}}{a+b}\right).$$

Po obustronnym pomnożeniu przez $(a+b)(b+c)(c+a)$ i redukcji wyrazów podobnych, otrzymujemy do wykazania nierówność

$$\begin{aligned} a^{n+2}b^{n+1} + a^{n+1}b^{n+2} + b^{n+2}c^{n+1} + b^{n+1}c^{n+2} + c^{n+2}a^{n+1} + c^{n+1}a^{n+2} &\leq \\ &\leq a^{n+3}b^n + a^n b^{n+3} + b^{n+3}c^n + b^n c^{n+3} + c^{n+3}a^n + c^n a^{n+3}. \end{aligned}$$

Jest ona (po dalszych przekształceniach) równoważna nierówności

$$0 \leq a^n b^n (a+b)(a-b)^2 + b^n c^n (b+c)(b-c)^2 + c^n a^n (c+a)(c-a)^2$$

prawdziwej dla dowolnych a, b, c rzeczywistych dodatnich. □

Sposób II.

Jak poprzednio, najpierw dowodzimy nierówności (2). Na mocy nierówności między średnimi potęgowymi oraz (2) (z n zastąpionym przez m), dla dowolnego $m \geq n$ zachodzi nierówność

$$S_n(a^m + b^m + c^m) \leq a^{m+1} + b^{m+1} + c^{m+1}. \quad (3)$$

Prosty rachunek pokazuje, że jeśli nierówność (1) prawdziwa jest dla pewnej trójki liczb (a, b, c) , to jest ona prawdziwa także dla trójki $(a', b', c') = (ax, bx, cx)$, gdzie x jest dowolną liczbą dodatnią. Wystarczy zatem udowodnić nierówność (1) przy założeniu $a + b + c = 1$. Możemy wtedy podstawić w (3) $m = n, n + 1, n + 2, \dots$ i zsumować uzyskane nierówności; powstałe szeregi są zbieżne, gdyż $0 < a, b, c < 1$. W wyniku tego otrzymamy nierówność

$$S_n \left(\sum_{m=n}^{\infty} a^m + \sum_{m=n}^{\infty} b^m + \sum_{m=n}^{\infty} c^m \right) \leq \sum_{m=n+1}^{\infty} a^m + \sum_{m=n+1}^{\infty} b^m + \sum_{m=n+1}^{\infty} c^m,$$

która po zastosowaniu wzoru na sumę wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego, wygląda następująco:

$$S_n \left(\frac{a^n}{1-a} + \frac{b^n}{1-b} + \frac{c^n}{1-c} \right) \leq \frac{a^{n+1}}{1-a} + \frac{b^{n+1}}{1-b} + \frac{c^{n+1}}{1-c},$$

Jest to nierówność równoważna tezie, ponieważ założyliśmy wcześniej, że $a + b + c = 1$. □

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje
można znaleźć w Internecie pod adresem: www.om.edu.pl



LXI Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych
zawodów stopnia pierwszego

III seria (1 listopada – 30 listopada 2009r.)

Zadanie 9. Niech $\mathbb{N}_0$ oznacza zbiór liczb całkowitych nieujemnych. Funkcje $f, g: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ spełniają dla każdego $n \in \mathbb{N}_0$ warunek

$$g(f(n)) = g(n) - n. \quad (1)$$

Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości $f(0)$.

Rozwiązanie

Sposób I.

Niech $m \in \mathbb{N}_0$ będzie jedną z liczb, dla których wartość $g(m)$ jest najmniejsza z możliwych. Jeżeli $m \neq 0$, to

$$g(f(m)) = g(m) - m < g(m),$$

co jest sprzeczne z założeniem, że $g(m)$ jest najmniejsze z możliwych. Zatem dla dowolnego $n \in \mathbb{N}_0$ zachodzi $g(0) \leq g(n)$, przy czym równość ma miejsce jedynie dla $n = 0$. Ponadto

$$g(f(0)) = g(0) - 0 = g(0),$$

co prowadzi do wniosku $f(0) = 0$.

Pozostaje sprawdzić, czy takie funkcje rzeczywiście istnieją. Biorąc $f(n) = 0$ oraz $g(n) = n$ bez trudu przekonamy się, że funkcje te spełniają warunki zadania. Zatem jedyną możliwą wartością $f(0)$ jest 0.

Sposób II.

Niech f^k oznacza k -krotne złożenie funkcji f , tj.

$$f^k(n) = \underbrace{f(f(\dots f(n) \dots))}_{k \text{ razy}}.$$

Korzystając wielokrotnie z (1) w postaci $g(n) = g(f(n)) + n$, otrzymujemy

$$g(0) = g(f(0)) + 0 = g(f^2(0)) + f(0) = g(f^3(0)) + f^2(0) + f(0) = \dots$$

Zatem dla dowolnego k całkowitego dodatniego zachodzi nierówność

$$f(0) + f^2(0) + f^3(0) + \dots + f^k(0) \leq g(0).$$

Lewa strona nierówności dla żadnego k nie może przekroczyć $g(0)$. Składniki tej sumy są liczbami całkowitymi nieujemnymi, skąd wniosek, że tylko skończenie wiele spośród nich jest liczbami

dodatnimi. Zatem istnieje taka liczba całkowita dodatnia t , że $f^k(0) = 0$ dla wszystkich $k \geq t$. W takim razie

$$f(0) = f(f^t(0)) = f^{t+1}(0) = 0.$$

Na koniec znów sprawdzamy, że takie funkcje rzeczywiście istnieją.

Zadanie 10. Znaleźć wszystkie liczby naturalne n , dla których istnieją parami różne liczby całkowite dodatnie $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$, spełniające warunki:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n \quad \text{oraz} \quad a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_n. \quad (1)$$

Rozwiązanie

Sposób I.

Oczywiście $n = 1$ nie spełnia warunków zadania. Dla $n = 2$ mamy warunki $a_1 + a_2 = b_1 + b_2 = c$ oraz $a_1 a_2 = b_1 b_2 = d$. Na mocy wzorów Viéte'a, pierwiastkami trójmianu $x^2 - cx + d$ są liczby a_1, a_2 , ale także liczby b_1, b_2 , więc $\{a_1, a_2\} = \{b_1, b_2\}$. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że $n = 2$ też nie spełnia wymaganych warunków.

Udowodnimy następujący fakt: Jeżeli liczba n spełnia warunki zadania, to spełnia je również liczba $n + 3$.

Przyjmijmy więc, że n spełnia podane warunki; istnieją zatem takie parami różne liczby $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$, że

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n = S, \quad a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_n = P.$$

Zauważmy, że liczby

$$a_1, a_2, \dots, a_n, 2S, 8S, 9S, b_1, b_2, \dots, b_n, 3S, 4S, 12S$$

są parami różne. Zachodzą przy tym równości

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n \cdot 2S \cdot 8S \cdot 9S = 144PS^3 = b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_n \cdot 3S \cdot 4S \cdot 12S$$

oraz

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + 2S + 8S + 9S = 20S = b_1 + b_2 + \dots + b_n + 3S + 4S + 12S,$$

więc liczba $n + 3$ również spełnia warunki zadania, gdyż w ten sposób zdefiniowane zbiory liczb mają równe sumy i równe iloczyny. $\square$

Dla $n = 3, 4, 5$ znajdujemy następujące liczby, spełniające (1):

- dla $n = 3$: $(a_1, a_2, a_3) = (2, 8, 9)$, $(b_1, b_2, b_3) = (3, 4, 12)$,
- dla $n = 4$: $(a_1, a_2, a_3, a_4) = (1, 5, 6, 12)$, $(b_1, b_2, b_3, b_4) = (2, 3, 4, 15)$,
- dla $n = 5$: $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = (1, 4, 8, 9, 10)$, $(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) = (2, 3, 5, 6, 16)$.

Wobec tego, na mocy indukcji, warunki zadania spełnia każda liczba całkowita n postaci $3 + 3k$, $4 + 3k$, $5 + 3k$, gdzie k jest liczbą całkowitą nieujemną. Obejmuje to wszystkie liczby całkowite nie mniejsze niż 3, zatem każda liczba całkowita nie mniejsza niż 3 spełnia warunki zadania.

Sposób II.

Podobnie jak w sposobie I, zauważamy, że liczby $n = 1, n = 2$ nie spełniają warunków zadania i znajdujemy odpowiednie liczby a_i, b_i dla $n = 3$. Udowodnimy przez indukcję, że każda liczba naturalna większa lub równa 3 spełnia warunki zadania.

Założmy indukcyjnie, że dla pewnego n istnieją parami różne liczby $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$, dla których zachodzą równości (1). Niech S oznacza sumę, zaś P iloczyn liczb $a_1, a_2, \dots, a_n$. Rozważmy liczby

$$a'_k = \frac{S^n(S^n - 1)}{S - 1} a_k \quad \text{dla } k = 1, 2, \dots, n, \quad a'_{n+1} = S^n,$$

$$b'_k = \frac{S^{n-1}(S^n - 1)}{S - 1} b_k \quad \text{dla } k = 1, 2, \dots, n, \quad b'_{n+1} = S^{2n}.$$

Są one całkowite dodatnie, gdyż $S - 1 > 0$ jest zawsze dzielnikiem liczby $S^n - 1$. Na mocy założenia indukcyjnego, liczby $b'_1, b'_2, \dots, b'_n$, a także liczby $a'_1, a'_2, \dots, a'_n$ są parami różne. Ponadto dla dowolnych $k, l \in \{1, 2, \dots, n\}$ zachodzą nierówności:

$$a'_{n+1} < b'_k < \frac{S^n(S^n - 1)}{S - 1} \leq a'_l, \quad b'_k < \frac{S^n(S^n - 1)}{S - 1} < b'_{n+1}.$$

Oprócz tego $a'_k \neq b'_{n+1}$, gdyż w przeciwnym razie zaszłaby równość $a_k = \frac{S^n(S^n - 1)}{S^n - 1}$, a liczba ta nie jest całkowita.

Udowodniliśmy więc, że liczby $a'_1, a'_2, \dots, a'_{n+1}, b'_1, b'_2, \dots, b'_{n+1}$ są parami różne. Pozostaje zauważyć, że

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} a'_k &= S \cdot \frac{S^n(S^n - 1)}{S - 1} + S^n = \frac{S^n(S^{n+1} - 1)}{S - 1}, \\ \sum_{k=1}^{n+1} b'_k &= S \cdot \frac{S^{n-1}(S^n - 1)}{S - 1} + S^{2n} = \frac{S^n(S^{n+1} - 1)}{S - 1} = \sum_{k=1}^{n+1} a'_k, \\ \prod_{k=1}^{n+1} a'_k &= P \cdot \left(\frac{S^n(S^n - 1)}{S - 1} \right)^n \cdot S^n = \frac{P S^{n^2+n} (S^n - 1)^n}{(S - 1)^n}, \\ \prod_{k=1}^{n+1} b'_k &= P \cdot \left(\frac{S^{n-1}(S^n - 1)}{S - 1} \right)^n \cdot S^{2n} = \frac{P S^{n^2+n} (S^n - 1)^n}{(S - 1)^n} = \prod_{k=1}^{n+1} a'_k, \end{aligned}$$

co kończy krok indukcyjny.

Indukcja rozpoczyna się od $n = 3$. Udowodniliśmy więc, że każda liczba $n \geq 3$ spełnia warunki zadania.

Sposób III.

Jak w sposobie I, zauważamy, że liczby $n = 1, 2$ nie spełniają warunków zadania. Rozważmy liczby

$$a_k = k \quad \text{dla } k = 1, 2, \dots, n - 2, \quad a_{n-1} = (n - 1) \left(n^{n-1} - \frac{1}{2}n \right), \quad a_n = (n - 1)^2 n^{n-1},$$

$$b_k = nk \quad \text{dla } k = 1, 2, \dots, n - 2, \quad b_{n-1} = (n - 1)^2, \quad b_n = n(n - 1) \left(n^{n-1} - \frac{1}{2}n \right),$$

gdzie $n \geq 3$. Są to liczby całkowite dodatnie. Liczby te są parami różne, gdyż

$$a_1 < a_2 < \dots < a_{n-2} < b_1 < b_2 < \dots < b_{n-2} < b_{n-1} < a_{n-1} < a_n < b_n.$$

Ponadto

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n a_k &= \frac{(n-2)(n-1)}{2} + (n-1) \left(n^{n-1} - \frac{1}{2}n \right) + (n-1)^2 n^{n-1} = (n-1)(n^n - 1), \\
\sum_{k=1}^n b_k &= \frac{n(n-2)(n-1)}{2} + (n-1)^2 + n(n-1) \left(n^{n-1} - \frac{1}{2}n \right) = (n-1)(n^n - 1), \\
\prod_{k=1}^n a_k &= (n-2)! \cdot (n-1) \left(n^{n-1} - \frac{1}{2}n \right) \cdot (n-1)^2 n^{n-1} = n!(n-1)^2 n^{n-2} \left(n^{n-1} - \frac{1}{2}n \right), \\
\prod_{k=1}^n b_k &= n^{n-2} (n-2)! \cdot (n-1)^2 \cdot n(n-1) \left(n^{n-1} - \frac{1}{2}n \right) = n!(n-1)^2 n^{n-2} \left(n^{n-1} - \frac{1}{2}n \right).
\end{aligned}$$

Widzimy więc, że zdefiniowane wcześniej ciągi liczb mają takie same sumy i takie same iloczyny. Zatem liczby o żądanej własności istnieją dla $n \geq 3$.

Zadanie 11. Czworokąty wypukłe $ABCD$ i $PQRS$ mają jednakowe pola. Ponadto spełnione są równości:

$$AB = PQ, \quad BC = QR, \quad CD = RS, \quad DA = SP.$$

Dowieść, że istnieją takie punkty P', Q', R', S' leżące na tej samej płaszczyźnie co czworokąt $ABCD$, że

$$AP' = BQ' = CR' = DS'$$

i czworokąty $P'Q'R'S'$ i $PQRS$ są przystające.

Rozwiązanie

Udowodnimy najpierw następujący lemat:

Lemat: Istnieją co najwyżej dwa czworokąty (z dokładnością do przystawania) o kolejnych bokach długości a, b, c, d oraz powierzchni F .

Dowód lematu: Niech e będzie przekątną leżącą wewnątrz czworokąta i dzielącą go na trójkąty o bokach a, b, e oraz c, d, e . Skorzystamy z następującego wzoru na pole czworokąta (udowodnimy go w dalszej części rozwiązania):

$$F = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd \cos^2 \varphi}, \quad (1)$$

gdzie $p = \frac{a+b+c+d}{2}$, zaś φ jest średnią arytmetyczną miar kątów α i β pomiędzy odpowiednio bokami a, b oraz c, d . Przekształcając powyższy wzór otrzymujemy

$$\cos^2 \varphi = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - F^2}{abcd},$$

co prowadzi do wniosku, że φ może (dla ustalonych a, b, c, d, F) przyjmować co najwyżej dwie różne wartości. Pozostaje do wykazania, że długości boków oraz miara kąta φ jednoznacznie wyznaczają czworokąt.

Zauważmy, że im dłuższa jest przekątna e , tym większa jest miara kąta α oraz kąta β , a tym samym zwiększa się $\varphi = \frac{\alpha+\beta}{2}$. Stąd długość przekątnej e jest jednoznacznie wyznaczona przez miarę kąta φ , natomiast długości a, b, c, d, e jednoznacznie wyznaczają czworokąt, co kończy dowód lematu. $\square$

Dowód wzoru (1): Przy oznaczeniach takich jak wyżej, $F = \frac{1}{2}(ab \sin \alpha + cd \sin \beta)$, więc

$$\begin{aligned} 16F^2 &= 4a^2b^2 \sin^2 \alpha + 4c^2d^2 \sin^2 \beta + 8abcd \sin \alpha \sin \beta = \\ &= 4a^2b^2 + 4c^2d^2 - 4a^2b^2 \cos^2 \alpha - 4c^2d^2 \cos^2 \beta + 8abcd \sin \alpha \sin \beta. \end{aligned}$$

Na mocy twierdzenia cosinusów $e^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha = c^2 + d^2 - 2cd \cos \beta$, zatem

$$2ab \cos \alpha - 2cd \cos \beta = a^2 + b^2 - c^2 - d^2,$$

co po podniesieniu do kwadratu daje

$$4a^2b^2 \cos^2 \alpha + 4c^2d^2 \cos^2 \beta = (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 + 8abcd \cos \alpha \cos \beta.$$

Wstawiając ten wynik do poprzedniego wzoru otrzymamy

$$16F^2 = 4(ab + cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 - 8abcd(1 + \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta).$$

Nietrudno się przekonać, że

$$4(ab + cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 = 16(p - a)(p - b)(p - c)(p - d).$$

Ponadto

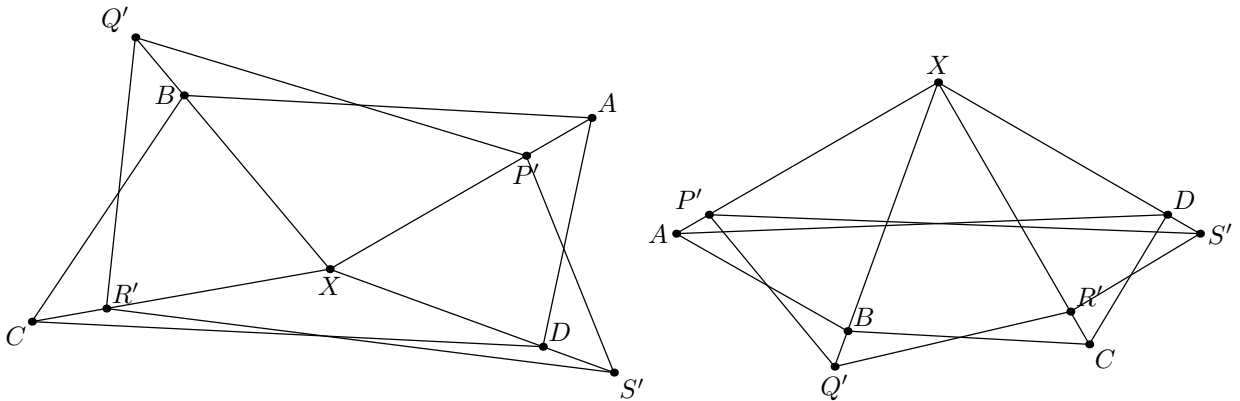
$$2 \cos^2 \frac{\alpha + \beta}{2} = 1 + \cos(\alpha + \beta) = 1 + \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta,$$

co ostatecznie dowodzi wzoru (1). □

Przejdźmy do rozwiązania zadania. Zauważmy, że jeżeli $ABCD \equiv PQRS$, to wystarczy wziąć $P'Q'R'S' = ABCD$ i teza zadania jest spełniona. Załóżmy więc, że $ABCD \not\equiv PQRS$. Niech φ_1, φ_2 będą kątami z lematu, odpowiednio dla czworokątów $ABCD$ i $PQRS$ (nie ma znaczenia, w jaki dokładnie sposób symbole a, b, c, d są przypisane kolejnym bokom).

Jeżeli na czworokącie $ABCD$ (lub $PQRS$) można opisać okrąg, to $\varphi_1 = \varphi_2 = 90^\circ$, więc $PQRS \equiv ABCD$, wbrew przyjętemu założeniu. Zatem na żadnym z czworokątów $ABCD, PQRS$ nie można opisać okręgu.

Niech X będzie punktem przecięcia symetralnych odcinków AC, BD . Wtedy oczywiście $AX = CX \neq BX = DX$. Niech $x = AX$ i $y = BX$.



Wybermy punkty P', Q', R', S' odpowiednio na półprostych $XA^\rightarrow, XB^\rightarrow, XC^\rightarrow, XD^\rightarrow$, w ten sposób, by zachodziły równości:

$$XQ' = XS' = x, \quad XP' = XR' = y.$$

Zauważmy, że X jest także punktem przecięcia się symetralnych odcinków $P'R'$ oraz $Q'S'$, jednak $XA = x \neq y = XP'$. Stąd $ABCD \not\equiv P'Q'R'S'$, natomiast przystające są następujące pary trójkątów:

$$\triangle AXB \equiv \triangle Q'XP', \quad \triangle BXC \equiv \triangle R'XQ', \quad \triangle CXD \equiv \triangle S'XR', \quad \triangle DXA \equiv \triangle P'XS'.$$

Teraz już łatwo dowieść, że czworokąty $ABCD$ i $P'Q'R'S'$ mają jednakowe pola (równe sumom lub różnicom pól odpowiednio przystających trójkątów; rysunki ilustrują różne przypadki). Przy tym $PQRS \not\equiv ABCD$, więc na mocy wcześniej dowiedzionego lematu, $PQRS \equiv P'Q'R'S'$. Ponadto zachodzą równości

$$AP' = BQ' = CR' = DS' = |x - y|,$$

co kończy dowód. □

Uwaga: Przez zapis $ABCD \equiv PQRS$ rozumiemy równość długości kolejnych boków oraz miar kolejnych kątów (jest to przystawanie uwzględniające kolejność wierzchołków). Na przykład jeżeli $ABCD$ i $PQRS$ są rombami o boku długości 1 oraz $\sphericalangle ABC = \sphericalangle QRS = 60^\circ$, to $ABCD \not\equiv PQRS$. Jeżeli natomiast $\sphericalangle ABC = \sphericalangle PQR = 60^\circ$, to $ABCD \equiv PQRS$.

Zadanie 12. Gracze K i F grają w c -fasolki, gdzie c jest liczbą rzeczywistą dodatnią. Gracz K posiada na początku $n \geq 2$ pustych kubków. W każdej rundzie wskazuje dowolne dwa rozłączne, niepuste zbiory kubków. Następnie F wybiera jeden ze zbiorów wskazanych przez K i dokłada po jednej fasolce do każdego z kubków w tym zbiorze. Gra kończy się w momencie wybranym przez K , przy czym liczba rund nie może przekroczyć cn . K wygrywa, gdy po zakończeniu gry w każdym kubku znajduje się inna liczba fasolek, w przeciwnym razie wygrywa F . Wyznaczyć wszystkie liczby c o następującej własności: dla każdego $n \geq 2$ gracz K ma strategię zapewniającą mu zwycięstwo w c -fasolki.

Rozwiązanie

Udowodnimy, że własność przedstawioną w zadaniu posiadają wszystkie liczby rzeczywiste dodatnie $c \geq 2$, zaś wszystkie liczby $c < 2$ jej nie posiadają. W tym celu przedstawimy strategię wygrywającą gracza K przy warunku $c = 2$, dla dowolnego n . Strategia zapewniająca K zwycięstwo w 2-fasolki jest oczywiście strategią wygrywającą dla K w c -fasolki dla $c \geq 2$. Dowiedzimy też, że jeżeli $c < 2$, to istnieje taka liczba n , dla której strategię wygrywającą ma gracz F .

Nietrudno sprawdzić, że dla $n = 2$ gracz K wygrywa w 2-fasolki po jednej rundzie, natomiast dla $n = 3$ najpóźniej po trzech. Ustalmy $n_0 > 3$. Załóżmy indukcyjnie, że K posiada strategię wygrywającą w 2-fasolki dla wszystkich $n < n_0$. Udowodnimy, że jest to prawda także dla $n = n_0$.

Pomalujmy połowę (zaokrąglając w górę) kubków na biało, a resztę na czarno. Najpierw K chce doprowadzić do stanu, w którym w każdym z białych kubków jest inna liczba ziaren fasoli i w każdym z czarnych kubków jest inna liczba ziaren fasoli (liczby w białych kubkach mogą pokrywać się z liczbami w czarnych). Może to osiągnąć, wybierając za każdym razem dwa zbiory B_1 i B_2 spośród białych kubków wedle strategii dla $n = \lceil n_0/2 \rceil$ oraz dwa zbiory C_1 i C_2 spośród

czarnych wedle strategii dla $n = \lfloor n_0/2 \rfloor$, i jako pierwszy zbiór wskazując $B_1 \cup C_1$, a jako drugi $B_2 \cup C_2$. Jeżeli we wszystkich kubkach jednego z kolorów będzie inna liczba ziaren fasoli, wówczas kontynuujemy grę wyłącznie na kubkach drugiego koloru. Na mocy założenia indukcyjnego, po co najwyżej $2\lceil n_0/2 \rceil \leq n_0 + 1$ rundach białe kubki zawierają różne liczby ziaren fasoli, jak również czarne kubki zawierają różne liczby ziaren fasoli.

Jest jasne, że teraz dla ustalonej liczby l istnieją co najwyżej dwa kubki, w których jest dokładnie l ziaren. Liczbę l , dla której istnieją dokładnie dwa takie kubki nazwiemy podwójną. Liczbą bezpieczną nazwiemy natomiast taką liczbę m , że istnieje dokładnie jeden kubek, w którym jest m ziaren, oraz nie istnieje liczba podwójna mniejsza od m . K stosuje teraz następującą strategię podziału na zbiory: tak długo, jak istnieją liczby podwójne, bierze do każdego ze zbiorów po jednym kubku z każdej pary kubków o tej samej liczbie ziaren. Kubków, w których liczba ziaren nie jest podwójna, nie przydziela do żadnego ze zbiorów.

Zauważmy, że w wyniku stosowania tej strategii nigdy nie otrzymamy trzech kubków z tą samą liczbą ziaren. Faktycznie, dla danej liczby m jest co najwyżej jeden kubek, który przez rundą miał m ziaren i nie otrzymał od gracza F żadnego ziarna, oraz co najwyżej jeden kubek, który miał $m - 1$ ziaren i otrzymał ziarno. Co więcej, jeśli przed rundą jakaś liczba p była bezpieczna, to po niej też jest bezpieczna (bo żaden kubek zawierający p lub mniej ziaren nie był w którymkolwiek ze wskazanych zbiorów). Ponadto, najmniejsza liczba podwójna r po rundzie staje się bezpieczna, ponieważ nie pojawi się żadna liczba podwójna mniejsza od niej, a jeden z kubków zawierających r ziaren teraz będzie zawierał ich $r + 1$, czyli będzie dokładnie jeden kubek z r ziarnami. Wobec tego, ilość liczb bezpiecznych w każdej rundzie rośnie o co najmniej 1.

Zatem po co najwyżej $n_0 - 1$ rundach mamy przynajmniej $n_0 - 1$ liczb bezpiecznych. Jednak jeżeli $n_0 - 1$ liczb jest bezpiecznych, to istnieje przynajmniej $n_0 - 1$ kubków z unikalną liczbą ziaren, więc ostatni kubek też musi mieć unikalną liczbę ziaren, czyli powstała sytuacja wygrywająca dla gracza K . W sumie wykonano co najwyżej $n_0 + 1$ rund w pierwszej fazie i $n_0 - 1$ rund w drugiej fazie, a więc łącznie nie więcej niż $2n_0$ rund. Stąd, na mocy zasady indukcji, gracz K ma dla dowolnego $n \geq 2$ strategię wygrywającą. Z faktu, że ma ją dla $c = 2$ w oczywisty sposób wynika, że dla $c > 2$ również.

Zajmiemy się teraz przypadkiem $c < 2$. Każdemu kubkowi przypiszemy jego poziom. Będzie to liczba $(1 + 2y)^k$, gdzie k oznacza liczbę ziaren fasoli w tym kubku, zaś y jest pewną liczbą rzeczywistą dodatnią. Zauważmy, że jeżeli w tej sytuacji dołożono ziarno fasoli do kubka, to jego poziom wzrasta $1 + 2y$ razy.

Strategia dla gracza F polega na dokładaniu ziaren fasoli do kubków w tym zbiorze, w którym suma poziomów wszystkich kubków jest mniejsza (jeżeli są jednakowe, F wybiera dowolnie). W takim razie, jeżeli przed rundą suma poziomów wszystkich kubków wynosiła A , to po rundzie jest ona równa co najwyżej

$$\frac{A}{2} + \frac{A}{2}(1 + 2y) = A(1 + y).$$

Na początku poziom każdego kubka wynosi 1, więc po zakończeniu gry, czyli nie później niż po cn rundach, suma poziomów wszystkich kubków jest nie większa niż $n(1 + y)^{cn}$. Jeśli gracz K wygrał, to pewien kubek zawiera co najmniej $n - 1$ ziaren fasoli, zatem suma poziomów wszystkich kubków przekracza $(1 + 2y)^{n-1}$. Wobec tego zachodzi nierówność

$$n(1 + y)^{cn} > (1 + 2y)^{n-1}. \quad (1)$$

Znajdziemy liczby y i n , dla których nierówność (1) nie jest spełniona. Będzie to oznaczało, że (przy opisanej strategii gracza F) gracz K nie może wygrać. W tym celu poszukamy najpierw takiej liczby y , że $1 + 2y > (1 + y)^c$.

Niech $m > \frac{1}{2-c}$ będzie liczbą całkowitą. Ze wzoru dwumianowego wynika, że

$$(1+2y)^m = 1 + 2my + y^2W(y) \quad \text{oraz} \quad (1+y)^{2m-1} = 1 + (2m-1)y + y^2V(y),$$

gdzie W i V są wielomianami zmiennej y , o współczynnikach całkowitych dodatnich. Weźmy takie $y \in (0, 1)$, że $0 < yV(1) < 1$. Wtedy

$$(1+2y)^m > 1 + 2my > 1 + 2my - y + y^2V(1) > 1 + 2my - y + y^2V(y) = (1+y)^{2m-1},$$

i mamy postulowaną zależność

$$1+2y > (1+y)^{\frac{2m-1}{m}} > (1+y)^c.$$

Niech $\frac{1+2y}{(1+y)^c} = 1+z$, gdzie $z > 0$. Nierówność (1) przyjmuje teraz postać

$$n(1+2y) > \left(\frac{1+2y}{(1+y)^c} \right)^n = (1+z)^n.$$

Jednak dla $n \geq 2$ zachodzi

$$(1+z)^n \geq 1 + nz + \frac{n(n-1)}{2}z^2 > \frac{n^2z^2}{4}.$$

Zatem nierówność (1) jest fałszywa dla $n > \frac{4}{z^2}(1+2y)$, przy wcześniej wybranym y .

W ten sposób znaleźliśmy strategię wygrywającą gracza F dla pewnego n , przy założeniu, że $c < 2$. Postawiona na początku rozwiązania teza jest więc dowiedziona.

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje
można znaleźć w Internecie pod adresem: www.om.edu.pl



LXI Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia drugiego

19 lutego 2010 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Rozwiązać w liczbach rzeczywistych x, y, z układ równań

$$\begin{cases} x^2 - (y + z + yz)x + (y + z)yz = 0 \\ y^2 - (z + x + zx)y + (z + x)zx = 0 \\ z^2 - (x + y + xy)z + (x + y)xy = 0 \end{cases}$$

2. Punkty A', B', C' są odpowiednio rzutami prostokątnymi wierzchołków A, B, C czworościanu $ABCD$ na przeciwległe ściany. Dowieść, że jeżeli punkt A' jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie BCD , punkt B' jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ACD , zaś punkt C' jest środkiem ciężkości trójkąta ABD , to czworościan $ABCD$ jest foremny.

3. Dodatnie liczby całkowite k i n spełniają nierówność $k > n!$. Udowodnić, że istnieją różne liczby pierwsze $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ będące odpowiednio dzielnikami liczb $k+1, k+2, k+3, \dots, k+n$.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podeście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.



LXI Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia drugiego

20 lutego 2010 r. (drugi dzień zawodów)

4. W pięciokącie wypukłym $ABCDE$ wszystkie kąty wewnętrzne mają równe miary. Wykazać, że symetralna odcinka EA , symetralna odcinka BC i dwusieczna kąta CDE przecinają się w jednym punkcie.

5. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje monotoniczne f , określone na zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych i przyjmujące wartości rzeczywiste, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi równość

$$f(f(x) - y) + f(x + y) = 0.$$

(*Uwaga:* Funkcja monotoniczna to funkcja niemalejąca lub nierosnąca.)

6. Dany jest n -elementowy zbiór liczb rzeczywistych, przy czym $n \geq 6$. Dowieść, że istnieje co najmniej $n - 1$ dwuelementowych podzbiorów tego zbioru, w których średnia arytmetyczna elementów jest nie mniejsza niż średnia arytmetyczna elementów całego zbioru.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.



LXI Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia drugiego

19 lutego 2010 r. (pierwszy dzień zawodów)

Zadanie 1. Rozwiązać w liczbach rzeczywistych x, y, z układ równań

$$\begin{cases} x^2 - (y+z+yz)x + (y+z)yz = 0 \\ y^2 - (z+x+zx)y + (z+x)zx = 0 \\ z^2 - (x+y+xy)z + (x+y)xy = 0 \end{cases}$$

Rozwiązanie

Pierwsze równanie danego układu możemy zapisać w postaci

$$(x - (y + z))(x - yz) = 0,$$

a więc oznacza ono, że $x = y + z$ lub $x = yz$. Podobnie zapisując dwa pozostałe równania stwierdzamy, że *każda z liczb x, y, z jest sumą lub iloczynem dwóch pozostałych liczb*.

Daje to razem 8 układów równań, z których cztery są następujące:

$$1. \begin{cases} x = y + z \\ y = z + x \\ z = x + y \end{cases}, \quad 2. \begin{cases} x = y + z \\ y = z + x \\ z = xy \end{cases}, \quad 3. \begin{cases} x = y + z \\ y = zx \\ z = xy \end{cases}, \quad 4. \begin{cases} x = yz \\ y = zx \\ z = xy \end{cases},$$

zaś pozostałe cztery powstają z układów **2.** i **3.** przez cykliczne przestawienie zmiennych. Rozwiążemy teraz każdy z układów **1.**–**4.**

Układ 1. Dodając stronami dwa pierwsze równania dostajemy równość $x + y = y + 2z + x$, skąd $z = 0$. Podobnie stwierdzamy, że $x = 0$ i $y = 0$.

Układ 2. Dodając stronami dwa pierwsze równania widzimy, że $z = 0$. Układ sprowadza się zatem do dwóch równań $x = y$ i $xy = 0$, skąd $x = y = 0$.

Układ 3. Jeżeli $y = 0$ lub $z = 0$, to z dwóch ostatnich równań wynika, że $y = z = 0$ i pierwsze równanie daje $x = 0$. Możemy więc przyjąć, że $y \neq 0$ i $z \neq 0$. Mnożąc stronami równania drugie i trzecie uzyskujemy $yz = x^2yz$, skąd $x^2 = 1$. W przypadku $x = 1$ układ przyjmuje postać $1 = y + z$ i $y = z$, skąd $(x, y, z) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, natomiast w przypadku $x = -1$ układ przyjmuje postać $-1 = y + z$ i $y = -z$, prowadząc tym samym do sprzeczności $-1 = y + z = 0$.

Układ 4. Przyjmijmy najpierw, że jedna z liczb x, y, z jest równa zeru, na przykład $x = 0$. Wtedy drugie i trzecie równanie dają $y = z = 0$.

Zakładając natomiast, że liczby x, y, z są różne od zera i mnożąc stronami wszystkie równania układu stwierdzamy, że $xyz = (xyz)^2$, czyli $xyz = 1$. W efekcie pierwsze równanie układu oznacza, że $x^2 = xyz = 1$ i podobnie $y^2 = z^2 = 1$. Każda z liczb x, y, z jest więc równa 1 albo -1 i każda jest iloczynem dwóch pozostałych. Zatem albo wszystkie te liczby są równe 1, albo też dwie są równe -1 , a trzecia jest równa 1.

Pozostaje dokonać cyklicznego przedstawienia rozwiązań układów **2.** i **3.**, aby wypisać wszystkie rozwiązania układu danego w zadaniu.

Odpowiedź: Rozwiązaniami (x, y, z) są:

$$\begin{array}{cccc} (0, 0, 0) & (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), & (\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}), & (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1), \\ (1, 1, 1), & (1, -1, -1), & (-1, 1, -1), & (-1, -1, 1). \end{array}$$

Zadanie 2. Punkty A' , B' , C' są odpowiednio rzutami prostokątnymi wierzchołków A , B , C czworościanu $ABCD$ na przeciwległe ściany. Dowieść, że jeżeli punkt A' jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie BCD , punkt B' jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ACD , zaś punkt C' jest środkiem ciężkości trójkąta ABD , to czworościan $ABCD$ jest foremny.

Rozwiązanie

Skoro punkt A' jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie BCD , mamy $A'B = A'C = A'D$ i stosując twierdzenie Pitagorasa do trójkątów prostokątnych $AA'B$, $AA'C$ i $AA'D$ stwierdzamy, że $AB = AC = AD$.

Następnie, niech X' , Y' , Z' będą punktami styczności okręgu wpisanego w trójkąt ACD odpowiednio do boków CD , DA , AC . Punkt B' jest środkiem tego okręgu, więc $B'X' = B'Y' = B'Z'$ i na mocy twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkątów prostokątnych $BB'X'$, $BB'Y'$, $BB'Z'$ wnioskujemy o równości długości odcinków BX' , BY' i BZ' . Ponieważ odcinki te są wysokościami odpowiednio ścian BCD , BDA i BAC , więc następujące pary trójkątów prostokątnych są przystające: BAY' i BAZ' ; BCZ' i BCX' ; BDX' i BDY' . Wynika stąd, że

$$(1) \quad \sphericalangle BAD = \sphericalangle BAC, \quad \sphericalangle BCA = \sphericalangle BCD, \quad \sphericalangle BDC = \sphericalangle BDA.$$

Z zależności $AB = AC = AD$ i $\sphericalangle BAD = \sphericalangle BAC$ wynika, że trójkąty równoramienne ABC i ABD są przystające (cecha *bok-kąt-bok*). Zatem są one symetryczne względem płaszczyzny π przechodzącej przez prostą AB i środek odcinka CD . To oznacza, że π jest płaszczyzną symetrii czworościanu $ABCD$. Przy tej symetrii punkty A i B pozostają na swoich miejscach, zaś punkt C przechodzi na D . W rezultacie z założenia, iż punkt C' jest środkiem ciężkości trójkąta ABD , wynika, że również rzut prostokątny D' punktu D na ścianę ABC jest jej środkiem ciężkości.

Odcinki CC' i DD' łączące wierzchołek czworościanu $ABCD$ ze środkiem ciężkości przeciwległej ściany przechodzą przez środek ciężkości S czworościanu. Rozpatrując płaszczyznę CDS zawierającą oba te odcinki i wykorzystując ich prostopadłość odpowiednio do ścian ABD i ABC , stwierdzamy, że płaszczyzna CDS jest prostopadła do tych ścian, a więc także do ich wspólnej krawędzi AB . Wobec tego części wspólne płaszczyzny CDS ze ścianami ABD i ABC są prostopadłe do odcinka AB . Z drugiej zaś strony, te czę-

ści wspólne są środkowymi ścian. Stąd wniosek, że ściany te są trójkątami równoramiennymi, czyli $DA = DB$ oraz $CA = CB$.

Na mocy uzyskanej wcześniej równości długości krawędzi wychodzących z wierzchołka A uzyskujemy więc $AB = AC = AD = BC = BD$. Zatem ściany ABC i ABD są trójkątami równobocznymi. Stosując równości (1) widzimy, że $\sphericalangle BCD = \sphericalangle BCA = 60^\circ$ oraz $\sphericalangle BDC = \sphericalangle BDA = 60^\circ$. To dowodzi, że ściana BCD również jest trójkątem równobocznym i kończy rozwiązanie.

Zadanie 3. Dodatnie liczby całkowite k i n spełniają nierówność $k > n!$. Udowodnić, że istnieją różne liczby pierwsze $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ będące odpowiednio dzielnikami liczb $k+1, k+2, k+3, \dots, k+n$.

Rozwiązanie

Dla $i = 1, 2, \dots, n$ niech a_i oznacza najmniejszą wspólną wielokrotność tych dzielników liczby $k+i$, które nie przekraczają n .

Najmniejsza wspólna wielokrotność liczb nie przekraczających n jest nie większa niż $n!$, więc w myśl danej w treści zadania zależności $k > n!$ dostajemy

$$(1) \quad a_i < k \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, n.$$

Z drugiej strony, dla każdego $i = 1, 2, \dots, n$ liczba a_i jest najmniejszą wspólną wielokrotnością dzielników liczby $k+i$. Wobec tego sama jest dzielnikiem liczby $k+i$. Liczby

$$(2) \quad \frac{k+1}{a_1}, \quad \frac{k+2}{a_2}, \quad \frac{k+3}{a_3}, \quad \dots, \quad \frac{k+n}{a_n}$$

są zatem całkowite, a nierówności (1) wskazują, że są one większe od 1.

Wykażemy, że liczby (2) są parami względnie pierwsze. W tym celu rozpatrzmy różne wskaźniki $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Liczby $k+i$ oraz $k+j$ różnią się o mniej niż n , więc ich największy wspólny dzielnik $d = \text{NWD}(k+i, k+j)$ nie przekracza n i wobec tego jest dzielnikiem liczb a_i oraz a_j . To oznacza, że liczby $\frac{k+i}{a_i}$ oraz $\frac{k+j}{a_j}$ są odpowiednio dzielnikami liczb $\frac{k+i}{d}$ oraz $\frac{k+j}{d}$. Te ostatnie są względnie pierwsze na podstawie określenia największego wspólnego dzielnika, co dowodzi własności zapowiedzianej na początku akapitu.

W efekcie liczby (2) są parami względnie pierwszymi liczbami większymi od 1. Są one jednak odpowiednio dzielnikami liczb $k+1, k+2, k+3, \dots, k+n$. Teza zadania będzie więc spełniona, jeżeli za $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ przyjmiemy dowolne dzielniki pierwsze odpowiednio liczb (2).

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w Internecie pod adresem: www.om.edu.pl



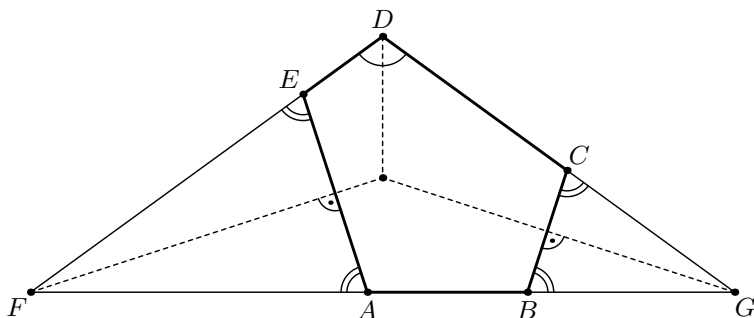
LXI Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia drugiego

20 lutego 2010 r. (drugi dzień zawodów)

Zadanie 4. W pięciokącie wypukłym $ABCDE$ wszystkie kąty wewnętrzne mają równe miary. Wykazać, że symetralna odcinka EA , symetralna odcinka BC i dwusieczna kąta CDE przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązanie



rys. 1

Przedłużmy boki AB i DE do przecięcia w punkcie F oraz boki AB i CD do przecięcia w punkcie G (rys. 1). Wówczas z równości kątów wewnętrznych danego pięciokąta wynika, że trójkąty EFA i BGC są równoramienne. To zaś oznacza, że symetralne odcinków EA i BC są odpowiednio dwusiecznymi kątów EFA i BGC . Wobec tego trzy proste, o których mowa w treści zadania, są dwusiecznymi kątów wewnętrznych trójkąta FGD , zatem mają punkt wspólny, będący środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt.

Zadanie 5. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje monotoniczne f , określone na zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych i przyjmujące wartości rzeczywiste, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi równość

$$(1) \quad f(f(x) - y) + f(x + y) = 0.$$

(Uwaga: Funkcja monotoniczna to funkcja niemalejąca lub nierosnąca.)

Rozwiązanie

Oznaczmy $c = f(0)$; przyjmując $x = 0$ w równości (1) dostajemy

$$(2) \quad f(c - y) + f(y) = 0 \quad \text{dla każdej liczby rzeczywistej } y,$$

skąd w szczególności biorąc $y = 0$ uzyskujemy $f(c) + c = 0$. Następnie podstawiając w (1) wartości $x = c$ i $y = -c$ stwierdzamy, że $f(f(c) + c) + c = 0$, co

wraz z uzyskanym przed chwilą warunkiem $f(c)+c=0$ daje $2c=0$, czyli $c=0$. W efekcie zależność (2) pozwala wnioskować, że

$$(3) \quad f(-y) = -f(y) \quad \text{dla każdej liczby rzeczywistej } y.$$

Niech teraz t będzie dowolną liczbą rzeczywistą, dla której $f(t)=0$. Biorąc $x=t$ w równości (1) dostajemy $f(-y)+f(t+y)=0$ i łącząc to z własnością (3) widzimy, że $f(t+y)=f(y)$ dla dowolnej liczby rzeczywistej y .

Jeżeli $t \neq 0$, to funkcja f jest okresowa o okresie t . Jednakże funkcja monotoniczna okresowa musi być stała. Skoro $f(0)=0$, funkcja f jest zerowa; taka funkcja spełnia oczywiście warunki zadania.

Pozostaje do rozpatrzenia przypadek, w którym jedyną liczbą rzeczywistą t spełniającą równanie $f(t)=0$ jest liczba $t=0$. Przyjmując wówczas $y=-x$ w zależności (1) otrzymujemy

$$0 = f(f(x)+x) + f(0) = f(f(x)+x).$$

Wynika stąd, że $f(x)+x$ jest argumentem, dla którego wartość funkcji f jest równa zero. Stąd $f(x)+x=0$, czyli $f(x)=-x$ dla dowolnej liczby x . Proste sprawdzenie dowodzi, że ta funkcja również ma żądane własności.

Odpowiedź: Warunki zadania spełniają funkcje $f(x) \equiv 0$ oraz $f(x) = -x$.

Zadanie 6. Dany jest n -elementowy zbiór liczb rzeczywistych, przy czym $n \geq 6$. Dowieść, że istnieje co najmniej $n-1$ dwuelementowych podzbiorów tego zbioru, w których średnia arytmetyczna elementów jest nie mniejsza niż średnia arytmetyczna elementów całego zbioru.

Rozwiązanie

Sposób I

Niech $a_1 > a_2 > \dots > a_n$ będą wszystkimi elementami danego w treści zadania zbioru, a $s = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$ niech będzie ich średnią arytmetyczną.

Przyjmijmy

$$b_i = a_i + a_{n+1-i} \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, n.$$

Suma liczb $b_1, b_2, \dots, b_n$ jest równa $2(a_1 + a_2 + \dots + a_n) = 2ns$, więc wśród nich istnieje liczba nie mniejsza niż $2s$. Niech liczbą tą będzie $b_k = a_k + a_{n+1-k}$; możemy przy tym założyć, że $k \leq n+1-k$, czyli $k \leq \frac{1}{2}(n+1)$.

Z zależności $a_k + a_{n+1-k} \geq 2s$ wynika, że nierówność

$$\frac{1}{2}(a_i + a_j) \geq s$$

zachodzi dla każdej pary wskaźników (i, j) , w której $1 \leq i < j \leq k$ oraz dla każdej pary wskaźników (i, j) , w której $i \leq k < j \leq n+1-k$. Każda taka para (i, j) odpowiada dwuelementowemu zbiorowi $\{a_i, a_j\}$ o średniej arytmetycznej elementów nie mniejszej niż s , a przy tym różnym parom odpowiadają różne zbiory.

Pozostaje obliczyć, ile par wskaźników uzyskaliśmy w ten sposób. Liczba par (i, j) spełniających warunek $1 \leq i < j \leq k$ wynosi $\binom{k}{2}$, zaś liczba par (i, j)

spełniających nierówności $i \leq k < j \leq n+1-k$ jest równa $k(n+1-2k)$. Wskazaliśmy zatem

$$\binom{k}{2} + k(n+1-2k) = \frac{1}{2}k(k-1) + k(n+1-2k) = k(n + \frac{1}{2} - \frac{3}{2}k).$$

dwuelementowych podzbiorów o średniej arytmetycznej nie mniejszej niż s .

Do zakończenia rozwiązania pozostaje wykazać, że

$$(1) \quad k(n + \frac{1}{2} - \frac{3}{2}k) \geq n-1 \quad \text{dla } n \geq 6 \quad \text{i} \quad 1 \leq k \leq \frac{1}{2}(n+1).$$

Wyrażenie $k(n + \frac{1}{2} - \frac{3}{2}k)$ jest trójmianem kwadratowym zmiennej k o ujemnym współczynniku przy wyrazie kwadratowym, więc przyjmuje ono najmniejszą wartość na końcach przedziału zmienności. Dla $k=1$ i $k=\frac{1}{2}(n+1)$ wartości trójmianu wynoszą odpowiednio $n-1$ i $\frac{1}{8}(n-1)(n+1)$. Dla $n \geq 7$ obie wartości są równe co najmniej $n-1$, zaś dla $n=6$ największą całkowitą wartością k w przedziale $1 \leq k \leq \frac{1}{2}(n+1)$ jest $k=3$, dla której wartość trójmianu wynosi $3 \cdot (6 + \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \cdot 3) = 6 > n-1$. To uzasadnia zależność (1) i kończy rozwiązanie zadania.

Sposób II

Przez $\Sigma(S)$ będziemy oznaczać sumę elementów zbioru liczbowego S .

Ponieważ dodanie tej samej liczby do wszystkich elementów danego n -elementowego zbioru X nie wpływa na warunki zadania, więc możemy bez utraty ogólności rozumowania przyjąć, że $\Sigma(X)=0$. Musimy dowieść istnienia co najmniej $n-1$ dwuelementowych zbiorów $S \subset X$, dla których $\Sigma(S) \geq 0$.

Niech α oznacza największą liczbę w zbiorze X . Jeżeli wszystkie elementy X są równe co najmniej $-\alpha$, to każdy z $n-1$ zbiorów postaci $\{\alpha, x\}$, gdzie $x \in X \setminus \{\alpha\}$, ma nieujemną sumę elementów i teza zadania jest spełniona. Niech więc zbiór M liczb należących do X i mniejszych od $-\alpha$ ma $t > 0$ elementów i niech K będzie zbiorem t największych liczb w zbiorze X (zauważmy, że M jest zbiorem t najmniejszych liczb).

Jest jasne, że $\Sigma(M) < -t\alpha$ oraz $\Sigma(X \setminus M) \leq (n-t)\alpha$. Otrzymujemy stąd

$$0 = \Sigma(X) = \Sigma(M) + \Sigma(X \setminus M) < -t\alpha + (n-t)\alpha = (n-2t)\alpha,$$

skąd $n > 2t$. Wobec tego zbiory K i M są rozłączne, a zbiór $L = X \setminus (K \cup M)$ jest niepusty. Ponadto nierówności $\Sigma(M) < -t\alpha$ i $\Sigma(K) \leq t\alpha$ wskazują, że $\Sigma(K \cup M) < 0$, czyli

$$\Sigma(L) > 0.$$

Wobec tego największy element β zbioru L jest liczbą dodatnią.

Wszystkie liczby w zbiorze K są dodatnie, gdyż są większe od β . Zatem każdy dwuelementowy podzbiór S zbioru $(t+1)$ -elementowego $K \cup \{\beta\}$ spełnia nierówność $\Sigma(S) > 0$. Ponadto wszystkie elementy zbioru L są równe co najmniej $-\alpha$, co daje $\Sigma(\{\alpha, x\}) \geq 0$ dla x będącego dowolnym z $n-2t-1$ elementów zbioru $L \setminus \{\beta\}$. Liczba otrzymanych w ten sposób dwuelementowych

podzbiorów o nieujemnej sumie elementów wynosi

$$\binom{t+1}{2} + (n - 2t - 1) = \frac{1}{2}t(t-3) + n - 1.$$

Jeżeli $t \geq 3$, to powyższa liczba jest równa co najmniej $n-1$ i rozwiązanie zadania jest zakończone. Natomiast dla $t=1$ lub $t=2$ mamy $\frac{1}{2}t(t-3) = -1$ i do dokończenia rozwiązania należy wskazać jeszcze jeden, różny od wymienionych powyżej, dwuelementowy podzbiór o nieujemnej sumie elementów. Jednak na mocy nierówności $n \geq 6$ dostajemy $n-2t \geq 6-2 \cdot 2 = 2$; zbiór L ma zatem przynajmniej 2 elementy i nierówność $\Sigma(L) > 0$ dowodzi, że szukany podzbiorem jest zbiór dwóch największych elementów zbioru L .

To kończy rozwiązanie.

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w Internecie pod adresem: www.om.edu.pl



LXI Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia trzeciego

21 kwietnia 2010 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Dana jest liczba całkowita $n > 1$ i zbiór $S \subseteq \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ mający więcej niż $\frac{3}{4}n$ elementów. Dowieść, że istnieją takie liczby całkowite a, b, c , że reszty z dzielenia przez n liczb

$$a, \quad b, \quad c, \quad a+b, \quad a+c, \quad b+c, \quad a+b+c$$

należą do zbioru S .

2. Dodatkowo liczby wymierne a i b spełniają równość

$$a^3 + 4a^2b = 4a^2 + b^4.$$

Udowodnić, że liczba $\sqrt{a} - 1$ jest kwadratem liczby wymiernej.

3. Dany jest równoległobok $ABCD$, w którym kąt DAB jest ostry. Punkty A, P, B, D leżą w tej kolejności na jednym okręgu. Proste AP i CD przecinają się w punkcie Q . Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie CPQ . Wykazać, że jeśli $D \neq O$, to proste AD i DO są prostopadłe.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.



LXI Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia trzeciego

22 kwietnia 2010 r. (drugi dzień zawodów)

4. Wewnątrz boku BC trójkąta ABC leżą różne punkty D i E , przy czym $BD < BE$. Niech p_1 i p_2 oznaczają odpowiednio obwody trójkątów ABC i ADE . Udowodnić, że

$$p_1 > p_2 + 2 \cdot \min\{BD, EC\}.$$

5. Liczba pierwsza $p > 3$ daje resztę 2 z dzielenia przez 3. Niech

$$a_k = k^2 + k + 1 \quad \text{dla } k = 1, 2, 3, \dots, p-1.$$

Wykazać, że iloczyn $a_1 a_2 a_3 \dots a_{p-1}$ daje resztę 3 z dzielenia przez p .

6. Dana jest liczba rzeczywista $C > 1$. Ciąg dodatnich liczb rzeczywistych $a_1, a_2, a_3, \dots$, w którym $a_1 = 1$ i $a_2 = 2$, spełnia warunki

$$a_{mn} = a_m a_n \quad \text{oraz} \quad a_{m+n} \leq C(a_m + a_n)$$

dla $m, n = 1, 2, 3, \dots$. Dowieść, że

$$a_n = n \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots$$

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.



LXI Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia trzeciego

21 kwietnia 2010 r. (pierwszy dzień zawodów)

Zadanie 1. Dana jest liczba całkowita $n > 1$ i zbiór $S \subseteq \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ mający więcej niż $\frac{3}{4}n$ elementów. Dowieść, że istnieją takie liczby całkowite a, b, c , że reszty z dzielenia przez n liczb

$$a, \quad b, \quad c, \quad a+b, \quad a+c, \quad b+c, \quad a+b+c$$

należą do zbioru S .

Rozwiązanie

Oznaczmy przez k liczbę elementów zbioru S ; mamy więc $k > \frac{3}{4}n$.

Wybermy najpierw dowolną liczbę $a \in S$. Zauważmy następnie, że dla różnych liczb $x \in S$ otrzymujemy różne reszty z dzielenia liczby $a+x$ przez n , gdyż zbiór S jest zawarty w przedziale o długości mniejszej niż n . Zbiór S składa się z k reszt z dzielenia przez n , więc istnieje najwyżej $n-k$ takich wartości $x \in S$, że reszta z dzielenia liczby $a+x$ przez n nie należy do zbioru S .

Z warunku $k > \frac{3}{4}n$ wynika, że $n-k < k$. W rezultacie istnieje taka liczba $b \in S$, że reszta z dzielenia liczby $a+b$ przez n należy do zbioru S . Wybierzmy więc i ustalmy taką liczbę b .

Analogicznie dowodzimy, że:

- istnieje najwyżej $n-k$ wartości $y \in S$, dla których reszta z dzielenia liczby $a+y$ przez n nie należy do zbioru S ;
- istnieje najwyżej $n-k$ wartości $y \in S$, dla których reszta z dzielenia liczby $b+y$ przez n nie należy do zbioru S ;
- istnieje najwyżej $n-k$ wartości $y \in S$, dla których reszta z dzielenia liczby $a+b+y$ przez n nie należy do zbioru S .

Zatem istnieje najwyżej $3(n-k)$ takich wartości $y \in S$, że reszta z dzielenia przynajmniej jednej z liczb $a+y, b+y, a+b+y$ przez n nie należy do zbioru S .

Nierówność $k > \frac{3}{4}n$ daje $3(n-k) < k$, więc możemy wybrać taką liczbę $c \in S$, że reszty z dzielenia liczb $a+c, b+c, a+b+c$ przez n należą do zbioru S .

Tak otrzymane liczby a, b, c spełniają oczywiście warunki zadania.

Zadanie 2. Dodatnie liczby wymierne a i b spełniają równość

$$a^3 + 4a^2b = 4a^2 + b^4.$$

Udowodnić, że liczba $\sqrt{a} - 1$ jest kwadratem liczby wymiernej.

Rozwiązanie

Z zależności danej w treści zadania otrzymujemy

$$a(a+2b)^2 = a^3 + 4a^2b + 4ab^2 = 4a^2 + b^4 + 4ab^2 = (2a + b^2)^2,$$

skąd wniosek, że

$$a = \frac{(2a+b^2)^2}{(a+2b)^2}, \quad \text{czyli} \quad \sqrt{a} = \frac{2a+b^2}{a+2b}.$$

Zatem $\sqrt{a}$ jest liczbą wymierną. Ponadto liczba $x=b$ jest pierwiastkiem trójmianu kwadratowego

$$x^2 - 2\sqrt{a}x + 2a - a\sqrt{a} = 0.$$

Jednocześnie współczynniki tego trójmianu są liczbami wymiernymi i wobec tego jego wyróżnik, który wynosi

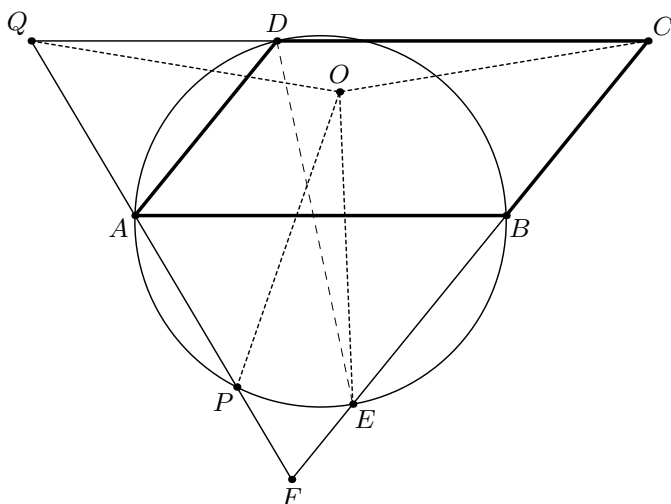
$$\Delta = (2\sqrt{a})^2 - 4(2a - a\sqrt{a}) = 4a(\sqrt{a} - 1),$$

jest kwadratem liczby wymiernej. Jest nim więc także liczba $\frac{\Delta}{(2\sqrt{a})^2} = \sqrt{a} - 1$.

Zadanie 3. Dany jest równoległobok $ABCD$, w którym kąt DAB jest ostry. Punkty A, P, B, D leżą w tej kolejności na jednym okręgu. Proste AP i CD przecinają się w punkcie Q . Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie CPQ . Wykazać, że jeśli $D \neq O$, to proste AD i DO są prostopadłe.

Rozwiązanie

Niech okrąg przechodzący przez punkty A, P, B, D przecina po raz drugi prostą BC w punkcie E (w przypadku styczności przyjmujemy $E = B$) oraz niech proste AP i BC przecinają się w punkcie F (rys. 1). Z założenia $\angle DAB < 90^\circ$ wynika, że punkty E i F leżą wewnątrz półprostej $CB^\rightarrow$.



rys. 1

Punkty A, P, E, B leżą na jednym okręgu, więc

$$(1) \quad FP \cdot FA = FE \cdot FB.$$

Z drugiej strony, twierdzenie Talesa zastosowane do kąta AFB przeciętego prostymi równoległymi AB i QC daje

$$(2) \quad \frac{FA}{FQ} = \frac{FB}{FC}.$$

Łącząc zależności (1) i (2) stwierdzamy, że

$$(3) \quad FP \cdot FQ = FE \cdot FC.$$

Ponadto punkty F , E , P bądź to pokrywają się, bądź są różne i punkt F leży na zewnątrz obu odcinków PQ i EC (jeżeli punkt P leży po tej samej stronie prostej BC , co odcinek AD) albo wewnątrz obu tych odcinków (gdy P leży po przeciwnej stronie prostej BC). We wszystkich tych przypadkach równość (3) wskazuje, że punkty P , Q , E , C leżą na jednym okręgu, którego środkiem — w myśl warunków zadania — jest punkt O . Wobec tego

$$(4) \quad OE = OC.$$

Jednocześnie trapez o podstawach AD i BE jako wpisany w okrąg jest trapezem równoramiennym, zatem odcinki AB i DE , będące jego dwiema przekątnymi albo dwoma ramionami, mają równe długości. Stąd

$$(5) \quad DE = DC.$$

Równości (4) i (5) oznaczają, że punkty D i O leżą na symetralnej odcinka EC , która jest oczywiście prostopadła do prostej AD . To kończy rozwiązanie.

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w Internecie pod adresem: www.om.edu.pl



LXI Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia trzeciego

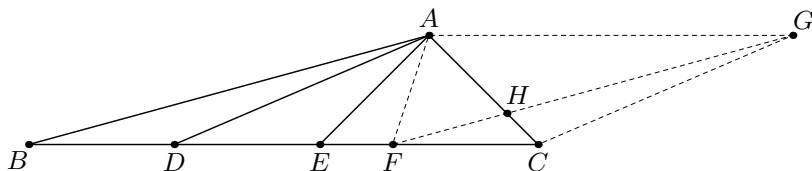
22 kwietnia 2010 r. (drugi dzień zawodów)

Zadanie 4. Wewnątrz boku BC trójkąta ABC leżą różne punkty D i E , przy czym $BD < BE$. Niech p_1 i p_2 oznaczają odpowiednio obwody trójkątów ABC i ADE . Udowodnić, że

$$p_1 > p_2 + 2 \cdot \min\{BD, EC\}.$$

Rozwiązanie

Niech F będzie takim punktem odcinka BC , że $CF = BD$ (rys. 2). Uzupełnimy trójkąt ABF do równoległoboku $ABFG$; wówczas czworokąt $ADCG$ także jest równoległobokiem.



rys. 2

Niech H oznacza punkt przecięcia odcinków AC i FG . Stosując nierówność trójkąta do (być może zdegenerowanego do odcinka) trójkąta AEF oraz do trójkątów GCH i AFH otrzymujemy

$$AE \leq AF + EF, \quad GC < GH + CH, \quad AF < HA + HF.$$

Wobec tego

$$\begin{aligned} AD + AE &= GC + AE \leq GC + AF + EF < GH + CH + HA + HF + EF = \\ &= AC + GF + EF = AC + AB + EF. \end{aligned}$$

Ponieważ $|x - y| = x + y - 2 \cdot \min\{x, y\}$ oraz $EF = |BD - CE|$, więc dostajemy

$$AD + AE < AC + AB + BD + CE - 2 \cdot \min\{BD, CE\}.$$

Dodając do obu stron powyższej nierówności wielkość DE stwierdzamy, że $p_2 < p_1 - 2 \cdot \min\{BD, CE\}$, co należało wykazać.

Zadanie 5. Liczba pierwsza $p > 3$ daje resztę 2 z dzielenia przez 3. Niech

$$a_k = k^2 + k + 1 \quad \text{dla } k = 1, 2, 3, \dots, p-1.$$

Wykazać, że iloczyn $a_1 a_2 a_3 \dots a_{p-1}$ daje resztę 3 z dzielenia przez p .

Rozwiązanie

Udowodnimy najpierw, że liczby $0^3, 1^3, 2^3, \dots, (p-1)^3$ dają różne reszty z dzielenia przez p .

Przypuśćmy bowiem, że dla pewnych $m, n \in \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$ spełniona jest zależność $m^3 \equiv n^3 \pmod{p}$. Z założenia mamy $p = 3\ell + 2$ dla pewnej liczby całkowitej ℓ , a więc

$$(1) \quad m^{2p-1} = m^{6\ell+3} = (m^3)^{2\ell+1} \equiv (n^3)^{2\ell+1} = n^{6\ell+3} = n^{2p-1} \pmod{p}.$$

Z drugiej strony, małe twierdzenie Fermata orzeka, że $m^p \equiv m \pmod{p}$ oraz $n^p \equiv n \pmod{p}$, co daje

$$m^{2p-1} = m^p \cdot m^{p-1} \equiv m \cdot m^{p-1} = m^p \equiv m \pmod{p}$$

i podobnie $n^{2p-1} \equiv n \pmod{p}$. Wraz z równością (1) prowadzi to do wniosku, że $m \equiv n \pmod{p}$, czyli $m = n$. To dowodzi początkowego stwierdzenia.

Ponieważ liczby $0^3 - 1$ i $1^3 - 1$ dają odpowiednio reszty $p-1$ i 0 z dzielenia przez p , więc w szczególności wykazaliśmy, że ciąg reszt z dzielenia liczb

$$2^3 - 1, \quad 3^3 - 1, \quad 4^3 - 1, \quad \dots, \quad (p-1)^3 - 1$$

przez p jest permutacją ciągu $1, 2, 3, \dots, p-2$. Wobec tego

$$(2) \quad (2^3-1)(3^3-1)(4^3-1)\dots((p-1)^3-1) \equiv 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (p-2) = (p-2)! \pmod{p}.$$

Z drugiej strony, mamy $k^3 - 1 = (k-1)a_k$ dla $k = 2, 3, 4, \dots, p-1$ i mnożąc te równości stronami dostajemy

$$(3) \quad (2^3-1)(3^3-1)(4^3-1)\dots((p-1)^3-1) = (p-2)! a_2 a_3 a_4 \dots a_{p-1}.$$

Łącząc zależności (2) i (3) widzimy, że $(p-2)! \equiv (p-2)! a_2 a_3 a_4 \dots a_{p-1} \pmod{p}$ i ponieważ liczba $(p-2)!$ nie jest podzielna przez liczbę pierwszą p , więc iloczyn $a_2 a_3 a_4 \dots a_{p-1}$ daje resztę 1 z dzielenia przez p . A skoro mamy $a_1 = 3$, iloczyn $a_1 a_2 a_3 \dots a_{p-1}$ daje resztę 3 z dzielenia przez p .

Zadanie 6. Dana jest liczba rzeczywista $C > 1$. Ciąg dodatnich liczb rzeczywistych $a_1, a_2, a_3, \dots$, w którym $a_1 = 1$ i $a_2 = 2$, spełnia warunki

$$a_{mn} = a_m a_n \quad \text{oraz} \quad a_{m+n} \leq C(a_m + a_n)$$

dla $m, n = 1, 2, 3, \dots$. Dowieść, że

$$a_n = n \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots$$

Rozwiązanie

Wykażemy przede wszystkim, że

$$a_{m+n} \leq a_m + a_n \quad \text{dla wszystkich } m, n = 1, 2, 3, \dots$$

Niech S oznacza zbiór takich dodatnich liczb rzeczywistych d , że nierówność $a_{m+n} \leq d(a_m + a_n)$ jest spełniona dla dowolnych $m, n = 1, 2, 3, \dots$. W myśl warunków zadania jest to zbiór niepusty, gdyż należy doń liczba C .

Ponadto wraz z dowolną liczbą do zbioru S należą wszystkie liczby większe. Zbiór S jest zatem przedziałem domkniętym $\langle D; \infty \rangle$ lub przedziałem otwartym $(D; \infty)$ dla pewnej dodatniej liczby rzeczywistej D . Ta druga możliwość jednak odpada. Oznacza ona bowiem, że dla każdej wartości $d > D$ nierówność $a_{m+n} \leq d(a_m + a_n)$ jest spełniona dla wszystkich $m, n = 1, 2, 3, \dots$

Ustalając wskaźniki m i n widzimy, że nieostra nierówność $a_{m+n} \leq d(a_m + a_n)$ jest prawdziwa dla *każdej* wartości $d > D$. Jest ona więc prawdziwa również dla $d = D$. Wobec tego $a_{m+n} \leq D(a_m + a_n)$ i z uwagi na dowolność wskaźników m i n stwierdzamy, że $D \in S$.

Zatem zbiór S jest przedziałem domkniętym $\langle D; \infty \rangle$.

Ponieważ $D \in S$, więc dla dowolnych $j, k, \ell = 1, 2, 3, \dots$ możemy napisać

$$a_{j+k+\ell} \leq D(a_j + a_{k+\ell}) \leq D(a_j + D(a_k + a_\ell)) = Da_j + D^2 a_k + D^2 a_\ell.$$

Dokonując cyklicznych przestawień symboli j, k, ℓ otrzymujemy dwie analogiczne nierówności. Sumując je wraz z powyższą uzyskujemy

$$a_{j+k+\ell} \leq \left(\frac{2}{3}D^2 + \frac{1}{3}D\right)(a_j + a_k + a_\ell).$$

Przyjmijmy teraz $j = m^2, k = 2mn, \ell = n^2$; otrzymujemy wówczas

$$a_{(m+n)^2} \leq \left(\frac{2}{3}D^2 + \frac{1}{3}D\right)(a_{m^2} + a_{2mn} + a_{n^2}).$$

Z warunków zadania wynika, że lewa strona powyższej nierówności wynosi a_{m+n}^2 , natomiast drugi nawias po prawej stronie można zapisać w postaci $a_m a_m + a_2 a_m a_n + a_n a_n = a_m^2 + 2a_m a_n + a_n^2 = (a_m + a_n)^2$. Zatem

$$a_{m+n} \leq \sqrt{\frac{2}{3}D^2 + \frac{1}{3}D} (a_m + a_n)$$

dla $m, n = 1, 2, 3, \dots$, skąd dostajemy relację $\sqrt{\frac{2}{3}D^2 + \frac{1}{3}D} \in S$. Na mocy określenia liczby D oznacza to, że $\sqrt{\frac{2}{3}D^2 + \frac{1}{3}D} \geq D$, co daje $D \geq D^2$ i $D \leq 1$.

Udowodniliśmy tym samym, że

$$(1) \quad a_{m+n} \leq a_m + a_n \quad \text{dla } m, n = 1, 2, 3, \dots$$

Nierówność (1) wskazuje w szczególności, że $a_{m+1} \leq a_m + 1$ dla $m = 1, 2, 3, \dots$, skąd stosując indukcję dostajemy $a_m \leq m$ dla każdego m .

Na koniec rozpatrzmy dowolną liczbę całkowitą dodatnią n i niech k będzie taką liczbą całkowitą, że $2^k > n$. Z zależności $a_2 = 2$ i $a_{\ell m} = a_\ell a_m$ dla wszystkich $\ell, m = 1, 2, 3, \dots$ wynika, że $a_{2^k} = 2^k$. W rezultacie na mocy (1) otrzymujemy zależność

$$2^k = a_{2^k} = a_{n+(2^k-n)} \leq a_n + a_{2^k-n} \leq n + (2^k - n) = 2^k.$$

Zatem w powyższych nierównościach muszą w istocie mieć miejsce równości, a to dowodzi, że $a_n = n$, co kończy rozwiązanie zadania.

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w Internecie pod adresem: www.om.edu.pl



LXII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego

I seria (1 września 2010 r. – 4 października 2010 r.)

1. Wyznaczyć wszystkie takie pary (a, b) liczb wymiernych dodatnich, że

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{4 + \sqrt{7}}.$$

2. Dane są liczby całkowite dodatnie m , n oraz d . Udowodnić, że jeżeli liczby $m^2n + 1$ i $mn^2 + 1$ są podzielne przez d , to również liczby $m^3 + 1$ i $n^3 + 1$ są podzielne przez d .

3. W czworokącie wypukłym $ABCD$ punkty M i N są odpowiednio środkami boków AB i CD , zaś przekątne przecinają się w punkcie E . Wykazać, że prosta zawierająca dwusieczną kąta BEC jest prostopadła do prostej MN wtedy i tylko wtedy, gdy $AC = BD$.

4. Dana jest liczba naturalna k . Dowieść, że z każdego zbioru liczb całkowitych, mającego więcej niż 3^k elementów, można wybrać $(k+1)$ -elementowy podzbiór S o następującej własności:

Dla dowolnych dwóch różnych podzbiorów $A, B \subseteq S$ suma wszystkich elementów zbioru A jest różna od sumy wszystkich elementów zbioru B . (Przyjmujemy, że suma elementów zbioru pustego wynosi 0.)

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

4 października 2010 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.



LXII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego

II seria (5 października 2010 r. – 4 listopada 2010 r.)

5. Krawędzie dwunastościanu foremnego chcemy ponumerować liczbami 1, 2, ..., 30, używając każdej z nich dokładnie raz. Rozstrzygnąć, czy można to uczynić tak, aby suma numerów krawędzi wychodzących z dowolnego wierzchołka była:

- a) parzysta;
- b) podzielna przez 4.

6. Dodatnie liczby rzeczywiste a, b, c spełniają warunek

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq a^3 + b^3 + c^3.$$

Udowodnić, że

$$\frac{a^3}{\sqrt{b^4 + b^2c^2 + c^4}} + \frac{b^3}{\sqrt{c^4 + c^2a^2 + a^4}} + \frac{c^3}{\sqrt{a^4 + a^2b^2 + b^4}} \geq \sqrt{3}.$$

7. Znaleźć wszystkie takie pary (a, b) różnych liczb całkowitych dodatnich, że liczba $b^2 + ab + 4$ jest podzielna przez liczbę $a^2 + ab + 4$.

8. Punkt M jest środkiem boku BC trójkąta ostrokątnego ABC . Punkt K leży na boku BC i spełnia warunek $\sphericalangle BAM = \sphericalangle KAC$. Na odcinku AK wybrano taki punkt E , że $\sphericalangle BEK = \sphericalangle BAC$. Dowieść, że

$$\sphericalangle KEC = \sphericalangle BAC.$$

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

4 listopada 2010 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.



LXII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego

III seria (5 listopada 2010 r. – 6 grudnia 2010 r.)

9. Wykazać, że dowolny czworokąt wypukły można rozciąć na 7 deltoidów.

10. Dane są różne nieparzyste liczby pierwsze p i q . Dowieść, że liczba $2^{pq} - 1$ ma co najmniej 3 różne dzielniki pierwsze.

11. W czworoscianie rozważamy dwusieczne trzech kątów płaskich mających wspólny wierzchołek. Wykazać, że jeżeli pewne dwie z tych dwusiecznych są prostopadłe, to wszystkie one są wzajemnie prostopadłe.

12. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje f określone na zbiorze wszystkich dodatnich liczb rzeczywistych i przyjmujące wartości rzeczywiste, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych x, y spełniona jest równość

$$f\left(\sqrt{\frac{x^2 + xy + y^2}{3}}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

6 grudnia 2010 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.

Adresy Komitetów Okręgowych Olimpiady Matematycznej

- Dla województwa pomorskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Gdańskiego, ul. Wita Stwosza 57, 80-952 Gdańsk

- Dla województwa śląskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Śląskiego, ul. Bankowa 14, 40-007 Katowice.

- Dla województwa małopolskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego, ul. Łojasiewicza 6, 30-348 Kraków.

- Dla województwa lubelskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Zakład Rachunku Prawdopodobieństwa pok. 810, Instytut Matematyki UMCS, pl. Marii Skłodowskiej-Curie 1, 20-031 Lublin.

- Dla województwa łódzkiego i świętokrzyskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki Uniwersytetu Łódzkiego, ul. Banacha 22, 90-238 Łódź.

- Dla województwa wielkopolskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki i Informatyki UAM, ul. Umultowska 87, 61-614 Poznań

- Dla województwa podkarpackiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Katedra Matematyki, Politechnika Rzeszowska, al. Powstańców Warszawy 8, 35-959 Rzeszów

- Dla województwa lubuskiego i zachodniopomorskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Uniwersytet Szczeciński, Instytut Matematyki, ul. Wielkopolska 15, 70-451 Szczecin.

- Dla województwa kujawsko-pomorskiego i warmińsko-mazurskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki i Informatyki UMK, ul. Chopina 12/18, 87-100 Toruń.

- Dla województwa mazowieckiego i podlaskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyczny PAN, ul. Śniadeckich 8, 00-956 Warszawa

- Dla województwa dolnośląskiego i opolskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego, pl. Grunwaldzki 2/4, 50-384 Wrocław

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w Internecie pod adresem: www.om.edu.pl



LXII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia pierwszego

(1 września 2010 r. – 6 grudnia 2010 r.)

Zadanie 1. Wyznaczyć wszystkie takie pary (a, b) liczb wymiernych dodatnich, że

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{4 + \sqrt{7}}.$$

Rozwiązanie

Przypuśćmy, że dodatnie liczby wymierne a i b spełniają daną w treści zadania równość. Przekształcając ją otrzymujemy kolejno

$$a + 2\sqrt{ab} + b = 4 + \sqrt{7},$$

$$2\sqrt{ab} = 4 - a - b + \sqrt{7},$$

$$4ab = (4 - a - b)^2 + 2(4 - a - b)\sqrt{7} + 7,$$

$$4ab - (4 - a - b)^2 - 7 = 2(4 - a - b)\sqrt{7}.$$

Liczby a i b są wymierne, zaś liczba $\sqrt{7}$ jest niewymierna. Zatem ostatnia z powyższych równości może mieć miejsce jedynie wtedy, gdy obie jej strony są równe zeru, skąd otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} a + b = 4 \\ 4ab = 7 \end{cases}.$$

By rozwiązać ten układ obliczamy, że $(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab = 4^2 - 7 = 9$, skąd uzyskujemy alternatywę dwóch układów:

$$\begin{cases} a + b = 4 \\ a - b = 3 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} a + b = 4 \\ a - b = -3 \end{cases}.$$

To daje dwie pary: $(a, b) = (\frac{7}{2}, \frac{1}{2})$ oraz $(a, b) = (\frac{1}{2}, \frac{7}{2})$.

Pozostaje sprawdzić, że obie te pary mają żądaną własność, czyli że prawdziwa jest równość $\sqrt{\frac{7}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{4 + \sqrt{7}}$. O jej prawdziwości przekonujemy się jednak natychmiast po obustronnym podniesieniu do kwadratu.

Odpowiedź: Szukanymi parami są $(a, b) = (\frac{7}{2}, \frac{1}{2})$ i $(a, b) = (\frac{1}{2}, \frac{7}{2})$.

Zadanie 2. Dane są liczby całkowite dodatnie m , n oraz d . Udowodnić, że jeżeli liczby $m^2n + 1$ i $mn^2 + 1$ są podzielne przez d , to również liczby $m^3 + 1$ i $n^3 + 1$ są podzielne przez d .

Rozwiązanie

Z warunków zadania wynika, że liczba

$$n(m^2n + 1) - m(mn^2 + 1) = n - m$$

jest podzielna przez d , gdyż lewa strona jest różnicą dwóch iloczynów, w których drugi czynnik jest podzielny przez d . Ponadto

$$m^3 + 1 = m^2(m - n) + (m^2n + 1),$$

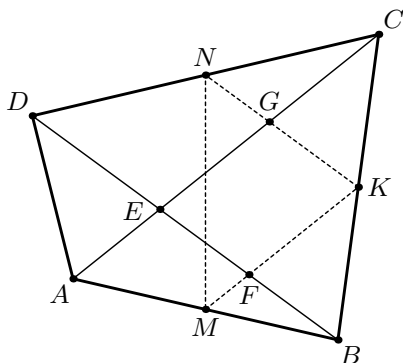
$$n^3 + 1 = n^2(n - m) + (mn^2 + 1),$$

a więc liczby $m^3 + 1$ i $n^3 + 1$ są sumami liczb podzielnych przez d , co kończy rozwiązanie.

Zadanie 3. W czworokącie wypukłym $ABCD$ punkty M i N są odpowiednio środkami boków AB i CD , zaś przekątne przecinają się w punkcie E . Wykazać, że prosta zawierająca dwusieczną kąta BEC jest prostopadła do prostej MN wtedy i tylko wtedy, gdy $AC = BD$.

Rozwiązanie

Niech K będzie środkiem boku BC , niech F będzie punktem przecięcia odcinków KM i BD oraz niech G będzie punktem przecięcia odcinków KN i AC (rys. 1).



rys. 1

Na mocy twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa uzyskujemy

$$(1) \quad KM \parallel AC \text{ i } KM = \frac{1}{2}AC \quad \text{oraz} \quad KN \parallel BD \text{ i } KN = \frac{1}{2}BD.$$

Wobec tego czworokąt $EFKG$ jest równoległobokiem, a więc dwusieczna kąta BEC jest równoległa do dwusiecznej kąta MKN .

Jak wiadomo, dwusieczna kąta wewnętrznego w trójkącie jest prostopadła do przeciwległego boku wtedy i tylko wtedy, gdy dwa boki przyległe do tego kąta mają równe długości. Zatem dwusieczna kąta MKN jest prostopadła do prostej MN wtedy i tylko wtedy, gdy $KM = KN$; z kolei w myśl zależności (1) warunki $KM = KN$ i $AC = BD$ są równoważne. To kończy dowód równoważności sformułowanej w zadaniu.

Zadanie 4. Dana jest liczba naturalna k . Dowieść, że z każdego zbioru liczb całkowitych, mającego więcej niż 3^k elementów, można wybrać $(k+1)$ -elementowy podzbiór S o następującej własności:

Dla dowolnych dwóch różnych podzbiorów $A, B \subseteq S$ suma wszystkich elementów zbioru A jest różna od sumy wszystkich elementów zbioru B . (Przyjmujemy, że suma elementów zbioru pustego wynosi 0.)

Rozwiązanie

Zbiory o opisanej własności nazwiemy *zbiorami rozróżniającymi sumy*.

Udowodnimy, że jeżeli $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ jest n -elementowym zbiorem liczb całkowitych rozróżniającym sumy, to istnieje co najwyżej 3^n takich liczb całkowitych x , że $X' = \{x, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ nie jest $(n+1)$ -elementowym zbiorem rozróżniającym sumy.

Wykluczamy najpierw wartości $x = x_1, x_2, \dots, x_n$, gdyż dla nich zbiór X' nie ma $n+1$ różnych elementów.

Następnie, jeżeli zbiór X' nie rozróżnia sum, to istnieją dwa różne podzbiory $A, B \subseteq X'$ o jednakowych sumach elementów. Usuając z nich wspólne elementy możemy przyjąć, iż są to podzbiory rozłączne. Ponadto zbiór X rozróżnia sumy, a więc do jednego z tych podzbiorów musi należeć liczba x ; niech na przykład $x \in A$. Zatem $A = \{x, x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_p}\}$ i $B = \{x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_q}\}$, gdzie wszystkie wskaźniki $i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q$ są różne. Zbiory A i B mają jednakowe sumy elementów, skąd uzyskujemy równość

$$x = x_{j_1} + x_{j_2} + \dots + x_{j_q} - x_{i_1} - x_{i_2} - \dots - x_{i_p}.$$

Wobec tego x jest liczbą postaci $\varepsilon_1 x_1 + \varepsilon_2 x_2 + \dots + \varepsilon_n x_n$, gdzie $\varepsilon_i \in \{-1, 0, 1\}$ dla $i = 1, 2, \dots, n$; taką postać mają również wykluczone wcześniej wartości $x = x_1, x_2, \dots, x_n$. Ponieważ istnieje 3^n ciągów n -elementowych $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ o wyrazach z 3-elementowego zbioru $\{-1, 0, 1\}$, więc istnieje co najwyżej 3^n liczb wskazanej postaci, co dowodzi początkowego stwierdzenia.

Przechodząc do rozwiązywania zadania oznaczmy przez K dany w treści zbiór liczb całkowitych, mający więcej niż 3^k elementów. Wybierzmy najpierw dowolny jednoelementowy podzbiór $S_1 \subseteq K$, którego elementem jest liczba różna od zera; podzbiór ten oczywiście rozróżnia sumy. Przyjmijmy teraz, że mamy dany n -elementowy podzbiór $S_n \subseteq K$ rozróżniający sumy. Na mocy udowodnionego stwierdzenia istnieje najwyżej 3^n liczb całkowitych x , dla których $S_n \cup \{x\}$ nie jest $(n+1)$ -elementowym zbiorem rozróżniającym sumy. Zatem jeżeli $n < k+1$, to liczba 3^n jest mniejsza od liczby elementów zbioru K . W efekcie istnieje taka liczba $x \in K$, że $S_{n+1} = S_n \cup \{x\}$ jest $(n+1)$ -elementowym podzbiorem rozróżniającym sumy.

Postępując w ten sposób skonstruujemy ciąg $S_1 \subseteq S_2 \subseteq \dots \subseteq S_k \subseteq S_{k+1}$ podzbiorów zbioru K rozróżniających sumy. Zbiór $S = S_{k+1}$ spełnia wówczas warunki zadania.

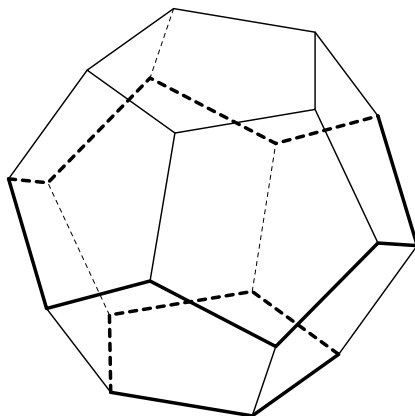
Zadanie 5. Krawędzie dwunastościanu foremnego chcemy ponumerować liczbami $1, 2, \dots, 30$, używając każdej z nich dokładnie raz. Rozstrzygnąć, czy można to uczynić tak, aby suma numerów krawędzi wychodzących z dowolnego wierzchołka była:

- a) parzysta;
- b) podzielna przez 4.

Rozwiązanie

a) Dwunastościan foremny składa się z dolnej podstawy i pięciu ścian do niej przyległych oraz górnej podstawy i pięciu ścian do niej przyległych. Istnieje 10 krawędzi, których żaden koniec nie należy do podstaw; krawędzie te tworzą drogę zamkniętą o długości 10.

Pomalujmy na czarno krawędzie tworzące tę właśnie drogę oraz krawędzie dolnej podstawy (na rys. 2 wymienione krawędzie są pogrubione). Łącznie otrzymujemy w ten sposób 15 czarnych krawędzi. Ponadto z każdego wierzchołka górnej podstawy nie wychodzą żadne czarne krawędzie, a z dowolnego innego wierzchołka wychodzą dokładnie dwie czarne krawędzie.



rys. 2

Ponumerujmy teraz w dowolny sposób czarne krawędzie liczbami nieparzystymi $1, 3, \dots, 29$, zaś pozostałe krawędzie — w dowolny sposób liczbami parzystymi $2, 4, \dots, 30$. Wówczas z każdego wierzchołka wychodzi parzysta liczba krawędzi ponumerowanych liczbami nieparzystymi. Stąd suma numerów krawędzi wychodzących z każdego wierzchołka jest parzysta.

b) Przypuśćmy, że krawędzie danego dwunastościanu ponumerowano liczbami $1, 2, \dots, 30$. Wpiszmy w każdym wierzchołku dwunastościanu sumę numerów trzech wychodzących zeń krawędzi. Każda krawędź ma dwa końce, więc suma S wszystkich liczb znajdujących się w wierzchołkach jest dwukrotnością sumy numerów wszystkich krawędzi: $S = 2(1 + 2 + \dots + 30) = 30 \cdot 31$. Wobec tego suma S jest liczbą niepodzielną przez 4; to zaś oznacza, że nie we wszystkich wierzchołkach dwunastościanu wpisana jest liczba podzielna

przez 4. Zatem nie istnieje ponumerowanie krawędzi o wymaganej własności.

Odpowiedź: a) Tak. b) Nie.

Zadanie 6. Dodatnie liczby rzeczywiste a, b, c spełniają warunek

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq a^3 + b^3 + c^3.$$

Udowodnić, że

$$\frac{a^3}{\sqrt{b^4 + b^2c^2 + c^4}} + \frac{b^3}{\sqrt{c^4 + c^2a^2 + a^4}} + \frac{c^3}{\sqrt{a^4 + a^2b^2 + b^4}} \geq \sqrt{3}.$$

Rozwiązanie

Wykażemy, że prawdziwa jest nierówność

$$(1) \quad \frac{a^3}{\sqrt{b^4 + b^2c^2 + c^4}} \geq \sqrt{3} \cdot \frac{a^4}{a^3 + b^3 + c^3}.$$

Nierówność ta jest kolejno równoważna nierównościom:

$$\begin{aligned} a^3(a^3 + b^3 + c^3) &\geq a^4 \sqrt{3(b^4 + b^2c^2 + c^4)}, \\ a^3 + b^3 + c^3 &\geq a \sqrt{3(b^4 + b^2c^2 + c^4)}, \\ (a^3 + b^3 + c^3)^2 &\geq 3a^2(b^4 + b^2c^2 + c^4), \end{aligned}$$

i w efekcie zależność (1) jest równoważna zależności

$$(2) \quad a^6 + b^6 + c^6 + 2a^3b^3 + 2a^3c^3 + 2b^3c^3 \geq 3a^2b^4 + 3a^2c^4 + 3a^2b^2c^2.$$

Stosując trzykrotnie nierówność między średnią arytmetyczną i geometryczną dostajemy

$$\begin{aligned} b^6 + a^3b^3 + a^3b^3 &\geq 3 \sqrt[3]{b^6(a^3b^3)(a^3b^3)} = 3a^2b^4, \\ c^6 + a^3c^3 + a^3c^3 &\geq 3 \sqrt[3]{c^6(a^3c^3)(a^3c^3)} = 3a^2c^4, \\ a^6 + b^3c^3 + b^3c^3 &\geq 3 \sqrt[3]{a^6(b^3c^3)(b^3c^3)} = 3a^2b^2c^2. \end{aligned}$$

Sumując stronami trzy powyższe nierówności uzyskujemy nierówność (2), a więc i równoważną z nią nierówność (1).

Analogicznie dowodzimy, że

$$(3) \quad \frac{b^3}{\sqrt{c^4 + c^2a^2 + a^4}} \geq \sqrt{3} \cdot \frac{b^4}{a^3 + b^3 + c^3},$$

$$(4) \quad \frac{c^3}{\sqrt{a^4 + a^2b^2 + b^4}} \geq \sqrt{3} \cdot \frac{c^4}{a^3 + b^3 + c^3}.$$

Dodając stronami zależności (1), (3) i (4) oraz korzystając z danego w treści zadania warunku $a^4 + b^4 + c^4 \geq a^3 + b^3 + c^3$ uzyskujemy tezę.

Zadanie 7. Znaleźć wszystkie takie pary (a, b) różnych liczb całkowitych dodatnich, że liczba $b^2 + ab + 4$ jest podzielna przez liczbę $a^2 + ab + 4$.

Rozwiązanie

Przypuśćmy, że para (a, b) spełnia warunki zadania. Wówczas prawdziwa jest nierówność $b^2 + ab + 4 \geq a^2 + ab + 4$ i na mocy założenia $a \neq b$ dostajemy $a < b$. Ponadto liczba

$$b(a^2 + ab + 4) - a(b^2 + ab + 4) = 4b - 4a$$

jest podzielna przez $a^2 + ab + 4$. Jak stwierdziliśmy wcześniej, prawa strona powyższej równości jest liczbą dodatnią. W takim razie $4b - 4a \geq a^2 + ab + 4$ lub równoważnie $(4 - a)b \geq (a + 2)^2$. Wobec tego $(4 - a)b$ jest liczbą dodatnią, skąd uzyskujemy $a < 4$. Pozostaje więc rozpatrzyć wartości $a = 1, 2, 3$.

1. $a = 1$. Zatem liczba $b^2 + b + 4$ ma być podzielna przez $b + 5$. Mamy

$$b^2 + b + 4 = (b + 5)(b - 4) + 24,$$

czyli żądana podzielność zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy liczba 24 jest podzielna przez $b + 5$. Stąd $b + 5 \in \{6, 8, 12, 14\}$, co daje $b \in \{3, 7, 19\}$; wartość $b = 1$ odrzucamy ze względu na wymaganie $a \neq b$.

2. $a = 2$. Zatem liczba $b^2 + 2b + 4$ ma być podzielna przez $2b + 8$. Liczba $b^2 + 2b + 4$ musi więc być parzysta, czyli także b jest liczbą parzystą. Ponadto

$$b^2 + 2b + 4 = (b + 4)(b - 2) + 12 = (2b + 8) \cdot \frac{1}{2}(b - 2) + 12,$$

przy czym liczba $\frac{1}{2}(b - 2)$ jest całkowita. Wobec tego rozpatrywana podzielność ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $2b + 8$ jest parzystym dzielnikiem liczby 12 większym od 8, a więc $2b + 8 = 12$. Stąd $b = 2$, lecz tę wartość musimy odrzucić, gdyż $a \neq b$.

3. $a = 3$. Zatem liczba $b^2 + 3b + 4$ ma być podzielna przez $3b + 13$. Mamy

$$3(b^2 + 3b + 4) = 3b^2 + 9b + 12 = b(3b + 13) - (4b - 12),$$

i w rezultacie liczba $4b - 12$ musi być podzielna przez $3b + 13$. Wiemy jednak, że $b > a$, skąd $4b - 12 > 0$; ponadto oczywiście $4b - 12 < 2(3b + 13)$. Musi więc być $4b - 12 = 3b + 13$, co daje wartość $b = 25$. Pozostaje sprawdzić, że liczba $25^2 + 3 \cdot 25 + 4 = 704 = 8 \cdot 88$ istotnie jest podzielna przez $3 \cdot 25 + 13 = 88$.

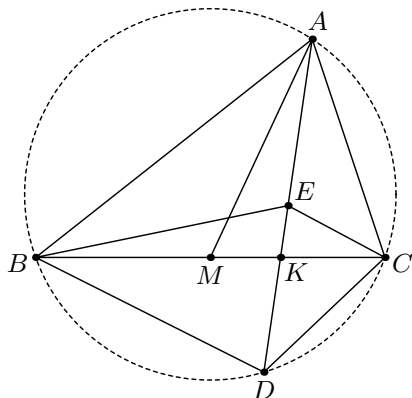
Odpowiedź: Szukanymi parami (a, b) są: $(1, 3)$, $(1, 7)$, $(1, 19)$, $(3, 25)$.

Zadanie 8. Punkt M jest środkiem boku BC trójkąta ostrokątnego ABC . Punkt K leży na boku BC i spełnia warunek $\sphericalangle BAM = \sphericalangle KAC$. Na odcinku AK wybrano taki punkt E , że $\sphericalangle BEK = \sphericalangle BAC$. Dowieść, że

$$\sphericalangle KEC = \sphericalangle BAC.$$

Rozwiązanie

Niech półprosta $AK^{\rightarrow}$ przecina okrąg opisany na trójkącie ABC po raz drugi w punkcie D (rys. 3).



rys. 3

Mamy wówczas $\sphericalangle MBA = \sphericalangle CDA$ oraz $\sphericalangle BAM = \sphericalangle DAC$, zatem trójkąty ABM i ADC są podobne (cecha *kąt-kąt-kąt*). Stąd $\frac{AB}{BM} = \frac{AD}{DC}$, czyli

$$(1) \quad AB \cdot DC = AD \cdot BM.$$

Analogicznie $\sphericalangle MCA = \sphericalangle BDA$ i $\sphericalangle MAC = \sphericalangle BAD$, skąd uzyskujemy podobieństwo trójkątów ABD i AMC , co daje

$$(2) \quad AD \cdot MC = AC \cdot BD.$$

Punkt M jest środkiem boku BC , więc $BM = MC$; z zależności (1) i (2) wynika teraz, że

$$(3) \quad AB \cdot DC = AC \cdot BD.$$

Zauważmy dalej, że na mocy założeń zadania mamy $\sphericalangle BED = \sphericalangle BAC$; ponadto $\sphericalangle BDE = \sphericalangle BCA$ i wobec tego trójkąty BED i BAC są podobne (cecha *kąt-kąt-kąt*). W efekcie $\frac{BD}{DE} = \frac{BC}{CA}$ i stosując równość (3) dostajemy

$$DE \cdot BC = BD \cdot CA = AB \cdot DC,$$

co prowadzi do wniosku, że

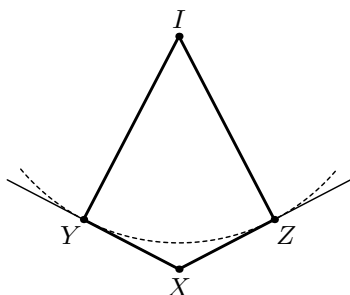
$$(4) \quad \frac{CD}{DE} = \frac{CB}{BA}.$$

Ponieważ zaś $\sphericalangle CDE = \sphericalangle CBA$, więc zależność (4) pociąga za sobą podobieństwo trójkątów CDE i CBA (cecha *kąt-bok-kąt*), z którego wynika teza.

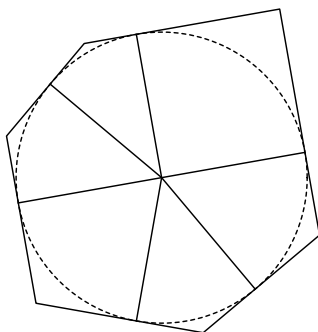
Zadanie 9. Wykazać, że dowolny czworokąt wypukły można rozciąć na 7 deltoidów.

Rozwiązanie

Zauważmy najpierw, że jeśli okrąg o środku w punkcie I wpisany w kąt o wierzchołku X jest styczny do jego ramion w punktach Y i Z (rys. 4), to czworokąt $IYXZ$ jest deltoidem. Z tego spostrzeżenia wprost wynika, że dowolny n -kąt opisany na okręgu można rozciąć na n deltoidów (rys. 5).

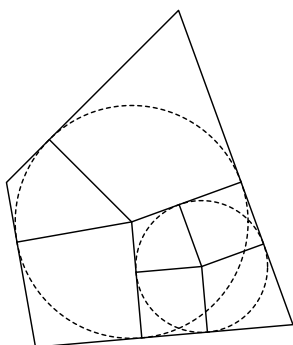


rys. 4

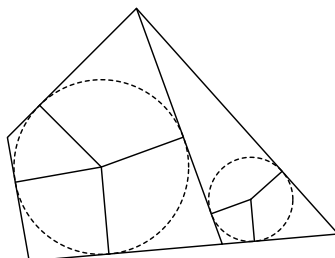


rys. 5

Przechodzimy do rozwiązania zadania. Jeżeli w dany czworokąt wypukły można wpisać okrąg, to czworokąt ten można podzielić na 4 deltoidy. Ponadto w każdy deltoid można wpisać okrąg, a więc jeden z tych deltoidów możemy rozciąć na 4 mniejsze deltoidy. W rezultacie otrzymujemy podział wyjściowego czworokąta na 7 deltoidów (rys. 6).



rys. 6



rys. 7

Jeżeli natomiast w rozpatrywany czworokąt wypukły nie można wpisać okręgu, to istnieje okrąg styczny do trzech jego boków i nie mający punktów wspólnych z czwartym bokiem (okrąg taki otrzymujemy wpisując w dowolnie wybrany kąt wewnętrzny czworokąta mały okrąg i powiększając go aż do uzyskania styczności z trzecim bokiem). Wówczas dany czworokąt można rozbić na opisany na tym okręgu czworokąt, który daje się podzielić na 4 deltoidy, oraz trójkąt, który daje się podzielić na 3 deltoidy (rys. 7). W ten sposób wyjściowy czworokąt został rozcięty na 7 deltoidów.

Zadanie 10. Dane są różne nieparzyste liczby pierwsze p i q . Dowieść, że liczba $2^{pq} - 1$ ma co najmniej 3 różne dzielniki pierwsze.

Rozwiązanie

Będziemy wielokrotnie korzystać z tożsamości

$$(1) \quad \frac{a^n - 1}{a - 1} = 1 + a + a^2 + \dots + a^{n-2} + a^{n-1}$$

prawdziwej dla dowolnej liczby $a \neq 1$ i dowolnej liczby całkowitej dodatniej n .

Z tożsamości tej zastosowanej raz dla $a = 2^p$ i $n = q$, a raz dla $a = 2^q$ i $n = p$ wynika, że liczba $2^{pq} - 1$ jest podzielna przez liczby $2^p - 1$ i $2^q - 1$.

Wykażemy teraz, że liczby $2^p - 1$ i $2^q - 1$ są względnie pierwsze. Przypuśćmy bowiem, że mają one wspólny dzielnik całkowity $d > 1$; jest on oczywiście liczbą nieparzystą. Niech k oznacza najmniejszą liczbę całkowitą dodatnią, dla której liczba $2^k - 1$ jest podzielna przez d . Podzielmy liczby p i q przez k otrzymując odpowiednio ilorazy n_p i n_q oraz reszty r_p i r_q . Innymi słowy,

$$p = kn_p + r_p \quad \text{oraz} \quad q = kn_q + r_q, \quad \text{gdzie } 0 \leq r_p, r_q < k.$$

Tożsamość (1) dla $a = 2^k$ i $n = n_p$ implikuje podzielność liczby $a^n - 1 = 2^{kn_p} - 1$ przez $a - 1 = 2^k - 1$, a więc podzielność liczby $2^{kn_p} - 1$ przez d . Różnica

$$(2^p - 1) - (2^{kn_p} - 1) = 2^p - 2^{kn_p} = 2^{kn_p + r_p} - 2^{kn_p} = 2^{kn_p} (2^{r_p} - 1)$$

jest wobec tego podzielna przez liczbę nieparzystą d , zatem i liczba $2^{r_p} - 1$ jest podzielna przez d . Z określenia liczby k i nierówności $r_p < k$ dostajemy $r_p = 0$, czyli liczba p jest podzielna przez k . Analogicznie liczba q jest podzielna przez k . Jednak p i q są różnymi liczbami pierwszymi, skąd $k = 1$ i liczba $2^k - 1 = 1$ jest podzielna przez d , wbrew nierówności $d > 1$.

Skoro $2^p - 1$ i $2^q - 1$ są względnie pierwszymi dzielnikami liczby $2^{pq} - 1$, więc istnieje taka liczba całkowita dodatnia m , że

$$(2) \quad 2^{pq} - 1 = (2^p - 1)(2^q - 1)m.$$

Przy tym $m > 1$, gdyż liczba $2^{pq} - 1$ daje resztę 3 z dzielenia przez 4, natomiast iloczyn $(2^p - 1)(2^q - 1)$ daje resztę 1 z dzielenia przez 4.

Zbadamy następnie, jakie wspólne dzielniki mogą mieć liczby $2^p - 1$ i m . Przypuśćmy, że d jest takim dzielnikiem; zatem d jest także wspólnym dzielnikiem liczb $2^p - 1$ i

$$(3) \quad (2^q - 1)m = \frac{2^{pq} - 1}{2^p - 1} = 1 + 2^p + 2^{2p} + \dots + 2^{(q-2)p} + 2^{(q-1)p},$$

gdzie ponownie wykorzystaliśmy tożsamość (1). Podzielność liczby $2^p - 1$ przez d oznacza, że prawa strona zależności (3) jest sumą q składników, z których każdy daje resztę 1 z dzielenia przez d . Zatem liczba $(2^q - 1)m$ daje z dzielenia przez d tę samą resztę, co liczba pierwsza q , z drugiej zaś strony liczba $(2^q - 1)m$ jest podzielna przez d . Wobec tego $d = 1$ lub $d = q$.

Przeprowadzając podobne rozumowanie dla wspólnych dzielników liczb $2^q - 1$ i m stwierdzamy, że

$$(4) \quad \text{NWD}(2^p - 1, m) \in \{1, q\} \quad \text{oraz} \quad \text{NWD}(2^q - 1, m) \in \{1, p\}.$$

W równości (2) po prawej stronie występują 3 czynniki, z których dwa pierwsze są względnie pierwsze. Jeżeli którykolwiek z tych dwóch czynników ma więcej niż jeden dzielnik pierwszy, to liczba $2^{pq} - 1$ ma co najmniej 3 dzielniki pierwsze. Możemy więc w dalszej części rozwiązania przyjąć, że liczby $2^p - 1$ i $2^q - 1$ są potęgami liczb pierwszych. Ponadto z uwagi na symetrię wolno założyć, że $p > q$.

Udowodnimy, że liczba $2^p - 1$ nie jest podzielna przez q . Wśród $q+1$ liczb $2^0, 2^1, 2^2, \dots, 2^{q-1}, 2^q$ pewne dwie dają te same reszty z dzielenia przez q . Niech będą to 2^{ℓ_1} i 2^{ℓ_2} , gdzie $0 \leq \ell_1 < \ell_2 \leq q$. Różnica

$$2^{\ell_2} - 2^{\ell_1} = 2^{\ell_1}(2^{\ell_2 - \ell_1} - 1)$$

jest wówczas podzielna przez q , więc przez q dzieli się także liczba $2^\ell - 1$, gdzie $\ell = \ell_2 - \ell_1$. W efekcie liczby $2^p - 1$ i $2^\ell - 1$ są podzielne przez q . Stosując rozumowanie takie jak w trzecim akapicie rozwiązania stwierdzamy, że istnieje taki wspólny dzielnik h liczb p i ℓ , że liczba $2^h - 1$ jest podzielna przez q . Jednak p jest liczbą pierwszą oraz $\ell \leq q < p$, czyli jedynym takim dzielnikiem jest $h = 1$. Stąd liczba $2^1 - 1$ jest podzielna przez q i mamy sprzeczność.

Wobec tego liczba $2^p - 1$ jest potęgą liczby pierwszej różnej od q , zaś liczba $2^q - 1$ jest potęgą liczby pierwszej (być może równej p). W tej sytuacji z rozkładu (2) oraz z zależności (4) wynika, że liczba $2^p - 1$ jest względnie pierwsza zarówno z liczbą $2^q - 1$, jak i z liczbą m . Zatem liczba $2^{pq} - 1$ może nie mieć 3 różnych dzielników pierwszych tylko wtedy, gdy $2^q - 1$ i m są potęgami liczby pierwszej p , a więc gdy

$$(5) \quad 2^q - 1 = p^\alpha \quad \text{oraz} \quad m = p^\beta,$$

gdzie w myśl (4) przynajmniej jeden z wykładników α, β jest równy 1.

Niech najpierw $\alpha = 1$, czyli $2^q = p + 1$. Na mocy wzorów (2) i (1) mamy

$$\begin{aligned} (2^p - 1)p^\beta &= (2^p - 1)m = \frac{2^{pq} - 1}{2^q - 1} = 1 + 2^q + 2^{2q} + \dots + 2^{(p-1)q} = \\ &= 1 + (p+1) + (p+1)^2 + \dots + (p+1)^{p-1} = \frac{(p+1)^p - 1}{p}, \end{aligned}$$

i stosując wzór dwumianowy dochodzimy do wniosku, że

$$\begin{aligned} (2^p - 1)p^{\beta+1} &= (p+1)^p - 1 = \\ &= p^p + \binom{p}{1}p^{p-1} + \dots + \binom{p}{p-3}p^3 + \binom{p}{p-2}p^2 + \binom{p}{p-1}p + 1 - 1 = \\ &= p^p + \binom{p}{1}p^{p-1} + \dots + \binom{p}{p-3}p^3 + \binom{p}{p-2}p^2 + p^2. \end{aligned}$$

W otrzymanej liczbie wszystkie składniki z wyjątkiem ostatniego są podzielne przez p^3 — współczynnik $\binom{p}{p-2} = \frac{1}{2}p(p-1)$ jest bowiem podzielny przez liczbę pierwszą $p \geq 3$. W rezultacie liczba $(2^p - 1)p^{\beta+1}$ jest podzielna przez p^2 , ale nie przez p^3 , co daje $\beta = 1$.

Zatem w równościach (5) zawsze mamy $\beta = 1$ i w takim razie

$$m = p^\beta = p \leq p^\alpha = 2^q - 1.$$

Stąd jednak otrzymujemy

$$2^{pq-1} < 2^{pq} - 1 = (2^p - 1)(2^q - 1)m \leq (2^p - 1)(2^q - 1)^2 < 2^p(2^q)^2 = 2^{p+2q}$$

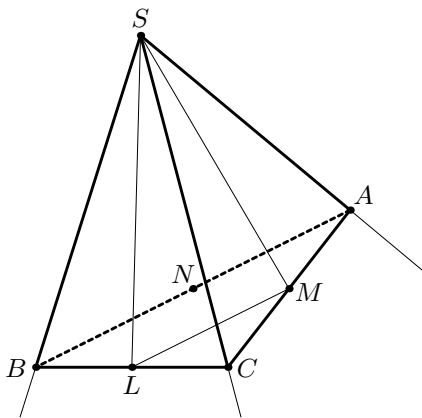
i wobec tego $pq - 1 < p + 2q$, czyli $p(q - 1) < 2q + 1$. Ta nierówność nie może jednak mieć miejsca dla różnych liczb całkowitych $p, q \geq 3$, gdyż wówczas $p(q - 1) < 2q + 1 < 2q + 1 + (2q - 5) = 4(q - 1)$ i musiałoby być $p = 3$, lecz wtedy dostajemy $3(q - 1) < 2q + 1$, co daje $q < 4$.

Uzyskana sprzeczność wskazuje, że równości (5) nie mogą być jednocześnie prawdziwe; to zaś, jak stwierdziliśmy wcześniej, kończy rozwiązanie.

Zadanie 11. W czworościanie rozważamy dwusieczne trzech kątów płaskich mających wspólny wierzchołek. Wykazać, że jeżeli pewne dwie z tych dwusiecznych są prostopadłe, to wszystkie one są wzajemnie prostopadłe.

Rozwiązanie

Niech S będzie wspólnym wierzchołkiem danych kątów płaskich. Na trzech ramionach tych kątów płaskich wybierzmy takie punkty A, B i C , że odcinki SA, SB i SC mają jednakową długość (rys. 8), którą oznaczmy d . Przyjmijmy ponadto oznaczenia: $a = \frac{1}{2} \cdot BC$, $b = \frac{1}{2} \cdot CA$, $c = \frac{1}{2} \cdot AB$.



rys. 8

Niech L, M i N oznaczają odpowiednio środki odcinków BC, CA i AB . Trójkąty SBC, SCA i SAB są równoramienne, zatem półproste $SL^\rightarrow, SM^\rightarrow$ i $SN^\rightarrow$ są odpowiednio dwusiecznymi kątów płaskich BSC, CSA i ASB .

Znajdziemy warunek konieczny i dostateczny na to, by półproste $SL^\rightarrow$ i $SM^\rightarrow$ były prostopadłe. Na mocy twierdzenia Pitagorasa prostopadłość ta jest równoważna równości

$$(1) \quad SL^2 + SM^2 = LM^2.$$

Z drugiej jednak strony, twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa daje $LM = \frac{1}{2}AB = c$, zaś twierdzenie Pitagorasa prowadzi do wniosku, że

$$SL^2 = SC^2 - CL^2 = d^2 - a^2 \quad \text{oraz} \quad SM^2 = SC^2 - CM^2 = d^2 - b^2.$$

W rezultacie warunek (1) jest równoważny równości

$$(2) \quad 2d^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

Analogicznie dowodzimy, że każda z prostopadłości $SM^\perp \perp SN^\perp$ oraz $SN^\perp \perp SL^\perp$ jest równoważna warunkowi (2). Wynika stąd teza zadania.

Zadanie 12. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje f określone na zbiorze wszystkich dodatnich liczb rzeczywistych i przyjmujące wartości rzeczywiste, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych x, y spełniona jest równość

$$f\left(\sqrt{\frac{x^2 + xy + y^2}{3}}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

Rozwiązanie

Wprowadźmy oznaczenie

$$(1) \quad a * b = \sqrt{\frac{a^2 + ab + b^2}{3}},$$

gdzie a i b są dowolnymi liczbami dodatnimi. Wówczas daną w treści zadania równość możemy zapisać w postaci

$$(2) \quad f(x * y) = \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

Stosując trzykrotnie warunek (2) widzimy, że dla dowolnych liczb dodatnich x_1, x_2, x_3, x_4 prawdziwa jest zależność

$$f((x_1 * x_2) * (x_3 * x_4)) = \frac{f(x_1 * x_2) + f(x_3 * x_4)}{2} = \frac{f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4)}{4}.$$

Prawa strona powyższej zależności nie zmienia się pod wpływem przestawienia symboli x_1, x_2, x_3, x_4 . Wobec tego dokonując permutacji tych symboli po lewej stronie nie zmienimy jej wartości; w szczególności uzyskujemy

$$(3) \quad f((x_1 * x_4) * (x_2 * x_3)) = f((x_1 * x_2) * (x_3 * x_4)).$$

Określmy teraz funkcje g i h wzorami

$$g(x) = (x^2 * x) * (x * 1) \quad \text{oraz} \quad h(x) = (x^2 * 1) * (x * x)$$

dla każdej liczby dodatniej $x > 0$. Z definicji (1) wynika natychmiast, że dla dowolnej liczby $t > 0$ mamy $ta * tb = t \cdot (a * b)$, skąd

$$tg(x) = (tx^2 * tx) * (tx * t) \quad \text{oraz} \quad th(x) = (tx^2 * t) * (tx * tx)$$

dla wszystkich liczb $t, x > 0$. W takim razie stosując równość (3) do ciągu $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (tx^2, tx, tx, t)$ otrzymujemy związek

$$(4) \quad f(tg(x)) = f(th(x)) \quad \text{dla } t, x > 0.$$

Zauważmy, że $g(1) = h(1) = 1$ oraz

$$g(2) = (4 * 2) * (2 * 1) = \sqrt{\frac{28}{3}} * \sqrt{\frac{7}{3}} = \frac{7}{3},$$

$$h(2) = (4 * 1) * (2 * 2) = \sqrt{7} * 2 = \sqrt{\frac{1}{3}(11 + 2\sqrt{7})}.$$

Nietrudno sprawdzić, że $g(2) > h(2)$; rzeczywiście, przekształcając równoważnie tę nierówność dostajemy kolejno $\frac{49}{9} > \frac{1}{3}(11 + 2\sqrt{7})$, $49 > 33 + 6\sqrt{7}$, $8 > 3\sqrt{7}$, $64 > 63$. Zatem

$$\frac{g(1)}{h(1)} = 1 \quad \text{oraz} \quad \lambda = \frac{g(2)}{h(2)} > 1.$$

Ponieważ $\frac{g(x)}{h(x)}$ jest funkcją ciągłą zmiennej x , więc każda liczba rzeczywista z przedziału $\langle 1; \lambda \rangle$ jest wartością tego ilorazu dla pewnej liczby $x \in \langle 1; 2 \rangle$.

Niech a będzie liczbą dodatnią i rozpatrzmy dowolną liczbę $b \in \langle a; \lambda a \rangle$.

Wówczas $\frac{b}{a} \in \langle 1; \lambda \rangle$ i na mocy konkluzji poprzedniego akapitu mamy

$$\frac{b}{a} = \frac{g(z)}{h(z)}$$

dla pewnej liczby rzeczywistej $z \in \langle 1; 2 \rangle$; stąd zaś, w myśl równości (4) zastosowanej dla $t = \frac{a}{h(z)}$ i $x = z$, otrzymujemy

$$f(b) = f\left(a \cdot \frac{b}{a}\right) = f\left(a \cdot \frac{g(z)}{h(z)}\right) = f\left(\frac{a}{h(z)} \cdot g(z)\right) = f\left(\frac{a}{h(z)} \cdot h(z)\right) = f(a).$$

To oznacza, że funkcja f jest stała na przedziale $\langle a; \lambda a \rangle$.

Jeżeli wreszcie a i b są dowolnymi liczbami dodatnimi, przy czym $a \leq b$, to dla dostatecznie dużej liczby naturalnej n spełniona jest nierówność

$$\mu = \sqrt[n]{\frac{b}{a}} \leq \lambda.$$

Wobec tego funkcja f jest stała na każdym z przedziałów

$$\langle a; \mu a \rangle, \quad \langle \mu a; \mu^2 a \rangle, \quad \langle \mu^2 a; \mu^3 a \rangle, \quad \dots, \quad \langle \mu^{n-1} a; \mu^n a \rangle,$$

skąd wynika, że

$$f(a) = f(\mu a) = f(\mu^2 a) = \dots = f(\mu^{n-1} a) = f(\mu^n a) = f\left(\frac{b}{a} \cdot a\right) = f(b).$$

Jednak liczby a i b wybraliśmy dowolnie, czyli f musi być funkcją stałą.

Pozostaje stwierdzić, że funkcje stałe mają wymaganą własność.

Odpowiedź: Szukanymi funkcjami są wszystkie funkcje stałe.

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w Internecie pod adresem: www.om.edu.pl



LXII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia drugiego

18 lutego 2011 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Rozwiązać w liczbach rzeczywistych układ równań

$$\begin{cases} (x-y)(x^3+y^3)=7 \\ (x+y)(x^3-y^3)=3 \end{cases}$$

2. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym $AB < BC$ oraz $AD < CD$. Punkty P i Q leżą odpowiednio na bokach BC i CD , przy czym $PB = AB$ oraz $QD = AD$. Punkt M jest środkiem odcinka PQ . Wykazać, że jeśli kąt BMD jest prosty, to na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg.

3. Udowodnić, że dla dowolnych dodatnich liczb całkowitych $x_1, x_2, \dots, x_{2011}, y_1, y_2, \dots, y_{2011}$ iloczyn

$$(2x_1^2 + 3y_1^2)(2x_2^2 + 3y_2^2) \dots (2x_{2011}^2 + 3y_{2011}^2)$$

nie jest kwadratem liczby całkowitej.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielnego pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.



LXII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia drugiego

19 lutego 2011 r. (drugi dzień zawodów)

4. Punkty A, B, C, D, E, F leżą w tej kolejności na półokręgu o środku O , przy czym $AD = BE = CF$. Cięciwa BE przecina cięciwy AD i CF odpowiednio w punktach G i H . Wykazać, że

$$\sphericalangle AOC = 2\sphericalangle GOH.$$

(Uwaga: Środkiem półokręgu jest środek zawierającego go okręgu.)

5. Dla każdej liczby całkowitej $n \geq 3$ wyznaczyć największą możliwą długość takiego ciągu o wyrazach w zbiorze n -elementowym, że żadne jego dwa sąsiednie wyrazy nie są równe, a ponadto nie można w wyniku wykreślenia wszystkich jego wyrazów z wyjątkiem czterech otrzymać ciągu postaci x, y, x, y , gdzie $x \neq y$.

6. Różne wielomiany P i Q o współczynnikach rzeczywistych spełniają warunek

$$P(Q(x)) = Q(P(x))$$

dla każdego x . Wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej n wielomian

$$\underbrace{P(P(\dots P(P(x))\dots))}_n - \underbrace{Q(Q(\dots Q(Q(x))\dots))}_n$$

jest podzielny przez wielomian $P(x) - Q(x)$.

(Uwaga: Wielomian $F(x)$ jest podzielny przez wielomian $G(x)$, jeżeli istnieje taki wielomian $H(x)$, że $F(x) = G(x)H(x)$ dla każdego x .)

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podeście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.



LXII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia drugiego

18 lutego 2011 r. (pierwszy dzień zawodów)

Zadanie 1. Rozwiązać w liczbach rzeczywistych układ równań

$$(1) \quad \begin{cases} (x-y)(x^3+y^3)=7 \\ (x+y)(x^3-y^3)=3 \end{cases}$$

Rozwiązanie

Stosując wzory na sumę i różnicę sześcianów widzimy, że

$$(x-y)(x+y)(x^2-xy+y^2)=7 \quad \text{oraz} \quad (x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)=3.$$

Prawe strony powyższych równań są różne od zera, więc lewe także i możemy podzielić te równania stronami. Otrzymujemy

$$\frac{x^2-xy+y^2}{x^2+xy+y^2}=\frac{7}{3}, \quad \text{czyli} \quad 3(x^2-xy+y^2)=7(x^2+xy+y^2).$$

Wobec tego $0=4x^2+10xy+4y^2=2(2x+y)(x+2y)$. Stąd dostajemy dwie możliwości: $x=-2y$ lub $y=-2x$.

Dla $x=-2y$ układ (1) sprowadza się do dwóch zależności: $-3y \cdot (-7y^3)=7$ oraz $-y \cdot (-9y^3)=3$, skąd uzyskujemy $y^4=\frac{1}{3}$. To daje dwie pary (x,y) będące rozwiązaniami układu: $(\frac{2}{\sqrt[4]{3}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{3}})$ i $(-\frac{2}{\sqrt[4]{3}}, \frac{1}{\sqrt[4]{3}})$.

Natomiast dla $y=-2x$ pierwsze równanie układu (1) przyjmuje postać $3x \cdot (-7x^3)=7$, czyli $x^4=-\frac{1}{3}$, a więc nie ma rozwiązań rzeczywistych.

Odpowiedź: Rozwiązaniami (x,y) są $(\frac{2}{\sqrt[4]{3}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{3}})$ oraz $(-\frac{2}{\sqrt[4]{3}}, \frac{1}{\sqrt[4]{3}})$.

Zadanie 2. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym $AB < BC$ oraz $AD < CD$. Punkty P i Q leżą odpowiednio na bokach BC i CD , przy czym $PB=AB$ oraz $QD=AD$. Punkt M jest środkiem odcinka PQ . Wykazać, że jeśli kąt BMD jest prosty, to na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg.

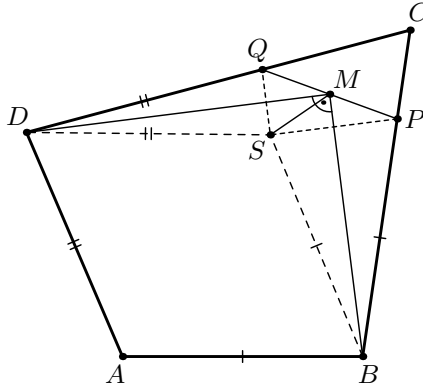
Rozwiązanie

Niech S oznacza punkt symetryczny do punktu P względem prostej BM (rys. 1). Z równości $\sphericalangle BMD=90^\circ$ wynika, że

$$\sphericalangle BMP + \sphericalangle DMQ = 90^\circ = \sphericalangle BMS + \sphericalangle DMS,$$

a skoro $\sphericalangle BMP = \sphericalangle BMS$, więc mamy także $\sphericalangle DMQ = \sphericalangle DMS$. Ponadto $MS=MP=MQ$ i w rezultacie punkt S jest symetryczny do Q względem prostej DM . Z obu symetrii uzyskujemy

$$SB=PB=AB \quad \text{oraz} \quad SD=QD=AD.$$



rys. 1

Równości $SB=AB$ i $SD=AD$ dowodzą, że punkty S i A są symetryczne względem prostej BD , bądź też pokrywają się. Ta druga możliwość jednak odpada, mielibyśmy bowiem wtedy $\sphericalangle DAB = \sphericalangle DSM + \sphericalangle MSB$. Jednakże

$$(1) \quad \begin{aligned} \sphericalangle DSM + \sphericalangle MSB &= \sphericalangle DQM + \sphericalangle BPM = \\ &= 180^\circ - \sphericalangle CQP + 180^\circ - \sphericalangle CPQ = 180^\circ + \sphericalangle DCB, \end{aligned}$$

skąd wynikałaby niedorzeczna nierówność $\sphericalangle DAB > 180^\circ$. Wobec tego punkty S i A są symetryczne względem prostej BD . Stąd i z zależności (1) dostajemy

$$\sphericalangle DAB = \sphericalangle DSB = 360^\circ - (\sphericalangle DSM + \sphericalangle MSB) = 180^\circ - \sphericalangle DCB,$$

co pociąga za sobą tezę zadania.

Zadanie 3. Udowodnić, że dla dowolnych dodatnich liczb całkowitych $x_1, x_2, \dots, x_{2011}, y_1, y_2, \dots, y_{2011}$ iloczyn

$$(1) \quad (2x_1^2 + 3y_1^2)(2x_2^2 + 3y_2^2) \dots (2x_{2011}^2 + 3y_{2011}^2)$$

nie jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie

Przypuśćmy, wbrew tezie zadania, że dany w treści zadania iloczyn jest kwadratem liczby całkowitej dla pewnych wartości zmiennych.

Możemy przyjąć, że w każdej z par (x_i, y_i) dla $i = 1, 2, \dots, 2011$ przynajmniej jedna z liczb nie jest podzielna przez 3. Jeżeli bowiem liczby x_i i y_i są obie podzielne przez 3, to zastępując je liczbami całkowitymi $\frac{1}{3}x_i$ i $\frac{1}{3}y_i$ zmniejszamy 9 razy wartość iloczynu (1), zatem będzie on nadal kwadratem liczby całkowitej. Kontynuując to postępowanie doprowadzimy w końcu do sytuacji opisanej w pierwszym zdaniu akapitu.

Zauważmy następnie, że kwadrat liczby całkowitej niepodzielnej przez 3 daje resztę 1 z dzielenia przez 3. Rzeczywiście, jeśli liczba y nie jest podzielna przez 3, to podzielna przez 3 jest jedna z liczb $y-1, y+1$, a więc stwierdzenie wynika z równości $y^2 = (y-1)(y+1) + 1$.

Jeżeli liczba x_i nie jest podzielna przez 3, to liczba $2x_i^2 + 3y_i^2$ daje resztę 2 z dzielenia przez 3. Jeżeli zaś $x_i = 3z_i$ dla pewnej liczby całkowitej z_i , to $2x_i^2 + 3y_i^2 = 3(6z_i^2 + y_i^2)$ i ponieważ y_i nie jest wówczas podzielne przez 3, więc liczba w nawiasie daje resztę 1 z dzielenia przez 3.

Tak więc każdy z 2011 czynników iloczynu (1) albo daje resztę 2 z dzielenia przez 3 (nazwijmy taki czynnik *białym*), albo jest trzykrotnością liczby dającej resztę 1 z dzielenia przez 3 (nazwijmy go wtedy *czarnym*). Iloczyn (1) jest kwadratem liczby całkowitej, skąd liczba trójek występująca w jego rozkładzie na czynniki pierwsze musi być parzysta. Zatem liczba czynników czarnych jest parzysta, a ich iloczyn ma postać $3^{2n}(3k+1)$ dla pewnych nieujemnych liczb całkowitych n i k .

Ponieważ liczba wszystkich czynników jest nieparzysta, więc liczba białych czynników jest także nieparzysta. A stąd wynika, że iloczyn białych czynników daje resztę 2 z dzielenia przez 3; oznaczmy ten iloczyn przez $3\ell+2$. Tym samym iloczyn (1) jest równy $3^{2n}(3k+1)(3\ell+2)$, czyli $3^{2n}(9k\ell+6k+3\ell+2)$. Skoro jest on kwadratem liczby całkowitej, więc kwadratem jest także liczba stojąca w nawiasie. To jednak prowadzi do sprzeczności, gdyż liczba ta daje resztę 2 z dzielenia przez 3.

Wykazaliśmy zatem, że iloczyn (1) nie jest kwadratem liczby całkowitej.

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w Internecie pod adresem: www.om.edu.pl



LXII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia drugiego

19 lutego 2011 r. (drugi dzień zawodów)

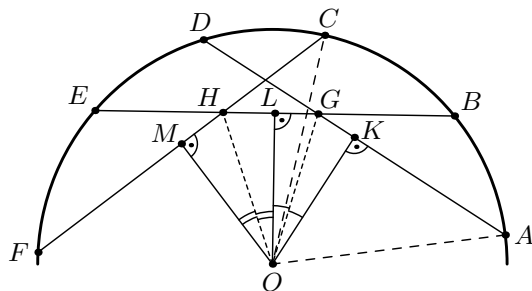
Zadanie 4. Punkty A, B, C, D, E, F leżą w tej kolejności na półokręgu o środku O , przy czym $AD = BE = CF$. Cięciwa BE przecina cięciwy AD i CF odpowiednio w punktach G i H . Wykazać, że

$$\sphericalangle AOC = 2\sphericalangle GOH.$$

(Uwaga: Środkiem półokręgu jest środek zawierającego go okręgu.)

Rozwiązanie

Niech K, L, M będą odpowiednio środkami cięciw AD, BE, CF (rys. 2).



rys. 2

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkątów OKA i OLB otrzymujemy

$$OK^2 = OA^2 - \left(\frac{1}{2}AD\right)^2 \quad \text{oraz} \quad OL^2 = OB^2 - \left(\frac{1}{2}BE\right)^2,$$

zatem na mocy założeń zadania mamy $OK = OL$. Stosując ponadto twierdzenie Pitagorasa do trójkątów OKG i OLG widzimy, że

$$GL^2 = OG^2 - OL^2 = OG^2 - OK^2 = GK^2,$$

skąd $GK = GL$. Wobec tego punkty K i L są symetryczne względem prostej OG albo pokrywają się — to drugie jednak odpada, gdyż z relacji $OK \perp AD$ i $OL \perp BE$ wynikałaby wtedy równoległość cięciw AD i BE . Tak więc $2\sphericalangle GOL = \sphericalangle KOL$. Podobnie dowodzimy, że $2\sphericalangle HOL = \sphericalangle MOL$. Ponadto punkty K i M leżą po przeciwnych stronach prostej OL . W efekcie

$$2\sphericalangle GOH = 2(\sphericalangle GOL + \sphericalangle HOL) = \sphericalangle KOL + \sphericalangle MOL = \sphericalangle KOM.$$

Pozostaje udowodnić, że $\sphericalangle KOM = \sphericalangle AOC$. Jednakże

$$\sphericalangle AOK + \sphericalangle KOM = \sphericalangle AOM = \sphericalangle AOC + \sphericalangle COM,$$

więc postulowana równość jest równoważna równości $\sphericalangle AOK = \sphericalangle COM$. A ta ostatnia zależność jest prawdziwa ze względu na przystawanie trójkątów prostokątnych AKO i CMO , w których $AK = CM$ i $OK = OM$.

Zadanie 5. Dla każdej liczby całkowitej $n \geq 3$ wyznaczyć największą możliwą długość takiego ciągu o wyrazach w zbiorze n -elementowym, że żadne jego dwa sąsiednie wyrazy nie są równe, a ponadto nie można w wyniku wykreślenia wszystkich jego wyrazów z wyjątkiem czterech otrzymać ciągu postaci x, y, x, y , gdzie $x \neq y$.

Rozwiązanie

Niech c_n oznacza poszukiwaną największą długość.

Rozważmy ciąg $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ o wyrazach w zbiorze n -elementowym, mający opisaną własność. Wśród wszystkich wartości występujących w tym ciągu niech u będzie tą, której pierwsze wystąpienie w ciągu jest najdalsze; oznaczmy je przez $a_\ell = u$. Zatem każdy element różny od u , który występuje chociaż raz w tym ciągu, jest obecny wśród wyrazów $a_1, a_2, \dots, a_{\ell-1}$.

Wykażemy, że element u pojawia się w ciągu tylko raz.

Przypuśćmy, że wyraz $a_m = u$ jest drugim wystąpieniem elementu u w rozważanym ciągu. Oczywiście $a_{\ell+1} = w \neq u$, gdyż na mocy warunków zadania sąsiednie wyrazy a_ℓ i $a_{\ell+1}$ są różne. W takim razie $m \geq \ell + 2$. Ponadto — na mocy określenia u — wśród wyrazów $a_1, a_2, \dots, a_{\ell-1}$ występuje w , czyli $a_i = w$ dla pewnego $i \leq \ell - 1$. Jednak wówczas skreślając wszystkie wyrazy ciągu z wyjątkiem $a_i, a_\ell, a_{\ell+1}, a_m$ otrzymujemy ciąg postaci w, u, w, u , w sprzeczności z założeniami zadania.

Istotnie więc wystąpienie elementu u w ciągu $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ jest pojedyncze. Wykreślmy z ciągu wyraz $a_\ell = u$. Ponadto jeśli wyrazy $a_{\ell-1}$ i $a_{\ell+1}$ były równe, to wykreślmy także jeden z nich. Otrzymamy w ten sposób ciąg o długości co najmniej $k - 2$, w którym występuje co najwyżej $n - 1$ różnych wyrazów, i nie zawierający dwóch jednakowych sąsiednich wyrazów. Stąd wniosek, że ciąg ten spełnia warunki zadania, jeżeli tylko $n - 1 \geq 3$. Zatem dla $n \geq 4$ mamy $k - 2 \leq c_{n-1}$. Przyjmując $c_2 = 3$ widzimy, że nierówność ta jest prawdziwa także dla $n = 3$. Każdy bowiem ciąg o długości co najmniej 4 o wyrazach ze zbioru dwuelementowego, nie zawierający dwóch jednakowych sąsiednich wyrazów, zaczyna się od podciągu postaci x, y, x, y .

Jednak k jest długością dowolnie wybranego dozwolonego ciągu o wyrazach w zbiorze n -elementowym. Zatem z zależności $k - 2 \leq c_{n-1}$ otrzymujemy

$$c_n \leq c_{n-1} + 2 \quad \text{dla } n = 2, 3, 4, \dots$$

Skoro $c_2 = 3$, więc przez prostą indukcję uzyskujemy $c_n \leq 2n - 1$ dla każdego n .

Na koniec zauważmy, że $(2n - 1)$ -wyrazowy ciąg

$$1, 2, 3, \dots, n-1, n, n-1, \dots, 3, 2, 1$$

o wyrazach ze zbioru n -elementowego ma postulowaną własność.

Odpowiedź: Szukana największa długość ciągu wynosi $2n - 1$.

Zadanie 6. Różne wielomiany P i Q o współczynnikach rzeczywistych spełniają warunek

$$P(Q(x)) = Q(P(x))$$

dla każdego x . Wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej n wielomian

$$\underbrace{P(P(\dots P(P(x)) \dots))}_n - \underbrace{Q(Q(\dots Q(Q(x)) \dots))}_n$$

jest podzielny przez wielomian $P(x) - Q(x)$.

(*Uwaga:* Wielomian $F(x)$ jest podzielny przez wielomian $G(x)$, jeżeli istnieje taki wielomian $H(x)$, że $F(x) = G(x)H(x)$ dla każdego x .)

Rozwiązanie

Udowodnimy najpierw następujący

Lemat

Jeżeli F , G i H są dowolnymi wielomianami, przy czym G i H są różne, to wielomian $F(G(x)) - F(H(x))$ jest podzielny przez wielomian $G(x) - H(x)$.

Dowód lematu

Niech wielomian F ma postać $F(x) = c_m x^m + c_{m-1} x^{m-1} + \dots + c_1 x + c_0$. Wtedy wielomian $F(G(x)) - F(H(x))$ można zapisać jako sumę m wielomianów $c_k [G(x)^k - H(x)^k]$ dla $k = 1, 2, \dots, m$, z których każdy jest podzielny przez wielomian $G(x) - H(x)$ na mocy tożsamości

$$a^k - b^k = (a - b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + a^{k-3}b^2 + \dots + ab^{k-2} + b^{k-1}),$$

w której podstawiamy $a = G(x)$ oraz $b = H(x)$. To dowodzi lematu.

Przystępujemy do rozwiązywania zadania. Wprowadźmy oznaczenie

$$F_n(x) = \underbrace{F(F(\dots F(F(x)) \dots))}_n \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots;$$

teza zadania sprowadza się więc do wykazania, że dla każdego n wielomian $P_n(x) - Q_n(x)$ jest podzielny przez wielomian $P(x) - Q(x)$.

Zastosujemy indukcję ze względu na n .

Dla $n = 1$ teza jest oczywiście prawdziwa. Przypuśćmy z kolei, że wielomian $P_n(x) - Q_n(x)$ jest podzielny przez wielomian $P(x) - Q(x)$. Wówczas

$$(1) \quad P_{n+1}(x) - Q_{n+1}(x) = [P_n(P(x)) - P_n(Q(x))] + [P_n(Q(x)) - Q_n(Q(x))].$$

Na mocy lematu zastosowanego dla $F = P_n$, $G = P$ i $H = Q$ wielomian w pierwszym nawiasie kwadratowym jest podzielny przez $P(x) - Q(x)$.

Z równości $P(Q(x)) = Q(P(x))$ dla każdej liczby x wynika ponadto, że

$$\begin{aligned} P_n(Q(x)) &= \underbrace{P(P(\dots P(P(P(Q(x)))) \dots))}_{n-1} = \underbrace{P(P(\dots P(P(Q(P(x)))) \dots))}_{n-1} = \\ &= \underbrace{P(P(\dots P(Q(P(P(x)))) \dots))}_{n-2} = \dots = Q(P_n(x)) \end{aligned}$$

dla każdego x . Zatem wielomian w drugim nawiasie kwadratowym po prawej stronie zależności (1) jest równy $Q(P_n(x)) - Q(Q_n(x))$. Stosując lemat dla $F = Q$, $G = P_n$ i $H = Q_n$ stwierdzamy, że wielomian ten jest podzielny przez $P_n(x) - Q_n(x)$, a więc — w myśl założenia indukcyjnego — tym bardziej przez $P(x) - Q(x)$.

Wobec tego równość (1) wskazuje, że $P_{n+1}(x) - Q_{n+1}(x)$ jest sumą dwóch wielomianów podzielnych przez $P(x) - Q(x)$, co kończy dowód indukcyjny.

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w Internecie pod adresem: www.om.edu.pl



LXII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia trzeciego

13 kwietnia 2011 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Znaleźć wszystkie liczby całkowite $n \geq 1$ o następującej własności: istnieje taka permutacja $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ ciągu $(1, 2, \dots, n)$, że dla $k = 1, 2, \dots, n$ suma $a_1 + a_2 + \dots + a_k$ jest podzielna przez k .

2. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków BC , CA , AB odpowiednio w punktach D , E , F . Prowadzimy trzy proste: przez środki odcinków AE i AF , przez środki odcinków BF i BD oraz przez środki odcinków CD i CE . Wykazać, że środek okręgu opisanego na trójkącie wyznaczonym przez te trzy proste pokrywa się ze środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC .

3. Dla każdej liczby nieparzystej $n \geq 3$ wyznaczyć liczbę rzeczywistych rozwiązań $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ układu równań

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1(x_1 + 1) = x_2(x_2 - 1) \\ x_2(x_2 + 1) = x_3(x_3 - 1) \\ \vdots \\ x_{n-1}(x_{n-1} + 1) = x_n(x_n - 1) \\ x_n(x_n + 1) = x_1(x_1 - 1) \end{array} \right.$$

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podeście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.



LXII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia trzeciego

14 kwietnia 2011 r. (drugi dzień zawodów)

4. Wyznaczyć wszystkie takie pary funkcji f, g określonych na zbiorze liczb rzeczywistych i przyjmujących wartości rzeczywiste, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest równość

$$f(x)f(y) = g(x)g(y) + g(x) + g(y).$$

5. Wysokości czworościanu $ABCD$ przecinają się w punkcie H leżącym wewnątrz czworościanu. Prosta DH przecina ścianę ABC w punkcie P , a sferę opisaną na danym czworościanie w punkcie Q różnym od D . Udowodnić, że $PQ = 2HP$.

6. Dowieść, że nie istnieją takie wielomiany $f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x)$ o współczynnikach wymiernych, że dla każdej liczby rzeczywistej x spełniona jest równość

$$x^2 + 7 = (f_1(x))^2 + (f_2(x))^2 + (f_3(x))^2 + (f_4(x))^2.$$

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podeście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.



LXII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia trzeciego

13 kwietnia 2011 r. (pierwszy dzień zawodów)

Zadanie 1. Znaleźć wszystkie liczby całkowite $n \geq 1$ o następującej własności: istnieje taka permutacja $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ ciągu $(1, 2, \dots, n)$, że dla $k = 1, 2, \dots, n$ suma $a_1 + a_2 + \dots + a_k$ jest podzielna przez k .

Rozwiązanie

Zauważmy najpierw, że liczby $n = 1$ i $n = 3$ spełniają warunki zadania: dla $n = 3$ postulowaną permutacją jest $(a_1, a_2, a_3) = (1, 3, 2)$.

Przyjmijmy, że inna liczba n ma żadaną własność. Suma

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

jest podzielna przez n , zatem liczba $\frac{1}{2}(n+1)$ musi być całkowita, czyli n jest liczbą nieparzystą. W szczególności $n \geq 5$. Ponadto suma

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} = \frac{1}{2}n(n+1) - a_n$$

jest podzielna przez $n-1$, a ponieważ liczba

$$\frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{2}(n+1) \cdot (n-1) + \frac{1}{2}(n+1)$$

daje resztę $\frac{1}{2}(n+1)$ z dzielenia przez $n-1$, więc tę samą resztę daje również liczba a_n . Jedyną taką liczbą w przedziale $\langle 1; n \rangle$ jest $\frac{1}{2}(n+1)$, skąd

$$a_n = \frac{1}{2}(n+1).$$

Wobec tego

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} = \frac{1}{2}n(n+1) - a_n = \frac{1}{2}n(n+1) - \frac{1}{2}(n+1) = \frac{1}{2}(n^2 - 1).$$

Suma $a_1 + a_2 + \dots + a_{n-2}$ jest podzielna przez $n-2$ i w takim razie liczba a_{n-1} daje z dzielenia przez $n-2$ tę samą resztę, co liczba

$$\frac{1}{2}(n^2 - 1) = \frac{1}{2}(n+1) \cdot (n-2) + \frac{1}{2}(n+1),$$

czyli tę samą resztę, co liczba $\frac{1}{2}(n+1)$. Z nierówności $n \geq 5$ dostajemy

$$\frac{1}{2}(n+1) - (n-2) = -\frac{1}{2}(n-5) \leq 0,$$

$$\frac{1}{2}(n+1) + (n-2) = n + \frac{1}{2}(n-3) > n,$$

więc jedyną liczbą w przedziale $\langle 1; n \rangle$ dającą resztę $\frac{1}{2}(n+1)$ z dzielenia przez $n-2$ jest liczba

$$a_{n-1} = \frac{1}{2}(n+1).$$

Otrzymujemy zatem $a_{n-1} = a_n$, wbrew temu, że ciąg $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ jest permutacją ciągu $(1, 2, \dots, n)$. Sprzeczność dowodzi, że nie ma innych rozwiązań.

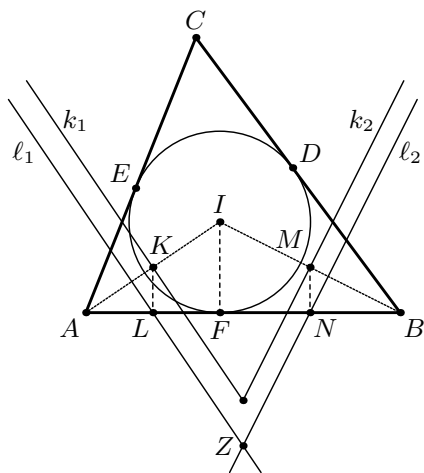
Odpowiedź: Szukanymi liczbami są $n = 1$ oraz $n = 3$.

Zadanie 2. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków BC , CA , AB odpowiednio w punktach D , E , F . Prowadzimy trzy proste: przez środki odcinków AE i AF , przez środki odcinków BF i BD oraz przez środki odcinków CD i CE . Wykazać, że środek okręgu opisanego na trójkącie wyznaczonym przez te trzy proste pokrywa się ze środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC .

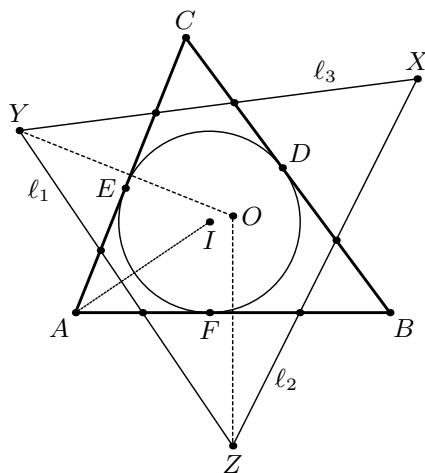
Rozwiązanie

Niech ℓ_1 , ℓ_2 , ℓ_3 będą odpowiednio trzema prostymi określonymi w treści zadania. Udowodnimy najpierw, że punkt przecięcia prostych ℓ_1 i ℓ_2 leży na symetralnej odcinka AB .

Oznaczmy przez I środek okręgu wpisanego w trójkąt ABC . Niech K , L , M , N będą odpowiednio środkami odcinków AI , AF , BI , BF (rys. 1). Oznaczmy wreszcie przez k_1 i k_2 odpowiednio symetralne odcinków AI i BI . Punkt przecięcia tych symetralnych jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie AIB , zatem leży on na symetralnej odcinka AB .



rys. 1



rys. 2

Trójkąt EAF jest równoramienny, więc prosta ℓ_1 przechodząca przez środki ramion jest prostopadła do prostej AI . To oznacza, że $\ell_1 \parallel k_1$. Ponadto $K \in k_1$ oraz $L \in \ell_1$, czyli prosta ℓ_1 powstaje z prostej k_1 w wyniku przesunięcia o wektor $\overrightarrow{KL}$. Zauważmy też, że na mocy twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa mamy $\overrightarrow{KL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IF}$.

Analogiczne rozumowanie dowodzi, że prosta ℓ_2 powstaje z prostej k_2 w wyniku przesunięcia o wektor $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IF}$. Stąd wniosek, że punkt przecięcia prostych ℓ_1 i ℓ_2 jest przesunięciem o wektor $\frac{1}{2}\overrightarrow{IF}$ punktu przecięcia prostych k_1 i k_2 . Ten ostatni punkt, jak wcześniej stwierdziliśmy, leży na symetralnej odcinka AB . Ponieważ wektor $\frac{1}{2}\overrightarrow{IF}$ jest równoległy do tej symetralnej, więc leży na niej także punkt Z przecięcia prostych ℓ_1 i ℓ_2 .

W ten sam sposób dowodzimy, że proste ℓ_2 i ℓ_3 przecinają się w punkcie X leżącym na symetralnej odcinka BC , zaś proste ℓ_3 i ℓ_1 przecinają się w punkcie Y leżącym na symetralnej odcinka CA (rys. 2).

Oznaczmy teraz przez O środek okręgu opisanego na trójkącie ABC . Punkt Z leży na symetralnej odcinka AB i w takim razie $OZ \perp AB$. A skoro również $YZ \perp AI$, więc ramiona kąta OZY są prostopadłe do ramion kąta BAI , skąd wynika, że

$$\sphericalangle OZY = \sphericalangle BAI \quad \text{lub} \quad \sphericalangle OZY + \sphericalangle BAI = 180^\circ.$$

Podobnie dowodzimy, że

$$\sphericalangle OYZ = \sphericalangle CAI \quad \text{lub} \quad \sphericalangle OYZ + \sphericalangle CAI = 180^\circ.$$

Kąt $\sphericalangle BAI = \sphericalangle CAI = \frac{1}{2}\sphericalangle BAC$ jest ostry, więc gdyby w co najmniej jednej z powyższych alternatyw spełniony był drugi człon, to otrzymalibyśmy $\sphericalangle OZY + \sphericalangle OYZ \geq 180^\circ$. W trójkącie OYZ taka nierówność jest niemożliwa (trójkąt ten jest niezdegenerowany, gdyż proste OY i OZ są symetralnymi odcinków AC i AB). Wobec tego w obu alternatywach spełniony jest pierwszy człon, a stąd $\sphericalangle OZY = \sphericalangle OYZ = \frac{1}{2}\sphericalangle BAC$ i w efekcie $OY = OZ$.

Analogicznie uzasadniamy, że $OX = OY$. To dowodzi, że punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie XYZ , co kończy rozwiązanie.

Zadanie 3. Dla każdej liczby nieparzystej $n \geq 3$ wyznaczyć liczbę rzeczywistych rozwiązań $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ układu równań

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1(x_1 + 1) = x_2(x_2 - 1) \\ x_2(x_2 + 1) = x_3(x_3 - 1) \\ \vdots \\ x_{n-1}(x_{n-1} + 1) = x_n(x_n - 1) \\ x_n(x_n + 1) = x_1(x_1 - 1) \end{array} \right.$$

Rozwiązanie

Przekształcając równoważnie zależność $x(x+1) = y(y-1)$ otrzymujemy $y+x = y^2 - x^2 = (y+x)(y-x)$, skąd $y+x=0$ lub $y-x=1$, czyli $y \in \{-x, x+1\}$. Należy zatem znaleźć liczbę ciągów $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$, w których $x_0 = x_n$ oraz

$$(1) \quad x_{i+1} \in \{-x_i, x_i + 1\} \quad \text{dla } i = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Każda liczba rzeczywista x_0 oraz ciąg sterujący $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$, w którym $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$ dla $i = 1, 2, \dots, n$, wyznaczają następujący ciąg $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$:

$$x_i = \begin{cases} x_{i-1} + 1, & \text{gdy } \varepsilon_i = 0 \\ -x_{i-1}, & \text{gdy } \varepsilon_i = 1 \end{cases} \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, n.$$

Taki ciąg spełnia warunki (1), ale nie musi zachodzić równość $x_0 = x_n$. Odwrotnie, każdy ciąg spełniający warunki (1) powstaje w opisany wyżej sposób.

Rozpatrzmy ciąg $(c_0, c_1, c_2, \dots, c_n)$ powstający w taki sposób od wartości początkowej $c_0 = 0$ i tego samego ciągu sterującego $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$. Mamy więc

$$c_i = \begin{cases} c_{i-1} + 1, & \text{gdy } \varepsilon_i = 0 \\ -c_{i-1}, & \text{gdy } \varepsilon_i = 1 \end{cases} \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, n.$$

Udowodnimy teraz przez indukcję ze względu na i , że

$$(2) \quad x_i = (-1)^{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_i} x_0 + c_i \quad \text{dla } i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Dla $i=0$ powyższa równość ma postać $x_0 = x_0$. Przyjmując zaś, że równość (2) jest prawdziwa dla pewnego $i = j \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$, otrzymujemy

$$x_{j+1} = x_j + 1 = (-1)^{\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_j} x_0 + c_j + 1 = (-1)^{\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_j + \varepsilon_{j+1}} x_0 + c_{j+1},$$

gdy $\varepsilon_{j+1} = 0$, albo

$$x_{j+1} = -x_j = -[(-1)^{\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_j} x_0 + c_j] = (-1)^{\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_j + \varepsilon_{j+1}} x_0 + c_{j+1},$$

gdy $\varepsilon_{j+1} = 1$, co kończy indukcję. Podstawiając $i = n$ w związku (2) dostajemy

$$(3) \quad x_n = (-1)^s x_0 + c_n, \quad \text{gdzie } s = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n.$$

Zauważmy też, że dla $i = 1, 2, \dots, n$ sąsiednie wyrazy c_{i-1} oraz c_i mają jednakową parzystość wtedy i tylko wtedy, gdy $\varepsilon_i = 1$, co ma miejsce dla dokładnie s różnych wartości wskaźnika i . Ponieważ $c_0 = 0$, więc liczba c_n ma taką samą parzystość jak liczba $n - s$, czyli inną niż liczba s .

Jeżeli s jest liczbą parzystą, to w myśl wzoru (3) równanie $x_0 = x_n$ ma postać $x_0 = x_0 + c_n$. Jednakże w tej sytuacji liczba c_n jest nieparzysta, a więc różna od zera i rozważane równanie nie ma rozwiązań.

Jeżeli zaś s jest liczbą nieparzystą, to równanie $x_0 = x_n$ przybiera postać $x_0 = -x_0 + c_n$, gdzie liczba c_n jest parzysta — ma ono zatem dokładnie jedno rozwiązanie, będące ponadto liczbą całkowitą. Wobec tego dla każdego ciągu sterującego $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$, w którym suma $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n$ jest nieparzysta, istnieje dokładnie jeden ciąg $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$, w którym $x_0 = x_n$ oraz zachodzą warunki (1). Wyrazy tego ciągu są liczbami całkowitymi.

Pozostaje rozstrzygnąć, czy różne ciągi sterujące mogą wyznaczać to samo rozwiązanie $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$. Przypuśćmy, że dzieje się tak dla ciągów $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ oraz $(\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \dots, \varepsilon'_n)$. Niech $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ będzie najmniejszym wskaźnikiem, dla którego $\varepsilon_k \neq \varepsilon'_k$. Wówczas $x_k = x_{k-1} + 1$ i jednocześnie $x_k = -x_{k-1}$, skąd $x_{k-1} + 1 = -x_{k-1}$, czyli $x_{k-1} = -\frac{1}{2}$. Jest to sprzeczne ze sprostowaniem, że wszystkie liczby $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ są całkowite.

Ostatecznie liczba rozwiązań danego w treści zadania układu jest równa liczbie tych ciągów sterujących, w których suma wyrazów jest nieparzysta. Ponieważ przyporządkowanie $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) \mapsto (1 - \varepsilon_1, 1 - \varepsilon_2, \dots, 1 - \varepsilon_n)$ ustala wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość między ciągami sterującymi o sumie nieparzystej oraz ciągami o sumie parzystej, więc poszukiwana liczba jest połową liczby *wszystkich* ciągów sterujących, których jest oczywiście 2^n .

Odpowiedź: Dany układ ma 2^{n-1} rozwiązań.



LXII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia trzeciego

14 kwietnia 2011 r. (drugi dzień zawodów)

Zadanie 4. Wyznaczyć wszystkie takie pary funkcji f, g określonych na zbiorze liczb rzeczywistych i przyjmujących wartości rzeczywiste, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest równość

$$(1) \quad f(x)f(y) = g(x)g(y) + g(x) + g(y).$$

Rozwiązanie

Określmy funkcję h wzorem

$$h(t) = g(t) + 1 \quad \text{dla każdego } t;$$

wówczas

$$g(x)g(y) + g(x) + g(y) = (g(x) + 1)(g(y) + 1) - 1 = h(x)h(y) - 1,$$

a więc warunek (1) możemy przepisać w równoważnej postaci

$$(2) \quad f(x)f(y) + 1 = h(x)h(y) \quad \text{dla dowolnych } x, y.$$

Podstawiając $x = y$ wnioskujemy z równania (2), że

$$f(x)^2 + 1 = h(x)^2 \quad \text{dla wszystkich } x.$$

Wobec tego podnosząc obustronnie zależność (2) do kwadratu dostajemy

$$(f(x)f(y) + 1)^2 = h(x)^2 h(y)^2 = (f(x)^2 + 1)(f(y)^2 + 1),$$

skąd po wymnożeniu nawiasów i redukcji wyrazów podobnych otrzymujemy

$$2f(x)f(y) = f(x)^2 + f(y)^2,$$

czyli $(f(x) - f(y))^2 = 0$. Tak więc $f(x) = f(y)$, ale liczby x i y wybraliśmy dowolnie, zatem f musi być funkcją stałą. W takim razie związek (2) wskazuje, że również h jest funkcją stałą. Istotnie, jeśli h nie jest funkcją zerową, to $h(a) \neq 0$ dla pewnego a . Podstawmy $y = a$ w zależności (2), uzyskując

$$h(x) = \frac{f(x)f(a) + 1}{h(a)} = \frac{f(a)^2 + 1}{h(a)}$$

dla każdego x . W rezultacie funkcja h — i tym samym także g — jest stała.

Pozostaje więc wyznaczyć pary funkcji stałych spełniające warunki zadania. Jeśli $f(x) \equiv C$ i $g(x) \equiv D$, to warunek (2), równoważny danemu w treści zadania warunkowi (1), przybiera postać

$$(3) \quad C^2 + 1 = (D + 1)^2.$$

Zatem para funkcji stałych ma żadaną własność wtedy i tylko wtedy, gdy prawdziwa jest zależność (3).

Odpowiedź: Rozwiązaniami są pary funkcji stałych $f(x) \equiv C$, $g(x) \equiv D$, gdzie stałe C i D są związane równością $C^2 + 1 = (D + 1)^2$.

Zadanie 5. Wysokości czworościanu $ABCD$ przecinają się w punkcie H leżącym wewnątrz czworościanu. Prosta DH przecina ścianę ABC w punkcie P , a sferę opisaną na danym czworościanie w punkcie Q różnym od D . Udowodnić, że $PQ = 2HP$.

Rozwiązanie

Wykażemy najpierw następujące dwa stwierdzenia:

1. Jeżeli wysokości trójkąta XYZ przecinają się w punkcie T leżącym wewnątrz trójkąta, a prosta XT przecina bok YZ w punkcie V oraz okrąg opisany na danym trójkącie w punkcie W różnym od X , to $TV = VW$.

(Zauważmy, iż jest to „płaska” wersja zadania.)

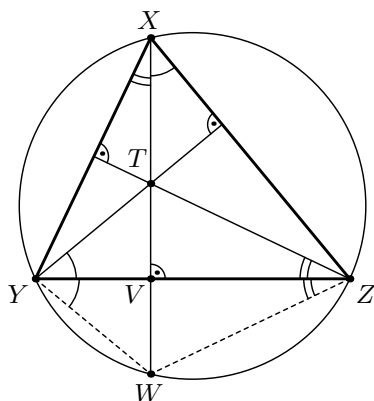
2. Dla dowolnych dwóch wierzchołków danego czworościanu płaszczyzna zawierająca te dwa wierzchołki oraz punkt H jest prostopadła do krawędzi wyznaczonej przez dwa pozostałe wierzchołki.

Dowód zdania 1. Ponieważ (rys. 3)

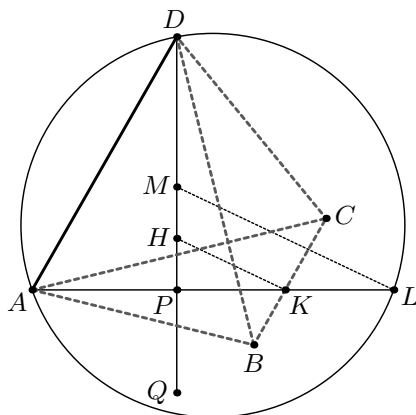
$$\sphericalangle WYZ = \sphericalangle WXZ = 90^\circ - \sphericalangle XZY = \sphericalangle TYZ$$

i podobnie $\sphericalangle WZY = \sphericalangle TZY$, więc trójkąty YWZ i YTZ są symetryczne względem prostej YZ , skąd od razu uzyskujemy żadaną równość.

Dowód zdania 2. Wykażemy, że płaszczyzna AHB jest prostopadła do krawędzi CD ; rozumowanie dla innych par wierzchołków jest analogiczne. Prosta AH jest prostopadła do ściany BCD , a zatem także do zawartej w niej krawędzi CD . Podobnie prosta BH jest prostopadła do krawędzi CD . W takim razie dwie nierównoległe proste zawarte w płaszczyźnie AHB są prostopadłe do krawędzi CD , czyli prostopadła do niej jest cała płaszczyzna.



rys. 3



rys. 4

Przechodzimy do rozwiązania zadania.

Niech prosta AP przecina krawędź BC w punkcie K , a sferę opisaną na czworościanie w punkcie L różnym od A (rys. 4). Niech ponadto M oznacza punkt przecięcia wysokości trójkąta ALD .

Wysokości trójkąta ABC przecinają się w punkcie P — rzeczywiście, w myśl zdania **2**. płaszczyzna AHD jest prostopadła do krawędzi BC , zatem prosta AP zawarta w tej płaszczyźnie jest prostopadła do krawędzi BC , i analogicznie proste BP oraz CP zawierają wysokości trójkąta ABC .

W oparciu o zdanie **2**. stwierdzamy, że prosta HK zawarta w płaszczyźnie BHC jest prostopadła do krawędzi AD . Prostopadła do niej jest też oczywiście prosta LM zawierająca wysokość trójkąta ALD . Ponieważ trzy proste HK , ML i AD leżą w jednej płaszczyźnie ALD , więc z prostopadłości $HK \perp AD$ i $ML \perp AD$ wynika równoległość prostych HK i ML .

Na mocy zdania **1**. odpowiednio dla trójkątów ALD i ABC otrzymujemy

$$MP = PQ \quad \text{oraz} \quad PK = KL.$$

Druga z tych równości, w połączeniu z twierdzeniem Talesa zastosowanym do kąta DPL przeciętego prostymi równoległymi HK i ML , prowadzi do związku $MH = HP$. Zatem z pierwszej równości dostajemy $PQ = MP = 2HP$, czyli tezę zadania.

Zadanie 6. Dowieść, że nie istnieją takie wielomiany $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, $f_4(x)$ o współczynnikach wymiernych, że dla każdej liczby rzeczywistej x spełniona jest równość

$$(1) \quad x^2 + 7 = (f_1(x))^2 + (f_2(x))^2 + (f_3(x))^2 + (f_4(x))^2.$$

Rozwiązanie

Przypuśćmy, wbrew tezie zadania, że takie wielomiany $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, $f_4(x)$ istnieją. Zauważmy najpierw, że są to wielomiany stopnia co najwyżej pierwszego. Jeżeli bowiem d jest największym ze stopni tych czterech wielomianów, to wielomian stojący po prawej stronie równości (1) ma przy potęgach x^{2d} współczynnik będący sumą kwadratów liczb rzeczywistych, nie wszystkich równych zeru, a więc współczynnik dodatni. Stąd $d = 1$.

Istnieją zatem takie liczby całkowite a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , b_1 , b_2 , b_3 , b_4 oraz $m \neq 0$, że

$$(2) \quad f_i(x) = \frac{a_i x + b_i}{m} \quad \text{dla } i = 1, 2, 3, 4.$$

Zależność (1) przybiera w związku z tym postać

$$m^2(x^2 + 7) = (a_1 x + b_1)^2 + (a_2 x + b_2)^2 + (a_3 x + b_3)^2 + (a_4 x + b_4)^2$$

i porównując współczynniki przy tych samych potęgach zmiennej dostajemy

$$\begin{cases} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = m^2 \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4 = 0 \\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2 = 7m^2 \end{cases}.$$

Wprowadźmy oznaczenia $c_i = a_i + b_i$ oraz $d_i = b_i - a_i$ dla $i = 1, 2, 3, 4$; wówczas

z napisanego przed chwilą układu równości możemy wywnioskować, że

$$(3) \quad \begin{cases} c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + c_4^2 = 8m^2 \\ c_1d_1 + c_2d_2 + c_3d_3 + c_4d_4 = 6m^2 \\ d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 = 8m^2 \end{cases}.$$

Ponieważ $m \neq 0$, zaś równości (3) pozostaną prawdziwe, jeżeli liczby $c_1, c_2, c_3, c_4, d_1, d_2, d_3, d_4, m$ podzielimy przez 2, więc wykonując w razie potrzeby skończoną liczbę takich dzieleni możemy przyjąć, iż nie wszystkie spośród tych liczb całkowitych są parzyste.

Zauważmy teraz, że kwadrat liczby parzystej daje resztę 0 lub 4 z dzielenia przez 8, natomiast kwadrat liczby nieparzystej daje resztę 1 z dzielenia przez 8, gdyż $(2k+1)^2 = 4k(k+1) + 1$, a liczba $k(k+1)$ jest parzysta dla dowolnej całkowitej wartości k . Z tego spostrzeżenia dotyczącego reszt wynika, że suma czterech kwadratów liczb całkowitych może być podzielna przez 8 jedynie wtedy, gdy wszystkie te cztery liczby są parzyste. W rezultacie pierwsze i trzecie z równań (3) wskazują, że liczby $c_1, c_2, c_3, c_4, d_1, d_2, d_3, d_4$ są parzyste. Biorąc to pod uwagę stwierdzamy na mocy drugiego z równań (3), że liczba $6m^2$ jest podzielna przez 4 i skutkiem tego również liczba m jest parzysta. Przeczy to jednak poczynionemu wcześniej założeniu.

Uzyskana sprzeczność dowodzi, że rozpatrywana teza jest prawdziwa.



LXIII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego

I seria (1 września 2011 r. – 3 października 2011 r.)

1. Rozwiązać w liczbach rzeczywistych układ równań

$$\begin{cases} (x+y)^3 = 8z \\ (y+z)^3 = 8x \\ (z+x)^3 = 8y \end{cases}$$

2. Znaleźć wszystkie takie pary dodatnich liczb całkowitych (x, y) , że liczba $2^x + 5^y$ jest kwadratem liczby całkowitej.

3. W trójkącie ostrokątnym ABC punkt D jest spodkiem wysokości poprowadzonej z wierzchołka C . Punkty E i F leżą odpowiednio na bokach AC i BC , przy czym $AE = AD$ i $BF = BD$. Punkt S jest symetryczny do punktu C względem środka okręgu opisanego na trójkącie ABC . Wykazać, że $SE = SF$.

4. Dana jest liczba całkowita $n \geq 1$. Dla niepustego podzbioru X zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ niech a i b oznaczają odpowiednio najmniejszy i największy element zbioru X oraz niech

$$f(X) = \frac{1}{n - (b - a)}.$$

Wyznaczyć, w zależności od n , sumę liczb $f(X)$ dla wszystkich niepustych podzbiorów X zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

3 października 2011 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.



LXIII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego

II seria (4 października 2011 r. – 3 listopada 2011 r.)

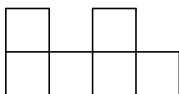
5. Znaleźć wszystkie takie ciągi $(a_1, a_2, \dots, a_{63})$ złożone z różnych dodatnich liczb całkowitych, że dla $i = 1, 2, \dots, 62$ liczba a_i jest dzielnikiem liczby $1 + a_{i+1}$, zaś liczba a_{63} jest dzielnikiem liczby $1 + a_1$.

6. W czworokącie wypukłym $ABCD$ zachodzi równość

$$\sphericalangle DAB + 2\sphericalangle BCD = 180^\circ.$$

Okrąg wpisany w trójkąt ABD jest styczny do boków AB i AD odpowiednio w punktach K i L . Wykazać, że okręgi opisane na trójkątach AKL i BCD są styczne.

7. Znaleźć wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych (m, n) , dla których prostokąt o wymiarach $m \times n$ można zbudować z następujących klocków utworzonych z 6 kwadratów jednostkowych:



Klocki wolno obracać i odwracać na drugą stronę.

8. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje f określone na zbiorze liczb rzeczywistych i przyjmujące wartości rzeczywiste, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest równość

$$f(x + f(x + y)) = f(x - y) + f(x)^2.$$

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

3 listopada 2011 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.



LXIII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego

III seria (4 listopada 2011 r. – 5 grudnia 2011 r.)

9. Wyznaczyć wszystkie takie liczby całkowite $n \geq 1$, że liczba $1 + 2^{n+1} + 4^{n+1}$ jest podzielna przez liczbę $1 + 2^n + 4^n$.

10. Znaleźć wszystkie takie liczby całkowite $n \geq 2$, że istnieje zbiór n punktów na płaszczyźnie, z których każdy leży na zewnątrz pewnego koła, zawierającego wszystkie pozostałe punkty i mającego środek w jednym z nich.

11. W ostrosłupie o podstawie ABC i wierzchołku S wysokości AA' , BB' , CC' , SS' przecinają się w jednym punkcie, leżącym wewnątrz ostrosłupa. Punkt O jest środkiem sfery opisanej na danym ostrosłupie. Dowieść, że jeśli prosta SO jest prostopadła do płaszczyzny $A'B'C'$, to ostrosłup $ABCS$ jest prawidłowy.

12. Mając dany skończony ciąg liczb, tworzymy z niego nowy ciąg, wstawiając pomiędzy każdą parę kolejnych wyrazów nowy wyraz, równy ich sumie. Rozpoczynamy od ciągu (1,1) i wykonujemy wielokrotnie tę operację, otrzymując w pierwszym kroku ciąg (1,2,1), w drugim kroku ciąg (1,3,2,3,1) itd.

Dla każdego $n \geq 1$ obliczyć sumę sześcianów wyrazów ciągu otrzymanego w n -tym kroku.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

5 grudnia 2011 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.

Adresy Komitetów Okręgowych Olimpiady Matematycznej

- Dla województwa pomorskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Gdańskiego, ul. Wita Stwosza 57, 80-952 Gdańsk.

- Dla województwa śląskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Śląskiego, ul. Bankowa 14, 40-007 Katowice.

- Dla województwa małopolskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego, ul. Łojasiewicza 6, 30-348 Kraków.

- Dla województwa lubelskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Zakład Rachunku Prawdopodobieństwa pok. 810, Instytut Matematyki UMCS, pl. Marii Skłodowskiej-Curie 1, 20-031 Lublin.

- Dla województwa łódzkiego i świętokrzyskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Łódzkiego, ul. Banacha 22, 90-238 Łódź.

- Dla województwa wielkopolskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki i Informatyki UAM, ul. Umultowska 87, 61-614 Poznań.

- Dla województwa podkarpackiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Katedra Matematyki, Politechnika Rzeszowska, al. Powstańców Warszawy 8, 35-959 Rzeszów.

- Dla województwa lubuskiego i zachodniopomorskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Szczecińskiego, ul. Wielkopolska 15, 70-451 Szczecin.

- Dla województwa kujawsko-pomorskiego i warmińsko-mazurskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki i Informatyki UMK, ul. Chopina 12/18, 87-100 Toruń.

- Dla województwa mazowieckiego i podlaskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, ul. Śniadeckich 8, 00-656 Warszawa.

- Dla województwa dolnośląskiego i opolskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego, pl. Grunwaldzki 2/4, 50-384 Wrocław.

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w Internecie pod adresem: www.om.edu.pl



LXIII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia pierwszego

(1 września 2011 r. – 6 grudnia 2011 r.)

Zadanie 1. Rozwiązać w liczbach rzeczywistych układ równań

$$\begin{cases} (x+y)^3 = 8z \\ (y+z)^3 = 8x \\ (z+x)^3 = 8y \end{cases}$$

Rozwiązanie

Odejmując drugie równanie układu od pierwszego oraz stosując wzór na różnicę sześcianów otrzymujemy

$$\begin{aligned} 8(z-x) &= (x+y)^3 - (y+z)^3 = \\ &= [(x+y) - (y+z)][(x+y)^2 + (x+y)(y+z) + (y+z)^2] = \\ &= (x-z)[(x+y)^2 + (x+y)(y+z) + (y+z)^2], \end{aligned}$$

czyli

$$(x-z)[(x+y)^2 + (x+y)(y+z) + (y+z)^2 + 8] = 0.$$

Wobec tego

$$x = z \quad \text{lub} \quad (x+y)^2 + (x+y)(y+z) + (y+z)^2 + 8 = 0.$$

Druga z powyższych równości zachodzić jednak nie może, gdyż oznaczając $a = x+y$ i $b = y+z$ mamy

$$(x+y)^2 + (x+y)(y+z) + (y+z)^2 + 8 = a^2 + ab + b^2 + 8 = (a + \frac{1}{2}b)^2 + \frac{3}{4}b^2 + 8 \geq 8.$$

W takim razie $x = z$. Postępując analogicznie z drugim i trzecim równaniem danego układu dochodzimy do wniosku, że $y = x$.

Zatem wszystkie trzy niewiadome muszą być równe: $x = y = z = t$, a cały układ równań przybiera postać $(2t)^3 = 8t$, lub równoważnie $t^3 = t$. Dostajemy stąd trzy możliwe wartości t , którymi są: 0, 1 oraz -1 .

Odpowiedź: Rozwiązaniami (x, y, z) danego układu równań są:

$$(0, 0, 0), \quad (1, 1, 1), \quad (-1, -1, -1).$$

Zadanie 2. Znaleźć wszystkie takie pary dodatnich liczb całkowitych (x, y) , że liczba $2^x + 5^y$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie

Przypuśćmy, że $2^x + 5^y = k^2$ dla pewnej liczby całkowitej k .

Liczby k^2 i 2^x dają te same reszty z dzielenia przez 5. Kwadrat liczby całkowitej może dawać tylko resztę 0, 1 lub 4 z dzielenia przez 5, gdyż

$$(5n)^2 = 5 \cdot 5n^2, \quad (5n \pm 1)^2 = 5(5n^2 \pm 2n) + 1, \quad (5n \pm 2)^2 = 5(5n^2 \pm 4n) + 4$$

dla dowolnej liczby całkowitej n , a każdą liczbę całkowitą można przedstawić w postaci $5n$, $5n \pm 1$ lub $5n \pm 2$ dla pewnego n .

Wykażemy z kolei, że reszta z dzielenia liczby 2^x przez 5 jest zależna od reszty z dzielenia liczby x przez 4. Niech bowiem $x=4m+r$, gdzie m jest liczbą całkowitą oraz $r \in \{0, 1, 2, 3\}$. Wówczas $2^x = 2^{4m+r} = (2^4)^m \cdot 2^r = (3 \cdot 5 + 1)^m \cdot 2^r$. Wymnażając nawiasy w wyrażeniu $(3 \cdot 5 + 1)^m$ możemy je zapisać w postaci sumy składników podzielnych przez 5 oraz liczby 1. Stąd wynika, że liczby 2^x i 2^r dają jednakowe reszty z dzielenia przez 5. Reszty te dla $r=0, 1, 2, 3$ są odpowiednio równe 1, 2, 4, 3. Zatem resztę, którą jednocześnie może dawać liczba k^2 , otrzymujemy tylko dla $r=0$ oraz $r=2$, czyli gdy x jest liczbą parzystą.

Wobec tego $x=2z$, gdzie z jest dodatnią liczbą całkowitą. Ponadto

$$5^y = k^2 - 2^x = k^2 - (2^z)^2 = (k - 2^z)(k + 2^z).$$

W takim razie liczby $k - 2^z$ i $k + 2^z$ są dzielnikami potęgi piątki, czyli

$$k - 2^z = 5^\alpha \quad \text{oraz} \quad k + 2^z = 5^\beta,$$

gdzie α, β są liczbami całkowitymi spełniającymi warunki $0 \leq \alpha < \beta$ i $\alpha + \beta = y$. Gdyby $\alpha > 0$, to liczba $5^\beta - 5^\alpha = 2 \cdot 2^z = 2^{z+1}$ byłaby podzielna przez 5, co nie jest możliwe. Stąd $\alpha = 0$, czyli $k - 2^z = 1$ oraz $k + 2^z = 5^y$. W rezultacie

$$5^y = k + 2^z = (k - 2^z) + 2^{z+1} = 1 + 2^{z+1}.$$

Jeżeli teraz $z > 1$, to liczba $5^y = 1 + 2^{z+1}$ daje resztę 1 z dzielenia przez $2^3 = 8$. To pociąga za sobą parzystość liczby y — dla nieparzystej wartości $y=2s+1$ liczba $5^y = 25^s \cdot 5 = 5(3 \cdot 8 + 1)^s$ daje bowiem resztę 5 z dzielenia przez 8 (co uzasadniamy tak jak dla rozpatrywanej wcześniej liczby $(3 \cdot 5 + 1)^m$). Ale skoro $y=2t$ dla pewnej dodatniej liczby całkowitej t , to

$$2^{z+1} = 5^y - 1 = (5^t)^2 - 1 = (5^t - 1)(5^t + 1),$$

czyli liczby $5^t - 1$ oraz $5^t + 1$ są potęgami dwójki o nieujemnych całkowitych wykładnikach, różniącymi się o 2. Tak więc $5^t - 1 = 2$ i $5^t + 1 = 4$, co prowadzi do niedorzecznej równości $5^t = 3$.

Zatem $z=1$, czyli $x=2$ oraz $5^y = 1 + 2^{z+1} = 1 + 2^2 = 5$, skąd $y=1$. Uzyskana para $(x, y) = (2, 1)$ oczywiście spełnia warunki zadania: $2^2 + 5^1 = 9 = 3^2$.

Odpowiedź: Jedyną parą o żądanych własnościach jest $(x, y) = (2, 1)$.

Zadanie 3. W trójkącie ostrokątnym ABC punkt D jest spodkiem wysokości poprowadzonej z wierzchołka C . Punkty E i F leżą odpowiednio na bokach AC i BC , przy czym $AE = AD$ i $BF = BD$. Punkt S jest symetryczny do punktu C względem środka okręgu opisanego na trójkącie ABC . Wykazać, że $SE = SF$.

Rozwiązanie

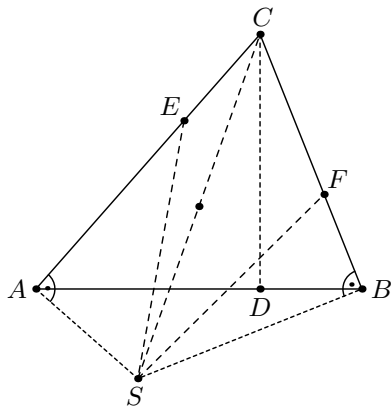
Odcinek CS jest średnicą okręgu opisanego na trójkącie ABC , więc $\sphericalangle SAC = \sphericalangle SBC = 90^\circ$ (rys. 1). Zatem na podstawie twierdzenia Pitagorasa

zastosowanego do trójkątów SAC i SBC otrzymujemy

$$(1) \quad AS^2 + AC^2 = CS^2 = BS^2 + BC^2.$$

Z kolei rozpatrując trójkąty prostokątne CDA i CDB dostajemy

$$(2) \quad AC^2 - AD^2 = CD^2 = BC^2 - BD^2.$$



rys. 1

Łącząc zależności (1) i (2) stwierdzamy, że

$$(3) \quad AS^2 - BS^2 = BC^2 - AC^2 = BD^2 - AD^2.$$

Na mocy danych w treści zadania równości $AE = AD$ i $BF = BD$ możemy przepisać związek (3) w postaci

$$AS^2 - BS^2 = BF^2 - AE^2,$$

skąd w myśl twierdzenia Pitagorasa dla trójkątów SAE i SBF uzyskujemy

$$SE^2 = AS^2 + AE^2 = BS^2 + BF^2 = SF^2,$$

a więc $SE = SF$, co kończy rozwiązanie.

Zadanie 4. Dana jest liczba całkowita $n \geq 1$. Dla niepustego podzbioru X zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ niech a i b oznaczają odpowiednio najmniejszy i największy element zbioru X oraz niech

$$f(X) = \frac{1}{n - (b - a)}.$$

Wyznaczyć, w zależności od n , sumę liczb $f(X)$ dla wszystkich niepustych podzbiorów X zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$.

Rozwiązanie

Rozważmy dowolną parę liczb $a \leq b$ ze zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$. Obliczymy sumę liczb $f(X)$ dla wszystkich podzbiorów X , których najmniejszy i największy element są odpowiednio równe a i b . Jeżeli $a = b$, to X jest zbiorem jednoelementowym oraz $f(X) = \frac{1}{n}$. Suma liczb $f(X)$ dla wszystkich jednoelementowych zbiorów X wynosi w takim razie 1. Przyjmijmy dalej, że $a < b$.

Dowolny podzbiór X , którego najmniejszy i największy element są odpowiednio równe a i b , można zapisać w postaci

$$X = \{a, b\} \cup Y,$$

gdzie Y jest dowolnym podzbiorem zbioru $Y_{a,b}$, złożonego z liczb całkowitych większych od a i mniejszych od b .

Zbiór $Y_{a,b}$ ma $b-a-1$ elementów, a więc 2^{b-a-1} podzbiorów. Stąd wniosek, że suma liczb $f(X)$ dla wszystkich podzbiorów X o najmniejszym elemencie a i największym elemencie b wynosi

$$s_{a,b} = \frac{1}{n-(b-a)} \cdot 2^{b-a-1}.$$

Poszukiwana w zadaniu wielkość jest o 1 większa od sumy liczb $s_{a,b}$ uzyskanych dla wszystkich par $a < b$ liczb ze zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$. Dla każdego $r \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ istnieje dokładnie $n-r$ par, w których $b-a=r$: są to mianowicie pary $(a, b) = (1, r+1), (2, r+2), (3, r+3), \dots, (n-r, n)$. Dla każdej z tych par liczba $s_{a,b}$ jest taka sama i wynosi

$$\frac{1}{n-r} \cdot 2^{r-1},$$

czyli suma tych $n-r$ liczb $s_{a,b}$ jest równa 2^{r-1} . Wobec tego suma wszystkich liczb $s_{a,b}$ jest równa sumie liczb 2^{r-1} dla $r=1, 2, \dots, n-1$, a szukana suma wszystkich liczb $f(X)$ wynosi

$$1 + 2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{n-2} = 2^{n-1}.$$

Zadanie 5. Znaleźć wszystkie takie ciągi $(a_1, a_2, \dots, a_{63})$ złożone z różnych dodatnich liczb całkowitych, że dla $i=1, 2, \dots, 62$ liczba a_i jest dzielnikiem liczby $1+a_{i+1}$, zaś liczba a_{63} jest dzielnikiem liczby $1+a_1$.

Rozwiązanie

Będziemy szukać ciągów spełniających warunki zadania, w których a_1 jest największym wyrazem. Pozostałe ciągi otrzymamy wówczas w wyniku cyklicznego przestawienia wyrazów.

Niech więc $(a_1, a_2, \dots, a_{63})$ będzie ciągiem o żądanej własności, przy czym pierwszy wyraz jest większy od wszystkich pozostałych. Udowodnimy indukcyjnie, że

$$(1) \quad a_i = a_1 + 1 - i \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, 63.$$

Dla $i=1$ równość (1) jest oczywiście prawdziwa. Przypuśćmy z kolei, że jest ona prawdziwa dla wskaźników $i=1, 2, \dots, j$, gdzie $j \in \{1, 2, \dots, 62\}$; wykażemy jej słuszność dla $i=j+1$. Na mocy założeń zadania liczba a_j jest dzielnikiem liczby $1+a_{j+1}$, skąd $a_j \leq 1+a_{j+1}$ i w takim razie

$$(2) \quad a_{j+1} \geq a_j - 1 = a_1 - j.$$

czyli punkt J leży na dwusiecznej kąta DAB .

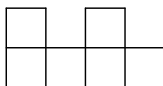
Zauważmy następnie, że

$$\begin{aligned}\sphericalangle BIJ &= 180^\circ - \sphericalangle AIB = \sphericalangle IAB + \sphericalangle IBA = \\ &= \frac{1}{2}(\sphericalangle DAB + \sphericalangle ABD) = \frac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle BDA)\end{aligned}$$

oraz $\sphericalangle BDA = \sphericalangle BJA$. Stąd wniosek, że trójkąt BIJ jest równoramienny: $JB = JI$. W takim razie punkt I leży na okręgu o_1 .

Ponadto odcinek AI jest średnicą okręgu o_2 opisanego na trójkącie AKL , gdyż $\sphericalangle IKA = \sphericalangle ILA = 90^\circ$. Wobec tego okręgi o_1 i o_2 mają punkt wspólny I , a przy tym środki tych okręgów oraz punkt I leżą na jednej prostej — dwusiecznej kąta DAB . To zaś oznacza, że okręgi o_1 i o_2 są styczne w punkcie I .

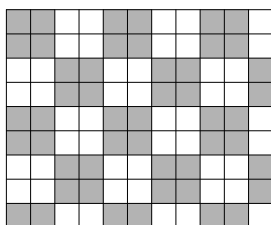
Zadanie 7. Znaleźć wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych (m, n) , dla których prostokąt o wymiarach $m \times n$ można zbudować z następujących klocków utworzonych z 6 kwadratów jednostkowych:



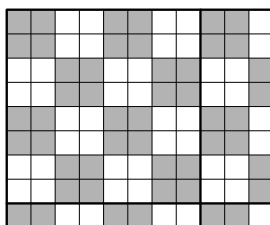
Klocki wolno obracać i odwracać na drugą stronę.

Rozwiązanie

Podzielmy dany prostokąt $m \times n$ na kwadraty 2×2 , rozpoczynając od lewego górnego rogu. Jeśli przynajmniej jedna z liczb m, n jest nieparzysta, to przy prawym lub dolnym brzegu zamiast kwadratów umieszczamy prostokąty 1×2 , a w prawym dolnym rogu w razie potrzeby umieszczamy kwadrat jednostkowy (rys. 3). Następnie pomalujmy otrzymane kwadraty i prostokąty na biało i czarno tak, aby dwie figury o wspólnym boku miały różne kolory, a kwadrat w lewym górnym rogu był czarny. Na koniec podzielmy wszystkie te figury na kwadraty jednostkowe, które będziemy krótko nazywać polami.



rys. 3



rys. 4

Zauważmy teraz, że dowolny klocek zawsze pokrywa 3 pola białe oraz 3 pola czarne: rzeczywiście, dowolny prostokąt 1×4 pokrywa dwa pola białe oraz dwa czarne, natomiast dowolna para kwadratów jednostkowych leżących w linii pionowej lub poziomej i oddzielona jednym polem pokrywa jedno pole białe i jedno czarne. Wobec tego jeżeli prostokąt $m \times n$ można zbudować z klocków, to znajduje się w nim tyle samo pól białych i czarnych.

Z drugiej strony, podzielmy liczby m i n przez 4, otrzymując odpowiednio ilorazy q_m i q_n oraz reszty r_m i r_n . Mamy więc

$$m = 4q_m + r_m \quad \text{oraz} \quad n = 4q_n + r_n, \quad \text{gdzie } r_m, r_n \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

Prostokąt $m \times n$ możemy podzielić na prostokąty: $4q_m \times 4q_n$ przyległy do lewego górnego rogu, $4q_m \times r_n$, $r_m \times 4q_n$ oraz $r_m \times r_n$ (rys. 4; niektóre z tych prostokątów mogą nie występować, gdy któraś z liczb m , n jest podzielna przez 4). Każdy z prostokątów $4q_m \times 4q_n$, $4q_m \times r_n$, $r_m \times 4q_n$ daje się podzielić na prostokąty 1×4 i w związku z tym zawiera tyle samo pól białych i czarnych. Zbadajmy teraz, kiedy prostokąt $r_m \times r_n$ — o ile istnieje — zawiera tyle samo pól białych i czarnych. Liczba pól takiego prostokąta musi być parzysta, czyli ma on wymiary 1×2 , 2×1 , 2×2 , 3×2 lub 2×3 . Jednak trzy pierwsze prostokąty składają się wyłącznie z czarnych pól, a ostatnie dwa zawierają czarny kwadrat 2×2 w lewym górnym rogu (korzystamy tu z faktu, że do lewego górnego rogu wyjściowego prostokąta $m \times n$ przylega czarny kwadrat 2×2). Tak więc jeśli $r_m \geq 1$ i $r_n \geq 1$, to w prostokącie $r_m \times r_n$ liczby pól białych i czarnych są różne. W rezultacie liczba pól białych w prostokącie $m \times n$ nie jest równa liczbie pól czarnych, gdy liczby m i n nie są podzielne przez 4.

Zatem jeżeli para (m, n) ma postulowaną w zadaniu własność, to jedna z liczb m , n musi być podzielna przez 4. Ponadto oczywiście jedna z nich musi być podzielna przez 3, gdyż każdy klocek pokrywa liczbę pól podzielną przez 3. W takim razie mamy dwie możliwości:

1. Jedna z liczb m , n jest podzielna przez 4, a druga — przez 3.
2. Jedna z liczb m , n jest podzielna przez 12.

W przypadku 1 prostokąt $m \times n$ można podzielić na prostokąty 4×3 , z których każdy daje się ułożyć z dwóch klocków. Wszystkie takie pary (m, n) spełniają więc warunki zadania.

Przejdźmy z kolei do przypadku 2; możemy przyjąć, że dany w zadaniu prostokąt ma wówczas wymiary $12m' \times n$, gdzie m' , n są dodatnimi liczbami całkowitymi. Przypuśćmy, że liczbę n można zapisać w postaci

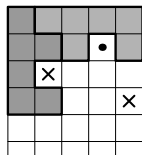
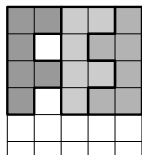
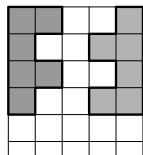
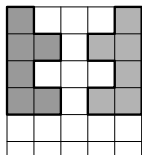
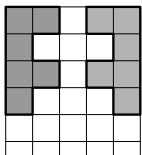
$$(1) \quad n = 3k + 4\ell,$$

gdzie k , ℓ są nieujemnymi liczbami całkowitymi. Wtedy rozważany prostokąt można podzielić na k prostokątów 12×3 oraz ℓ prostokątów 12×4 . Każdy z takich prostokątów można rozbić na prostokąty 4×3 , które — jak wiemy — składają się z dwóch klocków.

Przedstawienie w postaci (1) istnieje dla liczb $n = 3, 4$ oraz dla wszystkich liczb $n \geq 6$: mamy

$$6 + 3t = 3 \cdot (t + 2) + 4 \cdot 0, \quad 7 + 3t = 3 \cdot (t + 1) + 4 \cdot 1, \quad 8 + 3t = 3 \cdot t + 4 \cdot 2$$

dla każdej liczby całkowitej $t \geq 0$. To dowodzi, że pary $(m, n) = (12m', n)$, w których $n \notin \{1, 2, 5\}$, spełniają warunki zadania. Pozostaje jeszcze zbadać przypadki $n = 1, 2, 5$.



rys. 5

rys. 6

rys. 7

Prostokątów $12m' \times 1$ i $12m' \times 2$ oczywiście nie da się zbudować z klocków. Wykażemy, iż jest to niemożliwe również dla prostokątów $12m' \times 5$. Rozważmy bowiem dwa rogi takiego prostokąta będące końcami boku o długości 5 oraz dwa klocki przyległe do takich rogów. Gdyby te dwa klocki nie pokrywały całego boku (rys. 5), to po umieszczeniu trzeciego klocka przyległego do brakującej części boku pozostałoby jedno puste pole otoczone ze wszystkich stron klockami (rys. 6). Zatem te dwa narożne klocki muszą pokrywać cały bok (rys. 7); wtedy jednak pokrycie pola oznaczonego kropką na rys. 7 sprawia, że jedno z pól oznaczonych krzyżykiem zostanie otoczone klockami. Zbudowanie z klocków prostokąta o wymiarach $12m' \times 5$ nie jest więc możliwe.

Odpowiedź: Warunki zadania spełniają pary (m, n) , w których jedna z liczb jest podzielna przez 3, a druga przez 4, oraz pary, w których jedna z liczb jest podzielna przez 12, a druga jest różna od 1, 2 i 5.

Zadanie 8. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje f określone na zbiorze liczb rzeczywistych i przyjmujące wartości rzeczywiste, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest równość

$$(1) \quad f(x + f(x + y)) = f(x - y) + f(x)^2.$$

Rozwiązanie

Niech $c = f(0)$. Podstawmy $x = c$ i $y = -c$ w równaniu (1); otrzymamy $f(2c) = f(2c) + f(c)^2$, skąd

$$(2) \quad f(c) = 0.$$

Przyjmijmy z kolei $x = \frac{1}{2}(c + t)$ oraz $y = \frac{1}{2}(c - t)$ w zależności (1), gdzie t jest dowolną liczbą rzeczywistą. Wówczas $x + y = c$ i $x - y = t$, a więc uwzględniając równość (2) uzyskujemy $f(x) = f(t) + f(x)^2$ i wobec tego

$$(3) \quad f(t) = f(x) - f(x)^2 = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - f(x)\right)^2 \leq \frac{1}{4}$$

dla każdego t .

Podstawmy teraz w (1) wartości $x = y = 0$. Dostajemy $f(c) = c + c^2$ i na podstawie związku (2) wnioskujemy, że $c = 0$ lub $c = -1$. Załóżmy, że $c = -1$. Wówczas przyjmując $x = 0$ i $y = 1$ w warunku (1) stwierdzamy w oparciu o (2), że $f(f(1)) = f(-1) + f(0)^2 = f(c) + c^2 = 1$. To przeczy nierówności (3) dla $t = f(1)$ i wobec tego

$$(4) \quad c = f(0) = 0.$$

Przypuśćmy, że istnieje liczba rzeczywista b , dla której $f(b) \neq 0$. Niech $x_0 = b + f(2b)$; podstawiając $x = y = b$ w równaniu (1) i stosując zależność (4) uzyskujemy $f(x_0) = f(b)^2 > 0$. Określmy ciągi $x_1, x_2, x_3, \dots$ oraz $y_0, y_1, y_2, \dots$ w następujący sposób:

$$x_{n+1} = x_n + f(x_n) \quad \text{oraz} \quad y_n = f(x_n) \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, \dots$$

Wówczas dla każdego n podstawiając $x = x_n$ i $y = 0$ w warunku (1) dostajemy

$$f(x_{n+1}) = f(x_n + f(x_n)) = f(x_n) + f(x_n)^2,$$

czyli

$$(5) \quad y_{n+1} = y_n + y_n^2$$

dla $n = 0, 1, 2, \dots$. Stąd wynika, że $y_{n+1} \geq y_n$ dla każdego $n \geq 0$ i w rezultacie $y_n^2 \geq y_0^2$, gdyż $y_0 = f(x_0) > 0$. Zatem z równości (5) otrzymujemy

$$y_{n+1} \geq y_n + y_0^2 \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, \dots,$$

skąd wniosek, że dla dowolnego $n \geq 1$ mamy

$$f(x_n) = y_n = (y_n - y_{n-1}) + (y_{n-1} - y_{n-2}) + \dots + (y_2 - y_1) + (y_1 - y_0) + y_0 > ny_0^2.$$

Wybierając teraz liczbę n , dla której $ny_0^2 > \frac{1}{4}$, dostajemy sprzeczność z zależnością (3).

Założenie, że funkcja f przyjmuje wartość różną od zera, okazało się fałszywe. Pozostaje zauważyć, że funkcja zerowa spełnia warunki zadania.

Odpowiedź: Jedyną funkcję spełniającą równanie (1) jest funkcja zerowa.

Zadanie 9. Wyznaczyć wszystkie takie liczby całkowite $n \geq 1$, że liczba $1 + 2^{n+1} + 4^{n+1}$ jest podzielna przez liczbę $1 + 2^n + 4^n$.

Rozwiązanie

Zauważmy, że

$$1 + 2^n + 4^n < 1 + 2^{n+1} + 4^{n+1} < 4 + 2^{n+2} + 4^{n+1} = 4(1 + 2^n + 4^n).$$

Zatem jeżeli liczba $1 + 2^{n+1} + 4^{n+1}$ jest wielokrotnością liczby $1 + 2^n + 4^n$, to musi zachodzić jedna z równości

$$1 + 2^{n+1} + 4^{n+1} = 2(1 + 2^n + 4^n) \quad \text{lub} \quad 1 + 2^{n+1} + 4^{n+1} = 3(1 + 2^n + 4^n).$$

Pierwsza z powyższych równości nie jest jednak możliwa, gdyż jej lewa strona jest nieparzysta, prawa zaś — parzysta. Sprawdźmy z kolei, czy możliwa jest druga równość. Liczba $1 + 2^{n+1} + 4^{n+1}$ daje resztę 1 z dzielenia przez 4 dla każdego $n \geq 1$. Ponadto dla $n \geq 2$ liczba $3(1 + 2^n + 4^n) = 3 + 3 \cdot 2^n + 3 \cdot 4^n$ daje resztę 3 z dzielenia przez 4. Obie liczby mogą więc być równe tylko wtedy, gdy $n = 1$; bez trudu sprawdzamy, iż istotnie tak jest: $1 + 2^2 + 4^2 = 21 = 3(1 + 2 + 4)$.

Odpowiedź: Jedyną liczbą o opisanej własności jest $n = 1$.

Zadanie 10. Znaleźć wszystkie takie liczby całkowite $n \geq 2$, że istnieje zbiór n punktów na płaszczyźnie, z których każdy leży na zewnątrz pewnego koła, zawierającego wszystkie pozostałe punkty i mającego środek w jednym z nich.

Rozwiązanie

Przypuśćmy, że zbiór n punktów na płaszczyźnie spełnia wymagane warunki. Wybierzmy jeden z tych punktów; oznaczmy go przez P . W myśl założeń zadania wśród pozostałych punktów istnieje taki punkt Q , że koło o środku Q i pewnym promieniu zawiera wszystkie punkty danego zbioru oprócz punktu P (jeśli jest kilka takich punktów Q , wybieramy tylko jeden z nich). Narysujmy teraz strzałkę od punktu P do punktu Q . W tej sytuacji punkt P jest najbardziej oddalonym od Q punktem rozważanego zbioru.

Powtarzając tę procedurę dla wszystkich n punktów narysujemy łącznie n strzałek. Z każdego punktu wychodzi dokładnie jedna strzałka. Zauważmy, że również do każdego punktu wchodzi dokładnie jedna strzałka. W przeciwnym bowiem razie — skoro liczba końców strzałek jest równa liczbie punktów — do pewnego punktu R wchodziłyby co najmniej dwie strzałki. To nie jest jednak możliwe, gdyż jeśli takie dwie strzałki wychodziłyby z różnych punktów R_1 i R_2 , to na mocy spostrzeżenia z ostatniego zdania poprzedniego akapitu punkt R_1 byłby bardziej odległy od R niż punkt R_2 i jednocześnie punkt R_2 byłby bardziej odległy od R niż punkt R_1 .

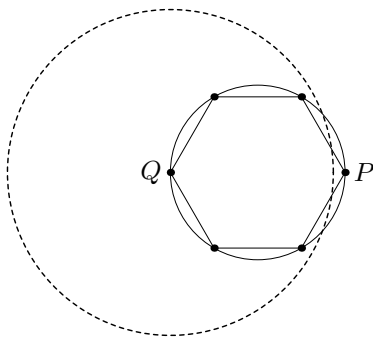
Wobec tego startując w dowolnym punkcie danego zbioru możemy przechodzić po strzałkach zgodnie z ich kierunkami do kolejnych punktów zbioru. W pewnym momencie powrócimy do punktu odwiedzonego już wcześniej. I to do punktu początkowego — powrót do punktu, który nie był pierwszy na tej trasie, oznaczałby bowiem, że do tego punktu wchodziły dwie różne strzałki, a wiemy, że nie jest to możliwe. Przebyta ścieżka jest więc cyklem rozpoczynającym się i kończącym w tym samym punkcie. Początkowy punkt wybraliśmy dowolnie, zatem cały układ strzałek rozpada się na takie cykle.

Przypuśćmy, że taki cykl $S_1 \rightarrow S_2 \rightarrow S_3 \rightarrow \dots \rightarrow S_n \rightarrow S_1$ składa się z co najmniej 3 strzałek. Istnienie strzałki $S_1 \rightarrow S_2$ oznacza, że punkt S_1 jest bardziej odległy od S_2 , niż dowolny inny punkt rozpatrywanego zbioru. A skoro $S_3 \neq S_1$, więc otrzymujemy nierówność $S_1 S_2 > S_2 S_3$. Podobnie uzasadniamy, że $S_2 S_3 > S_3 S_4 > \dots > S_{n-1} S_n > S_n S_1 > S_1 S_2$, czyli uzyskujemy sprzeczność. Stąd wniosek, że dowolny cykl składa się z dwóch strzałek, wzajemnie „przeciwnych” do siebie. Każdy punkt danego zbioru należy do pewnego takiego cyklu i w takim razie liczba tych punktów musi być parzysta.

Wykażemy teraz, że dla dowolnej liczby parzystej n istnieje na płaszczyźnie zbiór n punktów o żądanej własności. Dla $n = 2$ to stwierdzenie jest oczywiste — wystarczy rozważyć jakikolwiek zbiór dwóch różnych punktów.

Udowodnimy z kolei, że dla każdej liczby parzystej $n \geq 4$ zbiór wierzchołków n -kąta foremnego spełnia warunki zadania. Niech bowiem P będzie

dowolnym wierzchołkiem n -kąta foremnego. Liczba n jest parzysta, istnieje więc wierzchołek Q (przeciwny do wierzchołka P) o tej własności, że odcinek PQ jest średnicą okręgu zawierającego wszystkie n wierzchołków. Zatem dowolny wierzchołek różny od P znajduje się w mniejszej odległości od Q niż wierzchołek P (rys. 8). A stąd wynika, że pewne koło o środku Q zawiera wszystkie wierzchołki n -kąta z wyjątkiem P . Wobec tego rozpatrywany zbiór ma wymaganą własność.



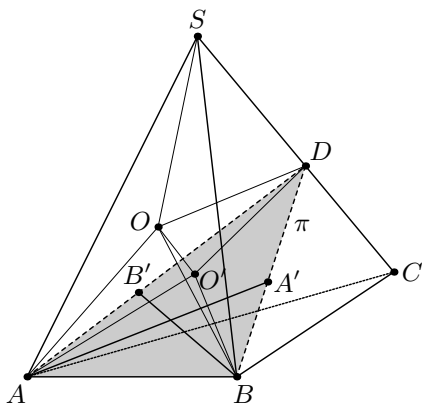
rys. 8

Odpowiedź: Szukanymi liczbami są wszystkie dodatnie liczby parzyste.

