

COMPENDIUM OMJ

Olimpiada Matematyczna Juniorów (Polonia)



Gerard Romo Garrido

Toomates Coolección Vol. 95



Toomates Colección

Los libros de **Toomates** son materiales digitales y gratuitos. Son digitales porque están pensados para ser consultados mediante un ordenador, tablet o móvil. Son gratuitos porque se ofrecen a la comunidad educativa sin coste alguno. Los libros de texto pueden ser digitales o en papel, gratuitos o en venta, y ninguna de estas opciones es necesariamente mejor o peor que las otras. Es más: Suele suceder que los mejores docentes son los que piden a sus alumnos la compra de un libro de texto en papel, esto es un hecho. Lo que no es aceptable, por inmoral y mezquino, es el modelo de las llamadas "licencias digitales", "licencias de uso" y en general cualquier forma de "pago por el acceso a los materiales didácticos", con las que algunas empresas pretenden cobrar a los estudiantes, una y otra vez, por acceder a los mismos contenidos (unos contenidos que, además, son de una bajísima calidad). Este modelo de negocio es miserable, pues impide el compartir un mismo material, incluso entre dos hermanos, pretende convertir a los estudiantes en un mercado cautivo, exige a los estudiantes y a las escuelas costosísimas líneas de Internet, pretende pervertir el conocimiento, que es algo social, público, convirtiéndolo en un producto de propiedad privada, accesible solo a aquellos que se lo puedan permitir, y solo de una manera encapsulada, fragmentada, impidiendo el derecho del alumno de poseer todo el libro, de acceder a todo el libro, de moverse libremente por todo el libro.

Nadie puede pretender ser neutral ante esto: Mirar para otro lado y aceptar el modelo de pago por acceso a los materiales es admitir un mundo más injusto, es participar en la denegación del acceso al conocimiento a aquellos que no disponen de medios económicos, y esto en un mundo en el que las modernas tecnologías actuales permiten, por primera vez en la historia de la Humanidad, poder compartir el conocimiento sin coste alguno, con algo tan simple como es un archivo "pdf". **El conocimiento no es una mercancía.** El proyecto Toomates tiene como objetivo la promoción y difusión entre el profesorado y el colectivo de estudiantes de unos materiales didácticos libres, gratuitos y de calidad, que fuerce a las empresas comerciales a competir ofreciendo alternativas de pago atractivas aumentando la calidad de los materiales que ofrecen, (que son muy mediocres) y no mediante retorcidas técnicas comerciales.

Estos libros se comparten bajo una licencia "**Creative Commons 4.0 (Attribution Non Commercial)**": Se permite, se promueve y se fomenta cualquier uso, reproducción y edición de todos estos materiales siempre que sea sin ánimo de lucro y se cite su procedencia. Todos los libros se ofrecen en dos versiones: En formato "**pdf**" para una cómoda lectura y en el formato "**doc**" de MSWord para permitir y facilitar su edición y generar versiones parcial o totalmente modificadas. **¡Libérate de la tiranía y mediocridad de los productos comerciales! Crea, utiliza y comparte tus propios materiales didácticos.**

Problem Solving (en español):

[Geometría Axiomática](#) [Problemas de Geometría Vol. 1](#) [Vol. 2](#) [Vol. 3](#)
[Introducción a la Geometría](#) [Álgebra](#) [Teoría de números Vol. 1](#) [Vol. 2](#) [Combinatoria](#)
[Probabilidad](#) [Trigonometría](#) [Desigualdades](#) [Números complejos](#) [Calculus & Precalculus](#)

Libros de texto para ESO y bachillerato (en español y en catalán):

[Cálculo infinitesimal ESP](#) [CAT](#) [Álgebra Lineal ESP](#) [CAT](#) [Geometría Lineal ESP](#) [CAT](#)
[Números Complejos ESP](#) [CAT](#) [Combinatoria y probabilidad ESP](#) [CAT](#) [Estadística ESP](#) [CAT](#)
[Programación Lineal ESP](#) [CAT](#) [Álgebra ESP](#) [CAT](#) [Trigonometría ESP](#) [CAT](#)
[Geometría analítica ESP](#) [CAT](#) [Funciones ESP](#) [CAT](#) [Números \(Preálgebra\) ESP](#) [CAT](#)
[Proporcionalidad ESP](#) [CAT](#) [Medidas geométricas ESP](#) [CAT](#) [Mates amb Excel](#)

PAU españolas:

[Cataluña TEC](#) [Cataluña CCSS](#) [Valencia](#) [Galicia](#) [País Vasco](#) [Balears](#)

Reválidas internacionales:

[Portugal](#) [Italia](#) [Francia](#) [Rumanía](#) [Hungría](#) [Polonia](#) [Pearson Edexcel International A Level](#)
[China-Gaokao](#) [China-Zhongkao](#) [Corea-Suneung](#) [Cambridge International A Level](#)
[Cambridge IGCSE](#) [AQA GCSE](#) [International Baccalaureate \(IB\)](#) [Pearson Edexcel IGCSE](#)

Evaluación diagnóstica y pruebas de acceso:

[ACM6EP](#) [ACM4](#) [CFGS](#) [PAP](#)

Competiciones matemáticas:

Canguro: [España](#) [Cataluña](#) [Francia](#) [USA](#) [Reino Unido](#) [Austria](#)
USA: [Mathcounts](#) [AMC 8](#) [10](#) [12](#) [AIME](#) [USAJMO](#) [USAMO](#) [TSTST](#) [TST](#) [ELMO](#) [Putnam](#) [HMMT](#)
España: [OME](#) [OMEFL](#) [OMEEX](#) [OMC](#) [OMEA](#) [OMEM](#) [OMA](#) [CDP](#)
Europa: [OMI](#) [Arquimede](#) [BMO](#) [BalkanMO](#) [JBMO](#) [OPM](#) [OMP](#) [OMJ](#)
Internacional: [IMO](#) [IGO](#) [SMT](#) [INMO](#) [CMO](#) [EGMO](#) [KMO](#) [KJMO](#)
AHSME: [Book 1](#) [2](#) [3](#) [4](#) [5](#) [6](#) [7](#) [8](#) [9](#)

Otros materiales:

Pizzazz! [Book A](#) [B](#) [C](#) [D](#) [E](#) [Pre-Algebra](#) [Algebra](#) , [REOIM](#) , [Llibre3r](#) , [Excalibur](#)

¡Genera tus propias versiones de este documento! Siempre que es posible se ofrecen las versiones editables "MS Word" de todos los materiales para facilitar su edición.

¡Ayuda a mejorar! Envía cualquier duda, observación, comentario o sugerencia a toomates@gmail.com

¡No utilices una versión anticuada! Todos estos libros se revisan y amplían constantemente. Descarga totalmente gratis la última versión de estos documentos en los correspondientes enlaces superiores, en los que siempre encontrarás la versión más actualizada.

Consulta el [catálogo de libros](http://www.toomates.net) completo en <http://www.toomates.net>

¿Problemas para descargar algún documento? Descarga toda la biblioteca Toomates [Aquí](#) 

Visita mi **Canal de Youtube**: <https://www.youtube.com/c/GerardRomo> 

Visita mi **blog**: <https://toomatesbloc.blogspot.com/>

Versión de este documento: 09/01/2026

Presentación.

La **Olimpiada Matematyczna Juniorów** es una competición de matemáticas escolar específica para alumnos de primaria, equivalente a la Olimpiada Matemática de secundaria. La primera edición de la Olimpiada tuvo lugar en el curso escolar 2005/2006. Los alumnos resuelven problemas de álgebra , teoría de números , combinatoria y geometría. Desde sus inicios, la Olimpiada ha sido organizada por la Asociación para la Educación Matemática.

Formato de la competición.

La competición se desarrollará en tres etapas:

Los concursos de Nivel I (Zawody I stopnia)

constan de dos partes independientes (el resultado del concurso de 1er grado es la suma de los puntos de ambas partes):

Parte basada en tareas (a partir de la 21.^a edición (2025/26)) : consta de 7 tareas abiertas, por las que se puede obtener un máximo de 3 puntos (21 puntos en total).

Sección de prueba (desde la 7.^a edición (2011/12)) : se realiza en centros educativos registrados; consta de 15 preguntas, cada una con tres respuestas. Para completar la prueba, se debe decidir si la respuesta es verdadera (V) o falsa (N). Por tres respuestas correctas a una misma pregunta, el estudiante recibe 1 punto; por dos, 0,5 puntos; de lo contrario, no se otorga ningún punto. Por lo tanto, se puede otorgar un total de 15 puntos en esta sección de prueba.

Competición de Nivel II (Zawody II stopnia)

Las competiciones se celebran a nivel de distrito el mismo día en varias ciudades de Polonia. Durante esta competición de un día, los estudiantes completan cinco tareas abiertas en 180 minutos.

Competición de Nivel III (Zawody III stopnia)

La competición dura dos días y se celebra en Varsovia . El primer día se celebran las finales, durante las cuales los estudiantes completan cinco tareas abiertas en 180 minutos. El segundo día se dedica a la ceremonia de clausura y a la entrega de premios a los mejores concursantes.

Índice.

	Nivel I						Nivel II			Nivel III		
	Tareas			Prueba								
	Enun	Sol	Stad	Enun	Sol	Stad						
I (2005-2006)	5						6			7		
II (2006-2007)	8						9	10		11	12	
III (2007-2008)	13						14	15		17	18	
IV (2008-2009)	20						21	23		25	26	
V (2009-2010)	28						29	30		32	33	
VI (2010-2011)	35						36	37		39	40	
VII (2011-2012)	42	46	55	57	58	61	64	65	67	71	72	75
VIII (2012-2013)	78	82	91	94	95	99	102	103	105	109	110	112
IX (2013-2014)	116	120	127	131	132	136	139	140	142	146	147	150
X (2014-2015)	153	157	166	170	171	176	180	181	184	188	189	192
XI (2015-2016)	195	199	209	214	215	220	224	225	228	231	232	235
XII (2016-2017)	238	242	253	258	259	264	268	269	272	275	276	280
XIII (2017-2018)	283	287	295	300	301	306	310	311	314	317	318	321
XIV (2018-2019)	324	328	336	341	342	347	352	353	355	361	362	365
XV (2019-2020)	371	375	384	390	391	400	404	405	411	-	-	-
XVI (2020-2021)	414	418	428	434	435	441	445	446	458	461	462	469
XVII (2021-2022)	472	476	485	491	492	503	507	508	517	520	521	531
XVIII (2022-2023)	534	538	548	553	554	562	565	566	572	575	576	583
XIX (2023-2024)	586	590	598	603	604	609	612	613	618	621	622	633
XX (2024-2025)	633	637	645	650	651	658	661	662	666	669	670	673
XXI (2025-2026)	676	680	688	691	692							

I Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów
rok szkolny 2005/06
Zadania zawodów I stopnia

1. Dowieść, że

$$\sqrt{3-\sqrt{8}}+\sqrt{5-\sqrt{24}}+\sqrt{7-\sqrt{48}}=1.$$

2. Dany jest czworokąt wypukły o następujących własnościach:

- w czworokąt można wpisać okrąg,
- przekątne czworokąta są prostopadłe.

Dowieść, że jedna z przekątnych czworokąta dzieli drugą na połowy.

3. W kole o promieniu 10 wybrano 99 punktów. Dowieść, że wewnątrz koła istnieje punkt odległy od każdego z wybranych punktów o więcej niż 1.

4. Wyznaczyć wszystkie rozwiązania układu równań

$$\begin{cases} 25x^2 + 9y^2 = 12yz \\ 9y^2 + 4z^2 = 20xz \\ 4z^2 + 25x^2 = 30xy \end{cases}$$

w liczbach rzeczywistych x, y, z .

5. Ogrodnik włożył 121 jabłek do 15 wiader w taki sposób, że w każdym wiadrze znalazło się co najmniej jedno jabłko. Czy jest możliwe, że w każdym wiadrze znajduje się inna liczba jabłek?

6. Wiadomo, że prawdziwa moneta waży 10 gramów, a fałszywa 9 gramów. Mamy 5 monet o łącznej wadze 48 gramów i dysponujemy wagą elektroniczną. Wykonując ważenie możemy położyć na wagę dowolną liczbę wybranych przez nas monet i odczytać ich łączną wagę. Czy wykonując nie więcej niż 3 ważenia możemy zawsze rozpoznać, które z danych monet są fałszywe, a które prawdziwe?

7. Na płaszczyźnie dane są punkty A, B, C, D . Punkt B jest środkiem odcinka AC , a przy tym $AB = BC = BD = 17$ oraz $AD = 16$. Obliczyć długość odcinka CD .

I Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

zawody II stopnia

28 stycznia 2006

Zadanie 1.

Pewien graniastosłup ma dwa razy więcej wierzchołków niż pewien ostrosłup. Który z tych wielościanów ma więcej ścian i o ile więcej?

Zadanie 2.

Danych jest 111 dodatnich liczb całkowitych. Wykaż, że spośród nich można wybrać 11 takich liczb, których suma jest podzielna przez 11.

Zadanie 3.

Dany jest trójkąt ostrokątny ABC , w którym $\sphericalangle BAC = 45^\circ$. Wysokości tego trójkąta przecinają się w punkcie H . Wykaż, że $|AH| = |BC|$.

Zadanie 4.

Wyznacz wszystkie dodatnie liczby całkowite n , dla których liczba $14^n - 9$ jest pierwsza.

Zadanie 5.

Dany jest sześciokąt wypukły $ABCDEF$ o kątach przy wierzchołkach A , B , C , D równych odpowiednio 90° , 128° , 142° , 90° . Wykaż, że pole tego sześciokąta jest mniejsze niż $\frac{1}{2} \cdot |AD|^2$.

Informacje dla uczestnika zawodów

1. Czas trwania zawodów: 180 minut (3 godziny).
2. W przypadku potrzeby zadania pytania, wyjścia z sali itp., należy podnieść rękę i siedząc na miejscu zaczekać na podeście dyżurującego.
3. W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, Komitet unieważni pracę.
4. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów i telefonów.

I Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

(zawody trzeciego stopnia)

25 marca 2006 r.

1. Ile jest czwórek (a, b, c, d) dodatnich liczb całkowitych, które spełniają równanie: $ab+bc+cd+da=55$? Odpowiedź uzasadnij.

2. Dany jest równoległobok $ABCD$. Punkt E należy do boku AB , a punkt F do boku AD . Prosta EF przecina prostą CB w punkcie P , a prostą CD w punkcie Q . Wykaż, że pole trójkąta CEF jest równe polu trójkąta APQ .

3. W przestrzeni danych jest takich n punktów ($n \geq 4$), że żadne cztery nie leżą na jednej płaszczyźnie. Każde dwa z tych punktów połączono odcinkiem niebieskim lub czerwonym. Udowodnij, że można tak wybrać jeden z tych kolorów, aby każde dwa punkty były połączone odcinkiem lub łamaną wybranego koloru.

4. Dany jest taki czworościan, że każdy kąt dwuścienny wyznaczony przez jego sąsiednie ściany jest ostry lub prosty. Wierzchołki tego czworościanu leżą na sferze o środku S . Czy punkt S może leżeć na zewnątrz tego wielościanu? Odpowiedź uzasadnij.

5. Dane są różne liczby pierwsze p, q oraz takie dodatnie liczby całkowite a, b , że liczba aq daje resztę 1 przy dzieleniu przez p , a liczba bp daje resztę 1 przy dzieleniu przez q . Wykaż, że

$$\frac{a}{p} + \frac{b}{q} > 1.$$

Zadania II Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów

1 września 2006 r. – 16 października 2006 r.

(zawody stopnia pierwszego)

1. Czy istnieją takie dodatnie liczby całkowite a, b , że suma cyfr każdej z nich jest równa 2006, a suma cyfr liczby $a \cdot b$ jest równa 2006^2 ? Odpowiedź uzasadnij.

2. Dany jest trójkąt ABC , w którym $\sphericalangle ACB = 90^\circ$ oraz $AC \neq BC$. Punkty P i Q są takie, że czworokąt $APBQ$ jest kwadratem. Udowodnij, że proste CP i CQ są prostopadłe.

3. Wyznacz wszystkie trójki liczb pierwszych p, q, r spełniające układ równań

$$\begin{cases} q = p^2 + 6 \\ r = q^2 + 6 \end{cases}$$

4. W trójkącie ABC punkt M jest środkiem boku AB oraz $\sphericalangle ACB = 120^\circ$. Udowodnij, że

$$CM \geq \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot AB.$$

5. Wyznacz wszystkie dodatnie liczby całkowite n o następującej własności: Dla każdej pary liczb rzeczywistych dodatnich x, y zachodzi nierówność

$$xy^n < x^4 + y^4.$$

6. Czy istnieje taki czworościan, w którym co najmniej jedna ściana jest trójkątem rozwartokątnym, a środek sfery opisanej na tym czworościanie leży w jego wnętrzu? Odpowiedź uzasadnij.

7. Spośród wszystkich wierzchołków 17-kąta foremnego wybrano dziesięć. Wykaż, że wśród wybranych punktów są cztery będące wierzchołkami trapezu.

II Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

(zawody stopnia drugiego)

13 stycznia 2007 r.

1. Wyznacz wszystkie trójki (a, b, c) liczb rzeczywistych spełniające układ równań:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 23 \\ a + 2b + 4c = 22 \end{cases}$$

2. Miara każdego kąta sześciokąta $ABCDEF$ jest równa 120° . Udowodnij, że symetralne odcinków AB , CD i EF przecinają się w jednym punkcie.

3. W przestrzeni danych jest 6 punktów, z których żadne cztery nie leżą na jednej płaszczyźnie. Łącząc niektóre z tych punktów narysowano 10 odcinków. Wykaż, że w ten sposób uzyskano co najmniej jeden trójkąt.

4. Czy istnieją takie dodatnie liczby całkowite a, b, c, d , że liczba $(a+b)(b+c)(c+d)(d+a)$ jest w systemie dziesiętnym zakończona cyframi „10”?

Odpowiedź uzasadnij.

5. Trójkąt ABC jest podstawą ostrosłupa $ABCS$, w którym

$$\sphericalangle ASB = \sphericalangle BSC = \sphericalangle CSA = 20^\circ.$$

Wykaż, że obwód trójkąta ABC jest nie mniejszy od długości każdej z krawędzi AS , BS i CS .

II Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

(zawody stopnia drugiego)

13 stycznia 2007 r.

Szkice rozwiązań

1. Wyznacz wszystkie trójki (a, b, c) liczb rzeczywistych spełniające układ równań:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 23 \\ a + 2b + 4c = 22 \end{cases}$$

Rozwiązanie

Drugie równanie mnożymy stronami przez 2 i odejmujemy stronami od pierwszego. W efekcie uzyskujemy $a^2 - 2a + b^2 - 4b + c^2 - 8c + 21 = 0$, co po skorzystaniu ze wzorów skróconego mnożenia jest równoważne zależności $(a-1)^2 + (b-2)^2 + (c-4)^2 = 0$. Stąd wynika, że $a = 1$, $b = 2$, $c = 4$. Jednak bezpośrednie sprawdzenie pokazuje, że trójka ta nie spełnia danego układu równań. Układ ten nie ma zatem rozwiązań.

2. Miara każdego kąta sześciokąta $ABCDEF$ jest równa 120° . Udowodnij, że symetralne odcinków AB , CD i EF przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązanie

Niech $P = FA \cap BC$, $Q = BC \cap DE$, $R = DE \cap FA$. Wtedy trójkąty ABP , CDQ , EFR są równoboczne. Zatem symetralna odcinka AB jest jednocześnie dwusieczną kąta APB trójkąta ABP , a więc również dwusieczną kąta RPQ trójkąta PQR . Analogicznie, symetralne odcinków CD i EF są odpowiednio dwusiecznymi kątów PQR i QRP trójkąta PQR . A zatem rozpatrywane symetralne przecinają się w jednym punkcie.

Uwaga: Rozpatrywany sześciokąt $ABCDEF$ nie musi być foremny.

3. W przestrzeni danych jest 6 punktów, z których żadne cztery nie leżą na jednej płaszczyźnie. Łącząc niektóre z tych punktów narysowano 10 odcinków. Wykaż, że w ten sposób uzyskano co najmniej jeden trójkąt.

Rozwiązanie

Zauważmy najpierw, że z pewnego punktu wychodzą co najmniej 4 odcinki; w przeciwnym razie wszystkich odcinków byłoby co najwyżej $\frac{3 \cdot 6}{2} = 9$, a jest ich 10. Oznaczmy więc dane punkty przez A, B, C, D, E, F oraz przyjmijmy, że punkt A jest połączony z punktami B, C, D, E .

Z punktu F wychodzi co najwyżej pięć odcinków, a zatem skoro wszystkich odcinków jest 10, to pewne dwa punkty spośród B, C, D, E muszą być połączone. Punkty te wraz z punktem A dają żądany trójkąt.

4. Czy istnieją takie dodatnie liczby całkowite a, b, c, d , że liczba $(a+b)(b+c)(c+d)(d+a)$ jest w systemie dziesiętnym zakończona cyframi „10”? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie

Każda liczba zakończona w systemie dziesiętnym cyframi „10” jest parzysta, lecz niepodzielna przez 4. Wobec tego dokładnie jeden z czynników $(a+b)$, $(b+c)$, $(c+d)$, $(d+a)$ rozpatrywanej liczby jest parzysty, pozostałe trzy są nieparzyste. Jednak wtedy liczba

$$(a+b) + (b+c) + (c+d) + (d+a) = 2(a+b+c+d)$$

byłaby liczbą nieparzystą. Uzyskaliśmy sprzeczność, która dowodzi, że nie istnieją liczby a, b, c, d spełniające podane w treści zadania warunki.

5. Trójkąt ABC jest podstawą ostrosłupa $ABCS$, w którym

$$\sphericalangle ASB = \sphericalangle BSC = \sphericalangle CSA = 20^\circ.$$

Wykaż, że obwód trójkąta ABC jest nie mniejszy od długości każdej z krawędzi AS , BS i CS .

Rozwiązanie

Rozetnijmy powierzchnię ostrosłupa wzdłuż krawędzi AC , BC , SC , po czym rozłóżmy ją na płaszczyźnie. W ten sposób uzyskujemy siatkę ostrosłupa $ABCS$, składającą się z trójkątów ABS , ABC_1 , ASC_2 , BSC_3 . Ponieważ $SC_2 = SC_3$ oraz

$$\sphericalangle C_2SC_3 = \sphericalangle ASB + \sphericalangle BSC + \sphericalangle CSA = 3 \cdot 20^\circ = 60^\circ,$$

więc trójkąt C_2C_3S jest równoboczny. Stąd

$$CA + AB + BC = C_2A + AB + BC_3 \geq C_2C_3 = SC_2 = CS.$$

Analogicznie dowodzimy, że obwód trójkąta ABC jest nie mniejszy od długości krawędzi AS i BS , co kończy rozwiązanie zadania.

II Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

(zawody stopnia trzeciego)

10 marca 2007 r.

1. Wyznacz wszystkie trójki (a, b, c) liczb rzeczywistych spełniające układ równań:

$$\begin{cases} ab = a + b \\ bc = b + c \\ ca = c + a \end{cases}$$

2. Każdemu wierzchołkowi 100-kąta foremnego trzeba przyporządkować pewną dodatnią liczbę rzeczywistą. Czy możliwe jest takie przyporządkowanie, w którym każda liczba jest równa wartości bezwzględnej różnicy liczb, które z nią sąsiadują? Odpowiedź uzasadnij.

3. W trójkącie ostrokątnym ABC punkty M i N są odpowiednio środkami boków AC i BC . Wysokość trójkąta ABC poprowadzona z wierzchołka C przecina odcinek MN w punkcie D . Symetralna boku AB przecina odcinek MN w punkcie E . Wykaż, że $MD = NE$.

4. Ile jest takich liczb n należących do zbioru $\{1, 2, \dots, 2007\}$, dla których liczba $n^4 - 1$ jest podzielna przez 9? Odpowiedź uzasadnij.

5. Czy istnieje taki ostrosłup czworokątny, którego każda ściana boczna jest trójkątem prostokątnym? Odpowiedź uzasadnij.

II Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

(zawody stopnia trzeciego)

10 marca 2007 r.

Szkice rozwiązań

1. Wyznacz wszystkie trójki (a, b, c) liczb rzeczywistych spełniające układ równań:

$$\begin{cases} ab = a + b \\ bc = b + c \\ ca = c + a \end{cases}$$

Rozwiązanie

Odejmujemy stronami równanie drugie od pierwszego. W efekcie uzyskujemy $ab - bc = a - c$, czyli po przekształceniach $(b-1)(a-c) = 0$. Stąd $b=1$ lub $a=c$. Przypadek $b=1$ nie może być spełniony, gdyż wtedy pierwsze równanie przybrałoby sprzeczną postać $a = a + 1$. Wobec tego $a=c$. Analogicznie, rozpatrując równanie drugie i trzecie dowodzimy, że $b=a$. W efekcie otrzymujemy $a=b=c$.

Z pierwszego równania mamy wówczas $a^2 = 2a$, czyli $a=0$ lub $a=2$. Stąd $(a, b, c) = (0, 0, 0)$ lub $(a, b, c) = (2, 2, 2)$. Bezpośrednio sprawdzamy, że uzyskane trójki (a, b, c) istotnie są rozwiązaniem danego układu równań.

2. Każdemu wierzchołkowi 100-kąta foremnego trzeba przyporządkować pewną dodatnią liczbę rzeczywistą. Czy możliwe jest takie przyporządkowanie, w którym każda liczba jest równa wartości bezwzględnej różnicy liczb, które z nią sąsiadują? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie

Przypuśćmy, że takie przyporządkowanie istnieje oraz niech a będzie największą spośród wszystkich przyporządkowanych liczb. Oznaczmy ponadto przez b i c liczby sąsiadujące z liczbą a oraz przyjmijmy, że $b \geq c$. Skoro liczba a jest największa spośród rozpatrywanych liczb, więc $b \leq a$.

Z drugiej strony, ponieważ $c > 0$, więc $b > b - c = |b - c| = a$. Uzyskana sprzeczność dowodzi, że opisane w treści zadania przyporządkowanie nie istnieje.

3. W trójkącie ostrokątnym ABC punkty M i N są odpowiednio środkami boków AC i BC . Wysokość trójkąta ABC poprowadzona z wierzchołka C przecina odcinek MN w punkcie D . Symetralna boku AB przecina odcinek MN w punkcie E . Wykaż, że $MD = NE$.

Rozwiązanie

Niech K będzie środkiem boku AB oraz przyjmijmy, że prosta CK przecina odcinek MN w punkcie L . Korzystając z twierdzenia Talesa uzyskujemy

$$\frac{LD}{LE} = \frac{CD}{KE} = 1 \quad \text{oraz} \quad \frac{LM}{LN} = \frac{AK}{KB} = 1,$$

skąd $LD = LE$ oraz $LM = LN$. Zatem ostatecznie $MD = LM - LD = LN - LE = NE$.

4. Ile jest takich liczb n należących do zbioru $\{1, 2, \dots, 2007\}$, dla których liczba $n^4 - 1$ jest podzielna przez 9? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie

Zauważmy, że $n^4 - 1 = (n-1)(n+1)(n^2+1)$. Liczba n^2+1 daje z dzielenia przez 3 resztę 1 lub 2, więc liczba $n^4 - 1$ jest podzielna przez 9 wtedy i tylko wtedy, gdy liczba $(n-1)(n+1)$ jest podzielna przez 9. Ponadto oba czynniki $n-1$ oraz $n+1$ nie mogą być jednocześnie podzielne przez 3, gdyż ich różnica wynosi 2. Wobec tego liczba $n^4 - 1$ jest podzielna przez 9 wtedy i tylko wtedy, gdy $9|n+1$ lub $9|n-1$. Liczb z rozpatrywanego zbioru spełniających każdą z tych podzielności jest 223, a więc łącznie istnieje dokładnie 446 liczb spełniających warunki zadania.

5. Czy istnieje taki ostrosłup czworokątny, którego każda ściana boczna jest trójkątem prostokątnym? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie

Taki ostrosłup istnieje. Niech $ABCD A'B'C'D'$ będzie prostopadłościanem. Wówczas ostrosłup czworokątny $ABCD A'$ spełnia warunki zadania.

Istotnie: Równości $\sphericalangle BAA' = 90^\circ = \sphericalangle DAA'$ nie ulegają wątpliwości. Z drugiej strony, prosta BC jest prostopadłą do płaszczyzny ABA' , co oznacza, że prosta ta jest prostopadłą do każdej prostej zawartej w płaszczyźnie ABA' . A ponieważ prosta BA' leży w płaszczyźnie ABA' , więc $\sphericalangle CBA' = 90^\circ$. Analogicznie uzasadniamy równość $\sphericalangle CDA' = 90^\circ$.

III Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

Zawody stopnia pierwszego

(10 września 2007 r. – 29 października 2007 r.)

1. Rozwiąż równanie: $\left| \left| \left| x - 1 \right| - 2 \right| - 3 \right| - 4 \right| = 0$.

2. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$ o polu 1. Punkt K jest symetryczny do punktu B względem punktu A , punkt L jest symetryczny do punktu C względem punktu B , punkt M jest symetryczny do punktu D względem punktu C , punkt N jest symetryczny do punktu A względem punktu D . Oblicz pole czworokąta $KLMN$.

3. Liczby a, b, c są dodatnie. Wykaż, że

$$\frac{a}{a+1} + \frac{b}{(a+1)(b+1)} + \frac{c}{(a+1)(b+1)(c+1)} < 1.$$

4. Dana jest liczba ośmiocyfrowa a . Liczba ośmiocyfrowa b powstaje z liczby a poprzez przestawienie cyfry jednośmi liczby a na początek. Wykaż, że jeśli liczba a jest podzielna przez 101, to liczba b jest także podzielna przez 101.

5. Okrąg o promieniu 1 jest wpisany w czworokąt wypukły $ABCD$. Okrąg ten jest styczny do boków AB, BC, CD, DA odpowiednio w punktach K, L, M, N . Wiadomo, że

$$\sphericalangle KLM = 4 \sphericalangle AKN \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle KNM = 4 \sphericalangle BKL.$$

Oblicz długość odcinka LN .

6. Ile jest liczb 15-cyfrowych k o następującej własności: *Każde trzy kolejne cyfry liczby k są różne oraz w każdej trójce kolejnych cyfr liczby k występuje 0*? Odpowiedź uzasadnij.

7. Czy istnieje taki ostrosłup czworokątny oraz taka płaszczyzna przecinająca wszystkie jego krawędzie boczne, że pole uzyskanego przekroju jest większe od pola podstawy ostrosłupa? Odpowiedź uzasadnij.

III Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

(zawody stopnia drugiego)

12 stycznia 2008 r.

1. Liczby dodatnie a, b spełniają warunek

$$\frac{a+b}{2} = \sqrt{ab+3}.$$

Wykaż, że co najmniej jedna z liczb a, b jest niewymierna.

2. W każde pole tablicy o wymiarach 4×4 wpisano liczbę 0 lub 1. Następnie obliczono sumy liczb stojących w każdym wierszu, w każdej kolumnie i na obu przekątnych. Wykaż, że co najmniej trzy sumy są jednakowe.

3. Punkt S leży wewnątrz sześciokąta foremnego $ABCDEF$. Udowodnij, że suma pól trójkątów ABS, CDS, EFS jest równa połowie pola sześciokąta $ABCDEF$.

4. Czy istnieje taka dodatnia liczba całkowita n , dla której liczbę 2^n można przedstawić w postaci sumy co najmniej dwóch kolejnych dodatnich liczb całkowitych? Odpowiedź uzasadnij.

5. Czy można tak przeciąć sześciian płaskim cięciem na dwie bryły o równych objętościach, aby w przekroju otrzymać pięciokąt? Odpowiedź uzasadnij.

III Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

(zawody stopnia drugiego)

12 stycznia 2008 r.

Szkice rozwiązań

1. Liczby dodatnie a, b spełniają warunek

$$\frac{a+b}{2} = \sqrt{ab+3}.$$

Wykaż, że co najmniej jedna z liczb a, b jest niewymierna.

Rozwiązanie

Daną w treści zadania równość przekształcamy równoważnie uzyskując kolejno:

$$a^2 + 2ab + b^2 = 4(ab + 3), \quad a^2 - 2ab + b^2 = 12, \quad (a - b)^2 = 12, \quad |a - b| = 2\sqrt{3}.$$

Gdyby obie liczby a, b były wymierne, to wymierna byłaby także liczba $|a - b|$. Jednak liczba $2\sqrt{3}$ jest niewymierna. Uzyskana sprzeczność oznacza, że co najmniej jedna z liczb a, b jest niewymierna.

2. W każde pole tablicy o wymiarach 4×4 wpisano liczbę 0 lub 1. Następnie obliczono sumy liczb stojących w każdym wierszu, w każdej kolumnie i na obu przekątnych. Wykaż, że co najmniej trzy sumy są jednakowe.

Rozwiązanie

Przypuśćmy, że wśród uzyskanych 10 sum żadna nie powtarza się więcej niż dwa razy.

Dodając cztery liczby, z których każda równa się 0 lub 1 możemy uzyskać 5 możliwych wyników: 4, 3, 2, 1 lub 0. Ponieważ wszystkich sum jest 10, więc każda z nich musiałaby wystąpić dokładnie dwa razy.

Tymczasem wśród uzyskanych 10 sum nie mogą się pojawić dwie równe 4 i jednocześnie dwie równe 0. Jeśli bowiem sumę 4 uzyskamy dodając liczby z pewnej przekątnej, to na tej przekątnej muszą występować same jedynki. W efekcie otrzymamy co najwyżej jedną sumę równą 0 (tę na drugiej przekątnej).

Jeśli natomiast wynik 4 otrzymamy dodając cztery jedynki stojące w pewnej kolumnie, to sumę 0 możemy uzyskać jedynie dodając cztery zera w innej kolumnie. Wobec tego drugą sumę 4 oraz drugą sumę 0 uzyskamy dodając liczby stojące w pozostałych dwóch kolumnach. Wtedy jednak w wierszach otrzymamy cztery sumy równe 2.

Analogicznie rozumujemy, jeśli wynik 4 uzyskamy sumując cztery jedynki stojące w pewnym wierszu. Uzyskana sprzeczność dowodzi, że co najmniej trzy uzyskane sumy są jednakowe.

3. Punkt S leży wewnątrz sześciokąta foremnego $ABCDEF$. Udowodnij, że suma pól trójkątów ABS, CDS, EFS jest równa połowie pola sześciokąta $ABCDEF$.

Rozwiązanie

Niech a będzie długością boku sześciokąta $ABCDEF$. Wówczas

$$[ABCDEF] = \frac{3}{2}a^2\sqrt{3},$$

gdzie $[\mathcal{F}]$ oznacza pole figury $\mathcal{F}$.

Niech P będzie punktem przecięcia prostych EF i AB , Q punktem przecięcia prostych AB i CD , a R punktem przecięcia prostych CD i EF .

Każdy z trójkątów PFA, QBC, RDE jest równoboczny o boku długości a . Wobec tego trójkąty SAB, SPA i SBQ mają równe pola — każdy z nich ma podstawę długości a i jednakową wysokość opuszczoną na tę podstawę. Zatem

$$[ABS] = \frac{1}{3}[PQS].$$

Analogicznie uzyskujemy równości

$$[CDS] = \frac{1}{3}[QRS] \quad \text{oraz} \quad [EFS] = \frac{1}{3}[RPS].$$

Ponieważ trójkąt PQR jest równoboczny o boku $3a$, więc na mocy otrzymanych zależności uzyskujemy

$$[ABS] + [CDS] + [EFS] = \frac{1}{3}([PQS] + [QRS] + [RPS]) = \frac{1}{3}[PQR] = \frac{1}{3} \cdot \frac{(3a)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2}[ABCDEF].$$

4. Czy istnieje taka dodatnia liczba całkowita n , dla której liczbę 2^n można przedstawić w postaci sumy co najmniej dwóch kolejnych dodatnich liczb całkowitych? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie

Odpowiedź: Taka liczba n nie istnieje.

Przyjmijmy, że $2^n = k + (k+1) + \dots + (k+m)$, gdzie $k, m \geq 1$ są liczbami całkowitymi. Korzystając ze wzoru $1+2+\dots+m = \frac{1}{2}m(m+1)$ sprowadzamy powyższą zależność do postaci:

$$2^n = (m+1)k + \frac{m(m+1)}{2}.$$

Rozpatrzmy dwa przypadki:

(a) m jest liczbą parzystą. Wówczas $m = 2l$, gdzie $l \geq 1$. Wobec tego uzyskana zależność przybiera postać $2^n = (2l+1)(k+l)$. Uzyskaliśmy sprzeczność, gdyż liczba nieparzysta $2l+1$ ($l \geq 1$), nie może być dzielnikiem liczby 2^n .

(b) m jest liczbą nieparzystą. Wtedy $m = 2l-1$, gdzie $l \geq 1$. Dana zależność przybiera postać $2^n = l(2k+2l-1)$. Podobnie jak w poprzednim przypadku otrzymaliśmy sprzeczność, gdyż liczba nieparzysta $2k+2l-1$ ($k, l \geq 1$) nie może być dzielnikiem liczby 2^n .

5. Czy można tak przeciąć sześcián płaskim cięciem na dwie bryły o równych objętościach, aby w przekroju otrzymać pięciokąt? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie

Odpowiedź: Nie można.

Niech α będzie płaszczyzną dzielącą sześcián na dwie bryły o równych objętościach. Niech z kolei β będzie płaszczyzną, która przechodzi przez środek sześciánu i jest równoległa do płaszczyzny α . Każda płaszczyzna przechodząca przez środek symetrii sześciánu rozcina go na dwie przystające bryły, a więc na bryły o równych objętościach. Wobec tego płaszczyzna β również dzieli sześcián na dwie bryły o równych objętościach, a zatem objętość części sześciánu zawartej pomiędzy płaszczyznami α i β musi być równa 0. Stąd wynika, że płaszczyzna α musi przechodzić przez środek sześciánu. Przekrój sześciánu płaszczyzną α jest więc wielokątem mającym środek symetrii, a więc wielokątem o parzystej liczbie boków. Zatem nie istnieje przekrój sześciánu spełniający warunki zadania.

III Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

(zawody stopnia trzeciego)

8 marca 2008 r.

1. Dane są takie liczby rzeczywiste a, b, c , że liczby

$$ab + bc, \quad bc + ca, \quad ca + ab$$

są dodatnie. Udowodnij, że liczby a, b, c mają jednakowy znak, tzn. wszystkie są dodatnie lub wszystkie są ujemne.

2. Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele trójek (a, b, c) dodatnich liczb całkowitych spełniających równość

$$a^3 + 3b^6 = c^2.$$

3. Dany jest trójkąt ABC , w którym $AC > BC$. Punkt P jest rzutem prostokątnym punktu B na dwusieczną kąta ACB . Punkt M jest środkiem odcinka AB . Wiedząc, że

$$BC = a, \quad CA = b, \quad AB = c,$$

oblicz długość odcinka PM .

4. Czy wierzchołki 20-kąta foremnego można tak ponumerować liczbami $1, 2, \dots, 20$, aby użyć wszystkich tych liczb oraz aby dla każdych czterech kolejnych wierzchołków suma ich numerów była mniejsza od 43? Odpowiedź uzasadnij.

5. Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny, którego każda krawędź ma długość 1. Ostrosłup ten przecięto płaszczyzną przecinającą jego wszystkie krawędzie boczne i uzyskano w przekroju czworokąt wypukły $ABCD$ nie będący trapezem. Proste AB i CD przecinają się w punkcie P . Wyznacz wszystkie wartości, jakie może przyjąć odległość punktu P od płaszczyzny podstawy ostrosłupa.

III Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

(zawody stopnia trzeciego)

8 marca 2008 r.

Szkice rozwiązań

1. Dane są takie liczby rzeczywiste a, b, c , że liczby $ab+bc$, $bc+ca$, $ca+ab$ są dodatnie. Udowodnij, że liczby a, b, c mają jednakowy znak, tzn. wszystkie są dodatnie lub wszystkie są ujemne.

Rozwiązanie

Zauważmy, że żadna z liczb nie może być równa 0; w przeciwnym razie któraś z liczb $ab+bc$, $bc+ca$, $ca+ab$ byłaby równa 0.

Jeśli nie wszystkie spośród liczb a, b, c mają jednakowy znak, to albo

(1) dwie spośród liczb a, b, c są dodatnie, a trzecia ujemna, albo

(2) dwie spośród liczb a, b, c są ujemne, a trzecia dodatnia.

Rozpatrzmy przypadek (1). Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $a, b > 0$ oraz $c < 0$. Wtedy jednak $bc+ca < 0$, co stoi w sprzeczności z założeniami treści zadania.

Analogicznie rozumujemy w przypadku (2): Jeśli $a, b < 0$ oraz $c > 0$, to $bc+ca < 0$, co przeczy warunkom zadania.

2. Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele trójek (a, b, c) dodatnich liczb całkowitych spełniających równość $a^3 + 3b^6 = c^2$.

Rozwiązanie

Zauważmy, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n ,

$$(n^2)^3 + 3n^6 = 4n^6 = (2n^3)^2.$$

Stąd wynika, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n , trójka liczb $(a, b, c) = (n^2, n, 2n^3)$ jest rozwiązaniem danego równania.

3. Dany jest trójkąt ABC , w którym $AC > BC$. Punkt P jest rzutem prostokątnym punktu B na dwusieczną kąta ACB . Punkt M jest środkiem odcinka AB . Wiedząc, że $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, oblicz długość odcinka PM .

Rozwiązanie

Oznaczmy przez Q punkt przecięcia prostych AC i BP . Wówczas w trójkącie BQC dwusieczna kąta przy wierzchołku C pokrywa się z wysokością tego trójkąta poprowadzoną z wierzchołka C . Wobec tego $CQ = CB = a$ oraz $BP = PQ$. Ponadto $AM = MB$. Stąd wynika, że $PM = \frac{1}{2}AQ$. Zatem

$$PM = \frac{1}{2}AQ = \frac{1}{2}(AC - CQ) = \frac{1}{2}(b - a).$$

4. Czy wierzchołki 20-kąta foremnego można tak ponumerować liczbami $1, 2, \dots, 20$, aby użyć wszystkich tych liczb oraz aby dla każdego czterech kolejnych wierzchołków suma ich numerów była mniejsza od 43? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie

Odpowiedź: Takie ponumerowanie nie istnieje.

Założmy, że kolejne wierzchołki 20-kąta foremnego są ponumerowane liczbami $a_1, a_2, \dots, a_{20}$. Wtedy

$$\begin{aligned} (1) \quad & a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \leq 42 \\ & a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \leq 42 \\ & a_3 + a_4 + a_5 + a_6 \leq 42 \\ & \dots \\ & a_{19} + a_{20} + a_1 + a_2 \leq 42 \\ & a_{20} + a_1 + a_2 + a_3 \leq 42 \end{aligned}$$

Dodając nierówności (1) stronami uzyskujemy zależność $4 \cdot (a_1 + a_2 + \dots + a_{20}) \leq 20 \cdot 42$, która z kolei jest równoważna nierówności $4 \cdot (1 + 2 + \dots + 20) \leq 20 \cdot 42$, czyli $840 \leq 840$.

Wobec tego aby rozpatrywane ponumerowanie istniało, w nierównościach (1) muszą zachodzić równości. Stąd w szczególności uzyskujemy $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = a_2 + a_3 + a_4 + a_5$, czyli $a_1 = a_5$. Otrzymaliśmy sprzeczność, gdyż wszystkie liczby $a_1, a_2, \dots, a_{20}$ są różne.

5. Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny, którego każda krawędź ma długość 1. Ostrosłup ten przecięto płaszczyzną przecinającą jego wszystkie krawędzie boczne i uzyskano w przekroju czworokąt wypukły $ABCD$ nie będący trapezem. Proste AB i CD przecinają się w punkcie P . Wyznacz wszystkie wartości, jakie może przyjąć odległość punktu P od płaszczyzny podstawy ostrosłupa.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez S wierzchołek danego ostrosłupa. Prosta AB leży w płaszczyźnie ABS , a prosta CD leży w płaszczyźnie CDS . Zatem punkt wspólny prostych AB i CD musi leżeć w części wspólnej płaszczyzn ABS i CDS , którą jest prosta przechodząca przez punkt S i równoległa do płaszczyzny podstawy danego ostrosłupa. Tak więc, niezależnie od wyboru płaszczyzny $ABCD$, odległość punktu P od płaszczyzny podstawy danego ostrosłupa jest równa wysokości H tego ostrosłupa.

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa obliczamy:

$$H^2 = 1^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}, \quad \text{skąd} \quad H = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

IV Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

Zawody stopnia pierwszego Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów polegają na rozwiązywaniu przez uczniów siedmiu zadań. Uczestnicy mogą korzystać z książek, konsultować się z nauczycielem, jednak muszą rozwiązywać zadania samodzielnie.

Nie jest konieczne rozwiązanie wszystkich zadań. Uczeń, który rozwiąże część z nich, także może zostać zakwalifikowany do zawodów stopnia drugiego.

Rozwiązania poszczególnych zadań należy zapisać **jednostronnie** na **oddzielnych** arkuszach formatu A4. Na każdej kartce z rozwiązaniem należy podać następujące informacje:

- w prawym górnym rogu numer zadania,
- w lewym górnym rogu dane uczestnika: imię i nazwisko, adres domowy, adres e-mail, nazwa i adres szkoły, klasa.

Rozwiązania zadań należy przesłać do koordynatora okręgowego, właściwego terytorialnie dla szkoły. Adresy koordynatorów, informacje o kwalifikacji do zawodów stopnia drugiego, zadania z poprzednich edycji OMG oraz inne bieżące informacje można znaleźć w Internecie pod adresem

www.om.edu.pl/omg

Zachęcamy Gimnazjalistów do wzięcia udziału w zawodach.

Uwaga: Począwszy od tegorocznej edycji, uczniowie przesyłają swoje prace bezpośrednio do koordynatora, bez uprzedniej oceny rozwiązań przez nauczyciela matematyki.

Terminarz IV Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów

- termin przesłania rozwiązań zadań zawodów I stopnia do koordynatora okręgowego: **27 października 2008 r.** (decyduje data stempla pocztowego)
- termin zawodów II stopnia: 17 stycznia 2009 r.
- termin zawodów III stopnia: 14 marca 2009 r.

IV Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

Zawody stopnia pierwszego

(1 września 2008 r. – 27 października 2008 r.)

1. Wyznacz w zależności od parametru a liczbę rozwiązań układu równań

$$\begin{cases} |x| + |y| = 1 \\ |x| + a = y \end{cases}$$

2. Dany jest prostopadłościan o podstawie kwadratowej. Przekątna tego prostopadłościanu ma długość d , a jego pole powierzchni jest równe b . Oblicz sumę długości wszystkich krawędzi prostopadłościanu.

3. Dany jest kwadrat $ABCD$ o boku 1 oraz prosta ℓ przechodząca przez jego środek. Niech a, b, c, d oznaczają odpowiednio odległości punktów A, B, C, D od prostej ℓ . Wykaż, że

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1.$$

4. Wyznacz wszystkie takie pary (a, b) dodatnich liczb całkowitych, że liczba $a + b$ jest liczbą pierwszą oraz liczba $a^3 + b^3$ jest podzielna przez 3.

5. W trójkącie ABC dwusieczna kąta ACB przecina bok AB w punkcie D . Długości boków BC i AC są równe odpowiednio a i b , a długość odcinka CD jest równa d . Wykaż, że

$$d < \frac{2ab}{a+b}.$$

6. Każdy punkt płaszczyzny pokolorowano na niebiesko lub czerwono. Udowodnij, że istnieje trójkąt prostokątny równoramienny, którego wierzchołki są tego samego koloru.

7. Czy istnieje taki wielościan, którego rzuty prostokątne na pewne trzy płaszczyzny są odpowiednio czworokątem, sześciokątem i ośmiokątem? Odpowiedź uzasadnij.

IV Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

Zawody stopnia drugiego

17 stycznia 2009 r.

1. Wyznacz wszystkie trójki (a, b, c) liczb nieparzystych dodatnich spełniające zależność

$$\frac{a+c-b}{b+c-a} = \frac{a}{b}.$$

2. Każda z liczb $x_1, x_2, \dots, x_{101}$ jest równa 1 lub -1 . Wyznacz najmniejszą możliwą wartość wyrażenia

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + \dots + x_{100}x_{101} + x_{101}x_1.$$

3. Dany jest równoległobok $ABCD$ oraz punkt E należący do boku BC . Przez punkt D prowadzimy prostą k równoległą do prostej AE . Na prostej k obieramy takie punkty K, L , że czworokąt $AEKL$ jest równoległobokiem. Udowodnij, że równoległoboki $ABCD$ i $AEKL$ mają równe pola.

4. W turnieju tenisa stołowego wzięło udział 50 zawodników. Każdy zawodnik rozegrał jeden mecz z każdym innym zawodnikiem, nie było remisów. Czy możliwe jest, aby każdy z uczestników wygrał tę samą liczbę meczów? Odpowiedź uzasadnij.

5. Ostrosłup prawidłowy sześciokątny przecięto płaszczyzną, która przecina wszystkie jego krawędzie boczne. W przekroju otrzymano sześciokąt wypukły $ABCDEF$. Wykaż, że proste AD , BE i CF przecinają się w jednym punkcie.

IV Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

(zawody stopnia drugiego)

17 stycznia 2009 r.

Szkice rozwiązań

1. Wyznacz wszystkie trójki (a, b, c) liczb nieparzystych dodatnich spełniające zależność

$$\frac{a+c-b}{b+c-a} = \frac{a}{b}.$$

Rozwiązanie

Przekształcając równoważnie daną zależność uzyskujemy kolejno:

$$\begin{aligned}ab+bc-b^2 &= ab+ac-a^2, \\a^2-b^2-ac+bc &= 0, \\(a-b)(a+b)-(a-b)c &= 0, \\(a-b)(a+b-c) &= 0.\end{aligned}$$

Ponieważ liczby a , b oraz c są nieparzyste, więc liczba $a+b-c$ jest także liczbą nieparzystą. W szczególności liczba $a+b-c$ jest różna od zera. Wobec tego dana w treści zadania zależność jest równoważna równości $a=b$.

Ostatecznie trójkami (a, b, c) spełniającymi warunki zadania są trójki postaci (a, a, c) , gdzie a , c są dowolnymi liczbami nieparzystymi dodatnimi.

2. Każda z liczb $x_1, x_2, \dots, x_{101}$ jest równa 1 lub -1 . Wyznacz najmniejszą możliwą wartość wyrażenia $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + \dots + x_{100}x_{101} + x_{101}x_1$.

Rozwiązanie

Liczby $x_1, x_2, \dots, x_{101}$ są równe 1 lub -1 , a więc każda z liczb $x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, \dots, x_{100}x_{101}, x_{101}x_1$ jest też równa 1 lub -1 .

Przypuśćmy, że każda z liczb $x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, \dots, x_{100}x_{101}, x_{101}x_1$ jest równa -1 . Wówczas

$$-1 = (-1)^{101} = (x_1x_2) \cdot (x_2x_3) \cdot (x_3x_4) \cdot \dots \cdot (x_{100}x_{101}) \cdot (x_{101}x_1) = (x_1x_2 \dots x_{101})^2.$$

Uzyskaliśmy sprzeczność, z której wynika, że wśród liczb $x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, \dots, x_{100}x_{101}, x_{101}x_1$ musi być co najmniej jedna równa 1. Zatem

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + \dots + x_{100}x_{101} + x_{101}x_1 \geq 100 \cdot (-1) + 1 = -99.$$

Wartość -99 możemy uzyskać przyjmując $x_1 = x_3 = \dots = x_{101} = 1$ oraz $x_2 = x_4 = \dots = x_{100} = -1$. Stąd wynika, że -99 jest najmniejszą możliwą wartością, jaką może przyjąć dane wyrażenie.

3. Dany jest równoległobok $ABCD$ oraz punkt E należący do boku BC . Przez punkt D prowadzimy prostą k równoległą do prostej AE . Na prostej k obieramy takie punkty K, L , że czworokąt $AEKL$ jest równoległobokiem. Udowodnij, że równoległoboki $ABCD$ i $AEKL$ mają równe pola.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez $[\mathcal{F}]$ pole figury $\mathcal{F}$.

Równoległobok $ABCD$ oraz trójkąt ADE mają wspólną podstawę AD oraz wysokości równej długości opuszczone na tę podstawę. Wobec tego $[ABCD] = 2[ADE]$.

Podobnie, równoległobok $AEKL$ oraz trójkąt ADE mają wspólną podstawę AE oraz wysokości równej długości opuszczone na tę podstawę. Stąd otrzymujemy $[AEKL] = 2[ADE]$.

Łącząc uzyskane równości dostajemy $[ABCD] = [AEKL]$, co należało wykazać.

4. W turnieju tenisa stołowego wzięło udział 50 zawodników. Każdy zawodnik rozegrał jeden mecz z każdym innym zawodnikiem, nie było remisów. Czy możliwe jest, aby każdy z uczestników wygrał tę samą liczbę meczów? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie

Odpowiedź: Taka sytuacja nie jest możliwa.

Przyjmijmy, że każdy zawodnik wygrał k meczów. Wówczas liczba wszystkich meczów wygranych, a więc i rozegranych w turnieju wynosi $50k$.

Z drugiej strony każdy zawodnik przegrał dokładnie $49 - k$ meczów. Zatem liczba wszystkich meczów przegranych, a więc i rozegranych w turnieju wynosi $50(49 - k)$.

Wobec tego $50k = 50(49 - k)$, skąd obliczamy $k = 49/2$. Otrzymaliśmy sprzeczność, która kończy rozwiązanie zadania.

5. Ostrosłup prawidłowy sześciokątny przecięto płaszczyzną, która przecina wszystkie jego krawędzie boczne. W przekroju otrzymano sześciokąt wypukły $ABCDEF$. Wykaż, że proste AD , BE i CF przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązanie

Niech P oznacza punkt przecięcia prostej zawierającej wysokość danego ostrosłupa z płaszczyzną sześciokąta $ABCDEF$. Wykażemy, że punkt P leży na każdej z prostych AD , BE , CF . Punkt P jest wówczas punktem wspólnym prostych AD , BE i CF .

Niech S oznacza wierzchołek danego ostrosłupa. Ponieważ ostrosłup jest prawidłowy, więc wysokość tego ostrosłupa leży w płaszczyźnie ADS . Wobec tego prosta zawierająca wysokość ostrosłupa przecina prostą AD . Stąd wynika, że punkt P leży na prostej AD .

Analogicznie dowodzimy, że punkt P leży na prostych BE i CF , co kończy rozwiązanie zadania.

IV Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

Zawody stopnia trzeciego

14 marca 2009 r.

1. Wyznacz wszystkie liczby całkowite dodatnie, które są 11 razy większe od sumy swoich cyfr.

2. W turnieju tenisa stołowego uczestniczyło $2n$ zawodników. Każdy zawodnik rozegrał z każdym innym zawodnikiem co najwyżej jeden mecz. Po turnieju okazało się, że dokładnie n zawodników rozegrało po dwa mecze, a pozostałych n zawodników po trzy mecze. Wyznacz wszystkie liczby całkowite dodatnie n , dla których taka sytuacja jest możliwa.

3. Dany jest okrąg o środku S oraz punkt D leżący na tym okręgu. Cięciwa AB przecina odcinek SD w punkcie C , różnym od punktu S . Wykaż, że $AB > 2CD$.

4. Dodatnie liczby rzeczywiste a, b mają tę własność, że liczba

$$\frac{a-b}{a+b}$$

jest wymierna. Udowodnij, że liczba

$$\frac{2a-b}{2a+b}$$

jest także wymierna.

5. Czy istnieje taki wielościan wypukły, który ma nieparzystą liczbę krawędzi i którego każda ściana ma parzystą liczbę boków? Odpowiedź uzasadnij.

IV Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

(zawody stopnia trzeciego)

14 marca 2009 r.

Szkice rozwiązań

1. Wyznacz wszystkie liczby całkowite dodatnie, które są 11 razy większe od sumy swoich cyfr.

Rozwiązanie

Niech $x = a_0 + 10a_1 + 10^2a_2 + \dots + 10^na_n$, gdzie $a_0, a_1, \dots, a_n$ są cyframi, będzie szukaną liczbą. Wówczas dany w treści zadania warunek możemy przepisać w postaci

$$a_0 + 10a_1 + 10^2a_2 + \dots + 10^na_n = 11(a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n).$$

Jest on równoważny zależności

$$(1) \quad (10^2 - 11)a_2 + (10^3 - 11)a_3 + \dots + (10^n - 11)a_n = 10a_0 + a_1.$$

Zauważmy, że prawa strona równości (1) jest liczbą dwucyfrową. Przypuśćmy, że dla pewnej liczby całkowitej $k \geq 3$, liczba a_k jest różna od 0. Wówczas $(10^k - 11)a_k \geq 10^3 - 11 = 989$. Wynika stąd, że lewa strona zależności (1) jest większa lub równa od 989. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że $a_3 = a_4 = \dots = a_n = 0$.

Równość (1) przybiera zatem postać

$$(2) \quad 89a_2 = 10a_0 + a_1.$$

Jeśli $a_2 \geq 2$, to lewa strona równości (2) jest większa lub równa od $89 \cdot 2 = 178$, gdy tymczasem po prawej stronie tej równości jest liczba co najwyżej dwucyfrowa. Wobec tego $a_2 = 0$ lub $a_2 = 1$.

Jeśli $a_2 = 0$, to $a_0 = a_1 = 0$, skąd obliczamy $x = 0$. Liczba ta jednak nie spełnia warunków zadania (nie jest dodatnia).

Jeśli z kolei $a_2 = 1$, to $a_0 = 8$, $a_1 = 9$. Wtedy $x = 198$. Bezpośrednio sprawdzamy, że liczba ta spełnia warunki zadania.

Odp.: Jedyną liczbą spełniającą warunki zadania jest **198**.

2. W turnieju tenisa stołowego uczestniczyło $2n$ zawodników. Każdy zawodnik rozegrał z każdym innym zawodnikiem co najwyżej jeden mecz. Po turnieju okazało się, że dokładnie n zawodników rozegrało po dwa mecze, a pozostałych n zawodników po trzy mecze. Wyznacz wszystkie liczby całkowite dodatnie n , dla których taka sytuacja jest możliwa.

Rozwiązanie

Ponieważ dokładnie n zawodników rozegrało po dwa mecze, a pozostałych n zawodników po trzy mecze, więc łączna liczba meczów w turnieju wynosi

$$\frac{2n + 3n}{2} = \frac{5n}{2}.$$

Zatem, aby opisana sytuacja była możliwa, liczba n musi być parzysta.

Wykażemy teraz, że jeśli $n = 2k$ jest liczbą parzystą, to można zaplanować mecze tak, aby spełnione były warunki zadania.

Przyjmijmy, że $2n = 4k$ zawodników $A_1, A_2, \dots, A_{4k}$ rozgrywało mecze w następujący sposób: zawodnik A_1 zagrał z A_2 , A_2 zagrał z A_3 , ..., A_{4k} zagrał z A_1 . Ponadto przyjmijmy, że zawodnik A_1 zagrał z A_{2k+1} , A_3 zagrał z A_{2k+3} , ..., A_{2k-1} zagrał z A_{4k-1} .

Wówczas każdy z n zawodników $A_2, A_4, \dots, A_{4k}$ rozegrał dokładnie dwa mecze, a każdy z pozostałych n zawodników $A_1, A_3, \dots, A_{4k-1}$ rozegrał dokładnie trzy mecze.

3. Dany jest okrąg o środku S oraz punkt D leżący na tym okręgu. Cięciwa AB przecina odcinek SD w punkcie C , różnym od punktu S . Wykaż, że $AB > 2CD$.

Rozwiązanie

Wykorzystując nierówność trójkąta ACS uzyskujemy

$$AC + CS > AS = DS = CD + CS,$$

skąd wynika, że $AC > CD$. Analogicznie, wykorzystując nierówność trójkąta BCS , dowodzimy, że $BC > CD$. Dodając stronami dwie ostatnie nierówności otrzymujemy $AB > 2CD$, co należało udowodnić.

4. Dodatnie liczby rzeczywiste a, b mają tę własność, że liczba $\frac{a-b}{a+b}$ jest wymierna. Udowodnij, że liczba $\frac{2a-b}{2a+b}$ jest także wymierna.

Rozwiązanie

Wykażemy najpierw, że liczba $x = \frac{a}{b}$ jest wymierna. Niech $\frac{a-b}{a+b} = p$. Wówczas $\frac{\frac{a}{b} - 1}{\frac{a}{b} + 1} = p$, skąd uzyskujemy $\frac{x-1}{x+1} = p$. Wyznaczając z ostatniej zależności x , otrzymujemy

$$x = \frac{1+p}{1-p}.$$

Ponieważ liczba p jest wymierna, więc wymierne są także liczby $1+p$ oraz $1-p$. Stąd wniosek, że iloraz liczb $1+p$ oraz $1-p$, czyli liczba x , jest także liczbą wymierną.

Ponadto

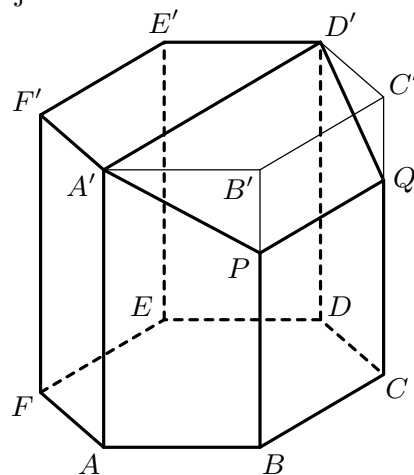
$$\frac{2a-b}{2a+b} = \frac{2\frac{a}{b} - 1}{2\frac{a}{b} + 1} = \frac{2x-1}{2x+1}.$$

Ponieważ x jest liczbą wymierną, więc liczby $2x-1$ oraz $2x+1$ są także wymierne. Stąd wynika, że iloraz liczb $2x-1$ oraz $2x+1$ jest liczbą wymierną, co należało wykazać.

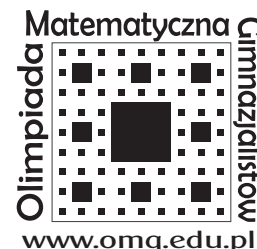
5. Czy istnieje taki wielościan wypukły, który ma nieparzystą liczbę krawędzi i którego każda ściana ma parzystą liczbę boków? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie

Odp.: Taki wielościan istnieje, podamy jego konstrukcję. Rozpatrzmy graniastosłup, którego podstawami są sześciokąty $ABCDEF$ oraz $A'B'C'D'E'F'$ (zob. rysunek). Następnie poprowadźmy przez punkty A' i D' płaszczyznę, która przecina krawędzie BB' i CC' odpowiednio w punktach P i Q . Płaszczyzna ta rozcina graniastosłup na dwa wielościany. Jeden z uzyskanych wielościanów ma osiem ścian będących czworokątami i jedną ścianę będącą sześciokątem, a więc wszystkie jego ściany mają parzystą liczbę boków. Ponadto wielościan ten ma 19, czyli nieparzystą liczbę krawędzi.



V Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów



Zachęcamy Gimnazjalistów do wzięcia udziału w zawodach

Jak wystartować w OMG

Wystarczy rozwiązać co najmniej jedno z poniższych zadań i swoje rozwiązania przesłać do właściwego Komitetu Okręgowego OMG, **najpóźniej dnia 26 października 2009 r.** (decyduje data stempla pocztowego).

Aby zakwalifikować się do kolejnego etapu Olimpiady, nie jest konieczne rozwiązanie wszystkich zadań. Progi kwalifikacyjne są każdego roku inne i zależą od liczby uczestników, jakości rozwiązań i trudności zadań.

Adresy Komitetów Okręgowych, informacje o kwalifikacji do zawodów stopnia drugiego, zadania z poprzednich edycji OMG oraz inne informacje można znaleźć na stronie internetowej OMG: www.omg.edu.pl

Dlaczego warto wystartować w OMG

Zgodnie z decyzją Ministra Edukacji Narodowej, laureaci OMG są zwolnieni z egzaminu gimnazjalnego z części matematyczno-przyrodniczej i przyjmowani do wybranego liceum w pierwszej kolejności.

Wielu finalistów OMG zostało później laureatami Olimpiady Matematycznej (dla uczniów szkół ponadgimnazjalnych).

Terminarz V Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów

Zawody stopnia pierwszego **1 września 2009 r. – 26 października 2009 r.**

Zawody stopnia drugiego **9 stycznia 2010 r.**

Zawody stopnia trzeciego **20–21 marca 2010 r.**

*Komitet Główny
Olimpiady Matematycznej
Gimnazjalistów*

Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego

Zadanie 1. Wyznacz wszystkie trójki liczb pierwszych a, b, c , dla których $a^2 = b^2 + c$.

Zadanie 2. Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD . Wyznacz wszystkie punkty P leżące wewnątrz tego trapezu i spełniające równość

$$[PAB] + [PCD] = [PBC] + [PDA],$$

gdzie $[XYZ]$ oznacza pole trójkąta XYZ .

Zadanie 3. Liczby całkowite a, b, c, d spełniają układ równań

$$\begin{cases} a + b + c + d = 101 \\ ab + cd = 200. \end{cases}$$

Wykaż, że dokładnie jedna z liczb a, b, c, d jest nieparzysta.

Zadanie 4. Dany jest 18-kąt foremny $A_1A_2 \dots A_{18}$. Wykaż, że czworokąt ograniczony prostymi $A_2A_7, A_3A_{15}, A_6A_{12}$ i $A_{10}A_{17}$ jest prostokątem. Czy ten prostokąt jest kwadratem?

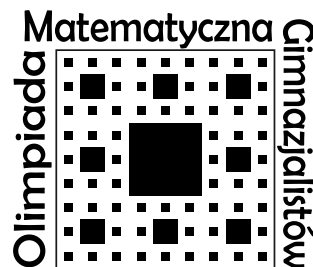
Zadanie 5. Przy każdym wierzchołku 55-kąta foremnego napisano liczbę całkowitą. Żadna z tych liczb nie jest podzielna przez 5. Wykaż, że istnieją takie dwie liczby a i b , napisane przy sąsiednich wierzchołkach tego wielokąta, że liczba $a^2 - b^2$ jest podzielna przez 5.

Zadanie 6. Czworoscian foremny o krawędzi 1 przecięto płaszczyzną tak, że w przekroju otrzymano czworokąt. Jaki jest najmniejszy możliwy obwód tego czworokąta? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 7. Dana jest taka liczba rzeczywista a , że liczby $a^2 + a$ oraz $a^3 + a$ są wymierne. Udowodnij, że liczba a jest wymierna.

V Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

Zawody stopnia drugiego
(9 stycznia 2010 r.)



1. Danych jest 21 liczb rzeczywistych. Wiadomo, że suma każdych jedenastu spośród tych liczb jest większa od sumy pozostałych dziesięciu. Wykaż, że wszystkie te liczby są dodatnie.

2. Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD , w którym
 $\sphericalangle BAD = \sphericalangle ABC = 60^\circ$ oraz $CD < BC$.

Na boku BC tego trapezu wybrano taki punkt E , że $EB = CD$. Wykaż, że $BD = AE$.

3. Wyznacz wszystkie takie dodatnie liczby całkowite n , dla których obie liczby

$$n^2 + n + 1 \quad \text{oraz} \quad n^2 + n + 3$$

są pierwsze.

4. Na przyjęciu spotkało się sześć osób. Okazało się, że każda z nich ma wśród pozostałych dokładnie trzech znajomych. Wykaż, że pewne cztery z tych osób mogą usiąść przy okrągłym stole w taki sposób, aby każda z nich siedziała pomiędzy swoimi dwoma znajomymi.

5. Czy istnieje taki ostrosłup czworokątny, którego każda krawędź boczna jest prostopadła do którejś krawędzi podstawy? Odpowiedź uzasadnij.

Uwaga:

Proste prostopadłe w przestrzeni nie muszą się przecinać.

V Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

Zawody stopnia drugiego

(9 stycznia 2010 r.)

Szkice rozwiązań

1. Danych jest 21 liczb rzeczywistych. Wiadomo, że suma każdych jedenastu spośród tych liczb jest większa od sumy pozostałych dziesięciu. Wykaż, że wszystkie te liczby są dodatnie.

Rozwiązanie

Niech $x_1, x_2, \dots, x_{21}$ będą danymi liczbami. Wówczas

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{11} > x_{12} + x_{13} + \dots + x_{21},$$

$$x_1 + x_{12} + x_{13} + \dots + x_{21} > x_2 + x_3 + \dots + x_{11}.$$

Po dodaniu stronami tych nierówności otrzymujemy

$$2x_1 + (x_2 + x_3 + \dots + x_{21}) > x_2 + x_3 + \dots + x_{21},$$

skąd $2x_1 > 0$, czyli $x_1 > 0$.

Analogicznie dowodzimy, że pozostałe liczby $x_2, x_3, \dots, x_{21}$ są dodatnie.

2. Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD , w którym

$$\sphericalangle BAD = \sphericalangle ABC = 60^\circ \quad \text{oraz} \quad CD < BC.$$

Na boku BC tego trapezu wybrano taki punkt E , że $EB = CD$. Wykaż, że $BD = AE$.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez P punkt przecięcia prostych BC i AD . Wówczas z równości kątów danych w treści zadania wynika, że trójkąty ABP i DCP są równoboczne. Wobec tego $CP = EB$, a więc punkty E i C są symetryczne względem wysokości trójkąta ABP poprowadzonej z wierzchołka A . Stąd wynika, że $AE = AC = BD$.

3. Wyznacz wszystkie takie dodatnie liczby całkowite n , dla których obie liczby

$$n^2 + n + 1 \quad \text{oraz} \quad n^2 + n + 3$$

są pierwsze.

Rozwiązanie

Dla $n = 1$ obie liczby są pierwsze: wynoszą odpowiednio 3 i 5.

Wykażemy, że dla $n \geq 2$ co najmniej jedna z liczb $n^2 + n + 1$, $n^2 + n + 3$ jest złożona.

Jeśli liczba n jest podzielna przez 3 lub przy dzieleniu przez 3 daje resztę 2, to liczba $n^2 + n + 3 = n(n+1) + 3$ jest podzielna przez 3. Ponieważ liczba $n^2 + n + 3$ jest większa od 3, więc jest złożona.

Jeśli natomiast liczba n przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1, to liczba $n^2 + n + 1$ jest podzielna przez 3. Dla $n \geq 2$ liczba $n^2 + n + 1$ jest większa od 3, a więc jest złożona.

4. Na przyjęciu spotkało się sześć osób. Okazało się, że każda z nich ma wśród pozostałych dokładnie trzech znajomych. Wykaż, że pewne cztery z tych osób mogą usiąść przy okrągłym stole w taki sposób, aby każda z nich siedziała pomiędzy swoimi dwoma znajomymi.

Rozwiązanie

Przyjmijmy, że osoba A będąca na przyjęciu ma trzech znajomych: B , C oraz D . Oznaczmy przez E i F pozostałe dwie osoby z przyjęcia. Wówczas osoba E nie może znać osoby A , bowiem w przeciwnym razie osoba A miałaby więcej niż trzech znajomych. Wobec tego, jeśli osoby E i F się znają, to osoba E musi znać dwie osoby spośród B , C , D ; natomiast jeśli osoby E i F się nie znają, to osoba E zna wszystkie osoby B , C oraz D .

Bez straty ogólności możemy przyjąć, że znajomymi osoby E są B i C . Jeżeli osoby A , B , E , C usiądą wokół okrągłego stołu w tej właśnie kolejności, to każda z nich będzie siedziała między swoimi dwoma znajomymi.

5. Czy istnieje taki ostrosłup czworokątny, którego każda krawędź boczna jest prostopadła do którejś krawędzi podstawy? Odpowiedź uzasadnij.

Uwaga:

Proste prostopadłe w przestrzeni nie muszą się przecinać.

Rozwiązanie

Wykażemy, że taki ostrosłup istnieje.

Rozpatrzmy na płaszczyźnie taki czworokąt wypukły $ABCD$, w którym

$$\sphericalangle BAD = \sphericalangle ADC = \sphericalangle ACB = 90^\circ.$$

Niech ponadto S będzie takim punktem w przestrzeni, że prosta SA jest prostopadła do płaszczyzny $ABCD$.

Wykażemy, że ostrosłup $SABCD$ spełnia warunki zadania, a mianowicie, że:

- (a) krawędź SA jest prostopadła do krawędzi AB ,
- (b) krawędź SB jest prostopadła do krawędzi AD ,
- (c) krawędź SC jest prostopadła do krawędzi BC oraz
- (d) krawędź SD jest prostopadła do krawędzi CD .

Ponieważ prosta SA jest prostopadła do płaszczyzny $ABCD$, więc własność (a) jest spełniona. Wykażemy, że spełniona jest własność (b).

Zauważmy, że prosta AD jest prostopadła do prostej AS oraz do prostej AB , a więc jest prostopadła do płaszczyzny ABS . Stąd wynika, że prosta AD jest prostopadła do każdej prostej zawartej w płaszczyźnie ABS , a więc w szczególności do prostej SB .

Analogicznie dowodzimy własności (c) oraz (d).

V Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

Zawody stopnia trzeciego
(20 marca 2010 r.)



1. Dane są takie liczby całkowite $a, b, c > 1$, że największy wspólny dzielnik liczb $a - 1$, $b - 1$, $c - 1$ jest większy od 1. Udowodnij, że liczba $abc - 1$ jest złożona.

2. Na tablicy napisano skończenie wiele (i więcej niż jedną) różnych liczb rzeczywistych. Okazało się, że dla każdych dwóch napisanych liczb została napisana także ich suma. Jakie liczby napisano na tablicy? Podaj wszystkie możliwości. Odpowiedź uzasadnij.

3. Punkt P leży wewnątrz trójkąta ABC . Punkty D , E , F to punkty symetryczne do punktu P odpowiednio względem prostych BC , CA , AB . Wykaż, że jeśli trójkąt DEF jest równoboczny, to proste AD , BE i CF przecinają się w jednym punkcie.

4. Danych jest pięć dodatnich liczb rzeczywistych. Wykaż, że spośród tych liczb można wybrać takie dwie liczby a , b , dla których

$$0 \leq \frac{1}{1+a} - \frac{1}{1+b} < \frac{1}{4}.$$

5. Czy istnieje wielościan wypukły mający dokładnie 100 ścian, z których przynajmniej jedna jest 99-kątem i taki, że w każdym jego wierzchołku zbiegają się dokładnie trzy krawędzie? Odpowiedź uzasadnij.

1. Dane są takie liczby całkowite $a, b, c > 1$, że największy wspólny dzielnik liczb $a-1$, $b-1$, $c-1$ jest większy od 1. Udowodnij, że liczba $abc-1$ jest złożona.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez d największy wspólny dzielnik liczb $a-1$, $b-1$, $c-1$. Wówczas każda z liczb $a-1$, $b-1$, $c-1$ jest podzielna przez d , a zatem istnieją dodatnie liczby całkowite x , y , z , dla których $a-1 = dx$, $b-1 = dy$, $c-1 = dz$. Stąd otrzymujemy

$$\begin{aligned} abc-1 &= (dx+1)(dy+1)(dz+1)-1 = d^3xyz + d^2(xy+yz+zx) + d(x+y+z) = \\ &= d(d^2xyz + d(xy+yz+zx) + x+y+z), \end{aligned}$$

co oznacza, że liczba $abc-1$ jest podzielna przez d .

Ponadto $d > 1$ oraz $d^2xyz + d(xy+yz+zx) + x+y+z > 1$. Wobec tego liczba $abc-1$ jest złożona.

2. Na tablicy napisano skończenie wiele (i więcej niż jedną) różnych liczb rzeczywistych. Okazało się, że dla każdych dwóch napisanych liczb została napisana także ich suma. Jakie liczby napisano na tablicy? Podaj wszystkie możliwości. Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie

Przypuśćmy, że wśród napisanych liczb są co najmniej dwie liczby dodatnie i niech a oznacza największą liczbę dodatnią napisaną na tablicy. Jeśli b oznacza jakąkolwiek inną napisaną liczbę dodatnią, to zgodnie z warunkami zadania napisana została także liczba $a+b$, która jest większa od a . Stąd wniosek, że na tablicy może widnieć co najwyżej jedna liczba dodatnia.

Analogicznie dowodzimy, że wśród napisanych liczb jest co najwyżej jedna liczba ujemna. Wobec tego na tablicy musiały zostać napisane co najwyżej trzy liczby: dodatnia, ujemna, zero.

Przyjmijmy więc, że na tablicy zostały napisane dokładnie dwie liczby: x oraz y . Wówczas liczba $x+y$ musi być równa x lub y , co oznacza, że jedna z tych liczb równa się 0.

Bezpośrednio sprawdzamy, że jeśli na tablicy napisano dowolną liczbę rzeczywistą $x \neq 0$ oraz liczbę 0, to warunki zadania są spełnione.

Przyjmijmy z kolei, że na tablicy napisano dokładnie trzy liczby: x , y , z . Wówczas jedna z nich, np. x musi być równa 0. Zgodnie z warunkami zadania liczba $y+z$ musi widnieć na tablicy. A ponieważ $y, z \neq 0$, więc liczba $y+z$ jest różna od y oraz z . Stąd wniosek, że $y+z=0$, czyli $z=-y$.

Pozostaje bezpośrednio sprawdzić, że jeśli na tablicy napisano dowolną liczbę rzeczywistą $y \neq 0$, liczbę 0 oraz liczbę $-y$, to warunki zadania są spełnione.

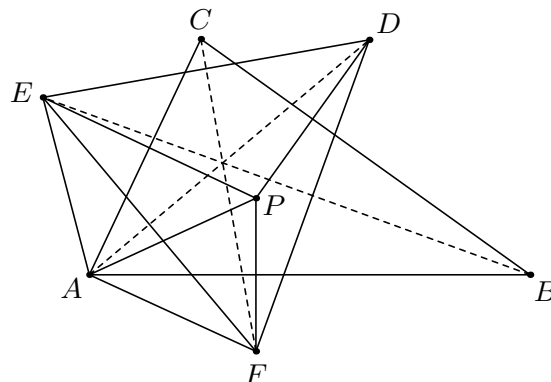
Odpowiedź: Na tablicy napisano dwie liczby $(x, 0)$ lub trzy liczby $(y, 0, -y)$, gdzie $x, y \neq 0$ są dowolnymi liczbami rzeczywistymi.

3. Punkt P leży wewnątrz trójkąta ABC . Punkty D, E, F to punkty symetryczne do punktu P odpowiednio względem prostych BC, CA, AB . Wykaż, że jeśli trójkąt DEF jest równoboczny, to proste AD, BE i CF przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązanie

Punkty P i E są symetryczne względem prostej AC , a więc $AE = AP$. Podobnie zauważamy, że $AP = AF$. Wobec tego $AE = AF$. Ponadto $ED = DF$. Stąd wynika, że prosta AD jest symetralną odcinka EF (gdyż czworokąt $AFDE$ jest deltoidem).

Analogicznie dowodzimy, że proste BE i CF są odpowiednio symetralnymi odcinków FD i DE . Zatem proste AD, BE i CF są symetralnymi boków trójkąta DEF , a więc przecinają się w jednym punkcie (będącym środkiem okręgu opisanego na trójkącie DEF).



rys. 1

4. Danych jest pięć dodatnich liczb rzeczywistych. Wykaż, że spośród tych liczb można wybrać takie dwie liczby a, b , dla których

$$0 \leq \frac{1}{1+a} - \frac{1}{1+b} < \frac{1}{4}.$$

Rozwiązanie

Niech $x_1, x_2, \dots, x_5$ będą danymi liczbami dodatnimi. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_5$. Niech ponadto

$$y_i = \frac{1}{1+x_i} \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, 5.$$

Wówczas $y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_5$ oraz liczby te należą do otwartego przedziału $(0, 1)$. Teza zadania sprowadza się więc do wykazania, że różnica między dwiema spośród liczb $y_1, y_2, \dots, y_5$ jest nieujemna i jednocześnie mniejsza od $1/4$.

Przypuśćmy, że warunek ten nie jest spełniony. Wówczas

$$y_1 - y_2 \geq \frac{1}{4}, \quad y_2 - y_3 \geq \frac{1}{4}, \quad y_3 - y_4 \geq \frac{1}{4}, \quad y_4 - y_5 \geq \frac{1}{4}.$$

Dodając stronami te nierówności uzyskujemy $y_1 - y_5 \geq 1$. Otrzymaliśmy sprzeczność, gdyż liczby y_1 oraz y_5 należą do przedziału otwartego $(0, 1)$, a stąd wynika, że $y_1 - y_5 < 1$. Wobec tego dla pewnej liczby k spełnione są nierówności $0 \leq y_k - y_{k+1} < \frac{1}{4}$, co kończy rozwiązanie zadania.

5. Czy istnieje wielościan wypukły mający dokładnie 100 ścian, z których przynajmniej jedna jest 99-kątem i taki, że w każdym jego wierzchołku zbiegają się dokładnie trzy krawędzie? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie

Taki wielościan istnieje.

Rozpatrzmy graniastosłup prawidłowy o podstawach $A_1 A_2 \dots A_{99}$ oraz $B_1 B_2 \dots B_{99}$ i krawędziach bocznych $A_1 B_1, A_2 B_2, \dots, A_{99} B_{99}$. Następnie weźmy pod uwagę płaszczyznę, która przechodzi przez punkty A_1 i A_2 oraz przecina krawędzie $A_3 B_3, A_4 B_4, \dots, A_{99} B_{99}$. Płaszczyzna ta rozcina dany graniastosłup na dwa wielościany, z których jeden — ten który zawiera ścianę $A_1 A_2 \dots A_{99}$ — spełnia warunki zadania. Posiada on dokładnie 100 ścian, ścianę będącą 99-kątem oraz w każdym jego wierzchołku zbiegają się dokładnie trzy krawędzie.

VI Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

(zawody stopnia pierwszego)

1 września 2010 r. – 25 października 2010 r.

Rozwiązania poniższych zadań należy zapisywać **jednostronnie** na **oddzielnych** arkuszach formatu A4. Na każdej kartce z rozwiązaniem należy podać następujące informacje:

- w prawym górnym rogu numer zadania,
- w lewym górnym rogu dane uczestnika: imię i nazwisko, adres domowy, adres e-mail, nazwa i adres szkoły, klasa.

Rozwiązania zadań należy przesłać do Komitetu Okręgowego, właściwego terytorialnie dla szkoły najpóźniej dnia 25 października 2010 r. (decyduje data stempla pocztowego). Adresy Komitetów Okręgowych, informacje o kwalifikacji do zawodów stopnia drugiego, terminy kolejnych etapów OMG oraz inne bieżące informacje można znaleźć w Internecie pod adresem

www.omg.edu.pl

1. Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} x^2 + x(y - 4) = -2 \\ y^2 + y(x - 4) = -2 \end{cases}$$

2. W pewnym czworościanie każdy wierzchołek połączono odcinkiem ze środkiem okręgu opisanego na przeciwległej ścianie. Okazało się, że otrzymane odcinki są wysokościami czworościanu. Wykaż, że czworościan ten jest foremny.

3. Udowodnij, że dla każdych dodatnich liczb a, b, c spełniona jest nierówność

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}} + \frac{b}{\sqrt{b+c}} + \frac{c}{\sqrt{c+a}} > \sqrt{a+b+c}.$$

4. Dany jest sześciokąt wypukły $ABCDEF$. Punkt X leży wewnątrz tego sześciokąta. Punkty K, L, M, N, P, Q są odpowiednio środkami boków AB, BC, CD, DE, EF, FA . Wykaż, że suma pól czworokątów $QAKX, LCMX, NEPX$ nie zależy od wyboru punktu X .

5. W każde pole kwadratowej tablicy 100×100 wpisano liczbę rzeczywistą. Okazało się, że suma liczb wpisanych w każde cztery pola, które można nakryć L -tetraminem, jest równa 0. Wyznacz sumę liczb wpisanych w pola, które znajdują się na obu przekątnych tablicy.

Uwaga: L -tetraminem nazywamy figurę składającą się z czterech kwadratów o boku 1, ułożonych jak na rysunku obok. L -tetramina można obracać i odbijać symetrycznie.



6. Czworokąt wypukły $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Jego przekątne przecinają się w punkcie E , a kąt BEC jest rozwarty. Prosta przechodząca przez punkt C i prostopadła do prostej AC przecina prostą przechodzącą przez punkt B i prostopadłą do prostej BD w punkcie F . Wykaż, że proste EF i AD są prostopadłe.

7. Udowodnij, że nie istnieją dodatnie liczby nieparzyste a i b spełniające równanie

$$a^2 - b^3 = 4.$$

VI Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

Zawody stopnia drugiego
(8 stycznia 2011 r.)



1. Dany jest taki pięciokąt wypukły $ABCDE$, w którym pola trójkątów ABD , BCE , CDA , DEB i EAC są równe. Wykaż, że każda przekątna tego pięciokąta jest równoległa do pewnego jego boku.

2. Dane są dodatnie liczby całkowite a i b . Wykaż, że jeżeli liczba a^2 jest podzielna przez liczbę $a+b$, to także liczba b^2 jest podzielna przez liczbę $a+b$.

3. W turnieju tenisa stołowego wzięło udział n zawodników ($n \geq 4$). Każdy zawodnik rozegrał dokładnie jeden mecz z każdym innym zawodnikiem, żaden mecz nie zakończył się remisem. Po turnieju wszyscy zawodnicy usiedli przy okrągłym stole w taki sposób, że każdy zawodnik wygrał z osobą siedzącą obok niego z jego lewej strony. Wykaż, że istnieją tacy trzej zawodnicy A , B i C , że A wygrał z B , B wygrał z C oraz C wygrał z A .

4. Udowodnij, że dla każdych liczb x, y należących do przedziału $(0,1)$ spełniona jest nierówność

$$x(1-y)^2 + y(1-x)^2 < (1-xy)^2.$$

5. Dany jest czworościan foremny opisany na sferze o promieniu 1. Udowodnij, że w tym czworościanie można umieścić 6 kul o promieniu $\frac{1}{2}$, w taki sposób, aby każde dwie kule miały co najwyżej jeden punkt wspólny.





VI Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

Zawody stopnia drugiego

(8 stycznia 2011 r.)

Szkice rozwiązań zadań konkursowych



1. Dany jest taki pięciokąt wypukły $ABCDE$, w którym pola trójkątów ABD , BCE , CDA , DEB i EAC są równe. Wykaż, że każda przekątna tego pięciokąta jest równoległa do pewnego jego boku.

Rozwiązanie

Trójkąty ABD i CDA mają równe pola oraz wspólny bok AD . Wobec tego wysokości tych trójkątów poprowadzone do boku AD są równe. Ponadto punkty B i C leżą po tej samej stronie prostej AD . Stąd wniosek, że przekątna AD jest równoległa do boku BC .

Analogicznie dowodzimy, że pozostałe cztery przekątne pięciokąta $ABCDE$ są równoległe do odpowiednich boków tego pięciokąta.

Uwaga: Istnieją pięciokąty $ABCDE$ spełniające warunki zadania, które nie są foremne.

2. Dane są dodatnie liczby całkowite a i b . Wykaż, że jeżeli liczba a^2 jest podzielna przez liczbę $a+b$, to także liczba b^2 jest podzielna przez liczbę $a+b$.

Rozwiązanie

Ponieważ $b^2 - a^2 = (b-a)(b+a)$, więc $b^2 = (b-a)(a+b) + a^2$. Prawa strona ostatniej równości jest podzielna przez liczbę $a+b$, a zatem liczba b^2 jest także podzielna przez liczbę $a+b$.

3. W turnieju tenisa stołowego wzięło udział n zawodników ($n \geq 4$). Każdy zawodnik rozegrał dokładnie jeden mecz z każdym innym zawodnikiem, żaden mecz nie zakończył się remisem. Po turnieju wszyscy zawodnicy usiedli przy okrągłym stole w taki sposób, że każdy zawodnik wygrał z osobą siedzącą obok niego z jego lewej strony. Wykaż, że istnieją tacy trzej zawodnicy A , B i C , że A wygrał z B , B wygrał z C oraz C wygrał z A .

Rozwiązanie

Nazwijmy danych zawodników $A_1, A_2, \dots, A_n$ i przyjmijmy, że siedzą oni przy okrągłym stole w wymienionej kolejności, zgodnej z ruchem wskazówek zegara. Wtedy, na mocy warunków zadania, A_1 wygrał z A_2 , A_2 wygrał z A_3 , $\dots$, A_{n-1} wygrał z A_n oraz A_n wygrał z A_1 .

Jeśli ponadto zawodnik A_1 wygrał z zawodnikiem A_{n-1} , to przyjmując $A = A_1$, $B = A_{n-1}$, $C = A_n$, otrzymujemy trójkę zawodników A , B , C spełniającą tezę zadania.

Założmy więc, że A_{n-1} wygrał z A_1 i usuńmy zawodnika A_n od stołu. Wtedy pozostałych $n-1$ zawodników $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ spełnia założenia treści zadania: każdy z nich wygrał z osobą, która siedzi obok niego, po jego lewej stronie. Kontynuując zatem powyższe rozumowanie i usuwając kolejnych zawodników, doprowadzimy do sytuacji, w której przy stole pozostaną tacy trzej zawodnicy A_1, A_2, A_3 , że A_1 wygrał z A_2 , A_2 wygrał z A_3 oraz A_3 wygrał z A_1 . Przyjmując wtedy $A = A_1$, $B = A_2$, $C = A_3$, dostajemy trójkę zawodników A , B , C spełniającą tezę zadania.



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

MINISTERSTWO
EDUKACJI
NARODOWEJ

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



4. Udowodnij, że dla każdych liczb x, y należących do przedziału $(0, 1)$ spełniona jest nierówność

$$x(1-y)^2 + y(1-x)^2 < (1-xy)^2.$$

Rozwiązanie

Daną w treści zadania nierówność przekształcamy równoważnie, uzyskując kolejno:

$$\begin{aligned}x(1-y)^2 + y(1-x)^2 &< (1-xy)^2 \\x(1-2y+y^2) + y(1-2x+x^2) &< 1-2xy+x^2y^2 \\x+xy^2+y+yx^2 &< 1+2xy+x^2y^2 \\(x+y) + xy(x+y) &< (1+xy)^2 \\(x+y)(1+xy) &< (1+xy)^2.\end{aligned}$$

Liczby x, y są dodatnie, więc $1+xy > 0$. Dzieląc zatem obie strony otrzymanej nierówności przez $1+xy$ i kontynuując przekształcenia równoważne, dostajemy

$$\begin{aligned}1+xy-x-y &> 0 \\(1-x)(1-y) &> 0.\end{aligned}$$

Uzyskana nierówność jest spełniona, gdyż obie liczby x, y są mniejsze od 1. Dowód jest więc zakończony.

5. Dany jest czworościan foremny opisany na sferze o promieniu 1. Udowodnij, że w tym czworościanie można umieścić 6 kul o promieniu $\frac{1}{2}$, w taki sposób, aby każde dwie kule miały co najwyżej jeden punkt wspólny.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez A, B, C, D wierzchołki danego czworościanu foremnego. Poprowadźmy płaszczyznę styczną do sfery wpisanej w ten czworościan, równoległą do płaszczyzny ABC i różną od płaszczyzny ABC . Przyjmijmy, że przecina ona krawędzie AD, BD i CD odpowiednio w punktach K, L i M .

Środek sfery wpisanej w czworościan $ABCD$ dzieli wysokość poprowadzoną z wierzchołka D w stosunku $1:3$ licząc od podstawy ABC . Wynika stąd, że płaszczyzna KLM przechodzi przez środek tej wysokości. Ponieważ płaszczyzna KLM jest równoległa do płaszczyzny ABC , więc na mocy twierdzenia Talesa, punkty K, L i M są odpowiednio środkami krawędzi AD, BD i CD .

W analogiczny sposób określamy trzy płaszczyzny równoległe do pozostałych ścian. Jeśli więc przez N, P i Q oznaczmy odpowiednio środki krawędzi AB, BC i AC , to sfera wpisana w czworościan $ABCD$ jest styczna także do płaszczyzn KNQ, LNP i MPQ .

Długości krawędzi każdego z czworościanów foremnych $AKNQ, BLNP, CMPQ$ i $DKLM$ są równe i wynoszą $\frac{1}{2}$ długości krawędzi czworościanu $ABCD$. Zatem kule wpisane w te czworościany mają promienie równe $\frac{1}{2}$. Ponadto w kuli wpisanej w czworościan $ABCD$ możemy umieścić dwie kule o promieniu $\frac{1}{2}$ mające dokładnie jeden punkt wspólny. W ten sposób w czworościan $ABCD$ umieściliśmy 6 kul o promieniu $\frac{1}{2}$, z których każde dwie mają co najwyżej jeden punkt wspólny.



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

MINISTERSTWO
EDUKACJI
NARODOWEJ

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



VI Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

Zawody stopnia trzeciego
(19 marca 2011 r.)



1. Czy istnieją takie liczby całkowite a i b , że liczby

$$a^2 + b \quad \text{oraz} \quad a + b^2$$

są kolejnymi liczbami całkowitymi? Odpowiedź uzasadnij.

2. Dany jest 99-kąt foremny. Wyznacz liczbę trójkątów równoramiennych, których wierzchołki pokrywają się z wierzchołkami danego wielokąta.

3. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC . Okrąg styczny do prostej AI w punkcie I i przechodzący przez punkt B przecina bok BC w punkcie P (różnym od B). Proste IP i AC przecinają się w punkcie Q . Wykaż, że punkt I jest środkiem odcinka PQ .

4. Liczby p i q są różnymi liczbami pierwszymi. Udowodnij, że liczba $p^2 + q^2$ nie jest podzielna przez liczbę $p + q$.

5. Wewnątrz koła o promieniu 1 znajdują się punkty $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{100}$. Udowodnij, że na brzegu tego koła istnieje taki punkt P , dla którego

$$PA_1 + PA_2 + \dots + PA_{100} \geq 100.$$





VI Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

Zawody stopnia trzeciego

(19 marca 2011 r.)

Szkice rozwiązań zadań konkursowych



1. Czy istnieją takie liczby całkowite a i b , że liczby

$$a^2 + b \quad \text{oraz} \quad a + b^2$$

są kolejnymi liczbami całkowitymi? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie

Przypuśćmy, że takie liczby a oraz b istnieją. Wtedy liczba $(a^2 + b) - (b^2 + a)$ jest równa 1 lub -1 . Z drugiej strony,

$$(a^2 + b) - (a + b^2) = a(a - 1) - b(b - 1).$$

Obie liczby $a(a - 1)$ i $b(b - 1)$ są parzyste, skąd wynika, że liczba $a(a - 1) - b(b - 1)$ jest także parzysta. Wobec tego liczba $(a^2 + b) - (b^2 + a)$ nie może być równa ani 1 ani -1 . Zatem liczby a , b o postulowanej własności nie istnieją.

2. Dany jest 99-kąt foremny. Wyznacz liczbę trójkątów równoramiennych, których wierzchołki pokrywają się z wierzchołkami danego wielokąta.

Rozwiązanie

Wybermy dowolny wierzchołek C danego 99-kąta. Wyznamy najpierw liczbę trójkątów ABC spełniających równość $AC = BC$, których wierzchołki pokrywają się z wierzchołkami danego 99-kąta.

Rozpatrzmy okrąg opisany na 99-kącie oraz niech k będzie prostą przechodzącą przez punkt C i zawierającą średnicę tego okręgu. Wówczas punkty A i B są symetryczne względem prostej k . Ponadto prosta k zawiera punkt C i nie przechodzi przez żaden inny wierzchołek danego 99-kąta. Zatem po każdej stronie prostej k leży $(99 - 1)/2 = 49$ wierzchołków 99-kąta. Punkt A możemy więc wybrać na 49 sposobów; punkt B jest wtedy wyznaczony jednoznacznie. Wobec tego istnieje 49 trójkątów ABC spełniających powyższe warunki.

Z kolei wierzchołek C możemy wybrać na 99 sposobów. Zatem łączną liczbę trójkątów spełniających warunki zadania uzyskamy, mnożąc 49 przez 99 i odejmując od wyniku podwojoną liczbę trójkątów równobocznych, których wierzchołki pokrywają się z wierzchołkami danego 99-kąta. A tych trójkątów równobocznych jest $99/3 = 33$.

Reasumując: Łączna liczba trójkątów spełniających warunki zadania wynosi

$$49 \cdot 99 - 2 \cdot 33 = 4785.$$

3. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC . Okrąg styczny do prostej AI w punkcie I i przechodzący przez punkt B przecina bok BC w punkcie P (różnym od B). Proste IP i AC przecinają się w punkcie Q . Wykaż, że punkt I jest środkiem odcinka PQ .

Rozwiązanie

Ponieważ punkt I leży na dwusiecznej kąta ACB , więc wystarczy wykazać, że $\angle PIC = 90^\circ$. Oznaczmy przez D punkt przecięcia prostych AI i BC . Wówczas $\angle DIP = \angle IBP$ oraz $\angle CID = \angle CAI + \angle ACI$. Wobec tego

$$\angle PIC = \angle DIP + \angle CID = \angle IBP + \angle CAI + \angle ACI = \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle CAB + \angle ACB) = 90^\circ,$$

co kończy dowód.



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

MINISTERSTWO
EDUKACJI
NARODOWEJ

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



4. Liczby p i q są różnymi liczbami pierwszymi. Udowodnij, że liczba $p^2 + q^2$ nie jest podzielna przez liczbę $p + q$.

Rozwiązanie

Z równości $(p + q)^2 = p^2 + q^2 + 2pq$ wynika, że jeśli liczba $p^2 + q^2$ jest podzielna przez $p + q$, to także liczba $2pq$ jest podzielna przez $p + q$.

Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $p < q$. Liczby $p + q$ i q są względnie pierwsze. Wobec tego z podzielności $p + q \mid 2pq$ wynika, że $p + q \mid 2p$. Jednak podzielność ta nie może być spełniona, bowiem $p + q > 2p$.

Uzyskaliśmy sprzeczność, z której wynika, że liczba $p^2 + q^2$ nie może być podzielna przez $p + q$, jeśli p i q są różnymi liczbami pierwszymi.

5. Wewnątrz koła o promieniu 1 znajdują się punkty $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{100}$. Udowodnij, że na brzegu tego koła istnieje taki punkt P , dla którego

$$PA_1 + PA_2 + \dots + PA_{100} \geq 100.$$

Rozwiązanie

Wyberzmy dowolną średnicę danego koła i oznaczmy jej końce przez P_1 i P_2 . Wykażemy, że co najmniej jeden z punktów P_1, P_2 spełnia postulowaną w treści zadania nierówność.

Wyberzmy dowolny punkt A_i ($i = 1, 2, \dots, 100$). Wykorzystując nierówność trójkąta dla trójkąta $P_1P_2A_i$, otrzymujemy

$$P_1A_i + P_2A_i \geq P_1P_2 = 2.$$

A zatem

$$(P_1A_1 + P_1A_2 + \dots + P_1A_{100}) + (P_2A_1 + P_2A_2 + \dots + P_2A_{100}) \geq 2 \cdot 100 = 200.$$

Wobec tego co najmniej jedna z liczb

$$P_1A_1 + P_1A_2 + \dots + P_1A_{100} \quad \text{lub} \quad P_2A_1 + P_2A_2 + \dots + P_2A_{100}$$

jest większa lub równa 100.



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

MINISTERSTWO
EDUKACJI
NARODOWEJ

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Imię i nazwisko: Klasa:



VII Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

Zawody stopnia pierwszego – część testowa

(29 września 2011 r., godz. 9:00)

Przed przystąpieniem do rozwiązywania testu wpisz na każdą stronę swoje imię, nazwisko oraz klasę.

Treść każdego z poniższych zadań zawiera trzy stwierdzenia. Każde z nich jest prawdziwe lub fałszywe. Jeśli dane stwierdzenie jest prawdziwe, wpisz w odpowiednią kratkę literkę T, jeśli zaś stwierdzenie jest fałszywe, wpisz literkę N.

W przypadku pomyłki przekreśl znakiem **X** podaną odpowiedź, a właściwą odpowiedź podaj obok z lewej strony.

Przykład poprawnie rozwiązanej zadania:

0. Dla każdej dodatniej liczby całkowitej n liczba $2n + 1$ jest

☐	T	a) dodatnia;
☐	T	b) nieparzysta;
N	☒	c) pierwsza.

Czas na rozwiązywanie testu: 75 minut.

Powodzenia!

1. Istnieje taki graniastosłup, którego liczba krawędzi jest równa

☐	a) 3^{100} ;
☐	b) 5^{100} ;
☐	c) 100001.

2. Istnieje 2011 takich różnych liczb pierwszych, że

☐	a) ich suma jest liczbą nieparzystą;
☐	b) ich suma jest liczbą parzystą;
☐	c) ich iloczyn jest liczbą parzystą.



Imię i nazwisko: Klasa:

3. Liczby a, b, c są długościami boków pewnego trójkąta oraz $(a-b)(b-c)(c-a)=0$. Wynika z tego, że jest to trójkąt

☐

a) równoramienny;

☐

b) równoboczny;

☐

c) ostrokątny.

4. Towar X podrożał o 20%, a towar Y podrożał o 50%, w efekcie czego oba towary kosztują tyle samo. Wynika z tego, że przed podwyżką

☐

a) towar X był o 20% droższy od towaru Y ;

☐

b) towar X był o 25% droższy od towaru Y ;

☐

c) towar X był o 30% droższy od towaru Y .

5. Dodatnie liczby a, b spełniają warunek $a+b=1$. Wynika z tego, że

☐

a) $a^2+b^2 < 1$;

☐

b) $\sqrt{a}+\sqrt{b} < 1$;

☐

c) $ab < 1$.

6. Liczby całkowite x i y są dodatnie, a ich suma jest liczbą podzielną przez 3. Wynika z tego, że

☐

a) każda z liczb x i y jest podzielna przez 3;

☐

b) liczba x^2+y^2 jest podzielna przez 3;

☐

c) liczba x^2-y^2 jest podzielna przez 3.

7. W trójkącie ABC wysokości AE i BF są równe. Wynika z tego, że

☐

a) wszystkie wysokości tego trójkąta są równe;

☐

b) kąty BAC i ABC są równe;

☐

c) środkowe AK i BL trójkąta ABC są równe.



Imię i nazwisko: Klasa:

8. Dodatnia liczba całkowita n ma dokładnie trzy różne dodatnie dzielniki. Wynika z tego, że

☐
☐
☐

- a) liczba n jest kwadratem pewnej liczby całkowitej;
- b) liczba n jest iloczynem co najmniej dwóch różnych liczb pierwszych;
- c) liczba n^2 ma dokładnie sześć różnych dodatnich dzielników.

9. Każdy z dwóch boków trójkąta ostrokątnego ma długość 2. Wynika z tego, że

☐
☐
☐

- a) pole tego trójkąta jest mniejsze od 2;
- b) każda wysokość tego trójkąta ma długość mniejszą od 2;
- c) trzeci bok tego trójkąta ma długość mniejszą od 2.

10. Wśród każdych pięciu różnych liczb całkowitych istnieją takie dwie, których

☐
☐
☐

- a) różnica jest podzielna przez 4;
- b) suma jest podzielna przez 4;
- c) iloczyn jest podzielny przez 4.

11. Prostokąt $ABCD$ jest zawarty w kwadracie o boku długości 1 i żaden z punktów A, B, C, D nie leży na brzegu tego kwadratu. Wynika z tego, że

☐
☐
☐

- a) $AB \cdot BC < 1$;
- b) $AB < 1$;
- c) $AC < \sqrt{2}$.

12. Dane są takie dodatnie liczby rzeczywiste a, b , że liczby $a^2 + b^2$ oraz ab są wymierne. Wynika stąd, że wymierna jest liczba

☐
☐
☐

- a) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$;
- b) $(a+b)^2$;
- c) $a+b$.



Imię i nazwisko: Klasa:

13. Dany jest trójkąt ABC , w którym $\sphericalangle ACB = 40^\circ$. Punkt P leży wewnątrz trójkąta ABC , przy czym $\sphericalangle APB = 80^\circ$. Wynika z tego, że

☐
☐
☐

- a) każdy z kątów CAP i CBP jest mniejszy od 40° ;
- b) trójkąt ABP jest ostrokątny;
- c) punkt P jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC .

14. Liczba $\sqrt{3-2\sqrt{2}}-\sqrt{2}$ jest

☐
☐
☐

- a) całkowita;
- b) niewymierna;
- c) dodatnia.

15. Dany jest ostrosłup o parzystej liczbie wierzchołków, którego wszystkie krawędzie mają równą długość. Wynika z tego, że liczba krawędzi danego ostrosłupa jest mniejsza od

☐
☐
☐

- a) 9;
- b) 11;
- c) 13.



VII Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

Zawody stopnia pierwszego – część testowa

(29 września 2011 r.)

Rozwiązania zadań testowych

1. Istnieje taki graniastosłup, którego liczba krawędzi jest równa

T	a) 3^{100} ;
N	b) 5^{100} ;
N	c) 100001.

Komentarz

Rozważmy graniastosłup, którego podstawę stanowi pewien n -kąt. Liczba krawędzi tego graniastosłupa jest równa $3n$. Wobec tego liczba krawędzi graniastosłupa jest podzielna przez 3.

a) Liczba 3^{100} jest podzielna przez 3. Jest to liczba krawędzi graniastosłupa, którego podstawą jest 3^{99} -kąt.

b), c) Liczba 5^{100} nie jest podzielna przez 3, gdyż w rozkładzie tej liczby na czynniki pierwsze nie występuje liczba 3. Również liczba 100001 nie jest podzielna przez 3, gdyż suma cyfr tej liczby nie jest podzielna przez 3.

2. Istnieje 2011 takich różnych liczb pierwszych, że

T	a) ich suma jest liczbą nieparzystą;
T	b) ich suma jest liczbą parzystą;
T	c) ich iloczyn jest liczbą parzystą.

Komentarz

a) Rozważmy 2011 dowolnych różnych, nieparzystych liczb pierwszych. Ich suma jest liczbą nieparzystą.

b), c) Rozważmy 2011 różnych liczb pierwszych, z których jedna jest równa 2. Ich iloczyn jest podzielny przez 2, czyli jest liczbą parzystą.

Wśród rozważanych liczb jest 2010 liczb nieparzystych. Ich suma jest liczbą parzystą. Po dodaniu liczby 2, suma wszystkich liczb w dalszym ciągu jest liczbą parzystą.



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPOJNOŚCI



Stowarzyszenie
na rzecz Edukacji
Matematycznej

MINISTERSTWO
EDUKACJI
NARODOWEJ



OŚRODEK
ROZWOJU
EDUKACJI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



3. Liczby a, b, c są długościami boków pewnego trójkąta oraz $(a-b)(b-c)(c-a)=0$.

Wynika z tego, że jest to trójkąt

T	a) równoramienny;
N	b) równoboczny;
N	c) ostrokatny.

Komentarz

a) Ponieważ $(a-b)(b-c)(c-a)=0$, więc $a-b=0$ lub $b-c=0$ lub $c-a=0$, zatem $a=b$ lub $b=c$ lub $c=a$. Wobec tego pewne dwa boki rozważanego trójkąta są równe, czyli jest on równoramienny.

b), c) Zauważmy, że boki dowolnego trójkąta rozwartokątnego równoramiennego spełniają podaną w treści zadania równość.

4. Towar X podrożał o 20%, a towar Y podrożał o 50%, w efekcie czego oba towary kosztują tyle samo. Wynika z tego, że przed podwyżką

N	a) towar X był o 20% droższy od towaru Y ;
T	b) towar X był o 25% droższy od towaru Y ;
N	c) towar X był o 30% droższy od towaru Y .

Komentarz

Uzasadnimy, że towar X był o 25% droższy od towaru Y . Podamy dwa sposoby tego uzasadnienia.

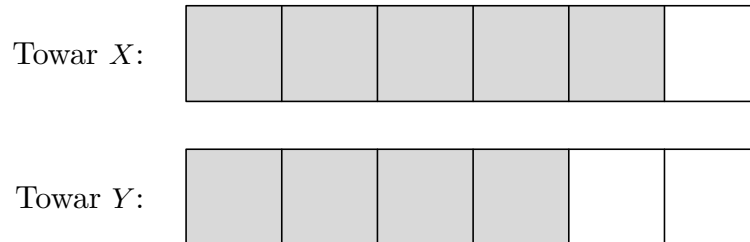
Sposób I

Oznaczmy przez x początkową cenę towaru X , a przez y początkową cenę towaru Y . Po podwyżce cena towaru X wynosi $x + \frac{20}{100}x = \frac{6}{5}x$. Z kolei cena towaru Y po podwyżce jest równa $y + \frac{50}{100}y = \frac{3}{2}y$. Wobec tego $\frac{6}{5}x = \frac{3}{2}y$, czyli $x = \frac{5}{4}y$, więc $x = \frac{125}{100}y = y + \frac{25}{100}y$.

Sposób II

Ponieważ aktualna cena towaru X jest równa $\frac{6}{5}$ ceny towaru przed podwyżką, więc pierwotna cena tego towaru wynosiła $\frac{5}{6}$ obecnej ceny. Podobnie uzasadniamy, że cena towaru Y wynosiła przed podwyżką $\frac{2}{3}$ aktualnej ceny.

Rozważmy dwa przystające prostokąty, symbolizujące obecne, równe ceny towarów X i Y (rys. 1). Oznaczmy na szaro części prostokątów, odpowiadające pierwotnym cenom towarów, czyli $\frac{5}{6}$ pierwszego i $\frac{2}{3}$ drugiego prostokąta. Zauważmy, że szary prostokąt, odpowiadający pierwotnej cenie towaru X , jest o $\frac{1}{4}$ czyli 25% dłuższy niż szary prostokąt, odpowiadający pierwotnej cenie towaru Y .



rys. 1

5. Dodatnie liczby a , b spełniają warunek $a + b = 1$. Wynika z tego, że

- ☐ T a) $a^2 + b^2 < 1$;
- ☐ N b) $\sqrt{a} + \sqrt{b} < 1$;
- ☐ T c) $ab < 1$.

Komentarz

a) Zauważmy, że $(a + b)^2 = 1$, czyli $a^2 + 2ab + b^2 = 1$, zatem $a^2 + b^2 = 1 - 2ab$. Ponieważ liczby a i b są dodatnie, więc $2ab > 0$. Stąd wynika, że $a^2 + b^2 < 1$.

b) Przyjmując $a = \frac{1}{2}$ oraz $b = \frac{1}{2}$, otrzymujemy $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} > 1$.

c) Skoro $a + b = 1$ oraz liczby a i b są dodatnie, to $a < 1$ i $b < 1$. Obie strony ostatnich nierówności są dodatnie, a zatem możemy je pomnożyć stronami. Otrzymujemy $ab < 1$.

6. Liczby całkowite x i y są dodatnie, a ich suma jest liczbą podzielną przez 3. Wynika z tego, że

- ☐ N a) każda z liczb x i y jest podzielna przez 3;
- ☐ N b) liczba $x^2 + y^2$ jest podzielna przez 3;
- ☐ T c) liczba $x^2 - y^2$ jest podzielna przez 3.

Komentarz

a), b) Przyjmijmy $x = 1$ oraz $y = 2$. Wówczas liczba $x + y = 3$ jest podzielna przez 3. Jednak wtedy żadna z liczb x , y oraz $x^2 + y^2 = 5$ nie jest podzielna przez 3.

c) Zauważmy, że $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$. Pierwszy czynnik tego iloczynu jest liczbą podzielną przez 3. Stąd wynika, że liczba $x^2 - y^2$ jest podzielna przez 3.

7. W trójkącie ABC wysokości AE i BF są równe. Wynika z tego, że

- ☐ N a) wszystkie wysokości tego trójkąta są równe;
- ☐ T b) kąty BAC i ABC są równe;
- ☐ T c) środkowe AK i BL trójkąta ABC są równe.

Komentarz

b) Pole trójkąta ABC jest równe $\frac{1}{2} \cdot BC \cdot AE$, a także $\frac{1}{2} \cdot AC \cdot BF$. Wobec tego

$$\frac{1}{2} \cdot BC \cdot AE = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BF.$$

Ponieważ $AE = BF$, więc $BC = AC$. Zatem kąty BAC i ABC są równe.

c) Wykazaliśmy wyżej, że $BC = AC$. Wynika z tego, że trójkąt ABC ma oś symetrii, przechodzącą przez wierzchołek C . Stąd wniosek, że środkowe AK i BL trójkąta ABC są równe.

a) Zauważmy, że trójkąt prostokątny równoramienny, o kącie prostym przy wierzchołku C , spełnia warunki zadania, lecz nie wszystkie wysokości tego trójkąta są równe.

8. Dodatnia liczba całkowita n ma dokładnie trzy różne dodatnie dzielniki. Wynika z tego, że

T

a) liczba n jest kwadratem pewnej liczby całkowitej;

N

b) liczba n jest iloczynem co najmniej dwóch różnych liczb pierwszych;

N

c) liczba n^2 ma dokładnie sześć różnych dodatnich dzielników.

Komentarz

b) Przypuśćmy, że liczba n ma co najmniej dwa różne dzielniki pierwsze p i q . Wówczas jej dzielnikami są co najmniej cztery różne liczby dodatnie 1, p , q oraz pq , co przeczy założeniom.

a) Wykazaliśmy przed chwilą, że liczba n ma co najwyżej jeden dzielnik pierwszy, czyli jest równa p^k , dla pewnej liczby pierwszej p oraz pewnej nieujemnej liczby całkowitej k . Liczba takiej postaci ma dokładnie $k+1$ różnych dzielników dodatnich: $1, p, p^2, \dots, p^k$. Ponieważ liczba n ma trzy różne dodatnie dzielniki, więc $k+1=3$, czyli $k=2$. Stąd wynika, że $n=p^2$, dla pewnej liczby pierwszej p .

c) Skoro $n=p^2$, dla pewnej liczby pierwszej p , to $n^2=p^4$. Wobec tego liczba n^2 ma dokładnie pięć różnych dodatnich dzielników: $1, p, p^2, p^3$ oraz p^4 .

Uwaga

Jeśli $p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \dots \cdot p_l^{k_l}$ jest rozkładem liczby n na czynniki pierwsze (liczby $p_1, p_2, \dots, p_l$ są różnymi liczbami pierwszymi, a $k_1, k_2, \dots, k_l$ dodatnimi liczbami całkowitymi), to liczba dzielników liczby n jest równa $(k_1+1)(k_2+1) \dots (k_l+1)$.



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



Stowarzyszenie
na rzecz Edukacji
Matematycznej

MINISTERSTWO
EDUKACJI
NARODOWEJ



OŚRODEK
ROZWOJU
EDUKACJI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



9. Każdy z dwóch boków trójkąta ostrokątnego ma długość 2. Wynika z tego, że

T

a) pole tego trójkąta jest mniejsze od 2;

T

b) każda wysokość tego trójkąta ma długość mniejszą od 2;

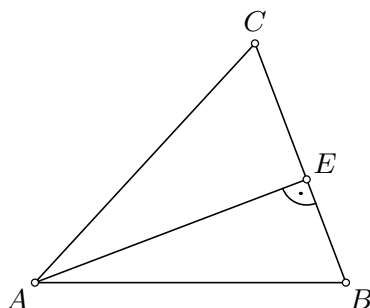
N

c) trzeci bok tego trójkąta ma długość mniejszą od 2.

Komentarz

b) Rozważmy dowolny trójkąt ostrokątny ABC i jego wysokość AE (rys. 2). W trójkącie prostokątnym AEB przyprostokątna AE jest krótsza od przeciwprostokątnej AB . Podobnie wykazujemy, że odcinek AE jest krótszy od odcinka AC .

A zatem w trójkącie ostrokątnym ABC , wysokość poprowadzona z dowolnego wierzchołka jest krótsza od każdego z boków wychodzących z tego wierzchołka. Ponieważ w trójkącie, o którym mowa w zadaniu, dwa boki mają długość 2, więc każda wysokość tego trójkąta ma długość mniejszą od 2.



rys. 2

a) Rozpatrzmy wysokość danego trójkąta, opuszczoną na bok długości 2. Wykazaliśmy wyżej, że ma ona długość mniejszą od 2. Wobec tego pole trójkąta jest mniejsze od $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2$.

c) Zauważmy, że trójkąt równoboczny o boku długości 2 spełnia warunki zadania.

10. Wśród każdych pięciu różnych liczb całkowitych istnieją takie dwie, których

T

a) różnica jest podzielna przez 4;

N

b) suma jest podzielna przez 4;

N

c) iloczyn jest podzielny przez 4.

Komentarz

a) Każda liczba całkowita daje z dzielenia przez 4 jedną z czterech reszt: 0, 1, 2 lub 3. Wobec tego wśród każdych pięciu różnych liczb całkowitych istnieją co najmniej dwie takie a i b , które dają taką samą resztę z dzielenia przez 4. Oznacza to, że $a = 4k + r$ oraz $b = 4l + r$, gdzie k i l są liczbami całkowitymi, a liczba r jest równa 0, 1, 2, 3 lub 4.



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



Stowarzyszenie
na rzecz Edukacji
Matematycznej

MINISTERSTWO
EDUKACJI
NARODOWEJ



OŚRODEK
ROZWOJU
EDUKACJI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Wobec tego $k - l = 4(k - l)$. Liczba $k - l$ jest całkowita, skąd wniosek, że liczba $a - b$ jest podzielna przez 4.

b) Rozpatrzmy pięć różnych liczb całkowitych, z których każda daje resztę 1 z dzielenia przez 4 (np. 1, 5, 9, 13, 17). Suma każdych dwóch z nich daje resztę 2 z dzielenia przez 4, a więc nie jest liczbą podzielną przez 4.

c) Rozpatrzmy pięć różnych nieparzystych liczb całkowitych (np. 1, 3, 5, 7, 9). Zauważmy, że iloczyn dowolnych dwóch z nich jest liczbą nieparzystą, czyli nie jest podzielny przez 4.

11. Prostokąt $ABCD$ jest zawarty w kwadracie o boku długości 1 i żaden z punktów A, B, C, D nie leży na brzegu tego kwadratu. Wynika z tego, że

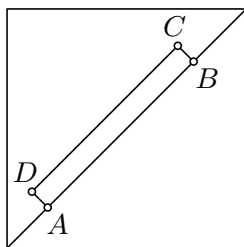
T	a) $AB \cdot BC < 1$;
N	b) $AB < 1$;
T	c) $AC < \sqrt{2}$.

Komentarz

a) Ponieważ prostokąt $ABCD$ jest zawarty w kwadracie o boku długości 1 i nie jest całym kwadratem, więc jego pole jest mniejsze od pola tego kwadratu, czyli $AB \cdot BC < 1$.

c) Najdłuższym odcinkiem zawartym w kwadracie jest jego przekątna. Ponieważ dany w zadaniu kwadrat ma bok długości 1, więc jego przekątna ma długość $\sqrt{2}$. Punkty A i C nie leżą na brzegu kwadratu, czyli odcinek AC jest krótszy od przekątnej kwadratu. Zatem $AC < \sqrt{2}$.

b) Przypuśćmy, że odcinek AB długości 1 leży na przekątnej kwadratu w taki sposób, że żaden z punktów A, B nie pokrywa się z wierzchołkiem kwadratu (rys. 3). Wówczas dowolny prostokąt o boku AB , zawarty wewnątrz danego kwadratu, spełnia warunki zadania.



rys. 3



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



Stowarzyszenie
na rzecz Edukacji
Matematycznej

MINISTERSTWO
EDUKACJI
NARODOWEJ



OŚRODEK
ROZWOJU
EDUKACJI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



12. Dane są takie dodatnie liczby rzeczywiste a, b , że liczby $a^2 + b^2$ oraz ab są wymierne.

Wynika stąd, że wymierna jest liczba

☐ T a) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$;

☐ T b) $(a+b)^2$;

☐ N c) $a+b$.

Komentarz

a) Zauważmy, że

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a^2}{ab} + \frac{b^2}{ab} = \frac{a^2 + b^2}{ab}.$$

Wobec tego liczba $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ jest wymierna, jako iloraz dwóch liczb wymiernych.

b) Liczby $a^2 + b^2$ oraz $2ab$ są wymierne, a zatem ich suma $a^2 + b^2 + 2ab = (a+b)^2$ również jest liczbą wymierną.

c) Przyjmijmy $a = \sqrt{2}$ oraz $b = \sqrt{2}$. Wówczas liczby $a^2 + b^2 = 2 + 2 = 4$ oraz $ab = 2$ są wymierne, ale liczba $a + b = 2\sqrt{2}$ nie jest wymierna.

13. Dany jest trójkąt ABC , w którym $\sphericalangle ACB = 40^\circ$. Punkt P leży wewnątrz trójkąta ABC , przy czym $\sphericalangle APB = 80^\circ$. Wynika z tego, że

☐ T a) każdy z kątów CAP i CBP jest mniejszy od 40° ;

☐ N b) trójkąt ABP jest ostrokątny;

☐ N c) punkt P jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC .

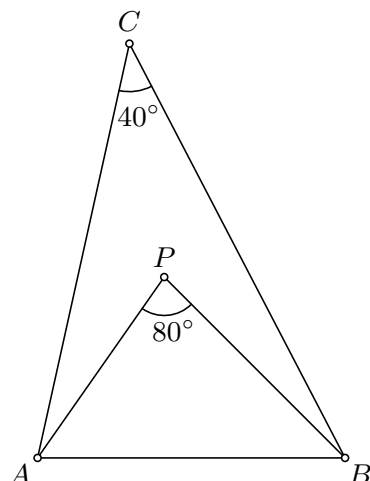
Komentarz

a) Suma kątów w czworokącie wklęsłym $APBC$ jest równa 360° , więc

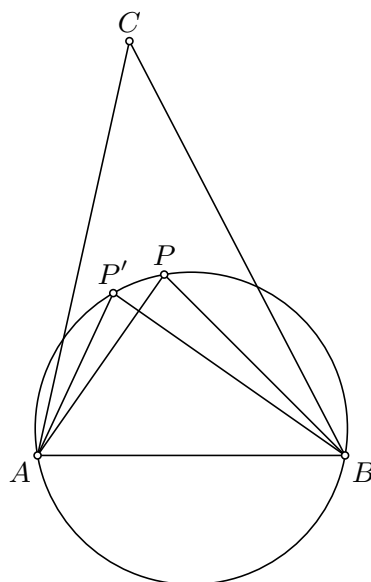
$$(360^\circ - \sphericalangle APB) + \sphericalangle CAP + \sphericalangle CBP + \sphericalangle ACB = 360^\circ,$$

zatem $\sphericalangle CAP + \sphericalangle CBP = \sphericalangle APB - \sphericalangle ACB = 80^\circ - 40^\circ = 40^\circ$. Stąd wynika, że każdy z kątów CAP i CBP jest mniejszy od 40° .

c) Rozpatrzmy okrąg ω opisany na trójkącie ABP (rys. 5). Zauważmy, że dowolny punkt P' , leżący na okręgu ω , wewnątrz trójkąta ABC , spełnia warunki zadania, gdyż $\sphericalangle AP'B = \sphericalangle APB = 80^\circ$, jako kąty wpisane oparte na tym samym łuku.



rys. 4



rys. 5

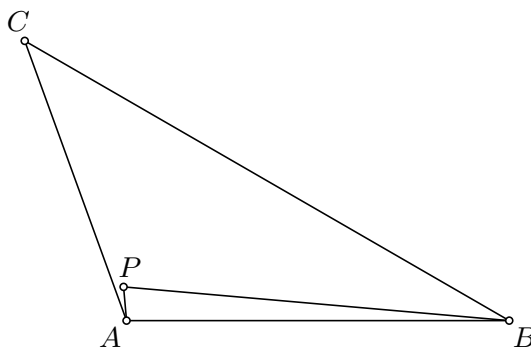
b) Rozpatrzmy trójkąt ABC , w którym $\sphericalangle CAB = 110^\circ$ oraz $\sphericalangle ABC = 30^\circ$ (rys. 6). Wówczas $\sphericalangle ACB = 40^\circ$. Wybierzmy punkt P leżący po tej samej stronie prostej AB , co punkt C , dla którego spełnione są równości:

$$\sphericalangle CAP = 15^\circ \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle CBP = 25^\circ.$$

Wówczas punkt P leży wewnątrz trójkąta ABC . Podobnie jak w części a) wykazujemy, że

$$\sphericalangle APB = \sphericalangle CAP + \sphericalangle CBP + \sphericalangle ACB = 15^\circ + 25^\circ + 40^\circ = 80^\circ.$$

Ponadto $\sphericalangle PAB = \sphericalangle CAB - \sphericalangle CAP = 110^\circ - 15^\circ = 95^\circ$. Trójkąt ABP jest więc rozwartokątny.



rys. 6

14. Liczba $\sqrt{3-2\sqrt{2}}-\sqrt{2}$ jest

T	a) całkowita;
N	b) niewymierna;
N	c) dodatnia.



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



Stowarzyszenie
na rzecz Edukacji
Matematycznej

MINISTERSTWO
EDUKACJI
NARODOWEJ



OŚRODEK
ROZWOJU
EDUKACJI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Komentarz

Zauważmy, że $3 - 2\sqrt{2} = 2 - 2\sqrt{2} + 1 = (\sqrt{2} - 1)^2$. Liczba $\sqrt{2} - 1$ jest dodatnia, więc $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$. Stąd wynika, że

$$\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} - \sqrt{2} = \sqrt{2} - 1 - \sqrt{2} = -1.$$

15. Dany jest ostrosłup o parzystej liczbie wierzchołków, którego wszystkie krawędzie mają równą długość. Wynika z tego, że liczba krawędzi danego ostrosłupa jest mniejsza od

N	a) 9;
T	b) 11;
T	c) 13.

Komentarz

b), c) Przyjmijmy, że podstawą rozważanego ostrosłupa jest pewien n -kąt. Wtedy liczba krawędzi tego ostrosłupa jest równa $2n$, a liczba jego ścian bocznych jest równa n . Krawędzi jest zatem dwa razy więcej niż ścian bocznych.

Ponieważ wszystkie krawędzie danego ostrosłupa mają równą długość, więc jego ściany boczne są trójkątami równobocznymi, których kąty przy wierzchołku ostrosłupa są równe 60° . Suma kątów płaskich przy (górnym) wierzchołku ostrosłupa musi być mniejsza niż 360° . Wobec tego liczba ścian bocznych wynosi co najwyżej 5. A zatem liczba krawędzi ostrosłupa jest równa co najwyżej 10.

a) Ostrosłup, którego podstawę stanowi pięciokąt foremny, a ściany boczne są trójkątami równobocznymi, spełnia warunki zadania.



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



Stowarzyszenie
na rzecz Edukacji
Matematycznej

MINISTERSTWO
EDUKACJI
NARODOWEJ



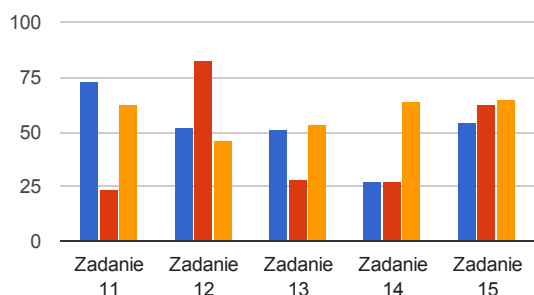
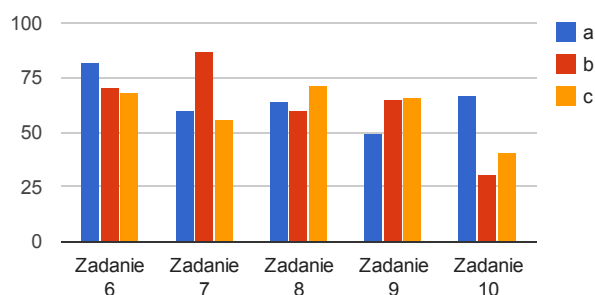
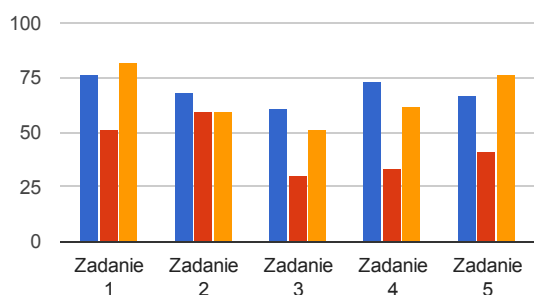
OŚRODEK
ROZWOJU
EDUKACJI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

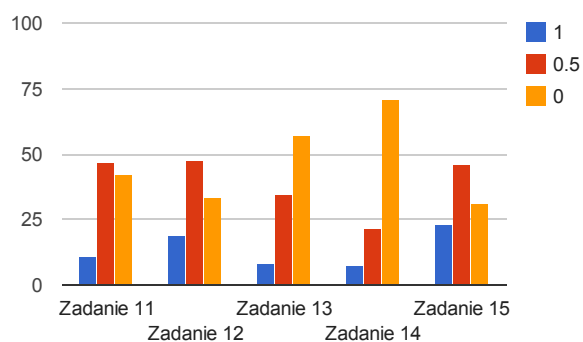
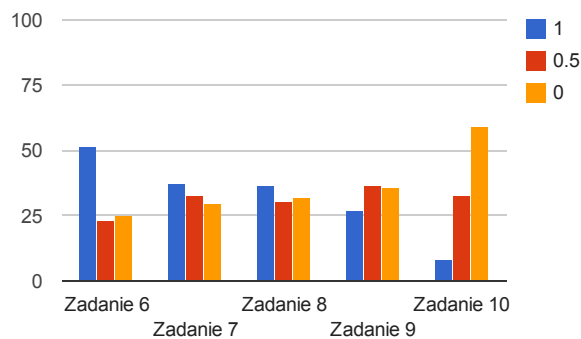
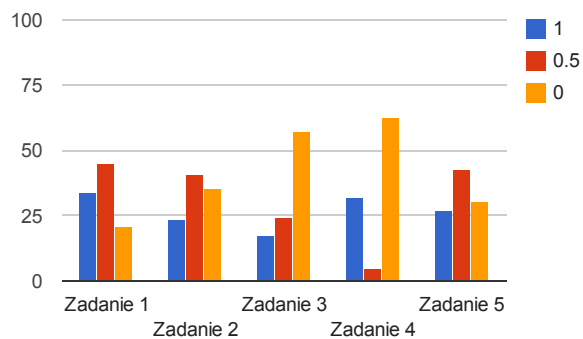


Statystyki dotyczące zadań testowych VII OMG (2011/2012)

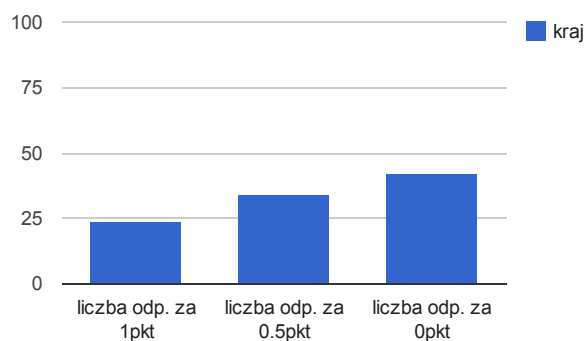
Procentowe zestawienie liczby poprawnych odpowiedzi zadań testowych w podziale na zadania (kraj)



Procentowe zestawienie liczby osób, które uzyskały daną liczbę punktów w podziale na zadania (kraj)



Procentowe zestawienie liczby uzyskanych ocen ze wszystkich zadań



Średnia punktów w województwach:

dolnośląskie	6.07	kujawsko-pomorskie	6.52	lubelskie	6.48	lubuskie	5.49
łódzkie	5.92	małopolskie	6.41	mazowieckie	6.73	opolskie	6.2
podkarpackie	6.58	podlaskie	6.07	pomorskie	5.95	śląskie	6.36
świętokrzyskie	5.71	warmińsko-mazurskie	5.53	wielkopolskie	5.7	zachodniopomorskie	6.28

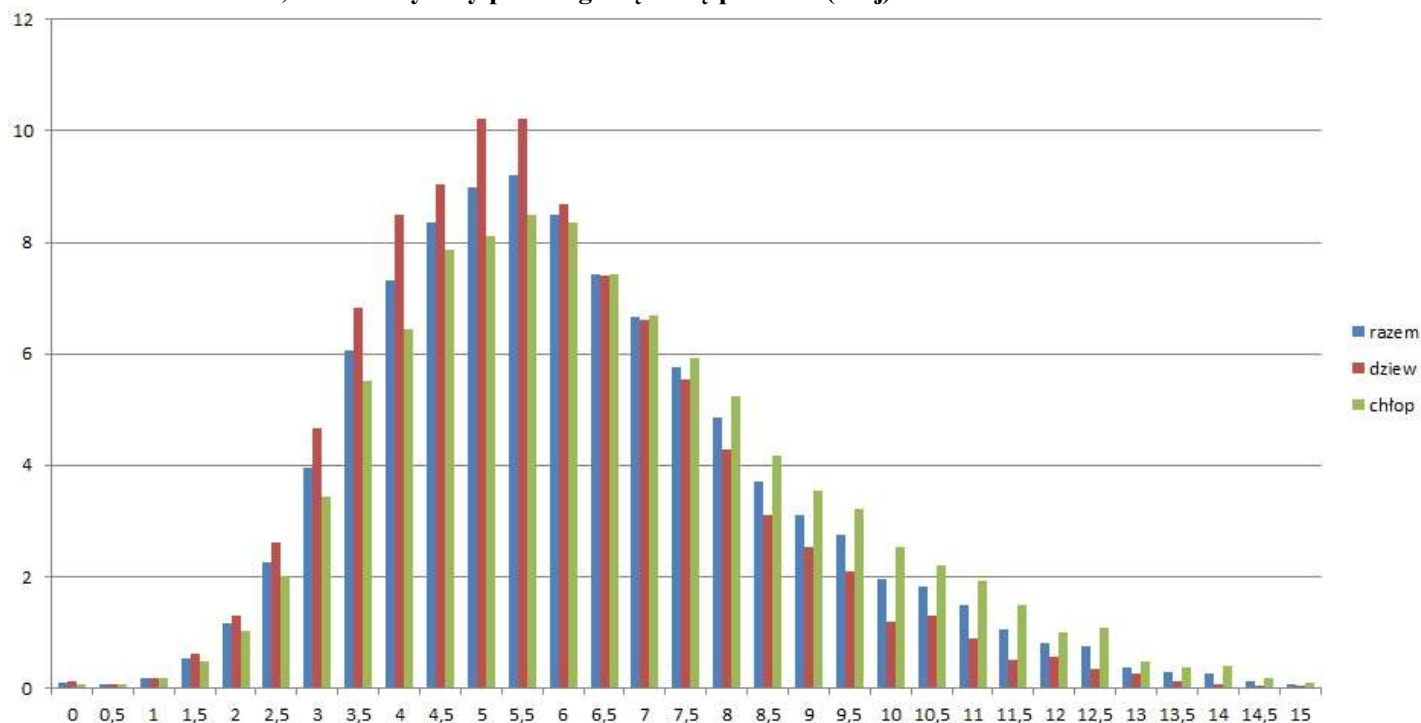
Średnia liczba poprawnych odpowiedzi: 57.94%

Liczba uczniów, którzy wzięli udział w części testowej VII OMG (2011/2012): 14043

Liczba szkół: 1270

Średnia punktów w kraju: 6.2

Procentowa liczba osób, które otrzymały poszczególną sumę punktów (kraj)



VII Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

Zawody stopnia pierwszego – część korespondencyjna

(1 września 2011 r. – 24 października 2011 r.)

Rozwiązania poniższych zadań należy zapisywać **jednostronnie** na **oddzielnych** arkuszach formatu A4. Na każdej kartce z rozwiązaniem należy podać następujące informacje:

- w prawym górnym rogu numer zadania,
- w lewym górnym rogu dane uczestnika: imię i nazwisko, nazwa i adres szkoły, klasa.

Rozwiązania zadań należy przesłać do Komitetu Okręgowego, właściwego terytorialnie dla szkoły najpóźniej dnia **24 października 2011 r.** (decyduje data stempla pocztowego). Adresy Komitetów Okręgowych, informacje o kwalifikacji do zawodów stopnia drugiego, terminy kolejnych etapów OMG oraz inne bieżące informacje można znaleźć w Internecie pod adresem

www.omg.edu.pl

Uwaga. W roku szkolnym 2011/2012 Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów zostanie przeprowadzona w nowej, eksperymentalnej formule. Zawody stopnia pierwszego, odbywające się dotychczas wyłącznie w systemie korespondencyjnym, zostaną w bieżącej edycji rozbudowane o część testową. Więcej informacji na stronie www.omg.edu.pl

1. Czy istnieją takie liczby rzeczywiste x, y , dla których

$$\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1} = x + y?$$

Odpowiedź uzasadnij.

2. Dany jest trójkąt ABC , w którym $AC = BC$. Punkt D leży na boku AB , przy czym $BD = 2AD$, a kąt BCD jest prosty. Wyznacz miarę kąta BAC .

3. Dane są dwa prostokąty o równych polach i o równych obwodach. Wykaż, że długości przekątnych obu prostokątów także są równe.

4. Każda spośród pewnych 99 liczb naturalnych ma w zapisie dziesiętnym 10 jedynek, 20 dwójek oraz pewną liczbę zer. Udowodnij, że liczb tych nie można rozdzielić na dwie grupy w taki sposób, aby iloczyn liczb z pierwszej grupy był równy iloczynowi liczb z drugiej grupy.

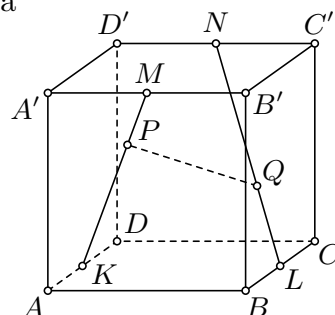
5. W pięciokącie wypukłym $ABCDE$ kąty przy wierzchołkach B i D są proste. Wykaż, że obwód trójkąta ACE jest nie mniejszy od $2BD$.

6. Dane są takie dodatnie liczby wymierne a i b , dla których liczba

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{ab}$$

jest wymierna. Wykaż, że liczby $\sqrt{a}$ oraz $\sqrt{b}$ także są wymierne.

7. Niech $ABCD A'B'C'D'$ będzie sześcianem, jak na rysunku. Punkty K, L, M, N są odpowiednio środkami krawędzi $AD, BC, A'B', C'D'$. Punkty P i Q leżą odpowiednio na odcinkach KM i LN . Krawędź sześcianu jest równa 2. Udowodnij, że $PQ \geq \sqrt{2}$.



VII Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

Zawody stopnia pierwszego – część korespondencyjna

(1 września 2011 r. – 24 października 2011 r.)

Szkice rozwiązań zadań konkursowych

1. Czy istnieją takie liczby rzeczywiste x, y , dla których

$$\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1} = x + y?$$

Odpowiedź uzasadnij.

Szkic rozwiązania

Dla każdej liczby rzeczywistej x , $\sqrt{x^2 + 1} > \sqrt{x^2} = |x| \geq x$. Wobec tego

$$\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1} > x + y,$$

a zatem nie istnieją liczby spełniające warunki zadania.

2. Dany jest trójkąt ABC , w którym $AC = BC$. Punkt D leży na boku AB , przy czym $BD = 2AD$, a kąt BCD jest prosty. Wyznacz miarę kąta BAC .

Szkic rozwiązania

Niech E będzie środkiem przeciwprostokątnej DB trójkąta prostokątnego DBC . Wówczas punkt E jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie DBC , a więc $DE = CE$. Z kolei trójkąt ABC ma oś symetrii, przechodzącą przez wierzchołek C , a punkty D i E są względem niej symetryczne. Zatem $CD = CE$. Wobec tego trójkąt DEC jest równoboczny, a więc $\angle CDE = 60^\circ$. Wówczas $\angle DBC = 30^\circ$, skąd $\angle BAC = 30^\circ$.

3. Dane są dwa prostokąty o równych polach i o równych obwodach. Wykaż, że długości przekątnych obu prostokątów także są równe.

Szkic rozwiązania

Rozważmy prostokąt o bokach a, b oraz przekątnej d . Oznaczmy przez S i L odpowiednio pole i obwód tego prostokąta, czyli $S = ab$ oraz $L = 2(a + b)$. Zauważmy, że

$$d^2 = a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = \left(\frac{L}{2}\right)^2 - 2S.$$

Wobec tego długości przekątnych danych prostokątów są równe.

4. Każda spośród pewnych 99 liczb naturalnych ma w zapisie dziesiętnym 10 jedynek, 20 dwójek oraz pewną liczbę zer. Udowodnij, że liczb tych nie można rozdzielić na dwie grupy w taki sposób, aby iloczyn liczb z pierwszej grupy był równy iloczynowi liczb z drugiej grupy.

Szkic rozwiązania

Przypuśćmy, że istnieje podział opisany w treści zadania. Oznaczmy dane liczby przez $x_1, x_2, \dots, x_{99}$ w taki sposób, że $x_1 \dots x_k = x_{k+1} \dots x_{99}$. Wówczas $x_1 \dots x_{99} = (x_1 \dots x_k)^2$.

Suma cyfr każdej z liczb $x_1, x_2, \dots, x_{99}$ jest równa 50, a więc każda z nich daje resztę 2 z dzielenia przez 3. Wobec tego $x_1 \equiv x_2 \equiv \dots \equiv x_{99} \equiv -1 \pmod{3}$, skąd

$$x_1 \dots x_{99} \equiv (-1)^{99} = -1 \pmod{3}.$$

Z drugiej strony

$$(x_1 \dots x_k)^2 \equiv (-1)^{2k} = 1 \pmod{3}.$$

Otrzymana sprzeczność kończy rozwiązanie zadania.

Uwaga

W powyższym rozwiązaniu użyliśmy kongruencji i ich własności. Czytelników, którym to pojęcie nie jest znane, polecamy lekturę broszury *I Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów*, Sprawozdanie Komitetu Głównego, Dodatek, str. 33.

5. W pięciokącie wypukłym $ABCDE$ kąty przy wierzchołkach B i D są proste. Wykaż, że obwód trójkąta ACE jest nie mniejszy od $2BD$.

Szkic rozwiązania

Oznaczmy przez K i L odpowiednio środki odcinków AC i CE . Ponieważ punkt K jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym ABC , więc $BK = \frac{1}{2}AC$. Podobnie uzasadniamy, że $LD = \frac{1}{2}CE$. Ponadto $KL = \frac{1}{2}AE$.

Z nierówności trójkąta wynika, że $BK + KL + LD \geq BD$. A zatem $AC + CE + AE \geq 2BD$.

6. Dane są takie dodatnie liczby wymierne a i b , dla których liczba

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{ab}$$

jest wymierna. Wykaż, że liczby $\sqrt{a}$ oraz $\sqrt{b}$ także są wymierne.

Szkic rozwiązania

Niech $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{ab} = x$. Wówczas $\sqrt{b} + \sqrt{ab} = x - \sqrt{a}$. Podnosząc tę równość stronami do kwadratu, uzyskujemy

$$b + 2b\sqrt{a} + ab = x^2 - 2x\sqrt{a} + a.$$

Stąd wynika, że

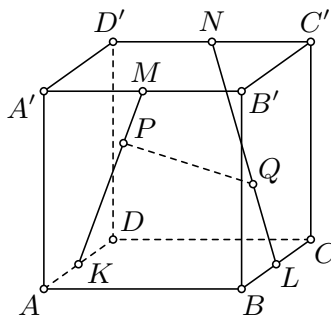
$$\sqrt{a} = \frac{x^2 + a - b - ab}{2(b+x)}.$$

Wobec tego liczba $\sqrt{a}$ jest wymierna, jako iloraz dwóch liczb wymiernych. Analogicznie wykazujemy, że liczba $\sqrt{b}$ jest wymierna.

7. Niech $ABCD A' B' C' D'$ będzie sześcianem, jak na rysunku. Punkty K, L, M, N są odpowiednio środkami krawędzi $AD, BC, A'B', C'D'$. Punkty P i Q leżą odpowiednio na odcinkach KM i LN . Krawędź sześcianu jest równa 2. Udowodnij, że $PQ \geq \sqrt{2}$.

Szkic rozwiązania

Niech P', Q', M', N' będą rzutami prostokątnymi odpowiednio punktów P, Q, M, N na płaszczyznę $ABCD$. Wówczas proste KM' oraz LN' są równoległe, a ich odległość jest równa $\sqrt{2}$. Stąd wynika, że $PQ \geq P'Q' \geq \sqrt{2}$.



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



Stowarzyszenie
na rzecz Edukacji
Matematycznej

MINISTERSTWO
EDUKACJI
NARODOWEJ



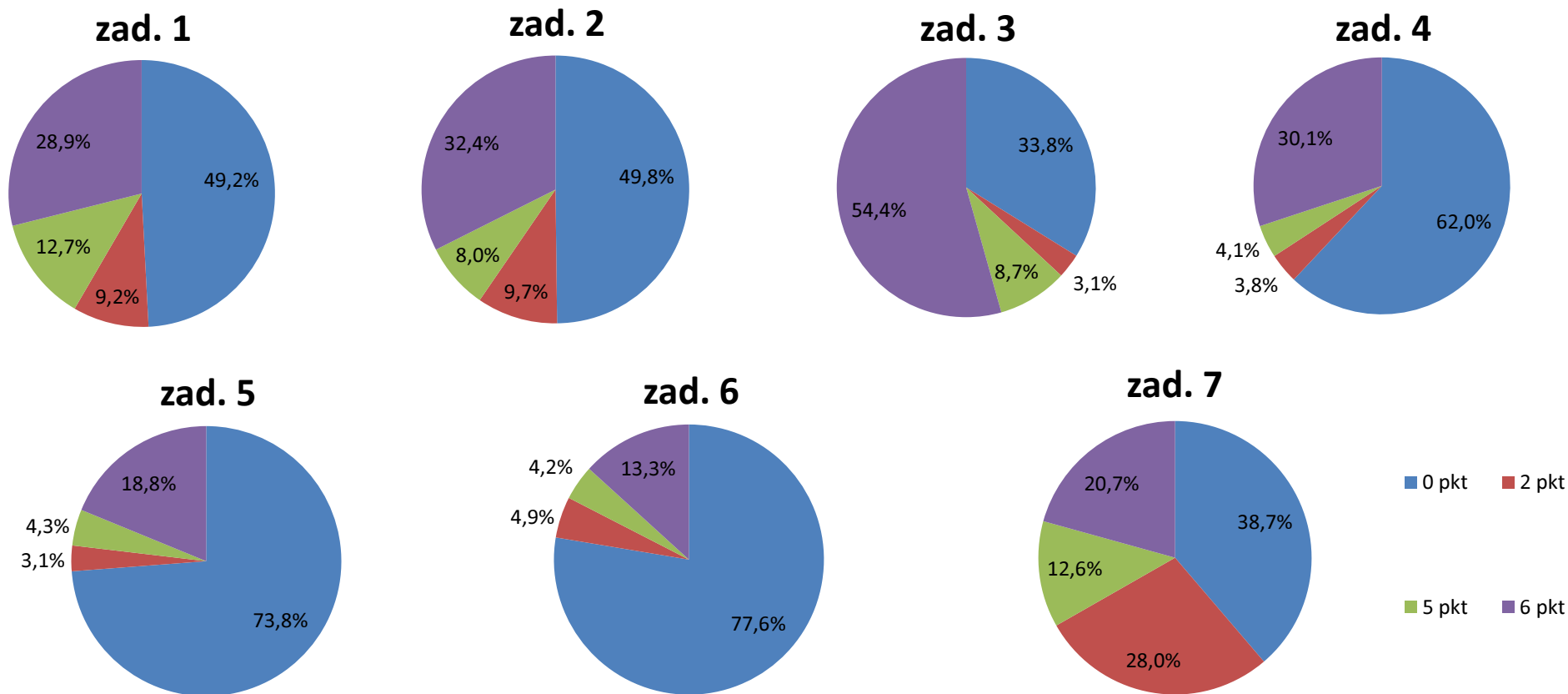
OŚRODEK
ROZWOJU
EDUKACJI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Statystyki części korespondencyjnej VII OMG (2011/2012)

Procentowa liczba osób, które uzyskały daną liczbę punktów za poszczególne zadania



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



Stowarzyszenie
na rzecz Edukacji
Matematycznej

MINISTERSTWO
EDUKACJI
NARODOWEJ



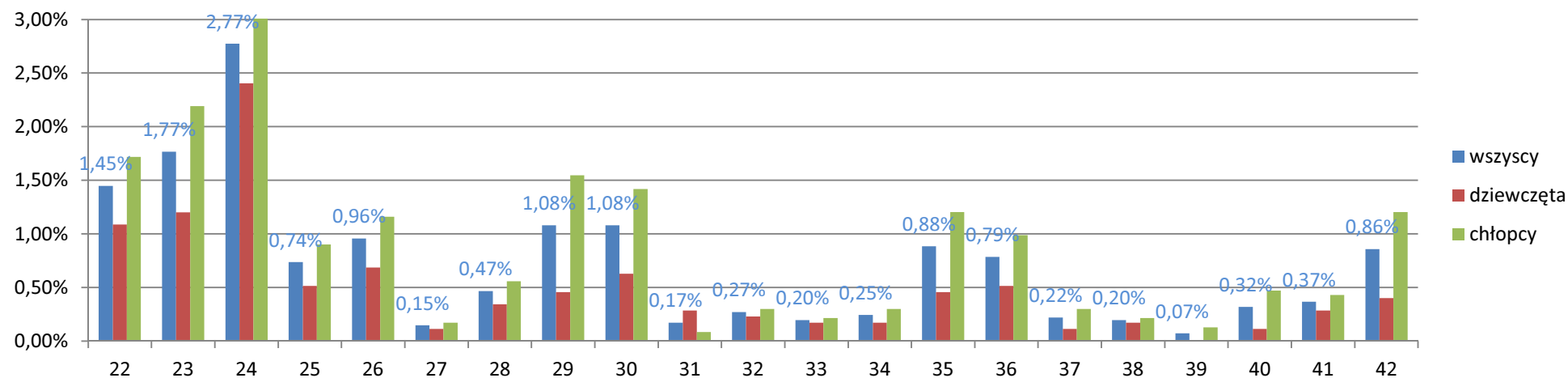
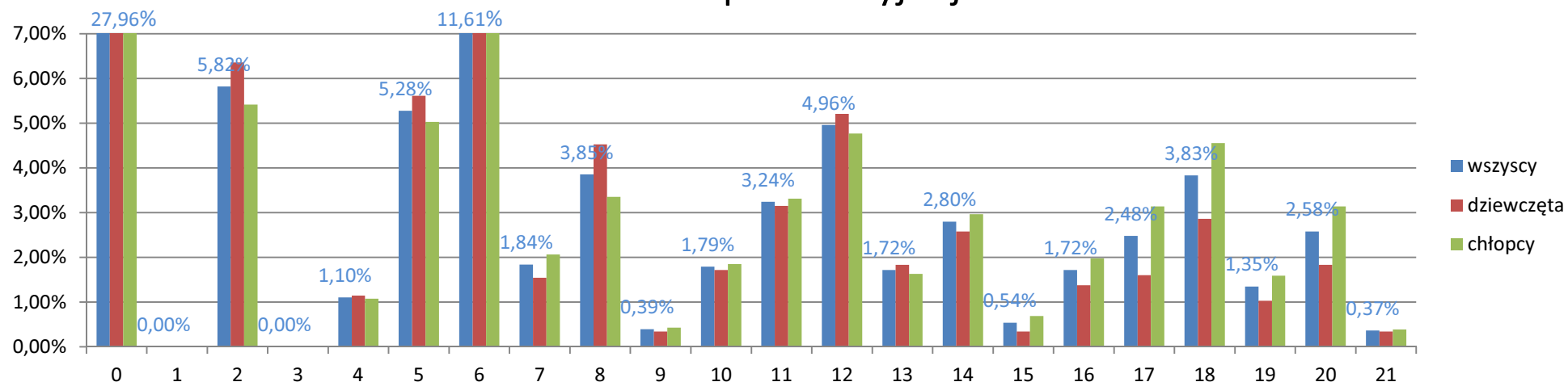
OŚRODEK
ROZWOJU
EDUKACJI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Procentowa liczba osób, które uzyskały daną sumę punktów z części korespondencyjnej



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



Stowarzyszenie
na rzecz Edukacji
Matematycznej

MINISTERSTWO
EDUKACJI
NARODOWEJ



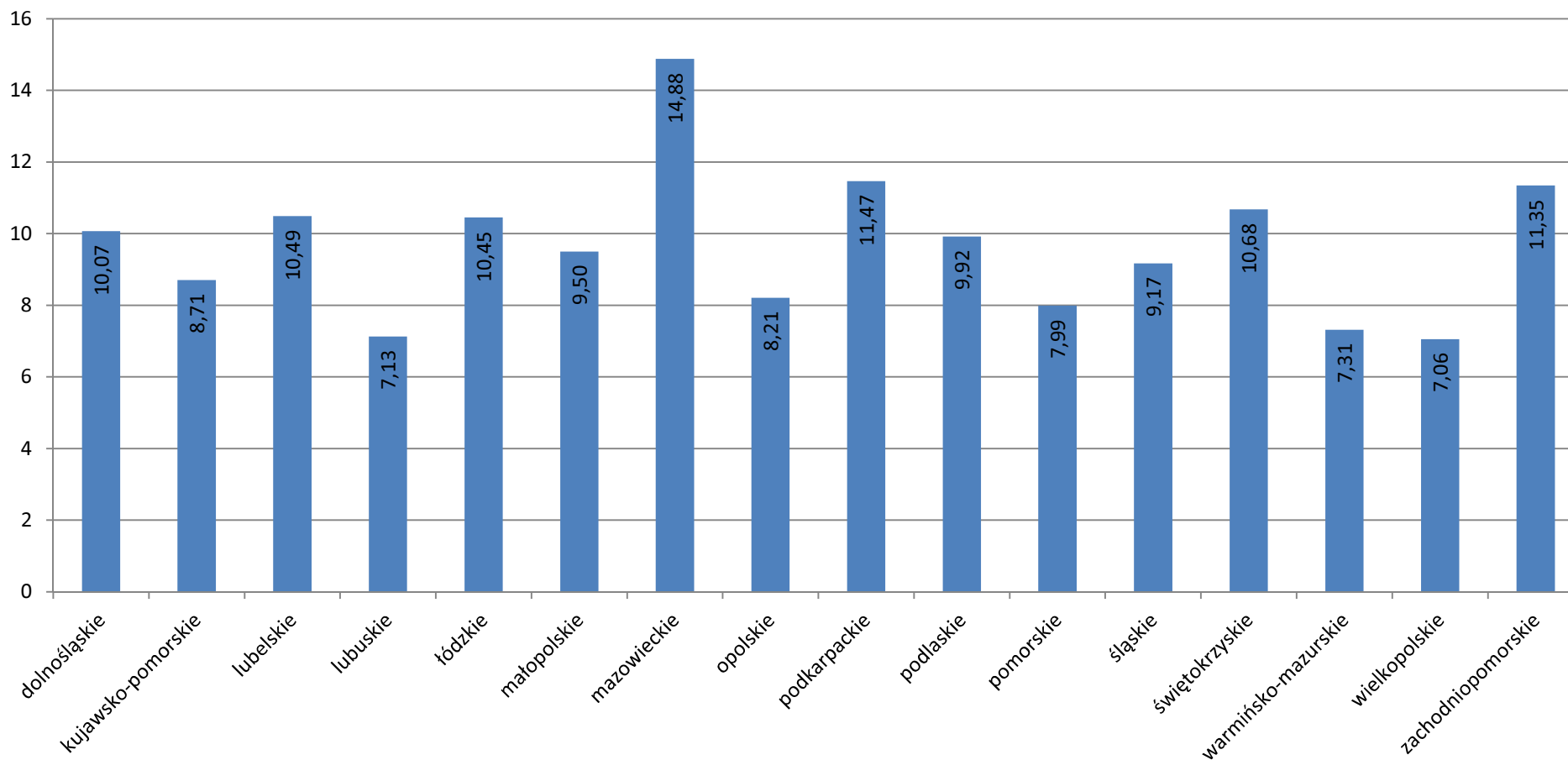
Biuro
Ośrodek
Rozwoju
Edukacji

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Średnia uzyskanych punktów ze wszystkich zadań łącznie w podziale na województwa



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



Stowarzyszenie
na rzecz Edukacji
Matematycznej

MINISTERSTWO
EDUKACJI
NARODOWEJ



Ośrodek
Rozwoju
Edukacji

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Rozwiązania zadań wysłały 4074 osoby, z tego 1747 dziewcząt oraz 2327 chłopców.

Liczba nadesłanych rozwiązań poszczególnych zadań:

Zadanie 1	4045
Zadanie 2	3476
Zadanie 3	3224
Zadanie 4	3502
Zadanie 5	874
Zadanie 6	1275
Zadanie 7	2020

Liczba osób, które nadesłały rozwiązanie co najmniej jednego zadania w poszczególnych województwach:

dolnośląskie	298
kujawsko-pomorskie	299
lubelskie	140
lubuskie	70
łódzkie	215
małopolskie	290
mazowieckie	583
opolskie	133
podkarpackie	214
podlaskie	154
pomorskie	349
śląskie	549
świętokrzyskie	81
warmińsko-mazurskie	134
wielkopolskie	355
zachodniopomorskie	188
Wilno	22
SUMA	4074

VII Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

Zawody stopnia drugiego
(7 stycznia 2012 r.)



1. Wyznacz wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych a , b , których iloczyn ab jest podzielny przez 175, a suma $a + b$ równa się 175.

2. W pewnym turnieju uczestniczyło 6 drużyn. Każda drużyna rozegrała z każdą inną dokładnie jeden mecz. Za zwycięstwo w meczu drużyna otrzymywała 3 punkty, za porażkę 0 punktów, a za remis 1 punkt. Po turnieju okazało się, że suma punktów zdobytych przez wszystkie drużyny wynosi 41. Wykaż, że istnieją takie cztery drużyny, z których każda co najmniej jeden raz zremisowała.

3. Czy istnieje taki trójkąt o bokach długości a , b , c , którego pole jest równe $\frac{1}{4}(ab + bc)$? Odpowiedź uzasadnij.

4. Wyznacz wszystkie trójki (a, b, c) liczb nieujemnych i nie większych od 1, dla których spełniona jest równość

$$a + b + c = ab + bc + ca.$$

5. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym

$$\sphericalangle DAB + \sphericalangle BCD = \sphericalangle ABC.$$

Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC . Wykaż, że punkt O jest jednakowo odległy od prostych AD i CD .



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



Stowarzyszenie
na rzecz Edukacji
Matematycznej

MINISTERSTWO
EDUKACJI
NARODOWEJ



OŚRODEK
ROZWOJU
EDUKACJI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



VII Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

Zawody stopnia drugiego

(7 stycznia 2012 r.)

Szkice rozwiązań zadań konkursowych

1. Wyznacz wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych a , b , których iloczyn ab jest podzielny przez 175, a suma $a+b$ równa się 175.

Szkic rozwiązania

Dzielnikami pierwszymi liczby 175 są liczby 5 i 7. Wobec tego liczba ab jest podzielna przez 5, skąd wynika, że liczba a lub liczba b jest podzielna przez 5. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że liczba a jest podzielna przez 5. Ponieważ $b = 175 - a$, więc liczba b także jest podzielna przez 5. Stąd wniosek, że obie liczby są podzielne przez 5.

Podobnie dowodzimy, że liczby a i b są podzielne przez 7. Wobec tego liczby a i b są podzielne przez 35, czyli istnieją dodatnie liczby całkowite k i l , dla których $a = 35k$ oraz $b = 35l$. Stąd wynika, że $35(k+l) = 175$. A zatem $k+l = 5$, więc (k, l) jest jedną z czterech par: $(1, 4)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$, $(4, 1)$. Uzyskujemy stąd

$$(a, b) = (35, 140), \quad (a, b) = (70, 105), \quad (a, b) = (105, 70) \quad \text{lub} \quad (a, b) = (140, 35).$$

Bezpośrednio sprawdzamy, że wszystkie cztery powyższe pary liczb (a, b) spełniają warunki zadania.

2. W pewnym turnieju uczestniczyło 6 drużyn. Każda drużyna rozegrała z każdą inną dokładnie jeden mecz. Za zwycięstwo w meczu drużyna otrzymywała 3 punkty, za porażkę 0 punktów, a za remis 1 punkt. Po turnieju okazało się, że suma punktów zdobytych przez wszystkie drużyny wynosi 41. Wykaż, że istnieją takie cztery drużyny, z których każda co najmniej jeden raz zremisowała.

Szkic rozwiązania

Oznaczmy przez r liczbę meczów, które zakończyły się remisem. Zauważmy, że wszystkich meczów było 15, czyli $15 - r$ meczów zakończyło się wygraną jednej z drużyn. Suma punktów zdobytych przez wszystkie drużyny wynosi zatem $2 \cdot r + 3 \cdot (15 - r)$. Wobec tego $2 \cdot r + 3 \cdot (15 - r) = 41$, skąd wynika, że $r = 4$.

Przypuśćmy, że nie istnieją takie cztery drużyny, z których każda co najmniej jeden raz zremisowała. Wówczas pewne trzy drużyny nie zremisowały ani razu. Pozostałe trzy drużyny rozegrały między sobą dokładnie trzy mecze. Stąd wniosek, że co najwyżej trzy mecze zakończyły się remisem. Otrzymana sprzeczność kończy rozwiązanie zadania.

3. Czy istnieje taki trójkąt o bokach długości a , b , c , którego pole jest równe $\frac{1}{4}(ab+bc)$? Odpowiedź uzasadnij.

Szkic rozwiązania

Wykażemy, że taki trójkąt nie istnieje.

Przypuśćmy, że istnieje trójkąt o bokach długości a , b , c i polu równym $\frac{1}{4}(ab+bc)$. Oznaczmy przez h wysokość tego trójkąta opuszczoną na bok b . Wówczas

$$\frac{1}{2}bh = \frac{1}{4}(ab+bc), \quad \text{czyli} \quad h = \frac{1}{2}(a+c).$$

Z drugiej strony $h \leq a$ i $h \leq c$ oraz przynajmniej jedna z tych nierówności jest ostra (w przeciwnym razie trójkąt ten miałby dwa kąty proste). Wobec tego $2h < a+c$, a zatem $h < \frac{1}{2}(a+c)$. Otrzymaliśmy sprzeczność.

4. Wyznacz wszystkie trójki (a, b, c) liczb nieujemnych i nie większych od 1, dla których spełniona jest równość $a + b + c = ab + bc + ca$.

Szkic rozwiązania

Rozważymy trzy przypadki:

(a) Wszystkie trzy liczby a, b, c są dodatnie i mniejsze od 1. Mnożąc nierówność $1 > b$ stronami przez liczbę dodatnią a , otrzymujemy $a > ab$. Podobnie dowodzimy, że $b > bc$ oraz $c > ca$. Stąd wynika, że $a + b + c > ab + bc + ca$, czyli w tym przypadku dane równanie nie ma rozwiązań.

(b) Co najmniej jedna z liczb a, b, c jest równa 1. Bez straty ogólności możemy założyć, że $a = 1$. Wówczas $1 + b + c = b + bc + c$, czyli $1 = bc$, więc $b = c = 1$. Zadana równość spełnia w tym przypadku wyłącznie trójka $(1, 1, 1)$.

(c) Co najmniej jedna z liczb a, b, c jest równa 0. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $a = 0$. Wówczas $b + c = bc$. Ponieważ $bc \leq b$, więc $b + c \leq b$, a zatem $c = 0$. Wtedy również $b = 0$. Zadana równość spełnia w tym przypadku wyłącznie trójka $(0, 0, 0)$.

Odp.: Dana równość jest spełniona jedynie dla trójek $(1, 1, 1)$ oraz $(0, 0, 0)$.

5. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym

$$\sphericalangle DAB + \sphericalangle BCD = \sphericalangle ABC.$$

Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC . Wykaż, że punkt O jest jednakowo odległy od prostych AD i CD .