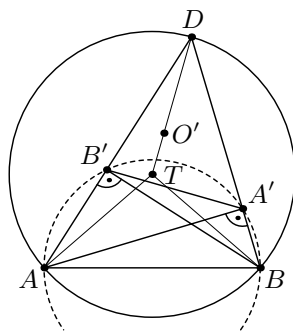
Zadanie 11. W ostrosłupie o podstawie ABC i wierzchołku S wysokości AA' , BB' , CC' , SS' przecinają się w jednym punkcie, leżącym wewnątrz ostrosłupa. Punkt O jest środkiem sfery opisanej na danym ostrosłupie. Dowieść, że jeśli prosta SO jest prostopadła do płaszczyzny $A'B'C'$, to ostrosłup $ABCS$ jest prawidłowy.

Rozwiązanie

Odcinki AA' i BB' przecinają się wewnątrz ostrosłupa, zatem leżą one na jednej płaszczyźnie π , która przecina krawędź CS w pewnym punkcie D (rys. 9).



rys. 9



rys. 10

Prosta AA' jest prostopadła do płaszczyzny BCS , a więc także do zawartej w tej płaszczyźnie prostej CS . Analogicznie uzasadniamy prostopadłość prostych BB' i CS . Zatem dwie nierównoległe proste leżące na płaszczyźnie π — proste AA' oraz BB' — są prostopadłe do prostej CS . Wynika stąd, że cała płaszczyzna π jest prostopadła do prostej CS . Oznacza to w szczególności, że rzutem prostokątnym punktu S na płaszczyznę π jest punkt D .

Niech O' oznacza rzut prostokątny punktu O na płaszczyznę π . Na mocy założeń zadania prosta SO jest prostopadła do płaszczyzny $A'B'C'$ i tym bardziej do zawartej w niej prostej $A'B'$. Wobec tego — w myśl twierdzenia o trzech prostych prostopadłych — prosta DO' , będąca rzutem prostokątnym prostej SO na płaszczyznę π , jest prostopadła do prostej $A'B'$.

Ponadto punkt O jest środkiem sfery opisanej na ostrosłupie $ABCS$, więc zachodzi równość $OA=OB$ i stosując twierdzenie Pitagorasa do trójkątów prostokątnych $OO'A$ oraz $OO'B$ uzyskujemy zależność $O'A=O'B$.

Dalsza część rozumowania rozgrywa się na płaszczyźnie π (rys. 10). Odcinki AA' oraz BB' są wysokościami trójkąta ABD i przecinają się w jego wnętrzu. Trójkąt ten jest zatem ostrokątny, a więc środek T opisanego na nim okręgu również leży wewnątrz trójkąta. Udowodnimy, że punkty D , O' oraz T leżą na jednej prostej. Okrąg o średnicy AB przechodzi przez punkty A' i B' , skąd wyznaczamy $\sphericalangle B'A'D = 180^\circ - \sphericalangle B'A'B = \sphericalangle DAB$. Zatem z prostopadłości $DO' \perp A'B'$ otrzymujemy

$$\sphericalangle O'DB = 90^\circ - \sphericalangle B'A'D = 90^\circ - \sphericalangle DAB.$$

Z drugiej strony, w trójkącie równoramiennym DTB mamy

$$\sphericalangle TDB = \frac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle DTB) = \frac{1}{2}(180^\circ - 2\sphericalangle DAB) = 90^\circ - \sphericalangle DAB.$$

W efekcie $\sphericalangle O'DB = \sphericalangle TDB$, co dowodzi, że punkt O' leży na prostej DT .

Zauważona wcześniej równość $O'A=O'B$ oznacza z kolei, że punkt O' leży na symetralnej boku AB .

Jeżeli $AD \neq BD$, to symetralna boku AB nie jest równoległa do prostej DT , a obie proste przecinają się w punkcie T . Ale punkt O' leży — jak wykazaliśmy — na obu tych prostych. Zatem punkt $O'=T$ jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABD , co daje $O'A=O'D$. Twierdzenie Pitagorasa dla trójkątów prostokątnych $OO'A$ i $OO'D$ prowadzi teraz do związku $OA=OD$. To jest jednak niemożliwe, gdyż sfera o środku O i promieniu OA jest sferą opisaną na rozważanym ostrosłupie, zaś punkt D znajduje się wewnątrz krawędzi bocznej CS , czyli nie może jednocześnie leżeć na tej sferze.

Wobec tego musi zachodzić równość $AD=BD$. Stąd oraz z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkątów prostokątnych ADC i BDC oraz do trójkątów prostokątnych ADS i BDS dostajemy $AC=BC$ oraz $AS=BS$. Analogiczne rozumowanie dowodzi, że $AB=CB$ oraz $AS=CS$. W rezultacie $AB=AC=BC$ i $SA=SB=SC$, czyli ostrosłup $ABCS$ jest prawidłowy.

Zadanie 12. Mając dany skończony ciąg liczb, tworzymy z niego nowy ciąg, wstawiając pomiędzy każdą parę kolejnych wyrazów nowy wyraz, równy ich sumie. Rozpoczynamy od ciągu $(1, 1)$ i wykonujemy wielokrotnie tę operację, otrzymując w pierwszym kroku ciąg $(1, 2, 1)$, w drugim kroku ciąg $(1, 3, 2, 3, 1)$ itd.

Dla każdego $n \geq 1$ obliczyć sumę sześcianów wyrazów ciągu otrzymanego w n -tym kroku.

Rozwiązanie

Dla $n = 0, 1, 2, \dots$ niech S_n oznacza sumę sześcianów wyrazów ciągu uzyskanego po wykonaniu n operacji; w szczególności mamy $S_0 = 1^3 + 1^3 = 2$ oraz $S_1 = 1^3 + 2^3 + 1^3 = 10$.

Znajdziemy zależność pomiędzy liczbami S_n i S_{n+1} dla dowolnego $n \geq 1$.

Ustalmy wartość $n \geq 1$ oraz niech $(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k)$ będzie ciągiem otrzymanym po wykonaniu $n - 1$ kroków. Zatem $x_0 = x_k = 1$ oraz

$$(1) \quad S_{n-1} = x_0^3 + x_1^3 + \dots + x_{k-1}^3 + x_k^3.$$

W n -tym kroku dostajemy ciąg

$$(x_0, x_0 + x_1, x_1, x_1 + x_2, x_2, \dots, x_{k-2}, x_{k-2} + x_{k-1}, x_{k-1}, x_{k-1} + x_k, x_k)$$

i wobec tego

$$(2) \quad \begin{aligned} S_n &= x_0^3 + (x_0 + x_1)^3 + x_1^3 + \dots + x_{k-1}^3 + (x_{k-1} + x_k)^3 + x_k^3 = \\ &= S_{n-1} + (x_0 + x_1)^3 + (x_1 + x_2)^3 + \dots + (x_{k-2} + x_{k-1})^3 + (x_{k-1} + x_k)^3. \end{aligned}$$

Dla $i = 0, 1, 2, \dots, k - 1$ mamy

$$(x_i + x_{i+1})^3 = x_i^3 + x_{i+1}^3 + 3y_i,$$

gdzie oznaczyliśmy $y_i = x_i^2 x_{i+1} + x_i x_{i+1}^2$. Dodając stronami powyższe k równości oraz stosując wzór (1) stwierdzamy, że

$$\begin{aligned} (x_0 + x_1)^3 + (x_1 + x_2)^3 + \dots + (x_{k-2} + x_{k-1})^3 + (x_{k-1} + x_k)^3 &= \\ &= (S_{n-1} - x_0^3) + (S_{n-1} - x_0^3) + 3(y_0 + y_1 + \dots + y_{k-2} + y_{k-1}) = \\ &= 2S_{n-1} - 2 + 3(y_0 + y_1 + \dots + y_{k-2} + y_{k-1}). \end{aligned}$$

W takim razie możemy przepisać zależność (2) w następujący sposób:

$$S_n = 3S_{n-1} - 2 + 3(y_0 + y_1 + \dots + y_{k-2} + y_{k-1}),$$

a więc

$$(3) \quad 3(y_0 + y_1 + \dots + y_{k-2} + y_{k-1}) = S_n - 3S_{n-1} + 2.$$

Rozważmy teraz ciąg uzyskany w $(n+1)$ -szym kroku. Wstawione w tym kroku wyrazy są kolejno równe $2x_0 + x_1$, $x_0 + 2x_1$, $2x_1 + x_2$, $x_1 + 2x_2$, $\dots$, $2x_{k-1} + x_k$, $x_{k-1} + 2x_k$. Aby obliczyć sumę ich sześcianów — która jest równa różnicy $S_{n+1} - S_n$ — zauważmy najpierw, że

$$(2x_i + x_{i+1})^3 + (x_i + 2x_{i+1})^3 = 9x_i^3 + 9x_{i+1}^3 + 18y_i$$

dla $i = 0, 1, 2, \dots, k-1$. Sumując stronami te k równości i ponownie stosując związek (1) dostajemy

$$\begin{aligned} S_{n+1} - S_n &= 9(S_{n-1} - x_k^3) + 9(S_{n-1} - x_0^3) + 18(y_0 + y_1 + \dots + y_{k-2} + y_{k-1}) = \\ &= 18S_{n-1} - 18 + 18(y_0 + y_1 + \dots + y_{k-2} + y_{k-1}). \end{aligned}$$

Wykorzystując teraz zależność (3) otrzymujemy

$$S_{n+1} - S_n = 18S_{n-1} - 18 + 6(S_n - 3S_{n-1} + 2) = 6S_n - 6$$

i ostatecznie

$$(4) \quad S_{n+1} = 7S_n - 6 \quad \text{dla każdego } n \geq 1.$$

Pozostaje już tylko ze wzoru rekurencyjnego (4) wyprowadzić jawny wzór na n -ty wyraz ciągu $S_1, S_2, S_3, \dots$. W tym celu zauważmy, że dla dowolnego $n \geq 1$ mamy

$$S_{n+1} - 1 = 7S_n - 7 = 7(S_n - 1).$$

Stosując tę zależność wielokrotnie uzyskujemy

$$S_n - 1 = 7(S_{n-1} - 1) = 7^2(S_{n-2} - 1) = \dots = 7^{n-1}(S_1 - 1) = 7^{n-1} \cdot 9,$$

czyli szukana suma sześciątów wynosi $S_n = 9 \cdot 7^{n-1} + 1$.

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w Internecie pod adresem: www.om.edu.pl



LXIII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia drugiego

17 lutego 2012 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Rozwiązać w liczbach rzeczywistych a, b, c, d układ równań

$$\begin{cases} a^3 + b = c, \\ b^3 + c = d, \\ c^3 + d = a, \\ d^3 + a = b. \end{cases}$$

2. Udowodnić, że w czworościanie $ABCD$ wierzchołek D , środek sfery wpisanej oraz środek ciężkości czworościanu leżą na jednej prostej wtedy i tylko wtedy, gdy pola trójkątów ABD , BCD i CAD są równe.

3. Niech m, n będą takimi dodatnimi liczbami całkowitymi, że w zbiorze $\{1, 2, \dots, n\}$ znajduje się dokładnie m liczb pierwszych. Dowieść, że wśród dowolnych $m+1$ różnych liczb z tego zbioru można znaleźć liczbę, która jest dzielnikiem iloczynu pozostałych m liczb.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podeście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.



LXIII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia drugiego

18 lutego 2012 r. (drugi dzień zawodów)

4. Znaleźć wszystkie takie pary funkcji f, g określonych na zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych i przyjmujących wartości rzeczywiste, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y spełniona jest równość

$$g(f(x) - y) = f(g(y)) + x.$$

5. Dany jest trójkąt ABC , w którym $\angle CAB = 60^\circ$ oraz $AB \neq AC$. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie, a punkt I — środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt. Wykazać, że symetralna odcinka AI , prosta OI oraz prosta BC przecinają się w jednym punkcie.

6. Niech $S(k)$ oznacza sumę cyfr liczby całkowitej k w zapisie dziesiętnym. Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele takich dodatnich liczb całkowitych n , że $S(2^n + n) < S(2^n)$.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.



LXIII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia drugiego

17 lutego 2012 r. (pierwszy dzień zawodów)

Zadanie 1. Rozwiązać w liczbach rzeczywistych a, b, c, d układ równań

$$\begin{cases} a^3 + b = c, \\ b^3 + c = d, \\ c^3 + d = a, \\ d^3 + a = b. \end{cases}$$

Rozwiązanie

Odejmijmy stronami trzecie równanie danego układu od pierwszego równania. Otrzymujemy

$$a^3 + b - c^3 - d = c - a,$$

czyli

$$b - d = c^3 - a^3 + c - a.$$

Zauważmy teraz, że liczby $c^3 - a^3$ i $c - a$ mają jednakowy znak: dla $c > a$ obie te liczby są dodatnie, dla $c < a$ obie są ujemne, a dla $c = a$ obie są równe zero. Zatem także liczby $b - d$ i $c - a$ mają jednakowy znak.

Odejmując zaś stronami czwarte równanie układu od drugiego dostajemy

$$c - a = d^3 - b^3 + d - b,$$

skąd analogicznie wnioskujemy, że liczby $c - a$ i $d - b$ mają jednakowy znak. To wraz z równością znaków liczb $c - a$ i $b - d$ dowodzi, że $c - a = d - b = 0$, a więc $a = c$ oraz $b = d$. Wobec tego dany w treści zadania układ sprowadza się do następującego układu dwóch równań:

$$a^3 + b = a \quad \text{oraz} \quad b^3 + a = b.$$

Dodając stronami powyższe dwa równania widzimy, że $a^3 + b^3 = 0$, czyli $a = -b$.

Wykazaliśmy w ten sposób, że $(a, b, c, d) = (t, -t, t, -t)$ dla pewnej liczby rzeczywistej t . Ponadto wszystkie równania rozważanego układu przyjmują postać $t^3 - t = t$, czyli $0 = t^3 - 2t = t(t^2 - 2)$. W efekcie warunki zadania są spełnione dla następujących trzech wartości parametru t : 0 , $\sqrt{2}$ oraz $-\sqrt{2}$.

Odpowiedź: Wszystkimi rozwiązaniami (a, b, c, d) danego układu są:

$$(0, 0, 0, 0), \quad (\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, -\sqrt{2}), \quad (-\sqrt{2}, \sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}).$$

Zadanie 2. Udowodnić, że w czworościanie $ABCD$ wierzchołek D , środek sfery wpisanej oraz środek ciężkości czworościanu leżą na jednej prostej wtedy i tylko wtedy, gdy pola trójkątów ABD , BCD i CAD są równe.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez I oraz S odpowiednio środek sfery wpisanej w dany czworościan oraz jego środek ciężkości. Niech ponadto proste DI i DS przecinają ścianę ABC odpowiednio w punktach I' i S' . Wówczas punkty D , I oraz S leżą na jednej prostej wtedy i tylko wtedy, gdy $I' = S'$.

Punkt I — a więc także punkt I' — jest jednakowo odległy od ścian ABD , BCD i CAD . Co więcej, I' jest jedynym takim punktem trójkąta ABC . To oznacza, że punkty D , I oraz S leżą na jednej prostej wtedy i tylko wtedy, gdy punkt S' jest jednakowo odległy od rozważanych trzech ścian.

Z drugiej strony, punkt S' jest środkiem ciężkości ściany ABC , zatem pola trójkątów ABS' , BCS' i CAS' są równe. Wobec tego objętości czworościanów $ABS'D$, $BCS'D$ i $CAS'D$, mających wspólną wysokość poprowadzoną z wierzchołka D , są równe. W takim razie iloczyn pola dowolnego spośród trójkątów ABD , BCD , CAD i odległości punktu S' od płaszczyzny tego trójkąta jest taki sam dla wszystkich trzech trójkątów. To zaś prowadzi do wniosku, że trójkąty te mają jednakowe pola wtedy i tylko wtedy, gdy odległości punktu S' od tych ścian są równe, skąd uzyskujemy tezę.

Zadanie 3. Niech m , n będą takimi dodatnimi liczbami całkowitymi, że w zbiorze $\{1, 2, \dots, n\}$ znajduje się dokładnie m liczb pierwszych. Dowieść, że wśród dowolnych $m+1$ różnych liczb z tego zbioru można znaleźć liczbę, która jest dzielnikiem iloczynu pozostałych m liczb.

Rozwiązanie

Przypuśćmy, że teza zadania jest nieprawdziwa. Wobec tego istnieje taki $(m+1)$ -elementowy zbiór A zawarty w zbiorze $\{1, 2, \dots, n\}$, że żadna liczba $x \in A$ nie jest dzielnikiem iloczynu pozostałych m elementów zbioru A . Każda liczba $x \in A$ ma więc dzielnik pierwszy p , który wchodzi do rozkładu na czynniki pierwsze liczby x z wykładnikiem wyższym niż do rozkładu na czynniki pierwsze iloczynu pozostałych m liczb ze zbioru A .

Dla ustalonego elementu $x \in A$ liczba pierwsza p o własności opisanej w poprzednim zdaniu nie musi być jedyna — jeżeli jest ich więcej, wybieramy dowolną z nich. W ten sposób każdemu elementowi $x \in A$ przypisaliśmy liczbę pierwszą ze zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$. Jednak zbiór A składa się z $m+1$ elementów, a do dyspozycji mamy tylko m liczb pierwszych. W rezultacie pewna liczba pierwsza p została przyporządkowana dwóm różnym elementom $x, y \in A$.

Niech w oznacza iloczyn $m-1$ elementów zbioru A różnych od x i y . Na mocy określenia liczby p istnieją takie nieujemne całkowite wykładniki k i ℓ , że potęga p^k jest dzielnikiem liczby x , ale nie iloczynu wy , a potęga p^ℓ jest dzielnikiem liczby y , ale nie iloczynu wx . Zatem w rozkładzie iloczynu $wy \cdot wx$ liczba pierwsza p występuje z wykładnikiem niższym niż $k+\ell$, mimo że iloczyn ten jest podzielny przez liczbę xy , która z kolei jest podzielna przez $p^{k+\ell}$.

Uzyskana sprzeczność kończy rozwiązanie zadania.



LXIII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia drugiego

18 lutego 2012 r. (drugi dzień zawodów)

Zadanie 4. Znaleźć wszystkie takie pary funkcji f, g określonych na zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych i przyjmujących wartości rzeczywiste, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y spełniona jest równość

$$(1) \quad g(f(x) - y) = f(g(y)) + x.$$

Rozwiązanie

Oznaczmy $a = f(g(0))$. Podstawiając $y = 0$ w warunku (1) otrzymujemy

$$(2) \quad g(f(x)) = f(g(0)) + x = a + x.$$

Biorąc zaś $y = f(x)$ w zależności (1) i wykorzystując związek (2) dostajemy

$$(3) \quad g(0) = f(g(f(x))) + x = f(a + x) + x$$

dla każdego x . Niech teraz z będzie dowolną liczbą rzeczywistą. Przyjmując $x = z - a$ w równości (3) stwierdzamy, że

$$(4) \quad f(z) = f(a + x) = g(0) - x = g(0) - z + a = c - z \quad \text{dla dowolnego } z,$$

gdzie oznaczyliśmy $c = g(0) + a$. Wobec tego związek (2) przybiera postać

$$(5) \quad g(c - x) = a + x.$$

Podstawiając $x = c - t$ w zależności (5) uzyskujemy

$$(6) \quad g(t) = g(c - (c - t)) = a + (c - t) \quad \text{dla dowolnego } t.$$

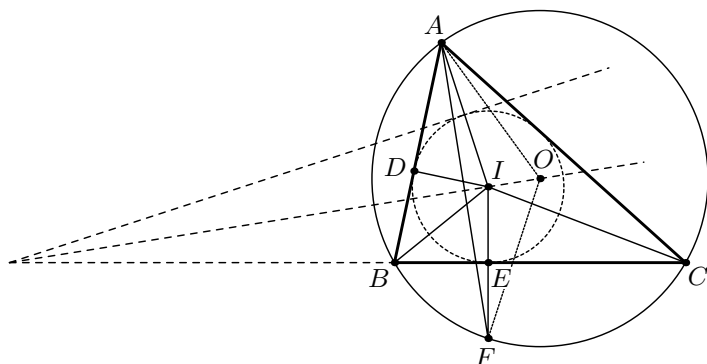
Na mocy równości (6) zastosowanej dla $t = 0$ oraz równości (4) otrzymujemy $a = f(g(0)) = f(a + c) = c - (a + c) = -a$, czyli $a = 0$. Zatem zależności (4) i (6) prowadzą do wniosku, że

$$(7) \quad f(x) = g(x) = c - x \quad \text{dla każdego } x.$$

Nietrudno sprawdzić, że dla dowolnej wartości c funkcje f i g zadane wzorami (7) spełniają równość (1) — obie jej strony są wówczas równe $x + y$.

Odpowiedź: Wszystkie pary funkcji f, g o żądanej własności są opisane zależnością $f(x) = g(x) = c - x$, gdzie c jest dowolną liczbą rzeczywistą.

Zadanie 5. Dany jest trójkąt ABC , w którym $\angle CAB = 60^\circ$ oraz $AB \neq AC$. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie, a punkt I — środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt. Wykazać, że symetralna odcinka AI , prosta OI oraz prosta BC przecinają się w jednym punkcie.



rys. 1

Zauważmy najpierw, że na mocy zależności $\sphericalangle CAB = 60^\circ$ mamy

$$(1) \quad \sphericalangle BIC = 180^\circ - \frac{1}{2}(\sphericalangle ABC + \sphericalangle BCA) = 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle CAB) = 120^\circ.$$

Oznaczmy przez D i E rzuty prostokątne punktu I odpowiednio na boki AB i BC . Niech ponadto F będzie punktem symetrycznym do punktu I względem prostej BC (rys. 1 przedstawia sytuację, gdy $AB < AC$, jednakże rozwiązanie zachowuje moc dla $AB > AC$). Punkty F i A leżą po przeciwnych stronach prostej BC , a przy tym na podstawie związku (1) otrzymujemy

$$\sphericalangle BFC + \sphericalangle CAB = \sphericalangle BIC + \sphericalangle CAB = 180^\circ.$$

Wobec tego punkt F leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC , skąd

$$(2) \quad OA = OF.$$

Z drugiej strony, w trójkącie prostokątnym ADI kąt ostry ma miarę $\sphericalangle IAD = \frac{1}{2}\sphericalangle CAB = 30^\circ$ i w takim razie

$$(3) \quad IA = 2ID = 2IE = IF.$$

Równości (2) i (3) dowodzą, że punkty O oraz I leżą na symetralnej odcinka AF . Zatem symetralna odcinka AI , prosta OI oraz prosta BC są symetralnymi boków trójkąta IAF , a więc przecinają się w jednym punkcie będącym środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie.

Zadanie 6. Niech $S(k)$ oznacza sumę cyfr liczby całkowitej k w zapisie dziesiętnym. Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele takich dodatnich liczb całkowitych n , że $S(2^n + n) < S(2^n)$.

Rozwiązanie

Wykażemy, że wymaganą własność ma każda liczba postaci $n = 10^m + 3$, gdzie $m \geq 2$ jest liczbą całkowitą.

Zauważmy w tym celu, że dla każdego całkowitego $k \geq 1$ liczba 2^{20k+3} daje resztę 8 z dzielenia przez 100. Rzeczywiście, z równości $2^{20} = 1048576$

wynika, że liczba $2^{20k} = (2^{20})^k$ jest iloczynem k liczb dających resztę 76 z dzielenia przez 100. Ponadto dla dowolnych liczb całkowitych a i b mamy $(100a + 76)(100b + 76) = 100(100ab + 76a + 76b + 57) + 76$, skąd wnioskujemy, że iloczyn liczb dających resztę 76 z dzielenia przez 100 również jest taką liczbą. Wobec tego $2^{20k} = 100\ell + 76$ dla pewnej liczby całkowitej ℓ , a więc $2^{20k+3} = 8(100\ell + 76) = 100(8\ell + 6) + 8$.

Liczba n daje resztę 3 z dzielenia przez 20. Zatem $2^n = 100x + 8$ dla pewnej liczby całkowitej x , skąd uzyskujemy $S(2^n) = S(x) + 8$ oraz

$$(1) \quad S(2^n + 3) = S(100x + 11) = S(x) + 2 = S(2^n) - 6.$$

Z drugiej strony, dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej y prawdziwa jest nierówność $S(y + 10^m) \leq S(y) + 1$. Istotnie, pisemne dodawanie $y + 10^m$ polega na dodaniu jedynki do pewnej pozycji w zapisie dziesiętnym liczby y . Jeżeli na tej pozycji stoi cyfra różna od 9, to zwiększamy ją o 1, a pozostałe cyfry nie zmieniają się, czyli $S(y + 10^m) = S(y) + 1$. Z kolei gdy na rozważanej pozycji stoi cyfra 9, to w wyniku dodawania $y + 10^m$ zamieniamy blok pewnej liczby kolejnych dziewiątek na zera oraz zwiększamy o 1 cyfrę stojącą przed tym blokiem. Oznaczając przez d liczbę zamienionych dziewiątek widzimy, że $S(y + 10^m) = S(y) - 9d + 1 < S(y)$.

W rezultacie

$$S(2^n + n) = S(2^n + 3 + 10^m) \leq S(2^n + 3) + 1,$$

co w połączeniu z zależnością (1) pozwala stwierdzić, że $S(2^n + n) \leq S(2^n) - 5$. Rozwiązanie jest więc zakończone.



LXIII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia trzeciego

18 kwietnia 2012 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Rozstrzygnąć, czy istnieje taka dodatnia liczba wymierna w , nie będąca liczbą całkowitą, że potęga w^w jest liczbą wymierną.

2. Wyznaczyć wszystkie pary (m, n) dodatnich liczb całkowitych, dla których sześcian K o krawędzi n można obudować prostopadłociennymi klockami o wymiarach $m \times 1 \times 1$ w taki sposób, by powstał sześcian o krawędzi $n + 2$, mający ten sam środek co K .

3. Trójkąt ABC , w którym $AB = AC$, jest wpisany w okrąg o . Okręgi o_1 i o_2 są styczne wewnętrznie do okręgu o odpowiednio w punktach P i Q , są też styczne odpowiednio do odcinków AB i AC oraz są rozłączne z wnętrzem trójkąta ABC . Niech m będzie taką prostą styczną do okręgów o_1 i o_2 , że punkty P i Q leżą po przeciwnej jej stronie niż punkt A . Prosta m przecina odcinki AB i AC odpowiednio w punktach K i L . Dowieść, że punkt przecięcia prostych PK i QL leży na dwusiecznej kąta BAC .

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podjęcie dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.



LXIII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia trzeciego

19 kwietnia 2012 r. (drugi dzień zawodów)

4. W turnieju wzięło udział n zawodników ($n \geq 4$). Każdy zawodnik rozegrał dokładnie jeden mecz z każdym innym zawodnikiem, nie było remisów. Zakładamy, że nie istnieje taka czwórka zawodników (A, B, C, D) , że A wygrał z B , B wygrał z C , C wygrał z D oraz D wygrał z A . Wyznaczyć, w zależności od n , największą możliwą liczbę takich trójek zawodników (A, B, C) , że A wygrał z B , B wygrał z C oraz C wygrał z A .

(Uwaga: Trójki (A, B, C) , (B, C, A) i (C, A, B) uważamy za jedną trójkę.)

5. W trójkącie ostrokątnym ABC punkt O jest środkiem okręgu opisanego, a dwusieczna kąta BAC przecina bok BC w punkcie D . Niech M będzie takim punktem, że $MC \perp BC$ oraz $MA \perp AD$. Proste BM i OA przecinają się w punkcie P . Wykazać, że okrąg o środku P i przechodzący przez punkt A jest styczny do prostej BC .

6. Dowieść, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c prawdziwa jest nierówność

$$\left(\frac{a-b}{c}\right)^2 + \left(\frac{b-c}{a}\right)^2 + \left(\frac{c-a}{b}\right)^2 \geq 2\sqrt{2} \left(\frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b}\right).$$

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podeście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.



LXIII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia trzeciego

18 kwietnia 2012 r. (pierwszy dzień zawodów)

Zadanie 1. Rozstrzygnąć, czy istnieje taka dodatnia liczba wymierna w , nie będąca liczbą całkowitą, że potęga w^w jest liczbą wymierną.

Rozwiązanie

Przypuśćmy, że liczba wymierna w spełnia dany warunek i zapiszmy ją w postaci ułamka nieskracalnego $w = \frac{a}{b}$, gdzie a i b są względnie pierwszymi dodatnimi liczbami całkowitymi. Liczba w nie jest całkowita, zatem $b > 1$. Przedstawmy wreszcie liczbę wymierną w^w jako ułamek $\frac{m}{n}$, gdzie m i n są względnie pierwszymi dodatnimi liczbami całkowitymi. Wówczas

$$(1) \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a}{b}} = \frac{m}{n}.$$

Podnosząc równość (1) stronami do potęgi b , a następnie mnożąc ją obustronnie przez $b^a n^b$, otrzymujemy

$$(2) \quad a^a n^b = m^b b^a.$$

Zależność (2) wskazuje, że liczba n^b jest dzielnikiem iloczynu $m^b b^a$. Ponieważ liczby m i n są względnie pierwsze, więc liczba n^b musi być dzielnikiem liczby b^a . Ponadto — znów na mocy związku (2) — liczba b^a jest dzielnikiem iloczynu $a^a n^b$. Korzystając teraz z faktu, że liczby a i b są względnie pierwsze, dochodzimy do wniosku, że liczba b^a jest dzielnikiem liczby n^b . Wobec tego

$$(3) \quad n^b = b^a.$$

Rozważmy rozkład liczby b na czynniki pierwsze. W myśl równości (3) wykładnik, z jakim dowolna liczba pierwsza wchodzi do tego rozkładu, staje się po pomnożeniu przez a liczbą podzielną przez b . Jednak liczby a i b są względnie pierwsze i w efekcie wykładnik ten musiał być podzielny przez b . Zatem nie tylko liczba b^a , lecz także liczba b jest b -tą potęgą liczby całkowitej.

Niech więc $b = c^b$, gdzie c jest nieujemną liczbą całkowitą. Zależność $b > 1$ dowodzi, że $c > 1$, czyli $c \geq 2$. Stąd $b = c^b \geq 2^b$. Uzyskaliśmy sprzeczność, gdyż dla każdej liczby całkowitej $k \geq 2$ prawdziwa jest przeciwna nierówność $k < 2^k$. Aby ją uzasadnić, stosujemy indukcję. Dla $k = 2$ nierówność jest prawdziwa. Natomiast krok indukcyjny sprowadza się do spostrzeżenia, że jeżeli $k < 2^k$ dla pewnej wartości $k \geq 2$, to

$$k + 1 < 2^k + 1 < 2^k + 2^k = 2^{k+1}.$$

To kończy rozwiązanie zadania.

Odpowiedź: Taka liczba nie istnieje.

Zadanie 2. Wyznaczyć wszystkie pary (m, n) dodatnich liczb całkowitych, dla których sześcian K o krawędzi n można obudować prostopadłościanymi klocekami o wymiarach $m \times 1 \times 1$ w taki sposób, by powstał sześcian o krawędzi $n+2$, mający ten sam środek jak K .

Rozwiązanie

Niech C będzie sześcianem o krawędzi $n+2$, podzielonym na sześciany jednostkowe, które nazwiemy *kostkami*. Umieścimy sześcian C w trójwymiarowym układzie współrzędnych tak, by był on zbiorem punktów o wszystkich współrzędnych należących do przedziału $(-\frac{1}{2}, n+\frac{3}{2})$. Wówczas wszystkie współrzędne środka dowolnej kostki należą do zbioru $\{0, 1, 2, \dots, n+1\}$.

Kostki nie przylegające do brzegu sześcianu C tworzą sześcian o krawędzi n współśrodkowy z C . Jest to sześcian K , o którym mowa w treści zadania. Należy zatem wyznaczyć takie pary (m, n) , że wszystkie kostki brzegowe można połączyć w klocki zbudowane z m kostek, będące prostopadłościanami o wymiarach $m \times 1 \times 1$.

Wpiszmy w każdą kostkę brzegową liczbę ze zbioru $S = \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$ w następujący sposób: jeżeli środek kostki ma współrzędne (x, y, z) , to wpisujemy w nią resztę z dzielenia sumy $x+y+z$ przez m . Wtedy w dowolnym prostopadłościanie $m \times 1 \times 1$ zbudowanym z m kostek brzegowych sumy współrzędnych środków tych kostek tworzą ciąg m kolejnych liczb całkowitych, czyli każdy element zbioru S pojawia się dokładnie raz. Wobec tego jeżeli para (m, n) ma własność opisaną w treści zadania, to wśród wszystkich kostek brzegowych każdy element zbioru S występuje tyle samo razy.

Zbiór punktów o równych trzech współrzędnych tworzy prostą ℓ przechodzącą przez dwa przeciwległe wierzchołki sześcianu C . Obrót o kąt 120° wokół prostej ℓ przekształca sześcian C w siebie oraz kostki brzegowe w kostki brzegowe, a ponadto przeprowadza punkt (x, y, z) na punkt (y, z, x) o takiej samej sumie współrzędnych. Przy tym jedynie kostka o środku $(0, 0, 0)$ oraz kostka o środku $(n+1, n+1, n+1)$ przechodzą na siebie; nazwijmy je kostkami *wyjątkowymi*. Pozostałe kostki brzegowe pod wpływem obrotu łączą się w trójki o środkach postaci (x, y, z) , (y, z, x) i (z, x, y) . Liczby wpisane we wszystkie kostki takiej trójki są więc równe. Wynika stąd, że wśród kostek brzegowych niewyjątkowych liczba wystąpień każdego elementu zbioru S jest podzielna przez 3.

Jeżeli pewien element zbioru S nie jest wpisany w żadną z dwóch kostek wyjątkowych, to liczba jego wystąpień wśród wszystkich kostek brzegowych jest podzielna przez 3. Z kolei dla elementu $s \in S$ wpisanego w jedną z kostek wyjątkowych — zależnie od tego, czy w drugiej kostce wyjątkowej także znajduje się s — liczba wystąpień daje resztę 1 lub 2 z dzielenia przez 3. Aby więc wszystkie elementy zbioru S mogły pojawić się tyle samo razy, każda liczba wpisana w dowolną kostkę musi również wystąpić w pewnej kostce wyjątkowej.

W rezultacie albo $m=1$, albo też $m=2$ i wówczas kostki wyjątkowo zawierają dwie różne liczby. W drugim przypadku sumy współrzędnych środków tych kostek, równe 0 oraz $3n+3$, dają różne reszty z dzielenia przez 2, co ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy n jest liczbą parzystą.

Pozostaje sprawdzić, że dla $m=1$ oraz dla $m=2$ i parzystych wartości n można pogrupować kostki w prostopadłościany $m \times 1 \times 1$. Dla $m=1$ nie ma czego dowodzić. Jeżeli zaś $m=2$, to kostki brzegowe można podzielić na ścianę dolną i górną — obie będące prostopadłościanami $(n+2) \times (n+2) \times 1$ — oraz na pionowe słupy o wymiarach $1 \times 1 \times n$. Dla parzystych n każdą z tych dwóch ścian oraz każdy słup można oczywiście rozbić na prostopadłościany $2 \times 1 \times 1$.

Odpowiedź: Para (m, n) ma żądaną własność wtedy i tylko wtedy, gdy $m=1$ lub gdy $m=2$ i n jest liczbą parzystą.

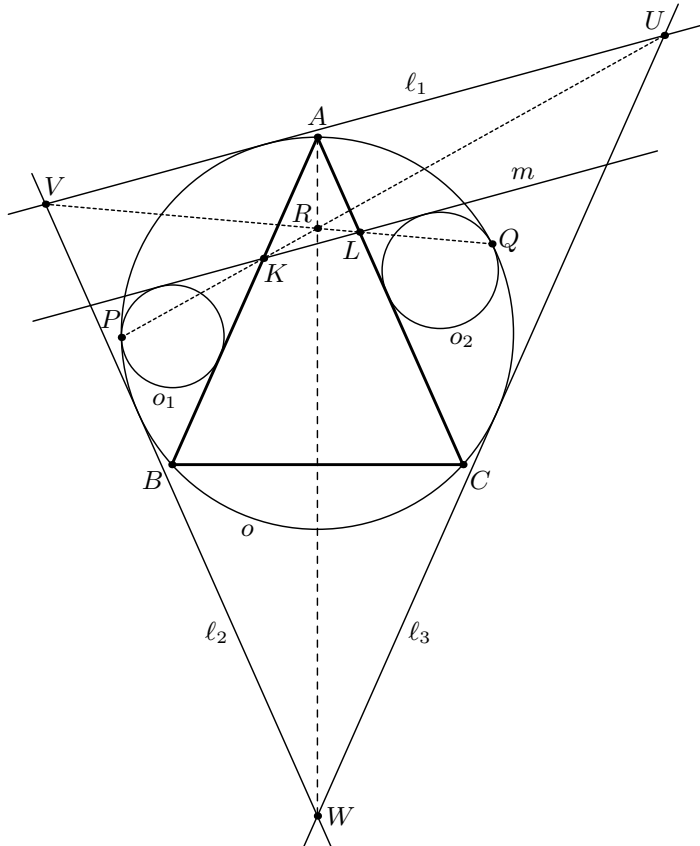
Zadanie 3. Trójkąt ABC , w którym $AB=AC$, jest wpisany w okrąg o . Okręgi o_1 i o_2 są styczne wewnętrznie do okręgu o odpowiednio w punktach P i Q , są też styczne odpowiednio do odcinków AB i AC oraz są rozłączne z wnętrzem trójkąta ABC . Niech m będzie taką prostą styczną do okręgów o_1 i o_2 , że punkty P i Q leżą po przeciwnej jej stronie niż punkt A . Prosta m przecina odcinki AB i AC odpowiednio w punktach K i L . Dowieść, że punkt przecięcia prostych PK i QL leży na dwusiecznej kąta BAC .

Rozwiązanie

Poprowadźmy trzy proste styczne do okręgu o : prostą ℓ_1 równoległą do prostej m i leżącą po przeciwnej jej stronie niż punkty B i C , prostą ℓ_2 równoległą do prostej AC i leżącą po tej samej jej stronie co punkt B , oraz prostą ℓ_3 równoległą do prostej AB i leżącą po tej samej jej stronie co punkt C . Oznaczmy ponadto symbolami U , V i W wierzchołki trójkąta wyznaczonego przez proste ℓ_1 , ℓ_2 i ℓ_3 w sposób wskazany na rys. 1.

Jednokładność o środku P , która odwzorowuje okrąg o_1 na okrąg o , przekształca proste m i AB styczne do okręgu o_1 na proste ℓ_1 i ℓ_3 styczne do okręgu o . Zatem przeprowadza ona punkt K przecięcia prostych m i AB na punkt U przecięcia prostych ℓ_1 i ℓ_3 . Stąd wniosek, że punkty P , K i U leżą na jednej prostej. Analogicznie punkty Q , L i V leżą na jednej prostej.

Niech R będzie punktem przecięcia prostych PK i QL . Rozpatrzmy jednokładność j o środku R przekształcającą prostą m na prostą ℓ_1 ; zachowuje ona proste KU i LV , czyli przeprowadza punkty K i L odpowiednio na punkty U i V . Wobec tego j odwzorowuje prostą AB przechodzącą przez punkt K na równoległą do niej prostą przechodzącą przez punkt U , a więc na prostą ℓ_3 . Podobnie uzasadniamy, że j przekształca prostą AC na prostą ℓ_2 . To oznacza, że proste zawierające boki trójkąta AKL są odwzorowywane przez jednokładność j na proste zawierające boki trójkąta WUV . W efekcie oba te trójkąty są jednokładne względem punktu R , co dowodzi, że punkt R leży na prostej AW .



rys. 1

Do zakończenia pozostaje jeszcze wykazać, że punkt W leży na dwusiecznej kąta BAC . Jednak przy symetrii względem tej dwusiecznej prosta AB przechodzi na prostą AC , a z równości $AB = AC$ wynika, że okrąg o przechodzi na siebie. Zatem prosta ℓ_2 przechodzi przy tej symetrii na prostą ℓ_3 , czyli punkt ich przecięcia W leży na osi tej symetrii, co kończy rozwiązanie.



LXIII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia trzeciego

19 kwietnia 2012 r. (drugi dzień zawodów)

Zadanie 4. W turnieju wzięło udział n zawodników ($n \geq 4$). Każdy zawodnik rozegrał dokładnie jeden mecz z każdym innym zawodnikiem, nie było remisów. Zakładamy, że nie istnieje taka czwórka zawodników (A, B, C, D) , że A wygrał z B , B wygrał z C , C wygrał z D oraz D wygrał z A . Wyznaczyć, w zależności od n , największą możliwą liczbę takich trójek zawodników (A, B, C) , że A wygrał z B , B wygrał z C oraz C wygrał z A .

(Uwaga: Trójki (A, B, C) , (B, C, A) i (C, A, B) uważamy za jedną trójkę.)

Rozwiązanie

Nazwijmy *trójką remisową* zbiór złożony z trzech zawodników, których można tak oznaczyć literami A, B, C , że A wygrał z B , B wygrał z C i C wygrał z A . Mamy więc znaleźć największą możliwą liczbę trójek remisowych.

Wykażemy, że jeden zawodnik nie może należeć do dwóch różnych trójek remisowych. Przypuśćmy bowiem, wbrew tej tezie, że dwie różne trójki mają wspólnych niektórych zawodników. Wtedy istnieje taki zawodnik A należący do obu tych trójek, że zawodnik pokonany przez A w pierwszej trójce jest inny niż zawodnik pokonany przez A w drugiej trójce. Tych dwóch zawodników, którzy przegrali z A , możemy tak oznaczyć symbolami B i C , że B wygrał z C . Niech ponadto D będzie trzecim zawodnikiem tej z rozważanych trójek, do której należą A i C ; wówczas D przegrał z C oraz wygrał z A . Wobec tego A wygrał z B , B wygrał z C , C wygrał z D oraz D wygrał z A , co przeczy warunkom zadania.

Zatem każdy zawodnik należy do co najwyżej jednej trójki remisowej. Stąd wniosek, że trzykrotność liczby tych trójek nie przekracza n . W efekcie trójek remisowych jest nie więcej niż m , gdzie m jest największą liczbą całkowitą, dla której $m \leq \frac{1}{3}n$.

Wskażemy teraz przykład turnieju o wymaganej własności, w którym liczba trójek remisowych wynosi co najmniej m .

W tym celu ponumerujemy zawodników liczbami $1, 2, 3, \dots, n$ i określmy wyniki rozgrywek przyjmując, że każdy mecz został wygrany przez zawodnika o mniejszym numerze, z następującymi wyjątkami: dla $k = 1, 2, 3, \dots, m$ zawodnik o numerze $3k - 2$ przegrał z zawodnikiem o numerze $3k$. Wówczas dla $k = 1, 2, 3, \dots, m$ zawodnicy o numerach $3k - 2$, $3k - 1$ i $3k$ tworzą trójkę remisową.

Przypuśćmy wreszcie, że istnieje czwórka (A, B, C, D) opisana w treści zadania; możemy przyjąć, że zawodnik A ma w tej czwórce najmniejszy nu-

mer. Ponieważ A przegrał z zawodnikiem D o większym numerze, więc dla pewnego k zawodnicy A i D mają odpowiednio numery $3k-2$ i $3k$. To oznacza, że D pokonał zawodników o numerach większych od $3k$. W takim razie C ma numer mniejszy od $3k$ i większy od $3k-2$, czyli numer $3k-1$. Jednak w tej sytuacji numer zawodnika B wynosi co najmniej $3k+1$, a każdy taki zawodnik przegrał z C , w sprzeczności z przypuszczeniem, że B wygrał z C .

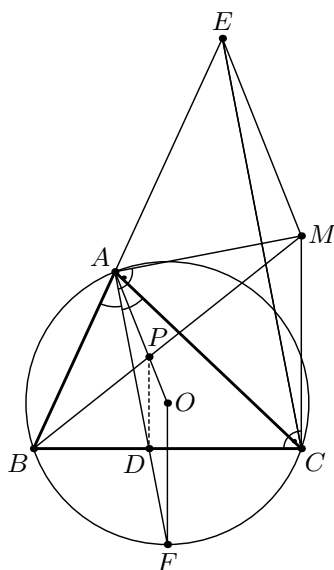
Wynika stąd, że największa możliwa liczba trójek remisowych wynosi m .

Odpowiedź: Szukana największa możliwa liczba trójek jest równa największej liczbie całkowitej nie przekraczającej $\frac{1}{3}n$.

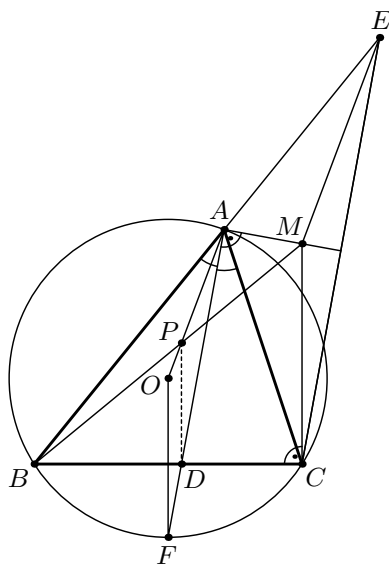
Zadanie 5. W trójkącie ostrokątnym ABC punkt O jest środkiem okręgu opisanego, a dwusieczna kąta BAC przecina bok BC w punkcie D . Niech M będzie takim punktem, że $MC \perp BC$ oraz $MA \perp AD$. Proste BM i OA przecinają się w punkcie P . Wykazać, że okrąg o środku P i przechodzący przez punkt A jest styczny do prostej BC .

Rozwiązanie

Jeżeli $AB = AC$, to odcinek AD zawiera punkt O i jest prostopadły do boku BC . Ponadto $BD = DC$ oraz czworokąt $ADCM$ jest prostokątem. W efekcie punkt P jest środkiem odcinka AD , czyli odcinek ten jest średnicą okręgu o środku P i przechodzącego przez punkt A , co pociąga za sobą tezę.



rys. 2



rys. 3

Przyjmijmy więc, że $AB \neq AC$. Na przedłużeniu boku BA poza punkt A odłóżmy taki punkt E , że $AE = AC$ (rys. 2 i 3, na których przedstawione są odpowiednio przypadki $AB < AC$ i $AB > AC$). Na mocy założenia $AB \neq AC$ punkt E nie leży prostej MC .

Z określenia punktu D i warunku $MA \perp AD$ wnioskujemy, że punkt M leży na dwusiecznej kąta CAE . Ponieważ zaś trójkąt CAE jest równoramienny, więc prosta AM jest symetralną odcinka CE . Zatem $ME = MC$, a przy tym $MA \perp CE$ i w rezultacie $EC \parallel AD$.

Niech F będzie punktem, w którym dwusieczna kąta BAC ponownie przecina okrąg opisany na trójkącie ABC . Punkt F jest środkiem łuku BC tego okręgu. W takim razie $OF \perp BC$, co oznacza, że $OF \parallel MC$.

Przyjrzyjmy się teraz bliżej trójkątom FOA i CME . Są to trójkąty równoramienne, w których $OF = OA$ oraz $MC = ME$. Punkty O, A, M i E leżą po przeciwnej stronie prostej BC niż punkt F , więc z wykazanych wyżej równoległości $AF \parallel EC$ i $OF \parallel MC$ uzyskujemy równość $\sphericalangle OFA = \sphericalangle MCE$. Wobec tego w obu rozważanych trójkątach równoramiennych kąty między ramieniem a podstawą są równe, czyli trójkąty te są podobne. Co więcej, ich podstawy AF i EC są równoległe oraz ramiona OF i MC są równoległe. Zatem ramię OA jest równoległe do ramienia ME .

W ten sposób udowodniliśmy, że $AP \parallel EM$. Stosując twierdzenie Talesa do kątów EBM i EBC otrzymujemy

$$\frac{BP}{PM} = \frac{BA}{AE} = \frac{BD}{DC}.$$

Na podstawie twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa wynika stąd, że $PD \parallel MC$ i w konsekwencji $PD \perp BC$. Ponadto w trójkącie równoramiennym FOA odcinek PD jest równoległy do ramienia OF , czyli trójkąt DPA jest równoramienny i $PD = PA$. To wraz z prostopadłością $PD \perp BC$ dowodzi, że okrąg o środku P przechodzący przez punkt A jest styczny do prostej BC w punkcie D .

Zadanie 6. Dowieść, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c prawdziwa jest nierówność

$$(1) \quad \left(\frac{a-b}{c}\right)^2 + \left(\frac{b-c}{a}\right)^2 + \left(\frac{c-a}{b}\right)^2 \geq 2\sqrt{2} \left(\frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b}\right).$$

Rozwiązanie

Mnożąc obustronnie nierówność (1) przez liczbę dodatnią $a^2b^2c^2$ uzyskujemy równoważną postać

$$a^2b^2(a-b)^2 + b^2c^2(b-c)^2 + c^2a^2(c-a)^2 \geq 2\sqrt{2}abc[ab(a-b) + bc(b-c) + ca(c-a)].$$

Ponieważ

$$\begin{aligned} ab(a-b) + bc(b-c) + ca(c-a) &= ab(a-b) + c(b^2 - a^2) + c^2(a-b) = \\ &= (a-b)[ab - c(a+b) + c^2] = (a-b)(a-c)(b-c), \end{aligned}$$

więc należy wykazać, że

$$(2) \quad a^2b^2(a-b)^2 + b^2c^2(b-c)^2 + c^2a^2(c-a)^2 \geq 2\sqrt{2}abc(a-b)(a-c)(b-c).$$

Obie strony nierówności (1) nie ulegają zmianie pod wpływem cyklicznego przestawienia symboli a, b, c . Możemy wobec tego przyjąć, że a jest największą spośród danych trzech liczb (lub jedną z największych). Jeżeli $b < c$, to nierówność (2) zachodzi, gdyż jej prawa strona jest niedodatnia, lewa zaś — nieujemna. Przypuśćmy zatem, że $a \geq b \geq c$. Wówczas liczby $x = a - b$ oraz $y = b - c$ są nieujemne, a dowodzoną zależność (2) możemy przepisać w postaci

$$(3) \quad a^2 b^2 x^2 + b^2 c^2 y^2 + c^2 a^2 (x+y)^2 \geq 2\sqrt{2} abcx y(x+y).$$

Zastosujmy nierówność $u + w \geq 2\sqrt{uw}$ do liczb nieujemnych $u = b^2 c^2 y^2$, $w = c^2 a^2 (x+y)^2$ oraz do liczb nieujemnych $u = abx^2 y(x+y)$, $w = 2abc^2 y(x+y)$. Otrzymujemy następujące dwie zależności:

$$b^2 c^2 y^2 + c^2 a^2 (x+y)^2 \geq 2abc^2 y(x+y)$$

oraz

$$abx^2 y(x+y) + 2abc^2 y(x+y) \geq 2\sqrt{2} abcx y(x+y);$$

dodając je stronami i redukując wyrazy podobne stwierdzamy, że

$$(4) \quad abx^2 y(x+y) + b^2 c^2 y^2 + c^2 a^2 (x+y)^2 \geq 2\sqrt{2} abcx y(x+y).$$

Porównując (3) i (4) widzimy, że po obu stronach występują jednakowe składniki z wyjątkiem pierwszych składników lewych stron. W takim razie nierówność (3) wynika z nierówności (4), jeżeli udowodnimy, że te pierwsze składniki spełniają warunek $a^2 b^2 x^2 \geq abx^2 y(x+y)$, czyli $abx^2 [ab - y(x+y)] \geq 0$. Ostatnia nierówność jest jednak prawdziwa, gdyż $abx^2 \geq 0$ oraz

$$ab = (c + x + y)(c + y) > (x + y)y,$$

a więc wyrażenie w nawiasie kwadratowym ma wartość dodatnią.

W ten sposób wykazaliśmy związek (3), co pociąga za sobą tezę zadania.



LXIV Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe

zawodów stopnia pierwszego

I seria (3 września 2012 r. – 3 października 2012 r.)

1. Dane są różne dodatnie liczby wymierne x i y , dla których liczba

$$w = \frac{x + \sqrt{y}}{y + \sqrt{x}}$$

jest wymierna. Wykazać, że obie liczby x i y są kwadratami liczb wymiernych.

2. Dany jest równoległobok $ABCD$ z kątem ostrym przy wierzchołku A . Zakładamy, że okrąg opisany na trójkącie ABD przecina boki CB i CD odpowiednio w punktach K i L różnych od wierzchołków. Niech odcinek AN będzie średnicą tego okręgu. Udowodnić, że punkt N jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie CKL .

3. Niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą. Wykazać, że jeżeli suma wszystkich jej dodatnich dzielników jest nieparzysta, to liczba n jest kwadratem lub podwojonym kwadratem liczby całkowitej.

4. Na tablicy narysowany jest 2012-kąt foremny. Michał i Jurek dorysowują na zmianę jedną przekątną, nie mającą wspólnych punktów wewnętrznych ani wspólnych końców z wcześniej narysowanymi przekątnymi. Przegrywa ten z graczy, który nie może wykonać ruchu. Grę rozpoczyna Michał. Który z graczy ma strategię wygrywającą?

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

3 października 2012 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane później nie będą rozpatrywane.



LXIV Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe

zawodów stopnia pierwszego

II seria (4 października 2012 r. – 5 listopada 2012 r.)

5. Wyznaczyć najmniejszą wartość wyrażenia $|20^m - 9^n|$, gdzie m i n są dodatnimi liczbami całkowitymi.

6. Punkty P , Q i R leżą odpowiednio na bokach BC , CA i AB trójkąta ABC , przy czym spełnione są równości $AR = RP = PC$ oraz $BR = RQ = QC$. Wykazać, że $AC + BC = 2AB$.

7. Dany jest czworościan $ABCD$, w którym $\angle BCA = \angle BAD$, a sfera o środku S dopisana do tego czworościanu jest styczna do ściany ABC w środku okręgu opisanego na tej ścianie. Udowodnić, że proste AD i AS są prostopadłe.

(Uwaga: Sfera dopisana do czworościanu to sfera styczna do dokładnie jednej ściany oraz do trzech płaszczyzn zawierających pozostałe ściany.)

8. Na planszy o wymiarach $n \times n$ wyróżniono $2n - 1$ pól. Dowieść, że można pomalować pewną niezerową liczbę wyróżnionych pól na zielono w taki sposób, że:

- w każdym wierszu i w każdej kolumnie liczba zielonych pól jest parzysta,
- albo
- w każdym wierszu i w każdej kolumnie liczba zielonych pól jest nieparzysta.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

5 listopada 2012 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane później nie będą rozpatrywane.



LXIV Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe

zawodów stopnia pierwszego

III seria (6 listopada 2012 r. – 6 grudnia 2012 r.)

9. Na płaszczyźnie ustawiono po jednym kamieniu w punktach o współrzędnych $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$ i $(1, 1)$. W jednym ruchu wybieramy dowolny kamień i przestawiamy go symetrycznie względem któregoś z pozostałych kamieni. Rozstrzygnąć, czy po skończonej liczbie ruchów trzy kamienie mogą znaleźć się na jednej prostej.

10. Dany jest prostopadłościan $ABCD A' B' C' D'$. Niech α , β i γ będą kątami utworzonymi przez przekątną AC' z krawędziami AB , AD i AA' . Udowodnić, że

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma \leq \frac{3}{2} \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma.$$

11. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Proste zawierające dwusieczne kątów wewnętrznych A i C przecinają się w punkcie P , a proste zawierające dwusieczne kątów wewnętrznych B i D przecinają się w punkcie Q . Dowieść, że jeżeli kąt PAQ jest prosty, to również kąt PCQ jest prosty.

12. Zbadać, czy istnieje liczba całkowita większa od 2012^{2012} , której nie można przedstawić w postaci $x^2 + y^3 + z^6$, gdzie x , y i z są dodatnimi liczbami całkowitymi.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

6 grudnia 2012 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane później nie będą rozpatrywane.

Adresy Komitetów Okręgowych Olimpiady Matematycznej

- Dla województwa pomorskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Gdańskiego, ul. Wita Stwosza 57, 80-952 Gdańsk.

- Dla województwa śląskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Śląskiego, ul. Bankowa 14, 40-007 Katowice.

- Dla województwa małopolskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego, ul. Łojasiewicza 6, 30-348 Kraków.

- Dla województwa lubelskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Zakład Rachunku Prawdopodobieństwa pok. 810, Instytut Matematyki UMCS, pl. Marii Skłodowskiej-Curie 1, 20-031 Lublin.

- Dla województwa łódzkiego i świętokrzyskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Łódzkiego, ul. Banacha 22, 90-238 Łódź.

- Dla województwa wielkopolskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki i Informatyki UAM, ul. Umultowska 87, 61-614 Poznań.

- Dla województwa podkarpackiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Katedra Matematyki, Politechnika Rzeszowska, al. Powstańców Warszawy 8, 35-959 Rzeszów.

- Dla województwa lubuskiego i zachodniopomorskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Szczecińskiego, ul. Wielkopolska 15, 70-451 Szczecin.

- Dla województwa kujawsko-pomorskiego i warmińsko-mazurskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki i Informatyki UMK, ul. Chopina 12/18, 87-100 Toruń.

- Dla województwa mazowieckiego i podlaskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, ul. Śniadeckich 8, 00-656 Warszawa.

- Dla województwa dolnośląskiego i opolskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego, pl. Grunwaldzki 2/4, 50-384 Wrocław.

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w Internecie pod adresem: www.om.edu.pl



LXIV Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia pierwszego

(3 września 2012 r. – 6 grudnia 2012 r.)

Zadanie 1. Dane są różne dodatnie liczby wymierne x i y , dla których liczba

$$(1) \quad w = \frac{x + \sqrt{y}}{y + \sqrt{x}}$$

jest wymierna. Wykazać, że obie liczby x i y są kwadratami liczb wymiernych.

Rozwiązanie

Pomnożmy obustronnie równość (1) przez mianownik $y + \sqrt{x}$, otrzymując

$$wy + w\sqrt{x} = x + \sqrt{y},$$

skąd

$$(2) \quad w\sqrt{x} - \sqrt{y} = x - wy.$$

Następnie podnieśmy obustronnie zależność (2) do kwadratu. Uzyskujemy

$$w^2x - 2w\sqrt{xy} + y = x^2 - 2wxy + w^2y^2,$$

a więc

$$(3) \quad 2w\sqrt{xy} = w^2x + y - x^2 + 2wxy - w^2y^2.$$

Prawa strona związku (3) jest liczbą wymierną, a w jest dodatnią liczbą wymierną. W rezultacie liczba $a = \sqrt{xy}$ także jest wymierna.

Pomnożmy teraz obie strony równości (2) przez $\sqrt{x}$. Dostajemy

$$(4) \quad wx - a = (x - wy)\sqrt{x}.$$

Mnożąc z kolei obustronnie zależność (2) przez $\sqrt{y}$ otrzymujemy

$$(5) \quad aw - y = (x - wy)\sqrt{y}.$$

Czynnik $x - wy$ występujący po prawej stronie związków (4) i (5) jest różny od zera. Przypuśćmy bowiem, wbrew tej tezie, że ma miejsce równość $x = wy$. Wówczas mnożąc obie jej strony przez $y + \sqrt{x}$ stwierdzamy, że

$$x(y + \sqrt{x}) = (x + \sqrt{y})y.$$

Wynika stąd zależność $x\sqrt{x} = y\sqrt{y}$, która jednak przeczy założeniu, że liczby x i y są różne. Zatem na mocy związków (4) i (5) liczby

$$\sqrt{x} = \frac{wx - a}{x - wy} \quad \text{oraz} \quad \sqrt{y} = \frac{aw - y}{x - wy}$$

są wymierne, co jest równoznaczne z tezą zadania.

Zadanie 2. Dany jest równoległobok $ABCD$ z kątem ostrym przy wierzchołku A . Zakładamy, że okrąg opisany na trójkącie ABD przecina boki CB i CD odpowiednio w punktach K i L różnych od wierzchołków. Niech odcinek AN będzie średnicą tego okręgu. Udowodnić, że punkt N jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie CKL .

Rozwiązanie

Sposób I

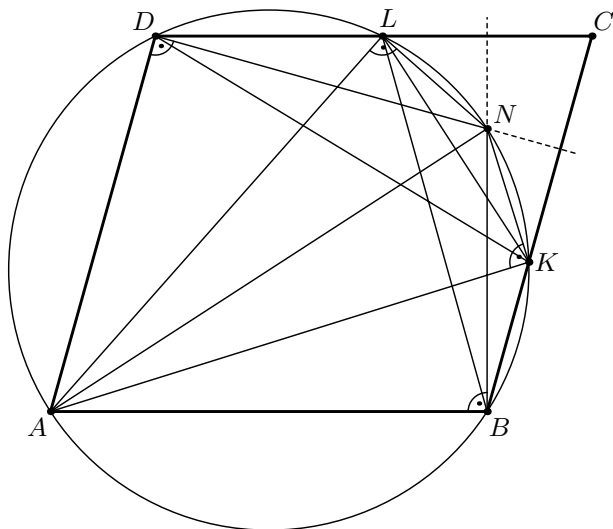
Punkty A, B, L oraz D leżą na jednym okręgu w wypisanej kolejności, a kąty wewnętrzne równoległoboku $ABCD$ przy wierzchołkach A i C mają równe miary (rys. 1). Stąd otrzymujemy

$$\sphericalangle BLC = 180^\circ - \sphericalangle BLD = \sphericalangle BAD = \sphericalangle BCD = \sphericalangle BCL.$$

Wobec tego trójkąt BCL jest równoramienny.

Z drugiej strony, odcinek AN jest średnicą danego w treści zadania okręgu, więc proste AB i BN są prostopadłe. W efekcie również proste CD i BN są prostopadłe. Jednak w trójkącie równoramiennym BCL wysokość poprowadzona z wierzchołka B pokrywa się z symetralną boku CL , zatem z poprzedniego zdania wynika, że punkt N leży na symetralnej odcinka CL .

Podobnie dowodzimy, że trójkąt KCD jest równoramienny, a punkt N leży na symetralnej odcinka CK . W takim razie punkt N jest punktem przecięcia symetralnych dwóch boków trójkąta CKL , co pociąga za sobą tezę.



rys. 1

Sposób II

Na mocy określenia punktu N kąty ABN i ADN są proste (rys. 1). Z kolei w myśl założeń zadania kąty ABK i ADL są rozwarte. To oznacza, że punkty B i N leżą po przeciwnych stronach prostej AK , a punkty D i N leżą

po przeciwnych stronach prostej AL . Zatem punkty A, B, K, N, L oraz D leżą na jednym okręgu w wypisanej kolejności, skąd uzyskujemy związki

$$\sphericalangle ANK = 180^\circ - \sphericalangle ABK \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle ANL = 180^\circ - \sphericalangle ADL.$$

Jednak czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem i w konsekwencji prawe strony powyższych dwóch zależności są równe $\sphericalangle BCD$. To oznacza, że

$$(1) \quad \sphericalangle ANK = \sphericalangle ANL = \sphericalangle BCD.$$

Na podstawie równości (1) kąty wewnętrzne trójkątów AKN i ALN przy wierzchołku N mają równe miary. Ponadto kąty wewnętrzne tych trójkątów odpowiednio przy wierzchołkach K i L są proste jako kąty wpisane oparte na średnicy okręgu. W takim razie trójkąty AKN i ALN są podobne (cecha *kąt-kąt-kąt*). Co więcej, mają one wspólny odpowiedni bok AN , a więc są przystające. Wobec tego $NK = NL$, czyli istnieje okrąg o o środku w punkcie N , przechodzący przez punkty K i L . Ponadto punkty N i C leżą po tej samej stronie prostej KL , a z zależności (1) otrzymujemy

$$\sphericalangle KNL = \sphericalangle ANK + \sphericalangle ANL = 2\sphericalangle BCD = 2\sphericalangle KCL,$$

skąd wynika, że okrąg o przechodzi także przez punkt C . Okrąg o o środku N jest więc okręgiem opisanym na trójkącie CKL , co kończy rozwiązanie.

Zadanie 3. Niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą. Wykazać, że jeżeli suma wszystkich jej dodatnich dzielników jest nieparzysta, to liczba n jest kwadratem lub podwojonym kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie

Sposób I

Suma wszystkich dodatnich dzielników liczby n jest nieparzysta wtedy i tylko wtedy, gdy liczba nieparzystych składników tej sumy jest nieparzysta. Zatem na mocy warunków zadania zbiór nieparzystych dodatnich dzielników liczby n ma nieparzystą liczbę elementów.

Niech k będzie największą taką nieujemną liczbą całkowitą, że potęga 2^k jest dzielnikiem liczby n . Wtedy prawdziwy jest rozkład $n = 2^k \cdot m$, w którym czynnik m jest nieparzysty. Z rozkładu tego wynika, że dowolny nieparzysty dzielnik liczby n jest również dzielnikiem liczby m . Na odwrót, każdy dzielnik liczby m jest też dzielnikiem liczby n . Wobec tego zbiór nieparzystych dzielników liczby n pokrywa się ze zbiorem nieparzystych dzielników liczby m .

Liczba m jest nieparzysta, więc wszystkie jej dodatnie dzielniki także są nieparzyste. Stąd wnioskujemy, że liczba wszystkich dodatnich dzielników liczby m jest nieparzysta.

Przyporządkujemy każdemu dodatniemu dzielnikowi d liczby m mniejszemu od $\sqrt{m}$ liczbę całkowitą $\frac{m}{d}$; jest ona dzielnikiem liczby m większym od $\sqrt{m}$. Wówczas różnym dzielnikom d odpowiadają różne wartości ilorazu $\frac{m}{d}$. Ponadto każdy dzielnik liczby m większy od $\sqrt{m}$ można uzyskać w ten sposób:

dzielnik g liczby m większy od $\sqrt{m}$ został bowiem przypisany dzielnikowi $\frac{m}{g}$ mniejszemu od $\sqrt{m}$. W rezultacie zbiór dodatnich dzielników liczby m mniejszych od $\sqrt{m}$ ma tyle samo elementów, co zbiór dzielników liczby m większych od $\sqrt{m}$. W takim razie liczba dodatnich dzielników liczby m różnych od $\sqrt{m}$ jest parzysta. To wraz z ostatnim zdaniem poprzedniego akapitu dowodzi, że $a = \sqrt{m}$ jest liczbą całkowitą będącą dzielnikiem liczby m . Innymi słowy, liczba m jest kwadratem liczby całkowitej a .

Jeżeli teraz k jest liczbą parzystą, to ma miejsce równość $k = 2b$ dla pewnej liczby całkowitej $b \geq 0$, skąd $n = 2^k \cdot m = 2^{2b} \cdot a^2 = (2^b \cdot a)^2$. Jeżeli natomiast k jest liczbą nieparzystą, to $k = 2c + 1$ dla pewnej liczby całkowitej $c \geq 0$ i w efekcie $n = 2^k \cdot m = 2^{2c+1} \cdot a^2 = 2(2^c \cdot a)^2$. Zatem liczba n jest kwadratem lub podwojonym kwadratem liczby całkowitej.

Sposób II

Niech $p_1, p_2, \dots, p_k$ będą wszystkimi dzielnikami pierwszymi liczby n . Rozkładając liczbę n na czynniki pierwsze uzyskujemy więc przedstawienie

$$n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \dots \cdot p_k^{a_k},$$

w którym wykładniki $a_1, a_2, \dots, a_k$ są dodatnimi liczbami całkowitymi.

Dowolny dodatni dzielnik liczby n ma wtedy postać $p_1^{b_1} \cdot p_2^{b_2} \cdot \dots \cdot p_k^{b_k}$, gdzie wykładniki $b_1, b_2, \dots, b_k$ są liczbami całkowitymi spełniającymi nierówności $0 \leq b_i \leq a_i$ dla $i = 1, 2, \dots, k$. Na odwrót, każdy iloczyn tej postaci jest dzielnikiem liczby n . Zauważmy następnie, że suma wszystkich możliwych iloczynów tej postaci wynosi

$$S = (1 + p_1 + p_1^2 + \dots + p_1^{a_1}) \cdot (1 + p_2 + p_2^2 + \dots + p_2^{a_2}) \cdot \dots \cdot (1 + p_k + p_k^2 + \dots + p_k^{a_k}).$$

Rzeczywiście, wymnażając wszystkie nawiasy po prawej stronie powyższej równości otrzymujemy sumę wszystkich możliwych iloczynów $p_1^{b_1} \cdot p_2^{b_2} \cdot \dots \cdot p_k^{b_k}$, w których $b_i \in \{0, 1, 2, \dots, a_i\}$ dla $i = 1, 2, \dots, k$.

Wobec tego liczba S jest sumą wszystkich dodatnich dzielników liczby n . Zatem w myśl warunków zadania wszystkie czynniki iloczynu stojącego po prawej stronie wzoru określającego liczbę S muszą być liczbami nieparzystymi. Jeżeli teraz dla pewnego wskaźnika $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ liczba pierwsza p_i jest nieparzysta, to z nieparzystości sumy $1 + p_i + p_i^2 + \dots + p_i^{a_i}$ wynika, że liczba jej składników musi być nieparzysta, czyli wykładnik a_i jest liczbą parzystą. W takim razie dowolna nieparzysta liczba pierwsza wchodzi do rozkładu liczby n na czynniki pierwsze z wykładnikiem parzystym.

Możliwe są więc dwie sytuacje: w rozkładzie liczby n na czynniki pierwsze albo wszystkie liczby pierwsze występują z wykładnikiem parzystym, albo też wszystkie nieparzyste liczby pierwsze występują z wykładnikiem parzystym, a liczba pierwsza 2 występuje z wykładnikiem nieparzystym. W drugim przypadku liczba n jest parzysta oraz wszystkie liczby pierwsze występują z wykładnikiem parzystym w rozkładzie liczby $\frac{1}{2}n$ na czynniki pierwsze.

Jeżeli wszystkie liczby pierwsze wchodzą z wykładnikiem parzystym do rozkładu pewnej dodatniej liczby całkowitej m na czynniki pierwsze, to jest ona kwadratem liczby całkowitej. Istotnie, niech $q_1, q_2, \dots, q_\ell$ będą wszystkimi dzielnikami pierwszymi liczby m . Wtedy rozkład liczby m przybiera postać $m = q_1^{2c_1} \cdot q_2^{2c_2} \cdot \dots \cdot q_\ell^{2c_\ell}$ dla pewnych dodatnich liczb całkowitych $c_1, c_2, \dots, c_\ell$, skąd wynika, że liczba m jest kwadratem liczby całkowitej $q_1^{c_1} \cdot q_2^{c_2} \cdot \dots \cdot q_\ell^{c_\ell}$.

Na mocy stwierdzeń zawartych w dwóch poprzednich akapitach liczba n lub liczba $\frac{1}{2}n$ jest kwadratem liczby całkowitej, co dowodzi tezy zadania.

Zadanie 4. Na tablicy narysowany jest 2012-kąt foremny. Michał i Jurek dorysowują na zmianę jedną przekątną, nie mającą wspólnych punktów wewnętrznych ani wspólnych końców z wcześniej narysowanymi przekątnymi. Przegrywa ten z graczy, który nie może wykonać ruchu. Grę rozpoczyna Michał. Który z graczy ma strategię wygrywającą?

Rozwiązanie

Udowodnimy, że Michał ma strategię wygrywającą.

Przypuśćmy, że Michał na początku gry rysuje dowolną spośród 1006 najdłuższych przekątnych danego 2012-kąta foremnego (prosta ℓ zawierająca tak wybraną przekątną q jest wówczas osią symetrii rozważanego 2012-kąta), a w każdym ze swoich następnych ruchów dorysowuje przekątną symetryczną względem prostej ℓ do przekątnej narysowanej przed chwilą przez Jurka.

Wykażemy, że przy każdym swoim ruchu Michał będzie mógł zastosować opisaną strategię nie naruszając zasad gry. Wyniknie stąd, że doprowadzi go ona do wygranej, gdyż po każdym ruchu Jurka Michał będzie w stanie wykonać kolejny ruch i w rezultacie nie Michał — a więc Jurek — w pewnym momencie znajdzie się w sytuacji, w której dorysowanie kolejnej przekątnej w sposób zgodny z wymaganiami zadania stanie się niemożliwe.

Zauważmy najpierw, że dopóki Michał stosuje opisaną strategię, dopóty po dowolnym jego ruchu zbiór wszystkich przekątnych narysowanych w danej chwili na tablicy jest symetryczny względem prostej ℓ . Istotnie, pierwszy ruch Michała polega na narysowaniu przekątnej zawartej w prostej ℓ . Natomiast później wykonywane są pary ruchów, złożone z ruchu Jurka i następującego po nim ruchu Michała; w wyniku wykonania każdej takiej pary na tablicy pojawiają się dwie nowe przekątne symetryczne względem prostej ℓ .

Udowodnimy teraz, że jeżeli we wszystkich poprzednich ruchach Michał stosował rozpatrywaną strategię, to może ją również zastosować w bieżącym ruchu w odpowiedzi na ruch wykonany przez Jurka. Wyniknie stąd teza.

Niech p oznacza przekątną, którą w wykonanym przed chwilą ruchu narysował Jurek. Przed narysowaniem tej przekątnej zbiór $\mathcal{S}$ przekątnych znajdujących się wówczas na tablicy był symetryczny względem prostej ℓ i zawierał przekątną q . Ponieważ ruch Jurka był zgodny z regułami gry, więc przekątna p nie ma punktów wspólnych (wewnętrznych ani końców) z żadną przekątną

ze zbioru $\mathcal{S}$ — w szczególności z przekątną q , co oznacza, że przekątna p jest zawarta w jednej z dwóch otwartych półpłaszczyzn wyznaczonych przez prostą ℓ . Na mocy dwóch poprzednich zdań także przekątna p' , symetryczna do przekątnej p względem prostej ℓ , nie ma punktów wspólnych z żadną przekątną ze zbioru $\mathcal{S}$. Ponadto przekątne p' i p również nie mają punktów wspólnych, gdyż leżą one po przeciwnych stronach prostej ℓ . Wobec tego Michał może narysować na tablicy przekątną p' w zgodzie z zasadami gry i rozważaną strategią, a to właśnie należało wykazać.

Odpowiedź: Strategię wygrywającą ma Michał.

Zadanie 5. Wyznaczyć najmniejszą wartość wyrażenia $|20^m - 9^n|$, gdzie m i n są dodatnimi liczbami całkowitymi.

Rozwiązanie

Dla $m = n = 1$ otrzymujemy wartość $|20^1 - 9^1| = 11$. Udowodnimy, że jest to najmniejsza możliwa wartość rozpatrywanego wyrażenia.

Z algorytmu mnożenia pisemnego wynika, że jeżeli dwie dodatnie liczby całkowite mają w zapisie dziesiętnym cyfrę jedności równą 9, to iloczyn tych dwóch liczb ma taką samą cyfrę jedności, jak iloczyn $9 \cdot 9$, czyli cyfrę 1. Natomiast iloczyn dwóch dodatnich liczb całkowitych o cyfrach jedności równych odpowiednio 1 i 9 ma cyfrę jedności 9. Zatem cyfry jedności potęg 9^n dla $n = 1, 2, 3$ są na przemian równe 9 i 1. Liczba 20^m jest zaś podzielna przez 10 dla każdej liczby całkowitej $m \geq 1$. Wobec tego dla dowolnych dodatnich liczb całkowitych m i n cyfra jedności liczby $|20^m - 9^n|$ wynosi 1 lub 9.

Należy więc wykazać, że dane wyrażenie nie może być równe 1 ani 9.

Liczba 20^m nie jest podzielna przez 9, gdyż w jej rozkładzie na czynniki pierwsze występują tylko liczby 2 i 5. To oznacza, że również różnica $20^m - 9^n$ nie jest podzielna przez 9 i w konsekwencji $|20^m - 9^n| \neq 9$ dla dowolnych dodatnich liczb całkowitych m i n .

Przypuśćmy z kolei, że dla pewnych liczb całkowitych $m, n \geq 1$ spełniona jest równość $|20^m - 9^n| = 1$. W takim razie $20^m - 9^n = 1$ lub $20^m - 9^n = -1$. W pierwszym przypadku dostajemy zależność

$$9^n = 20^m - 1 = (20 - 1)(20^{m-1} + 20^{m-2} + 20^{m-3} + \dots + 20^2 + 20 + 1),$$

która pociąga za sobą podzielność liczby 9^n przez 19, co jednak nie może mieć miejsca. Przejdźmy teraz do przypadku $20^m - 9^n = -1$. Gdyby wykładnik m był liczbą nieparzystą, to z równości

$$9^n = 20^m + 1 = (20 + 1)(20^{m-1} - 20^{m-2} + 20^{m-3} - \dots + 20^2 - 20 + 1)$$

uzyskalibyśmy podzielność liczby 9^n przez 21 i tym bardziej przez 7, co nie jest możliwe. Stąd wniosek, że wykładnik m jest liczbą parzystą, czyli $m = 2k$ dla pewnej dodatniej liczby całkowitej k . Otrzymujemy zatem rozkład

$$-1 = 20^m - 9^n = 20^{2k} - 3^{2n} = (20^k - 3^n)(20^k + 3^n),$$

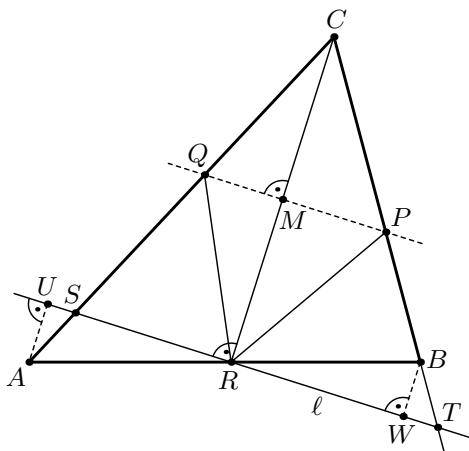
w którym każda z dwóch liczb całkowitych stojących w nawiasach po prawej stronie musi być równa 1 albo -1 . To przeczy nierówności $20^k + 3^n \geq 20 + 3$, a więc rozwiązanie jest zakończone.

Odpowiedź: Szukana najmniejsza wartość wynosi 11.

Zadanie 6. Punkty P , Q i R leżą odpowiednio na bokach BC , CA i AB trójkąta ABC , przy czym spełnione są równości $AR = RP = PC$ oraz $BR = RQ = QC$. Wykazać, że $AC + BC = 2AB$.

Rozwiązanie

Sposób I



rys. 2

Poprowadźmy przez punkt R prostą ℓ prostopadłą do prostej CR . Niech prosta ℓ przecina proste CA i CB odpowiednio w punktach S i T (rys. 2).

W myśl warunku $RQ = QC$ punkt Q leży na symetralnej boku CR trójkąta prostokątnego CRS . Podobnie punkt P leży na symetralnej boku CR trójkąta prostokątnego CRT . Symetralna przyprostokątnej w trójkącie prostokątnym przechodzi przez środek przeciwprostokątnej. Zatem punkty Q i P są odpowiednio środkami odcinków CS i CT , skąd wnioskujemy, że punkty S i T leżą odpowiednio na półprostych $CA^{\rightarrow}$ i $CB^{\rightarrow}$, a ponadto

$$(1) \quad CS = 2QC = 2BR \quad \text{oraz} \quad CT = 2PC = 2AR.$$

Oznaczmy przez U i W rzuty prostokątne odpowiednio punktów A i B na prostą ℓ . Wówczas proste AU i BW są równoległe, a więc trójkąty ARU i BRW są jednokładne względem punktu R . Stąd uzyskujemy związek

$$(2) \quad \frac{AR}{BR} = \frac{AU}{BW}.$$

Podobnie uzasadniamy, że

$$(3) \quad \frac{BT}{CT} = \frac{BW}{CR} \quad \text{oraz} \quad \frac{CS}{AS} = \frac{CR}{AU}.$$

Mnożąc stronami zależności (2) i (3) stwierdzamy, że

$$(4) \quad \frac{AR}{BR} \cdot \frac{BT}{CT} \cdot \frac{CS}{AS} = 1.$$

Łącząc teraz równości (1) i (4) dostajemy zależność

$$(5) \quad BT = AS.$$

Prosta ℓ albo przecina prostą AB w punkcie R , albo się z nią pokrywa. To oznacza, że punkty S i T leżą po przeciwnych stronach prostej AB albo też oba leżą na prostej AB . W obu przypadkach z równości (5) wynika, że suma długości odcinków CA i CB jest taka sama, jak suma długości odcinków CS i CT . Stąd i ze związków (1) otrzymujemy

$$AC + BC = CS + CT = 2BR + 2AR = 2(BR + AR) = 2AB.$$

Sposób II

Stosując twierdzenie sinusów do trójkątów ABC i RBP (rys. 2) oraz korzystając z równości danych w treści zadania uzyskujemy

$$(6) \quad \begin{aligned} \frac{AC}{AB} &= \frac{\sin \sphericalangle ABC}{\sin \sphericalangle BCA} = \frac{\sin \sphericalangle RBP}{\sin \sphericalangle RPB} \cdot \frac{\sin \sphericalangle RPB}{\sin \sphericalangle BCA} = \\ &= \frac{RP}{BR} \cdot \frac{\sin \sphericalangle RPB}{\sin \sphericalangle BCA} = \frac{CP}{CQ} \cdot \frac{\sin \sphericalangle RPB}{\sin \sphericalangle BCA}. \end{aligned}$$

W trójkącie równoramiennym RPC prawdziwy jest związek $\sphericalangle CRP = \sphericalangle PCR$, z którego wynika zależność

$$(7) \quad \sphericalangle RPB = 180^\circ - \sphericalangle RPC = 2\sphericalangle PCR.$$

Z kolei na podstawie równości $RP = PC$ i $RQ = QC$ punkty P i Q leżą na symetralnej odcinka CR . Zatem środek M tego odcinka leży na prostej PQ , a trójkąty PMC i QMC mają kąt prosty przy wierzchołku M . To wraz ze związkiem (7) dowodzi, że

$$(8) \quad \begin{aligned} \frac{CP}{CQ} \cdot \sin \sphericalangle RPB &= \frac{CM}{CQ} \cdot \frac{CP}{CM} \cdot \sin 2\sphericalangle PCR = \\ &= \frac{\cos \sphericalangle QCR}{\cos \sphericalangle PCR} \cdot 2 \sin \sphericalangle PCR \cos \sphericalangle PCR = 2 \cos \sphericalangle QCR \sin \sphericalangle PCR. \end{aligned}$$

Łącząc zależności (6) i (8) otrzymujemy równość

$$(9) \quad \frac{AC}{AB} = \frac{2 \cos \sphericalangle QCR \sin \sphericalangle PCR}{\sin \sphericalangle BCA}.$$

Analogicznie uzasadniamy, że

$$(10) \quad \frac{BC}{AB} = \frac{2 \cos \sphericalangle PCR \sin \sphericalangle QCR}{\sin \sphericalangle BCA}.$$

Dodając stronami związki (9) i (10) dochodzimy do wniosku, że

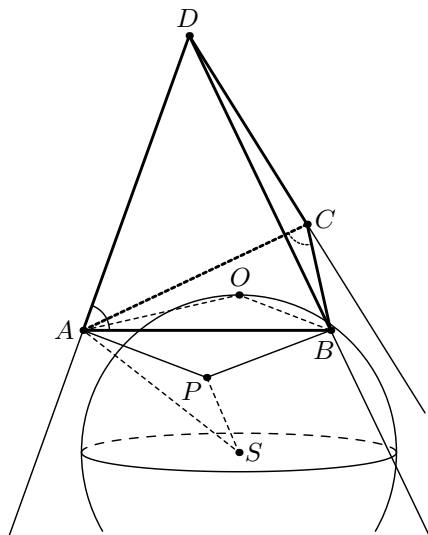
$$\frac{AC + BC}{AB} = \frac{2 \sin(\sphericalangle PCR + \sphericalangle QCR)}{\sin \sphericalangle BCA} = \frac{2 \sin \sphericalangle BCA}{\sin \sphericalangle BCA} = 2,$$

co należało udowodnić.

Zadanie 7. Dany jest czworościan $ABCD$, w którym $\sphericalangle BCA = \sphericalangle BAD$, a sfera o środku S dopisana do tego czworościanu jest styczna do ściany ABC w środku okręgu opisanego na tej ścianie. Udowodnić, że proste AD i AS są prostopadłe.

(Uwaga: Sfera dopisana do czworościanu to sfera styczna do dokładnie jednej ściany oraz do trzech płaszczyzn zawierających pozostałe ściany.)

Rozwiązanie



rys. 3

Niech O oznacza środek okręgu opisanego na ścianie ABC , a P — punkt styczności danej w treści zadania sfery do płaszczyzny ABD (rys. 3).

Odcinki stycznych do sfery poprowadzonych z tego samego punktu mają równe długości, skąd na mocy założeń zadania otrzymujemy związki $AO = AP$ i $BO = BP$. Z drugiej strony, na podstawie określenia punktu O prawdziwa jest zależność $OA = OB$. W takim razie odcinki AP , AO , BO i BP mają jednakowe długości. To z kolei dowodzi, że trójkąty AOB oraz APB są równoramienne i przystające (cecha *bok-bok-bok*), co pociąga za sobą równość

$$(1) \quad \sphericalangle BPA = \sphericalangle BOA.$$

Punkt O leży wewnątrz ściany ABC i jest środkiem opisanego na niej okręgu. Stąd, w myśl związku pomiędzy kątami środkowym i wpisanym, uzyskujemy

$$(2) \quad \sphericalangle BOA = 2\sphericalangle BCA.$$

Łącząc równości (1) i (2) z równością daną w treści zadania stwierdzamy, że

$$(3) \quad \sphericalangle BPA = 2\sphericalangle BAD.$$

Ponadto w trójkącie równoramiennym APB spełniona jest zależność

$$\sphericalangle PAB = \frac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle BPA),$$

która wraz ze związkiem (3) prowadzi do równości

$$\sphericalangle PAD = \sphericalangle PAB + \sphericalangle BAD = \frac{1}{2}(180^\circ - 2\sphericalangle BAD) + \sphericalangle BAD = 90^\circ.$$

Wykazaliśmy w ten sposób, że proste AD i AP są prostopadłe.

Płaszczyzna ABD jest styczna w punkcie P do rozważanej sfery, skąd wynika, że prosta SP jest prostopadła do tej płaszczyzny. Zatem prosta SP jest prostopadła do leżącej w tej płaszczyźnie prostej AD . W konsekwencji prosta AD jest prostopadła do nierównoległych prostych AP i SP leżących w płaszczyźnie ASP . Prosta AD jest więc prostopadła do płaszczyzny ASP , czyli jest prostopadła do leżącej w tej płaszczyźnie prostej AS , co daje tezę.

Zadanie 8. Na planszy o wymiarach $n \times n$ wyróżniono $2n - 1$ pól. Dowieść, że można pomalować pewną niezerową liczbę wyróżnionych pól na zielono w taki sposób, że:

- w każdym wierszu i w każdej kolumnie liczba zielonych pól jest parzysta,
- albo
- w każdym wierszu i w każdej kolumnie liczba zielonych pól jest nieparzysta.

Rozwiązanie

Sposób I

Niech S oznacza zbiór wszystkich $2n - 1$ wyróżnionych pól planszy.

Przyporządkujemy każdemu podzbiorowi zbioru S pewien $2n$ -wyrazowy ciąg o wyrazach równych 0 lub 1 w następujący sposób. Niech A będzie dowolnym podzbiorem zbioru S . Dla $i = 1, 2, \dots, n$ oznaczmy przez w_i oraz k_i liczbę pól zbioru A leżących odpowiednio w i -tym wierszu oraz w i -tej kolumnie planszy. Zastąpmy każdy parzysty wyraz ciągu $(w_1, w_2, \dots, w_n, k_1, k_2, \dots, k_n)$ liczbą 0, a każdy nieparzysty wyraz — liczbą 1. Uzyskany $2n$ -wyrazowy ciąg przypisujemy zbiorowi A . Zauważmy, że suma wszystkich wyrazów tego ciągu jest parzysta, gdyż suma $(w_1 + w_2 + \dots + w_n) + (k_1 + k_2 + \dots + k_n)$ jest równa podwojonej liczbie pól zbioru A .

Liczba $2n$ -wyrazowych ciągów o wyrazach równych 0 lub 1 i parzystej sumie wszystkich wyrazów wynosi 2^{2n-1} . Początkowe $2n - 1$ wyrazów można bowiem wybrać dowolnie na 2^{2n-1} sposobów, a dla każdego takiego wyboru ostatni wyraz jest jednoznacznie wyznaczony.

Każdemu spośród 2^{2n-1} podzbiorów zbioru S przyporządkowaliśmy więc jeden z 2^{2n-1} możliwych ciągów. Zatem albo każdy ciąg został przypisany

dokładnie jednemu podzbiorowi, albo istnieją dwa różne podzbiory, którym przyporządkowany został ten sam ciąg.

W pierwszym przypadku istnieje podzbiór A zbioru S , któremu przypisany został ciąg o wszystkich wyrazach równych 1. Wtedy w każdym wierszu i w każdej kolumnie planszy znajduje się nieparzysta liczba pól ze zbioru A . Wobec tego w wyniku pomalowania wszystkich pól zbioru A na zielono otrzymujemy rozmieszczenie zielonych pól spełniające żądany warunek.

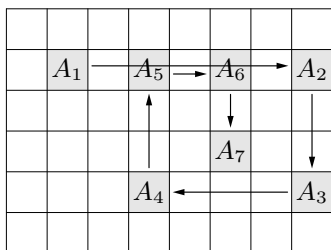
W drugim przypadku zaś istnieją dwa różne podzbiory B_1 i B_2 zbioru S , którym przypisany został ten sam ciąg. Niech B będzie *różnicą symetryczną* zbiorów B_1 i B_2 , czyli zbiorem tych pól, które należą do dokładnie jednego ze zbiorów B_1 i B_2 . W myśl relacji $B_1 \neq B_2$ zbiór B jest niepusty. Rozpatrzmy dowolną linię (wiersz lub kolumnę) danej planszy. Niech m_1, m_2 i m oznaczają liczby tych pól wybranej linii, które należą odpowiednio do zbiorów B_1, B_2 i do ich części wspólnej $B_1 \cap B_2$. Na mocy określenia zbiorów B_1 i B_2 liczby m_1 i m_2 mają jednakową parzystość. W efekcie liczba pól rozważanej linii należących do zbioru B wynosi $(m_1 - m) + (m_2 - m) = (m_1 + m_2) - 2m$, a więc jest liczbą parzystą. Stąd wniosek, że w każdym wierszu i w każdej kolumnie planszy znajduje się parzysta liczba pól ze zbioru B . Pozostaje pomalować wszystkie pola zbioru B na zielono.

Sposób II

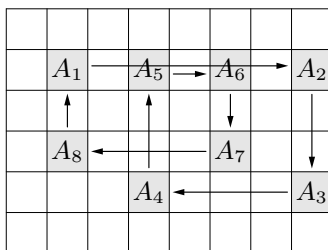
Wprowadzimy najpierw kilka pojęć.

Zbiór pól planszy nazwiemy *parzystym* (*nieparzystym*), jeżeli w każdym wierszu i w każdej kolumnie znajduje się parzysta (odpowiednio: nieparzysta) liczba pól z tego zbioru. Teza zadania sprowadza się zatem do wykazania, że istnieje niepusty parzysty lub nieparzysty zbiór złożony z wyróżnionych pól.

Ciąg różnych pól planszy nazwiemy *dopuszczalnym* (rys. 4), jeżeli dowolne dwa sąsiednie pola tego ciągu leżą w jednym wierszu albo w jednej kolumnie, ale żadne trzy kolejne pola ciągu nie leżą w jednym wierszu ani w jednej kolumnie. Ciąg dopuszczalny $(A_1, A_2, \dots, A_k)$ nazwiemy *cyklicznym* (rys. 5), jeżeli $k \geq 3$ oraz ciąg $(A_3, A_4, \dots, A_k, A_1, A_2)$ jest także dopuszczalny.



rys. 4



rys. 5

Środki kolejnych pól ciągu cyklicznego są kolejnymi wierzchołkami łamanej zamkniętej, której kolejne odcinki są na przemian poziome i pionowe.

W każdym wierszu znajduje się pewna (być może zerowa) liczba poziomych odcinków tej łamanej. Każdy z nich ma dwa różne końce, a dwa różne odcinki nie mogą mieć wspólnego końca, gdyż ciąg cykliczny składa się z różnych pól planszy. To oznacza, że w dowolnym wierszu — i analogicznie w dowolnej kolumnie — liczba pól występujących w ciągu cyklicznym jest parzysta. Stąd zbiór wszystkich pól ciągu cyklicznego jest niepustym zbiorem parzystym.

Przechodzimy do rozwiązania zadania.

Wykażemy ogólniejsze stwierdzenie: Jeżeli m i n są dowolnymi dodatnimi liczbami całkowitymi o jednakowej parzystości oraz na prostokątnej planszy o wymiarach $m \times n$ wyróżniono $m + n - 1$ pól, to istnieje niepusty parzysty lub nieparzysty zbiór złożony z wyróżnionych pól.

Zastosujemy indukcję ze względu na wartość sumy $m + n$.

Jeżeli $m = n = 1$, to teza jest spełniona. Co więcej, jest ona spełniona, gdy choć jedna z liczb m , n jest równa 1. Wtedy bowiem liczba pól planszy wynosi $m + n - 1$ i wszystkie one są wyróżnione. A ponieważ liczby m i n są nieparzyste, więc wszystkie pola planszy tworzą szukany zbiór nieparzysty.

Niech z kolei m i n będą takimi liczbami całkowitymi o tej samej parzystości, większymi od 1, że dowodzone stwierdzenie jest prawdziwe dla każdej planszy, w której suma liczby wierszy i liczby kolumn jest liczbą parzystą mniejszą od $m + n$. Rozpatrzmy dowolną planszę o wymiarach $m \times n$, na której wyróżniono $m + n - 1$ pól.

Weźmy pod uwagę wszystkie ciągi dopuszczalne, w których każde pole jest jednym z $m + n - 1$ wyróżnionych pól. Spośród tych ciągów wybierzmy ciąg $\mathcal{A} = (A_1, A_2, \dots, A_k)$ o największej możliwej długości. Liczby m i n są mniejsze od $m + n - 1$; w efekcie w pewnym wierszu, jak i w pewnej kolumnie, leżą co najmniej dwa wyróżnione pola, skąd otrzymujemy nierówność $k \geq 2$.

Nie tracąc ogólności rozumowania przyjmijmy, że pola A_{k-1} i A_k leżą w jednej kolumnie K . Oznaczmy przez W wiersz, w którym leży pole A_k .

Wiersz W nie zawiera żadnego pola wyróżnionego nie występującego w ciągu $\mathcal{A}$ — gdyby bowiem istniało takie pole B , to ciąg $(A_1, A_2, \dots, A_n, B)$ byłby ciągiem dopuszczalnym dłuższym od ciągu $\mathcal{A}$, wbrew wyborowi tego ostatniego. W takim razie możliwe są dwie sytuacje:

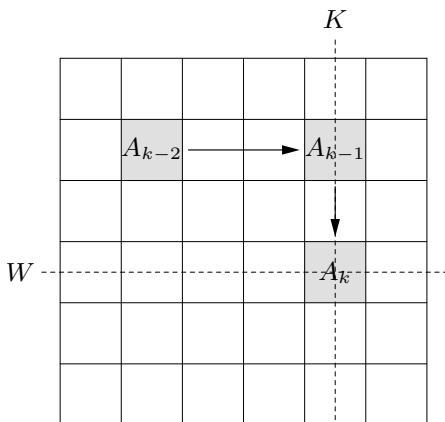
1. Pole A_k jest jedynym wyróżnionym polem wiersza W .
2. Wiersz W zawiera, oprócz pola A_k , inne pola występujące w ciągu $\mathcal{A}$. W pierwszej sytuacji możemy wyodrębnić następujące trzy przypadki:
 - 1a. Pola A_{k-1} i A_k są jedynymi wyróżnionymi polami kolumny K .
 - 1b. Kolumna K zawiera wyróżnione pole nie występujące w ciągu $\mathcal{A}$.
 - 1c. Kolumna K zawiera, oprócz pól A_{k-1} i A_k , inne wyróżnione pola, z których wszystkie występują w ciągu $\mathcal{A}$.

Rozpatrzmy teraz po kolei wszystkie cztery przypadki.

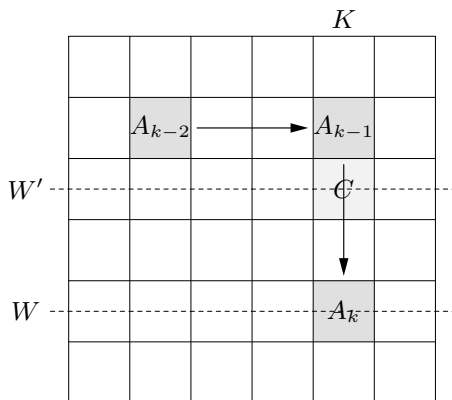
Przypadek 1a. Wykreślmy z planszy wiersz W i kolumnę K , usuwając w ten sposób dwa wyróżnione pola: A_{k-1} i A_k (rys. 6). Uzyskana mniejsza

plansza o wymiarach $(m-1) \times (n-1)$ zawiera $m+n-3 = (m-1) + (n-1) - 1$ wyróżnionych pól. Ponadto liczby $m-1$ i $n-1$ mają jednakową parzystość. Zatem na podstawie założenia indukcyjnego istnieje niepusty parzysty lub nieparzysty zbiór $\mathcal{S}$, złożony z niektórych wyróżnionych pól mniejszej planszy.

Przywróćmy teraz wiersz W i kolumnę K . Jeżeli zbiór $\mathcal{S}$ jest parzysty na mniejszej planszy, to jest też parzysty na wyjściowej planszy o wymiarach $m \times n$. Jeżeli natomiast zbiór $\mathcal{S}$ jest nieparzysty na mniejszej planszy, to zbiór $\mathcal{S} \cup \{A_k\}$ jest nieparzysty na wyjściowej planszy, gdyż w wierszu W i w kolumnie K — jedynych nie leżących na mniejszej planszy — znajduje się dokładnie jedno pole z tego zbioru, a mianowicie pole A_k .



rys. 6



rys. 7

Przypadek 1b. Niech C będzie wyróżnionym polem kolumny K , które nie występuje w ciągu $\mathcal{A}$, a W' — wierszem zawierającym pole C . Zauważmy, że ciąg $\mathcal{A}' = (A_1, A_2, \dots, A_{k-1}, C)$ jest ciągiem dopuszczalnym o tej samej długości, co ciąg $\mathcal{A}$. Jeżeli w wierszu W' istnieją wyróżnione pola inne niż pole C , to zamieniając ciąg $\mathcal{A}$ na ciąg $\mathcal{A}'$ przechodzimy do przypadku **2**. (w którym nie wykonujemy dalszego przejścia do innego przypadku).

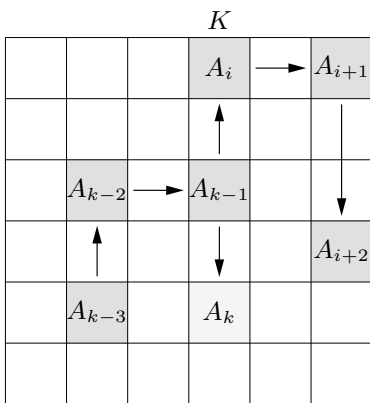
Założmy więc, że pole C jest jedynym wyróżnionym polem wiersza W' .

Wykreślmy z planszy wiersze W i W' , usuwając dwa wyróżnione pola: A_k i C (rys. 7). Nierówność $m+n \geq 4$ dowodzi, że pozostałe wiersze zawierają co najmniej jedno wyróżnione pole, czyli nie wykreśliliśmy całej planszy.

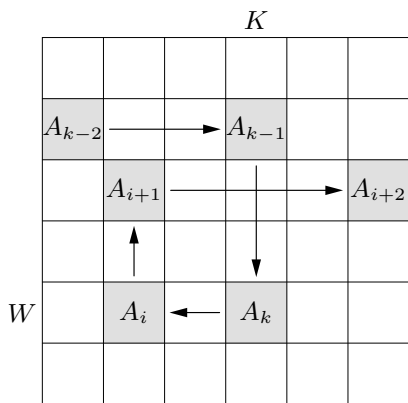
Dalej postępujemy analogicznie do przypadku **1a**. Na mniejszej planszy liczba wierszy ma tę samą parzystość, co liczba kolumn, a suma tych dwóch liczb pomniejszona o 1 jest równa liczbie pól wyróżnionych. Zatem na mocy założenia indukcyjnego istnieje niepusty parzysty lub nieparzysty zbiór $\mathcal{S}$, złożony z niektórych wyróżnionych pól mniejszej planszy. Jeżeli zbiór $\mathcal{S}$ jest parzysty na mniejszej planszy, to jest także parzysty na wyjściowej planszy. Jeżeli zaś zbiór $\mathcal{S}$ jest nieparzysty na mniejszej planszy, to zbiór $\mathcal{S} \cup \{A_k, C\}$ jest nieparzysty na wyjściowej planszy. Rzeczywiście: każdy z wierszy W i W'

zawiera jedno pole z tego zbioru, a kolumna K — dwa dodatkowe pola w porównaniu z mniejszą planszą. Natomiast wszystkie pozostałe wiersze i kolumny zawierają na obu planszach tyle samo pól z tego zbioru.

Przypadek 1c. Z założenia przynajmniej jedno z pól $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{k-2}$ leży w kolumnie K . Istnieje więc największy wskaźnik $i \in \{1, 2, 3, \dots, k-2\}$, dla którego pole A_i leży w kolumnie K (rys. 8). Wtedy $i \neq k-2$, gdyż pola A_{k-2}, A_{k-1} i A_k nie mogą jednocześnie leżeć w kolumnie K . Co więcej, z wyboru wskaźnika i wynika, że pola A_i oraz A_{i+1} nie mogą leżeć w jednej kolumnie, czyli leżą one w jednym wierszu. Wobec tego pola A_{k-2} oraz A_{k-1} leżą w jednym wierszu, pola A_{k-1} oraz A_i leżą w jednej kolumnie, a pola A_i oraz A_{i+1} leżą w jednym wierszu. Stąd ciąg $(A_i, A_{i+1}, \dots, A_{k-2}, A_{k-1})$ jest ciągiem cyklicznym i w konsekwencji zbiór pól tego ciągu jest niepustym zbiorem parzystym złożonym z wyróżnionych pól planszy.



rys. 8



rys. 9

Przypadek 2. Wówczas istnieje największy wskaźnik $i \in \{1, 2, 3, \dots, k-1\}$, dla którego pole A_i leży w wierszu W . Ponadto $i \neq k-1$, gdyż pole A_{k-1} leży w tej samej kolumnie, co pole A_k znajdujące się w wierszu W . Zatem w myśl określenia wskaźnika i pole A_{i+1} nie leży w wierszu W . Wobec tego pola A_{k-1} oraz A_k leżą w jednej kolumnie K , pola A_k oraz A_i leżą w jednym wierszu W , a pola A_i oraz A_{i+1} leżą w jednej kolumnie (rys. 9). W rezultacie ciąg $(A_i, A_{i+1}, \dots, A_{k-1}, A_k)$ jest ciągiem cyklicznym złożonym z wyróżnionych pól, skąd znów wynika istnienie poszukiwanego zbioru parzystego.

To kończy dowód indukcyjny i rozwiązanie zadania.

Zadanie 9. Na płaszczyźnie ustawiono po jednym kamieniu w punktach o współrzędnych $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$ i $(1,1)$. W jednym ruchu wybieramy dowolny kamień i przestawiamy go symetrycznie względem któregoś z pozostałych kamieni. Rozstrzygnąć, czy po skończonej liczbie ruchów trzy kamienie mogą znaleźć się na jednej prostej.

Rozwiązanie

Sposób I

Wykażemy za pomocą indukcji następujące stwierdzenie: Po wykonaniu skończonego ciągu ruchów otrzymujemy takie rozstawienie czterech kamieni w punktach o obu współrzędnych całkowitych, że dowolne trzy kamienie są wierzchołkami niezdegenerowanego trójkąta, którego pole jest równe połowie nieparzystej liczby całkowitej. To pociągnie za sobą przeczącą odpowiedź na pytanie postawione w treści zadania.

W początkowej pozycji dowolne trzy kamienie tworzą trójkąt o polu $\frac{1}{2}$. Przypuśćmy z kolei, że przed wykonaniem ruchu rozważane cztery kamienie znajdują się w takich punktach A, B, C, D o obu współrzędnych całkowitych, że pole każdego z trójkątów ABC, BCD, CDA, DAB jest równe połowie nieparzystej liczby całkowitej. Niech ruch polega na przestawieniu kamienia stojącego w punkcie A symetrycznie względem punktu B do punktu A' . Należy udowodnić, że punkt A' ma współrzędne całkowite, a pole każdego z trójkątów $A'BC, CDA'$ i $DA'B$ jest połową nieparzystej liczby całkowitej.

Punkt B jest środkiem odcinka AA' , a punkt C leży poza prostą AB . Zatem punkt B jest środkiem boku AA' trójkąta $AA'C$, co oznacza, że trójkąty ABC i $A'BC$ mają jednakowe pola, równe połowie pola trójkąta $AA'C$. Analogicznie uzasadniamy, że trójkąty DAB i $DA'B$ mają jednakowe pola. Wobec tego na podstawie założenia indukcyjnego pole każdego z trójkątów $A'BC$ i $DA'B$ jest połową nieparzystej liczby całkowitej.

Pozostaje udowodnić, że punkt A' ma obie współrzędne całkowite, a pole trójkąta CDA' jest połową nieparzystej liczby całkowitej.

Oznaczmy współrzędne punktów A, B, C, D i A' odpowiednio przez $(x, y), (z, t), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$ i (x', y') . Cztery pierwsze z tych punktów mają współrzędne całkowite. Ponadto punkt B jest środkiem odcinka AA' , skąd uzyskujemy zależności $\frac{1}{2}(x+x')=z$ oraz $\frac{1}{2}(y+y')=t$. W efekcie współrzędne punktu A' , równe $(x', y')=(2z-x, 2t-y)$, są liczbami całkowitymi.

Skorzystamy teraz ze wzoru wyznacznikowego na pole trójkąta. Orzeka on, że dla dowolnych trzech punktów P, Q, R o współrzędnych odpowiednio $(p_x, p_y), (q_x, q_y), (r_x, r_y)$ pole trójkąta PQR wyraża się wzorem

$$\frac{1}{2}|\det(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR})| = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} q_x - p_x & r_x - p_x \\ q_y - p_y & r_y - p_y \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} |(q_x - p_x)(r_y - p_y) - (q_y - p_y)(r_x - p_x)|.$$

W takim razie pole trójkąta CDA jest równe $\frac{1}{2}|M|$, gdzie

$$M = (x_2 - x_1)(y - y_1) - (y_2 - y_1)(x - x_1),$$

a pole trójkąta CDA' wynosi $\frac{1}{2}|N|$, gdzie

$$N = (x_2 - x_1)(y' - y_1) - (y_2 - y_1)(x' - x_1).$$

Na mocy założenia indukcyjnego liczba M jest nieparzysta. Natomiast suma

$$M + N = 2(x_2 - x_1)(t - y_1) - 2(y_2 - y_1)(z - x_1)$$

jest liczbą parzystą. W rezultacie liczba N jest nieparzysta. Wykazaliśmy w ten sposób, że pole trójkąta CDA' jest równe połowie nieparzystej liczby całkowitej, co kończy rozwiązanie.

Sposób II

Udowodnimy, że nie jest to możliwe. Przypuśćmy w tym celu, że po skończonej liczbie ruchów trzy kamienie znalazły się na jednej prostej.

Dla dowolnych dwóch punktów o obu współrzędnych całkowitych punkt symetryczny do pierwszego punktu względem drugiego punktu również ma obie współrzędne całkowite. Zatem nie tylko w początkowym ustawieniu, ale także po wykonaniu każdego ruchu wszystkie cztery kamienie znajdują się w punktach o obu współrzędnych całkowitych. Istnieje więc prosta ℓ , na której po wykonaniu rozważanego ciągu ruchów leżą trzy kamienie, i przechodząca przez dwa różne punkty o obu współrzędnych całkowitych — niezależnie od tego, czy te trzy kamienie znajdują się w jednym punkcie, czy też nie.

Przyjmijmy, że prosta ℓ przechodzi przez dwa różne punkty o współrzędnych całkowitych (u_1, w_1) i (u_2, w_2) . Prosta ta jest wówczas zbiorem punktów o współrzędnych (x, y) spełniających równanie

$$(w_2 - w_1)(x - u_1) = (u_2 - u_1)(y - w_1),$$

czyli równanie $Ax + By = C$, gdzie liczby całkowite A , B i C są zadane wzorami

$$A = w_2 - w_1, \quad B = -(u_2 - u_1) \quad \text{oraz} \quad C = Au_1 + Bw_1.$$

Ponadto co najmniej jedna z liczb A i B jest różna od zera, gdyż punkty o współrzędnych (u_1, w_1) i (u_2, w_2) są różne.

W myśl związku $C = Au_1 + Bw_1$ dowolny wspólny dzielnik liczb A i B jest także dzielnikiem liczby C . Dzieląc więc liczby A , B i C przez największy wspólny dodatni dzielnik liczb A i B otrzymujemy odpowiednio pewne liczby całkowite a , b i c . Co więcej, prosta ℓ jest zbiorem punktów o współrzędnych (x, y) związanych zależnością $ax + by = c$. Z drugiej strony, liczby a i b są względnie pierwsze, co oznacza, że przynajmniej jedna z nich jest nieparzysta.

Pomalujmy każdy punkt płaszczyzny o obu współrzędnych całkowitych na czarno albo na białą w następujący sposób: każdy punkt o współrzędnych (x, y) , dla którego liczba $ax + by$ jest parzysta, malujemy na białą, a wszystkie pozostałe punkty — na czarno. Na mocy ostatniego zdania poprzedniego akapitu wśród liczb a , b , $a + b$ dokładnie dwie liczby są nieparzyste. Wynika stąd, że w początkowym ustawieniu kamieni pewne dwa kamienie znajdują się w punktach białych, a pozostałe dwa — w punktach czarnych.

Punktem symetrycznym do punktu o współrzędnych całkowitych (x, y) względem punktu o współrzędnych całkowitych (z, t) jest punkt o współrzędnych (x', y') spełniających równości $\frac{1}{2}(x + x') = z$ i $\frac{1}{2}(y + y') = t$. Z zależności tych dostajemy związek

$$ax' + by' = a(2z - x) + b(2t - y) = 2(az + bt) - (ax + by).$$

W efekcie liczby $ax+by$ i $ax'+by'$ są obie parzyste albo obie nieparzyste. To zaś dowodzi, że w każdym ruchu przestawiamy wybrany kamień z pewnego punktu do punktu o tym samym kolorze.

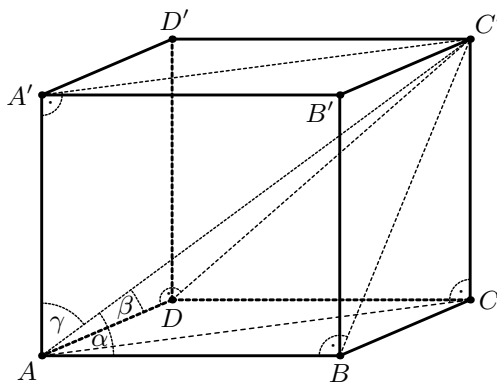
Łącząc stwierdzenia uzyskane w dwóch poprzednich akapitach wnioskuje, że po dowolnej liczbie ruchów dwa kamienie znajdują się w punktach białych, a pozostałe dwa — w punktach czarnych. Jednak wszystkie punkty o obu współrzędnych całkowitych leżące na prostej ℓ zadanej równaniem $ax+by=c$ mają jednakowy kolor. Wobec tego żadne trzy kamienie nie mogą jednocześnie znaleźć się na prostej ℓ , wbrew uczynionemu założeniu.

Odpowiedź: W wyniku wykonywania opisanych ruchów trzy kamienie nie mogą znaleźć się na jednej prostej.

Zadanie 10. Dany jest prostopadłościan $ABCD A' B' C' D'$. Niech α , β i γ będą kątami utworzonymi przez przekątną AC' z krawędziami AB , AD i AA' . Udowodnić, że

$$(1) \quad \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma \leq \frac{3}{2} \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma.$$

Rozwiązanie



rys. 10

Kąty ostre $\alpha = \sphericalangle C'AB$, $\beta = \sphericalangle C'AD$ i $\gamma = \sphericalangle C'AA'$ odpowiednio w trójkątach prostokątnych ABC' , ADC' i $AA'C'$ spełniają zależności (rys. 10)

$$(2) \quad \cos \alpha = \frac{AB}{AC'}, \quad \cos \beta = \frac{AD}{AC'} \quad \text{oraz} \quad \cos \gamma = \frac{AA'}{AC'}.$$

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa dla trójkątów prostokątnych ACC' i ABC otrzymujemy równości

$$AC'^2 = AC^2 + CC'^2 = AC^2 + AA'^2 = AB^2 + BC^2 + AA'^2 = AB^2 + AD^2 + AA'^2,$$

które po obustronnym podzieleniu przez AC'^2 i zastosowaniu zależności (2) prowadzą do związku

$$(3) \quad \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Mnożąc obie strony dowodzonej nierówności (1) przez liczbę dodatnią $\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta \operatorname{ctg} \gamma$ uzyskujemy do wykazania równoważną nierówność

$$(4) \quad \operatorname{ctg} \beta \operatorname{ctg} \gamma + \operatorname{ctg} \gamma \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta \leq \frac{3}{2}.$$

Dla dowolnych liczb dodatnich x i y prawdziwa jest zależność $0 \leq \frac{1}{2}(x-y)^2$, czyli zależność $xy \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$. Stąd dostajemy

$$(5) \quad \operatorname{ctg} \beta \operatorname{ctg} \gamma = \frac{\cos \beta \cos \gamma}{\sin \beta \sin \gamma} = \frac{\cos \beta}{\sin \gamma} \cdot \frac{\cos \gamma}{\sin \beta} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{\cos^2 \beta}{\sin^2 \gamma} + \frac{\cos^2 \gamma}{\sin^2 \beta} \right).$$

Analogicznie dowodzimy, że

$$(6) \quad \operatorname{ctg} \gamma \operatorname{ctg} \alpha \leq \frac{1}{2} \left(\frac{\cos^2 \gamma}{\sin^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \gamma} \right)$$

oraz

$$(7) \quad \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta \leq \frac{1}{2} \left(\frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \beta} + \frac{\cos^2 \beta}{\sin^2 \alpha} \right).$$

Dodając stronami nierówności (5), (6) i (7) otrzymujemy

$$(8) \quad \begin{aligned} & \operatorname{ctg} \beta \operatorname{ctg} \gamma + \operatorname{ctg} \gamma \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta \leq \\ & \leq \frac{1}{2} \left(\frac{\cos^2 \beta + \cos^2 \gamma}{\sin^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \gamma + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \beta} + \frac{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta}{\sin^2 \gamma} \right). \end{aligned}$$

Na mocy związku (3) każdy z trzech ułamków w nawiasie po prawej stronie zależności (8) jest równy 1. To dowodzi nierówności (4) i kończy rozwiązanie.

Zadanie 11. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Proste zawierające dwusieczne kątów wewnętrznych A i C przecinają się w punkcie P , a proste zawierające dwusieczne kątów wewnętrznych B i D przecinają się w punkcie Q . Dowieść, że jeżeli kąt PAQ jest prosty, to również kąt PCQ jest prosty.

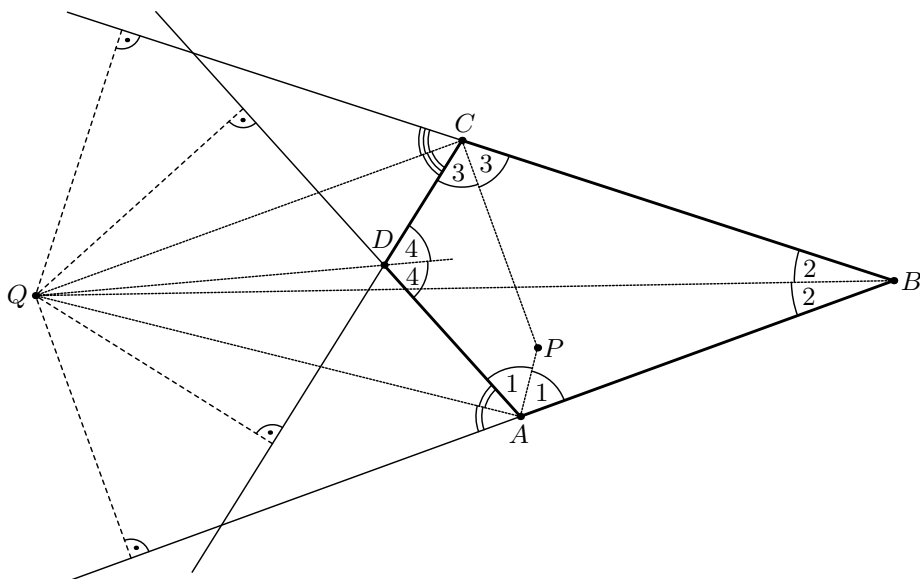
Rozwiązanie

Zauważmy najpierw, że punkt jest jednakowo odległy od dwóch przecinających się prostych wtedy i tylko wtedy, gdy leży on na dwusiecznej jednego z czterech kątów wypukłych, na które te dwie proste dzielą płaszczyznę.

Punkt P leży na prostej zawierającej dwusieczną kąta wewnętrznego A (rys. 11). Jeżeli więc kąt PAQ jest prosty, to punkt Q leży na dwusiecznej kąta zewnętrznego przy wierzchołku A . Wynika stąd, że odległości punktu Q od prostych DA i AB są równe.

Z drugiej strony, punkt Q leży na prostych zawierających dwusieczne kątów wewnętrznych B oraz D . W takim razie punkt ten jest jednakowo odległy od prostych AB i BC oraz jednakowo odległy od prostych CD i DA . To wraz z ostatnim zdaniem poprzedniego akapitu dowodzi, że odległości punktu Q od wszystkich czterech prostych zawierających boki czworokąta $ABCD$ są równe. Zatem punkt Q jest jednakowo odległy od prostych BC i CD , czyli

leży on albo na prostej zawierającej dwusieczną kąta wewnętrznego C , albo też na dwusiecznej kąta zewnętrznego przy tym wierzchołku.



rys. 11

Przypuśćmy, że punkt Q leży na prostej zawierającej dwusieczną kąta wewnętrznego C . W myśl warunków zadania leży on wówczas na każdej z trzech prostych zawierających odpowiednio dwusieczne kątów wewnętrznych B , C i D . Jednak dwusieczne kątów wewnętrznych B i C przecinają się w punkcie leżącym po tych samych stronach prostych AB i CD , co wewnątrz czworokąta $ABCD$. Podobnie dwusieczne kątów wewnętrznych C i D przecinają się w punkcie leżącym po tych samych stronach prostych BC i DA , co wewnątrz czworokąta $ABCD$. Wobec tego punkt Q znajduje się wewnątrz danego czworokąta, a to stoi w sprzeczności z faktem, że punkt ten leży na dwusiecznej kąta zewnętrznego przy wierzchołku A .

W konsekwencji punkt Q leży na dwusiecznej kąta zewnętrznego przy wierzchołku C . Stąd prosta CQ jest prostopadła do prostej zawierającej dwusieczną kąta wewnętrznego C . A ponieważ na tej ostatniej prostej leży punkt P , więc kąt PCQ jest prosty, co kończy rozwiązanie.

Zadanie 12. Zbadać, czy istnieje liczba całkowita większa od 2012^{2012} , której nie można przedstawić w postaci $x^2 + y^3 + z^6$, gdzie x , y i z są dodatnimi liczbami całkowitymi.

Rozwiązanie

Niech n będzie dowolną dodatnią liczbą całkowitą. Weźmy pod uwagę trójki dodatnich liczb całkowitych (x, y, z) , dla których

$$x^2 + y^3 + z^6 \leq n^6.$$

Jeżeli dodatnie liczby całkowite x, y i z spełniają powyższą zależność, to każdy z trzech składników jej lewej strony jest mniejszy od n^6 . Wynika stąd, że $x < n^3$, $y < n^2$ oraz $z < n$. Zatem liczby x, y i z przyjmują odpowiednio jedną spośród $n^3 - 1$, $n^2 - 1$ i $n - 1$ możliwych wartości. Wobec tego liczba rozpatrywanych trójek (x, y, z) nie przekracza iloczynu

$$(n^3 - 1)(n^2 - 1)(n - 1) = (n^3 - 1)(n^3 - n^2 - n + 1) = n^6 - n^5 - n^4 + n^2 + n - 1.$$

Udowodniliśmy więc, że istnieje co najwyżej $n^6 - (n^5 + n^4 - n^2 - n + 1)$ trójek dodatnich liczb całkowitych (x, y, z) , dla których wyrażenie $x^2 + y^3 + z^6$ nie przekracza liczby n^6 . To dowodzi, że w zbiorze $\{1, 2, 3, \dots, n^6\}$ istnieje co najmniej $n^5 + n^4 - n^2 - n + 1$ elementów, których nie można przedstawić w postaci $x^2 + y^3 + z^6$ dla pewnych dodatnich liczb całkowitych x, y i z . Największy wśród tych elementów wynosi zaś co najmniej $n^5 + n^4 - n^2 - n + 1$.

W efekcie dla dowolnej liczby całkowitej $n \geq 1$ istnieje liczba całkowita nie mniejsza od $n^5 + n^4 - n^2 - n + 1$, której nie można przedstawić w postaci opisanej w treści zadania. Jednocześnie dla dostatecznie dużych dodatnich liczb całkowitych n prawdziwa jest nierówność $n^5 + n^4 - n^2 - n + 1 > 2012^{2012}$, gdyż jej lewa strona jest wielomianem zmiennej n o dodatnim współczynniku przy najwyższej potędze zmiennej. To pociąga za sobą twierdzącą odpowiedź na postawione w zadaniu pytanie.

Odpowiedź: Taka liczba istnieje.

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w Internecie pod adresem: www.om.edu.pl



LXIV Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia drugiego

22 lutego 2013 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Dane są liczby całkowite b i c oraz trójmian $f(x) = x^2 + bx + c$. Udowodnić, że jeżeli dla pewnych liczb całkowitych k_1 , k_2 i k_3 wartości $f(k_1)$, $f(k_2)$ i $f(k_3)$ są podzielne przez liczbę całkowitą n różną od zera, to również iloczyn $(k_1 - k_2)(k_2 - k_3)(k_3 - k_1)$ jest podzielny przez n .

2. Okręgi o_1 i o_2 o środkach odpowiednio O_1 i O_2 przecinają się w dwóch różnych punktach A i B , przy czym kąt O_1AO_2 jest rozwarty. Prosta O_1B przecina okrąg o_2 w punkcie C różnym od B , a prosta O_2B przecina okrąg o_1 w punkcie D różnym od B . Wykazać, że punkt B jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ACD .

3. Mamy do dyspozycji płytki o następujących kształtach:



Dla każdej liczby nieparzystej $n \geq 7$ wyznaczyć najmniejszą liczbę takich płytek potrzebnych do ułożenia kwadratu o boku n .

(Uwaga: Płytki można obracać, ale nie mogą one na siebie zachodzić.)

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.



LXIV Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia drugiego

23 lutego 2013 r. (drugi dzień zawodów)

4. Rozwiązać równanie

$$(x^4 + 3y^2)\sqrt{|x+2| + |y|} = 4|xy^2|$$

w liczbach rzeczywistych x, y .

5. Dany jest taki wielomian $W(x)$ o współczynnikach całkowitych, że dla dowolnej pary różnych liczb wymiernych r_1, r_2 prawdziwa jest zależność $W(r_1) \neq W(r_2)$. Rozstrzygnąć, czy z tych założeń wynika, że dla dowolnej pary różnych liczb rzeczywistych t_1, t_2 prawdziwa jest zależność $W(t_1) \neq W(t_2)$.

6. Rozstrzygnąć, czy istnieją takie czworościany $\mathcal{T}$ oraz $\mathcal{T}'$, o ścianach odpowiednio S_1, S_2, S_3, S_4 oraz S'_1, S'_2, S'_3, S'_4 , że

dla $i = 1, 2, 3, 4$ trójkąt S_i jest podobny do trójkąta S'_i ,

ale mimo to czworościan $\mathcal{T}$ nie jest podobny do czworościanu $\mathcal{T}'$.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.



LXIV Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia drugiego

22 lutego 2013 r. (pierwszy dzień zawodów)

Zadanie 1. Dane są liczby całkowite b i c oraz trójmian $f(x) = x^2 + bx + c$. Udowodnić, że jeżeli dla pewnych liczb całkowitych k_1 , k_2 i k_3 wartości $f(k_1)$, $f(k_2)$ i $f(k_3)$ są podzielne przez liczbę całkowitą n różną od zera, to również iloczyn $(k_1 - k_2)(k_2 - k_3)(k_3 - k_1)$ jest podzielny przez n .

Rozwiązanie

Sposób I

Określmy liczby całkowite A , B i C następującymi wzorami:

$$A = k_1^2(k_2 - k_3) + k_2^2(k_3 - k_1) + k_3^2(k_1 - k_2),$$

$$B = bk_1(k_2 - k_3) + bk_2(k_3 - k_1) + bk_3(k_1 - k_2),$$

$$C = c(k_2 - k_3) + c(k_3 - k_1) + c(k_1 - k_2).$$

Dodając odpowiednie składniki prawych stron otrzymujemy zależność

$$A + B + C = f(k_1)(k_2 - k_3) + f(k_2)(k_3 - k_1) + f(k_3)(k_1 - k_2),$$

w której prawa strona jest sumą trzech iloczynów podzielnych przez n . Zatem suma $A + B + C$ jest podzielna przez n . Z drugiej strony, wymnażając nawiasy we wzorach definiujących liczby B i C oraz przeprowadzając redukcję wyrazów podobnych stwierdzamy, że $B = C = 0$. Stąd wniosek, że liczba A jest podzielna przez n . Do zakończenia rozwiązania pozostaje obliczyć, że

$$\begin{aligned}(k_1 - k_2)(k_2 - k_3)(k_3 - k_1) &= (k_1 - k_2)[k_3(k_1 + k_2) - k_1k_2 - k_3^2] = \\ &= k_3(k_1^2 - k_2^2) - k_1^2k_2 + k_1k_2^2 - k_3^2(k_1 - k_2) = \\ &= -k_1^2(k_2 - k_3) - k_2^2(k_3 - k_1) - k_3^2(k_1 - k_2) = -A.\end{aligned}$$

Sposób II

Aby wykazać podzielność liczby $M = (k_1 - k_2)(k_2 - k_3)(k_3 - k_1)$ przez n , należy uzasadnić, że każda liczba pierwsza występuje w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby n z wykładnikiem nie większym, niż w rozkładzie liczby M .

Niech więc liczba pierwsza p występuje w rozkładach liczb $k_1 - k_2$, $k_2 - k_3$, $k_3 - k_1$ i n odpowiednio z wykładnikami x , y , z i t . Wówczas dowodzona teza staje się nierównością $x + y + z \geq t$. Jeżeli którakolwiek z liczb x , y , z wynosi co najmniej t , to nierówność ta jest spełniona. Przyjmijmy zatem, że wszystkie te trzy liczby są mniejsze od t . W myśl warunków zadania różnica

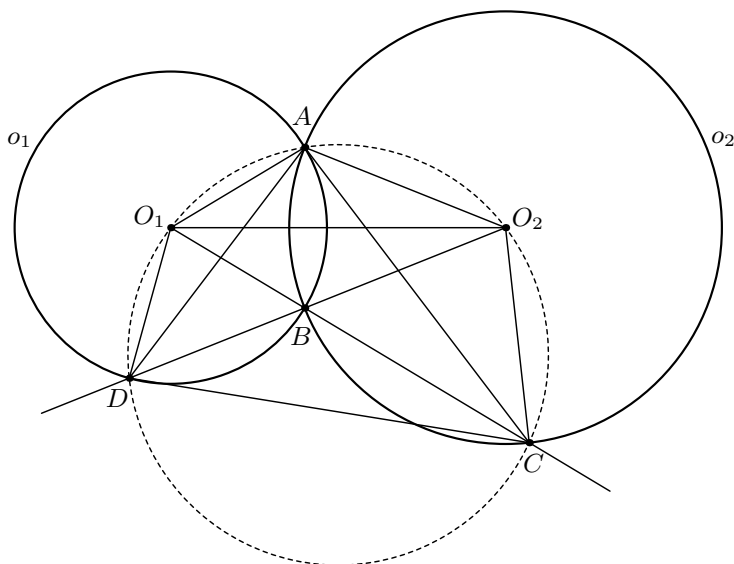
$$f(k_1) - f(k_2) = k_1^2 - k_2^2 + b(k_1 - k_2) = (k_1 + k_2 + b)(k_1 - k_2)$$

jest podzielna przez n i tym bardziej przez p^t . Ponadto drugi czynnik iloczynu stojącego po prawej stronie jest podzielny przez p^x , ale nie przez p^{x+1} .

Wobec tego czynnik $k_1 + k_2 + b$ jest podzielny przez p^{t-x} . Analogicznie uzasadniamy, że liczba $k_2 + k_3 + b$ jest podzielna przez p^{t-y} . W konsekwencji różnica $(k_2 + k_3 + b) - (k_1 + k_2 + b) = k_3 - k_1$ jest podzielna przez $p^{\min\{t-x, t-y\}}$. Stąd i z określenia liczby z uzyskujemy związek $z \geq \min\{t-x, t-y\} = t - \max\{x, y\}$. W rezultacie $x + y + z \geq \max\{x, y\} + z \geq t$, co kończy rozwiązanie.

Zadanie 2. Okręgi o_1 i o_2 o środkach odpowiednio O_1 i O_2 przecinają się w dwóch różnych punktach A i B , przy czym kąt O_1AO_2 jest rozwarty. Prosta O_1B przecina okrąg o_2 w punkcie C różnym od B , a prosta O_2B przecina okrąg o_1 w punkcie D różnym od B . Wykazać, że punkt B jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ACD .

Rozwiązanie



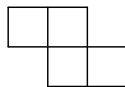
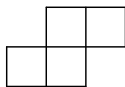
rys. 1

Ponieważ kąt O_1BO_2 jest rozwarty, więc punkt B leży wewnątrz odcinka O_1C , a punkt C leży na zewnątrz okręgu o_1 (rys. 1). Stąd i z zależności pomiędzy kątem wpisanym i kątem środkowym otrzymujemy

$$\sphericalangle ACO_1 = \sphericalangle ACB = \frac{1}{2} \sphericalangle AO_2B = \sphericalangle AO_2O_1.$$

Zatem punkty A, O_1, C, O_2 leżą na pewnym okręgu o . Podobnie dowodzimy, że punkty A, O_2, D, O_1 leżą na pewnym okręgu o' . Jednak okręgi o i o' mają trzy różne punkty wspólne: A, O_1 oraz O_2 . W efekcie okręgi te pokrywają się, czyli punkt D leży na okręgu o . Na mocy równości $O_1A = O_1D$ punkt O_1 jest środkiem łuku AD tego okręgu. Stąd wniosek, że punkt O_1 — a co za tym idzie, również punkt B — leży na dwusiecznej kąta wpisanego ACD . W analogiczny sposób stwierdzamy, że punkt B leży na dwusiecznej kąta ADC i wobec tego jest on środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ACD .

Zadanie 3. Mamy do dyspozycji płytki o następujących kształtach:

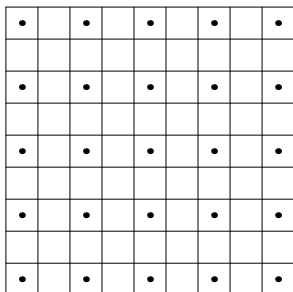


Dla każdej liczby nieparzystej $n \geq 7$ wyznaczyć najmniejszą liczbę takich płytek potrzebnych do ułożenia kwadratu o boku n .

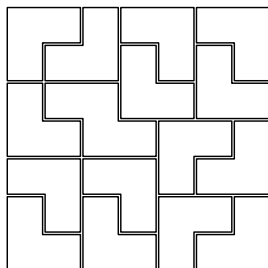
(Uwaga: Płytki można obracać, ale nie mogą one na siebie zachodzić.)

Rozwiązanie

Przypuśćmy, że z danych płytek zbudowano kwadrat, którego bok ma długość nieparzystą $n \geq 7$. Podzielmy ten kwadrat liniami równoległymi do boków na n^2 kwadratów jednostkowych, uzyskując n wierszy i n kolumn. Następnie wyróżnimy wszystkie te kwadraty jednostkowe, które znajdują się na przecięciu wiersza i kolumny o numerach nieparzystych (rys. 2). Ponieważ istnieje $\frac{1}{2}(n+1)$ wierszy oraz $\frac{1}{2}(n+1)$ kolumn o numerach nieparzystych, więc łącznie wyróżnimy w ten sposób $\frac{1}{4}(n+1)^2$ kwadratów. Ponadto każda płytka składa się z 3 albo 4 kwadratów jednostkowych, z których co najwyżej jeden jest wyróżniony. W konsekwencji liczba użytych płytek nie może być mniejsza od liczby wyróżnionych kwadratów, czyli od $\frac{1}{4}(n+1)^2$.



rys. 2



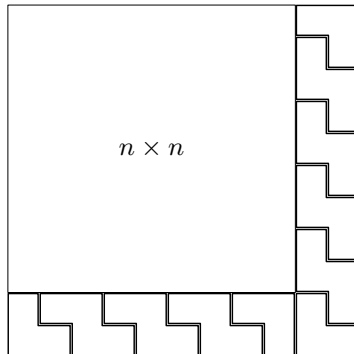
rys. 3

Wykażemy teraz za pomocą indukcji, że dla każdej liczby nieparzystej $n \geq 7$ kwadrat o boku n można zbudować z $\frac{1}{4}(n+1)^2$ płytek.

Kwadrat o boku 7 ułożony z 16 płytek przedstawiony jest na rys. 3.

Przyjmijmy z kolei, że dla pewnej liczby nieparzystej $n \geq 7$ mamy dany kwadrat o boku n ułożony z $\frac{1}{4}(n+1)^2$ płytek. Wówczas możemy do niego dobudować dodatkowe dwa wiersze i dwie kolumny w sposób przedstawiony na rys. 4. Dwie ostatnie kolumny zawierają wtedy $\frac{1}{2}(n+3)$ nowych płytek, a dwa ostatnie wiersze bez czterech pól leżących w dwóch ostatnich kolumnach zawierają $\frac{1}{2}(n+1)$ nowych płytek. Zatem liczba płytek w powstałym kwadracie o boku $n+2$ jest równa

$\frac{1}{4}(n+1)^2 + \frac{1}{2}(n+3) + \frac{1}{2}(n+1) = \frac{1}{4}[(n+1)^2 + (2n+6) + (2n+2)] = \frac{1}{4}(n+3)^2$,
co kończy indukcję i rozwiązanie zadania.



rys. 4

Odpowiedź: Szukana najmniejsza liczba płytek wynosi $\frac{1}{4}(n+1)^2$.

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w Internecie pod adresem: www.om.edu.pl



LXIV Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia drugiego

23 lutego 2013 r. (drugi dzień zawodów)

Zadanie 4. Rozwiązać równanie

$$(1) \quad (x^4 + 3y^2)\sqrt{|x+2|+|y|} = 4|xy^2|$$

w liczbach rzeczywistych x, y .

Rozwiązanie

Z zależności $|x+2|+|y| \geq |y|$ otrzymujemy nierówność

$$(2) \quad (x^4 + 3y^2)\sqrt{|x+2|+|y|} \geq (x^4 + 3y^2)\sqrt{|y|},$$

która staje się równością wtedy i tylko wtedy, gdy $x^4 + 3y^2 = 0$ lub $|x+2|=0$, czyli gdy $x=y=0$ lub $x=-2$.

Z drugiej strony, na mocy nierówności pomiędzy średnią arytmetyczną i średnią geometryczną nieujemnych liczb rzeczywistych uzyskujemy

$$(3) \quad x^4 + 3y^2 = x^4 + y^2 + y^2 + y^2 \geq 4\sqrt{x^4 \cdot y^2 \cdot y^2 \cdot y^2} = 4|xy|\sqrt{|y|},$$

a ponadto lewa strona zależności (3) jest równa prawej stronie wtedy i tylko wtedy, gdy $x^4 = y^2$, czyli gdy $x^2 = |y|$. Zatem

$$(4) \quad (x^4 + 3y^2)\sqrt{|y|} \geq 4|xy^2|,$$

przy czym równość ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $x^2 = |y|$ lub $y=0$.

Łącząc związki (2) i (4) widzimy, że lewa strona równania (1) jest zawsze nie mniejsza niż prawa strona, a równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(x=y=0 \quad \text{lub} \quad x=-2) \quad \text{oraz} \quad (x^2=|y| \quad \text{lub} \quad y=0).$$

Stąd bez trudu wyznaczamy wszystkie rozwiązania (x, y) danego równania:

$$(0, 0), \quad (-2, 0), \quad (-2, 4) \quad \text{oraz} \quad (-2, -4).$$

Zadanie 5. Dany jest taki wielomian $W(x)$ o współczynnikach całkowitych, że dla dowolnej pary różnych liczb wymiernych r_1, r_2 prawdziwa jest zależność $W(r_1) \neq W(r_2)$. Rozstrzygnąć, czy z tych założeń wynika, że dla dowolnej pary różnych liczb rzeczywistych t_1, t_2 prawdziwa jest zależność $W(t_1) \neq W(t_2)$.

Rozwiązanie

Udowodnimy, że implikacja sformułowana w treści zadania jest fałszywa dla wielomianu $W(x) = x^3 - 2x$. Zauważmy najpierw, że $W(0) = W(\sqrt{2}) = 0$. Niech z kolei r_1 i r_2 będą dowolnymi liczbami wymiernymi, dla których $W(r_1) = W(r_2)$. Zadanie będzie rozwiązane, jeżeli wykazemy, że $r_1 = r_2$.

Przypuśćmy w tym celu, że $r_1 \neq r_2$. Wówczas z równości

$$0 = W(r_1) - W(r_2) = (r_1^3 - r_2^3) - 2(r_1 - r_2) = (r_1 - r_2)(r_1^2 + r_1r_2 + r_2^2 - 2)$$

otrzymujemy związek

$$(1) \quad r_1^2 + r_1r_2 + r_2^2 = 2.$$

Sprowadźmy liczby wymierne r_1 i r_2 do najmniejszego wspólnego mianownika, uzyskując przedstawienia

$$(2) \quad r_1 = \frac{k}{n} \quad \text{oraz} \quad r_2 = \frac{m}{n},$$

w których k i m są liczbami całkowitymi, a n jest dodatnią liczbą całkowitą. Podstawiając wzory (2) do zależności (1) dostajemy

$$(3) \quad k^2 + km + m^2 = 2n^2.$$

Gdyby liczby k i m były parzyste, to każdy składnik lewej strony związku (3) byłby podzielny przez 4. W konsekwencji liczba $2n^2$ byłaby podzielna przez 4, skąd wynikałaby parzystość liczby n . Zatem ułamki stojące po prawych stronach równości (2) miałyby parzyste liczniki i mianowniki, wbrew temu, że liczba n jest najmniejszym wspólnym mianownikiem liczb wymiernych r_1 i r_2 . Co najmniej jedna z liczb k i m jest więc nieparzysta. Stąd — w zależności od tego, czy obie te liczby są nieparzyste, czy też nie — lewa strona związku (3) jest sumą trzech liczb nieparzystych albo jednej nieparzystej i dwóch parzystych, czyli jest nieparzysta. Otrzymana sprzeczność kończy rozwiązanie.

Odpowiedź: Nie.

Zadanie 6. Rozstrzygnąć, czy istnieją takie czworościany $\mathcal{T}$ oraz $\mathcal{T}'$, o ścianach odpowiednio S_1, S_2, S_3, S_4 oraz S'_1, S'_2, S'_3, S'_4 , że

dla $i = 1, 2, 3, 4$ trójkąt S_i jest podobny do trójkąta S'_i ,

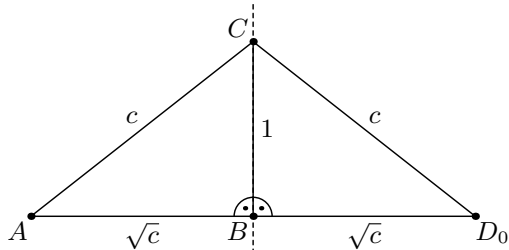
ale mimo to czworościan $\mathcal{T}$ nie jest podobny do czworościanu $\mathcal{T}'$.

Rozwiązanie

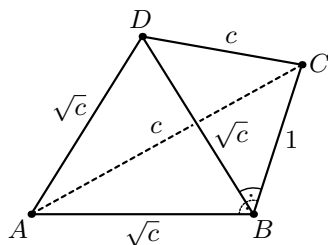
Wykażemy, że takie dwa czworościany istnieją. Opiszemy jeden z wielu możliwych przykładów.

Liczba $c = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ jest pierwiastkiem równania $1 + c = c^2$ większym od 1. Wobec tego istnieje trójkąt prostokątny o bokach długości 1, $\sqrt{c}$, c .

Umieścmy na płaszczyźnie dwa takie trójkąty prostokątne o wspólnej przyprostokątnej długości 1. Oznaczmy ich wierzchołki w sposób wskazany na rys. 5. Następnie obróćmy w przestrzeni trójkąt BCD_0 wokół prostej BC o pewien kąt, uzyskując trójkąt BCD oraz czworościan $ABCD$. Ponieważ punkty A i D_0 są symetryczne względem prostej BC , więc dla odpowiednio dobranego kąta obrotu długość krawędzi AD tego czworościanu może być dowolnie wybraną liczbą dodatnią mniejszą od $AD_0 = 2\sqrt{c}$. Niech $\mathcal{T}$ będzie tak otrzymanym czworościanem $ABCD$, w którym $AD = \sqrt{c}$ (rys. 6).

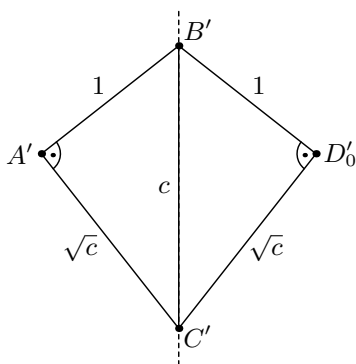


rys. 5

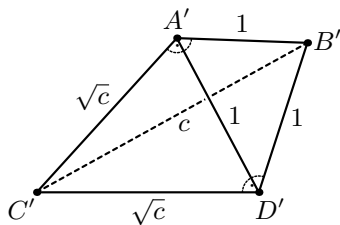


rys. 6

Umieścimy teraz na płaszczyźnie dwa takie same trójkąty prostokątne, lecz tym razem o wspólnej przeciwprostokątnej; oznaczymy ich wierzchołki tak jak na rys. 7. Wówczas $A'D'_0 = \frac{2}{\sqrt{c}} > 1$. Analogicznie uzasadniamy, że w wyniku obrotu trójkąta $B'C'D'_0$ wokół prostej $B'C'$ możemy dostać trójkąt $B'C'D'$ oraz czworościan $A'B'C'D'$, w którym $A'D' = 1$. Oznaczmy ten czworościan symbolem T' (rys. 8).



rys. 7



rys. 8

W tej sytuacji prawdziwe są następujące zależności:

- trójkąt ABC jest przystający do trójkąta $C'A'B'$;
- trójkąt BCD jest przystający do trójkąta $D'B'C'$;
- trójkąty ABD i $A'B'D'$ są równoboczne o bokach odpowiednio długości $\sqrt{c}$ i 1;
- trójkąt ACD ma boki o długościach $c, c, \sqrt{c}$, a trójkąt $A'C'D'$ ma boki o długościach $\sqrt{c}, \sqrt{c}, 1$ oraz oba te trójkąty są ostrokątne.

Zatem ściany ABC, ABD, ACD i BCD czworościanu T są podobne odpowiednio do ścian $C'A'B', A'B'D', A'C'D'$ i $D'B'C'$ czworościanu T' ; skale podobieństw wynoszą odpowiednio 1, $\sqrt{c}$, $\sqrt{c}$ i 1.

Natomiast czworościany T i T' nie są podobne. Istotnie, kąty płaskie ABC i DBC przy wierzchołku B czworościanu T są proste. Czworościan T' nie ma zaś wierzchołka, w którym schodziłyby się dwa kąty proste, gdyż jedy-
nymi kątami prostymi wśród 12 kątów wewnętrznych ścian tego czworościanu

są kąty $B'A'C'$ i $B'D'C'$ przy wierzchołkach odpowiednio A' i D' .

To kończy rozwiązanie zadania.

Odpowiedź: Tak.

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w Internecie pod adresem: www.om.edu.pl



LXIV Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe

zawodów stopnia trzeciego

17 kwietnia 2013 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Rozwiązać równanie

$$x^4 + y = x^3 + y^2$$

w liczbach całkowitych x, y .

2. Dane są takie liczby całkowite a i b , że $a \neq 0$ oraz liczba $3+a+b^2$ jest podzielna przez $6a$. Wykazać, że liczba a jest ujemna.

3. Dany jest czworokąt $ABCD$, w który można wpisać okrąg. Odcinki AB , BC , CD i DA są średnicami odpowiednio okręgów o_1 , o_2 , o_3 i o_4 . Dowieść, że istnieje okrąg styczny do każdego z okręgów o_1 , o_2 , o_3 i o_4 .

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.



LXIV Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe

zawodów stopnia trzeciego

18 kwietnia 2013 r. (drugi dzień zawodów)

4. Dany jest czworościan $ABCD$, w którym

$$AB = CD \quad \text{oraz} \quad \angle BAD + \angle BCD = 180^\circ.$$

Udowodnić, że $\angle BAD > \angle ADC$.

5. Niech k , m oraz n będą trzema różnymi dodatnimi liczbami całkowitymi. Wykazać, że

$$\left(k - \frac{1}{k}\right)\left(m - \frac{1}{m}\right)\left(n - \frac{1}{n}\right) \leq kmn - (k + m + n).$$

6. Dla każdej liczby całkowitej $n \geq 1$ wyznaczyć największą możliwą liczbę punktów w przestrzeni, tworzących zbiór A o następujących własnościach:

- (1) współrzędne każdego punktu zbioru A są liczbami całkowitymi z przedziału $\langle 0; n \rangle$;
- (2) dla każdej pary różnych punktów (x_1, x_2, x_3) , (y_1, y_2, y_3) zbioru A spełniona jest co najmniej jedna z nierówności $x_1 < y_1$, $x_2 < y_2$, $x_3 < y_3$ oraz co najmniej jedna z nierówności $x_1 > y_1$, $x_2 > y_2$, $x_3 > y_3$.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.



LXIV Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia trzeciego

17 kwietnia 2013 r. (pierwszy dzień zawodów)

Poprawiono 23 kwietnia 2013, godz. 19:02

1. Rozwiązać równanie

$$(1) \quad x^4 + y = x^3 + y^2$$

w liczbach całkowitych x, y .

Rozwiązanie

Przepiszmy równanie (1) w równoważnej postaci

$$(2) \quad y^2 - y = x^4 - x^3.$$

Mnożąc obie strony zależności (2) przez 4 i dodając do nich 1 otrzymujemy

$$(2y-1)^2 = 4x^4 - 4x^3 + 1 = (2x^2 - x)^2 - (x^2 - 1) = (2x^2 - x - 1)^2 + (3x^2 - 2x).$$

Zatem liczba $4x^4 - 4x^3 + 1$ jest kwadratem liczby całkowitej; jednocześnie zaś leży ona pomiędzy kwadratami dwóch kolejnych całkowitych, o ile tylko liczby $x^2 - 1$ i $3x^2 - 2x$ są dodatnie. Wobec tego zależność (2) może być spełniona jedynie wtedy, gdy $x^2 - 1 \leq 0$ lub $3x^2 - 2x \leq 0$, czyli gdy $x \in \{-1, 0, 1\}$.

Podstawiając kolejno te trzy wartości niewiadomej x i rozwiązując uzyskane w ten sposób równania kwadratowe z niewiadomą y wyznaczamy następujące rozwiązania (x, y) równania (1):

$$(-1, -1), \quad (-1, 2), \quad (0, 0), \quad (0, 1), \quad (1, 0), \quad (1, 1).$$

2. Dane są takie liczby całkowite a i b , że $a \neq 0$ oraz liczba $3 + a + b^2$ jest podzielna przez $6a$. Wykazać, że liczba a jest ujemna.

Rozwiązanie

Przypuśćmy, wbrew tezie zadania, że $a > 0$. W myśl założeń istnieje liczba całkowita c , dla której $3 + a + b^2 = 6ac$. Lewa strona ostatniej zależności jest liczbą dodatnią, skąd $c > 0$. Zatem w równości $b^2 + 3 = a(6c - 1)$ drugi czynnik prawej strony daje resztę 5 z dzielenia przez 6, a więc liczba $b^2 + 3$ ma dzielnik pierwszy postaci $p = 6k - 1$ dla pewnej dodatniej liczby całkowitej k .

W tej sytuacji liczba $(b-1)^3 = (b-3)(b^2+3) + 8$ daje przy dzieleniu przez p tę samą resztę, co liczba $2^3 = 8$; w szczególności liczba $b-1$ nie jest podzielna przez p . W oparciu o zależność $3(4k-1) = 2(p-1) + 1$ stwierdzamy, że liczby

$$(1) \quad ((b-1)^3)^{4k-1} = ((b-1)^{p-1})^2 \cdot (b-1) \quad \text{ i } \quad (2^3)^{4k-1} = (2^{p-1})^2 \cdot 2$$

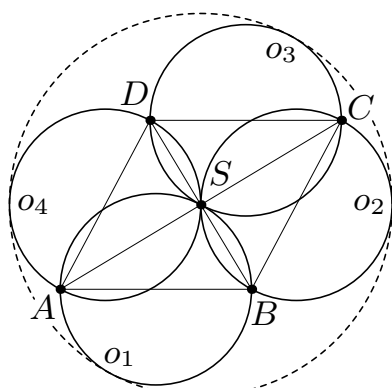
dają równe reszty z dzielenia przez p . Na mocy małego twierdzenia Fermata liczby $(b-1)^{p-1}$ i 2^{p-1} dają resztę 1 z dzielenia przez p . Związki (1)

dowodzą więc, że liczby $b - 1$ i 2 dają te same reszty z dzielenia przez p . W efekcie różnica $(b^2 + 3) - (b - 3)(b + 3) = 12$ jest podzielna przez liczbę p dającą resztę 5 z dzielenia przez 6 . Uzyskana sprzeczność kończy rozwiązanie.

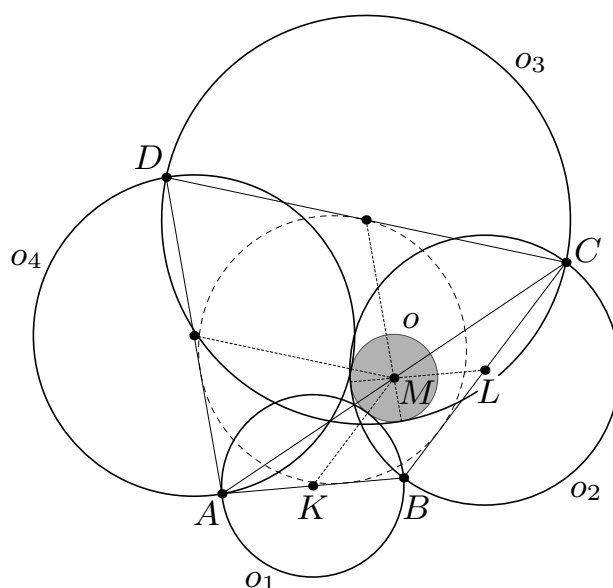
- 3.** Dany jest czworokąt $ABCD$, w który można wpisać okrąg. Odcinki AB , BC , CD i DA są średnicami odpowiednio okręgów o_1 , o_2 , o_3 i o_4 . Dowieść, że istnieje okrąg styczny do każdego z okręgów o_1 , o_2 , o_3 i o_4 .

Rozwiązanie

Jeżeli dany czworokąt jest rombem, to okręgi mają średnice o jednakowej długości, powiedzmy d , i przechodzą przez S — środek symetrii rombu (rys. 1). Okrąg o środku S i promieniu d ma więc żadaną własność.



rys.1



rys.2

Przypuśćmy teraz, że nie wszystkie boki mają równe długości; przyjmijmy, nie tracąc ogólności rozważań, że $AB < BC$ (rys. 2). Oznaczmy symbolami K , L i M odpowiednio środki odcinków AB , BC i AC oraz określmy $r = \frac{1}{2}(BC - AB)$. Wówczas na podstawie równości

$$r + \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}BC = KM \quad \text{oraz} \quad r - \frac{1}{2}BC = -\frac{1}{2}AB = -LM$$

stwierdzamy, że okrąg o o środku M i promieniu r jest styczny zewnętrznie do okręgu o_1 oraz wewnętrznie do okręgu o_2 .

Jednak na mocy założenia o danym czworokącie prawdziwy jest związek $r = \frac{1}{2}(DC - AD)$. Zatem w wyniku analogicznego rozumowania dla środków odcinków AD , DC i AC dochodzimy do wniosku, że okrąg o jest styczny wewnętrznie do okręgu o_3 i zewnętrznie do okręgu o_4 . Wobec tego okrąg o spełnia warunki zadania.



LXIV Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia trzeciego

18 kwietnia 2013 r. (drugi dzień zawodów)

4. Dany jest czworokąt $ABCD$, w którym

$$AB = CD \quad \text{oraz} \quad \angle BAD + \angle BCD = 180^\circ.$$

Udowodnić, że $\angle BAD > \angle ADC$.

Rozwiązanie

Na płaszczyźnie ABD zbudujemy trójkąt $BC'D$ przystający do ściany BCD i leżący po przeciwnej stronie prostej BD niż trójkąt BAD (rys. 4). Wówczas z danych w treści zadania związków otrzymujemy:

$$AB = C'D \quad \text{i} \quad \angle BAD + \angle BC'D = 180^\circ.$$

Zatem na czworokącie $ABC'D$ można opisać okrąg, a ponadto czworokąt ten jest trapezem równoramiennym o podstawach AD i BC' . Stąd i z nierówności trójkąta dla kąta trójsiennego o wierzchołku D (rys. 3) uzyskujemy

$$\angle BAD = \angle ADC' = \angle ADB + \angle BDC' = \angle ADB + \angle BDC > \angle ADC.$$

5 Niech k , m oraz n będą trzema różnymi dodatnimi liczbami całkowitymi. Wykazać, że

$$\left(k - \frac{1}{k}\right) \left(m - \frac{1}{m}\right) \left(n - \frac{1}{n}\right) \leq kmn - (k + m + n).$$

Rozwiązanie

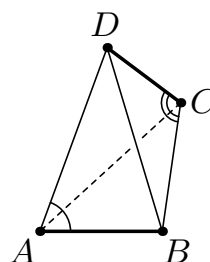
Zauważmy najpierw, że czynniki lewej strony dowodzonej nierówności są liczbami nieujemnymi. Nie ograniczając ogólności rozumowania przyjmijmy, że n jest największą spośród danych trzech liczb. Wykażemy, że

$$(1) \quad \left(k - \frac{1}{k}\right) \left(m - \frac{1}{m}\right) \leq km - 2 \quad \text{i} \quad (km - 2) \left(n - \frac{1}{n}\right) \leq kmn - (k + m + n).$$

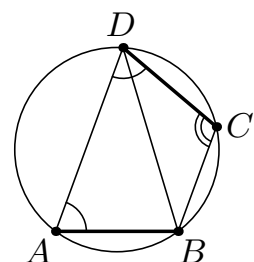
Wówczas łącząc powyższe dwie zależności otrzymamy tezę zadania.

Wymnażając czynniki lewej strony pierwszej spośród nierówności (1), redukując wyraz km i wreszcie mnożąc obustronnie przez km otrzymujemy równoważną postać $-k^2 - m^2 + 1 \leq -2km$, czyli $1 \leq (k - m)^2$. To zaś jest prawdą, gdyż k i m są różnymi liczbami całkowitymi.

Dowód drugiej z nierówności (1) przebiega analogicznie: wymnażamy czynniki lewej strony, redukujemy wyrazy kmn i $-n$, a na koniec mnożymy obustronnie przez n . Dostajemy równoważną postać $-n^2 - km + 2 \leq$



rys. 3



rys. 4

$\leq -(k+m)n$, czyli $2 \leq (n-k)(n-m)$. Do zakończenia rozwiązania pozostaje przypomnieć, że $n-k$ oraz $n-m$ są różnymi dodatnimi liczbami całkowitymi.

Rachunkowe rozwiązanie — kompilacja prac kilku finalistów

Niech

$$\begin{aligned} f(k, m, n) &= 2kmn \left(kmn - (k+m+n) - \left(k - \frac{1}{k}\right) \left(m - \frac{1}{m}\right) \left(n - \frac{1}{n}\right) \right) = \\ &= 2kmn \left(\frac{km}{n} + \frac{mn}{k} + \frac{nk}{m} - k - m - n - \frac{k}{mn} - \frac{m}{nk} - \frac{n}{km} + \frac{1}{kmn} \right) = \\ &= 2k^2m^2 + 2m^2n^2 + 2n^2k^2 - 2k^2mn - 2km^2n - 2kmn^2 - 2k^2 - 2m^2 - 2n^2 + 2 = \\ &= (km - kn)^2 + (mn - mk)^2 + (nk - nm)^2 - 2k^2 - 2m^2 - 2n^2 + 2 = \\ &= k^2((m-n)^2 - 2) + m^2((n-k)^2 - 2) + n^2((k-m)^2 - 2) + 2. \end{aligned}$$

Ze względu na symetrię można założyć bez straty ogólności, że $k > m > n$. Jeśli $k-m \geq 2$ i $m-n \geq 2$, to

$$f(k, m, n) \geq k^2(2^2 - 2) + m^2(2^2 - 2) + n^2(2^2 - 2) + 2 > 0,$$

co uzasadnia prawdziwość dowodzonej nierówności w tym przypadku.

$$\begin{aligned} \text{Jeśli } m = n+1, \text{ to zachodzą równości: } f(k, n+1, n) &= \\ &= k^2 + (n+1)^2(k-n)^2 + n^2(k-n-1)^2 - 2k^2 - 2(n+1)^2 - 2n^2 + 2 = \\ &= k^2(1 + (n+1)^2 + n^2 - 2) - 2k(n(n+1)^2 + n^2(n+1)) + \\ &\quad + 2n^2(n+1)^2 - 2(n+1)^2 - 2n^2 + 2 = \\ &= 2n(n+1)k^2 - 2n(n+1)(2n+1)k + 2(n^2-1)((n+1)^2-1) = \\ &= 2n(n+1)(k^2 - (2n+1)k + (n-1)(n+2)) = 2n(n+1)(k-n+1)(k-n-2). \end{aligned}$$

Oczywiście $k > m$, więc $k \geq m+1 = n+2$ i wobec tego: $f(k, n+1, n) = 2n(n+1)(k-n+1)(k-n-2) \geq 0$.

Analogicznie prawdziwy jest wzór:

$$\begin{aligned} f(m+1, m, n) &= 2m(m+1)(n-m+1)(n-m-2) = \\ &= 2m(m+1)(m-n-1)(m+2-n) \geq 0. \end{aligned}$$

Nierówność jest prawdziwa dla każdej trójki liczb całkowitych $k > m > n$.

6. Dla każdej liczby całkowitej $n \geq 1$ wyznaczyć największą możliwą liczbę punktów w przestrzeni, tworzących zbiór A o następujących własnościach:

- (1) współrzędne każdego punktu zbioru A są liczbami całkowitymi z przedziału $\langle 0; n \rangle$;
- (2) dla każdej pary różnych punktów $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)$ zbioru A spełniona jest co najmniej jedna z nierówności $x_1 < y_1, x_2 < y_2, x_3 < y_3$ oraz co najmniej jedna z nierówności $x_1 > y_1, x_2 > y_2, x_3 > y_3$.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez S zbiór wszystkich $(n+1)^3$ punktów całkowitych z przedziału $\langle 0; n \rangle$. Niech ponadto m będzie najmniejszą liczbą całkowitą równą co najmniej $\frac{1}{2}n$; wtedy $n = 2m$ albo $n = 2m - 1$.

Podzielimy zbiór S na mniejsze zbiory, z których każdy będzie mógł zawierać co najwyżej jeden punkt dowolnego zbioru A o własnościach (1) i (2).

Dla każdej pary liczb $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ i $\ell \in \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$ niech $B_{k,\ell}$ będzie zbiorem wszystkich wyrazów następującego ciągu punktów zbioru S :

$$(0, \ell, k), (1, \ell, k), (2, \ell, k), \dots, (n - \ell - 1, \ell, k), (n - \ell, \ell, k), \\ (n - \ell, \ell + 1, k), (n - \ell, \ell + 2, k), \dots, (n - \ell, n - 1, k), (n - \ell, n, k).$$

Wszystkie punkty występujące w powyższym ciągu mają trzecią współrzedną równą k . Jeśli ponadto punkt (x_1, x_2, k) poprzedza punkt (y_1, y_2, k) w tym ciągu, to prawdziwe są nierówności $x_1 \leq y_1$ i $x_2 \leq y_2$, z których co najmniej jedna jest ostra. Stąd wniosek, że co najwyżej jeden wyraz tego ciągu może być elementem zbioru A .

Przy ustalonej wartości parametru $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ zbiory

$B_{k,0}, B_{k,1}, B_{k,2}, \dots, B_{k,m-1}$ pokrywają łącznie wszystkie punkty zbioru S o trzeciej współrzednej równej k z wyjątkiem punktów (x_1, x_2, k) , w których $x_1 \in \{0, 1, 2, 3, \dots, n - m - 1, n - m\}$ oraz $x_2 \in \{m, m + 1, m + 2, \dots, n\}$. Dla każdej pary liczb $s \in \{0, 1, 2, \dots, n - m\}$ oznaczmy teraz symbolem $C_{s,t}$ zbiór $n + 1$ punktów postaci (s, t, x_3) , gdzie $x_3 \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$.

Również i tu co najwyżej jeden punkt ustalonego zbioru $C_{s,t}$ może należeć do zbioru A .

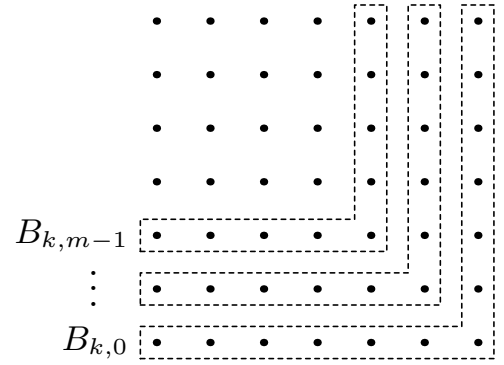
W ten sposób skonstruowaliśmy $(n+1)m$ zbiorów $B_{k,\ell}$ oraz $(n-m+1)^2$ zbiorów $C_{s,t}$. Łącznie stanowią one rozbiecie zbioru S na

$$(1) \quad N = (n + 1)m + (n - m + 1)^2$$

zbiorów. W każdym z nich jest co najwyżej jeden punkt zbioru A . Wobec tego liczba punktów zbioru A nie przekracza N .

Wykażemy teraz, że dla każdego $n \geq 1$ istnieje zbiór o własnościach (1) i (2) oraz zawierający po jednym punkcie z każdego spośród rozważanych N zbiorów. W tym celu zauważmy, że dla dowolnej liczby całkowitej w zbiór A_w wszystkich punktów $(x, y, z) \in S$ związanych równością $x + y + z = w$ spełnia warunki zadania. Wystarczy zatem tak dobrać wartość w , by zbiór A_w miał punkt wspólny z każdym zbiorem $B_{k,\ell}$ oraz z każdym zbiorem $C_{s,t}$.

Dla dowolnych liczb $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ oraz $\ell \in \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$ sumy współrzędnych kolejnych punktów ciągu definiującego zbiór $B_{k,\ell}$ są



rys. 5

kolejnymi liczbami całkowitymi. Pierwsza z tych sum wynosi $\ell + k$, czyli jest równa co najwyżej $n + m - 1$; ostatnia zaś wynosi $2n - \ell + k$, a więc jest równa co najmniej $2n - m + 1$. W konsekwencji zbiór A_w ma punkt wspólny z każdym zbiorem $B_{k,\ell}$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(2) \quad n + m - 1 \leq w \leq 2n - m + 1.$$

Podobnie rozumiemy dla zbioru $C_{s,t}$, gdzie $s \in \{0, 1, 2, \dots, n - m\}$ oraz $t \in \{m, m + 1, m + 2, \dots, n\}$: sumy współrzędnych kolejnych punktów zbioru $C_{s,t}$ tworzą ciąg kolejnych liczb całkowitych rozpoczynający się liczbą $s + t \leq 2n - m$ i kończący się liczbą $s + t + n \geq n + m$. Stąd zbiór A_w ma punkt wspólny z każdym zbiorem $C_{s,t}$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(3) \quad 2n - m \leq w \leq n + m.$$

Pozostaje stwierdzić, że nierówności (2) i (3) są spełnione: w przypadku $n = 2m$ dla $w = 3m$, a w przypadku $n = 2m - 1$ dla $w = 3m - 2$ i $w = 3m - 1$. W rezultacie przy tak wybranej wartości w zbiór $A = A_w$ liczy N punktów.

Na koniec wyznaczmy jednolity wzór wyrażający liczbę N w zależności od n . Przekształcając równość (1) otrzymujemy następujące wyniki:

$$N = (2m + 1)m + (m + 1)^2 = 3m^2 + 3m + 1 = \frac{3}{4}(n + 1)^2 + \frac{1}{4}, \quad \text{gdy } n = 2m,$$

oraz

$$N = 2m \cdot m + m^2 = 3m^2 = \frac{3}{4}(n + 1)^2, \quad \text{gdy } n = 2m - 1.$$

Zatem N jest najmniejszą liczbą całkowitą równą co najmniej $\frac{3}{4}(n + 1)^2$.

Odpowiedź: Szukana największa możliwa liczba punktów zbioru A jest równa najmniejszej liczbie całkowitej nie mniejszej niż $\frac{3}{4}(n + 1)^2$.

Roboczy szkic drugiego rozwiązania

Poniżej $\lceil x \rceil$ oznacza najmniejszą liczbę całkowitą z półprostej $[x, \infty)$. Zbiory *równoliczne* to zbiory o tej samej liczbie elementów. Kostka K to najmniejszy sześcián zawierający wszystkie punkty o współrzędnych całkowitych z przedziału $\langle 0; n \rangle$.

Zbiór o własnościach (1) i (2) nazwijmy *dobrym*. Symbole $m(A)$ i $M(A)$ oznaczają, odpowiednio, najmniejszą i największą wartość sumy $x + y + z$, gdy $(x, y, z) \in A$.

Lemat. Jeżeli A jest zbiorem dobrym, $m(A) < \frac{3}{2}n$, to istnieje taki zbiór dobry A' , równoliczny z A , że zachodzą równości $m(A') = m(A) + 1$ oraz $M(A') = \max\{M(A), m(A) + 1\}$.

Najpierw wywnioskujemy twierdzenie z lematu. Niech A będzie zbiorem dobrym. Stosując lemat wielokrotnie, zwiększamy $m(\cdot)$ i dochodzimy

do zbioru dobrego A^* , równolicznego z A , w którym $m(A^*) = \lceil \frac{3}{2}n \rceil$, $M(A^*) = \max\{M(A), \lceil \frac{3}{2}n \rceil\}$.

Jeśli $M(A^*) = M(A) > \lceil \frac{3}{2}n \rceil$, to stosując (tyle razy ile trzeba) lemat do odbicia zbioru A^* w symetrii względem punktu $(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}, \frac{n}{2})$ — środka kostki, zmniejszamy $M(\cdot)$ i otrzymujemy zbiór dobry A^{**} , w którym nadal $m(A^{**}) = \lceil \frac{3}{2}n \rceil$, oraz także $M(A^{**}) = \lceil \frac{3}{2}n \rceil$. (Jeśli zaś $M(A^*) = \lceil \frac{3}{2}n \rceil$, przyjmujemy po prostu $A^{**} = A^*$). Zbiór A^{**} (równoliczny z A) cały leży w płaszczyźnie $x + y + z = \lceil \frac{3}{2}n \rceil$.

Różnie można zliczyć punkty kostki, leżące w tej płaszczyźnie. Wynik: $\lceil \frac{3}{4}(n+1)^2 \rceil$. To odpowiedź na pytanie, bo wszystkie punkty tego przekroju tworzą zbiór dobry.

Dowód lematu. Niech $B = \{p = (x, y, z) \in A : x + y + z = s\}$ oraz $m(A) = s < \frac{3}{2}n$. Określamy trzy zbiory: $B_1 = \{p \in B : y \geq \frac{1}{3}s > z\}$, $B_2 = \{p \in B : z \geq \frac{1}{3}s > x\}$, $B_3 = \{p \in B : x \geq \frac{1}{3}s > y\}$. Są one rozłączne.

Niech $p_0 = (x, y, z) \in B \setminus (B_1 \cup B_2 \cup B_3)$. Ponieważ $x + y + z = s$, więc zachodzi nierówność $\max(x, y, z) \geq \frac{1}{3}s$. Niech np. $x \geq \frac{1}{3}s$. Skoro $p_0 \notin B_3$, to $y \geq \frac{1}{3}s$; a skoro $p_0 \notin B_1$, to $z \geq \frac{1}{3}s$. To znaczy, że $x = y = z = \frac{1}{3}s$. Punkt p_0 istnieje więc wtedy i tylko wtedy, gdy liczba s dzieli się przez 3, i jest wówczas jedyny: $p_0 = (\frac{1}{3}s, \frac{1}{3}s, \frac{1}{3}s)$.

Określamy zbiór A' , zastępując każdy punkt $p = (x, y, z) \in B$ punktem p' , uzyskanym z p przez zwiększenie jednej współrzędnej o 1: jeśli $p \in B_i$ to zwiększamy i -tą współrzędną ($i = 1, 2, 3$), jeśli zaś $p = p_0$, to którąkolwiek z trzech. Zbiór A jest dobry, więc $p' \notin A$. Punkty zbioru $A \setminus B$ włączamy do A' nie zmieniając ich.

Jasne, że $m(A') = s + 1$. Jeżeli $M(A) > s$, to również $M(A') = M(A)$. Jeśli $M(A) = s$, to zachodzi równość $A = B$, więc $M(A') = m(A') = s + 1$.

Wykażemy, że zbiory A' i A mają tyle samo elementów. Wystarczy wykazać, że przyporządkowanie $p \mapsto p'$ jest różnowartościowe. Załóżmy, że $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in B_1$, $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \in B_2$, $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) \in B_3$. Tym punktom przypisujemy punkty $(\bar{x} + 1, \bar{y}, \bar{z}) \in A'$, $(\tilde{x}, \tilde{y} + 1, \tilde{z}) \in A'$, $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z} + 1) \in A'$. Są one różne, bo $\bar{z} < \frac{1}{3}s \leq \tilde{z}$, $\tilde{x} < \frac{1}{3}s \leq \hat{x}$, $\hat{y} < \frac{1}{3}s \leq \bar{y}$. Są one też różne od punktu p'_0 (jeśli on istnieje).

Wykażemy, że zbiór A' jest dobry. Najpierw wykażemy, że $A' \subset K$. Przypuśćmy, że punkt p' , uzyskany z $p = (x, y, z) \in B$, znalazł się poza kostką. Niech np. $p \in B_1$. Wtedy $p' = (x + 1, y, z)$ i $x + 1 > n$, więc $x = n$. Z definicji zbioru B_1 i z założenia $s < \frac{3}{2}n$ wynika, że $s = n + y + z \geq n + \frac{1}{3}s + 0 > \frac{2}{3}s + \frac{1}{3}s = s$. Sprzeczność, zatem $p' \in K$. Również p'_0 jest punktem kostki, bo $\frac{1}{3}s < \frac{1}{2}n < n$.

Teraz zajmijmy się warunkiem (2). Załóżmy, że dla pewnych punktów $p = (x, y, z) \in A'$ i $q = (u, v, w) \in A'$ zachodzą nierówności $x \leq u$, $y \leq v$,

$z \leq w$. Ponieważ $p \neq q$ i $m(A') = s + 1$, więc $s + 1 \leq x + y + z < u + v + w$, zatem $q \in A$. Ponieważ zbiór A jest dobry, więc $p \notin A$, zatem $p = r'$ dla pewnego punktu $r \in B$. Wtedy $r = (x - 1, y, z)$. Jednak punkty r i q nie mogą należeć do zbioru A , bo jest on dobry.

Zbiór A' ma więc wszystkie wymagane własności. Zakończyliśmy dowód lematu i tym samym rozwiązanie zadania.

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w Internecie pod adresem: www.om.edu.pl bieżące informacje można znaleźć w Internecie pod adresem: www.om.edu.pl



LXV Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego

I seria (1 września 2013 r. – 30 września 2013 r.)

1. Wykazać, że jeśli liczby całkowite a, b, c spełniają równanie

$$(a+3)^2 + (b+4)^2 - (c+5)^2 = a^2 + b^2 - c^2,$$

to wspólna wartość obu stron jest kwadratem liczby całkowitej.

2. Dane są trzy różne liczby całkowite $a, b, c > 1$ spełniające warunek $\text{NWD}(a, b, c) = 1$. Znaleźć wszystkie możliwe wartości liczby

$$\text{NWD}(a^2b + b^2c + c^2a, ab^2 + bc^2 + ca^2, a + b + c).$$

3. Na tablicy napisano słowo $abdc$. W jednym ruchu możemy dopisać lub usunąć (na początku, w środku lub na końcu) palindrom parzystej długości utworzony z liter a, b, c, d . Rozstrzygnąć, czy po skończonej liczbie ruchów możemy uzyskać słowo $bacd$.

(Uwaga: Palindromem nazywamy słowo, które czytane od lewej do prawej jest takie samo jak czytane od prawej do lewej, np. $abba, cc, daaaad$.)

4. Na bokach BC, CA, AB trójkąta ostrokątnego ABC leżą odpowiednio punkty D, E, F , przy czym $FA = FE$ oraz $FB = FD$. Udowodnić, że punkt przecięcia wysokości trójkąta ABC leży na okręgu przechodzącym przez punkty C, D, E .

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

30 września 2013 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.

Rozwiązanie każdego zadania należy podpisać w lewym górnym rogu pierwszej jego strony: imieniem i nazwiskiem, swoim adresem, swoim adresem elektronicznym oraz klasą, nazwą i adresem szkoły.



LXV Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego

II seria (1 października 2013 r. – 4 listopada 2013 r.)

5. Wyznaczyć wszystkie funkcje f określone na zbiorze liczb całkowitych i przyjmujące wartości całkowite, spełniające warunek

$$f(a+b)^3 - f(a)^3 - f(b)^3 = 3f(a)f(b)f(a+b)$$

dla każdej pary liczb całkowitych a, b .

6. Dowieść, że nie istnieją dodatnie liczby całkowite x, y, z , dla których

$$(3x + 4y)(4x + 5y) = 7^z.$$

7. Dany jest okrąg o i jego cięciwa AB niebędąca średnicą. Na okręgu o wybieramy punkt P , różny od punktów A i B . Punkty Q i R leżą odpowiednio na prostych PA i PB , przy czym $QP = QB$ oraz $RP = RA$. Punkt M jest środkiem odcinka QR . Wykazać, że wszystkie uzyskane w ten sposób proste PM (odpowiadające różnym położeniom punktu P na okręgu o) mają punkt wspólny.

8. W czworokącie $ABCD$ płaszczyzna dwusieczna kąta dwusiecznego o krawędzi BC przecina krawędź AD w punkcie P , zaś punkt Q jest rzutem prostokątnym punktu P na prostą BC . Udowodnić, że $\sphericalangle AQP = \sphericalangle PQD$.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

4 listopada 2013 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.

Rozwiązanie każdego zadania należy podpisać w lewym górnym rogu pierwszej jego strony: imieniem i nazwiskiem, swoim adresem, swoim adresem elektronicznym oraz klasą, nazwą i adresem szkoły.



LXV Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego

III seria (5 listopada 2013 r. – 4 grudnia 2013 r.)

9. Udowodnić, że dla każdej trójki różnych liczb dodatnich a, b, c z odcinków o długościach

$$\sqrt[3]{(a^2 - b^2)(a - b)}, \quad \sqrt[3]{(b^2 - c^2)(b - c)}, \quad \sqrt[3]{(c^2 - a^2)(c - a)}$$

można zbudować trójkąt.

10. Ciąg $x_0, x_1, x_2, \dots$ określamy wzorami: $x_0 = 1, x_1 = 3$ oraz

$$x_{n+2} = 6x_{n+1} - x_n \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, \dots$$

Udowodnić, że dla każdego n istnieją takie liczby całkowite a, b , że

$$x_n = a^2 + 2b^2.$$

11. Dany jest trójkąt ABC , w którym $AB \neq AC$. Okrąg o wpisany w ten trójkąt jest styczny do boków BC, CA, AB odpowiednio w punktach D, E, F . Punkt M jest środkiem odcinka EF . Okrąg o średnicy MD przecina okrąg o w punktach D i P oraz przecina odcinek EF w punktach M i Q . Wykazać, że prosta PQ połowi odcinek AM .

12. W prostokącie P zaznaczono n^2 różnych punktów. Dla każdej liczby całkowitej $n \geq 2$ znaleźć największą możliwą liczbę prostokątów, w których każdy wierzchołek jest jednym z zaznaczonych punktów, a boki są równoległe do boków prostokąta P .

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

4 grudnia 2013 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.

Rozwiązanie każdego zadania należy podpisać w lewym górnym rogu pierwszej jego strony: imieniem i nazwiskiem, swoim adresem, swoim adresem elektronicznym oraz klasą, nazwą i adresem szkoły.

Adresy Komitetów Okręgowych Olimpiady Matematycznej

- Dla województwa pomorskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Gdańskiego, ul. Wita Stwosza 57, 80-952 Gdańsk.

- Dla województwa śląskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Śląskiego, ul. Bankowa 14, 40-007 Katowice.

- Dla województwa małopolskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego, ul. Łojasiewicza 6, 30-348 Kraków.

- Dla województwa lubelskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Zakład Rachunku Prawdopodobieństwa pok. 810, Instytut Matematyki UMCS, pl. Marii Skłodowskiej-Curie 1, 20-031 Lublin.

- Dla województwa łódzkiego i świętokrzyskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Łódzkiego, ul. Banacha 22, 90-238 Łódź.

- Dla województwa wielkopolskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki i Informatyki UAM, ul. Umultowska 87, 61-614 Poznań.

- Dla województwa podkarpackiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Katedra Matematyki, Politechnika Rzeszowska, al. Powstańców Warszawy 8, 35-959 Rzeszów.

- Dla województwa lubuskiego i zachodniopomorskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Szczecińskiego, ul. Wielkopolska 15, 70-451 Szczecin.

- Dla województwa kujawsko-pomorskiego i warmińsko-mazurskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki i Informatyki UMK, ul. Chopina 12/18, 87-100 Toruń.

- Dla województwa mazowieckiego i podlaskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, ul. Śniadeckich 8, 00-656 Warszawa.

- Dla województwa dolnośląskiego i opolskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego, pl. Grunwaldzki 2/4, 50-384 Wrocław.

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w Internecie pod adresem: www.om.edu.pl



LXV Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia pierwszego

(1 września 2013 r. – 4 grudnia 2013 r.)

Zadanie 1. Wykazać, że jeśli liczby całkowite a, b, c spełniają równanie

$$(a+3)^2 + (b+4)^2 - (c+5)^2 = a^2 + b^2 - c^2,$$

to wspólna wartość obu stron jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie

Rozwińmy kwadraty stojące po lewej stronie danego równania, uzyskując

$$a^2 + 6a + 9 + b^2 + 8b + 16 - c^2 - 10c - 25 = a^2 + b^2 - c^2.$$

Po redukcji wyrazów podobnych dostajemy $6a + 8b - 10c = 0$, skąd $c = \frac{3}{5}a + \frac{4}{5}b$.

Prawą stronę rozważanego równania przekształcamy teraz następująco:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 - c^2 &= a^2 + b^2 - \left(\frac{3}{5}a + \frac{4}{5}b\right)^2 = a^2 + b^2 - \frac{9}{25}a^2 - \frac{24}{25}ab - \frac{16}{25}b^2 = \\ &= \frac{16}{25}a^2 - \frac{24}{25}ab + \frac{9}{25}b^2 = \left(\frac{4}{5}a - \frac{3}{5}b\right)^2. \end{aligned}$$

Do zakończenia rozwiązania pozostaje jeszcze uzasadnić, że liczba $\frac{4}{5}a - \frac{3}{5}b$ jest całkowita. W tym celu korzystamy znów ze związku $c = \frac{3}{5}a + \frac{4}{5}b$, otrzymując

$$\frac{4}{5}a - \frac{3}{5}b = \frac{9}{5}a + \frac{12}{5}b - a - 3b = 3\left(\frac{3}{5}a + \frac{4}{5}b\right) - a - 3b = 3c - a - 3b.$$

Zatem liczba $a^2 + b^2 - c^2$ jest kwadratem liczby całkowitej $3c - a - 3b$.

Zadanie 2. Dane są trzy różne liczby całkowite $a, b, c > 1$ spełniające warunek $\text{NWD}(a, b, c) = 1$. Znaleźć wszystkie możliwe wartości liczby

$$\text{NWD}(a^2b + b^2c + c^2a, ab^2 + bc^2 + ca^2, a + b + c).$$

Rozwiązanie

Niech d oznacza największy wspólny dzielnik liczb

$$K = a^2b + b^2c + c^2a, \quad L = ab^2 + bc^2 + ca^2 \quad \text{oraz} \quad M = a + b + c.$$

Wykażemy najpierw, że liczby a, b, c są względnie pierwsze z liczbą d .

Przypuśćmy bowiem, że liczby a i d mają wspólny dzielnik pierwszy p ; jest on wtedy także dzielnikiem liczb K i M . Różnica $K - a(ab + c^2) = b^2c$ jest zatem podzielna przez p , czyli jedna z liczb b, c jest podzielna przez liczbę pierwszą p . Wobec tego suma $M = a + b + c$ oraz jej dwa składniki są podzielne przez p . Stąd wniosek, że każda z liczb a, b, c jest podzielna przez p , wbrew założeniu $\text{NWD}(a, b, c) = 1$. To dowodzi, że $\text{NWD}(a, d) = 1$ i podobnie uzasadniamy zależności $\text{NWD}(b, d) = \text{NWD}(c, d) = 1$.

Z drugiej strony, liczba $(ab + bc + ca)M - K - L = 3abc$ jest podzielna przez d . A ponieważ liczby a, b, c są względnie pierwsze z liczbą d , więc podzielność liczby $3abc$ przez d pociąga za sobą podzielność liczby 3 przez d , skąd $d = 1$ lub $d = 3$. Obie te wartości są możliwe do uzyskania:

- dla $(a, b, c) = (2, 3, 4)$ otrzymujemy $\text{NWD}(K, L, M) = \text{NWD}(80, 82, 9) = 1$;
- dla $(a, b, c) = (2, 5, 8)$ dostajemy $\text{NWD}(K, L, M) = \text{NWD}(348, 402, 15) = 3$.

Odpowiedź: Szukanymi możliwymi wartościami są 1 i 3.

Zadanie 3. Na tablicy napisano słowo $abdc$. W jednym ruchu możemy dopisać lub usunąć (na początku, w środku lub na końcu) palindrom parzystej długości utworzony z liter a, b, c, d . Rozstrzygnąć, czy po skończonej liczbie ruchów możemy uzyskać słowo $bacd$.

(*Uwaga:* Palindromem nazywamy słowo, które czytane od lewej do prawej jest takie samo jak czytane od prawej do lewej, np. $abba, cc, daaaad$.)

Rozwiązanie

Dla dowolnego słowa w utworzonego z liter a, b, c, d niech $N(w)$ oznacza liczbę pozycji nieparzystych, a $P(w)$ — liczbę pozycji parzystych, na których w słowie w występuje litera a . (Pozycje w słowie numerujemy od lewej strony kolejno liczbami 1, 2, 3, ..., a więc np. $N(\underline{a}b\underline{a}acd) = 2$ i $P(\underline{a}b\underline{a}acd) = 1$.) Oznaczmy wreszcie $R(w) = N(w) - P(w)$.

Wykażemy, że jeżeli w wyniku wykonania ruchu ze słowa w powstaje słowo v , to prawdziwy jest związek $R(v) = R(w)$.

Istotnie, dłuższe ze słów w, v otrzymujemy z krótszego poprzez dopisanie palindromu o parzystej długości. Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że słowo v uzyskujemy ze słowa w wstawiając w pewnym jego miejscu (na początku, w środku lub na końcu) palindrom postaci $p_1p_2 \dots p_{k-1}p_kp_kp_{k-1} \dots p_2p_1$, gdzie każdy z symboli $p_1, p_2, \dots, p_k$ jest jedną z liter a, b, c, d . W wyniku tego wstawienia dotychczasowe litery słowa w albo pozostają w słowie v na tej samej pozycji, albo też przesuwają się o $2k$ pozycji w prawo. Stąd wniosek, że słowo w zawiera tyle samo liter a na pozycjach nieparzystych, co słowo v poza dopisanym palindromem; podobnie dla pozycji parzystych.

Niech z kolei m oznacza liczbę wystąpień litery a w ciągu $p_1, p_2, \dots, p_k$. Dla $i = 1, 2, \dots, k$ symbol p_i występuje w dopisanym palindromie dwukrotnie — raz na pozycji nieparzystej, a raz na parzystej. W konsekwencji dokładnie połowa spośród $2m$ liter a występujących w rozważanym palindromie stoi na pozycjach nieparzystych, a druga połowa — na pozycjach parzystych. Wobec tego $N(v) = N(w) + m$ i $P(v) = P(w) + m$, co pociąga za sobą postulowany związek $R(v) = R(w)$.

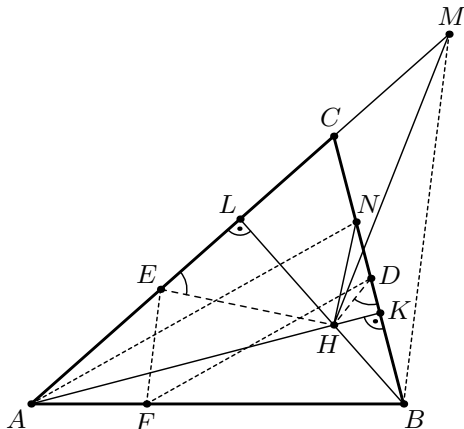
Zatem dowolne słowo w , które można otrzymać na tablicy po skończonej liczbie ruchów, spełnia zależność $R(w) = R(abdc) = 1 - 0 = 1$. Stąd i z równości $R(bacd) = 0 - 1 = -1$ wynika przecząca odpowiedź na postawione pytanie.

Odpowiedź: Uzyskanie słowa $bacd$ nie jest możliwe.

Zadanie 4. Na bokach BC, CA, AB trójkąta ostrokątnego ABC leżą odpowiednio punkty D, E, F , przy czym $FA = FE$ oraz $FB = FD$. Udowodnić, że punkt przecięcia wysokości trójkąta ABC leży na okręgu przechodzącym przez punkty C, D, E .

Rozwiązanie

Niech K i L będą spodkami wysokości trójkąta ABC opuszczonych odpowiednio z wierzchołków A i B oraz niech H będzie punktem przecięcia tych wysokości. Odbijmy symetrycznie punkt A względem punktu L oraz punkt B względem punktu K , otrzymując odpowiednio punkty M oraz N (rys. 1). Wówczas proste AK i BL są symetralnymi odpowiednio odcinków BN i AM .



rys. 1

Punkt B leży na symetralnej odcinka AM , więc trójkąt ABM jest równoramienny. Ponadto trójkąty równoramiennie AFE i ABM mają wspólny kąt między ramieniem a podstawą przy wierzchołku A . W rezultacie są one jednokładne względem tego wierzchołka. Analogicznie trójkąty BFD i BAN są jednokładne względem punktu B . Stąd uzyskujemy równości stosunków

$$(1) \quad \frac{AE}{EM} = \frac{AF}{FB} = \frac{ND}{DB}.$$

Z drugiej strony, punkt H leży na symetralnych odcinków AM i BN . Zatem trójkąty AHM i NHB są równoramiennie. Co więcej, miary ich kątów między ramieniem a podstawą są równe, gdyż

$$\sphericalangle HAM = \sphericalangle KAC = 90^\circ - \sphericalangle BCA = \sphericalangle LBC = \sphericalangle HBN.$$

W efekcie trójkąty te są podobne. Na mocy zależności (1) podobieństwo, które przeprowadza wierzchołki A, H, M odpowiednio na wierzchołki N, H, B , przekształca punkt E na punkt D . Wobec tego $\sphericalangle HEM = \sphericalangle HDB$, czyli

$$\sphericalangle HEC = 180^\circ - \sphericalangle HDC.$$

Na czworokącie $HDCE$ można więc opisać okrąg, co kończy rozwiązanie.

Zadanie 5. Wyznaczyć wszystkie funkcje f określone na zbiorze liczb całkowitych i przyjmujące wartości całkowite, spełniające warunek

$$(1) \quad f(a+b)^3 - f(a)^3 - f(b)^3 = 3f(a)f(b)f(a+b)$$

dla każdej pary liczb całkowitych a, b .

Rozwiązanie

Przyjmując $a = b = 0$ w zależności (1) uzyskujemy $-f(0)^3 = 3f(0)^3$, skąd

$$(2) \quad f(0) = 0.$$

Niech n będzie dowolną liczbą całkowitą. W myśl równości (2) związek (1) dla wartości $a = n$ i $b = -n$ przybiera postać $-f(n)^3 - f(-n)^3 = 0$. Zatem

$$(3) \quad f(-n) = -f(n) \quad \text{dla każdego } n.$$

Przypuśćmy wreszcie, że istnieje liczba całkowita $d \neq 0$, dla której $f(d) = 0$. Wtedy dla dowolnej liczby całkowitej n z zależności (1) dla $a = n$ oraz $b = d$ dostajemy $f(n+d)^3 - f(n)^3 = 0$, czyli $f(n+d) = f(n)$. W rezultacie

$$(4) \quad \text{jeśli } f(d) = 0, \quad \text{to } f(n+d) = f(n) \text{ dla każdego } n.$$

Jeżeli $f(1) = 0$, to związek (4) dowodzi, że $f(n+1) = f(n)$ dla każdego n . Stąd funkcja f jest stała, a wobec równości (2) — zerowa. W dalszej części zakładamy, że $k = f(1) \neq 0$. Podstawiając $a = b = 1$ w warunku (1) stwierdzamy, że liczba $x = f(2)$ jest pierwiastkiem równania $x^3 - 2k^3 = 3k^2x$. Z rozkładu

$$x^3 - 3k^2x - 2k^3 = (x - 2k)(x^2 + 2kx + k^2) = (x - 2k)(x + k)^2$$

wynika więc, że $f(2) = 2k$ albo $f(2) = -k$. Zbadamy oddzielnie oba przypadki.

Przypadek 1. $f(2) = 2k$.

Wówczas równość

$$(5) \quad f(n) = kn$$

jest spełniona dla $n = 0$, $n = 1$ oraz $n = 2$. Wykażemy indukcyjnie, że jest ona prawdziwa dla dowolnej nieujemnej liczby całkowitej n — i w konsekwencji, na podstawie związku (3), dla dowolnej liczby całkowitej n .

Przypuśćmy w tym celu, że $f(m) = km$ dla pewnej liczby całkowitej $m \geq 2$. Korzystając z zależności (1) dla $a = m$ i $b = 1$ wnioskujemy, że liczba $y = f(m+1)$ jest pierwiastkiem równania $y^3 - m^3k^3 - k^3 = 3mk^2y$. W rozkładzie

$$y^3 - 3mk^2y - k^3(m^3 + 1) = [y - k(m+1)][y^2 + k(m+1)y + k^2(m^2 - m + 1)]$$

drugi czynnik jako trójmian kwadratowy zmiennej y ma wyróżnik równy

$$\Delta = k^2(m+1)^2 - 4k^2(m^2 - m + 1) = k^2(-3m^2 + 6m - 3) = -3k^2(m-1)^2 < 0,$$

czyli czynnik ten jest stale dodatni. Zatem $y = k(m+1)$, co dowodzi słuszności związku (5) dla $n = m+1$ i kończy rozumowanie indukcyjne.

Przypadek 2. $f(2) = -k$.

Wtedy warunek (1) dla wartości $a = 2$ oraz $b = 1$ prowadzi do równości $f(3)^3 = -3k^2f(3)$. Jej strony miałyby przeciwne znaki, gdyby $f(3) \neq 0$, a więc $f(3) = 0$. W oparciu o zależność (4) otrzymujemy teraz związek $f(n+3) = f(n)$ dla każdego n , który pociąga za sobą wzór

$$(6) \quad f(n) = \begin{cases} 0, & \text{gdy liczba } n \text{ jest podzielna przez } 3, \\ k, & \text{gdy liczba } n \text{ daje resztę } 1 \text{ z dzielenia przez } 3, \\ -k, & \text{gdy liczba } n \text{ daje resztę } 2 \text{ z dzielenia przez } 3. \end{cases}$$

Pozostaje sprawdzić, że dla każdej liczby całkowitej k funkcja f określona jednym ze wzorów (5), (6) spełnia tożsamość (1).

1. Dla funkcji $f(n) = kn$ obie strony warunku (1) wynoszą $k^3(3a^2b + 3ab^2)$.

2. Funkcja f zadana wzorem (6) ma własność (3). Zatem wprowadzając oznaczenie $c = -(a+b)$ możemy przepisać dowodzoną zależność (1) w postaci

$$(7) \quad f(a)^3 + f(b)^3 + f(c)^3 = 3f(a)f(b)f(c).$$

Jeżeli co najmniej jedna z liczb a , b , c jest podzielna przez 3, to prawa strona oraz pewien składnik lewej strony warunku (7) są równe zeru, a pozostałe dwa składniki znoszą się wzajemnie. W przeciwnym razie związek $a+b+c=0$ oznacza, że liczby a , b , c dają tę samą resztę (1 lub 2) z dzielenia przez 3, skąd $f(a) = f(b) = f(c)$. W obu przypadkach równość (7) jest prawdziwa.

Odpowiedź: Wszystkie funkcje f o żądanej własności są opisane wzorami (5) i (6), w których parametr k może być dowolną liczbą całkowitą.

Zadanie 6. Dowieść, że nie istnieją dodatnie liczby całkowite x , y , z , dla których

$$(3x + 4y)(4x + 5y) = 7^z.$$

Rozwiązanie

Przypuśćmy, że dodatnie liczby całkowite x , y , z spełniają daną równość. Ponieważ liczba 7 jest jedynym dzielnikiem pierwszym prawej strony, więc

$$3x + 4y = 7^a \quad \text{oraz} \quad 4x + 5y = 7^b$$

dla pewnych nieujemnych liczb całkowitych a i b o sumie równej z . Nierówność $3x + 4y < 4x + 5y$ pociąga za sobą związek $a < b$. Wobec tego $b \geq a + 1$, skąd

$$4x + 5y = 7^b \geq 7 \cdot 7^a = 7(3x + 4y) = 21x + 28y > 4x + 5y.$$

Uzyskaliśmy sprzeczność, która dowodzi tezy zadania.

Zadanie 7. Dany jest okrąg o i jego cięciwa AB niebędąca średnicą. Na okręgu o wybieramy punkt P , różny od punktów A i B . Punkty Q i R leżą odpowiednio na prostych PA i PB , przy czym $QP = QB$ oraz $RP = RA$. Punkt M jest środkiem odcinka QR . Wykazać, że wszystkie uzyskane w ten sposób proste PM (odpowiadające różnym położeniom punktu P na okręgu o) mają punkt wspólny.

Rozwiązanie

Udowodnimy, że szukanym punktem wspólnym jest punkt C , w którym przecinają się styczne do okręgu o w punktach A i B (rys. 2 i 3).

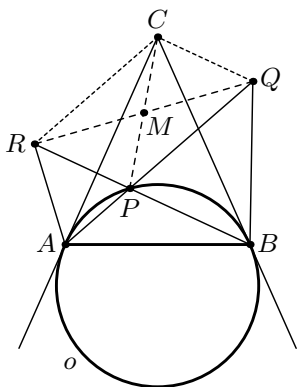
Trójkąty ACB , ARP i BQP są równoramienne. Wykażemy, że mają one jednakowe miary kątów między ramieniem a podstawą. Istotnie, przyjmijmy oznaczenie $\alpha = \sphericalangle CAB = \sphericalangle CBA$. Na mocy twierdzenia o kącie między styczną a cięciwą kąt wpisany oparty na krótszym łuku AB okręgu o ma miarę α . Jeżeli więc punkt P leży na owym krótszym łuku (rys. 2), to

$$\sphericalangle APR = \sphericalangle BPQ = 180^\circ - \sphericalangle APB = \alpha,$$

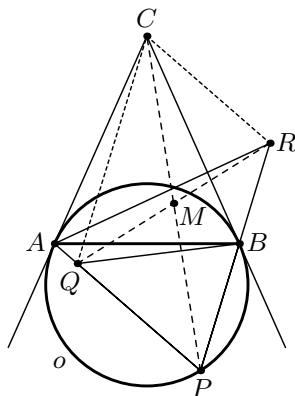
jeżeli zaś punkt P leży na dłuższym łuku AB okręgu o (rys. 3), to

$$\sphericalangle APR = \sphericalangle BPQ = \sphericalangle APB = \alpha.$$

Wobec tego rozważane trzy trójkąty równoramienne są podobne.



rys. 2



rys. 3

Trójkąty równoramienne ARP i ACB są zbudowane na dwóch bokach trójkąta ABP jako na podstawach, przy czym jeden do wewnątrz, a drugi — na zewnątrz trójkąta ABP . W obu przypadkach z podobieństwa tych trójkątów równoramiennych i równości $\sphericalangle RAP = \sphericalangle CAB$ wynikają zależności

$$\frac{RA}{AC} = \frac{PA}{AB} \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle RAC = \sphericalangle PAB.$$

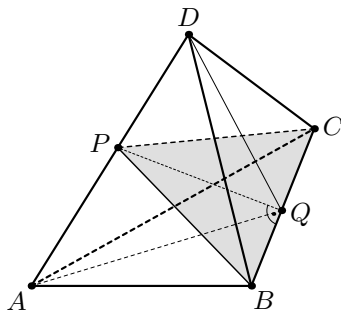
Zatem trójkąty RAC i PAB są podobne (cecha *bok-kąt-bok*). Analogicznie trójkąty QCB i PAB są podobne. Stąd trójkąty RAC i QCB są podobne, a więc przystające, gdyż ich odpowiadające boki AC i CB mają równe długości. W efekcie $QC = RA = RP$ i analogicznie dowodzimy, że $CR = PQ$.

Półproste $PQ \rightarrow$ i $PR \rightarrow$ albo przecinają odpowiednio odcinki BC i AC (rys. 2), albo też przechodzą odpowiednio przez punkty A i B (rys. 3). W obu sytuacjach punkty Q i R leżą po przeciwnych stronach prostej PC , a równości $QC = RP$ i $CR = PQ$ oznaczają, że punkty P, Q, C, R są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku. Punkt M jest zaś środkiem jego przekątnej QR , czyli prosta PM przechodzi przez wierzchołek C , tak jak twierdziliśmy.

Zadanie 8. W czworokącie $ABCD$ płaszczyzna dwusieczna kąta dwusiecznego o krawędzi BC przecina krawędź AD w punkcie P , zaś punkt Q jest rzutem prostokątnym punktu P na prostą BC . Udowodnić, że $\sphericalangle AQP = \sphericalangle PQD$.

Rozwiązanie

Oznaczmy symbolem φ symetrię względem prostej PQ , czyli obrót wokół tej prostej o kąt 180° (rys. 4).



rys. 4

Prosta BC przecina prostą PQ pod kątem prostym, a więc przechodzi przy symetrii φ na siebie. Wobec tego φ przeprowadza dowolną płaszczyznę π zawierającą prostą BC na pewną płaszczyznę zawierającą prostą BC , a ściślej — na płaszczyznę *symetryczną do π względem płaszczyzny BCP* .

Na mocy warunków zadania płaszczyzny BCA i BCD są symetryczne względem płaszczyzny BCP . Zatem φ przekształca płaszczyznę BCA na BCD . Z kolei płaszczyzna AQD przechodzi przy symetrii φ na siebie, gdyż zawiera oś tej symetrii. Stąd φ odwzorowuje przekrój płaszczyzn BCA i AQD (prostą AQ) na przekrój płaszczyzn BCD i AQD (prostą DQ). W rezultacie proste AQ i DQ są symetryczne względem prostej PQ , skąd wynika teza.

Zadanie 9. Udowodnić, że dla każdej trójki różnych liczb dodatnich a, b, c z odinków o długościach

$$\sqrt[3]{(a^2 - b^2)(a - b)}, \quad \sqrt[3]{(b^2 - c^2)(b - c)}, \quad \sqrt[3]{(c^2 - a^2)(c - a)}$$

można zbudować trójkąt.

Rozwiązanie

Należy wykazać, że suma dowolnych dwóch pierwiastków występujących w treści zadania jest większa od trzeciego pierwiastka. Udowodnimy, że

$$(1) \quad \sqrt[3]{(a^2 - b^2)(a - b)} + \sqrt[3]{(b^2 - c^2)(b - c)} > \sqrt[3]{(c^2 - a^2)(c - a)}.$$

Dowody dwóch pozostałych nierówności przebiegają analogicznie.

Zamiana symboli a i c nie wpływa na prawą stronę zależności (1) oraz zmienia kolejność dwóch składników lewej strony. Bez szkody dla ogólności dalszego rozumowania możemy więc przyjąć, że $a < c$.

Żałómy najpierw, że b jest najmniejszą z liczb dodatnich a, b, c . Wtedy

$$c - b > c - a > 0 \quad \text{oraz} \quad c^2 - b^2 > c^2 - a^2 > 0.$$

Po wymnożeniu uzyskujemy związek

$$(c^2 - b^2)(c - b) > (c^2 - a^2)(c - a),$$

z którego wynika, że sam drugi składnik po lewej stronie nierówności (1) jest większy od prawej strony. Jeżeli natomiast b jest największą spośród danych

trzech liczb, to podobnie uzasadniamy, że $(b^2 - a^2)(b - a) > (c^2 - a^2)(c - a)$ i tym razem już pierwszy składnik lewej strony jest większy od prawej strony.

Do zakończenia dowodu zależności (1) pozostaje rozważyć przypadek, w którym $a < b < c$. Dzieląc tę zależność przez prawą stronę i rozkładając różnice kwadratów na dwa czynniki otrzymujemy równoważną postać

$$\sqrt[3]{\frac{(b-a)^2(b+a)}{(c-a)^2(c+a)}} + \sqrt[3]{\frac{(c-b)^2(c+b)}{(c-a)^2(c+a)}} > 1,$$

czyli

$$(2) \quad \frac{b-a}{c-a} \sqrt[3]{\frac{(c-a)(b+a)}{(b-a)(c+a)}} + \frac{c-b}{c-a} \sqrt[3]{\frac{(c-a)(c+b)}{(c-b)(c+a)}} > 1.$$

Aby wykazać związek (2) zauważmy, że liczby $b-a$, $c-a$ oraz $c-b$ są dodatnie. Wobec tego stojąca pod pierwszym pierwiastkiem liczba

$$\frac{(c-a)(b+a)}{(b-a)(c+a)} = \frac{bc - a^2 + a(c-b)}{bc - a^2 - a(c-b)} = 1 + \frac{2a(c-b)}{bc - a^2 - a(c-b)} = 1 + \frac{2a(c-b)}{(b-a)(c+a)}$$

jest większa od 1, a iloraz stojący przed tym pierwiastkiem jest dodatni. Stąd i z analogicznego stwierdzenia dla drugiego pierwiastka dostajemy

$$\frac{b-a}{c-a} \sqrt[3]{\frac{(c-a)(b+a)}{(b-a)(c+a)}} + \frac{c-b}{c-a} \sqrt[3]{\frac{(c-a)(c+b)}{(c-b)(c+a)}} > \frac{b-a}{c-a} + \frac{c-b}{c-a} = 1,$$

a więc uzyskaliśmy żadaną nierówność (2).

Zadanie 10. Ciąg $x_0, x_1, x_2, \dots$ określamy wzorami: $x_0 = 1$, $x_1 = 3$ oraz

$$(1) \quad x_{n+2} = 6x_{n+1} - x_n \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, \dots$$

Udowodnić, że dla każdego n istnieją takie liczby całkowite a, b , że

$$x_n = a^2 + 2b^2.$$

Rozwiązanie

Określimy liczby całkowite $a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots$ wzorami: $a_0 = 1, b_0 = 0$,

$$(2) \quad \begin{cases} a_{n+1} = a_n + 2b_n, \\ b_{n+1} = a_n + b_n \end{cases} \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, \dots$$

Wykażemy indukcyjnie, że wówczas dla każdego n prawdziwa jest równość

$$(3) \quad x_n = a_n^2 + 2b_n^2.$$

Bezpośrednie sprawdzenie wskazuje, że zależność (3) jest spełniona dla $n = 0$ i $n = 1$. Przechodząc do kroku indukcyjnego przyjmijmy, że

$$(4) \quad x_m = a_m^2 + 2b_m^2 \quad \text{oraz} \quad x_{m+1} = a_{m+1}^2 + 2b_{m+1}^2$$

dla pewnej liczby całkowitej $m \geq 0$. Należy udowodnić prawdziwość związku $x_{m+2} = a_{m+2}^2 + 2b_{m+2}^2$, który w myśl wzorów (1) i (4) można zapisać jako

$$(5) \quad 6(a_{m+1}^2 + 2b_{m+1}^2) - (a_m^2 + 2b_m^2) = a_{m+2}^2 + 2b_{m+2}^2.$$

Wprowadźmy oznaczenia $A=a_m$ i $B=b_m$. Wtedy korzystając z zależności (2) uzyskujemy $a_{m+1}=A+2B$, $b_{m+1}=A+B$, $a_{m+2}=3A+4B$ i $b_{m+2}=2A+3B$. Wobec tego dowodzony związek (5) przybiera postać

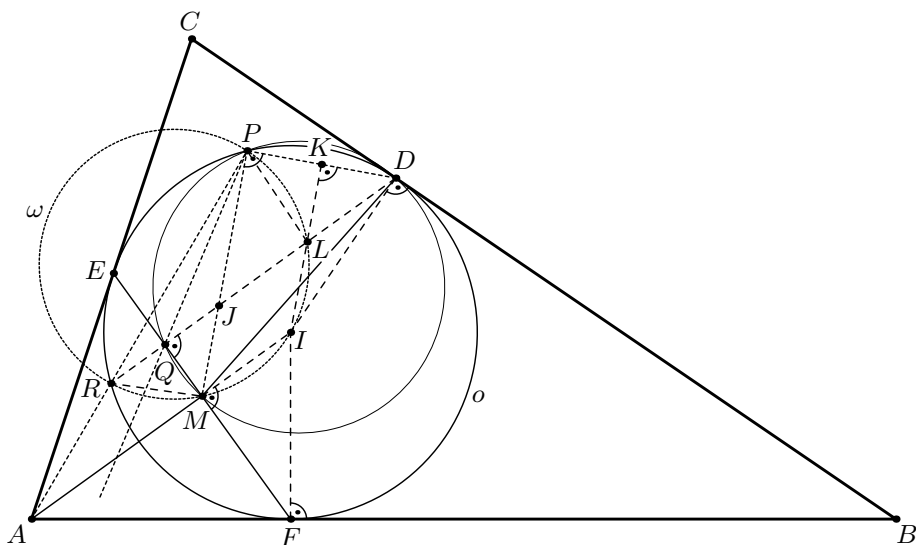
$$(6) \quad 6[(A+2B)^2+2(A+B)^2]-[A^2+2B^2]=(3A+4B)^2+2(2A+3B)^2.$$

Obliczamy, że obie strony równości (6) wynoszą $17A^2+48AB+34B^2$. To zaś kończy dowód zależności (3) i rozwiązanie zadania.

Zadanie 11. Dany jest trójkąt ABC , w którym $AB \neq AC$. Okrąg o wpisany w ten trójkąt jest styczny do boków BC , CA , AB odpowiednio w punktach D , E , F . Punkt M jest środkiem odcinka EF . Okrąg o średnicy MD przecina okrąg o w punktach D i P oraz przecina odcinek EF w punktach M i Q . Wykazać, że prosta PQ połowi odcinek AM .

Rozwiązanie

Oznaczmy symbolami I oraz K odpowiednio środek okręgu o oraz środek odcinka DP . Niech J i L będą punktami, w których prosta DQ przecina odpowiednio proste MP i IK , a R niech będzie punktem symetrycznym do punktu J względem punktu Q (rys. 5).



rys. 5

Końce odcinka MD są rzutami prostokątnymi punktu I na proste EF i BC , co dowodzi, że punkty P i Q leżą po przeciwnej stronie prostej MD niż punkt I . Ponadto proste IM i DQ są prostopadłe do prostej EF , a proste IK i MP — do prostej DP . Wobec tego punkty M , I , L oraz J są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku.

Proste IK i EF są symetralnymi odpowiednio odcinków DP i JR , skąd

$$LP = LD = LJ = IM \quad \text{oraz} \quad MR = MJ = IL.$$

Zatem czworokąty $RMIL$ i $MILP$ są trapezami równoramiennymi. Wynika stąd, że okrąg ω opisany na trójkącie MIL przechodzi także przez punkty R i P , a punkty R, M, I, L, P leżą na tym okręgu w wypisanej kolejności. Co więcej, łuki RI, ML oraz IP okręgu ω mają jednakowe długości. W efekcie $IR=IP$, czyli punkt R leży na okręgu o .

Prosta PR jest więc osią potęgową okręgów o i ω , a potęgi punktu A względem tych okręgów wynoszą odpowiednio AF^2 i $AM \cdot AI$ (zob. *LVI Olimpiada Matematyczna, Sprawozdanie Komitetu Głównego*, Warszawa 2007, Dodatek, str. 98-100). Na mocy podobieństwa trójkątów prostokątnych AMF i AFI obie te potęgi są równe. W konsekwencji punkt A leży na prostej PR .

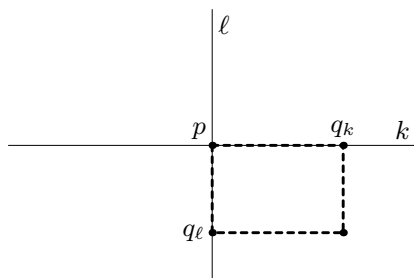
Udowodniliśmy w ten sposób, że odcinki RJ oraz AM są jednokładne względem punktu P . Jednak punkt Q jest środkiem odcinka RJ . W rezultacie prosta PQ połowi również odcinek AM , co należało wykazać.

Zadanie 12. W prostokącie P zaznaczono n^2 różnych punktów. Dla każdej liczby całkowitej $n \geq 2$ znaleźć największą możliwą liczbę prostokątów, w których każdy wierzchołek jest jednym z zaznaczonych punktów, a boki są równoległe do boków prostokąta P .

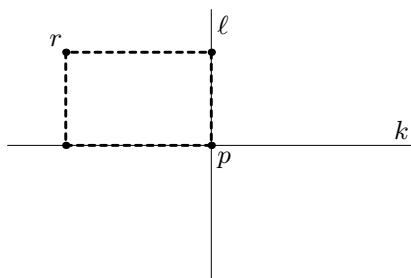
Rozwiązanie

Prostokątem *dobrym* nazwiemy każdy prostokąt, w którym wszystkie wierzchołki są zaznaczone, a boki są równoległe do boków prostokąta P . Wykażemy, że dowolny z n^2 zaznaczonych punktów może być wierzchołkiem co najwyżej $(n-1)^2$ różnych dobrych prostokątów. Wyniknie stąd, że istnieje co najwyżej $n^2(n-1)^2$ par złożonych z dobrego prostokąta i jego wierzchołka, czyli co najwyżej $\frac{1}{4}n^2(n-1)^2$ dobrych prostokątów.

Przechodząc do dowodu poprowadźmy przez zaznaczony punkt p dwie proste k i ℓ , równoległe do boków prostokąta P . Przyjmijmy, że na prostych k i ℓ leży odpowiednio m_k i m_ℓ zaznaczonych punktów, różnych od p . Niech wreszcie M oznacza liczbę dobrych prostokątów o wierzchołku p .



rys. 6



rys. 7

Każdy dobry prostokąt o wierzchołku p ma jeszcze jeden wierzchołek q_k na prostej k i jeszcze jeden wierzchołek q_ℓ na prostej ℓ . Ponadto dowolna spośród $m_k m_\ell$ par zaznaczonych punktów (q_k, q_ℓ) leżących odpowiednio na

prostych k i ℓ pochodzi od co najwyżej jednego dobrego prostokąta o wierzchołku p (rys. 6). Zatem $M \leq m_k m_\ell$.

Z drugiej strony, dobry prostokąt o wierzchołku p ma jeden wierzchołek r leżący poza prostymi k i ℓ . Każdy zaznaczony punkt leżący poza prostymi k i ℓ może zaś być wierzchołkiem co najwyżej jednego dobrego prostokąta o wierzchołku p (rys. 7), a liczba takich punktów wynosi $n^2 - m_k - m_\ell - 1$. Wobec tego $M \leq n^2 - m_k - m_\ell - 1$.

Jeżeli teraz spełniona jest nierówność $m_k + m_\ell > 2n - 2$, to z zależności $M \leq n^2 - m_k - m_\ell - 1$ otrzymujemy $M < n^2 - (2n - 2) - 1 = (n - 1)^2$. Natomiast w przypadku $m_k + m_\ell \leq 2n - 2$ związek $M \leq m_k m_\ell$ prowadzi do wniosku, że $M \leq m_k(2n - 2 - m_k) = 2(n - 1)m_k - m_k^2 = (n - 1)^2 - [(n - 1) - m_k]^2 \leq (n - 1)^2$.

To kończy dowód zapowiedzianego stwierdzenia.

Pozostaje wskazać sposób zaznaczenia n^2 punktów, dla którego liczba dobrych prostokątów wynosi $\frac{1}{4}n^2(n - 1)^2$. W tym celu prostokąt P o bokach poziomych i pionowych przecinamy siatką n prostych poziomych i n prostych pionowych oraz zaznaczamy n^2 punktów uzyskanych w przecięciu. Wówczas każdy dobry prostokąt jest wyznaczony przez dwie proste poziome i dwie pionowe, a zarówno dwie proste poziome, jak i dwie pionowe można wybrać na $\frac{1}{2}n(n - 1)$ sposobów, co łącznie daje $\frac{1}{4}n^2(n - 1)^2$ dobrych prostokątów.

Odpowiedź: Szukana liczba prostokątów jest równa $\frac{1}{4}n^2(n - 1)^2$.

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w Internecie pod adresem: www.om.edu.pl



LXV Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia drugiego

21 lutego 2014 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Dane są takie dodatnie liczby całkowite x i y , że liczba $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x}$ jest całkowita. Udowodnić, że liczba $\frac{x^2}{y}$ jest całkowita.

2. Różne punkty A , B i C leżą w podanej kolejności na jednej prostej. Punkt D leży na symetralnej odcinka BC w odległości $h > 0$ od tego odcinka. Niech r oznacza promień okręgu wpisanego w trójkąt ABD , a R — promień okręgu o środku leżącym poza trójkątem ACD , stycznego do odcinka CD oraz stycznego do prostych AC i AD . Wykazać, że $h = r + R$.

3. Dla każdej liczby całkowitej $n \geq 1$ wyznaczyć najmniejszą wartość wielomianu

$$W_n(x) = x^{2n} + 2x^{2n-1} + 3x^{2n-2} + \dots + (2n-1)x^2 + 2nx$$

określonego na zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielnosci pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.



LXV Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia drugiego

22 lutego 2014 r. (drugi dzień zawodów)

4. W rozgrywkach ligi piłkarskiej wzięło udział $2n$ drużyn ($n \geq 2$) i odbyło się $2n - 1$ kolejek. W każdej kolejce każda drużyna rozegrała jeden mecz. Dowolne dwie drużyny spotkały się ze sobą podczas rozgrywek w dokładnie jednym meczu. Ponadto w każdym meczu jedna drużyna była gospodarzem, a druga — gościem.

Drużynę nazwiemy *podróżującą*, jeżeli w dowolnych dwóch sąsiednich kolejkach była ona raz gospodarzem i raz gościem. Udowodnić, że istnieją co najwyżej dwie drużyny podróżujące.

5. Okręgi o_1 i o_2 , styczne do pewnej prostej odpowiednio w punktach A i B , przecinają się w punktach X i Y , przy czym punkt X leży bliżej prostej AB niż punkt Y . Prosta AX przecina okrąg o_2 w punkcie P różnym od X . Styczna do okręgu o_2 w punkcie P przecina prostą AB w punkcie Q . Wykazać, że $\sphericalangle XYB = \sphericalangle BYQ$.

6. Liczbę całkowitą n nazwiemy *dobrą*, jeżeli istnieje taka liczba pierwsza p , że liczba n jest podzielna przez p , ale nie przez p^2 . Dowieść, że wśród liczb $1, 2, 3, \dots, 10^{12}$ liczby dobre stanowią co najmniej 99%.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu czekać na podeście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielnosci pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.



21 lutego 2014 r. (pierwszy dzień zawodów)

Rozwiązanie

Z twierdzenia o wymiernych pierwiastkach wielomianu wynika teraz, że mianownik ułamka nieskracalnego wyrażającego liczbę a jest dzielnikiem współczynnika wielomianu $W(x)$ przy najwyższej potędze zmiennej. Jednak współczynnik przy potędze x^2 wynosi 1, czyli rozważany mianownik także jest równy 1. Wobec tego liczba a jest całkowita.

Zadanie 2. Różne punkty A , B i C leżą w podanej kolejności na jednej prostej. Punkt D leży na symetralnej odcinka BC w odległości $h > 0$ od tego odcinka. Niech r oznacza promień okręgu wpisanego w trójkąt ABD , a R — promień okręgu o środku leżącym poza trójkątem ACD , stycznego do odcinka CD oraz stycznego do prostych AC i AD . Wykazać, że $h = r + R$.

Rozwiązanie



Niech o_1 , o_2 i o_3 oznaczają okręgi wpisane w kąt BAD o promieniach odpowiednio r , R i $\frac{1}{2}h$ (rys. 1); w treści zadania mowa jest o okręgach o_1 i o_2 . Oznaczmy ponadto środek odcinka BC literą M , a punkty styczności okręgów o_1 , o_2 , o_3 do prostych AC , AD , BD , CD literami od E do L tak jak na rys. 1.

Odcinek DM jest prostopadły do prostej AC , stycznej do okręgu o_3 , i ma długość h , równą średnicy tego okręgu. Zatem odcinki stycznych do okręgu o_3 poprowadzonych z punktów M i D mają jednakowe długości. Uzyskany w ten sposób związek $MK = DL$ dowodzi, że

$$AK = AL = \frac{1}{2}(AK + AL) = \frac{1}{2}(AM + MK + AD - DL) = \frac{1}{2}(AM + AD).$$

Korzystając z zależności $AG = AE$, $BE = BF$ i $DF = DG$ obliczamy, że $AE + AG = \frac{1}{2}(AB - BE + AD - DG) = \frac{1}{2}(AB + AD - BF - DF) = \frac{1}{2}(AB + AD - BD)$.

Podobnie równości $AJ = AH$, $CH = CI$ oraz $DI = DJ$ prowadzą do wniosku, że $AH = \frac{1}{2}(AC + AD + CD)$. Stąd w myśl związku $BD = CD$ otrzymujemy

$$AE + AH = \frac{1}{2}(AB + AD) + \frac{1}{2}(AC + AD) = \frac{1}{2}(AB + AC) + AD = AM + AD = 2AK.$$

Z równości stosunków $\frac{r}{AE} = \frac{\frac{1}{2}h}{AK} = \frac{R}{AH} = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \sphericalangle BAD$ uzyskujemy więc

$$h = 2AK \operatorname{tg} \frac{1}{2} \sphericalangle BAD = (AE + AH) \operatorname{tg} \frac{1}{2} \sphericalangle BAD = r + R.$$

Zadanie 3. Dla każdej liczby całkowitej $n \geq 1$ wyznaczyć najmniejszą wartość wielomianu

$$W_n(x) = x^{2n} + 2x^{2n-1} + 3x^{2n-2} + \dots + (2n-1)x^2 + 2nx$$

określonego na zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych.

Rozwiązanie

Wielomian $W_n(x)$ jest sumą następujących wielomianów:

$$x^{2n} + 2x^{2n-1} + x^{2n-2} = (x+1)^2 \cdot x^{2n-2},$$

$$2x^{2n-2} + 4x^{2n-3} + 2x^{2n-4} = (x+1)^2 \cdot 2x^{2n-4},$$

$$3x^{2n-4} + 6x^{2n-5} + 3x^{2n-6} = (x+1)^2 \cdot 3x^{2n-6},$$

$$\dots\dots\dots$$

$$kx^{2n-2k+2} + 2kx^{2n-2k+1} + kx^{2n-2k} = (x+1)^2 \cdot kx^{2n-2k},$$

$$\dots\dots\dots$$

$$(n-2)x^6 + (2n-4)x^5 + (n-2)x^4 = (x+1)^2 \cdot (n-2)x^4,$$

$$(n-1)x^4 + (2n-2)x^3 + (n-1)x^2 = (x+1)^2 \cdot (n-1)x^2,$$

$$nx^2 + 2nx = (x+1)^2 \cdot n - n.$$

Stąd otrzymujemy tożsamość

$$W_n(x) = (x+1)^2[x^{2n-2} + 2x^{2n-4} + 3x^{2n-6} + \dots + (n-1)x^2 + n] - n,$$

w której czynnik $(x+1)^2$ jest liczbą nieujemną, równą zero jedynie dla $x = -1$, a czynnik stojący w nawiasie kwadratowym jest liczbą dodatnią, gdyż jest on sumą $n-1$ liczb nieujemnych i liczby dodatniej. Zatem $W_n(x) \geq W_n(-1) = -n$ dla każdej liczby rzeczywistej x .

Odpowiedź: Szukana najmniejsza wartość wynosi $-n$.



LXV Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia drugiego

22 lutego 2014 r. (drugi dzień zawodów)

Zadanie 4. W rozgrywkach ligi piłkarskiej wzięło udział $2n$ drużyn ($n \geq 2$) i odbyło się $2n - 1$ kolejek. W każdej kolejce każda drużyna rozegrała jeden mecz. Dowolne dwie drużyny spotkały się ze sobą podczas rozgrywek w dokładnie jednym meczu. Ponadto w każdym meczu jedna drużyna była gospodarzem, a druga — gościem. Drużynę nazwiemy *podróżującą*, jeżeli w dowolnych dwóch sąsiednich kolejkach była ona raz gospodarzem i raz gościem. Udowodnić, że istnieją co najwyżej dwie drużyny podróżujące.

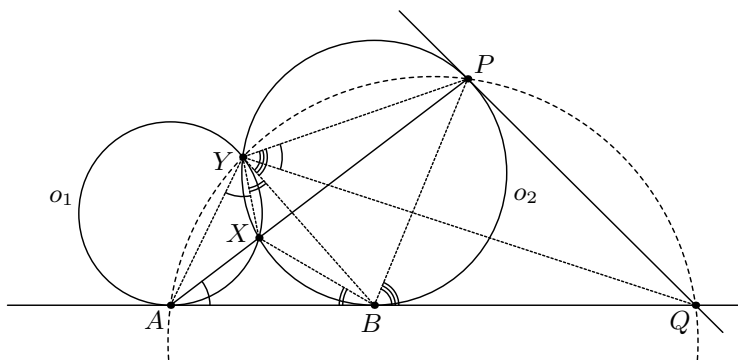
Rozwiązanie

Załóżmy, że istnieją dwie drużyny podróżujące, które w pierwszej kolejce były gospodarzami. Wtedy w drugiej kolejce były one gośćmi, w trzeciej — znów gospodarzami, w czwartej — gośćmi, itd. W każdej kolejce obie drużyny były więc gospodarzami albo obie były gośćmi. Jednocześnie zaś w kolejce, w której drużyny te rozegrały ze sobą mecz, jedna z nich była gospodarzem, a druga — gościem. Otrzymaliśmy sprzeczność.

Zatem wśród gospodarzy w pierwszej kolejce tylko jedna drużyna może być podróżująca. Podobnie dowodzimy, że wśród gości w pierwszej kolejce może istnieć co najwyżej jedna drużyna podróżująca. Wynika stąd teza.

Zadanie 5. Okręgi o_1 i o_2 , styczne do pewnej prostej odpowiednio w punktach A i B , przecinają się w punktach X i Y , przy czym punkt X leży bliżej prostej AB niż punkt Y . Prosta AX przecina okrąg o_2 w punkcie P różnym od X . Styczna do okręgu o_2 w punkcie P przecina prostą AB w punkcie Q . Wykazać, że $\sphericalangle XYB = \sphericalangle BYQ$.

Rozwiązanie



rys. 2

Z twierdzenia o kącie pomiędzy styczną a cięciwą otrzymujemy (rys. 2)

$$(1) \quad \sphericalangle AYX = \sphericalangle XAB, \quad \sphericalangle BYX = \sphericalangle XBA \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle BYP = \sphericalangle PBQ.$$

Dodając stronami pierwsze dwie spośród równości (1) dostajemy

$$(2) \quad \sphericalangle AYB = 180^\circ - \sphericalangle AXB = \sphericalangle BXP = \sphericalangle BYP.$$

Stąd, na mocy trzeciej z równości (1) i związku $QB = QP$, uzyskujemy

$$\sphericalangle AYP = 2\sphericalangle BYP = 2\sphericalangle PBQ = 180^\circ - \sphericalangle AQP.$$

Wobec tego punkty A, Y, P i Q leżą na jednym okręgu. W rezultacie

$$(3) \quad \sphericalangle AYX = \sphericalangle XAB = \sphericalangle PAQ = \sphericalangle PYQ.$$

Zależności (2) i (3) prowadzą teraz do wniosku, że

$$\sphericalangle XYB = \sphericalangle AYB - \sphericalangle AYX = \sphericalangle BYP - \sphericalangle PYQ = \sphericalangle BYQ.$$

Zadanie 6. Liczbę całkowitą n nazwiemy *dobrą*, jeżeli istnieje taka liczba pierwsza p , że liczba n jest podzielna przez p , ale nie przez p^2 . Dowieść, że wśród liczb $1, 2, 3, \dots, 10^{12}$ liczby dobre stanowią co najmniej 99%.

Rozwiązanie

Niech S oznacza zbiór wszystkich tych dodatnich liczb całkowitych nie przekraczających 10^{12} , które nie są dobre. Wówczas w rozkładzie dowolnej liczby ze zbioru S na czynniki pierwsze wszystkie liczby pierwsze występują z wykładnikami większymi od 1.

Każdej liczbie ze zbioru S przyporządkujemy dodatnią liczbę całkowitą w następujący sposób: jeżeli liczba $s \in S$ ma rozkład na czynniki pierwsze postaci $p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \dots \cdot p_k^{a_k}$, to liczbie s przypisujemy liczbę $p_1^{b_1} \cdot p_2^{b_2} \cdot \dots \cdot p_k^{b_k}$, gdzie dla $i = 1, 2, \dots, k$ liczba b_i jest największą liczbą całkowitą nie przekraczającą $\frac{1}{2}a_i$. Na mocy określenia zbioru S wykładniki $a_1, a_2, \dots, a_k$ są równe co najmniej 2, więc wykładniki $b_1, b_2, \dots, b_k$ są dodatnie. W efekcie liczba przyporządkowana liczbie s ma te same dzielniki pierwsze, co liczba s .

Liczbie $s = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \dots \cdot p_k^{a_k}$ przyporządkowana jest liczba nie większa niż $p_1^{\frac{1}{2}a_1} \cdot p_2^{\frac{1}{2}a_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\frac{1}{2}a_k} = \sqrt{s}$, czyli nie przekraczająca 10^6 . Zbadamy teraz, ilu różnym elementom zbioru S może być przyporządkowana ta sama liczba.

Elementy zbioru S , którym przypisana jest dodatnia liczba całkowita $t \leq 10^6$ o rozkładzie $t = q_1^{c_1} \cdot q_2^{c_2} \cdot \dots \cdot q_m^{c_m}$, mają postać iloczynu $q_1^{d_1} \cdot q_2^{d_2} \cdot \dots \cdot q_m^{d_m}$, w którym wykładnik d_j jest jedną z liczb $2c_j, 2c_j + 1$ dla $j = 1, 2, \dots, m$. Każdy z wykładników $d_1, d_2, \dots, d_m$ można niezależnie wybrać na dwa sposoby. Zatem istnieje 2^m iloczynów tej postaci; niektóre mogą być większe od 10^{12} . Ponadto $m \leq 7$, gdyż liczba mająca więcej niż 7 różnych dzielników pierwszych wynosi co najmniej $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 = 9699690 > 10^6$. Wobec tego liczba t jest przyporządkowana co najwyżej 2^7 elementom zbioru S .

W rezultacie zbiór S ma nie więcej niż $2^7 \cdot 10^6 = 0,000128 \cdot 10^{12}$ elementów. Stąd wśród liczb $1, 2, 3, \dots, 10^{12}$ liczby dobre stanowią co najmniej 99,9872%.



LXV Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia trzeciego

8 kwietnia 2014 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Dane są względnie pierwsze liczby całkowite $k, n \geq 1$. Na tablicy napisano w pewnej kolejności wszystkie dodatnie liczby całkowite nie przekraczające $k+n$. Ruch polega na zamianie miejscami dwóch liczb różniących się o k albo o n . Dowieść, że można wykonać ciąg ruchów, który doprowadzi liczby na tablicy do kolejności $1, 2, \dots, k+n-1, k+n$.

2. Dane są takie liczby całkowite $k \geq 2, n \geq 1$ oraz liczby całkowite $a_1, a_2, \dots, a_k$ i $b_1, b_2, \dots, b_n$, że $1 < a_1 < a_2 < \dots < a_k < b_1 < b_2 < \dots < b_n$. Wykazać, że jeżeli

$$a_1 + a_2 + \dots + a_k > b_1 + b_2 + \dots + b_n,$$

to

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_k > b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_n.$$

3. Czworoscian $ABCD$ o ścianach ostrokątnych jest wpisany w sferę o środku O . Prosta przechodząca przez punkt O i prostopadła do płaszczyzny ABC przecina daną sferę w punkcie D' leżącym po przeciwnej stronie płaszczyzny ABC niż punkt D . Prosta DD' przecina płaszczyznę ABC w punkcie P leżącym wewnątrz trójkąta ABC . Udowodnić, że jeżeli $\sphericalangle APB = 2\sphericalangle ACB$, to $\sphericalangle ADD' = \sphericalangle BDD'$.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu poczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielnosci pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.



LXV Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia trzeciego

9 kwietnia 2014 r. (drugi dzień zawodów)

4. Niech Q_+ oznacza zbiór dodatnich liczb wymiernych. Znaleźć wszystkie funkcje $f: Q_+ \rightarrow Q_+$ spełniające dla każdej liczby całkowitej $n \geq 1$ i każdej liczby wymiernej $q > 0$ warunek

$$\underbrace{f(f(f(\dots f(f(q))\dots)))}_n = f(nq).$$

5. Wyznaczyć wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych x, y spełniających równanie

$$2^x + 17 = y^4.$$

6. W trójkącie ostrokątnym ABC punkt D jest spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka A , a punkty M i N są rzutami prostokątnymi punktu D odpowiednio na boki AB i AC . Proste MN oraz AD przecinają okrąg opisany na trójkącie ABC odpowiednio w punktach P, Q oraz A, R . Dowieść, że punkt D jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt PQR .

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu czekać na podeście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielnosci pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.



LXV Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia trzeciego

8 kwietnia 2014 r. (pierwszy dzień zawodów)

Zadanie 1. Dane są względnie pierwsze liczby całkowite $k, n \geq 1$. Na tablicy napisano w pewnej kolejności wszystkie dodatnie liczby całkowite nie przekraczające $k+n$. Ruch polega na zamianie miejscami dwóch liczb różniących się o k albo o n . Dowieść, że można wykonać ciąg ruchów, który doprowadzi liczby na tablicy do kolejności $1, 2, \dots, k+n-1, k+n$.

Rozwiązanie

Wykażemy, że dla każdej kolejności liczb na tablicy i dowolnej pary p, q spośród tych liczb istnieje ciąg ruchów, w wyniku którego liczby p i q zostają zamienione miejscami, a wszystkie pozostałe liczby zachowują swoje miejsca.

Określmy ciąg liczb całkowitych $a_1, a_2, a_3, \dots$ wzorami: $a_1 = p$ oraz

$$(1) \quad a_{i+1} = \begin{cases} a_i - k, & \text{gdy } a_i > k, \\ a_i + n, & \text{gdy } a_i \leq k \end{cases} \quad \text{dla } i = 1, 2, 3, \dots$$

Za pomocą indukcji stwierdzamy, że każdy wyraz tego ciągu jest dodatnią liczbą całkowitą nie większą niż $k+n$. Ponadto dla dowolnego $i \geq 1$ liczba $a_i - a_{i+1} + n$ wynosi 0 albo $k+n$, a więc jest podzielna przez $k+n$.

Przypuśćmy, że pewne dwa wyrazy rozważanego ciągu są równe: $a_s = a_t$, przy czym $s < t$. Wtedy dodając liczby $a_i - a_{i+1} + n$ dla $i = s, s+1, s+2, \dots, t-1$ otrzymujemy liczbę $(t-s)n$ podzielną przez $k+n$. Liczby n i $k+n$ są względnie pierwsze, czyli różnica $t-s$ musi być podzielna przez $k+n$. Stąd wniosek, że w ciągu $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{k+n}$ każda z liczb $1, 2, 3, \dots, k+n$ występuje dokładnie raz. Zatem $a_r = q$ dla pewnego wskaźnika $r \in \{1, 2, \dots, k+n-1, k+n\}$. Co więcej, żadne dwie z liczb $a_1, a_2, a_3, \dots, a_r$ nie są równe.

Na mocy wzoru (1) dla dowolnego $i \geq 1$ dopuszczalny jest ruch $a_i \leftrightarrow a_{i+1}$ zamieniający miejscami liczby a_i oraz a_{i+1} . Bezpośrednio sprawdzamy teraz, że do żądanej zamiany miejscami liczb $a_1 = p$ i $a_r = q$ prowadzi ciąg ruchów

$$a_1 \leftrightarrow a_2, \quad a_2 \leftrightarrow a_3, \quad a_3 \leftrightarrow a_4, \quad \dots, \quad a_{r-3} \leftrightarrow a_{r-2}, \quad a_{r-2} \leftrightarrow a_{r-1}, \quad a_{r-1} \leftrightarrow a_r, \\ a_{r-2} \leftrightarrow a_{r-1}, \quad a_{r-3} \leftrightarrow a_{r-2}, \quad \dots, \quad a_3 \leftrightarrow a_4, \quad a_2 \leftrightarrow a_3, \quad a_1 \leftrightarrow a_2.$$

Wreszcie dla danej początkowej kolejności liczb na tablicy wykonajmy kolejno dla $d = 1, 2, 3, \dots, k+n-1$ ciąg ruchów zamieniający liczbę d z aktualną d -tą liczbą na tablicy (o ile ta ostatnia jest różna od d), uzyskując w rezultacie sytuację, w której pierwszymi d liczbami na tablicy są liczby $1, 2, 3, \dots, d$. Wówczas doprowadzimy ostatecznie wszystkie liczby do kolejności rosnącej.

Zadanie 2. Dane są takie liczby całkowite $k \geq 2$, $n \geq 1$ oraz liczby całkowite $a_1, a_2, \dots, a_k$ i $b_1, b_2, \dots, b_n$, że $1 < a_1 < a_2 < \dots < a_k < b_1 < b_2 < \dots < b_n$. Wykazać, że jeżeli

$$(1) \quad a_1 + a_2 + \dots + a_k > b_1 + b_2 + \dots + b_n,$$

to

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_k > b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_n.$$

Rozwiązanie

Wprowadźmy oznaczenie $f(u) = \sqrt[n]{u}$ dla $u = 2, 3, 4, \dots$. Udowodnimy, że

$$(2) \quad f(w) > f(w+1) \quad \text{dla każdego } w \geq 3.$$

Bezpośrednie wymnożenie wskazuje, że $\frac{w+1}{w} < \frac{t+1}{t}$ dla $0 < t < w$. Zatem

$$(3) \quad \left(\frac{w+1}{w}\right)^w < \frac{w+1}{w} \cdot \left(\frac{w+1}{w} \cdot \frac{w}{w-1} \cdot \frac{w-1}{w-2} \cdot \frac{w-2}{w-3} \cdot \dots \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2}\right) = \frac{(w+1)^2}{2w}.$$

Na mocy zależności $(r+1)^2 < 2r^2$ dla $r > 1 + \sqrt{2}$ prawa strona związku (3) jest mniejsza od w . W efekcie $\left(\frac{w+1}{w}\right)^w < w$, co jest równoważne nierówności (2).

Ponieważ $b_1 \geq 4$, więc z zależności (2) i związku $f(2) = f(4)$ otrzymujemy

$$f(a_i) \geq f(b_1) \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, k \quad \text{oraz} \quad f(b_1) \geq f(b_j) \quad \text{dla } j = 1, 2, \dots, n.$$

W myśl określenia funkcji f powyższe nierówności można zapisać w postaci

$$a_i \geq f(b_1)^{a_i} \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, k \quad \text{oraz} \quad f(b_1)^{b_j} \geq b_j \quad \text{dla } j = 1, 2, \dots, n.$$

Stąd zaś, po wymnożeniu stronami i skorzystaniu z warunku (1), uzyskujemy

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_k \geq f(b_1)^{a_1 + a_2 + \dots + a_k} > f(b_1)^{b_1 + b_2 + \dots + b_n} \geq b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_n.$$

Zadanie 3. Czworoscian $ABCD$ o ścianach ostrokątnych jest wpisany w sferę o środku O . Prosta przechodząca przez punkt O i prostopadła do płaszczyzny ABC przecina daną sferę w punkcie D' leżącym po przeciwnej stronie płaszczyzny ABC niż punkt D . Prosta DD' przecina płaszczyznę ABC w punkcie P leżącym wewnątrz trójkąta ABC . Udowodnić, że jeżeli $\sphericalangle APB = 2\sphericalangle ACB$, to $\sphericalangle ADD' = \sphericalangle BDD'$.

Rozwiązanie

Prosta OD' przecina płaszczyznę ABC pod kątem prostym w punkcie S będącym środkiem okręgu opisanego na trójkącie ostrokątnym ABC (rys. 1). Punkt S leży więc wewnątrz tego trójkąta, a ponadto z równości

$$\sphericalangle APB = 2\sphericalangle ACB = \sphericalangle ASB$$

wynika, że punkty A, B, P i S leżą na jednym okręgu. W konsekwencji

$$(1) \quad \sphericalangle SAP = \sphericalangle SBP.$$

Rozważmy teraz obrót wokół prostej OD' o kąt $\sphericalangle ASB$. Przeprowadza on półprostą $AS^\rightarrow$ na półprostą $BS^\rightarrow$. Zatem na mocy zależności (1) obrót ten



LXV Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia trzeciego

9 kwietnia 2014 r. (drugi dzień zawodów)

Zadanie 4. Niech Q_+ oznacza zbiór dodatnich liczb wymiernych. Znaleźć wszystkie funkcje $f: Q_+ \rightarrow Q_+$ spełniające dla każdej liczby całkowitej $n \geq 1$ i każdej liczby wymiernej $q > 0$ warunek

$$(1) \quad \underbrace{f(f(f(\dots f(f(q))\dots)))}_n = f(nq).$$

Rozwiązanie

Dla dowolnych wartości $m \geq 1$ i $r \in Q_+$ korzystając z warunku (1) kolejno dla $n = 2m$ i $q = r$, dla $n = m$ i $q = r$ oraz dla $n = m+1$ i $q = mr$ otrzymujemy

$$(2) \quad \begin{aligned} f(2mr) &= \underbrace{f(f(\dots f(f(r))\dots))}_{2m} = \underbrace{f(f(\dots f(f(f(\dots f(r)\dots)))\dots))}_{m} = \\ &= \underbrace{f(f(\dots f(f(f(mr)))\dots))}_{m} = f((m+1)mr). \end{aligned}$$

Zapiszmy teraz dowolnie wybrany element $s \in Q_+$ w postaci ilorazu $s = \frac{a}{b}$ liczb całkowitych a i b większych od 1. Wówczas na podstawie związku (2) dla $m = b-1$ i $r = \frac{a}{2b(b-1)}$ oraz dla $m = a-1$ i $r = \frac{1}{2(a-1)}$ uzyskujemy

$$\begin{aligned} f(s) &= f\left(2(b-1) \cdot \frac{a}{2b(b-1)}\right) = f\left(b(b-1) \cdot \frac{a}{2b(b-1)}\right) = f\left(\frac{a}{2}\right) = \\ &= f\left(a(a-1) \cdot \frac{1}{2(a-1)}\right) = f\left(2(a-1) \cdot \frac{1}{2(a-1)}\right) = f(1). \end{aligned}$$

W rezultacie f jest funkcją stałą. Rzecz jasna funkcje stałe mają własność (1).

Odpowiedź: Szukanymi funkcjami są wszystkie funkcje stałe.

Zadanie 5. Wyznaczyć wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych x, y spełniających równanie

$$2^x + 17 = y^4.$$

Rozwiązanie

Z tożsamości $a^4 - b^4 = (a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$ dla $a = y^4$ i $b = 2^x$ wynika, że liczba $a^4 - b^4 = y^{16} - 16^x$ jest podzielna przez $a - b = y^4 - 2^x = 17$. Inaczej mówiąc, liczby y^{16} i 16^x dają jednakowe reszty z dzielenia przez 17.

Wymnażając nawiasy w wyrażeniu $16^x = (17-1)^x$ stwierdzamy, że przy dzieleniu przez 17 liczba 16^x daje resztę 1, gdy x jest liczbą parzystą, albo resztę 16, gdy x jest liczbą nieparzystą. Z kolei w myśl małego twierdzenia

Fermata liczba y^{16} daje przy dzieleniu przez 17 resztę 0 lub 1. Zatem x jest liczbą parzystą.

Wobec tego prawdziwy jest rozkład

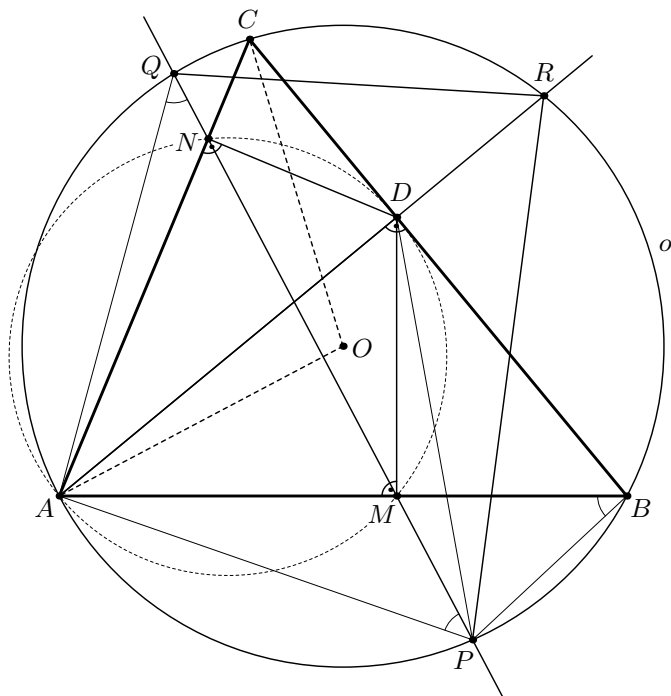
$$17 = y^4 - 2^x = (y^2 - 2^{x/2})(y^2 + 2^{x/2}),$$

w którym czynniki są dwiema różnymi liczbami całkowitymi, a drugi czynnik jest dodatni i większy od pierwszego. Liczba pierwsza 17 ma tylko jeden taki rozkład: $17 = 1 \cdot 17$. Stąd $y^2 - 2^{x/2} = 1$ i $y^2 + 2^{x/2} = 17$, czyli $2^{x/2} = 8$ i $y^2 = 9$. Tak otrzymane liczby $x = 6$ i $y = 3$ spełniają warunki zadania: $2^6 + 17 = 81 = 3^4$.

Odpowiedź: Jedyną parą o żądanych własnościach są liczby $x = 6$ i $y = 3$.

Zadanie 6. W trójkącie ostrokątnym ABC punkt D jest spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka A , a punkty M i N są rzutami prostokątnymi punktu D odpowiednio na boki AB i AC . Proste MN oraz AD przecinają okrąg opisany na trójkącie ABC odpowiednio w punktach P, Q oraz A, R . Dowieść, że punkt D jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt PQR .

Rozwiązanie



rys. 2

Rozpocznijmy od wykazania, że punkt A jest środkiem łuku PQ okręgu o opisanego na trójkącie ABC (rys. 2).

Punkty M i N leżą na okręgu o średnicy AD , skąd otrzymujemy

$$(1) \quad \sphericalangle ANM = \sphericalangle ADM = 90^\circ - \sphericalangle DAB = \sphericalangle ABC.$$

Niech z kolei O oznacza środek okręgu o . Wówczas

$$(2) \quad \sphericalangle NAO = \frac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle AOC) = \frac{1}{2}(180^\circ - 2\sphericalangle ABC) = 90^\circ - \sphericalangle ABC.$$

Łącząc związki (1) i (2) dostajemy równość $\sphericalangle ANM + \sphericalangle NAO = 90^\circ$. W efekcie proste AO i MN są prostopadłe, co dowodzi zapowiadzanego stwierdzenia.

Skoro trójkąt PAQ jest równoramienny, więc $\sphericalangle APM = \sphericalangle AQP = \sphericalangle ABP$. Zatem trójkąty AMP i APB są podobne. Trójkąty prostokątne AMD i ADB także są podobne. Z podobieństw tych uzyskujemy zależności

$$AP^2 = AM \cdot AB = AD^2.$$

W konsekwencji również trójkąt PAD jest równoramienny. Wobec tego

$$\begin{aligned} \sphericalangle DPQ &= \sphericalangle APD - \sphericalangle APQ = \frac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle PAD) - \frac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle PAQ) = \\ &= \frac{1}{2}(\sphericalangle PAQ - \sphericalangle PAD) = \frac{1}{2}\sphericalangle RAQ = \frac{1}{2}\sphericalangle RPQ, \end{aligned}$$

czyli punkt D leży na dwusiecznej kąta RPQ . Na mocy początkowego stwierdzenia leży on też na dwusiecznej kąta PRQ . Wynika stąd teza zadania.

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w Internecie pod adresem: www.om.edu.pl



LXVI Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego

I seria (1 września 2014 r. – 30 września 2014 r.)

1. Dane są takie liczby całkowite a , b i c różne od zera, że liczba

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$$

jest całkowita. Wykazać, że iloczyn abc jest sześcianem liczby całkowitej.

2. Dodatnie liczby całkowite $x_1, x_2, \dots, x_n$ spełniają warunek

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = s < 2n.$$

Udowodnić, że każda liczba ze zbioru $\{1, 2, \dots, s\}$ jest sumą pewnych spośród liczb $x_1, x_2, \dots, x_n$.

3. Rozstrzygnąć, czy istnieje taka liczba całkowita $n \geq 1$, że liczba

$$\sqrt[n]{\sqrt{2}+1} + \sqrt[n]{\sqrt{2}-1}$$

jest wymierna.

4. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC , w którym $AB \neq AC$. Punkty E i F są spodkami wysokości tego trójkąta opuszczonych odpowiednio z wierzchołków B i C . Punkty M i N są środkami odpowiednio odcinków BC i EF , a punkt Q jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie AMN . Dowieść, że proste AQ i BC są równoległe.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

30 września 2014 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.

Rozwiązanie każdego zadania należy podpisać w lewym górnym rogu pierwszej jego strony: imieniem i nazwiskiem, swoim adresem, swoim adresem elektronicznym oraz klasą, nazwą i adresem szkoły.



LXVI Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego

II seria (1 października 2014 r. – 3 listopada 2014 r.)

5. Rozwiązać w liczbach całkowitych x i y równanie

$$x^4 - 2x^3 + x = y^4 + 3y^2 + y.$$

6. Dany jest trójkąt ABC , w którym kąt przy wierzchołku C jest prosty. Punkt D jest spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka C , a okrąg wpisany w dany trójkąt jest styczny do boków AB i AC odpowiednio w punktach E i F . Wykazać, że punkt przecięcia wysokości trójkąta AEF jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ACD .

7. Dany jest czworościan $ABCD$. Płaszczyzna przechodząca przez punkty styczności sfery s wpisanej w ten czworościan ze ścianami ABD , BCD i ACD przecina krawędzie AD , BD i CD odpowiednio w punktach A' , B' i C' . Udowodnić, że środek sfery wpisanej w czworościan $A'B'C'D$ leży na sferze s .

8. Dla każdej liczby całkowitej $n \geq 2$ wyznaczyć najmniejszą liczbę całkowitą k o następującej własności:

Wśród dowolnych k różnych podzbiorów zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ mających parzystą liczbę elementów istnieją dwa różne podzbiory, których część wspólna ma parzystą liczbę elementów.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

3 listopada 2014 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.

Rozwiązanie każdego zadania należy podpisać w lewym górnym rogu pierwszej jego strony: imieniem i nazwiskiem, swoim adresem, swoim adresem elektronicznym oraz klasą, nazwą i adresem szkoły.



LXVI Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego

III seria (4 listopada 2014 r. – 1 grudnia 2014 r.)

9. Nieujemne liczby rzeczywiste $x_1, x_2, \dots, x_n$ ($n \geq 2$) spełniają równość $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$. Udowodnić, że

$$\max\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \cdot \left(1 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \min\{x_i, x_j\}\right) \geq 1.$$

10. Dane są takie dodatnie liczby całkowite a, b, c i d , że dla każdej liczby naturalnej n liczba $an + b$ jest podzielna przez liczbę $cn + d$. Wykazać, że istnieje liczba naturalna k , dla której $a = kc$ i $b = kd$.

11. Dany jest trójkąt ABC , w którym $BC < CA < AB$. Okrąg wpisany w ten trójkąt jest styczny do boków BC, CA i AB odpowiednio w punktach D, E i F , a punkty K, L i M są środkami odpowiednio boków BC, CA i AB . Proste DE i KL przecinają się w punkcie P , a proste DF i KM — w punkcie Q . Dowieść, że punkty A, P i Q leżą na jednej prostej.

12. Na płaszczyźnie zaznaczono wierzchołki 2014-kąta foremnego. Dwaj gracze na przemian dorysowują nowy bok albo nową przekątną tego wielokąta. Gracz przegrywa grę, jeżeli po jego ruchu dla każdego wierzchołka v dowolne dwa spośród pozostałych wierzchołków można połączyć łamaną złożoną z narysowanych odcinków, nie przechodzącą przez wierzchołek v . Rozstrzygnąć, który z graczy — rozpoczynający grę czy jego przeciwnik — ma strategię wygrywającą.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

1 grudnia 2014 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.

Rozwiązanie każdego zadania należy podpisać w lewym górnym rogu pierwszej jego strony: imieniem i nazwiskiem, swoim adresem, swoim adresem elektronicznym oraz klasą, nazwą i adresem szkoły.

Adresy Komitetów Okręgowych Olimpiady Matematycznej

- Dla województwa pomorskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Gdańskiego, ul. Wita Stwosza 57, 80-952 Gdańsk.

- Dla województwa śląskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Śląskiego, ul. Bankowa 14, 40-007 Katowice.

- Dla województwa małopolskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego, ul. Łojasiewicza 6, 30-348 Kraków.

- Dla województwa lubelskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Zakład Rachunku Prawdopodobieństwa pok. 810, Instytut Matematyki Uniwersytetu Marii Curie-Skłodowskiej, pl. Marii Curie-Skłodowskiej 1, 20-031 Lublin.

- Dla województwa łódzkiego i świętokrzyskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Łódzkiego, ul. Banacha 22, 90-238 Łódź.

- Dla województwa wielkopolskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Adama Mickiewicza, ul. Umultowska 87, 61-614 Poznań.

- Dla województwa podkarpackiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Katedra Matematyki Politechniki Rzeszowskiej, al. Powstańców Warszawy 8, 35-959 Rzeszów.

- Dla województwa lubuskiego i zachodniopomorskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Szczecińskiego, ul. Wielkopolska 15, 70-451 Szczecin.

- Dla województwa kujawsko-pomorskiego i warmińsko-mazurskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, ul. Chopina 12/18, 87-100 Toruń.

- Dla województwa mazowieckiego i podlaskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, ul. Śniadeckich 8, 00-656 Warszawa.

- Dla województwa dolnośląskiego i opolskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego, pl. Grunwaldzki 2/4, 50-384 Wrocław.

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w Internecie pod adresem: www.om.edu.pl



LXVI Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia pierwszego

(1 września 2014 r. – 1 grudnia 2014 r.)

Zadanie 1. Dane są takie liczby całkowite a , b i c różne od zera, że liczba

$$(1) \quad \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$$

jest całkowita. Wykazać, że iloczyn abc jest sześcianem liczby całkowitej.

Rozwiązanie

Należy dowieść, że każda liczba pierwsza p wchodzi do rozkładu iloczynu abc na czynniki pierwsze z wykładnikiem podzielny przez 3. Niech więc x , y i z będą wykładnikami, z jakimi liczba p występuje w rozkładach odpowiednio liczb a , b i c . Udowodnimy, że suma $s = x + y + z$ jest podzielna przez 3.

Oznaczmy sumę (1) symbolem k . Mnożąc ją przez abc otrzymujemy

$$(2) \quad a^2c + b^2a + c^2b = kabc.$$

Liczba pierwsza p pojawia się w rozkładach trzech składników lewej strony zależności (2) z wykładnikami równymi kolejno $2x+z$, $2y+x$ i $2z+y$. Niech m będzie najmniejszą wartością wśród tych trzech wykładników.

Jeżeli tylko jeden z tych wykładników wynosi m , to jeden składnik lewej strony związku (2) jest podzielny przez p^m , ale nie przez p^{m+1} , a pozostałe dwa składniki są podzielne przez p^{m+1} . Zatem cała lewa strona zależności (2) jest podzielna przez p^m , ale nie przez p^{m+1} . Prawa strona jest zaś podzielna przez $p^{x+y+z} = p^s$. Stąd uzyskujemy nierówność $m \geq s$ i sprzeczność, gdyż

$$3s = 3(x+y+z) = (2x+z) + (2y+x) + (2z+y) \geq m + (m+1) + (m+1) > 3m.$$

Wobec tego pewne dwie z liczb $2x+z$, $2y+x$ i $2z+y$ są równe (liczbie m). Przyjmijmy, bez szkody dla ogólności dowodu, że $2x+z = 2y+x$. Wtedy liczba

$$s = x + y + z = x + y + z - (2x + z) + (2y + x) = 3y$$

jest podzielna przez 3, co należało wykazać.

Zadanie 2. Dodatnie liczby całkowite $x_1, x_2, \dots, x_n$ spełniają warunek

$$(1) \quad x_1 + x_2 + \dots + x_n = s < 2n.$$

Udowodnić, że każda liczba ze zbioru $\{1, 2, \dots, s\}$ jest sumą pewnych spośród liczb $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Rozwiązanie

Przeprowadzimy dowód przez indukcję ze względu na wartość liczby n .

Dla $n = 1$ teza zadania jest prawdziwa, ponieważ wówczas $x_1 = s = 1$.

Przechodząc do kroku indukcyjnego wybierzmy dowolną liczbę całkowitą $n > 1$, dla której teza zadania jest słuszna po zastąpieniu liczby n liczbą $n - 1$.

Założenie indukcyjne orzeka więc, że dla każdego układu $n-1$ dodatnich liczb całkowitych o sumie równej $t < 2n-2$ wszystkie liczby ze zbioru $\{1, 2, \dots, t\}$ można zapisać w postaci sumy pewnych liczb danego układu.

W celu wykazania tezy indukcyjnej rozpatrzmy dowolne dodatnie liczby całkowite $x_1, x_2, \dots, x_n$ spełniające warunek (1). Niech m będzie największą wartością wśród tych n liczb. Jeżeli $m=1$, to każda z nich wynosi 1, a wtedy na podstawie związku $n > 1$ dostajemy $s-m=n-1 < 2n-2$. Jeżeli natomiast $m \geq 2$, to z zależności $s < 2n$ znów wynika, że $s-m < 2n-2$.

Przenumerowując w razie potrzeby wskaźniki możemy przyjąć, że $x_n=m$. Wówczas $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ są dodatnimi liczbami całkowitymi o sumie $s-m$ mniejszej od $2n-2$, czyli zgodnie z założeniem indukcyjnym dowolna liczba ze zbioru $\{1, 2, \dots, s-m\}$ jest sumą pewnych spośród liczb $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$.

Wobec tego sumami pewnych spośród liczb $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$ są liczby:

- $1, 2, \dots, s-m$ (sumy bez użycia liczby $x_n=m$);
- $m+1, m+2, \dots, s$ (sumy z użyciem liczby $x_n=m$),

jak również sama liczba $x_n=m$. Zatem wszystkie liczby z każdego ze zbiorów

$$(2) \quad \{1, 2, \dots, s-m\} \quad \text{oraz} \quad \{m, m+1, \dots, s\}$$

można zapisać w postaci sumy pewnych spośród liczb $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Ponadto zbiory (2) pokrywają razem cały zbiór $\{1, 2, \dots, s\}$, gdyż słuszne są nierówności $s-m \geq n-1$ oraz $m \leq n$. Pierwsza nierówność opiera się bowiem na spostrzeżeniu, że jej lewa strona $s-m = x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}$ jest sumą $n-1$ liczb nie mniejszych niż 1; druga zaś — na pierwszej oraz na związku $s < 2n$, z których otrzymujemy $m = s - (s-m) \leq s - (n-1) < 2n - (n-1) = n+1$.

W efekcie każda liczba ze zbioru $\{1, 2, \dots, s\}$ jest sumą pewnych spośród liczb $x_1, x_2, \dots, x_n$, co kończy indukcję i rozwiązanie zadania.

Zadanie 3. Rozstrzygnąć, czy istnieje taka liczba całkowita $n \geq 1$, że liczba

$$\sqrt[n]{\sqrt{2}+1} + \sqrt[n]{\sqrt{2}-1}$$

jest wymierna.

Rozwiązanie

Przypuśćmy, że liczba całkowita $n \geq 1$ ma postulowaną własność. Wtedy z równości $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)=1$ wynika, że liczbę wymierną określoną w treści zadania można zapisać w postaci $w = a + \frac{1}{a}$, gdzie $a = \sqrt[n]{\sqrt{2}+1}$.

Wykażemy, że dla $k=0, 1, 2, \dots$ liczba $b_k = a^k + \frac{1}{a^k}$ jest wymierna. W tym celu zastosujemy indukcję. Liczby $b_0=2$ i $b_1=w$ są wymierne. Niech z kolei dla pewnej liczby całkowitej $\ell \geq 2$ liczby $b_{\ell-2}$ i $b_{\ell-1}$ będą wymierne. Liczba

$$b_\ell = a^\ell + \frac{1}{a^\ell} = \left(a + \frac{1}{a}\right) \left(a^{\ell-1} + \frac{1}{a^{\ell-1}}\right) - \left(a^{\ell-2} + \frac{1}{a^{\ell-2}}\right) = wb_{\ell-1} - b_{\ell-2}$$

jest wówczas także wymierna, co kończy rozumowanie indukcyjne.

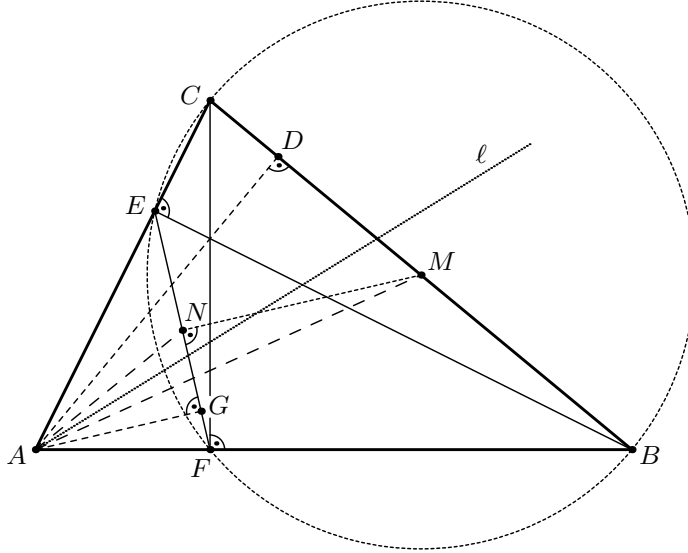
W rezultacie liczba $b_n = a^n + \frac{1}{a^n} = (\sqrt{2}+1) + (\sqrt{2}-1) = 2\sqrt{2}$ jest wymierna. Uzyskana sprzeczność świadczy o niesłuszności uczynionego przypuszczenia.

Odpowiedź: Taka liczba n nie istnieje.

Zadanie 4. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC , w którym $AB \neq AC$. Punkty E i F są spodkami wysokości tego trójkąta opuszczonych odpowiednio z wierzchołków B i C . Punkty M i N są środkami odpowiednio odcinków BC i EF , a punkt Q jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie AMN . Dowieść, że proste AQ i BC są równoległe.

Rozwiązanie

Niech D i G będą spodkami wysokości opuszczonych z wierzchołka A odpowiednio w trójkątach ABC i AEF (rys. 1).



rys. 1

Ponieważ kąty BEC i BFC są proste, więc punkty E i F leżą na okręgu o średnicy BC i środku M . Punkt N jest środkiem cięciwy EF tego okręgu, co oznacza, że prosta MN jest prostopadła do prostej EF , czyli jest równoległa do prostej AG . W konsekwencji punkt M leży wewnątrz kąta GAN oraz

$$(1) \quad \angle GAN = 180^\circ - \angle ANM.$$

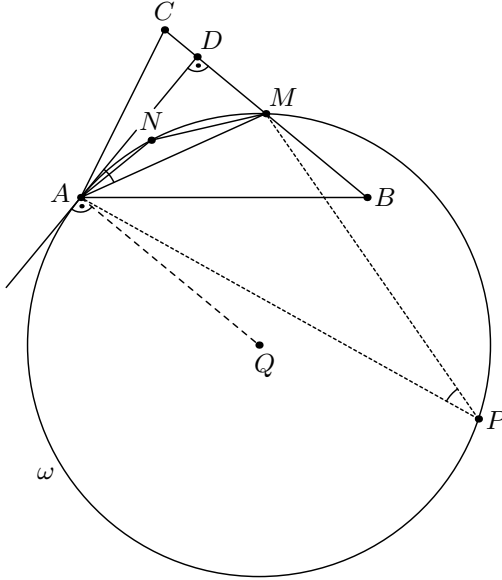
Czworokąt $BCEF$ jest wpisany w okrąg. Stąd otrzymujemy związki $\angle AEF = 180^\circ - \angle CEF = \angle ABC$ oraz $\angle AFE = 180^\circ - \angle BFE = \angle BCA$, które wskazują, że trójkąty AEF i ABC są podobne (cecha *kąt-kąt-kąt*).

Podobieństwo φ odwzorowujące pierwszy trójkąt na drugi jest złożeniem symetrii względem dwusiecznej ℓ kąta CAB z jednokładnością o środku A

i skali $AB:AE$. Weźmy teraz pod uwagę kąty GAN i DAM — kąty między wysokością a środkową przy wierzchołku A odpowiednio w trójkątach AEF i ABC . Podobieństwo φ przekształca wysokość oraz środkową w pierwszym trójkącie odpowiednio na wysokość oraz środkową w drugim; w takim razie przekształca ono pierwszy kąt na drugi. Zatem kąty te mają jednakowe miary i możemy przepisać równość (1) w postaci

$$(2) \quad \sphericalangle DAM = 180^\circ - \sphericalangle ANM.$$

Ponadto, zgodnie z opisem podobieństwa φ , kąty GAN i DAM — a w ślad za tym półproste $AN^\rightarrow$ i $AM^\rightarrow$ jako ich odpowiednie ramiona — są symetryczne względem dwusiecznej ℓ . W efekcie podobieństwo φ przeprowadza punkt M , który leży wewnątrz kąta GAN , na pewien punkt półprostej $AN^\rightarrow$ położony w kącie DAM . Wobec tego punkt N znajduje się wewnątrz kąta DAM .



rys. 2

Zaznaczmy wreszcie na okręgu ω , opisanym na trójkącie AMN , dowolny punkt P leżący po przeciwnej stronie prostej AM niż punkty D i N (rys. 2). Wówczas prawa strona zależności (2) jest równa mierze kąta APM . Uzyskany w ten sposób związek $\sphericalangle DAM = \sphericalangle APM$ dowodzi, na podstawie twierdzenia o kącie między styczną a cięciwą, że prosta DA jest styczna do okręgu ω , co oznacza, że jest ona prostopadła do jego promienia AQ . Jednocześnie jest ona prostopadła do boku BC trójkąta ABC , gdyż zawiera wysokość tego trójkąta opuszczoną z wierzchołka A . Proste AQ i BC są więc równoległe.

Zadanie 5. Rozwiązać w liczbach całkowitych x i y równanie

$$x^4 - 2x^3 + x = y^4 + 3y^2 + y.$$

Rozwiązanie

Niech L i P oznaczają odpowiednio lewą i prawą stronę danego równania.

Zauważmy też na wstępie, że dla dowolnej całkowitej liczby t słuszne są związki $t^2 + t \geq 0$ oraz $t^2 - t \geq 0$.

Dla $x=0$ i dla $x=1$ zachodzi równość $L=0$. Liczba $P=y^4+2y^2+(y^2+y)$ jest z kolei sumą trzech nieujemnych składników, przy czym pierwsze dwa są równe zeru jedynie dla $y=0$. Wobec tego zależność $P=0$ jest spełniona tylko dla $y=0$. W rezultacie uzyskujemy dwa rozwiązania (x,y) danego równania: $(0,0)$ i $(1,0)$, a innych rozwiązań z niewiadomą x równą 0 lub 1 nie ma.

Od tego momentu zakładamy, że liczba całkowita x jest różna od 0 i 1. Prawdziwa jest więc nierówność $x^2 - x \geq 2$.

Korzystając z zależności $x^2 - x \geq 2$ i $y^2 - y + 4 \geq 4$ otrzymujemy związki

$$L = (x^2 - x)^2 - (x^2 - x) > (x^2 - x)^2 - 2(x^2 - x) + 1 = (x^2 - x - 1)^2,$$

$$P = (y^2 + 2)^2 - (y^2 - y + 4) < (y^2 + 2)^2.$$

W konsekwencji równość $L = P$ może zachodzić jedynie wtedy, gdy

$$(x^2 - x - 1)^2 < (y^2 + 2)^2.$$

Obie liczby stojące powyżej w nawiasach pod kwadratami są dodatnie. Zatem zależność $L = P$ może być spełniona jedynie pod warunkiem, że

$$(1) \quad x^2 - x - 1 < y^2 + 2.$$

Podobnie, tym razem w oparciu o związki $x^2 - x \geq 2$ i $y^2 + y \geq 0$, dostajemy

$$L = (x^2 - x)^2 - (x^2 - x) < (x^2 - x)^2 - 1,$$

$$P = (y^2 + 1)^2 + (y^2 + y - 1) \geq (y^2 + 1)^2 - 1.$$

Analogicznie wynika stąd, że równość $L = P$ jest możliwa tylko wtedy, gdy

$$(2) \quad x^2 - x > y^2 + 1.$$

Zwiększając obie strony zależności (1) o 1 widzimy, że warunki (1) i (2) są łącznie spełnione jedynie wtedy, gdy

$$(3) \quad x^2 - x = y^2 + 2.$$

Jeżeli teraz prawdziwa jest równość $L = P$, to słuszny jest także związek (3).

Liczby stojące pod kwadratami w wykorzystanych już przedstawieniach

$$L = (x^2 - x)^2 - (x^2 - x) \quad \text{oraz} \quad P = (y^2 + 2)^2 - (y^2 - y + 4)$$

są więc równe, co prowadzi do zależności

$$(4) \quad x^2 - x = y^2 - y + 4.$$

Porównując związki (3) i (4) uzyskujemy równanie $y^2 + 2 = y^2 - y + 4$, skąd $y = 2$.

Ponadto $x^2 - x = 2^2 + 2 = 6$, czyli $x = 3$ lub $x = -2$. Bezpośrednio sprawdzamy, że dla obu wyznaczonych przed chwilą par (x,y) zachodzi równość $L = P$.

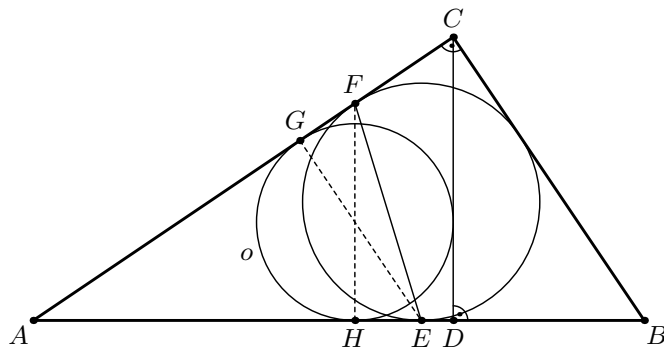
Odpowiedź: Dane równanie ma cztery rozwiązania całkowite (x,y) :

$$(0,0), \quad (1,0), \quad (3,2) \quad \text{oraz} \quad (-2,2).$$

Zadanie 6. Dany jest trójkąt ABC , w którym kąt przy wierzchołku C jest prosty. Punkt D jest spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka C , a okrąg wpisany w dany trójkąt jest styczny do boków AB i AC odpowiednio w punktach E i F . Wykazać, że punkt przecięcia wysokości trójkąta AEF jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ACD .

Rozwiązanie

Niech okrąg o wpisany w trójkąt ACD będzie styczny do boków AC i AD odpowiednio w punktach G i H (rys. 3).



rys. 3

Trójkąty prostokątne ACD i ABC są podobne, gdyż mają wspólny kąt ostry przy wierzchołku A . Podobieństwo odwzorowujące pierwszy trójkąt na drugi przeprowadza: wierzchołki A, C i D kolejno na wierzchołki A, B i C , okrąg o na okrąg wpisany w trójkąt ABC , a punkty styczności G i H odpowiednio na punkty styczności E i F . Stąd otrzymujemy równości stosunków

$$\frac{AG}{AE} = \frac{AC}{AB} \quad \text{oraz} \quad \frac{AH}{AF} = \frac{AD}{AC},$$

które zgodnie z twierdzeniem odwrotnym do twierdzenia Talesa dowodzą, że proste EG i BC są równoległe oraz proste FH i CD są równoległe.

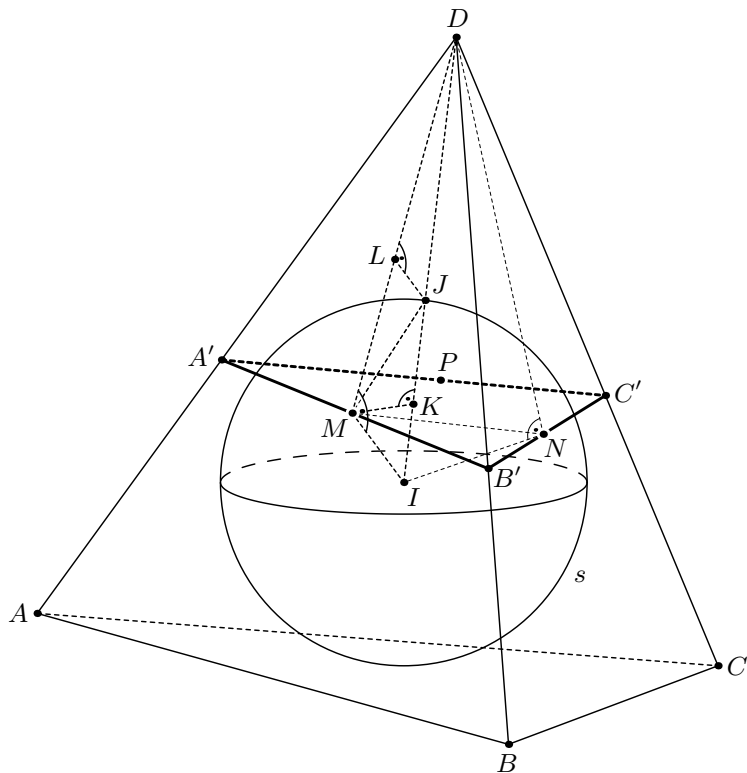
Wobec tego każda z prostych EG i FH — prostopadłych odpowiednio do prostych AC i AB — zawiera wysokość trójkąta AEF oraz przecina styczną do okręgu o pod kątem prostym w punkcie styczności, czyli przechodzi przez środek okręgu o . Zatem punkt przecięcia prostych EG i FH jest jednocześnie punktem przecięcia wysokości trójkąta AEF i środkiem okręgu o .

Zadanie 7. Dany jest czworościan $ABCD$. Płaszczyzna przechodząca przez punkty styczności sfery s wpisanej w ten czworościan ze ścianami ABD , BCD i ACD przecina krawędzie AD , BD i CD odpowiednio w punktach A' , B' i C' . Udowodnić, że środek sfery wpisanej w czworościan $A'B'C'D$ leży na sferze s .

Rozwiązanie

Oznaczmy symbolem I środek sfery s , a symbolami M , N i P — punkty jej styczności odpowiednio ze ścianami ABD , BCD i ACD . Niech następnie

J i K będą punktami, w których odcinek DI przecina odpowiednio sferę s i płaszczyznę $A'B'C'$. Oznaczmy wreszcie literą L rzut prostokątny punktu J na ścianę ABD (rys. 4).



rys. 4

Udowodnimy, że środkiem sfery wpisanej w czworościan $A'B'C'D$ jest punkt J , który na mocy samego określenia leży na sferze s .

W tym celu wykażemy najpierw, że prosta DI jest prostopadła do płaszczyzny $A'B'C'$. Istotnie, każdy z punktów D oraz I jest jednakowo odległy od obu końców odcinka MN : punkt D , gdyż DM i DN są odcinkami stycznych do sfery s poprowadzonych z jednego punktu; punkt I zaś, gdyż odcinki IM oraz IN są promieniami sfery s . Stąd punkty D oraz I — a w ślad za tym cała prosta DI — leżą na płaszczyźnie symetralnej odcinka MN . W efekcie proste MN i DI są prostopadłe. Podobnie stwierdzamy, że proste NP i PM są prostopadłe do prostej DI . Punkty M , N i P wyznaczają więc płaszczyznę prostopadłą do prostej DI , a tego dowodziliśmy.

Zatem odległość punktu J od ściany $A'B'C'$ czworościanu $A'B'C'D$ jest równa JK . Aby dokończyć rozwiązanie, należy udowodnić, że takie same są odległości punktu J od ścian $A'B'D$, $B'C'D$ oraz $A'C'D$. Uzasadnimy to dla ściany $A'B'D$; dla pozostałych dwóch ścian rozumujemy analogicznie.

Punkt M jest rzutem prostokątnym punktu I na płaszczyznę $A'B'D$. W konsekwencji punkt L — będący rzutem prostokątnym punktu J , leżącego na odcinku DI , na tę płaszczyznę — znajduje się na odcinku DM . Pozostała część dowodu rozgrywa się na płaszczyźnie DMI . Trójkąt MIJ jest równoramienny ($IM = IJ$), a proste MI oraz LJ są równoległe, ponieważ obie są prostopadłe do prostej DM . Wobec tego

$$\sphericalangle IJM = \sphericalangle IMJ = \sphericalangle LJM,$$

czyli trójkąty prostokątne MKJ i MLJ mają przy wierzchołku J kąty ostre o jednakowej mierze. Mają one też wspólną przeciwprostokątną MJ i w takim razie są przystające, skąd uzyskujemy żądany związek $JK = JL$ i tezę zadania.

Zadanie 8. Dla każdej liczby całkowitej $n \geq 2$ wyznaczyć najmniejszą liczbę całkowitą k o następującej własności:
Wśród dowolnych k różnych podzbiorów zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ mających parzystą liczbę elementów istnieją dwa różne podzbiory, których część wspólna ma parzystą liczbę elementów.

Rozwiązanie

Zbiór o parzystej liczbie elementów będziemy krótko nazywać *zbiorem parzystym*, a zbiór o nieparzystej liczbie elementów — *zbiorem nieparzystym*. Wprowadźmy ponadto oznaczenie $S = \{1, 2, \dots, n\}$.

Niech ℓ będzie największą liczbą nieparzystą nie większą niż n . Weźmy pod uwagę ℓ różnych zbiorów powstających ze zbioru $\{1, 2, \dots, \ell\}$ po usunięciu jednego elementu. Każdy z rozważanych ℓ zbiorów ma $\ell - 1$ elementów, czyli jest zbiorem parzystym. Natomiast część wspólna dowolnych różnych dwóch spośród tych ℓ zbiorów ma $\ell - 2$ elementów, a więc jest zbiorem nieparzystym. Wskazany w ten sposób przykład ℓ różnych parzystych podzbiorów zbioru S bez żądanej własności pociąga za sobą nierówność $k \geq \ell + 1$.

Udowodnimy, że jest ona w istocie równością. Inaczej mówiąc, wykazemy, że szukana najmniejsza wartość wynosi

$$(1) \quad k = \begin{cases} n, & \text{gdy } n \text{ jest liczbą parzystą,} \\ n + 1, & \text{gdy } n \text{ jest liczbą nieparzystą.} \end{cases}$$

Przypuśćmy najpierw, że sformułowana przed chwilą teza została już udowodniona dla wszystkich parzystych wartości n . Niech n będzie liczbą nieparzystą. Wówczas $n + 1$ różnych parzystych podzbiorów zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ traktujemy jak $n + 1$ różnych parzystych podzbiorów zbioru $\{1, 2, \dots, n, n + 1\}$. Liczba $n + 1$ jest parzysta, więc zgodnie z uczynionym przypuszczeniem wśród danych $n + 1$ zbiorów istnieją dwa różne zbiory o parzystej części wspólnej. To zaś dowodzi słuszności tezy także dla nieparzystych wartości n .

Pozostaje teraz dowieść następującego zdania:

Jeżeli n jest liczbą parzystą, to wśród dowolnych różnych parzystych podzbiorów $A_1, A_2, \dots, A_n \subset S$ pewne dwa różne podzbiory mają parzystą część wspólną.

Dowód będzie oparty na pojęciu różnicy symetrycznej. Dla dowolnych zbiorów $X_1, X_2, \dots, X_m \subset S$ określamy różnicę symetryczną $X_1 \triangle X_2 \triangle \dots \triangle X_m$ jako podzbiór zbioru S złożony z wszystkich tych elementów, które należą do nieparzystej liczby spośród zbiorów $X_1, X_2, \dots, X_m$. Wykażemy, że

jeżeli zbiory $X_1, X_2, \dots, X_m$ mają odpowiednio $x_1, x_2, \dots, x_m$ elementów, to zbiór $X = X_1 \triangle X_2 \triangle \dots \triangle X_m$ jest parzysty wtedy i tylko wtedy, gdy suma $x_1 + x_2 + \dots + x_m$ jest parzysta.

Niech bowiem liczby $1, 2, \dots, n$ należą odpowiednio do $y_1, y_2, \dots, y_n$ zbiorów występujących w ciągu $X_1, X_2, \dots, X_m$. Wówczas dowolna liczba $i \in S$ należy do zbioru X wtedy i tylko wtedy, gdy liczba y_i jest nieparzysta. W rezultacie zbiór X jest parzysty wtedy i tylko wtedy, gdy liczba nieparzystych składników sumy $y_1 + y_2 + \dots + y_n$ jest parzysta, czyli gdy cała suma jest parzysta. Wynika stąd zapowiedziane stwierdzenie, gdyż obliczając dwoma sposobami liczbę par postaci (X_j, i) , w których $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ oraz liczba $i \in S$ należy do zbioru X_j , otrzymujemy zależność

$$x_1 + x_2 + \dots + x_m = y_1 + y_2 + \dots + y_n.$$

Przystępujemy do kluczowego kroku rozwiązania. Udowodnimy, że:

Różnica symetryczna niektórych spośród zbiorów $A_1, A_2, \dots, A_n$ jest zbiorem pustym. Innymi słowy, istnieją: liczba $r \in \{1, 2, \dots, n\}$ oraz r -elementowy zbiór $I = \{i_1, i_2, \dots, i_r\} \subset S$, dla których

$$A_{i_1} \triangle A_{i_2} \triangle \dots \triangle A_{i_r} = \emptyset.$$

Przed przejściem do dowodu zauważmy, że na mocy określenia różnicy symetrycznej zbiór $A_{i_1} \triangle A_{i_2} \triangle \dots \triangle A_{i_r}$ nie zależy od wyboru kolejności wskaźników $i_1, i_2, \dots, i_r$ i w efekcie jest wyznaczony jednoznacznie przez podzbiór I .

Ponieważ zbiory $A_1, A_2, \dots, A_n$ są parzyste, więc na podstawie wykazanego wyżej stwierdzenia każdemu z $2^n - 1$ niepustych zbiorów $I \subset S$ odpowiada różnica symetryczna będąca parzystym podzbiorem zbioru S . Jednak zbiór S ma mniej niż $2^n - 1$ parzystych podzbiorów — ma mianowicie więcej niż jeden podzbiór nieparzysty, w tym n podzbiorów jednoelementowych. Wobec tego istnieją dwa różne podzbiory: p -elementowy podzbiór $J = \{j_1, j_2, \dots, j_p\} \subset S$ oraz q -elementowy podzbiór $J' = \{j'_1, j'_2, \dots, j'_q\} \subset S$, którym odpowiada taka sama różnica symetryczna R .

Rozpatrzmy następujący ciąg $p + q$ zbiorów:

$$(2) \quad A_{j_1}, A_{j_2}, \dots, A_{j_p}, A_{j'_1}, A_{j'_2}, \dots, A_{j'_q}.$$

Dowolna liczba ze zbioru R należy do nieparzystej liczby z początkowych p zbiorów i do nieparzystej liczby z końcowych q zbiorów. Dowolna spośród pozostałych liczb ze zbioru S należy zaś do parzystej liczby z początkowych p zbiorów i do parzystej liczby z końcowych q zbiorów. Zatem różnica symetryczna wszystkich $p + q$ zbiorów (2) jest zbiorem pustym.

Podzielmy wskaźniki ze zbiorów J i J' na dwa typy: wskaźniki należące

do obu zbiorów i wskaźniki należące tylko do jednego z nich. W myśl relacji $J \neq J'$ istnieje co najmniej jeden wskaźnik drugiego typu. Niech $i_1, i_2, \dots, i_r$ oznaczają wszystkie wskaźniki drugiego typu, wypisane jednokrotnie. Zbiory $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_r}$ występują jeden raz w ciągu (2), a dla każdego wskaźnika i pierwszego typu zbiór A_i występuje dwukrotnie. Po wykreśleniu z ciągu (2) wszystkich powstających w ten sposób par jednakowych zbiorów dostajemy krótszy ciąg zbiorów o takiej samej różnicy symetrycznej. W konsekwencji

$$A_{i_1} \triangle A_{i_2} \triangle \dots \triangle A_{i_r} = A_{j_1} \triangle A_{j_2} \triangle \dots \triangle A_{j_p} \triangle A_{j'_1} \triangle A_{j'_2} \triangle \dots \triangle A_{j'_q} = \emptyset,$$

czyli zbiór $I = \{i_1, i_2, \dots, i_r\}$ ma własność żadaną w tezie kluczowego kroku.

Aby wreszcie dokończyć rozwiązanie zbadamy dwa przypadki. Symbole $i_1, i_2, \dots, i_r$ będą nadal oznaczać takie wskaźniki, że $A_{i_1} \triangle A_{i_2} \triangle \dots \triangle A_{i_r} = \emptyset$.

Przypadek 1. r jest liczbą parzystą.

Każda liczba ze zbioru S , i w szczególności każda liczba ze zbioru A_{i_1} , należy do parzystej liczby ze zbiorów $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_r}$. W takim razie dowolna liczba ze zbioru A_{i_1} należy do parzystej liczby ze zbiorów

$$(3) \quad A_{i_1}, \quad A_{i_1} \cap A_{i_2}, \quad A_{i_1} \cap A_{i_3}, \quad \dots, \quad A_{i_1} \cap A_{i_r}$$

i jest to też prawdą dla liczb spoza zbioru A_{i_1} , gdyż nie należą one do żadnego ze zbiorów (3). W rezultacie różnica symetryczna r zbiorów (3) jest zbiorem pustym. Różnica symetryczna zbioru parzystego i $r-1$ zbiorów nieparzystych jest jednak nieparzysta. Co najmniej jedna spośród części wspólnych $A_{i_1} \cap A_{i_j}$ dla $j = 2, 3, \dots, r$ jest więc zbiorem parzystym.

Przypadek 2. r jest liczbą nieparzystą.

Wtedy $r \neq n$, ponieważ n jest liczbą parzystą. Stąd istnieje wskaźnik $i \in S$ różny od każdego ze wskaźników $i_1, i_2, \dots, i_r$. Podobnie jak w przypadku 1 wnioskujemy z równości $A_{i_1} \triangle A_{i_2} \triangle \dots \triangle A_{i_r} = \emptyset$, że

$$(A_i \cap A_{i_1}) \triangle (A_i \cap A_{i_2}) \triangle \dots \triangle (A_i \cap A_{i_r}) = \emptyset.$$

Różnica symetryczna r zbiorów nieparzystych jest nieparzysta. Zatem znów dla pewnego $j \in \{1, 2, \dots, r\}$ część wspólna $A_i \cap A_{i_j}$ jest zbiorem parzystym.

Odpowiedź: Szukana najmniejsza liczba k jest opisana wzorem (1).

Zadanie 9. Nieujemne liczby rzeczywiste $x_1, x_2, \dots, x_n$ ($n \geq 2$) spełniają równość $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$. Udowodnić, że

$$\max\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \cdot \left(1 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \min\{x_i, x_j\}\right) \geq 1.$$

Rozwiązanie

Wykażemy ogólniejsze stwierdzenie: dla dowolnych nieujemnych liczb rzeczywistych $x_1, x_2, \dots, x_n$ prawdziwa jest zależność

$$(1) \quad \max\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \cdot \left(\sum_{i=1}^n x_i + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \min\{x_i, x_j\}\right) \geq (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2.$$

Podstawiając do niej dwukrotnie warunek $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$ otrzymamy wprost tezę zadania.

Aby udowodnić związek (1) przedstawmy jego lewą stronę L i prawą stronę P w następujący sposób:

$$L = \sum_{i=1}^n \max\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \cdot x_i + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \max\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \cdot \min\{x_i, x_j\},$$

$$P = \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i \cdot x_j.$$

W celu wykazania żądanej nierówności $L \geq P$ wystarczy teraz uzasadnić, że każdy składnik pierwszej z dwóch sum występujących powyżej w liczbie L jest nie mniejszy niż odpowiedni składnik pierwszej z dwóch sum występujących w liczbie P , oraz postąpić analogicznie dla drugich sum.

Pierwszy z opisanych przed chwilą kroków sprowadza się do zależności

$$\max\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \cdot x_i \geq x_i^2 \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, n,$$

które są prawdziwe, gdyż w i -tej zależności ($i = 1, 2, \dots, n$) pierwszy czynnik iloczynu stojącego po lewej stronie jest nie mniejszy niż x_i . Z kolei drugi krok przybiera postać związków

$$\max\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \cdot \min\{x_i, x_j\} \geq x_i \cdot x_j \quad \text{dla } 1 \leq i < j \leq n,$$

które również są słuszne dla dowolnej pary wskaźników $1 \leq i < j \leq n$, ponieważ w każdym związku pierwszy i drugi czynnik lewej strony są nie mniejsze niż odpowiednio większy i mniejszy czynnik prawej strony.

To dowodzi nierówności (1), która — jak wiemy — pociąga za sobą tezę.

Zadanie 10. Dane są takie dodatnie liczby całkowite a , b , c i d , że dla każdej liczby naturalnej n liczba $an + b$ jest podzielna przez liczbę $cn + d$. Wykazać, że istnieje liczba naturalna k , dla której $a = kc$ i $b = kd$.

Rozwiązanie

Zgodnie z warunkami zadania, dla każdego $n \geq 1$ liczby $cn + d$ i $an + b$ są podzielne przez $cn + d$, czyli liczba

$$a(cn + d) - c(an + b) = ad - bc$$

także jest podzielna przez $cn + d$. Zatem liczba całkowita $ad - bc$ jest podzielna przez dowolnie duże liczby naturalne i wobec tego $ad - bc = 0$. Przedstawmy otrzymany w ten sposób związek $ad = bc$ jako równość ułamków

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

i oznaczmy ich wspólną wartość symbolem k . Spełnione są więc zależności

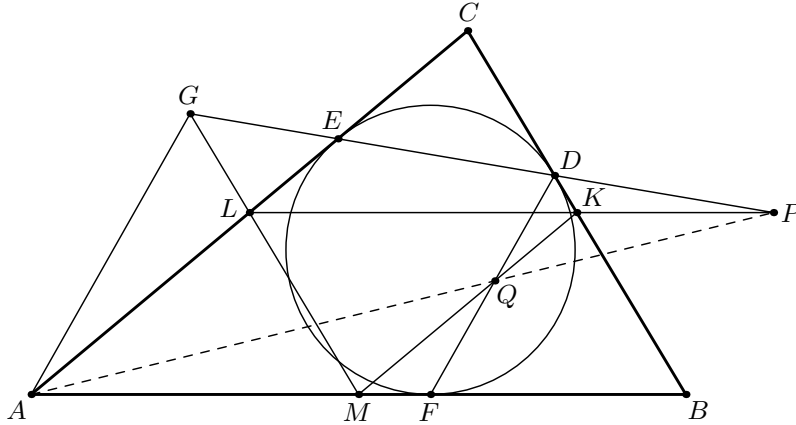
$$a = kc \quad \text{oraz} \quad b = kd.$$

Ponadto w myśl założeń zadania dla $n = 1$ liczba $a + b = k(c + d)$ jest podzielna przez $c + d$. W rezultacie k jest liczbą całkowitą, co kończy rozwiązanie.

Zadanie 11. Dany jest trójkąt ABC , w którym $BC < CA < AB$. Okrąg wpisany w ten trójkąt jest styczny do boków BC , CA i AB odpowiednio w punktach D , E i F , a punkty K , L i M są środkami odpowiednio boków BC , CA i AB . Proste DE i KL przecinają się w punkcie P , a proste DF i KM — w punkcie Q . Dowieść, że punkty A , P i Q leżą na jednej prostej.

Rozwiązanie

Korzystając z równości $AE = AF$, $BF = BD$, $CD = CE$ obliczamy, że $AE = \frac{1}{2}(AE + AF) = \frac{1}{2}(AE + CE - CD + AF + BF - BD) = \frac{1}{2}(AC + AB - BC)$. Stąd i z warunku $AB > BC$ dostajemy $AE > \frac{1}{2}AC = AL$. Zatem punkt L leży bliżej punktu A niż punkt E , a różnica między obiema odległościami wynosi

$$(1) \quad LE = AE - AL = \frac{1}{2}(AC + AB - BC) - \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}(AB - BC).$$


rys. 5

Niech G będzie punktem przecięcia prostych DE i ML (rys. 5). Ponieważ proste BC i ML są równoległe, więc trójkąty DCE i GLE są jednokładne względem punktu E . Wobec tego związek $CD = CE$ wskazuje, że

$$(2) \quad LG = LE.$$

Z kolei punkty D i E leżą odpowiednio na podstawie BC i ramieniu CL trapezu $BCLM$, czyli punkt G znajduje się na półprostej $ML^{\rightarrow}$ na zewnątrz trójkąta ABC . Łącząc teraz zależności (2) i (1) stwierdzamy, że

$$MG = ML + LG = ML + LE = \frac{1}{2}BC + \frac{1}{2}(AB - BC) = \frac{1}{2}AB = MA.$$

W konsekwencji trójkąt AMG jest równoramienny. Ponadto jego ramiona są równoległe do ramion trójkąta równoramiennego FBD , co dowodzi, że równoległe są też podstawy AG i FD obu rozważanych trójkątów.

Z drugiej strony, proste AL i MG są równoległe odpowiednio do prostych MK i BC . Zatem boki trójkąta ALG są równoległe do boków trójkąta QKD .

Stąd oba trójkąty są jednokładne lub przystające, a trzy proste, przechodzące przez wierzchołek pierwszego trójkąta i odpowiadający wierzchołek drugiego, przecinają się w jednym punkcie (środku jednokładności) lub są równoległe. Dwie z nich — proste LK i GD — przecinają się w punkcie P . W rezultacie trzecia prosta AQ również przechodzi przez punkt P , co należało wykazać.

Zadanie 12. Na płaszczyźnie zaznaczono wierzchołki 2014-kąta foremego. Dwaj gracze na przemian dorysowują nowy bok albo nową przekątną tego wielokąta. Gracz przegrywa grę, jeżeli po jego ruchu dla każdego wierzchołka v dowolne dwa spośród pozostałych wierzchołków można połączyć łamaną złożoną z narysowanych odcinków, nie przechodzącą przez wierzchołek v . Rozstrzygnąć, który z graczy — rozpoczynający grę czy jego przeciwnik — ma strategię wygrywającą.

Rozwiązanie

Wierzchołki danego 2014-kąta będziemy krótko nazywać *punktami*, jego boki i przekątne zaś — *odcinkami* (bez względu na to, czy są narysowane).

Układ odcinków nazwiemy: *ukończonym*, jeżeli dla dowolnego punktu v każdą parę pozostałych punktów można połączyć łamaną złożoną z odcinków danego układu omijającą punkt v , a *przegranym*, jeżeli nie jest ukończony, lecz dodanie doń dowolnego nowego odcinka przekształca go w układ ukończony.

Jeżeli układ narysowanych w bieżącej chwili odcinków jest przegrany, to gra jeszcze się toczy, jednak gracz, który ma wykonać ruch, po jego wykonaniu doprowadza do powstania układu ukończonego i przegrywa grę.

Rozwiązanie zadania będzie oparte na bliższym zbadaniu możliwej liczby odcinków w układzie przegranym.

Niech P będzie dowolnym układem przegranym. Należące doń odcinki będziemy krótko nazywać *P -odcinkami*, a łamane zbudowane z P -odcinków — *P -łamanymi*. Układ P nie jest ukończony, więc istnieją takie trzy różne punkty a , b i v , że każda P -łamana o końcach a i b przechodzi przez punkt v .

Oznaczmy symbolem A zbiór wszystkich punktów dających się połączyć z punktem a pewną P -łamaną, na której nie leży punkt v . Sam punkt a także zaliczamy do zbioru A . Podobnie, zamieniając punkt a na punkt b , określamy zbiór B . Punkt v nie należy do żadnego ze zbiorów A i B .

Zbiory A i B nie mają punktów wspólnych. Rzeczywiście, jakikolwiek punkt wspólny tych zbiorów można by połączyć P -łamaną omijającą punkt v zarówno z punktem a , jak i z punktem b . Łącząc obie te łamane w P -łamaną o końcach a i b dostalibyśmy wtedy sprzeczność z wyborem punktów a , b i v .

Wykażemy teraz cztery własności, wyrażone w następujących zdaniach:

1. *Dowolne dwa różne punkty ze zbioru A są połączone P -odcinkiem. Analogiczna teza jest słuszna dla zbioru B .*
2. *Żaden P -odcinek nie łączy punktu ze zbioru A z punktem ze zbioru B .*
3. *Punkt v jest połączony P -odcinkiem z każdym innym punktem.*
4. *Każdy punkt różny od punktu v należy do jednego ze zbiorów A i B .*

Dowód zdania 1. Przypuśćmy, że różne punkty $a_1, a_2 \in A$ nie są połączone P -odcinkiem. Zgodnie z określeniem zbioru A każdy z punktów a_1 i a_2 można połączyć z punktem a pewną P -łamaną, na której nie leży punkt v . Zatem punkty a_1 i a_2 też można połączyć taką P -łamaną, którą oznaczmy literą ℓ .

Weźmy pod uwagę układ P' powstający z układu P po dodaniu odcinka o końcach a_1 i a_2 . Układ P' jest ukończony, więc istnieje łamana ℓ' złożona z odcinków układu P' , łącząca punkty a i b bez przechodzenia przez punkt v . Zastępując w łamanej ℓ' każdy odcinek o końcach a_1 i a_2 łamaną ℓ uzyskujemy P -łamaną łączącą punkty a i b oraz omijającą punkt v , czyli sprzeczność.

Dowód zdania 2. Załóżmy, że punkty $a' \in A$ i $b' \in B$ są końcami jednego P -odcinka. Na mocy zdania 1 punkty a i a' są końcami jednego P -odcinka (o ile $a' \neq a$) oraz punkty b i b' są końcami jednego P -odcinka (o ile $b' \neq b$). Stąd otrzymujemy P -łamaną o końcach a i b , zbudowaną z co najwyżej trzech P -odcinków oraz nie przechodzącą przez punkt v — znów sprzeczność.

Dowód zdania 3. Gdyby punkt v nie był połączony P -odcinkiem z innym punktem c , to układ powstający z układu P po dodaniu odcinka o końcach v i c powinien być ukończony.

Tymczasem wciąż nie istnieje łamana o końcach a i b omijająca punkt v . Dodany odcinek o jednym końcu v nie może mianowicie wejść w skład takiej łamanej; nie można jej również utworzyć z samych P -odcinków.

Dowód zdania 4. Przypuśćmy, że punkt $d \neq v$ nie należy do żadnego ze zbiorów A i B . W myśl założenia $d \notin A$ odcinek o końcach a i d nie należy do układu P . Dodając ten odcinek do układu P dostajemy układ ukończony P' .

Niech ℓ będzie łamaną złożoną z odcinków układu P' , łączącą punkty a i b z pominięciem punktu v . Wybierając w razie potrzeby pewien jej krótszy fragment przyjmijmy, że punkt a leży na łamanej ℓ tylko raz — jako jej koniec.

Co najmniej jeden z odcinków łamanej ℓ nie należy do układu P . Wobec tego znajduje się na niej odcinek o końcach a i d . Występuje on jednak tylko raz i przylega do końca a łamanej ℓ . Wszystkie pozostałe odcinki łamanej ℓ są P -odcinkami. W konsekwencji punkty d i b można połączyć P -łamaną omijającą punkt v . To przeczy warunkowi $d \notin B$ i kończy dowód zdania 4.

Przystępujemy wreszcie do wyznaczenia liczby P -odcinków.

Niech k i n oznaczają liczby punktów należących odpowiednio do zbiorów A i B . Zdania 1–4 wskazują, że $k + n = 2013$, a wszystkimi P -odcinkami są: odcinki o obu końcach w $(k+1)$ -elementowym zbiorze $A \cup \{v\}$ i odcinki o obu końcach w $(n+1)$ -elementowym zbiorze $B \cup \{v\}$. W efekcie liczba wszystkich P -odcinków wynosi

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}k(k+1) + \frac{1}{2}n(n+1) &= \frac{1}{2}[k(k+1) + (2013-k)(2014-k)] = \\ &= \frac{1}{2}(2k^2 - 4026k + 2013 \cdot 2014) = k(k-2013) + 2013 \cdot 1007 \end{aligned}$$

i jest nieparzysta, gdyż jeden z czynników iloczynu $k(k-2013)$ jest parzysty. Zatem dowolny układ przegrany składa się z nieparzystej liczby odcinków.

Jeżeli kolej wykonania ruchu przypada na gracza R rozpoczynającego grę, to liczba odcinków narysowanych w tym momencie na płaszczyźnie jest parzysta, czyli na podstawie konkluzji poprzedniego akapitu nie tworzą one układu przegranego. Wynika stąd, że w każdym swoim ruchu gracz R może wybrać do dorysowania taki odcinek, że po jego dorysowaniu gra jeszcze się nie zakończy. W rezultacie strategia gracza R , polegająca na dorysowywaniu za każdym razem *dowolnego* nowego odcinka, które nie powoduje przegranej natychmiast po wykonaniu ruchu, jest strategią wygrywającą. Rozpatrywana gra zawsze kończy się bowiem przegraną jednego z graczy, ponieważ układ wszystkich boków i przekątnych danego 2014-kąta jest ukończony.

Odpowiedź: Strategię wygrywającą ma gracz rozpoczynający grę.

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w Internecie pod adresem: www.om.edu.pl



LXVI Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe

zawodów stopnia drugiego

20 lutego 2015 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Punkty E , F , G leżą odpowiednio na bokach BC , CA , AB trójkąta ABC , przy czym $2AG = GB$, $2BE = EC$ oraz $2CF = FA$. Punkty P i Q leżą na odcinkach EG i FG odpowiednio, przy czym $2EP = PG$ oraz $2GQ = QF$. Udowodnić, że czworokąt $AGPQ$ jest równoległobokiem.

2. Dana jest liczba naturalna $A > 1$. Niech $a_1 = A^A$, $a_{n+1} = A^{a_n}$, $b_1 = A^{A+1}$, $b_{n+1} = 2^{b_n}$ dla $n = 1, 2, 3, \dots$. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej $n \geq 1$ zachodzi nierówność

$$a_n < b_n.$$

3. Rozważmy ciąg $a_n = |n(n+1) - 19|$ dla $n = 0, 1, 2, \dots$. Dla dowolnego $n \neq 4$ wykazać, że: jeśli dla każdego $k < n$ liczby a_k i a_n są względnie pierwsze, to a_n jest liczbą pierwszą.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.



LXVI Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe

zawodów stopnia drugiego

21 lutego 2015 r. (drugi dzień zawodów)

4. Liczby rzeczywiste x_1, x_2, x_3, x_4 są miejscami zerowymi wielomianu czwartego stopnia $W(x)$ o współczynnikach całkowitych. Dowieść, że jeśli $x_3 + x_4$ jest liczbą wymierną a x_3x_4 jest liczbą niewymierną, to $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$.

5. Niech n będzie dowolną dodatnią liczbą całkowitą. Wyznaczyć liczbę takich ciągów $a_0, a_1, \dots, a_n$ o wyrazach w zbiorze $\{0, 1, 2, 3\}$, że

$$n = a_0 + 2a_1 + 2^2a_2 + \dots + 2^na_n.$$

6. Dany jest trójkąt ABC . Punkt K jest środkiem boku BC , punkt M leży wewnątrz boku AB . Prosta KM przecina prostą AC w takim punkcie L , że punkt C leży między A i L . Punkt N jest środkiem odcinka LM . Prosta AN przecina okrąg opisany na trójkącie ABC w punkcie $S \neq A$. Wykazać, że jeśli $S \neq N$, to okrąg przechodzący przez punkty K , N i S jest styczny do prostej BC .

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.

LXVI Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe

zawodów stopnia trzeciego

13 kwietnia 2015 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. W trójkącie ABC kąt przy wierzchołku A jest najmniejszy. Punkty D i E leżą odpowiednio na bokach AB i AC , przy czym $\sphericalangle CBE = \sphericalangle DCB = \sphericalangle BAC$. Wykazać, że środki odcinków AB, AC, BE, CD leżą na jednym okręgu.

2. Niech P będzie wielomianem o współczynnikach rzeczywistych. Udowodnić, że jeśli dla pewnej liczby całkowitej k liczba $P(k)$ nie jest całkowita, to istnieje nieskończenie wiele takich liczb całkowitych m , dla których liczba $P(m)$ nie jest całkowita.

3. Znaleźć największą liczbę naturalną m o następującej własności: wśród pięciu dowolnie wybranych podzbiorów 500-elementowych zbioru $\{1, 2, \dots, 1000\}$ istnieją dwa zbiory, których część wspólna liczy co najmniej m elementów.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.

LXVI Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe

zawodów stopnia trzeciego

14 kwietnia 2015 r. (drugi dzień zawodów)

4. Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^5 + y^5 + z^5 = 1 \end{cases}$$

w liczbach rzeczywistych x, y, z .

5. Dowieść, że przekątne wypukłego czworokąta są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy wewnątrz tego czworokąta znajduje się punkt, którego rzuty prostopadłe na boki czworokąta są wierzchołkami prostokąta.

6. Wykazać, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej a istnieje taka liczba całkowita $b > a$, że liczba $1 + 2^b + 3^b$ dzieli się przez liczbę $1 + 2^a + 3^a$.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.



LXVI Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych

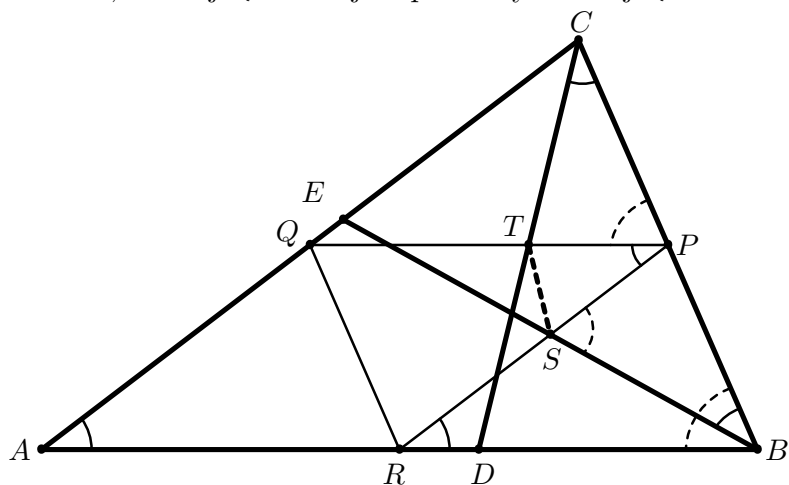
zawodów stopnia trzeciego

13 kwietnia 2015 r. (pierwszy dzień zawodów)

Zadanie 1. W trójkącie ABC kąt przy wierzchołku A jest najmniejszy. Punkty D i E leżą odpowiednio na bokach AB i AC , przy czym $\sphericalangle CBE = \sphericalangle DCB = \sphericalangle BAC$. Wykazać, że środki odcinków AB, AC, BE, CD leżą na jednym okręgu.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez P, Q, R, S, T kolejno środki odcinków BC, CA, AB, BE, CD . Z twierdzenia Talesa wynika, że $PQ \parallel BA, QR \parallel CB, RP \parallel AC$. Punkt wspólny odcinka CD i prostej PQ jest więc środkiem odcinka CD , zatem jest to punkt T . Podobnie punkt S jest punktem wspólnym odcinka BE i prostej PR . Wynika stąd, że punkty Q, R, S i T — w tej kolejności — są wierzchołkami czworokąta wypukłego. Poza tym $\sphericalangle ABC = \sphericalangle TPC, \sphericalangle SPB = \sphericalangle ACB$. Stąd i założenia $\sphericalangle CAB = \sphericalangle DCB = \sphericalangle CBE$ wynika, że trójkąty ABC, BSP i CPT mają odpowiednio równe kąty, więc są podobne. Stąd zaś wynikają równości $\frac{PS}{PB} = \frac{CB}{CA}$ i $\frac{PT}{PC} = \frac{BC}{BA}$. Po podzieleniu tych równości stronami i uwzględnieniu równości $PB = PC$ otrzymujemy wzór $\frac{PS}{PT} = \frac{BA}{CA}$, który w połączeniu z równością $\sphericalangle BAC = \sphericalangle SPT$ (wynikającą z tego, że czworokąt $QARP$ jest równoległobokiem) pozwala stwierdzić, że trójkąt SPT jest podobny do trójkąta BAC .



Wobec tego $\sphericalangle TSP = \sphericalangle CBA = \sphericalangle RQT$, stąd zaś $\sphericalangle RQT + \sphericalangle RST =$

$\sphericalangle RQT + 180^\circ - \sphericalangle TSP = 180^\circ$, a to pozwala stwierdzić, że na czworokącie $QRST$ można opisać okrąg, co mieliśmy udowodnić.

Zadanie 2. Niech P będzie wielomianem o współczynnikach rzeczywistych. Udowodnić, że jeśli dla pewnej liczby całkowitej k liczba $P(k)$ nie jest całkowita, to istnieje nieskończenie wiele takich liczb całkowitych m , dla których liczba $P(m)$ nie jest całkowita.

Rozwiązanie

Niech A_P będzie zbiorem złożonym z tych liczb całkowitych k , dla których liczba $P(k)$ nie jest całkowita. Załóżmy, że teza nie jest prawdziwa. Wtedy zbiór A_P , z założenia niepusty, ma skończenie wiele elementów. Niech P będzie wielomianem najniższego stopnia, dla którego teza jest nieprawdziwa, czyli dla którego zbiór A_P jest niepusty i skończony. Niech k_0 będzie największą liczbą w zbiorze A_P , a k_1 — najmniejszą. Niech $Q(x) = P(x+1) - P(x)$. Stopień wielomianu Q jest o 1 mniejszy od stopnia wielomianu P . Liczba $Q(k_0)$ nie jest całkowita (jako różnica liczby całkowitej $P(k_0+1)$ i niecałkowitej $P(k_0)$), zatem $k_0 \in A_Q$. Z definicji k_0 i k_1 wynika, że jeśli m jest liczbą całkowitą i $m > k_0$ lub $m < k_1 - 1$, to $Q(m)$ też jest całkowite jako różnica liczb całkowitych, więc $m \notin A_Q$. Przeczy to temu, że P jest wielomianem najniższego stopnia, dla którego zbiór A_P jest niepusty i skończony.

Uwaga. Niech P będzie wielomianem stopnia d . Niech $P_1(x) = P(x+1) - P(x)$. P_1 jest wielomianem stopnia $d-1$. Niech $P_{j+1}(x) = P_j(x+1) - P_j(x)$ dla $j = 1, 2, \dots, d-1$. Jasne jest, że P_2 jest wielomianem stopnia $d-2$, P_3 — wielomianem stopnia $d-3$, itd. Wobec tego P_d jest wielomianem stopnia 0, czyli stałą. Wynika stąd natychmiast, że jeśli wielomian stopnia d przyjmuje wartości całkowite dla $d+1$ kolejnych liczb całkowitych, to jedyna wartość wielomianu P_d jest całkowita. Istnieje taka liczba całkowita m , że $P_{d-1}(m)$ jest całkowite. Stąd wynika, że wszystkie wartości wielomianu P_{d-1} , przyjmowane w punktach całkowitych, są całkowite: $P_{d-1}(m+1) = P_{d-1}(m) + P_d(m)$, $P_{d-1}(m+2) = P_{d-1}(m+1) + P_d(m)$ itd. oraz $P_{d-1}(m-1) = P_{d-1}(m) - P_d(m)$, $P_{d-1}(m-2) = P_{d-1}(m-1) - P_d(m)$ itd. Stąd wynika, że taką samą własność ma wielomian P_{d-2} , bo $P_{d-2}(n+1) = P_{d-2}(n) + P_{d-1}(n)$, itd. (formalnie znów rozumowanie indukcyjne).

Zadanie 3. Znaleźć największą liczbę naturalną m o następującej własności: wśród pięciu dowolnie wybranych podzbiorów 500-elementowych zbioru $\{1, 2, \dots, 1000\}$ istnieją dwa zbiory, których część wspólna liczy co najmniej m elementów.

Rozwiązanie

Wykażemy najpierw, że $m \geq 200$. Niech A_1, A_2, A_3, A_4 i A_5 będą podzbiarami 500-elementowymi zbioru $\{1, 2, \dots, 1000\}$. Niech $a_{i,j} = 1$, gdy $i \in A_j$ oraz $a_{i,j} = 0$ w przeciwnym przypadku. Dla każdego $j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ zachodzi więc równość $a_{1,j} + a_{2,j} + \dots + a_{1000,j} = 500$. Niech $s_i = a_{i,1} + a_{i,2} + a_{i,3} + a_{i,4} + a_{i,5}$ dla każdego $i \in \{1, 2, \dots, 1000\}$. Wtedy $s_1 + s_2 + \dots + s_{1000} = 2500$. Dla każdej liczby $i \in \{1, 2, \dots, 1000\}$ zachodzi równość:

$$\begin{aligned} s_i^2 &= a_{i,1}^2 + a_{i,2}^2 + a_{i,3}^2 + a_{i,4}^2 + a_{i,5}^2 + \\ &\quad + 2(a_{i,1}a_{i,2} + a_{i,1}a_{i,3} + a_{i,1}a_{i,4} + a_{i,1}a_{i,5} + a_{i,2}a_{i,3} + \dots + a_{i,4}a_{i,5}) = \\ &= \frac{a_{i,j}^2 = a_{i,j}}{\text{dla każdej pary } (i,j)} a_{i,1} + a_{i,2} + a_{i,3} + a_{i,4} + a_{i,5} \\ &\quad + 2(a_{i,1}a_{i,2} + a_{i,1}a_{i,3} + a_{i,1}a_{i,4} + a_{i,1}a_{i,5} + a_{i,2}a_{i,3} + \dots + a_{i,4}a_{i,5}) = \\ &= s_i + 2(a_{i,1}a_{i,2} + a_{i,1}a_{i,3} + a_{i,1}a_{i,4} + a_{i,1}a_{i,5} + a_{i,2}a_{i,3} + \dots + a_{i,4}a_{i,5}). \end{aligned}$$

Wobec tego

$$2(a_{i,1}a_{i,2} + a_{i,1}a_{i,3} + a_{i,1}a_{i,4} + a_{i,1}a_{i,5} + a_{i,2}a_{i,3} + \dots + a_{i,4}a_{i,5}) = s_i^2 - s_i.$$

Jeśli $i \in A_j \cap A_k$, to $a_{i,j}a_{i,k} = 1$, a gdy $i \notin A_j \cap A_k$, to $a_{i,j}a_{i,k} = 0$.

Wobec tego $|A_j \cap A_k| = a_{1,j}a_{1,k} + a_{2,j}a_{2,k} + \dots + a_{1000,j}a_{1000,k}$, gdzie $|B|$ oznacza liczbę elementów zbioru B . Stąd wynika równość

$$\begin{aligned} |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + \dots + |A_4 \cap A_5| &= \\ &= \frac{1}{2}(s_1^2 - s_1 + s_2^2 - s_2 + \dots + s_{1000}^2 - s_{1000}) = \\ &= \frac{1}{2}((s_1 - 2)(s_1 - 3) + (s_2 - 2)(s_2 - 3) + \dots + (s_{1000} - 2)(s_{1000} - 3)) + \\ &\quad + \frac{1}{2}(4s_1 - 6 + 4s_2 - 6 + \dots + 4s_{1000} - 6) = \\ &= \frac{1}{2}((s_1 - 2)(s_1 - 3) + \dots + (s_{1000} - 2)(s_{1000} - 3)) + \frac{1}{2}(4 \cdot 2500 - 6 \cdot 1000) = \\ &= \frac{1}{2}((s_1 - 2)(s_1 - 3) + \dots + (s_{1000} - 2)(s_{1000} - 3)) + 2000. \end{aligned}$$

Ponieważ s_i jest liczbą całkowitą, więc $(s_i - 2)(s_i - 3) \geq 0$. Wykazaliśmy, że $|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + \dots + |A_4 \cap A_5| \geq 2000$. Wynika stąd, że dla pewnej pary (j, k) zachodzi nierówność $|A_j \cap A_k| \geq \frac{1}{10} \cdot 2000 = 200$.

Wykazaliśmy, że $m \geq 200$.

Zdefiniujemy takie zbiory $A_1, \dots, A_5$, że $|A_j \cap A_k| \geq 200$. Tym samym wykażemy, że minimalną wartością liczby m jest 200. Ponieważ liczby $a_{i,j}$, $1 \leq i \leq 1000$, $1 \leq j \leq 5$, jednoznacznie definiują zbiory A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 , więc wystarczy je określić tak, by $a_{1,j} + a_{2,j} + \dots + a_{1000,j} = 500$ (zbiór A_j ma mieć 500 elementów)

i by $a_{1,j}a_{1,k} + a_{2,j}a_{2,k} + \dots + a_{1000,j}a_{1000,k} = 200$ (zbiór $A_j \cap A_k$ ma mieć 200 elementów). Ostatnia nierówność dowodu staje się równością wtedy i tylko wtedy, gdy $(s_i - 2)(s_i - 3) = 0$ dla każdego i , czyli gdy $s_i \in \{2, 3\}$. Liczby $a_{i,j}$ będą tak zdefiniowane, że wśród liczb $s_1, s_2, \dots, s_{1000}$ liczba 3 pojawi się 500 razy i tyleż razy pojawi się liczba 2. Definiujemy

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1} &= 1 & a_{1,2} &= 1 & a_{1,3} &= 1 & a_{1,4} &= 0 & a_{1,5} &= 0 \\ a_{2,1} &= 0 & a_{2,2} &= 1 & a_{2,3} &= 1 & a_{2,4} &= 1 & a_{2,5} &= 0 \\ a_{3,1} &= 0 & a_{3,2} &= 0 & a_{3,3} &= 1 & a_{3,4} &= 1 & a_{3,5} &= 1 \\ a_{4,1} &= 1 & a_{4,2} &= 0 & a_{4,3} &= 0 & a_{4,4} &= 1 & a_{4,5} &= 1 \\ a_{5,1} &= 1 & a_{5,2} &= 1 & a_{5,3} &= 0 & a_{5,4} &= 0 & a_{5,5} &= 1 \\ a_{6,1} &= 1 & a_{6,2} &= 0 & a_{6,3} &= 1 & a_{6,4} &= 0 & a_{6,5} &= 0 \\ a_{7,1} &= 0 & a_{7,2} &= 1 & a_{7,3} &= 0 & a_{7,4} &= 1 & a_{7,5} &= 0 \\ a_{8,1} &= 0 & a_{8,2} &= 0 & a_{8,3} &= 1 & a_{8,4} &= 0 & a_{8,5} &= 1 \\ a_{9,1} &= 1 & a_{9,2} &= 0 & a_{9,3} &= 0 & a_{9,4} &= 1 & a_{9,5} &= 0 \\ a_{10,1} &= 0 & a_{10,2} &= 1 & a_{10,3} &= 0 & a_{10,4} &= 0 & a_{10,5} &= 1 \end{array}$$

Kończymy definiowanie pisząc $a_{10+i,j} = a_{i,j}$ dla $i \in \{1, 2, \dots, 990\}$, $j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, czyli powtarzamy napisane dziesięć wierszy 100 razy. Otrzymujemy więc wzory $A_1 = \{1, 4, 5, 6, 9, 11, 14, 15, 16, 19, \dots\}$, $A_2 = \{1, 2, 5, 7, 10, 11, 12, 15, 17, 20, \dots\}$, itd. Jasne jest, że $|A_j| = 500$ dla $j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ oraz $|A_j \cap A_k| = 200$ dla $j, k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $j < k$.

Uwaga. Jeśli $s_1, s_2, \dots, s_{1000} \in \mathbb{R}$ i $s_1 + s_2 + \dots + s_{1000} = 2500$, to ponieważ funkcja $x^2 - x$ jest ściśle wypukła, więc (nierówność Jensena) $s_1^2 - s_1 + s_2^2 - s_2 + \dots + s_{1000}^2 - s_{1000} \geq 1000((\frac{s_1 + s_2 + \dots + s_{1000}}{1000})^2 - (\frac{s_1 + s_2 + \dots + s_{1000}}{1000})) = 1000(2,5^2 - 2,5) = 3750$ przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $s_i = 2,5$ dla każdego i . W zadaniu szacowaliśmy tę sumę (2000 składników) zakładając, że liczby $s_1, s_2, \dots, s_{1000}$ są całkowite. Całkowitymi sąsiadami liczby 2,5 są liczby 2 i 3. Stąd pomysł użycia równości $s^2 - s = (s - 2)(s - 3) + 4s - 6$.



LXVI Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych

zawodów stopnia trzeciego

14 kwietnia 2015 r. (drugi dzień zawodów)

Zadanie 4. Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^5 + y^5 + z^5 = 1 \end{cases}$$

w liczbach rzeczywistych x, y, z .

Rozwiązanie pierwsze Każda z trójek postaci $(t, -t, 1)$, $(t, 1, -t)$, $(1, t, -t)$ jest rozwiązaniem układu równań. Załóżmy teraz, że trójka (x, y, z) jest rozwiązaniem. Ze względu na symetrię układu możemy założyć, że $z \leq 1$ oraz $x \geq y$. Wtedy $x + y = 1 - z \geq 0$. Załóżmy, że dla pewnego $r > 0$ również trójka $(x + r, y - r, z)$ jest rozwiązaniem układu. Wtedy $1 - z^5 = (x + r)^5 + (y - r)^5 = x^5 + y^5 + 5r(x^4 - y^4) + 10r^2(x^3 + y^3) + 10r^3(x^2 - y^2) + 5r^4(x + y) = 1 - z^5 + 5r(x - y)(x + y)(x^2 + y^2) + 10r^2(x + y)(x^2 - xy + y^2) + 10r^3(x - y)(x + y) + 5r^4(x + y) = 1 - z^5 + 5r(x - y)(x + y)(x^2 + y^2) + 5r^2(x + y)((x - y)^2 + x^2 + y^2) + 10r^3(x - y)(x + y) + 5r^4(x + y) \geq 1 - z^5$ przy czym ostatnia nierówność staje się równością wtedy i tylko wtedy, gdy $x + y = 0$, czyli gdy $z = 1$, ale wtedy $y = -x$. Wobec tego dla każdego $z < 1$ istnieje co najwyżej jedna taka para (x, y) , że $x \geq y$ i trójka (x, y, z) jest rozwiązaniem badanego układu równań. Wykazaliśmy tym samym, że rozwiązań różnych od podanych na wstępie nie ma.

Rozwiązanie drugie Jeśli trójka (x, y, z) jest rozwiązaniem danego układu równań, to $0 = (x + y + z)^5 - x^5 - y^5 - z^5 = 5(x + y)(y + z)(z + x)(x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx) = \frac{5}{2}(x + y)(y + z)(z + x)((x + y)^2 + (y + z)^2 + (z + x)^2)$, zatem ta równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi co najmniej jedna z równości $x + y = 0$, $y + z = 0$ lub $z + x = 0$. Z pierwszej z nich wynika, że $z = 1$, z drugiej — $x = 1$, a z trzeciej — $y = 1$.

Uwaga. Niech $w(x, y, z) = (x + y + z)^5 - x^5 - y^5 - z^5$. Mamy $w(-y, y, z) = 0$. Wobec tego jeśli potraktujemy wielomian w zmiennych x, y, z jako wielomian zmiennej x , którego współczynnikami są wielomiany zmiennych y, z , to jest on podzielny przez wielomian $x - (-y) = x + y$. Wynik jest wielomianem trzech zmiennych (lub zmiennej x , którego współczynnikami są wielomiany zmiennych y, z).

Ponieważ $w(x, -z, z) = 0$, więc jest on (jako wielomian zmiennej y) podzielny przez wielomian $y - (-z) = y + z$. Wynik dzielenia potraktowany jako wielomian zmiennej z jest podzielny przez $z + x$. Wobec tego istnieje wielomian taki v zmiennych x, y, z , że $w(x, y, z) = (x + y)(y + z)(z + x)v(x, y, z)$. Ponieważ wielomiany w oraz $(x + y)(y + z)(z + x)$ są symetryczne, więc również wielomian v jest symetryczny. Ponieważ $w(tx, ty, tz) = t^5w(x, y, z)$ i $(tx + ty)(ty + tz)(tz + tx) = t^3(x + y)(y + z)(z + x)$ dla każdej czwórki liczb t, x, y, z , więc $v(tx, ty, tz) = t^2v(x, y, z)$, a stąd wynika od razu, że istnieją takie liczby a, b , że $v(x, y, z) = ax^2 + ay^2 + az^2 + bxy + byz + bzx$ dla dowolnych liczb x, y, z . Mamy $\frac{w(1,1,0)}{(1+1)(1+0)(0+1)} = 15$ oraz $\frac{w(2,1,0)}{(2+1)(1+0)(0+2)} = 35$, więc $15 = v(1, 1, 0) = 2a + b$ i $35 = v(2, 1, 0) = 5a + 2b$, zatem $a = 5a + 2b - 2(2a + b) = 35 - 30 = 5$, więc $b = 15 - 2 \cdot 5 = 5$. Stąd wynika równość $(x + y + z)^5 - x^5 - y^5 - z^5 = 5(x + y)(y + z)(z + x)(x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx)$ dla wszystkich trójek (x, y, z) .

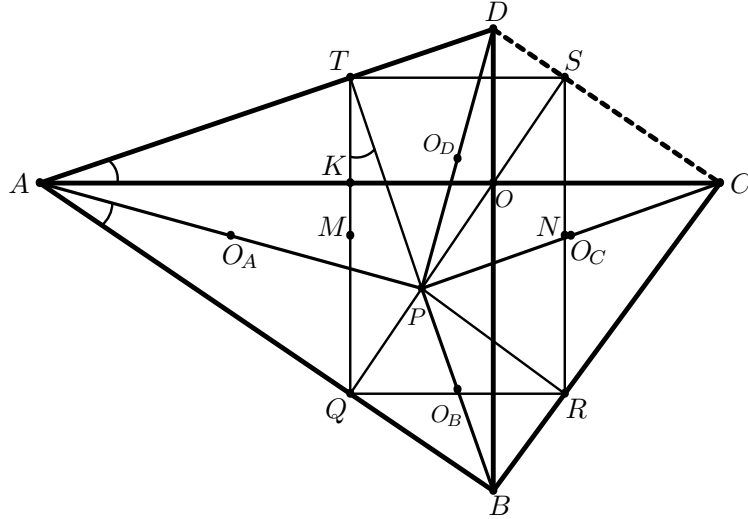
Wreszcie można ten układ rozwiązać traktując np. z jako parametr i wyznaczyć x i y w zależności od z , ale tego już robić nie będziemy.

Zadanie 5. Dowieść, że przekątne wypukłego czworokąta są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy wewnątrz tego czworokąta znajduje się punkt, którego rzuty prostopadłe na boki czworokąta są wierzchołkami prostokąta.

Rozwiązanie

Udowodnimy najpierw, że jeśli taki punkt istnieje, to przekątne są prostopadłe. Wierzchołki czworokąta oznaczmy kolejno literami A, B, C, D . Niech P oznacza punkt, którego rzuty prostopadłe na boki czworokąta są wierzchołkami prostokąta. Te rzuty oznaczamy literami Q, R, S, T , przy czym punkt Q leży na boku AB , R — na boku BC itd. Na każdym z czworokątów $AQPT$, $BRPQ$, $CSPR$ i $DTPS$ można opisać okrąg, bo w każdym dwa przeciwległe kąty są proste, więc ich suma jest 180° . Niech O_A, O_B, O_C, O_D będą środkami odcinków PA, PB, PC, PD . Są to środki okręgów opisanych odpowiednio na $AQPT, BRPQ, CSPR$ i $DTPS$ (środek okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym to środek jego przeciwprostokątnej). Niech M będzie środkiem odcinka QT , a N — odcinka RS . Punkt O_A równooddalony od Q i od T leży na symetralnej odcinka QT . Podobnie punkt O_C leży na symetralnej odcinka RS . Symetralną odcinków RS i QT jest prosta MN , bo $QRST$ jest prostokątem. Wobec tego środki odcinków AP i CP , czyli punkty O_A i O_C leżą na prostej MN .

Trójkąty O_APO_C i APC są jednokładne względem punktu P w skali 2, więc $AC \parallel O_AO_C$, zatem przekątna AC danego czworokąta jest równoległa do boku QR prostokąta $QRST$. W taki sam sposób dowodzimy, że przekątna BD jest równoległa do boku RS tego prostokąta. Jeśli zdarzy się, że punkty O_A, P, O_C są współliniowe, to rozumowanie tylko uprości się. Udowodniliśmy, że z istnienia punktu P wynika prostopadłość przekątnych AC i BD .



Trzeba teraz udowodnić, że z prostopadłości przekątnych AC i BD wynika istnienie punktu P , więc też prostokąta $QRST$. Niech O będzie punktem wspólnym przekątnych AC i BD . Bez straty ogólności rozważań można założyć, że $AO \geq OC$ i $BO \geq OD$. Niech ℓ_1 oznacza prostą symetryczną do AC względem dwusiecznej kąta $\sphericalangle DAB$, ℓ_2 — prostą symetryczną do prostej BD względem dwusiecznej kąta $\sphericalangle ABC$. Niech P będzie punktem wspólnym prostych ℓ_1 i ℓ_2 . Z założeń $AO \geq OC$ i $BO \geq OD$ wynika, że P leży w trójkącie ABO , poza bokiem AB . Niech K będzie punktem wspólnym prostych AC i QT . Punkty T, Q, R są rzutami punktu P na proste DA, AB i BC . Na każdym z czworokątów $AQPT$ i $BRPQ$ można opisać okrąg. Stąd i z konstrukcji punktu P wynika, że $\sphericalangle QTP = \sphericalangle QAP = \sphericalangle KAT$. Wobec tego $\sphericalangle KAT + \sphericalangle KTA = \sphericalangle QTP + \sphericalangle KTA = 90^\circ$, więc $\sphericalangle AKT = 90^\circ$, zatem $QT \perp AC$ i wobec tego $QT \parallel BD$. W taki sam sposób dowodzimy, że $QR \parallel AC$. Wobec tego $QR \perp QT$. Niech S będzie czwartym wierzchołkiem prostokąta $TQRS$. Wykażemy, że S leży na odcinku CD . Punkt O_D jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie

prostokątnym PDT . Odcinek O_DO_B jest równoległy do odcinka BD , bo trójkąty O_DPO_B i DPB są jednokładne względem punktu P . Wobec tego $O_DO_C \perp TS \parallel QR$. Stąd wynika, że prosta O_DO_B jest symetralną odcinka TS . Wobec tego $O_DS = O_DT = O_DD = O_DP$, zatem O_D jest środkiem okręgu opisanego na czworokącie $SDTP$. Ponieważ PD jest średnicą tego okręgu, więc $\sphericalangle DSP = 90^\circ$. Podobnie $\sphericalangle CSP = 90^\circ$. Punkty C, D leżą więc na pr. prostopadłej do PS , co kończy dowód.

Uwaga. Można bez trudu wykazać (prosta algebra), że jeśli $O = (0, 0)$, $A = (a, 0)$, $B = (0, b)$, $C = (c, 0)$ i $D = (0, d)$, to $P = (\frac{bd(a+c)}{ac+bd}, \frac{ac(b+d)}{ac+bd})$, $Q = (\frac{abd}{ac+bd}, \frac{abc}{ac+bd})$, $R = (\frac{bcd}{ac+bd}, \frac{abc}{ac+bd})$, $S = (\frac{bcd}{ac+bd}, \frac{acd}{ac+bd})$, $T = (\frac{abd}{ac+bd}, \frac{acd}{ac+bd})$. Pokażemy, jak można to zrobić. Równanie prostej AB wygląda tak: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$. Sprawdzamy szybko: $\frac{a}{a} + \frac{0}{b} = 1$ oraz $\frac{0}{a} + \frac{b}{b} = 1$, więc współrzędne punktów A i B spełniają to równanie. Równania prostych BC, CD i DA wyglądają tak: $\frac{x}{c} + \frac{y}{b} = 1$, $\frac{x}{c} + \frac{y}{d} = 1$ i $\frac{x}{a} + \frac{y}{d} = 1$. Niech $Q_t = (t, b(1 - \frac{t}{a}))$, $R_t = (\frac{ct}{a}, b(1 - \frac{t}{a}))$, $S_t = (\frac{ct}{a}, d(1 - \frac{t}{a}))$, $T_t = (t, d(1 - \frac{t}{a}))$ — wyliczone zostały współrzędne tych punktów w zależności od pierwszej współrzędnej punktu Q_t , która została oznaczona literą t , w taki sposób, by punkt Q_t leżał na prostej AB , punkt R_t — na BC , punkt S_t — na CD , punkt T_t — na DA . Czworokąt $Q_tR_tS_tT_t$ jest prostokątem o bokach równoległych do osi układu współrzędnych. Znajdziemy taki punkt $P_d = (p, q)$, że odcinek P_dQ_t będzie prostopadły do prostej AB , a odcinek P_dR_t — prostopadły do prostej BC . Spełniona ma być równość $(p-t) \cdot \frac{1}{b} - (q-b+\frac{bt}{a}) \cdot \frac{1}{a} = 0$ oraz $(p-\frac{ct}{a}) \cdot \frac{1}{b} - (q-b+\frac{bt}{a}) \cdot \frac{1}{c} = 0$. Odejmujemy od pierwszej pomnożonej przez a drugą pomnożoną przez c : $0 = (p-t)\frac{a}{b} - (p-\frac{ct}{a})\frac{c}{b} = \frac{p(a-c)}{b} + t\frac{c^2-a^2}{ab}$, więc $p = t\frac{c+a}{a}$. Obliczamy drugą współrzędną: $q = (p-t) \cdot \frac{a}{b} + b - \frac{bt}{a} = \frac{ct}{a} \cdot \frac{a}{b} + b - \frac{bt}{a} = b + t\frac{ac-b^2}{ab}$. W taki sam sposób znajdujemy taki punkt $P_g = (\tilde{p}, \tilde{q})$, że $P_gT_t \perp AD$ i $P_gS_t \perp AD$: $\tilde{p} = t\frac{c+a}{a} = p$ i $\tilde{q} = d + t\frac{ac-d^2}{ad}$. Obliczymy t z równania $q = \tilde{q}$: $d - b = t\frac{(ac-b^2)d - (ac-d^2)d}{abd} = t\frac{(ac+bd)(d-b)}{abd}$, zatem $t = \frac{abd}{ac+bd}$. Dla tego t otrzymujemy $P := P_d = P_g = (\frac{bd(a+c)}{ac+bd}, \frac{ac(b+d)}{ac+bd})$. Rzutami punktu P na proste AB, BC, CD i DA są punkty $Q := Q_t = (\frac{abd}{ac+bd}, \frac{abc}{ac+bd})$, $R := R_t = (\frac{bcd}{ac+bd}, \frac{abc}{ac+bd})$, $S := S_t = (\frac{bcd}{ac+bd}, \frac{acd}{ac+bd})$, $T := T_t = (\frac{abd}{ac+bd}, \frac{acd}{ac+bd})$. Zauważyć należy jeszcze, że punkt P znajduje się po tej samej stronie prostej AB co punkty C, D , po

tej samej stronie prostej BC co punkt A, D itd. Dla dowodu wystarczy spojrzeć na znak wyrażenia $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1$ po podstawieniu w miejsce (x, y) współrzędnych punktów P oraz np. C . Otrzymujemy $\frac{bd(a+c)}{a(ac+bd)} + \frac{ac(b+d)}{b(ac+bd)} - 1 = \frac{b^2d(a+c)+a^2c(b+d)-ab(ac+bd)}{ac+bd} = \frac{(b^2+a^2)cd}{ac+bd} < 0$ oraz $\frac{0}{a} + \frac{c}{a} - 1 = \frac{c-a}{a} < 0$. Pozostałe trzy sprawdzenia są analogiczne. o o przydługie opowiadanie ma pokazać, że w krótkim czasie można było znaleźć punkt P rozwiązując kilka równań liniowych.

Zadanie 6. Wykazać, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej a istnieje taka liczba całkowita $b > a$, że liczba $1 + 2^b + 3^b$ dzieli się przez liczbę $1 + 2^a + 3^a$.

Rozwiązanie

Dla $a = 1$ twierdzenie jest prawdziwe, bo $1 + 2 + 3 = 6$ jest dzielnikiem liczby $1 + 2^3 + 3^3 = 36$. Dalej zakładamy, że $a \geq 2$. Niech $1 + 2^a + 3^a = 2^r 3^s m$, gdzie r, s są nieujemnymi liczbami całkowitymi a m — dodatnią liczbą całkowitą niepodzielną ani przez 2, ani przez 3. Niech k będzie liczbą liczb względnie pierwszych z m ze zbioru $\{1, 2, \dots, m\}$. Z twierdzenia Eulera wynika, że liczby $2^k - 1$ i $3^k - 1$ są podzielne przez m , zatem dla każdej dodatniej liczby całkowitej n liczby $2^{nk} - 1 = (2^k - 1)(2^{k(n-1)} + 2^{k(n-2)} + \dots + 1)$ i $3^{nk} - 1 = (3^k - 1)(3^{k(n-1)} + 3^{k(n-2)} + \dots + 1)$ są podzielne przez m . Jeśli $n \geq 0$ jest liczbą całkowitą, to liczba $3^{2n} + 1 = (3^n + 1)^2 - 2 \cdot 3^n$ jest podzielna przez 2 i niepodzielna przez 4, natomiast liczba $3^{2n+1} + 1$ jest podzielna przez 4, ale nie przez 8, bo: $3^{2n+1} + 1 = 3(3^n - 1)(3^n + 1) + 4$, liczba $(3^n - 1)(3^n + 1)$ dzieli się przez 8 jako różnica **kolejnych** liczb parzystych. Wobec tego $r = 1$ dla parzystych a oraz $r = 2$ dla nieparzystych a . Zachodzi nierówność $s < a$, bo $3^a > 2^a + 1$, więc 3^a nie dzieli $2^a + 1$. Ponieważ 3^s jest dzielnikiem obu liczb $1 + 2^a + 3^a$ i 3^a , więc jest dzielnikiem $1 + 2^a$. Niech $b = a + 2ak$. Mamy $1 + 2^b + 3^b - (1 + 2^a + 3^a) = 2^a(2^{2ka} - 1) + 3^a(3^{2ka} - 1)$. Liczby $2^{2ka} - 1$ i $3^{2ka} - 1$ dzielą się przez m . Liczby 3^a i $2^{2ka} - 1 = (2^a - 1)(2^a + 1)(2^{2a(k-1)} + 2^{2a(k-2)} + \dots + 1)$ dzielą się przez 3^s . Liczby 2^2 i $3^{2ka} - 1$ dzielą się przez 4. Wobec tego różnica $1 + 2^b + 3^b - (1 + 2^a + 3^a)$ jest podzielna przez m , przez 3^s i przez 4, więc przez $1 + 2^a + 3^a$, co kończy dowód.



LXVII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia pierwszego

I seria: 1 września 2015 r. — 30 września 2015 r.

1. Na tablicy napisano liczbę całkowitą dodatnią. W każdym kroku zmazujemy liczbę n napisaną na tablicy i piszemy nową liczbę. Jeśli liczba n jest parzysta, to piszemy na tablicy liczbę $\frac{n}{2}$. Jeśli liczba n jest nieparzysta, to wybieramy jedną z liczb $3n + 1$, $3n - 1$ i piszemy ją na tablicy.

Czy — niezależnie od tego, jaką liczbę napisano na tablicy na początku — możemy, po skończeniu wielu krokach, uzyskać na tablicy jedynkę?

2. W trójkącie ABC punkt D leży na boku BC , E — na boku AB , przy czym $BD = AC$, $AD = AE$ i $AB^2 = AC \cdot BC$. Dowieść, że $\sphericalangle BAD = \sphericalangle CEA$.

3. Niech $f(x)$ i $g(x)$ będą takimi funkcjami kwadratowymi, że nierówność $|f(x)| \geq |g(x)|$ zachodzi dla każdej liczby rzeczywistej x . Δ_f jest wyróżnikiem funkcji f , a Δ_g — wyróżnikiem funkcji g . Udowodnić, że $|\Delta_f| \geq |\Delta_g|$.

4. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Kąt przy wierzchołku B jest prosty, a kąty przy wierzchołkach A i C — ostre. Przez punkt P , leżący wewnątrz czworokąta $ABCD$ poprowadzono proste równoległe do boków AB i CB . Dzielą one czworokąt $ABCD$ na cztery wielokąty.

Wielokąt, którego jednym z wierzchołków jest A ma pole a .

Wielokąt, którego jednym z wierzchołków jest B ma pole b .

Wielokąt, którego jednym z wierzchołków jest C ma pole c .

Czwarty wielokąt ma pole d .

Udowodnić, że $ac \geq bd$.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

30 września 2015 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane. Rozwiązanie każdego zadania należy podpisać w lewym górnym rogu pierwszej jego strony: imieniem i nazwiskiem, swoim adresem, swoim adresem elektronicznym oraz klasą, nazwą i adresem szkoły.



LXVII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia pierwszego

II seria: 1 października 2015 r. — 2 listopada 2015 r.

5. Wykazać, że dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich a, b równanie

$$(x^2 - y^2 - a)(x^2 - y^2 - b)(x^2 - y^2 - ab) = 0$$

ma przynajmniej jedno rozwiązanie w liczbach całkowitych x, y .

6. Znaleźć wszystkie takie pary P, Q wielomianów o współczynnikach rzeczywistych, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzą obie równości: $P(x^2 + 1) = Q(x)^2 + 2x$ oraz $Q(x^2 + 1) = P(x)^2$.

7. Dwuosobowa gra polega na stawianiu pionków na wierzchołkach n -kąta foremnego (zakładamy, że $n \geq 3$). Gracze wykonują ruchy na przemian. Gracz stawia jeden ze swych, dotychczas nieużytych pionków na dowolnym niezajętym wierzchołku, który nie sąsiaduje z wierzchołkiem zajęтым przez pionek przeciwnika. Przegrywa gracz, który nie może wykonać ruchu. Rozstrzygnąć, w zależności od n , czy strategię wygrywającą ma gracz rozpoczynający grę, czy jego przeciwnik?

8. W trójkącie ABC punkt I jest środkiem okręgu wpisanego. Prosta AI przecina odcinek BC w punkcie D . Symetralna odcinka AD przecina proste BI oraz CI odpowiednio w punktach P i Q . Dowieść, że wysokości trójkąta PQD przecinają się w punkcie I .

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

2 listopada 2015 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane. Rozwiązanie każdego zadania należy podpisać w lewym górnym rogu pierwszej jego strony: imieniem i nazwiskiem, swoim adresem, swoim adresem elektronicznym oraz klasą, nazwą i adresem szkoły.



III seria: 3 listopada 2015 r. — 4 grudnia 2015 r.

9. Dowieść, że liczba $\sqrt{10} - \sqrt{6} - \sqrt{5} + \sqrt{3}$ jest niewymierna.

[illegible]

11. Wiersze i kolumny nieskończonej tabeli są ponumerowane liczbami całkowitymi nieujemnymi. W jej pola wpisane są liczby całkowite nieujemne według następującej reguły: w każdym polu znajduje się najmniejsza liczba, nieobecna w żadnym wcześniejszym polu tego samego wiersza ani tej samej kolumny (poniżej, dla ilustracji, fragment tej tabeli). Udowodnić, że jeśli na przecięciu m -tego wiersza z n -tą kolumną znajduje się liczba r , to na przecięciu m -tego wiersza z r -tą kolumną znajduje się liczba n .

0	1	2	3	4	...
1	0	3	2	5	...
2	3	0	1	6	...
3	2	1	0	7	...
4	5	6	7	0	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

12. Dany jest czworościan $ABCD$. Punkt S jest środkiem sfery wpisanej w czworościan $ABCD$, zaś Q jest środkiem sfery dopisanej do niego, stycznej do ściany ABC oraz do płaszczyzn pozostałych ścian. Punkty K i L są rzutami prostokątnymi punktu Q na proste AB i BC . Dowieść, że proste (skośne) KL i BS są prostopadłe.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

4 grudnia 2015 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane. Rozwiązanie każdego zadania należy podpisać w lewym górnym rogu pierwszej jego strony: imieniem i nazwiskiem, swoim adresem, swoim adresem elektronicznym oraz klasą, nazwą i adresem szkoły.

Adresy Komitetów Okręgowych Olimpiady Matematycznej

- Dla województwa pomorskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Gdańskiego, ul. Wita Stwosza 57, 80-952 Gdańsk.
- Dla województwa śląskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Śląskiego, ul. Bankowa 14, 40-007 Katowice.
- Dla województwa małopolskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego, ul. Łojasiewicza 6, 30-348 Kraków.
- Dla województwa lubelskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Zakład Rachunku Prawdopodobieństwa pok. 810, Instytut Matematyki Uniwersytetu Marii Curie-Skłodowskiej, pl. Marii Curie-Skłodowskiej 1, 20-031 Lublin.
- Dla województwa łódzkiego i świętokrzyskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Łódzkiego, ul. Banacha 22, 90-238 Łódź.
- Dla województwa wielkopolskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Adama Mickiewicza, ul. Umultowska 87, 61-614 Poznań.
- Dla województwa podkarpackiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Katedra Matematyki Politechniki Rzeszowskiej, al. Powstańców Warszawy 8, 35-959 Rzeszów.
- Dla województwa lubuskiego i zachodniopomorskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Szczecińskiego, ul. Wielkopolska 15, 70-451 Szczecin.
- Dla województwa kujawsko-pomorskiego i warmińsko-mazurskiego: — Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, ul. Chopina 12/18, 87-100 Toruń.
- Dla województwa mazowieckiego i podlaskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, ul. Śniadeckich 8, 00-656 Warszawa.
- Dla województwa dolnośląskiego i opolskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego, pl. Grunwaldzki 2/4, 50-384 Wrocław.



LXVII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych

zawodów stopnia pierwszego

pierwsza seria: 1 września — 30 września

Zadanie 1.

Na tablicy napisano liczbę całkowitą dodatnią. W każdym kroku zmazujemy liczbę n napisaną na tablicy i piszemy nową liczbę. Jeśli liczba n jest parzysta, to piszemy na tablicy liczbę $\frac{n}{2}$. Jeśli liczba n jest nieparzysta, to wybieramy jedną z liczb $3n+1$, $3n-1$ i piszemy ją na tablicy.

Czy — niezależnie od tego, jaką liczbę napisano na tablicy na początku — możemy, po skończeniu wielu krokach, uzyskać na tablicy jedynkę?

Rozwiązanie

Oczywiście $\frac{n}{2} < n$ dla każdej liczby parzystej n .

Jeśli n jest liczbą nieparzystą, to $n = 4k + 1$ lub $n = 4k + 3$ dla pewnej liczby całkowitej $k \geq 0$.

W pierwszym wypadku po zmazaniu n na tablicy piszemy $3n + 1 = 12k + 4$, więc w następnych krokach pojawiają się liczby $\frac{3n+1}{2} = 6k + 2$ i $\frac{3n+1}{4} = 3k + 1 < 4k + 1 = n$ dla $k > 0$, czyli $n > 1$.

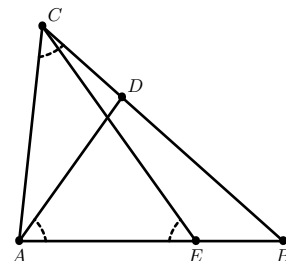
W drugim wypadku na tablicy piszemy liczbę $3n - 1 = 12k + 8$, co zmusza nas do zastąpienia jej kolejno przez $6k + 4$ i przez $3k + 2 < 4k + 3 = n$ dla każdej liczby $k \geq 0$.

Wykazaliśmy, że jeśli na tablicy pojawiła się na początku liczba $n > 1$, to najdalej po trzech krokach możemy napisać liczbę od niej mniejszą (niezależnie od parzystości n). Oznacza to, że po skończonej liczbie kroków możemy uzyskać liczbę 1. $\square$

Zadanie 2. W trójkącie ABC punkt D leży na boku BC , E — na boku AB , przy czym $BD = AC$, $AD = AE$ i $AB^2 = AC \cdot BC$. Dowieść, że $\sphericalangle BAD = \sphericalangle CEA$.

Rozwiązanie

Ponieważ $AB^2 = AC \cdot BC = BD \cdot BC$, czyli $\frac{AB}{BC} = \frac{BD}{AB}$, więc na mocy cechy *bok – kąt – bok* trójkąty ABC i DBA są podobne, w szczególności $\frac{AC}{BA} = \frac{DA}{BD}$. Wobec tego $\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{BD} = \frac{AC}{AB}$, więc na mocy cechy *bok – kąt – bok* trójkąty EAC i CAB są podobne. Wobec tego



$\sphericalangle CEA = \sphericalangle BCA = \sphericalangle BAD$ — ostatnia równość wynika z podobieństwa trójkątów ABC i DBA . $\square$

Zadanie 3. Niech $f(x)$ i $g(x)$ będą takimi funkcjami kwadratowymi, że nierówność $|f(x)| \geq |g(x)|$ zachodzi dla każdej liczby rzeczywistej x . Δ_f jest wyróżnikiem funkcji f , a Δ_g — wyróżnikiem funkcji g . Udowodnić, że $|\Delta_f| \geq |\Delta_g|$.

Rozwiązanie

Niech $f(x) = Ax^2 + Bx + C$, $g(x) = ax^2 + bx + c$. Pomnożenie którejkolwiek z tych funkcji przez -1 nie zmienia ani jej modułu, ani wyróżnika. Nie tracąc ogólności przyjmujemy więc, że $A > 0$, $a > 0$. Rozważymy trzy przypadki.

1°. $\Delta_f > 0$. Wówczas trójmian f ma dwa pierwiastki rzeczywiste x_1, x_2 . Są to jednocześnie pierwiastki trójmianu g (bo $|f| \geq |g|$). Zatem $f(x) = A(x - x_1)(x - x_2)$, $g(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, czyli $g(x) = t \cdot f(x)$, gdzie $t = \frac{a}{A} > 0$. Oczywiście $t \leq 1$ (bo $|g| \leq |f|$). Równość $g = tf$ oznacza, że $a = tA$, $b = tB$, $c = tC$; stąd $|\Delta_g| = |t^2 \Delta_f| \leq |\Delta_f|$.

2°. $\Delta_f \leq 0 < \Delta_g$. W tym przypadku trójmian f przyjmuje wyłącznie wartości nieujemne. Założenie przybiera postać $f(x) \geq |g(x)|$, zatem obie funkcje $f + g$ oraz $f - g$ przyjmują wyłącznie wartości nieujemne. Pierwsza z nich jest więc trójmianem kwadratowym o wyróżniku $\Delta_{f+g} \leq 0$. Druga też jest trójmianem kwadratowym o wyróżniku $\Delta_{f-g} \leq 0$ lub jest stałą nieujemną. Otrzymujemy nierówności

$$(B + b)^2 - 4(A + a)(C + c) \leq 0, \quad (B - b)^2 - 4(A - a)(C - c) \leq 0;$$

ta druga zachodzi także wtedy, gdy $f - g$ jest stałą (czyli $A = a$, $B = b$). Przepisujemy te nierówności w postaci

$$\Delta_f + \Delta_g + (2Bb - 4Ac - 4Ca) \leq 0, \quad \Delta_f + \Delta_g - (2Bb - 4Ac - 4Ca) \leq 0.$$

Uzyskujemy wniosek, że

$$\Delta_f + \Delta_g \leq 2Bb - 4Ac - 4Ca \leq -\Delta_f - \Delta_g,$$

równoważny nierówności

$$0 \leq |2Bb - 4Ac - 4Ca| \leq -\Delta_f - \Delta_g = |\Delta_f| - |\Delta_g|.$$

3°. $\Delta_f \leq 0$, $\Delta_g \leq 0$. Teraz oba te trójmiany (f i g) przyjmują wyłącznie wartości nieujemne, a założenie ma postać $f(x) \geq g(x)$. Wartości minimalne tych trójmianów to $f(-\frac{B}{2A}) = \frac{|\Delta_f|}{4A}$, $g(-\frac{b}{2a}) = \frac{|\Delta_g|}{4a}$ (wierzchołki parabol). Dla każdego x mamy $f(x) \geq g(x) \geq g(-\frac{b}{2a})$. Biorąc $x = -\frac{B}{2A}$ otrzymujemy nierówność $\frac{|\Delta_f|}{4A} \geq \frac{|\Delta_g|}{4a}$, czyli $|\Delta_f| \geq \frac{A}{a}|\Delta_g| \geq |\Delta_g|$.

Rozpatrzone trzy przypadki obejmują wszystkie możliwości. W każdym z nich uzyskaliśmy żadaną nierówność $|\Delta_f| \geq |\Delta_g|$.

Zadanie 4. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Kąt przy wierzchołku B jest prosty, a kąty przy wierzchołkach A i C — ostre. Przez punkt P , leżący wewnątrz czworokąta $ABCD$ poprowadzono proste równoległe do boków AB i CB . Dzieli one czworokąt $ABCD$ na cztery wielokąty.

Wielokąt, którego jednym z wierzchołków jest A ma pole a .

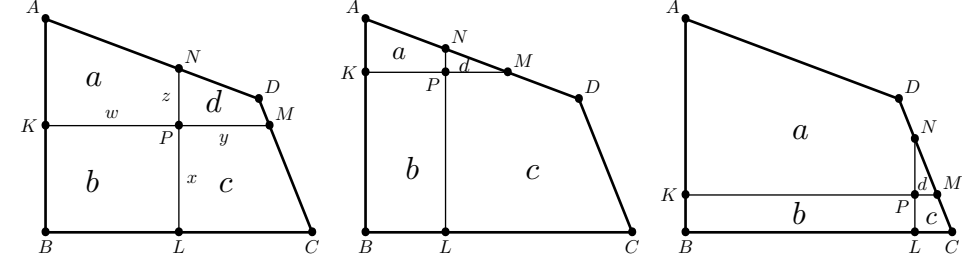
Wielokąt, którego jednym z wierzchołków jest B ma pole b .

Wielokąt, którego jednym z wierzchołków jest C ma pole c .

Czwarty wielokąt ma pole d .

Udowodnić, że $ac \geq bd$.

Rozwiązanie



Niech K będzie rzutem prostokątnym punktu P na bok AB , L — rzutem prostokątnym punktu P na bok BC . K i L są punktami wewnętrznymi odpowiednich boków, bo kąt ABC jest prosty zaś kąty DAB i BCD są ostre. Niech M i N będą punktami przecięcia prostych KP i LP z obwodem czworokąta znajdującymi się poza odcinkami AB i BC . Oznaczmy długości kolejnych odcinków PK , PL , PM i PN literami w , x , y , z . Pole czworokąta $KBLP$ równe jest b , a ponieważ jest to prostokąt, którego boki mają długości w i x , więc $b = wx$. Wielokąt o polu a (czworokąt lub pięciokąt) zawiera prostokąt o bokach długości w i z , więc $a > wz$. Analogicznie $c > xy$. Natomiast czwarty wielokąt, ten o polu d , jest albo trójkątem albo czworokątem. W obu wypadkach jest zawarty w prostokącie o bokach długości y i z , zatem $d < yz$. Mamy więc $ac > wzxy = wxyz > bd$, a to chcieliśmy udowodnić. $\square$

Zadanie 5. Wykazać, że dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich a, b równanie

$$(x^2 - y^2 - a)(x^2 - y^2 - b)(x^2 - y^2 - ab) = 0$$

ma przynajmniej jedno rozwiązanie w liczbach całkowitych x, y .

Rozwiązanie

Jeśli liczba a jest nieparzysta, to przyjmując $x = \frac{a+1}{2}$, $y = \frac{a-1}{2}$ otrzymujemy $x^2 - y^2 - a = 0$. Podobnie, gdy b jest liczbą nieparzystą, para liczb całkowitych $x = \frac{b+1}{2}$, $y = \frac{b-1}{2}$ spełnia równanie $x^2 - y^2 - b = 0$. Jeśli obie liczby a i b są parzyste, to para liczb całkowitych $x = \frac{a+b}{2}$, $y = \frac{a-b}{2}$ spełnia równanie $x^2 - y^2 - ab = 0$. W każdym z trzech przypadków wskazaliśmy parę liczb całkowitych spełniającą równanie $(x^2 - y^2 - a)(x^2 - y^2 - b)(x^2 - y^2 - ab) = 0$. $\square$

Zadanie 6. Znaleźć wszystkie takie pary P, Q wielomianów o współczynnikach rzeczywistych, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzą obie równości:

$$P(x^2 + 1) = Q(x)^2 + 2x \quad \text{oraz} \quad Q(x^2 + 1) = P(x)^2.$$

Rozwiązanie

Mamy $2x + Q(x)^2 = P(x^2 + 1) = P((-x)^2 + 1) = Q(-x)^2 - 2x$, zatem $4x = Q(-x)^2 - Q(x)^2 = (Q(-x) - Q(x))(Q(-x) + Q(x))$. Wynika stąd, że jeden z wielomianów $Q(-x) - Q(x)$, $Q(-x) + Q(x)$ jest stopnia 0, a drugi — stopnia 1. W wielomianie $Q(-x) + Q(x)$ występują tylko parzyste potęgi zmiennej x , więc jego stopień jest liczbą parzystą. Ponieważ ten stopień nie jest większy od 1, więc jest równy 0, czyli wielomian $Q(-x) + Q(x)$ jest stałą (różną od 0). Wobec tego stopień wielomianu $Q(-x) - Q(x)$ jest równy 1. Oczywiście $Q(-0) - Q(0) = 0$. Istnieją więc takie liczby $a \neq 0$ i $c \neq 0$, że $Q(-x) + Q(x) = 2c$, $Q(-x) - Q(x) = 2ax$ dla każdej liczby rzeczywistej x . Stąd wynika, że $Q(x) = -ax + c$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Z równości $Q(x^2 + 1) = P(x)^2$ wynika, że stopień wielomianu P jest równy 1, więc istnieją takie liczby $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, że $P(x) = \alpha x + \beta$. W konsekwencji

$$-a(x^2 + 1) + c = P(x)^2 = \alpha^2 x^2 + 2\alpha\beta x + \beta^2,$$

więc $2\alpha\beta = 0$, a ponieważ $\alpha \neq 0$, zatem $\beta = 0$ i wobec tego $-a = \alpha^2$ i $c - a = \beta^2 = 0$. Oznacza to, że $a = c = -\alpha^2$, czyli $P(x) = \alpha x$ oraz $Q(x) = \alpha^2(x - 1)$. Z równości $P(x^2 + 1) = Q(x)^2 + 2x$ wnioskujemy,

że $\alpha(x^2 + 1) = \alpha^4(x - 1)^2 + 2x$. Dla $x = 1$ mamy $2\alpha = 2$, więc $\alpha = 1$. Udowodniliśmy, że istnieje co najwyżej jedna para takich wielomianów: $P(x) = x$ i $Q(x) = x - 1$. Bez trudu sprawdzamy, że te wielomiany spełniają równania z treści zadania. Istnieje zatem dokładnie jedna para wielomianów spełniających oba warunki. $\square$

Zadanie 7. Dwuosobowa gra polega na stawianiu pionków na wierzchołkach n -kąta foremnego (zakładamy, że $n \geq 3$). Gracze wykonują ruchy na przemian. Gracz stawia jeden ze swych, dotychczas nieużytych pionków na dowolnym niezajętym wierzchołku, który nie sąsiaduje z wierzchołkiem zajęтым przez pionek przeciwnika. Przegrywa gracz, który nie może wykonać ruchu. Rozstrzygnąć, w zależności od n , czy strategię wygrywającą ma gracz rozpoczynający grę, czy jego przeciwnik?

Rozwiązanie

Załóżmy, że pierwszym graczem jest Ewa, a drugim — Jan. Wykażemy, że jeśli liczba n jest parzysta, to strategię wygrywającą ma Jan, a jeśli liczba n jest nieparzysta — Ewa. Zaczniemy od pierwszego przypadku. Jan może zawsze postawić następny pionek na polu symetrycznym względem środka wielokąta do pola, na którym postawiła pionek Ewa. To gwarantuje mu wygraną w oczywisty sposób, niezależnie od poczynąń swej przeciwniczki.

Teraz załóżmy, że n jest nieparzyste. Ewa stawia gdzieś swój pionek, co powoduje, że Jan nie może korzystać z trzech pól. Wyobraźmy sobie, że gracze przenoszą się na wielokąt, który ma $n - 1$ wierzchołków. Są tam dwa pola sąsiednie zakazane dla Jana, ale nie dla Ewy. Teraz Jan stawia gdzieś swój pionek, a Ewa stawia na polu symetrycznym względem środka $(n - 1)$ -kąta. Może zawsze to uczynić, więc teraz ona wygra (jeśli tylko będzie kontynuować swe postępowanie). $\square$

Rozwiązanie

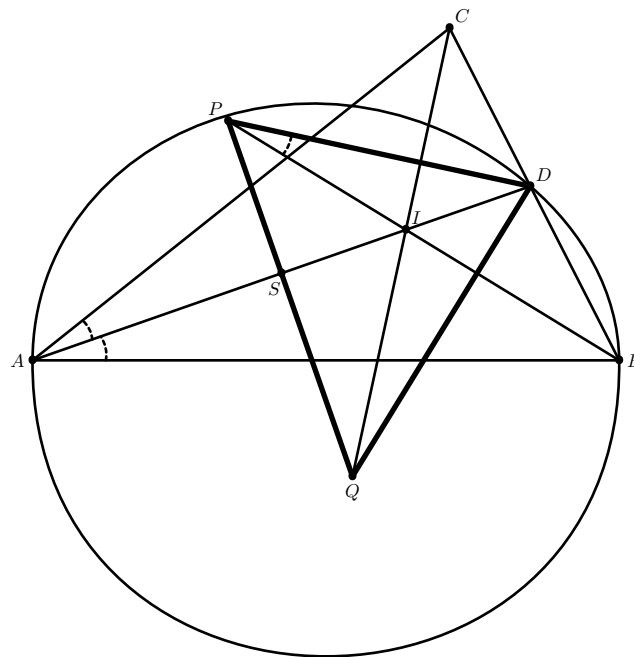
$$\sphericalangle B\bar{D}A = 180^\circ - (\beta + \frac{\alpha}{2}) = \alpha + \beta + \gamma - (\beta + \frac{\alpha}{2}) = \frac{\alpha}{2} + \gamma,$$

Rozważmy okrąg opisany na trójkącie ABD . Dwusieczna BI przecina go w środku tego łuku o końcach A i D , który nie zawiera punktu B . Również symetralna cięciwy AD przechodzi przez ten środek. Jedyнным punktem wspólnym owej symetralnej i prostej BI jest punkt P (proste te nie pokrywają się, skoro pierwsza z nich nie przechodzi przez punkt I). Punkt P leży więc na rozważanym okręgu po tej samej stronie prostej BD co punkt A . Stąd otrzymujemy $\sphericalangle DPB = \sphericalangle DAB$, czyli $\sphericalangle DPI = \frac{\alpha}{2}$.

Łącząc uzyskane związki, otrzymujemy równość

$$\sphericalangle DPI + \sphericalangle PIC = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = 90^\circ.$$

Wynika z niej, że prosta IC (czyli prosta QI) jest prostopadła do prostej PD . Zawiera więc wysokość trójkąta PQD . Inną wysokością tego trójkąta jest odcinek DS , przechodący przez punkt I . Oznacza to, że wysokości trójkąta PQD przecinają się w punkcie I . $\square$



Zadanie 11. Wiersze i kolumny nieskończonej tabeli są ponumerowane liczbami całkowitymi nieujemnymi. W jej pola wpisane są liczby całkowite nieujemne według następującej reguły: w każdym polu znajduje się najmniejsza liczba, nieobecna w żadnym wcześniejszym polu tego samego wiersza ani tej samej kolumny (poniżej, dla ilustracji, fragment tej tabeli). Udowodnić, że jeśli na przecięciu m -tego wiersza z n -tą kolumną znajduje się liczba r , to na przecięciu m -tego wiersza z r -tą kolumną znajduje się liczba n .

0	1	2	3	4	...
1	0	3	2	5	...
2	3	0	1	6	...
3	2	1	0	7	...
4	5	6	7	0	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Rozwiązanie

Pokażemy najpierw nieco większy fragment tabeli.

0	1	2	3	4	5	6	7	...
1	0	3	2	5	4	7	6	...
2	3	0	1	6	7	4	5	...
3	2	1	0	7	6	5	4	...
4	5	6	7	0	1	2	3	...
5	4	7	6	1	0	3	2	...
6	7	4	5	2	3	0	1	...
7	6	5	4	3	2	1	0	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Będziemy używali zapisu liczb w dwójkowym systemie pozycyjnym. Każda dodatnia liczba całkowita n ma jednoznaczne przedstawienie w postaci $c_0 + 2c_1 + \dots + 2^t c_t$, gdzie $c_i = 0$ lub 1 (dla $i = 0, \dots, t$), przy czym $c_t = 1$; zapisem dwójkowym liczby n jest wtedy ciąg $t + 1$ cyfr $c_t c_{t-1} \dots c_1 c_0$. Działa ponadto umowa, że wiodącą jedynekę ($c_t = 1$) poprzedzamy zerami tworząc nieskończony ciąg (podobnie, jak w zapisie dziesiętnym, gdzie np. liczbę 77 można — w razie potrzeby — zapisać jako $\dots 00077$; tę samą liczbę zapisujemy w systemie dwójkowym jako 1001101 ($77 = 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 8 + 0 \cdot 16 + 0 \cdot 32 + 1 \cdot 64$), a w wyniku wydłużenia ciągu cyfr w lewo jako $\dots 001001101$). Liczbę 0 zapisu-

jemy jako nieskończony ciąg zer. Mówimy, że liczba o przedstawieniu dwójkowym $\dots 000c_t \dots c_1 c_0$ ma na i -tej pozycji zero (jedynekę), gdy $c_i = 0$ (gdy $c_i = 1$).

Niech x, y będą nieujemnymi liczbami całkowitymi. Patrzymy na ich przedstawienia dwójkowe (nieskończone). Symbolem $x \diamond y$ będziemy oznaczać liczbę określoną następująco:

gdy x oraz y mają na i -tej pozycji jednakowe cyfry, liczba $x \diamond y$ ma na i -tej pozycji zero;

gdy x oraz y mają na i -tej pozycji różne cyfry, liczba $x \diamond y$ ma na i -tej pozycji jedynekę¹

(Przykład: dla $x = \dots 0001001101$, $y = \dots 0000011100$ mamy $x \diamond y = \dots 0001010001$). Jasne jest, że zdefiniowane tak działanie przemienne ($x \diamond y = y \diamond x$) i łączne ($(x \diamond y) \diamond z = x \diamond (y \diamond z)$). Jest też jasne, że $x \diamond 0 = x$ oraz $x \diamond x = 0$ dla każdej liczby x . Ma ono ponadto ważną własność:

(1) jeżeli $z = x \diamond y$, to $x = y \diamond z$ oraz $y = x \diamond z$.

Wynika to od razu z wymienionych wcześniej własności działania $\diamond$:

$$y \diamond z = z \diamond y = (x \diamond y) \diamond y = x \diamond (y \diamond y) = x \diamond 0 = x \text{ oraz}$$

$$x \diamond z = x \diamond (x \diamond y) = (x \diamond x) \diamond y = 0 \diamond y = y.$$

W tabeli, rozważanej w zadaniu, pole leżące na przecięciu m -tego wiersza i n -tej kolumny będziemy oznaczać $\langle m, n \rangle$. Udowodnimy, że dla każdej pary liczb całkowitych $m, n \geq 0$:

(2) w polu $\langle m, n \rangle$ znajduje się liczba $m \diamond n$.

(jest to więc „tabliczka wartości działania $\diamond$ ”, podobna do „tabliczki mnożenia”, choć znacznie większa). Teza zadania wyniknie stąd natychmiast: gdy w polu $\langle m, n \rangle$ stoi liczba $r = m \diamond n$, to w myśl reguły (1), $n = m \diamond r$, czyli w polu $\langle m, r \rangle$ stoi liczba n .

Dowód prowadzimy przez indukcję względem sumy współrzędnych pól. W polu $\langle 0, 0 \rangle$ znajduje się najmniejsza dopuszczalna liczba, czyli 0 ($= 0 \diamond 0$). Ustalmy wartość sumy $s \geq 1$ i założmy, że w każdym

¹ i -ta cyfra liczby $x \diamond y$ jest więc resztą z dzielenia przez 2 sumy i -tych cyfr liczb x, y . Traktując i -te cyfry liczb x, y jako wartości logiczne zdań możemy powiedzieć, że i -tą cyfrą liczby $x \diamond y$ jest alternatywa wykluczająca i -tych cyfr liczb x, y .

polu $\langle k, l \rangle$ o sumie $k + l < s$ znajduje się liczba $k \diamond l$. Weźmy dowolne pole $\langle m, n \rangle$ o sumie $m + n = s$. Należy udowodnić, że liczba r , określona jako $r = m \diamond n$, jest różna od wszystkich liczb postaci $k \diamond n$ (gdzie $k < m$) oraz od wszystkich liczb $m \diamond l$ (gdzie $l < n$), i że jest najmniejszą liczbą o tej własności.

Pierwsza część stwierdzenia jest oczywista: gdyby zachodziła równość $k \diamond n = m \diamond n$, to zgodnie z regułą (1) otrzymalibyśmy równość $k = (k \diamond n) \diamond n = (m \diamond n) \diamond n = m$, wbrew $k < m$. Analogicznie wykluczamy możliwość $m \diamond n = m \diamond l$, $l < n$.

Pozostaje uzasadnić, że każda liczba $q < r$ znajduje się na jakimś polu $\langle k, n \rangle$, $k < m$, lub $\langle m, l \rangle$, $l < n$ – czyli, zgodnie z założeniem indukcyjnym – że

(3) $q = k \diamond n$ dla pewnego $k < m$ lub $q = m \diamond l$ dla pewnego $l < n$. Niech j będzie najwcześniejszą (od lewej strony) pozycją, na której różnią się cyfry przedstawień dwójkowych liczb q i r . Nierówność $q < r$ oznacza, że na tej pozycji liczba q ma zero, a liczba r jedynkę. Skoro $r = m \diamond n$, liczby m , n mają na pozycji j różne cyfry. Przyjmijmy, że m ma jedynkę, a n ma tam zero (nie tracimy ogólności, wobec symetrii ról wierszy i kolumn).

Weźmy liczbę $k = q \diamond n$. Wtedy, zgodnie z (1), $q = k \diamond n$. Aby uzyskać jeden z wymaganych warunków (3), wystarczy wykazać, że $k < m$.

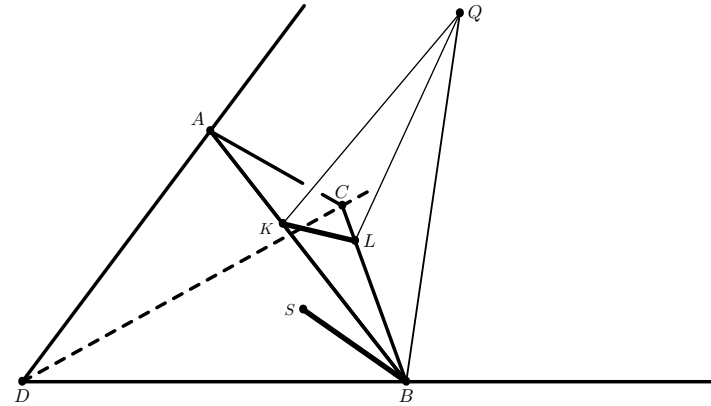
Przypuśćmy, że tak nie jest, więc że $k \geq m$. Na pozycji j liczba k ma zero, a liczba m jedynkę, zatem $k \neq m$, więc $k > m$. Oznacza to, że na pewnej pozycji i , na lewo od j , liczba k ma jedynkę, zaś m ma zero. Skoro $k = q \diamond n$ oraz $m = r \diamond n$, cyfry liczb q , n na pozycji i są różne, a cyfry liczb r , n na tej pozycji są jednakowe. To się nie da pogodzić z tym, że zapisy liczb q i r pokrywają się w całym fragmencie na lewo od j , w tym na pozycji i . Sprzeczność dowodzi, że istotnie $k < m$. (Gdybyśmy, chwilę wcześniej, przyjęli przeciwny układ cyfr liczb m , n na pozycji j , uzyskalibyśmy dla liczby $l = m \diamond q$ drugi z warunków (3)).

Otrzymaliśmy tezę indukcyjną dla dowolnego pola $\langle m, n \rangle$ z sumą $m + n = s$. To dowodzi słuszności stwierdzenia (2) dla wszystkich par liczb $m, n \geq 0$ i tym samym kończy rozwiązanie zadania. $\square$

Zadanie 12. Dany jest czworościan $ABCD$. Punkt S jest środkiem sfery wpisanej w czworościan $ABCD$, zaś Q jest środkiem sfery dopisanej do niego, stycznej do ścian ABC oraz do płaszczyzn pozostałych ścian. Punkty K i L są rzutami prostokątnymi punktu Q na proste AB i BC . Dowieść, że proste (skośne) KL i BS są prostopadłe.

Rozwiązanie

Płaszczyzny BCQ i BCS są prostopadłe, gdyż dzielą na połowy kąty dwuścienne między półpłaszczyzną o krawędzi BC przechodzącą przez punkt A i płaszczyzną DBC , czyli kąty dopełniające się do 180° . Prosta QL jest prostopadła do krawędzi przecięcia tych płaszczyzn, leży w płaszczyźnie BCQ , zatem jest prostopadła do płaszczyzny BCS . Wobec tego jest prostopadła do każdej prostej leżącej w płaszczyźnie BCS , w tym do prostej BS . W taki sam sposób uzasadniamy prostopadłość prostych BS i QK . Proste QL i QK są różne, więc wyznaczają płaszczyznę. Płaszczyzna QKL jest prostopadła do prostej BS , zatem prosta KL , zawarta w płaszczyźnie BKL , też jest prostopadła do BS .



$\square$



LXVII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe

zawodów stopnia drugiego

19 lutego 2016 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. We wnętrzu trójkąta o bokach długości 3, 4, 5 leży punkt P . Wykazać, że jeżeli odległości P od wierzchołków są wszystkie wymierne, to odległości P od boków też.

2. W trójkącie ostrokątnym ABC dwusieczna kąta BAC przecina bok BC w punkcie D . Symetralna odcinka AD przecina okrąg opisany na trójkącie ABC w punktach E i F . Udowodnić, że okrąg opisany na trójkącie DEF jest styczny do prostej BC .

3. Niech $\mathbb{Z}$ oznacza zbiór liczb całkowitych. Rozstrzygnąć, czy istnieje funkcja f , która każdej liczbie całkowitej k przypisuje nieujemną liczbę całkowitą $f(k)$ i spełnia następujące dwa warunki:

- $f(0) > 0$,
- dla każdej liczby całkowitej k najmniejsza spośród liczb postaci $f(k-l) + f(l)$, gdzie $l \in \mathbb{Z}$, jest równa $f(k)$.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.



LXVII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe

zawodów stopnia drugiego

20 lutego 2016 r. (drugi dzień zawodów)

4. Dana jest liczba całkowita dodatnia k . Udowodnić, że istnieje liczba całkowita dodatnia n , dla której zbioru $A = \{1^2, 2^2, 3^2, \dots\}$ i $B = \{1^2 + n, 2^2 + n, 3^2 + n, \dots\}$ mają dokładnie k wspólnych elementów.

5. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Punkty P i Q leżą odpowiednio na półprostych $AB^{\rightarrow}$ i $AD^{\rightarrow}$, przy czym $AP = CD$, $AQ = BC$. Wykazać, że środek odcinka PQ leży na prostej AC .

6. W przestrzeni danych jest n zielonych punktów, przy czym $n \geq 4$ i żadne cztery zielone punkty nie leżą na jednej płaszczyźnie. Niektóre odcinki łączące zielone punkty pomalowano na czerwono. Liczba czerwonych odcinków jest parzysta. Każde dwa różne zielone punkty łączy pewna łamana złożona z czerwonych odcinków.

Udowodnić, że czerwone odcinki da się podzielić na takie pary, że odcinki z jednej pary mają wspólny koniec.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.



LXVII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych

zawodów stopnia drugiego

19 lutego 2016 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. We wnętrzu trójkąta o bokach długości 3, 4, 5 leży punkt P . Wykazać, że jeżeli odległości P od wierzchołków są wszystkie wymierne, to odległości P od boków też.

Rozwiązanie

Trójkąt można umieścić w prostokątnym układzie współrzędnych tak, by jego wierzchołkami były punkty $A = (4, 0)$, $B = (0, 3)$ i $C = (0, 0)$ (trójkąt ABC jest prostokątny, gdyż $3^2 + 4^2 = 5^2$). Niech $P = (x, y)$. Odległość punktu P od wierzchołka A jest równa $\sqrt{(x-4)^2 + y^2}$, a ponieważ jest to liczba wymierna, więc również liczba $(x-4)^2 + y^2$ jest wymierna. Wymierne są też liczby $x^2 + (y-3)^2$ oraz $x^2 + y^2$, jako kwadraty odległości od wierzchołków B i C .

Ponieważ różnica liczb wymiernych jest wymierna, więc wymierne są też obie liczby $x^2 + y^2 - ((x-4)^2 + y^2) = 8x - 16$ i $x^2 + y^2 - (x^2 + (y-3)^2) = 6y - 9$, zatem również liczby x i y , czyli odległości od boków BC i AC . Równanie prostej AB wygląda tak: $3x + 4y - 12 = 0$. Wobec tego odległość punktu P od boku AB jest równa

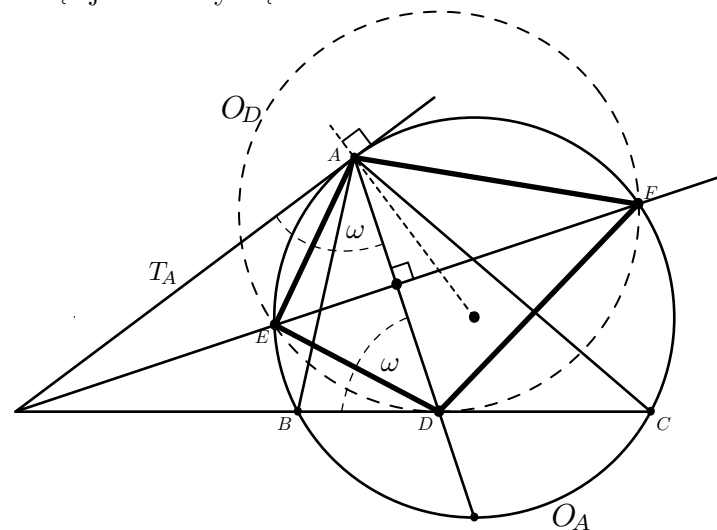
$$\frac{|3x + 4y - 12|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|3x + 4y - 12|}{5},$$

więc też jest liczbą wymierną (jako iloraz liczb wymiernych). $\square$

2. W trójkącie ostrokątnym ABC dwusieczna kąta BAC przecina bok BC w punkcie D . Symetralna odcinka AD przecina okrąg opisany na trójkącie ABC w punktach E i F . Udowodnić, że okrąg opisany na trójkącie DEF jest styczny do prostej BC .

Rozwiązanie

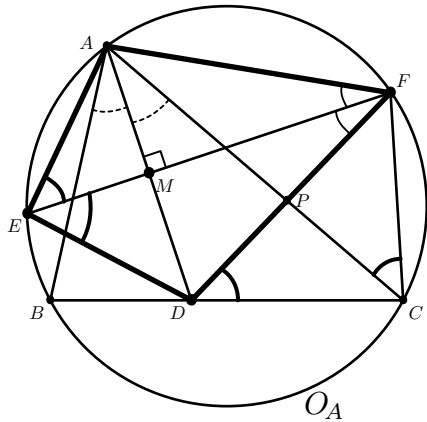
Symetria S_{EF} względem prostej EF przekształca trójkąt AEF na trójkąt DEF , więc okrąg O_A opisany na trójkącie AEF jest przekształcany przez nią na okrąg O_D opisany na trójkącie DEF . Dla ustalenia uwagi założmy, że $\sphericalangle ABC \geq \sphericalangle ACB$. Niech T_A oznacza styczną do okręgu O_A w punkcie A . Kąt ostry między styczną T_A a cięciwą AB jest równy kątowi $\sphericalangle ACB$, zatem ostry ewentualnie prosty kąt ω utworzony przez styczną T_A i półprostą $AD^\rightarrow$ jest równy $\sphericalangle ACB + \frac{1}{2}\sphericalangle CAB$. Zachodzi też równość $\sphericalangle BDA = \sphericalangle DCA + \sphericalangle CAD = \sphericalangle BCA + \frac{1}{2}\sphericalangle CAB$ (bo kąt zewnętrzny trójkąta jest sumą dwóch kątów wewnętrznych do niego nieprzyległych), więc ten kąt jest równy kątowi ω .



Ponieważ symetria S_{EF} przekształca odcinek AD na odcinek DA , więc przekształca styczną T_A na prostą przechodzącą przez punkt D tworzącą z odcinkiem DA kąt ω , czyli na prostą BC . Wobec tego prosta BC jest styczna do okręgu O_D — obrazu O_A w symetrii S_{EF} . Otrzymaliśmy tezę. $\square$

Rozwiązanie drugie

Nie tracąc ogólności rozważań założmy, że $AB \leq AC$ czyli, że $\sphericalangle ABC \geq \sphericalangle BCA$. Dalej $\sphericalangle BAD = \frac{1}{2}\sphericalangle BAC < \frac{1}{2}\sphericalangle BAC + \sphericalangle BCA = \sphericalangle BDA$ — kąt zewnętrzny trójkąta to suma dwóch wewnętrznych do niego nieprzyległych. Wobec tego, że naprzeciwko większego kąta w trójkącie leży dłuższy bok mamy $AB > BD$. Niech M będzie środkiem dwusiecznej AD . Skoro $AB > BD$, to kąt $\sphericalangle BMD$ jest ostry. Stąd i z tego, że prosta EF jest symetralną odcinka AD wynika, że punkty B i C leżą po jednej stronie prostej EF . Możemy więc przyjąć, że punkt E leży na tym z łuków wyznaczonych przez punkty A i B , który nie zawiera punktu C , a punkt F — na tym łuku wyznaczonym przez punkty A i C , który nie zawiera punktu B .



Oznaczmy kąty trójkąta ABC literami: $\alpha = \sphericalangle BAC$, $\beta = \sphericalangle ABC$ oraz $\gamma = \sphericalangle BCA$. Czworokąt $AEDF$ jest symetryczny względem prostej EF . Niech $\varphi = \sphericalangle AFE = \sphericalangle EFD$ i niech P będzie punktem wspólnym odcinków AC i DF . Zachodzą równości

$$\sphericalangle CAF = \sphericalangle DAF - \sphericalangle DAC = 90^\circ - \varphi - \frac{\alpha}{2} = \frac{\beta + \gamma}{2} - \varphi.$$

Ponieważ $\sphericalangle PDC + \sphericalangle DCP = \sphericalangle PFA + \sphericalangle FAP$, więc

$$\sphericalangle PDC = \sphericalangle PFA + \sphericalangle FAP - \sphericalangle DCP = 2\varphi + \frac{\beta + \gamma}{2} - \varphi - \gamma = \varphi + \frac{\beta - \gamma}{2}.$$

Mamy $\sphericalangle FAC + \sphericalangle ACF + \sphericalangle AFC = 180^\circ = \sphericalangle ABC + \sphericalangle AFC$, więc

$$\sphericalangle ACF = \sphericalangle ABC - \sphericalangle FAC = \beta - \left(\frac{\beta + \gamma}{2} - \varphi\right) = \varphi + \frac{\beta - \gamma}{2}.$$

W takim razie

$$\sphericalangle DEF = \sphericalangle AEF = \sphericalangle ACF = \varphi + \frac{\beta - \gamma}{2} = \sphericalangle PDC = \sphericalangle FDC.$$

Niech O_D będzie okręgiem opisanym na trójkącie EFD . Ponieważ kąt wpisany w okrąg O_D oparty na łuku DF (niezawierającym punktu E) jest równy kątowi między styczną do tego okręgu w punk-

cie D i cięciwą DF , więc prosta BC jest styczna do O_D . Zakończymy dowód. $\square$

3. Niech $\mathbb{Z}$ oznacza zbiór liczb całkowitych. Rozstrzygnąć, czy istnieje funkcja f , która każdej liczbie całkowitej k przypisuje nieujemną liczbę całkowitą $f(k)$ i spełnia następujące dwa warunki:

- $f(0) > 0$,
- dla każdej liczby całkowitej k najmniejsza spośród liczb postaci $f(k - l) + f(l)$, gdzie $l \in \mathbb{Z}$, jest równa $f(k)$.

Rozwiązanie

Udowodnimy, że takiej funkcji nie ma. Przypuśćmy, że f jest funkcją o podanych własnościach. Niech m będzie jej najmniejszą wartością (istnieje, bo wartościami funkcji f są nieujemne liczby całkowite) i niech a będzie liczbą o najmniejszej wartości bezwzględnej, dla której zachodzi równość $f(a) = m$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $a \geq 0$. W myśl założenia, $f(a)$ to najmniejsza z liczb postaci $f(l) + f(a - l)$, więc istnieje $b \in \mathbb{Z}$, dla którego zachodzi wzór

$$(1) \quad m = f(a) = f(b) + f(a - b) \geq m + m.$$

Ponieważ $m \geq 0$ i $m \geq 2m$, więc $m = 0$, zatem $f(a) = 0$, przy czym $a \geq 1$ (bo $f(0) > 0$).

Z określenia liczby a wynika, że

$$(2) \quad f(k) > 0 \quad \text{dla} \quad |k| < a.$$

Z wzorów (1) i $m = 0$ otrzymujemy równości $f(b) = 0 = f(a - b)$. Zauważmy, że liczby b i $a - b$ albo obie leżą w przedziale $(0, a)$, albo obie znajdują się poza nim. Własność (2) wyklucza pierwszą z tych możliwości. Funkcja f ma więc ujemne miejsce zerowe. Niech $c < 0$ będzie jej miejscem zerowym, położonym najbliżej zera. Wobec (2) mamy $f(k) > 0$, gdy $c < k < a$. Z nierówności $c < a + c < a$ wynika, że $f(a + c) > 0$. Ale przecież

$$f(a + c) \leq f(a + c - a) + f(a) = f(c) + f(a) = 0$$

(przyjeliśmy $k = a + c$ oraz $l = a$ w warunku z treści zadania). Otrzymana sprzeczność kończy dowód nieistnienia funkcji o podanych własnościach. $\square$



LXVII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych
zawodów stopnia drugiego

20 lutego 2016 r. (drugi dzień zawodów)

4. Dana jest liczba całkowita dodatnia k . Udowodnić, że istnieje liczba całkowita dodatnia n , dla której zbiory $A = \{1^2, 2^2, 3^2, \dots\}$ i $B = \{1^2 + n, 2^2 + n, 3^2 + n, \dots\}$ mają dokładnie k wspólnych elementów.

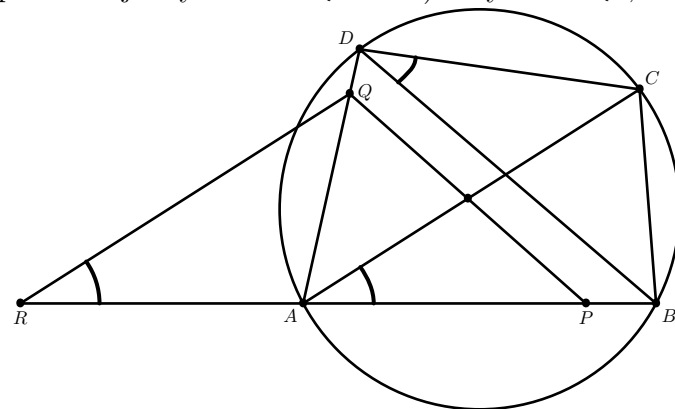
Rozwiązanie

Udowodnimy, że np. liczba $n = 3^{2k-1}$ spełnia warunki zadania. W tym celu należy sprawdzić, że istnieje dokładnie k par liczb całkowitych dodatnich (a, b) , dla których zachodzi wzór $a^2 = b^2 + 3^{2k-1}$. Równość $3^{2k-1} = a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ przedstawia rozkład liczby 3^{2k-1} na iloczyn dwóch czynników, z których pierwszy jest mniejszy od drugiego. Jest ona więc równoważna temu, że dla pewnego $l \in \{0, 1, 2, \dots, k-1\}$ mamy $a - b = 3^l$ oraz $a + b = 3^{2k-1-l}$, czyli $a = \frac{1}{2}(3^{2k-1-l} + 3^l)$ oraz $b = \frac{1}{2}(3^{2k-1-l} - 3^l)$. Wobec tego par (a, b) o powyższych własnościach jest dokładnie k . $\square$

5. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Punkty P i Q leżą odpowiednio na półprostych $AB^{\rightarrow}$ i $AD^{\rightarrow}$, przy czym $AP = CD$, $AQ = BC$. Wykazać, że środek odcinka PQ leży na prostej AC .

Rozwiązanie

Niech R będzie punktem symetrycznym do punktu P względem wierzchołka A . Trójkąty QAR i BCD są przystające, bo $QA = BC$, $AR = CD$ i $\sphericalangle BCD = 180^\circ - \sphericalangle BAD = \sphericalangle QAR$ — suma przeciwległych kątów czworokąta wpisanego w okrąg to 180° . Stąd otrzymujemy równości kątów: $\sphericalangle ARQ = \sphericalangle CDB = \sphericalangle CAB$ (kąty wpisane oparte na jednym łuku są równe). Wynika stąd, że $RQ \parallel AC$.



Prosta AC połowi odcinek PR , więc na mocy twierdzenia Talesa również odcinek PQ . $\square$

6. W przestrzeni danych jest n zielonych punktów, przy czym $n \geq 4$ i żadne cztery zielone punkty nie leżą na jednej płaszczyźnie. Niektóre odcinki łączące zielone punkty pomalowano na czerwono. Liczba czerwonych odcinków jest parzysta. Każde dwa różne zielone punkty łączy pewna łamana złożona z czerwonych odcinków.

Udowodnić, że czerwone odcinki da się podzielić na takie pary, że odcinki z jednej pary mają wspólny koniec.

Rozwiązanie

Zauważmy najpierw, że jedynym punktem wspólnym różnych czerwonych odcinków może być wspólny koniec (żadne cztery zielone punkty nie leżą na jednej płaszczyźnie). Cyklem nazywać będziemy taki ciąg $I_1, I_2, \dots, I_k$ parami różnych czerwonych odcinków, że dla $j = 1, 2, \dots, k$ odcinek I_j łączy punkty A_j i A_{j+1} , przy czym $A_{k+1} = A_1$.

Opiszemy operację zmniejszającą liczbę cykli utworzonych z czerwonych odcinków i zwiększającą o jeden liczbę zielonych punktów.

Wybieramy dowolny cykl $I_1, I_2, \dots, I_k$ (jeśli istnieje). Usuwamy odcinek I_1 i dodajemy zielony punkt tak, aby nie leżał na żadnej z płaszczyzn wyznaczonych przez trójki pozostałych punktów. Następnie nowy zielony punkt łączymy z A_1 czerwonym odcinkiem. Zauważmy, że w ten sposób zmniejszyliśmy liczbę cykli i nie zmieniliśmy liczby czerwonych odcinków. Poza tym każde dwa różne, zielone punkty są wciąż połączone czerwoną łamaną (czyli złożoną z czerwonych odcinków). Co więcej, jeśli nowe odcinki podzieliśmy na pary tak, aby odcinki z pary miały wspólny koniec, to odpowiednie „stare” odcinki też miały wspólny koniec.

Powtarzamy tę operację, dopóki nie usuniemy wszystkich cykli. Otrzymany zbiór punktów jest rzecz jasna skończony.

Niech $PB_1B_2 \dots B_{k-1}B_kA$ będzie łamaną złożoną z największej możliwej liczby czerwonych odcinków (ponieważ zlikwidowaliśmy wszystkie cykle, więc dwa różne punkty łączy dokładnie jedna czerwona łamana). Oczywiście, taka łamana musi się składać z co najmniej dwóch odcinków, gdyż istnieją co najmniej dwa czerwone odcinki.

Jeśli istnieje taki zielony punkt $C \neq B_{k-1}$, że odcinek B_kC jest czerwony, to łączymy odcinki AB_k i B_kC w parę i usuwamy oba ze zbioru czerwonych odcinków (a punkty A i C ze zbioru zielonych punktów). Nowy, mniejszy zbiór spełnia założenia nałożone na

zbiór wyjściowy, gdyż jedynym czerwonym odcinkiem o końcu w A był AB_k , a o końcu w C — odcinek CB_k . W przeciwnym razie istniałaby czerwona łamana o początku w P złożona z większej liczby odcinków niż $PB_1B_2 \dots B_{k-1}B_kA$.

Jeśli z kolei jedynym odcinkiem o końcu w B_k jest B_kA , to łączymy w parę odcinki $B_{k-1}B_k$ oraz B_kA i usuwamy je (oraz punkty B_k i A), otrzymując w ten sposób mniej liczny zbiór czerwonych odcinków spełniający założenia nałożone na wstępie — nie rozerwaliliśmy żadnej czerwonej łamanej, jedynie skróciliśmy jedną o dwa odcinki.

Powtarzamy konstrukcję opisaną w dwóch poprzednich akapitach, dopóki nie połączymy wszystkich czerwonych odcinków w pary (ostatecznie zmniejszymy zbiór zielonych punktów do zbioru jednoelementowego lub pustego). $\square$



LXVII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe

zawodów stopnia trzeciego

6 kwietnia 2016 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Niech p będzie ustaloną liczbą pierwszą. Znaleźć wszystkie nieujemne liczby całkowite n , dla których wielomian

$$W(x) = x^4 - 2(n+p)x^2 + (n-p)^2$$

może być zapisany w postaci iloczynu dwóch trójmianów kwadratowych o współczynnikach całkowitych.

2. Okrąg ω o środku I wpisany w czworokąt wypukły $ABCD$ jest styczny do boku AB w punkcie M , a do boku CD — w punkcie N , przy czym $\sphericalangle BAD + \sphericalangle ADC < 180^\circ$. Na prostej MN wybrano taki punkt $K \neq M$, że $AK = AM$. Dowieść, że prosta ID przechodzi przez środek odcinka KN .

3. Dane są dodatnie liczby całkowite a i b . Przez $f(a, b)$ oznaczamy liczbę takich a -wyrazowych ciągów liczb całkowitych, że suma wartości bezwzględnych wyrazów ciągu nie przekracza b .

Udowodnić, że $f(a, b) = f(b, a)$.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.



LXVII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe

zawodów stopnia trzeciego

7 kwietnia 2016 r. (drugi dzień zawodów)

4. Niech k, n będą liczbami nieparzystymi większymi od 1. Wykazać, że jeśli istnieje taka liczba naturalna a , że

$$(1) \quad k \mid 2^a + 1 \quad \text{oraz} \quad n \mid 2^a - 1,$$

to nie istnieje taka liczba naturalna b , że

$$(2) \quad n \mid 2^b + 1 \quad \text{oraz} \quad k \mid 2^b - 1.$$

Uwaga: Symbol $p \mid q$ oznacza, że liczba całkowita p jest dzielnikiem liczby całkowitej q .

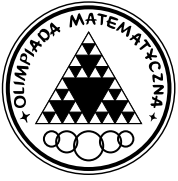
5. Dane są dodatnie liczby rzeczywiste $a < b$. Dowieść, że istnieją takie dodatnie liczby całkowite p, q, r, s , że $a < \frac{p}{q} < \frac{r}{s} < b$ oraz $p^2 + q^2 = r^2 + s^2$.

6. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC . Prosta AI przecina prostą BC w punkcie D oraz okrąg opisany na trójkącie ABC w punkcie $S \neq A$. Punkt K jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt DSB , a punkt L — w trójkąt DSC . Punkt P jest odbiciem symetrycznym punktu I względem prostej KL .

Wykazać, że kąt BPC jest prosty.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.



LXVII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych

zawodów stopnia trzeciego

6 kwietnia 2016 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Niech p będzie ustaloną liczbą pierwszą. Znaleźć wszystkie nieujemne liczby całkowite n , dla których wielomian

$$W(x) = x^4 - 2(n+p)x^2 + (n-p)^2$$

może być zapisany w postaci iloczynu dwóch trójmianów kwadratowych o współczynnikach całkowitych.

Rozwiązanie

Założmy, że dla pewnych liczb całkowitych a, b, c, A, B, C równość

$$x^4 - 2(n+p)x^2 + (n-p)^2 = (ax^2 + bx + c)(Ax^2 + Bx + C)$$

zachodzi dla każdej liczby x . Po wymnożeniu otrzymujemy

$$x^4 - 2(n+p)x^2 + (n-p)^2 =$$

$$= aAx^4 + (aB + bA)x^3 + (aC + bB + cA)x^2 + (bC + cB)x + cC.$$

Ponieważ równość zachodzi dla wszystkich liczb x , więc współczynniki przy tych samych potęgach zmiennej x po obu stronach równości muszą być takie same, czyli $aA = 1$, $aB + bA = 0$, $aC + bB + cA = -2(n+p)$, $bC + cB = 0$ i $cC = (n-p)^2$. Liczby a i A są całkowite, więc albo $a = A = 1$, albo $a = A = -1$. Możemy przyjąć, że $a = 1 = A$, bo w przeciwnym wypadku możemy zastąpić szóstką a, b, c, A, B, C szóstką $-a, -b, -c, -A, -B, -C$.

Wobec tego $b + B = 0$, $C - b^2 + c = -2(n+p)$, $b(C - c) = 0$ oraz $cC = (n-p)^2$, zatem $b = 0$ lub $c = C$.

Jeśli $b = 0$, to $B = 0$, $C + c = -2(n+p)$ oraz $cC = (n-p)^2$, więc $(C - c)^2 = (C + c)^2 - 4Cc = 4(n+p)^2 - 4(n-p)^2 = 16np$. Liczba $16np$ okazała się być kwadratem liczby całkowitej, a to oznacza, że istnieje taka liczba całkowita k , że $n = k^2p$. Wtedy

$$\begin{aligned} x^4 - 2(n+p)x^2 + (n-p)^2 &= x^4 - 2p(k^2+1)x^2 + p^2(k^2-1)^2 = \\ &= (x^2 - p(k^2+1))^2 - p^2((k^2+1)^2 - (k^2-1)^2) = \\ &= (x^2 - p(k^2+1))^2 - 4k^2p^2 = (x^2 - p(k+1)^2)(x^2 - p(k-1)^2). \end{aligned}$$

Został do rozpatrzenia jeszcze jeden przypadek: $c = C$. Mamy teraz $2c - b^2 = -2(n+p)$ i $c^2 = (n-p)^2$, więc $c = n-p$ lub $c = p-n$. Stąd $b^2 = 2(c+p+n)$, więc $b^2 = 4n$ lub $b^2 = 4p$. Liczba $4p$ nie jest kwadratem liczby całkowitej, bo p jest liczbą pierwszą. Natomiast liczba $4n$ jest kwadratem liczby całkowitej wtedy i tylko

wtedy, gdy $n = k^2$ dla pewnej całkowitej liczby k . W tym ostatnim przypadku zachodzi równość

$$x^4 - 2(n+p)x^2 + (n-p)^2 = (x^2 + 2kx + k^2 - p)(x^2 - 2kx + k^2 - p).$$

Reasumując: wielomian W jest iloczynem dwóch trójmianów kwadratowych wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka liczba całkowita k , że $n = p \cdot k^2$ lub $n = k^2$. $\square$

3. Dane są dodatnie liczby całkowite a i b . Przez $f(a, b)$ oznaczamy liczbę takich a -wyrazowych ciągów liczb całkowitych, że suma wartości bezwzględnych wyrazów ciągu nie przekracza b .

Udowodnić, że $f(a, b) = f(b, a)$.

Rozwiązanie

Przyjmijmy dodatkowo, że $f(a, 0) = 1$ dla każdej liczby całkowitej $a > 0$ — to liczba a -elementowych ciągów o sumie 0. Zauważmy, że $f(1, b) = 2b + 1$ — ciągi jednowyrazowe można wypisać (zob. niżej). Mamy również $f(a, 1) = 2a + 1$, bo ciągów długości a , w których liczba ± 1 występuje dokładnie jeden raz jest $2a$, do nich dochodzi ciąg złożony z samych zer. Wykazaliśmy, że dla każdej liczby całkowitej $c > 0$ zachodzi równość $f(1, c) = f(c, 1)$.

Teraz zastosujemy indukcję względem $a + b$.