Szkic rozwiązania

Przeprowadzimy rozumowanie w przypadku, gdy oba kąty DAB i BCD są ostre. Dowód w pozostałych przypadkach przebiega analogicznie.

Oznaczmy przez E taki punkt na półprostej AD , że $\sphericalangle DAB = \sphericalangle ABE$. Niech F będzie punktem przecięcia prostych CD i BE . Wówczas $\sphericalangle BCD = \sphericalangle FBC$. Wobec tego trójkąty ABE oraz BCF są równoramienne.

Punkt O jest punktem przecięcia symetralnych odcinków AB i BC , które są jednocześnie dwusiecznymi kątów AEB i BFC .

Jeśli $D = E$, to $E = F = O$ i teza zadania jest oczywiście spełniona.

Przyjmijmy zatem, że punkty D i E są różne. Punkt O leży wówczas na dwusiecznych kątów DEF i DFE trójkąta DEF . Stąd wniosek, że jest on środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt, czyli jest jednakowo odległy od prostych AD i CD .



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



Stowarzyszenie
na rzecz Edukacji
Matematycznej

MINISTERSTWO
EDUKACJI
NARODOWEJ



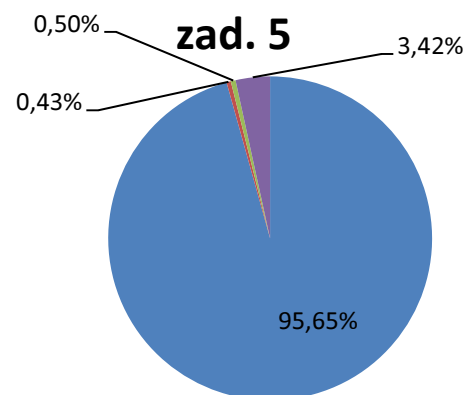
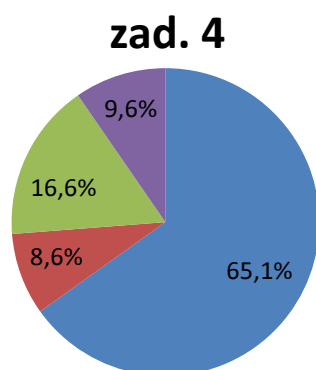
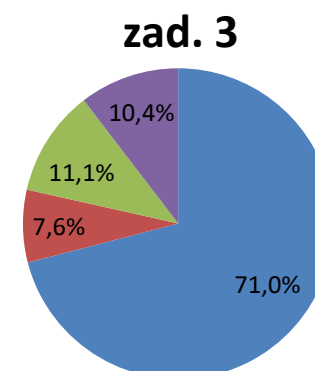
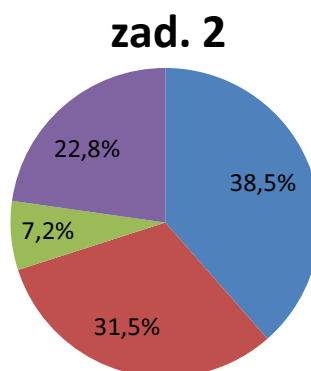
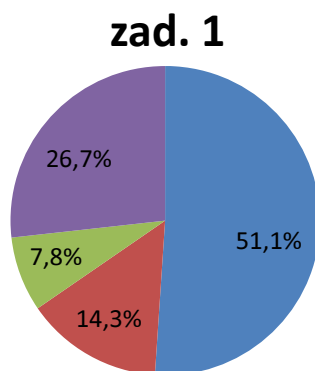
OŚRODEK
ROZWOJU
EDUKACJI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



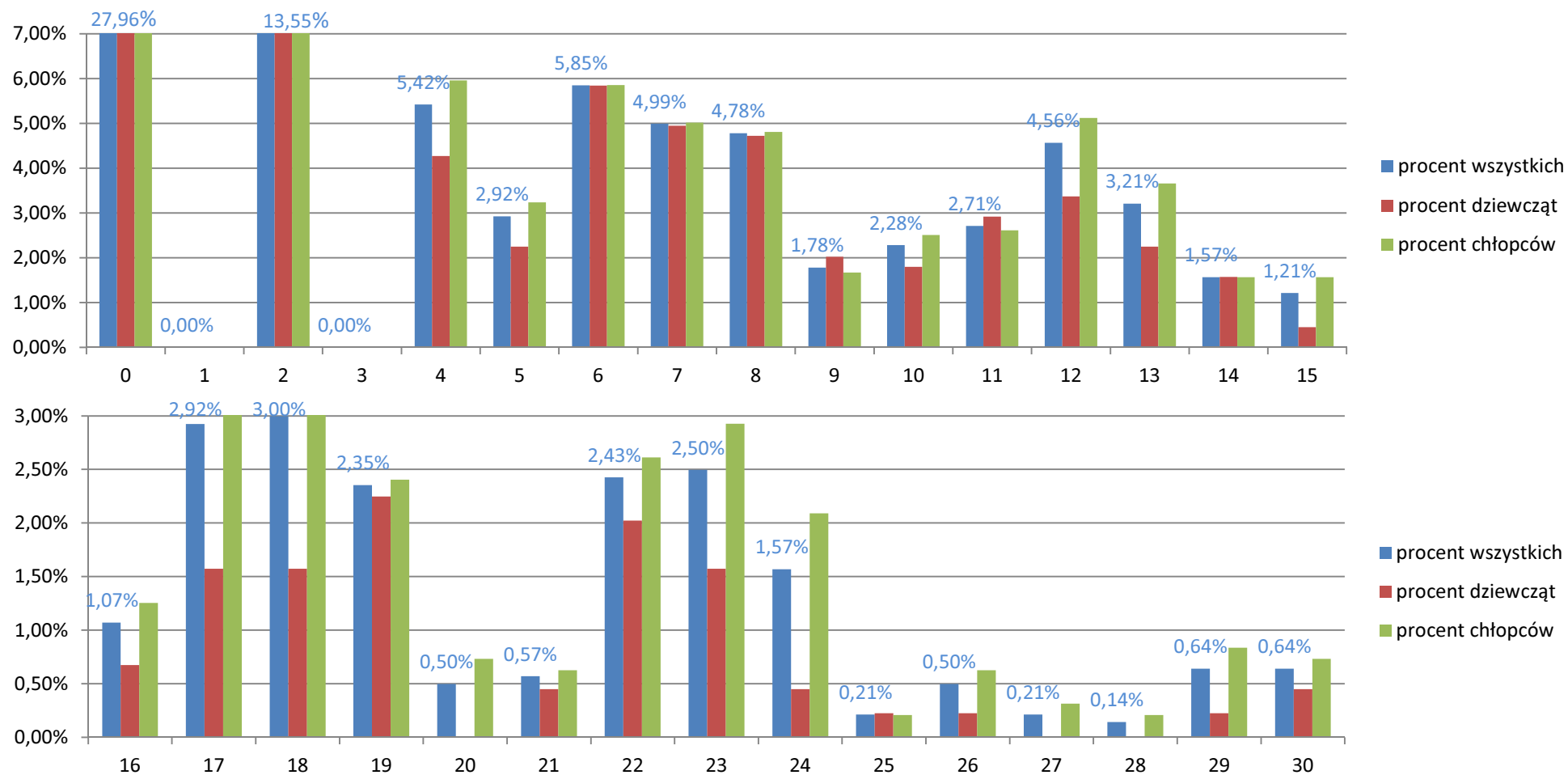
Statystyki zawodów drugiego stopnia VII OMG (2011/2012)

Procentowa liczba osób, które uzyskały daną liczbę punktów za poszczególne zadania



0 pkt 2 pkt 5 pkt 6 pkt

Procentowa liczba osób, które uzyskały daną sumę punktów z drugiego etapu



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



Stowarzyszenie
na rzecz Edukacji
Matematycznej

MINISTERSTWO
EDUKACJI
NARODOWEJ



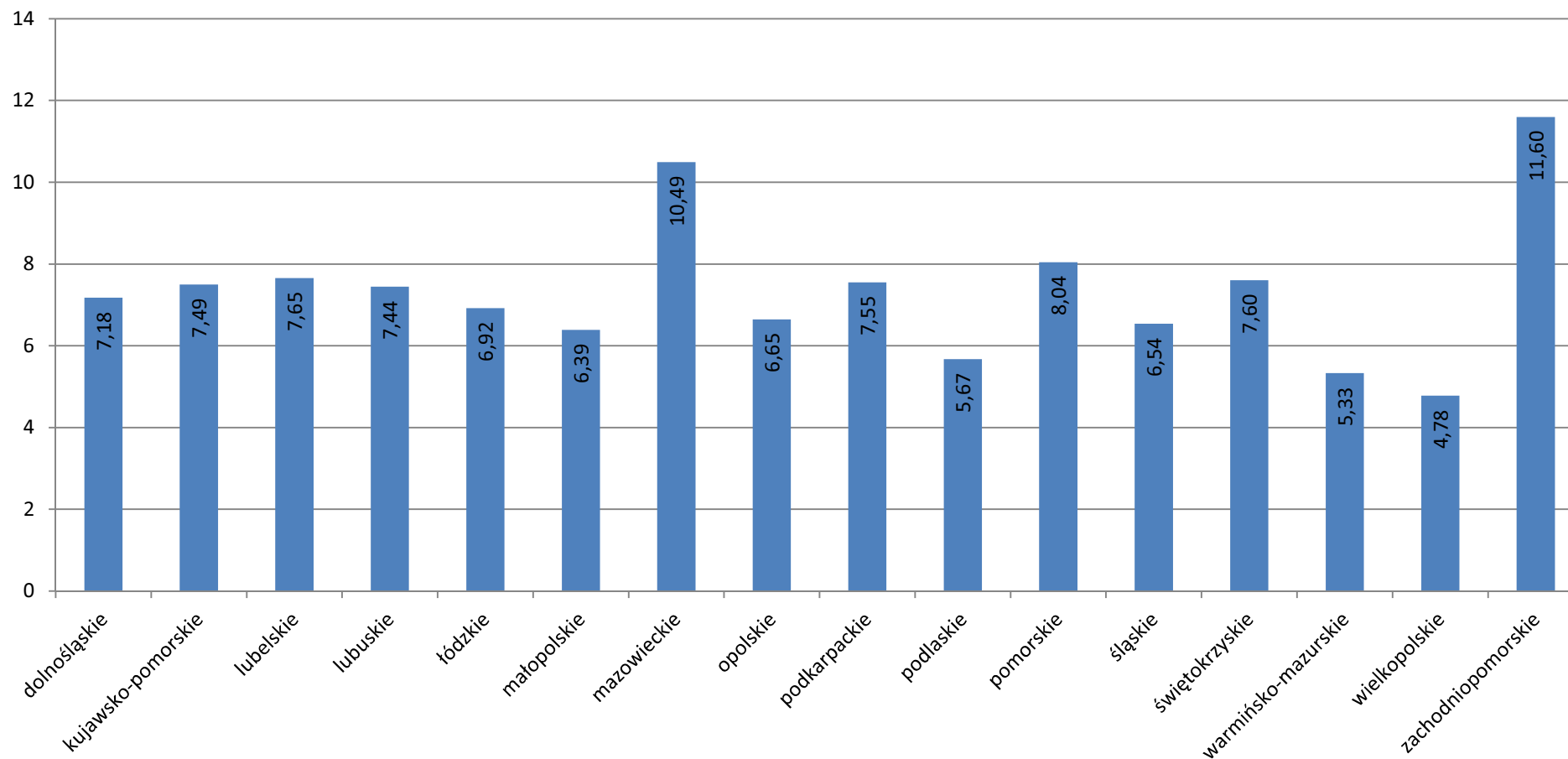
OŚRODEK
ROZWOJU
EDUKACJI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Średnia uzyskanych punktów ze wszystkich zadań łącznie w podziale na województwa



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



Stowarzyszenie
na rzecz Edukacji
Matematycznej

MINISTERSTWO
EDUKACJI
NARODOWEJ



OSIOŁEK
ROZWOJU
EDUKACJI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Liczba uczestników zawodów stopnia drugiego
w poszczególnych województwach:

dolnośląskie	108
kujawsko-pomorskie	99
lubelskie	52
lubuskie	18
łódzkie	61
małopolskie	100
mazowieckie	293
opolskie	34
podkarpackie	80
podlaskie	61
pomorskie	99
śląskie	174
świętokrzyskie	20
warmińsko-mazurskie	39
wielkopolskie	90
zachodniopomorskie	72
Wilno	2
cała Polska	1402



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



Stowarzyszenie
na rzecz Edukacji
Matematycznej

MINISTERSTWO
EDUKACJI
NARODOWEJ



OŚRODEK
ROZWOJU
EDUKACJI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

VII Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

Zawody stopnia trzeciego
(17 marca 2012 r.)



1. Wyznacz wszystkie takie liczby rzeczywiste x , dla których liczby $x + \sqrt{3}$ oraz $x^2 + \sqrt{3}$ są wymierne.

2. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Punkty K i L są odpowiednio środkami boków BC i AD . Symetralne odcinków AB i CD przecinają odcinek KL odpowiednio w punktach P i Q . Wykaż, że jeżeli $KP = LQ$, to proste AB i CD są równoległe.

3. Dane są takie dodatnie liczby całkowite a, b , że iloczyn ab jest podzielny przez sumę $a + b$. Niech d będzie największym wspólnym dzielnikiem liczb a i b . Udowodnij, że

$$d \geq \sqrt{a+b}.$$

4. Dana jest dodatnia liczba całkowita n . Wykaż, że w zapisie dziesiętnym liczby

$$\sqrt{100^n + 2}$$

na n -tym miejscu po przecinku jest cyfra 0.

5. Czy na powierzchni każdego czworościanu można wskazać takie cztery punkty, które są wierzchołkami kwadratu i z których żadne dwa nie leżą na jednej ścianie tego czworościanu? Odpowiedź uzasadnij.



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



Stowarzyszenie
na rzecz Edukacji
Matematycznej

MINISTERSTWO
EDUKACJI
NARODOWEJ



OŚRODEK
ROZWOJU
EDUKACJI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



VII Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

Zawody stopnia trzeciego

(17 marca 2012 r.)

Szkice rozwiązań zadań konkursowych

1. Wyznacz wszystkie takie liczby rzeczywiste x , dla których liczby $x + \sqrt{3}$ oraz $x^2 + \sqrt{3}$ są wymierne.

Szkic rozwiązania

Oznaczmy przez a i b odpowiednio liczby wymierne $x + \sqrt{3}$ oraz $x^2 + \sqrt{3}$. Wówczas $x = a - \sqrt{3}$. Stąd otrzymujemy

$$b = (a - \sqrt{3})^2 + \sqrt{3} = (1 - 2a)\sqrt{3} + a^2 + 3, \quad \text{czyli} \quad (1 - 2a)\sqrt{3} = b - a^2 - 3.$$

Przypuśćmy, że liczba $1 - 2a$ jest różna od zera. Wówczas

$$\sqrt{3} = \frac{b - a^2 - 3}{1 - 2a}.$$

Liczba po prawej stronie ostatniej równości jest wymierna, jako iloraz dwóch liczb wymiernych. Otrzymujemy więc sprzeczność, z której wynika, że $1 - 2a = 0$. Wobec tego $a = \frac{1}{2}$, czyli $x = \frac{1}{2} - \sqrt{3}$.

Bezpośrednio sprawdzamy, że liczba $x = \frac{1}{2} - \sqrt{3}$ spełnia warunki zadania. Na mocy powyższego rozumowania, jest to jedyna liczba o żądanej własności.

2. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Punkty K i L są odpowiednio środkami boków BC i AD . Symetralne odcinków AB i CD przecinają odcinek KL odpowiednio w punktach P i Q . Wykaż, że jeżeli $KP = LQ$, to proste AB i CD są równoległe.

Szkic rozwiązania

Oznaczmy przez M i N odpowiednio środki boków AB i CD czworokąta $ABCD$. Ponieważ punkty L i N są środkami odpowiednio boków AD i CD trójkąta ACD , więc $LN = \frac{1}{2}AC$ oraz prosta LN jest równoległa do prostej AC . Analogicznie wykazujemy, że $MK = \frac{1}{2}AC$ oraz prosta MK jest równoległa do prostej AC .

Wobec tego $LN = MK$, a ponadto proste LN i MK są równoległe. Zauważmy, że wówczas $\sphericalangle QLN = \sphericalangle PKM$, jako kąty naprzemianległe. Zatem trójkąty MKP i NLQ są przystające (cecha bok-kąt-bok). Stąd wniosek, że $\sphericalangle KPM = \sphericalangle LQN$, czyli proste MP i NQ są równoległe. Wobec tego proste AB i CD również są równoległe.

3. Dane są takie dodatnie liczby całkowite a, b , że iloczyn ab jest podzielny przez sumę $a + b$. Niech d będzie największym wspólnym dzielnikiem liczb a i b . Udowodnij, że

$$d \geq \sqrt{a+b}.$$

Szkic rozwiązania

Niech x, y będą dodatnimi liczbami całkowitymi, dla których $a = dx, b = dy$. Ponieważ d jest największym wspólnym dzielnikiem liczb a i b , więc liczby x i y są względnie pierwsze.

Skoro iloczyn ab jest podzielny przez sumę $a + b$, to istnieje dodatnia liczba całkowita z taka, że $(a + b) \cdot z = ab$. Stąd otrzymujemy

$$d(x + y) \cdot z = d^2xy, \quad \text{czyli} \quad (x + y) \cdot z = dxy.$$

To oznacza, że liczba dxy jest podzielna przez $x + y$.

Liczby $x+y$ i x są względnie pierwsze. Podobnie liczby $x+y$ i y . Wobec tego z podzielności $x+y \mid dxy$ wynika, że $x+y \mid d$. Stąd wniosek, że $d \geq x+y$. Po pomnożeniu tej nierówności stronami przez d uzyskujemy $d^2 \geq a+b$, czyli $d \geq \sqrt{a+b}$.

4. Dana jest dodatnia liczba całkowita n . Wykaż, że w zapisie dziesiętnym liczby

$$\sqrt{100^n + 2}$$

na n -tym miejscu po przecinku jest cyfra 0.

Szkic rozwiązania

Oznaczmy liczbę $\sqrt{100^n + 2}$ przez a . Udowodnimy, że w zapisie dziesiętnym liczby a , na *każdym* miejscu od pierwszego do n -tego po przecinku, jest cyfra 0. W tym celu wskażemy taką dodatnią liczbę całkowitą k , że $k < a < k + \frac{1}{10^n}$.

Zauważmy, że $a = \sqrt{100^n + 2} > \sqrt{100^n}$, czyli $a > 10^n$. Z drugiej strony

$$a^2 = 100^n + 2 < 100^n + 2 + \frac{1}{100^n} = \left(10^n + \frac{1}{10^n}\right)^2, \quad \text{a zatem} \quad a < 10^n + \frac{1}{10^n}.$$

Podsumowując, $10^n < a < 10^n + \frac{1}{10^n}$, co kończy rozwiązanie zadania.

5. Czy na powierzchni każdego czworościanu można wskazać takie cztery punkty, które są wierzchołkami kwadratu i z których żadne dwa nie leżą na jednej ścianie tego czworościanu? Odpowiedź uzasadnij.

Szkic rozwiązania

Wykażemy, że takie cztery punkty istnieją w *każdym* czworościanie.

Rozważmy dowolny czworościan $ABCD$, w którym $BC = a$, $AD = b$. Na krawędziach AB , AC , DB i DC wybierzmy odpowiednio takie punkty K , L , M , N , że

$$\frac{AK}{KB} = \frac{AL}{LC} = \frac{DM}{MB} = \frac{DN}{NC} = \frac{b}{a}.$$

Z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa wynika, że proste KL i MN są równoległe. Wobec tego punkty K , L , M , N leżą na jednej płaszczyźnie. Ponadto z twierdzenia Talesa obliczamy

$$\frac{KL}{BC} = \frac{AK}{AB} = \frac{b}{a+b}, \quad \text{skąd} \quad KL = BC \cdot \frac{b}{a+b} = \frac{ab}{a+b}.$$

Analogicznie wykazujemy, że każdy z odcinków LN , NM , MK ma długość $ab/(a+b)$. Stąd wniosek, że czworokąt $KLNM$ jest rombem.

Niech P będzie środkiem rombu $KLNM$. Punkty przecięcia prostych zawierających dwusieczne kątów KPM i MPN z bokami rombu tworzą wierzchołki czworokąta. Czworokąt ten jest kwadratem, gdyż jego przekątne są równe i przecinają się pod kątem prostym.



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



Stowarzyszenie
na rzecz Edukacji
Matematycznej

MINISTERSTWO
EDUKACJI
NARODOWEJ



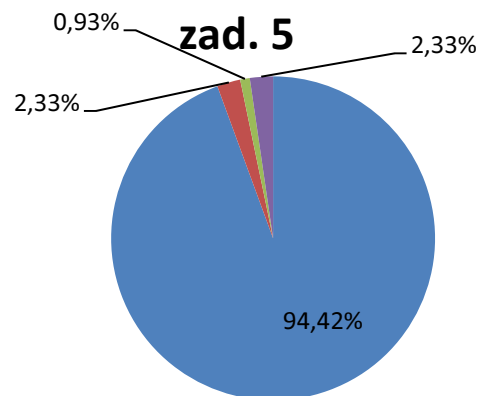
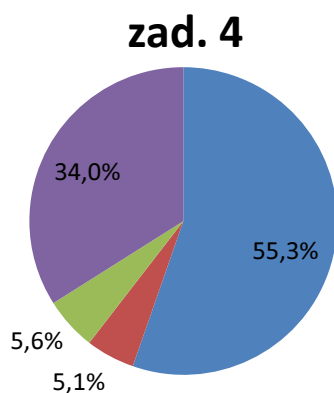
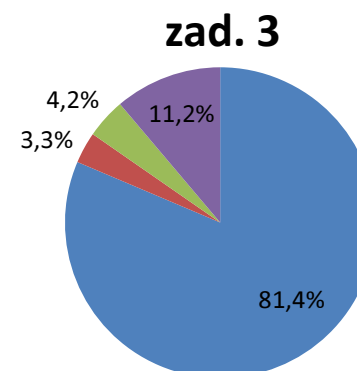
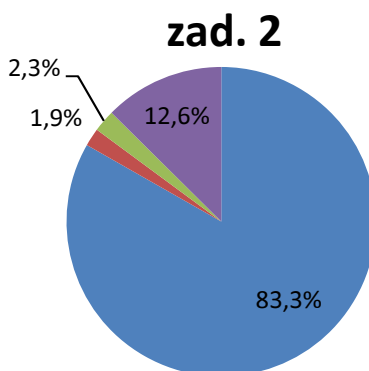
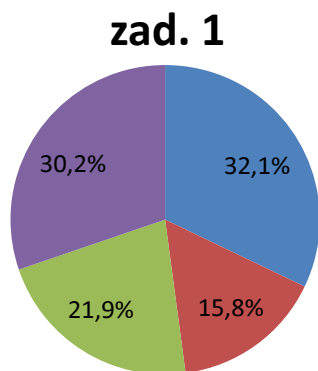
OŚRODEK
ROZWOJU
EDUKACJI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



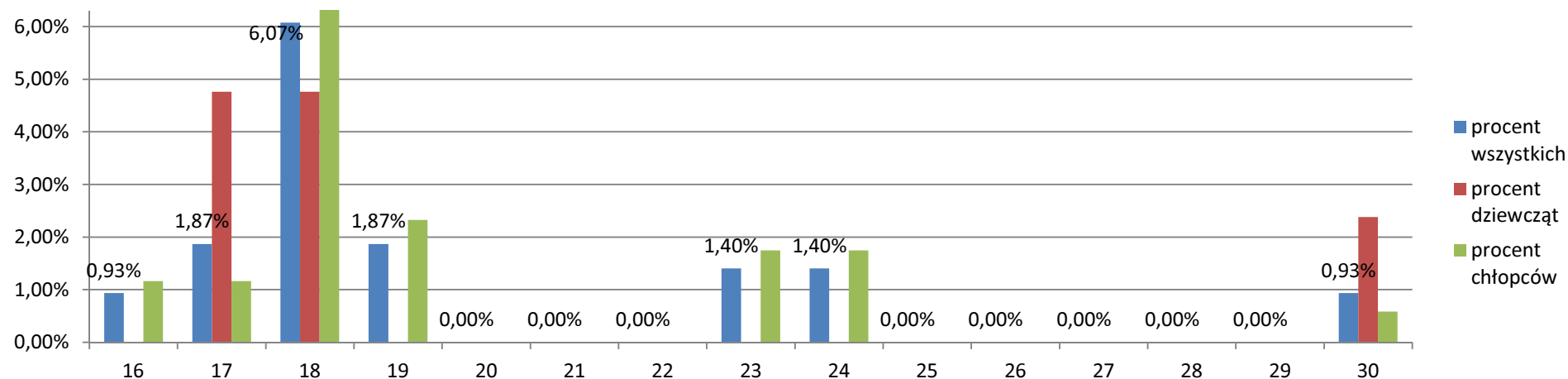
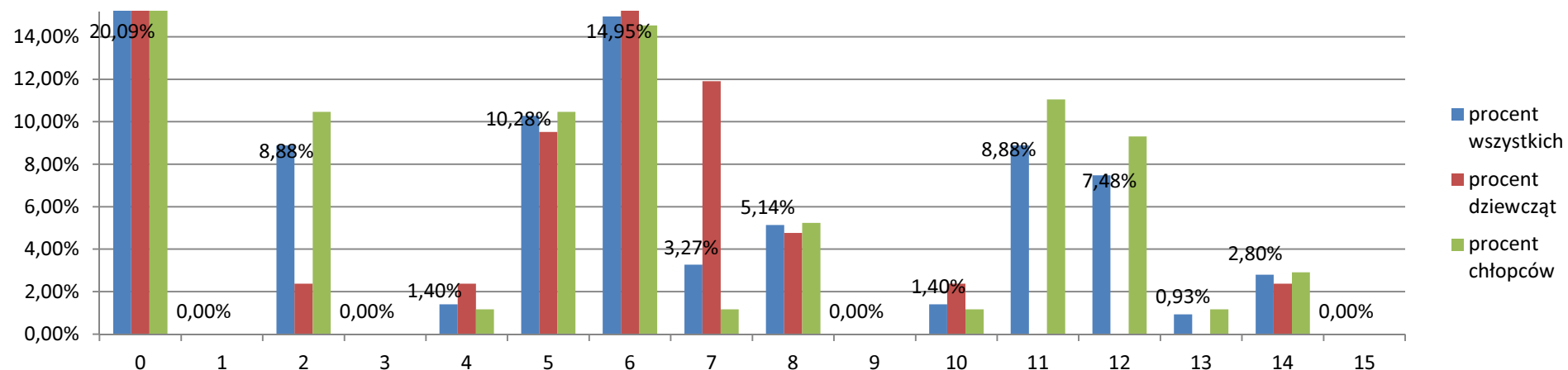
Statystyki zawodów trzeciego stopnia VII OMG (2011/2012)

Procentowa liczba osób, które uzyskały daną liczbę punktów za poszczególne zadania

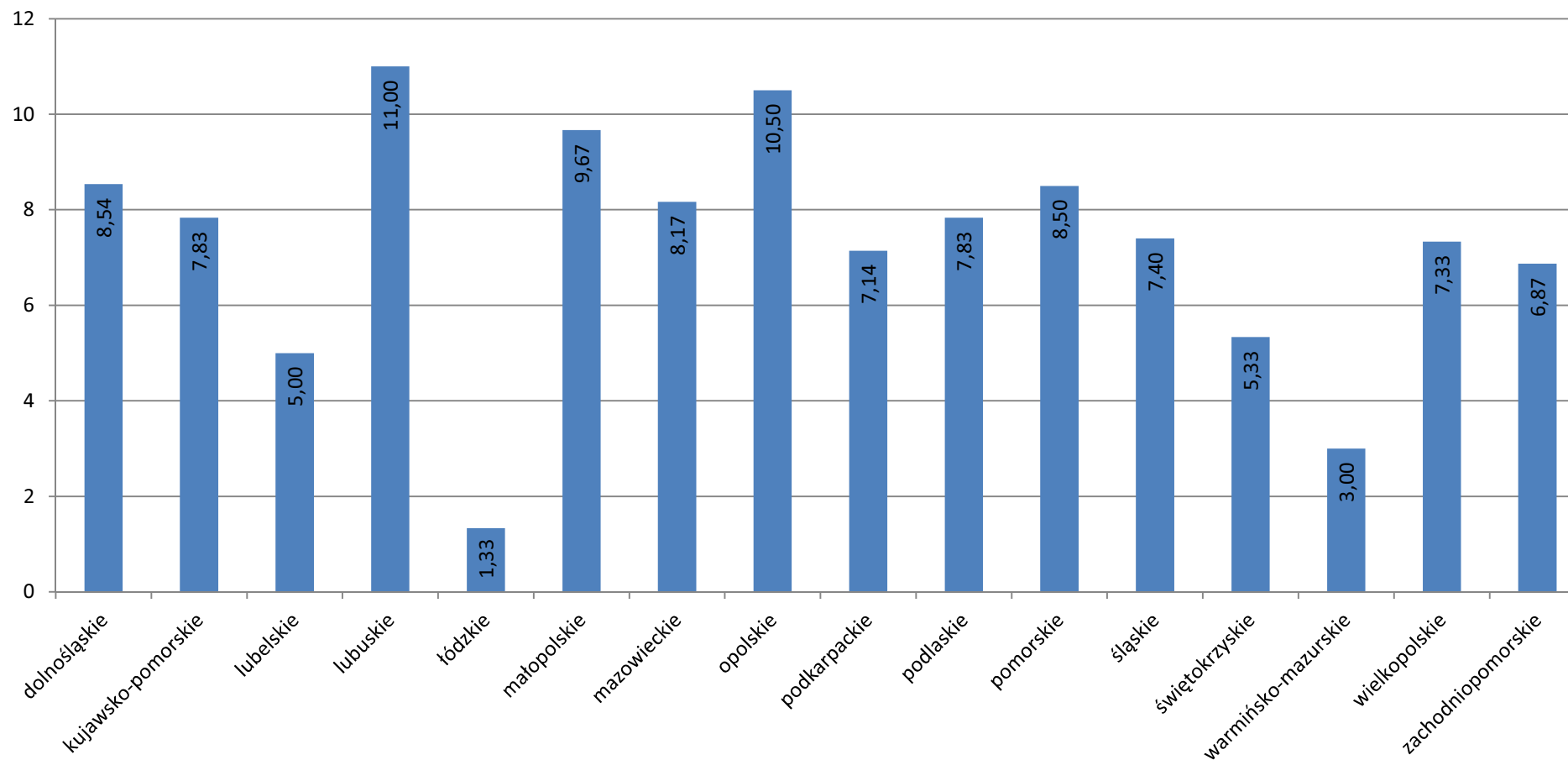


0 pkt 2 pkt 5 pkt 6 pkt

Procentowa liczba osób, które uzyskały daną sumę punktów z trzeciego etapu



Średnia uzyskanych punktów ze wszystkich zadań łącznie w podziale na województwa



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



Stowarzyszenie
na rzecz Edukacji
Matematycznej

MINISTERSTWO
EDUKACJI
NARODOWEJ



Ośrodek
Rozwoju
Edukacji

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Liczba uczestników zawodów trzeciego stopnia
z poszczególnych województw:

dolnośląskie	13
kujawsko-pomorskie	12
lubelskie	8
lubuskie	2
łódzkie	6
małopolskie	12
mazowieckie	78
opolskie	4
podkarpackie	7
podlaskie	6
pomorskie	12
śląskie	20
świętokrzyskie	3
warmińsko-mazurskie	2
wielkopolskie	6
zachodniopomorskie	23
cała Polska	214



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



Stowarzyszenie
na rzecz Edukacji
Matematycznej

MINISTERSTWO
EDUKACJI
NARODOWEJ



OŚRODEK
ROZWOJU
EDUKACJI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Imię:

Nazwisko:

Klasa:



VIII Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

Zawody stopnia pierwszego – część testowa

(18 października 2012 r., godz. 9:00)

Przed przystąpieniem do rozwiązywania testu wpisz na każdą stronę swoje imię, nazwisko oraz numer klasy.

Treść każdego z poniższych zadań zawiera trzy stwierdzenia. Każde z nich jest prawdziwe lub fałszywe. Jeśli dane stwierdzenie jest prawdziwe, wpisz w odpowiednią kratkę literkę T, jeśli zaś stwierdzenie jest fałszywe, wpisz literkę N.

W przypadku pomyłki przekreśl znakiem **X** podaną odpowiedź, a właściwą odpowiedź podaj obok z lewej strony. Nie używaj korektora.

Przykład poprawnie rozwiązane zadania:

0. Dla każdej dodatniej liczby całkowitej n liczba $2n+1$ jest

T

a) dodatnia;

T

b) nieparzysta;

N

X

c) pierwsza.

Czas na rozwiązywanie testu: 75 minut.

Powodzenia!

1. Miary α, β, γ kątów pewnego trójkąta spełniają warunek $\alpha + \beta < \gamma$. Wynika z tego, że

a) trójkąt ten jest ostrokątny;

b) trójkąt ten jest rozwartokątny;

c) taki trójkąt nie istnieje.

2. Długość przekątnej pewnego kwadratu jest liczbą niewymierną. Wynika z tego, że

a) pole tego kwadratu jest liczbą wymierną;

b) długość boku tego kwadratu jest liczbą wymierną;

c) obwód tego kwadratu jest liczbą całkowitą.



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



Stowarzyszenie
na rzecz Edukacji
Matematycznej

MINISTERSTWO
EDUKACJI
NARODOWEJ



OŚRODEK
ROZWOJU
EDUKACJI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Imię:

Nazwisko:

Klasa:

3. Istnieje liczba naturalna o sumie cyfr równej 2012, podzielna przez

a) 4;

b) 5;

c) 6.

4. Nierówność $\sqrt{x^2 - 1} > x$

a) nie ma rozwiązań w zbiorze liczb rzeczywistych;

b) ma co najmniej jedno rozwiązanie w zbiorze liczb rzeczywistych;

c) ma nieskończenie wiele rozwiązań w zbiorze liczb rzeczywistych.

5. Dane są takie liczby całkowite a i b , że liczby $a + b$ i $a - b$ są podzielne przez 12.

Wynika z tego, że obie liczby a i b są podzielne przez

a) 2;

b) 3;

c) 4.

6. Trójkąt ABC jest podstawą takiego ostrosłupa $ABCS$, że kąty ASB , BSC , CSA są równe. Wynika z tego, że

a) $AS = BS = CS$;

b) $AB = BC = CA$;

c) ostrosłup $ABCS$ jest prawidłowy.

7. Dodatnie liczby a i b są całkowite i ich największy wspólny dzielnik jest równy 1.

Ponadto liczba $a \cdot b$ jest kwadratem liczby całkowitej. Wynika z tego, że

a) obie liczby a i b są kwadratami liczb całkowitych;

b) największy wspólny dzielnik liczb a oraz $a + b$ jest równy 1;

c) liczba $a + b$ jest kwadratem liczby całkowitej.

8. Istnieje taki ostrosłup prawidłowy siedmiokątny, którego krawędź boczna jest

a) dłuższa od krawędzi podstawy;

b) równa krawędzi podstawy;

c) krótsza od krawędzi podstawy.

Imię:

Nazwisko:

 Klasa:

9. Dodatnia liczba całkowita d jest dzielnikiem dodatniej liczby całkowitej a . Liczbę d zwiększono o 30% uzyskując w wyniku liczbę całkowitą będącą dzielnikiem liczby a . Wynika z tego, że liczba a jest podzielna przez

- ☐ a) 10;
☐ b) 13;
☐ c) 30.

10. Dany jest trójkąt ABC , w którym $BC = AC$. Dwusieczna kąta BAC przecina odcinek BC w punkcie D . Wynika z tego, że kąt ADC jest

- ☐ a) równy $3 \cdot \angle DAC$;
☐ b) większy od kąta ACB ;
☐ c) mniejszy od kąta BAC .

11. Liczba $\frac{2}{1+\sqrt{3}} + \frac{1}{2+\sqrt{3}}$ jest

- ☐ a) niewymierna;
☐ b) całkowita;
☐ c) większa od $\frac{2}{3}$.

12. Sfera wpisana w czworościan $ABCD$ jest styczna do ścian ABC i ABD odpowiednio w punktach K i L . Wynika z tego, że

- ☐ a) $AK = AL$;
☐ b) $\angle AKB = \angle ALB$;
☐ c) oba punkty K i L są środkami okręgów wpisanych w trójkąty ABC i ABD .

13. Na odcinku długości 1 wybrano trzy różne punkty dzieląc ten odcinek na cztery części. Wynika z tego, że

- ☐ a) długość co najmniej jednej z tych części jest większa od $1/5$;
☐ b) suma długości pewnych dwóch z tych części jest nie mniejsza od $1/2$;
☐ c) z pewnych trzech części można zbudować trójkąt.

Imię:

Nazwisko:

Klasa:

14. Dane są takie liczby a, b , że $a > b$ oraz liczby $a(b+1)$ i $b(a+1)$ są wymierne. Wynika z tego, że

☐

a) liczba $a - b$ jest wymierna;

☐

b) liczba ab jest wymierna;

☐

c) obie liczby a i b są wymierne.

15. W czworokącie $ABCD$ kąty ABC i BCD są proste. Wynika z tego, że

☐

a) $AD \geq BC$;

☐

b) kąt CDA jest prosty;

☐

c) $AB^2 + BD^2 = AC^2 + CD^2$.



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



Stowarzyszenie
na rzecz Edukacji
Matematycznej

MINISTERSTWO
EDUKACJI
NARODOWEJ



OŚRODEK
ROZWOJU
EDUKACJI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Rozwiązania zadań testowych

1. Miary α, β, γ kątów pewnego trójkąta spełniają warunek $\alpha + \beta < \gamma$. Wynika z tego, że

- ☐ N a) trójkąt ten jest ostrokątny;
☐ T b) trójkąt ten jest rozwartokątny;
☐ N c) taki trójkąt nie istnieje.

Komentarz

Przekształcimy podaną nierówność równoważnie. Dodając do obu jej stron γ , otrzymujemy $\alpha + \beta + \gamma < 2\gamma$. Suma kątów w trójkącie jest równa 180° , a zatem $180^\circ < 2\gamma$. Stąd wniosek, że warunek dany w treści zadania jest równoważny zależności $90^\circ < \gamma$, która oznacza, że trójkąt jest rozwartokątny.

2. Długość przekątnej pewnego kwadratu jest liczbą niewymierną. Wynika z tego, że

- ☐ N a) pole tego kwadratu jest liczbą wymierną;
☐ N b) długość boku tego kwadratu jest liczbą wymierną;
☐ N c) obwód tego kwadratu jest liczbą całkowitą.

Komentarz

Rozważmy kwadrat, którego przekątna d ma długość $\sqrt[4]{2}$. Liczba $\sqrt[4]{2}$ jest liczbą niewymierną. Ponadto pole rozważanego kwadratu jest równe

$$\frac{1}{2}d^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

i jest to liczba niewymierna. Z kolei długość boku tego kwadratu wynosi

$$\frac{\sqrt{2}}{2}d = \frac{\sqrt[4]{8}}{2}$$

i jest to także liczba niewymierna. Wreszcie obwód tego kwadratu to

$$4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}d = 2\sqrt{2}d = 2\sqrt[4]{8}$$

i ta liczba jest również niewymierna.

3. Istnieje liczba naturalna o sumie cyfr równej 2012, podzielna przez

- ☐ T a) 4;
☐ T b) 5;
☐ N c) 6.

Komentarz

a), b) Niech a będzie liczbą, której pierwsze 2012 cyfr to 1, a cyfry dziesiątek i jedności są równe 0. Liczba a jest podzielna przez 4, gdyż jej ostatnie dwie cyfry tworzą liczbę podzielną przez 4. Liczba a jest podzielna przez 5, gdyż jej ostatnia cyfra to 0.

c) Ponieważ $6 = 2 \cdot 3$ oraz największy wspólny dzielnik liczb 2 i 3 wynosi 1, więc liczba naturalna jest podzielna przez 6 wtedy i tylko wtedy, gdy jest podzielna przez 2 i przez 3. Liczba 2012 nie jest podzielna przez 3, a zatem na mocy cechy podzielności przez 3, liczba o sumie cyfr równej 2012 nie może być podzielna przez 3. Tym bardziej więc liczba ta nie może być podzielna przez 6.

4. Nierówność $\sqrt{x^2 - 1} > x$

- ☐ N a) nie ma rozwiązań w zbiorze liczb rzeczywistych;
☐ T b) ma co najmniej jedno rozwiązanie w zbiorze liczb rzeczywistych;
☐ T c) ma nieskończenie wiele rozwiązań w zbiorze liczb rzeczywistych.

Komentarz

Każda liczba $x \leq -1$ spełnia podaną nierówność. Istotnie: jeśli $x \leq -1$, to $x^2 \geq 1$, czyli $x^2 - 1 \geq 0$, a zatem wyrażenie $\sqrt{x^2 - 1}$ jest określone. Ponadto $\sqrt{x^2 - 1} \geq 0$. Wobec tego $\sqrt{x^2 - 1} \geq 0 > -1 \geq x$.

5. Dane są takie liczby całkowite a i b , że liczby $a + b$ i $a - b$ są podzielne przez 12.

Wynika z tego, że obie liczby a i b są podzielne przez

- ☐ T a) 2;
☐ T b) 3;
☐ N c) 4.

Komentarz

a), b) Skoro obie liczby $a + b$ i $a - b$ są podzielne przez 12, to ich suma oraz różnica mają również tę własność. Stąd wynika, że liczby $2a$ i $2b$ są podzielne przez 12, a zatem istnieją takie liczby całkowite k i l , że $2a = 12k$ oraz $2b = 12l$. Wobec tego $a = 6k$, $b = 6l$, więc liczby a i b są podzielne zarówno przez 2 jak i przez 3.

c) Przyjmijmy $a = 6$ oraz $b = 6$. Wówczas liczby $a + b = 12$ i $a - b = 0$ są podzielne przez 12. Jednak wtedy żadna z liczb a i b nie jest podzielna przez 12.

6. Trójkąt ABC jest podstawą takiego ostrosłupa $ABCS$, że kąty ASB , BSC , CSA są równe. Wynika z tego, że

- ☐ N a) $AS = BS = CS$;
☐ N b) $AB = BC = CA$;
☐ N c) ostrosłup $ABCS$ jest prawidłowy.

Komentarz

Rozważmy czworościan foremny $AB'C'S$ o krawędzi długości 2. Niech B i C będą odpowiednio środkami krawędzi $B'S$, $C'S$. Przecinając rozpatrywany czworościan płaszczyzną ABC , otrzymujemy ostrosłup $ABCS$, w którym kąty ASB , BSC , CSA są równe. Ponadto $AB = \sqrt{3}$, $BC = 1$, $AC = \sqrt{3}$ oraz $AS = 2$, $BS = 1$, $CS = 1$.

7. Dodatkowo liczby a i b są całkowite i ich największy wspólny dzielnik jest równy 1. Ponadto liczba $a \cdot b$ jest kwadratem liczby całkowitej. Wynika z tego, że

- ☐ T a) obie liczby a i b są kwadratami liczb całkowitych;
☐ T b) największy wspólny dzielnik liczb a oraz $a + b$ jest równy 1;
☐ N c) liczba $a + b$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Komentarz

a) Dodatnia liczba całkowita jest kwadratem liczby całkowitej wtedy i tylko wtedy, gdy w jej rozkładzie na czynniki pierwsze każda liczba pierwsza występuje w parzystej potęgze.

Niech liczba pierwsza p będzie dzielnikiem liczby a . Wówczas liczba p jest także dzielnikiem liczby $a \cdot b$. Największy wspólny dzielnik liczb a i b jest równy 1, więc liczba p nie jest dzielnikiem liczby b . Wobec tego liczba p występuje w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby a w takiej samej potęgze, jak w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby $a \cdot b$. Jednak w rozkładzie liczby $a \cdot b$ na czynniki pierwsze każda liczba pierwsza występuje w parzystej potęgze, gdyż liczba $a \cdot b$ jest kwadratem liczby całkowitej.

b) Oznaczmy przez d największy wspólny dzielnik liczb a oraz $a + b$. Ponieważ $d \mid a$ oraz $d \mid a + b$, więc liczba d jest również dzielnikiem różnicy tych liczb równej $(a + b) - a = b$. Wobec tego $d \mid a$ oraz $d \mid b$, a skoro największy wspólny dzielnik liczb a i b jest równy 1, to wynika stąd, że $d = 1$.

c) Przyjmijmy $a = 4$ oraz $b = 9$. Liczby a i b spełniają wówczas warunki zadania, ale liczba $a + b = 13$ nie jest kwadratem liczby całkowitej.

8. Istnieje taki ostrosłup prawidłowy siedmiokątny, którego krawędź boczna jest

T	a) dłuższa od krawędzi podstawy;
N	b) równa krawędzi podstawy;
N	c) krótsza od krawędzi podstawy.

Komentarz

Rozważmy ostrosłup prawidłowy siedmiokątny $ABCDEFGS$ o podstawie siedmiokąta foremnego $ABCDEFG$. Oznaczmy przez O rzut prostokątny wierzchołka S na podstawę ostrosłupa. Wówczas $\sphericalangle AOB = 360^\circ / 7$, a zatem $\sphericalangle AOB < 60^\circ$. Wobec tego w trójkącie równoramiennym ABO bok AO jest dłuższy od podstawy AB . Ponadto, w trójkącie prostokątnym AOS przeciwprostokątna AS jest dłuższa od przyprostokątnej AO .

Podsumowując, $AS > AO > AB$, czyli w dowolnym ostrosłupie prawidłowym siedmiokątnym krawędź boczna jest dłuższa od krawędzi podstawy.

9. Dodatnia liczba całkowita d jest dzielnikiem dodatniej liczby całkowitej a . Liczbę d zwiększono o 30% uzyskując w wyniku liczbę całkowitą będącą dzielnikiem liczby a . Wynika z tego, że liczba a jest podzielna przez

T	a) 10;
T	b) 13;
N	c) 30.

Komentarz

a) Zwiększając liczbę d o 30%, uzyskujemy liczbę $d + \frac{30}{100}d = \frac{13}{10}d$, która jest całkowita. Oznaczmy tę liczbę przez l . Wówczas $\frac{13}{10}d = l$, czyli $13d = 10l$, a zatem 10 jest dzielnikiem liczby $13d$. Liczby 13 i 10 są względnie pierwsze (tzn. ich największy wspólny dzielnik jest równy 1). Wobec tego 10 jest dzielnikiem liczby d . Ponieważ d jest dzielnikiem liczby a , więc wynika stąd, że 10 jest dzielnikiem liczby a .

b) Zwiększając liczbę d o 30%, otrzymujemy liczbę $\frac{13}{10}d$, która jest dzielnikiem liczby a . Wobec tego istnieje taka dodatnia liczba całkowita k , że $a = \frac{13}{10}dk$. Mnożąc ostatnią zależność stronami przez 10, uzyskujemy $10a = 13dk$. Stąd wniosek, że 13 jest dzielnikiem liczby $10a$. Ponieważ liczba 13 jest pierwsza, więc jest ona dzielnikiem liczby 10 lub liczby a . Pierwszy z tych przypadków nie jest spełniony. Wobec tego 13 jest dzielnikiem liczby a .

c) Przyjmijmy $a=130$ oraz $d=10$. Zwiększając liczbę d o 30%, otrzymujemy liczbę 13, będącą dzielnikiem liczby 130. Jednocześnie liczba 130 nie jest podzielna przez 30.

10. Dany jest trójkąt ABC , w którym $BC = AC$. Dwusieczna kąta BAC przecina odcinek BC w punkcie D . Wynika z tego, że kąt ADC jest

- ☐ T a) równy $3 \cdot \sphericalangle DAC$;
☐ N b) większy od kąta ACB ;
☐ N c) mniejszy od kąta BAC .

Komentarz

a) Półprosta AD jest dwusieczną kąta BAC , skąd wynika, że $\sphericalangle DAB = \sphericalangle DAC$. Ponadto, $AC = BC$, a zatem $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BAC = \sphericalangle DAB + \sphericalangle DAC = 2 \cdot \sphericalangle DAC$. Ponieważ kąt ADC jest kątem zewnętrznym trójkąta ABD , więc

$$\sphericalangle ADC = \sphericalangle DAB + \sphericalangle ABC = \sphericalangle DAC + 2 \cdot \sphericalangle DAC = 3 \cdot \sphericalangle DAC.$$

c) Wykazaliśmy przed chwilą, że $\sphericalangle ADC = 3 \cdot \sphericalangle DAC$, podczas gdy $\sphericalangle BAC = 2 \cdot \sphericalangle DAC$. Wobec tego kąt ADC jest większy od kąta BAC .

b) Rozpatrzmy trójkąt ABC , w którym $\sphericalangle ACB = 120^\circ$, $\sphericalangle CAB = 30^\circ$ i $\sphericalangle ABC = 30^\circ$. Wówczas $\sphericalangle DAC = 15^\circ$, więc $\sphericalangle ADC = 3 \cdot 15^\circ = 45^\circ$, a zatem $\sphericalangle ACB > \sphericalangle ADC$.

11. Liczba $\frac{2}{1+\sqrt{3}} + \frac{1}{2+\sqrt{3}}$ jest

- ☐ N a) niewymierna;
☐ T b) całkowita;
☐ T c) większa od $\frac{2}{3}$.

Komentarz

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} \frac{2}{1+\sqrt{3}} + \frac{1}{2+\sqrt{3}} &= \frac{2 \cdot (2+\sqrt{3})}{(1+\sqrt{3}) \cdot (2+\sqrt{3})} + \frac{1 \cdot (1+\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3}) \cdot (1+\sqrt{3})} = \\ &= \frac{4+2\sqrt{3}+1+\sqrt{3}}{5+3\sqrt{3}} = \frac{5+3\sqrt{3}}{5+3\sqrt{3}} = 1. \end{aligned}$$

12. Sfera wpisana w czworościan $ABCD$ jest styczna do ścian ABC i ABD odpowiednio w punktach K i L . Wynika z tego, że

- ☐ T a) $AK = AL$;
☐ T b) $\sphericalangle AKB = \sphericalangle ALB$;
☐ N c) oba punkty K i L są środkami okręgów wpisanych w trójkąty ABC i ABD .



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



Stowarzyszenie
na rzecz Edukacji
Matematycznej

MINISTERSTWO
EDUKACJI
NARODOWEJ



OŚRODEK
ROZWOJU
EDUKACJI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Komentarz

a) Oznaczmy przez O środek sfery. Wówczas $\sphericalangle OKA = 90^\circ = \sphericalangle OLA$. Wobec tego, na mocy twierdzenia Pitagorasa, otrzymujemy

$$AK^2 = AO^2 - OK^2 = AO^2 - OL^2 = AL^2,$$

skąd $AK = AL$.

b) Wykazaliśmy wyżej, że $AK = AL$. Analogicznie wykazujemy, że $BK = BL$. Trójkąty ABK i ABL mają ponadto wspólny bok AB . Wobec tego trójkąty te są przystające (cecha bok-bok-bok), skąd wynika, że $\sphericalangle AKB = \sphericalangle ALB$.

c) Rozpatrzmy taki czworościan $ABCD$, że trójkąt ABC jest równoboczny, a trójkąt ABD prostokątny równoramienny o kącie prostym przy wierzchołku D . Przypuśćmy, że punkty K i L są środkami okręgów wpisanych w trójkąty ABC i ABD . Wtedy półproste AK i BK są odpowiednio dwusiecznymi kątów BAC i ABC , skąd wniosek, że $\sphericalangle BAK = \sphericalangle ABK = 30^\circ$, więc $\sphericalangle AKB = 120^\circ$. Analogicznie wykazujemy, że $\sphericalangle ALB = 135^\circ$. A zatem $\sphericalangle AKB \neq \sphericalangle ALB$, wbrew udowodnionej wcześniej równości $\sphericalangle AKB = \sphericalangle ALB$. Z otrzymanej sprzeczności wynika, że oba punkty K i L nie mogą być jednocześnie środkami okręgów wpisanych w trójkąty ABC i ABD .

13. Na odcinku długości 1 wybrano trzy różne punkty dzieląc ten odcinek na cztery części. Wynika z tego, że

T	a) długość co najmniej jednej z tych części jest większa od $1/5$;
T	b) suma długości pewnych dwóch z tych części jest nie mniejsza od $1/2$;
N	c) z pewnych trzech części można zbudować trójkąt.

Komentarz

Oznaczmy przez a , b , c i d długości czterech części, na które podzielono odcinek. Warunek dany w treści zadania oznacza, że $a + b + c + d = 1$.

a) Przypuśćmy, że

$$a \leq \frac{1}{5}, \quad b \leq \frac{1}{5}, \quad c \leq \frac{1}{5} \quad \text{oraz} \quad d \leq \frac{1}{5}.$$

Dodając powyższe cztery nierówności stronami, otrzymujemy $a + b + c + d \leq 4/5$. Z otrzymanej sprzeczności wynika, że długość co najmniej jednej części jest większa od $1/5$.

b) Przypuśćmy, że

$$a + b < \frac{1}{2}, \quad a + c < \frac{1}{2}, \quad a + d < \frac{1}{2}, \quad b + c < \frac{1}{2}, \quad b + d < \frac{1}{2} \quad \text{oraz} \quad c + d < \frac{1}{2}.$$

Dodając powyższe nierówności stronami, uzyskujemy

$$3a + 3b + 3c + 3d < \frac{6}{2}, \quad \text{czyli} \quad a + b + c + d < 1.$$

Otrzymaliśmy sprzeczność, z której wynika, że suma długości pewnych dwóch części jest nie mniejsza od $1/2$.

c) Przyjmijmy $a = 1/10$, $b = 1/10$, $c = 3/10$, $d = 5/10$. Wtedy $a + b + c + d = 1$, lecz żadne trzy spośród tych czterech długości nie spełniają nierówności trójkąta.

14. Dane są takie liczby a , b , że $a > b$ oraz liczby $a(b+1)$ i $b(a+1)$ są wymierne. Wynika z tego, że

T	a) liczba $a - b$ jest wymierna;
N	b) liczba ab jest wymierna;
N	c) obie liczby a i b są wymierne.

Komentarz

a) Liczby $a(b+1)$ i $b(a+1)$ są wymierne, a zatem ich różnica

$$a(b+1) - b(a+1) = ab + a - ab - b = a - b$$

również jest liczbą wymierną.

b), c) Przyjmijmy $a = \sqrt{2}$ oraz $b = \sqrt{2} - 1$. Wówczas $a > b$, a ponadto liczby $a(b+1)$ oraz $b(a+1)$ są wymierne, gdyż

$$a(b+1) = \sqrt{2} \cdot (\sqrt{2} - 1 + 1) = 2, \quad b(a+1) = (\sqrt{2} - 1) \cdot (\sqrt{2} + 1) = 2 - 1 = 1.$$

Jednak wtedy liczby a i b oraz liczba

$$ab = \sqrt{2} \cdot (\sqrt{2} - 1) = 2 - \sqrt{2}$$

nie są wymierne.

15. W czworościanie $ABCD$ kąty ABC i BCD są proste. Wynika z tego, że

T	a) $AD \geq BC$;
N	b) kąt CDA jest prosty;
T	c) $AB^2 + BD^2 = AC^2 + CD^2$.

Komentarz

a) Przez punkty B i C poprowadźmy odpowiednio płaszczyzny k i l prostopadłe do prostej BC . Wówczas płaszczyzny te są równoległe, a odległość między nimi jest równa długości odcinka BC . Ponadto punkt A należy do płaszczyzny k , a punkt D do płaszczyzny l . Stąd $AD \geq BC$.

b) Rozpatrzmy trójkąt prostokątny ABC o kącie prostym przy wierzchołku B . Przez punkt C poprowadźmy prostą prostopadłą do płaszczyzny ABC i wybierzmy na niej



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



Stowarzyszenie
na rzecz Edukacji
Matematycznej

MINISTERSTWO
EDUKACJI
NARODOWEJ



OŚRODEK
ROZWOJU
EDUKACJI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



punkt D , różny od punktu C . Wówczas czworościan $ABCD$ spełnia warunki zadania. Za-
uważmy jednak, że w trójkącie ACD kąt ACD jest prosty, a zatem kąt CDA jest mniejszy
od 90° .

c) Ponieważ trójkąt ABC jest prostokątny, więc na mocy twierdzenia Pitagorasa

$$AB^2 + BC^2 = AC^2, \quad \text{a zatem} \quad BC^2 = AC^2 - AB^2.$$

Podobnie, na mocy twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta prostokątnego BCD , otrzymujemy

$$BC^2 + CD^2 = BD^2, \quad \text{więc} \quad BC^2 = BD^2 - CD^2.$$

Wobec tego $AC^2 - AB^2 = BD^2 - CD^2$, skąd wniosek, że $AB^2 + BD^2 = AC^2 + CD^2$.



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



Stowarzyszenie
na rzecz Edukacji
Matematycznej

MINISTERSTWO
EDUKACJI
NARODOWEJ



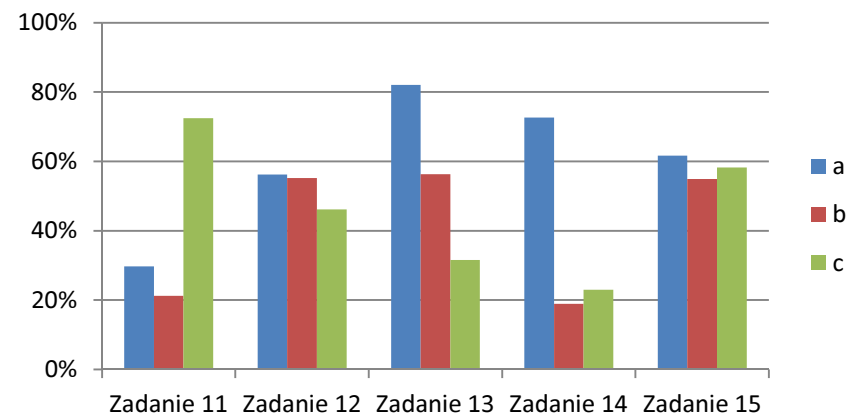
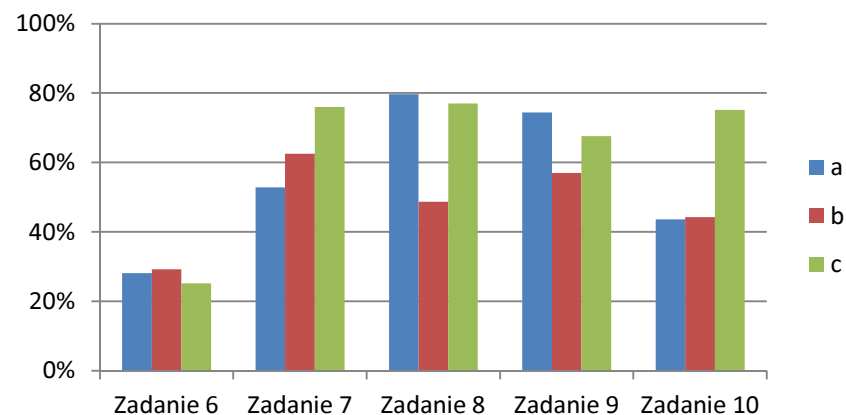
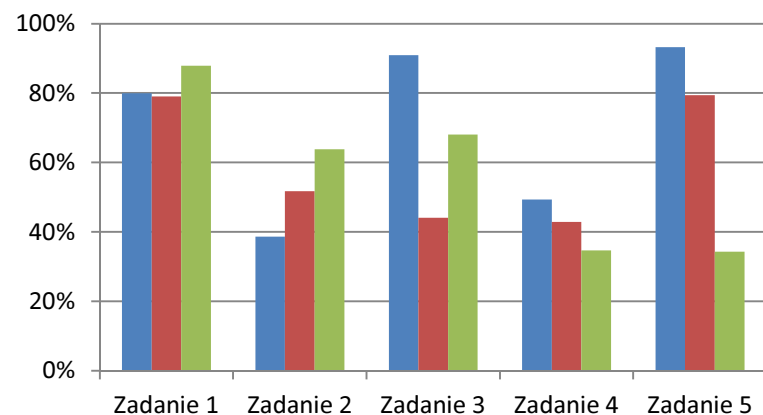
OŚRODEK
ROZWOJU
EDUKACJI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Statystyki części testowej VIII OMG (2012/2013)

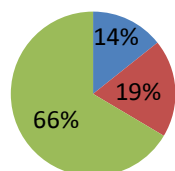
Procentowe zestawienie liczby poprawnych odpowiedzi zadań testowych
w podziale na zadania (kraj)



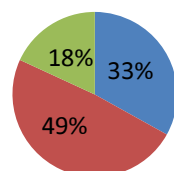
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Procentowe zestawienie liczby osób, które uzyskały daną liczbę punktów w podziale na zadania (kraj)

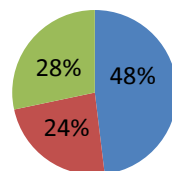
Zadanie 1



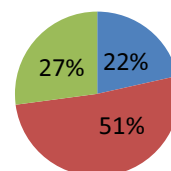
Zadanie 2



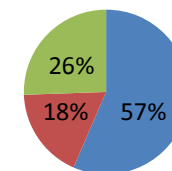
Zadanie 3



Zadanie 4

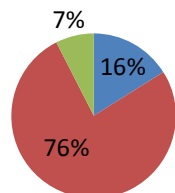


Zadanie 5

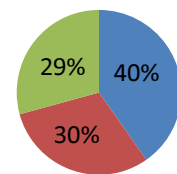


1 pkt
0.5 pkt
0 pkt

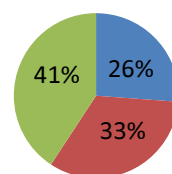
Zadanie 6



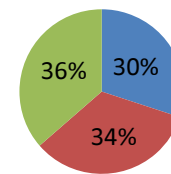
Zadanie 7



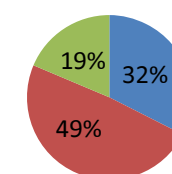
Zadanie 8



Zadanie 9

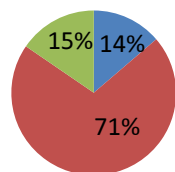


Zadanie 10

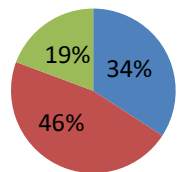


1 pkt
0.5 pkt
0 pkt

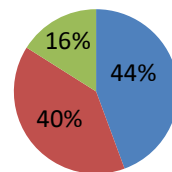
Zadanie 11



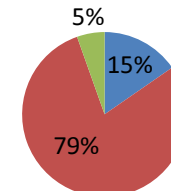
Zadanie 12



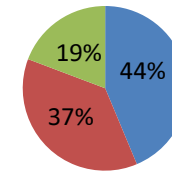
Zadanie 13



Zadanie 14



Zadanie 15

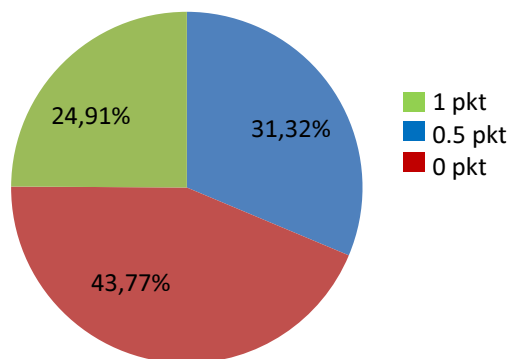


1 pkt
0.5 pkt
0 pkt

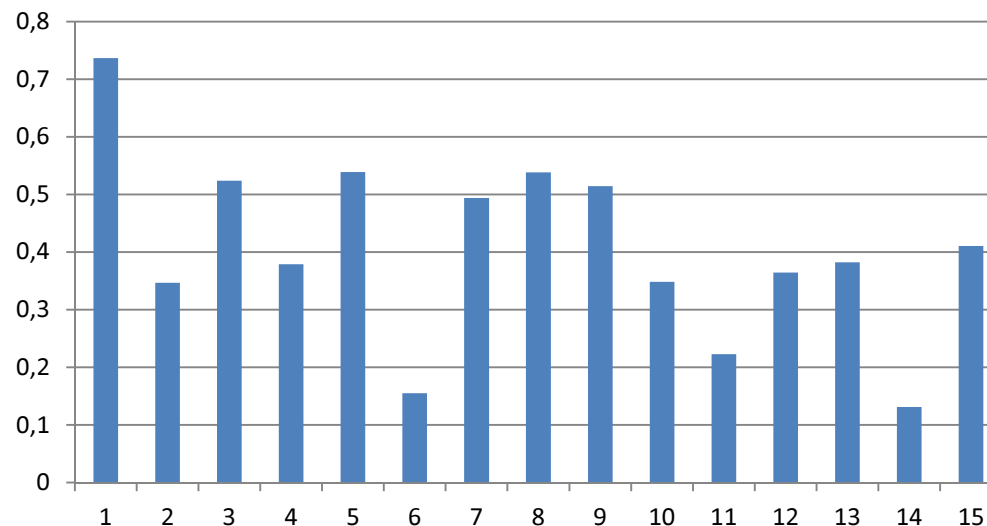


Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Procentowe zestawienie liczby uzyskanych ocen ze wszystkich zadań



Średnia otrzymanych punktów za poszczególne zadania



Średnia liczba poprawnych odpowiedzi: 55.99%

Liczba uczniów, którzy wzięli udział w części testowej VIII OMG (2012/2013): 9719

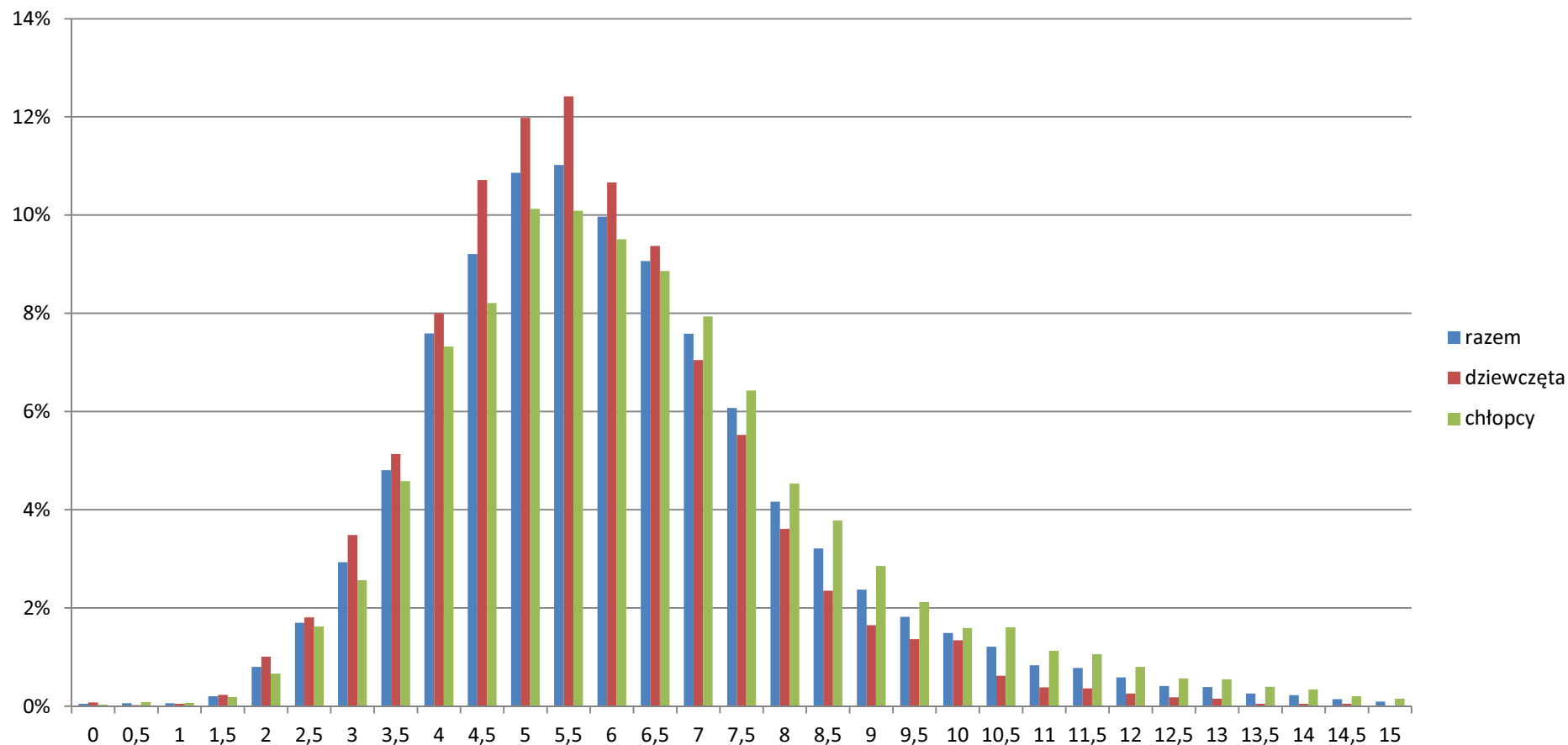
Liczba szkół biorących udział w części testowej VIII OMG (2012/2013): 1016

Średnia punktów w kraju: 6.08



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Procentowa liczba osób, które otrzymały poszczególną sumę punktów (kraj)



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



Stowarzyszenie
na rzecz Edukacji
Matematycznej

MINISTERSTWO
EDUKACJI
NARODOWEJ



OŚRODEK
ROZWOJU
EDUKACJI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

VIII Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

Zadania konkursowe zawodów pierwszego stopnia — część korespondencyjna

(1 września – 29 października 2012 r.)

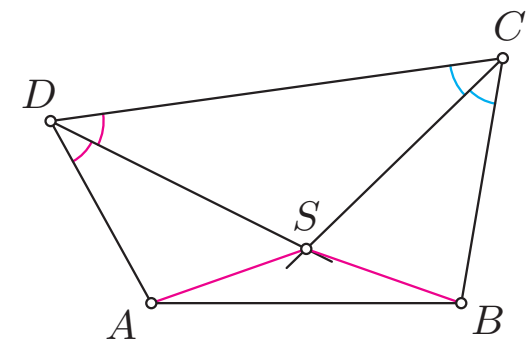


1. Wykaż, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n , liczby

$$n, n^5, n^9, n^{13}, n^{17}, \dots$$

mają jednakowe cyfry jedności.

2. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym $AD + BC = CD$. Dwusieczne kątów BCD i CDA przecinają się w punkcie S . Udowodnij, że $AS = BS$.

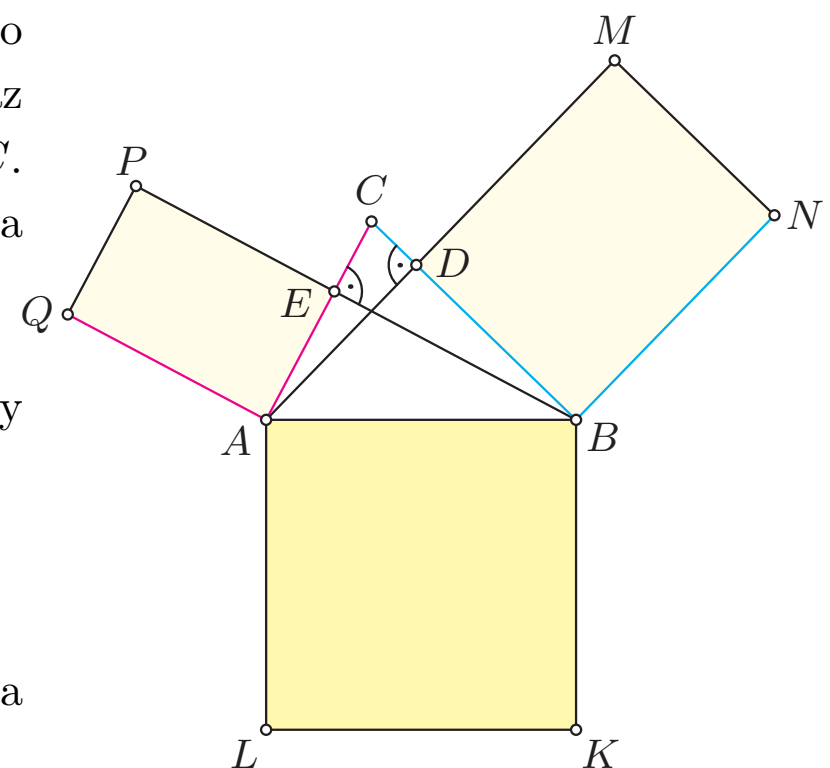


Zadanie 2.

3. Liczba naturalna n jest co najmniej trzycyfrowa. Jeżeli pomiędzy cyfrę setek a cyfrę dziesiątek tej liczby wpiszemy znak mnożenia, to po wykonaniu mnożenia otrzymamy połowę liczby n . Wyznacz wszystkie liczby n o tej własności.

4. W balu wzięło udział 102 królewiczów i 103 królewny. Po balu okazało się, że każdy królewicz zatańczył z taką samą liczbą królewn. Udowodnij, że pewne dwie królewny zatańczyły z taką samą liczbą królewiczów.

5. Odcinki AD i BE są wysokościami trójkąta ostrokątnego ABC . Po zewnętrznej stronie trójkąta ABC zbudowano kwadrat $ABKL$ oraz prostokąty $BDMN$ i $AEPQ$, przy czym $BN = BC$ oraz $AQ = AC$. Udowodnij, że suma pól prostokątów $BDMN$ i $AEPQ$ jest równa polu kwadratu $ABKL$.



Zadanie 5.

6. W ostrosłup $SABCD$, którego podstawą jest czworokąt wypukły $ABCD$, można wpisać sferę. Udowodnij, że

$$\sphericalangle ASB + \sphericalangle CSD = \sphericalangle BSC + \sphericalangle DSA.$$

7. Wyznacz wszystkie dodatnie liczby całkowite n , dla których liczba $n^3 - 7n$ jest kwadratem liczby całkowitej.



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



Stowarzyszenie
na rzecz Edukacji
Matematycznej

MINISTERSTWO
EDUKACJI
NARODOWEJ



OŚRODEK
ROZWOJU
EDUKACJI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



VIII Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

Zawody stopnia pierwszego – część korespondencyjna

(1 września 2012 r. – 29 października 2012 r.)

Szkice rozwiązań zadań konkursowych

1. Wykaż, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n , liczby

$$n, n^5, n^9, n^{13}, n^{17}, \dots$$

mają jednakowe cyfry jedności.

Szkic rozwiązania

Zacniemy od wykazania, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n , liczby n oraz n^5 mają jednakowe cyfry jedności.

Zauważmy, że jeśli cyfrą jedności liczby A jest cyfra a , a liczby B — cyfra b , to cyfrą jedności liczby AB jest cyfra jedności liczby ab . Opierając się na tym spostrzeżeniu możemy, znając cyfrę jedności liczby n , wyznaczyć kolejno cyfry jedności liczb n^2 , n^4 i n^5 . Wyniki przedstawia następująca tabela.

cyfra jedności liczby n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
cyfra jedności liczby n^2	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1
cyfra jedności liczby n^4	0	1	6	1	6	5	6	1	6	1
cyfra jedności liczby n^5	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Widzimy zatem, że w każdym z dziesięciu przypadków, cyfry jedności liczb n oraz n^5 są równe. Innymi słowy, liczba $n^5 - n$ jest podzielna przez 10.

Stąd wynika, że $10 | n^4(n^5 - n)$, czyli $10 | n^9 - n^5$. A zatem $10 | n^4(n^9 - n^5)$, czyli $10 | n^{13} - n^9$. Kontynuując to rozumowanie dochodzimy do wniosku, że liczby

$$n, n^5, n^9, n^{13}, n^{17}, \dots$$

mają jednakowe cyfry jedności.

Uwaga

Rozwiązanie opiera się na spostrzeżeniu, że liczba $n^5 - n$ jest podzielna przez 10. Inny dowód tej podzielności można znaleźć w artykule „O n kolejnych liczbach”, *Kwadrat* nr 5 (czerwiec 2012), zadanie 3.

2. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym $AD + BC = CD$. Dwusieczne kątów BCD i CDA przecinają się w punkcie S . Udowodnij, że $AS = BS$.

Szkic rozwiązania

Niech E będzie takim punktem na odcinku CD , że $DE = AD$. Wówczas $CE = BC$. Trójkąty ADS i EDS są przystające (cecha bok-kąt-bok), a zatem $AS = ES$. Analogicznie z przystawiania trójkątów BCS i ECS wynika, że $BS = ES$. Łącząc dwie ostatnie równości, uzyskujemy tezę.

3. Liczba naturalna n jest co najmniej trzycyfrowa. Jeżeli pomiędzy cyfrę setek a cyfrę dziesiątek tej liczby wpisujemy znak mnożenia, to po wykonaniu mnożenia otrzymamy połowę liczby n . Wyznacz wszystkie liczby n o tej własności.

Szkic rozwiązania

Liczbę n możemy zapisać w postaci $n = 100a + b$, gdzie a jest dodatnią liczbą całkowitą, natomiast b — liczbą co najwyżej dwucyfrową. Wówczas warunek opisany w treści zadania przybiera postać równości

$$(1) \quad a \cdot b = \frac{1}{2}(100a + b).$$

Przekształcając równoważnie tę zależność, uzyskujemy kolejno

$$\begin{aligned} 2ab &= 100a + b \\ 2ab - 100a - b + 50 &= 50 \\ (2a - 1)(b - 50) &= 50. \end{aligned}$$

Stąd wynika, że liczba $2a - 1$ jest dodatnim i nieparzystym dzielnikiem liczby 50, a zatem jest ona równa 1, 5 lub 25. Możliwe są więc trzy przypadki.

- (1) Jeśli $2a - 1 = 1$, to $b - 50 = 50$. Wtedy jednak $b = 100$, co stoi w sprzeczności z założeniem, że liczba b jest co najwyżej dwucyfrowa.
- (2) Jeśli $2a - 1 = 5$, to $b - 50 = 10$, czyli $a = 3$ oraz $b = 60$.
- (3) Jeśli $2a - 1 = 25$, to $b - 50 = 2$, czyli $a = 13$ oraz $b = 52$.

Istnieją zatem dwie liczby $n = \mathbf{360}$ oraz $n = \mathbf{1352}$, które spełniają warunki zadania.

Uwaga

Metodzie rozwiązywania równań typu (1) został poświęcony artykuł „Sztuczka z iloczynem”, *Kwadrat* nr 5 (czerwiec 2012).

4. W balu wzięło udział 102 królewiczów i 103 królewny. Po balu okazało się, że każdy królewicz zatańczył z taką samą liczbą królewien. Udowodnij, że pewne dwie królewny zatańczyły z taką samą liczbą królewiczów.

Szkic rozwiązania

Oznaczmy przez a_i liczbę królewiczów, z którymi zatańczyła i -ta królewna. Liczby a_i są całkowite i należą do przedziału $\langle 0, 102 \rangle$. Przypuśćmy, że każda królewna zatańczyła z inną liczbą królewiczów. Ciąg $a_1, a_2, \dots, a_{103}$ zawiera wówczas 103 różne liczby, czyli występuje w nim dokładnie jeden raz każda liczba całkowita z przedziału $\langle 0, 102 \rangle$. Wobec tego

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{103} = 0 + 1 + \dots + 102 = \frac{102 \cdot 103}{2} = 5253,$$

a zatem na balu tańczyły 5253 różne pary.

Z drugiej strony, każdy królewicz zatańczył z taką samą liczbą królewien. Oznaczmy tę liczbę przez k . Stąd wynika, że na balu tańczyło $102 \cdot k$ różnych par, czyli $5253 = 102 \cdot k$. Otrzymaliśmy sprzeczność, gdyż liczba 5253 nie jest podzielna przez 102.

Uwaga

Metoda rozwiązania polega na obliczeniu na dwa sposoby, ile różnych par tańczyło. Uzyskanie dwóch różnych wyników pozwala stwierdzić, że sytuacja, w której „każda królewna zatańczyła z inną liczbą królewiczów”, nie może mieć miejsca. Inne przykłady zastosowania tej metody można znaleźć w artykule „Oblicz dwoma sposobami”, *Kwadrat* nr 6 (wrzesień 2012).

5. Odcinki AD i BE są wysokościami trójkąta ostrokątnego ABC . Po zewnętrznej stronie trójkąta ABC zbudowano kwadrat $ABKL$ oraz prostokąty $BDMN$ i $AEPQ$, przy czym $BN = BC$ oraz $AQ = AC$. Udowodnij, że suma pól prostokątów $BDMN$ i $AEPQ$ jest równa polu kwadratu $ABKL$.



Szkic rozwiązania

Oznaczmy przez R i S punkty przecięcia wysokości trójkąta ABC poprowadzonej z wierzchołka C odpowiednio z prostymi AB i KL . Trójkąty prostokątne AEB i ARC mają wspólny kąt przy wierzchołku A , a zatem są podobne. Wobec tego

$$\frac{AE}{AR} = \frac{AB}{AC}, \quad \text{więc} \quad AE \cdot AC = AR \cdot AB.$$

Podstawiając do ostatniej równości $AC = AQ$ oraz $AB = AL$, otrzymujemy

$$AE \cdot AQ = AR \cdot AL, \quad \text{czyli} \quad [AEPQ] = [ARSL],$$

gdzie $[F]$ oznacza pole figury F .

Analogicznie dowodzimy, że $[BDMN] = [BRSK]$. Dodając stronami dwie ostatnie równości, uzyskujemy tezę.

6. W ostrosłup $SABCD$, którego podstawą jest czworokąt wypukły $ABCD$, można wpisać sferę. Udowodnij, że $\sphericalangle ASB + \sphericalangle CSD = \sphericalangle BSC + \sphericalangle DSA$.

Szkic rozwiązania

Oznaczmy przez P, Q, R, T punkty styczności sfery odpowiednio ze ścianami ABS, BCS, CDS i ADS . Odcinki SP i SQ , o wspólnym końcu S , są styczne do danej sfery w punktach P i Q , a zatem $SP = SQ$. Analogicznie $BP = BQ$. Wobec tego trójkąty BSP i BSQ są przystające (cecha bok–bok–bok), skąd wynika, że $\sphericalangle BSP = \sphericalangle BSQ$.

Analogicznie dowodzimy, że $\sphericalangle CSR = \sphericalangle CSQ$, $\sphericalangle DSR = \sphericalangle DST$ oraz $\sphericalangle ASP = \sphericalangle AST$. Dodając otrzymane równości kątów stronami, otrzymujemy tezę.

7. Wyznacz wszystkie dodatnie liczby całkowite n , dla których liczba $n^3 - 7n$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Szkic rozwiązania

Rozważymy dwa przypadki.

(1) Liczba n nie jest podzielna przez 7. Wtedy liczby n i $n^2 - 7$ są względnie pierwsze. Istotnie: niech d będzie wspólnym dzielnikiem liczb n i $n^2 - 7$. Skoro $d | n$, to $d | n^2$, a zatem d jest dzielnikiem liczby $n^2 - (n^2 - 7) = 7$. Z założenia wiemy, że $d \neq 7$, więc $d = 1$.

Ponieważ liczba $n^3 - 7n = n(n^2 - 7)$ jest kwadratem liczby całkowitej, a liczby n i $n^2 - 7$ są względnie pierwsze, więc $n = a^2$ i $n^2 - 7 = b^2$, gdzie a i b są pewnymi nieujemnymi liczbami całkowitymi. A zatem $a^4 - 7 = b^2$, czyli $(a^2 - b)(a^2 + b) = 7$. Stąd wyznaczamy $a^2 = 4$, $b = 3$ oraz bezpośrednio sprawdzamy, że liczba $n = a^2 = 4$ spełnia warunki zadania.

(2) Liczba n jest podzielna przez 7. Niech $n = 7m$, gdzie m jest dodatnią liczbą całkowitą. Wówczas $n^3 - 7n = 49m(7m^2 - 1)$, skąd wynika, że liczba $m(7m^2 - 1)$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Podobnie jak wyżej dowodzimy, że liczby m i $7m^2 - 1$ są względnie pierwsze, więc $m = c^2$ i $7m^2 - 1 = d^2$, gdzie c i d są pewnymi nieujemnymi liczbami całkowitymi. A zatem $7c^4 - 1 = d^2$, czyli $7c^4 = d^2 + 1$. Analizując reszty z dzielenia liczby d przez 7, dochodzimy do wniosku, że liczba $d^2 + 1$ nie może być podzielna przez 7. Ten przypadek prowadzi zatem do sprzeczności.

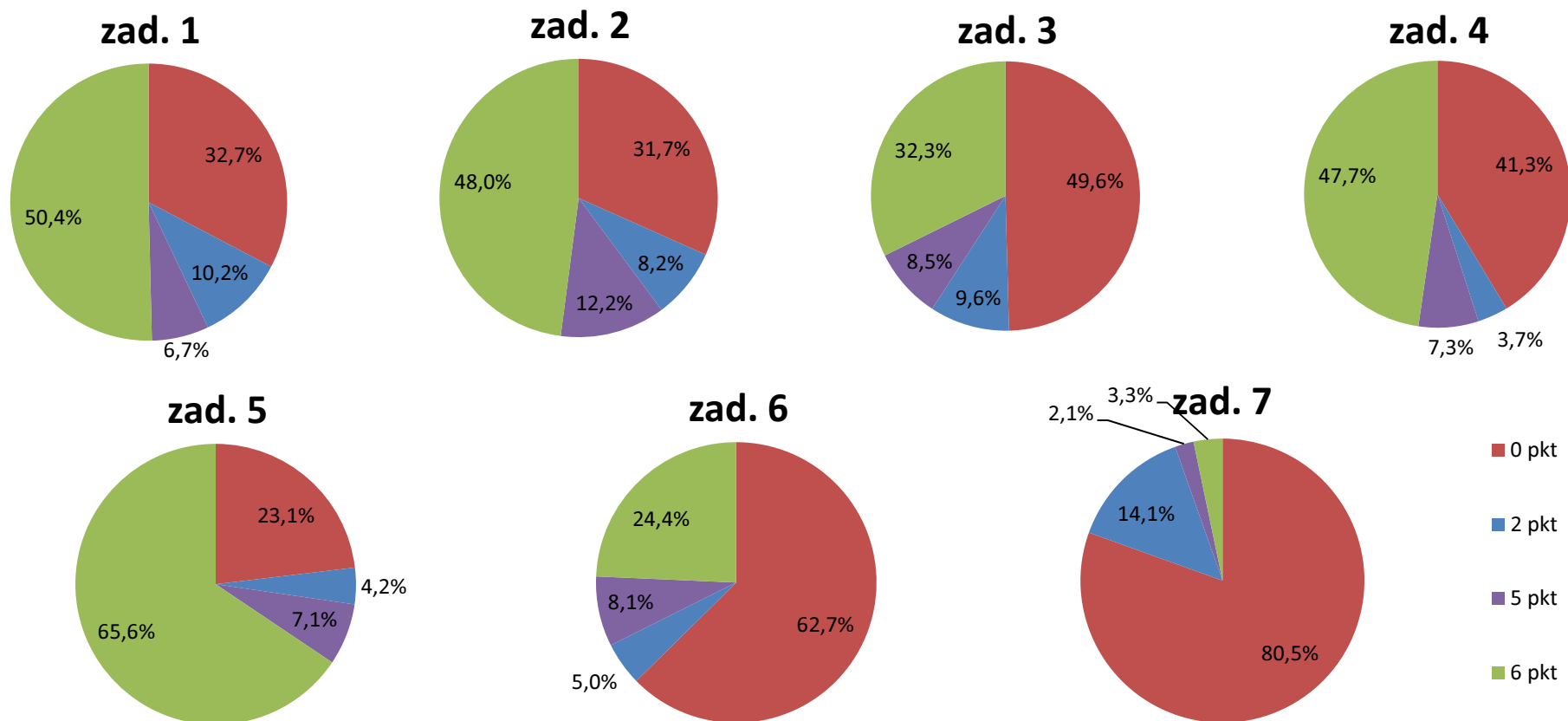
Ostatecznie jedyną liczbą spełniającą warunki zadania jest $n = 4$.

Uwaga

Powyższe rozwiązanie opiera się na spostrzeżeniu, że jeśli dodatnie liczby całkowite a i b są względnie pierwsze, a ich iloczyn jest kwadratem liczby całkowitej, to wówczas każda z liczb a i b jest kwadratem liczby całkowitej. Uzasadnienie tej własności znajduje się w rozwiązaniach zadań części testowej tegorocznej edycji OMG (zadanie 7).

Statystyki części korespondencyjnej VIII OMG (2012/2013)

Procentowa liczba osób, które uzyskały daną liczbę punktów za poszczególne zadania



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



Stowarzyszenie
na rzecz Edukacji
Matematycznej

MINISTERSTWO
EDUKACJI
NARODOWEJ



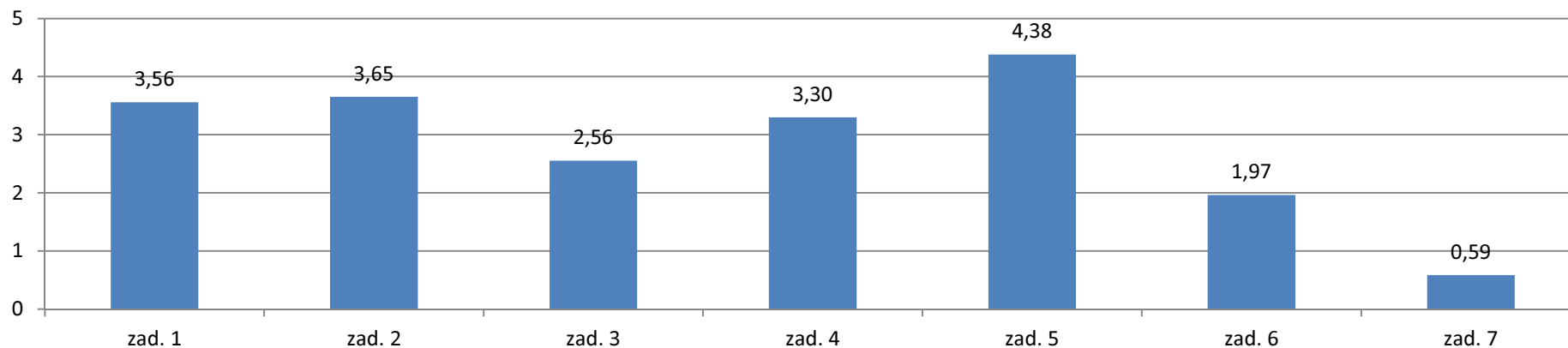
Ośrodek
Rozwoju
Edukacji

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

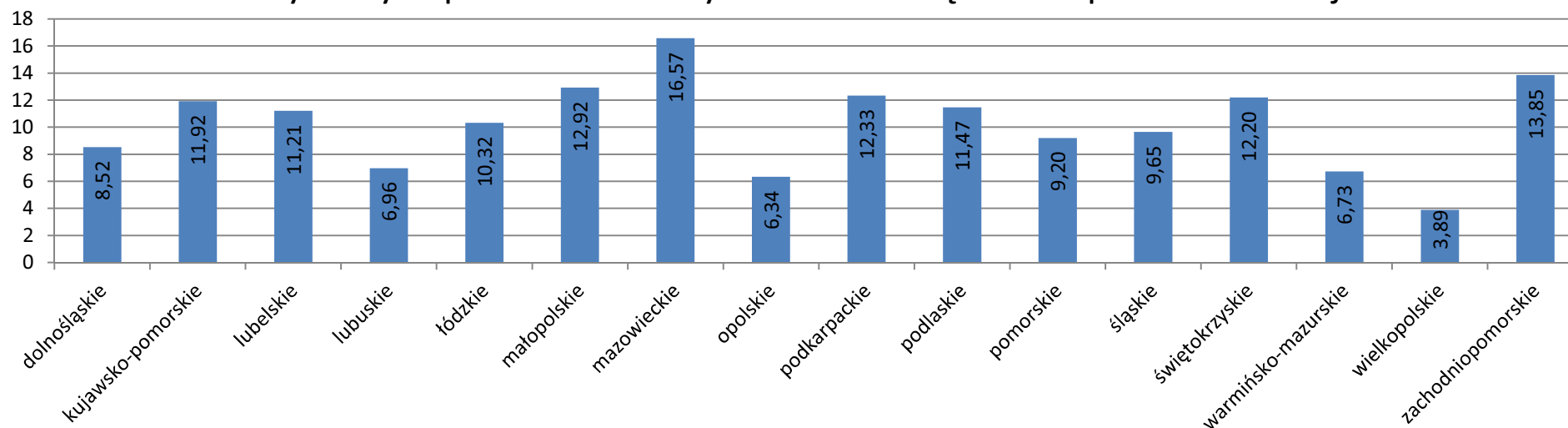


Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Średnia otrzymanych punktów za poszczególne zadania



Średnia uzyskanych punktów ze wszystkich zadań łącznie w podziale na województwa



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



Stowarzyszenie
na rzecz Edukacji
Matematycznej

MINISTERSTWO
EDUKACJI
NARODOWEJ



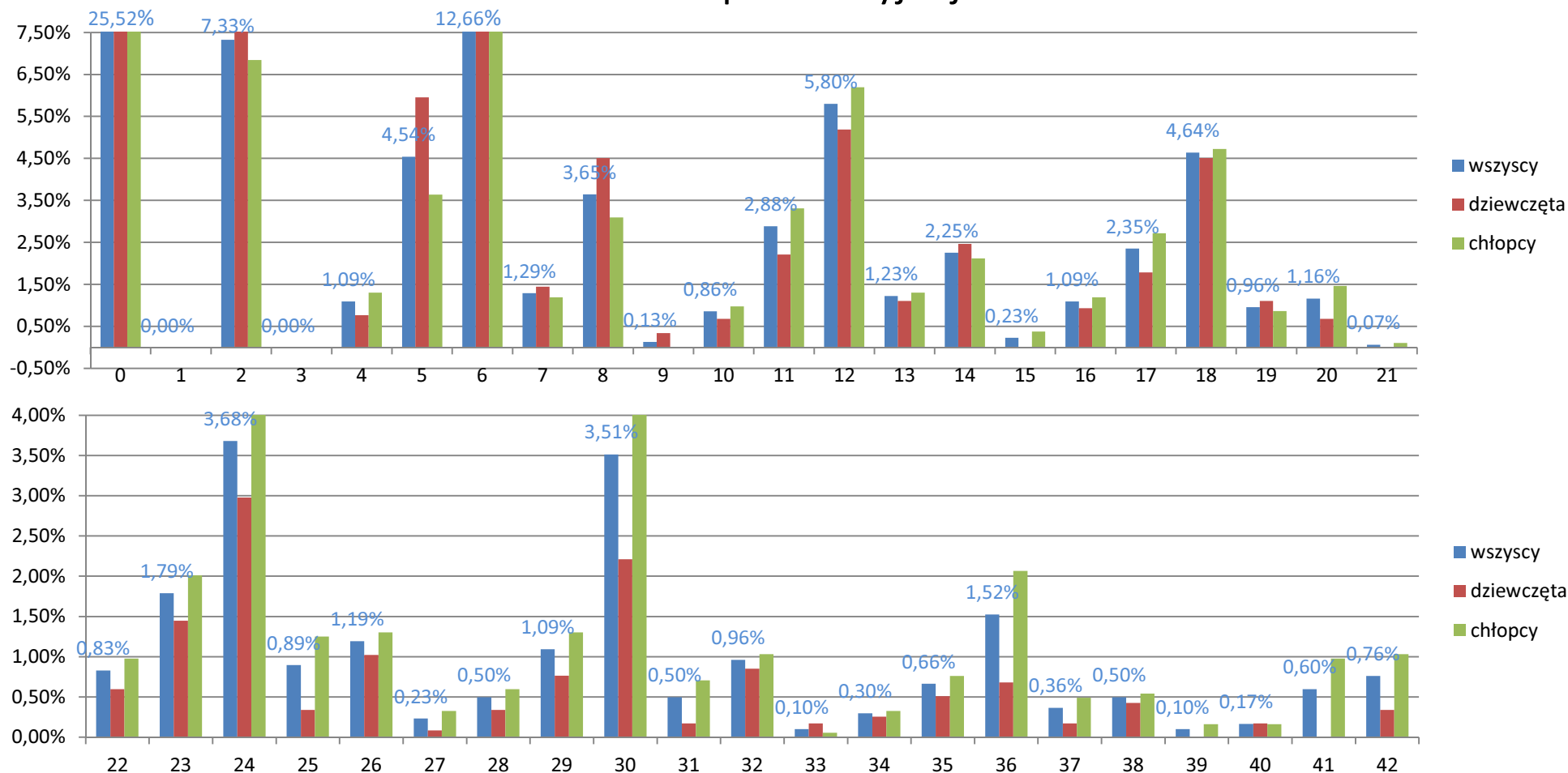
OŚRODEK
ROZWOJU
EDUKACJI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Procentowa liczba osób, które uzyskały daną sumę punktów z części korespondencyjnej



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



Stowarzyszenie
na rzecz Edukacji
Matematycznej

MINISTERSTWO
EDUKACJI
NARODOWEJ



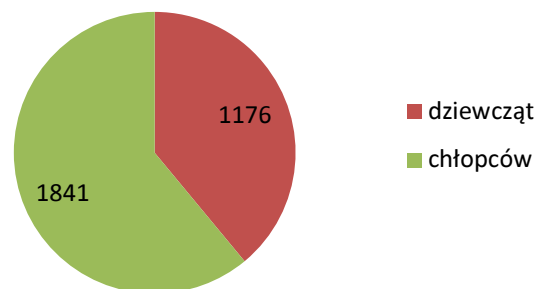
Centrum
Rozwoju
Edukacji

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



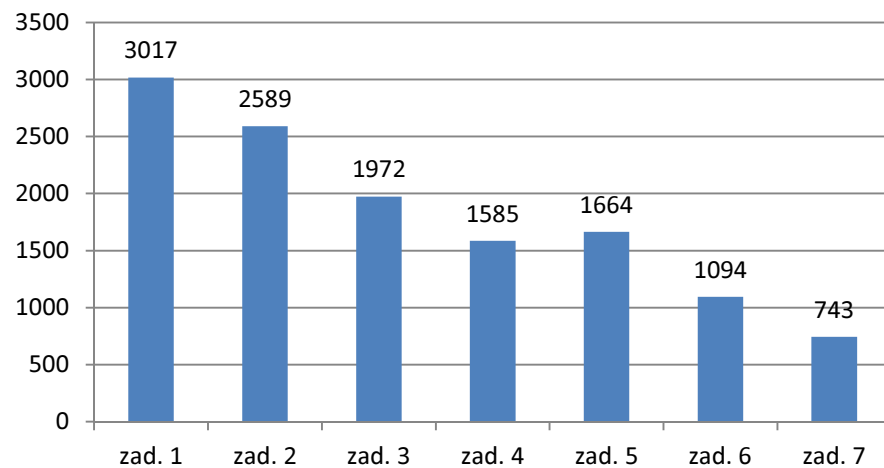
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Liczba uczniów, którzy wysłali rozwiązanie co najmniej jednego zadania w kraju

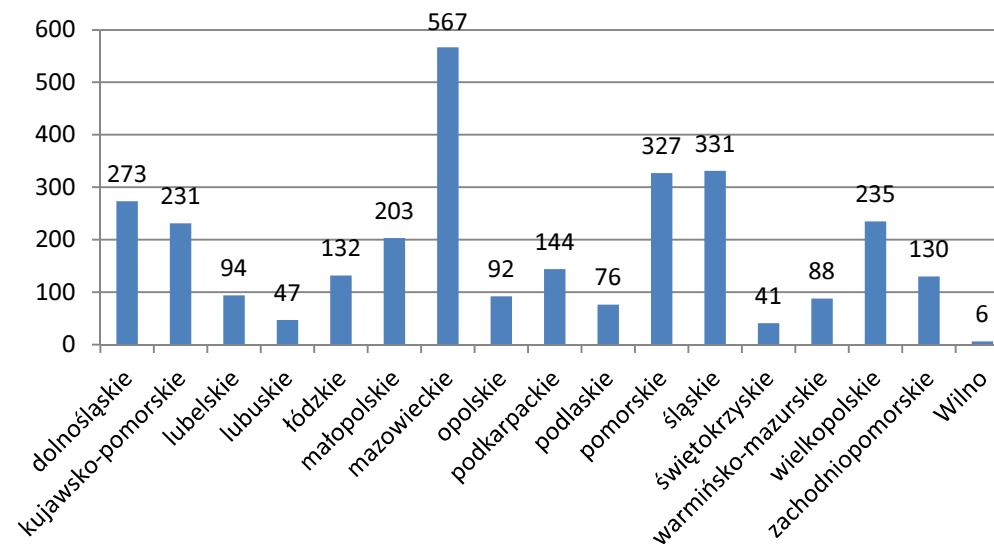


razem: 3017

Liczba nadesłanych rozwiązań poszczególnych zadań



w poszczególnych województwach



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



Stowarzyszenie
na rzecz Edukacji
Matematycznej

MINISTERSTWO
EDUKACJI
NARODOWEJ



OŚRODEK
ROZWOJU
EDUKACJI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

VIII Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

Zawody drugiego stopnia
(5 stycznia 2013 r.)



1. Wyznacz wszystkie pary (a, b) liczb całkowitych spełniających warunki

$$a < b < 2013 \quad \text{oraz} \quad a + b = 4020.$$

2. Czy istnieje taki trójkąt ostrokątny, w którym długości wszystkich boków i wszystkich wysokości są liczbami całkowitymi? Odpowiedź uzasadnij.

3. Wykaż, że jeśli liczby a i b są dodatnie i mniejsze od 1, to

$$a \cdot \sqrt{b} + b \cdot \sqrt{a} + 1 > 3ab.$$

4. Każdy punkt płaszczyzny należy pomalować na pewien kolor w taki sposób, aby każda prosta była jednokolorowa lub dwukolorowa. Jaka jest największa możliwa liczba kolorów, których można użyć do pomalowania punktów tej płaszczyzny? Odpowiedź uzasadnij.

5. Wyznacz wszystkie pary liczb pierwszych (p, q) , dla których liczba

$$p^2 + pq + q^2$$

jest kwadratem liczby całkowitej.



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



Stowarzyszenie
na rzecz Edukacji
Matematycznej

MINISTERSTWO
EDUKACJI
NARODOWEJ



OŚRODEK
ROZWOJU
EDUKACJI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



VIII Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

Zawody stopnia drugiego

(5 stycznia 2013 r.)

Szkice rozwiązań zadań konkursowych

1. Wyznacz wszystkie pary (a, b) liczb całkowitych spełniających warunki

$$a < b < 2013 \quad \text{oraz} \quad a + b = 4020.$$

Szkic rozwiązania

Ponieważ $a + b = 4020$, więc $a = 4020 - b$. Korzystając z nierówności $a < b$, otrzymujemy $4020 - b < b$. Stąd wynika, że $4020 < 2b$, czyli $2010 < b$.

Wobec tego $2010 < b < 2013$, a ponieważ liczba b jest całkowita, więc $b = 2011$ lub $b = 2012$. Wstawiając uzyskane wartości b do równości $a = 4020 - b$, dostajemy kolejno $a = 2009$ lub $a = 2008$.

Pozostaje sprawdzić, że obie otrzymane pary $(a, b) = (2009, 2011)$ i $(a, b) = (2008, 2012)$ spełniają warunki zadania.

2. Czy istnieje taki trójkąt ostrokątny, w którym długości wszystkich boków i wszystkich wysokości są liczbami całkowitymi? Odpowiedź uzasadnij.

Szkic rozwiązania

Taki trójkąt istnieje. Pokażemy, jak go skonstruować.

Rozważmy trójkąt prostokątny MBC , którego przyprostokątne BM i CM mają odpowiednio długości 15 i 20. Z twierdzenia Pitagorasa wynika, że $BC = 25$. Niech A będzie punktem symetrycznym do punktu B względem prostej CM .

Wykażemy, że trójkąt ABC spełnia warunki zadania.

Długości boków trójkąta ABC są liczbami całkowitymi. Również długość wysokości CM jest liczbą całkowitą. Ponieważ trójkąt ABC jest równoramienny ($AC = BC$), więc pozostałe dwie wysokości tego trójkąta są równe. Oznaczmy je przez h . Obliczając na dwa sposoby pole S trójkąta ABC , uzyskujemy

$$\frac{AB \cdot CM}{2} = S = \frac{BC \cdot h}{2}, \quad \text{skąd} \quad h = \frac{AB \cdot CM}{BC} = \frac{30 \cdot 20}{25} = 24.$$

Pozostaje uzasadnić, że trójkąt ABC jest ostrokątny. Ponieważ trójkąt MBC jest prostokątny, więc $\angle CBM < 90^\circ$, a zatem kąty CBA i CAB są ostre. Ponadto, przyprostokątna BM trójkąta MBC jest krótsza od przyprostokątnej CM . Wobec tego $\angle BCM < \angle CBM$, skąd wynika, że $\angle BCM < 45^\circ$, czyli $\angle ACB = 2 \cdot \angle BCM < 90^\circ$.

3. Wykaż, że jeśli liczby a i b są dodatnie i mniejsze od 1, to

$$a \cdot \sqrt{b} + b \cdot \sqrt{a} + 1 > 3ab.$$

Szkic rozwiązania

Dodatnia liczba b spełnia nierówność $b < 1$. Wobec tego $\sqrt{b} > b$, a zatem $a \cdot \sqrt{b} > ab$. Analogicznie otrzymujemy $b \cdot \sqrt{a} > ab$. Ponadto, skoro obie liczby a, b są dodatnie i mniejsze od 1, więc $1 > ab$. Stąd ostatecznie uzyskujemy

$$a \cdot \sqrt{b} + b \cdot \sqrt{a} + 1 > ab + ab + ab = 3ab,$$

co należało wykazać.



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



Stowarzyszenie
na rzecz Edukacji
Matematycznej

MINISTERSTWO
EDUKACJI
NARODOWEJ



OŚRODEK
ROZWOJU
EDUKACJI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



4. Każdy punkt płaszczyzny należy pomalować na pewien kolor w taki sposób, aby każda prosta była jednokolorowa lub dwukolorowa. Jaka jest największa możliwa liczba kolorów, których można użyć do pomalowania punktów tej płaszczyzny? Odpowiedź uzasadnij.

Szkic rozwiązania

Wykażemy, że największa możliwa liczba kolorów, których można użyć do pomalowania punktów tej płaszczyzny, jest równa 3.

Przypuśćmy, że płaszczyznę można pomalować przy użyciu czterech kolorów w taki sposób, aby każda prosta była jednokolorowa lub dwukolorowa. Wybierzmy cztery punkty różnych kolorów: C – czerwony, Z – zielony, N – niebieski oraz P – pomarańczowy.

Możliwe są dwa przypadki.

- (1) Proste CZ i NP nie są równoległe. Oznaczmy przez X punkt ich przecięcia. Wówczas, skoro punkt X leży na prostej CZ , to musi on być albo czerwony, albo zielony. Z drugiej strony, punkt X leży na prostej NP , więc jest on albo niebieski, albo pomarańczowy. Jednak obu tych warunków pogodzić się nie da.
- (2) Proste CZ i NP są równoległe. Wówczas punkty C, Z, N, P są wierzchołkami trapezu. Przyjmijmy, dla ustalenia uwagi, że przekątnymi tego trapezu są proste CN i ZP oraz oznaczmy przez X punkt przecięcia tych przekątnych. Rozumując jak poprzednio, stwierdzamy, że skoro punkt X leży na prostej CN , to jest on koloru czerwonego lub niebieskiego. Z drugiej strony, punkt X leży na prostej ZP , więc jest on zielony lub pomarańczowy. Te dwa warunki jednak nie mogą być spełnione jednocześnie.

Sprzeczność otrzymana w obu przypadkach dowodzi, że nie można pomalować punktów płaszczyzny czterema kolorami w żądany sposób.

Wskażemy teraz pokolorowanie punktów płaszczyzny trzema kolorami, aby każda prosta była jednokolorowa lub dwukolorowa.

Rozważmy punkt A i prostą k , przechodzącą przez ten punkt. Punkt A pomalujemy na czerwono, wszystkie inne punkty prostej k na zielono, a pozostałe punkty płaszczyzny na niebiesko. Każda prosta zawiera wówczas punkty jednego lub dwóch kolorów.

5. Wyznacz wszystkie pary liczb pierwszych (p, q) , dla których liczba $p^2 + pq + q^2$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Szkic rozwiązania

Rozważmy najpierw przypadek $p \geq q$. Niech a będzie taką nieujemną liczbą całkowitą, że $p^2 + pq + q^2 = a^2$. Wówczas

$$(p+q)^2 - a^2 = pq, \quad \text{czyli} \quad (p+q+a)(p+q-a) = pq.$$

Ponieważ liczby p i q są pierwsze oraz $p+q+a \geq p+q-a$, więc

$$\begin{cases} p+q+a = p \\ p+q-a = q \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} p+q+a = pq \\ p+q-a = 1. \end{cases}$$

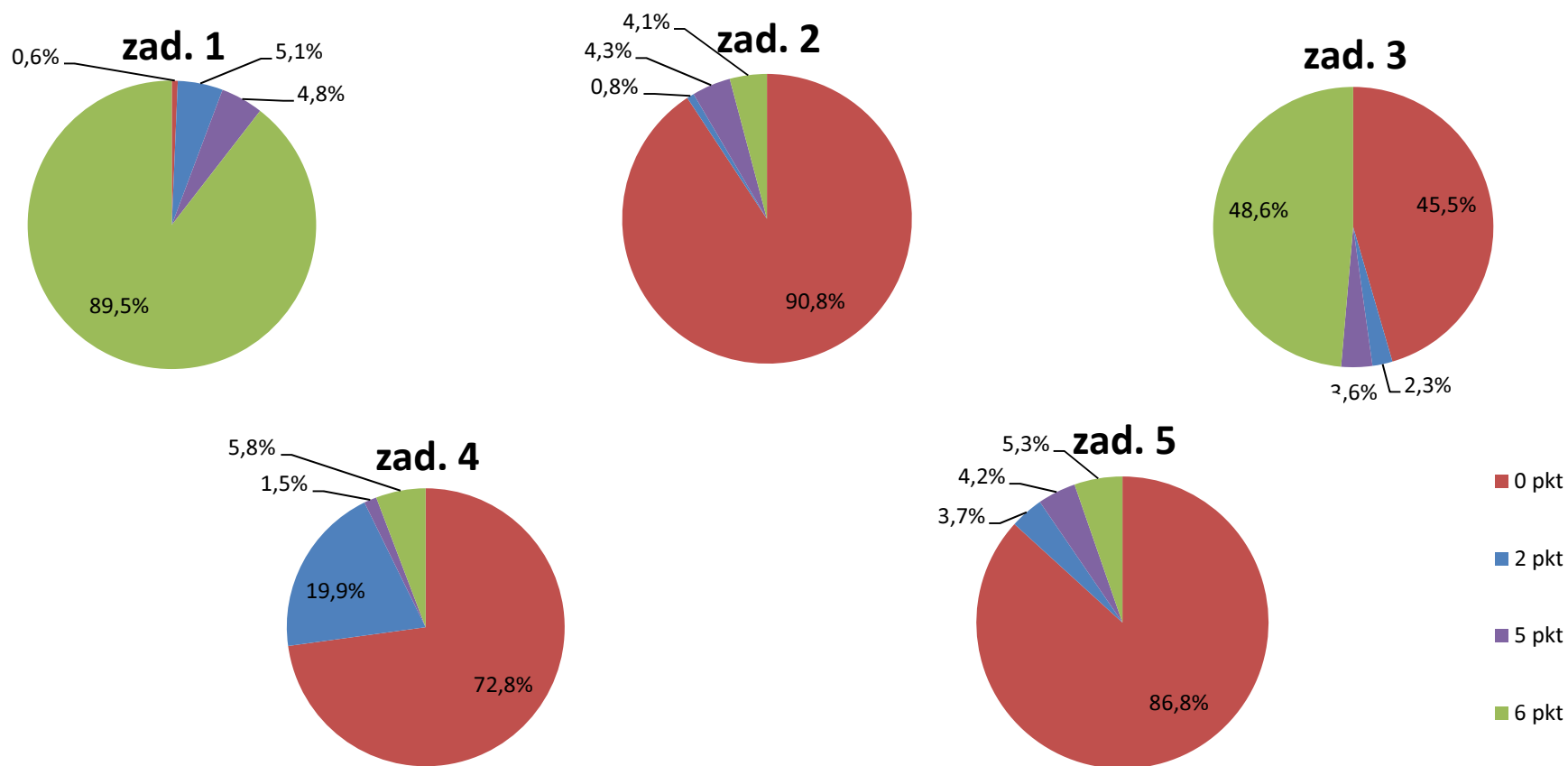
Pierwszy z powyższych układów nie może być spełniony, gdyż $p+q+a > p$.

Z kolei dodając stronami równania drugiego układu, uzyskujemy $2p+2q-1 = pq$, co po przekształceniach przybiera postać $(p-2)(q-2) = 3$. Liczby $p-2$ i $q-2$ są nieujemne oraz $p-2 \geq q-2$. Stąd wniosek, że $p-2 = 3$, $q-2 = 1$, czyli $p = 5$, $q = 3$. Pozostaje sprawdzić, że otrzymana para $(p, q) = (5, 3)$ spełnia warunki zadania.

Analogicznie dla $p \leq q$ uzyskujemy parę $(p, q) = (3, 5)$, która także spełnia warunki zadania.

Statystyki zawodów II stopnia VIII OMG (2012/2013)

Procentowa liczba osób, które uzyskały daną liczbę punktów za poszczególne zadania



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



Stowarzyszenie
na rzecz Edukacji
Matematycznej

MINISTERSTWO
EDUKACJI
NARODOWEJ



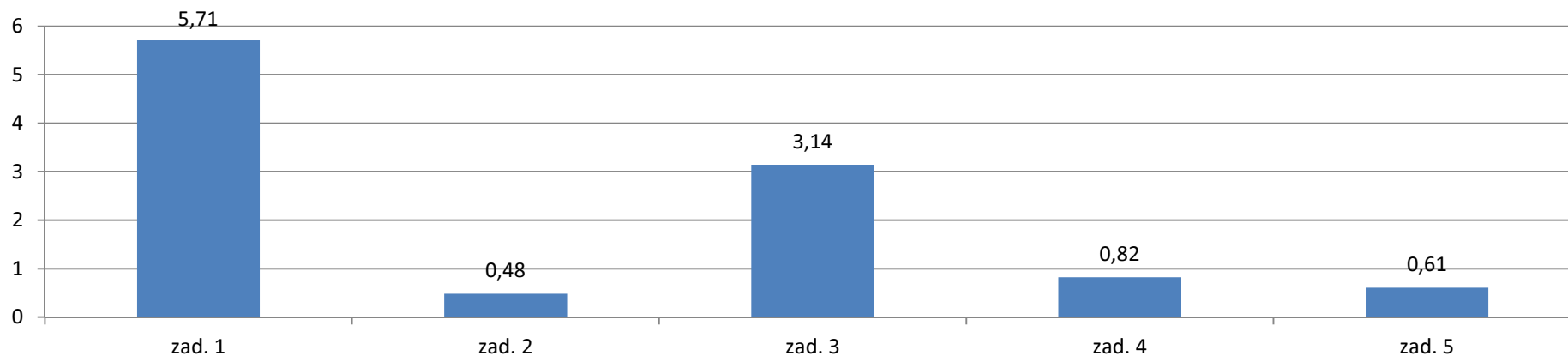
Ośrodek
Rozwoju
Edukacji

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

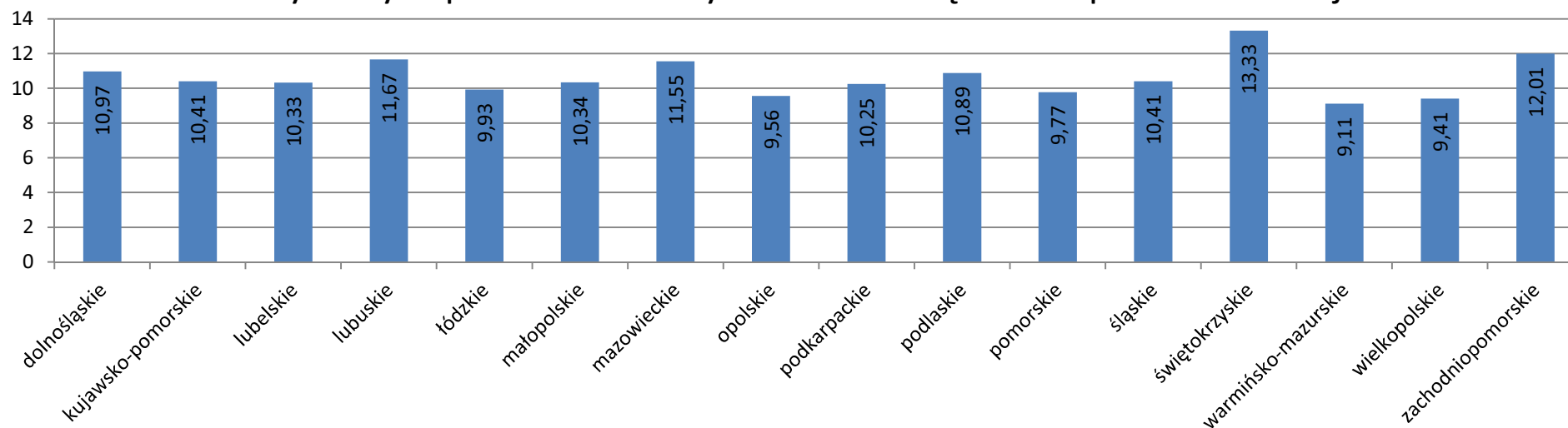


Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Średnia otrzymanych punktów za poszczególne zadania



Średnia uzyskanych punktów ze wszystkich zadań łącznie w podziale na województwa



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



Stowarzyszenie
na rzecz Edukacji
Matematycznej

MINISTERSTWO
EDUKACJI
NARODOWEJ



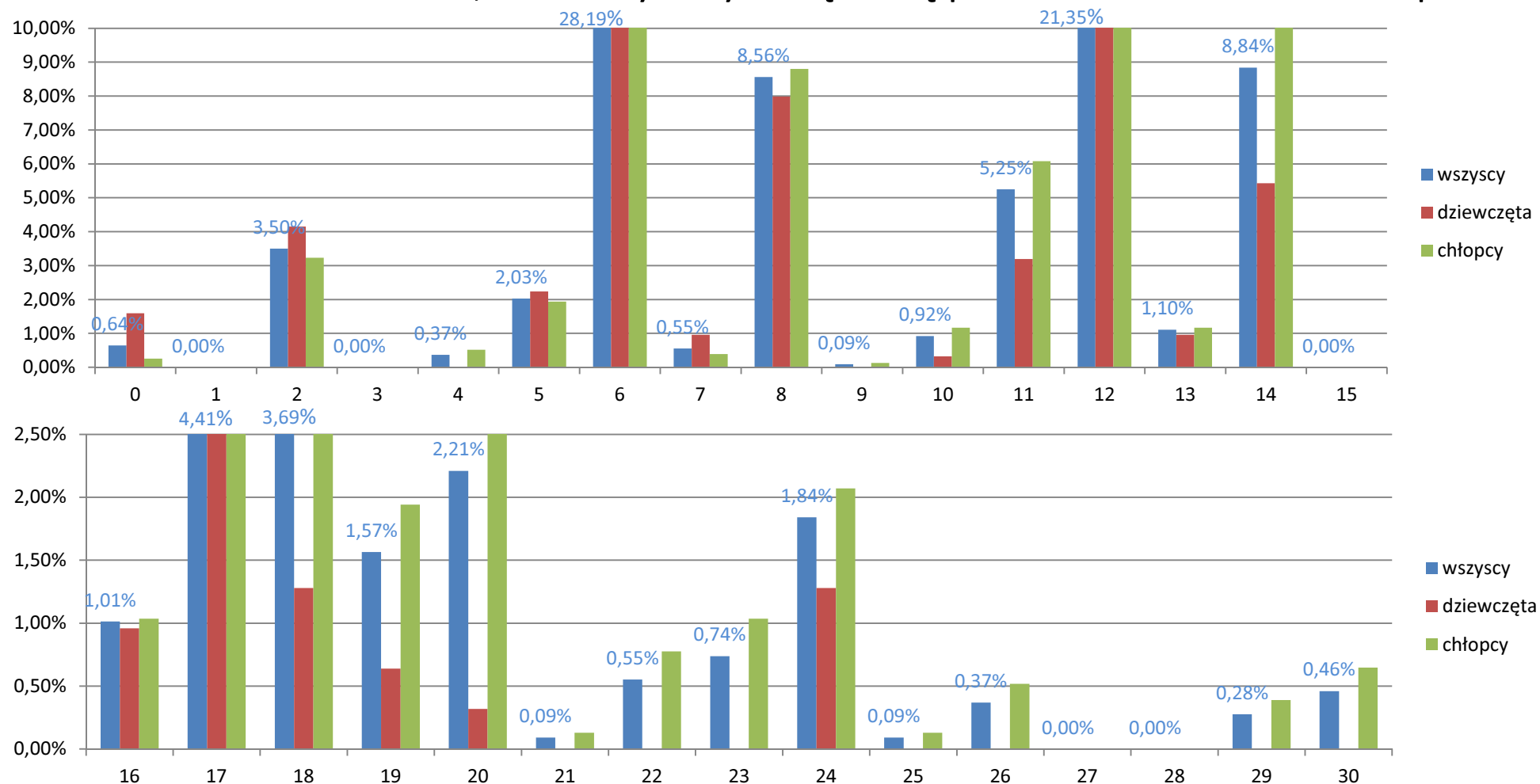
Ośrodek
Rozwoju
Edukacji

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Procentowa liczba osób, które uzyskały daną sumę punktów w zawodach II stopnia



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



Stowarzyszenie
na rzecz Edukacji
Matematycznej

MINISTERSTWO
EDUKACJI
NARODOWEJ



OŚRODEK
ROZWOJU
EDUKACJI

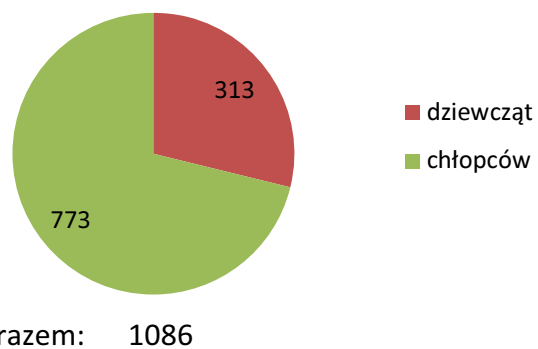
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



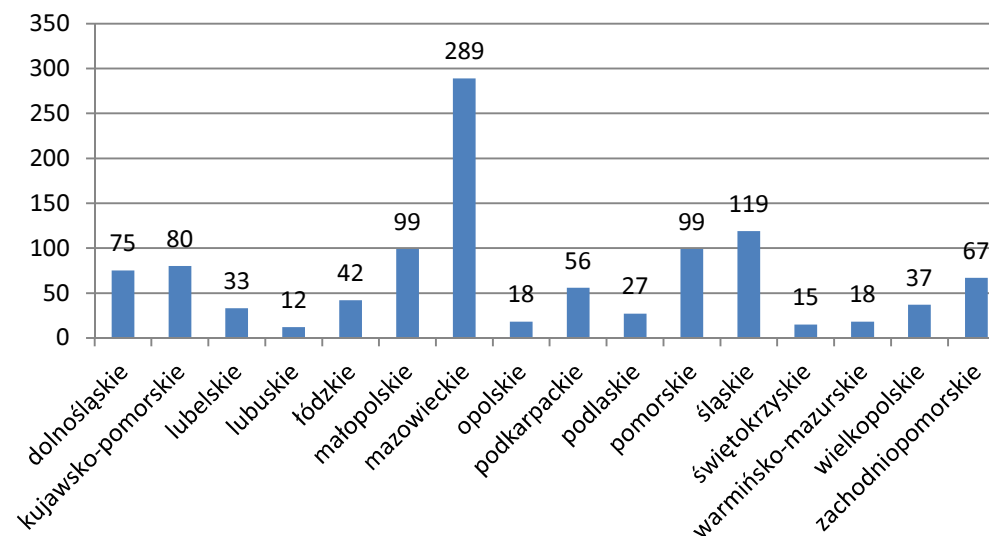
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Liczba uczniów, którzy wzięli udział w zawodach II stopnia

w kraju



w poszczególnych województwach



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



Stowarzyszenie
na rzecz Edukacji
Matematycznej

MINISTERSTWO
EDUKACJI
NARODOWEJ

ORE Ośrodek
Rozwoju
Edukacji

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

VIII Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

Zawody trzeciego stopnia
(16 marca 2013 r.)



1. Liczby całkowite a, b, c spełniają warunek $a + b + c = bc$. Udowodnij, że liczba $(a + b)(a + c)$ jest podzielna przez 4.

2. Na przyjęciu spotkało się 99 osób. Wiadomo, że wśród każdych trzech osób można wskazać taką, która zna dwie pozostałe osoby z tej trójki. Wykaż, że pewna osoba zna wszystkie inne osoby obecne na przyjęciu.

Uwaga. Przyjmujemy, że jeśli osoba A zna osobę B , to osoba B zna osobę A .

3. Dany jest trójkąt ABC , w którym $\sphericalangle ACB = 120^\circ$. Punkt M jest środkiem boku AB . Na odcinkach AC i BC wybrano odpowiednio takie punkty P i Q , że $AP = PQ = QB$. Wykaż, że $\sphericalangle PMQ = 90^\circ$.

4. Liczby a, b, c, d są większe od 2. Wykaż, że co najmniej dwie spośród liczb

$$\frac{ab}{c}, \quad \frac{bc}{d}, \quad \frac{cd}{a}, \quad \frac{da}{b}$$

są większe od 2.

5. Czy istnieje taki wielościan wypukły, który ma nieparzystą liczbę ścian i w którym każdym wierzchołku schodzi się parzysta liczba krawędzi? Odpowiedź uzasadnij.



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



Stowarzyszenie
na rzecz Edukacji
Matematycznej

MINISTERSTWO
EDUKACJI
NARODOWEJ



OŚRODEK
ROZWOJU
EDUKACJI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



VIII Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

Zawody stopnia trzeciego

(16 marca 2013 r.)

Szkice rozwiązań zadań konkursowych

1. Liczby całkowite a , b , c spełniają warunek $a + b + c = bc$. Udowodnij, że liczba $(a + b)(a + c)$ jest podzielna przez 4.

Szkic rozwiązania

Przekształcając równość $a + b + c = bc$, otrzymujemy

$$a + b = bc - c = c(b - 1) \quad \text{oraz} \quad a + c = bc - b = b(c - 1).$$

Stąd wynika, że

$$(a + b)(a + c) = c(b - 1)b(c - 1) = (b - 1)b(c - 1)c.$$

Iloczyn dwóch kolejnych liczb całkowitych jest liczbą parzystą, a zatem obie liczby $(b - 1)b$ oraz $(c - 1)c$ są podzielne przez 2. Wobec tego ich iloczyn jest liczbą podzielną przez 4, co kończy rozwiązanie zadania.

2. Na przyjęciu spotkało się 99 osób. Wiadomo, że wśród każdych trzech osób można wskazać taką, która zna dwie pozostałe osoby z tej trójki. Wykaż, że pewna osoba zna wszystkie inne osoby obecne na przyjęciu.

Uwaga. Przyjmujemy, że jeśli osoba A zna osobę B , to osoba B zna osobę A .

Szkic rozwiązania

Przypuśćmy, że wśród uczestników przyjęcia istnieje osoba A , która nie zna przynajmniej dwóch innych osób B i C . Wówczas wśród osób A , B i C nie można wskazać takiej, która zna dwie pozostałe osoby z tej trójki. Opisany przypadek jest zatem sprzeczny z warunkami zadania, skąd wniosek, że każdy uczestnik przyjęcia zna wszystkich innych lub nie zna dokładnie jednej z pozostałych osób.

Zauważmy, że w takiej sytuacji ludzi, którzy się nie znają, możemy połączyć w pary. Gdyby nie istniała osoba, znająca wszystkich pozostałych, to każdy z obecnych należałby do jakiejś pary. Jest to jednak niemożliwe, gdyż liczba uczestników przyjęcia jest nieparzysta. Z otrzymanej sprzeczności wynika, że pewna osoba zna wszystkie inne osoby obecne na przyjęciu.

3. Dany jest trójkąt ABC , w którym $\sphericalangle ACB = 120^\circ$. Punkt M jest środkiem boku AB . Na odcinkach AC i BC wybrano odpowiednio takie punkty P i Q , że $AP = PQ = QB$. Wykaż, że $\sphericalangle PMQ = 90^\circ$.

Szkic rozwiązania

Niech D będzie punktem symetrycznym do punktu Q względem punktu M . Punkt M jest wówczas środkiem przekątnych AB i DQ czworokąta $ADBQ$. Wobec tego czworokąt ten jest równoległobokiem.

Skoro proste AD i BQ są równoległe, to $\sphericalangle DAP = 180^\circ - \sphericalangle ACB = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$. Ponadto $AD = QB = AP$. Trójkąt ADP jest więc równoramienny, a jeden z jego kątów ma miarę 60° . Stąd wynika, że jest to trójkąt równoboczny. Wobec tego $PD = AP = PQ$, co z kolei oznacza, że trójkąt DQP jest równoramienny. Ponieważ punkt M jest środkiem podstawy DQ tego trójkąta, więc odcinek PM jest jego wysokością, a zatem $\sphericalangle PMQ = 90^\circ$.

4. Liczby a, b, c, d są większe od 2. Wykaż, że co najmniej dwie spośród liczb

$$\frac{ab}{c}, \quad \frac{bc}{d}, \quad \frac{cd}{a}, \quad \frac{da}{b}$$

są większe od 2.

Szkic rozwiązania

Bez straty ogólności możemy przyjąć, że liczba a jest nie mniejsza od każdej z pozostałych liczb b, c i d . Wówczas

$$\frac{a}{c} \geq 1, \quad \text{a ponieważ } b > 2, \quad \text{więc } \frac{ab}{c} > 2.$$

Analogicznie otrzymujemy $\frac{da}{b} > 2$, co kończy rozwiązanie zadania.

5. Czy istnieje taki wielościan wypukły, który ma nieparzystą liczbę ścian i w którego każdym wierzchołku schodzi się parzysta liczba krawędzi? Odpowiedź uzasadnij.

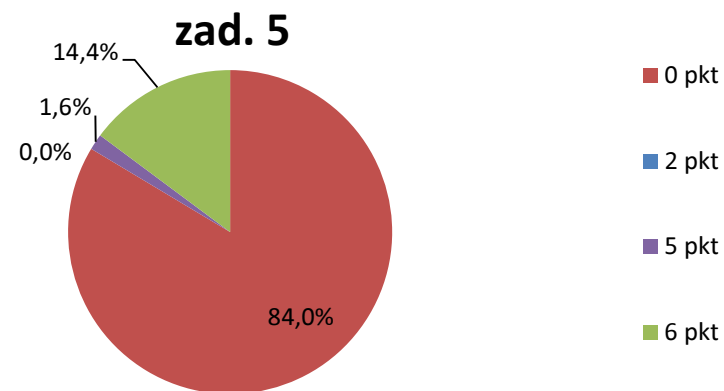
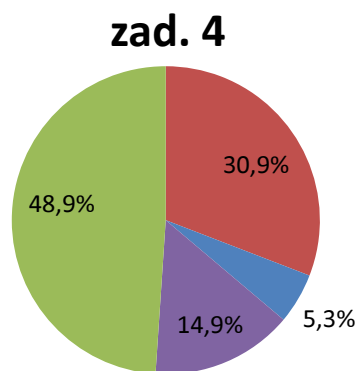
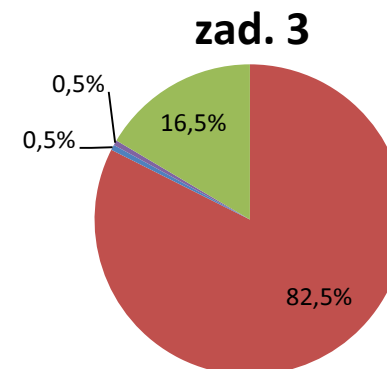
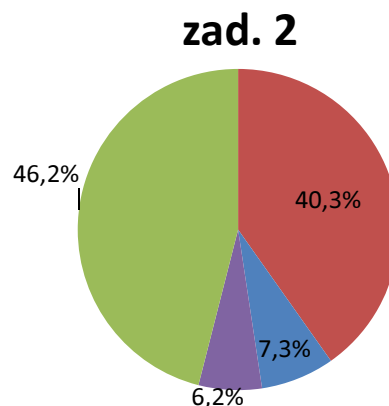
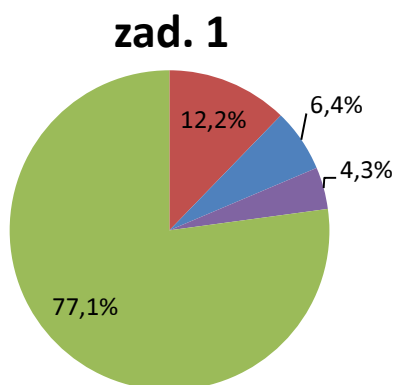
Szkic rozwiązania

Taki wielościan istnieje, podamy jego konstrukcję.

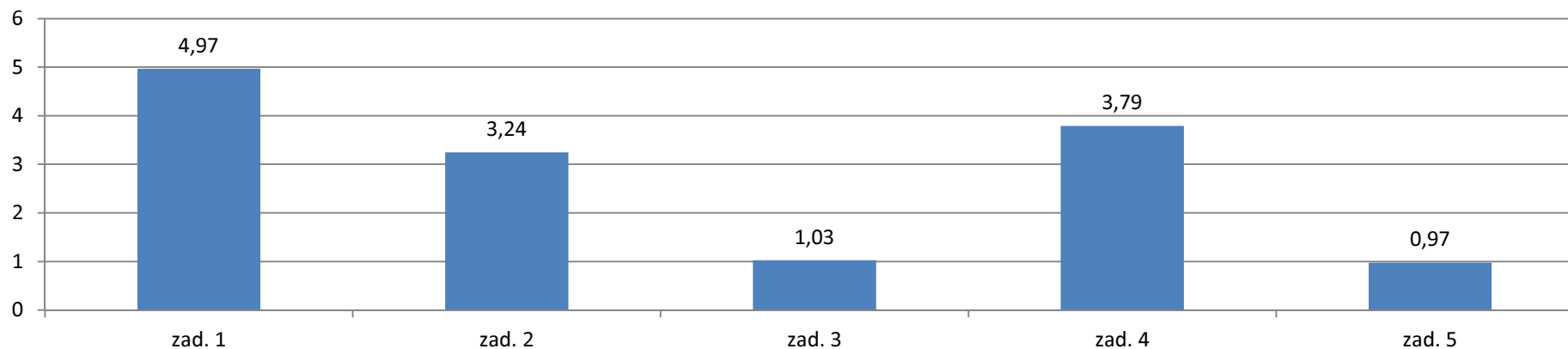
Rozpatrzmy graniastosłup, którego podstawy stanowią sześciokąty $ABCDEF$ oraz $A'B'C'D'E'F'$. Na ścianach bocznych $ABB'A'$, $CDD'C'$ i $EFF'E'$ graniastosłupa, po jego zewnętrznej stronie, zbudujemy ostrosłupy czworokątne $ABB'A'P$, $CDD'C'Q$ oraz $EFF'E'R$ tak, aby otrzymana bryła była siedemnastościanem wypukłym. Skonstruowany w ten sposób wielościan ma nieparzystą liczbę ścian i w każdym jego wierzchołku schodzą się 4 krawędzie.

Statystyki zawodów III stopnia VIII OMG (2012/2013)

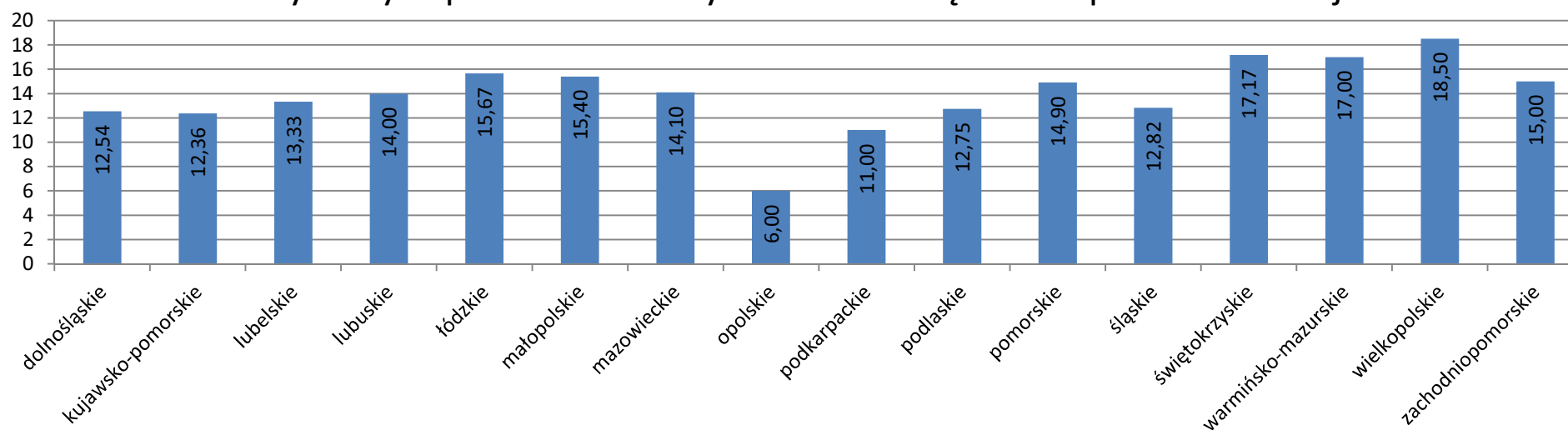
Procentowa liczba osób, które uzyskały daną liczbę punktów za poszczególne zadania



Średnia otrzymanych punktów za poszczególne zadania



Średnia uzyskanych punktów ze wszystkich zadań łącznie w podziale na województwa



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



Stowarzyszenie
na rzecz Edukacji
Matematycznej

MINISTERSTWO
EDUKACJI
NARODOWEJ



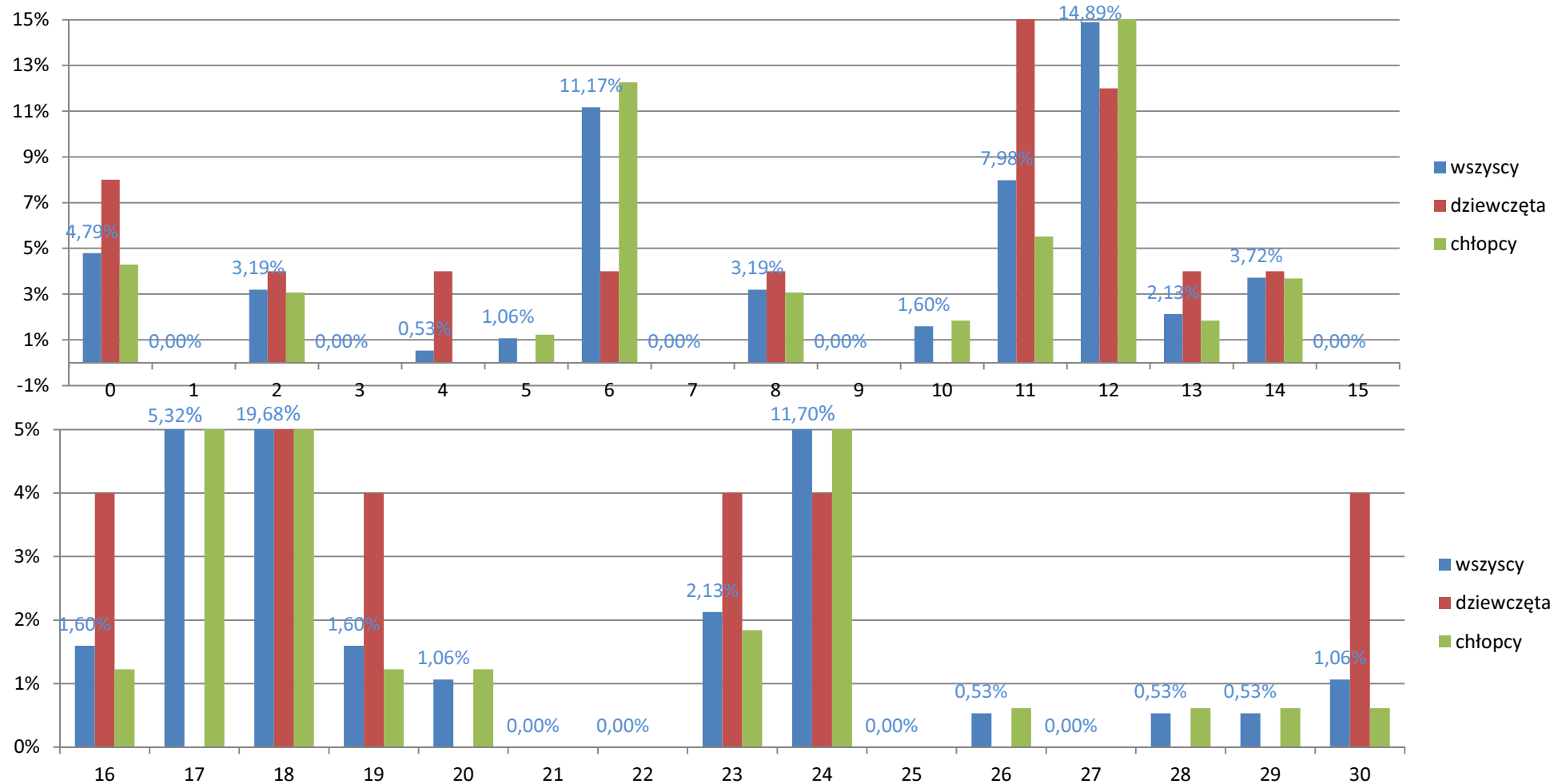
OŚRODEK
ROZWOJU
EDUKACJI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Procentowa liczba osób, które uzyskały daną sumę punktów w zawodach III stopnia



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



Stowarzyszenie
na rzecz Edukacji
Matematycznej

MINISTERSTWO
EDUKACJI
NARODOWEJ



OŚRODEK
ROZWOJU
EDUKACJI

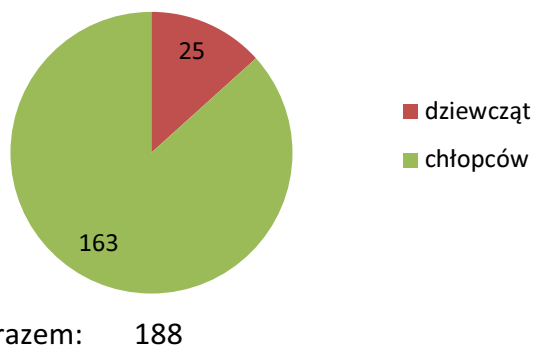
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



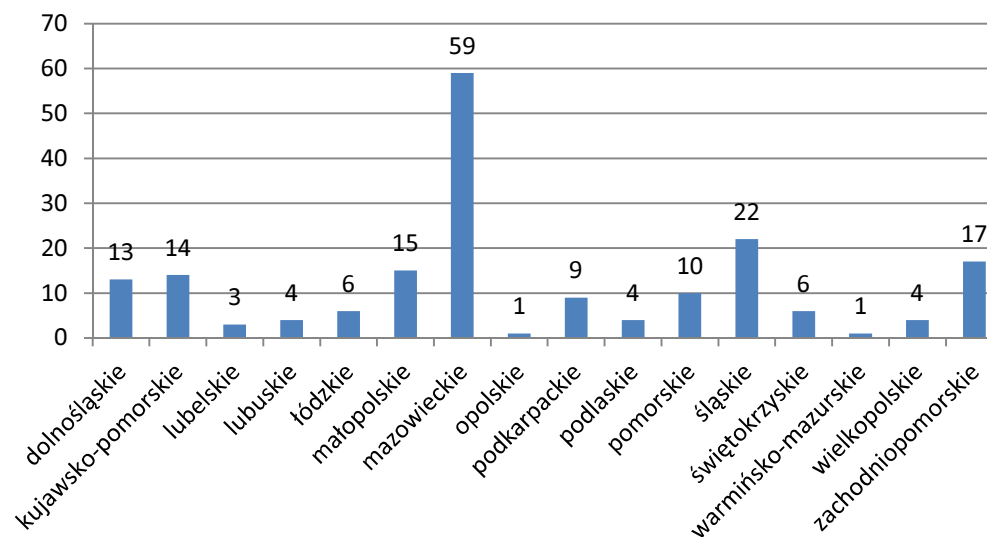
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Liczba uczniów, którzy wzięli udział w zawodach III stopnia

w kraju



w poszczególnych województwach



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



Stowarzyszenie
na rzecz Edukacji
Matematycznej

MINISTERSTWO
EDUKACJI
NARODOWEJ

ORE Ośrodek
Rozwoju
Edukacji

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Imiona:

Nazwisko:

Klasa:



IX Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

Zawody stopnia pierwszego – część testowa

(3 października 2013 r., godz. 9:00)

Przed przystąpieniem do rozwiązywania testu wpisz na każdą stronę swoje imiona, nazwisko oraz numer klasy.

Treść każdego z poniższych zadań zawiera trzy stwierdzenia. Każde z nich jest prawdziwe lub fałszywe. Jeśli dane stwierdzenie jest prawdziwe, wpisz w odpowiednią kratkę literkę T, jeśli zaś stwierdzenie jest fałszywe, wpisz literkę N.

W przypadku pomyłki przekreśl znakiem **X** podaną odpowiedź, a właściwą odpowiedź podaj obok z lewej strony. Nie używaj korektora.

Przykład poprawnie rozwiązane zadania:

0. Dla każdej dodatniej liczby całkowitej n liczba $2n + 1$ jest

T	a) dodatnia;
T	b) nieparzysta;
N X	c) pierwsza.

Czas na rozwiązywanie testu: 75 minut.

Powodzenia!

1. Liczba $\sqrt[3]{9 \cdot \sqrt[3]{27}}$ jest

☐	a) niewymierna;
☐	b) równa $\sqrt[3]{27}$;
☐	c) całkowita.

2. Zmieszano 1 litr 4% roztworu soli kuchennej w wodzie z 2 litrami 4% roztworu soli kuchennej w wodzie. Otrzymano wówczas roztwór o stężeniu

☐	a) 4%;
☐	b) 6%;
☐	c) 12%.

Imiona:

Nazwisko:

Klasa:

3. Przekątne czworokąta wypukłego $ABCD$ są prostopadłe. Wynika z tego, że

a) czworokąt ten jest kwadratem;

b) czworokąt ten jest rombem;

c) $AB^2 + CD^2 = BC^2 + DA^2$.

4. Każdy bok kwadratu powiększono o 20%. Wynika z tego, że pole tego kwadratu zwiększyło się o

a) 20%;

b) 40%;

c) 44%.

5. Suma cyfr dodatniej liczby całkowitej a wynosi 30. Wynika z tego, że liczba a jest podzielna przez

a) 2;

b) 3;

c) 5.

6. Równanie $x^2 - 2|x| = 0$ ma

a) co najmniej jedno rozwiązanie;

b) dokładnie dwa rozwiązania;

c) więcej niż dwa rozwiązania.

7. Liczby a i b są całkowite. Wynika z tego, że liczba $2a(a+1)(a+2) + 3b(b+1)$ jest podzielna przez

a) 4;

b) 5;

c) 6.



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



Stowarzyszenie
na rzecz Edukacji
Matematycznej

MINISTERSTWO
EDUKACJI
NARODOWEJ



OŚRODEK
Rozwoju
Edukacji

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Imiona:

Nazwisko:

Klasa:

8. W czworokącie wypukłym $ABCD$ pola trójkątów ABC i ADC są równe. Wynika z tego, że

a) pola trójkątów BCD i BAD są równe;

b) środek przekątnej BD należy do przekątnej AC ;

c) czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem.

9. Nierówność $(x^2 + 2)x < x$

a) nie ma rozwiązań;

b) ma nieskończenie wiele rozwiązań;

c) jest spełniona przez pewną liczbę dodatnią.

10. Liczba $\sqrt{0,4444\dots}$ jest

a) wymierna;

b) równa $0,2222\dots$;

c) większa od $0,5$.

11. Odległość punktu E od prostej AB jest mniejsza od odległości punktu F od prostej AB . Wynika z tego, że

a) pole trójkąta ABE jest mniejsze od pola trójkąta ABF ;

b) obwód trójkąta ABE jest mniejszy od obwodu trójkąta ABF ;

c) promień okręgu wpisanego w trójkąt ABE jest mniejszy od promienia okręgu wpisanego w trójkąt ABF .

12. Liczba a^2 jest niewymierna. Wynika z tego, że liczba

a) a jest niewymierna;

b) a jest wymierna;

c) a^4 jest wymierna.



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



Stowarzyszenie
na rzecz Edukacji
Matematycznej

MINISTERSTWO
EDUKACJI
NARODOWEJ



OŚRODEK
Rozwoju
Edukacji

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Imiona:

Nazwisko:

Klasa:

13. Sześciąt można rozciąć płaskim cięciem na dwa wielościany w taki sposób, aby jeden z tych wielościanów

a) był graniastosłupem pięciokątnym;

b) miał osiem ścian;

c) był ostrosłupem prawidłowym.

14. Dany jest 101-kąt foremny $A_1A_2\dots A_{101}$. Wynika z tego, że

a) trójkąt $A_5A_{10}A_{15}$ jest równoramienny;

b) trójkąt $A_{15}A_{31}A_{100}$ jest równoramienny;

c) pewien trójkąt, którego wierzchołkami są trzy spośród punktów $A_1, A_2, \dots, A_{101}$ jest prostokątny.

15. Każdy bok i każdą przekątną pięciokąta foremnego pomalowano na czerwono lub niebiesko. Wynika z tego, że

a) pewne trzy boki są tego samego koloru;

b) pewne dwie przekątne są różnych kolorów;

c) z pewnego wierzchołka wychodzą trzy odcinki tego samego koloru.



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



Stowarzyszenie
na rzecz Edukacji
Matematycznej

MINISTERSTWO
EDUKACJI
NARODOWEJ



OŚRODEK
Rozwoju
Edukacji

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Rozwiązania zadań testowych

1. Liczba $\sqrt[3]{9 \cdot \sqrt[3]{27}}$ jest

- ☐ N a) niewymierna;
☐ T b) równa $\sqrt[3]{27}$;
☐ T c) całkowita.

Komentarz

$$\sqrt[3]{9 \cdot \sqrt[3]{27}} = \sqrt[3]{9 \cdot 3} = \sqrt[3]{27} = 3.$$

2. Zmieszano 1 litr 4% roztworu soli kuchennej w wodzie z 2 litrami 4% roztworu soli kuchennej w wodzie. Otrzymano wówczas roztwór o stężeniu

- ☐ T a) 4%;
☐ N b) 6%;
☐ N c) 12%.

Komentarz

Roztwory, o których mowa w zadaniu, zawierają te same substancje i mają takie samo stężenie, są więc jednakowe. Po ich zmieszaniu otrzymano zatem tę samą ciecz — 4% roztwór soli kuchennej w wodzie.

3. Przekątne czworokąta wypukłego $ABCD$ są prostopadłe. Wynika z tego, że

- ☐ N a) czworokąt ten jest kwadratem;
☐ N b) czworokąt ten jest rombem;
☐ T c) $AB^2 + CD^2 = BC^2 + DA^2$.

Komentarz

a), b) Rozpatrzmy dwa dowolne przecinające się pod kątem prostym odcinki AC i BD , których środki się nie pokrywają. Końce tych odcinków tworzą czworokąt wypukły $ABCD$, który nie jest równoległobokiem, a więc tym bardziej rombem, czy też kwadratem.

c) Oznaczmy przez P punkt przecięcia przekątnych czworokąta $ABCD$. Na mocy twierdzenia Pitagorasa odpowiednio dla trójkątów APB i CPD , otrzymujemy

$$AB^2 = AP^2 + BP^2 \quad \text{oraz} \quad CD^2 = CP^2 + DP^2.$$

Dodając powyższe równości stronami, uzyskujemy $AB^2 + CD^2 = AP^2 + BP^2 + CP^2 + DP^2$. Analogicznie dowodzimy, że $BC^2 + DA^2 = AP^2 + BP^2 + CP^2 + DP^2$. Stąd wniosek, że $AB^2 + CD^2 = BC^2 + DA^2$.

4. Każdy bok kwadratu powiększono o 20%. Wynika z tego, że pole tego kwadratu zwiększyło się o

N	a) 20%;
N	b) 40%;
T	c) 44%.

Komentarz

Oznaczmy przez a początkową długość boku kwadratu. Zwiększając liczbę a o 20%, uzyskujemy liczbę $a + \frac{20}{100}a = \frac{12}{10}a$. Pole kwadratu o boku długości $\frac{12}{10}a$ jest równe

$$\left(\frac{12}{10}a\right)^2 = \frac{144}{100}a^2 = a^2 + \frac{44}{100}a^2.$$

Stąd wynika, że pole tego kwadratu, początkowo równe a^2 , zwiększyło się o 44%.

5. Suma cyfr dodatniej liczby całkowitej a wynosi 30. Wynika z tego, że liczba a jest podzielna przez

N	a) 2;
T	b) 3;
N	c) 5.

Komentarz

a), c) Niech a będzie liczbą, której wszystkie 30 cyfr to 1. Liczba a nie jest podzielna przez 2, gdyż jej ostatnia cyfra jest nieparzysta. Liczba a nie jest podzielna przez 5, gdyż jej ostatnią cyfrą nie jest 0 ani 5.

b) Liczba 30 jest podzielna przez 3, a zatem na mocy cechy podzielności przez 3, liczba o sumie cyfr równej 30 jest podzielna przez 3.

6. Równanie $x^2 - 2|x| = 0$ ma

T	a) co najmniej jedno rozwiązanie;
N	b) dokładnie dwa rozwiązania;
T	c) więcej niż dwa rozwiązania.

Komentarz

Zauważmy, że $x^2 = |x|^2$. Dane równanie możemy zatem zapisać w postaci równoważnej $|x|^2 - 2|x| = 0$, czyli $|x| \cdot (|x| - 2) = 0$. Z kolei ta zależność jest spełniona wtedy i tylko wtedy, gdy $|x| = 0$ lub $|x| = 2$. Wobec tego równanie $x^2 - 2|x| = 0$ ma dokładnie trzy rozwiązania: $x = 0$, $x = 2$ oraz $x = -2$.

7. Liczby a i b są całkowite. Wynika z tego, że liczba $2a(a+1)(a+2) + 3b(b+1)$ jest podzielna przez

N	a) 4;
N	b) 5;
T	c) 6.

Komentarz

a), b) Przyjmijmy $a = 0$, $b = 1$. Wówczas liczba $2a(a+1)(a+2) + 3b(b+1) = 0 + 6 = 6$ nie jest podzielna przez 4 oraz nie jest podzielna przez 5.

c) Ponieważ $6 = 2 \cdot 3$ oraz największy wspólny dzielnik liczb 2 i 3 wynosi 1, więc liczba całkowita jest podzielna przez 6 wtedy i tylko wtedy, gdy jest podzielna przez 2 i przez 3.

Liczba $3b(b+1)$ jest podzielna przez 3. Ponadto, jedna spośród dwóch kolejnych liczb całkowitych b , $b+1$ jest parzysta. Wobec tego liczba $3b(b+1)$ jest podzielna przez 2. Stąd wynika, że jest ona podzielna przez 6.

Liczba $2a(a+1)(a+2)$ jest podzielna przez 2. Ponadto, wśród trzech kolejnych liczb całkowitych a , $a+1$, $a+2$ jest jedna podzielna przez 3. Wobec tego liczba $2a(a+1)(a+2)$ jest podzielna przez 3. A zatem jest ona podzielna przez 6.

Skoro obie liczby $2a(a+1)(a+2)$ oraz $3b(b+1)$ są podzielne przez 6, to ich suma również ma tę własność.

8. W czworokącie wypukłym $ABCD$ pola trójkątów ABC i ADC są równe. Wynika z tego, że

N	a) pola trójkątów BCD i BAD są równe;
T	b) środek przekątnej BD należy do przekątnej AC ;
N	c) czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem.

Komentarz

b) Rozważmy wysokości BM i DN odpowiednio trójkątów ABC i ADC . Ponieważ pola tych trójkątów są równe oraz mają one wspólną podstawę AC , więc $BM = DN$.

Odcinki BM i DN są więc równej długości i równoległe. Wobec tego, jeśli punkty M i N pokrywają się, to każdy z nich jest środkiem odcinka BD , skąd wynika, że środek ten leży na przekątnej AC . W przeciwnym wypadku, czworokąt $MBND$ jest równoległobokiem, a zatem środek przekątnej BD pokrywa się ze środkiem przekątnej MN . Stąd wniosek, że również w tym przypadku środek przekątnej BD należy do przekątnej AC .

a), c) Rozpatrzmy trójkąt ostrokątny ABC , w którym $AB \neq BC$. Niech D będzie obrazem symetrycznym punktu B względem prostej AC . Wówczas czworokąt $ABCD$ jest wypukły, a pola trójkątów ABC i ADC są równe, gdyż są to trójkąty przystające. Ponieważ wysokości trójkątów BCD i BAD opuszczone na wspólny bok BD są różnej długości, więc pola tych trójkątów są różne. Ponadto $AB \neq CD$, a zatem czworokąt $ABCD$ nie jest równoległobokiem.

9. Nierówność $(x^2 + 2)x < x$

- ☐ N a) nie ma rozwiązań;
☐ T b) ma nieskończenie wiele rozwiązań;
☐ N c) jest spełniona przez pewną liczbę dodatnią.

Komentarz

Przekształcając daną nierówność równoważnie, uzyskujemy kolejno

$$(x^2 + 2)x < x$$

$$x^3 + 2x < x$$

$$x^3 + x < 0$$

$$x(x^2 + 1) < 0.$$

Ponieważ $x^2 + 1 > 0$, więc zbiorem rozwiązań danej nierówności jest zbiór liczb ujemnych.

10. Liczba $\sqrt{0,4444\dots}$ jest

- ☐ T a) wymierna;
☐ N b) równa $0,2222\dots$;
☐ T c) większa od $0,5$.

Komentarz

Oznaczmy przez x liczbę $0,4444\dots$. Wówczas

$$10x = 10 \cdot 0,4444\dots = 4,4444\dots = 4 + 0,4444\dots = 4 + x.$$

Stąd wynika, że $9x = 4$, wobec czego $x = \frac{4}{9}$, a zatem

$$\sqrt{0,4444\dots} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3} = 0,6666\dots$$

11. Odległość punktu E od prostej AB jest mniejsza od odległości punktu F od prostej AB . Wynika z tego, że

T	a) pole trójkąta ABE jest mniejsze od pola trójkąta ABF ;
N	b) obwód trójkąta ABE jest mniejszy od obwodu trójkąta ABF ;
N	c) promień okręgu wpisanego w trójkąt ABE jest mniejszy od promienia okręgu wpisanego w trójkąt ABF .

Komentarz

a) Trójkąty ABE i ABF mają wspólną podstawę AB , a wysokość trójkąta ABE jest mniejsza od wysokości trójkąta ABF . Wobec tego pole trójkąta ABE jest mniejsze od pola trójkąta ABF .

Rozpatrzmy proste k i l równoległe do prostej AB . Przyjmijmy, że odległość prostej k od prostej AB jest mniejsza od odległości prostej l od prostej AB .

b) Wybierzmy dowolny punkt F na prostej l . Na prostej k znajdujemy taki punkt E , że długość odcinka AE jest większa od obwodu trójkąta ABF . Punkty E i F spełniają warunki zadania (odległość punktu E od prostej AB jest mniejsza od odległości punktu F od prostej AB), jednak obwód trójkąta ABE jest *większy* od obwodu trójkąta ABF .

c) Wybierzmy dowolny punkt E na prostej k . Przez punkt B poprowadźmy prostą m , której odległość od punktu A jest dodatnia, ale mniejsza od promienia okręgu wpisanego w trójkąt ABE . Niech F będzie punktem przecięcia prostych l i m . Wówczas punkty E i F spełniają warunki zadania. Ponadto promień okręgu wpisanego w trójkąt ABF jest mniejszy od wysokości tego trójkąta poprowadzonej z wierzchołka A . Z kolei wysokość ta ma długość równą odległości punktu A od prostej m i jest krótsza od promienia okręgu wpisanego w trójkąt ABE .

12. Liczba a^2 jest niewymierna. Wynika z tego, że liczba

T	a) a jest niewymierna;
N	b) a jest wymierna;
N	c) a^4 jest wymierna.

Komentarz

a), b) Przypuśćmy, że liczba a jest wymierna. Wówczas liczba a^2 , jako iloczyn dwóch liczb wymiernych, również jest wymierna. Z otrzymanej sprzeczności wynika, że a jest liczbą niewymierną.

c) Przyjmijmy $a = \sqrt[8]{2}$. Wtedy obie liczby $a^2 = \sqrt[4]{2}$ oraz $a^4 = \sqrt{2}$ są niewymierne.

13. Sześcián można rozciąć płaskim cięciem na dwa wielościany w taki sposób, aby jeden z tych wielościanów

- ☐ T a) był graniastosłupem pięciokątnym;
- ☐ N b) miał osiem ścian;
- ☐ T c) był ostrosłupem prawidłowym.

Komentarz

Rozważmy sześcián o podstawie $ABCD$.

a) Oznaczmy przez K i L środki odpowiednio krawędzi AB i BC . Przecinając rozpatrywany sześcián płaszczyzną prostopadłą do płaszczyzny podstawy, przechodzącą przez punkty K i L , otrzymujemy graniastosłup pięciokątny o podstawie $AKLCD$.

c) Oznaczmy przez B' taki wierzchołek sześcianu, że odcinek BB' jest jego krawędzią boczną. Przecinając rozpatrywany sześcián płaszczyzną ACB' , otrzymujemy ostrosłup prawidłowy trójkątny: jego podstawa ACB' jest trójkątem równobocznym, a krawędzie boczne AB , CB oraz $B'B$ są równej długości.

b) Rozpatrzmy dowolną z dwóch części, na jakie rozcięto dany sześcián. Jest nią wielościan, którego jedna ściana leży w płaszczyźnie przekroju. Każda z pozostałych ścian tego wielościanu należy do innej ściany wyjściowego sześcianu. Stąd wynika, że otrzymany wielościan ma nie więcej niż siedem ścian.

14. Dany jest 101-kąt foremny $A_1A_2\dots A_{101}$. Wynika z tego, że

- ☐ T a) trójkąt $A_5A_{10}A_{15}$ jest równoramienny;
- ☐ T b) trójkąt $A_{15}A_{31}A_{100}$ jest równoramienny;
- ☐ N c) pewien trójkąt, którego wierzchołkami są trzy spośród punktów $A_1, A_2, \dots, A_{101}$ jest prostokątny.

Komentarz

Rozważmy okrąg opisany na danym 101-kącie. Przyjmijmy, że kolejność wierzchołków $A_1, A_2, \dots, A_{101}$ na tym okręgu jest zgodna z ruchem wskazówek zegara. Przez łuk XY będziemy rozumieli łuk danego okręgu biegnący od punktu X do punktu Y zgodnie z ruchem wskazówek zegara.

a), b) Zauważmy, że łuki $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{101}A_1$ są równej długości. Oznaczmy tę długość przez a . Wówczas łuki A_5A_{10} oraz $A_{10}A_{15}$ mają długość równą $5a$. Wobec tego $\sphericalangle A_5A_{15}A_{10} = \sphericalangle A_{10}A_5A_{15}$, gdyż są to kąty wpisane oparte na łukach tej samej długości. Stąd wniosek, że trójkąt $A_5A_{10}A_{15}$ jest równoramienny. Ponieważ oba łuki $A_{100}A_{15}$ oraz

$A_{15}A_{31}$ mają długość $16a$, więc analogicznie wykazujemy, że trójkąt $A_{15}A_{31}A_{100}$ jest równoramienny.

c) Ponieważ 101 jest liczbą nieparzystą, więc żadne dwa punkty spośród wierzchołków $A_1, A_2, \dots, A_{101}$ nie są końcami średnicy rozpatrywanego okręgu. Stąd wniosek, że żaden trójkąt, którego wierzchołkami są trzy spośród punktów $A_1, A_2, \dots, A_{101}$ nie może być prostokątny.