Ciąg a -wyrazowy można otrzymać z ciągu $(a-1)$ -wyrazowego dopisując na końcu jedną spośród następujących liczb: $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm b$, w zależności od tego jaka jest suma ciągu $(a-1)$ -wyrazowego. Prowadzi to do następującego wzoru rekurencyjnego (dla $a > 1$):

$$f(a, b) = f(a-1, b) + 2(f(a-1, b-1) + f(a-1, b-2) + f(a-1, b-3) + \dots + f(a-1, 0)).$$

Z otrzymanej zależności wynika następująca równość

$$\begin{aligned} f(a, b) &= f(a-1, b) + f(a-1, b-1) + (f(a-1, b-1) + \\ &\quad + 2(f(a-1, b-2) + f(a-1, b-3) + \dots + f(a-1, 0))) = \\ &= f(a-1, b) + f(a-1, b-1) + f(a, b-1). \end{aligned}$$

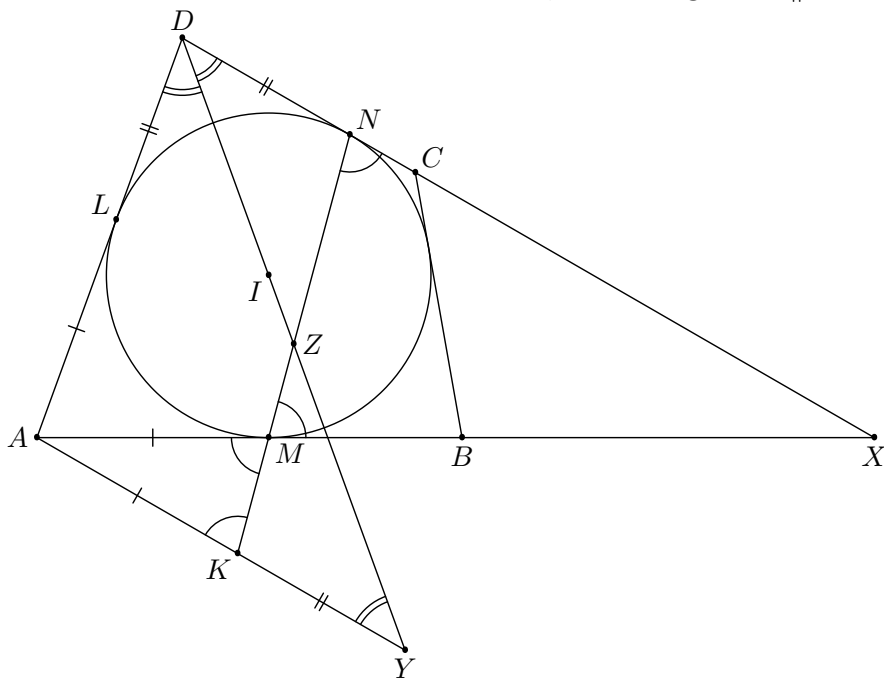
Z ostatniej formuły wynika, że jeśli $f(x, y) = f(y, x)$, gdy $x + y < a + b$, to również $f(a, b) = f(b, a)$. $\square$

2. Okrąg ω o środku I wpisany w czworokąt wypukły $ABCD$ jest styczny do boku AB w punkcie M , a do boku CD — w punkcie N , przy czym $\sphericalangle BAD + \sphericalangle ADC < 180^\circ$. Na prostej MN wybrano taki punkt $K \neq M$, że $AK = AM$. Dowieść, że prosta ID przechodzi przez środek odcinka KN .

Rozwiązanie

Skoro $\sphericalangle BAD + \sphericalangle ADC < 180^\circ$, to proste AB i CD przecinają się w punkcie X leżącym po tej samej stronie prostej MN , co punkty B i C . Kąt $\sphericalangle XMN$ jest ostry (ponieważ jest kątem przy podstawie trójkąta równoramiennego XMN), więc kąt $\sphericalangle NMA$ jest rozwarty. Stąd wynika, że punkt M leży pomiędzy punktami K i N .

Z równoramienności trójkątów AMK i XMN wynika, że $\sphericalangle MKA = \sphericalangle AMK = \sphericalangle XMN = \sphericalangle MNX$, wobec tego $AK \parallel CD$.

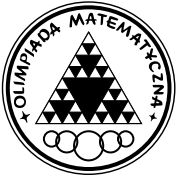


Niech Y będzie punktem przecięcia prostych AK i DI , zaś L — punktem styczności odcinka AD z okręgiem ω . Punkty K, Y leżą na prostej AK po tej samej stronie punktu A , bo dwusieczna DI i półprosta AK leżą po tej samej stronie prostej AD . Wtedy $\sphericalangle ADY = \sphericalangle YDC = \sphericalangle DY A$, bo DI jest dwusieczną kąta $\sphericalangle ADX$ i $AK \parallel CD$. Wobec tego $AY = AD = AL + LD > AL = AM = AK$, więc punkt K leży

między punktami A i Y .

Wtedy $AL = AM$ oraz $DL = DN$. Wobec tego zachodzą równości $DN = DL = AD - AL = AY - AM = AY - AK = KY$.

Oznaczmy punkt przecięcia prostych MN i DI przez Z . Trójkąty DNZ i YKZ są podobne, bo mają takie same kąty ($\sphericalangle KZY = \sphericalangle NZD$ oraz $\sphericalangle ZDN = \sphericalangle ZYK$). Jednakże $DN = KY$, więc trójkąty te są przystające. Stąd $NZ = ZK$, co oznacza, że ID przechodzi przez środek odcinka KN . $\square$



LXVII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych
zawodów stopnia trzeciego

7 kwietnia 2016 r. (drugi dzień zawodów)

4. Niech k, n będą liczbami nieparzystymi większymi od 1. Wykazać, że jeśli istnieje taka liczba naturalna a , że

$$(1) \quad k \mid 2^a + 1 \quad \text{oraz} \quad n \mid 2^a - 1,$$

to nie istnieje taka liczba naturalna b , że

$$(2) \quad n \mid 2^b + 1 \quad \text{oraz} \quad k \mid 2^b - 1.$$

Uwaga: Symbol $p \mid q$ oznacza, że liczba całkowita p jest dzielnikiem liczby całkowitej q .

Rozwiązanie

Założmy, że warunki (1) i (2) są spełnione jednocześnie. Każdy wspólny dzielnik liczb k i n dzieli liczbę $2^a + 1 - (2^a - 1) = 2$, więc k i n — jako nieparzyste — są względnie pierwsze.

Niech α oznacza najmniejszą dodatnią liczbę całkowitą, dla której $k \mid 2^\alpha - 1$, zaś β — najmniejszą dodatnią liczbę całkowitą, dla której $n \mid 2^\beta - 1$. Jeśli $\mu \geq 1$ jest liczbą całkowitą, to

$$k \mid (2^\alpha - 1)(2^{(\mu-1)\alpha} + 2^{(\mu-2)\alpha} + \dots + 2^\alpha + 1) = 2^{\mu\alpha} - 1.$$

Niech $m > 0$ będzie liczbą całkowitą, a ϱ — resztą z dzielenia m przez ϱ : $m = \mu\alpha + \varrho$, gdzie $\mu \geq 0$ i $0 \leq \varrho < \alpha$. Wtedy $k \mid 2^{\varrho}(2^{\mu\alpha} - 1) = 2^m - 2^\varrho$, więc liczby 2^ϱ i 2^m dają tę samą resztę z dzielenia przez k . Wynika stąd w szczególności równoważność $k \mid 2^m - 1 \iff \alpha \mid m$.

Niech $c \geq 0$ będzie taką liczbą całkowitą, że $a = c\alpha + \gamma$ dla pewnej liczby $\gamma \in \{0, 1, 2, \dots, \alpha - 1\}$. Ponieważ $k \mid 2^a + 1$, więc $k \mid 2^{c\alpha+\gamma} - 2^\gamma + 2^\gamma + 1$, zatem $k \mid 2^\gamma + 1$. Oczywiście $\gamma > 0$ i $k \mid 2^{2\gamma} - 1 = (2^\gamma + 1)(2^\gamma - 1)$, więc $\alpha \mid 2\gamma \leq 2\alpha - 2$, czyli $\alpha = 2\gamma$. W taki sam sposób wykazujemy, że jeśli δ jest resztą z dzielenia b przez β , to $\beta = 2\delta$ i $n \mid 2^\delta + 1$.

Zachodzi równość $a = c\alpha + \gamma = \gamma(2c + 1)$. Podobnie $b = d\beta + \delta = \delta(2d + 1)$, gdzie $d \geq 0$ jest taką liczbą całkowitą, że $b = d\beta + \delta$.

Ponieważ $n \mid 2^a - 1$, więc $2\delta = \beta \mid a = \gamma(2c + 1)$. Widzimy również, że $k \mid 2^b - 1$, więc $2\gamma = \alpha \mid b = \delta(2d + 1)$. Stąd wynika, że $4\gamma\delta \mid \gamma\delta(2c + 1)(2d + 1)$, zatem $4 \mid (2c + 1)(2d + 1)$. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że warunki (1) i (2) nie mogą być spełnione równocześnie. $\square$

5. Dane są dodatnie liczby rzeczywiste $a < b$. Dowieść, że istnieją takie dodatnie liczby całkowite p, q, r, s , że $a < \frac{p}{q} < \frac{r}{s} < b$ oraz $p^2 + q^2 = r^2 + s^2$.

Rozwiązanie

Niech x, y będą dowolnymi liczbami wymiernymi z przedziału $(0, 1)$.

Wówczas liczby dodatnie

$$(1) \quad u = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}, \quad v = \frac{2x}{1 + x^2}, \quad w = \frac{1 - y^2}{1 + y^2}, \quad z = \frac{2y}{1 + y^2}$$

też są wymierne, a przy tym $u^2 + v^2 = 1$, $w^2 + z^2 = 1$. Zapiszmy te cztery liczby wymierne jako ułamki o wspólnym mianowniku:

$$(2) \quad u = \frac{q}{D}, \quad v = \frac{p}{D}, \quad w = \frac{s}{D}, \quad z = \frac{r}{D}.$$

Widzimy, że $p^2 + q^2 = D^2 = r^2 + s^2$; liczby naturalne p, q, r, s spełniają więc równość, postulowaną w treści zadania.

Trzeba jeszcze zadbać o nierówności $a < \frac{p}{q} < \frac{r}{s} < b$, czyli

$$(3) \quad a < \frac{2x}{1 - x^2} < \frac{2y}{1 - y^2} < b.$$

Środkowa nierówność jest spełniona, gdy $x < y$. Pozostałe dwie:

$$ax^2 + 2x - a > 0 \quad \text{oraz} \quad by^2 + 2y - b < 0$$

są spełnione (w liczbach dodatnich x, y), odpowiednio, dla

$$(4) \quad x > \frac{\sqrt{1+a^2}-1}{a} =: A \quad \text{oraz} \quad y < \frac{\sqrt{1+b^2}-1}{b} =: B.$$

Jasne, że $A > 0, B < 1$. Ponadto $A < B$, skoro

$$A = \frac{\sqrt{1+a^2}-1}{a} = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}+1} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+1}+\frac{1}{a}} < \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{b^2}+1}+\frac{1}{b}} = B.$$

Przedział (A, B) jest więc niepusty i jest zawarty w przedziale $(0, 1)$.

Istnieje wobec tego nieskończenie wiele par ułamków $\frac{p}{q}, \frac{r}{s}$, o jakie chodzi w zadaniu. Wystarczy bowiem wybrać z przedziału (A, B) dowolne dwie różne liczby wymierne x, y : $A < x < y < B$; a następnie określić liczby wymierne u, v, w, z wzorami (1) i zapisać je w formie (2); spełniona będzie równość $p^2 + q^2 = r^2 + s^2$ oraz nierówności (4), więc i nierówność (3), czyli $a < \frac{p}{q} < \frac{r}{s} < b$.

Uwaga. Przedstawione rozumowanie ma wyrazistą interpretację trygonometryczną: liczby dodatnie u, v , spełniające równanie

$u^2 + v^2 = 1$, dadzą się zapisać jako kosinus oraz sinus pewnego kąta ostrego α . Wzory (1) to wówczas znane ich wyrażenia przez $x = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.

Dociekliwy czytelnik dostrzeże, że treść zadania wyraża następujący fakt algebraiczno-geometryczny: na każdym łuku okręgu o równaniu $u^2 + v^2 = 1$ znajdują się punkty (a nawet nieskończenie wiele punktów) o obu współrzędnych wymiernych.

Ostatnie stwierdzenie można wywnioskować też z tego, że jeśli $\cos \alpha$, $\sin \alpha$, $\cos \beta$ i $\sin \beta$ są liczbami wymiernymi, to liczby

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \quad \text{oraz}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

są wymierne. Niech $\cos \alpha_n = \frac{n^2-1}{n^2+1}$ oraz $\sin \alpha_n = \frac{2n}{n^2+1}$ dla pewnej liczby całkowitej $n > 0$. Wtedy dla każdej liczby całkowitej $k > 0$ $\cos(k\alpha_n)$ i $\sin(k\alpha_n)$ są wymierne. Dla każdej liczby $\epsilon > 0$ istnieje taka liczba naturalna n , że $\sqrt{(\frac{n^2-1}{n^2+1} - 1)^2 + (\frac{2n}{n^2+1})^2} = \frac{2}{\sqrt{n^2+1}} < \epsilon$. Obroty nie zmieniają długości odcinków, więc odległość punktów $(\cos(k\alpha_n), \sin(k\alpha_n))$ i $(\cos((k+1)\alpha_n), \sin((k+1)\alpha_n))$, równa odległości punktów $(1, 0)$ i $(\cos(\alpha_n), \sin(\alpha_n))$, jest mniejsza od $\frac{2}{\sqrt{n^2+1}}$, więc te punkty wyznaczają łuki oparte na cięciwach o długości mniejszej niż $\frac{2}{\sqrt{n^2+1}}$. $\square$

6. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC . Prosta AI przecina prostą BC w punkcie D oraz okrąg opisany na trójkącie ABC w punkcie $S \neq A$. Punkt K jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt DSB , a punkt L — w trójkąt DSC . Punkt P jest odbiciem symetrycznym punktu I względem prostej KL .

Wykazać, że kąt BPC jest prosty.

Rozwiązanie

Niech $X \neq S$ będzie punktem przecięcia prostej SK z okręgiem opisanym na trójkącie ABC . Ponieważ kąty wpisane oparte na łukach tej samej długości są równe, prosta AS jest dwusieczną $\sphericalangle BAC$, a prosta KS jest dwusieczną $\sphericalangle ASB$, więc

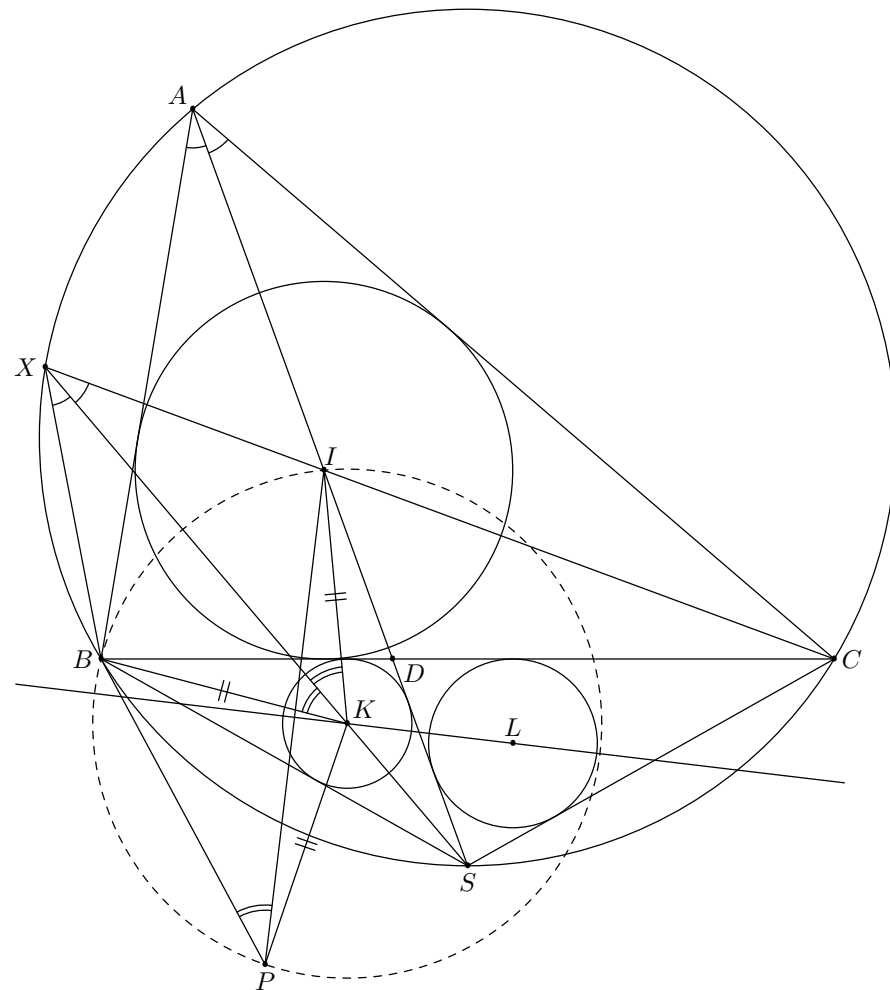
$$\sphericalangle BXS = \sphericalangle BAS = \sphericalangle SAC = \sphericalangle SXC \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle ISX = \sphericalangle XSB.$$

Stąd wniosek, że punkty I i B są symetryczne względem prostej SX . W szczególności $KI = KB$. Ponadto, skoro P i I są symetryczne względem prostej KL , to $KI = KP$. Zatem punkty I, B, P leżą na okręgu o środku K .

$$\begin{aligned} \sphericalangle IPB &= \frac{1}{2} \sphericalangle IKB = \sphericalangle XKB = 180^\circ - \sphericalangle BKS = \\ &= \sphericalangle SBK + \sphericalangle KSB = \frac{1}{2}(\sphericalangle SBD + \sphericalangle DSB). \end{aligned}$$

Analogicznie dowodzimy, że $\sphericalangle CPI = \frac{1}{2}(\sphericalangle CSD + \sphericalangle DCS)$. Korzystając z powyższych równości oraz z tego, że suma kątów wewnętrznych trójkąta BCS wynosi 180° , otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sphericalangle CPB &= \sphericalangle IPB + \sphericalangle CPI = \\ &= \frac{1}{2}(\sphericalangle SBD + \sphericalangle DSB + \sphericalangle CSD + \sphericalangle DCS) = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ. \quad \square \end{aligned}$$





LXVIII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia pierwszego

I seria: 1 września — 30 września 2016 r.

1. Rozstrzygnąć, czy istnieją takie trzy różne, niezerowe liczby rzeczywiste a, b, c , że spośród liczb

$$\frac{a+b}{a^2+ab+b^2}, \quad \frac{b+c}{b^2+bc+c^2}, \quad \frac{c+a}{c^2+ca+a^2}$$

pewne dwie są równe, a trzecia jest od nich różna.

2. W skrzyni znajduje się 2017 kul. Na każdej kuli napisana jest dokładnie jedna liczba całkowita. Losujemy ze zwracaniem dwie kule ze skrzyni i dodajemy napisane na nich liczby. Udowodnić, że prawdopodobieństwo otrzymania parzystej sumy jest większe niż $\frac{1}{2}$.

3. Odcinki AD , BE są wysokościami trójkąta ostrokątnego ABC . Punkt M jest środkiem odcinka AB . Punkty P , Q są symetryczne do punktu M odpowiednio względem prostych AD , BE . Wykazać, że środek odcinka DE leży na prostej PQ .

4. Niech t będzie liczbą z przedziału $(0, 1)$. Udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b zachodzi nierówność

$$|a + (1+t)b| + |a + (1-t)b| \geq \frac{2t}{2+t} \cdot (|a| + |b|).$$

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

30 września 2016 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.

Rozwiązanie każdego zadania należy podpisać w lewym górnym rogu pierwszej jego strony: imieniem i nazwiskiem, swoim adresem, swoim adresem elektronicznym oraz klasą, nazwą szkoły i jej adresem.



LXVIII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia pierwszego

II seria: 1 października — 31 października 2016 r.

5. Wykazać, że istnieje liczba naturalna n , która ma więcej niż 2017 dzielników d spełniających warunek

$$\sqrt{n} \leq d < 1,01\sqrt{n}.$$

6. W balu uczestniczyło 20 kawalerów i 20 dam. W każdym z 99 tańców tańczyła dokładnie jedna para, za każdym razem inna. W każdej parze tańczyła dama z kawalerem. Dowieść, że istnieje takich dwóch kawalerów i takie dwie damy, że każdy z tych dwóch kawalerów zatańczył z obiema tymi damami.

7. Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD . Symetralna boku AD przecina odcinek BC w punkcie E . Prosta równoległa do prostej AE , przechodząca przez punkt C , przecina odcinek AD w punkcie F . Dowieść, że

$$\sphericalangle AFB = \sphericalangle CFD.$$

8. Dane są liczby całkowite a, b, c . Udowodnić, że istnieje taka dodatnia liczba całkowita n , że liczba $n^3 + an^2 + bn + c$ nie jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

31 października 2016 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.

Rozwiązanie każdego zadania należy podpisać w lewym górnym rogu pierwszej jego strony: imieniem i nazwiskiem, swoim adresem, swoim adresem elektronicznym oraz klasą, nazwą szkoły i jej adresem.



LXVIII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia pierwszego

III seria: 1 listopada — 30 listopada 2016 r.

9. Wykazać, że równanie

$$(x^2 + 2y^2)^2 - 2(z^2 + 2t^2)^2 = 1$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach całkowitych x, y, z, t .

10. Dla ustalonej dodatniej liczby całkowitej n rozważamy równanie

$$x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n = n,$$

w którym niewiadome $x_1, \dots, x_n$ mogą przybierać wartości całkowite nieujemne. Dowieść, że to równanie ma tyle samo rozwiązań $(x_1, \dots, x_n)$, spełniających warunek

(1) dla każdego $k \in \{1, \dots, n-1\}$: $x_k > 0$ lub $x_{k+1} = 0$,

ile ma rozwiązań $(x_1, \dots, x_n)$, spełniających warunek

(2) dla każdego $k \in \{1, \dots, n\}$: $x_k = 0$ lub $x_k = 1$.

11. Odcinek AD jest wysokością trójkąta ostrokątnego ABC . Punkt E jest rzutem prostokątnym punktu D na prostą AB , a punkt F jest rzutem prostokątnym punktu D na prostą AC . Punkt M jest środkiem odcinka AB , a N — środkiem odcinka AC . Proste MF , EN przecinają się w punkcie S . Dowieść, że środek okręgu opisanego na trójkącie ABC leży na prostej SD .

12. Niech α będzie taką liczbą rzeczywistą, że $\operatorname{tg}(\alpha \cdot \pi) = \sqrt{2}$. Rozstrzygnąć, czy α musi być liczbą wymierną.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

30 listopada 2016 r.

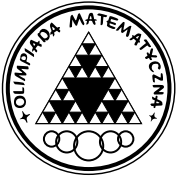
(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.

Rozwiązanie każdego zadania należy podpisać w lewym górnym rogu pierwszej jego strony: imieniem i nazwiskiem, swoim adresem, swoim adresem elektronicznym oraz klasą, nazwą szkoły i jej adresem.

Adresy Komitetów Okręgowych Olimpiady Matematycznej

- Dla województwa pomorskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Gdańskiego, ul. Wita Stwosza 57, 80-952 Gdańsk.
- Dla województwa śląskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Śląskiego, ul. Bankowa 14, 40-007 Katowice.
- Dla województwa małopolskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego, ul. Łojasiewicza 6, 30-348 Kraków.
- Dla województwa lubelskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Zakład Rachunku Prawdopodobieństwa pok. 810, Instytut Matematyki Uniwersytetu Marii Curie-Skłodowskiej, pl. Marii Curie-Skłodowskiej 1, 20-031 Lublin.
- Dla województwa łódzkiego i świętokrzyskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Łódzkiego, ul. Banacha 22, 90-238 Łódź.
- Dla województwa wielkopolskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Adama Mickiewicza, ul. Umultowska 87, 61-614 Poznań.
- Dla województwa podkarpackiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Katedra Matematyki Politechniki Rzeszowskiej, al. Powstańców Warszawy 8, 35-959 Rzeszów.
- Dla województwa lubuskiego i zachodniopomorskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Szczecińskiego, ul. Wielkopolska 15, 70-451 Szczecin.
- Dla województwa kujawsko-pomorskiego i warmińsko-mazurskiego: — Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, ul. Chopina 12/18, 87-100 Toruń.
- Dla województwa mazowieckiego i podlaskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, ul. Śniadeckich 8, 00-656 Warszawa.
- Dla województwa dolnośląskiego i opolskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego, pl. Grunwaldzki 2/4, 50-384 Wrocław.

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w Internecie pod adresem: www.om.edu.pl



LXVIII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego

I seria: 1 września — 30 września 2016 r.

1. Rozstrzygnąć, czy istnieją takie trzy różne, niezerowe liczby rzeczywiste a, b, c , że spośród liczb

$$\frac{a+b}{a^2+ab+b^2}, \quad \frac{b+c}{b^2+bc+c^2}, \quad \frac{c+a}{c^2+ca+a^2}$$

pewne dwie są równe, a trzecia jest od nich różna.

Autor zadania: Kamil Rychlewicz

Rozwiązanie

$$\begin{aligned} \text{Zachodzi równość } (a+b)(b^2+bc+c^2) - (b+c)(a^2+ab+b^2) &= \\ = b^2(a+b-b-c) + c(a+b)(b+c) - a(b+c)(a+b) &= \\ = (c-a)((a+b)(b+c) - b^2) = (c-a)(ab+bc+ca). \end{aligned}$$

Wobec tego

$$\frac{a+b}{a^2+ab+b^2} - \frac{b+c}{b^2+bc+c^2} = \frac{(c-a)(ab+bc+ca)}{(a^2+ab+b^2)(b^2+bc+c^2)}.$$

Analogicznie

$$\frac{b+c}{b^2+bc+c^2} - \frac{c+a}{c^2+ca+a^2} = \frac{(a-b)(ab+bc+ca)}{(b^2+bc+c^2)(c^2+ca+a^2)} \quad \text{oraz}$$

$$\frac{c+a}{c^2+ca+a^2} - \frac{a+b}{a^2+ab+b^2} = \frac{(b-c)(ab+bc+ca)}{(c^2+ca+a^2)(a^2+ab+b^2)}.$$

Jeśli więc zachodzi równość $ab+bc+ca = 0$, to wszystkie trzy liczby są równe. Jeśli $ab+bc+ca \neq 0$, to z założenia, że $a \neq b \neq c \neq a$ wynika,

$$\text{że } \frac{a+b}{a^2+ab+b^2} \neq \frac{b+c}{b^2+bc+c^2} \neq \frac{c+a}{c^2+ca+a^2} \neq \frac{a+b}{a^2+ab+b^2}.$$

Wobec tego jeśli dwie spośród liczb $\frac{a+b}{a^2+ab+b^2}$, $\frac{b+c}{b^2+bc+c^2}$, $\frac{c+a}{c^2+ca+a^2}$ są równe, to trzecia też. $\square$

Rozwiązanie drugie

Z równości $\frac{a+b}{a^2+ab+b^2} = \frac{b+c}{b^2+bc+c^2}$ wynika, że $\frac{a^2-b^2}{a^3-b^3} = \frac{b^2-c^2}{b^3-c^3}$ — rozszerzyliśmy oba ułamki, a z tej równości wynika, że

$$\frac{a+b}{a^2+ab+b^2} = \frac{a^2-b^2}{a^3-b^3} = \frac{b^2-c^2}{b^3-c^3} = \frac{a^2-b^2+b^2-c^2}{a^3-b^3+b^3-c^3} = \frac{a^2-c^2}{a^3-c^3} = \frac{a+c}{a^2+ac+c^2},$$

wiec jeśli dwie są równe, to trzecia też. „Po drodze” skorzystaliśmy z tego, że $\frac{w}{x} = \frac{y}{z} \iff \frac{w}{x} = \frac{w+y}{x+z}$, jeśli $x \neq 0$, $z \neq 0$, $x+z \neq 0$. $\square$

2. W skrzyni znajduje się 2017 kul. Na każdej kuli napisana jest dokładnie jedna liczba całkowita. Losujemy ze zwracaniem dwie kule ze skrzyni i dodajemy napisane na nich liczby. Udowodnić, że prawdopodobieństwo otrzymania parzystej sumy jest większe niż $\frac{1}{2}$.

Autor zadania: Mariusz Skalba

Rozwiązanie

Niech n oznacza liczbę tych kul, na których jest napisana liczba nieparzysta, a p — liczbę kul, na których jest napisana liczba parzysta. Par (uporządkowanych) kul, na których napisane zostały liczby tej samej parzystości jest $n^2 + p^2$, a par, na których napisano liczby o różnej parzystości, jest $2np$, więc prawdopodobieństwo otrzymania parzystej sumy jest równe $\frac{n^2+p^2}{2017^2}$, a nieparzystej $\frac{2np}{2017^2}$. Zauważmy, że $n \neq p$, gdyż suma tych dwu liczb całkowitych jest równa 2017, zatem jedna z nich jest nieparzysta, a druga parzysta. W takim razie $n^2 + p^2 - 2np = (n-p)^2 > 0$, wobec czego $\frac{n^2+p^2}{2017^2} > \frac{2np}{2017^2}$. Tak więc z równości $\frac{n^2+p^2}{2017^2} + \frac{2np}{2017^2} = \frac{(n+p)^2}{2017^2} = \frac{2017^2}{2017^2} = 1$ wynika nierówność $\frac{n^2+p^2}{2017^2} > \frac{1}{2}$. $\square$

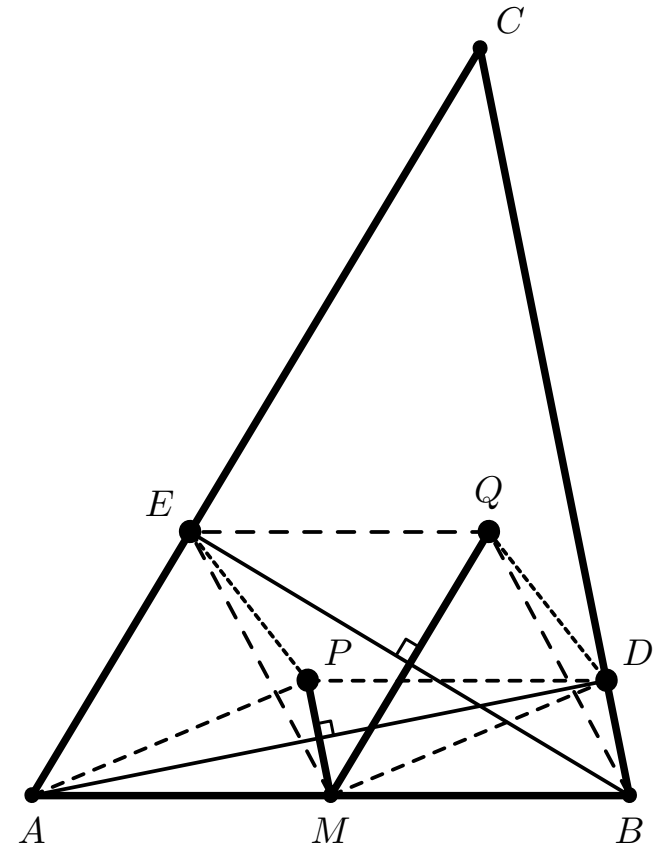
3. Odcinki AD , BE są wysokościami trójkąta ostrokątnego ABC . Punkt M jest środkiem odcinka AB . Punkty P , Q są symetryczne do punktu M odpowiednio względem prostych AD , BE . Wykazać, że środek odcinka DE leży na prostej PQ .

Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie

Ponieważ M jest środkiem odcinka AB i $MP \perp AD$, więc $MP \parallel BC$. Stąd i z twierdzenia Talesa wynika, że prosta MP przecina odcinek AD w jego środku.

Czworokąt $AMDP$ jest więc rombem. Podobnie czworokąt $BMEQ$ jest rombem. Wynikają stąd równości $EQ = MB = AM = PD$ i zależności $EQ \parallel MB \parallel AM \parallel PD$. Jeśli odcinki PD i EQ leżą na jednej prostej, to teza jest spełniona. Jeśli te odcinki nie leżą na jednej prostej, to czworokąt $PDQE$ jest równoległobokiem i wtedy przekątna DE przecina przekątną PQ w punkcie dzielącym każdą z nich na połowy i teza też jest spełniona.



4. Niech t będzie liczbą z przedziału $(0, 1)$. Udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b zachodzi nierówność

$$|a + (1 + t)b| + |a + (1 - t)b| \geq \frac{2t}{2 + t} \cdot (|a| + |b|).$$

Autor zadania: Michał Strzelecki

Rozwiązanie

Dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b i $t \in (0, 1)$ zachodzą nierówności:

$$\begin{aligned} |a + (1 + t)b| + |a + (1 - t)b| &\geq |a + (1 + t)b + a + (1 - t)b| = \\ &= 2|a + b| \geq 2|a| - 2|b| \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} |a + (1 + t)b| + |a + (1 - t)b| &= \\ &= |a + (1 + t)b| + |-a - (1 - t)b| \geq |a + (1 + t)b - a - (1 - t)b| = 2t|b|. \end{aligned}$$

Otrzymujemy wobec tego

$$(1) \quad |a + (1 + t)b| + |a + (1 - t)b| \geq 2|a| - 2|b|$$

oraz

$$(2) \quad |a + (1 + t)b| + |a + (1 - t)b| \geq 2t|b|.$$

Dodając do nierówności (1) pomnożonej przez $\frac{t}{2+t}$ nierówność (2) pomnożoną przez $\frac{2}{2+t}$ otrzymujemy

$$|a + (1 + t)b| + |a + (1 - t)b| \geq \frac{t}{2+t} \cdot (2|a| - 2|b|) + \frac{2}{2+t} \cdot 2t|b| = \frac{2t}{2+t} (|a| + |b|),$$

czyli tezę. $\square$

II seria: 1 października — 31 października 2016 r.

5. Wykazać, że istnieje liczba naturalna n , która ma więcej niż 2017 dzielników d spełniających warunek

$$\sqrt{n} \leq d < 1,01\sqrt{n}.$$

Autor zadania: Mariusz Skalba

Rozwiązanie

Niech k będzie taką liczbą naturalną, że

$$\left(\frac{k+1}{k}\right)^{2017} = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{2017} < 1,01.$$

Nierówność ta może być przepisana w formie

$$\frac{1}{k} < \sqrt[2017]{1,01} - 1 \quad \text{czyli} \quad k > \frac{1}{\sqrt[2017]{1,01} - 1},$$

więc taka liczba k istnieje.

$$\begin{aligned} \text{Przyjmijmy } n = (k(k+1))^{2 \cdot 2017}. \text{ Wówczas} \\ \sqrt{n} = (k(k+1))^{2017} < k^{2016}(k+1)^{2018} < k^{2015}(k+1)^{2019} < \dots < \\ < k(k+1)^{4033} < (k+1)^{4034}. \end{aligned}$$

Liczby w tym ciągu są postaci $k^j(k+1)^{4034-j}$, gdzie $j \leq 2017$ oznacza nieujemną liczbę całkowitą. Każda z nich jest dzielnikiem liczby n oraz spełnia żądane oszacowanie:

$$k^j(k+1)^{4034-j} = \sqrt{n} \cdot \left(\frac{k+1}{k}\right)^{2017-j} \leq \sqrt{n} \cdot \left(\frac{k+1}{k}\right)^{2017} < 1,01\sqrt{n}.$$

Dowód został zakończony. $\square$

6. W balu uczestniczyło 20 kawalerów i 20 dam. W każdym z 99 tańców tańczyła dokładnie jedna para, za każdym razem inna. W każdej parze tańczyła dama z kawalerem. Dowieść, że istnieje takich dwóch kawalerów i takie dwie damy, że każdy z tych dwóch kawalerów zatańczył z obiema tymi damami.

Autor zadania: Nguyen Hung Son

Rozwiązanie

Tańczyło 20 dam: $D_1, D_2, \dots, D_{20}$. Można z nich utworzyć $\binom{20}{2} = 190$ par (nieuporządkowanych). Każdy z kawalerów $K_1, K_2, \dots, K_{20}$ tańczył z pewną liczbą dam. Przyjmijmy, że z kawalerem K_i zatańczyło k_i dam. Z nich można utworzyć $\frac{k_i(k_i-1)}{2}$ par (jest tak również dla $k_i = 0$ oraz $k_i = 1$). Wszystkich par dam można więc utworzyć

$$\frac{k_1(k_1-1)}{2} + \frac{k_2(k_2-1)}{2} + \frac{k_3(k_3-1)}{2} + \dots + \frac{k_{20}(k_{20}-1)}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{Tańców było } 99, \text{ zatem } k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_{20} &= 99. \text{ Zauważmy, że} \\ \frac{1}{2}(k_1(k_1-1) + k_2(k_2-1) + \dots + k_{20}(k_{20}-1)) &= \\ = \frac{1}{2}((k_1-4)(k_1-5) + (k_2-4)(k_2-5) + \dots + (k_{20}-4)(k_{20}-5) + \\ &\quad + 8(k_1 + k_2 + \dots + k_{20}) - 20 \cdot 20) = \\ = \frac{1}{2}((k_1-4)(k_1-5) + (k_2-4)(k_2-5) + \dots + \\ &\quad + (k_{20}-4)(k_{20}-5) + 8 \cdot 99 - 20 \cdot 20) = \\ = \frac{1}{2}((k_1-4)(k_1-5) + (k_2-4)(k_2-5) + \dots + \\ &\quad + (k_{20}-4)(k_{20}-5) + 392) \geq 196, \end{aligned}$$

bo wyrażenie $(x-4)(x-5)$ przyjmuje wartości ujemne tylko dla $x \in (4, 5)$, zatem dla każdej liczby całkowitej k mamy $(k-4)(k-5) \geq 0$. Stąd i z nierówności $196 > 190$ wynika, że pewnym dwóm kawalerom odpowiada ta sama para dam, a to właśnie jest teza twierdzenia, które należało uzasadnić. $\square$

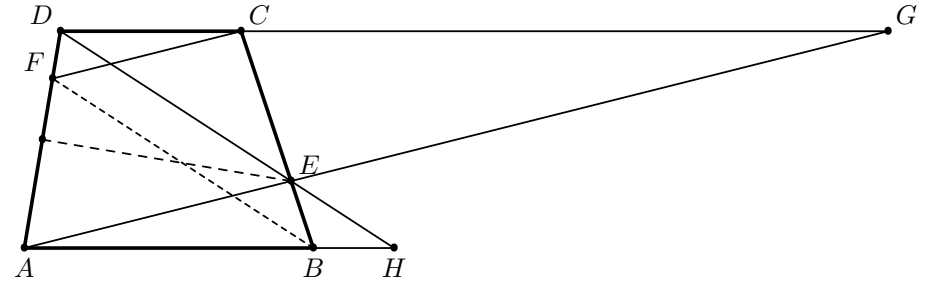
Uwaga – zagadka. Gdybyśmy założyli, że odbyło 98 tańców, teza też byłaby prawdziwa, nierówność $196 > 190$ zastąpilibyśmy taką $192 > 190$. A jak byłoby, gdyby tańców było jedynie 97?

7. Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD . Symetralna boku AD przecina odcinek BC w punkcie E . Prosta równoległa do prostej AE , przechodząca przez punkt C , przecina odcinek AD w punkcie F . Dowieść, że

$$\sphericalangle AFB = \sphericalangle CFD.$$

Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie



Niech G oznacza punkt wspólny prostych AE i DC , a H — punkt wspólny prostych DE i AB . Trójkąty ABE i GCE są podobne, bo proste AB i GC są równoległe, zatem $\frac{GC}{EC} = \frac{AB}{EB}$. Podobnie z podobieństwa trójkątów BHE i CDE wynika równość $\frac{EC}{CD} = \frac{EB}{BH}$. Ponadto $\frac{AF}{FD} = \frac{GC}{CD}$, bo proste FC i AE są równoległe. Z tych równości wnioskujemy, że

$$\frac{AF}{FD} = \frac{GC}{CD} = \frac{GC}{EC} \cdot \frac{EC}{CD} = \frac{AB}{EB} \cdot \frac{EB}{BH} = \frac{AB}{BH}.$$

Stąd i z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa wynika, że proste BF i DE są równoległe, więc $\sphericalangle AFB = \sphericalangle ADE$. Punkt E leży na symetralnej odcinka AD , zatem $\sphericalangle ADE = \sphericalangle DAE$ i wreszcie $\sphericalangle DAE = \sphericalangle DFC$, bo proste AE i FC są równoległe. Z ostatnich trzech równości wynika, że kąty AFB i DFC są równe. Teza została wykazana. $\square$

8. Dane są liczby całkowite a, b, c . Udowodnić, że istnieje taka dodatnia liczba całkowita n , że liczba $n^3 + an^2 + bn + c$ nie jest kwadratem liczby całkowitej.

Autor zadania: Nguyen Hung Son

Rozwiązanie

Założmy, wbrew tezie zadania, że dla każdej liczby całkowitej $n > 0$ wartość wyrażenia $n^3 + an^2 + bn + c$ jest kwadratem liczby całkowitej. Istnieją więc takie liczby całkowite k, ℓ, m, n , że

$$\begin{aligned} 1 + a + b + c &= k^2, \\ 8 + 4a + 2b + c &= \ell^2, \\ 27 + 9a + 3b + c &= m^2, \\ 64 + 16a + 4b + c &= n^2. \end{aligned}$$

Po odjęciu stronami pierwszej równości od trzeciej i drugiej od czwartej otrzymujemy

$$m^2 - k^2 = 26 + 8a + 2b \quad \text{oraz} \quad n^2 - \ell^2 = 56 + 12a + 2b.$$

Liczby $m^2 - k^2$ i $n^2 - \ell^2$ są więc parzyste. Z równości

$$m^2 - k^2 = (m - k)(m + k)$$

wynika, że co najmniej jeden z czynników $m - k$, $m + k$ jest parzysty. Ponieważ ich suma $m - k + m + k = 2m$ jest parzysta, więc drugi też jest parzysty, zatem liczba $m^2 - k^2$ jest podzielna przez 4. Podobnie liczba $n^2 - \ell^2$. Wobec tego przez 4 dzieli się liczba

$$n^2 - \ell^2 - (m^2 - k^2) = 56 + 12a + 2b - (26 + 8a + 2b) = 30 + 4a = 4(a + 7) + 2.$$

Jednak ona z dzielenia przez 4 daje resztę 2. Otrzymana sprzeczność kończy dowód. $\square$

III seria: 1 listopada — 30 listopada 2016 r.

9. Wykazać, że równanie

$$(x^2 + 2y^2)^2 - 2(z^2 + 2t^2)^2 = 1$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach całkowitych x, y, z, t .

Autor zadania: Mariusz Skalba

Rozwiązanie

Zachodzi równość

$$(1^2 + 2 \cdot 1^2)^2 - 2 \cdot (0^2 + 2 \cdot 1^2)^2 = 1,$$

więc czwórka $(1, 1, 0, 1)$ jest rozwiązaniem równania.

Założmy następnie, że dla czwórki (x, y, z, t) nieujemnych liczb całkowitych spełnione są warunki $u = x^2 + 2y^2 > 0$, $v = z^2 + 2t^2 > 0$ oraz $u^2 - 2v^2 = 1$. Wtedy

$$(u^2 + 2v^2)^2 - 2(2uv)^2 = (u^2 - 2v^2)^2 = 1$$

oraz $2uv = 2(x^2 + 2y^2)(z^2 + 2t^2) = 2x^2z^2 + 4y^2z^2 + 4x^2t^2 + 8y^2t^2 = (2xt - 2yz)^2 + 2(xz + 2yt)^2$, więc czwórka nieujemnych liczb całkowitych $(u, v, 2|xt - yz|, xz + 2yt)$ też spełnia równanie. Nie pokrywa się ona z czwórką (x, y, z, t) , bo zachodzi nierówność $u > x$, gdyż $v > 0$, więc $u^2 > 1$, zatem $u > 1$ czyli $x > 1$ lub $y > 0$. Zachodzą też nierówności $u^2 + 2v^2 > 0$ i $|2xt - 2yz|^2 + 2(xz + 2yt)^2 = 2uv > 0$.

Można więc powtórzyć rozumowanie (indukcja) i w ten sposób wskazać nieskończenie wiele różnych rozwiązań w liczbach całkowitych badanego równania. $\square$

Uwaga. Równanie $r^2 - ds^2 = 1$, z parametrem całkowitym $d > 0$ i niewiadomymi r, s , zwane równaniem Pella, jest dobrze zbadane. Wiadomo jak wyglądają jego rozwiązania w liczbach całkowitych. W zadaniu $d = 2$, ale od rozwiązań wymagana jest dodatkowa własność: liczby całkowite r, s mają być bardzo szczególnej postaci. Można udowodnić, że jeśli $r, s > 0$ i $r^2 - 2s^2 = 1$, to istnieje taka

dodatnia liczba całkowita n , że $r = \frac{1}{2}((3 + 2\sqrt{2})^n + (3 - 2\sqrt{2})^n)$, a $s = \frac{1}{2\sqrt{2}}((3 + 2\sqrt{2})^n - (3 - 2\sqrt{2})^n)$. Liczba $r = \frac{1}{2}((3 + 2\sqrt{2})^n + (3 - 2\sqrt{2})^n) = \frac{1}{2}((1 + \sqrt{2})^n)^2 + ((1 - \sqrt{2})^n)^2 = = \frac{1}{2}((p + q\sqrt{2})^2 + (p - q\sqrt{2})^2) = p^2 + 2q^2$ jest odpowiedniej postaci: tu p, q są takimi liczbami całkowitymi, że $(1 + \sqrt{2})^n = p + q\sqrt{2}$, więc $(1 - \sqrt{2})^n = p - q\sqrt{2}$. Jednak tego samego nie można powiedzieć o liczbie $s = \frac{1}{2\sqrt{2}}((p + q\sqrt{2})^2 - (p - q\sqrt{2})^2) = 2pq$ – ona nie musi być tej postaci. W rozwiązaniu wykazaliśmy, że jeśli n jest potęgą liczby 2, to liczby r, s są postaci $x^2 + 2y^2$. Autor zadania potrafi dowieść, że dla $n = 257$, więc nie dla potęgi dwójki, ta liczba też jest postaci $x^2 + 2y^2$. W tym wypadku liczba $p = 118\,119\,373\,866\,262\,081\,485\,223\,899\,617\,886\,417\,593\,271\,902\,402\,645\,222\,441\,921\,910\,431\,040\,354\,300\,019\,446\,804\,767\,966\,058\,309\,121$ jest pierwsza a liczba $q = 1\,640\,689\,623\,700\,659\,351\,936\,833\,81\,621\,330\,294\,770\,651\,861\,320\,888\,171\,562\,587\,614\,620\,304\,100\,785\,844\,883\,920\,376\,945\,100\,294\,097$ jest iloczynem trzech liczb pierwszych. Każda z tych czterech liczb pierwszych z dzielenia przez 8 daje resztę 1, a nieparzysta liczba pierwsza, która z dzielenia przez 8 daje resztę 1 lub 3 może być zapisana w postaci $x^2 + 2y^2$ (w odróżnieniu od pozostałych nieparzystych liczb pierwszych). $\square$

10. Dla ustalonej dodatniej liczby całkowitej n rozważamy równanie

$$x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n = n,$$

w którym niewiadome $x_1, \dots, x_n$ mogą przybierać wartości całkowite nieujemne. Dowieść, że to równanie ma tyle samo rozwiązań $(x_1, \dots, x_n)$, spełniających warunek

$$(1) \quad \text{dla każdego } k \in \{1, \dots, n-1\}: \quad x_k > 0 \quad \text{lub} \quad x_{k+1} = 0,$$

ile ma rozwiązań $(x_1, \dots, x_n)$, spełniających warunek

$$(2) \quad \text{dla każdego } k \in \{1, \dots, n\}: \quad x_k = 0 \quad \text{lub} \quad x_k = 1.$$

Autor zadania: Marcin Kuczma

Rozwiązanie

Rozważajmy ciągi $(x_1, \dots, x_n)$ o wyrazach całkowitych nieujemnych

(niekoniecznie spełniające równanie $x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n = n$), o sumie wyrazów nie przekraczającej n . Warunek (1) oznacza, że ciąg $(x_1, \dots, x_n)$ ma do pewnego miejsca wyrazy dodatnie, a po nich zera. Weźmy dowolny taki ciąg $(x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$; $1 \leq m \leq n$; $x_k > 0$ dla $k \leq m$. Niech $s_i = x_i + \dots + x_n$. Wówczas

$$(3) \quad s_1 > \dots > s_m > 0 = s_{m+1} = s_{m+2} = \dots = s_n.$$

Każdemu ciągowi $(x_1, \dots, x_n)$ przypisaliśmy jeden ciąg $(s_1, \dots, s_n)$. Każdemu ciągowi $(s_1, s_2, \dots, s_m, s_{m+1}, \dots, s_n)$, który spełnia warunek (3) odpowiada dokładnie jeden ciąg $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, którego pierwszych m wyrazów to dodatnie liczby całkowite, po których następują zera: $x_1 = s_1 - s_2, x_2 = s_2 - s_3, \dots, x_{n-1} = s_{n-1} - s_n, x_n = s_n$. Teraz ciągowi $(s_1, \dots, s_m, 0, \dots, 0)$, przypisujemy ciąg zero-jedynkowy $(y_1, \dots, y_n)$ wpisując jedynki na miejscach o numerach $s_1, s_2, \dots, s_m$, tzn. $y_{s_i} = 1$, a na pozostałych miejscach 0. Na przykład, jeśli $n = 24, x_1 = 2, x_2 = 5, x_3 = 4$ oraz $x_4 = x_5 = \dots = x_{24} = 0$, to $s_1 = 2 + 5 + 4 = 11, s_2 = 5 + 4 = 9, s_3 = 4, s_4 = s_5, \dots, s_{24} = 0$. Wtedy $y_{11} = y_9 = y_4 = 1$ oraz $y_i = 0$ dla $i \notin \{4, 9, 11\}$, więc z ciągu $(2, 5, 4, \underbrace{0, \dots, 0}_{21 \text{ zer}}, 0, \dots, 0)$ powstaje ciąg $(0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{13 \text{ zer}})$.

Procedura ta jest odwracalna. Z ciągu $(y_1, \dots, y_n)$ złożonego z zer i jedynek tworzymy ciąg $s_1, s_2, \dots, s_n$ wypisując kolejno numery jedynek w danym ciągu w kolejności malejącej, a po nich zera.

Wystarczy teraz wykazać, że albo oba ciągi $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ oraz $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ spełniają zadane równanie, albo oba go nie spełniają. Zachodzi równość $\sum_{j=1}^n jy_j = \sum_{i=1}^n s_i$, bo $jy_j = j$, gdy $y_j = 1$ i wtedy $j = s_i$ dla odpowiedniego i . Poza tym $\sum_{i=1}^n s_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=i}^n x_k \right) = \sum_{k=1}^n kx_k$. Dowód został zakończony. $\square$

11. Odcinek AD jest wysokością trójkąta ostrokątnego ABC . Punkt E jest rzutem prostokątnym punktu D na prostą AB , a punkt F jest rzutem prostokątnym punktu D na prostą AC . Punkt M jest środ-

kiem odcinka AB , a N — środkiem odcinka AC . Proste MF , EN przecinają się w punkcie S . Dowieść, że środek okręgu opisanego na trójkącie ABC leży na prostej SD .

Autorzy zadania: Dominik Burek i Tomasz Cieśla

Rozwiązanie

Ponieważ w zadaniu występują w zasadzie jedynie proste lub odcinki, proste do nich prostopadłe i proste przechodzące przez dwa punkty, więc najpierw zadanie rozwiążemy analitycznie.

Bez straty ogólności można przyjąć, że wierzchołkami trójkąta są punkty $A = (0, 2)$, $B = (2b, 0)$, $C = (2c, 0)$ i $b < 0 < c$. Wtedy $D = (0, 0)$. Równanie prostej AB wygląda tak: $x + by = 2b$, zatem równanie prostej DE tak: $bx - y = 0$. Niech $E = (x_E, y_E)$. Rozwiązując ten układ równań otrzymujemy $x_E = \frac{2b}{1+b^2}$, $y_E = bx_E = \frac{2b^2}{1+b^2}$, czyli $E = \left(\frac{2b}{1+b^2}, \frac{2b^2}{1+b^2}\right)$. Podobnie uzasadnimy, że $F = \left(\frac{2c}{1+c^2}, \frac{2c^2}{1+c^2}\right)$. Oczywiście $M = (b, 1)$ i $N = (c, 1)$. Równania prostych MF i NE wyglądają więc tak:

$$y = \frac{\frac{2c^2}{1+c^2} - 1}{\frac{2c}{1+c^2} - b}(x - b) + 1 = \frac{c^2 - 1}{2c - b(1 + c^2)}(x - b) + 1.$$

$$y = \frac{\frac{2b^2}{1+b^2} - 1}{\frac{2b}{1+b^2} - c}(x - c) + 1 = \frac{b^2 - 1}{2b - c(1 + b^2)}(x - c) + 1.$$

Można przepisać je w postaci:

$$(c^2 - 1)x + (b + bc^2 - 2c)y = b(c^2 - 1) + b(1 + c^2) - 2c = 2c(bc - 1),$$

$$(b^2 - 1)x + (c + b^2c - 2b)y = c(b^2 - 1) + c(1 + b^2) - 2b = 2b(bc - 1).$$

Odejmując od pierwszego pomnożonego przez b drugie pomnożone przez c otrzymujemy równość

$$0 = x(bc^2 - b - b^2c + c) + y(b^2 + b^2c^2 - 2bc - c^2 - b^2c^2 + 2bc) = \\ = (c - b)(bc + 1)x + (b^2 - c^2)y = (c - b)((bc + 1)x - (b + c)y),$$

zatem współrzędne punktu S spełniają równanie

$$(S) \quad (bc + 1)x - (b + c)y = 0.$$

Jest to równanie prostej, jeśli $bc + 1 \neq 0$ lub $b + c \neq 0$, czyli gdy $b \neq -1$ lub $c \neq 1$, ale tak jest, bo $\sphericalangle BAC \neq 90^\circ$, więc $bc + 1 \neq 0$.

Równaniem symetralnej odcinka AB jest $bx - y = b^2 - 1$, a symetralnej odcinka AC : $cx - y = c^2 - 1$. Współrzędne punktu O , czyli środka okręgu opisanego na trójkącie ABC , spełniają więc równanie $0 = (b(c^2 - 1) - c(b^2 - 1))x + (b^2 - 1 - (c^2 - 1))y =$

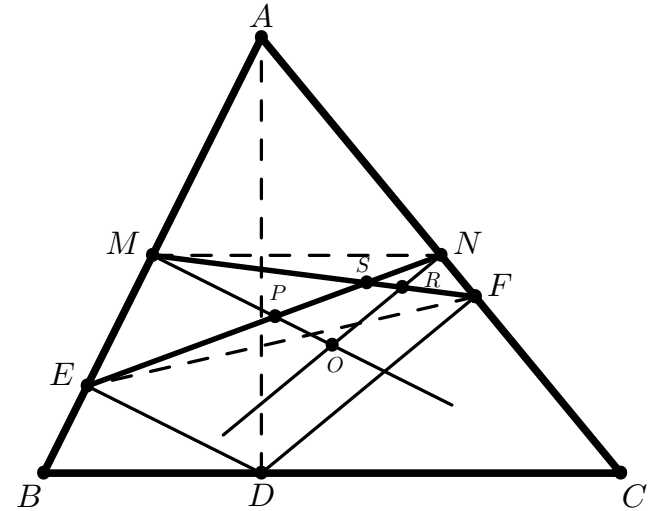
$$= (c - b)((1 + bc)x - (b + c)y),$$

czyli $(1 + bc)x - (b + c)y = 0$.

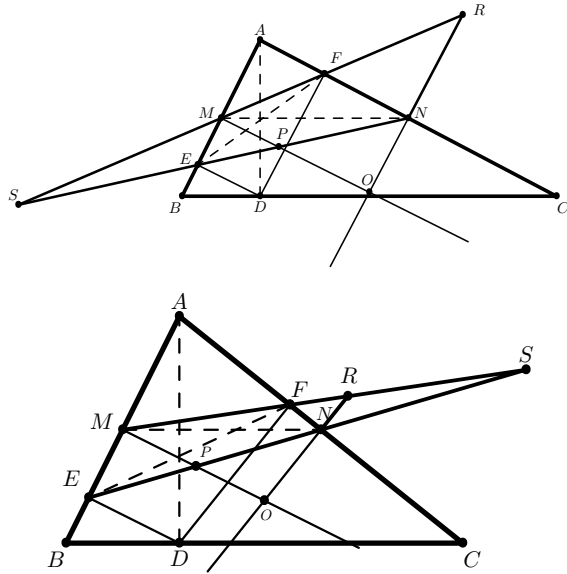
Otrzymaliśmy znów równanie (S) , a ponieważ $D = (0, 0)$, więc punkty D, S, O leżą na prostej o równaniu (S) . Dowód został zakończony. $\square$

Drugie rozwiązanie

Niech P oznacza punkt wspólny prostych MO i EN a R punkt wspólny prostych NO i FM . Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że $\sphericalangle DAB \leq \sphericalangle DAC$, więc $\sphericalangle DAB \leq \frac{\sphericalangle DAB + \sphericalangle DAC}{2} = \frac{\sphericalangle BAC}{2} < 45^\circ$. Punkt E leży więc między punktami B i M . Zachodzi równość $\sphericalangle ADF = \sphericalangle DCA$, bo $\sphericalangle ADF + \sphericalangle FAD = 90^\circ = \sphericalangle DCA + \sphericalangle FAD$. Podobnie $\sphericalangle ADE = \sphericalangle DBA$.



Punkty A, E, D i F leżą na okręgu o średnicy AD , zatem $\sphericalangle AEF = \sphericalangle ADF = \sphericalangle DCA$ i $\sphericalangle AFE = \sphericalangle ADE = \sphericalangle DBA$. Proste MN i BC są równoległe, więc $\sphericalangle AMN = \sphericalangle ABC$ i $\sphericalangle ANM = \sphericalangle ACB$. Jeśli $F = N$, czyli $\sphericalangle DAC = 45^\circ$, to $S = N = F$ a prosta DS jest symetralną odcinka AC , więc na niej leży punkt O i teza jest spełniona.



Dalej $N \neq F$. Jeśli punkt F leży między punktami N i C , to $\sphericalangle EMN + \sphericalangle EFN = 180^\circ - \sphericalangle AMN + \sphericalangle EFA = 180^\circ$, więc na czworokącie $MNEF$ można opisać okrąg. Jeśli punkt F leży na odcinku NA , to zachodzą równości $\sphericalangle MEF = \sphericalangle AEF = \sphericalangle BCA = \sphericalangle MNA$, a stąd wynika, że na czworokącie $MENF$ można opisać okrąg.

Z tego, że przez punkty N, M, E i F przechodzi okrąg wynika równość $\sphericalangle EMS = \sphericalangle FNS$, a z niej, przez odjęcie lub dodanie kąta prostego, równość $\sphericalangle PMS = \sphericalangle RNS$. Jeśli $\sphericalangle PMS = \sphericalangle RNS = 0^\circ$, to prosta SM jest symetralną odcinka AB a prosta SN — symetralną odcinka AC i wtedy $O = S$, więc twierdzenie jest prawdziwe. Dalej zakładamy, że $\sphericalangle PMS = \sphericalangle RNS \neq 0^\circ$. Trójkąty SMP i SNR są podobne, bo ich odpowiednie kąty są równe. Podobne są również trójkąty SMN i SEF . Wobec tego $\frac{SR}{SP} = \frac{SN}{SM} = \frac{SF}{SE}$. Jednokładność w skali $\frac{SE}{SP} = \frac{SF}{SR}$ względem punktu S przekształca więc punkt P na punkt E , punkt R na punkt F , prostą PO na równoległą do niej przechodzącą przez punkt E , czyli na prostą ED , prostą OR na prostą DF . Wobec tego punkt wspólny prostych PO i RO , czyli punkt O przechodzi na punkt wspólny prostych ED i FD , więc na punkt D , co dowodzi współliniowości punktów D, O i S .

12. Niech α będzie taką liczbą rzeczywistą, że $\operatorname{tg}(\alpha \cdot \pi) = \sqrt{2}$. Rozstrzygnąć, czy α musi być liczbą wymierną.

Zadanie zaproponował: Michał Krych

Rozwiązanie

Udowodnimy, że liczba α jest niewymierna. Załóżmy, że tak nie jest i niech $\alpha = \frac{p}{q}$, gdzie p i $q > 0$ oznaczają liczby całkowite. Ponieważ dla każdej liczby $x \in \mathbb{R}$, dla której $\operatorname{tg} x$ jest zdefiniowany, zachodzi równość $\operatorname{tg}(\pi + x) = \operatorname{tg} x$, każda z liczb

$$\operatorname{tg}(\alpha\pi), \operatorname{tg}(2\alpha\pi), \operatorname{tg}(3\alpha\pi), \dots$$

jest elementem zbioru $\left\{ \operatorname{tg} 0, \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{q} \right), \operatorname{tg} \left(\frac{2\pi}{q} \right), \dots, \operatorname{tg} \left(\frac{(q-1)\pi}{q} \right) \right\}$.

Niech $p_1 = 1, q_1 = 1$ oraz $p_{n+1} = 2p_n q_n$ i $q_{n+1} = q_n^2 - 2p_n^2$ dla $n = 1, 2, \dots$. Udowodnimy, że

1° dla każdego n liczba q_n jest nieparzysta,

2° dla każdego n liczby p_n i q_n są względnie pierwsze oraz $p_n \neq 0 \neq q_n$,

3° dla każdego n zachodzi równość $\operatorname{tg}(2^{n-1}\alpha\pi) = \frac{p_n}{q_n}\sqrt{2}$.

Dla $n = 1$ stwierdzenie jest prawdziwe. Jeśli jest prawdziwe dla pewnego n , to liczba $q_{n+1} = q_n^2 - 2p_n^2$ jest nieparzysta, więc $q_{n+1} \neq 0$. Również $p_{n+1} = 2p_n q_n \neq 0$. Jeśli liczba pierwsza k jest wspólnym dzielnikiem liczb p_{n+1} i q_{n+1} , to jest nieparzysta jako dzielnik liczby nieparzystej q_{n+1} . Ponieważ k jest też dzielnikiem liczby $p_{n+1} = 2p_n q_n$, więc jest dzielnikiem jednej z liczb p_n, q_n . Z tego, że k jest nieparzysta i że jest dzielnikiem liczby $q_{n+1} = q_n^2 - 2p_n^2$ wynika, że jest też dzielnikiem drugiej z nich. Wobec tego k jest wspólnym dzielnikiem liczb p_n i q_n , zatem $k = 1$, co jednak przeczy temu, że jest liczbą pierwszą. Jeśli $\operatorname{tg}(2^{n-1}\alpha\pi) = \frac{p_n}{q_n}\sqrt{2}$, to

$$\operatorname{tg}(2^n\alpha\pi) = \frac{2 \operatorname{tg}(2^{n-1}\alpha\pi)}{1 - \operatorname{tg}^2(2^{n-1}\alpha\pi)} = \frac{2 \frac{p_n}{q_n}\sqrt{2}}{1 - \left(\frac{p_n}{q_n}\sqrt{2}\right)^2} = \frac{2p_n q_n \sqrt{2}}{q_n^2 - 2p_n^2} = \frac{p_{n+1} \sqrt{2}}{q_{n+1}}.$$

Zachodzi również nierówność $|p_{n+1}| = |2p_n q_n| \geq |2p_n| > |p_n|$. Wobec tego wszystkie liczby $\frac{p_n}{q_n}\sqrt{2} = \operatorname{tg}(2^{n-1}\alpha\pi)$ są różne. Przeczy to temu, że znajdują się one w zbiorze $\left\{ \operatorname{tg} 0, \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{q} \right), \operatorname{tg} \left(\frac{2\pi}{q} \right), \dots, \operatorname{tg} \left(\frac{(q-1)\pi}{q} \right) \right\}$, bo mam on tylko q elementów. $\square$



LXVIII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe

zawodów stopnia drugiego

24 lutego 2017 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Wykazać, że dla każdej liczby pierwszej $p > 2$ istnieje dokładnie jedna taka dodatnia liczba całkowita n , że liczba $n^2 + np$ jest kwadratem liczby całkowitej.

2. W trójkącie ostrokątnym ABC dwusieczna kąta BAC przecina bok BC w punkcie D . Punkty P i Q są rzutami prostokątnymi punktu D odpowiednio na proste AB i AC . Dowieść, że pole trójkąta APQ jest równe polu czworokąta $BCQP$ wtedy i tylko wtedy, gdy środek okręgu opisanego na trójkącie ABC leży na prostej PQ .

3. Dane są liczby rzeczywiste $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{2n-1}$, których średnia arytmetyczna równa jest A . Wykazać, że

$$2 \cdot \sum_{i=1}^{2n-1} (x_i - A)^2 \geq \sum_{i=1}^{2n-1} (x_i - x_n)^2.$$

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.



LXVIII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe

zawodów stopnia drugiego

25 lutego 2017 r. (drugi dzień zawodów)

4. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków AB i AC odpowiednio w punktach D i E . Punkt J jest środkiem okręgu dopisanego do trójkąta ABC , stycznego do boku BC . Punkty M i N są odpowiednio środkami odcinków JD i JE . Proste BM i CN przecinają się w punkcie P . Udowodnić, że punkt P leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC .

Uwaga. Okręgiem dopisanym do trójkąta nazywamy okrąg styczny do jednego z boków i do przedłużeń dwóch pozostałych.

5. Smakosz Jan porównywał n restauracji, gdzie n jest dodatnią liczbą całkowitą. Każdą parę restauracji porównał w dwóch kategoriach: smaczności posiłku oraz jakości obsługi. W przypadku niektórych par Jan nie mógł się zdecydować, którą uważa za lepszą w którejś kategorii, ale w żadnej parze nie zdarzyło się to w obu kategoriach. Ponadto, jeśli Jan uznał, że restauracja A jest lepsza od restauracji B w którejś kategorii, oraz stwierdził, że restauracja B jest lepsza od restauracji C w tej samej kategorii, to uznał również, że A jest lepsza od C w tej kategorii. Udowodnić, że istnieje taka restauracja R , że każda inna restauracja została uznana za gorszą od R w chociaż jednej kategorii.

6. Dana jest liczba pierwsza $p > 2$ oraz liczby $x, y \in \{1, 2, \dots, \frac{p-1}{2}\}$. Wykazać, że jeśli liczba $x(p-x)y(p-y)$ jest kwadratem liczby całkowitej, to $x = y$.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.



LXVIII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych
zawodów stopnia drugiego
24 lutego 2017 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Wykazać, że dla każdej liczby pierwszej $p > 2$ istnieje dokładnie jedna taka dodatnia liczba całkowita n , że liczba $n^2 + np$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Autor zadania: Michał Figlus

Rozwiązanie:

Niech $k > 0$ będzie taką liczbą całkowitą, że $n^2 + np = k^2$. Wtedy

$$0 = 4n(n+p) - 4k^2 = (2n+p)^2 - 4k^2 - p^2 = (2n+p-2k)(2n+p+2k) - p^2.$$

Stąd $p^2 = (2n+p-2k)(2n+p+2k)$. Ponieważ $2n+p+2k > 0$, więc również $2n+p-2k > 0$. Liczba p jest pierwsza oraz $2n+p-2k < 2n+p+2k$, zatem $2n+p-2k$ jest dodatnim dzielnikiem p^2 , mniejszym od p , więc $2n+p-2k = 1$ i $2n+p+2k = p^2$. Dodając stronami ostatnie dwie równości otrzymujemy $4n+2p = p^2+1$, czyli $n = (\frac{p-1}{2})^2$. Udowodniliśmy, że jeśli liczba n istnieje, to $n = (\frac{p-1}{2})^2$, więc istnieje nie więcej niż jedno n .

Jeśli $n = (\frac{p-1}{2})^2$, to n jest liczbą całkowitą, bo p jest nieparzyste, oraz

$$n(n+p) = \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 \left(\left(\frac{p-1}{2}\right)^2 + p\right) = \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 \left(\frac{p+1}{2}\right)^2,$$

zatem $n(n+p) = k^2$ dla $k = \frac{p-1}{2} \cdot \frac{p+1}{2}$. Wobec tego jedyną liczbą całkowitą dla której $n^2 + np$ jest kwadratem liczby całkowitej jest $(\frac{p-1}{2})^2$. $\square$

2. W trójkącie ostrokątnym ABC dwusieczna kąta BAC przecina bok BC w punkcie D . Punkty P i Q są rzutami prostokątnymi punktu D odpowiednio na proste AB i AC . Dowieść, że pole trójkąta APQ jest równe polu czworokąta $BCQP$ wtedy i tylko wtedy, gdy środek okręgu opisanego na trójkącie ABC leży na prostej PQ .

Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie:

Sposób I: Załóżmy, że prosta AD przecina okrąg opisany na trójkącie ABC w punkcie E i oznaczmy przez M środek odcinka AE (rys. 1).

Pole czworokąta $BCQP$ jest równe polu trójkąta APQ wtedy i tylko wtedy, gdy pole trójkąta APQ stanowi połowę pola trójkąta ABC . Korzystając ze wzoru na pole trójkąta dostajemy równość

$$\frac{1}{2}AP \cdot AQ \cdot \sin \sphericalangle BAC = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin \sphericalangle BAC$$

lub równoważnie $2AP \cdot AQ = AB \cdot AC$.

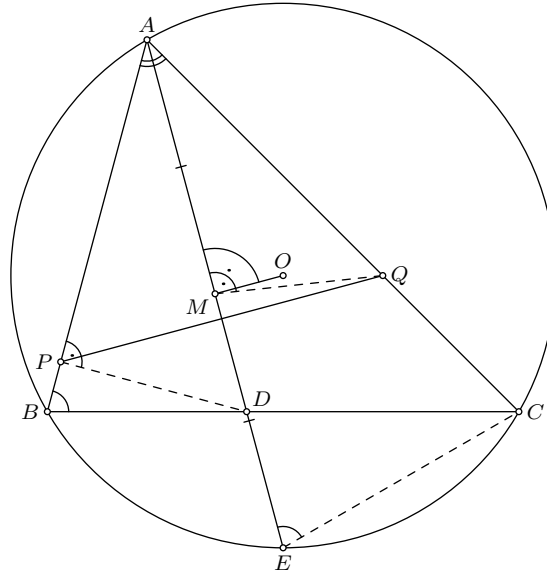
Trójkąty ABD i AEC są podobne, gdyż $\sphericalangle CBA = \sphericalangle CEA$ oraz $\sphericalangle BAD = \sphericalangle DAC$. Wobec tego

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AC},$$

więc warunek dany w zadaniu jest równoważny równości $2AP \cdot AQ = AD \cdot AE$.

Ponieważ $AM = ME$, to $AP \cdot AQ = AD \cdot AM$, stąd

$$\frac{AM}{AQ} = \frac{AP}{AD}. \quad (1)$$

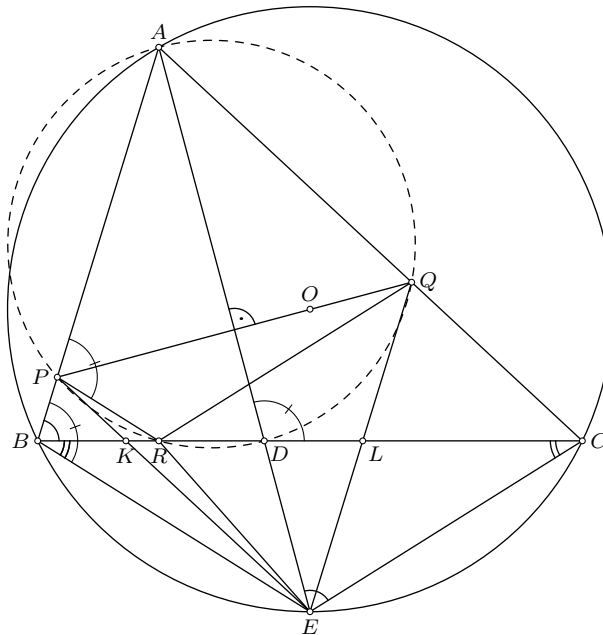


rys. 1

Łącząc (1) z równością $\sphericalangle PAD = \sphericalangle MAQ$, uzyskujemy podobieństwo trójkątów APD i AMQ . W szczególności $\sphericalangle QMA = 90^\circ$ — co jest możliwe wtedy i tylko wtedy, gdy punkt O leży na prostej PQ . $\square$

Sposób II: Niech E będzie punktem przecięcia prostej AD z okręgiem opisanym na trójkącie ABC , którego środkiem jest punkt O . Ponieważ prosta AE jest dwusieczną kąta BAC to punkty P i Q są symetryczne względem AE , a więc czworokąt $APEQ$ jest deltoidem. Skoro $AO = OE$, to czworokąt ten jest rombem wtedy i tylko wtedy, gdy punkt O leży na prostej PQ .

Bez szkody założymy, że $AB < AC$ (jeśli $AB = AC$, to rozumowanie przebiega analogicznie). Z równości $\sphericalangle DPA = \sphericalangle AQD = 90^\circ$ wynika, że na czworokącie $APDQ$ można opisać okrąg. Drugi punkt przecięcia tego okręgu z prostą BC oznaczmy przez R . Niech K i L oznaczają punkt przecięcia prostej BC z prostymi odpowiednio PE i QE (rys. 2). Zauważmy, że



rys. 2

$$\begin{aligned}\sphericalangle EBA &= \sphericalangle DBA + \sphericalangle EBC = \sphericalangle CEA + \sphericalangle DCE = \sphericalangle ADC = \\ &= 180^\circ - \sphericalangle ADR = \sphericalangle RPA,\end{aligned}$$

więc czworokąt $PBER$ jest trapezem. Analogicznie dowodzimy, że czworokąt $RECQ$ jest trapezem. Wynika stąd, że punkt R leży między punktami K i L .

Pola trójkątów PBR i PER są równe, gdyż trójkąty te mają wspólną podstawę PR i równe wysokości opuszczone na PR . Wobec tego pola trójkątów PBK i RKE też są równe. Podobnie, pola trójkątów REL i QLC są równe. Zatem

$$\begin{aligned}[APEQ] &= [APKLQ] + [KED] + [DEL] = \\ &= [APKLQ] + [RKE] + [REL] = \\ &= [APKLQ] + [PBK] + [QLC] = [ABC],\end{aligned}$$

gdzie symbolem $[\mathcal{F}]$ oznaczyliśmy pole figury $\mathcal{F}$.

Z powyższego rozumowania wynika, że $[BCQP] = [APQ] \iff [APQ] = \frac{1}{2}[ABC] \iff [APQ] = \frac{1}{2}[APEQ]$, co zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy czworokąt $AQEP$ jest rombem. $\square$

3. Dane są liczby rzeczywiste $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{2n-1}$, których średnia arytmetyczna równa jest A . Wykazać, że

$$2 \cdot \sum_{i=1}^{2n-1} (x_i - A)^2 \geq \sum_{i=1}^{2n-1} (x_i - x_n)^2.$$

Autor zadania: Marta Strzelecka i Michał Strzelecki

Rozwiązanie:

Sposób I: Zauważmy, że jeżeli zastąpimy liczby $x_1, x_2, \dots, x_{2n-1}$ odpowiednio przez $x_1 - A, x_2 - A, \dots, x_{2n-1} - A$, to nierówność do udowodnienia w zadaniu nie zmieni się, gdyż średnia arytmetyczna nowych liczb wynosi 0. Oznacza to, że nie zmniejszymy ogólności przyjmując $A = 0$.

Przy takim założeniu prawa strona nierówności przyjmuje postać

$$\sum_{i=1}^{2n-1} (x_i - x_n)^2 = \sum_{i=1}^{2n-1} x_i^2 - 2x_n \sum_{i=1}^{2n-1} x_i + (2n-1)x_n^2 = \sum_{i=1}^{2n-1} x_i^2 + (2n-1)x_n^2.$$

Pozostaje wykazać, że $\sum_{i=1}^{2n-1} x_i^2 \geq (2n-1)x_n^2$.

Dla $n = 1$ żądana nierówność jest spełniona. Przyjmijmy $n \geq 2$ i oznaczmy przez B i C odpowiednio średnią arytmetyczną liczb $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ oraz $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{2n-1}$. Z założeń zadania wynika, że $B \leq x_n \leq C$. Ponadto zachodzi równość

$$0 = (2n-1)A = x_n + (n-1)(B+C).$$

Z nierówności między średnią arytmetyczną i kwadratową oraz nierówności trójkąta wynika, że

$$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2}{n-1}} \geq \frac{\sum_{i=1}^{n-1} |x_i|}{n-1} \geq \frac{\left| \sum_{i=1}^{n-1} x_i \right|}{n-1} = |B|,$$

stąd $\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 \geq (n-1)B^2$. Analogicznie dostajemy $\sum_{i=n+1}^{2n-1} x_i^2 \geq (n-1)C^2$. Oznacza to, że spełniona jest nierówność

$$\sum_{i=1}^{2n-1} x_i^2 \geq x_n^2 + (n-1)(B^2 + C^2).$$

Niech $g(t) = t^2 + (B + C - t)^2$. Ponieważ $g(B) = g(C) = B^2 + C^2$ oraz współczynnik przy t^2 funkcji g jest dodatni, to dla $B \leq t \leq C$ zachodzi nierówność $g(t) \leq B^2 + C^2$. W szczególności skoro $B \leq x_n \leq C$, to zachodzi nierówność

$$B^2 + C^2 \geq g(x_n) = x_n^2 + (B + C - x_n)^2.$$

Z równości $(n - 1)(B + C) + x_n = 0$ wynika, że liczby $B + C$ i x_n są przeciwnych znaków, więc $(B + C - x_n)^2 \geq x_n^2$. Łącząc otrzymane oszacowania dostajemy $B^2 + C^2 \geq 2x_n^2$.

Ostatecznie

$$\sum_{i=1}^{2n-1} x_i^2 \geq x_n^2 + (n - 1)(B^2 + C^2) \geq (2n - 1)x_n^2,$$

co było do okazania. □

Sposób II: Zastępując liczby $x_1, x_2, \dots, x_{2n-1}$ odpowiednio przez $x_1 - x_n, x_2 - x_n, \dots, x_{2n-1} - x_n$, możemy bez straty ogólności przyjąć, że $x_n = 0$. Dla $n = 1$ nierówność jest spełniona. Przyjmijmy $n \geq 2$. Mamy ciąg równości

$$\begin{aligned} 2 \sum_{i=1}^{2n-1} (x_i - A)^2 - \sum_{i=1}^{2n-1} (x_i - x_n)^2 &= \sum_{i=1}^{2n-1} x_i^2 - 4A \sum_{i=1}^{2n-1} x_i + 2(2n - 1)A^2 = \\ &= \frac{2n - 3}{2n - 1} \sum_{i=1}^{2n-1} x_i^2 - \frac{4}{2n - 1} \sum_{1 \leq i < j \leq 2n-1} x_i x_j = \\ &= \frac{1}{2n - 1} \left(\sum_{i=1}^{2n-1} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n-1} (x_i - x_j)^2 + 2 \sum_{n+1 \leq i < j \leq 2n-1} (x_i - x_j)^2 - 4 \sum_{\substack{1 \leq i \leq n-1 \\ n+1 \leq j \leq 2n-1}} x_i x_j \right). \end{aligned}$$

Ponieważ $x_i x_j \leq 0$ dla $i \leq n \leq j$, to powyższa suma jest nieujemna. Oznacza to, że wyjściowa nierówność jest spełniona. □



LXVIII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych
zawodów stopnia drugiego
24 lutego 2017 r. (pierwszy dzień zawodów)

4. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków AB i AC odpowiednio w punktach D i E . Punkt J jest środkiem okręgu dopisanego do trójkąta ABC , stycznego do boku BC . Punkty M i N są odpowiednio środkami odcinków JD i JE . Proste BM i CN przecinają się w punkcie P . Udowodnić, że punkt P leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC .

Uwaga: Okręgiem dopisanym do trójkąta nazywamy okrąg styczny do jednego z boków i do przedłużeń dwóch pozostałych.

Autor zadania: Piotr Ambroszczyk

Rozwiązanie:

Niech F i G będą punktami styczności okręgu dopisanego z zadania z prostymi odpowiednio AB i AC . Ponadto niech K i L oznaczają punkty styczności kolejno okręgów wpisanego i dopisanego z prostą BC (rys. 3).

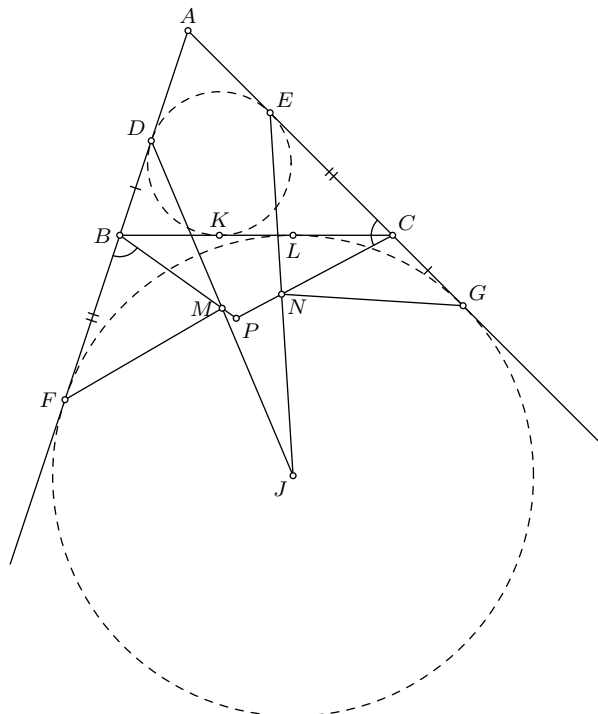
Trójkąty DFM i EGN są symetryczne względem prostej AJ , więc są przystające. Ponadto są one równoramienne, gdyż punkty M i N to środki przeciwprostokątnych odpowiednio trójkątów DFJ i EGJ . Zauważmy, że

$$\begin{aligned} 2CG &= 2AG - 2AC = AG + AF - 2AC = \\ &= AB + BL + AC + CL - 2AC = AB + BC - AC. \end{aligned}$$

Podobnie

$$2BD = BD + BK = AB - AE + BC - EC = AB + BC - AC,$$

więc $CG = BD$, stąd B i C dzielą boki DF i EG trójkątów DFM i ENG w tym samym stosunku, zatem trójkąty BFM i CEN są przystające. W szczególności $\angle ECN = \angle FBM$. Wobec tego $\angle ACP = 180^\circ - \angle PBA$ — co oznacza, że punkt P leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC . $\square$



rys. 3

5. Smakosz Jan porównywał n restauracji, gdzie n jest dodatnią liczbą całkowitą. Każdą parę restauracji porównał w dwóch kategoriach: smaczności posiłku oraz jakości obsługi. W przypadku niektórych par Jan nie mógł się zdecydować, którą uważa za lepszą w którejś kategorii, ale w żadnej parze nie zdarzyło się to w obu kategoriach. Ponadto, jeśli Jan uznał, że restauracja A jest lepsza od restauracji B w którejś kategorii, oraz stwierdził, że restauracja B jest lepsza od restauracji C w tej samej kategorii, to uznał również, że A jest lepsza od C w tej kategorii. Udowodnić, że istnieje taka restauracja R , że każda inna restauracja została uznana za gorszą od R w chociaż jednej kategorii.

Autor zadania: Andrzej Grzesik

Rozwiązanie:

Powiemy, że restauracja A jest *wyróżniająca się* w zbiorze restauracji $\mathcal{S}$, jeżeli A jest lepsza w przynajmniej jednej kategorii od każdej restauracji ze zbioru $\mathcal{S} \setminus \{A\}$.

Udowodnimy przez indukcję ze względu na liczbę restauracji, że w każdym niepustym zbiorze restauracji istnieje co najmniej jedna restauracja wyróżniająca się. Jeżeli mamy jedną restaurację to oczywiście jest ona wyróżniająca się. Przypuśćmy, że teza zachodzi dla dowolnego niepustego zbioru restauracji o mocy mniejszej niż n i udowodnimy, że zachodzi również dla zbioru złożonego z n restauracji.

Oznaczmy zbiór $n \geq 2$ restauracji przez $\mathcal{R}$. Wybierzmy dowolną restaurację $A \in \mathcal{R}$. Z założenia indukcyjnego, w zbiorze $\mathcal{R} \setminus \{A\}$ istnieje restauracja wyróżniająca się, nazwijmy ją B . Oznaczmy przez $\mathcal{O}_B$ i $\mathcal{P}_B$ zbiory restauracji z $\mathcal{R} \setminus \{A\}$, które mają odpowiednio gorszą obsługę i gorsze posiłki od B . Oczywiście $\mathcal{O}_B \cup \mathcal{P}_B = \mathcal{R} \setminus \{A, B\}$. Rozważmy wszystkie możliwe wyniki porównania restauracji A i B . Jeżeli B jest lepsza od A w którejkolwiek z kategorii, to B jest wyróżniająca się w $\mathcal{R}$. Jeżeli A jest lepsza w obu kategoriach od B , to A ma również lepszą obsługę od każdej restauracji ze zbioru $\mathcal{O}_B$, oraz lepsze posiłki od każdej restauracji ze zbioru $\mathcal{P}_B$. Oznacza to, że A jest wyróżniająca się w $\mathcal{R}$.

Pozostaje przypadek, w którym A jest lepsza od B w dokładnie jednej kategorii. Bez straty ogólności przyjmijmy, że A ma lepszą obsługę od B . Wówczas A ma również lepszą obsługę od każdej restauracji ze zbioru $\mathcal{O}_B$. Z założenia indukcyjnego w zbiorze $\mathcal{P}_B \cup \{A\}$ istnieje restauracja wyróżniająca się, nazwijmy ją C . Jeżeli $C = A$, to A ma lepszą obsługę od restauracji ze zbioru $\mathcal{O}_B \cup \{B\}$ oraz jest wyróżniająca się w zbiorze $\mathcal{P}_B \cup \{A\}$. Wynika stąd, że A jest wyróżniająca się w $\mathcal{O}_B \cup \{B\} \cup \mathcal{P}_B \cup \{A\} = \mathcal{R}$. Jeżeli zaś $C \neq A$ to C jest lepsza od A w którejś z kategorii. Jeżeli C ma lepsze posiłki od A , to również B ma lepsze posiłki od A , wbrew naszemu założeniu. Jeżeli zaś C jest lepsza od A pod względem obsługi, to C ma lepszą obsługę od każdej restauracji ze zbioru $\{A, B\} \cup \mathcal{O}_B$. Ponadto, z założenia C jest wyróżniająca się w zbiorze $\mathcal{P}_B \cup \{A\}$, oznacza to, że C jest wyróżniająca się w $\{A, B\} \cup \mathcal{O}_B \cup \mathcal{P}_B = \mathcal{R}$. Kończy to dowód tezy indukcyjnej. $\square$

6. Dana jest liczba pierwsza $p > 2$ oraz liczby $x, y \in \{1, 2, \dots, \frac{p-1}{2}\}$. Wykazać, że jeśli liczba $x(p-x)y(p-y)$ jest kwadratem liczby całkowitej, to $x = y$.

Autor zadania: Mariusz Skałba

Rozwiązanie:

Przypuśćmy, że $xy(p-x)(p-y) = k^2$ dla pewnego $k > 0$. Z nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną otrzymujemy

$$k^2 = xy(p-x)(p-y) < \left(\frac{x+(p-x)}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{y+(p-y)}{2}\right)^2 = \left(\frac{p^2}{4}\right)^2.$$

Oznacza to, że $k < \frac{p^2}{4}$. Ponieważ $p-x > x$ oraz $p-y > y$, to $k^2 > x^2y^2$ i $k > xy$. Z równości

$$0 = k^2 - xy(p-x)(p-y) = (k-xy)(k+xy) - pxy(p-x-y)$$

wynika, że liczba $(k-xy)(k+xy)$ jest podzielna przez p . Ponieważ p jest liczbą pierwszą, to jedna z liczb $k-xy$, $k+xy$ jest podzielna przez p . Istnieje więc taka dodatnia liczba całkowita l , że $k-xy = lp$ lub $k+xy = lp$. W pierwszym przypadku otrzymujemy

$$lp(lp+2xy) = lp(k+xy) = pxy(p-x-y),$$

czyli $p(xy - l^2) = xy(2l + x + y)$. Ze wzorów $lp = k - xy < k < \frac{p^2}{4}$ wynika, że $l < \frac{p}{4}$, więc $2l + x + y < 2 \cdot \frac{p}{4} + \frac{p}{2} + \frac{p}{2} = 2p$. Ponieważ $x < p$ i $y < p$, więc p jest dzielnikiem liczby $2l + x + y > 0$. Stąd wynika, że $p = 2l + x + y$. Jednak wtedy $p(xy - l^2) = pxy$, zatem $l = 0$, czyli $k = xy$, wbrew nierówności $xy < k$.

Z równości $k + xy = lp$ wynika, że

$$lp(lp - 2xy) = lp(k - xy) = pxy(p - x - y),$$

czyli $p(xy - l^2) = xy(x + y - 2l)$. Ponieważ $x < p$ i $y < p$, więc p jest dzielnikiem liczby $x + y - 2l$. Mamy też $lp = k + xy < \frac{p^2}{4} + \frac{p}{2} \cdot \frac{p}{2} = \frac{p^2}{2}$, zatem $l < \frac{p}{2}$. Podobnie jak poprzednio p jest dzielnikiem liczby $x + y - 2l$, ale $p > x + y > x + y - 2l > -2 \cdot \frac{p}{2} = -p$, więc $x + y - 2l = 0$. Wynika stąd, że $p(xy - l^2) = 0$, zatem $xy = l^2$, więc $(x - y)^2 = (x + y)^2 - 4xy = (2l)^2 - 4l^2 = 0$, czyli $x = y$, a to należało udowodnić. $\square$

(db,mg)



LXVIII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe

zawodów stopnia trzeciego

3 kwietnia 2017 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Punkty P i Q leżą odpowiednio wewnątrz boków AB i AC trójkąta ABC , przy czym spełniona jest równość $BP = CQ$. Odcinki BQ i CP przecinają się w punkcie R . Okręgi opisane na trójkątach BPR i CQR przecinają się ponownie w punkcie S różnym od R . Udowodnić, że punkt S leży na dwusiecznej kąta BAC .

2. Ciąg $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ składający się z parami różnych pól szachownicy o wymiarach $n \times n$ nazwiemy *cyklem*, jeśli $k \geq 4$ oraz pola a_i i a_{i+1} mają wspólny bok dla wszystkich $i = 1, 2, \dots, k$, gdzie $a_{k+1} = a_1$. Podzbiór X pól tej szachownicy nazwiemy *złośliwym*, jeśli każdy cykl na niej zawiera co najmniej jedno pole należące do X .

Wyznaczyć wszystkie liczby rzeczywiste C o następującej własności: dla każdej liczby całkowitej $n \geq 2$ na szachownicy o wymiarach $n \times n$ istnieje podzbiór złośliwy składający się z co najwyżej Cn^2 pól.

3. Liczby całkowite $a_1, a_2, \dots, a_n$ spełniają nierówności

$$1 < a_1 < a_2 < \dots < a_n < 2a_1.$$

Udowodnić, że jeśli m jest liczbą różnych dzielników pierwszych iloczynu $a_1 a_2 \dots a_n$, to

$$(a_1 a_2 \dots a_n)^{m-1} \geq (n!)^m.$$

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejsze dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.



LXVIII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe

zawodów stopnia trzeciego

4 kwietnia 2017 r. (drugi dzień zawodów)

4. Wykazać, że zbiór dodatnich liczb całkowitych $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$ można przedstawić w postaci sumy pięciu parami rozłącznych podzbiorów o następującej własności: każda piątka liczb postaci $(n, 2n, 3n, 4n, 5n)$, gdzie $n \in \mathbb{Z}^+$, zawiera po jednej liczbie z każdego z tych pięciu podzbiorów.

5. Punkt M jest środkiem boku BC trójkąta ABC , w którym $AB = AC$. Punkt D jest rzutem prostokątnym punktu M na bok AB . Okrąg ω jest wpisany w trójkąt ACD i styczny do odcinków AD i AC odpowiednio w punktach K i L . Proste styczne do ω przechodzące przez M przecinają prostą KL w punktach X i Y , przy czym punkty X, K, L, Y leżą w tej kolejności na prostej KL . Udowodnić, że punkty M, D, X, Y leżą na jednym okręgu.

6. Dane są takie trzy ciągi nieujemnych liczb rzeczywistych $(a_0, a_1, \dots, a_n)$, $(b_0, b_1, \dots, b_n)$, $(c_0, c_1, \dots, c_{2n})$, że dla wszystkich $0 \leq i, j \leq n$ zachodzi nierówność $a_i b_j \leq (c_{i+j})^2$. Wykazać, że

$$\sum_{i=0}^n a_i \cdot \sum_{j=0}^n b_j \leq \left(\sum_{k=0}^{2n} c_k \right)^2.$$

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejsze dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.



LXVIII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych

zawodów stopnia trzeciego

3 kwietnia 2017 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Punkty P i Q leżą odpowiednio na bokach AB i AC trójkąta ABC , przy czym spełniona jest równość $BP = CQ$. Odcinki BQ i CP przecinają się w punkcie R . Okręgi opisane na trójkątach BPR i CQR przecinają się ponownie w punkcie S różnym od R . Udowodnić, że punkt S leży na dwusiecznej kąta BAC .

Autor zadania: Dominik Burek

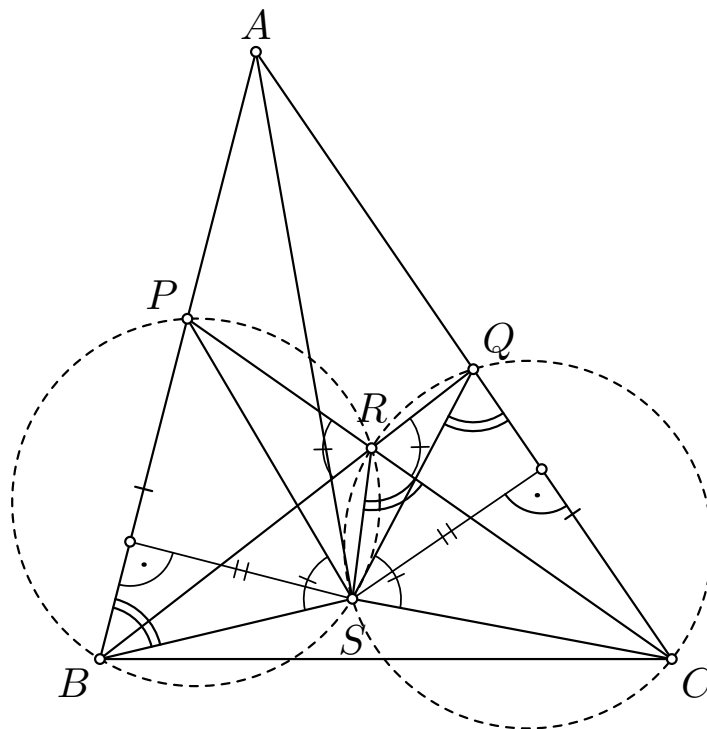
Rozwiązanie:

Pokażemy, że punkt S leży wewnątrz kąta BRC . Przypuśćmy najpierw, że S znajduje się wewnątrz kąta QRP . Wówczas

$$\begin{aligned} \sphericalangle QRP + \sphericalangle PSQ &= \sphericalangle QRP + \sphericalangle PSR + \sphericalangle RSQ = \sphericalangle BRC + (180^\circ - \sphericalangle RBP) + (180^\circ - \sphericalangle QCR) = \\ &= 360^\circ + (180^\circ - \sphericalangle CBR - \sphericalangle RCB) - \sphericalangle RBP - \sphericalangle QCR = 360^\circ + \sphericalangle BAC > 360^\circ. \end{aligned}$$

Oznacza to, że suma miar kątów czworokąta $SPRQ$ jest większa od 360° — sprzeczność. Punkt S nie może również leżeć wewnątrz kąta PRB , gdyż jedynym punktem okręgu opisanego na trójkącie RCQ wspólnym z kątem PRB jest punkt R . Analogicznie punkt S nie może leżeć wewnątrz kąta CRQ . Z powyższych rozważań wynika, że punkty B, S, R, P oraz S, C, Q, R leżą w tej kolejności odpowiednio na okręgach opisanych na trójkątach BRP i CQR .

Równości $\sphericalangle SBP = 180^\circ - \sphericalangle PRS = \sphericalangle SRC = \sphericalangle SQC$ oraz $\sphericalangle PSB = \sphericalangle PRB = \sphericalangle CRQ = \sphericalangle CSQ$ pozwalają stwierdzić, że trójkąty PBS i CQS są podobne, a ponieważ $PB = QC$, to są one przystające. W szczególności wysokości trójkątów PBS i CQS opuszczone z wierzchołka S są równej długości, skąd teza. $\square$



rys. 1

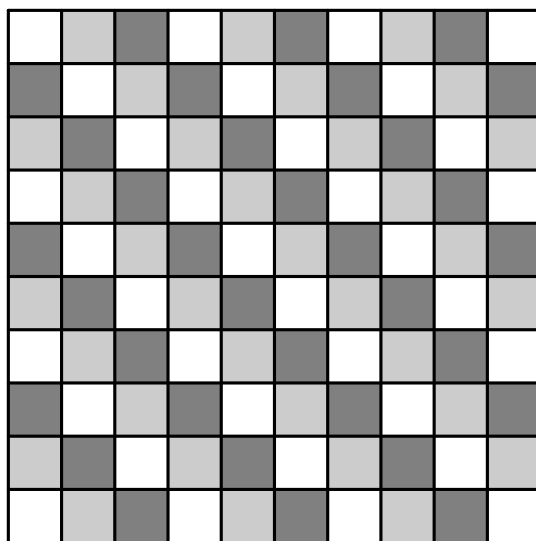
2. Ciąg $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ składający się z parami różnych pól szachownicy o wymiarach $n \times n$ nazwiemy *cyklem*, jeśli $k \geq 4$ oraz pola a_i i a_{i+1} mają wspólny bok dla wszystkich $i = 1, 2, \dots, k$, gdzie $a_{k+1} = a_1$. Podzbiór X pól tej szachownicy nazwiemy *złośliwym*, jeśli każdy cykl na niej zawiera co najmniej jedno pole należące do X .

Wyznaczyć wszystkie liczby rzeczywiste C o następującej własności: dla każdej liczby całkowitej $n \geq 2$ na szachownicy o wymiarach $n \times n$ istnieje zbiór złośliwy składający się z co najwyżej Cn^2 pól.

Autor zadania: Marek Sokołowski

Rozwiązanie:

Udowodnimy, że wszystkie liczby $C \geq \frac{1}{3}$ spełniają warunki zadania. Na początku dla dowolnego n wskażemy złośliwy podzbiór pól szachownicy $n \times n$ o mocy nie większej niż $\frac{1}{3}n^2$. W tym celu rozważmy kolorowanie szachownicy trzema kolorami jak na rysunku (rys. 2).



rys. 2

Łatwo zauważyć, że pola w każdym z kolorów tworzą złośliwy podzbiór tej szachownicy. Ponadto liczba pól w pewnym z kolorów jest nie większa niż $\frac{1}{3}n^2$, zatem istotnie wskazaliśmy podzbiór złośliwy składający się z co najwyżej $\frac{1}{3}n^2$ pól.

Wykażemy teraz, że każdy złośliwy podzbiór pól szachownicy $n \times n$ ma co najmniej $\frac{1}{3}(n^2 - 2n)$ pól. Rozważmy pewien złośliwy podzbiór X składający się z k pól. Oszacujmy na dwa sposoby liczbę E par pól spoza zbioru X , mających wspólny bok. W każdym wierszu i w każdej kolumnie znajduje się po $n - 1$ par pól mających wspólny bok, wobec tego na całej szachownicy znajduje się $(n + n) \cdot (n - 1) = 2n(n - 1)$ par pól mających wspólny bok. Każde pole ze zbioru X należy do co najwyżej czterech takich par. Wynika stąd, że $E \geq 2n(n - 1) - 4k$.

Aby uzyskać górne ograniczenie na liczbę E udowodnimy następujące stwierdzenie: *Jeżeli nie istnieje cykl złożony z pól pewnego m -elementowego zbioru pól szachownicy S , to liczba par pól z S mających wspólny bok jest mniejsza niż m .*

Stosujemy indukcję ze względu na m . Dla $m = 1$ teza jest oczywista. Przypuśćmy, że stwierdzenie jest prawdziwe dla liczb mniejszych od m i udowodnijmy, że jest również prawdziwe dla m . Przypuśćmy, że każde pole należące do zbioru S ma wspólny bok z co najmniej dwoma innymi polami zbioru S . Konstruujemy ciąg pól $p_1, p_2, \dots$ następująco: p_1 i p_2 są dowolnymi polami mającymi wspólny bok, natomiast dla $i \geq 2$ pole p_{i+1} jest dowolnym polem mającym wspólny bok z p_i różnym od p_{i-1} . Ponieważ zbiór S jest skończony, to któreś pole w naszym ciągu powtórzy się. Wybierzmy minimalną taką liczbę całkowitą j , że istnieje $i < j$ spełniające warunek $p_i = p_j$. Wówczas ciąg pól $(p_i, \dots, p_{j-1})$ jest cyklem, wbrew założeniu, że nie ma cyklu złożonego z pól zbioru S . Oznacza to,

że pewne pole p zbioru S ma wspólny bok z co najwyżej jednym innym polem zbioru S , stosując założenie indukcyjne do zbioru $S \setminus \{p\}$ otrzymujemy tezę.

Wróćmy do szacowania liczby E . Ponieważ podzbiór X jest złośliwy, to nie ma cyklu zawierającego jedynie pola spoza X . Korzystając z powyższego faktu dostajemy, że $n^2 - k > E$. Łącząc otrzymane oszacowania dostajemy, że $n^2 - k \geq 2n(n-1) - 4k$ czyli $3k \geq n^2 - 2n$ lub równoważnie $k \geq \frac{1}{3}(n^2 - 2n)$.

Pozostaje zauważyć, że jeżeli $C < \frac{1}{3}$ to dla dostatecznie dużych n spełniona jest nierówność $Cn^2 < \frac{1}{3}(n^2 - 2n)$. Uzyskujemy, że liczby $C < \frac{1}{3}$ nie spełniają warunków zadania. $\square$

3. Liczby całkowite $a_1, a_2, \dots, a_n$ spełniają nierówności

$$1 < a_1 < a_2 < \dots < a_n < 2a_1.$$

Udowodnić, że jeśli m jest liczbą różnych dzielników pierwszych iloczynu $a_1 a_2 \dots a_n$, to

$$(a_1 a_2 \dots a_n)^{m-1} \geq (n!)^m.$$

Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie:

Ustalmy dzielnik pierwszy p iloczynu $a_1 a_2 \dots a_n$. Dla $i = 1, 2, \dots, n$ niech $a_i = b_i p^{e_i}$, gdzie e_i jest liczbą całkowitą nieujemną, zaś b_i jest liczbą całkowitą niepodzielną przez p .

Udowodnimy, że liczby $b_1, b_2, \dots, b_n$ są parami różne. Dla dowodu nie wprost przypuśćmy, że $b_i = b_j$ dla pewnych $i < j$. Ponieważ $a_j > a_i$, to otrzymujemy, że $e_j > e_i$ i w konsekwencji $a_j = b_j p^{e_j} \geq b_j p^{e_i+1} = p a_i$. Z warunków danych w zadaniu wynika jednak nierówność przeciwna $a_j < 2a_1 \leq 2a_i \leq p a_i$ i uzyskujemy sprzeczność.

Ponieważ liczby $b_1, b_2, \dots, b_n$ są parami różnymi dodatnimi liczbami całkowitymi, to zachodzi nierówność

$$b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_n \geq 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n = n!.$$

Wykażemy, że jeżeli powtórzymy powyższe rozumowanie dla każdego czynnika pierwszego iloczynu $a_1 a_2 \dots a_n$ i wymnożymy uzyskane nierówności stronami, to otrzymamy żadaną nierówność. Ponieważ iloczyn $a_1 a_2 \dots a_n$ ma m czynników pierwszych, to prawa strona uzyskanej w opisany powyżej sposób nierówności jest równa $(n!)^m$. Pozostaje wykazać, że lewa strona wynosi $(a_1 a_2 \dots a_n)^{m-1}$.

Niech $p_1, p_2, \dots, p_m$ będą czynnikami pierwszymi iloczynu $a_1 a_2 \dots a_n$. Ustalmy liczbę $1 \leq i \leq m$ i rozważmy rozkład na czynniki pierwsze $a_i = p_1^{f_1} p_2^{f_2} \dots p_m^{f_m}$. Mamy równość

$$a_i^{m-1} = \frac{a_i^m}{a_i} = \frac{a_i^m}{p_1^{f_1} p_2^{f_2} \dots p_m^{f_m}} = \frac{a_i}{p_1^{f_1}} \cdot \frac{a_i}{p_2^{f_2}} \cdot \dots \cdot \frac{a_i}{p_m^{f_m}}.$$

Czynniki iloczynu po prawej stronie powyższej równości to wartości b_i dla kolejnych liczb pierwszych $p_1, p_2, \dots, p_m$. Wymnażając powyższą równość dla $i = 1, 2, \dots, m$ stronami uzyskamy, że rzeczywiście lewa strona naszej nierówności jest równa $(a_1 a_2 \dots a_n)^{m-1}$. $\square$



LXVIII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych
zawodów stopnia trzeciego
4 kwietnia 2017 r. (drugi dzień zawodów)

4. Wykazać, że zbiór dodatnich liczb całkowitych $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$ można przedstawić w postaci sumy pięciu parami rozłącznych podzbiorów o następującej własności: każda piątka liczb postaci $(n, 2n, 3n, 4n, 5n)$, gdzie $n \in \mathbb{Z}^+$, zawiera po jednej liczbie z każdego z tych pięciu podzbiorów.

Zadanie zaproponował: Mariusz Skałba

Rozwiązanie:

Z podstawowego twierdzenia arytmetyki wynika, że dowolną dodatnią liczbę całkowitą n możemy jednoznacznie przedstawić w postaci $n = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot m$, gdzie a, b, c są nieujemnymi liczbami całkowitymi, zaś m jest dodatnią liczbą całkowitą niepodzielną przez 2, 3 i 5.

Funkcję $f : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}$ definiujemy następująco: jeżeli $n = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot m$ jest zapisem liczby n w powyższej postaci, to $f(n) := a + 3b + 4c$. Nietrudno zauważyć, że dla dowolnych dodatnich liczb całkowitych r, s zachodzi zależność $f(rs) = f(r) + f(s)$.

Udowodnimy, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n liczby $f(n), f(2n), f(3n), f(4n), f(5n)$ dają parami różne reszty z dzielenia przez 5. Dla dowodu nie wprost przypuścimy, że istnieje taka dodatnia liczba całkowita n , że dla pewnych $1 \leq k < l \leq 5$ zachodzi podzielność

$$5 \mid f(ln) - f(kn) = (f(l) + f(n)) - (f(k) + f(n)) = f(l) - f(k).$$

Ponieważ liczby $f(1) = 0, f(2) = 1, f(3) = 3, f(4) = 2, f(5) = 4$ dają parami różne reszty z dzielenia przez 5, to otrzymujemy sprzeczność.

Pozostaje zauważyć, że wobec powyższych rozważań, podział dodatnich liczb całkowitych na pięć podzbiorów w zależności od reszty z dzielenia wartości funkcji f przez pięć spełnia warunki zadania. $\square$

5. Punkt M jest środkiem boku BC trójkąta ABC , w którym $AB = AC$. Punkt D jest rzutem prostokątnym punktu M na bok AB . Okrąg ω jest wpisany w trójkąt ACD i styczny do odcinków AD i AC odpowiednio w punktach K i L . Proste styczne do ω przechodzące przez M przecinają prostą KL w punktach X i Y , przy czym punkty X, K, L, Y leżą w tej kolejności na prostej KL . Udowodnić, że punkty M, D, X, Y leżą na jednym okręgu.

Autor zadania: Piotr Ambroszczyk

Rozwiązanie:

Pokażemy, że punkty A, Y, M, D i X leżą na jednym okręgu. Ze względu na to, że $\sphericalangle MDA = 90^\circ$ wystarczy pokazać, że $\sphericalangle AYM = 90^\circ$ (równość $\sphericalangle AXM = 90^\circ$ wyniknie z symetrii rysunku). Oznaczmy przez I środek okręgu ω a przez N rzut prostokątny punktu D na prostą AM . Niech prosta DN przecina ω w punkcie P , leżącym po tej samej stronie prostej AM jak punkt C .

Na czworokątach $IKDN$ oraz $LIMC$ można opisać okrąg, gdyż kąty przy wierzchołkach K, N, L i M są proste, więc

$$\begin{aligned} \sphericalangle NKI &= \sphericalangle NDI = 90^\circ - \sphericalangle DIN = 90^\circ - (180^\circ - \sphericalangle AID) = \\ &= 90^\circ - \frac{1}{2} (\sphericalangle DAC + \sphericalangle CDA) = \\ &= 90^\circ - \frac{1}{2} (180^\circ - \sphericalangle ACD) = \sphericalangle LCI = \sphericalangle LMI. \end{aligned}$$

Ponadto $\sphericalangle MIL = \sphericalangle KIN$, gdyż punkty K i L są symetryczne względem prostej AI , więc trójkąty IKN i IML są podobne. Zatem

$$\frac{IN}{IP} = \frac{IN}{IK} = \frac{IL}{IM} = \frac{IP}{IM}, \quad (1)$$

The diagram illustrates a complex geometric construction, likely a proof in projective geometry. It features a central vertical axis with points A at the top and M at the bottom. A horizontal line segment BC is at the base. A point D is located to the left of the axis, and a point C is to the right. A point P is on the axis between N and M . A point I is on the axis between S and N . A point R is on the axis between S and I . A point L is on the axis between I and N . A point K is on the axis between S and I . A point Y is on the axis between S and I . A point Q is on the axis between S and I . A point T is on the axis between S and I . A point V is on the axis between S and I . A point W is on the axis between S and I . A point X is on the axis between S and I . A point Z is on the axis between S and I . The diagram includes solid lines, dashed lines, and arcs indicating angles and intersections.

Niech S będzie punktem wspólnym prostych AI i KL . Wprowadźmy następujące oznaczenia: $a = AS$, $b = SI$, $c = IN$ oraz $d = NM$. Na podstawie (1) wiemy, że $IN \cdot IM = IP^2 = IL^2$. Trójkąty prostokątne AIL i LIS są podobne, gdyż mają wspólny kąt przy wierzchołku I , stąd dostajemy, że $IS \cdot AI = IL^2$, więc

Z twierdzenia Talesa mamy

więc $(a + b)(b + c) = a(c + d)$ lub równoważnie

Wobec tego

więc

Ponownie korzystając z twierdzenia Talesa dostajemy

czyli na podstawie twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa $IP \parallel AY$, jednakże $\sphericalangle IPM = 90^\circ$,
stad $\sphericalangle AYM = 90^\circ$ — co było do pokazania. $\square$

Inne rozwiązanie:

Wiedząc już, że prosta MP jest styczna do ω , w dalszej części dowodu wykorzystamy podstawowe własności biegunowych (zob. L Olimpiada Matematyczna, Sprawozdanie Komitetu Głównego, Warszawa 2000, Dodatek B, str. 107).

Niech R będzie punktem przecięcia prostych AP i KL (rys. 3). Rozpatrujemy biegunowe punktów względem okręgu ω . Punkt Y leży na prostej KL , która jest biegunową punktu A . Zatem punkt A leży na biegunowej Y , jednakże na tej biegunowej leży również punkt P , więc AP jest biegunową punktu Y .

Punkt R jako punkt przecięcia biegunowych punktów A i Y , jest biegunem prostej AY . W szczególności $IR \perp AY$, więc wystarczy pokazać że $IR \parallel MY$. Jednakże jest to konsekwencją twierdzenia Talesa i twierdzenia doń odwrotnego, gdyż

$$\frac{AR}{RP} = \frac{AK}{KD} = \frac{AI}{IM}.$$

□

6. Dane są takie trzy ciągi nieujemnych liczb rzeczywistych $(a_0, a_1, \dots, a_n)$, $(b_0, b_1, \dots, b_n)$, $(c_0, c_1, \dots, c_{2n})$, że dla wszystkich $0 \leq i, j \leq n$ zachodzi nierówność $a_i b_j \leq (c_{i+j})^2$. Wykazać, że

$$\sum_{i=0}^n a_i \cdot \sum_{j=0}^n b_j \leq \left(\sum_{k=0}^{2n} c_k \right)^2.$$

Autorzy zadania: Marta i Michał Strzeleccy

Rozwiązanie:

Niech a_s będzie maksymalną spośród liczb $a_0, a_1, \dots, a_n$, zaś b_t będzie maksymalną spośród liczb $b_0, b_1, \dots, b_n$. Mamy ciąg nierówności

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=0}^{2n} c_k \right)^2 &\geq \left(\sum_{k=t}^{t+n} c_k \right) \left(\sum_{k=s}^{s+n} c_k \right) = \left(\sum_{i=0}^n c_{i+t} \right) \left(\sum_{j=0}^n c_{j+s} \right) \geq \left(\sum_{i=0}^n \sqrt{a_i b_t} \right) \left(\sum_{j=0}^n \sqrt{a_s b_j} \right) = \\ &= \sqrt{a_s b_t} \left(\sum_{i=0}^n \sqrt{a_i} \right) \left(\sum_{j=0}^n \sqrt{b_j} \right) = \left(\sum_{i=0}^n \sqrt{a_i a_s} \right) \left(\sum_{j=0}^n \sqrt{b_t b_j} \right) \geq \sum_{i=0}^n a_i \cdot \sum_{j=0}^n b_j. \end{aligned}$$

□

(db,mg)



LXIX Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego

I seria: 1 września 2017 r. — 5 października 2017 r.

1. Dane są liczby całkowite a i b oraz liczba pierwsza $p \geq 3$. Wykazać, że jeśli liczby $a + b$ oraz $a^2 + b^2$ są podzielne przez p , to liczba $a^2 + b^2$ jest podzielna przez p^2 .

2. Dany jest trójkąt ABC , w którym $3AC = AB + BC$. Okrąg dopisany do trójkąta ABC jest styczny do boku AB w punkcie P , zaś do prostej AC w punkcie Q . Wykazać, że kąt CPQ jest prosty.

Uwaga. Okręgiem dopisanym do trójkąta nazywamy okrąg styczny do jednego z boków i do przedłużeń dwóch pozostałych.

3. Znaleźć wszystkie trójki x, y, z liczb rzeczywistych spełniające równania

$$\begin{cases} x^2y + 2 = x + 2yz \\ y^2z + 2 = y + 2zx \\ z^2x + 2 = z + 2xy \end{cases}$$

4. Rozważmy ciąg $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ o wyrazach ze zbioru $\{0, 1, 2\}$. *Blokiem* będziemy nazywać podciąg postaci $(a_i, a_{i+1}, \dots, a_j)$, gdzie $1 \leq i \leq j \leq n$ oraz $a_i = a_{i+1} = \dots = a_j$. Blok nazywamy *maksymalnym*, jeśli nie jest zawarty w żadnym dłuższym bloku. Przykładowo w ciągu $(1, 0, 0, 0, 2, 1, 1)$ maksymalnymi blokami są (1) , $(0, 0, 0)$, (2) , $(1, 1)$.

Niech K_n będzie liczba takich ciągów długości n o wyrazach ze zbioru $\{0, 1, 2\}$, w których wszystkie maksymalne bloki mają nieparzyste długości. Ponadto niech L_n będzie liczbą wszystkich ciągów długości n o wyrazach ze zbioru $\{0, 1, 2\}$, w których liczby 0 i 2 nie występują na sąsiednich pozycjach. Udowodnić, że $L_n = K_n + \frac{1}{3}K_{n-1}$ dla wszystkich $n > 1$.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

5 października 2017 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane. Rozwiązanie każdego zadania należy podpisać w lewym górnym rogu pierwszej jego strony: imieniem i nazwiskiem, swoim adresem, swoim adresem elektronicznym oraz klasą, nazwą i adresem szkoły.



LXIX Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia pierwszego

II seria: 6 października 2017 r. — 6 listopada 2017 r.

5. Liczby a, b, c są kolejnymi wyrazami pewnego ciągu arytmetycznego. Ponadto, są one długościami boków pewnego trójkąta, w którym jeden z kątów ma miarę 120° . Udowodnić, że trójkąt ten jest podobny do trójkąta o bokach długości 3, 5, 7.

6. Podstawą ostrosłupa czworokątnego $ABCD S$ jest równoległobok $ABCD$. Ponadto w ostrosłup $ABCD S$ można wpisać sferę. Wykazać, że suma pól ścian ABS i CDS jest równa sumie pól ścian BCS i ADS .

7. W przestrzeni danych jest $n \geq 7$ zielonych punktów, przy czym żadne cztery z nich nie leżą na jednej płaszczyźnie. Niektóre z nich połączono odcinkami, z których część pomalowano na niebiesko, a pozostałe na czerwono. Przy tym każdy zielony punkt jest końcem takiej samej liczby czerwonych co niebieskich odcinków oraz istnieje zielony punkt, który jest końcem co najmniej sześciu kolorowych odcinków.

Udowodnić, że można usunąć co najmniej jeden, ale nie wszystkie kolorowe odcinki tak, by nadal każdy zielony punkt był końcem takiej samej liczby czerwonych co niebieskich odcinków.

8. Na płaszczyźnie umieszczono 2017 punktów w taki sposób, że odległość między każdymi dwoma z nich jest większa od 1. Wykazać, że odległość między pewnymi dwoma spośród tych punktów jest większa od 35.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

6 listopada 2017 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane. Rozwiązanie każdego zadania należy podpisać w lewym górnym rogu pierwszej jego strony: imieniem i nazwiskiem, swoim adresem, swoim adresem elektronicznym oraz klasą, nazwą i adresem szkoły.



LXIX Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego

III seria: 7 listopada 2017 r. — 7 grudnia 2017 r.

9. Wykazać, że dla nieskończenie wielu liczb całkowitych $n > 1$ równanie

$$(x+1)^{n+1} - (x-1)^{n+1} = y^n$$

nie ma rozwiązania w liczbach całkowitych x, y .

10. Dana jest liczba całkowita $n \geq 3$. Udowodnić, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych $x_1, \dots, x_n$ zachodzi nierówność

$$\frac{1+x_1^2}{x_2+x_3} + \frac{1+x_2^2}{x_3+x_4} + \dots + \frac{1+x_{n-2}^2}{x_{n-1}+x_n} + \frac{1+x_{n-1}^2}{x_n+x_1} + \frac{1+x_n^2}{x_1+x_2} \geq n.$$

11. Na płaszczyźnie dany jest trójkąt $A_1A_2A_3$. Przyjmując $A_4 = A_1$ oraz $A_5 = A_2$, definiujemy punkty X_t oraz Y_t dla $t = 1, 2, 3$ następująco. Niech Γ_t będzie okręgiem dopisanym do trójkąta $A_1A_2A_3$ i stycznym do boku $A_{t+1}A_{t+2}$, zaś I_t będzie jego środkiem. Niech P_t i Q_t będą odpowiednio punktami styczności Γ_t z prostymi A_tA_{t+1} oraz A_tA_{t+2} . Wówczas X_t i Y_t są odpowiednio punktami przecięcia prostej P_tQ_t z prostymi I_tA_{t+1} oraz I_tA_{t+2} . Wykazać, że punkty $X_1, Y_1, X_2, Y_2, X_3, Y_3$ leżą na jednym okręgu.

12. Zbiór A składa się z n liczb rzeczywistych. Dla podzbioru $X \subseteq A$ przez $S(X)$ oznaczamy sumę elementów zbioru X , przy czym przyjmujemy $S(\emptyset) = 0$. Niech k będzie liczbą takich różnych liczb rzeczywistych x , że $x = S(X)$ dla pewnego $X \subseteq A$. Niech ℓ będzie liczbą uporządkowanych par (X, Y) podzbiorów zbioru A spełniających równość $S(X) = S(Y)$. Dowieść, że $k\ell \leq 6^n$.

Uwaga. Przy definiowaniu ℓ uwzględniamy również pary postaci (X, X) dla wszystkich $X \subseteq A$. Pary uporządkowane (X, Y) oraz (Y, X) uznajemy za różne, o ile $X \neq Y$.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

7 grudnia 2017 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane. Rozwiązanie każdego zadania należy podpisać w lewym górnym rogu pierwszej jego strony: imieniem i nazwiskiem, swoim adresem, swoim adresem elektronicznym oraz klasą, nazwą i adresem szkoły.

Adresy Komitetów Okręgowych Olimpiady Matematycznej

- Dla województwa pomorskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Gdańskiego, ul. Wita Stwosza 57, 80-952 Gdańsk.
- Dla województwa śląskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Śląskiego, ul. Bankowa 14, 40-007 Katowice.
- Dla województwa małopolskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego, ul. Łojasiewicza 6, 30-348 Kraków.
- Dla województwa lubelskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Zakład Rachunku Prawdopodobieństwa pok. 810, Instytut Matematyki Uniwersytetu Marii Curie-Skłodowskiej, pl. Marii Curie-Skłodowskiej 1, 20-031 Lublin.
- Dla województwa łódzkiego i świętokrzyskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Łódzkiego, ul. Banacha 22, 90-238 Łódź.
- Dla województwa wielkopolskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Adama Mickiewicza, ul. Umultowska 87, 61-614 Poznań.
- Dla województwa podkarpackiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Katedra Matematyki Politechniki Rzeszowskiej, al. Powstańców Warszawy 8, 35-959 Rzeszów.
- Dla województwa lubuskiego i zachodniopomorskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Szczecińskiego, ul. Wielkopolska 15, 70-451 Szczecin.
- Dla województwa kujawsko-pomorskiego i warmińsko-mazurskiego: — Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, ul. Chopina 12/18, 87-100 Toruń.
- Dla województwa mazowieckiego i podlaskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, ul. Śniadeckich 8, 00-656 Warszawa.
- Dla województwa dolnośląskiego i opolskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego, pl. Grunwaldzki 2/4, 50-384 Wrocław.

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w Internecie pod adresem: www.om.edu.pl



LXIX Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia pierwszego

1 września 2017 r. — 7 grudnia 2017 r.

Zadanie 1. Dane są liczby całkowite a i b oraz liczba pierwsza $p \geq 3$. Wykazać, że jeśli liczby $a + b$ oraz $a^2 + b^2$ są podzielne przez p , to liczba $a^2 + b^2$ jest podzielna przez p^2 .

Autor zadania: Michał Pilipczuk

Rozwiązanie:

Skoro $p \mid (a + b)$ i $p \mid (a^2 + b^2)$, to $p \mid (a + b)^2 - (a^2 + b^2) = 2ab$. Jednakże $p \geq 3$, więc $p \mid a$ lub $p \mid b$, a ponieważ $p \mid (a + b)$, to $p \mid a$ i $p \mid b$. Wobec tego $p^2 \mid a^2$ oraz $p^2 \mid b^2$, skąd teza zadania. $\square$

Zadanie 2. Dany jest trójkąt ABC , w którym $3AC = AB + BC$. Okrąg dopisany do trójkąta ABC jest styczny do boku AB w punkcie P , zaś do prostej AC w punkcie Q . Wykazać, że kąt CPQ jest prosty.

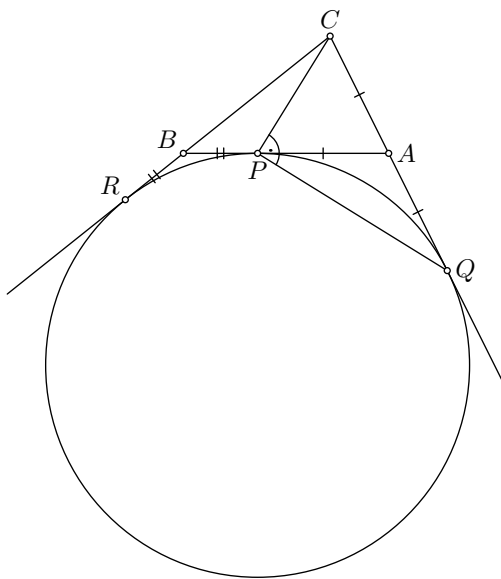
Autor zadania: Michał Kieza

Rozwiązanie:

Na podstawie równości odcinków stycznych, mamy zależności $BP = BR$, $AP = AQ$ oraz $CR = CQ$. Łącząc je wraz z warunkami zadania dostajemy, że

$$\begin{aligned} 3AC &= AB + BC = AP + PB + BC = AP + RB + BC = \\ &= CR + AP = CQ + AP = AC + AQ + AP = AC + 2AP, \end{aligned}$$

stąd $AC = AP = AQ$. Oznacza to, że punkt A jest środkiem odcinka CQ i jednocześnie środkiem okręgu opisanego na trójkącie CPQ , więc $\angle CPQ = 90^\circ$. $\square$



rys. 1

Zadanie 3. Znaleźć wszystkie trójki x, y, z liczb rzeczywistych spełniające równania

$$\begin{cases} x^2y + 2 = x + 2yz \\ y^2z + 2 = y + 2zx \\ z^2x + 2 = z + 2xy \end{cases}$$

Autor zadania: Michał Figlus

Rozwiązanie:

Odpowiedź: Jedyne trójki x, y, z spełniającymi dane równania są: $(-1, -1, -1)$, $(1, 1, 1)$, $(2, 2, 2)$.

Sposób I: Dany układ jest równoważny układowi

$$\begin{cases} x(xy - 1) = 2(yz - 1) \\ y(yz - 1) = 2(zx - 1) \\ z(zx - 1) = 2(xy - 1) \end{cases}$$

Wymnażając stronami wszystkie trzy równania otrzymujemy

$$xyz(xy - 1)(yz - 1)(zx - 1) = 8(xy - 1)(yz - 1)(zx - 1),$$

czyli

$$(xyz - 8)(xy - 1)(yz - 1)(zx - 1) = 0.$$

Rozpatrzmy teraz dwa przypadki:

Przypadek 1. Co najmniej jedna z liczb xy, yz, zx jest równa 1.

Dany układ równań jest cykliczny, więc bez straty ogólności możemy przyjąć, że $xy = 1$. Z pierwszego równania mamy $yz = 1$, a z drugiego, że $zx = 1$. Zatem $x^2 = \frac{xy \cdot zx}{yz} = 1$, więc $x = 1$ lub $x = -1$. Dla $x = 1$ z równości $xy = zx = 1$ dostajemy $y = z = 1$, a dla $x = -1$ analogicznie wnioskujemy, że $y = z = -1$. Bezpośrednie sprawdzenie pokazuje, że trójki $(1, 1, 1), (-1, -1, -1)$ spełniają wyjściowy układ.

Przypadek 2. Żadna z liczb xy, yz, zx nie jest równa 1.

Wtedy na mocy otrzymanej wcześniej równości zachodzi $xyz = 8$. Stąd $xy = \frac{8}{z}$, $yz = \frac{8}{x}$ oraz $zx = \frac{8}{y}$. Podstawiając te równości do danego w treści układu dostajemy

$$\begin{cases} \frac{8x}{z} + 2 = x + \frac{16}{x} \\ \frac{8y}{x} + 2 = y + \frac{16}{y} \\ \frac{8z}{y} + 2 = z + \frac{16}{z} \end{cases}$$

Układ ten jest cykliczny, więc bez straty ogólności możemy przyjąć, że $x \geq y$ i $x \geq z$. Wtedy x jest liczbą dodatnią, gdyż w przeciwnym wypadku byłoby $y \leq x \leq 0$ i $z \leq x \leq 0$, skąd $xyz \leq 0$, co przeczyłoby równości $xyz = 8$. Wobec tego $yz = \frac{8}{x} > 0$, czyli y i z są tego samego znaku i $\frac{z}{y} > 0$. Zatem z trzeciego równania dostajemy że

$$z + \frac{16}{z} = \frac{8z}{y} + 2 > 2 > 0,$$

więc $z > 0$ (gdyż dla $z < 0$ byłoby $z + \frac{16}{z} < 0$), a skoro y i z są tego samego znaku, to również $y > 0$.

Zatem $x, y, z > 0$, czyli $x^3 \geq xyz \geq 8$, co daje $x \geq 2$. Stąd i z drugiego równania dostajemy nierówność

$$y + \frac{16}{y} = \frac{8y}{x} + 2 \leq 4y + 2,$$

która jest równoważna nierówności

$$(y - 2) \left(3 + \frac{8}{y} \right) \geq 0$$

prawdziwej dla $y \in \left[-\frac{8}{3}, 0 \right) \cup [2, +\infty)$. Wiemy jednak, że $y > 0$, więc musi zachodzić $y \geq 2$. Analogicznie na podstawie trzeciego równania dostajemy $z \geq 2$.

Ostatecznie $x, y, z \geq 2$, skąd $8 = xyz \geq 8$, wobec czego $x = y = z = 2$, co oczywiście spełnia układ dany w zadaniu. $\square$

Sposób II: Mnożąc pierwsze równanie przez y i dodając stronami podwojone drugie równanie otrzymujemy:

$$x^2y^2 + 2y + 2y^2z + 4 = xy + 2y^2z + 2y + 4zx,$$

lub równoważnie

$$x^2y^2 - xy + 4 = 4zx.$$

Analogicznie uzyskujemy $y^2z^2 - yz + 4 = 4xy$ oraz $z^2x^2 - zx + 4 = 4yz$. Podstawiając $a = xy, b = yz$ oraz $c = zx$ dostajemy układ równań:

$$\begin{cases} a^2 - a + 4 = 4c \\ b^2 - b + 4 = 4a \\ c^2 - c + 4 = 4b \end{cases}$$

Udowodnimy, że powyższy układ ma jedynie dwa rozwiązania $(a, b, c) = (4, 4, 4)$ oraz $(a, b, c) = (1, 1, 1)$. W tym celu rozważmy największą z liczb a, b, c . Bez straty ogólności przyjmijmy, że jest to a . Odejmując stronami dwa pierwsze równania dostajemy równość

$$(a - b)(a + b - 1) = 4(c - a)$$

Ponieważ

$$16(a + b - 1) = 4(b^2 - b + 4) + 4(c^2 - c + 4) - 16 = (2b - 1)^2 + (2c - 1)^2 + 14 > 0,$$

to liczba $a + b - 1$ jest dodatnia. Oznacza to, że zachodzi ciąg nierówności

$$0 \leq (a - b)(a + b - 1) = 4(c - a) \leq 0.$$

Ponieważ w powyższych nierównościach musi zachodzić równość, to mamy $a = b$ i $a = c$. Bezpośrednie wstawienie prowadzi do równania $a^2 - 5a + 4 = 0$, więc istotnie jedynymi rozwiązaniami są trójki $(a, b, c) = (1, 1, 1)$ oraz $(a, b, c) = (4, 4, 4)$.

Wróćmy do rozwiązania zadanego układu. Ponieważ $xy = yz = zx \neq 0$, to $x = y = z$. Wyjściowy układ wraz z tą równością jest równoważny równaniu $x^3 + 2 = x + 2x^2$. Mamy

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x - 2)(x^2 - 1) = (x - 2)(x - 1)(x + 1),$$

więc rozwiązaniami zadanego układu są trójki $(x, y, z) = (2, 2, 2), (1, 1, 1), (-1, -1, -1)$. □

Zadanie 4. Rozważmy ciąg $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ o wyrazach ze zbioru $\{0, 1, 2\}$. *Blokiem* będziemy nazywać podciąg postaci $(a_i, a_{i+1}, \dots, a_j)$, gdzie $1 \leq i \leq j \leq n$ oraz $a_i = a_{i+1} = \dots = a_j$. Blok nazywamy *maksymalnym*, jeśli nie jest zawarty w żadnym dłuższym bloku. Przykładowo w ciągu $(1, 0, 0, 0, 2, 1, 1)$ maksymalnymi blokami są $(1), (0, 0, 0), (2), (1, 1)$.

Niech K_n będzie liczbą takich ciągów długości n o wyrazach ze zbioru $\{0, 1, 2\}$, w których wszystkie maksymalne bloki mają nieparzyste długości. Ponadto niech L_n będzie liczbą wszystkich ciągów długości n o wyrazach ze zbioru $\{0, 1, 2\}$, w których liczby 0 i 2 nie występują na sąsiednich pozycjach. Udowodnić, że $L_n = K_n + \frac{1}{3}K_{n-1}$ dla wszystkich $n > 1$. □

Autor zadania: Marcin Kuczma

Rozwiązanie:

Udowodnimy, że ciąg (K_n) spełnia zależność rekurencyjną:

$$K_1 = 3, K_2 = 6 \quad \text{oraz} \quad K_n = 2K_{n-1} + K_{n-2} \quad \text{dla} \quad n \geq 3.$$

Rozważmy $n \geq 3$. Ciągi długości n , które mają wszystkie maksymalne bloki nieparzystej długości dzielimy na dwa podzbiory: takie, które mają ostatni maksymalny blok długości 1 oraz takie, które mają ostatni maksymalny blok długości co najmniej 3.

Jeżeli ostatni maksymalny blok ma długość 1, to po jego usunięciu dostajemy ciąg długości $n - 1$, którego wszystkie maksymalne bloki mają nieparzyste długości. Odwrotnie, do każdego ciągu długości $n - 1$, którego wszystkie maksymalne bloki mają nieparzyste długości możemy na dwa sposoby dopisać na końcu wyraz, który utworzy nowy maksymalny blok długości 1. Oznacza to, że ciągów w pierwszym podzbiore jest $2K_{n-1}$.

Jeżeli ostatni maksymalny blok ma długość co najmniej 3, to po usunięciu jego dwóch ostatnich wyrazów otrzymamy ciąg długości $n - 2$, którego wszystkie maksymalne bloki mają nieparzyste długości. Odwrotnie, do ciągu długości $n - 2$, którego wszystkie maksymalne bloki mają nieparzyste długości możemy tylko na jeden sposób dopisać dwa wyrazy tak, aby ostatni maksymalny blok uzyskanego ciągu miał długość co najmniej 3. Oznacza to, że ciągów w drugim podzbiore jest K_{n-2} .

Podsumowując: otrzymaliśmy równość $K_n = 2K_{n-1} + K_{n-2}$ dla $n \geq 3$. Sprawdzamy, że $K_1 = 3$ oraz $K_2 = 6$ i dostajemy wskazaną zależność rekurencyjną.

Udowodnimy teraz, że ciąg (L_n) spełnia zależność rekurencyjną:

$$L_1 = 3, L_2 = 7 \quad \text{oraz} \quad L_n = 2L_{n-1} + L_{n-2} \quad \text{dla} \quad n \geq 3.$$

Rozważmy $n \geq 3$. Ciągi długości n , w których liczby 0 i 2 nie występują na sąsiednich pozycjach dzielimy na dwa podzbiory: takie, które kończą się dwoma jedynekami oraz takie, w których przynajmniej jeden z dwóch ostatnich wyrazów nie jest jedynką.

Jeżeli dwa ostatnie wyrazy w ciągu są równe 1, to po ich obcięciu dostaniemy ciąg długości $n - 2$, w którym liczby 0 i 2 nie występują na sąsiednich pozycjach. Odwrotnie, do każdego ciągu długości $n - 2$ w którym liczby 0 i 2 nie sąsiadują możemy dopisać dwie jedynki, w tak otrzymanym ciągu długości n liczby 0 i 2 nie występują na sąsiednich pozycjach, ponadto jest on zakończony dwoma jedynekami. Oznacza to, że ciągów w pierwszym podzbiorze jest L_{n-2} .

Jeżeli przynajmniej jeden z ostatnich dwóch wyrazów ciągu nie jest jedynką, to po obcięciu ostatniego wyrazu dostaniemy ciąg długości $n - 1$, w którym liczby 0 i 2 nie występują na sąsiednich pozycjach. Odwrotnie, do każdego ciągu długości $n - 1$ w którym liczby 0 i 2 nie sąsiadują możemy na dwa sposoby dopisać ostatni wyraz tak, aby 0 i 2 nie występowały na sąsiednich pozycjach a na ostatnich dwóch pozycjach nie było dwóch jedynek. Dokładniej: po 0 możemy dopisać 0 lub 1, po 1 możemy dopisać 0 lub 2 zaś po 2 możemy dopisać 1 lub 2. Oznacza to, że ciągów w drugim podzbiorze jest $2L_{n-1}$.

Podsumowując: otrzymaliśmy równość $L_n = 2L_{n-1} + L_{n-2}$ dla $n \geq 3$. Sprawdzamy, że $L_1 = 3$ oraz $L_2 = 7$ i dostajemy wskazaną zależność rekurencyjną.

Mając wzory rekurencyjne na ciągi (K_n) oraz (L_n) , możemy udowodnić daną w zadaniu zależność przez indukcję. Dla $n = 2$ i $n = 3$ żądana równość jest spełniona gdyż

$$L_2 = 7 = 6 + \frac{1}{3} \cdot 3 = K_2 + \frac{1}{3}K_1 \quad \text{oraz} \quad L_3 = 17 = 15 + \frac{1}{3} \cdot 6 = K_3 + \frac{1}{3}K_2.$$

Natomiast dla $n \geq 4$ wynika ona z założenia indukcyjnego zastosowanego do $n - 1$ i $n - 2$:

$$\begin{aligned} L_n - K_n - \frac{1}{3}K_{n-1} &= (2L_{n-1} + L_{n-2}) - (2K_{n-1} + K_{n-2}) - \frac{1}{3}(2K_{n-2} + K_{n-3}) \\ &= 2(L_{n-1} - K_{n-1} - \frac{1}{3}K_{n-2}) + (L_{n-2} - K_{n-2} - \frac{1}{3}K_{n-3}) \\ &= 2 \cdot 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Oznacza to, że żądana zależność jest spełniona. □

Uwaga: Z uzyskanych wzorów rekurencyjnych można wyprowadzić wzory ogólne

$$K_n = \frac{3\sqrt{2}}{4} \left((1 + \sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n \right) \quad \text{oraz} \quad L_n = \frac{1}{2} \left((1 + \sqrt{2})^{n+1} + (1 - \sqrt{2})^{n+1} \right).$$

Metoda uzyskiwania wzorów ogólnych dla rekurencji liniowych jest opisana w [Dodatku A do Broszury L Olimpiady Matematycznej](#).

Zadanie 5. Liczby a, b, c są kolejnymi wyrazami pewnego ciągu arytmetycznego. Ponadto, są one długościami boków pewnego trójkąta, w którym jeden z kątów ma miarę 120° . Udowodnić, że trójkąt ten jest podobny do trójkąta o bokach długości 3, 5, 7.

Autor zadania: Michał Krych

Rozwiązanie:

Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $a \leq b \leq c$. Ponieważ kąt 120° jest rozwarty, to leży naprzeciw najdłuższego boku trójkąta. Z twierdzenia cosinusów dostajemy, że

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(120^\circ) = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = a^2 + b^2 + ab.$$

Ponieważ liczby a, b, c są kolejnymi wyrazami pewnego ciągu arytmetycznego, to spełniona jest równość $a + c = 2b$. Łącząc otrzymane równości dostajemy, że

$$b(a + b) = c^2 - a^2 = (c + a)(c - a) = 2b(c - a),$$

stąd $a + b = 2c - 2a$. Mamy więc zależności

$$\begin{cases} a - 2b + c = 0 \\ 3a + b - 2c = 0. \end{cases}$$

Mnożąc pierwszą równość przez 2 i dodając do drugiej otrzymujemy związek $5a - 3b = 0$, a po pomnożeniu drugiej przez 2 i dodaniu do pierwszej — związek $7a - 3c = 0$. Wobec tego $b = \frac{5}{3}a$ i $c = \frac{7}{3}a$, zatem trójkąt jest podobny do trójkąta o bokach 3, 5, 7.

Zadanie 6. Podstawą ostrosłupa czworokątnego $ABCD S$ jest równoległobok $ABCD$. Ponadto w ostrosłup $ABCD S$ można wpisać sferę. Wykazać, że suma pól ścian ABS i CDS jest równa sumie pól ścian BCS i ADS .

Autor zadania: Michał Kieza

Rozwiązanie:

Niech K, L, M, N i P oznaczają punkty styczności sfery wpisanej ze ścianami ASB, ASD, DSC, BSC oraz $DCBA$, odpowiednio (rys. 1). Na podstawie równości odcinków stycznych do sfery mamy, że $AK = AP$ oraz $BP = BK$, więc trójkąty APB i AKB są przystające.

Analogicznie uzasadniamy przystawanie trójkątów: BPC i BNC, DMC i DPC, APD i ALD, CMS i CNS, SNB i BKS, ASK i ASL oraz SLD i SMD .

Oznaczmy przez $[\mathcal{F}]$ pole figury $\mathcal{F}$. Ponieważ trójkąty przystające mają równe pola, to

$$\begin{aligned} [ASB] + [DSC] &= ([AKB] + [ASK] + [BKS]) + \\ &+ ([DMC] + [SMD] + [CMS]) = \\ &= ([APB] + [ASL] + [SNB]) + \\ &+ ([DPC] + [SLD] + [CNS]). \end{aligned}$$

Podobnie dostajemy związek

$$[BSC] + [ASD] = ([BPC] + [SNB] + [CNS]) + ([APD] + [ASL] + [SLD]).$$

Odejmując powyższe równości stronami otrzymujemy, że

$$[ASB] + [DSC] - ([BSC] + [ASD]) = [APB] + [DPC] - ([BPC] + [APD]),$$

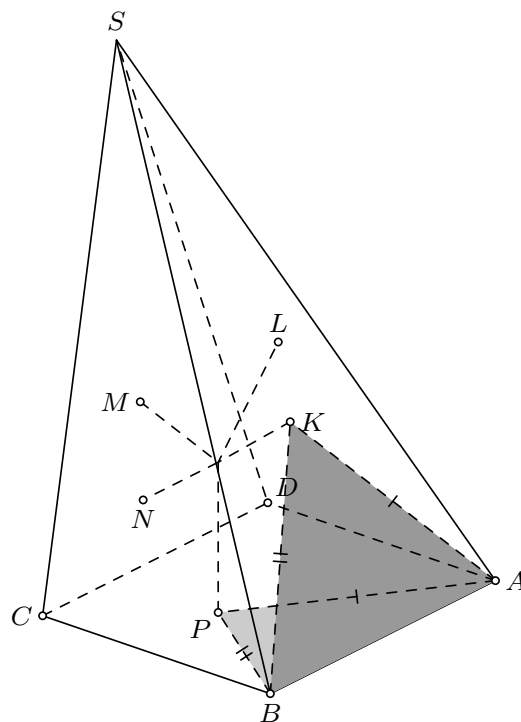
wiec wystarczy pokazać zależność $[APB] + [DPC] = [BPC] + [APD]$ lub równoważnie

$$[APB] + [DPC] = \frac{1}{2}[ABCD].$$

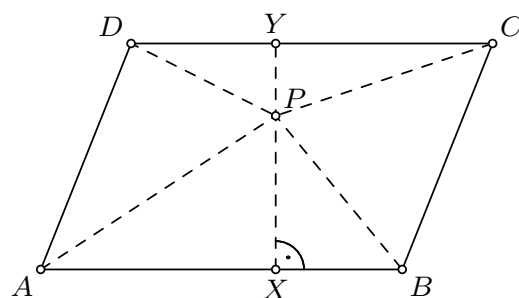
Rozpatrzmy równoległobok $ABCD$ (rys. 2) i niech prosta przechodząca przez punkt P i prostopadła do AB przecina odcinki AB i CD w punktach odpowiednio X i Y . Wówczas

$$\begin{aligned} [APB] + [CPD] &= \frac{1}{2} \cdot PX \cdot AB + \frac{1}{2} \cdot PY \cdot CD = \\ &= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot (PX + PY) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot XY = \frac{1}{2}[ABCD], \end{aligned}$$

skąd teza. $\square$



rys. 1



rys. 2

Zadanie 7. W przestrzeni danych jest $n \geq 7$ zielonych punktów, przy czym żadne cztery z nich nie leżą na jednej płaszczyźnie. Niektóre z nich połączono odcinkami, z których część pomalowano na niebiesko, a pozostałe na czerwono. Przy tym każdy zielony punkt jest końcem takiej samej liczby czerwonych co niebieskich odcinków oraz istnieje zielony punkt, który jest końcem co najmniej sześciu kolorowych odcinków. Udowodnić, że można usunąć co najmniej jeden, ale nie wszystkie kolorowe odcinki tak, by nadal każdy zielony punkt był końcem takiej samej liczby czerwonych co niebieskich odcinków.

Autor zadania: Kamil Rychlewicz

Rozwiązanie:

Wybermy dowolny zielony punkt, który jest końcem co najmniej sześciu kolorowych odcinków. Niech to będzie punkt P . Rozważmy zbiór łamanych złożonych z kolorowych odcinków o następujących własnościach:

- łamana zaczyna się w punkcie P ,
- łamana nie przechodzi ponownie przez punkt P .
- odcinki łamanej są na przemian czerwone i niebieskie, zaczynając od czerwonego,
- każdy kolorowy odcinek jest odcinkiem łamanej co najwyżej raz.

Ze zbioru tych łamanych wybierzmy taką, która składa się z maksymalnej możliwej liczby odcinków. Oznaczmy koniec tej łamanej przez Q . Punkt Q należy do nieparzystej liczby odcinków łamanej, a ponieważ kolory odcinków łamanej występują na przemian i punkt Q jest końcem tej samej liczby czerwonych co niebieskich odcinków, to z punktu Q wychodzi odcinek koloru różnego od koloru ostatniego odcinka łamanej. Skoro nasza łamana ma maksymalną możliwą długość, to drugim końcem tego odcinka musi być punkt P , gdyż w przeciwnym razie moglibyśmy naszą łamaną wydłużyć.

Uzyskaliśmy łamaną której odcinki mają naprzemienne kolory, która zaczyna i kończy się w punkcie P oraz o tej własności, że punkt P nie leży w środku łamanej. Jeżeli pierwszy i ostatni odcinek tej łamanej mają różne kolory, to zbiór odcinków naszej łamanej spełnia warunki zadania. W przeciwnym razie nasza łamana zaczyna i kończy się czerwonym odcinkiem.

W zbiorze pozostałych odcinków analogicznie znajdujemy łamaną zaczynającą i kończącą się w punkcie P , która zaczyna się niebieskim odcinkiem i której odcinki mają naprzemienne kolory. Jeżeli ta łamana kończy się czerwonym odcinkiem, to zbiór jej odcinków spełnia warunki zadania. W innym wypadku zbiór odcinków obu łamanych spełnia warunki zadania. Zauważmy, że nie usuwamy wszystkich odcinków, gdyż usuwamy co najwyżej cztery odcinki, których końcem jest punkt P . $\square$

Zadanie 8. Na płaszczyźnie umieszczono 2017 punktów w taki sposób, że odległość między każdymi dwoma z nich jest większa od 1. Wykazać, że odległość między pewnymi dwoma spośród tych punktów jest większa od 35.

Autor zadania: Michał Pilipczuk

Rozwiązanie:

Przypuśćmy dla dowodu nie wprost, że każde dwa spośród danych punktów leżą w odległości co najwyżej 35.

Ponieważ odległości pomiędzy danymi punktami są nie większe niż 35, to wszystkie punkty znajdują się w kwadracie 35×35 , którego lewy bok wyznacza punkt znajdujący się najbardziej na lewo, zaś górny bok, punkt, który znajduje się najwyżej. Rozważmy koła o środkach w danych punktach i promieniu $1/2$. Ponieważ ich środki znajdują się w kwadracie o boku 35, to wewnątrz kół znajdują się wewnątrz kwadratu o boku 36. Oszacujmy sumę pól danych kół:

$$2017 \cdot \pi \cdot (1/2)^2 > 2016 \cdot 1/4 \cdot \pi = 504\pi > 504 \cdot 3 = 1512 = 42 \cdot 36 > 36^2.$$

Oznacza to, że pewne dwa z tych kół przecinają się. Środki przecinających się kół znajdują się w odległości mniejszej niż 1, co przeczy założeniu zadania. Otrzymana sprzeczność dowodzi tezy zadania. $\square$

Uwaga. Zadanie można rozwiązać w analogiczny sposób wykorzystując twierdzenie Junga:

Twierdzenie. Każdy skończony zbiór punktów, wśród których dowolne dwa punkty znajdują się w odległości co najwyżej d , zawiera się w pewnym kole o promieniu $\frac{d}{\sqrt{3}}$.

Dowód. Aby udowodnić to twierdzenie wystarczy rozważyć koła o środkach w danych punktach i promieniu $\frac{d}{\sqrt{3}}$. Wykażemy, że dowolne trzy spośród tych kół przecinają się. Wybierzmy pewne trzy punkty, jeżeli są one współliniowe, to teza jest oczywista. W przeciwnym razie oznaczmy przez α najmniejszy kąt trójkąta wyznaczonego przez te trzy punkty. Z twierdzenia sinusów wynika, że promień okręgu opisanego na tym trójkącie nie może być większy niż $\frac{d}{2\sin\alpha} \leq \frac{d}{2\sin(60^\circ)} = \frac{d}{\sqrt{3}}$. Oznacza to, że środek okręgu opisanego na tym trójkącie należy do każdego z trzech wybranych kół. Ponieważ każde trzy spośród tych kół mają punkt wspólny, to wszystkie te koła mają punkt wspólny, co jest konsekwencją następującego twierdzenia Helly'ego:

Twierdzenie. *Jeżeli $C_1, C_2, \dots, C_n$ są wypukłymi podzbiorami płaszczyzny i każde trzy mają punkt wspólny, to zbiór $C_1 \cap C_2 \cap \dots \cap C_n$ jest niepusty.*

Niech P będzie dowolnym punktem wspólnym wybranych kół. Pozostaje zauważyć, że koło o środku w punkcie P i promieniu $\frac{d}{\sqrt{3}}$ zawiera dane punkty. $\square$

Więcej o twierdzeniu Junga i Helly'ego można przeczytać np. w książce I. M. Jagłoma i W. G. Bołtiańskiego, *Figury wypukłe*, PWN, Warszawa 1950.

Przejdźmy do rozwiązania zadania. Analogicznie jak w pierwszym sposobie zakładamy, że odległość między dowolnymi spośród danych punktów jest nie większa niż 35. Z twierdzenia Junga wynika, że punkty te leżą w kole o promieniu $\frac{35\sqrt{3}}{3}$. Rozważamy koła o środkach w danych punktach i promieniu $1/2$. Wnętrza tych kół leżą wewnątrz koła o promieniu $\frac{1}{2} + \frac{35\sqrt{3}}{3}$. Podobnie jak w pierwszym sposobie pozostaje zauważyć, że któreś dwa z tych kół przecinają się, gdyż ich suma pól jest większa od pola koła wewnątrz którego się znajdują:

$$2017 \cdot \pi \cdot (1/2)^2 > \pi \left(\frac{1}{2} + \frac{35\sqrt{3}}{3} \right)^2 \iff \sqrt{2017} > 1 + \frac{70\sqrt{3}}{3}.$$

Ostatnia nierówność jest prawdziwa, gdyż

$$\sqrt{2017} > \sqrt{1936} = 44 = 1 + \frac{129}{3} > 1 + \frac{7 \cdot 18}{3} > 1 + \frac{7 \cdot \sqrt{300}}{3} = 1 + \frac{70\sqrt{3}}{3}.$$

Uwaga. *Zauważmy na koniec, że prowadząc dokładne rachunki w obydwu sposobach, można udowodnić, że pewne dwa spośród danych punktów znajdują się w odległości co najmniej 38.*

Zadanie 9. Wykazać, że dla nieskończenie wielu liczb całkowitych $n > 1$ równanie

$$(x+1)^{n+1} - (x-1)^{n+1} = y^n$$

nie ma rozwiązania w liczbach całkowitych x, y .

Autor zadania: Witold Bednarek

Rozwiązanie:

Wykażemy, że dla $n = p - 1$, gdzie $p > 2$ jest dowolną liczbą pierwszą, podane równanie nie ma rozwiązania w liczbach całkowitych.

Założmy, że istnieją takie liczby całkowite x, y , że zachodzi równość

$$(x+1)^p - (x-1)^p = y^{p-1}.$$

Z małego twierdzenia Fermata wynika, że

$$p \mid (x+1)^p - (x+1) \text{ oraz } p \mid (x-1)^p - (x-1).$$

Wobec tego

$$p \mid (x+1)^p - (x+1) - ((x-1)^p - (x-1)) = (x+1)^p - (x-1)^p - 2 = y^{p-1} - 2.$$

Stąd otrzymujemy podzielność

$$p \mid y(y^{p-1} - 2) = y^p - y - y.$$

Ponownie korzystając z małego twierdzenia Fermata dostajemy, że $p \mid y^p - y$, co wraz z poprzednią podzielnością daje $p \mid y$ — sprzeczność z tym, że $p \mid y^{p-1} - 2$. $\square$

Zadanie 10. Dana jest liczba całkowita $n \geq 3$. Udowodnić, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych $x_1, \dots, x_n$ zachodzi nierówność

$$\frac{1+x_1^2}{x_2+x_3} + \frac{1+x_2^2}{x_3+x_4} + \dots + \frac{1+x_{n-2}^2}{x_{n-1}+x_n} + \frac{1+x_{n-1}^2}{x_n+x_1} + \frac{1+x_n^2}{x_1+x_2} \geq n.$$

Autor zadania: Michał Kieza

Rozwiązanie:

Korzystając z nierówności między średnimi dostajemy ciąg nierówności

$$\frac{1+x_1^2}{x_2+x_3} + \frac{x_2+x_3}{2} \geq 2\sqrt{\frac{1+x_1^2}{x_2+x_3} \cdot \frac{x_2+x_3}{2}} = 2\sqrt{\frac{1+x_1^2}{2}} \geq 2 \cdot \frac{1+x_1}{2} = 1+x_1.$$

Analogicznie dla $k = 1, 2, \dots, n$ otrzymujemy nierówności:

$$\frac{1+x_k^2}{x_{k+1}+x_{k+2}} + \frac{x_{k+1}+x_{k+2}}{2} \geq 1+x_k,$$

gdzie przyjmujemy $x_{n+1} = x_1$ oraz $x_{n+2} = x_2$. Sumując powyższe nierówności i odejmując od obu stron sumę $x_1 + x_2 + \dots + x_n$ dostajemy tezę. $\square$

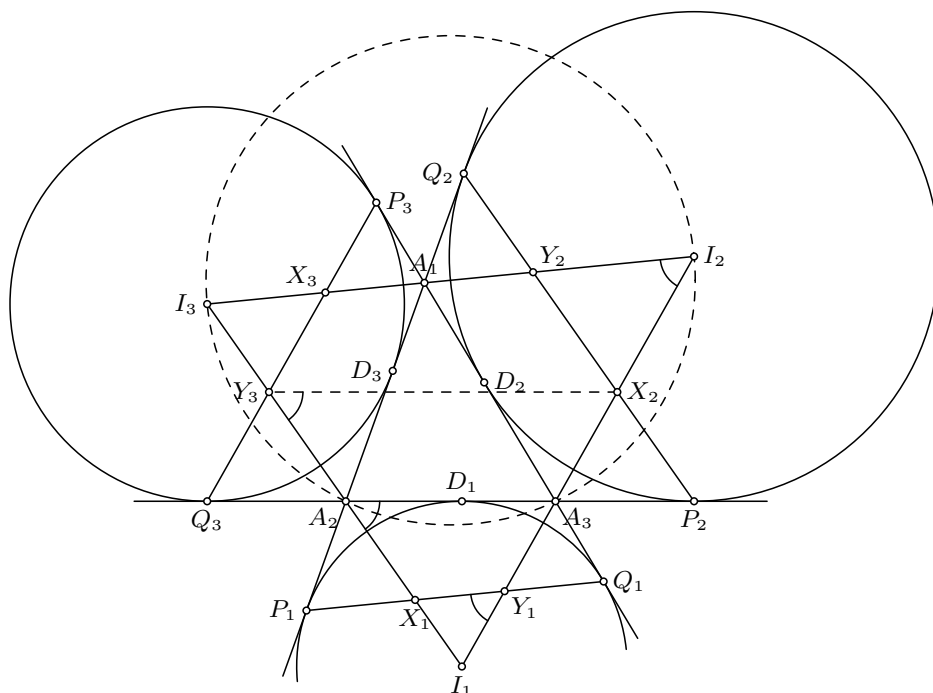
Zadanie 11. Na płaszczyźnie dany jest trójkąt $A_1A_2A_3$. Przyjmując $A_4 = A_1$ oraz $A_5 = A_2$, definiujemy punkty X_t oraz Y_t dla $t = 1, 2, 3$ następująco. Niech Γ_t będzie okręgiem dopisanym do trójkąta $A_1A_2A_3$ i stycznym do boku $A_{t+1}A_{t+2}$, zaś I_t będzie jego środkiem. Niech P_t i Q_t będą odpowiednio punktami styczności Γ_t z prostymi A_tA_{t+1} oraz A_tA_{t+2} . Wówczas X_t i Y_t są odpowiednio punktami przecięcia prostej P_tQ_t z prostymi I_tA_{t+1} oraz I_tA_{t+2} . Wykazać, że punkty $X_1, Y_1, X_2, Y_2, X_3, Y_3$ leżą na jednym okręgu.

Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie:

Niech D_1, D_2, D_3 będą punktami styczności okręgów dopisanych do boków BC, CA i AB , odpowiednio (rys. 3). Wykorzystując równość odcinków stycznych mamy

$$\begin{aligned} Q_3A_3 &= \frac{1}{2}(Q_3A_3 + P_3A_3) = \frac{1}{2}(Q_3A_2 + A_2A_3 + A_3A_1 + A_1P_3) = \\ &= \frac{1}{2}(D_3A_2 + A_2A_3 + A_3A_1 + A_1D_3) = p, \end{aligned}$$



rys. 3

gdzie p jest połową obwodu trójkąta $A_1A_2A_3$. Analogicznie dostajemy, że $A_2P_2 = p$, stąd

$$Q_3A_2 = p - A_2A_3 = A_2P_2 - A_2A_3 = A_3P_2. \quad (1)$$

Prosta Q_3P_3 jest prostopadła do dwusiecznej kąta $A_2A_3A_1$, więc jest równoległa do prostej A_3X_2 , która jest dwusieczną kąta zewnętrznego $A_2A_3A_1$. Podobnie $A_2Y_3 \parallel X_2P_2$. Wobec tego z równości (1) dostajemy przystawanie trójkątów $Q_3A_2Y_3$ oraz $A_3P_2X_2$. W szczególności $X_2Y_3 \parallel A_2A_3$.

Zauważmy teraz, że $\sphericalangle I_3A_3I_2 = 90^\circ$, gdyż jest to kąt między dwusiecznymi kątów przyległych. Podobnie $\sphericalangle I_3A_2I_2 = 90^\circ$, więc na czworokącie $I_2I_3A_2A_3$ można opisać okrąg. Wobec tego $\sphericalangle A_3I_2I_3 = \sphericalangle A_3A_2X_1$. Z równoległości $I_2I_3 \parallel X_1Y_1$ oraz $X_2Y_3 \parallel A_2A_3$ wynika więc, że

$$\sphericalangle I_1Y_1X_1 = \sphericalangle A_3I_2I_3 = \sphericalangle A_3A_2X_1 = \sphericalangle X_2Y_3A_2. \quad (2)$$

Równość (2) pokazuje, że na czworokącie $X_1Y_1X_2Y_3$ można opisać okrąg. Analogicznie uzasadniamy, że na czworokątach $X_2Y_2X_3Y_1$ oraz $X_3Y_3X_1Y_2$ można opisać okręgi.

Gdyby czworokąty $X_1Y_1X_2Y_3$, $X_2Y_2X_3Y_1$ oraz $X_3Y_3X_1Y_2$ były wpisane w różne okręgi, to ich osie potęgowe I_1I_2 , I_2I_3 i I_3I_1 przecinałyby się w jednym punkcie, co jest niemożliwe. Wobec tego punkty $X_1, Y_1, X_2, Y_2, X_3, Y_3$ leżą na jednym okręgu. $\square$

Uwaga. W końcówce rozwiązania nie jest konieczne wykorzystanie osi potęgowych. Istotnie: z tego, że na czworokącie $A_2A_3I_1I_3$ można opisać okrąg oraz równoległości $Y_2X_2 \parallel I_3A_2$, $I_2A_3 \parallel X_3Q_3$ oraz $Q_3P_2 \parallel Y_3X_2$ mamy

$$\sphericalangle X_2Y_2I_2 = \sphericalangle I_2I_3A_2 = \sphericalangle I_2A_3P_2 = \sphericalangle X_3Q_3P_2 = \sphericalangle X_3Y_3X_2.$$

Wobec tego na czworokącie $X_2Y_2X_3Y_3$ można opisać okrąg. Podobnie pokazujemy, że na czworokątach $X_1Y_1X_3Y_3$ oraz $Y_1X_2Y_2X_1$ można opisać okręgi.

Zadanie 12. Zbiór A składa się z n liczb rzeczywistych. Dla podzbioru $X \subseteq A$ przez $S(X)$ oznaczamy sumę elementów zbioru X , przy czym przyjmujemy $S(\emptyset) = 0$. Niech k będzie liczbą takich różnych liczb rzeczywistych x , że $x = S(X)$ dla pewnego $X \subseteq A$. Niech ℓ będzie liczbą uporządkowanych par (X, Y) podzbiorów zbioru A spełniających równość $S(X) = S(Y)$.

Dowieść, że $k\ell \leq 6^n$.

Uwaga. Przy definiowaniu ℓ uwzględniamy również pary postaci (X, X) dla wszystkich $X \subseteq A$. Pary uporządkowane (X, Y) oraz (Y, X) uznajemy za różne o ile $X \neq Y$.

Zadanie zaproponował: Michał Pilipczuk

Rozwiązanie:

Dla dowolnego zbioru X , niech $\mathcal{P}(X)$ oznacza zbiór wszystkich podzbiorów X , natomiast $|X|$ to liczba elementów X .

Oznaczmy przez $\mathcal{S}$ zbiór tych liczb rzeczywistych x , że $x = S(X)$ dla pewnego $X \subseteq A$. Dla dowolnego elementu $s \in \mathcal{S}$ niech P_s oznacza zbiór tych $X \subseteq A$, że $S(X) = s$.

Oczywiście

$$k = |\mathcal{S}| \quad \text{oraz} \quad \sum_{s \in \mathcal{S}} |P_s| = |\mathcal{P}(A)| = 2^n.$$

Ponieważ liczba takich uporządkowanych par (X, Y) podzbiorów zbioru A , że $S(X) = S(Y) = s$ wynosi $|P_s|^2$, to

$$\ell = \sum_{s \in \mathcal{S}} |P_s|^2.$$

Niech $s_0 \in \mathcal{S}$ będzie taką liczbą rzeczywistą, że liczba elementów w zbiorze P_{s_0} jest największa. Oznaczmy przez $M = |P_{s_0}|$ tę liczbę elementów. Ponieważ spełniona jest nierówność

$$k\ell = |\mathcal{S}| \cdot \sum_{s \in \mathcal{S}} |P_s|^2 \leq M \cdot |\mathcal{S}| \cdot \sum_{s \in \mathcal{S}} |P_s| = M \cdot |\mathcal{S}| \cdot 2^n,$$

to wystarczy wykazać, że $M \cdot |\mathcal{S}| \leq 3^n$.

Niech $Q \subseteq \mathcal{P}(A)$ będzie zbiorem zawierającym po jednym elemencie z każdego zbioru P_s , dla $s \in \mathcal{S}$. Oczywiście $|Q| = |\mathcal{S}|$.

Oznaczmy elementy zbioru A przez $a_1, a_2, \dots, a_n$ w dowolnej kolejności. Dla dowolnego podzbioru $Z \subseteq A$ niech

$$v(Z) = (v_1(Z), v_2(Z), \dots, v_n(Z)),$$

gdzie

$$v_i(Z) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } a_i \in Z, \\ 0 & \text{jeśli } a_i \notin Z. \end{cases}$$

Łatwo zauważyć, że dla dowolnych $Z, Z' \subseteq A$, jeśli $v(Z) = v(Z')$, to $Z = Z'$.

Dla zbiorów $X \in P_{s_0}$ oraz $Y \in Q$ wprowadźmy n -tkę

$$v(X, Y) := v(X) + v(Y) = (v_1(X, Y), v_2(X, Y), \dots, v_n(X, Y)),$$

gdzie $v_i(X, Y) = v_i(X) + v_i(Y)$. Wówczas

$$S(X) + S(Y) = a_1 \cdot v_1(X, Y) + a_2 \cdot v_2(X, Y) + \dots + a_n \cdot v_n(X, Y). \quad (3)$$

Pokażemy, że dla wszystkich $(X, Y) \in P_{s_0} \times Q$, n -tki $v(X, Y)$ są parami różne. A ponieważ $v_i \in \{0, 1, 2\}$, to dostaniemy, że $M \cdot |\mathcal{S}| = |P_{s_0}| \cdot |Q| \leq 3^n$, czyli zakończymy dowód.

Założmy, że dla pewnych $(X, Y), (X', Y') \in P_{s_0} \times Q$ zachodzi równość $v(X, Y) = v(X', Y')$. Na mocy (3) oznacza to w szczególności, że

$$S(X) + S(Y) = S(X') + S(Y').$$

Skoro każdy ze zbiorów w P_{s_0} ma sumę równą s_0 , to $S(X) = S(X') = s_0$, więc również $S(Y) = S(Y')$. Jednakże zbiory w Q mają parami różne sumy, więc wynika stąd, że $Y = Y'$.

Zauważmy teraz, że z równości $v(X, Y) = v(X', Y')$ oraz $Y = Y'$ wynika $X = X'$. Istotnie, mamy wtedy

$$v(X) = v(X, Y) - v(Y) = v(X', Y') - v(Y') = v(X'),$$

więc $X = X'$. Wynika stąd, że $v(X, Y) = v(X', Y')$ pociąga za sobą $(X, Y) = (X', Y')$, co kończy dowód. $\square$

(db,mg)



LXIX Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia drugiego

9 lutego 2018 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Wyznaczyć wszystkie funkcje f określone na zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych i przyjmujące wartości rzeczywiste, które spełniają oba następujące warunki:

- $f(x) + f(y) \geq xy$ dla wszystkich liczb rzeczywistych x, y ; oraz
- dla każdej liczby rzeczywistej x istnieje taka liczba rzeczywista y , że $f(x) + f(y) = xy$.

2. Dana jest dodatnia liczba całkowita n , która z dzielenia przez 8 daje resztę 4. Liczby

$$1 = k_1 < k_2 < \dots < k_m = n$$

są wszystkimi dodatnimi dzielnikami liczby n . Udowodnić, że jeśli liczba $i \in \{1, 2, \dots, m-1\}$ nie jest podzielna przez 3, to $k_{i+1} \leq 2k_i$.

3. Symetralna boku BC przecina okrąg opisany na trójkącie ABC w punktach P i Q , przy czym punkty A i P leżą po tej samej stronie prostej BC . Punkt R jest rzutem prostokątnym punktu P na prostą AC . Punkt S jest środkiem odcinka AQ . Wykazać, że punkty A, B, R i S leżą na jednym okręgu.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.



LXIX Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia drugiego

10 lutego 2018 r. (drugi dzień zawodów)

4. Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD , przy czym okrąg o średnicy BC jest styczny do prostej AD . Udowodnić, że okrąg o średnicy AD jest styczny do prostej BC .

5. Dane są takie pięcioelementowe podzbiory $A_1, A_2, \dots, A_k$ zbioru $\{1, 2, \dots, 23\}$, że dla wszystkich $1 \leq i < j \leq k$ zbiór $A_i \cap A_j$ ma co najwyżej trzy elementy. Wykazać, że $k \leq 2018$.

6. Dana jest dodatnia liczba całkowita k oraz ciąg $a_1, a_2, a_3, \dots$ o wyrazach ze zbioru $\{0, 1, 2, \dots, k\}$. Niech

$$b_n = \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \dots + a_n^n}$$

dla wszystkich dodatnich liczb całkowitych n . Udowodnić, że jeśli w ciągu $b_1, b_2, b_3, \dots$ występuje nieskończenie wiele całkowitych wyrazów, to wszystkie wyrazy tego ciągu są całkowite.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.



LXIX Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych
zawodów stopnia drugiego
9 lutego 2017 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Wyznaczyć wszystkie funkcje f określone na zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych i przyjmujące wartości rzeczywiste, które spełniają oba następujące warunki:

- $f(x) + f(y) \geq xy$ dla wszystkich liczb rzeczywistych x, y ; oraz
- dla każdej liczby rzeczywistej x istnieje taka liczba rzeczywista y , że $f(x) + f(y) = xy$.

Autorzy zadania: Marta i Michał Strzeleccy

Rozwiązanie:

Odpowiedź: Warunki zadania spełnia jedynie funkcja zadana wzorem $f(x) = \frac{x^2}{2}$ dla dowolnej liczby rzeczywistej x .

Niech f będzie funkcją spełniającą warunki zadania. Wstawiając do pierwszego warunku $x = y$ dostajemy nierówność $f(x) + f(x) \geq x^2$, lub równoważnie $f(x) \stackrel{(*)}{\geq} \frac{x^2}{2}$.

Wybermy dowolną liczbę rzeczywistą x . Z drugiego warunku wynika, że istnieje taka liczba rzeczywista y , że $f(x) + f(y) = xy$. Stąd i z nierówności $(*)$ dostajemy, że

$$0 = f(x) + f(y) - xy \geq \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - xy = \frac{1}{2}(x - y)^2 \geq 0.$$

Oznacza to, że w powyższych nierównościach musi zachodzić równość, w szczególności $f(x) = \frac{x^2}{2}$.

Niech teraz $f(x) = \frac{x^2}{2}$. Wówczas

$$f(x) + f(y) - xy = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - xy = \frac{1}{2}(x - y)^2 \geq 0,$$

więc pierwszy warunek jest spełniony. Równość w powyższej nierówności zachodzi dla $y = x$, więc drugi warunek jest również spełniony. $\square$

2. Dana jest dodatnia liczba całkowita n , która z dzielenia przez 8 daje resztę 4. Liczby

$$1 = k_1 < k_2 < \dots < k_m = n$$

są wszystkimi dodatnimi dzielnikami liczby n . Udowodnić, że jeśli liczba $i \in \{1, 2, \dots, m-1\}$ nie jest podzielna przez 3, to $k_{i+1} \leq 2k_i$.

Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie:

Niech $i \in \{1, 2, \dots, m-1\}$ będzie taką liczbą, że spełniona jest nierówność $k_{i+1} > 2k_i$. Udowodnimy, że liczba i jest podzielna przez 3. W tym celu wykażemy, że zbiór $\{k_1, k_2, \dots, k_i\}$ jest sumą rozłącznych trójek postaci $(d, 2d, 4d)$, gdzie d jest dowolnym nieparzystym dzielnikiem n nie większym od k_i .

Niech $d \mid n$, $2 \nmid d$ oraz $d \leq k_i$. Ponieważ liczby 2 i d są względnie pierwsze i obie są dzielnikami n , więc $2d \mid n$ i $2d \leq 2k_i$. Ponieważ k_i oraz k_{i+1} są kolejnymi dzielnikami n i $2d < k_{i+1}$, więc $2d \leq k_i$.

Oznacza to, że trójka $(d, 2d, 4d)$ jest podzbiorem zbioru $\{k_1, k_2, \dots, k_i\}$.

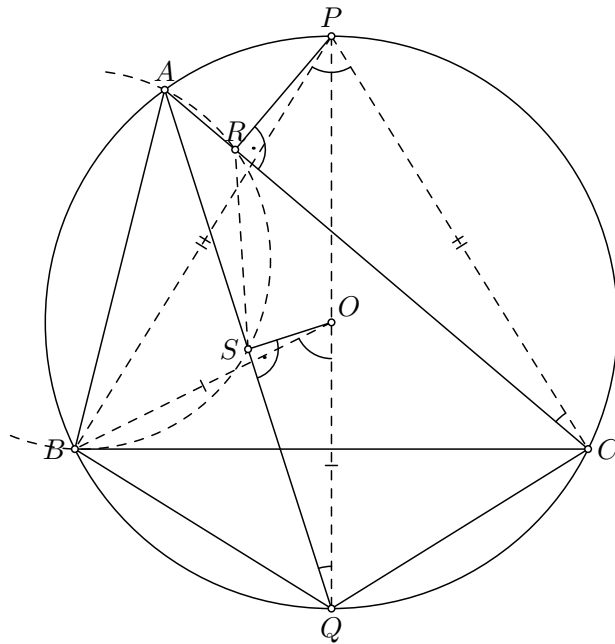
Niech $a \leq k_i$ będzie dzielnikiem n . Ponieważ $8 \nmid n$, to $8 \nmid a$. Oznacza to, że $a = d$, $a = 2d$ lub $a = 4d$, dla pewnego nieparzystego dzielnika d liczby n . Ponieważ $d \leq a \leq k_i$, to a należy do pewnej trójki postaci $(d, 2d, 4d)$.

Oczywiście jeżeli $d_1 \neq d_2$, to trójki $(d_1, 2d_1, 4d_1)$ i $(d_2, 2d_2, 4d_2)$ są rozłączne. Zatem istotnie rozbiliśmy zbiór $\{k_1, k_2, \dots, k_i\}$ na rozłączne podzbiory trójelementowe, więc $3 \mid i$, stąd teza. $\square$

3. Symetralna boku BC przecina okrąg opisany na trójkącie ABC w punktach P i Q , przy czym punkty A i P leżą po tej samej stronie prostej BC . Punkt R jest rzutem prostokątnym punktu P na prostą AC . Punkt S jest środkiem odcinka AQ . Wykazać, że punkty A, B, R i S leżą na jednym okręgu.

Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie:



rys. 1

Bez straty ogólności przyjmijmy, że $AB < AC$. Jeżeli $AB = AC$, to $A = P = R$ i $S = O$. Ponieważ w takim przypadku $\angle ACB < 90^\circ$, to punkty A, B, O nie są współliniowe, więc leżą na jednym okręgu i teza zadania jest spełniona. Jeżeli $AB > AC$, to rozwiązanie przebiega analogicznie.

Niech O będzie środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC . Oczywiście punkt O leży na odcinku PQ oraz $OS \perp AQ$. Ponieważ $\sphericalangle PCR = \sphericalangle OQS$, to trójkąty prostokątne PRC i OSQ są podobne.

Ponadto $PB = PC$, $OB = OQ$ oraz

$$\angle BOQ = 2\angle BCQ = 2\angle QPC = \angle BPC,$$

więc trójkąty OBQ i PBC są podobne. Na podstawie uzyskanych podobieństw wnioskujemy, że czworokąty $OSBQ$ i $PRBC$ są podobne. W szczególności $\sphericalangle BSQ = \sphericalangle BRC$, więc

$$\angle ARB = 180^\circ - \angle BRC = 180^\circ - \angle BSQ = \angle ASB,$$

zatem na czworokącie $ABSR$ można opisać okrąg.

☐



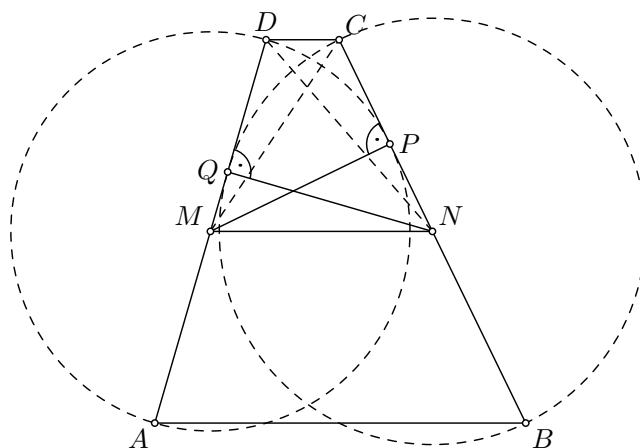
LXIX Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych
zawodów stopnia drugiego
10 lutego 2017 r. (drugi dzień zawodów)

4. Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD , przy czym okrąg o średnicy BC jest styczny do prostej AD . Udowodnić, że okrąg o średnicy AD jest styczny do prostej BC .

Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie:



rys. 2

Niech punkty M i N będą odpowiednio środkami ramion AD i BC . Załóżmy, że okrąg o średnicy BC jest styczny do prostej AD w punkcie Q . Wówczas $NQ = NC$, gdyż są to promienie okręgu o średnicy BC . Oznaczmy przez P rzut prostokątny punktu M na prostą BC .

Ponieważ $MN \parallel CD$, to $[MNC] = [MND]$, gdzie $[F]$ oznacza pole figury F . Jednakże ze wzoru na pole trójkąta oraz założenia zadania mamy

$$[MND] = \frac{1}{2} \cdot MD \cdot QN = \frac{1}{2} \cdot MD \cdot CN. \quad (1)$$

Podobnie

$$[MNC] = \frac{1}{2} \cdot CN \cdot MP. \quad (2)$$

Porównując uzyskane zależności stwierdzamy, że $MD = MP$, czyli okrąg o średnicy AD jest styczny do BC w punkcie P . $\square$

5. Dane są takie pięcioelementowe podzbiory $A_1, A_2, \dots, A_k$ zbioru $\{1, 2, \dots, 23\}$, że dla wszystkich $1 \leq i < j \leq k$ zbiór $A_i \cap A_j$ ma co najwyżej trzy elementy. Wykazać, że $k \leq 2018$.

Autor zadania: Wojciech Nadara

Rozwiązanie:

Oszacujmy na dwa sposoby liczbę takich par (B, i) , że $1 \leq i \leq k$ oraz B jest czteroelementowym podzbiorem zbioru A_i .

Z jednej strony, dla dowolnego $1 \leq i \leq k$ istnieje dokładnie 5 czteroelementowych podzbiorów zbioru A_i , więc liczba naszych par wynosi $5k$.

Z drugiej strony dowolny czteroelementowy podzbiór zbioru $\{1, 2, \dots, 23\}$ może być podzbiorem co najwyżej jednego spośród zbiorów $A_1, A_2, \dots, A_k$. Oznacza to, że liczba naszych par jest nie większa od liczby czteroelementowych podzbiorów zbioru $\{1, 2, \dots, 23\}$. Stąd spełniona jest nierówność

$$5k \leq \binom{23}{4} = \frac{23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20}{24} = 23 \cdot 11 \cdot 7 \cdot 5 = 1771 \cdot 5,$$

więc $k \leq 1771 \leq 2018$. □

6. Dana jest dodatnia liczba całkowita k oraz ciąg $a_1, a_2, a_3, \dots$ o wyrazach ze zbioru $\{0, 1, 2, \dots, k\}$. Niech

$$b_n = \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \dots + a_n^n}$$

dla wszystkich dodatnich liczb całkowitych n . Udowodnić, że jeśli w ciągu $b_1, b_2, b_3, \dots$ występuje nieskończenie wiele całkowitych wyrazów, to wszystkie wyrazy tego ciągu są całkowite.

Autor zadania: Rami Ayoush

Rozwiązanie:

Jeżeli wszystkie wyrazy ciągu $a_1, a_2, a_3, \dots$ są zerami, to również wszystkie wyrazy ciągu $b_1, b_2, b_3, \dots$ są zerami i teza zadania jest spełniona. Przypuśćmy, że co najmniej jeden wyraz ciągu $a_1, a_2, a_3, \dots$ jest dodatni. Bez straty ogólności, zmniejszając ewentualnie k , możemy przyjąć, że liczba k jest największym wyrazem ciągu $a_1, a_2, a_3, \dots$

Niech s będzie najmniejszą taką liczbą całkowitą, że $a_s = k$. Udowodnimy, że dla dowolnego $m \neq s$ zachodzi równość $a_m = 0$. Wybierzmy taką liczbę $n \geq \max\{s, m, 2k^2\}$, że b_n jest liczbą całkowitą. Ponieważ $n \geq 2k^2$, to zachodzą nierówności

$$\left(1 + \frac{1}{k}\right)^n = 1 + \frac{n}{k} + \frac{n(n-1)}{2k^2} + \dots + \frac{1}{k^n} > 1 + (n-1) \cdot \frac{n}{2k^2} \geq n,$$

więc $1 + \frac{1}{k} > \sqrt[n]{n}$. Wobec tego spełniona jest nierówność

$$b_n = \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \dots + a_n^n} \leq \sqrt[n]{n \cdot k^n} < \left(1 + \frac{1}{k}\right) \cdot k = k + 1.$$

Z drugiej strony jeżeli $a_m \geq 1$, to

$$b_n = \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \dots + a_n^n} \geq \sqrt[n]{1 + a_s^n} > \sqrt[n]{a_s^n} = k.$$

Otrzymaliśmy, że b_n jest liczbą całkowitą i $k < b_n < k + 1$. Uzyskaliśmy sprzeczność, więc istotnie $a_m = 0$.

Wobec powyższych rozważań dla dowolnej liczby całkowitej n spełnione są równości

$$a_n = \begin{cases} k & \text{dla } n = s \\ 0 & \text{dla } n \neq s \end{cases} \quad \text{oraz} \quad b_n = \begin{cases} 0 & \text{dla } n < s \\ k & \text{dla } n \geq s \end{cases}$$

W szczególności wszystkie wyrazy ciągu $b_1, b_2, b_3, \dots$ są całkowite. □

(db,mg)



LXIX Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia trzeciego

18 kwietnia 2018 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC , w którym $AB < AC$. Dwusieczna kąta BAC przecina bok BC w punkcie D . Punkt M jest środkiem boku BC . Udowodnić, że prosta przechodząca przez środki okręgów opisanych na trójkątach ABC i ADM jest równoległa do prostej AD .

2. Dany jest n -elementowy podzbiór S płaszczyzny składający się z punktów o obu współrzędnych całkowitych, przy czym n jest liczbą nieparzystą. Różnowartościowa funkcja $f: S \rightarrow S$ spełnia następujący warunek: dla każdej pary punktów $A, B \in S$, odległość między punktami $f(A)$ i $f(B)$ jest nie większa niż odległość między punktami A i B . Wykazać, że istnieje taki punkt $X \in S$, że $f(X) = X$.

3. Wyznaczyć wszystkie liczby rzeczywiste c , dla których istnieje taka funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, że dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ spełniona jest równość

$$f(f(x) + f(y)) + cxy = f(x + y).$$

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejsie dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.



LXIX Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia trzeciego

19 kwietnia 2018 r. (drugi dzień zawodów)

4. Liczbę całkowitą nazwiemy *bezkwadratową*, jeśli nie jest ona podzielna przez żaden kwadrat liczby całkowitej większej od 1.

Niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą. Przyjmijmy, że w zbiorze $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ jest dokładnie M takich liczb bezkwadratowych k , że liczba $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ jest nieparzysta. Wykazać, że liczba M jest nieparzysta.

Uwaga: Dla danej liczby rzeczywistej x , przez $\lfloor x \rfloor$ oznaczamy największą liczbę całkowitą nie większą od x .

5. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC , w którym $AB < AC$. Punkty E i F są spodkami jego wysokości opuszczonych odpowiednio z wierzchołków B i C . Prosta styczna w punkcie A do okręgu opisanego na trójkącie ABC przecina prostą BC w punkcie P . Prosta równoległa do prostej BC przechodząca przez punkt A przecina prostą EF w punkcie Q . Wykazać, że prosta PQ jest prostopadła do środkowej trójkąta ABC opuszczonej z wierzchołka A .

6. Dana jest liczba pierwsza p większa od 3. Niech K oznacza liczbę takich permutacji $(a_1, a_2, \dots, a_p)$ zbioru $\{1, 2, \dots, p\}$, że liczba

$$a_1a_2 + a_2a_3 + \dots + a_{p-1}a_p + a_pa_1$$

jest podzielna przez p . Udowodnić, że liczba $K + p$ jest podzielna przez p^2 .

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejsie dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.



LXIX Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych
zawodów stopnia trzeciego
18 kwietnia 2018 r. (pierwszy dzień zawodów)

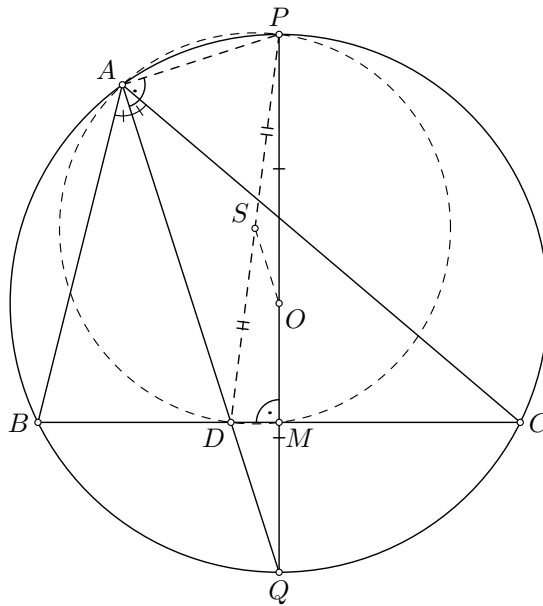
1. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC , w którym $AB < AC$. Dwusieczna kąta BAC przecina bok BC w punkcie D . Punkt M jest środkiem boku BC . Udowodnić, że prosta przechodząca przez środki okręgów opisanych na trójkątach ABC i ADM jest równoległa do prostej AD .

Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie:

Oznaczmy odpowiednio przez O i S środki okręgów opisanych na trójkątach ABC i ADM (rys. 1). Niech symetralna odcinka BC przecina okrąg opisany na trójkącie ABC w punktach P i Q przy czym punkty A i P leżą po tej samej stronie prostej BC . Zauważmy, że PQ jest średnicą okręgu opisanego na trójkącie ABC , zaś punkt Q jest środkiem łuku okręgu opisanego na trójkącie ABC niezawierającego A , więc leży na dwusiecznej AD trójkąta ABC .

Ponieważ $\angle QAP = \angle PMD = 90^\circ$, to punkt P leży na okręgu opisanym na trójkącie ADM o średnicy PD . W szczególności punkt S jest środkiem odcinka PD . Ponadto punkt O jest środkiem odcinka PQ , zatem punkty O i S są odpowiednio środkami boków PQ i PD trójkąta PDQ , więc $OS \parallel DQ$, skąd teza. $\square$



rys. 1

2. Dany jest n -elementowy podzbiór S płaszczyzny składający się z punktów o obu współrzędnych całkowitych, przy czym n jest liczbą nieparzystą. Różnowartościowa funkcja $f : S \rightarrow S$ spełnia następujący warunek: dla każdej pary punktów $A, B \in S$, odległość między punktami $f(A)$ i $f(B)$ jest nie większa niż odległość między punktami A i B . Wykazać, że istnieje taki punkt $X \in S$, że $f(X) = X$.

Autorzy zadania: Marta i Michał Strzeleccy

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód przez indukcję ze względu na n . Jeżeli $n = 1$, to teza jest oczywiście spełniona.

Niech A będzie dowolnym punktem zbioru S . Rozważmy ciąg

$$A_0 = A, A_1 = f(A), A_2 = f(f(A)), A_3 = f(f(f(A))), \dots$$

Ponieważ zbiór S jest skończony, to pewien punkt w tym ciągu powtórzy się. Wybierzmy minimalną taką liczbę całkowitą dodatnią k , że $A_i = A_{i+k}$ dla pewnej nieujemnej liczby całkowitej i . Ponieważ f jest różnowartościową funkcją ze zbioru skończonego S w siebie, więc z równości $A_i = A_{i+k}$ wynikają kolejno równości $A_{i-1} = A_{i-1+k}$, $A_{i-2} = A_{i-2+k}$, $\dots$, $A_0 = A_k$. Ponadto z minimalności liczby k wynika, że punkty $A_0, A_1, \dots, A_{k-1}$ są parami różne.

Jeśli k jest liczbą parzystą, to zbiór $S' = S \setminus \{A_0, A_1, \dots, A_{k-1}\}$ wraz z funkcją f zawężoną do S' spełnia warunki zadania. Z założenia indukcyjnego wynika, że istnieje taki punkt $X \in S' \subset S$, że $f(X) = X$.

Założmy, że k jest liczbą nieparzystą. Z warunku danego w zadaniu dostajemy, że

$$|A_0 A_1| \geq |A_1 A_2| \geq \dots \geq |A_{k-2} A_{k-1}| \geq |A_{k-1} A_0| \geq |A_0 A_1|.$$

Zatem w powyższych nierównościach musi zachodzić równość.

Oznaczmy przez (x_i, y_i) współrzędne wektora $\overrightarrow{A_i A_{i+1}}$ dla $i = 0, 1, \dots, k-1$, gdzie $A_k = A_0$. Ponieważ $|A_0 A_1| = |A_1 A_2| = \dots = |A_{k-2} A_{k-1}| = |A_{k-1} A_0|$, to spełnione są równości

$$x_0^2 + y_0^2 = x_1^2 + y_1^2 = \dots = x_{k-1}^2 + y_{k-1}^2. \quad (1)$$

Ponadto

$$\sum_{i=0}^{k-1} x_i = \sum_{i=0}^{k-1} y_i = 0, \quad (2)$$

gdyż $\sum_{i=0}^{k-1} \overrightarrow{A_i A_{i+1}} = \overrightarrow{A_0 A_0} = \vec{0}$.

Udowodnimy, że dla dowolnej liczby nieparzystej k jeżeli liczby całkowite $x_0, y_0, x_1, y_1, \dots, x_{k-1}, y_{k-1}$ spełniają warunki (1) i (2), to $x_0 = y_0 = x_1 = y_1 = \dots = x_{k-1} = y_{k-1} = 0$.

Przypuśćmy, że liczby całkowite $x_0, y_0, x_1, y_1, \dots, x_{k-1}, y_{k-1}$ spełniają warunki (1) i (2) i że nie wszystkie są zerami. Spośród wszystkich takich ciągów wybierzmy ten o minimalnej wartości $x_0^2 + y_0^2$. Dalej oznaczamy $d = x_0^2 + y_0^2$.

Jeżeli $d \equiv 1 \pmod{4}$, to w każdej parze (x_i, y_i) jest jedna liczba parzysta i jedna liczba nieparzysta. Mamy wówczas

$$0 = \sum_{i=0}^{k-1} x_i + \sum_{i=0}^{k-1} y_i = \sum_{i=0}^{k-1} (x_i + y_i) \equiv \sum_{i=0}^{k-1} 1 = k \pmod{2}.$$

Otrzymujemy sprzeczność, gdyż k jest liczbą nieparzystą.

Jeżeli $d \equiv 2 \pmod{4}$, to w każdej parze (x_i, y_i) obie liczby są nieparzyste. Wówczas

$$0 = \sum_{i=0}^{k-1} x_i \equiv \sum_{i=0}^{k-1} 1 = k \pmod{2}.$$

Ponownie sprzeczność z nieparzystością liczby k .

Jeżeli zaś $d \equiv 0 \pmod{4}$, to w każdej parze (x_i, y_i) obie liczby są parzyste. W takim przypadku liczby

$$x'_0 = \frac{x_0}{2}, y'_0 = \frac{y_0}{2}, x'_1 = \frac{x_1}{2}, y'_1 = \frac{y_1}{2}, \dots, x'_{k-1} = \frac{x_{k-1}}{2}, y'_{k-1} = \frac{y_{k-1}}{2}$$

są całkowite i spełniają warunki (1) i (2). Ponadto $x_0'^2 + y_0'^2 = \frac{d}{4} < d$. Otrzymaliśmy sprzeczność z minimalnością d .

Liczba d jako suma dwóch kwadratów liczb całkowitych nie daje reszty 3 z dzielenia przez 4.

Udowodniliśmy, że $x_0 = y_0 = x_1 = y_1 = \dots = x_{k-1} = y_{k-1} = 0$. W szczególności $x_0 = y_0 = 0$, więc $\overrightarrow{A_0 A_1} = \vec{0}$. Oznacza to, że $A_0 = A_1$, więc $A_0 = f(A_0)$, co kończy dowód. $\square$

3. Wyznaczyć wszystkie liczby rzeczywiste c , dla których istnieje taka funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, że dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ spełniona jest równość

$$f(f(x) + f(y)) + cxy = f(x + y).$$

Autor zadania: Paweł Służewski

Rozwiązanie:

Udowodnimy, że jedyną liczbą rzeczywistą c , dla której istnieje funkcja f o żądanych własnościach jest $c = 0$.

Po pierwsze zauważmy, że jeżeli $c = 0$, to dowolna funkcja stała spełnia warunki zadania.

Niech $c > 0$ będzie taką liczbą rzeczywistą, że istnieje funkcja f o żądanych własnościach. Podstawiając $y = -x$ do równania danego w zadaniu otrzymujemy, że

$$f(f(x) + f(-x)) = f(0) + cx^2. \quad (3)$$

Niech t będzie liczbą rzeczywistą spełniającą nierówność $t \geq f(0)$. Ponieważ liczba t może być zapisana w postaci $t = f(0) + cx^2$ dla pewnego x , to z równości (3) wynika, że t jest wartością funkcji f .

Podstawiając do wyjściowej równości $x = 0$ dostajemy równość

$$f(f(y) + f(0)) = f(y). \quad (4)$$

Dla dowolnej liczby rzeczywistej $t \geq f(0)$ istnieje taka liczba rzeczywista y , że $f(y) = t$, co w połączeniu z (4) daje

$$f(t + f(0)) = t.$$

Podstawiając $s = t + f(0)$ do powyższego równania otrzymujemy, że dla dowolnej liczby rzeczywistej $s \geq 2f(0)$ zachodzi wzór

$$f(s) = s - f(0). \quad (5)$$

Niech $x \geq 3|f(0)|$ będzie dowolną liczbą rzeczywistą. Z wzoru (5) zastosowanego kilkakrotnie wynika, że

$$f(2f(x)) = f(2x - 2f(0)) = 2x - 3f(0),$$

oraz

$$f(2x) = 2x - f(0).$$

Łącząc powyższe równości z wyjściowym równaniem dostajemy, że dla dowolnego $x \geq 3|f(0)|$ spełniona jest równość

$$2f(0) = cx^2.$$

Ponieważ powyższa równość może zachodzić dla co najwyżej dwóch liczb x , to dostajemy sprzeczność.

Jeżeli $c < 0$, to rozumowanie przebiega analogicznie. W tym przypadku z równości (3) wynika, że każda liczba rzeczywista $t \leq f(0)$ jest wartością funkcji f , w konsekwencji równość (5) zachodzi dla dowolnego $s \leq 2f(0)$. Podobnie jak wyżej, dostajemy że dla $x \leq -3|f(0)|$ zachodzi równość $2f(0) = cx^2$, więc ponownie uzyskujemy sprzeczność. $\square$



LXIX Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych
zawodów stopnia trzeciego
19 kwietnia 2018 r. (drugi dzień zawodów)

4. Liczbę całkowitą nazwiemy bezkwadratową, jeśli nie jest ona podzielna przez żaden kwadrat liczby całkowitej większej od 1.

Niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą. Przyjmijmy, że w zbiorze $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ jest dokładnie M takich liczb bezkwadratowych k , że liczba $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ jest nieparzysta. Wykazać, że liczba M jest nieparzysta.

Uwaga: Dla danej liczby rzeczywistej x , przez $\lfloor x \rfloor$ oznaczamy największą liczbę całkowitą nie większą od x .

Autor zadania: Mariusz Skalba

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód przez indukcję ze względu na n . Po pierwsze zauważmy, że dla $n = 1$ mamy $M = 1$ i teza zadania jest spełniona.

Przypuśćmy, że teza zadania jest spełniona dla pewnej liczby n , udowodnimy, że jest spełniona dla $n + 1$. Niech k będzie liczbą całkowitą dodatnią. Zapiszmy $n + 1 = qk + r$, gdzie q, r są całkowite i $0 \leq r < k$. Mamy $\lfloor \frac{n+1}{k} \rfloor = q$ oraz

$$\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor = \begin{cases} q & \text{gdy } r > 0, \\ q - 1 & \text{gdy } r = 0. \end{cases}$$

Oznacza to, że liczby $\lfloor \frac{n+1}{k} \rfloor$ i $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ są różnej parzystości wtedy i tylko wtedy, gdy $k \mid n + 1$.

Jeśli $n + 1 = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_\ell^{a_\ell}$, gdzie $p_1 < p_2 < \dots < p_\ell$ są liczbami pierwszymi, to dzielniki bezkwadratowe liczby $n + 1$ są postaci $p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_\ell^{e_\ell}$, gdzie $e_1, e_2, \dots, e_\ell \in \{0, 1\}$, więc jest ich 2^ℓ . Oznacza to, że po przejściu od n do $n + 1$, dokładnie 2^ℓ spośród liczb postaci $\lfloor \frac{n+1}{k} \rfloor$, gdzie liczba k jest bezkwadratowa, ma inną parzystość niż $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$. Skoro $\ell \geq 1$ to liczba 2^ℓ jest parzysta, a więc parzystość liczby M nie zmienia się. $\square$

5. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC , w którym $AB < AC$. Punkty E i F są spodkami jego wysokości opuszczonych odpowiednio z wierzchołków B i C . Prosta styczna w punkcie A do okręgu opisanego na trójkącie ABC przecina prostą BC w punkcie P . Prosta równoległa do prostej BC przechodząca przez punkt A przecina prostą EF w punkcie Q . Wykazać, że prosta PQ jest prostopadła do środkowej trójkąta ABC opuszczonej z wierzchołka A .

Autor zadania: Bartłomiej Bollin

Rozwiązanie:

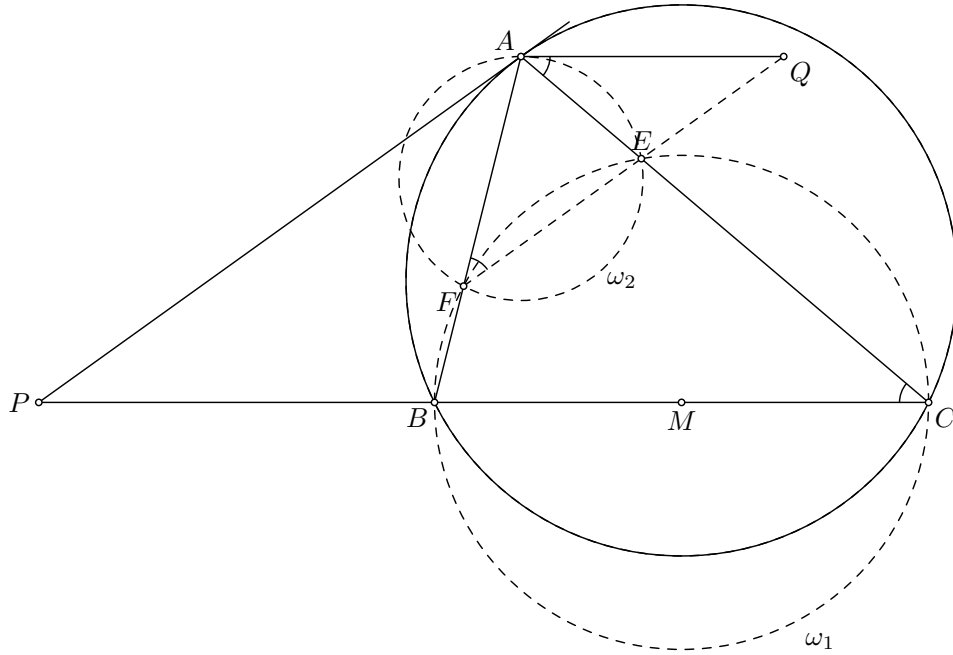
Zauważmy na początku, że na czworokącie $EFBC$ można opisać okrąg ω_1 , gdyż $\sphericalangle BEC = \sphericalangle BFC = 90^\circ$. W szczególności

$$\sphericalangle EFA = 180^\circ - \sphericalangle BFE = \sphericalangle ACB = \sphericalangle EAQ,$$

gdzie ostatnia równość wynika z równoległości prostych AQ i BC .