15. Każdy bok i każdą przekątną pięciokąta foremnego pomalowano na czerwono lub niebiesko. Wynika z tego, że

T	a) pewne trzy boki są tego samego koloru;
N	b) pewne dwie przekątne są różnych kolorów;
N	c) z pewnego wierzchołka wychodzą trzy odcinki tego samego koloru.

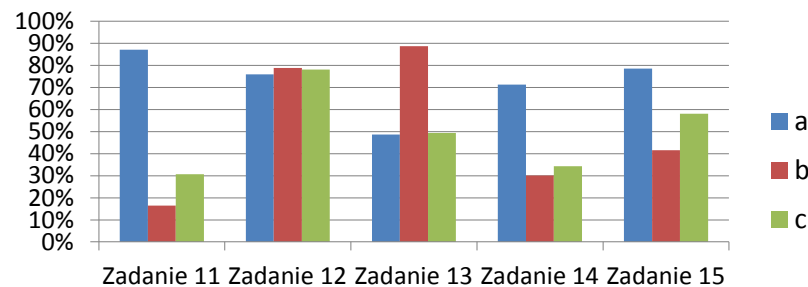
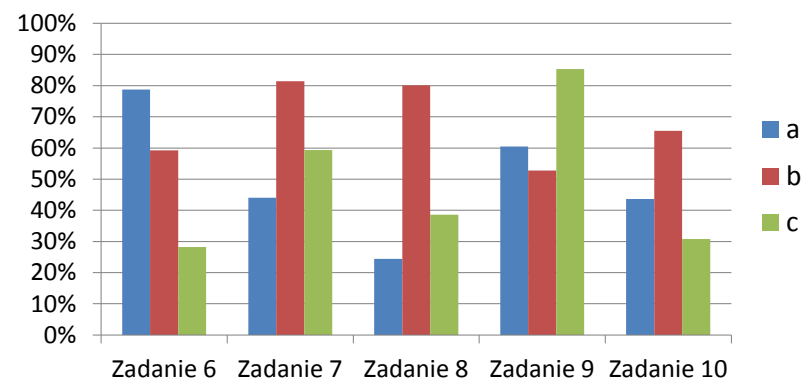
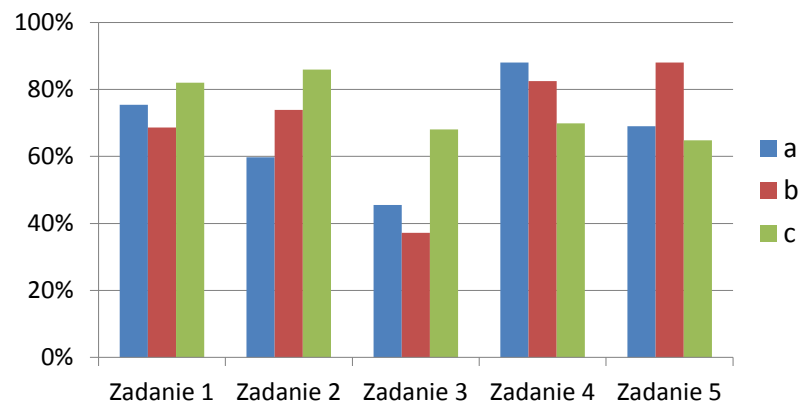
Komentarz

a) Przypuśćmy, że nie istnieją trzy boki tego samego koloru. Wobec tego, co najwyżej dwa boki są czerwone oraz co najwyżej dwa boki są niebieskie. Stąd wniosek, że pomalowano nie więcej niż cztery boki. Z otrzymanej sprzeczności wynika, że pewne trzy boki są tego samego koloru.

b), c) Przyjmijmy, że wszystkie boki pięciokąta pomalowano na czerwono, a wszystkie przekątne na niebiesko. Wówczas wszystkie przekątne są tego samego koloru i z żadnego wierzchołka nie wychodzą trzy czerwone ani trzy niebieskie odcinki.

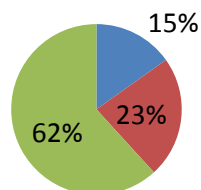
Statystyki części testowej IX OMG (2013/2014)

Procentowe zestawienie liczby poprawnych odpowiedzi zadań testowych
w podziale na zadania (kraj)

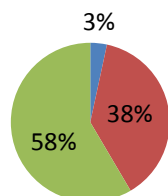


Procentowe zestawienie liczby osób, które uzyskały daną liczbę punktów w podziale na zadania (kraj)

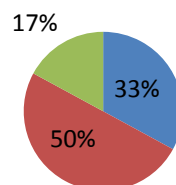
Zadanie 1



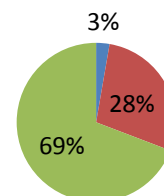
Zadanie 2



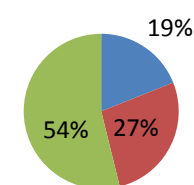
Zadanie 3



Zadanie 4

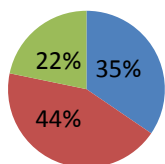


Zadanie 5

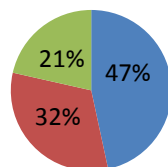


1 pkt
0.5 pkt
0 pkt

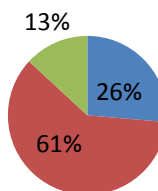
Zadanie 6



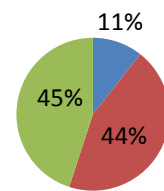
Zadanie 7



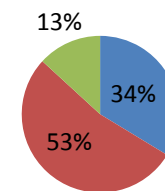
Zadanie 8



Zadanie 9

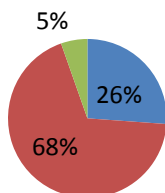


Zadanie 10

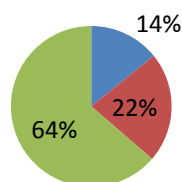


1 pkt
0.5 pkt
0 pkt

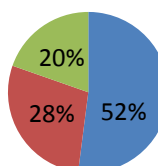
Zadanie 11



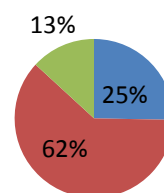
Zadanie 12



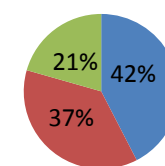
Zadanie 13



Zadanie 14

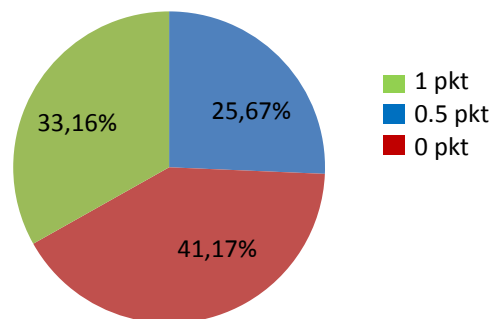


Zadanie 15

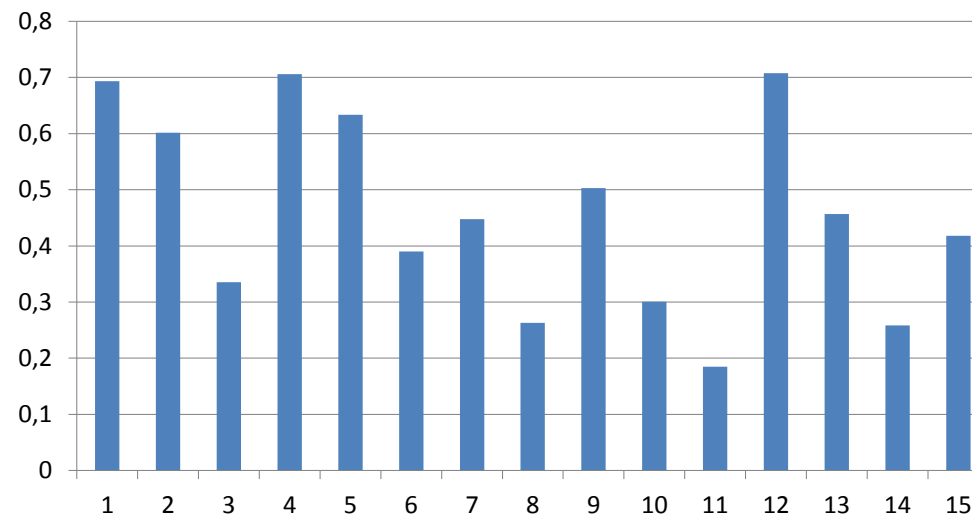


1 pkt
0.5 pkt
0 pkt

Procentowe zestawienie liczby uzyskanych ocen ze wszystkich zadań



Średnia otrzymanych punktów za poszczególne zadania



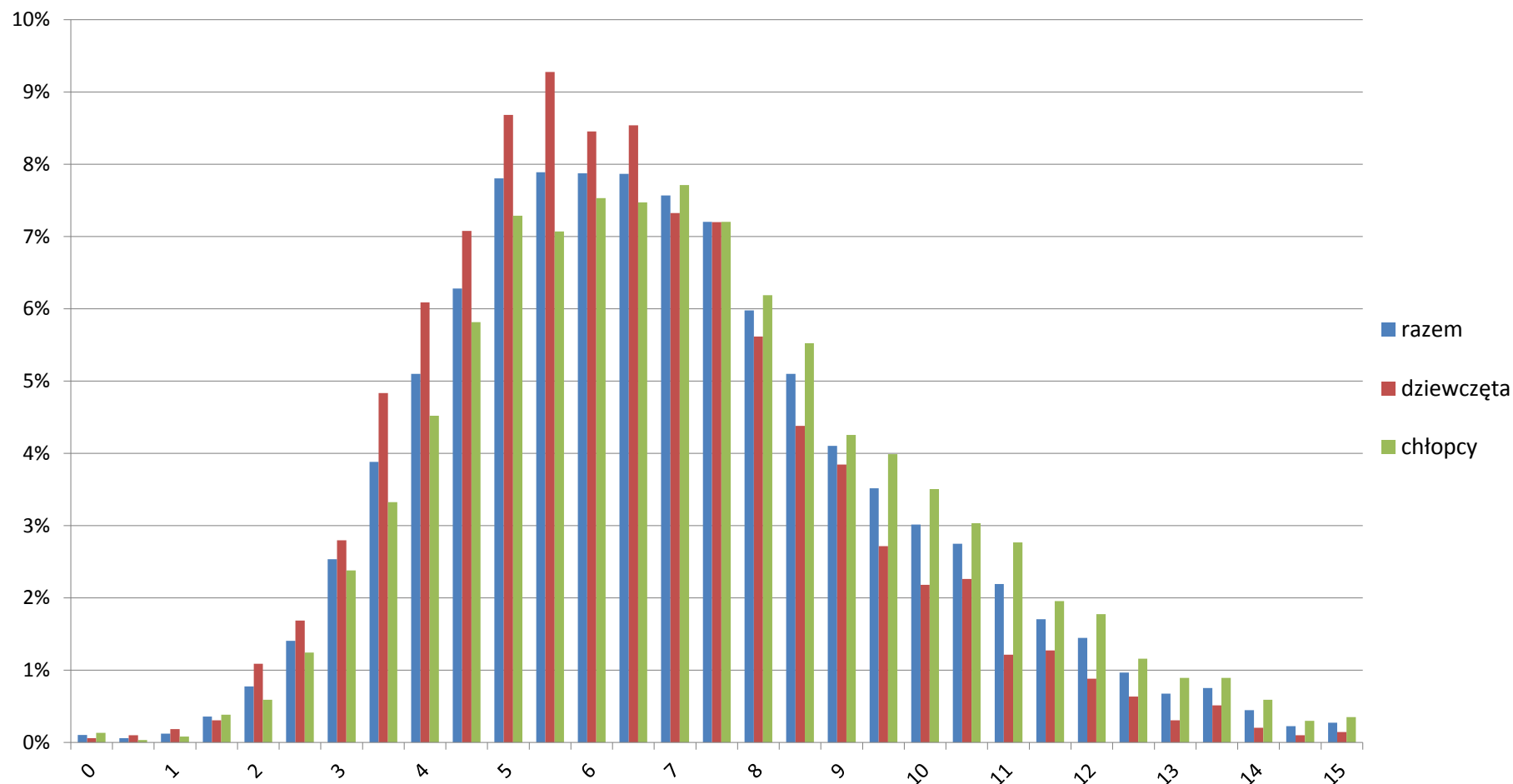
Średnia liczba poprawnych odpowiedzi: 61,32%

Liczba uczniów, którzy wzięli udział w części testowej IX OMG (2013/2014): 13133

Liczba szkół biorących udział w części testowej IX OMG (2013/2014): 1055

Średnia punktów w kraju: 6,9

Procentowa liczba osób, które otrzymały poszczególną sumę punktów (kraj)



IX Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

Zawody stopnia pierwszego — część korespondencyjna

(1 września – 21 października 2013 r.)

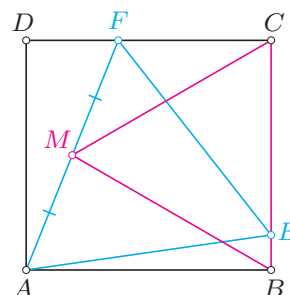
1. Do pociągu, który może pomieścić co najwyżej 404 pasażerów, wsiadła na początkowej stacji pewna liczba podróżnych. Na następnej stacji liczba pasażerów tego pociągu zwiększyła się o 1,5%. Ilu podróżnych wsiadło do pociągu na początkowej stacji? Odpowiedź uzasadnij.

2. Czy istnieją takie liczby całkowite a, b, c, d , że liczby

$$a-b, \quad b-c, \quad c-d, \quad d-a,$$

wypisane w podanym porządku, są kolejnymi liczbami całkowitymi? Odpowiedź uzasadnij.

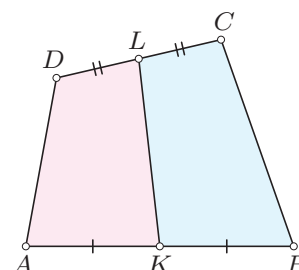
3. Punkty E i F leżą odpowiednio na bokach BC i CD prostokąta $ABCD$, przy czym trójkąt AEF jest równoboczny. Punkt M jest środkiem odcinka AF . Wykaż, że trójkąt BCM jest równoboczny.



4. Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 4 \\ 2xy - 2x = -5. \end{cases}$$

5. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Punkty K i L są środkami odpowiednio boków AB i CD . Wykaż, że jeżeli pola czworokątów $BCLK$ i $DAKL$ są równe, to czworokąt $ABCD$ jest trapezem.



6. Punkt P leży na sferze opisanej na sześciacie. Wykaż, że suma kwadratów odległości punktu P od wierzchołków sześciangu nie zależy od wyboru punktu P .

7. Czy kwadrat o wymiarach 2013×2013 można podzielić na prostokąty o wymiarach 1×3 w taki sposób, aby liczba prostokątów ułożonych pionowo różniła się o 1 od liczby prostokątów ułożonych poziomo? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązania powyższych zadań (wszystkich lub części z nich) należy przekazać szkolnemu koordynatorowi OMG lub przesłać bezpośrednio, listem poleconym, do Komitetu Okręgowego OMG właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

21 października 2013 r. (decyduje data stempla pocztowego).

Uczestnik przysyłający prace bezpośrednio do Komitetu Okręgowego powinien umieścić na kopercie swoje imię i nazwisko oraz dokładne dane szkoły, w tym adres placówki wraz z nazwą powiatu oraz województwa.

Szczegółowe wytyczne dotyczące sposobu redakcji rozwiązań oraz regulamin OMG znajdują się na stronie internetowej Olimpiady: omg.edu.pl.



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



Stowarzyszenie
na rzecz Edukacji
Matematycznej

MINISTERSTWO
EDUKACJI
NARODOWEJ



OŚRODEK
ROZWOJU
EDUKACJI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



IX Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

Zawody stopnia pierwszego – część korespondencyjna

(1 września 2013 r. – 21 października 2013 r.)

Szkice rozwiązań zadań konkursowych

1. Do pociągu, który może pomieścić co najwyżej 404 pasażerów, wsiadła na początkowej stacji pewna liczba podróżnych. Na następnej stacji liczba pasażerów tego pociągu zwiększyła się o 1,5%. Ilu podróżnych wsiadło do pociągu na początkowej stacji? Odpowiedź uzasadnij.

Szkic rozwiązania

Niech x będzie liczbą osób, które wsiadły do pociągu na początkowej stacji. Na następnej stacji liczba pasażerów wzrosła o 1,5%, czyli wyniosła

$$y = x + \frac{1,5}{100}x = \frac{1015}{1000}x = \frac{203}{200}x.$$

Z warunków zadania wynika, że y jest dodatnią liczbą całkowitą nie większą od 404. Ponadto

$$x = \frac{200}{203}y.$$

Ponieważ ułamek $\frac{200}{203}$ jest nieskracalny (największy wspólny dzielnik licznika i mianownika wynosi 1), więc liczba x jest całkowita jedynie wtedy, gdy liczba y jest podzielna przez 203. Jedyną dodatnią liczbą całkowitą, podzielną przez 203 i nie większą od 404 jest 203. Wobec tego $y = 203$. A zatem $x = 200$, co oznacza, że na początkowej stacji do pociągu wsiadło 200 podróżnych.

2. Czy istnieją takie liczby całkowite a, b, c, d , że liczby

$$a-b, \quad b-c, \quad c-d, \quad d-a,$$

wypisane w podanym porządku, są kolejnymi liczbami całkowitymi? Odpowiedź uzasadnij.

Szkic rozwiązania

Przypuśćmy, że istnieją liczby a, b, c, d o zadanych własnościach. Wówczas dla pewnej liczby całkowitej n spełnione są równości

$$a-b=n, \quad b-c=n+1, \quad c-d=n+2, \quad d-a=n+3$$

lub

$$a-b=n+3, \quad b-c=n+2, \quad c-d=n+1, \quad d-a=n.$$

W obu przypadkach, po dodaniu zależności stronami, otrzymujemy

$$(a-b) + (b-c) + (c-d) + (d-a) = 4n+6,$$

a zatem $0 = 4n+6$, więc $4n = -6$, skąd wynika, że $n = -\frac{3}{2}$. Otrzymana sprzeczność kończy rozwiązanie zadania.

3. Punkty E i F leżą odpowiednio na bokach BC i CD prostokąta $ABCD$, przy czym trójkąt AEF jest równoboczny. Punkt M jest środkiem odcinka AF . Wykaż, że trójkąt BCM jest równoboczny.

Szkic rozwiązania

Ponieważ punkt M jest środkiem boku AF trójkąta równobocznego AEF , więc prosta EM jest wysokością tego trójkąta i $\sphericalangle EMF = 90^\circ$. Ponadto $\sphericalangle ECF = 90^\circ$. Stąd wynika, że okrąg o średnicy EF przechodzi przez punkty C i M . Wobec tego $\sphericalangle MCE = \sphericalangle MFE = 60^\circ$, gdyż są to kąty wpisane oparte na tym samym łuku.

Analogicznie wykazujemy, że punkty A , B , E i M leżą na okręgu o średnicy AE , skąd uzyskujemy równość kątów $\sphericalangle MBE = \sphericalangle MAE = 60^\circ$.

Wykazaliśmy, że w trójkącie BCM każdy z kątów MCB oraz MBC ma miarę 60° , a zatem jest to trójkąt równoboczny.

4. Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 4 \\ 2xy - 2x = -5. \end{cases}$$

Szkic rozwiązania

Dodając równania stronami i przekształcając, uzyskujemy kolejno:

$$\begin{aligned} 2x^2 + y^2 + 2xy - 2x &= -1 \\ x^2 + 2xy + y^2 + x^2 - 2x + 1 &= 0 \\ (x + y)^2 + (x - 1)^2 &= 0. \end{aligned}$$

Wobec tego muszą zachodzić równości $x + y = 0$ oraz $x - 1 = 0$. Są one prawdziwe jedynie wówczas, gdy $x = 1$ i $y = -1$. Podstawiając uzyskane wartości do danego układu równań, uzyskujemy sprzeczność. Stąd wynika, że układ ten nie ma rozwiązań.

Uwaga

Metodzie rozwiązywania układów równań opartej na dodawaniu lub odejmowaniu równań stronami został poświęcony artykuł „Rady na układy”, *Kwadrat* nr 10 (wrzesień 2013).

5. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Punkty K i L są środkami odpowiednio boków AB i CD . Wykaż, że jeżeli pola czworokątów $BCLK$ i $DAKL$ są równe, to czworokąt $ABCD$ jest trapezem.

Szkic rozwiązania

Zauważmy, że trójkąty DKL i KCL mają równe podstawy DL i LC oraz wspólną wysokość poprowadzoną z wierzchołka K . Wobec tego $[DKL] = [KCL]$, gdzie $[F]$ oznacza pole figury F . Stąd wynika, że $[AKD] = [KBC]$.

Niech h_D będzie wysokością trójkąta AKD poprowadzoną z wierzchołka D , a h_C — wysokością trójkąta KBC poprowadzoną z wierzchołka C . Wówczas $\frac{1}{2} \cdot AK \cdot h_D = \frac{1}{2} \cdot KB \cdot h_C$, a zatem $h_D = h_C$, gdyż $AK = KB$. Wobec tego odległości punktów D i C od prostej AB są równe. Ponadto punkty D i C leżą po tej samej stronie prostej AB . Stąd wynika, że proste AB i CD są równoległe, a zatem czworokąt $ABCD$ jest trapezem.

Uwaga

Przykłady rozwiązań podobnych zadań geometrycznych związanych z polem figury można znaleźć w artykule „Pole”, *Kwadrat* nr 10 (wrzesień 2013).

6. Punkt P leży na sferze opisanej na sześciacie. Wykaż, że suma kwadratów odległości punktu P od wierzchołków sześcianu nie zależy od wyboru punktu P .

Szkic rozwiązania

Oznaczmy przez A i B takie wierzchołki sześcianu, że odcinek AB stanowi jego przekątną. Poprowadźmy płaszczyznę przez punkty A , B i P . W przekroju sfery otrzymamy okrąg, którego średnicą jest AB . Ponieważ punkt P leży na tym okręgu, więc kąt APB jest kątem wpisanym opartym na półokręgu, a zatem $\sphericalangle APB = 90^\circ$. Stąd, na mocy twierdzenia Pitagorasa, uzyskujemy $AP^2 + BP^2 = AB^2$. Zależność ta jest spełniona również w przypadku, gdy $P = A$ lub $P = B$.

Postępując analogicznie z pozostałymi trzema parami przeciwległych wierzchołków sześcianu i dodając otrzymane równości stronami dowodzimy, że suma kwadratów odległości punktu P od wierzchołków sześcianu jest równa $4d^2$, gdzie d jest długością jego przekątnej. Liczba ta nie zależy od wyboru punktu P .

7. Czy kwadrat o wymiarach 2013×2013 można podzielić na prostokąty o wymiarach 1×3 w taki sposób, aby liczba prostokątów ułożonych pionowo różniła się o 1 od liczby prostokątów ułożonych poziomo? Odpowiedź uzasadnij.

Szkic rozwiązania

Przypuśćmy, że kwadrat o wymiarach 2013×2013 można podzielić na prostokąty o wymiarach 1×3 w taki sposób, aby liczba prostokątów ułożonych pionowo różniła się o 1 od liczby prostokątów ułożonych poziomo. Wszystkich prostokątów jest

$$\frac{2013 \cdot 2013}{3} = 1350723.$$

Bez straty ogólności możemy przyjąć, że liczba prostokątów ułożonych pionowo jest większa. Wynosi ona wówczas 675362.

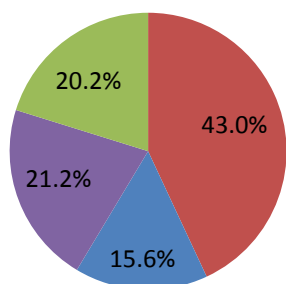
Pomalujmy kolumny danego kwadratu na przemian kolejno na czerwono, zielono i niebiesko. Ponieważ liczba 2013 jest podzielna przez 3, więc pół (kwadratów jednostkowych) każdego koloru jest tyle samo. Zauważmy, że każdy prostokąt ułożony poziomo pokrywa jedno pole czerwone, jedno zielone i jedno niebieskie. A zatem wszystkie poziome prostokąty pokrywają tyle samo pół każdego z trzech kolorów. Stąd wynika, że pionowe prostokąty również muszą pokryć tyle samo pół każdego koloru.

Każdy prostokąt ułożony pionowo pokrywa trzy pola tego samego koloru. Wobec tego wszystkie pionowe prostokąty dzielą się na trzy grupy: prostokąty czerwone, prostokąty zielone i prostokąty niebieskie. Skoro w sumie pokrywają one tyle samo pół każdego z tych kolorów, to grupy te mają po tyle samo elementów. Liczba 675362 nie dzieli się jednak przez 3. Otrzymana sprzeczność kończy rozwiązanie zadania.

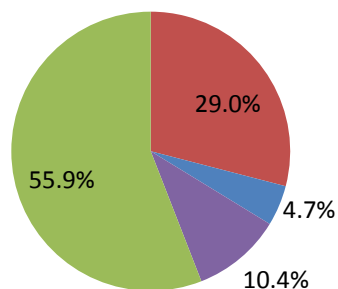
Statystyki części korespondencyjnej IX OMG (2013/2014)

Procentowa liczba osób, które uzyskały daną liczbę punktów za poszczególne zadania

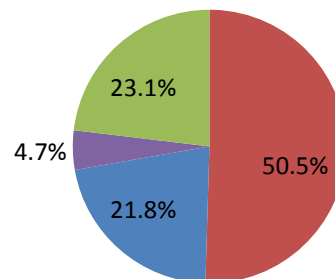
zad. 1



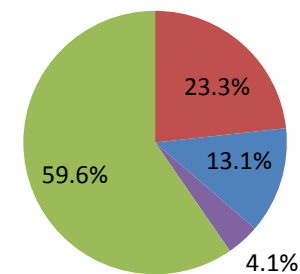
zad. 2



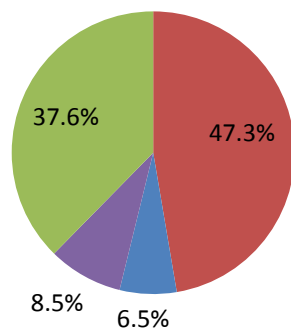
zad. 3



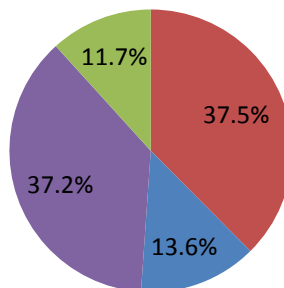
zad. 4



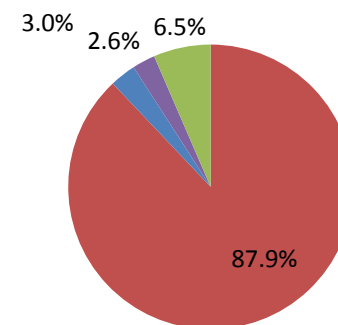
zad. 5



zad. 6



zad. 7



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



Stowarzyszenie
na rzecz Edukacji
Matematycznej

MINISTERSTWO
EDUKACJI
NARODOWEJ



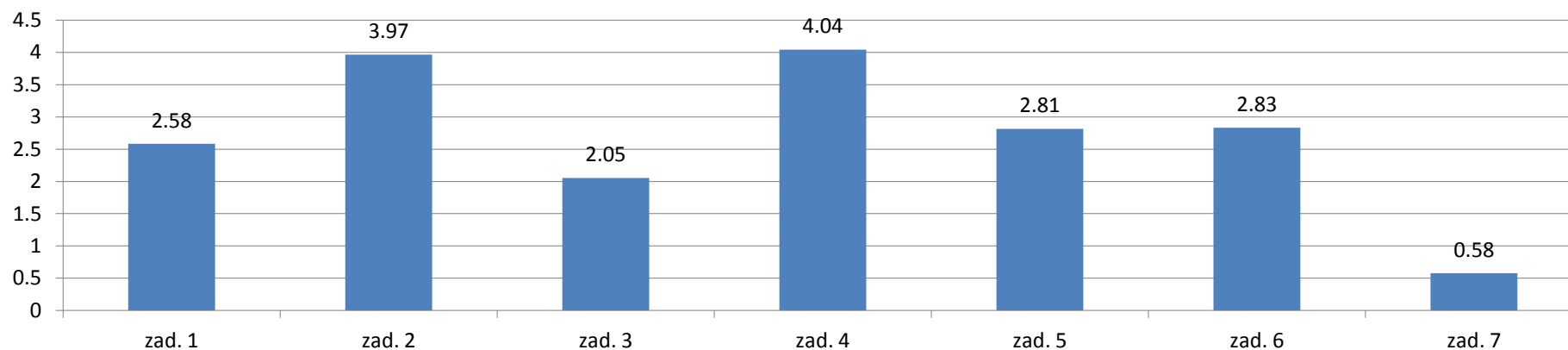
OŚRODEK
ROZWOJU
EDUKACJI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

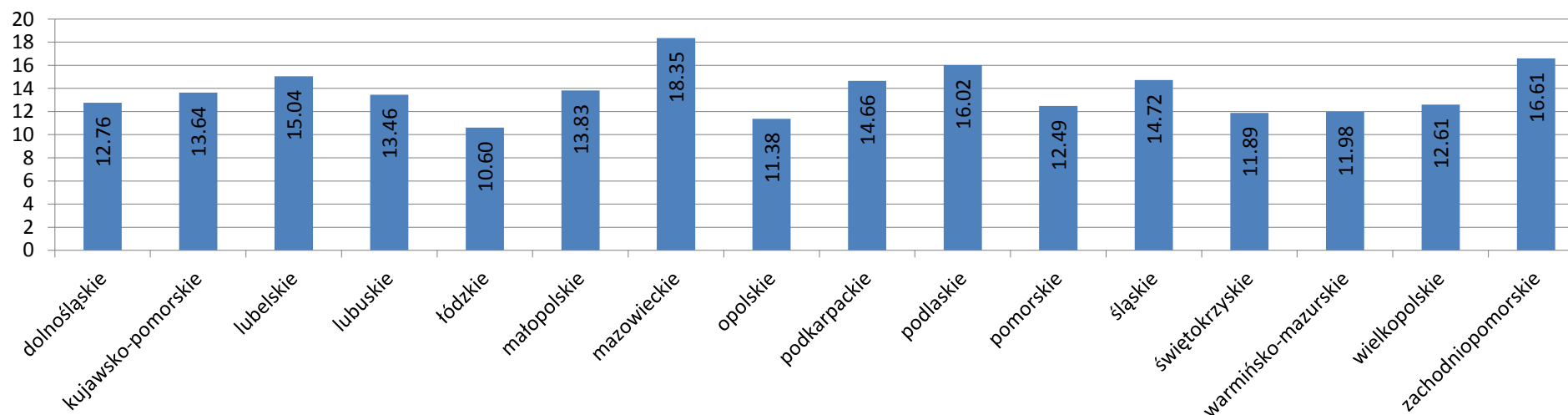


Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

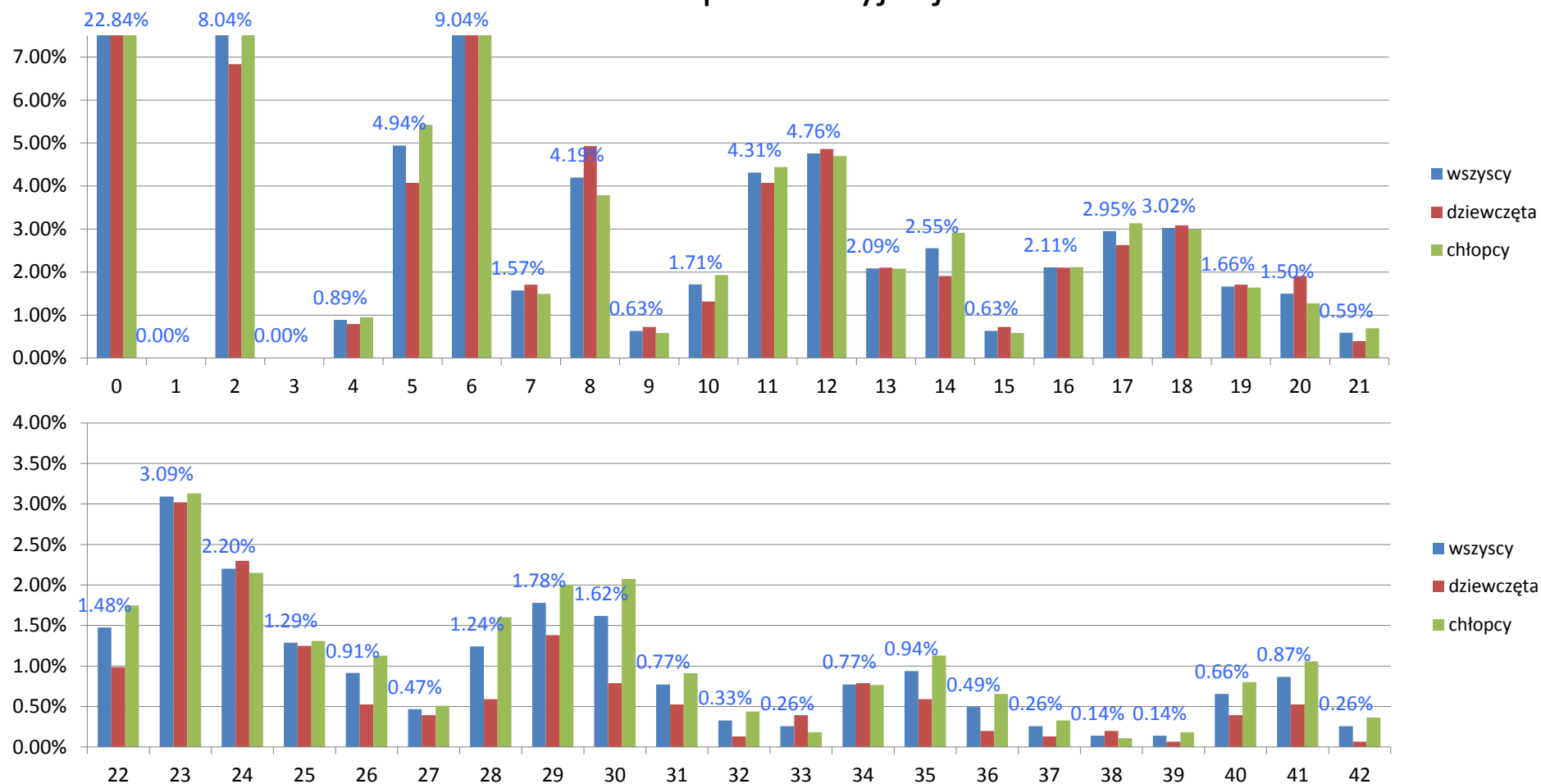
Średnia otrzymanych punktów za poszczególne zadania



Średnia uzyskanych punktów ze wszystkich zadań łącznie w podziale na województwa



Procentowa liczba osób, które uzyskały daną sumę punktów z części korespondencyjnej



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



Stowarzyszenie
na rzecz Edukacji
Matematycznej

MINISTERSTWO
EDUKACJI
NARODOWEJ



OŚRODEK
ROZWOJU
EDUKACJI

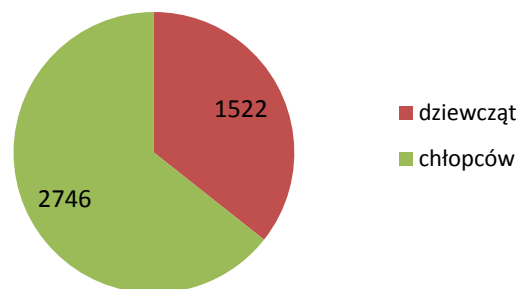
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

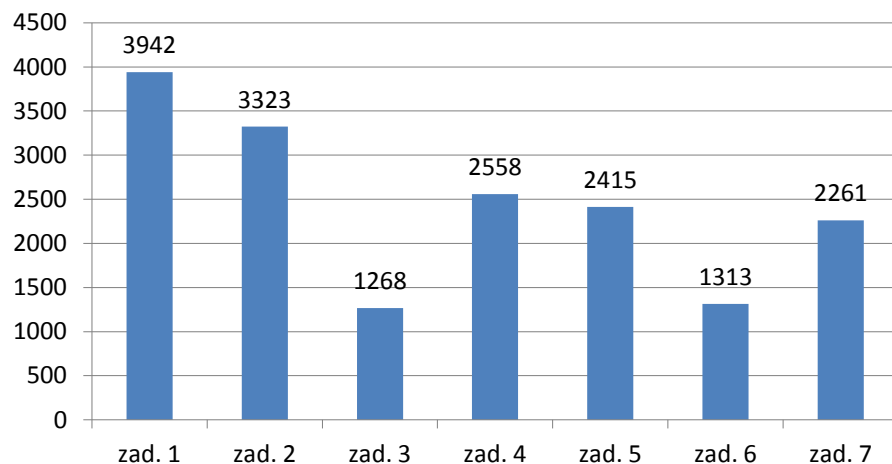
Liczba uczniów, którzy wysłali rozwiązanie co najmniej jednego zadania

w kraju

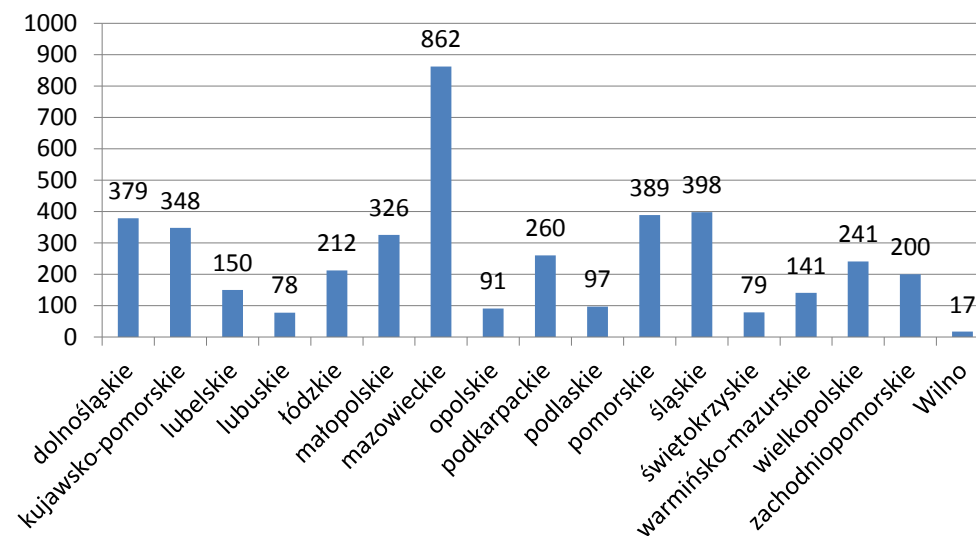


razem: 4268

Liczba nadesłanych rozwiązań poszczególnych zadań



w poszczególnych województwach



IX Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

Zawody drugiego stopnia
(18 stycznia 2014 r.)



1. Czy istnieje taka trójka (a, b, c) dodatnich liczb nieparzystych, że

$$\sqrt{a-c} + \sqrt{b-c} = \sqrt{a+b} ?$$

Odpowiedź uzasadnij.

2. W trapezie $ABCD$ punkty M i N są środkami odpowiednio podstaw AB i CD . Punkt P należy do odcinka MN . Udowodnij, że trójkąty ADP i BCP mają równe pola.

3. W każde pole tablicy o wymiarach 9×9 wpisano pewną dodatnią liczbę całkowitą. Następnie obliczono sumy liczb znajdujących się w każdym wierszu i w każdej kolumnie. Czy może się zdarzyć, że 18 obliczonych sum to kolejne liczby naturalne w pewnym porządku? Odpowiedź uzasadnij.

4. Na płaszczyźnie zaznaczono n punktów ($n \geq 3$), z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej. Każdy z tych punktów pomalowano na jeden z trzech kolorów, przy czym każdego koloru użyto przynajmniej raz. Udowodnij, że istnieje taki trójkąt o wierzchołkach w zaznaczonych punktach, którego każde dwa wierzchołki mają różne kolory i do wnętrza którego nie należy żaden zaznaczony punkt.

5. W trójkącie ABC punkt D jest środkiem boku AB , a punkt E jest środkiem odcinka CD . Wykaż, że jeżeli $\sphericalangle CAE = \sphericalangle BCD$, to $AC = CD$.



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



Stowarzyszenie
na rzecz Edukacji
Matematycznej

MINISTERSTWO
EDUKACJI
NARODOWEJ



OŚRODEK
ROZWOJU
EDUKACJI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



IX Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

Zawody stopnia drugiego

(18 stycznia 2014 r.)

Szkice rozwiązań zadań konkursowych

1. Czy istnieje taka trójka (a, b, c) dodatnich liczb nieparzystych, że

$$\sqrt{a-c} + \sqrt{b-c} = \sqrt{a+b} ?$$

Odpowiedź uzasadnij.

Szkic rozwiązania

Daną równość podnosimy stronami do kwadratu, a następnie przekształcamy równo-
ważnie, uzyskując kolejno:

$$a - c + 2\sqrt{(a-c)(b-c)} + b - c = a + b,$$

$$\sqrt{(a-c)(b-c)} = c,$$

$$(a-c)(b-c) = c^2.$$

Jednak jeśli liczby a, b, c są wszystkie nieparzyste, to lewa strona ostatniej równości jest liczbą parzystą, a prawa — liczbą nieparzystą. Uzyskana sprzeczność oznacza, że nie istnieje trójka liczb spełniających warunki zadania.

2. W trapezie $ABCD$ punkty M i N są środkami odpowiednio podstaw AB i CD . Punkt P należy do odcinka MN . Udowodnij, że trójkąty ADP i BCP mają równe pola.

Szkic rozwiązania

Przez $[\mathcal{F}]$ będziemy oznaczali pole figury $\mathcal{F}$.

Zauważmy, że $[AMP] = [BMP]$, gdyż oba trójkąty mają równe podstawy AM i BM oraz wspólną wysokość opuszczoną z wierzchołka P . Analogicznie uzasadniamy równość $[DNP] = [CNP]$. Ponadto trapezy $AMND$ i $BMNC$ mają równe wysokości, a przy tym $AM = BM$ oraz $DN = CN$. Stąd wniosek, że $[AMND] = [BMNC]$. Łącząc uzyskane równości pól, otrzymujemy

$$[ADP] = [AMND] - [AMP] - [DNP] = [BMNC] - [BMP] - [CNP] = [BCP].$$

3. W każde pole tablicy o wymiarach 9×9 wpisano pewną dodatnią liczbę całkowitą. Następnie obliczono sumy liczb znajdujących się w każdym wierszu i w każdej kolumnie. Czy może się zdarzyć, że 18 obliczonych sum to kolejne liczby naturalne w pewnym porządku? Odpowiedź uzasadnij.

Szkic rozwiązania

Udowodnimy, że otrzymane sumy nie mogą być kolejnymi liczbami naturalnymi.

Zauważmy, że suma 18 rozważanych liczb jest liczbą parzystą, jako dwukrotność sumy wszystkich liczb wpisanych w pola tablicy. Z drugiej strony, wśród 18 kolejnych liczb naturalnych znajduje się dokładnie 9 liczb nieparzystych, których suma jest liczbą nieparzystą. Stąd wniosek, że suma 18 kolejnych liczb naturalnych jest liczbą nieparzystą. Otrzymana sprzeczność kończy rozwiązanie zadania.

4. Na płaszczyźnie zaznaczono n punktów ($n \geq 3$), z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej. Każdy z tych punktów pomalowano na jeden z trzech kolorów, przy czym każdego koloru użyto przynajmniej raz. Udowodnij, że istnieje taki trójkąt o wierzchołkach w zaznaczonych punktach, którego każde dwa wierzchołki mają różne kolory i do wnętrza którego nie należy żaden zaznaczony punkt.

Szkic rozwiązania

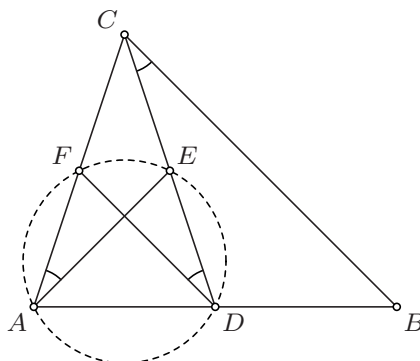
Ponieważ każdy z trzech kolorów został użyty, więc istnieje przynajmniej jeden trójkąt o wierzchołkach różnych kolorów. Spośród wszystkich takich trójkątów wybierzmy ten, który ma najmniejsze pole (jeśli trójkątów o najmniejszym polu jest więcej niż jeden, wybieramy dowolny z nich). Nazwijmy ten trójkąt ABC . Wykażemy, że trójkąt ABC spełnia warunki zadania.

Przypuśćmy, że do wnętrza trójkąta ABC należy pewien zaznaczony punkt P . Bez straty ogólności możemy przyjąć, że punkt P jest tego samego koloru, co punkt A . To oznacza, że każde dwa wierzchołki trójkąta BCP mają różne kolory. Jednak pole tego trójkąta jest mniejsze od pola trójkąta ABC . Uzyskana sprzeczność dowodzi, że do wnętrza trójkąta ABC nie należy żaden zaznaczony punkt.

5. W trójkącie ABC punkt D jest środkiem boku AB , a punkt E jest środkiem odcinka CD . Wykaż, że jeżeli $\sphericalangle CAE = \sphericalangle BCD$, to $AC = CD$.

Szkic rozwiązania

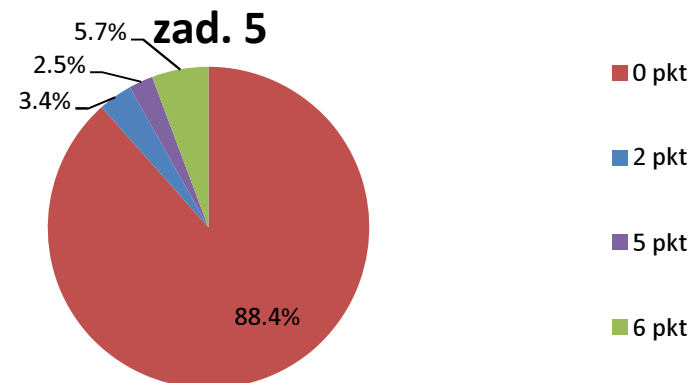
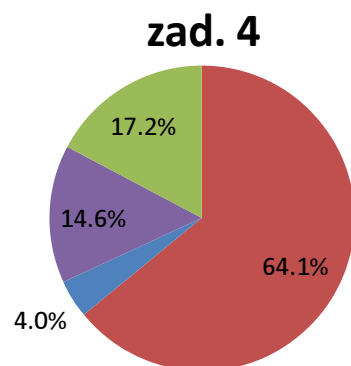
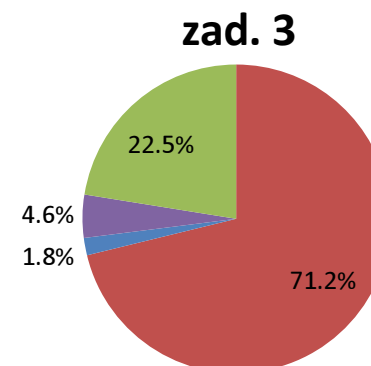
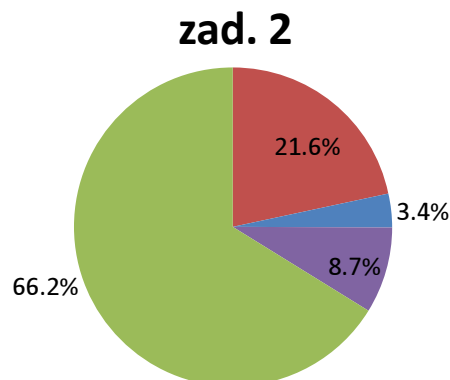
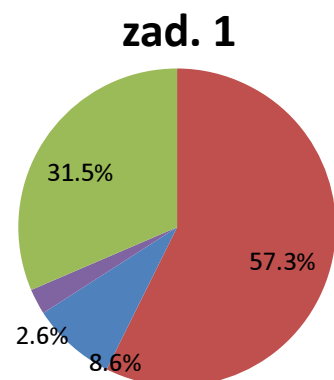
Niech F będzie środkiem odcinka AC . Wówczas $BC \parallel DF$, a zatem $\sphericalangle BCD = \sphericalangle FDC$. Stąd, po uwzględnieniu założenia $\sphericalangle CAE = \sphericalangle BCD$, uzyskujemy $\sphericalangle CAE = \sphericalangle FDC$, czyli $\sphericalangle FAE = \sphericalangle FDE$.



Ponieważ punkty A i D znajdują się po tej samej stronie prostej EF , więc ostatnia równość kątów oznacza, że na czworokącie $ADEF$ można opisać okrąg. Ponadto $AD \parallel EF$, więc czworokąt ten jest trapezem równoramiennym. Stąd $AF = DE$, czyli $AC = CD$. Tym samym dowód jest zakończony.

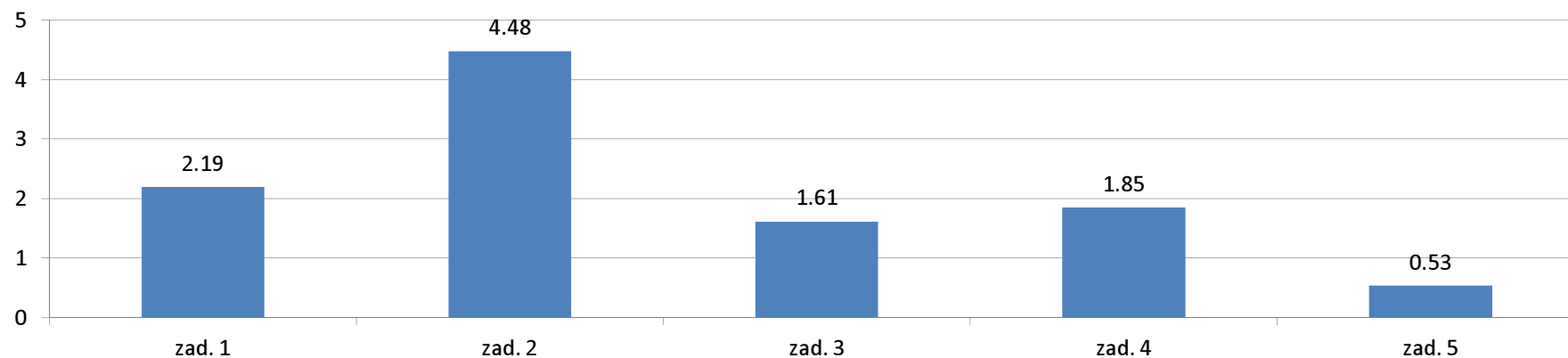
Statystyki zawodów II stopnia IX OMG (2013/2014)

Procentowa liczba osób, które uzyskały daną liczbę punktów za poszczególne zadania

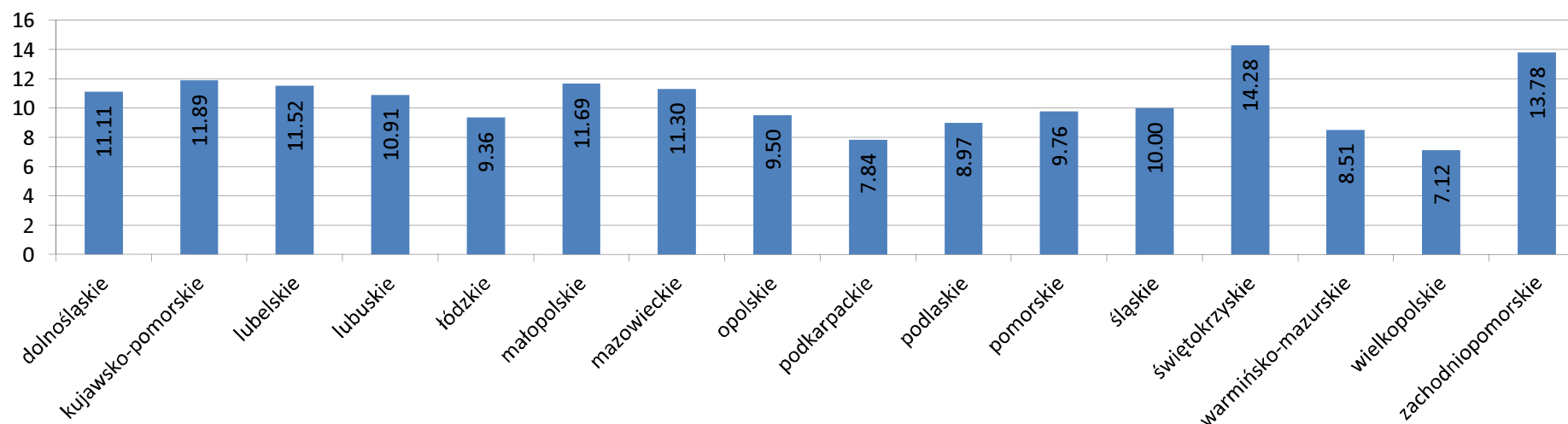


0 pkt
2 pkt
5 pkt
6 pkt

Średnia otrzymanych punktów za poszczególne zadania



Średnia uzyskanych punktów ze wszystkich zadań łącznie w podziale na województwa



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



Stowarzyszenie
na Teren Edukacji
Matematycznej

MINISTERSTWO
EDUKACJI
NARODOWEJ



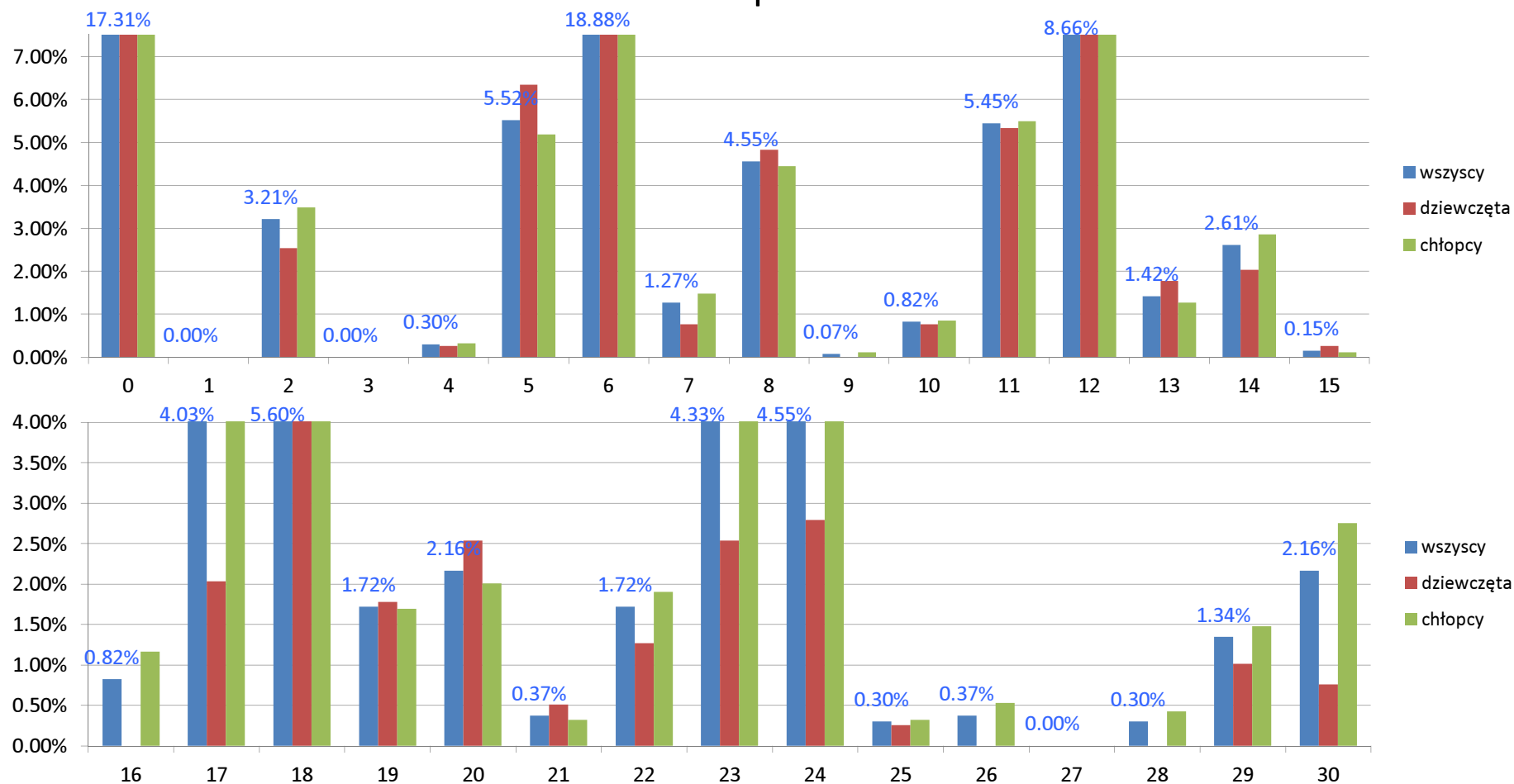
OSRODEK
ROZWOJU
EDUKACJI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



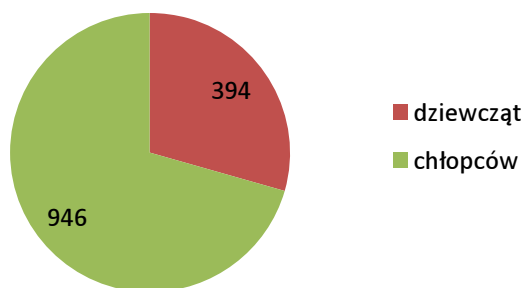
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Procentowa liczba osób, które uzyskały daną sumę punktów w zawodach II stopnia



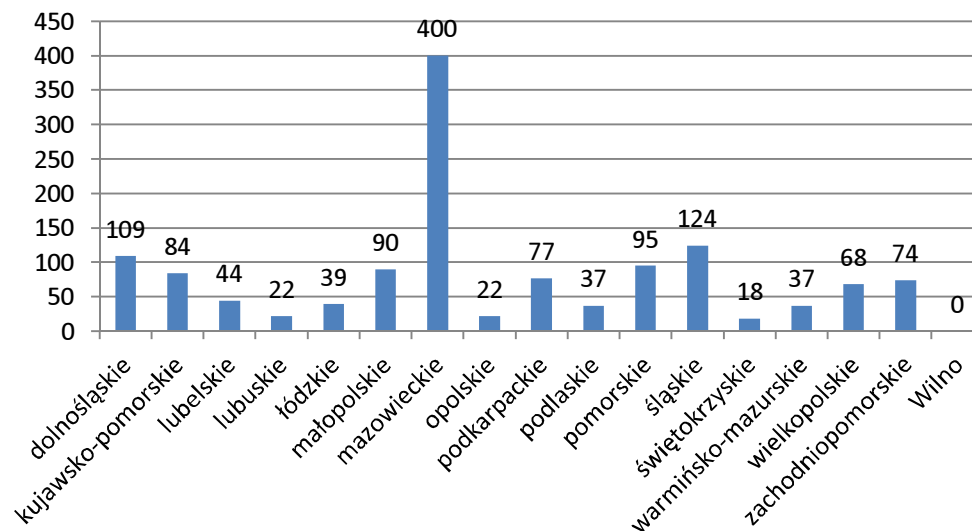
Liczba uczniów, którzy wzięli udział w zawodach II stopnia

w kraju



razem: 1340

w poszczególnych województwach



IX Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

Zawody trzeciego stopnia
(15 marca 2014 r.)



1. Danych jest takich pięć dodatnich liczb rzeczywistych, że iloczyn dowolnych dwóch spośród nich jest mniejszy od iloczynu pozostałych trzech. Udowodnij, że każda z danych liczb jest większa od 1.
2. Dany jest trójkąt ABC , w którym $AC = 8$ oraz $BC = 10$. Punkt M jest środkiem boku AB . Okrąg o środku w punkcie M ma promień długości 1. Wykaż, że na tym okręgu istnieje dokładnie jeden taki punkt P , dla którego $\angle APC = 90^\circ$.
3. Dodatnie liczby całkowite a, b mają tę własność, że liczba $4ab$ jest podzielna przez liczbę $a^2 + b^2$. Udowodnij, że $a = b$.
4. Spośród wierzchołków 100-kąta foremnego wybrano 51 punktów. Wykaż, że wśród wybranych punktów istnieją trzy będące wierzchołkami trójkąta prostokątnego równoramiennego.
5. Czy istnieje taki wielościan wypukły, że w każdym jego wierzchołku schodzą się co najmniej cztery krawędzie i który można przeciąć pewną płaszczyzną, otrzymując w przekroju trójkąt? Odpowiedź uzasadnij.

Honorowy patronat Małżonki Prezydenta RP Pani Anny Komorowskiej



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



Stowarzyszenie
na rzecz Edukacji
Matematycznej

MINISTERSTWO
EDUKACJI
NARODOWEJ



OŚRODEK
ROZWOJU
EDUKACJI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

IX Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

Zawody stopnia trzeciego

(15 marca 2014 r.)

Szkice rozwiązań zadań konkursowych

1. Danych jest takich pięć dodatnich liczb rzeczywistych, że iloczyn dowolnych dwóch spośród nich jest mniejszy od iloczynu pozostałych trzech. Udowodnij, że każda z danych liczb jest większa od 1.

Szkic rozwiązania

Oznaczmy dane liczby przez a, b, c, d, e . Wiemy, że $bc < ade$ oraz $de < abc$. Wobec tego $bc < ade < a \cdot abc$. Dzieląc obie strony otrzymanej nierówności $bc < a^2bc$ przez liczbę dodatnią bc , uzyskujemy $1 < a^2$. Ponieważ a jest liczbą dodatnią, więc z ostatniej nierówności wynika, że $a > 1$. Analogicznie dowodzimy, że każda z pozostałych czterech liczb jest większa od 1.

2. Dany jest trójkąt ABC , w którym $AC = 8$ oraz $BC = 10$. Punkt M jest środkiem boku AB . Okrąg o środku w punkcie M ma promień długości 1. Wykaż, że na tym okręgu istnieje dokładnie jeden taki punkt P , dla którego $\angle APC = 90^\circ$.

Szkic rozwiązania

Niech N będzie środkiem boku AC . Zbiorem takich punktów P , że $\angle APC = 90^\circ$, jest okrąg o średnicy AC (z wyłączeniem punktów A i C), czyli okrąg o środku w punkcie N i promieniu długości 4. Oznaczmy ten okrąg przez ω .

Okrąg o środku M i promieniu 1 oznaczmy przez ω . Z twierdzenia Talesa wynika, że $MN = \frac{1}{2}BC = 5$, a zatem odległość między środkami okręgów ω i ω jest równa sumie długości ich promieni. Wobec tego okręgi te są styczne zewnętrznie. Ich punkt styczności to jedyny punkt okręgu ω , który spełnia warunki zadania.

3. Dodatnie liczby całkowite a, b mają tę własność, że liczba $4ab$ jest podzielna przez liczbę $a^2 + b^2$. Udowodnij, że $a = b$.

Szkic rozwiązania

Przekształcając równoważnie nierówność $(a-b)^2 \geq 0$, otrzymujemy $\frac{4ab}{a^2+b^2} \leq 2$. Z warunków zadania wynika, że $\frac{4ab}{a^2+b^2}$ jest dodatnią liczbą całkowitą. Wobec tego możliwe są dwa przypadki: $\frac{4ab}{a^2+b^2} = 1$ lub $\frac{4ab}{a^2+b^2} = 2$.

(1) Przypuśćmy, że $\frac{4ab}{a^2+b^2} = 1$. Wówczas $4ab = a^2 + b^2$, skąd uzyskujemy zależności

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 6ab \quad \text{oraz} \quad (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab = 2ab.$$

Ponadto $2ab > 0$, więc pierwszą z powyższych równości możemy podzielić stronami przez drugą, otrzymując

$$\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2 = \frac{6ab}{2ab} = 3, \quad \text{czyli} \quad \left|\frac{a+b}{a-b}\right| = \sqrt{3}.$$

Po lewej stronie ostatniej równości znajduje się iloraz dwóch liczb całkowitych, czyli liczba wymierna, a po prawej — liczba niewymierna. Ten przypadek prowadzi zatem do sprzeczności.

(2) Jeśli $\frac{4ab}{a^2+b^2} = 2$, to $4ab = 2a^2 + 2b^2$, czyli równoważnie $(a-b)^2 = 0$. Stąd wynika, że $a = b$, co należało wykazać.

Honorowy patronat Małżonki Prezydenta RP Pani Anny Komorowskiej



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



Stowarzyszenie
na rzecz Edukacji
Matematycznej

MINISTERSTWO
EDUKACJI
NARODOWEJ



OŚRODEK
ROZWOJU
EDUKACJI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



4. Spośród wierzchołków 100-kąta foremnego wybrano 51 punktów. Wykaż, że wśród wybranych punktów istnieją trzy będące wierzchołkami trójkąta prostokątnego równoramiennego.

Szkic rozwiązania

Oznaczmy dany 100-kąt foremny przez $A_1 A_2 \dots A_{100}$. Podzielmy jego wierzchołki na 25 czteroelementowych grup w taki sposób, aby punkty w obrębie każdej grupy były wierzchołkami kwadratu:

$$A_1 A_{26} A_{51} A_{76}, A_2 A_{27} A_{52} A_{77}, A_3 A_{28} A_{53} A_{78}, \dots, A_{25} A_{50} A_{75} A_{100}.$$

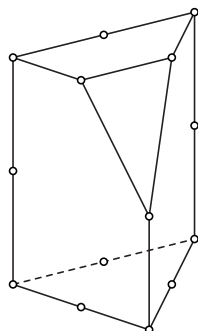
Przypuśćmy, że z każdej grupy wybrano co najwyżej dwa wierzchołki. Wybranych punktów jest wówczas co najwyżej $25 \cdot 2 = 50$. Z otrzymanej sprzeczności wynika, że wśród rozważanych kwadratów istnieje taki, którego co najmniej trzy wierzchołki zostały wybrane. To kończy rozwiązanie zadania, ponieważ każde trzy wierzchołki kwadratu tworzą trójkąt prostokątny równoramienny.

5. Czy istnieje taki wielościan wypukły, że w każdym jego wierzchołku schodzą się co najmniej cztery krawędzie i który można przeciąć pewną płaszczyzną, otrzymując w przekroju trójkąt? Odpowiedź uzasadnij.

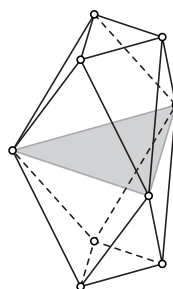
Szkic rozwiązania

Taki wielościan istnieje, podamy jego konstrukcję.

Rozpatrzmy graniastosłup trójkątny. Wybierzmy jego dowolny wierzchołek i weźmy pod uwagę płaszczyznę przechodzącą przez środki krawędzi, które schodzą się w tym wierzchołku. Płaszczyzna ta rozcina dany graniastosłup na dwa wielościany. Usuńmy tę z otrzymanych brył, do której należy wybrany wierzchołek (rys. 1).



rys. 1



rys. 2

Powtarzając opisaną konstrukcję dla każdego z pozostałych wierzchołków graniastosłupa, otrzymamy wielościan, który spełnia warunki zadania (rys. 2). W każdym jego wierzchołku schodzą się cztery krawędzie i posiada on przekrój będący trójkątem.

Honorowy patronat Małżonki Prezydenta RP Pani Anny Komorowskiej



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



Stowarzyszenie
na rzecz Edukacji
Matematycznej

MINISTERSTWO
EDUKACJI
NARODOWEJ



OŚRODEK
ROZWOJU
EDUKACJI

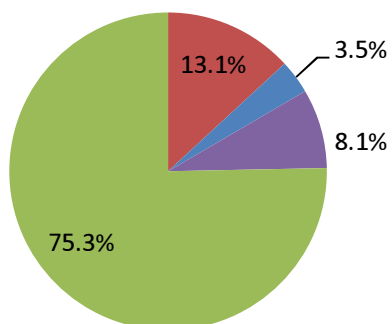
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



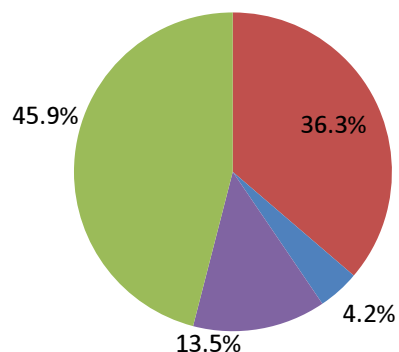
Statystyki zawodów III stopnia IX OMG (2013/2014)

Procentowa liczba osób, które uzyskały daną liczbę punktów za poszczególne zadania

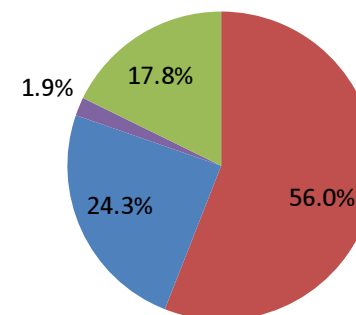
zad. 1



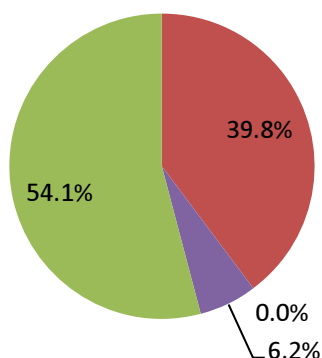
zad. 2



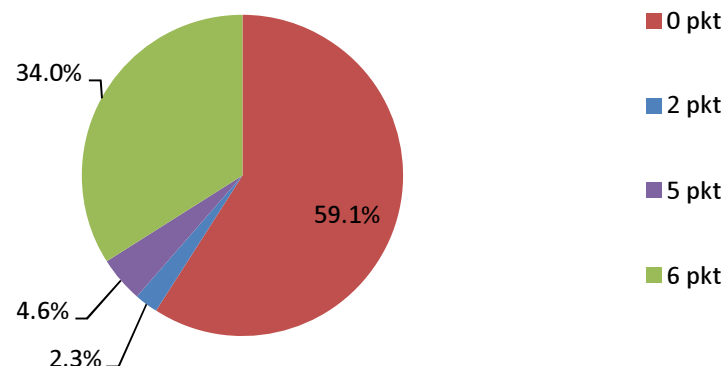
zad. 3



zad. 4



zad. 5



0 pkt
2 pkt
5 pkt
6 pkt



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



Stowarzyszenie
na rzecz Edukacji
Matematycznej

MINISTERSTWO
EDUKACJI
NARODOWEJ



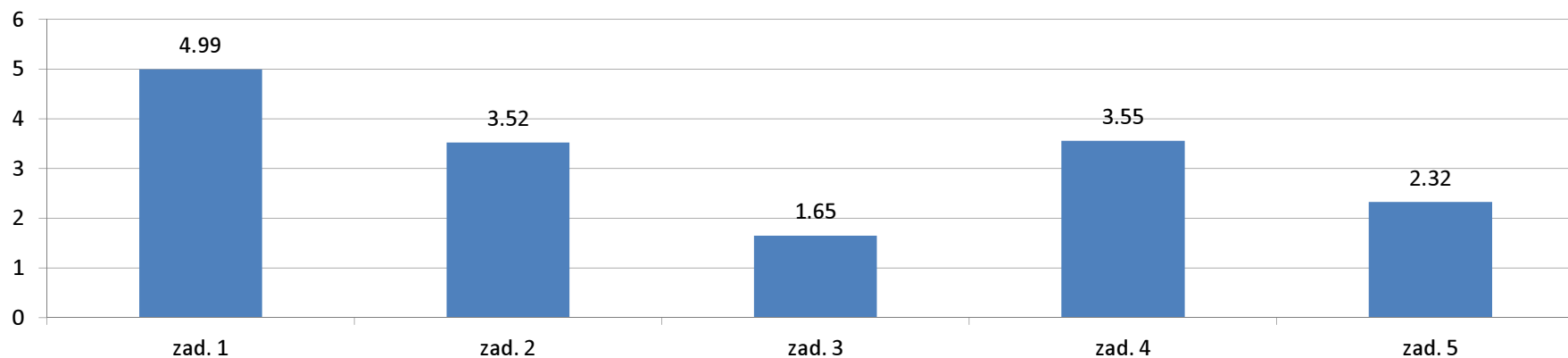
OŚRODEK
ROZWOJU
EDUKACJI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

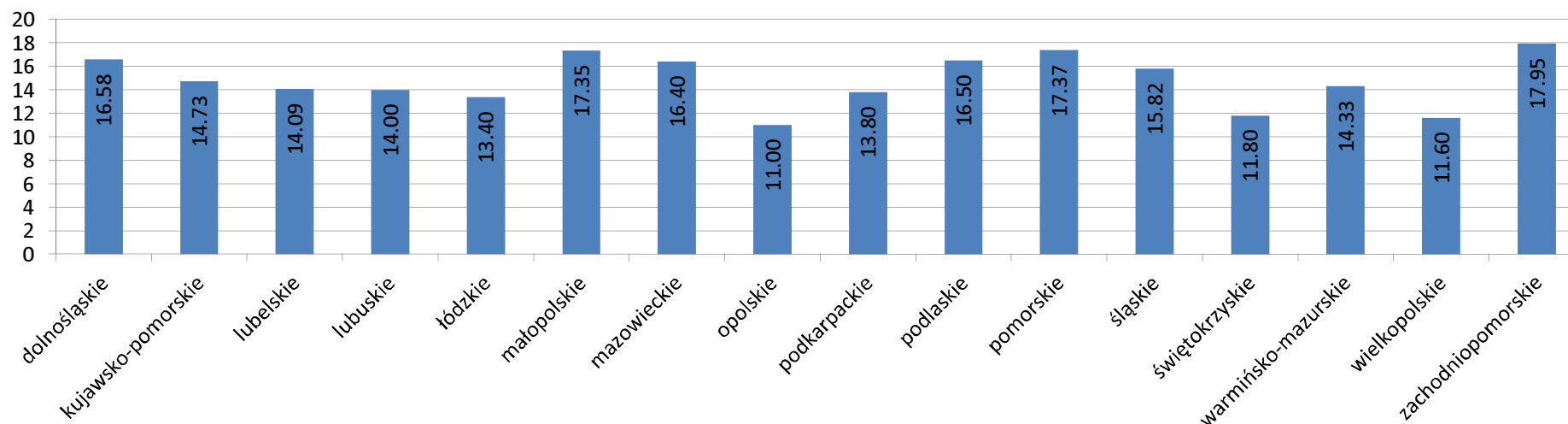


Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Średnia otrzymanych punktów za poszczególne zadania



Średnia uzyskanych punktów ze wszystkich zadań łącznie w podziale na województwa



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



Stowarzyszenie
na Rzecz Edukacji
Matematycznej

MINISTERSTWO
EDUKACJI
NARODOWEJ



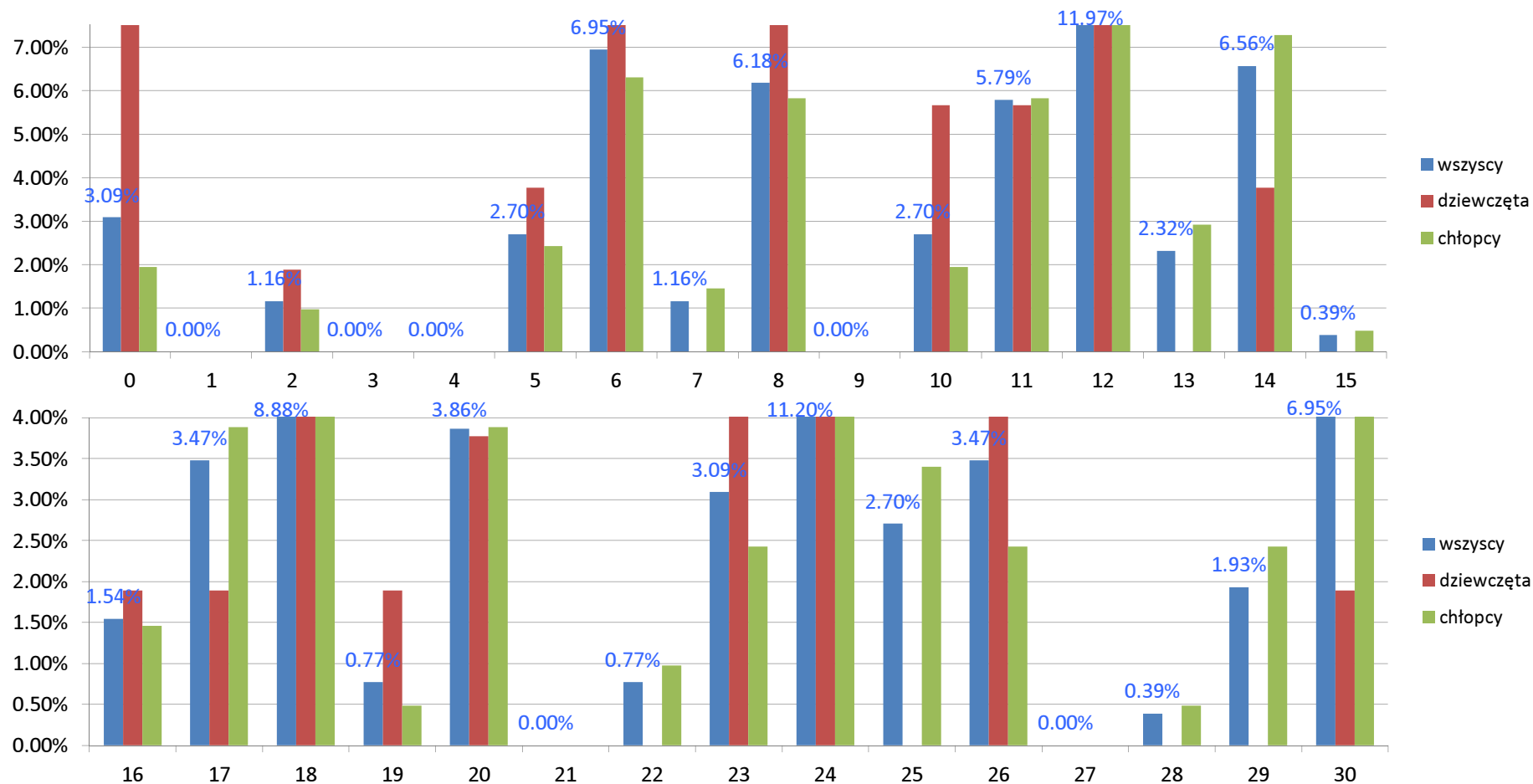
OSRÓDEK
ROZWOJU
EDUKACJI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Procentowa liczba osób, które uzyskały daną sumę punktów w zawodach III stopnia



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



Stowarzyszenie
na rzecz Edukacji
Matematycznej

MINISTERSTWO
EDUKACJI
NARODOWEJ



OŚRODEK
ROZWOJU
EDUKACJI

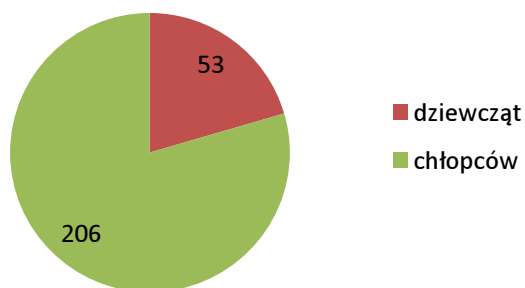
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

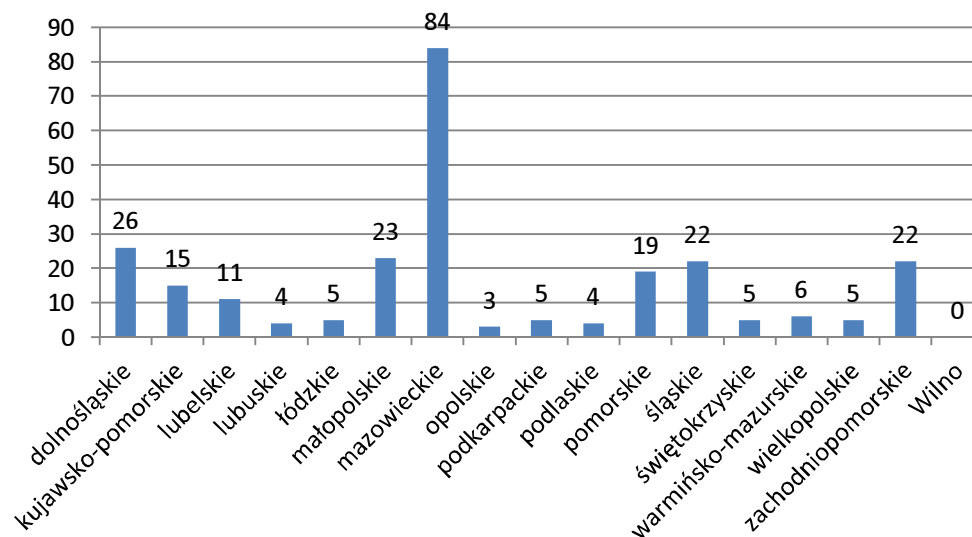
Liczba uczniów, którzy wzięli udział w zawodach III stopnia

w kraju



razem: 259

w poszczególnych województwach



Imiona:

Nazwisko:

Klasa:



X Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

Zawody stopnia pierwszego – część testowa

(27 listopada 2014 r., godz. 9:00)

Przed przystąpieniem do rozwiązywania testu wpisz na każdą stronę swoje imiona, nazwisko oraz numer klasy.

Treść każdego z poniższych zadań zawiera trzy stwierdzenia. Każde z nich jest prawdziwe lub fałszywe. Jeśli dane stwierdzenie jest prawdziwe, wpisz w odpowiednią kratkę literkę T, jeśli zaś stwierdzenie jest fałszywe, wpisz literkę N.

W przypadku pomyłki przekreśl znakiem **X** podaną odpowiedź, a właściwą odpowiedź podaj obok z lewej strony. Nie używaj korektora.

Przykład poprawnie rozwiązane zadania:

0. Dla każdej dodatniej liczby całkowitej n liczba $2n + 1$ jest

	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>T</td></tr></table>	T	a) dodatnia;
T			
	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>T</td></tr></table>	T	b) nieparzysta;
T			
N	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>~~X~~</td></tr></table>	~~X~~	c) pierwsza.
~~X~~			

Czas na rozwiązywanie testu: 75 minut.

Powodzenia!

1. Istnieje ostrosłup, który ma dokładnie 15^{14}

<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td> </td></tr></table>		a) wierzchołków;
<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td> </td></tr></table>		b) krawędzi;
<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td> </td></tr></table>		c) ścian.

2. Mieszając w odpowiednich proporcjach roztwory soli kuchennej w wodzie, o stężeniach 10% i 30%, można otrzymać roztwór o stężeniu

<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td> </td></tr></table>		a) 20%;
<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td> </td></tr></table>		b) 27%;
<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td> </td></tr></table>		c) 40%.

Imiona:

Nazwisko:

Klasa:

3. Nierówność $(x-4)(x-9) > 0$ jest prawdziwa dla

a) $x = \sqrt{3}$;

b) $x = \sqrt{7}$;

c) $x = \sqrt{17}$.

4. Cyfry 1, 2, 3, 4, 5, 6 można ustawić w takiej kolejności, aby otrzymać liczbę sześciocyfrową, która jest

a) podzielna przez 5;

b) podzielna przez 9;

c) liczbą pierwszą.

5. Czworokąt wypukły $ABCD$ jest opisany na okręgu i $AB = BC$. Wynika z tego, że

a) $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ADC$;

b) $CD = DA$;

c) czworokąt $ABCD$ jest rombem.

6. Iloczyn $a \cdot b$ liczb całkowitych a, b jest podzielny przez 400. Wynika z tego, że co najmniej jedna z liczb a, b jest podzielna przez

a) 5;

b) 8;

c) 10.

7. W trójkącie ABC punkt M jest środkiem boku AB , a punkt D jest spodkiem wysokości poprowadzonej z wierzchołka C . Wynika z tego, że

a) $2 \cdot DM < AB$;

b) $CD \leq AC$ oraz $CD \leq BC$;

c) $CM < AC$ oraz $CM < BC$.

Imiona:

Nazwisko:

Klasa:

8. Punkt P znajduje się wewnątrz prostokąta $ABCD$ o polu 1, przy czym $AB > BC$.

Wynika z tego, że

- ☐ a) co najmniej jeden z trójkątów ABP , BCP , CDP , DAP ma pole mniejsze od 0,26;
- ☐ b) suma pól trójkątów ABP i CDP jest większa od 0,5;
- ☐ c) suma pól trójkątów ABP i BCP jest większa od 0,5.

9. Na tablicy napisano siedem różnych liczb całkowitych. Wynika z tego, że

- ☐ a) suma pewnych trzech spośród nich jest podzielna przez 2;
- ☐ b) suma pewnych czterech spośród nich jest podzielna przez 2;
- ☐ c) suma pewnych trzech spośród nich jest podzielna przez 3.

10. Liczba $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2} + \sqrt{2}$ jest

- ☐ a) całkowita;
- ☐ b) niewymierna;
- ☐ c) większa od 1,8.

11. W trójkącie równoramiennym ABC o podstawie AB punkt M jest środkiem ramienia BC . Wynika z tego, że

- ☐ a) $2 \cdot AM < 3 \cdot BC$;
- ☐ b) pola trójkątów ABM i ACM są równe;
- ☐ c) $\sphericalangle CAM = \frac{1}{2} \sphericalangle CAB$.

12. Istnieje n -kąt wypukły ($n \geq 4$), w którym liczba przekątnych

- ☐ a) jest potęgą liczby 4 o wykładniku całkowitym dodatnim;
- ☐ b) równa jest liczbie wierzchołków;
- ☐ c) jest mniejsza od połowy liczby wierzchołków.

Imiona:

Nazwisko:

Klasa:

13. Dodatnia liczba całkowita n ma tę własność, że liczba $\sqrt{2+\sqrt{4+n}}$ jest naturalna.

Wynika z tego, że liczba n jest

☐

a) podzielna przez 2;

☐

b) podzielna przez 3;

☐

c) większa od $\sqrt{2014}$.

14. Liczba $\frac{2+\sqrt{6}}{3+\sqrt{6}} \cdot \frac{3+\sqrt{15}}{5+\sqrt{15}} \cdot \frac{5+\sqrt{10}}{2+\sqrt{10}}$ jest

☐

a) wymierna;

☐

b) większa od 1;

☐

c) równa $\sqrt{30}$.

15. Ostrosłup o podstawie będącej 10-kątem wypukłym rozcięto płaszczyzną otrzymując w przekroju pewien wielokąt. Wynika z tego, że

☐

a) wielokąt ten ma co najwyżej 10 wierzchołków;

☐

b) co najmniej jeden z wielościanów, na które został rozcięty dany ostrosłup, ma więcej niż 7 wierzchołków;

☐

c) co najmniej jeden z wielościanów, na które został rozcięty dany ostrosłup, jest ostrosłupem.

Rozwiązania zadań testowych

1. Istnieje ostrosłup, który ma dokładnie 15^{14}

T	a) wierzchołków;
N	b) krawędzi;
T	c) ścian.

Komentarz

a), c) Ostrosłup o podstawie n -kąta ma $n+1$ wierzchołków oraz $n+1$ ścian. Wobec tego dla $n = 15^{14} - 1$ otrzymujemy ostrosłup o 15^{14} wierzchołkach i 15^{14} ścianach.

b) Ostrosłup o podstawie n -kąta ma $2n$ krawędzi. W każdym ostrosłupie liczba krawędzi jest więc parzysta, podczas gdy 15^{14} nie jest liczbą parzystą.

2. Mieszając w odpowiednich proporcjach roztwory soli kuchennej w wodzie, o stężeniach 10% i 30%, można otrzymać roztwór o stężeniu

T	a) 20%;
T	b) 27%;
N	c) 40%.

Komentarz

W a jednostkach roztworu o stężeniu $p\%$ znajduje się $\frac{a \cdot p}{100}$ jednostek soli. W takim razie mieszając a_1 jednostek roztworu o stężeniu $p_1\%$ oraz a_2 jednostek roztworu o stężeniu $p_2\%$, otrzymujemy $a_1 + a_2$ jednostek roztworu, w którym liczba jednostek soli jest równa

$$\frac{a_1 \cdot p_1}{100} + \frac{a_2 \cdot p_2}{100}.$$

To oznacza, że po zmieszaniu uzyskujemy roztwór o stężeniu

$$\frac{a_1 \cdot p_1 + a_2 \cdot p_2}{100 \cdot (a_1 + a_2)} \cdot 100\% = \left(\frac{a_1 \cdot p_1 + a_2 \cdot p_2}{a_1 + a_2} \right) \%.$$

a) W wyniku zmieszania jednej jednostki roztworu o stężeniu 10% z jedną jednostką roztworu o stężeniu 30% otrzymamy roztwór o stężeniu

$$\left(\frac{1 \cdot 10 + 1 \cdot 30}{2} \right) \% = 20\%.$$

b) W wyniku zmieszania trzech jednostek roztworu o stężeniu 10% z siedemnastoma jednostkami roztworu o stężeniu 30% otrzymamy roztwór o stężeniu

$$\left(\frac{3 \cdot 10 + 17 \cdot 30}{20}\right)\% = 27\%.$$

c) Mieszając dane roztwory, otrzymamy roztwór o stężeniu mniejszym od 30%. Rzeczywiście, w wyniku zmieszania a_1 jednostek roztworu o stężeniu 10% z a_2 jednostkami roztworu o stężeniu 30% uzyskujemy roztwór o stężeniu

$$\left(\frac{a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 30}{a_1 + a_2}\right)\% < \left(\frac{a_1 \cdot 30 + a_2 \cdot 30}{a_1 + a_2}\right)\% = 30\%.$$

W związku z tym nie można otrzymać roztworu o stężeniu 40%.

3. Nierówność $(x-4)(x-9) > 0$ jest prawdziwa dla

T	a) $x = \sqrt{3}$;
T	b) $x = \sqrt{7}$;
N	c) $x = \sqrt{17}$.

Komentarz

Dana nierówność jest prawdziwa, gdy obie liczby $x-4$, $x-9$ są ujemne lub gdy obie są dodatnie. Pierwszy warunek oznacza, że $x < 4$, a drugi jest spełniony jedynie dla $x > 9$. Wobec tego dana nierówność jest spełniona wtedy i tylko wtedy, gdy $x < 4$ lub $x > 9$.

- a) Jeśli $x = \sqrt{3}$, to $x < \sqrt{16} = 4$.
b) Jeśli $x = \sqrt{7}$, to $x < \sqrt{16} = 4$.
c) Jeśli $x = \sqrt{17}$, to $x > \sqrt{16} = 4$ oraz $x < \sqrt{81} = 9$.

4. Cyfry 1, 2, 3, 4, 5, 6 można ustawić w takiej kolejności, aby otrzymać liczbę sześciocyfrową, która jest

T	a) podzielna przez 5;
N	b) podzielna przez 9;
N	c) liczbą pierwszą.

Komentarz

- a) Ostatnią cyfrą liczby 123465 jest 5, więc jest to liczba podzielna przez 5.
b) Dowolna liczba n , której cyframi są 1, 2, 3, 4, 5, 6 w pewnej kolejności, ma sumę cyfr równą $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$. Liczba 21 nie jest podzielna przez 9, więc korzystając z cechy podzielności przez 9, wnosimy, że liczba n również nie może być podzielna przez 9.
c) Każda liczba sześciocyfrowa składająca się z cyfr 1, 2, 3, 4, 5, 6 ma sumę cyfr równą 21. Liczba 21 jest podzielna przez 3, więc liczba sześciocyfrowa o sumie cyfr równej

21 również jest podzielna przez 3. Taka liczba, jako większa od 3, nie może być liczbą pierwszą.

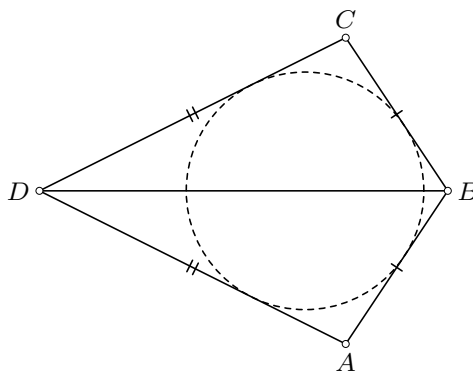
5. Czworokąt wypukły $ABCD$ jest opisany na okręgu i $AB = BC$. Wynika z tego, że

N	a) $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ADC$;
T	b) $CD = DA$;
N	c) czworokąt $ABCD$ jest rombem.

Komentarz

b) Skoro czworokąt $ABCD$ jest opisany na okręgu, to $AB + CD = BC + DA$. Stąd wynika, że jeśli $AB = BC$, to $CD = DA$.

a) Rozpatrzmy trójkąt ABD , w którym $AB < AD$. Niech C będzie obrazem symetrycznym punktu A względem prostej BD (rys. 1). Wówczas $AB + CD = BC + DA$, a więc czworokąt $ABCD$ jest opisany na okręgu. Ponadto, skoro $AB < AD$, to $\sphericalangle ABD > \sphericalangle ADB$. Mnożąc tę nierówność stronami przez 2, uzyskujemy $\sphericalangle ABC > \sphericalangle ADC$.



rys. 1

c) Czworokąt $ABCD$ zbudowany punkcie a) spełnia warunki zadania, ale nie jest rombem.

6. Iloczyn $a \cdot b$ liczb całkowitych a, b jest podzielny przez 400. Wynika z tego, że co najmniej jedna z liczb a, b jest podzielna przez

T	a) 5;
N	b) 8;
N	c) 10.

Komentarz

a) Gdyby żadna z liczb a, b nie była podzielna przez 5, iloczyn $a \cdot b$ tych liczb również nie mógłby być podzielny przez 5, a tym bardziej przez 400.

b) Jeżeli $a = 4$, $b = 100$, to $a \cdot b = 400$ jest liczbą podzielną przez 400, ale żadna z liczb a , b nie jest podzielna przez 8.

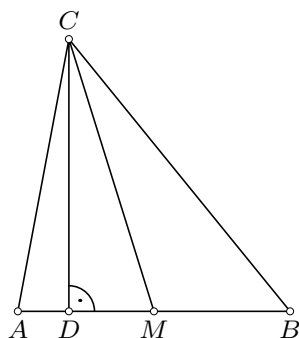
c) Jeżeli $a = 16$, $b = 25$, to $a \cdot b = 400$ jest liczbą podzielną przez 400, ale żadna z liczb a , b nie jest podzielna przez 10.

7. W trójkącie ABC punkt M jest środkiem boku AB , a punkt D jest spodkiem wysokości poprowadzonej z wierzchołka C . Wynika z tego, że

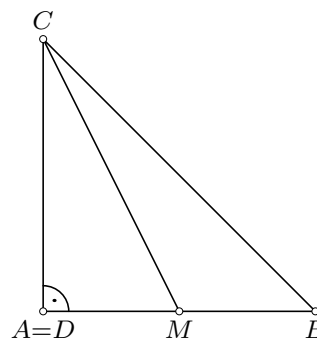
- ☐ N a) $2 \cdot DM < AB$;
☐ T b) $CD \leq AC$ oraz $CD \leq BC$;
☐ N c) $CM < AC$ oraz $CM < BC$.

Komentarz

b) Jeżeli punkty A i D pokrywają się, to $CD = CA$. W przeciwnym wypadku odcinek CD jest przyprostokątną trójkąta prostokątnego CDA , więc długość tego odcinka jest mniejsza od długości przeciwprostokątnej CA tego trójkąta, czyli $CD < CA$ (rys. 2). Wobec tego $CD \leq AC$. Analogicznie uzasadniamy, że $CD \leq CB$.



rys. 2



rys. 3

a), c) Niech ABC będzie równoramiennym trójkątem prostokątnym o kącie prostym przy wierzchołku A (rys. 3). Wówczas punkty A i D pokrywają się, więc $2DM = 2AM = AB$. Odcinek CA jest przyprostokątną trójkąta prostokątnego CAM , więc jego długość jest mniejsza od długości przeciwprostokątnej tego trójkąta, czyli $CM > AC$.

8. Punkt P znajduje się wewnątrz prostokąta $ABCD$ o polu 1, przy czym $AB > BC$. Wynika z tego, że

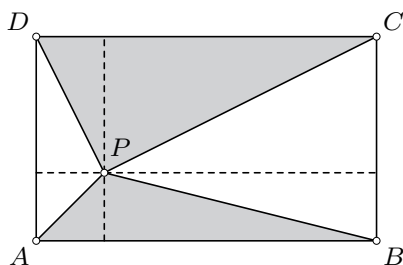
- ☐ T a) co najmniej jeden z trójkątów ABP , BCP , CDP , DAP ma pole mniejsze od 0,26;
☐ N b) suma pól trójkątów ABP i CDP jest większa od 0,5;
☐ N c) suma pól trójkątów ABP i BCP jest większa od 0,5.

Komentarz

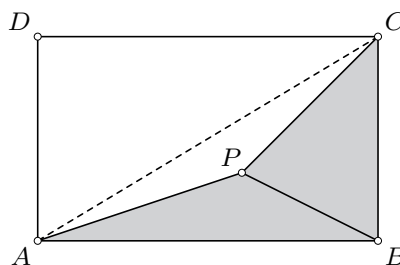
a) Gdyby każdy z omawianych czterech trójkątów miał pole równe co najmniej $0,26$, to suma pól tych trójkątów byłaby nie mniejsza od $4 \cdot 0,26 = 1,04$. Tymczasem suma pól tych trójkątów jest równa polu prostokąta $ABCD$, jest więc równa 1 .

b) Udowodnimy, że niezależnie od wyboru punktu P suma pól trójkątów ABP i CDP jest równa $0,5$.

Podzielmy prostokąt $ABCD$ na cztery mniejsze prostokąty prostymi przechodzącymi przez punkt P (rys. 4). Każdy z otrzymanych mniejszych prostokątów możemy podzielić przekątną na dwa trójkąty przystające, a więc trójkąty o równych polach, z których jeden kolorujemy na szaro, a drugi na białą. Suma pól trójkątów ABP i CDP , czyli szara powierzchnia, stanowi więc połowę pola prostokąta $ABCD$.



rys. 4



rys. 5

c) Jeżeli punkt P należy do wnętrza trójkąta ABC (rys. 5), to suma pól trójkątów ABP i BCP jest mniejsza od pola trójkąta ABC , równego $0,5$.

9. Na tablicy napisano siedem różnych liczb całkowitych. Wynika z tego, że

N	a) suma pewnych trzech spośród nich jest podzielna przez 2;
T	b) suma pewnych czterech spośród nich jest podzielna przez 2;
T	c) suma pewnych trzech spośród nich jest podzielna przez 3.

Komentarz

a) Jeżeli na tablicy znajduje się siedem liczb nieparzystych, to suma każdych trzech spośród nich jest liczbą nieparzystą.

b) Wśród każdych siedmiu liczb całkowitych są co najmniej cztery liczby parzyste lub co najmniej cztery liczby nieparzyste. Rzeczywiście, gdyby zarówno liczb parzystych, jak i nieparzystych było co najwyżej trzy, to łącznie na tablicy mogłoby być napisanych co najwyżej sześć liczb, podczas gdy jest ich siedem. Pozostaje zauważyć, że suma czterech liczb parzystych oraz suma czterech liczb nieparzystych są liczbami parzystymi.

c) Wśród każdych siedmiu liczb całkowitych są co najmniej trzy liczby dające tę samą resztę przy dzieleniu przez 3. Rzeczywiście, gdyby każdą z trzech możliwych reszt dawały

co najwyżej dwie liczby, to łącznie na tablicy mogłoby być napisanych co najwyżej sześć liczb, podczas gdy jest ich siedem. Pozostaje zauważyć, że suma trzech liczb dających tę samą resztę przy dzieleniu przez 3 jest podzielna przez 3.

10. Liczba $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2} + \sqrt{2}$ jest

N	a) całkowita;
T	b) niewymierna;
T	c) większa od 1,8.

Komentarz

Oznaczmy daną liczbę przez a . Ponieważ $1-\sqrt{2} < 0$, więc $|1-\sqrt{2}| = \sqrt{2}-1$. Wobec tego

$$a = \sqrt{(1-\sqrt{2})^2} + \sqrt{2} = |1-\sqrt{2}| + \sqrt{2} = \sqrt{2}-1 + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}-1.$$

a), b) Gdyby liczba a była wymierna, to również liczba $\frac{a+1}{2} = \sqrt{2}$ musiałaby być wymierna. Jednak liczba $\sqrt{2}$ jest niewymierna, więc liczba a także musi być niewymierna.

c) Prawdziwa jest nierówność $\sqrt{2} > \sqrt{1,96} = 1,4$. Stąd wynika, że

$$a = 2\sqrt{2}-1 > 2 \cdot 1,4 - 1 = 1,8.$$

11. W trójkącie równoramiennym ABC o podstawie AB punkt M jest środkiem ramienia BC . Wynika z tego, że

T	a) $2 \cdot AM < 3 \cdot BC$;
T	b) pola trójkątów ABM i ACM są równe;
N	c) $\sphericalangle CAM = \frac{1}{2} \sphericalangle CAB$.

Komentarz

a) Z nierówności trójkąta dla trójkąta CAM wynika, że

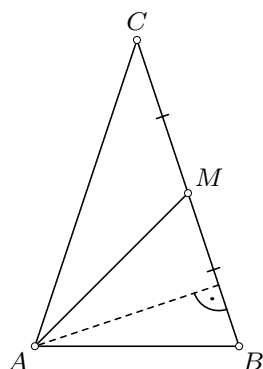
$$AM < AC + CM = BC + \frac{1}{2}BC = \frac{3}{2}BC, \quad \text{skąd} \quad 2 \cdot AM < 3 \cdot BC.$$

b) Trójkąty ABM i ACM mają równe podstawy $MB = MC$ oraz tę samą wysokość poprowadzoną na te podstawy (rys. 6). Stąd wniosek, że trójkąty te mają równe pola.

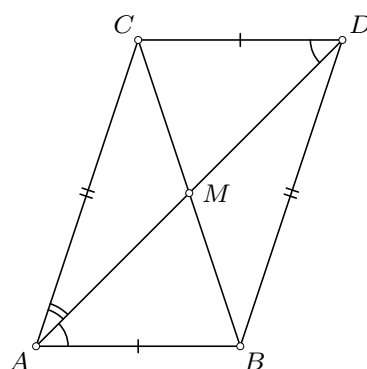
c) Niech ABC będzie trójkątem równoramiennym o podstawie AB , w którym podstawa AB jest krótsza od ramienia AC . Wykażemy, że wówczas $\sphericalangle CAM < \frac{1}{2} \sphericalangle CAB$.

Niech D będzie takim punktem, że czworokąt $ABDC$ jest równoległobokiem (rys. 7). Wówczas $DC < AC$, a więc $\sphericalangle CAM < \sphericalangle CDA = \sphericalangle MAB$. Wobec tego

$$2\sphericalangle CAM < \sphericalangle CAM + \sphericalangle MAB = \sphericalangle CAB.$$



rys. 6



rys. 7

12. Istnieje n -kąt wypukły ($n \geq 4$), w którym liczba przekątnych

N	a) jest potęgą liczby 4 o wykładniku całkowitym dodatnim;
T	b) równa jest liczbie wierzchołków;
N	c) jest mniejsza od połowy liczby wierzchołków.

Komentarz

Wykażemy, że liczba przekątnych n -kąta wypukłego jest równa $\frac{1}{2}n(n-3)$.

Każdy z wierzchołków n -kąta wypukłego jest końcem dokładnie $n-3$ przekątnych tego wielokąta. Stąd wniosek, że wszystkie przekątne mają łącznie dokładnie $n(n-3)$ końców. Skoro każda przekątna ma dwa końce, to przekątnych jest $\frac{1}{2}n(n-3)$.

a) Przypuśćmy, że dla pewnej liczby całkowitej dodatniej k zachodzi równość

$$\frac{1}{2}n(n-3) = 4^k, \quad \text{czyli} \quad n(n-3) = 2^{2k+1}.$$

Liczby całkowite dodatnie n , $n-3$ różnią się o 3, więc jedna z tych liczb jest parzysta, a druga — nieparzysta. Jedynym nieparzystym dzielnikiem liczby 2^{2k+1} jest liczba 1, skąd wniosek, że $n-3=1$, czyli $n=4$. Jednak liczba przekątnych czworokąta wypukłego jest równa 2, a 2 nie jest potęgą liczby 4 o wykładniku całkowitym. Uzyskana sprzeczność oznacza, że nie istnieje liczba k o szukanych własnościach.

b) Każdy pięciokąt wypukły ma dokładnie 5 przekątnych.

c) Ponieważ $n \geq 4$, więc $n-3 \geq 1$, a zatem $\frac{1}{2}n \cdot (n-3) \geq \frac{1}{2}n$. To oznacza, że liczba przekątnych jest nie mniejsza od połowy liczby wierzchołków.

13. Dodatnia liczba całkowita n ma tę własność, że liczba $\sqrt{2 + \sqrt{4 + n}}$ jest naturalna.

Wynika z tego, że liczba n jest

N	a) podzielna przez 2;
T	b) podzielna przez 3;
T	c) większa od $\sqrt{2014}$.

Komentarz

Oznaczmy $k = \sqrt{2 + \sqrt{4 + n}}$. Przekształcając tę równość, otrzymujemy kolejno:

$$k^2 = 2 + \sqrt{4 + n},$$

$$k^2 - 2 = \sqrt{4 + n},$$

$$k^4 - 4k^2 + 4 = 4 + n,$$

$$k^2(k^2 - 4) = n,$$

$$k^2(k - 2)(k + 2) = n.$$

b) Jeżeli k jest liczbą naturalną, to jedna z liczb $k - 2$, k , $k + 2$ jest podzielna przez 3. Rzeczywiście, jeżeli k daje resztę 1 przy dzieleniu przez 3, to liczba $k + 2$ jest podzielna przez 3, a jeżeli k daje resztę 2 przy dzieleniu przez 3, to liczba $k - 2$ jest podzielna przez 3. Stąd wniosek, że iloczyn $k^2(k - 2)(k + 2)$ jest liczbą podzielną przez 3 dla każdej liczby naturalnej k .

c) Liczba $n = k^2(k - 2)(k + 2)$ jest dodatnia, skąd wynika, że $k \geq 3$. Wobec tego

$$n = k^2(k - 2)(k + 2) \geq 3^2 \cdot (3 - 2)(3 + 2) = 45 = \sqrt{2025} > \sqrt{2014}.$$

a) Dla liczby nieparzystej $n = 45$ liczba

$$\sqrt{2 + \sqrt{4 + 45}} = \sqrt{2 + \sqrt{49}} = \sqrt{2 + 7} = \sqrt{9} = 3$$

jest naturalna.

14. Liczba $\frac{2 + \sqrt{6}}{3 + \sqrt{6}} \cdot \frac{3 + \sqrt{15}}{5 + \sqrt{15}} \cdot \frac{5 + \sqrt{10}}{2 + \sqrt{10}}$ jest

T

a) wymierna;

N

b) większa od 1;

N

c) równa $\sqrt{30}$.

Komentarz

$$\frac{2 + \sqrt{6}}{3 + \sqrt{6}} \cdot \frac{3 + \sqrt{15}}{5 + \sqrt{15}} \cdot \frac{5 + \sqrt{10}}{2 + \sqrt{10}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2} + \sqrt{3})}{\sqrt{3}(\sqrt{3} + \sqrt{2})} \cdot \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3} + \sqrt{5})}{\sqrt{5}(\sqrt{5} + \sqrt{3})} \cdot \frac{\sqrt{5}(\sqrt{5} + \sqrt{2})}{\sqrt{2}(\sqrt{2} + \sqrt{5})} = 1.$$

15. Ostrosłup o podstawie będącej 10-kątem wypukłym rozcięto płaszczyzną otrzymując w przekroju pewien wielokąt. Wynika z tego, że

N

a) wielokąt ten ma co najwyżej 10 wierzchołków;

N

b) co najmniej jeden z wielościanów, na które został rozcięty dany ostrosłup, ma więcej niż 7 wierzchołków;

N

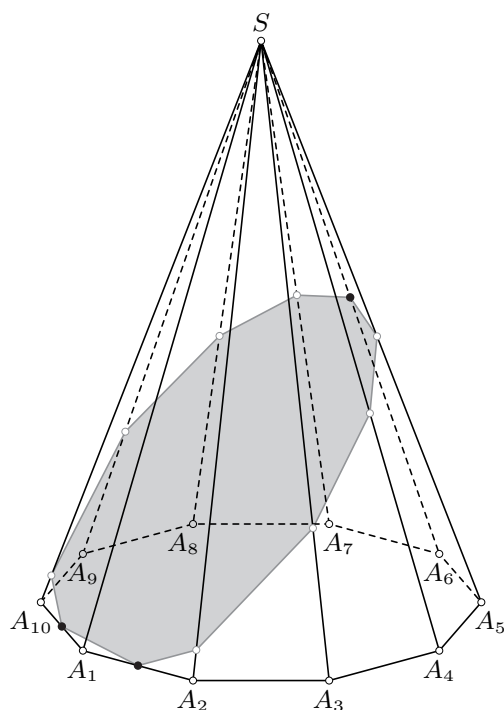
c) co najmniej jeden z wielościanów, na które został rozcięty dany ostrosłup, jest ostrosłupem.

Rozważmy ostrosłup prawidłowy o podstawie dziesięciokąta foremnego $A_1A_2\ldots A_{10}$ oraz wierzchołku S .

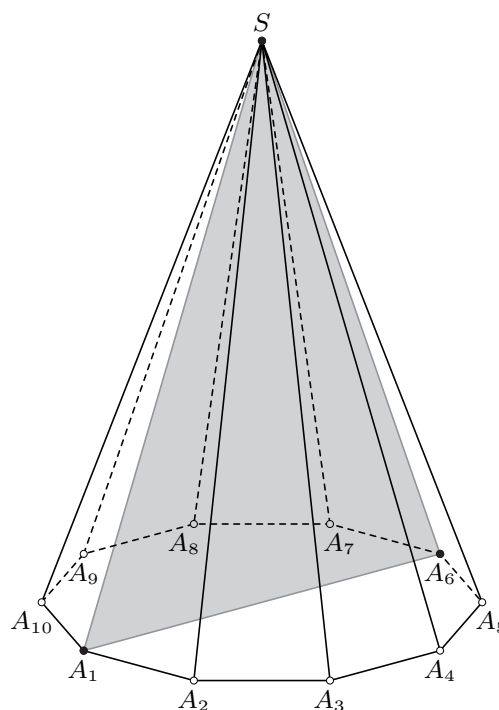
a) Przetnijmy ostrosłup płaszczyzną przechodzącą przez środki krawędzi A_1A_{10} , A_1A_2 oraz A_6S (rys. 8). Płaszczyzna ta przecina 11 krawędzi wyjściowego ostrosłupa, więc w przekroju otrzymujemy pewien 11-kąt wypukły.

c) Żadna z brył otrzymanych z przecięcia opisanego w poprzednim punkcie nie jest ostrosłupem. Jedna z tych brył ma dwie ściany 11-kątne, a każdy ostrosłup ma co najwyżej jedną ścianę nie będącą trójkątem. Druga z otrzymanych brył ma dwie ściany czworokątne i jedną jedenastokątną, więc również nie może być ostrosłupem.

b) Przetnijmy ostrosłup płaszczyzną przechodzącą przez wierzchołki A_1 , A_6 oraz S (rys. 9). Wtedy każda z otrzymanych brył ma dokładnie 7 wierzchołków.



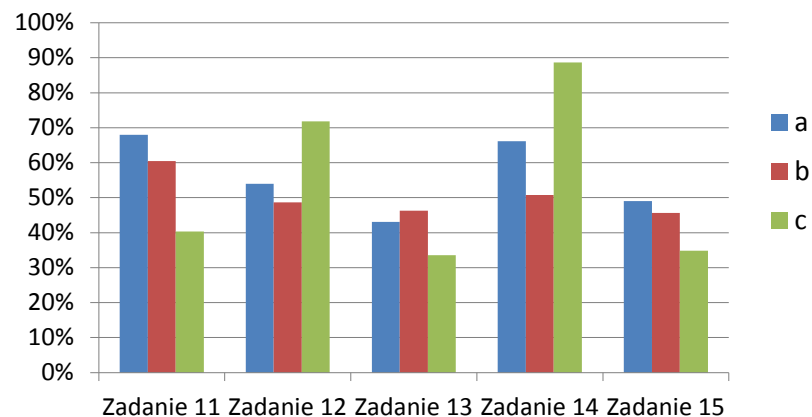
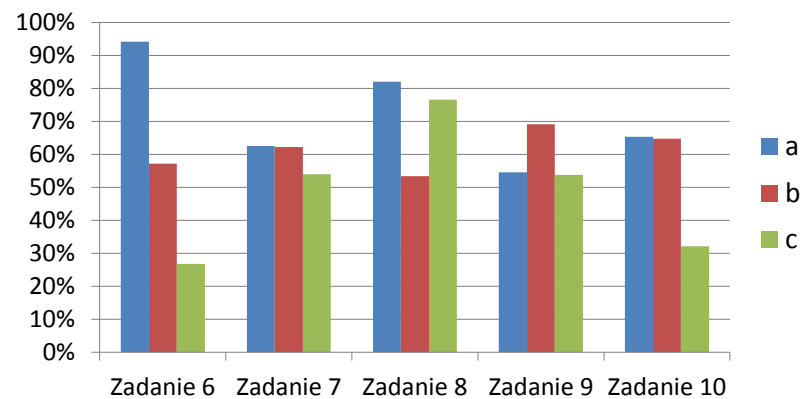
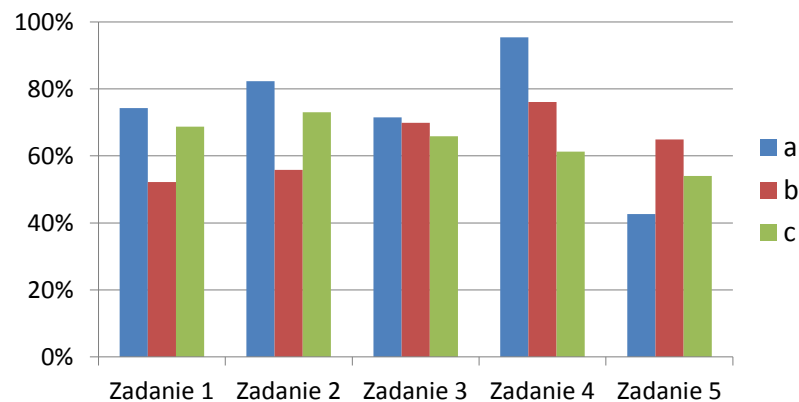
rys. 8



rys. 9

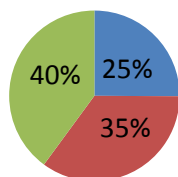
Statystyki części testowej X OMG (2014/2015)

Procentowe zestawienie liczby poprawnych odpowiedzi zadań testowych
w podziale na zadania (kraj)

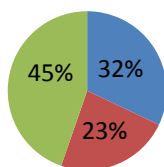


Procentowe zestawienie liczby osób, które uzyskały daną liczbę punktów w podziale na zadania (kraj)

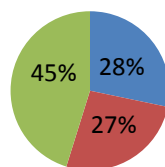
Zadanie 1



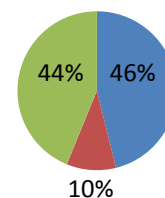
Zadanie 2



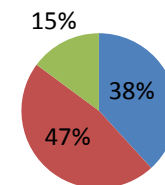
Zadanie 3



Zadanie 4

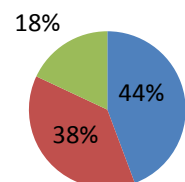


Zadanie 5

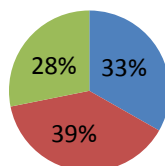


1 pkt
0.5 pkt
0 pkt

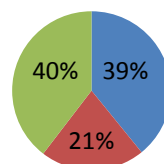
Zadanie 6



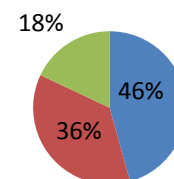
Zadanie 7



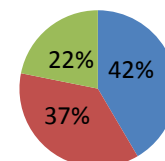
Zadanie 8



Zadanie 9

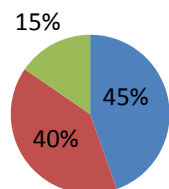


Zadanie 10

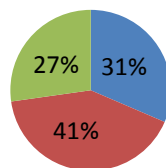


1 pkt
0.5 pkt
0 pkt

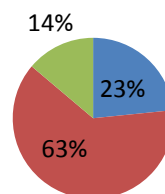
Zadanie 11



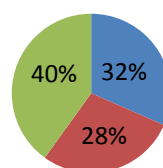
Zadanie 12



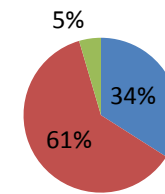
Zadanie 13



Zadanie 14

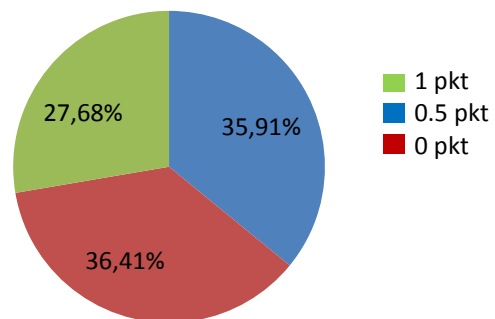


Zadanie 15

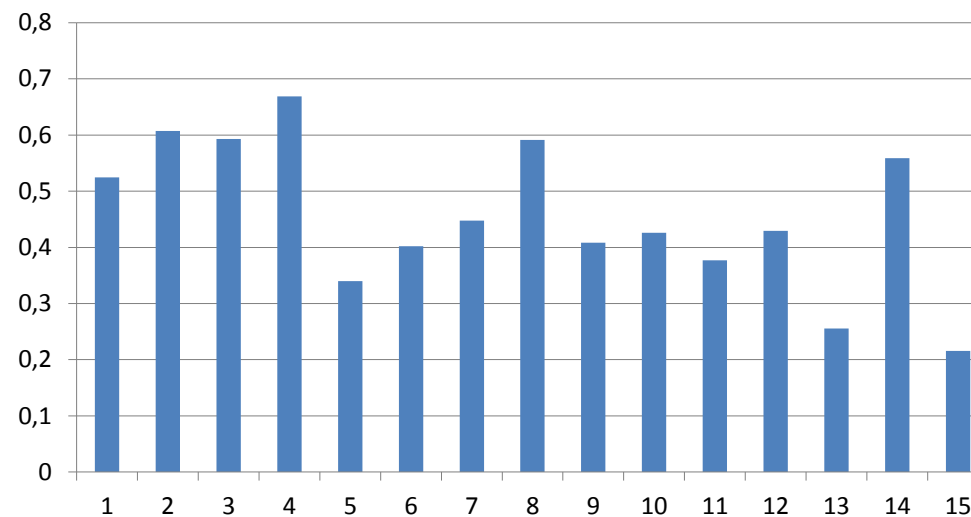


1 pkt
0.5 pkt
0 pkt

Procentowe zestawienie liczby uzyskanych ocen ze wszystkich zadań



Średnia otrzymanych punktów za poszczególne zadania



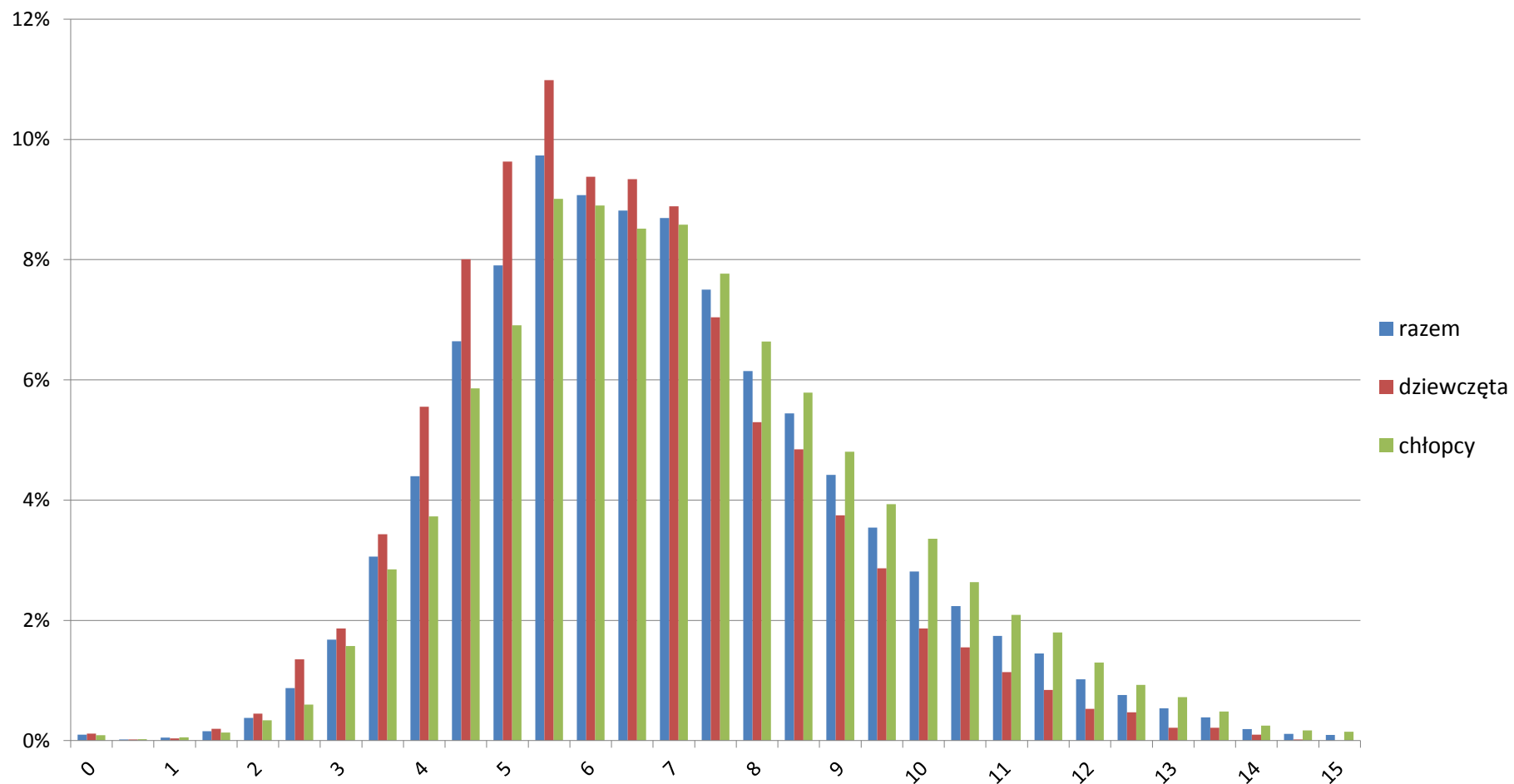
Średnia liczba poprawnych odpowiedzi: 60,39%

Liczba uczniów, którzy wzięli udział w części testowej X OMG (2014/2015): 13940

Liczba szkół biorących udział w części testowej X OMG (2014/2015): 1189

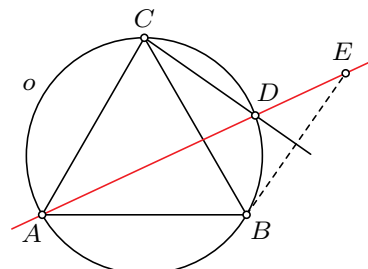
Średnia punktów w kraju: 6,85

Procentowa liczba osób, które otrzymały poszczególną sumę punktów (kraj)



1. Ania rozmieniła banknot o nominale 50 zł na 13 monet, z których każda miała wartość 1 zł, 2 zł lub 5 zł. Ile monet pięciozłotowych otrzymała Ania? Podaj wszystkie możliwości. Odpowiedź uzasadnij.

2. Trójkąt równoboczny ABC jest wpisany w okrąg o . Punkt D leży na krótszym łuku BC okręgu o . Punkt E jest symetryczny do punktu B względem prostej CD . Wykaż, że punkty A, D, E leżą na jednej prostej.

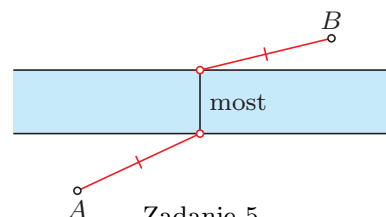


Zadanie 2.

3. Wyznacz najmniejszą możliwą wartość wyrażenia $a+b^3$, gdzie a i b są dodatnimi liczbami o iloczynie równym 1.

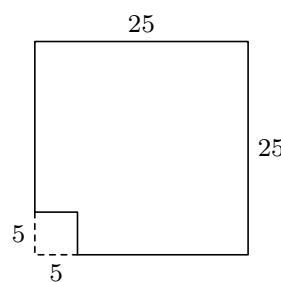
4. Na przyjęcie przyszło n osób. Początkowo każdy miał dokładnie 3 znajomych wśród pozostałych osób obecnych na przyjęciu. W trakcie przyjęcia niektóre osoby poznały się, w wyniku czego pod koniec przyjęcia każdy miał wśród pozostałych obecnych dokładnie 4 znajomych. Wyznacz wszystkie liczby n , dla których opisana sytuacja jest możliwa. (Przyjmujemy, że jeśli osoba A zna osobę B , to osoba B zna osobę A .)

5. Po dwóch stronach rzeki o równoległych brzegach znajdują się dwa domy A i B , przy czym prosta AB nie jest prostopadła do brzegów rzeki (zob. rysunek). W którym miejscu należy wybudować most, prostopadły do brzegów rzeki, aby drogi z obu domów do mostu, biegnące w linii prostej, były równej długości? Podaj odpowiednią konstrukcję cyrklem i linijką oraz uzasadnij jej poprawność.



Zadanie 5.

6. Od kwadratowej kartki o boku 25 odcięto kwadrat o boku 5, jak pokazano na rysunku. Czy pozostałą część kartki można pociąć na 100 prostokątów, z których każdy ma wymiary 1×6 lub 2×3 ? Odpowiedź uzasadnij.



Zadanie 6.

7. Dany jest czworościan $ABCD$, w którym $\angle ACB = \angle ADB = 90^\circ$ oraz $AC = CD = DB$. Wykaż, że $AB < 2 \cdot CD$.

Rozwiązania powyższych zadań (wszystkich lub części z nich) należy przekazać szkolnemu koordynatorowi OMG lub przesłać bezpośrednio, listem poleconym, do Komitetu Okręgowego OMG właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

15 grudnia 2014 r. (decyduje data stempla pocztowego).

Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane. Adresy Komitetów Okręgowych OMG, szczegółowe wytyczne dotyczące sposobu redakcji rozwiązań i przysyłania prac, a także regulamin OMG i inne bieżące informacje znajdują się na stronie internetowej Olimpiady: www.omg.edu.pl.

Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej. Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku.

X Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

Zawody stopnia pierwszego – część korespondencyjna

(10 listopada 2014 r. – 15 grudnia 2014 r.)

Szkice rozwiązań zadań konkursowych

1. Ania rozmięniła banknot o nominale 50zł na 13 monet, z których każda miała wartość 1 zł, 2 zł lub 5 zł. Ile monet pięciozłotowych otrzymała Ania? Podaj wszystkie możliwości. Odpowiedź uzasadnij.

Szkic rozwiązania

Przypuśćmy, że Ania otrzymała a monet pięciozłotowych, b monet dwuzłotowych oraz c monet jednozłotowych. To oznacza, że a, b, c są nieujemnymi liczbami całkowitymi, spełniającymi układ równań

$$\begin{cases} a + b + c = 13 \\ 5a + 2b + c = 50. \end{cases}$$

Rozwiążemy ten układ ze względu na niewiadome b i c .

Odejmując pierwsze równanie stronami od drugiego, otrzymujemy zależność

$$5a + 2b + c - (a + b + c) = 50 - 13, \quad \text{skąd} \quad b = 37 - 4a.$$

Następnie mnożąc stronami pierwsze równanie przez 2 i odejmując od drugiego, uzyskujemy

$$5a + 2b + c - (2a + 2b + 2c) = 50 - 26, \quad \text{skąd} \quad c = 3a - 24.$$

Ponieważ liczby b i c są nieujemne, więc $37 - 4a \geq 0$ oraz $3a - 24 \geq 0$. Wobec tego $a \leq \frac{37}{4} = 9\frac{1}{4}$ oraz $a \geq 8$. To oznacza, że $a = 8$ lub $a = 9$.

Jeżeli $a = 8$, to $b = 37 - 4 \cdot 8 = 5$ oraz $c = 13 - 8 - 5 = 0$, a jeżeli $a = 9$, to $b = 37 - 4 \cdot 9 = 1$ oraz $c = 13 - 9 - 1 = 3$. Znalezione trójki są rozwiązaniami wyjściowego układu równań, więc spełnione są dla nich warunki zadania.

Odpowiedź

Ania otrzymała 8 lub 9 monet pięciozłotowych.

2. Trójkąt równoboczny ABC jest wpisany w okrąg o . Punkt D leży na krótszym łuku BC okręgu o . Punkt E jest symetryczny do punktu B względem prostej CD . Wykaż, że punkty A, D, E leżą na jednej prostej.

Szkic rozwiązania

Z równości kątów wpisanych i opartych na tych samych łukach otrzymujemy (rys. 1)

$$\sphericalangle ADB = \sphericalangle ACB = 60^\circ, \quad \sphericalangle ADC = \sphericalangle ABC = 60^\circ.$$

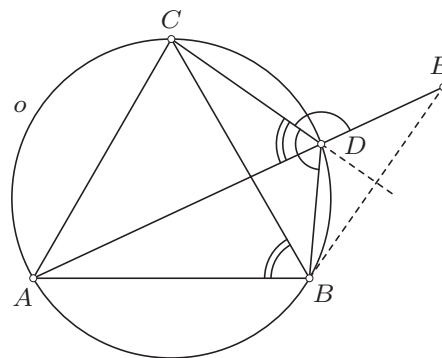
Ponieważ punkty B i E są symetryczne względem prostej CD , więc

$$\sphericalangle EDC = \sphericalangle BDC = \sphericalangle ADB + \sphericalangle ADC = 120^\circ.$$

Łącząc uzyskane zależności, otrzymujemy

$$\sphericalangle EDC + \sphericalangle ADC = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ,$$

a to oznacza, że punkty A, D, E leżą na jednej prostej.



rys. 1

3. Wyznacz najmniejszą możliwą wartość wyrażenia $a + b^3$, gdzie a i b są dodatnimi liczbami o iloczynie równym 1.

Szkic rozwiązania

Korzystając z nierówności między średnią arytmetyczną a geometryczną dla czterech liczb: $\frac{a}{3}$, $\frac{a}{3}$, $\frac{a}{3}$, b^3 , uzyskujemy

$$\frac{a + b^3}{4} = \frac{\frac{a}{3} + \frac{a}{3} + \frac{a}{3} + b^3}{4} \geq \sqrt[4]{\frac{a}{3} \cdot \frac{a}{3} \cdot \frac{a}{3} \cdot b^3} = \sqrt[4]{\frac{a^3 b^3}{27}} = \frac{1}{3} \sqrt[4]{3}.$$

Wykazaliśmy zatem, że dla dowolnych dodatnich liczb a , b o iloczynie równym 1 wyrażenie $a + b^3$ przyjmuje wartość nie mniejszą od $\frac{4}{3} \sqrt[4]{3}$. Aby wykazać, że liczba ta jest rzeczywiście szukaną najmniejszą wartością, należy wskazać takie liczby dodatnie a , b o iloczynie równym 1, dla których

$$a + b^3 = \frac{4}{3} \sqrt[4]{3}.$$

Bezpośrednio podstawiając sprawdzamy, że warunek ten spełniają liczby

$$a = \sqrt[4]{3} \quad \text{oraz} \quad b = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}.$$

Odpowiedź

Poszukiwaną najmniejszą wartością jest $\frac{4}{3} \sqrt[4]{3}$.

Uwaga 1.

Więcej na temat nierówności między średnią arytmetyczną a geometryczną i jej zastosowaniach można znaleźć w artykule „Nierówność między średnimi”, *Kwadrat* nr 13 (wrzesień 2014).

Uwaga 2.

W rozwiązaniu stosowaliśmy nierówność między średnią arytmetyczną a geometryczną dla czterech liczb. Krótki jej dowód można przeprowadzić w oparciu o zależność

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2},$$

czyli nierówność między średnią arytmetyczną a geometryczną dla dwóch liczb:

$$\sqrt[4]{abcd} = \sqrt{\sqrt{ab} \cdot \sqrt{cd}} \leq \sqrt{\frac{a+b}{2} \cdot \frac{c+d}{2}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{a+b}{2} + \frac{c+d}{2} \right) = \frac{a+b+c+d}{4}.$$

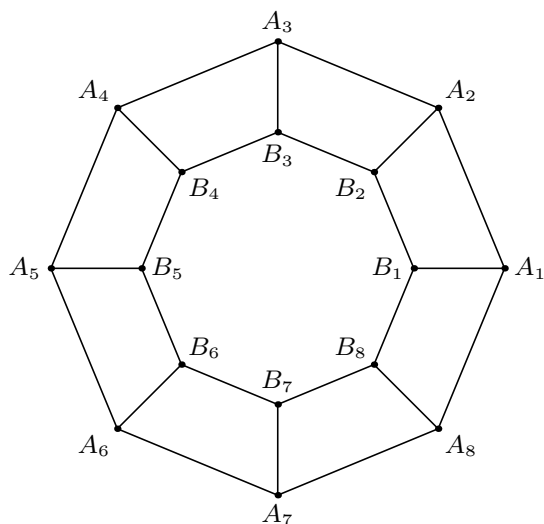
4. Na przyjęcie przyszło n osób. Początkowo każdy miał dokładnie 3 znajomych wśród pozostałych osób obecnych na przyjęciu. W trakcie przyjęcia niektóre osoby poznały się, w wyniku czego pod koniec przyjęcia każdy miał wśród pozostałych obecnych dokładnie 4 znajomych. Wyznacz wszystkie liczby n , dla których opisana sytuacja jest możliwa. (Przyjmujemy, że jeśli osoba A zna osobę B , to osoba B zna osobę A .)

Szkic rozwiązania

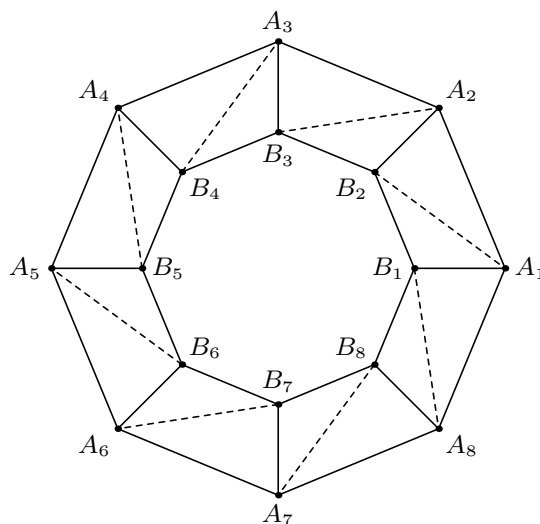
Zauważmy, że podczas przyjęcia każdy poznał dokładnie jedną osobę. To oznacza, że osoby, które poznały się na przyjęciu można połączyć w pary, a zatem liczba n jest parzysta. Ponadto, skoro pod koniec przyjęcia każdy miał pośród obecnych dokładnie 4 znajomych, to $n > 4$, czyli $n \geq 6$.

Udowodnimy, że każda liczba parzysta $n \geq 6$ spełnia warunki zadania.

W tym celu przyjmijmy, że $n = 2k$ dla pewnej liczby całkowitej dodatniej $k \geq 3$ i rozważmy graniastosłup k -kątny o podstawach $A_1 A_2 \dots A_k$ i $B_1 B_2 \dots B_k$ oraz krawędziach bocznych $A_1 B_1, A_2 B_2, \dots, A_k B_k$ (rys. 2 przedstawia widok z góry dla $k = 8$).



rys. 2



rys. 3

Przyjmijmy, że każdy z wierzchołków $A_1, A_2, \dots, A_k$ oraz $B_1, B_2, \dots, B_k$ symbolizuje uczestnika przyjęcia oraz że dwie osoby znają się od początku przyjęcia, jeśli przyporządkowane im wierzchołki są połączone krawędzią. Wtedy każdy uczestnik przyjęcia początkowo miał dokładnie 3 znajomych, gdyż w każdym wierzchołku graniastosłupa schodzą się dokładnie 3 krawędzie.

Przypuśćmy, że podczas przyjęcia poznały się osoby, którym odpowiadają wierzchołki A_1 oraz B_2 , A_2 oraz B_3 , A_3 oraz B_4 , $\dots$, A_{k-1} oraz B_k , A_k oraz B_1 (linie przerywane na rysunku 3). Wówczas każda osoba zyskała dokładnie jednego nowego znajomego, czyli pod koniec przyjęcia każdy miał dokładnie 4 znajomych.

Odpowiedź

Warunki zadania spełniają wszystkie liczby parzyste $n \geq 6$.

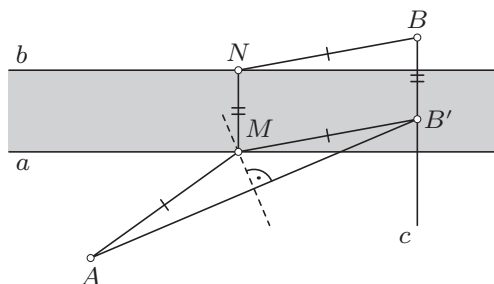
5. Po dwóch stronach rzeki o równoległych brzegach znajdują się dwa domy A i B , przy czym prosta AB nie jest prostopadła do brzegów rzeki. W którym miejscu należy wybudować most, prostopadły do brzegów rzeki, aby drogi z obu domów do mostu, biegnące w linii prostej, były równej długości? Podaj odpowiednią konstrukcję cyrklem i linijką oraz uzasadnij jej poprawność.

Szkic rozwiązania

Oznaczmy przez a brzeg rzeki po stronie domu A , a przez b — brzeg po stronie domu B . Niech c będzie półprostą o początku w punkcie B , prostopadłą do brzegów rzeki oraz przecinającą brzegi rzeki. Na półprostej c znajdujemy taki punkt B' , aby długość odcinka BB' była równa odległości między prostymi a i b .

Wówczas jeśli M i N są takimi punktami leżącymi odpowiednio na prostych a i b , że odcinek MN jest prostopadły do brzegów rzeki, to czworokąt $MNBB'$ jest równoległobokiem (gdyż odcinki MN i BB' są równoległe i mają równe długości). Wobec tego warunek $AM = BN$ jest równoważny warunkowi $AM = B'M$. Stąd wniosek, że poszukiwany punkt M musi leżeć na symetralnej odcinka AB' .

Aby zatem wyznaczyć punkt M , wystarczy skonstruować punkt przecięcia symetralnej odcinka AB' z prostą a . Ponieważ prosta AB nie jest prostopadła do brzegów rzeki, więc taki punkt istnieje i jest tylko jeden. Punkt N uzyskujemy jako punkt przecięcia prostej b z prostą przechodzącą przez punkt M i prostopadłą do prostych a i b .



rys. 4

Uwaga

Wszystkie kolejne elementy opisanej konstrukcji (półprosta c , punkt B' , symetralna odcinka AB' , punkty M i N) można skonstruować za pomocą cyrkla i linijki.

6. Od kwadratowej kartki o boku 25 odcięto kwadrat o boku 5, jak pokazano na rysunku. Czy pozostałą część kartki można pociąć na 100 prostokątów, z których każdy ma wymiary 1×6 lub 2×3 ? Odpowiedź uzasadnij.

Szkic rozwiązania

Wykażemy, że żądany podział nie jest możliwy.

Gdyby daną figurę (czyli kwadratową kartkę z odciętym narożnikiem) można było pociąć na prostokąty o wymiarach 1×6 oraz 2×3 , to przecinając każdy z tych prostokątów na pół, uzyskalibyśmy podział figury na 200 prostokątów o wymiarach 1×3 . Wykażemy tymczasem, że danej figury nie da się pociąć na 200 prostokątów o wymiarach 1×3 .

Przypuśćmy, wbrew tezie, że taki podział jest możliwy. Podzielmy figurę na 600 kwadratów o boku 1 i nazwijmy te kwadraty *polami*. Zauważmy, że skoro taki podział jest możliwy, to każdy prostokąt o wymiarach 1×3 musi być złożony z trzech pełnych pól.

Rozwiązanie dokończymy dwoma sposobami.

Sposób I

Jeżeli wyróżnimy 247 pól, jak pokazano na rysunku 5, to każdy prostokąt o wymiarach 1×3 , złożony z pełnych pól, będzie zawierał parzystą liczbę wyróżnionych pól. W takim razie wszystkie 200 prostokątów, na które podzielona jest figura, łącznie również będą zawierały parzystą liczbę wyróżnionych pól. Otrzymaliśmy sprzeczność, gdyż 247 jest liczbą nieparzystą.

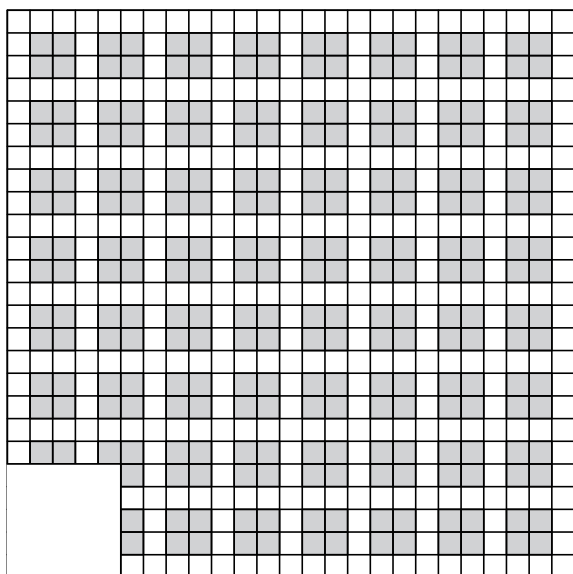
Sposób II

Jeżeli wyróżnimy 199 pól, jak pokazano na rysunku 6, to każdy prostokąt o wymiarach 1×3 , złożony z pełnych pól, będzie zawierał dokładnie jedno pole wyróżnione. W takim razie wszystkie 200 prostokątów, na które podzielona jest figura, łącznie będą zawierały 200 wyróżnionych pól. Otrzymaliśmy sprzeczność, gdyż wyróżnionych pól jest tylko 199.

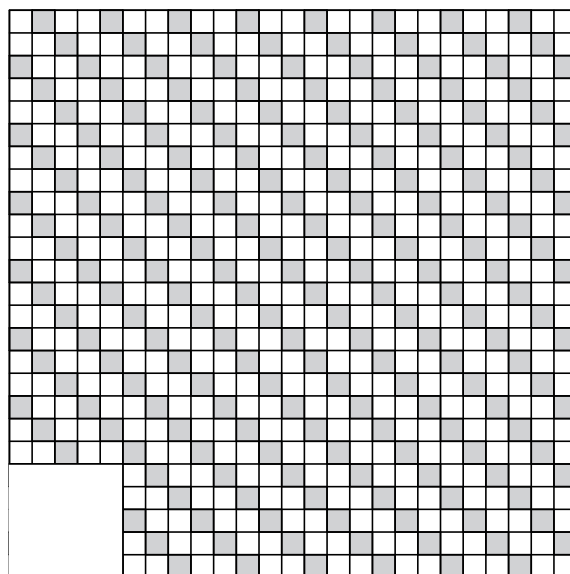
W każdym ze sposobów założenie, że figurę można podzielić na 200 prostokątów o wymiarach 1×3 doprowadziło do sprzeczności. To oznacza, że kartki nie można podzielić na 200 prostokątów o wymiarach 1×3 , a tym bardziej — na 100 prostokątów, z których każdy ma wymiary 1×6 lub 2×3 .

Uwaga

Techniki rozwiązywania zadań z użyciem kolorowania pól zostały opisane w artykule „Kolorowe szachownice”, *Kwadrat* nr 13 (wrzesień 2014).



rys. 5



rys. 6

7. Dany jest czworościan $ABCD$, w którym $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB = 90^\circ$ oraz $AC = CD = DB$. Wykaż, że $AB < 2 \cdot CD$.

Szkic rozwiązania

Oznaczmy przez M środek odcinka AB (rys. 7). Ponieważ trójkąt ABC jest prostokątny, więc punkt M jest środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie, skąd $MC = \frac{1}{2}AB$. Analogicznie, skoro trójkąt ABD jest prostokątny, to $MD = \frac{1}{2}AB$.

Z równości $MA = MB = MC = MD$ oraz $AC = CD = DB$ wynika, że trójkąty równoramienne AMC , CMD , DMB są przystające (cecha bok–bok–bok). Przyjmijmy oznaczenie

$$\sphericalangle AMC = \sphericalangle CMD = \sphericalangle DMB = \alpha.$$

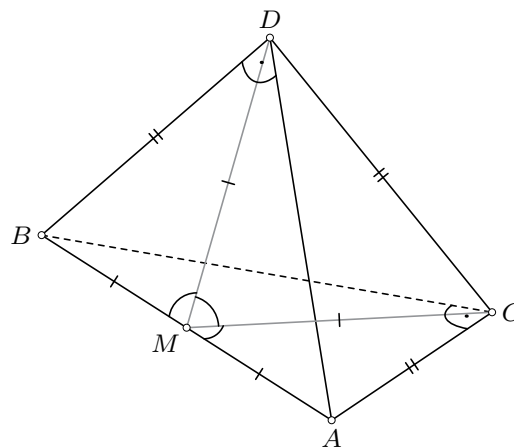
Zauważmy, że zachodzi nierówność

$$\begin{aligned} 3\alpha &= \sphericalangle AMC + \sphericalangle CMD + \sphericalangle DMB > \\ &> \sphericalangle AMD + \sphericalangle DMB = 180^\circ, \end{aligned}$$

czyli $\alpha > 60^\circ$. Stąd w szczególności wynika, że

$$\sphericalangle MAC = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha < 60^\circ < \alpha = \sphericalangle AMC,$$

więc $MC < AC$, gdyż w trójkącie naprzeciw większego kąta leży dłuższy bok. Ostatnia nierówność równoważna jest tezie zadania, gdyż $MC = \frac{1}{2}AB$ oraz $AC = CD$.

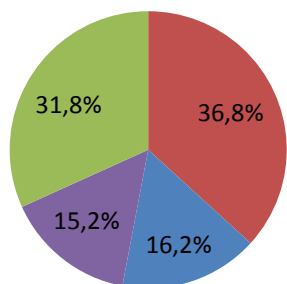


rys. 7

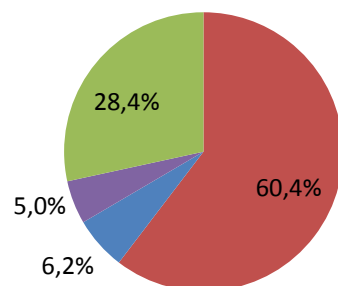
Statystyki części korespondencyjnej X OMG (2014/2015)

Procentowa liczba osób, które uzyskały daną liczbę punktów za poszczególne zadania

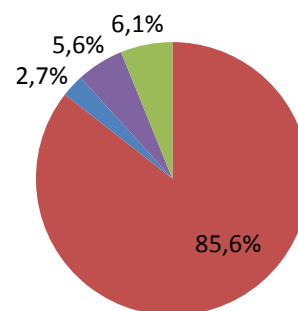
zad. 1



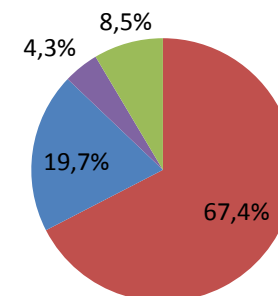
zad. 2



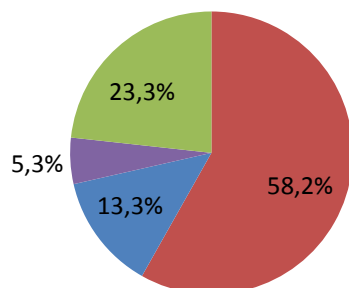
zad. 3



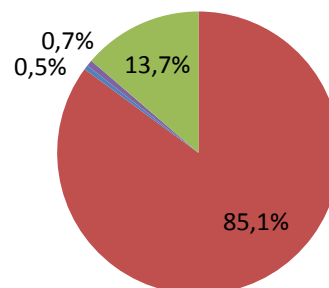
zad. 4



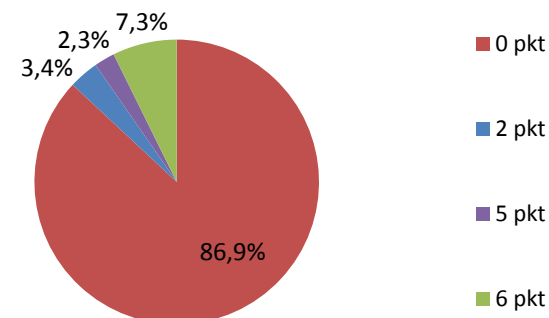
zad. 5



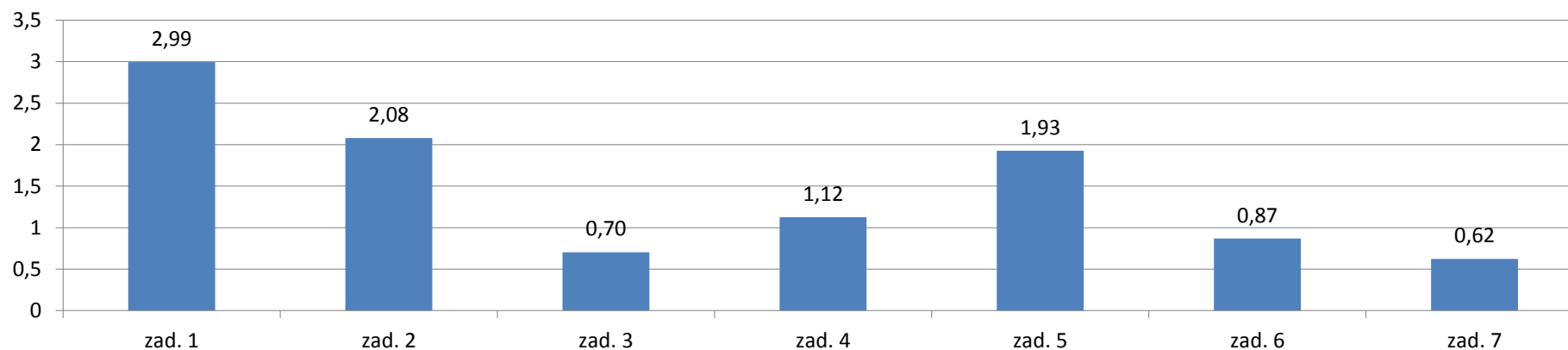
zad. 6



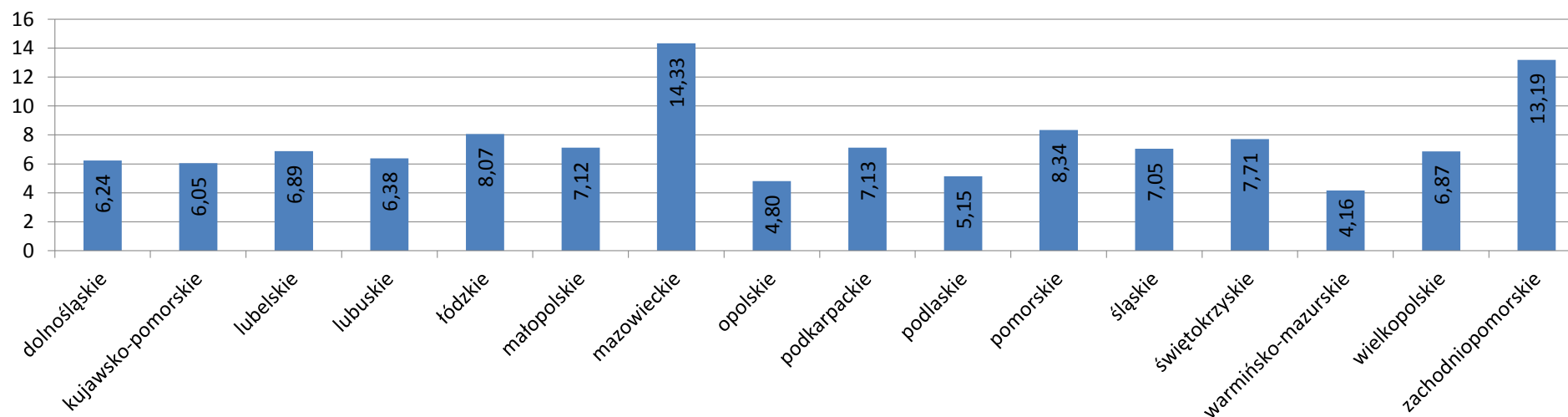
zad. 7



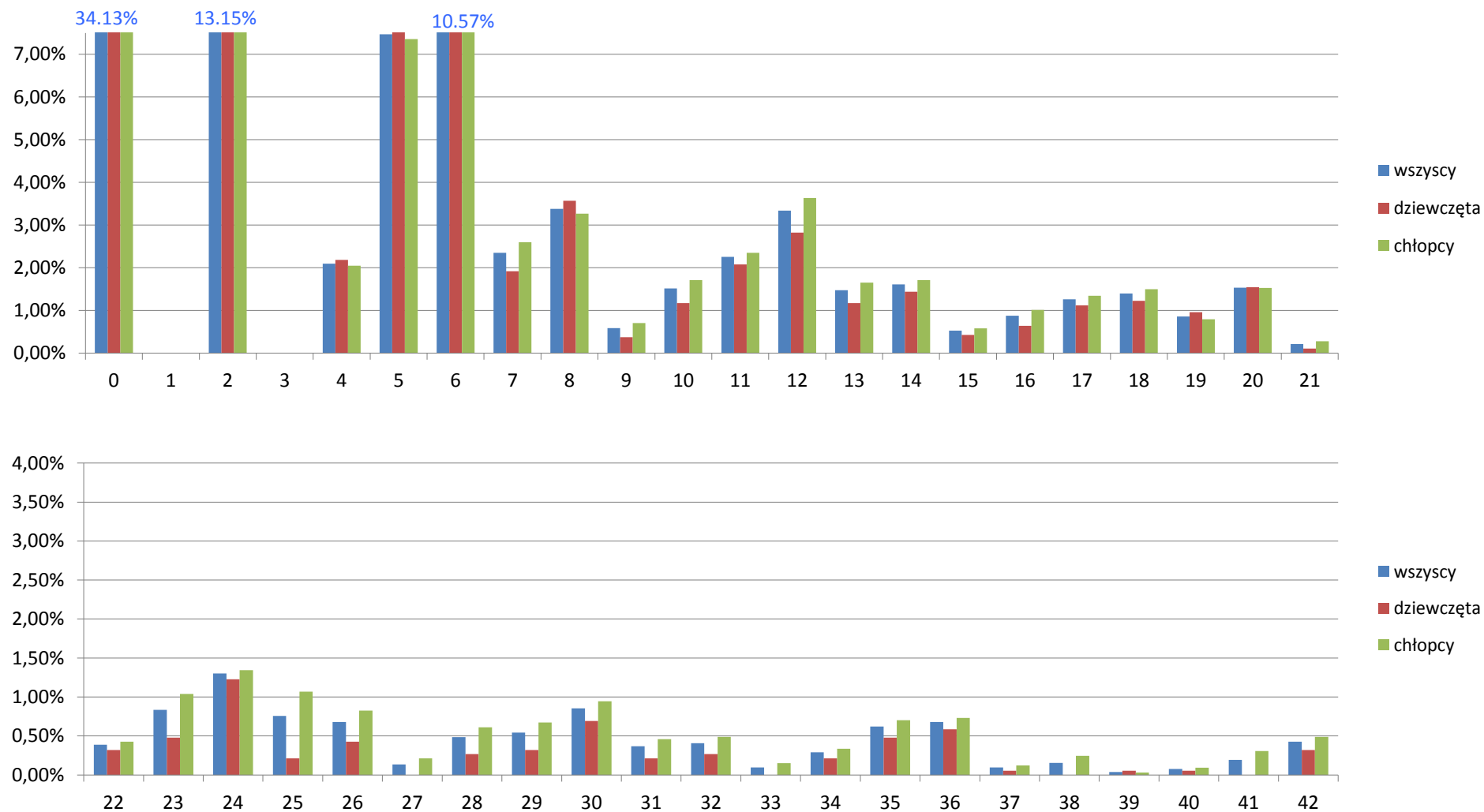
Średnia otrzymanych punktów za poszczególne zadania



Średnia uzyskanych punktów ze wszystkich zadań łącznie w podziale na województwa

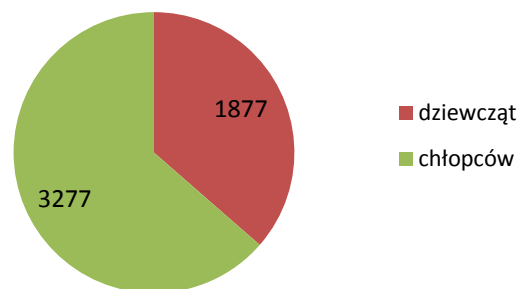


Procentowa liczba osób, które uzyskały daną sumę punktów z części korespondencyjnej



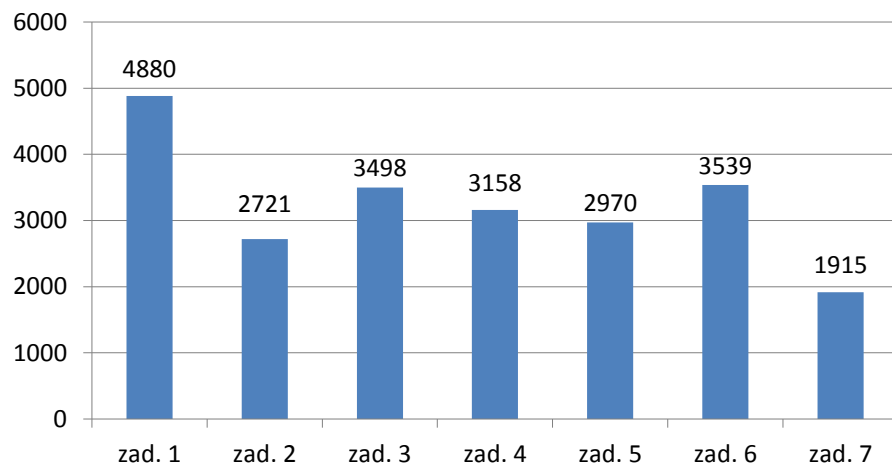
Liczba uczniów, którzy wysłali rozwiązanie co najmniej jednego zadania

w kraju + Wilno

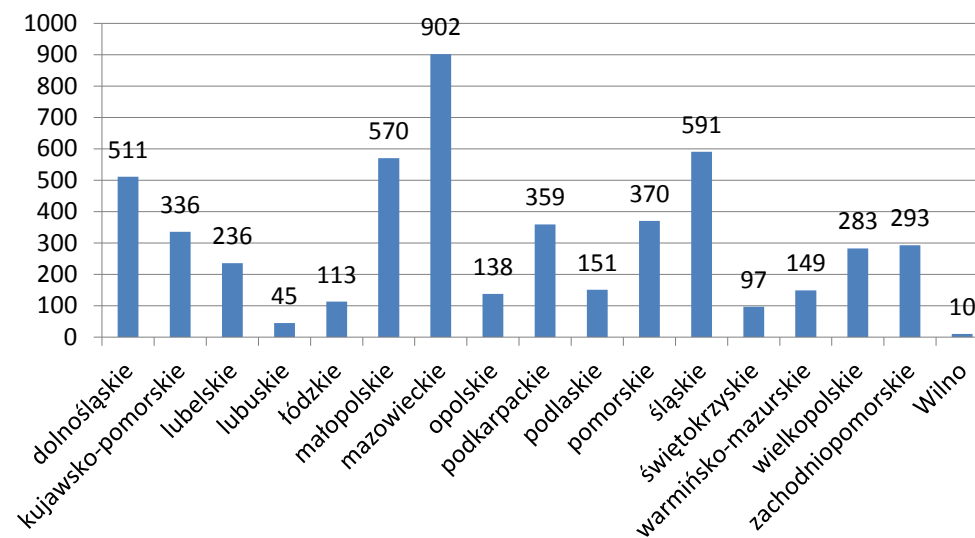


razem: 5154

Liczba nadesłanych rozwiązań poszczególnych zadań



w poszczególnych województwach + Wilno



X Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

Zawody drugiego stopnia
(7 marca 2015 r.)



1. Liczby dodatnie a, b, c, d spełniają warunki $a + b = c + d$ oraz $ac = bd$. Udowodnij, że $a = d$ oraz $b = c$.
2. Dany jest trójkąt ABC , w którym $AC < BC$. Punkty D i E leżą odpowiednio na bokach BC i AC tego trójkąta, przy czym $AE = BD$. Wykaż, że symetralne odcinków AB i DE przecinają się w punkcie leżącym na okręgu opisanym na trójkącie ABC .
3. Na każdej ścianie sześcianu napisano pewną liczbę całkowitą. Następnie każdej krawędzi sześcianu przyporządkowano sumę liczb z dwóch ścian, pomiędzy którymi znajduje się dana krawędź. Udowodnij, że wśród dwunastu liczb przyporządkowanych krawędziom są co najmniej cztery liczby parzyste.
4. Liczby pierwsze p, q, r, s spełniają warunki $p > q > r > s$ oraz $p - q = q - r = r - s$. Udowodnij, że liczba $p - s$ jest podzielna przez 18.
5. Dany jest trójkąt równoboczny ABC . Niech P będzie punktem leżącym wewnątrz tego trójkąta. Proste AP, BP, CP przecinają odcinki BC, CA, AB odpowiednio w punktach D, E, F . Czy można punkt P wybrać w taki sposób, aby dokładnie cztery spośród trójkątów $AEP, AFP, BFP, BDP, CDP, CEP$ miały równe pola? Odpowiedź uzasadnij.

X Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

Zawody drugiego stopnia

(7 marca 2015 r.)

Szkice rozwiązań zadań konkursowych

1. Liczby dodatnie a, b, c, d spełniają warunki $a+b=c+d$ oraz $ac=bd$. Udowodnij, że $a=d$ oraz $b=c$.

Szkic rozwiązania

Sposób I

Dodając do obu stron równości $ac=bd$ wielkość ad , otrzymujemy

$$ac+ad=bd+ad, \quad \text{czyli} \quad a(c+d)=d(a+b).$$

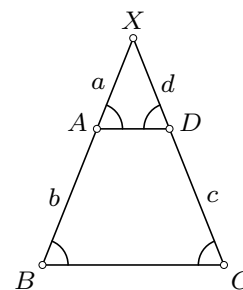
Wobec tego, skoro $a+b=c+d \neq 0$, to $a=d$. Wówczas równość $a+b=c+d$ przybiera postać $a+b=c+a$, czyli $b=c$.

Sposób II

Rozważmy trójkąt równoramienny XBC , w którym

$$XB=XC=a+b=c+d$$

oraz takie punkty A i D odpowiednio na bokach XB, XC , że $XA=a$, $XD=d$ (rys. 1). Wówczas z warunku $\frac{a}{b}=\frac{d}{c}$ i twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa wynika, że proste AD oraz BC są równoległe. Stąd wniosek, że trójkąt XAD także jest równoramienny. Tym samym $a=d$ i w konsekwencji $b=c$.