Z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia o kącie między styczną a cięciwą wynika, że okrąg ω_2 opisany na trójkącie AFE jest styczny do prostej AQ . Wobec tego z twierdzenia o trzech osiach potęgowych zastosowanego dla punktu A i okręgów ω_1 oraz ω_2 wynika, że punkt Q leży na osi potęgowej punktu A i okręgu ω_1 .

Ponownie korzystając z twierdzenia o trzech osiach potęgowych dla punktu A , okręgu opisanego na trójkącie ABC i okręgu ω_1 dostajemy, że punkt P leży na osi potęgowej punktu A i okręgu ω_1 .



rys. 2

Zatem prosta PQ jest osią potęgową punktu A i okręgu ω_1 , więc w szczególności jest ona prostopadła do prostej łączącej punkt A ze środkiem ω_1 , czyli do prostej AM . $\square$

6. Dana jest liczba pierwsza p większa od 3. Niech K oznacza liczbę takich permutacji $(a_1, a_2, \dots, a_p)$ zbioru $\{1, 2, \dots, p\}$, że liczba

$$a_1a_2 + a_2a_3 + \dots + a_{p-1}a_p + a_pa_1$$

jest podzielna przez p . Udowodnić, że liczba $K + p$ jest podzielna przez p^2 .

Autor zadania: Michał Pilipczuk

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez A zbiór wszystkich permutacji zbioru $\{1, 2, \dots, p\}$ które spełniają warunek dany w zadaniu. Ponadto dla liczby całkowitej a niech $\bar{a}$ oznacza tę liczbę ze zbioru $\{1, 2, \dots, p\}$, która daje tę samą resztę z dzielenia przez p co a .

Rozważmy odwzorowania

$$S : A \ni (a_1, a_2, \dots, a_p) \rightarrow (a_p, a_1, a_2, \dots, a_{p-1}) \in A,$$

$$T : A \ni (a_1, a_2, \dots, a_p) \rightarrow (\overline{a_1 + 1}, \overline{a_2 + 1}, \dots, \overline{a_p + 1}) \in A.$$

Ponieważ liczba

$$(a_1 + 1)(a_2 + 1) + (a_2 + 1)(a_3 + 1) + \dots + (a_p + 1)(a_1 + 1) - \\ - (a_1a_2 + a_2a_3 + \dots + a_pa_1) = 2(a_1 + a_2 + \dots + a_p) + p = p(p + 1) + p$$

jest podzielna przez p , mamy $\sigma \in A \iff T(\sigma) \in A \iff S(\sigma) \in A$.

Zauważmy, że dla dowolnej permutacji $\sigma = (a_1, a_2, \dots, a_p)$ spełnione są warunki

$$S^p(\sigma) := \underbrace{S(S(\dots S(\sigma)))}_{p \text{ razy}} = \sigma, \quad T^p(\sigma) := \underbrace{T(T(\dots T(\sigma)))}_{p \text{ razy}} = \sigma, \quad (6)$$

$$S(T(\sigma)) = (\overline{a_p + 1}, \overline{a_1 + 1}, \dots, \overline{a_{p-1} + 1}) = T(S(\sigma)). \quad (7)$$

Niech $\sigma \in A$, definiujemy zbiór

$$\mathcal{O}(\sigma) = \{S^i(T^j(\sigma)) \mid 1 \leq i, j \leq p\}.$$

Wykażemy, że jeżeli $\sigma, \tau \in A$, to $\mathcal{O}(\sigma) = \mathcal{O}(\tau)$ lub $\mathcal{O}(\sigma) \cap \mathcal{O}(\tau) = \emptyset$. Przypuśćmy, że $\mu \in \mathcal{O}(\sigma) \cap \mathcal{O}(\tau)$. Wówczas

$$\mu = S^a(T^b(\sigma)) \quad \text{dla pewnych } 1 \leq a, b \leq p,$$

więc

$$\mathcal{O}(\mu) = \{S^{i+a}(T^{j+b}(\sigma)) \mid 1 \leq i, j \leq p\}.$$

Z warunku (6) wynika, że dla $S^{i+a} = \overline{S^{i+a}}$ oraz $T^{j+b} = \overline{T^{j+b}}$, więc

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(\mu) &= \{S^{i+a}(T^{j+b}(\sigma)) \mid 1 \leq i, j \leq p\} = \\ &= \{\overline{S^{i+a}}(\overline{T^{j+b}}(\sigma)) \mid 1 \leq i, j \leq p\} = \\ &= \{S^i(T^j(\sigma)) \mid 1 \leq i, j \leq p\} = \mathcal{O}(\sigma). \end{aligned}$$

Analogicznie dowodzimy, że $\mathcal{O}(\mu) = \mathcal{O}(\tau)$. Ostatecznie $\mathcal{O}(\sigma) = \mathcal{O}(\tau)$. Ponieważ zbiory $\mathcal{O}(\sigma)$, $\mathcal{O}(\tau)$ są albo równe, albo rozłączne, to możemy wybrać takie $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$, że dla dowolnych $1 \leq i < j \leq k$ zachodzi $\mathcal{O}(\sigma_i) \cap \mathcal{O}(\sigma_j) = \emptyset$ oraz dla każdego $\sigma \in A$ istnieje takie $1 \leq i \leq k$, że $\mathcal{O}(\sigma_i) = \mathcal{O}(\sigma)$.

Wówczas oczywiście $A = \bigcup_{i=1}^k \mathcal{O}(\sigma_i)$.

Udowodnimy, że wśród zbiorów $\mathcal{O}(\sigma_1), \mathcal{O}(\sigma_2), \dots, \mathcal{O}(\sigma_k)$ jest dokładnie $p-1$ zbiorów p -elementowych, oraz $k - (p-1)$ zbiorów p^2 -elementowych.

Przypuśćmy, że zbiór $\mathcal{O}(\sigma)$ ma mniej niż p^2 elementów. Wówczas

$$S^{i_1}(T^{j_1}(\sigma)) = S^{i_2}(T^{j_2}(\sigma)),$$

gdzie $(i_1, j_1) \neq (i_2, j_2)$ oraz $1 \leq i_1, j_1, i_2, j_2 \leq p$. Mamy $\overline{S^{i_1-i_2}(T^{j_1-j_2}(\sigma))} = \sigma$. Oznaczmy $\sigma = (a_1, a_2, \dots, a_p)$, $i = \overline{i_1 - i_2}$ oraz $j = \overline{j_1 - j_2}$. Zmieniając ewentualnie permutację σ na jej cykliczne przesunięcie możemy założyć, że $a_1 = p$.

Po pierwsze zauważmy, że nie może zachodzić równość $i = p$. Istotnie, jeżeli $i = p$, to $T^j(\sigma) = \sigma$, więc $a_1 = \overline{a_1 + j}$, skąd $j = p$. Jednak jeżeli $i = j = p$, to $i_1 = i_2$ i $j_1 = j_2$ wbrew założeniom.

Z równości $S^i(T^j(\sigma)) = \sigma$ wynika, że

$$\overline{\overline{a_{t+i}} + j} = a_t, \quad \text{dla } t = 1, 2, \dots, p. \quad (8)$$

Ponieważ $i \neq p$, to istnieje taka liczba $1 \leq s \leq p-1$, że $si \equiv 1 \pmod{p}$. Stosując warunek (8) s -krotnie otrzymujemy, że dla $t = 1, 2, \dots, p$ zachodzi wzór

$$a_t = \overline{\overline{a_{t+si}} + sj} = \overline{a_{t+1} + sj}.$$

Oznaczmy $m = \overline{sj}$. Otrzymujemy, że $(a_1, a_2, \dots, a_p)$ jest ciągiem arytmetycznym o różnicy m , danym wzorem

$$a_t = \overline{(t-1)m}, \quad \text{dla } t = 1, 2, \dots, p. \quad (9)$$

Ponieważ

$$S(\sigma) = (\overline{(p-1)m}, \overline{pm}, \dots, \overline{(p-2)m}) = \overline{T^{(p-1)m}}(\sigma),$$

to wszystkie permutacje w zbiorze $\mathcal{O}(\sigma)$ dają się przedstawić w jednej z postaci $T(\sigma), T^2(\sigma), \dots, T^{p-1}(\sigma)$. Otrzymane w ten sposób permutacje są parami różne, a ciągi je tworzące są wszystkimi ciągami arytmetycznymi o różnicy m .

Udowodniliśmy więc, że jeżeli zbiór $\mathcal{O}(\sigma)$ ma mniej niż p^2 elementów, to ma dokładnie p elementów i składa się z ciągów arytmetycznych o pewnej ustalonej różnicy $1 \leq m \leq p-1$.

Odwrotnie, niech $1 \leq m \leq p-1$ i niech $(a_1, a_2, \dots, a_p)$ będzie permutacją zadaną wzorem (9). Sprawdźmy, że spełnia ona warunek dany w zadaniu. Mamy

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^p a_i a_{i+1} &\equiv \sum_{i=1}^p m(i-1) \cdot mi = m^2 \left(\sum_{i=1}^p i(i-1) \right) \\ &= m^2 \cdot \frac{(p-1)p(p+1)}{3} \equiv 0 \pmod{p}, \end{aligned}$$

gdzie w ostatniej kongruencji wykorzystaliśmy warunek $p > 3$.

Ostatecznie wykazaliśmy, że wśród zbiorów $\mathcal{O}(\sigma_1), \mathcal{O}(\sigma_2), \dots, \mathcal{O}(\sigma_k)$ jest $p-1$ zbiorów p -elementowych, złożonych z ciągów arytmetycznych o różnicach odpowiednio $1, 2, \dots, p-1$ oraz $k-(p-1)$ zbiorów p^2 -elementowych. Zatem

$$\begin{aligned} K+p &= |A|+p = p + \sum_{i=1}^k |\mathcal{O}(\sigma_i)| = \\ &= p + p(p-1) + p^2 \cdot (k-(p-1)) = p^2(k-(p-1)+1), \end{aligned}$$

jest liczbą podzielną przez p^2 , co należało udowodnić. □

(db,mg)



LXX Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe

zawodów stopnia pierwszego

I seria: 3 września 2018 r. — 5 października 2018 r.

1. Rozstrzygnąć, czy istnieje taka dodatnia liczba całkowita k , że w zapisie dziesiętnym liczby 2^k każda z cyfr $0, 1, \dots, 9$ występuje taką samą liczbę razy.

2. Wysokości nierównoramiennej, ostrokatnego trójkąta ABC przecinają się w punkcie H . Punkt S jest środkiem tego łuku BC okręgu opisanego na trójkącie BCH , który zawiera punkt H . Wyznaczyć miarę kąta BAC , jeśli spełniona jest równość $AH = AS$.

3. Rozstrzygnąć, czy istnieją takie parami różne liczby wymierne a, b, c , że wielomiany

$$P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \quad \text{ i } \quad Q(x) = x^3 + bx^2 + cx + a$$

mają wspólny pierwiastek niewymierny.

4. Szachownicę o wymiarach 2018×2018 przykryto przy pomocy jednej kwadratowej płytki o wymiarach 2×2 oraz $\frac{2018^2 - 4}{5}$ prostokątnych płytek o wymiarach 1×5 w taki sposób, że każde pole szachownicy jest przykryte przez dokładnie jedną płytkę (płytki można obracać). Wykazać, że płytka 2×2 nie przykrywa żadnego pola o krawędzi zawartej w brzegu szachownicy.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

5 października 2018 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane. Rozwiązanie każdego zadania należy podpisać w lewym górnym rogu pierwszej jego strony: imieniem i nazwiskiem, swoim adresem, swoim adresem elektronicznym oraz klasą, nazwą i adresem szkoły.



LXX Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia pierwszego

II seria: 6 października 2018 r. — 5 listopada 2018 r.

5. Wyznaczyć wszystkie szóstki $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ liczb rzeczywistych o następującej własności: dla $i = 1, 2, 3$ liczby a_{i+1} i b_{i+1} są różnymi pierwiastkami równania $x^2 + a_i x + b_i = 0$, przy czym przyjmujemy $a_4 = a_1$ oraz $b_4 = b_1$.

6. Sto osób usiadło w równych odstępach przy okrągłym, obrotowym stole. Każda z osób zamówiła lody, przy czym 51 osób zamówiło lody śmietankowe, a pozostałe 49 osób zamówiło lody czekoladowe. Przed każdą z osób postawiono lody o smaku niekoniecznie zgodnym z jej zamówieniem, przy czym w sumie podano 51 lodów śmietankowych oraz 49 czekoladowych. Wykazać, że stół można tak obrócić, by co najmniej 52 osoby miały przed sobą lody w zamówionym przez siebie smaku.

7. Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD . Punkty P i Q leżą odpowiednio na ramionach BC i AD , przy czym $\sphericalangle APB = \sphericalangle CPD$ oraz $\sphericalangle AQB = \sphericalangle CQD$. Udowodnić, że symetralna odcinka PQ przechodzi przez punkt przecięcia przekątnych trapezu $ABCD$.

8. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite $n \geq 1$, dla których w pola kwadratowej tablicy o wymiarach $n \times n$ można tak wpisać parami różne kwadraty liczb całkowitych, by suma liczb w każdym wierszu i w każdej kolumnie tablicy była kwadratem liczby całkowitej oraz te $2n$ sum było parami różnych.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

5 listopada 2018 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane. Rozwiązanie każdego zadania należy podpisać w lewym górnym rogu pierwszej jego strony: imieniem i nazwiskiem, swoim adresem, swoim adresem elektronicznym oraz klasą, nazwą i adresem szkoły.



LXX Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe

zawodów stopnia pierwszego

III seria: 6 listopada 2018 r. — 5 grudnia 2018 r.

9. Dany jest czworościan $ABCD$, którego wszystkie ściany są ostrokątne. Punkt X jest środkiem dłuższego łuku BC okręgu opisanego na ścianie BCD . Punkt Y jest środkiem dłuższego łuku CA okręgu opisanego na ścianie CAD . Punkt Z jest środkiem dłuższego łuku AB okręgu opisanego na ścianie ABD . Udowodnić, że punkty D, X, Y, Z leżą na jednym okręgu.

10. Dowieść, że jeśli dodatnie liczby całkowite x, y, z, t spełniają równanie

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 2018!,$$

to każda z liczb x, y, z, t jest większa od 10^{250} .

11. W turnieju badmintona wzięło udział $2n$ zawodników, gdzie $n \geq 15$ jest liczbą całkowitą. Każda para zawodników rozegrała dokładnie jeden mecz, nie było remisów. Gdy dla każdego zawodnika policzono, z iloma innymi zawodnikami wygrał, to okazało się, że żadnych pięciu zawodników nie uzyskało takiego samego wyniku. Wykazać, że zawodników można tak podzielić na grupy A i B , każdą złożoną z n zawodników, by wśród meczów pomiędzy zawodnikami z grupy A i zawodnikami z grupy B co najmniej 60% było wygranych przez zawodników z grupy A .

12. Dana jest dodatnia liczba całkowita k . Ciąg dodatnich liczb rzeczywistych $a_1, a_2, a_3, \dots$ spełnia równość

$$a_{n+1} = a_n + \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \quad \text{dla wszystkich } n \geq k.$$

Wykazać, że istnieje taka dodatnia liczba całkowita N , że

$$N^k \leq a_N \leq \left(1 + \frac{1}{k}\right)^N.$$

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

5 grudnia 2018 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane. Rozwiązanie każdego zadania należy podpisać w lewym górnym rogu pierwszej jego strony: imieniem i nazwiskiem, swoim adresem, swoim adresem elektronicznym oraz klasą, nazwą i adresem szkoły.

Adresy Komitetów Okręgowych Olimpiady Matematycznej

- Dla województwa pomorskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Gdańskiego, ul. Wita Stwosza 57, 80-952 Gdańsk.
- Dla województwa śląskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Śląskiego, ul. Bankowa 14, 40-007 Katowice.
- Dla województwa małopolskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego, ul. Łojasiewicza 6, 30-348 Kraków.
- Dla województwa lubelskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Zakład Rachunku Prawdopodobieństwa pok. 810, Instytut Matematyki Uniwersytetu Marii Curie-Skłodowskiej, pl. Marii Curie-Skłodowskiej 1, 20-031 Lublin.
- Dla województwa łódzkiego i świętokrzyskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Łódzkiego, ul. Banacha 22, 90-238 Łódź.
- Dla województwa wielkopolskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Adama Mickiewicza, ul. Umultowska 87, 61-614 Poznań.
- Dla województwa podkarpackiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyczno-Przyrodniczy Uniwersytetu Rzeszowskiego, ul. Pigonia 1, 35-959 Rzeszów
- Dla województwa lubuskiego i zachodniopomorskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Szczecińskiego, ul. Wielkopolska 15, 70-451 Szczecin.
- Dla województwa kujawsko-pomorskiego i warmińsko-mazurskiego: — Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, ul. Chopina 12/18, 87-100 Toruń.
- Dla województwa mazowieckiego i podlaskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, ul. Śniadeckich 8, 00-656 Warszawa.
- Dla województwa dolnośląskiego i opolskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego, pl. Grunwaldzki 2/4, 50-384 Wrocław.

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w Internecie pod adresem: www.om.edu.pl



LXX Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych
zawodów stopnia pierwszego

3 września – 5 października 2018 r. (pierwsza seria)

1. Rozstrzygnąć, czy istnieje taka dodatnia liczba całkowita k , że w zapisie dziesiętnym liczby 2^k każda z cyfr $0, 1, 2, \dots, 9$ występuje taką samą liczbę razy.

Autor zadania: Michał Pilipczuk

Rozwiązanie:

Odpowiedź: Taka liczba **nie** istnieje.

Założmy, że taka liczba całkowita k istnieje i niech ℓ będzie liczbą wystąpień każdej z cyfr $0, 1, \dots, 9$ w zapisie dziesiętnym liczby 2^k . Wówczas suma cyfr liczby 2^k jest równa

$$\ell(0 + 1 + 2 + \dots + 9) = 45\ell,$$

czyli jest liczbą podzielną przez 3. Jednakże z cechy podzielności liczby przez 3 wynika, że 2^k jest również podzielna przez 3 – sprzeczność. $\square$

2. Wysokości nierównoramiennego, ostrokątnego trójkąta ABC przecinają się w punkcie H . Punkt S jest środkiem tego łuku BC okręgu opisanego na trójkącie BCH , który zawiera punkt H . Wyznaczyć miarę kąta BAC , jeśli spełniona jest równość $AH = AS$.

Autor zadania: Dominik Burek

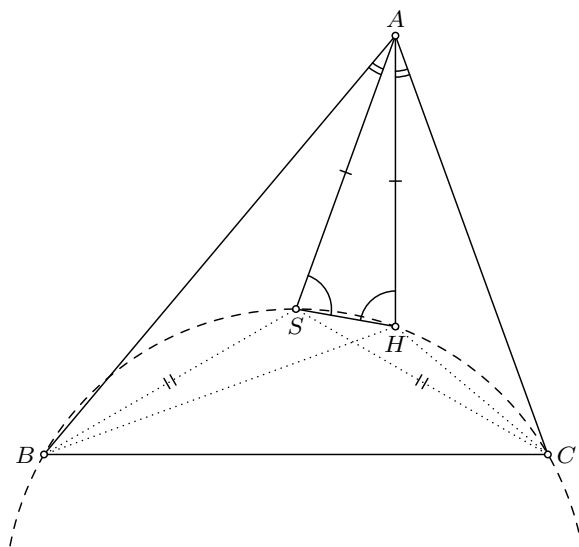
Rozwiązanie:

Odpowiedź: Szukana miara kąta wynosi 60° .

Bez szkody dla ogólności założmy, że $AB > AC$. Oznaczmy przez α , β i γ miary kątów wewnętrznych trójkąta przy wierzchołkach odpowiednio A , B i C . Ponieważ H to ortocentrum trójkąta ABC , to

$$\sphericalangle CHA = 180^\circ - (90^\circ - \gamma + 90^\circ - \alpha) = \gamma + \alpha = 180^\circ - \beta. \quad (1)$$

Punkty B , S , H i C leżą na jednym okręgu, stąd



rys. 1

$$\sphericalangle BSC = \sphericalangle BHC = 180^\circ - \alpha,$$

gdzie w ostatniej równości wykorzystujemy analogiczną równość jak w (1). Ponadto $BS = SC$, więc $\sphericalangle CBS = \sphericalangle SCB = \frac{1}{2}\alpha$. Ponownie wykorzystując fakt, iż na czworokącie $BSHC$ można opisać okrąg dostajemy, że $\sphericalangle SHC = 180^\circ - \frac{1}{2}\alpha$. Zatem

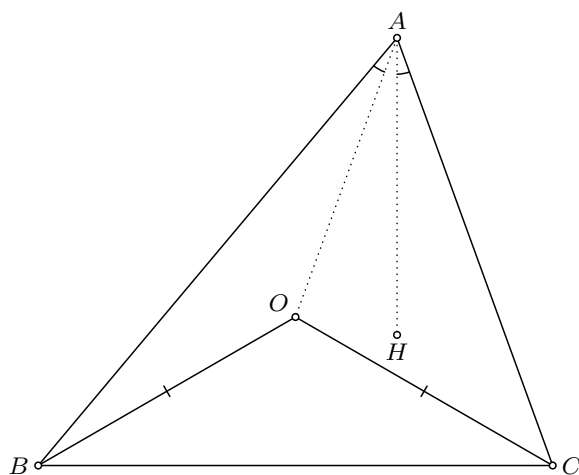
$$\sphericalangle HSA = \sphericalangle AHS = 360^\circ - \sphericalangle CHA - \sphericalangle SHC = 360^\circ - (180^\circ - \beta) - \left(180^\circ - \frac{1}{2}\alpha\right) = \beta + \frac{1}{2}\alpha.$$

W czworokącie $BSHC$, wpisanym w okrąg, zachodzi równość $\sphericalangle CSH = \sphericalangle CBH = 90^\circ - \gamma$. Oczywiście $\sphericalangle BSC = 180^\circ - \alpha$, więc

$$\begin{aligned}\sphericalangle ASB &= 360^\circ - (\sphericalangle BSC + \sphericalangle CSH + \sphericalangle HSA) = \\ &= 360^\circ - \left(180^\circ - \alpha + 90^\circ - \gamma + \beta + \frac{1}{2}\alpha\right) = 90^\circ + \frac{1}{2}\alpha + \gamma - \beta.\end{aligned}$$

Wobec tego

$$\begin{aligned}\sphericalangle BAS &= 180^\circ - \sphericalangle ASB - \sphericalangle SBA = \\ &= 180^\circ - \left(90^\circ + \frac{1}{2}\alpha + \gamma - \beta\right) - \left(\beta - \frac{1}{2}\alpha\right) = 90^\circ - \gamma = \sphericalangle HAC.\end{aligned}\quad (2)$$



rys. 2

Niech O będzie środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC . Wówczas $OB = OC$ oraz

$$\sphericalangle BAO = \frac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle AOB) = \frac{1}{2}(180^\circ - 2\gamma) = 90^\circ - \gamma = \sphericalangle HAC.$$

Skoro $SB = SC$ oraz zachodzi równość (2), to $S = O$. W szczególności $2\alpha = \sphericalangle BSC = 180^\circ - \alpha$, więc $\alpha = 60^\circ$. $\square$

3. Rozstrzygnąć, czy istnieją parami różne liczby wymierne a, b, c , że wielomiany

$$P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \quad \text{ i } \quad Q(x) = x^3 + bx^2 + cx + a$$

mają wspólny pierwiastek niewymierny.

Autor zadania: Andrzej Fryszkowski

Rozwiązanie:

Odpowiedź: Takie liczby **nie** istnieją.

Jeżeli x jest wspólnym pierwiastkiem wielomianów P i Q , to jest również pierwiastkiem wielomianu

$$P(x) - Q(x) = (a - b)x^2 + (b - c)x + (c - a) = (a - b)(x - 1) \left(x - \frac{c - a}{a - b}\right).$$

Oznacza to, że $x = 1$ lub $x = \frac{c-a}{a-b}$. Ponieważ liczby a, b, c są wymierne, to obie te liczby są wymierne, więc liczby wymierne a, b, c o szukanej własności nie istnieją. $\square$

4. Szachownicę o wymiarach 2018×2018 przykryto przy pomocy jednej kwadratowej płytki o wymiarach 2×2 oraz $\frac{2018^2-4}{5}$ prostokątnych płytek o wymiarach 1×5 w taki sposób, że każde pole szachownicy jest przykryte przez dokładnie jedną płytkę (płytki można obracać). Wykazać, że płytka 2×2 nie przykrywa żadnego pola o krawędzi zawartej w brzegu szachownicy.

Autor zadania: Michał Pilipczuk

Rozwiązanie:

Zauważmy, że ze względu na symetrię wystarczy udowodnić, że płytka 2×2 nie może zakrywać pól z pierwszych dwóch wierszy szachownicy, których pewna krawędź jest zawarta w brzegu szachownicy.

W każde pole szachownicy wpisujemy numer jego wiersza. Reszta z dzielenia przez 5 sumy wpisanych liczb wynosi

$$S = 2018 \cdot (1 + 2 + \dots + 2018) \equiv 3 \cdot (1 + 2 + 3) \equiv 3 \pmod{5}.$$

1	1	1	1	1	1	1	...	1
2	2	2	2	2	2	2	...	2
3	3	3	3	3	3	3	...	3
4	4	4	4	4	4	4	...	4
5	5	5	5	5	5	5	...	5
6	6	6	6	6	6	6	...	6
7	7	7	7	7	7	7	...	7
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2018	2018	2018	2018	2018	2018	2018	...	2018

rys. 3

Jeżeli płytka o wymiarach 2×2 leży w pierwszym i drugim wierszu szachownicy, to suma przykrytych przez nią pól wynosi $K = 2 \cdot (1 + 2) = 6$. Każda płytka 1×5 przykrywa albo pięć takich samych liczb albo pięć kolejnych liczb, zatem suma liczb przykrytych przez taką płytkę jest podzielna przez 5. Ponieważ $S \not\equiv K \pmod{5}$, to nie jest możliwe aby cała szachownica była pokryta. $\square$

5. Znaleźć wszystkie szóstki $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ liczb rzeczywistych o następującej własności: dla $i = 1, 2, 3$ liczby a_{i+1} i b_{i+1} są różnymi pierwiastkami równania $x^2 + a_i x + b_i = 0$, przy czym przyjmujemy $a_4 = a_1$ oraz $b_4 = b_1$.

Autor zadania: Marcin Kuczma

Rozwiązanie:

Korzystając ze wzorów Viète'a warunki dane w zadaniu można zapisać jako układ równań

$$\begin{cases} a_1 + b_1 = -a_3 \\ a_2 + b_2 = -a_1 \\ a_3 + b_3 = -a_2 \\ a_1 b_1 = b_3 \\ a_2 b_2 = b_1 \\ a_3 b_3 = b_2 \end{cases}$$

Przypuśćmy, że któraś z liczb b_1, b_2, b_3 jest równa 0. Bez straty ogólności niech $b_1 = 0$. Wówczas korzystając z czwartego równania dostajemy $b_3 = 0$, a następnie z szóstego równania $b_2 = 0$. Pierwsze trzy równania przyjmują postać

$$\begin{cases} a_1 = -a_3 \\ a_2 = -a_1 \\ a_3 = -a_2 \end{cases}$$

więc $a_1 = -a_3 = -(-a_2) = -(-(-a_1)) = -a_1$, czyli $a_1 = 0$. Oznacza to, że w tym przypadku liczby a_1, b_1 nie są różne co przeczy założeniu zadania.

Dalej, możemy założyć, że $b_1 b_2 b_3 \neq 0$. Mnożąc stronami trzy ostatnie równania dostajemy

$$a_1 a_2 a_3 b_1 b_2 b_3 = b_1 b_2 b_3,$$

więc $a_1 a_2 a_3 = 1$. Pierwsze trzy równania zapisujemy jako

$$\begin{cases} b_1 = -a_1 - a_3 \\ b_2 = -a_2 - a_1 \\ b_3 = -a_3 - a_2 \end{cases}$$

Wyliczone wartości b_1, b_2, b_3 podstawiamy do trzech ostatnich równań i otrzymujemy

$$\begin{cases} a_1(a_1 + a_3) = a_2 + a_3 \\ a_2(a_2 + a_1) = a_3 + a_1 \\ a_3(a_3 + a_2) = a_1 + a_2 \end{cases}$$

Ponieważ $a_1 a_2 a_3 = 1$, to mamy dwa przypadki: albo wszystkie liczby a_1, a_2, a_3 są dodatnie, albo jedna liczba spośród a_1, a_2, a_3 jest dodatnia a pozostałe są ujemne.

Przypuśćmy, że liczby a_1, a_2, a_3 są dodatnie. Bez straty ogólności, niech $a_1 = \max\{a_1, a_2, a_3\}$. Mamy $1 = a_1 a_2 a_3 \leq a_1^3$, więc $1 \leq a_1$. Zatem

$$a_2 + a_3 = a_1(a_1 + a_3) \geq a_1 + a_3,$$

czyli $a_2 \geq a_1 \geq 1$. Podobnie wykazujemy, że $a_3 \geq a_2 \geq a_1$. Z założenia $a_1 = \max\{a_1, a_2, a_3\}$ otrzymujemy $a_1 = a_2 = a_3$, a skoro $a_1 a_2 a_3 = 1$, to $a_1 = a_2 = a_3 = 1$. Podstawiając, te wartości do pierwszych trzech równań wyjściowego układu dostajemy $b_1 = b_2 = b_3 = -2$. Ostatecznie rozwiązaniem jest szóstka $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3) = (1, 1, 1, -2, -2, -2)$.

Rozważmy teraz przypadek, w którym jedna liczba spośród a_1, a_2, a_3 jest dodatnia a pozostałe ujemne. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $a_1 > 0$ oraz $a_2, a_3 < 0$. Ponieważ $a_2, a_3 < 0$, to $0 > (a_2 + a_3) = a_1(a_1 + a_3)$, więc $a_1 + a_3 < 0$. Podobnie ponieważ $a_3, a_2 + a_3 < 0$, to $0 < a_3(a_2 + a_3) = a_1 + a_2$. Oznacza to, że

$$|a_3| = -a_3 > a_1 = |a_1| > -a_2 = |a_2|.$$

Mamy $1 = a_1 a_2 a_3 = |a_1 a_2 a_3| = |a_1| |a_2| |a_3| \leq |a_3|^3$, więc $|a_3| \geq 1$. Ponieważ $a_3(a_3 + a_2) = a_1 + a_2$, to

$$|a_1| > |a_1| - |a_2| = a_1 + a_2 = |a_1 + a_2| = |a_3(a_3 + a_2)| = |a_3| |a_3 + a_2| \geq |a_3 + a_2| = |a_3| + |a_2| > |a_3|.$$

Jest to sprzeczne z nierównością $|a_3| > |a_1|$, więc w tym przypadku nie ma rozwiązań.

Ostatecznie jedynym rozwiązaniem $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3)$ spełniającym warunki zadania jest szóstka $(1, 1, 1, -2, -2, -2)$. $\square$

6. Sto osób usiadło w równych odstępach przy okrągłym, obrotowym stole. Każda z osób zamówiła lody, przy czym 51 osób zamówiło lody śmietankowe, a pozostałe 49 osób zamówiło lody czekoladowe. Przed każdą z osób postawiono lody o smaku niekoniecznie zgodnym z jej zamówieniem, przy czym w sumie podano 51 lodów śmietankowych oraz 49 czekoladowych. Wykazać, że stół można tak obrócić, by co najmniej 52 osoby miały przed sobą lody w zamówionym przez siebie smaku

Zadanie zaproponował: Marcin Kuczma

Rozwiązanie:

Dla każdego ze 100 możliwych obrotów stołu niech odpowiednio $s_1, s_2, \dots, s_{100}$ oznacza liczbę lodów śmietankowych, które zostałyby prawidłowo dostarczone, gdyby wykonać dany obrót. Ponieważ każda porcja lodów śmietankowych jest prawidłowo dostarczona przy 51 różnych obrotach, to

$$s_1 + s_2 + \dots + s_{100} = 51 \cdot 51 = 2601.$$

Niech $s = \max\{s_1, s_2, \dots, s_{100}\}$. Mamy

$$100 \cdot s \geq s_1 + s_2 + \dots + s_{100} = 2601,$$

więc $s \geq 26,01$. Ponieważ s jest liczbą całkowitą, to $s \geq 27$. Zauważmy, że jeżeli s porcji lodów śmietankowych jest prawidłowo dostarczonych, to $51 - s$ lodów śmietankowych jest dostarczonych nieprawidłowo, więc $49 - (51 - s) = s - 2$ miłośników lodów czekoladowych otrzymało zamówione lody. Oznacza to, że w tym przypadku

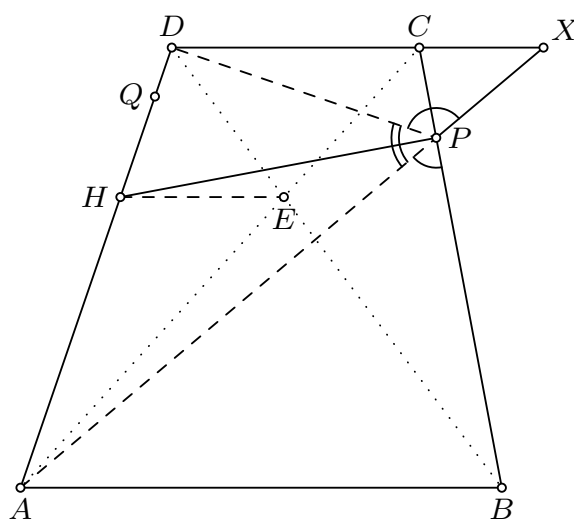
$$s + (s - 2) = 2s - 2 \geq 2 \cdot 27 - 2 = 52$$

osób otrzyma lody, które zamówiło. Co było do udowodnienia. $\square$

7. Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD . Punkty P i Q leżą na ramionach BC i AD , przy czym $\sphericalangle APB = \sphericalangle CPD$ oraz $\sphericalangle AQB = \sphericalangle CQD$. Udowodnić, że symetralna odcinka PQ przechodzi przez punkt przecięcia przekątnych trapezu $ABCD$.

Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie:



rys. 4

Niech H będzie punktem przecięcia dwusiecznej kąta DPA z ramieniem AD . Ponadto oznaczmy przez E i X punkty odpowiednio przecięcia DC i AP oraz przekątnych w trapezie $ABCD$ (rys. 1).

Na podstawie twierdzenia o dwusiecznej w trójkątach DPA i XPB zachodzą równości

$$\frac{DH}{HA} = \frac{DP}{PA} \quad \text{oraz} \quad \frac{DP}{PX} = \frac{DC}{CX}.$$

Ponadto z podobieństwa trójkątów CXP oraz PBA widzimy, że $\frac{PA}{PX} = \frac{AB}{CX}$. Łącząc te trzy równości dostajemy

$$\frac{DH}{HA} = \frac{DP}{PA} = \frac{\frac{DC}{CX} \cdot PX}{\frac{AB}{CX} \cdot PX} = \frac{DC}{AB} = \frac{DE}{EB}, \quad (3)$$

gdzie w ostatnim kroku wykorzystaliśmy podobieństwo trójkątów EBA i DCE .

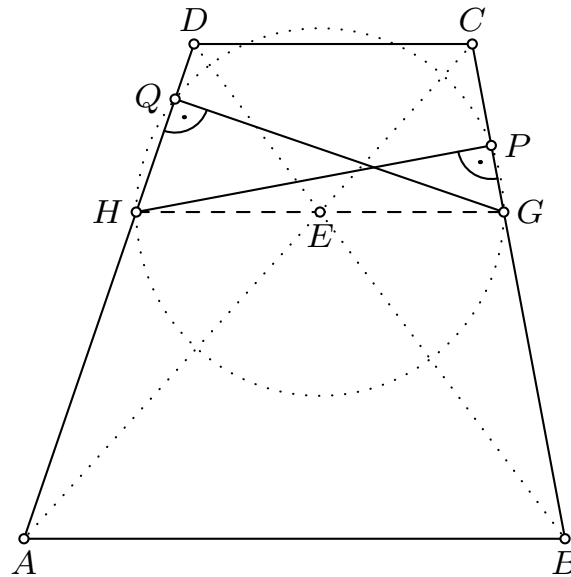
Równość (3) oznacza, że $HE \parallel DC$. Podobnie, gdy przez G oznaczmy punkt przecięcia dwusiecznej kąta BQC z ramieniem BC , to $EG \parallel DC$, więc punkty H , E i G leżą na jednej prostej równoległej do podstaw trapezu.

Korzystając z podobieństwa odpowiednich trójkątów HDE , ADB , ECG i ACB mamy

$$\frac{HE}{AB} = \frac{DE}{DB} = \frac{CE}{CA} = \frac{EG}{AB},$$

skąd $HE = EG$. Zauważmy ponadto, że $\sphericalangle HPB = 90^\circ$, gdyż proste HP i BC są dwusiecznymi kąta wewnętrznego i zewnętrznego DPA . Analogicznie $\sphericalangle HQG = 90^\circ$.

Łącząc uzyskane fakty widzimy, że na czworokącie $HQPG$ można opisać okrąg, którego środkiem jest punkt E . W szczególności symetralna PQ przechodzi przez punkt E , skąd teza. $\square$



rys. 5

8. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite $n \geq 1$, dla których w pola kwadratowej tablicy o wymiarach $n \times n$ można tak wpisać parami różne kwadraty liczb całkowitych, by suma liczb w każdym wierszu i w każdej kolumnie tablicy była kwadratem liczby całkowitej oraz te $2n$ sum było parami różnych.

Autorzy zadania: Dominik Burek i Tomasz Cieśla

Rozwiązanie:

Odpowiedź: Wszystkie $n \geq 2$.

Oczywiście dla $n = 1$ sumy w jedynym wierszu i w jedynej kolumnie są takie same. Wykażemy natomiast, że dla każdego $n \geq 2$ można wpisać liczby w tablicę o wymiarach $n \times n$ tak, aby spełnić zadane warunki.

Definiujemy następujące liczby naturalne

$$a_1 = 3^{n-1}, \quad a_2 = 4 \cdot 3^{n-2}, \quad a_3 = 4 \cdot 3^{n-3} \cdot 5, \quad \dots, \quad a_i = 4 \cdot 3^{n-i} \cdot 5^{i-2}, \quad \dots, \quad a_n = 4 \cdot 3^0 \cdot 5^{n-2}.$$

Wtedy dla dowolnego $2 \leq k \leq n$ zachodzi równość

$$a_1^2 + \dots + a_k^2 = 3^{2(n-k)} \cdot 5^{2(k-1)}. \quad (4)$$

Istotnie, wykażemy ją wykorzystując indukcję matematyczną. Dla $k = 2$ jest ona spełniona, gdyż

$$a_1^2 + a_2^2 = 3^{2(n-1)} + 4^2 \cdot 3^{2(n-2)} = 3^{2(n-2)} (4^2 + 3^2) = 3^{2(n-2)} \cdot 5^{2(2-1)}.$$

Dalej zakładając równość (4) dla liczby naturalnej k chcemy ją udowodnić dla $k + 1$. Mamy

$$\begin{aligned} a_1^2 + \dots + a_{k+1}^2 &= a_1^2 + \dots + a_k^2 + \left(4 \cdot 3^{n-(k+1)} \cdot 5^{(k+1)-2}\right)^2 = \\ &= 3^{2(n-k)} \cdot 5^{2(k-1)} + 4^2 \cdot 3^{2(n-k)-2} \cdot 5^{2(k-1)} = \\ &= 3^{2(n-k)-2} \cdot 5^{2(k-1)} \cdot (3^2 + 4^2) = 3^{2(n-(k+1))} \cdot 5^{2(k+1-1)}. \end{aligned}$$

Wykorzystując teraz trójkę Pitagorejską (7, 24, 25) definiujemy w analogiczny sposób liczby

$$b_1 = 7^{n-1}, \quad b_2 = 24 \cdot 7^{n-2}, \quad b_3 = 24 \cdot 7^{n-3} \cdot 25, \quad \dots, \quad b_i = 24 \cdot 7^{n-i} \cdot 25^{i-2}, \quad \dots, \quad b_n = 24 \cdot 7^0 \cdot 25^{n-2},$$

dla których podobnie jak wyżej

$$b_1^2 + \dots + b_k^2 = 7^{2(n-k)} \cdot 25^{2(k-1)} \quad \text{dla } 2 \leq k \leq n. \quad (5)$$

Wpiszmy w i -tym wierszu oraz j -tej kolumnie liczbę $(a_i b_j)^2 = a_i^2 b_j^2$. Wtedy suma s_i liczb w i -tym wierszu jest równa

$$s_i = \sum_{j=1}^n a_i^2 b_j^2 = a_i^2 \sum_{j=1}^n b_j^2 = \left(a_i \cdot 25^{n-1}\right)^2,$$

czyli jest kwadratem liczby całkowitej. Podobnie suma t_j liczb w j -tej kolumnie wynosi

$$t_j = \sum_{i=1}^n a_i^2 b_j^2 = b_j^2 \sum_{i=1}^n a_i^2 = \left(b_j \cdot 5^{n-1}\right)^2.$$

Widzimy zatem, że $s_i < s_j$ oraz $t_i < t_j$, gdyż $a_i < a_j$ i $b_i < b_j$ dla $i < j$. Ponadto $s_i \neq t_j$ dla $0 \leq i \leq n$ oraz $j < n$, gdyż wówczas s_i i t_n różnią się liczbą siódemek w rozkładzie na czynniki pierwsze. Podobnie $s_i \neq t_n$ dla $0 \leq i \leq n$, gdyż tym razem mamy różną liczbę dwójek w rozkładzie na czynniki pierwsze.

Ostatecznie $s_i \neq t_j$ dla dowolnych i, j , więc powyższa konstrukcja spełnia warunki zadania. $\square$

9. Dany jest czworościan $ABCD$, którego wszystkie ściany są ostrokątne. Punkt X jest środkiem dłuższego łuku BC okręgu opisanego na ścianie BCD . Punkt Y jest środkiem dłuższego łuku CA okręgu opisanego na ścianie CAD . Punkt Z jest środkiem dłuższego łuku AB okręgu opisanego na ścianie ABD . Udowodnić, że punkty D, X, Y, Z leżą na jednym okręgu.

Autor zadania: Tomasz Przybyłowski

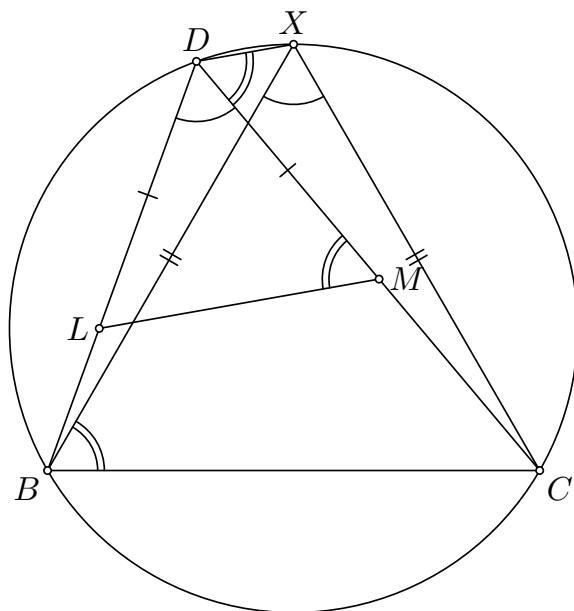
Rozwiązanie:

Niech K, L i M będą punktami leżącymi na odcinkach DA, DB i DC odpowiednio tak, że

$$DK = DL = DM.$$

Weźmy pod uwagę ścianę BDC (rys. 6). Trójkąty LDM i BXC są równoramienne oraz $\sphericalangle BDC = \sphericalangle BXC$, gdyż są kąty wpisane oparte na łuku krótszym BC , więc są podobne. W szczególności $\sphericalangle DML = \sphericalangle CBX$. Jednakże $\sphericalangle CBX = \sphericalangle CDX$, gdyż punkty B, D, X, C leżą na jednym okręgu. Wobec tego $\sphericalangle DML = \sphericalangle CDX$, czyli $LM \parallel DX$.

Podobnie $DY \parallel MK$ oraz $DZ \parallel KL$. Niech teraz Π będzie płaszczyzną równoległą do płaszczyzny KLM przechodzącą przez punkt D . Z równoległości $DX \parallel LM$ wynika, że prosta DX jest zawarta w płaszczyźnie Π , skąd w szczególności $X \in \Pi$. Analogicznie $Y, Z \in \Pi$, więc punkty X, Y, Z i D leżą na jednej płaszczyźnie.



rys. 6

Jako, że punkty D , X , Y i Z leżą na sferze opisanej na czworościanie $ABCD$, to leżą na przecięciu płaszczyzny Π z tą sferą. Stąd punkty D , X , Y i Z leżą na jednym okręgu, co było do pokazania. $\square$

10. Dowieść, że jeśli dodatnie liczby całkowite x, y, z, t spełniają równanie

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 2018!,$$

to każda z liczb x, y, z, t jest większa od 10^{250} .

Autor zadania: Mariusz Skałba

Rozwiązanie:

Zauważmy, że kwadrat liczby parzystej daje resztę 0 lub 4 z dzielenia przez 8, podczas gdy kwadrat liczby nieparzystej daje resztę 1. Ponieważ 8 dzieli $2018!$, to liczby x, y, z i t muszą być parzyste. Istotnie, liczba nieparzystych liczb musi być oczywiście parzysta. W przypadku dwóch nieparzystych, suma czterech kwadratów daje resztę 2 lub 6 przy dzieleniu przez 8. Natomiast, gdy wszystkie liczby są nieparzyste, to łącznie ich kwadraty dają resztę 4 z dzielenia przez 8.

Wobec powyższego możemy zapisać $x = 2x_1$, $y = 2y_1$, $z = 2z_1$ i $t = 2t_1$ dla pewnych liczb całkowitych x_1, y_1, z_1 i t_1 . Wstawiając uzyskane wzory do wyjściowego równania dostajemy, że

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + t_1^2 = \frac{2018!}{4},$$

czyli równanie analogiczne do wyjściowego.

Zauważmy teraz, że $2^{2000} \mid 2018!$, gdyż na podstawie wzoru Legendre'a

$$v_2(2018!) = \left\lfloor \frac{2018}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2018}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2018}{8} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{2018}{2^i} \right\rfloor + \dots > 2000,$$

gdzie dla liczby całkowitej n , symbolem $v_2(n)$ oznaczamy największą liczbę całkowitą dodatnią k , że $2^k \mid n$.

Postępując analogicznie 900 razy (możemy, gdyż $2000 > 2 \cdot 900$) jak w pierwszych dwóch akapitach dostajemy, że liczby x, y, z i t są podzielne przez 2^{900} . Pozostaje zauważyć, że

$$2^{900} = (2^{10})^{90} > (10^3)^{90} = 10^{270} > 10^{250},$$

więc każda z liczb x, y, z i t jest większa od 10^{250} . $\square$

11. W turnieju badmintona wzięło udział $2n$ zawodników, gdzie $n \geq 15$ jest liczbą całkowitą. Każda para zawodników rozegrała dokładnie jeden mecz, nie było remisów. Gdy dla każdego zawodnika policzono,

z iloma innymi zawodnikami wygrał, to okazało się, że żadnych pięciu zawodników nie uzyskało takiego samego wyniku. Wykazać, że zawodników można tak podzielić na grupy A i B , każdą złożoną z n zawodników, by wśród meczów pomiędzy zawodnikami z grupy A i zawodnikami z grupy B co najmniej 60% było wygranych przez zawodników z grupy A .

Autor zadania: Michał Pilipczuk

Rozwiązanie:

Niech $a_1, a_2, \dots, a_{2n}$ będą liczbami gier, które wygrał odpowiednio pierwszy, drugi, $\dots$, $2n$ -ty zawodnik. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że

$$a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_{2n}.$$

Udowodnimy, że przy tych oznaczeniach podział $A = \{1, 2, \dots, n\}$, $B = \{n+1, n+2, \dots, 2n\}$ spełnia warunki zadania. Ponieważ każda para zawodników rozegrała dokładnie jeden mecz, to

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{2n} = \binom{2n}{2} = n(2n-1). \quad (6)$$

Zawodnicy z grupy A wygrali w sumie $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ gier, z czego $\binom{n}{2}$ w meczach rozegranych między sobą. Oznacza to, że zawodnicy z grupy A wygrali

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n) - \binom{n}{2}$$

meczów z zawodnikami z grupy B . Pozostaje wykazać, że

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n) - \binom{n}{2} \geq 60\% \cdot n^2 = \frac{3}{5}n^2.$$

Zauważmy, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej k spełniającej warunek $k+4 \leq 2n$ zachodzi nierówność

$$a_k > a_{k+4}. \quad (7)$$

Istotnie, gdyby $a_{k+4} \geq a_k$, to z ciągu nierówności

$$a_k \geq a_{k+1} \geq a_{k+2} \geq a_{k+3} \geq a_{k+4} \geq a_k,$$

dostajemy, że $a_k = a_{k+1} = a_{k+2} = a_{k+3} = a_{k+4}$. Oznacza to, że pięciu zawodników uzyskało taki sam wynik, co przeczy założeniu zadania. Ponieważ liczby a_k, a_{k+4} są całkowite, to nierówność $a_k > a_{k+4}$ jest równoważna $a_k \geq 1 + a_{k+4}$.

Udowodnimy, teraz że dla dowolnego $i = 1, 2, \dots, n$ zachodzi nierówność

$$a_i \geq \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + a_{n+i}.$$

Istotnie, korzystając wielokrotnie z nierówności (7) dostajemy, że

$$a_i \geq 1 + a_{i+4} \geq 2 + a_{i+4+2} \geq \dots \geq \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + a_{i+4 \cdot \lfloor \frac{n}{4} \rfloor} \geq \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + a_{i+n}.$$

Sumując uzyskane nierówności dla $i = 1, 2, \dots, n$ stronami uzyskujemy, że

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{2n}. \quad (8)$$

Wróćmy do rozwiązania zadania. Korzystając z równości (6) i nierówności (8) dostajemy, że

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{2n} = n \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + n(2n-1) - (a_1 + a_2 + \dots + a_n),$$

więc

$$2(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \geq n \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + n(2n-1).$$

Wystarczy udowodnić, że

$$n \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + n(2n-1) \geq 2 \cdot \left(\frac{3}{5}n^2 + \binom{n}{2} \right).$$

Po redukcji wyrazów podobnych pozostaje wykazać, że

$$n \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor \geq \frac{1}{5}n^2,$$

czyli $\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor \geq \frac{1}{5}n$. Korzystając z $n \geq 15$ dostajemy, że

$$\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor - \frac{1}{5}n \geq \frac{n-3}{4} - \frac{1}{5}n = \frac{1}{20}(5n-15-4n) = \frac{(n-15)}{20} \geq 0.$$

W konsekwencji teza zadania jest spełniona. □

12. Dana jest dodatnia liczba całkowita k . Ciąg dodatnich liczb rzeczywistych $a_1, a_2, a_3, \dots$ spełnia równość

$$a_{n+1} = a_n + \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \quad \text{dla wszystkich } n \geq k.$$

Wykazać, że istnieje taka dodatnia liczba całkowita N , że

$$N^k \leq a_N \leq \left(1 + \frac{1}{k}\right)^N.$$

Autor zadania: Michał Pilipczuk

Rozwiązanie:

Udowodnimy, że podane nierówności spełnione są dla dostatecznie dużych N . Zajmijmy się najpierw prawą nierównością. Wybierzmy dowolną liczbę rzeczywistą $1 < \alpha < 1 + \frac{1}{k}$. Niech

$$M = \max \left\{ k, \left\lceil \frac{\alpha}{(\alpha-1)^2} \right\rceil \right\}.$$

Wybierzmy taką liczbę rzeczywistą C , aby dla $n = 1, 2, \dots, M$ spełniona była nierówność

$$a_n \leq C\alpha^n.$$

Taka liczba rzeczywista oczywiście istnieje, wystarczy przyjąć $C = \max_{n=1,2,\dots,M} \frac{a_n}{\alpha^n}$. Udowodnijmy przez indukcję, że dla dowolnego n zachodzi nierówność $a_n \leq C\alpha^n$. Z doboru C wynika, że jest to prawda dla $n = 1, 2, \dots, M$. Przejdźmy do dowodu kroku indukcyjnego. Niech $n \geq M$, mamy

$$a_{n+1} = a_n + \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \leq C \left(\alpha^n + \frac{\alpha^1 + \alpha^2 + \dots + \alpha^n}{n} \right).$$

Wystarczy więc udowodnić, że

$$\alpha^n + \frac{\alpha^1 + \alpha^2 + \dots + \alpha^n}{n} \leq \alpha^{n+1},$$

lub równoważnie

$$\alpha^1 + \alpha^2 + \dots + \alpha^n \leq n\alpha^n(\alpha-1) \iff \alpha(\alpha^n-1) \leq n\alpha^n(\alpha-1)^2.$$

Ponieważ

$$n(\alpha-1)^2 \geq M(\alpha-1)^2 \geq \alpha,$$

to

$$n\alpha^n(\alpha-1)^2 \geq \alpha^{n+1} > \alpha^{n+1} - \alpha = \alpha(\alpha^n-1),$$

co kończy dowód kroku indukcyjnego. Oznacza to, że dla dowolnego n mamy $a_n \leq C\alpha^n$. Ponieważ $\alpha < 1 + \frac{1}{k}$, to dla dostatecznie dużych n zachodzi nierówność

$$a_n \leq C\alpha^n \leq \left(1 + \frac{1}{k}\right)^n.$$

Dowód lewej nierówności przebiega analogicznie. Niech $M = \max \left\{ k, \left\lceil \left(\sqrt[k+1]{1 + \frac{1}{2^{k+3}}} - 1 \right)^{-1} \right\rceil \right\}$. Niech C będzie taką liczbą rzeczywistą, że dla $n = 1, 2, \dots, M$ spełniona jest nierówność

$$a_n \geq Cn^{k+1}.$$

Udowodnijmy przez indukcję, że dla dowolnego n zachodzi nierówność

$$a_n \geq Cn^{k+1}.$$

Z doboru C wynika, że jest to prawda dla $n = 1, 2, \dots, M$. Przejdźmy do dowodu kroku indukcyjnego. Niech $n \geq M$, mamy

$$a_{n+1} = a_n + \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq C \left(n^{k+1} + \frac{1^{k+1} + 2^{k+1} + \dots + n^{k+1}}{n} \right).$$

Wystarczy więc udowodnić, że

$$n^{k+1} + \frac{1^{k+1} + 2^{k+1} + \dots + n^{k+1}}{n} \geq (n+1)^{k+1}.$$

Zauważmy, że

$$1^{k+1} + 2^{k+1} + \dots + n^{k+1} > \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor^{k+1} + \dots + n^{k+1} \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \cdot \frac{n^{k+1}}{2^{k+1}} \geq \frac{n^{k+2}}{2^{k+3}},$$

wiec

$$n^{k+1} + \frac{1^{k+1} + 2^{k+1} + \dots + n^{k+1}}{n} \geq n^{k+1} \left(1 + \frac{1}{2^{k+3}} \right).$$

Wystarczy udowodnić, że

$$(n+1)^{k+1} \leq n^{k+1} \left(1 + \frac{1}{2^{k+3}} \right)$$

lub równoważnie

$$\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{k+1} \leq \left(1 + \frac{1}{2^{k+3}} \right) \iff n \geq \left(\sqrt[k+1]{1 + \frac{1}{2^{k+3}}} - 1 \right)^{-1},$$

co jest prawdą, gdyż $n \geq M$. Oznacza to, że dla dowolnego n mamy $a_n \geq Cn^{k+1}$, więc dla dostatecznie dużych n zachodzi nierówność

$$a_n \geq Cn^{k+1} \geq n^k.$$

□

(db,mg)

LXX Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe

zawodów stopnia drugiego

8 lutego 2019 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Punkty K_1, K_2 leżą wewnątrz boku AB , punkty L_1, L_2 leżą wewnątrz boku BC , punkty M_1, M_2 leżą wewnątrz boku CD , oraz punkty N_1, N_2 leżą wewnątrz boku DA , przy czym punkty $K_1, K_2, L_1, L_2, M_1, M_2, N_1, N_2$ są parami różne i leżą w tej kolejności na jednym okręgu ω . Niech a, b, c, d będą odpowiednio długościami łuków $N_2K_1, K_2L_1, L_2M_1, M_2N_1$ okręgu ω , nie zawierających punktów K_2, L_2, M_2, N_2 odpowiednio. Wykazać, że

$$a + c = b + d.$$

2. Wyznaczyć wszystkie pary nieujemnych liczb całkowitych x, y spełniające równość

$$\sqrt{xy} = \sqrt{x+y} + \sqrt{x} + \sqrt{y}.$$

3. Niech $f(t) = t^3 + t$. Rozstrzygnąć, czy istnieją takie liczby wymierne x, y oraz dodatnie liczby całkowite m, n , że $xy = 3$ oraz

$$\underbrace{f(f(\dots f(f(x)) \dots))}_{m \text{ razy}} = \underbrace{f(f(\dots f(f(y)) \dots))}_{n \text{ razy}}.$$

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.

LXX Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe

zawodów stopnia drugiego

9 lutego 2019 r. (drugi dzień zawodów)

4. Dane są takie dodatnie liczby całkowite $a_1, a_2, \dots, a_n$ ($n \geq 3$), że nie istnieje liczba całkowita $m > 1$ dzieląca każdą z nich. Ponadto, jeśli oznaczymy $s = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, to każda z liczb $a_1, a_2, \dots, a_n$ dzieli s . Udowodnić, że liczba s^{n-2} jest podzielna przez $a_1 a_2 \dots a_n$.

5. Dany jest ciąg $b_0, b_1, b_2, \dots$ nieujemnych liczb całkowitych, przy czym wyrazy tego ciągu są parami różne, $b_0 = 0$ oraz $b_n < 2n$ dla każdej dodatniej liczby całkowitej n . Udowodnić, że dla każdej nieujemnej liczby całkowitej m istnieją takie nieujemne liczby całkowite k oraz ℓ , że

$$b_k + b_\ell = m.$$

6. Punkt X leży wewnątrz trójkąta ostrokątnego ABC , przy czym

$$\angle BAX = 2\angle XBA \quad \text{oraz} \quad \angle XAC = 2\angle ACX.$$

Punkt M jest środkiem tego łuku BC okręgu opisanego na trójkącie ABC , który zawiera punkt A . Dowieść, że $XM = XA$.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.



LXX Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych

zawodów stopnia drugiego

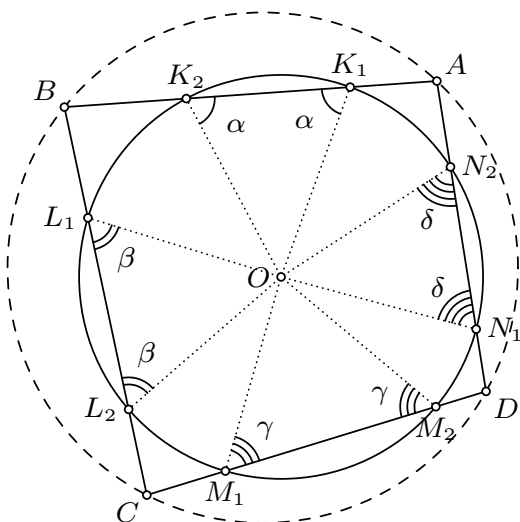
8 lutego 2019 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Punkty K_1, K_2 leżą wewnątrz boku AB , punkty L_1, L_2 leżą wewnątrz boku BC , punkty M_1, M_2 leżą wewnątrz boku CD , oraz punkty N_1, N_2 leżą wewnątrz boku DA , przy czym punkty $K_1, K_2, L_1, L_2, M_1, M_2, N_1, N_2$ są parami różne i leżą w tej kolejności na jednym okręgu ω . Niech a, b, c, d będą odpowiednio długościami łuków $N_2K_1, K_2L_1, L_2M_1, M_2N_1$ okręgu ω , niezawierających punktów K_2, L_2, M_2, N_2 odpowiednio. Wykazać, że

$$a + c = b + d.$$

Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie:



Niech O będzie środkiem okręgu ω opisanego na punktach $K_1, K_2, L_1, L_2, M_1, M_2, N_1$ i N_2 . Zauważmy, że teza zadania jest równoważna

równości

$$\sphericalangle N_2OK_1 + \sphericalangle L_2OM_1 = \sphericalangle K_2OL_1 + \sphericalangle M_2ON_1. \quad (1)$$

Trójkąty $K_1OK_2, L_1OL_2, M_1OM_2$ i N_1ON_2 są równoramienne, gdyż ich ramiona to promienie okręgu ω . Oznaczmy kąty przy podstawie w tych trójkątach odpowiednio przez α, β, γ i δ . Wtedy, wykorzystując sumę miar kątów w czworokącie OK_1AN_2 mamy

$$\begin{aligned} \sphericalangle N_2OK_1 &= 360^\circ - (\sphericalangle OK_1A + \sphericalangle BAD + \sphericalangle AN_2O) = \\ &= 360^\circ - (180^\circ - \alpha + \sphericalangle BAD + 180^\circ - \delta) = \\ &= \alpha + \delta - \sphericalangle BAD. \end{aligned}$$

Analogicznie

$$\begin{aligned} \sphericalangle L_2OM_1 &= \beta + \gamma - \sphericalangle DCB, \\ \sphericalangle K_2OL_1 &= \beta + \alpha - \sphericalangle CBA, \\ \sphericalangle M_2ON_1 &= \delta + \gamma - \sphericalangle ADC. \end{aligned}$$

Równość (1), którą należy wykazać, jest równoważna równości

$$\alpha + \delta - \sphericalangle BAD + \beta + \gamma - \sphericalangle DCB = \beta + \alpha - \sphericalangle CBA + \delta + \gamma - \sphericalangle ADC,$$

która z kolei jest równoważna temu, że

$$\sphericalangle BAD + \sphericalangle DCB = \sphericalangle CBA + \sphericalangle ADC.$$

Jednakże ostatnia równość jest konsekwencją tego, że na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg. $\square$

2. Wyznaczyć wszystkie pary nieujemnych liczb całkowitych x, y spełniające równość

$$\sqrt{xy} = \sqrt{x+y} + \sqrt{x} + \sqrt{y}.$$

Autor zadania: Hung Son Nguyen

Rozwiązanie:

Odpowiedź: Jedyne parami nieujemnych liczb całkowitych x, y spełniającymi dane równanie są: $(0, 0), (9, 16)$ i $(16, 9)$.

Lemat: Jeżeli dodatnie liczby całkowite a, b, c spełniają jedną z równości

$$\sqrt{a} = c + \sqrt{b} \quad \text{lub} \quad \sqrt{a} = c - \sqrt{b},$$

to a i b są kwadratami liczb całkowitych.

Dowód: Przeprowadzimy dowód w przypadku gdy zachodzi pierwsza z równości, dowód gdy zachodzi druga z równości jest analogiczny. Podnosząc obie strony do kwadratu otrzymujemy, że

$$a = c^2 + b + 2c\sqrt{b},$$

więc

$$\sqrt{b} = \frac{a - b - c^2}{2c},$$

czyli b jest kwadratem liczby wymiernej. Zauważmy, że jeżeli $b = (\frac{s}{t})^2$ dla pewnych dodatnich liczb całkowitych s, t , to $t^2 \mid s^2$, więc $t \mid s$. Oznacza to, że b jest kwadratem liczby całkowitej. Podobnie dowodzimy, że a jest kwadratem liczby całkowitej. $\square$

Przejdźmy do rozwiązania zadania. Po pierwsze odnotujmy, że jeżeli któraś z liczb x, y jest równa zero, to druga również i para $(x, y) = (0, 0)$ spełnia warunki zadania. Przyjmijmy dalej, że liczby x, y są dodatnie. Odejmując stronami $\sqrt{x+y}$ od wyjściowej równości i podnosząc do kwadratu dostajemy, że

$$(\sqrt{xy} - \sqrt{x+y})^2 = (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2.$$

Co po redukcji wyrazów podobnych daje

$$xy - 2\sqrt{xy(x+y)} = 2\sqrt{xy}.$$

Dzieląc stronami przez $\sqrt{xy}$ otrzymujemy, że

$$\sqrt{xy} - \sqrt{4(x+y)} = 2. \quad (2)$$

Z lematu wynika, że liczby xy i $4(x+y)$ są kwadratami liczb całkowitych. Ponieważ $4(x+y)$ jest kwadratem liczby całkowitej, to również $x+y$ jest kwadratem liczby całkowitej, więc liczba $\sqrt{xy} - \sqrt{x+y}$ jest całkowita. Ponownie wykorzystując lemat dla równości

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{xy} - \sqrt{x+y}$$

dostajemy, że x, y są kwadratami liczb całkowitych.

Równanie (2) można zapisać w postaci $2\sqrt{x+y} = \sqrt{xy} - 2$. Stąd i z równości

$$\sqrt{xy} = \sqrt{x+y} + \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

wynika, że

$$2\sqrt{xy} = \sqrt{xy} - 2 + \sqrt{x} + \sqrt{y},$$

co po przeniesieniu wszystkiego na lewą stronę i dodaniu liczby 2 do obu stron daje

$$(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{y} - 2) = 2.$$

Ponieważ liczby $\sqrt{x} \geq 1$ i $\sqrt{y} \geq 1$ są całkowite, więc $\sqrt{x} - 2 \geq -1$ i $\sqrt{y} - 2 \geq -1$, zatem albo $\sqrt{x} - 2 = 1$ i $\sqrt{y} - 2 = 2$, albo $\sqrt{y} - 2 = 1$ i $\sqrt{x} - 2 = 2$. Oznacza to, że $x = 9$ i $y = 16$ albo $x = 16$ i $y = 9$. Podstawiając uzyskane pary do wyjściowego równania stwierdzamy, że są one rozwiązaniami. $\square$

3. Niech $f(t) = t^3 + t$. Rozstrzygnąć, czy istnieją takie liczby wymierne x, y oraz dodatnie liczby całkowite m, n , że $xy = 3$ oraz

$$\underbrace{f(f(\dots f(f(x)) \dots))}_{m \text{ razy}} = \underbrace{f(f(\dots f(f(y)) \dots))}_{n \text{ razy}}.$$

Autor zadania: Mariusz Skałba

Rozwiązanie:

Odpowiedź: Nie istnieją liczby x, y, m, n spełniające warunki zadania.

Sposób I: Niech $t = \frac{a}{b}$ będzie liczbą wymierną przedstawioną w postaci ułamka nieskracalnego tzn. $\text{NWD}(a, b) = 1$. Wówczas

$$f(t) = t^3 + t = \frac{a^3}{b^3} + \frac{a}{b} = \frac{a(a^2 + b^2)}{b^3}. \quad (3)$$

Udowodnimy, że również ostatni ułamek, czyli $\frac{a(a^2+b^2)}{b^3}$ jest nieskracalny. Przypuśćmy, że dla pewnej liczby pierwszej p zachodzi

$$p \mid b^3 \quad \text{oraz} \quad p \mid a(a^2 + b^2).$$

Ponieważ $p \mid b^3$, to $p \mid b$, więc $p \nmid a$, zatem z tego, że $p \mid a(a^2 + b^2)$ wynika, że $p \mid a^2 + b^2$, ale wtedy $p \mid a^2 + b^2 - b^2 = a^2$ wbrew temu, że

$p \nmid a$. Oznacza to, że $\text{NWD}(a(a^2 + b^2), b^3) = 1$, więc istotnie ułamek $\frac{a(a^2+b^2)}{b^3}$ jest nieskracalny.

Przejdźmy do rozwiązania zadania. Ponieważ $f(t) = -f(-t)$, więc możemy bez straty założyć, że liczby x, y są dodatnie. Niech $x = \frac{a}{b}$, $y = \frac{c}{d}$ będą odpowiednio zapisami liczb x, y w postaci ułamka nieskracalnego. Z założenia $xy = 3$ wynika, że $ac = 3bd$. Zauważmy, że przynajmniej jedna z liczb a, c nie jest podzielna przez 3. Istotnie, gdyby a i c były podzielne przez 3, to b, d byłyby niepodzielne przez 3 i lewa strona równości $ac = 3bd$ byłaby podzielna przez 9, a prawa nie. Bez straty ogólności założymy, że $3 \nmid a$. Wówczas $y = \frac{3}{x} = \frac{3b}{a}$. Ponieważ $3 \nmid a$ i liczby a i b są względnie pierwsze, zatem ułamek $y = \frac{3}{x}$ jest nieskracalny.

Zgodnie z powyższą obserwacją mianownik liczby $\underbrace{f(f(\dots f(f(x)) \dots))}_{m \text{ razy}}$ zapisanej w postaci ułamka nieskracalnego wynosi b^{3^m} . Podobnie mianownik liczby $\underbrace{f(f(\dots f(f(y)) \dots))}_{n \text{ razy}}$ zapisanej w postaci ułamka nieskracalnego wynosi a^{3^n} . Gdyby zachodziła równość żądana w zadaniu mieliśmy $b^{3^m} = a^{3^n}$. Ponieważ liczby a, b są względnie pierwsze, więc $a = b = 1$. Wówczas $x = 1$, zatem $y = 3$. Ponieważ dla t całkowitego liczba $t^2 + 1$ nie jest podzielna przez 3, więc zachodzi równoważność

$$3 \mid f(t) = t(t^2 + 1) \iff 3 \mid t.$$

Wynika stąd, że

$$3 \nmid \underbrace{f(f(\dots f(f(1)) \dots))}_{m \text{ razy}} \quad \text{oraz} \quad 3 \mid \underbrace{f(f(\dots f(f(3)) \dots))}_{n \text{ razy}},$$

więc żądana równość nie może zachodzić. $\square$

Sposób II: Zauważmy, że każdą dodatnią liczbę wymierną x można jednoznacznie zapisać w postaci $x = 3^k \cdot \frac{s}{t}$, gdzie k jest liczbą całkowitą, zaś s, t są względnie pierwszymi liczbami całkowitymi niepodzielnymi przez 3. W tej sytuacji piszemy $\nu_3(x) = k$. Nietrudno udowodnić, że dla dowolnych dodatnich liczb wymiernych x, y zachodzą następujące zależności $\nu_3(xy) = \nu_3(x) + \nu_3(y)$ oraz $\nu_3(\frac{x}{y}) = \nu_3(x) - \nu_3(y)$.

Podobnie jak w pierwszym sposobie zakładamy bez straty, że liczby x, y są dodatnie. Niech $t = \frac{a}{b}$ będzie dodatnią liczbą wymierną zapisaną

w postaci ułamka nieskracalnego. Mamy ciąg równości

$$\nu_3(f(t)) = \nu_3(t^3 + t) = \nu_3\left(\frac{a(a^2 + b^2)}{b^3}\right) = \nu_3(a) + \nu_3(a^2 + b^2) - 3\nu_3(b).$$

Ponieważ liczby a, b są względnie pierwsze, więc przynajmniej jedna z nich jest liczbą niepodzielną przez 3, więc $3 \nmid a^2 + b^2$. Oznacza to, że $\nu_3(a^2 + b^2) = 0$, więc

$$\nu_3(f(t)) = \nu_3(a) - 3\nu_3(b) \equiv \nu_3(a) - \nu_3(b) = \nu_3(t) \pmod{2}.$$

Stosując otrzymaną zależność wielokrotnie otrzymujemy, że

$$\nu_3(x) \equiv \nu_3(\underbrace{f(f(\dots f(f(x)) \dots))}_{m \text{ razy}}) \pmod{2}$$

oraz

$$\nu_3(y) \equiv \nu_3(\underbrace{f(f(\dots f(f(y)) \dots))}_{n \text{ razy}}) \pmod{2}.$$

Z równości $3 = xy$, dostajemy

$$1 = \nu_3(3) = \nu_3(xy) = \nu_3(x) + \nu_3(y),$$

więc liczby $\nu_3(x)$ i $\nu_3(y)$ są różnej parzystości. Oznacza to, że liczby

$$\underbrace{\nu_3(f(f(\dots f(f(x)) \dots))}_{m \text{ razy}} \quad \text{i} \quad \underbrace{\nu_3(f(f(\dots f(f(y)) \dots))}_{n \text{ razy}}$$

są różnej parzystości, więc równość dana w zadaniu nie może zachodzić. $\square$



LXX Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych
zawodów stopnia drugiego

9 lutego 2019 r. (drugi dzień zawodów)

4. Dane są takie dodatnie liczby całkowite $a_1, a_2, \dots, a_n$ ($n \geq 3$), że nie istnieje liczba całkowita $m > 1$ dzieląca każdą z nich. Ponadto, jeśli oznaczymy $s = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, to każda z liczb $a_1, a_2, \dots, a_n$ dzieli s . Udowodnić, że liczba s^{n-2} jest podzielna przez $a_1 a_2 \dots a_n$.

Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie:

Przypuśćmy, że teza zadania nie zachodzi. Niech p będzie liczbą pierwszą dzielącą mianownik liczby

$$\frac{s^{n-2}}{a_1 a_2 \dots a_n}$$

zapisanej w postaci ułamka nieskracalnego. Ponieważ $p \mid a_1 a_2 \dots a_n$, więc p dzieli przynajmniej jedną z liczb $a_1, a_2, \dots, a_n$, więc $p \mid s$. Z założenia zadania wynika, że przynajmniej jedna z liczb $a_1, a_2, \dots, a_n$ nie jest podzielna przez p . Bez straty ogólności, możemy założyć, że jest to a_n . Zauważmy, że któraś z liczb $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ nie jest podzielna przez p . Istotnie, w przeciwnym razie mielibyśmy

$$p \mid s - (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}) = a_n \text{ — sprzeczność.}$$

Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $p \nmid a_{n-1}$. Ponieważ liczby $\frac{s}{a_1}, \frac{s}{a_2}, \dots, \frac{s}{a_{n-2}}$ są całkowite, to mianownik liczby

$$\frac{s^{n-2}}{a_1 a_2 \dots a_n} = \frac{s}{a_1} \cdot \frac{s}{a_2} \cdot \dots \cdot \frac{s}{a_{n-2}} \cdot \frac{1}{a_{n-1} a_n}$$

zapisanej w postaci ułamka nieskracalnego jest dzielnikiem $a_{n-1} a_n$, więc nie jest podzielny przez p . Otrzymana sprzeczność dowodzi tezy zadania. $\square$

5. Dany jest ciąg $b_0, b_1, b_2, \dots$ nieujemnych liczb całkowitych, przy czym wyrazy tego ciągu są parami różne, $b_0 = 0$ oraz $b_n < 2n$ dla każdej dodatniej liczby całkowitej n . Udowodnić, że dla każdej nieujemnej liczby całkowitej m istnieją takie nieujemne liczby całkowite k oraz ℓ , że

$$b_k + b_\ell = m.$$

Autor zadania: Mariusz Skałba

Rozwiązanie:

Rozważmy dwa przypadki ze względu na parzystość liczby m .

Niech $m = 2n - 1$ będzie liczbą nieparzystą. Rozważmy n par liczb

$$(0, 2n - 1), (1, 2n - 2), \dots, (n - 1, n).$$

Każdy spośród $n + 1$ wyrazów $b_0, b_1, \dots, b_n$ naszego ciągu jest mniejszy od $2n$, więc należy do którejś z wyżej wymienionych par. Z zasady szufladkowej Dirichleta wynika, że w pewnej parze obie liczby są wyrazami naszego ciągu. Ponieważ suma liczb w każdej z par wynosi $2n - 1 = m$, to teza zadania zachodzi dla m .

Niech $m = 2n$ będzie liczbą parzystą. Jeżeli n jest wyrazem naszego ciągu tzn. $b_k = n$ dla pewnego k , to $b_k + b_k = 2n = m$ i teza zadania jest spełniona dla m . W przeciwnym razie rozważmy $n - 1$ par liczb

$$(1, 2n - 1), (2, 2n - 2), \dots, (n - 1, n + 1).$$

Każdy wyraz ciągu $b_1, b_2, \dots, b_n$ jest dodatni i mniejszy od $2n$, więc należy do którejś z wyżej wymienionych par. Z zasady szufladkowej Dirichleta wynika, że w pewnej parze obie liczby są wyrazami naszego ciągu. Ponieważ suma liczb w każdej z par wynosi $2n = m$, to teza zadania zachodzi dla m . $\square$

6. Punkt X leży wewnątrz trójkąta ostrokątnego ABC , przy czym

$$\sphericalangle BAX = 2\sphericalangle XBA \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle XAC = 2\sphericalangle ACX.$$

Punkt M jest środkiem tego łuku BC okręgu opisanego na trójkącie ABC , który zawiera punkt A . Dowieść, że $XM = XA$.

Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie:

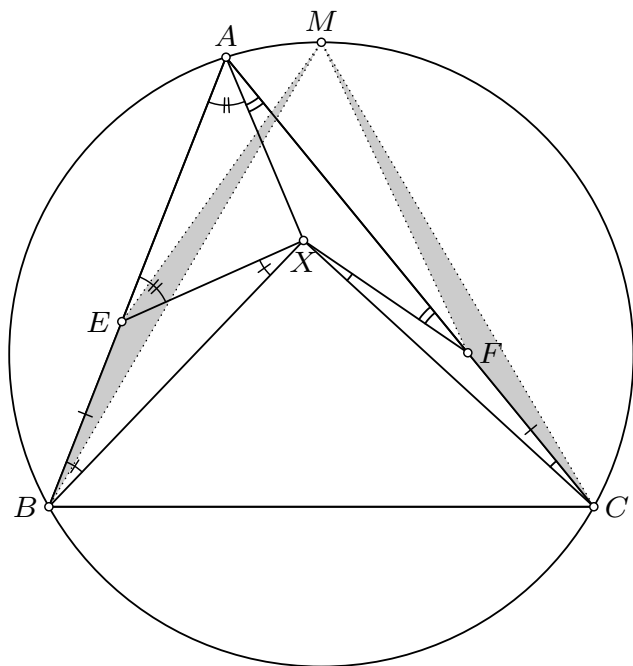
Bez szkody dla ogólności załóżmy, że $AB < AC$ (jeśli $AB = AC$, to $A \equiv M$ i teza jest oczywista). Rozważmy taki punkt E leżący na półprostej $\overrightarrow{AB}$, że $AX = EX$. Ponieważ

$$\sphericalangle XEA = \sphericalangle BAX = 2\sphericalangle XBA > \sphericalangle XBA,$$

więc punkt E leży na odcinku AB . Ponadto

$$2\sphericalangle XBE = 2\sphericalangle XBA = \sphericalangle XEA = 180^\circ - \sphericalangle BEX = \sphericalangle XBE + \sphericalangle EXB,$$

skąd $\sphericalangle XBE = \sphericalangle EXB$, czyli trójkąt EXB jest równoramienny i $EB = EX$.



Analogicznie, rozważmy punkt F leżący na półprostej $\overrightarrow{AC}$ dla którego $FX = AX$. Wówczas podobnie jak wyżej, definicja punktu F wraz z warunkami zadania implikuje, że F leży na odcinku AC oraz $FC = FX$. Wobec tego pokazaliśmy, że

$$BE = EX = AX = XF = FC. \quad (4)$$

Ponieważ M jest środkiem łuku BAC , więc $BM = MC$. Ponadto $\sphericalangle MBE = \sphericalangle MCF$, gdyż są to kąty wpisane oparte na łuku AM . Łącząc te fakty z równością $BE = CF$, na podstawie cechy przystawania (*bkb*) wnioskujemy, że trójkąty MBE i MCF są przystające. W szczególności $\sphericalangle EMB = \sphericalangle FMC$, a zatem

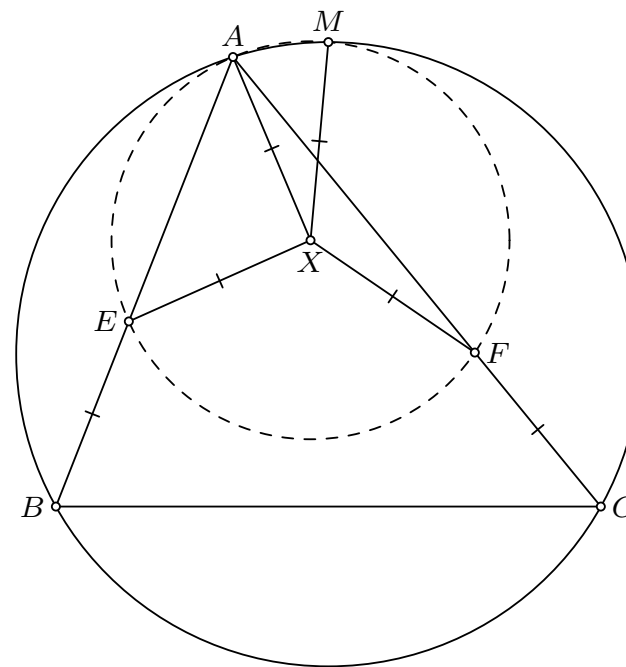
$$\sphericalangle EMF = \sphericalangle EMB + \sphericalangle BMF = \sphericalangle FMC + \sphericalangle BMF = \sphericalangle BMC}.$$

Kąty wpisane BAC i BMC są równe, gdyż są oparte na łuku BC , wobec tego

$$\sphericalangle EMF = \sphericalangle BMC = \sphericalangle BAC = \sphericalangle EAF,$$

czyli punkty A, M, F i E leżą na jednym okręgu.

Równość (4) pokazuje, że punkt X jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie AFE , a ponieważ wyżej stwierdziliśmy, że na tym okręgu leży również punkt M , więc $AX = XM$.



(db,mg)



LXX Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia trzeciego

3 kwietnia 2019 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Punkty X i Y leżą odpowiednio wewnątrz boków AB i AC trójkąta ostrokątnego ABC , przy czym $AX = AY$ oraz odcinek XY przechodzi przez ortocentrum trójkąta ABC . Proste styczne do okręgu opisanego na trójkącie AXY w punktach X i Y przecinają się w punkcie P . Dowieść, że punkty A, B, C, P leżą na jednym okręgu.

2. Dana jest liczba pierwsza p oraz taka liczba całkowita r , że liczba $r^7 - 1$ jest podzielna przez p . Ponadto istnieją takie liczby całkowite a oraz b , że liczby $r + 1 - a^2$ oraz $r^2 + 1 - b^2$ są podzielne przez p . Wykazać, że istnieje taka liczba całkowita c , że liczba $r^3 + 1 - c^2$ jest podzielna przez p .

3. Na przyjęciu spotkało się $n \geq 3$ gości, wśród których niektórzy się znają. Okazało się, że na przyjęciu nie istnieje taka czwórka różnych gości a, b, c, d , że w parach $\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{d, a\}$ goście się znają, ale w parach $\{a, c\}, \{b, d\}$ goście się nie znają.

Maksymalną kliką na przyjęciu nazwiemy taki niepusty zbiór gości X (być może jednoelementowy), że goście z X się parami znają, ale nie istnieje gość spoza X znający wszystkich gości z X . Dowieść, że na przyjęciu jest co najwyżej $\frac{n(n-1)}{2}$ różnych maksymalnych klik.

Uwaga: Jeśli gość a zna gościa b , to gość b zna gościa a .

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.



LXX Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia trzeciego

4 kwietnia 2019 r. (drugi dzień zawodów)

4. Dane są dodatnie liczby całkowite n, k, ℓ oraz taka różnowartościowa funkcja σ o argumentach i wartościach w zbiorze $\{1, 2, \dots, n\}$, że dla każdej liczby $x \in \{1, 2, \dots, n\}$ liczba $\sigma(x) - x$ jest równa k lub $-\ell$. Dowieść, że liczba n jest podzielna przez $k + \ell$.

5. Dane są liczby dodatnie $a_0, a_1, \dots, a_n$ spełniające warunki: a_0 jest liczbą całkowitą, $\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \leq 1$ oraz $a_i \leq a_{i-1} + 1$ dla wszystkich $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Udowodnić, że

$$n \leq 4a_0 \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}.$$

6. Okrąg Ω jest opisany na trójkącie ostrokątnym ABC . Punkt D jest środkiem tego łuku BC okręgu Ω , który nie zawiera punktu A . Okrąg ω o środku w punkcie D jest styczny do odcinka BC w punkcie E . Proste styczne do okręgu ω przechodzące przez punkt A przecinają prostą BC w punktach K i L , przy czym punkty B, K, L, C leżą w tej kolejności na prostej BC . Okrąg γ_1 jest styczny do odcinków AL i BL oraz do okręgu Ω w punkcie M . Okrąg γ_2 jest styczny do odcinków AK i CK oraz do okręgu Ω w punkcie N . Proste KN i LM przecinają się w punkcie P . Wykazać, że $\angle KAP = \angle EAL$.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.





LXX Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych

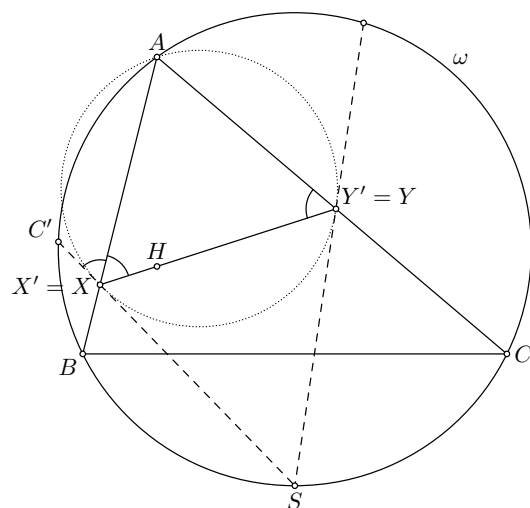
zawodów stopnia trzeciego

3 kwietnia 2019 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Punkty X i Y leżą odpowiednio wewnątrz boków AB i AC trójkąta ostrokątnego ABC , przy czym $AX = AY$ oraz odcinek XY przechodzi przez ortocentrum trójkąta ABC . Proste styczne do okręgu opisanego na trójkącie AXY w punktach X i Y przecinają się w punkcie P . Dowieść, że punkty A, B, C, P leżą na jednym okręgu.

Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie:



Niech C' będzie punktem symetrycznym względem prostej AB do ortocentrum trójkąta ABC , punktu H . Wtedy

$$\begin{aligned}\angle BC'A &= \angle BHA = 180^\circ - \angle BAH - \angle HBA = \\ &= 180^\circ - \angle HCB - \angle ACH = 180^\circ - \angle ACB,\end{aligned}$$

więc C' leży na okręgu ω opisanym na trójkącie ABC .

Oznaczmy przez S środek krótszego łuku BC okręgu ω , który jest zarazem punktem przecięcia dwusiecznej kąta BAC z ω . Niech prosta

$C'S$ przecina AB w punkcie X' . Wówczas

$$\begin{aligned}\angle HX'A &= \angle AX'C' = \angle BC'S + \angle ABC' = \angle BAS + \angle HBA = \\ &= \frac{1}{2}\angle BAC + 90^\circ - \angle BAC = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BAC,\end{aligned}$$

po drodze skorzystaliśmy z definicji punktu C' i równości kątów wpisanych opartych na łuku BS okręgu ω .

Wobec tego, jeśli prosta $X'H$ przecina prostą AC w punkcie Y' , to $\angle Y'X'A = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BAC$ oraz

$$\begin{aligned}\angle AY'X' &= 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{1}{2}\angle BAC + \angle BAC\right) = \\ &= 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BAC = \angle Y'X'A,\end{aligned}$$

skąd dostajemy równość $AX' = AY'$, więc $X = X'$ i $Y = Y'$, gdyż punkty X, Y są wyznaczone przez warunki zadania jednoznacznie.

Zauważmy teraz, że $\angle AXC' = \angle YXA = \angle AYX$, więc z twierdzenia o kącie między styczną a cięciwą otrzymujemy, że prosta XS jest styczna do okręgu opisanego na trójkącie AXY w punkcie X . Analogicznie dowodzimy, że prosta YS jest styczna do tego okręgu w punkcie Y . Oznacza to, że styczne w punktach X i Y do okręgu opisanego na trójkącie AXY przecinają się w punkcie S leżącym na okręgu ω – to kończy rozwiązanie. $\square$

Uwaga: Można wykazać następujące twierdzenie Steinera: W trójkącie ABC , prosta ℓ przechodzi przez jego ortocentrum H . Wówczas obrazy prostej ℓ w symetrii względem boków trójkąta przecinają się w punkcie leżącym na okręgu opisanym na trójkącie ABC . W naszym zadaniu obrazy prostej XY względem AB i AC , to oczywiście styczne do okręgu opisanego na trójkącie AXY , więc z powyższego twierdzenia dostajemy tezę zadania.

2. Dana jest liczba pierwsza p oraz taka liczba całkowita r , że liczba $r^7 - 1$ jest podzielna przez p . Ponadto istnieją takie liczby całkowite a oraz b , że liczby $r + 1 - a^2$ oraz $r^2 + 1 - b^2$ są podzielne przez p . Wykazać, że istnieje taka liczba całkowita c , że liczba $r^3 + 1 - c^2$ jest podzielna przez p .

Autor zadania: Mariusz Skałba

Rozwiązanie:

Jeżeli $p \mid r - 1$, to $p \mid r + 1 - a^2 + (r - 1)(r^2 + r) = r^3 + 1 - a^2$, więc możemy przyjąć $c = a$.

Założmy, że $p \nmid r - 1$. Wówczas z podzielności

$$p \mid r^7 - 1 = (r - 1)(r^6 + r^5 + \dots + 1)$$

wynika, że $p \mid r^6 + r^5 + \dots + 1$. Rozważmy iloczyn

$$\begin{aligned} (r+1)(r^2+1)(r^3+1)r^4 &= (r+1)(r^2+1)(r^7+r^4) \equiv (r+1)(r^2+1)(r^4+1) = \\ &= 1 + r + \dots + r^6 + r^7 \equiv r^7 \equiv 1 \pmod{p}. \end{aligned}$$

Ponieważ $r + 1 \equiv a^2 \pmod{p}$ i $r^2 + 1 \equiv b^2 \pmod{p}$, więc

$$(r^3 + 1)a^2b^2r^4 \equiv 1 \pmod{p}. \quad (1)$$

Przyjmijmy $c = (r^3 + 1)abr^2$, wówczas

$$r^3 + 1 - c^2 = (r^3 + 1)(1 - (r^3 + 1)a^2b^2r^4).$$

Z kongruencji (1) wynika, że wyrażenie w drugim nawiasie jest podzielne przez p , więc $p \mid r^3 + 1 - c^2$. $\square$

3. Na przyjęciu spotkało się $n \geq 3$ gości, wśród których niektórzy się znają. Okazało się, że na przyjęciu nie istnieje taka czwórka różnych gości a, b, c, d , że w parach $\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{d, a\}$ goście się znają, ale w parach $\{a, c\}, \{b, d\}$ goście się nie znają.

Maksymalną kliką na przyjęciu nazwiemy taki niepusty zbiór gości X (być może jednoelementowy), że goście z X się parami znają, ale nie istnieje gość spoza X znający wszystkich gości z X . Dowieść, że na przyjęciu jest co najwyżej $\frac{n(n-1)}{2}$ różnych maksymalnych klik.

Uwaga: Jeśli gość a zna gościa b , to gość b zna gościa a .

Zadanie zaproponował: Michał Pilipczuk

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód przez indukcję ze względu na n . Dla $n = 3$ nietrudno zauważyć, że nie da się wybrać czterech podzbiorów gości, tak aby żaden nie był nadzbiorem innego. Oznacza to, że niezależnie od znajomości liczba maksymalnych klik wynosi co najwyżej trzy.

Niech G będzie n -elementowym zbiorem gości na przyjęciu. Wybierzmy dowolnego gościa $a \in G$, który zna przynajmniej jednego innego gościa. Jeżeli taki gość nie istnieje to wszystkie maksymalne klikie w G składają się z jednego gościa i jest ich $n \leq \frac{n(n-1)}{2}$.

Rozważmy pewną maksymalną klikę L w $G \setminus \{a\}$. Zauważmy, że jeżeli a nie zna któregoś z gości z L , to L jest również maksymalną kliką w G . Natomiast jeżeli a zna wszystkich gości z L , to $L \cup \{a\}$ jest maksymalną kliką w G .

Niech K będzie maksymalną kliką w G , dla której nie istnieje taka maksymalna klika L w $G \setminus \{a\}$, że $K = L$ lub $K = L \cup \{a\}$. Wówczas $a \in K$, gdyż w przeciwnym razie K jest maksymalną kliką w $G \setminus \{a\}$. Ponieważ a ma jakiegoś znajomego, to zbiór $K \setminus \{a\}$ jest nie pusty. Z założenia $K \setminus \{a\}$ jest kliką, która nie jest maksymalną kliką w $G \setminus \{a\}$, więc istnieje taki gość $c \in G \setminus \{a\}$, który zna wszystkich gości z $K \setminus \{a\}$. Udowodnimy, że $K \setminus \{a\}$ jest zbiorem wspólnych znajomych a i c .

Goście a i c się nie znają, gdyż w przeciwnym razie $K \cup \{c\}$ byłaby większą kliką w G , wbrew maksymalności K . Przypuśćmy, że istnieje taka osoba b która zna a i c , ale $b \notin K \setminus \{a\}$. Gość b nie zna pewnego gościa z K , gdyż w przeciwnym razie $K \cup \{b\}$ byłaby kliką zawierającą K . Niech $d \in K \setminus \{a\}$ będzie gościem którego nie zna b . Wówczas goście w parach $\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}$ i $\{d, a\}$ się znają, zaś $\{a, c\}$ i $\{b, d\}$ się nie znają. Zgodnie z warunkiem danym w zadaniu taka sytuacja jest niemożliwa, więc istotnie $K \setminus \{a\}$ jest zbiorem wspólnych znajomych a i c .

Podsumowując, udowodniliśmy, że każda maksymalna klika w G albo odpowiada jednoznacznie pewnej klicie w $G \setminus \{a\}$, albo jest zbiorem wspólnych znajomych a i pewnej osoby $c \neq a$. Z założenia indukcyjnego tych pierwszych klik jest co najwyżej $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$. Każda z pozostałych maksymalnych klik jest wyznaczona jednoznacznie przez pewnego gościa różnego od a , jest ich więc co najwyżej $n - 1$. Oznacza to, że liczba maksymalnych klik w G jest nie większa niż

$$\frac{(n-2)(n-1)}{2} + n - 1 = \frac{(n-1)n}{2}.$$

Co kończy dowód kroku indukcyjnego. $\square$

(db,mg)



LXX Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych

zawodów stopnia trzeciego

4 kwietnia 2019 r. (drugi dzień zawodów)

4. Dane są dodatnie liczby całkowite n, k, ℓ oraz taka różnowartościowa funkcja σ o argumentach i wartościach w zbiorze $\{1, 2, \dots, n\}$, że dla każdej liczby $x \in \{1, 2, \dots, n\}$ liczba $\sigma(x) - x$ jest równa k lub $-\ell$. Dowieść, że liczba n jest podzielna przez $k + \ell$.

Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie:

Niech s będzie liczbą całkowitą, oznaczamy przez A_s zbiór takich $x \in \{1, 2, \dots, n\}$, że $k + \ell \mid x - s$. Zauważmy, że

$$x \in A_s \Rightarrow \sigma(x) \in A_{s+k}. \quad (2)$$

Istotnie, liczba $\sigma(x) - (s + k)$ jest równa $x + k - (s + k) = x - s$ lub $x - \ell - (s + k) = x - s - (k + \ell)$, więc jest podzielna przez $k + \ell$. Ponieważ funkcja σ jest różnowartościowa, to z warunku (2) wynika nierówność

$$|A_s| \leq |A_{s+k}|, \quad (3)$$

gdzie przez $|\cdot|$ oznaczamy liczbę elementów zbioru.

Przypuśćmy, że $k + \ell \nmid n$, wówczas $n = q(k + \ell) + r$, dla pewnych nieujemnych liczb całkowitych q, r spełniających warunek $1 \leq r < k + \ell$. Zauważmy, że

$$|A_s| = \begin{cases} q + 1 & \text{dla } 1 \leq s \leq r \\ q & \text{dla } r + 1 \leq s \leq k + \ell \end{cases}.$$

W szczególności $|A_1| = q + 1$ i $|A_{r+1}| = q$. Z nierówności (3) mamy $|A_1| \leq |A_{k+1}|$, więc $|A_{k+1}| = q + 1$ i w konsekwencji $k + 1 \leq r$. Oznacza to, że $1 \leq r + 1 - k \leq r$, więc $|A_{r+1-k}| = q + 1$. Korzystając ponownie z (3) otrzymujemy

$$q + 1 = |A_{r+1-k}| \leq |A_{r+1}| = q \text{ — sprzeczność, skąd teza.} \quad \square$$

5. Dane są liczby dodatnie $a_0, a_1, \dots, a_n$ spełniające warunki: a_0 jest liczbą całkowitą, $\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \leq 1$ oraz $a_i \leq a_{i-1} + 1$ dla wszystkich $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Udowodnić, że

$$n \leq 4a_0 \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}.$$

Autor zadania: Michał Pilipczuk

Rozwiązanie:

Sposób I: Na początek zauważmy, że stosując wielokrotnie warunek dany w zadaniu dostajemy, że $a_i \leq a_0 + i$ dla $i = 1, 2, \dots, n$.

Zauważamy, że $n < 3a_0$. Istotnie, w przeciwnym razie mielibyśmy

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} &\geq \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_0 + i} \geq \sum_{i=1}^{a_0} \frac{1}{a_0 + i} + \sum_{i=a_0+1}^{2a_0} \frac{1}{a_0 + i} + \sum_{i=2a_0+1}^{3a_0} \frac{1}{a_0 + i} \geq \\ &\geq \frac{a_0}{2a_0} + \frac{a_0}{3a_0} + \frac{a_0}{4a_0} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1, \end{aligned}$$

sprzeczność z założeniem. W związku z tym otrzymujemy, że

$$4a_0 \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \geq 4a_0 \cdot \frac{n}{a_0 + n} \geq 4a_0 \cdot \frac{n}{4a_0} = n.$$

Sposób II: Udowodnimy, że stałą 4 z treści zadania można zastąpić przez $\frac{12}{5}$, której nie można już zmniejszyć.

Odnotujmy po pierwsze, że jeżeli $n = 1$, to

$$\frac{12}{5} \cdot \frac{a_0}{a_1} > \frac{2a_0}{a_0 + 1} \geq 1.$$

Przyjmijmy dalej, że $n \geq 2$. Z nierówności między średnią arytmetyczną i harmoniczną dla parami różnych liczb $\frac{1}{a_0+1}, \frac{1}{a_0+2}, \dots, \frac{1}{a_0+n}$, dostajemy

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_0 + i} > \frac{n^2}{\sum_{i=1}^n (a_0 + i)} = \frac{n^2}{na_0 + \frac{n(n+1)}{2}} = \frac{2n}{2a_0 + 1 + n}.$$

Wobec tego

$$1 \geq \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \geq \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_0 + i} > \frac{2n}{2a_0 + 1 + n},$$

Przejdźmy do dowodu żądanej nierówności. Mamy

$$\frac{12}{5}a_0 \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \geq \frac{24na_0}{5(2a_0 + 1 + n)} = n \left(1 + \frac{5(2a_0 - n) + (4a_0 - 5)}{5(2a_0 + 1 + n)} \right).$$

Jeżeli $2a_0 > n$ lub $a_0 > 1$, to $5(2a_0 - n) + (4a_0 - 5) > 0$ i teza zadania jest spełniona. W przeciwnym razie mamy $a_0 = 1$ i $n = 2$. Wówczas

$$\frac{12}{5}a_0\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}\right)\geqslant\frac{12}{5}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=2=n.$$

Przy czym równość zachodzi gdy $a_1 = 2$ i $a_2 = 3$.

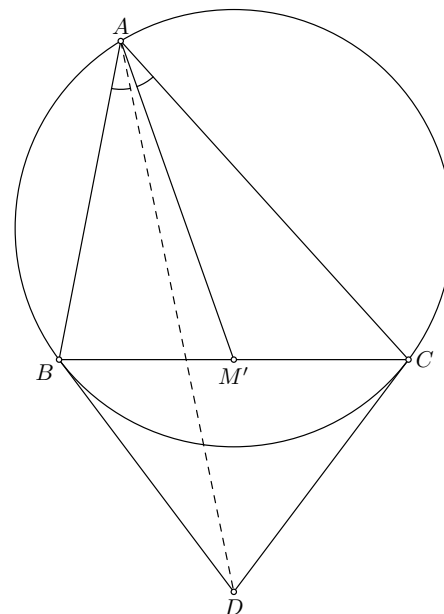
6. Okrąg Ω jest opisany na trójkącie ostrokątnym ABC . Punkt D jest środkiem tego łuku BC okręgu Ω , który nie zawiera punktu A . Okrąg ω o środku w punkcie D jest styczny do odcinka BC w punkcie E . Proste styczne do okręgu ω przechodzące przez punkt A przecinają prostą BC w punktach K i L , przy czym punkty B, K, L, C leżą w tej kolejności na prostej BC . Okrąg γ_1 jest styczny do odcinków AL i BL oraz do okręgu Ω w punkcie M . Okrąg γ_2 jest styczny do odcinków AK i CK oraz do okręgu Ω w punkcie N . Proste KN i LM przecinają się w punkcie P . Wykazać, że $\sphericalangle KAP = \sphericalangle EAL$.

Autor zadania: Michał Kieza

Rozwiązanie:

W rozwiązaniu wykorzystamy następujący lemat, znany jako twierdzenie o symedianie.

Lemat. Dany jest trójkąt ABC wpisany w okrąg o , przy czym $\angle BAC < 90^\circ$. Punkt M jest środkiem boku BC , zaś punkt D punktem przecięcia stycznych do okręgu o w punktach B i C . Wówczas prosta AD jest symetryczna do prostej AM względem dwusiecznej kąta BAC . (Prostą AD nazywamy *symmedianą* trójkąta ABC).



Dowód. Niech M' będzie punktem przecięcia prostej symetrycznej do AD względem dwusiecznej kąta BAC z odcinkiem BC . Wtedy, korzystając z twierdzenia sinusów dla trójkątów ABM' i $AM'C$ dostajemy

$$\frac{CM'}{M'B} = \frac{CM'}{AM'} \cdot \frac{AM'}{M'B} = \frac{\sin \angle M'AC}{\sin \angle BCA} \cdot \frac{\sin \angle CBA}{\sin \angle BAM'} = (*).$$

Ponieważ proste DB i DC są styczne do okręgu o , to z twierdzenia o kącie między styczną a cięciwą wynika, że

$$\sphericalangle DBA = 180^\circ - \sphericalangle ACB \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle ACD = 180^\circ - \sphericalangle CBA.$$

Mamy więc

$$(*) = \frac{\sin \sphericalangle DAB}{\sin \sphericalangle DBA} \cdot \frac{\sin \sphericalangle ACD}{\sin \sphericalangle DAC} = \frac{BD}{AD} \cdot \frac{AD}{CD} = 1,$$

w poprzedniej równości wykorzystaliśmy twierdzenie sinusów dla trójkątów ABD i ADC . Otrzymaliśmy, że $CM' = M'B$, więc punkt M' jest środkiem odcinka BC , stąd teza. $\square$

ptm rok zał. 191



LXXI Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia pierwszego
I seria: do 30 września 2019 r.

1. Dana jest dodatnia liczba całkowita n . Rozważmy wszystkie liczby postaci $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$, gdzie k jest dodatnią liczbą całkowitą. Wykazać, że różnych takich liczb jest nie więcej niż $2\sqrt{n} + 1$.

Uwaga: Dla liczby rzeczywistej x , przez $\lfloor x \rfloor$ oznaczamy największą liczbę całkowitą nie większą niż x .

2. Dla każdej liczby całkowitej $n \geq 4$ wyznaczyć wszystkie takie ciągi liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \dots, a_n$, że

$$a_{i+1}^2 + a_{i+2}^2 + 2a_i a_{i+3} \leq 0 \quad \text{dla wszystkich } i = 1, 2, \dots, n,$$

gdzie $a_{n+t} = a_t$ dla $t \in \{1, 2, 3\}$.

3. Szachownicę o wymiarach 15×15 przykryto przy pomocy płytek o wymiarach 2×2 i 3×3 w taki sposób, że płytki nie wystają poza szachownicę i nie nachodzą na siebie oraz każde pole szachownicy jest przykryte. Wyznaczyć najmniejszą liczbę użytych płytek 3×3 , dla której jest to możliwe.

4. Trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD jest wpisany w okrąg Ω . Punkt M jest środkiem tego łuku CD okręgu Ω , na którym nie leży punkt A . Niech ω będzie okręgiem o środku M stycznym do prostej AD . Punkt X jest jednym z punktów przecięcia prostej CD z okręgiem ω . Udowodnić, że prosta styczna do okręgu ω w punkcie X przechodzi przez środek odcinka AB .

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

30 września 2019 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane. Rozwiązanie każdego zadania należy podpisać w lewym górnym rogu pierwszej jego strony: imieniem i nazwiskiem, swoim adresem, swoim adresem elektronicznym oraz klasą, nazwą i adresem szkoły.



LXXI Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe

zawodów stopnia pierwszego

II seria: do 30 października 2019 r.

5. Dane są dodatnie liczby całkowite $k_1, k_2, \dots, k_n, K$, przy czym K dzieli się przez każdą z liczb $k_1, k_2, \dots, k_n$. Załóżmy, że istnieją liczby całkowite $x_1, x_2, \dots, x_n$ spełniające równanie

$$\frac{K}{k_1} \cdot x_1 + \frac{K}{k_2} \cdot x_2 + \dots + \frac{K}{k_n} \cdot x_n = 1.$$

Udowodnić, że istnieją również takie liczby całkowite $y_1, y_2, \dots, y_n$, że

$$\frac{K}{k_1} \cdot y_1 + \frac{K}{k_2} \cdot y_2 + \dots + \frac{K}{k_n} \cdot y_n = 1$$

oraz $|y_i| \leq k_i$ dla wszystkich $i = 1, 2, \dots, n$.

6. Dana jest liczba całkowita $n \geq 2019$. Liczby $1, 2, \dots, n^2$ wpisano w pola tablicy o wymiarach $n \times n$ tak, że w każde pole została wpisana dokładnie jedna liczba. Udowodnić, że można wybrać n pól w taki sposób, by w każdym wierszu i w każdej kolumnie znajdowało się dokładnie jedno wybrane pole oraz wśród liczb wpisanych w wybrane pola nie było czterech będących kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego.

7. Ściany czworościanu $ABCD$ są trójkątami ostrokątnymi, a kąty dwuścienne przy krawędziach AB i CD są proste. Dowieść, że ortocentra trójkątów ABC , BCD , CDA , DAB leżą na jednej płaszczyźnie.

8. Wykazać, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c zachodzi nierówność

$$\frac{3 + a^4 + b^3 + c^2}{1 + 2a^3 + 3b^2 + 6c} + \frac{3 + b^4 + c^3 + a^2}{1 + 2b^3 + 3c^2 + 6a} + \frac{3 + c^4 + a^3 + b^2}{1 + 2c^3 + 3a^2 + 6b} \geq \frac{3}{2}.$$

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

30 października 2019 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane. Rozwiązanie każdego zadania należy podpisać w lewym górnym rogu pierwszej jego strony: imieniem i nazwiskiem, swoim adresem, swoim adresem elektronicznym oraz klasą, nazwą i adresem szkoły.



LXXI Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia pierwszego
III seria: do 2 grudnia 2019 r.

9. Dane są takie liczby dodatnie a, b , że liczby $a^2 + b^2$, a^3 i b^3 są wymierne. Udowodnić, że liczby a i b również są wymierne.

10. Czworokąt $ABCD$ jest opisany na okręgu, przy czym $BC = 2AB$. Symetralna boku BC oraz dwusieczna kąta DCB przecinają się w punkcie X . Wykazać, że proste AX i BD są prostopadłe.

11. Dane są dodatnie liczby całkowite n i k . Na przyjęciu spotkało się n gości, spośród których niektórzy się znają. Okazało się, że każdy gość zna co najwyżej $2k$ innych gości, ale każdych dwóch nieznanających się gości ma co najmniej k wspólnych znajomych na przyjęciu. Udowodnić, że $n \leq 6k$.

Uwaga: Jeśli gość A zna gościa B, to gość B zna gościa A.

12. Wszystkie liczby postaci $x^2 + y^2$, gdzie x, y są względnie pierwszymi dodatnimi liczbami całkowitymi, ustawmy w ciąg rosnący $z_1 < z_2 < z_3 < \dots$. Przykładowo:

$$z_1 = 2 = 1^2 + 1^2, \quad z_2 = 5 = 2^2 + 1^2, \quad z_3 = 10 = 3^2 + 1^2, \quad z_4 = 13 = 3^2 + 2^2, \quad \dots$$

Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele takich dodatnich liczb całkowitych n , że liczby $z_n, z_{n+1}, \dots, z_{n+2019}$ są nieparzyste.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

2 grudnia 2019 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane. Rozwiązanie każdego zadania należy podpisać w lewym górnym rogu pierwszej jego strony: imieniem i nazwiskiem, swoim adresem, swoim adresem elektronicznym oraz klasą, nazwą i adresem szkoły.

Adresy Komitetów Okręgowych Olimpiady Matematycznej

- Dla województwa pomorskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Gdańskiego, ul. Wita Stwosza 57, 80-952 Gdańsk.
- Dla województwa śląskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Śląskiego, ul. Bankowa 14, 40-007 Katowice.
- Dla województwa małopolskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego, ul. Łojasiewicza 6, 30-348 Kraków.
- Dla województwa lubelskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Zakład Rachunku Prawdopodobieństwa pok. 810, Instytut Matematyki Uniwersytetu Marii Curie-Skłodowskiej, pl. Marii Curie-Skłodowskiej 1, 20-031 Lublin.
- Dla województwa łódzkiego i świętokrzyskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Łódzkiego, ul. Banacha 22, 90-238 Łódź.
- Dla województwa wielkopolskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Adama Mickiewicza, ul. Uniwersytetu Poznańskiego 4, 61-614 Poznań .
- Dla województwa podkarpackiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyczno-Przyrodniczy, Uniwersytetu Rzeszowskiego ul. Pigonia 1, 35-310 Rzeszów.
- Dla województwa lubuskiego i zachodniopomorskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Szczecińskiego, ul. Wielkopolska 15, 70-451 Szczecin.
- Dla województwa kujawsko-pomorskiego i warmińsko-mazurskiego: — Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, ul. Chopina 12/18, 87-100 Toruń.
- Dla województwa mazowieckiego i podlaskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, ul. Śniadeckich 8, 00-656 Warszawa.
- Dla województwa dolnośląskiego i opolskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego, pl. Grunwaldzki 2/4, 50-384 Wrocław.

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w Internecie pod adresem: <https://om.mimuw.edu.pl/problems/>



LXXI Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych

zawodów stopnia pierwszego

3 września – 2 grudnia 2019 r.

1. Rozważmy wszystkie liczby postaci $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$, gdzie k jest dodatnią liczbą całkowitą. Wykazać, że różnych takich liczb jest nie więcej niż $2\sqrt{n} + 1$.

Uwaga: Dla każdej liczby rzeczywistej x , przez $\lfloor x \rfloor$ oznaczamy największą liczbę całkowitą nie większą niż x .

Autor zadania: Mariusz Skalba

Rozwiązanie:

Jeśli $1 \leq k \leq \sqrt{n}$, to wyrażenie $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ przyjmuje oczywiście co najwyżej $\sqrt{n}$ wartości. Jeśli $\sqrt{n} < k \leq n$, to

$$1 \leq \lfloor \frac{n}{k} \rfloor \leq \lfloor \frac{n}{\sqrt{n}} \rfloor \leq \sqrt{n},$$

więc również $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ przyjmuje nie więcej niż $\sqrt{n}$ wartości.

Dla pozostałych liczb $k > n$, wartością wyrażenia $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ jest równa 0, więc łącznie dostajemy co najwyżej $2\sqrt{n} + 1$ wartości.

2. Dla każdej liczby całkowitej $n \geq 4$ wyznaczyć wszystkie takie ciągi liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \dots, a_n$, że

$$a_{i+1}^2 + a_{i+2}^2 + 2a_i a_{i+3} \leq 0 \quad \text{dla wszystkich } i = 1, 2, \dots, n,$$

gdzie $a_{n+t} = a_t$ dla $t \in \{1, 2, 3\}$.

Autor zadania: Michał Pilipczuk

Rozwiązanie:

Sumując stronami dane nierówności dostajemy, że $\sum_{i=1}^n (a_i + a_{i+3})^2 \leq 0$. Ponieważ suma kwadratów jest niedodatnia, wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie składniki są zerami, to $a_i = -a_{i+3}$ dla dowolnego $i = 1, 2, \dots, n$. Ponadto, we wszystkich nierównościach danych w zadaniu musi zachodzić równość, więc

$$a_{i+1}^2 + a_{i+2}^2 = 2a_i^2 \quad \text{dla wszystkich } i = 1, 2, \dots, n.$$

Odejmujemy dwa kolejne równania i po uwzględnieniu równości $a_i = -a_{i+3}$ otrzymujemy

$$(a_{i+1}^2 + a_{i+2}^2) - (a_{i+2}^2 + a_{i+3}^2) = 2(a_i^2 - a_{i+1}^2) \Rightarrow 3a_{i+1}^2 = 3a_i^2 \iff |a_{i+1}| = |a_i|$$

dla wszystkich $i = 1, 2, \dots, n$. Oznacza to, że wszystkie liczby w naszym ciągu mają tę samą wartość bezwzględną.

Rozważmy dwa przypadki.

Przypadek I. Pewne dwa kolejne wyrazy szukanego ciągu są równe.

Niech $a_{i+1} = a_{i+2}$ dla pewnego $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Wówczas, ponieważ wszystkie liczby w rozważanym ciągu mają tę samą wartość bezwzględną oraz $a_i = -a_{i+3}$, to $a_i = a_{i+1} = a_{i+2}$ lub $a_{i+1} = a_{i+2} = a_{i+3}$, więc pewne trzy kolejne wyrazy ciągu są równe. Zauważmy, że jeżeli pewien ciąg spełnia warunki zadania, to spełniają je też cykliczne przesunięcia ciągu. Bez straty ogólności rozważań przyjmijmy, że $a_1 = a_2 = a_3$. Stosując indukcję nietrudno wykazać, że dla dowolnego $i = 1, 2, \dots, n+3$ zachodzi wzór

$$a_i = \begin{cases} a_1 & \text{gdy } i \text{ daje przy dzieleniu przez 6 resztę } 1, 2 \text{ lub } 3 \\ -a_1 & \text{w przeciwnym wypadku} \end{cases}. \quad (1)$$

Jeżeli n nie jest liczbą podzielną przez 6, to pewna liczba spośród $n+1, n+2, n+3$ daje z dzielenia przez 6 resztę różną od 1, 2 i 3. Wtedy któraś z liczb $a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}$ jest równa $-a_1$ a z definicji ciągu wynika, że

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_{n+1} = a_{n+2} = a_{n+3},$$

więc $a_1 = -a_1$ i w konsekwencji $a_1 = 0$. Wobec tego wszystkie wyrazy rozważanego ciągu są równe zero.

Jeżeli zaś n jest liczbą podzielną przez 6, to zgodnie ze wzorem (II) rozważany ciąg jest postaci

$$(C, C, C, -C, -C, -C, \dots, C, C, C, -C, -C, -C),$$

dla pewnej liczby rzeczywistej C . Łatwo sprawdzić, że tak określony ciąg spełnia warunki zadania.

Przypadek II. Każde dwa kolejne wyrazy szukanego ciągu są różne.

Ponieważ $|a_i| = |a_{i+1}|$ dla dowolnego $i = 1, 2, \dots, n$, więc $a_{i+1} = -a_i$. Stosując indukcję nietrudno wykazać, że $a_i = (-1)^{i+1}a_1$ dla $i = 1, 2, \dots, n$. Jeżeli n jest liczbą nieparzystą, to $a_1 = a_{n+1} = (-1)^{n+2}a_1 = -a_1$, więc $a_1 = 0$ i otrzymujemy sprzeczność, gdyż wówczas $a_1 = a_2 = 0$. Jeżeli n jest liczbą parzystą, to ciąg jest postaci

$$(C, -C, C, -C, \dots, C, -C), \quad \text{gdzie } C \in \mathbb{R}.$$

Łatwo sprawdzić, że ciągi tej postaci spełniają warunki zadania.

Podsumowując: warunki zadania spełnia ciąg stale równy zero, ponadto jeśli n jest liczbą parzystą, to spełniają je również ciągi postaci $(C, -C, C, -C, \dots, C, -C)$, dla pewnego $C \in \mathbb{R}$ oraz jeśli n jest liczbą podzielną przez 6, to spełniają je też ciągi postaci

$$(C, C, C, -C, -C, -C, \dots, C, C, C, -C, -C, -C)$$

i jego cykliczne przesunięcia, gdzie $C \in \mathbb{R}$. $\square$

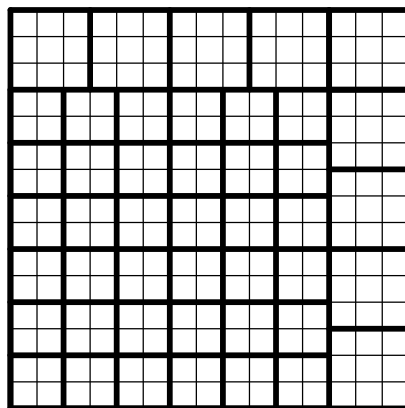
3. Szachownicę o wymiarach 15×15 przykryto przy pomocy płytek o wymiarach 2×2 i 3×3 w taki sposób, że każde pole jest przykryte przez dokładnie jedną płytkę oraz płytki nie wystają poza szachownicę. Wyznaczyć najmniejszą liczbę użytych płytek 3×3 , dla której jest to możliwe.

Autorzy zadania: Łukasz Bożyk, Michał Pilipczuk, Tomasz Przybyłowski

Rozwiązanie:

Odpowiedź: Najmniejszą liczbą płytek 3×3 , dla której przykrycie z treści zadania jest możliwe jest 9.

Niech x oznacza szukaną minimalną liczbę płytek 3×3 . Na rysunku przedstawiono przykrycie z użyciem dziewięciu płytek 3×3 , więc $x \leq 9$.



rys. 1

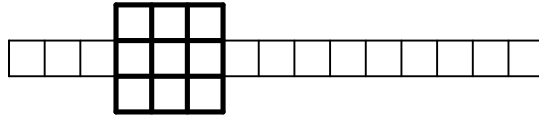
Rozważmy dowolne przykrycie. Niech n, m będą odpowiednio liczbą użytych płytek 2×2 i 3×3 . Wówczas $4n + 9m = 225$, lub równoważnie $m = 4(56 - n - 2m) + 1$, więc m daje przy dzieleniu przez 4 resztę 1. Oznacza to, że $x = 1, 5$ lub 9 .

Zauważmy, że ponieważ dowolna kolumna zawiera nieparzystą liczbę pól, a płytka 2×2 przykrywa 0 lub 2 pola, to muszą w niej istnieć pola przykryte przez płytkę 3×3 . Podobnie, w każdym wierszu muszą istnieć pola przykryte przez płytkę 3×3 .

Każda płytka 3×3 przykrywa pola w dokładnie trzech różnych kolumnach, więc liczba płytek 3×3 wynosi co najmniej $\frac{15}{3} = 5$. W szczególności nie może być $x = 1$, więc $x = 5$ lub 9 .

Przypuśćmy, że istnieje przykrycie przy użyciu pięciu płytek 3×3 . Każda z 15 kolumn musi posiadać pola przykryte przez płytki 3×3 , zaś każda z pięciu użytych płytek 3×3 przykrywa pola w dokładnie trzech kolumnach, więc żadne dwie płytki 3×3 nie mogą przykrywać pól tej samej kolumny. Ponadto, płytki 3×3 można tak ponumerować $P_1, P_2, \dots, P_5$, że i -ta płytka pokrywa pola w kolumnach $3i - 2, 3i - 1, 3i$ dla $i = 1, 2, \dots, 5$. Analogicznie żadne dwie płytki 3×3 nie mogą przykrywać pól tego samego wiersza.

Rozważmy płytkę P_2 , znajdującą się w kolumnach od czwartej do szóstej. Weźmy dowolny wiersz, w którym znajduje się ta płytka. Po jednej stronie płytki znajdują się trzy pola a po drugiej dziewięć, więc nie mogą być one przykryte przez płytki 2×2 . Oznacza to, że pola tego wiersza przykrywa inna płytka 3×3 — sprzeczność.

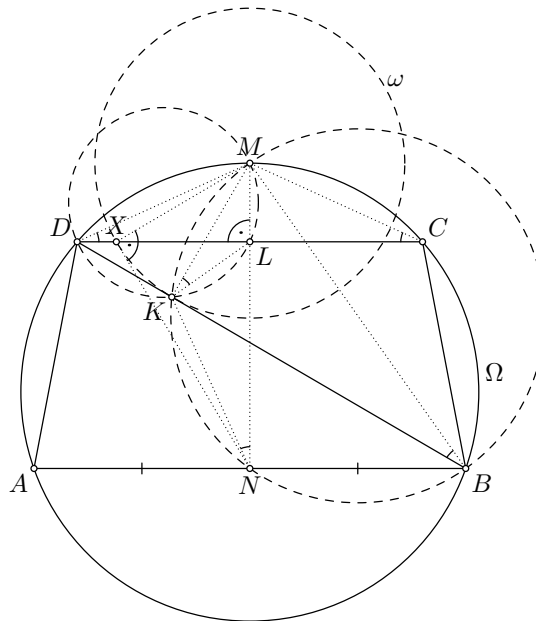


Wykazaliśmy, że nie istnieje żądane przykrycie przy użyciu pięciu płytek, więc $x = 9$. $\square$

4. Trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD jest wpisany w okrąg ω . Punkt M jest środkiem tego łuku CD okręgu Ω , na którym nie leży punkt A . Niech ω będzie okręgiem o środku M stycznym do prostej AD . Punkt X jest jednym z punktów przecięcia prostej CD z okręgiem ω . Udowodnić, że prosta styczna do okręgu ω w punkcie X przechodzi przez środek odcinka AB .

Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie:



Bez szkody przyjmijmy, że punkt X leży bliżej punktu D . Oznaczmy przez N i L środki odcinków AB i CD , odpowiednio. Ponadto niech K będzie rzutem punktu M na odcinek DB .

Kąty BKM i BNM są proste, więc na czworokącie $BNKM$ można opisać okrąg. Podobnie, na czworokącie $MLKD$ można również opisać okrąg. Wobec tego korzystając wielokrotnie z twier-

dzienia o równości kątów wpisanych opartych na tym samym łuku (lub łukach tej samej długości) otrzymujemy równości

$$\angle LKM = \angle LDM = \angle MCD = \angle MBK = \angle MNK.$$

Zatem trójkąty KML i NKM są podobne. Oznacza to że prawdziwa jest równość

$$\frac{ML}{MK} = \frac{MK}{MN}.$$

Punkt M jest środkiem łuku CD , zatem półprosta BM jest dwusieczną kąta DBC , więc odległości punktu M od prostych BD i BC są równe, zatem też równe odległości M od prostej AD , czyli promieniowi okręgu ω . Wobec tego $XM = MK$, stąd

$$\frac{ML}{MX} = \frac{MX}{MN}. \quad (2)$$

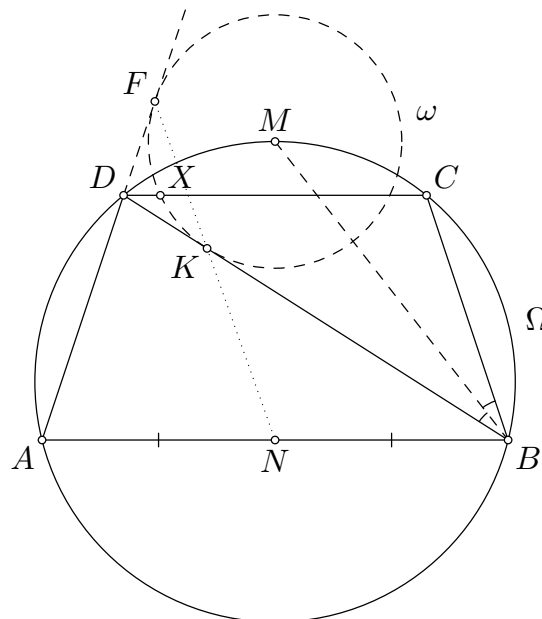
Z ostatniej równości wynika, że trójkąty XML i NMX są podobne, gdyż mają one dodatkowo wspólny kąt przy wierzchołku M . Wobec tego $\angle NXM = \angle MLX = 90^\circ$, czyli XN jest styczna do okręgu ω .

Inne rozwiązanie:

Punkt M jest środkiem łuku DC okręgu Ω , więc MB jest dwusieczną kąta CBD . Ponadto ω jest okręgiem stycznym do AD i BC , więc M jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ograniczony prostymi AD , BD i BC . W szczególności ω jest styczny do BD – oznaczmy punkt styczności przez K , jak wyżej.

Niech F będzie punktem styczności ω i AD , a N środkiem odcinka AB . Pokażemy, że punkty F , K i N są współliniowe. Istotnie, na podstawie twierdzenia Menelaosa zastosowanego dla trójkąta ADB i punktów F , K i N leżących odpowiednio na prostych AD , BD i BA wystarczy pokazać, że

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BK}{DK} \cdot \frac{FD}{FA} = 1. \quad (3)$$



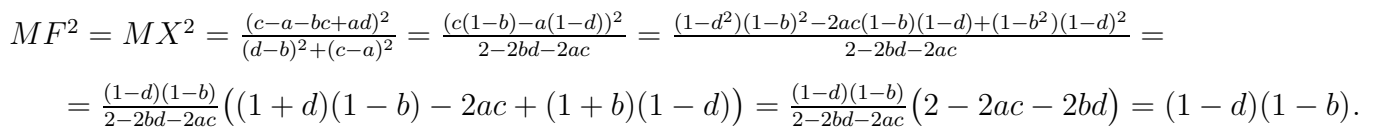
Jednakże $AN = NB$ (gdyż N jest środkiem AB) oraz $FD = DK$ ponieważ są to odcinki styczne poprowadzone z punktu D do ω .

Równość (3) jest zatem równoważna temu, że $AF = KB$. Zauważmy jednak, że prosta MN jest osią symetrii trapezu $ABCD$ i ω . Wobec tego długości odcinków stycznych do ω poprowadzonych z punktów A i B są równe, a co za tym idzie $AF = BK$.

Uwaga. Zauważmy, że punkty F , K i N są rzutami punktu M na proste AD , DB i AB , odpowiednio. Zatem na podstawie twierdzenia Simsona zastosowanego dla trójkąta ADB i punktu M leżącego na Ω , punkty F , K i N są współliniowe.

Pokażemy teraz rozwiązanie analityczne: Załóżmy, że okrąg opisany na trapezie $ABCD$ jest opisany równaniem $x^2 + y^2 = 1$ oraz że $A = (-a, b)$, $B = (a, b)$, $C = (c, d)$, $D = (-c, d)$, $b < d$. Mamy więc $a^2 + b^2 = 1 = c^2 + d^2$ oraz $M = (0, 1)$. Równanie prostej AD wygląda tak

więc kwadrat odległości punktu M od prostej AD , czyli kwadrat promienia okręgu ω jest równy



$MN^2 = MX^2 + XN^2$. Ponieważ $MX^2 = ML^2 + LX^2$ i $NX^2 = LX^2 + LN^2 = MX^2 - ML^2 + LN^2$,
więc

Dowód został zakończony.

5

Udowodnić, że istnieją również takie liczby całkowite $y_1, y_2, \dots, y_n$, że

$$\frac{K}{k_1} \cdot y_1 + \frac{K}{k_2} \cdot y_2 + \dots + \frac{K}{k_n} \cdot y_n = 1$$

oraz $|y_i| \leq k_i$ dla wszystkich $i = 1, 2, \dots, n$.

Autor zadania: Michał Pilipczuk

Rozwiązanie:

Zauważmy najpierw, że jeżeli $K = 1$, to $k_1 = 1$ i wystarczy przyjąć $y_1 = 1, y_2 = y_3 = \dots = y_n = 0$.

Założmy dalej, że $K \geq 2$. Niech

$$x_i = q_i k_i + r_i, \quad \text{gdzie} \quad 0 \leq r_i < k_i, \quad q_i, r_i \in \mathbf{Z}, \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, n.$$

Wówczas

$$\frac{K}{k_1} \cdot (q_1 k_1 + r_1) + \frac{K}{k_2} \cdot (q_2 k_2 + r_2) + \dots + \frac{K}{k_n} \cdot (q_n k_n + r_n) = 1,$$

więc

$$\frac{K}{k_1} \cdot r_1 + \frac{K}{k_2} \cdot r_2 + \dots + \frac{K}{k_n} \cdot r_n = 1 - K(q_1 + q_2 + \dots + q_n) = 1 + QK,$$

gdzie $Q = -(q_1 + q_2 + \dots + q_n)$. Ponieważ $0 \leq r_i < k_i$ dla $i = 1, 2, \dots, n$, to

$$0 \leq \frac{K}{k_1} \cdot r_1 + \frac{K}{k_2} \cdot r_2 + \dots + \frac{K}{k_n} \cdot r_n < \frac{K}{k_1} \cdot k_1 + \frac{K}{k_2} \cdot k_2 + \dots + \frac{K}{k_n} \cdot k_n = nK.$$

Oznacza to, że $0 \leq 1 + QK < nK$, więc $Q < n$. Ponieważ Q jest liczbą całkowitą i $Q \geq -\frac{1}{K} \geq -\frac{1}{2}$, więc $Q \geq 0$. Definiujemy

$$y_i = \begin{cases} r_i - k_i & \text{dla } 1 \leq i \leq Q \\ r_i & \text{dla } Q + 1 \leq i \leq n. \end{cases}$$

Łatwo sprawdzić, że tak zdefiniowany ciąg spełnia warunki zadania. Istotnie, dla dowolnego $i = 1, 2, \dots, n$ zachodzą nierówności

$$-k_i \leq r_i - k_i \leq y_i \leq r_i < k_i,$$

więc $|y_i| \leq k_i$. Ponadto

$$\begin{aligned} \frac{K}{k_1} \cdot y_1 + \frac{K}{k_2} \cdot y_2 + \dots + \frac{K}{k_n} \cdot y_n &= \left(\frac{K}{k_1} \cdot (r_1 - k_1) + \frac{K}{k_2} \cdot (r_2 - k_2) + \dots + \frac{K}{k_Q} \cdot (r_Q - k_Q) \right) + \\ &+ \left(\frac{K}{k_{Q+1}} \cdot r_{Q+1} + \dots + \frac{K}{k_n} \cdot r_n \right) = \left(\frac{K}{k_1} \cdot r_1 + \frac{K}{k_2} \cdot r_2 + \dots + \frac{K}{k_n} \cdot r_n \right) - QK = (1 + QK) - QK = 1. \end{aligned}$$

□

6. Dana jest liczba całkowita $n \geq 2019$. Liczby $1, 2, \dots, n^2$ wpisano w pola tablicy o wymiarach $n \times n$ tak, że w każde pole została wpisana dokładnie jedna liczba. Udowodnić, że można wybrać n pól w taki sposób, by w każdym wierszu i w każdej kolumnie znajdowało się dokładnie jedno wybrane pole oraz wśród liczb wpisanych w wybrane pola nie było czterech będących kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego.

Autor zadania: Rami Ayoush

Rozwiązanie:

Niech A oznacza liczbę rosnących, czterowyrazowych ciągów arytmetycznych o wyrazach ze zbioru $\{1, 2, \dots, n^2\}$. Każdy taki ciąg jest postaci $(a, a + d, a + 2d, a + 3d)$, dla pewnych $1 \leq a, d \leq n^2$. Ponieważ $3d < a + 3d \leq n^2$, więc $d < \frac{n^2}{3}$. Liczbę a możemy wybrać na mniej niż n^2 sposobów, zaś d na mniej niż $\frac{n^2}{3}$ sposoby, więc $A < \frac{n^4}{3}$.

Niech P oznacza zbiór tych wyborów n pól, że w każdym wierszu i w każdej kolumnie znajduje się jedno wybrane pole, zaś Q niech oznacza zbiór tych wyborów n pól, że wśród liczb wpisanych w wybrane pola istnieje czterowyrazowy ciąg arytmetyczny.

Oczywiście zbiór P ma $n!$ elementów. Oszacujmy liczbę elementów zbioru $P \cap Q$. Każdemu takiemu elementowi odpowiada przynajmniej jeden czterowyrazowy ciąg arytmetyczny. Odwrotnie, jeżeli pola w których wpisano liczby ustalonego czterowyrazowego ciągu arytmetycznego znajdują się w parami różnych wierszach i parami różnych kolumnach, to taki ciąg odpowiada $(n-4)!$ elementom zbioru $P \cap Q$, gdyż pola z pozostałych wierszy i kolumn można wybrać dowolnie na $(n-4)!$ sposobów. W przeciwnym przypadku takiemu ciągowi nie odpowiada żaden element zbioru $P \cap Q$. Oznacza to, że

$$|P \cap Q| \leq A \cdot (n-4)! < \frac{n^4}{3} \cdot (n-4)!.$$

Ponieważ

$$\frac{|P|}{|P \cap Q|} > \frac{3n!}{(n-4)!n^4} = \frac{3(n-1)(n-2)(n-3)}{n^3} = 3 \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \left(1 - \frac{3}{n}\right) \geq 3 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = 1,$$

wiecz istnieje element zbioru P , który nie należy do Q , co należało udowodnić. $\square$

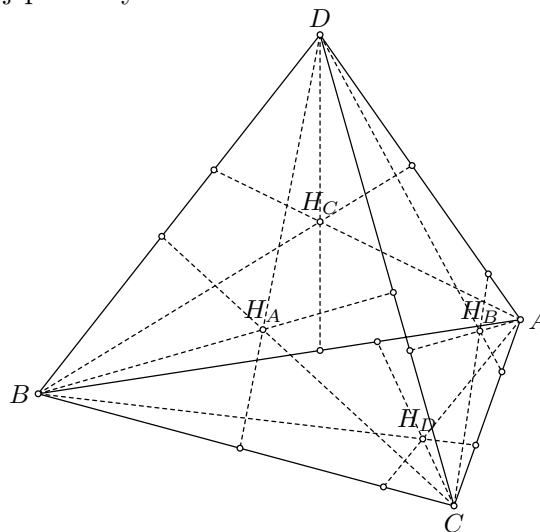
7. Ściany czworościanu $ABCD$ są trójkątami ostrokątnymi, a kąty dwuścienne przy krawędziach AB i CD są proste. Dowieść, że ortocentra trójkątów ABC , BCD , CDA , DAB leżą na jednej płaszczyźnie.

Autor zadania: Michał Kieza

Rozwiązanie:

Niech H_X oznacza ortocentrum ściany YZT dla $\{X, Y, Z, T\} = \{A, B, C, D\}$. Prosta BH_D jest prostopadła do AC , gdyż H_D jest ortocentrum trójkąta ABC . Ponadto BH_A jako prosta zawarta w płaszczyźnie BCD , która na mocy warunków zadania jest prostopadła do płaszczyzny ACD , również jest prostopadła do AC . Wobec tego prosta AC jest prostopadła do prostych BH_D i BH_A , czyli do płaszczyzny BH_AH_D . W szczególności prosta AC jest prostopadła do prostej H_AH_D .

Analogiczne rozumowanie pokazuje, że prosta H_AH_D jest prostopadła do prostej BD . Zatem prosta H_AH_D jest prostopadła do płaszczyzny Π równoległej do prostych AC i BD . Podobnie, prosta H_BH_C jest prostopadła do płaszczyzny Π . Wobec tego H_BH_C i H_AH_D są równoległe, więc w szczególności leżą na jednej płaszczyźnie.



8. Wykazać, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c zachodzi nierówność

$$\frac{3 + a^4 + b^3 + c^2}{1 + 2a^3 + 3b^2 + 6c} + \frac{3 + b^4 + c^3 + a^2}{1 + 2b^3 + 3c^2 + 6a} + \frac{3 + c^4 + a^3 + b^2}{1 + 2c^3 + 3a^2 + 6b} \geq \frac{3}{2}.$$

Autor zadania: Tomasz Cieśla

Rozwiązanie:

Korzystając z nierówności między średnią arytmetyczną a geometryczną dostajemy, że dla dowolnej liczby rzeczywistej dodatniej mamy

$$1 + 2x^3 = 1 + x^3 + x^3 \geq 3\sqrt[3]{1 \cdot x^3 \cdot x^3} = 3x^2$$

oraz

$$4 + 2x^3 = 2 + 2 + 2x^3 \geq 3\sqrt[3]{2 \cdot 2 \cdot 2x^3} = 6x.$$

Wobec tego

$$1 + 2a^3 + 3b^2 + 6c \leq 1 + 2a^3 + (1 + 2b^3) + (4 + 2c^3) = 2 \cdot (3 + a^3 + b^3 + c^3)$$

i podobnie

$$1 + 2b^3 + 3c^2 + 6a \leq 2 \cdot (3 + a^3 + b^3 + c^3) \quad \text{oraz} \quad 1 + 2c^3 + 3a^2 + 6b \leq 2 \cdot (3 + a^3 + b^3 + c^3).$$

Zatem

$$\begin{aligned} & \frac{3 + a^4 + b^3 + c^2}{1 + 2a^3 + 3b^2 + 6c} + \frac{3 + b^4 + c^3 + a^2}{1 + 2b^3 + 3c^2 + 6a} + \frac{3 + c^4 + a^3 + b^2}{1 + 2c^3 + 3a^2 + 6b} \geq \\ & \geq \frac{3 + a^4 + b^3 + c^2}{2 \cdot (3 + a^3 + b^3 + c^3)} + \frac{3 + b^4 + c^3 + a^2}{2 \cdot (3 + a^3 + b^3 + c^3)} + \frac{3 + c^4 + a^3 + b^2}{2 \cdot (3 + a^3 + b^3 + c^3)} = \\ & = \frac{3 + a^4 + a^3 + a^2}{2 \cdot (3 + a^3 + b^3 + c^3)} + \frac{3 + b^4 + b^3 + b^2}{2 \cdot (3 + a^3 + b^3 + c^3)} + \frac{3 + c^4 + c^3 + c^2}{2 \cdot (3 + a^3 + b^3 + c^3)} \geq \\ & \geq \frac{3 + 3\sqrt[3]{a^2 \cdot a^3 \cdot a^4}}{2 \cdot (3 + a^3 + b^3 + c^3)} + \frac{3 + 3\sqrt[3]{b^2 \cdot b^3 \cdot b^4}}{2 \cdot (3 + a^3 + b^3 + c^3)} + \frac{3 + 3\sqrt[3]{c^2 \cdot c^3 \cdot c^4}}{2 \cdot (3 + a^3 + b^3 + c^3)} = \\ & = \frac{3 + 3a^3}{2 \cdot (3 + a^3 + b^3 + c^3)} + \frac{3 + 3b^3}{2 \cdot (3 + a^3 + b^3 + c^3)} + \frac{3 + 3c^3}{2 \cdot (3 + a^3 + b^3 + c^3)} = \frac{3}{2}. \quad \square \end{aligned}$$

Uwaga. $1 + 2x^3 - 3x^2 = (1 - x)(1 + x - 2x^2) = (1 - x)^2(1 + 2x) \geq 0$ dla $x \geq 0$; oraz $4 + 2x^3 - 6x = 2(1 - x)(2 - x - x^2) = 2(1 - x)^2(2 + x) \geq 0$ dla $x \geq 0$. Użycie nierówności między średnimi nie jest więc konieczne. Główny pomysł polega na oszacowaniu z dołu przez ułamki o tym samym mianowniku: $3 + a^3 + b^3 + c^3$.

9. Dane są takie liczby dodatnie a, b , że liczby $a^2 + b^2$, a^3 i b^3 są wymierne. Udowodnić, że liczby a i b również są wymierne.

Autor zadania: Andrzej Fryszkowski

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$a^2b^2 = \frac{(a^2 + b^2)^3 - (a^3)^2 - (b^3)^2}{3(a^2 + b^2)} \in \mathbb{Q}.$$

Wobec tego $ab = \frac{a^3b^3}{a^2b^2}$ jest również liczbą wymierną. Mamy więc

$$a + b = \frac{a^3 + b^3}{a^2 + b^2 - ab} \in \mathbb{Q} \quad \text{oraz} \quad a - b = \frac{a^3 - b^3}{a^2 + b^2 + ab} \in \mathbb{Q}.$$

Zatem liczby

$$a = \frac{(a + b) + (a - b)}{2} \quad \text{oraz} \quad b = \frac{(a + b) - (a - b)}{2}$$

są wymierne.

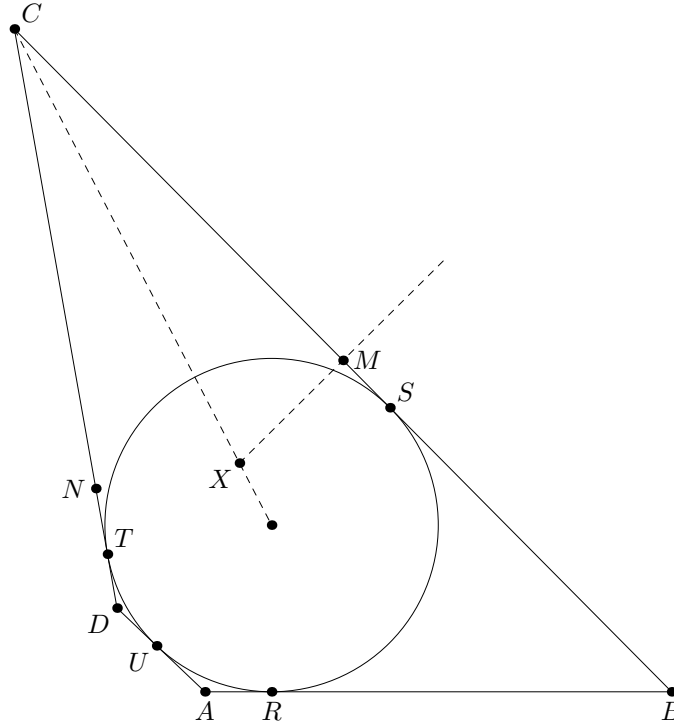
10. Czworokąt $ABCD$ jest opisany na okręgu, przy czym $BC = 2AB$. Symetralna boku BC oraz dwusieczna kąta DCB przecinają się w punkcie X . Wykazać, że proste AX i BD są prostopadłe.

Rozwiązanie. Zaczniemy od sformułowania i udowodnienia pomocniczego twierdzenia.

Jeśli punkty Y i $Z \neq Y$ leżą na płaszczyźnie Π , to dla każdej liczby rzeczywistej r zbiór tych punktów W płaszczyzny Π , dla których zachodzi równość $r = WY^2 - WZ^2$ jest prostą prostopadłą do prostej YZ .

Niech W będzie punktem prostej YZ . Załóżmy, że na prostej YZ wprowadzona został struktura osi liczbowej oraz że współrzędnymi punktów W, Y, Z są liczby w, y, z . Wtedy

Otrzymane wyrażenie to (niestała) funkcja liniowa zmiennej w , więc przyjmuje ono każdą wartość rzeczywistą dokładnie w jednym punkcie (dla każdej liczby rzeczywistej r istnieje dokładnie jedna taka liczba w , że $r = (z - y)(2w - y - z)$). Oznacza to, że na prostej YZ znajduje się dokładnie jeden taki punkt W_0 , że $W_0Y^2 - W_0Z^2 = r$. Z twierdzenia Pitagorasa wynika natychmiast, że każdemu punktowi W prostej L prostopadłej do YZ przechodzącej przez punkt W_0 przysługuje ta sama własność. Jasne jest też, że jeśli punkt W leży poza prostą L , to $WY^2 - WZ^2 \neq r$ – wystarczy znów zastosować twierdzenie Pitagorasa. Lemat został udowodniony. $\square$


$$AU = AR = AB - BR = BM - BS = SM = CS - CM = CT - CN = TN$$
$$XB^2 - XD^2 = (XM^2 + MB^2) - (XN^2 + ND^2) = MB^2 - ND^2 = AB^2 - AD^2.$$

9

Inne rozwiązanie:

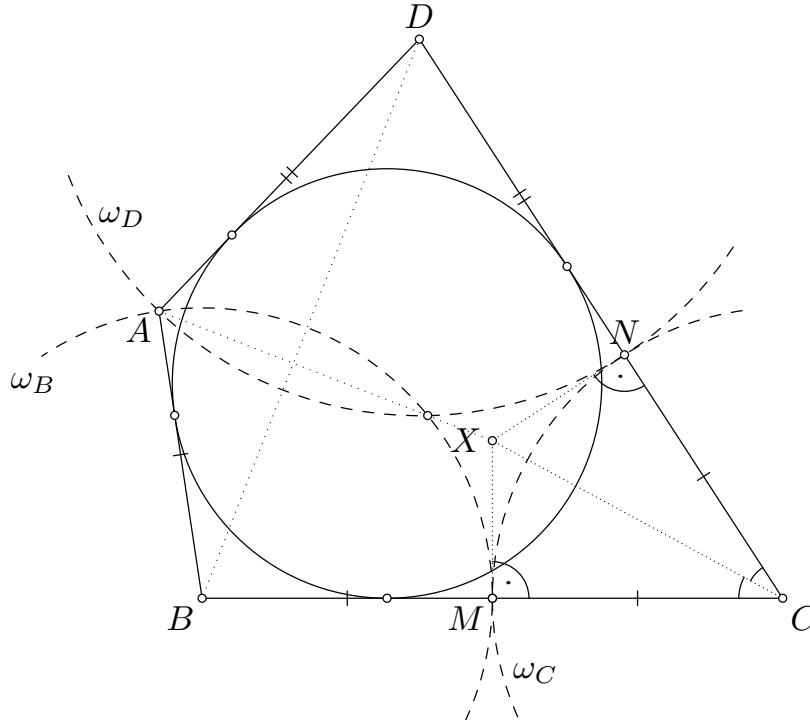
Oznaczmy przez M środek odcinka BC a przez N punkt na odcinku CD taki, że $CN = CM$. Wówczas z warunków zadania mamy równość $AB = BM = MC = CN$. Ponadto z faktu, że w czworokąt $ABCD$ można wpisać okrąg wynika że $AB + CD = BC + AD$. Wobec tego

$$2 \cdot AB + DN = AB + CN + DN = AB + CD = BC + AD = 2 \cdot AB + AD,$$

więc $AD = DN$.

Rozpatrzmy okręgi ω_B i ω_C o promieniu AB i środkach w punktach B i C , odpowiednio. Niech ω_D oznacza okrąg o środku w punkcie D i promieniu AD . Na podstawie wyżej pokazanych równości odcinków, okręgi w parach (ω_B, ω_C) i (ω_C, ω_D) są zewnętrznie styczne.

Z definicji punktów M, N, X wynika, że X jest punktem przecięcia się wspólnych stycznych wewnętrznych, a więc osi potęgowych, okręgów w parach (ω_B, ω_C) i (ω_C, ω_D) . Korzystając z twierdzenia o trzech osiach potęgowych dla okręgów ω_B, ω_C i ω_D widzimy, że punkt X jest ich środkiem potęgowym. W szczególności AX jest osią potęgową okręgów ω_B i ω_D , więc jest też prostą prostopadłą do prostej BD , która łączy środki okręgów ω_B i ω_D , skąd teza. $\square$



11. Dane są dodatnie liczby całkowite n i k . Na przyjęciu spotkało się n gości, spośród których niektórzy się znają. Okazało się, że każdy gość zna co najwyżej $2k$ innych gości, ale każdych dwóch nieznających się gości ma co najmniej k wspólnych znajomych na przyjęciu. Udowodnić, że $n \leq 6k$.

Uwaga: Jeśli gość A zna gościa B , to gość B zna gościa A .

Autor zadania: Michał Pilipczuk

Rozwiązanie:

Trójkę gości wśród których jeden gość z trójki zna dwóch pozostałych, którzy się nie znają nazwiemy *zbalansowaną*. Gościa należącego do zbalansowanej trójki, który zna dwóch pozostałych gości nazwiemy *popularnym*. Oszacujmy na dwa sposoby liczbę T zbalansowanych trójek gości.

Dla ustalonego gościa A , oszacujmy w ilu zbalansowanych trójkach może być on popularny. Zauważmy, że pozostali dwaj goście z trójki muszą być znajomymi A . Ponieważ A ma co najwyżej $2k$ znajomych, to liczba zbalansowanych trójek w których A jest popularny jest nie większa niż $\binom{2k}{2} = k(2k - 1)$. Każda zbalansowana trójka zawiera dokładnie jednego popularnego gościa, więc

$$T \leq nk(2k - 1).$$

Ustalmy parę gości B, C którzy się nie znają. Z założenia zadania mają oni co najmniej k wspólnych znajomych. Zauważmy, że każdy wspólny znajomy wraz z B i C tworzy zbalansowaną trójkę, więc B i C znajdują się razem w co najmniej k zbalansowanych trójkach. Ponieważ każda osoba zna co najwyżej $2k$ gości, to nie zna co najmniej $n - 1 - 2k$ gości. Wobec tego liczba par osób które się nie znają wynosi co najmniej $\frac{n(n-1-2k)}{2}$. Każda taka para gości znajduje się w co najmniej k zbalansowanych trójkach, więc

$$T \geq k \cdot \frac{n(n-1-2k)}{2}.$$

Łącząc otrzymane oszacowania dostajemy, że

$$k \cdot \frac{n(n-1-2k)}{2} \leq T \leq nk(2k-1),$$

więc

$$0 \leq \frac{nk}{2}(4k-2-(n-1-2k)) = \frac{nk}{2}(6k-1-n).$$

Oznacza to, że $6k-1 \geq n$, skąd teza. $\square$

12. Wszystkie liczby postaci x^2+y^2 , gdzie $x, y > 0$ są względnie pierwszymi liczbami całkowitymi, ustawmy w ciąg rosnący $z_1 < z_2 < z_3 < \dots$. Przykładowo:

$$z_1 = 2 = 1^2 + 1^2, \quad z_2 = 5 = 2^2 + 1^2, \quad z_3 = 10 = 3^2 + 1^2, \quad z_4 = 13 = 3^2 + 2^2, \quad \dots$$

Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele takich dodatnich liczb całkowitych n , że liczby $z_n, z_{n+1}, \dots, z_{n+2019}$ są nieparzyste.

Autorzy zadania: Wojciech Nadara, Mariusz Skalba

Rozwiązanie:

Niech

$$A := 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot \dots \cdot (4039^2 - 2).$$

Zauważmy, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej k mamy

$$\text{NWD}(kA+1, 1) = \text{NWD}(kA+1, 3) = \text{NWD}(kA+1, 5) = \dots = \text{NWD}(kA+1, 4039) = 1,$$

więc liczby

$$(kA+1)^2 + 1^2, (kA+1)^2 + 3^2, (kA+1)^2 + 5^2, \dots, (kA+1)^2 + 4039^2$$

są elementami ciągu $(z_n)_{n \geq 1}$. Ponadto jeśli k jest liczbą nieparzystą, to wyżej wypisane liczby również są nieparzyste.

Dla $k \geq 1$ niech n_k będzie taką liczbą całkowitą dodatnią, że $z_{n_k} = (kA+1)^2 + 1$. Oczywiście liczby $(n_k)_{k \geq 1}$ są parami różne. Udowodnimy, że liczby $(n_k)_{k \geq 1}$ dla nieparzystych k spełniają warunki zadania.

Ponieważ liczby

$$(kA+1)^2 + 1^2, (kA+1)^2 + 3^2, (kA+1)^2 + 5^2, \dots, (kA+1)^2 + 4039^2$$

są nieparzyste i są elementami ciągu $(z_n)_{n \geq 1}$, więc wystarczy dowieść, że $(kA+1)^2 + \ell$ nie jest elementem ciągu $(z_n)_{n \geq 1}$ dla nieparzystego k i $\ell \in \{2, 4, 6, \dots, 4039^2 - 1\}$. Przypuśćmy więc, że

$$(kA+1)^2 + \ell = x^2 + y^2,$$

dla pewnych liczb całkowitych x, y . Wystarczy dowieść, że $\text{NWD}(x, y) > 1$, co pozwoli na stwierdzenie, że liczba $(kA+1)^2 + \ell = x^2 + y^2$ nie występuje w ciągu $(z_n)_{n \geq 1}$.

Rozpatrzmy dwa przypadki:

1° $4 \mid \ell$. Wtedy $4 \mid (kA + 1)^2 + \ell$, więc $4 \mid x^2 + y^2$. Ponieważ kwadrat liczby całkowitej daje resztę 0 lub 1 przy dzieleniu przez 4, to $x^2 \equiv y^2 \equiv 0 \pmod{4}$. Zatem x i y są liczbami parzystymi, więc $\text{NWD}(x, y) > 1$.

2° $\ell \equiv 2 \pmod{4}$.

W rozważanym przypadku mamy $\ell + 1 \equiv 3 \pmod{4}$. Liczba $\ell + 1$ ma więc dzielnik pierwszy p postaci $4m + 3$ dla pewnej liczby nieujemnej całkowitej m . Ponieważ $\ell < 4039^2$ i $p \mid \ell + 1$, więc $p < 4039^2$, zatem $p \mid A$. Wobec tego

$$x^2 + y^2 = (kA + 1)^2 + \ell \equiv 0 \pmod{p}.$$

Z lematu pierwszego, który jest sformułowany i udowodniony poniżej, wynika więc, że $p \mid x$ i $p \mid y$, czyli $\text{NWD}(x, y) \geq p > 1$.

Inne rozwiązanie:

W rozwiązaniu przyda się nam następujący:

Lemat 1.

Niech n będzie liczbą całkowitą, $p = 4\ell + 3$ – liczbą pierwszą, $\ell \in \mathbf{Z}$. Wówczas jeśli $n = x^2 + y^2$ dla pewnych liczb całkowitych x, y , to $p \mid x$ i $p \mid y$. W szczególności $\text{NWD}(x, y) > 1$.

Dowód lematu 1.

Przypuśćmy, że $n = x^2 + y^2$ dla pewnych liczb całkowitych x, y . Jeśli $p \mid x$, to $p \mid n - x^2 = y^2$, więc $p \mid y$, skąd teza. Dowód w przypadku $p \mid y$ jest analogiczny. W dalszym ciągu $p \nmid x$ i $p \nmid y$. Ponieważ $p \mid n$, to $x^2 \equiv -y^2 \pmod{p}$. Podnosimy obustronnie kongruencję do potęgi $\frac{p-1}{2} = 2\ell + 1$ i otrzymujemy

$$x^{p-1} \equiv -y^{p-1} \pmod{p}.$$

Z małego twierdzenia Fermata wnioskujemy, że $x^{p-1} \equiv 1 \equiv y^{p-1} \pmod{p}$, zatem $1 \equiv -1 \pmod{p}$, co jest niemożliwe. Udowodniliśmy lemat.

Wykorzystamy jeszcze jeden lemat, ale przed jego sformułowaniem przypomnimy dwie definicje.

Definicja 1.

Liczba całkowita r nazywana jest resztą kwadratową modulo p wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka liczba całkowita x , że $x^2 \equiv r \pmod{p}$. Liczby, które nie są resztami kwadratowymi nazywane są nieresztami kwadratowymi modulo p .

Każda liczba jest resztą kwadratową modulo 2. Euler udowodnił, że jeśli $p > 2$ jest liczbą pierwszą i $p \nmid a$, to a jest resztą kwadratową modulo p wtedy i tylko wtedy, gdy $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$ oraz $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}$ wtedy i tylko wtedy, gdy a jest nieresztą kwadratową modulo p .

Definicja 2. (symbolu Legendre'a)

Niech $p > 2$ będzie liczbą pierwszą. Dla każdej liczby całkowitej a definiujemy

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } a \not\equiv 0 \pmod{p} \text{ oraz } a \text{ jest resztą kwadratową modulo } p; \\ -1 & \text{gdy } a \not\equiv 0 \pmod{p} \text{ oraz } a \text{ jest nieresztą kwadratową modulo } p; \\ 0 & \text{gdy } a \equiv 0 \pmod{p}. \end{cases}$$

Zachodzi ważny wzór $\left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right) \left(\frac{b}{p}\right)$. Z twierdzenia Eulera zacytowanego przed definicją 2 wynika, że $\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}$. Jeśli p, q są różnymi liczbami pierwszymi, to zachodzi wzór

$$(Q) \quad \left(\frac{p}{q}\right) \left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}}$$

zwany prawem wzajemności reszt kwadratowych, którego znaczenie trudno przecenić. Więcej o tym przeczytać można w większości książek poświęconych elementarnej teorii liczb, również w Wikipedii. Dodajmy, że wielu miejscach symbol Legendre’a jest definiowany przy założeniu, że $p \nmid a$

Lemat 2.

Niech n będzie nieparzystą dodatnią liczbą całkowitą, która nie jest kwadratem liczby całkowitej. Wówczas istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych p postaci $4\ell + 3$, dla których n nie jest resztą kwadratową modulo p .

Dowód lematu 2.

Niech $n = m^2 q_1 q_2 \dots q_s$, gdzie $q_1, q_2, \dots, q_s$ są parami różnymi liczbami pierwszymi i niech $p > n$ będzie dowolną liczbą pierwszą postaci $4\ell + 3$. Mamy $\left(\frac{p}{q_i}\right) \left(\frac{q_i}{p}\right) = (-1)^{\frac{(p-1)(q_i-1)}{4}}$ oraz $\left(\frac{p}{q_i}\right)^2 = 1$, więc $\left(\frac{q_i}{p}\right) = (-1)^{\frac{(p-1)(q_i-1)}{4}} \left(\frac{p}{q_i}\right) = (-1)^{(2\ell+1)\frac{(q_i-1)}{2}} \left(\frac{p}{q_i}\right) = (-1)^{\frac{q_i-1}{2}} \left(\frac{p}{q_i}\right)$ i wobec tego

$$\left(\frac{n}{p}\right) = \prod_{i=1}^s \left(\frac{q_i}{p}\right) = \prod_{i=1}^s \left(\frac{p}{q_i}\right) (-1)^{\frac{q_i-1}{2}}.$$

Przypuśćmy, że p spełnia następujący układ kongruencji

$$\begin{cases} p \equiv 3 \pmod{4} \\ p \equiv -x \pmod{q_1} \\ p \equiv -1 \pmod{q_i} \text{ dla } i = 2, 3, \dots, s \end{cases},$$

gdzie x jest dowolną nieresztą kwadratową modulo q_1 . Wówczas

$$\prod_{i=1}^s \left(\frac{p}{q_i}\right) (-1)^{\frac{q_i-1}{2}} = \left(\frac{x}{q_1}\right) \prod_{i=1}^s (-1)^{q_i-1} = -1,$$

więc n jest nieresztą kwadratową modulo p . Z chińskiego twierdzenia o resztach wynika istnienie takiej liczby a względnie pierwszej z $4q_1 q_2 \dots q_s$, że $p \equiv a \pmod{4q_1 q_2 \dots q_s}$. Z twierdzenia Dirichleta, według którego każdy ciąg arytmetyczny o wyrazie $a + mb$, przy czym $\text{NWD}(a, b) = 1$ (u nas $b = 4q_1 q_2 \dots q_s$), zawiera nieskończenie wiele liczb pierwszych wynika, że istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych p spełniających taką kongruencję. Stąd wynika teza lematu 2. $\square$

Przejdźmy do rozwiązania zadania. Udowodnimy, że można tak dobrać dodatnią liczbę całkowitą N , że liczby

$$a_0 = N^2 + (N+1)^2, a_1 = (N-1)^2 + (N+2)^2, \dots, a_{2019} = (N-2019)^2 + (N+2020)^2$$

są kolejnymi wyrazami ciągu (z_n) . Ponieważ wszystkie te liczby są nieparzyste wynika stąd teza zadania.

Po pierwsze niech $N \equiv 0 \pmod{4039!}$. Wówczas dla dowolnego $k = 0, 1, \dots, 2019$, mamy

$$\text{NWD}(N-k, N+k+1) = \text{NWD}(N-k, 2k+1) = \text{NWD}(k, 2k+1) = 1.$$

Oznacza to, że liczby $a_0, a_1, \dots, a_{2019}$ są sumami kwadratów względnie pierwszych liczb całkowitych, więc są wyrazami ciągu (z_n) .

Niech m będzie taką liczbą całkowitą, że $a_0 \leq m \leq a_{2019}$ i $m \neq a_i$ dla $i = 0, 1, \dots, 2019$. Ponieważ, $a_0 = 2N^2 + 2N + 1$ zaś $a_{2019} = 2N^2 + 2N + 2019^2 + 2020^2$, to

$$m = 2N^2 + 2N + k, \text{ dla pewnego } 1 \leq k \leq 2019^2 + 2020^2.$$

Udowodnimy, że liczba $2k-1$ nie jest kwadratem liczby całkowitej. Przypuśćmy przeciwnie, niech $2k-1 = (2t+1)^2$ dla pewnego t . Ponieważ $1 \leq 2k-1 \leq 2(2019^2 + 2020^2) - 1 = 4039^2$, więc $0 \leq t \leq 2019$. Oznacza to, że

$$m = 2N^2 + 2N + k = 2N^2 + 2N + (2t^2 + 2t + 1) = (N-t)^2 + (N+t+1)^2 = a_t,$$

wbrew założeniu.

Z lematu drugiego wynika, że istnieje taka liczba pierwsza $p_k > 4039$ postaci $4l + 3$, że $2k - 1$ jest nieresztą kwadratową modulo p_k . Ponieważ -1 jest nieresztą kwadratową modulo p_k , więc $(-1)(2k - 1) = 1 - 2k$ jest resztą kwadratową modulo p_k (jako iloczyn dwóch niereszt kwadratowych). Niech x_k będzie taką liczbą całkowitą, że $x_k^2 \equiv (1 - 2k) \pmod{p_k}$ i dobierzmy N tak, aby $2N + 1 \equiv x_k \pmod{p_k}$. Mamy

$$2N^2 + 2N + k = \frac{1}{2}((2N + 1)^2 - (1 - 2k)) \equiv \frac{1}{2}(x_k^2 - (1 - 2k)) \equiv 0 \pmod{p_k}.$$

Liczba $2N^2 + 2N + k$ jest podzielna przez liczbę pierwszą postaci $4l + 3$, więc nie jest sumą kwadratów względnie pierwszych liczb całkowitych – lemat pierwszy.

Zauważmy, że ponieważ lemat drugi gwarantuje istnienie nieskończenie wielu liczb pierwszych o żądanej własności, to możemy wybrać liczby $p_2, p_3, \dots, p_{2019^2 + 2020^2 - 1}$ parami różne i większe od 4039.

Oznacza to, że jeżeli N spełnia warunki

$$\begin{cases} N \equiv 0 \pmod{4039!} \\ N \equiv \frac{x_2 - 1}{2} \pmod{p_2} \\ \dots \\ N \equiv \frac{x_{2019^2 + 2020^2 - 1} - 1}{2} \pmod{p_{2019^2 + 2020^2 - 1}} \end{cases},$$

to $a_0, a_1, \dots, a_{2019}$ są sumami kwadratów względnie pierwszych liczb całkowitych. Ponadto, żadna inna liczba większa od a_0 i mniejsza niż a_{2019} nie jest sumą kwadratów względnie pierwszych liczb całkowitych. Zatem liczby $a_0, a_1, \dots, a_{2019}$ to kolejne wyrazy ciągu (z_n) . Istnienie takiego N wynika wprost z chińskiego twierdzenia o resztach. $\square$



LXXI Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe

zawodów stopnia drugiego

7 lutego 2020 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Załóżmy, że parami różne liczby rzeczywiste a, b, c, d spełniają warunek

$$(a^2 + b^2 - 1)(a + b) = (b^2 + c^2 - 1)(b + c) = (c^2 + d^2 - 1)(c + d).$$

Udowodnić, że $a + b + c + d = 0$.

2. Dana jest dodatnia liczba całkowita n . Jadzia ma za zadanie napisać na tablicy wszystkie liczby od 1 do $2n - 1$ po kolei, przy czym każdą z nich może napisać czerwoną lub niebieską kredą. Powiemy, że para liczb $i, j \in \{1, \dots, 2n - 1\}$, gdzie $i \leq j$, jest *dobra*, jeśli wśród liczb $i, i + 1, \dots, j$ nieparzyście wiele zostało napisanych na tablicy na niebiesko. Wyznaczyć, w zależności od n , największą możliwą liczbę dobrych par, jaką Jadzia może uzyskać.

3. Punkt M jest środkiem boku BC trójkąta ostrokątnego ABC . Okrąg wpisany w trójkąt ABM jest styczny do boku AB w punkcie D . Okrąg wpisany w trójkąt ACM jest styczny do boku AC w punkcie E . Punkt F jest taki, że czworokąt $DMEF$ jest równoległobokiem. Udowodnić, że punkt F leży na prostej zawierającej dwusieczną kąta BAC .

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.



LXXI Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe

zawodów stopnia drugiego

8 lutego 2020 r. (drugi dzień zawodów)

4. W sześciokącie wypukłym $ABCDEF$ prawdziwe są równości

$$AB = CD = EF \quad \text{oraz} \quad BC = DE = FA.$$

Wykazać, że jeśli $\sphericalangle FAB + \sphericalangle ABC = \sphericalangle FAB + \sphericalangle EFA = 240^\circ$, to $\sphericalangle FAB + \sphericalangle CDE = 240^\circ$.

5. Dana jest liczba pierwsza $p > 2$. Niech S będzie zbiorem $p + 1$ liczb całkowitych. Wykazać, że istnieją parami różne liczby $a_1, a_2, \dots, a_{p-1}$, należące do zbioru S , dla których liczba

$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + (p - 1)a_{p-1}$$

jest podzielna przez p .

6. Załóżmy, że nieujemne liczby rzeczywiste $a_0, a_1, a_2, \dots$ oraz $b_0, b_1, b_2, \dots$ spełniają nierówności $a_i^2 \leq a_{i-1}a_{i+1}$ oraz $b_i^2 \leq b_{i-1}b_{i+1}$ dla wszystkich $i \geq 1$. Definiujemy liczby $c_0, c_1, c_2, \dots$ wzorem

$$c_n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a_i b_{n-i}$$

(przy czym $c_0 = a_0 b_0$). Wykazać, że dla wszystkich $k \geq 1$ prawdziwa jest nierówność $c_k^2 \leq c_{k-1} c_{k+1}$.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.



LXXI Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia drugiego

7 lutego 2020 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Załóżmy, że parami różne liczby rzeczywiste a, b, c, d spełniają warunek

$$(a^2 + b^2 - 1)(a + b) = (b^2 + c^2 - 1)(b + c) = (c^2 + d^2 - 1)(c + d).$$

Udowodnić, że $a + b + c + d = 0$.

Autor zadania: Piotr Nayar

Rozwiązanie:

Mamy

$$\begin{aligned} 0 &= (a^2 + b^2 - 1)(a + b) - (b^2 + c^2 - 1)(b + c) = \\ &= (a - c)(b^2 - 1) + a^2(a + b) - c^2(b + c) = \\ &= (a - c)(b^2 - 1 + (a^2 + ac + c^2) + b(a + c)) \\ &= (a - c)(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca - 1). \end{aligned}$$

Ponieważ, liczby a i c są różne, to

$$(1) \quad a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca - 1 = 0.$$

Podobnie, ponieważ liczby b i d są różne, to z równości

$$\begin{aligned} 0 &= (b^2 + c^2 - 1)(b + c) - (c^2 + d^2 - 1)(c + d) = \\ &= (b - d)(c^2 - 1) + b^2(b + c) - d^2(c + d) = \\ &= (b - d)(c^2 - 1 + (b^2 + bd + d^2) + c(b + d)) \\ &= (b - d)(b^2 + c^2 + d^2 + bc + cd + db - 1) \end{aligned}$$

wynika, że

$$(2) \quad b^2 + c^2 + d^2 + bc + cd + db - 1 = 0.$$

Odejmując stronami równania (1) i (2) dostajemy, że

$$0 = a^2 + ab + ac - d^2 - bd - cd = (a - d)(a + b + c + d).$$

Ponieważ liczby a i d są różne, to otrzymujemy tezę. $\square$

Sposób II

Równość $(a^2 + b^2 - 1)(a + b) = (b^2 + c^2 - 1)(b + c)$ możemy potrak-

tować jako równanie z niewiadomą a i z parametrami b, c . Oczywiście pierwiastkiem tego równania jest c , a to oznacza, że wielomian $(a^2 + b^2 - 1)(a + b) - (b^2 + c^2 - 1)(b + c)$ dzieli się przez $a - c$. Podzielwszy otrzymujemy

$$\begin{aligned} 0 &= (a^2 + b^2 - 1)(a + b) - (b^2 + c^2 - 1)(b + c) = \\ &= (a - c)(a^2 + a(b + c) + b^2 + bc + c^2 - 1). \end{aligned}$$

Podobnie z założenia $(c^2 + d^2 - 1)(c + d) = (b^2 + c^2 - 1)(b + c)$ wynika równość

$$\begin{aligned} 0 &= (d^2 + c^2 - 1)(d + c) - (b^2 + c^2 - 1)(b + c) = \\ &= (d - b)(d^2 + d(b + c) + b^2 + bc + c^2 - 1). \end{aligned}$$

Ponieważ $a \neq c$ i $d \neq b$, więc liczby a i d są różnymi pierwiastkami równania $x^2 + x(b + c) + b^2 + bc + c^2 - 1 = 0$. Z wzoru Viète'a wynika, że $a + d = -(b + c)$ czyli $a + b + c + d = 0$. Zakończyliśmy dowód. $\square$

Uwaga. Drugi sposób pojawił się w rozwiązaniach uczestników drugiego stopnia OM w kilku różnych wersjach. Pierwszy – rozwiązanie firmowe – też.

2. Dana jest dodatnia liczba całkowita n . Jadzia ma za zadanie napisać na tablicy wszystkie liczby od 1 do $2n - 1$ po kolei, przy czym każdą z nich może napisać czerwoną lub niebieską kredą. Powiemy, że para liczb $i, j \in \{1, \dots, 2n - 1\}$, gdzie $i \leq j$, jest *dobra*, jeśli wśród liczb $i, i + 1, \dots, j$ nieparzyście wiele zostało napisanych na tablicy na niebiesko. Wyznaczyć, w zależności od n , największą możliwą liczbę dobrych par, jaką Jadzia może uzyskać.

Autor zadania: Łukasz Bożyk

Rozwiązanie:

Odpowiedź: n^2 .

Jeżeli Jadzia pomaluje każdą liczbę na niebiesko, to para (i, j) jest dobra wtedy i tylko wtedy, gdy $j - i$ jest liczbą parzystą. Zauważmy, że przy ustalonym $j - i = k$ liczbę i można wybrać dowolnie spośród liczb $1, 2, \dots, 2n - 1 - k$. Oznacza to, że liczba dobrych par jest równa $(2n - 1 - 0) + (2n - 1 - 2) + \dots + (2n - 1 - 2(n - 1)) = n \left(\frac{(2n - 1) + 1}{2} \right) = n^2$.

Udowodnimy teraz, że większej liczby dobrych par nie da się uzyskać. Dla $i = 1, 2, \dots, 2n - 1$ niech s_i oznacza liczbę niebieskich liczb wśród liczb $1, 2, \dots, i$. Ponadto przyjmijmy $s_0 = 0$. Dla dowolnych i, j liczba niebieskich liczb pośród $i, i + 1, \dots, j$ jest równa $s_j - s_{i-1}$. Zatem para (i, j) jest dobra wtedy i tylko wtedy, gdy $s_j - s_{i-1}$ jest liczbą nieparzystą, lub równoważnie liczby s_{i-1} i s_j są różnej parzystości.

Oznaczmy przez p liczbę liczb parzystych pośród $s_1, s_2, \dots, s_{2n-1}$. Wówczas wśród liczb $s_0, s_1, \dots, s_{2n-1}$ jest $p + 1$ liczb parzystych oraz $2n - 1 - p$ liczb nieparzystych. Liczba par liczb s_{i-1}, s_j o różnej parzystości jest równa

$$(p + 1)(2n - 1 - p) \leq \left(\frac{p + 1 + 2n - 1 - p}{2} \right)^2 = n^2,$$

więc liczba dobrych par jest nie większa od n^2 . $\square$

3. Punkt M jest środkiem boku BC trójkąta ostrokątnego ABC . Okrąg wpisany w trójkąt ABM jest styczny do boku AB w punkcie D . Okrąg wpisany w trójkąt ACM jest styczny do boku AC w punkcie E . Punkt F jest taki, że czworokąt $DMEF$ jest równoległobokiem. Udowodnić, że punkt F leży na dwusiecznej kąta BAC .

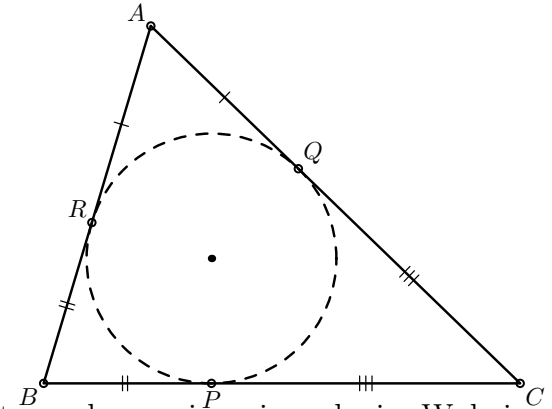
Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie:

Sposób I

Rozpatrzmy dowolny trójkąt $A'B'C'$ którego okrąg wpisany jest styczny do boków $B'C'$, $C'A'$ i $A'B'$ w punktach P , Q i R odpowiednio. Wówczas na podstawie twierdzenia o równości odcinków stycznych wiemy, że $A'R = A'Q := x$, $B'R = B'P := y$ oraz $C'P = C'Q := z$. Mamy więc $x + y = A'B'$, $y + z = B'C'$ oraz $z + x = C'A'$. Dodając te równości stronami, następnie dzieląc wynik przez 2 otrzymujemy $x + y + z = \frac{1}{2}(A'B' + B'C' + C'A')$. Wobec tego prawdziwy jest wzór

$$(3) \quad A'R = (x + y + z) - (y + z) = \frac{1}{2}(A'B' + A'C' - B'C').$$



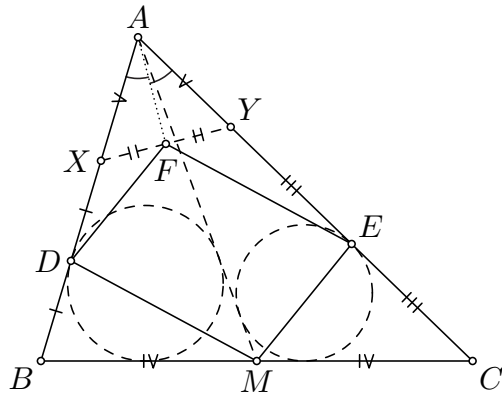
Przejdźmy teraz do rozwiązania zadania. Wykażemy najpierw, że $AM > \frac{1}{2}BC$. Przeprowadzimy rozumowanie nie wprost: założmy, że $AM \leq \frac{1}{2}BC$. Wówczas $AM \leq BM$, skąd $\sphericalangle MBA \leq \sphericalangle BAM$. Podobnie, $AM \leq CM$, więc $\sphericalangle ACM \leq \sphericalangle MAC$. Wnioskujemy, że $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BAM + \sphericalangle MAC \geq \sphericalangle MBA + \sphericalangle ACM = 180^\circ - \sphericalangle BAC$. Jednakże nierówność ta nie może być spełniona, gdyż kąt BAC jest ostry na mocy założeń zadania. Otrzymana sprzeczność kończy dowód nie wprost. Zatem istotnie $AM > \frac{1}{2}BC$.

Z nierówności $AM > \frac{1}{2}BC$ oraz ze wzoru (3) wynika, że $AD > BD$ oraz $AE > EC$. W takim razie istnieją punkty X i Y na odcinkach odpowiednio AD i AE takie, że

$$BD = DX \text{ oraz } EC = EY.$$

Oznaczmy przez F' środek odcinka XY . Wówczas na podstawie twierdzenia o linii środkowej w trójkącie mamy, że $DF' \parallel BY$, $ME \parallel BY$, $DM \parallel XC$ oraz $F'E \parallel XC$. W szczególności oznacza to, że czworokąt $DMEF'$ jest równoległobokiem, a stąd $F = F'$.

Pozostaje zatem wykazać, że $AX = AY$; wtedy AF jako środkowa w trójkącie równoramiennym AXY jest również dwusieczną kąta BAC .



Korzystając dwukrotnie z (3) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} AX &= AB - 2 \cdot BD = AB - 2 \cdot \frac{AB + BM - AM}{2} = \\ &= AM - BM = AM - MC = AC - 2 \cdot \frac{AC + MC - AM}{2} = \\ &= AC - 2 \cdot EC = AY. \quad \square \end{aligned}$$

Sposób II

W tym rozwiązaniu stosujemy oznaczenia: jeśli $x_1, y_1, x_2, y_2, t_1, t_2$ są dowolnymi liczbami rzeczywistymi i $X_1 = (x_1, y_1)$, $X_2 = (x_2, y_2)$, to $t_1 X_1 + t_2 X_2 = (t_1 x_1 + t_2 x_2, t_1 y_1 + t_2 y_2)$. Zakładamy, że punkty A, B, C

leżą na płaszczyźnie, na której wybrano pewien układ współrzędnych prostokątnych. Niech a, b, c oznaczają kolejno długości odcinków BC, CA, AB , a m długość odcinka AM . Oczywiście $M = \frac{1}{2}(B + C)$. Z równości (3) z poprzedniego rozwiązania zastosowanej do trójkąta ABM wynika, że $BD = \frac{1}{2}(c + \frac{a}{2} - m)$ i $AD = \frac{1}{2}(c - \frac{a}{2} + m)$. Stąd otrzymujemy $D = \frac{AD}{AB}B + \frac{BD}{AB}A = \frac{1}{2c}((c - \frac{a}{2} + m)B + (c + \frac{a}{2} - m)A)$. W taki sam sposób otrzymujemy równość $E = \frac{1}{2b}((b - \frac{a}{2} + m)C + (b + \frac{a}{2} - m)A)$. Punkt F jest czwartym wierzchołkiem równoległoboku, którego kolejnymi wierzchołkami są D, M, E , zatem $\frac{1}{2}(D + E) = \frac{1}{2}(M + F)$ (środkii przekątnych pokrywają się) i wobec tego

$$F = D + E - M =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2c}((c - \frac{a}{2} + m)B + (c + \frac{a}{2} - m)A) + \\ &\quad + \frac{1}{2b}((b - \frac{a}{2} + m)C + (b + \frac{a}{2} - m)A) - \frac{1}{2}(B + C) = \\ &= \frac{1}{2bc}((2bc + (b + c)(\frac{a}{2} - m))A + \frac{1}{2c}(m - \frac{a}{2})B + \frac{1}{2b}(m - \frac{a}{2})C) = \\ &= A + \frac{1}{2}(m - \frac{a}{2})\left(\frac{1}{c}(B - A) + \frac{1}{b}(C - A)\right). \end{aligned}$$

Przekształcamy dalej: $F - A = \frac{1}{2}(m - \frac{a}{2})\left(\frac{B-A}{c} + \frac{C-A}{b}\right)$. Niech $D_1 = A + \frac{1}{2}(m - \frac{a}{2})\frac{B-A}{c}$ i $E_1 = A + \frac{1}{2}(m - \frac{a}{2})\frac{C-A}{b}$. Jasne jest, że długości odcinków AD_1 i AE_1 są równe $|\frac{1}{2}(m - \frac{a}{2})|$, punkt D_1 leży na prostej AB , punkt E_1 leży na prostej AC , F jest środkiem odcinka D_1E_1 , zatem prosta AF zawiera dwusieczną kąta D_1AE_1 , więc też kąta BAC . $\square$

Uwaga 1: W drugim rozwiązaniu nie korzystamy z tego, że trójkąt jest ostrokątny. Pierwsze rozwiązanie wymagałoby wydłużenia o jedno zdanie, by uzyskać tezę również dla trójkątów nieostrokątnych.

Uwaga 2: Dodawanie punktów w drugim sposobie to standardowe postępowanie. Stosowane również w programach komputerowych używanych do „rysowania”. Poza tym jeśli potraktować pary liczb rzeczywistych jako liczby zespolone, więc utożsamiać punkt (x, y) , $x, y \in \mathbf{R}$ z liczbą $x + yi$, gdzie $i^2 = -1$, to takie dodawanie jest dodawaniem liczb zespolonych. Można przyjąć, że $A = (0, 0)$, więc zrezygnować

z pisanie A w kolejnych wzorach. Można też uznać, że mamy do czynienia z liczbami zespolonymi i że dwusieczną kąta BAC jest półprosta złożona z nieujemnych liczb rzeczywistych. To jeszcze bardziej upraszcza zapis rozwiązania. Można napisać, że $B = c\bar{z}$, $C = bz$ dla pewnej liczby zespolonej z , dla której $|z| = 1$, a litery b, c w dalszym ciągu oznaczają długości boków AC i AB trójkąta ABC . Zachęcamy do sprawdzenia, że wtedy $D = \frac{1}{2}(c - \frac{a}{2} + m)\bar{z}$, $E = \frac{1}{2}(b - \frac{a}{2} + m)z$, $M = \frac{1}{2}(bz + c\bar{z})$ i wobec tego $F = \frac{1}{2}(m - \frac{a}{2})(z + \bar{z})$, zatem $F \in \mathbf{R}$, co kończy dowód. Niektórzy uczestnicy zawodów drugiego stopnia tak właśnie zrobili skracając istotnie swe rozwiązania.

O współrzędnych barycentrycznych przeczytać można w różnych książkach, również w artykule prof. dr. hab. Marka Kordosa:

http://www.deltami.edu.pl/temat/matematyka/geometria/planimetria/2012/02/28/Co_moga_nam_dac_ciezary_i_wypory/

W istocie rzeczy w drugim rozwiązaniu użyliśmy współrzędnych barycentrycznych, choć nie użyliśmy tej nazwy, bo nie była istotna.



LXXI Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych
zawodów stopnia drugiego

8 lutego 2020 r. (drugi dzień zawodów)

4. W sześciokącie wypukłym $ABCDEF$ prawdziwe są równości

$$AB = CD = EF \quad \text{oraz} \quad BC = DE = FA.$$

Wykazać, że jeśli $\sphericalangle FAB + \sphericalangle ABC = \sphericalangle FAB + \sphericalangle EFA = 240^\circ$, to $\sphericalangle FAB + \sphericalangle CDE = 240^\circ$.

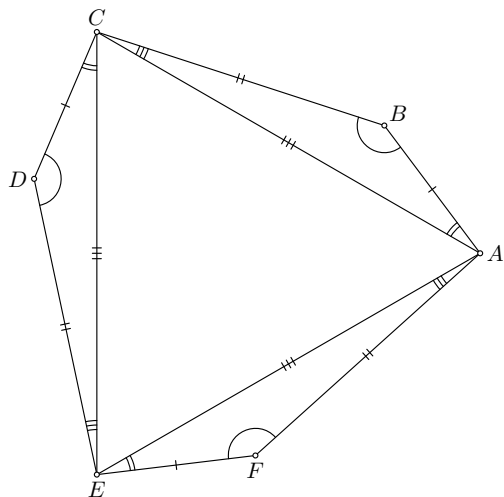
Autor zadania: Michał Kieza

Rozwiązanie:

Z danego w treści zadania warunku wynika w szczególności, że $\sphericalangle ABC = \sphericalangle EFA$. Wobec tego na podstawie cechy przystawania (bkb) trójkąty CBA i EFA są przystające, zatem $AC = EA$. Ponadto

$$\begin{aligned} \sphericalangle EAC &= \sphericalangle FAB - (\sphericalangle FAE + \sphericalangle CAB) = \sphericalangle FAB - (\sphericalangle FAE + \sphericalangle AEF) = \\ &= \sphericalangle FAB - (180^\circ - \sphericalangle EFA) = 240^\circ - 180^\circ = 60^\circ. \end{aligned}$$

Zatem trójkąt EAC jest równoboczny, skąd $EC = EA$.



Na podstawie cechy przystawania (bbb) trójkąty DEC i EFA są przystające, czyli

$$\sphericalangle FAB + \sphericalangle CDE = (240^\circ - \sphericalangle EFA) + \sphericalangle EFA = 240^\circ. \quad \square$$

5. Dana jest liczba pierwsza $p > 2$. Niech S będzie zbiorem $p + 1$ liczb całkowitych. Wykazać, że istnieją parami różne liczby $a_1, a_2, \dots, a_{p-1}$, należące do zbioru S , dla których liczba

$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + (p-1)a_{p-1}$$

jest podzielna przez p .

Autor zadania: Michał Kieza

Rozwiązanie:

Założmy, że można tak wybrać p liczb ze zbioru S , by ich suma nie była podzielna przez p . Oznaczmy te liczby przez $b_1, b_2, \dots, b_p$. Udowodnimy, że liczby

$$c_1 := b_1 + 2b_2 + \dots + (p-1)b_{p-1} + pb_p$$

$$c_2 := b_2 + 2b_3 + \dots + (p-1)b_p + pb_1$$

...

$$c_p := b_p + 2b_1 + \dots + (p-1)b_{p-2} + pb_{p-1}$$

dają parami różne reszty z dzielenia przez p . Założmy, że dla pewnych $i < j$ mamy $c_i \equiv c_j \pmod{p}$. Zauważmy, że dla dowolnego n mamy

$$c_n = b_n + 2b_{n+1} + \dots + pb_{n-1} \equiv \sum_{k=1}^p (k-n+1)b_k \pmod{p}.$$

Zatem

$$0 \equiv c_j - c_i \equiv \sum_{k=1}^p (k-j+1)b_k - (k-i+1)b_k \equiv (i-j) \sum_{k=1}^p b_k \pmod{p}.$$

Ponieważ $\sum_{k=1}^p b_k$ nie jest podzielna przez p , to $p \mid i-j$. Jednak $0 > i-j > -j \geq -p$, więc otrzymujemy sprzeczność. Oznacza to, że istotnie liczby $c_1, \dots, c_p$ dają parami różne reszty z dzielenia przez p . W szczególności dla pewnego k , mamy $p \mid c_k$. Przyjmując $a_i = b_{1+((k+i-2) \bmod p)}$ dla $i = 1, 2, \dots, p-1$ otrzymujemy tezę zadania.

Pozostaje rozważyć sytuację, w której suma dowolnych p liczb ze zbioru S jest podzielna przez p . W takim przypadku każda z liczb w zbiorze S daje tę samą resztę z dzielenia przez p co suma liczb

w zbiorze S , oznaczmy tę resztę przez r . Niech $a_1, a_2, \dots, a_{p-1}$ będą dowolnymi liczbami ze zbioru S . Mamy

$$\begin{aligned} a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + (p-1)a_{p-1} &\equiv r(1 + 2 + \dots + (p-1)) = \\ &= r \cdot \frac{p(p-1)}{2} \equiv 0 \pmod{p}. \end{aligned}$$

W ostatniej równości skorzystaliśmy z założenia, że $p > 2$, czyli 2 dzieli $p-1$. Wynika stąd teza. $\square$

6. Załóżmy, że nieujemne liczby rzeczywiste $a_0, a_1, a_2, \dots$ oraz $b_0, b_1, b_2, \dots$ spełniają nierówności $a_i^2 \leq a_{i-1}a_{i+1}$ oraz $b_i^2 \leq b_{i-1}b_{i+1}$ dla wszystkich $i \geq 1$. Definiujemy liczby $c_0, c_1, c_2, \dots$ wzorem

$$c_n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a_i b_{n-i}$$

(przy czym $c_0 = a_0 b_0$). Wykazać, że dla wszystkich $n \geq 1$ prawdziwa jest nierówność $c_n^2 \leq c_{n-1}c_{n+1}$.

Autor zadania: Piotr Nayar

Rozwiązanie:

Ciąg $d_0, d_1, d_2, \dots$ nieujemnych liczb rzeczywistych spełniający nierówności $d_n^2 \leq d_{n-1}d_{n+1}$ dla $n \geq 1$ będziemy nazywać *dobrym* ciągiem. *Splotem* ciągów $e_0, e_1, e_2, \dots$ i $f_0, f_1, f_2, \dots$ nazwiemy ciąg $d_0, d_1, d_2, \dots$ dany wzorem

$$d_n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} e_i f_{n-i}$$

(przy czym $d_0 = e_0 f_0$). Udowodnimy, że splot dowolnych dwóch dobrych ciągów jest dobrym ciągiem. Wyniknie stąd teza zadania, gdyż ciąg $c_0, c_1, c_2, \dots$ dany w treści zadania jest splotem dobrych ciągów $a_0, a_1, a_2, \dots$ i $b_0, b_1, b_2, \dots$.

W tym celu wystarczy udowodnić następujące stwierdzenie: dla dowolnego $n \geq 1$ oraz dowolnych dwóch dobrych ciągów $e_0, e_1, e_2, \dots$ i $f_0, f_1, f_2, \dots$ ich splot $d_0, d_1, d_2, \dots$ spełnia nierówność $d_n^2 \leq d_{n-1}d_{n+1}$. Udowodnimy je przez indukcję ze względu na n .

Przyjmijmy $n = 1$ i rozważmy dowolne dwa dobre ciągi $e_0, e_1, e_2, \dots$ i $f_0, f_1, f_2, \dots$ oraz ich splot $d_0, d_1, d_2, \dots$. Należy dowieść, że $d_1^2 \leq d_0 d_2$.

Mamy $d_0 = e_0 f_0$, $d_1 = e_0 f_1 + e_1 f_0$ oraz $d_2 = e_0 f_2 + 2e_1 f_1 + e_2 f_0$, zatem

$$\begin{aligned} d_1^2 &= (e_0 f_1 + e_1 f_0)^2 = e_0^2 f_1^2 + e_1^2 f_0^2 + 2e_0 e_1 f_0 f_1 \\ &\leq e_0^2 f_0 f_2 + e_0 e_2 f_0^2 + 2e_0 e_1 f_0 f_1 = e_0 f_0 (e_0 f_2 + 2e_1 f_1 + e_2 f_0) = d_0 d_2, \end{aligned}$$

czyli teza jest prawdziwa dla $n = 1$.

Przypuśćmy teraz, że teza zachodzi dla pewnego $n \geq 1$. Pokażemy, że teza zachodzi także dla $n + 1$. Rozważmy dowolne dwa dobre ciągi $e_0, e_1, e_2, \dots$ i $f_0, f_1, f_2, \dots$ oraz ich splot $d_0, d_1, d_2, \dots$. Należy dowieść, że $d_{n+1}^2 \leq d_n d_{n+2}$. Zdefiniujmy ciągi

$$g_k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} e_i f_{k+1-i}, \quad h_k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} e_{i+1} f_{k-i}, \quad k \geq 0,$$

przy czym zgodnie z przyjętą konwencją $g_0 = e_0 f_1$ i $h_0 = e_1 f_0$. Ciąg $g_0, g_1, g_2, \dots$ jest splotem dobrych ciągów $e_0, e_1, e_2, \dots$ oraz $f_1, f_2, f_3, \dots$. Podobnie ciąg $h_0, h_1, h_2, \dots$ jest splotem dobrych ciągów $e_1, e_2, e_3, \dots$ oraz $f_0, f_1, f_2, \dots$. Na mocy założenia indukcyjnego prawdziwe są zatem nierówności $g_n^2 \leq g_{n-1}g_{n+1}$ oraz $h_n^2 \leq h_{n-1}h_{n+1}$. Dla $k \geq 1$ i $1 \leq i \leq k-1$ mamy $\binom{k}{i} = \binom{k-1}{i} + \binom{k-1}{i-1}$, zatem

$$\begin{aligned} d_k &= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} e_i f_{k-i} = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} e_i f_{k-i} + \sum_{i=1}^k \binom{k-1}{i-1} e_i f_{k-i} = \\ &= g_{k-1} + \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} e_{i+1} f_{k-1-i} = g_{k-1} + h_{k-1}. \end{aligned}$$

Stąd otrzymujemy

$$\begin{aligned} d_{n+1}^2 &= (g_n + h_n)^2 = g_n^2 + h_n^2 + 2g_n h_n \leq \\ &\leq g_{n-1}g_{n+1} + h_{n-1}h_{n+1} + 2\sqrt{g_{n-1}g_{n+1}h_{n-1}h_{n+1}} \leq \\ &\leq g_{n-1}g_{n+1} + h_{n-1}h_{n+1} + g_{n-1}h_{n+1} + g_{n+1}h_{n-1} = \\ &= (g_{n-1} + h_{n-1})(g_{n+1} + h_{n+1}) = d_n d_{n+2}, \end{aligned}$$

gdzie druga nierówność to nierówność między średnią arytmetyczną i geometryczną, a pierwsza nierówność to użyte czterokrotnie założenie indukcyjne. $\square$

(db,mg)



LXXII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia pierwszego
I seria: do 30 września 2020 r.

1. Niech a, b będą liczbami rzeczywistymi. Załóżmy, że dla wszystkich liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność $|(ax + by)(ay + bx)| \leq x^2 + y^2$. Udowodnić, że $a^2 + b^2 \leq 2$.

2. Dany jest trójkąt ABC , w którym $AB > AC$. Niech ℓ będzie prostą styczną w punkcie A do okręgu opisanego na trójkącie ABC . Punkt X leży na odcinku AB , punkt Y leży na prostej ℓ , przy czym $AX = AY = AC$ oraz punkty X i Y leżą po przeciwnych stronach prostej zawierającej dwusieczną kąta BAC . Udowodnić, że środek okręgu wpisanego w trójkąt ABC leży na prostej XY .

3. Załóżmy, że dodatnia liczba całkowita n nie ma żadnego dzielnika d spełniającego nierówność $\sqrt{n} \leq d \leq \sqrt[3]{n^2}$. Udowodnić, że liczba n ma dzielnik $p > \sqrt[3]{n^2}$, który jest liczbą pierwszą.

4. Wśród punktów płaszczyzny o obydwu współrzędnych w zbiorze $\{1, \dots, 106\}$ niektóre punkty zaznaczono, przy czym dla każdych dwóch zaznaczonych punktów (x, y) oraz (x', y') spełniony jest co najmniej jeden z warunków:

$$(1) \quad x > x' - 10 \text{ oraz } y > y' - 10;$$

$$(2) \quad x' > x - 10 \text{ oraz } y' > y - 10.$$

Wyznaczyć największą możliwą liczbę zaznaczonych punktów.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

30 września 2020 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane. Rozwiązanie każdego zadania należy podpisać w lewym górnym rogu pierwszej jego strony: imieniem i nazwiskiem, swoim adresem, swoim adresem elektronicznym oraz klasą, nazwą i adresem szkoły.



LXXII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia pierwszego
II seria: do 2 listopada 2020 r.

5. Dany jest trójkąt równoramienny ABC , w którym $AB = AC$. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC . Prosta BI przecina bok AC w punkcie D . Punkt D jest środkiem odcinka IX . Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie BCX . Udowodnić, że proste OD i AC są prostopadłe.

6. Dane są dodatnie liczby rzeczywiste a, b, c, d , przy czym $a, c > 1$ i $b, d < 1$. Udowodnić, że

$$\frac{a}{ab + c + 1} + \frac{b}{bc + d + 1} + \frac{c}{cd + a + 1} + \frac{d}{da + b + 1} > 1.$$

7. W każde pole planszy 2020×2020 wpisano liczbę rzeczywistą. Spełniony jest przy tym następujący warunek: dla dowolnych czterech pól o wspólnym wierzchołku, jeśli przez a, b, c, d oznaczymy liczby wpisane w te pola jak na rysunku, to zachodzi układ równań

$$\begin{cases} a + b + 2c + 3d = 0 \\ 2a + b + 3c + 4d = 0. \end{cases}$$

a	b
c	d

Rysunek

Udowodnić, że istnieje 500 różnych pól, w które wpisano tę samą liczbę.

8. Dane są takie wielomiany f_1, f_2, f_3, f_4 o współczynnikach rzeczywistych, że suma dowolnych dwóch z nich nie ma pierwiastka rzeczywistego. Udowodnić, że jeśli wielomian $f_1 + f_2 + f_3 + f_4$ ma pierwiastek rzeczywisty, to co najmniej jeden z wielomianów f_1, f_2, f_3, f_4 nie ma pierwiastka rzeczywistego.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

2 listopada 2020 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane. Rozwiązanie każdego zadania należy podpisać w lewym górnym rogu pierwszej jego strony: imieniem i nazwiskiem, swoim adresem, swoim adresem elektronicznym oraz klasą, nazwą i adresem szkoły.



LXXII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego III seria: do 2 grudnia 2020 r.

9. Niech $n \geq 2$ będzie liczbą całkowitą. Dane są liczby rzeczywiste a_{ij} , gdzie $1 \leq i < j \leq n$, przy czym dla dowolnych $x_1, \dots, x_n \in \{-1, 1\}$ zachodzi warunek

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} x_i x_j \in \{-1, 1\}.$$

Wyznaczyć, w zależności od n , największą możliwą liczbę takich par i, j , że $a_{ij} \neq 0$ oraz $i < j$.

10. Sfera wpisana w czworościan $ABCD$ jest styczna do ścian BCD, CDA, DAB i ABC odpowiednio w punktach A', B', C', D' . Udowodnić, że jeśli proste AA' i BB' przecinają się, to proste CC' i DD' także się przecinają.

11. Dana jest liczba pierwsza $p \geq 2$. Dodatnią liczbę całkowitą n nazwiemy *ładną* wtedy i tylko wtedy, gdy suma reszt z dzielenia liczb $n, n^2, n^3, \dots, n^{p-1}$ przez p jest równa $\frac{1}{2}p(p-1)$. Udowodnić, że w zbiorze $\{1, \dots, p-1\}$ liczb ładnych jest nieparzysta wiele.

Uwaga. Resztą z dzielenia liczby całkowitej a przez dodatnią liczbę całkowitą b nazywamy taką liczbę $r \in \{0, 1, 2, \dots, b-1\}$, że liczba $a - r$ jest podzielna przez b .

12. Niech $A_{m,n}$ oznacza zbiór wektorów (k, l) , gdzie $0 \leq k \leq m-1$ oraz $0 \leq l \leq n-1$ są liczbami całkowitymi. Funkcję $f: A_{m,n} \rightarrow A_{m,n}$ nazywamy *dobrą* wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są obydwa warunki:

- (1) f jest funkcją różnowartościową;
- (2) jeśli $v, w \in A_{m,n}$ oraz $v + f(v) - w - f(w) = (am, bn)$ dla pewnych liczb całkowitych a i b , to $v = w$.

Wyznaczyć wszystkie pary m, n dodatnich liczb całkowitych, dla których istnieje dobra funkcja $f: A_{m,n} \rightarrow A_{m,n}$.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

2 grudnia 2020 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane. Rozwiązanie każdego zadania należy podpisać w lewym górnym rogu pierwszej jego strony: imieniem i nazwiskiem, swoim adresem, swoim adresem elektronicznym oraz klasą, nazwą i adresem szkoły.

Adresy Komitetów Okręgowych Olimpiady Matematycznej

- Dla województwa pomorskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Gdańskiego, ul. Wita Stwosza 57, 80-952 Gdańsk.
- Dla województwa śląskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Śląskiego, ul. Bankowa 14, 40-007 Katowice.
- Dla województwa małopolskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego, ul. Łojasiewicza 6, 30-348 Kraków.
- Dla województwa lubelskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Zakład Rachunku Prawdopodobieństwa pok. 810, Instytut Matematyki Uniwersytetu Marii Curie-Skłodowskiej, pl. Marii Curie-Skłodowskiej 1, 20-031 Lublin.
- Dla województwa łódzkiego i świętokrzyskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Łódzkiego, ul. Banacha 22, 90-238 Łódź.
- Dla województwa wielkopolskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Adama Mickiewicza, ul. Uniwersytetu Poznańskiego 4, 61-614 Poznań.
- Dla województwa podkarpackiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyczno-Przyrodniczy, Uniwersytetu Rzeszowskiego, ul. Pigonia 1, 35-310 Rzeszów.
- Dla województwa lubuskiego i zachodniopomorskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Szczecińskiego, ul. Wielkopolska 15, 70-451 Szczecin.
- Dla województwa kujawsko-pomorskiego i warmińsko-mazurskiego: — Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, ul. Chopina 12/18, 87-100 Toruń.
- Dla województwa mazowieckiego i podlaskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, ul. Śniadeckich 8, 00-656 Warszawa.
- Dla województwa dolnośląskiego i opolskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego, pl. Grunwaldzki 2/4, 50-384 Wrocław.

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w Internecie pod adresem: www.om.edu.pl



LXXII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych
zawodów stopnia pierwszego
1 września – 2 grudnia 2020 r.

1. Niech a, b będą liczbami rzeczywistymi. Załóżmy, że dla wszystkich liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest nierówność $|(ax + by)(ay + bx)| \leq x^2 + y^2$. Udowodnić, że $a^2 + b^2 \leq 2$.

Autor zadania: Piotr Nayar

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez $(\star)$ nierówność

$$|(ax + by)(ay + bx)| \leq x^2 + y^2$$

zachodzącą dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y . Podstawiając $x = 1$ oraz $y = 1$ w $(\star)$ otrzymujemy

$$(a + b)^2 = |(a + b)(a + b)| \leq 1^2 + 1^2 = 2. \quad (1)$$

Natomiast podstawiając $x = 1$ oraz $y = -1$ w $(\star)$ dostajemy

$$(a - b)^2 = |(a - b)(-a + b)| \leq 1^2 + (-1)^2 = 2. \quad (2)$$

Dodając stronami nierówności (1) i (2) mamy

$$2(a^2 + b^2) = (a + b)^2 + (a - b)^2 \leq 2 + 2 = 4.$$

□

2. Dany jest trójkąt ABC , w którym $AB > AC$. Niech ℓ będzie prostą styczną w punkcie A do okręgu opisanego na trójkącie ABC . Punkt X leży na odcinku AB , punkt Y leży na prostej ℓ , przy czym $AX = AY = AC$ oraz punkty X i Y leżą po przeciwnych stronach prostej zawierającej dwusieczną kąta BAC . Udowodnić, że środek okręgu wpisanego w trójkąt ABC leży na prostej XY .

Autor zadania: Dominik Burek

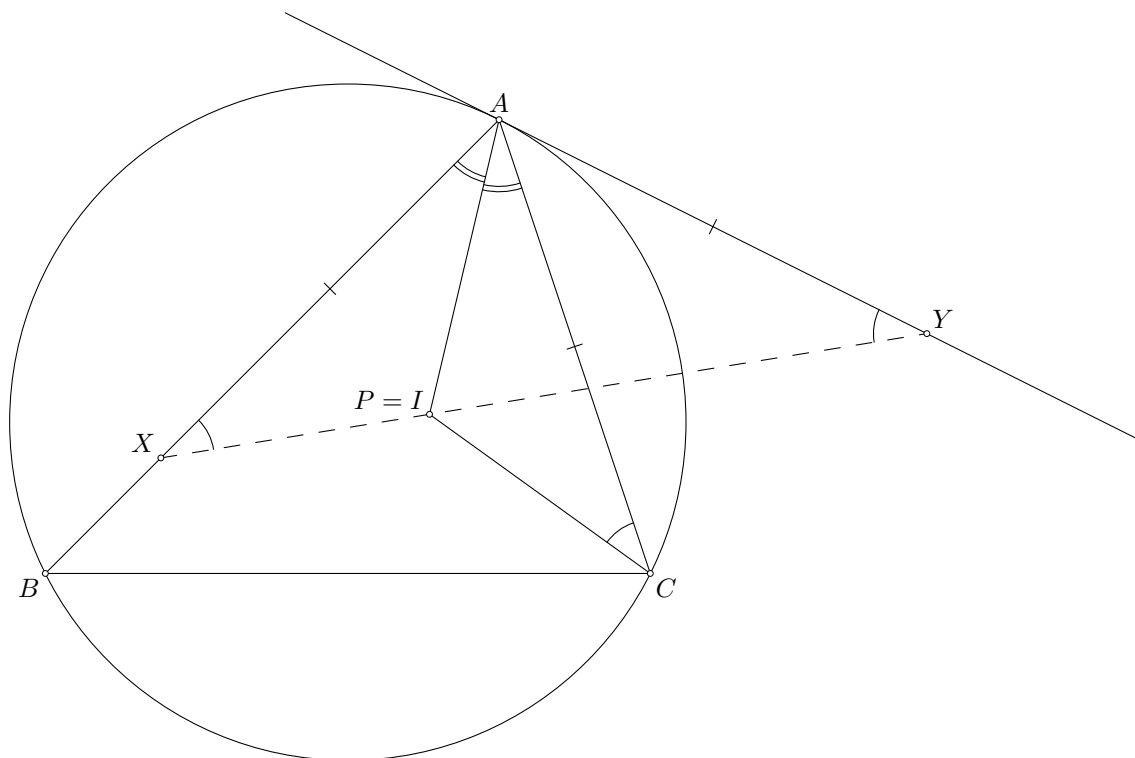
Rozwiązanie:

Niech I będzie środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC a P punktem wspólnym prostych XY i AI . Kąt między styczną a cięciwą równy jest kątowi wpisanemu opartemu na tej cięciwie, więc $180^\circ - \sphericalangle XAY = \sphericalangle BCA$. Wobec tego

$$\sphericalangle PXA = \sphericalangle YXA = \frac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle XAY) = \frac{1}{2}\sphericalangle BCA = \sphericalangle ICA,$$

gdzie w drugiej równości skorzystaliśmy z tego, że trójkąt XAY jest równoramienny.

Trójkąty PXA i ICA mają więc takie same kąty, czyli są podobne. Ponieważ $AX = AC$, więc są przystające. Wobec tego $AP = AI$, czyli $P = I$. □



3. Załóżmy, że dodatnia liczba całkowita n nie ma żadnego dzielnika d spełniającego nierówność $\sqrt{n} \leq d \leq \sqrt[3]{n^2}$. Udowodnić, że liczba n ma dzielnik $p > \sqrt[3]{n^2}$, który jest liczbą pierwszą.

Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie:

Jeśli k jest dzielnikiem liczby n , to $\frac{n}{k}$ jest również dzielnikiem liczby n . Zatem z założeń zadania wynika, że n nie ma dzielnika w przedziale $[\sqrt[3]{n}, \sqrt[3]{n^2}]$.

Niech d będzie największym dzielnikiem liczby n spełniającym $d < \sqrt[3]{n}$. Niech p będzie dowolnym dzielnikiem pierwszym liczby $\frac{n}{d}$. Wtedy dp jest dzielnikiem n . Z maksymalności d mamy $dp > \sqrt[3]{n^2}$. Zatem

$$p = \frac{dp}{d} > \frac{\sqrt[3]{n^2}}{\sqrt[3]{n}} = \sqrt[3]{n}.$$

Ponieważ p jest dzielnikiem n , to $p > \sqrt[3]{n^2}$, skąd p jest szukanym dzielnikiem pierwszym n . □

4. Wśród punktów płaszczyzny o obydwu współrzędnych w zbiorze $\{1, \dots, 106\}$ niektóre punkty zaznaczono, przy czym dla każdych dwóch zaznaczonych punktów (x, y) oraz (x', y') spełniony jest co najmniej jeden z warunków:

- $x > x' - 10$ oraz $y > y' - 10$;
- $x' > x - 10$ oraz $y' > y - 10$.

Wyznaczyć największą możliwą liczbę zaznaczonych punktów.

Autor zadania: Michał Pilipczuk

Rozwiązanie:

Niech X będzie zbiorem spełniającym warunki zadania. Rozważmy zbiory

$$L_k = \{1, 2, \dots, 106\}^2 \cap \{(x, y) : x + y = k\}, \text{ gdzie } k = 2, 3, \dots, 212.$$

Weźmy dwa dowolne punkty $(x, y), (x', y') \in X \cap L_k$. Wówczas $x - x' = y' - y$, a zatem z warunków zadania $|x - x'| < 10$. Stąd natychmiast otrzymujemy, że $|X \cap L_k| \leq 10$ dla $k = 2, 3, \dots, 212$.

Oczywiście $|L_k| = k - 1$ dla $k \leq 107$ oraz $|L_k| = 213 - k$ dla $k > 107$. Wobec tego

$$\begin{aligned} |X| &= \sum_{k=2}^{212} |X \cap L_k| \leq \sum_{k=2}^{107} \min(10, k-1) + \sum_{k=108}^{212} \min(10, 213-k) \\ &= 10 \cdot 97 + \sum_{k=2}^{10} (k-1) + 10 \cdot 96 + \sum_{k=204}^{212} (213-k) = 1930 + 2 \sum_{k=1}^9 k = 1930 + 90 = 2020. \end{aligned}$$

To oszacowanie jest optymalne, co pokazuje przykład zbioru

$$\{1, \dots, 10\} \times \{1, \dots, 106\} \cup \{11, \dots, 106\} \times \{97, \dots, 106\}.$$

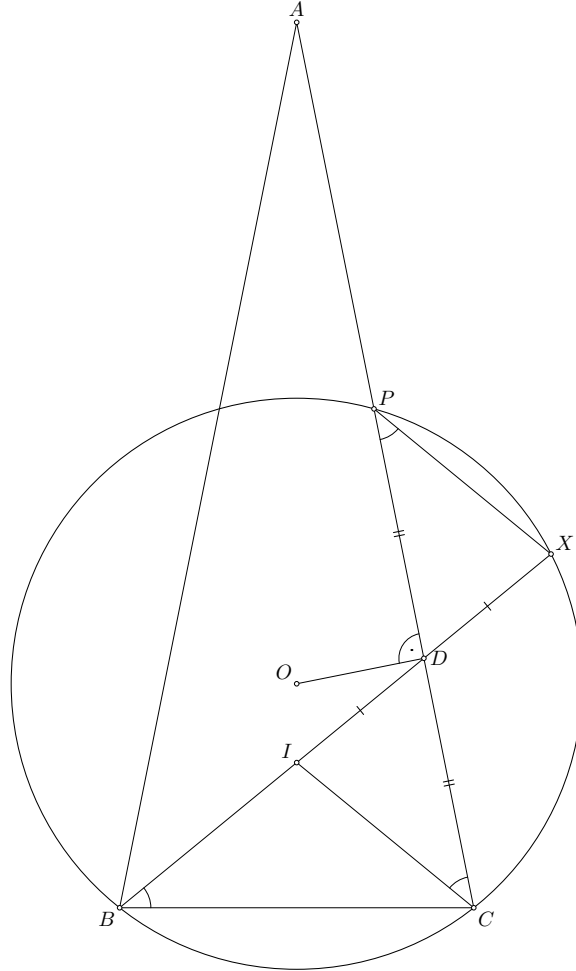
□

5. Dany jest trójkąt równoramienny ABC , w którym $AB = AC$. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC . Prosta BI przecina bok AC w punkcie D . Punkt D jest środkiem odcinka IX . Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie BCX . Udowodnić, że proste OD i AC są prostopadłe.

Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez ω okrąg opisany na trójkącie BCX . Punkt D leży wewnątrz ω a punkt C na okręgu ω .



Niech P będzie drugim punktem wspólnym okręgu i prostej CD . Wtedy $\sphericalangle CBX = \sphericalangle CPX$, gdyż są to kąty wsparte na tym samym łuku. Wobec tego, korzystając z równoramienności trójkąta ABC oraz faktu, że I jest punktem wspólnym dwusiecznych kątów $\sphericalangle ABC$ i $\sphericalangle BCA$, otrzymujemy

$$\sphericalangle XPD = \sphericalangle IBC = \sphericalangle ICB = \sphericalangle ICD.$$

Ponieważ $\sphericalangle IDC = \sphericalangle XDP$, to trójkąty CDI i PDX są przystające, gdyż $ID = DX$ (cecha (bkk)). Zatem $CD = DP$, więc D jest środkiem odcinka CP .

Ostatecznie, odcinek OD łączący środek okręgu ze środkiem cięciwy, jest prostopadły do cięciwy, skąd uzyskujemy tezę $OD \perp AC$. $\square$

6. Dane są dodatnie liczby rzeczywiste a, b, c, d , przy czym $a, c > 1$ i $b, d < 1$. Udowodnić, że

$$\frac{a}{ab+c+1} + \frac{b}{bc+d+1} + \frac{c}{cd+a+1} + \frac{d}{da+b+1} > 1.$$

Autor zadania: Michał Kieza

Rozwiązanie:

Z warunków zadania $a > 1$ oraz $b < 1$, więc $(a-1)(b-1) < 0$, czyli $ab+1 < a+b$. Stąd

$$\frac{a}{ab+c+1} = \frac{a}{(ab+1)+c} > \frac{a}{a+b+c} > \frac{a}{a+b+c+d}.$$

Analogicznie dostajemy nierówności

$$\frac{b}{bc+d+1} > \frac{b}{a+b+c+d}, \quad \frac{c}{cd+a+1} > \frac{c}{a+b+c+d}, \quad \frac{d}{da+b+1} > \frac{d}{a+b+c+d}.$$

Dodając je stronami mamy

$$\begin{aligned} & \frac{a}{ab+c+1} + \frac{b}{bc+d+1} + \frac{c}{cd+a+1} + \frac{d}{da+b+1} > \\ & > \frac{a}{a+b+c+d} + \frac{b}{a+b+c+d} + \frac{c}{a+b+c+d} + \frac{d}{a+b+c+d} = \frac{a+b+c+d}{a+b+c+d} = 1. \end{aligned}$$

7. W każde pole planszy 2020×2020 wpisano liczbę rzeczywistą. Spełniony jest przy tym następujący warunek: dla dowolnych czterech pól o wspólnym wierzchołku, jeśli przez a, b, c, d oznaczymy liczby wpisane w te pola jak na rysunku, to zachodzi układ równań

$$\begin{cases} a+b+2c+3d=0 \\ 2a+b+3c+4d=0. \end{cases}$$

a	b
c	d

Rysunek

Udowodnić, że istnieje 500 różnych pól, w które wpisano tę samą liczbę.

Autor zadania: Mariusz Skałba

Rozwiązanie:

Rozwiązując układ równań traktując b, d jako niewiadome uzyskujemy równości $b = 2a + c$, $d = -a - c$. Pola planszy będziemy oznaczać parami liczb (k, l) , gdzie $1 \leq k, l \leq 2020$, przy czym pole $(1, 1)$ odpowiada lewemu górnemu rogowi planszy. Niech $k \leq 2016$ oraz $l \leq 2018$. Jeśli w pola (k, l) i $(k, l+1)$ wpisano odpowiednio liczby a i c (zgodnie z rysunkiem), to w pola $(k+1, l)$ oraz $(k+1, l+1)$ wpisano odpowiednio liczby $2a+c$ oraz $-a-c$. Powtarzając to rozumowanie otrzymujemy, że w pola $(k+2, l)$ oraz $(k+2, l+1)$ wpisano odpowiednio liczby $3a+c$ oraz $-a$. Zatem pokazaliśmy, że jeśli w pole (k, l) wpisana jest liczba a , to w pole $(k+2, l+1)$ wpisana jest liczba $-a$.

Stosując powyższą obserwację dwukrotnie otrzymujemy, że w pole $(k+4, l+2)$ wpisana jest liczba a . Zatem w pola $(1+4j, 1+2j)$ dla $0 \leq j \leq 504$ wpisane są te same liczby. Wskazaliśmy zatem 505 pól, w które wpisano tę samą liczbę.

8. Dane są takie wielomiany f_1, f_2, f_3, f_4 o współczynnikach rzeczywistych, że suma dowolnych dwóch z nich nie ma pierwiastka rzeczywistego. Udowodnić, że jeśli wielomian $f_1 + f_2 + f_3 + f_4$ ma pierwiastek rzeczywisty, to co najmniej jeden z wielomianów f_1, f_2, f_3, f_4 nie ma pierwiastka rzeczywistego.

Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie:

Zauważamy, że wielomian, który nie ma pierwiastka rzeczywistego, ma stały znak (czyli jest ściśle dodatni lub ściśle ujemny). Rozważmy graf pełny o wierzchołkach 1, 2, 3, 4, którego krawędzie kolorujemy na czerwono lub niebiesko zgodnie z następującą zasadą: jeśli wielomian $f_i + f_j$ dla $i \neq j$ jest dodatni, to krawędź (i, j) kolorujemy na czerwono, a jeśli ujemny – na niebiesko.

Jeśli i, j, k, l są parami różne, to krawędzie (i, j) oraz (k, l) są pokolorowane różnymi kolorami, gdyż w przeciwnym razie funkcja $f_1 + f_2 + f_3 + f_4$ miałaby stały znak, a zatem nie miałaby pierwiastka. Łatwo zauważyć, że graf ten musi mieć następującą strukturę: istnieje wierzchołek (bez straty ogólności wierzchołek 1), z którego wychodzą trzy krawędzie jednego koloru, a pozostałe krawędzie, tworzące trójkąt, są przeciwnego koloru. Stąd znaki funkcji $f_1 + f_2, f_1 + f_3, f_1 + f_4$ są takie same i przeciwne do znaku funkcji $f_2 + f_3, f_3 + f_4, f_4 + f_2$. Wobec tego znaki funkcji

$$(f_1 + f_2) + (f_1 + f_3) + (f_1 + f_4) = 3f_1 + f_2 + f_3 + f_4$$

oraz

$$(f_2 + f_3) + (f_3 + f_4) + (f_4 + f_2) = 2(f_2 + f_3 + f_4)$$

są przeciwne, czyli znaki funkcji $3f_1 + f_2 + f_3 + f_4$ oraz $-(f_2 + f_3 + f_4)$ są takie same. Sumując te dwie funkcje otrzymujemy, że wielomian $3f_1$ ma stały znak, a zatem nie ma pierwiastka rzeczywistego.

9. Niech $n \geq 2$ będzie liczbą całkowitą. Dane są liczby rzeczywiste a_{ij} , gdzie $1 \leq i < j \leq n$, przy czym dla dowolnych $x_1, \dots, x_n \in \{-1, 1\}$ zachodzi warunek

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} x_i x_j \in \{-1, 1\}.$$

Wyznaczyć, w zależności od n , największą możliwą liczbę takich par i, j , że $a_{ij} \neq 0$ oraz $i < j$.

Autor zadania: Piotr Nayar

Rozwiązanie:

Wykażemy, że możliwa liczba niezerowych liczb a_{ij} to 1 dla $n = 2, 3$ oraz 1 i 4 dla $n \geq 4$. Dla $x = (x_1, \dots, x_n)$ niech $f(x) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} x_i x_j$. Oznaczmy $\sigma_k(x) = (x_1, \dots, x_{k-1}, -x_k, x_{k+1}, \dots, x_n)$. Wtedy dla $k < l$ mamy

$$\{-4, -2, 0, 2, 4\} \ni f(x) - f(\sigma_k(x)) - f(\sigma_l(x)) + f(\sigma_l(\sigma_k(x))).$$

Z drugiej strony, oznaczając $\varepsilon_{a,bc} = -1$ dla $a \in \{b, c\}$ oraz $\varepsilon_{a,bc} = 1$ dla $a \notin \{b, c\}$, dla $k < l$ mamy

$$\begin{aligned} f(x) - f(\sigma_k(x)) - f(\sigma_l(x)) + f(\sigma_l(\sigma_k(x))) &= \sum_{i < j} a_{ij} (x_i x_j - \varepsilon_{k,ij} x_i x_j - \varepsilon_{l,ij} x_i x_j + \varepsilon_{k,ij} \varepsilon_{l,ij} x_i x_j) \\ &= \sum_{i < j} a_{ij} x_i x_j (1 - \varepsilon_{k,ij})(1 - \varepsilon_{l,ij}) = 4a_{kl} x_k x_l. \end{aligned}$$

Stąd $a_{kl} \in \{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\}$.

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} 1 &= 2^{-n} \sum_{x_1, \dots, x_n \in \{-1, 1\}} f(x)^2 = 2^{-n} \sum_{x_1, \dots, x_n \in \{-1, 1\}} \left(\sum_{i < j} a_{ij} x_i x_j \right)^2 \\ &= 2^{-n} \sum_{x_1, \dots, x_n \in \{-1, 1\}} \sum_{i < j, i' < j'} a_{ij} a_{i'j'} x_i x_{i'} x_j x_{j'} = 2^{-n} \sum_{i < j, i' < j'} a_{ij} a_{i'j'} \sum_{x_1, \dots, x_n \in \{-1, 1\}} x_i x_{i'} x_j x_{j'} = \sum_{i < j} a_{ij}^2, \end{aligned}$$

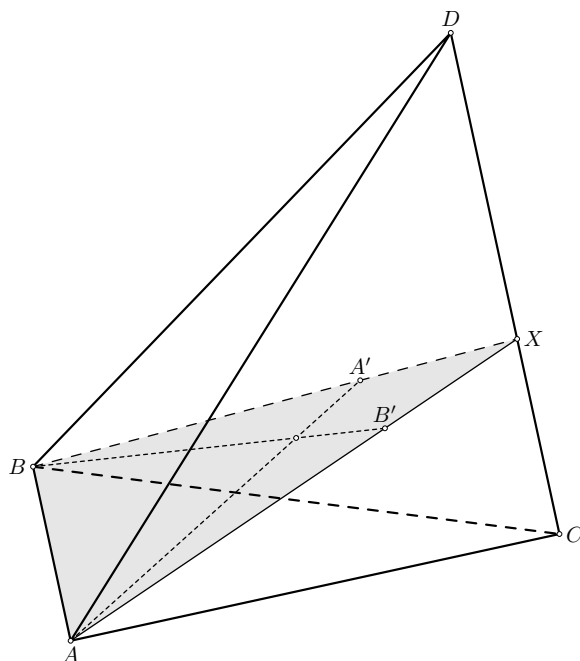
gdyż wyrażenie $\sum_{x_1, \dots, x_n \in \{-1, 1\}} x_i x_{i'} x_j x_{j'}$ dla $i < j$ oraz $i' < j'$ jest niezerowe tylko dla $i = i'$ oraz $j = j'$. Jeśli dla pewnych i, j mamy $|a_{ij}| = 1$, to pozostałe liczby a_{kl} muszą być zerowe. Przykładem takiej funkcji jest $f(x) = x_1 x_2$. W przeciwnym przypadku mamy cztery niezerowe współczynniki $\pm \frac{1}{2}$. Przykładem takiej funkcji jest $f(x) = \frac{1}{2}(x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_4 - x_4 x_1)$. Aby sprawdzić, że funkcja ta przyjmuje wartości w zbiorze $\{-1, 1\}$ zauważamy, że jeśli $x_3 = x_1$, to $f(x) = x_1 x_2$, a jeśli $x_3 = -x_1$, to $f(x) = -x_1 x_4$.

10. Sfera wpisana w czworościan $ABCD$ jest styczna do ścian BCD , CDA , DAB i ABC odpowiednio w punktach A' , B' , C' , D' . Udowodnić, że jeśli proste AA' i BB' przecinają się, to proste CC' i DD' także się przecinają.

Autor zadania: Michał Kieza

Rozwiązanie:

Założmy, że proste AA' i BB' mają punkt wspólny. Proste AA' i BB' wyznaczają więc pewną płaszczyznę, której przecięcie z krawędzią CD oznaczmy przez X .

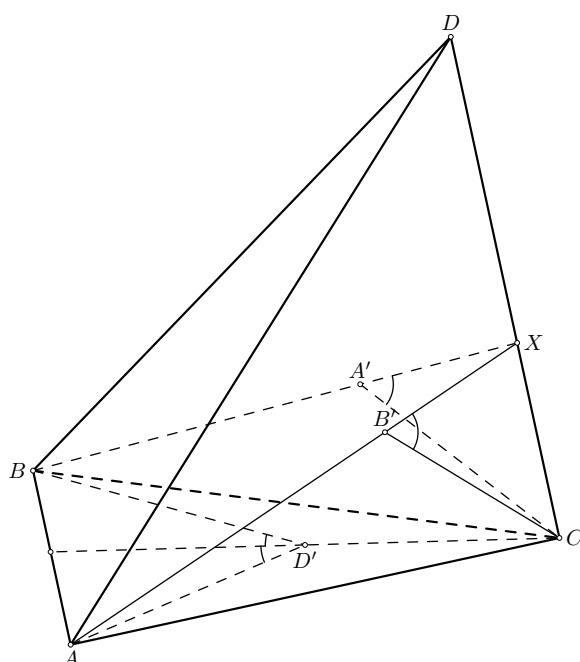


W rozwiązaniu wielokrotnie skorzystamy z następującego stwierdzenia: długości dowolnych dwóch odcinków stycznych poprowadzonych z punktu do sfery są równe.

Ze stwierdzenia wynika, że $XA' = XB'$ oraz $CA' = CB'$. Oprócz tego trójkąty XCA' oraz XCB' mają wspólny bok XC , są więc przystające na mocy cechy przystawania (bbb). W pełni analogicznie dowodzimy, że trójkąt $AB'C$ przystaje do trójkąta $AD'C$ oraz trójkąt BCA' przystaje do trójkąta BCD' . Z przystawań tych oraz z faktu, że suma kątów przyległych równa jest kątowi półpełnemu, otrzymujemy

$$\sphericalangle AD'C = \sphericalangle AB'C = 180^\circ - \sphericalangle CB'X = 180^\circ - \sphericalangle CA'X = \sphericalangle BA'C = \sphericalangle BD'C.$$

Równość ta oznacza, że prosta $D'C$ jest dwusieczną kąta płaskiego $AD'B$.

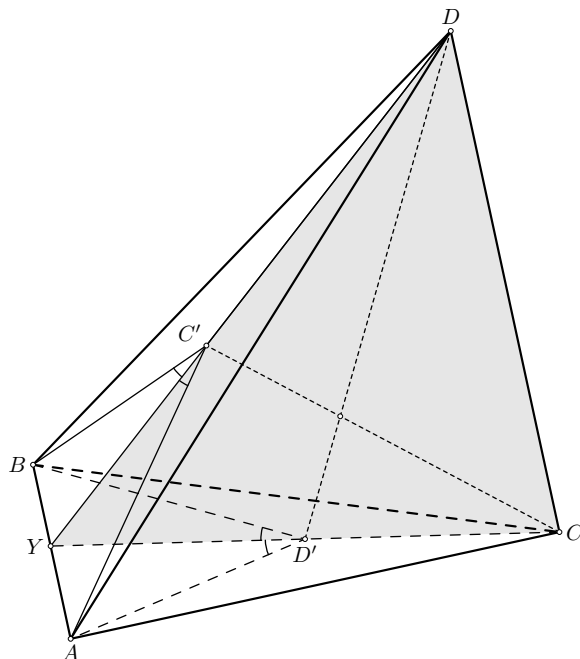


Prowadząc analogiczne rozumowanie wykazujemy, że prosta $C'D$ jest dwusieczną kąta płaskiego $AC'B$. Ponadto trójkąt $AD'B$ przystaje do trójkąta $AC'B$. Zatem dwusieczne tych dwóch trójkątów poprowadzone z wierzchołków C' i D' przecinają krawędź AB w tym samym punkcie, który oznaczmy przez Y .

Punkty C, C', D, D', Y leżą więc na jednej płaszczyźnie. W takim razie proste CC' i DD' mają punkt wspólny lub są równoległe. Druga ewentualność nie może mieć jednak miejsca, gdyż

$$\sphericalangle C'CD + \sphericalangle CDD' < \sphericalangle YCD + \sphericalangle CDY = 180^\circ - \sphericalangle CYD < 180^\circ.$$

Wykazaliśmy więc, że proste CC' i DD' przecinają się.



11. Dana jest liczba pierwsza $p \geq 3$. Dodatnią liczbę całkowitą n nazwiemy *ładną* wtedy i tylko wtedy, gdy suma reszt z dzielenia liczb $n, n^2, n^3, \dots, n^{p-1}$ przez p jest równa $\frac{1}{2}p(p-1)$. Udowodnić, że w zbiorze $\{1, \dots, p-1\}$ liczb ładnych jest nieparzyste wiele.

Autor zadania: Daniel Goc

Rozwiązanie:

Udowodnimy najpierw następujący lemat.

Lemat. Jeśli p jest liczbą pierwszą, to dla każdego $n \in \{1, \dots, p-1\}$ istnieje dokładnie jedna liczba $m \in \{1, \dots, p-1\}$ taka, że $nm \equiv 1 \pmod{p}$. Liczbę tę oznaczamy jako $\frac{1}{n}$.

Dowód. Dla $k = 1, \dots, p-1$ liczby $kn \pmod{p} \in \{1, \dots, p-1\}$ są parami różne. Faktycznie, jeśli dla pewnych $k, l \in \{1, \dots, p-1\}$ mamy $kn \equiv ln \pmod{p}$, to $p \mid (k-l)n$, czyli $p \mid (k-l)$, a zatem $k = l$. Wśród rozważanych liczb istnieje zatem dokładnie jedna spełniająca $kn \equiv 1 \pmod{p}$. $\square$

Liczba 1 nie jest ładna, gdyż rozważana suma reszt jest równa $p-1$. Liczba $p-1$ jest ładna, gdyż w tym wypadku resztami są liczby $p-1, 1, p-1, \dots, p-1, 1$, więc ich sumą jest $\frac{1}{2}p(p-1)$. Wystarczy zatem pokazać, że w zbiorze $\{2, \dots, p-2\}$ jest parzyste wiele ładnych liczb.

Po pierwsze zauważmy, że dla $n \in \{2, \dots, p-2\}$ ciąg reszt $n, n^2, \dots, n^{p-1} \pmod{p}$ jest permutacją ciągu reszt $\frac{1}{n}, (\frac{1}{n})^2, \dots, (\frac{1}{n})^{p-1} \pmod{p}$, gdyż zgodnie z małym twierdzeniem Fermata:

$$n^{p-1} \pmod{p} = 1 = \left(\frac{1}{n}\right)^{p-1} \pmod{p}$$

$$\begin{aligned} n \pmod{p} &= n \cdot n^{p-2} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^{p-2} \pmod{p} = n^{p-1} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^{p-2} \pmod{p} = \left(\frac{1}{n}\right)^{p-2} \pmod{p} \\ n^2 \pmod{p} &= n^2 \cdot n^{p-3} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^{p-3} \pmod{p} = n^{p-1} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^{p-3} \pmod{p} = \left(\frac{1}{n}\right)^{p-3} \pmod{p} \\ &\vdots \\ n^{p-2} \pmod{p} &= n^{p-2} \cdot n \cdot \frac{1}{n} \pmod{p} = n^{p-1} \cdot \frac{1}{n} \pmod{p} = \frac{1}{n} \pmod{p}. \end{aligned}$$

Oznacza to, że sumy tych ciągów są sobie równe, czyli $n \in \{2, \dots, p-2\}$ jest ładna wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{1}{n} \pmod{p}$ jest ładna.

Z kolei $n \equiv \frac{1}{n} \pmod{p}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $1 \equiv n^2 \pmod{p}$, co jest równoważne z warunkiem $p|n^2 - 1$, czyli $p|n - 1$ (wtedy $n = 1$) lub $p|n + 1$ (wtedy $n = p - 1$). Wynika stąd, że $n \not\equiv \frac{1}{n} \pmod{p}$ dla $n \in \{2, \dots, p - 2\}$.

Z tego otrzymujemy, że liczby ładne ze zbioru $\{2, \dots, p - 2\}$ można połączyć w pary $(n, \frac{1}{n} \pmod{p})$, czyli jest ich parzysta liczba. Uwzględniając 1 i $p - 1$ otrzymujemy tezę zadania.

12. Niech $A_{n,m}$ oznacza zbiór wektorów (k, l) , gdzie $0 \leq k \leq n - 1$ oraz $0 \leq l \leq m - 1$ są liczbami całkowitymi. Funkcję $f : A_{n,m} \rightarrow A_{n,m}$ nazywamy *dobrą* wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są obydwa z warunków:

(1) f jest funkcją różnowartościową;

(2) jeśli $v, w \in A_{n,m}$ oraz $v + f(v) = w + f(w) = (an, bm)$ dla pewnych liczb całkowitych a i b , to $v = w$.

Wyznaczyć wszystkie pary n, m dodatnich liczb całkowitych, dla których istnieje dobra funkcja $f : A_{n,m} \rightarrow A_{n,m}$.

Autor zadania: Wojciech Nadara

Rozwiązanie:

Parę (n, m) nazwiemy *dobrą*, jeśli istnieje dobra funkcja $f : A_{n,m} \rightarrow A_{n,m}$. Pokażemy, że para (n, m) jest dobra wtedy i tylko wtedy, gdy $2 \mid n - m$.

Przypadek 1. $2 \nmid n - m$.

Założmy, że $2 \mid n$ oraz $2 \nmid m$ (przypadek $2 \nmid n$ oraz $2 \mid m$ jest analogiczny). Założmy, że istnieje dobra funkcja f . Sumując pierwsze współrzędne wszystkich wektorów ze zbioru $A_{n,m}$ otrzymujemy

$$m(0 + 1 + \dots + (n - 1)) = \frac{mn(n - 1)}{2} \equiv \frac{n}{2} \pmod{n}.$$

Z warunku (2) tę samą sumę $\pmod{n}$ otrzymujemy sumując pierwsze współrzędne wektorów $f(v) + v$ dla $v \in A_{n,m}$. Z drugiej strony z punktu (1) suma ta przystaje do $2 \cdot \frac{n}{2} \equiv 0 \pmod{n}$, co daje sprzeczność.

Przypadek 2. $2 \nmid n, m$.

Definiujemy f wzorem $f(x, y) = (x, y)$. Wtedy

$$f(x, y) + (x, y) = (2x \bmod n, 2y \bmod m)$$

jest bijekcją, gdyż n i m są nieparzyste.

Przypadek 3. $n = 2, 2 \mid m$.

Niech $m = 2l$. Definiujemy $f : A_{2,2l} \rightarrow A_{2,2l}$ za pomocą wzorów

$$\begin{aligned} f(0, r) &= (0, r) \\ f(1, r) &= (0, r + l) \\ f(0, r + l) &= (1, r + 1 \bmod(2l)) \\ f(1, r + l) &= (1, r + l + 1 \bmod(2l)) \end{aligned}$$

dla $0 \leq r < l$. Wówczas funkcja f jest oczywiście różnowartościowa oraz funkcja $s(v) = v + f(v)$ zadana jest wzorem

$$\begin{aligned} s(0, r) &= (0, 2r) \\ s(1, r) &= (1, 2r + l \bmod(2l)) \\ s(0, r + l) &= (1, 2r + l + 1 \bmod(2l)) \\ s(1, r + l) &= (0, 2r + 1) \end{aligned}$$

dla $0 \leq r < l$. Bez trudu sprawdzamy, że funkcja s jest bijekcją.

W dalszej części rozwiązania będzie nam potrzebny następujący lemat.

Lemat. Jeśli pary (a, b) oraz (c, d) są dobre, to również para (ac, bd) jest dobra.

Dowód. Niech f, g będą dobrymi funkcjami dla par $(a, b), (c, d)$. Niech f_1, f_2 będą odpowiednio pierwszą i drugą współrzędną f , zaś g_1, g_2 pierwszą i drugą współrzędną g , czyli $f = (f_1, f_2)$ oraz $g = (g_1, g_2)$. Każdy element $A_{ac,bd}$ może być jednoznacznie zapisany jako $(x_1a + x_2, y_1b + y_2)$, gdzie $0 \leq x_1 < c, 0 \leq x_2 < a, 0 \leq y_1 < d, 0 \leq y_2 < b$. Definiujemy $F : A_{ac,bd} \rightarrow A_{ac,bd}$ wzorem

$$F(x_1a + x_2, y_1b + y_2) = (g_1(x_1, y_1) \cdot a + f_1(x_2, y_2), g_2(x_1, y_1) \cdot b + f_2(x_2, y_2)).$$

Pokażemy, że funkcja F jest różnowartościowa. Załóżmy, że $F(x_1a + x_2, y_1b + y_2) = F(x'_1a + x'_2, y'_1b + y'_2)$. Wtedy

$$g_1(x_1, y_1) \cdot a + f_1(x_2, y_2) = g_1(x'_1, y'_1) \cdot a + f_1(x'_2, y'_2), \quad g_2(x_1, y_1) \cdot b + f_2(x_2, y_2) = g_2(x'_1, y'_1) \cdot b + f_2(x'_2, y'_2).$$

Z jednoznaczności ilorazu i reszty z dzielenia przez a i b mamy $g_1(x_1, y_1) = g_1(x'_1, y'_1)$, $f_1(x_2, y_2) = f_1(x'_2, y'_2)$, $g_2(x_1, y_1) = g_2(x'_1, y'_1)$, $f_2(x_2, y_2) = f_2(x'_2, y'_2)$. Stąd $g(x_1, y_1) = g(x'_1, y'_1)$ oraz $f(x_2, y_2) = f(x'_2, y'_2)$ czyli $(x_1, y_1) = (x'_1, y'_1)$ oraz $(x_2, y_2) = (x'_2, y'_2)$, gdyż f i g są różnowartościowe.

Pozostało wykazać, że z równości

$$(x_1a + x_2, y_1b + y_2) + F(x_1a + x_2, y_1b + y_2) = (x'_1a + x'_2, y'_1b + y'_2) + F(x'_1a + x'_2, y'_1b + y'_2)$$

Wynikają równości $(x_1, y_1) = (x'_1, y'_1)$ oraz $(x_2, y_2) = (x'_2, y'_2)$. Mamy

$$(x_1a + x_2) + g_1(x_1, y_1) \cdot a + f_1(x_2, y_2) = (x'_1a + x'_2) + g_1(x'_1, y'_1) \cdot a + f_1(x'_2, y'_2)$$

oraz

$$(y_1b + y_2) + g_2(x_1, y_1) \cdot b + f_2(x_2, y_2) = (y'_1b + y'_2) + g_2(x'_1, y'_1) \cdot b + f_2(x'_2, y'_2).$$

Równości te można przepisać w postaci

$$(x_2 + f_1(x_2, y_2)) + a(x_1 + g_1(x_1, y_1)) = (x'_2 + f_1(x'_2, y'_2)) + a(x'_1 + g_1(x'_1, y'_1))$$

oraz

$$(y_2 + f_2(x_2, y_2)) + b(y_1 + g_2(x_1, y_1)) = (y'_2 + f_2(x'_2, y'_2)) + b(y'_1 + g_2(x'_1, y'_1)).$$

Z jednoznaczności ilorazu i reszty z dzielenia przez a i b mamy

$$(x_2 + f_1(x_2, y_2)) \equiv (x'_2 + f_1(x'_2, y'_2)) \pmod{a}$$

oraz

$$(y_2 + f_2(x_2, y_2)) \equiv (y'_2 + f_2(x'_2, y'_2)) \pmod{b}.$$

Stąd $(x_2, y_2) + f(x_2, y_2) = (x'_2, y'_2) + f(x'_2, y'_2) + (ka, lb)$ dla pewnych liczb całkowitych k, l , a zatem $(x_2, y_2) = (x'_2, y'_2)$, gdyż f jest dobra. Wykorzystując tę wiedzę i powracając do powyższych równości otrzymujemy

$$x_1 + g_1(x_1, y_1) = x'_1 + g_1(x'_1, y'_1), \quad y_1 + g_2(x_1, y_1) = y'_1 + g_2(x'_1, y'_1),$$

co daje $(x_1, y_1) + g(x_1, y_1) = (x'_1, y'_1) + g(x'_1, y'_1) + (ka, lb)$ dla pewnych liczb całkowitych k, l , a zatem $(x_1, y_1) = (x'_1, y'_1)$, gdyż g jest dobra. $\square$

Przypadek 3. $2 \mid n, m$.

Niech $n = 2^x a, m = 2^y b$, gdzie $1 \leq x \leq y, 2 \nmid a, 2 \nmid b$. Stosując powyższy lemat wielokrotnie widzimy, że jeśli pary $(a_1, b_1), \dots, (a_k, b_k)$ są dobre, to również para $(a_1 \dots a_k, b_1 \dots b_k)$ jest dobra. Stosując tę uwagę do par $\underbrace{(2, 2), (2, 2), \dots, (2, 2)}_{x-1}, (2, 2^{y-x+1}), (a, b)$, które są dobre (Przypadki 2 i 3), otrzymujemy, że (n, m) jest również dobra.

(db, tc, pn)



LXXII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia drugiego

12 lutego 2021 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Jacek ma n kart ponumerowanych kolejno liczbami $1, \dots, n$, które układa na stole w rzędzie, w dowolnej wybranej przez siebie kolejności. Jacek będzie zdejmować karty ze stołu w kolejności zgodnej z numeracją kart: wpierw zdejmie kartę o numerze 1, potem kartę o numerze 2, i tak dalej. Zanim Jacek zacznie zdejmować karty, Placek pokoloruje każdą z kart na czerwono, niebiesko lub żółto. Udowodnić, że Placek może pokolorować karty w taki sposób, że podczas ich zdejmowania przez Jacka w każdym momencie spełniony będzie następujący warunek: pomiędzy dowolnymi dwiema kartami tego samego koloru znajduje się co najmniej jedna karta innej barwy.
2. Punkt P leży na boku CD równoległoboku $ABCD$, przy czym $\sphericalangle DBA = \sphericalangle CBP$. Punkt O jest środkiem okręgu przechodzącego przez punkty D i P oraz stycznego do prostej AD w punkcie D . Wykazać, że $AO = OC$.
3. Dodatnie liczby całkowite a, b, z spełniają zależność $ab = z^2 + 1$. Udowodnić, że istnieją takie dodatnie liczby całkowite x, y , że

$$\frac{a}{b} = \frac{x^2 + 1}{y^2 + 1}.$$

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na białym papierze (może być w kratkę), wyłącznie czarnym kolorem. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań. Dotyczy to również tych brudnopisów, które uczeń zamierza dołączyć do rozwiązania.
3. W przypadku konieczności odejścia od miejsca pracy trzeba powiadomić opiekuna i uzyskać jego zgodę.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. Należy dokładnie przestrzegać zasad zawartych w pliku „Instrukcja dla uczestników 2 etapu OM.pdf” umieszczonego na stronie olimpiady.



LXXII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia drugiego

13 lutego 2021 r. (drugi dzień zawodów)

4. Dane są takie liczby rzeczywiste x, y , że $x \neq 0$, $y \neq 0$, $xy + 1 \neq 0$ oraz $x + y \neq 0$. Przypuśćmy, że liczby $x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y}$ oraz $x^3 + \frac{1}{x^3} + y^3 + \frac{1}{y^3}$ są wymierne. Udowodnić, że wówczas liczba $x^2 + \frac{1}{x^2} + y^2 + \frac{1}{y^2}$ jest również wymierna.
5. Wyznaczyć największą dodatnią liczbę całkowitą n o następującej własności: na płaszczyźnie istnieją takie prostokąty $A_1, \dots, A_n$ oraz $B_1, \dots, B_n$, każdy o bokach równoległych do osi układu współrzędnych, że prostokąty A_i oraz B_i są rozłączne dla wszystkich $i \in \{1, \dots, n\}$, ale prostokąty A_i oraz B_j mają punkt wspólny dla wszystkich $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$.

Uwaga: Przez punkty należące do prostokąta rozumiemy wszystkie punkty leżące bądź w jego wnętrzu, bądź na którymkolwiek z jego boków, również jego wierzchołki.

6. Niech $p \geq 5$ będzie liczbą pierwszą. Rozważmy funkcję zadaną wzorem

$$f(x_1, \dots, x_p) = x_1 + 2x_2 + \dots + px_p.$$

Niech A_k oznacza zbiór wszystkich tych permutacji $(a_1, \dots, a_p)$ zbioru $\{1, \dots, p\}$, dla których liczba $f(a_1, \dots, a_p) - k$ jest podzielna przez p oraz $a_i \neq i$ dla wszystkich $i \in \{1, \dots, p\}$. Wykazać, że zbiory A_1 i A_4 mają tyle samo elementów.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na białym papierze (może być w kratkę), wyłącznie czarnym kolorem. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań. Dotyczy to również tych brudnopisów, które uczeń zamierza dołączyć do rozwiązania.
3. W przypadku konieczności odejścia od miejsca pracy trzeba powiadomić opiekuna i uzyskać jego zgodę.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. Należy dokładnie przestrzegać zasad zawartych w pliku „Instrukcja dla uczestników 2 etapu OM.pdf” umieszczonego na stronie olimpiady.



LXXII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia drugiego

12 lutego 2021 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Jacek ma n kart ponumerowanych kolejno liczbami $1, \dots, n$, które układa na stole w rzędzie, w dowolnej wybranej przez siebie kolejności. Jacek będzie zdejmować karty ze stołu w kolejności zgodnej z numeracją kart: wpierv zdejmie kartę o numerze 1, potem kartę o numerze 2, i tak dalej. Zanim Jacek zacznie zdejmować karty, Placek koloruje każdą z kart na czerwono, niebiesko lub żółto. Udowodnić, że Placek może pokolorować karty w taki sposób, że podczas ich zdejmowania przez Jacka w każdym momencie spełniony będzie następujący warunek: pomiędzy dowolnymi dwiema kartami tego samego koloru znajduje się co najmniej jedna karta innej barwy.

Rozwiązanie:

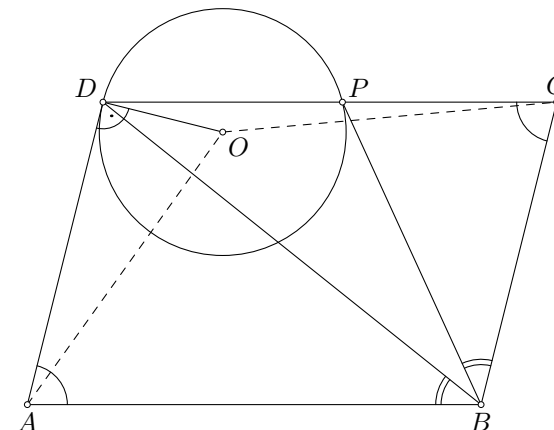
Odwracamy bieg czasu: wykładamy na stół karty, zaczynając od karty, która jako ostatnia została zdjęta ze stołu. Pierwszą wyłożoną kartę kolorujemy na dowolny kolor (na przykład na niebiesko). Każdą następną wyłożoną kartę kolorujemy zgodnie z następującą regułą:

- Jeśli wykładamy kartę na początek lub koniec rzędu, kolorujemy ją na kolor różny od koloru karty leżącej obok.
- Jeśli wykładamy kartę pomiędzy dwie karty, które leżą już na stole, kolorujemy tę kartę na kolor różny od kolorów tych dwóch kart.

Tak otrzymane kolorowanie spełnia warunki zadania. $\square$

2. Punkt P leży na boku CD równoległoboku $ABCD$, przy czym $\angle DBA = \angle CBP$. Punkt O jest środkiem okręgu przechodzącego przez punkty D i P oraz stycznego do prostej AD w punkcie D . Wykazać, że $AO = OC$.

Rozwiązanie:



Sposób 1. Ponieważ $\angle PCB = \angle DAB$ oraz $\angle DBA = \angle CBP$, trójkąty PCB i DAB są podobne. Stąd

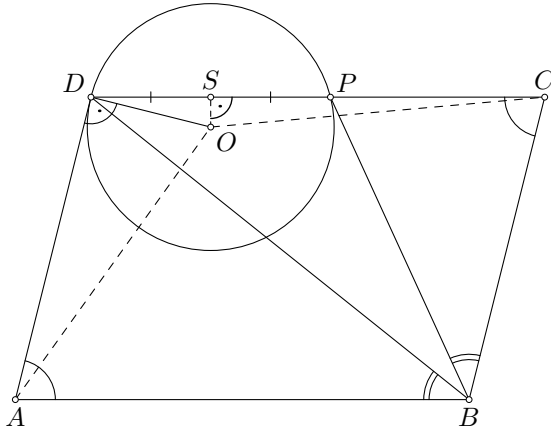
$$\frac{AD}{AB} = \frac{PC}{BC}.$$

Niech o będzie okręgiem o środku w punkcie O i promieniu $r = OD$. Korzystając z twierdzenia Pitagorasa i twierdzenia o potędze punktu względem okręgu, otrzymujemy

$$AO^2 - r^2 = AD^2 = AD \cdot BC = AB \cdot PC = DC \cdot PC = OC^2 - r^2.$$

Wynika stąd, że $AO = OC$.

Sposób 2. Oznaczmy $a = AB = DC$, $b = AD = BC$ oraz $r = OD = OP$. Trójkąty ABD i CBP są podobne, gdyż mają takie same kąty. Wynika stąd, że $\frac{PC}{BC} = \frac{DA}{BA}$, zatem $PC = \frac{BC \cdot DA}{BA} = \frac{b^2}{a}$. Wobec tego $DP = a - \frac{b^2}{a} = \frac{a^2 - b^2}{a}$. Niech S będzie środkiem odcinka DP . Odcinki OS i DP są prostopadłe. Zastosujemy kilkakrotnie twierdzenie Pitagorasa. Mamy $AO^2 = AD^2 + DO^2 = r^2 + b^2$, a zatem



$$\begin{aligned}
 OC^2 &= OS^2 + SC^2 = OD^2 - DS^2 + SC^2 \\
 &= r^2 - \left(\frac{a^2 - b^2}{2a} \right)^2 + \left(a - \frac{a^2 - b^2}{2a} \right)^2 \\
 &= r^2 - \left(\frac{a^2 - b^2}{2a} \right)^2 + \left(\frac{a^2 + b^2}{2a} \right)^2 = r^2 + b^2 = AO^2. \quad \square
 \end{aligned}$$

3. Dodatnie liczby całkowite a, b, z spełniają zależność $ab = z^2 + 1$. Udowodnić, że istnieją takie dodatnie liczby całkowite x, y , że

$$\frac{a}{b} = \frac{x^2 + 1}{y^2 + 1}.$$

Rozwiązanie:

Niech $x = z + a$ oraz $y = z + b$. Mamy wtedy

$$\begin{aligned}
 \frac{x^2 + 1}{y^2 + 1} &= \frac{(z + a)^2 + 1}{(z + b)^2 + 1} = \frac{z^2 + 1 + 2za + a^2}{z^2 + 1 + 2zb + b^2} = \\
 &= \frac{ab + 2za + a^2}{ab + 2zb + b^2} = \frac{a(a + b + 2z)}{b(a + b + 2z)} = \frac{a}{b}.
 \end{aligned}$$

□



LXXII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych
zawodów stopnia drugiego

13 lutego 2021 r. (drugi dzień zawodów)

4. Dane są takie liczby rzeczywiste x, y , że $x \neq 0$, $y \neq 0$, $xy + 1 \neq 0$ oraz $x + y \neq 0$. Przypuśćmy, że liczby $x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y}$ oraz $x^3 + \frac{1}{x^3} + y^3 + \frac{1}{y^3}$ są wymierne. Udowodnić, że wówczas liczba $x^2 + \frac{1}{x^2} + y^2 + \frac{1}{y^2}$ jest również wymierna.

Rozwiązanie:

Niech $X = x + \frac{1}{x}$ oraz $Y = y + \frac{1}{y}$. Ponieważ

$$X^2 + Y^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + y^2 + \frac{1}{y^2} + 4,$$

wystarczy pokazać, że liczba $X^2 + Y^2$ jest wymierna. Z założenia zadania liczby $X + Y$ oraz

$$X^3 + Y^3 = x^3 + \frac{1}{x^3} + y^3 + \frac{1}{y^3} + 3 \left(x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y} \right)$$

są wymierne. Zauważmy, że

$$X + Y = (x + y) \left(1 + \frac{1}{xy} \right) = \frac{(x + y)(1 + xy)}{xy} \neq 0.$$

Liczba

$$a = \frac{X^3 + Y^3}{X + Y} = X^2 - XY + Y^2$$

jest więc wymierna. Wymierna jest również liczba $b = (X + Y)^2$. Stąd otrzymujemy wymierność liczby

$$\frac{2a + b}{3} = X^2 + Y^2.$$

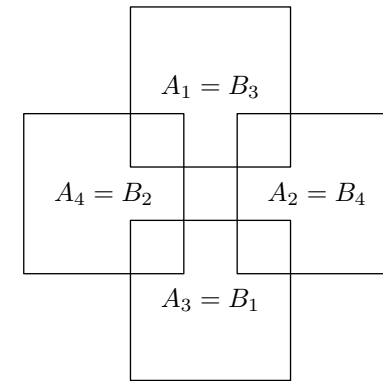
□

5. Wyznaczyć największą dodatnią liczbę całkowitą n o następującej własności: na płaszczyźnie istnieją takie prostokąty $A_1, \dots, A_n$ oraz $B_1, \dots, B_n$, każdy o bokach równoległych do osi układu współrzędnych, że prostokąty A_i oraz B_i są rozłączne dla wszystkich $i \in \{1, \dots, n\}$, ale prostokąty A_i oraz B_j mają punkt wspólny dla wszystkich $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$.

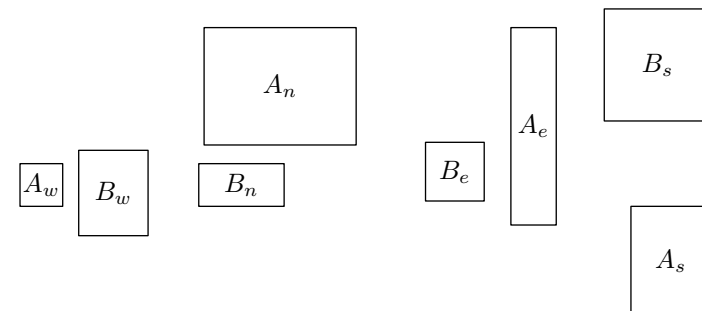
Uwaga: Przez punkty należące do prostokąta rozumiemy wszystkie punkty leżące bądź w jego wnętrzu, bądź na którymkolwiek z jego boków, również jego wierzchołki.

Rozwiązanie:

Największą liczbą spełniającą warunki zadania jest $n = 4$. Poniższy rysunek przedstawia przykład dla $n = 4$.



Przypuśćmy, że prostokąty $A_1, \dots, A_t$ oraz $B_1, \dots, B_t$ spełniają warunki zadania. Liczbę $i \in \{1, \dots, t\}$ nazwiemy *zachodnią*, jeśli wszystkie punkty należące do prostokąta A_i mają ściśle mniejsze współrzędne x od wszystkich punktów należących do prostokąta B_i . Analogicznie definiujemy liczby *północne*, *wschodnie* i *południowe*.



W sytuacji przedstawionej na powyższym rysunku w jest liczbą zachodnią, n jest liczbą północną, e jest liczbą wschodnią, a s jest liczbą południową.

Zauważmy, że skoro prostokąty A_i oraz B_i są rozłączne, to każda liczba $i \in \{1, \dots, t\}$ jest zachodnia, północna, wschodnia lub południowa (przy czym dwie z tych alternatyw mogą zajść jednocześnie). Z drugiej strony, przypuśćmy, że dwie różne liczby $i, j \in \{1, \dots, t\}$ są jednocześnie zachodnie i rozważmy dowolne dwa punkty $(x, y) \in A_i \cap B_j$ oraz $(x', y') \in A_j \cap B_i$. Zachodniość liczby i wówczas implikuje, że $x < x'$, zaś zachodniość liczby j implikuje, że $x' < x$, sprzeczność. Analogicznie dowodzimy, że istnieje co najwyżej jedna liczba północna, co najwyżej jedna wschodnia i co najwyżej jedna południowa. Wynika stąd, że $t \leq 4$.

6. Niech $p \geq 5$ będzie liczbą pierwszą. Rozważmy funkcję zadaną wzorem

$$f(x_1, \dots, x_p) = x_1 + 2x_2 + \dots + px_p.$$

Niech A_k oznacza zbiór tych permutacji $(a_1, \dots, a_p)$ zbioru $\{1, \dots, p\}$, dla których liczba $f(a_1, \dots, a_p) - k$ jest podzielna przez p oraz $a_i \neq i$ dla wszystkich $i \in \{1, \dots, p\}$. Wykazać, że zbiory A_1 i A_4 mają tyle samo elementów.

Rozwiązanie:

W poniższym rozwiązaniu wszystkie przystawania rozważane są modulo p . Oznaczmy $[p] = \{1, 2, \dots, p\}$. Zdefiniujmy funkcję $\sigma: [p] \rightarrow [p]$ wzorem

$$\sigma(i) = \begin{cases} 2i & \text{dla } i = 1, 2, \dots, \frac{p-1}{2} \\ 2i - p & \text{dla } i = \frac{p+1}{2}, \frac{p+3}{2}, \dots, p. \end{cases}$$

Wprost z określenia funkcji σ wynika, że jest ona bijekcją oraz że $\sigma(i) \equiv 2i$ dla każdego $i \in [p]$.

Rozważmy funkcję g przyporządkowującą permutacji $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ permutację

$$g(x_1, x_2, \dots, x_p) = (\sigma(x_{\sigma^{-1}(1)}), \sigma(x_{\sigma^{-1}(2)}), \dots, \sigma(x_{\sigma^{-1}(p)})).$$

Wystarczy dowieść, że g jest bijekcją zbiorów A_1 i A_4 , wyniknie stąd bowiem, że zbiory te mają tyle samo elementów.

Po pierwsze, $f(x_1, \dots, x_p) \equiv 1$ wtedy i tylko wtedy gdy $f(g(x_1, x_2, \dots, x_p)) \equiv 4$. Wynika to z następującego rachunku:

$$\begin{aligned} f(g(x_1, \dots, x_p)) &= \sum_{i=1}^p i \sigma(x_{\sigma^{-1}(i)}) = \sum_{i=1}^p \sigma(i) \sigma(x_i) \equiv \sum_{i=1}^p (2i)(2x_i) \\ &= 4 \sum_{i=1}^p ix_i = 4f(x_1, \dots, x_p). \end{aligned}$$

Po drugie, permutacja $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ nie ma punktów stałych (tzn. $x_i \neq i$ dla każdego $i \in [p]$) wtedy i tylko wtedy gdy $g(x_1, x_2, \dots, x_p)$ nie ma punktów stałych. Istotnie,

$$\forall i \in [p] \ x_i \neq i \iff \forall i \in [p] \ \sigma(x_i) \neq \sigma(i) \iff \forall i \in [p] \ \sigma(x_{\sigma^{-1}(i)}) \neq i.$$

Z powyższych dwóch obserwacji wprost wynika, że $(x_1, x_2, \dots, x_p) \in A_1$ wtedy i tylko wtedy gdy $g(x_1, x_2, \dots, x_p) \in A_4$. Do dokończenia rozwiązania wystarczy więc pokazać, że g jest różnowartościowa.

Rozważmy dwie różne permutacje $(x_1, x_2, \dots, x_p), (y_1, y_2, \dots, y_p)$. Wtedy dla pewnego indeksu i mamy $x_i \neq y_i$. Ponieważ σ jest bijekcją, $i = \sigma^{-1}(j)$ dla pewnego j . W takim razie otrzymujemy kolejno $x_{\sigma^{-1}(j)} \neq y_{\sigma^{-1}(j)}$ oraz $\sigma(x_{\sigma^{-1}(j)}) \neq \sigma(y_{\sigma^{-1}(j)})$. Stąd wniosek, że $g(x_1, x_2, \dots, x_p) \neq g(y_1, y_2, \dots, y_p)$, co dowodzi różnowartościowości. $\square$



LXXII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe

zawodów stopnia trzeciego

7 kwietnia 2021 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Dana jest dodatnia liczba całkowita $k \geq 2$. Niech $p_1, p_2, \dots, p_k$ będą k najmniejszymi liczbami pierwszymi i niech N będzie ich iloczynem. Wykazać, że w zbiorze $\{1, 2, \dots, N\}$ dokładnie połowa elementów jest podzielna przez nieparzyste wiele spośród liczb $p_1, \dots, p_k$.

Przykład. Mamy $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5$, a zatem dla $k = 3$ jest $N = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$. Liczba 12 dzieli się przez 2 i przez 3, zatem jest podzielna przez parzyste wiele spośród liczb p_1, p_2, p_3 .

2. Niech $n \geq 1$ będzie liczbą całkowitą. Dla każdej pary liczb całkowitych i, j spełniających $0 \leq i \leq j \leq n$ dana jest liczba rzeczywista $f(i, j)$, przy czym spełnione są warunki:

- $f(i, i) = 0$ dla wszystkich liczb całkowitych i spełniających $0 \leq i \leq n$;
- $0 \leq f(i, l) \leq 2 \max(f(i, j), f(j, k), f(k, l))$ dla wszystkich liczb całkowitych i, j, k, l spełniających $0 \leq i \leq j \leq k \leq l \leq n$.

Udowodnić, że

$$f(0, n) \leq 2 \sum_{k=1}^n f(k-1, k).$$

3. Dany jest trójkąt ABC wpisany w okrąg ω . Punkt P leży na okręgu ω i jest różny od punktów A, B, C . Proste AP i BC nie są równoległe i przecinają się w punkcie D . Podobnie proste BP i AC przecinają się w punkcie E , zaś proste CP i AB przecinają się w punkcie F . Niech punkt X będzie rzutem D na prostą przechodzącą przez środki odcinków AP i BC , punkt Y rzutem E na prostą przechodzącą przez środki odcinków BP i AC , zaś punkt Z rzutem F na prostą przechodzącą przez środki odcinków CP i AB . Punkt Q jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie XYZ . Dowieść, że wszystkie punkty Q odpowiadające różnym położeniom punktu P na ω , leżą na jednym okręgu.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu poczekać na podejsze dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.



MINISTERSTWO
EDUKACJI
NARODOWEJ



Stowarzyszenie
na rzecz Edukacji
Matematycznej





LXXII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe

zawodów stopnia trzeciego

8 kwietnia 2021 r. (drugi dzień zawodów)

4. Udowodnić, że dla każdej pary dodatnich liczb rzeczywistych a, b oraz dla każdej dodatniej liczby całkowitej n zachodzi nierówność

$$(a+b)^n - a^n - b^n \geq \frac{2^n - 2}{2^{n-2}} \cdot ab(a+b)^{n-2}.$$

5. Dany jest sześciokąt wypukły $ABCDEF$, w którym $\sphericalangle FAB + \sphericalangle BCD + \sphericalangle DEF = 360^\circ$ oraz $\sphericalangle AEB = \sphericalangle ADB$. Załóżmy, że odcinki AB i DE nie są równoległe. Wykazać, że środki okręgów opisanych na trójkątach AFE , BCD oraz punkt przecięcia prostych AB i DE leżą na jednej prostej.

6. Dana jest liczba całkowita $d \geq 2$ oraz okrąg ω . Jaś narysował pewną skończoną liczbę cięciw okręgu ω . Spełniony jest przy tym warunek: każdy koniec każdej narysowanej cięciwy jest końcem co najmniej d różnych narysowanych cięciw. Dowieść, że istnieje narysowana cięciwa, która przecina co najmniej $\frac{d^2}{4}$ innych narysowanych cięciw. Przyjmujemy, że cięciwy o wspólnym końcu przecinają się.

Uwaga: Dowód, że pewna narysowana cięciwa przecina co najmniej $\frac{d^2}{8}$ innych narysowanych cięciw będzie nagradzany dwoma punktami.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu poczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.



MINISTERSTWO
EDUKACJI
NARODOWEJ



Stowarzyszenie
na rzecz Edukacji
Matematycznej





LXXII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych

zawodów stopnia trzeciego

7 kwietnia 2021 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Dana jest dodatnia liczba całkowita $k \geq 2$. Niech $p_1, p_2, \dots, p_k$ będą k najmniejszymi liczbami pierwszymi i niech N będzie ich iloczynem. Wykazać, że w zbiorze $\{1, 2, \dots, N\}$ dokładnie połowa elementów jest podzielna przez nieparzyste wiele spośród liczb $p_1, \dots, p_k$.

Przykład. Mamy $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5$, a zatem dla $k = 3$ jest $N = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$. Liczba 12 dzieli się przez 2 i przez 3, zatem jest podzielna przez parzyste wiele spośród liczb p_1, p_2, p_3 .

Rozwiązanie:

Niech $i \in \{1, 2, \dots, \frac{N}{2}\}$. Zauważmy, że liczba $\frac{N}{2}$ jest nieparzysta, a zatem $2 \mid i \iff 2 \nmid \frac{N}{2} + i$. Ponadto dla $j = 2, 3, \dots, k$ liczba p_j dzieli $\frac{N}{2}$, więc $p_j \mid i \iff p_j \nmid \frac{N}{2} + i$. W takim razie liczba liczb $p_1, p_2, \dots, p_k$ dzielących i różni się od liczby liczb $p_1, p_2, \dots, p_k$ dzielących $\frac{N}{2} + i$ o dokładnie jeden — w takim razie jedna z liczb $i, \frac{N}{2} + i$ dzieli się przez nieparzyste wiele spośród liczb $p_1, p_2, \dots, p_k$, a druga nie.

Wobec tego łącząc liczby ze zbioru $\{1, 2, 3, \dots, N\}$ w pary postaci $i, \frac{N}{2} + i$ dla $i = 1, 2, \dots, \frac{N}{2}$ widzimy, że dokładnie połowa z nich dzieli się przez nieparzyste wiele spośród $p_1, p_2, \dots, p_k$. $\square$

2. Niech $n \geq 1$ będzie liczbą całkowitą. Dla każdej pary liczb całkowitych i, j spełniających $0 \leq i \leq j \leq n$ dana jest liczba rzeczywista $f(i, j)$, przy czym spełnione są warunki:

- $f(i, i) = 0$ dla wszystkich liczb całkowitych i spełniających $0 \leq i \leq n$;
- $0 \leq f(i, l) \leq 2 \max(f(i, j), f(j, k), f(k, l))$ dla wszystkich liczb całkowitych i, j, k, l spełniających $0 \leq i \leq j \leq k \leq l \leq n$.

Udowodnić, że

$$f(0, n) \leq 2 \sum_{k=1}^n f(k-1, k).$$

Rozwiązanie:

Układ liczb $f(i, j)$ dla $0 \leq i \leq j \leq n$ spełniający założenia zadania będziemy nazywać *dobrym* układem. Przeprowadzimy dowód indukcyjny ze względu na n . Dla $n = 1$ należy dowieść, że $f(0, 1) \leq 2f(0, 1)$, co jest prawdą, gdyż $f(0, 1) \geq 0$ na mocy założeń zadania.

Niech $n \geq 2$ i założymy, że dla każdego $m \leq n-1$ i każdego dobrego układu liczb $g(i, j)$, gdzie $0 \leq i \leq j \leq m$ spełniona jest teza zadania. Rozważmy dobry układ $f(i, j)$, $1 \leq i \leq j \leq n$. Należy dowieść, że $f(0, n) \leq 2S$, gdzie $S = \sum_{k=1}^n f(k-1, k)$. Zauważmy, że z definicji S mamy $f(k-1, k) \leq S$ dla $1 \leq k \leq n$.

Rozważmy najpierw przypadek, gdy $f(0, 1) > \frac{S}{2}$. Wówczas

$$f(0, n) \leq 2 \max(f(0, 0), f(0, 1), f(1, n)) = 2 \max(f(0, 1), f(1, n)).$$

Mamy $f(0, 1) \leq S$. Ponadto $\sum_{k=2}^n f(k-1, k) = S - f(0, 1) < \frac{S}{2}$, zatem z założenia indukcyjnego zastosowanego do dobrego układu liczb $f(i+1, j+1)$, $0 \leq i \leq j \leq n-1$ otrzymujemy $f(1, n) \leq 2 \cdot \sum_{k=2}^n f(k-1, k) < S$.

Założmy teraz, że $f(0, 1) \leq \frac{S}{2}$. Istnieje wtedy liczba $1 \leq \ell \leq n-1$ taka, że

$$\sum_{k=1}^{\ell} f(k-1, k) \leq \frac{S}{2} \leq \sum_{k=1}^{\ell+1} f(k-1, k).$$

Wystarczy dowieść, że liczby $f(0, \ell), f(\ell+1, n)$ nie przekraczają S , gdyż wówczas

$$f(0, n) \leq 2 \max(f(0, \ell), f(\ell+1, n)) \leq 2S.$$

Jeśli $\ell = n-1$, wystarczy wykazać, że $f(0, n-1) \leq S$. Wynika to z założenia indukcyjnego zastosowanego do dobrego układu liczb $f(i, j)$ dla $0 \leq i \leq j \leq n-1$. Pozostaje rozważyć przypadek $1 \leq \ell \leq n-2$. Z założenia indukcyjnego zastosowanego do dobrego układu $f(i, j)$, $0 \leq i \leq j \leq \ell$ oraz z wyboru liczby ℓ otrzymujemy

$$f(0, \ell) \leq 2 \sum_{k=1}^{\ell} f(k-1, k) \leq S.$$

Z założenia indukcyjnego zastosowanego do dobrego układu $f(\ell+1+i, \ell+1+j)$, gdzie $0 \leq i \leq j \leq n-\ell-1$, oraz z wyboru ℓ otrzymujemy

również

$$f(\ell+1, n) \leq 2 \sum_{k=\ell+2}^n f(k-1, k) = 2S - 2 \sum_{k=1}^{\ell+1} f(k-1, k) \leq S.$$

□

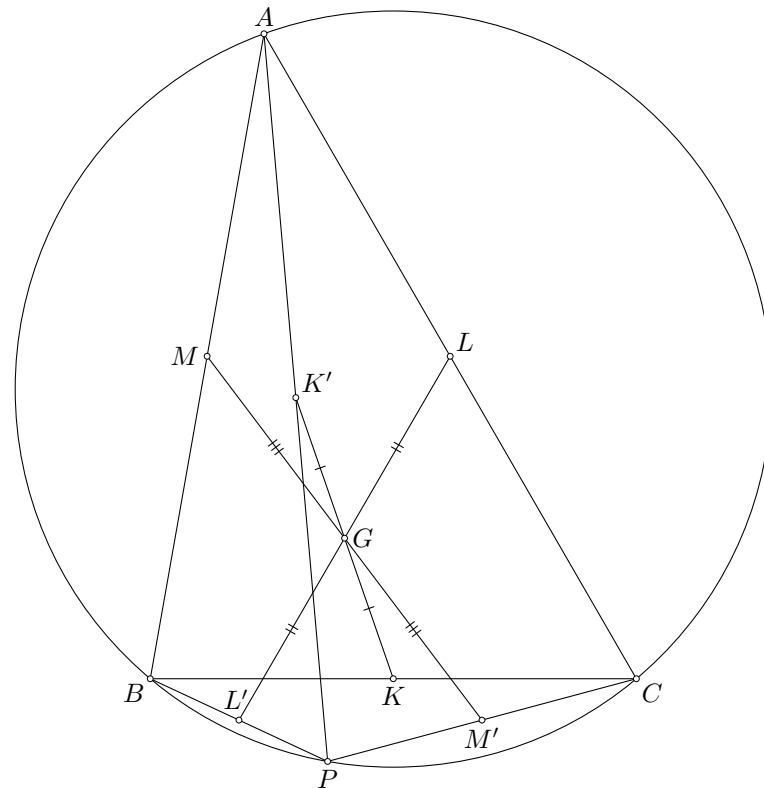
3. Dany jest trójkąt ABC wpisany w okrąg ω . Punkt P leży na okręgu ω i jest różny od punktów A, B, C . Proste AP i BC nie są równoległe i przecinają się w punkcie D . Podobnie proste BP i AC przecinają się w punkcie E , zaś proste CP i AB przecinają się w punkcie F . Niech punkt X będzie rzutem D na prostą przechodzącą przez środki odcinków AP i BC , punkt Y rzutem E na prostą przechodzącą przez środki odcinków BP i AC , zaś punkt Z rzutem F na prostą przechodzącą przez środki odcinków CP i AB . Punkt Q jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie XYZ . Dowieść, że wszystkie punkty Q odpowiadające różnym położeniom punktu P na ω , leżą na jednym okręgu.

Rozwiązanie:

Oznaczmy środek okręgu ω przez O . Oznaczmy środki odcinków BC, CA, AB, AP, BP, CP przez odpowiednio K, L, M, K', L', M' . Niech G będzie takim punktem, że $\vec{OG} = \frac{1}{4}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OP})$. Wówczas $\vec{OG} = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}(\vec{OB} + \vec{OC}) + \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OP})) = \frac{1}{2}(\vec{OK} + \vec{OK}')$, więc G jest środkiem odcinka KK' . Analogicznie dowodzimy, że G jest środkiem odcinków LL' i MM' .

Punkt symetryczny do O względem G oznaczmy przez O' . Udowodnimy teraz, że punkt X leży na okręgu o średnicy $O'G$. Rozważmy najpierw przypadek, w którym $O = K$. Wtedy $O' = K'$ i $\angle OK'D = 90^\circ$, więc $X = O'$ i w szczególności X leży na okręgu o średnicy $O'G$. Podobnie dowodzimy, że gdy $O = K'$, to $X = O'$. Załóżmy teraz, że $O \neq K, O \neq K'$. Wówczas także $O' \neq K, O' \neq K'$, a czworokąt $OKO'K'$ jest równoległobokiem (zwróćmy znowu uwagę na to, że punkty O, K, K' nie są współliniowe, gdyż wówczas byłoby $BC \perp OK = OK' \perp AP$ skąd $BC \parallel AP$ wbrew założeniom zadania). W takim razie $O'K' \parallel OK \perp BC$ i $O'K \parallel OK' \perp AP$. Stąd proste KO' i $K'O'$ są prostopadłe odpowiednio do prostych DK' i DK (o ile D nie pokrywa się z K i K'), więc O' jest ortocentrum trójkąta DKK' . Zatem rzuty punktów D, O' na KK' się pokrywają. Wnioskujemy, że w tym przypadku X leży na okręgu o

średnicy $O'G$. Wreszcie, jeśli D pokrywa się z K bądź z K' , to $X = D$ i w obu przypadkach $O'X \perp XG$.



Analogicznie rozumując dowodzimy, że Y i Z leżą na okręgu o średnicy $O'G$. Stąd wniosek, że Q jest środkiem $O'G$. W takim razie

$$\vec{OQ} = \frac{3}{2}\vec{OG} = \frac{3}{4}(\vec{OK} + \vec{OK}') = \frac{3}{8}(\vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OA} + \vec{OP}) = \vec{OT} + \frac{3}{8}\vec{OP},$$

przy czym T jest takim punktem płaszczyzny, że $\vec{OT} = \frac{3}{8}(\vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OA})$. Wobec tego $\vec{TQ} = \frac{3}{8}\vec{OP}$, w szczególności $TQ = \frac{3}{8}R$, gdzie R jest promieniem okręgu ω . Punkt Q leży więc na okręgu o środku T i promieniu $\frac{3}{8}R$.



LXXII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych

zawodów stopnia trzeciego

8 kwietnia 2021 r. (drugi dzień zawodów)

4. Udowodnić, że dla każdej pary dodatnich liczb rzeczywistych a, b oraz dla każdej dodatniej liczby całkowitej n zachodzi nierówność

$$(a+b)^n - a^n - b^n \geq \frac{2^n - 2}{2^{n-2}} \cdot ab(a+b)^{n-2}.$$

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy dowód indukcyjny ze względu na n . Dla $n = 1$ obie strony nierówności są równe 0, dla $n = 2$ obie strony nierówności są równe $2ab$, a dla $n = 3$ obie strony nierówności są równe $3ab(a+b)$.

Ustalmy $a, b > 0$ i założmy, że dla pewnego $n \geq 3$ mamy

$$(a+b)^n - a^n - b^n \geq \frac{2^n - 2}{2^{n-2}} \cdot ab(a+b)^{n-2}.$$

Mnożąc tę nierówność stronami przez liczbę dodatnią $a+b$ otrzymujemy

$$(a+b)^{n+1} - a^{n+1} - b^{n+1} - ab(a^{n-1} + b^{n-1}) \geq \frac{2^n - 2}{2^{n-2}} \cdot ab(a+b)^{n-1}.$$

Wobec tego

$$(a+b)^{n+1} - a^{n+1} - b^{n+1} \geq ab(a^{n-1} + b^{n-1}) + \frac{2^n - 2}{2^{n-2}} \cdot ab(a+b)^{n-1}.$$

Aby zakończyć dowód indukcyjny wystarczy sprawdzić, że

$$ab(a^{n-1} + b^{n-1}) + \frac{2^n - 2}{2^{n-2}} \cdot ab(a+b)^{n-1} \geq \frac{2^{n+1} - 2}{2^{n-1}} \cdot ab(a+b)^{n-1}.$$

Odejmując od obu stron liczbę $\frac{2^n - 2}{2^{n-2}} \cdot ab(a+b)^{n-1}$ otrzymujemy równoważną postać

$$ab(a^{n-1} + b^{n-1}) \geq \left(\frac{2^{n+1} - 2}{2^{n-1}} - \frac{2^n - 2}{2^{n-2}} \right) \cdot ab(a+b)^{n-1} = \frac{ab(a+b)^{n-1}}{2^{n-2}}.$$

Dzieląc obie strony nierówności przez liczbę dodatnią $2ab$ a następnie wyciągając pierwiastek stopnia $n-1$ otrzymujemy równoważnie

$$\sqrt[n-1]{\frac{a^{n-1} + b^{n-1}}{2}} \geq \frac{a+b}{2}.$$

Ta nierówność jest prawdziwa — jest to nierówność między średnią potęgową stopnia $n-1$ i średnią arytmetyczną. $\square$

5. Dany jest sześciokąt wypukły $ABCDEF$, w którym $\sphericalangle FAB + \sphericalangle BCD + \sphericalangle DEF = 360^\circ$ oraz $\sphericalangle AEB = \sphericalangle ADB$. Załóżmy, że odcinki AB i DE nie są równoległe. Wykazać, że środki okręgów opisanych na trójkątach AFE , BCD i punkt przecięcia prostych AB i DE leżą na jednej prostej.

Rozwiązanie:

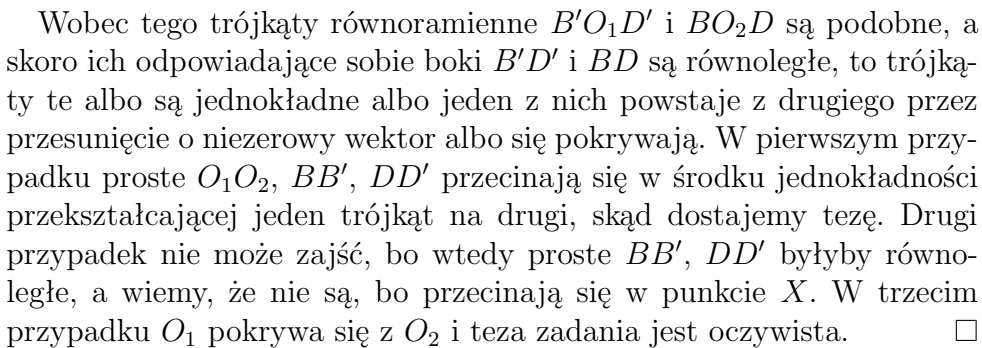
W niniejszym rozwiązaniu przyjmujemy następującą konwencję: $\sphericalangle KLM$ oznacza kąt skierowany, czyli kąt o jaki należy obrócić półprostą LK wokół punktu L przeciwnie do kierunku ruchu wskazówek zegara tak, by nałożyła się ona na półprostą LM . Rachunki na kątach wykonujemy z dokładnością do wielokrotności 360° . (Tak więc na przykład $\sphericalangle KLM = 360^\circ - \sphericalangle MLK = -\sphericalangle MLK$.)

Niech X będzie punktem przecięcia prostych AB i DE . Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że punkty B, D leżą na odcinkach odpowiednio AX, EX .

Oznaczmy okrąg opisany na trójkącie EFA przez ω . Niech B' będzie takim punktem leżącym na prostej XA , że $\sphericalangle XB'E = \sphericalangle AFE$. Wówczas B' leży na ω . Podobnie, gdy D' jest takim punktem leżącym na prostej XE , że $\sphericalangle AD'X = \sphericalangle AFE$, to D' leży na ω . Zauważmy, że skoro $\sphericalangle ADB = \sphericalangle AEB$ oraz punkty D, E leżą po tej samej stronie prostej AB , to punkty A, B, D, E leżą na jednym okręgu. Wobec tego $\sphericalangle XBD = \sphericalangle AEX = \sphericalangle XB'D'$, co oznacza, że $BD \parallel B'D'$.

Niech O_1 będzie środkiem ω , a O_2 środkiem okręgu opisanego na trójkącie BCD . Mamy

$$\begin{aligned} \sphericalangle B'O_1D' &= \sphericalangle B'O_1F + \sphericalangle FO_1D' = 2\sphericalangle XAF + 2\sphericalangle FEX = \\ &= 2(360^\circ - \sphericalangle DCB) = 2\sphericalangle BCD = \sphericalangle BO_2D. \end{aligned}$$



Uwaga: Dowód, że pewna narysowana cięciwa przecina co najmniej $\frac{d^2}{8}$ innych narysowanych cięciw będzie nagradzany dwoma punktami.

Oznaczmy końce cięciw narysowanych przez Jasia przez $A_1, A_2, \dots, A_t$, przy czym numerację dobieramy tak, że $A_1, A_2, \dots, A_t$ leżą w tej kolejności na okręgu ω .

Rozważmy punkt A_m , przy czym $k+1 \leq m \leq \ell-1$ i rozważmy cięciwę $A_m A_{m+n}$, która nie przecina $A_k A_\ell$. Wówczas $k+1 \leq m+n \leq \ell-1$ oraz $n \neq 0$, a ponadto $-\frac{d}{2} \leq n \leq \frac{d}{2}$, gdyż w przeciwnym razie cięciwa $A_m A_{m+n}$ miałaby długość większą od $\frac{d}{2}$ i mniejszą od $\ell-k$, wbrew wyborowi cięciwy $A_k A_\ell$. W takim razie $-\min(m-k-1, \lfloor \frac{d}{2} \rfloor) \leq n \leq \min(\ell-1-m, \lfloor \frac{d}{2} \rfloor)$. Stąd wniosek, że jest co najwyżej $\min(m-k-1, \lfloor \frac{d}{2} \rfloor) + \min(\ell-1-m, \lfloor \frac{d}{2} \rfloor)$ cięciw o końcu A_m , które nie przecinają $A_k A_\ell$. W takim razie co najmniej $d - \min(m-k-1, \lfloor \frac{d}{2} \rfloor) - \min(\ell-1-m, \lfloor \frac{d}{2} \rfloor)$ cięciw o końcu A_m przecina $A_k A_\ell$. Ponadto $A_k A_\ell$ ma wspólny koniec A_k z co najmniej $d-1$ cięciwami spośród których co najwyżej $\lfloor \frac{d}{2} \rfloor$ jest postaci $A_k A_m$ dla $k+1 \leq m \leq \ell-1$ oraz wspólny koniec A_ℓ z co najmniej $d-1$ innymi cięciwami, spośród których co najwyżej $\lfloor \frac{d}{2} \rfloor$ jest postaci $A_m A_\ell$ dla $k+1 \leq m \leq \ell-1$.

Podsumowując, liczba cięciw przecinających $A_k A_\ell$ wynosi co najmniej

$$\begin{aligned}
& 2(d-1-\left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor) + \sum_{m=k+1}^{\ell-1} \left(d - \min(m-k-1, \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor) - \min(\ell-1-m, \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor) \right) \\
&= (\ell-k)(d-2\left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor) + \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor^2 + \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor + d-2 \\
&\geq (\left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor + 1)(d-2\left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor) + \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor^2 + \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor + d-2 \\
&= \begin{cases} \frac{d^2}{4} + \frac{3d}{2} - 2 & \text{jeśli } 2 \mid d, \\ \frac{d^2}{4} + \frac{3d}{2} - \frac{7}{4} & \text{jeśli } 2 \nmid d. \end{cases}
\end{aligned}$$

W obu przypadkach otrzymana liczba jest większa od $\frac{d^2}{4}$.

Uwaga. Otrzymane wyżej szacowania są najlepsze możliwe, o czym świadczy przykład $d + 1$ punktów na okręgu połączonych wszystkimi możliwymi cięciami.

Uwaga. Istnienie cięciwy, która przecina się z więcej niż $\frac{d^2}{8}$ cięciami można uzasadnić podobną metodą w sposób następujący. Spośród wszystkich cięciw długości większej od $\frac{d}{4}$ wybierzmy jedną z tych o najmniejszej długości. Niech będzie to cięciwa $A_k A_\ell$, przy czym $k < \ell$. Dla każdego $k + 1 \leq m \leq \ell - 1$ istnieje co najwyżej $\frac{d}{2}$ cięciw o końcu A_m nieprzecinających $A_k A_\ell$ (jedynymi potencjalnymi kandydatami na takie cięciwy są $A_m A_{m+n}$, gdzie $-\frac{d}{4} \leq n \leq \frac{d}{4}$ i $n \neq 0$). Pozostałe cięciwy o końcu A_m muszą przecinać $A_k A_\ell$. Takich cięciw jest co najmniej $d - \frac{d}{2} = \frac{d}{2}$. W takim razie liczba cięciw przecinających $A_k A_\ell$ mających jeden koniec wśród wierzchołków $A_{k+1}, A_{k+2}, \dots, A_{\ell-1}$ to co najmniej $(\ell - k - 1) \cdot \frac{d}{2}$. Oprócz tego jest co najmniej $d - (\ell - k)$ cięciw o końcu A_k , których nie uwzględniliśmy w powyższym zliczaniu — razem otrzymujemy więc co najmniej

$$(\ell - k - 1) \cdot \frac{d}{2} + d - (\ell - k) = (\ell - k) \left(\frac{d}{2} - 1 \right) + \frac{d}{2} > \frac{d}{4} \cdot \left(\frac{d}{2} - 1 \right) + \frac{d}{2} > \frac{d^2}{8}$$

cięciw przecinających $A_k A_\ell$.



LXXIII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe

zawodów stopnia pierwszego

I seria: do 15 października 2021 r.

1. Niech a, b będą liczbami rzeczywistymi spełniającymi warunek $a + b = 1$. Udowodnić nierówność

$$(a^2 + b)(b^2 + a) \geq \frac{9}{16}.$$

2. W trójkącie ABC punkt I jest środkiem okręgu wpisanego. Punkt X leży na odcinku AB , przy czym spełniony jest warunek $\angle AIX = 90^\circ$. Okrąg opisany na trójkącie BIX przecina okrąg opisany na trójkącie ABC w punkcie Y różnym od B , leżącym po tej samej stronie prostej AB co punkt C . Wykazać, że prosta YX jest dwusieczną kąta AYB .

3. Dane są dodatnie liczby całkowite a, b, c , przy czym $b > c$ oraz $a > 1$. Udowodnić, że liczba $a^{b^2} - a^{c^2}$ jest podzielna przez liczbę $a^b - a^c$.

4. Jadzia ma kostkę w kształcie czworościanu foremnego o krawędzi długości n oraz ma do dyspozycji n^2 naklejek w kształcie trójkątów równobocznych o boku długości 2. Chciałaby okleić kostkę naklejkami, zginając je w razie potrzeby, w taki sposób, by każdy punkt na jej powierzchni był przykryty przez przynajmniej jedną naklejkę. Wyznaczyć wszystkie dodatnie liczby całkowite n , dla których Jadzia może to zrobić.

Uwaga: W tym roku szkolnym zadania zawodów pierwszego stopnia OM będą publikowane sukcesywnie: pierwsza seria 1 września 2021 r., druga seria 1 października 2021 r., a trzecia seria 25 października 2021 r.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

15 października 2021 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane. Rozwiązanie każdego zadania należy podpisać w lewym górnym rogu pierwszej jego strony: imieniem i nazwiskiem, swoim adresem, swoim adresem elektronicznym oraz klasą, nazwą i adresem szkoły.



LXXIII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia pierwszego
II seria: do 8 listopada 2021 r.

5. Dane są dodatnie liczby całkowite $a, b \leq 2^{2021}$. Załóżmy, że dla pewnej liczby całkowitej $m \geq 2021$ liczba a^{m+1} jest podzielna przez b^m , a liczba b^{m+1} jest podzielna przez a^m . Dowieść, że $a = b$.

6. Dana jest funkcja kwadratowa f oraz parami różne liczby rzeczywiste x, y, z , dla których $f(x) = yz$, $f(y) = zx$, $f(z) = xy$. Wyrazić jawnie wartość $f(x + y + z)$ w zależności od x, y, z .

7. W każdym wierzchołku 2021-kąta foremnego siedzi tresowana pchła. Każdej przekątnej tego wielokąta przypisano numer będący dodatnią liczbą całkowitą, przy czym różnym przekątnym przypisano różne numery. Na sygnał tresera pchły zaczynają skakać wzdłuż przekątnych od wierzchołka do wierzchołka. Przestrzegają one następującej reguły: przed każdym skokiem każda pchła sprawdza, które przekątne mające koniec w jej obecnym położeniu mają większy numer od wszystkich przekątnych wzdłuż których ta pchła dotychczas skoczyła, spośród nich wybiera tę o najniższym numerze i skacze wzdłuż niej; jeśli takich przekątnych nie ma, pchła przestaje skakać. Wykazać, że każda pchła zatrzyma się w innym wierzchołku.

Uwaga: W jednym wierzchołku może znajdować się wiele pcheł równocześnie. Każda pchła może odwiedzać wielokrotnie ten sam wierzchołek.

8. Dany jest trójkąt ABC . Punkt D jest rzutem prostokątnym punktu A na prostą BC , a punkt E jest rzutem prostokątnym punktu D na prostą AC . Punkt M jest środkiem boku AB . Dowieść, że $\sqrt{2} \cdot EM \leq AB$.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

8 listopada 2021 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane. Rozwiązanie każdego zadania należy podpisać w lewym górnym rogu pierwszej jego strony: imieniem i nazwiskiem, swoim adresem, swoim adresem elektronicznym oraz klasą, nazwą i adresem szkoły.



LXXIII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia pierwszego
III seria: do 30 listopada 2021 r.

9. Dana jest liczba pierwsza p . Wykazać, że istnieje nieskończenie wiele dodatnich liczb całkowitych n , dla których liczba $2^{3^n} - n$ jest podzielna przez p .

10. Dana jest dodatnia liczba całkowita n oraz parami różne dodatnie liczby rzeczywiste a, b, c spełniające równość

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1.$$

Dowieść, że

$$\frac{a^n - b^n}{a^{n+1} - b^{n+1}} + \frac{b^n - c^n}{b^{n+1} - c^{n+1}} + \frac{c^n - a^n}{c^{n+1} - a^{n+1}} < \frac{n}{n+1}.$$

11. Dany jest trójkąt prostokątny ABC . Punkt D jest rzutem prostokątnym punktu C na przeciwprostokątną AB . Punkty I i J są środkami okręgów wpisanych odpowiednio w trójkąty ADC i BDC . Prosta ℓ , różna od AB , jest styczna do obu tych okręgów, przy czym okręgi te leżą po tej samej stronie prostej ℓ . Punkty P i Q są punktami przecięcia prostej ℓ odpowiednio z bokami AC i BC . Udowodnić, że pięciokąt $CPIJQ$ można wpisać w okrąg.

12. Dane są dodatnie liczby całkowite k, n tej samej parzystości. Na okręgu zaznaczono $2n$ punktów. Narysowano k cięciw tego okręgu o obu końcach wśród zaznaczonych punktów, przy czym każdy punkt jest końcem nieparzystej liczby cięciw. Każdemu z zaznaczonych punktów chcemy przypisać jeden z numerów $1, 2, \dots, 2n$, przy czym różnym punktom chcemy przypisać różne numery. Punkt A nazwiemy *cudownym*, jeśli liczba cięciw łączących A z punktami o numerach mniejszych od numeru A jest parzysta. Wykazać, że numery można przypisać w taki sposób, aby dokładnie n punktów było cudownych.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

30 listopada 2021 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane. Rozwiązanie każdego zadania należy podpisać w lewym górnym rogu pierwszej jego strony: imieniem i nazwiskiem, swoim adresem, swoim adresem elektronicznym oraz klasą, nazwą i adresem szkoły.

Adresy Komitetów Okręgowych Olimpiady Matematycznej

- Dla województwa pomorskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Gdańskiego, ul. Wita Stwosza 57, 80-952 Gdańsk.
- Dla województwa śląskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Śląskiego, ul. Bankowa 14, 40-007 Katowice.
- Dla województwa małopolskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego, ul. Łojasiewicza 6, 30-348 Kraków.
- Dla województwa lubelskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Zakład Rachunku Prawdopodobieństwa pok. 810, Instytut Matematyki Uniwersytetu Marii Curie-Skłodowskiej, pl. Marii Curie-Skłodowskiej 1, 20-031 Lublin.
- Dla województwa łódzkiego i świętokrzyskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Łódzkiego, ul. Banacha 22, 90-238 Łódź.
- Dla województwa wielkopolskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Adama Mickiewicza, ul. Uniwersytetu Poznańskiego 4, 61-614 Poznań.
- Dla województwa podkarpackiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyczno-Przyrodniczy, Uniwersytetu Rzeszowskiego ul. Pigonia 1, 35-310 Rzeszów.
- Dla województwa lubuskiego i zachodniopomorskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Szczecińskiego, ul. Wielkopolska 15, 70-451 Szczecin.
- Dla województwa kujawsko-pomorskiego i warmińsko-mazurskiego: — Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, ul. Chopina 12/18, 87-100 Toruń.
- Dla województwa mazowieckiego i podlaskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, ul. Śniadeckich 8, 00-656 Warszawa.
- Dla województwa dolnośląskiego i opolskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego, pl. Grunwaldzki 2/4, 50-384 Wrocław.

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w Internecie pod adresem: <https://om.mimuw.edu.pl>



LXXIII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych
zawodów stopnia pierwszego

1. Niech a, b będą liczbami rzeczywistymi spełniającymi warunek $a + b = 1$. Udowodnić nierówność

$$(a^2 + b)(b^2 + a) \geq \frac{9}{16}.$$

Autor zadania: Piotr Nayar

Rozwiązanie:

Sposób 1. Z równości danej w treści zadania obliczamy $b = 1 - a$. Mamy zatem $a^2 + b = a^2 - a + 1$ oraz $b^2 + a = (1 - a)^2 + a = 1 - 2a + a^2 + a = a^2 - a + 1$. Zapisując trójkąt kwadratowy $a^2 - a + 1$ w postaci kanonicznej otrzymujemy $a^2 - a + 1 = (a - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$. Wynika stąd, że $a^2 - a + 1 \geq \frac{3}{4}$. Ostatecznie,

$$(a^2 + b)(b^2 + a) = (a^2 - a + 1)^2 \geq \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}.$$

Sposób 2. Zauważmy, że

$$\begin{aligned}(a^2 + b)(b^2 + a) &= a^2b^2 + a^3 + b^3 + ab = a^2b^2 + (a + b)(a^2 - ab + b^2) + ab = \\&= a^2b^2 + a^2 - ab + b^2 + ab = a^2b^2 + a^2 + b^2 = \\&= \left(ab - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{8}(a - b)^2 + \frac{5}{8}(a + b)^2 - \frac{1}{16} \geq \\&\geq \frac{5}{8} - \frac{1}{16} = \frac{9}{16}.\end{aligned}$$

Sposób 3. Podobnie jak w sposobie drugim dowodzimy, że lewa strona nierówności jest równa liczbie $a^2b^2 + a^2 + b^2$. Do obu stron nierówności dodajemy 1, mamy więc udowodnić, że

$$(a^2 + 1)(b^2 + 1) = a^2b^2 + a^2 + b^2 + 1 \geq \frac{25}{16}.$$

Ta nierówność jest szczególnym przypadkiem nierówności Cauchy'ego-Schwarza: dla dowolnych liczb rzeczywistych $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$ zachodzi nierówność

$$(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2) \geq (x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n)^2.$$

Rzeczywiście, przyjmując $n = 5$, $x_1 = a$, $y_1 = b$, $x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = y_1 = y_3 = y_4 = y_5 = \frac{1}{2}$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}\left(a^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) \left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 + b^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) &\geq \\&\geq \left(a \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot b + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right)^2,\end{aligned}$$

czyli

$$(a^2 + 1)(b^2 + 1) \geq \left(\frac{a + b}{2} + \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{25}{16},$$

gdyż $a + b = 1$.

2. W trójkącie ABC punkt I jest środkiem okręgu wpisanego. Punkt X leży na odcinku AB , przy czym spełniony jest warunek $\sphericalangle AIX = 90^\circ$. Okrąg opisany na trójkącie BIX przecina okrąg opisany na trójkącie ABC w punkcie Y różnym od B , leżącym po tej samej stronie prostej AB co punkt C . Wykazać, że prosta YX jest dwusieczną kąta AYB .

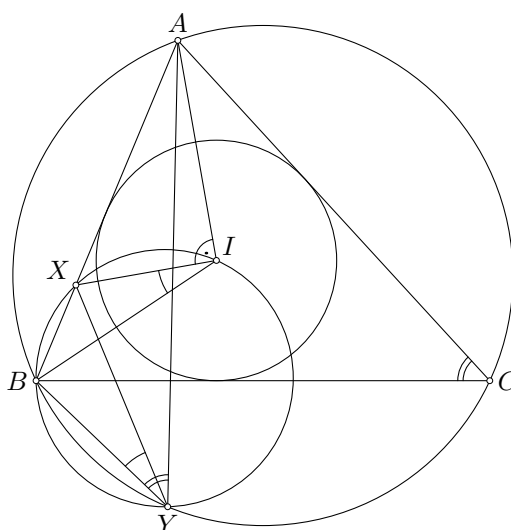
Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie:

Mamy $\sphericalangle AYB = \sphericalangle ACB$, jako że kąty te oparte są na tym samym łuku AB okręgu opisanego na trójkącie ABC . Wystarczy zatem pokazać, że $\sphericalangle XYB = \frac{1}{2}\sphericalangle ACB$.

Zauważmy, że $\sphericalangle XYB = \sphericalangle XIB$, jako że kąty te są oparte na tym samym łuku okręgu opisanego na trójkącie BIX . Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC , więc proste AI i BI są dwusiecznymi kątów BAC i CBA . W takim razie $\sphericalangle BAI = \frac{1}{2}\sphericalangle BAC$ i $\sphericalangle IBA = \frac{1}{2}\sphericalangle CBA$. Stąd i z tego, że suma kątów dowolnego trójkąta wynosi 180° , otrzymujemy

$$\begin{aligned}\sphericalangle XIB &= 180^\circ - \sphericalangle IBA - \sphericalangle BAI - \sphericalangle AIX = 180^\circ - \frac{1}{2}\sphericalangle CBA - \frac{1}{2}\sphericalangle BAC - 90^\circ \\ &= \frac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle CBA - \sphericalangle BAC) = \frac{1}{2}\sphericalangle ACB.\end{aligned}$$



Ostatecznie,

$$\sphericalangle XYB = \sphericalangle XIB = \frac{1}{2}\sphericalangle ACB,$$

co kończy dowód.

Uwaga. Założenie, że punkt Y leży po tej samej stronie prostej AB co punkt C , można pominąć w treści zadania. Okazuje się bowiem, że tak właśnie jest dla dowolnego trójkąta. Aby to uzasadnić przeprowadzimy dowód nie wprost: przypuśćmy, że punkty Y i C leżą po różnych stronach prostej AB . Korzystając dwukrotnie z tego, że w czworokącie wpisanym w okrąg suma dwóch przeciwległych kątów wynosi 180° , otrzymujemy $\sphericalangle BYA = 180^\circ - \sphericalangle ACB$ oraz $\sphericalangle BYX = 180^\circ - \sphericalangle XIB = 180^\circ - \frac{1}{2}\sphericalangle ACB$. (Użyliśmy tutaj udowodnionej w rozwiązaniu równości $\sphericalangle XIB = \frac{1}{2}\sphericalangle ACB$. W jej dowodzie nie wykorzystywaliśmy w żaden sposób założenia o położeniu punktu Y .) Z tych równości wynika, że $\sphericalangle BYX > \sphericalangle BYA$. Z drugiej strony, X leży wewnątrz kąta BYA , więc zachodzi nierówność przeciwna: $\sphericalangle BYX < \sphericalangle BYA$. Otrzymana sprzeczność kończy dowód nie wprost.

3. Dane są dodatnie liczby całkowite a, b, c , przy czym $b > c$ oraz $a > 1$. Udowodnić, że liczba $a^{b^2} - a^{c^2}$ jest podzielna przez liczbę $a^b - a^c$.

Autor zadania: Emil Łasocha

Rozwiązanie:

Ze wzoru skróconego mnożenia

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1})$$

wynika, że jeśli x, y, n są dodatnimi liczbami całkowitymi spełniającymi warunek $x > y$, to liczba $x^n - y^n$ jest podzielna przez $x - y$.

Rozwiązanie dokończymy na dwa sposoby.

Sposób 1.

Zauważmy, że

$$a^{b^2} - a^{c^2} = a^{b^2} - a^{bc} + a^{bc} - a^{c^2} = ((a^b)^b - (a^c)^b) + ((a^b)^c - (a^c)^c).$$

Z powyższej obserwacji dla $x = a^b, y = a^c$ oraz $n = b$ wynika, że liczba $(a^b)^b - (a^c)^b$ jest podzielna przez $a^b - a^c$. Podobnie liczba $(a^b)^c - (a^c)^c$ jest podzielna przez $a^b - a^c$. Liczba $a^{b^2} - a^{c^2}$ jest zatem podzielna przez $a^b - a^c$ jako suma dwóch liczb podzielnych przez tę liczbę.

Sposób 2.

Zauważmy, że $a^b - a^c = a^c(a^{b-c} - 1)$ oraz $a^{b^2} - a^{c^2} = a^{c^2}(a^{b^2-c^2} - 1)$. Skoro $c \leq c^2$, to liczba a^{c^2} dzieli się przez a^c . Do zakończenia rozwiązania wystarczy więc dowieść, że liczba $a^{b^2-c^2} - 1$ dzieli się przez $a^{b-c} - 1$. Mamy

$$a^{b^2-c^2} - 1 = a^{(b-c)(b+c)} - 1 = (a^{b-c})^{b+c} - 1^{b+c},$$

więc liczba ta dzieli się przez $a^{b-c} - 1$ na mocy początkowej obserwacji zastosowanej do liczb $x = a^{b-c}, y = 1$ i $n = b + c$.

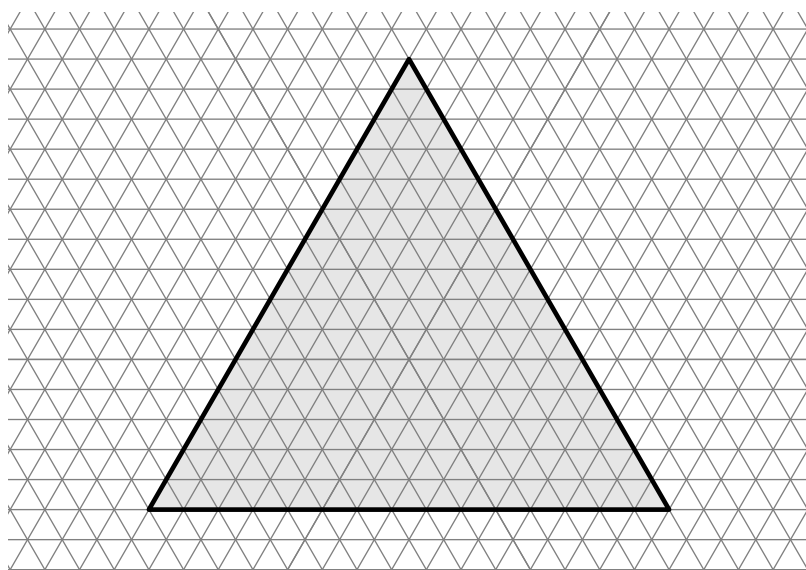
4. Jadzia ma kostkę w kształcie czworościanu foremego o krawędzi długości n oraz ma do dyspozycji n^2 naklejek w kształcie trójkątów równobocznych o boku długości 2. Chciałaby okleić kostkę naklejkami, zginając je w razie potrzeby, w taki sposób, by każdy punkt na jej powierzchni był przykryty przez przynajmniej jedną naklejkę. Wyznaczyć wszystkie dodatnie liczby całkowite n , dla których Jadzia może to zrobić.

Autorzy zadania: Łukasz Bożyk i Michał Pilipczuk

Rozwiązanie:

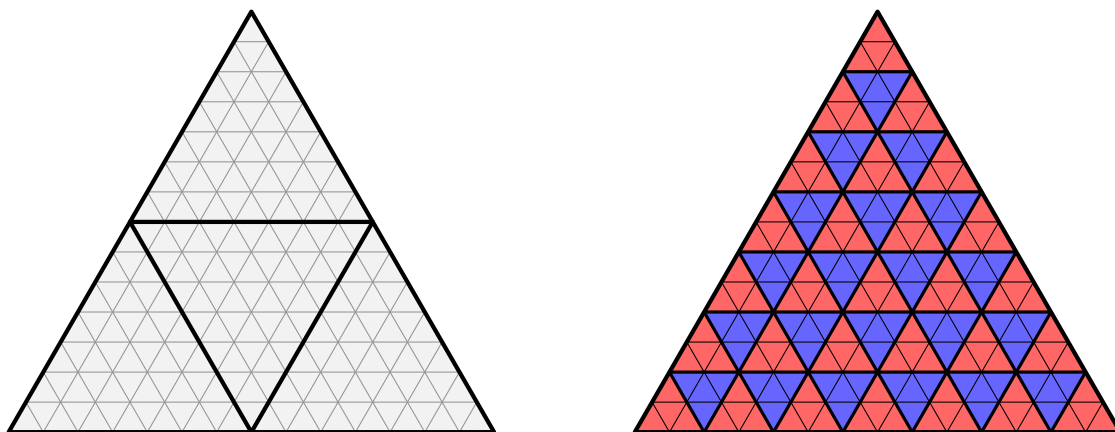
Odpowiedź: Jadzia może okleić kostkę zgodnie z warunkami zadania dla wszystkich dodatnich liczb całkowitych n .

W rozwiązaniu wykorzystamy następującą obserwację: jeśli m jest liczbą naturalną i $a > 0$, to trójkąt równoboczny o boku $m \cdot a$ można podzielić na m^2 trójkątów równobocznych o boku a . Aby to dostrzec wystarczy zauważyć, że płaszczyznę można wykafelkować trójkątami równobocznymi o boku a w sposób przedstawiony na rysunku, a trójkąt równoboczny o boku $m \cdot a$ można umieścić na płaszczyźnie tak, by przykrywał całe kafelki. Porównując pole dużego trójkąta i pola małych trójkątów widzimy, że duży trójkąt przykrywa m^2 kafelków.



Przejdźmy do rozwiązania zadania. Rozważmy siatkę czworościanu foremnego o krawędzi długości n przedstawioną na poniższym rysunku. Jest ona trójkątem równobocznym o boku $2n$. Ze względu na możliwość zginania naklejek, wystarczy okleić naklejkami tę siatkę. Z obserwacji poczynionej na początku

wynika, że trójkąt równoboczny o boku długości $2n$ można podzielić na n^2 trójkątów równobocznych o boku długości 2 — wystarczy więc przykleić naklejkę na każdy z trójkątów o boku 2.



5. Dane są dodatnie liczby całkowite $a, b \leq 2^{2021}$. Załóżmy, że dla pewnej liczby całkowitej $m \geq 2021$ liczba a^{m+1} jest podzielna przez b^m , a liczba b^{m+1} jest podzielna przez a^m . Dowieść, że $a = b$.

Autor zadania: Rami Ayoush

Rozwiązanie:

Dla zwięzłości zapisu, jeśli x jest dzielnikiem y , będziemy pisać $x \mid y$.

Sposób 1. Niech $d = \text{NWD}(a, b)$. Określmy $a' = \frac{a}{d}$ i $b' = \frac{b}{d}$. Wówczas a' i b' są liczbami naturalnymi, $a = a'd$, $b = b'd$ i $\text{NWD}(a', b') = 1$. Warunek $a^m \mid b^{m+1}$ oznacza, że $(a')^m d^m \mid (b')^{m+1} d^{m+1}$, a stąd dostajemy $(a')^m \mid (b')^{m+1} d$. Skoro zaś $\text{NWD}(a', b') = 1$, to z tej podzielności wnioskujemy, że $(a')^m \mid d$. Wobec tego $(a')^{m+1} \mid d \cdot a' = a$. Stąd i z założenia $a \leq 2^{2021}$ i $m \geq 2021$ dostajemy

$$(a')^{2022} \leq (a')^{m+1} \leq a \leq 2^{2021}.$$

To oznacza, że $a' \leq 2^{2021/2022} < 2$. Wynika stąd, że $a' = 1$. Analogicznie dowodzimy, że $b' = 1$. Ostatecznie, $a = a'd = d$ i $b = b'd = d$, więc $a = b$.

Sposób 2. Przeprowadzimy dowód nie wprost: założymy, że $a \neq b$ i doprowadzimy do sprzeczności.

Niech $a \neq b$. Wtedy rozkłady liczb a i b na czynniki pierwsze są różne. To znaczy: istnieje taka liczba pierwsza p , że najwyższa potęga p dzieląca a jest różna od najwyższej potęgi p dzielącej b . Ustalmy taką liczbę pierwszą p i niech p^k będzie najwyższą potęgą p dzielącą liczbę a , a p^ℓ — najwyższą potęgą p dzielącą liczbę b . Wtedy $k \neq \ell$.

Przyjmijmy, że $k < \ell$ (rozumowanie w przypadku $k > \ell$ jest analogiczne). Wtedy $k + 1 \leq \ell$. Z podzielności $b^m \mid a^{m+1}$ dostajemy $p^{\ell m} \mid p^{k(m+1)}$. Wobec tego $\ell m \leq k(m + 1)$. Mamy więc szacowania $km + m = (k + 1)m \leq \ell m \leq k(m + 1) = km + k$, więc $m \leq k$. Z założeń zadania mamy $m \geq 2021$, więc $2021 \leq m \leq k \leq \ell - 1$, wobec czego $\ell \geq 2022$. Skoro liczba b dzieli się przez p^ℓ , to $b \geq p^\ell \geq p^{2022} \geq 2^{2022}$. To stoi w sprzeczności z nierównością $b \leq 2^{2021}$. Otrzymana sprzeczność kończy rozwiązanie zadania.

6. Dana jest funkcja kwadratowa f oraz parami różne liczby rzeczywiste x, y, z , dla których $f(x) = yz$, $f(y) = zx$, $f(z) = xy$. Wyrazić jawnie wartość $f(x + y + z)$ w zależności od x, y, z .

Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie:

Sposób 1. Funkcja f jest dana wzorem $f(t) = at^2 + bt + c$ dla pewnych liczb rzeczywistych a, b, c . Równości dane w treści zadania możemy więc napisać w postaci poniższego układu równań, z którego następnie wyznaczymy a, b, c w zależności od x, y, z .

$$\begin{cases} ax^2 + bx + c = yz \\ ay^2 + by + c = zx \\ az^2 + bz + c = xy \end{cases}$$

Odejmując drugie równanie od pierwszego otrzymujemy $a(x^2 - y^2) + b(x - y) = z(y - x)$. Liczby x, y są różne, więc obie strony tego równania można podzielić przez $x - y$. Wykorzystując wzór skróconego mnożenia $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ dostajemy zatem $a(x + y) + b = -z$. Odejmując trzecie równanie od drugiego i prowadząc analogiczne rachunki dochodzimy do równości $a(y + z) + b = -x$. Odejmując stronami dwa otrzymane równania otrzymujemy $a(x - z) = x - z$. Ponieważ $x \neq z$, więc $a = 1$. Z równości $a(x + y) + b = -z$ obliczamy $b = -z - a(x + y) = -(x + y + z)$. Mamy też $c = yz - ax^2 - bx = yz - x^2 + (x + y + z)x = xy + yz + zx$.

W takim razie funkcja f dana jest wzorem $f(t) = t^2 - (x + y + z)t + xy + yz + zx$ i wobec tego

$$f(x + y + z) = (x + y + z)^2 - (x + y + z)(x + y + z) + xy + yz + zx = xy + yz + zx.$$

Sposób 2. Podobnie jak w sposobie pierwszym zapisujemy $f(t) = at^2 + bt + c$. Równość $f(x) = yz$ mnożymy stronami przez x i otrzymujemy $ax^3 + bx^2 + cx = xyz$. To znaczy: x jest pierwiastkiem wielomianu trzeciego stopnia $g(t) = at^3 + bt^2 + ct - xyz$. Analogicznie dowodzimy, że y i z są pierwiastkami wielomianu g . Liczby x, y, z są parami różne, więc są to wszystkie pierwiastki wielomianu g . Stąd

$$at^3 + bt^2 + ct - xyz = g(t) = a(t - x)(t - y)(t - z) = at^3 - a(x + y + z)t^2 + a(xy + yz + zx)t - axyz.$$

Przyrównując współczynniki stojące przy odpowiednich potęgach zmiennej t otrzymujemy następujące równości:

$$b = -a(x + y + z), \quad c = a(xy + yz + zx), \quad -xyz = -axyz.$$

Jeżeli $xyz \neq 0$, to z trzeciej równości natychmiast wynika, że $a = 1$. Jeśli zaś $xyz = 0$, to któraś z liczb x, y, z jest zerem, a pozostałe dwie nie. Bez straty ogólności przyjmijmy, że $x = 0$. Wtedy równość $c = a(xy + yz + zx)$ oznacza, że $c = ayz$, a warunek $f(x) = yz$ daje $c = yz$. Ponieważ $yz \neq 0$, mamy $a = 1$.

Dowiedliśmy, że w obu przypadkach mamy $a = 1$. Stąd też $b = -(x + y + z)$ i $c = xy + yz + zx$. Identycznie jak w sposobie pierwszym obliczamy $f(x + y + z) = xy + yz + zx$.

7. W każdym wierzchołku 2021-kąta foremego siedzi tresowana pchła. Każdej przekątnej tego wielokąta przypisano numer będący dodatnią liczbą całkowitą, przy czym różnym przekątnym przypisano różne numery. Na sygnał tresera pchły zaczynają skakać wzdłuż przekątnych od wierzchołka do wierzchołka. Przestrzegają one następującej reguły: przed każdym skokiem każda pchła sprawdza, które przekątne mające koniec w jej obecnym położeniu mają większy numer od wszystkich przekątnych wzdłuż których ta pchła dotychczas skoczyła, spośród nich wybiera tę o najniższym numerze i skacze wzdłuż niej; jeśli takich przekątnych nie ma, pchła przestaje skakać. Wykazać, że każda pchła zatrzyma się w innym wierzchołku.

Uwaga: W jednym wierzchołku może znajdować się wiele pcheł równocześnie. Każda pchła może odwiedzać wielokrotnie ten sam wierzchołek.

Autorzy zadania: Marta i Michał Strzeleccy

Rozwiązanie:

Sposób 1. Wykażemy, że teza zadania pozostaje prawdziwa jeśli numery przypisano pewnym przekątnym, niekoniecznie wszystkim. Przeprowadzimy dowód indukcyjny ze względu na liczbę przekątnych z przypisanym numerem.

Baza indukcji: żadnej z przekątnych nie przypisano numeru. Wtedy żadna z pcheł nie może wykonać skoku i teza jest oczywista — każda pchła znajduje się w innym wierzchołku.

Krok indukcyjny: załóżmy, że teza jest spełniona dla dowolnego przypisania $n \geq 0$ numerów niektórym przekątnym. Rozważmy dowolne przypisanie $n + 1$ numerów niektórym przekątnym. Rozważmy przekątną o najniższym numerze. Oznaczmy jej końce przez a i b . Zauważmy, że pchła znajdująca się w wierzchołku a skoczy wzdłuż przekątnej ab do wierzchołka b , a pchła znajdująca się w wierzchołku b skoczy wzdłuż ab do wierzchołka a . Po tych dwóch skokach wciąż każda pchła znajduje się w innym wierzchołku. Oczywiście następne skoki wykonywane przez te dwie pchły nie mogą odbyć się wzdłuż przekątnej ab . Ponadto żadna inna pchła nigdy nie wykona skoku wzdłuż ab , gdyż jej pierwszy skok musi zostać wykonany wzdłuż przekątnej o numerze większym od numeru ab . W takim razie możemy usunąć numer przekątnej ab nie zaburzając kolejnych wyborów pcheł. Po usunięciu numeru przekątnej ab otrzymujemy numerowanie n przekątnych, więc z założenia indukcyjnego wynika, że każda pchła zatrzyma się w innym wierzchołku.

Sposób 2. Zauważmy przede wszystkim, że po pewnym czasie wszystkie pchły przestaną skakać. Wynika to z obserwacji, że każda pchła może skoczyć wzdłuż danej przekątnej co najwyżej raz, a liczba przekątnych jest skończona.

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Przypuśćmy, że dwie pchły zatrzymały się w tym samym wierzchołku. Nazwijmy te pchły A i B . Przyjmijmy, że pchła A wykonała k skoków, a pchła B wykonała ℓ skoków. Oznaczmy przez $a_k, a_{k-1}, a_{k-2}, \dots, a_1, a_0$ wierzchołki, w których pchła A znajdowała się odpowiednio po $0, 1, 2, \dots, k$ skokach. Podobnie, oznaczmy przez $b_\ell, b_{\ell-1}, b_{\ell-2}, \dots, b_1, b_0$ wierzchołki, w których pchła B znajdowała się odpowiednio po $0, 1, 2, \dots, \ell$ skokach. Dzięki założeniu, że A i B zatrzymały się w tym samym wierzchołku mamy $a_0 = b_0$.

Niech n będzie największym wskaźnikiem, dla którego $a_n = b_n, a_{n-1} = b_{n-1}, \dots, a_0 = b_0$. To znaczy: $a_n = b_n$ jest najwcześniejszym wierzchołkiem począwszy od którego trasy przebyte przez obie pchły są takie same. Oczywiście $0 \leq n \leq \min(k, \ell)$. Dalszą część dowodu rozbijemy na trzy przypadki i w każdym uzyskamy sprzeczność.

1° $n = 0$, tj. pchły przeskoczyły do końcowego wierzchołka $a_0 = b_0$ z różnych wierzchołków. Bez straty ogólności przyjmijmy, że numer $a_1 a_0$ jest większy od numeru $b_1 b_0$. Wtedy numer przekątnej $a_1 a_0 = a_1 b_0$ jest większy także od numerów wszystkich przekątnych $b_\ell b_{\ell-1}, \dots, b_2 b_1, b_1 b_0$. Tak więc pchła B po wykonaniu skoku wzdłuż przekątnej $b_1 b_0$ może wykonać kolejny skok wzdłuż przekątnej $b_0 a_1$. To przeczy temu, że B przestała skakać po skoku wzdłuż $b_1 b_0$.

2° $0 < n < \min(k, \ell)$, tj. pchły przeskoczyły do wierzchołka $a_n = b_n$ z różnych wierzchołków, po osiągnięciu którego pchły skakały dalej wzdłuż tej samej trasy. Bez straty ogólności przyjmijmy, że numer $a_{n+1} a_n$ jest większy od numeru $b_{n+1} b_n$. Jest on wtedy większy od numerów $b_\ell b_{\ell-1}, \dots, b_{n+1} b_n$. Z drugiej strony, ze względu na to, że A skoczyła wzdłuż $a_{n+1} a_n$ zanim skoczyła wzdłuż $a_n a_{n-1}$, numer $a_{n+1} a_n$ jest mniejszy od numeru przekątnej $a_n a_{n-1} = b_n b_{n-1}$. Tak więc pchła B nie mogła skoczyć wzdłuż $b_n b_{n-1}$ — ma ona numer większy od numerów $b_\ell b_{\ell-1}, \dots, b_{n+1} b_n$, ale nie jest to przekątna o najmniejszym możliwym numerze spośród przekątnych o tej własności. Sprzeczność.

3° $n = \min(k, \ell)$, tj. trasa przebyta przez jedną z pcheł całkowicie zawiera się w trasie przebytej przez drugą z pcheł. Załóżmy bez straty ogólności, że $k > \ell$. Wtedy $n = \ell$. Pchła A skoczyła wzdłuż $a_{\ell+1} a_\ell$ zanim skoczyła wzdłuż $a_\ell a_{\ell-1}$, więc numer $a_{\ell+1} a_\ell$ jest mniejszy od numeru przekątnej $a_\ell a_{\ell-1} = b_\ell b_{\ell-1}$. Wtedy jednak pchła B nie mogła oddać pierwszego skoku wzdłuż $b_\ell b_{\ell-1}$, gdyż przekątna $a_{\ell+1} a_\ell = a_{\ell+1} b_\ell$ ma od niej niższy numer. Sprzeczność.

8. Dany jest trójkąt ABC . Punkt D jest rzutem prostokątnym punktu A na prostą BC , a punkt E jest rzutem prostokątnym punktu D na prostą AC . Punkt M jest środkiem boku AB . Dowieść, że $\sqrt{2} \cdot EM \leq AB$.

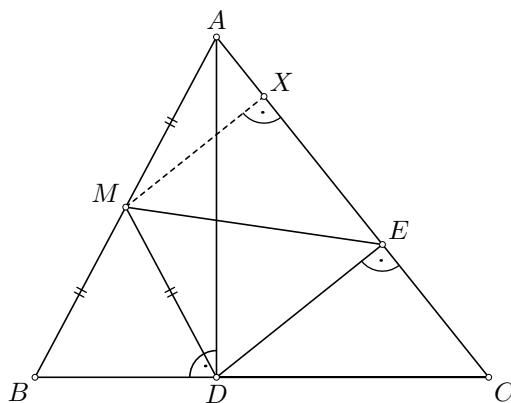
Autor zadania: Emil Łasocha

Rozwiązanie:

Sposób 1. Oznaczmy przez X rzut prostokątny punktu M na prostą AC . Wówczas $XE \leq MD$, gdyż długość rzutu odcinka na prostą nie przekracza długości tego odcinka. Z tego samego powodu $MX \leq MA$, bo odcinek MX jest rzutem odcinka MA na prostą MX . Ponadto $MA = MD = \frac{1}{2}AB$. Istotnie, jest to jasne, gdy kąt CBA jest prosty, bo wtedy punkty B i D się pokrywają. W przeciwnym razie postulowane równości wynikają z tego, że w trójkącie prostokątnym ABD środek przeciwprostokątnej AB jest środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie. Z twierdzenia Pitagorasa mamy też $ME^2 = MX^2 + XE^2$. Wobec tego

$$ME^2 = MX^2 + XE^2 \leq MA^2 + MD^2 = \left(\frac{1}{2}AB\right)^2 + \left(\frac{1}{2}AB\right)^2 = \frac{AB^2}{2},$$

co dowodzi tezy.



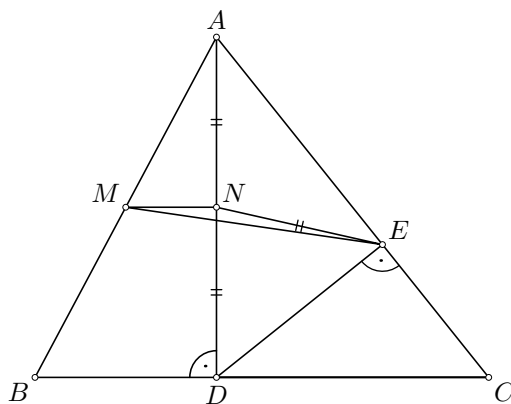
Sposób 2. Oznaczmy środek odcinka AD przez N . Wtedy MN jest linią środkową trójkąta ABD , więc $MN = \frac{1}{2}BD$. Ponadto $NE = \frac{1}{2}AD$. Faktycznie, jeśli kąt ACB jest prosty, to punkty D i E się pokrywają i równość $NE = \frac{1}{2}AD$ staje się oczywista. W przeciwnym razie N jest środkiem przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego AED , czyli środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie — stąd $NE = \frac{1}{2}AD$. Na mocy nierówności trójkąta mamy

$$EM \leqslant MN + NE = \frac{BD + AD}{2}.$$

Z nierówności między średnią arytmetyczną i średnią kwadratową mamy

$$\frac{BD + AD}{2} \leqslant \sqrt{\frac{BD^2 + AD^2}{2}} = \sqrt{\frac{AB^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}AB.$$

Łącząc powyższe nierówności dostajemy $EM \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}AB$, co jest równoważne tezie zadania.



Sposób 3. Wprowadźmy układ współrzędnych w taki sposób, by $A = (0, 1)$, a punkty B i C leżały na osi OX . Niech $B = (b, 0)$, $C = (c, 0)$. Wówczas $D = (0, 0)$.

Łatwo obliczyć, że równaniem prostej AC jest $x + cy = c$. Prosta DE jest do niej prostopadła i przechodzi przez $(0, 0)$, więc jej równaniem jest $-cx + y = 0$. Punkt E jest przecięciem prostych AC i DE , więc współrzędne punktu E znajdujemy rozwiązując układ równań $x + cy = c$, $-cx + y = 0$. Po obliczeniach otrzymujemy $E = (\frac{c}{1+c^2}, \frac{c^2}{1+c^2})$. Punkt M jest środkiem odcinka AB , więc $M = (\frac{b}{2}, \frac{1}{2})$. Należy dowieść, że $2EM^2 \leqslant AB^2$, czyli że

$$2 \left(\left(\frac{c}{1+c^2} - \frac{b}{2} \right)^2 + \left(\frac{c^2}{1+c^2} - \frac{1}{2} \right)^2 \right) \leqslant b^2 + 1.$$

Lewa strona tej nierówności jest równa

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2(c^2+1)^2} \left((2c - b(1+c^2))^2 + (c^2-1)^2 \right) = \\ & \frac{1}{2(c^2+1)^2} \left(4c^2 - 4bc(1+c^2) + b^2(1+c^2)^2 + c^4 - 2c^2 + 1 \right) = \\ & \frac{1}{2(c^2+1)^2} \left(-4bc(1+c^2) + b^2(1+c^2)^2 + (1+c^2)^2 \right) = \\ & \frac{1}{2(c^2+1)} \left(-4bc + b^2(1+c^2) + (1+c^2) \right) = \\ & \frac{1}{2(c^2+1)} \left(-4bc + (b^2+1)(c^2+1) \right) \end{aligned}$$

Należy więc dowieść, że

$$2(b^2+1)(c^2+1) \geq -4bc + (b^2+1)(c^2+1).$$

Równoważnie:

$$\begin{aligned} (b^2+1)(c^2+1) + 4bc &\geq 0 \\ b^2c^2 + b^2 + c^2 + 1 + 4bc &\geq 0 \\ (bc+1)^2 + (b+c)^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Ostatnia nierówność jest prawdziwa, gdyż kwadrat dowolnej liczby rzeczywistej jest liczbą nieujemną.

9. Dana jest liczba pierwsza p . Wykazać, że istnieje nieskończenie wiele dodatnich liczb całkowitych n , dla których liczba $2^{3^n} - n$ jest podzielna przez p .

Na podstawie propozycji Witolda Bednarka

Rozwiązanie:

W niniejszym rozwiązaniu zapis $x \equiv y \pmod{z}$ będzie oznaczał, że liczby x i y dają tę samą resztę z dzielenia przez z . Zaczniemy od udowodnienia następującego lematu.

Lemat. Dane są dodatnie liczby całkowite a, m . Wówczas istnieją dodatnie liczby całkowite k, t takie, że $t < m$ oraz ciąg reszt z dzielenia liczb $a^k, a^{k+1}, a^{k+2}, \dots$ przez m jest okresowy z okresem t .

Dowód. Jeśli dla pewnego k liczba a^k dzieli się przez m , to także dowolna potęga a o wykładniku większym od k dzieli się przez m . Wtedy $t = 1$ spełnia warunki lematu.

W przeciwnym razie liczby $a, a^2, \dots, a^m$ dają niezerowe reszty z dzielenia przez m . Tych liczb jest m a niezerowych reszt jest $m-1$, więc któreś dwie dają tę samą resztę. Niech k i $k+t$ będą najmniejszymi wykładnikami takimi, że $a^k \equiv a^{k+t} \pmod{m}$. Mamy $1 \leq k < k+t \leq m$, więc $t < m$. Wtedy ciąg reszt z dzielenia liczb $a^k, a^{k+1}, a^{k+2}, \dots$ przez m jest okresowy z okresem t , gdyż dla dowolnego $\ell \geq k$ mamy

$$a^\ell = a^{\ell-k} \cdot a^k \equiv a^{\ell-k} \cdot a^{k+t} = a^{\ell+t} \pmod{m}.$$

Rozwiązanie dokończymy na dwa różne sposoby.

Sposób 1. Udowodnimy przez indukcję względem m następujące zdania:

$\Phi(m)$: Istnieje nieskończenie wiele dodatnich liczb całkowitych n takich, że liczba $2^{3^n} - n$ dzieli się przez m .

$\Psi(m)$: Istnieje nieskończenie wiele dodatnich liczb całkowitych n takich, że liczba $3^{2^n} - n$ dzieli się przez m .

Tezą zadania jest zdanie $\Phi(p)$.

Baza indukcji: zdania $\Phi(1)$ i $\Psi(1)$ są oczywiście prawdziwe, bo jedynka jest dzielnikiem dowolnej liczby całkowitej.

Krok indukcyjny: ustalmy $m > 1$ i założmy, że zdania $\Phi(m')$, $\Psi(m')$ są prawdziwe dla dowolnej liczby $m' < m$. Należy dowieść prawdziwości zdań $\Phi(m)$ i $\Psi(m)$.

Z lematu dla $a = 2$ wynika, że dla pewnego k ciąg reszt z dzielenia liczb $2^k, 2^{k+1}, 2^{k+2}, \dots$ przez m jest okresowy z okresem t mniejszym od m . Jeżeli więc liczba ℓ jest nie mniejsza od k i taka, że liczba $3^{2^\ell} - \ell$ dzieli się przez t , to

$$2^{3^{2^\ell}} \equiv 2^\ell \pmod{m}.$$

Zatem dla dowolnej liczby n postaci 2^ℓ , gdzie $\ell \geq k$ i $3^{2^\ell} - \ell$ dzieli się przez t , liczba $2^{3^n} - n$ dzieli się przez m . Takich liczb jest nieskończenie wiele na mocy zdania $\Psi(t)$, prawdziwego na mocy założenia indukcyjnego. To dowodzi prawdziwości zdania $\Phi(m)$.

Zdanie $\Psi(m)$ dowodzimy analogicznie. Z lematu dla $a = 3$ wynika, że dla pewnego k ciąg reszt z dzielenia liczb $3^k, 3^{k+1}, 3^{k+2}, \dots$ przez m jest okresowy z okresem t mniejszym od m . Jeżeli więc liczba ℓ jest nie mniejsza od k i taka, że liczba $2^{3^\ell} - \ell$ dzieli się przez t , to

$$3^{2^{3^\ell}} \equiv 3^\ell \pmod{m}.$$

Zatem dla dowolnej liczby n postaci 3^ℓ , gdzie $\ell \geq k$ i $2^{3^\ell} - \ell$ dzieli się przez t , liczba $3^{2^n} - n$ dzieli się przez m . Takich liczb jest nieskończenie wiele na mocy zdania $\Phi(t)$, prawdziwego na mocy założenia indukcyjnego. To dowodzi prawdziwości zdania $\Psi(m)$ i kończy dowód indukcyjny.

Sposób 2. Dla $p = 2$ dowolna dodatnia liczba parzysta n spełnia warunki zadania (jest ich oczywiście nieskończenie wiele). Od teraz zakładamy, że $p \geq 3$.

Stosując lemat dla $a = 3$ i $m = p - 1$ dostajemy, że dla pewnych k i t ciąg reszt z dzielenia liczb $3^k, 3^{k+1}, 3^{k+2}, \dots$ przez $p - 1$ ma okres t . W szczególności, jeśli $n = k + \ell t$ dla pewnego ℓ , to $3^n \equiv 3^k \pmod{p - 1}$. Możemy wtedy zapisać $3^n = s(p - 1) + 3^k$ dla pewnego s . Na mocy małego twierdzenia Fermata mamy $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, więc

$$2^{3^n} = 2^{s(p-1)+3^k} = 2^{3^k} \cdot (2^{p-1})^s \equiv 2^{3^k} \cdot 1^s = 2^{3^k} \pmod{p}.$$

W takim razie jeśli liczba n jest postaci $k + \ell t$ oraz dodatkowo daje taką samą resztę z dzielenia przez p co 2^{3^k} , to

$$2^{3^n} - n \equiv 2^{3^k} - 2^{3^k} = 0 \pmod{p},$$

czyli innymi słowy, dla takiej liczby n liczba $2^{3^n} - n$ jest podzielna przez p . Wystarczy wykazać, że istnieje nieskończenie wiele liczb n o takich dwóch własnościach.

Powyższe dwa warunki na liczbę n można wysłowić następująco: $n \equiv k \pmod{t}$, $n \equiv 2^{3^k} \pmod{p}$. Ponieważ $t < p$, a p jest liczbą pierwszą, więc $\text{NWD}(t, p) = 1$. Istnienie nieskończenie wielu liczb n spełniających te dwa warunki wynika więc wprost z chińskiego twierdzenia o resztach. Dowód został zakończony.

Uwaga. W sposobie pierwszym nie wykorzystaliśmy założenia, że p jest liczbą pierwszą.

10. Dana jest dodatnia liczba całkowita n oraz parami różne dodatnie liczby rzeczywiste a, b, c spełniające równość

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1.$$

Dowieść, że

$$\frac{a^n - b^n}{a^{n+1} - b^{n+1}} + \frac{b^n - c^n}{b^{n+1} - c^{n+1}} + \frac{c^n - a^n}{c^{n+1} - a^{n+1}} < \frac{n}{n+1}.$$

Autor zadania: Piotr Nayar

Rozwiązanie:

Udowodnimy, że jeśli liczby $x \neq y$ są dodatnie, to

$$\frac{x^n - y^n}{x^{n+1} - y^{n+1}} < \frac{n}{2(n+1)} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right).$$

Po zsumowaniu tej nierówności dla $(x, y) = (a, b), (b, c), (c, a)$ oraz skorzystaniu z warunku $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$ otrzymamy tezę zadania. Dalszą część rozwiązania przeprowadzimy na dwa różne sposoby.

Sposób 1. Mamy

$$\frac{x^n - y^n}{x^{n+1} - y^{n+1}} = \frac{(x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1})}{(x - y)(x^n + x^{n-1}y + \dots + xy^{n-1} + y^n)} = \frac{x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1}}{x^n + x^{n-1}y + \dots + xy^{n-1} + y^n}.$$

Należy więc dowieść, że

$$\frac{x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1}}{x^n + x^{n-1}y + \dots + xy^{n-1} + y^n} < \frac{n}{2(n+1)} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right).$$

Po wymnożeniu przez mianowniki i przekształceniach otrzymujemy równoważnie

$$\begin{aligned} 2(n+1)xy(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1}) &< n(x+y)(x^n + x^{n-1}y + \dots + xy^{n-1} + y^n) \\ 2(n+1)(x^n y + x^{n-1}y^2 + \dots + xy^n) &< nx^{n+1} + 2n(x^n y + x^{n-1}y^2 + \dots + xy^n) + ny^{n+1} \\ 2(x^n y + x^{n-1}y^2 + \dots + xy^n) &< n(x^{n+1} + y^{n+1}) \quad (*) \end{aligned}$$

Do zakończenia dowodu wystarczy pokazać, że dla każdego $i = 1, 2, \dots, n$ zachodzi nierówność

$$x^{n+1-i}y^i + x^i y^{n+1-i} < x^{n+1} + y^{n+1},$$

bowiem sumując te nierówności otrzymamy nierówność (*), do której sprowadziliśmy tezę zadania. Mamy

$$x^{n+1} + y^{n+1} - x^{n+1-i}y^i - x^i y^{n+1-i} = (x^i - y^i)(x^{n+1-i} - y^{n+1-i}) > 0,$$

gdyż oba czynniki są jednocześnie dodatnie (gdy $x > y$) lub jednocześnie ujemne (gdy $x < y$). To dowodzi, że $x^{n+1-i}y^i + x^i y^{n+1-i} < x^{n+1} + y^{n+1}$ i kończy rozwiązanie zadania.

Sposób 2. Nierówność pomocniczą udowodnimy przez indukcję ze względu na n .

Dla $n = 1$ lewa strona jest równa $\frac{x-y}{x^2-y^2} = \frac{1}{x+y}$, więc należy dowieść, że $\frac{1}{x+y} < \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)$. Po wymnożeniu przez mianowniki dostajemy $4xy < (x+y)^2$. Ta nierówność jest prawdziwa, bo $(x+y)^2 - 4xy = (x-y)^2 > 0$.

Krok indukcyjny: założmy, że dla pewnego $n \geq 1$ zachodzi nierówność $\frac{x^n - y^n}{x^{n+1} - y^{n+1}} < \frac{n}{2(n+1)} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)$. Należy dowieść, że $\frac{x^{n+1} - y^{n+1}}{x^{n+2} - y^{n+2}} < \frac{n+1}{2(n+2)} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)$. Równoważnie: $\frac{x^{n+2} - y^{n+2}}{x^{n+1} - y^{n+1}} > \frac{2(n+2)xy}{(n+1)(x+y)}$. Mamy na mocy założenia indukcyjnego

$$\begin{aligned} \frac{x^{n+2} - y^{n+2}}{x^{n+1} - y^{n+1}} &= x + y - xy \cdot \frac{x^n - y^n}{x^{n+1} - y^{n+1}} \\ &> x + y - xy \cdot \frac{n}{2(n+1)} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \\ &= x + y - \frac{n}{2(n+1)}(x+y) = \frac{(x+y)(n+2)}{2(n+1)}. \end{aligned}$$

Aby zakończyć dowód, wystarczy sprawdzić, że

$$\frac{(x+y)(n+2)}{2(n+1)} > \frac{2(n+2)xy}{(n+1)(x+y)}.$$

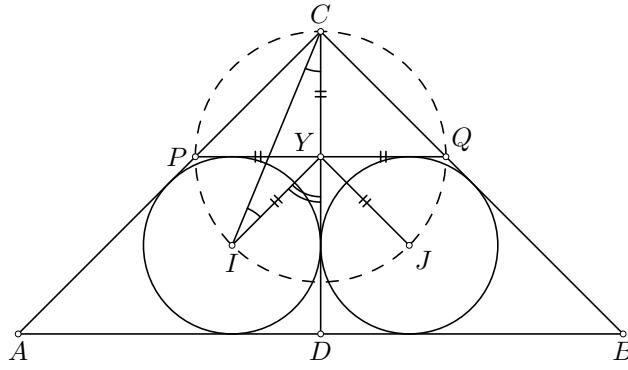
Po wymnożeniu mianowników i skróceniu wspólnych czynników obu stron dostajemy $(x+y)^2 > 4xy$, czyli równoważnie $(x-y)^2 > 0$.

11. Dany jest trójkąt prostokątny ABC . Punkt D jest rzutem prostokątnym punktu C na przeciwprostokątną AB . Punkty I, J są środkami okręgów wpisanych odpowiednio w trójkąty ADC i BDC . Wspólna styczna zewnętrzna do tych okręgów, różna od AB , przecina boki AC i BC w punktach P i Q . Udowodnić, że pięciokąt $CPIJQ$ jest wpisany w okrąg.

Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie:

Na początku rozważymy przypadek, w którym $AC = BC$. Niech Y będzie przecięciem odcinków CD i PQ . Mamy oczywiście $\sphericalangle PCY = 45^\circ = \sphericalangle YPC$, więc $PY = CY$. Mamy też $45^\circ = \sphericalangle IYD = \sphericalangle YIC + \sphericalangle ICY = \sphericalangle YIC + 22,5^\circ$, więc $\sphericalangle YIC = 22,5^\circ = \sphericalangle ICY$. Stąd $CY = IY$. Z symetrii rysunku dostajemy też $QY = PY$ i $JY = IY$. Stąd punkty C, P, I, J, Q leżą na okręgu o środku Y i promieniu CY i mamy tezę.



Założmy teraz, że $AC \neq BC$. Wtedy okręgi wpisane w trójkąty ACD i BCD nie są przystające, więc prosta PQ nie jest równoległa do AB . Stąd proste PQ i AB przecinają się w pewnym punkcie, który oznaczmy przez X . Założmy bez ograniczenia ogólności rozumowania, że A leży pomiędzy punktami X i B (jeśli B leży pomiędzy A i X , to dowód jest w pełni analogiczny). Prosta IJ przechodzi przez X , bo oba punkty I i J leżą na dwusiecznej kąta BXQ .

Oznaczmy $\sphericalangle CBA$ przez β . Wtedy $\sphericalangle BAC = 90^\circ - \beta$, $\sphericalangle DCB = 90^\circ - \beta$ i $\sphericalangle ACD = \beta$.

Dalszą część rozwiązania przeprowadzimy na dwa różne sposoby.

Sposób 1. Udowodnimy, że czworokąt $CIJQ$ można wpisać w okrąg. W tym celu sprawdzimy, że $\sphericalangle QJI + \sphericalangle ICQ = 180^\circ$. Mamy

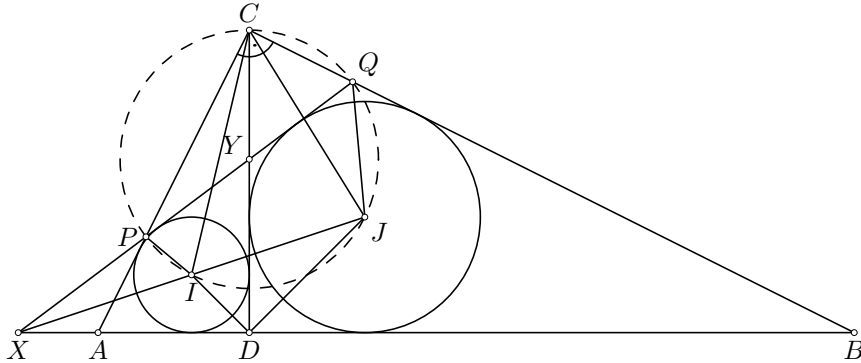
$$\sphericalangle QJX = 180^\circ - \sphericalangle JXQ - \sphericalangle XQJ = 180^\circ - \frac{1}{2}(\sphericalangle BXQ + \sphericalangle XQB) = 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle QBX) = 90^\circ + \frac{1}{2}\beta$$

oraz

$$\sphericalangle ICQ = \frac{1}{2}\sphericalangle ACD + \sphericalangle DCB = \frac{1}{2}\beta + 90^\circ - \beta = 90^\circ - \frac{1}{2}\beta.$$

Stąd

$$\sphericalangle QJI + \sphericalangle ICQ = 90^\circ + \frac{1}{2}\beta + 90^\circ - \frac{1}{2}\beta = 180^\circ.$$



Udowodnimy teraz, że czworokąt $CJIP$ także można wpisać w okrąg. W tym celu sprawdzimy, że $\sphericalangle PCJ + \sphericalangle JIP = 180^\circ$. Mamy

$$\begin{aligned} \sphericalangle PIX &= 180^\circ - \sphericalangle IXP - \sphericalangle XPA - \sphericalangle API = 180^\circ - \frac{1}{2}\sphericalangle AXP - \sphericalangle XPA - \frac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle XPA) \\ &= 90^\circ - \frac{1}{2}(\sphericalangle AXP + \sphericalangle XPA) = 90^\circ - \frac{1}{2}\sphericalangle BAC = 45^\circ + \frac{\beta}{2}. \end{aligned}$$

Ponadto

$$\sphericalangle PCJ = \sphericalangle PCD + \frac{1}{2}\sphericalangle DCB = \beta + \frac{1}{2}(90^\circ - \beta) = 45^\circ + \frac{\beta}{2}.$$

Zatem

$$\sphericalangle JIP + \sphericalangle PCJ = 180^\circ - \sphericalangle PIX + \sphericalangle PCJ = 180^\circ.$$

Udowodniliśmy, że czworokąty $CQJI$ i $CJIP$ można wpisać w okrąg. Jest to ten sam okrąg — mianowicie okrąg opisany na trójkącie CIJ . Stąd pięciokąt $CPIJQ$ jest wpisany w tenże okrąg.

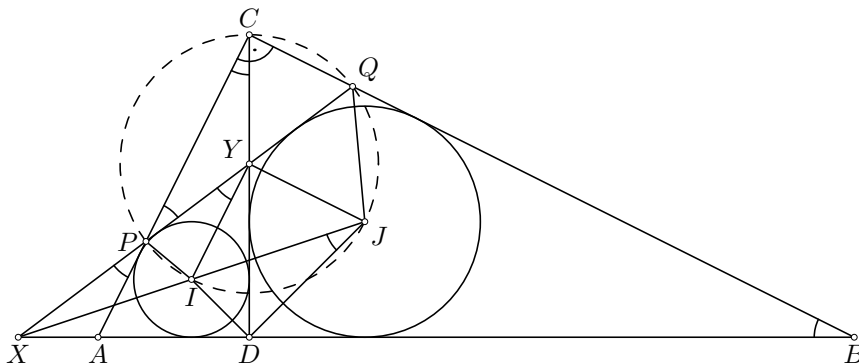
Sposób 2. Trójkąty prostokątne ADC i CDB są podobne do trójkąta prostokątnego ACB , gdyż mają takie same kąty. Odcinki DI i DJ są odcinkami łączącymi wierzchołek przy kącie prostym ze środkiem okręgu wpisanego w trójkątach ADC i CDB , a więc stosunek ich długości jest równy skali podobieństwa tych trójkątów. To znaczy:

$$\frac{DI}{DJ} = \frac{AC}{CB}.$$

Mamy ponadto

$$\sphericalangle JDI = \sphericalangle JDC + \sphericalangle CDI = \frac{1}{2}\sphericalangle BDC + \frac{1}{2}\sphericalangle CDA = \frac{1}{2} \cdot 90^\circ + \frac{1}{2} \cdot 90^\circ = 90^\circ.$$

Stąd i z otrzymanej wcześniej równości stosunków wnioskujemy, że trójkąt IDJ również jest podobny do trójkąta ACB (cecha bok-kąt-bok). Zatem $\sphericalangle IJD = \sphericalangle CBA = \beta$.



Mamy $\sphericalangle DXJ = \sphericalangle BDJ - \sphericalangle XJD = 45^\circ - \beta$. Ponadto $\sphericalangle BXP = 2\sphericalangle DXJ = 90^\circ - 2\beta$. Stąd

$$\sphericalangle QPC = \sphericalangle XPA = \sphericalangle BAC - \sphericalangle AXP = (90^\circ - \beta) - (90^\circ - 2\beta) = \beta.$$

Obliczamy dalej $\sphericalangle CQP = 180^\circ - \sphericalangle QPC - \sphericalangle PCQ = 90^\circ - \beta$.

Oznaczmy środek odcinka PQ przez Y . Jest to środek przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego CPQ , czyli środek okręgu opisanego na trójkącie CPQ .

Mamy $\sphericalangle PCY = \sphericalangle YPC = \beta = \sphericalangle PCD$. Stąd Y leży na prostej CD .

Mamy $\sphericalangle IPY = \frac{1}{2}\sphericalangle APY = \frac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle YPC) = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$. Poza tym $\sphericalangle PYD = 2\sphericalangle YPC = 2\beta$, więc $\sphericalangle PYI = \frac{1}{2}\sphericalangle PYD = \beta$. Zatem $\sphericalangle YIP = 180^\circ - \sphericalangle IPY - \sphericalangle PYI = 180^\circ - (90^\circ - \frac{\beta}{2}) - \beta = 90^\circ - \frac{\beta}{2} = \sphericalangle IPY$. Wnioskujemy, że trójkąt PYI jest równoramienny i $PY = IY$.

Wykonując podobne obliczenia dowodzimy, że $\sphericalangle YQJ = 45^\circ + \frac{\beta}{2} = \sphericalangle QJY$. Zatem trójkąt QYJ jest równoramienny i $QY = JY$.

Podsumowując, wykazaliśmy, że $CY = PY = QY = IY = JY$. Stąd pięciokąt $CPIJQ$ jest wpisany w okrąg o środku Y i promieniu CY .

12. Dane są dodatnie liczby całkowite k, n tej samej parzystości. Na okręgu zaznaczono $2n$ punktów. Narysowano k cięciw tego okręgu o obu końcach wśród zaznaczonych punktów, przy czym każdy punkt jest końcem nieparzystej liczby cięciw. Każdemu z zaznaczonych punktów chcemy przypisać jeden z numerów $1, 2, \dots, 2n$, przy czym różnym punktom chcemy przypisać różne numery. Punkt o numerze v nazwiemy *cudownym*, jeśli jest połączony cięciwami z parzystą liczbą punktami o numerach mniejszych od v . Wykazać, że numery można przypisać w taki sposób, aby dokładnie n punktów było cudownych.

Autor zadania: Daniel Goc

Rozwiązanie:

Poczynimy kilka obserwacji, z których następnie wywnioskujemy tezę zadania.

Obserwacja 1. Dla dowolnego numerowania liczba cudownych punktów ma tę samą parzystość co n .

Dowód. Każda cięciwa ma dwa końce — jeden o mniejszym numerze od drugiego. Każdy cudowny punkt jest końcem o mniejszym numerze nieparzystej liczby cięciw, a pozostałe punkty są końcami o mniejszym numerze parzystej liczby cięciw. Widzimy więc, że jeśli c jest liczbą cudownych punktów, to k jest sumą c liczb nieparzystych oraz $2n - c$ liczb parzystych. Stąd natychmiast wynika, że liczby c i k są tej samej parzystości. Z założeń zadania mamy, że k i n są tej samej parzystości. Stąd c i n są tej samej parzystości.

Powiemy, że punkt A jest sąsiadem punktu B jeśli A i B są połączone cięciwą.

Obserwacja 2. Istnieje numerowanie, dla którego co najwyżej n punktów jest cudownych. Istnieje także numerowanie, dla którego co najmniej n punktów jest cudownych.

Dowód. Ustalmy dowolne numerowanie. Dla każdego $i = 1, 2, \dots, 2n$ zastąpmy numer i numerem $2n + 1 - i$. Otrzymujemy w ten sposób nowe numerowanie. Rozważmy dowolny punkt A i powiedzmy, że w początkowym numerowaniu przypisano mu numer v . Dowolny sąsiad A o numerze $w < v$ ma w nowym numerowaniu większy numer od A , bo $2n + 1 - w > 2n + 1 - v$. Podobnie, dowolny sąsiad A o numerze $w > v$ ma w nowym numerowaniu mniejszy numer od A , gdyż $2n + 1 - w < 2n + 1 - v$. Jeśli więc A w początkowym numerowaniu miał a sąsiadów o mniejszych numerach i b sąsiadów o większych numerach, to w nowym numerowaniu ma b sąsiadów o mniejszych numerach i a sąsiadów o większych numerach. Z założeń zadania liczba $a + b$ jest nieparzysta, więc liczby a i b są różnej parzystości. Stąd wniosek, że jeśli A był cudowny, to po zmianie numerowania przestaje być cudowny, a jeśli A nie był cudowny, to w nowym numerowaniu staje się cudowny. Stąd jeśli początkowe numerowanie miało c cudownych punktów, to zmienione numerowanie ma $2n - c$ cudownych punktów. Zatem jedno z tych numerowań ma co najwyżej n cudownych punktów, a drugie co najmniej n cudownych punktów.

Ruchem nazwiemy zamianę miejscami numerów $i, i + 1$ dla pewnego $i = 1, 2, \dots, 2n - 1$.

Obserwacja 3. Po wykonaniu dowolnego ruchu liczba cudownych punktów albo zmniejsza się o 2 albo zwiększa się o 2 albo nie zmienia się.

Dowód. Powiedzmy, że punkt A ma numer i , a punkt B — numer $i + 1$. Rozważmy ruch polegający na zamianie miejscami numerów $i, i + 1$. Popatrzmy na punkt C różny od A i B ; niech v będzie jego numerem. Ponieważ $v > i$ wtedy i tylko wtedy gdy $v > i + 1$, więc wykonanie ruchu nie zmienia liczby sąsiadów C o numerach mniejszych od v . To znaczy: jeśli C był cudowny, to po wykonaniu ruchu pozostaje cudowny, a jeśli C nie był cudowny, to po wykonaniu ruchu wciąż nie jest cudowny.

Zbadajmy teraz co się dzieje z punktami A i B . Dowolny sąsiad A różny od B o numerze mniejszym od i będzie nadal miał po wykonaniu ruchu mniejszy numer niż A (bo numer A wzrośnie o 1). Dowolny sąsiad B różny od A mający numer mniejszy od $i + 1$ musi mieć numer mniejszy od i (bo A ma numer i), więc po wykonaniu ruchu wciąż będzie sąsiadem B o niższym numerze (bo nowym numerem B będzie i).

Jeżeli wśród narysowanych cięciw nie ma odcinka AB , to punkty A i B po wykonaniu ruchu mają dokładnie tych samych sąsiadów o mniejszych numerach co przed wykonaniem ruchu. Ich stan cudowności, a zarazem liczba cudownych punktów, nie zmieni się.

Jeśli wśród narysowanych cięciw występuje AB , to po wykonaniu ruchu punkt B staje się sąsiadem A o mniejszym numerze, a punkt A przestaje być sąsiadem B o mniejszym numerze. Dla obu punktów A i B liczba sąsiadów o mniejszych numerach zmieni swą parzystość, więc punkty A i B zmieniają stan cudowności na przeciwny. To znaczy, że albo oba przestaną być cudowne (wtedy liczba cudownych punktów zmniejszy się o 2) albo oba zaczną być cudowne (wtedy liczba cudownych punktów zwiększy się o 2) albo jeden stanie się cudowny, a drugi przestanie taki być (wtedy liczba cudownych punktów nie zmieni się).

Obserwacja 4. Dla dowolnych dwóch numerowań istnieje skończony ciąg ruchów zmieniający jedno numerowanie na drugie.

Dowód. Opiszemy algorytm pozwalający znaleźć szukany ciąg ruchów.

- (i) Jeśli obecne numerowanie jest takie samo jak docelowe, kończymy działanie algorytmu. W przeciwnym razie przechodzimy do punktu (ii).
- (ii) Znajdujemy największy numer, który nie znajduje się w obecnym numerowaniu w docelowym wierzchołku. Taki numer istnieje, bo obecne numerowanie różni się od docelowego. Oznaczmy ten numer oraz jego docelowy wierzchołek odpowiednio przez i i A . Niech j będzie obecnym numerem wierzchołka A . Wtedy $j < i$. Wykonajmy kolejno następujące ruchy: zamiana numerów $j, j + 1$, zamiana numerów $j + 1, j + 2$, zamiana numerów $j + 2, j + 3$, ..., zamiana numerów $i - 1, i$. Następnie przechodzimy do punktu (i).

Prześledźmy procedurę opisaną w punkcie (ii). Numery większe od i są już przypisane docelowym wierzchołkom, a numer i nie. Po zamianie numerów $j, j + 1$ wierzchołek A ma numer $j + 1$. Po kolejnej zamianie ma on numer $j + 2$, i tak dalej: po ostatniej zamianie numer i znajdzie się w docelowym wierzchołku A . Wykonywane ruchy nie zmieniały oczywiście numerów wierzchołków o numerach większych od i .

Zatem po zakończeniu procedury opisanej w punkcie (ii) numery $i, i + 1, \dots, 2n$ będą już w docelowych wierzchołkach.

Powyższa analiza oznacza, że punkt (ii) zostanie wykonany co najwyżej $2n$ razy. Po jego ostatnim wykonaniu przechodzimy do punktu (i) i algorytm kończy swoje działanie. Tak otrzymany ciąg ruchów zmienia początkowe numerowanie na docelowe.

Przejdźmy do rozwiązania zadania. Ustalmy numerowanie Φ o co najwyżej n cudownych punktach oraz numerowanie Ψ o co najmniej n cudownych punktach. Takie numerowania istnieją na mocy Obserwacji 2. Ustalmy skończony ciąg ruchów, który zamienia Φ na Ψ . Takie ruchy istnieją na mocy Obserwacji 4. Zaczniemy wykonywać kolejne ruchy startując od numerowania Φ , ale zakończmy wykonywanie ruchów w najwcześniejszym momencie, w którym liczba cudownych punktów jest nie mniejsza od n . Taki moment istnieje, bo końcowe numerowanie Ψ ma co najmniej n punktów. Z Obserwacji 3 wynika, że w tym momencie liczba cudownych punktów wynosi n lub $n + 1$. Liczby $n, n + 1$ są różnej parzystości, więc z Obserwacji 1 wynika, że liczbą cudownych punktów nie może być $n + 1$. W takim razie w tym momencie liczba cudownych punktów wynosi dokładnie n , co kończy rozwiązanie zadania.



LXXIII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia drugiego

11 lutego 2022 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Znaleźć wszystkie czwórki liczb rzeczywistych (a, b, c, d) spełniające układ równań

$$\begin{cases} ab + cd = 6 \\ ac + bd = 3 \\ ad + bc = 2 \\ a + b + c + d = 6 \end{cases}$$

2. Dany jest czworokąt $ABCD$ wpisany w okrąg. Środek tego okręgu leży wewnątrz czworokąta $ABCD$. Przekątne AC i BD przecinają się w punkcie S . Punkty P i Q są środkami odpowiednio boków AD i BC . Niech p będzie prostą prostopadłą do prostej AC i przechodzącą przez punkt P , q prostą prostopadłą do prostej BD i przechodzącą przez punkt Q , zaś s prostą prostopadłą do prostej CD i przechodzącą przez punkt S . Dowieść, że proste p, q, s przecinają się w jednym punkcie.

3. Dodatnie liczby całkowite a, b, c spełniają równość

$$a^3 + 4b + c = abc,$$

przy czym $a \geq c$ oraz liczba $p = a^2 + 2a + 2$ jest pierwsza. Wykazać, że p jest dzielnikiem liczby $a + 2b + 2$.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.



LXXIII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia drugiego

12 lutego 2022 r. (drugi dzień zawodów)

4. Dany jest czworokąt $ABCD$ wpisany w okrąg. Przekątna AC jest średnicą tego okręgu. Punkt E leży na odcinku BC , przy czym $\angle DAC = \angle EAB$. Punkt M jest środkiem odcinka CE . Udowodnić, że $BM = DM$.

5. Dodatnią liczbę całkowitą n nazwiemy *dobrą* jeśli istnieje dodatnia liczba całkowita k , dla której $n = k(k + 1)$. Rozstrzygnąć, czy istnieje 2022 parami różnych dobrych liczb, których suma jest również dobrą liczbą.

6. W turnieju badmintonu wzięło udział n zawodników, gdzie n jest liczbą nieparzystą. Każdych dwóch zawodników zagrało ze sobą dokładnie dwa mecze, nie było remisów. Okazało się, że każdy zawodnik wygrał tyle samo meczów co przegrał. Wykazać, że można unieważnić dokładnie połowę wszystkich meczów w taki sposób, by również wśród ważnych meczów każdy zawodnik wygrał tyle samo meczów co przegrał.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.



LXXIII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych
zawodów stopnia drugiego

1. Znaleźć wszystkie czwórki liczb rzeczywistych (a, b, c, d) spełniające układ równań

$$\begin{cases} ab + cd = 6 \\ ac + bd = 3 \\ ad + bc = 2 \\ a + b + c + d = 6 \end{cases}$$

Autor zadania: Tomasz Cieśla

Rozwiązanie:

Odpowiedź: Układ ma cztery rozwiązania: $(a, b, c, d) = (0, 1, 2, 3)$, $(a, b, c, d) = (1, 0, 3, 2)$, $(a, b, c, d) = (2, 3, 0, 1)$, $(a, b, c, d) = (3, 2, 1, 0)$.

Z pierwszego i drugiego równania wynika, że

$$(a + d)(b + c) = ab + cd + ac + bd = 6 + 3 = 9.$$

Z czwartego równania mamy $b + c = 6 - (a + d)$. Podstawiając to do powyższej równości dostajemy $(a + d)(6 - (a + d)) = 9$. Liczba $a + d$ jest zatem pierwiastkiem wielomianu kwadratowego $9 - x(6 - x) = (x - 3)^2$. Stąd $a + d = 3$ oraz $b + c = 6 - (a + d) = 3$.

Rozumując podobnie, z pierwszego i trzeciego równania wynika, że

$$(a + c)(b + d) = ab + cd + ad + bc = 6 + 2 = 8.$$

Wykorzystując czwarte równanie dostajemy $b + d = 6 - (a + c)$, a więc $(a + c)(6 - (a + c)) = 8$. Liczba $a + c$ jest zatem pierwiastkiem wielomianu kwadratowego $8 - x(6 - x) = (x - 2)(x - 4)$. Stąd $a + c = 2$ lub $a + c = 4$.

Z drugiego i trzeciego równania dostajemy

$$(a + b)(c + d) = ac + bd + ad + bc = 3 + 2 = 5.$$

Z równości $c + d = 6 - (a + b)$ dostajemy, że $(a + b)(6 - (a + b)) = 5$, a więc $a + b$ jest pierwiastkiem wielomianu $5 - x(6 - x) = (x - 1)(x - 5)$. Stąd $a + b = 1$ lub $a + b = 5$.

Mamy więc cztery możliwe przypadki:

- i) $a + b = 1, a + c = 2$
- ii) $a + b = 1, a + c = 4$
- iii) $a + b = 5, a + c = 2$
- iv) $a + b = 5, a + c = 4$

We wszystkich przypadkach wartość a możemy obliczyć z równości

$$a = \frac{1}{2}((a + b) + (a + c) - (b + c)) = \frac{1}{2}((a + b) + (a + c) - 3),$$

a wartości pozostałych zmiennych możemy wyznaczyć z równości $b = (a + b) - a$, $c = (a + c) - a$ i $d = (a + d) - a = 3 - a$. Otrzymujemy w poszczególnych przypadkach:

- i) $a = 0, b = 1, c = 2, d = 3$
- ii) $a = 1, b = 0, c = 3, d = 2$
- iii) $a = 2, b = 3, c = 0, d = 1$
- iv) $a = 3, b = 2, c = 1, d = 0$

Bezpośrednio sprawdzamy, że wszystkie otrzymane czwórki liczb spełniają wyjściowy układ.

2. Dany jest czworokąt $ABCD$ wpisany w okrąg. Środek tego okręgu leży wewnątrz czworokąta $ABCD$. Przekątne AC i BD przecinają się w punkcie S . Punkty P i Q są środkami odpowiednio boków AD i BC . Niech p będzie prostą prostopadłą do prostej AC i przechodzącą przez punkt P , q prostą prostopadłą do prostej BD i przechodzącą przez punkt Q , zaś s prostą prostopadłą do prostej CD i przechodzącą przez punkt S . Dowieść, że proste p, q, s przecinają się w jednym punkcie.

Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie:

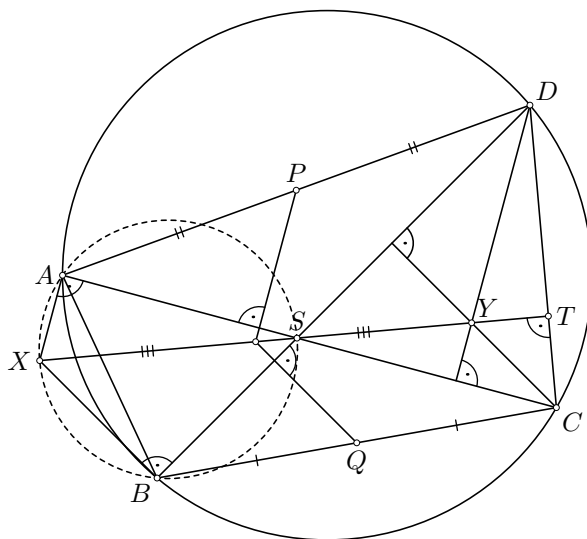
Niech T będzie rzutem prostokątnym punktu S na prostą CD . Wtedy T jest przecięciem prostej s z prostą CD . Niech X będzie punktem przecięcia prostej prostopadłej do AC przechodzącej przez A i prostej prostopadłej do BD przechodzącej przez B . Wykażemy, że X leży na prostej s .

Punkty A, B, S, X leżą na okręgu o średnicy SX . Z założenia, że środek okręgu opisanego na czworokącie $ABCD$ leży wewnątrz tego czworokąta wynika, że kąty DBA i BAC są ostre. Punkty X i S leżą więc po różnych stronach prostej AB . Mamy

$$\sphericalangle ASX = \sphericalangle ABX = 90^\circ - \sphericalangle SBA = 90^\circ - \sphericalangle DCS = \sphericalangle CST}.$$

Wynika stąd, że punkty X, S, T są współliniowe, czyli że X leży na prostej s .

Niech Y będzie ortocentrum trójkąta CDS . Wtedy Y leży na prostej s . Zauważmy, że prosta p jest linią środkową trapezu $XADY$. Rzeczywiście, jest ona równoległa do podstaw AX, DY (bo wszystkie trzy proste są prostopadłe do AC) i przechodzi przez środek ramienia AD . W takim razie p przechodzi także przez środek drugiego ramienia tego trapezu, czyli przez środek odcinka XY . Podobnie, prosta q jest linią środkową trapezu $BXYC$, gdyż jest równoległa do podstaw BX, CY (wszystkie trzy proste są prostopadłe do BD) i przechodzi przez środek ramienia BC . Stąd q również przechodzi przez środek XY . Wykazaliśmy więc, że proste p, q przecinają się w środku odcinka XY , który oczywiście leży także na prostej s .



3. Dodatnie liczby całkowite a, b, c spełniają równość

$$a^3 + 4b + c = abc,$$

przy czym $a \geq c$ oraz liczba $p = a^2 + 2a + 2$ jest pierwsza. Wykazać, że p jest dzielnikiem liczby $a + 2b + 2$.

Autor zadania: Emil Łasocha

Rozwiązanie:

Sposób 1. Ponieważ $b(ac - 4) = a^3 + c$, więc $ac - 4 > 0$. Zatem

$$b = \frac{a^3 + c}{ac - 4}.$$

Należy więc wykazać, że liczba

$$a + 2 \cdot \frac{a^3 + c}{ac - 4} + 2 = \frac{a^2c - 4a + 2a^3 + 2c + 2ac - 8}{ac - 4}$$

dzieli się przez p . Ponieważ $c \leq a$, więc $ac - 4 < a^2 < a^2 + 2a + 2 = p$. W szczególności $\text{NWD}(p, ac - 4) = 1$, więc wystarczy dowieść, że liczba $a^2c - 4a + 2a^3 + 2c + 2ac - 8$ dzieli się przez p . Wynika to z następującego rachunku:

$$\begin{aligned} a^2c - 4a + 2a^3 + 2c + 2ac - 8 &= c(a^2 + 2a + 2) + 2a^3 - 4a - 8 \\ &= cp + 2(a^2 + 2a + 2)(a - 2) \\ &= p(c + 2a - 4). \end{aligned}$$

Sposób 2. Równość daną w treści zadania mnożymy przez a a następnie dodajemy do obu stron otrzymanej równości liczbę $4 - 4ab - ac$. Otrzymujemy $a^4 + 4 = a^2bc + 4 - 4ab - ac$. Ponieważ

$$a^4 + 4 = (a^2 + 2a + 2)(a^2 - 2a + 2) = p(a^2 - 2a + 2)$$

oraz

$$a^2bc + 4 - 4ab - ac = (ab - 1)(ac - 4),$$

więc $p(a^2 - 2a + 2) = (ab - 1)(ac - 4)$. Podobnie jak w sposobie pierwszym dowodzimy, że $\text{NWD}(p, ac - 4) = 1$. Wobec tego z poprzedniej równości wynika, że p jest dzielnikiem liczby $ab - 1$.

Mamy

$$a^3 = a(p - 2a - 2) = ap - 2a^2 - 2a = ap - 2(p - 2a - 2) - 2a = p(a - 2) + 2a + 4,$$

więc z równości danej w treści zadania otrzymujemy

$$0 = a^3 + 4b + c - abc = p(a - 2) + 2a + 4 + 4b - c(ab - 1).$$

Liczby $p(a - 2)$ i $c(ab - 1)$ dzielą się przez p , więc z powyższej równości wynika, że liczba $2a + 4 + 4b = 2(a + 2b + 2)$ także dzieli się przez p . Skoro zaś $p > 2$, to p jest dzielnikiem liczby $a + 2b + 2$.

Uwaga. Można wykazać, że tylko trzy czwórki (a, b, c, p) spełniają warunki narzucone w treści zadania; są to $(a, b, c, p) = (3, 6, 3, 17)$, $(a, b, c, p) = (5, 126, 1, 37)$ i $(a, b, c, p) = (9, 146, 1, 101)$. Rachunki przeprowadzone w sposobie pierwszym prowadzą do równości

$$(a + 2b + 2)(ac - 4) = p(c + 2a - 4).$$

Jak już wiemy, $ac - 4 > 0$, więc także $c + 2a - 4 > 0$, a skoro $\text{NWD}(ac - 4, p) = 1$, to $ac - 4$ musi dzielić $c + 2a - 4$. W szczególności $ac - 4 \leq c + 2a - 4$, tj. $ac \leq c + 2a$. Z założenia $a \geq c$ wynika, że $c + 2a \leq 3a$, więc $ac \leq 3a$, tj. $c \leq 3$. Pozostaje rozpatrzeć kilka możliwości.

Jeśli $c = 3$, to nierówności $a \geq c$ i $ac \leq c + 2a$ wymuszają $a = 3$. Wtedy $b = 6$ i $p = 17$.

Przypadek $c = 2$ jest niemożliwy. Z równania $a^3 + 4b + c = abc$ wynikłoby wtedy, że liczba a jest parzysta. Wtedy jednak $a^3 + 4b + 2 = 2ab$, co jest niemożliwe, bo prawa strona dzieliłaby się przez 4, a lewa nie.

Dla $c = 1$ liczba $a - 4$ ma być dodatnim dzielnikiem liczby $2a - 3$. Stąd $a - 4$ jest dodatnim dzielnikiem liczby $2a - 3 - 2(a - 4) = 5$. To prowadzi do dwóch możliwości: $a = 5$ lub $a = 9$. Jeśli $a = 5$, to $b = 126$ i $p = 37$. Jeśli $a = 9$, to $b = 146$ i $p = 101$.

4. Dany jest czworokąt $ABCD$ wpisany w okrąg. Przekątna AC jest średnicą tego okręgu. Punkt E leży na odcinku BC , przy czym $\sphericalangle DAC = \sphericalangle EAB$. Punkt M jest środkiem odcinka CE . Udowodnić, że $BM = DM$.

Autor zadania: Stanisław Majchrzak

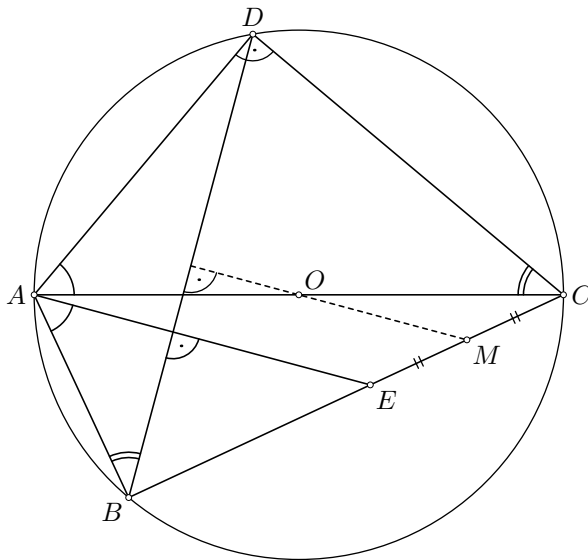
Rozwiązanie:

Sposób 1. Zauważmy, że

$$\sphericalangle BAE + \sphericalangle DBA = \sphericalangle CAD + \sphericalangle DCA = 90^\circ.$$

Stąd proste AE i BD są prostopadłe.

Niech O będzie środkiem okręgu opisanego na czworokącie $ABCD$. Wtedy O jest środkiem odcinka AC , gdyż AC jest średnicą tego okręgu. Prosta OM jest zatem linią środkową trójkąta ACE . W szczególności prosta OM jest równoległa do AE . Wobec tego prosta OM jest prostopadła do BD . Ponieważ O jest środkiem okręgu opisanego na czworokącie $ABCD$, więc $OB = OD$. Wynika stąd, że prosta OM jest symetralną odcinka BD . Zatem $BM = DM$.

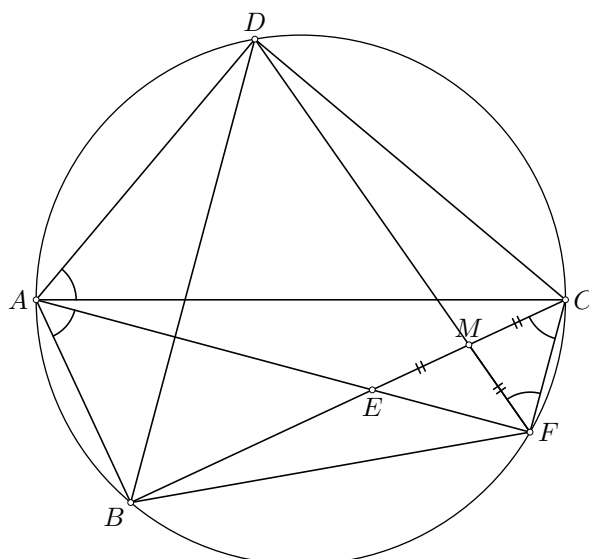


Sposób 2. Niech F będzie drugim punktem przecięcia prostej AE z okręgiem opisanym na czworokącie $ABCD$. Ponieważ AC jest średnicą tego okręgu, więc kąt CFE jest prosty. Punkt M jest środkiem przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego CEF , więc $MF = MC$. Mamy zatem

$$\sphericalangle CFM = \sphericalangle MCF = \sphericalangle BAF = \sphericalangle CAD = \sphericalangle CFD,$$

więc punkty D, M, F są współliniowe.

Kąty oparte na łukach BF i CD są równe, więc czworokąt $BFCD$ jest trapezem równoramiennym o podstawach BD, CF . Punkt M jest punktem przecięcia przekątnych tego trapezu, a zatem $BM = DM$.



5. Dodatnią liczbę całkowitą n nazwiemy *dobrą* jeśli istnieje dodatnia liczba całkowita k , dla której $n = k(k+1)$. Rozstrzygnąć, czy istnieje 2022 parami różnych dobrych liczb, których suma jest również dobrą liczbą.

Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie:

Odpowiedź: Tak.

Oznaczmy

$$x = \frac{1}{2} \cdot (1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + 2021 \cdot 2022).$$

Dla dowolnego $i = 1, 2, \dots, 2021$ liczba $i(i+1)$ jest parzysta, bo jest iloczynem dwóch kolejnych liczb całkowitych. W konsekwencji liczba x jest całkowita. Zauważmy, że

$$x(x+1) = (x-1)x + 2x = (x-1)x + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + 2021 \cdot 2022.$$

Powyższa równość stanowi przedstawienie dobrej liczby $x(x+1)$ w postaci sumy 2022 parami różnych dobrych liczb.

6. W turnieju badmintona wzięło udział n zawodników, gdzie n jest liczbą nieparzystą. Każdych dwóch zawodników zagrało ze sobą dokładnie dwa mecze, nie było remisów. Okazało się, że każdy zawodnik wygrał tyle samo meczów co przegrał. Wykazać, że można unieważnić dokładnie połowę wszystkich meczów w taki sposób, by również wśród ważnych meczów każdy zawodnik wygrał tyle samo meczów co przegrał.

Autor zadania: Łukasz Bożyk

Rozwiązanie:

Parę meczów rozegranych między dwoma zawodnikami będziemy nazywać *dwumeczem*. Powiemy, że zawodnik *wygrał dwumecz* (odpowiednio *przegrał dwumecz*) jeśli zwyciężył (odpowiednio przegrał) w obu meczach w tym dwumeczu. Dwumecz, którego nie wygrał żaden z graczy (a więc obaj gracze wygrali po jednym meczu) będziemy nazywać *remisowym*. Udowodnimy, że można unieważnić po jednym meczu z każdego dwumeczu w taki sposób, by wśród ważnych meczów każdy zawodnik wygrał tyle samo meczów co przegrał. Warunki zadania zostaną spełnione, bo unieważnimy w ten sposób dokładnie połowę wszystkich meczów.

Wykażemy najpierw, że każdy zawodnik wygrał tyle samo dwumeczów co przegrał, a ponadto liczba dwumeczów remisowych, w których brał udział, jest parzysta. Rozważmy dowolnego

zawodnika i założmy, że wygrał on a dwumeczów, przegrał b dwumeczów oraz rozegrał c dwumeczów remisowych. Każdy zawodnik zagrał w $n - 1$ dwumeczach, więc $a + b + c = n - 1$. Z założeń zadania każdy zawodnik wygrał tyle samo meczów ile przegrał, więc $2a + c = 2b + c$, skąd otrzymujemy $a = b$. W konsekwencji liczba $c = n - 1 - a - b = n - 1 - 2a$ jest parzysta, gdyż na mocy założeń zadania liczba n jest nieparzysta.

Dla każdego nieremisowego dwumeczu unieważniamy dowolny z meczów będących częścią tego dwumeczu. Ponieważ każdy zawodnik wygrał tyle samo dwumeczów co przegrał, zachowana zostanie własność, że każdy zawodnik wygrał tyle samo ważnych meczów co przegrał. Pozostaje wykazać, że można unieważnić po jednym meczu z dwumeczów remisowych w żądany sposób.

Niech G będzie grafem, którego wierzchołkami są zawodnicy, a krawędź $v - w$ prowadzimy wtedy i tylko wtedy, gdy dwumecz między tymi zawodnikami był remisowy. Z obserwacji z drugiego akapitu rozwiązania wynika, że stopień każdego wierzchołka w grafie G jest parzysty. Z twierdzenia Eulera wynika, że graf G można podzielić na pewną liczbę krawędziowo rozłącznych cykli (przyjmujemy konwencję, że wierzchołki w cyklu się nie powtarzają). Dla każdego cyklu $v_1 - v_2 - v_3 - \dots - v_k - v_1$ unieważniamy mecze, w których v_1 wygrał z v_2 , v_2 wygrał z v_3 , $\dots$, v_{k-1} wygrał z v_k i v_k wygrał z v_1 . Każda krawędź pojawia się w dokładnie jednym cyklu, więc unieważniono po jednym meczu z każdego dwumeczu. Zauważmy, że po takim unieważnieniu meczów zachowujemy własność, że każdy zawodnik wygrał tyle samo ważnych meczów co przegrał. Istotnie, unieważniając mecze w obrębie ustalonego cyklu, każdemu zawodnikowi unieważniliśmy dokładnie jedno zwycięstwo i jedną porażkę.



LXXIII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia trzeciego

30 marca 2022 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC , w którym $AB < AC$. Dwusieczna kąta BAC przecina bok BC w punkcie D oraz okrąg opisany na trójkącie ABC w punkcie M różnym od A . Punkty X i Y wybrano tak, że $MX \perp AB$, $BX \perp MB$, $MY \perp AC$ oraz $CY \perp MC$. Dowieść, że punkty X, D, Y leżą na jednej prostej.

2. Dane są liczby całkowite $m, n \geq 2$. Wykazać, że istnieją takie dodatnie liczby całkowite $a_1 < a_2 < \dots < a_m$, że dla dowolnych liczb całkowitych $1 \leq i < j \leq m$ liczba $\frac{a_j}{a_j - a_i}$ jest całkowita i podzielna przez n .

3. Na okręgu zaznaczono n punktów i narysowano pewną liczbę cięciw o obu końcach w zaznaczonych punktach. Spełniona jest przy tym następująca własność: po wymazaniu dowolnych 2021 z narysowanych cięciw dowolne dwa zaznaczone punkty można połączyć łamaną złożoną z niewymazanych cięciw. Udowodnić, że można wymazać niektóre z cięciw w taki sposób, że na rysunku zostanie co najwyżej $2022n$ cięciw oraz wyżej opisana własność zostanie zachowana.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejsie dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.



LXXIII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia trzeciego

31 marca 2022 r. (drugi dzień zawodów)

4. Znaleźć wszystkie trójki liczb rzeczywistych (a, b, c) spełniające układ równań

$$\begin{cases} a^3 + b^2c = ac \\ b^3 + c^2a = ba \\ c^3 + a^2b = cb \end{cases}$$

5. Dany jest trójkąt ABC , w którym $AB < AC$. Punkt M jest środkiem boku BC . Punkt P leży na odcinku AB i spełnia nierówność $AP > PB$. Punkt Q leży na odcinku AC , przy czym $\angle MPA = \angle AQM$. Symetralne odcinków BC i PQ przecinają się w punkcie S . Udowodnić, że $\angle BAC + \angle QSP = \angle QMP$.

6. Dana jest liczba pierwsza p oraz dodatnia liczba całkowita n . Udowodnić, że każdą z liczb $1, 2, \dots, p-1$ można pokolorować na jeden z $2n$ kolorów tak, aby dla dowolnego $i = 2, 3, \dots, n$ suma dowolnych i liczb tego samego koloru była niepodzielna przez p .

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejsie dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.



LXXIII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia trzeciego

30 marca 2022 r. (pierwszy dzień zawodów)

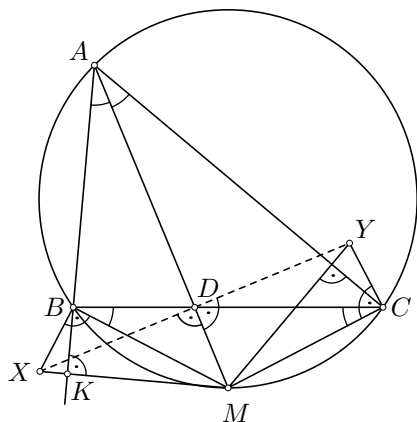
1. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC , w którym $AB < AC$. Dwusieczna kąta BAC przecina bok BC w punkcie D oraz okrąg opisany na trójkącie ABC w punkcie M różnym od A . Punkty X i Y wybrano tak, że $MX \perp AB$, $BX \perp MB$, $MY \perp AC$ oraz $CY \perp MC$. Dowieść, że punkty X, D, Y leżą na jednej prostej.

Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie:

Niech K będzie rzutem punktu M na prostą AB . Wtedy BK jest wysokością w trójkącie prostokątnym MBX . Trójkąty prostokątne MBX i MKB mają wspólny kąt ostry przy wierzchołku M , więc są podobne. Stąd $\frac{MB}{MX} = \frac{MK}{MB}$.

Oznaczmy $\angle BAC = 2\alpha$. M jest środkiem łuku BC , więc kąty oparte na łukach BM i MC mają miarę α . Zatem $\angle MBD = \alpha = \angle BAM$. Trójkąty MDB i MBA mają też wspólny kąt przy wierzchołku M , więc są podobne na mocy cechy podobieństwa kąt-kąt. Stąd $\frac{MD}{MB} = \frac{MB}{MA}$.



Mnożąc otrzymane równości stosunków otrzymujemy $\frac{MD}{MX} = \frac{MK}{MA}$. Trójkąty MDX i MKA mają wspólny kąt przy wierzchołku M . Z cechy podobieństwa bok-kąt-bok wynika, że trójkąty te są podobne. W szczególności $\angle XDM = \angle MKA = 90^\circ$.

W podobny sposób dowodzimy, że $\angle MDY = 90^\circ$. W takim razie $\angle XDY = \angle XDM + \angle MDY = 180^\circ$, co dowodzi tezy.

2. Dane są liczby całkowite $m, n \geq 2$. Wykazać, że istnieją takie dodatnie liczby całkowite $a_1 < a_2 < \dots < a_m$, że dla dowolnych liczb całkowitych $1 \leq i < j \leq m$ liczba $\frac{a_j}{a_j - a_i}$ jest całkowita i podzielna przez n .

Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie:

Rosnący ciąg liczb całkowitych (niekoniecznie dodatnich) $a_1, a_2, \dots, a_t$ będziemy nazywać ciągiem *dobrym*, jeśli dla każdych $1 \leq i < j \leq t$ liczba $\frac{a_j}{a_j - a_i}$ jest całkowita i podzielna przez n .

Obserwacja. Załóżmy, że ciąg $a_1, a_2, \dots, a_t$ jest dobry. Wtedy:

- (i) jeśli $a_t < 0$, to ciąg $a_1, a_2, \dots, a_t, 0$ jest dobry;
- (ii) ciąg $a_1 + x, a_2 + x, \dots, a_t + x$ jest dobry o ile liczba całkowita x dzieli się przez $n \cdot \prod_{1 \leq i < j \leq t} (a_j - a_i)$.

Część (i) obserwacji jest oczywista. Część (ii) wynika z tego, że jeśli $x = yn \cdot \prod_{1 \leq i < j \leq t} (a_j - a_i)$ dla pewnej liczby całkowitej y , to dla dowolnych $1 \leq i < j \leq t$ liczba

$$\frac{a_j + x}{(a_j + x) - (a_i + x)} = \frac{a_j}{a_j - a_i} + yn \cdot \prod_{\substack{1 \leq k < \ell \leq t \\ (k, \ell) \neq (i, j)}} (a_\ell - a_k)$$

jest całkowita i dzieli się przez n .

Przejdźmy do rozwiązania zadania. Przeprowadzimy dowód przez indukcję ze względu na m . Dla $m = 2$ wystarczy wziąć $a_1 = n - 1$, $a_2 = n$.

Krok indukcyjny. Załóżmy, że ciąg $a_1, a_2, \dots, a_m$ jest dobry i $a_1 > 0$. Należy skonstruować dobry ciąg długości $m + 1$ o wyrazach dodatnich. Niech x będzie wielokrotnością liczby $n \cdot \prod_{1 \leq i < j \leq m} (a_j - a_i)$ tak dużą, że $x > a_m$. Wtedy ciąg

$$a_1 - x, a_2 - x, \dots, a_m - x$$

jest dobry i ma ujemne wyrazy. Dopisując na końcu tego ciągu wyraz 0 otrzymujemy dobry ciąg

$$a_1 - x, a_2 - x, \dots, a_m - x, 0$$

długości $m + 1$. Niech

$$y = n \cdot \prod_{1 \leq i < j \leq m} (a_j - a_i) \cdot \prod_{k=1}^m (x - a_k).$$

Wtedy $y > x - a_1$. Zatem ciąg

$$a_1 - x + y, a_2 - x + y, \dots, a_m - x + y, y$$

jest dobry, ma dodatnie wyrazy i jest długości $m + 1$. To kończy krok indukcyjny i rozwiązanie zadania.

3. Na okręgu zaznaczono n punktów i narysowano pewną liczbę cięciw o obu końcach w zaznaczonych punktach. Spełniona jest przy tym następująca własność: po wymazaniu dowolnych 2021 z narysowanych cięciw dowolne dwa zaznaczone punkty można połączyć łamaną złożoną z niewymazanych cięciw. Udowodnić, że można wymazać niektóre z cięciw w taki sposób, że na rysunku zostanie co najwyżej $2022n$ cięciw oraz wyżej opisana własność zostanie zachowana.

Autor zadania: Wojciech Nadara

Rozwiązanie:

Powiemy, że niepusty spójny graf jest *wspaniały*, jeśli pozostaje on spójny po usunięciu z niego dowolnych 2021 krawędzi. Należy udowodnić, że z każdego wspaniałego grafu o n wierzchołkach można usunąć część jego krawędzi tak, żeby powstały graf pozostał wspaniały i miał co najwyżej $2022n$ krawędzi.

Ustalmy wspaniały graf G o n wierzchołkach. Niech V będzie jego zbiorem wierzchołków. Skonstruujmy grafy $G_0, F_0, G_1, F_1, \dots, F_{2021}, G_{2022}$, każdy o zbiorze wierzchołków V , w następujący sposób. Niech $G_0 = G$. Jeśli graf G_i jest już skonstruowany, to definiujemy F_i jako dowolny las rozpinający G_i (to znaczy: dla każdej spójnej składowej grafu G_i znajdujemy drzewo rozpinające i deklaruujemy, że krawędziami grafu F_i są krawędzie tychże drzew). Jeśli graf F_i jest już skonstruowany, to określamy G_{i+1} jako graf, którego krawędziami są te krawędzie

grafu G_i , które nie są krawędziami grafu F_i . Zdefiniujmy jeszcze graf H o zbiorze wierzchołków V , którego krawędziami są krawędzie grafów $F_0, F_1, F_2, \dots, F_{2021}$. Udowodnimy, że H jest wspaniały i ma mniej niż $2022n$ krawędzi.

Oczywiście, każdy z grafów $F_0, F_1, F_2, \dots, F_{2021}$ ma co najwyżej $n - 1$ krawędzi, więc H ma co najwyżej $2022(n - 1)$ krawędzi. Do sprawdzenia zostaje wspaniałość grafu H . Niech Z będzie zbiorem dowolnych 2021 krawędzi grafu H . Niech H' będzie grafem powstałym z H przez usunięcie krawędzi ze zbioru Z . Należy dowieść, że H' jest spójny.

Lemat. Jeśli wierzchołki u, v są w tej samej składowej spójności grafu G_{2022} , to są w tej samej składowej spójności grafu H' .

Dowód lematu. Ponieważ G_{2022} jest podgrafem grafów $G_0, G_1, G_2, \dots, G_{2021}$, więc dla dowolnego $i = 0, 1, 2, \dots, 2021$ wierzchołki u, v są w tej samej składowej spójności grafu G_i . Ponieważ F_i jest lasem rozpinającym G_i , możemy znaleźć ścieżkę p_i w F_i łączącą u z v . Ścieżki $p_0, p_1, \dots, p_{2021}$ są krawędziowo rozłączne, bo grafy F_i są krawędziowo rozłączne. Ponieważ mamy 2022 ścieżek, a Z ma 2021 krawędzi, któraś ze ścieżek, powiedzmy p_j , składa się wyłącznie z krawędzi nienależących do Z . Ta ścieżka łączy u z v i jest zawarta w H' — wierzchołki u, v są więc w tej samej składowej spójności grafu H' , co kończy dowód lematu.

Uzbrojeni w lemat dokończymy rozwiązanie. Niech $E(G)$ będzie zbiorem krawędzi grafu G . Zauważmy, że $E(G)$ możemy podzielić na trzy zbiory: zbiór krawędzi grafu G_{2022} , który oznaczymy przez $E(G_{2022})$, zbiór krawędzi grafu H' , który oznaczymy przez $E(H')$ oraz zbiór Z .

Przypuśćmy nie wprost, że graf H' nie jest spójny. Wówczas V można podzielić na dwa niepuste zbiory A i B w taki sposób, że w H' nie ma krawędzi łączącej jakikolwiek wierzchołek z A z jakimkolwiek wierzchołkiem z B . Rozważmy dowolne wierzchołki $u \in A$ i $v \in B$. Z lematu wynika, że u i v należą do różnych składowych spójności grafu G_{2022} . Zatem jeśli w grafie G jest krawędź łącząca u z v , to ta krawędź nie należy ani do $E(G_{2022})$ ani do $E(H')$ — musi więc należeć do zbioru Z . To znaczy, że po usunięciu z grafu G krawędzi ze zbioru Z otrzymujemy niespójny graf — nie ma w nim bowiem żadnej krawędzi łączącej jakikolwiek wierzchołek z A z jakimkolwiek wierzchołkiem z B . To jest sprzeczność z założeniem, że G jest wspaniały. Oznacza to, że graf H' jest spójny.



LXXIII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych
zawodów stopnia trzeciego

31 marca 2022 r. (drugi dzień zawodów)

4. Znaleźć wszystkie trójki liczb rzeczywistych (a, b, c) spełniające układ równań

$$\begin{cases} a^3 + b^2c = ac \\ b^3 + c^2a = ba \\ c^3 + a^2b = cb \end{cases}$$

Autor zadania: Tomasz Cieśla

Rozwiązanie:

Odpowiedź: $(a, b, c) = (0, 0, 0)$, $(a, b, c) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Sposób 1. Jeśli $a = 0$, to z drugiego równania otrzymujemy $b = 0$. Podobnie, jeśli $b = 0$, to z trzeciego równania dostajemy $c = 0$, a jeśli $c = 0$, to pierwsze równanie daje $a = 0$. Zatem wszystkie niewiadome są jednocześnie zerowe lub jednocześnie niezerowe. Oczywiście trójka $(a, b, c) = (0, 0, 0)$ spełnia układ.

Od teraz zakładamy, że $a, b, c \neq 0$. Pomnóżmy pierwsze równanie przez b , drugie przez c , a trzecie przez a . Otrzymujemy

$$\begin{cases} a^3b + b^3c = abc \\ b^3c + c^3a = abc \\ c^3a + a^3b = abc \end{cases}$$

Po dodaniu tych równań stronami dostajemy $2(a^3b + b^3c + c^3a) = 3abc$. Stąd obliczamy

$$a^3b = (a^3b + b^3c + c^3a) - (b^3c + c^3a) = \frac{3}{2}abc - abc = \frac{1}{2}abc.$$

Zatem $2a^2 = c$. Prowadząc analogiczne rachunki dowodzimy, że $2b^2 = a$ i $2c^2 = b$. Dostajemy

$$a = 2b^2 = 2(2c^2)^2 = 2^3c^4 = 2^3(2a^2)^4 = 2^7a^8.$$

Stąd $a = \frac{1}{2}$ i analogicznie obliczamy $b = c = \frac{1}{2}$. Trójka $(a, b, c) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ spełnia układ.

Sposób 2. Zapiszmy równania w następującej postaci:

$$\begin{cases} a(2a^2 - c) = c(a - 2b^2) \\ b(2b^2 - a) = a(b - 2c^2) \\ c(2c^2 - b) = b(c - 2a^2) \end{cases}$$

Po pomnożeniu stronami otrzymujemy

$$abc(2a^2 - c)(2b^2 - a)(2c^2 - b) = abc(c - 2a^2)(a - 2b^2)(b - 2c^2).$$

Lewa strona powyższej równości jest liczbą przeciwną do prawej strony. Jest to możliwe jedynie gdy $abc(2a^2 - c)(2b^2 - a)(2c^2 - b) = 0$. Stąd co najmniej jedna z liczb $a, b, c, 2a^2 - c, 2b^2 - a, 2c^2 - b$ jest zerem. Podobnie jak w sposobie pierwszym dowodzimy, że jeśli jedna z liczb a, b, c jest zerem to wszystkie są. Jeśli $a, b, c \neq 0$, to któraś z liczb $2a^2 - c, 2b^2 - a, 2c^2 - b$ jest zerem. Równość $2a^2 - c = 0$ na mocy pierwszego równania pociąga za sobą $2b^2 - a = 0$, równość $2b^2 - a = 0$ na mocy drugiego równania daje $2c^2 - b = 0$, a równość $2c^2 - b = 0$ wobec trzeciego równania daje $2a^2 - c = 0$. Musi zatem być $2a^2 = c, 2b^2 = a$ i $2c^2 = b$. Podobnie jak w sposobie pierwszym obliczamy $a = b = c = \frac{1}{2}$. Pozostaje sprawdzić, że otrzymane trójki $(a, b, c) = (0, 0, 0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ spełniają wyjściowy układ.

5. Dany jest trójkąt ABC , w którym $AB < AC$. Punkt M jest środkiem boku BC . Punkt P leży na odcinku AB , przy czym $AP > PB$. Punkt Q leży na odcinku AC , przy czym $\sphericalangle MPA = \sphericalangle AQM$. Symetralne odcinków BC i PQ przecinają się w punkcie S . Udowodnić, że $\sphericalangle BAC + \sphericalangle QSP = \sphericalangle QMP$.

Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie:

Niech N będzie środkiem odcinka AB . Ponieważ $AP > PB$, więc P leży na odcinku NB . Zatem

$$\sphericalangle MPA = \sphericalangle MNA - \sphericalangle NMP < \sphericalangle MNA = 180^\circ - \sphericalangle BAC.$$

Suma kątów MPA, PAC jest więc mniejsza od 180° — a to oznacza, że półproste PM i AC przecinają się. Punkt wspólny tych półprostych

oznaczymy przez X . Również $\sphericalangle AQM + \sphericalangle BAQ < 180^\circ$, więc półproste $AB^\rightarrow$, $QM^\rightarrow$ przecinają się. Oznaczmy ich punkt przecięcia przez Y .

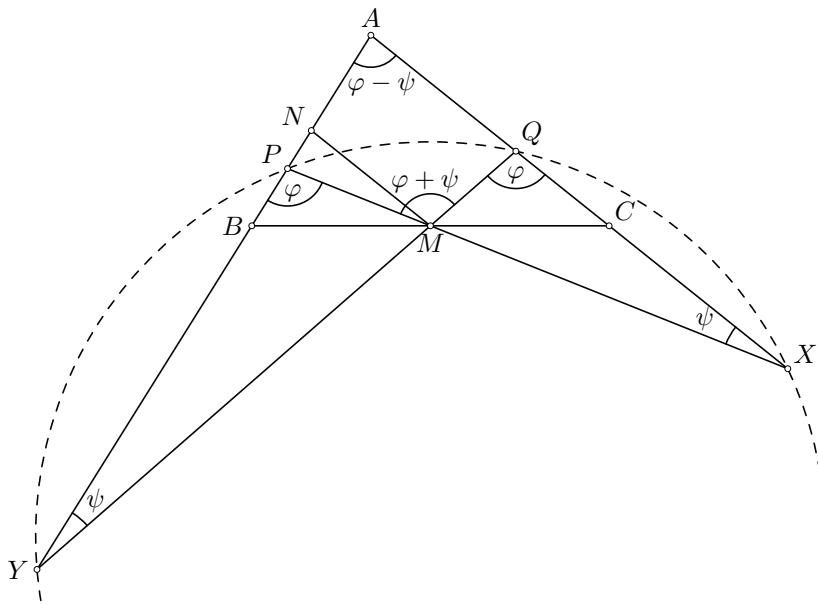
Mamy $\sphericalangle YPX = 180^\circ - \sphericalangle MPA = 180^\circ - \sphericalangle AQM = \sphericalangle YQX$. Wynika stąd, że czworokąt $XYPQ$ można wpisać w okrąg. Zachodzą równości $\sphericalangle QMP = 180^\circ - \sphericalangle XMQ = \sphericalangle MQX + \sphericalangle QXM$ oraz $\sphericalangle BAC = \sphericalangle YQX - \sphericalangle QYA = \sphericalangle MQX - \sphericalangle QXP$. Należy więc udowodnić, że

$$\sphericalangle MQX - \sphericalangle QXP + \sphericalangle QSP = \sphericalangle MQX + \sphericalangle QXM,$$

czyli równoważnie

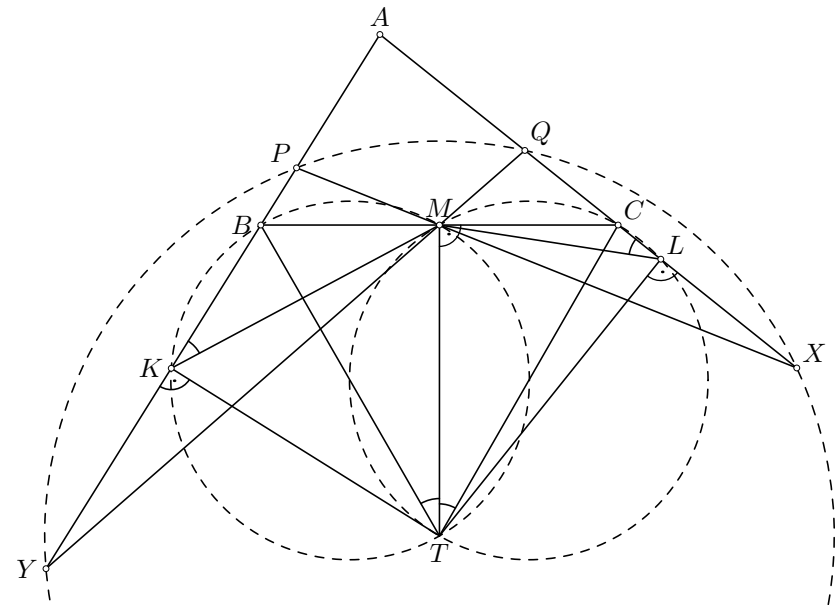
$$\sphericalangle QSP = 2\sphericalangle QXP.$$

W tym celu wystarczy udowodnić, że S jest środkiem okręgu opisanego na czworokącie $XYPQ$.



Z równości $\sphericalangle YPM = \sphericalangle MQX$ i $\sphericalangle PMY = \sphericalangle XMQ$ wynika, że trójkąty PMY , QMX są podobne. Oznaczmy środki odcinków PY i QX odpowiednio przez K i L . Wówczas trójkąty PMK i QML są podobne, bo odcinki MK , ML są odpowiadającymi sobie środkowymi w trójkątach PMY , QMX . W szczególności $\sphericalangle MKP = \sphericalangle QLM$.