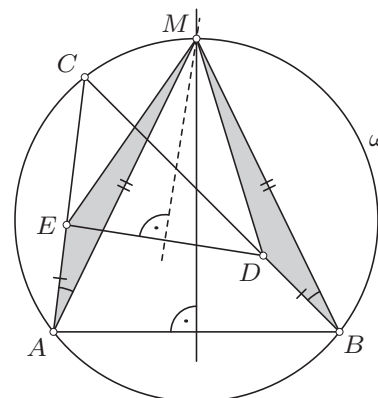
rys. 1

2. Dany jest trójkąt ABC , w którym $AC < BC$. Punkty D i E leżą odpowiednio na bokach BC i AC tego trójkąta, przy czym $AE=BD$. Wykaż, że symetralne odcinków AB i DE przecinają się w punkcie leżącym na okręgu opisanym na trójkącie ABC .

Szkic rozwiązania

Oznaczmy przez ω okrąg opisany na trójkącie ABC . Niech M będzie tym punktem przecięcia symetralnej odcinka AB z okręgiem ω , który leży po tej samej stronie prostej AB , co punkt C (rys. 2). Udowodnimy, że punkt M leży na symetralnej odcinka DE .

Punkt M leży na symetralnej odcinka AB , skąd wniosek, że $AM=BM$. Ponadto zachodzi równość $\angle CAM = \angle CBM$ — kątów wpisanych w okrąg ω opartych na tym samym łuku. Powyższe zależności w połączeniu z równością $AE=BD$ dowodzą, że trójkąty AEM i BDM są przystające (cecha bok–kąt–bok). Wobec tego $EM=DM$, czyli punkt M leży na symetralnej odcinka DE .



rys. 2

3. Na każdej ścianie sześcianu napisano pewną liczbę całkowitą. Następnie każdej krawędzi sześcianu przyporządkowano sumę liczb z dwóch ścian, pomiędzy którymi znajduje się dana krawędź. Udowodnij, że wśród dwunastu liczb przyporządkowanych krawędziom są co najmniej cztery liczby parzyste.

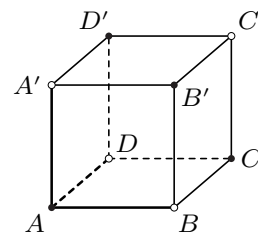
Szkic rozwiązania

Niech $ABCD A' B' C' D'$ będzie danym sześcianem (rys. 3). Zauważmy, że wśród liczb napisanych na ścianach $ABCD$, $AA' B' B$, $ADD' A'$ są co najmniej dwie liczby tej samej parzystości, czyli obie parzyste lub obie nieparzyste. Stąd wniosek, że co najmniej jednej z krawędzi AB , AA' , AD przyporządkowana została liczba parzysta, gdyż suma dwóch liczb tej samej parzystości jest parzysta.

Analogicznie uzasadniamy, że co najmniej jednej krawędzi w każdej z trójek

$$CB, CC', CD, \quad B' A', B' B', B' C' \quad \text{oraz} \quad D' A', D' B', D' D$$

została przyporządkowana liczba parzysta. To oznacza, że łącznie krawędziom sześcianu zostały przyporządkowane co najmniej cztery liczby parzyste.



rys. 3

Uwaga: Można uzasadnić, że jest tylko 10 różnych możliwych wzajemnych ułożeń liczb napisanych na ścianach sześcianu z dokładnością do reszty z dzielenia przez 2. Inny sposób rozwiązania zadania można uzyskać, rozpatrując każdy z tych przypadków osobno.

4. Liczby pierwsze p, q, r, s spełniają warunki $p > q > r > s$ oraz $p - q = q - r = r - s$. Udowodnij, że liczba $p - s$ jest podzielna przez 18.

Szkic rozwiązania

Oznaczmy przez a wspólną wartość różnic $p - q, q - r, r - s$. Wówczas

$$p - s = (p - q) + (q - r) + (r - s) = 3a.$$

Należy więc udowodnić, że a jest liczbą podzielną przez 6.

Wiemy, że $p > q$, wobec czego $a > 0$.

Skoro $s \geq 2$, to liczby pierwsze q i r są większe od 2. Obie są więc nieparzyste, skąd wniosek, że liczba $a = q - r$ jest parzysta. Pozostaje zatem wykazać, że liczba a jest podzielna przez 3.

Przypuśćmy przeciwnie, że liczba a nie dzieli się przez 3. Zauważmy, że $r = s + a$, $q = r + a = s + 2a$ oraz $p = q + a = s + 3a$.

Liczba pierwsza s jest różna od 3, gdyż w przeciwnym razie liczba $p = s + 3a = 3 + 3a$ byłaby podzielna przez 3 i większa od 3, a więc nie byłaby liczbą pierwszą. Stąd wniosek, że liczba s nie jest podzielna przez 3.

Jeśli teraz liczby a i s dają różne reszty z dzielenia przez 3, to jedna z nich daje resztę 1, druga — resztę 2. Wtedy liczba $r = a + s$ jest podzielna przez 3 i większa od 3, czyli nie jest liczbą pierwszą. Jeśli natomiast liczby a i s dają taką samą resztę z dzielenia przez 3, to wtedy liczba $q = s + 2a$ jest podzielna przez 3 i większa od 3, a więc również nie jest liczbą pierwszą.

Uzyskana sprzeczność oznacza, że a jest liczbą podzielną przez 3, co kończy rozwiązanie.

5. Dany jest trójkąt równoboczny ABC . Niech P będzie punktem leżącym wewnątrz tego trójkąta. Proste AP, BP, CP przecinają odcinki BC, CA, AB odpowiednio w punktach D, E, F . Czy można punkt P wybrać w taki sposób, aby dokładnie cztery spośród trójkątów $AEP, AFP, BFP, BDP, CDP, CEP$ miały równe pola? Odpowiedź uzasadnij.

Szkic rozwiązania

Udowodnimy, że jeżeli co najmniej cztery spośród danych sześciu trójkątów mają równe pola, to wszystkie sześć trójkątów mają równe pola. Tym samym uzyskamy negatywną odpowiedź na pytanie postawione w treści zadania.

Zauważmy, że jeżeli cztery spośród trójkątów AEP , AFP , BFP , BDP , CDP , CEP mają równe pola, to w co najmniej jednej z par

$$AFP, BFP, \quad BDP, CDP \quad \text{oraz} \quad CEP, AEP$$

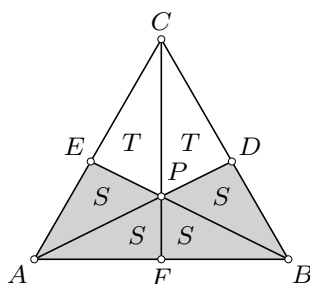
obydwa trójkąty mają równe pola. Bez straty ogólności przyjmijmy, że $[AFP] = [BFP] = S$, gdzie przez $[F]$ rozumiemy pole figury F .

Ponieważ trójkąty AFP i BFP mają równe pola i tę samą wysokość poprowadzoną z wierzchołka P , więc mają także podstawy równej długości, czyli $AF = BF$. To oznacza, że prosta CF jest osią symetrii trójkąta ABC , skąd $[AEP] = [BDP]$ oraz $[CDP] = [CEP]$. Ponieważ dokładnie cztery spośród rozważanych sześciu trójkątów mają pola S , więc w dokładnie jednej z powyższych równości pola są równe S .

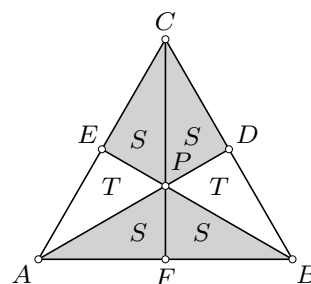
Przypuśćmy, że $[AEP] = [BDP] = S$ oraz $[CDP] = [CEP] = T \neq S$ (rys. 4). Wówczas, ponieważ stosunek pól trójkątów o wspólnej wysokości jest równy stosunkowi długości ich podstaw, więc

$$\frac{T}{S} = \frac{[CDP]}{[BDP]} = \frac{CD}{BD} = \frac{[ACD]}{[ABD]} = \frac{2T + S}{3S}.$$

Stąd otrzymujemy $3T = 2T + S$, czyli $T = S$. W tym przypadku dochodzimy zatem do sprzeczności.



rys. 4



rys. 5

Pozostał do rozważenia przypadek, w którym zachodzą równości $[CDP] = [CEP] = S$. Niech tym razem $[AEP] = [BDP] = T \neq S$ (rys. 5). Zauważmy, że wówczas

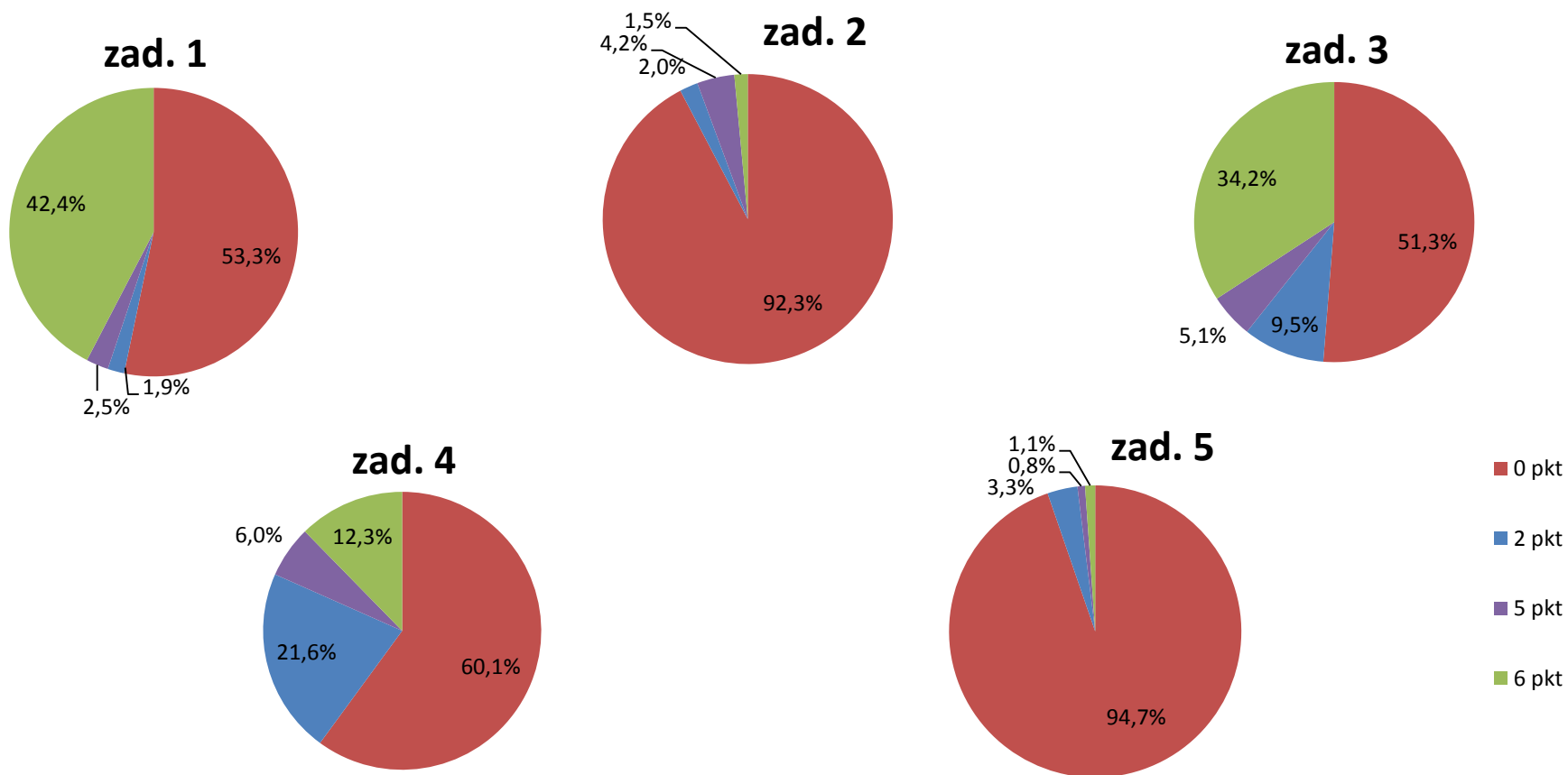
$$[ABD] = 2S + T = [ACD].$$

Trójkąty ABD oraz ACD mają tę samą wysokość opuszczoną z wierzchołka A i równe pola, więc ich podstawy także są równe, czyli $BD = CD$. To oznacza, że punkt P , jako punkt przecięcia dwóch środkowych w trójkącie ABC , jest środkiem ciężkości tego trójkąta. Wówczas wszystkie sześć trójkątów AEP , AFP , BFP , BDP , CDP , CEP to trójkąty przystające, więc pole każdego z nich jest równe S wbrew założeniu $S \neq T$.

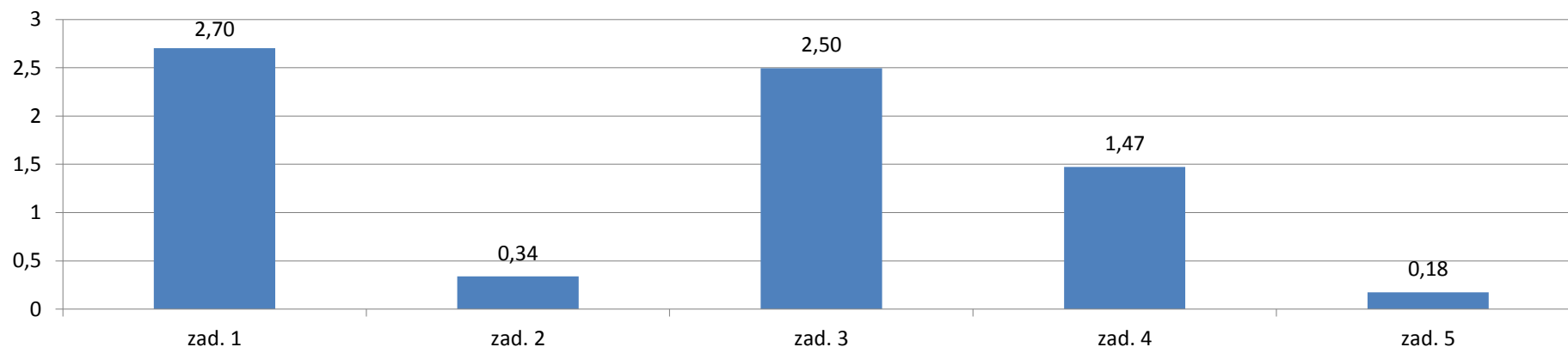
Podsumowując, nie jest możliwe, aby dokładnie cztery z danych sześciu trójkątów miały równe pola.

Statystyki zawodów II stopnia X OMG (2014/2015)

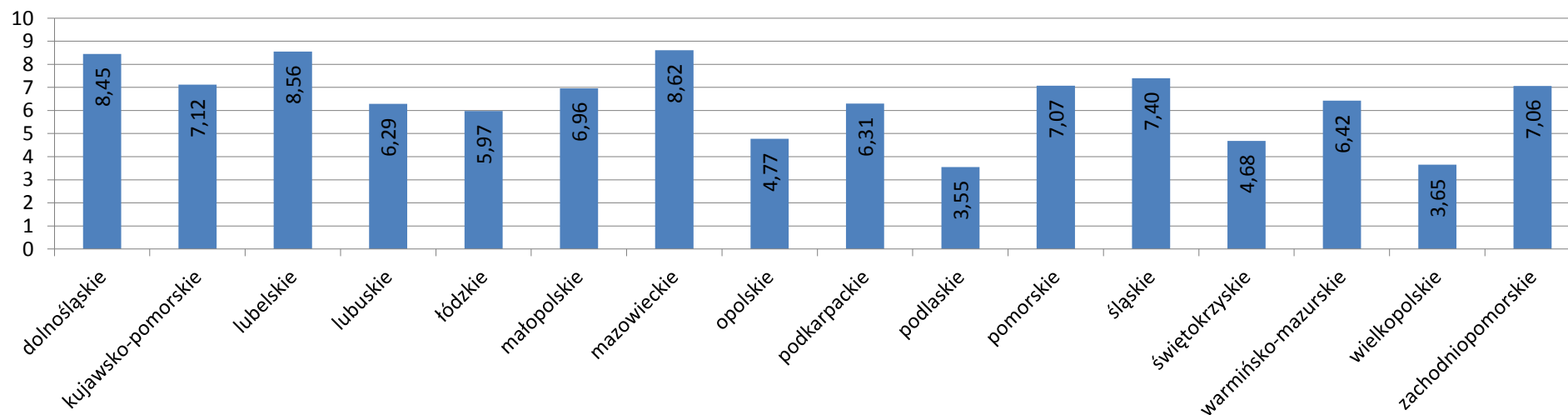
Procentowa liczba osób, które uzyskały daną liczbę punktów za poszczególne zadania (zawody II stopnia X OMG)



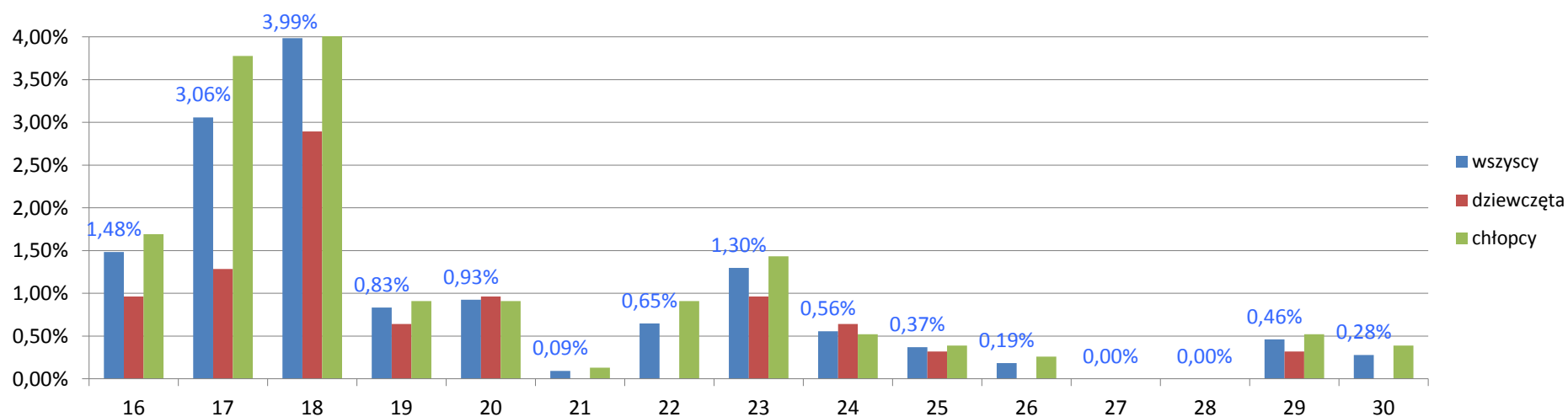
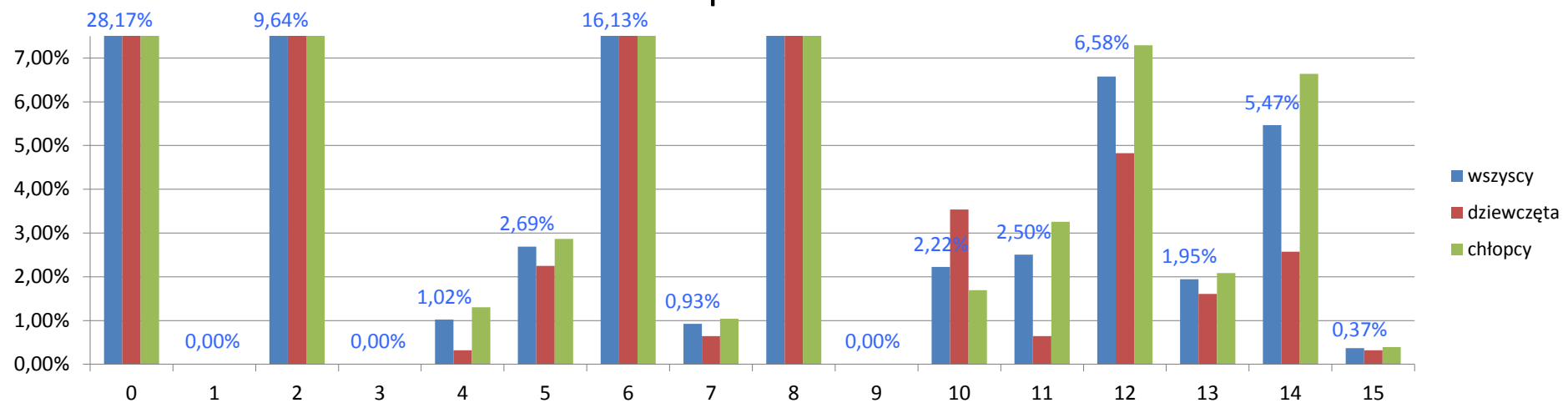
Średnia otrzymanych punktów za poszczególne zadania (zawody II stopnia X OMG)



Średnia uzyskanych punktów ze wszystkich zadań łącznie w podziale na województwa

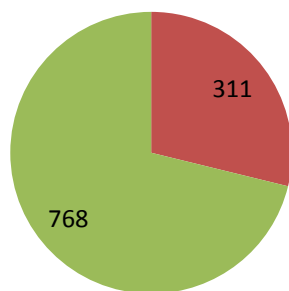


Procentowa liczba osób, które uzyskały daną sumę punktów w zawodach II stopnia X OMG



Liczba uczniów, którzy wzięli udział w zawodach II stopnia X OMG

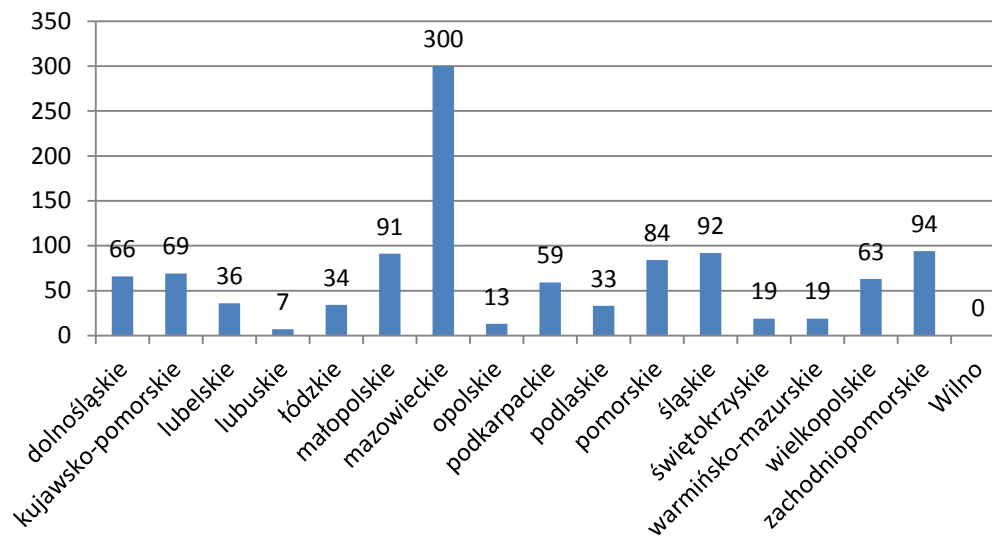
w kraju



razem: 1079

■ dziewcząt
■ chłopców

w poszczególnych województwach



X Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

Zawody trzeciego stopnia
(25 kwietnia 2015 r.)



1. Udowodnij, że każdą liczbę całkowitą większą od 5 można przedstawić w postaci sumy liczby pierwszej i liczby złożonej.

2. Każdą liczbę całkowitą dodatnią pomalowano na pewien kolor. Okazało się, że dla każdej pary liczb całkowitych a, b większych od 1 liczby $a + b$ i ab są tego samego koloru. Wykaż, że wszystkie liczby większe od 4 zostały pomalowane tym samym kolorem.

3. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym

$$\sphericalangle DAB + \sphericalangle ABC = 90^\circ.$$

Punkt M jest środkiem boku CD . Znając długości odcinków AD oraz BC , które wynoszą odpowiednio a oraz b , oblicz wartość wyrażenia $[ABM] - [DAM] - [BCM]$.

Uwaga. Symbol $[\mathcal{F}]$ oznacza pole figury $\mathcal{F}$.

4. Dane są takie dodatnie liczby całkowite a i b , że liczby

$$a^2 + 2b + 1 \quad \text{oraz} \quad b^2 + 2a + 1$$

są kwadratami pewnych liczb naturalnych. Wykaż, że $a = b$.

5. Czy istnieje wielościan wypukły, którego dokładnie jedna ściana nie jest wielokątem foremnym? Odpowiedź uzasadnij.

Honorowy patronat Małżonki Prezydenta RP Pani Anny Komorowskiej

MINISTERSTWO
EDUKACJI
NARODOWEJ



Stowarzyszenie
na rzecz Edukacji
Matematycznej



Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

X Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

Zawody trzeciego stopnia

(25 kwietnia 2015 r.)

Szkice rozwiązań zadań konkursowych

1. Udowodnij, że każdą liczbę całkowitą większą od 5 można przedstawić w postaci sumy liczby pierwszej i liczby złożonej.

Szkic rozwiązania

Zauważmy, że jeżeli $n \geq 6$ jest liczbą parzystą, to $n - 2$ jest liczbą parzystą większą od 2, a więc liczbą złożoną. Stąd otrzymujemy przedstawienie $n = 2 + (n - 2)$ liczby n jako sumy liczby pierwszej i liczby złożonej. Podobnie, jeśli $n \geq 6$ jest liczbą nieparzystą, to $n - 3$ jest liczbą parzystą większą od 2, a więc liczbą złożoną. Wobec tego $n = 3 + (n - 3)$ to szukane przedstawienie liczby n w postaci sumy liczby pierwszej i liczby złożonej.

2. Każdą liczbę całkowitą dodatnią pomalowano na pewien kolor. Okazało się, że dla każdej pary liczb całkowitych a, b większych od 1 liczby $a + b$ i ab są tego samego koloru. Wykaż, że wszystkie liczby większe od 4 zostały pomalowane tym samym kolorem.

Szkic rozwiązania

Niech n będzie dowolną liczbą całkowitą większą od 1. Zgodnie z warunkami zadania liczby $n + 3 = 2 + (n + 1)$ oraz $2(n + 1) = 2n + 2$ są tego samego koloru. Również liczby $2(n + 1) = 2n + 2$ oraz $2n \cdot 2 = 4n$ są tego samego koloru. Ponadto liczby $4n$ oraz $n + 4$ mają ten sam kolor. Łącząc powyższe obserwacje, dochodzimy do wniosku, że liczby $n + 3$ oraz $n + 4$ są tego samego koloru dla każdej liczby naturalnej $n > 1$. To oznacza, że wszystkie liczby większe od 4 pomalowano tym samym kolorem.

3. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym

$$\sphericalangle DAB + \sphericalangle ABC = 90^\circ.$$

Punkt M jest środkiem boku CD . Znając długości odcinków AD oraz BC , które wynoszą odpowiednio a oraz b , oblicz wartość wyrażenia $[ABM] - [DAM] - [BCM]$.

Uwaga. Symbol $[\mathcal{F}]$ oznacza pole figury $\mathcal{F}$.

Szkic rozwiązania

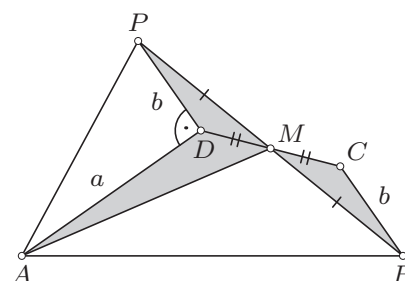
Niech P będzie punktem symetrycznym do punktu B względem punktu M (rys. 1). Wówczas $[ABM] = [APM]$, gdyż trójkąty te mają wspólną wysokość poprowadzoną z wierzchołka A oraz równe podstawy BM i PM . Ponadto $[BCM] = [PDM]$, gdyż trójkąty te są przystające (cecha bok–kąt–bok). Stąd wynika, że

$$\begin{aligned} [ABM] - [DAM] - [BCM] &= \\ &= [APM] - [DAM] - [PDM] = [ADP]. \end{aligned}$$

Zauważmy, że $DP = BC = b$ oraz

$$\begin{aligned} \sphericalangle ADP &= 360^\circ - \sphericalangle MDA - \sphericalangle PDM = \\ &= 360^\circ - \sphericalangle CDA - \sphericalangle BCD = \sphericalangle DAB + \sphericalangle ABC = 90^\circ, \end{aligned}$$

skąd wniosek, że $[ADP] = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot DP = \frac{1}{2} ab$.



rys. 1

Honorowy patronat Małżonki Prezydenta RP Pani Anny Komorowskiej

4. Dane są takie dodatnie liczby całkowite a i b , że liczby

$$a^2 + 2b + 1 \quad \text{oraz} \quad b^2 + 2a + 1$$

są kwadratami pewnych liczb naturalnych. Wykaż, że $a = b$.

Szkic rozwiązania

Przypuśćmy, że $a \neq b$. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $a < b$. Wówczas

$$b^2 < b^2 + 2a + 1 < b^2 + 2b + 1 = (b+1)^2.$$

To oznacza, że liczba $b^2 + 2a + 1$ znajduje się między kwadratami dwóch kolejnych liczb naturalnych, więc sama nie może być kwadratem liczby naturalnej. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że $a = b$.

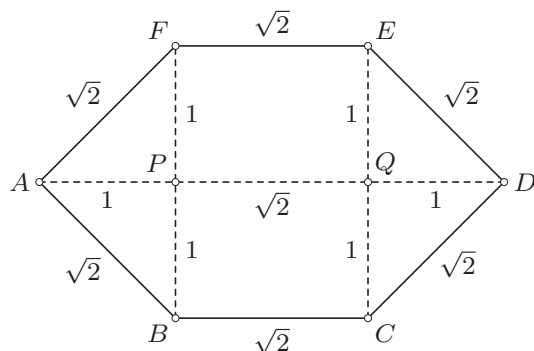
5. Czy istnieje wielościan wypukły, którego dokładnie jedna ściana nie jest wielokątem foremnym? Odpowiedź uzasadnij.

Szkic rozwiązania

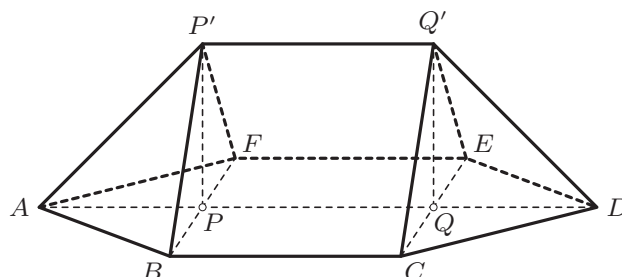
Taki wielościan istnieje, podamy jego konstrukcję.

Rozważmy płaszczyznę π oraz zawarty w niej prostokąt $BCEF$, w którym $BC = \sqrt{2}$ oraz $CE = 2$. Zbudujmy na zewnątrz prostokąta $BCEF$ trójkąty prostokątne równoramienne ABF oraz CDE , których przeciwprostokątnymi są odpowiednio odcinki BF oraz CE . Wówczas $ABCDEF$ jest sześciokątem, którego każdy bok ma długość $\sqrt{2}$, ale nie wszystkie kąty wewnętrzne są równe (rys. 2).

Niech proste BF i CE przecinają odcinek AD odpowiednio w punktach P i Q oraz niech P' i Q' będą takimi punktami przestrzeni leżącymi po tej samej stronie płaszczyzny π , że $PP' = QQ' = 1$ oraz proste PP' i QQ' są prostopadłe do π . Udowodnimy, że wielościan $\mathcal{W}$ o wierzchołkach A, B, C, D, E, F, P', Q' (rys. 3) spełnia warunki zadania.



rys. 2



rys. 3

Stosując twierdzenie Pitagorasa, bezpośrednio obliczamy, że każdy z odcinków FP' , AP' , BP' , CQ' , DQ' , EQ' ma długość $\sqrt{2}$, a także $P'Q' = PQ = \sqrt{2}$. Stąd wniosek, że każdy z trójkątów ABP' , FAP' , CDQ' , DEQ' jest równoboczny, a każdy z prostokątów $BCQ'P'$, $EFP'Q'$ jest kwadratem. To oznacza, że każda ze ścian wielościanu $\mathcal{W}$ oprócz $ABCDEF$ jest wielokątem foremnym.

Honorowy patronat Małżonki Prezydenta RP Pani Anny Komorowskiej

MINISTERSTWO
EDUKACJI
NARODOWEJ

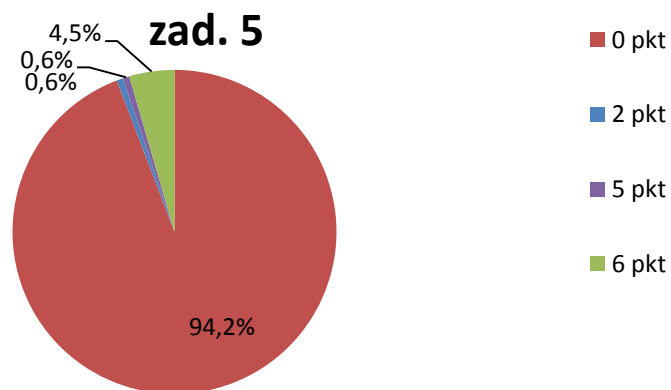
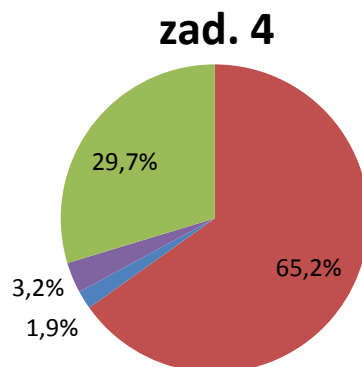
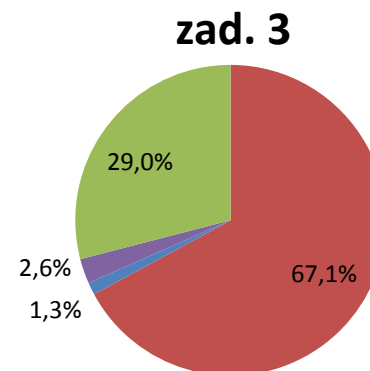
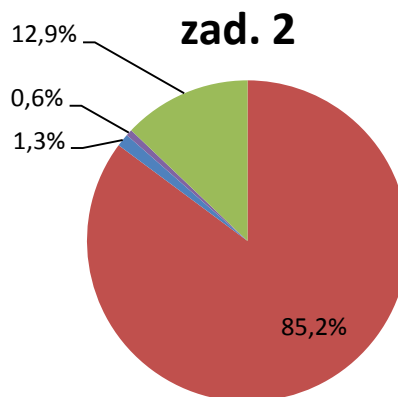
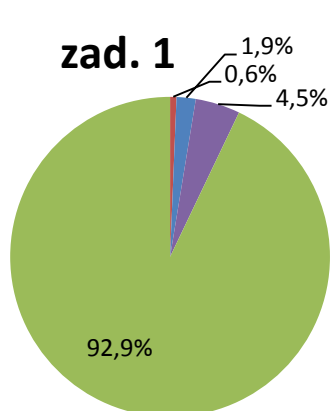


Stowarzyszenie
na rzecz Edukacji
Matematycznej

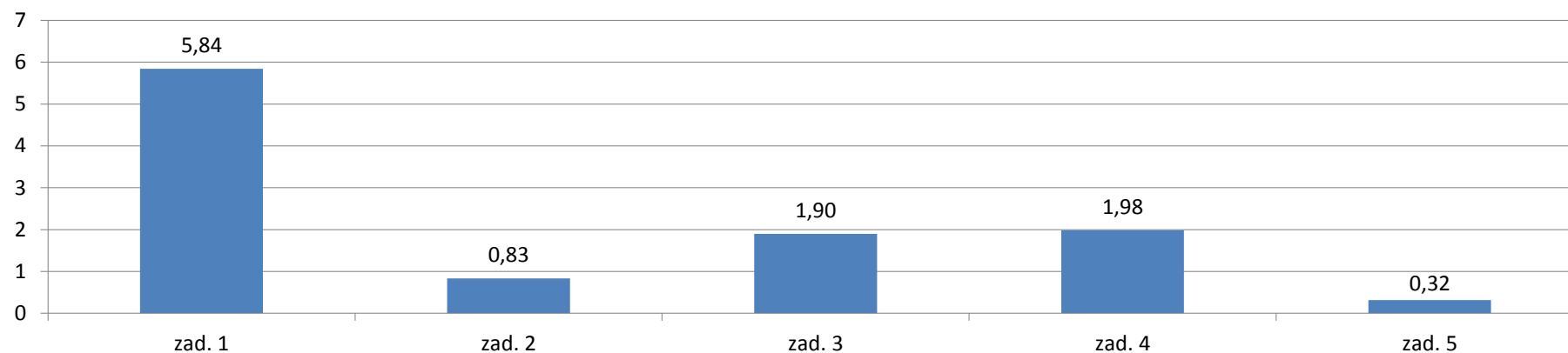


Statystyki zawodów III stopnia X OMG (2014/2015)

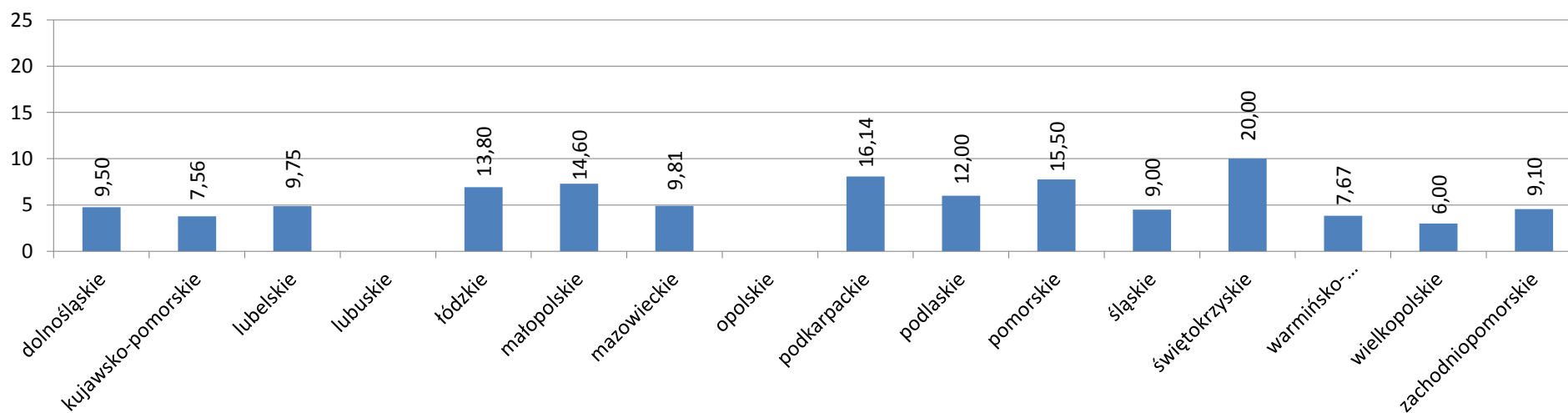
Procentowa liczba osób, które uzyskały daną liczbę punktów za poszczególne zadania



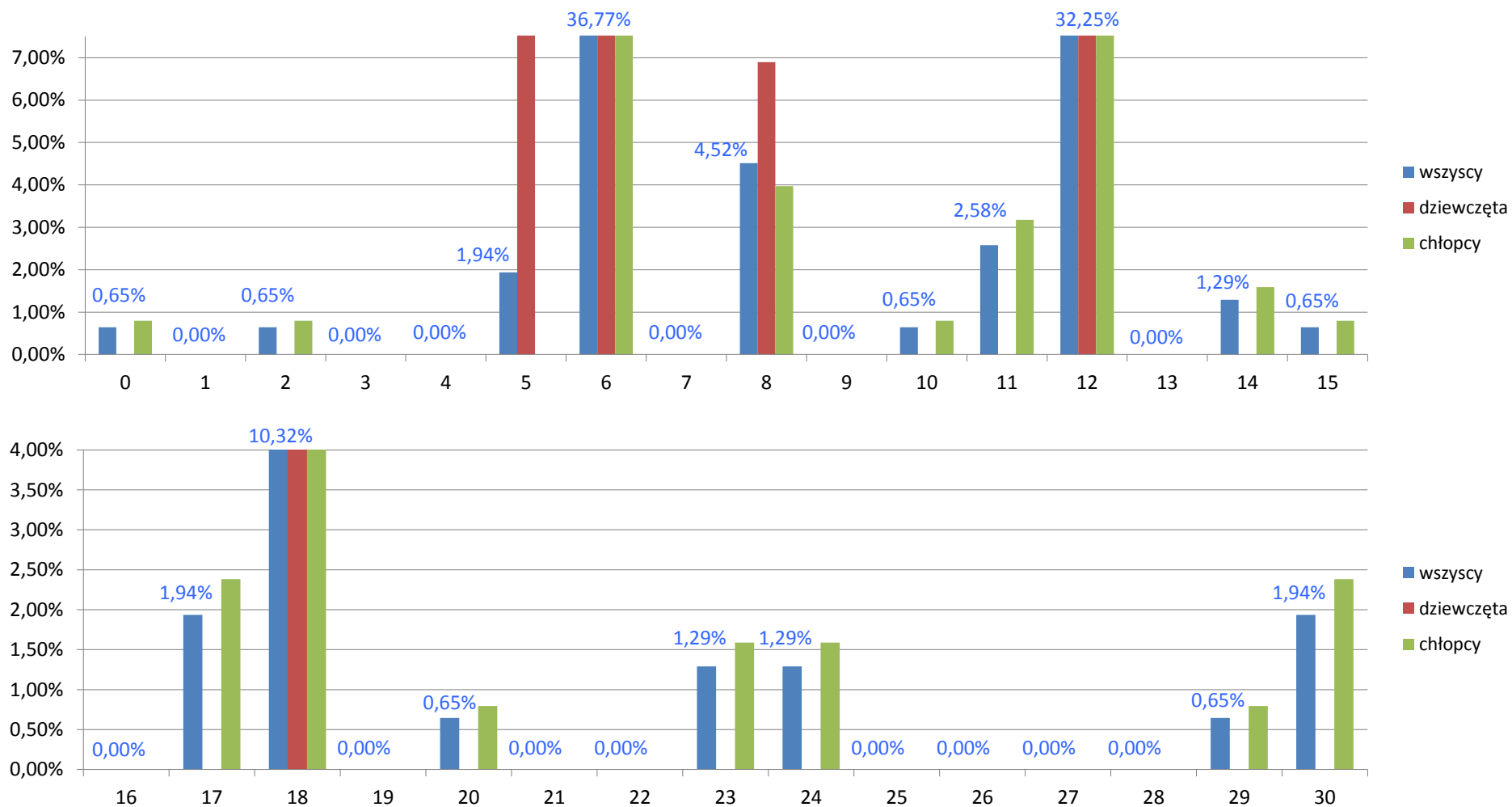
Średnia otrzymanych punktów za poszczególne zadania



Średnia uzyskanych punktów ze wszystkich zadań łącznie w podziale na województwa

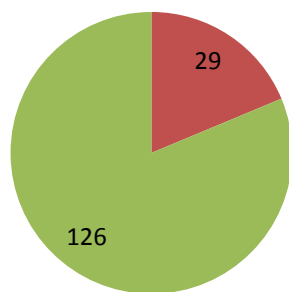


Procentowa liczba osób, które uzyskały daną sumę punktów



Liczba uczniów, którzy wzięli udział w zawodach III stopnia

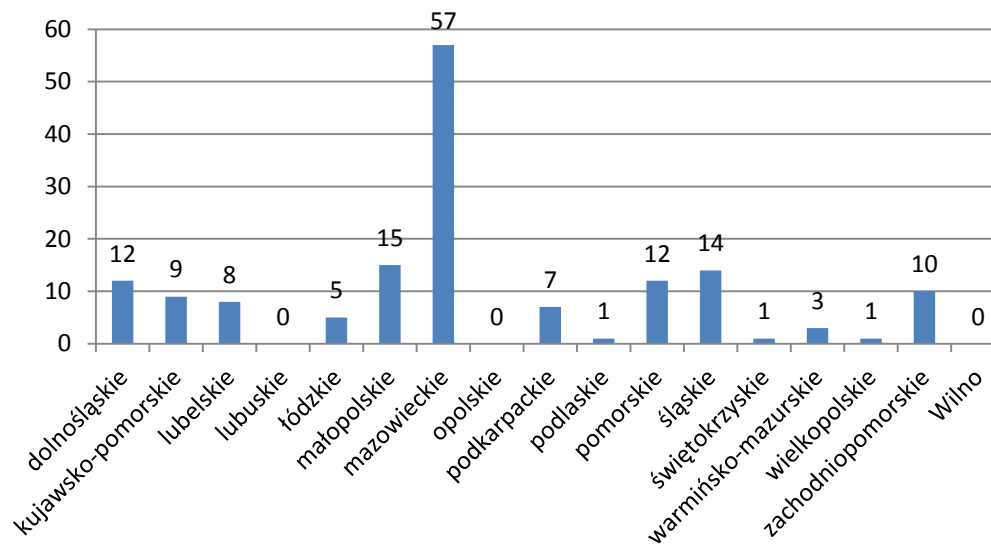
w kraju



razem: 155

■ dziewcząt
■ chłopców

w poszczególnych województwach



Imiona:

Nazwisko:

Klasa:



XI Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

Zawody stopnia pierwszego — część testowa

(24 września 2015 r., godz. 9:00)

Przed przystąpieniem do rozwiązywania testu wpisz na każdą stronę swoje imiona, nazwisko oraz numer klasy.

Treść każdego z poniższych zadań zawiera trzy stwierdzenia. Każde z nich jest prawdziwe lub fałszywe. Jeśli dane stwierdzenie jest prawdziwe, wpisz w odpowiednią kratkę literkę T, jeśli zaś stwierdzenie jest fałszywe, wpisz literkę N.

W przypadku pomyłki przekreśl znakiem **X** podaną odpowiedź, a właściwą odpowiedź podaj obok z lewej strony. Nie używaj korektora.

Przykład poprawnie rozwiązane zadania:

0. Dla każdej dodatniej liczby całkowitej n liczba $2n + 1$ jest

☐	T	a) dodatnia;
☐	T	b) nieparzysta;
N ☒	X	c) pierwsza.

Czas na rozwiązywanie testu: 75 minut.

Powodzenia!

1. Dane są takie dodatnie liczby a i b , że 30% liczby a jest równe 60% liczby b . Wynika z tego, że

☐	a) $a = 2b$;
☐	b) $b = 2a$;
☐	c) liczba a jest o 100% większa od liczby b .

2. Dwa z boków trójkąta prostokątnego mają długości 3 oraz 4. Wynika z tego, że trzeci bok tego trójkąta ma długość

☐	a) nie mniejszą od 5;
☐	b) nie większą od 5;
☐	c) równą 5.

Imiona:

Nazwisko:

Klasa:

3. Liczba $9^{16} - 16^9$ jest podzielna przez

a) 4;

b) 5;

c) $3^{16} - 4^9$.

4. Każde dwie spośród trzech dodatnich liczb całkowitych a , b , c są różne. Ponadto liczby te spełniają zależności $\text{NWD}(a, b) = 1$ oraz $\text{NWD}(a, c) = 1$. Wynika z tego, że

a) $\text{NWD}(b, c) = 1$;

b) $\text{NWD}(a, b + c) = 1$;

c) $\text{NWD}(a, bc) = 1$.

5. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC , w którym $\sphericalangle ACB = 50^\circ$.

Wynika z tego, że

a) $\sphericalangle AIB = 100^\circ$;

b) $\sphericalangle AIB > 110^\circ$;

c) $\sphericalangle AIB < 120^\circ$.

6. Trójkąt T rozcięto wzdłuż odcinka na dwa trójkąty T_1 i T_2 , a trójkąt S — na trójkąty S_1 i S_2 . Okazało się, że trójkąt T_1 jest przystający do trójkąta S_1 , a trójkąt T_2 jest przystający do trójkąta S_2 . Wynika z tego, że trójkąty T i S

a) mają równe pola;

b) mają równe obwody;

c) są przystające.

7. Liczby rzeczywiste x , y spełniają nierówność $x(x + 2) < y(y + 2)$. Wynika z tego, że

a) $x < y$;

b) $x + y \neq -2$;

c) $|x + 1| < |y + 1|$.

Imiona:

Nazwisko:

Klasa:

8. Każdy z wierzchołków sześcianu pomalowano jednym z dwóch kolorów. Wynika z tego, że

a) pewna krawędź tego sześcianu ma końce jednakowego koloru;

b) pewna przekątna pewnej ściany tego sześcianu ma końce jednakowego koloru;

c) pewna przekątna tego sześcianu ma końce jednakowego koloru.

9. Antek, biegnąc z prędkością x km/h, jeden kilometr pokonuje w ciągu x minut, gdzie x jest pewną dodatnią liczbą rzeczywistą. Wynika z tego, że

a) x jest liczbą wymierną;

b) Antek biegnie z prędkością większą niż 8 km/h;

c) gdyby Antek szedł z prędkością $\frac{1}{2}x$ km/h, to jeden kilometr pokonywałby w ciągu $2x$ minut.

10. Wielokąt A ma co najmniej osiem wierzchołków oraz dwa razy więcej boków niż wielokąt B . Wynika z tego, że wielokąt A ma

a) dwa razy więcej wierzchołków niż wielokąt B ;

b) dwa razy więcej przekątnych niż wielokąt B ;

c) parzystą liczbę przekątnych.

11. Każdy punkt okręgu ω o promieniu 1 pomalowano na czarno lub biało w taki sposób, że każda cięciwa tego okręgu o długości 1 ma końce różnych kolorów. Wynika z tego, że

a) każda średnica okręgu ω ma końce różnych kolorów;

b) każdy trójkąt równoboczny wpisany w okrąg ω ma wszystkie trzy wierzchołki tego samego koloru;

c) każdy kwadrat wpisany w okrąg ω ma dwa wierzchołki czarne i dwa białe.

Imiona:

Nazwisko:

Klasa:

12. Liczba $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[6]{2}$ jest

a) niewymierna;

b) mniejsza od 2;

c) równa $\sqrt[n]{2}$ dla pewnej liczby całkowitej $n > 1$.

13. Iloczyn cyfr dodatniej liczby całkowitej n jest równy 4^{100} . Wynika z tego, że

a) liczba n jest parzysta;

b) liczba n ma co najmniej 100 cyfr;

c) suma cyfr liczby n jest nie mniejsza od 400.

14. Każdy bok pewnego czworokąta ma długość mniejszą od 1. Wynika z tego, że

a) pole tego czworokąta jest mniejsze od 1;

b) istnieje kwadrat o boku 1, w którym ten czworokąt jest zawarty;

c) długość każdej przekątnej tego czworokąta jest mniejsza od $\sqrt{2}$.

15. Graniastosłup prawidłowy trójkątny rozcięto płaszczyzną na dwa wielościany, uzyskując w przekroju trójkąt. Wynika z tego, że

a) każdy z otrzymanych wielościanów ma dokładnie dwie ściany trójkątne;

b) w każdym wierzchołku każdego z otrzymanych wielościanów schodzą się dokładnie trzy krawędzie;

c) każda ściana każdego z otrzymanych wielościanów jest trójkątem lub czworokątem.

Rozwiązania zadań testowych

1. Dane są takie dodatnie liczby a i b , że 30% liczby a jest równe 60% liczby b . Wynika z tego, że

- ☐ T a) $a = 2b$;
☐ N b) $b = 2a$;
☐ T c) liczba a jest o 100% większa od liczby b .

Komentarz

Warunki zadania można zapisać następująco

$$\begin{aligned} 30\% \cdot a &= 60\% \cdot b, \\ \frac{30}{100}a &= \frac{60}{100}b, \\ a &= 2b. \end{aligned}$$

W szczególności wynika z tego, że $a = b + b = b + 100\% \cdot b$.

2. Dwa z boków trójkąta prostokątnego mają długości 3 oraz 4. Wynika z tego, że trzeci bok tego trójkąta ma długość

- ☐ N a) nie mniejszą od 5;
☐ T b) nie większą od 5;
☐ N c) równą 5.

Komentarz

Ponieważ przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego jest jednocześnie najdłuższym bokiem tego trójkąta, więc bok o długości 3 musi być jedną z przyprostokątnych. Stąd wniosek, że bok o długości 4 jest albo drugą przyprostokątną, albo przeciwprostokątną danego trójkąta.

W pierwszym przypadku, w myśl twierdzenia Pitagorasa, przeciwprostokątna tego trójkąta ma długość

$$\sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

Z kolei w drugim przypadku długość drugiej przyprostokątnej jest równa

$$\sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7}.$$

Pozostaje zauważyć, że $\sqrt{7} < \sqrt{25} = 5$, skąd wynika, że w obu przypadkach trzeci bok rozważanego trójkąta ma długość nie większą od 5.

3. Liczba $9^{16} - 16^9$ jest podzielna przez

N	a) 4;
T	b) 5;
T	c) $3^{16} - 4^9$.

Komentarz

a) Liczba 9^{16} jest nieparzysta, a liczba 16^9 jest parzysta. Wobec tego różnica $9^{16} - 16^9$ jest liczbą nieparzystą, więc nie jest podzielna przez 4.

b) Ostatnią cyfrą liczby $9^{16} = 81^8$ jest 1, gdyż wszystkie potęgi liczb zakończonych cyfrą 1 są zakończone cyfrą 1. Podobnie, ostatnią cyfrą liczby 16^9 jest 6, gdyż wszystkie potęgi liczb zakończonych cyfrą 6 są zakończone cyfrą 6. W związku z tym ostatnią cyfrą różnicy $9^{16} - 16^9$ jest 5, więc różnica ta jest podzielna przez 5.

c) Zauważmy, że dana liczba jest różnicą kwadratów dwóch liczb całkowitych dodatnich, wobec czego możemy ją przedstawić następująco

$$9^{16} - 16^9 = (3^{16})^2 - (4^9)^2 = (3^{16} - 4^9)(3^{16} + 4^9).$$

W takim razie omawiana różnica jest liczbą podzielną przez $3^{16} - 4^9$.

4. Każde dwie spośród trzech dodatnich liczb całkowitych a , b , c są różne. Ponadto liczby te spełniają zależności $\text{NWD}(a, b) = 1$ oraz $\text{NWD}(a, c) = 1$. Wynika z tego, że

N	a) $\text{NWD}(b, c) = 1$;
N	b) $\text{NWD}(a, b + c) = 1$;
T	c) $\text{NWD}(a, bc) = 1$.

Komentarz

a), b) Jeżeli $a = 2$, $b = 3$, $c = 9$, to $\text{NWD}(a, b) = 1$ oraz $\text{NWD}(a, c) = 1$, a przy tym

$$\text{NWD}(b, c) = \text{NWD}(3, 9) = 3 \neq 1 \quad \text{oraz} \quad \text{NWD}(a, b + c) = \text{NWD}(2, 12) = 2 \neq 1.$$

c) Przypuśćmy, że $\text{NWD}(a, bc) > 1$. Oznacza to, że liczby a oraz bc mają wspólny dzielnik większy od 1. Wobec tego istnieje pewien wspólny dzielnik pierwszy p liczb a oraz bc . Skoro p dzieli iloczyn bc , to dzieli co najmniej jeden z czynników b , c . Jedna z par (a, b) , (a, c) ma więc wspólny dzielnik większy od 1, czyli $\text{NWD}(a, b) \neq 1$ lub $\text{NWD}(a, c) \neq 1$. Uzyskana sprzeczność dowodzi, że $\text{NWD}(a, bc) = 1$.

5. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC , w którym $\sphericalangle ACB = 50^\circ$.

Wynika z tego, że

N	a) $\sphericalangle AIB = 100^\circ$;
T	b) $\sphericalangle AIB > 110^\circ$;
T	c) $\sphericalangle AIB < 120^\circ$.

Komentarz

Punkt I , jako środek okręgu wpisanego w trójkąt ABC , jest punktem przecięcia dwusiecznych kątów wewnętrznych BAC oraz ABC trójkąta ABC (rys. 1). Stąd wniosek, że

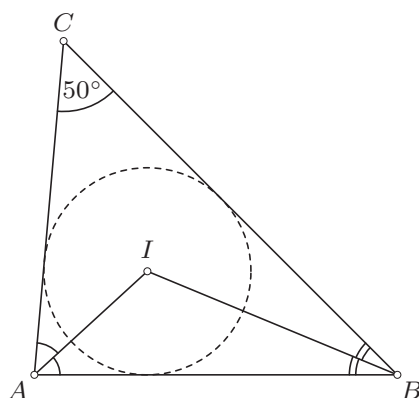
$$\sphericalangle BAI = \frac{\sphericalangle BAC}{2} \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle ABI = \frac{\sphericalangle ABC}{2}.$$

Suma kątów wewnętrznych w trójkącie jest równa 180° , skąd

$$\sphericalangle BAC + \sphericalangle ABC = 180^\circ - \sphericalangle ACB = 130^\circ.$$

Łącząc uzyskane równości, otrzymujemy

$$\sphericalangle AIB = 180^\circ - \sphericalangle BAI - \sphericalangle ABI = 180^\circ - \frac{\sphericalangle BAC + \sphericalangle ABC}{2} = 180^\circ - \frac{130^\circ}{2} = 115^\circ.$$



rys. 1

6. Trójkąt T rozcięto wzdłuż odcinka na dwa trójkąty T_1 i T_2 , a trójkąt S — na trójkąty S_1 i S_2 . Okazało się, że trójkąt T_1 jest przystający do trójkąta S_1 , a trójkąt T_2 jest przystający do trójkąta S_2 . Wynika z tego, że trójkąty T i S

T	a) mają równe pola;
N	b) mają równe obwody;
N	c) są przystające.

Komentarz

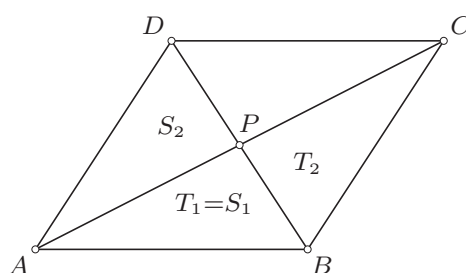
a) Pole trójkąta T jest równe sumie pól trójkątów T_1 i T_2 , a pole trójkąta S jest równe sumie pól trójkątów S_1 i S_2 . Figury przystające mają równe pola, więc pola trójkątów T

i S_1 są równe oraz pola trójkątów T_2 i S_2 są równe. Wobec tego również pola trójkątów T i S są równe.

b), c) Niech $ABCD$ będzie dowolnym równoległobokiem, w którym kąt ABC jest rozwarty. Niech ponadto P będzie punktem przecięcia przekątnych AC i BD (rys. 2). Oznaczmy trójkąty ABC , ABP , BCP odpowiednio przez T , T_1 , T_2 , a trójkąty ABD , ABP , DAP odpowiednio przez S , S_1 , S_2 . Zauważmy, że wówczas trójkąty T_1 i S_1 są przystające (jest to ten sam trójkąt), a także trójkąty T_2 i S_2 są przystające (jeden jest obrazem drugiego w symetrii względem punktu P). Jednak

$$AB + BC + CA > AB + AD + DB,$$

co oznacza, że obwód trójkąta T jest większy od obwodu trójkąta S . Stąd wynika także, że trójkąty T i S nie są przystające.



rys. 2

7. Liczby rzeczywiste x , y spełniają nierówność $x(x+2) < y(y+2)$. Wynika z tego, że

N	a) $x < y$;
T	b) $x + y \neq -2$;
T	c) $ x + 1 < y + 1 $.

Komentarz

b) Przypuśćmy, że $x + y = -2$. Wówczas $x + 2 = -y$ oraz $y + 2 = -x$ i wobec tego

$$x(x+2) = x \cdot (-y) = -xy \quad \text{oraz} \quad y(y+2) = y \cdot (-x) = -xy.$$

Stąd wynika, że liczby $x(x+2)$ i $y(y+2)$ są równe. Uzyskana sprzeczność dowodzi, że $x + y \neq -2$.

c) Daną w treści zadania nierówność możemy przekształcić równoważnie

$$\begin{aligned} x(x+2) &< y(y+2), \\ x^2 + 2x &< y^2 + 2y, \\ x^2 + 2x + 1 &< y^2 + 2y + 1, \\ (x+1)^2 &< (y+1)^2, \\ |x+1| &< |y+1|. \end{aligned}$$

a) Przyjmując $x = 0$, $y = -3$, otrzymujemy $x(x+2) = 0$ oraz $y(y+2) = 3$. Dla tak dobranych liczb zachodzi więc dana nierówność $x(x+2) < y(y+2)$, ale $x > y$.

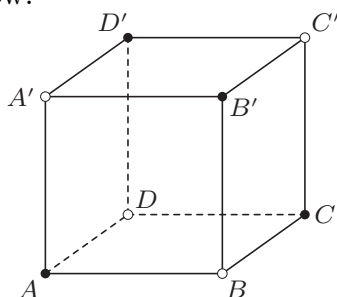
8. Każdy z wierzchołków sześcianu pomalowano jednym z dwóch kolorów. Wynika z tego, że

- ☐ N a) pewna krawędź tego sześcianu ma końce jednakowego koloru;
☐ T b) pewna przekątna pewnej ściany tego sześcianu ma końce jednakowego koloru;
☐ N c) pewna przekątna tego sześcianu ma końce jednakowego koloru.

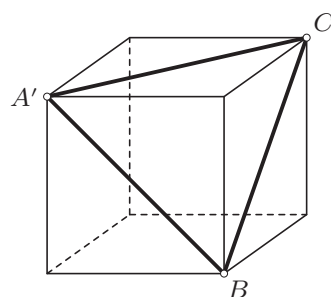
Komentarz

Oznaczmy dwie przeciwległe ściany sześcianu przez $ABCD$ oraz $A'B'C'D'$ w taki sposób, aby odcinki AA' , BB' , CC' , DD' były krawędziami sześcianu.

a), c) Jeżeli pomalujemy wierzchołki A , B' , C , D' na czarno, a wierzchołki A' , B , C' , D na biało (rys. 3), to każda krawędź i każda przekątna sześcianu będzie miała wierzchołki różnych kolorów.



rys. 3



rys. 4

b) Ponieważ wierzchołki pomalowano dwoma kolorami, więc pewne dwa wierzchołki trójkąta $A'BC'$ zostały pomalowane tym samym kolorem. To oznacza, że pewien bok tego trójkąta ma końce tego samego koloru (rys. 4).

9. Antek, biegnąc z prędkością x km/h, jeden kilometr pokonuje w ciągu x minut, gdzie x jest pewną dodatnią liczbą rzeczywistą. Wynika z tego, że

- ☐ N a) x jest liczbą wymierną;
☐ N b) Antek biegnie z prędkością większą niż 8 km/h;
☐ T c) gdyby Antek szedł z prędkością $\frac{1}{2}x$ km/h, to jeden kilometr pokonywałby w ciągu $2x$ minut.

Komentarz

Skoro Antek pokonuje jeden kilometr w ciągu x minut, to biegnie z prędkością $\frac{1}{x}$

kilometrów na minutę, czyli $\frac{60}{x}$ kilometrów na godzinę. Wobec tego

$$\frac{60}{x} = x,$$

skąd obliczamy $x = \sqrt{60}$.

- a) Liczba $\sqrt{60} = 2\sqrt{15}$ jest niewymierna.
- b) Zachodzi nierówność $\sqrt{60} < \sqrt{64} = 8$, więc Antek biegnie z prędkością mniejszą od 8 km/h.
- c) Gdyby Antek szedł dwa razy wolniej, przebycie tej samej trasy zajęłoby mu dwukrotnie więcej czasu.

10. Wielokąt A ma co najmniej osiem wierzchołków oraz dwa razy więcej boków niż wielokąt B . Wynika z tego, że wielokąt A ma

T	a) dwa razy więcej wierzchołków niż wielokąt B ;
N	b) dwa razy więcej przekątnych niż wielokąt B ;
N	c) parzystą liczbę przekątnych.

Komentarz

a) Każdy wielokąt ma tyle samo boków co wierzchołków. Wobec tego, skoro wielokąt A ma dwa razy więcej boków niż wielokąt B , to ma on również dwa razy więcej wierzchołków.

b) Zauważmy, że liczba przekątnych każdego n -kąta jest równa $\frac{1}{2}n(n-3)$. Rzeczywiście, każdy z wierzchołków n -kąta jest końcem dokładnie $n-3$ przekątnych tego wielokąta. Stąd wniosek, że wszystkie przekątne mają łącznie dokładnie $n(n-3)$ końców. Skoro każda przekątna ma dwa końce, to przekątnych jest $\frac{1}{2}n(n-3)$. W szczególności wynika stąd, że czworokąt ma dwie przekątne, a mający dwa razy więcej boków ośmiokąt ma 20, czyli 10 razy więcej, przekątnych.

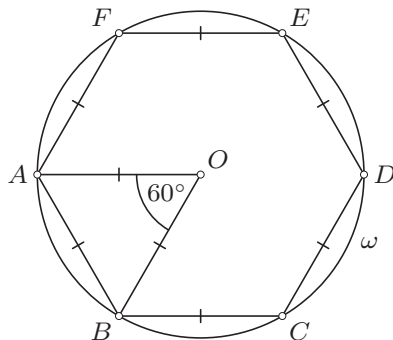
c) Korzystając ze wzoru na liczbę przekątnych w n -kącie wypukłym, wyprowadzonego w poprzednim podpunkcie, stwierdzamy, że każdy dziesięciokąt wypukły ma dokładnie $\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot (10-3) = 35$, czyli nieparzystą liczbę, przekątnych.

11. Każdy punkt okręgu ω o promieniu 1 pomalowano na czarno lub biało w taki sposób, że każda cięciwa tego okręgu o długości 1 ma końce różnych kolorów. Wynika z tego, że

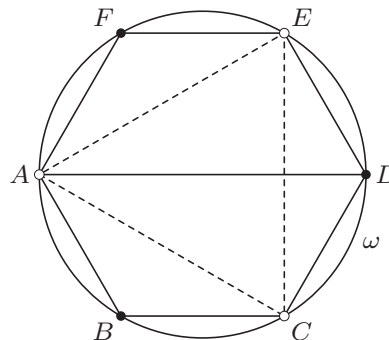
T	a) każda średnica okręgu ω ma końce różnych kolorów;
T	b) każdy trójkąt równoboczny wpisany w okrąg ω ma wszystkie trzy wierzchołki tego samego koloru;
T	c) każdy kwadrat wpisany w okrąg ω ma dwa wierzchołki czarne i dwa białe.

Komentarz

Oznaczmy przez O środek okręgu ω . Niech A będzie dowolnym punktem okręgu ω oraz niech $ABCDEF$ będzie sześciokątem foremnym wpisanym w ten okrąg (rys. 5). Wówczas $\sphericalangle AOB = 60^\circ$, gdyż jest to kąt środkowy oparty na łuku będącym $\frac{1}{6}$ okręgu. Stąd wniosek, że trójkąt ABO jest równoboczny, więc $AB = OA = 1$. To oznacza, że każdy z boków sześciokąta $ABCDEF$ jest cięciwą okręgu ω o długości 1.



rys. 5



rys. 6

a) Bez straty ogólności przypuśćmy, że punkt A został pomalowany na białą (rozumowanie w przypadku gdy punkt A jest czarny jest w pełni analogiczne). Wówczas z warunków zadania wynika kolejno, że punkty B i F zostały pomalowane na czarno, punkty C i E na białą i w końcu punkt D na czarno (rys. 6). Odcinek AD jest średnicą okręgu ω , która ma końce różnych kolorów, a punkt A został wybrany dowolnie. Stąd wniosek, że każda średnica okręgu ω ma końce różnych kolorów.

b) Trójkąt ACE o wierzchołkach tego samego koloru jest równoboczny i wpisany w okrąg ω . Punkt A został wybrany dowolnie. Stąd wynika, że każdy trójkąt równoboczny wpisany w dany okrąg ma wierzchołki tego samego koloru.

c) Zauważmy, że przekątne kwadratu wpisanego w okrąg ω są średnicami tego okręgu. Z punktu a) wiemy, że każda taka średnica ma jeden wierzchołek czarny i jeden biały. Stąd wniosek, że wśród wierzchołków kwadratu zawsze będą dwa wierzchołki czarne i dwa białe.

12. Liczba $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[6]{2}$ jest

N	a) niewymierna;
N	b) mniejsza od 2;
N	c) równa $\sqrt[n]{2}$ dla pewnej liczby całkowitej $n > 1$.

Komentarz

Zauważmy, że

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[6]{2} = \sqrt[6]{2^3} \cdot \sqrt[6]{2^2} \cdot \sqrt[6]{2} = \sqrt[6]{2^3 \cdot 2^2 \cdot 2} = \sqrt[6]{2^6} = 2.$$

13. Iloczyn cyfr dodatniej liczby całkowitej n jest równy 4^{100} . Wynika z tego, że

- ☐ N a) liczba n jest parzysta;
☐ N b) liczba n ma co najmniej 100 cyfr;
☐ T c) suma cyfr liczby n jest nie mniejsza od 400.

Komentarz

a) Liczba $n = \underbrace{444 \dots 41}_{100 \text{ cyfr } 4}$ jest nieparzysta, a jej iloczyn cyfr jest równy 4^{100} .

b) Liczba $n = \underbrace{888 \dots 84}_{66 \text{ cyfr } 8}$ ma 67 cyfr, a jej iloczyn cyfr jest równy

$$8^{66} \cdot 4 = 2^{3 \cdot 66} \cdot 2^2 = 2^{198+2} = 2^{200} = 4^{100}.$$

c) Zauważmy, że jedynymi możliwymi cyframi liczby n są cyfry 1, 2, 4 i 8. Oznaczmy przez m_d liczbę wystąpień cyfry d w zapisie dziesiętnym liczby n . Z warunków zadania wynika wówczas, że

$$\underbrace{1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1}_{m_1 \text{ cyfr } 1} \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_{m_2 \text{ cyfr } 2} \cdot \underbrace{4 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 4}_{m_4 \text{ cyfr } 4} \cdot \underbrace{8 \cdot 8 \cdot \dots \cdot 8}_{m_8 \text{ cyfr } 8} = 4^{100},$$

czyli równoważnie

$$1^{m_1} \cdot 2^{m_2} \cdot 4^{m_4} \cdot 8^{m_8} = 4^{100},$$

$$2^{m_2} \cdot 2^{2m_4} \cdot 2^{3m_8} = 2^{200},$$

$$2^{m_2+2m_4+3m_8} = 2^{200},$$

$$m_2 + 2m_4 + 3m_8 = 200.$$

Suma cyfr liczby n jest równa

$$\underbrace{1+1+\dots+1}_{m_1 \text{ cyfr } 1} + \underbrace{2+2+\dots+2}_{m_2 \text{ cyfr } 2} + \underbrace{4+4+\dots+4}_{m_4 \text{ cyfr } 4} + \underbrace{8+8+\dots+8}_{m_8 \text{ cyfr } 8} = m_1 + 2m_2 + 4m_4 + 8m_8.$$

Możemy teraz zauważyć, że

$$m_1 + 2m_2 + 4m_4 + 8m_8 = m_1 + 2m_8 + 2 \cdot (m_2 + 2m_4 + 3m_8) = m_1 + 2m_8 + 2 \cdot 200 \geq 400,$$

gdyż $m_1 \geq 0$ oraz $m_8 \geq 0$.

14. Każdy bok pewnego czworokąta ma długość mniejszą od 1. Wynika z tego, że

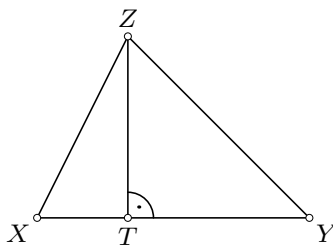
- ☐ T a) pole tego czworokąta jest mniejsze od 1;
☐ N b) istnieje kwadrat o boku 1, w którym ten czworokąt jest zawarty;
☐ N c) długość każdej przekątnej tego czworokąta jest mniejsza od $\sqrt{2}$.

Udowodnimy najpierw następujący fakt: jeżeli co najmniej dwa z boków trójkąta mają długość mniejszą od 1, to pole tego trójkąta jest mniejsze od $\frac{1}{2}$.

Niech XYZ będzie trójkątem, w którym $XY < 1$ oraz $XZ < 1$ (rys. 7). Oznaczmy przez T rzut prostokątny punktu Z na prostą XY (punkt T może leżeć poza odcinkiem XY lub pokrywać się z jednym z punktów X, Y). W trójkącie prostokątnym XZT (być może zdegenerowanym do odcinka) przeciwprostokątna XZ jest nie krótsza od przyprostokątnej ZT , czyli $ZT \leq XZ$. Uzyskujemy więc nierówność

$$[XYZ] = \frac{XY \cdot ZT}{2} \leq \frac{XY \cdot XZ}{2} < \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2},$$

gdzie $[F]$ oznacza pole figury F . To kończy dowód.



rys. 7

a) Niech $ABCD$ będzie czworokątem, którego każdy bok ma długość mniejszą od 1. Korzystając z udowodnionego na początku faktu, otrzymujemy

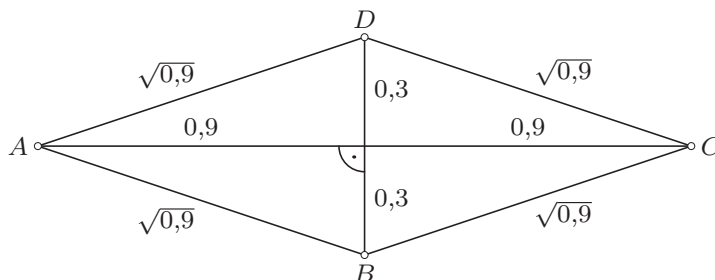
$$[ABC] < \frac{1}{2} \quad \text{oraz} \quad [ADC] < \frac{1}{2}.$$

Dodając stronami dwie powyższe nierówności, uzyskujemy $[ABCD] < 1$.

c) Rozważmy prostopadłe odcinki AC, BD o długościach odpowiednio 1,8, 0,6, które dzielą się na połowy (rys. 8). Wówczas czworokąt $ABCD$ jest rombem, którego każdy bok ma długość

$$\sqrt{0,9^2 + 0,3^2} = \sqrt{0,81 + 0,09} = \sqrt{0,9} < 1.$$

Z kolei przekątna AC ma długość większą od $\sqrt{2}$, gdyż $(1,8)^2 = 3,24 > 2 = (\sqrt{2})^2$.



rys. 8

b) Każdy odcinek zawarty w kwadracie o boku 1 ma długość co najwyżej $\sqrt{2}$. Stąd wniosek, że czworokąt $ABCD$ skonstruowanego w punkcie c) nie można umieścić wewnątrz takiego kwadratu.

15. Graniastosłup prawidłowy trójkątny rozcięto płaszczyzną na dwa wielościany, uzyskując w przekroju trójkąt. Wynika z tego, że

N

a) każdy z otrzymanych wielościanów ma dokładnie dwie ściany trójkątne;

N

b) w każdym wierzchołku każdego z otrzymanych wielościanów schodzą się dokładnie trzy krawędzie;

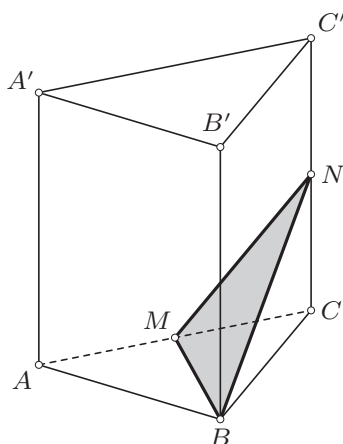
N

c) każda ściana każdego z otrzymanych wielościanów jest trójkątem lub czworokątem.

Komentarz

Rozważmy graniastosłup prawidłowy trójkątny o podstawach ABC , $A'B'C'$ oznaczonych w taki sposób, że AA' , BB' , CC' są krawędziami bocznymi graniastosłupa. Niech punkty M i N będą odpowiednio środkami krawędzi AC i CC' .

Przetnijmy graniastosłup płaszczyzną BMN , uzyskując w przekroju trójkąt (rys. 9). Wówczas jedna z otrzymanych brył ma trzy ściany trójkątne ABM , BMN , $A'B'C'$, w jej wierzchołku B schodzą się dokładnie cztery krawędzie oraz posiada ona ścianę pięciokątną $AMNC'A'$.



rys. 9

XI Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów Statystyki dotyczące części testowej zawodów pierwszego stopnia (2015/2016)

(24 września 2015 r.)

Tabela 1.

Procentowa liczba poprawnych odpowiedzi w poszczególnych podpunktach.

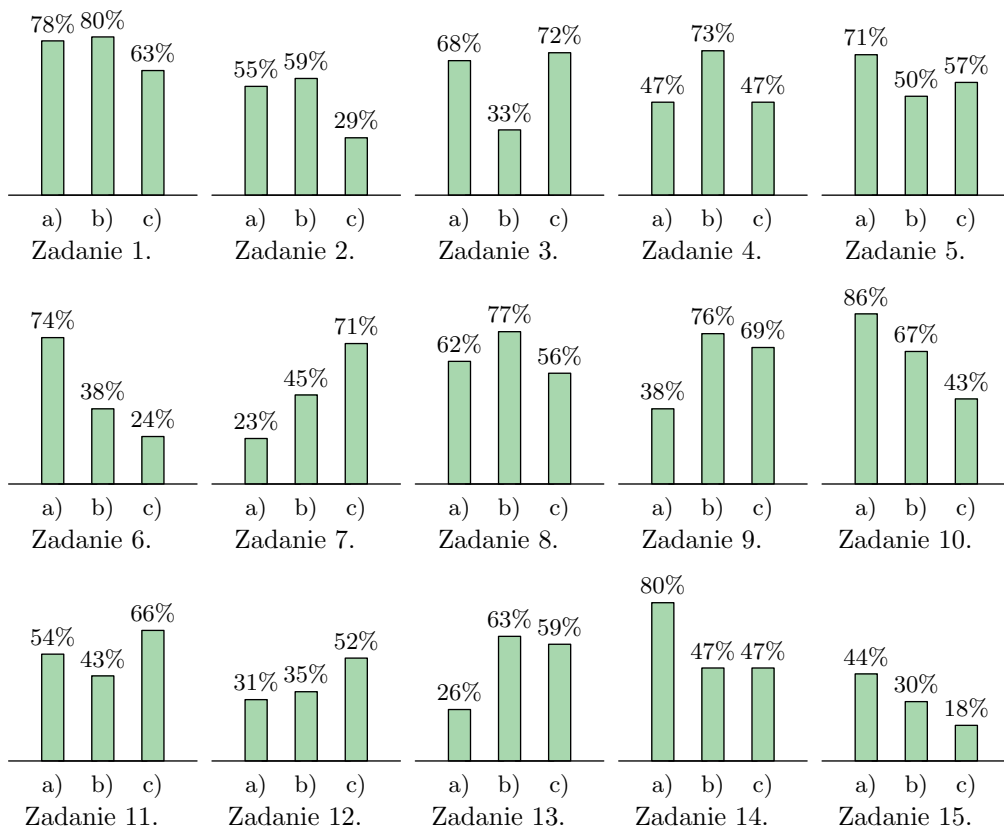
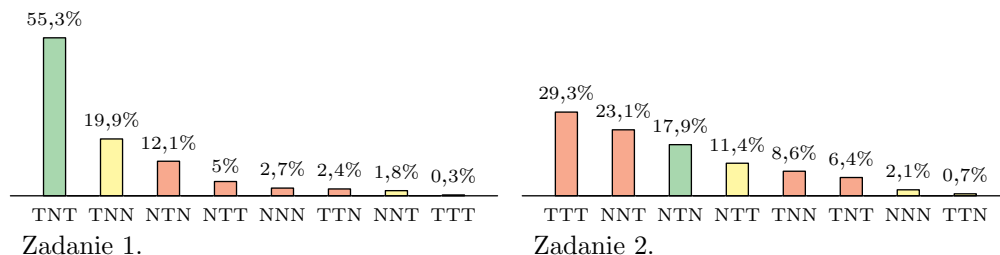
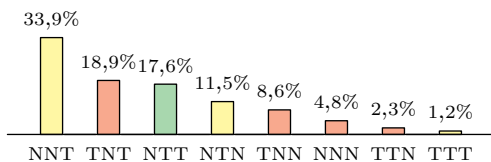


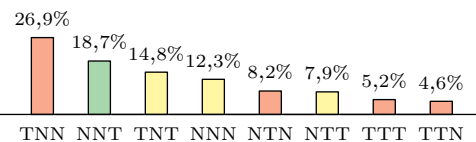
Tabela 2.

Procentowa liczba udzielonych kombinacji odpowiedzi w poszczególnych zadaniach.

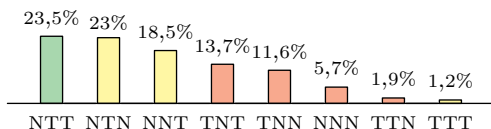




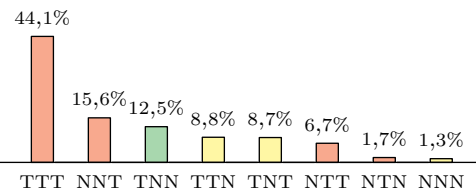
Zadanie 3.



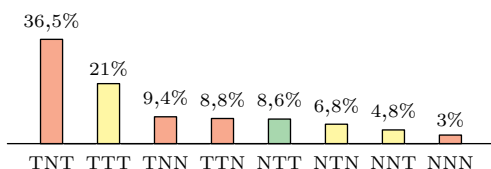
Zadanie 4.



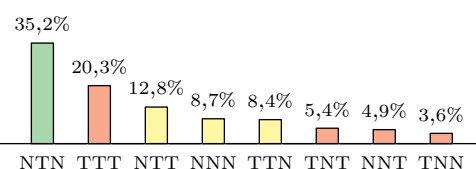
Zadanie 5.



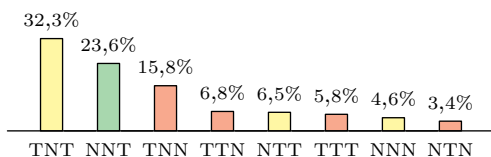
Zadanie 6.



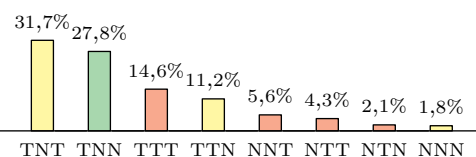
Zadanie 7.



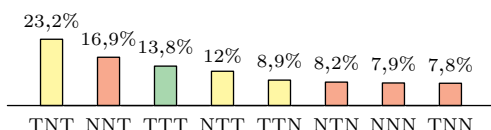
Zadanie 8.



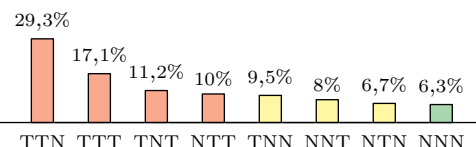
Zadanie 9.



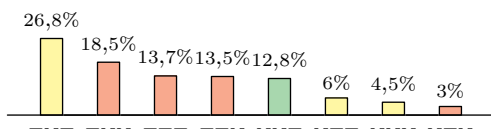
Zadanie 10.



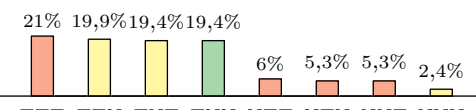
Zadanie 11.



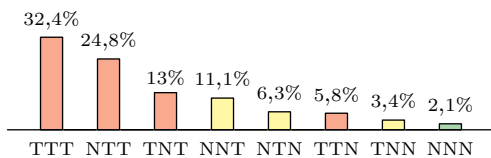
Zadanie 12.



Zadanie 13.



Zadanie 14.



Zadanie 15.

Zestaw odpowiedzi za:

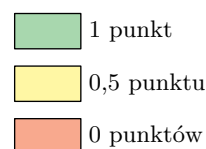


Tabela 3.

Rzeczywista oraz procentowa liczba osób, które uzyskały daną sumę punktów.

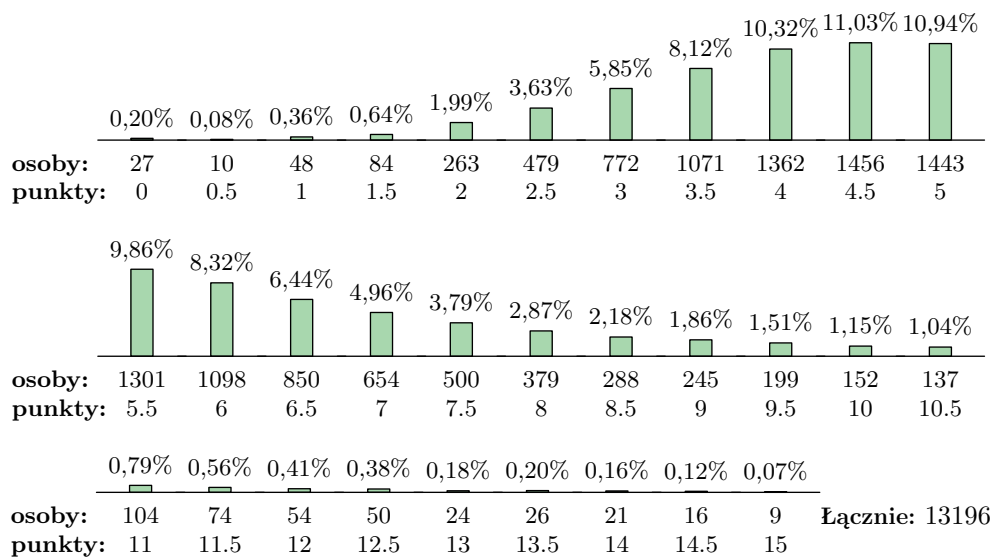


Tabela 4.

Procentowa i rzeczywista liczba osób, które uzyskały daną lub większą sumę punktów.

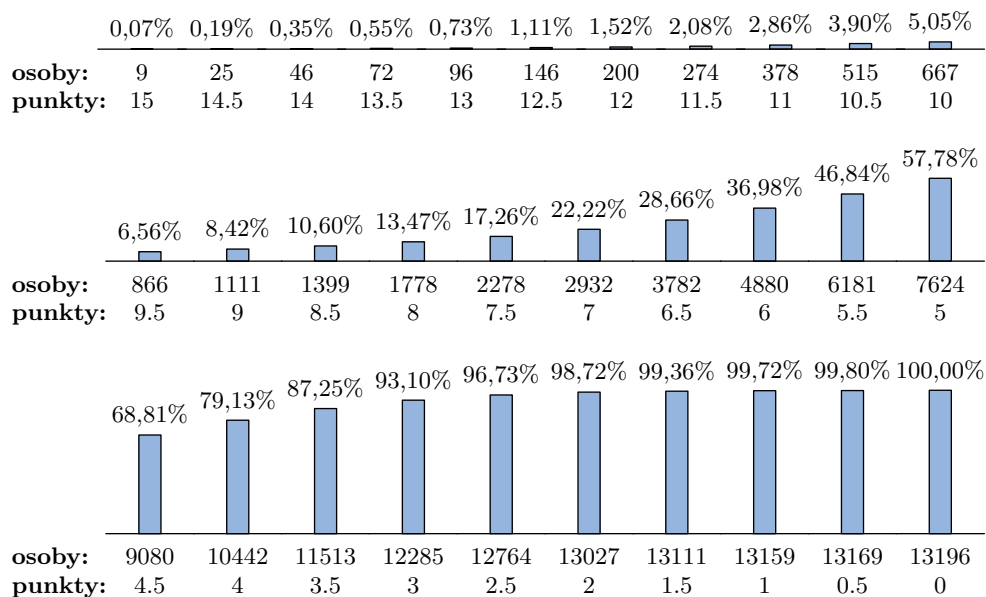


Tabela 5.

Procentowa liczba uzyskanych punktów za poszczególne zadania.

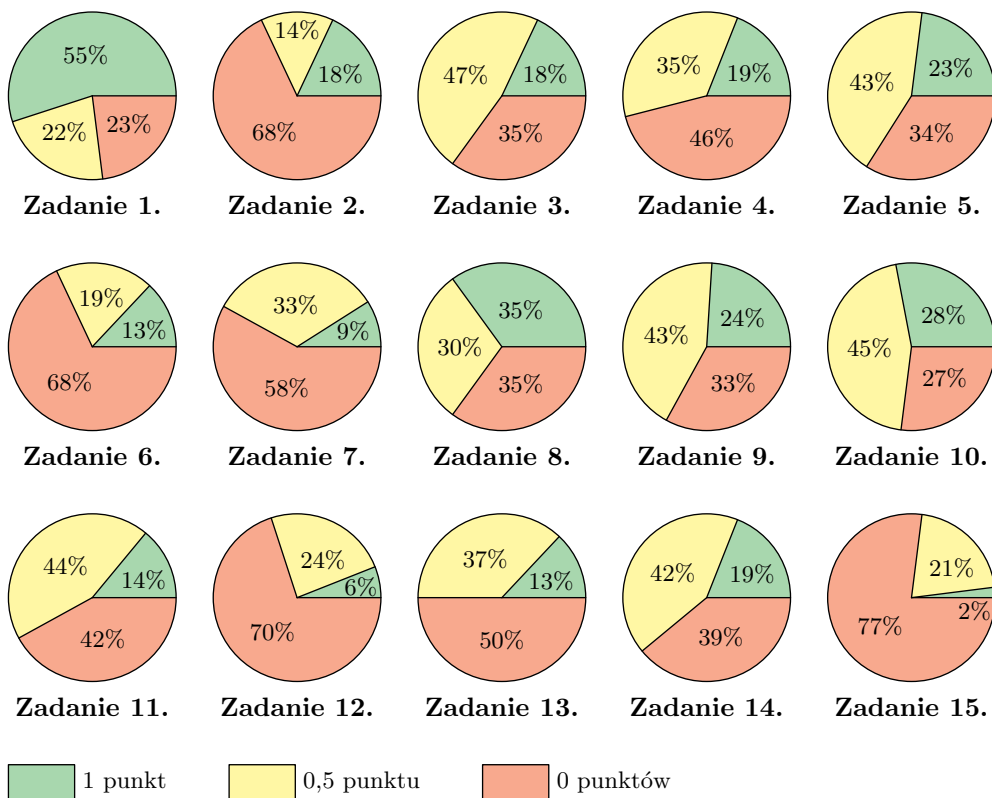


Tabela 6.

Średnia z uzyskanych punktów za poszczególne zadania.

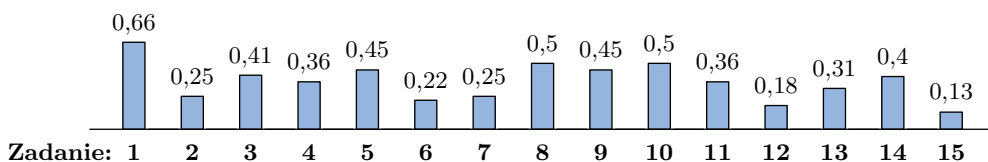


Tabela 7.

Średnia uzyskanych punktów ze wszystkich zadań w podziale na województwa i inne regiony.

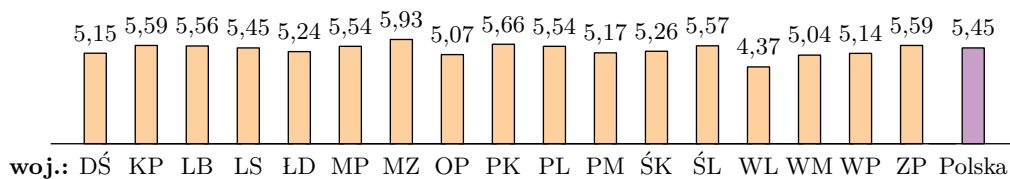
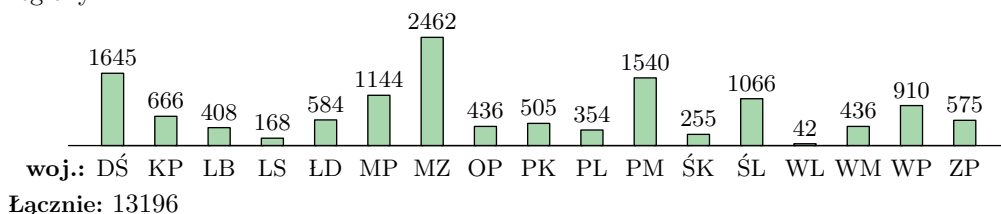
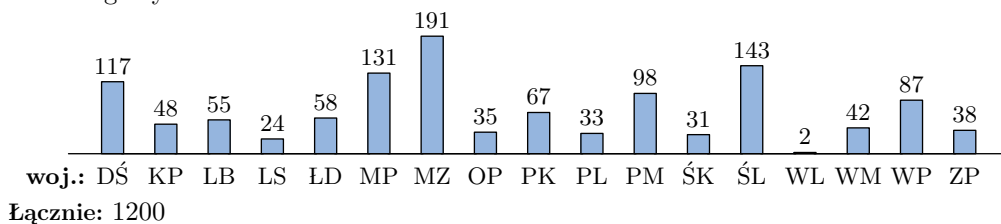


Tabela 8.

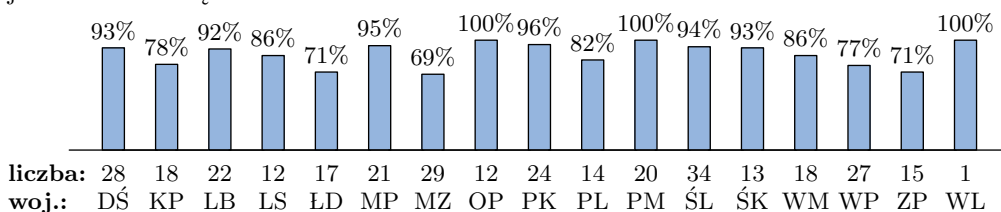
Liczba uczniów, którzy wzięli udział w zawodach w podziale na województwa i inne regiony.

**Tabela 9.**

Liczba szkół, których uczniowie wzięli udział w zawodach w podziale na województwa i inne regiony.

**Tabela 10.**

Reczywista i procentowa liczba powiatów w danym województwie, z których co najmniej jedna szkoła wzięła udział w zawodach.



Skróty województw i innych regionów

DŚ — dolnośląskie

LB — lubelskie

ŁD — łódzkie

MZ — mazowieckie

PK — podkarpackie

PM — pomorskie

ŚL — śląskie

WP — wielkopolskie

WL — Wilno

KP — kujawsko-pomorskie

LS — lubuskie

MP — małopolskie

OP — opolskie

PL — podlaskie

ŚK — świętokrzyskie

WM — warmińsko-mazurskie

ZP — zachodniopomorskie

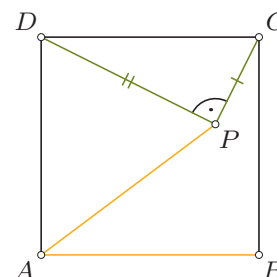
1. Wykaż, że istnieje nieskończenie wiele trójek (x, y, z) dodatnich liczb całkowitych spełniających równanie

$$x(y - z) + y(z - x) = 6.$$

2. Wewnątrz kwadratu $ABCD$ wybrano taki punkt P , że

$$AP = AB \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle CPD = 90^\circ.$$

Wykaż, że $DP = 2 \cdot CP$.



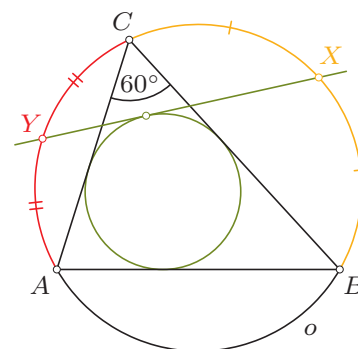
Zadanie 2

3. Wyznacz wszystkie liczby naturalne n , dla których liczba

$$\frac{n^4 + 4}{17}$$

jest pierwsza.

4. Dany jest trójkąt ABC , w którym $\sphericalangle ACB = 60^\circ$. Na trójkącie tym opisano okrąg o . Punkt X jest środkiem tego łuku BC okręgu o , który nie zawiera punktu A , a punkt Y jest środkiem tego łuku CA okręgu o , który nie zawiera punktu B . Udowodnij, że prosta XY jest styczna do okręgu wpisanego w trójkąt ABC .



Zadanie 4

5. W wierzchołkach n -kąta foremnego rozmieszczono liczby $1, 2, \dots, n$ w taki sposób, że suma liczb znajdujących się w każdych trzech kolejnych wierzchołkach n -kąta jest parzysta. Wyznacz wszystkie liczby naturalne $n \geq 3$, dla których takie rozmieszczenie jest możliwe.

6. Różne liczby pierwsze nieparzyste p i q mają tę własność, że liczba $p^2 + p$ jest podzielna przez $q^2 + q$. Udowodnij, że liczba $\frac{1}{2}(p - q)$ jest złożona.

7. Czy istnieje taki ostrosłup $ABCD S$, którego podstawą jest prostokąt $ABCD$ i którego każde dwie krawędzie boczne są różnych długości, a ponadto spełniona jest równość $AS + CS = BS + DS$? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązania powyższych zadań (wszystkich lub części z nich) należy przekazać szkolnemu koordynatorowi OMG lub przesyłać bezpośrednio, listem poleconym, do Komitetu Okręgowego OMG właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

12 października 2015 r. (decyduje data stempla pocztowego).

Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym lub pod niewłaściwy adres nie będą rozpatrywane. Adresy Komitetów Okręgowych OMG, szczegółowe wytyczne dotyczące sposobu redakcji rozwiązań i przysyłania prac, a także regulamin OMG i inne bieżące informacje znajdują się na stronie internetowej Olimpiady: www.omg.edu.pl.

XI Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

Zawody stopnia pierwszego — część korespondencyjna

(1 września 2015 r. – 12 października 2015 r.)

Szkice rozwiązań zadań konkursowych

1. Wykaż, że istnieje nieskończenie wiele trójek (x, y, z) dodatnich liczb całkowitych spełniających równanie

$$x(y - z) + y(z - x) = 6.$$

Szkic rozwiązania

Przekształcając równoważnie dane równanie, otrzymujemy kolejno

$$xy - xz + yz - xy = 6,$$

$$yz - xz = 6,$$

$$z(y - x) = 6.$$

Jeśli zatem $n \geq 1$ jest dowolną liczbą naturalną, to każda trójka postaci

$$(x, y, z) = (n, n + 6, 1)$$

jest rozwiązaniem danego równania. Wobec tego takich trójek jest nieskończenie wiele.

Uwaga

Wskazane w rozwiązaniu trójki liczb $(x, y, z) = (n, n + 6, 1)$ nie są jedynymi spełniającymi dane równanie. Również każda z trójek $(n, n + 3, 2)$, $(n, n + 2, 3)$, $(n, n + 1, 6)$, gdzie n jest dowolną dodatnią liczbą całkowitą, spełnia warunki zadania.

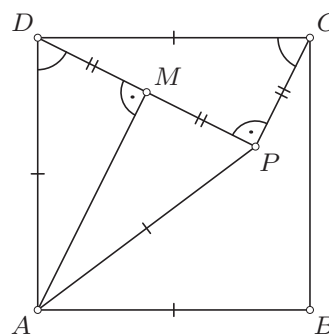
2. Wewnątrz kwadratu $ABCD$ wybrano taki punkt P , że

$$AP = AB \quad \text{oraz} \quad \angle CPD = 90^\circ.$$

Wykaż, że $DP = 2 \cdot CP$.

Szkic rozwiązania

Oznaczmy przez M środek odcinka DP (rys. 1). Ponieważ $AP = AB = AD$, więc trójkąt ADP jest równoramienny i wobec tego trójkąt ADM jest prostokątny. Ponadto zachodzą równości $\angle ADM = 90^\circ - \angle PDC = \angle DCP$ oraz $AD = DC$, więc trójkąty ADM i DCP są przystające, na mocy cechy kąt-bok-kąt. Wobec tego $DM = CP$, skąd otrzymujemy $DP = 2 \cdot DM = 2 \cdot CP$, a to należało udowodnić.



rys. 1

3. Wyznacz wszystkie liczby naturalne n , dla których liczba

$$\frac{n^4 + 4}{17}$$

jest pierwsza.

Szkic rozwiązania

W rozwiązaniu skorzystamy z następującego rozkładu na czynniki liczby $n^4 + 4$:

$$n^4 + 4 = n^4 + 4n^2 + 4 - 4n^2 = (n^2 + 2)^2 - (2n)^2 = (n^2 + 2 - 2n)(n^2 + 2 + 2n).$$

Przyjmijmy oznaczenie $p = \frac{n^4 + 4}{17}$.

Szukamy takich liczb naturalnych n , dla których liczba p jest pierwsza. Korzystając z wyprowadzonej na początku tożsamości, możemy powyższą równość zapisać w postaci

$$(n^2 + 2 - 2n)(n^2 + 2 + 2n) = 17p.$$

Ponieważ liczby 17 oraz p są pierwsze, a ponadto $n^2 + 2 - 2n < n^2 + 2 + 2n$, więc spełniony jest jeden z trzech układów równań:

$$\begin{cases} n^2 + 2 - 2n = 1 \\ n^2 + 2 + 2n = 17p, \end{cases} \quad \begin{cases} n^2 + 2 - 2n = 17 \\ n^2 + 2 + 2n = p, \end{cases} \quad \begin{cases} n^2 + 2 - 2n = p \\ n^2 + 2 + 2n = 17. \end{cases}$$

Pierwsze równanie pierwszego układu równań przybiera postać $(n-1)^2 + 1 = 1$, skąd obliczamy $n = 1$. Przekształcając podobnie pierwsze równanie drugiego układu równań, otrzymujemy $(n-1)^2 = 16$, skąd $n = 5$. Wreszcie, przekształcając analogicznie drugie równanie trzeciego układu równań, dostajemy $(n+1)^2 + 1 = 17$, skąd $n = 3$.

Bezpośrednio sprawdzamy, że spośród uzyskanych trzech wartości jedynie $n = 3$ lub $n = 5$ spełniają warunki zadania. Podsumowując, jedynymi liczbami naturalnymi n spełniającymi warunki zadania są $n = 3$ lub $n = 5$.

Uwaga

Tożsamość, którą wyprowadziliśmy na początku rozwiązania jest szczególnym przypadkiem ogólniejszego wzoru

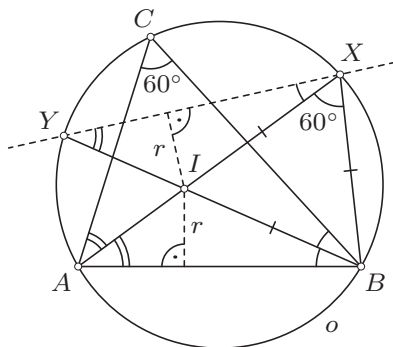
$$a^4 + 4b^4 = (a^2 + 2b^2 - 2ab)(a^2 + 2b^2 + 2ab),$$

nazywanego *tożsamością Sophie Germain*. Więcej na temat zastosowań tej tożsamości w zadaniach olimpijskich można znaleźć w artykule „Tożsamość Sophie Germain”, *Kwadrat* nr 16 (lipiec 2015).

4. Dany jest trójkąt ABC , w którym $\sphericalangle ACB = 60^\circ$. Na trójkącie tym opisano okrąg o . Punkt X jest środkiem tego łuku BC okręgu o , który nie zawiera punktu A , a punkt Y jest środkiem tego łuku CA okręgu o , który nie zawiera punktu B . Udowodnij, że prosta XY jest styczna do okręgu wpisanego w trójkąt ABC .

Szkic rozwiązania

Ponieważ punkt X jest środkiem łuku BC okręgu o , więc prosta AX zawiera dwusieczną kąta BAC (rys. 2). Analogicznie, prosta BY zawiera dwusieczną kąta ABC . Stąd wniosek, że odcinki AX i BY przecinają się w punkcie I będącym środkiem okręgu ω wpisanego w trójkąt ABC .



rys. 2

Prosta k jest styczna do okręgu ω , wtedy i tylko wtedy, gdy odległość punktu I od prostej k jest równa promieniowi tego okręgu. A ponieważ promień okręgu ω jest równy odległości punktu I od prostej AB , więc zadanie będzie rozwiązane, jeśli wykazemy, że odległości punktu I od prostych AB i XY są równe.

Zauważmy, że

$$\sphericalangle BIX = \sphericalangle BAI + \sphericalangle ABI = \sphericalangle CAX + \sphericalangle CBY = \sphericalangle CBX + \sphericalangle CBY = \sphericalangle IBX,$$

skąd wniosek, że $BX = IX$. Ponadto $\sphericalangle AXB = \sphericalangle ACB = 60^\circ$. Trójkąt IBX jest więc równoramienny, w którym jeden z kątów ma miarę 60° . Wobec tego jest to trójkąt równoboczny, a więc $IB = IX$. Ponadto $\sphericalangle IBA = \sphericalangle IXY$ oraz $\sphericalangle BIA = \sphericalangle XIY$. Trzy ostatnie równości dowodzą, że trójkąty AIB i YIX są przystające (cecha bok–kąt–bok). Stąd w szczególności wynika, że odległości punktu I od prostych AB i XY są równe, a tego mieliśmy dowieść.

Uwaga

Kluczową rolę w rozwiązaniu zadania odgrywa wyprowadzona równość $IB = IX$, której dowód można znaleźć również w artykule „Bliźniacze zadania”, *Kwadrat* nr 16 (lipiec 2015).

5. W wierzchołkach n -kąta foremnego rozmieszczono liczby $1, 2, \dots, n$ w taki sposób, że suma liczb znajdujących się w każdym trzech kolejnych wierzchołkach n -kąta jest parzysta. Wyznacz wszystkie liczby naturalne $n \geq 3$, dla których takie rozmieszczenie jest możliwe.

Szkic rozwiązania

Zauważmy, że suma trzech liczb naturalnych jest liczbą parzystą tylko wtedy, gdy wszystkie są parzyste lub gdy dokładnie dwie spośród nich są nieparzyste.

Oznaczmy dany n -kąt foremny przez $A_1 A_2 \dots A_n$ w taki sposób, aby wierzchołkowi A_1 była przyporządkowana liczba 2. Liczbę znajdującą się w wierzchołku A_i oznaczmy przez a_i ; mamy więc $a_1 = 2$. Przyjmijmy, że $a_{n+i} = a_i$ dla $i = 1, 2, \dots$ (np. dla $n = 3$ przyjmujemy, że $a_4 = a_1$, $a_5 = 2$, itd.).

W myśl uwagi poczynionej na początku rozwiązania, wśród liczb a_2 , a_3 albo obie są parzyste, albo obie są nieparzyste. Jeżeli każda z liczb a_2 , a_3 jest parzysta, to również liczba a_4 jest parzysta, gdyż z warunków zadania wynika, że liczba $a_2 + a_3 + a_4$ jest parzysta. Powtarzając analogiczne rozumowanie dla liczb a_5 , a_6 itd. dochodzimy do wniosku, że każdemu wierzchołkowi musiała zostać przyporządkowana liczba parzysta, co nie jest możliwe, gdyż pewien wierzchołek musi mieć numer 1. Stąd wniosek, że liczby a_2 , a_3 są nieparzyste.

Ponieważ wśród liczb a_2 , a_3 , a_4 dwie pierwsze są nieparzyste, więc trzecia liczba, czyli a_4 , jest parzysta. Podobnie, skoro wśród liczb a_3 , a_4 , a_5 jest jedna parzysta i jedna nieparzysta, to trzecia liczba, czyli a_5 , jest nieparzysta. Przeprowadzając analogiczne rozumowanie dla kolejnych trójek wierzchołków danego n -kąta dochodzimy do wniosku, że co trzeciemu wierzchołkowi przyporządkowana jest liczba parzysta, a pozostałym — liczby nieparzyste. Wynika z tego, że n jest liczbą podzielną przez 3 oraz $\frac{n}{3}$ jest liczbą liczb parzystych pośród $1, 2, \dots, n$.

Jeżeli n jest liczbą parzystą, to wśród liczb $1, 2, \dots, n$ jest dokładnie $\frac{n}{2}$ liczb parzystych. Jednak równość $\frac{n}{3} = \frac{n}{2}$ nie może mieć miejsca dla żadnej liczby całkowitej dodatniej n .

Jeżeli n jest liczbą nieparzystą, to pośród liczb $1, 2, \dots, n$ jest dokładnie $\frac{n-1}{2}$ liczb parzystych. Otrzymujemy równanie

$$\frac{n}{3} = \frac{n-1}{2},$$

skąd $2n = 3n - 3$ i $n = 3$. Bezpośrednio sprawdzamy, że dla $n = 3$ dowolne etykietowanie wierzchołków trójkąta równobocznego liczbami $1, 2, 3$ spełnia warunki zadania.

Odpowiedź

Opisana w zadaniu sytuacja jest możliwa tylko dla liczby $n = 3$.

6. Różne liczby pierwsze nieparzyste p i q mają tę własność, że liczba $p^2 + p$ jest podzielna przez $q^2 + q$. Udowodnij, że liczba $\frac{1}{2}(p - q)$ jest złożona.

Szkic rozwiązania

Zauważmy, że skoro liczba $p^2 + p$ jest podzielna przez $q^2 + q$, to $p^2 + p \geq q^2 + q$. Nierówność tę można przekształcić równoważnie do postaci

$$(p - q)(p + q + 1) \geq 0.$$

Skoro $p \neq q$ oraz $p + q + 1 > 0$, to z powyższej nierówności wynika, że $p > q$. W szczególności $p > q + 1$, gdyż p, q to liczby nieparzyste.

Dana w treści zadania podzielność oznacza, że

$$p(p + 1) = kq(q + 1) \quad (1)$$

dla pewnej liczby naturalnej k . Skoro $p > q + 1$, to p nie dzieli żadnej z liczb $q, q + 1$. Jednak p dzieli liczbę $kq(q + 1)$, skąd wniosek, że p dzieli k , czyli $k = pl$ dla pewnej dodatniej liczby całkowitej l .

Równość (1) przybiera wtedy postać

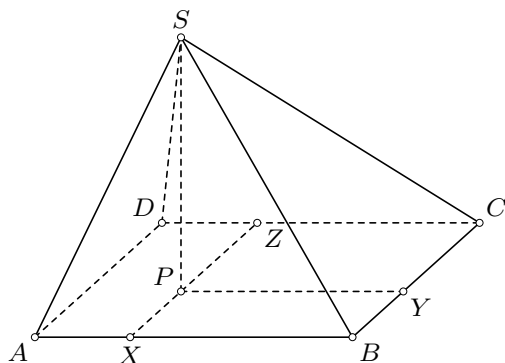
$$p + 1 = lq(q + 1), \quad \text{skąd} \quad \frac{1}{2}(p - q) = \frac{1}{2}(p + 1) - \frac{1}{2}(q + 1) = (lq - 1) \cdot \frac{q + 1}{2}.$$

Ponieważ $q \geq 3$, więc obie liczby $\frac{q + 1}{2}, lq - 1$ są większe od 1. Tym samym liczba $\frac{1}{2}(p - q)$, jako iloczyn dwóch liczb większych od 1, jest złożona.

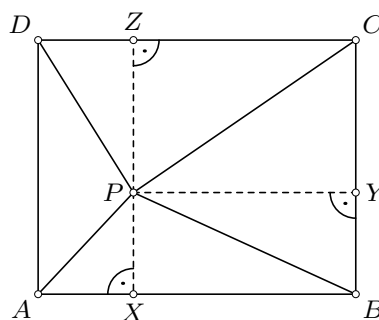
7. Czy istnieje taki ostrosłup $ABCD S$, którego podstawą jest prostokąt $ABCD$ i którego każde dwie krawędzie boczne są różnych długości, a ponadto spełniona jest równość $AS + CS = BS + DS$? Odpowiedź uzasadnij.

Szkic rozwiązania

Załóżmy, że istnieje ostrosłup $ABCD S$ o własnościach opisanych w treści zadania. Oznaczmy przez P spodek wysokości ostrosłupa poprowadzonej z wierzchołka S , a przez X, Y, Z — rzuty prostokątne punktu P na proste zawierające odpowiednio krawędzie podstawy AB, BC, CD (rys. 3).



rys. 3



rys. 4

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa dla trójkątów PXA, PYC (rys. 4), uzyskujemy

$$PA^2 + PC^2 = PX^2 + XA^2 + PY^2 + YC^2. \quad (2)$$

Z kolei dla trójkątów PXB , PZD , otrzymujemy

$$PB^2 + PD^2 = PX^2 + XB^2 + PZ^2 + ZD^2. \quad (3)$$

Ponieważ $YC = PZ$, $XA = ZD$ oraz $PY = XB$, więc prawe strony zależności (2) oraz (3) są równe. Stąd wniosek, że ich lewe strony są równe, czyli

$$PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2.$$

Dodając do obu stron powyższej równości $2 \cdot PS^2$ i korzystając z twierdzenia Pitagorasa dla trójkątów prostokątnych APS , BPS , CPS , DPS , otrzymujemy

$$AS^2 + CS^2 = BS^2 + DS^2. \quad (4)$$

Równoważnie powyższą zależność możemy zapisać jako

$$AS^2 - BS^2 = DS^2 - CS^2, \quad \text{czyli} \quad (AS - BS)(AS + BS) = (DS - CS)(DS + CS).$$

Ale w myśl założeń zadania, $AS - BS = DS - CS \neq 0$, więc z równości (4) wynika, że

$$AS + BS = CS + DS.$$

Dodając tę równość stronami do $AS - BS = DS - CS$, a następnie dzieląc obustronnie przez 2, otrzymujemy $AS = DS$, co stoi w sprzeczności z założeniem, że długości krawędzi bocznych rozważanego ostrosłupa są różne. Uzyskana sprzeczność oznacza, że nie istnieje ostrosłup o opisanych własnościach.

Odpowiedź

Nie istnieje ostrosłup $ABCD$ o własnościach opisanych w treści zadania.

Uwaga

Sytuacja zobrazowana na rysunku 4 nie jest jedyną możliwością. Punkt P może znaleźć się na zewnątrz prostokąta $ABCD$, na prostej zawierającej jeden z jego boków lub nawet w jednym z jego wierzchołków. Przeprowadzone rozumowanie pozostaje w mocy również w tych przypadkach.

XI Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

Statystyki dotyczące zawodów części korespondencyjnej (2015/16)

(1 września – 12 października 2015 r.)

Tabela 1. Liczba uczniów, którzy wzięli udział w zawodach w podziale na województwa i inne regiony.

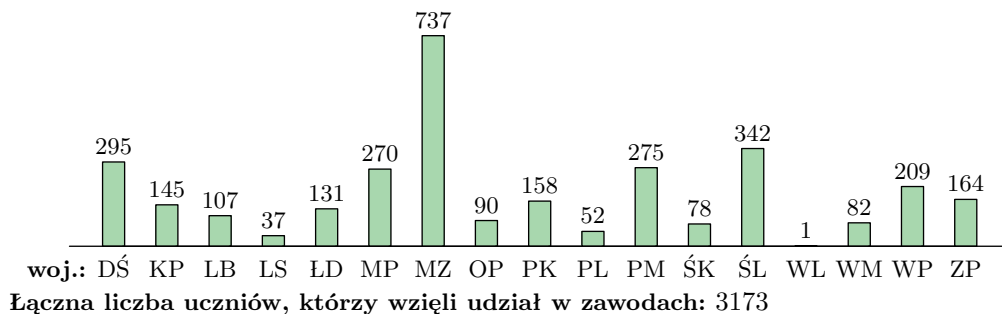
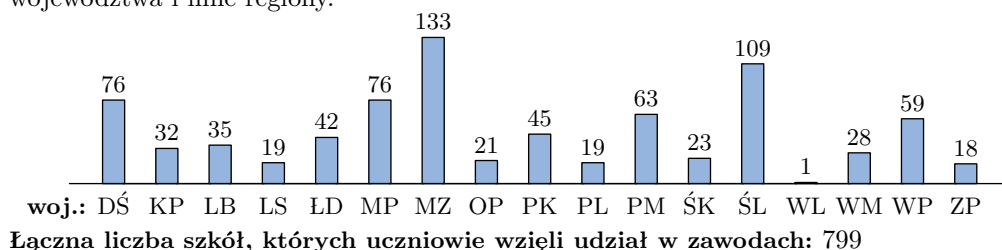


Tabela 2. Liczba szkół, których uczniowie wzięli udział w zawodach w podziale na województwa i inne regiony.



Skróty województw i innych regionów

DŚ — dolnośląskie
LB — lubelskie
ŁD — łódzkie
MZ — mazowieckie
PK — podkarpackie
PM — pomorskie
ŚL — śląskie
WP — wielkopolskie
WL — Wilno

KP — kujawsko-pomorskie
LS — lubuskie
MP — małopolskie
OP — opolskie
PL — podlaskie
ŚK — świętokrzyskie
WM — warmińsko-mazurskie
ZP — zachodniopomorskie

Tabela 3. Procentowa liczba osób, które uzyskały daną liczbę punktów za poszczególne zadania.

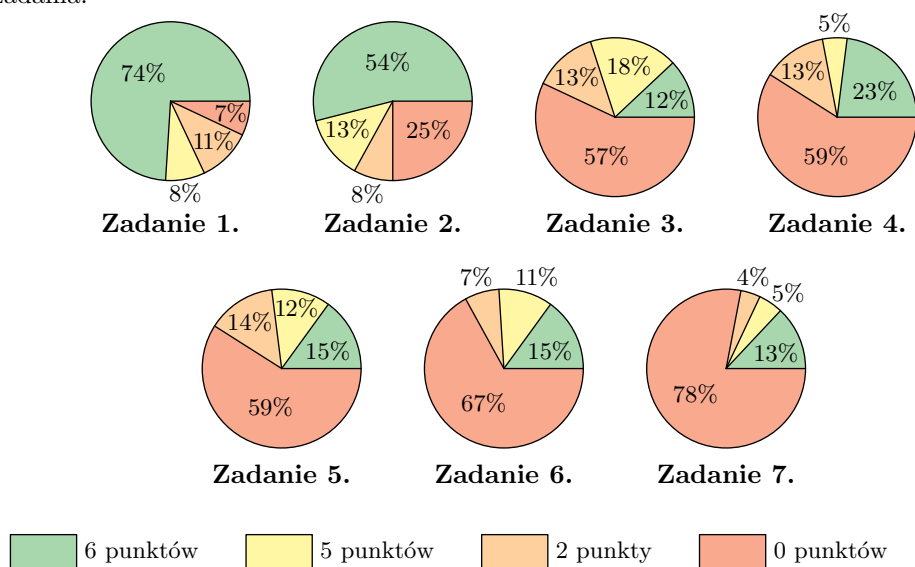


Tabela 4. Średnia uzyskanych punktów za poszczególne zadania.

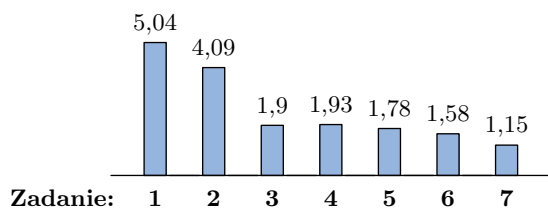


Tabela 5. Liczba nadesłanych prac dotyczących poszczególnych zadań.

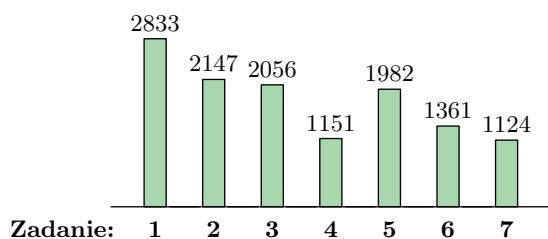


Tabela 6. Średnia uzyskanej sumy punktów w podziale na województwa.

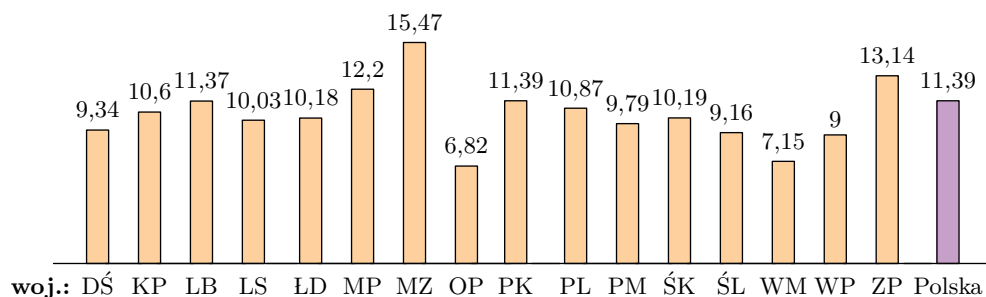


Tabela 7. Procentowa i rzeczywista liczba osób, które uzyskały daną sumę punktów.

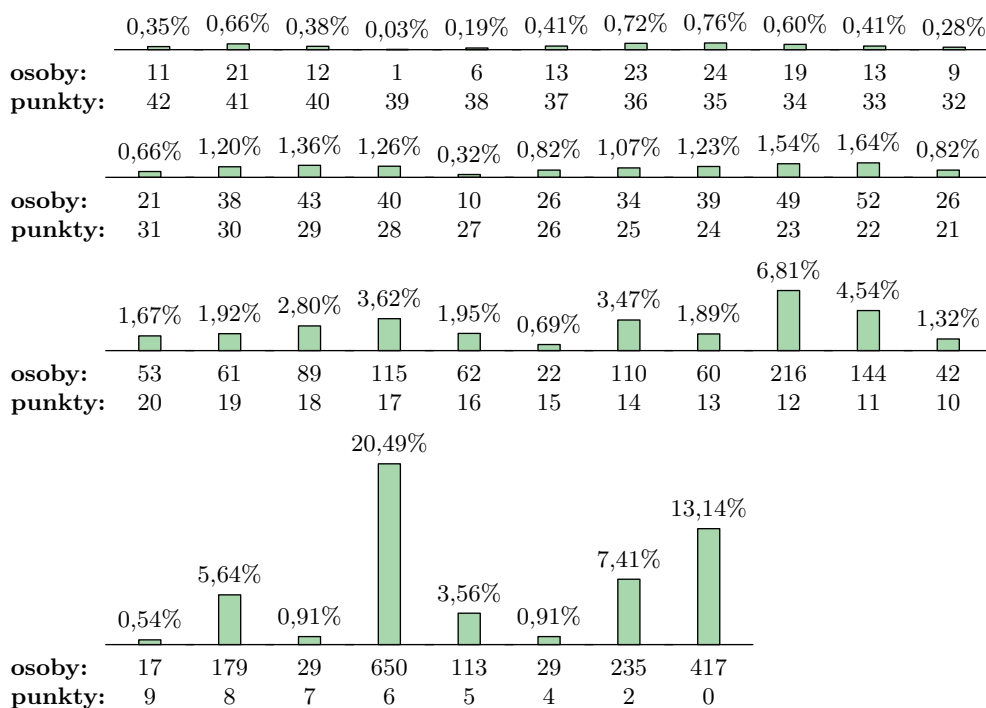
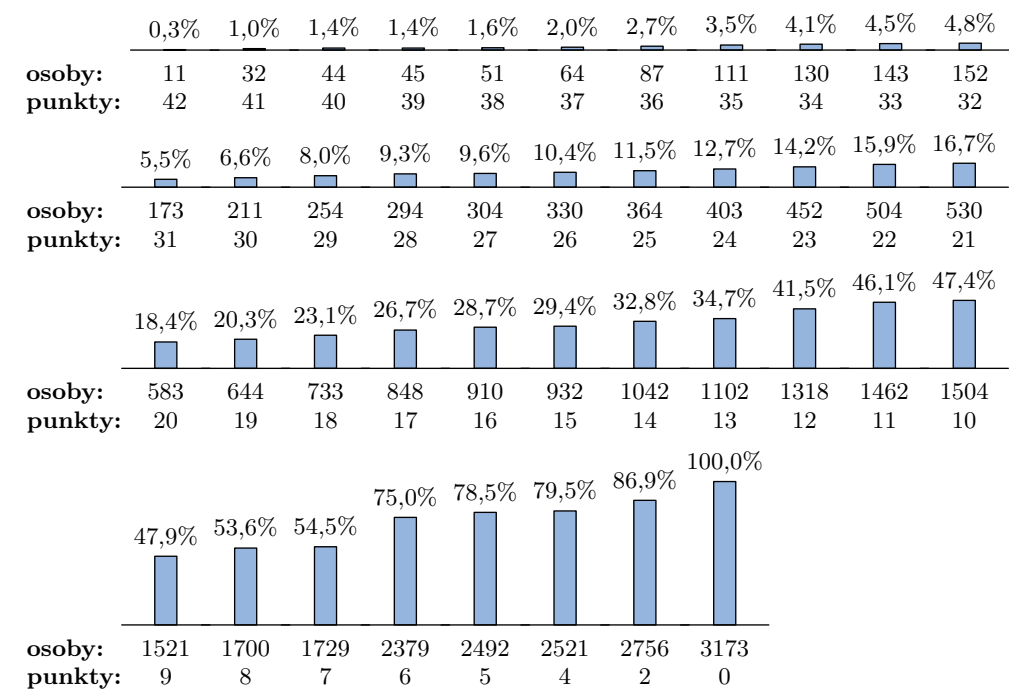


Tabela 8. Procentowa i rzeczywista liczba osób, które uzyskały daną lub większą sumę punktów.



XI Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

Zawody drugiego stopnia
(16 stycznia 2016 r.)



1. Wyznacz wszystkie takie trójki (a, b, c) dodatnich liczb całkowitych, że każda z liczb

$$a + b, \quad b + c, \quad c + a \quad \text{oraz} \quad a + b + c$$

jest pierwsza.

2. Dany jest równoległobok $ABCD$. Na bokach AB i AD leżą odpowiednio takie punkty X i Y różne od A , że $AD = DX$ oraz $AB = BY$. Udowodnij, że $CX = CY$.

3. Liczby rzeczywiste a, b, c, d spełniają równości

$$a + b = cd \quad \text{oraz} \quad c + d = ab.$$

Wykaż, że $(a + 1)(b + 1)(c + 1)(d + 1) \geq 0$.

4. Punkt M jest środkiem boku AB trójkąta ABC , przy czym

$$\sphericalangle BAC + \sphericalangle MCB = 90^\circ.$$

Wykaż, że trójkąt ABC jest równoramienny lub prostokątny.

5. Spośród wierzchołków 100-kąta foremnego wybrano pewne 50 i pokolorowano je na białą. Pozostałe wierzchołki pokolorowano na czerwono. Udowodnij, że wierzchołki tego 100-kąta można tak podzielić na 25 grup po 4 punkty, aby punkty w obrębie każdej grupy były wierzchołkami prostokąta o dwóch białych i dwóch czerwonych wierzchołkach.

XI Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

Zawody drugiego stopnia

(16 stycznia 2016 r.)

Szkice rozwiązań zadań konkursowych

1. Wyznacz wszystkie takie trójki (a, b, c) dodatnich liczb całkowitych, że każda z liczb

$$a+b, \quad b+c, \quad c+a \quad \text{oraz} \quad a+b+c$$

jest pierwsza.

Szkic rozwiązania

Sposób I

Zauważmy, że co najmniej jedna z liczb $a+b$, $b+c$, $c+a$ jest parzysta. Istotnie, gdyby wszystkie one były nieparzyste, to ich suma byłaby też nieparzysta, gdy tymczasem liczba $(a+b) + (b+c) + (c+a) = 2(a+b+c)$ jest parzysta. Bez straty ogólności przyjmijmy zatem, że liczba $a+b$ jest parzysta.

Jedyną parzystą liczbą pierwszą jest 2, skąd otrzymujemy $a+b=2$, a zatem $a=b=1$. Wówczas $c+a=c+1$ oraz $a+b+c=c+2$ to liczby pierwsze, które różnią się o 1, więc mniejsza z nich jest równa 2, a większa 3. Stąd uzyskujemy $c+1=2$, czyli $c=1$. Bezpośrednio sprawdzamy, że trójka $(a, b, c) = (1, 1, 1)$ spełnia warunki zadania.

Sposób II

Przypuśćmy, że co najmniej jedna z liczb a , b , c , powiedzmy a , jest nie mniejsza od 2. Wówczas liczby $a+b$, $a+c$, $a+b+c$ są pierwsze i nie mniejsze od 3, więc są to liczby nieparzyste. W takim razie liczby $(a+b+c) - (a+b) = c$ oraz $(a+b+c) - (a+c) = b$ są parzyste, jako różnice liczb nieparzystych. To jednak oznacza, że $b+c$ jest liczbą parzystą większą od 2, a więc liczbą złożoną. Uzyskana sprzeczność oznacza, że wszystkie liczby a , b , c są równe 1. Bezpośrednio sprawdzamy, że trójka $(a, b, c) = (1, 1, 1)$ spełnia warunki zadania.

Sposób III

Ponieważ $a+b+c$ jest liczbą pierwszą nie mniejszą od 3, więc jest to liczba nieparzysta. Stąd wynika, że wśród liczb a , b , c jest parzysta liczba liczb parzystych. Jeżeli są dokładnie dwie liczby parzyste, to ich suma jest liczbą złożoną, jako liczba parzysta większa od 2, wbrew warunkom zadania.

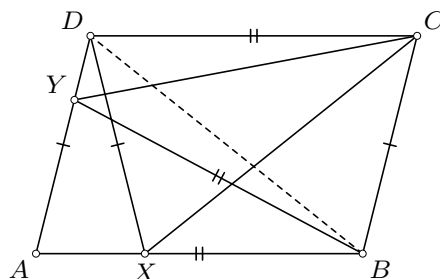
Wobec tego każda z liczb a , b , c jest nieparzysta. Suma każdych dwóch z nich jest z jednej strony liczbą pierwszą (co wynika z warunków zadania), z drugiej zaś liczbą parzystą. Wobec tego każda z liczb $a+b$, $b+c$, $c+a$ jest równa 2. Stąd wniosek, że wszystkie liczby a , b , c są równe 1. Bezpośrednio sprawdzamy, że trójka $(a, b, c) = (1, 1, 1)$ spełnia warunki zadania.

2. Dany jest równoległobok $ABCD$. Na bokach AB i AD leżą odpowiednio takie punkty X i Y różne od A , że $AD = DX$ oraz $AB = BY$. Udowodnij, że $CX = CY$.

Szkic rozwiązania

Sposób I

Ponieważ $DX = AD = BC$ oraz $BY = AB = CD$, więc trapezy $BCDX$ i $BCDY$ są równoramienne i nie są równoległobokami (rys. 1). Stąd wniosek, że $CX = BD$ i $CY = BD$. Łącząc te równości, uzyskujemy tezę zadania.



rys. 1

Sposób II

Z równości $CD = AB = YB$, $DX = AD = BC$ oraz

$$\sphericalangle CDX = \sphericalangle DXA = \sphericalangle DAB = \sphericalangle BYA = \sphericalangle YBC$$

wynika, że trójkąty CDX i YBC są przystające (cecha bok–kąt–bok). Stąd wynika, że $CX = CY$, co należało wykazać.

3. Liczby rzeczywiste a, b, c, d spełniają równości

$$a + b = cd \quad \text{oraz} \quad c + d = ab.$$

Wykaż, że $(a+1)(b+1)(c+1)(d+1) \geq 0$.

Szkic rozwiązania

Sposób I

Zauważmy, że zachodzą równości

$$(a+1)(b+1) = ab + a + b + 1 = a + b + c + d + 1,$$

oraz analogicznie

$$(c+1)(d+1) = cd + c + d + 1 = a + b + c + d + 1.$$

Stąd wniosek, że

$$(a+1)(b+1)(c+1)(d+1) = (a+b+c+d+1)^2.$$

Kwadrat dowolnej liczby rzeczywistej jest liczbą nieujemną, co kończy rozwiązanie.

Sposób II

Przyjmijmy oznaczenia pomocnicze $x = a+1$, $y = b+1$, $z = c+1$, $t = d+1$; wówczas teza zadania przybiera postać $xyzt \geq 0$. Podstawiając $a = x-1$, $b = y-1$, $c = z-1$, $d = t-1$ do warunku $a+b=cd$, otrzymujemy

$$x+y-2 = (z-1)(t-1), \quad \text{skąd} \quad x+y-2 = zt - z - t + 1$$

i w konsekwencji $x+y+z+t = zt+3$. Postępując analogicznie, z warunku $c+d=ab$ otrzymujemy

$$x+y+z+t = xy+3.$$

Łącząc otrzymane równości, stwierdzamy, że $xy = zt$, skąd $xyzt = (xy)^2 \geq 0$.

4. Punkt M jest środkiem boku AB trójkąta ABC , przy czym

$$\sphericalangle BAC + \sphericalangle MCB = 90^\circ.$$

Wykaż, że trójkąt ABC jest równoramienny lub prostokątny.

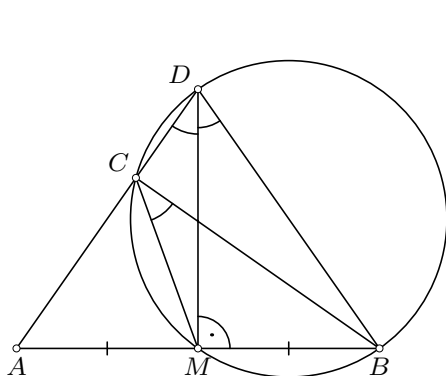
Szkic rozwiązania

Sposób I

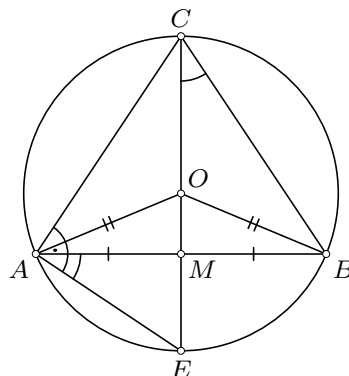
Przypuśćmy, że $AC \neq BC$. Wykażemy, że wówczas $\sphericalangle ACB = 90^\circ$, co zakończy rozwiązanie zadania. Oznaczmy przez D punkt przecięcia symetralnej boku AB z prostą AC . Wówczas punkty C i D są różne (rys. 2). Z równości

$$\sphericalangle MDB = \sphericalangle MDA = 90^\circ - \sphericalangle BAC = \sphericalangle MCB$$

wynika, że punkty B, C, D, M leżą na jednym okręgu. Ponieważ $\sphericalangle BMD = 90^\circ$, więc jest to okrąg o średnicy BD . Stąd wniosek, że $\sphericalangle ACB = 90^\circ$, co kończy rozwiązanie zadania.



rys. 2



rys. 3

Sposób II

Przyjmijmy, że prosta przechodząca przez punkt A i prostopadła do boku AC przecina prostą CM w punkcie E (rys. 3). Ponieważ

$$\sphericalangle EAB = 90^\circ - \sphericalangle BAC = \sphericalangle MCB = \sphericalangle ECB},$$

więc na czworokącie $AEBC$ można opisać okrąg. Niech O będzie środkiem tego okręgu. Skoro $\sphericalangle EAC = 90^\circ$, to punkt O jest środkiem odcinka CE — średnicy okręgu.

Jeżeli $O = M$, to trójkąt ABC jest prostokątny. Jeżeli natomiast $O \neq M$, to na mocy cechy bok-bok-bok, trójkąty OMA i OMB są przystające. Skoro $\sphericalangle AMO + \sphericalangle BMO = 180^\circ$, to $\sphericalangle AMO = \sphericalangle BMO = 90^\circ$. Wobec tego prosta OM jest symetralną odcinka AB , skąd wniosek, że $AC = BC$.

5. Spośród wierzchołków 100-kąta foremnego wybrano pewne 50 i pokolorowano je na białe. Pozostałe wierzchołki pokolorowano na czerwono. Udowodnij, że wierzchołki tego 100-kąta można tak podzielić na 25 grup po 4 punkty, aby punkty w obrębie każdej grupy były wierzchołkami prostokąta o dwóch białych i dwóch czerwonych wierzchołkach.

Szkic rozwiązania

Weźmy pod uwagę 50 par przeciwległych wierzchołków danego 100-kąta foremnego i przez b oznaczmy liczbę par o obu wierzchołkach białych (nazwiemy te pary *białymi*), przez c o obu wierzchołkach czerwonych (nazwiemy je *czerwonymi*), a przez d o jednym wierzchołku białym i jednym czerwonym (pary *dwukolorowe*). Ponieważ zarówno białych, jak i czerwonych wierzchołków jest dokładnie 50, więc

$$2b + d = 50 \quad \text{oraz} \quad 2c + d = 50,$$

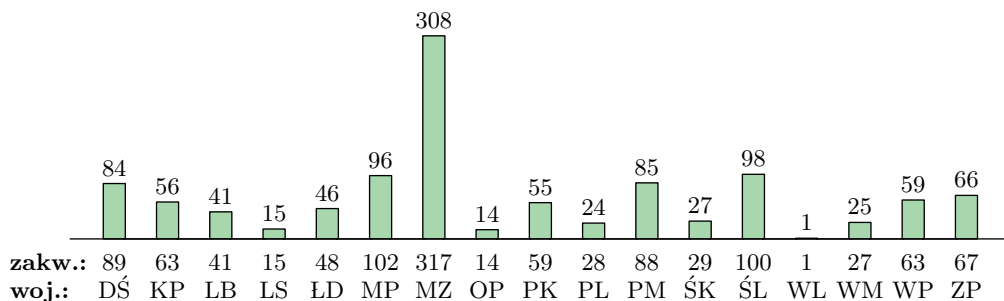
skąd $b = c$ oraz $d = 2(25 - b)$. Ponieważ każde dwie z rozważanych par wyznaczają prostokąt, więc łącząc każdą parę białą z parą czerwoną, uzyskamy $b = c$ prostokątów o dokładnie dwóch białych i dwóch czerwonych wierzchołkach. Pozostałe d dwukolorowych par możemy połączyć po dwie, gdyż d jest liczbą parzystą, otrzymując tym samym pozostałe $\frac{1}{2}d$ prostokątów.

XI Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

Statystyki dotyczące zawodów drugiego stopnia (2015/16)

(16 stycznia 2016 r.)

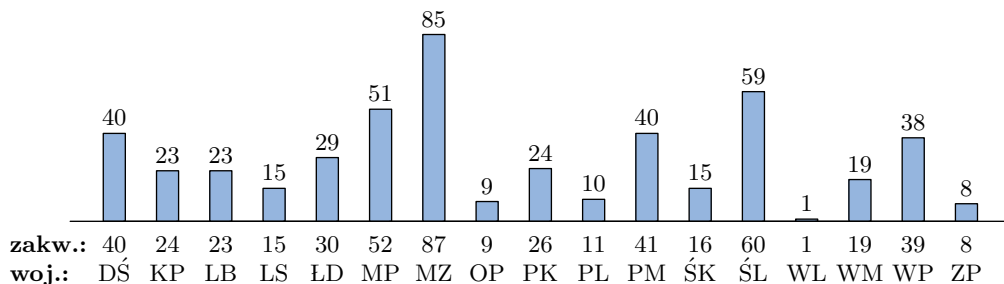
Tabela 1. Liczba uczniów, którzy wzięli udział w zawodach oraz zakwalifikowanych do zawodów w podziale na województwa.



Łączna liczba uczniów, którzy wzięli udział w zawodach: 1100

Łączna liczba uczniów zakwalifikowanych do zawodów: 1151

Tabela 2. Liczba szkół uczniów, którzy wzięli udział w zawodach oraz zakwalifikowanych do zawodów w podziale na województwa.



Łączna liczba szkół uczniów, którzy wzięli udział w zawodach: 489

Łączna liczba szkół uczniów zakwalifikowanych do zawodów: 501

Skróty województw i innych regionów

DŚ — dolnośląskie

LB — lubelskie

LD — łódzkie

MZ — mazowieckie

PK — podkarpackie

PM — pomorskie

ŚL — śląskie

WP — wielkopolskie

WL — Wilno

KP — kujawsko-pomorskie

LS — lubuskie

MP — małopolskie

OP — opolskie

PL — podlaskie

ŚK — świętokrzyskie

WM — warmińsko-mazurskie

ZP — zachodniopomorskie

Tabela 3. Procentowa liczba osób, które uzyskały daną liczbę punktów za poszczególne zadania.

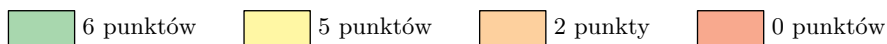
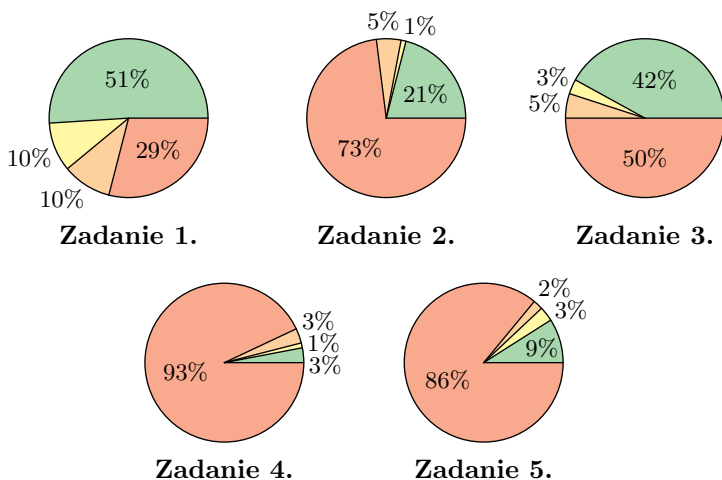


Tabela 4. Średnia uzyskanych punktów za poszczególne zadania.

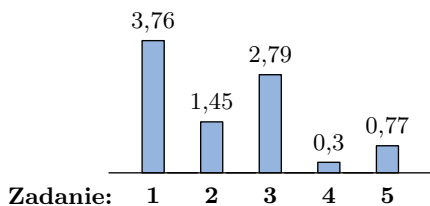


Tabela 5. Średnia sumy punktów w podziale na województwa.

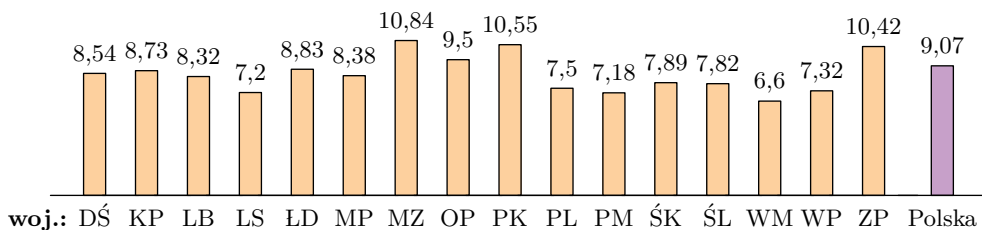


Tabela 6. Procentowa i rzeczywista liczba osób, które uzyskały daną sumę punktów.

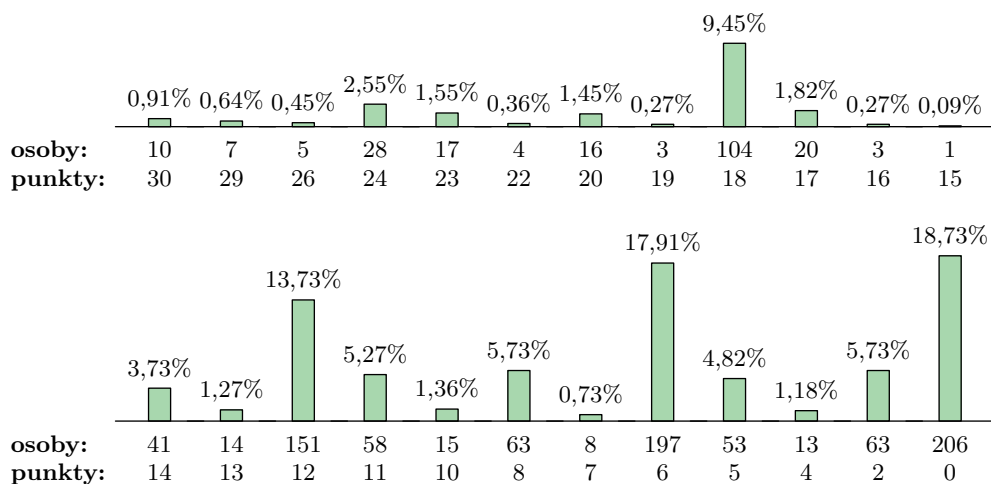
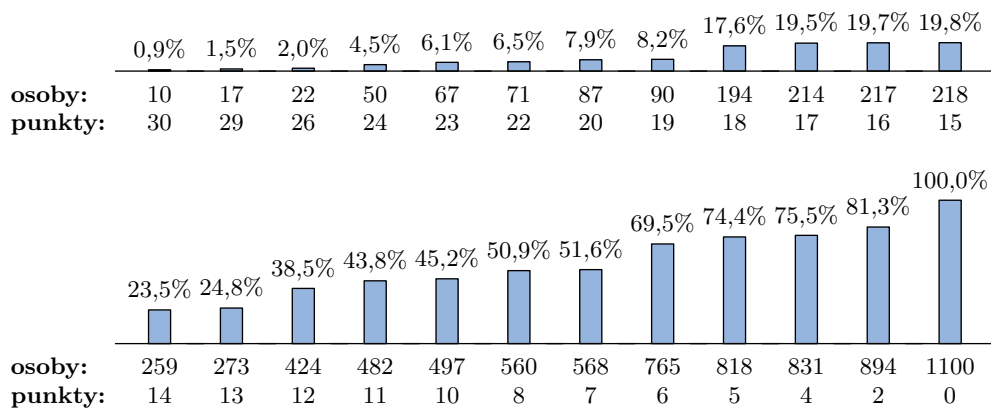


Tabela 7. Procentowa i rzeczywista liczba osób, które uzyskały daną lub większą sumę punktów.



XI Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

Zawody trzeciego stopnia
(19 marca 2016 r.)



1. Dane są takie dodatnie liczby całkowite m i n , że liczba $m+n^2$ jest podzielna przez $m+n$. Wykaż, że liczba $m+n^3$ jest podzielna przez $m+n$.

2. Dodatnie liczby a, b, c są nie większe od 2. Udowodnij, że

$$a+b+c+2 \geq abc.$$

3. Dany jest trójkąt równoboczny ABC . Punkt P leży na krótszym łuku AB okręgu opisanego na tym trójkącie. Punkt M jest środkiem odcinka AC . Punkt Q jest symetryczny do punktu P względem punktu M . Wykaż, że $BQ = PQ$.

4. Czy z 32 prostopadłościennych klocków o wymiarach $2 \times 3 \times 3$ można ułożyć prostopadłościan o wymiarach $8 \times 8 \times 9$? Odpowiedź uzasadnij.

5. Czy istnieje taki wielościan wypukły, w którym każda krawędź jest bokiem pewnej ściany siedmiokątnej tego wielościanu? Odpowiedź uzasadnij.

XI Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

Zawody trzeciego stopnia

(19 marca 2016 r.)

Szkice rozwiązań zadań konkursowych

1. Dane są takie dodatnie liczby całkowite m i n , że liczba $m+n^2$ jest podzielna przez $m+n$. Wykaż, że liczba $m+n^3$ jest podzielna przez $m+n$.

Szkic rozwiązania

Sposób I

Jeżeli liczba $m+n$ jest dzielnikiem liczby $m+n^2$, to $m+n$ jest także dzielnikiem liczby

$$(n+1)(m+n^2),$$

i w konsekwencji również dzielnikiem liczby

$$(n+1)(m+n^2) - n(m+n) = mn + m + n^3 + n^2 - mn - n^2 = m + n^3.$$

Sposób II

Liczba $m+n$ jest dzielnikiem liczby $m+n^2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $m+n$ jest dzielnikiem liczby

$$m+n^2 - (m+n) = n^2 - n = n(n-1).$$

Z kolei $m+n$ jest dzielnikiem liczby $m+n^3$ wtedy i tylko wtedy, gdy $m+n$ jest dzielnikiem liczby

$$m+n^3 - (m+n) = n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n-1)(n+1).$$

Zauważmy, że $n(n-1)$ jest dzielnikiem liczby $n(n-1)(n+1)$. Wobec tego jeżeli pierwsza z tych liczb dzieli się przez $m+n$, to druga także, co kończy rozwiązanie.

2. Dodatnie liczby a , b , c są nie większe od 2. Udowodnij, że

$$a+b+c+2 \geq abc.$$

Szkic rozwiązania

Sposób I

Z nierówności $a \leq 2$, $b \leq 2$, $c \leq 2$ wynika, że $ab \leq 4$, $bc \leq 4$, $ca \leq 4$ oraz $abc \leq 8$, a stąd

$$\frac{1}{ab} \geq \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{bc} \geq \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{ca} \geq \frac{1}{4} \quad \text{oraz} \quad \frac{2}{abc} \geq \frac{1}{4}.$$

Dodając powyższe cztery nierówności stronami, dostajemy

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} + \frac{2}{abc} \geq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1.$$

Mnożąc stronami uzyskaną nierówność przez liczbę dodatnią abc , otrzymujemy

$$a+b+c+2 \geq abc,$$

co należało udowodnić.

Sposób II

Bez straty ogólności założmy, że c jest najmniejszą spośród liczb a , b , c . Zachodzą wówczas nierówności $a \geq c$, $b \geq c$, skąd

$$a+b+c+2 \geq 3c+2.$$

Z założenia $2 \geq c$ wynika, że

$$3c + 2 \geq 4c.$$

Z kolei z nierówności $2 \geq a$, $2 \geq b$ otrzymujemy $4 \geq ab$, skąd

$$4c \geq abc.$$

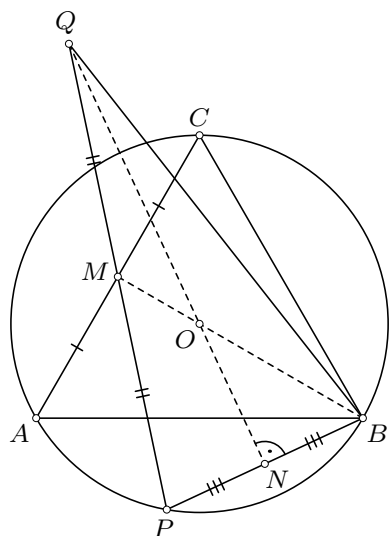
Wobec tego $a + b + c + 2 \geq 3c + 2 \geq 4c \geq abc$, co kończy rozwiązanie zadania.

3. Dany jest trójkąt równoboczny ABC . Punkt P leży na krótszym łuku AB okręgu opisanego na tym trójkącie. Punkt M jest środkiem odcinka AC . Punkt Q jest symetryczny do punktu P względem punktu M . Wykaż, że $BQ = PQ$.

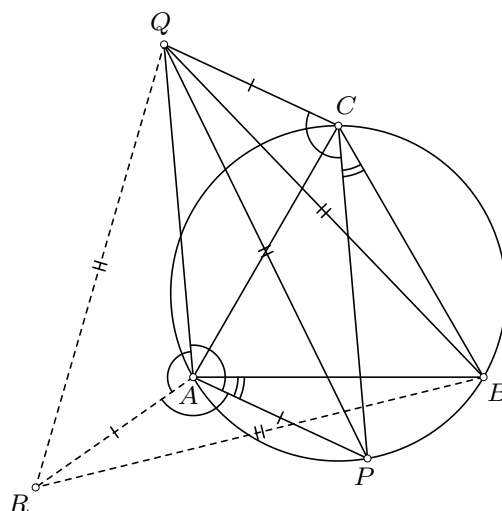
Szkic rozwiązania

Sposób I

Niech O będzie środkiem trójkąta ABC , a N — środkiem odcinka BP (rys. 1). Zauważmy, że w trójkącie BPQ punkt O jest środkiem ciężkości, gdyż leży na środkowej BM oraz $OB = 2 \cdot OM$. Wobec tego punkt O należy także do odcinka QN , czyli punkt Q leży na prostej NO . Prosta NO jest z kolei symetralną odcinka BP , skąd wniosek, że $BQ = PQ$. To kończy rozwiązanie zadania.



rys. 1



rys. 2

Sposób II

Zauważmy, że $\angle APC = \angle ABC = 60^\circ$, więc miary kątów wewnętrznych równoległoboku $APCQ$ to 60° oraz 120° . W szczególności, $\angle PAQ = 120^\circ$ oraz $\angle BCQ = 120^\circ + \angle PCB$.

Niech R będzie obrazem punktu Q przy obrocie o 60° wokół punktu B , przeprowadzającym punkt C na punkt A (rys. 2). Wówczas $BQ = BR$ i $\angle QBR = 60^\circ$, skąd wynika, że trójkąt BQR jest równoboczny. W szczególności więc $BQ = RQ$.

Przy rozpatrywaniu obrotu trójkąt BCQ jest przeprowadzany na trójkąt BAR , więc $AR = CQ = AP$ oraz $\angle BAR = \angle BCQ$. Wobec tego

$$\angle PAR = \angle BAR - \angle PAB = \angle BCQ - \angle PCB = 120^\circ.$$

Uzasadniliśmy wcześniej, że $\angle PAQ = 120^\circ$, skąd otrzymujemy $\angle RAQ = 120^\circ$. Trójkąty PAQ oraz RAQ są zatem przystające (cecha bok–kąt–bok). Stąd wniosek, że

$$PQ = RQ = BQ,$$

co kończy dowód.

4. Czy z 32 prostopadłościennych klocków o wymiarach $2 \times 3 \times 3$ można ułożyć prostopadłościan o wymiarach $8 \times 8 \times 9$? Odpowiedź uzasadnij.

Szkic rozwiązania

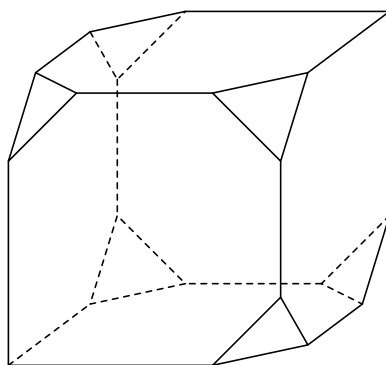
Wykażemy, że nie jest to możliwe.

Przypuśćmy, że prostopadłościan o wymiarach $8 \times 8 \times 9$ został zbudowany z prostopadłościennych klocków o wymiarach $2 \times 3 \times 3$. Rozpatrzmy jedną warstwę $8 \times 8 \times 1$ danego prostopadłościanu. Ponieważ cały prostopadłościan został wypełniony klockami o wymiarach $2 \times 3 \times 3$, więc warstwa ta musiała zostać wypełniona prostopadłościanami o wymiarach $3 \times 3 \times 1$ lub $2 \times 3 \times 1$. Jednak nie jest to możliwe, gdyż objętość każdego z prostopadłościanów $3 \times 3 \times 1$ lub $2 \times 3 \times 1$ jest podzielna przez 3, podczas gdy objętość warstwy $8 \times 8 \times 1$ nie jest podzielna przez 3. Otrzymana sprzeczność kończy dowód.

5. Czy istnieje taki wielościan wypukły, w którym każda krawędź jest bokiem pewnej ściany siedmiokątnej tego wielościanu? Odpowiedź uzasadnij.

Szkic rozwiązania

Taki wielościan istnieje, podamy jego konstrukcję. Rozważmy sześćcian i od każdego jego naroża oprócz dwóch przeciwległych odetnijmy wierzchołek, uzyskując nową ścianę trójkątną (rys. 3). Wówczas każda krawędź otrzymanego w ten sposób wielościanu jest bokiem pewnej ściany siedmiokątnej tego wielościanu.

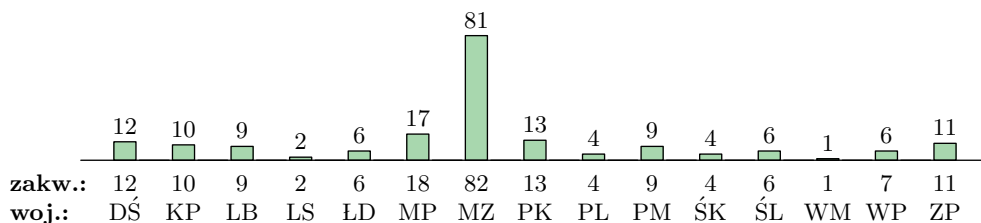


rys. 3

XI Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów Statystyki dotyczące zawodów trzeciego stopnia (2015/16)

(19 marca 2016 r.)

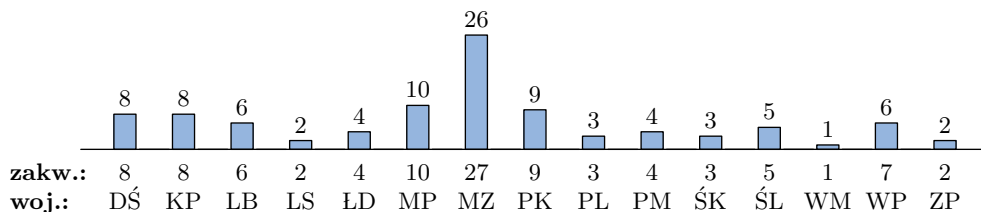
Tabela 1. Liczba uczniów, którzy wzięli udział w zawodach oraz zakwalifikowanych do zawodów w podziale na województwa.



Łączna liczba uczniów, którzy wzięli udział w zawodach: 191

Łączna liczba uczniów zakwalifikowanych do zawodów: 194

Tabela 2. Liczba szkół uczniów, którzy wzięli udział w zawodach oraz zakwalifikowanych do zawodów w podziale na województwa.



Łączna liczba szkół uczniów, którzy wzięli udział w zawodach: 97

Łączna liczba szkół uczniów zakwalifikowanych do zawodów: 99

Skróty województw

DŚ — dolnośląskie

LB — lubelskie

ŁD — łódzkie

MZ — mazowieckie

PK — podkarpackie

PM — pomorskie

ŚŁ — śląskie

WP — wielkopolskie

KP — kujawsko-pomorskie

LS — lubuskie

MP — małopolskie

OP — opolskie

PL — podlaskie

ŚK — świętokrzyskie

WM — warmińsko-mazurskie

ZP — zachodniopomorskie

Tabela 3. Procentowa liczba osób, które uzyskały daną liczbę punktów za poszczególne zadania.

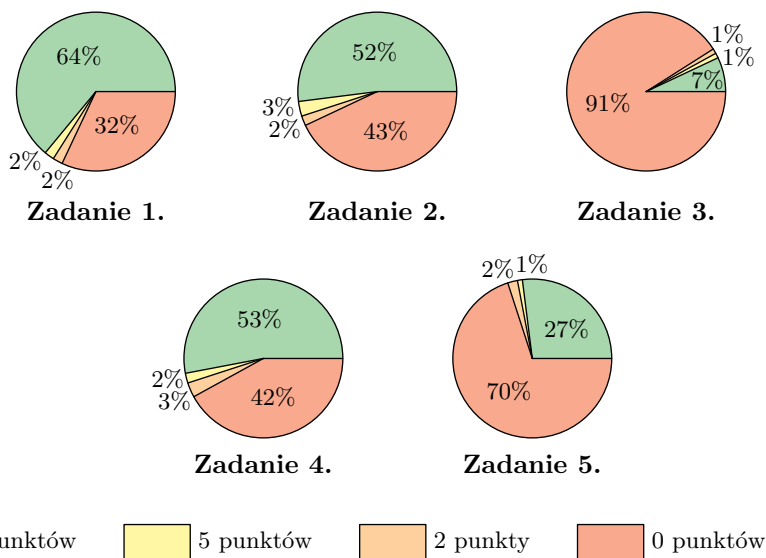


Tabela 4. Średnia uzyskanych punktów za poszczególne zadania.

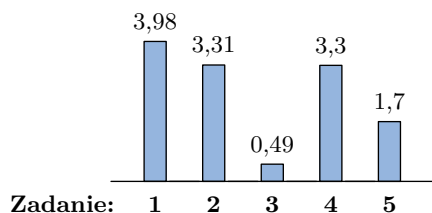


Tabela 5. Średnia sumy punktów w podziale na województwa i inne regiony.

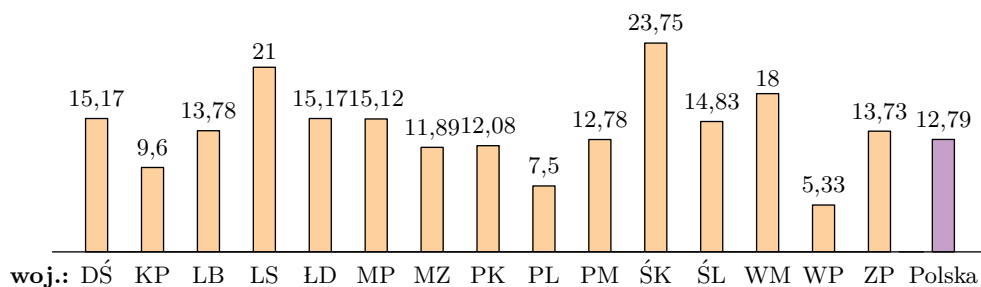


Tabela 6. Procentowa i rzeczywista liczba osób, które uzyskały daną sumę punktów.

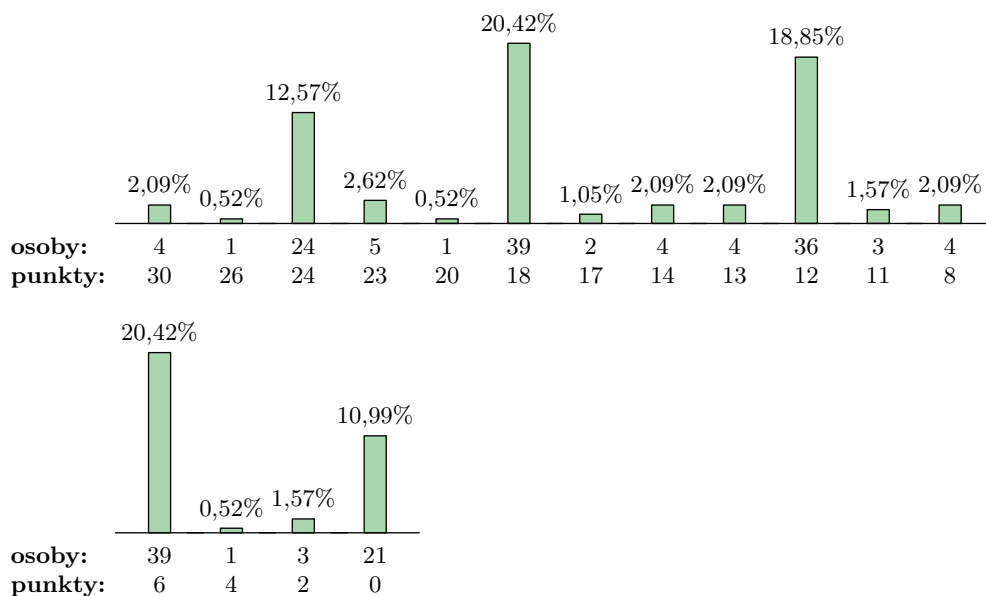
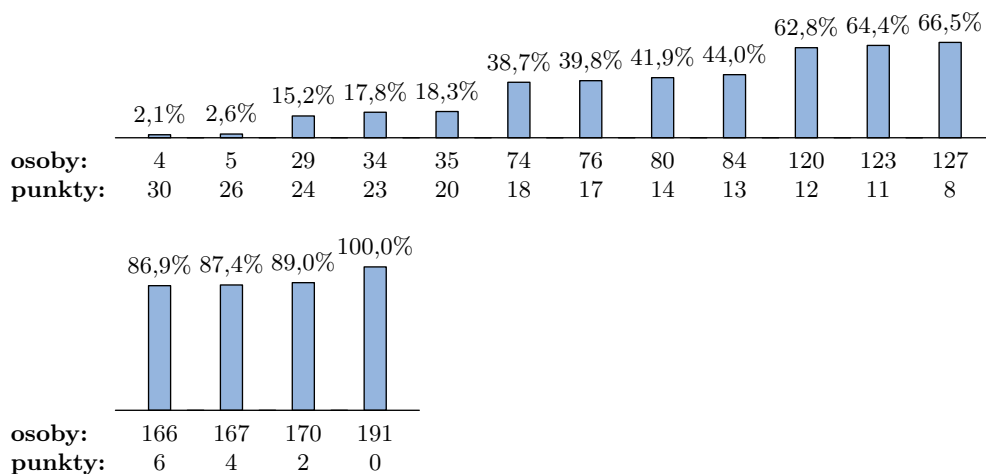


Tabela 7. Procentowa i rzeczywista liczba osób, które uzyskały daną lub większą sumę punktów.