Rozważmy punkt T na symetralnej odcinka BC spełniający równość $\sphericalangle CTB = 2\sphericalangle MKP$ oraz taki, że punkty A i T leżą po różnych stronach prostej BC . Udowodnimy, że $TK \perp AB$. Rozważymy trzy przypadki zależne od położenia punktu K na prostej AB względem punktu B . Jeśli K leży po tej samej stronie prostej BM co T , to $\sphericalangle MTB = \sphericalangle MKB$, więc punkty B, M, T, K leżą na jednym okręgu, skąd $\sphericalangle TKB = 180^\circ - \sphericalangle BMT = 90^\circ$. Jeśli K i T leżą po różnych stronach prostej BM , to $\sphericalangle BKM = 180^\circ - \sphericalangle MKP = 180^\circ - \sphericalangle MTB$, więc punkty M, T, B, K leżą na okręgu i $\sphericalangle TKB = \sphericalangle TMB = 90^\circ$. Jeśli K pokrywa się z punktem B , to $\sphericalangle MKP = \sphericalangle MTP$, a zatem $\sphericalangle TKP = \sphericalangle TKM + \sphericalangle MKP = 90^\circ - \sphericalangle MTB + \sphericalangle MTB = 90^\circ$. We wszystkich trzech możliwych przypadkach wykazaliśmy, że $TK \perp AB$. Prowadząc analogiczne rozumowanie (wystarczy w rachunkach podmienić B na C , K na L i P na Q) dowodzimy, że $TL \perp AC$.



Ponieważ $TK \perp AB$ i K jest środkiem PY , punkt T leży na symetralnej odcinka PY . Podobnie, $TL \perp QY$ i L jest środkiem QX , więc T leży na symetralnej odcinka QX . Stąd T jest przecięciem symetralnych dwóch boków czworokąta $XYPQ$ wpisanego w okrąg — punkt T jest więc środkiem tego okręgu. W szczególności T leży na symetralnej odcinka PQ . To oznacza, że $T = S$ i dowód jest zakończony.

6. Dana jest liczba pierwsza p oraz dodatnia liczba całkowita n . Udowodnić, że każdą z liczb $1, 2, \dots, p-1$ można pokolorować na jeden z $2n$ kolorów tak, aby dla dowolnego $i = 2, 3, \dots, n$ suma dowolnych i liczb tego samego koloru była niepodzielna przez p .

Zadanie zaproponowali: Tomasz Cieśla, Wojciech Nadara, Michał Pilipczuk

Rozwiązanie:

Zbiór $X \subseteq \{1, 2, \dots, p-1\}$ nazwiemy *dobrym* jeśli dla dowolnego $i = 2, 3, \dots, n$ i dowolnych $x_1, \dots, x_i \in X$ suma $x_1 + x_2 + \dots + x_i$ nie dzieli się przez p . Wystarczy dowieść, że istnieją dobre zbiory $X_1, X_2, \dots, X_{2n}$, takie że $X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_{2n} = \{1, 2, \dots, p-1\}$ — wtedy kolorowanie zgodne z warunkami zadania otrzymamy przypisując liczbie x jakikolwiek kolor k , dla którego $x \in X_k$.

Dla każdej liczby całkowitej x oznaczmy przez $r(x) \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ resztę z dzielenia liczby x przez p . Niech a będzie największą liczbą całkowitą spełniającą nierówność $an < p$. Dla dowolnego $j = 1, 2, \dots, p-1$ zdefiniujemy zbiór

$$A_j = \{r(j), r(2j), r(3j), \dots, r(aj)\}.$$

Udowodnimy, że zbiory $A_1, A_2, \dots, A_{p-1}$ są dobre. Są one oczywiście podzbiorami $\{1, 2, \dots, p-1\}$. Pozostaje sprawdzić, że dla dowolnego $j = 1, 2, \dots, p-1$ oraz $i = 2, 3, \dots, n$ suma dowolnych i elementów zbioru A_j nie dzieli się przez p . Niech $m_1, m_2, \dots, m_i \in \{1, 2, \dots, a\}$. Mamy

$$r(m_1j) + r(m_2j) + \dots + r(m_ij) \equiv (m_1 + m_2 + \dots + m_i)j \pmod{p}.$$

Ponieważ $m_1 + m_2 + \dots + m_i \leq ai < p$, więc $m_1 + \dots + m_i \not\equiv 0 \pmod{p}$. Ponadto $j \not\equiv 0 \pmod{p}$. Zatem liczba $r(m_1j) + r(m_2j) + \dots + r(m_ij)$ nie dzieli się przez p . To kończy uzasadnienie, że zbiór A_j jest dobry. By zakończyć rozwiązanie wystarczy dowieść, że pewne $2n$ zbiorów pośród $A_1, A_2, \dots, A_{p-1}$ pokrywa cały zbiór $\{1, 2, \dots, p-1\}$.

Lemat. Dla dowolnej liczby $x \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ istnieje taka liczba $y \in \{\pm 1, \pm 2, \dots, \pm n\}$, że $r(yx) \in \{1, 2, \dots, a\}$.

Dowód lematu. Niech $x \in \{1, 2, \dots, p-1\}$. Rozważmy reszty

$$r(x), r(2x), r(3x), \dots, r(nx), r((n+1)x).$$

Są one parami różne. W rzeczy samej, jeśli $ix \equiv jx \pmod{p}$ dla pewnych $i, j \in \{1, 2, \dots, n+1\}$, to $(i-j)x \equiv 0 \pmod{p}$, skąd $i \equiv j \pmod{p}$. Wobec ograniczeń $1 \leq i, j \leq n+1 \leq p$ oznacza to, że $i = j$.

Rozważmy następujące przedziały:

$$[0, a], [a+1, 2a+1], [2a+2, 3a+2], \dots, [(n-1)a+n-1, na+n-1].$$

Ponieważ $na+n > p$, więc każda z rozważanych reszt należy do któregoś z przedziałów. Reszt jest $n+1$, a przedziałów n . Z zasady szufladkowej wynika, że któreś dwie reszty są w tym samym przedziale. Zatem istnieją różne $i, j \in \{1, 2, \dots, n+1\}$ takie, że reszta $r(ix)$ jest większa od $r(jx)$ o co najwyżej a . Połóżmy $y = i - j$. Wtedy $y \in \{\pm 1, \pm 2, \dots, \pm n\}$ oraz $r(yx) = r(ix) - r(jx) \in \{1, 2, \dots, a\}$ — dowód lematu jest zakończony.

Przypomnijmy, że dla dowolnej liczby całkowitej k niepodzielnej przez p istnieje liczba $f(k) \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ spełniająca $f(k) \cdot k \equiv 1 \pmod{p}$. Twierdzimy, że zbiory $A_{f(1)}, A_{f(2)}, \dots, A_{f(n)}, A_{f(-1)}, A_{f(-2)}, \dots, A_{f(-n)}$ pokrywają zbiór $\{1, 2, \dots, p-1\}$. Rzeczywiście, rozważmy dowolną liczbę $x \in \{1, 2, \dots, p-1\}$. Z lematu wynika, że istnieją $y \in \{\pm 1, \pm 2, \dots, \pm n\}$ oraz $b \in \{1, 2, \dots, a\}$ takie, że $yx \equiv b \pmod{p}$. Ta kongruencja jest równoważna takiej: $x \equiv f(y)b \pmod{p}$. To znaczy, że $x = r(f(y)b)$, wobec czego $x \in A_{f(y)}$.



LXXIV Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe

zawodów stopnia pierwszego

I seria: do 17 października 2022 r.

1. Wyznaczyć wszystkie dodatnie liczby całkowite n , dla których istnieją takie liczby $s_1, s_2, \dots, s_n \in \{-1, 1\}$, że

$$1 \cdot s_1 + 2 \cdot s_2 + \dots + n \cdot s_n = 0.$$

2. Znaleźć wszystkie trójki liczb rzeczywistych (a, b, c) spełniające układ równań

$$\begin{cases} a^2 + 4ab + b^2 = 1 \\ b^2 + 4bc + c^2 = 1 \\ c^2 + 4ca + a^2 = -2 \end{cases}$$

3. Dany jest trójkąt ABC . Okrąg styczny do boku AC oraz do przedłużeń boków AB , BC ma promień długości r_1 . Okrąg styczny do boku BC oraz do przedłużeń boków AB , AC ma promień długości r_2 . Udowodnić, że jeżeli $r_1 + r_2 = AB$, to trójkąt ABC jest prostokątny.

4. Wyznaczyć wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych (m, n) o następującej własności: w każde pole nieskończonej szachownicy można wpisać liczbę ze zbioru $A = \{1, 2, \dots, mn\}$ w taki sposób, że w każdym prostokącie o wymiarach $m \times n$ lub $n \times m$ (składającym się z mn pól) każda liczba ze zbioru A występuje dokładnie raz.

Uwaga: W tym roku szkolnym zadania zawodów pierwszego stopnia OM będą publikowane sukcesywnie: pierwsza seria 1 września 2022 r., druga seria 30 września 2022 r., a trzecia seria 28 października 2022 r.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

17 października 2022 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane. Rozwiązanie każdego zadania należy podpisać w lewym górnym rogu pierwszej jego strony: imieniem i nazwiskiem, swoim adresem, swoim adresem elektronicznym oraz klasą, nazwą i adresem szkoły.



LXXIV Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia pierwszego
II seria: do 7 listopada 2022 r.

5. Rozstrzygnąć, czy istnieje nieskończenie wiele dodatnich liczb całkowitych, których nie można przedstawić w postaci $n^2 + p$, gdzie n jest liczbą całkowitą, a p liczbą pierwszą.

6. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$ wpisany w okrąg. Przekątne AC i BD przecinają się w punkcie P , przy czym $BP = AD + DC$. Punkt X leży na boku BC , przy czym $BX = AC$. Dowieść, że $2\angle BPX = \angle ADC$.

7. Udowodnić, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych zachodzi nierówność

$$\sqrt{ab^2(b+c)} + \sqrt{bc^2(c+a)} + \sqrt{ca^2(a+b)} \leq \frac{1}{2} \sqrt{(a+b+c)^4 - (a^2+b^2+c^2)^2}.$$

8. Dany jest okrąg, w którym zaznaczono pewną skończoną liczbę cięciw. Łamaną zamkniętą złożoną z co najmniej trzech parami różnych zaznaczonych cięciw nazwiemy *cyklem*. Łamane uznajemy za takie same wtedy i tylko wtedy, gdy składają się z tego samego zbioru cięciw. Okazało się, że istnieje cykl $\mathcal{C}$ złożony z 2022 cięciw o następującej własności: każdy cykl ma co najmniej jedną wspólną cięciwę z cyklem $\mathcal{C}$. Wyznaczyć największą możliwą liczbę cykli.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

7 listopada 2022 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane. Rozwiązanie każdego zadania należy podpisać w lewym górnym rogu pierwszej jego strony: imieniem i nazwiskiem, swoim adresem, swoim adresem elektronicznym oraz klasą, nazwą i adresem szkoły.



LXXIV Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe

zawodów stopnia pierwszego

III seria: do 30 listopada 2022 r.

9. Załóżmy, że $2(a^2 + b^2 + c^2) = 5(ab + bc + ca) = d$ dla pewnych liczb całkowitych a, b, c, d . Udowodnić, że $10d$ jest kwadratem liczby całkowitej.

10. Dany jest różnoboczny trójkąt ostrokątny ABC wpisany w okrąg Ω . Punkt M jest środkiem dłuższego łuku BC okręgu Ω , a punkt N — środkiem krótszego łuku BC okręgu Ω . Symetralna odcinka AN przecina odcinki AB i AC odpowiednio w punktach X i Y . Oznaczmy przez Z różny od N punkt przecięcia okręgu Ω i okręgu opisanego na trójkącie NXY . Dowieść, że prosta MZ przechodzi przez ortocentrum trójkąta ABC .

11. Dana jest liczba całkowita $n \geq 2$. Dodatkowo liczby rzeczywiste $a_1, \dots, a_n$ spełniają równość $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = n$. Oznaczmy przez A zbiór tych indeksów $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, dla których $a_i \geq 2$. Udowodnić, że

$$n \cdot \sum_{i \in A} a_i^2 + 4 \cdot \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2 \leq 4n^2.$$

12. Gra w (n, k) -kamienie rozgrywana jest na prostokątnej planszy składającej się z n pól ustawionych w rzędzie. Na początku gry na k -tym polu od lewej znajduje się kamień, a pozostałe pola są puste. Pojedyncza tura przebiega następująco. Na każdym kamieniu na planszy stawiamy kropkę. Następnie kładziemy kamień (bez kropki) na każdym polu sąsiadującym z dokładnie jednym polem, na którym znajduje się kamień z kropką. Na koniec tury zdejmujemy z planszy wszystkie kamienie z kropką. Gra kończy się porażką, jeżeli na planszy nie pozostały żadne kamienie. Znaleźć wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych (n, k) , dla których gra w (n, k) -kamienie nigdy nie zakończy się porażką, niezależnie od tego ile tur rozegramy.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym na adres komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

30 listopada 2022 r.

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane. Rozwiązanie każdego zadania należy podpisać w lewym górnym rogu pierwszej jego strony: imieniem i nazwiskiem, swoim adresem, swoim adresem elektronicznym oraz klasą, nazwą i adresem szkoły.

Adresy Komitetów Okręgowych Olimpiady Matematycznej

- Dla województwa pomorskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Gdańskiego, ul. Wita Stwosza 57, 80-952 Gdańsk.
- Dla województwa śląskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Śląskiego, ul. Bankowa 14, 40-007 Katowice.
- Dla województwa małopolskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego, ul. Łojasiewicza 6, 30-348 Kraków.
- Dla województwa lubelskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Marii Curie-Skłodowskiej, pl. M. Curie-Skłodowskiej 1, 20-031 Lublin
- Dla województwa łódzkiego i świętokrzyskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Łódzkiego, ul. Banacha 22, 90-238 Łódź.
- Dla województwa wielkopolskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Adama Mickiewicza, ul. Uniwersytetu Poznańskiego 4, 61-614 Poznań.
- Dla województwa podkarpackiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyczno-Przyrodniczy, Uniwersytetu Rzeszowskiego ul. Pigonia 1, 35-310 Rzeszów.
- Dla województwa lubuskiego i zachodniopomorskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyki Uniwersytetu Szczecińskiego, ul. Wielkopolska 15, 70-451 Szczecin.
- Dla województwa kujawsko-pomorskiego i warmińsko-mazurskiego: — Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, ul. Chopina 12/18, 87-100 Toruń.
- Dla województwa mazowieckiego i podlaskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, ul. Śniadeckich 8, 00-656 Warszawa.
- Dla województwa dolnośląskiego i opolskiego: Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej — Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego, pl. Grunwaldzki 2/4, 50-384 Wrocław.

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w Internecie pod adresem: <https://om.mimuw.edu.pl>



LXXIV Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych
zawodów stopnia pierwszego

1. Wyznaczyć wszystkie dodatnie liczby całkowite n , dla których istnieją takie liczby $s_1, s_2, \dots, s_n \in \{-1, 1\}$, że

$$1 \cdot s_1 + 2 \cdot s_2 + \dots + n \cdot s_n = 0.$$

Autor zadania: Piotr Nayar

Rozwiązanie:

Odpowiedź: Liczby n postaci $4k + 3$ i $4k + 4$ dla $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

Na początek zauważmy, że gdy n jest postaci $4k + 1$ lub $4k + 2$ dla pewnego całkowitego k , to dla dowolnego wyboru liczb $s_1, s_2, \dots, s_n$ w sumie

$$1 \cdot s_1 + 2 \cdot s_2 + \dots + n \cdot s_n$$

występuje dokładnie $2k + 1$ nieparzystych składników, wobec czego cała suma jest liczbą nieparzystą. Liczby n postaci $4k + 1$ i $4k + 2$ nie spełniają więc warunków zadania.

Udowodnimy, że jeśli dla jakiejś liczby $n \in \mathbb{N}$ istnieją takie liczby $s_1, s_2, \dots, s_n \in \{-1, 1\}$, że $1 \cdot s_1 + 2 \cdot s_2 + \dots + n \cdot s_n = 0$, to istnieją też takie liczby dla $n + 4$. Wystarczy przyjąć $s_{n+1} = s_{n+4} = 1$ oraz $s_{n+2} + s_{n+3} = -1$, bo $(n + 1) - (n + 2) - (n + 3) + (n + 4) = 0$.

Teza zachodzi dla $n = 3$, bo $1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 = 0$. Zachodzi też dla $n = 4$, bo $1 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + (-1) \cdot 3 + 1 \cdot 4 = 0$. Teza zachodzi więc dla każdej liczby postaci $4k + 3$ i każdej liczby postaci $4k + 4$, gdzie k oznacza dowolną całkowitą liczbę nieujemną.

Uwaga. Liczby $s_1, s_2, \dots, s_n$ można dobierać na wiele różnych sposobów. Na przykład, jeżeli $n = 4k - 1$ dla pewnego $k = 1, 2, \dots$, to możemy wziąć

$$s_i = \begin{cases} 1 & \text{dla } i \in \{1, 2, 3, \dots, k - 1, 3k, 3k + 1, \dots, 4k - 2, 4k - 1\} \\ -1 & \text{dla } i \in \{k, k + 1, \dots, 3k - 1\} \end{cases}.$$

Wówczas

$$1 \cdot s_1 + 2 \cdot s_2 + \dots + n \cdot s_n = A - B + C,$$

gdzie

$$A = 1 + 2 + \dots + (k - 1) = \frac{(k - 1)k}{2},$$

$$B = k + (k + 1) + \dots + (3k - 1) = \frac{2k(4k - 1)}{2} = k(4k - 1),$$

$$C = 3k + (3k + 1) + \dots + (4k - 1) = \frac{k(7k - 1)}{2}.$$

(Powyższe równości wynikają ze wzoru na sumę ciągu arytmetycznego.)

Stąd

$$A - B + C = k \cdot \left(\frac{k - 1}{2} - (4k - 1) + \frac{7k - 1}{2} \right) = 0.$$

Jeżeli $n = 4k$ dla pewnego $k = 1, 2, \dots$, to możemy wybrać

$$s_i = \begin{cases} 1 & \text{dla } i \in \{1, 2, 3, \dots, k, 3k + 1, 3k + 2, \dots, 4k\} \\ -1 & \text{dla } i \in \{k + 1, k + 2, \dots, 3k\} \end{cases}.$$

Analogicznie jak wyżej widzimy, że

$$1 \cdot s_1 + 2 \cdot s_2 + \dots + n \cdot s_n = A - B + C,$$

gdzie

$$A = 1 + 2 + \dots + k = \frac{k(k + 1)}{2},$$

$$B = (k + 1) + (k + 2) + \dots + 3k = \frac{2k(4k + 1)}{2} = k(4k + 1),$$

$$C = (3k + 1) + (3k + 2) + \dots + 4k = \frac{k(7k + 1)}{2}.$$

Stąd

$$A - B + C = k \cdot \left(\frac{k + 1}{2} - (4k + 1) + \frac{7k + 1}{2} \right) = 0.$$

2. Znaleźć wszystkie trójki liczb rzeczywistych (a, b, c) spełniające układ równań

$$\begin{cases} a^2 + 4ab + b^2 = 1 \\ b^2 + 4bc + c^2 = 1 \\ c^2 + 4ca + a^2 = -2 \end{cases}$$

Autor zadania: Tomasz Cieśla

Rozwiązanie:

Odpowiedź: $(a, b, c) = (1, 0, -1)$ i $(a, b, c) = (-1, 0, 1)$.

Porównując lewe strony pierwszego i drugiego równania otrzymujemy $a^2 + 4ab = 4bc + c^2$, skąd

$$0 = a^2 - c^2 + 4ab - 4bc = (a - c)(a + c + 4b).$$

Jeśli $a - c = 0$, to $a = c$ i trzecie równanie przyjmuje postać $6a^2 = -2$. To jest sprzeczność, bo kwadrat liczby rzeczywistej nie może być ujemny. W takim razie $a - c \neq 0$, wobec czego $a + c + 4b = 0$.

Z drugiej strony, dodając stronami wszystkie trzy równania dostajemy $2(a + b + c)^2 = 0$, skąd $a + b + c = 0$.

Otrzymane związki dają $3b = (a + c + 4b) - (a + b + c) = 0 - 0 = 0$, więc $b = 0$. Stąd $a + c = 0$, tj. $c = -a$. Pierwsze równanie redukuje się do $a^2 = 1$, skąd $a = 1$ lub $a = -1$. Otrzymaliśmy dwie możliwe trójki: $(a, b, c) = (1, 0, -1)$ i $(a, b, c) = (-1, 0, 1)$. Bezpośrednie sprawdzenie pokazuje, że obie spełniają wyjściowy układ równań.

3. Dany jest trójkąt ABC . Okrąg styczny do boku AC oraz do przedłużeń boków AB , BC ma promień długości r_1 . Okrąg styczny do boku BC oraz do przedłużeń boków AB , AC ma promień długości r_2 . Udowodnić, że jeżeli $r_1 + r_2 = AB$, to trójkąt ABC jest prostokątny.

Autor zadania: Dominik Burek

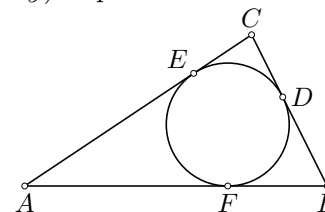
Rozwiązanie:

Przedstawimy kilka sposobów rozwiązania. Najpierw jednak sformułujemy i udowodnimy dwa pomocnicze stwierdzenia, z których będziemy korzystać. Dla skrócenia zapisu będziemy oznaczać $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$.

Lemat 1. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków BC , CA , AB odpowiednio w punktach D , E , F . Wówczas

$$AE = AF = p - a, \quad BD = BF = p - b, \quad CD = CE = p - c.$$

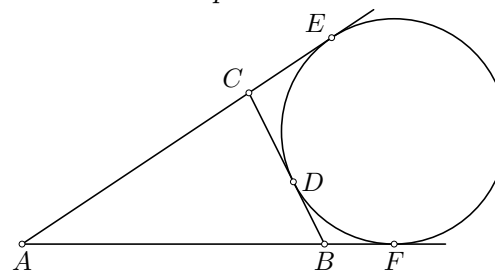
Dowód. Oznaczmy $x = AE = AF$, $y = BD = BF$, $z = CD = CE$. Wówczas $a = y + z$, $b = x + z$ i $c = x + y$. Po dodaniu stronami tych trzech równości dostajemy $a + b + c = 2(x + y + z)$, skąd $p = x + y + z$. W takim razie $x = (x + y + z) - (y + z) = p - a$, $y = (x + y + z) - (x + z) = p - b$ i $z = (x + y + z) - (x + y) = p - c$.



Lemat 2. Dany jest trójkąt ABC . Okrąg o jest styczny do boku BC w punkcie D oraz do przedłużeń boków AC i AB odpowiednio w punktach E i F . Wówczas

$$AE = AF = p, \quad BD = BF = p - c, \quad CD = CE = p - b.$$

Dowód. Oznaczmy $x = AE = AF$, $y = BD = BF$, $z = CD = CE$. Wówczas $a = y + z$, $b = x - z$ i $c = x - y$. Po dodaniu stronami tych trzech równości dostajemy $a + b + c = 2x$, skąd $p = x$. W takim razie $y = x - c = p - c$ i $z = x - b = p - b$.



Przejdźmy do rozwiązania zadania.

Sposób 1. Oznaczmy środek okręgu stycznego do boku AC i przedłużeń boków AB , BC przez J , oraz środek okręgu stycznego do boku BC i przedłużeń boków AB , AC przez K . Niech D będzie punktem

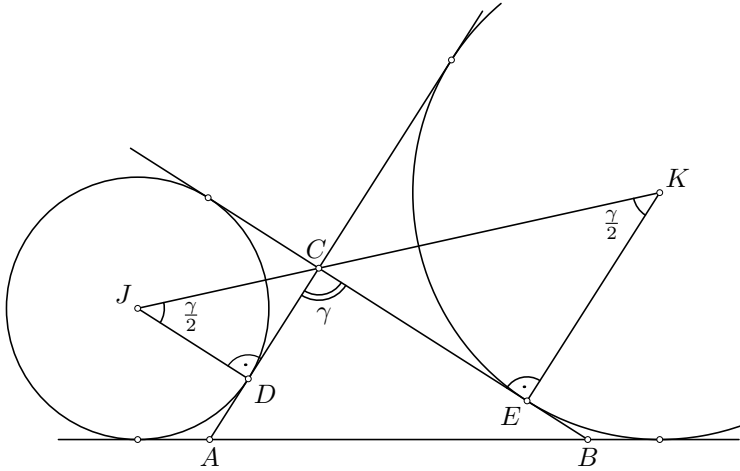
styczności pierwszego okręgu z bokiem AC , a E — punktem styczności drugiego okręgu z bokiem BC . Z Lematu 2. wynika, że $CD = p - a$ oraz $CE = p - b$, więc $CD + CE = 2p - a - b = c$. Z drugiej strony, oznaczając $\sphericalangle ACB = \gamma$, mamy

$$\sphericalangle JCD = 90^\circ - \frac{\gamma}{2} = \sphericalangle ECK,$$

więc $\sphericalangle DJC = \frac{\gamma}{2} = \sphericalangle CKE$. Stąd $r_1 = CD \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}$ i $r_2 = CE \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}$. Po dodaniu stronami otrzymujemy

$$r_1 + r_2 = (CD + CE) \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} = c \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}.$$

Jeśli więc $r_1 + r_2 = c$, to $\operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} = 1$. Ponieważ $0 < \frac{\gamma}{2} < 90^\circ$, więc $\frac{\gamma}{2} = 45^\circ$, tj. $\gamma = 90^\circ$.



Sposób 2. Przyjmijmy oznaczenia punktów J, K, D, E jak w sposobie pierwszym. Obierzmy na boku AB taki punkt F , że $AF = r_1$. Wówczas z równości $r_1 + r_2 = AB$ wynika, że $BF = r_2$. Z Lematu 2. wynika, że $AD = p - c = BE$. Niech I będzie takim punktem leżącym po tej samej stronie prostej AB co C , że $IF \perp AB$ i $IF = p - c$. Wówczas z cechy przystawania bok-kąt-bok wynika, że $\triangle JDA \equiv \triangle AFI$ oraz $\triangle BEK \equiv \triangle IFB$. Mamy

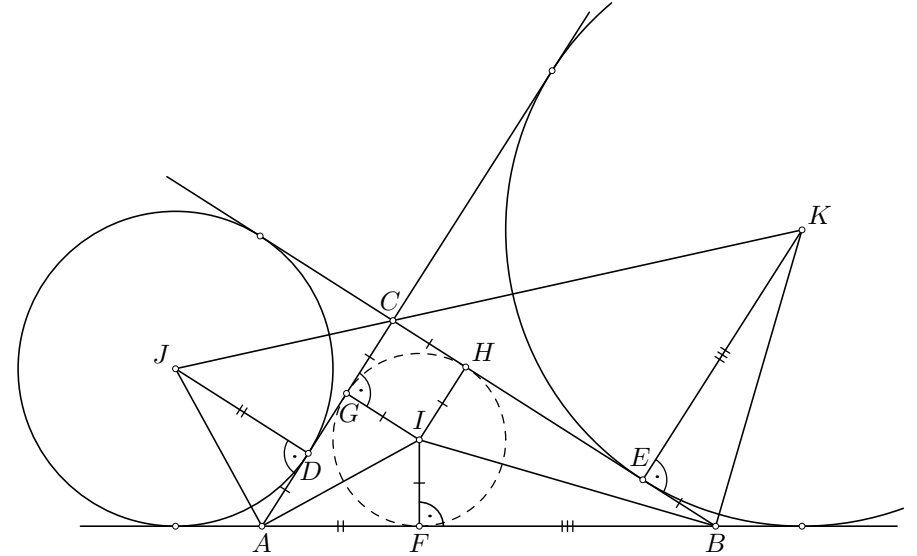
$$\sphericalangle FAI = \sphericalangle AJD = 90^\circ - \sphericalangle DAJ = 90^\circ - (90^\circ - \frac{1}{2} \sphericalangle BAC) = \frac{1}{2} \sphericalangle BAC,$$

więc AI jest dwusieczną kąta BAC . Analogicznie,

$$\sphericalangle IBF = \sphericalangle EKB = 90^\circ - \sphericalangle KBE = 90^\circ - (90^\circ - \frac{1}{2} \sphericalangle CBA) = \frac{1}{2} \sphericalangle CBA,$$

więc BI jest dwusieczną kąta CBA . W takim razie I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC , a F — jego punktem styczności z bokiem AB . Oznaczmy punkty styczności okręgu wpisanego w trójkąt ABC z bokami AC i BC odpowiednio przez G i H . Z Lematu 1. wynika, że $CH = CG = p - c = IG = IH$. Czworokąt $CGIH$ jest więc rombem. Stąd

$$\sphericalangle ACB = 180^\circ - \sphericalangle IGC = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ.$$



Sposób 3. Spróbujmy wyrazić r_1 i r_2 w zależności od a, b, c . Przyjmijmy oznaczenia punktów J i K jak w sposobie pierwszym. Kwadratowe nawiasy oznaczają pole figury. Wysokości trójkątów ABJ , BCJ i ACJ opuszczone z wierzchołka J mają długość r_1 . W takim razie

$$[ABC] = [ABJ] + [BCJ] - [ACJ] = \frac{cr_1}{2} + \frac{ar_1}{2} - \frac{br_1}{2} = (p - b)r_1.$$

Analogicznie, wysokości trójkątów ABK , ACK i CBK mają długość r_2 , więc

$$[ABC] = [ABK] + [ACK] - [CBK] = \frac{cr_2}{2} + \frac{br_2}{2} - \frac{ar_2}{2} = (p - a)r_2.$$

Wobec tego

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 &= \frac{[ABC]}{p-b} + \frac{[ABC]}{p-a} = [ABC] \cdot \left(\frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-a} \right) \\ &= [ABC] \cdot \frac{(p-a) + (p-b)}{(p-b)(p-a)} = [ABC] \cdot \frac{c}{(p-b)(p-a)}. \end{aligned}$$

Z założenia $r_1 + r_2 = c$ wynika więc, że $(p-b)(p-a) = [ABC]$. Ze wzoru Herona mamy

$$[ABC] = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

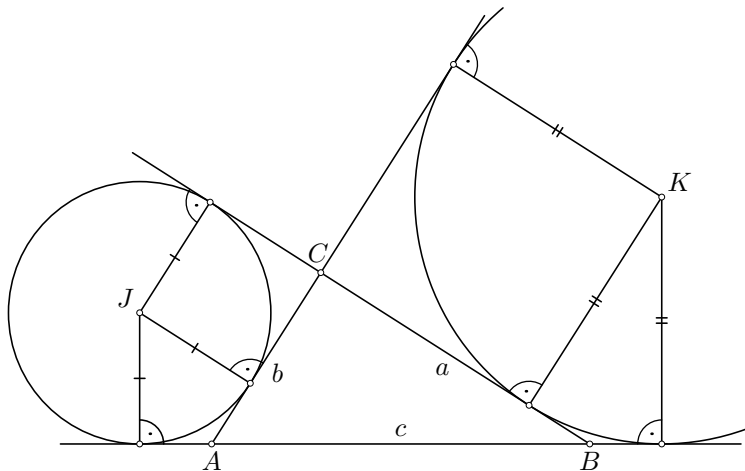
co w połączeniu z poprzednią równością daje

$$(p-b)(p-a) = p(p-c).$$

Po wymnożeniu mamy $p^2 - (a+b)p + ab = p^2 - pc$, więc

$$ab = p(a+b-c) = \frac{1}{2}(a+b+c)(a+b-c) = \frac{1}{2}((a+b)^2 - c^2) = \frac{1}{2}(a^2 + 2ab + b^2 - c^2).$$

Stąd $a^2 + b^2 = c^2$. Z twierdzenia Pitagorasa wynika więc, że kąt ACB jest prosty.



4. Wyznaczyć wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych (m, n) o następującej własności: w każde pole nieskończonej szachownicy można

wpisać liczbę ze zbioru $A = \{1, 2, \dots, mn\}$ w taki sposób, że w każdym prostokącie o wymiarach $m \times n$ lub $n \times m$ (składającym się z mn pól) każda liczba ze zbioru A występuje dokładnie raz.

Autorzy zadania: Marta i Michał Strzeleccy

Rozwiązanie:

Odpowiedź: Pary (m, n) , dla których m dzieli n lub n dzieli m .

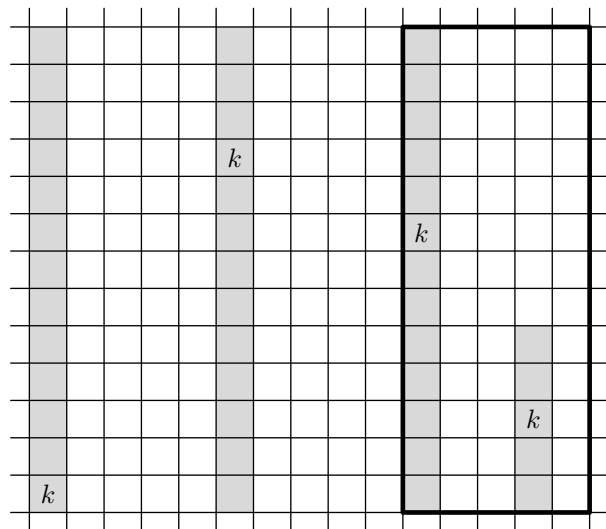
Założmy, że udało się wpisać liczby w żądany sposób. Pole w x -tej kolumnie i y -tym rzędzie będziemy nazywać *polem* (x, y) .

Dla dowolnego y całkowitego rozważmy prostokąt $m \times n$, którego lewym dolnym polem jest pole $(y, 1)$ oraz prostokąt $m \times n$, którego lewym dolnym polem jest pole $(y+1, 1)$. Te dwa prostokąty mają $m-1$ wspólnych kolumn. Ponieważ oba prostokąty zawierają ten sam zestaw liczb, więc liczby w lewej skrajnej kolumnie pierwszego prostokąta są takie same jak liczby w prawej skrajnej kolumnie drugiego prostokąta. To znaczy, że liczby wpisane w pola $(y, 1), (y, 2), \dots, (y, n)$ są takie same jak liczby wpisane w pola $(y+m, 1), (y+m, 2), \dots, (y+m, n)$.

Prowadząc analogiczne rozumowanie dla prostokątów $n \times m$ dowodzimy, że liczby wpisane w pola $(y, 1), (y, 2), \dots, (y, m)$ są takie same jak liczby wpisane w pola $(y+n, 1), (y+n, 2), \dots, (y+n, m)$.

Założmy, że żadna z liczb m, n nie jest dzielnikiem drugiej. Doprowadzimy do sprzeczności. Bez ograniczenia ogólności rozumowania założymy, że $m > n$. Zapiszmy $m = an + b$, gdzie a i b są liczbami całkowitymi i $1 \leq b \leq n-1$. Niech k będzie liczbą wpisaną w pole $(1, 1)$. Korzystając wielokrotnie z poczynionej wcześniej obserwacji widzimy, że liczba k jest również wpisana w któreś z pól $(n+1, 1), (n+1, 2), \dots, (n+1, m)$, w któreś z pól $(2n+1, 1), (2n+1, 2), \dots, (2n+1, m)$, i tak dalej.

Liczba k jest zatem wpisana w któreś z pól $(an+1, 1), (an+1, 2), \dots, (an+1, m)$, a także w któreś z pól $(m, 1), (m, 2), \dots, (m, n)$. Jednakże prostokąt $n \times m$, którego lewym dolnym polem jest pole $(an+1, 1)$ przykrywa oba powyższe zestawy pól — zawiera więc liczbę k dwukrotnie, co daje sprzeczność. Zatem nie istnieje żądane wpisanie liczb gdy żadna z liczb m, n nie jest dzielnikiem drugiej.



Założmy teraz, że m dzieli się przez n (gdy n dzieli się przez m rozumowanie jest analogiczne). Wskażemy spełniające warunki zadania przyporządkowanie liczb.

Symbolem $a \bmod b$ będziemy oznaczać resztę z dzielenia liczby a przez b . W pole (x, y) wpisujemy liczbę

$$f(x, y) = ((x - y) \bmod m) \cdot n + (y \bmod n) + 1.$$

Tak określona liczba jest w zbiorze A dla dowolnych x, y . Na rysunku przedstawiono wypełnienie planszy za pomocą powyższego wzoru dla $m = 6$ i $n = 2$.

9	11	1	3	5	7	9	11	1
12	2	4	6	8	10	12	2	4
1	3	5	7	9	11	1	3	5
4	6	8	10	12	2	4	6	8
5	7	9	11	1	3	5	7	9
8	10	12	2	4	6	8	10	12
9	11	1	3	5	7	9	11	1
12	2	4	6	8	10	12	2	4
1	3	5	7	9	11	1	3	5

Zauważmy, że $f(x, y) = f(x', y')$ wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzą

równości

$$y \bmod n = y' \bmod n \quad \text{oraz} \quad (x - y) \bmod m = (x' - y') \bmod m.$$

To zaś jest równoważne temu, że n dzieli liczbę $y - y'$ oraz m dzieli liczbę $x - y - (x' - y') = (x - x') - (y - y')$.

Wykażemy, że każdy prostokąt $m \times n$ przykrywa parami różne liczby. Należy pokazać, że jeśli $|x - x'| < m$, $|y - y'| < n$ i $f(x, y) = f(x', y')$, to $x = x'$ i $y = y'$. Na mocy obserwacji poczynionej powyżej, liczba $y - y'$ dzieli się przez n , a liczba $(x - x') - (y - y')$ dzieli się przez m . Jediną liczbą o module mniejszym od n podzielną przez n jest 0 — zatem $y - y' = 0$. Wtedy $(x - x') - (y - y') = x - x'$ jest podzielną przez m liczbą o module mniejszym od m — zatem $x - x' = 0$. Ostatecznie $x = x'$ i $y = y'$.

Teraz wykażemy, że każdy prostokąt $n \times m$ przykrywa parami różne liczby. Należy pokazać, że z warunków $|x - x'| < n$, $|y - y'| < m$ i $f(x, y) = f(x', y')$ wynika, że $x = x'$ i $y = y'$. Analogicznie jak wyżej stwierdzamy, że $y - y'$ dzieli się przez n oraz że $(x - x') - (y - y')$ dzieli się przez m . Liczba m dzieli się przez n , więc n dzieli liczbę $(x - x') - (y - y')$, a skoro n dzieli $y - y'$, to musi też dzielić $x - x'$. Ponieważ $x - x'$ jest podzielną przez n liczbą o module mniejszym od n , więc $x - x' = 0$. Stąd wniosek, że liczba $(x - x') - (y - y')$ jest równa $y' - y$. Jest ona podzielną przez m i ma moduł mniejszy od m , więc $y' - y = 0$. Otrzymaliśmy zatem $x = x'$ i $y = y'$.

5. Rozstrzygnąć, czy istnieje nieskończenie wiele dodatnich liczb całkowitych, których nie można przedstawić w postaci $n^2 + p$, gdzie n jest liczbą całkowitą, a p liczbą pierwszą.

Autor zadania: Paweł Gadziński

Rozwiązanie:

Udowodnimy, że dla dowolnej nieparzystej liczby $a \geq 3$ liczby $\left(\frac{3a+1}{2}\right)^2$ nie można przedstawić w żądanej postaci. To jest dodatnia liczba całkowita, bo licznik ułamka $\frac{3a+1}{2}$ jest parzysty i dodatni. Przypuśćmy nie wprost, że $\left(\frac{3a+1}{2}\right)^2 = n^2 + p$ dla pewnej liczby całkowitej n i pewnej liczby pierwszej p . Zamieniając w razie potrzeby n na $-n$, możemy założyć, że $n \geq 0$. Mamy

$$p = \left(\frac{3a+1}{2}\right)^2 - n^2 = \left(\frac{3a+1}{2} + n\right) \left(\frac{3a+1}{2} - n\right).$$

W powyższym iloczynie pierwszy czynnik jest dodatni, więc drugi też musi być dodatni. Liczba p jest pierwsza, więc powyższa równość może zajść jedynie wtedy, gdy czynniki są równe 1 i p . Ich suma z jednej strony jest równa $p + 1$, a z drugiej $\left(\frac{3a+1}{2} + n\right) + \left(\frac{3a+1}{2} - n\right) = 3a + 1$. W konsekwencji $3a = p$. Otrzymaliśmy sprzeczność, gdyż liczba $3a$ jest złożona, a liczba p — pierwsza.

6. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$ wpisany w okrąg. Przekątne AC i BD przecinają się w punkcie P , przy czym $BP = AD + DC$. Punkt X leży na boku BC , przy czym $BX = AC$. Dowieść, że $2\angle BPX = \angle ADC$.

Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie:

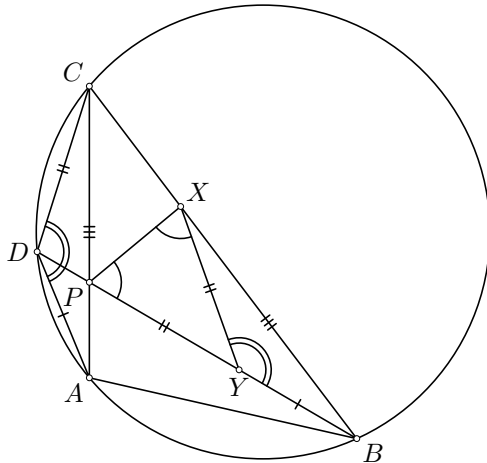
Obierzmy na odcinku BP taki punkt Y , że $BY = AD$. Kąty CAD i XYB są równe, bo są to kąty wpisane oparte na tym samym łuku okręgu opisanego na czworokącie $ABCD$. Ponadto $AC = BX$ oraz $AD = BY$. Z cechy przystawiania bok-kąt-bok wynika, że trójkąty ACD i BXY są przystające. W szczególności $CD = XY$. Zauważmy, że

$$PY = BP - BY = AD + DC - AD = CD = XY.$$

W konsekwencji trójkąt PXY jest równoramienny i $\angle YPX = \angle PXY$. Stąd

$$\angle ADC = \angle BYX = \angle YPX + \angle PXY = 2\angle BPX,$$

co było do udowodnienia.



7. Udowodnić, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych zachodzi nierówność

$$\sqrt{ab^2(b+c)} + \sqrt{bc^2(c+a)} + \sqrt{ca^2(a+b)} \leq \frac{1}{2} \sqrt{(a+b+c)^4 - (a^2+b^2+c^2)^2}.$$

Autor zadania: Piotr Nayar

Rozwiązanie:

Sposób 1. Oznaczmy lewą stronę i prawą stronę dowodzonej nierówności odpowiednio przez L i P . Korzystając ze wzoru

$$(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)$$

otrzymujemy $L^2 = A + 2B$, gdzie

$$A = ab^2(b+c) + bc^2(c+a) + ca^2(a+b)$$

oraz

$$B = \sqrt{ab^3c^2(b+c)(c+a)} + \sqrt{bc^3a^2(c+a)(a+b)} + \sqrt{ca^3b^2(a+b)(b+c)}.$$

Mamy też

$$\begin{aligned} P^2 &= \frac{1}{4} \left(((a+b+c)^2)^2 - (a^2+b^2+c^2)^2 \right) \\ &= \frac{1}{4} \left((a+b+c)^2 + (a^2+b^2+c^2) \right) \left((a+b+c)^2 - (a^2+b^2+c^2) \right) \\ &= (a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)(ab+bc+ca) \\ &= A + C + D, \end{aligned}$$

gdzie

$$C = a^2b(a+b) + b^2c(b+c) + c^2a(c+a)$$

oraz

$$D = abc(b+c) + abc(c+a) + abc(a+b).$$

Wystarczy więc udowodnić, że $2B \leq C + D$. Z nierówności między średnimi geometryczną i arytmetyczną wynika, że

$$\begin{aligned} 2\sqrt{ab^3c^2(b+c)(c+a)} &= 2\sqrt{b^2c(b+c) \cdot abc(c+a)} \leq b^2c(b+c) + abc(c+a), \\ 2\sqrt{bc^3a^2(c+a)(a+b)} &= 2\sqrt{c^2a(c+a) \cdot abc(a+b)} \leq c^2a(c+a) + abc(a+b), \\ 2\sqrt{ca^3b^2(a+b)(b+c)} &= 2\sqrt{a^2b(a+b) \cdot abc(b+c)} \leq a^2b(a+b) + abc(b+c). \end{aligned}$$

Po dodaniu stronami powyższych nierówności otrzymujemy $2B \leq C+D$, co kończy dowód.

Sposób 2. Posłużymy się nierównością Cauchy’ego-Schwarza. Mówi ona, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ zachodzi nierówność

$$\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2} \geq a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n.$$

Przyjmijmy $n = 3$ i połóżmy

$$a_1 = \sqrt{ab}, \quad a_2 = \sqrt{bc}, \quad a_3 = \sqrt{ca},$$

$$b_1 = \sqrt{b(b+c)}, \quad b_2 = \sqrt{c(c+a)}, \quad b_3 = \sqrt{a(a+b)}.$$

Wówczas

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = ab + bc + ca,$$

$$b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca,$$

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = \sqrt{ab^2(b+c)} + \sqrt{bc^2(c+a)} + \sqrt{ca^2(a+b)}.$$

Nierówność Cauchy’ego-Schwarza dla powyższego doboru liczb $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ wraz z przekształceniem prawej strony dowodzonej nierówności przedstawionym w sposobie pierwszym dowodzi więc tezy zadania.

8. Dany jest okrąg, w którym zaznaczono pewną skończoną liczbę cięciw. Łamaną zamkniętą złożoną z co najmniej trzech parami różnych zaznaczonych cięciw nazwiemy *cyklem*. Łamane uznajemy za takie same wtedy i tylko wtedy, gdy składają się z tego samego zbioru cięciw. Okazało się, że istnieje cykl $\mathcal{C}$ złożony z 2022 cięciw o następującej własności: każdy cykl ma co najmniej jedną wspólną cięciwę z cyklem $\mathcal{C}$. Wyznaczyć największą możliwą liczbę cykli.

Autor zadania: Daniel Goc

Rozwiązanie:

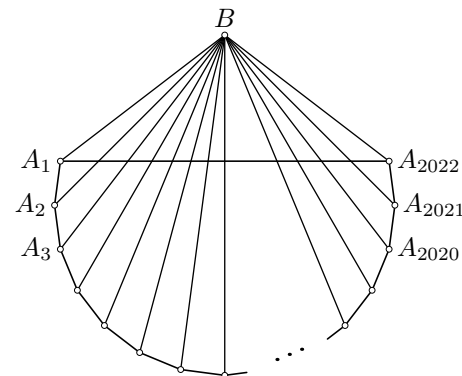
Dla każdego cyklu $\mathcal{A}$ będziemy oznaczać przez $f(\mathcal{A})$ zbiór wspólnych cięciw cykli $\mathcal{A}$ i $\mathcal{C}$. Z warunków zadania wynika, że dla dowolnego cyklu $\mathcal{A}$ zbiór $f(\mathcal{A})$ jest niepusty. Udowodnimy, że jeśli $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ są różnymi cyklami, to $f(\mathcal{A}) \neq f(\mathcal{B})$.

Założmy, że $f(\mathcal{A}) = f(\mathcal{B})$ dla pewnych dwóch różnych cykli $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$. Udowodnimy, że istnieje cykl, który nie ma żadnej wspólnej cięciwy z cyklem $\mathcal{C}$, co da sprzeczność z warunkami zadania. Niech $\mathcal{D}$ będzie zbiorem tych cięciw, które występują w dokładnie jednym spośród cykli $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$. Zbiór $\mathcal{D}$ jest niepusty, bo cykle $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ są różne. Ponadto $\mathcal{D}$ nie zawiera żadnej cięciwy z cyklu $\mathcal{C}$, bo $f(\mathcal{A}) = f(\mathcal{B})$. Zauważmy, że koniec dowolnego odcinka z dowolnego cyklu jest końcem parzyście wielu odcinków z tego cyklu. Wynika stąd, że koniec dowolnej cięciwy jest końcem parzyście wielu odcinków z $\mathcal{D}$ — w szczególności dowolny koniec odcinka z $\mathcal{D}$ jest końcem co najmniej dwóch odcinków z $\mathcal{D}$. Wybierzmy dowolny odcinek ze zbioru $\mathcal{D}$ i oznaczmy jego końce przez A_0 i A_1 . W zbiorze $\mathcal{D}$ istnieje jakiś odcinek o końcu A_1 różny od A_0A_1 . Wybierzmy jeden z takich odcinków i oznaczmy jego drugi koniec przez A_2 . Podobnie rozumując, w $\mathcal{D}$ istnieje odcinek o końcu A_2 różny od A_1A_2 . Wybierzmy dowolny z takich odcinków i oznaczmy jego drugi koniec przez A_3 . Kontynuujemy to rozumowanie do momentu, w którym wybierzemy taki odcinek $A_{i-1}A_i$, że $A_i = A_j$ dla pewnego $j < i$. Wtedy łamana zamknięta $A_jA_{j+1} \dots A_i$ jest cyklem niemającym żadnej wspólnej cięciwy z cyklem $\mathcal{C}$.

Udowodniliśmy więc, że różnym cyklom odpowiadają różne niepuste podzbiory zbioru cięciw tworzących cykl $\mathcal{C}$. Takich podzbiorów jest $2^{2022} - 1$. W takim razie liczba cykli to co najwyżej $2^{2022} - 1$. Pokażemy teraz, że to ograniczenie górne może być osiągnięte.

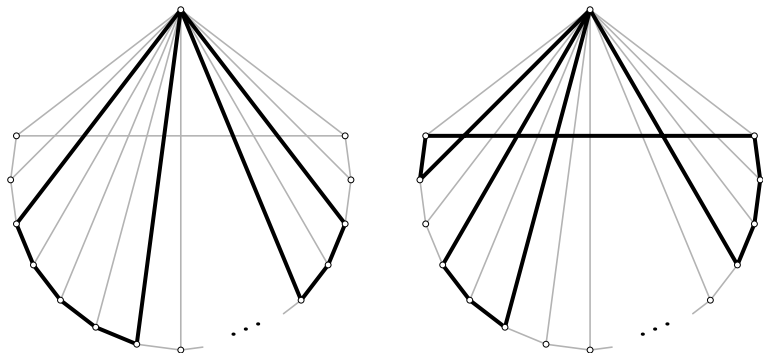
Rozważmy dowolne 2023 punkty $A_1, A_2, \dots, A_{2022}, B$ na okręgu. Narysujmy cięciwy

$$A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{2021}A_{2022}, A_{2022}A_1, BA_1, BA_2, \dots, BA_{2022}.$$



Wówczas cykl $\mathcal{C} = A_1A_2 \dots A_{2022}A_1$ ma własność opisaną w treści zadania.

nia. Pozostaje uzasadnić, że dla każdego niepustego podzbioru $\mathcal{X}$ zbioru cięciw tworzących cykl $\mathcal{C}$ istnieje cykl $\mathcal{A}$ taki, że $f(\mathcal{A}) = \mathcal{X}$.



Jeśli $\mathcal{X}$ składa się ze wszystkich cięciw cyklu $\mathcal{C}$, to $f(\mathcal{C}) = \mathcal{X}$. W przeciwnym razie cięciwy w zbiorze $\mathcal{X}$ tworzą łamane otwarte $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \dots, \mathcal{L}_k$, przy czym końce wszystkich tych łamanych są różne, każda jest postaci $A_i A_{i+1} \dots A_j$ dla pewnych $i < j$, być może poza jedną łamaną, która może być postaci $A_i A_{i+1} \dots A_{2022} A_1 \dots A_j$ dla pewnych $i > j$. Wtedy cykl $\mathcal{A} = B\mathcal{L}_1 B\mathcal{L}_2 B \dots B\mathcal{L}_k B$ spełnia $f(\mathcal{A}) = \mathcal{X}$.

9. Załóżmy, że $2(a^2 + b^2 + c^2) = 5(ab + bc + ca) = d$ dla pewnych liczb całkowitych a, b, c, d . Udowodnić, że $10d$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Autor zadania: Emil Łasocha

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = \frac{1}{2}d + \frac{2}{5}d = \frac{9}{10}d.$$

Z tej równości wynika w szczególności, że $a + b + c$ dzieli się przez 3. W takim razie

$$10d = \frac{100}{9}(a + b + c)^2 = \left(\frac{10(a + b + c)}{3} \right)^2,$$

co dowodzi tezy.

10. Dany jest różnoboczny trójkąt ostrokątny ABC wpisany w okrąg Ω . Punkt M jest środkiem dłuższego łuku BC okręgu Ω , a punkt

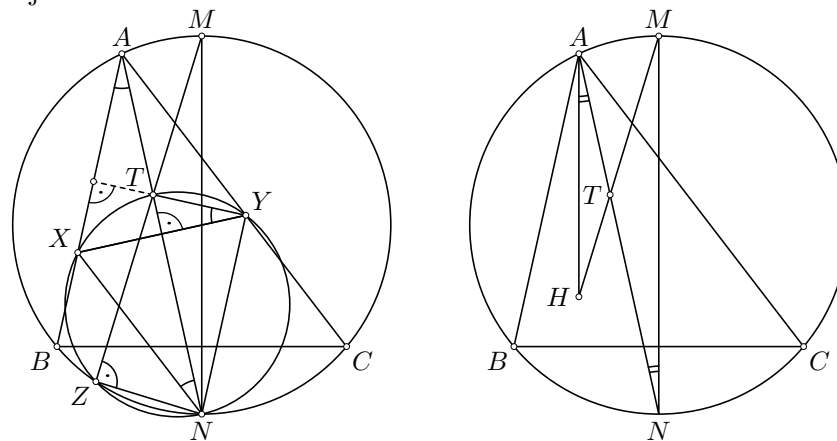
N — środkiem krótszego łuku BC okręgu Ω . Symetralna odcinka AN przecina odcinki AB i AC odpowiednio w punktach X i Y . Oznaczmy przez Z różny od N punkt przecięcia okręgu Ω i okręgu opisanego na trójkącie NXY . Dowieść, że prosta MZ przechodzi przez ortocentrum trójkąta ABC .

Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie:

Zauważmy, że AN jest dwusieczną kąta XAY . Trójkąt XAY jest więc równoramienny. Poza tym prosta XY jest symetralną AN , więc A i N są symetryczne względem XY . Czworokąt $AXNY$ jest więc rombem.

Punkty M i N są środkami dłuższego łuku BC i krótszego łuku BC okręgu Ω , więc MN jest średnicą Ω . Oznaczmy przez T różny od Z punkt przecięcia prostej MZ z okręgiem opisanym na trójkącie NXY . Ponieważ $\sphericalangle NZT = \sphericalangle NZM = 90^\circ$, więc NT jest średnicą tego okręgu. Ze względu na równoramiennność trójkąta NXY punkt T leży na prostej AN .



Oznaczmy ortocentrum trójkąta ABC przez H . Aby udowodnić, że H leży na prostej MZ wystarczy udowodnić, że $\sphericalangle ATH = \sphericalangle NTM$, do czego z kolei wystarczy wykazać, że trójkąty AHT i NMT są podobne. Proste AH i MN są prostopadłe do BC , więc $AH \parallel MN$. Zatem $\sphericalangle HAT = \sphericalangle MNT$ i do zakończenia rozwiązania wystarczy udowodnić, że

$$\frac{AH}{AT} = \frac{MN}{NT} \quad (*)$$

— żądane podobieństwo wyniknie wtedy z cechy bok-kąt-bok.

Zauważmy, że $\sphericalangle TYX = \sphericalangle TNX = \sphericalangle XAT = 90^\circ - \sphericalangle YXA$. Wynika stąd, że $YT \perp AX$. Wraz z $AN \perp XY$ oznacza to, że T jest ortocentrum trójkąta AXY .

Lemat. Jeśli H jest ortocentrum trójkąta ostrokątnego ABC wpisanego w okrąg o średnicy d , to $AH = d \cos(\sphericalangle BAC)$.

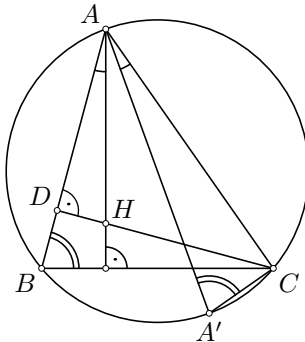
Dowód. Niech A' będzie takim punktem, że AA' jest średnicą okręgu opisanego na trójkącie ABC . Niech D będzie spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka C . Mamy

$$\sphericalangle DAH = 90^\circ - \sphericalangle CBA = 90^\circ - \sphericalangle CA'A = \sphericalangle A'AC.$$

Trójkąty prostokątne ADH i ACA' są zatem podobne. Stąd

$$\frac{AH}{AA'} = \frac{AD}{AC} = \cos(\sphericalangle BAC),$$

co kończy dowód lematu.



Wróćmy do rozwiązania zadania. Średnica okręgu opisanego na trójkącie AXY jest równa średnicy okręgu opisanego na trójkącie NXY , bo trójkąty te są przystające. Jest ona zatem równa NT . Z lematu zastosowanego do trójkąta AXY mamy $AT = NT \cos(\sphericalangle XAY)$. Z drugiej strony, lemat zastosowany do trójkąta ABC daje $AH = MN \cos(\sphericalangle BAC)$. W takim razie

$$\frac{AH}{AT} = \frac{MN \cos(\sphericalangle BAC)}{NT \cos(\sphericalangle XAY)} = \frac{MN}{NT},$$

co dowodzi równości (*), do której sprowadziliśmy tezę zadania.

11. Dana jest liczba całkowita $n \geq 2$. Dodatnie liczby rzeczywiste $a_1, \dots, a_n$ spełniają równość $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = n$. Oznaczmy przez A zbiór tych indeksów $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, dla których $a_i \geq 2$. Udowodnić, że

$$n \cdot \sum_{i \in A} a_i^2 + 4 \cdot \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2 \leq 4n^2.$$

Autorzy zadania: Marta i Michał Strzeleccy

Rozwiązanie:

W rozwiązaniu skorzystamy z nierówności między średnią kwadratową i średnią arytmetyczną: dla dowolnych liczb rzeczywistych $x_1, \dots, x_n$ zachodzi nierówność

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}} \geq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

Sposób 1. Na początek zauważmy, że gdy zbiór A jest pusty, to nierówność przyjmuje postać

$$4 \cdot \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2 \leq 4n^2 = 4n \sum_{i=1}^n a_i^2.$$

Po podzieleniu tej nierówności przez $4n^2$ i wzięciu pierwiastka otrzymujemy nierówność między średnią kwadratową i średnią arytmetyczną.

Będziemy od teraz zakładać, że zbiór A nie jest pusty. Oznaczmy przez B zbiór tych indeksów i , że $a_i < 2$. Zbiór B jest niepusty, bo w przeciwnym razie mielibyśmy $a_i \geq 2$ dla wszystkich $i = 1, 2, \dots, n$, skąd $n = \sum_{i=1}^n a_i^2 \geq 4n$ — sprzeczność. Oznaczmy $k = |A|$, $\ell = |B|$, oraz

$$x = \sqrt{\frac{\sum_{i \in A} a_i^2}{k}}, \quad y = \sqrt{\frac{\sum_{i \in B} a_i^2}{\ell}}.$$

Wtedy $x \geq 2 > y > 0$, skąd w szczególności $x^2 - y^2 > 0$. Ponieważ $A \cup B = \{1, 2, \dots, n\}$, więc $k + \ell = n$ oraz

$$n = \sum_{i=1}^n a_i^2 = \sum_{i \in A} a_i^2 + \sum_{i \in B} a_i^2 = kx^2 + \ell y^2.$$

Traktując powyższe dwa związki jako równania liniowe zmiennych k, ℓ , wyznaczamy k i ℓ w zależności od n, x i y :

$$k = n \cdot \frac{1 - y^2}{x^2 - y^2}, \quad \ell = n \cdot \frac{x^2 - 1}{x^2 - y^2}.$$

Ze wzoru na k wynika w szczególności, że $y < 1$. Z nierówności między średnią kwadratową i średnią arytmetyczną wynika, że

$$\sum_{i \in A} a_i \leq kx, \quad \sum_{i \in B} a_i \leq \ell y.$$

W takim razie

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i \in A} a_i + \sum_{i \in B} a_i \leq kx + \ell y,$$

więc

$$n \cdot \sum_{i \in A} a_i^2 + 4 \cdot \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2 \leq nkx^2 + 4(kx + \ell y)^2$$

i do dokończenia rozwiązania wystarczy dowieść, że

$$nkx^2 + 4(kx + \ell y)^2 \leq 4n^2 = 4n(kx^2 + \ell y^2).$$

Mamy

$$\begin{aligned} n(kx^2 + \ell y^2) - (kx + \ell y)^2 &= nkx^2 + n\ell y^2 - k^2x^2 - 2k\ell xy - \ell^2y^2 \\ &= k(n - k)x^2 + \ell(n - \ell)y^2 - 2k\ell xy \\ &= k\ell(x^2 + y^2 - 2xy) = k\ell(x - y)^2. \end{aligned}$$

Wystarczy więc dowieść, że

$$nkx^2 \leq 4k\ell(x - y)^2.$$

Podstawiając za ℓ obliczoną wcześniej wartość i mnożąc obie strony nierówności przez $\frac{x + y}{nk}$, otrzymujemy równoważnie

$$x^2(x + y) \leq 4(x^2 - 1)(x - y).$$

Ponieważ $y < 1$ i $x \geq 2$, więc

$$\begin{aligned} 4(x^2 - 1)(x - y) - x^2(x + y) &= 3x^3 - 4x - y(5x^2 - 4) \\ &> 3x^3 - 4x - (5x^2 - 4) \\ &= (x - 2)(3x^2 + x - 2) \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

co kończy dowód.

Sposób 2. Niech s będzie średnią arytmetyczną liczb $a_1, \dots, a_n$. Z nierówności między średnią kwadratową i średnią arytmetyczną wynika, że

$$1 = \sqrt{\frac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{n}} \geq s.$$

Wobec tego dla dowolnego $i \in A$ mamy

$$\frac{a_i}{2} = a_i - \frac{a_i}{2} \leq a_i - s.$$

Dla $i = 1, 2, \dots, n$ oznaczmy

$$b_i = \begin{cases} \frac{a_i}{2} & \text{dla } i \in A \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Wówczas dla dowolnego $i = 1, 2, \dots, n$ mamy

$$b_i^2 \leq (a_i - s)^2.$$

Rzeczywiście, jeśli $i \in A$, to wynika to bezpośrednio z poprzedniej nierówności i założenia o dodatniości a_i . Jeśli zaś $i \notin A$, to nierówność zachodzi, bo kwadrat dowolnej liczby rzeczywistej jest liczbą nieujemną.

Sumując powyższe nierówności dla $i = 1, 2, \dots, n$ dostajemy

$$\sum_{i=1}^n b_i^2 \leq \sum_{i=1}^n (a_i - s)^2.$$

Prawa strona powyższej nierówności jest równa

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (a_i - s)^2 &= \sum_{i=1}^n (a_i^2 - 2a_i s + s^2) = \sum_{i=1}^n a_i^2 - 2 \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) s + ns^2 \\ &= n - 2ns^2 + ns^2 = n - ns^2. \end{aligned}$$

W takim razie

$$n \cdot \sum_{i \in A} a_i^2 = 4n \cdot \sum_{i=1}^n b_i^2 \leq 4n^2 - 4n^2 s^2 = 4n^2 - 4 \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2,$$

co jest równoważne tezie zadania.

12. Gra w (n, k) -kamienie rozgrywana jest na prostokątnej planszy składającej się z n pól ustawionych w rzędzie. Na początku gry na k -tym polu od lewej znajduje się kamień, a pozostałe pola są puste. Pojedyncza tura przebiega następująco. Na każdym kamieniu na planszy stawiamy kropkę. Następnie kładziemy kamień (bez kropki) na każdym polu sąsiadującym z dokładnie jednym polem, na którym znajduje się kamień z kropką. Na koniec tury zdejmujemy z planszy wszystkie kamienie z kropką. Gra kończy się porażką, jeżeli na planszy nie pozostały żadne kamienie. Znaleźć wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych (n, k) , dla których gra w (n, k) -kamienie nigdy nie zakończy się porażką, niezależnie od tego ile tur rozegramy.

Autor zadania: Jakub Onufry Wojtaszczyk

Rozwiązanie:

Odpowiedź: Takie pary (n, k) , że $n + 1$ nie jest potęgą dwójki o wykładniku całkowitym dodatnim oraz k jest dowolną liczbą ze zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$.

Zauważmy, że po każdej turze wszystkie kamienie znajdują się na polach tej samej parzystości i parzystość ta zmienia się po każdej turze. Rzeczywiście, na początku gry ta własność zachodzi, bo jest tylko jeden kamień, a w każdej turze kamienie są dostawiane wyłącznie na pola sąsiadujące z tymi, na których stały kamienie przed wykonaniem tury.

Grę w $(1, 1)$ -kamienie przegrywamy po wykonaniu pierwszej tury. Jeżeli $2 \mid n$, to gry w (n, k) -kamienie nigdy nie przegramy. Rzeczywiście, skoro pierwsze i ostatnie pole są różnej parzystości, to na początku tury zawsze co najmniej jedno ze skrajnych pól planszy musi być puste. Dzięki temu w każdej turze zawsze możemy dostawić co najmniej jeden kamień bez kropki, gdyż jeśli np. ostatnie pole jest puste, to możemy dostawić kamień po prawej stronie kamienia z kropką znajdującego się najbardziej na prawo. Podobnie, jeśli pierwsze pole jest puste, to zawsze możemy dostawić kamień bez kropki po lewej stronie kamienia z kropką znajdującego się najbardziej na lewo.

Grę w (n, k) -kamienie możemy przeformułować w następujący sposób. Każdy możliwy stan gry na początku tury reprezentujemy przez n -elementowy ciąg zero-jedynkowy $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, przy czym dla dowolnego $i = 1, 2, \dots, n$ równość $x_i = 0$ oznacza, że i -te pole jest puste, a równość $x_i = 1$ oznacza, że na i -tym polu stoi kamień. Wykonanie tury polega na przejściu ze stanu $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ do stanu

$(x_2, x_1 + x_3, x_2 + x_4, \dots, x_{n-2} + x_n, x_{n-1})$, gdzie dodawanie wykonujemy modulo 2 (czyli umawiamy się, że $1 + 1 = 0$). Stanem początkowym gry jest ciąg zero-jedynkowy, który na k -tej pozycji ma jedynkę, a na pozostałych pozycjach — zera. Grę przegrywamy wtedy i tylko wtedy, gdy po pewnej skończonej liczbie tur otrzymamy ciąg złożony z samych zer.

Zauważmy, że po wykonaniu dwóch tur w (n, k) -kamienie przechodzimy ze stanu $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ do stanu

$$(x_1 + x_3, x_4, x_1 + x_5, x_2 + x_6, \dots, x_{n-5} + x_{n-1}, x_{n-4} + x_n, x_{n-3}, x_{n-2} + x_n).$$

Stąd jeśli $n \geq 3$ i $2 \nmid n$, to wykonanie dwóch tur w grze w (n, k) -kamienie zmienia liczby $x_2, x_4, \dots, x_{n-1}$ w taki sam sposób jak wykonanie pojedynczej tury dla stanu $(x_2, x_4, \dots, x_{n-1})$.

Dla dowolnego n -elementowego ciągu $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ symbolem $\bar{\mathbf{x}}$ będziemy oznaczać $(2n + 1)$ -elementowy ciąg $(0, x_1, 0, x_2, 0, \dots, 0, x_n, 0)$.

Oznaczmy przez $\mathbf{x}^{n,k,m} = (x_1^{n,k,m}, x_2^{n,k,m}, \dots, x_n^{n,k,m})$ stan w grze w (n, k) -kamienie po wykonaniu m tur.

Rozważmy grę w $(2n + 1, 2k)$ -kamienie. Mamy $\mathbf{x}^{2n+1,2k,0} = \bar{\mathbf{x}}^{n,k,0}$. Z poprzedniego spostrzeżenia wynika, że dla dowolnego $m \geq 0$

$$\mathbf{x}^{2n+1,2k,2m} = \bar{\mathbf{x}}^{n,k,m}.$$

Oznacza to, że gra w $(2n + 1, 2k)$ -kamienie kończy się porażką wtedy i tylko wtedy, gdy gra w (n, k) -kamienie kończy się porażką.

Teraz rozważmy grę w $(2n + 1, 2k + 1)$ -kamienie, gdzie $1 \leq k \leq n - 1$. Zauważmy, że

$$\mathbf{x}^{2n+1,2k+1,1} = \mathbf{x}^{2n+1,2k,0} + \mathbf{x}^{2n+1,2k+2,0} = \bar{\mathbf{x}}^{n,k,0} + \bar{\mathbf{x}}^{n,k+1,0}.$$

Stąd i z wcześniejszego spostrzeżenia wynika, że dla dowolnego m mamy

$$\mathbf{x}^{2n+1,2k+1,2m+1} = \bar{\mathbf{x}}^{n,k,m} + \bar{\mathbf{x}}^{n,k+1,m}.$$

Zauważmy, że wszystkie jedynki w ciągu $\mathbf{x}^{n,k,m}$ stoją na pozycjach różnej parzystości od pozycji wszystkich jedynek w ciągu $\mathbf{x}^{n,k+1,m}$. Wynika to stąd, że tak jest dla $m = 0$ oraz parzystość pozycji jedynek w obu ciągach zmienia się na przeciwną gdy zwiększamy m o jeden. W szczególności nie może się zdarzyć, że dla jakichś m i i mamy $x_i^{n,k,m} = 1 = x_i^{n,k+1,m}$. Wobec

tego ciąg $\mathbf{x}^{2n+1, 2k+1, 2m+1}$ jest zerowy wtedy i tylko wtedy gdy oba ciągi $\mathbf{x}^{n, k, m}$, $\mathbf{x}^{n, k+1, m}$ są zerowe. Innymi słowy, gra w $(2n+1, 2k+1)$ -kamienie kończy się porażką wtedy i tylko wtedy gdy gra w (n, k) -kamienie i gra w $(n, k+1)$ -kamienie kończą się porażką.

Zauważmy wreszcie, że po pierwszej turze w $(2n+1, 1)$ -kamienie otrzymujemy pozycję startową gry w $(2n+1, 2)$ -kamienie, a po pierwszej turze w $(2n+1, 2n+1)$ -kamienie otrzymujemy pozycję startową gry w $(2n+1, 2n)$ -kamienie.

Z powyższej dyskusji wynika następujące stwierdzenie:

Stwierdzenie. Niech n będzie liczbą naturalną. Jeżeli dla dowolnego $k = 1, 2, \dots, n$ gra w (n, k) -kamienie kończy się porażką, to dla dowolnego $k = 1, 2, \dots, 2n+1$ gra w $(2n+1, k)$ -kamienie kończy się porażką. Jeśli natomiast dla dowolnego $k = 1, 2, \dots, n$ gra w (n, k) -kamienie nigdy nie kończy się porażką, to dla dowolnego $k = 1, 2, \dots, 2n+1$ gra w $(2n+1, k)$ -kamienie też nigdy nie kończy się porażką.

Rozważmy dowolną liczbę całkowitą $n \geq 1$. Liczbę $n+1$ można jednoznacznie zapisać w postaci $2^s \cdot t$, gdzie $s \geq 0$ jest liczbą całkowitą, a t jest liczbą nieparzystą. Indukcja względem s dowodzi, że gra w (n, k) -kamienie kończy się porażką wtedy i tylko wtedy, gdy $t = 1$. Rzeczywiście, baza indukcji (czyli przypadek $s = 1$ dla $t = 1$ oraz przypadek $s = 0$ dla $t \geq 3$) została udowodniona w drugim akapicie rozwiązania. Krok indukcyjny wynika ze stwierdzenia oraz z tożsamości $2^{s+1} \cdot t - 1 = 2 \cdot (2^s \cdot t - 1) + 1$. To prowadzi do odpowiedzi podanej na początku rozwiązania.



LXXIV Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia drugiego

10 lutego 2023 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Wyznaczyć wszystkie dodatnie liczby całkowite b o następującej własności: istnieją takie dodatnie liczby całkowite a, k, ℓ , że liczby $a^k + b^\ell$ i $a^\ell + b^k$ są podzielne przez $b^{k+\ell}$, a przy tym $k \neq \ell$.

2. Dana jest liczba całkowita $n \geq 2$. Po polach planszy $n \times n$ porusza się ołowiany żołnierz, rozpoczynając swój spacer od narożnego pola. Przed wykonaniem kroku na kolejne (sąsiednie) pole, ołowiany żołnierz może (ale nie musi) wykonać zwrot w prawo lub w lewo. Wyznaczyć najmniejszą liczbę zwrotów, jakie żołnierz musi wykonać, aby odwiedzić każde pole szachownicy co najmniej raz.

Uwaga. Przed rozpoczęciem spaceru plecy żołnierzyka są skierowane w stronę krawędzi planszy.

3. Dane są liczby całkowite k, n oraz liczba rzeczywista ℓ , przy czym $k \geq 1$ i $n \geq 1$. Dane są też parami różne dodatnie liczby rzeczywiste $a_1, a_2, \dots, a_k$. Oznaczmy

$$S = \{a_1, a_2, \dots, a_k, -a_1, -a_2, \dots, -a_k\}.$$

Niech A będzie liczbą rozwiązań równania

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{2n} = 0,$$

gdzie $x_1, x_2, \dots, x_{2n} \in S$. Niech B będzie liczbą rozwiązań równania

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{2n} = \ell,$$

gdzie $x_1, x_2, \dots, x_{2n} \in S$. Dowieść, że $A \geq B$.

Uwaga. Rozwiązania równania różniące się wyłącznie kolejnością składników uznajemy za różne.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podjęcie dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.



LXXIV Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia drugiego

11 lutego 2023 r. (drugi dzień zawodów)

4. Dane są takie parami różne liczby rzeczywiste a, b, c, d, e , że

$$\begin{cases} ab + b = ac + a, \\ bc + c = bd + b, \\ cd + d = ce + c, \\ de + e = da + d. \end{cases}$$

Udowodnić, że $abcde = 1$.

5. Dany jest trójkąt ABC , przy czym $AC < BC$. Okrąg ω wpisany w ten trójkąt jest styczny do boków AB i AC odpowiednio w punktach D i E . Odcinek CD przecina ω w punkcie $K \neq D$. Punkt L jest rzutem prostokątnym punktu A na prostą CD . Punkt M jest środkiem odcinka DE . Punkt H jest ortocentrum trójkąta KLM . Wykazać, że kąt AHK jest prosty.

6. Rozważmy szachownicę $n \times n$, przy czym $n \geq 4$ i $p = n + 1$ jest liczbą pierwszą. Zbiór n pól nazwiemy *taktycznym*, jeśli po ustawieniu hetmana na każdym polu z tego zbioru żadne dwa z tych hetmanów nie będą się atakować. Dowieść, że istnieje $n - 2$ taktycznych zbiorów, których suma zawiera wszystkie pola szachownicy leżące poza jej przekątnymi.

Uwaga. Hetman może poruszać się o dowolną liczbę pól poziomo, pionowo i równoległe do przekątnych szachownicy.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podjęcie dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.



LXXIV Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia drugiego

10 lutego 2023 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Wyznaczyć wszystkie dodatnie liczby całkowite b o następującej własności: istnieją takie dodatnie liczby całkowite a, k, ℓ , że liczby $a^k + b^\ell$ i $a^\ell + b^k$ są podzielne przez $b^{k+\ell}$, a przy tym $k \neq \ell$.

Autor zadania: Emil Łasocha

Rozwiązanie:

Odpowiedź: Jedyną możliwą wartością b jest 1.

Liczba $b = 1$ spełnia warunki zadania dla dowolnego doboru a, k, ℓ . Udowodnimy, że to jedyna możliwa wartość b .

Sposób 1. Bez straty ogólności przyjmijmy, że $k > \ell$. Z założeń wynika, że liczba

$$a^k + b^\ell - a^{k-\ell}(a^\ell + b^k) = b^\ell - a^{k-\ell}b^k$$

dzieli się przez $b^{k+\ell}$. Zatem liczba $1 - a^{k-\ell}b^{k-\ell}$ dzieli się przez b^k . W szczególności dzieli się przez b . W takim razie liczba

$$1 - a^{k-\ell}b^{k-\ell} + b \cdot a^{k-\ell}b^{k-\ell-1} = 1$$

dzieli się przez b . Stąd $b = 1$.

Sposób 2. Bez straty ogólności założmy, że $k > \ell$. Z założeń wynika w szczególności, że $a^\ell + b^k$ dzieli się przez b^k , więc przez b^k dzieli się też a^ℓ . Ponieważ $k > \ell$, więc a^ℓ dzieli się przez b^ℓ . Stąd a dzieli się przez b . Wobec tego a^k dzieli się przez b^k , ale z założeń zadania wynika też, że $a^k + b^\ell$ dzieli się przez b^k . W takim razie b^k dzieli b^ℓ . Jest to możliwe tylko gdy $b = 1$, bo w przeciwnym razie $b^k > b^\ell$, a dzielnik danej liczby nie może być od niej większy.

Sposób 3. Rozważmy dowolną liczbę pierwszą p . Załóżmy, że p wchodzi do rozkładu na liczby pierwsze liczb a i b odpowiednio z wykładnikami x i y . Udowodnimy, że $y = 0$. Załóżmy nie wprost, że $y \geq 1$. Z podzielności liczby $a^k + b^\ell$ przez $b^{k+\ell}$ wynika w szczególności, że dzieli się ona przez $p^{y\ell}$. Liczba b^ℓ też się przez nią dzieli, więc $a^k = (a^k + b^\ell) - b^\ell$ również.

Z drugiej strony, $a^k + b^\ell$ dzieli się przez $p^{y\ell+1}$, a b^ℓ nie. W takim razie liczba $a^k = (a^k + b^\ell) - b^\ell$ nie dzieli się przez $p^{y\ell+1}$. Wnioskujemy, że p wchodzi do rozkładu na czynniki pierwsze liczby a^k z wykładnikiem $y\ell$. Stąd $xk = y\ell$. Prowadząc analogiczne rozumowanie dla liczby $a^\ell + b^k$ dowodzimy, że $x\ell = yk$. Z otrzymanych równości wynika, że $k = \ell$ wbrew założeniom zadania. Założenie, że $y \geq 1$ doprowadziło do sprzeczności. W takim razie $y = 0$ i liczba b nie dzieli się przez p . Wobec dowolności wyboru p oznacza to, że b nie ma dzielników pierwszych. Stąd $b = 1$.

2. Dana jest liczba całkowita $n \geq 2$. Po polach planszy $n \times n$ porusza się ołowiany żołnierz, rozpoczynając swój spacer od narożnego pola. Przed wykonaniem kroku na kolejne (sąsiednie) pole, ołowiany żołnierz może (ale nie musi) wykonać zwrot w prawo lub w lewo. Wyznaczyć najmniejszą liczbę zwrotów, jakie żołnierz musi wykonać, aby odwiedzić każde pole szachownicy co najmniej raz.

Uwaga. Przed rozpoczęciem spaceru plecy żołnierzyka są skierowane w stronę krawędzi planszy.

Autorzy zadania: Marta i Michał Strzelecki

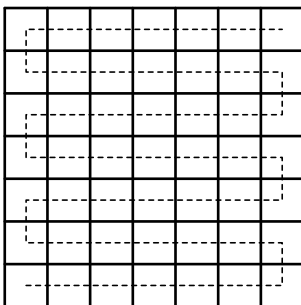
Rozwiązanie:

Odpowiedź: $2n - 2$.

Założmy, że żołnierz wykonał łącznie $k \leq 2n - 3$ zwrotów. Wykażemy, że nie odwiedził któregoś pola. Niech P_0 będzie polem początkowym żołnierzyka, P_{k+1} polem końcowym, a $P_1, P_2, \dots, P_k$ — kolejnymi polami, na których wykonywane były zwroty. Bez straty ogólności przyjmijmy, że pola P_0 i P_1 leżą w tym samym wierszu planszy. Każda para pól postaci P_{2i}, P_{2i+1} wyznacza pewien wiersz W_i , a każda para pól postaci P_{2i+1}, P_{2i+2} wyznacza pewną kolumnę K_i . Zauważmy, że każde pole odwiedzone przez żołnierzyka znajduje się w pewnym wierszu W_i bądź pewnej kolumnie K_i . Łącznie mamy co najwyżej $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1 \leq \lfloor \frac{2n-3}{2} \rfloor + 1 = n - 1$ wierszy W_i oraz co najwyżej $\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor + 1 \leq \lfloor \frac{2n-4}{2} \rfloor + 1 = n - 1$ kolumn K_i . Istnieje więc wiersz W różny od wszystkich wierszy $W_0, W_1, \dots$ oraz kolumna K różna od wszystkich kolumn $K_0, K_1, \dots$ — pole na przecięciu wiersza W i kolumny K nie zostało odwiedzone przez żołnierzyka.

Wskażemy teraz przykład spaceru, w którym żołnierz odwiedza każde pole planszy wykonując dokładnie $2n - 2$ zwroty. Dla ustalenia uwagi

przyjmijmy, że żołnierz zaczyna spacer od lewego dolnego rogu i stoi plecami do lewej krawędzi planszy. Żołnierz idzie do końca planszy, wykonuje zwrot w lewo, przechodzi na następne pole, ponownie skręca w lewo, idzie do końca planszy, wykonuje zwrot w prawo, przechodzi na następne pole, wykonuje zwrot w prawo, po czym powtarza wszystkie opisane wyżej czynności aż do momentu, gdy odwiedzi wszystkie pola. W ten sposób zwroty wykonywane są wyłącznie na polach przy lewej i prawej krawędzi planszy nie licząc pola startowego i końcowego — łącznie żołnierz wykona $2n - 2$ zwroty.



3. Dane są liczby całkowite k, n oraz liczba rzeczywista ℓ , przy czym $k \geq 1$ i $n \geq 1$. Dane są też parami różne dodatnie liczby rzeczywiste $a_1, a_2, \dots, a_k$. Oznaczmy

$$S = \{a_1, a_2, \dots, a_k, -a_1, -a_2, \dots, -a_k\}.$$

Niech A będzie liczbą rozwiązań równania

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{2n} = 0,$$

gdzie $x_1, x_2, \dots, x_{2n} \in S$. Niech B będzie liczbą rozwiązań równania

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{2n} = \ell,$$

gdzie $x_1, x_2, \dots, x_{2n} \in S$. Dowieść, że $A \geq B$.

Uwaga. Rozwiązania równania różniące się wyłącznie kolejnością składników uznajemy za różne.

Autor zadania: Piotr Nayar

Rozwiązanie:

Dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej m i dowolnej liczby rzeczywistej t niech $R(m, t)$ oznacza równanie zmiennych $x_1, x_2, \dots, x_m$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_m = t,$$

w którym jedynymi dopuszczalnymi wartościami zmiennych $x_1, x_2, \dots, x_m$ są liczby ze zbioru S . Należy udowodnić, że równanie $R(2n, 0)$ ma co najmniej tyle rozwiązań co równanie $R(2n, \ell)$.

Niech T będzie zbiorem wszystkich liczb postaci $x_1 + x_2 + \dots + x_n$, gdzie $x_1, x_2, \dots, x_n \in S$. Zauważmy, że dla dowolnego $t \in T$ liczba rozwiązań równania $R(n, t)$ jest taka sama jak liczba rozwiązań równania $R(n, -t)$. Rzeczywiście, $x_1 + x_2 + \dots + x_n = t$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(-x_1) + (-x_2) + \dots + (-x_n) = -t$. Dla dowolnego $t \in T$ oznaczmy liczbę rozwiązań równania $R(n, t)$ przez C_t .

Jeśli ciąg $(b_1, b_2, \dots, b_{2n})$ jest rozwiązaniem równania $R(2n, 0)$, to dla $t = b_1 + b_2 + \dots + b_n$ ciąg $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ jest rozwiązaniem równania $R(n, t)$, a ciąg $(b_{n+1}, b_{n+2}, \dots, b_{2n})$ jest rozwiązaniem równania $R(n, -t)$. Na odwrót — dla dowolnego $t \in T$, dowolnego rozwiązania $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ równania $R(n, t)$ i dowolnego rozwiązania $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ równania $R(n, -t)$ ciąg $(b_1, b_2, \dots, b_n, c_1, c_2, \dots, c_n)$ jest rozwiązaniem równania $R(2n, 0)$. Wynika stąd, że

$$A = \sum_{t \in T} C_t C_{-t} = \sum_{t \in T} C_t^2.$$

Niech T' będzie zbiorem złożonym z tych liczb $t \in T$, dla których liczba $\ell - t$ również należy do T . Zauważmy, że $t \in T'$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\ell - t \in T'$, gdyż $\ell - (\ell - t) = t$. Jeśli ciąg $(b_1, b_2, \dots, b_{2n})$ jest rozwiązaniem równania $R(2n, \ell)$, to dla $t = b_1 + b_2 + \dots + b_n$ ciąg $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ jest rozwiązaniem równania $R(n, t)$, a ciąg $(b_{n+1}, b_{n+2}, \dots, b_{2n})$ jest rozwiązaniem równania $R(n, \ell - t)$ — w szczególności $\ell - t \in T$ i $t \in T'$. Na odwrót, dla dowolnego $t \in T'$, dowolnego rozwiązania $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ równania $R(n, t)$ i dowolnego rozwiązania $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ równania $R(n, \ell - t)$ ciąg $(b_1, b_2, \dots, b_n, c_1, c_2, \dots, c_n)$ jest rozwiązaniem równania $R(2n, \ell)$. Wynika stąd, że

$$B = \sum_{t \in T'} C_t C_{\ell - t}.$$

Z nierówności $x^2 + y^2 \geq 2xy$ prawdziwej dla dowolnych liczb rzeczywistych otrzymujemy zatem

$$2A = 2 \sum_{t \in T} C_t^2 \geq 2 \sum_{t \in T'} C_t^2 = \sum_{t \in T'} (C_t^2 + C_{\ell - t}^2) \geq \sum_{t \in T'} 2C_t C_{\ell - t} = 2B,$$

co dowodzi tezy zadania.



LXXIV Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych
zawodów stopnia drugiego

11 lutego 2023 r. (drugi dzień zawodów)

4. Dane są takie parami różne liczby rzeczywiste a, b, c, d, e , że

$$\begin{cases} ab + b = ac + a, \\ bc + c = bd + b, \\ cd + d = ce + c, \\ de + e = da + d. \end{cases}$$

Udowodnić, że $abcde = 1$.

Autor zadania: Emil Łasocha

Rozwiązanie:

Jeśli $b = 0$, to z drugiego równania wynika, że $c = 0$ wbrew założeniu, że liczby b, c są różne. Zatem $b \neq 0$. Analogicznie dowodzimy, że c i d są niezerowe.

Jeśli $a = -1$, to z pierwszego równania wynika, że $c = -1$, co przeczy założeniu, że $a \neq c$. Zatem $a \neq -1$. Analogicznie dowodzimy, że $c \neq -1$ i $d \neq -1$.

Wyrażenia występujące w zadanych równościach można rozłożyć w następujący sposób:

$$\begin{cases} b(a+1) = a(c+1), \\ c(b+1) = b(d+1), \\ d(c+1) = c(e+1), \\ e(d+1) = d(a+1). \end{cases}$$

Mnożąc stronami zadane równości otrzymujemy

$$b(a+1)c(b+1)d(c+1)e(d+1) = a(c+1)b(d+1)c(e+1)d(a+1).$$

Dzieląc tę równość przez niezerową liczbę $bcd(a+1)(c+1)(d+1)$ otrzymujemy $e(b+1) = a(e+1)$.

Równości dane w treści zadania oraz wyprowadzoną wyżej równość $e(b+1) = a(e+1)$ można przepisać w postaci

$$\begin{cases} a(b-c) = a-b, \\ b(c-d) = b-c, \\ c(d-e) = c-d, \\ d(e-a) = d-e, \\ e(a-b) = e-a. \end{cases}$$

Po wymnożeniu tych związków stronami i skróceniu niezerowego czynnika $(a-b)(b-c)(c-d)(d-e)(e-a)$ otrzymujemy $abcde = 1$.

Uwaga. Przykładowa piątka (a, b, c, d, e) spełniająca warunki zadania: $(2, -\frac{\sqrt{5}}{3}, -\frac{\sqrt{5}+2}{2}, \frac{\sqrt{5}-5}{10}, \frac{3\sqrt{5}-9}{2})$.

5. Dany jest trójkąt ABC , przy czym $AC < BC$. Okrąg ω wpisany w ten trójkąt jest styczny do boków AB i AC odpowiednio w punktach D i E . Odcinek CD przecina ω w punkcie $K \neq D$. Punkt L jest rzutem prostokątnym punktu A na prostą CD . Punkt M jest środkiem odcinka DE . Punkt H jest ortocentrum trójkąta KLM . Wykazać, że kąt AHK jest prosty.

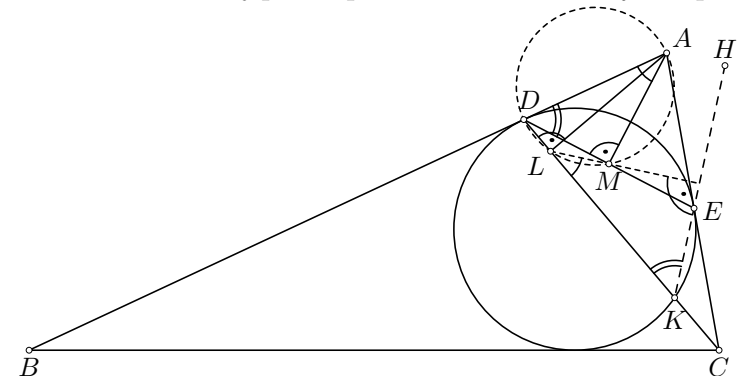
Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie:

Korzystając z równości kąta dopisanego do cięciwy DE okręgu ω i kąta wpisanego opartego na tej cięciwie otrzymujemy $\sphericalangle MDA = \sphericalangle EKD$ oraz $\sphericalangle AEM = \sphericalangle EKD$. Zauważmy, że punkty A, L, D, M leżą na okręgu o średnicy AD . Wobec tego

$$\sphericalangle KLM = \sphericalangle DAM = 90^\circ - \sphericalangle MDA = 90^\circ - \sphericalangle EKD.$$

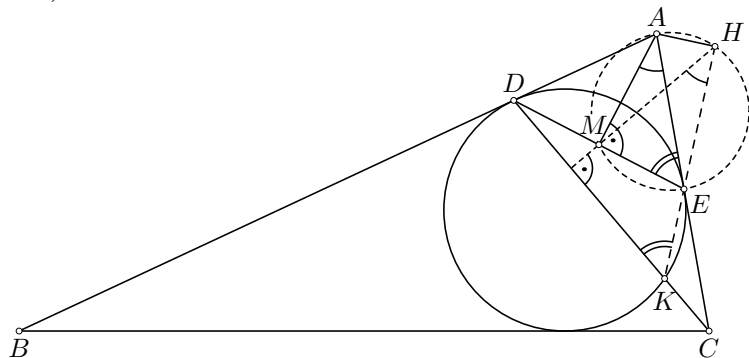
Stąd proste LM i EK są prostopadłe. Zatem H leży na prostej EK .



Zauważmy, że

$$\sphericalangle MHK = 90^\circ - \sphericalangle EKD = 90^\circ - \sphericalangle AEM = \sphericalangle MAE.$$

Ponadto punkty A i H leżą po tej samej stronie prostej EM . Powyższa równość oznacza więc, że punkty A, H, E, M leżą na jednym okręgu. Średnicą tego okręgu jest AE , bo $\sphericalangle EMA = 90^\circ$. Stąd również $\sphericalangle AHK = \sphericalangle AHE = 90^\circ$.



6. Rozważmy szachownicę $n \times n$, przy czym $n \geq 4$ i $p = n+1$ jest liczbą pierwszą. Zbiór n pól nazwiemy *taktycznym*, jeśli po ustawieniu hetmana na każdym polu z tego zbioru żadne dwa z tych hetmanów nie będą się atakować. Dowieść, że istnieje $n-2$ taktycznych zbiorów, których suma zawiera wszystkie pola szachownicy leżące poza jej przekątnymi.

Uwaga. Hetman może poruszać się o dowolną liczbę pól poziomo, pionowo i równoległe do przekątnych szachownicy.

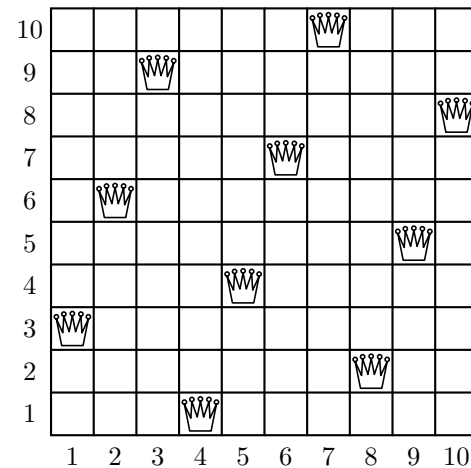
Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie:

Dla dowolnej liczby całkowitej x symbolem $r(x)$ będziemy oznaczać resztę z dzielenia liczby x przez p . Ponumerujemy wiersze i kolumny kolejno liczbami $1, 2, \dots, n$. Pole w i -tej kolumnie i j -tym wierszu będziemy krótko nazywać *polem* (i, j) . Dla dowolnego $a = 2, 3, \dots, n-1$ zdefiniujemy następujący zbiór pól:

$$X_a = \{(i, r(ai)) : i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Następujący rysunek przedstawia zbiór X_3 dla $n = 10$.



Udowodnimy, że zbiory $X_2, X_3, \dots, X_{n-1}$ spełniają warunki zadania.

Najpierw udowodnimy, że każdy z tych zbiorów jest taktyczny. Ustalmy $a \in \{2, 3, \dots, n-1\}$. Jest jasne, że pola ze zbioru X_a leżą w parach różnych kolumnach. Leżą też w parach różnych wierszach — równość $r(ai) = r(aj)$ pociągnęłaby za sobą $ai \equiv aj \pmod{p}$, skąd $i \equiv j \pmod{p}$, co dla różnych $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ nie jest prawdą. Udowodnimy teraz, że żadne dwa pola nie wyznaczają linii równoległej do przekątnej $(1,1) - (n,n)$. W przeciwnym razie mielibyśmy $i - j = r(ai) - r(aj)$ dla pewnych $1 \leq i < j \leq n$. Wtedy $j - i \equiv aj - ai \pmod{p}$, skąd $a = 1$, gdyż $j - i$ nie dzieli się przez p — sprzeczność, bo $a \in \{2, 3, \dots, p-2\}$. Podobnie, gdyby dla pewnych $1 \leq i < j \leq p-1$ pola $(i, r(ai)), (j, r(aj))$ wyznaczały linię równoległą do przekątnej $(1,n) - (n,1)$, to mielibyśmy $i + r(ai) = j + r(aj)$. Wtedy $j - i \equiv ai - aj \pmod{p}$. Stąd $a \equiv -1 \pmod{p}$, bo $j - i$ nie dzieli się przez p — sprzeczność, bo $a \in \{2, 3, \dots, p-2\}$.

Pozostaje wykazać, że zbiory $X_2, \dots, X_{n-1}$ pokrywają całą szachownicę poza przekątnymi. Rozważmy pole (i, j) nieleżące na żadnej z przekątnych. Wtedy $j \neq i$ oraz $j \neq p - i$. Należy udowodnić, że $j = r(ai)$ dla pewnego $a \in \{2, 3, \dots, p-2\}$. Ponieważ i nie dzieli się przez p , więc istnieje liczba k niepodzielna przez p taka, że $ik \equiv 1 \pmod{p}$. Wtedy $j \equiv ik \cdot j \equiv r(jk)i \pmod{p}$. Przyjmując $a = r(jk)$ mamy więc $j = r(ai)$ i pozostaje sprawdzić, że $a \neq 1$ i $a \neq p-1$. Jeśli $a = 1$, to $jk \equiv 1 \equiv ik \pmod{p}$, skąd $j \equiv i \pmod{p}$ i dalej $j = i$ — sprzeczność. Podobnie, jeśli $a = p-1$, to $jk \equiv -1 \equiv -ik \pmod{p}$, skąd $j \equiv -i \pmod{p}$ i dalej $j = p - i$ — sprzeczność. Stąd $a \in \{2, \dots, p-2\}$, co kończy dowód.



LXXIV Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia trzeciego

29 marca 2023 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Dany jest taki ciąg liczb całkowitych $a_1, a_2, a_3, \dots$, że dla dowolnych dodatnich liczb całkowitych k, ℓ liczba $a_k + a_\ell$ dzieli się przez $k + \ell$. Udowodnić, że dla dowolnych dodatnich liczb całkowitych $k > \ell$ liczba $a_k - a_\ell$ dzieli się przez $k - \ell$.

2. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ostrokątny ABC . Punkt X leży na odcinku BC po tej samej stronie prostej AI , co punkt B . Punkt Y leży na krótszym łuku AB okręgu opisanego na trójkącie ABC . Spełnione są przy tym równości kątów

$$\sphericalangle AIX = \sphericalangle XYA = 120^\circ.$$

Dowieść, że prosta YI jest dwusieczną kąta XYA .

3. Dana jest liczba całkowita $n \geq 2$. Dane są też liczby rzeczywiste $a_1, a_2, \dots, a_n$ należące do przedziału $[0, 1]$. Udowodnić, że istnieją takie liczby $b_1, b_2, \dots, b_n \in \{0, 1\}$, że dla dowolnych $1 \leq k \leq \ell \leq n$ zachodzi nierówność

$$\left| \sum_{i=k}^{\ell} (a_i - b_i) \right| \leq \frac{n}{n+1}.$$

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.



LXXIV Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia trzeciego

30 marca 2023 r. (drugi dzień zawodów)

4. Dane są liczba całkowita $n \geq 2$ oraz dodatnie liczby rzeczywiste $a_1, a_2, \dots, a_n$ o sumie równej 1. Niech $b = a_1 + 2a_2 + \dots + na_n$. Udowodnić, że

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} (i - j)^2 a_i a_j \leq (n - b)(b - 1).$$

5. Dana jest liczba pierwsza $p > 2023$. Dla dowolnej liczby całkowitej x symbolem $r(x)$ oznaczmy resztę z dzielenia liczby x przez p . Niech $p_1 < p_2 < p_3 < \dots < p_m$ będą wszystkimi liczbami pierwszymi mniejszymi od $\sqrt[4]{\frac{1}{2}p}$. Załóżmy, że $q_1, q_2, \dots, q_m$ są takimi liczbami całkowitymi, że liczby $p_1 q_1 - 1, p_2 q_2 - 1, \dots, p_m q_m - 1$ są podzielne przez p . Udowodnić, że dla dowolnych liczb całkowitych $0 < a, b < p$ zbiory

$$\{r(q_1), r(q_2), \dots, r(q_m)\}, \quad \{r(aq_1 + b), r(aq_2 + b), \dots, r(aq_m + b)\}$$

mają co najwyżej trzy wspólne elementy.

6. Dla dowolnej liczby rzeczywistej a i dowolnego $b > 0$ rozszerzeniem przedziału domkniętego $[a - b, a + b] \subseteq \mathbb{R}$ nazwiemy przedział domknięty $[a - 2b, a + 2b]$. Powiemy, że przedziały $P_1, P_2, \dots, P_k$ pokrywają zbiór X , jeśli $X \subseteq P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_k$.

Udowodnić, że istnieje liczba całkowita M o następującej własności: dla dowolnego skończonego podzbioru $A \subseteq \mathbb{R}$ istnieje taki podzbiór $B \subseteq A$ składający się z co najwyżej M liczb, że dla dowolnych stu przedziałów domkniętych pokrywających zbiór B ich rozszerzenia pokrywają zbiór A .

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.



LXXIV Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia trzeciego

29 marca 2023 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Dany jest taki ciąg liczb całkowitych $a_1, a_2, a_3, \dots$, że dla dowolnych dodatnich liczb całkowitych k, ℓ liczba $a_k + a_\ell$ dzieli się przez $k + \ell$. Udowodnić, że dla dowolnych dodatnich liczb całkowitych $k > \ell$ liczba $a_k - a_\ell$ dzieli się przez $k - \ell$.

Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie:

Ustalmy dowolne dodatnie liczby całkowite $k > \ell$. Zauważmy, że dla dowolnego m zachodzi równość

$$a_k - a_\ell = (a_k + a_m) - (a_m + a_\ell).$$

Wystarczy dobrać liczbę m w taki sposób, by liczby $a_k + a_m$ i $a_m + a_\ell$ były podzielne przez $k - \ell$. Z założeń zadania wynika, że liczba $a_k + a_m$ dzieli się przez $k + m$, a liczba $a_m + a_\ell$ dzieli się przez $m + \ell$. Wystarczy więc dobrać liczbę m tak, aby liczby $k + m$ i $m + \ell$ były podzielne przez $k - \ell$. Połóżmy $m = (k + 1)(k - \ell) - k$. Wówczas $m > 0$, $k + m = (k + 1)(k - \ell)$ oraz $m + \ell = k(k - \ell)$. Tak dobrana liczba m spełnia więc omówione wyżej warunki dające tezę zadania.

2. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ostrokątny ABC . Punkt X leży na odcinku BC po tej samej stronie prostej AI , co punkt B . Punkt Y leży na krótszym łuku AB okręgu opisanego na trójkącie ABC . Spełnione są przy tym równości kątów

$$\sphericalangle AIX = \sphericalangle XYA = 120^\circ.$$

Dowieść, że prosta YI jest dwusieczną kąta XYA .

Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie:

Sposób 1. Niech M będzie środkiem krótszego łuku BC okręgu opisanego na trójkącie ABC . Wówczas M leży na prostej AI . Z lematu o trójlisciu wynika, że $BM = CM = IM$.

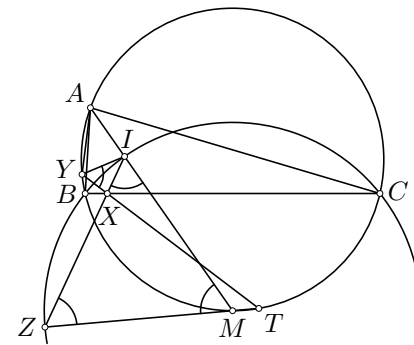
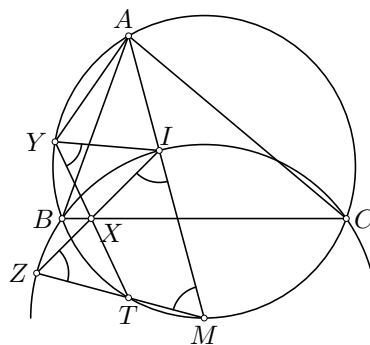
Zbudujmy trójkąt równoboczny IMZ po tej stronie prostej IM , po której leży punkt X . Wtedy X leży na prostej IZ , bo

$$\sphericalangle ZIM = 60^\circ = \sphericalangle XIM.$$

Oznaczmy punkt przecięcia prostych XY i MZ przez T . Mamy $\sphericalangle XYA = 120^\circ$ i $\sphericalangle AMZ = 60^\circ$. Wynika stąd, że T leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC : jeśli T leży po tej samej stronie prostej AM co Y , to przeciwległe kąty czworokąta $AMTY$ sumują się do kąta półpełnego, a jeśli T leży po drugiej stronie tej prostej, to $\sphericalangle TMA = \sphericalangle TYA = 120^\circ$ oraz punkty Y i M leżą po tej samej stronie prostej AT . Jeśli zaś T leży na prostej AM , to pokrywa się z M . Zauważmy jeszcze, że punkty Z, B, I, C leżą na okręgu o środku M . Z twierdzenia o siecznych wynika, że $XZ \cdot XI = XB \cdot XC = XY \cdot XT$. Stąd

$$\frac{XI}{XY} = \frac{XT}{XZ}.$$

Ponadto $\sphericalangle IXY = \sphericalangle ZXT$. Z cechy podobieństwa bkb wynika, że trójkąty IXY i TXZ są podobne. Zatem $\sphericalangle XYI = \sphericalangle TZI = 60^\circ$, skąd wynika teza.



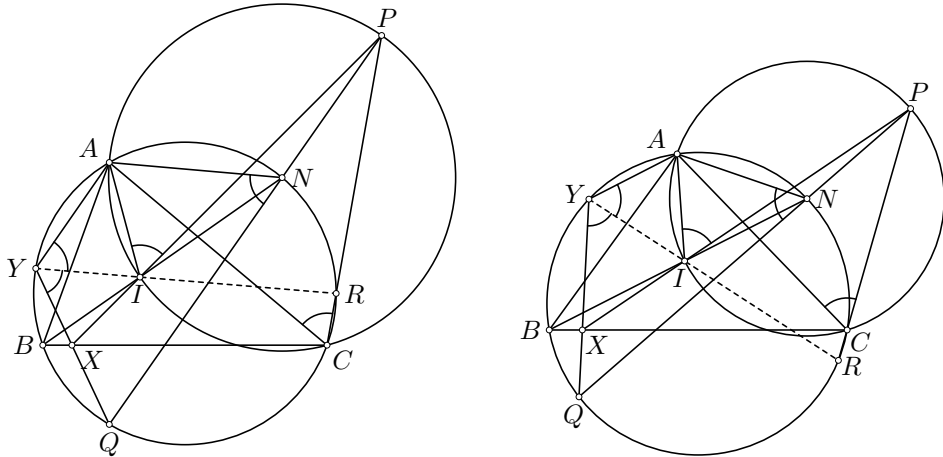
Sposób 2. Oznaczmy przez Ω okrąg opisany na trójkącie ABC . Niech N będzie środkiem krótszego łuku AC okręgu Ω . Niech ω będzie okręgiem o środku N przechodzącym przez I . Z lematu o trójlisciu wynika, że punkty A i C leżą na ω . Niech P będzie różnym od I punktem

przecięcia ω i prostej XI . Z zależności między kątem środkowym i kątem wpisanym opartych na tym samym łuku mamy $\sphericalangle PNA = 2 \cdot \sphericalangle PIA$, więc

$$\sphericalangle PNA = 2 \cdot \sphericalangle PIA = 2 \cdot (180^\circ - \sphericalangle AIX) = 120^\circ.$$

Niech Q będzie punktem przecięcia prostych PN i XY . Wówczas $\sphericalangle ANQ = 180^\circ - \sphericalangle PNA = 60^\circ$ i wobec tego przeciwległe kąty czworokąta $QYAN$ sumują się do kąta półpełnego. W konsekwencji czworokąt ten można wpisać w okrąg, skąd wniosek, że punkt Q leży na okręgu Ω .

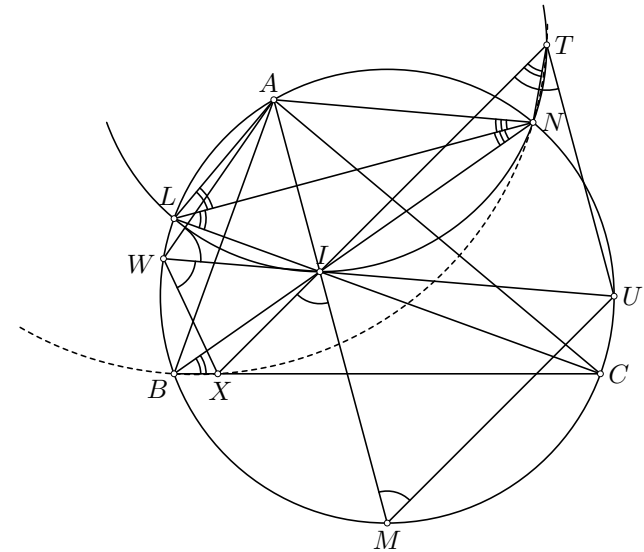
Niech R będzie środkiem dłuższego łuku AQ okręgu Ω . Wówczas $AR = QR$ oraz $\sphericalangle ARQ = 180^\circ - \sphericalangle QYA = 60^\circ$, więc trójkąt AQR jest równoboczny. Należy udowodnić, że punkt I leży na prostej YR , bo $\sphericalangle XYR = 60^\circ = \sphericalangle RYA$. Udowodnimy najpierw, że punkt R leży na prostej PC . Jeśli R leży wewnątrz okręgu ω , to $\sphericalangle RCA = 60^\circ = \sphericalangle PCA$, a jeśli R leży na zewnątrz okręgu ω , to $\sphericalangle ACR = 120^\circ = 180^\circ - \sphericalangle PCA$. Zauważmy jeszcze, że jeśli $R = C$, to prosta CP jest styczna do Ω , gdyż $\sphericalangle PCA = 60^\circ = \sphericalangle RQA$.



Z twierdzenia Pascala dla sześciokąta $BCRYQN$ wynika, że punkty X , P oraz przecięcie prostych BN , YR są współliniowe. To oznacza, że przecięcie prostych XP i BN , czyli punkt I , leży na prostej RY . To kończy dowód.

Sposób 3. Niech Ω będzie okręgiem opisanym na trójkącie ABC . Niech L , M , N będą odpowiednio środkami krótszych łuków AB , BC i AC okręgu Ω . Wówczas proste AM , BN , CL są dwusiecznymi kątów trójkąta ABC , więc przechodzą przez I .

Czworokąt $ALIN$ jest deltoidem, gdyż $\sphericalangle ILN = \frac{1}{2} \sphericalangle CBA = \sphericalangle NLA$ oraz $\sphericalangle ANL = \frac{1}{2} \sphericalangle ACB = \sphericalangle LNI$. W konsekwencji okrąg opisany na trójkącie LNI , który oznaczmy przez Ω' , jest symetryczny do Ω względem prostej LN . Te okręgi są więc przystające. Oznaczmy środki okręgów Ω i Ω' odpowiednio przez O i O' . Wówczas $OO' \perp LN$ i okrąg Ω powstaje z okręgu Ω' przez przesunięcie o wektor $\overrightarrow{O'O}$. Wynika stąd, że $\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{O'O}$, gdyż M jest jedynym punktem wspólnym okręgu Ω i półprostej o początku I i kierunku $\overrightarrow{O'O}$.



Niech T będzie różnym od I punktem przecięcia prostej XI i okręgu Ω' . Niech U będzie takim punktem, że $\overrightarrow{TU} = \overrightarrow{O'O}$. Wówczas U leży na Ω , a czworokąt $MITU$ jest równoległobokiem. Niech W będzie różnym od U punktem przecięcia okręgu Ω i prostej UI . Zauważmy, że

$$\sphericalangle ITN = \sphericalangle ILN = \sphericalangle XBI$$

oraz punkty B, T leżą po tej samej stronie prostej XN , więc czworokąt $BXNT$ jest wpisany w okrąg. Z twierdzenia o siecznych wynika, że

$$XI \cdot TI = BI \cdot NI = UI \cdot WI.$$

Stąd $\frac{WI}{XI} = \frac{TI}{UI}$. Ponadto trójkąty WIX i TIU mają równe kąty przy wierzchołku I , więc z cechy podobieństwa bkb wynika, że trójkąty te są podobne. Stąd $\sphericalangle XWI = \sphericalangle ITU$. Korzystając z tego, że $TU \parallel IM$

otrzymujemy

$$\sphericalangle XWI = \sphericalangle ITU = \sphericalangle XIM = 180^\circ - \sphericalangle AIX = 60^\circ.$$

Ponadto

$$\sphericalangle UWA = \sphericalangle UMA = \sphericalangle XIM = 60^\circ.$$

Stąd wniosek, że $\sphericalangle XWA = \sphericalangle XWI + \sphericalangle IWA = 120^\circ$ oraz WI jest dwusieczną kąta XWA . Pozostaje zauważyć, że $W = Y$, gdyż istnieje tylko jeden punkt $\tilde{Y}$ na okręgu Ω spełniający równość $\sphericalangle X\tilde{Y}A = 120^\circ$.

3. Dana jest liczba całkowita $n \geq 2$. Dane są też liczby rzeczywiste $a_1, a_2, \dots, a_n$ z przedziału $[0, 1]$. Udowodnić, że istnieją takie liczby $b_1, b_2, \dots, b_n \in \{0, 1\}$, że dla dowolnych $1 \leq k \leq \ell \leq n$ zachodzi nierówność

$$\left| \sum_{i=k}^{\ell} (a_i - b_i) \right| \leq \frac{n}{n+1}.$$

Autor zadania: Piotr Nayar

Rozwiązanie:

Symbolem $\{x\}$ będziemy oznaczać część ułamkową liczby rzeczywistej x , czyli taką liczbę y , że $x - y$ jest największą liczbą całkowitą nie większą od x . Rozważmy liczby

$$\{a_1\}, \{a_1 + a_2\}, \dots, \{a_1 + a_2 + \dots + a_n\}.$$

Dziela one przedział $(0, 1)$ na co najwyżej $n+1$ mniejszych przedziałów. Jeden z nich musi mieć więc długość równą co najmniej $\frac{1}{n+1}$. W szczególności istnieje taka liczba t , że $0 \leq t \leq \frac{n}{n+1}$ i przedział otwarty $(t, t + \frac{1}{n+1})$ nie zawiera żadnej z wyżej wypisanych części ułamkowych.

Niech $a_0 = \frac{n}{n+1} - t$ oraz $b_0 = 0$. Udowodnimy, że można dobrać liczby $b_1, b_2, \dots, b_n \in \{0, 1\}$ tak, aby dla wszystkich $k = 0, 1, 2, \dots, n$

$$0 \leq \sum_{i=0}^k (a_i - b_i) \leq \frac{n}{n+1}. \quad (*)$$

Rozumujemy przez indukcję względem k . Dla $k = 0$ żądana nierówność jest prawdziwa ponieważ $a_0 - b_0 = \frac{n}{n+1} - t$. Krok indukcyjny: założmy,

że $0 \leq k < n$ oraz że liczby $b_0, b_1, \dots, b_k$ są już zdefiniowane. Wówczas

$$\sum_{i=0}^k (a_i - b_i) + a_{k+1} \geq \sum_{i=0}^k (a_i - b_i) \geq 0.$$

Jeśli suma $\sum_{i=0}^k (a_i - b_i) + a_{k+1}$ nie przekracza $\frac{n}{n+1}$, to przyjmujemy $b_{k+1} = 0$ i wówczas warunek $(*)$ jest spełniony. W przeciwnym razie definiujemy $b_{k+1} = 1$. Wówczas

$$\sum_{i=0}^{k+1} (a_i - b_i) = \sum_{i=0}^k (a_i - b_i) + a_{k+1} - 1 \leq \frac{n}{n+1} - (1 - a_{k+1}) \leq \frac{n}{n+1}$$

oraz

$$\sum_{i=0}^{k+1} (a_i - b_i) = \sum_{i=0}^k (a_i - b_i) + a_{k+1} - 1 > \frac{n}{n+1} - 1 = -\frac{1}{n+1}.$$

Należy wykluczyć możliwość $0 > \sum_{i=0}^{k+1} (a_i - b_i) > -\frac{1}{n+1}$. Gdyby tak było, to

$$t + \frac{1}{n+1} > \sum_{i=1}^{k+1} (a_i - b_i) + 1 > t.$$

W szczególności liczba $\sum_{i=0}^{k+1} (a_i - b_i) + 1$ byłaby w przedziale $(0, 1)$, a ponadto różniłaby się od liczby $a_1 + a_2 + \dots + a_{k+1}$ o liczbę całkowitą. Stąd otrzymalibyśmy, że część ułamkowa liczby $a_1 + a_2 + \dots + a_{k+1}$ jest w przedziale $(t, t + \frac{1}{n+1})$ — sprzeczność z wyborem liczby t . Stąd $\sum_{i=0}^{k+1} (a_i - b_i) \geq 0$, co oznacza, że własność $(*)$ jest prawdziwa. To kończy indukcyjną definicję liczb $b_1, b_2, \dots, b_n$.

Powyżej zdefiniowane liczby $b_1, b_2, \dots, b_n$ spełniają warunki zadania, gdyż dla dowolnych $1 \leq k \leq \ell \leq n$ wartość bezwzględna liczby

$$\sum_{i=k}^{\ell} (a_i - b_i) = \sum_{i=0}^{\ell} (a_i - b_i) - \sum_{i=0}^{k-1} (a_i - b_i)$$

nie przekracza $\frac{n}{n+1}$, bo jest różnicą dwóch liczb z przedziału $[0, \frac{n}{n+1}]$.



LXXIV Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia trzeciego

30 marca 2023 r. (drugi dzień zawodów)

4. Dane są liczba całkowita $n \geq 2$ oraz dodatnie liczby rzeczywiste $a_1, a_2, \dots, a_n$ o sumie równej 1. Niech $b = a_1 + 2a_2 + \dots + na_n$. Udowodnić, że

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} (j-i)^2 a_i a_j \leq (n-b)(b-1).$$

Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} (n-b)(b-1) &= \left(\sum_{i=1}^n (n-i)a_i \right) \left(\sum_{j=1}^n (j-1)a_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (n-i)(j-1)a_i a_j. \end{aligned}$$

Powyższe wyrażenie jest równe

$$\sum_{i=1}^n (n-i)(i-1)a_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} ((n-i)(j-1) + (n-j)(i-1))a_i a_j. \quad (*)$$

Współczynnik stojący przy a_i^2 jest nieujemny dla $i = 1, 2, \dots, n$, więc możemy oszacować $(n-b)(b-1)$ z dołu przez drugą sumę występującą w wyrażeniu (*). Do zakończenia rozwiązania wystarczy wykazać, że współczynnik stojący w tej sumie przy $a_i a_j$ jest równy co najmniej $(j-i)^2$. Mamy

$$\begin{aligned} (n-i)(j-1) + (n-j)(i-1) &\geq (j-i)(j-1) + (i-j)(i-1) \\ &= (j-i)((j-1) - (i-1)) \\ &= (j-i)^2, \end{aligned}$$

co kończy dowód.

Uwaga. Nierówność z zadania staje się równością wtedy i tylko wtedy gdy $a_2 = a_3 = \dots = a_{n-1} = 0$.

5. Dana jest liczba pierwsza $p > 2023$. Dla dowolnej liczby całkowitej x symbolem $r(x)$ oznaczmy resztę z dzielenia liczby x przez p . Niech $p_1 < p_2 < p_3 < \dots < p_m$ będą wszystkimi liczbami pierwszymi mniejszymi od $\sqrt[4]{\frac{1}{2}p}$. Załóżmy, że $q_1, q_2, \dots, q_m$ są takimi liczbami całkowitymi, że liczby $p_1 q_1 - 1, p_2 q_2 - 1, \dots, p_m q_m - 1$ są podzielne przez p . Udowodnić, że dla dowolnych liczb całkowitych $0 < a, b < p$ zbiory

$$\{r(q_1), r(q_2), \dots, r(q_m)\}, \quad \{r(aq_1 + b), r(aq_2 + b), \dots, r(aq_m + b)\}$$

mają co najwyżej trzy wspólne elementy.

Autor zadania: Mikołaj Leonarski

Rozwiązanie:

Zauważmy, że liczby $r(q_1), r(q_2), \dots, r(q_m)$ są parami różne. Rzeczywiście, jeśli $r(q_i) = r(q_j)$, to $q_i \equiv q_j \pmod{p}$. Po pomnożeniu przez $p_i p_j$ i skorzystaniu z tego, że $p_i q_i \equiv 1 \equiv p_j q_j \pmod{p}$ dostajemy $p_i \equiv p_j \pmod{p}$. To jednak oznacza, że $p_i = p_j$, bo $0 < p_i, p_j < p$, skąd $i = j$.

Podobnie, liczby $r(aq_1 + b), r(aq_2 + b), \dots, r(aq_m + b)$ są parami różne: jeśli $r(aq_i + b) = r(aq_j + b)$, to $aq_i + b \equiv aq_j + b \pmod{p}$, skąd $a(q_i - q_j) \equiv 0 \pmod{p}$ i skoro $0 < a < p$, to $q_i - q_j \equiv 0 \pmod{p}$ i $r(q_i) = r(q_j)$.

Zauważmy, że $r(q_i) = r(aq_i + b)$ dla co najwyżej jednego indeksu i . Rzeczywiście, to jest równoważne kongruencji $q_i \equiv aq_i + b \pmod{p}$. Jeśli $a = 1$, to takie i w ogóle nie istnieje, bo wymuszałoby to $b \equiv 0 \pmod{p}$, a jeśli $1 < a < p$, to dana kongruencja jest równoważna $q_i \equiv bc \pmod{p}$, gdzie c jest taką liczbą, że $(1-a)c \equiv 1 \pmod{p}$. To jest równoważne $r(q_i) = r(bc)$, co oznacza, że potencjalny indeks i , który mógłby spełniać tę równość jest wyznaczony jednoznacznie.

Założmy nie wprost, że zbiory z zadania mają co najmniej cztery wspólne elementy. Wówczas dla pewnych parami różnych i_1, i_2, i_3, i_4 oraz pewnych j_1, j_2, j_3, j_4 mamy $r(q_{i_k}) = r(aq_{j_k} + b)$ dla $k = 1, 2, 3, 4$. Wówczas również j_1, j_2, j_3, j_4 są parami różne. Na mocy obserwacji z poprzedniego akapitu możemy bez ograniczenia ogólności rozumowania założyć, że $i_k \neq j_k$ dla $k = 1, 2, 3$.

Mamy $q_{i_1} \equiv aq_{j_1} + b \pmod{p}$ i $q_{i_2} \equiv aq_{j_2} + b \pmod{p}$, skąd

$$q_{i_1} - q_{i_2} \equiv a(q_{j_1} - q_{j_2}) \pmod{p}.$$

Analogicznie dowodzimy, że

$$q_{i_1} - q_{i_3} \equiv a(q_{j_1} - q_{j_3}) \pmod{p}.$$

Wobec tego

$$(q_{i_1} - q_{i_2})(q_{j_1} - q_{j_3}) \equiv a(q_{j_1} - q_{j_2})(q_{j_1} - q_{j_3}) \equiv (q_{i_1} - q_{i_3})(q_{j_1} - q_{j_2}) \pmod{p}.$$

Mnożąc tę kongruencję przez $p_{i_1}p_{i_2}p_{i_3}p_{j_1}p_{j_2}p_{j_3}$ i wykorzystując to, że $p_i q_i \equiv 1 \pmod{p}$ dla dowolnego i otrzymujemy

$$p_{i_3}p_{j_2}(p_{i_2} - p_{i_1})(p_{j_3} - p_{j_1}) \equiv p_{i_2}p_{j_3}(p_{i_3} - p_{i_1})(p_{j_2} - p_{j_1}) \pmod{p}.$$

Wartości bezwzględne liczb stojących po obu stronach tej kongruencji są mniejsze od $\frac{1}{2}p$, gdyż z założeń zadania $p_i < \sqrt[4]{\frac{1}{2}p}$ dla każdego i . Te dwie liczby różnią się więc o nie więcej niż p i dają taką samą resztę z dzielenia przez p , więc są równe. Zatem

$$p_{i_3}p_{j_2}(p_{i_2} - p_{i_1})(p_{j_3} - p_{j_1}) = p_{i_2}p_{j_3}(p_{i_3} - p_{i_1})(p_{j_2} - p_{j_1}).$$

Ponieważ liczba pierwsza p_{i_3} nie jest dzielnikiem żadnej z liczb p_{i_2} , p_{j_3} , $p_{i_3} - p_{i_1}$, więc jest dzielnikiem liczby $p_{j_2} - p_{j_1}$. W szczególności

$$p_{i_3} \leq |p_{j_2} - p_{j_1}| < \max\{p_{j_1}, p_{j_2}\} \leq \max\{p_{i_1}, p_{i_2}, p_{i_3}, p_{j_1}, p_{j_2}, p_{j_3}\}.$$

Analogicznie dowodzimy, że każda z liczb $p_{i_1}, p_{i_2}, p_{i_3}, p_{j_1}, p_{j_2}, p_{j_3}$ jest mniejsza od $\max\{p_{i_1}, p_{i_2}, p_{i_3}, p_{j_1}, p_{j_2}, p_{j_3}\}$. To daje sprzeczność, bo wśród dowolnych sześciu liczb istnieje największa.

6. Dla dowolnej liczby rzeczywistej a i dowolnego $b > 0$ *rozszerzeniem* przedziału domkniętego $[a - b, a + b] \subseteq \mathbb{R}$ nazwiemy przedział domknięty $[a - 2b, a + 2b]$. Powiemy, że przedziały $P_1, P_2, \dots, P_k$ *pokrywają* zbiór X , jeśli $X \subseteq P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_k$.

Udowodnić, że istnieje liczba całkowita M o następującej własności: dla dowolnego skończonego podzbioru $A \subseteq \mathbb{R}$ istnieje taki podzbiór $B \subseteq A$ składający się z co najwyżej M liczb, że dla dowolnych stu przedziałów pokrywających zbiór B ich rozszerzenia pokrywają zbiór A .

Autorzy zadania: Katarzyna Kowalska i Michał Pilipczuk

Rozwiązanie:

Udowodnimy przez indukcję ze względu na $k = 1, 2, 3, \dots$ następujące zdanie:

$\Phi(k)$: Dla dowolnego niepustego skończonego podzbioru $A \subseteq \mathbb{R}$ istnieje taki podzbiór $B \subseteq A$ zawierający $\min A$ i $\max A$ i składający się z co najwyżej $2 \cdot 3^{k-1}$ liczb, że dla dowolnych k przedziałów pokrywających zbiór B ich rozszerzenia pokrywają zbiór A .

Jeśli A jest zbiorem jednoelementowym, to zbiór $B = A$ spełnia żądane warunki. Od teraz zakładamy, że A ma co najmniej dwa elementy.

Dla $k = 1$ przyjmujemy $B = \{\min A, \max A\}$. Wówczas dowolny przedział pokrywający B pokrywa także A , a więc jego rozszerzenie tym bardziej pokrywa A .

Założmy teraz, że zdanie $\Phi(k)$ jest prawdziwe dla pewnego $k \geq 1$. Udowodnimy zdanie $\Phi(k + 1)$. Rozważmy dowolny skończony podzbiór $A \subseteq \mathbb{R}$ o co najmniej dwóch elementach. Niech $x = \min A$ i $y = \max A$. Podzielmy przedział $[x, y]$ na trzy części:

$$P_1 = \left[x, \frac{2x + y}{3} \right], \quad P_2 = \left[\frac{2x + y}{3}, \frac{x + 2y}{3} \right], \quad P_3 = \left[\frac{x + 2y}{3}, y \right].$$

Oznaczmy $A_1 = A \cap P_1$, $A_2 = A \cap P_2$ i $A_3 = A \cap P_3$. Ze zdania $\Phi(k)$ wynika, że dla $i = 1, 2, 3$ istnieje taki zbiór $B_i \subseteq A_i$ mający co najwyżej $2 \cdot 3^{k-1}$ elementów, że jeśli k przedziałów pokrywa zbiór B_i , to ich rozszerzenia pokrywają zbiór A_i , a ponadto $x \in B_1$ i $y \in B_3$. Oznaczmy $B = B_1 \cup B_2 \cup B_3$. Wówczas B ma co najwyżej $2 \cdot 3^k$ elementów i zawiera x i y . Udowodnimy, że jeśli $k + 1$ przedziałów pokrywa zbiór B , to ich rozszerzenia pokrywają zbiór A .

Rozważmy dowolne $k + 1$ przedziałów $Q_1, Q_2, \dots, Q_{k+1}$ pokrywających zbiór B . Jeżeli dla każdego $i = 1, 2, 3$ zbiór B_i jest pokryty przez nie więcej niż k przedziałów spośród $Q_1, Q_2, \dots, Q_{k+1}$, to ich rozszerzenia pokrywają zbiór A_i ; w konsekwencji zbiór A jest pokryty przez rozszerzenia $Q_1, Q_2, \dots, Q_{k+1}$.

W przeciwnym razie któryś ze zbiorów B_1, B_2, B_3 niepusto przecina się z każdym z przedziałów $Q_1, Q_2, \dots, Q_{k+1}$. Jeśli B_1 jest takim zbiorem, to rozważmy przedział Q_i , który zawiera y . Ze względu na to, że Q_i zawiera jakiś element zbioru B_1 , przedział Q_j zawiera przedział $P_2 \cup P_3$. Stąd jego rozszerzenie pokrywa przedział $[x, y]$ i w szczególności pokrywa zbiór A . Analogicznie dowodzimy, że jeśli B_3 niepusto przecina się

z każdym z przedziałów $Q_1, Q_2, \dots, Q_{k+1}$, to przedział Q_j zawierający x pokrywa $P_1 \cup P_2$, więc jego rozszerzenie pokrywa $[x, y]$ i w szczególności pokrywa A .

Pozostał przypadek, w którym B_2 przecina się niepusto z każdym z przedziałów $Q_1, Q_2, \dots, Q_{k+1}$. Rozważmy przedział Q_i zawierający y oraz przedział Q_j zawierający x . Wówczas Q_i pokrywa przedział P_3 , a przedział Q_j pokrywa przedział P_1 . Ich rozszerzenia pokrywają odpowiednio przedziały $[\frac{x+y}{2}, y]$ oraz $[x, \frac{x+y}{2}]$. Stąd rozszerzenia przedziałów Q_i i Q_j pokrywają $[x, y]$ i w konsekwencji pokrywają A . To dowodzi prawdziwości zdania $\Phi(k+1)$.

Na mocy zasady indukcji matematycznej zdanie $\Phi(k)$ jest prawdziwe dla dowolnego $k \geq 1$. Ze zdania $\Phi(100)$ wynika, że liczba $M = 2 \cdot 3^{99}$ spełnia warunki zadania.



LXXV Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe

zawodów stopnia pierwszego

I seria: do 16 października 2023 r.

1. Dany jest trójkąt ABC . Punkt J jest środkiem okręgu stycznego do boku BC oraz do przedłużeń boków AB i AC . Punkty P, B, C, Q leżą w tej kolejności na jednej prostej, przy czym $PB = AB$ i $QC = AC$. Udowodnić, że $\sphericalangle BAC + \sphericalangle QJP = 180^\circ$.

2. Wyznaczyć wszystkie dodatnie liczby całkowite x , dla których liczba

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7$$

jest potęgą liczby pierwszej.

3. Liczby rzeczywiste x, y spełniają równość

$$x \cdot \frac{4^x - 2^y}{4^x + 2^y} = y \cdot \frac{4^y - 2^x}{4^y + 2^x}.$$

Dowieść, że $|x| = |y|$.

4. Wyznaczyć wszystkie dodatnie liczby całkowite n o następującej własności: z n prostokątów o wymiarach

$$1 \times n, 2 \times n, 3 \times n, \dots, n \times n$$

można ułożyć kwadrat.

Uwaga. Prostokąty można obracać, ale nie mogą one na siebie nachodzić.

Rozwiązania powyższych zadań należy — po uprzedniej rejestracji — zamieścić w systemie internetowym olimpiady dostępnym pod adresem <https://om.sem.edu.pl> najpóźniej dnia

16 października 2023 r.

Rozwiązania przesłane w późniejszym terminie nie będą rozpatrywane. Każde rozwiązanie należy podpisać na pierwszej jego stronie: imieniem, nazwiskiem, adresem poczty elektronicznej oraz numerem zadania.



LXXV Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia pierwszego
II seria: do 10 listopada 2023 r.

5. Dana jest dodatnia liczba całkowita dająca resztę 3 z dzielenia przez 7. Udowodnić, że suma sześciątów jej dodatnich dzielników dzieli się przez 7.

6. Dany jest trójkąt ABC , w którym $AC = BC > AB$. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC . Punkt M jest środkiem boku AC . Okrąg opisany na trójkącie AMO przecina odcinek BM w punkcie X różnym od M . Wykazać, że $CX = 2MX$.

7. Dana jest liczba całkowita $n > 1$. W Matlandii znajduje się n^2 miast. Pomiedzy niektórymi miastami istnieją dwukierunkowe połączenia lotnicze. Wiadomo, że z każdego miasta można odbyć podróż samolotem do każdego innego miasta (być może z przesiadkami). Ciąg parami różnych miast $M_1, M_2, \dots, M_k$ o tej własności, że dla każdego $i = 1, 2, \dots, k - 1$ istnieje bezpośrednie połączenie lotnicze pomiędzy miastami M_i i M_{i+1} , będziemy nazywać *trasą długości k* . Każdemu miastu przypisujemy największą liczbę całkowitą k , taką że istnieje trasa długości k zawierająca to miasto. Dowieść, że pewna liczba została przypisana co najmniej $n\sqrt{2}$ miastom.

8. Znaleźć wszystkie wielomiany W o współczynnikach rzeczywistych mające następującą własność: dla dowolnych $a, b, c > 0$ będących długościami boków pewnego trójkąta i dowolnych liczb rzeczywistych x, y, z o sumie 0 zachodzi nierówność

$$W(a)yz + W(b)zx + W(c)xy \leq 0.$$

Rozwiązania powyższych zadań należy — po uprzedniej rejestracji — zamieścić w systemie internetowym olimpiady dostępnym pod adresem <https://om.sem.edu.pl> najpóźniej dnia

10 listopada 2023 r.

Rozwiązania przesłane w późniejszym terminie nie będą rozpatrywane. Każde rozwiązanie należy podpisać na pierwszej jego stronie: imieniem, nazwiskiem, adresem poczty elektronicznej oraz numerem zadania.



LXXV Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe

zawodów stopnia pierwszego

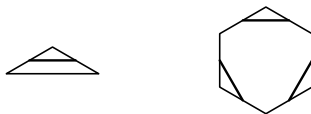
III seria: do 30 listopada 2023 r.

9. Wykazać, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c spełniających równość $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ zachodzą nierówności

$$2\sqrt{2} \leq |a + b + c| + |b + c - a| + |c + a - b| + |a + b - c| \leq 4.$$

10. Dana jest dodatnia liczba całkowita n mająca co najmniej dwa różne dzielniki pierwsze większe od 3. Niech $m \geq 1$ będzie najmniejszą liczbą całkowitą spełniającą warunek $\text{NWD}(m(m+2), n) = 1$. Niech p i q będą dwoma największymi dzielnikami pierwszymi liczby n . Udowodnić, że $mpq \leq 5n$.

11. *Płytką trójkątną* nazwiemy trójkąt o bokach długości $1, 1, \sqrt{3}$, w którym zaznaczono odcinek łączący środki boków o długości 1. *Płytką sześciokątną* nazwiemy sześciokąt foremny o boku długości 1, w którym zaznaczono trzy odcinki łączące środki sąsiednich boków, tak jak przedstawiono to na rysunku.



Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite $n \geq 1$ o następującej własności: z $3n$ płytek trójkątnych i $\frac{1}{2}(n-1)n$ płytek sześciokątnych można ułożyć trójkąt równoboczny o boku $n\sqrt{3}$ w taki sposób, aby wszystkie zaznaczone odcinki tworzyły jedną łamaną zamkniętą. Płytki można obracać.

12. Dany jest czworościan $ABCD$ wpisany w sferę s , której środek leży we wnętrzu tego czworościanu. Punkt I jest środkiem sfery wpisanej w czworościan $ABCD$. Udowodnić, że sfera przechodząca przez środki sfer opisanych na czworościanach $IBCD$, $ICDA$, $IDAB$, $IABC$ jest współśrodkowa z s .

Rozwiązania powyższych zadań należy — po uprzedniej rejestracji — zamieścić w systemie internetowym olimpiady dostępnym pod adresem <https://om.sem.edu.pl> najpóźniej dnia

30 listopada 2023 r.

Rozwiązania przesłane w późniejszym terminie nie będą rozpatrywane. Każde rozwiązanie należy podpisać na pierwszej jego stronie: imieniem, nazwiskiem, adresem poczty elektronicznej oraz numerem zadania.



LXXV Olimpiada Matematyczna

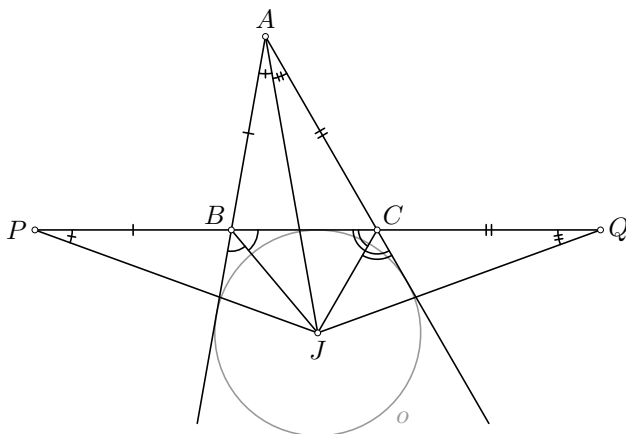
Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia pierwszego

1. Dany jest trójkąt ABC . Punkt J jest środkiem okręgu stycznego do boku BC oraz do przedłużeń boków AB i AC . Punkty P, B, C, Q leżą w tej kolejności na jednej prostej, przy czym $PB = AB$ i $QC = AC$. Udowodnić, że $\sphericalangle BAC + \sphericalangle QJP = 180^\circ$.

Autor zadania: Stanisław Majchrzak

Rozwiązanie: Oznaczmy okrąg, o którym mowa w zadaniu przez o . Zauważmy, że $\sphericalangle JBA = \sphericalangle PBJ$, gdyż proste BA i BP są styczne do o oraz J jest środkiem o . Z założeń zadania wiadomo też, że $AB = PB$. Ponadto trójkąty ABJ i PBJ mają wspólny bok BJ . Z cechy przystawania trójkątów bok-kąt-bok wynika więc, że trójkąty ABJ i PBJ są przystające. Stąd wynika, że $\sphericalangle BAJ = \sphericalangle JPB$. Analogicznie, z równości $\sphericalangle ACJ = \sphericalangle JCQ$, $AC = CQ$ wynika, że trójkąty ACJ i QCJ są przystające, skąd $\sphericalangle JAC = \sphericalangle CQJ$. Korzystając z otrzymanych związków oraz z faktu, że suma kątów wewnętrznych trójkąta PJQ wynosi 180° otrzymujemy

$$\begin{aligned}\sphericalangle BAC + \sphericalangle QJP &= \sphericalangle BAJ + \sphericalangle JAC + \sphericalangle QJP = \\ &= \sphericalangle JPB + \sphericalangle CQJ + \sphericalangle QJP = 180^\circ.\end{aligned}$$



2. Wyznaczyć wszystkie dodatnie liczby całkowite x , dla których liczba

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7$$

jest potęgą liczby pierwszej.

Autor zadania: Piotr Nayar

Rozwiązanie: Zauważmy, że

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 = (1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4).$$

Jeśli powyższa liczba jest potęgą liczby pierwszej p , to każdy z czynników $1 + x, 1 + x^2, 1 + x^4$ także jest potęgą liczby p . Zapiszmy $p^a = 1 + x, p^b = 1 + x^2$ dla pewnych nieujemnych liczb całkowitych a, b . Mamy $a, b \geq 1$, gdyż $x > 0$. Podstawiając $x = p^a - 1$ do równości $p^b = 1 + x^2$ otrzymujemy

$$p^b = 1 + x^2 = 1 + (p^a - 1)^2 = 1 + p^{2a} - 2p^a + 1 = p^{2a} - 2p^a + 2.$$

Stąd

$$2 = p^b - p^{2a} + 2p^a = p(p^{b-1} - p^{2a-1} + 2p^{a-1}).$$

Z powyższej równości wynika, że $p = 2$ oraz

$$1 = p^{b-1} - p^{2a-1} + 2p^{a-1} = 2^{b-1} - 2^{2a-1} + 2^a.$$

Wynika stąd, że $b = 1$, gdyż w przeciwnym razie powyższa liczba byłaby parzysta. Wnioskujemy, że $1 + x^2 = 2$, skąd $x = 1$. Pozostaje sprawdzić, że dla $x = 1$ liczba z zadania jest równa $8 = 2^3$; jest więc potęgą liczby pierwszej.

Odpowiedź: Jediną liczbą spełniającą warunki zadania jest $x = 1$.

3. Liczby rzeczywiste x, y spełniają równość

$$x \cdot \frac{4^x - 2^y}{4^x + 2^y} = y \cdot \frac{4^y - 2^x}{4^y + 2^x}.$$

Dowieść, że $|x| = |y|$.

Autor zadania: Daniel Goc

Rozwiązanie: Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że $|x| \neq |y|$. Naszym celem jest doprowadzenie do sprzeczności.

Przekształćmy równość daną w treści zadania w następujący sposób.

$$\begin{aligned}x(4^x - 2^y)(4^y + 2^x) &= y(4^y - 2^x)(4^x + 2^y), \\x(4^{x+y} + 8^x - 8^y - 2^{x+y}) &= y(4^{x+y} + 8^y - 8^x - 2^{x+y}), \\(x - y)(4^{x+y} - 2^{x+y}) &= (x + y)(8^y - 8^x), \\2^{x+y} \cdot \frac{2^{x+y} - 1}{x + y} &= 8^y \cdot \frac{1 - 8^{x-y}}{x - y}.\end{aligned}\tag{♡}$$

Wykorzystując następujące własności funkcji wykładniczej

$$\begin{aligned}2^t > 1 &\iff t > 0 \iff 8^t > 1 \\2^t < 1 &\iff t < 0 \iff 8^t < 1\end{aligned}$$

wnioskujemy że

$$\frac{2^{x+y} - 1}{x + y} > 0 \quad \text{oraz} \quad \frac{1 - 8^{x-y}}{x - y} < 0.$$

W takim razie lewa strona równości (♡) jest dodatnia, a prawa ujemna — sprzeczność.

4. Wyznaczyć wszystkie dodatnie liczby całkowite n o następującej własności: z n prostokątów o wymiarach

$$1 \times n, 2 \times n, 3 \times n, \dots, n \times n$$

można ułożyć kwadrat.

Uwaga. Prostokąty można obracać, ale nie mogą one na siebie nachodzić.

Autor zadania: Łukasz Bożyk

Rozwiązanie: Załóżmy, że z prostokątów o wymiarach $1 \times n, 2 \times n, \dots, n \times n$ można ułożyć kwadrat o boku m . Pole tego kwadratu to z jednej strony m^2 , a z drugiej

$$1 \cdot n + 2 \cdot n + \dots + n \cdot n = (1 + 2 + \dots + n) \cdot n = \frac{n(n+1)}{2} \cdot n.$$

Wynika stąd, że $2m^2 = n^2(n+1)$. Z tej równości wynika, że n^2 jest dzielnikiem liczby $2m^2$, zatem n jest dzielnikiem liczby m . Zapisując $m = kn$ dla pewnej dodatniej liczby całkowitej k otrzymujemy $2k^2 = n + 1$. Stąd wynika, że n musi być postaci $2k^2 - 1$ dla pewnej dodatniej liczby całkowitej k .

Wykażemy teraz, że każda liczba n postaci $2k^2 - 1$ spełnia warunki zadania. Wszystkie prostokąty poza ostatnim łączymy w $\frac{n-1}{2} = k^2 - 1$ par postaci $i \times n$, $(n-i) \times n$. Z każdej takiej pary prostokątów układamy kwadrat $n \times n$. W ten sposób ułożyliśmy $k^2 - 1$ kwadratów $n \times n$. Do dyspozycji mamy też jeden kwadrat $n \times n$, którego na początku nie sparowaliśmy z żadnym innym prostokątem. Łącznie mamy więc k^2 kwadratów $n \times n$, z których układamy kwadrat $kn \times kn$.

Odpowiedź: Liczby postaci $2k^2 - 1$, gdzie k jest dodatnią liczbą całkowitą.

5. Dana jest dodatnia liczba całkowita dająca resztę 3 z dzielenia przez 7. Udowodnić, że suma sześciątów jej dodatnich dzielników dzieli się przez 7.

Autor zadania: Emil Łasocha

Rozwiązanie:

Sposób 1. Rozważmy liczbę $n = 7k + 3$, gdzie k jest nieujemną liczbą całkowitą. Niech S oznacza sumę sześciątów dodatnich dzielników liczby n . Zauważmy, że jeśli d jest dzielnikiem n , to $\frac{n}{d}$ również jest dzielnikiem n oraz $d \cdot \frac{n}{d} = n$. Udowodnimy, że dla dowolnego dzielnika d liczby n liczba $d^3 + \left(\frac{n}{d}\right)^3$ dzieli się przez 7. Wyniknie stąd teza zadania, gdyż wtedy liczba

$$2S = \sum_{d|n} \left(d^3 + \left(\frac{n}{d} \right)^3 \right)$$

będzie podzielna przez 7 jako suma liczb podzielnych przez 7.

Rozważmy dowolny dzielnik d liczby n . Wtedy d nie dzieli się przez 7, bo n nie dzieli się przez 7. Zauważmy, że

$$d^3 + \left(\frac{n}{d} \right)^3 = \frac{d^6 + n^3}{d^3}.$$

Wystarczy więc wykazać, że liczba $d^6 + n^3$ dzieli się przez 7. Zauważmy, że n^3 daje resztę 6 z dzielenia przez 7, bo

$$n^3 = (7k+3)^3 = (7k)^3 + 3 \cdot (7k)^2 \cdot 3 + 3 \cdot 7k \cdot 3^2 + 3^3 = 7 \cdot (49k^3 + 63k^2 + 27k + 3) + 6.$$

Wystarczy więc dowieść, że d^6 daje resztę 1 z dzielenia przez 7. Zapiszmy $d = 7\ell + r$, gdzie ℓ jest liczbą całkowitą oraz $r \in \{1, 2, \dots, 6\}$. Wówczas

$$d^6 - r^6 = (d - r)(d^5 + d^4r + \dots + r^5) = 7\ell(d^5 + d^4r + \dots + r^5)$$

Liczba d^6 daje więc taką samą resztę z dzielenia przez 7 co r^6 . Bezpośrednio sprawdzamy, że r^6 daje resztę 1 z dzielenia przez 7 dla $r \in \{1, 2, \dots, 6\}$:

$$\begin{aligned} 1^6 &= 1 = 7 \cdot 0 + 1, & 2^6 &= 64 = 7 \cdot 9 + 1 \\ 3^6 &= 729 = 7 \cdot 104 + 1, & 4^6 &= 4096 = 7 \cdot 585 + 1, \\ 5^6 &= 15625 = 7 \cdot 2232 + 1, & 6^6 &= 46656 = 7 \cdot 6665 + 1. \end{aligned}$$

Uwaga. To, że d^6 daje resztę 1 z dzielenia przez 7, można uzasadnić powołując się na *małe twierdzenie Fermata*. Orzeka ono, że jeśli p jest liczbą pierwszą, to dla dowolnej liczby całkowitej a liczba $a^p - a$ dzieli się przez p . Małe twierdzenie Fermata można udowodnić np. przez indukcję, wykorzystując w kroku indukcyjnym tożsamość

$$(a + 1)^p = a^p + \binom{p}{1}a^{p-1} + \binom{p}{2}a^{p-2} + \dots + \binom{p}{p-1}a + 1$$

oraz fakt, że symbole Newtona $\binom{p}{1}, \binom{p}{2}, \dots, \binom{p}{p-1}$ dzielą się przez p , gdyż p jest liczbą pierwszą.

Sposób 2. Wszystkie przystawania będą rozważane modulo 7. Niech n będzie liczbą dającą resztę 3 z dzielenia przez 7. Niech

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$$

będzie rozkładem liczby n na czynniki pierwsze. Zauważmy, że wśród liczb $p_1, p_2, \dots, p_k$ nie występuje 7. Dodatnimi dzielnikami n są liczby postaci $p_1^{i_1} p_2^{i_2} \dots p_k^{i_k}$, gdzie $i_j \in \{0, 1, \dots, a_j\}$ dla $j = 1, 2, \dots, k$. W takim razie suma ich sześciątów jest równa

$$\sum_{i_1=0}^{a_1} \sum_{i_2=0}^{a_2} \dots \sum_{i_k=0}^{a_k} (p_1^{i_1} p_2^{i_2} \dots p_k^{i_k})^3 = \prod_{j=1}^k (1 + p_j^3 + \dots + p_j^{3a_j}).$$

Należy udowodnić, że $1 + p_j^3 + \dots + p_j^{3a_j} \equiv 0$ dla pewnego $j \in \{1, 2, \dots, k\}$. Zbadajmy najpierw jaką resztę z dzielenia przez 7 daje liczba p^3 w zależności od reszty z dzielenia p przez 7. Niech $p = 7\ell + r$ dla pewnej liczby całkowitej ℓ oraz $r \in \{1, 2, \dots, 6\}$. Mamy

$$\begin{aligned} (7\ell + 1)^3 &\equiv 1^3 = 1, \\ (7\ell + 2)^3 &\equiv 2^3 = 8 \equiv 1, \\ (7\ell + 3)^3 &\equiv 3^3 = 27 \equiv -1, \\ (7\ell + 4)^3 &\equiv 4^3 = 64 \equiv 1, \\ (7\ell + 5)^3 &\equiv 5^3 = 125 \equiv -1, \\ (7\ell + 6)^3 &\equiv 6^3 = 216 \equiv -1. \end{aligned}$$

W takim razie jeśli $r \in \{3, 5, 6\}$, to

$$1 + p^3 + \dots + p^{3a} \equiv 1 - 1 + \dots + (-1)^a = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } 2 \nmid a \\ 1, & \text{jeśli } 2 \mid a \end{cases}$$

Założmy nie wprost, że liczba $1 + p_j^3 + \dots + p_j^{3a_j}$ nie dzieli się przez 7 dla żadnego $j \in \{1, 2, \dots, k\}$. Jeśli $p_j \equiv 3, 5, 6$, to $2 \mid a_j$. Bez ograniczenia ogólności rozumowania możemy przyjąć, że $p_1, p_2, \dots, p_s$ dają reszty 1, 2, 4 z dzielenia przez 7, a liczby $p_{s+1}, p_{s+2}, \dots, p_k$ dają reszty 3, 5, 6. Zapisując n w postaci

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_s^{a_s} (p_{s+1}^2)^{a_{s+1}/2} (p_{s+2}^2)^{a_{s+2}/2} \dots (p_k^2)^{a_k/2}$$

i zauważając, że $3^2 \equiv 2$, $5^2 \equiv 4$, $6^2 \equiv 1$, widzimy że n jest iloczynem liczb dających reszty 1, 2, 4 z dzielenia przez 7. Taka liczba też daje resztę 1, 2 bądź 4, ponieważ

$$1 \cdot 1 \equiv 1, \quad 1 \cdot 2 \equiv 2, \quad 1 \cdot 4 \equiv 4, \quad 2 \cdot 2 \equiv 4, \quad 2 \cdot 4 \equiv 1, \quad 4 \cdot 4 \equiv 2.$$

Otrzymaliśmy sprzeczność z założeniem, że $n \equiv 3$, co kończy dowód.

6. Dany jest trójkąt ABC , w którym $AC = BC$. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC . Punkt M jest środkiem boku AC . Okrąg opisany na trójkącie AMO przecina odcinek BM w punkcie X różnym od M . Wykazać, że $CX = 2MX$.

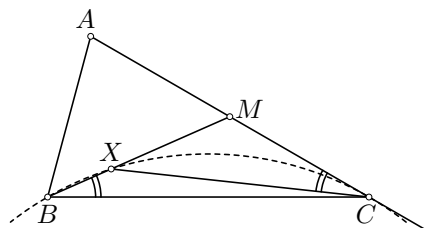
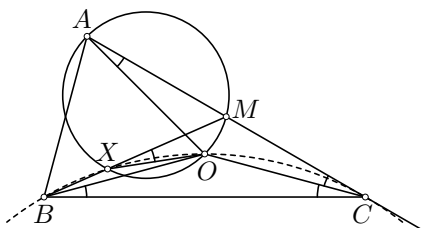
Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie:

Sposób 1. Niech $\sphericalangle ACB = 2\varphi$. Wówczas $\sphericalangle OXM = \sphericalangle OAM = \varphi$, więc

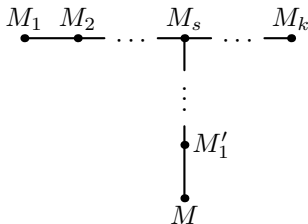
$$\sphericalangle BXO = 180^\circ - \sphericalangle OXM = 180^\circ - \varphi = 180^\circ - \sphericalangle OCB.$$

Z tej równości wynika, że punkty B, X, O, C leżą na jednym okręgu. Ten okrąg jest styczny do prostej AC w punkcie C , gdyż $\sphericalangle ACO = \varphi = \sphericalangle CBO$.



Autor zadania: Paweł Gadziński

Wykażemy, że każdemu miastu przypisano liczbę większą lub równą $\ell + 2$. Rozważmy dowolne miasto M różne od $M_1, M_2, \dots, M_k$. Z założeń zadania wiemy, że istnieje trasa rozpoczynająca się miastem M i kończąca się miastem M_1 . Niech M_s będzie tym miastem pośród $M_1, M_2, \dots, M_k$, które pojawia się najwcześniej na owej trasie. Początkowy fragment tej trasy wygląda więc następująco: $M, M'_1, M'_2, \dots, M'_t, M_s$, przy czym wszystkie miasta $M'_1, \dots, M'_t$ są różne od $M_1, M_2, \dots, M_k$.


$$M, M'_1, \dots, M'_t, M_s, M_{s+1}, \dots, M_k$$
$$M, M'_1, \dots, M'_t, M_s, M_{s-1}, \dots, M_1$$

Dla dowolnego i oznaczmy przez x_i liczbę miast, którym przypisano liczbę i .

$$n^2 = x_{\ell+2} + x_{\ell+3} + \dots + x_k.$$

$$n^2 < (k - \ell - 1) \cdot n\sqrt{2} < \frac{k}{2} \cdot n\sqrt{2} < \frac{n\sqrt{2}}{2} \cdot n\sqrt{2} = n^2,$$

sprzeczność. Wobec tego $x_i \geq n\sqrt{2}$ dla pewnego i , co kończy dowód.

8. Znaleźć wszystkie wielomiany W o współczynnikach rzeczywistych mające następującą własność: dla dowolnych $a, b, c > 0$ będących długościami boków pewnego trójkąta i dowolnych liczb rzeczywistych x, y, z o sumie 0 zachodzi nierówność

$$W(a)yz + W(b)zx + W(c)xy \leq 0.$$

Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie: Podstawiając $x = y = 1, z = -2$ otrzymujemy, że dla dowolnych a, b, c będących długościami boków trójkąta zachodzi nierówność

$$2W(a) + 2W(b) \geq W(c). \quad (\clubsuit)$$

W szczególności dla $a = b = c$ otrzymujemy $W(a) \geq 0$ dla dowolnego $a > 0$.

Wielomian stale równy 0 oczywiście spełnia warunki zadania. Rozważmy niezerowy wielomian $W(t) = a_n t^n + \dots + a_1 t + a_0$ spełniający warunki zadania. Z tego, że $W(a) \geq 0$ dla $a > 0$ wynika w szczególności, że współczynnik wiodący a_n jest dodatni, a wyraz wolny a_0 jest nieujemny. Oznacza to, że jeśli $n \leq 1$, to W jest funkcją liniową o nieujemnych współczynnikach.

Dla dowolnego $t > 1$ podstawmy $a = b = t, c = 2t - 1$ do zależności $(\clubsuit)$. Otrzymujemy nierówność $4W(t) \geq W(2t - 1)$. Jeżeli $n \geq 3$, to współczynnik wiodący wielomianu $4W(t) - W(2t - 1)$ jest równy $4a_n - 2^n a_n$, jest więc ujemny. Wówczas $4W(t) - W(2t - 1) < 0$ dla dostatecznie dużych t , sprzeczność. Wobec tego $n \leq 2$.

Załóżmy, że $n = 2$. Udowodnimy, że $a_1 \geq 0$. Załóżmy przeciwnie: $a_1 < 0$. Podstawiając do $(\clubsuit)$ $a = b = t, c = 2t - \varepsilon$, gdzie $t > 1$ i $\varepsilon \in (0, 1)$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} 4W(t) &\geq W(2t - \varepsilon) \\ 4(a_2 t^2 + a_1 t + a_0) &\geq a_2 (2t - \varepsilon)^2 + a_1 (2t - \varepsilon) + a_0 \\ 4a_2 t^2 + 4a_1 t + 4a_0 &\geq 4a_2 t^2 + (-4a_2 \varepsilon + 2a_1)t + a_2 \varepsilon^2 - a_1 \varepsilon + a_0 \\ (2a_1 + 4a_2 \varepsilon)t &\geq a_2 \varepsilon^2 - a_1 \varepsilon - 3a_0 \end{aligned} \quad (\spadesuit)$$

Dobierając liczbę $\varepsilon > 0$ tak małą, że $2a_1 + 4a_2 \varepsilon < 0$ oraz dostatecznie dużą liczbę t widzimy, że nierówność $(\spadesuit)$ jest nieprawdziwa — sprzeczność. Zatem $a_1 \geq 0$.

Dotychczas udowodniliśmy, że jeśli W spełnia warunki zadania, to jest wielomianem stopnia co najwyżej 2 o nieujemnych współczynnikach. Udowodnimy, że wszystkie takie wielomiany spełniają warunki zadania.

Rozważmy dowolny wielomian $W(t) = a_2t^2 + a_1t + a_0$, gdzie $a_2, a_1, a_0 \geq 0$. Rozważmy dowolne liczby a, b, c będące długościami boków trójkąta oraz dowolne liczby rzeczywiste x, y, z o sumie 0. Bez ograniczenia ogólności rozumowania możemy założyć, że liczby x, y są tego samego znaku (tj. obie są nieujemne lub obie są ujemne). Niech $d = \frac{1}{2}(-a + b + c)$, $e = \frac{1}{2}(a - b + c)$ i $f = \frac{1}{2}(a + b - c)$. Wówczas $xy \geq 0$, $d, e, f > 0$, $a = e + f$, $b = f + d$, $c = d + e$ oraz $z = -(x + y)$. Należy udowodnić, że $W(a)yz + W(b)zx + W(c)xy \leq 0$, czyli że

$$W(a)y(x + y) + W(b)x(x + y) - W(c)xy \geq 0.$$

Mamy

$$W(a)y(x + y) + W(b)x(x + y) - W(c)xy = a_2P + a_1Q + a_0R,$$

gdzie

$$P = a^2y(x + y) + b^2x(x + y) - c^2xy,$$

$$Q = ay(x + y) + bx(x + y) - cxy,$$

$$R = y(x + y) + x(x + y) - xy.$$

Wystarczy udowodnić, że $P, Q, R \geq 0$. Zauważmy, że

$$\begin{aligned} P &\geq e^2(xy + y^2) + d^2(x^2 + xy) - (d + e)^2xy = \\ &= e^2y^2 + d^2x^2 - 2dexy = (dx - ey)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q &\geq e(xy + y^2) + d(x^2 + xy) - (d + e)xy = \\ &= ey^2 + dx^2 \geq 0, \end{aligned}$$

$$R = x^2 + xy + y^2 = \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 \geq 0,$$

co kończy dowód.

Odpowiedź: Wielomiany postaci $W(t) = a_2t^2 + a_1t + a_0$, gdzie $a_2, a_1, a_0 \geq 0$.

9. Wykazać, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c spełniających równość $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ zachodzą nierówności

$$2\sqrt{2} \leq |a + b + c| + |b + c - a| + |c + a - b| + |a + b - c| \leq 4.$$

Autor zadania: Piotr Nayar

Rozwiązanie: Wystarczy dowieść, że

$$8 \leq (|a + b + c| + |b + c - a| + |c + a - b| + |a + b - c|)^2 \leq 16.$$

Mamy

$$(|a+b+c|+|b+c-a|+|c+a-b|+|a+b-c|)^2 = K + 2L,$$

gdzie

$$\begin{aligned} K &= |a+b+c|^2 + |b+c-a|^2 + |c+a-b|^2 + |a+b-c|^2 = \\ &= (a+b+c)^2 + (b+c-a)^2 + (c+a-b)^2 + (a+b-c)^2 = \\ &= (a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)) + (a^2+b^2+c^2+2(bc-ab-ac)) + \\ &\quad + (a^2+b^2+c^2+2(ac-bc-ab)) + (a^2+b^2+c^2+2(ab-ac-bc)) = \\ &= 4(a^2+b^2+c^2) = 4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L &= |(a+b+c)(b+c-a)| + |(a+b+c)(c+a-b)| + \\ &\quad + |(a+b+c)(a+b-c)| + |(b+c-a)(c+a-b)| + \\ &\quad + |(b+c-a)(a+b-c)| + |(c+a-b)(a+b-c)| = \\ &= |(b+c)^2 - a^2| + |(a+c)^2 - b^2| + |(a+b)^2 - c^2| + \\ &\quad + |(a-b)^2 - c^2| + |(a-c)^2 - b^2| + |(b-c)^2 - a^2|. \end{aligned}$$

Wystarczy zatem udowodnić, że $2 \leq L \leq 6$. Z nierówności trójkąta wynika, że $L \geq |M|$, gdzie

$$\begin{aligned} M &= ((b+c)^2 - a^2) + ((a+c)^2 - b^2) + ((a+b)^2 - c^2) + \\ &\quad + ((a-b)^2 - c^2) + ((a-c)^2 - b^2) + ((b-c)^2 - a^2) = \\ &= 2(a^2 + b^2 + c^2) = 2. \end{aligned}$$

Z drugiej strony, z nierówności $|x-y| \leq x+y$ słusznej dla $x, y \geq 0$ wynika, że

$$\begin{aligned} L &= (b+c)^2 + a^2 + (a+c)^2 + b^2 + (a+b)^2 + c^2 + \\ &\quad + (a-b)^2 + c^2 + (a-c)^2 + b^2 + (b-c)^2 + a^2 = \\ &= 6(a^2 + b^2 + c^2) = 6. \end{aligned}$$

10. Dana jest dodatnia liczba całkowita n mająca co najmniej dwa różne dzielniki pierwsze większe od 3. Niech $m \geq 1$ będzie najmniejszą liczbą całkowitą spełniającą warunek $\text{NWD}(m(m+2), n) = 1$. Niech p i q będą dwoma największymi dzielnikami pierwszymi liczby n . Udowodnić, że $mpq \leq 5n$.

Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie: Jest jasne, że $pq \leq n$. Zatem jeśli $m \leq 5$, to teza zadania jest oczywista.

Założmy teraz, że $m \geq 6$. Zauważmy, że $\text{NWD}(k(k+2), n) > 1$ dla dowolnego $k \in \{1, 2, \dots, m-1\}$. Kładąc $k = 1$ i $k = 2$ otrzymujemy $\text{NWD}(3, n) > 1$ i $\text{NWD}(8, n) > 1$, co oznacza, że 2 i 3 dzielą n . Niech $p_1 < p_2 < \dots < p_s$ będą wszystkimi dzielnikami pierwszymi liczby n . Wówczas $s \geq 4$. Rozważmy liczby

$$k_i = i \cdot p_1 p_2 \dots p_{s-2} - 1 \quad \text{dla } i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

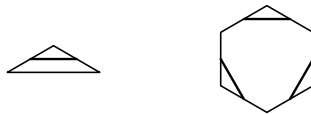
Udowodnimy, że $\text{NWD}(k_i(k_i + 2), n) = 1$ dla pewnego $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Wyniknie stąd teza zadania, bo wówczas $m \leq k_i < 5p_1 p_2 \dots p_{s-2}$, zatem $mpq < 5p_1 p_2 \dots p_s \leq 5n$.

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Założmy, że $\text{NWD}(k_i(k_i + 2), n) > 1$ dla każdego $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Ponieważ dla dowolnych $j \in \{1, 2, \dots, s-2\}$ oraz $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ liczba p_j dzieli $k_i + 1$, więc $\text{NWD}(p_j, k_i(k_i + 2)) = 1$. W takim razie nierówność $\text{NWD}(k_i(k_i + 2), n) > 1$ może zajść wyłącznie wtedy, gdy p lub q dzieli $k_i(k_i + 2)$. Któraś z liczb p i q musi dzielić pewne trzy spośród liczb $k_1(k_1 + 2), k_2(k_2 + 2), \dots, k_5(k_5 + 2)$. Bez ograniczenia ogólności rozumowania niech będzie to liczba p dzieląca liczby $k_x(k_x + 2), k_y(k_y + 2), k_z(k_z + 2)$ dla parami różnych $x, y, z \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Wtedy dla każdego $i \in \{x, y, z\}$ liczba p dzieli k_i lub $k_i + 2$, bo liczba p jest pierwsza. Zatem dla pewnego $t \in \{0, 2\}$ liczba p dzieli któreś dwie spośród liczb $k_x + t, k_y + t, k_z + t$, bez straty ogólności przyjmijmy, że dzieli $k_x + t$ i $k_y + t$. Wtedy p dzieli ich różnicę, która jest równa

$$(k_x + t) - (k_y + t) = (x - y)p_1 p_2 \dots p_{s-2}.$$

To daje sprzeczność, bo $p \neq p_j$ dla $j = 1, 2, \dots, s-2$ i $p \geq 5 > |x - y|$.

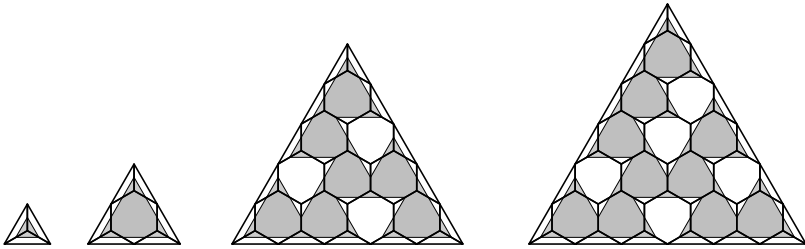
11. *Płytką trójkątną* nazwiemy trójkąt o bokach długości 1, 1, $\sqrt{3}$, w którym zaznaczono odcinek łączący środki boków o długości 1. *Płytką sześciokątną* nazwiemy sześciokąt foremny o boku długości 1, w którym zaznaczono trzy odcinki łączące środki sąsiednich boków, tak jak przedstawiono to na rysunku.



Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite $n \geq 1$ o następującej własności: z $3n$ płytek trójkątnych i $\frac{1}{2}(n-1)n$ płytek sześciokątnych można ułożyć trójkąt równoboczny o boku $n\sqrt{3}$ w taki sposób, aby wszystkie zaznaczone odcinki tworzyły jedną łamaną zamkniętą. Płytki można obracać.

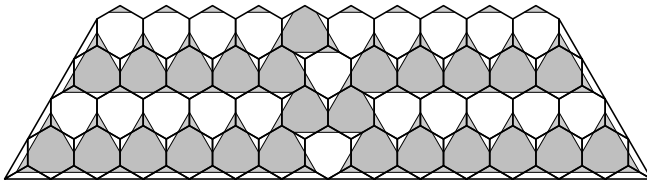
Autor zadania: Łukasz Bożyk

Rozwiązanie: Poniższe rysunki przedstawiają przykładowe ustawienia płytek spełniające warunki zadania dla $n = 1, 2, 5, 6$ (na rysunkach zacieniowano wielokąty ograniczone łamanymi zamkniętymi utworzonymi z odcinków narysowanych na płytkach):



Płytkę sześciokątną ustawioną tak jak na rysunku w treści zadania nazwiemy *plytką typu I*. Płytkę powstałą z płytki typu I o obrót o 60° nazwiemy *plytką typu II*.

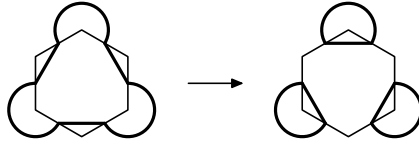
Zauważmy, że dla $n = 5$ i $n = 6$ trzecia od lewej sześciokątna płytka w dolnym rzędzie jest typu I, a pozostałe są typu II. Opiszemy teraz jak układać płytki dla większych n . Załóżmy, że dla pewnego $n = 4k + r$, gdzie $r \in \{1, 2\}$ istnieje ustawienie płytek spełniające warunki zadania i dodatkowo w dolnym rzędzie tego ustawienia $(2k + 1)$ -sza płytka sześciokątna jest typu I, a pozostałe — typu II. Modyfikujemy to ustawienie płytek w następujący sposób. Zastępujemy $4k + r$ płytek trójkątnych tworzących dolny bok trójkąta równobocznego następującą kompozycją złożoną z $4k + r + 12$ płytek trójkątnych i $16k + 4r + 6$ płytek sześciokątnych:



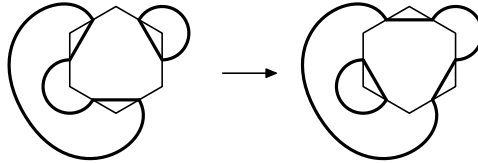
W ten sposób otrzymujemy ustawienie płytek spełniające warunki zadania dla $n = 4(k + 1) + r$, w którego dolnym rzędzie $(4(k + 1) + 1)$ -sza płytka sześciokątna jest typu I, a pozostałe są typu II. Z zasady indukcji wynika więc, że liczby dające resztę 1 lub 2 spełniają warunki zadania.

Udowodnimy teraz, że jeśli n spełnia warunki zadania, to n daje resztę 1 lub 2 z dzielenia przez 4. Rozważmy dowolne ustawienie płytek tworzące trójkąt równoboczny (niekoniecznie spełniające warunki zadania). Wówczas zaznaczone odcinki tworzą pewną liczbę łamanych zamkniętych. Zastanówmy się, jak zmienia się liczba utworzonych łamanych, gdy zamienimy jedną z sześciokątnych płytek typu II na płytke typu I.

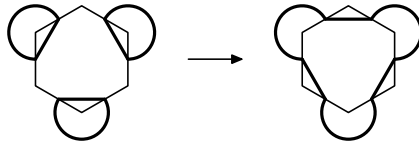
Jeśli środki sześciokąta znajdują się na jednej łamanej, to po zamianie zamiast wyjściowej łamanej powstają trzy łamane.



Jeśli środki sześciokąta znajdują się na dwóch łamanych, to po zamianie zamiast wyjściowych dwóch łamanych powstają dwie inne łamane.



Jeśli środki sześciokąta znajdują się na trzech łamanych, to po zamianie zamiast wyjściowych trzech łamanych powstaje jedna łamana.



We wszystkich przypadkach liczba łamanych nie zmienia swojej parzystości. Wykonując skończoną liczbę takich zamian otrzymujemy sytuację, w której wszystkie płytki są typu I. Wtedy wszystkie łamane składają się z trzech zaznaczonych odcinków i łamanych tych jest dokładnie $\frac{n(n+1)}{2}$. Jeśli możliwe jest ustawienie płytek tak, że utworzona została tylko jedna łamana, to z powyższej dyskusji wynika, że liczba $\frac{n(n+1)}{2}$ jest nieparzysta. Zapiszmy $n = 4k + r$, gdzie $r \in \{0, 1, 2, 3\}$ i zbadajmy kiedy liczba $\frac{n(n+1)}{2}$ jest nieparzysta. Mamy

$$\frac{4k(4k+1)}{2} = 2k(4k+1), \quad \frac{(4k+1)(4k+2)}{2} = (4k+1)(2k+1),$$

$$\frac{(4k+2)(4k+3)}{2} = (2k+1)(4k+3), \quad \frac{(4k+3)(4k+4)}{2} = 2(4k+3)(k+1),$$

skąd wynika, że $\frac{n(n+1)}{2}$ jest liczbą nieparzystą tylko gdy $n = 4k + 1$ lub $n = 4k + 2$.

Odpowiedź: Liczby dające resztę 1 lub 2 z dzielenia przez 4.

12. Dany jest czworościan $ABCD$ wpisany w sferę s , której środek leży we wnętrzu tego czworościanu. Punkt I jest środkiem sfery wpisanej w czworościan $ABCD$. Udowodnić, że sfera przechodząca przez środki sfer opisanych na czworościanach $IBCD$, $ICDA$, $IDAB$, $IABC$ jest współśrodkowa z s .

Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie:

Sposób 1. Oznaczmy środki sfer opisanych na czworościanach $IBCD$, $ICDA$, $IDAB$, $IABC$ odpowiednio przez O_A , O_B , O_C , O_D . Oznaczmy punkty styczności sfery wpisanej w czworościan $ABCD$ ze ścianami BCD , CDA , DAB , ABC odpowiednio przez E , F , G , H . Wówczas płaszczyzna FGH jest prostopadła do prostej AI . Płaszczyzna $O_BO_CO_D$ jest płaszczyzną symetralną odcinka AI , więc także jest do niej prostopadła. W takim razie płaszczyzny FGH i $O_BO_CO_D$ są równoległe. Analogicznie dowodzimy, że odpowiednie ściany czworościanów $EFGH$, $O_AO_BO_CO_D$ są równoległe. Ponadto te dwa czworościany nie są przystające, więc istnieje jednokładność j przekształcająca punkty E , F , G , H odpowiednio na O_A , O_B , O_C , O_D . Ta jednokładność przekształca punkt I na środek sfery opisanej na czworościanie $O_AO_BO_CO_D$. Niech O będzie środkiem sfery s . Należy udowodnić, że $j(I) = O$.

Oznaczmy środek okręgu opisanego na ścianie BCD przez S_A . Zauważmy, że punkty O , O_A wyznaczają prostą prostopadłą do płaszczyzny BCD przechodzącą przez S_A . Zauważmy też, że prosta IE jest prostopadła do płaszczyzny BCD . To oznacza, że proste IE , OO_A są równoległe. Stąd i z faktu, że $j(E) = O_A$ wynika, że jednokładność j przeprowadza prostą IE na prostą OO_A . W rezultacie punkt $j(I)$ leży na prostej OO_A . Analogicznie dowodzimy, że $j(I)$ leży na prostej OO_B , co oznacza, że $j(I)$ jest punktem przecięcia prostych OO_A , OO_B . Stąd $j(I) = O$, co było do udowodnienia.

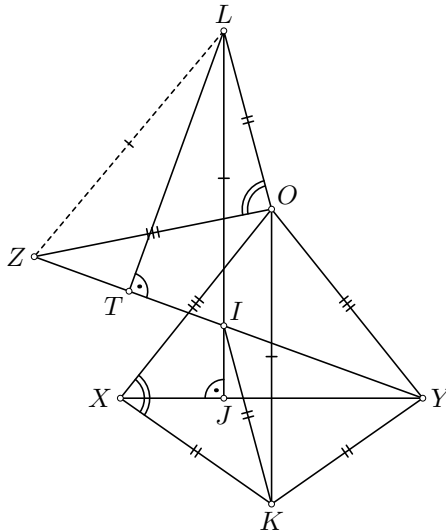
Sposób 2. Oznaczmy sferę opisaną na czworościanie $IBCD$ przez σ , a jej środek przez K . Sfery s i σ przecinają się wzdłuż okręgu opisanego na trójkącie BCD . Oznaczmy ten okrąg przez o . Niech O będzie środkiem sfery s . Rozważmy płaszczyznę π przechodzącą przez punkty I , O , K (może zdarzyć się, że takich płaszczyzn jest wiele (gdy punkty I , O , K są współliniowe) — wtedy rozważamy dowolną z nich). Ta płaszczyzna jest prostopadła do płaszczyzny BCD , gdyż zawiera prostą OK , która jest prostopadła do płaszczyzny BCD . Niech X , Y będą punktami przecięcia π z o . Niech J będzie rzutem prostokątnym I na ścianę BCD . Niech Z będzie drugim punktem przecięcia prostej IY ze sferą s . Zauważmy, że punkty O , I , J , K , X , Y , Z leżą na płaszczyźnie π , J jest rzutem prostokątnym I na XY , punkty X , I , Y leżą na okręgu będącym

przecięciem π ze sferą σ (ten okrąg ma więc środek K), a punkty X, Y, Z leżą na okręgu będącym przecięciem π z s (ten okrąg ma więc środek O). Z zależności między kątami środkowym i wpisanym opartymi na tym samym łuku mamy $\sphericalangle ZOX = 2\sphericalangle ZYX = 2\sphericalangle IYX = \sphericalangle IKX$. Niech L będzie takim punktem, że czworokąt $KILO$ jest równoległobokiem. Zauważmy, że

$$\begin{aligned}\sphericalangle LOZ &= \sphericalangle LOK - \sphericalangle ZOX - \sphericalangle XOK = \\ &= 180^\circ - \sphericalangle OKI - \sphericalangle IKX - \sphericalangle XOK = \\ &= \sphericalangle KXO.\end{aligned}$$

Ponadto $LI = OK$ i $OL = KI = KX$. Z cechy przystawania bok-kąt-bok wynika, że trójkąty LOZ i KXO są przystające. W szczególności $LZ = OX$. Niech T będzie środkiem odcinka IZ . Wtedy trójkąt ITL jest prostokątny, bo $LZ = LI$. Trójkąty prostokątne LIT , IYJ są podobne, bo ich kąty przy wierzchołku I są równe (kąty wierzchołkowe). Stąd $\frac{LI}{IT} = \frac{IY}{IJ}$ i wobec tego

$$OK = LI = \frac{IT \cdot IY}{IJ} = \frac{IY \cdot IZ}{2IJ}.$$



Analogicznie, oznaczmy sferę opisaną na czworościanie $IABC$ przez σ' , jej środek przez K' , płaszczyznę przechodzącą przez punkty O, I, K' przez π' , okrąg przecięcia sfer s i σ' przez o' , punkty przecięcia π' z o' przez X', Y' , przecięcie IY' z s przez Z' oraz rzut I na ścianę ABC przez J' . Powtarzając powyższy argument otrzymujemy wzór

$$OK' = \frac{IY' \cdot IZ'}{2IJ'}.$$

Jednakże $IY \cdot IZ = IY' \cdot IZ'$ na mocy twierdzenia o siecznych, oraz $IJ = IJ'$, gdyż oba te odcinki mają taką samą długość jak promień sfery wpisanej w czworokąt $ABCD$. To pokazuje, że $OK = OK'$. Analogicznie dowodzimy, że środki sfer opisanych na czworokątach $ICDA$, $IDAB$ leżą w odległości OK od punktu O . To dowodzi tezy zadania.

Uwaga. Długość odcinka OK można obliczyć w inny sposób. Przyjmijmy oznaczenia punktów jak w rozwiązaniu i niech M będzie środkiem odcinka XY . Niech $IJ = r$ i $OX = R$. Z twierdzenia Pitagorasa wynika, że

$$\begin{aligned}OI^2 &= JM^2 + (OM - IJ)^2 \\JM^2 + (MK + IJ)^2 &= IK^2 \\OM^2 + MX^2 &= OX^2 \\KX^2 &= XM^2 + KM^2\end{aligned}$$

Po dodaniu stronami tych równości i skróceniu równych składników występujących po obu stronach otrzymujemy zależność

$$2rTK + OI^2 = R^2 - 2rOT,$$

z której wynika, że $OK = \frac{R^2 - OI^2}{2r}$.



LXXV Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia drugiego

9 lutego 2024 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Rozstrzygnąć, czy istnieje taka liczba wymierna x_1 , że wszystkie wyrazy ciągu $x_1, x_2, \dots, x_{2024}$ spełniającego warunek

$$x_{n+1} = x_n + \sqrt{x_n^2 - 1} \quad \text{dla } n = 1, 2, \dots, 2023$$

są większe od 1 i wymierne.

2. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym kąty przy wierzchołkach B i D mają miarę 120° . Punkt E leży na odcinku AD , przy czym $AE \cdot BC = AB \cdot DE$. Punkt F leży na odcinku BC , przy czym $BF \cdot CD = AD \cdot FC$. Udowodnić, że proste BE i DF są równoległe.

3. Dana jest liczba całkowita $n \geq 2$. W Matlandii jest $2n$ miast $M_1, M_2, \dots, M_{2n}$. Król chce wybudować sieć dróg umożliwiających przejazd z każdego miasta do każdego innego (potencjalnie przejeżdżając przez inne miasta). Obecnie istnieją tylko drogi łączące M_1 z $M_2, M_3, \dots, M_n$. Koszt budowy nowej drogi pomiędzy miastami M_i, M_j wynosi $k_{i,j} > 0$. Oznaczmy

$$K = \sum_{j=n+1}^{2n} k_{1,j} + \sum_{2 \leq i < j \leq 2n} k_{i,j}.$$

Udowodnić, że król może zrealizować swój plan kosztem nie większym od $\frac{2K}{3n-1}$.

Uwaga. Wszystkie drogi są dwukierunkowe.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podeście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.

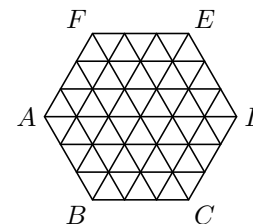


LXXV Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia drugiego

10 lutego 2024 r. (drugi dzień zawodów)

4. Dana jest dodatnia liczba całkowita n . Plansza w kształcie sześciokąta foremnego $ABCDEF$ o boku długości n składa się z $6n^2$ pól w kształcie trójkąta równobocznego o boku 1. (Rysunek przedstawia planszę dla $n = 3$.) Na planszy ustawiono $3n^2$ rombów o boku długości 1 i kątach wewnętrznych 60° i 120° w taki sposób, że każdy romb całkowicie przykrywa dwa pola planszy i każde pole jest przykryte przez dokładnie jeden romb. Udowodnić, że przekątna AD dzieli na pół dokładnie n rombów.



5. Liczby dodatnie a, b, c, x, y, z spełniają równość

$$5a + 4b + 3c = 5x + 4y + 3z.$$

Udowodnić, że

$$\frac{a^5}{x^4} + \frac{b^4}{y^3} + \frac{c^3}{z^2} \geq x + y + z.$$

6. Dana jest liczba pierwsza p . Udowodnić, że liczba

$$p \cdot \left(p^2 \cdot \frac{p^{p-1} - 1}{p - 1} \right)!$$

jest podzielna przez $p! \cdot (p^2)! \cdot (p^3)! \cdot \dots \cdot (p^{p-1})! \cdot (p^p)!$.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podeście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.



LXXV Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia drugiego

1. Rozstrzygnąć, czy istnieje taka liczba wymierna x_1 , że wszystkie wyrazy ciągu $x_1, x_2, \dots, x_{2024}$ spełniającego warunek

$$x_{n+1} = x_n + \sqrt{x_n^2 - 1} \quad \text{dla } n = 1, 2, \dots, 2023$$

są większe od 1 i wymierne.

Autor zadania: Mariusz Skalba

Rozwiązanie: Udowodnimy, że istnieje taka liczba. Ciąg $x_1, x_2, \dots, x_{2024}$ konstruujemy „od tyłu”: niech $x_{2024} = 2$ oraz

$$x_n = \frac{x_{n+1}^2 + 1}{2x_{n+1}} \quad \text{dla } n = 2023, 2022, \dots, 1.$$

Z określenia ciągu wprost wynika, że liczby $x_{2024}, x_{2023}, \dots, x_2, x_1$ są wymierne. Udowodnimy przez indukcję, że $x_n > 1$ dla dowolnego n . Mamy $x_{2024} = 2 > 1$ oraz dla dowolnego $n = 2023, 2022, \dots, 1$

$$x_n - 1 = \frac{x_{n+1}^2 + 1}{2x_{n+1}} - 1 = \frac{x_{n+1}^2 + 1 - 2x_{n+1}}{2x_{n+1}} = \frac{(x_{n+1} - 1)^2}{2x_{n+1}} > 0.$$

Pozostaje sprawdzić, że spełniony jest wzór z treści zadania. Mamy dla dowolnego $n = 1, 2, \dots, 2023$

$$\begin{aligned} x_n^2 - 1 &= \left(\frac{x_{n+1}^2 + 1}{2x_{n+1}} \right)^2 - 1 = \frac{x_{n+1}^4 + 2x_{n+1}^2 + 1}{4x_{n+1}^2} - 1 = \\ &= \frac{x_{n+1}^4 - 2x_{n+1}^2 + 1}{4x_{n+1}^2} = \left(\frac{x_{n+1}^2 - 1}{2x_{n+1}} \right)^2, \end{aligned}$$

zatem

$$x_n + \sqrt{x_n^2 - 1} = \frac{x_{n+1}^2 + 1}{2x_{n+1}} + \frac{x_{n+1}^2 - 1}{2x_{n+1}} = x_{n+1}.$$

Uwaga. Wzór dany w treści zadania można zinterpretować tak: x_{n+1} jest jednym z pierwiastków równania kwadratowego $x^2 - 2x_n x + 1 = 0$, co prowadzi do równości $x_n = \frac{x_{n+1}^2 + 1}{2x_{n+1}}$. Ten związek można wyprowadzić „bez zgadywania” np. w następujący sposób:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n + \sqrt{x_n^2 - 1} \\x_{n+1} - x_n &= \sqrt{x_n^2 - 1} \\x_{n+1}^2 - 2x_{n+1}x_n + x_n^2 &= x_n^2 - 1 \\2x_{n+1}x_n &= x_{n+1}^2 + 1 \\x_n &= \frac{x_{n+1}^2 + 1}{2x_{n+1}}\end{aligned}$$

2. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym kąty przy wierzchołkach B i D mają miarę 120° . Punkt E leży na odcinku AD , przy czym $AE \cdot BC = AB \cdot DE$. Punkt F leży na odcinku BC , przy czym $BF \cdot CD = AD \cdot FC$. Udowodnić, że proste BE i DF są równoległe.

Autor zadania: Emil Łasocha

Rozwiązanie: Niech dwusieczna kąta ABC przecina AC w punkcie G . Wykorzystując założenie i twierdzenie o dwusiecznej dostajemy

$$\frac{AE}{ED} = \frac{AB}{BC} = \frac{AG}{GC}.$$

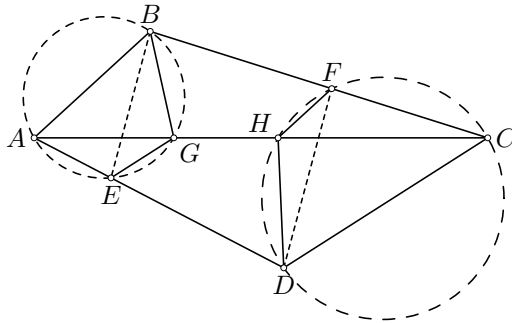
Z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa wynika, że $EG \parallel DC$. W takim razie $\sphericalangle AEG = \sphericalangle ADC = 120^\circ$. Ale $\sphericalangle ABG = \frac{1}{2} \cdot 120^\circ = 60^\circ$, więc przeciwległe kąty czworokąta $ABGE$ sumują się do kąta półpełnego, czyli ten czworokąt można wpisać w okrąg. Analogicznie, niech dwusieczna kąta CDA przecina AC w H . Wtedy

$$\frac{BF}{FC} = \frac{AD}{DC} = \frac{AH}{HC},$$

więc $FH \parallel AB$, $\sphericalangle HFC = \sphericalangle ABC = 120^\circ$, $\sphericalangle CDH = \frac{1}{2} \cdot 120^\circ = 60^\circ$ i czworokąt $CDHF$ jest wpisany w okrąg. Stąd

$$\sphericalangle BEA = \sphericalangle BGA = 60^\circ + \sphericalangle BCA = 60^\circ + \sphericalangle FDH = \sphericalangle FDA,$$

skąd $BE \parallel FD$.



3. Dana jest liczba całkowita $n \geq 2$. W Matlandii jest $2n$ miast $M_1, M_2, \dots, M_{2n}$. Król chce wybudować sieć dróg umożliwiającą przejazd z każdego miasta do każdego innego. Obecnie istnieją tylko drogi łączące M_1 z $M_2, M_3, \dots, M_n$. Koszt budowy nowej drogi pomiędzy miastami M_i, M_j wynosi $k_{i,j} > 0$. Oznaczmy

$$K = \sum_{j=n+1}^{2n} k_{1,j} + \sum_{2 \leq i < j \leq 2n} k_{i,j}.$$

Udowodnić, że król może zrealizować swój plan kosztem nie większym od $\frac{2K}{3n-1}$.

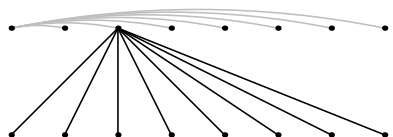
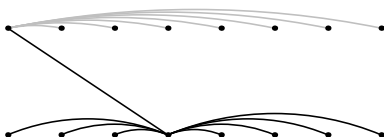
Uwaga. Wszystkie drogi są dwukierunkowe.

Autor zadania: Adam Trzaskowski

Rozwiązanie: Zauważmy, że $K = K_0 + K_1 + K_2$, gdzie

$$K_0 = \sum_{2 \leq i < j \leq n} k_{i,j}, \quad K_1 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=n+1}^{2n} k_{i,j}, \quad K_2 = \sum_{n+1 \leq i < j \leq 2n} k_{i,j}.$$

Rozważmy następujące plany budowy nowych dróg. Dla dowolnego i ze zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ plan A_i zakłada budowę drogi pomiędzy M_1 i M_{n+i} oraz dróg pomiędzy M_{n+i} do wszystkich miast M_{n+j} dla $j \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{i\}$. Plan B_i zakłada budowę dróg pomiędzy M_i i wszystkimi miastami M_{n+j} dla $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.



Oznaczmy koszt budowy dróg w planie P przez $k(P)$. Wówczas dla dowolnego $i \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$k(A_i) = k_{1,n+i} + \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} k_{n+i,n+j}$$

oraz

$$k(B_i) = \sum_{j=n+1}^{2n} k_{i,j}.$$

Wobec tego

$$\sum_{i=1}^n k(A_i) + k(B_1) + 2 \sum_{i=2}^n k(B_i) = 2(K_1 + K_2),$$

gdyż droga pomiędzy M_1 i M_{n+i} pojawia się tylko w planach A_i i B_1 , droga pomiędzy M_i i M_{n+j} pojawia się tylko w planie B_i , a droga pomiędzy M_{n+i} i M_{n+j} pojawia się tylko w planach A_i i A_j .

Gdyby $k(A_i) > \frac{2K}{3n-1}$ i $k(B_i) > \frac{2K}{3n-1}$ dla każdego $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, to otrzymalibyśmy następującą sprzeczność:

$$\begin{aligned} 2(K_1 + K_2) &= \sum_{i=1}^n k(A_i) + k(B_1) + 2 \sum_{i=2}^n k(B_i) > \\ &> \sum_{i=1}^n \frac{2K}{3n-1} + \frac{2K}{3n-1} + 2 \sum_{i=2}^n \frac{2K}{3n-1} = \\ &= (3n-1) \cdot \frac{2K}{3n-1} = 2K. \end{aligned}$$

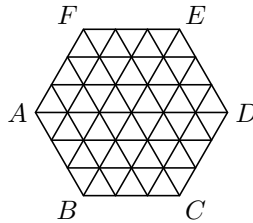
W takim razie dla pewnego $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ mamy $k(A_i) \leq \frac{2K}{3n-1}$ lub $k(B_i) \leq \frac{2K}{3n-1}$, co kończy dowód.



LXXV Olimpiada Matematyczna

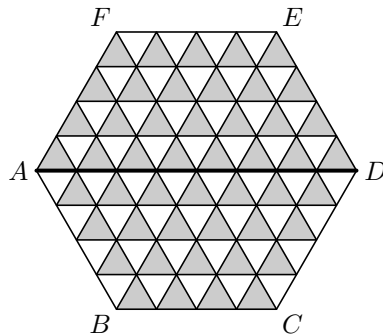
Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia drugiego

4. Dana jest dodatnia liczba całkowita n . Plansza w kształcie sześciokąta foremnego $ABCDEF$ o boku długości n składa się z $6n^2$ pól w kształcie trójkąta równobocznego o boku 1. (Rysunek przedstawia planszę dla $n = 3$.) Na planszy ustawiono $3n^2$ rombów o boku długości 1 i kątach wewnętrznych 60° i 120° w taki sposób, że każdy romb całkowicie przykrywa dwa pola planszy i każde pole jest przykryte przez dokładnie jeden romb. Udowodnić, że przekątna AD dzieli na pół dokładnie n rombów.



Autor zadania: Łukasz Bożyk

Rozwiązanie: Pomalujmy pola na biało i czarno w szachownicę jak na rysunku.



Niech k będzie liczbą rombów połowionych przez przekątną AD , a ℓ — liczbą rombów zawartych wewnątrz trapezu $ADEF$. Każdy romb połowiony przez przekątną AD przykrywa dokładnie jedno czarne pole wewnątrz trapezu $ADEF$ i ani jednego białego. Każdy romb zawarty wewnątrz trapezu $ADEF$ przykrywa po jednym białym polu i jednym czarnym polu w tym trapezie. Zatem w tym trapezie jest $k + \ell$ czarnych pól oraz ℓ białych pól.

Zliczając liczbę białych pól w kolejnych rzędach widzimy, że liczba białych pól w trapezie $ADEF$ jest równa

$$\ell = n + (n + 1) + \dots + (2n - 1) = \frac{n(3n - 1)}{2}.$$

Pozostałe pola w tym trapezie są czarne; jest ich zatem

$$k + \ell = 3n^2 - \frac{n(3n - 1)}{2} = \frac{n(3n + 1)}{2}.$$

Wobec tego

$$k = (k + \ell) - \ell = \frac{n(3n + 1)}{2} - \frac{n(3n - 1)}{2} = n,$$

co było do udowodnienia.

5. Liczby dodatnie a, b, c, x, y, z spełniają równość

$$5a + 4b + 3c = 5x + 4y + 3z.$$

Udowodnić, że

$$\frac{a^5}{x^4} + \frac{b^4}{y^3} + \frac{c^3}{z^2} \geq x + y + z.$$

Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie: Z nierówności między średnimi dostajemy

$$\begin{aligned} \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{a^5}{x^4} + x + x + x + x \right) &\geq \sqrt[5]{\frac{a^5}{x^4} \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x} = a, \\ \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{b^4}{y^3} + y + y + y \right) &\geq \sqrt[4]{\frac{b^4}{y^3} \cdot y \cdot y \cdot y} = b, \\ \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{c^3}{z^2} + z + z \right) &\geq \sqrt[3]{\frac{c^3}{z^2} \cdot z \cdot z} = c, \end{aligned}$$

skąd wynika, że

$$\frac{a^5}{x^4} \geq 5a - 4x, \quad \frac{b^4}{y^3} \geq 4b - 3y, \quad \frac{c^3}{z^2} \geq 3c - 2z.$$

Po dodaniu stronami tych nierówności i wykorzystaniu równości danej w treści zadania $5a + 4b + 3c = 5x + 4y + 3z$ otrzymujemy

$$\frac{a^5}{x^4} + \frac{b^4}{y^3} + \frac{c^3}{z^2} \geq 5a + 4b + 3c - (4x + 3y + 2z) = x + y + z.$$

6. Dana jest liczba pierwsza p . Udowodnić, że liczba

$$p \cdot \left(p^2 \cdot \frac{p^{p-1} - 1}{p - 1} \right)!$$

jest podzielna przez $p! \cdot (p^2)! \cdot (p^3)! \cdot \dots \cdot (p^{p-1})! \cdot (p^p)!$.

Autor zadania: Grzegorz Dłużewski

Rozwiązanie: Najpierw obliczymy dla dowolnej liczby pierwszej q i dowolnej dodatniej liczby całkowitej n , jaki jest największy wykładnik m , dla którego $n!$ dzieli się przez q^m . Największy taki wykładnik oznaczmy przez $f(q, n)$. Symbolem $\lfloor x \rfloor$ będziemy oznaczać część całkowitą liczby x , tzn. największą liczbą całkowitą nieprzekraczającą x . Niech ℓ będzie największą liczbą całkowitą spełniającą nierówność $q^\ell \leq n$. Zauważmy, że dla dowolnego $k = 1, 2, \dots, \ell$ pośród liczb $1, 2, 3, \dots, n$ liczbami podzielnymi przez q^k są

$$q^k, 2q^k, \dots, \left\lfloor \frac{n}{q^k} \right\rfloor q^k.$$

Zauważmy też, że żadna z liczb $1, 2, \dots, n$ nie dzieli się przez q^k gdy $k > \ell$. Wynika stąd, że

$$f(q, n) = \sum_{k=1}^{\ell} \left\lfloor \frac{n}{q^k} \right\rfloor$$

Zauważmy też, że w powyższym wzorze można zamienić liczbę ℓ na dowolną liczbę większą od ℓ , bo $\left\lfloor \frac{n}{q^k} \right\rfloor = 0$ dla $k > \ell$.

Przejdźmy do rozwiązania zadania. Oznaczmy $n = p^2 \cdot \frac{p^{p-1}-1}{p-1}$ oraz $A = p! \cdot (p^2)! \cdot (p^3)! \cdot \dots \cdot (p^{p-1})! \cdot (p^p)!$. Należy udowodnić, że dla dowolnej liczby pierwszej q liczba q wchodzi w rozkład na czynniki pierwsze liczby A nie więcej razy niż występuje w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby $p \cdot n!$, czyli że

$$\sum_{i=1}^p f(p, p^i) \leq 1 + f(p, n)$$

oraz

$$\sum_{i=1}^p f(q, p^i) \leq f(q, n)$$

gdy $q \neq p$.

Najpierw wykazemy, że w pierwszej nierówności tak naprawdę zachodzi równość. Mamy

$$f(p, p^i) = \sum_{k=1}^i \left\lfloor \frac{p^i}{p^k} \right\rfloor = \sum_{k=1}^i p^{i-k} = \sum_{k=0}^{i-1} p^k = \frac{p^i - 1}{p - 1}$$

dla dowolnego $i = 1, 2, \dots, p$. Ponadto

$$\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{p^2(p^{p-1} - 1)}{(p-1)p} \right\rfloor = p \cdot \frac{p^{p-1} - 1}{p-1} = \frac{p^p - 1}{p-1} - 1,$$

a dla $2 \leq i \leq p$ mamy

$$\left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{p^2(p^{p-1} - 1)}{(p-1)p^i} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{p^{p+1-i} - 1}{p-1} + \frac{p^{i-2} - 1}{(p-1)p^{i-2}} \right\rfloor = \frac{p^{p+1-i} - 1}{p-1}.$$

Wobec tego

$$\begin{aligned} 1 + f(p, n) &= 1 + \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \sum_{i=2}^p \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor = \sum_{i=1}^p \frac{p^{p+1-i} - 1}{p-1} = \sum_{i=1}^p \frac{p^i - 1}{p-1} = \\ &= \sum_{i=1}^p f(p, p^i). \end{aligned}$$

Rozważmy teraz liczbę pierwszą $q \neq p$. Ponieważ dla dowolnego $i = 1, 2, \dots, p$ liczba p^i nie dzieli się przez q , więc $f(q, p^i) = f(q, p^i - 1)$. Ze wzoru na sumę ciągu geometrycznego wynika, że

$$n = \sum_{i=2}^p p^i = \sum_{i=1}^p p^i - p = \sum_{i=1}^p (p^i - 1).$$

Oczywiście $n > p^i - 1$ dla $i = 1, 2, 3, \dots, p$. Wybierzmy liczbę M tak dużą, że $q^M > n$. Mamy, zgodnie z uwagą poczynioną na końcu pierwszego akapitu rozwiązania,

$$\sum_{i=1}^p f(q, p^i) = \sum_{i=1}^p f(q, p^i - 1) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^M \left\lfloor \frac{p^i - 1}{q^j} \right\rfloor = (*)$$

Zmieniając kolejność sumowania oraz wykorzystując wielokrotnie nierówność $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor$ (nierówność ta wynika stąd, że $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$ jest liczbą całkowitą nieprzekraczającą $x + y$) dostajemy

$$(*) = \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^p \left\lfloor \frac{p^i - 1}{q^j} \right\rfloor \leq \sum_{j=1}^M \left\lfloor \frac{\sum_{i=1}^p (p^i - 1)}{q^j} \right\rfloor = f \left(q, \sum_{i=1}^p (p^i - 1) \right) = f(q, n).$$

Uwaga. Dla dowolnych dodatnich liczb całkowitych $k_1, k_2, \dots, k_n$ o sumie k liczbę podziałów zbioru k -elementowego na zbiory $A_1, A_2, \dots, A_n$ licznosci odpowiednio $k_1, k_2, \dots, k_n$ oznacza się symbolem $\binom{k}{k_1, k_2, \dots, k_n}$. Nietrudno obliczyć, że

$$\binom{k}{k_1, k_2, \dots, k_n} = \frac{k!}{k_1! k_2! \dots k_n!}.$$

W zadaniu należy udowodnić, że liczba

$$A := \frac{p \cdot \left(p^2 \cdot \frac{p^{p-1}-1}{p-1} \right)!}{p! \cdot (p^2)! \cdot (p^3)! \cdot \dots \cdot (p^{p-1})! \cdot (p^p)!}$$

jest całkowita.