Imiona:

Nazwisko:

Klasa:



XII Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody stopnia pierwszego — część testowa

(29 września 2016 r., godz. 9:00)

Przed przystąpieniem do rozwiązywania testu wpisz na każdą stronę swoje imiona, nazwisko oraz numer klasy.

Treść każdego z poniższych zadań zawiera trzy stwierdzenia. Każde z nich jest prawdziwe lub fałszywe. Jeśli dane stwierdzenie jest prawdziwe, wpisz w odpowiednią kratkę literkę T, jeśli zaś stwierdzenie jest fałszywe, wpisz literkę N.

W przypadku pomyłki przekreśl znakiem **X** podaną odpowiedź, a właściwą odpowiedź podaj obok z lewej strony. Nie używaj korektora.

Przykład poprawnie rozwiązane zadania:

0. Dla każdej dodatniej liczby całkowitej n liczba $2n + 1$ jest

T

a) dodatnia;

T

b) nieparzysta;

N

X

c) pierwsza.

Czas na rozwiązywanie testu: 75 minut.

Powodzenia!

1. Dodatnia liczba a powiększona o 50% jest równa dodatniej liczbie b pomniejszonej o 50%. Wynika z tego, że liczba b jest

a) 2 razy większa od liczby a ;

b) 3 razy większa od liczby a ;

c) 4 razy większa od liczby a .

2. Pole powierzchni sześcianu A jest 4 razy mniejsze od pola powierzchni sześcianu B . Wynika z tego, że

a) krawędź sześcianu A jest 2 razy mniejsza od krawędzi sześcianu B ;

b) krawędź sześcianu A jest 4 razy mniejsza od krawędzi sześcianu B ;

c) objętość sześcianu A jest 8 razy mniejsza od objętości sześcianu B .

Imiona:

Nazwisko:

Klasa:

3. Liczby rzeczywiste a i b spełniają nierówność $a \geq b$. Wynika z tego, że

a) $a^2 \geq ab$;

b) $a^2 \geq b^2$;

c) $a^3 \geq b^3$.

4. W trójkącie ABC kąt ABC jest dwa razy większy od kąta BAC . Dwusieczna kąta ABC przecina okrąg opisany na tym trójkącie w punkcie E . Wynika z tego, że

a) $EA = BC$;

b) $CA = 2 \cdot BC$;

c) proste EC i AB są równoległe.

5. Liczba $\underbrace{33\dots3}_n \text{ trójek}$ jest podzielna przez 99. Wynika z tego, że liczba n jest podzielna

a) przez 3;

b) przez 6;

c) przez 9.

6. Liczby rzeczywiste a i b są różne od zera, a liczba $a\sqrt{2} + b\sqrt{3}$ jest wymierna. Wynika z tego, że

a) obie liczby a i b są niewymierne;

b) co najmniej jedna z liczb a , b jest wymierna;

c) co najmniej jedna z liczb a , b jest niewymierna.

7. Sześciokąt $ABCDEF$ jest opisany na okręgu o środku S . Wynika z tego, że

a) $AB + CD + EF = BC + DE + FA$;

b) $AD = BE = CF$;

c) suma pól trójkątów ABS , CDS , EFS jest równa sumie pól trójkątów BCS , DES , FAS .

Imiona:

Nazwisko:

Klasa:

8. Liczbę n można przedstawić w postaci sumy kwadratów dwóch liczb całkowitych. Wynika z tego, że w postaci sumy kwadratów dwóch liczb całkowitych można przedstawić także liczbę

a) $2n$;

b) $3n$;

c) $4n$.

9. Czworokąt wypukły $ABCD$ ma dokładnie dwie osie symetrii. Wynika z tego, że ten czworokąt jest

a) rombem;

b) prostokątem;

c) równoległobokiem.

10. Liczby wymierne a , b , c są różne i każdy z iloczynów $a \cdot b$, $b \cdot c$, $c \cdot a$ jest liczbą całkowitą. Wynika z tego, że

a) co najmniej jedna z liczb a , b , c jest całkowita;

b) co najmniej dwie z liczb a , b , c są całkowite;

c) każda z liczb a , b , c jest całkowita.

11. Dany jest taki trójkąt ABC , że $\sphericalangle ACB = 30^\circ$. Promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy R , a promień okręgu wpisanego jest równy r . Wynika z tego, że

a) $AB = R$;

b) $r = \frac{R\sqrt{3}}{2}$;

c) pole trójkąta ABC jest mniejsze od R^2 .

12. Istnieje dodatnia liczba całkowita n o następującej własności: można tak przestawić cyfry zapisu dziesiętnego liczby 2^n , aby otrzymać pewną całkowitą potęgę liczby

a) 3;

b) 5;

c) 7.

Imiona:

Nazwisko:

Klasa:

13. Każda krawędź graniastosłupa n -kątnego została pomalowana na jeden z trzech kolorów w taki sposób, że w każdym wierzchołku graniastosłupa schodzą się krawędzie trzech kolorów. Wynika z tego, że

a) n jest liczbą parzystą;

b) wszystkie krawędzie boczne tego graniastosłupa mają ten sam kolor;

c) ten graniastosłup ma po n krawędzi każdego koloru.

14. Spośród wierzchołków pewnego dwunastokąta foremnego wyróżniono siedem. Wynika z tego, że wśród wyróżnionych punktów można wskazać takie trzy, które są wierzchołkami trójkąta

a) prostokątnego;

b) równobocznego;

c) rozwartokątnego równoramiennego.

15. Sześciąt można rozciąć na

a) trzy ostrosłupy czworokątne;

b) cztery graniastosłupy trójkątne;

c) pięć czworościanów.

XII Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody stopnia pierwszego — część testowa

(29 września 2016 r.)

Rozwiązania zadań testowych

1. Dodatnia liczba a powiększona o 50% jest równa dodatniej liczbie b pomniejszonej o 50%. Wynika z tego, że liczba b jest

- ☐ N a) 2 razy większa od liczby a ;
☐ T b) 3 razy większa od liczby a ;
☐ N c) 4 razy większa od liczby a .

Komentarz

Z warunków zadania wynika, że

$$a + \frac{50}{100}a = b - \frac{50}{100}b,$$

skąd uzyskujemy $3a = b$.

2. Pole powierzchni sześcianu A jest 4 razy mniejsze od pola powierzchni sześcianu B . Wynika z tego, że

- ☐ T a) krawędź sześcianu A jest 2 razy mniejsza od krawędzi sześcianu B ;
☐ N b) krawędź sześcianu A jest 4 razy mniejsza od krawędzi sześcianu B ;
☐ T c) objętość sześcianu A jest 8 razy mniejsza od objętości sześcianu B .

Komentarz

a), b) Oznaczmy przez a długość krawędzi sześcianu A , a przez b długość krawędzi sześcianu B . Z warunków zadania wynika, że $6b^2 = 4 \cdot 6a^2$, skąd uzyskujemy $b = 2a$.

- c) Objętość sześcianu A jest równa a^3 , a objętość sześcianu B jest równa

$$b^3 = (2a)^3 = 8a^3,$$

czyli jest 8 razy większa od objętości sześcianu A .

3. Liczby rzeczywiste a i b spełniają nierówność $a \geq b$. Wynika z tego, że

- ☐ N a) $a^2 \geq ab$;
☐ N b) $a^2 \geq b^2$;
☐ T c) $a^3 \geq b^3$.

Komentarz

a), b) Jeżeli $a = -1$, $b = -2$, to nierówność $a \geq b$ jest spełniona, ale

$$a^2 = 1 < 2 = ab \quad \text{oraz} \quad a^2 = 1 < 4 = b^2.$$

c) Ponieważ $a \geq b$, więc możliwe są trzy przypadki: 1) $a \geq b \geq 0$, 2) $a > 0 > b$, 3) $0 \geq a \geq b$. W przypadku 1) obie strony nierówności $a \geq b$ są liczbami nieujemnymi, wobec tego możemy obie strony tej nierówności podnieść do dowolnej potęgi, będącej liczbą naturalną. W szczególności, uzyskujemy $a^3 \geq b^3$.

W przypadku 2) liczba a^3 jest dodatnia, a liczba b^3 jest ujemna, wobec czego $a^3 > b^3$.

Wreszcie w przypadku 3) obie liczby $-a$ i $-b$ są nieujemne oraz $-b \geq -a$. W związku z tym, podnosząc obie strony tej nierówności do trzeciej potęgi, uzyskujemy $(-b)^3 \geq (-a)^3$, czyli $a^3 \geq b^3$.

4. W trójkącie ABC kąt ABC jest dwa razy większy od kąta BAC . Dwusieczna kąta ABC przecina okrąg opisany na tym trójkącie w punkcie E . Wynika z tego, że

T

a) $EA = BC$;

N

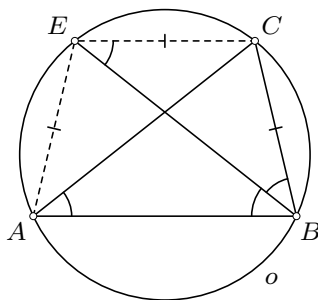
b) $CA = 2 \cdot BC$;

T

c) proste EC i AB są równoległe.

Komentarz

a) Oznaczmy okrąg opisany na trójkącie ABC przez o (rys. 1). Z warunków zadania wynika, że $\sphericalangle BAC = \sphericalangle CBE = \sphericalangle EBA$. Kąty te są wpisane w okrąg o i oparte odpowiednio na łukach BC , CE oraz EA , a więc łuki te są równej długości. Stąd wniosek, że również cięciwy BC , CE oraz EA są równej długości.



rys. 1

b) Zapisując nierówność trójkąta dla trójkąta ACE , uzyskujemy

$$CA < CE + EA = 2 \cdot BC.$$

c) Kąty BEC i EBA są kątami wpisanymi w okrąg o , opartymi odpowiednio na łukach BC i EA , które są równej długości. Wobec tego $\sphericalangle BEC = \sphericalangle EBA$, a to oznacza, że proste EC i AB są równoległe.

Uwaga

W rozwiązaniu skorzystaliśmy z własności kątów wpisanych w okrąg, opartych na przystających łukach. Więcej własności i przykładów zastosowań w zadaniach można odnaleźć w artykule „O łukach równej długości”, *Kwadrat* nr 14 (grudzień 2014).

5. Liczba $\underbrace{33\dots3}_{n \text{ trójek}}$ jest podzielna przez 99. Wynika z tego, że liczba n jest podzielna

T	a) przez 3;
T	b) przez 6;
N	c) przez 9.

Komentarz

Przyjmijmy oznaczenie $A_n = \underbrace{33\dots3}_{n \text{ trójek}}$.

a) Liczba A_n jest podzielna przez 99, więc jest również liczbą podzielną przez 9. To oznacza, że suma cyfr liczby A_n — równa $3n$ — jest liczbą podzielną przez 9. Stąd wynika, że n jest liczbą podzielną przez 3.

b) Ponieważ $6 = 2 \cdot 3$ oraz największy wspólny dzielnik liczb 2 i 3 jest równy 1, więc wykorzystując podpunkt a), wystarczy dowieść, że liczba n jest parzysta.

Przypuśćmy, że liczba n jest nieparzysta. Wówczas liczba

$$A_n = \underbrace{33\dots30}_{n-1 \text{ cyfr}} + 3 = 33 \cdot \underbrace{1010\dots10}_{n-1 \text{ cyfr}} + 3$$

daje resztę 3 z dzielenia przez 33. Nie jest więc podzielna przez 33, a tym bardziej przez 99. Uzyskaliśmy sprzeczność, z której wynika, że liczba n jest parzysta.

c) Zauważmy, że $A_6 = 333333 = 99 \cdot 3367$, a 6 nie jest liczbą podzielną przez 9.

Uwaga

Można dowieść, że A_n jest liczbą podzielną przez 99 wtedy i tylko wtedy, gdy n jest liczbą podzielną przez 6.

6. Liczby rzeczywiste a i b są różne od zera, a liczba $a\sqrt{2} + b\sqrt{3}$ jest wymierna. Wynika z tego, że

N	a) obie liczby a i b są niewymierne;
N	b) co najmniej jedna z liczb a , b jest wymierna;
T	c) co najmniej jedna z liczb a , b jest niewymierna.

Komentarz

a) Jeżeli $a = \sqrt{6}$ i $b = -2$, to

$$a\sqrt{2} + b\sqrt{3} = \sqrt{12} - 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 0$$

jest liczbą wymierną, a jedna z liczb a , b jest wymierna.

b) Jeżeli $a = \sqrt{2}$ i $b = \sqrt{3}$, to

$$a\sqrt{2} + b\sqrt{3} = 2 + 3 = 5$$

jest liczbą wymierną, a żadna z liczb a , b nie jest wymierna.

c) Załóżmy, że obydwie liczby a i b są wymierne. Przyjmijmy oznaczenie $c = a\sqrt{2} + b\sqrt{3}$; z warunków zadania wynika więc, że c jest liczbą wymierną. Zauważmy, że

$$(a\sqrt{2} + b\sqrt{3})^2 = c^2,$$

$$2a^2 + 2ab\sqrt{6} + 3b^2 = c^2,$$

$$2ab\sqrt{6} = c^2 - 2a^2 - 3b^2.$$

Ponieważ obie liczby a i b są różne od 0, więc $ab \neq 0$. Wobec tego

$$\sqrt{6} = \frac{c^2 - 2a^2 - 3b^2}{2ab}.$$

Zarówno licznik, jak i mianownik ułamka stojącego po prawej stronie ostatniej równości są liczbami wymiernymi, więc cały ułamek jest liczbą wymierną. Tymczasem lewa strona ostatniej równości, równa $\sqrt{6}$, jest liczbą niewymierną. Uzyskana sprzeczność oznacza, że co najmniej jedna z liczb a i b jest niewymierna.

7. Sześciokąt $ABCDEF$ jest opisany na okręgu o środku S . Wynika z tego, że

T

a) $AB + CD + EF = BC + DE + FA$;

N

b) $AD = BE = CF$;

T

c) suma pól trójkątów ABS , CDS , EFS jest równa sumie pól trójkątów BCS , DES , FAS .

Komentarz

a) Oznaczmy odpowiednio przez a , b , c , d , e , f długości odcinków stycznych do okręgu wpisanego w sześciokąt $ABCDEF$ poprowadzonych z punktów A , B , C , D , E , F (rys. 2). Wówczas

$$AB + CD + EF = a + b + c + d + e + f = BC + DE + FA.$$

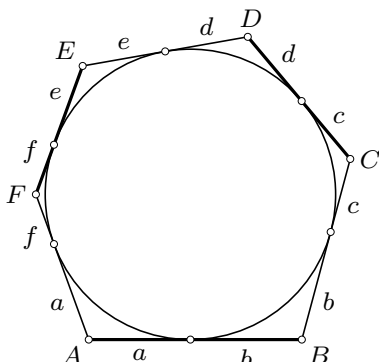
c) Zauważmy, że wysokości trójkątów ABS , CDS , EFS opuszczone z wierzchołka S mają tę samą długość, równą promieniowi r okręgu wpisanego w sześciokąt $ABCDEF$ (rys. 3). Wobec tego suma pól trójkątów ABS , CDS , EFS jest równa

$$\frac{AB \cdot r}{2} + \frac{CD \cdot r}{2} + \frac{EF \cdot r}{2} = \frac{r}{2}(AB + CD + EF).$$

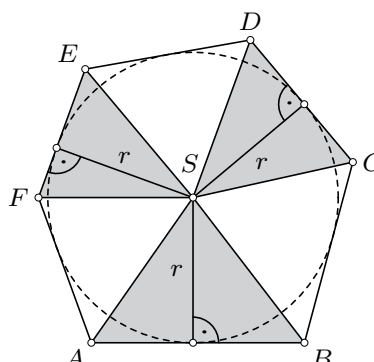
Analogicznie dochodzimy do wniosku, że suma pól trójkątów BCS , DES , FAS jest równa

$$\frac{r}{2}(BC + DE + FA).$$

Aby przekonać się, że rozważane sumy pól są równe, pozostaje skorzystać z konkluzji podpunktu a).



rys. 2

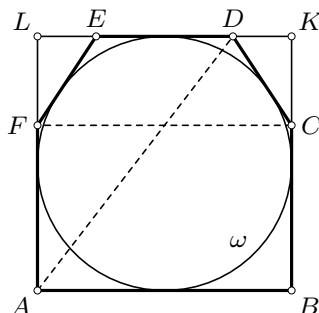


rys. 3

b) Rozważmy kwadrat $ABKL$ opisany na okręgu ω . Na bokach AL , BK wybierzmy odpowiednio takie punkty F , C , że $AF = BC > \frac{1}{2}AB$ (rys. 4). Wreszcie niech D , E będą takimi punktami należącymi do odcinka KL , że odcinki CD i EF są styczne do okręgu ω .

Wówczas $ABCDEF$ jest sześciokątem opisanym na okręgu ω , ale

$$CF = AB = AL < AD.$$



rys. 4

8. Liczbę n można przedstawić w postaci sumy kwadratów dwóch liczb całkowitych.

Wynika z tego, że w postaci sumy kwadratów dwóch liczb całkowitych można przedstawić także liczbę

T	a) $2n$;
N	b) $3n$;
T	c) $4n$.

Komentarz

Z warunków zadania wynika, że istnieją takie liczby całkowite a i b , że $n = a^2 + b^2$.

c) Zauważmy, że $4n = 4a^2 + 4b^2 = (2a)^2 + (2b)^2$ oraz liczby $2a$ i $2b$ są całkowite.

a) Zauważmy, że

$$2n = 2a^2 + 2b^2 = a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - 2ab + b^2 = (a+b)^2 + (a-b)^2$$

oraz liczby $a+b$ i $a-b$ są całkowite.

b) Liczba $n=1=1^2+0^2$ jest sumą kwadratów dwóch liczb całkowitych, ale liczba $3n=3$ nie da się przedstawić w tej postaci.

Uwagi

1. Można udowodnić, że jeżeli różną od zera liczbę n można przedstawić w postaci sumy kwadratów dwóch liczb całkowitych, to liczby $3n$ nie można przedstawić w takiej postaci.

2. Zależności wyprowadzone w podpunktach c) i a) są szczególnymi przypadkami tzw. *tożsamości Diofantosa*. Więcej na ten temat można przeczytać w artykule „Tożsamość Diofantosa”, *Kwadrat* nr 2 (grudzień 2011).

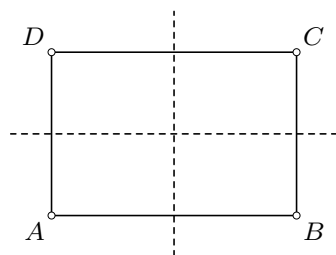
9. Czworokąt wypukły $ABCD$ ma dokładnie dwie osie symetrii. Wynika z tego, że ten czworokąt jest

N	a) rombem;
N	b) prostokątem;
T	c) równoległobokiem.

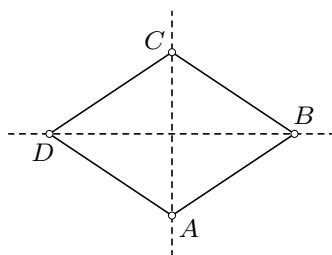
Komentarz

a) Dowolny prostokąt nie będący kwadratem ma dokładnie dwie osie symetrii (rys. 5).

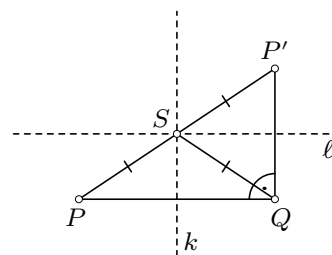
b) Dowolny romb nie będący kwadratem ma dokładnie dwie osie symetrii (rys. 6).



rys. 5



rys. 6



rys. 7

c) Udowodnimy ogólniejszy fakt: jeżeli wielokąt ma dokładnie dwie osie symetrii, to są one prostopadłe, a ich punkt przecięcia jest środkiem symetrii wielokąta. Wynika stąd, że jeśli czworokąt ma dokładnie dwie osie symetrii, to ma on także środek symetrii, a więc jest równoległobokiem.

Niech k i ℓ będą (jedylnymi dwiema) osiami symetrii wielokąta $\mathcal{W}$. Oznaczmy przez k' prostą symetryczną do prostej k względem prostej ℓ . Wówczas prosta k' również jest

osią symetrii wielokąta $\mathcal{W}$ oraz $k' \neq \ell$, skąd wynika, że $k' = k$. Tym samym prosta k jest symetryczna względem prostej ℓ (różnej od k), a to oznacza, że proste k i ℓ są prostopadłe.

Oznaczmy przez S punkt przecięcia prostych k i ℓ . Niech P będzie dowolnym punktem płaszczyzny, Q będzie punktem symetrycznym do P względem prostej k , a P' będzie punktem symetrycznym do Q względem prostej ℓ (rys. 7). Zauważmy, że punkt P należy do wielokąta $\mathcal{W}$ dokładnie wtedy, gdy punkt Q należy do wielokąta $\mathcal{W}$, czyli dokładnie wtedy, gdy punkt P' należy do wielokąta $\mathcal{W}$. Dowód będzie więc zakończony, jeśli wykazemy, że punkty P i P' są symetryczne względem punktu S — będzie to oznaczało, że S jest środkiem symetrii wielokąta $\mathcal{W}$.

Zauważmy, że $SP = SQ = SP'$, więc S jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie PQP' . Z prostopadłości prostych k i ℓ wynika, że $\sphericalangle PQP' = 90^\circ$, czyli trójkąt PQP' jest prostokątny i wobec tego punkt S jest środkiem przeciwprostokątnej PP' . To oznacza, że punkty P i P' są symetryczne względem punktu S i kończy dowód faktu.

Uwaga

Można uzasadnić, że jeśli czworokąt wypukły ma dokładnie dwie osie symetrii, to jest on prostokątem (nie będącym kwadratem) lub rombem (nie będącym kwadratem). Zarówno prostokąt, jak i romb są równoległobokami. Wobec tego, jeśli czworokąt wypukły ma dokładnie dwie osie symetrii, to jest równoległobokiem, choć oczywiście na każdy równoległobok ma dwie osie symetrii.

10. Liczby wymierne a , b , c są różne i każdy z iloczynów $a \cdot b$, $b \cdot c$, $c \cdot a$ jest liczbą całkowitą. Wynika z tego, że

- ☐ N a) co najmniej jedna z liczb a , b , c jest całkowita;
- ☐ N b) co najmniej dwie z liczb a , b , c są całkowite;
- ☐ N c) każda z liczb a , b , c jest całkowita.

Komentarz

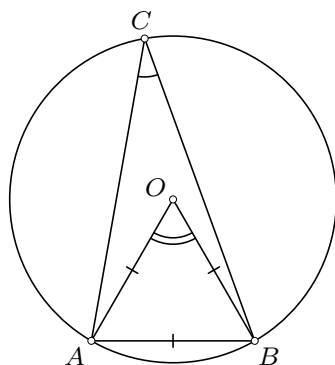
Niech $a = \frac{3 \cdot 5}{2}$, $b = \frac{5 \cdot 2}{3}$, $c = \frac{2 \cdot 3}{5}$. Liczby a , b , c są różne, wymierne i żadna z nich nie jest liczbą całkowitą. Tymczasem każdy z iloczynów $a \cdot b = 25$, $b \cdot c = 4$, $c \cdot a = 9$ jest liczbą całkowitą.

11. Dany jest taki trójkąt ABC , że $\sphericalangle ACB = 30^\circ$. Promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy R , a promień okręgu wpisanego jest równy r . Wynika z tego, że

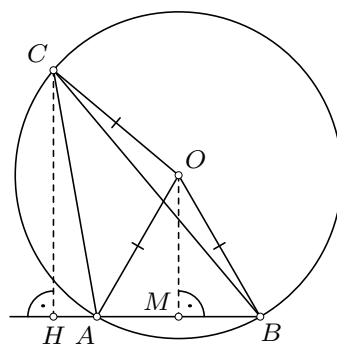
- ☐ T a) $AB = R$;
- ☐ N b) $r = \frac{R\sqrt{3}}{2}$;
- ☐ T c) pole trójkąta ABC jest mniejsze od R^2 .

Komentarz

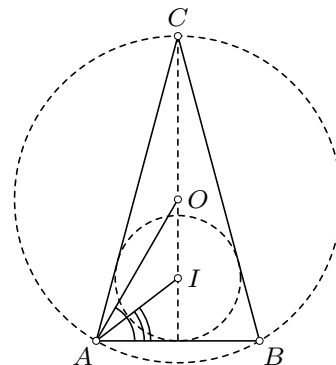
a) Oznaczmy przez O środek okręgu opisanego na trójkącie ABC (rys. 8). Ponieważ $\sphericalangle AOB = 2 \cdot \sphericalangle ACB = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$ oraz $AO = BO = R$, więc trójkąt ABO jest równoboczny. Stąd wniosek, że $AB = R$.



rys. 8



rys. 9



rys. 10

c) Niech H będzie spodkiem wysokości trójkąta ABC poprowadzonej z wierzchołka C , a M spodkiem wysokości trójkąta równobocznego ABO , poprowadzonej z wierzchołka O (rys. 9). Wówczas

$$CH \leq CO + OM = R + \frac{R\sqrt{3}}{2} < 2R.$$

Wobec tego, oznaczając przez S pole trójkąta ABC , uzyskujemy

$$S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CH < \frac{1}{2} \cdot R \cdot 2R = R^2.$$

b) Rozważmy trójkąt ABC , w którym $\sphericalangle ACB = 30^\circ$ i $\sphericalangle BAC = \sphericalangle CBA = 75^\circ$ (rys. 10). Oznaczmy środek okręgu wpisanego w ten trójkąt przez I . Punkty O oraz I leżą na prostej prostopadłej do AB oraz

$$\sphericalangle BAO = 60^\circ > 37.5^\circ = \frac{\sphericalangle BAC}{2} = \sphericalangle BAI.$$

Wobec tego odległość punktu I od prostej AB jest mniejsza od odległości punktu O od prostej AB , a zatem $r < \frac{R\sqrt{3}}{2}$.

12. Istnieje dodatnia liczba całkowita n o następującej własności: można tak przestawić cyfry zapisu dziesiętnego liczby 2^n , aby otrzymać pewną całkowitą potęgę liczby

N	a) 3;
T	b) 5;
T	c) 7.

Komentarz

a) Jeżeli n jest dodatnią liczbą całkowitą, to liczba 2^n nie jest podzielna przez 3. Wobec tego także suma cyfr zapisu dziesiętnego liczby 2^n nie jest podzielna przez 3. Tymczasem

liczba będąca dodatnią całkowitą potęgą liczby 3 jest podzielna przez 3, a więc suma cyfr jej zapisu dziesiętnego jest liczbą podzielną przez 3.

b) Dla $n = 9$ cyfry liczby $2^n = 512$ można tak przestawić, by otrzymać liczbę $125 = 5^3$.

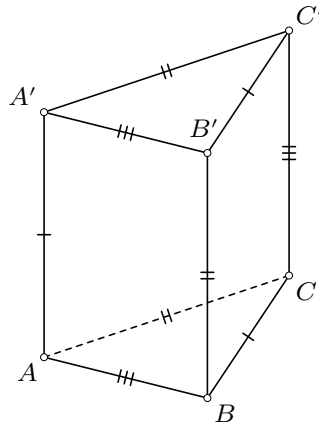
c) Dla $n = 10$ cyfry liczby $2^n = 1024$ można tak przestawić, by otrzymać liczbę $2401 = 7^4$.

13. Każda krawędź graniastosłupa n -kątnego została pomalowana na jeden z trzech kolorów w taki sposób, że w każdym wierzchołku graniastosłupa schodzą się krawędzie trzech kolorów. Wynika z tego, że

N	a) n jest liczbą parzystą;
N	b) wszystkie krawędzie boczne tego graniastosłupa mają ten sam kolor;
T	c) ten graniastosłup ma po n krawędzi każdego koloru.

Komentarz

a), b) Rozważmy graniastosłup trójkątny o podstawach ABC , $A'B'C'$ i krawędziach bocznych AA' , BB' , CC' (rys. 11). Jeżeli krawędzie AA' , BC , $B'C'$ pomalujemy na czerwono, krawędzie BB' , CA , $C'A'$ na zielono, a krawędzie CC' , AB , $A'B'$ na niebiesko, to warunki zadania będą spełnione. Wówczas $n = 3$ jest liczbą nieparzystą oraz krawędzie AA' , BB' , CC' mają różne kolory.



rys. 11

c) Przyjmijmy, że krawędzie graniastosłupa pomalowano na czerwono, zielono i niebiesko. Z warunków zadania wynika, że każdy z $2n$ wierzchołków graniastosłupa jest końcem dokładnie jednej czerwonej krawędzi. Ponieważ każda krawędź łączy dokładnie dwa wierzchołki graniastosłupa, więc krawędzi czerwonych jest dokładnie $2n/2 = n$. W pełni analogicznie uzasadniamy, że wielościan ten posiada dokładnie n krawędzi zielonych i dokładnie n krawędzi niebieskich.

14. Spośród wierzchołków pewnego dwunastokąta foremnego wyróżniono siedem. Wynika z tego, że wśród wyróżnionych punktów można wskazać takie trzy, które są wierzchołkami trójkąta

T	a) prostokątnego;
N	b) równobocznego;
N	c) rozwartokątnego równoramiennego.

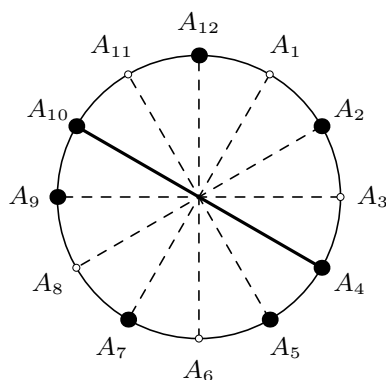
Komentarz

Oznaczmy dany dwunastokąt foremny przez $A_1 A_2 \dots A_{12}$.

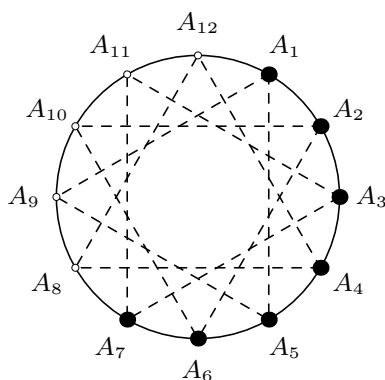
a) Zauważmy, że co najmniej jedna z sześciu średnic okręgu opisanego na danym dwunastokącie

$$A_1 A_7, A_2 A_8, A_3 A_9, A_4 A_{10}, A_5 A_{11}, A_6 A_{12}$$

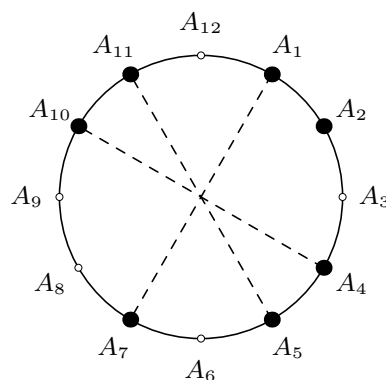
ma obydwa końce w wyróżnionych punktach (rys. 12), gdyż w przeciwnym przypadku wyróżnionych punktów byłoby co najwyżej sześć. Dołączając do końców takiej średnicy dowolny inny wyróżniony punkt, otrzymujemy wierzchołki trójkąta prostokątnego.



rys. 12



rys. 13



rys. 14

b) Jeżeli wyróżnione zostały punkty $A_1, A_2, \dots, A_7$, to żadne trzy z nich nie są wierzchołkami trójkąta równobocznego (rys. 13). Rzeczywiście, tylko cztery trójki wierzchołków danego dwunastokąta wyznaczają trójkąty równoboczne:

$$A_1 A_5 A_9, A_2 A_6 A_{10}, A_3 A_7 A_{11}, A_4 A_8 A_{12}$$

i żadna z nich nie jest złożona wyłącznie z wyróżnionych punktów.

c) Jeżeli wyróżnione zostały punkty $A_1, A_2, A_4, A_5, A_7, A_{10}, A_{11}$ (rys. 14), to żadne trzy z nich nie są wierzchołkami trójkąta rozwartokątnego równoramiennego. Wówczas jedynymi trójkątami równoramiennymi o wierzchołkach w wyróżnionych punktach są

$$A_1 A_4 A_7, A_1 A_4 A_{10}, A_1 A_7 A_{10}, A_2 A_5 A_{11}, A_4 A_7 A_{10}$$

i wszystkie te trójkąty są prostokątne (gdyż odcinki $A_1 A_7, A_4 A_{10}, A_5 A_{11}$ są średnicami okręgu opisanego na danym dwunastokącie).

Uwaga

Można zauważyć, że dołączając punkt A_8 do siódemek wyróżnionych punktów w kontrprzykładach do podpunktów b) oraz c), otrzymujemy ósemki wyróżnionych punktów wciąż stanowiące odpowiednie kontrprzykłady. Wobec tego odpowiedzi w podpunktach b) oraz c) nie ulegną zmianie, jeśli w treści zadania słowo *siedem* zastąpimy przez *osiem*.

15. Sześcian można rozciąć na

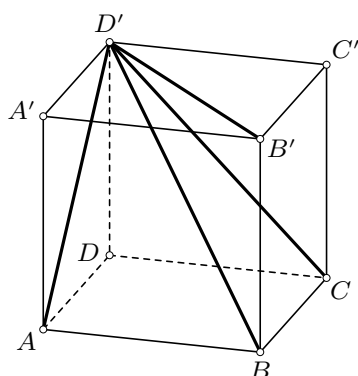
T	a) trzy ostrosłupy czworokątne;
T	b) cztery graniastosłupy trójkątne;
T	c) pięć czworościanów;

Komentarz

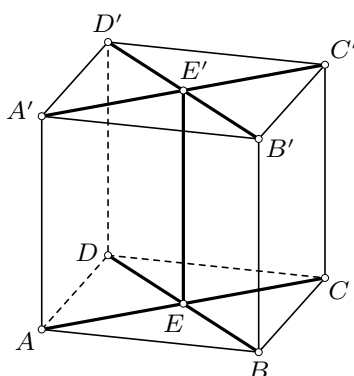
a) Na rysunku 15 sześcian został podzielony na trzy ostrosłupy czworokątne o podstawach $ABB'A'$, $BCC'B'$, $ABCD$ i wspólnym wierzchołku D' .

b) Na rysunku 16 sześcian został podzielony na cztery graniastosłupy trójkątne o podstawach ABE , BCE , CDE , DEF i wspólnej krawędzi bocznej EE' , łączącej środki ścian $ABCD$ i $A'B'C'D'$.

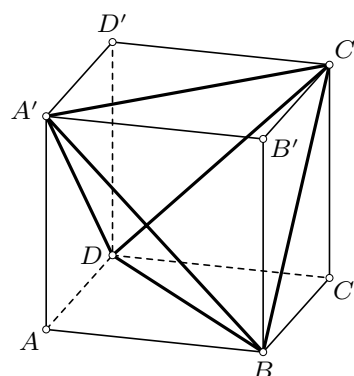
c) Na rysunku 17 sześcian został podzielony na pięć czworościanów $A'BC'B'$, $A'BAD$, $A'D'C'D$, $CBC'D$ oraz $A'BC'D$.



rys. 15



rys. 16



rys. 17

XII Olimpiada Matematyczna Juniorów

Statystyki dotyczące części testowej

zawodów pierwszego stopnia (2016/2017)

(29 września 2016 r.)

Tabela 1.

Procentowa liczba poprawnych odpowiedzi w poszczególnych podpunktach.

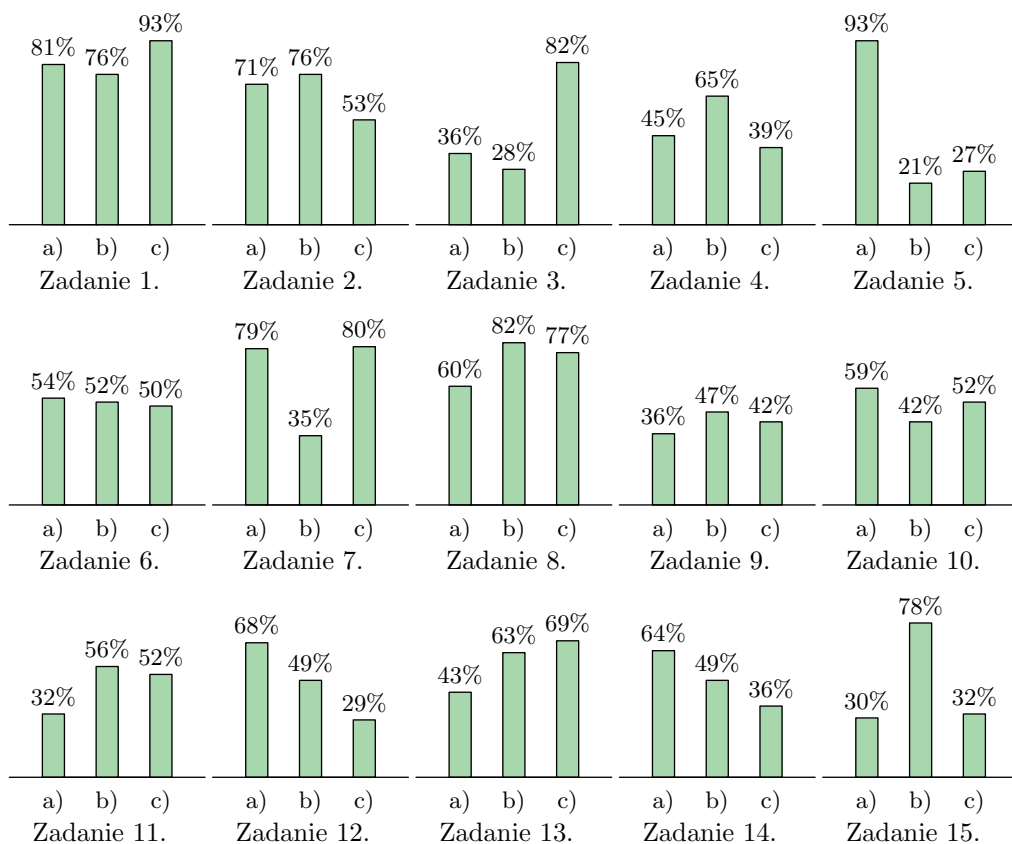
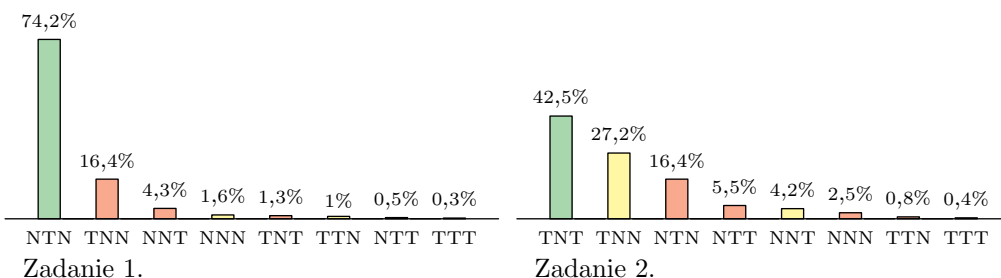
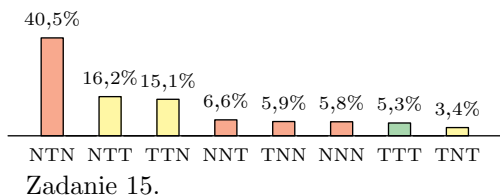
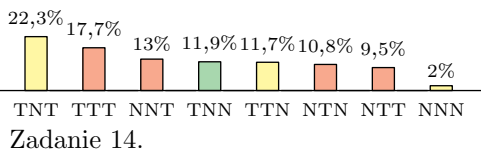
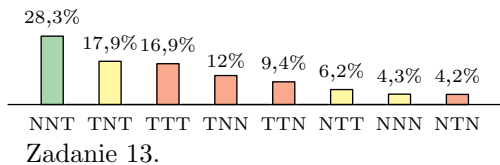
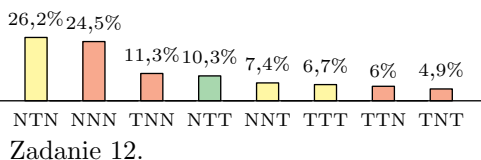
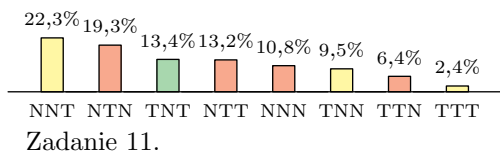
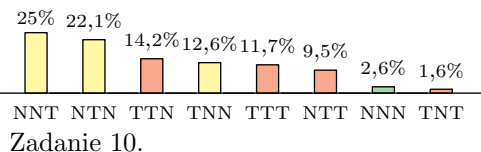
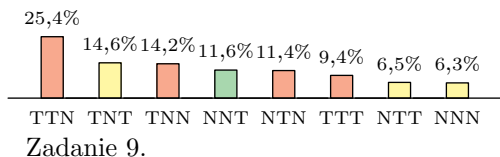
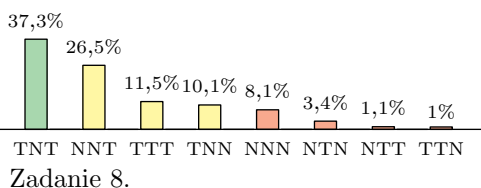
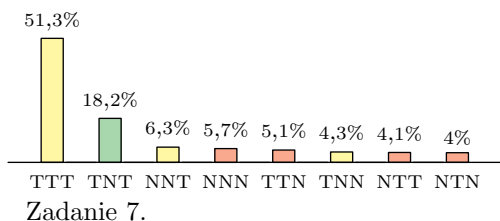
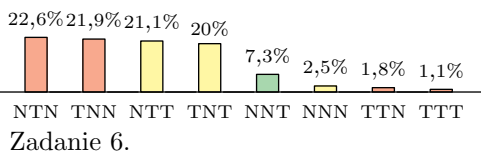
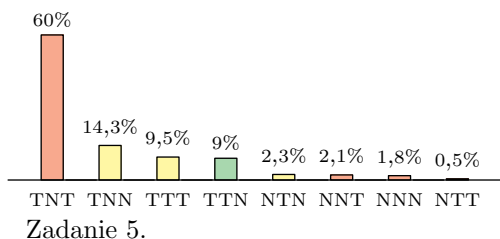
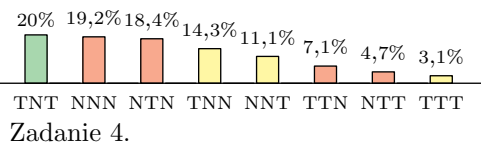
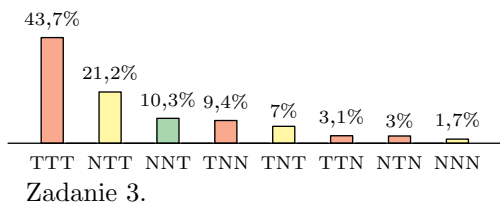


Tabela 2.

Procentowa liczba udzielonych kombinacji odpowiedzi w poszczególnych zadaniach.





Zestaw odpowiedzi za:

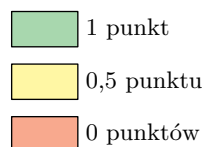


Tabela 3.

Rzeczywista oraz procentowa liczba osób, które uzyskały daną sumę punktów.

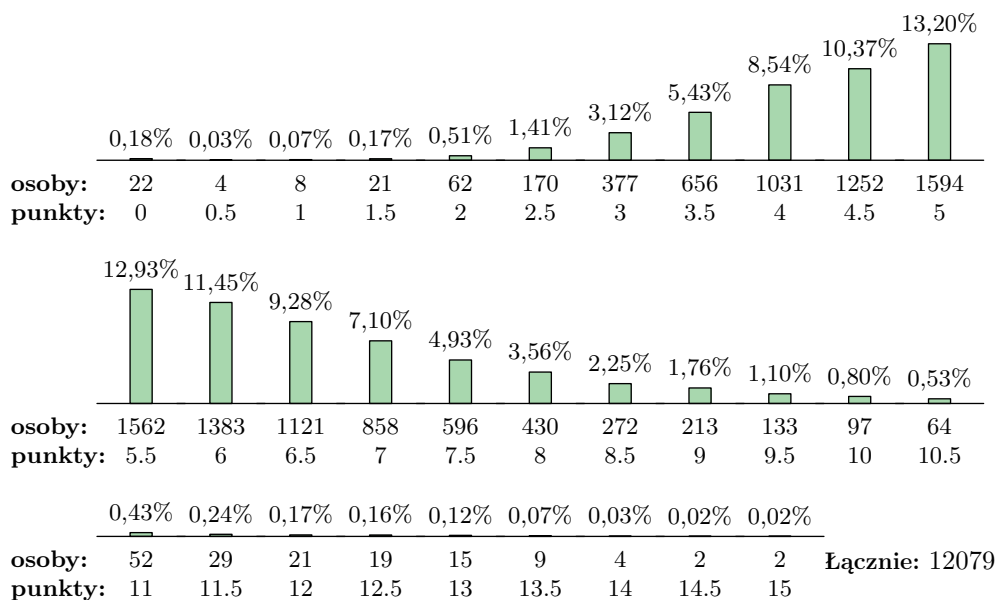


Tabela 4.

Procentowa i rzeczywista liczba osób, które uzyskały daną lub większą sumę punktów.

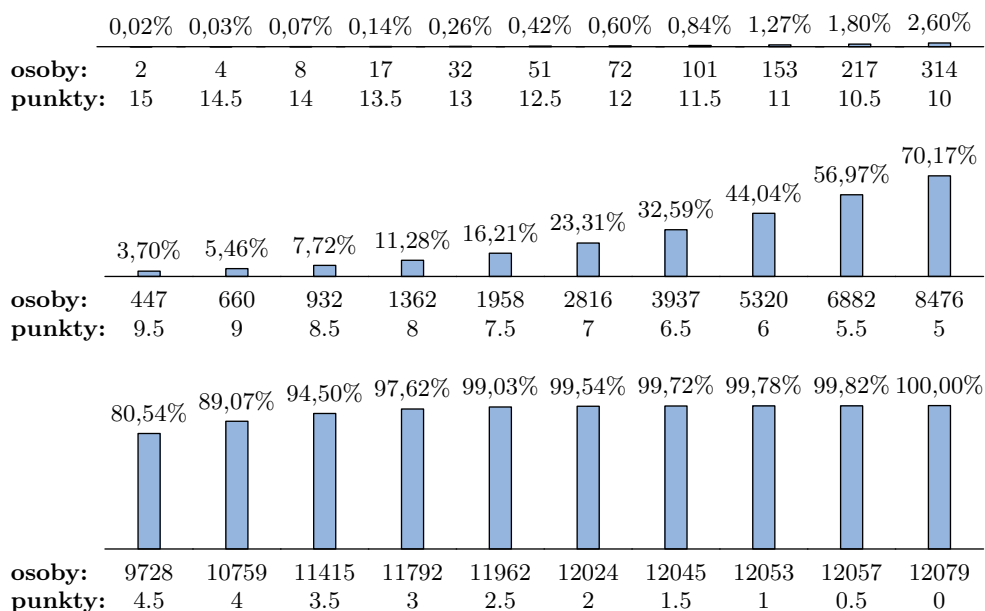


Tabela 5.

Procentowa liczba uzyskanych punktów za poszczególne zadania.

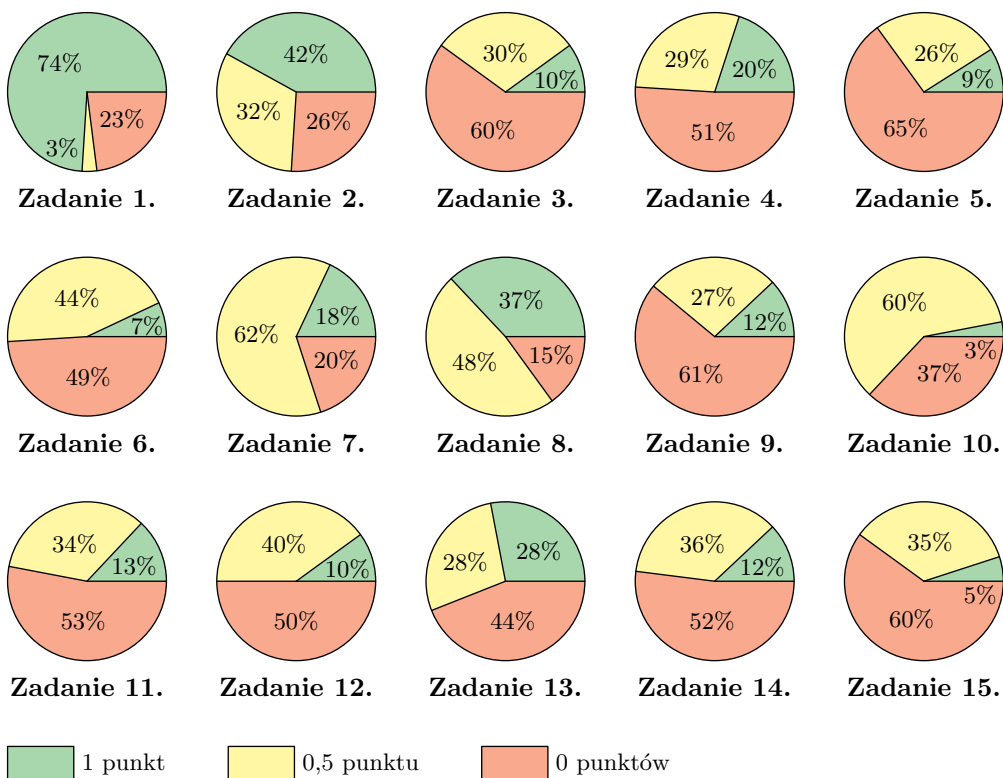


Tabela 6.

Średnia z uzyskanych punktów za poszczególne zadania.

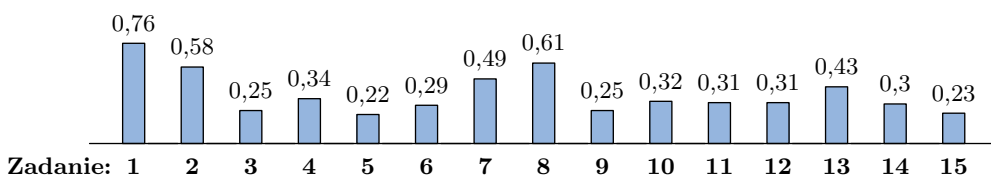


Tabela 7.

Średnia uzyskanych punktów ze wszystkich zadań w podziale na województwa i inne regiony

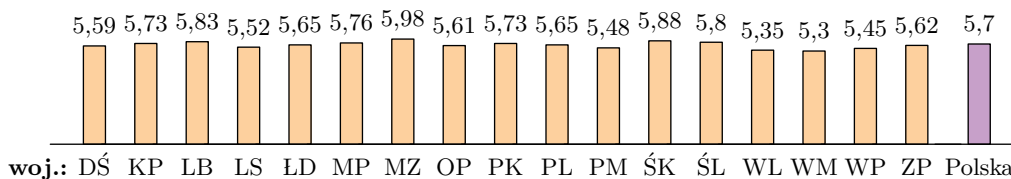
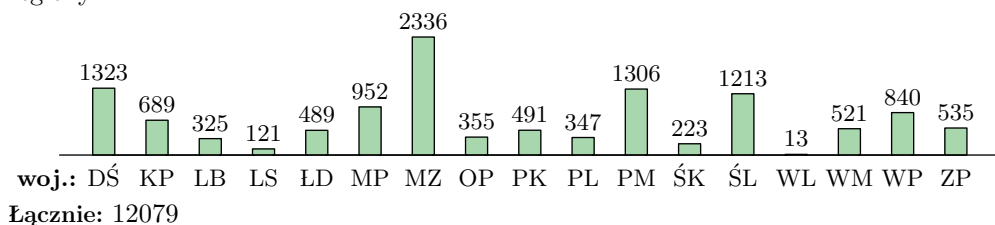
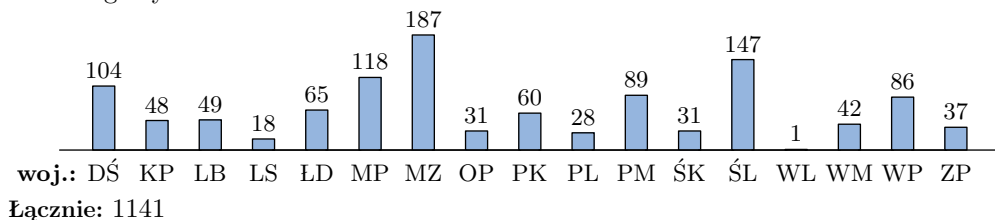


Tabela 8.

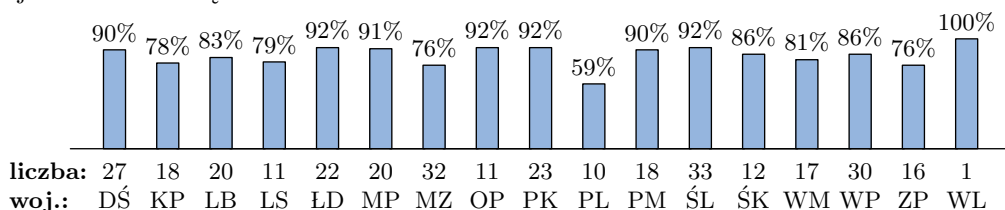
Liczba uczniów, którzy wzięli udział w zawodach w podziale na województwa i inne regiony.

**Tabela 9.**

Liczba szkół, których uczniowie wzięli udział w zawodach w podziale na województwa i inne regiony.

**Tabela 10.**

Reczywista i procentowa liczba powiatów w danym województwie, z których co najmniej jedna szkoła wzięła udział w zawodach.



Skróty województw i innych regionów

DŚ — dolnośląskie

LB — lubelskie

ŁD — łódzkie

MZ — mazowieckie

PK — podkarpackie

PM — pomorskie

ŚL — śląskie

WP — wielkopolskie

WL — Wilno

KP — kujawsko-pomorskie

LS — lubuskie

MP — małopolskie

OP — opolskie

PL — podlaskie

ŚK — świętokrzyskie

WM — warmińsko-mazurskie

ZP — zachodniopomorskie

1. Liczby wymierne a, b, c spełniają równanie

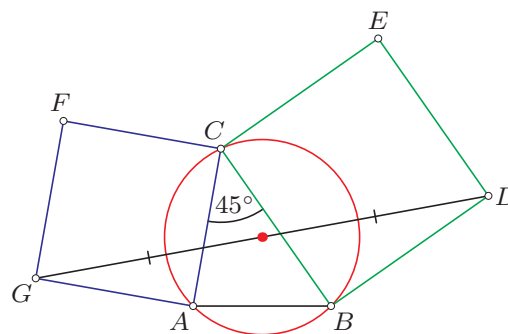
$$(a+b+c)(a+b-c) = c^2.$$

Wykaż, że $a+b+c=0$.

2. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC , w którym

$$\angle ACB = 45^\circ.$$

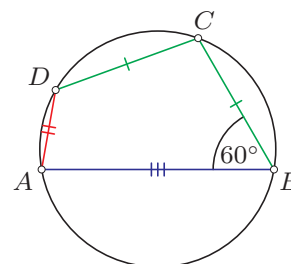
Niech $BCED$ oraz $ACFG$ będą kwadratami leżącymi na zewnątrz trójkąta ABC . Udowodnij, że środek odcinka DG pokrywa się ze środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC .



Zadanie 2

3. W każde pole tablicy 11×11 należy wpisać jedną z liczb $-1, 0, 1$ w taki sposób, aby suma liczb w każdej kolumnie była nieujemna, a suma liczb w każdym wierszu była niedodatnia. Jaką najmniejszą liczbę zer można w ten sposób wpisać w pola tablicy? Odpowiedź uzasadnij.

4. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg, przy czym $\angle ABC = 60^\circ$ oraz $BC = CD$. Udowodnij, że $AB = AD + DC$.



Zadanie 4

6. Podstawą ostrosłupa $ABCD$ jest trójkąt równoboczny ABC o boku 1. Ponadto

$$\angle ADB = \angle BDC = \angle CDA = 90^\circ.$$

Oblicz objętość ostrosłupa $ABCD$.

7. Dane są takie dodatnie liczby całkowite a i b , że liczba $a+b+1$ jest dzielnikiem pierwszym liczby $4ab-1$. Udowodnij, że $a=b$.

Rozwiązania powyższych zadań (wszystkich lub części z nich) należy przekazać szkolnemu koordynatorowi OMJ lub przesłać bezpośrednio, listem poleconym, do Komitetu Okręgowego OMJ właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

17 października 2016 r. (decyduje data stempla pocztowego).

Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym lub pod niewłaściwy adres nie będą rozpatrywane. Adresy Komitetów Okręgowych OMJ, szczegółowe wytyczne dotyczące sposobu redakcji rozwiązań i przesyłania prac, a także regulamin OMJ i inne bieżące informacje znajdują się na stronie internetowej Olimpiady: www.omj.edu.pl.

XII Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody stopnia pierwszego — część korespondencyjna

(1 września 2016 r. – 17 października 2016 r.)

Szkice rozwiązań zadań konkursowych

1. Liczby wymierne a, b, c spełniają równanie

$$(a+b+c)(a+b-c) = c^2.$$

Wykaż, że $a+b=c=0$.

Szkic rozwiązania

Przekształcamy równoważnie daną równość, uzyskując kolejno:

$$(a+b+c)(a+b-c) = c^2,$$

$$(a+b)^2 - c^2 = c^2,$$

$$(a+b)^2 = 2c^2,$$

$$|a+b| = |c|\sqrt{2}.$$

Przypuśćmy, że $c \neq 0$. Wówczas ostatnią zależność możemy podzielić obustronnie przez $|c|$, otrzymując

$$\left| \frac{a+b}{c} \right| = \sqrt{2}.$$

Ponieważ liczby a, b, c są wymierne, więc także liczba $a+b$ jest wymierna i w konsekwencji lewa strona powyższej równości jest wymierna. Tymczasem jej prawa strona, czyli liczba $\sqrt{2}$ jest niewymierna. Uzyskana sprzeczność dowodzi, że $c=0$, a skoro $|a+b| = |c|\sqrt{2}$, to również $a+b=0$.

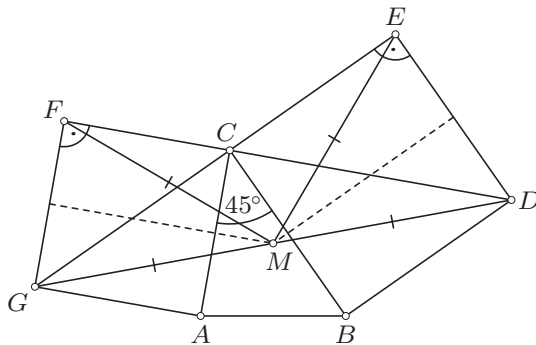
2. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC , w którym $\angle ACB = 45^\circ$. Niech $BCED$ oraz $ACFG$ będą kwadratami leżącymi na zewnątrz trójkąta ABC . Udowodnij, że środek odcinka DG pokrywa się ze środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC .

Szkic rozwiązania

Zauważmy, że

$$\angle FCA + \angle ACB + \angle BCD = 90^\circ + 45^\circ + 45^\circ = 180^\circ,$$

skąd wynika, że punkty F, C, D leżą na jednej prostej. Podobnie uzasadniamy, że punkty E, C, G leżą na jednej prostej.



rys. 1

Oznaczmy przez M środek odcinka DG (rys. 1). Ponieważ

$$\sphericalangle DEG = \sphericalangle DFG = 90^\circ,$$

więc punkty E, F leżą na okręgu o średnicy DG , którego środkiem jest punkt M . Wobec tego symetralne odcinków DE i FG przecinają się w punkcie M .

Z drugiej strony, symetralne odcinków DE i FG pokrywają się z symetralnymi odcinków BC i CA , a więc przecinają się w środku okręgu opisanego na trójkącie ABC . Stąd wniosek, że punkt M , czyli środek odcinka DG , pokrywa się ze środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC . To kończy dowód.

3. W każde pole tablicy 11×11 należy wpisać jedną z liczb $-1, 0, 1$ w taki sposób, aby suma liczb w każdej kolumnie była nieujemna, a suma liczb w każdym wierszu była niedodatnia. Jaką najmniejszą liczbę zer można w ten sposób wpisać w pola tablicy? Odpowiedź uzasadnij.

Szkic rozwiązania

Niech $k_1, k_2, \dots, k_{11}$ będą sumami liczb znajdujących się w kolejnych kolumnach, a $w_1, w_2, \dots, w_{11}$ — sumami liczb znajdujących się w kolejnych wierszach. Oznaczmy ponadto przez s sumę wszystkich liczb wpisanych w pola tablicy.

Z warunków zadania wynika, że $k_1 \geq 0, k_2 \geq 0, \dots, k_{11} \geq 0$, skąd

$$s = k_1 + k_2 + \dots + k_{11} \geq 0 + 0 + \dots + 0 = 0.$$

Podobnie, skoro $w_1 \leq 0, w_2 \leq 0, \dots, w_{11} \leq 0$, to

$$s = w_1 + w_2 + \dots + w_{11} \leq 0 + 0 + \dots + 0 = 0.$$

Łącząc powyższe nierówności, dochodzimy do wniosku, że $s = 0$. Zatem we wszystkich powyższych nierównościach zachodzą równości, czyli

$$k_1 = k_2 = \dots = k_{11} = w_1 = w_2 = \dots = w_{11} = 0.$$

Ponieważ suma liczb w każdym wierszu jest równa 0, więc w każdym wierszu jest tyle samo liczb 1 co liczb -1 . W każdym wierszu jest zatem parzysta liczba niezerowych liczb. Tymczasem w każdym wierszu jest 11, czyli nieparzysta liczba pól. Wobec tego w każdym wierszu znajduje się co najmniej jedna liczba 0, a więc w całej tablicy znajduje się co najmniej 11 zer.

0	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1
1	0	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1
1	1	0	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1
1	1	1	0	-1	-1	-1	-1	-1	1	1
1	1	1	1	0	-1	-1	-1	-1	-1	1
1	1	1	1	1	0	-1	-1	-1	-1	-1
-1	1	1	1	1	1	0	-1	-1	-1	-1
-1	-1	1	1	1	1	1	0	-1	-1	-1
-1	-1	-1	1	1	1	1	1	0	-1	-1
-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	0	-1
-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	0

rys. 2

Pozostaje zauważyć, że można uzupełnić tablicę zgodnie z warunkami zadania tak, aby znalazło się w niej dokładnie 11 zer (rys. 2). W związku z tym szukaną najmniejszą liczbą zer wpisanych w pola tablicy jest 11.

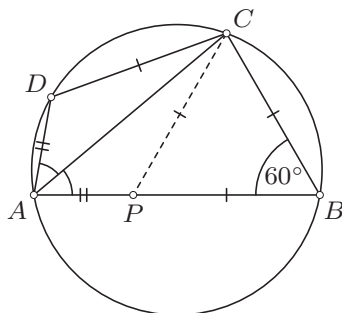
4. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg, przy czym $\sphericalangle ABC = 60^\circ$ oraz $BC = CD$. Udowodnij, że $AB = AD + DC$.

Szkic rozwiązania

Ponieważ $\sphericalangle ADC = 120^\circ > 60^\circ = \sphericalangle ABC$ oraz $\sphericalangle BDC = \sphericalangle DBC$, więc

$$\sphericalangle ADB = \sphericalangle ADC - \sphericalangle BDC > \sphericalangle ABC - \sphericalangle DBC = \sphericalangle ABD.$$

Stąd $AB > AD$. Na odcinku AB można więc wskazać taki punkt P , że $AP = AD$ (rys. 3).



rys. 3

Ponieważ $BC = DC$, więc łuki BC i CD danego okręgu (niezawierające punktu A) są równej długości. Stąd wynika, że $\sphericalangle BAC = \sphericalangle DAC$, gdyż są to kąty wpisane w ten sam okrąg oparte na łukach równej długości. Wobec tego trójkąty APC i ADC są przystające (cecha bok–kąt–bok) i w konsekwencji $PC = DC = BC$.

Wiemy ponadto, że $\sphericalangle ABC = 60^\circ$, skąd wynika, że trójkąt równoramienny BCP jest równoboczny. W związku z tym $PB = DC$. Ostatecznie otrzymujemy zatem

$$AB = AP + PB = AD + DC,$$

co było do udowodnienia.

Uwaga

W rozwiązaniu zadania wykorzystaliśmy fakt, że równość długości cięciw BC i CD pociąga za sobą równość długości łuków BC i CD . Więcej na temat zastosowania tego twierdzenia można przeczytać w artykule „O łukach równej długości”, *Kwadrat* nr 14 (grudzień 2014).

5. Liczby całkowite a , b są dodatnie. Wykaż, że co najmniej jedną z liczb a , b , $a + b$ można przedstawić w postaci różnicy kwadratów dwóch liczb całkowitych.

Szkic rozwiązania

Zauważmy, że każdą liczbę nieparzystą oraz każdą liczbę podzielną przez 4 można przedstawić w postaci różnicy kwadratów dwóch liczb całkowitych. Rzeczywiście, dla dowolnej liczby całkowitej n spełnione są równości

$$2n - 1 = n^2 - (n - 1)^2 \quad \text{oraz} \quad 4n = (n + 1)^2 - (n - 1)^2.$$

Wystarczy zatem wykazać, że wśród liczb a , b , $a + b$ co najmniej jedna jest nieparzysta lub podzielna przez 4.

Przypuśćmy, że tak nie jest. Wtedy liczby a , b oraz $a + b$ są parzyste i niepodzielne przez 4. W szczególności, obie liczby a i b dają resztę 2 z dzielenia przez 4. Wtedy jednak liczba $a + b$ jest podzielna przez 4, wbrew poczynionemu założeniu. Uzyskana sprzeczność kończy rozwiązanie zadania.

Uwaga

Można wykazać, że żadnej liczby, która z dzielenia przez 4 daje resztę 2 nie da się przedstawić w postaci różnicy kwadratów dwóch liczb całkowitych. Dowód tego stwierdzenia przebiega analogicznie do rozwiązania zadania 6 z artykułu „Różnica kwadratów”, *Kwadrat* nr 18 (sierpień 2016).

6. Podstawą ostrosłupa $ABCD$ jest trójkąt równoboczny ABC o boku 1. Ponadto

$$\sphericalangle ADB = \sphericalangle BDC = \sphericalangle CDA = 90^\circ.$$

Oblicz objętość ostrosłupa $ABCD$.

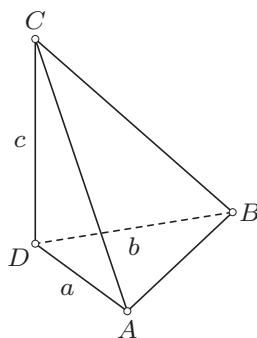
Szkic rozwiązania

Oznaczmy długości krawędzi AD , BD , CD danego ostrosłupa odpowiednio przez a , b , c . Ponieważ

$$\sphericalangle BDC = \sphericalangle CDA = 90^\circ,$$

więc krawędź CD jest prostopadła do płaszczyzny ABD . Potraktujmy zatem teraz ścianę ABD jako podstawę ostrosłupa; wtedy krawędź CD jest wysokością ostrosłupa opuszczoną na tę podstawę (rys. 4). Oznaczając przez V objętość ostrosłupa $ABCD$, a przez $[ABD]$ pole ściany ABD , uzyskujemy

$$V = \frac{1}{3} \cdot [ABD] \cdot CD = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} ab \cdot c = \frac{1}{6} abc.$$



rys. 4

Ponieważ trójkąty ADB , BDC , CDA są prostokątne, więc korzystając z twierdzenia Pitagorasa, możemy zapisać układ równań

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ b^2 + c^2 = 1 \\ c^2 + a^2 = 1. \end{cases}$$

Wobec tego

$$2a^2 = (a^2 + b^2) + (c^2 + a^2) - (b^2 + c^2) = 1 + 1 - 1 = 1,$$

skąd $a^2 = \frac{1}{2}$ i w konsekwencji $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

W pełni analogicznie wyznaczamy pozostałe wielkości b i c , uzyskując $b = c = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Stąd otrzymujemy ostatecznie

$$V = \frac{1}{6} abc = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{12\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{24}.$$

7. Dane są takie dodatnie liczby całkowite a i b , że liczba $a + b + 1$ jest dzielnikiem pierwszym liczby $4ab - 1$. Udowodnij, że $a = b$.

Szkic rozwiązania

Jeżeli liczba $4ab - 1$ jest podzielna przez $a + b + 1$, to również liczba

$$4ab - 1 + 2(a + b + 1) = 4ab + 2a + 2b + 1 = (2a + 1)(2b + 1)$$

jest podzielna przez $a + b + 1$. Ponieważ $a + b + 1$ jest liczbą pierwszą, więc jest dzielnikiem co najmniej jednego z czynników $2a + 1$, $2b + 1$. Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że $a + b + 1$ dzieli $2a + 1$.

Gdyby spełniona była nierówność

$$\frac{2a + 1}{a + b + 1} \geq 2,$$

to przekształcając ją równoważnie, uzyskalibyśmy $2a + 1 \geq 2a + 2b + 2$, czyli $2b + 1 \leq 0$. To przeczy jednak warunkowi, że liczba b jest dodatnia. Wobec tego musi być spełniona równość

$$\frac{2a + 1}{a + b + 1} = 1,$$

która po przekształceniach prowadzi do $a = b$. To kończy rozwiązanie zadania.

XII Olimpiada Matematyczna Juniorów Statystyki dotyczące zawodów części korespondencyjnej (2016/17)

(1 września – 17 października 2016 r.)

Tabela 1. Liczba uczniów, którzy wzięli udział w zawodach w podziale na województwa.

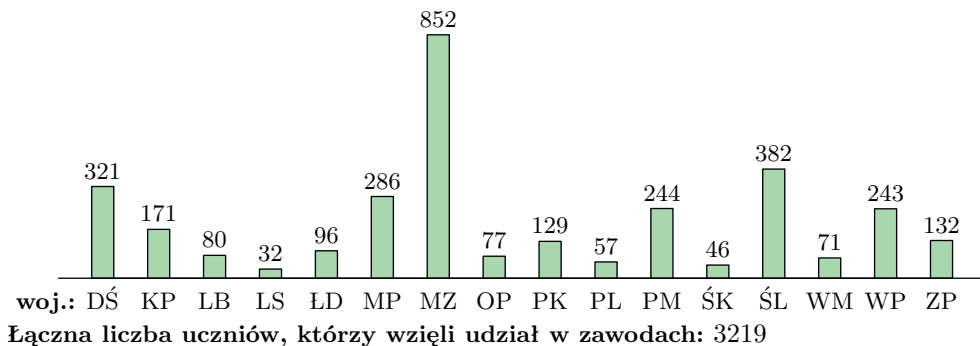
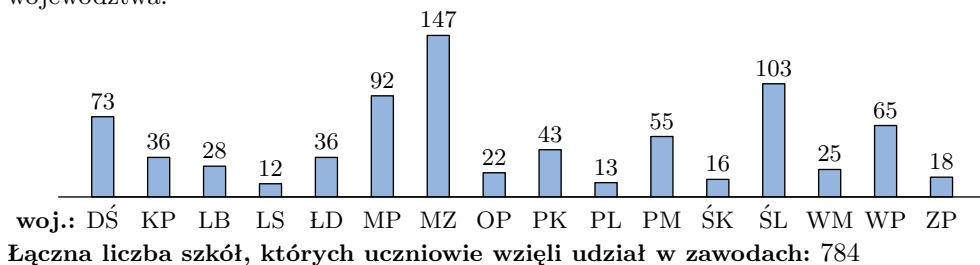


Tabela 2. Liczba szkół, których uczniowie wzięli udział w zawodach w podziale na województwa.



Skróty województw

DŚ — dolnośląskie
 LB — lubelskie
 ŁD — łódzkie
 MZ — mazowieckie
 PK — podkarpackie
 PM — pomorskie
 ŚL — śląskie
 WP — wielkopolskie

KP — kujawsko-pomorskie
 LS — lubuskie
 MP — małopolskie
 OP — opolskie
 PL — podlaskie
 ŚK — świętokrzyskie
 WM — warmińsko-mazurskie
 ZP — zachodniopomorskie

Tabela 3. Procentowa liczba osób, które uzyskały daną liczbę punktów za poszczególne zadania.

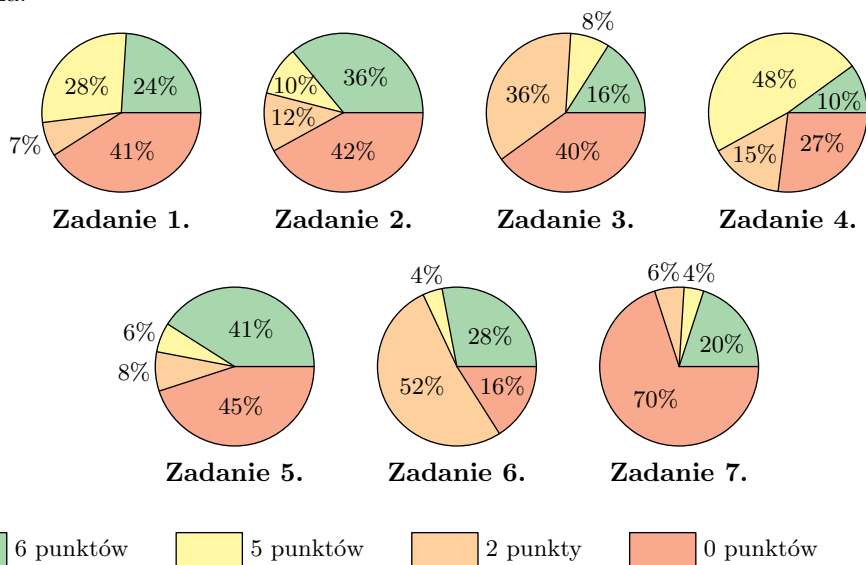


Tabela 4. Średnia uzyskanych punktów za poszczególne zadania.

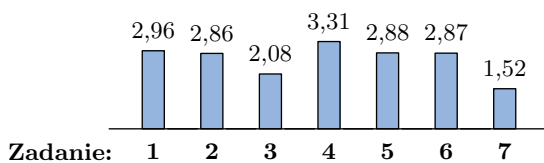


Tabela 5. Liczba nadesłanych prac dotyczących poszczególnych zadań.

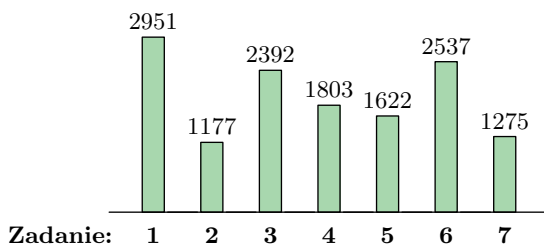


Tabela 6. Średnia uzyskanej sumy punktów w podziale na województwa.

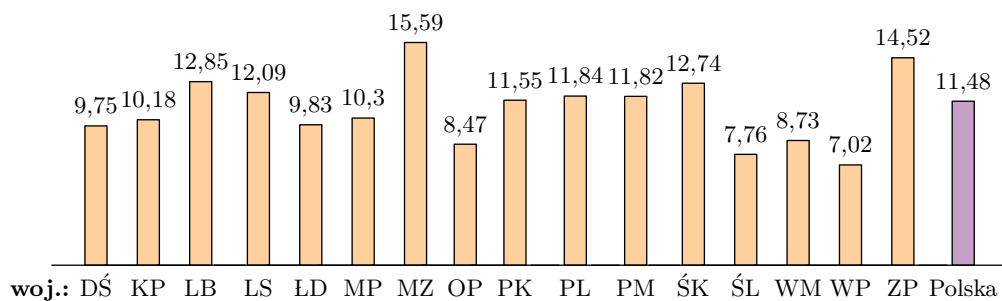


Tabela 7. Procentowa i rzeczywista liczba osób, które uzyskały daną sumę punktów.

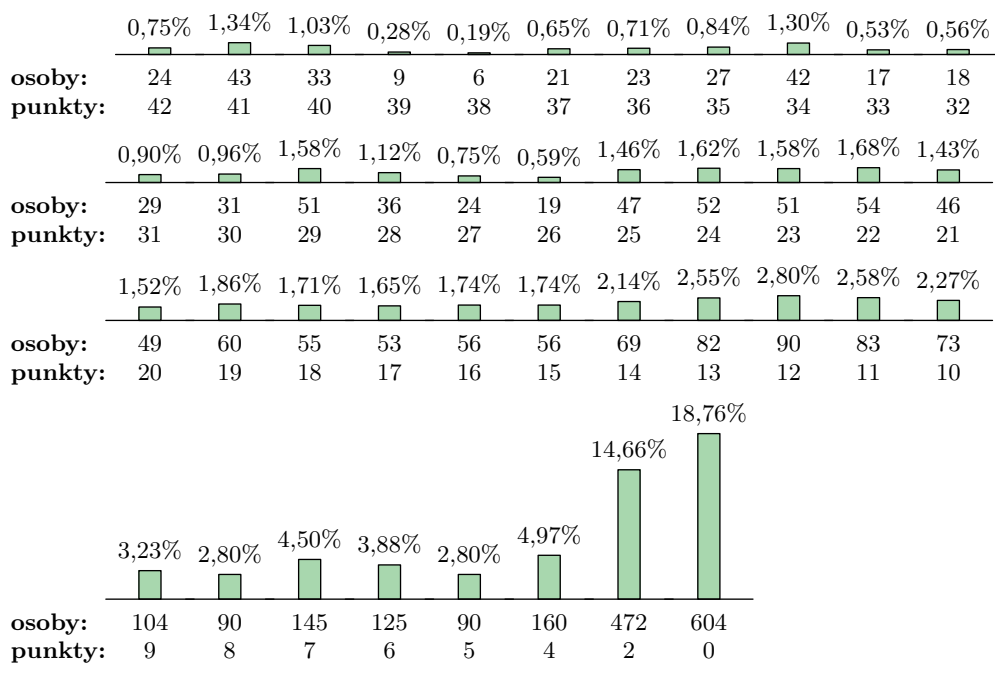
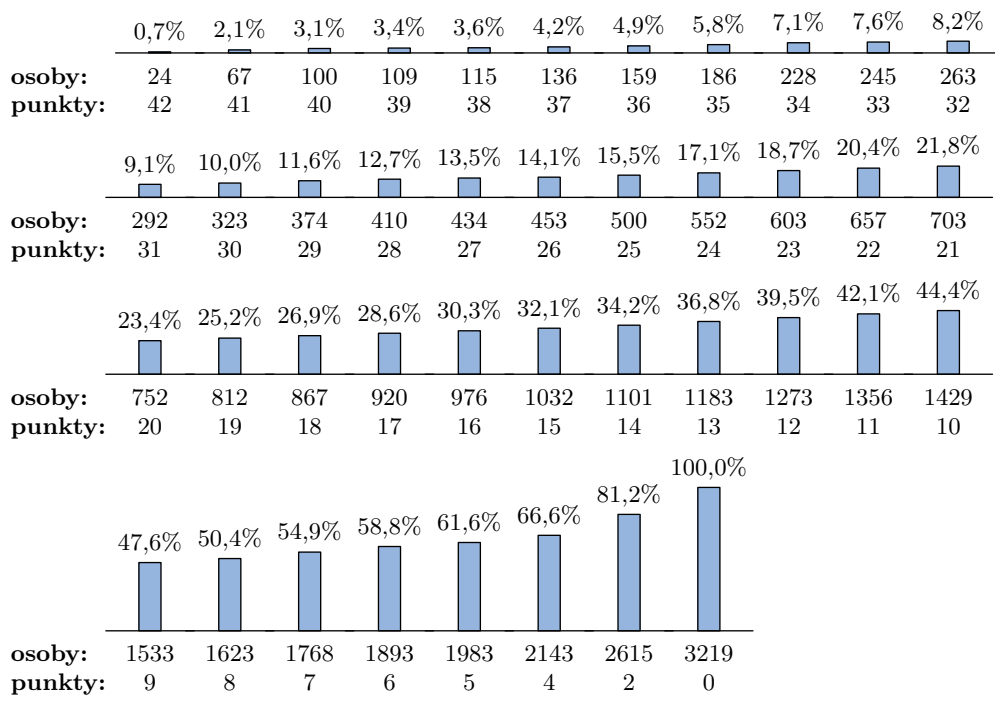


Tabela 8. Procentowa i rzeczywista liczba osób, które uzyskały daną lub większą sumę punktów.



XII Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody drugiego stopnia
(14 stycznia 2017 r.)



1. W każde pole tablicy 4×4 należy wpisać pewną liczbę całkowitą w taki sposób, aby sumy liczb w każdej kolumnie i w każdym wierszu były potęgami liczby 2 o wykładniku całkowitym nieujemnym. Czy można to zrobić w taki sposób, aby każde dwie z tych ośmiu sum były różne? Odpowiedź uzasadnij.

2. Wykaż, że jeżeli przekątne pewnego trapezu są prostopadłe, to suma długości podstaw tego trapezu jest nie większa od sumy długości ramion tego trapezu.

3. Dane są dodatnie liczby całkowite a, b, d . Wiadomo, że liczba $a+b$ jest podzielna przez d , a liczba $a \cdot b$ jest podzielna przez d^2 . Udowodnij, że każda z liczb a i b jest podzielna przez d .

4. Czy istnieją liczby $x_1, x_2, \dots, x_{99}$, z których każda jest równa $\sqrt{2}+1$ lub $\sqrt{2}-1$ i które spełniają równość

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + \dots + x_{98}x_{99} + x_{99}x_1 = 199?$$

Odpowiedź uzasadnij.

5. Czy istnieje taki wielościan wypukły, że każdy kąt wewnętrzny jego każdej ściany jest prosty lub rozwarty i który ma dokładnie 100 krawędzi? Odpowiedź uzasadnij.

XII Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody drugiego stopnia (14 stycznia 2017 r.)

Szkice rozwiązań zadań konkursowych

1. W każde pole tablicy 4×4 należy wpisać pewną liczbę całkowitą w taki sposób, aby sumy liczb w każdej kolumnie i w każdym wierszu były potęgami liczby 2 o wykładniku całkowitym nieujemnym. Czy można to zrobić w taki sposób, aby każde dwie z tych ośmiu sum były różne? Odpowiedź uzasadnij.

Szkic rozwiązania

Przypuśćmy, że sumy liczb w kolumnach są równe $2^{k_1}, 2^{k_2}, 2^{k_3}, 2^{k_4}$, a sumy liczb w wierszach są równe $2^{w_1}, 2^{w_2}, 2^{w_3}, 2^{w_4}$, przy czym $k_1, k_2, k_3, k_4, w_1, w_2, w_3, w_4$ to nieujemne liczby całkowite, z których każde dwie są różne. Przyjmijmy ponadto bez straty ogólności, że k_1 jest najmniejszą z tych ośmiu liczb.

Zapisując dwoma sposobami sumę wszystkich liczb wpisanych w pola tablicy, uzyskujemy równość

$$2^{k_1} + 2^{k_2} + 2^{k_3} + 2^{k_4} = 2^{w_1} + 2^{w_2} + 2^{w_3} + 2^{w_4}.$$

Dzieląc tę równość stronami przez 2^{k_1} , otrzymujemy

$$1 + 2^{k_2-k_1} + 2^{k_3-k_1} + 2^{k_4-k_1} = 2^{w_1-k_1} + 2^{w_2-k_1} + 2^{w_3-k_1} + 2^{w_4-k_1}.$$

Lewa strona powyższej zależności jest liczbą nieparzystą, a prawa — liczbą parzystą. Użyta sprzeczność dowodzi, że nie jest możliwe wpisanie liczb w pola tablicy zgodnie z warunkami zadania.

2. Wykaż, że jeżeli przekątne pewnego trapezu są prostopadłe, to suma długości podstaw tego trapezu jest nie większa od sumy długości ramion tego trapezu.

Szkic rozwiązania

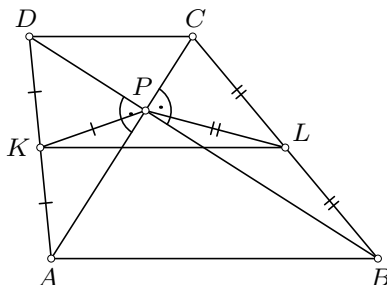
Niech $ABCD$ będzie trapezem o podstawach AB i CD oraz prostopadłych przekątnych przecinających się w punkcie P . Należy udowodnić, że $AD + BC \geq AB + CD$.

Oznaczmy przez K i L środki odpowiednio ramion AD i BC trapezu $ABCD$ (rys. 1).

Ponieważ trójkąty ADP oraz BCP są prostokątne, więc $PK = \frac{1}{2}AD$ oraz $PL = \frac{1}{2}BC$. Ponadto, odcinek KL łączy środki ramion trapezu $ABCD$, więc $KL = \frac{1}{2}(AB + CD)$. Zapisując nierówność trójkąta KLP , otrzymujemy

$$PK + PL \geq KL, \quad \text{czyli} \quad \frac{1}{2}AD + \frac{1}{2}BC \geq \frac{1}{2}(AB + CD).$$

Mnożąc ostatnią nierówność stronami przez 2, uzyskujemy tezę zadania.



rys. 1

3. Dane są dodatnie liczby całkowite a, b, d . Wiadomo, że liczba $a + b$ jest podzielna przez d , a liczba $a \cdot b$ jest podzielna przez d^2 . Udowodnij, że każda z liczb a i b jest podzielna przez d .

Szkic rozwiązania

Jeżeli $d = 1$, to warunki zadania oczywiście są spełnione. W dalszej części rozwiązania przyjmijmy, że $d > 1$.

Niech $p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \dots \cdot p_n^{k_n}$ będzie rozkładem liczby d na czynniki pierwsze. Wykażemy najpierw, że obie liczby a i b są podzielne przez $p_1^{k_1}$.

Liczba $a \cdot b$ jest podzielna przez d^2 , a więc jest także podzielna przez $p_1^{2k_1}$. Wobec tego liczba p_1 wchodzi do rozkładu na czynniki pierwsze liczby $a \cdot b$ z wykładnikiem większym lub równym $2k_1$. Stąd wniosek, że ta sama liczba pierwsza p_1 wchodzi do rozkładu na czynniki pierwsze co najmniej jednej z liczb a, b z wykładnikiem większym lub równym k_1 . To dowodzi, że co najmniej jedna z liczb a, b jest podzielna przez $p_1^{k_1}$.

Przyjmijmy, bez straty ogólności, że liczba a jest podzielna przez $p_1^{k_1}$. Ponieważ liczba $a + b$ jest podzielna przez d , więc jest podzielna także przez $p_1^{k_1}$. W związku z tym liczba $b = (a + b) - a$ jest także podzielna przez $p_1^{k_1}$.

Analogicznie dowodzimy, że liczby a, b są podzielne przez każdą z liczb $p_2^{k_2}, p_3^{k_3}, \dots, p_n^{k_n}$. Ponieważ każde dwie spośród liczb $p_1^{k_1}, p_2^{k_2}, \dots, p_n^{k_n}$ są względnie pierwsze, więc obie liczby a, b są podzielne przez iloczyn liczb $p_1^{k_1}, p_2^{k_2}, \dots, p_n^{k_n}$, czyli przez d .

Uwaga

W rozwiązaniu uzasadniliśmy, że jeśli d jest potęgą liczby pierwszej, to z podzielności liczby $a \cdot b$ przez d^2 wynika, że co najmniej jedna z liczb a, b jest podzielna przez d . Stwierdzenie to nie jest jednak prawdziwe dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej d . Na przykład dla $d = 6$ liczba $4 \cdot 9$ jest podzielna przez 6^2 , lecz żadna z liczb 4, 9 nie jest podzielna przez 6.

4. Czy istnieją liczby $x_1, x_2, \dots, x_{99}$, z których każda jest równa $\sqrt{2} + 1$ lub $\sqrt{2} - 1$ i które spełniają równość

$$x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_4 + \dots + x_{98} x_{99} + x_{99} x_1 = 199?$$

Odpowiedź uzasadnij.

Szkic rozwiązania

Wykażemy, że takie liczby nie istnieją.

Przypuśćmy, że istnieje układ liczb $x_1, x_2, \dots, x_{99}$ spełniających warunki zadania.

Każdy z iloczynów $x_1 x_2, x_2 x_3, \dots, x_{99} x_1$ przyjmuje jedną z trzech wartości:

$$(\sqrt{2} + 1)^2 = 3 + 2\sqrt{2}, \quad (\sqrt{2} - 1)^2 = 3 - 2\sqrt{2}, \quad (\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1) = 1.$$

Niech a będzie liczbą iloczynów równych $3 + 2\sqrt{2}$, b — liczbą iloczynów równych $3 - 2\sqrt{2}$, natomiast c — liczbą iloczynów równych 1. Ponieważ wszystkich iloczynów jest 99, więc

$$a + b + c = 99.$$

Wykażemy najpierw, że $a = b$.

Z danej w treści zadania równości wynika, że

$$a(3 + 2\sqrt{2}) + b(3 - 2\sqrt{2}) + c = 199,$$

czyli równoważnie

$$2(a - b)\sqrt{2} = 199 - c - 3(a + b).$$

Jeżeli $a \neq b$, to dzieląc przez $2(a - b)$ obie strony powyższej zależności, otrzymujemy

$$\sqrt{2} = \frac{199 - c - 3(a + b)}{2(a - b)}.$$

Lewa strona ostatniej równości jest liczbą niewymierną, a prawa — wymierną. Uzyskaliśmy sprzeczność, która prowadzi do wniosku, że $a = b$.

Wykażemy teraz, że c jest liczbą parzystą.

Narysujmy 99-kąt foremny $X_1X_2\ldots X_{99}$. Przy wierzchołku X_1 napiszmy liczbę x_1 , przy wierzchołku X_2 — liczbę x_2 , itd. Przy każdym jego wierzchołku napisaliśmy zatem jedną z dwóch liczb: $\sqrt{2}+1$ lub $\sqrt{2}-1$.

Wykonajmy teraz wędrówkę po obwodzie 99-kąta, zaczynając od wierzchołka X_1 , odwiedzając kolejno wierzchołki $X_2, X_3, \ldots, X_{99}$ i kończąc w punkcie wyjścia X_1 . Przechodząc z danego wierzchołka do kolejnego, odnotujmy czy liczba przy odwiedzonym wierzchołku uległa zmianie, tzn. czy liczby przy obu wierzchołkach są różne. Ponieważ wędrówka zaczyna się i kończy w tym samym punkcie X_1 , więc podczas niej odnotujemy parzystą liczbę zmian.

Z drugiej strony, przy przejściu z danego wierzchołka do kolejnego liczba przy odwiedzonym wierzchołku ulega zmianie jedynie wtedy, gdy iloczyn obu liczb przypisanych tym wierzchołkom jest równy 1. Wobec tego liczba zmian odnotowanych podczas wędrówki jest równa c . To dowodzi, że c jest liczbą parzystą.

Wykorzystując wyżej uzyskane zależności $a + b + c = 99$ oraz $a = b$, wnioskujemy, że $c = 99 - 2a$. To dowodzi, że c jest liczbą nieparzystą. Uzyskaliśmy więc sprzeczność, z której wynika, że liczby o postulowanej własności nie istnieją.

5. Czy istnieje taki wielościan wypukły, że każdy kąt wewnętrzny jego każdej ściany jest prosty lub rozwarty i który ma dokładnie 100 krawędzi? Odpowiedź uzasadnij.

Szkic rozwiązania

Udowodnimy, że wielościan o opisanej własności nie istnieje.

Zauważmy, że jeżeli pewien wielościan wypukły ma wszystkie ściany o wszystkich kątach prostych lub rozwartych, to w każdym z jego wierzchołków schodzą się dokładnie trzy krawędzie. Rzeczywiście, rozważmy dowolny wierzchołek takiego wielościanu i oznaczmy przez $d \geq 3$ liczbę schodzących się w nim krawędzi. Wówczas suma s miar kątów płaskich przy tym wierzchołku jest nie mniejsza od $d \cdot 90^\circ$. Z drugiej strony, w każdym wielościanie wypukłym suma kątów płaskich przy dowolnym wierzchołku jest mniejsza od 360° . Wobec tego

$$d \cdot 90^\circ \leq s < 360^\circ,$$

skąd wynika, że $d < 4$, czyli $d = 3$.

Przypuśćmy, że istnieje wielościan wypukły o 100 krawędziach, w którego każdym wierzchołku schodzą się dokładnie trzy krawędzie. Niech w będzie liczbą wierzchołków tego wielościanu. Wówczas, skoro każdy wierzchołek jest końcem dokładnie trzech krawędzi wielościanu, a każda krawędź ma dwa końce, to

$$3w = 2 \cdot 100.$$

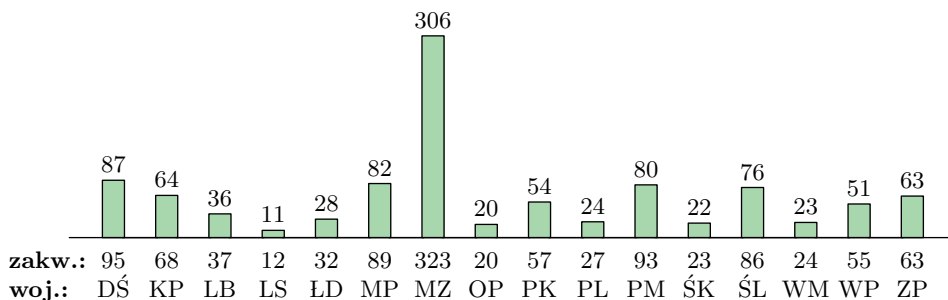
Ponieważ nie istnieje liczba całkowita w , która spełnia powyższą równość, więc nie istnieje wielościan o własności opisanej w treści zadania.

XII Olimpiada Matematyczna Juniorów

Statystyki dotyczące zawodów drugiego stopnia (2016/17)

(14 stycznia 2017 r.)

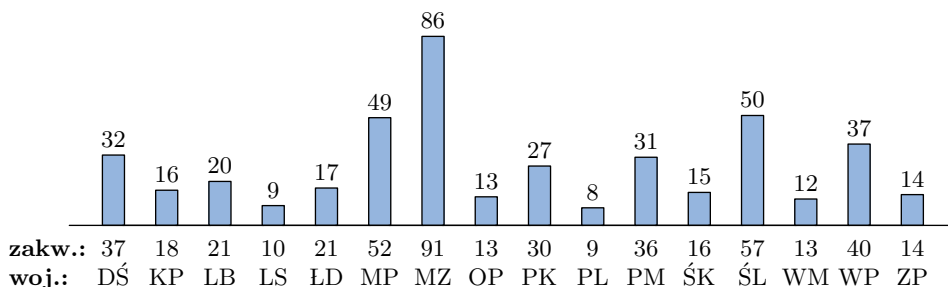
Tabela 1. Liczba uczniów, którzy wzięli udział w zawodach oraz zakwalifikowanych do zawodów w podziale na województwa.



Łączna liczba uczniów, którzy wzięli udział w zawodach: 1027

Łączna liczba uczniów zakwalifikowanych do zawodów: 1104

Tabela 2. Liczba szkół uczniów, którzy wzięli udział w zawodach oraz zakwalifikowanych do zawodów w podziale na województwa.



Łączna liczba szkół uczniów, którzy wzięli udział w zawodach: 436

Łączna liczba szkół uczniów zakwalifikowanych do zawodów: 478

Skróty województw

DŚ — dolnośląskie

LB — lubelskie

ŁD — łódzkie

MZ — mazowieckie

PK — podkarpackie

PM — pomorskie

ŚL — śląskie

WP — wielkopolskie

KP — kujawsko-pomorskie

LS — lubuskie

MP — małopolskie

OP — opolskie

PL — podlaskie

ŚK — świętokrzyskie

WM — warmińsko-mazurskie

ZP — zachodniopomorskie

Tabela 3. Procentowa i rzeczywista liczba osób, które uzyskały daną sumę punktów.

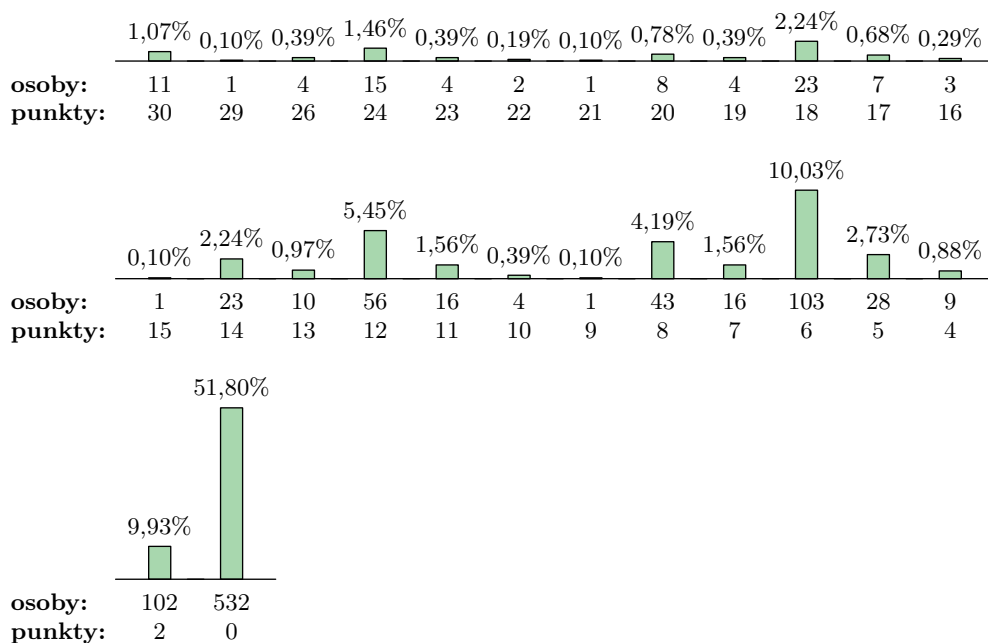


Tabela 4. Procentowa i rzeczywista liczba osób, które uzyskały daną lub większą sumę punktów.

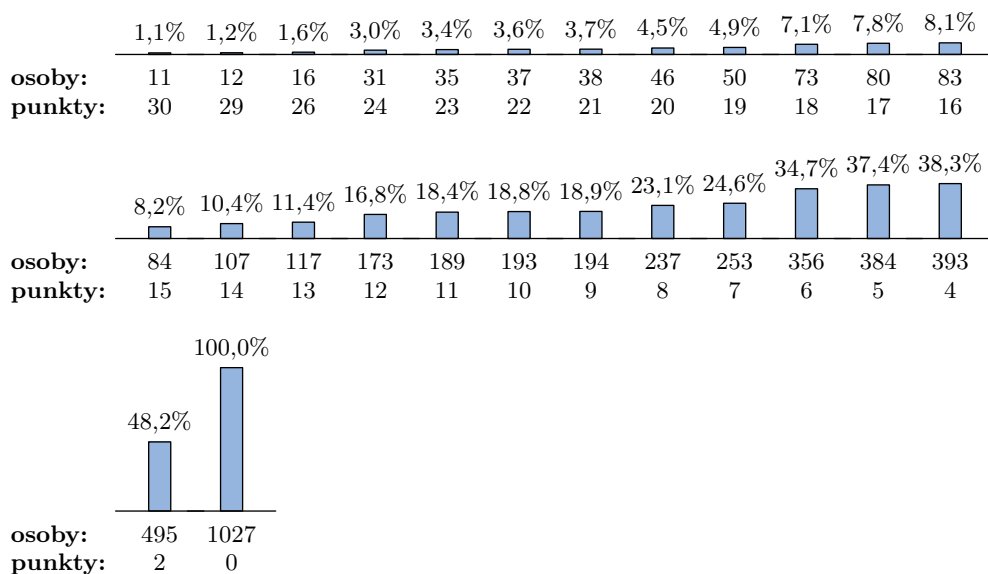


Tabela 5. Procentowa liczba osób, które uzyskały daną liczbę punktów za poszczególne zadania.

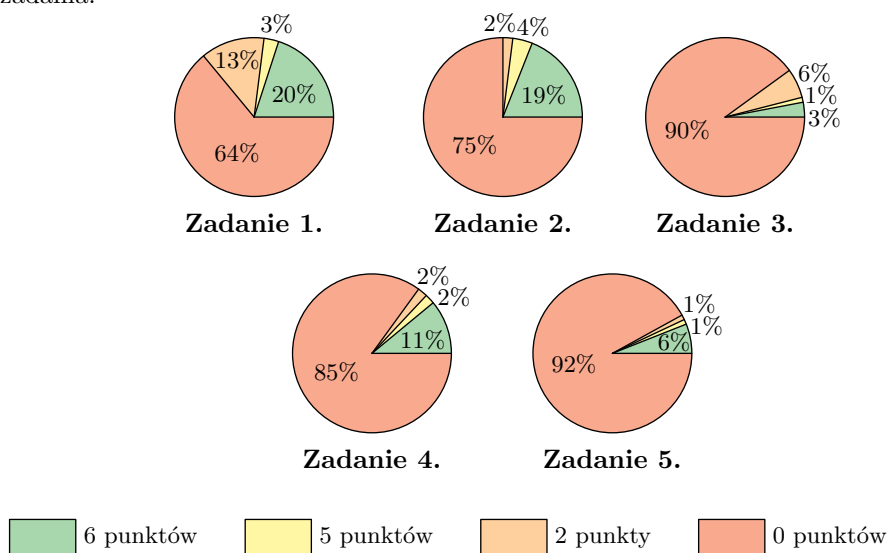


Tabela 6. Średnia uzyskanych punktów za poszczególne zadania.

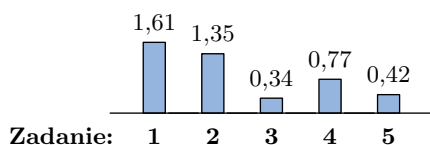
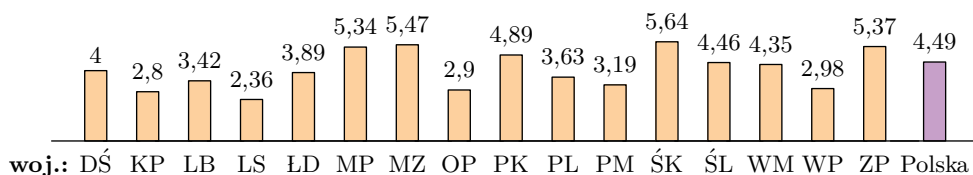
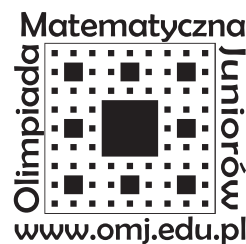


Tabela 7. Średnia sumy punktów w podziale na województwa.



XII Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody trzeciego stopnia
(25 marca 2017 r.)



1. Dane są dodatnie liczby całkowite a, b, c , dla których liczba

$$\frac{a\sqrt{2}+b}{b\sqrt{2}+c}$$

jest wymierna. Wykaż, że liczba $ab+bc+ca$ jest podzielna przez liczbę $a+b+c$.

2. Punkt D leży na boku AB trójkąta ABC . Punkt E leży na odcinku CD . Wykaż, że jeżeli suma pól trójkątów ACE i BDE jest równa połowie pola trójkąta ABC , to punkt D jest środkiem boku AB lub punkt E jest środkiem odcinka CD .

3. Dane są takie dodatnie liczby całkowite a i b , że każda z liczb

$$ab \quad \text{oraz} \quad (a+1)(b+1)$$

jest kwadratem liczby całkowitej. Udowodnij, że istnieje taka liczba całkowita $n > 1$, dla której liczba $(a+n)(b+n)$ jest kwadratem liczby całkowitej.

4. W sześciokącie wypukłym $ABCDEF$ kąty wewnętrzne przy wierzchołkach B, C, E, F są równe. Ponadto spełniona jest równość

$$AB+DE=AF+CD.$$

Wykaż, że prosta AD oraz symetralne odcinków BC i EF mają punkt wspólny.

5. Na stole leży n zapalek, które stanowią n jednoelementowych stosów. Adam chce połączyć je w jeden stos n -elementowy. Będzie to robił przy użyciu $n-1$ operacji, z których każda polega na połączeniu dwóch stosów w jeden. Adam umówił się z Bartkiem, że za każdym razem, gdy Adam połączy stos a -elementowy ze stosem b -elementowym, dostanie od Bartka $a \cdot b$ cukierków. Jaka jest największa możliwa liczba cukierków, które może dostać Adam po wykonaniu $n-1$ operacji? Odpowiedź uzasadnij.

XII Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody trzeciego stopnia (25 marca 2017 r.)

Szkice rozwiązań zadań konkursowych

1. Dane są dodatnie liczby całkowite a, b, c , dla których liczba

$$\frac{a\sqrt{2}+b}{b\sqrt{2}+c}$$

jest wymierna. Wykaż, że liczba $ab+bc+ca$ jest podzielna przez liczbę $a+b+c$.

Szkic rozwiązania

W rozwiązaniu wykorzystamy następujący fakt: *jeżeli liczby x, y oraz $z = x + y\sqrt{2}$ są wymierne, to $y = 0$* . Rzeczywiście, gdyby $y \neq 0$, to moglibyśmy zapisać

$$\sqrt{2} = \frac{z-x}{y},$$

co prowadzi do sprzeczności, gdyż lewa strona powyższej równości jest liczbą niewymierną, a prawa — wymierną.

Ponieważ $b \neq 0$, więc z powyższej obserwacji wynika, że liczba $b\sqrt{2}-c$ jest niewymierna, w szczególności jest różna od 0. Wobec tego możemy rozszerzyć dany w treści zadania ułamek o tę liczbę, otrzymując

$$\frac{a\sqrt{2}+b}{b\sqrt{2}+c} = \frac{(a\sqrt{2}+b)(b\sqrt{2}-c)}{(b\sqrt{2}+c)(b\sqrt{2}-c)} = \frac{2ab-bc}{2b^2-c^2} + \frac{b^2-ac}{2b^2-c^2}\sqrt{2} = x + y\sqrt{2}.$$

Liczby a, b, c są całkowite, więc liczby x, y są wymierne. Z treści zadania wiemy ponadto, że liczba $x + y\sqrt{2}$ jest wymierna. Wobec tego $y = 0$, czyli $b^2 - ac = 0$. Stąd

$$ab + bc + ca = ab + bc + b^2 = b(a + b + c),$$

co natychmiast daje postulowaną podzielność.

2. Punkt D leży na boku AB trójkąta ABC . Punkt E leży na odcinku CD . Wykaż, że jeżeli suma pól trójkątów ACE i BDE jest równa połowie pola trójkąta ABC , to punkt D jest środkiem boku AB lub punkt E jest środkiem odcinka CD .

Szkic rozwiązania

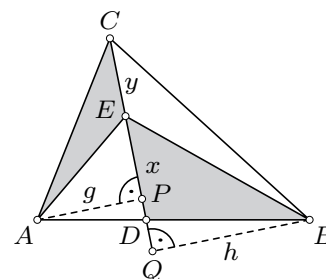
Niech P i Q będą rzutami prostokątnymi odpowiednio punktów A i B na prostą CD (rys. 1). Przyjmijmy ponadto oznaczenia: $DE = x$, $CE = y$, $AP = g$, $BQ = h$.

Z treści zadania wynika, że suma pól trójkątów ACE i BDE jest równa sumie pól trójkątów BCE i ADE , czyli

$$\frac{1}{2}yg + \frac{1}{2}xh = \frac{1}{2}yh + \frac{1}{2}xg.$$

Zależność ta jest równoważna równości $(g-h)(x-y) = 0$. Wobec tego $g = h$ lub $x = y$.

Z równości $g = h$ wynika, że (być może zdegenerowane) trójkąty prostokątne ADP i BDQ są przystające (cecha kąt-bok-kąt), skąd wniosek, że punkt D jest środkiem odcinka AB . Z kolei równość $x = y$ oznacza, że punkt E jest środkiem odcinka CD .



rys. 1

Uwaga

Można udowodnić, że zbiorem wszystkich punktów X leżących wewnątrz trójkąta ABC , dla których suma pól trójkątów ACX i BDX jest równa połowie pola trójkąta ABC jest fragment prostej łączącej środki odcinków AB i CD zawarty we wnętrzu trójkąta.

Stąd natychmiast wynika teza zadania. Jeżeli bowiem punkt D nie jest środkiem odcinka AB , to prosta łącząca środki odcinków AB i CD przecina odcinek CD w dokładnie jednym punkcie: środku odcinka CD . Wobec tego punkt E musi pokrywać się ze środkiem odcinka CD .

3. Dane są takie dodatnie liczby całkowite a i b , że każda z liczb

$$ab \quad \text{oraz} \quad (a+1)(b+1)$$

jest kwadratem liczby całkowitej. Udowodnij, że istnieje taka liczba całkowita $n > 1$, dla której liczba $(a+n)(b+n)$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Szkic rozwiązania

Jeżeli $a=b=1$, to $(a+n)(b+n)=(n+1)^2$ jest kwadratem liczby całkowitej dla dowolnej liczby $n > 1$. W pozostałych przypadkach przyjmijmy $n=ab$. Wówczas $n > 1$ oraz

$$(a+n)(b+n) = (a+ab)(b+ab) = ab \cdot (a+1)(b+1).$$

Uzyskana liczba jest kwadratem liczby całkowitej, jako iloczyn kwadratów liczb całkowitych.

Uwaga

Istnieją pary (a,b) spełniające warunki zadania, w których $a \neq b$, na przykład $(1,49)$, $(2,242)$, $(3,48)$, $(8,288)$.

Okazuje się, że istnieje nawet nieskończenie wiele par (a,b) postaci $(1,n)$, które spełniają warunki zadania. Pary takie można uzyskać z pomocą rozwiązań w liczbach całkowitych równania $x^2 - 2y^2 = -1$. Można udowodnić, że takich rozwiązań jest nieskończenie wiele.

Jeśli para (x,y) spełnia powyższe równanie (np. $(x,y) = (7,5)$), to przyjmując $n=x^2$, uzyskujemy $ab=x^2$ oraz $(a+1)(b+1) = 2(x^2+1) = (2y)^2$. Obie liczby ab oraz $(a+1)(b+1)$ są więc kwadratami liczb całkowitych.

4. W sześciokącie wypukłym $ABCDEF$ kąty wewnętrzne przy wierzchołkach B, C, E, F są równe. Ponadto spełniona jest równość

$$AB + DE = CD + FA.$$

Wykaż, że prosta AD oraz symetralne odcinków BC i EF mają punkt wspólny.

Szkic rozwiązania

Oznaczmy przez P punkt przecięcia prostych AB i CD , a przez Q punkt przecięcia prostych DE i FA (rys. 2).

Ponieważ $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BCD = \sphericalangle DEF = \sphericalangle EFA$, więc również

$$\sphericalangle PBC = \sphericalangle BCP = \sphericalangle QEF = \sphericalangle EFQ,$$

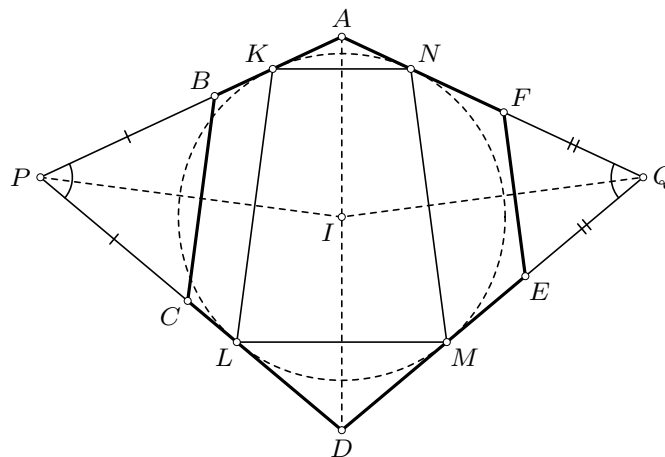
a zatem trójkąty BCP oraz EFQ są podobnymi trójkątami równoramiennymi.

Równości $BP=CP$ oraz $EQ=FQ$ w połączeniu z $AB+DE=CD+FA$ prowadzą do

$$AB + DE + BP + EQ = CD + FA + CP + FQ, \quad \text{czyli} \quad AP + DQ = DP + AQ.$$

Ostatnia równość oznacza, że w czworokąt wypukły $APDQ$ można wpisać okrąg. Oznaczmy środek tego okręgu przez I , a jego punkty styczności z bokami AP, PD, DQ, QA odpowiednio przez K, L, M, N .

Symetralne odcinków BC i EF są odpowiednio dwusiecznymi kątów APD i AQD , więc przechodzą przez punkt I . Pozostaje wykazać, że punkt I leży na prostej AD .



rys. 2

Skoro $IK = IL = IM = IN$ oraz

$$\sphericalangle KIL = 180^\circ - \sphericalangle KPL = 180^\circ - \sphericalangle MQN = \sphericalangle MIN,$$

to trójkąty KLI oraz MNI są przystające (cecha bok–kąt–bok). Stąd $KL = MN$, a zatem wpisany w okrąg czworokąt $KLMN$ jest trapezem równoramiennym. Ponieważ $AK = AN$ oraz $DL = DM$, więc punkty A oraz D leżą na wspólnej symetralnej odcinków KN i LM . Na tej symetralnej leży punkt I . Zatem punkty A, D, I leżą na jednej prostej, co kończy rozwiązanie zadania.

5. Na stole leży n zapalek, które stanowią n jednoelementowych stosów. Adam chce połączyć je w jeden stos n -elementowy. Będzie to robił przy użyciu $n - 1$ operacji, z których każda polega na połączeniu dwóch stosów w jeden. Adam umówił się z Bartkiem, że za każdym razem, gdy Adam połączy stos a -elementowy ze stosiem b -elementowym, dostaje od Bartka $a \cdot b$ cukierków. Jaka jest największa możliwa liczba cukierków, które może dostać Adam po wykonaniu $n - 1$ operacji? Odpowiedź uzasadnij.

Szkic rozwiązania

Sposób I

Zauważmy, że w każdej z operacji liczba cukierków, które otrzymuje Adam jest równa liczbie par zapalek, z których jedna należy do jednego, a druga do drugiego stosu. Ponadto po wykonaniu operacji para zapalek z różnych stosów staje się parą zapalek z jednego stosu i taką pozostanie do końca całej procedury.

Na początku żadne dwie zapalki nie należały do tego samego stosu, na końcu zaś wszystkie zapalki tworzą jeden stos. Wobec tego łączna liczba cukierków, które otrzyma Adam jest równa liczbie wszystkich par zapalek.

Łączna liczba par zapalek może być obliczona w następujący sposób. Dla każdej z n zapalek drugą do pary możemy dobrać na $n - 1$ sposobów. To daje $n(n - 1)$ par, ale każda z nich została policzona dwukrotnie, wobec czego łączna liczba par zapalek jest równa $\frac{1}{2}n(n - 1)$. Tyle cukierków dostanie Adam, niezależnie od tego, w jaki sposób będzie je łączył w stosy.

Sposób II

Oznaczmy przez S_k sumę kwadratów liczności stosów przed k -tą operacją wykonaną przez Adama oraz przez S_n — kwadrat liczności stosu uzyskanego na końcu. Mamy więc

$$S_1 = 1^2 + 1^2 + \dots + 1^2 = n \quad \text{oraz} \quad S_n = n^2.$$

Zauważmy, że jeżeli w k -tym ruchu Adam łączy stosy a -elementowy oraz b -elementowy, to

$$S_{k+1} - S_k = (a+b)^2 - a^2 - b^2 = 2ab.$$

Wobec tego łączna liczba cukierków otrzymanych przez Adama jest równa

$$\frac{1}{2}(S_2 - S_1) + \frac{1}{2}(S_3 - S_2) + \dots + \frac{1}{2}(S_n - S_{n-1}) = \frac{1}{2}(S_n - S_1) = \frac{1}{2}(n^2 - n).$$

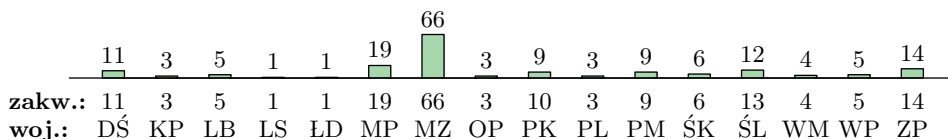
Zatem niezależnie od sposobu wykonywanych operacji, Adam otrzyma łącznie $\frac{1}{2}n(n-1)$ cukierków.

XII Olimpiada Matematyczna Juniorów

Statystyki dotyczące zawodów trzeciego stopnia (2016/17)

(25 marca 2017 r.)

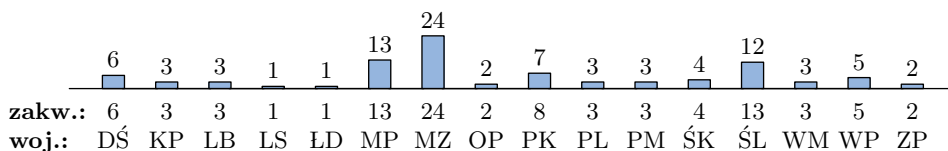
Tabela 1. Liczba uczniów, którzy wzięli udział w zawodach oraz zakwalifikowanych do zawodów w podziale na województwa.



Łączna liczba uczniów, którzy wzięli udział w zawodach: 171

Łączna liczba uczniów zakwalifikowanych do zawodów: 173

Tabela 2. Liczba szkół uczniów, którzy wzięli udział w zawodach oraz zakwalifikowanych do zawodów w podziale na województwa.



Łączna liczba szkół uczniów, którzy wzięli udział w zawodach: 92

Łączna liczba szkół uczniów zakwalifikowanych do zawodów: 94

Skróty województw

DŚ — dolnośląskie

LB — lubelskie

ŁD — łódzkie

MZ — mazowieckie

PK — podkarpackie

PM — pomorskie

ŚL — śląskie

WP — wielkopolskie

KP — kujawsko-pomorskie

LS — lubuskie

MP — małopolskie

OP — opolskie

PL — podlaskie

ŚK — świętokrzyskie

WM — warmińsko-mazurskie

ZP — zachodniopomorskie

Tabela 3. Procentowa i rzeczywista liczba osób, które uzyskały daną sumę punktów.

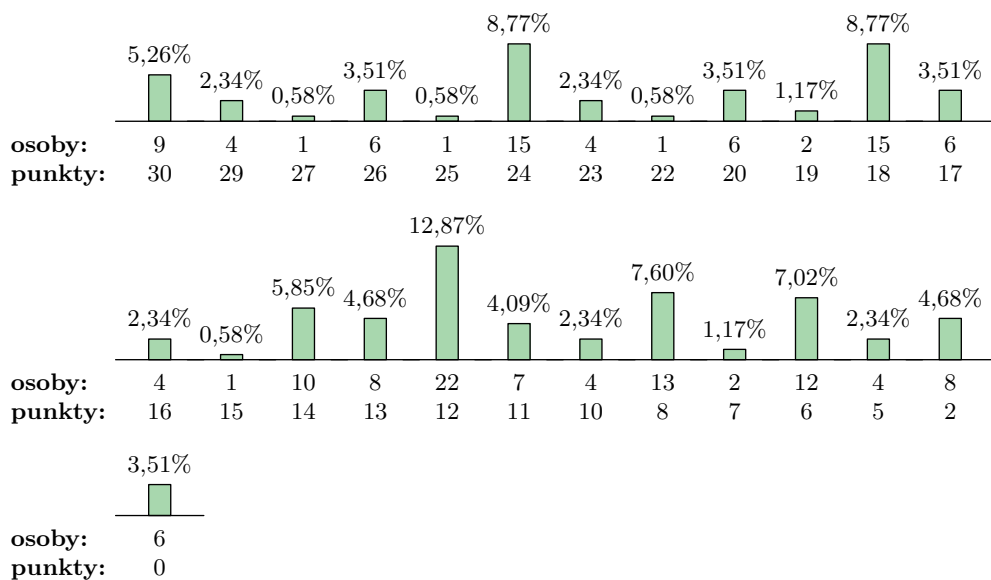


Tabela 4. Procentowa i rzeczywista liczba osób, które uzyskały daną lub większą sumę punktów.

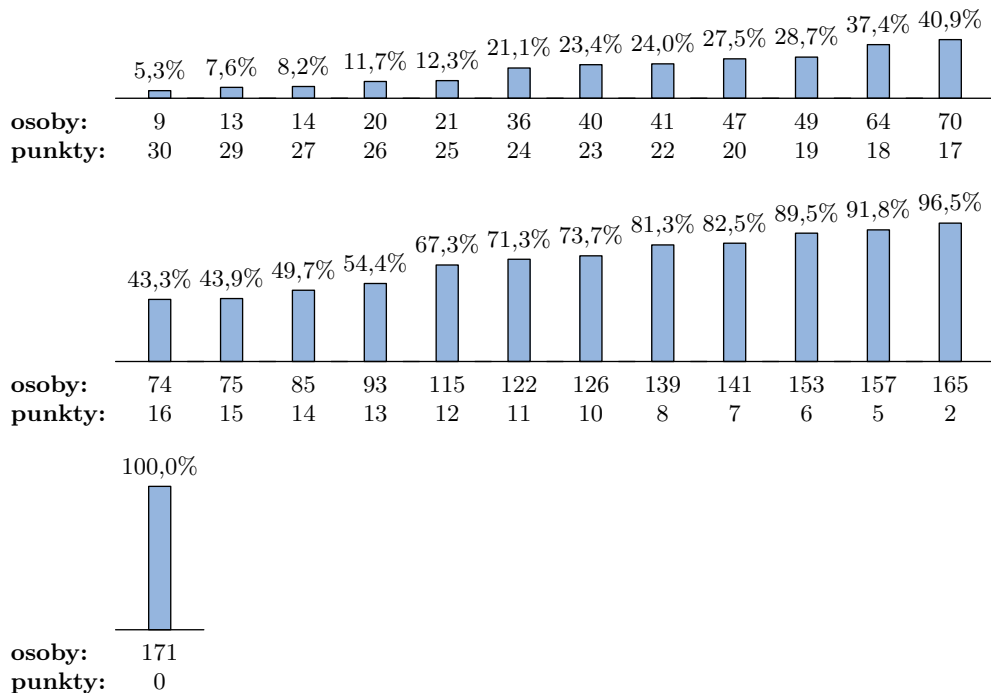


Tabela 5. Procentowa liczba osób, które uzyskały daną liczbę punktów za poszczególne zadania.

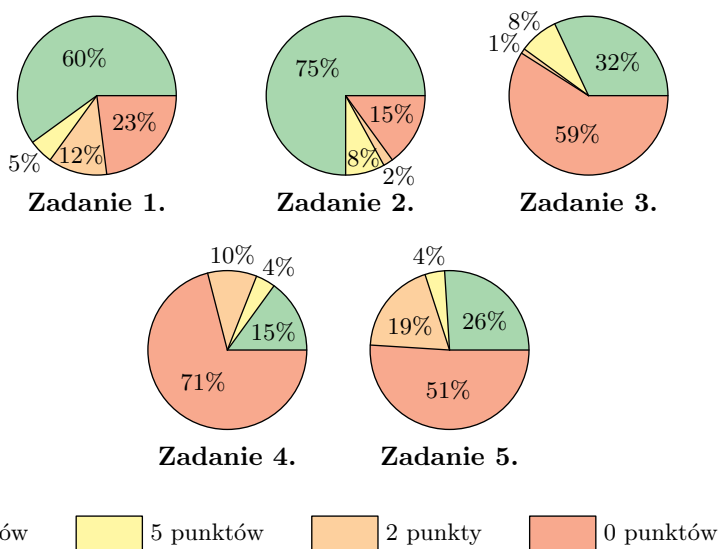


Tabela 6. Średnia uzyskanych punktów za poszczególne zadania.

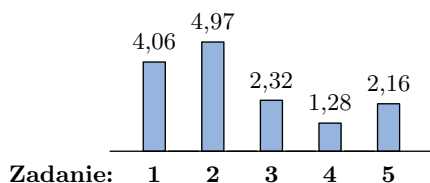
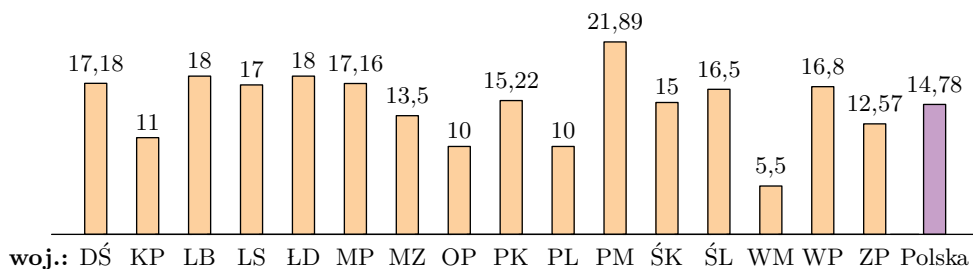


Tabela 7. Średnia sumy punktów w podziale na województwa.



Imiona:

Nazwisko:

Klasa:



XIII Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody stopnia pierwszego — część testowa

(28 września 2017 r., godz. 9:00)

Przed przystąpieniem do rozwiązywania testu wpisz na każdą stronę swoje imiona, nazwisko oraz numer klasy.

Treść każdego z poniższych zadań zawiera trzy stwierdzenia. Każde z nich jest prawdziwe lub fałszywe. Jeśli dane stwierdzenie jest prawdziwe, wpisz w odpowiednią kratkę literkę T, jeśli zaś stwierdzenie jest fałszywe, wpisz literkę N.

W przypadku pomyłki przekreśl znakiem **X** podaną odpowiedź, a właściwą odpowiedź podaj obok z lewej strony. Nie używaj korektora.

Przykład poprawnie rozwiązane zadania:

0. Dla każdej dodatniej liczby całkowitej n liczba $2n + 1$ jest

	<table border="1"><tr><td>T</td></tr></table>	T	a) dodatnia;
T			
	<table border="1"><tr><td>T</td></tr></table>	T	b) nieparzysta;
T			
N	<table border="1"><tr><td>X</td></tr></table>	X	c) pierwsza.
X			

Czas na rozwiązywanie testu: 75 minut.

Powodzenia!

1. W każdym z trzech lat 2018, 2019 i 2020 pensja pana Antoniego będzie o 5% większa od jego pensji z roku poprzedniego. Wynika z tego, że pensja pana Antoniego w roku 2020 będzie większa od jego pensji z roku 2017 o

<table border="1"><tr><td></td></tr></table>		a) dokładnie 15%;
<table border="1"><tr><td></td></tr></table>		b) więcej niż 15%;
<table border="1"><tr><td></td></tr></table>		c) mniej niż 15%.

Imiona:

Nazwisko:

Klasa:

2. Istnieje kwadrat, w którym przekątna jest dłuższa od boku o dokładnie

a) 1;

b) $\sqrt{2}$;

c) $\sqrt{2} - 1$.

3. Liczby rzeczywiste x , y są różne od 0 oraz spełniają warunek $2x = 3y$. Wynika z tego, że

a) $x \leq y$;

b) $x \geq y$;

c) $x \neq y$.

4. Co najmniej 5 krawędzi prostopadłościanu $\mathcal{P}$ ma długość 1. Wynika z tego, że

a) co najmniej 8 krawędzi prostopadłościanu $\mathcal{P}$ ma długość 1;

b) co najmniej jedna ściana prostopadłościanu $\mathcal{P}$ jest kwadratem;

c) prostopadłościan $\mathcal{P}$ jest sześcianem.

5. Liczba dodatnich liczb nieparzystych, mniejszych od 2^{2018} jest równa

a) 2^{1009} ;

b) 2^{2017} ;

c) $(-\sqrt{2})^{4034}$.

6. Istnieje trójkąt, w którym różnica miar pewnych dwóch kątów wewnętrznych jest równa

a) 90° ;

b) 100° ;

c) 200° .

Imiona:

Nazwisko:

Klasa:

7. Liczba naturalna a jest dwucyfrowa, a liczba naturalna b jest trzycyfrowa. Wynika z tego, że

- ☐ a) suma $a + b$ jest liczbą trzycyfrową;
- ☐ b) iloczyn $a \cdot b$ jest liczbą czterocyfrową;
- ☐ c) suma $a + b$ ma mniej cyfr niż iloczyn $a \cdot b$.

8. Istnieje liczba pierwsza $p > 13$ o tej własności, że każda cyfra liczby p jest równa

- ☐ a) 0 lub 7;
- ☐ b) 1 lub 3;
- ☐ c) 2 lub 5.

9. Liczby a , b , c są długościami boków pewnego trójkąta. Wynika z tego, że istnieje trójkąt o bokach długości

- ☐ a) $a + 1$, $b + 1$, $c + 1$;
- ☐ b) a^2 , b^2 , c^2 ;
- ☐ c) $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$.

10. Każda z dwóch wysokości pewnego trójkąta ma długość większą od 1. Wynika z tego, że

- ☐ a) trzecia wysokość tego trójkąta również ma długość większą od 1;
- ☐ b) każdy z boków tego trójkąta ma długość większą od 1;
- ☐ c) pole tego trójkąta jest większe od $\frac{1}{2}$.

11. Liczba x jest wymierna, a liczba y jest niewymierna. Wynika z tego, że

- ☐ a) liczba $x + y$ jest niewymierna;
- ☐ b) liczba $x \cdot y$ jest niewymierna;
- ☐ c) liczba $x + y + x \cdot y$ jest niewymierna.

Imiona:

Nazwisko:

Klasa:

12. Dodatnia liczba całkowita n jest podzielna przez każdą z następujących dziewięciu liczb: $1, 2, 3, \dots, 9$. Wynika z tego, że liczba n jest

a) podzielna przez 10;

b) podzielna przez 27;

c) większa lub równa $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 9$.

13. Sześciokąt foremny podzielono na sześć przystających wielokątów wypukłych. Wynika z tego, że każdy z tych wielokątów ma co najmniej

a) jeden kąt wewnętrzny o mierze 60° ;

b) jeden kąt wewnętrzny o mierze 120° ;

c) dwa kąty wewnętrzne ostre.

14. Każdy punkt prostej pomalowano na czerwono albo na niebiesko w taki sposób, że każdy odcinek o długości 2 zawarty w tej prostej ma końce różnych kolorów. Wynika z tego, że na tej prostej istnieje odcinek o końcach różnych kolorów, którego długość jest równa

a) 4;

b) 5;

c) 6.

15. Sześcian o krawędzi 1 można tak przeciąć płaszczyzną, aby uzyskać w przekroju prostokąt, którego pole jest

a) większe od 1;

b) równe 1;

c) mniejsze od 1.

XIII Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody stopnia pierwszego — część testowa

(28 września 2017 r.)

Rozwiązania zadań testowych

1. W każdym z trzech lat 2018, 2019 i 2020 pensja pana Antoniego będzie o 5% większa od jego pensji z roku poprzedniego. Wynika z tego, że pensja pana Antoniego w roku 2020 będzie większa od jego pensji z roku 2017 o

N	a) dokładnie 15%;
T	b) więcej niż 15%;
N	c) mniej niż 15%.

Komentarz

Oznaczmy przez p_0 wysokość pensji pana Antoniego w 2017 roku. Wówczas pensja p_1 pana Antoniego w roku 2018 będzie wynosić

$$p_1 = p_0 + p_0 \cdot 5\% = p_0 + p_0 \cdot 0,05 = 1,05 \cdot p_0.$$

Analogicznie wyznaczamy pensje p_2 i p_3 pana Antoniego odpowiednio w latach 2019 i 2020:

$$p_2 = 1,05 \cdot p_1 = (1,05)^2 \cdot p_0,$$

$$p_3 = 1,05 \cdot p_2 = (1,05)^3 \cdot p_0.$$

Ponieważ $(1,05)^3 = 1,157625$, więc $p_3 = p_0 + p_0 \cdot 0,157625 = p_0 + p_0 \cdot 15,7625\%$. Pensja pana Antoniego w roku 2020 będzie więc większa od jego pensji w roku 2017 o 15,7625%.

2. Istnieje kwadrat, w którym przekątna jest dłuższa od boku o dokładnie

T	a) 1;
T	b) $\sqrt{2}$;
T	c) $\sqrt{2} - 1$.

Komentarz

W kwadracie o boku a przekątna ma długość $a\sqrt{2}$, więc różnica między długością przekątnej a długością boku jest równa $a(\sqrt{2} - 1)$. Aby zbudować odpowiedni kwadrat w kolejnych podpunktach, rozwiązujemy równania

$$a(\sqrt{2} - 1) = 1, \quad a(\sqrt{2} - 1) = \sqrt{2}, \quad a(\sqrt{2} - 1) = \sqrt{2} - 1,$$

uzyskując odpowiednio $a = \frac{1}{\sqrt{2} - 1}$, $a = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1}$ oraz $a = 1$.

3. Liczby rzeczywiste x, y są różne od 0 oraz spełniają warunek $2x = 3y$. Wynika z tego, że

- ☐ N a) $x \leq y$;
☐ N b) $x \geq y$;
☐ T c) $x \neq y$.

Komentarz

a) Jeżeli $(x, y) = (3, 2)$, to $2x = 3y$ oraz $x > y$.

b) Jeżeli $(x, y) = (-3, -2)$, to $2x = 3y$ oraz $x < y$.

c) Gdyby zachodziła równość $x = y$, to $2x = 3x$. Stąd $x = 0$ wbrew założeniu, że liczba x jest różna od 0.

4. Co najmniej 5 krawędzi prostopadłościanu $\mathcal{P}$ ma długość 1. Wynika z tego, że

- ☐ T a) co najmniej 8 krawędzi prostopadłościanu $\mathcal{P}$ ma długość 1;
☐ T b) co najmniej jedna ściana prostopadłościanu $\mathcal{P}$ jest kwadratem;
☐ N c) prostopadłościan $\mathcal{P}$ jest sześcianem.

Komentarz

a), b) Prostopadłościan o wymiarach $a \times b \times c$ ma cztery krawędzie o długości a , cztery krawędzie o długości b i cztery o długości c . Wobec tego, jeżeli co najmniej 5 krawędzi prostopadłościanu ma długość 1, to co najmniej dwie z liczb a, b, c są równe. To zaś oznacza, że pewne dwie przeciwległe ściany są kwadratami o boku długości 1.

c) Prostopadłościan o wymiarach $1 \times 1 \times 2$ spełnia warunki zadania i nie jest sześcianem.

5. Liczba dodatnich liczb nieparzystych, mniejszych od 2^{2018} jest równa

- ☐ N a) 2^{1009} ;
☐ T b) 2^{2017} ;
☐ T c) $(-\sqrt{2})^{4034}$.

Komentarz

a), b) Ponieważ liczba 2^{2018} jest parzysta, więc wśród liczb $1, 2, 3, \dots, 2^{2018}$ jest dokładnie tyle samo liczb parzystych co nieparzystych. Wobec tego dodatnich liczb nieparzystych, mniejszych od 2^{2018} jest $\frac{1}{2} \cdot 2^{2018} = 2^{2017}$.

c) Mamy $(-\sqrt{2})^{4034} = (-1)^{4034} \cdot (\sqrt{2})^{4034} = 2^{2017}$.

6. Istnieje trójkąt, w którym różnica miar pewnych dwóch kątów wewnętrznych jest równa

T	a) 90° ;
T	b) 100° ;
N	c) 200° .

Komentarz

a) Trójkąt o kątach $30^\circ, 30^\circ, 120^\circ$ ma zadaną własność, gdyż $120^\circ - 30^\circ = 90^\circ$.

b) Trójkąt o kątach $20^\circ, 40^\circ, 120^\circ$ ma zadaną własność, gdyż $120^\circ - 20^\circ = 100^\circ$.

c) Gdyby istniał trójkąt o opisanej własności, to co najmniej jeden z jego kątów wewnętrznych miałby miarę większą od 200° . Nie jest to jednak możliwe, gdyż każdy kąt wewnętrzny trójkąta ma miarę mniejszą od 180° .

7. Liczba naturalna a jest dwucyfrowa, a liczba naturalna b jest trzycyfrowa. Wynika z tego, że

N	a) suma $a + b$ jest liczbą trzycyfrową;
N	b) iloczyn $a \cdot b$ jest liczbą czterocyfrową;
N	c) suma $a + b$ ma mniej cyfr niż iloczyn $a \cdot b$.

Komentarz

a), b) Jeżeli $a = 20$ oraz $b = 990$, to $a + b = 1010$ jest liczbą czterocyfrową, a $a \cdot b = 19800$ jest liczbą pięciocyfrową.

c) Jeżeli $a = 10$ oraz $b = 990$, to obie liczby $a + b = 1000$ oraz $a \cdot b = 9900$ są czterocyfrowe.

8. Istnieje liczba pierwsza $p > 13$ o tej własności, że każda cyfra liczby p jest równa

N	a) 0 lub 7;
T	b) 1 lub 3;
N	c) 2 lub 5.

Komentarz

a) Każda liczba naturalna, której zapis zawiera tylko cyfry 0, 7 jest podzielna przez 7. Wobec tego każda liczba o tej własności i większa od 7 jest złożona.

c) Każda liczba naturalna zakończona cyfrą 2 jest parzysta, a każda liczba zakończona cyfrą 5 jest podzielna przez 5. Wobec tego liczba p składająca się tylko z cyfr 2, 5 jest podzielna przez 2 lub przez 5. Ponieważ $p > 13$, więc liczba p jest złożona.

b) Liczba $p = 31$ jest pierwsza i większa od 13.

9. Liczby a, b, c są długościami boków pewnego trójkąta. Wynika z tego, że istnieje trójkąt o bokach długości

- ☐ T a) $a+1, b+1, c+1$;
☐ N b) a^2, b^2, c^2 ;
☐ T c) $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$.

Komentarz

Trójkąt o bokach x, y, z istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy

$$x+y > z, \quad y+z > x, \quad z+x > y.$$

a) Skoro a, b, c są długościami boków pewnego trójkąta, to $a+b > c$. Wobec tego

$$(a+1) + (b+1) = a+b+2 > c+2 > c+1.$$

W pełni analogicznie wykazujemy pozostałe dwie nierówności. Stąd wniosek, że istnieje trójkąt o bokach długości $a+1, b+1, c+1$.

c) Skoro a, b, c są długościami boków pewnego trójkąta, to $a+b > c$. A zatem

$$a+b+2\sqrt{ab} > a+b > c, \quad \text{skąd} \quad (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 > (\sqrt{c})^2.$$

Wobec tego $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{c}$. Pozostałe dwie nierówności wykazujemy analogicznie.

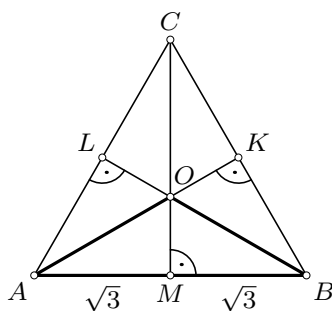
b) Trójkąt o bokach 2, 2, 3 istnieje, a trójkąt o bokach $2^2, 2^2, 3^2$ nie, gdyż $2^2 + 2^2 < 3^2$.

10. Każda z dwóch wysokości pewnego trójkąta ma długość większą od 1. Wynika z tego, że

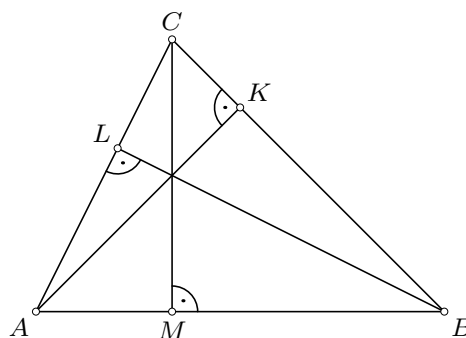
- ☐ N a) trzecia wysokość tego trójkąta również ma długość większą od 1;
☐ T b) każdy z boków tego trójkąta ma długość większą od 1;
☐ T c) pole tego trójkąta jest większe od $\frac{1}{2}$.

Komentarz

a) Rozważmy trójkąt równoboczny ABC o boku długości $2\sqrt{3}$ i oznaczmy przez O punkt przecięcia wysokości tego trójkąta, a przez K, L, M — środki odpowiednio boków BC, CA, AB (rys. 1).



rys. 1



rys. 2

W trójkącie ABO odcinki AL , BK , OM są wysokościami, przy czym

$$AL = BK = \sqrt{3} \quad \text{oraz} \quad OM = \frac{CM}{3} = 1.$$

To oznacza, że dwie z wysokości trójkąta ABO mają długość większą od 1, a trzecia wysokość tego trójkąta ma długość równą 1 (czyli nie większą od 1).

b) Rozważmy dowolny trójkąt ABC spełniający warunki zadania i oznaczmy spodki wysokości poprowadzonych z wierzchołków A , B , C odpowiednio przez K , L , M (rys. 2). Przypuśćmy, że $BL > 1$ oraz $CM > 1$. Wówczas, korzystając z twierdzenia Pitagorasa, uzyskujemy

$$AB^2 = AL^2 + BL^2 \geq BL^2, \quad \text{skąd} \quad AB \geq BL > 1.$$

Podobnie uzasadniamy, że

$$BC^2 = BL^2 + CL^2 \geq BL^2 \quad \text{oraz} \quad CA^2 = CM^2 + AM^2 \geq CM^2,$$

skąd $BC \geq BL > 1$ oraz $CA \geq CM > 1$. Wobec tego każdy bok trójkąta ABC ma długość większą od 1.

c) Przy oznaczeniach z rozwiązania poprzedniego podpunktu, wykorzystując nierówności $AB > 1$ oraz $CM > 1$, otrzymujemy

$$[ABC] = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CM > \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2},$$

gdzie $[ABC]$ oznacza pole trójkąta ABC .

11. Liczba x jest wymierna, a liczba y jest niewymierna. Wynika z tego, że

T	a) liczba $x + y$ jest niewymierna;
N	b) liczba $x \cdot y$ jest niewymierna;
N	c) liczba $x + y + x \cdot y$ jest niewymierna.

Komentarz

a) Gdyby liczba $x + y$ była wymierna, to również liczba $y = (x + y) - x$ byłaby wymierna, jako różnica liczb wymiernych — sprzeczność. Wobec tego liczba $x + y$ jest niewymierna.

b) Przyjmując $x = 0$ oraz $y = \sqrt{2}$, uzyskujemy $x \cdot y = 0$, co jest liczbą wymierną.

c) Przyjmując $x = -1$ oraz $y = \sqrt{2}$, uzyskujemy $x + y + x \cdot y = -1 + \sqrt{2} - \sqrt{2} = -1$, co jest liczbą wymierną.

12. Dodatnia liczba całkowita n jest podzielna przez każdą z następujących dziewięciu liczb: $1, 2, 3, \dots, 9$. Wynika z tego, że liczba n jest

T	a) podzielna przez 10;
N	b) podzielna przez 27;
N	c) większa lub równa $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 9$.

Komentarz

b), c) Zauważmy, że liczba $n = 5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9$ jest podzielna przez każdą z liczb $1, 2, 3, \dots, 9$. Jednak liczba ta nie jest podzielna przez 27, gdyż liczba $\frac{n}{27} = \frac{280}{3}$ nie jest całkowita. Liczba n jest także mniejsza od $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 9$.

a) Liczba n jest podzielna przez 2 i przez 5, więc jest także podzielna przez najmniejszą wspólną wielokrotność liczb 2 i 5, czyli przez 10.

13. Sześciokąt foremny podzielono na sześć przystających wielokątów wypukłych. Wynika z tego, że każdy z tych wielokątów ma co najmniej

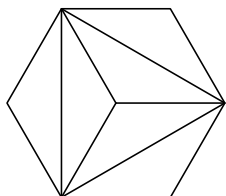
- ☐ N a) jeden kąt wewnętrzny o mierze 60° ;
- ☐ N b) jeden kąt wewnętrzny o mierze 120° ;
- ☐ N c) dwa kąty wewnętrzne ostre.

Komentarz

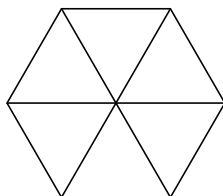
a) Sześciokąt foremny można podzielić na sześć przystających trójkątów o kątach $30^\circ, 30^\circ, 120^\circ$ (rys. 3).

b) Sześciokąt foremny można podzielić na sześć przystających trójkątów równobocznych (rys. 4).

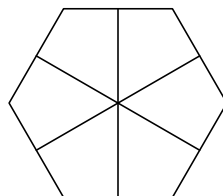
c) Sześciokąt foremny można podzielić na sześć przystających czworokątów o kątach $60^\circ, 90^\circ, 90^\circ, 120^\circ$ (rys. 5 lub rys. 6).



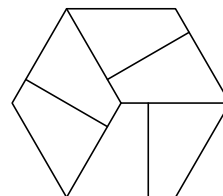
rys. 3



rys. 4



rys. 5



rys. 6

14. Każdy punkt prostej pomalowano na czerwono albo na niebiesko w taki sposób, że każdy odcinek o długości 2 zawarty w tej prostej ma końce różnych kolorów. Wynika z tego, że na tej prostej istnieje odcinek o końcach różnych kolorów, którego długość jest równa

- ☐ N a) 4;
- ☐ T b) 5;
- ☐ T c) 6.

Komentarz

a) Oznaczmy przez AB dowolny odcinek długości 4 zawarty w danej prostej, a przez M środek tego odcinka. Wówczas odcinki AM oraz BM mają długość 2, więc z warunków zadania wynika, że zarówno A , jak i B są innego koloru niż M . To oznacza, że punkty A i B mają ten sam kolor. Z dowolności wyboru odcinka AB wynika, że każdy odcinek długości 4 ma końce tego samego koloru.

c) Oznaczmy przez AB dowolny odcinek długości 6 zawarty w danej prostej, a przez K i L takie punkty, że $AK = KL = LB = 2$. Wówczas punkty A oraz K są innego koloru, a punkty K i B są tego samego koloru (co wynika z rozwiązania pierwszego podpunktu). Wobec tego punkty A i B są różnych kolorów.

b) Oznaczmy przez AB dowolny odcinek długości 10 zawarty w danej prostej, przez M — środek tego odcinka, a przez N — taki punkt, że $AN = 4$ oraz $NB = 6$. Z rozwiązania podpunktu a) wnioskujemy, że A i N mają ten sam kolor, a z rozwiązania podpunktu c) otrzymujemy, że N i B są różnych kolorów. To oznacza, że punkty A i B są różnych kolorów. W takim razie jeden z odcinków AM , BM długości 5 ma końce różnych kolorów.

Uwaga

Zauważmy, że w podpunkcie c) wykazaliśmy własność znacznie ogólniejszą niż sformułowaną w treści zadania, mianowicie *każdy* odcinek długości 6 ma końce różnego koloru.

15. Sześcian o krawędzi 1 można tak przeciąć płaszczyzną, aby uzyskać w przekroju prostokąt, którego pole jest

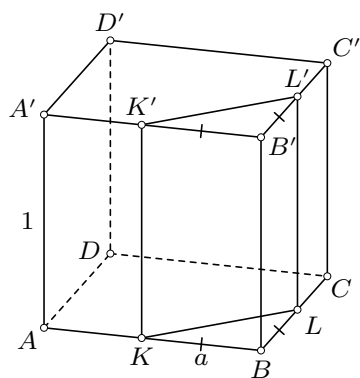
T	a) większe od 1;
T	b) równe 1;
T	c) mniejsze od 1.

Komentarz

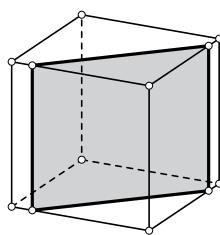
Niech $ABCD A' B' C' D'$ będzie sześcianem o krawędzi 1, którego wierzchołki są tak oznaczone, że kwadraty $ABCD$, $ABB' A'$ oraz $A' B' C' D'$ są jego ścianami. Oznaczmy przez K , L , K' , L' takie punkty leżące odpowiednio na krawędziach AB , BC , $A' B'$, $B' C'$, że

$$BK = BL = B' K' = B' L' = a,$$

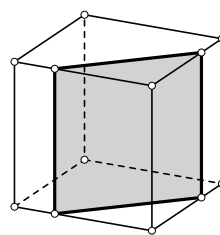
przy czym $0 < a < 1$ (rys. 7). Wówczas czworokąty $BKK' B'$ oraz $BLL' B'$ są prostokątami, więc wielościan $BKLB' K' L'$ jest graniastosłupem prostym. Zatem czworokąt $KLL' K'$ jest prostokątem, którego pole jest równe $KL \cdot KK' = a\sqrt{2}$.



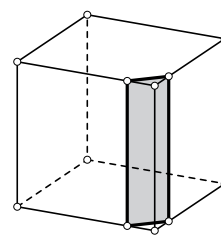
rys. 7



rys. 8



rys. 9



rys. 10

- a) Jeżeli $a > \frac{1}{\sqrt{2}}$ (rys. 8), to $KLL'K'$ jest prostokątem o polu większym od 1.
- b) Jeżeli $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (rys. 9), to $KLL'K'$ jest prostokątem o polu równym 1.
- c) Jeżeli $a < \frac{1}{\sqrt{2}}$ (rys. 10), to $KLL'K'$ jest prostokątem o polu mniejszym od 1.

Uwaga

W podpunkcie b) odpowiednie cięcie można zrealizować również płaszczyzną równoległą do pewnej pary przeciwległych ścian sześcianu. Z kolei w podpunkcie a) można także na przykład rozważyć cięcie przez parę przeciwległych krawędzi sześcianu (np. płaszczyzną $ACC'A'$, co odpowiada $a = 1$ w przedstawionej w rozwiązaniu konstrukcji).

XIII Olimpiada Matematyczna Juniorów

Statystyki dotyczące części testowej

zawodów pierwszego stopnia (2017/2018)

(28 września 2017 r.)

Tabela 1.

Procentowa liczba poprawnych odpowiedzi w poszczególnych podpunktach.

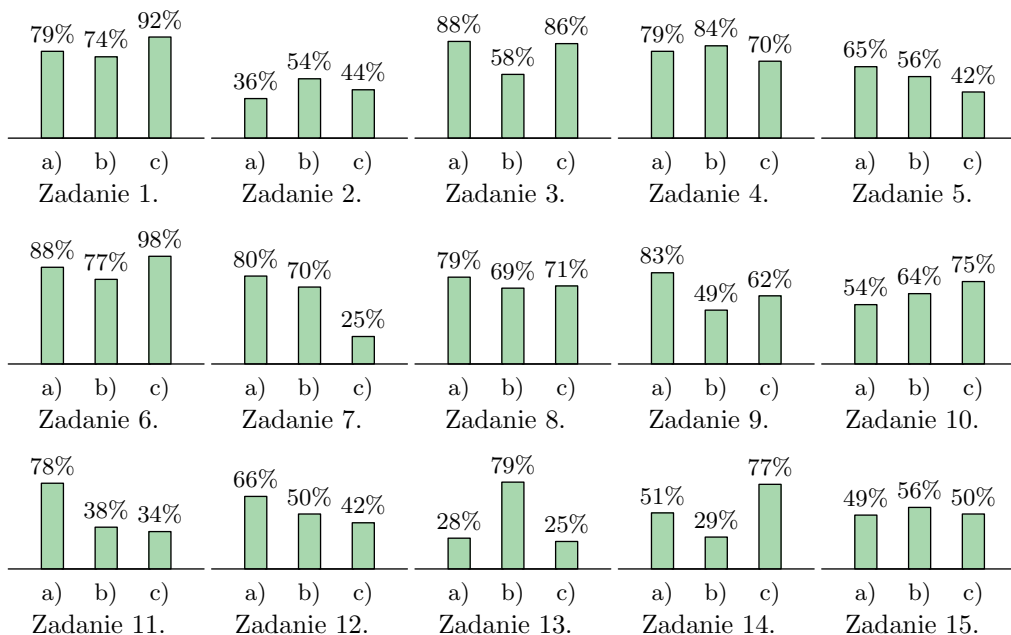
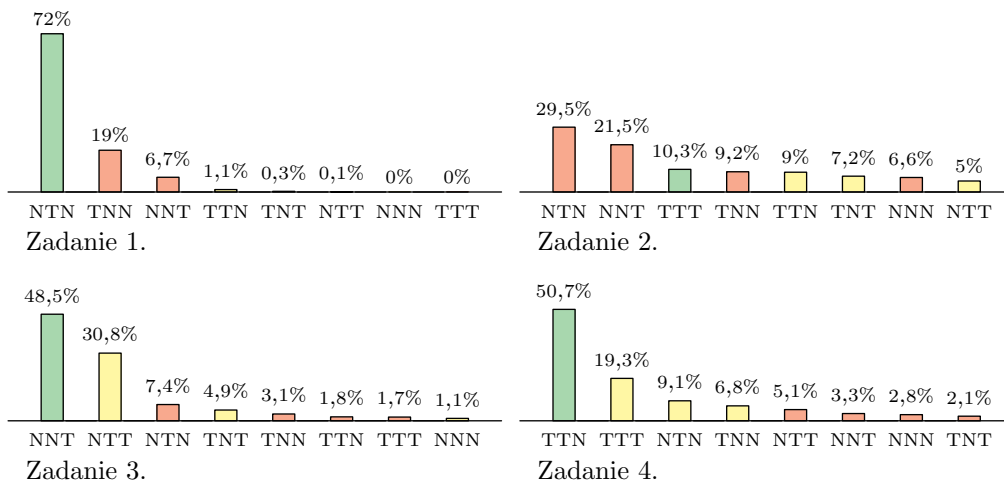
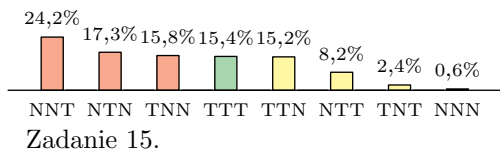
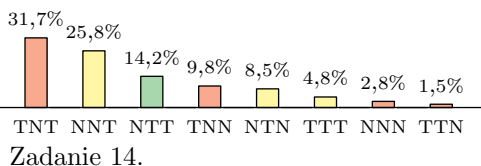
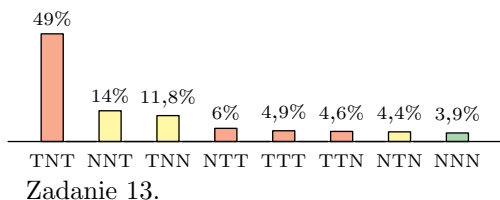
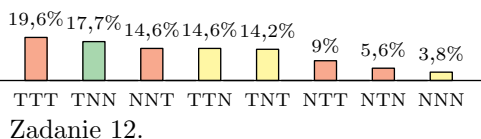
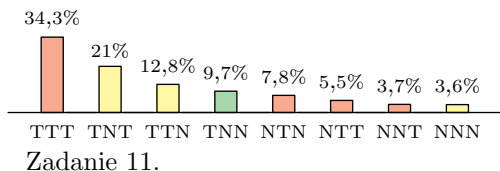
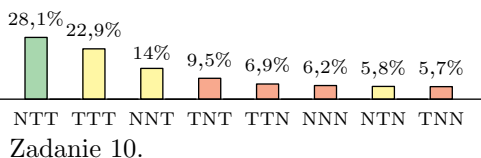
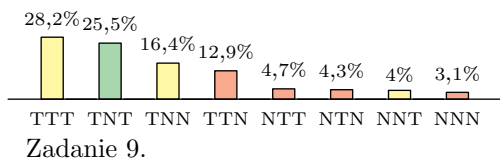
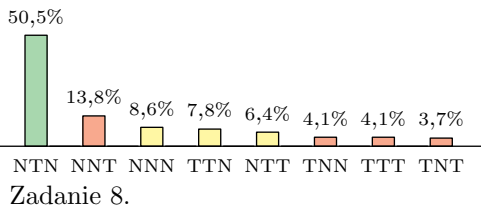
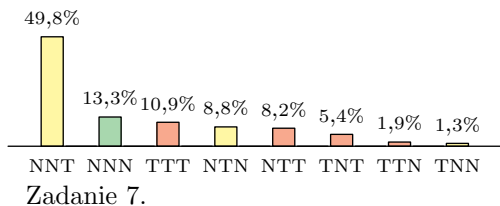
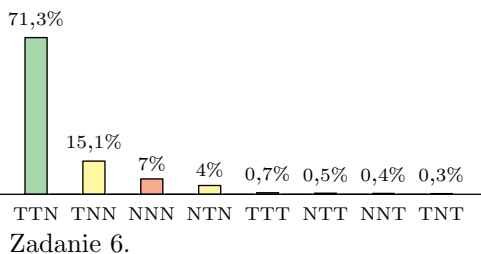
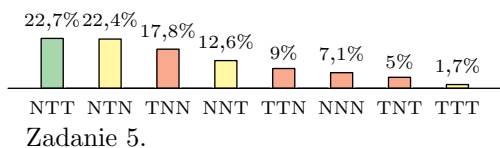


Tabela 2.

Procentowa liczba udzielonych kombinacji odpowiedzi w poszczególnych zadaniach.





Zestaw odpowiedzi za:

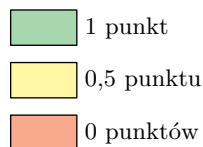


Tabela 3.

Rzeczywista oraz procentowa liczba osób, które uzyskały daną sumę punktów.

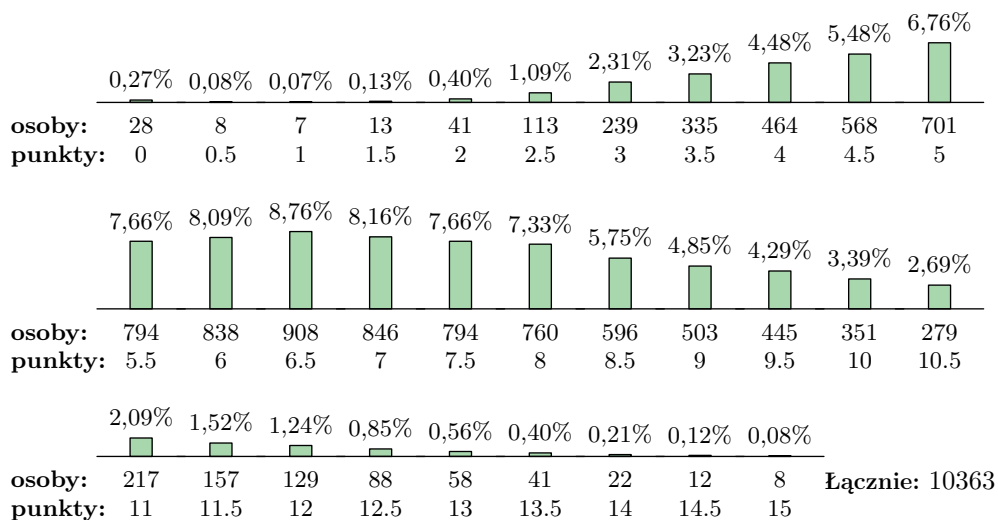


Tabela 4.

Procentowa i rzeczywista liczba osób, które uzyskały daną lub większą sumę punktów.

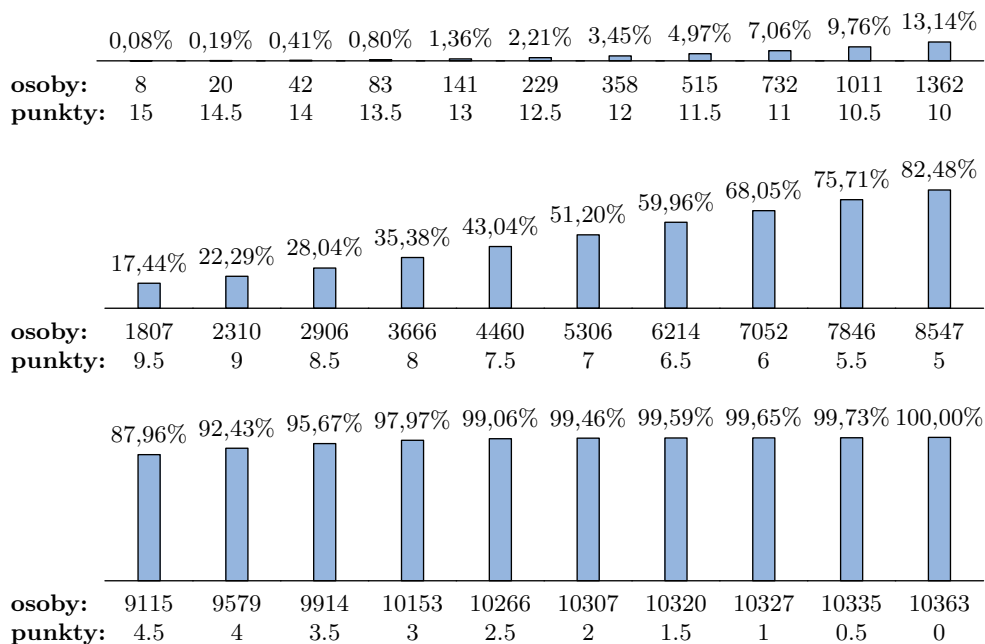


Tabela 5.

Procentowa liczba uzyskanych punktów za poszczególne zadania.

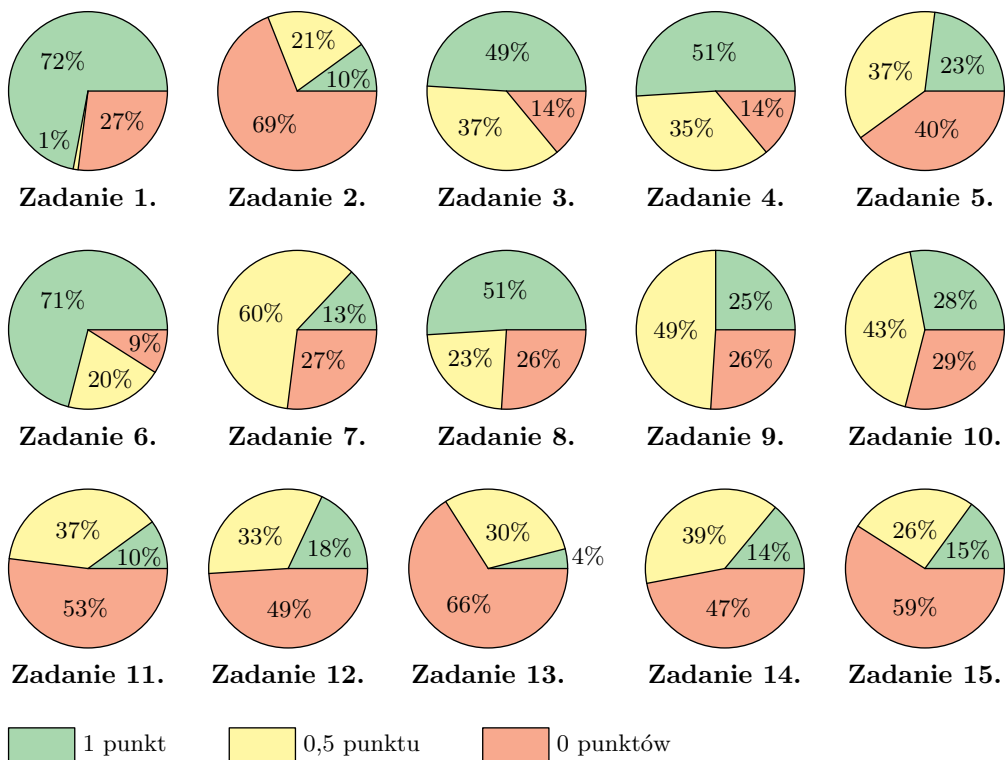


Tabela 6.