Ponieważ $n = \sum_{i=1}^p (p^i - 1)$, więc liczba

$$B := \binom{n}{p-1, p^2-1, \dots, p^p-1} = \frac{n}{(p-1)!(p^2-1)! \dots (p^p-1)!}$$

jest całkowita. Z drugiej strony $n = \sum_{i=2}^p p^i$, więc liczba

$$C := \binom{n}{p^2, p^3, \dots, p^p}$$

jest całkowita. Zauważmy, że

$$\frac{B}{p^{(p-1)(p+2)/2}} = A = \frac{C}{(p-1)!}.$$

Z pierwszej równości wynika, że mianownik liczby wymiernej A zapisanej w postaci ułamka nieskracalnego jest potęgą liczby pierwszej p , a z drugiej równości wynika, że ten mianownik jest niepodzielny przez p . Ów mianownik jest więc równy 1, wobec czego A jest liczbą całkowitą.



LXXV Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia trzeciego

3 kwietnia 2024 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Dany jest prostokąt $ABCD$ i punkt X leżący w jego wnętrzu. Dwusieczne kątów DAX oraz CBX przecinają się w punkcie P . Punkt Q spełnia równości $\sphericalangle QAP = \sphericalangle QBP = 90^\circ$. Udowodnić, że $PX = QX$.

2. Dana jest dodatnia liczba całkowita n . Bolek rysuje $2n$ punktów na płaszczyźnie, z których żadne dwa nie wyznaczają prostej pionowej ani poziomej. Następnie Lolek dla każdego z tych $2n$ punktów rysuje dwie półproste o początku w tym punkcie, z których jedna jest pionowa, a druga pozioma. Lolek chce zrobić to w taki sposób, by narysowane półproste podzieliły płaszczyznę na jak najwięcej obszarów. Wyznaczyć największą liczbę całkowitą k taką, że Lolek może uzyskać co najmniej k obszarów niezależnie od położenia punktów narysowanych przez Bolka.

3. Wyznaczyć wszystkie pary liczb pierwszych (p, q) o następującej własności: istnieją dodatnie liczby całkowite a, b, c spełniające równości

$$\frac{p}{a} + \frac{p}{b} + \frac{p}{c} = 1 \quad \text{oraz} \quad \frac{a}{p} + \frac{b}{p} + \frac{c}{p} = q + 1.$$

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejsie dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielnosci pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.



LXXV Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia trzeciego

4 kwietnia 2024 r. (drugi dzień zawodów)

4. Rozstrzygnąć, czy istnieją liczby rzeczywiste a, b, c , dla których układ równań

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ x^2 + y^2 + z^2 = b \\ x^4 + y^4 + z^4 = c \end{cases}$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach rzeczywistych x, y, z .

5. Dana jest liczba całkowita $n \geq 2024$ i ciąg liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \dots, a_{n^2}$ spełniający warunki

$$|a_k - a_{k-1}| \leq \frac{1}{k} \quad \text{oraz} \quad |a_1 + a_2 + \dots + a_k| \leq 1$$

dla $k = 2, 3, \dots, n^2$. Wykazać, że

$$|a_{n(n-1)}| \leq \frac{2}{n}.$$

Uwaga. Dowód nierówności $|a_{n(n-1)}| \leq \frac{75}{n}$ będzie nagradzany dwoma punktami.

6. Dany jest równoległobok $ABCD$. Punkt X leży w jego wnętrzu poza przekątną AC i spełnia równości $\sphericalangle AXB = \sphericalangle CXD = 90^\circ$. Oznaczmy okrąg opisany na trójkącie AXC przez Ω . Punkty E i F leżą na okręgu Ω w taki sposób, że odcinek EF jest jego średnicą, punkty E, X, B nie są współliniowe oraz punkty F, X, D nie są współliniowe. Załóżmy, że okręgi opisane na trójkątach BXE i DXF przecinają się w punkcie $K \neq X$ oraz że $L \neq X$ jest takim punktem na Ω , że $\sphericalangle KXL = 90^\circ$. Udowodnić, że $KL = AB$.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejsie dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielnosci pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.



LXXV Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia trzeciego

1. Dany jest prostokąt $ABCD$ i punkt X leżący w jego wnętrzu. Dwusieczne kątów DAX oraz CBX przecinają się w punkcie P . Punkt Q spełnia równości $\sphericalangle QAP = \sphericalangle QBP = 90^\circ$. Udowodnić, że $PX = QX$.

Autor zadania: Daniel Goc

Rozwiązanie: Oznaczmy $\sphericalangle PAD = \varphi$ i $\sphericalangle CBP = \psi$. Mamy $\sphericalangle BAP = 90^\circ - \varphi$ i $\sphericalangle PBA = 90^\circ - \psi$, więc $\sphericalangle APB = 180^\circ - \sphericalangle BAP - \sphericalangle PBA = \varphi + \psi$. Ponieważ $\sphericalangle QAP = \sphericalangle PBQ = 90^\circ$, więc odcinek PQ jest średnicą okręgu opisanego na trójkącie ABP . Oznaczmy środek tego okręgu przez R . Wtedy R jest środkiem odcinka PQ . Jeśli $X = R$, to teza zachodzi. Od teraz przyjmijmy, że $X \neq R$ i przyjmijmy bez straty ogólności, że X leży po tej samej stronie prostej PQ co A . Wystarczy udowodnić, że $\sphericalangle XRQ = 90^\circ$, gdyż wyniknie stąd, że X leży na symetralnej odcinka PQ .

Z zależności między kątem wpisanym i kątem środkowym opartymi na tym samym łuku otrzymujemy $\sphericalangle ARB = 2\sphericalangle APB = 2\varphi + 2\psi$. Z drugiej strony

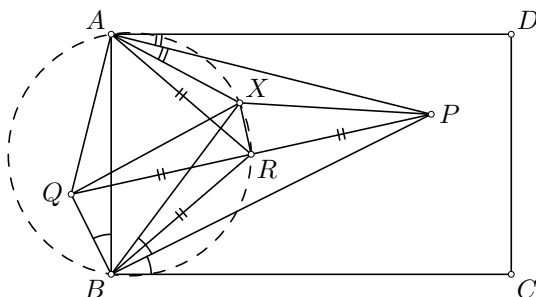
$$\begin{aligned}\sphericalangle AXB &= 180^\circ - \sphericalangle BAX - \sphericalangle XBA = \\ &= 180^\circ - (90^\circ - 2\varphi) - (90^\circ - 2\psi) = 2\varphi + 2\psi.\end{aligned}$$

Zatem $\sphericalangle AXB = \sphericalangle ARB$, więc punkty A, X, R, B leżą na jednym okręgu.

Mamy $\sphericalangle ABQ = 90^\circ - \sphericalangle PBA = \sphericalangle CBP = \psi$. W takim razie

$$\sphericalangle XRQ = \sphericalangle XRA + \sphericalangle ARQ = \sphericalangle XBA + 2\sphericalangle ABQ = 90^\circ - 2\psi + 2\psi = 90^\circ,$$

co kończy dowód.



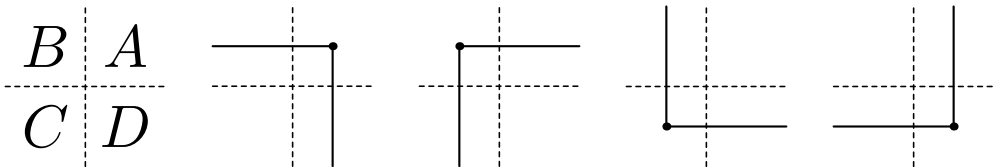
2. Dana jest dodatnia liczba całkowita n . Bolek rysuje $2n$ punktów na płaszczyźnie, z których żadne dwa nie wyznaczają prostej pionowej ani poziomej. Następnie Lolek dla każdego z tych $2n$ punktów rysuje dwie półproste o początku w tym punkcie, z których jedna jest pionowa, a druga pozioma. Lolek chce zrobić to w taki sposób, by narysowane półproste podzieliły płaszczyznę na jak najwięcej obszarów. Wyznaczyć największą liczbę całkowitą k taką, że Lolek może uzyskać co najmniej k obszarów niezależnie od położenia punktów wybranego przez Bolka.

Autor zadania: Łukasz Bożyk

Rozwiązanie: Parę półprostych o wspólnym początku, z których jedna jest pionowa, a druga pozioma, nazywać będziemy *elką*. Uzasadnimy najpierw, że po narysowaniu ℓ elek, które wyznaczają parami różne proste, liczba obszarów, na które została podzielona płaszczyzna jest o $\ell + 1$ większa niż liczba punktów przecięcia elek. Jeśli nie narysowano ani jednej elki, to mamy zero punktów przecięcia elek oraz jeden obszar. Ponadto dorysowanie każdej kolejnej elki powiększa liczbę obszarów o jeden więcej niż liczbę punktów przecięcia elek. Stąd wynika, że po narysowaniu ℓ elek liczba obszarów jest o $\ell + 1$ większa od liczby punktów przecięcia elek.

Udowodnimy, że odpowiedzią na pytanie postawione w treści zadania jest $k = 2n^2 + 2n + 1$. Zgodnie z obserwacją poczynioną w poprzednim akapicie wystarczy udowodnić, że $k' = 2n^2$ jest największą taką liczbą, że niezależnie od położenia punktów narysowanych przez Bolka, Lolek może uzyskać co najmniej k' punktów przecięcia elek.

Niech S będzie zbiorem punktów wybranych przez Bolka. Niech O będzie takim punktem, że prosta pozioma przechodząca przez O rozcina płaszczyznę na dwie półpłaszczyzny, z których każda zawiera po n punktów ze zbioru S oraz prosta pionowa przechodząca przez O również ma tę własność. Te dwie proste dzielą płaszczyznę na cztery ćwiartki, które oznaczymy tak jak na rysunku.



Udowodnimy, że jeśli Lolek narysuje półproste pionowe w dół dla punktów w ćwiartkach A i B , półproste pionowe w górę dla punktów w ćwiartkach C i D , półproste poziome w prawo dla punktów w ćwiartkach B i C oraz półproste poziome w lewo dla punktów w ćwiartkach A i D , to uzyska on co

najmniej $2n^2$ punktów przecięcia. Załóżmy, że w ćwiartce A znajduje się a punktów ze zbioru S . Wówczas w ćwiartkach B i D znajduje się po $n - a$ punktów ze zbioru S , a w ćwiartce C znajduje się a punktów ze zbioru S . Zauważmy, że:

- dowolne dwie elki wyznaczone przez parę punktów w przeciwległych ćwiartkach przecinają się w dokładnie dwóch punktach,
- dowolne dwie elki wyznaczone przez parę punktów w sąsiadujących ćwiartkach przecinają się w dokładnie jednym punkcie.

Mamy dwie pary przeciwległych ćwiartek: (A, C) oraz (B, D) . Wyznaczają one łącznie $2a^2 + 2(n - a)^2$ punktów przecięcia. Mamy cztery pary sąsiadujących ćwiartek: (A, B) , (B, C) , (C, D) oraz (D, A) . Każda z nich wyznacza $a(n - a)$ punktów przecięcia. Zatem liczba punktów przecięcia wszystkich elek wynosi co najmniej

$$2a^2 + 2(n - a)^2 + 4a(n - a) = 2(a + (n - a))^2 = 2n^2.$$

Teraz wykażemy, że jeśli Bolek narysuje punkty o współrzędnych

$$(1, 1), (2, 2), (3, 3), \dots, (2n, 2n),$$

to Lolek może uzyskać co najwyżej $2n^2$ punktów przecięcia elek. Podzielmy zbiór elek narysowanych przez Lolka na cztery zbiory: niech A będzie zbiorem elek skierowanych w lewo i w dół, B zbiorem elek skierowanych w prawo i w dół, C zbiorem elek skierowanych w prawo i w górę, a D zbiorem elek skierowanych w lewo i w górę. Zauważmy, że:

- każde dwie elki ze zbioru A są rozłączne,
- każde dwie elki ze zbioru B przecinają się w jednym punkcie,
- każde dwie elki ze zbioru C są rozłączne,
- każde dwie elki ze zbioru D przecinają się w jednym punkcie,
- każda elka ze zbioru A przecina każdą elkę ze zbioru $B \cup D$ w co najwyżej jednym punkcie,
- każda elka ze zbioru A przecina każdą elkę ze zbioru C w co najwyżej dwóch punktach,

- każda elka ze zbioru B przecina każdą elkę ze zbioru C w co najwyżej jednym punkcie,
- każda elka ze zbioru B jest rozłączna z każdą elką ze zbioru D ,
- każda elka ze zbioru C przecina każdą elkę ze zbioru D w co najwyżej jednym punkcie.

Oznaczmy moce zbiorów A, B, C, D odpowiednio przez a, b, c, d . Wówczas $a + b + c + d = 2n$, a liczba uzyskanych punktów przecięcia nie przekracza liczby

$$T = \binom{b}{2} + \binom{d}{2} + ab + ad + 2ac + bc + cd.$$

Ponieważ

$$\binom{b}{2} \leq \frac{b^2}{2}, \quad \binom{d}{2} \leq \frac{d^2}{2}, \quad ac \leq \frac{a^2 + c^2}{2}, \quad 0 \leq bd,$$

więc

$$T \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{2} + ab + ac + ad + bc + bd + cd = \frac{(a + b + c + d)^2}{2} = 2n^2,$$

co pokazuje, że Lolek może uzyskać co najwyżej $2n^2$ punktów przecięcia elek.

3. Wyznaczyć wszystkie pary liczb pierwszych (p, q) o następującej własności: istnieją dodatnie liczby całkowite a, b, c spełniające równości

$$\frac{p}{a} + \frac{p}{b} + \frac{p}{c} = 1 \quad \text{oraz} \quad \frac{a}{p} + \frac{b}{p} + \frac{c}{p} = q + 1.$$

Autor zadania: Łukasz Bożyk

Rozwiązanie:

Sposób 1. Załóżmy, że liczby a, b, c, p, q spełniają narzucone warunki. Równania można przepisać w postaci

$$p(ab + bc + ca) = abc \quad \text{oraz} \quad a + b + c = p(q + 1).$$

Z pierwszego równania wynika, że $p \mid abc$. Bez straty ogólności przyjmijmy, że $p \mid a$. Z drugiego równania wynika, że $p \mid b \iff p \mid c$. Rozważmy najpierw przypadek, w którym każda z liczb a, b, c dzieli się przez p . Zapiszmy $a = pd$,

$b = pe$, $c = pf$ dla pewnych dodatnich liczb całkowitych d, e, f . Pierwsze równanie przyjmuje postać $\frac{1}{d} + \frac{1}{e} + \frac{1}{f} = 1$, a drugie $d + e + f = q + 1$. Bez straty ogólności przyjmijmy, że $d \leq e \leq f$. Jeśli $d \geq 3$, to $\frac{1}{d} + \frac{1}{e} + \frac{1}{f} \leq 3 \cdot \frac{1}{d} \leq 1$, więc musi zajść równość $d = e = f = 3$. Wtedy jednak $d + e + f = 9$, skąd $q = 8$ i sprzeczność, bo 8 nie jest liczbą pierwszą. Jeśli $d = 2$, to $\frac{1}{e} + \frac{1}{f} = \frac{1}{2}$, więc $2(e + f) = ef$, czyli $(e - 2)(f - 2) = 4$, skąd $(e, f) = (4, 4)$ lub $(e, f) = (3, 6)$. W pierwszym przypadku $d + e + f = 10$, co daje $q = 9$ i sprzeczność, bo 9 nie jest liczbą pierwszą, a w drugim przypadku $d + e + f = 11$, skąd $q = 10$ i sprzeczność, bo 10 nie jest liczbą pierwszą. Przypadek $d = 1$ daje sprzeczność, bo wtedy $\frac{1}{d} + \frac{1}{e} + \frac{1}{f} > 1$.

Do rozważenia został przypadek, w którym $p \mid a$, $p \nmid b$ i $p \nmid c$. Zapiszmy $a = pd$ i podstawmy do danych równań. Pierwsze równanie przyjmuje postać $pd(b + c) = bc(d - 1)$, z którego wynika, że $p \mid d - 1$. Podstawmy więc $d = pe + 1$ dla pewnej dodatniej liczby całkowitej e . Otrzymujemy $(pe + 1)(b + c) = bce$ oraz $b + c = p(q - pe)$. Z pierwszej równości wynika, że $e \mid b + c$, co w połączeniu z drugą daje $e \mid pq$. Zatem $e \in \{1, p, q, pq\}$. Jeśli $e = 1$, to pierwsze równanie daje $p \mid b$ lub $p \mid c$, wbrew naszemu założeniu. Jeśli $e = q$ lub $e = pq$, to prawa strona równości $b + c = p(q - pe)$ jest ujemna, a lewa jest dodatnia, sprzeczność. Zatem $e = p$. To prowadzi do $d = p^2 + 1$ i $a = p^3 + p$.

Równania przyjmują więc postać $(p^2 + 1)(b + c) = pbc$ i $b + c = p(q - p^2)$. Zauważmy, że

$$q = \frac{b + c}{p} + p^2 = \frac{(b + c)(p^2 + 1)}{p} - (b + c)p + p^2 = bc - (b + c)p + p^2 = (b - p)(c - p).$$

Liczba q jest pierwsza, więc jej jedyne rozkłady na czynniki całkowite to $q = 1 \cdot q = (-1) \cdot (-q)$. Bez straty ogólności przyjmijmy, że $b - p = \pm 1$ i $c - p = \pm q$.

Jeśli $b - p = -1$ i $c - p = -q$, to $b = p - 1$ i $c = p - q$. Zauważmy, że z równania $b + c = p(q - p^2)$ wynika w szczególności, że $q > p^2$. Wtedy $c = p - q < p - p^2 < 0$, co daje sprzeczność. Zatem $b - p = 1$ i $c - p = q$, tj. $b = p + 1$ i $c = p + q$. Mamy

$$\begin{aligned}(p + 1)(p + q) &= (p^2 + 1)(q - p^2) \\ p^2 + pq + p + q &= p^2q - p^4 + q - p^2 \\ p^4 + 2p^2 + p &= (p^2 - p)q \\ p^3 + 2p + 1 &= (p - 1)q \\ (p - 1)(p^2 + p + 3) + 4 &= (p - 1)q\end{aligned}$$

Z powyższej równości wynika, że $p - 1 \mid 4$, skąd $p - 1 \in \{1, 2, 4\}$, czyli $p \in \{2, 3, 5\}$. Dla $p = 2$ obliczamy $q = 13$ i widzimy, że warunki zadania są spełnione dla $a = 10$, $b = 3$ i $c = 15$. Dla $p = 3$ obliczamy $q = 17$, co spełnia warunki dla $a = 30$, $b = 4$ i $c = 20$. Dla $p = 5$ mamy $q = 34$, co nie spełnia warunków, bo 34 nie jest liczbą pierwszą.

Odpowiedź: Jedynymi parami (p, q) spełniającymi warunki zadania są $(2, 13)$ i $(3, 17)$.

Sposób 2. Podobnie jak w sposobie pierwszym zapisujemy równania w postaci

$$p(ab + bc + ca) = abc \quad \text{oraz} \quad a + b + c = p(q + 1).$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} (a - p)(b - p)(c - p) &= abc - (ab + bc + ca)p + (a + b + c)p^2 - p^3 = \\ &= abc - abc + p(q + 1) \cdot p^2 - p^3 = \\ &= p^3 q. \end{aligned}$$

Stąd w szczególności wynika, że liczby a, b, c są różne od p . Zauważmy, że $-p < a - p < a - p + b + c = pq$. Stąd wynika, że liczba $a - p$ nie jest podzielna przez pq . Analogicznie dowodzimy, że $b - p$ i $c - p$ nie są podzielne przez pq . W takim razie z wyżej wyprowadzonego rozkładu liczby $p^3 q$ na czynniki $a - p$, $b - p$, $c - p$ wynika, że jedna z liczb $a - p$, $b - p$, $c - p$ jest równa q lub $-q$. Biorąc dodatkowo pod uwagę to, że liczby $a - p$, $b - p$, $c - p$ są większe od $-p$ zważamy możliwe rozkłady liczby $p^3 q$ do następujących trzech: $q \cdot 1 \cdot p^3$, $q \cdot p \cdot p^2$ i $(-q) \cdot (-1) \cdot p^3$.

W pierwszym przypadku $pq - 2p = (a - p) + (b - p) + (c - p) = q + 1 + p^3$, skąd $q(p - 1) = p^3 + 2p + 1 = (p - 1)(p^2 + p + 3) + 4$. Podobnie jak w ostatnim akapicie pierwszego sposobu rozwiązania dochodzimy do wniosku, że w tym przypadku jedynie pary $(p, q) = (2, 13)$ i $(p, q) = (3, 17)$ spełniają warunki zadania.

W drugim przypadku $pq - 2p = (a - p) + (b - p) + (c - p) = q + p + p^2$, skąd wynika, że $p \mid q$, czyli $q = p$. Wtedy jednak równość $pq - 2p = q + p + p^2$ upraszcza się do $p = 0$ — sprzeczność.

W trzecim przypadku $pq - 2p = (a - p) + (b - p) + (c - p) = -q - 1 + p^3$, więc $q(p + 1) = p^3 + 2p - 1 = (p + 1)(p^2 - p + 3) - 4$, skąd wynika, że $p + 1 \mid 4$. Jediną liczbą pierwszą p taką, że 4 dzieli się przez $p + 1$ jest $p = 3$. Obliczamy stąd $q = 8$, co nie spełnia warunków zadania, bo 8 nie jest liczbą pierwszą.



LXXV Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia trzeciego

4. Rozstrzygnąć, czy istnieją liczby rzeczywiste a, b, c , dla których układ równań zmiennych x, y, z

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ x^2 + y^2 + z^2 = b \\ x^4 + y^4 + z^4 = c \end{cases}$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach rzeczywistych x, y, z .

Autor zadania: Piotr Nayar

Rozwiązanie: Tak, istnieją takie liczby. Połóżmy $a = 0$, $b = 2$, $c = 2$. Niech x będzie dowolną liczbą rzeczywistą z przedziału $(0, 1)$. Dobierzmy y tak, by $x^2 + xy + y^2 = 1$. To jest równanie kwadratowe zmiennej y , którego wyróżnik $\Delta = 4 - 3x^2$ jest dodatni. Jednym z pierwiastków tego równania jest $\frac{-x + \sqrt{4 - 3x^2}}{2}$. Połóżmy więc $y = \frac{-x + \sqrt{4 - 3x^2}}{2}$. Wreszcie, weźmy $z = -x - y$. Wówczas

$$x + y + z = 0,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + (x + y)^2 = 2(x^2 + xy + y^2) = 2,$$

$$xy + yz + zx = \frac{(x + y + z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2)}{2} = -1,$$

$$\begin{aligned} x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 &= (xy + yz + zx)^2 - 2(xy \cdot yz + yz \cdot zx + zx \cdot xy) = \\ &= 1 - 2xyz(x + y + z) = 1, \end{aligned}$$

$$x^4 + y^4 + z^4 = (x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) = 4 - 2 = 2.$$

5. Dana jest liczba całkowita $n \geq 2024$ i ciąg liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \dots, a_n$ spełniający warunki

$$|a_k - a_{k-1}| \leq \frac{1}{k} \quad \text{oraz} \quad |a_1 + a_2 + \dots + a_k| \leq 1$$

dla $k = 2, 3, \dots, n^2$. Wykazać, że

$$|a_{n(n-1)}| \leq \frac{2}{n}.$$

Uwaga. Dowód, że $|a_{n(n-1)}| \leq \frac{75}{n}$ będzie nagradzany dwoma punktami.

Autor zadania: Jacek Jakimiuk

Rozwiązanie: Z założeń wynika, że:

$$\begin{aligned} |a_{n^2-1} - a_{n^2}| &\leq \frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)^2} \\ 2|a_{n^2-2} - a_{n^2-1}| &\leq \frac{2}{n^2-1} < \frac{2}{(n-1)^2} \\ &\vdots \\ n|a_{n^2-n} - a_{n^2-n+1}| &\leq \frac{n}{n^2-n+1} < \frac{n}{(n-1)^2} \\ n|a_{n^2-n} - a_{n^2-n-1}| &\leq \frac{n}{n^2-n} < \frac{n}{(n-1)^2} \\ (n-1)|a_{n^2-n-1} - a_{n^2-n-2}| &\leq \frac{n-1}{n^2-n-1} < \frac{n-1}{(n-1)^2} \\ &\vdots \\ |a_{n^2-2n+1} - a_{n^2-2n}| &\leq \frac{1}{n^2-2n+1} = \frac{1}{(n-1)^2} \end{aligned}$$

Dodając stronami powyższe nierówności i wykorzystując nierówność trójkąta otrzymujemy

$$\begin{aligned} \left| (2n+1)a_{n^2-n} - \sum_{k=n^2-2n}^{n^2} a_k \right| &\leq \\ &\leq \sum_{k=1}^n (k|a_{n^2-k} - a_{n^2-k+1}| + k|a_{n^2-2n+k} - a_{n^2-2n-1+k}|) < \\ &< \left(\sum_{k=1}^n 2k \right) \cdot \frac{1}{(n-1)^2} = \frac{n(n+1)}{(n-1)^2}. \end{aligned}$$

Ponieważ $n \geq 2024$, więc $n(n+1) < 2(n-1)^2$. Z powyższych nierówności,

z założeń i z nierówności trójkąta wynika, że

$$\begin{aligned} |(2n+1)a_{n^2-n}| &\leq \left| (2n+1)a_{n^2-n} - \sum_{k=n^2-2n}^{n^2} a_k \right| + \left| \sum_{k=1}^{n^2-2n-1} a_k \right| + \left| \sum_{k=1}^{n^2} a_k \right| < \\ &< \frac{n(n+1)}{(n-1)^2} + 1 + 1 < \frac{2(n-1)^2}{(n-1)^2} + 2 = 4. \end{aligned}$$

Stąd

$$|a_{n^2-n}| < \frac{4}{2n+1} < \frac{2}{n}.$$

Uwaga. W powyższym rozwiązaniu wykazano, że $|a_{n^2-n}| \leq \frac{1}{2n+1} \cdot \left(\frac{n(n+1)}{(n-1)^2} + 2 \right)$.

Dla dużych n liczba $x_n = \frac{1}{2n+1} \cdot \left(\frac{n(n+1)}{(n-1)^2} + 2 \right)$ jest bardzo bliska $\frac{3}{2n}$. Ściślej rzecz ujmując, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{1/n} = \frac{3}{2}$. Nasuwa się pytanie, czy można znaleźć taki ciąg $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ oraz stałą $c < \frac{3}{2}$, że $|a_{n^2-n}| \leq y_n$ dla każdego n oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{1/n} = c$, a jeśli tak, to jak małą stałą może być c .

Niech N będzie liczbą całkowitą, której dokładną wartość ustalimy później. Powtarzając rachunki przedstawione w rozwiązaniu otrzymujemy

$$\begin{aligned} &\left| (n+N+1)a_{n^2-n} - \sum_{k=n^2-n-N}^{n^2} a_k \right| = \\ &= \left| \sum_{k=1}^n k(a_{n^2-k} - a_{n^2-k+1}) + \sum_{k=1}^N k(a_{n^2-n-N+k} - a_{n^2-n-N+k-1}) \right| \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^n k|a_{n^2-k} - a_{n^2-k+1}| + \sum_{k=1}^N k|a_{n^2-n-N+k} - a_{n^2-n-N+k-1}| \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2-k+1} + \sum_{k=1}^N \frac{k}{n^2-n-N+k} < \\ &< \left(\sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^N k \right) \cdot \frac{1}{n^2-n-N+1} = \\ &= \frac{n(n+1) + N(N+1)}{2(n^2-n-N+1)}, \end{aligned}$$

co w podobny sposób jak w rozwiązaniu prowadzi do szacowania

$$|(n+N+1)a_{n^2-n}| < \frac{n(n+1) + N(N+1)}{2(n^2-n-N+1)} + 2 = \frac{5n^2 + N^2 - 3n - 3N + 4}{2(n^2-n-N+1)}.$$

Wstawmy $N = \lfloor dn \rfloor$, przy czym liczbę $d > 0$ dobierzemy za chwilę. Mamy

$$\begin{aligned} |a_{n^2-n}| &< \frac{5n^2 + N^2 - 3n - 3N + 4}{2(n^2 - n - N + 1)(n + N + 1)} < \\ &< \frac{5n^2 + (dn)^2 - 3n - 3(dn - 1) + 4}{2(n^2 - n - dn + 1)(n + dn)} =: y_n. \end{aligned}$$

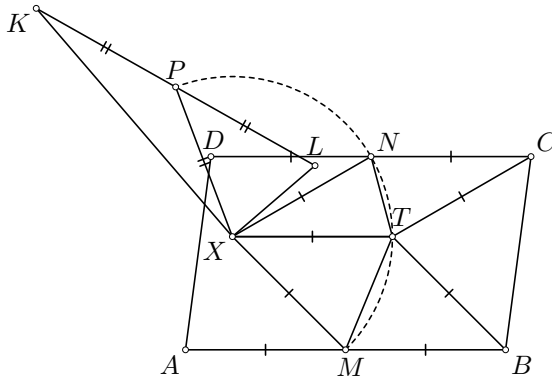
Wówczas $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{1/n} = \frac{5+d^2}{2(d+1)}$. Najmniejsza wartość wyrażenia $\frac{5+d^2}{2(d+1)}$ wynosi $\sqrt{6} - 1$ i jest ona przyjmowana dla $d = \sqrt{6} - 1$. Oszacowaliśmy zatem $|a_{n^2-n}|$ z góry przez y_n , przy czym $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{1/n} = \frac{5+d^2}{2(d+1)} = \sqrt{6} - 1 \approx 1,4494897 < \frac{3}{2}$.

6. Dany jest równoległobok $ABCD$ oraz punkt X w jego wnętrzu nieleżący na przekątnej AC i spełniający równości $\sphericalangle AXB = \sphericalangle CXD = 90^\circ$. Oznaczmy okrąg opisany na trójkącie AXC przez Ω . Punkty E i F leżą na Ω w taki sposób, że EF jest średnicą Ω , punkty E, X, B nie są współliniowe oraz punkty F, X, D nie są współliniowe. Załóżmy, że okręgi opisane na trójkątach BXE i DXF przecinają się w punkcie $K \neq X$ oraz że $L \neq X$ jest takim punktem na Ω , że $\sphericalangle KXL = 90^\circ$. Udowodnić, że $KL = AB$.

Autor zadania: Stanisław Majchrzak

Rozwiązanie:

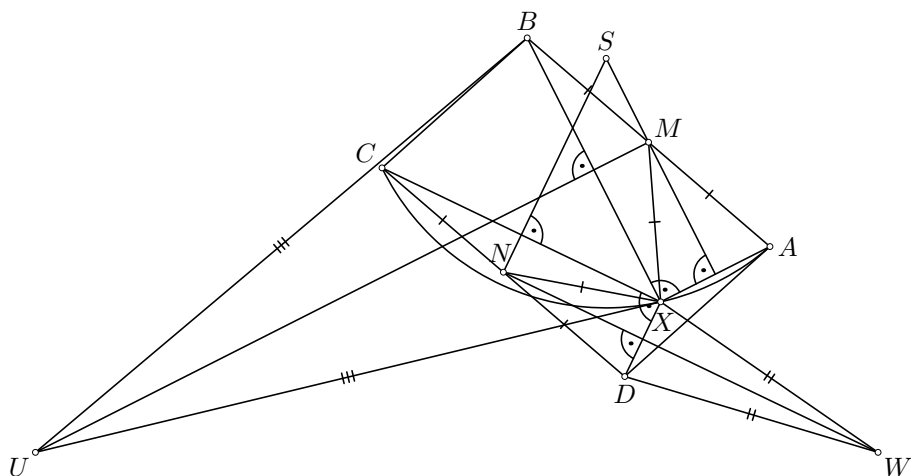
Sposób 1. Oznaczmy środki odcinków AB, CD, KL odpowiednio przez M, N, P . Wystarczy udowodnić, że $XP = XM$, bowiem wtedy $KL = 2XP = 2XM = AB$. Niech T będzie takim punktem, że $\overrightarrow{XT} = \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{MB}$. Czworokąt $XNCT$ jest równoległobokiem i $CN = NX$, więc jest rombem. Analogicznie $BMXT$ jest rombem. W szczególności $TB = TX = TC$, więc T jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie BXC . Ponieważ $XN = XM = XT$, więc X jest środkiem okręgu przechodzącego przez punkty M, N, T . Wystarczy udowodnić, że $XP = XM$, czyli że P leży na okręgu opisanym na trójkącie MNT .



Proste SU , SW są symetralnymi odpowiednio odcinków XE i XF , a ponadto kąt EXF jest prosty. Stąd wynika, że $SU \perp XE \perp XF \perp SW$.

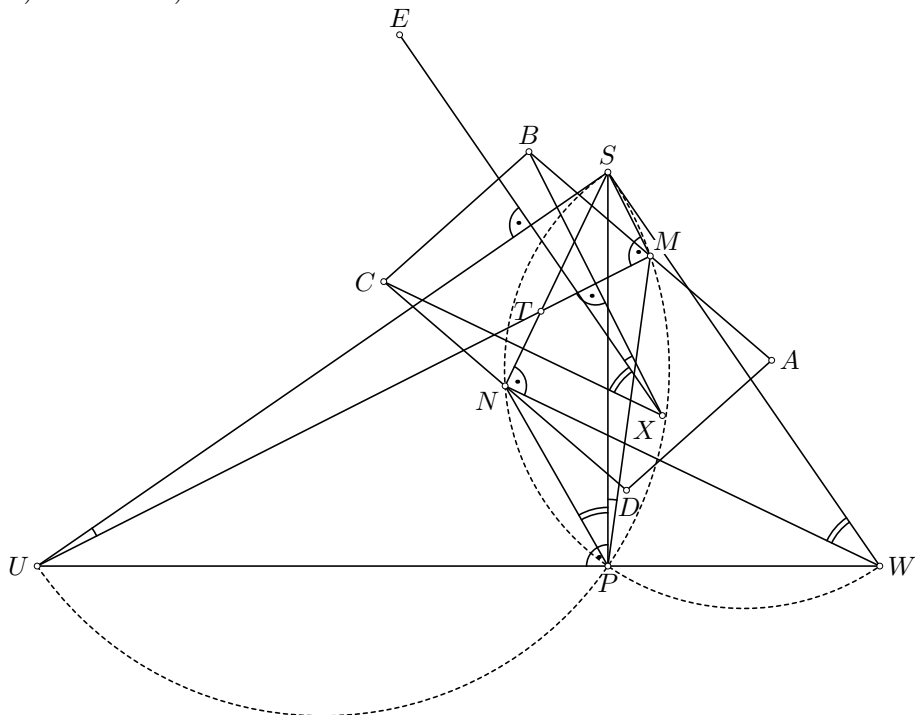


Proste NS i NW są symetralnymi odpowiednio odcinków CX i DX . Ponadto kąt CXD jest prosty. Stąd $NS \perp CX \perp DX \perp NW$.



Ponieważ $\sphericalangle SMU = \sphericalangle SPU = 90^\circ$, więc punkty M, P leżą na okręgu o średnicy SU . Stąd $\sphericalangle MPS = \sphericalangle MUS$. Ponieważ $MU \perp BX$ i $SU \perp EX$, więc $\sphericalangle MUS = \sphericalangle BXE$.

Ponieważ $\sphericalangle WPS = \sphericalangle WNS = 90^\circ$, więc punkty P, N leżą na okręgu o średnicy SW . Stąd $\sphericalangle SPN = \sphericalangle SWN$. Ponieważ $SW \parallel EX$ i $WN \parallel CX$, więc $\sphericalangle SWN = \sphericalangle EXC$.



Z równości $\sphericalangle MPS = \sphericalangle BXE$ i $\sphericalangle SPN = \sphericalangle EXC$ wynika równość

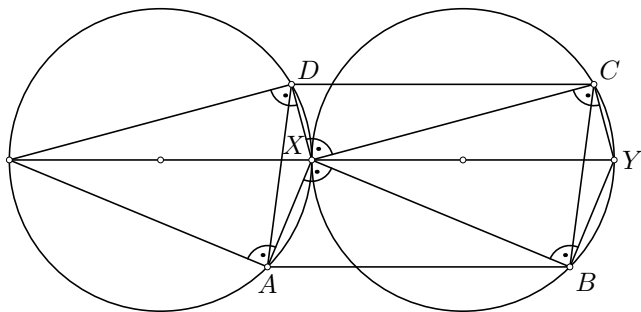
$\sphericalangle MPN = \sphericalangle BXC$. Kąt BXC jest równy kątowi między symetralnymi odcinków BX i CX , czyli kątowi MTS . Zatem $\sphericalangle MPN = \sphericalangle MTS$, co dowodzi, że punkty P, M, N, T leżą na okręgu.

Sposób 2.

Lemat. Oznaczmy okręgi opisane na trójkątach ABX, BCX, CXD, DXA odpowiednio przez o_1, o_2, o_3, o_4 . Wówczas te cztery okręgi są przystające, a ponadto okręgi o_2 i o_4 są styczne.

Dowód lematu. Niech Y będzie takim punktem, że $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Wówczas czworokąty $ABYX$ i $XYCD$ są równoległobokami. Wynika stąd, że $\sphericalangle YBX = \sphericalangle AXB = 90^\circ$ oraz $\sphericalangle XCY = \sphericalangle CXD = 90^\circ$. Stąd wynika, że punkty B i C leżą na okręgu o średnicy XY . To znaczy, że średnica okręgu o_2 ma taką samą długość co AB . Analogicznie dowodzimy, że okrąg o_4 też ma średnicę tej długości. Rozważane okręgi są zatem przystające.

Zauważmy jeszcze, że środek o_2 , czyli środek XY , leży na prostej przechodzącej przez X równoległej do AB . Analogicznie pokazujemy, że środek okręgu o_4 leży na tej prostej. Stąd wynika, że okręgi o_2 i o_4 są styczne, bo prosta przechodząca przez środki tych okręgów przechodzi przez punkt X , który leży na obu tych okręgach.

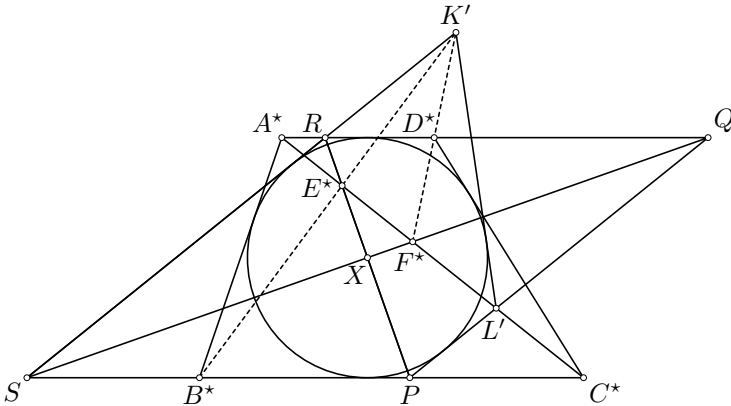


Rozważmy inwersję względem okręgu o środku X i dowolnym promieniu r . Obraz dowolnego punktu T w tej inwersji będziemy oznaczać przez T^* . Ponieważ okręgi o_1, o_2, o_3, o_4 są przystające i przechodzą przez X , więc ich obrazami są odpowiednio proste A^*B^*, B^*C^*, C^*D^* i D^*A^* , przy czym odległość punktu X od każdej z nich jest taka sama (równa $\frac{r^2}{AB}$). Czworokąt $A^*B^*C^*D^*$ jest więc opisany na okręgu o środku X i promieniu $\frac{r^2}{AB}$; oznaczmy ten okrąg przez ω . Ponieważ okręgi o_2 i o_4 nie mają punktów wspólnych poza X , więc proste A^*D^* i B^*C^* są równoległe. Punkty E^*, F^* leżą na prostej A^*C^* , przy czym $\sphericalangle F^*XE^* = 90^\circ$. Punkt K^* jest przecięciem prostych B^*E^* i D^*F^* . Punkt L^* leży na prostej A^*C^* i spełnia równość $\sphericalangle L^*XK^* = 90^\circ$. Teza zadania jest równoważna temu, że okrąg opisany na trójkącie KLX jest

przystający do o_1 , czyli temu, że prosta K^*L^* jest styczna do ω .

Założmy, że żadna z prostych E^*X , F^*X nie jest równoległa do podstaw trapezu $A^*B^*C^*D^*$. Oznaczmy punkty przecięcia prostej E^*X z prostymi B^*C^* i A^*D^* odpowiednio przez P i R . Oznaczmy punkty przecięcia prostej F^*X z prostymi A^*D^* i B^*C^* odpowiednio przez Q i S . Wtedy $PQRS$ jest rombem opisanym na okręgu ω . Oznaczmy punkt przecięcia prostych PQ i A^*C^* przez L' . Niech K' będzie punktem przecięcia prostej RS ze styczną do ω poprowadzoną z punktu L' (różną od PQ). Udowodnimy, że $K' = K^*$ i $L' = L^*$, co zakończy dowód.

Z twierdzenia Brianchona dla sześciokąta $A^*RK'L'PB^*$ wynika, że proste A^*L' , RP i $K'B^*$ przecinają się w jednym punkcie. Ponieważ A^*L' i RP przecinają się w punkcie E^* , więc oznacza to, że K' leży na prostej B^*E^* . Podobnie, z twierdzenia Brianchona dla sześciokąta $C^*SK'L'QD^*$ wynika, że proste C^*L' , SQ i $K'D^*$ przecinają się w jednym punkcie. Ponieważ C^*L' i SQ przecinają się w punkcie F^* , więc oznacza to, że K' leży na prostej F^*D^* .



Wykazaliśmy zatem, że K' jest przecięciem prostych B^*E^* i D^*F^* , a więc $K' = K^*$. Do wykazania zostaje równość $\sphericalangle L'XK^* = 90^\circ$. To jest równoważne równości $\sphericalangle XK^*L' + \sphericalangle K^*L'X = 90^\circ$. Proste K^*X , $L'X$ są dwusiecznymi kątów RK^*L' i $K^*L'P$, więc $\sphericalangle XK^*L' + \sphericalangle K^*L'X = \frac{1}{2}(\sphericalangle RK^*L' + \sphericalangle K^*L'P)$. Należy więc wykazać, że $\sphericalangle RK^*L' + \sphericalangle K^*L'P = 180^\circ$. To wynika z równoległości prostych K^*R , $L'P$.

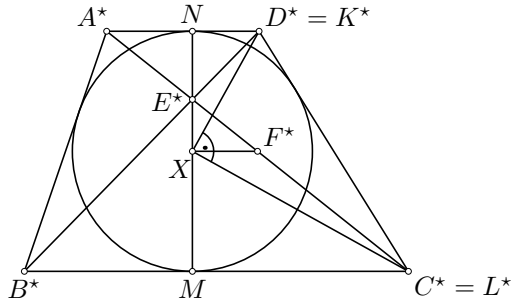
Do rozważenia zostały dwa przypadki:

1° $F^*X \parallel BC$. Niech M i N będą punktami styczności okręgu ω odpowiednio z bokami B^*C^* i A^*D^* . Z twierdzenia Brianchona dla zdegenerowanego sześciokąta $A^*B^*MC^*D^*N$ wynika, że przekątne A^*C^* , B^*D^* i prosta MN przecinają się w jednym punkcie. Ponieważ $F^*X \parallel BC$, więc $E^*X \perp BC$, skąd E^*X pokrywa się z prostą MN . To oznacza, że E^* jest przecięciem

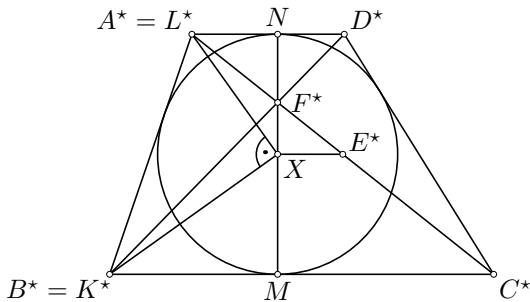
przekątnych trapezu $A^*B^*C^*D^*$. Stąd punkt K^* , będący przecięciem prostych B^*E^* i D^*F^* , pokrywa się z punktem D^* . Ponieważ

$$\begin{aligned} \sphericalangle C^*XK^* &= \sphericalangle C^*XD^* = 180^\circ - \sphericalangle XD^*C^* - \sphericalangle D^*C^*X = \\ &= 180^\circ - \frac{1}{2}(\sphericalangle A^*D^*C^* + \sphericalangle D^*C^*B^*) = 180^\circ - \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ, \end{aligned}$$

więc punkt L^* pokrywa się z C^* . Ostatecznie prosta K^*L^* pokrywa się z prostą C^*D^* , więc w szczególności jest ona styczna do ω .



2° $E^*X \parallel BC$. Analogicznie jak w przypadku 1° dowodzimy, że F^* jest przecięciem przekątnych trapezu $A^*B^*C^*D^*$. Stąd wynika, że punkt K^* , będący przecięciem prostych B^*E^* i D^*F^* , pokrywa się z punktem B^* . Następnie, prowadząc analogiczne rachunki jak w przypadku 1°, dowodzimy, że $\sphericalangle K^*XA^* = \sphericalangle B^*XA^* = 90^\circ$. Stąd L^* pokrywa się z punktem A^* . W konsekwencji prosta K^*L^* pokrywa się z prostą A^*B^* , w szczególności jest styczna do ω .





LXXVI Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe

zawodów stopnia pierwszego

I seria: do 14 października 2024 r.

1. Dana jest funkcja kwadratowa $f(x) = ax^2 + bx + c$, której wykres nie przecina osi odciętych. Wykazać, że

$$a(2a + 3b + 6c) > 0.$$

2. Dany jest prostokąt $ABCD$ wpisany w okrąg ω o środku O . Prosta ℓ przechodzi przez O oraz przecina odcinki BC i AD odpowiednio w punktach E i F . Punkty K i L są punktami przecięcia ℓ i ω , przy czym punkty K, E, F, L leżą w takiej kolejności na prostej ℓ . Proste styczne do ω w punktach K i L przecinają prostą CD odpowiednio w punktach M i N . Udowodnić, że punkty E, F, M, N leżą na jednym okręgu.

3. Dana jest dodatnia liczba całkowita n będąca iloczynem 2024 parami różnych liczb pierwszych. Wyznaczyć liczbę dodatnich liczb całkowitych k spełniających równość

$$n + \text{NWD}(n, k) = k.$$

4. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite $n \geq 2$, dla których istnieją takie liczby całkowite $a_1, a_2, \dots, a_n$, że każdy ze zbiorów

$$\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \quad \text{oraz} \quad \{a_1 + a_2, a_2 + a_3, \dots, a_{n-1} + a_n, a_n + a_1\}$$

zawiera n kolejnych liczb całkowitych.

Rozwiązania powyższych zadań należy — po uprzedniej rejestracji — zamieścić w systemie internetowym olimpiady dostępnym pod adresem <https://om.sem.edu.pl> najpóźniej dnia

14 października 2024 r.

Rozwiązania przesłane w późniejszym terminie nie będą rozpatrywane. Każde rozwiązanie należy podpisać na pierwszej jego stronie: imieniem, nazwiskiem, adresem poczty elektronicznej oraz numerem zadania.



LXXVI Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia pierwszego
II seria: do 12 listopada 2024 r.

5. Dane są dodatnie liczby całkowite a, b, n . Załóżmy, że liczby a i n są parzyste, liczba b jest nieparzysta oraz liczba $ab(a+b)^{n-1}$ jest podzielna przez $a^n + b^n$. Udowodnić, że istnieje taka liczba pierwsza p , że liczba $a^n + b^n$ jest podzielna przez p^{n+1} .

6. Dane są dodatnie liczby całkowite k, n oraz podzbiory $A_1, A_2, \dots, A_k$ zbioru $\{1, 2, \dots, 2n\}$. Powiemy, że para liczb (x, y) jest *dobra*, jeśli $x < y$, $x, y \in \{1, 2, \dots, 2n\}$ i istnieje dokładnie jeden indeks $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, dla którego dokładnie jedna z liczb x, y należy do A_i . Wykazać, że istnieje co najwyżej n^2 dobrych par.

7. Okręgi o_1, o_2 o równych promieniach przecinają się w punktach A, B . Punkty C, D, E, F leżą w tej kolejności na jednej prostej, przy czym C i E leżą na o_1 , a D i F — na o_2 . Symetralne odcinków CD i EF przecinają prostą AB odpowiednio w punktach X i Y . Dowieść, że $AX = BY$.

8. Liczby rzeczywiste a, b, c, x, y, z spełniają równości

$$\begin{cases} a^2 + 2bc = x^2 + 2yz, \\ b^2 + 2ca = y^2 + 2zx, \\ c^2 + 2ab = z^2 + 2xy. \end{cases}$$

Wykazać, że $a^2 + b^2 + c^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Rozwiązania powyższych zadań należy — po uprzedniej rejestracji — zamieścić w systemie internetowym olimpiady dostępnym pod adresem <https://om.sem.edu.pl> najpóźniej dnia

12 listopada 2024 r.

Rozwiązania przesłane w późniejszym terminie nie będą rozpatrywane. Każde rozwiązanie należy podpisać na pierwszej jego stronie: imieniem, nazwiskiem, adresem poczty elektronicznej oraz numerem zadania.



LXXVI Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia pierwszego
III seria: do 2 grudnia 2024 r.

9. Dane są takie dodatnie liczby całkowite m, n , że $\sqrt{2} < \frac{m}{n} < \sqrt{2} + \frac{1}{2}$ oraz liczba m jest parzysta. Wykazać, że istnieją takie dodatnie liczby całkowite $k < m$ i $l < n$, że

$$\left| \frac{k}{l} - \sqrt{2} \right| < \frac{m}{n} - \sqrt{2}.$$

10. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC , w którym $AB < AC$. Oznaczmy okrąg opisany na trójkącie ABC przez Ω . Punkty M i N są środkami odpowiednio dłuższego łuku BC i krótszego łuku BC okręgu Ω . Punkty $X \neq M$ i $Y \neq N$ leżą na prostej AM i spełniają równości $BX = BM = CM = CY$. Punkt E jest rzutem prostokątnym punktu B na prostą AC , a punkt F rzutem prostokątnym punktu C na prostą AB . Dowieść, że $\sphericalangle FNX = \sphericalangle YNE$.

11. Dana jest dodatnia liczba całkowita ℓ oraz dodatnie liczby rzeczywiste $a_1, a_2, \dots, a_\ell$. Dla każdej dodatniej liczby całkowitej n definiujemy

$$c_n = \sum_{k_1+k_2+\dots+k_\ell=n} \frac{(2n)!}{(2k_1)!(2k_2)! \dots (2k_\ell)!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_\ell^{k_\ell}.$$

(W powyższym wzorze sumowanie przebiega po wszystkich ℓ -elementowych ciągach nieujemnych liczb całkowitych $k_1, k_2, \dots, k_\ell$ o sumie równej n .)

Wykazać, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n zachodzi nierówność $\sqrt[n]{c_n} \leq \sqrt[n+1]{c_{n+1}}$.

12. Powiemy, że podzbiór A zbioru nieujemnych liczb całkowitych jest *fajny*, jeśli istnieje taka liczba całkowita k , że dla dowolnej liczby całkowitej $n \geq k$ istnieje dokładnie jedna para liczb $a > b$ ze zbioru A spełniająca równość $n = a + b$. Rozstrzygnąć, czy istnieje fajny zbiór.

Rozwiązania powyższych zadań należy — po uprzedniej rejestracji — zamieścić w systemie internetowym olimpiady dostępnym pod adresem <https://om.sem.edu.pl> najpóźniej dnia

2 grudnia 2024 r.

Rozwiązania przesłane w późniejszym terminie nie będą rozpatrywane. Każde rozwiązanie należy podpisać na pierwszej jego stronie: imieniem, nazwiskiem, adresem poczty elektronicznej oraz numerem zadania.



LXXVI Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia pierwszego

1. Dana jest funkcja kwadratowa $f(x) = ax^2 + bx + c$, której wykres nie przecina osi odciętych. Wykazać, że

$$a(2a + 3b + 6c) > 0.$$

Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie:

Sposób 1. Z założeń wynika, że wyróżnik funkcji kwadratowej f jest ujemny, tj. $\Delta = b^2 - 4ac < 0$. Stąd $ac > \frac{1}{4}b^2$. Zatem

$$\begin{aligned} a(2a + 3b + 6c) &= 2a^2 + 3ab + 6ac > 2a^2 + 3ab + \frac{3}{2}b^2 = \\ &= \frac{1}{2}a^2 + \frac{3}{2}(a^2 + 2ab + b^2) = \frac{1}{2}a^2 + \frac{3}{2}(a + b)^2 > 0. \end{aligned}$$

Sposób 2. Z założeń wynika, że współczynnik wiodący a ma taki sam znak jak wartość funkcji f dla dowolnego argumentu. W szczególności

$$\begin{aligned} ac &= af(0) > 0, \\ a(a + 2b + 4c) &= 4af\left(\frac{1}{2}\right) > 0, \\ a(a + b + c) &= af(1) > 0. \end{aligned}$$

Dodając stronami powyższe nierówności otrzymujemy tezę.

Sposób 3. Podobnie jak w sposobie drugim wnioskujemy, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność $af(x) > 0$. W takim razie

$$\begin{aligned} 0 &< \int_0^1 af(x) \, dx = \int_0^1 (a^2x^2 + abx + ac) \, dx = \\ &= \frac{a^2}{3}x^3 + \frac{ab}{2}x^2 + acx \Big|_{x=0}^1 = \frac{a^2}{3} + \frac{ab}{2} + ac. \end{aligned}$$

Mnożąc otrzymaną nierówność przez 6 otrzymujemy tezę.

2. Dany jest prostokąt $ABCD$ wpisany w okrąg ω o środku O . Prosta ℓ przechodzi przez O oraz przecina odcinki BC i AD odpowiednio w punktach E i F . Punkty K i L są punktami przecięcia ℓ i ω , przy czym punkty K, E, F, L leżą w takiej kolejności na prostej ℓ . Proste styczne do ω w punktach K i L przecinają prostą CD odpowiednio w punktach M i N . Udowodnić, że punkty E, F, M, N leżą na jednym okręgu.

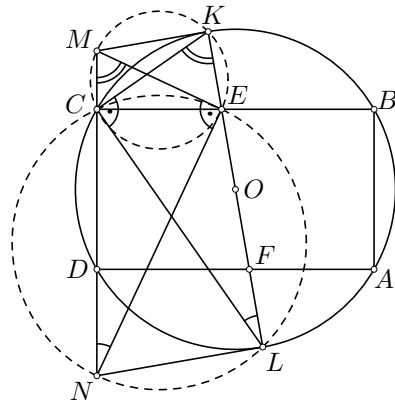
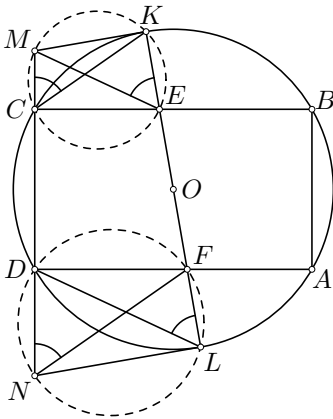
Autor zadania: Stanisław Majchrzak

Rozwiązanie:

Sposób 1. Ponieważ proste KM i LN są styczne do ω , więc kąty OKM i OLN są proste. Również kąty ECM i NDF są proste, gdyż $ABCD$ jest prostokątem. Punkty C i K leżą więc na okręgu o średnicy EM , a punkty D i L na okręgu o średnicy FN . Oznaczmy $\sphericalangle FNM = \alpha$. Wówczas $\sphericalangle FLD = \alpha$, bo kąty FLD i FND są oparte na tym samym łuku okręgu o średnicy FN . Kąty DCK i FLD są przeciwległymi kątami czworokąta wpisanego w okrąg, więc $\sphericalangle DCK = 180^\circ - \alpha$. Kąt KCM jest przyległy do kąta DCK , więc $\sphericalangle KCM = \alpha$. Kąty KEM i KCM są oparte na tym samym łuku okręgu o średnicy EM , więc $\sphericalangle KEM = \alpha$. Kąt MEF jest przyległy do kąta KEM , więc $\sphericalangle MEF = 180^\circ - \alpha$. Otrzymujemy

$$\sphericalangle FNM + \sphericalangle MEF = \alpha + (180^\circ - \alpha) = 180^\circ,$$

co oznacza, że czworokąt $EFNM$ można wpisać w okrąg.



Sposób 2. Punkty C i K leżą na okręgu o średnicy EM , bo kąty ECM i MKE są proste. Podobnie, punkty C i L leżą na okręgu o średnicy EN , bo kąty NCE i ELN są proste. Mamy $\sphericalangle CME = \sphericalangle CKE$ i $\sphericalangle ENC = \sphericalangle ELC$. Odcinek KL jest średnicą okręgu ω , więc trójkąt CKL jest prostokątny.

W konsekwencji

$$90^\circ = \sphericalangle CKE + \sphericalangle ELC = \sphericalangle CME + \sphericalangle ENC,$$

skąd wynika, że $\sphericalangle MEN = 90^\circ$. Analogicznie dowodzimy, że $\sphericalangle MFN = 90^\circ$. Stąd wynika, że punkty E i F leżą na okręgu o średnicy MN , co daje tezę.

3. Dana jest dodatnia liczba całkowita n będąca iloczynem 2024 różnych liczb pierwszych. Wyznaczyć liczbę dodatnich liczb całkowitych k spełniających równość

$$n + \text{NWD}(n, k) = k.$$

Autor zadania: Emil Łasocha

Rozwiązanie: Udowodnimy, że liczba k spełnia równość $n + \text{NWD}(n, k) = k$ wtedy i tylko wtedy, gdy $k = n + d$ dla pewnego dzielnika d liczby n . Z jednej strony, jeśli $k = n + \text{NWD}(n, k)$, to k jest postulowanej postaci, bowiem $\text{NWD}(n, k)$ dzieli n . Z drugiej strony, dla dowolnej liczby k postaci $n + d$, gdzie d dzieli n , mamy

$$n + \text{NWD}(n, k) = n + \text{NWD}(n, n + d) = n + \text{NWD}(n, d) = n + d = k.$$

To oznacza, że liczb k spełniających równość z zadania jest tyle samo ile jest dzielników liczby n . Ponieważ n jest iloczynem 2024 różnych liczb pierwszych, więc ma 2^{2024} dzielników.

Odpowiedź: 2^{2024} .

4. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite $n \geq 2$, dla których istnieją takie liczby całkowite $a_1, a_2, \dots, a_n$, że każdy ze zbiorów

$$\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \quad \text{oraz} \quad \{a_1 + a_2, a_2 + a_3, \dots, a_{n-1} + a_n, a_n + a_1\}$$

zawiera n kolejnych liczb całkowitych.

Autor zadania: Łukasz Bożyk

Rozwiązanie: Załóżmy, że n spełnia warunki zadania. Wtedy istnieją liczby całkowite $a_1, a_2, \dots, a_n, a, b$, dla których

$$\{a_1, a_2, \dots, a_n\} = \{a, a + 1, a + 2, \dots, a + n - 1\}$$

oraz

$$\{a_1 + a_2, a_2 + a_3, \dots, a_{n-1} + a_n, a_n + a_1\} = \{b, b + 1, b + 2, \dots, b + n - 1\}$$

Wówczas

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = a + (a + 1) + (a + 2) + \dots + (a + n - 1) = \frac{n(2a + n - 1)}{2}$$

oraz

$$\begin{aligned}(a_1 + a_2) + (a_2 + a_3) + \dots + (a_{n-1} + a_n) + (a_n + a_1) &= \\ &= b + (b + 1) + \dots + (b + n - 1) = \frac{n(2b + n - 1)}{2}.\end{aligned}$$

Ale $(a_1 + a_2) + (a_2 + a_3) + \dots + (a_{n-1} + a_n) + (a_n + a_1) = 2(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$, więc $\frac{1}{2}n(2b + n - 1) = n(2a + n - 1)$, skąd $n = 2b - 4a + 1$. Zatem n jest liczbą nieparzystą.

Ustalmy teraz dowolną liczbę nieparzystą $n = 2m + 1 \geq 3$. Połóżmy $a_{2i+1} = i + 1$ dla $i = 0, 1, 2, \dots, m$ oraz $a_{2i} = m + i + 1$ dla $i = 1, 2, \dots, m$, tj. liczby $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2m+1}$ to kolejno

$$1, m + 2, 2, m + 3, 3, m + 4, 4, \dots, 2m + 1, m + 1.$$

Wówczas liczby $a_1 + a_2, a_2 + a_3, a_3 + a_4, \dots, a_{2m} + a_{2m+1}, a_{2m+1} + a_1$ to kolejno

$$m + 3, m + 4, m + 5, \dots, 3m + 1, 3m + 2, m + 2.$$

Zatem

$$\{a_1, a_2, \dots, a_{2m+1}\} = \{1, 2, \dots, 2m + 1\}$$

oraz

$$\{a_1 + a_2, a_2 + a_3, \dots, a_{2m} + a_{2m+1}, a_{2m+1} + a_1\} = \{m + 2, m + 3, \dots, 3m + 2\},$$

co świadczy o tym, że liczba n spełnia warunki zadania.

Odpowiedź: Liczby nieparzyste większe lub równe 3.

5. Dane są dodatnie liczby całkowite a, b, n . Załóżmy, że liczby a i n są parzyste, liczba b jest nieparzysta oraz liczba $ab(a+b)^{n-1}$ jest podzielna przez $a^n + b^n$. Udowodnić, że istnieje taka liczba pierwsza p , że liczba $a^n + b^n$ jest podzielna przez p^{n+1} .

Autor zadania: Emil Łasocha

Rozwiązanie: Niech $a = dx$, $b = dy$, gdzie $d = \text{NWD}(a, b)$ dla pewnych liczb całkowitych x, y . Wówczas $\text{NWD}(x, y) = 1$. Skoro $a^n + b^n \mid ab(a+b)^{n-1}$, to $x^n + y^n \mid dxy(x+y)^{n-1}$. Zauważmy, że $\text{NWD}(x^n + y^n, x) = \text{NWD}(y^n, x) = 1$ i analogicznie $\text{NWD}(x^n + y^n, y) = 1$.

Udowodnimy, że $\text{NWD}(x^n + y^n, x+y) = 1$. Jeśli liczba pierwsza p dzieli $x^n + y^n$ oraz $x+y$, to $p > 2$, gdyż liczba $x+y$ jest nieparzysta na mocy założeń zadania. Mamy $0 \equiv x^n + y^n \equiv x^n + (-x)^n \equiv 2x^n \pmod{p}$. Stąd $p \mid 2x^n$, więc $p \mid x$. Zatem $p \mid (x+y) - x = y$, co stoi w sprzeczności z $\text{NWD}(x, y) = 1$. Tym samym udowodniliśmy, że liczby $x^n + y^n, x+y$ są względnie pierwsze.

Ponieważ $x^n + y^n \mid dxy(x+y)^{n-1}$ i liczba $x^n + y^n$ jest względnie pierwsza z każdą z liczb $x, y, x+y$, więc $x^n + y^n \mid d$. Jeśli p jest liczbą pierwszą dzielącą $x^n + y^n$, to $p \mid d$, skąd liczba $a^n + b^n = d^n(x^n + y^n)$ dzieli się przez p^{n+1} .

6. Dane są dodatnie liczby całkowite k, n oraz podzbiory $A_1, A_2, \dots, A_k$ zbioru $\{1, 2, \dots, 2n\}$. Powiemy, że para liczb (x, y) jest *dobra*, jeśli $x < y$, $x, y \in \{1, 2, \dots, 2n\}$ i istnieje dokładnie jeden indeks $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, dla którego dokładnie jedna z liczb x, y należy do A_i . Wykazać, że istnieje co najwyżej n^2 dobrych par.

Autor zadania: Daniel Goc

Rozwiązanie:

Sposób 1. Dla $x \in \{1, 2, \dots, 2n\}$ niech b_x oznacza liczbę takich indeksów i , że $x \in A_i$. Zauważmy, że jeśli para (x, y) jest dobra, to $|b_x - b_y| = 1$. W szczególności liczby b_x, b_y są różnej parzystości.

Parę (x, y) nazwiemy *wspaniałą* jeśli $x < y$ i liczby b_x, b_y są różnej parzystości. Wykazaliśmy wyżej, że każda dobra para jest wspaniała. Wystarczy udowodnić, że liczba wspaniałych par jest nie większa od n^2 . Niech c oznacza liczbę takich elementów $x \in \{1, 2, \dots, 2n\}$, że $2 \mid b_x$. Wtedy istnieje dokładnie $2n - c$ elementów $x \in \{1, 2, \dots, 2n\}$, dla których $2 \nmid b_x$. Liczba wspaniałych par jest zatem równa $c(2n - c)$. Należy wykazać, że $c(2n - c) \leq n^2$. Mamy $n^2 - c(2n - c) = (n - c)^2 \geq 0$, co kończy dowód.

Sposób 2. Dla dowolnego $i = 0, 1, \dots, k$ niech B_i oznacza zbiór tych elementów $\{1, 2, \dots, 2n\}$, które należą do dokładnie i zbiorów pośród $A_1, A_2, \dots, A_k$.

Zbiory $B_0, B_1, \dots, B_k$ stanowią podział zbioru $\{1, 2, \dots, 2n\}$. To oznacza, że $|B_0| + |B_1| + \dots + |B_k| = 2n$.

Jeśli para (x, y) jest dobra, to dla pewnego $i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ mamy $x \in B_i$ i $y \in B_{i+1}$ lub vice versa: $x \in B_{i+1}$ i $y \in B_i$. W takim razie liczba dobrych par szacuje się z góry przez

$$T = \sum_{i=0}^{k-1} |B_i| \cdot |B_{i+1}|.$$

Założmy, że B_j jest najliczniejszym spośród zbiorów $B_0, B_1, \dots, B_k$. Korzystając z szacowań $|B_i| \leq |B_j|$ dla dowolnego $0 \leq i \leq k$ oraz z nierówności między średnimi otrzymujemy

$$\begin{aligned} T &= \sum_{i=0}^{j-1} |B_i| \cdot |B_{i+1}| + \sum_{i=j}^{k-1} |B_i| \cdot |B_{i+1}| \leq \sum_{i=0}^{j-1} |B_i| \cdot |B_j| + \sum_{i=j}^{k-1} |B_j| \cdot |B_{i+1}| = \\ &= |B_j| \cdot \left(\sum_{i=0}^{j-1} |B_i| + \sum_{i=j+1}^k |B_i| \right) = |B_j| \cdot (2n - |B_j|) \leq \\ &\leq \left(\frac{|B_j| + (2n - |B_j|)}{2} \right)^2 = n^2, \end{aligned}$$

co kończy dowód.

Uwaga. Może zdarzyć się, że dobrych par jest dokładnie n^2 . Jest tak np. dla $k = 2$, $A_1 = \{1, 2, 3, \dots, n\}$, $A_2 = \{1, 2, 3, \dots, 2n\}$.

7. Okręgi o_1, o_2 o równych promieniach przecinają się w punktach A, B . Punkty C, D, E, F leżą w tej kolejności na jednej prostej, przy czym C i E leżą na o_1 , a D i F — na o_2 . Symetralne odcinków CD i EF przecinają prostą AB odpowiednio w punktach X i Y . Dowieść, że $AX = BY$.

Autor zadania: Daniel Goc

Rozwiązanie:

Sposób 1. Niech M będzie środkiem odcinka AB . Jeśli prosta przechodząca przez punkty C, D, E, F przechodzi przez M , to M jest środkiem symetrii całego rysunku, a teza jest oczywista. Od teraz będziemy zakładać, że M nie leży na prostej $CDEF$. Okręgi o_1, o_2 są symetryczne względem M . Oznaczmy punkty symetryczne do D, E, F względem M odpowiednio przez D', E', F' .

$$\frac{GF}{GC} = \frac{GE}{GD}.$$

Oznaczmy środki okręgów α_1 i α_2 odpowiednio przez S i T . Z równości $XC = XD$, $XS = XT$ i $CS = DT$ wynika, że trójkąty XCS i XDT są przystające (bok-bok-bok). Analogicznie, $YE = YF$, $YS = YT$ i $ES = FT$, więc trójkąty YES i YFT są przystające. Z powyższych przystań wynika

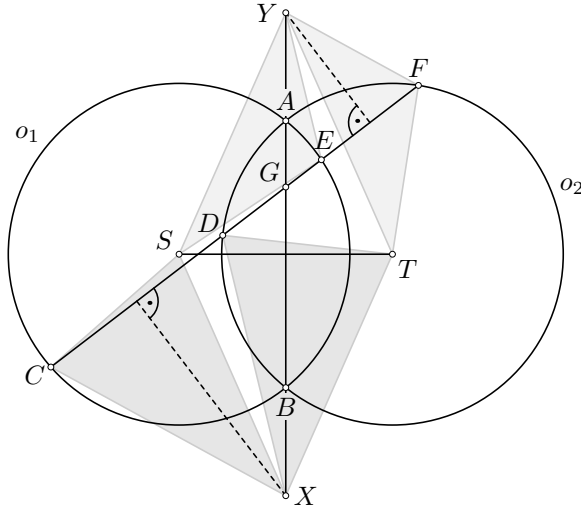
równości $\sphericalangle SXC = \sphericalangle TXD$ i $\sphericalangle SYE = \sphericalangle TYF$. Stąd

$$\sphericalangle DXC = \sphericalangle DXS + \sphericalangle SXC = \sphericalangle DXS + \sphericalangle TXD = \sphericalangle TXS$$

oraz

$$\sphericalangle EYF = \sphericalangle EYT + \sphericalangle TYF = \sphericalangle EYT + \sphericalangle SYE = \sphericalangle SYT.$$

Skoro $\sphericalangle DXC = \sphericalangle EYF$, to $\sphericalangle TXS = \sphericalangle SYT$. Stąd oraz z prostopadłości $ST \perp XY$ wynika, że punkty X i Y są symetryczne względem prostej ST . Punkty A i B też są symetryczne względem tej prostej, więc $AX = BY$.



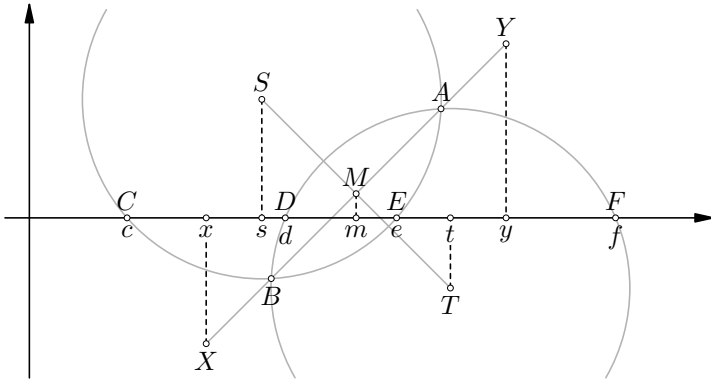
Sposób 3. Niech M będzie środkiem odcinka AB . Teza jest równoważna temu, że M jest środkiem odcinka XY . Niech S, T będą odpowiednio środkami okręgów o_1, o_2 . Umieśćmy rysunek w układzie współrzędnych w taki sposób, by punkty C, D, E, F leżały na osi odciętych. Oznaczmy odcięte punktów $C, D, E, F, M, X, Y, S, T$ odpowiednio przez $c, d, e, f, m, x, y, s, t$. Ponieważ punkty X, Y, S, T leżą odpowiednio na symetralnych odcinków CD, EF, CE, DF , więc

$$x = \frac{c+d}{2}, \quad y = \frac{e+f}{2}, \quad s = \frac{c+e}{2}, \quad t = \frac{d+f}{2}.$$

Ponieważ okręgi o_1, o_2 są przystające, więc M jest środkiem odcinka ST . W takim razie

$$m = \frac{s+t}{2} = \frac{\frac{c+e}{2} + \frac{d+f}{2}}{2} = \frac{\frac{c+d}{2} + \frac{e+f}{2}}{2} = \frac{x+y}{2}.$$

Prosta XY nie jest prostopadła do prostej CD (w przeciwnym razie symetralna odcinka CD byłaby równoległa do AB , więc proste te nie przecinałyby się). Na prostej XY istnieje zatem tylko jeden punkt o odciętej równej $\frac{x+y}{2}$ i jest to środek odcinka XY . Stąd wynika, że tym środkiem jest M , co kończy dowód.



8. Liczby rzeczywiste a, b, c, x, y, z spełniają równości

$$\begin{cases} a^2 + 2bc = x^2 + 2yz, \\ b^2 + 2ca = y^2 + 2zx, \\ c^2 + 2ab = z^2 + 2xy. \end{cases}$$

Wykazać, że $a^2 + b^2 + c^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie:

Sposób 1. Dodając stronami dane równości otrzymujemy

$$(a + b + c)^2 = (x + y + z)^2.$$

Oznaczmy $A = a^2 + 2bc$, $B = b^2 + 2ac$, $C = c^2 + 2ab$. Zauważmy, że

$$\begin{aligned} A^2 + B^2 + C^2 &= a^4 + 4a^2bc + 4b^2c^2 + b^4 + 4ab^2c + 4a^2c^2 + \\ &\quad + c^4 + 4abc^2 + 4a^2b^2 = \\ &= (a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2) + \\ &\quad + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2a^2bc + 2ab^2c + 2abc^2) = \\ &= (a^2 + b^2 + c^2)^2 + 2(ab + bc + ca)^2 \end{aligned}$$

i analogicznie

$$A^2 + B^2 + C^2 = (x^2 + y^2 + z^2)^2 + 2(xy + yz + zx)^2.$$

Oznaczając $D = a^2 + b^2 + c^2$, $E = x^2 + y^2 + z^2$, $F = (a + b + c)^2 = (x + y + z)^2$ dostajemy

$$A^2 + B^2 + C^2 = D^2 + 2\left(\frac{F - D}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}D^2 - DF + \frac{1}{2}F^2$$

i analogicznie

$$A^2 + B^2 + C^2 = \frac{3}{2}E^2 - EF + \frac{1}{2}F^2,$$

skąd po odjęciu stronami

$$0 = \frac{3}{2}(D^2 - E^2) + F(E - D) = \frac{1}{2}(D - E)(3D + 3E - 2F).$$

Jeśli $3D + 3E - 2F \neq 0$, to z powyższego dostajemy $D = E$, czyli tezę. W przeciwnym razie $3D + 3E - 2F = 0$. Tymczasem

$$\begin{aligned} 3D - F &= 3(a^2 + b^2 + c^2) - (a + b + c)^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = \\ &= (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

i analogicznie

$$3E - F = (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \geq 0,$$

przy czym równości zachodzą wyłącznie dla $a = b = c$ i $x = y = z$. Warunek $3D + 3E - 2F = 0$ oznacza zatem, że $a = b = c$ i $x = y = z$. Wtedy jednak

$$D = 3a^2 = a^2 + 2bc = x^2 + 2yz = 3x^2 = E,$$

co daje tezę.

Sposób 2. Dodając stronami wszystkie trzy równości dane w zadaniu otrzymujemy $(a + b + c)^2 = (x + y + z)^2$. W razie potrzeby możemy zamienić liczby x, y, z na liczby $-x, -y, -z$ (przy takiej zamianie prawe strony danych trzech równań oraz prawa strona równości z tezy nie zmieniają się). Dlatego można założyć, że $a + b + c = x + y + z$.

Ponieważ $a + b + c = x + y + z$, więc

$$2(a + b + c)t + 3t^2 = 2(x + y + z)t + 3t^2, \quad (\star)$$

gdzie t jest dowolną liczbą rzeczywistą. Dodając tę równość do równości danych w zadaniu otrzymujemy równoważnie

$$\begin{cases} (a+t)^2 + 2(b+t)(c+t) = (x+t)^2 + 2(y+t)(z+t), \\ (b+t)^2 + 2(c+t)(a+t) = (y+t)^2 + 2(z+t)(x+t), \\ (c+t)^2 + 2(a+t)(b+t) = (z+t)^2 + 2(x+t)(y+t). \end{cases}$$

Stąd szóstka (a, b, c, x, y, z) spełnia założenia zadania wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia je szóstka $(a+t, b+t, c+t, x+t, y+t, z+t)$. Z kolei dodając do tezy równość $(\star)$ otrzymujemy równoważną tezie równość

$$(a+t)^2 + (b+t)^2 + (c+t)^2 = (x+t)^2 + (y+t)^2 + (z+t)^2.$$

Zatem aby wykazać tezę zadania dla szóstki (a, b, c, x, y, z) wystarczy udowodnić ją dla szóstki $(a+t, b+t, c+t, x+t, y+t, z+t)$ dla dogodnie dobranej liczby t . Wybierzmy $t = -\frac{1}{3}(a+b+c)$. Wtedy $(a+t) + (b+t) + (c+t) = 0$ i $(x+t) + (y+t) + (z+t) = 0$. Wystarczy więc wykazać tezę przy założeniu, że $a+b+c = x+y+z = 0$.

Podstawiając $c = -a-b$ i $z = -x-y$ do pierwszych dwóch równań otrzymujemy

$$\begin{cases} a^2 - 2ab - 2b^2 = x^2 - 2xy - 2y^2, \\ b^2 - 2ab - 2a^2 = y^2 - 2xy - 2x^2. \end{cases}$$

Odejmując drugie równanie od pierwszego otrzymujemy $3a^2 - 3b^2 = 3x^2 - 3y^2$, skąd $a^2 - x^2 = b^2 - y^2$. Dodając dwukrotność drugiego równania do pierwszego otrzymujemy $-3a^2 - 6ab = -3x^2 - 6xy$, skąd $a^2 - x^2 = 2(xy - ab)$. Stąd wynika, że

$$\begin{aligned} (a^2 - x^2)(xy + ab) &= 2(xy - ab)(xy + ab) = 2(x^2y^2 - a^2b^2) \\ &= 2(x^2y^2 - a^2(a^2 - x^2 + y^2)) = 2(x^2 - a^2)(a^2 + y^2). \end{aligned}$$

Stąd

$$(x^2 - a^2)(2a^2 + 2y^2 - xy - ab) = 0.$$

Drugi nawias jest równy

$$a^2 + b^2 + x^2 + y^2 - xy - ab = \frac{1}{2} (a^2 + b^2 + x^2 + y^2 + (a-b)^2 + (x-y)^2),$$

co jest zerem wyłącznie dla $a = b = x = y = 0$. Jeśli nie wszystkie liczby a, b, x, y są zerami, to pierwszy nawias musi się zerować, skąd $a^2 = x^2$. Analogicznie dowodzimy, że $b^2 = y^2$ i $c^2 = z^2$, co daje tezę zadania.

Uwaga. Szóstka $(a, b, c, x, y, z) = (1, 5, 6, 7, 3, 2)$ spełnia założenia zadania. Zatem z założeń **nie wynika**, że $a^2 = x^2$, $b^2 = y^2$ i $c^2 = z^2$.

Z drugiego sposobu rozwiązania wynika parametryzacja wszystkich szóstek (a, b, c, x, y, z) spełniających założenia zadania: są to szóstki postaci $(t+u, t+v, t+w, t+u, t+v, t+w)$, $(t+u, t+v, t+w, -t-u, -t-v, -t-w)$, $(t+u, t+v, t+w, t-u, t-v, t-w)$, $(t+u, t+v, t+w, -t+u, -t+v, -t+w)$, gdzie t, u, v, w są dowolnymi liczbami rzeczywistymi spełniającymi równość $u + v + w = 0$.

Traktując a, b, c jako zadane parametry, a x, y, z jako zmienne, możemy rozwiązać układ równań z zadania. Powyższa parametryzacja pozwala obliczyć, że jedynymi rozwiązaniami są trójki $(x, y, z) = (\pm a, \pm b, \pm c)$ oraz $(x, y, z) = (\pm \frac{1}{3}(-a + 2b + 2c), \pm \frac{1}{3}(2a - b + 2c), \pm \frac{1}{3}(2a + 2b - c))$.

Niektórzy zawodnicy rozwiązali zadanie sprytnie wykorzystując liczby zespolone. Poniżej przedstawiamy rozwiązanie oparte na ich pomysśle.

Sposób 3. Oznaczmy $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Wówczas $\omega^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = -\omega - 1$ oraz $\omega^3 = 1$. Stąd

$$\begin{aligned}(a + \omega b + \omega^2 c)^2 &= a^2 + \omega^2 b^2 + \omega^4 c^2 + 2\omega ab + 2\omega^2 ac + 2\omega^3 bc = \\ &= (a^2 + 2bc) + \omega^2(b^2 + 2ca) + \omega(c^2 + 2ab) = \\ &= (x^2 + 2yz) + \omega^2(y^2 + 2zx) + \omega(z^2 + 2xy) = \\ &= (x + \omega y + \omega^2 z)^2.\end{aligned}$$

Zamieniając w razie potrzeby liczby x, y, z na $-x, -y, -z$, możemy przyjąć, że $a + \omega b + \omega^2 c = x + \omega y + \omega^2 z$. Wykorzystując związek $\omega^2 = -\omega - 1$, zapisujemy otrzymaną równość w postaci $a - c - x + z = \omega(c - b + y - z)$. Jeśli $c - b + y - z \neq 0$, to lewa strona ostatniej równości jest rzeczywista, a prawa nie — sprzeczność. Stąd $c - b + y - z = 0$, co pociąga za sobą $a - c - x + z = 0$. Z tych dwóch związków wynika, że liczby $a - x, b - y, c - z$ są równe; oznaczmy ich wspólną wartość przez t .

Podobnie jak wcześniej wykazujemy, że $(a + b + c)^2 = (x + y + z)^2$. Teza wynika z następujących przekształceń:

$$\begin{aligned}0 &= (a + b + c)^2 - (x + y + z)^2 = \\ &= (a + b + c + x + y + z)(a + b + c - x - y - z) = \\ &= (a + b + c + x + y + z) \cdot 3t = \\ &= 3((a + x)t + (b + y)t + (c + z)t) = \\ &= 3((a + x)(a - x) + (b + y)(b - y) + (c + z)(c - z)) = \\ &= 3(a^2 - x^2 + b^2 - y^2 + c^2 - z^2).\end{aligned}$$

9. Dane są takie dodatnie liczby całkowite m, n , że $\sqrt{2} < \frac{m}{n} < \sqrt{2} + \frac{1}{2}$ oraz liczba m jest parzysta. Wykazać, że istnieją takie dodatnie liczby całkowite $k < m$ i $\ell < n$, że

$$\left| \frac{k}{\ell} - \sqrt{2} \right| < \frac{m}{n} - \sqrt{2}.$$

Autor zadania: Mariusz Skalba

Rozwiązanie: Wykażemy, że liczby $k = n$ i $\ell = \frac{m}{2}$ spełniają tezę zadania. Po pierwsze,

$$1 < \sqrt{2} < \frac{m}{n} < \sqrt{2} + \frac{1}{2} < 2,$$

więc $k = n < m$ i $\ell = \frac{m}{2} < n$. Mamy $\frac{k}{\ell} = \frac{2n}{m}$, więc należy wykazać nierówności

$$-\frac{m}{n} + \sqrt{2} < \frac{2n}{m} - \sqrt{2} < \frac{m}{n} - \sqrt{2}. \quad (\star)$$

Z nierówności między średnimi wynika, że

$$\frac{\frac{2n}{m} + \frac{m}{n}}{2} > \sqrt{\frac{2n}{m} \cdot \frac{m}{n}} = \sqrt{2},$$

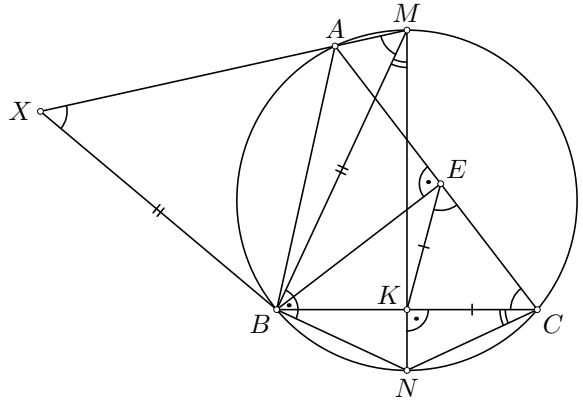
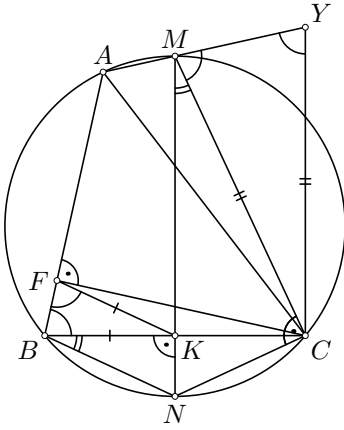
co jest równoważne pierwszej z nierówności $(\star)$. (Nierówność jest ostra, bo jej lewa strona jest wymierna, a prawa niewymierna.) Druga z nierówności $(\star)$ jest równoważna $2n^2 < m^2$, co jest prawdą na mocy założenia, że $\sqrt{2} < \frac{m}{n}$.

10. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC , w którym $AB < AC$. Oznaczmy okrąg opisany na trójkącie ABC przez Ω . Punkty M i N są środkami odpowiednio dłuższego łuku BC i krótszego łuku BC okręgu Ω . Punkty $X \neq M$ i $Y \neq N$ leżą na prostej AM i spełniają równości $BX = BM = CM = CY$. Punkt E jest rzutem prostokątnym punktu B na prostą AC , a punkt F rzutem prostokątnym punktu C na prostą AB . Dowieść, że $\sphericalangle FNX = \sphericalangle YNE$.

Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie: Niech K będzie środkiem boku BC . Wtedy K leży na MN . Ponieważ K jest środkiem przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego FBC , więc $KB = KF$. Kąt MCN jest prosty, bo MN jest średnicą okręgu Ω (prostopadłą do BC). Kąty oparte na tym samym łuku są równe, więc $\sphericalangle NBK = \sphericalangle NMC$. Z cechy podobieństwa kąt-kąt wynika, że trójkąty KBN i CMN są podobne. Mamy $\sphericalangle KBF = 180^\circ - \sphericalangle AMC = \sphericalangle CMY$. Trójkąty

równoramienne KBF i CMY są podobne, bo mają takie same kąty między podstawą i ramieniem. Z otrzymanych podobieństw wynika podobieństwo czworokątów $KNBF$ i $CNMY$. W szczególności $\sphericalangle KNF = \sphericalangle CNY$.

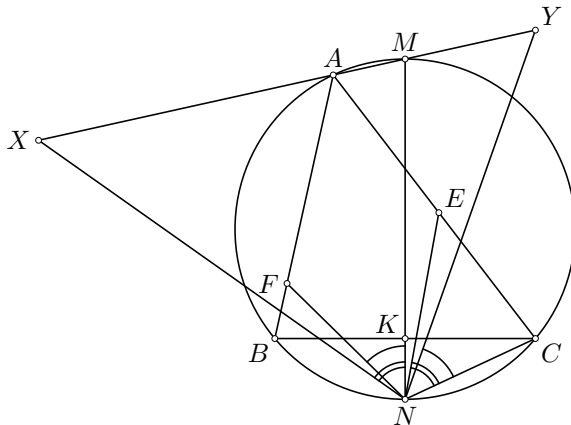


Analogicznie, $KE = KC$, gdyż K jest środkiem przeciwprostokątnej trójkąta EBC . Trójkąty KNC i BNM są podobne, bo $\sphericalangle NKC = 90^\circ = \sphericalangle NBM$ i $\sphericalangle KCN = \sphericalangle BMN$. Trójkąty równoramienne KCE i BMX są podobne, bo mają takie same kąty pomiędzy podstawą i ramieniem: $\sphericalangle XMB = \sphericalangle ECK$. Z otrzymanych podobieństw wynika podobieństwo czworokątów $KNCE$ i $BNMX$. Stąd $\sphericalangle CNE = \sphericalangle MNX$.

Z równości $\sphericalangle KNF = \sphericalangle CNY$ i $\sphericalangle MNX = \sphericalangle CNE$ wynika, że

$$\sphericalangle FNX = \sphericalangle MNX - \sphericalangle KNF = \sphericalangle CNE - \sphericalangle CNY = \sphericalangle YNE,$$

co było do wykazania.



11. Dana jest dodatnia liczba całkowita ℓ oraz dodatnie liczby rzeczywiste $a_1, a_2, \dots, a_\ell$. Dla każdej dodatniej liczby całkowitej n definiujemy

$$c_n = \sum_{k_1+k_2+\dots+k_\ell=n} \frac{(2n)!}{(2k_1)!(2k_2)!\dots(2k_\ell)!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_\ell^{k_\ell}.$$

(W powyższym wzorze sumowanie przebiega po wszystkich ℓ -elementowych ciągach nieujemnych liczb całkowitych $k_1, k_2, \dots, k_\ell$ o sumie równej n .)

Wykazać, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n zachodzi nierówność $\sqrt[n]{c_n} \leq \sqrt[n+1]{c_{n+1}}$.

Autor zadania: Jacek Jakimiuk

Rozwiązanie: Dla dowolnego $n = 1, 2, 3, \dots$ rozważmy liczbę

$$b_n = \sum_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_\ell \in \{-1, 1\}} |\varepsilon_1 \sqrt{a_1} + \varepsilon_2 \sqrt{a_2} + \dots + \varepsilon_\ell \sqrt{a_\ell}|^{2n}. \quad (\star)$$

Korzystając ze wzoru

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_\ell)^m = \sum_{k_1+k_2+\dots+k_\ell=m} \frac{m!}{k_1!k_2!\dots k_\ell!} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_\ell^{k_\ell}$$

rozpisujemy równość $(\star)$:

$$\begin{aligned} b_n &= \sum_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_\ell \in \{-1, 1\}} |\varepsilon_1 \sqrt{a_1} + \varepsilon_2 \sqrt{a_2} + \dots + \varepsilon_\ell \sqrt{a_\ell}|^{2n} = \\ &= \sum_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_\ell \in \{-1, 1\}} \sum_{k_1+k_2+\dots+k_\ell=2n} \frac{(2n)!}{k_1!k_2!\dots k_\ell!} (\varepsilon_1 \sqrt{a_1})^{k_1} \dots (\varepsilon_\ell \sqrt{a_\ell})^{k_\ell} = \\ &= \sum_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_\ell \in \{-1, 1\}} \sum_{k_1+k_2+\dots+k_\ell=2n} \frac{(2n)!}{k_1!k_2!\dots k_\ell!} (\sqrt{a_1})^{k_1} \dots (\sqrt{a_\ell})^{k_\ell} \varepsilon_1^{k_1} \dots \varepsilon_\ell^{k_\ell} = \\ &= \sum_{k_1+k_2+\dots+k_\ell=2n} \frac{(2n)!}{k_1!k_2!\dots k_\ell!} (\sqrt{a_1})^{k_1} \dots (\sqrt{a_\ell})^{k_\ell} \sum_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_\ell \in \{-1, 1\}} \varepsilon_1^{k_1} \dots \varepsilon_\ell^{k_\ell}. \end{aligned}$$

Zauważmy teraz, że

$$\begin{aligned} \sum_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_\ell \in \{-1, 1\}} \varepsilon_1^{k_1} \dots \varepsilon_\ell^{k_\ell} &= \left(\sum_{\varepsilon_1 \in \{-1, 1\}} \varepsilon_1^{k_1} \right) \left(\sum_{\varepsilon_2 \in \{-1, 1\}} \varepsilon_2^{k_2} \right) \dots \left(\sum_{\varepsilon_\ell \in \{-1, 1\}} \varepsilon_\ell^{k_\ell} \right) = \\ &= ((-1)^{k_1} + 1^{k_1}) ((-1)^{k_2} + 1^{k_2}) \dots ((-1)^{k_\ell} + 1^{k_\ell}), \end{aligned}$$

co jest równe 0, gdy choć jedna z liczb $k_1, k_2, \dots, k_\ell$ jest nieparzysta oraz równe 2^ℓ , gdy wszystkie liczby $k_1, k_2, \dots, k_\ell$ są parzyste. Wobec tego

$$\begin{aligned}
 b_n &= \sum_{k_1+k_2+\dots+k_\ell=2n} \frac{(2n)!}{k_1!k_2!\dots k_\ell!} (\sqrt{a_1})^{k_1} \dots (\sqrt{a_\ell})^{k_\ell} \sum_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_\ell \in \{-1, 1\}} \varepsilon_1^{k_1} \dots \varepsilon_\ell^{k_\ell} = \\
 &= \sum_{\substack{k_1+k_2+\dots+k_\ell=2n \\ k_1, k_2, \dots, k_\ell \text{ są parzyste}}} \frac{(2n)!}{k_1!k_2!\dots k_\ell!} (\sqrt{a_1})^{k_1} \dots (\sqrt{a_\ell})^{k_\ell} \cdot 2^\ell = \\
 &= 2^\ell \sum_{k_1+k_2+\dots+k_\ell=n} \frac{(2n)!}{(2k_1)!(2k_2)!\dots (2k_\ell)!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_\ell^{k_\ell} = \\
 &= 2^\ell c_n.
 \end{aligned}$$

Wykazaliśmy zatem, że c_n jest średnią arytmetyczną $2n$ -tych potęg 2^ℓ liczb postaci $|\varepsilon_1\sqrt{a_1} + \varepsilon_2\sqrt{a_2} + \dots + \varepsilon_\ell\sqrt{a_\ell}|$, gdzie $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_\ell \in \{-1, 1\}$. Teza zadania, po wzięciu pierwiastka kwadratowego, przyjmuje równoważną postać

$$\begin{aligned}
 \sqrt[2n]{\frac{\sum_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_\ell \in \{-1, 1\}} |\varepsilon_1\sqrt{a_1} + \varepsilon_2\sqrt{a_2} + \dots + \varepsilon_\ell\sqrt{a_\ell}|^{2n}}{2^\ell}} &\leq \\
 &\leq \sqrt[2n+2]{\frac{\sum_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_\ell \in \{-1, 1\}} |\varepsilon_1\sqrt{a_1} + \varepsilon_2\sqrt{a_2} + \dots + \varepsilon_\ell\sqrt{a_\ell}|^{2n+2}}{2^\ell}},
 \end{aligned}$$

co jest bezpośrednim wnioskiem z nierówności między średnimi potęgowymi stopnia $2n$ i $2n+2$.

12. Powiemy, że podzbiór A zbioru nieujemnych liczb całkowitych jest *fajny*, jeśli istnieje taka liczba całkowita k , że dla dowolnej liczby całkowitej $n \geq k$ istnieje dokładnie jedna para liczb $a > b$ ze zbioru A spełniająca równość $n = a + b$. Rozstrzygnąć, czy istnieje fajny zbiór.

Autor zadania: Piotr Nayar

Rozwiązanie: Załóżmy, że zbiór A jest fajny. Zauważmy, że dla dowolnych liczb całkowitych n, a, b , takich, że $a, b \in A$ równość $n = a + b$ jest równoważna równości $n - 2 \min(A) = (a - \min(A)) + (b - \min(A))$. To oznacza, że zbiór $\{a - \min(A) : a \in A\}$ jest fajny. Innymi słowy, można bez straty ogólności założyć, że $0 \in A$.

Zbiór A musi być nieskończony — w przeciwnym razie żadna liczba większa od $2 \cdot \max(A)$ nie miałaby przedstawienia w postaci $a + b$, gdzie $a, b \in A$.

Niech $0 = a_0 < a_1 < a_2 < \dots$ będzie rosnącą numeracją wszystkich elementów zbioru A . Wówczas oczywiście $a_n \geq n$ dla dowolnego n .

Ustalmy taką liczbę całkowitą $k \geq 100$, że dla dowolnego $n \geq k$ istnieje dokładnie jedna para $0 \leq i < j$ spełniająca równość $n = a_i + a_j$. Oznaczmy $S_n = \{a_i + a_j : 0 \leq i < j \leq n\}$. Zauważmy, że zbiór S_n ma co najwyżej $\binom{n+1}{2}$ elementów.

Lemat 1. $a_n = \min(\{k, k+1, k+2, \dots\} \setminus S_{n-1})$ dla dowolnego $n \geq k$. Innymi słowy, dla dowolnego $n \geq k$ liczba a_n jest najmniejszą liczbą całkowitą większą lub równą k , która nie należy do S_{n-1} .

Dowód Lematu 1. Zauważmy, że $a_n + a_0$ jest reprezentacją liczby a_n w postaci $a_i + a_j$ dla pewnych $0 \leq i < j$. Ponieważ $a_n \geq n \geq k$, więc takie przedstawienie jest jedyne. W konsekwencji nie istnieje para liczb $0 \leq i < j \leq n-1$ spełniająca $a_n = a_i + a_j$. To dowodzi, że $a_n \notin S_{n-1}$. Z drugiej strony, jeśli $m = a_i + a_j \geq k$ dla pewnych $0 \leq i < j$ i $m \notin S_{n-1}$, to $j \geq n$, więc $m = a_i + a_j \geq a_j \geq a_n$, co dowodzi, że a_n jest najmniejszą liczbą całkowitą większą lub równą k spoza zbioru S_{n-1} .

Lemat 2. $a_n \leq a_k + \binom{n}{2}$ dla każdego $n \geq k$.

Dowód Lematu 2. Ponieważ zbiór S_{n-1} ma $|S_{n-1}|$ elementów, wśród liczb całkowitych z przedziału $[a_k, a_k + |S_{n-1}|]$ istnieje taka, która nie należy do S_{n-1} . Nazwijmy tę liczbę m . Z Lematu 1. wynika, że

$$a_n \leq m \leq a_k + |S_{n-1}| \leq a_k + \binom{n}{2}.$$

Lemat 3. $a_n \geq \binom{n-k}{2}$ dla każdego $n > k$.

Dowód Lematu 3. Zdefiniujmy zbiór $R_n = \{a_j - a_i : k \leq i < j \leq n\}$. Zauważmy, że wszystkie elementy tego zbioru są dodatnie i mniejsze od a_n . Stąd wynika, że $|R_n| \leq a_n$. Wystarczy więc udowodnić, że $|R_n| \geq \binom{n-k}{2}$.

Równość $a_j - a_i = a_{j'} - a_{i'}$ jest równoważna równości $a_j + a_{i'} = a_{j'} + a_i$, która dla $k \leq i < j \leq n$, $k \leq i' < j' \leq n$ może być prawdziwa tylko gdy $(i, j) = (i', j')$ lub $i = j'$ lub $i' = j$ (w przeciwnym razie istniałaby liczba większa od k w postaci sumy dwóch różnych elementów zbioru A). Dalej, dla ustalonego $k \leq i < n$ istnieje co najwyżej jedna para liczb j, i' spełniająca $k \leq i' < i < j \leq n$ i $a_j - a_i = a_i - a_{i'}$ (równość ta jest równoważna $2a_i = a_j + a_{i'}$). Z powyższej dyskusji wynika, że wśród liczb $a_j - a_i$, gdzie $k \leq i < j \leq n$, co najwyżej $n - k$ liczb pojawia się dwukrotnie, a wszystkie

pozostałe — jednokrotnie. Zatem

$$|R_n| \geq \binom{n-k+1}{2} - (n-k) = \binom{n-k}{2}.$$

Przejdźmy do rozwiązania zadania. Wybierzmy $n = 4m$, gdzie $m > k$ jest tak dużą liczbą całkowitą, że szacowania w dalszej części rozwiązania oznaczone symbolami $(\star)$ i $(\star\star)$ są prawdziwe. Istnienie takiej liczby m wynika z tego, że jeśli współczynnik wiodący funkcji kwadratowej f jest większy od współczynnika wiodącego funkcji kwadratowej g , to $f(m) > g(m)$ dla dostatecznie dużych m .

Zauważmy, że dla dowolnych $4m - 1 \geq j > i \geq 3m$ mamy, na mocy Lematu 3., wyboru liczby m , oraz Lematu 2.

$$\begin{aligned} a_i + a_j &\geq \binom{i-k}{2} + \binom{j-k}{2} > 2 \cdot \binom{3m-k}{2} \stackrel{(\star)}{>} a_k + \binom{4m}{2} = \\ &= a_k + \binom{n}{2} \geq a_n. \end{aligned}$$

Istnieje zatem $\binom{m}{2}$ elementów zbioru S_{n-1} większych od a_n . To pozwala poprawić szacowanie uzyskane w Lemacie 2. W rzeczy samej, niech S'_{n-1} będzie zbiorem S_{n-1} bez jego $\binom{m}{2}$ największych elementów. Wówczas

$$|S'_{n-1}| = |S_{n-1}| - \binom{m}{2} \quad \text{oraz} \quad a_n = \min(\{k, k+1, k+2, \dots\} \setminus S'_{n-1}).$$

Istnieje taka liczba całkowita t , że $a_k \leq t \leq a_k + |S'_{n-1}|$ oraz $t \notin S'_{n-1}$. Wtedy

$$\begin{aligned} a_n \leq t \leq a_k + |S'_{n-1}| &= a_k + |S_{n-1}| - \binom{m}{2} \leq a_k + \binom{n}{2} - \binom{m}{2} = \\ &= a_k + \binom{4m}{2} - \binom{m}{2} \stackrel{(\star\star)}{<} \binom{4m-k}{2} = \binom{n-k}{2}, \end{aligned}$$

co daje sprzeczność z Lematem 3.

Odpowiedź: Nie.



LXXVI Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia drugiego

14 lutego 2025 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite $n \geq 2$ o następującej własności: istnieją takie niezerowe liczby rzeczywiste $x_1, x_2, \dots, x_n, y$, że

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_k)(x_{k+1} + x_{k+2} + \dots + x_n) = y$$

dla każdego $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$.

2. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite $n \geq 2$ o następującej własności: liczba $2^k \cdot n - 1$ jest pierwsza dla każdego $k \in \{2, 3, \dots, n\}$.

3. Punkt P leży wewnątrz trójkąta ostrokątnego ABC , przy czym kąt BPC jest prosty. Na zewnątrz trójkąta ABC zbudowano trójkąty AQB i ARC , przy czym $\sphericalangle ABQ = \sphericalangle PBC$, $\sphericalangle QAB = \sphericalangle PAC$, $\sphericalangle RCA = \sphericalangle PCB$ oraz $\sphericalangle CAR = \sphericalangle BAP$. Wykazać, że punkty P , Q , R leżą na jednej prostej.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.

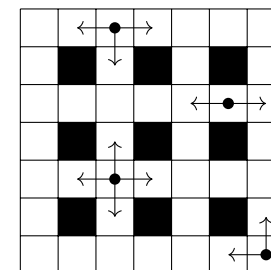


LXXVI Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia drugiego

15 lutego 2025 r. (drugi dzień zawodów)

4. Z planszy $(2n+1) \times (2n+1)$, gdzie $n \geq 2$ jest liczbą całkowitą, usunięto pola w parzystych wierszach i kolumnach, otrzymując labirynt (patrz rysunek). Po labiryncie chodzi mrówka, a jej pojedynczy krok polega na przejściu na jedno z sąsiednich pól. Wyznaczyć, w zależności od n , najmniejszą liczbę kroków, które musi wykonać mrówka, aby odwiedzić każde pole labiryntu. Pole startowe wybiera mrówka. Pole startowe i pole końcowe uznajemy za odwiedzone. Pola mogą być odwiedzane wielokrotnie.



Labirynt dla $n = 3$ oraz możliwe kroki mrówki w czterech różnych jej pozycjach.

5. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC . Okrąg o środku J jest styczny do boku BC w punkcie D , do przedłużenia boku AC w punkcie E i do przedłużenia boku AB w punkcie F . Prosta DE przecina proste CJ i BJ odpowiednio w punktach P i Q . Punkt M jest środkiem odcinka AD . Wykazać, że $PM = QM$.

6. Dane są liczby całkowite $1 \leq k \leq n$. Załóżmy, że ciąg $a_1, a_2, \dots, a_n$ spełnia nierówności $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k$ oraz $0 \leq a_n \leq a_{n-1} \leq \dots \leq a_k$. Liczby $a_1, a_2, \dots, a_n$ ustawiono w kolejności niemalejącej, otrzymując ciąg $b_1, b_2, \dots, b_n$. Wykazać, że

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (j-i)^2 a_i a_j \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (j-i)^2 b_i b_j.$$

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podejście dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.



LXXVI Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia drugiego

1. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite $n \geq 2$ o następującej własności: istnieją takie niezerowe liczby rzeczywiste $x_1, x_2, \dots, x_n$ oraz y , że

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_k)(x_{k+1} + x_{k+2} + \dots + x_n) = y$$

dla każdego $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$.

Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie: Ustalmy dowolną liczbę całkowitą $n \geq 2$. Określmy $x_1 = 1$, $x_k = (-1)^k$ dla $2 \leq k \leq n-1$ oraz $x_n = 1$ gdy $2 \nmid n$ i $x_n = 2$ gdy $2 \mid n$. Wówczas suma $x_1 + x_2 + \dots + x_k$ jest równa 1 dla nieparzystych $1 \leq k \leq n-1$ oraz równa 2 dla parzystych $1 \leq k \leq n-1$. Liczbę x_n dobrano tak, by $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 3$, a więc tak, że suma $x_{k+1} + \dots + x_n$ jest równa 2 dla nieparzystych $1 \leq k \leq n-1$ oraz równa 1 dla parzystych $1 \leq k \leq n$. Otrzymujemy zatem

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_k)(x_{k+1} + x_{k+2} + \dots + x_n) = 2$$

dla dowolnego $1 \leq k \leq n-1$. Dobierając $y = 2$ widzimy, że warunki zadania są spełnione.

Odpowiedź: Wszystkie liczby całkowite $n \geq 2$.

Uwaga. Gdy $n = 2$, dla dowolnych $x_1 \neq 0 \neq x_2$ można dobrać $y = x_1 x_2$. Jeśli $n \geq 3$, to wszystkie ciągi $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, dla których istnieje y spełniający warunki zadania są postaci

$$(a, b, -b, b, -b, \dots, -b, a + b)$$

dla n parzystych oraz

$$(a, b, -b, b, -b, \dots, b, a)$$

dla n nieparzystych, gdzie a, b są dowolnymi liczbami rzeczywistymi takimi, że liczby $a, b, a + b$ są niezerowe. W obu przypadkach $y = a(a + b)$.

2. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite $n \geq 2$ o następującej własności: liczba $2^k \cdot n - 1$ jest pierwsza dla każdego $k \in \{2, 3, \dots, n\}$.

Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie: Liczby $n = 2$ i $n = 3$ spełniają warunki zadania, bowiem liczby

$$2^2 \cdot 2 - 1 = 7, \quad 2^2 \cdot 3 - 1 = 11, \quad 2^3 \cdot 3 - 1 = 23$$

są pierwsze. Poniżej wykażemy na dwa różne sposoby, że liczby $n \geq 4$ nie spełniają warunków zadania.

Sposób 1. Jeśli $n \geq 4$ jest liczbą parzystą, to $n - 1$ jest nieparzystą liczbą większą lub równą 3, a więc ma nieparzysty dzielnik pierwszy p . Wówczas $2 \leq p - 1 \leq n$. Z małego twierdzenia Fermata wynika, że

$$2^{p-1} \cdot n - 1 \equiv 2^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p},$$

więc $2^{p-1} \cdot n - 1$ dzieli się przez p . Liczba ta jest większa od p , więc jest złożona. Stąd n nie spełnia warunków zadania.

Jeśli $n \geq 5$ jest liczbą nieparzystą, to liczba $n - 2$ jest nieparzystą liczbą większą lub równą 3, a więc ma nieparzysty dzielnik pierwszy p . Jeśli $p = 3$, to liczba $2^3 \cdot n - 1 = 8(n - 2) + 15$ dzieli się przez 3 i jest większa od 3, jest więc złożona. W przeciwnym razie $p \geq 5$, wtedy $2 \leq p - 2 \leq n$. Z małego twierdzenia Fermata wynika, że

$$2^{p-2} \cdot n - 1 \equiv 2^{p-2} \cdot 2 - 1 \equiv 2^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p},$$

więc $2^{p-2} \cdot n - 1$ dzieli się przez p . Jest to liczba większa od p , więc jest złożona. Zatem n nie spełnia warunków zadania.

Sposób 2. Jeśli $n - 1$ ma nieparzysty dzielnik pierwszy, to analogicznie jak w sposobie pierwszym dowodzimy, że n nie spełnia warunków zadania. Liczba $n = 5$ nie spełnia warunków zadania, bo $2^3 \cdot 5 - 1 = 3 \cdot 13$. Do rozważenia pozostał przypadek, gdy $n = 2^k + 1$, gdzie $k \geq 3$. Oczywiście $k \leq n$. Mamy

$$2^{k-1}n - 1 = 2^{2k-1} + 2^{k-1} - 1 = 2^{2k-1} + 2^k - 2^{k-1} - 1 = (2^k - 1)(2^{k-1} + 1).$$

Powyższa liczba jest złożona, a zatem n nie spełnia warunków zadania.

Odpowiedź: $n \in \{2, 3\}$.

3. Punkt P leży wewnątrz trójkąta ostrokątnego ABC , przy czym kąt BPC jest prosty. Na zewnątrz trójkąta ABC zbudowano trójkąty AQB i ARC , przy czym $\sphericalangle ABQ = \sphericalangle PBC$, $\sphericalangle QAB = \sphericalangle PAC$, $\sphericalangle RCA = \sphericalangle PCB$ oraz $\sphericalangle CAR = \sphericalangle BAP$. Wykazać, że punkty P , Q , R leżą na jednej prostej.

Autor zadania: Stanisław Majchrzak

Rozwiązanie: Niech X będzie spodkiem wysokości trójkąta ABC poprowadzonej z punktu B . Wówczas punkty P i X leżą na okręgu o średnicy BC . Zauważmy, że

$$\sphericalangle ABQ = \sphericalangle CBP = 180^\circ - \sphericalangle PXC = \sphericalangle AXP.$$

Ponadto z założeń zadania mamy $\sphericalangle QAB = \sphericalangle PAX$. Stąd trójkąty AQB i APX są podobne (cecha podobieństwa kąt-kąt). Zatem

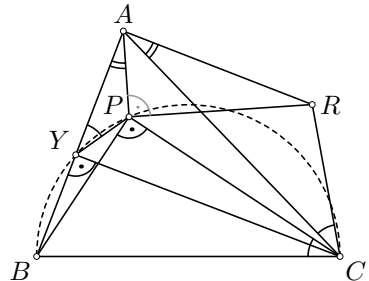
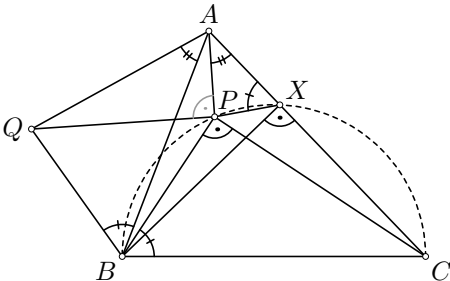
$$\frac{AQ}{AP} = \frac{AB}{AX}.$$

Ponadto

$$\sphericalangle QAP = \sphericalangle QAB + \sphericalangle BAP = \sphericalangle PAX + \sphericalangle BAP = \sphericalangle BAX}.$$

Z powyższych równości wynika, że trójkąty QAP i BAX są podobne (cecha bok-kąt-bok). Stąd wynika, że $\sphericalangle APQ = \sphericalangle AXB = 90^\circ$.

W pełni analogicznie dowodzimy, że $\sphericalangle RPA = 90^\circ$. Zatem punkty Q i R leżą na prostej prostopadłej do AP przechodzącej przez P .

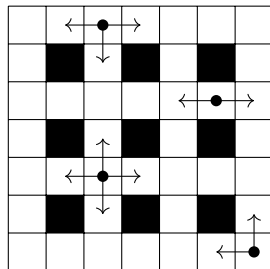




LXXVI Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia drugiego

4. Z planszy $(2n+1) \times (2n+1)$, gdzie $n \geq 2$ jest liczbą całkowitą, usunięto pola w parzystych wierszach i kolumnach, otrzymując labirynt (patrz rysunek). Po labiryncie chodzi mrówka, a jej pojedynczy krok polega na przejściu na jedno z sąsiednich pól. Wyznaczyć, w zależności od n , najmniejszą liczbę kroków, które musi wykonać mrówka, aby odwiedzić każde pole labiryntu. Pole startowe wybiera mrówka. Pole startowe i pole końcowe uznajemy za odwiedzone. Pola mogą być odwiedzane wielokrotnie.

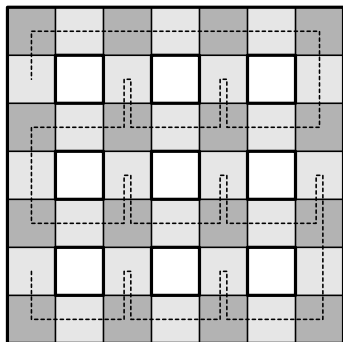
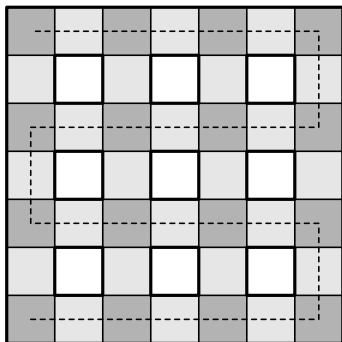


Labirynt dla $n = 3$ oraz możliwe kroki mrówki w czterech różnych jej pozycjach.

Autorzy zadania: Marta i Michał Strzeleccy

Rozwiązanie: Każde pole labiryntu znajdujące się w nieparzystych wierszach i kolumnach pokolorujemy na czerwono, a pozostałe pola labiryntu — na zielono. Pól czerwonych jest $(n+1)^2$, a zielonych — $2n(n+1)$. Dowolne dwa sąsiadujące pola są różnych kolorów. Stąd wniosek, że aby odwiedzić wszystkie zielone pola potrzeba co najmniej $2(2n(n+1) - 1) = 4n^2 + 4n - 2$ kroków.

Wykażemy teraz, że szacowanie otrzymane powyżej jest optymalne. Rozważmy wężyk przedstawiony na lewym rysunku. Wężyk zaczyna się w lewym górnym polu, przechodzi na drugi koniec wiersza, schodzi dwa pola niżej, przechodzi na drugi koniec wiersza, i tak dalej.



Opiszemy teraz przykładową optymalną trasę mrówki. Mrówka zaczyna spacer w polu znajdującym się w drugim wierszu i pierwszej kolumnie. Przechodzi do lewego górnego pola, a następnie idzie wzdłuż wężyka trzymając się cały czas następującej reguły: jeśli mrówka znajduje się w polu bezpośrednio pod nieodwiedzonym dotychczas zielonym polem, to wchodzi na to zielone pole. Jeśli było to ostatnie nieodwiedzione zielone pole, kończy spacer. W przeciwnym razie mrówka natychmiast wraca na poprzednie pole i kontynuuje spacer wzdłuż wężyka.

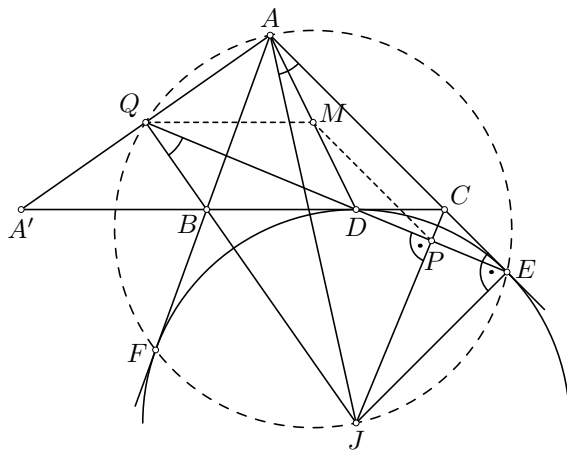
W ten sposób wszystkie pola z wężyka będą odwiedzane w tej samej kolejności, w jakiej znajdują się w wężyku. Bezpośrednio nad ostatnim polem wężyka znajduje się zielone pole (które jest różne od pola startowego, gdyż $n \geq 2$), a więc spacer mrówki nie zakończy się wcześniej niż dotrze na owo pole. W wężyku znajdują się wszystkie czerwone pola, więc wszystkie one zostaną odwiedzane. Wszystkie pola labiryntu poza wężykiem są zielone i znajdują się bezpośrednio nad jakimś czerwonym polem z wężyka, a więc one wszystkie też zostaną odwiedzane. Pozostaje zauważyć, że dla takiej trasy mrówka zaczyna i kończy wędrówkę na zielonym polu i każde zielone pole odwiedza dokładnie raz. Stąd mrówka wykona dokładnie $2(2n^2 + 2n - 1)$ kroków.

5. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC . Okrąg o środku J jest styczny do boku BC w punkcie D , do przedłużenia boku AC w punkcie E i do przedłużenia boku AB w punkcie F . Prosta DE przecina proste CJ i BJ odpowiednio w punktach P i Q . Punkt M jest środkiem odcinka AD . Wykazać, że $PM = QM$.

Autor zadania: Stanisław Majchrzak

Rozwiązanie:

Sposób 1. Oznaczmy $\alpha = \sphericalangle BAC$, $\beta = \sphericalangle CBA$, $\gamma = \sphericalangle ACB$. Proste BJ i CJ są dwusiecznymi kątów FBC i BCE , więc $\sphericalangle JBC = \frac{1}{2}(180^\circ - \beta)$ i $\sphericalangle BCJ = \frac{1}{2}(180^\circ - \gamma)$. Stąd $\sphericalangle CJB = 180^\circ - \sphericalangle JBC - \sphericalangle BCJ = \frac{\beta + \gamma}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ i $\sphericalangle JQE = 90^\circ - \sphericalangle CJB = \frac{\alpha}{2}$. Prosta AJ jest dwusieczną kąta BAC , więc $\sphericalangle JAE = \frac{\alpha}{2}$. Zatem kąty JQE i JAE są równe. Przy tym punkty A i Q leżą po tej samej stronie prostej JE , więc punkty A , Q , J , E leżą na jednym okręgu. Ponieważ $\sphericalangle AEJ = 90^\circ$, więc również $\sphericalangle JQA = 90^\circ$.



Niech A' będzie punktem symetrycznym do A względem prostej BJ . Ponieważ BJ jest dwusieczną kąta między prostymi AB i BC , więc A' leży na BC . Oprócz tego Q jest środkiem odcinka AA' , bo kąt JQA jest prosty. Korzystając z twierdzenia o linii środkowej mamy $PM = \frac{1}{2}EA$ i $QM = \frac{1}{2}A'D$. Ponadto $A'D = AF$, gdyż odcinki te są symetryczne względem BJ oraz $AF = AE$, gdyż są to odcinki styczne poprowadzone z punktu A do okręgu z zadania. Łącząc otrzymane równości odcinków dostajemy

$$QM = \frac{1}{2}A'D = \frac{1}{2}AF = \frac{1}{2}AE = PM.$$

Sposób 2. Niech R będzie punktem przecięcia prostych DF i CJ . Analogicznie jak w sposobie pierwszym dowodzimy, że Q i R leżą na okręgu o średnicy AJ . Proste AQ i DF są równoległe, bo obie są prostopadłe do BJ . Podobnie, AR i DE są równoległe, bo są prostopadłe do CJ . Wobec tego czworokąt $AQDR$ jest równoległobokiem. Punkt M , czyli środek odcinka AD , jest jednocześnie środkiem QR . Trójkąt PQR jest prostokątny, a M jest środkiem jego przeciwprostokątnej QR . Stąd $PM = QM$.

Rozważmy ciąg $a_1, a_2, \dots, a_n$ spełniający założenia zadania. Wówczas $b_1 = a_1$ lub $b_1 = a_n$. Zastępując w razie potrzeby ciąg $a_1, a_2, \dots, a_n$ ciągiem $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1$ możemy założyć, że $b_1 = a_1$. Rzeczywiście, przy takiej zamianie obie strony dowodzonej nierówności nie zmieniają się. Zauważmy, że ciąg $a'_1 = a_2, a'_2 = a_3, \dots, a'_{n-1} = a_n$ spełnia założenie indukcyjne, a jego

niemalejącą permutacją jest ciąg $b'_1 = b_2, b'_2 = b_3, \dots, b'_{n-1} = b_n$. Dostajemy

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n-1} (j-i)^2 a'_i a'_j \leq \sum_{1 \leq i < j \leq n-1} (j-i)^2 b'_i b'_j,$$

czyli

$$\sum_{2 \leq i < j \leq n} (j-i)^2 a_i a_j \leq \sum_{2 \leq i < j \leq n} (j-i)^2 b_i b_j. \quad (\clubsuit)$$

Wystarczy zatem udowodnić, że

$$\sum_{j=2}^n (j-1)^2 a_j \leq \sum_{j=2}^n (j-1)^2 b_j, \quad (\spadesuit)$$

gdyż $a_1 \cdot (\spadesuit) + (\clubsuit) = (\heartsuit)$.

Zauważmy, że ciągi $1^2, 2^2, \dots, (n-1)^2$ i $b_2, b_3, \dots, b_n$ są niemalejące, a ciąg $a_2, a_3, \dots, a_n$ jest permutacją ciągu $b_2, b_3, \dots, b_n$. Stosując nierówność między ciągami jednomonotonicznymi, dostajemy $(\spadesuit)$.

Uwaga. Nierówność między ciągami jednomonotonicznymi orzeka, że jeśli $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ i $y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_n$, to dla dowolnej permutacji $\sigma: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ zachodzą nierówności

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \geq \sum_{i=1}^n x_i y_{\sigma(i)} \geq \sum_{i=1}^n x_i y_{n-i+1}. \quad (\diamond)$$

Dowód tej nierówności wykorzystuje następujący lemat: jeżeli $a \geq b$ i $c \geq d$, to $ac + bd \geq ad + bc$. Lemat jest równoważny nierówności $(a-b)(c-d) \geq 0$, prawdziwej na mocy przyjętych założeń.

Jeśli $y_{\sigma(j)} > y_{\sigma(k)}$ dla pewnych $j < k$, to możemy zamienić miejscami $y_{\sigma(j)}$ i $y_{\sigma(k)}$, tym samym nie zmniejszając wartości sumy $\sum_{i=1}^n x_i y_{\sigma(i)}$. Po wykonaniu skończenie wielu takich zamian dochodzimy do sytuacji, w której ciąg $y_{\sigma(1)}, y_{\sigma(2)}, \dots, y_{\sigma(n)}$ jest posortowany niemalejąco. Stąd wynika lewa z nierówności $(\diamond)$. Prawej nierówności dowodzi się analogicznie, sukcesywnie zamieniając liczby $y_{\sigma(j)}, y_{\sigma(k)}$, dla których $j < k$ i $y_{\sigma(j)} < y_{\sigma(k)}$, ostatecznie doprowadzając do sytuacji, w której ciąg $y_{\sigma(1)}, y_{\sigma(2)}, \dots, y_{\sigma(n)}$ jest nierosnący.



LXXVI Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia trzeciego

2 kwietnia 2025 r. (pierwszy dzień zawodów)

1. Wyznaczyć wszystkie czwórki liczb rzeczywistych (a, b, c, d) spełniające układ równań

$$\begin{cases} a + b + c + d = 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 12 \\ abcd = -3 \end{cases}$$

2. Dane są takie dodatnie liczby całkowite k, m, n, p , że $p = 2^{2^n} + 1$, p jest liczbą pierwszą i $2^k - m$ dzieli się przez p . Wykazać, że istnieje taka dodatnia liczba całkowita ℓ , że liczba $2^\ell - m$ dzieli się przez p^2 .

3. Dana jest dodatnia liczba całkowita k oraz k kolorów. Zbiór $2k$ punktów płaszczyzny nazwiemy *barwnym*, jeśli zawiera po dwa punkty każdego koloru oraz odcinki łączące pary punktów tego samego koloru są parami rozłączne. Wyznaczyć, w zależności od k , najmniejszą liczbę całkowitą $n \geq 2$ o następującej własności: w każdym zbiorze nk punktów płaszczyzny, z których żadne trzy nie są współliniowe, zawierającym po n punktów każdego koloru istnieje barwny podzbiór.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podjęcie dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.



LXXVI Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe zawodów stopnia trzeciego

3 kwietnia 2025 r. (drugi dzień zawodów)

4. Dana jest liczba całkowita $n \geq 2$ oraz zbiór S składający się z $2n$ dodatnich liczb całkowitych nie większych od n^2 . Udowodnić, że istnieje liczba całkowita $r \in \{1, 2, \dots, n\}$, którą można zapisać w postaci $r = a - b$ dla $a, b \in S$ na co najmniej trzy różne sposoby.

5. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$ niebędący trapezem wpisany w pewien okrąg i opisany na okręgu ω . Oznaczmy punkty styczności okręgu ω z bokami AB, BC, CD, DA odpowiednio przez K, L, M, N . Okrąg o środku I_K , różny od ω , jest styczny do boku AB i prostych AD i BC . Okrąg o środku I_L , różny od ω , jest styczny do boku BC i prostych AB i CD . Okrąg o środku I_M , różny od ω , jest styczny do boku CD i prostych AD i BC . Okrąg o środku I_N , różny od ω , jest styczny do boku AD i prostych AB i CD . Wykazać, że proste $I_K K, I_L L, I_M M, I_N N$ przecinają się w jednym punkcie.

6. Dana jest malejąca funkcja $f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, która przyjmuje wszystkie dodatnie wartości. Dane są dodatnie liczby $a_1 \neq b_1$. Liczby $a_2, b_2, a_3, b_3, a_4, b_4, \dots$ spełniają zależności

$$a_{n+1} = a_n + f(b_n), \quad b_{n+1} = b_n + f(a_n)$$

dla każdego $n \geq 1$. Wykazać, że $|a_n - b_n| > 2025$ dla pewnej dodatniej liczby całkowitej n .

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 300 minut (5 godzin).
2. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez Komitet. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
3. W przypadku konieczności otrzymania dodatkowego papieru, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podjęcie dyżurującego.
4. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
5. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych i innych urządzeń elektronicznych.



LXXVI Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia trzeciego

1. Wyznaczyć wszystkie czwórki liczb rzeczywistych (a, b, c, d) spełniające układ równań

$$\begin{cases} a + b + c + d = 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 12 \\ abcd = -3 \end{cases}$$

Autor zadania: Piotr Nayar

Rozwiązanie: Permutowanie zmiennych oraz przemnożenie wszystkich zmiennych przez -1 nie zmienia układu równań. Można więc bez straty ogólności założyć, że co najmniej dwie z liczb a, b, c, d są nieujemne. Z trzeciego równania wynika, że liczby a, b, c, d są niezerowe i dokładnie trzy z nich są dodatnie. Bez straty ogólności przyjmijmy, że $a, b, c > 0$ i $d < 0$.

Z pierwszego równania wyznaczamy $d = -a - b - c$. Podstawiając wyliczoną wartość do pozostałych dwóch równań otrzymujemy po prostych przekształceniach

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca = 6 \\ abc(a + b + c) = 3 \end{cases}$$

Z równania $abc(a + b + c) = 3$ wynika związek $c(a + b + c) = \frac{3}{ab}$. Wobec tego

$$6 = a^2 + b^2 + ab + c(a + b + c) = a^2 + b^2 + ab + \frac{3}{ab}.$$

Równoważnie:

$$0 = (a - b)^2 + \frac{3}{ab} (ab - 1)^2,$$

skąd wynika, że $a = b$ i $ab = 1$. Zatem $a = b = 1$. Po podstawieniu do $abc(a + b + c) = 3$ dostajemy $c(c + 2) = 3$. Wobec dodatniości liczby c dostajemy $c = 1$. Stąd $d = -a - b - c = -3$. Bezpośrednio sprawdzamy, że otrzymana czwórka spełnia wyjściowy układ równań. Uwzględniając pierwsze zdanie dowodu otrzymujemy pozostałe rozwiązania.

Odpowiedź: Czwórki $(1, 1, 1, -3)$, $(-1, -1, -1, 3)$ oraz ich permutacje.

2. Dane są takie dodatnie liczby całkowite k, m, n, p , że $p = 2^{2^n} + 1$, p jest liczbą pierwszą i $2^k - m$ dzieli się przez p . Wykazać, że istnieje taka dodatnia liczba całkowita ℓ , że liczba $2^\ell - m$ dzieli się przez p^2 .

Autor zadania: Tomasz Kobos

Rozwiązanie: Z postaci liczby p wynika, że $p > 2$ oraz $p \nmid m$ (w przeciwnym razie liczba $p = 2^{2^n} + 1$ byłaby dzielnikiem liczby 2^k , co nie jest możliwe, bo jedynym dzielnikiem pierwszym liczby 2^k jest 2). Stąd $\text{NWD}(p, 2m) = 1$, co oznacza, że istnieje dodatnia liczba całkowita s spełniająca kongruencję $2ms \equiv 1 \pmod{p}$.

Z założenia wynika, że $2^k \equiv bp + m \pmod{p^2}$ dla pewnej nieujemnej liczby całkowitej b . Udowodnimy, że liczba $\ell = k + 2^{n+1} \cdot bs$ spełnia warunki zadania. Jest to jasne, gdy $b = 0$. Dla $b \geq 1$ mamy

$$2^{2^{n+1} \cdot bs} = (p-1)^{2bs} = 1 - 2bsp + \sum_{i=2}^{2bs} \binom{2bs}{i} p^i (-1)^{2bs-i} \equiv 1 - 2bsp \pmod{p^2}.$$

Wobec tego

$$2^\ell = 2^k \cdot 2^{2^{n+1} \cdot bs} \equiv (bp + m)(1 - 2bsp) \equiv m + pb(1 - 2ms) \equiv m \pmod{p^2}$$

— ostatnia kongruencja wynika z tego, że liczba $1 - 2ms$ dzieli się przez p .

3. Dana jest dodatnia liczba całkowita k oraz k kolorów. Zbiór $2k$ punktów płaszczyzny nazwiemy *barwnym*, jeśli zawiera po dwa punkty każdego koloru oraz odcinki łączące pary punktów tego samego koloru są parami rozłączne. Wyznaczyć, w zależności od k , najmniejszą liczbę całkowitą $n \geq 2$ o następującej własności: w każdym zbiorze nk punktów płaszczyzny, z których żadne trzy nie są współliniowe, zawierającym po n punktów każdego koloru istnieje barwny podzbiór.

Autor zadania: Łukasz Bożyk

Rozwiązanie: Rozszerzamy pojęcie zbiorów barwnych do sytuacji ogólniejszej, w której do dyspozycji jest ℓ kolorów. Zbiór 2ℓ punktów płaszczyzny nazwiemy ℓ -*barwnym*, jeśli zawiera po dwa punkty każdego koloru oraz odcinki łączące pary punktów tego samego koloru są parami rozłączne.

Stwierdzenie. Niech $1 \leq n \leq k$. Rozważmy zbiór S złożony z nk punktów $A_1, A_2, \dots, A_{nk}$ leżących na jednym okręgu w tej kolejności. Dla każdego i punkt

A_i kolorujemy na kolor $r(i)$, gdzie $r(i)$ oznacza resztę z dzielenia i przez k . Wówczas nie istnieje k -barwny podzbiór zbioru S .

Dowód stwierdzenia. Indukcja po k . Dla $k = 1$ mamy $n = 1$ i teza stwierdzenia jest oczywista — zbiór S składa się tylko z jednego punktu, a 1-barwny zbiór powinien zawierać dwa punkty.

Ustalmy $1 \leq n \leq k$, przy czym $k \geq 2$. Załóżmy, że dla wszystkich $1 \leq n' \leq k-1$ teza stwierdzenia dla pary $(n', k-1)$ jest prawdziwa. Udowodnimy, że jest też prawdziwa dla pary (n, k) . Załóżmy nie wprost, że B jest k -barwnym podzbiorem zbioru S i narysujmy k odcinków łączących punkty ze zbioru B tego samego koloru. Ponieważ punkty ze zbioru S są wierzchołkami wielokąta wypukłego, i żadne dwa narysowane odcinki się nie przecinają, więc któryś z narysowanych odcinków wyznacza taką prostą, że wszystkie pozostałe punkty zbioru S leżą po tej samej stronie tej prostej. Zmieńmy numerację punktów w taki sposób, by odcinkiem o opisanej własności był $A_{sk}A_{nk}$ dla pewnego s , a pozostałe punkty ze zbioru S miały indeksy mniejsze od sk . Zbiór $B' = B \setminus \{A_{sk}, A_{nk}\}$ jest $(k-1)$ -barwny. Rozważmy zbiór $S' = \{A_1, A_2, \dots, A_{sk}\} \setminus \{A_k, A_{2k}, \dots, A_{sk}\}$. Zbiór S' składa się z $s(k-1)$ punktów pokolorowanych na $k-1$ kolorów, po s punktów w każdym kolorze, przy czym kolorowanie spełnia założenia stwierdzenia przy (n, k) zastąpionym przez $(s, k-1)$. Z założenia indukcyjnego wynika więc, że S' nie zawiera $(k-1)$ -barwnego podzbioru — otrzymana sprzeczność kończy dowód stwierdzenia. $\square$

Ze stwierdzenia wynika w szczególności, że liczby n nie większe od k nie mają żądanej własności. Teraz udowodnimy, że $n = k+1$ ma żądaną własność.

Rozważmy zbiór S złożony z $k(k+1)$ punktów na płaszczyźnie, po $k+1$ punktów w każdym kolorze, przy czym żadne trzy z nich nie leżą na jednej prostej. Wprowadźmy układ współrzędnych w taki sposób, że odcięte punktów ze zbioru S są parami różne. Punkty ze zbioru S o kolorze i oznaczamy przez $A_{i,j} = (x_{i,j}, y_{i,j})$ dla $1 \leq j \leq k+1$. Numerację ustalamy tak, że dla każdego i i każdych $j < j'$ mamy $x_{i,j} < x_{i,j'}$. Niech i_1 będzie tym kolorem, dla którego liczba $x_{i_1,2}$ jest najmniejsza i narysujmy odcinek $A_{i_1,1}A_{i_1,2}$. Niech i_2 będzie tym kolorem spośród kolorów różnych od i_1 , dla którego liczba $x_{i_2,3}$ jest najmniejsza. Narysujmy odcinek $A_{i_2,2}A_{i_2,3}$. Procedurę kontynuujemy: w s -tym kroku znajdujemy kolor i_s , dla którego

$$x_{i_s,s+1} = \min\{x_{i,s+1} : i \neq i_t \text{ dla każdego } t < s\}$$

i rysujemy odcinek $A_{i_s,s}A_{i_s,s+1}$. Procedurę kończymy po wyczerpaniu wszyst-

kich k kolorów. W ten sposób narysowaliśmy k odcinków, każdy z nich łączy punkty jednego koloru, i dla każdych dwóch odcinków kolory te są różne. Żadne dwa narysowane odcinki nie przecinają się, bo kolejne kolory dobrane zostały tak, że

$$x_{i_1,1} < x_{i_1,2} < x_{i_2,2} < x_{i_2,3} < x_{i_3,3} < x_{i_3,4} < \dots < x_{i_{k-1},k} < x_{i_k,k} < x_{i_k,k+1}.$$

Zatem zbiór $\{A_{i_1,1}, A_{i_1,2}, A_{i_2,2}, A_{i_2,3}, \dots, A_{i_k,k}, A_{i_k,k+1}\}$ jest barwnym podzbiorem zbioru S .

Odpowiedź: Najmniejszym takim n jest $n = k + 1$.



LXXVI Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia trzeciego

4. Dana jest liczba całkowita $n \geq 2$ oraz zbiór S składający się z $2n$ dodatnich liczb całkowitych nie większych od n^2 . Udowodnić, że istnieje liczba całkowita $r \in \{1, 2, \dots, n\}$, którą można zapisać w postaci $r = a - b$ dla $a, b \in S$ na co najmniej trzy różne sposoby.

Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie: Oznaczmy przez $s_1, s_2, \dots, s_{2n}$ elementy zbioru S , przy czym $s_1 < s_2 < \dots < s_{2n}$. Wykażemy, że istnieje taka liczba $r \in \{1, 2, \dots, n\}$, że co najmniej trzy z następujących różnic

$$s_2 - s_1, s_3 - s_2, \dots, s_{2n} - s_{2n-1}$$

są równe r .

Założmy przeciwnie: każda z liczb $1, 2, \dots, n$ występuje wśród powyższych różnic co najwyżej dwa razy. Z jednej strony

$$\sum_{k=1}^{2n-1} (s_{k+1} - s_k) \geq 1 + 1 + 2 + 2 + \dots + (n-1) + (n-1) + n = n^2.$$

Z drugiej strony, skoro $1 \leq s_1$ i $s_{2n} \leq n^2$,

$$\sum_{k=1}^{2n-1} (s_{k+1} - s_k) = s_{2n} - s_1 \leq n^2 - 1.$$

Otrzymane nierówności prowadzą do sprzeczności.

5. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$ niebędący trapezem wpisany w pewien okrąg i opisany na okręgu ω . Oznaczmy punkty styczności okręgu ω z bokami AB, BC, CD, DA odpowiednio przez K, L, M, N . Okrąg o środku I_K , różny od ω , jest styczny do boku AB i prostych AD i BC . Okrąg o środku I_L , różny od ω , jest styczny do boku BC i prostych AB i CD . Okrąg o środku I_M , różny od ω , jest styczny do boku CD i prostych AD i

BC . Okrąg o środku I_N , różny od ω , jest styczny do boku AD i prostych AB i CD . Wykazać, że proste I_KK , I_LL , I_MM , I_NN przecinają się w jednym punkcie.

Autor zadania: Michał Kieza

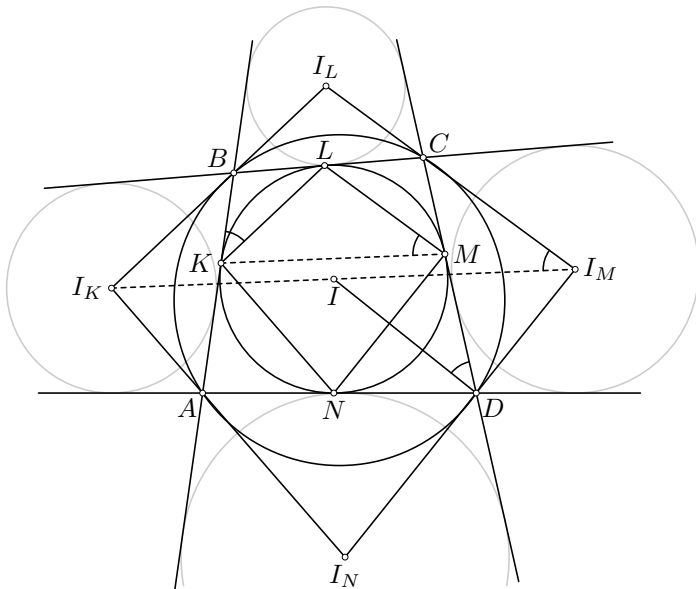
Rozwiązanie: Oznaczmy środek okręgu ω przez I . Punkty I_K, I, I_M są współliniowe, bo leżą na dwusiecznej kąta między prostymi AD i BC . Zauważmy, że proste KL i I_KI_L są równoległe, bo obie są prostopadłe do prostej BI . Analogicznie $LM \parallel I_LI_M$, $MN \parallel I_MI_N$, $NK \parallel I_NI_K$.

Skoro proste CI i CI_M są prostopadłe, to C leży na okręgu o średnicy II_M . Analogicznie D też leży na tym okręgu. Mamy więc

$$\sphericalangle CI_MI = \sphericalangle CDI = \frac{1}{2} \sphericalangle CDA = \frac{1}{2} (180^\circ - \sphericalangle ABC) = \sphericalangle LKB = \sphericalangle LMK,$$

przy czym kolejne równości biorą się z:

- współokręgowości punktów C, I_M, D, I ,
- tego, że DI jest dwusieczną kąta CDA ,
- współokręgowości punktów A, B, C, D ,
- równoramienności trójkąta BKL ,
- zależności między kątem dopisanym i kątem wpisanym.



Otrzymana równość wraz z równoległością $LM \parallel I_L I_M$ implikuje, że $KM \parallel II_M$. Z wszystkich otrzymanych równoległości wynika, że czworokąty $KLMN$ i $I_K I_L I_M I_N$ są jednokładne lub jeden z drugiego powstaje przez przesunięcie o wektor. Druga opcja jednak odpada, bo skala podobieństwa czworokątów $KLMN$ i $I_K I_L I_M I_N$ jest różna od 1, gdyż $KLMN$ całkowicie zawiera się wewnątrz $I_K I_L I_M I_N$. Wykazaliśmy więc, że proste $I_K K$, $I_L L$, $I_M M$, $I_N N$ przecinają się w jednym punkcie — środku jednokładności przekształcającej $KLMN$ na $I_K I_L I_M I_N$.

6. Dana jest malejąca funkcja $f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, która przyjmuje wszystkie dodatnie wartości. Dane są dodatnie liczby $a_1 \neq b_1$. Liczby $a_2, b_2, a_3, b_3, a_4, b_4, \dots$ spełniają zależności

$$a_{n+1} = a_n + f(b_n), \quad b_{n+1} = b_n + f(a_n)$$

dla każdego $n \geq 1$. Wykazać, że $|a_n - b_n| > 2025$ dla pewnej dodatniej liczby całkowitej n .

Autor zadania: Daniel Goc

Rozwiązanie: Jeśli ciąg $a_1, a_2, \dots$ jest ograniczony z góry, to istnieje $M > 0$, takie że $a_n < M$ dla każdego n . Wtedy $b_{n+1} = b_n + f(a_n) > b_n + f(M)$ dla dowolnego n , skąd otrzymujemy $b_{n+1} > b_1 + nf(M)$. Wtedy dla dostatecznie dużego n mamy $b_n > 2025 + M$, skąd $|a_n - b_n| > 2025$. Analogicznie rozumiemy, gdy ciąg $b_1, b_2, \dots$ jest ograniczony z góry.

Do rozważenia pozostaje przypadek, gdy oba ciągi są nieograniczone z góry. Bez straty ogólności przyjmijmy, że $a_1 > b_1$. Zdefiniujmy $c_n = a_n - b_n$ dla dowolnego $n \geq 1$. Oznaczmy $d = \frac{1}{3}(a_1 - b_1)$. Zauważmy, że $a_1 < a_2 < \dots$ i $b_1 < b_2 < \dots$, a ponadto dla dowolnego n mamy

$$c_{n+1} = c_n + f(b_n) - f(a_n) > c_n,$$

skąd wynika, że $c_n > c_1 = 3d$ dla dowolnego $n \geq 1$.

Lemat 1. Jeśli $m \geq n$ i $b_m < a_n$, to $b_{m+1} < a_{n+1}$.

Dowód lematu 1. Mamy $b_n < a_n \leq a_m$, więc $f(a_m) < f(b_n)$. Stąd i z założenia $b_m < a_n$ dostajemy $b_{m+1} = b_m + f(a_m) < a_n + f(b_n) = a_{n+1}$. $\square$

Ustalmy liczbę całkowitą N tak dużą, że $f(b_N) < d$. Wówczas $f(a_n) < d$ i $f(b_n) < d$ dla dowolnego $n \geq N$.

Lemat 2. Dla każdego $n \geq N$ istnieje $m \geq n$, takie że $c_m > c_n + d$.

Dowód lematu 2. Ustalmy $n \geq N$. Niech ℓ będzie największą liczbą całkowitą spełniającą nierówność $b_{n+\ell} < a_n$. Wtedy $a_n - b_{n+\ell} \leq d$, bo w przeciwnym razie mielibyśmy $b_{n+\ell+1} = b_{n+\ell} + f(a_{n+\ell}) < b_{n+\ell} + d < a_n$ wbrew wyborowi ℓ . Z lematu 1. dostajemy przez prostą indukcję $a_j > b_{j+\ell}$ dla dowolnego $j \geq n$. W konsekwencji $f(a_j) < f(b_{j+\ell})$ dla dowolnego $j \geq n$.

Zauważmy, że dla dowolnego $m > n + \ell$ mamy

$$c_m = c_n + \sum_{j=n}^{m-1} (f(b_j) - f(a_j)) = c_n + A + B - C,$$

gdzie

$$A = \sum_{j=n}^{n+\ell-1} f(b_j), \quad B = \sum_{j=n}^{m-\ell-1} (f(b_{j+\ell}) - f(a_j)), \quad C = \sum_{j=m-\ell}^{m-1} f(a_j).$$

Zauważmy, że

$$A = a_{n+\ell} - a_n \geq a_{n+\ell} - b_{n+\ell} - d = c_{n+\ell} - d > c_1 - d = 2d.$$

Ponadto $B > 0$, bo każdy składnik sumy we wzorze definiującym B jest dodatni. Wybierzmy liczbę m tak dużą, że $f(a_{m-\ell}) < \frac{d}{\ell}$. Mamy

$$C < \ell \cdot f(a_{m-\ell}) < d.$$

W takim razie $A + B - C > 2d + 0 - d = d$, co kończy dowód lematu. $\square$

Sukcesywnie stosujemy Lemat 2. i otrzymujemy rosnący ciąg indeksów $N = m_0, m_1, m_2, \dots$, taki że $c_{m_{j+1}} > c_{m_j} + d$ dla dowolnego $j \geq 0$. Wynika stąd, że $c_{m_j} > c_N + jd$ dla dowolnego j . Jeżeli więc $j > \frac{2025}{d}$, to

$$c_{m_j} > c_N + jd > 2025.$$



LXXVII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia pierwszego
I seria: do 13 października 2025 r.

1. Piotrek bawi się kamykami. Początkowo ma pusty stos. W i -tym ruchu jeśli może zabrać ze stosu i kamyków, to to robi, a w przeciwnym razie — dokłada na stos i kamyków. W kolejnych ruchach liczby kamyków na stosie są więc równe: 1, 3, 0, 4, 9, 3, 10, ...

Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite $n \geq 1$ o tej własności, że po n ruchach na stosie Piotrka nie ma żadnych kamyków.

2. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC . Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt. Okrąg o przechodzi przez punkt I i jest styczny do prostej BC w punkcie C . Półprosta BI przecina o w punkcie $D \neq I$. Półprosta BA przecina okrąg opisany na trójkącie ADI w punkcie $E \neq A$ leżącym poza odcinkiem AB . Wykazać, że proste DE i AI przecinają się w punkcie leżącym na o .

3. Dana jest liczba całkowita $n \geq 1$ oraz liczby rzeczywiste $x_1, x_2, \dots, x_{2n+1}$. Załóżmy, że $x_i + x_{i+1} \geq 0$ dla każdego $i = 1, 2, \dots, 2n + 1$ (przyjmujemy $x_{2n+2} = x_1$). Wykazać, że

$$|x_1| + |x_2| + \dots + |x_{2n+1}| \leq (2n + 1)(x_1 + x_2 + \dots + x_{2n+1}).$$

4. Dane są dodatnie liczby całkowite a, b . Załóżmy, że liczba $a^2 + ab$ jest iloczynem dwóch kolejnych liczb całkowitych. Wykazać, że jeśli $b > 1$, to

$$b \geq 1 + \sqrt{4a + 1}$$

oraz wyznaczyć wszystkie pary liczb (a, b) spełniające warunki zadania, dla których w powyższej nierówności zachodzi równość.

Rozwiązania powyższych zadań należy — po uprzedniej rejestracji — zamieścić w systemie internetowym olimpiady dostępnym pod adresem <https://om.sem.edu.pl> najpóźniej dnia

13 października 2025 r.

Rozwiązania przesłane w późniejszym terminie nie będą rozpatrywane. Każde rozwiązanie należy podpisać na pierwszej jego stronie: imieniem, nazwiskiem, adresem poczty elektronicznej oraz numerem zadania.



LXXVII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia pierwszego
II seria: do 12 listopada 2025 r.

5. Wyznaczyć wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych k, n spełniających równanie $3^k + n^3 + 6 = k(k+1)(k+2) \dots (k+n-1)$.

6. Dany jest ciąg 2025 liczb rzeczywistych, których suma wynosi 0, nie składający się z samych zer. Będziemy modyfikować ten ciąg zgodnie z następującą procedurą. Oznaczamy przez A liczbę dodatnich liczb w tym ciągu, przez B liczbę ujemnych liczb w tym ciągu, a przez S sumę wszystkich dodatnich liczb w tym ciągu. Od każdej dodatniej liczby w tym ciągu odejmujemy $\frac{S}{A}$, a do każdej ujemnej liczby w ciągu dodajemy $\frac{S}{B}$. Otrzymujemy w ten sposób nowy ciąg 2025 liczb rzeczywistych, do którego można zastosować opisaną wyżej procedurę ponownie (o ile otrzymany ciąg nie składa się z samych zer). Wykazać, że po wykonaniu tej procedury pewną skończoną liczbę razy otrzymamy ciąg, w którym wartości bezwzględne wszystkich wyrazów są mniejsze od $\frac{1}{2025}$.

7. Odcinek AD jest wysokością trójkąta ostrokątnego ABC . Punkty E i F są rzutami punktu D odpowiednio na proste AB i AC . Punkty K, L, M są odpowiednio środkami odcinków BD, BC, DC . Wykazać, że proste EK, AL, FM przecinają się w jednym punkcie.

8. Dana jest dodatnia liczba całkowita n . *Permutacją* nazywamy każdą różnowartościową funkcję $f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$. Dane są parami różne permutacje $f_1, \dots, f_N$ spełniające następujący warunek: dla dowolnych (niekoniecznie różnych) indeksów i, j istnieje takie k , że $f_i \circ f_j = f_k$, gdzie $\circ$ oznacza złożenie funkcji. Dla $1 \leq i < j \leq n$ niech $Z(i, j)$ oznacza liczbę tych indeksów ℓ , że $f_\ell(i) > f_\ell(j)$. Udowodnić, że

$$\frac{N}{2} \cdot \sum_{1 \leq i < j \leq n} Z(i, j) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} Z(i, j)^2.$$

Rozwiązania powyższych zadań należy — po uprzedniej rejestracji — zamieścić w systemie internetowym olimpiady dostępnym pod adresem <https://om.sem.edu.pl> najpóźniej dnia

12 listopada 2025 r.

Rozwiązania przesłane w późniejszym terminie nie będą rozpatrywane. Każde rozwiązanie należy podpisać na pierwszej jego stronie: imieniem, nazwiskiem, adresem poczty elektronicznej oraz numerem zadania.



LXXVII Olimpiada Matematyczna

Zadania konkursowe
zawodów stopnia pierwszego
III seria: do 1 grudnia 2025 r.

9. Dany jest taki ciąg dodatnich liczb całkowitych $a_1, a_2, a_3, \dots$, że nie istnieje liczba całkowita $d > 1$ dzieląca każdą z różnic $a_{n+1} - a_n$ dla $n \geq 1$. Wykazać, że istnieje taka dodatnia liczba całkowita N , że suma pewnych N (niekoniecznie różnych) elementów tego ciągu jest równa sumie pewnych $N + 1$ (niekoniecznie różnych) elementów tego ciągu.

10. Czworokąt wypukły $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Półproste AB i DC przecinają się w punkcie X . Półproste AD i BC przecinają się w punkcie Y . Punkty I i J są środkami okręgów wpisanych odpowiednio w trójkąty BCX i CDY . Okręgi opisane na trójkątach BCX i CDY przecinają się ponownie w punkcie $Z \neq C$. Załóżmy, że $CX = CY$. Wykazać, że $ZI = ZJ$.

11. Dany jest ciąg liczb dodatnich $a_0, a_1, \dots, a_n$ spełniający warunek $a_k^2 \geq a_{k+1}a_{k-1}$ dla $k = 1, 2, \dots, n - 1$. Załóżmy, że ciąg $b_0, b_1, \dots, b_n$ jest geometryczny, ma wyrazy dodatnie i spełnia równości

$$\sum_{k=0}^n a_k = \sum_{k=0}^n b_k \quad \text{oraz} \quad \sum_{k=0}^n k a_k = \sum_{k=0}^n k b_k.$$

Wykazać, że

$$\sum_{k=0}^n k^2 a_k \leq \sum_{k=0}^n k^2 b_k.$$

12. Przyjmujemy następujące oznaczenie: jeśli X i Y są podzbiorami zbioru liczb całkowitych, to $X + Y$ oznacza zbiór wszystkich liczb postaci $x + y$, gdzie $x \in X$ i $y \in Y$. Przyjmujemy też $X + Y + Z = (X + Y) + Z$.

Dane są niepuste skończone podzbiory A, B, C zbioru liczb całkowitych. Wykazać, że

$$2 \cdot |A + B + C| + 1 \geq |A + B| + |B + C| + |C + A|.$$

Rozwiązania powyższych zadań należy — po uprzedniej rejestracji — zamieścić w systemie internetowym olimpiady dostępnym pod adresem <https://om.sem.edu.pl> najpóźniej dnia

1 grudnia 2025 r.

Rozwiązania przesłane w późniejszym terminie nie będą rozpatrywane. Każde rozwiązanie należy podpisać na pierwszej jego stronie: imieniem, nazwiskiem, adresem poczty elektronicznej oraz numerem zadania.



LXXVII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań konkursowych zawodów stopnia pierwszego

1. Piotrek bawi się kamykami. Początkowo ma pusty stos. W i -tym ruchu jeśli może zabrać ze stosu i kamyków, to to robi, a w przeciwnym razie — dokłada na stos i kamyków. W kolejnych ruchach liczby kamyków na stosie są więc równe: 1, 3, 0, 4, 9, 3, 10, ...

Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite $n \geq 1$ o tej własności, że po n ruchach na stosie Piotrka nie ma żadnych kamyków.

Autor zadania: Łukasz Bożyk

Rozwiązanie: Załóżmy, że po t ruchach stos jest pusty. Udowodnimy przez indukcję, że dla każdego $i = 0, 1, 2, \dots, t+1$ po wykonaniu $(t+2i+1)$ -szego ruchu stos zawiera $t+1-i$ kamyków. Dla $i = 0$ jest to prawda — po t ruchach stos był pusty, więc w $(t+1)$ -szym ruchu Piotrek musi dołożyć $t+1$ kamyków. W kroku indukcyjnym załóżmy, że po $t+2i+1$ ruchach, gdzie $i = 0, 1, 2, \dots, t$, stos zawiera $t+1-i$ kamyków. Ponieważ $t+1-i < t+2i+2$, więc w $(t+2i+2)$ -gim ruchu Piotrek dokłada na stos $t+2i+2$ kamyków. Wówczas stos zawiera $t+1-i + (t+2i+2) = 2t+i+3$ kamyków. (Zauważmy przy okazji, że stos w tym momencie nie jest pusty.) Ponieważ $2t+i+3 \geq t+2i+3$, więc w $(t+2i+3)$ -cim ruchu Piotrek zdejmuję ze stosu $t+2i+3$ kamyki, a na stosie pozostaje $2t+i+3 - (t+2i+3) = t-i = t+1 - (i+1)$ kamyków. Dowód indukcyjny został zakończony.

Z powyższej dyskusji wynika, że jeśli stos był pusty po t ruchach, to następny moment, w którym stos staje się pusty występuje po $(3t+3)$ -cim ruchu.

numer ruchu	t	$t+1$	$t+2$	$t+3$	$t+4$	$t+5$	...	$3t$	$3t+1$	$3t+2$	$3t+3$
liczba kamyków	0	$t+1$	$2t+3$	t	$2t+4$	$t-1$	...	$3t+2$	1	$3t+3$	0

Oznaczmy przez a_k liczbę ruchów, po której stos staje się pusty po raz k -ty. Wówczas $a_1 = 3$ oraz $a_k = 3a_{k-1} + 3$ dla $k \geq 2$. Mamy więc

$$\begin{aligned}
 a_k + \frac{3}{2} &= 3a_{k-1} + \frac{9}{2} = 3 \left(a_{k-1} + \frac{3}{2} \right) = 3^2 \left(a_{k-2} + \frac{3}{2} \right) = \dots = \\
 &= 3^{k-1} \left(a_1 + \frac{3}{2} \right) = 3^{k-1} \cdot \frac{9}{2} = \frac{3^{k+1}}{2}.
 \end{aligned}$$

W takim razie $a_k = \frac{3^{k+1} - 3}{2}$ dla dowolnego $k \geq 1$.

Odpowiedź: Liczby postaci $\frac{3^{k+1} - 3}{2}$, gdzie $k = 1, 2, 3, \dots$

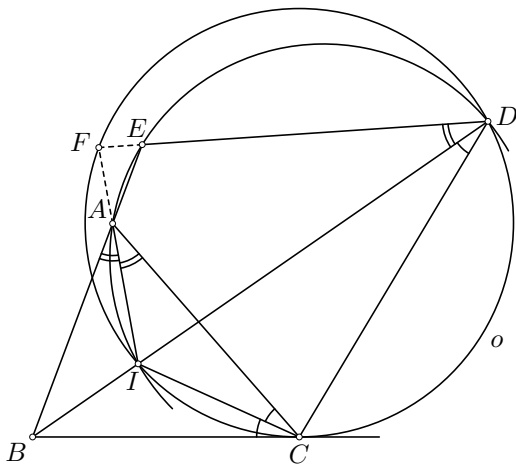
2. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC . Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt. Okrąg o przechodzi przez punkt I i jest styczny do prostej BC w punkcie C . Półprosta BI przecina o w punkcie $D \neq I$. Półprosta BA przecina okrąg opisany na trójkącie ADI w punkcie $E \neq A$ leżącym poza odcinkiem AB . Wykazać, że proste DE i AI przecinają się w punkcie leżącym na o .

Autor zadania: Stanisław Majchrzak

Rozwiązanie: Oznaczmy $\sphericalangle BAC = \alpha$ i $\sphericalangle ACB = \gamma$. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC , więc AI i CI są dwusiecznymi kątów BAC i ACB .

Wykorzystując zależność między kątem wpisanym opartym na łuku i kątem dopisanym do tego samego łuku dostajemy $\sphericalangle IDC = \sphericalangle ICB = \frac{1}{2}\gamma$. Ponadto $\sphericalangle EDI = \sphericalangle BAI = \frac{1}{2}\alpha$, gdyż czworokąt $AIDE$ jest wpisany w okrąg.

Niech F będzie punktem przecięcia prostych AI i DE . Należy udowodnić, że czworokąt $DCIF$ jest wpisany w okrąg. W tym celu wystarczy sprawdzić, że suma przeciwległych kątów tego czworokąta wynosi 180° . Zauważmy, że $\sphericalangle CIF = \sphericalangle CIA = 180^\circ - \sphericalangle ACI - \sphericalangle IAC = 180^\circ - \frac{1}{2}\gamma - \frac{1}{2}\alpha$. Z drugiej strony $\sphericalangle FDC = \sphericalangle EDI + \sphericalangle IDC = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\gamma$. Stąd $\sphericalangle CIF + \sphericalangle FDC = 180^\circ$, co kończy dowód.



3. Dana jest liczba całkowita $n \geq 1$ oraz liczby rzeczywiste $x_1, x_2, \dots, x_{2n+1}$. Załóżmy, że $x_i + x_{i+1} \geq 0$ dla każdego $i = 1, 2, \dots, 2n+1$ (przyjmujemy $x_{2n+2} = x_1$). Wykazać, że

$$|x_1| + |x_2| + \dots + |x_{2n+1}| \leq (2n+1)(x_1 + x_2 + \dots + x_{2n+1}).$$

Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie:

Sposób 1. Określmy $x_{2n+1+i} = x_i$ dla dowolnego $i = 2, 3, \dots, 2n+1$. Mamy dla dowolnego $k = 1, 2, \dots, 2n+1$

$$\begin{aligned} 2x_k &= (x_k + x_{k+1}) - (x_{k+1} + x_{k+2}) + (x_{k+2} + x_{k+3}) - (x_{k+3} + x_{k+4}) + \\ &+ \dots + (x_{2n+k-2} + x_{2n+k-1}) - (x_{2n+k-1} + x_{2n+k}) + (x_{2n+k} + x_{2n+1+k}). \end{aligned}$$

Z nierówności trójkąta oraz założenia, że $x_i + x_{i+1} \geq 0$ dla $i = 1, 2, \dots, 2n+1$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} 2|x_k| &\leq |x_k + x_{k+1}| + |x_{k+1} + x_{k+2}| + \dots + |x_{2n+k} + x_{2n+1+k}| = \\ &= |x_1 + x_2| + |x_2 + x_3| + \dots + |x_{2n} + x_{2n+1}| + |x_{2n+1} + x_1| = \\ &= (x_1 + x_2) + (x_2 + x_3) + \dots + (x_{2n} + x_{2n+1}) + (x_{2n+1} + x_1) = \\ &= 2(x_1 + x_2 + \dots + x_{2n+1}). \end{aligned}$$

Wobec tego $|x_k| \leq x_1 + x_2 + \dots + x_{2n+1}$ dla dowolnego $k = 1, 2, \dots, 2n+1$. Sumując tę nierówność dla wszystkich $k = 1, 2, \dots, 2n+1$ otrzymujemy tezę.

Sposób 2. Oznaczmy $M = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_{2n+1}|\}$. Wówczas

$$|x_1| + |x_2| + \dots + |x_{2n+1}| \leq (2n+1) \cdot M$$

i do zakończenia rozwiązania wystarczy wykazać, że

$$M \leq x_1 + x_2 + \dots + x_{2n+1}. \quad (\clubsuit)$$

Udowodnimy, że $M = x_j$ dla pewnego j . Wprost z definicji M wynika, że $M = |x_k|$ dla pewnego k . Jeśli $x_k \geq 0$, to mamy postulowaną własność dla $j = k$. W przeciwnym razie $x_k < 0$ i $M = -x_k$. Z założeń zadania wiadomo, że $x_k + x_{k+1} \geq 0$, skąd otrzymujemy

$$M \geq |x_{k+1}| \geq x_{k+1} \geq -x_k = M \implies M = x_{k+1}$$

i znów mamy postulowaną własność dla $j = k+1$.

Bez ograniczenia ogólności rozumowania można założyć, że $j = 1$, tj. $M = x_1$ (można w razie potrzeby cyklicznie przesunąć indeksy — nie zmienia to ani założeń ani tezy zadania). Dodając do równości $x_1 = M$ nierówności $x_2 + x_3 \geq 0$, $x_4 + x_5 \geq 0$, $\dots$, $x_{2n} + x_{2n+1} \geq 0$ otrzymujemy nierówność ($\clubsuit$), do której wcześniej sprowadziliśmy tezę zadania.

4. Dane są dodatnie liczby całkowite a , b . Załóżmy, że liczba $a^2 + ab$ jest iloczynem dwóch kolejnych liczb całkowitych. Wykazać, że jeśli $b > 1$, to

$$b \geq 1 + \sqrt{4a + 1}$$

oraz wyznaczyć wszystkie pary liczb (a, b) spełniające warunki zadania, dla których w powyższej nierówności zachodzi równość.

Autor zadania: Emil Łasocha

Rozwiązanie: Zapiszmy $a^2 + ab = a(a + b) = n(n + 1)$ dla pewnej liczby całkowitej n . Bez straty ogólności można założyć, że $n \geq 1$. Z założenia $b > 1$ wynika, że $n(n + 1) = a(a + b) > a(a + 1)$, a to oznacza, że $n > a$, bo funkcja $x \mapsto x(x + 1)$ jest rosnąca na zbiorze $(0, \infty)$.

Zapiszmy $n = a + m$ dla pewnej dodatniej liczby całkowitej m . Wówczas

$$a(a + b) = (a + m)(a + m + 1)$$

$$a^2 + ab = a^2 + 2am + m^2 + a + m$$

$$ab - 2am - a = m^2 + m$$

$$a(b - 2m - 1) = m(m + 1)$$

Prawa strona ostatniej równości jest dodatnia, więc lewa strona też jest dodatnia. W konsekwencji $b - 2m - 1 > 0$, skąd $b \geq 2m + 2$. Ponadto a jest dzielnikiem liczby $m(m + 1)$, więc $a \leq m(m + 1)$. Wobec tego

$$1 + \sqrt{4a + 1} \leq 1 + \sqrt{4m(m + 1) + 1} = 1 + \sqrt{(2m + 1)^2} = 1 + (2m + 1) \leq b,$$

co było do udowodnienia.

Równość w powyższej nierówności zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy w szacowaniach $a \leq m(m + 1)$ i $b \geq 2m + 2$ zachodzi równość, tj. gdy $a = m(m + 1)$ i $b = 2(m + 1)$ dla pewnej dodatniej liczby całkowitej m . Wyznaczone pary (a, b) w istocie spełniają warunki zadania, bo

$$a(a + b) = m(m + 1)(m(m + 1) + 2(m + 1)) = (m^2 + 2m)(m^2 + 2m + 1).$$

Odpowiedź: Pary (a, b) postaci $(m(m + 1), 2(m + 1))$, gdzie $m = 1, 2, 3, \dots$

5. Wyznaczyć wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych k, n spełniających równanie $3^k + n^3 + 6 = k(k+1)(k+2) \dots (k+n-1)$.

Autor zadania: Emil Łasocha

Rozwiązanie: Oznaczmy $L = 3^k + n^3 + 6$ i $P = k(k+1)(k+2) \dots (k+n-1)$. Wykażemy, że jeśli $n = 1$ lub $n = 2$, to $L > P$, co oznaczać będzie, że w tych przypadkach równanie nie ma rozwiązań. W tym celu udowodnimy przez indukcję, że $3^k > k(k+1)$ dla dowolnego $k \geq 1$. Baza indukcji jest jasna, bo $3 > 1 \cdot 2$. W kroku indukcyjnym założymy, że $3^k > k(k+1)$ dla pewnego $k \geq 1$. Wówczas

$$3^{k+1} = 3 \cdot 3^k > 3k(k+1) \geq (k+1)(k+2),$$

przy czym ostatnie szacowanie wynika z tego, że $3k \geq k+2$ dla $k \geq 1$. Z zasady indukcji wynika więc, że $3^k > k(k+1)$ dla każdego $k \geq 1$.

Od teraz zakładamy, że $n \geq 3$. P jest iloczynem co najmniej trzech kolejnych liczb całkowitych. Któraś z nich jest podzielna przez 3, więc P też dzieli się przez 3. Przez 3 dzieli się też liczby 3^k i 6, więc z równania wynika, że n^3 też dzieli się przez 3. Wobec tego n dzieli się przez 3.

Jeśli $k = 1$, to $L = n^3 + 9$ i $P = n!$. Gdy $n \geq 9$, to P dzieli się przez 27, a L nie (L daje resztę 9 przy dzieleniu przez 27). Zatem $n < 9$. Dla $n = 3$ mamy $L = 36$ i $P = 6$. Dla $n = 6$ liczba L jest nieparzysta, a P parzysta. Zatem nie ma rozwiązań dla $k = 1$.

Do rozważenia pozostał przypadek $k \geq 2$. Wówczas L nie dzieli się przez 9 (daje resztę 6 z dzielenia przez 9). Gdy $n \geq 6$, to P jest iloczynem co najmniej sześciu kolejnych liczb całkowitych. Wśród nich dwie dzielą się przez 3 i w rezultacie P dzieli się przez 9. Równanie nie ma wtedy rozwiązań. Zatem $n < 6$, tj. $n = 3$. Mamy więc $L = 3^k + 33$, $P = k(k+1)(k+2)$. Bezpośrednio obliczamy L i P dla małych k :

k	2	3	4
L	42	60	114
P	24	60	120

Wykażemy, że jeśli $k \geq 5$, to $L > P$. W tym celu wystarczy udowodnić, że $3^k > k(k+1)(k+2)$ dla $k \geq 5$. Wykażemy to indukcyjnie. Dla $k = 5$ jest to prawda: $3^5 = 243 > 210 = 5 \cdot 6 \cdot 7$. Wykażemy, że jeśli $3^k > k(k+1)(k+2)$ dla pewnego $k \geq 5$, to $3^{k+1} > (k+1)(k+2)(k+3)$. Mamy

$$3^{k+1} = 3 \cdot 3^k > 3k(k+1)(k+2) > (k+1)(k+2)(k+3),$$

przy czym ostatnia nierówność wynika z szacowania $3k > k+3$ słusznego dla $k \geq 5$. Dowód zakończony.

Odpowiedź: Jedynym rozwiązaniem jest $k = n = 3$.

6. Dany jest ciąg 2025 liczb rzeczywistych, których suma wynosi 0, nie składający się z samych zer. Będziemy modyfikować ten ciąg zgodnie z następującą procedurą. Oznaczamy przez A liczbę dodatnich liczb w tym ciągu, przez B liczbę ujemnych liczb w tym ciągu, a przez S sumę wszystkich dodatnich liczb w tym ciągu. Od każdej dodatniej liczby w tym ciągu odejmujemy $\frac{S}{A}$, a do każdej ujemnej liczby w ciągu dodajemy $\frac{S}{B}$. Otrzymujemy w ten sposób nowy ciąg 2025 liczb rzeczywistych, do którego można zastosować opisaną wyżej procedurę ponownie (o ile otrzymany ciąg nie składa się z samych zer). Wykazać, że po wykonaniu tej procedury pewną skończoną liczbę razy otrzymamy ciąg, w którym wartości bezwzględne wszystkich wyrazów są mniejsze od $\frac{1}{2025}$.

Autor zadania: Daniel Goc

Rozwiązanie: Jeśli po wykonaniu pewnej liczby razy procedury otrzymamy ciąg zerowy, to teza jest oczywista. Od teraz będziemy zakładać, że sukcesywne wykonywanie procedury nigdy nie wyzeruje ciągu.

Oznaczmy dodatnie liczby występujące w ciągu przez $x_1, x_2, \dots, x_A$. Niech X będzie największą z nich i niech $S = x_1 + x_2 + \dots + x_A$. Wskutek wykonania procedury liczba x_i zostaje zamieniona na liczbę $x'_i = x_i - \frac{S}{A}$. Zauważmy, że

$$x'_i = x_i - \frac{S}{A} \leq x_i - \frac{x_i}{A} = \frac{A-1}{A}x_i \leq \frac{A-1}{A}X$$

oraz

$$x'_i = \frac{1}{A} \sum_{j=1}^A (x_i - x_j) \geq \frac{A-1}{A} \cdot (-X),$$

gdyż i -ty składnik sumy jest zerem, a każdy inny szacuje się z dołu przez $-X$. Otrzymane dwie nierówności prowadzą do wniosku, że $|x'_i| \leq \frac{A-1}{A}X$ dla każdego $i = 1, 2, \dots, A$.

Wykażemy analogiczne szacowania dla ujemnych liczb w naszym ciągu. Oznaczmy je przez $y_1, y_2, \dots, y_B$ i niech Y będzie najmniejszą z nich (czyli największą co do wartości bezwzględnej). Mamy $y_1 + y_2 + \dots + y_B = -S$. Liczba y_i zostaje zamieniona na $y'_i = y_i + \frac{S}{B}$. Zauważmy, że

$$y'_i = y_i + \frac{S}{B} \geq y_i - \frac{y_i}{B} = \frac{B-1}{B}Y$$

oraz

$$y'_i = \frac{1}{B} \sum_{j=1}^B (y_i - y_j) \leq \frac{B-1}{B} \cdot (-Y),$$

gdyż i -ty składnik sumy jest zerem, a każdy inny szacuje się z góry przez $-Y$. Zatem $|y'_i| \leq \frac{B-1}{B} \cdot (-Y)$ dla każdego $i = 1, 2, \dots, B$.

Oznaczmy teraz $M = \max(X, -Y)$, tj. M jest największą z wartości bezwzględnych wyrazów początkowego ciągu. Mamy

$$|x'_i| \leq \frac{A-1}{A} X \leq \left(1 - \frac{1}{A}\right) M \leq \left(1 - \frac{1}{2025}\right) M = \frac{2024}{2025} M$$

dla $i = 1, 2, \dots, A$ oraz

$$|y'_i| \leq \frac{B-1}{B} (-Y) \leq \left(1 - \frac{1}{B}\right) M \leq \left(1 - \frac{1}{2025}\right) M = \frac{2024}{2025} M$$

dla $i = 1, 2, \dots, B$. Wobec tego wykonanie procedury pomniejsza największą z wartości bezwzględnych wyrazów ciągu o czynnik nie większy od $\frac{2024}{2025}$.

Niech M_k oznacza największą z wartości bezwzględnych wyrazów ciągu po wykonaniu procedury k razy. Wówczas $M_{k+1} \leq \frac{2024}{2025} M_k$ dla każdego $k \geq 0$. Stąd wynika, że $M_k \leq \left(\frac{2024}{2025}\right)^k M_0$. Dla dostatecznie dużych k (a konkretnie dla $k > \log_{2025/2024}(2025M_0)$) zachodzi nierówność $\left(\frac{2024}{2025}\right)^k M_0 < \frac{1}{2025}$. Każde takie k spełnia tezę.

7. Odcinek AD jest wysokością trójkąta ostrokątnego ABC . Punkty E i F są rzutami punktu D odpowiednio na proste AB i AC . Punkty K , L , M są odpowiednio środkami odcinków BD , BC , DC . Wykazać, że proste EK , AL , FM przecinają się w jednym punkcie.

Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie:

Sposób 1. Oznaczmy przecięcie prostych AB i DF przez Y , a przecięcie prostych AC i DE przez Z . Punkty Y i Z istnieją — z założenia kąt BAC nie jest prosty, więc $AB \nparallel DF$ i $AC \nparallel DE$.

Odcinki YF i ZE są wysokościami trójkąta AYZ . Punkt D jest zatem ortocentrum tego trójkąta, a stąd wynika, że $AD \perp YZ$. W konsekwencji $YZ \parallel BC$, gdyż obie proste są prostopadłe do BC .

Lemat. W dowolnym trapezie niebędącym równoległobokiem proste wyznaczone przez ramiona oraz prosta przechodząca przez środki podstaw są współpękowe.

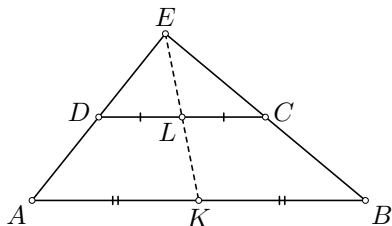
Dowód lematu. Rozważmy trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD , w którym proste BC i AD przecinają się w punkcie E . Niech K i L będą odpowiednio środkami AB i CD . Z równoległości $AB \parallel CD$ wynika, że trójkąty EAB i EDC są podobne (cecha kąt-kąt). Wobec tego

$$\frac{EA}{AB} = \frac{ED}{DC}.$$

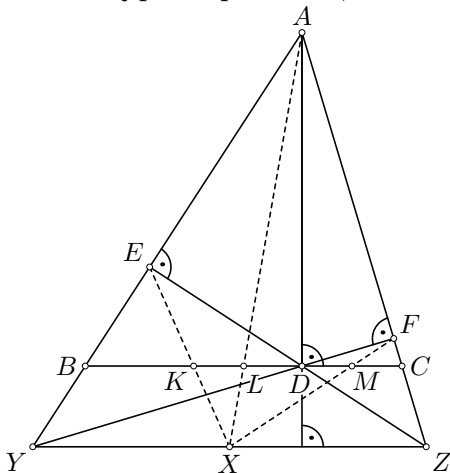
Dzieląc tę równość przez 2 otrzymujemy

$$\frac{EA}{AK} = \frac{ED}{DL},$$

co wraz z równością kątów KAE i LDE daje podobieństwo trójkątów AKE i DLE (cecha bok-kąt-bok). Wobec tego $\sphericalangle AEK = \sphericalangle DEL$, więc punkty E, L, K są współliniowe.



Wróćmy do rozwiązania zadania. Niech X będzie środkiem odcinka YZ . Stosując lemat dla trapezów $YZDB$, $YZCB$ i $YZCD$ otrzymujemy, że proste EK , AL i FM przechodzą przez punkt X , co kończy dowód.



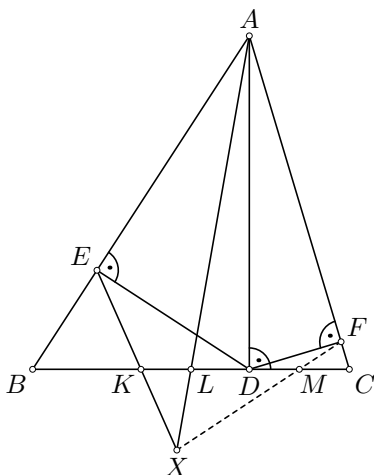
Sposób 2. Na początek zauważmy, że $BK = \frac{1}{2}BD$ i $BL = \frac{1}{2}BC$, gdyż K i L są odpowiednio środkami odcinków BD i BC . Trójkąty prostokątne BDA , BED i DEA są podobne (cecha kąt-kąt), więc

$$\frac{AE}{EB} = \frac{AE}{ED} \cdot \frac{ED}{EB} = \frac{AD}{DB} \cdot \frac{AD}{DB} = \frac{AD^2}{DB^2}.$$

Punkt E leży na odcinku AB , bo jest spodkiem wysokości trójkąta prostokątnego BDA opuszczonej z wierzchołka przy kącie prostym. Punkt K leży na odcinku BL , bo $BK = \frac{1}{2}BD < \frac{1}{2}BC = BL$. (Stąd przy okazji wynika, że $KL = BL - BK = \frac{1}{2}BC - \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}CD$.) Prosta EK przecina dwa boki trójkąta ABL (AB i BL), a zatem przecina przedłużenie trzeciego boku lub jest do niego równoległa. Wykażemy, że druga opcja odpada. Trójkąty BKE i BLA byłyby wtedy podobne. Ponieważ K jest środkiem przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego BDE , więc $BK = KE$. Wtedy mielibyśmy $BL = LA$, a skoro $BL = LC$, punkt L byłby środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC . Skoro L leży na BC , oznaczałoby to, że kąt BAC jest prosty wbrew założeniom zadania.

Zatem proste EK i AL przecinają się w punkcie leżącym poza odcinkiem AL . Oznaczmy ten punkt przez X . Z twierdzenia Menelaosa dla trójkąta ALB i prostej EK wynika, że

$$\frac{AX}{XL} = \frac{AE}{EB} \cdot \frac{BK}{KL} = \frac{AD^2}{BD^2} \cdot \frac{\frac{1}{2}BD}{\frac{1}{2}DC} = \frac{AD^2}{BD \cdot DC}.$$



W pełni analogicznie dowodzimy, że prosta FM przecina AL w punkcie X' leżącym poza odcinkiem AL i spełniającym równość $\frac{AX'}{X'L} = \frac{AD^2}{BD \cdot DC}$.

Istnieje tylko jeden punkt na prostej AL o opisanych własnościach — stąd $X = X'$, co dowodzi tezy zadania.

8. Dana jest dodatnia liczba całkowita n . *Permutacją* nazywamy każdą różnowartościową funkcję $f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$. Dane są parami różne permutacje $f_1, \dots, f_N$ spełniające następujący warunek: dla dowolnych (niekoniecznie różnych) indeksów i, j istnieje takie k , że $f_i \circ f_j = f_k$, gdzie $\circ$ oznacza złożenie funkcji. Dla $1 \leq i < j \leq n$ niech $Z(i, j)$ oznacza liczbę tych indeksów ℓ , że $f_\ell(i) > f_\ell(j)$. Udowodnić, że

$$\frac{N}{2} \cdot \sum_{1 \leq i < j \leq n} Z(i, j) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} Z(i, j)^2.$$

Autor zadania: Krzysztof Salata

Rozwiązanie: Odnotujmy najpierw, że różnowartościowa funkcja ze zbioru skończonego w ten sam zbiór jest bijekcją, a zatem istnieje do niej funkcja odwrotna. Oznaczmy przez X zbiór danych permutacji $f_1, f_2, \dots, f_N$. Wykażemy, że jeśli $f \in X$, to funkcja odwrotna do f , którą oznaczać będziemy przez f^{-1} , również należy do X . Rozważmy ciąg $f, f^2, f^3, \dots$ (przez f^k oznaczamy k -krotne złożenie funkcji f , tj. $\underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{k \text{ razy}}$). Wszystkie wy-

pisane funkcje należą do X na mocy założeń zadania. Na powyższej liście któreś dwie funkcje są takie same — istnieje bowiem tylko $n!$ permutacji zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$. To oznacza, że $f^k = f^\ell$ dla pewnych $k > \ell$. Wtedy $f^{k-\ell} = \text{id}$ (symbol id oznacza funkcję identycznościową), a stąd $f^{k-\ell-1}$ jest funkcją odwrotną do f , gdyż $f \circ f^{k-\ell-1} = f^{k-\ell} = \text{id}$.

Permutację f nazwiemy (i, j) -zgodną, jeśli $i < j$ i $f(i) < f(j)$. Permutację f nazwiemy (i, j) -niezgodną, gdy $i < j$ i $f(i) > f(j)$. Liczba $Z(i, j)$ jest więc liczbą (i, j) -niezgodnych permutacji w zbiorze X . Oznaczmy liczbę (i, j) -zgodnych permutacji w zbiorze X przez $T(i, j)$. Każda permutacja jest (i, j) -zgodna lub (i, j) -niezgodna, a zatem $T(i, j) + Z(i, j) = N$ dla dowolnych $i < j$. Lewa strona dowodzonej równości jest równa

$$\frac{1}{2} \sum_{i < j} N \cdot Z(i, j) = \frac{1}{2} \sum_{i < j} Z(i, j)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i < j} T(i, j)Z(i, j),$$

zatem wystarczy udowodnić, że

$$\sum_{i < j} T(i, j)Z(i, j) = \sum_{i < j} Z(i, j)^2. \quad (\heartsuit)$$

Rozważmy czwórki (i, j, f, g) , takie że $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ i $f, g \in X$. Zbiór wszystkich takich czwórek oznaczmy przez $\mathcal{C}$. Lewa strona równości $(\heartsuit)$ zlicza te czwórki $(i, j, f, g) \in \mathcal{C}$, w których $i < j$, f jest (i, j) -zgodna, a g jest (i, j) -niezgodna. Oznaczmy zbiór tych czwórek przez $\mathcal{L}$. Prawa strona równości $(\heartsuit)$ zlicza te czwórki $(i, j, f, g) \in \mathcal{C}$, że $i < j$, a f i g są (i, j) -niezgodne. Oznaczmy zbiór tych czwórek przez $\mathcal{P}$. Wykażemy, że $|\mathcal{L}| = |\mathcal{P}|$.

Dla dowolnej czwórki $(i, j, f, g) \in \mathcal{C}$ zdefiniujemy

$$\Phi(i, j, f, g) = (g(j), g(i), f \circ g^{-1}, g^{-1}).$$

Powyższy wzór określa funkcję z $\mathcal{C}$ w $\mathcal{C}$. Wprost z określenia Φ wynika, że

$$\Phi(\Phi(i, j, f, g)) = (i, j, f, g).$$

Z powyższej równości wynika w szczególności, że Φ jest bijekcją.

Niech $(i, j, f, g) \in \mathcal{L}$. Mamy $i < j$, $f(i) < f(j)$ i $g(j) < g(i)$. Funkcja g^{-1} jest $(g(j), g(i))$ -niezgodna, bo $g^{-1}(g(j)) = j > i = g^{-1}(g(i))$. Funkcja $f \circ g^{-1}$ również jest $(g(j), g(i))$ -niezgodna, bo

$$f \circ g^{-1}(g(j)) = f(g^{-1}(g(j))) = f(j) > f(i) = f(g^{-1}(g(i))) = f \circ g^{-1}(g(i)).$$

Stąd $\Phi(i, j, f, g) = (g(j), g(i), f \circ g^{-1}, g^{-1}) \in \mathcal{P}$. Wykazaliśmy zatem, że $|\mathcal{L}| \leq |\mathcal{P}|$.

Niech teraz $(i, j, f, g) \in \mathcal{P}$. Wówczas $i < j$, $f(j) < f(i)$ i $g(j) < g(i)$. Analogicznie jak w poprzednim akapicie dowodzimy, że funkcja g^{-1} jest $(g(j), g(i))$ -niezgodna. Funkcja $f \circ g^{-1}$ jest $(g(j), g(i))$ -zgodna, bo

$$f \circ g^{-1}(g(j)) = f(g^{-1}(g(j))) = f(j) < f(i) = f(g^{-1}(g(i))) = f \circ g^{-1}(g(i)).$$

Stąd $\Phi(i, j, f, g) = (g(j), g(i), f \circ g^{-1}, g^{-1}) \in \mathcal{L}$. Wykazaliśmy zatem, że $|\mathcal{P}| \leq |\mathcal{L}|$.

Z poprzednich dwóch akapitów otrzymujemy, że $|\mathcal{L}| = |\mathcal{P}|$, co kończy dowód.

9. Dany jest taki ciąg dodatnich liczb całkowitych $a_1, a_2, a_3, \dots$, że nie istnieje liczba całkowita $d > 1$ dzieląca każdą z różnic $a_{n+1} - a_n$ dla $n \geq 1$. Wykazać, że istnieje taka dodatnia liczba całkowita N , że suma pewnych N (niekoniecznie różnych) elementów tego ciągu jest równa sumie pewnych $N + 1$ (niekoniecznie różnych) elementów tego ciągu.

Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie: Ciąg dany w zadaniu nie jest stały, gdyż wtedy każda różnica $a_{n+1} - a_n$ byłaby zerem, a więc dzieliłaby się przez 2. Niech k będzie najmniejszym indeksem, dla którego $a_k \neq a_{k+1}$. Zdefiniujmy ciąg $d_{k+1}, d_{k+2}, \dots$ wzorem

$$d_n = \text{NWD}(a_{k+1} - a_k, a_{k+2} - a_{k+1}, \dots, a_n - a_{n-1}).$$

Jest to dobrze określony ciąg, bo $a_{k+1} - a_k \neq 0$. Jest on nierosnący, bo każdy wyraz jest dzielnikiem poprzedniego. W takim razie musi się stabilizować, tj. istnieje n_0 takie, że $d_n = d_{n_0}$ dla $n \geq n_0$ — nie istnieje bowiem nieskończony malejący ciąg liczb naturalnych. Gdyby $d_{n_0} > 1$, to otrzymalibyśmy sprzeczność z warunkami zadania — liczba d_{n_0} dzieliłaby każdą z różnic $a_{n+1} - a_n$. Wobec tego $d_{n_0} = 1$.

Skorzystamy teraz z następującego ogólnego faktu, znanego w literaturze pod nazwą *lemat Bézouta*: jeśli $b_1, b_2, \dots, b_s$ są takimi liczbami całkowitymi, że $\text{NWD}(b_1, b_2, \dots, b_s) = 1$, to istnieją liczby całkowite $c_1, c_2, \dots, c_s$ spełniające równość

$$c_1 b_1 + c_2 b_2 + \dots + c_s b_s = 1.$$

Z powyższego faktu wynika, że istnieją liczby całkowite $c_{k+1}, c_{k+2}, \dots, c_{n_0}$ spełniające równość

$$c_{k+1}(a_{k+1} - a_k) + c_{k+2}(a_{k+2} - a_{k+1}) + \dots + c_{n_0}(a_{n_0} - a_{n_0-1}) = 1.$$

Powyższą równość można przepisać w postaci

$$\sum_{j=k}^{n_0} c'_j a_j = 1,$$

gdzie $c'_k = -c_{k+1}$, $c'_j = c_j - c_{j+1}$ dla $j = k+1, k+2, \dots, n_0-1$ oraz $c'_{n_0} = c_{n_0}$. Zwróćmy uwagę na to, że $\sum_{j=k}^{n_0} c'_j = 0$. Niech A będzie zbiorem indeksów $j \in \{k, k+1, \dots, n_0\}$ spełniających $c'_j > 0$, a B — zbiorem indeksów $j \in \{k, k+1, \dots, n_0\}$, dla których $c'_j < 0$. Mamy wówczas

$$\sum_{j \in A} c'_j a_j = 1 + \sum_{j \in B} (-c'_j) a_j.$$

W powyższej równości wszystkie współczynniki stojące przy liczbach a_j są dodatnie. Mnożymy tę równość przez a_1 i otrzymujemy tezę zadania dla $N = \sum_{j \in A} a_1 c'_j = \sum_{j \in B} a_1 (-c'_j)$.

Uwaga. Lemat Bézouta można sformułować w następującej ogólniejszej wersji: jeśli $b_1, b_2, \dots, b_s$ są liczbami całkowitymi, przy czym nie wszystkie są równe zero, to istnieją liczby całkowite $c_1, c_2, \dots, c_s$ spełniające równość

$$c_1 b_1 + c_2 b_2 + \dots + c_s b_s = \text{NWD}(b_1, b_2, \dots, b_s). \quad (\dagger)$$

Dla $s = 2$ jest to prosta konsekwencja algorytmu Euklidesa, o czym można przeczytać np. w miesięczniku [Delta \(5/2021, Kącik początkującego olimpijczyka 29, str. 25\)](#).

Dla $s \geq 3$ dowód przebiega przez indukcję. Bez straty ogólności można założyć, że wśród liczb $b_1, \dots, b_{s-1}$ jest co najmniej jedna niezerowa. Z założenia indukcyjnego wynika, że istnieją takie liczby całkowite $c'_1, c'_2, \dots, c'_{s-1}$, że

$$c'_1 b_1 + c'_2 b_2 + \dots + c'_{s-1} b_{s-1} = \text{NWD}(b_1, b_2, \dots, b_{s-1}). \quad (\ddagger)$$

Ponieważ $\text{NWD}(\text{NWD}(b_1, b_2, \dots, b_{s-1}), b_s) = \text{NWD}(b_1, b_2, \dots, b_s)$, więc istnieją takie liczby całkowite e, f , że

$$e \text{NWD}(b_1, b_2, \dots, b_{s-1}) + f b_s = \text{NWD}(b_1, b_2, \dots, b_{s-1}, b_s).$$

Wykorzystując równość $(\ddagger)$ otrzymujemy

$$e(c'_1 b_1 + c'_2 b_2 + \dots + c'_{s-1} b_{s-1}) + f b_s = \text{NWD}(b_1, b_2, \dots, b_s),$$

więc liczby $c_i = e c'_i$ dla $i = 1, 2, \dots, s-1$ i $c_s = f$ spełniają $(\dagger)$, czyli tezę indukcyjną.

10. Czworokąt wypukły $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Półproste AB i DC przecinają się w punkcie X . Półproste AD i BC przecinają się w punkcie Y . Punkty I i J są środkami okręgów wpisanych odpowiednio w trójkąty BCX i CDY . Okręgi opisane na trójkątach BCX i CDY przecinają się ponownie w punkcie $Z \neq C$. Załóżmy, że $CX = CY$. Wykazać, że $ZI = ZJ$.

Autor zadania: Dominik Burek

Rozwiązanie: Korzystając parokrotnie z faktu, że w czworokącie wpisanym w okrąg przeciwległe kąty sumują się do kąta półpełnego, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sphericalangle CZX = 180^\circ - \sphericalangle XBC &= \sphericalangle CBA = 180^\circ - \sphericalangle ADC = \sphericalangle CDY = \\ &= 180^\circ - \sphericalangle YZC. \end{aligned}$$

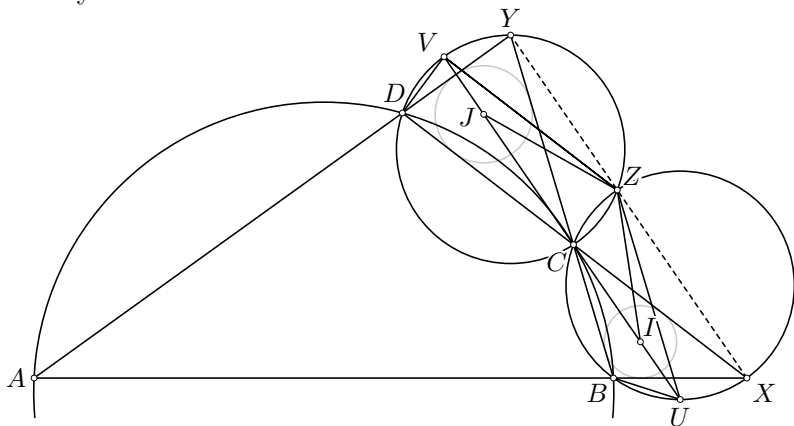
Zatem punkt Z leży na odcinku XY .

Oznaczmy okręgi opisane na trójkątach BCX i CDY odpowiednio przez o_1 i o_2 , a ich średnice odpowiednio przez d_1 i d_2 . Mamy

$$d_1 = \frac{CX}{\sin CZX} = \frac{CY}{\sin YZC} = d_2$$

— równość wynika z tego, że $CX = CY$ oraz $\sphericalangle CZX + \sphericalangle YZC = 180^\circ$.
 Okręgi o_1 i o_2 są zatem przystające.

Niech ℓ będzie dwusieczną kąta BCX . Prosta ℓ jest jednocześnie dwusieczną kąta YCD , gdyż jest to kąt wierzchołkowy do BCX . Na prostej ℓ leżą więc punkty I i J , gdyż są środkami okręgów wpisanych w trójkąty BCX i CDY . Oznaczmy drugi punkt przecięcia ℓ z o_1 przez $U \neq C$ oraz drugi punkt przecięcia ℓ z o_2 przez $V \neq C$. Kąty ZUC i CVZ są równe, bo są oparte na wspólnej cięciwie CZ w przystających okręgach o_1 i o_2 (i punkty U, V leżą po różnych stronach prostej CZ). Wobec tego trójkąt UVZ jest równoramienny i $ZU = ZV$.



Ponadto z lematu o trójlściu, który sformułujemy po zakończeniu rozwiązania, wynika że $IU = BU$ oraz $JV = DV$. Jednakże $BU = DV$, bo okręgi o_1 i o_2 są przystające i kąt wpisany oparty na cięciwie BU w o_1 jest równy kątowi wpisanemu opartemu na cięciwie DV w o_2 (kąt ten jest równy $\frac{1}{2} \sphericalangle BCX = \frac{1}{2} \sphericalangle YCD$). Łącząc otrzymane równości dochodzimy do wniosku, że $IU = JV$.

Z cechy przystawiania bok-kąt-bok wnioskujemy, że trójkąty IUZ i JVZ są przystające. Stąd wynika, że $ZI = ZJ$, co było do udowodnienia.

Sformułujemy teraz lemat o trójkącie.

Lemat o trójkąście. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC . Prosta AI przecina okrąg opisany na trójkącie ABC w punkcie M . Wówczas

$$MB = MC = MI.$$

Dowód lematu o trójlisciu można znaleźć w wielu źródłach, np. w gazecie Olimpiady Matematycznej Juniorów [Kwadrat](#) (nr 16, str. 2, Zadanie 7).

11. Dany jest ciąg liczb dodatnich $a_0, a_1, \dots, a_n$ spełniający warunek $a_k^2 \geq a_{k+1}a_{k-1}$ dla $k = 1, 2, \dots, n-1$. Załóżmy, że ciąg $b_0, b_1, \dots, b_n$ jest geometryczny, ma wyrazy dodatnie i spełnia równości

$$\sum_{k=0}^n a_k = \sum_{k=0}^n b_k \quad \text{oraz} \quad \sum_{k=0}^n ka_k = \sum_{k=0}^n kb_k.$$

Wykazać, że

$$\sum_{k=0}^n k^2 a_k \leq \sum_{k=0}^n k^2 b_k.$$

Autor zadania: Piotr Nayar

Rozwiązanie: Oznaczmy $c_k = \frac{a_k}{b_k}$ dla $k = 0, 1, \dots, n$. Ciąg $b_0, b_1, \dots, b_n$ jest geometryczny, więc spełnia równości $b_k^2 = b_{k-1}b_{k+1}$ dla $k = 1, 2, \dots, n-1$. Zatem z założeń wynika, że ciąg $c_0, c_1, \dots, c_n$ spełnia $c_k^2 \geq c_{k-1}c_{k+1}$ dla każdego $k = 1, 2, \dots, n-1$. Jest to równoważne nierównościom

$$\frac{c_0}{c_1} \leq \frac{c_1}{c_2} \leq \dots \leq \frac{c_{n-2}}{c_{n-1}} \leq \frac{c_{n-1}}{c_n}.$$

Niech ℓ będzie takim indeksem, że $c_\ell = \max\{c_0, c_1, \dots, c_n\}$. (Jeśli jest kilka takich, za ℓ bierzemy dowolny z nich.) Wówczas

$$\frac{c_0}{c_1} \leq \frac{c_1}{c_2} \leq \dots \leq \frac{c_{\ell-1}}{c_\ell} \leq 1 \leq \frac{c_\ell}{c_{\ell+1}} \leq \dots \leq \frac{c_{n-2}}{c_{n-1}} \leq \frac{c_{n-1}}{c_n},$$

skąd wynika, że

$$c_0 \leq \dots \leq c_{\ell-1} \leq c_\ell \geq c_{\ell+1} \geq \dots \geq c_n. \quad (\spadesuit)$$

Jeśli $c_\ell < 1$, to $c_k < 1$ dla każdego k , czyli $a_k < b_k$, co jest sprzeczne z założeniem $\sum_{k=0}^n a_k = \sum_{k=0}^n b_k$. Zatem $c_\ell \geq 1$. Z nierówności $(\spadesuit)$ wynika, że istnieją $i \leq j$ o następującej własności: $c_k \geq 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $i \leq k \leq j$, czyli wtedy i tylko wtedy, gdy $(k-i)(k-j) \leq 0$. Wobec tego dla wszystkich $0 \leq k \leq n$ mamy

$$(k-i)(k-j)(c_k-1) \leq 0.$$

Równoważnie: $(k^2 - (i+j)k + ij)a_k \leq (k^2 - (i+j)k + ij)b_k$. Zsumowanie tej nierówności stronami dla $k = 0, 1, \dots, n$ prowadzi do

$$\sum_{k=0}^n k^2 a_k + (i+j) \sum_{k=0}^n k a_k + ij \sum_{k=0}^n a_k \leq \sum_{k=0}^n k^2 b_k + (i+j) \sum_{k=0}^n k b_k + ij \sum_{k=0}^n b_k.$$

co jest równoważne tezie zadania, gdyż z założeń zadania mamy równości $\sum_{k=0}^n k a_k = \sum_{k=0}^n k b_k$ i $\sum_{k=0}^n a_k = \sum_{k=0}^n b_k$.

12. Przyjmujemy następujące oznaczenie: jeśli X i Y są podzbiorami zbioru liczb całkowitych, to $X+Y$ oznacza zbiór wszystkich liczb postaci $x+y$, gdzie $x \in X$ i $y \in Y$. Przyjmujemy też $X+Y+Z = (X+Y)+Z$.

Dane są niepuste skończone podzbiory A, B, C zbioru liczb całkowitych. Wykazać, że

$$2 \cdot |A+B+C| + 1 \geq |A+B| + |B+C| + |C+A|.$$

Autorka zadania: Marta Strzelecka

Rozwiązanie: Zauważmy, że dla dowolnej liczby całkowitej x i dowolnego podzbioru X zbioru liczb całkowitych zbiory X i $\{x\}+X$ mają tyle samo elementów. Można więc założyć, że $\min A = \min B = \min C = 0$ (zamiast zbiorów A, B, C rozważamy zbiory $\{-\min A\}+A, \{-\min B\}+B, \{-\min C\}+C$).

Oznaczmy $\max A = a$ i $\max B = b$. Rozważmy następujące cztery zbiory:

$$\begin{aligned} X_1 &= (\{a\} + B + C) \setminus \{a\} \\ X_2 &= (A + C) \cap (-\infty, a] \\ X_3 &= (A + \{b\} + C) \cap (a + b, \infty) \\ X_4 &= A + B \end{aligned}$$

Wszystkie te zbiory są zawarte w $A+B+C$. Zbiory X_1 i X_2 są rozłączne, bo pierwszy jest zawarty w przedziale (a, ∞) , a drugi w $(-\infty, a]$. Stąd wynika, że $|X_1| + |X_2| \leq |A+B+C|$. Podobnie, X_3 jest zawarty w $(a+b, \infty)$, a X_4 w $(-\infty, a+b]$, a więc X_3 i X_4 są rozłączne. Stąd $|X_3| + |X_4| \leq |A+B+C|$.

Mamy

$$\begin{aligned} |X_1| &= |\{a\} + B + C| - 1 = |B + C| - 1, \\ |X_2| + |X_3| &= |(A + C) \cap (-\infty, a]| + |(A + C) \cap (a, \infty)| = \\ &= |A + C|, \\ |X_4| &= |A + B|. \end{aligned}$$

Wobec tego

$$2|A + B + C| \geq |X_1| + |X_2| + |X_3| + |X_4| = |B + C| - 1 + |A + C| + |A + B|,$$

co było do wykazania.