Średnia z uzyskanych punktów za poszczególne zadania.

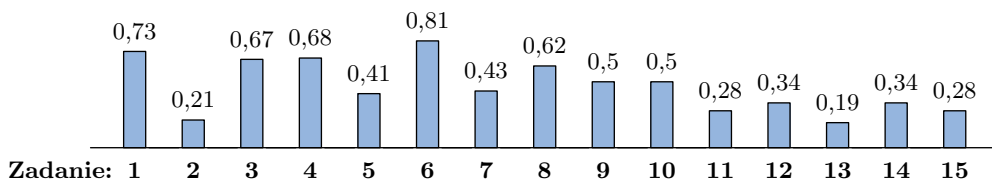


Tabela 7.

Średnia uzyskanych punktów ze wszystkich zadań w podziale na województwa i inne regiony

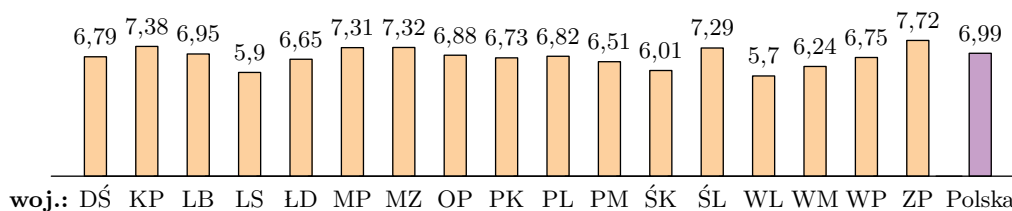
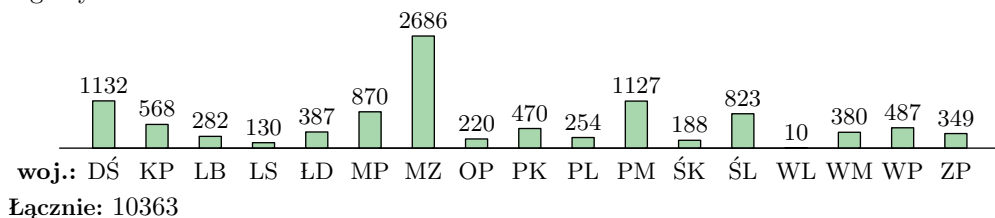
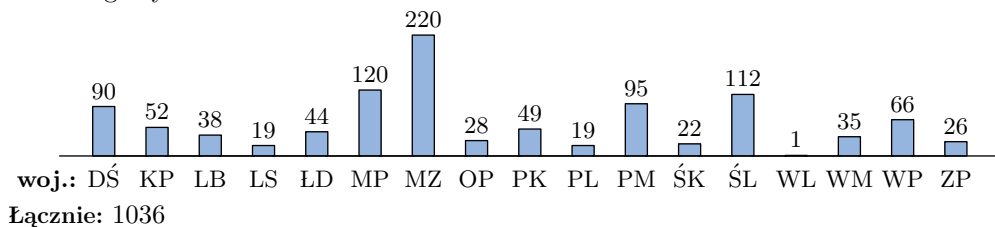


Tabela 8.

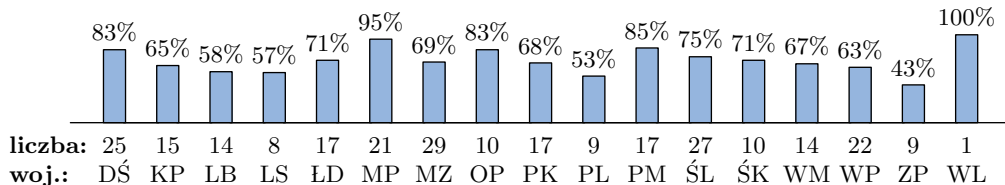
Liczba uczniów, którzy wzięli udział w zawodach w podziale na województwa i inne regiony.

**Tabela 9.**

Liczba szkół, których uczniowie wzięli udział w zawodach w podziale na województwa i inne regiony.

**Tabela 10.**

Rzeczywista i procentowa liczba powiatów w danym województwie, z których co najmniej jedna szkoła wzięła udział w zawodach.



Skróty województw i innych regionów

DŚ — dolnośląskie

LB — lubelskie

ŁD — łódzkie

MZ — mazowieckie

PK — podkarpackie

PM — pomorskie

ŚL — śląskie

WP — wielkopolskie

WL — Wilno

KP — kujawsko-pomorskie

LS — lubuskie

MP — małopolskie

OP — opolskie

PL — podlaskie

ŚK — świętokrzyskie

WM — warmińsko-mazurskie

ZP — zachodniopomorskie

MINISTERSTWO
EDUKACJI
NARODOWEJ



Stowarzyszenie
na rzecz Edukacji
Matematycznej

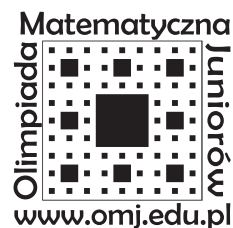


Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

XIII Olimpiada Matematyczna Juniorów (2017/18)

Zadania konkursowe zawodów pierwszego stopnia — część korespondencyjna

(1 września – 16 października 2017 r.)

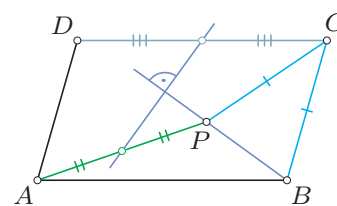


1. Liczby a, b, c spełniają zależności

$$3a + 4b = 3c \quad \text{oraz} \quad 4a - 3b = 4c.$$

Wykaż, że $a^2 + b^2 = c^2$.

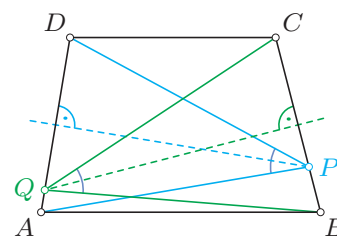
2. Wewnątrz równoległoboku $ABCD$ znajduje się taki punkt P , że $PC = BC$. Udowodnij, że prosta BP jest prostopadła do prostej łączącej środki odcinków AP i CD .



Zadanie 2

3. Liczby pierwsze a, b, c są większe od 3. Udowodnij, że liczba $(a-b)(b-c)(c-a)$

jest podzielna przez 48.



Zadanie 4

4. Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD . Symetralne ramion AD i BC przecinają odcinki BC i AD odpowiednio w punktach P i Q . Wykaż, że $\angle APD = \angle BQC$.

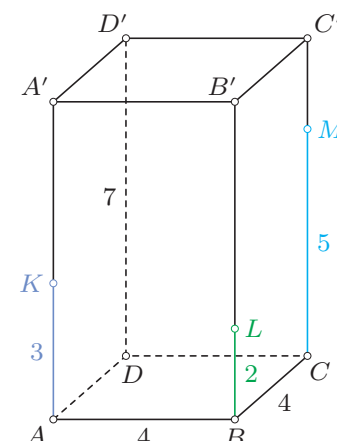
5. Każdą liczbę całkowitą należy pokolorować na jeden z trzech kolorów, w tym czerwony. Należy to uczynić w taki sposób, by każda liczba, którą można przedstawić w postaci sumy dwóch liczb o różnych kolorach miała kolor czerwony. Czy da się zrealizować takie kolorowanie, używając wszystkich trzech kolorów? Odpowiedź uzasadnij.

6. Dodatnie liczby całkowite k, m, n spełniają równość $m^2 + n = k^2 + k$. Wykaż, że $m \leq n$.

7. Kwadrat $ABCD$ o boku 4 jest podstawą prostopadłościanu $ABCD A'B'C'D'$. Krawędzie boczne AA', BB', CC', DD' tego prostopadłościanu mają długość 7. Punkty K, L, M leżą odpowiednio na odcinkach AA', BB', CC' , przy czym

$$AK = 3, \quad BL = 2, \quad CM = 5.$$

Płaszczyzna przechodząca przez punkty K, L, M rozcina prostopadłościan na dwie bryły. Wyznacz objętości obu tych brył.



Zadanie 7

Rozwiązania powyższych zadań (wszystkich lub części z nich) należy przekazać szkolnemu koordynatorowi OMJ lub przesłać bezpośrednio, listem poleconym, do Komitetu Okręgowego OMJ właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

16 października 2017 r. (decyduje data stempla pocztowego).

Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym lub pod niewłaściwy adres nie będą rozpatrywane. Adresy Komitetów Okręgowych OMJ, szczegółowe wytyczne dotyczące sposobu redakcji rozwiązań i przysyłania prac, a także regulamin OMJ i inne bieżące informacje znajdują się na stronie internetowej Olimpiady: www.omj.edu.pl.

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej. Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku.

XIII Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody stopnia pierwszego — część korespondencyjna

(1 września 2017 r. – 16 października 2017 r.)

Szkice rozwiązań zadań konkursowych

1. Liczby a , b , c spełniają zależności

$$3a + 4b = 3c \quad \text{oraz} \quad 4a - 3b = 4c.$$

Wykaż, że $a^2 + b^2 = c^2$.

Skic rozwiązania

Sposób I

Mnożąc obie strony pierwszej równości przez 4, a drugiej przez 3, uzyskujemy

$$12a + 16b = 12c \quad \text{oraz} \quad 12a - 9b = 12c.$$

Odejmując stronami otrzymane zależności, dostajemy $25b = 0$, czyli $b = 0$. Wobec tego $a = c$ i wówczas $a^2 + b^2 = a^2 = c^2$.

Sposób II

Podnosząc dane równości stronami do kwadratu, uzyskujemy

$$9c^2 = (3a + 4b)^2 = 9a^2 + 24ab + 16b^2,$$

$$16c^2 = (4a - 3b)^2 = 16a^2 - 24ab + 9b^2.$$

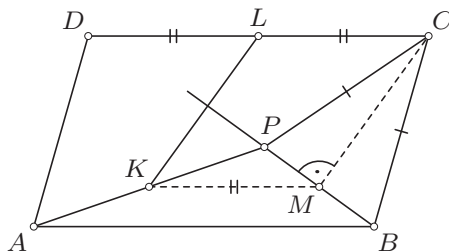
Dodając stronami powyższe zależności, otrzymujemy $25c^2 = 25a^2 + 25b^2$, czyli $c^2 = a^2 + b^2$. To kończy dowód.

2. Wewnątrz równoległoboku $ABCD$ znajduje się taki punkt P , że $PC = BC$. Udowodnij, że prosta BP jest prostopadła do prostej łączącej środki odcinków AP i CD .

Skic rozwiązania

Sposób I

Oznaczmy przez K , L , M środki odpowiednio odcinków AP , CD , BP (rys. 1). Wówczas prosta CM jest prostopadła do prostej BP jako wysokość trójkąta równoramiennego BCP . Aby rozwiązać zadanie, wystarczy więc udowodnić, że proste KL i CM są równoległe.



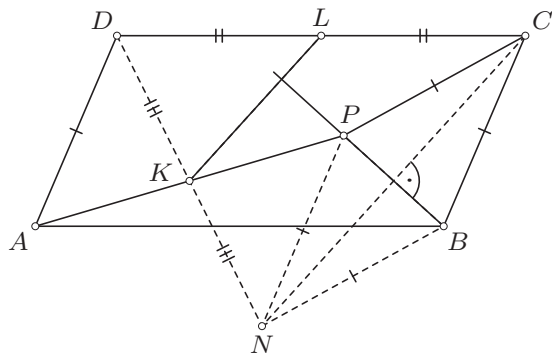
rys. 1

Skoro KM łączy środki dwóch boków AP i BP w trójkącie ABP , to $KM = \frac{1}{2}AB$ oraz proste KM i AB są równoległe. Ponadto $LC = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}AB$ oraz proste LC i AB są równoległe. Łącząc powyższe obserwacje, wnioskujemy, że odcinki KM i LC są równoległe oraz mają równą długość. To oznacza, że czworokąt $KMCL$ jest równoległobokiem. W szczególności proste KL i CM są równoległe, co kończy rozwiązanie zadania.

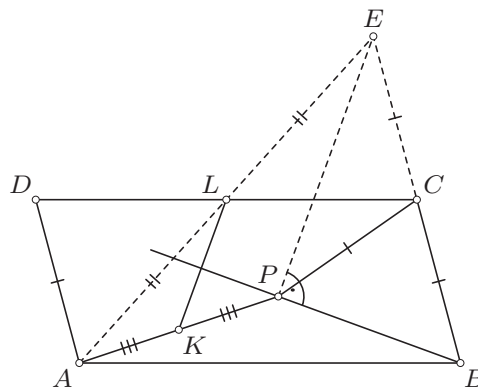
Sposób II

Oznaczmy przez K i L środki odpowiednio odcinków AP i CD , a przez N taki punkt, że czworokąt $ADPN$ jest równoległobokiem (rys. 2). Wówczas odcinek KL łączy środki boków ND i CD trójkąta CDN , wobec czego jest on równoległy do boku CN .

Zauważmy, że BC i AD oraz AD i PN to pary odcinków równych i równoległych, wobec czego odcinki BC i PN są równe i równoległe, a zatem czworokąt $BCPN$ jest równoległobokiem. Ponieważ $PC = BC$, więc równoległobok ten jest rombem i w konsekwencji jego przekątne BP i CN są prostopadłe. A ponieważ odcinki KL i CN są równoległe, więc proste KL i BP są prostopadłe, co kończy rozwiązanie zadania.



rys. 2



rys. 3

Sposób III

Oznaczmy przez K i L środki odpowiednio odcinków AP i CD , a przez E punkt symetryczny do punktu B względem punktu C (rys. 3). Wówczas odcinki AD i CE są równe i równoległe, wobec czego czworokąt $ACED$ jest równoległobokiem. W szczególności punkt L , jako środek przekątnej CD , jest także środkiem przekątnej AE .

W trójkącie APE odcinek KL łączy środki boków AP i AE , wobec czego prosta KL jest równoległa do boku PE . Co więcej, $BC = PC = CE$, więc punkt P leży na okręgu o średnicy BE , a zatem $\angle BPE = 90^\circ$. To kończy rozwiązanie.

Uwaga

W przedstawionych rozwiązaniach kluczowe było uzupełnienie rysunku o pewien element pozwalający uchwycić niewidoczne na pierwszy rzut oka zależności. Metodom rozwiązywania zadań geometrycznych w taki sposób poświęcone są artykuły *Dorysujmy środek odcinka*, Kwadrat nr 19 (styczeń 2017) oraz *Dorysujmy równoległobok*, Kwadrat nr 20 (wrzesień 2017).

3. Liczby pierwsze a , b , c są większe od 3. Udowodnij, że liczba

$$(a-b)(b-c)(c-a)$$

jest podzielna przez 48.

Szkic rozwiązania

Z warunków zadania wynika, że liczby a , b , c są nieparzyste i niepodzielne przez 3. W szczególności liczby te mogą dawać tylko reszty 1 i 3 przy dzieleniu przez 4 oraz tylko reszty 1 i 2 przy dzieleniu przez 3.

Ponieważ pewne dwie z liczb a , b , c dają tę samą resztę przy dzieleniu przez 3, więc co najmniej jedna z liczb $a-b$, $b-c$, $c-a$ jest podzielna przez 3. To oznacza, że iloczyn $(a-b)(b-c)(c-a)$ jest liczbą podzielną przez 3.

Podobnie, ponieważ pewne dwie z liczb a, b, c dają tę samą resztę przy dzieleniu przez 4, więc pewna spośród liczb $a-b, b-c, c-a$ jest podzielna przez 4. Ponadto wszystkie te liczby są parzyste, więc każda z pozostałych dwóch liczb jest podzielna przez 2. W konsekwencji iloczyn $(a-b)(b-c)(c-a)$ jest liczbą podzielną przez $4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$.

Ponieważ liczby 3 i 16 są względnie pierwsze, więc łącząc uzyskane wnioski, otrzymujemy, że liczba $(a-b)(b-c)(c-a)$ jest podzielna przez $3 \cdot 16 = 48$.

4. Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD . Symetralne ramion AD i BC przecinają boki BC i AD odpowiednio w punktach P i Q . Wykaż, że $\sphericalangle APD = \sphericalangle BQC$.

Szkic rozwiązania

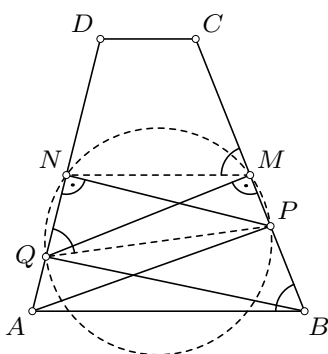
Odnotujemy, że $AP = DP$ oraz $BQ = CQ$, więc trójkąty APD oraz BQC są równoramienne. Wobec tego postulowana równość kątów zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy trójkąty te są podobne, czyli gdy $\sphericalangle PAD = \sphericalangle QBC$.

Ponieważ punkty A i B leżą po tej samej stronie prostej PQ , więc aby zakończyć rozwiązanie, wystarczy wykazać, że na czworokącie $ABPQ$ można opisać okrąg.

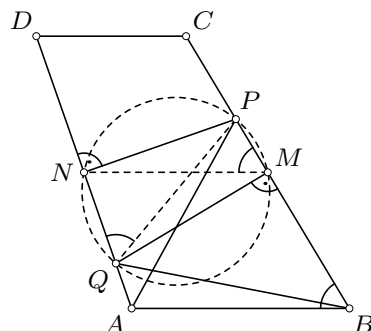
Oznaczmy przez M i N odpowiednio środki ramion BC i AD danego trapezu. Ponieważ $\sphericalangle PMQ = \sphericalangle PNQ = 90^\circ$, więc punkty M i N leżą na okręgu o średnicy PQ (również wtedy, gdy $P = M$ lub $Q = N$). Wówczas

$$\sphericalangle CMN = \sphericalangle DQP,$$

niezależnie od tego, czy punkty M i N leżą po tej samej stronie prostej PQ (rys. 4), czy po przeciwnych stronach tej prostej (rys. 5).



rys. 4



rys. 5

Proste MN i AB są równoległe, co w połączeniu z powyższą równością prowadzi do

$$\sphericalangle PBA = \sphericalangle CMN = \sphericalangle DQP = 180^\circ - \sphericalangle AQP}.$$

Stąd $\sphericalangle PBA + \sphericalangle AQP = 180^\circ$, a to oznacza, że na czworokącie wypukłym $ABPQ$ można opisać okrąg. To kończy dowód.

Uwaga

W rozwiązaniu korzystaliśmy z następującego twierdzenia: *odcinek łączący środki ramion trapezu jest równoległy do podstaw trapezu*. Dowód tej własności można znaleźć w książeczce Waldemara Pompe *Wokół obrotów, przewodnik po geometrii elementarnej*, Wydawnictwo Szkolne OMEGA, Kraków 2016 (wniosek 4.9).

5. Każdą liczbę całkowitą należy pokolorować na jeden z trzech kolorów, w tym czerwony. Należy to uczynić w taki sposób, by każda liczba, którą można przedstawić w postaci sumy dwóch liczb o różnych kolorach miała kolor czerwony. Czy da się zrealizować takie kolorowanie, używając wszystkich trzech kolorów? Odpowiedź uzasadnij.

Szkic rozwiązania

Przypuśćmy, że kolorowanie zgodne z warunkami zadania jest możliwe. To oznacza, że istnieją liczby całkowite a, b, c , z których każde dwie mają inny kolor.

Liczba 0 ma ten sam kolor co jedna z liczb a, b, c . Możemy bez straty ogólności przyjąć, że 0 ma ten sam kolor co a . Wówczas obie liczby $b = b + 0$ oraz $c = c + 0$ są przedstawione w postaci sumy dwóch liczb o różnych kolorach. Z warunków zadania wynika wówczas, że liczby b oraz c są czerwone. Jest to sprzeczność, gdyż liczby b oraz c są różnych kolorów.

Uzyskana sprzeczność dowodzi, że nie istnieje kolorowanie mające zadaną własność.

Uwaga

Istnieją kolorowania przy użyciu dwóch kolorów, powiedzmy czerwonego i niebieskiego, mające zadaną własność. Można na przykład pokolorować wszystkie liczby nieparzyste na czerwono, a wszystkie liczby parzyste na niebiesko. Wówczas suma każdych dwóch liczb różnego koloru, czyli suma liczby parzystej i nieparzystej, jest nieparzysta, czyli czerwona.

6. Dodatkowo liczby całkowite k, m, n spełniają równość $m^2 + n = k^2 + k$. Wykaż, że $m \leq n$.

Szkic rozwiązania

Sposób I

Zauważmy, że $m \leq k$. Istotnie: gdyby $m \geq k + 1$, to

$$m^2 + n > m^2 \geq k^2 + 2k + 1 > k^2 + k,$$

co nie może mieć miejsca. Zatem rzeczywiście $m \leq k$ i w konsekwencji

$$k^2 + k = m^2 + n \leq k^2 + n,$$

skąd $k \leq n$. Łącząc uzyskane nierówności $m \leq k$ i $k \leq n$, dostajemy tezę zadania.

Sposób II

Z danej w treści zadania równości wynika, że

$$4n + 1 = 4(k^2 + k - m^2) + 1 = 4k^2 + 4k + 1 - 4m^2 = (2k + 1)^2 - (2m)^2 = (2k + 1 - 2m)(2k + 1 + 2m).$$

Ponieważ liczby $4n + 1$ oraz $2k + 1 + 2m$ są dodatnie, więc również liczba $2k + 1 - 2m$ jest dodatnia, skąd wniosek, że

$$2k + 1 - 2m \geq 1, \quad \text{czyli} \quad m \leq k.$$

Ponadto liczba $2k + 1 + 2m$ jest dzielnikiem liczby $4n + 1$, wobec czego

$$2k + 1 + 2m \leq 4n + 1, \quad \text{czyli} \quad k + m \leq 2n.$$

Łącząc uzyskane nierówności, otrzymujemy

$$2m = m + m \leq k + m \leq 2n, \quad \text{czyli} \quad m \leq n,$$

co było do udowodnienia.

Sposób III

Przypuśćmy, że istnieje trójka liczb spełniających warunki zadania, dla której $m > n$. Wówczas

$$m^2 + n < m^2 + m = m(m + 1) \quad \text{oraz} \quad m^2 + n > m^2 > m^2 - m = (m - 1)m.$$

Łącząc powyższe nierówności z daną w treści zadania równością $m^2 + n = k(k + 1)$, otrzymujemy

$$(m - 1)m < k(k + 1) < m(m + 1).$$

To oznacza, że liczba $k(k+1)$ będąca iloczynem dwóch kolejnych liczb naturalnych znajduje się pomiędzy liczbami $(m-1)m$ a $m(m+1)$, czyli kolejnymi iloczynami dwóch kolejnych liczb naturalnych. Uzyskana sprzeczność kończy rozwiązanie.

Uwaga

Przedstawione w ostatnim sposobie rozwiązania rozumowanie polegające na szacowaniach angażujących kolejne liczby całkowite konkretnej postaci warto porównać z metodą opisaną w artykule *Między kwadratami*, *Kwadrat* nr 20 (wrzesień 2017).

7. Kwadrat $ABCD$ o boku 4 jest podstawą prostopadłościanu $ABCD A' B' C' D'$. Krawędzie boczne AA' , BB' , CC' , DD' tego prostopadłościanu mają długość 7. Punkty K , L , M leżą odpowiednio na odcinkach AA' , BB' , CC' , przy czym

$$AK = 3, \quad BL = 2, \quad CM = 5.$$

Płaszczyzna przechodząca przez punkty K , L , M rozcina prostopadłościan na dwie bryły. Wyznacz objętości obu tych brył.

Szkic rozwiązania

Rozważmy takie punkty A'' , B'' , C'' , D'' leżące odpowiednio na półprostych $AA' \rightarrow$, $BB' \rightarrow$, $CC' \rightarrow$, $DD' \rightarrow$, że $AA'' = BB'' = CC'' = DD'' = 8$. Wówczas objętość prostopadłościanu $A' B' C' D' A'' B'' C'' D''$ jest równa $4 \cdot 4 \cdot 1 = 16$.

Oznaczmy przez N punkt przecięcia płaszczyzny KLM z prostą DD'' . Zauważmy, że (leżące w jednej płaszczyźnie) proste KL i MN są równoległe, gdyż są zawarte w równoległych płaszczyznach $ABB' A'$, $CDD' C'$. Podobnie proste KN i LM są równoległe. Wobec tego czworokąt $KLMN$ jest równoległobokiem. Oznaczmy przez S środek symetrii tego równoległoboku.

Ponieważ $MC'' = CC'' - CM = 8 - 5 = 3 = AK$ oraz odcinki AK i MC'' są równoległe, więc $AKC''M$ jest równoległobokiem. W szczególności punkt S jest środkiem przekątnej AC'' prostopadłościanu $ABCD A'' B'' C'' D''$, czyli środkiem symetrii tego prostopadłościanu. To zaś oznacza, że płaszczyzna $KLMN$ dzieli prostopadłościan na dwie bryły o równych objętościach, równych $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot 8 = 64$.

Jedna z brył uzyskanych w wyniku podziału opisanego w poprzednim akapicie (zawierająca ścianę $ABCD$) pokrywa się z bryłą, której objętość należy znaleźć. Druga zaś powstaje z drugiej szukanej bryły przez doklejenie prostopadłościanu $A' B' C' D' A'' B'' C'' D''$. Wobec tego odpowiedź są liczby 64 oraz $64 - 16 = 48$.

XIII Olimpiada Matematyczna Juniorów

Statystyki dotyczące zawodów części korespondencyjnej (2017/18)

(1 września – 16 października 2017 r.)

Tabela 1. Liczba uczniów, którzy wzięli udział w zawodach w podziale na województwa.

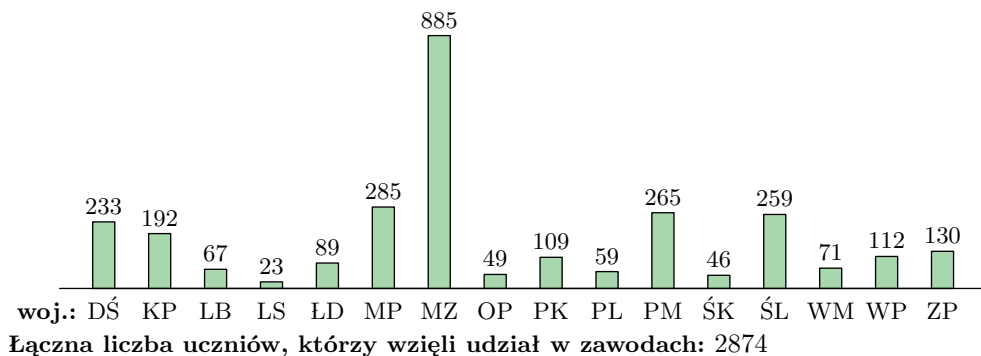
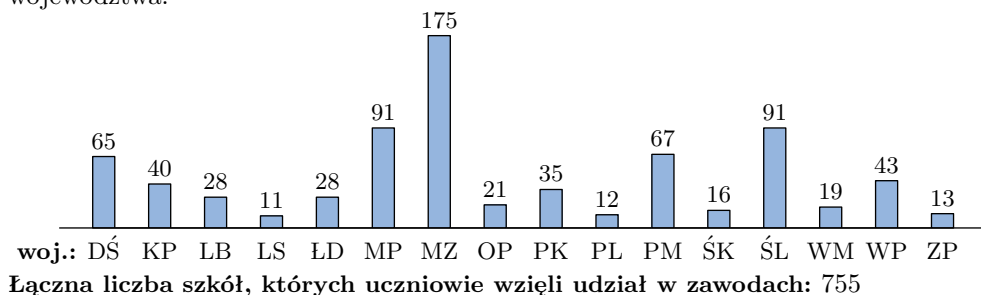


Tabela 2. Liczba szkół, których uczniowie wzięli udział w zawodach w podziale na województwa.



Skróty województw

DŚ — dolnośląskie
LB — lubelskie
ŁD — łódzkie
MZ — mazowieckie
PK — podkarpackie
PM — pomorskie
ŚL — śląskie
WP — wielkopolskie

KP — kujawsko-pomorskie
LS — lubuskie
MP — małopolskie
OP — opolskie
PL — podlaskie
ŚK — świętokrzyskie
WM — warmińsko-mazurskie
ZP — zachodniopomorskie

Tabela 3. Procentowa liczba osób, które uzyskały daną liczbę punktów za poszczególne zadania.

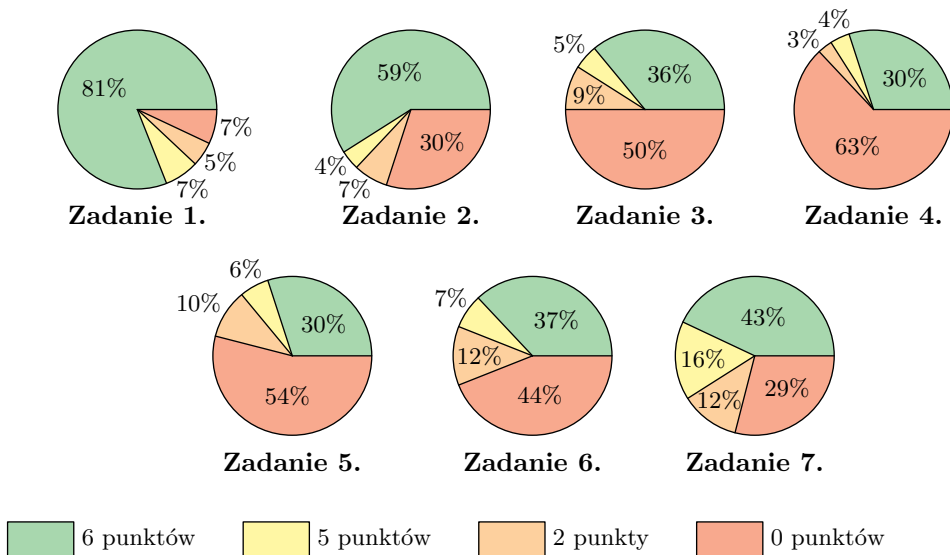


Tabela 4. Średnia uzyskanych punktów za poszczególne zadania.

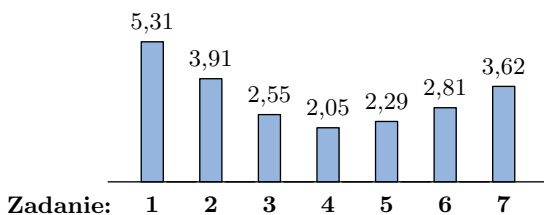


Tabela 5. Liczba nadesłanych prac dotyczących poszczególnych zadań.

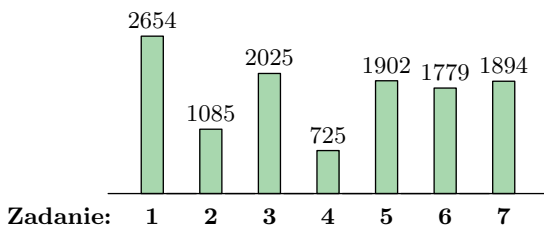


Tabela 6. Średnia uzyskanej sumy punktów w podziale na województwa.

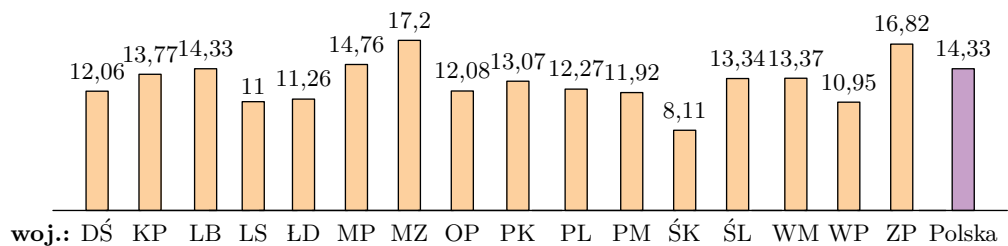


Tabela 7. Procentowa i rzeczywista liczba osób, które uzyskały daną sumę punktów.

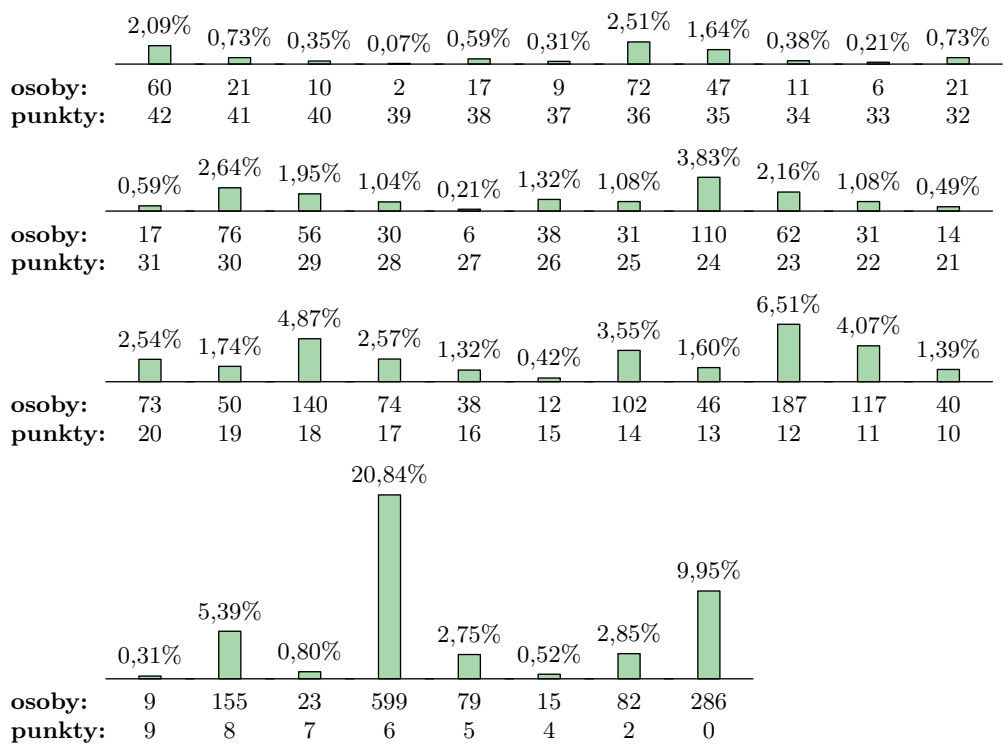
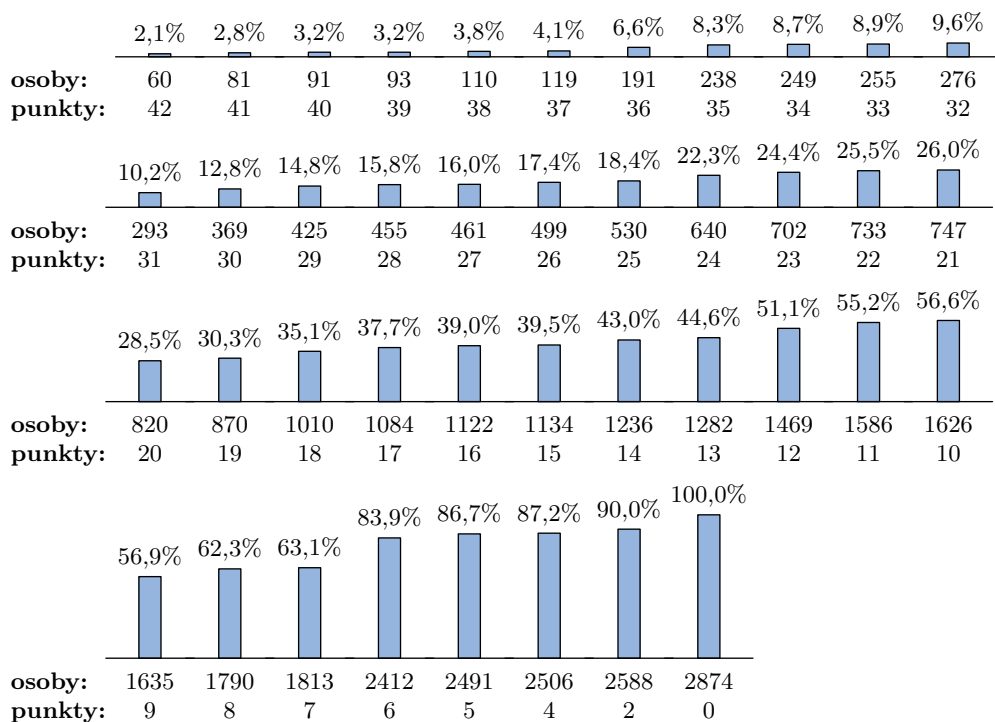


Tabela 8. Procentowa i rzeczywista liczba osób, które uzyskały daną lub większą sumę punktów.



MINISTERSTWO
EDUKACJI
NARODOWEJ



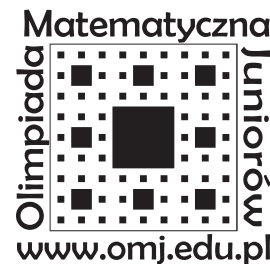
Stowarzyszenie
na rzecz Edukacji
Matematycznej



Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

XIII Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody drugiego stopnia
(13 stycznia 2018 r.)



1. Czy istnieją dodatnie liczby rzeczywiste a, b, c, x o tej własności, że

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad \text{oraz} \quad (a+x)^2 + (b+x)^2 = (c+x)^2?$$

Odpowiedź uzasadnij.

2. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC , w którym $AC \neq BC$. Punkt K jest spodkiem wysokości tego trójkąta poprowadzonej z wierzchołka C . Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC . Udowodnij, że pola czworokątów $AKOC$ oraz $BKOC$ są równe.

3. Wyznacz wszystkie trójki (x, y, z) liczb całkowitych spełniające układ równań

$$\begin{cases} x - yz = 1 \\ xz + y = 2. \end{cases}$$

4. Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD . Punkty P i Q leżą odpowiednio na przekątnych AC i BD , przy czym

$$\sphericalangle APD = \sphericalangle BQC.$$

Wykaż, że $\sphericalangle AQD = \sphericalangle BPC$.

5. Każdą liczbę całkowitą pomalowano na jeden z trzech kolorów. Udowodnij, że istnieją dwie różne liczby tego samego koloru, których różnica jest kwadratem liczby całkowitej.

XIII Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody drugiego stopnia (13 stycznia 2018 r.)

Szkice rozwiązań zadań konkursowych

1. Czy istnieją dodatnie liczby rzeczywiste a, b, c, x o tej własności, że

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad \text{oraz} \quad (a+x)^2 + (b+x)^2 = (c+x)^2?$$

Odpowiedź uzasadnij.

Szkic rozwiązania

Wykażemy, że takie liczby nie istnieją.

Przypuśćmy, że pewne dodatnie liczby rzeczywiste a, b, c, x spełniają dane równości.

Drugą z nich możemy przepisać w postaci

$$a^2 + 2ax + x^2 + b^2 + 2bx + x^2 = c^2 + 2cx + x^2.$$

Po skorzystaniu z pierwszej zależności $a^2 + b^2 = c^2$, redukując wyrazy podobne, otrzymujemy

$$x^2 = 2cx - 2ax - 2bx.$$

Ponieważ $x \neq 0$, więc $x = 2(c - a - b)$. Jednak liczby a, b są dodatnie, wobec czego

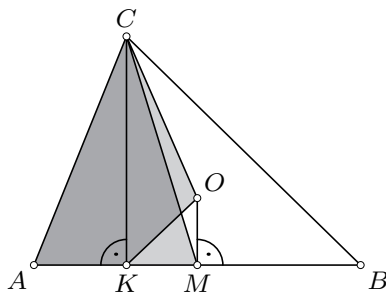
$$c^2 = a^2 + b^2 < a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2.$$

Stąd $c < a+b$ i w konsekwencji $c - a - b < 0$, co przeczy założeniu, że $x > 0$. Uzyskana sprzeczność dowodzi, że nie istnieją liczby o postulowanej własności.

2. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC , w którym $AC \neq BC$. Punkt K jest spodkiem wysokości tego trójkąta poprowadzonej z wierzchołka C . Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC . Udowodnij, że pola czworokątów $AKOC$ oraz $BKOC$ są równe.

Szkic rozwiązania

Bez straty ogólności przyjmijmy, że $AC < BC$. Oznaczmy przez M środek odcinka AB (rys. 1).



rys. 1

Ponieważ proste CK i OM są równoległe, więc

$$[CKO] = [CKM],$$

gdzie $[F]$ oznacza pole figury F . Czworokąt $AKOC$ jest wypukły, wobec czego otrzymujemy

$$[AKOC] = [AKC] + [CKO] = [AKC] + [CKM] = [ACM] = \frac{1}{2}[ABC].$$

W konsekwencji $[BKOC] = [ABC] - [AKOC] = \frac{1}{2}[ABC]$, czyli $[AKOC] = [BKOC]$, co było do udowodnienia.

3. Wyznacz wszystkie trójki (x, y, z) liczb całkowitych spełniające układ równań

$$\begin{cases} x - yz = 1 \\ xz + y = 2. \end{cases}$$

Szkic rozwiązania

Sposób I

Dane równania podnosimy stronami do kwadratu, po czym dodajemy je stronami. Uzyskujemy wówczas $(x - yz)^2 + (xz + y)^2 = 5$. Przekształcając lewą stronę tej zależności, dostajemy kolejno

$$\begin{aligned} x^2 - 2xyz + y^2z^2 + x^2z^2 + 2xyz + y^2 &= 5, \\ (x^2 + y^2)(1 + z^2) &= 5. \end{aligned}$$

Liczba 5 posiada jedno przedstawienie w postaci iloczynu dwóch liczb całkowitych nieujemnych, mianowicie $1 \cdot 5$. Wobec tego

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ 1 + z^2 = 1 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 1 + z^2 = 5. \end{cases}$$

Przeanalizujemy najpierw pierwszy z uzyskanych układów równań. Wynika z niego natychmiast, że $z = 0$. Podstawiając tę wartość do wyjściowego układu, otrzymujemy $x = 1$ oraz $y = 2$. Trójka $(x, y, z) = (1, 2, 0)$ jest więc rozwiązaniem wyjściowego układu równań.

Przejdziemy teraz do drugiego z otrzymanych wyżej układów.

Z drugiej równości uzyskujemy $|z| = 2$, gdy tymczasem z pierwszej wnioskujemy, że jedna z liczb $|x|$, $|y|$ jest równa 0, a druga 1. Gdyby $|x| = 0$, to z pierwszego równania danego w treści zadania układu uzyskalibyśmy $yz = -1$. Wtedy jednak $|yz| = 1$, czyli $|y| = \frac{1}{2}$, co przeczy założeniu, że liczba y jest całkowita. Jeśli z kolei $|y| = 0$, to $y = 0$ i podstawiając tę wartość do danego w treści zadania układu równań, otrzymujemy $x = 1$ oraz $z = 2$. Bez trudu stwierdzamy, że trójka $(x, y, z) = (1, 0, 2)$ istotnie spełnia dany w treści zadania układ równań.

Ostatecznie dany układ ma dwa rozwiązania w liczbach całkowitych: $(x, y, z) = (1, 2, 0)$ lub $(x, y, z) = (1, 0, 2)$.

Sposób II

Z pierwszego równania danego układu uzyskujemy $x = 1 + yz$. Podstawiając tę równość do drugiego równania, otrzymujemy

$$(1 + yz)z + y = 2, \quad \text{czyli} \quad y(z^2 + 1) = 2 - z.$$

Wobec tego liczba $z^2 + 1$ jest dzielnikiem liczby $2 - z$, a więc jest ona także dzielnikiem liczby

$$(2 - z)(2 + z) + (z^2 + 1) = 4 - z^2 + z^2 + 1 = 5.$$

Stąd otrzymujemy $z^2 + 1 = 1$ lub $z^2 + 1 = 5$. W pierwszym przypadku $z = 0$ i w konsekwencji $x = 1$ oraz $y = 2$. W drugim przypadku $|z| = 2$. Jeżeli $z = -2$, to $z^2 + 1 = 5$ nie jest dzielnikiem liczby $2 - z = 4$. Jeżeli zaś $z = 2$, to z równości $y(z^2 + 1) = 2 - z$ otrzymujemy $y = 0$, skąd i z pierwszej równości danego układu mamy $x = 1$.

Ostatecznie uzyskaliśmy, że $(x, y, z) = (1, 2, 0)$ lub $(x, y, z) = (1, 0, 2)$. Bezpośrednio sprawdzamy, że obie trójki istotnie spełniają wyjściowy układ równań.

4. Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD . Punkty P i Q leżą odpowiednio na przekątnych AC i BD , przy czym $\sphericalangle APD = \sphericalangle BQC$. Wykaż, że $\sphericalangle AQD = \sphericalangle BPC$.

Szkic rozwiązania

Zauważmy, że $\sphericalangle CPD = 180^\circ - \sphericalangle APD = 180^\circ - \sphericalangle BQC = \sphericalangle CQD$ oraz punkty P i Q leżą po tej samej stronie prostej CD . Stąd wynika, że punkty C, D, P, Q leżą na jednym okręgu.

Jeżeli punkt przecięcia przekątnych trapezu $ABCD$ leży wewnątrz tego okręgu (rys. 2), to możemy napisać kolejno równości

$$\sphericalangle ABQ = \sphericalangle QDC = \sphericalangle QPC = 180^\circ - \sphericalangle APQ.$$

Stąd wynika, że na czworokącie $ABQP$ można opisać okrąg.

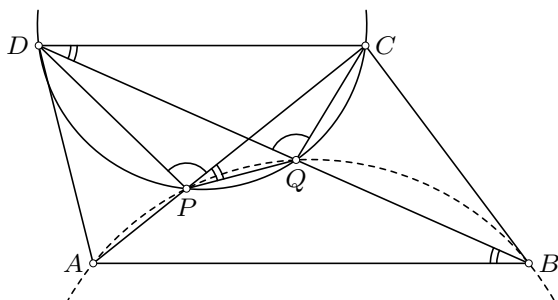
Jeżeli natomiast punkt przecięcia przekątnych trapezu $ABCD$ leży na zewnątrz okręgu przechodzącego przez punkty C, D, P, Q (rys. 3), to punkty B i P leżą po tej samej stronie prostej AQ i spełnione są równości

$$\sphericalangle ABQ = \sphericalangle QDC = 180^\circ - \sphericalangle QPC = \sphericalangle APQ,$$

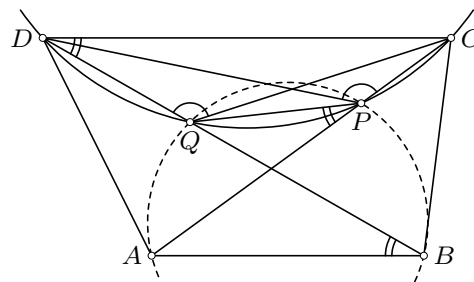
Wówczas na czworokącie $ABPQ$ można opisać okrąg.

W obu przypadkach otrzymujemy równość $\sphericalangle AQB = \sphericalangle APB$, z której wynika, że

$$\sphericalangle AQD = 180^\circ - \sphericalangle AQB = 180^\circ - \sphericalangle APB = \sphericalangle BPC.$$



rys. 2



rys. 3

5. Każdą liczbę całkowitą pomalowano na jeden z trzech kolorów. Udowodnij, że istnieją dwie różne liczby tego samego koloru, których różnica jest kwadratem liczby całkowitej.

Szkic rozwiązania

Przypuśćmy wbrew tezie, że każde dwie różne liczby, których różnica jest kwadratem liczby całkowitej są różnego koloru.

Niech n będzie dowolną liczbą całkowitą. Wówczas liczba $n + 25$ jest innego koloru niż liczba n , gdyż $(n + 25) - n = 5^2$.

Zauważmy, że liczba $n + 9$ jest innego koloru niż każda z liczb n oraz $n + 25$, gdyż

$$(n + 9) - n = 3^2 \quad \text{oraz} \quad (n + 25) - (n + 9) = 4^2.$$

Również liczba $n + 16$ jest innego koloru niż każda z liczb n oraz $n + 25$, gdyż

$$(n + 16) - n = 4^2 \quad \text{oraz} \quad (n + 25) - (n + 16) = 3^2.$$

Wobec tego, skoro użyto jedynie trzech kolorów, to liczby $n + 9$ i $n + 16$ mają ten sam kolor.

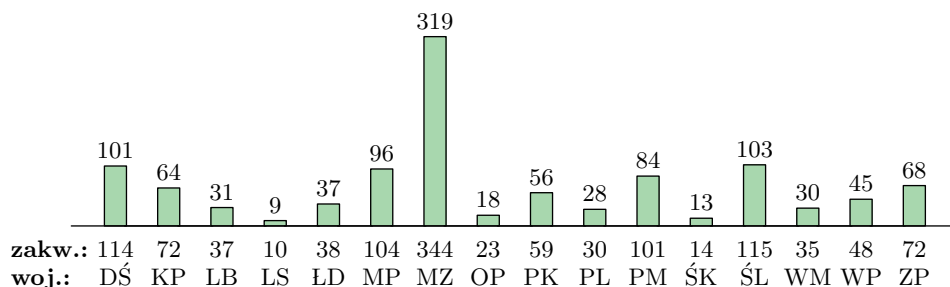
Konkluzja ta jest słuszna dla *każdej* liczby całkowitej n . To oznacza, że każde dwie liczby różniące się o 7 są tego samego koloru. W konsekwencji również każde dwie liczby różniące się o $7 \cdot 7 = 7^2$ są tego samego koloru. Otrzymaliśmy sprzeczność, która dowodzi, że istnieją dwie różne liczby tego samego koloru, których różnica jest kwadratem liczby całkowitej.

XIII Olimpiada Matematyczna Juniorów

Statystyki dotyczące zawodów drugiego stopnia (2017/18)

(13 stycznia 2018 r.)

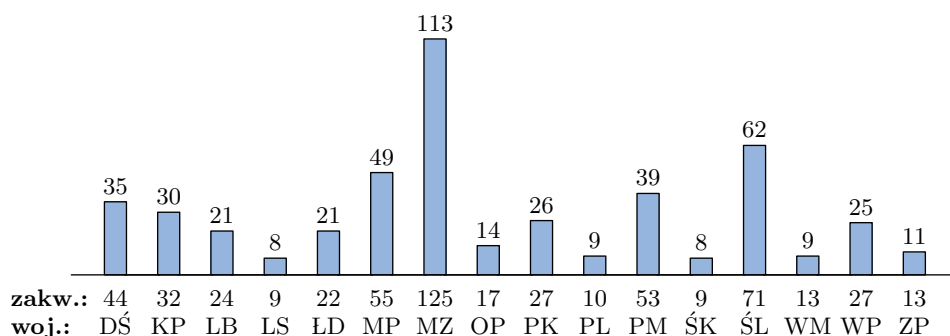
Tabela 1. Liczba uczniów, którzy wzięli udział w zawodach oraz zakwalifikowanych do zawodów w podziale na województwa.



Łączna liczba uczniów, którzy wzięli udział w zawodach: 1102

Łączna liczba uczniów zakwalifikowanych do zawodów: 1216

Tabela 2. Liczba szkół uczniów, którzy wzięli udział w zawodach oraz zakwalifikowanych do zawodów w podziale na województwa.



Łączna liczba szkół uczniów, którzy wzięli udział w zawodach: 480

Łączna liczba szkół uczniów zakwalifikowanych do zawodów: 551

Skróty województw

DŚ — dolnośląskie

LB — lubelskie

ŁD — łódzkie

MZ — mazowieckie

PK — podkarpackie

PM — pomorskie

ŚL — śląskie

WP — wielkopolskie

KP — kujawsko-pomorskie

LS — lubuskie

MP — małopolskie

OP — opolskie

PL — podlaskie

ŚK — świętokrzyskie

WM — warmińsko-mazurskie

ZP — zachodniopomorskie

Tabela 3. Procentowa i rzeczywista liczba osób, które uzyskały daną sumę punktów.

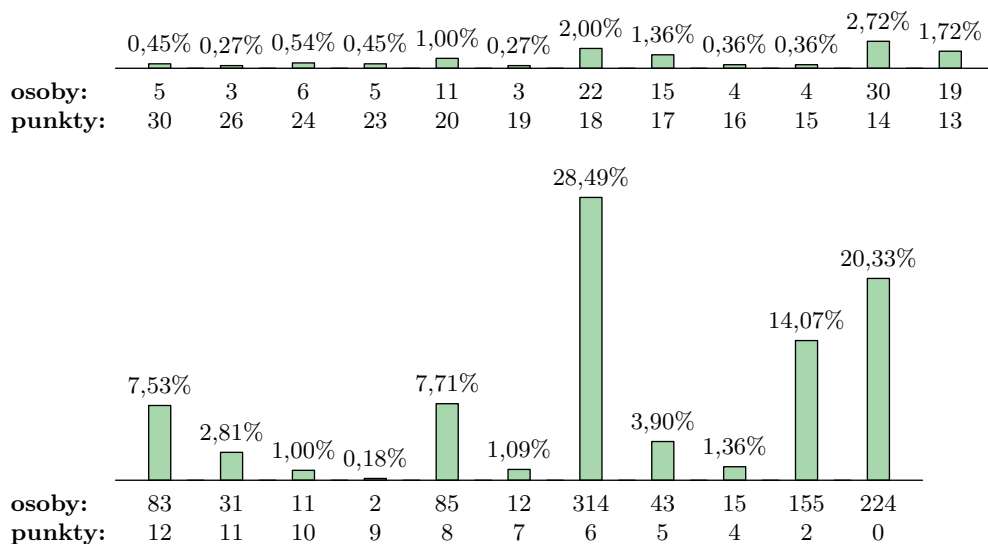


Tabela 4. Procentowa i rzeczywista liczba osób, które uzyskały daną lub większą sumę punktów.

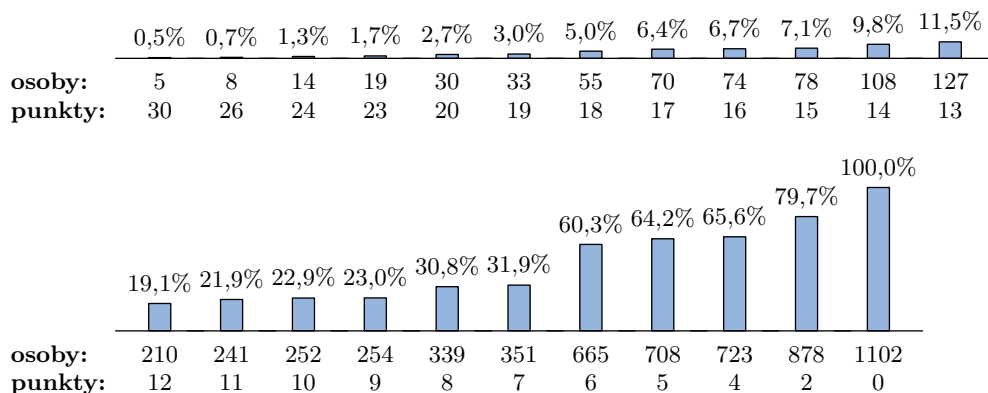


Tabela 5. Procentowa liczba osób, które uzyskały daną liczbę punktów za poszczególne zadania.

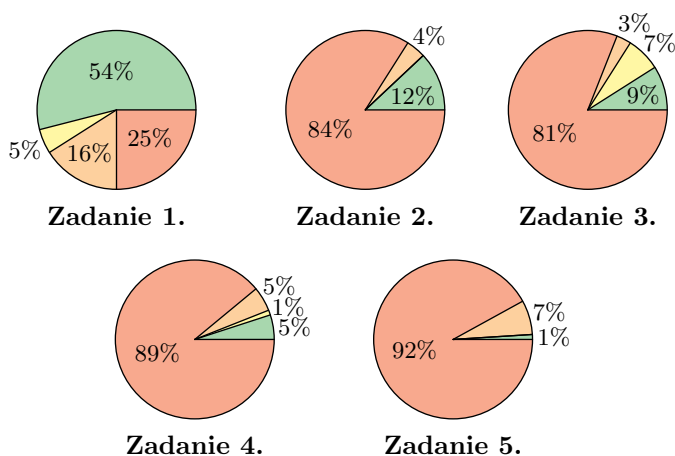


Tabela 6. Średnia uzyskanych punktów za poszczególne zadania.

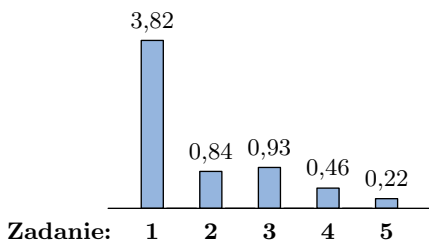
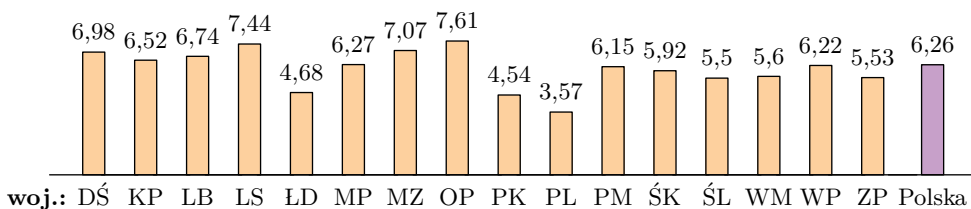
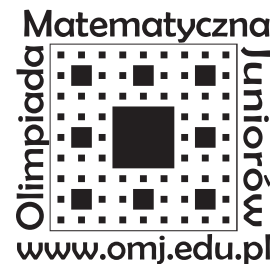


Tabela 7. Średnia sumy punktów w podziale na województwa.



XIII Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody trzeciego stopnia
(17 marca 2018 r.)



1. Dodatnie liczby nieparzyste a, b mają tę własność, że liczba $a^b b^a$ jest kwadratem liczby naturalnej. Wykaż, że liczba ab jest kwadratem liczby naturalnej.

2. Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD , w którym $AB + CD = AD$. Przekątne AC i BD przecinają się w punkcie E . Prosta przechodząca przez punkt E i równoległa do podstaw trapezu przecina ramię AD w punkcie F . Udowodnij, że $\sphericalangle BFC = 90^\circ$.

3. Niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą. Każdą z liczb $1, 2, 3, \dots, 1000$ pomalowano jednym z n kolorów. Okazało się, że każde dwie liczby, z których jedna jest dzielnikiem drugiej są pomalowane różnymi kolorami. Wyznacz najmniejszą liczbę n , dla której taka sytuacja jest możliwa.

4. Liczby rzeczywiste a, b, c są różne od zera i spełniają układ równań

$$\begin{cases} a^2 + a = b^2 \\ b^2 + b = c^2 \\ c^2 + c = a^2. \end{cases}$$

Udowodnij, że $(a-b)(b-c)(c-a) = 1$.

5. Punkt M jest środkiem boku AB trójkąta równobocznego ABC . Punkty D i E leżą odpowiednio na odcinkach AC i BC , przy czym $\sphericalangle DME = 60^\circ$. Wykaż, że $AD + BE = DE + \frac{1}{2}AB$.

XIII Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody trzeciego stopnia (17 marca 2018 r.)

Szkice rozwiązań zadań konkursowych

1. Dodatnie liczby nieparzyste a, b mają tę własność, że liczba $a^b b^a$ jest kwadratem liczby naturalnej. Wykaż, że liczba ab jest kwadratem liczby naturalnej.

Szkic rozwiązania

Ponieważ liczby a, b są nieparzyste, więc liczba $a^{\frac{b-1}{2}} b^{\frac{a-1}{2}}$ jest naturalna. Liczba

$$a^{b-1} b^{a-1} = \left(a^{\frac{b-1}{2}} b^{\frac{a-1}{2}} \right)^2$$

jest więc kwadratem liczby naturalnej. Wobec tego liczba naturalna

$$ab = \frac{a^b b^a}{a^{b-1} b^{a-1}}$$

jest ilorazem dwóch liczb, z których każda jest kwadratem liczby naturalnej. Stąd wniosek, że iloczyn ab jest kwadratem liczby naturalnej.

2. Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD , w którym $AB + CD = AD$. Przekątne AC i BD przecinają się w punkcie E . Prosta przechodząca przez punkt E i równoległa do podstaw trapezu przecina ramię AD w punkcie F . Udowodnij, że $\angle BFC = 90^\circ$.

Szkic rozwiązania

Proste AB, CD i EF są równoległe, więc korzystając z twierdzenia Talesa, uzyskujemy

$$\frac{DF}{FA} = \frac{DE}{EB} = \frac{CD}{AB}.$$

Dodając 1 do obu stron uzyskanej zależności, otrzymujemy

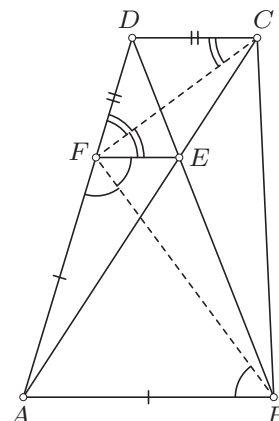
$$\frac{AD}{FA} = \frac{AB + CD}{AB}.$$

Ponieważ $AD = AB + CD$, więc ostatnia równość implikuje $FA = AB$.

Wobec tego również $DF = CD$. Stąd wniosek, że

$$\angle EFB = \angle FBA = \angle BFA \quad \text{oraz} \quad \angle EFC = \angle FCD = \angle CFD.$$

W konsekwencji $\angle BFC = \frac{1}{2} \angle AFD = 90^\circ$, co kończy rozwiązanie zadania.



3. Niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą. Każdą z liczb $1, 2, 3, \dots, 1000$ pomalowano jednym z n kolorów. Okazało się, że każde dwie liczby, z których jedna jest dzielnikiem drugiej są pomalowane różnymi kolorami. Wyznacz najmniejszą liczbę n , dla której taka sytuacja jest możliwa.

Szkic rozwiązania

Udowodnimy, że szukaną najmniejszą liczbą jest $n = 10$.

Zauważmy, że każde dwie spośród następujących dziesięciu liczb

$$2^0 = 1, 2^1 = 2, 2^2 = 4, 2^3 = 8, 2^4 = 16, 2^5 = 32, 2^6 = 64, 2^7 = 128, 2^8 = 256, 2^9 = 512$$

mają tę własność, że jedna jest dzielnikiem drugiej. Wobec tego żadne dwie z tych liczb nie mogą mieć tego samego koloru, a zatem użytych musi być co najmniej 10 kolorów.

Z drugiej strony, malując liczbę 1 pierwszym kolorem, liczby 2 i 3 — drugim, liczby od 4 do 7 — trzecim, itd. aż w końcu liczby od 512 do 1000 — dziesiątym, uzyskujemy kolorowanie, w którym iloraz dowolnych dwóch liczb tego samego koloru jest mniejszy od 2. Stąd wniosek, że przy tym kolorowaniu każde dwie liczby, z których jedna jest dzielnikiem drugiej są pomalowane różnymi kolorami.

Uwaga

Można wskazać inne przykłady kolorowań przy użyciu 10 kolorów spełniające warunki zadania.

Ponumerujemy kolory liczbami od 0 do 9. Liczbę 1 pokolorujemy kolorem o numerze 0. Następnie zauważmy, że każda z liczb $2, 3, 4, \dots, 1000$ jest iloczynem co najwyżej dziewięciu liczb pierwszych, niekoniecznie różnych. Liczbę, która jest iloczynem m liczb pierwszych pokolorujemy kolorem o numerze m . Wówczas każde dwie różne liczby, z których jedna jest dzielnikiem drugiej zostały pokolorowane różnymi kolorami, gdyż liczby te mają różną liczbę dzielników pierwszych.

4. Liczby rzeczywiste a, b, c są różne od zera i spełniają układ równań

$$\begin{cases} a^2 + a = b^2 \\ b^2 + b = c^2 \\ c^2 + c = a^2. \end{cases}$$

Udowodnij, że $(a-b)(b-c)(c-a) = 1$.

Szkic rozwiązania

Dodając stronami trzy równania danego układu, uzyskujemy

$$a^2 + a + b^2 + b + c^2 + c = b^2 + c^2 + a^2, \quad \text{skąd} \quad a + b + c = 0.$$

W szczególności, skoro liczby a, b, c są różne od zera, to również liczby $b+c=-a$, $c+a=-b$, $a+b=-c$ są różne od zera.

Z pierwszego, drugiego i trzeciego równania danego układu wynika kolejno, że

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2 = -a = b+c,$$

$$(b-c)(b+c) = b^2 - c^2 = -b = c+a,$$

$$(c-a)(c+a) = c^2 - a^2 = -c = a+b.$$

Mnożąc stronami powyższe równości, uzyskujemy

$$(a-b)(b-c)(c-a)(a+b)(b+c)(c+a) = (a+b)(b+c)(c+a).$$

Liczba $(a+b)(b+c)(c+a)$ jest różna od zera, więc dzieląc przez nią obie strony ostatniej równości, uzyskujemy tezę zadania.

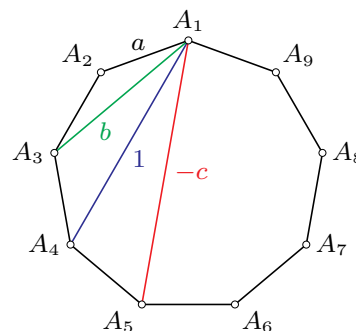
Uwaga

Można uzasadnić, że dany układ równań istotnie ma rozwiązanie (a, b, c) , w którym wszystkie liczby a, b, c są różne od 0. Można je opisać geometrycznie w następujący sposób.

Rozważmy dziewięciokąt foremny $A_1 A_2 \dots A_9$, w którym długość przekątnej $A_1 A_4$ jest równa 1. Wówczas trójka liczb

$$a = A_1 A_2, \quad b = A_1 A_3 \quad \text{oraz} \quad c = -A_1 A_5$$

spełnia dany w treści zadania układ równań.

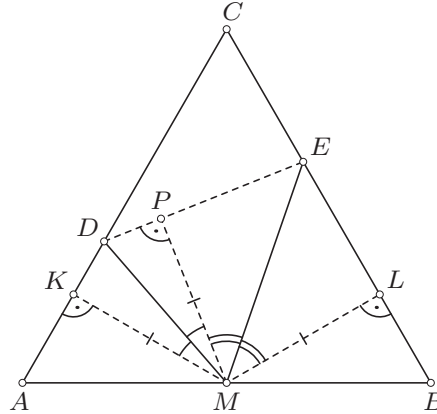


5. Punkt M jest środkiem boku AB trójkąta równobocznego ABC . Punkty D i E leżą odpowiednio na odcinkach AC i BC , przy czym $\angle DME = 60^\circ$. Wykaż, że

$$AD + BE = DE + \frac{1}{2}AB.$$

Szkic rozwiązania

Oznaczmy przez K i L rzuty prostokątne punktu M odpowiednio na proste AC i BC . Wówczas $\angle KML = 120^\circ$ oraz $KM = LM$.



Niech P będzie punktem symetrycznym do punktu K względem prostej DM . Wtedy $LM = KM = PM$, jak również

$$\angle EMP = 60^\circ - \angle DMP = \frac{1}{2}(120^\circ - \angle KMP) = \frac{1}{2}\angle LMP.$$

Wobec tego $\angle EMP = \angle EML$. Stąd wniosek, że trójkąty EMP i EML są przystające (cecha bok–kąt–bok). Ponadto $\angle DPM + \angle EPM = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, więc punkt P leży na odcinku DE . W konsekwencji

$$AD + BE = DK + EL + AK + BL = DP + EP + \frac{1}{2}AM + \frac{1}{2}BM = DE + \frac{1}{2}AB,$$

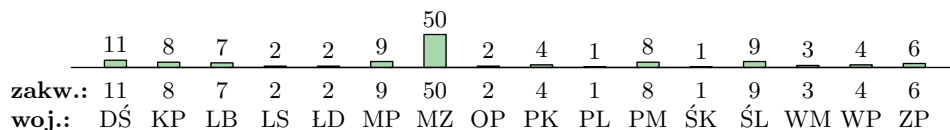
co kończy rozwiązanie zadania.

XIII Olimpiada Matematyczna Juniorów

Statystyki dotyczące zawodów trzeciego stopnia (2017/18)

(17 marca 2018 r.)

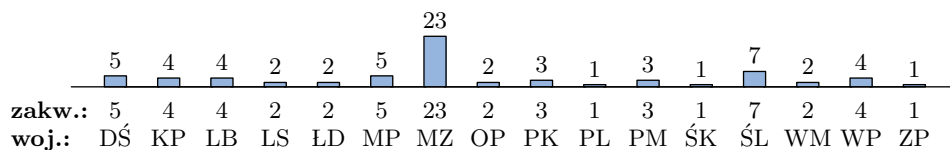
Tabela 1. Liczba uczniów, którzy wzięli udział w zawodach oraz zakwalifikowanych do zawodów w podziale na województwa.



Łączna liczba uczniów, którzy wzięli udział w zawodach: 127

Łączna liczba uczniów zakwalifikowanych do zawodów: 127

Tabela 2. Liczba szkół uczniów, którzy wzięli udział w zawodach oraz zakwalifikowanych do zawodów w podziale na województwa.



Łączna liczba szkół uczniów, którzy wzięli udział w zawodach: 69

Łączna liczba szkół uczniów zakwalifikowanych do zawodów: 69

Skróty województw

DŚ — dolnośląskie

LB — lubelskie

ŁD — łódzkie

MZ — mazowieckie

PK — podkarpackie

PM — pomorskie

ŚL — śląskie

WP — wielkopolskie

KP — kujawsko-pomorskie

LS — lubuskie

MP — małopolskie

OP — opolskie

PL — podlaskie

ŚK — świętokrzyskie

WM — warmińsko-mazurskie

ZP — zachodniopomorskie

Tabela 3. Procentowa i rzeczywista liczba osób, które uzyskały daną sumę punktów.

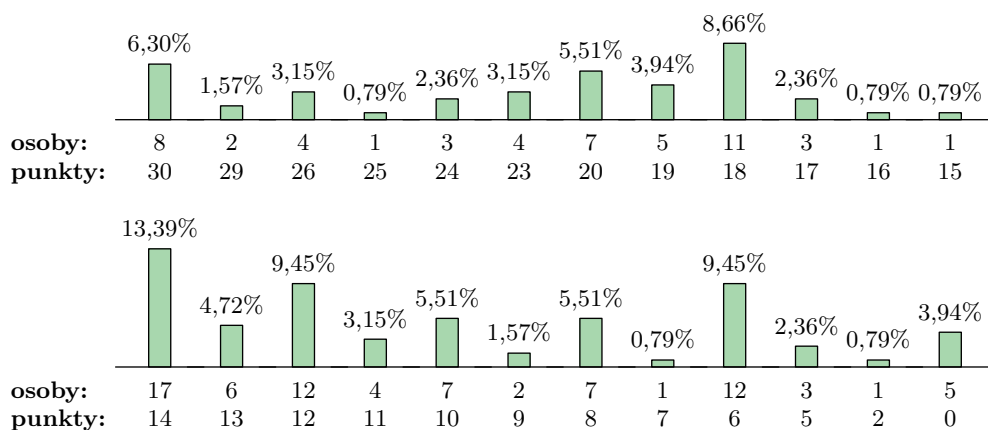


Tabela 4. Procentowa i rzeczywista liczba osób, które uzyskały daną lub większą sumę punktów.

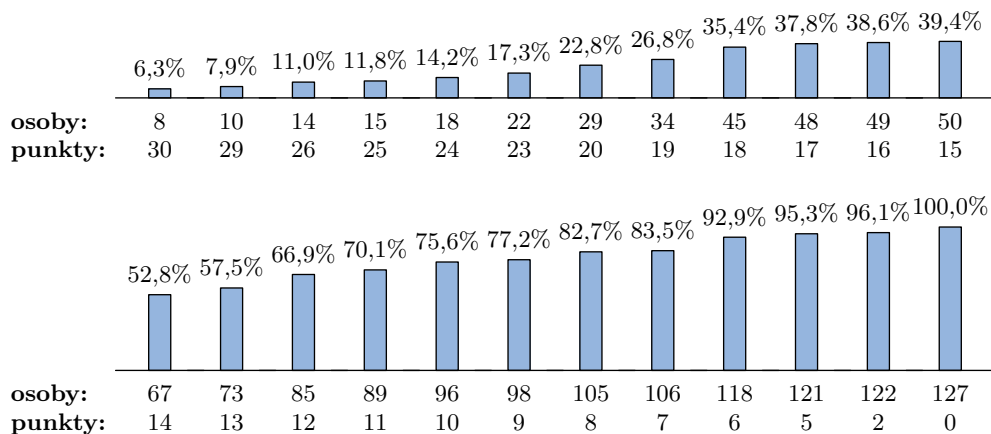


Tabela 5. Procentowa liczba osób, które uzyskały daną liczbę punktów za poszczególne zadania.

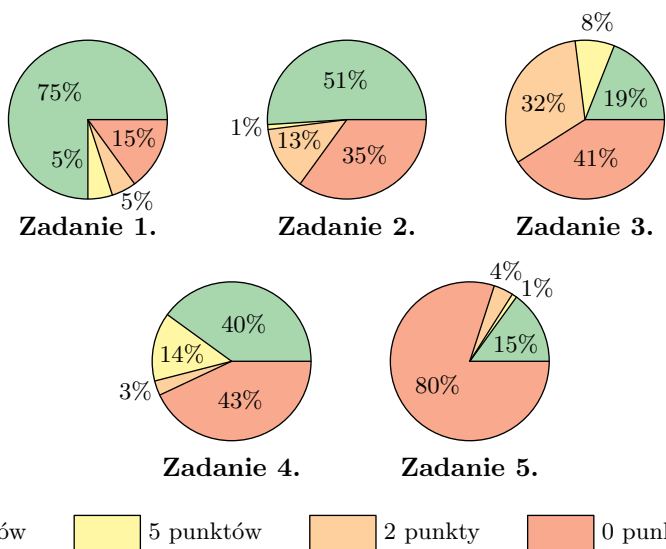


Tabela 6. Średnia uzyskanych punktów za poszczególne zadania.

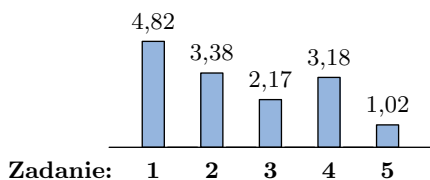
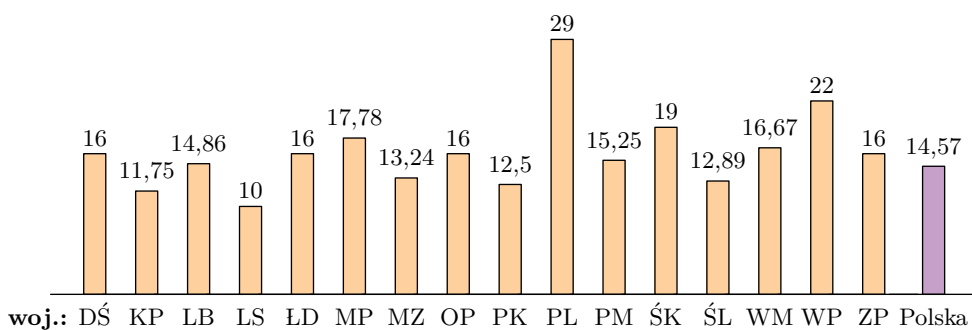


Tabela 7. Średnia sumy punktów w podziale na województwa.



Imiona:

Nazwisko:

Klasa:



XIV Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody stopnia pierwszego — część testowa

(27 września 2018 r., godz. 9:00)

Przed przystąpieniem do rozwiązywania testu wpisz na każdą stronę swoje imiona, nazwisko oraz numer klasy.

Treść każdego z poniższych zadań zawiera trzy stwierdzenia. Każde z nich jest prawdziwe lub fałszywe. Jeśli dane stwierdzenie jest prawdziwe, wpisz w odpowiednią kratkę literkę T, jeśli zaś stwierdzenie jest fałszywe, wpisz literkę N.

W przypadku pomyłki przekreśl znakiem **X** podaną odpowiedź, a właściwą odpowiedź podaj obok z lewej strony. Nie używaj korektora.

Przykład poprawnie rozwiązanego zadania:

0. Dla każdej dodatniej liczby całkowitej n liczba $2n + 1$ jest

T

a) dodatnia;

T

b) nieparzysta;

N

X

c) pierwsza.

Czas na rozwiązywanie testu: 75 minut.

Powodzenia!

1. W sklepie „U Bronka” cena spodni była równa cenie sukienki. Cenę spodni najpierw podniesiono o 5%, a następnie nową cenę obniżono o 15%. Z kolei cenę sukienki najpierw obniżono o 15%, a następnie nową cenę podniesiono o 5%. Wynika z tego, że w efekcie tych zmian

a) cena spodni jest większa od ceny sukienki;

b) cena spodni jest równa cenie sukienki;

c) cena spodni jest mniejsza od ceny sukienki.

Imiona:

Nazwisko:

Klasa:

2. Liczba $6^6 \cdot 12^{12}$ jest podzielna przez

a) 8^8 ;

b) 10^{10} ;

c) 18^{18} .

3. Istnieje taka liczba rzeczywista x , że

a) $x(x+1) = (x+1)(x+2)$;

b) $x(x+1) = (x+2)(x+3)$;

c) $x^2 = (x+1)^2$.

4. Wszystkie boki pięciokąta wypukłego $ABCDE$ są równej długości. Wynika z tego, że

a) wszystkie przekątne pięciokąta $ABCDE$ są równej długości;

b) proste AB i CE są równoległe;

c) pięciokąt $ABCDE$ jest foremny.

5. Istnieje dodatnia liczba całkowita o sumie cyfr równej 2, która jest podzielna przez

a) 3;

b) 5;

c) 7.

6. Liczba całkowita a jest podzielna przez 6, a liczba całkowita b jest podzielna przez 10. Wynika z tego, że liczba

a) $a+b$ jest podzielna przez 16;

b) $a \cdot b$ jest podzielna przez 60;

c) $5a+3b$ jest podzielna przez 15.

7. Istnieje taka liczba całkowita n , że dwiema ostatnimi cyframi liczby n^2 są

a) 44;

b) 55;

c) 66.

Imiona:

Nazwisko:

Klasa:

8. Trójkąt równoboczny można rozciąć na

- ☐ a) 4 trójkąty równoboczne;
- ☐ b) 6 trójkątów równobocznych;
- ☐ c) 1000 trójkątów równobocznych.

9. Podczas spotkania grupy 6 osób wymieniono dokładnie 9 uścisków dłoni, przy czym każda para osób wymieniła co najwyżej jeden uścisk dłoni. Wynika z tego, że

- ☐ a) pewna osoba wymieniła co najmniej 4 uściski dłoni;
- ☐ b) pewna osoba wymieniła dokładnie 3 uściski dłoni;
- ☐ c) każdy wymienił co najmniej 1 uścisk dłoni.

10. Istnieją takie liczby rzeczywiste a, b, c , że wśród liczb $a \cdot b, b \cdot c, c \cdot a$ są

- ☐ a) dokładnie dwie dodatnie;
- ☐ b) dokładnie dwie ujemne;
- ☐ c) dokładnie trzy ujemne.

11. Dokładnie 70% uczniów pewnej klasy uczy się języka angielskiego, dokładnie 50% uczy się języka niemieckiego oraz dokładnie 30% uczy się języka francuskiego. Wynika z tego, że

- ☐ a) każdy uczeń tej klasy uczy się co najmniej jednego języka obcego;
- ☐ b) co najmniej połowa uczniów tej klasy uczy się co najmniej dwóch języków;
- ☐ c) istnieje osoba, która uczy się co najmniej dwóch języków, w tym niemieckiego.

12. Istnieje taki czworokąt wypukły, że każda jego przekątna dzieli go na dwa trójkąty

- ☐ a) prostokątne;
- ☐ b) ostrokątne;
- ☐ c) rozwartokątne.

Imiona:

Nazwisko:

Klasa:

13. Suma cyfr dodatniej liczby całkowitej n jest równa liczbie cyfr liczby n . Wynika z tego, że

a) każda cyfra liczby n jest równa 1;

b) iloczyn cyfr liczby n jest mniejszy od 2;

c) suma cyfr liczby $n+1$ jest większa od sumy cyfr liczby n .

14. Spośród wierzchołków sześcianu wybrano pięć. Wynika z tego, że wśród wybranych punktów istnieją

a) dwa, które są połączone krawędzią sześcianu;

b) trzy, które są wierzchołkami trójkąta równobocznego;

c) cztery, które są wierzchołkami prostokąta.

15. Dodatnie liczby całkowite a, b, c są takie, że liczby $2^a, 2^b, 2^c$ są długościami boków pewnego trójkąta. Wynika z tego, że

a) jest to trójkąt ostrokątny;

b) liczby a, b, c są długościami boków pewnego trójkąta;

c) co najmniej dwie spośród liczb a, b, c są równe.

Rozwiązania zadań testowych

1. W sklepie „U Bronka” cena spodni była równa cenie sukienki. Cenę spodni najpierw podniesiono o 5%, a następnie nową cenę obniżono o 15%. Z kolei cenę sukienki najpierw obniżono o 15%, a następnie nową cenę podniesiono o 5%. Wynika z tego, że w efekcie tych zmian

- ☐ N a) cena spodni jest większa od ceny sukienki;
☐ T b) cena spodni jest równa cenie sukienki;
☐ N c) cena spodni jest mniejsza od ceny sukienki.

Komentarz

Niech a oznacza początkową cenę spodni oraz sukienki.

Po 5%-owej podwyżce spodnie kosztują $a + a \cdot 5\% = a \cdot 1,05$. Po obniżce tej ceny o 15% cena spodni równa się $a \cdot 1,05 - (a \cdot 1,05) \cdot 15\% = a \cdot 1,05 \cdot 0,85$.

Z kolei po 15% obniżce sukienka kosztuje $a - a \cdot 15\% = a \cdot 0,85$. Po podniesieniu tej ceny o 5% cena sukienki wynosi $a \cdot 0,85 + a \cdot 0,85 \cdot 5\% = a \cdot 0,85 \cdot 1,05$.

W efekcie tych zmian ceny spodni i sukienki są równe.

2. Liczba $6^6 \cdot 12^{12}$ jest podzielna przez

- ☐ T a) 8^8 ;
☐ N b) 10^{10} ;
☐ N c) 18^{18} .

Komentarz

a) Zauważmy, że $12^{12} = (2^2 \cdot 3)^{12} = 2^{24} \cdot 3^{12}$ oraz $8^8 = (2^3)^8 = 2^{24}$. Wobec tego liczba 12^{12} jest podzielna przez 8^8 , a więc również liczba $6^6 \cdot 12^{12}$ jest podzielna przez 8^8 .

b) Liczba 10^{10} jest podzielna przez 5, a iloczyn $6^6 \cdot 12^{12}$ — nie jest.

c) Obie liczby 18^{18} oraz $6^6 \cdot 12^{12}$ rozkładamy na czynniki pierwsze:

$$18^{18} = (2 \cdot 3^2)^{18} = 2^{18} \cdot 3^{36},$$

$$6^6 \cdot 12^{12} = (2 \cdot 3)^6 \cdot (2^2 \cdot 3)^{12} = 2^6 \cdot 3^6 \cdot 2^{24} \cdot 3^{12} = 2^{30} \cdot 3^{18}.$$

Widzimy stąd, że 18^{18} jest liczbą podzielną przez 3^{36} , a $6^6 \cdot 12^{12}$ — nie. Wobec tego $6^6 \cdot 12^{12}$ nie może być wielokrotnością liczby 18^{18} .

3. Istnieje taka liczba rzeczywista x , że

T

a) $x(x+1) = (x+1)(x+2)$;

T

b) $x(x+1) = (x+2)(x+3)$;

T

c) $x^2 = (x+1)^2$.

Komentarz

a) Dla $x = -1$ mamy $x(x+1) = -1 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = (x+1)(x+2)$.

b) Dla $x = -\frac{3}{2}$ mamy $x(x+1) = -\frac{3}{2} \cdot (-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = (x+2)(x+3)$.

c) Dla $x = -\frac{1}{2}$ mamy $x^2 = (-\frac{1}{2})^2 = (\frac{1}{2})^2 = (x+1)^2$.

4. Wszystkie boki pięciokąta wypukłego $ABCDE$ są równej długości. Wynika z tego, że

N

a) wszystkie przekątne pięciokąta $ABCDE$ są równej długości;

N

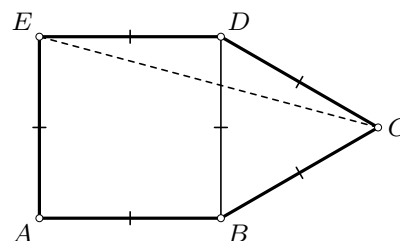
b) proste AB i CE są równoległe;

N

c) pięciokąt $ABCDE$ jest foremny.

Komentarz

Niech $ABDE$ będzie kwadratem, a BCD — trójkątem równobocznym zbudowanym na zewnątrz tego kwadratu (rys. 1). Wówczas wszystkie boki pięciokąta wypukłego $ABCDE$ są równej długości.



rys. 1

a) Mamy $AD > BD$, gdyż w trójkącie prostokątnym ABD przeciwprostokątna jest dłuższa od przyprostokątnej.

b) Proste AB i DE są równoległe, a proste DE i CE nie są równoległe. Wobec tego proste AB i CE również nie są równoległe.

c) Nie wszystkie kąty wewnętrzne pięciokąta $ABCDE$ są równe, np. $\sphericalangle EAB = 90^\circ$, a $\sphericalangle BCD = 60^\circ$. Wobec tego nie jest to pięciokąt foremny.

5. Istnieje dodatnia liczba całkowita o sumie cyfr równej 2, która jest podzielna przez

N

a) 3;

T

b) 5;

T

c) 7.

Komentarz

a) Liczba jest podzielna przez 3 wtedy i tylko wtedy, gdy jej suma cyfr jest podzielna przez 3. Wobec tego nie istnieje liczba o sumie cyfr 2, która jest podzielna przez 3.

b) Liczba 20 ma sumę cyfr równą 2 i jest podzielna przez 5.

c) Liczba 1001 ma sumę cyfr równą 2 i jest podzielna przez 7 ($1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$).

6. Liczba całkowita a jest podzielna przez 6, a liczba całkowita b jest podzielna przez 10. Wynika z tego, że liczba

- ☐ N a) $a + b$ jest podzielna przez 16;
☐ T b) $a \cdot b$ jest podzielna przez 60;
☐ T c) $5a + 3b$ jest podzielna przez 15.

Komentarz

Ponieważ liczba a jest podzielna przez 6, więc $a = 6k$ dla pewnej liczby całkowitej k . Podobnie, skoro b jest liczbą podzielną przez 10, to $b = 10\ell$ dla pewnej liczby całkowitej ℓ .

b) Mamy $a \cdot b = 6k \cdot 10\ell = 60 \cdot k\ell$. Ponieważ liczba $k\ell$ jest całkowita, więc z ostatniej równości wynika, że liczba $a \cdot b$ dzieli się przez 60.

c) Mamy $5a + 3b = 5 \cdot 6k + 3 \cdot 10\ell = 15 \cdot 2(k + \ell)$. Liczba $2(k + \ell)$ jest całkowita, więc z ostatniej zależności wynika, że liczba $5a + 3b$ dzieli się przez 15.

a) Przyjmijmy $a = 6$ oraz $b = 0$. Wtedy a jest liczbą podzielną przez 6, a b — liczbą podzielną przez 10. Jednak liczba $a + b = 6$ nie jest podzielna przez 16.

7. Istnieje taka liczba całkowita n , że dwiema ostatnimi cyframi liczby n^2 są

- ☐ T a) 44;
☐ N b) 55;
☐ N c) 66.

Komentarz

a) Przyjmijmy $n = 12$. Wtedy $n^2 = 144$.

b) Przypuśćmy, że istnieje taka liczba całkowita n , że n^2 kończy się cyframi 55. Wówczas liczba n jest nieparzysta oraz podzielna przez 5. W związku z tym liczba n^2 jest nieparzysta i podzielna przez 25. Jednak każda liczba nieparzysta podzielna przez 25 kończy się cyframi 25 lub 75.

c) Liczba, której dwiema ostatnimi cyframi są 66 jest parzysta, ale niepodzielna przez 4. Taka liczba nie może być kwadratem liczby całkowitej.

8. Trójkąt równoboczny można rozciąć na

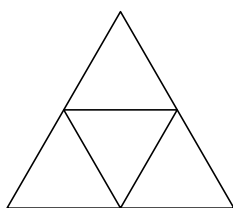
- ☐ T a) 4 trójkąty równoboczne;
☐ T b) 6 trójkątów równobocznych;
☐ T c) 1000 trójkątów równobocznych.

Komentarz

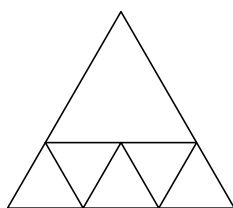
a) Trójkąt równoboczny można rozciąć na 4 trójkąty równoboczne wzdłuż odcinków łączących środki boków (rys. 2).

b) Trójkąt równoboczny o boku długości 3 można rozciąć na 5 trójkątów równobocznych o boku długości 1 oraz jeden trójkąt równoboczny o boku długości 2 — łącznie 6 trójkątów równobocznych (rys. 3).

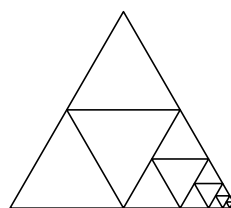
c) Zauważmy, że jedną z części uzyskanych w podziale z punktu a) można ponownie rozciąć na 4 trójkąty równoboczne, tym samym otrzymując 3 dodatkowe kawałki. Następnie dowolny z tych kawałków można ponownie rozciąć na 4 trójkąty równoboczne i otrzymać kolejne 3 części. Powtarzając tę czynność łącznie 332 razy, uzyskamy w końcu podział trójkąta równobocznego na $4 + 3 \cdot 332 = 1000$ trójkątów równobocznych (rys. 4).



rys. 2



rys. 3



rys. 4

9. Podczas spotkania grupy 6 osób wymieniono dokładnie 9 uścisków dłoni, przy czym każda para osób wymieniła co najwyżej jeden uścisk dłoni. Wynika z tego, że

- ☐ N a) pewna osoba wymieniła co najmniej 4 uściski dłoni;
- ☐ N b) pewna osoba wymieniła dokładnie 3 uściski dłoni;
- ☐ N c) każdy wymienił co najmniej 1 uścisk dłoni.

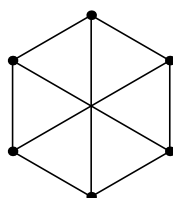
Komentarz

Na poniższych obrazkach każda gruba kropka oznacza osobę, a odcinek łączący dwie kropki — uścisk dłoni między odpowiadającymi im osobami.

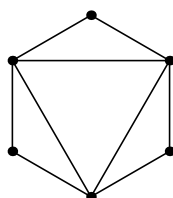
a) Może się zdarzyć, że każdy wymienił dokładnie 3 uściski dłoni (rys. 5).

b) Może się zdarzyć, że każdy wymienił 2 lub 4 uściski dłoni (rys. 6).

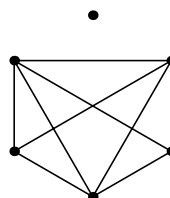
c) Może się zdarzyć, że pewna osoba nie wymieniła ani jednego uścisku dłoni (rys. 7).



rys. 5



rys. 6



rys. 7

10. Istnieją takie liczby rzeczywiste a, b, c , że wśród liczb $a \cdot b, b \cdot c, c \cdot a$ są

N

a) dokładnie dwie dodatnie;

T

b) dokładnie dwie ujemne;

N

c) dokładnie trzy ujemne.

Komentarz

c) Gdyby wszystkie trzy dane iloczyny były ujemne, to ich iloczyn również byłby liczbą ujemną. Tymczasem

$$a \cdot b \cdot b \cdot c \cdot c \cdot a = (abc)^2$$

jest kwadratem liczby rzeczywistej, a więc liczbą nieujemną.

a) Przypuśćmy, że wśród danych trzech iloczynów są dokładnie dwa dodatnie. Wtedy żadna z liczb a, b, c nie jest równa 0; w przeciwnym razie co najmniej dwa spośród iloczynów $a \cdot b, b \cdot c, c \cdot a$ byłyby równe 0, a wtedy nie mogłoby być dwóch dodatnich. W związku z tym trzeci iloczyn nie może być równy 0, a więc musi być liczbą ujemną. Wówczas, podobnie jak w rozwiązaniu punktu c), uzyskujemy sprzeczną nierówność $(abc)^2 < 0$.

b) Przyjmując $a = 1$ oraz $b = c = -1$, uzyskujemy

$$a \cdot b = -1, \quad b \cdot c = 1, \quad c \cdot a = -1.$$

Wśród tych trzech liczb są dokładnie dwie ujemne.

11. Dokładnie 70% uczniów pewnej klasy uczy się języka angielskiego, dokładnie 50% uczy się języka niemieckiego oraz dokładnie 30% uczy się języka francuskiego. Wynika z tego, że

N

a) każdy uczeń tej klasy uczy się co najmniej jednego języka obcego;

N

b) co najmniej połowa uczniów tej klasy uczy się co najmniej dwóch języków;

T

c) istnieje osoba, która uczy się co najmniej dwóch języków, w tym niemieckiego.

Komentarz

a), b) Przypuśćmy, że w 10-osobowej klasie jest:

- 3 uczniów, którzy uczą się wszystkich trzech języków;
- 2 uczniów, którzy uczą się tylko niemieckiego;
- 4 uczniów, którzy uczą się tylko angielskiego;
- 1 uczeń, który nie uczy się żadnego języka obcego.

Wówczas warunki zadania są spełnione, a przy tym istnieje uczeń, który nie uczy się żadnego języka obcego oraz mniej niż połowa uczniów uczy się co najmniej dwóch języków.

c) Skoro 50% uczniów uczy się niemieckiego, a 70% uczniów uczy się angielskiego, to co najmniej 20% uczniów uczy się obu tych języków jednocześnie.

12. Istnieje taki czworokąt wypukły, że każda jego przekątna dzieli go na dwa trójkąty

T

a) prostokątne;

N

b) ostrokątne;

T

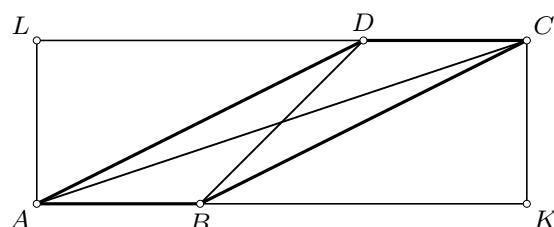
c) rozwartokątne.

Komentarz

a) Każda przekątna prostokąta dzieli go na dwa trójkąty prostokątne.

b) Gdyby taki czworokąt istniał, to jego każdy kąt wewnętrzny byłby ostry. Jednak wówczas suma kątów wewnętrznych tego czworokąta byłaby mniejsza od $4 \cdot 90^\circ = 360^\circ$, co nie może mieć miejsca.

c) Rozważmy prostokąt $AKCL$, w którym $AK = 3$, $KC = 1$ oraz takie punkty B i D leżące odpowiednio na bokach AK i CL , że $AB = CD = 1$ (rys. 8). Wówczas kąty KBC , KBD , LDA , LDB są ostre, więc każda przekątna równoległoboku $ABCD$ dzieli go na dwa trójkąty rozwartokątne.



rys. 8

13. Suma cyfr dodatniej liczby całkowitej n jest równa liczbie cyfr liczby n . Wynika z tego, że

N

a) każda cyfra liczby n jest równa 1;

T

b) iloczyn cyfr liczby n jest mniejszy od 2;

N

c) suma cyfr liczby $n+1$ jest większa od sumy cyfr liczby n .

Komentarz

a) Jeżeli $n = 20$, to liczba n ma dwie cyfry i sumę cyfr równą 2.

c) Jeżeli $n = 1000000009$, to suma cyfr i liczba cyfr liczby n są równe (obie wynoszą 10). Tymczasem suma cyfr liczby $n+1 = 1000000010$ jest równa 2, a zatem jest mniejsza od sumy cyfr liczby n .

b) Jeżeli pewna cyfra liczby n jest równa 0, to iloczyn cyfr liczby n jest także równy 0, a więc w szczególności jest on mniejszy od 2. W przeciwnym przypadku każda cyfra liczby n jest dodatnia. Wtedy z warunku, że suma cyfr liczby n jest równa liczbie jej cyfr wynika, że wszystkie cyfry liczby n równe są 1. Wówczas jednak także iloczyn cyfr takiej liczby jest mniejszy od 2.

14. Spośród wierzchołków sześciangu wybrano pięć. Wynika z tego, że wśród wybranych punktów istnieją

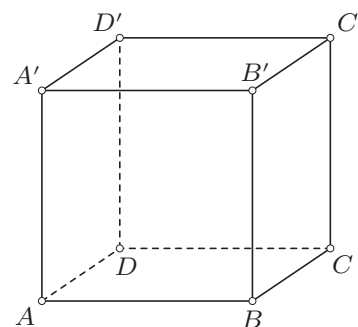
- | |
|---|
| T |
| T |
| N |
- a) dwa, które są połączone krawędzią sześciangu;
b) trzy, które są wierzchołkami trójkąta równobocznego;
c) cztery, które są wierzchołkami prostokąta.

Komentarz

Rozważmy sześciang o przeciwnych ścianach $ABCD$ i $A'B'C'D'$ oznaczonych tak, że odcinki AA' , BB' , CC' , DD' są krawędziami sześciangu (rys. 9).

a) Skoro wybrano pięć punktów, to wybrano obydwa końce co najmniej jednej spośród krawędzi AA' , BB' , CC' , DD' .

b) Zauważmy, że $AB'CD'$ oraz $A'BC'D$ to czworościany, których wszystkie krawędzie mają jednakową długość (równą długości przekątnej ścian sześciangu). Skoro wybrano pięć punktów, to pewne trzy należą do tego samego z tych dwóch czworościanów, a zatem wyznaczają trójkąt równoboczny.



rys. 9

c) Przypuśćmy, że wybrano punkty A , B , C , B' , D' . Wówczas żadne cztery z tych punktów nie leżą w jednej płaszczyźnie; nie mogą więc być wierzchołkami prostokąta.

15. Dodatnie liczby całkowite a , b , c są takie, że liczby 2^a , 2^b , 2^c są długościami boków pewnego trójkąta. Wynika z tego, że

- | |
|---|
| T |
| T |
| T |
- a) jest to trójkąt ostrokątny;
b) liczby a , b , c są długościami boków pewnego trójkąta;
c) co najmniej dwie spośród liczb a , b , c są równe.

Komentarz

Bez straty ogólności przyjmijmy, że $a \leq b \leq c$.

c) Przypuśćmy, że $b < c$, czyli $b + 1 \leq c$. Wówczas

$$2^a + 2^b \leq 2^b + 2^b = 2^{b+1} \leq 2^c,$$

co przeczy nierówności trójkąta o bokach 2^a , 2^b , 2^c . To oznacza, że $b = c$.

b) Bezpośrednio sprawdzamy, że $a + b > b = c$, $b + c > b \geq a$, $c + a > c \geq a$, więc liczby a , b , c spełniają nierówność trójkąta.

a) Z poprzednich dwóch punktów wynika, że trójkąt o bokach 2^a , 2^b , 2^c jest równoramienny i długość ramienia jest w nim nie mniejsza od długości podstawy. Ponieważ w trójkącie naprzeciw dłuższego boku leży większy kąt, więc wynika z tego, że kąt między ramionami jest nie większy od kąta między podstawą a ramieniem, a ten jest ostry w każdym trójkącie równoramiennym.

XIV Olimpiada Matematyczna Juniorów Statystyki dotyczące części testowej zawodów pierwszego stopnia (2018/2019)

(27 września 2018 r.)

Tabela 1.

Procentowa liczba poprawnych odpowiedzi w poszczególnych podpunktach.

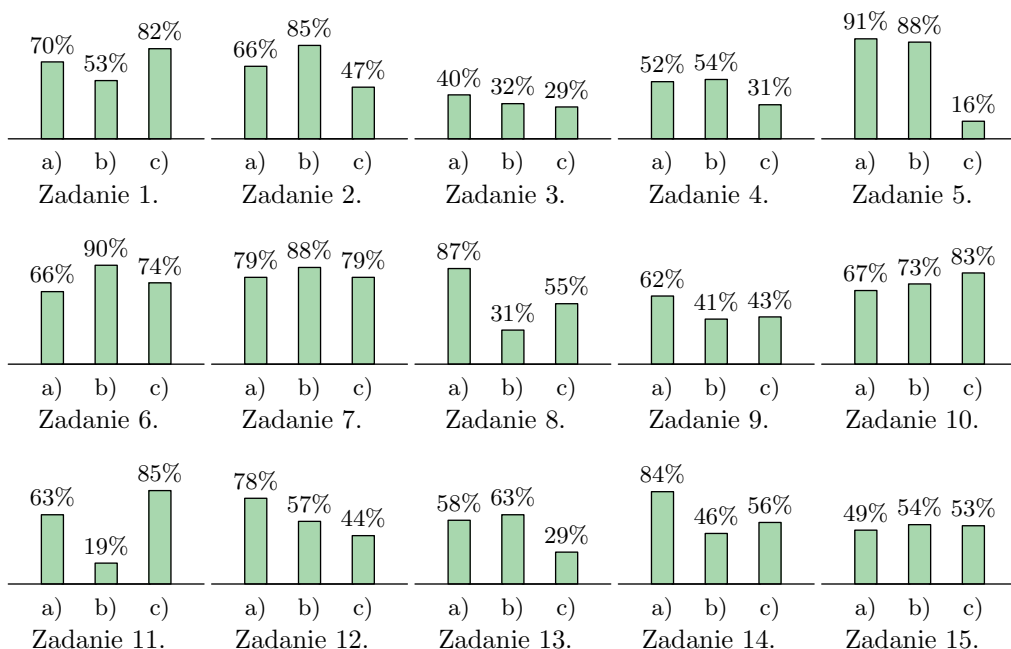
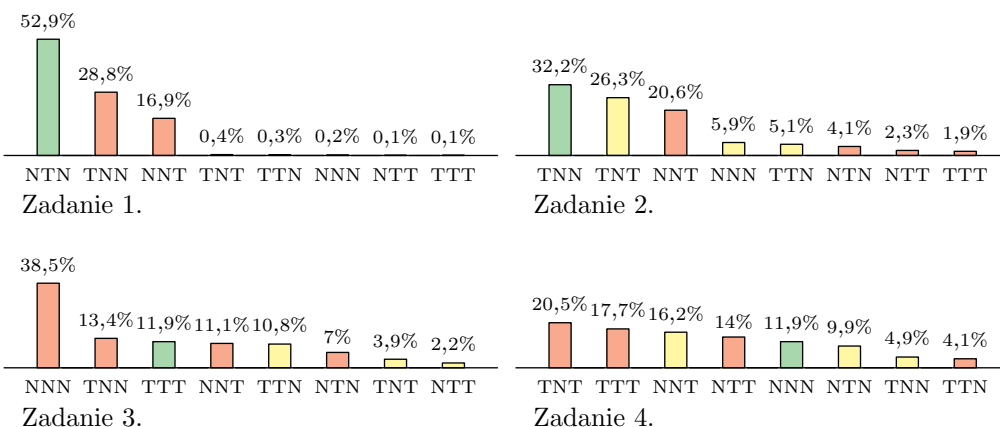
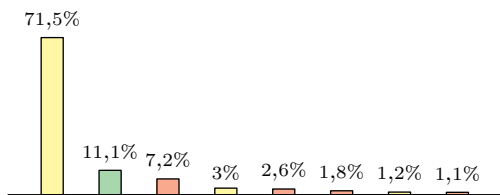


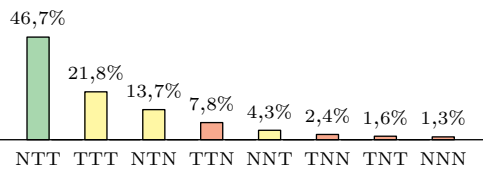
Tabela 2.

Procentowa liczba udzielonych kombinacji odpowiedzi w poszczególnych zadaniach.

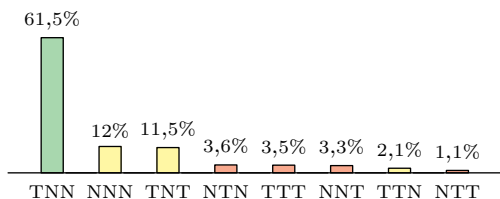




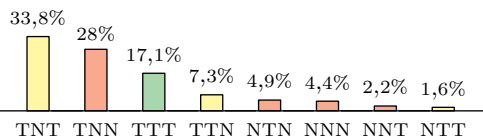
Zadanie 5.



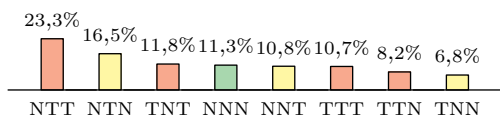
Zadanie 6.



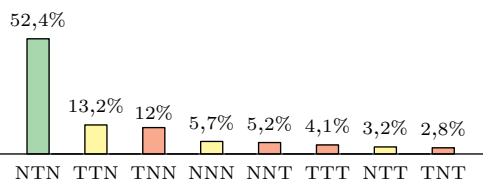
Zadanie 7.



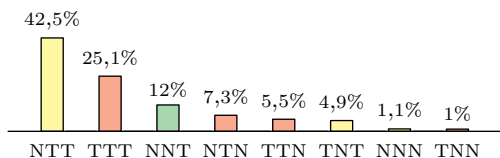
Zadanie 8.



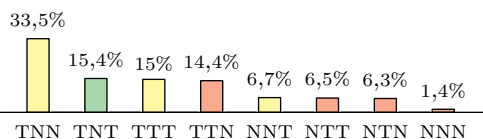
Zadanie 9.



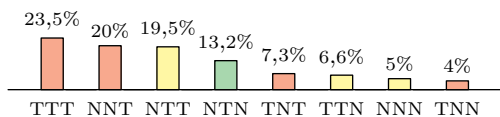
Zadanie 10.



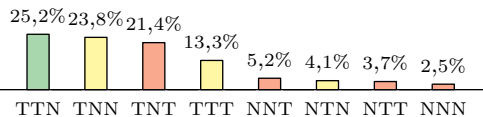
Zadanie 11.



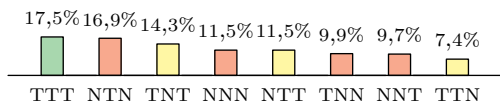
Zadanie 12.



Zadanie 13.



Zadanie 14.



Zadanie 15.

Zestaw odpowiedzi za:

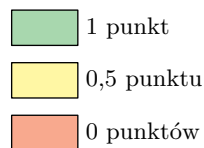


Tabela 3.

Rzeczywista oraz procentowa liczba osób, które uzyskały daną sumę punktów.

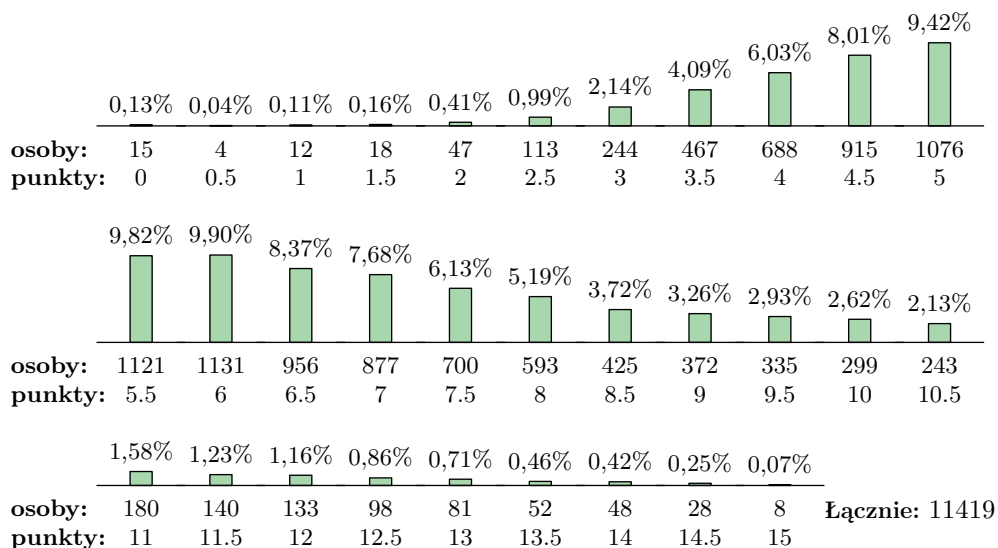


Tabela 4.

Procentowa i rzeczywista liczba osób, które uzyskały daną lub większą sumę punktów.

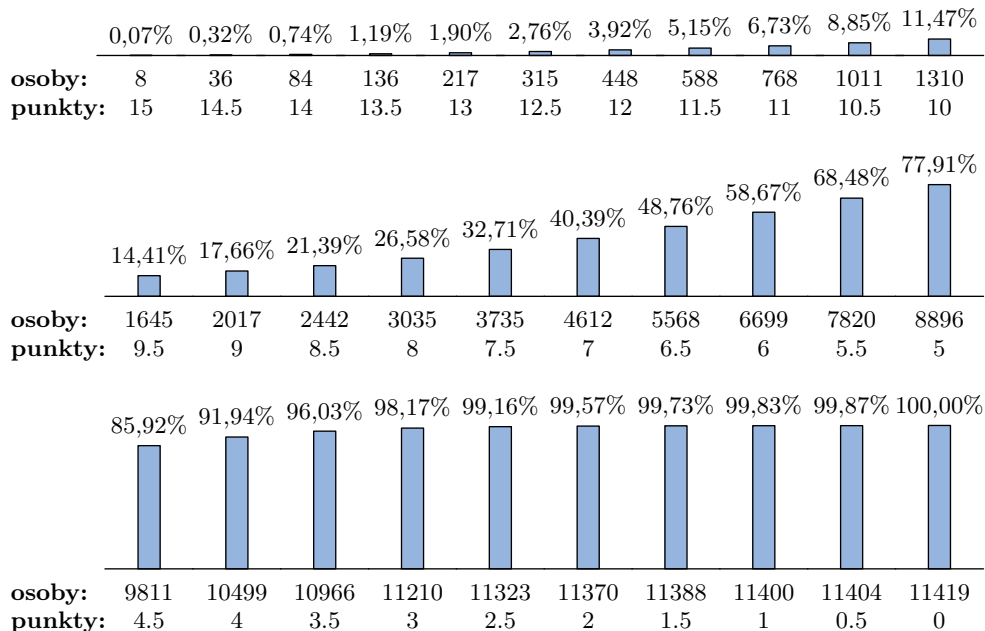


Tabela 5.

Procentowa liczba uzyskanych punktów za poszczególne zadania.

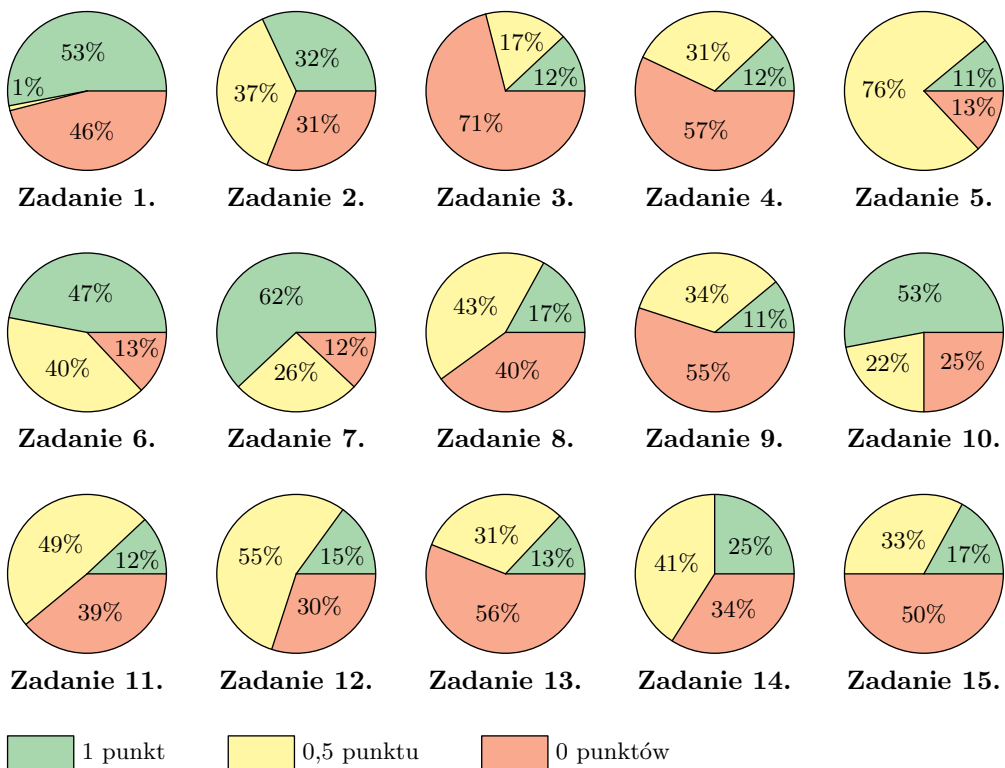


Tabela 6.

Średnia z uzyskanych punktów za poszczególne zadania.

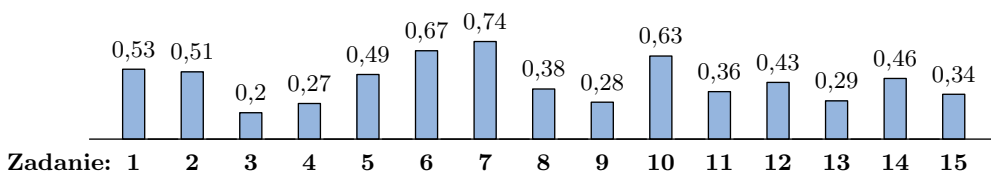


Tabela 7.

Średnia uzyskanych punktów ze wszystkich zadań w podziale na województwa i inne regiony.

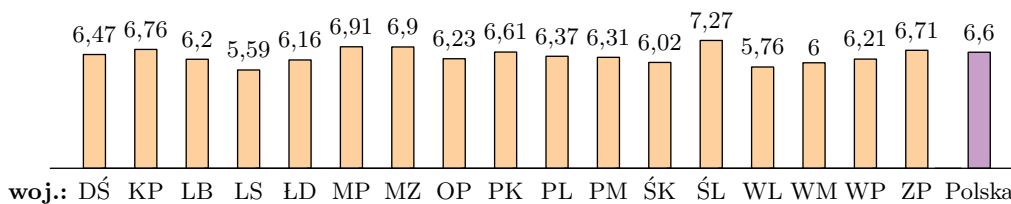
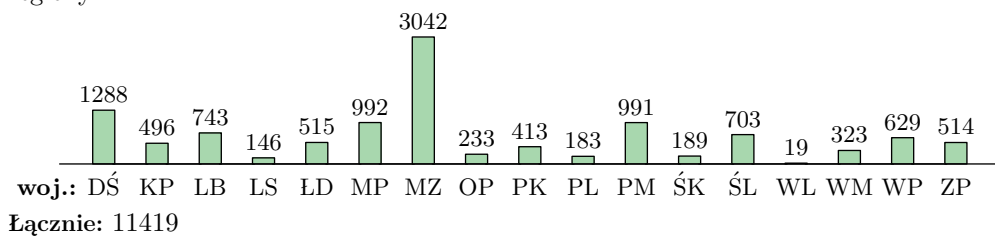
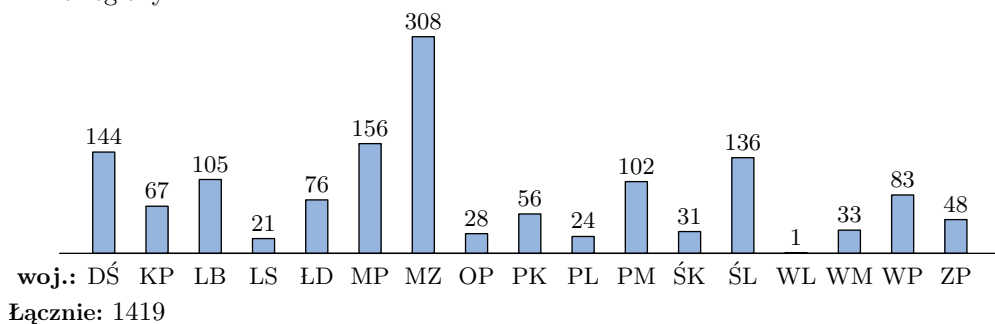


Tabela 8.

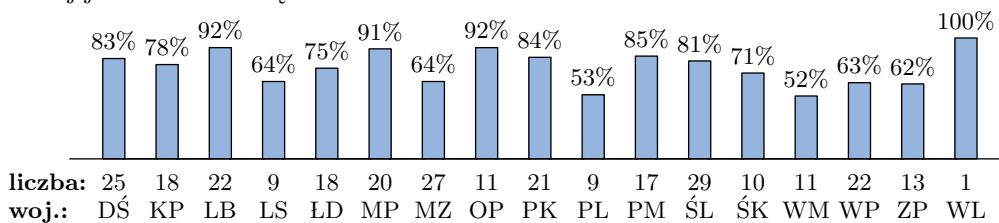
Liczba uczniów, którzy wzięli udział w zawodach w podziale na województwa i inne regiony.

**Tabela 9.**

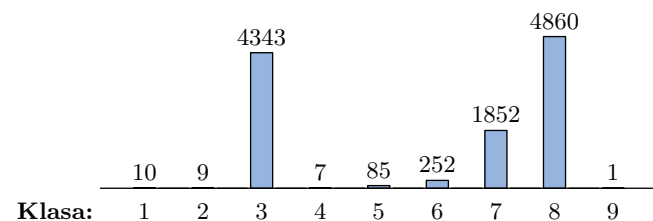
Liczba szkół, których uczniowie wzięli udział w zawodach w podziale na województwa i inne regiony.

**Tabela 10.**

Rzeczywista i procentowa liczba powiatów w danym województwie, z których co najmniej jedna szkoła wzięła udział w zawodach.

**Tabela 11.**

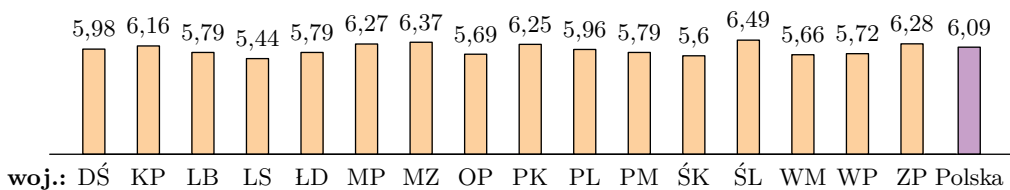
Liczba uczniów biorących udział w teście w podziale na klasy.



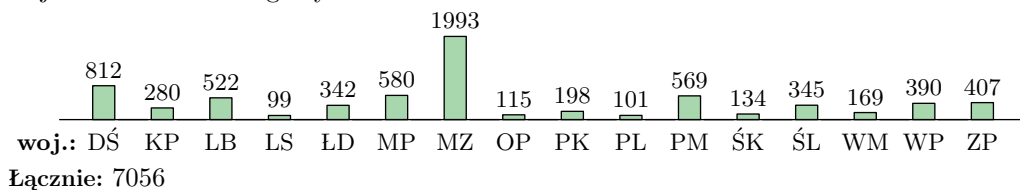
Łącznie: 11419

Tabela 12.

Średnia uzyskanych punktów przez uczniów szkół podstawowych ze wszystkich zadań w podziale na województwa i inne regiony.

**Tabela 13.**

Liczba uczniów szkół podstawowych, którzy wzięli udział w zawodach w podziale na województwa i inne regiony.



Skróty województw i innych regionów

DŚ — dolnośląskie

LB — lubelskie

ŁD — łódzkie

MZ — mazowieckie

PK — podkarpackie

PM — pomorskie

ŚL — śląskie

WP — wielkopolskie

WL — Wilno

KP — kujawsko-pomorskie

LS — lubuskie

MP — małopolskie

OP — opolskie

PL — podlaskie

ŚK — świętokrzyskie

WM — warmińsko-mazurskie

ZP — zachodniopomorskie

MINISTERSTWO
EDUKACJI
NARODOWEJ



Stowarzyszenie
na rzecz Edukacji
Matematycznej



Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

XIV Olimpiada Matematyczna Juniorów (2018/19)

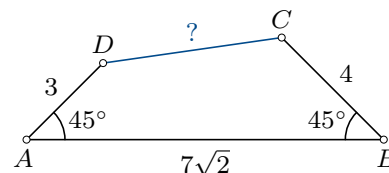
Zadania konkursowe zawodów pierwszego stopnia —
część korespondencyjna

(1 września – 15 października 2018 r.)



1. Liczbę naturalną n pomnożono przez 3, otrzymując w wyniku liczbę 999^{1000} . Wyznacz cyfrę jedności liczby n .

2. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym
 $\sphericalangle DAB = \sphericalangle ABC = 45^\circ$ oraz $DA = 3$, $AB = 7\sqrt{2}$, $BC = 4$.
Oblicz długość boku CD .



Zadanie 2.

3. Liczby całkowite a , b , c są różne od 0 i spełniają zależność

$$\frac{a}{b+c^2} = \frac{a+c^2}{b}.$$

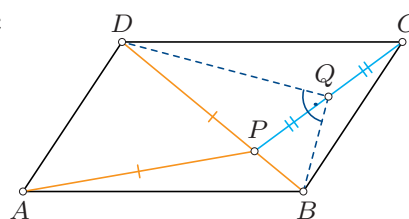
Wykaż, że $a+b+c \leq 0$.

4. Dodatkowo liczby całkowite a , b , c mają tę własność, że:

- a daje resztę 2 z dzielenia przez b ,
- b daje resztę 2 z dzielenia przez c ,
- c daje resztę 4 z dzielenia przez a .

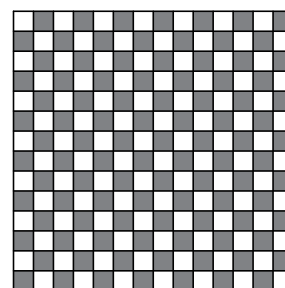
Udowodnij, że $c = 4$.

5. Dany jest równoległobok $ABCD$. Na przekątnej BD wybrano taki punkt P , że spełniona jest równość $AP = BP$. Punkt Q jest środkiem odcinka CP . Wykaż, że $\sphericalangle BQD = 90^\circ$.



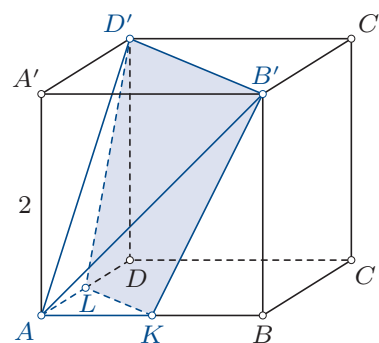
Zadanie 5.

6. Pola szachownicy o wymiarach 14×14 pokolorowano w sposób przedstawiony na rysunku. Czy można wybrać siedem pól czarnych i siedem pól białych tej szachownicy w taki sposób, aby w każdym wierszu i w każdej kolumnie znalazło się dokładnie jedno wybrane pole? Odpowiedź uzasadnij.



Zadanie 6.

7. Dany jest sześcian $ABCD A' B' C' D'$ o krawędzi długości 2 i wierzchołkach oznaczonych jak na rysunku. Punkt K jest środkiem krawędzi AB . Płaszczyzna zawierająca punkty B' , D' , K przecina krawędź AD w punkcie L . Oblicz objętość ostrosłupa o podstawie czworokąta $D' B' K L$ i wierzchołku A .



Zadanie 7.

Rozwiązania powyższych zadań (wszystkich lub części z nich) należy przekazać szkolnemu koordynatorowi OMJ lub przesłać bezpośrednio, listem poleconym, do Komitetu Okręgowego OMJ właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

15 października 2018 r. (decyduje data stempla pocztowego).

Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym lub pod niewłaściwy adres nie będą rozpatrywane. Adresy Komitetów Okręgowych OMJ, szczegółowe wytyczne dotyczące sposobu redakcji rozwiązań i przysyłania prac, a także regulamin OMJ i inne bieżące informacje znajdują się na stronie internetowej Olimpiady: www.omj.edu.pl.

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej. Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku.

XIV Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody stopnia pierwszego — część korespondencyjna

(1 września 2018 r. – 15 października 2018 r.)

Szkice rozwiązań zadań konkursowych

1. Liczbę naturalną n pomnożono przez 3, otrzymując w wyniku liczbę 999^{1000} . Wyznacz cyfrę jedności liczby n .

Szkic rozwiązania

Odpowiedź. Cyfrą jedności liczby n jest 7.

Zauważmy, że liczba 999^2 jest zakończona cyfrą 1, wobec czego liczba $3n = (999^2)^{500}$ jest także zakończona cyfrą 1. Stąd wniosek, że liczba $21n = 7 \cdot 3n$ jest zakończona cyfrą 7. Jednak liczby $21n$ oraz n mają tę samą cyfrę jedności, gdyż ich różnica $21n - n = 20n$ jest zakończona cyfrą 0.

Uwaga

Poniższa tabelka przedstawia wszystkie możliwe cyfry jedności liczby k oraz odpowiadające cyfry jedności liczby $3k$. Wynika stąd, że znając ostatnią cyfrę liczby $3k$ można jednoznacznie odtworzyć ostatnią cyfrę liczby k nie tylko w sytuacji, gdy cyfrą jedności liczby $3k$ jest 1.

k	...0	...1	...2	...3	...4	...5	...6	...7	...8	...9
$3k$	...0	...3	...6	...9	...2	...5	...8	...1	...4	...7

2. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym

$$\sphericalangle DAB = \sphericalangle ABC = 45^\circ \quad \text{oraz} \quad DA = 3, \quad AB = 7\sqrt{2}, \quad BC = 4.$$

Oblicz długość boku CD .

Szkic rozwiązania

Odpowiedź. Bok CD ma długość 5.

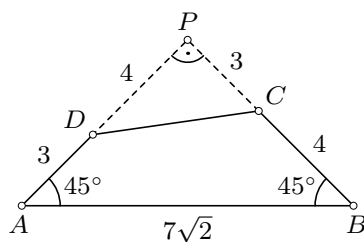
Sposób I

Oznaczmy przez P punkt przecięcia prostych AD i BC (rys. 1). Z treści zadania wiemy, że $\sphericalangle PAB = \sphericalangle PBA = 45^\circ$, więc ABP jest trójkątem prostokątnym równoramiennym. Wobec tego $AP\sqrt{2} = AB = 7\sqrt{2}$, skąd otrzymujemy $AP = 7$. Zatem również $BP = 7$. W konsekwencji

$$DP = AP - AD = 7 - 3 = 4 \quad \text{oraz} \quad CP = BP - BC = 7 - 4 = 3.$$

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta prostokątnego CDP , obliczamy

$$CD^2 = CP^2 + DP^2 = 3^2 + 4^2 = 25, \quad \text{skąd} \quad CD = 5.$$



rys. 1

Sposób II

Niech X, Y będą rzutami prostokątnymi punktów D, C na prostą AB oraz niech Z będzie rzutem prostokątnym punktu D na prostą CY (rys. 2). Wówczas trójkąty AXD oraz BYC są prostokątne i równoramienne, skąd

$$AX = XD = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{2} \quad \text{oraz} \quad BY = YC = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}.$$

Czworokąt $XYZD$ jest prostokątem, w związku z czym

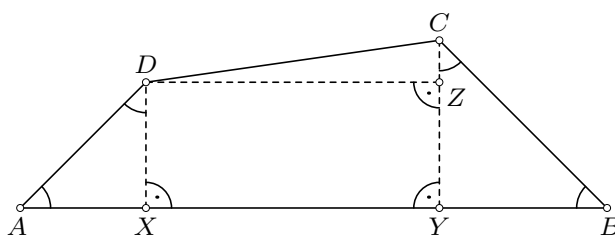
$$DZ = XY = AB - AX - BY = 7\sqrt{2} - \frac{3}{2}\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \frac{7}{2}\sqrt{2}$$

oraz

$$CZ = YC - YZ = YC - XD = 2\sqrt{2} - \frac{3}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta prostokątnego CDZ , otrzymujemy

$$CD^2 = DZ^2 + CZ^2 = \frac{49}{2} + \frac{1}{2} = 25, \quad \text{skąd} \quad CD = 5.$$



rys. 2

3. Liczby całkowite a, b, c są różne od 0 i spełniają zależność

$$\frac{a}{b+c^2} = \frac{a+c^2}{b}.$$

Wykaż, że $a+b+c \leq 0$.

Szkic rozwiązania

Przekształcając równoważnie daną w treści zadania równość, otrzymujemy kolejno

$$\begin{aligned}(a+c^2)(b+c^2) &= ab, \\ ab+ac^2+bc^2+c^4 &= ab, \\ c^2(a+b+c^2) &= 0.\end{aligned}$$

Ponieważ $c \neq 0$, więc z ostatniej równości wynika, że $a+b+c^2 = 0$.

Jeśli $c = 1$, to $a+b+c = a+b+c^2 = 0$ i teza zadania jest spełniona.

W przeciwnym przypadku, obie liczby c oraz $c-1$ są różne od 0. Ponieważ są to liczby całkowite różniące się o 1, więc nie mogą być przeciwnych znaków (różnica dwóch liczb całkowitych przeciwnych znaków wynosi co najmniej 2). W związku z tym $c(c-1) > 0$, skąd $c^2 > c$. W konsekwencji $a+b+c < a+b+c^2 = 0$, co należało wykazać.

Uwaga

Z powyższego rozumowania wynika, że w postulowana nierówność staje się równością jedynie wtedy, gdy $c = 1$ oraz a, b są dowolnymi liczbami całkowitymi o sumie równej -1 .

4. Dodatnie liczby całkowite a, b, c mają tę własność, że:

- a daje resztę 2 z dzielenia przez b ,
- b daje resztę 2 z dzielenia przez c ,
- c daje resztę 4 z dzielenia przez a .

Udowodnij, że $c = 4$.

Szkic rozwiązania

Zauważmy, że jeśli dodatnia liczba całkowita x daje z dzielenia przez dodatnią liczbę całkowitą y resztę r , to $y > r$ oraz liczba $x - r$ jest podzielna przez y . Wobec tego z warunków zadania wynika, że $b > 2$, $c > 2$, $a > 4$, a ponadto

- liczba $a - 2$ jest podzielna przez b ,
- liczba $b - 2$ jest podzielna przez c ,
- liczba $c - 4$ jest podzielna przez a .

Przypuśćmy, że $c > 4$. Wtedy wszystkie liczby $a - 2$, $b - 2$ oraz $c - 4$ są dodatnie i podzielne odpowiednio przez b , c oraz a . Stąd wniosek, że

$$a - 2 \geq b, \quad b - 2 \geq c, \quad c - 4 \geq a.$$

Dodając te nierówności stronami, otrzymujemy $a + b + c - 8 \geq a + b + c$, czyli $-8 \geq 0$. Uzyskana sprzeczność dowodzi, że $c \leq 4$.

Wiemy już jednak, że $c > 2$, w związku z tym pozostaje do rozpatrzenia przypadek $c = 3$. Wtedy trzeci z powyższych warunków oznacza, że liczba $c - 4 = -1$ jest podzielna przez liczbę a , która jest większa od 4. To oczywiście spełnione być nie może.

Wobec powyższego liczba c musi być równa 4, co kończy rozwiązanie zadania.

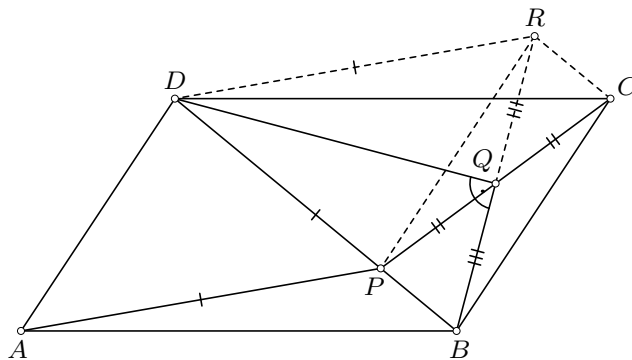
5. Dany jest równoległobok $ABCD$. Na przekątnej BD wybrano taki punkt P , że spełniona jest równość $AP = BD$. Punkt Q jest środkiem odcinka CP . Wykaż, że $\angle BQD = 90^\circ$.

Szkic rozwiązania

Sposób I

Niech R będzie takim punktem, że czworokąt $ADRP$ jest równoległobokiem (rys. 3). Wówczas $PR = AD = BC$ oraz $PR \parallel AD \parallel BC$, wobec czego czworokąt $BCRP$ także jest równoległobokiem.

Punkt Q jest środkiem przekątnej CP równoległoboku $BCRP$, więc jest także środkiem przekątnej BR . Ponadto $DR = AP = BD$, więc odcinek BR jest podstawą trójkąta równoramiennego BDR . Wobec tego punkt Q , jako środek tej podstawy, jest także spodkiem wysokości poprowadzonej z wierzchołka D . Stąd wniosek, że $\angle BQD = 90^\circ$.



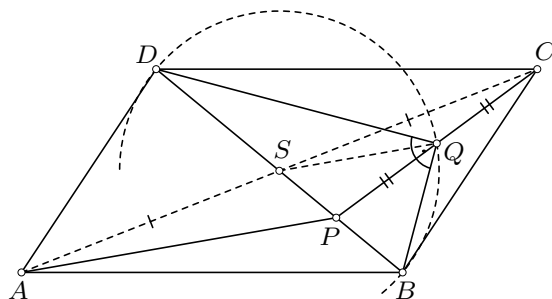
rys. 3

Sposób II

Niech S będzie punktem przecięcia przekątnych równoległoboku $ABCD$. Punkt S jest wtedy środkiem każdej z jego przekątnych (rys. 4). Skoro odcinek QS łączy środki boków AC i PC trójkąta APC , to

$$QS = \frac{1}{2}AP = \frac{1}{2}BD = BS = DS.$$

Wobec tego punkty B, D, Q leżą na okręgu o średnicy BD , skąd $\angle BQD = 90^\circ$.



rys. 4

Uwaga

W przedstawionych rozwiązaniach kluczowe było uzupełnienie rysunku o pewien element pozwalający uchwycić niewidoczne na pierwszy rzut oka zależności. Metodą rozwiązywania zadań geometrycznych w taki sposób poświęcone są artykuły *Dorysujmy środek odcinka*, Kwadrat nr 19 (styczeń 2017) oraz *Dorysujmy równoległobok*, Kwadrat nr 20 (wrzesień 2017).

6. Pola szachownicy o wymiarach 14×14 pokolorowano w sposób przedstawiony na rysunku. Czy można wybrać siedem pól czarnych i siedem pól białych tej szachownicy w taki sposób, aby w każdym wierszu i w każdej kolumnie znalazło się dokładnie jedno wybrane pole? Odpowiedź uzasadnij.

Szkic rozwiązania

Odpowiedź. Taki wybór pól nie jest możliwy.

Ponumerujmy wiersze i kolumny szachownicy i wpiszmy w każde pole sumę numerów wiersza oraz kolumny, jak pokazano na rysunku (rys. 5). Wówczas w pola czarne są wpisane liczby nieparzyste, a w pola białe — liczby parzyste.

Suma liczb wpisanych w siedem pól czarnych jest więc zawsze nieparzysta, a suma liczb wpisanych w siedem pól białych jest zawsze parzysta. To oznacza, że suma liczb wpisanych w czternaście pól szachownicy, wśród których jest siedem pól czarnych i siedem pól białych, jest nieparzysta.

Tymczasem suma liczb wpisanych w czternaście pól szachownicy o tej własności, że w każdym wierszu i w każdej kolumnie znajduje się dokładnie jedno z tych pól, jest równa sumie numerów wszystkich wierszy i wszystkich kolumn, czyli

$$2 \cdot (1 + 2 + \dots + 14),$$

a zatem jest liczbą parzystą.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28

rys. 5

7. Dany jest sześcian $ABCD A' B' C' D'$ o krawędzi długości 2 i wierzchołkach oznaczonych jak na rysunku. Punkt K jest środkiem krawędzi AB . Płaszczyzna zawierająca punkty B', D', K przecina krawędź AD w punkcie L . Oblicz objętość ostrosłupa o podstawie czworokąta $D' B' K L$ i wierzchołku A .

Szkic rozwiązania

Odpowiedź. Objętość ostrosłupa jest równa 1.

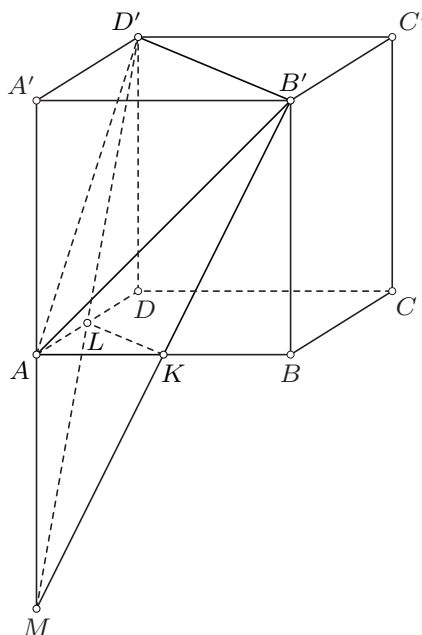
Niech M będzie wspólnym punktem płaszczyzny $B' K L D'$ oraz prostej AA' (rys. 6). Punkt M leży oczywiście w płaszczyźnie $B' K L D'$. Punkt M leży również w płaszczyźnie $B' K A A'$, gdyż cała prosta AA' w niej leży. Wobec tego punkt M należy do części wspólnej obu tych płaszczyzn, czyli do prostej $B' K$.

Analogicznie uzasadniamy, że punkt M leży na prostej $D' L$.

Ponieważ $AK = KB$, więc trójkąty prostokątne AKM i BKB' są przystające (cecha kąt-bok-kąt). Wobec tego $AM = BB' = DD'$, skąd wynika, że trójkąty ALM i DLD' są przystające (ponownie cecha kąt-bok-kąt). W związku z tym $AL = LD$.

Szukaną objętość V ostrosłupa można więc wyznaczyć, odejmując od objętości czworoscianu $A' B' D' M$ sumę objętości czworoscianów $A' B' D' A$ oraz $AKLM$:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \cdot \frac{A'B' \cdot A'D'}{2} \cdot A'M - \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{A'B' \cdot A'D'}{2} \cdot AA' + \frac{1}{3} \cdot \frac{AK \cdot AL}{2} \cdot AM \right) = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{2 \cdot 2}{2} \cdot 4 - \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{2 \cdot 2}{2} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1 \cdot 1}{2} \cdot 2 \right) = 1. \end{aligned}$$



rys. 6

Uwaga

Podobną metodę można wykorzystać do obliczenia objętości brył powstałych w wyniku przekroju sześcianu pewną płaszczyzną. Przykłady takich zadań znajdują się w artykule *Objętość ostrosłupa*, *Kwadrat* nr 22 (wrzesień 2018).

XIV Olimpiada Matematyczna Juniorów

Statystyki dotyczące zawodów części korespondencyjnej (2018/19)

(1 września – 15 października 2018 r.)

Tabela 1. Liczba uczniów, którzy wzięli udział w zawodach w podziale na województwa.

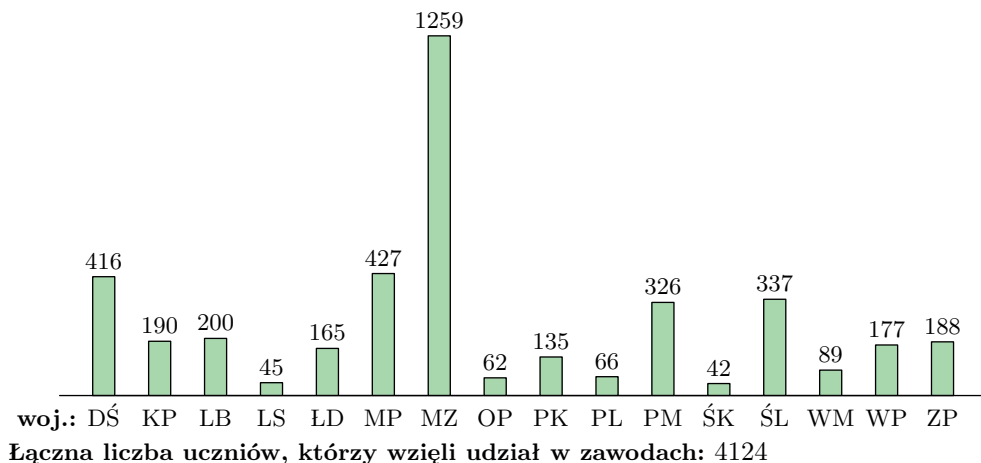
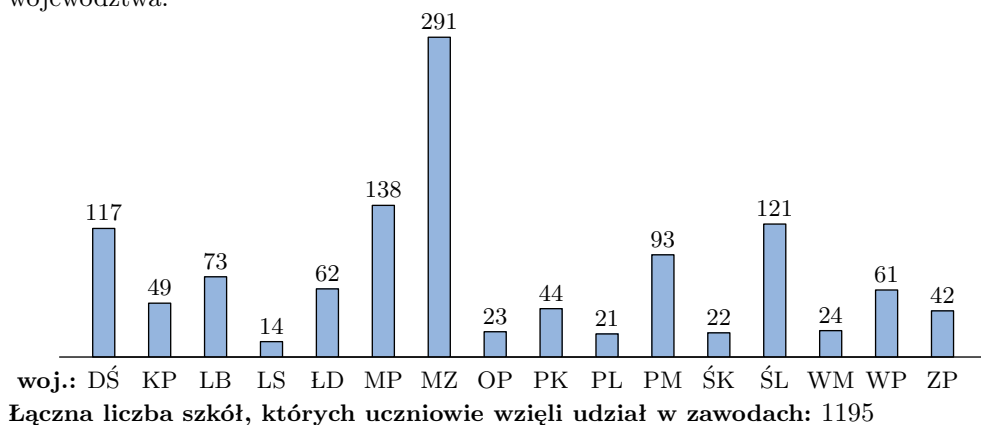


Tabela 2. Liczba szkół, których uczniowie wzięli udział w zawodach w podziale na województwa.



Skróty województw

DŚ — dolnośląskie
LB — lubelskie
ŁD — łódzkie
MZ — mazowieckie
PK — podkarpackie
PM — pomorskie
ŚŁ — śląskie
WP — wielkopolskie

KP — kujawsko-pomorskie
LS — lubuskie
MP — małopolskie
OP — opolskie
PL — podlaskie
ŚK — świętokrzyskie
WM — warmińsko-mazurskie
ZP — zachodniopomorskie

Tabela 3. Procentowa liczba osób, które uzyskały daną liczbę punktów za poszczególne zadania.

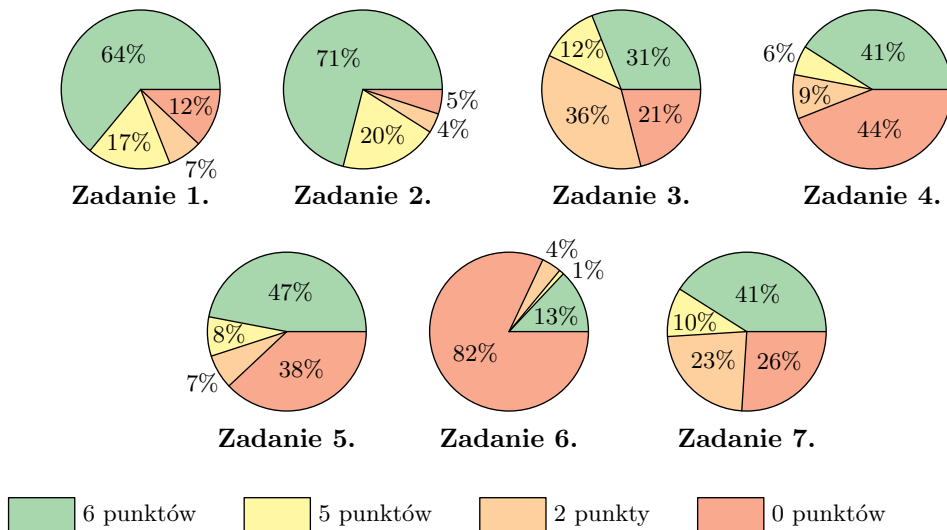


Tabela 4. Średnia uzyskanych punktów za poszczególne zadania.

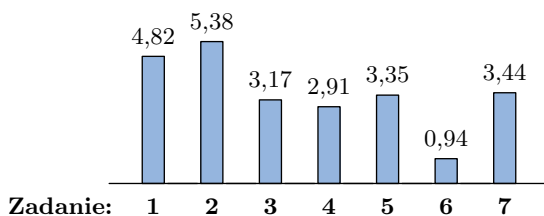


Tabela 5. Liczba nadesłanych (regulaminowo) prac dotyczących poszczególnych zadań.

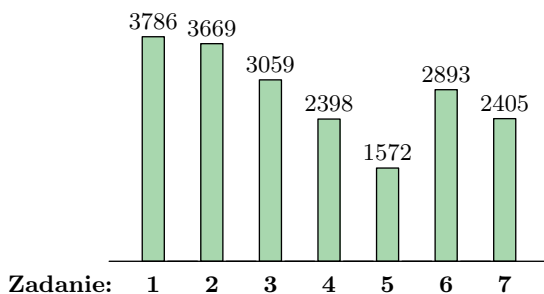


Tabela 6. Średnia uzyskanej sumy punktów w podziale na województwa.

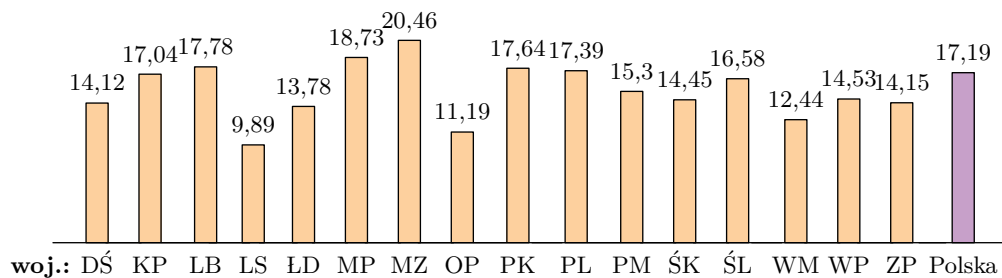


Tabela 7. Procentowa i rzeczywista liczba osób, które uzyskały daną sumę punktów.

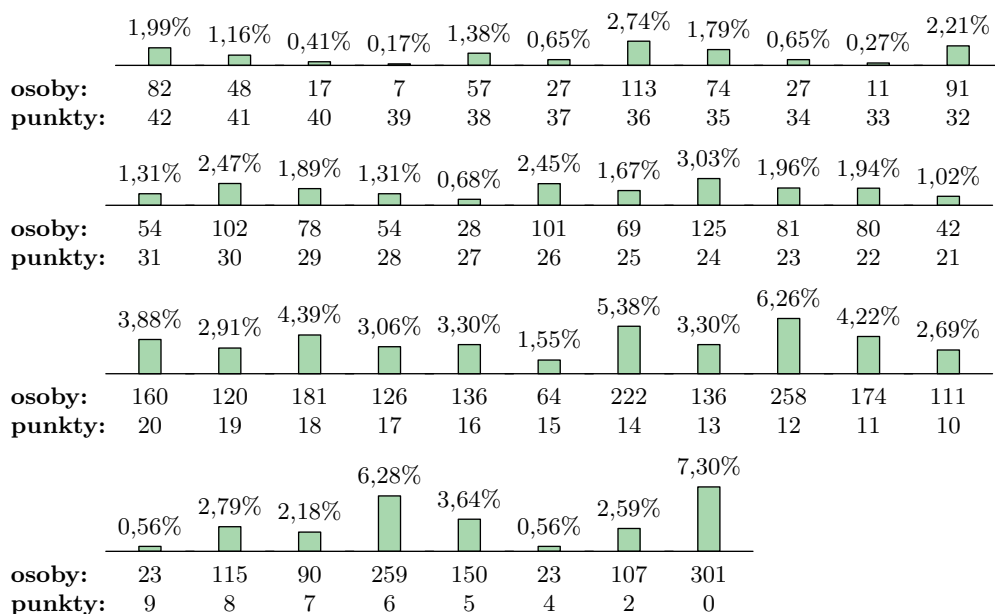


Tabela 8. Procentowa i rzeczywista liczba osób, które uzyskały daną lub większą sumę punktów.

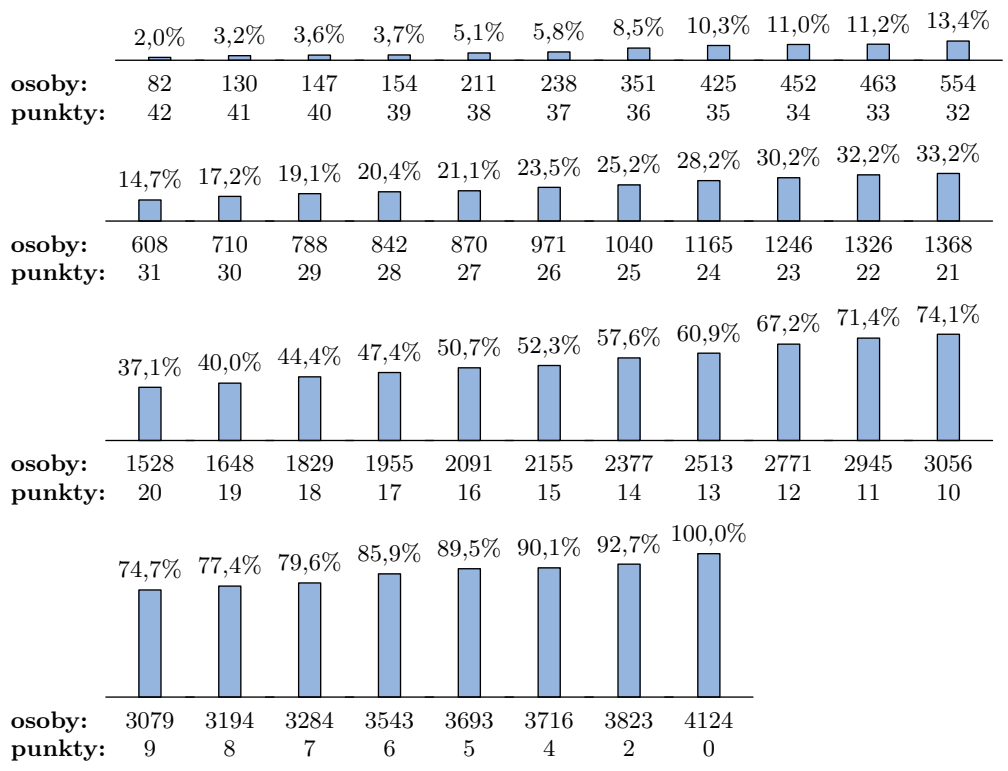


Tabela 9. Liczba uczniów szkół podstawowych, którzy wzięli udział w zawodach w podziale na województwa.

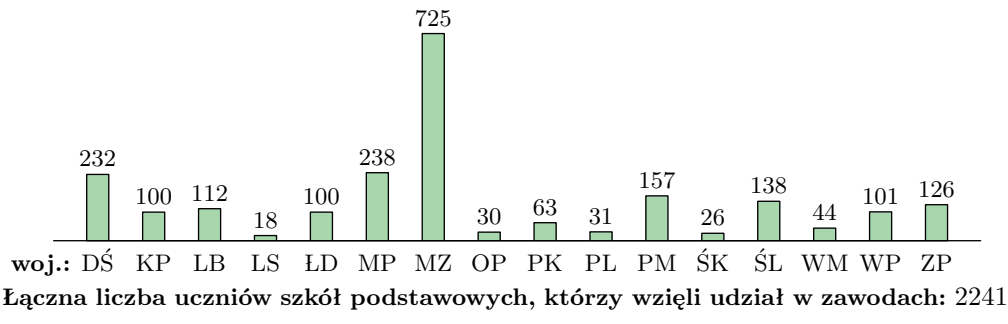
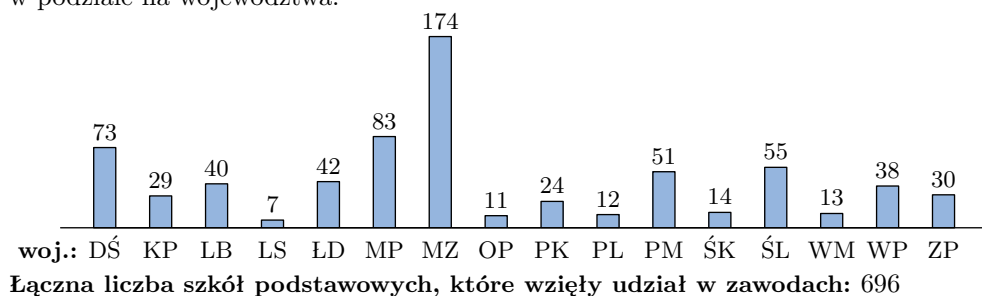


Tabela 10. Liczba szkół podstawowych, których uczniowie wzięli udział w zawodach w podziale na województwa.



MINISTERSTWO
EDUKACJI
NARODOWEJ



Stowarzyszenie
na rzecz Edukacji
Matematycznej



Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

XIV Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody drugiego stopnia
(12 stycznia 2019 r.)



1. Liczby rzeczywiste x oraz y spełniają nierówność $x^2 + x \leq y$. Udowodnij, że $y^2 + y \geq x$.

2. Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD , w którym $\sphericalangle ABC = 90^\circ$. Dwusieczna kąta BAD przecina odcinek BC w punkcie P . Wykaż, że jeśli $\sphericalangle APD = 45^\circ$, to pole czworokąta $APCD$ jest równe polu trójkąta ABP .

3. Dany jest 101-kąt foremny. Prosta ℓ leży w płaszczyźnie tego wielokąta i nie przechodzi przez żaden z jego wierzchołków. Udowodnij, że prosta ℓ przecina parzystą liczbę przekątnych danego wielokąta.

4. Dany jest trójkąt ABC , w którym $AB = 3 \cdot BC$. Punkty P i Q leżą na boku AB i spełniają warunek $AP = PQ = QB$. Punkt M jest środkiem boku AC . Wykaż, że $\sphericalangle PMQ = 90^\circ$.

5. W zapisie dziesiętnym pewnej dodatniej liczby całkowitej n nie występuje żadna z cyfr 1, 2, 9. Udowodnij, że w zapisie dziesiętnym liczby $3n$ występuje co najmniej jedna z cyfr 1, 2, 9.

XIV Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody drugiego stopnia (12 stycznia 2019 r.)

Szkice rozwiązań zadań konkursowych

1. Liczby rzeczywiste x oraz y spełniają nierówność $x^2 + x \leq y$. Udowodnij, że $y^2 + y \geq x$.

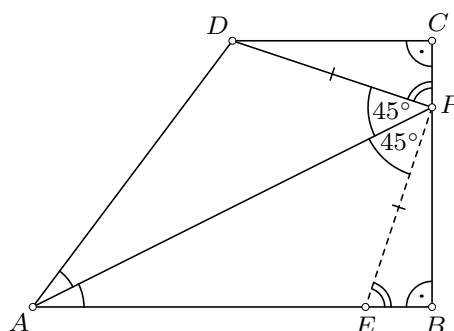
Szkic rozwiązania

Zauważmy, że $y^2 + y \geq y^2 + x^2 + x \geq x$, gdyż $y^2 + x^2 \geq 0$.

2. Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD , w którym $\angle ABC = 90^\circ$. Dwu-sieczna kąta BAD przecina odcinek BC w punkcie P . Wykaż, że jeśli $\angle APD = 45^\circ$, to pole czworokąta $APCD$ jest równe polu trójkąta ABP .

Szkic rozwiązania

Zauważmy, że $\angle CPD < 90^\circ$, wobec czego $\angle BPD > 90^\circ$. W związku z tym $\angle APB > 45^\circ$. Na odcinku AB można więc wskazać taki punkt E , że $\angle APE = 45^\circ$ (rys. 1).



rys. 1

Z równości $\angle APE = \angle APD$ oraz $\angle EAP = \angle DAP$ wynika, że trójkąty APE oraz APD są przystające (cecha kąt–bok–kąt). Stąd wniosek, że $PE = PD$. Ponadto

$$\angle BEP = 90^\circ - \angle BPE = 180^\circ - \angle DPE - \angle BPE = \angle CPD,$$

wobec czego trójkąty prostokątne BEP oraz CPD są przystające (cecha kąt–bok–kąt).

W konsekwencji, pola trójkątów APE i APD są równe oraz pola trójkątów BEP i CPD są równe. Pole czworokąta $APCD$ jest więc równe polu trójkąta ABP .

Uwaga

Z powyższego rozumowania wynika, że także obwód czworokąta $APCD$ jest równy obwodowi trójkąta ABP .

3. Dany jest 101-kąt foremny. Prosta ℓ leży w płaszczyźnie tego wielokąta i nie przechodzi przez żaden z jego wierzchołków. Udowodnij, że prosta ℓ przecina parzystą liczbę przekątnych danego wielokąta.

Szkic rozwiązania

Jeżeli prosta ℓ nie przecina wielokąta, to przecina 0 przekątnych tego wielokąta, a 0 jest liczbą parzystą. W dalszej części rozwiązania założmy więc, że prosta ℓ przechodzi przez wnętrze wielokąta.

Łączna liczba przekątnych i boków przecinających prostą ℓ jest równa liczbie wszystkich odcinków o końcach w wierzchołkach danego wielokąta, których jeden koniec leży po jednej

stronie prostej ℓ , a drugi — po drugiej. Jeżeli po jednej ze stron prostej ℓ znajduje się n wierzchołków danego 101-kąta, to po drugiej stronie tej prostej jest dokładnie $101 - n$ wierzchołków tego wielokąta. Jeden koniec boku lub przekątnej przecinających prostą ℓ możemy więc wybrać n sposobów, a drugi na $101 - n$ sposobów. W związku z tym łączna liczba przekątnych i boków przecinających prostą ℓ jest równa $n \cdot (101 - n)$. A ponieważ prosta ℓ przecina dokładnie dwa boki wielokąta, więc liczba przekątnych przecinających prostą ℓ jest równa $n \cdot (101 - n) - 2$.

Suma liczb n oraz $101 - n$ jest liczbą nieparzystą, a zatem jedna z liczb n lub $101 - n$ jest parzysta, a druga nieparzysta. Wobec tego ich iloczyn jest liczbą parzystą. Ostatecznie również liczba $n \cdot (101 - n) - 2$ jest parzysta, co było do udowodnienia.

4. Dany jest trójkąt ABC , w którym $AB = 3 \cdot BC$. Punkty P i Q leżą na boku AB i spełniają warunek $AP = PQ = QB$. Punkt M jest środkiem boku AC . Wykaż, że $\sphericalangle PMQ = 90^\circ$.

Szkic rozwiązania

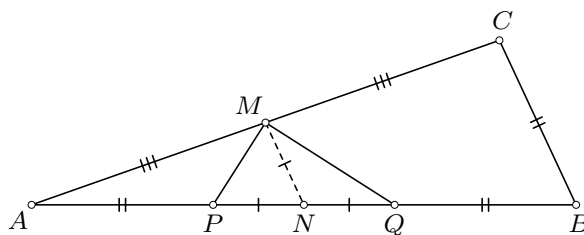
Oznaczmy przez N środek odcinka AB . Wówczas punkt N jest także środkiem odcinka PQ (rys. 2). Zauważmy, że

$$3 \cdot PQ = AP + PQ + QB = AB = 3 \cdot BC,$$

wobec czego $PQ = BC$ i w konsekwencji

$$NM = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}PQ = NP = NQ.$$

Punkt N jest więc środkiem okręgu opisanego na trójkącie PQM oraz leży na boku PQ tego trójkąta. Stąd wniosek, że $\sphericalangle PMQ = 90^\circ$, co kończy dowód.



rys. 2

Uwaga

W treści zadania zakładaliśmy, że bok trójkąta jest odcinkiem *otwartym*, tzn. nie zawiera swoich końców. W przeciwnym przypadku teza zadania nie jest prawdziwa. Przyjmując bowiem $P = B$ oraz $A = Q$, widzimy, że warunek $AP = PQ = QB$ jest spełniony, jednak kąt PMQ jest rozwarty.

5. W zapisie dziesiętnym pewnej dodatniej liczby całkowitej n nie występuje żadna z cyfr 1, 2, 9. Udowodnij, że w zapisie dziesiętnym liczby $3n$ występuje co najmniej jedna z cyfr 1, 2, 9.

Szkic rozwiązania

Przyjmijmy, że n jest liczbą k -cyfrową. Z warunków zadania wynika, że pierwsza cyfra liczby n jest różna od 1, 2 oraz 9. Warunek ten oznacza, że $3 \cdot 10^{k-1} \leq n < 9 \cdot 10^{k-1}$. Mnożąc nierówności te obustronnie przez 3, uzyskujemy $9 \cdot 10^{k-1} \leq 3n < 27 \cdot 10^{k-1}$. Stąd wniosek, że $3n$ jest k -cyfrową liczbą rozpoczynającą się cyfrą 9 lub $(k+1)$ -cyfrową liczbą rozpoczynającą się cyfrą 1 lub 2. We wszystkich tych przypadkach liczba $3n$ ma pierwszą cyfrę równą 1, 2 lub 9.

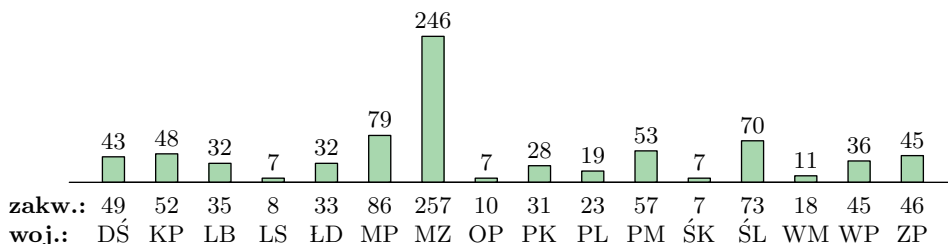
XIV Olimpiada Matematyczna Juniorów

Statystyki dotyczące zawodów drugiego stopnia (2018/19)

(12 stycznia 2019 r.)

Gimnazja oraz oddziały gimnazjalne

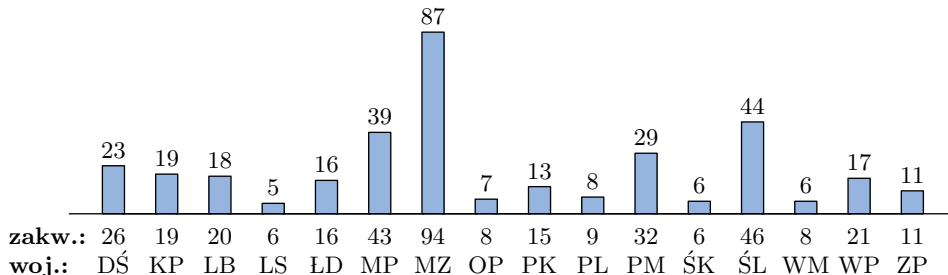
Tabela 1. Liczba uczniów, którzy wzięli udział w zawodach oraz zakwalifikowanych do zawodów w podziale na województwa.



Łączna liczba uczniów, którzy wzięli udział w zawodach: 763

Łączna liczba uczniów zakwalifikowanych do zawodów: 830

Tabela 2. Liczba szkół uczniów, którzy wzięli udział w zawodach oraz zakwalifikowanych do zawodów w podziale na województwa.



Łączna liczba szkół uczniów, którzy wzięli udział w zawodach: 348

Łączna liczba szkół uczniów zakwalifikowanych do zawodów: 380

Skróty województw

DŚ — dolnośląskie

LB — lubelskie

ŁD — łódzkie

MZ — mazowieckie

PK — podkarpackie

PM — pomorskie

ŚŁ — śląskie

WP — wielkopolskie

KP — kujawsko-pomorskie

LS — lubuskie

MP — małopolskie

OP — opolskie

PL — podlaskie

ŚK — świętokrzyskie

WM — warmińsko-mazurskie

ZP — zachodniopomorskie

Tabela 3. Procentowa i rzeczywista liczba osób, które uzyskały daną sumę punktów.

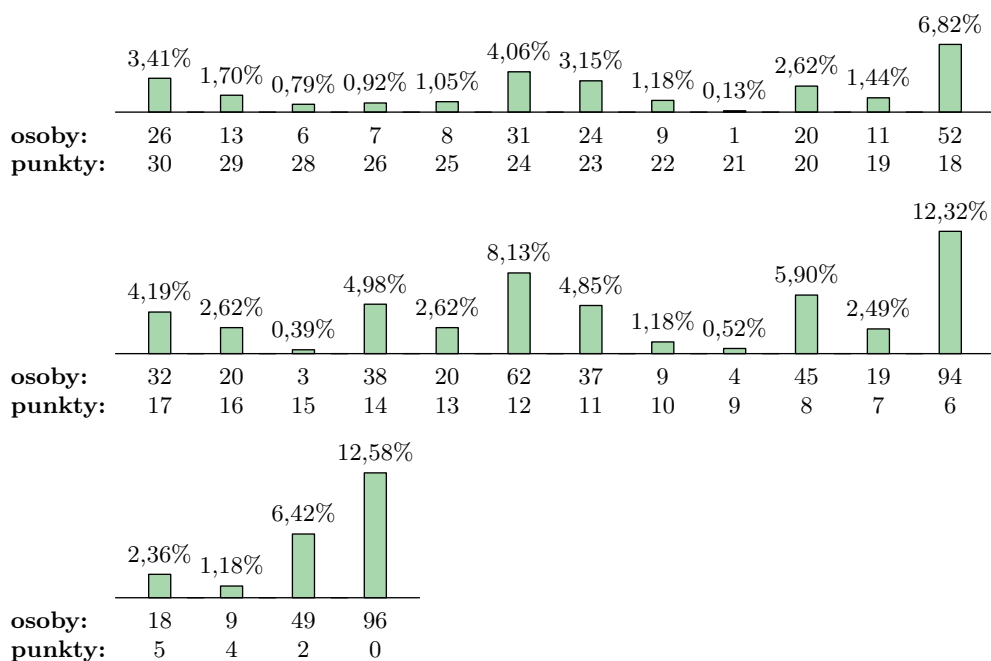


Tabela 4. Procentowa i rzeczywista liczba osób, które uzyskały daną lub większą sumę punktów.

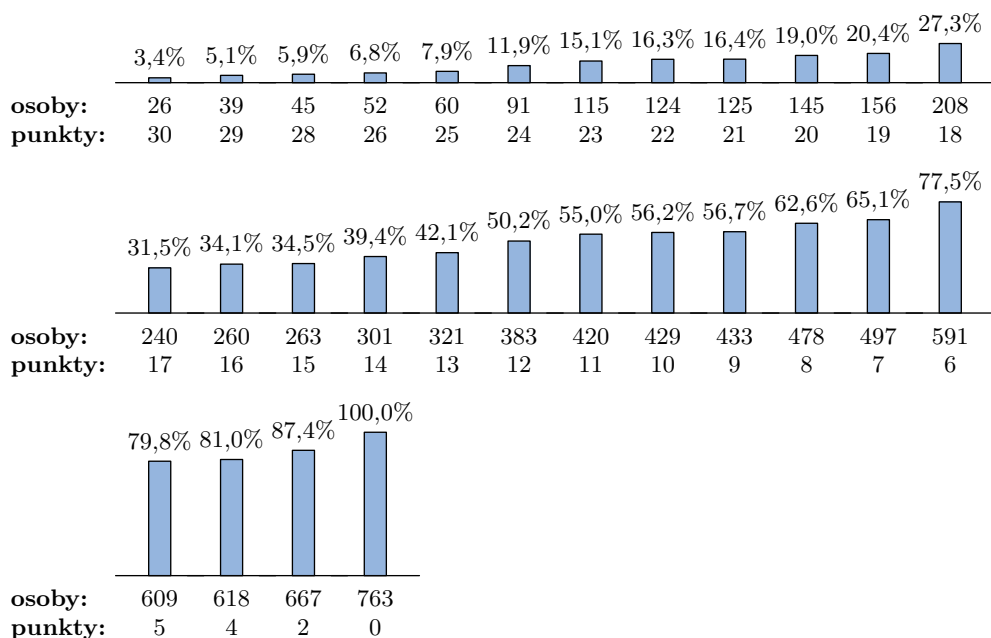


Tabela 5. Procentowa liczba osób, które uzyskały daną liczbę punktów za poszczególne zadania.

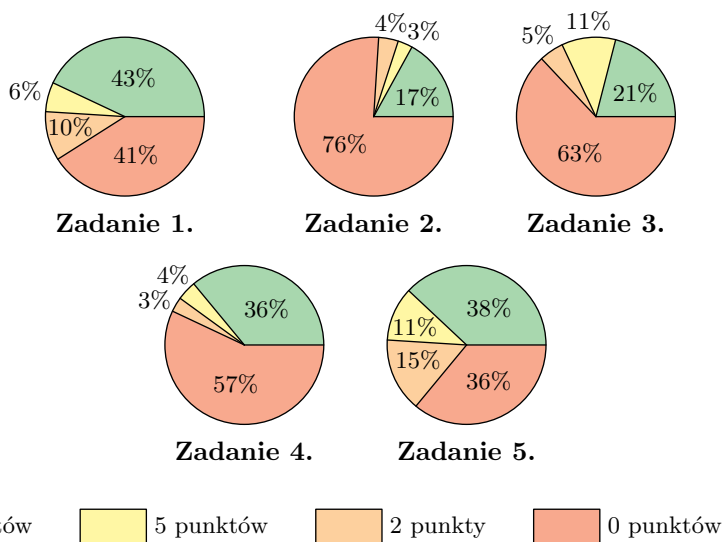


Tabela 6. Średnia uzyskanych punktów za poszczególne zadania.

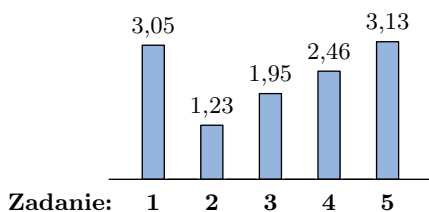
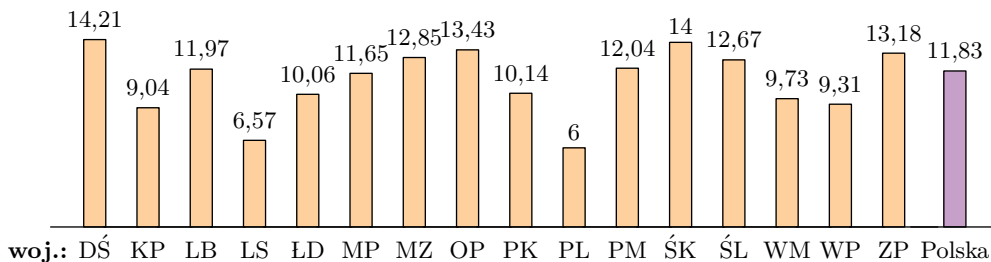


Tabela 7. Średnia sumy punktów w podziale na województwa.



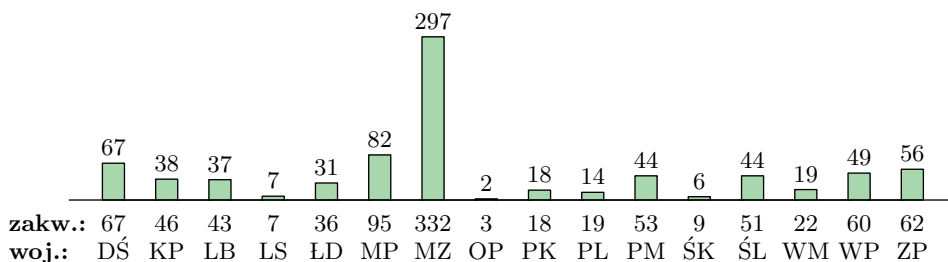
XIV Olimpiada Matematyczna Juniorów

Statystyki dotyczące zawodów drugiego stopnia (2018/19)

(12 stycznia 2019 r.)

Szkoły podstawowe

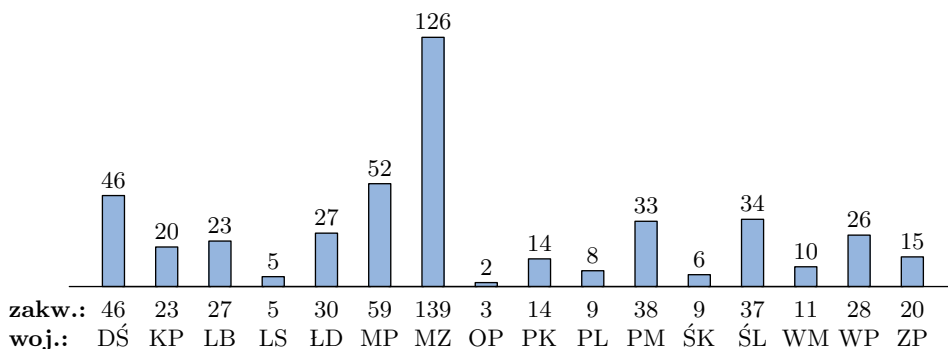
Tabela 1. Liczba uczniów, którzy wzięli udział w zawodach oraz zakwalifikowanych do zawodów w podziale na województwa.



Łączna liczba uczniów, którzy wzięli udział w zawodach: 811

Łączna liczba uczniów zakwalifikowanych do zawodów: 923

Tabela 2. Liczba szkół uczniów, którzy wzięli udział w zawodach oraz zakwalifikowanych do zawodów w podziale na województwa.



Łączna liczba szkół uczniów, którzy wzięli udział w zawodach: 447

Łączna liczba szkół uczniów zakwalifikowanych do zawodów: 498

Skróty województw

DŚ — dolnośląskie

LB — lubelskie

LD — łódzkie

MZ — mazowieckie

PK — podkarpackie

PM — pomorskie

ŚL — śląskie

WP — wielkopolskie

KP — kujawsko-pomorskie

LS — lubuskie

MP — małopolskie

OP — opolskie

PL — podlaskie

ŚK — świętokrzyskie

WM — warmińsko-mazurskie

ZP — zachodniopomorskie

Tabela 3. Procentowa i rzeczywista liczba osób, które uzyskały daną sumę punktów.

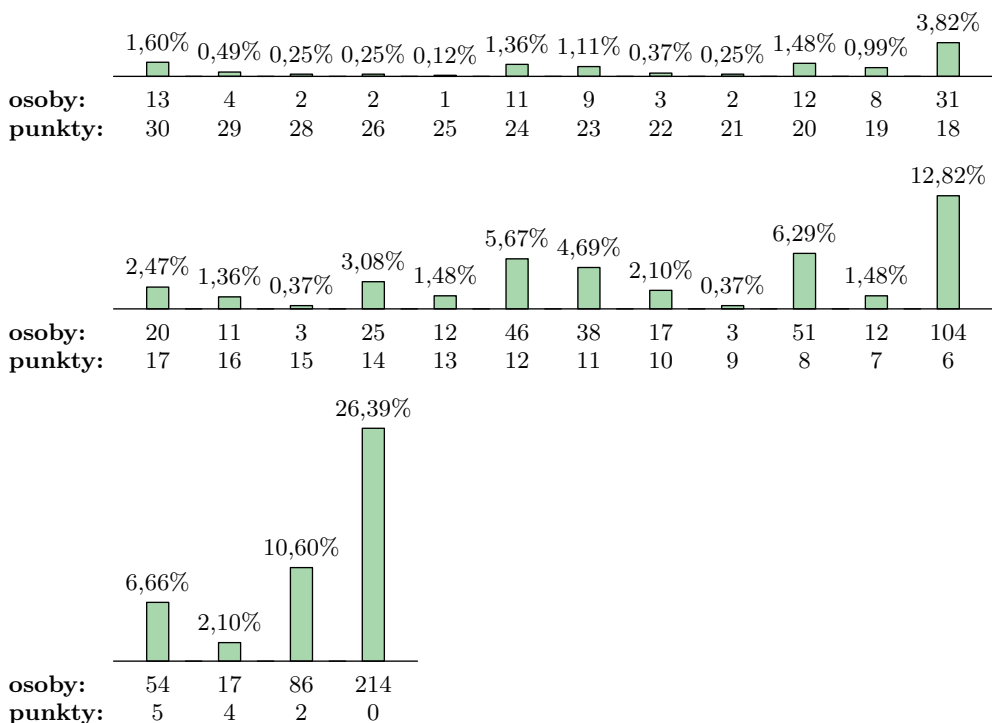


Tabela 4. Procentowa i rzeczywista liczba osób, które uzyskały daną lub większą sumę punktów.

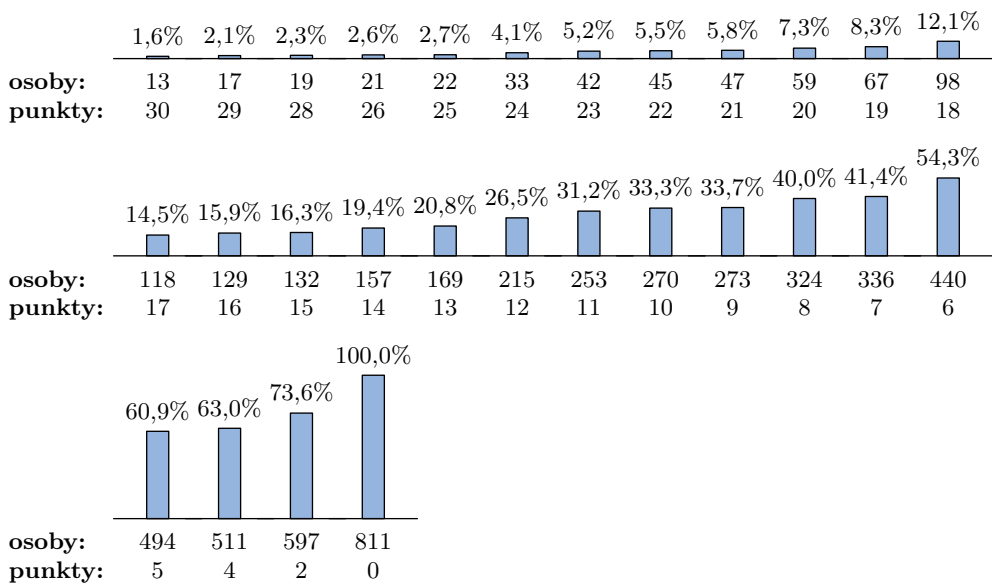


Tabela 5. Procentowa liczba osób, które uzyskały daną liczbę punktów za poszczególne zadania.

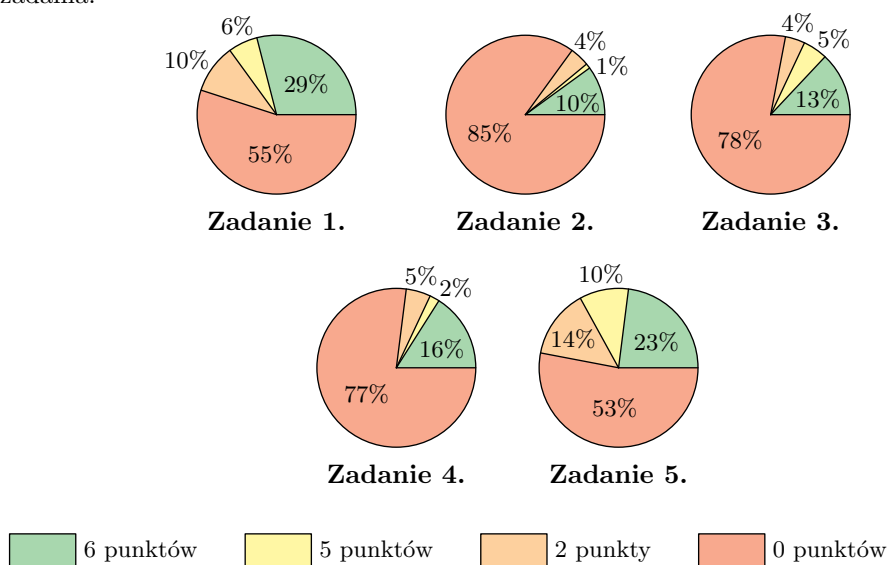


Tabela 6. Średnia uzyskanych punktów za poszczególne zadania.

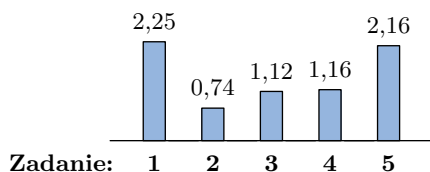
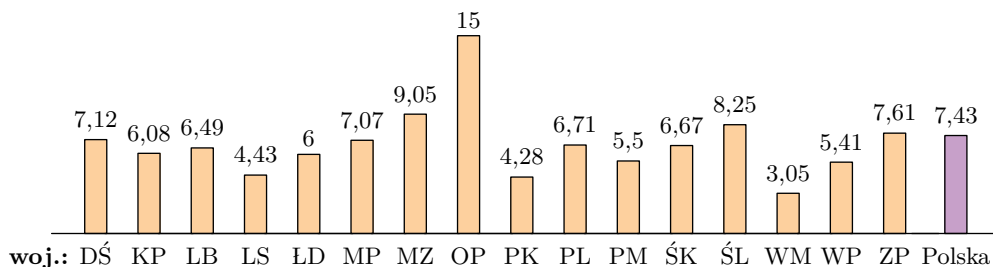
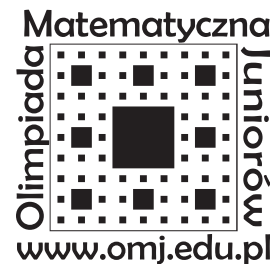


Tabela 7. Średnia sumy punktów w podziale na województwa.



XIV Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody trzeciego stopnia
(23 marca 2019 r.)



1. Liczby całkowite a i b są większe od 1. Udowodnij, że jeżeli jedna z liczb

$$\frac{a}{b}, \quad \frac{a-1}{b-1}$$

jest o 1 większa od drugiej, to obie są liczbami całkowitymi.

2. Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD , w którym $AC = BC$. Punkt M jest środkiem ramienia AD . Wykaż, że

$$\sphericalangle ACM = \sphericalangle CBD.$$

3. Dane są liczby rzeczywiste x, y, z , różne od zera, dla których $x + y + z = 0$. Wiedząc, że liczby

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \quad \text{oraz} \quad \frac{x}{z} + \frac{z}{y} + \frac{y}{x} + 1$$

są równe, wyznacz ich wspólną wartość.

4. Punkt D leży na boku AB trójkąta ABC . Załóżmy, że na odcinku CD istnieje taki punkt E , że

$$\sphericalangle EAD = \sphericalangle AED \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle ECB = \sphericalangle CEB.$$

Wykaż, że $AC + BC > AB + CE$.

5. W każde pole tablicy o wymiarach 5×5 wpisano jedną z liczb $-1, 0$ lub 1 . Okazało się, że w każdym kwadracie 2×2 złożonym z pól tablicy suma pewnych trzech spośród czterech wpisanych liczb jest równa zero. Jaka jest największa możliwa suma wszystkich liczb wpisanych w pola tablicy? Odpowiedź uzasadnij.

XIV Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody trzeciego stopnia (23 marca 2019 r.)

Szkice rozwiązań zadań konkursowych

1. Liczby całkowite a i b są większe od 1. Udowodnij, że jeżeli jedna z liczb

$$\frac{a}{b}, \quad \frac{a-1}{b-1}$$

jest o 1 większa od drugiej, to obie są liczbami całkowitymi.

Szkic rozwiązania

Z warunków zadania wynika, że liczba

$$\frac{a-1}{b-1} - \frac{a}{b} = \frac{b(a-1) - a(b-1)}{b(b-1)} = \frac{a-b}{b^2-b}$$

jest równa -1 lub 1 . W pierwszym przypadku otrzymujemy $a = 2b - b^2 = b(2-b) \leq 0$, co przeczy założeniu, że liczba a jest dodatnia. Z kolei w drugim przypadku dostajemy

$$a-b = b^2-b, \quad \text{czyli} \quad a = b^2.$$

Wtedy obie liczby

$$\frac{a}{b} = \frac{b^2}{b} = b \quad \text{oraz} \quad \frac{a-1}{b-1} = \frac{b^2-1}{b-1} = b+1$$

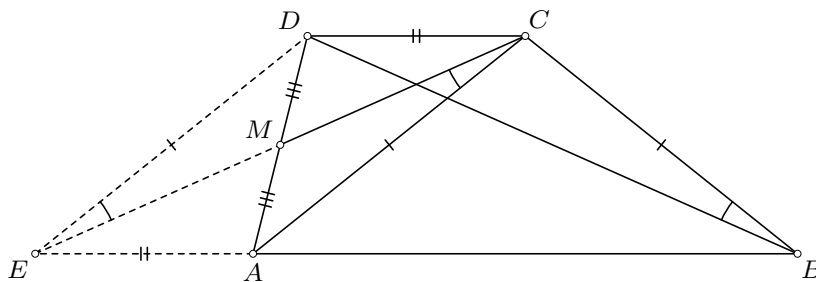
są całkowite.

2. Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD , w którym $AC = BC$. Punkt M jest środkiem ramienia AD . Wykaż, że

$$\sphericalangle ACM = \sphericalangle CBD.$$

Szkic rozwiązania

Oznaczmy przez E taki punkt prostej AB , że czworokąt $EACD$ jest równoległobokiem (rys. 1). Wówczas punkt M — jako środek odcinka AD — jest także środkiem odcinka EC . Ponadto $ED = AC = BC$, skąd wniosek, że trapez $EBCD$ jest równoramienny. W konsekwencji $\sphericalangle ACM = \sphericalangle ACE = \sphericalangle CED = \sphericalangle CBD$.



rys. 1

3. Dane są liczby rzeczywiste x, y, z , różne od zera, dla których $x + y + z = 0$. Wiedząc, że liczby

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \quad \text{oraz} \quad \frac{x}{z} + \frac{z}{y} + \frac{y}{x} + 1$$

są równe, wyznacz ich wspólną wartość.

Szkic rozwiązania

Oznaczmy przez S wspólną wartość dwóch rozpatrywanych liczb, czyli

$$S = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \quad \text{oraz} \quad S = \frac{x}{z} + \frac{z}{y} + \frac{y}{x} + 1.$$

Dodając stronami te dwie równości oraz korzystając trzykrotnie z $x + y + z = 0$, uzyskujemy

$$2S = \frac{x+y}{z} + \frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y} + 1 = \frac{-z}{z} + \frac{-x}{x} + \frac{-y}{y} + 1 = -1 - 1 - 1 + 1 = -2.$$

Stąd $S = -1$.

Uwaga

Można wykazać, że istnieją liczby x, y, z spełniające warunki zadania.

4. Punkt D leży na boku AB trójkąta ABC . Załóżmy, że na odcinku CD istnieje taki punkt E , że

$$\sphericalangle EAD = \sphericalangle AED \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle ECB = \sphericalangle CEB.$$

Wykaż, że $AC + BC > AB + CE$.

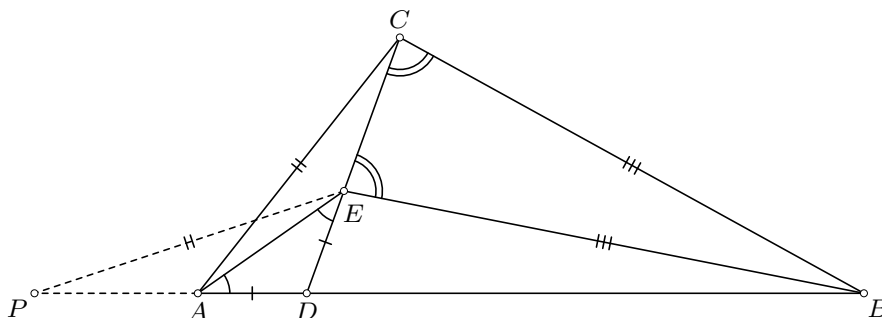
Szkic rozwiązania

Z warunków zadania wynika, że $AD = DE$ oraz $BC = BE$. Niech P będzie takim punktem prostej AB , że $AP = CE$ oraz punkt A leży na odcinku DP (rys. 2). Wówczas

$$DP = AD + AP = DE + CE = CD,$$

co w połączeniu z równością $AD = DE$ oznacza, że trójkąty ADC oraz EDP są przystające (cecha bok–kąt–bok). Wobec tego $AC = EP$. Stąd wynika, że

$$AC + BC = EP + BE > BP = AB + AP = AB + CE.$$



rys. 2

5. W każde pole tablicy o wymiarach 5×5 wpisano jedną z liczb $-1, 0$ lub 1 . Okazało się, że w każdym kwadracie 2×2 złożonym z pól tablicy suma pewnych trzech spośród czterech wpisanych liczb jest równa zero. Jaka jest największa możliwa suma wszystkich liczb wpisanych w pola tablicy? Odpowiedź uzasadnij.

Szkic rozwiązania

Odpowiedź. Największa możliwa suma wpisanych liczb jest równa 11.

Rozważmy figurę złożoną z siedmiu pól tablicy przedstawioną na rysunku 3. Z warunków zadania wynika, że w każdym kwadracie 2×2 suma wpisanych liczb jest nie większa od 1, skąd wniosek, że

$$a + b + c + d \leq 1 \quad \text{oraz} \quad d + e + f + g \leq 1.$$

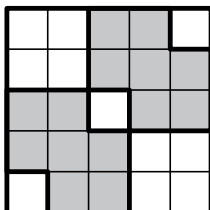
Łącząc te nierówności oraz korzystając z $d \geq -1$, uzyskujemy

$$a + b + c + d + e + f + g = (a + b + c + d) + (d + e + f + g) - d \leq 2 - d \leq 3.$$

To oznacza, że suma liczb wpisanych w każdą z dwóch szarych figur przedstawionych na rysunku 4 jest nie większa od 3. Ponadto suma liczb wpisanych w każdy z pięciu białych kwadratów jest nie większa od 1. Zatem suma wszystkich liczb wpisanych w pola tablicy jest nie większa od $2 \cdot 3 + 5 \cdot 1 = 11$.

a	b	
c	d	e
	f	g

rys. 3



rys. 4

1	0	1	0	1
1	-1	1	-1	1
1	0	1	0	1
1	-1	1	-1	1
1	0	1	0	1

rys. 5

Pozostaje zauważyć, że można wpisać liczby w pola tablicy zgodnie z warunkami zadania tak, aby suma wszystkich wpisanych liczb była równa 11 (rys. 5).

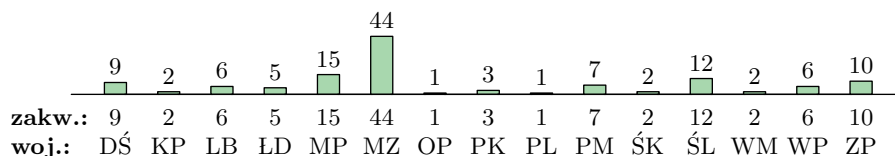
XIV Olimpiada Matematyczna Juniorów

Statystyki dotyczące zawodów trzeciego stopnia (2018/19)

(23 marca 2019 r.)

Gimnazja oraz oddziały gimnazjalne

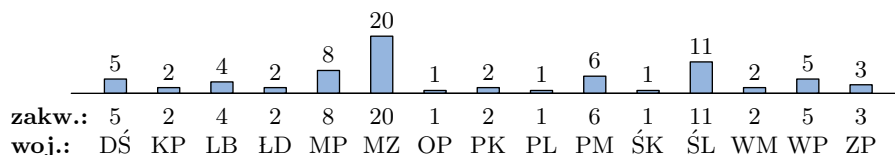
Tabela 1. Liczba uczniów, którzy wzięli udział w zawodach oraz zakwalifikowanych do zawodów w podziale na województwa.



Łączna liczba uczniów, którzy wzięli udział w zawodach: 125

Łączna liczba uczniów zakwalifikowanych do zawodów: 125

Tabela 2. Liczba szkół uczniów, którzy wzięli udział w zawodach oraz zakwalifikowanych do zawodów w podziale na województwa.



Łączna liczba szkół uczniów, którzy wzięli udział w zawodach: 73

Łączna liczba szkół uczniów zakwalifikowanych do zawodów: 73

Skróty województw

DŚ — dolnośląskie

LB — lubelskie

LD — łódzkie

MZ — mazowieckie

PK — podkarpackie

PM — pomorskie

ŚL — śląskie

WP — wielkopolskie

KP — kujawsko-pomorskie

LS — lubuskie

MP — małopolskie

OP — opolskie

PL — podlaskie

ŚK — świętokrzyskie

WM — warmińsko-mazurskie

ZP — zachodniopomorskie

Tabela 3. Procentowa i rzeczywista liczba osób, które uzyskały daną sumę punktów.

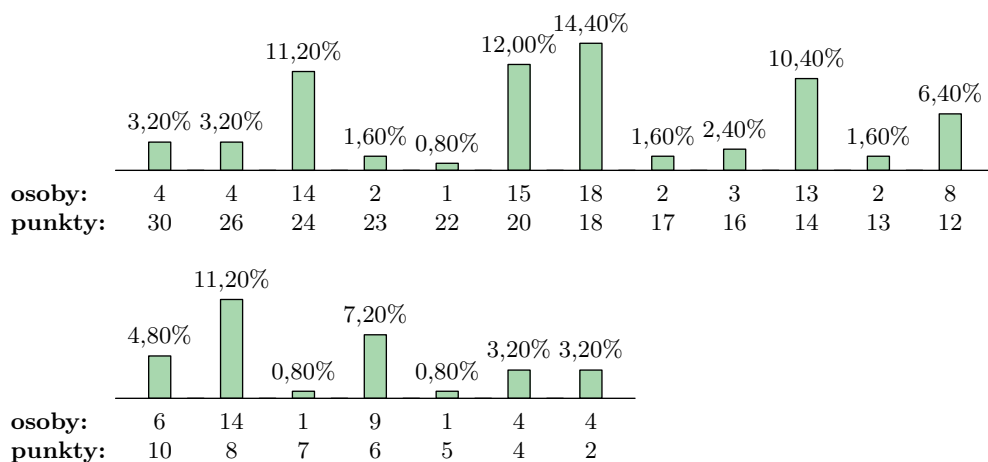


Tabela 4. Procentowa i rzeczywista liczba osób, które uzyskały daną lub większą sumę punktów.

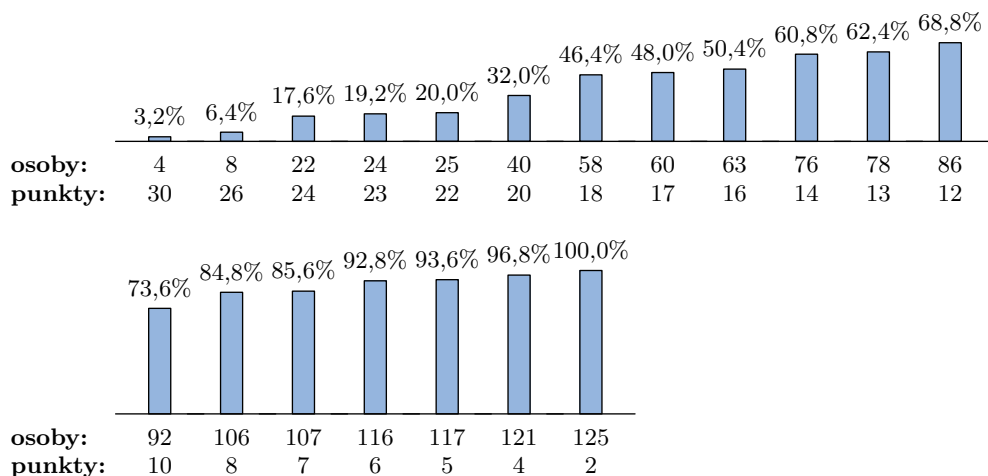


Tabela 5. Procentowa liczba osób, które uzyskały daną liczbę punktów za poszczególne zadania.

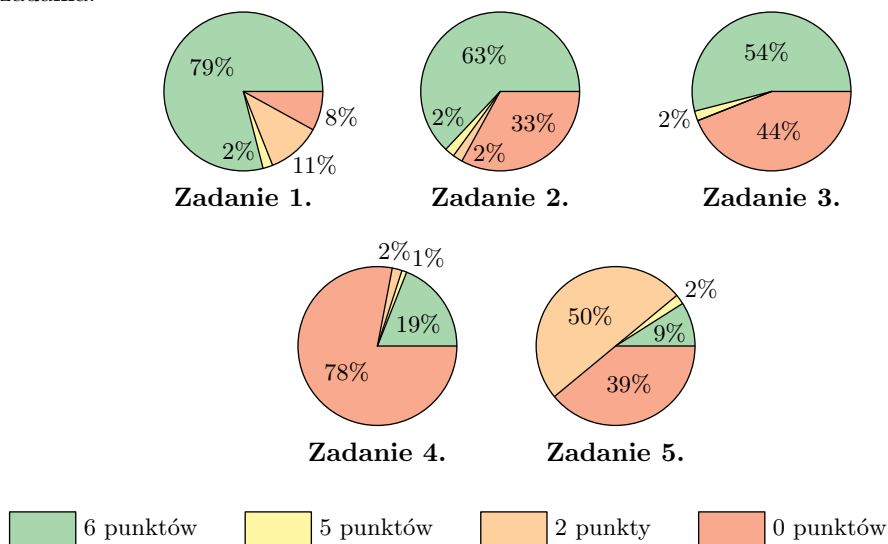


Tabela 6. Średnia uzyskanych punktów za poszczególne zadania.

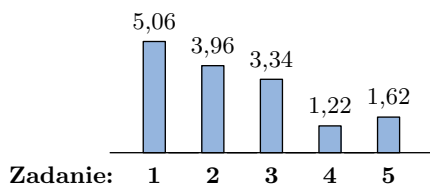
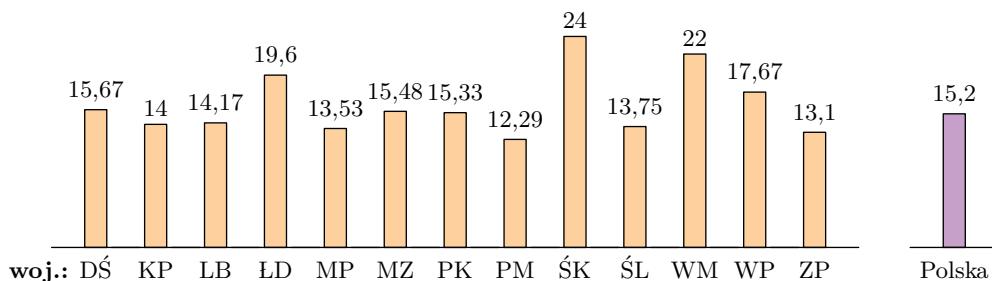


Tabela 7. Średnia sumy punktów w podziale na województwa.



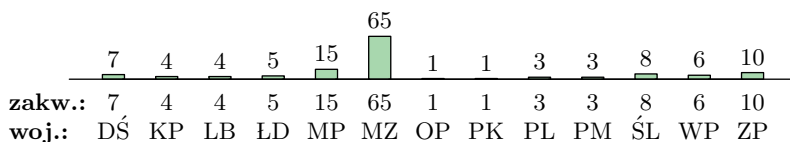
XIV Olimpiada Matematyczna Juniorów

Statystyki dotyczące zawodów trzeciego stopnia (2018/19)

(23 marca 2019 r.)

Szkoły podstawowe

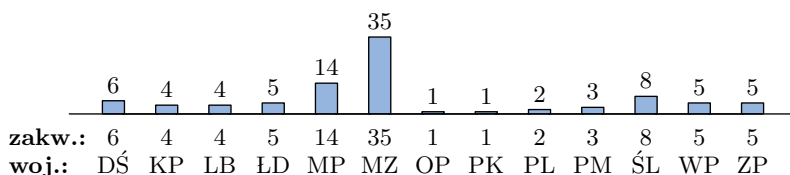
Tabela 1. Liczba uczniów, którzy wzięli udział w zawodach oraz zakwalifikowanych do zawodów w podziale na województwa.



Łączna liczba uczniów, którzy wzięli udział w zawodach: 132

Łączna liczba uczniów zakwalifikowanych do zawodów: 132

Tabela 2. Liczba szkół uczniów, którzy wzięli udział w zawodach oraz zakwalifikowanych do zawodów w podziale na województwa.



Łączna liczba szkół uczniów, którzy wzięli udział w zawodach: 93

Łączna liczba szkół uczniów zakwalifikowanych do zawodów: 93

Skróty województw

DŚ — dolnośląskie

LB — lubelskie

ŁD — łódzkie

MZ — mazowieckie

PK — podkarpackie

PM — pomorskie

ŚL — śląskie

WP — wielkopolskie

KP — kujawsko-pomorskie

LS — lubuskie

MP — małopolskie

OP — opolskie

PL — podlaskie

ŚK — świętokrzyskie

WM — warmińsko-mazurskie

ZP — zachodniopomorskie

Tabela 3. Procentowa i rzeczywista liczba osób, które uzyskały daną sumę punktów.

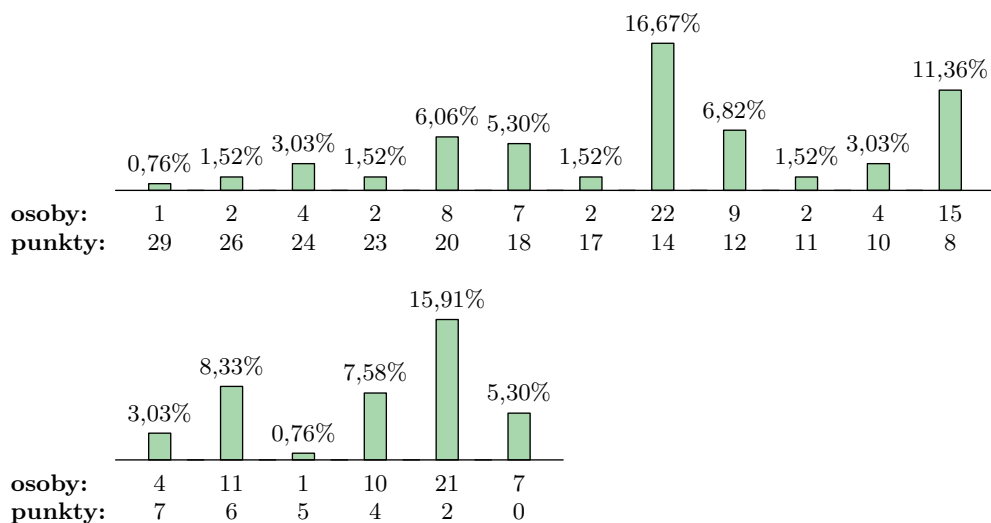


Tabela 4. Procentowa i rzeczywista liczba osób, które uzyskały daną lub większą sumę punktów.

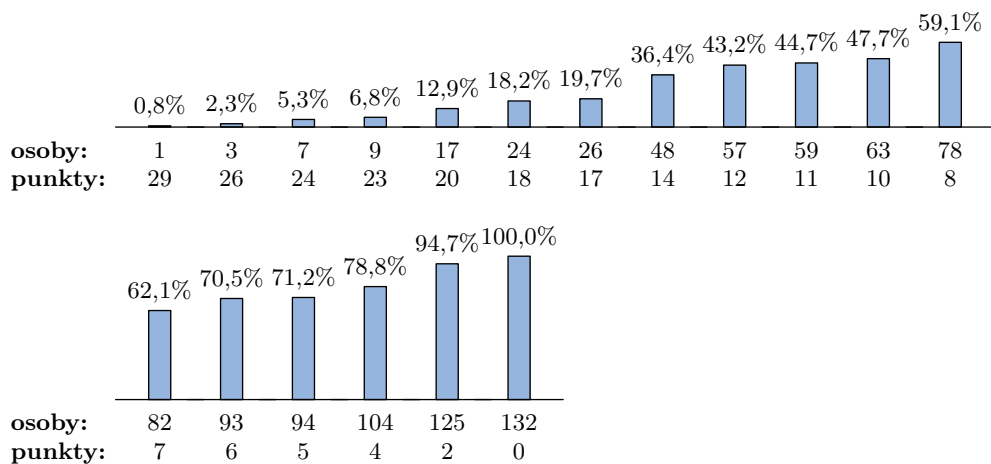


Tabela 5. Procentowa liczba osób, które uzyskały daną liczbę punktów za poszczególne zadania.

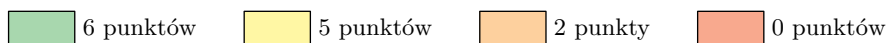
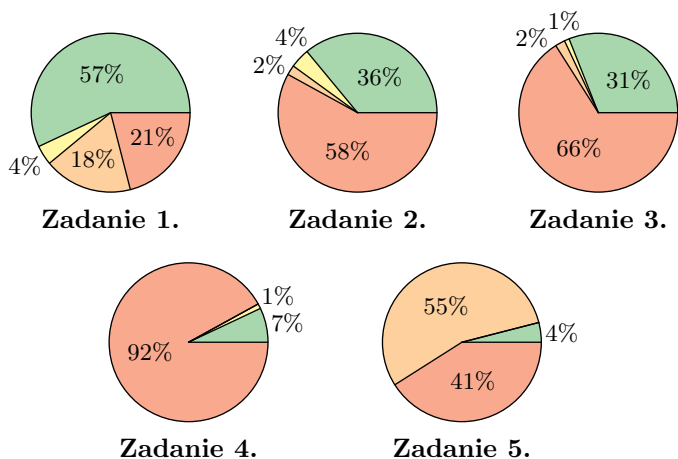


Tabela 6. Średnia uzyskanych punktów za poszczególne zadania.

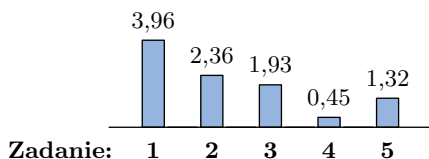
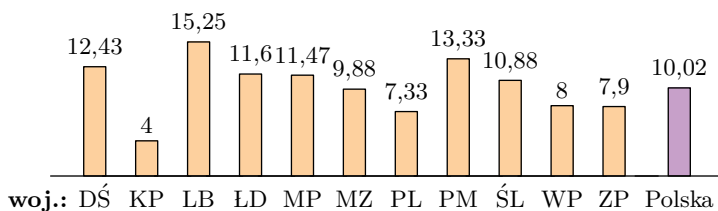


Tabela 7. Średnia sumy punktów w podziale na województwa.



MINISTERSTWO
EDUKACJI
NARODOWEJ



Stowarzyszenie
na rzecz Edukacji
Matematycznej



Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

Imiona:

Nazwisko:

Klasa:



XV Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody stopnia pierwszego — część testowa

(26 września 2019 r., godz. 9:00)

Przed przystąpieniem do rozwiązywania testu wpisz na każdą stronę swoje imiona, nazwisko oraz numer klasy.

Treść każdego z poniższych zadań zawiera trzy stwierdzenia. Każde z nich jest prawdziwe lub fałszywe. Jeśli dane stwierdzenie jest prawdziwe, wpisz w odpowiednią kratkę literkę T, jeśli zaś stwierdzenie jest fałszywe, wpisz literkę N.

W przypadku pomyłki przekreśl znakiem **X** podaną odpowiedź, a właściwą odpowiedź podaj obok z lewej strony. Nie używaj korektora.

Przykład poprawnie rozwiązane zadania:

0. Dla każdej dodatniej liczby całkowitej n liczba $2n + 1$ jest

T

a) dodatnia;

T

b) nieparzysta;

N

X

c) pierwsza.

Czas na rozwiązywanie testu: 75 minut.

Powodzenia!

1. Dodatnia liczba a jest mniejsza od 1. Wynika z tego, że

a) $a^2 > a$;

b) $\sqrt{a} > a$;

c) $\frac{1}{a} > a$.

2. Istnieje taki pięciokąt, w którym

a) dokładnie jeden kąt wewnętrzny ma miarę większą od 180° ;

b) dokładnie dwa kąty wewnętrzne mają miary większe od 180° ;

c) dokładnie trzy kąty wewnętrzne mają miary większe od 180° .

Imiona:

Nazwisko:

Klasa:

3. Liczby a , b , c , d są dodatnie. Liczba b jest o 100% większa od liczby a , liczba c jest o 100% większa od liczby b , liczba d jest o 100% większa od liczby c . Wynika z tego, że liczba d jest większa od liczby a o

a) 300%;

b) 700%;

c) 800%.

4. Istnieje taki trójkąt, którego dwa boki mają długości 5 oraz 10, a trzeci bok jest równy

a) 16;

b) 8;

c) 4.

5. Liczby całkowite a , b , c , d są dodatnie, przy czym ułamki $\frac{a}{b}$ oraz $\frac{c}{d}$ są nieskracalne. Wynika z tego, że

a) ułamek $\frac{a}{d}$ jest nieskracalny;

b) ułamek $\frac{a+c}{b+d}$ jest nieskracalny;

c) ułamek $\frac{a \cdot c}{b \cdot d}$ jest nieskracalny.

6. Liczby całkowite a , b , c , d są dodatnie, przy czym liczby $a+b$, $b+c$, $c+d$ są podzielne przez 3. Wynika z tego, że liczba

a) $a+b+c+d$ jest podzielna przez 3;

b) $a+c$ jest podzielna przez 3;

c) $a+d$ jest podzielna przez 3.

7. Punkty A , B , C , D leżą w tej właśnie kolejności na jednym okręgu, przy czym długości cięciw AC i BD są równe. Wynika z tego, że

a) proste AB i CD są równoległe;

b) proste BC i DA są równoległe;

c) czworokąt $ABCD$ jest trapezem.

Imiona:

Nazwisko:

Klasa:

8. Objętość pewnego prostopadłościanu jest równa 8. Wynika z tego, że

a) długość co najmniej jednej krawędzi tego prostopadłościanu jest liczbą parzystą;

b) pole powierzchni tego prostopadłościanu jest mniejsze od 35;

c) prostopadłościan ten jest sześcianem.

9. Istnieje taki prostokąt o polu równym 36, który można rozciąć na kwadraty, każdy o boku długości

a) 2;

b) $\sqrt{3}$;

c) 4.

10. Liczby rzeczywiste a , b , c , d są różne od 0 i spełniają warunek $ab > |cd|$. Wynika z tego, że

a) liczby a i b mają ten sam znak;

b) liczba $abcd$ jest dodatnia;

c) $ab + 1 > |cd + 1|$.

11. W gronie n osób każda ma dokładnie trzech znajomych (zakładamy, że jeśli osoba A zna B , to osoba B zna A). Wynika z tego, że liczba n jest podzielna przez

a) 2;

b) 3;

c) 4.

12. Każda spośród pewnych sześciu różnych cyfr jest niezerowa. Wynika z tego, że można te cyfry zapisać w takiej kolejności, aby otrzymać 6-cyfrową liczbę

a) parzystą;

b) nieparzystą;

c) podzielną przez 4.

Imiona:

Nazwisko:

Klasa:

13. Od sześciianu o krawędzi 1 można odciąć płaskim cięciem ostrosłup o objętości

- ☐ a) $\frac{1}{2}$;
- ☐ b) $\frac{1}{6}$;
- ☐ c) $\frac{1}{24}$.

14. Antek rozdzielił 100 cukierków pomiędzy swoich 15 kolegów, przy czym każdy z nich otrzymał od Antka co najmniej jednego cukierka. Wynika z tego, że

- ☐ a) co najmniej jeden kolega Antka otrzymał parzystą liczbę cukierków;
- ☐ b) co najmniej jeden kolega Antka otrzymał nieparzystą liczbę cukierków;
- ☐ c) pewnych dwóch kolegów Antka otrzymało po tyle samo cukierków.

15. Każdą dodatnią liczbę całkowitą można przedstawić w postaci różnicy

- ☐ a) liczby podzielnej przez 101 i liczby podzielnej przez 100;
- ☐ b) liczby podzielnej przez 100 i liczby podzielnej przez 15;
- ☐ c) liczby podzielnej przez 7 i liczby podzielnej przez 5.

Rozwiązania zadań testowych

1. Dodatnia liczba a jest mniejsza od 1. Wynika z tego, że

- ☐ N a) $a^2 > a$;
☐ T b) $\sqrt{a} > a$;
☐ T c) $\frac{1}{a} > a$.

Komentarz

a) Przyjmując $a = \frac{1}{2}$, uzyskujemy $a^2 = \frac{1}{4} < \frac{1}{2} = a$.

b) Skoro $a < 1$, to również $\sqrt{a} < 1$. Jeśli pomnożymy obie strony ostatniej nierówności przez liczbę dodatnią $\sqrt{a}$, to otrzymamy $a < \sqrt{a}$.

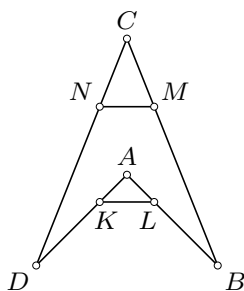
c) Skoro $a < 1$, to również $a^2 < 1$. Jeśli pomnożymy obie strony ostatniej nierówności przez liczbę dodatnią $\frac{1}{a}$, to otrzymamy $a < \frac{1}{a}$.

2. Istnieje taki pięciokąt, w którym

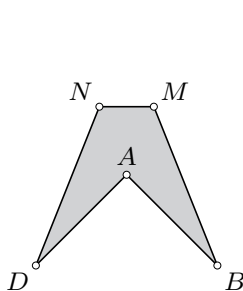
- ☐ T a) dokładnie jeden kąt wewnętrzny ma miarę większą od 180° ;
☐ T b) dokładnie dwa kąty wewnętrzne mają miary większe od 180° ;
☐ N c) dokładnie trzy kąty wewnętrzne mają miary większe od 180° .

Komentarz

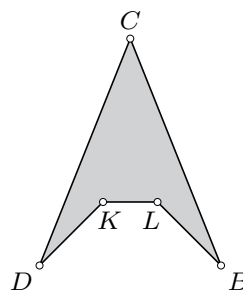
Niech $ABCD$ będzie czworokątem wklęsłym, w którym kąt przy wierzchołku A ma miarę większą od 180° (rys. 1). Niech ponadto K, L, M, N będą takimi punktami znajdującymi się odpowiednio na bokach DA, AB, BC, CD , że odcinek KL znajduje się na zewnątrz, a odcinek MN — wewnątrz czworokąta $ABCD$.



rys. 1



rys. 2



rys. 3

a) W pięciokącie $ABMND$ (rys. 2) tylko kąt przy wierzchołku A ma miarę większą od 180° .

b) W pięciokącie $KLBCD$ (rys. 3) kąty przy wierzchołkach K i L mają miary większe od 180° .

c) Suma miar kątów wewnętrznych dowolnego pięciokąta jest równa 540° . Tymczasem gdyby trzy kąty wewnętrzne miały miary większe od 180° , to suma miar kątów wewnętrznych byłaby większa od 540° . Uzyskana sprzeczność oznacza, że co najwyżej dwa kąty wewnętrzne pięciokąta mają miary większe od 180° .

3. Liczby a, b, c, d są dodatnie. Liczba b jest o 100% większa od liczby a , liczba c jest o 100% większa od liczby b , liczba d jest o 100% większa od liczby c . Wynika z tego, że liczba d jest większa od liczby a o

N	a) 300%;
T	b) 700%;
N	c) 800%.

Komentarz

Z treści zadania wynika kolejno, że

$$b = a + 100\% \cdot a = 2a, \quad c = b + 100\% \cdot b = 2b = 4a, \quad d = c + 100\% \cdot c = 2c = 8a,$$

czyli $d = a + 7a = a + 700\% \cdot a$, a zatem liczba d jest większa od liczby a o 700%.

4. Istnieje taki trójkąt, którego dwa boki mają długości 5 oraz 10, a trzeci bok jest równy

N	a) 16;
T	b) 8;
N	c) 4.

Komentarz

Liczby dodatnie a, b, c są długościami boków pewnego trójkąta wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są nierówności

$$a + b > c, \quad b + c > a, \quad c + a > b.$$

a) Liczby 5, 10, 16 nie są długościami boków trójkąta, gdyż $5 + 10 < 16$.

c) Liczby 5, 10, 4 nie są długościami boków trójkąta, gdyż $4 + 5 < 10$.

b) Trójkąt o bokach długości 5, 10, 8 istnieje, gdyż

$$5 + 10 > 8, \quad 10 + 8 > 5, \quad 8 + 5 > 10.$$

5. Liczby całkowite a, b, c, d są dodatnie, przy czym ułamki $\frac{a}{b}$ oraz $\frac{c}{d}$ są nieskracalne.

Wynika z tego, że

- ☐ N a) ułamek $\frac{a}{d}$ jest nieskracalny;
- ☐ N b) ułamek $\frac{a+c}{b+d}$ jest nieskracalny;
- ☐ N c) ułamek $\frac{a \cdot c}{b \cdot d}$ jest nieskracalny.

Komentarz

Przyjmujemy $a = d = 2$ oraz $b = c = 3$. Ułamki $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$ oraz $\frac{c}{d} = \frac{3}{2}$ są wówczas nieskracalne, ale ułamki

$$\frac{a}{d} = \frac{2}{2}, \quad \frac{a+c}{b+d} = \frac{5}{5}, \quad \frac{a \cdot c}{b \cdot d} = \frac{6}{6}$$

są skracalne.

6. Liczby całkowite a, b, c, d są dodatnie, przy czym liczby $a+b, b+c, c+d$ są podzielne przez 3. Wynika z tego, że liczba

- ☐ T a) $a+b+c+d$ jest podzielna przez 3;
- ☐ N b) $a+c$ jest podzielna przez 3;
- ☐ T c) $a+d$ jest podzielna przez 3.

Komentarz

a) Skoro liczby $a+b$ oraz $c+d$ są podzielne przez 3, to również ich suma $a+b+c+d$ jest liczbą podzielną przez 3.

c) Skoro liczby $a+b+c+d$ oraz $b+c$ są podzielne przez 3, to również ich różnica $a+d$ jest liczbą podzielną przez 3.

b) Przyjmując $a = c = 1$ oraz $b = d = 2$ uzyskujemy $a+b = b+c = c+d = 3$, więc liczby te spełniają założenia zadania. Tymczasem $a+c = 2$ nie jest liczbą podzielną przez 3.

7. Punkty A, B, C, D leżą w tej właśnie kolejności na jednym okręgu, przy czym długości cięciw AC i BD są równe. Wynika z tego, że

- | |
|---|
| N |
| N |
| T |
- a) proste AB i CD są równoległe;
b) proste BC i DA są równoległe;
c) czworokąt $ABCD$ jest trapezem.

Komentarz

a) Dowolny trapez równoramienny $ABCD$ nie będący prostokątem o podstawach BC i DA spełnia warunki zadania, a jego ramiona AB i CD nie są równoległe.

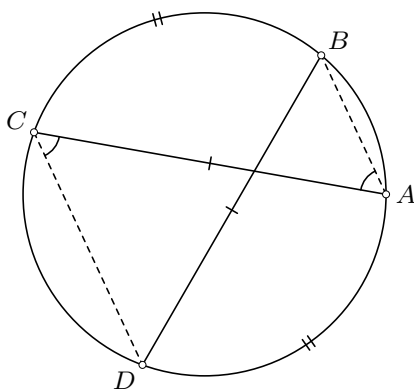
b) Dowolny trapez równoramienny $ABCD$ nie będący prostokątem o podstawach AB i CD spełnia warunki zadania, a jego ramiona BC i DA nie są równoległe.

c) Skoro długości cięciw AC i BD są równe, to długości odpowiednich łuków wyznaczanych przez te cięciwy także są równe. Są dwie możliwości.

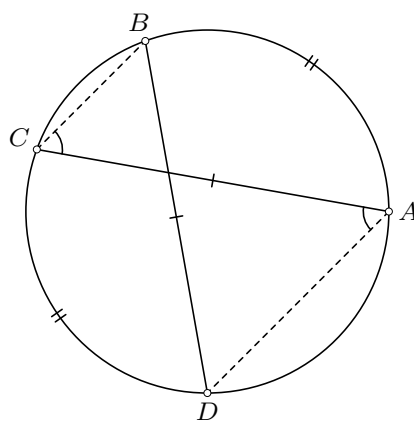
Jeżeli łuk AC zawierający punkt B ma taką długość jak łuk BD zawierający punkt A , to łuki DA oraz BC (nie zawierające żadnych innych wierzchołków czworokąta) są równe (rys. 4). Wobec tego $\sphericalangle DCA = \sphericalangle CAB$, gdyż są to kąty wpisane w okrąg oparte na przystających łukach, a w konsekwencji proste AB i CD są równoległe.

Jeżeli z kolei łuk AC zawierający punkt B ma taką długość jak łuk BD zawierający punkt C , to łuki AB oraz CD są równe (rys. 5). Wobec tego, podobnie jak w poprzednim przypadku, $\sphericalangle ADB = \sphericalangle DBC$ i w konsekwencji proste DA i BC są równoległe.

W obydwu przypadkach pewna para przeciwległych boków czworokąta $ABCD$ to para boków równoległych, wobec czego czworokąt $ABCD$ jest trapezem.



rys. 4



rys. 5

8. Objętość pewnego prostopadłościanu jest równa 8. Wynika z tego, że

- | |
|---|
| N |
| N |
| N |
- a) długość co najmniej jednej krawędzi tego prostopadłościanu jest liczbą parzystą;
b) pole powierzchni tego prostopadłościanu jest mniejsze od 35;
c) prostopadłościan ten jest sześcianem.

Komentarz

Rozważmy prostopadłościan o wymiarach $\frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times 9$. Objętość tego prostopadłościanu jest równa 8, więc spełnia on założenia zadania. Tymczasem prostopadłościan ten nie jest sześcianem, żadna z jego krawędzi nie ma długości będącej liczbą parzystą, a pole powierzchni tego prostopadłościanu jest równe

$$2 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} + \frac{2}{3} \cdot 9 + \frac{4}{3} \cdot 9 \right) = 37 + \frac{7}{9},$$

a więc jest większe od 35.

9. Istnieje taki prostokąt o polu równym 36, który można rozciąć na kwadraty, każdy o boku długości

T

a) 2;

T

b) $\sqrt{3}$;

N

c) 4.

Komentarz

c) Gdyby prostokąt o polu równym 36 można było rozciąć na n kwadratów o boku długości 4, to suma pól tych kwadratów byłaby równa polu całego prostokąta, czyli $36 = n \cdot 4^2$. Stąd uzyskujemy $n = \frac{36}{16}$, co nie jest liczbą całkowitą. Wobec tego taki podział nie jest możliwy.

a) Kwadrat o boku 6 ma pole równe 36 i można go rozciąć na 9 kwadratów, każdy o boku długości 2.

b) Prostokąt o wymiarach $3\sqrt{3} \times 4\sqrt{3}$ ma pole równe 36 i można go rozciąć na 12 kwadratów, każdy o boku długości $\sqrt{3}$.

10. Liczby rzeczywiste a, b, c, d są różne od 0 i spełniają warunek $ab > |cd|$. Wynika z tego, że

T

a) liczby a i b mają ten sam znak;

N

b) liczba $abcd$ jest dodatnia;

T

c) $ab + 1 > |cd + 1|$.

Komentarz

a) Skoro $ab > |cd|$ oraz $|cd| > 0$, to $ab > 0$. Ponieważ iloczyn liczb a i b jest dodatni, więc obie te liczby są dodatnie albo obie te liczby są ujemne.

c) Zauważmy, że $ab + 1 > |cd| + 1 \geq |cd + 1|$, skąd uzyskujemy tezę. Druga nierówność wynika stąd, że dla każdej pary liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność $|x| + |y| \geq |x + y|$. Aby ją uzasadnić, wystarczy wykazać, że $|x| + |y| \geq x + y$ oraz $|x| + |y| \geq -x - y$ — pierwsza

tych nierówności wynika z dodania stronami nierówności $|x| \geq x$ oraz $|y| \geq y$, druga zaś z dodania stronami nierówności $|x| \geq -x$ oraz $|y| \geq -y$.

b) Przyjmując $a = b = d = -1$ oraz $c = \frac{1}{2}$, uzyskujemy $ab = 1 > \frac{1}{2} = |cd|$, a przy tym $abcd = -\frac{1}{2}$ jest liczbą ujemną.

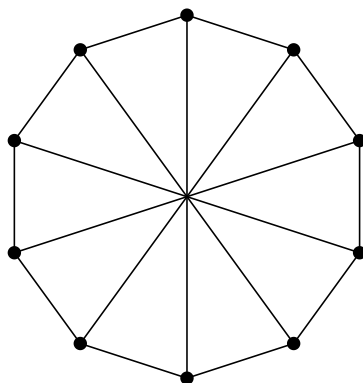
11. W gronie n osób każda ma dokładnie trzech znajomych (zakładamy, że jeśli osoba A zna B , to osoba B zna A). Wynika z tego, że liczba n jest podzielna przez

T	a) 2;
N	b) 3;
N	c) 4.

Komentarz

a) Liczba wszystkich relacji znajomości w danej grupie jest równa $\frac{3n}{2}$. Ta liczba jest naturalna, skąd wniosek, że liczba $3n$, a w konsekwencji — liczba n jest parzysta.

b), c) Rozważmy grupę 10 osób siedzących przy okrągłym stole w taki sposób, że każda osoba zna tylko swoich sąsiadów oraz osobę siedzącą naprzeciwko niej (na rysunku 6 kropki oznaczają osoby, a odcinki — znajomości). W takiej grupie każdy ma dokładnie trzech znajomych, a liczba $n = 10$ nie jest podzielna ani przez 3, ani przez 4.



rys. 6

Uwaga

Konstrukcja przedstawiona w rozwiązaniu może zostać wykorzystana do uzasadnienia, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$ istnieje grupa $2n$ osób, w której każdy ma dokładnie 3 znajomych. Wystarczy umieścić osoby w wierzchołkach $2n$ -kąta foremnego i ustalić, że każdy zna tylko osoby umieszczone w sąsiednich oraz przeciwległym wierzchołku.

Inna ogólna konstrukcja może polegać na rozmieszczeniu osób w wierzchołkach graniastopuła n -kątnego i ustaleniu, że dwie osoby znają się wtedy, gdy odpowiadające im wierzchołki są połączone krawędzią. W taki sposób uzyskujemy przykłady grup $2n$ osób o żądanej własności dla każdego $n \geq 3$.

12. Każda spośród pewnych sześciu różnych cyfr jest niezerowa. Wynika z tego, że można te cyfry zapisać w takiej kolejności, aby otrzymać 6-cyfrową liczbę

- ☐ T a) parzystą;
☐ T b) nieparzystą;
☐ N c) podzielną przez 4.

Komentarz

a) Co najwyżej pięć spośród sześciu danych cyfr to cyfry nieparzyste. Wobec tego wśród danych sześciu cyfr jest pewna cyfra parzysta. Aby uzyskać 6-cyfrową liczbę parzystą, wystarczy tę cyfrę umieścić na końcu, jako cyfrę jedności.

b) Co najwyżej cztery spośród sześciu danych cyfr to cyfry parzyste. Wobec tego wśród danych sześciu cyfr są co najmniej dwie cyfry nieparzyste. Aby uzyskać 6-cyfrową liczbę nieparzystą, wystarczy jedną z nich umieścić na końcu, jako cyfrę jedności.

c) Jeżeli sześć danych cyfr to 1, 3, 5, 7, 9 oraz 4, to nie można z nich utworzyć 6-cyfrowej liczby podzielnej przez 4. Rzeczywiście, jedynym sposobem, aby uzyskać liczbę parzystą, jest umieszczenie cyfry 4 na końcu. Jednak wówczas dwucyfrowa końcówka może być równa tylko 14, 34, 54, 74 lub 94, więc na mocy cechy podzielności przez 4, cała liczba nie jest podzielna przez 4.

13. Od sześcianu o krawędzi 1 można odciąć płaskim cięciem ostrosłup o objętości

- ☐ N a) $\frac{1}{2}$;
☐ T b) $\frac{1}{6}$;
☐ T c) $\frac{1}{24}$.

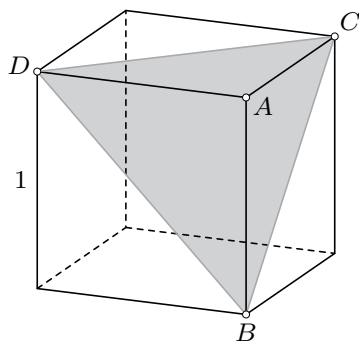
Komentarz

a) Każde cięcie sześcianu na dwie bryły o objętościach $\frac{1}{2}$ przechodzi przez środek symetrii tego sześcianu. Wobec tego w przekroju uzyskiwana jest figura środkowosymetryczna, a zatem nie będąca trójkątem. Stąd wniosek, że jeśli uzyskany zostanie ostrosłup, to płaszczyzna cięcia wyznacza podstawę tego ostrosłupa. Jednak płaszczyzna cięcia przechodzi co najwyżej przez cztery wierzchołki sześcianu, a zatem po każdej jej stronie znajdują się jeszcze co najmniej dwa wierzchołki sześcianu. Tymczasem, gdyby uzyskany został ostrosłup, po pewnej stronie musiałby pozostać tylko jeden wierzchołek. Uzyskana sprzeczność oznacza, że uzyskanie ostrosłupa nie jest możliwe.

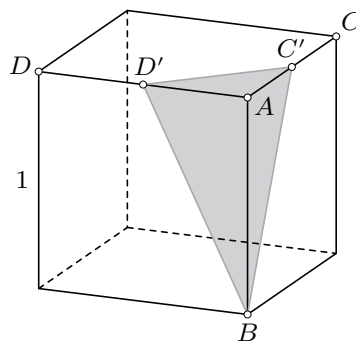
b) Rozważmy sześcian o krawędzi 1, którego jednym z wierzchołków jest punkt A , a trzema z krawędzi są odcinki AB , AC , AD (rys. 7). Płaszczyzna BCD odcina od tego

sześcianu czworościan (a więc i ostrosłup) $ABCD$ o objętości

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot AD = \frac{1}{6}.$$



rys. 7



rys. 8

c) Niech C' oraz D' będą środkami odpowiednio krawędzi AC oraz AD sześcianu wprowadzonego w rozwiązaniu poprzedniego punktu (rys. 8). Wówczas płaszczyzna $BC'D'$ odcina od tego sześcianu czworościan $ABC'D'$ o objętości

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC' \cdot AD' = \frac{1}{24}.$$

14. Antek rozdzielił 100 cukierków pomiędzy swoich 15 kolegów, przy czym każdy z nich otrzymał od Antka co najmniej jednego cukierka. Wynika z tego, że

T	a) co najmniej jeden kolega Antka otrzymał parzystą liczbę cukierków;
N	b) co najmniej jeden kolega Antka otrzymał nieparzystą liczbę cukierków;
T	c) pewnych dwóch kolegów Antka otrzymało po tyle samo cukierków.

Komentarz

a) Gdyby wszyscy koledzy Antka otrzymali nieparzystą liczbę cukierków, to po zsumowaniu tych 15 liczb uzyskalibyśmy również liczbę nieparzystą. Tymczasem łączna liczba rozdanych cukierków, równa 100, jest parzysta. To oznacza, że co najmniej jeden kolega Antka otrzymał parzystą liczbę cukierków.

c) Gdyby każdych dwóch kolegów Antka otrzymało inne liczby cukierków, to Antek musiałby rozdać ich co najmniej

$$1 + 2 + 3 + \dots + 15 = 120.$$

Tymczasem zostało rozdanych tylko 100 cukierków. To oznacza, że pewnych dwóch kolegów Antka otrzymało po tyle samo cukierków.

b) Antek mógł na przykład rozdać 14 kolegom po 2 cukierki, a piętnastemu koledze dać $100 - 2 \cdot 14 = 72$ cukierki. Wówczas wszyscy koledzy otrzymaliby parzyste liczby cukierków.

15. Każdą dodatnią liczbę całkowitą można przedstawić w postaci różnicy

T

a) liczby podzielnej przez 101 i liczby podzielnej przez 100;

N

b) liczby podzielnej przez 100 i liczby podzielnej przez 15;

T

c) liczby podzielnej przez 7 i liczby podzielnej przez 5.

Komentarz

a) Liczbę całkowitą n można przedstawić jako $101n - 100n$. Przedstawienie to ma żadaną własność, gdyż liczba $101n$ jest podzielna przez 101, a liczba $100n$ jest podzielna przez 100.

c) Liczbę całkowitą n można przedstawić jako $21n - 20n$. Przedstawienie to ma żadaną własność, gdyż liczba $21n$ jest podzielna przez 7, a liczba $20n$ jest podzielna przez 5.

b) Każda liczba będąca różnicą liczby podzielnej przez 100 i liczby podzielnej przez 15 jest liczbą podzielną przez 5. Wobec tego w żądanej postaci nie da się przedstawić żadnej liczby nieparzystej niepodzielnej przez 5, na przykład liczby 1.

Uwaga

Każdą dodatnią liczbę całkowitą podzielną przez 5 można przedstawić w postaci opisanej w punkcie b):

$$5n = 200n - 195n = 100 \cdot 2n - 15 \cdot 13n.$$

XV Olimpiada Matematyczna Juniorów

Statystyki dotyczące części testowej

zawodów pierwszego stopnia (2019/2020)

(26 września 2019 r.)

Tabela 1.

Procentowa liczba poprawnych odpowiedzi w poszczególnych podpunktach.

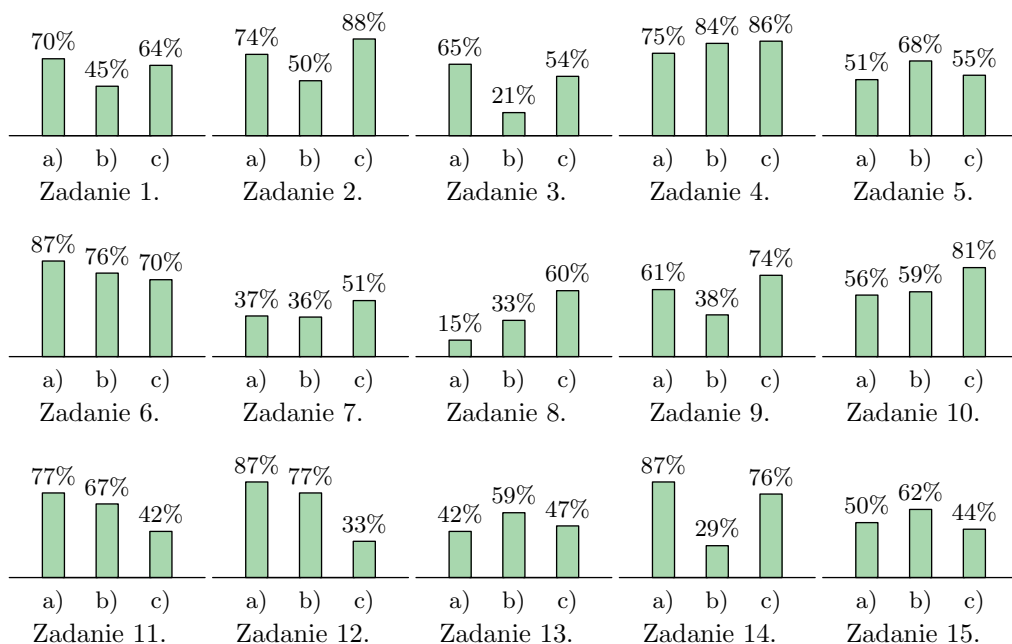
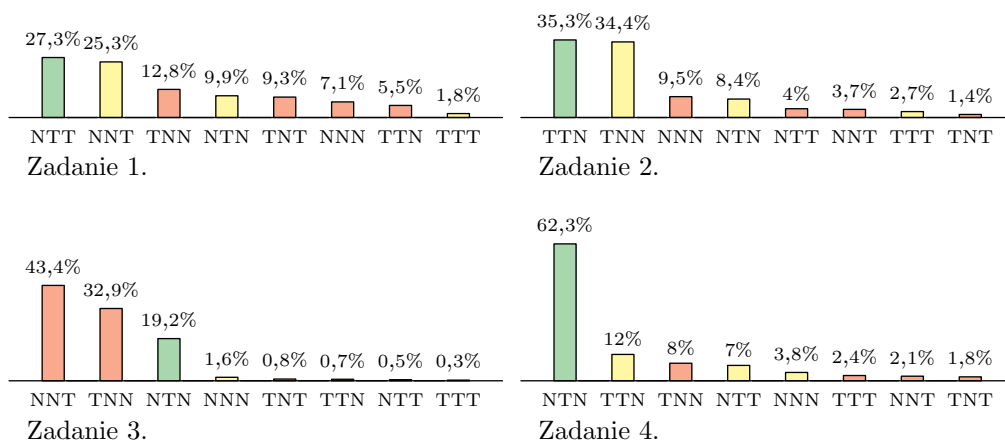
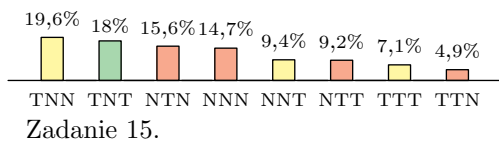
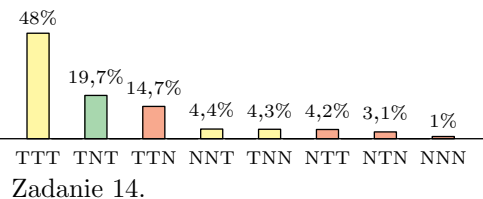
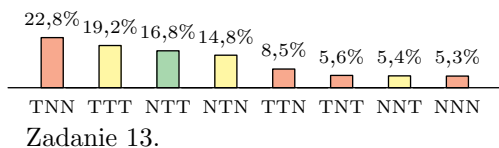
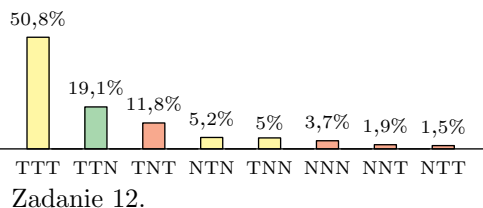
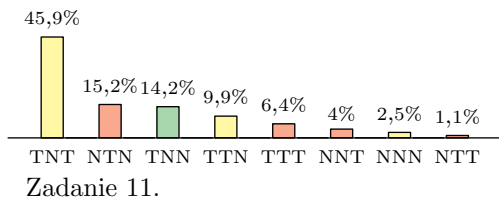
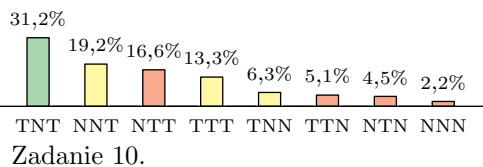
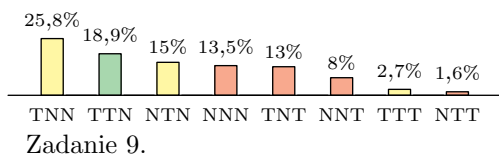
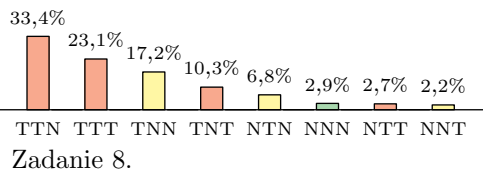
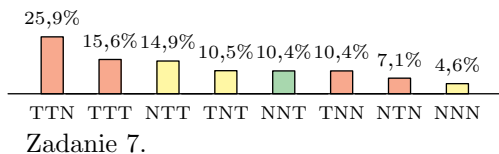
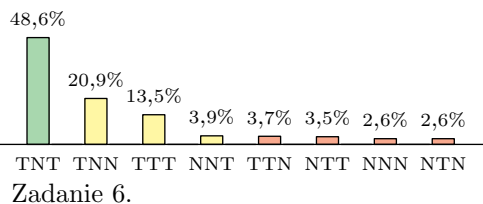
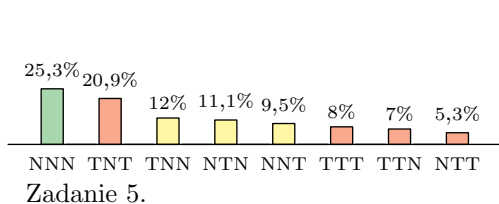


Tabela 2.

Procentowa liczba udzielonych kombinacji odpowiedzi w poszczególnych zadaniach.





Zestaw odpowiedzi za:

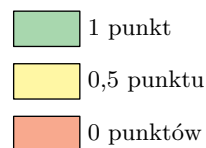


Tabela 3.

Rzeczywista oraz procentowa liczba osób, które uzyskały daną sumę punktów.

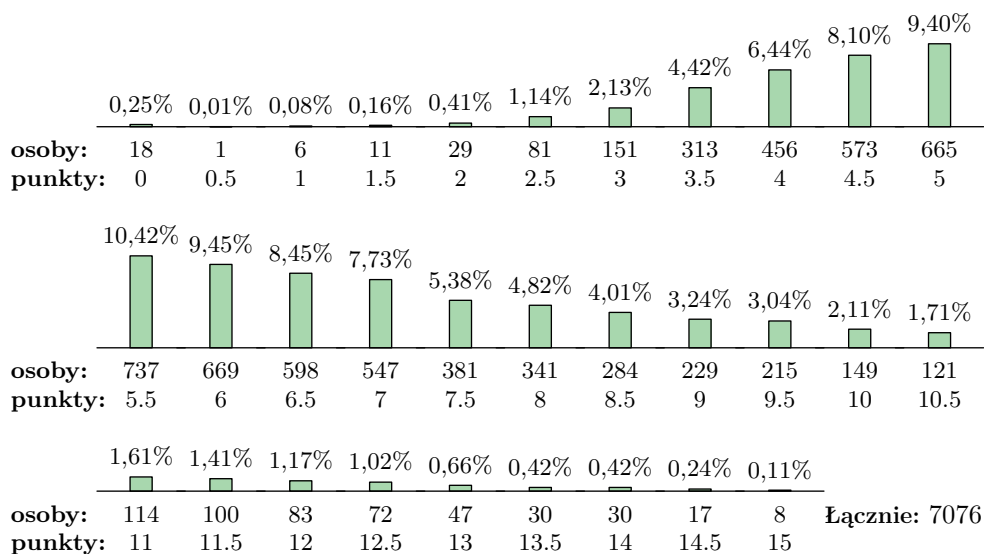


Tabela 4.

Procentowa i rzeczywista liczba osób, które uzyskały daną lub większą sumę punktów.

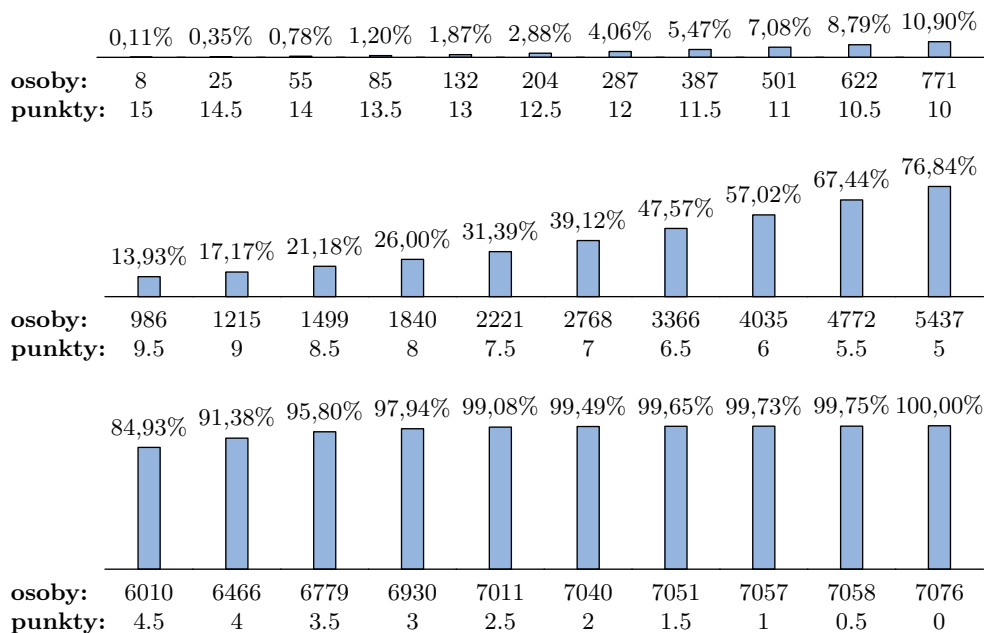


Tabela 5.

Procentowa liczba uzyskanych punktów za poszczególne zadania.

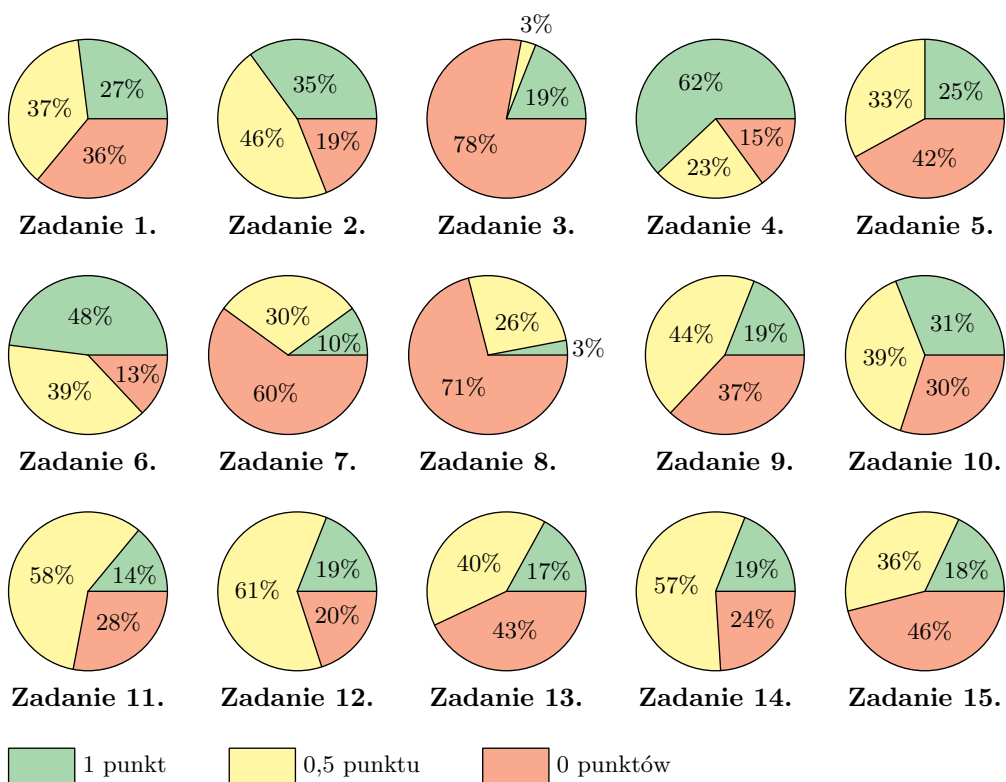


Tabela 6.

Średnia z uzyskanych punktów za poszczególne zadania.

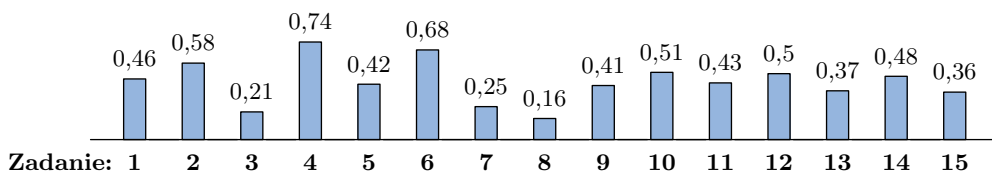


Tabela 7.

Średnia uzyskanych punktów ze wszystkich zadań w podziale na województwa i inne regiony.

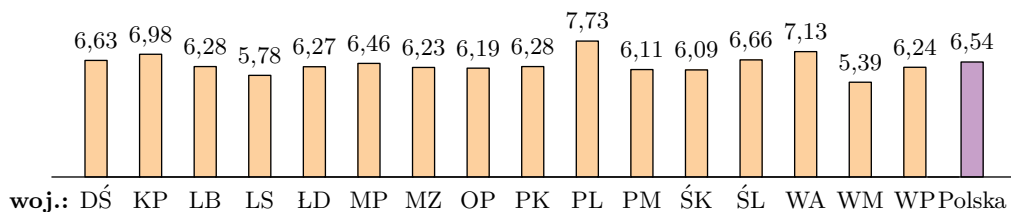
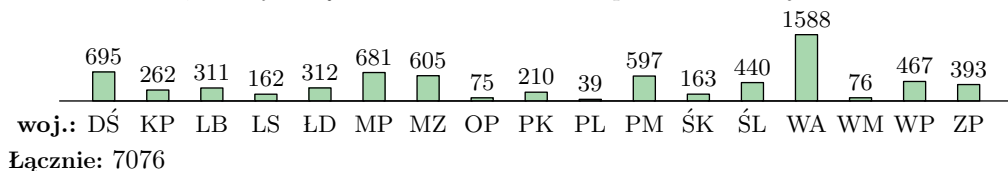
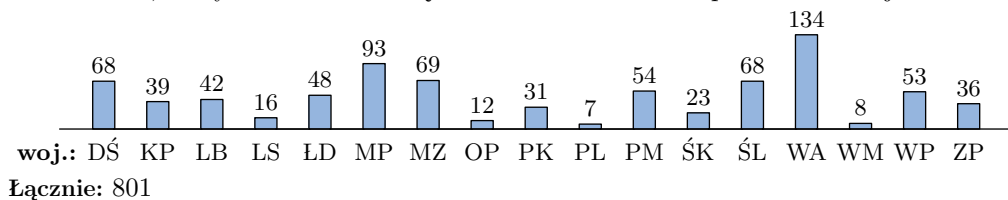


Tabela 8.

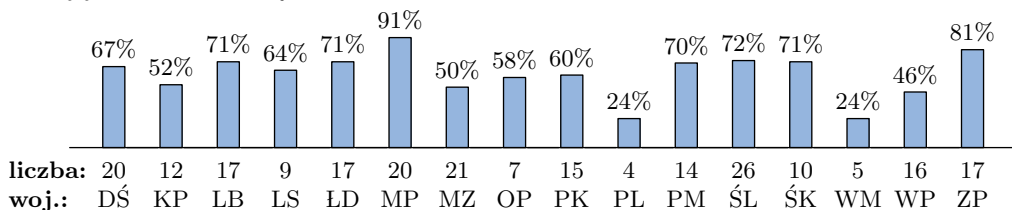
Liczba uczniów, którzy wzięli udział w zawodach w podziale na województwa.

**Tabela 9.**

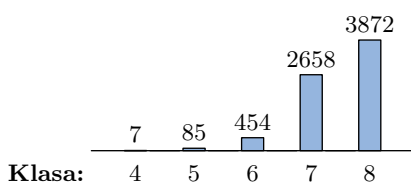
Liczba szkół, których uczniowie wzięli udział w zawodach w podziale na województwa.

**Tabela 10.**

Rzeczywista i procentowa liczba powiatów w danym województwie, z których co najmniej jedna szkoła wzięła udział w zawodach.

**Tabela 11.**

Liczba uczniów biorących udział w teście w podziale na klasy.



Łącznie: 7076

Skróty województw i innych regionów

DŚ — dolnośląskie

LB — lubelskie

ŁD — łódzkie

MZ — mazowieckie bez m.st. Warszawy

PK — podkarpackie

PM — pomorskie

ŚL — śląskie

WM — warmińsko-mazurskie

ZP — zachodniopomorskie

KP — kujawsko-pomorskie

LS — lubuskie

MP — małopolskie

OP — opolskie

PL — podlaskie

ŚK — świętokrzyskie

WA — m.st. Warszawa

WP — wielkopolskie

MINISTERSTWO
EDUKACJI
NARODOWEJ



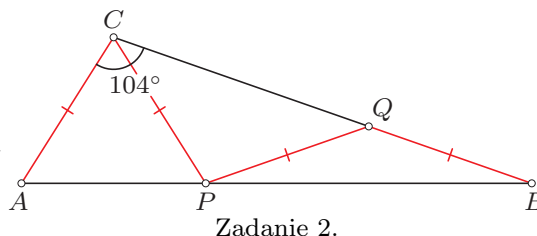
Stowarzyszenie
na rzecz Edukacji
Matematycznej



Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

1. Do pewnej dodatniej liczby całkowitej n dopisano na końcu pewną cyfrę, uzyskując w ten sposób liczbę 13 razy większą od liczby n . Wyznacz wszystkie liczby n o tej własności.

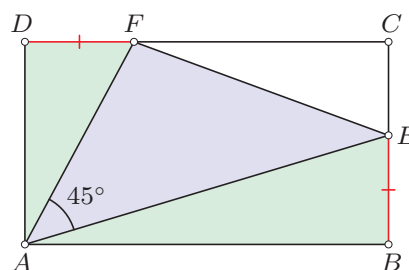
2. Na bokach AB i BC trójkąta ABC leżą odpowiednio takie punkty P i Q (różne od wierzchołków trójkąta), że $AC = CP = PQ = QB$. Wiedząc, że $\angle ACB = 104^\circ$, wyznacz miary pozostałych kątów trójkąta ABC .



3. Wyznacz wszystkie trójki (x, y, z) liczb rzeczywistych różnych od 0, dla których

$$xy(x+y) = yz(y+z) = zx(z+x).$$

4. Dany jest prostokąt $ABCD$. Punkty E i F leżą odpowiednio na bokach BC i CD , przy czym $\angle EAF = 45^\circ$ oraz $BE = DF$. Wykaż, że pole trójkąta AEF jest równe sumie pól trójkątów ABE i ADF .



5. W turnieju wzięło udział 8 zawodników. Każda para zawodników rozegrała dokładnie jeden mecz, który zakończył się zwycięstwem jednego z nich lub remisem. Zwycięzca meczu otrzymywał 2 punkty, jego przeciwnik 0 punktów, a w przypadku remisu obaj zawodnicy uzyskiwali po 1 punkcie. Po rozegraniu wszystkich meczów okazało się, że każdy zawodnik miał tę samą liczbę punktów. Jaka jest najmniejsza możliwa liczba meczów, które zakończyły się remisem? Odpowiedź uzasadnij.

6. Dane są liczby naturalne a, b, c , które w zapisie dziesiętnym są zapisane takimi samymi cyframi (tzn. każda cyfra liczby a występuje w jej zapisie dziesiętnym tyle samo razy co w zapisie każdej z liczb b i c). Czy jest możliwe, aby $a+b+c=10^{1001}$? Odpowiedź uzasadnij.

7. Dany jest graniastosłup prosty, którego podstawą jest romb o boku długości a i kącie ostrym 60° . Graniastosłup ten przecięto płaszczyzną, przecinając jego krawędzie boczne i uzyskując w przekroju kwadrat. Wyznacz wszystkie możliwe wartości, jakie może przyjąć długość boku tego kwadratu.

Rozwiązania powyższych zadań (wszystkich lub części z nich) należy przekazać szkolnemu koordynatorowi OMJ lub przesłać bezpośrednio, listem poleconym, do Komitetu Okręgowego OMJ właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

14 października 2019 r. (decyduje data stempla pocztowego).

Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym lub pod niewłaściwy adres nie będą rozpatrywane. Adresy Komitetów Okręgowych OMJ, szczegółowe wytyczne dotyczące sposobu redakcji rozwiązań i przysyłania prac, a także regulamin OMJ i inne bieżące informacje znajdują się na stronie internetowej Olimpiady: www.omj.edu.pl.

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej. Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku.

XV Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody stopnia pierwszego — część korespondencyjna

(1 września 2019 r. – 14 października 2019 r.)

Rozwiązania zadań konkursowych

1. Do pewnej dodatniej liczby całkowitej n dopisano na końcu pewną cyfrę, uzyskując w ten sposób liczbę 13 razy większą od liczby n . Wyznacz wszystkie liczby n o tej własności.

Rozwiązanie

Jeżeli na końcu liczby n dopiszemy cyfrę c , to otrzymamy liczbę $10n + c$. Wobec tego warunek zadania można zapisać jako

$$10n + c = 13n, \quad \text{czyli} \quad c = 3n.$$

Jednak c jest cyfrą, więc $c \leq 9$. W związku z tym $3n \leq 9$, czyli $n \leq 3$. Zatem liczba n może przyjmować jedynie wartości 1, 2 lub 3.

Z drugiej strony, dopisując po prawej stronie każdej z liczb 1, 2, 3 odpowiednio cyfry 3, 6, 9, uzyskujemy kolejno 13, 26, 39, a więc liczby 13 razy większe od wyjściowych.

Odpowiedź: Wszystkie liczby n o opisanej własności to 1, 2, 3.

2. Na bokach AB i BC trójkąta ABC leżą odpowiednio takie punkty P i Q (różne od wierzchołków trójkąta), że $AC = CP = PQ = QB$. Wiedząc, że $\sphericalangle ACB = 104^\circ$, wyznacz miary pozostałych kątów trójkąta ABC .

Rozwiązanie

Sposób I

Przyjmijmy oznaczenie $\sphericalangle ABC = \alpha$ (rys. 1). Ponieważ $PQ = QB$, więc mamy również $\sphericalangle BPQ = \sphericalangle PBQ = \alpha$. Stąd wniosek, że

$$\sphericalangle PQC = 180^\circ - \sphericalangle PQB = \sphericalangle BPQ} + \sphericalangle PBQ = 2\alpha.$$

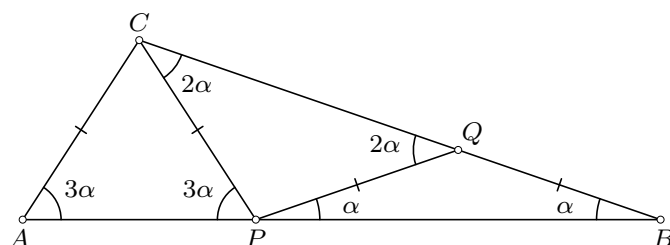
Skoro $CP = PQ$, to $\sphericalangle PCQ = \sphericalangle PQC = 2\alpha$. W konsekwencji

$$\sphericalangle APC = 180^\circ - \sphericalangle BPC = \sphericalangle PCB} + \sphericalangle PBC = 2\alpha + \alpha = 3\alpha.$$

Ponadto $AC = CP$, więc $\sphericalangle PAC = \sphericalangle APC = 3\alpha$. Sumując miary kątów w trójkącie ABC , uzyskujemy

$$180^\circ = \sphericalangle ACB} + \sphericalangle BAC} + \sphericalangle ABC} = 104^\circ + 3\alpha + \alpha,$$

skąd $4\alpha = 76^\circ$ i w konsekwencji $\alpha = 19^\circ$. Wobec tego miary pozostałych kątów trójkąta ABC to $\sphericalangle ABC = \alpha = 19^\circ$ oraz $\sphericalangle BAC = 3\alpha = 57^\circ$.



rys. 1

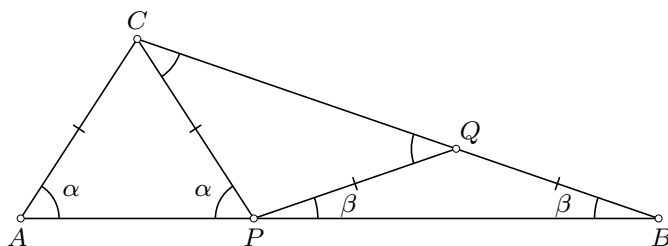
Odpowiedź: Pozostałe kąty trójkąta ABC mają miary $\sphericalangle ABC = 19^\circ$ oraz $\sphericalangle BAC = 57^\circ$.

Sposób II

Oznaczmy szukane kąty $\sphericalangle BAC$ oraz $\sphericalangle ABC$ odpowiednio przez α oraz β (rys. 2). W trójkącie ABC znamy miarę kąta przy wierzchołku C , w związku z czym możemy wyznaczyć sumę miar kątów przy jego pozostałych wierzchołkach:

$$\alpha + \beta = 180^\circ - 104^\circ = 76^\circ.$$

Z kolei z zależności $AC = PC$ oraz $BQ = PQ$ wynika, że $\sphericalangle CPA = \alpha$ oraz $\sphericalangle BPQ = \beta$. Wobec tego $\sphericalangle CPQ = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 180^\circ - 76^\circ = 104^\circ$.



rys. 2

Znając miarę kąta przy wierzchołku P w trójkącie równoramiennym CQP , możemy wyznaczyć miarę kąta przy podstawie CQ tego trójkąta:

$$\sphericalangle PQC = \frac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle CPQ) = \frac{1}{2}(180^\circ - 104^\circ) = 38^\circ.$$

Stąd, rozpatrując sumę miar kątów w trójkącie równoramiennym PBQ , uzyskujemy

$$\beta = \frac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle PQB) = \frac{1}{2}\sphericalangle PQC = \frac{1}{2} \cdot 38^\circ = 19^\circ.$$

Ostatecznie obliczamy miarę brakującego kąta: $\alpha = 76^\circ - \beta = 76^\circ - 19^\circ = 57^\circ$.

Odpowiedź: Pozostałe kąty trójkąta ABC mają miary $\sphericalangle ABC = 19^\circ$ oraz $\sphericalangle BAC = 57^\circ$.

3. Wyznacz wszystkie trójki (x, y, z) liczb rzeczywistych różnych od 0, dla których

$$xy(x+y) = yz(y+z) = zx(z+x).$$

Rozwiązanie

Sposób I

Dodając do każdego z trzech równych wyrażeń danych w treści zadania liczbę xyz , uzyskujemy równoważny warunek

$$xy(x+y+z) = yz(x+y+z) = zx(x+y+z).$$

Ponieważ liczby x, y, z są różne od zera, więc iloczyn xyz jest też liczbą różną od 0. Wobec tego możemy podzielić przez xyz każde z trzech uzyskanych wyrażeń, otrzymując równoważne zależności

$$\frac{x+y+z}{z} = \frac{x+y+z}{x} = \frac{x+y+z}{y}.$$

Jeśli $x+y+z=0$, to powyższe równości oczywiście są spełnione, a więc każda trójka (x, y, z) niezerowych liczb o sumie równej 0 spełnia warunki zadania.

Jeśli natomiast $x+y+z \neq 0$, to wszystkie otrzymane wyrażenia można podzielić przez liczbę $x+y+z$, uzyskując równoważnie

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x} = \frac{1}{y}, \quad \text{czyli} \quad z = x = y.$$

Odpowiedź: Szukaną własność mają jedynie takie trójki (x, y, z) , w których $x+y+z=0$ lub $x=y=z$.

Sposób II

Ponieważ $y \neq 0$, więc pierwsza z podanych w treści zadania równości jest równoważna warunkowi $x(x+y) = z(y+z)$. Przekształcając go równoważnie, uzyskujemy kolejno

$$\begin{aligned}x^2 - z^2 + xy - zy &= 0, \\(x-z)(x+z) + (x-z)y &= 0, \\(x-z)(x+y+z) &= 0.\end{aligned}$$

Przekształcając analogicznie drugą z podanych równości, dostajemy jej równoważną postać

$$(y-x)(x+y+z) = 0.$$

Jeśli $x+y+z=0$, to obie uzyskane równości oczywiście są spełnione, a więc każda trójka (x, y, z) niezerowych liczb o sumie równej 0 spełnia warunki zadania.

Jeśli natomiast $x+y+z \neq 0$, to obie strony każdej z uzyskanych zależności możemy podzielić przez $x+y+z$. Dostajemy wtedy $x-z=0$ oraz $y-x=0$, a więc $x=y=z$.

Odpowiedź: Szukaną własność mają jedynie takie trójki (x, y, z) , w których $x+y+z=0$ lub $x=y=z$.

Uwaga

Każda trójka (x, y, z) , dla której $x=y=z$ może być zapisana równoważnie w postaci (t, t, t) , gdzie t jest dowolną liczbą rzeczywistą. Do analogicznego zapisu trójki (x, y, z) , w której $x+y+z=0$ potrzebujemy dwóch parametrów s oraz t . W tym przypadku trójkę (x, y, z) można przedstawić równoważnie w postaci $(s, t, -s-t)$, gdzie s i t są dowolnymi liczbami rzeczywistymi.

4. Dany jest prostokąt $ABCD$. Punkty E i F leżą odpowiednio na bokach BC i CD , przy czym $\sphericalangle EAF = 45^\circ$ oraz $BE = DF$. Wykaż, że pole trójkąta AEF jest równe sumie pól trójkątów ABE i ADF .

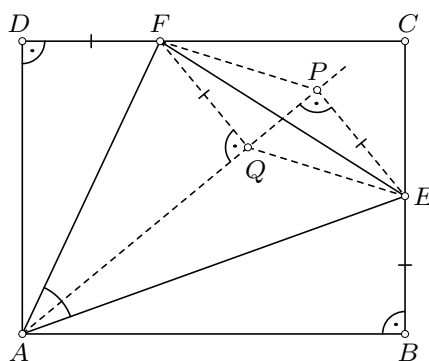
Rozwiązanie

Sposób I

Przypuśćmy bez straty ogólności, że $AB \geq AD$. Oznaczmy przez P punkt symetryczny do B względem prostej AE , a przez Q punkt symetryczny do D względem prostej AF (rys. 2). Ponieważ

$$\sphericalangle PAE + \sphericalangle QAF = \sphericalangle BAE + \sphericalangle DAF = 90^\circ - \sphericalangle EAF = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ = \sphericalangle EAF,$$

więc punkty A, P, Q leżą na jednej prostej. Ponadto $AQ = AD \leq AB = AP$, a więc punkt Q leży na odcinku AP .



rys. 3

Ponieważ $\sphericalangle APE = \sphericalangle ABE = 90^\circ = \sphericalangle ADF = \sphericalangle AQF$, więc odcinki PE oraz QF są równoległe. Wiemy także, że $PE = BE = DF = QF$, wobec czego czworokąt $EPFQ$ jest równoległobokiem. W szczególności wynika z tego, że pola trójkątów QEF oraz QEP są równe. Oznaczając przez $[\mathcal{F}]$ pole figury $\mathcal{F}$, uzyskujemy

$$[AEF] = [AQE] + [QEF] + [AQF] = [AQE] + [QEP] + [AQF] = [APE] + [AQF].$$

Do zakończenia rozwiązania wystarczy zauważyć, że $[APE] = [ABE]$ oraz $[AQF] = [ADF]$, gdyż są to pary trójkątów przystających. W związku z tym

$$[AEF] = [ABE] + [ADF],$$

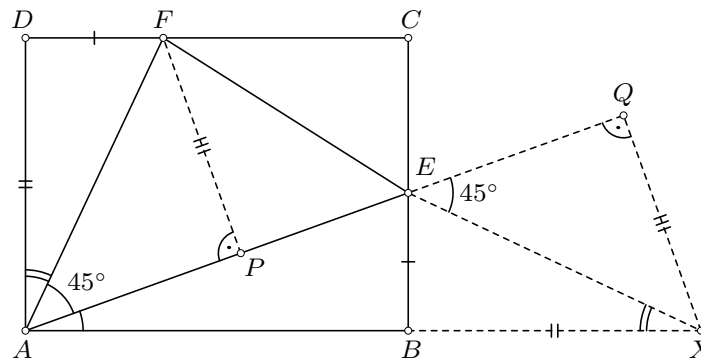
co należało wykazać.

Uwaga

Powyższe rozwiązanie przedstawia pewną ogólną metodę postępowania w sytuacji, gdy wewnątrz pewnego kąta (tutaj BAD) znajduje się kąt dwa razy mniejszy od niego o tym samym wierzchołku (tutaj EAF). Więcej szczegółów oraz przykładów związanych z tą metodą znajduje się w artykule „Zaginamy”, *Kwadrat* nr 23 (wrzesień 2019).

Sposób II

Niech X będzie takim punktem leżącym na półprostej AB , poza odcinkiem AB , że $BX = DA$ (rys. 4). Z równości tej oraz z zależności $DF = BE$ i $\sphericalangle ADF = 90^\circ = \sphericalangle XBE$ wynika, że trójkąty ADF i XBE są przystające (cecha bok–kąt–bok). W związku z tym $AF = EX$ oraz $\sphericalangle DAF = \sphericalangle BXE$.



rys. 4

Oznaczmy przez P i Q rzuty prostokątne odpowiednio punktów F i X na prostą AE . Wówczas

$$\sphericalangle XEQ = \sphericalangle BAE + \sphericalangle BXE = \sphericalangle BAE + \sphericalangle DAF = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ = \sphericalangle FAP.$$

Ponadto $AF = EX$, wobec czego trójkąty prostokątne XEQ oraz FAP są przystające (cecha kąt–bok–kąt). Stąd wynika, że $XQ = FP$. Oznaczając przez $[\mathcal{F}]$ pole figury $\mathcal{F}$, uzyskujemy

$$[ABE] + [ADF] = [ABE] + [XBE] = [AXE] = \frac{AE \cdot XQ}{2} = \frac{AE \cdot FP}{2} = [AEF],$$

co należało wykazać.

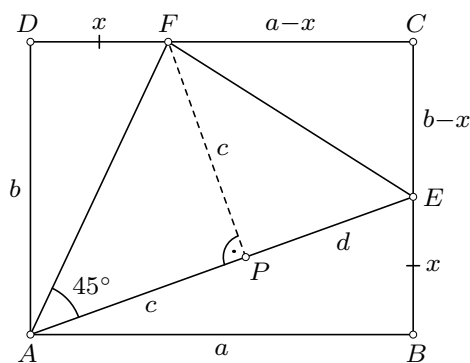
Sposób III

Oznaczmy $AB = a$, $AD = b$ oraz przyjmijmy, bez straty ogólności, że $a \geq b$.

Niech P będzie spodkiem wysokości trójkąta AEF poprowadzonej z wierzchołka F (rys. 5). Ponieważ w trójkącie prostokątnym AFP kąt ostry jest równy 45° , więc jest to trójkąt równoramienny. Oznaczmy zatem $c = AP = FP$. Niech ponadto $x = BE = DF$ oraz $d = PE$.

Równość, której chcemy dowieść przybiera postać $\frac{1}{2}ax + \frac{1}{2}bx = \frac{1}{2}(c+d)c$, czyli

$$ax + bx = c^2 + cd.$$



rys. 5

Wykorzystując twierdzenie Pitagorasa w trójkącie prostokątnym ABE , otrzymujemy $AB^2 + BE^2 = AE^2$, a więc

$$(1) \quad a^2 + x^2 = (c+d)^2.$$

Z kolei korzystając z twierdzenia Pitagorasa dla trójkątów prostokątnych ADF i APF , uzyskujemy $AD^2 + DF^2 = AF^2 = AP^2 + FP^2$. Wobec tego

$$(2) \quad b^2 + x^2 = 2c^2.$$

Wreszcie, twierdzenie Pitagorasa zastosowane dla trójkątów prostokątnych PEF oraz CEF prowadzi do wniosku, że $FP^2 + EP^2 = EF^2 = CF^2 + CE^2$, czyli

$$(3) \quad c^2 + d^2 = (a-x)^2 + (b-x)^2.$$

Dodając stronami zależności (1), (2), (3), dostajemy

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2x^2 = 3c^2 + 2cd + d^2 + a^2 + b^2 + 2x^2 - 2ax - 2bx.$$

Po redukcji wyrazów podobnych otrzymujemy $ax + bx = c^2 + cd$, a więc równość, której chcieliśmy dowieść. To kończy rozwiązanie zadania.

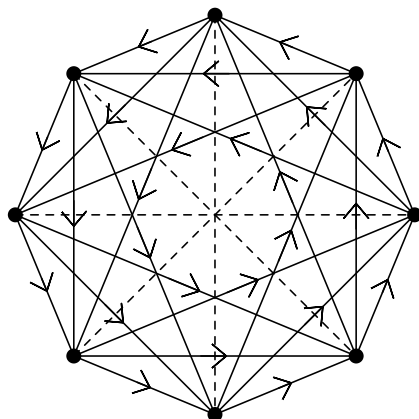
5. W turnieju wzięło udział 8 zawodników. Każda para zawodników rozegrała dokładnie jeden mecz, który zakończył się zwycięstwem jednego z nich lub remisem. Zwycięzca meczu otrzymywał 2 punkty, jego przeciwnik 0 punktów, a w przypadku remisu obaj zawodnicy uzyskiwali po 1 punkcie. Po rozegraniu wszystkich meczów okazało się, że każdy zawodnik miał tę samą liczbę punktów. Jaka jest najmniejsza możliwa liczba meczów, które zakończyły się remisem? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie

Zauważmy, że w każdym meczu zostały przyznane łącznie 2 punkty, a łączna liczba rozegranych meczów jest równa $\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 7 = 28$. Stąd wniosek, że łączna liczba przyznanych punktów w całym turnieju jest równa $2 \cdot 28 = 56$. Skoro więc każdy zawodnik uzyskał tę samą liczbę punktów, to każdy musiał zdobyć ich dokładnie $56/8 = 7$.

Jeśli mecz nie zakończył się remisem, to każdy z przeciwników otrzymał parzystą liczbę punktów (0 lub 2). Jeśli z kolei mecz zakończył się remisem, to obaj zawodnicy uzyskali po 1 punkcie, a więc nieparzystą liczbę. Stąd wniosek, że każdy zawodnik, który zakończył turniej z nieparzystą liczbą punktów, musiał zremisować co najmniej raz. Wobec tego, skoro wszyscy zawodnicy uzyskali po 7 punktów, to każdy z nich rozegrał co najmniej jeden

mecz zakończony remisem. Zawodników jest 8, skąd wynika, że co najmniej cztery mecze zakończyły się remisem.



rys. 6

Pozostaje sprawdzić, że możliwy jest układ rozgrywek spełniających warunki zadania, w którym dokładnie cztery mecze zakończyły się remisem. Przykładowy rozkład wyników o tej własności jest zilustrowany powyżej (rys. 6), przy czym strzałki prowadzą od zwycięzcy do przegranego w rozegranym między nimi meczu, a przerywane odcinki oznaczają mecze zakończone remisem. Innymi słowy, przyjmujemy, że zawodnicy znajdujący się naprzeciwko siebie zremisowali, a w pozostałych przypadkach A wygrał z B , jeśli A znajduje się po lewej stronie od B . Przy takim rozkładzie wyników każdy zawodnik zdobył dokładnie 7 punktów i dokładnie cztery mecze zakończyły się remisem.

Odpowiedź: Najmniejsza możliwa liczba meczów zakończonych remisem to 4.

6. Dane są liczby naturalne a , b , c , które w zapisie dziesiętnym są zapisane takimi samymi cyframi (tzn. każda cyfra liczby a występuje w jej zapisie dziesiętnym tyle samo razy co w zapisie każdej z liczb b i c). Czy jest możliwe, aby $a + b + c = 10^{1001}$? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie

Odpowiedź: Nie jest to możliwe.

W rozwiązaniu wykorzystamy (uogólnioną) cechę podzielności przez 3: *każda liczba naturalna daje tę samą resztę z dzielenia przez 3, co jej suma cyfr* (uzasadnienie tej własności znajduje się poniżej w uwadze).

Ponieważ liczby a , b , c składają się w zapisie dziesiętnym z tych samych cyfr, więc sumy cyfr tych liczb są równe. W szczególności wynika z tego, że liczby a , b , c dają tę samą resztę r z dzielenia przez 3. Zapiszmy zatem: $a = 3k + r$, $b = 3l + r$, $c = 3m + r$, gdzie k , l , m są pewnymi liczbami całkowitymi. W związku z tym $a + b + c = 3(k + l + m + r)$. Liczba $k + l + m + r$ jest całkowita, skąd wniosek, że liczba $a + b + c$ jest podzielna przez 3.

Tymczasem liczba 10^{1001} nie jest podzielna przez 3. Uzyskaliśmy sprzeczność, skąd wynika, że odpowiedź na postawione w zadaniu pytanie jest negatywna.

Uwaga

Uzasadnimy, że *każda liczba naturalna daje tę samą resztę z dzielenia przez 3, co jej suma cyfr*. Istotnie, przyjmijmy, że pewna m -cyfrowa liczba k została zapisana przy użyciu kolejno cyfr $a_m, a_{m-1}, \dots, a_2, a_1$, czyli

$$k = \underbrace{100 \dots 0}_{m-1} \cdot a_m + \underbrace{100 \dots 0}_{m-2} \cdot a_{m-1} + \dots + 100 \cdot a_3 + 10 \cdot a_2 + a_1.$$

Z kolei suma cyfr liczby k jest równa $s = a_m + a_{m-1} + \dots + a_3 + a_2 + a_1$. Wobec tego różnica liczby k i jej sumy cyfr s wynosi

$$k - s = \underbrace{99 \dots 9}_{m-1} \cdot a_m + \dots + 99 \cdot a_3 + 9 \cdot a_2 = 3 \cdot \left(\underbrace{33 \dots 3}_{m-1} \cdot a_m + \dots + 33 \cdot a_3 + 3 \cdot a_2 \right).$$

Liczba w nawiasie po prawej stronie jest całkowita, skąd wynika, że różnica $k - s$ jest podzielna przez 3. W związku z tym obie liczby k i s dają takie same reszty z dzielenia przez 3, co kończy dowód.

W taki sam sposób można uzasadnić uogólnioną cechę podzielności przez 9: *każda liczba naturalna daje tę samą resztę z dzielenia przez 9, co jej suma cyfr*.

7. Dany jest graniastosłup prosty, którego podstawą jest romb o boku długości a i kącie ostrym 60° . Graniastosłup ten przecięto płaszczyzną, przecinając jego krawędzie boczne i uzyskując w przekroju kwadrat. Wyznacz wszystkie możliwe wartości, jakie może przyjąć długość boku tego kwadratu.

Rozwiązanie

Rozwiązanie oparte jest na następującej obserwacji:

Dany jest graniastosłup prosty, którego podstawą jest romb $ABCD$ o boku długości a (rys. 7). Graniastosłup ten przecięto płaszczyzną, która przecina krawędzie boczne wychodzące z wierzchołków A, B, C, D odpowiednio w punktach A', B', C', D' . Wówczas jeśli $A'B'C'D'$ jest rombem, to $AC \parallel A'C'$ lub $BD \parallel B'D'$.

Oznaczmy przez b długość boku rombu $A'B'C'D'$. Bez straty ogólności, przyjmijmy, że spośród odcinków AA', BB', CC', DD' odcinek BB' jest najkrótszy. Niech X i Y będą takimi punktami leżącymi odpowiednio na odcinkach AA' i CC' , że $AX = CY = BB'$. Ponieważ dany graniastosłup jest prosty, więc czworokąty $ABB'X$ i $CBB'Y$ są prostokątami i w konsekwencji trójkąty AXB' i $C'YB'$ są prostokątne. Korzystając zatem z twierdzenia Pitagorasa, uzyskujemy

$$A'X = \sqrt{b^2 - a^2} \quad \text{oraz} \quad C'Y = \sqrt{b^2 - a^2}.$$

Wobec tego $A'X = C'Y$, a więc $AA' = CC'$. Wynika stąd, że przekątne $A'C'$ i AC są równoległe. To kończy uzasadnienie powyższej obserwacji.

Przystępujemy do rozwiązania zadania.

Przyjmijmy, że podstawą graniastosłupa jest romb $ABCD$ o kącie 60° przy wierzchołku A . Niech $A'B'C'D'$ będzie kwadratem, którego wierzchołki A', B', C', D' leżą odpowiednio na krawędziach bocznych wychodzących z wierzchołków A, B, C, D . Z powyższej obserwacji wynika, że $AC \parallel A'C'$ lub $BD \parallel B'D'$.

Jeśli $BD \parallel B'D'$, to

$$B'D' = BD = a < a\sqrt{3} = AC \leq A'C'.$$

W tym przypadku otrzymujemy sprzeczność: czworokąt $A'B'C'D'$, w którym przekątne $A'C'$ i $B'D'$ są różnych długości nie może być kwadratem.

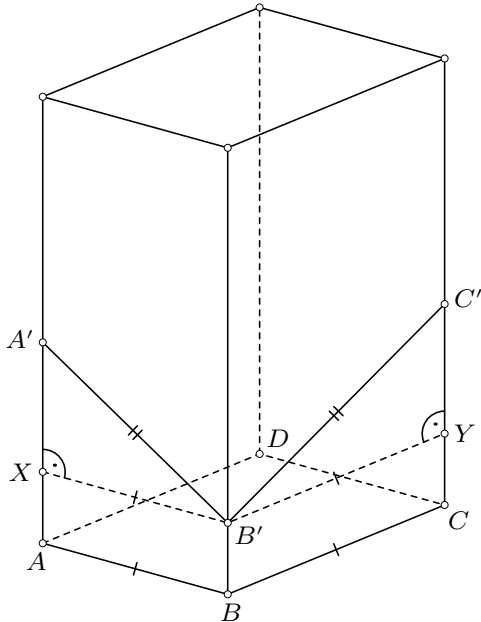
Jeśli z kolei $AC \parallel A'C'$, to $A'C' = AC = a\sqrt{3}$. Długość boku kwadratu $A'B'C'D'$ jest wtedy równa $a\sqrt{3}/\sqrt{2} = a\sqrt{6}/2$. Taki przekrój $A'B'C'D'$ możemy uzyskać w następujący sposób.

Wybieramy punkty A' i C' na krawędziach bocznych graniastosłupa w równej odległości od wierzchołków A i C . Następnie przez środek odcinka $A'C'$ prowadzimy prostą, która przecina krawędzie boczne wychodzące z wierzchołków B, D odpowiednio w punktach B', D'

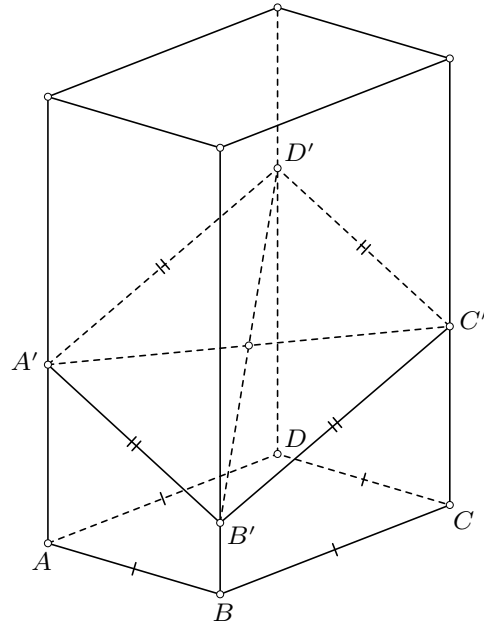
i w taki sposób, by długość odcinka $B'D'$ była równa długości odcinka AC . Jest to możliwe, ponieważ długość odcinka AC jest dłuższa od odległości krawędzi bocznych wychodzących z wierzchołków B i D . W ten sposób uzyskujemy romb $A'B'C'D'$, w którym przekątne $A'C'$ i $B'D'$ są równej długości, a więc w konsekwencji kwadrat.

Odpowiedź

Jedyną możliwą wartością, jaką może przyjmować długość boku kwadratu jest $a\sqrt{6}/2$.



rys. 7



rys. 8

Uwaga

Obserwacja, której dowiedliśmy w powyższym rozwiązaniu wynika natychmiast także z następującego ogólniejszego stwierdzenia:

Podstawą graniastostupa prostego jest czworokąt wypukły $ABCD$, którego przekątne są prostopadłe. Graniastostup ten przecięto płaszczyzną, która przecina krawędzie boczne wychodzące z wierzchołków A, B, C, D odpowiednio w punktach A', B', C', D' . Wówczas jeśli przekątne czworokąta $A'B'C'D'$ są prostopadłe, to $AC \parallel A'C'$ lub $BD \parallel B'D'$.

Dowód tego stwierdzenia jest nieco bardziej skomplikowany niż dowód w przypadku, gdy $ABCD$ oraz $A'B'C'D'$ są rombami. Można go przeprowadzić w następujący sposób.

Niech E będzie punktem przecięcia przekątnych AC i BD czworokąta $ABCD$ (rys. 9). Ponieważ $AC \perp BD$, więc korzystając z twierdzenia Pitagorasa, uzyskujemy

$$AB^2 + CD^2 = (AE^2 + BE^2) + (CE^2 + DE^2) = (BE^2 + CE^2) + (DE^2 + AE^2) = BC^2 + DA^2.$$

Analogicznie, przekątne $A'C'$ i $B'D'$ czworokąta $A'B'C'D'$ są prostopadłe, a zatem

$$(1) \quad (A'B')^2 + (C'D')^2 = (B'C')^2 + (D'A')^2.$$

Oznaczmy: $AB=a, BC=b, CD=c, DA=d$, a ponadto $AA'=x, BB'=y, CC'=z, DD'=t$. Wówczas, wykorzystując ponownie twierdzenie Pitagorasa, dostajemy

$$\begin{aligned} (A'B')^2 &= a^2 + (x-y)^2, & (B'C')^2 &= b^2 + (y-z)^2, \\ (C'D')^2 &= c^2 + (z-t)^2, & (D'A')^2 &= d^2 + (t-x)^2. \end{aligned}$$


$$a^2 + c^2 + (x - y)^2 + (z - t)^2 = b^2 + d^2 + (y - z)^2 + (t - x)^2.$$
$$(x-y)^2 + (z-t)^2 = (y-z)^2 + (t-x)^2.$$
$$x^2 - 2xy + y^2 + z^2 - 2zt + t^2 = y^2 - 2yz + z^2 + t^2 - 2tx + x^2,$$

$$y(x-z)-t(x-z)=0,$$

$$(x-z)(y-t)=0.$$

Stąd wynika, że $x=z$ lub $y=t$. Pierwsza z tych zależności oznacza, że $AC \parallel A'C'$, natomiast druga jest równoważna warunkowi $BD \parallel B'D'$. To kończy dowód powyższego stwierdzenia.

XV Olimpiada Matematyczna Juniorów

Statystyki dotyczące zawodów części korespondencyjnej (2019/20)

(1 września – 14 października 2019 r.)

Tabela 1. Liczba uczniów, którzy wzięli udział w zawodach w podziale na województwa.

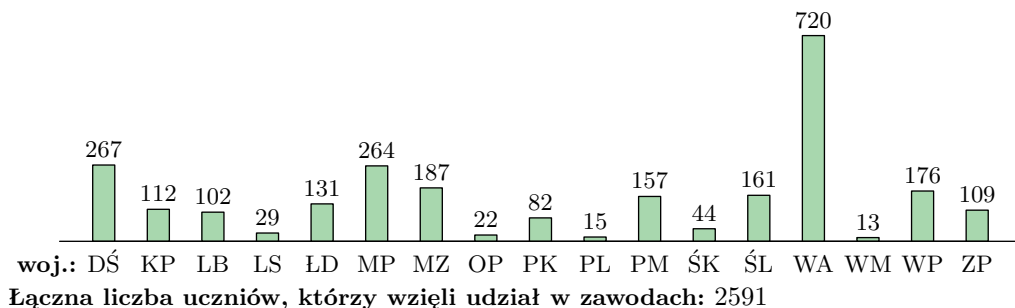
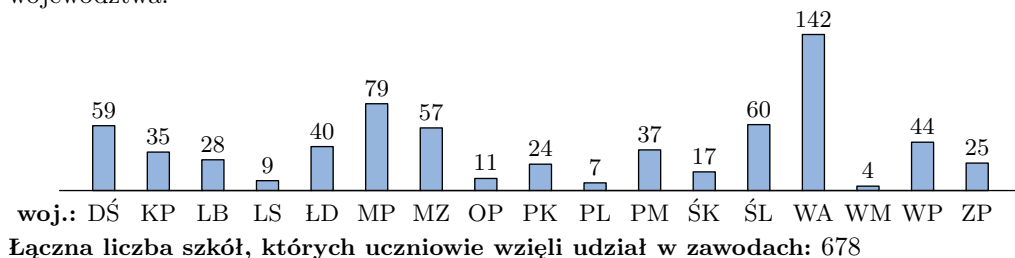


Tabela 2. Liczba szkół, których uczniowie wzięli udział w zawodach w podziale na województwa.



Skróty województw

DŚ — dolnośląskie
 LB — lubelskie
 ŁD — łódzkie
 MZ — mazowieckie bez m.st. Warszawy
 PK — podkarpackie
 PM — pomorskie
 ŚŁ — śląskie
 WM — warmińsko-mazurskie
 ZP — zachodniopomorskie

KP — kujawsko-pomorskie
 LS — lubuskie
 MP — małopolskie
 OP — opolskie
 PL — podlaskie
 ŚK — świętokrzyskie
 WA — m.st. Warszawa
 WP — wielkopolskie

Tabela 3. Procentowa liczba osób, które uzyskały daną liczbę punktów za poszczególne zadania.

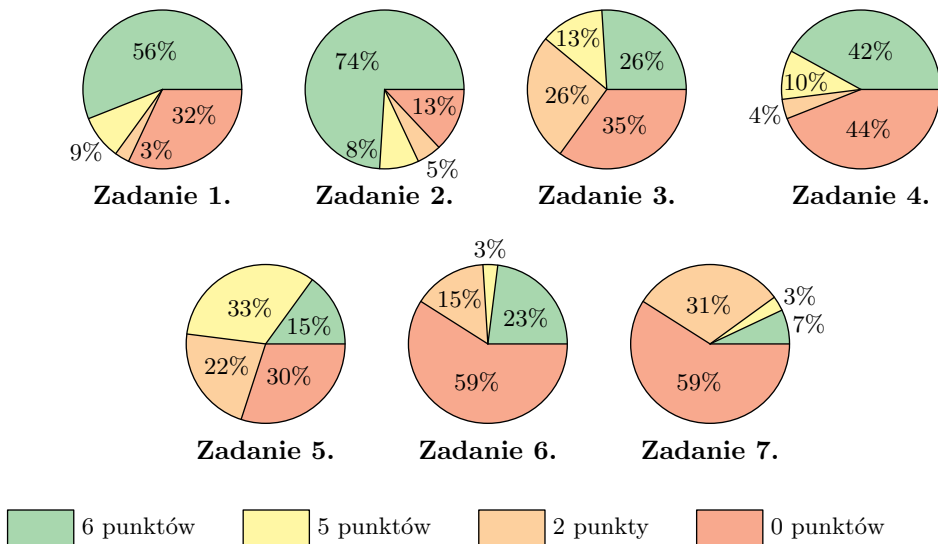


Tabela 4. Średnia uzyskanych punktów za poszczególne zadania.

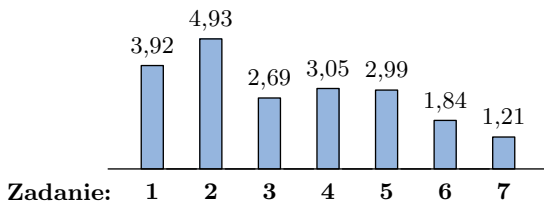


Tabela 5. Liczba nadesłanych prac dotyczących poszczególnych zadań.

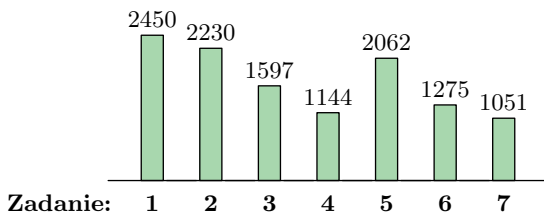


Tabela 6. Średnia uzyskanej sumy punktów w podziale na województwa.

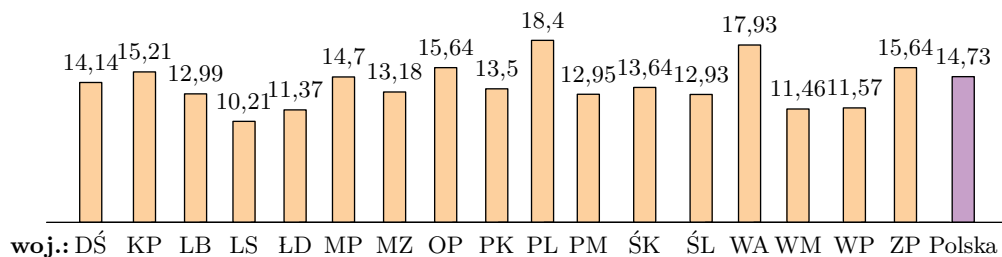


Tabela 7. Procentowa i rzeczywista liczba osób, które uzyskały daną sumę punktów.

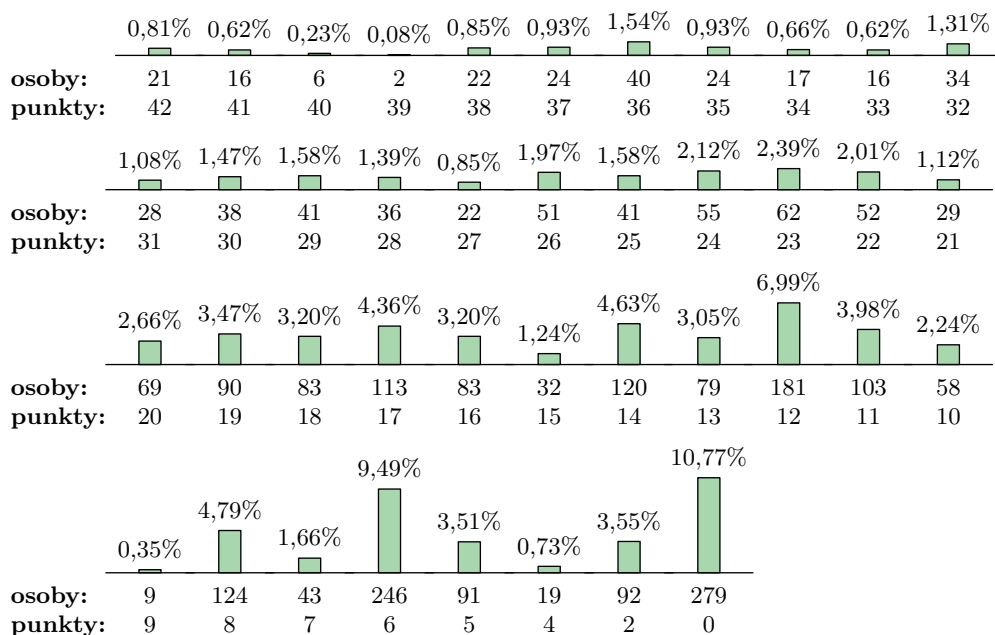
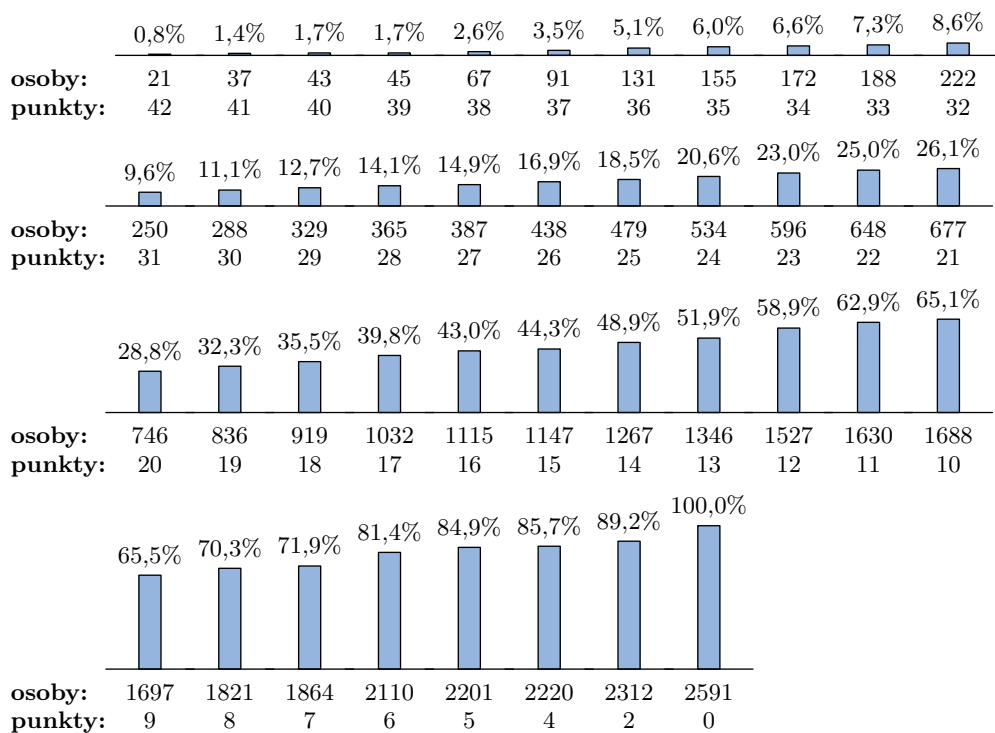


Tabela 8. Procentowa i rzeczywista liczba osób, które uzyskały daną lub większą sumę punktów.



MINISTERSTWO
EDUKACJI
NARODOWEJ



Stowarzyszenie
na rzecz Edukacji
Matematycznej



Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

XV Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody drugiego stopnia
(11 stycznia 2020 r.)



1. Dane są liczby rzeczywiste a, b, c . Wiadomo, że liczby $a + b, b + c, c + a$ są trzema kolejnymi liczbami całkowitymi, wypisanymi w pewnej kolejności, przy czym najmniejsza z nich jest nieparzysta. Wykaż, że liczby a, b, c są także trzema kolejnymi liczbami całkowitymi, wypisanymi w pewnej kolejności.

2. Dany jest równoległobok $ABCD$, w którym kąt przy wierzchołku A jest ostry. Symetralna odcinka AB przecina odcinek CD w punkcie X . Przekątne tego równoległoboku przecinają się w punkcie E . Udowodnij, że $XE = \frac{1}{2}AD$.

3. W pewnym turnieju wzięli udział chłopcy i dziewczęta. Każda osoba rozegrała dokładnie jeden mecz z każdą inną osobą, nie było remisów. Po turnieju okazało się, że każdy przegrał co najmniej raz. Ponadto każdy chłopiec przegrał inną liczbę meczów niż każdy z pozostałych chłopców. Wykaż, że pewna dziewczynka wygrała mecz z pewnym chłopcem.

4. Dany jest trójkąt ABC , w którym miara kąta przy wierzchołku A jest równa 45° , a kąt przy wierzchołku C jest rozwarty. Udowodnij, że

$$BC + (\sqrt{2} - 1) \cdot CA < AB.$$

5. Dane są dodatnie liczby całkowite a, b o następującej własności: dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ ułamek

$$\frac{a + n}{b + n}$$

jest skracalny. Wykaż, że $a = b$.

XV Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody drugiego stopnia (11 stycznia 2020 r.)

Rozwiązania zadań konkursowych

1. Dane są liczby rzeczywiste a, b, c . Wiadomo, że liczby $a+b, b+c, c+a$ są trzema kolejnymi liczbami całkowitymi, wypisanymi w pewnej kolejności, przy czym najmniejsza z nich jest nieparzysta. Wykaż, że liczby a, b, c są także trzema kolejnymi liczbami całkowitymi, wypisanymi w pewnej kolejności.

Rozwiązanie

Sposób I

Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $a+b < b+c < c+a$. Wówczas liczba $a+b$ jest nieparzysta, a więc $a+b = 2k-1$ dla pewnej liczby całkowitej k . Wobec tego $b+c = 2k$ oraz $c+a = 2k+1$. Stąd wniosek, że

$$2(a+b+c) = (a+b) + (b+c) + (c+a) = (2k-1) + 2k + (2k+1) = 6k,$$

a zatem $a+b+c = 3k$. W związku z tym obliczamy:

$$a = (a+b+c) - (b+c) = 3k - 2k = k,$$

$$b = (a+b+c) - (c+a) = 3k - (2k+1) = k-1,$$

$$c = (a+b+c) - (a+b) = 3k - (2k-1) = k+1.$$

Ponieważ liczba k jest całkowita, więc liczby b, a, c , wypisane w tej kolejności, są trzema kolejnymi liczbami całkowitymi. To kończy rozwiązanie zadania.

Sposób II

Podobnie jak wyżej przyjmijmy, bez straty ogólności, że $a+b < b+c < c+a$. Wówczas

$$1 = (b+c) - (a+b) = c-a \quad \text{oraz} \quad 1 = (c+a) - (b+c) = a-b,$$

a więc $c = a+1$ oraz $a = b+1$. W związku z tym wśród liczb b, a, c każda następna jest o 1 większa od poprzedniej. Aby wykazać, że są to trzy kolejne liczby całkowite, wystarczy uzasadnić, że liczba a jest całkowita.

Z treści zadania wynika, że liczba $a+b$ jest nieparzysta, liczba $b+c$ jest więc parzysta, a liczba $c+a$ — nieparzysta. Wobec tego suma tych trzech liczb jest parzysta, a więc równa $2k$ dla pewnej liczby całkowitej k . Zapisując, a następnie przekształcając równoważnie ten warunek, uzyskujemy kolejno

$$(a+b) + (b+c) + (c+a) = 2k,$$

$$2(a+b+c) = 2k,$$

$$a+b+c = k.$$

Stąd wniosek, że liczba $a+b+c$ jest całkowita. Ostatecznie, liczba $(a+b+c) - (b+c) = a$ jest także całkowita, jako różnica dwóch liczb całkowitych. To kończy rozwiązanie zadania.

Uwaga

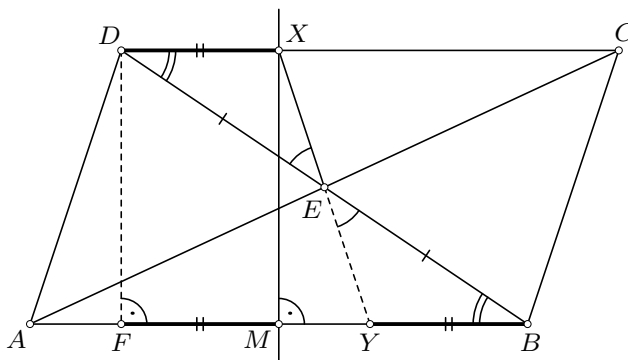
Teza zadania nie będzie prawdziwa, jeśli zostanie pominięte założenie, że najmniejsza z liczb $a+b, b+c, c+a$ jest *nieparzysta*. Przyjmijmy bowiem $b = \frac{1}{2}$, $a = \frac{3}{2}$, $c = \frac{5}{2}$. Wówczas liczby $a+b = 2$, $b+c = 3$, $c+a = 4$ są trzema kolejnymi liczbami całkowitymi, podczas gdy liczby a, b, c nie są całkowite.

2. Dany jest równoległobok $ABCD$, w którym kąt przy wierzchołku A jest ostry. Symetralna odcinka AB przecina odcinek CD w punkcie X . Przekątne tego równoległoboku przecinają się w punkcie E . Udowodnij, że $XE = \frac{1}{2}AD$.

Rozwiązanie

Sposób I

Oznaczmy przez M środek odcinka AB , a przez Y — punkt przecięcia prostych XE i AB (rys. 1). Niech ponadto F będzie spodkiem wysokości równoległoboku $ABCD$ poprowadzonej z wierzchołka D do boku AB .



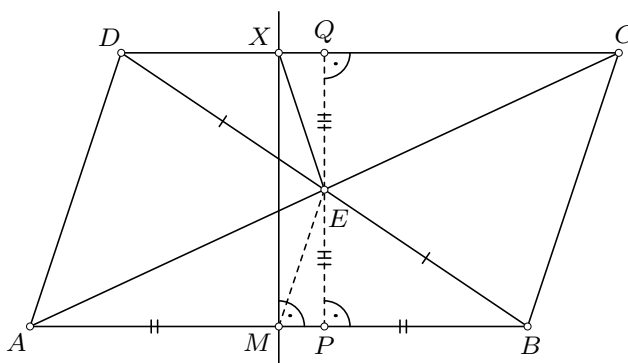
rys. 1

Zauważmy, że $\angle XED = \angle YEB$ (kąty wierzchołkowe), $\angle XDE = \angle YBE$ (kąty naprzemianległe) oraz $BE = ED$. Stąd wniosek, że trójkąty XED i YEB są przystające (cecha kąt–bok–kąt). Wobec tego $DX = BY$ i $EX = EY$.

Ponadto czworokąt $FMXD$ jest prostokątem, skąd wnioskujemy, że $DX = FM$. W konsekwencji $FM = YB$, a ponieważ $AM = MB$, więc $AF = MY$. W związku z tym trójkąty prostokątne AFD i YMX są przystające (cecha bok–kąt–bok). Stąd wynika, że $AD = YX$. Ostatecznie $XE = \frac{1}{2}YX = \frac{1}{2}AD$, co kończy rozwiązanie zadania.

Sposób II

Oznaczmy przez M środek odcinka AB (rys. 2). Wówczas ME jest linią środkową w trójkącie ADB , a więc $ME = \frac{1}{2}AD$.

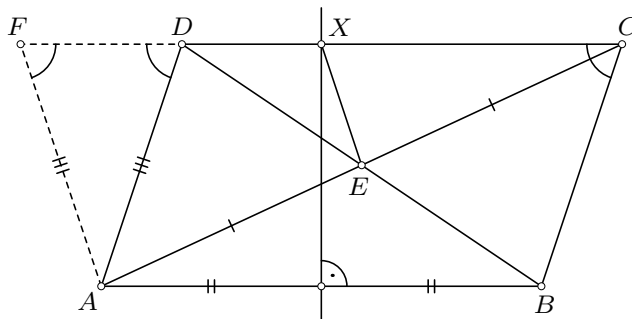


rys. 2

Przez punkt E poprowadźmy prostą prostopadłą do boków AB i CD , która przecina te boki odpowiednio w punktach P i Q . Trójkąty ABE i CDE są przystające, zatem ich wysokości poprowadzone z wierzchołka E są równe, czyli $EP = EQ$. Ponadto czworokąt $MPQX$ jest prostokątem, więc $MP = XQ$. Wobec tego trójkąty prostokątne MPE i XQE są przystające (cecha bok–kąt–bok), skąd wynika, że $XE = ME$. Łącząc tę zależność z uzyskaną wyżej równością $ME = \frac{1}{2}AD$, dostajemy tezę.

Sposób III

Niech F będzie punktem leżącym na prostej CD , różnym od D , dla którego $AF = AD$ (rys. 3). Wówczas $\sphericalangle AFD = \sphericalangle ADF = \sphericalangle BCD$, skąd wniosek, że $ABCF$ jest trapezem równoramiennym. Symetralna odcinka AB pokrywa się zatem z symetralną odcinka CF . Stąd wniosek, że punkt X jest środkiem odcinka CF . Wobec tego odcinek XE jest linią środkową w trójkącie AFC i w konsekwencji $XE = \frac{1}{2}AF = \frac{1}{2}AD$.



rys. 3

Uwaga

Więcej na temat twierdzenia o linii środkowej w trójkącie można znaleźć w artykule „Dorysujmy środek odcinka”, *Kwadrat* nr 19 (styczeń 2017 r.)

3. W pewnym turnieju wzięli udział chłopcy i dziewczęta. Każda osoba rozegrała dokładnie jeden mecz z każdą inną osobą, nie było remisów. Po turnieju okazało się, że każdy przegrał co najmniej raz. Ponadto każdy chłopiec przegrał inną liczbę meczów niż każdy z pozostałych chłopców. Wykaż, że pewna dziewczynka wygrała mecz z pewnym chłopcem.

Rozwiązanie

Sposób I

Oznaczmy przez k liczbę chłopców. Przypuśćmy, wbrew tezie, że żaden z chłopców nie przegrał meczu z dziewczynką. Wtedy we wszystkich przegranych meczach każdy chłopiec został pokonany jedynie przez innych chłopców, a więc nie mógł przegrać więcej niż $k - 1$ meczów. Z kolei każdy zawodnik przegrał co najmniej jeden mecz. W związku z tym każdy chłopiec przegrał dokładnie 1, 2, ..., $k - 2$ lub $k - 1$ meczów. Tymczasem chłopców jest k . Stąd wynika, że pewnych dwóch chłopców przegrało taką samą liczbę meczów, a to przeczy warunkom zadania. Uzyskana sprzeczność dowodzi, że pewna dziewczynka wygrała mecz z pewnym chłopcem, co należało wykazać.

Sposób II

Oznaczmy przez k liczbę chłopców. Niech $x_1, x_2, \dots, x_k$ będą liczbami meczów przegranych przez kolejnych chłopców. Ponieważ każdy chłopiec przegrał inną liczbę meczów niż każdy z pozostałych chłopców, więc liczby $x_1, x_2, \dots, x_k$ są różne. Bez straty ogólności przyjmijmy zatem, że $x_1 < x_2 < \dots < x_k$.

Ponieważ każdy z chłopców przegrał co najmniej raz, więc $x_1 \geq 1$. Wobec tego $x_2 > x_1 \geq 1$, skąd wynika, że $x_2 \geq 2$. Podobnie, $x_3 > x_2 \geq 2$, a więc $x_3 \geq 3$. Kontynuując to rozumowanie, dochodzimy do wniosku, że $x_k \geq k$.

W konsekwencji, pewien chłopiec przegrał co najmniej k meczów. A ponieważ chłopiec ten rozegrał jedynie $k - 1$ meczów z chłopcami, więc musiał on przegrać mecz z pewną dziewczynką. To kończy dowód.

4. Dany jest trójkąt ABC , w którym miara kąta przy wierzchołku A jest równa 45° , a kąt przy wierzchołku C jest rozwarty. Udowodnij, że

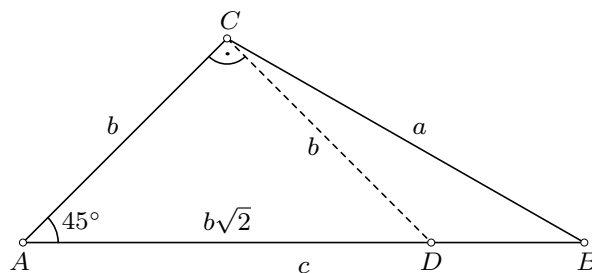
$$BC + (\sqrt{2} - 1) \cdot CA < AB.$$

Rozwiązanie

Sposób I

Oznaczymy $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$. Ponieważ kąt ACB jest rozwarty, więc na odcinku AB istnieje taki punkt D , że $\angle ACD = 90^\circ$ (rys. 4). Z równości $\angle DAC = 45^\circ$ wynika, że trójkąt ACD jest prostokątny równoramienny. Wobec tego $CD = b$ oraz $AD = b\sqrt{2}$.

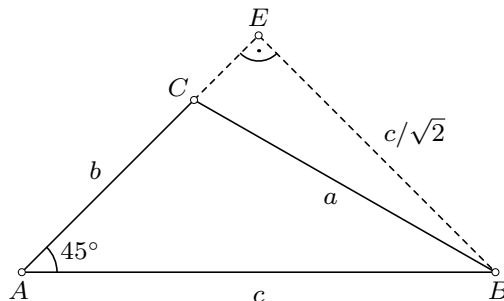
Z nierówności trójkąta BCD wynika, że $BC < BD + CD$, czyli $a < (c - b\sqrt{2}) + b$. Nierówność ta jest równoważna zależności $a + (\sqrt{2} - 1) \cdot b < c$, którą należało wykazać.



rys. 4

Sposób II

Oznaczymy $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$. Niech E będzie spodkiem wysokości trójkąta ABC poprowadzonej z wierzchołka B (rys. 5). Ponieważ $\angle ACB > 90^\circ$, więc punkt C leży na odcinku AE . Z kolei z równości $\angle BAC = 45^\circ$ wynika, że trójkąt ABE jest prostokątny równoramienny. W związku z tym $AE = BE = c/\sqrt{2}$. Z nierówności $AC < AE$ oraz $BE < BC$ wnioskujemy zatem, że $b < c/\sqrt{2}$ oraz $c/\sqrt{2} < a$.



rys. 5

Z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkąta prostokątnego BCE uzyskujemy

$$\left(\frac{c}{\sqrt{2}} - b\right)^2 + \left(\frac{c}{\sqrt{2}}\right)^2 = a^2.$$

Przekształcając równoważnie tę zależność, otrzymujemy $c^2 - \sqrt{2}bc + b^2 = a^2$.

Nierówność, którą należy wykazać, przepisujemy w postaci

$$(1) \quad a - b < c - b\sqrt{2}.$$

Z uzyskanych wyżej szacowań $b < c/\sqrt{2}$ oraz $c/\sqrt{2} < a$ wynika, że obie strony nierówności (1) są dodatnie. Podnosząc zatem obie strony tej nierówności do kwadratu, otrzymujemy równoważną postać zależności (1):

$$a^2 - 2ab + b^2 < c^2 - 2\sqrt{2}bc + 2b^2.$$

Przekształcamy tę nierówność równoważnie, wykorzystując otrzymaną wyżej zależność $c^2 - \sqrt{2}bc + b^2 = a^2$. Dostajemy w ten sposób kolejno:

$$\begin{aligned} a^2 - 2ab &< c^2 - 2\sqrt{2}bc + b^2, \\ c^2 - \sqrt{2}bc + b^2 - 2ab &< c^2 - 2\sqrt{2}bc + b^2, \\ \sqrt{2}bc &< 2ab, \\ c &< a\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Uzyskaliśmy nierówność równoważną udowodnionej wcześniej zależności $c/\sqrt{2} < a$. To kończy dowód nierówności (1), a tym samym rozwiązanie zadania.

Sposób III (szkic)

Oznaczmy $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$. Podobnie jak w sposobie II dowodzimy najpierw, że $c^2 - \sqrt{2}bc + b^2 = a^2$ oraz $b < c/\sqrt{2}$, $c/\sqrt{2} < a$.

Z dwóch ostatnich nierówności wynika, że $a > b$. Ponadto $a + b > c$. Mnożąc zatem obie strony nierówności $a + b > c$ przez dodatnią liczbę $(a - b)/c$, uzyskujemy

$$\frac{(a - b)(a + b)}{c} > a - b.$$

Dzieląc z kolei obie strony zależności $c^2 - \sqrt{2}bc = a^2 - b^2$ przez c , a następnie wykorzystując ostatnią nierówność, otrzymujemy

$$c - \sqrt{2}b = \frac{a^2 - b^2}{c} = \frac{(a - b)(a + b)}{c} > a - b.$$

Wobec tego $c - \sqrt{2}b > a - b$, czyli $c > a + (\sqrt{2} - 1) \cdot b$, co należało dowieść.

5. Dane są dodatnie liczby całkowite a , b o następującej własności: dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ ułamek

$$\frac{a + n}{b + n}$$

jest skracalny. Wykaż, że $a = b$.

Rozwiązanie

Sposób I

Przypuśćmy, że $a \neq b$. Przyjmijmy, bez straty ogólności, że $a > b$. Ponieważ liczb pierwszych jest nieskończenie wiele, więc istnieje taka dodatnia liczba naturalna n , że liczba $p = a + n$ jest pierwsza. Wtedy ułamek

$$\frac{a + n}{b + n}$$

można skrócić jedynie przez p . Jednak liczba $b + n$ nie może być podzielna przez p , gdyż $b + n < a + n = p$. Uzyskaliśmy sprzeczność, z której wynika, że $a = b$.

Sposób II

Podobnie jak wyżej przypuśćmy, że $a \neq b$ oraz przyjmijmy, bez straty ogólności, że $a > b$.

Niech $n = (a - b) \cdot b - b + 1$. Ponieważ $a > b$, więc $a - b \geq 1$, a zatem $n \geq 1 \cdot b - b + 1 = 1$. Z warunków zadania wynika więc, że ułamek

$$\frac{a + n}{b + n} = \frac{(a - b) \cdot b + (a - b) + 1}{(a - b) \cdot b + 1}$$

jest skracalny. Załóżmy, że można go skrócić przez pewną liczbę naturalną $d > 1$.

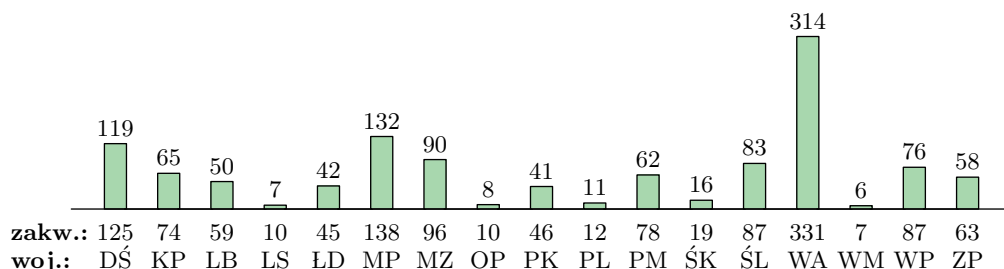
Liczba d jest dzielnikiem obu liczb $a+n$ oraz $b+n$, jest zatem dzielnikiem różnicy tych liczb, czyli liczby $(a+n) - (b+n) = a-b$. W związku z tym d jest także dzielnikiem liczby $(a-b) \cdot b$. Wykorzystując ponownie to, że d jest dzielnikiem liczby $b+n$, wnioskujemy, że d jest także dzielnikiem różnicy $(b+n) - (a-b) \cdot b = 1$. Uzyskaliśmy sprzeczność, gdyż liczba d jest większa od 1; nie może więc być dzielnikiem liczby 1. To kończy rozwiązanie zadania.

XV Olimpiada Matematyczna Juniorów

Statystyki dotyczące zawodów drugiego stopnia (2019/20)

(11 stycznia 2020 r.)

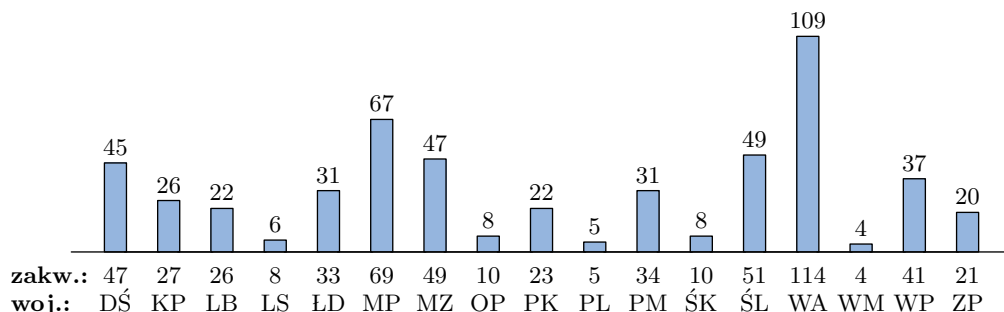
Tabela 1. Liczba uczniów, którzy wzięli udział w zawodach oraz zakwalifikowanych do zawodów w podziale na województwa i inne regiony.



Łączna liczba uczniów, którzy wzięli udział w zawodach: 1180

Łączna liczba uczniów zakwalifikowanych do zawodów: 1287

Tabela 2. Liczba szkół uczniów, którzy wzięli udział w zawodach oraz zakwalifikowanych do zawodów w podziale na województwa i inne regiony.



Łączna liczba szkół uczniów, którzy wzięli udział w zawodach: 537

Łączna liczba szkół uczniów zakwalifikowanych do zawodów: 572

Skróty województw

DŚ — dolnośląskie

LB — lubelskie

ŁD — łódzkie

MZ — mazowieckie bez m.st. Warszawy

PK — podkarpackie

PM — pomorskie

ŚŁ — śląskie

WM — warmińsko-mazurskie

ZP — zachodniopomorskie

KP — kujawsko-pomorskie

LS — lubuskie

MP — małopolskie

OP — opolskie

PL — podlaskie

ŚK — świętokrzyskie

WA — m.st. Warszawa

WP — wielkopolskie

Tabela 3. Procentowa i rzeczywista liczba osób, które uzyskały daną sumę punktów.

	0,25%	0,25%	0,51%	0,08%	1,02%	0,42%	0,51%	0,25%	1,86%	0,76%	1,78%	0,76%
osoby:	3	3	6	1	12	5	6	3	22	9	21	9
punkty:	30	29	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17

	1,53%	0,42%	4,15%	1,61%	2,63%	1,36%	4,15%	2,20%	6,19%	4,83%	7,54%	2,88%
osoby:	18	5	49	19	31	16	49	26	73	57	89	34
punkty:	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5

	10,42%	20,76%	20,85%
osoby:	123	245	246
punkty:	4	2	0

Tabela 4. Procentowa i rzeczywista liczba osób, które uzyskały daną lub większą sumę punktów.

	0,3%	0,5%	1,0%	1,1%	2,1%	2,5%	3,1%	3,3%	5,2%	5,9%	7,7%	8,5%
osoby:	3	6	12	13	25	30	36	39	61	70	91	100
punkty:	30	29	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17

	10,0%	10,4%	14,6%	16,2%	18,8%	20,2%	24,3%	26,5%	32,7%	37,5%	45,1%	48,0%
osoby:	118	123	172	191	222	238	287	313	386	443	532	566
punkty:	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5

	58,4%	79,2%	100,0%
osoby:	689	934	1180
punkty:	4	2	0

Tabela 5. Procentowa liczba osób, które uzyskały daną liczbę punktów za poszczególne zadania.

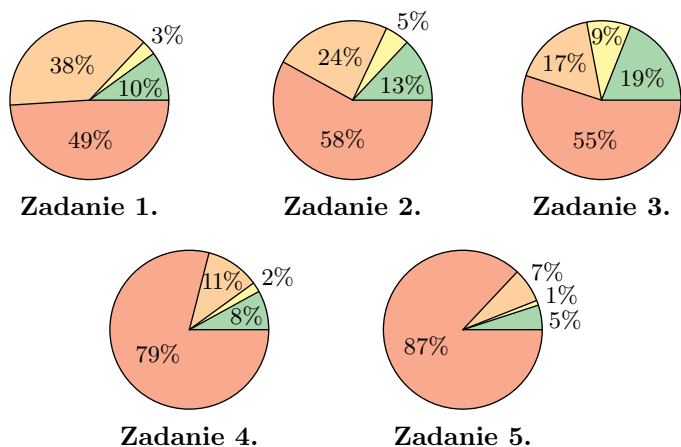


Tabela 6. Średnia uzyskanych punktów za poszczególne zadania.

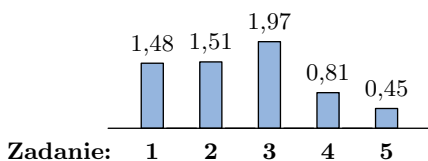
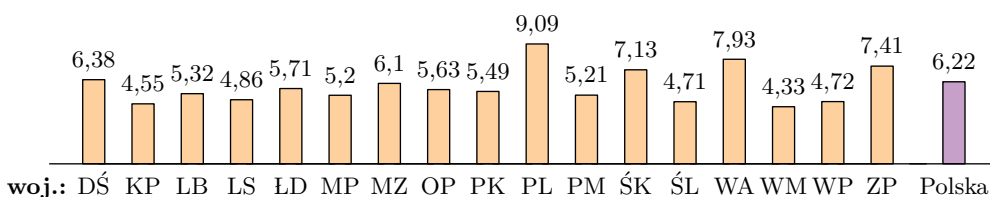


Tabela 7. Średnia sumy punktów w podziale na województwa i inne regiony.



MINISTERSTWO
EDUKACJI
NARODOWEJ



Stowarzyszenie
na rzecz Edukacji
Matematycznej



Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

Imiona:

Nazwisko:

Klasa:



XVI Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody stopnia pierwszego — część testowa

(24 września 2020 r., godz. 9:00)

Przed przystąpieniem do rozwiązywania testu wpisz na każdą stronę swoje imiona, nazwisko oraz numer klasy.

Treść każdego z poniższych zadań zawiera trzy stwierdzenia. Każde z nich jest prawdziwe lub fałszywe. Jeśli dane stwierdzenie jest prawdziwe, wpisz w odpowiednią kratkę literkę T, jeśli zaś stwierdzenie jest fałszywe, wpisz literkę N.

W przypadku pomyłki przekreśl znakiem **X** podaną odpowiedź, a właściwą odpowiedź podaj obok z lewej strony. Nie używaj korektora.

Przykład poprawnie rozwiązane zadania:

0. Dla każdej dodatniej liczby całkowitej n liczba $2n + 1$ jest

	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>T</td></tr></table>	T	a) dodatnia;
T			
	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>T</td></tr></table>	T	b) nieparzysta;
T			
N	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>~~X~~</td></tr></table>	~~X~~	c) pierwsza.
~~X~~			

Czas na rozwiązywanie testu: 75 minut.

Powodzenia!

1. Istnieje liczba pierwsza, która przy dzieleniu przez 6 daje resztę

<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td> </td></tr></table>		a) 2;
<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td> </td></tr></table>		b) 3;
<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td> </td></tr></table>		c) 4.

2. Liczby rzeczywiste a, b spełniają warunek $a + b > 0$. Wynika z tego, że

<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td> </td></tr></table>		a) $a \cdot b > 0$;
<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td> </td></tr></table>		b) $(a + 1) \cdot (b + 1) > a \cdot b$;
<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td> </td></tr></table>		c) $a^3 + b^3 > 0$.

Imiona:

Nazwisko:

Klasa:

3. Bartek miał obliczyć wartość wyrażenia $a+b \cdot c$ dla pewnych dodatnich liczb rzeczywistych a , b , c . Zapomniał on jednak o kolejności wykonywania działań i najpierw dodał liczby a i b , po czym używaną sumę pomnożył przez c . Okazało się, że pomimo tego Bartek otrzymał prawidłowy wynik. Wynika z tego, że

a) wszystkie liczby a , b , c były całkowite;

b) co najmniej jedna z liczb a , b , c była całkowita;

c) wszystkie liczby a , b , c były równe 1.

4. Istnieje taki trójkąt ABC , w którym $AB = AC = 1$ i którego pole

a) jest mniejsze od $\frac{1}{2}$;

b) jest równe $\frac{1}{2}$;

c) jest większe od $\frac{1}{2}$.

5. W okrąg jest wpisany kwadrat, a w ten kwadrat jest wpisany mniejszy okrąg. Wynika z tego, że pole pierścienia kołowego ograniczonego tymi okręgami

a) jest równe polu koła wpisanego w dany kwadrat;

b) jest mniejsze od pola kwadratu;

c) jest większe od 75% pola kwadratu.

6. Bartek rzucił 100 razy sześcienną kostką do gry, a następnie pomnożył wszystkie uzyskane liczby oczek. Wynika z tego, że iloczyn, który otrzymał Bartek

a) jest liczbą złożoną;

b) jest liczbą składającą się z co najwyżej 100 cyfr;

c) jest różny od $2^{150} \cdot 3^{50}$.

7. Każdą dodatnią liczbę całkowitą można przedstawić w postaci sumy

a) dokładnie dwóch kolejnych liczb całkowitych;

b) dokładnie trzech kolejnych liczb całkowitych;

c) co najmniej dwóch kolejnych liczb całkowitych.

Imiona:

Nazwisko:

Klasa:

8. Dodatnią liczbę całkowitą a zmniejszono o 70%, a następnie uzyskany wynik powiększono o 20%. Uzyskano w ten sposób liczbę całkowitą b . Wynika z tego, że

a) liczba a jest podzielna przez 100;

b) liczba b jest podzielna przez 9;

c) liczba ab jest kwadratem liczby całkowitej.

9. Istnieją takie liczby całkowite $a > 1$ oraz $b > 1$, że

a) $a^2 = b^3$;

b) $a^2 = 2 \cdot b^3$;

c) $a^2 = 2 \cdot b^2$.

10. W pewnym pięciokącie wypukłym wszystkie przekątne są równej długości. Wynika z tego, że

a) wszystkie boki tego pięciokąta są równej długości;

b) wszystkie kąty wewnętrzne tego pięciokąta są równej miary;

c) jest to pięciokąt foremny.

11. W pewnej grupie składającej się z co najmniej trzech osób każdy zna dokładnie jedną spośród pozostałych osób (przyjmujemy, że jeśli osoba A zna osobę B , to B zna A). Wynika z tego, że

a) istnieje osoba w tej grupie, którą wszyscy znają;

b) liczba osób w grupie jest parzysta;

c) można posadzić wszystkie osoby tej grupy przy okrągłym stole w taki sposób, by każdy siedział obok swojego znajomego.

12. Liczby a , b , c są naturalne oraz $a + b + c$ jest liczbą parzystą. Wynika z tego, że

a) abc jest liczbą parzystą;

b) $a - b + c$ jest liczbą parzystą;

c) $ab + bc + ca$ jest liczbą parzystą.

Imiona:

Nazwisko:

Klasa:

13. Punkty A, B, C, D leżą na okręgu o promieniu 1, przy czym cięciwy AC i BD przecinają się i są prostopadłe. Wynika z tego, że

a) pole czworokąta $ABCD$ jest nie większe od 2;

b) długość pewnego boku czworokąta $ABCD$ nie przekracza $\sqrt{2}$;

c) czworokąt $ABCD$ jest kwadratem.

14. Równoległe do boków kwadratu o boku długości 4 poprowadzono proste dzielące ten kwadrat na 16 małych kwadratów o boku długości 1. Następnie w niektórych z uzyskanych kwadratów 1×1 narysowano jedną przekątną w taki sposób, by żadne dwie narysowane przekątne nie miały wspólnych końców. Wynika z tego, że narysowano co najwyżej

a) 7 przekątnych;

b) 9 przekątnych;

c) 12 przekątnych.

15. Dany jest prostopadłościan o podstawach $ABCD, KLMN$ oraz krawędziach bocznych AK, BL, CM, DN . Wynika z tego, że

a) $\sphericalangle ALC = \sphericalangle ANC$;

b) $\sphericalangle ALC = \sphericalangle DMB$;

c) $\sphericalangle ANB = \sphericalangle BKC$.

XVI Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody stopnia pierwszego — część testowa

(24 września 2020 r.)

Rozwiązania zadań testowych

1. Istnieje liczba pierwsza, która przy dzieleniu przez 6 daje resztę

T

a) 2;

T

b) 3;

N

c) 4.

Komentarz

a), b) Liczby 2 i 3 są pierwsze i dają odpowiednio reszty 2 i 3 przy dzieleniu przez 6.

c) Dodatnia liczba całkowita, która z dzielenia przez 6 daje resztę 4, jest postaci

$$6n + 4 = 2(3n + 2),$$

gdzie n jest pewną liczbą całkowitą nieujemną. Czynniki 2 oraz $3n + 2$ są większe od 1, skąd wniosek, że liczba $2(3n + 2)$ jest złożona.

2. Liczby rzeczywiste a, b spełniają warunek $a + b > 0$. Wynika z tego, że

N

a) $a \cdot b > 0$;

T

b) $(a + 1) \cdot (b + 1) > a \cdot b$;

T

c) $a^3 + b^3 > 0$.

Komentarz

a) Jeśli $a = 2, b = -1$, to $a + b = 1 > 0$, lecz $a \cdot b = -2 < 0$.

b) Przekształcając równoważnie nierówność $(a + 1) \cdot (b + 1) > a \cdot b$, uzyskujemy

$$a \cdot b + a + b + 1 > a \cdot b,$$

czyli $(a + b) + 1 > 0$. Ostatnia nierówność jest prawdziwa, a więc również wyjściowa nierówność jest prawdziwa.

c) Z warunku $a + b > 0$ wynika, że $a > -b$. Wobec tego również $a^3 > (-b)^3$, czyli $a^3 + b^3 > 0$.

3. Bartek miał obliczyć wartość wyrażenia $a + b \cdot c$ dla pewnych dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c . Zapomniał on jednak o kolejności wykonywania działań i najpierw dodał liczby a i b , po czym uzyskaną sumę pomnożył przez c . Okazało się, że pomimo tego Bartek otrzymał prawidłowy wynik. Wynika z tego, że

N

a) wszystkie liczby a, b, c były całkowite;

- ☐ T b) co najmniej jedna z liczb a, b, c była całkowita;
- ☐ N c) wszystkie liczby a, b, c były równe 1.

Komentarz

a), b), c) Z warunków zadania wynika, że $a + b \cdot c = (a + b) \cdot c$. Przekształcając równo-
ważnie tę zależność, uzyskujemy kolejno

$$a + b \cdot c = a \cdot c + b \cdot c;$$

$$a \cdot c - a = 0;$$

$$a \cdot (c - 1) = 0.$$

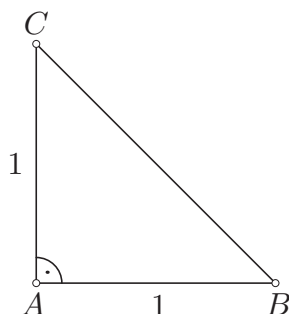
Ponieważ liczba a jest różna od 0, więc ostatnia równość sprowadza się do $c = 1$. Wobec tego
liczby a, b, c spełniają podany warunek wtedy i tylko wtedy, gdy $c = 1$.

4. Istnieje taki trójkąt ABC , w którym $AB = AC = 1$ i którego pole

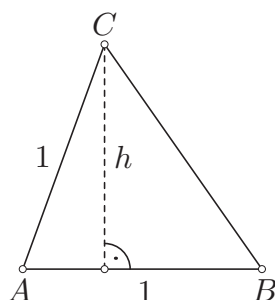
- ☐ T a) jest mniejsze od $\frac{1}{2}$;
- ☐ T b) jest równe $\frac{1}{2}$;
- ☐ N c) jest większe od $\frac{1}{2}$.

Komentarz

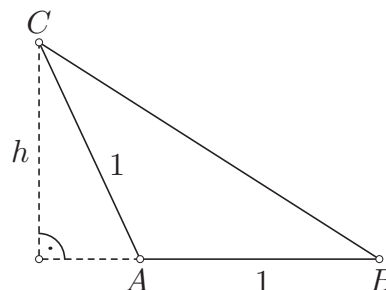
b) Trójkąt, w którym $AB = AC = 1$ oraz $\sphericalangle BAC = 90^\circ$ ma pole równe $\frac{1}{2}$ (rys. 1).



rys. 1



rys. 2



rys. 3

a) Uzasadnimy, że każdy trójkąt, w którym $AB = AC = 1$ oraz $\sphericalangle BAC \neq 90^\circ$ ma pole
mniejsze od $\frac{1}{2}$.

Oznaczmy przez h wysokość trójkąta ABC poprowadzoną z wierzchołka C (rys. 2, 3).
Wówczas $h < AC$, czyli $h < 1$. Pole trójkąta ABC jest wtedy równe

$$\frac{1}{2} AB \cdot h,$$

co z kolei jest mniejsze od $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$.

c) Z podpunktów a) i b) wynika, że każdy trójkąt, w którym $AB = AC = 1$ ma pole
albo równe $\frac{1}{2}$ (gdy $\sphericalangle BAC = 90^\circ$) albo mniejsze od $\frac{1}{2}$ (gdy $\sphericalangle BAC \neq 90^\circ$).

5. W okrąg jest wpisany kwadrat, a w ten kwadrat jest wpisany mniejszy okrąg.

Wynika z tego, że pole pierścienia kołowego ograniczonego tymi okręgami

T

a) jest równe polu koła wpisanego w dany kwadrat;

T

b) jest mniejsze od pola kwadratu;

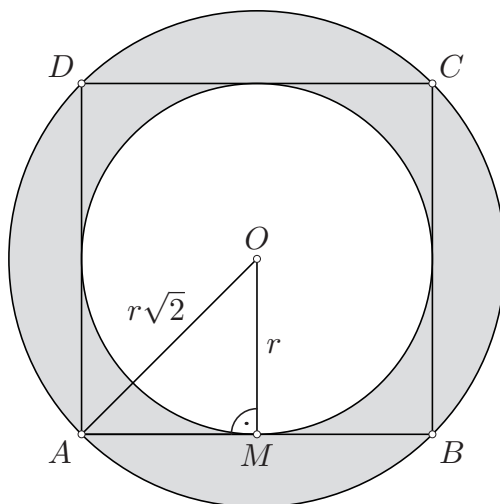
T

c) jest większe od 75% pola kwadratu.

Komentarz

Niech $ABCD$ będzie danym kwadratem. Oznaczmy ponadto przez O wspólny środek obu okręgów i kwadratu, a przez M — środek boku AB . Niech ponadto r będzie promieniem mniejszego okręgu. Wówczas bok kwadratu $ABCD$ ma długość $2r$, a jego przekątna $2r\sqrt{2}$. Wobec tego promień większego okręgu równa się $r\sqrt{2}$. Pole pierścienia kołowego ograniczonego okręgami jest więc równe

$$\pi(r\sqrt{2})^2 - \pi r^2 = 2\pi r^2 - \pi r^2 = \pi r^2.$$



rys. 4

- a) Pole mniejszego koła jest równe πr^2 , czyli tyle samo, co pole pierścienia.
- b) Ponieważ $\pi r^2 < 4r^2$, więc pole pierścienia jest mniejsze od pola kwadratu.
- c) Z kolei $\pi r^2 > \frac{3}{4} \cdot 4r^2$, więc pole pierścienia jest większe od 75% pola kwadratu.

6. Bartek rzucił 100 razy sześcienną kostką do gry, a następnie pomnożył wszystkie uzyskane liczby oczek. Wynika z tego, że iloczyn, który otrzymał Bartek

N

a) jest liczbą złożoną;

T

b) jest liczbą składającą się z co najwyżej 100 cyfr;

N

c) jest różny od $2^{150} \cdot 3^{50}$.

Komentarz

a) Bartek mógł wyrzucić 99 razy liczbę 1 oraz jeden raz liczbę 2. Wtedy iloczyn wszystkich wyrzuconych oczek równa się 2, a więc jest liczbą pierwszą.

b) Bartek za każdym razem wyrzucił liczbę mniejszą od 10. Wobec tego iloczyn, który otrzymał, jest liczbą mniejszą od 10^{100} , a liczby mniejsze od 10^{100} składają się z co najwyżej 100 cyfr.

c) Bartek mógł wyrzucić 50 razy liczbę 4 oraz 50 razy liczbę 6. Wtedy uzyskany iloczyn jest równy $4^{50} \cdot 6^{50} = 2^{100} \cdot (2^{50} \cdot 3^{50}) = 2^{150} \cdot 3^{50}$.

7. Każdą dodatnią liczbę całkowitą można przedstawić w postaci sumy

N	a) dokładnie dwóch kolejnych liczb całkowitych;
N	b) dokładnie trzech kolejnych liczb całkowitych;
T	c) co najmniej dwóch kolejnych liczb całkowitych.

Komentarz

a) Suma dwóch kolejnych liczb całkowitych jest liczbą nieparzystą. Istotnie, jeśli n oznacza liczbę całkowitą, to $n + (n + 1) = 2n + 1$. W związku z tym żadnej liczby parzystej (np. 2) nie da się przedstawić w postaci sumy dokładnie dwóch kolejnych liczb całkowitych.

b) Suma trzech kolejnych liczb całkowitych jest liczbą podzielną przez 3. Istotnie, jeśli n oznacza liczbę całkowitą, to $n + (n + 1) + (n + 2) = 3(n + 1)$. Zatem dowolnej liczby niepodzielnej przez 3 (np. 1) nie da się przedstawić w postaci sumy dokładnie trzech kolejnych liczb całkowitych.

c) Jeśli n jest dowolną liczbą całkowitą dodatnią, to

$$n = -(n - 1) - (n - 2) - \dots - 1 + 0 + 1 + 2 + \dots + (n - 1) + n.$$

Prawa strona powyższej równości jest sumą kolejnych liczb całkowitych od $-(n - 1)$ do n . Ta suma składa się z co najmniej dwóch składników, gdyż $n \geq 1$.

8. Dodatnią liczbę całkowitą a zmniejszono o 70%, a następnie uzyskany wynik powiększono o 20%. Uzyskano w ten sposób liczbę całkowitą b . Wynika z tego, że

N	a) liczba a jest podzielna przez 100;
T	b) liczba b jest podzielna przez 9;
T	c) liczba ab jest kwadratem liczby całkowitej.

Komentarz

Po zmniejszeniu dodatniej liczby a o 70% uzyskujemy $a - \frac{70}{100} \cdot a = \frac{3}{10} \cdot a$. Z kolei powiększając tę liczbę o 20%, dostajemy

$$b = \left(\frac{3}{10} \cdot a \right) + \frac{20}{100} \cdot \left(\frac{3}{10} \cdot a \right) = \frac{12}{10} \cdot \left(\frac{3}{10} \cdot a \right) = \frac{9}{25} \cdot a.$$

a) Przyjmując $a = 25$, uzyskujemy $b = 9$, czyli liczbę całkowitą. Jednak liczba 25 nie jest podzielna przez 100.

b) Uzyskaną wyżej równość możemy przepisać w postaci $9a = 25b$. Ponieważ liczba 9 nie ma wspólnych dzielników pierwszych z liczbą 25, więc b jest podzielne przez 9.

c) Powyższą równość możemy przepisać także w postaci

$$ab = \left(5 \cdot \frac{b}{3}\right)^2.$$

Z podpunktu b) wiemy, że liczba b jest podzielna przez 9, jest więc ona także podzielna przez 3. W związku z tym liczba $5 \cdot \frac{b}{3}$ jest całkowita, jako iloczyn dwóch liczb całkowitych.

9. Istnieją takie liczby całkowite $a > 1$ oraz $b > 1$, że

T	a) $a^2 = b^3$;
T	b) $a^2 = 2 \cdot b^3$;
N	c) $a^2 = 2 \cdot b^2$.

Komentarz

a) Liczby $a = 2^3$, $b = 2^2$ spełniają podaną równość.

b) Liczby $a = 4$, $b = 2$ spełniają podaną równość.

c) Przypuśćmy, że takie liczby istnieją. Daną zależność możemy przekształcić do postaci

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2.$$

Ułamek $\frac{a}{b}$ zapiszmy w postaci ułamka nieskracalnego $\frac{a_1}{b_1}$. Wtedy $\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^2 = 2$, czyli $\frac{a_1^2}{b_1^2} = 2$.

Ponieważ ułamek $\frac{a_1}{b_1}$ jest nieskracalny, więc także ułamek $\frac{a_1^2}{b_1^2}$ jest nieskracalny. Skoro więc jego wartość jest równa 2, to $b_1 = 1$. Wobec tego $a_1^2 = 2$. Jednak nie istnieje liczba całkowita, której kwadrat jest równy 2. Otrzymaliśmy sprzeczność.

Uwaga.

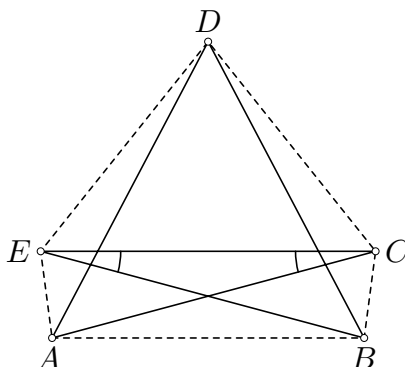
W podpunkcie c) wykazaliśmy, że nie istnieje taka liczba *wymierna* $\frac{a}{b}$, której kwadrat jest równy 2. Wynika stąd, że liczby $\sqrt{2}$ nie można przedstawić w postaci ułamka $\frac{a}{b}$, gdzie a i b są dodatnimi liczbami całkowitymi. Dowiedliśmy zatem, że liczba $\sqrt{2}$ jest *niewymierna*.

10. W pewnym pięciokącie wypukłym wszystkie przekątne są równej długości. Wynika z tego, że

N	a) wszystkie boki tego pięciokąta są równej długości;
N	b) wszystkie kąty wewnętrzne tego pięciokąta są równej miary;
N	c) jest to pięciokąt foremny.

Komentarz

a), b), c) Pięciokąt $ABCDE$ przedstawiony na rysunku 5 nie spełnia żadnego z warunków a), b), c), lecz ma wszystkie przekątne równych długości. Można go skonstruować następująco:



rys. 5

Niech a będzie dowolną liczbą dodatnią, a α dowolnym kątem o mierze mniejszej od 36° . Konstrukcję zaczynamy od dwóch trójkątów równoramiennych ACE i BEC , o ramionach równych a i kątach ACE, BEC równych α . Następnie konstruujemy trójkąt ABD , w którym $AD = BD = a$.

11. W pewnej grupie składającej się z co najmniej trzech osób każdy zna dokładnie jedną spośród pozostałych osób (przyjmujemy, że jeśli osoba A zna osobę B , to B zna A). Wynika z tego, że

N	a) istnieje osoba w tej grupie, którą wszyscy znają;
T	b) liczba osób w grupie jest parzysta;
T	c) można posadzić wszystkie osoby tej grupy przy okrągłym stole w taki sposób, by każdy siedział obok swojego znajomego.

Komentarz

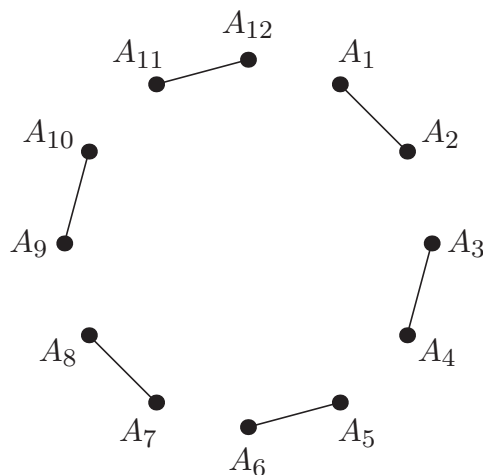
a) Gdyby taka osoba istniała, to znałaby ona wszystkich pozostałych, a więc co najmniej 2 inne osoby. Jest to sprzeczne z warunkami zadania.

b), c) Wybierzmy dowolną osobę A_1 . Zna ona pewną inną osobę A_2 . Wybieramy kolejną osobę A_3 , różną od A_1 i A_2 . Ona także zna pewną osobę A_4 , którą nie jest ani A_1 , ani A_2 — w przeciwnym razie osoba A_4 miałaby co najmniej dwóch znajomych. Dalej, wybieramy kolejną osobę A_5 , różną od A_1, A_2, A_3, A_4 . Ona również zna pewną osobę A_6 , która jest różna od A_1, A_2, A_3, A_4 . Postępowanie to kontynuujemy. Po jego zakończeniu uzyskamy wszystkie osoby z tej grupy połączone w pary znajomych:

$$(A_1, A_2), (A_3, A_4), \dots, (A_{2n-1}, A_{2n}).$$

Stąd wniosek, że w grupie jest parzysta liczba osób.

Wtedy także można je posadzić przy okrągłym stole w taki sposób, każdy siedział obok swojego znajomego (zob. rysunek 6 dla $n = 6$).



rys. 6

12. Liczby a , b , c są naturalne oraz $a + b + c$ jest liczbą parzystą. Wynika z tego, że

T	a) abc jest liczbą parzystą;
T	b) $a - b + c$ jest liczbą parzystą;
N	c) $ab + bc + ca$ jest liczbą parzystą.

Komentarz

a) Przypuśćmy, że liczba abc jest nieparzysta. Wtedy wszystkie czynniki a , b , c są nieparzyste, wobec czego także suma $a + b + c$ jest liczbą nieparzystą. Otrzymaliśmy sprzeczność, która dowodzi, że liczba abc jest parzysta.

b) Zauważmy, że $a - b + c = (a + b + c) - 2b$. Obie liczby $a + b + c$ i $2b$ są parzyste, a więc liczba $a - b + c$ jest także parzysta, jako różnica dwóch liczb parzystych.

c) Przyjmijmy $a = b = 1$, $c = 2$. Wówczas suma $a + b + c = 4$ jest liczbą parzystą, lecz $ab + bc + ca = 5$ jest liczbą nieparzystą.

13. Punkty A , B , C , D leżą na okręgu o promieniu 1, przy czym cięciwy AC i BD przecinają się i są prostopadłe. Wynika z tego, że

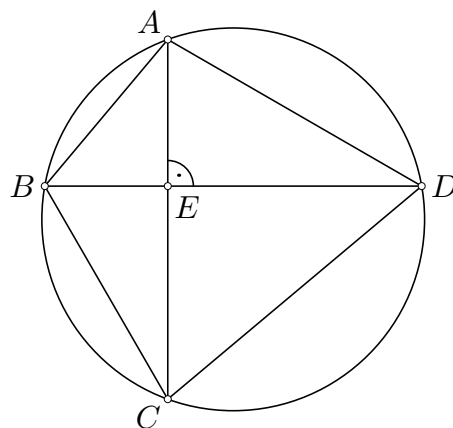
T	a) pole czworokąta $ABCD$ jest nie większe od 2;
T	b) długość pewnego boku czworokąta $ABCD$ nie przekracza $\sqrt{2}$;
N	c) czworokąt $ABCD$ jest kwadratem.

Komentarz

a) Długości odcinków AC i BD nie przekraczają 2, ponieważ są one cięciwami okręgu o średnicy 2. Wobec tego

$$[ABCD] = \frac{1}{2} AC \cdot BD \leq \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2,$$

gdzie $[ABCD]$ oznacza pole czworokąta $ABCD$.



rys. 7

b) Oznaczmy przez E punkt przecięcia przekątnych AC i BD . Ponieważ długość odcinka AC nie przekracza 2, więc długość któregoś z odcinków AE , EC nie przekracza 1. Bez straty ogólności przyjmijmy, że $AE \leq 1$.

Podobnie, długość odcinka BD nie przekracza 2, więc długość któregoś z odcinków BE , ED nie przekracza 1. Bez straty ogólności przyjmijmy, że $BE \leq 1$. Wtedy

$$AB = \sqrt{AE^2 + BE^2} \leq \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

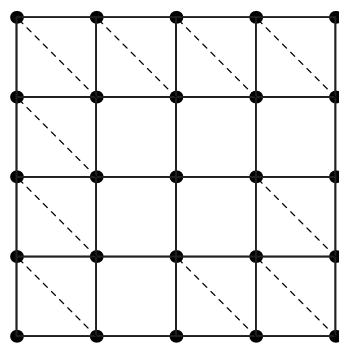
c) Jeśli AC i BD są dwiema prostopadłymi, przecinającymi się cięciwami, z których co najmniej jedna nie jest średnicą okręgu, to czworokąt $ABCD$ spełnia warunki zadania i nie jest kwadratem.

14. Równoległe do boków kwadratu o boku długości 4 poprowadzono proste dzielące ten kwadrat na 16 małych kwadratów o boku długości 1. Następnie w niektórych z uzyskanych kwadratów 1×1 narysowano jedną przekątną w taki sposób, by żadne dwie narysowane przekątne nie miały wspólnych końców. Wynika z tego, że narysowano co najwyżej

- ☐ N a) 7 przekątnych;
☐ N b) 9 przekątnych;
☐ T c) 12 przekątnych.

Komentarz

a), b) Rysunek 8 przedstawia sposób narysowania 10 przekątnych w sposób opisany w treści zadania.



rys. 8

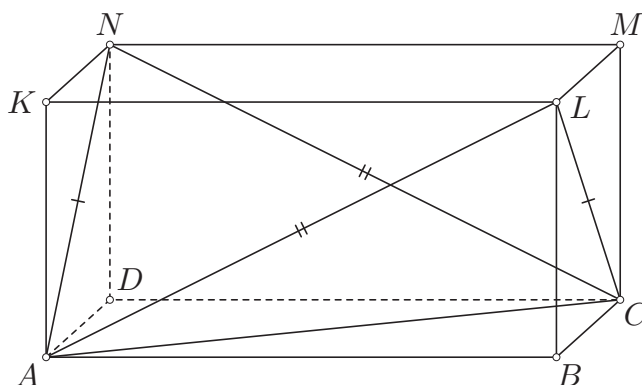
c) Gdyby było możliwe narysowanie 13 przekątnych zgodnie z warunkami zadania, to łączna liczba punktów zajętych przez końce narysowanych przekątnych byłaby równa $13 \cdot 2 = 26$. Tymczasem koniec każdej przekątnej leży w jednym z punktów, zaznaczonych na rysunku 8, których jest tylko 25. Uzyskana sprzeczność dowodzi, że nie można narysować więcej niż 12 przekątnych spełniających warunki zadania.

15. Dany jest prostopadłościan o podstawach $ABCD$, $KLMN$ oraz krawędziach bocznych AK , BL , CM , DN . Wynika z tego, że

- ☐ T a) $\sphericalangle ALC = \sphericalangle ANC$;
☐ T b) $\sphericalangle ALC = \sphericalangle DMB$;
☐ N c) $\sphericalangle ANB = \sphericalangle BKC$.

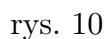
Komentarz

a) Zauważmy, że $CL = AN$ oraz $AL = CN$ (rys. 9). Wobec tego trójkąty ACL i CAN są przystające (cecha bok–bok–bok). Stąd $\sphericalangle ALC = \sphericalangle ANC$.



rys. 9

b) Zauważmy, że $AL = DM$, $AC = DB$ oraz $CL = BM$ (rys. 10). W związku z tym trójkąty ALC i DMB są przystające (cecha bok–bok–bok). Stąd $\sphericalangle ALC = \sphericalangle DMB$.


$$\sphericalangle BAN = \sphericalangle KBC = 90^\circ \quad \text{oraz} \quad BN = CK,$$

rys. 11

XVI Olimpiada Matematyczna Juniorów Statystyki dotyczące części testowej zawodów pierwszego stopnia (2020/2021)

(24 września 2020 r.)

Tabela 1.

Procentowa liczba poprawnych odpowiedzi w poszczególnych podpunktach.

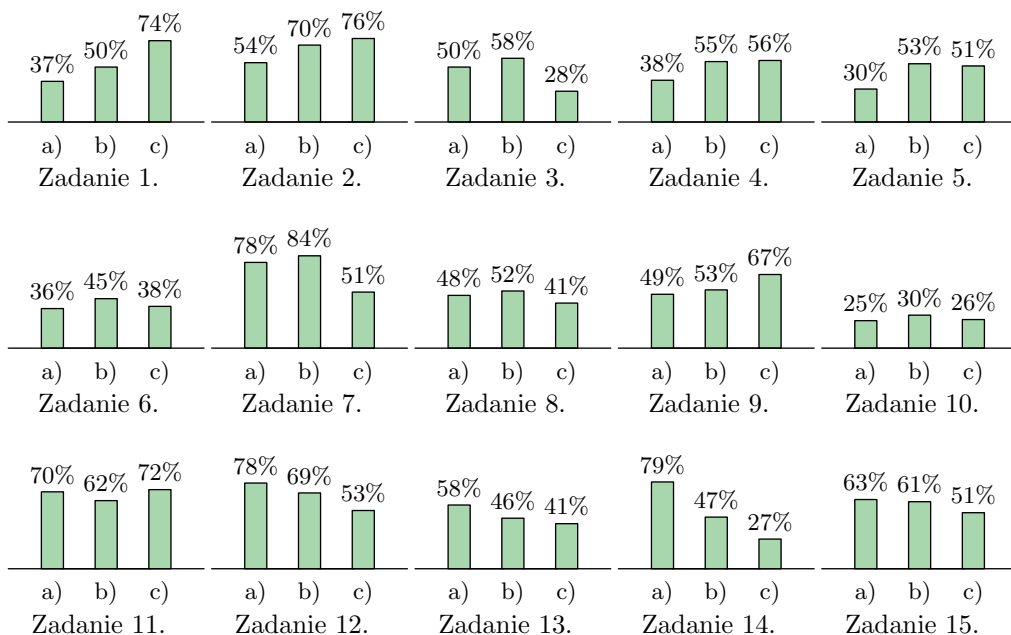
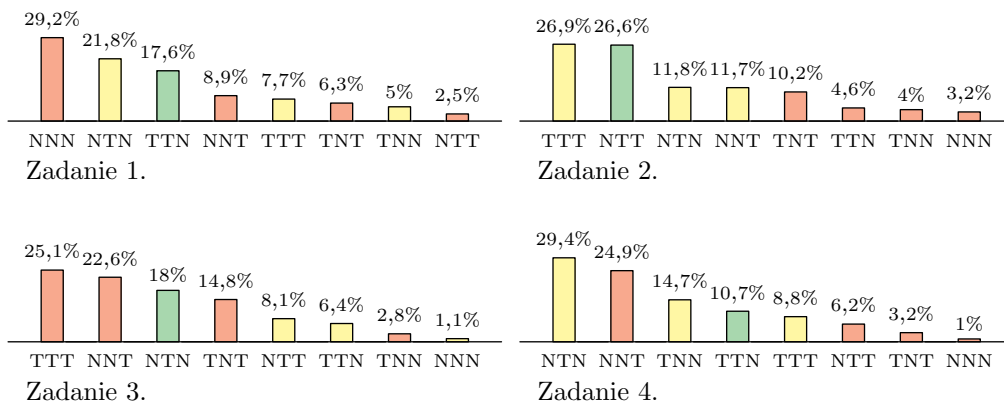
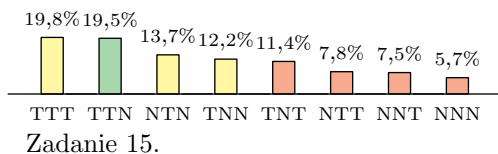
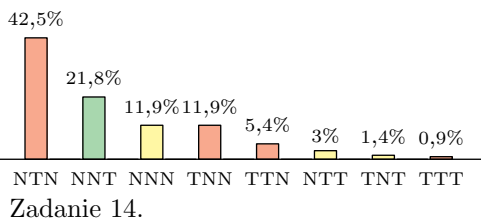
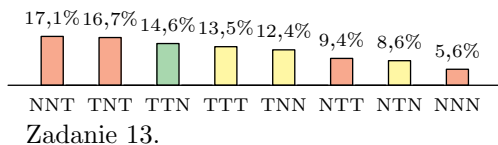
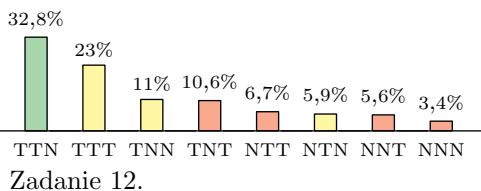
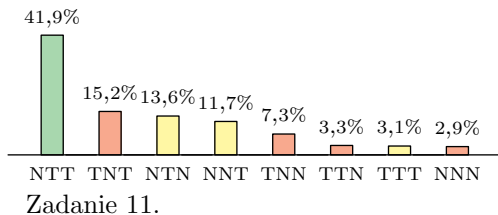
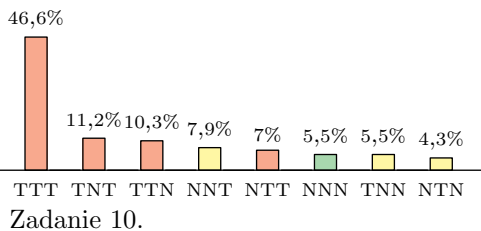
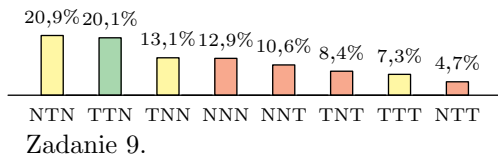
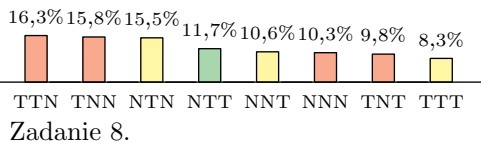
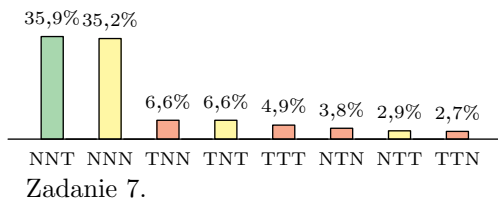
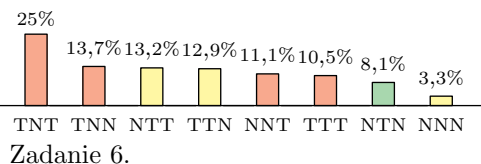
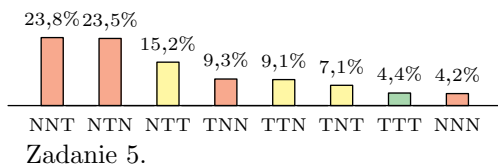


Tabela 2.

Procentowa liczba udzielonych kombinacji odpowiedzi w poszczególnych zadaniach.





Zestaw odpowiedzi za:

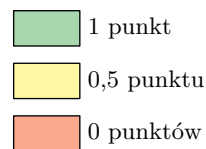


Tabela 3.

Rzeczywista oraz procentowa liczba osób, które uzyskały daną sumę punktów.

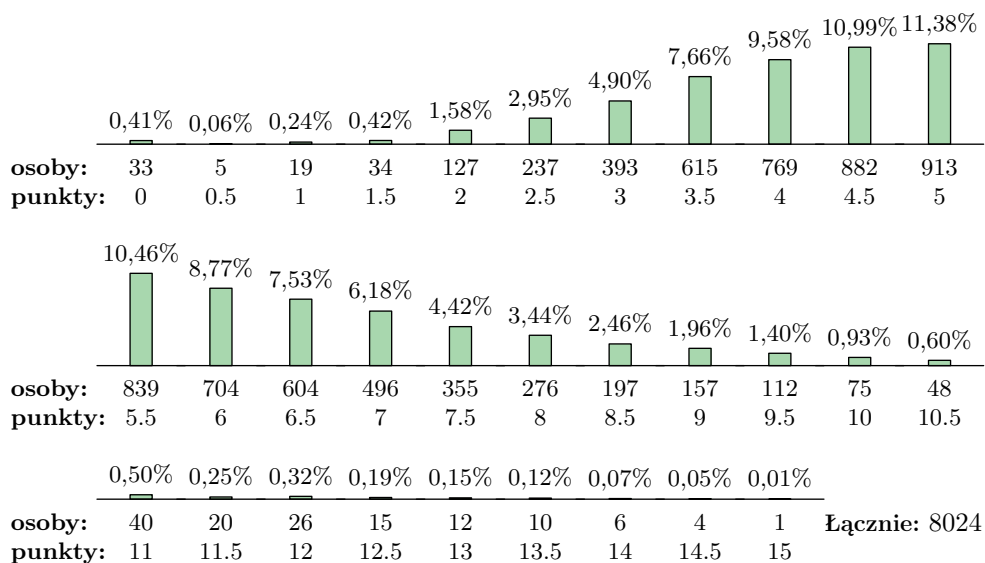


Tabela 4.

Procentowa i rzeczywista liczba osób, które uzyskały daną lub większą sumę punktów.

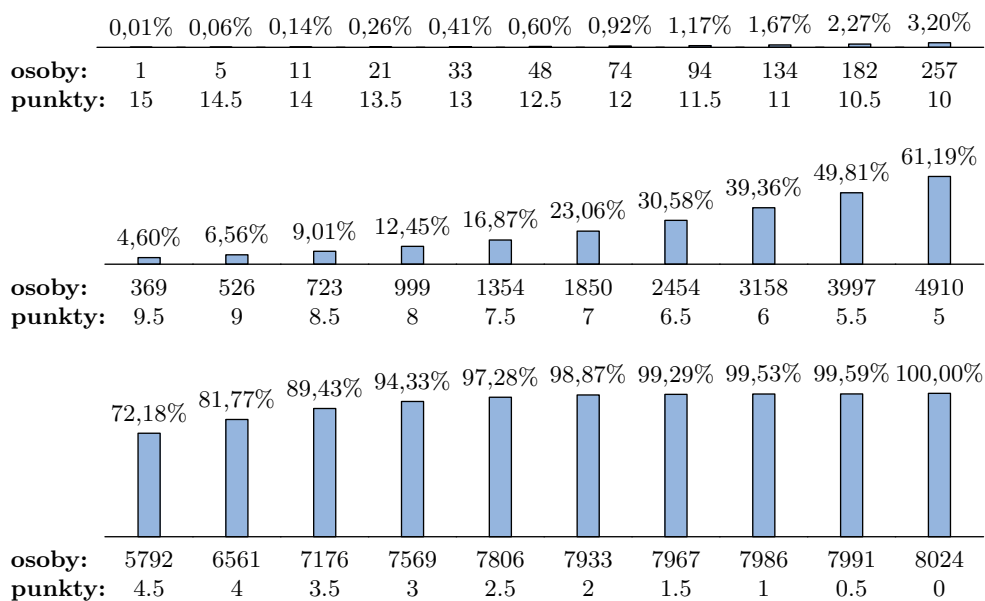


Tabela 5.

Procentowa liczba uzyskanych punktów za poszczególne zadania.

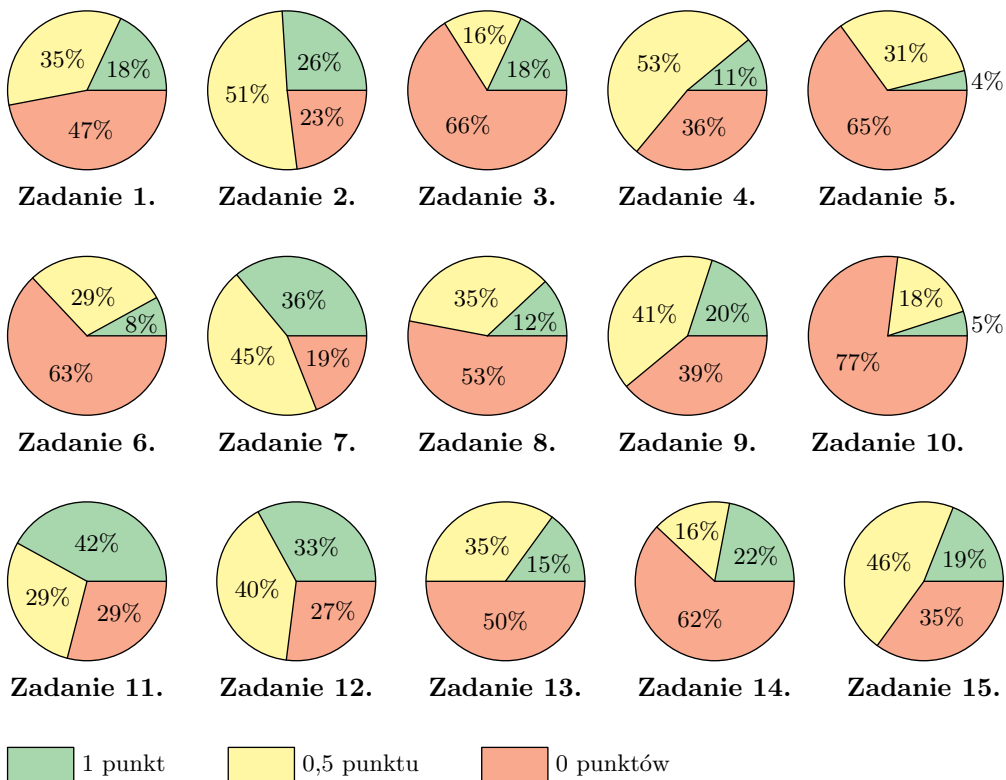


Tabela 6.

Średnia z uzyskanych punktów za poszczególne zadania.

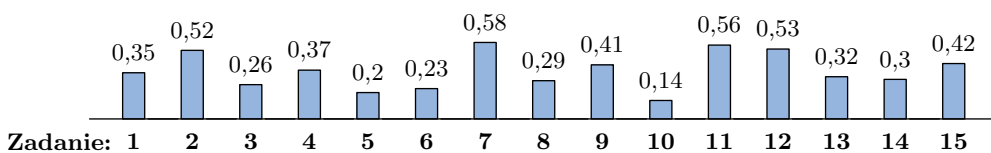


Tabela 7.

Średnia uzyskanych punktów ze wszystkich zadań w podziale na województwa i inne regiony.

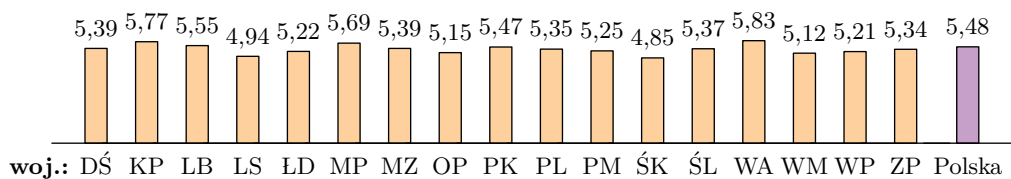
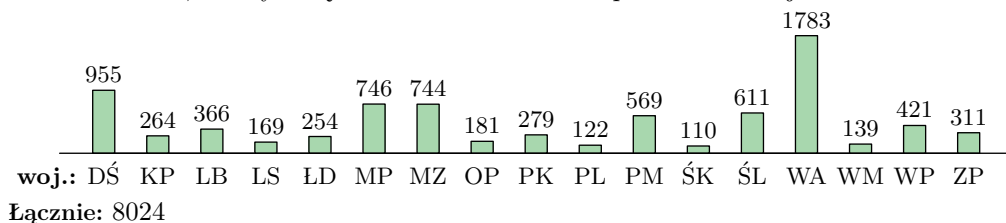
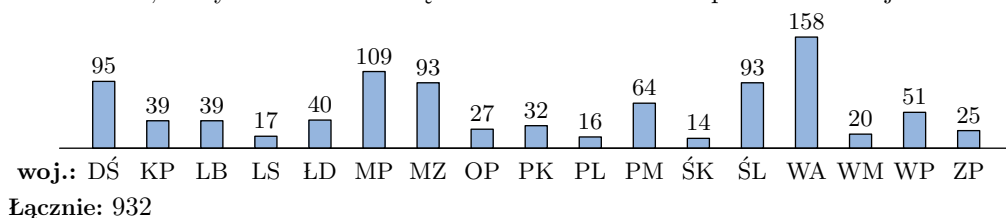


Tabela 8.

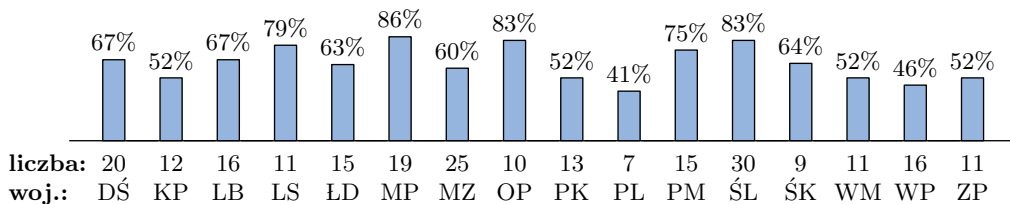
Liczba uczniów, którzy wzięli udział w zawodach w podziale na województwa.

**Tabela 9.**

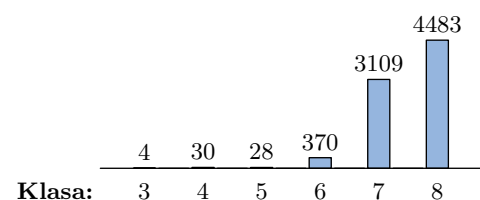
Liczba szkół, których uczniowie wzięli udział w zawodach w podziale na województwa.

**Tabela 10.**

Rzeczywista i procentowa liczba powiatów w danym województwie, z których co najmniej jedna szkoła wzięła udział w zawodach.

**Tabela 11.**

Liczba uczniów biorących udział w teście w podziale na klasy.



Łącznie: 8024

Skróty województw i innych regionów

DŚ — dolnośląskie

LB — lubelskie

ŁD — łódzkie

MZ — mazowieckie bez m.st. Warszawy

PK — podkarpackie

PM — pomorskie

ŚL — śląskie

WM — warmińsko-mazurskie

ZP — zachodniopomorskie

KP — kujawsko-pomorskie

LS — lubuskie

MP — małopolskie

OP — opolskie

PL — podlaskie

ŚK — świętokrzyskie

WA — m.st. Warszawa

WP — wielkopolskie

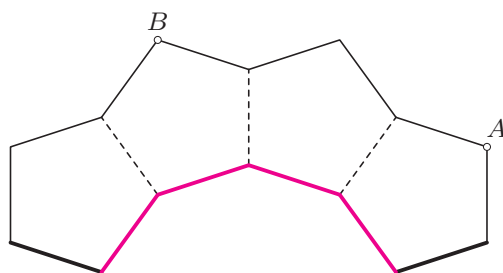
MINISTERSTWO
EDUKACJI
NARODOWEJ



Stowarzyszenie
na rzecz Edukacji
Matematycznej

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej

1. Czy istnieje taka liczba sześciocyfrowa, której każde dwie kolejne cyfry tworzą pewną liczbę dwucyfrową będącą kwadratem liczby całkowitej? Odpowiedź uzasadnij.
2. Dany jest trójkąt ABC , w którym $AC = BC = 5$. Wysokość tego trójkąta poprowadzona z wierzchołka A ma długość 4. Oblicz długość wysokości trójkąta ABC poprowadzonej z wierzchołka C .
3. Liczby a, b, c spełniają warunek $|a - b| = 2|b - c| = 3|c - a|$. Udowodnij, że $a = b = c$.
4. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym $\sphericalangle DAB = \sphericalangle ABC = 120^\circ$ oraz $CD = 3$, $BC = 2$, $AB = 1$. Oblicz długość odcinka AD .
5. Czy istnieją takie cztery dodatnie liczby całkowite, których suma jest równa 2^{1002} , a iloczyn jest równy 5^{1002} ? Odpowiedź uzasadnij.
6. W $(2n + 2)$ -kącie wypukłym narysowano n^2 przekątnych. Udowodnij, że pewna z tych przekątnych rozcina $(2n + 2)$ -kąt na dwa wielokąty, z których każdy ma nieparzystą liczbę wierzchołków.
7. Poniższą figurę, złożoną z czterech pięciokątów foremnych o boku długości 1, sklejono w przestrzeni w następujący sposób. Najpierw zagięto ją wzdłuż odcinków przerywanych, łącząc pogrubione odcinki, a następnie uformowano w taki sposób, aby kolorowe odcinki utworzyły kwadrat. Wyznacz długość powstałego w ten sposób odcinka AB .



Zadanie 7.

Rozwiązania powyższych zadań (wszystkich lub części z nich) należy przekazać szkolnemu koordynatorowi OMJ lub przesłać bezpośrednio, listem poleconym, do Komitetu Okręgowego OMJ właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

12 października 2020 r. (decyduje data stempla pocztowego).

Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym lub pod niewłaściwy adres nie będą rozpatrywane. Adresy Komitetów Okręgowych OMJ, szczegółowe wytyczne dotyczące sposobu redakcji rozwiązań i przysyłania prac, a także regulamin OMJ i inne bieżące informacje znajdują się na stronie internetowej Olimpiady: www.omj.edu.pl.

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej.

XVI Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody stopnia pierwszego — część korespondencyjna

(1 września 2020 r. – 12 października 2020 r.)

Rozwiązania zadań konkursowych

1. Czy istnieje taka liczba sześciocyfrowa, której każde dwie kolejne cyfry tworzą pewną liczbę dwucyfrową będącą kwadratem liczby całkowitej? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie

Wykażemy, że taka liczba nie istnieje.

Przypuśćmy, wbrew tezie, że taką liczbę da się zbudować. Niech a_1 będzie jej cyfrą jedności, a_2 — cyfrą dziesiątek, a_3 — cyfrą setek, itd.

Jedynymi liczbami dwucyfrowymi będącymi kwadratami liczb całkowitych są: 16, 25, 36, 49, 64 oraz 81. W związku z tym każda z cyfr a_2, a_3, a_4, a_5 musi być zarówno cyfrą jedności jak i cyfrą dziesiątek którejś z wymienionych liczb dwucyfrowych. W szczególności, cyfra a_5 musi być więc równa 1, 4 lub 6.

Jeśli $a_5 = 1$, to $a_4 = 6, a_3 = 4, a_2 = 9$ i cyfry a_1 nie da się już dobrać.

Jeśli $a_5 = 4$, to $a_4 = 9$ i cyfry a_3 nie da się już dobrać.

Jeśli $a_5 = 6$, to $a_4 = 4, a_3 = 9$ i cyfry a_2 nie da się już dobrać.

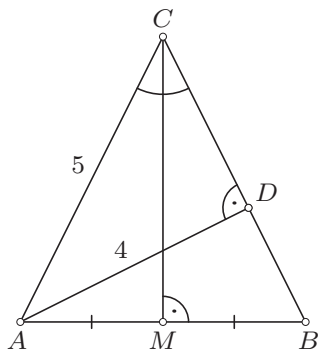
We wszystkich przypadkach otrzymaliśmy sprzeczność, skąd wynika, że nie istnieje liczba o postulowanej własności.

2. Dany jest trójkąt ABC , w którym $AC = BC = 5$. Wysokość tego trójkąta poprowadzona z wierzchołka A ma długość 4. Oblicz długość wysokości trójkąta ABC poprowadzonej z wierzchołka C .

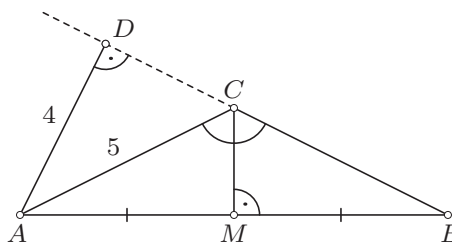
Rozwiązanie

Oznaczmy przez M środek odcinka AB . Ponieważ $AC = BC$, więc punkt M jest spodkiem wysokości trójkąta ABC poprowadzonej z wierzchołka C . Szukamy długości odcinka CM .

Oznaczmy przez D spodek wysokości trójkąta ABC poprowadzonej z wierzchołka A . Wówczas, jeśli $\angle ACB \leq 90^\circ$, to punkt D leży na odcinku BC (rys. 1). Jeśli natomiast $\angle ACB > 90^\circ$, to punkt D leży poza odcinkiem BC (rys. 2). Rachunki przeprowadzimy w obu tych przypadkach.



rys. 1



rys. 2

Przyjmijmy, że $\sphericalangle ACB \leq 90^\circ$ (rys. 1). Obliczamy najpierw, wykorzystując twierdzenie Pitagorasa, długość odcinka CD :

$$CD = \sqrt{AC^2 - AD^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3.$$

Stąd wyznaczamy długość odcinka BD :

$$BD = BC - CD = 5 - 3 = 2.$$

Dalej, znów korzystając z twierdzenia Pitagorasa, obliczamy długość odcinka AB :

$$AB = \sqrt{AD^2 + BD^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

Ostatecznie, korzystając po raz kolejny z twierdzenia Pitagorasa, uzyskujemy

$$CM = \sqrt{AC^2 - AM^2} = \sqrt{5^2 - (\sqrt{5})^2} = \sqrt{25 - 5} = \sqrt{20}.$$

Założmy teraz, że $\sphericalangle ACB > 90^\circ$ (rys. 2). Rachunki przeprowadzimy w podobny sposób. Najpierw, tak samo jak w poprzednim przypadku, wyznaczamy długość odcinka CD :

$$CD = \sqrt{AC^2 - AD^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3.$$

Stąd obliczamy długość odcinka BD :

$$BD = BC + CD = 5 + 3 = 8.$$

Dalej, korzystając z twierdzenia Pitagorasa, obliczamy długość odcinka AB :

$$AB = \sqrt{AD^2 + BD^2} = \sqrt{4^2 + 8^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{2}.$$

Ostatecznie, korzystając po raz kolejny z twierdzenia Pitagorasa, uzyskujemy

$$CM = \sqrt{AC^2 - AM^2} = \sqrt{5^2 - (4\sqrt{2})^2} = \sqrt{5}.$$

Odp.: Szukana długość wysokości równa się $\sqrt{20}$ lub $\sqrt{5}$.

3. Liczby a, b, c spełniają warunek $|a - b| = 2|b - c| = 3|c - a|$. Udowodnij, że $a = b = c$.

Rozwiązanie

W rozwiązaniu wykorzystamy następującą nierówność $|x| + |y| \geq |x + y|$, która jest spełniona dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y . Jej dowód przeprowadzimy w uwadze poniżej.

Oznaczmy: $r = |a - b| = 2|b - c| = 3|c - a|$. Wówczas $r \geq 0$ oraz

$$|a - b| = r, \quad |b - c| = \frac{1}{2}r, \quad |c - a| = \frac{1}{3}r.$$

Stąd, wykorzystując wspomnianą nierówność, uzyskujemy

$$\frac{1}{2}r + \frac{1}{3}r = |b - c| + |c - a| \geq |(b - c) + (c - a)| = |b - a| = |a - b| = r,$$

czyli $\frac{5}{6}r \geq r$. Nierówność ta nie może być jednak spełniona, jeśli $r > 0$. Wobec tego $r = 0$ i w konsekwencji $a - b = 0$, $b - c = 0$, $c - a = 0$. Stąd $a = b = c$, co należało wykazać.

Uwaga:

Dowód nierówności $|x| + |y| \geq |x + y|$ można przeprowadzić w następujący sposób. Załóżmy najpierw, że $x + y \geq 0$. Ponieważ $|x| \geq x$ oraz $|y| \geq y$, więc po dodaniu stronami tych nierówności uzyskujemy

$$|x| + |y| \geq x + y = |x + y|.$$

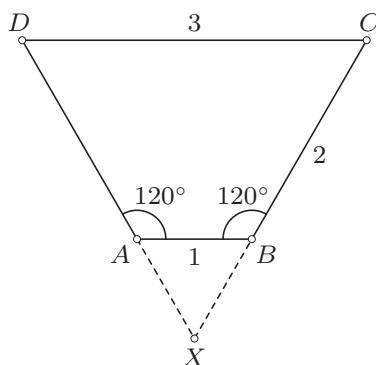
Jeśli z kolei $x + y < 0$, to dodając stronami nierówności $|x| \geq -x$ oraz $|y| \geq -y$, otrzymujemy

$$|x| + |y| \geq -x - y = -(x + y) = |x + y|.$$

W obu przypadkach dostajemy żadaną nierówność.

4. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym $\sphericalangle DAB = \sphericalangle ABC = 120^\circ$ oraz $CD = 3$, $BC = 2$, $AB = 1$. Oblicz długość odcinka AD .

Rozwiązanie



rys. 3

Oznaczmy przez X punkt przecięcia prostych AD i BC (rys. 3). Wówczas

$$\sphericalangle XAB = 180^\circ - \sphericalangle DAB = 60^\circ \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle XBA = 180^\circ - \sphericalangle CBA = 60^\circ,$$

skąd wynika, że trójkąt ABX jest równoboczny. Zatem $BX = AB = 1$ i w konsekwencji $XC = 1 + 2 = 3 = CD$. Ponadto, z faktu, że trójkąt ABX jest równoboczny wynika także, że $\sphericalangle DXC = 60^\circ$. Wobec tego trójkąt XCD również jest równoboczny. Stąd $XD = CD = 3$. Ostatecznie $AD = XD - XA = 3 - 1 = 2$.

5. Czy istnieją takie cztery dodatnie liczby całkowite, których suma jest równa 2^{1002} , a iloczyn jest równy 5^{1002} ? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie

Sposób I

Przypuśćmy, że istnieją dodatnie liczby całkowite a, b, c, d , dla których $a + b + c + d = 2^{1002}$ oraz $abcd = 5^{1002}$. Z drugiej równości wynika, że każda z liczb a, b, c, d jest postaci 5^k , gdzie k jest nieujemną liczbą całkowitą.

Przeanalizujemy reszty z dzielenia przez 5 obu stron równości $a + b + c + d = 2^{1002}$.

Zauważmy, że $2^{1002} = 4^{501} \equiv (-1)^{501} = -1 \pmod{5}$. Stąd wniosek, że liczba 2^{1002} daje resztę 4 z dzielenia przez 5. Z kolei każda liczba postaci 5^k daje resztę 0 (gdy $k \geq 1$) lub 1 (gdy $k = 0$) z dzielenia przez 5. Zatem liczba $a + b + c + d$ daje z dzielenia przez 5 resztę 4 jedynie wtedy, gdy $a = b = c = d = 1$. Wtedy jednak $a + b + c + d = 4 \neq 2^{1002}$. Otrzymaliśmy sprzeczność, z której wynika, że nie istnieją liczby o postulowanej w treści zadania własności.

Sposób II

Podobnie jak w sposobie I, przypuśćmy, że istnieją dodatnie liczby całkowite a, b, c, d , dla których $a + b + c + d = 2^{1002}$ oraz $abcd = 5^{1002}$. Zauważmy, że każda z liczb a, b, c, d jest postaci 5^k , gdzie k jest nieujemną liczbą całkowitą.

Tym razem przeanalizujemy reszty z dzielenia obu stron równości $a + b + c + d = 2^{1002}$ przez 8.

Oczywiście liczba 2^{1002} jest podzielna przez 8.

Dalej, zauważmy, że $5^2 = 25 \equiv 1 \pmod{8}$. Wobec tego $5^{2j} \equiv 1 \pmod{8}$ oraz $5^{2j+1} \equiv 5 \pmod{8}$ dla dowolnej liczby całkowitej nieujemnej j . A zatem jeśli wykładnik k jest liczbą parzystą, to liczba 5^k daje resztę 1 przy dzieleniu przez 8, natomiast jeśli wykładnik k jest liczbą nieparzystą, to liczba 5^k daje resztę 5 przy dzieleniu przez 8.

Ponieważ każda z liczb a, b, c, d jest potęgą liczby 5 o wykładniku całkowitym nieujemnym, więc możliwe są następujące przypadki:

- $a+b+c+d \equiv 1+1+1+1 = 4 \pmod{8}$;
- $a+b+c+d \equiv 1+1+1+5 \equiv 0 \pmod{8}$;
- $a+b+c+d \equiv 1+1+5+5 \equiv 4 \pmod{8}$;
- $a+b+c+d \equiv 1+5+5+5 \equiv 0 \pmod{8}$;
- $a+b+c+d \equiv 5+5+5+5 \equiv 4 \pmod{8}$.

Liczba $a+b+c+d$ jest zatem podzielna przez 8 jedynie w przypadku, gdy dokładnie jedna lub dokładnie trzy spośród liczb a, b, c, d są potęgami liczby 5 o wykładniku nieparzystym. Jednak w obu tych przypadkach iloczyn tych liczb jest potęgą liczby 5 o wykładniku nieparzystym (suma jednego wykładnika nieparzystego i trzech parzystych jest liczbą nieparzystą, a także suma trzech wykładników nieparzystych i jednego parzystego jest liczbą nieparzystą). Zatem iloczyn ten nie może być równy 5^{1002} . Otrzymaliśmy sprzeczność, która dowodzi, że nie istnieją liczby o postulowanej własności.

Uwaga

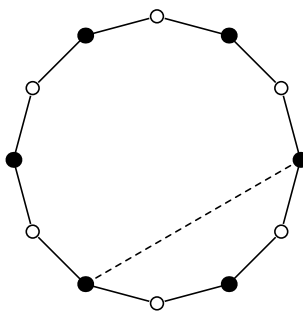
W rozwiązywaniu wykorzystywaliśmy własności *kongruencji*. O tym, czym są kongruencje i jak je stosować można przeczytać w opracowaniu *Matematyczne seminarium olimpijskie, cz. 1* dostępnym na stronie OMJ pod adresem

www.omj.edu.pl/broszury-seminaria

6. W $(2n+2)$ -kącie wypukłym narysowano n^2 przekątnych. Udowodnij, że pewna z tych przekątnych rozcina $(2n+2)$ -ką na dwa wielokąty, z których każdy ma nieparzystą liczbę wierzchołków.

Rozwiązanie

Pokolorujmy kolejne wierzchołki wielokąta na przemian kolorem białym i czarnym. Zauważmy, że przekątna wielokąta dzieli go na dwa wielokąty o nieparzystych liczbach wierzchołków wtedy i tylko wtedy, gdy ma ona końce tych samych kolorów (zob. rys. 4 dla $n=5$).

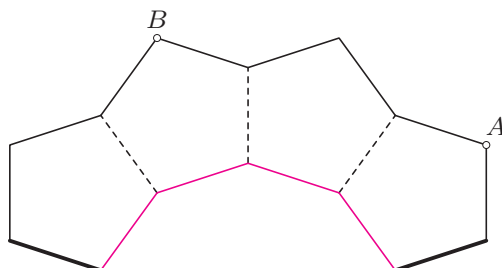


rys. 4

Obliczymy liczbę przekątnych (narysowanych lub nie), których końce są *różnych* kolorów. Wybierzmy najpierw wierzchołek biały. Możemy to zrobić na $n+1$ sposobów. Aby narysowany odcinek był przekątną, musi łączyć dwa niesąsiednie wierzchołki. Wierzchołek czarny nie sąsiadujący z ustalonym wcześniej wierzchołkiem białym możemy wybrać na $n-1$ sposobów. Wobec tego, łącznie jest dokładnie $(n+1)(n-1) = n^2 - 1$ przekątnych o końcach różnych kolorów.

Tymczasem przekątnych narysowano n^2 . Wobec tego co najmniej jedna z narysowanych przekątnych ma końce tego samego koloru, a więc dzieli dany wielokąt na dwa wielokąty o nieparzystych liczbach wierzchołków.

7. Poniższą figurę, złożoną z czterech pięciokątów foremnych o boku długości 1, sklejono w przestrzeni w następujący sposób: najpierw zagięto ją wzdłuż odcinków przerywanych, łącząc pogrubione odcinki, a następnie uformowano w taki sposób, aby kolorowe odcinki utworzyły kwadrat. Wyznacz długość powstałego w ten sposób odcinka AB .



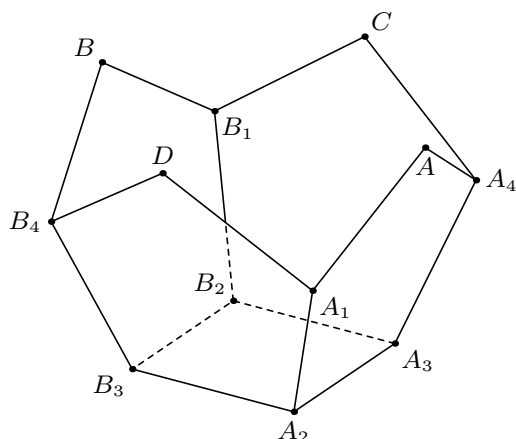
rys. 5

Rozwiązanie

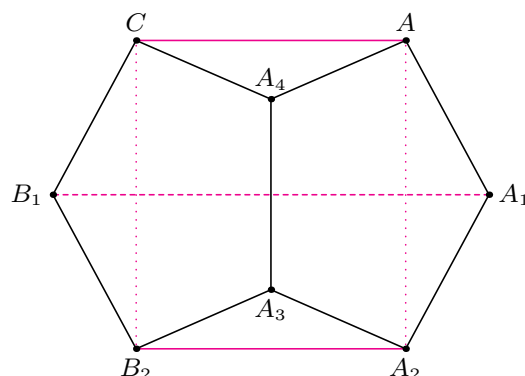
Sposób I

Przyjmijmy oznaczenia wierzchołków jak na rysunku 6.

Zauważmy, że $A_2B_2 = \sqrt{2}$, gdyż jest to przekątna kwadratu o boku 1. W symetrii względem płaszczyzny symetralnej odcinka A_3A_4 punkt A przechodzi na A_2 , a punkt C przechodzi na B_2 , skąd uzyskujemy $AC = A_2B_2$ (rys. 7). Wobec tego AB jest przekątną kwadratu o boku $\sqrt{2}$, skąd $AB = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$.



rys. 6



rys. 7

Sposób II

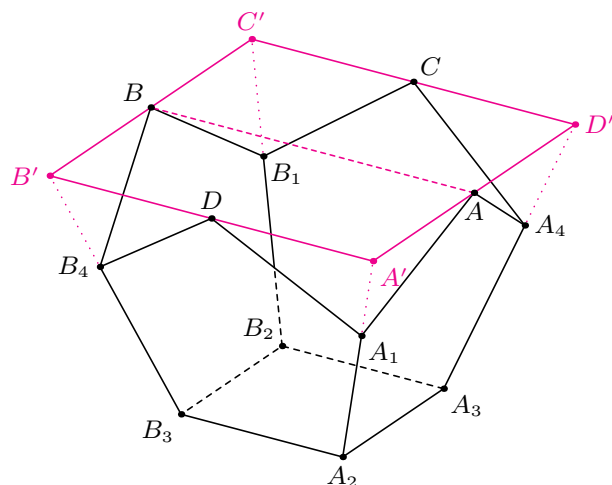
Niech A', B', C', D' będą punktami przecięcia płaszczyzny $ABCD$ odpowiednio z prostymi $A_1A_2, B_4B_3, B_1B_2, A_4A_3$ (rys. 8). Wówczas wierzchołki A, B, C, D są środkami boków kwadratu $A'B'C'D'$ skąd $AB = A'B'$.

Rozważmy konfigurację zawartą w płaszczyźnie pięciokąta $DA_1A_2B_3B_4$. Zauważmy, że

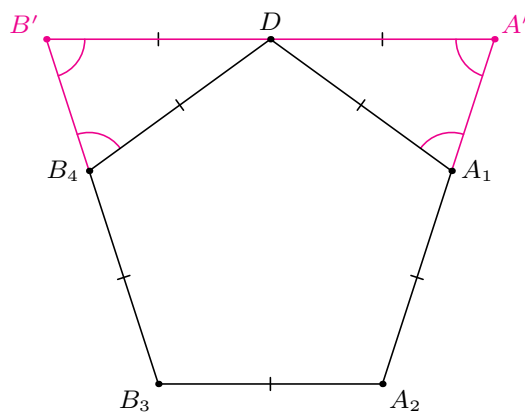
$$\angle DB'B_4 = 180^\circ - \angle A_2B_3B' = 180^\circ - \angle B_3B_4D = \angle DB_4B',$$

skąd wniosek, że trójkąt $B'DB_4$ jest równoramienny i $DB' = DB_4 = 1$. Analogicznie usadynamy, że $DA' = DA_1 = 1$. W konsekwencji mamy więc

$$A'B' = A'D + B'D = 1 + 1 = 2, \quad \text{skąd} \quad AB = 2.$$



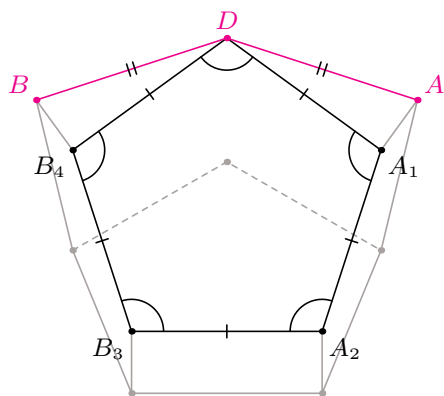
rys. 8



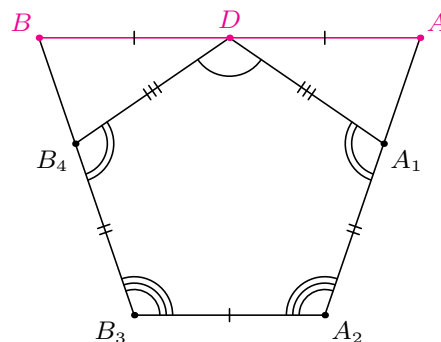
rys. 9

Uwaga

Warto zauważyć, że druga część rozumowania została przeprowadzona właśnie w płaszczyźnie jednego z danych pięciokątów po tym, jak odcinek AB został rzutowany *równolegle* na tę płaszczyznę. W szczególności, rzut prostopadły całej figury na płaszczyznę takiego pięciokąta (rys. 10) oraz „widok z boku” (czyli rzut prostopadły na płaszczyznę pionową, rys. 11) wyglądają inaczej niż konfiguracja z rysunku 9.



rys. 10



rys. 11

XVI Olimpiada Matematyczna Juniorów

Statystyki dotyczące zawodów części korespondencyjnej (2020/21)

(1 września – 12 października 2020 r.)

Tabela 1. Liczba uczniów, którzy wzięli udział w zawodach w podziale na województwa.

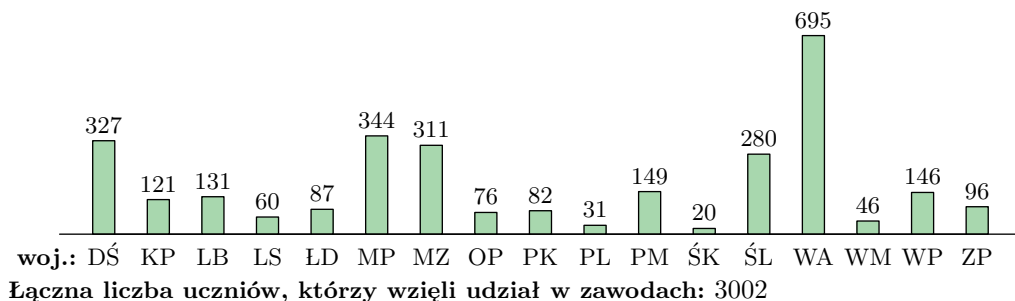
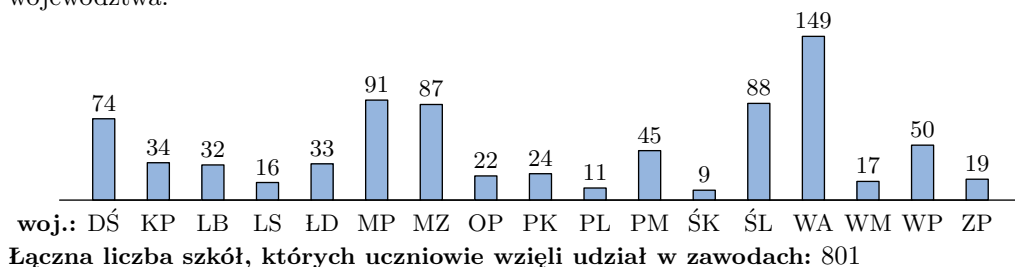


Tabela 2. Liczba szkół, których uczniowie wzięli udział w zawodach w podziale na województwa.



Skróty województw

DŚ — dolnośląskie
 LB — lubelskie
 ŁD — łódzkie
 MZ — mazowieckie bez m.st. Warszawy
 PK — podkarpackie
 PM — pomorskie
 ŚŁ — śląskie
 WM — warmińsko-mazurskie
 ZP — zachodniopomorskie

KP — kujawsko-pomorskie
 LS — lubuskie
 MP — małopolskie
 OP — opolskie
 PL — podlaskie
 ŚK — świętokrzyskie
 WA — m.st. Warszawa
 WP — wielkopolskie

Tabela 3. Procentowa liczba osób, które uzyskały daną liczbę punktów za poszczególne zadania.

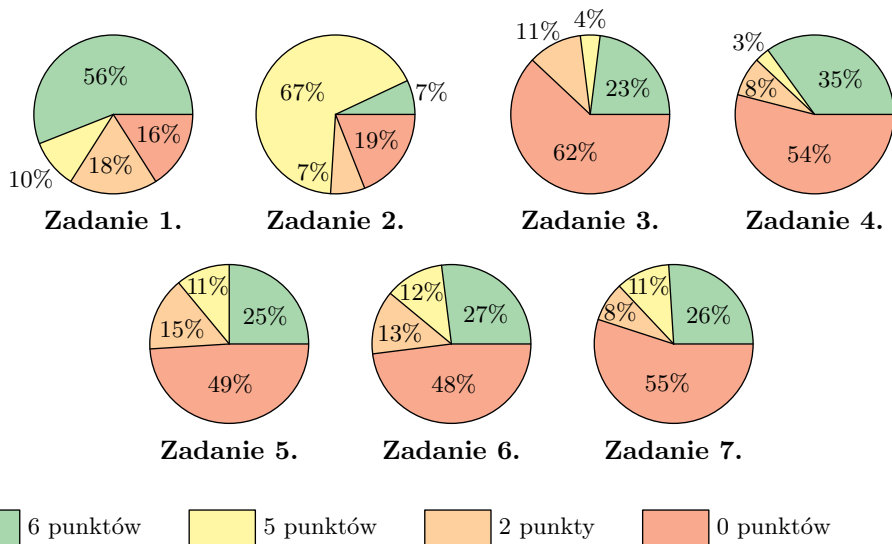


Tabela 4. Średnia uzyskanych punktów za poszczególne zadania.

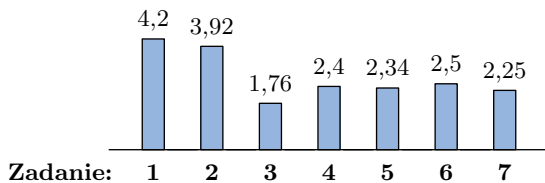


Tabela 5. Liczba nadesłanych prac dotyczących poszczególnych zadań.

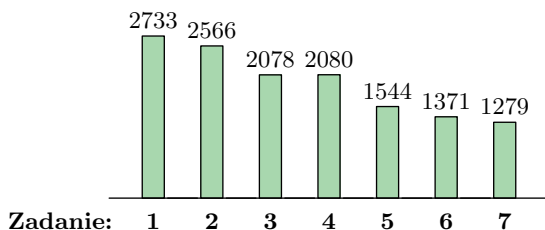


Tabela 6. Średnia uzyskanej sumy punktów w podziale na województwa.

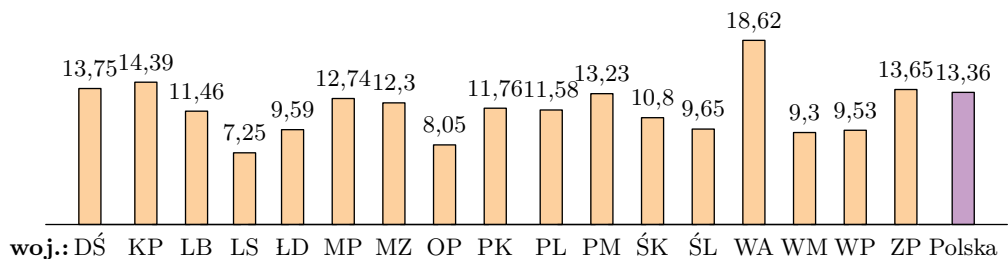


Tabela 7. Procentowa i rzeczywista liczba osób, które uzyskały daną sumę punktów.

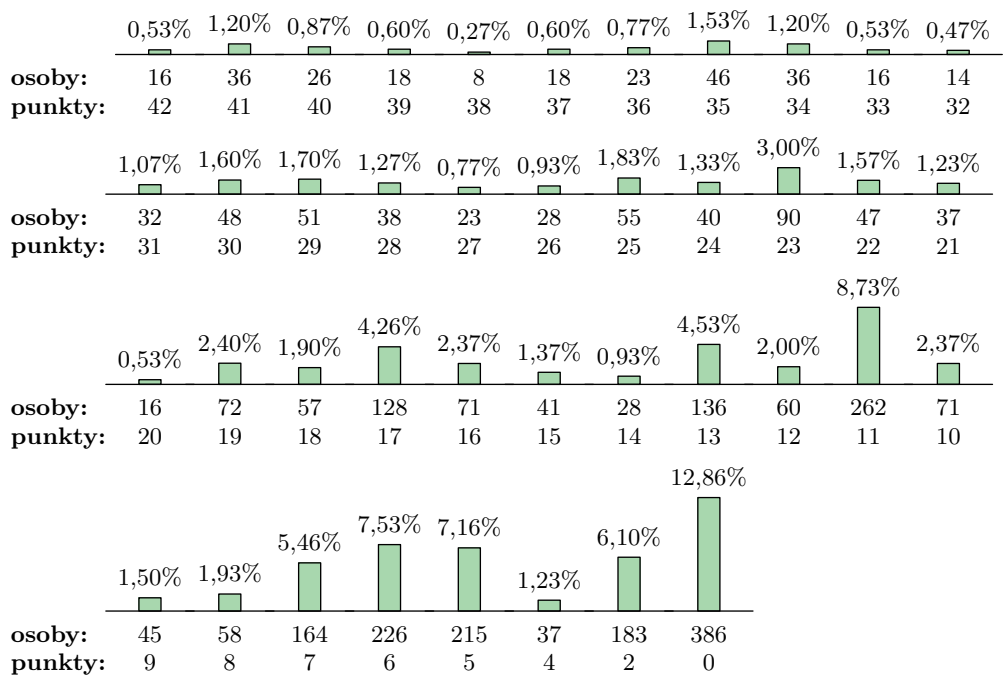
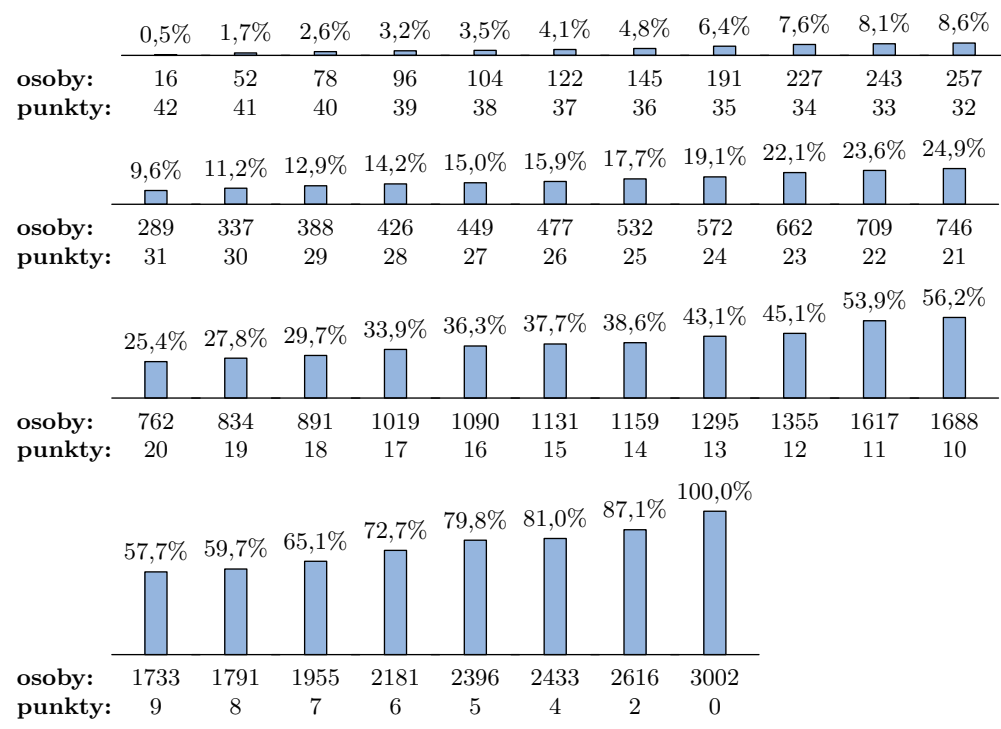


Tabela 8. Procentowa i rzeczywista liczba osób, które uzyskały daną lub większą sumę punktów.



MINISTERSTWO
EDUKACJI
NARODOWEJ

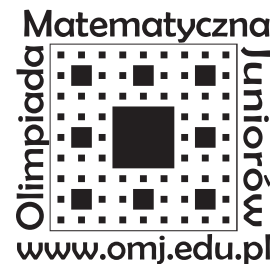


Stowarzyszenie
na rzecz Edukacji
Matematycznej

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej

XVI Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody drugiego stopnia
(23 stycznia 2021 r.)



1. Liczby a , b spełniają warunek $2a + a^2 = 2b + b^2$. Wykaż, że jeżeli liczba a jest całkowita, to liczba b także jest całkowita.

2. Dany jest kwadrat $ABCD$. Punkt E leży na przekątnej AC , przy czym $AE > EC$. Na boku AB wybrano punkt F , różny od B , dla którego $EF = DE$. Udowodnij, że $\angle DEF = 90^\circ$.

3. Dane są takie dodatnie liczby całkowite a , b , dla których liczba $5a + 3b$ jest podzielna przez liczbę $a + b$. Wykaż, że $a = b$.

4. Punkty K i L znajdują się odpowiednio na bokach BC i CD równoległoboku $ABCD$, przy czym

$$AB + BK = AD + DL.$$

Udowodnij, że dwusieczna kąta BAD jest prostopadła do prostej KL .

5. Tomek zaprosił na zdalne przyjęcie urodzinowe 11 swoich znajomych, którzy kolejno będą dołączać do spotkania. Tomek dobrał gości w taki sposób, aby niezależnie od kolejności w jakiej będą dołączać, zawsze nowo przybyła osoba znała co najmniej połowę już obecnych osób, wliczając Tomka. Wykaż, że wśród zaproszonych gości istnieje taki, który zna wszystkich pozostałych 10 znajomych Tomka.

Uwaga:

Przyjmujemy, że jeśli osoba A zna osobę B , to również B zna A .

XVI Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody drugiego stopnia (23 stycznia 2021 r.)

Rozwiązania zadań konkursowych

1. Liczby a, b spełniają warunek $2a + a^2 = 2b + b^2$. Wykaż, że jeżeli liczba a jest całkowita, to liczba b także jest całkowita.

Rozwiązanie

Sposób I

Dodając 1 do obu stron równości $2a + a^2 = 2b + b^2$, uzyskujemy $1 + 2a + a^2 = 1 + 2b + b^2$. Stąd, po wykorzystaniu wzoru $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$, dostajemy $(1 + a)^2 = (1 + b)^2$. Wobec tego $1 + a = 1 + b$ lub $1 + a = -(1 + b)$, czyli $b = a$ lub $b = -2 - a$. W obu przypadkach b jest więc liczbą całkowitą.

Sposób II

Tym razem w rachunkach użyjemy wzoru $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$. Przekształcając bowiem równoważnie zależność $2a + a^2 = 2b + b^2$, uzyskujemy kolejno

$$2a - 2b + a^2 - b^2 = 0,$$

$$2(a - b) + (a + b)(a - b) = 0,$$

$$(2 + a + b)(a - b) = 0.$$

Stąd wniosek, że $2 + a + b = 0$ lub $a - b = 0$, czyli $b = -2 - a$ lub $b = a$. W obu przypadkach b jest liczbą całkowitą.

2. Dany jest kwadrat $ABCD$. Punkt E leży na przekątnej AC , przy czym $AE > EC$. Na boku AB wybrano punkt F , różny od B , dla którego $EF = DE$. Udowodnij, że $\angle DEF = 90^\circ$.

Rozwiązanie

Sposób I

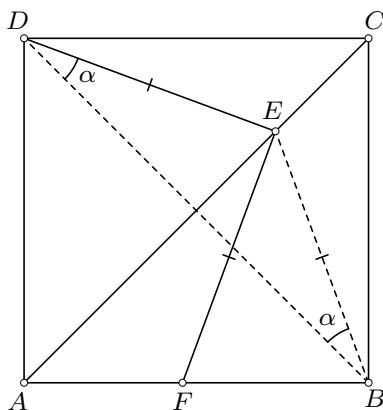
Ponieważ $BC = DC$ oraz $\angle BCE = 45^\circ = \angle DCE$, więc trójkąty BCE oraz DCE są przystające (cecha bok-kąt-bok). Stąd $BE = DE$ (rys. 1).

Oznaczmy zatem $\alpha = \angle EBD = \angle EDB$. Wtedy $\angle BED = 180^\circ - 2\alpha$.

Ponadto $BE = DE = EF$, więc $\angle FEB = \angle EBF = 45^\circ + \alpha$. W związku z tym

$$\angle FEB = 180^\circ - 2(45^\circ + \alpha) = 90^\circ - 2\alpha.$$

Wobec tego $\angle DEF = \angle DEB - \angle FEB = (180^\circ - 2\alpha) - (90^\circ - 2\alpha) = 90^\circ$, co kończy dowód.



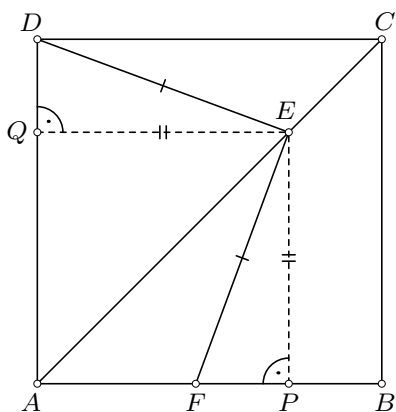
rys. 1

Sposób II

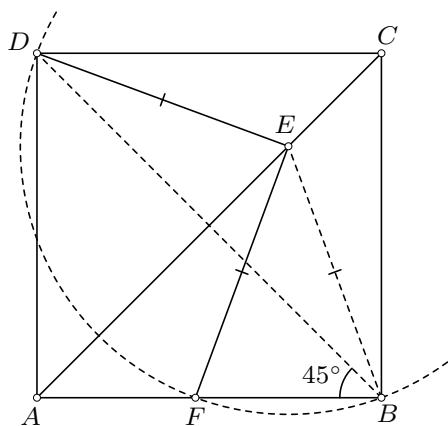
Oznaczmy przez P i Q rzuty prostokątne punktu E odpowiednio na boki AB i AD (rys. 2). Ponieważ punkt E leży na dwusiecznej kąta BAD , więc $EP = EQ$. Ponadto $EF = DE$. W związku z tym, wykorzystując twierdzenie Pitagorasa, otrzymujemy

$$PF = \sqrt{EF^2 - EP^2} = \sqrt{DE^2 - EQ^2} = QD.$$

Z zależności tych wynika, że trójkąty EPF i EQD są przystające (cecha bok–bok–bok). Wobec tego $\sphericalangle FEP = \sphericalangle DEQ$. Stąd, po dodaniu do obu stron miary kąta QEF , otrzymujemy $\sphericalangle DEF = \sphericalangle QEP$. Ale $\sphericalangle QEP = 90^\circ$, więc również $\sphericalangle DEF = 90^\circ$. To kończy dowód.



rys. 2



rys. 3

Sposób III

Podobnie jak w sposobie I uzasadniamy najpierw, że $BE = DE$ (rys. 3). Rozpatrzmy następnie okrąg o środku E i promieniu BE . Ponieważ $BE = DE = FE$, więc okrąg ten przechodzi przez punkty B , D i F . W związku z tym kąt DEF jest kątem środkowym opartym na łuku DF . Ma więc on dwa razy większą miarę od każdego kąta wpisanego opartego na tym łuku, w szczególności kąta DBF . Zatem $\sphericalangle DEF = 2\sphericalangle DBF = 2 \cdot 45^\circ = 90^\circ$.

3. Dane są takie dodatnie liczby całkowite a , b , dla których liczba $5a + 3b$ jest podzielna przez liczbę $a + b$. Wykaż, że $a = b$.

Rozwiązanie

Sposób I

Z warunków zadania wynika, że istnieje taka dodatnia liczba całkowita k , dla której $5a + 3b = k(a + b)$. Przekształcając tę zależność, uzyskujemy kolejno

$$5a - ka = kb - 3b,$$

$$(5 - k)a = (k - 3)b.$$

Liczby a , b są dodatnie. Zatem jeśli $k \geq 5$, to lewa strona ostatniej równości jest ujemna lub równa 0, podczas gdy jej prawa strona jest dodatnia. Podobnie, jeśli $k \leq 3$, to lewa tej samej równości jest dodatnia, podczas gdy jej prawa strona jest ujemna lub równa 0. Wobec tego k musi być równe 4. Podstawiając zatem $k = 4$ do uzyskanej wyżej równości, dostajemy $a = b$, co kończy dowód.

Sposób II

Podobnie jak w sposobie I rozpoczynamy od obserwacji, że istnieje taka dodatnia liczba całkowita k , dla której $5a + 3b = k(a + b)$. Wobec tego

$$k = \frac{5a + 3b}{a + b} = \frac{4(a + b) + a - b}{a + b} = 4 + \frac{a - b}{a + b}.$$

Liczby k i 4 są całkowite, więc z powyższej równości wynika, że liczba $a - b$, a więc także i liczba $b - a$, jest podzielna przez $a + b$.

Jeśli $a > b$, to liczba $a - b$ jest dodatnia i mniejsza od $a + b$, a wtedy $a + b$ nie może być dzielnikiem liczby $a - b$. Podobnie, jeśli $a < b$, to liczba $b - a$ jest dodatnia i mniejsza od $a + b$, a wtedy $a + b$ nie może być dzielnikiem liczby $b - a$.

W obu przypadkach uzyskujemy sprzeczność, z której wynika, że $a = b$. To kończy rozwiązanie zadania.

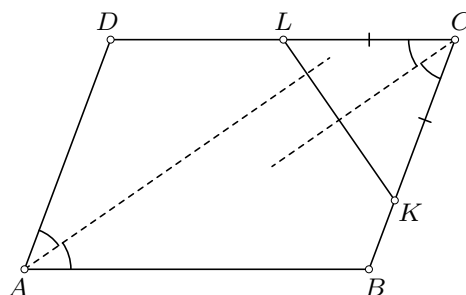
4. Punkty K i L znajdują się odpowiednio na bokach BC i CD równoległoboku $ABCD$, przy czym

$$AB + BK = AD + DL.$$

Udowodnij, że dwusieczna kąta BAD jest prostopadła do prostej KL .

Rozwiązanie

Ponieważ $\sphericalangle BAD = \sphericalangle DCB$, więc dwusieczna kąta BAD tworzy z prostą AD taki sam kąt, jak dwusieczna kąta DCB z prostą CB . W związku z tym, skoro proste AD i CB są równoległe, to także dwusieczne kątów BAD i DCB są równoległe. Wystarczy zatem wykazać, że dwusieczna kąta DCB jest prostopadła do prostej KL .



rys. 4

Przekształćmy daną w treści zadania zależność $AB + BK = AD + DL$ równoważnie w następujący sposób:

$$\begin{aligned} AB - DL &= AD - BK, \\ CD - DL &= BC - BK, \\ CL &= CK. \end{aligned}$$

Trójkąt KLC jest więc równoramienny, skąd wniosek, że dwusieczna kąta przy jego wierzchołku C jest prostopadła do podstawy KL . To kończy rozwiązanie zadania.

5. Tomek zaprosił na zdalne przyjęcie urodzinowe 11 swoich znajomych, którzy kolejno będą dołączać do spotkania. Tomek dobrał gości w taki sposób, aby niezależnie od kolejności w jakiej będą dołączać, zawsze nowo przybyła osoba знаła co najmniej połowę już obecnych osób, wliczając Tomka. Wykaż, że wśród zaproszonych gości istnieje taki, który zna wszystkich pozostałych 10 znajomych Tomka.

Uwaga:

Przyjmujemy, że jeśli osoba A zna osobę B , to również B zna A .

Rozwiązanie

Wykażemy najpierw, że każdy znajomy Tomka zna co najmniej 9 spośród pozostałych 10 gości.

Przypuśćmy, że tak nie jest. Wtedy pewna osoba, nazwijmy ją A , nie zna pewnych dwóch innych osób, powiedzmy B i C . Gdyby więc do spotkania zdalnego dołączyły najpierw osoby B i C , to spośród trzech osób obecnych już na spotkaniu (B , C i Tomek) A znałaby tylko Tomka, a więc mniej niż połowę wszystkich obecnych. To jednak jest sprzeczne z warunkami zadania.

Stąd wniosek, że każdy znajomy Tomka zna co najmniej 9 innych gości. Gdyby okazało się, że każdy zna dokładnie 9 innych osób, to łączna liczba znajomości w grupie 11 osób byłaby równa $\frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 11$, a więc nie byłaby liczbą całkowitą. Uzyskana sprzeczność dowodzi, że co najmniej jeden spośród znajomych Tomka musi znać wszystkich pozostałych 10 jego gości.

Dodatek: Najczęstsze błędy w zadaniu 1.

W wielu czytanych przez nas rozwiązaniach zadania 1. często pojawiały się te same nieprawdziwe stwierdzenia. W tym dodatkowym materiale postaramy się wyjaśnić, na czym one polegały i podać możliwie proste kontrprzykłady. Błędy zostały podzielone na pięć zasadniczych kategorii, a sformułowania są w dużej części zaczerpnięte z oryginalnych prac uczestników 2. etapu.

Pierwsza grupa popularnych błędów dotyczy zbioru liczb rzeczywistych.

Błąd 1. Każda liczba niecałkowita jest liczbą wymierną.

Komentarz. Istnieją liczby niecałkowite, których nie można przedstawić w postaci ułamka nieskracalnego $\frac{p}{q}$, gdzie p i q są liczbami całkowitymi. Nazywamy je liczbami *niewymiernymi*. Są nimi na przykład $\sqrt{2}$ i $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, ale także π (co jednak nie ma już tak prostego dowodu).

Błąd 2. Każda liczba niewymierna jest pierwiastkiem kwadratowym z liczby całkowitej nieujemnej.

Komentarz. Choć zdecydowanie najprostszymi przykładami liczb niewymiernych są właśnie pierwiastki kwadratowe z pewnych liczb całkowitych nieujemnych, takie jak $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \dots$, to nie są to jedyne liczby niewymierne. Wiedząc na przykład, że $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną, łatwo jest uzasadnić, że $1 + \sqrt{2}$ także jest liczbą niewymierną. Jednak $(1 + \sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{2}$ nie jest liczbą całkowitą.

Błąd 3. Suma liczb niecałkowitych jest liczbą niecałkowitą.

Komentarz. Zauważmy na przykład, że jeśli x jest dowolną liczbą niecałkowitą, to $-x$ również jest liczbą niecałkowitą, a suma $x + (-x)$ zawsze będzie równa 0, czyli jest liczbą całkowitą. Tak więc kontrprzykład możemy znaleźć już wśród liczb wymiernych: $\frac{1}{2} + (-\frac{1}{2}) = 0$.

Błąd 4. Suma liczb niewymiernych jest liczbą niewymierną.

Komentarz. Podobnie jak w powyższym kontrprzykładzie, możemy zapisać $\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0$.

Błąd 5. Iloczyn liczb niecałkowitych jest liczbą niecałkowitą.

Komentarz. Zauważmy na przykład, że $\frac{2}{3}$ i $\frac{3}{2}$ są liczbami niecałkowitymi, których iloczyn $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1$ jest liczbą całkowitą.

Błąd 6. Iloczyn liczb niewymiernych jest liczbą niewymierną.

Komentarz. Tym razem możemy zapisać $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$.

Druga grupa dotyczy zapisu dziesiętnego liczb rzeczywistych. Najczęstszym błędem było w tym przypadku założenie, że zapis dziesiętny liczby b jest *skończony*, co nie jest prawdą nawet dla wszystkich liczb wymiernych. Na przykład $\frac{1}{3} = 0, (3) = 0,33333 \dots$ ma nieskończone rozwinięcie dziesiętne, złożone z powtarzającej się cyfry 3. Pisząc „spójrzmy na ostatnią cyfrę zapisu dziesiętnego liczby b (...)” w oczywisty sposób rozważamy jedynie te liczby rzeczywiste, dla których wspomniana „ostatnia cyfra” naprawdę istnieje.

Błąd 7. W zapisie dziesiętnym liczby b^2 występuje więcej cyfr po przecinku niż w zapisie dziesiętnym liczby b .

Komentarz. Jest to prawda, o ile zapis dziesiętny b jest skończony. Co więcej, w zapisie dziesiętnym liczby b^2 występuje wtedy dokładnie dwa razy więcej cyfr po przecinku niż w zapisie dziesiętnym liczby b . Istotnie, jeśli oznaczymy przez n liczbę cyfr po przecinku w zapisie dziesiętnym liczby b , to możemy przedstawić ją w postaci $b = \frac{p}{10^n}$, gdzie p jest liczbą całkowitą niepodzielną przez 10. Wówczas $b^2 = \frac{p^2}{10^{2n}}$, a liczba p^2 wciąż jest niepodzielna przez 10.

Jeśli jednak rozwinięcie dziesiętne liczby b jest nieskończone, to rozważanemu stwierdzeniu ciężko jest nadać sens matematyczny.

Błąd 8. Jeśli zapis dziesiętny liczby b kończy się niezerową cyfrą po przecinku, to zapis dziesiętny liczby $b(2+b)$ również.

Komentarz. Znowu jest to prawda, o ile zapis dziesiętny b jest skończony. Co więcej, można nawet pokazać, że jeśli b jest dowolną niecałkowitą liczbą wymierną, to $b(2+b)$ również jest liczbą niecałkowitą. Istotnie, zapiszmy b w postaci ułamka nieskracalnego $\frac{p}{q}$, gdzie p i q są liczbami całkowitymi. Gdyby $b(2+b) = \frac{p(2q+p)}{q^2}$ było liczbą całkowitą, to wówczas mielibyśmy podzielność $q^2 \mid p(2q+p)$, z której wynika w szczególności $q \mid p(2q+p)$. Ponieważ jednak p jest względnie pierwsze z q , możemy zapisać $q \mid 2q+p$, skąd dostaniemy natychmiast $q \mid p$, wbrew założeniu o niecałkowitości liczby b .

Jeśli jednak rozwinięcie dziesiętne liczby b jest nieskończone, to znowu rozważanemu stwierdzeniu ciężko jest nadać sens matematyczny.

Trzecia grupa popularnych błędów dotyczy własności wyrażenia $2x + x^2$.

Błąd 9. Jeśli $2a + a^2 = 2b + b^2$, to $a = b$.

Komentarz. To, że po obu stronach równości występują podobne wyrażenia różniące się jedynie nazwą zmiennej, nie oznacza jeszcze, że równość zachodzi tylko wtedy, gdy wartości zmiennych a i b są sobie równe. Aby się o tym przekonać, wystarczy podstawić $a = -2$, $b = 0$. Wówczas $2a + a^2 = 0 = 2b + b^2$, ale oczywiście $a \neq b$.

Błąd 10. Jeśli $a < b$, to $2a + a^2 < 2b + b^2$.

Komentarz. Aby przekonać się, że stwierdzenie nie jest prawdziwe, wystarczy podstawić $a = -3$, $b = 0$. Wówczas $a < b$, ale $2a + a^2 = 3 > 0 = 2b + b^2$. Ponadto dla $a = 0$, $b = 1$ wciąż mamy $a < b$, ale tym razem $2a + a^2 = 0 < 3 = 2b + b^2$. Zatem wiedząc jedynie, że $a < b$, nie możemy udowodnić żadnej z dwóch nierówności.

Niepoprawne uzasadnienie tego stwierdzenia najczęściej opierało się na obserwacji, że jeśli $a < b$, to $a^2 < b^2$. Jest to prawda jedynie wtedy, gdy liczby a i b są *nieujemne*, czego niestety nie możemy założyć o liczbach a i b z treści zadania. Co więcej, gdy liczby a i b są *niedodatnie*, nierówność zachodzi w przeciwną stronę, na przykład $-2 < -1$, ale $(-2)^2 = 4 > 1 = (-1)^2$.

Błąd 11. Jeśli $2b + b^2$ jest liczbą całkowitą, to b też jest liczbą całkowitą.

Komentarz. Jest to chyba najczęściej pojawiające się niepoprawne stwierdzenie. Być może dlatego, że zawiera w sobie ziarno prawdy. Jeśli bowiem ograniczymy się do rozważania wymiernych b , to rzeczywiście jest ono prawdziwe, co wynika z rozumowania przedstawionego w komentarzu do podpunktu 8. Jeśli jednak dopuścimy liczby niewymierne, to na przykład dla $b = \sqrt{2} - 1$ otrzymamy

$$2b + b^2 = 2(\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{2} - 1)^2 = 2(\sqrt{2} - 1) + (2 - 2\sqrt{2} + 1) = 1,$$

czyli liczbę całkowitą.

Czwarta grupa to najczęściej popełniane błędy podczas wykonywania działań arytmetycznych.

Błąd 12. $\sqrt{x^2} = x$

Komentarz. Pierwiastek kwadratowy jest z definicji liczbą nieujemną, dlatego równość nie może być spełniona dla ujemnych x . Na przykład, $\sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1 \neq -1$. Prawdą jest jednak, że $\sqrt{x^2} = |x|$, gdzie $|x|$ jest wartością bezwzględną liczby x , to znaczy

$$|x| = \begin{cases} x & \text{gdy } x \geq 0 \\ -x & \text{gdy } x < 0 \end{cases}.$$

Błąd 13. $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

Komentarz. Aby przekonać się, że nie jest to prawda, wystarczy podstawić $x = 1$ i $y = 1$. Wówczas $\sqrt{1+1} = \sqrt{2} \neq 2 = \sqrt{1} + \sqrt{1}$. Zauważmy, że podnosząc prawą stronę „równości” do kwadratu, dla nieujemnych x, y otrzymamy

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 = \sqrt{x}^2 + 2\sqrt{x}\sqrt{y} + \sqrt{y}^2 = x + 2\sqrt{xy} + y,$$

które to wyrażenie jest różne od $x + y$, o ile $xy \neq 0$.

Błąd 14. Jeśli $x^2 = y^2$, to $x = |y|$.

Komentarz. Aby przekonać się, że nie jest to prawda, wystarczy podstawić $x = -1$ i $y = 1$. Błąd w tym miejscu jest dość subtelny. Z równości $x^2 = y^2$ wynika, że $x = y$ lub $x = -y$, ale nie jest to równoważne z $x = |y|$ ani z $|x| = y$. Nie znamy bowiem znaków zmiennych x i y , a na przykład zapis $x = |y|$ niejawnie zakłada, że x jest liczbą nieujemną.

Błąd 15. Jeśli $xz = yz$, to $x = y$.

Komentarz. Jeśli podstawimy $x = 1$, $y = 2$ i $z = 0$, to otrzymamy wówczas $1 \cdot 0 = 2 \cdot 0$, choć oczywiście $1 \neq 2$. Najczęściej niepoprawny wniosek $x = y$ był wynikiem podzielenia równości stronami przez z . Jednak we wskazanym kontrprzykładzie $z = 0$, więc to działanie nie było możliwe do wykonania. Dlatego przed podzieleniem równości stronami zawsze należy pamiętać o sprawdzeniu, czy wartość wyrażenia przez które dzielimy może być równa 0, a jeśli tak – rozbić rozumowanie na dwa przypadki.

Błąd 16. Jeśli $p \neq q$ i $r \neq s$, to $p + r \neq q + s$.

Komentarz. Wystarczy zauważyć, że $0 \neq 1$ i $1 \neq 0$, ale $0 + 1 = 1 + 0$.

Ostatnia grupa błędów dotyczy struktury dowodu i logiki rozumowania.

Błąd 17. Jak widać na przykładach (...)

Komentarz. Niestety, nawet sprawdzenie bardzo dużej liczby przykładów nie może być uznane za dowód, ponieważ nasza intuicja mimo wszystko może nas zawieść. Rozważmy na przykład następujące pytanie: czy istnieje liczba całkowita dodatnia n taka, że zapis dziesiętny liczby 2^n rozpoczyna się cyfrą 7? Analizując kolejne przykłady: 1, 2, 4, 8, 16... możemy szybko się zniechęcić i dojść do wniosku, że żadna potęga liczby 2 nie rozpoczyna się cyfrą 7. Okazuje się jednak, że nie jest to prawda, a najmniejsza liczba n o tej własności to 46, dla której $2^{46} = 70368744177664$. Co więcej, gdy wypiszemy odpowiednio dużo kolejnych potęg liczby 2, cyfra 7 będzie występować na pierwszym miejscu częściej niż cyfra 8!

Błąd 18. Załóżmy, że b jest liczbą całkowitą (...)

Komentarz. Jeśli na samym początku dowodu założymy, że b jest liczbą całkowitą, to z pewnością wiele stwierdzeń stanie się oczywiste. Jednak wówczas nasze rozumowanie będzie można podsumować słowami: „Jeśli założymy, że b jest liczbą całkowitą, to możemy dojść do wniosku, że b jest liczbą całkowitą”. Jest to niewątpliwie prawda, ale nie jest to niestety rozwiązanie zadania.

Dodatek: Najczęstsze błędy w zadaniu 2.

Podczas sprawdzania zadania olimpijskiego oceniane jest przede wszystkim rozumowanie przedstawione przez uczestnika, a więc poprawność uzasadnienia kolejnych kroków prowadzących od założeń do tezy. Komisja oceniająca sprawdza, między innymi, czy uczestnik nie wpadł w pułapkę błędnego rozumowania, polegającego na umieszczeniu w rozwiązaniu nieuzasadnionych stwierdzeń, nazywanych przez nas dalej — życzeniami. Przedstawiamy pięć pułapek w rozumowaniu, w które zdarzało się wpaść uczestnikom zawodów II stopnia, rozwiązującym zadanie 2. Do każdej pułapki dołączamy przykłady „życzeniowych rozumowań” oraz ujawniamy, jak stwierdzenia te odnoszą się do rzeczywistości.

Pułapka 1. „Założenie na życzenie”, czyli dokładanie założenia, które natychmiast daje rozwiązanie.

Przykład 1.1. *Opiszmy okrąg na czworokącie $ADEF$ (rys. 1). Wtedy $\sphericalangle FAD = 90^\circ$, więc DF jest średnicą okręgu. Stąd kąt DEF jest prosty.*

Życzenie: punkty A, D, E, F leżą na jednym okręgu.

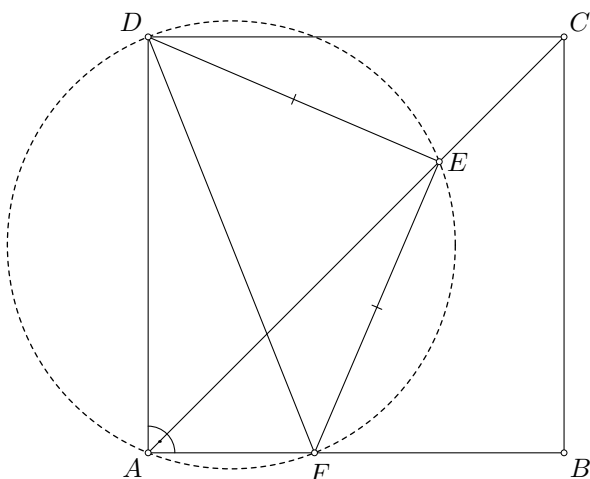
Rzeczywistość: Nie każde cztery punkty leżą na jednym okręgu. Przedstawione w przykładzie rozumowanie pokazuje, że *wystarczy uzasadnić*, że punkty A, D, E, F leżą na jednym okręgu. To uzasadnienie jest jednak kluczową częścią rozwiązania.

Przykład 1.2. *Niech punkt G będzie rzutem punktu E na prostą DF (rys. 2). Wtedy trójkąty DGE, EGF są trójkątami prostokątnymi równoramiennymi. Stąd*

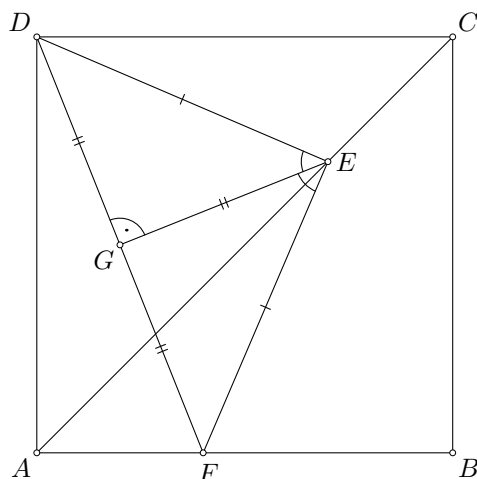
$$\sphericalangle DEF = \sphericalangle DEG + \sphericalangle GEF = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ.$$

Życzenie: Trójkąty DGE, EGF są równoramienne.

Rzeczywistość: Podobnie jak w poprzednim przykładzie pokazaliśmy, że *wystarczy uzasadnić*, iż trójkąty DGE, EGF są równoramienne. To jednak nie jest prostsze niż samo rozwiązanie zadania.



rys. 1



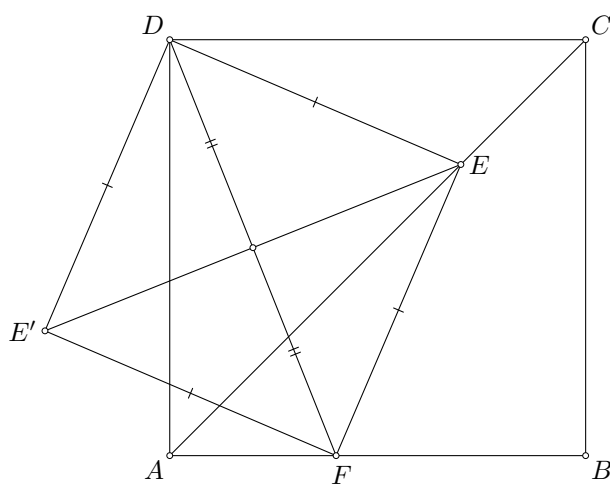
rys. 2

Pułapka 2. „Wniosek na życzenie”, czyli wyciąganie wniosków bez uzasadnienia.

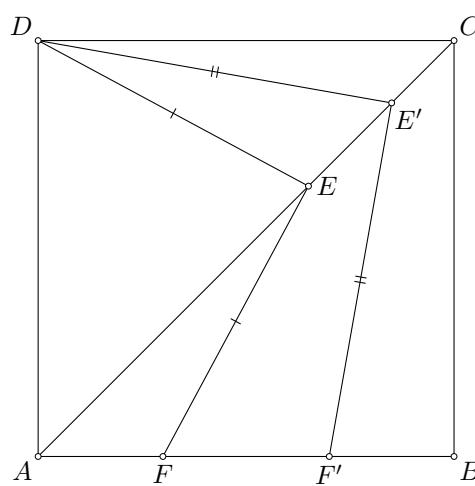
Przykład 2.1. Niech E' będzie punktem symetrycznym do punktu E względem środka odcinka DF (rys. 3). Ponieważ trójkąt DEF jest równoramienny, więc czworokąt $DEFE'$ jest kwadratem.

Życzenie: Każdy trójkąt równoramienny jest połówką kwadratu.

Rzeczywistość: Każdy trójkąt równoramienny jest połówką rombu, ale niekoniecznie kwadratu. Uzasadnienie, że $DEFE'$ jest kwadratem wymaga skorzystania z pozostałych założeń zadania, czyli z położenia punktów E , F na przekątnej i boku kwadratu $ABCD$.



rys. 3



rys. 4

Pułapka 3. „Uproszczenie na życzenie”, czyli rozważanie sytuacji prostszej niż opisana w zadaniu.

Przykład 3.1. Zauważmy, że $\sphericalangle ADF = \frac{1}{2} \sphericalangle ADB = \frac{1}{2} \cdot 45^\circ = 22,5^\circ$.

Życzenie: Prosta DF jest dwusieczną kąta ADB .

Rzeczywistość: Punkt F może być dowolnym punktem leżącym wewnątrz odcinka AB (rys. 4). Nasze życzenie jest spełnione tylko dla jednego, bardzo szczególnego położenia punktów E , F .

Przykład 3.2. Z treści zadania wynika, że punkt E jest punktem przecięcia przekątnych kwadratu $ABCD$.

Życzenie: Jest tylko jedno, bardzo szczególne położenie punktu E , dla którego założenia zadania są spełnione.

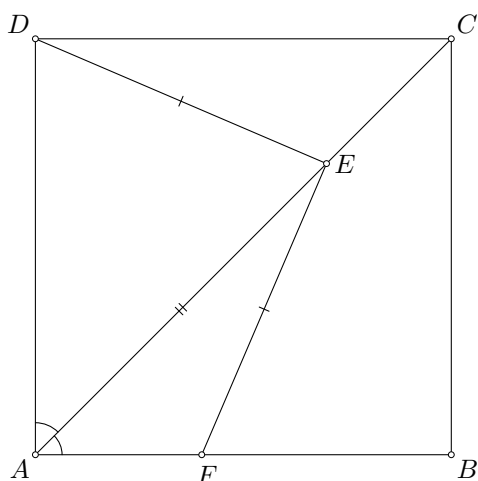
Rzeczywistość: Punkt E może być dowolnym punktem wewnątrz odcinka AC spełniającym założenie $AE > EC$ (rys. 4). Co więcej, założenie to wyklucza sytuację, w której punkt E jest punktem przecięcia przekątnych kwadratu.

Pułapka 4. „Falszyfikat na życzenie”, czyli tworzenie nieprawdziwych twierdzeń, podobnych do znanych faktów.

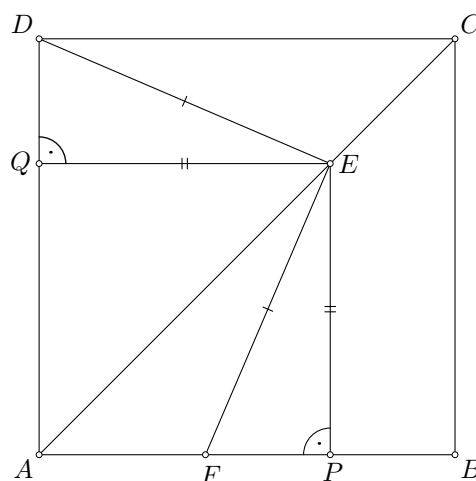
Przykład 4.1. *Zauważmy, że $FE = ED$ oraz $\sphericalangle FAE = 45^\circ = \sphericalangle EAD$ (rys. 5). Trójkąty AFE i ADE , mające dodatkowo wspólny bok AE , są więc przystające na mocy cechy przystawania bok-kąt-bok.*

Życzenie: W cesze przystawania bok-kąt-bok nie jest istotne, które pary boków i który kąt bierzemy pod uwagę.

Rzeczywistość: Już na pierwszy rzut oka widać, że trójkąt AFE jest rozwartokątny, w przeciwieństwie do trójkąta ADE . Nie mogą być więc one przystające. Korzystając z cechy przystawania bok-kąt-bok, musimy zadbać o to, aby równy kąt znajdował się pomiędzy odpowiednimi parami równych boków. W podanym przykładzie próbowaliśmy skorzystać z nieprawdziwej w ogólności cechy przystawania bok-bok-kąt.



rys. 5



rys. 6

Przykład 4.2. *Niech P , Q będą rzutami prostokątnymi punktu E odpowiednio na boki AB , AD (rys. 6). Skoro prosta AC jest dwusieczną kąta BAD , to $EP = EQ$. Dodatkowo $EF = ED$ oraz $\sphericalangle EPF = \sphericalangle EQD$, czyli na mocy cechy przystawania bok-kąt-bok, trójkąty EPF i EQD są przystające.*

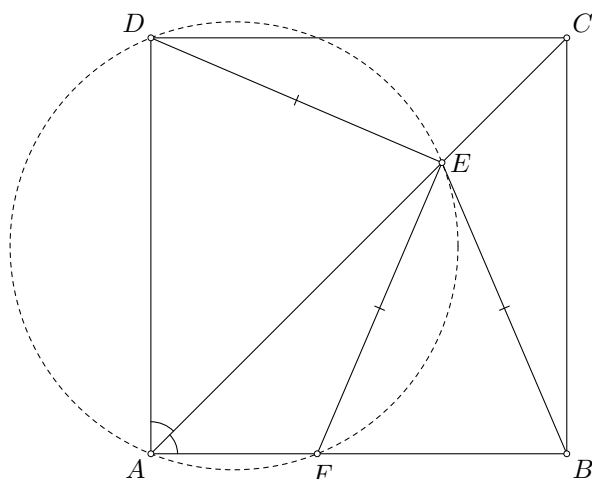
Życzenie: W cesze przystawania bok-kąt-bok nie jest istotne, które pary boków i który kąt bierzemy pod uwagę.

Rzeczywistość: Tak naprawdę próbujemy skorzystać z cechy przystawania bok-bok-kąt, która — jak już wiemy z poprzedniego przykładu — w ogólności nie zachodzi. W szczególnym przypadku, gdy rozważane równe kąty mają miarę 90 stopni, cecha przystawania bok-bok-kąt jest jednak prawdziwa. Szczegóły uzasadnienia pozostawiamy Czytelnikowi.

Przykład 4.3. Ponieważ $\sphericalangle FAE = 45^\circ = \sphericalangle EAD$ oraz $FE = ED$, więc na mocy równości kątów wpisanych w okrąg opartych na równych cięciwach, punkty A, F, E, D leżą na jednym okręgu (rys. 7).

Życzenie: Z równości odcinków i kątów na nich opartych można wywnioskować, że pewne cztery punkty leżą na jednym okręgu.

Rzeczywistość: Zauważmy, że $\sphericalangle BAE = 45^\circ = \sphericalangle EAD$ oraz $BE = ED$. Moglibyśmy więc w taki sam sposób uzasadnić, że punkty A, B, E, D leżą na jednym okręgu — co nie jest prawdą. To, że punkty A, F, E, D leżą na jednym okręgu, wymaga więc dodatkowego uzasadnienia.



rys. 7

Pułapka 5. „Teza na życzenie”, czyli obserwacja niebędąca dowodem.

Przykład 5.1. Zaznaczam na przekątnej AC taki punkt E , że $AE > EC$. Następnie przy pomocy cyrkla wyznaczam na boku AB taki punkt F , różny od punktu B , że $ED = EF$. Przy pomocy ekierki sprawdzam, że kąt DEF jest prosty.

Życzenie: konstrukcja geometryczna dowodzi, że teza zadania jest prawdziwa.

Rzeczywistość: Konstrukcja może być pomocna w wykonaniu dokładnego rysunku. Nie możemy jednak wyciągać wniosków jedynie na podstawie konstrukcji. Narzędzia, którymi dysponujemy, nie są dokładne — może kąt DEF ma tak naprawdę miarę $89,9$ stopnia?

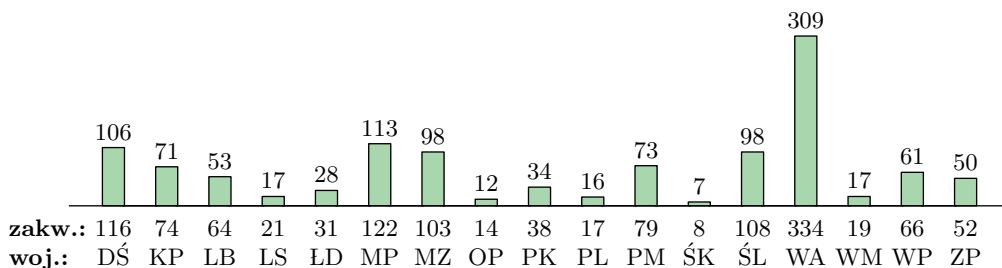
Mimo to wyobraźmy sobie na chwilę, że staliśmy się posiadaczami cyrkla i ekierki doskonałych, nieomylnych. Nawet wtedy konstrukcja nie staje się dowodem. Przeprowadzając konstrukcję, rozważamy bowiem bardzo szczególne położenie punktu E . Pomijamy wszystkie pozostałe położenia, których jest przecież nieskończenie wiele.

XVI Olimpiada Matematyczna Juniorów

Statystyki dotyczące zawodów drugiego stopnia (2020/21)

(23 stycznia 2021 r.)

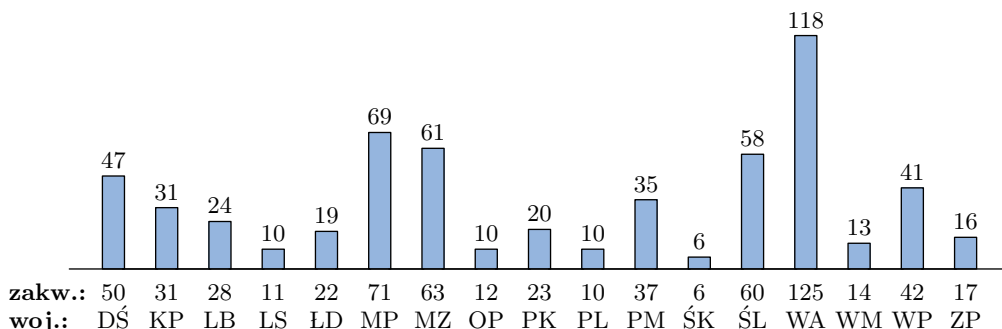
Tabela 1. Liczba uczniów, którzy wzięli udział w zawodach oraz zakwalifikowanych do zawodów w podziale na województwa i inne regiony.



Łączna liczba uczniów, którzy wzięli udział w zawodach: 1163

Łączna liczba uczniów zakwalifikowanych do zawodów: 1266

Tabela 2. Liczba szkół uczniów, którzy wzięli udział w zawodach oraz zakwalifikowanych do zawodów w podziale na województwa i inne regiony.



Łączna liczba szkół uczniów, którzy wzięli udział w zawodach: 588

Łączna liczba szkół uczniów zakwalifikowanych do zawodów: 622

Skróty województw

DŚ — dolnośląskie

LB — lubelskie

LD — łódzkie

MZ — mazowieckie bez m.st. Warszawy

PK — podkarpackie

PM — pomorskie

ŚL — śląskie

WM — warmińsko-mazurskie

ZP — zachodniopomorskie

KP — kujawsko-pomorskie

LS — lubuskie

MP — małopolskie

OP — opolskie

PL — podlaskie

ŚK — świętokrzyskie

WA — m.st. Warszawa

WP — wielkopolskie

Tabela 3. Procentowa i rzeczywista liczba osób, które uzyskały daną sumę punktów.

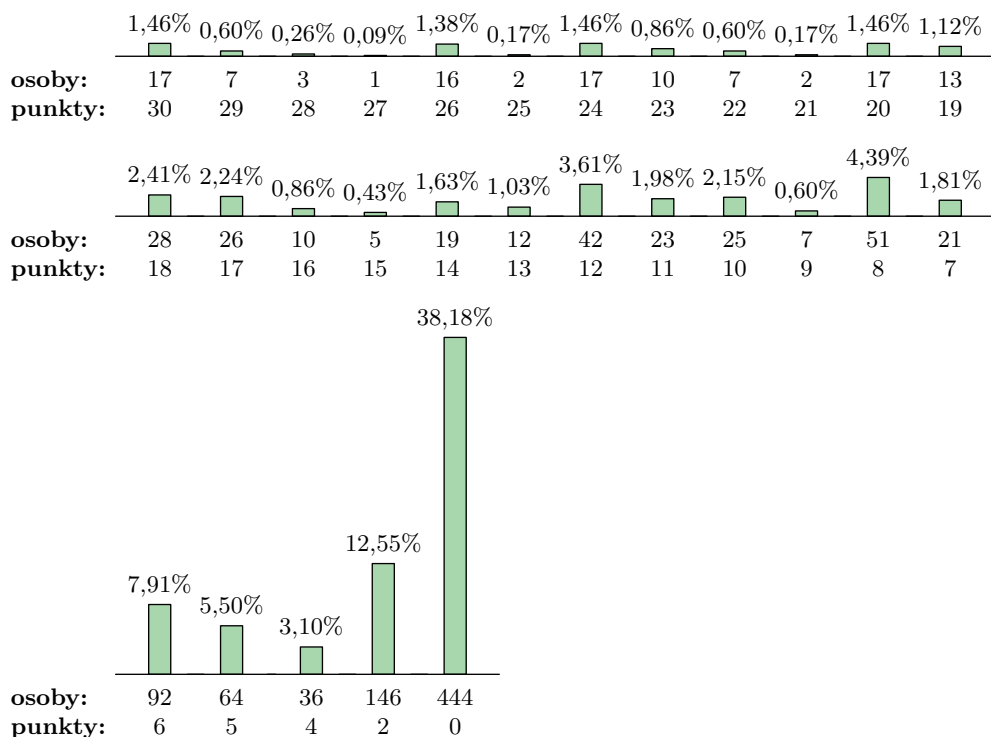


Tabela 4. Procentowa i rzeczywista liczba osób, które uzyskały daną lub większą sumę punktów.

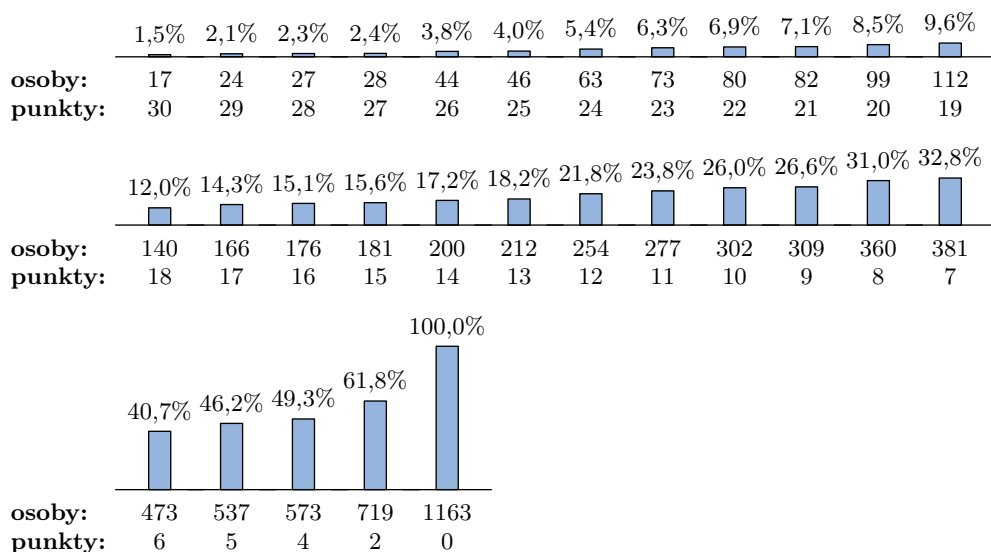


Tabela 5. Procentowa liczba osób, które uzyskały daną liczbę punktów za poszczególne zadania.

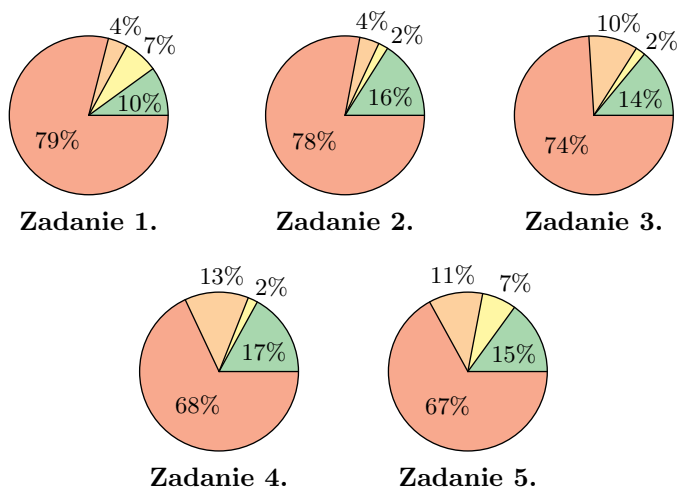


Tabela 6. Średnia uzyskanych punktów za poszczególne zadania.

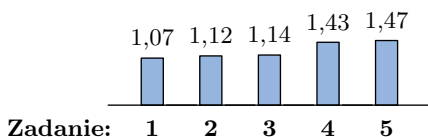
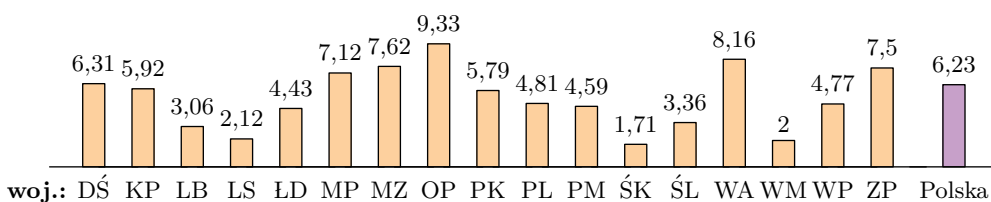


Tabela 7. Średnia sumy punktów w podziale na województwa i inne regiony.



MINISTERSTWO
EDUKACJI
NARODOWEJ



Stowarzyszenie
na rzecz Edukacji
Matematycznej

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej

XVI Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody trzeciego stopnia
(20 marca 2021 r.)



1. Dodatnie liczby całkowite a , b oraz n spełniają równość

$$\frac{a}{b} = \frac{a^2 + n^2}{b^2 + n^2}.$$

Wykaż, że liczba $\sqrt{ab}$ jest całkowita.

2. W trójkącie prostokątnym ABC punkt M jest środkiem przeciwprostokątnej AB . Punkty P i Q leżą odpowiednio na odcinkach AM i MB , przy czym $PQ = CQ$. Udowodnij, że $AP \leq 2 \cdot MQ$.

3. W turnieju badmintonu uczestniczyło 16 zawodników. Każdy zawodnik rozegrał co najwyżej jeden mecz z każdym innym zawodnikiem, żaden mecz nie zakończył się remisem. Po turnieju okazało się, że każdy z zawodników wygrał inną liczbę meczów. Wykaż, że każdy z zawodników przegrał inną liczbę meczów.

4. Na boku AB nierównoramiennej trójkąta ABC leżą takie punkty M i N , że $AN = AC$ oraz $BM = BC$. Prosta równoległa do BC przechodząca przez punkt M i prosta równoległa do AC przechodząca przez punkt N przecinają się w punkcie S . Wykaż, że $\angle CSM = \angle CSN$.

5. Dane są liczby naturalne a , b , które w zapisie dziesiętnym są zapisane takimi samymi cyframi (tzn. każda z cyfr od 0 do 9 występuje tyle samo razy w zapisie a co w zapisie b). Wykaż, że jeżeli $a + b = 10^{1000}$, to liczby a i b są podzielne przez 10.

XVI Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody trzeciego stopnia (20 marca 2021 r.)

Rozwiązania zadań konkursowych

1. Dodatnie liczby całkowite a , b oraz n spełniają równość

$$\frac{a}{b} = \frac{a^2 + n^2}{b^2 + n^2}.$$

Wykaż, że liczba $\sqrt{ab}$ jest całkowita.

Rozwiązanie

Sposób I

Przekształcając równoważnie zależność $\frac{a}{b} = \frac{a^2 + n^2}{b^2 + n^2}$, uzyskujemy kolejno

$$\begin{aligned} a(b^2 + n^2) &= b(a^2 + n^2), \\ ab^2 + an^2 &= ba^2 + bn^2, \\ an^2 - bn^2 &= ba^2 - ab^2, \\ n^2(a - b) &= ab(a - b), \\ (n^2 - ab)(a - b) &= 0. \end{aligned}$$

Ostatnia równość jest spełniona jedynie w przypadkach, gdy $n^2 - ab = 0$ lub $a - b = 0$, czyli odpowiednio $n^2 = ab$ lub $a = b$. W pierwszym przypadku mamy więc $\sqrt{ab} = n$, a w drugim $\sqrt{ab} = a$, czyli w obu przypadkach liczba $\sqrt{ab}$ jest całkowita.

Sposób II

Z równości $\frac{a}{b} = \frac{a^2 + n^2}{b^2 + n^2}$ wynika, że istnieje taka dodatnia liczba r (niekoniecznie całkowita), że spełnione są równości

$$ar = a^2 + n^2 \quad \text{oraz} \quad br = b^2 + n^2.$$

Odejmując te równości stronami, uzyskujemy $ar - br = a^2 - b^2$, skąd na mocy wzoru skróconego mnożenia otrzymujemy

$$(a - b)r = (a - b)(a + b).$$

Jeżeli $a = b$, to $\sqrt{ab} = a$, więc teza zadania jest spełniona.

W dalszej części rozwiązania założmy więc, że $a \neq b$, czyli $a - b \neq 0$. Wówczas uzyskaną wcześniej równość można podzielić stronami przez $a - b$, otrzymując $r = a + b$. Wobec tego

$$a^2 + n^2 = ar = a(a + b) = a^2 + ab, \quad \text{skąd} \quad n^2 = ab$$

i w konsekwencji $\sqrt{ab} = n$ jest liczbą całkowitą.

Sposób III

W rozwiązaniu skorzystamy z następującej obserwacji:

Jeżeli liczby x, y, z, t spełniają równości $x + y = z + t$ oraz $xy = zt$, to $(x, y) = (z, t)$ lub $(x, y) = (t, z)$.

Innymi słowy, suma oraz iloczyn pary liczb rzeczywistych wyznaczają tę parę jednoznacznie. Aby przekonać się o prawdziwości tego faktu, zauważmy, że

$$(x-z)(x-t) = x^2 + zt - xz - xt = x^2 + xy - xz - xt = x(x+y-z-t) = 0,$$

skąd $x = z$ lub $x = t$. Na mocy $x+y = z+t$ jeśli $x = z$, to $y = t$ i podobnie jeśli $x = t$, to $y = z$.

Przechodzimy do rozwiązywania zadania. Równość $\frac{a}{b} = \frac{a^2+n^2}{b^2+n^2}$ przekształcamy do postaci

$$\frac{a^2+n^2}{a} = \frac{b^2+n^2}{b}, \quad \text{czyli} \quad a + \frac{n^2}{a} = b + \frac{n^2}{b}.$$

Przyjmując $x = a$, $y = \frac{n^2}{a}$, $z = b$, $t = \frac{n^2}{b}$, uzyskujemy $x+y = z+t$. Ponadto $xy = zt = n^2$. Z przytoczonego faktu płynie więc wniosek, że $x = z$, czyli $a = b$ lub $x = t$, czyli $ab = n^2$. W pierwszym przypadku uzyskujemy zatem $\sqrt{ab} = a$, w drugim zaś $\sqrt{ab} = n$.

2. W trójkącie prostokątnym ABC punkt M jest środkiem przeciwprostokątnej AB . Punkty P i Q leżą odpowiednio na odcinkach AM i MB , przy czym $PQ = CQ$. Udowodnij, że $AP \leq 2 \cdot MQ$.

Rozwiązanie

W obu rozwiązaniach skorzystamy z faktu, że jeśli punkt M jest środkiem przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego ABC , to $AM = BM = CM$.

Sposób I

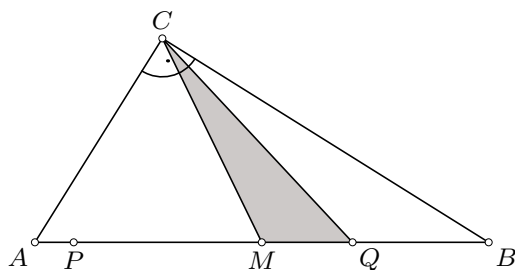
Z nierówności trójkąta zastosowanej dla punktów C, M, Q (rys. 1) otrzymujemy

$$CM \leq CQ + MQ.$$

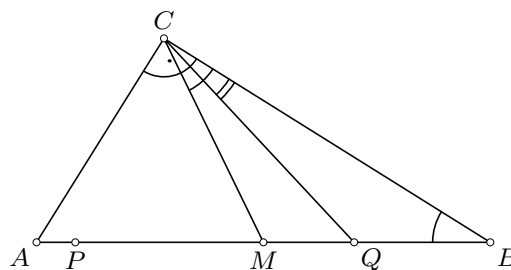
Wykorzystując równość $AM = CM$ oraz założenie $CQ = PQ$, uzyskujemy

$$AP + PM = AM = CM \leq CQ + MQ = PQ + MQ = PM + 2 \cdot MQ,$$

skąd $AP \leq 2 \cdot MQ$ (przy czym równość zachodzi wyłącznie gdy $Q = M$ i $A = P$).



rys. 1



rys. 2

Sposób II

Z równości $AM = BM$ oraz $PQ = CQ$ wynika, że

$$AP = AM + MQ - PQ = BM + MQ - CQ = 2 \cdot MQ + BQ - CQ.$$

Do rozwiązania zadania wystarczy więc udowodnić, że $BQ - CQ \leq 0$, czyli $CQ \geq BQ$.

Odnotujmy, że

$$\sphericalangle QBC = \sphericalangle MBC = \sphericalangle MCB \geq \sphericalangle QCB,$$

gdyż $BM = CM$ oraz punkt Q leży na odcinku MB . Wobec tego $CQ \geq BQ$, gdyż w trójkącie BCQ naprzeciw kąta większej (lub równej) miary leży bok większej (lub równej) długości.

3. W turnieju badmintona uczestniczyło 16 zawodników. Każdy zawodnik rozegrał co najwyżej jeden mecz z każdym innym zawodnikiem, żaden mecz nie zakończył się remisem. Po turnieju okazało się, że każdy z zawodników wygrał inną liczbę meczów. Wykaż, że każdy z zawodników przegrał inną liczbę meczów.

Rozwiązanie

W przedstawionych rozwiązaniach liczbę zwycięstw zawodnika (czyli liczbę wygranych przezeń meczów) będziemy nazywali jego *wynikiem*.

Sposób I

Każdy zawodnik zagrał co najwyżej 15 meczów. Wobec tego jest 16 możliwych wyników: 0, 1, 2, ..., 15. Ponieważ zawodników jest także 16, a żaden wynik się nie powtórzył, więc każdy z podanych wyników pojawił się dokładnie raz. Oznaczmy przez Z_w zawodnika, który wygrał w meczów, dla $w = 0, 1, 2, \dots, 15$.

Zauważmy, że Z_{15} zagrał ze wszystkimi pozostałymi i wszystkie te mecze wygrał. Wobec tego przegrał 0 meczów. Z kolei Z_{14} przegrał mecz z Z_{15} , a zatem aby rozegrać 14 zwycięskich meczów, musiał zagrać ze wszystkimi pozostałymi (i z nimi wygrać).

Rozumując analogicznie stwierdzamy, że zawodnik Z_w przegrał ze wszystkimi zawodnikami o większych wynikach, a zatem aby wygrać w meczów, musiał zagrać (i wygrać) ze wszystkimi zawodnikami o mniejszych wynikach. Ostatecznie więc dla każdego wyniku $w = 0, 1, 2, \dots, 15$ zawodnik Z_w przegrał $15 - w$ meczów, skąd wniosek, że każda z możliwych liczb przegranych meczów pojawia się dokładnie raz.

Sposób II

Podobnie jak w poprzednim sposobie stwierdzamy, że każdy z wyników od 0 do 15 pojawił się dokładnie raz. Zauważmy, że łączna liczba meczów turnieju jest równa łącznej liczbie wszystkich zwycięstw, bo każdy mecz ma dokładnie jednego zwycięzcę. Wobec tego łączna liczba rozegranych meczów jest równa

$$0 + 1 + 2 + \dots + 15 = 120.$$

Z drugiej strony największa możliwa liczba rozegranych meczów w całym turnieju jest równa maksymalnej liczbie różnych par jakie utworzyć można spośród 16 zawodników, czyli

$$\frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 15 = 120.$$

Stąd wniosek, że wszystkie możliwe mecze zostały rozegrane, czyli każdy z zawodników zagrał dokładnie 15 meczów. Zawodnik, który wygrał w meczów przegrał więc $15 - w$ meczów, czyli dwaj zawodnicy mają tyle samo zwycięstw na koncie dokładnie wtedy, gdy mają tyle samo przegranych. Wobec tego skoro liczby wygranych meczów są wszystkie różne, to liczby przegranych meczów także.

Uwaga

Na drodze przeprowadzonego rozumowania doszliśmy do wniosku, że jeśli wszystkie wyniki są różne, to każdych dwóch zawodników rozegrało w istocie *dokładnie* jeden mecz (a nie tylko *co najwyżej* jeden). Nie jest to jednak wniosek oczywisty i należało wyprowadzić go z założeń zadania.

Odnotujmy, że teza zadania jest także prawdziwa dla dowolnej liczby zawodników $n \geq 2$, niekoniecznie $n = 16$.

4. Na boku AB nierównoramiennej trójkąta ABC leżą takie punkty M i N , że $AN = AC$ oraz $BM = BC$. Prosta równoległa do BC przechodząca przez punkt M i prosta równoległa do AC przechodząca przez punkt N przecinają się w punkcie S . Wykaż, że $\sphericalangle CSM = \sphericalangle CSN$.

Rozwiązanie

Sposób I

Oznaczmy punkt przecięcia prostej SM i odcinka AC przez K , a punkt przecięcia prostej SN i odcinka BC przez L (rys. 3). Czworokąt $CKSL$ jest wówczas równoległobokiem. Aby uzasadnić, że jego przekątna SC połówi kąt KSL wystarczy więc wykazać, że równoległobok ten jest rombem.

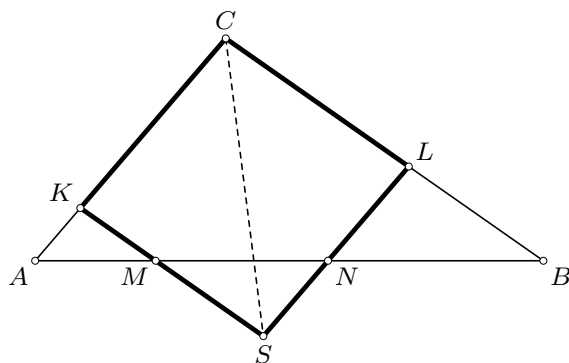
Ponieważ proste SM i BC są równoległe, więc na mocy twierdzenia Talesa otrzymujemy

$$\frac{CK}{AC} = \frac{BM}{AB}, \quad \text{skąd} \quad CK = \frac{AC \cdot BM}{AB} = \frac{AC \cdot BC}{AB}.$$

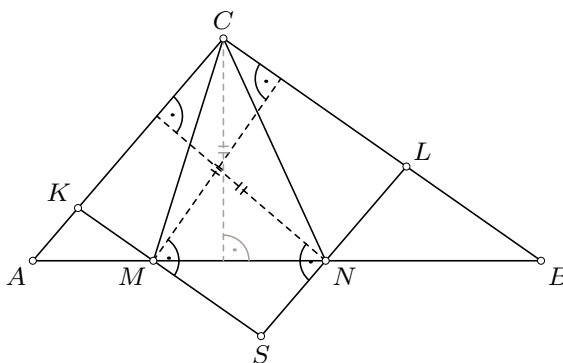
Analogicznie korzystając z równoległości prostych SN i AC , uzyskujemy

$$\frac{CL}{BC} = \frac{AN}{AB}, \quad \text{skąd} \quad CL = \frac{AN \cdot BC}{AB} = \frac{AC \cdot BC}{AB}.$$

Łącząc otrzymane równości, stwierdzamy, że $CK = CL$, czyli istotnie $CKSL$ jest rombem, co kończy rozwiązanie.



rys. 3



rys. 4

Sposób II

Podobnie jak w poprzednim sposobie wykazemy, że równoległobok $CKSL$ jest rombem, skąd wyniknie postulowana równość kątów.

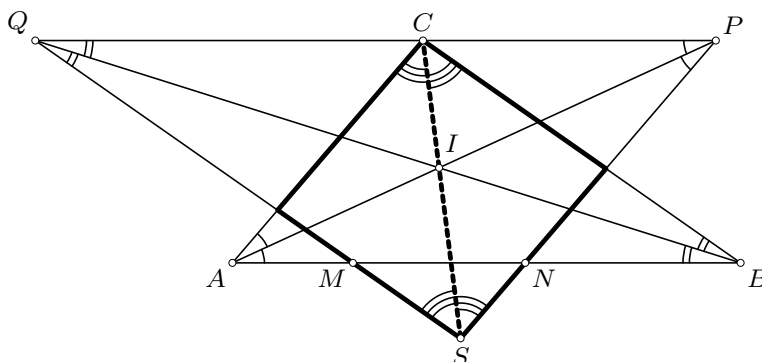
W trójkącie równoramiennym ACN wysokości poprowadzone z wierzchołków C i N są równej długości. Podobnie w trójkącie równoramiennym BCM wysokości poprowadzone z wierzchołków C i M są równej długości. Łącząc te obserwacje dochodzimy do wniosku, że odległość punktu N od prostej AC jest równa odległości punktu M od prostej BC . To oznacza, że wysokość równoległoboku $CKSL$ poprowadzona do boku CK jest równa wysokości poprowadzonej do boku CL , a zatem równoległobok ten jest rombem.

Sposób III

Niech P i Q będą takimi punktami, że czworokąty $ANPC$ oraz $BMQC$ są równoległobokami (rys. 5). Z warunków $AN = AC$ oraz $BM = BC$ wynika, że są to romby.

Niech I będzie punktem przecięcia odcinków AP oraz BQ . Skoro odcinki AP i BQ są zawarte w dwusiecznych kątów wewnętrznych trójkąta ABC przy wierzchołkach A i B , to ich punkt przecięcia I leży także na dwusiecznej kąta przy wierzchołku C . Podobne rozumowanie dla trójkąta PQS prowadzi do wniosku, że prosta SI jest dwusieczną kąta PSQ .

Do zakończenia rozwiązania pozostaje udowodnić, że punkty S , I , C są współliniowe. Zauważmy, że proste CI oraz SI są dwusiecznymi przeciwległych kątów wewnętrznych równoległoboku ograniczonego prostymi AC , BC , PS , QS , a zatem są równoległe. Jednak te proste mają punkt wspólny I , skąd wniosek, że się pokrywają.



rys. 5

Sposób IV

Oznaczmy punkty K i L tak samo, jak w pierwszym sposobie. Z równoległości prostych SK i BC oraz równoramienności trójkąta BMC wynika, że

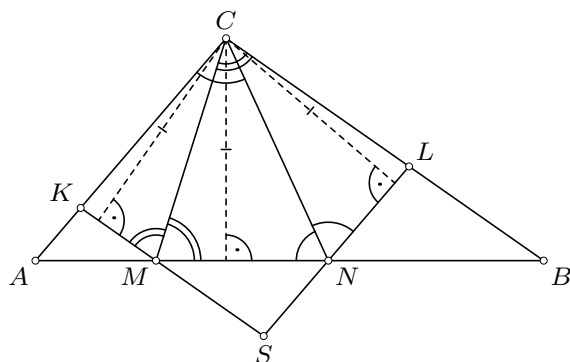
$$\sphericalangle KMC = \sphericalangle BCM = \sphericalangle BMC.$$

To oznacza, że punkt C leży na dwusiecznej kąta BMK , czyli jest jednakowo oddalony od prostych AB i SM (rys. 6). Analogicznie stwierdzamy, że $\sphericalangle LNC = \sphericalangle ANC$, skąd wynika, że punkt C leży na dwusiecznej kąta ANL i w konsekwencji jest jednakowo oddalony od prostych AB i SN .

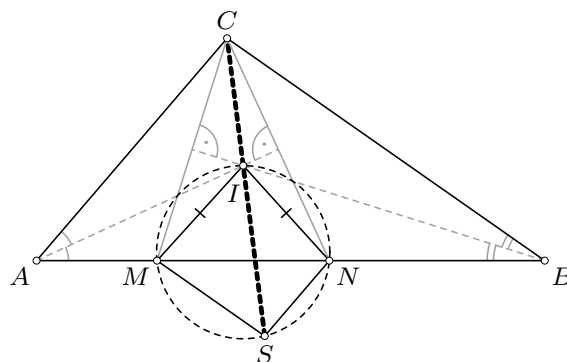
Łącząc powyższe obserwacje, dochodzimy do wniosku, że punkt C jest jednakowo oddalony od prostych SM i SN . To oznacza, że punkt C leży na dwusiecznej kąta KSL , co jest równoznaczne z tezą zadania.

Uwaga

Z przeprowadzonego rozumowania wynika, że istnieje okrąg o środku w punkcie C , który jest styczny do każdej z prostych AB , SN , SM . Taki okrąg nazywa się okręgiem *dopisanym* do trójkąta SMN naprzeciw wierzchołka S .



rys. 6



rys. 7

Sposób V

Niech I będzie punktem przecięcia dwusiecznych kątów BAC oraz ABC (rys. 7). Skoro $AN = AC$, to w trójkącie równoramiennym ACN dwusieczna kąta wewnętrznego przy wierzchołku A jest symetralną boku CN . Podobnie w trójkącie równoramiennym BCM dwusieczna kąta przy wierzchołku B jest jednocześnie symetralną boku CM . Łącząc te obserwacje,

dochodzimy do wniosku, że punkt I jest punktem przecięcia symetralnych odcinków CM i CN , a zatem jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie CMN . Stąd $\sphericalangle MIN = 2 \cdot \sphericalangle MCN$.

Korzystając wielokrotnie z własności sumy miar kątów wewnętrznych trójkąta oraz z równości $\sphericalangle ANC = \sphericalangle ACN$ oraz $\sphericalangle BCM = \sphericalangle BMC$, otrzymujemy

$$\begin{aligned}\sphericalangle MIN &= 2 \cdot \sphericalangle MCN = 2 \cdot (180^\circ - \sphericalangle NMC - \sphericalangle MNC) = \\ &= (180^\circ - \sphericalangle BMC - \sphericalangle BCM) + (180^\circ - \sphericalangle ANC - \sphericalangle ACN) = \\ &= \sphericalangle ABC + \sphericalangle BAC = 180^\circ - \sphericalangle ACB = 180^\circ - \sphericalangle MSN,\end{aligned}$$

co oznacza, że na czworokącie $MSNI$ można opisać okrąg.

Ponieważ $MI = NI$, więc na mocy twierdzenia o kątach wpisanych w okrąg opartych na przystających łukach zachodzi równość $\sphericalangle ISM = \sphericalangle ISN$. Pozostaje wykazać, że punkt C leży na prostej SI . Wynika to na przykład z następującego rachunku

$$\sphericalangle SIM + \sphericalangle MIC = \sphericalangle SNM + 2 \cdot \sphericalangle MNC = \sphericalangle BAC + \sphericalangle ANC + \sphericalangle ACN = 180^\circ.$$

5. Dane są liczby naturalne a, b , które w zapisie dziesiętnym są zapisane takimi samymi cyframi (tzn. każda z cyfr od 0 do 9 występuje tyle samo razy w zapisie a co w zapisie b). Wykaż, że jeżeli $a + b = 10^{1000}$, to liczby a i b są podzielne przez 10.

Rozwiązanie

Zauważmy najpierw, że każda z liczb a, b ma dokładnie 1000 cyfr.

Istotnie, skoro suma $a + b$ jest najmniejszą liczbą 1001-cyfrową, to liczby a i b nie mogą mieć więcej niż po 1000 cyfr. Gdyby obydwie miały po mniej niż 1000 cyfr, to

$$a < 10^{999} \quad \text{oraz} \quad b < 10^{999}, \quad \text{skąd} \quad a + b < 2 \cdot 10^{999} < 10 \cdot 10^{999} = 10^{1000},$$

wbrew założeniu zadania.

Niech a_1 będzie cyfrą jednościan liczby a , a_2 — cyfrą dziesiątek liczby a , i tak dalej, aż w końcu niech a_{1000} będzie pierwszą (od lewej) cyfrą w zapisie dziesiętnym liczby a . Analogicznie oznaczmy cyfry $b_1, b_2, \dots, b_{1000}$ liczby b . Z warunków zadania wynika, że suma wszystkich cyfr od a_1 do a_{1000} jest równa sumie wszystkich cyfr od b_1 do b_{1000} . Oznaczmy tę sumę przez S .

Skoro ostatnią cyfrą sumy $a + b$ jest 0, to $a_1 + b_1 = 0$ lub $a_1 + b_1 = 10$. W pierwszym przypadku uzyskujemy $a_1 = b_1 = 0$, czyli tezę zadania. Wykażemy, że drugi przypadek nie jest możliwy, co zakończy rozwiązanie zadania.

Przypuśćmy, że $a_1 + b_1 = 10$. Z algorytmu pisemnego dodawania wynika kolejno, że

$$a_2 + b_2 = 9, \quad a_3 + b_3 = 9, \quad \dots, \quad a_{1000} + b_{1000} = 9.$$

Uzyskujemy zatem

$$2S = (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{1000}) + (b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{1000}) = 10 + \underbrace{9 + 9 + \dots + 9}_{999 \text{ składników}} = 9001.$$

Lewa strona ostatniej równości jest liczbą parzystą, a prawa — nieparzystą. Uzyskana sprzeczność oznacza, że przypadek $a_1 + b_1 = 10$ nie może mieć miejsca.

Uwaga 1.

Istnieją pary liczb a, b spełniające warunki zadania, na przykład $a=b=5 \cdot 10^{999}$. Są wśród nich takie, w których zapisie dziesiętnym cyfra zero użyta jest tylko raz. Przykładowo dla

$$a = \underbrace{88 \dots 8}_{499} \underbrace{11 \dots 1}_{499} 50, \quad b = \underbrace{11 \dots 1}_{499} \underbrace{88 \dots 8}_{499} 50$$

zachodzi równość $a+b=10^{1000}$ oraz liczby a i b są zapisane takimi samymi cyframi.

Uwaga 2.

Tezę zadania można wzmocnić. Okazuje się mianowicie, że jeśli liczby a i b spełniają warunki zadania, to obie są podzielne przez 50.

Aby się o tym przekonać, można kontynuować przedstawione rozumowanie następująco. Wiemy, że $a_1 = b_1 = 0$. Jeśli $a_2 + b_2 = 0$, to liczby a i b są podzielne przez 100 (a więc także przez 50). Jeśli $a_2 + b_2 = 5$, to każda z liczb a i b jest zakończona cyframi „50”, a zatem każda z nich jest podzielna przez 50.

Pozostaje do rozważenia przypadek, w którym $a_2 + b_2 = 10$ oraz $a_2 \neq b_2$. Wykażemy, że przypadek ten nie może mieć miejsca. Niech N będzie liczbą wystąpień cyfry a_2 wśród cyfr $b_3, \dots, b_{1000}$. Podobnie jak w rozwiązaniu stwierdzamy, że

$$a_3 + b_3 = a_4 + b_4 = \dots = a_{1000} + b_{1000} = 9,$$

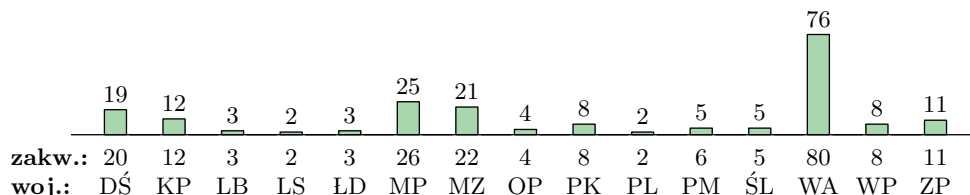
co oznacza, że $9 - a_2$ występuje N razy wśród cyfr $a_3, \dots, a_{1000}$. Zauważmy jednak, że skoro cyfra a_2 występuje tyle samo razy w zapisie liczby a , jak i w zapisie liczby b oraz $a_2 \neq b_1$ i $a_2 \neq b_2$, to a_2 występuje $N - 1$ razy wśród cyfr $a_3, \dots, a_{1000}$. Zatem $9 - a_2$ występuje wśród cyfr $b_3, \dots, b_{1000}$ jedynie $N - 1$ razy. Jeśli $9 - a_2 \neq 0$, to cyfra $9 - a_2$ nie jest równa żadnej z cyfr a_1, b_1, a_2, b_2 i w związku z tym występuje N razy w zapisie liczby a oraz $N - 1$ razy w zapisie liczby b . Jeśli $9 - a_2 = a_1 = b_1 = 0$, to cyfra ta występuje $N + 1$ w zapisie liczby a oraz N razy w zapisie liczby b . Uzyskana w obu przypadkach sprzeczność kończy dowód.

XVI Olimpiada Matematyczna Juniorów

Statystyki dotyczące zawodów trzeciego stopnia (2020/21)

(20 marca 2021 r.)

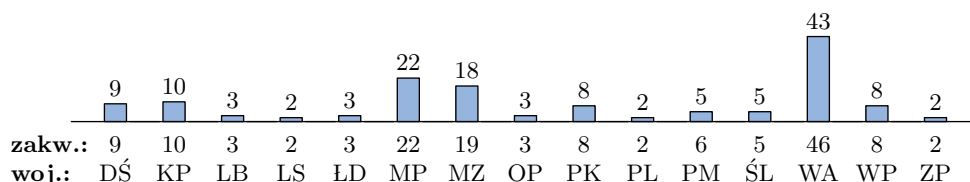
Tabela 1. Liczba uczniów, którzy wzięli udział w zawodach oraz zakwalifikowanych do zawodów w podziale na województwa i inne regiony.



Łączna liczba uczniów, którzy wzięli udział w zawodach: 204

Łączna liczba uczniów zakwalifikowanych do zawodów: 212

Tabela 2. Liczba szkół uczniów, którzy wzięli udział w zawodach oraz zakwalifikowanych do zawodów w podziale na województwa i inne regiony.



Łączna liczba szkół uczniów, którzy wzięli udział w zawodach: 143

Łączna liczba szkół uczniów zakwalifikowanych do zawodów: 148

Skróty województw

DŚ — dolnośląskie

LB — lubelskie

ŁD — łódzkie

MZ — mazowieckie bez m.st. Warszawy

PK — podkarpackie

PM — pomorskie

ŚL — śląskie

WM — warmińsko-mazurskie

ZP — zachodniopomorskie

KP — kujawsko-pomorskie

LS — lubuskie

MP — małopolskie

OP — opolskie

PL — podlaskie

ŚK — świętokrzyskie

WA — m.st. Warszawa

WP — wielkopolskie

Tabela 3. Procentowa i rzeczywista liczba osób, które uzyskały daną sumę punktów.

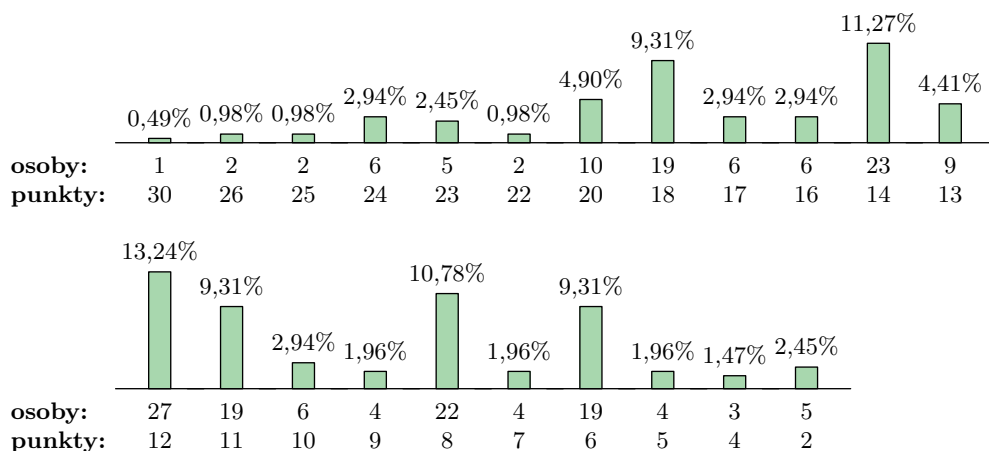


Tabela 4. Procentowa i rzeczywista liczba osób, które uzyskały daną lub większą sumę punktów.

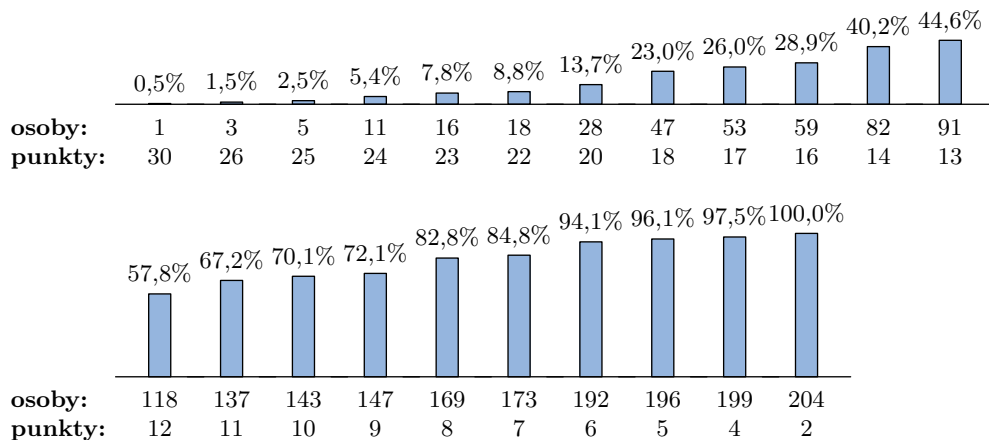


Tabela 5. Procentowa liczba osób, które uzyskały daną liczbę punktów za poszczególne zadania.

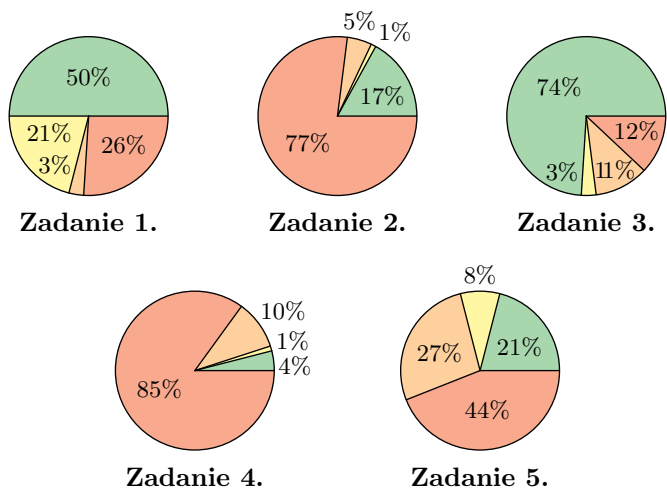


Tabela 6. Średnia uzyskanych punktów za poszczególne zadania.

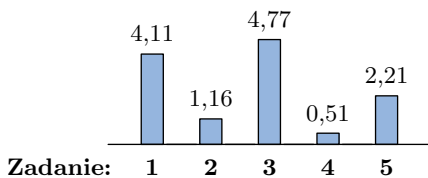
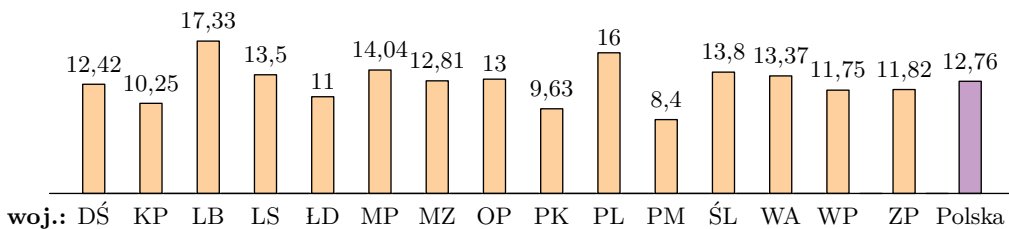


Tabela 7. Średnia sumy punktów w podziale na województwa i inne regiony.



Imiona:

Nazwisko:

Klasa:



XVII Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody stopnia pierwszego — część testowa

(23 września 2021 r., godz. 9:00)

Przed przystąpieniem do rozwiązywania testu wpisz na każdą stronę swoje imiona, nazwisko oraz numer klasy.

Treść każdego z poniższych zadań zawiera trzy stwierdzenia. Każde z nich jest prawdziwe lub fałszywe (przy czym może się zdarzyć, że wszystkie trzy stwierdzenia w obrębie jednego zadania są fałszywe). Jeśli dane stwierdzenie jest prawdziwe, wpisz w odpowiednią kratkę literkę T, jeśli zaś stwierdzenie jest fałszywe, wpisz literkę N.

W przypadku pomyłki przekreśl znakiem **X** podaną odpowiedź, a właściwą odpowiedź podaj obok z lewej strony. Nie używaj korektora.

Przykład poprawnie rozwiązane zadania:

0. Dla każdej dodatniej liczby całkowitej n liczba $2n + 1$ jest

T

a) dodatnia;

T

b) nieparzysta;

N

~~X~~

c) pierwsza.

Czas na rozwiązywanie testu: 75 minut.

Powodzenia!

1. Istnieje taka liczba naturalna, której każda cyfra jest równa 2 lub 6 i która jest podzielna przez

a) 4;

b) 5;

c) 9.

2. Istnieją takie dwa trójkąty, których część wspólna jest

a) pięciokątem;

b) sześciokątem;

c) siedmiokątem.

Imiona:

Nazwisko:

Klasa:

3. Suma pięciu parami różnych dodatnich liczb całkowitych jest równa 17. Wynika z tego, że jedną z tych pięciu liczb jest

a) 2;

b) 3;

c) 4.

4. Istnieją takie liczby całkowite x, y, z , że ujemna jest każda z liczb

a) $x + y, y + z, z + x$;

b) $x - y, y - z, z - x$;

c) $x \cdot y, y \cdot z, z \cdot x$.

5. Liczba naturalna n jest podzielna przez 2, a liczba $n + 1$ jest podzielna przez 3. Wynika z tego, że

a) liczba $n + 2$ jest podzielna przez 4;

b) liczba $n + 3$ jest podzielna przez 5;

c) liczba $n + 4$ jest podzielna przez 6.

6. Liczby całkowite a oraz b spełniają nierówność $a^3 \geq b^2$. Wynika z tego, że

a) $a \geq 0$;

b) $b \geq 0$;

c) $2a + b \geq 0$.

7. Istnieje taki trójkąt, który można rozciąć na dwa trójkąty

a) ostrokątne;

b) prostokątne;

c) rozwartokątne.

Imiona:

Nazwisko:

Klasa:

8. Z pewnej liczby prostopadłościennych klocków o wymiarach $1 \times 2 \times 3$ można zbudować prostopadłościan o wymiarach

a) $4 \times 4 \times 4$;

b) $5 \times 6 \times 7$;

c) $7 \times 8 \times 9$.

9. Liczba dodatnich dzielników dodatniej liczby całkowitej a jest większa od liczby dodatnich dzielników dodatniej liczby całkowitej b . Wynika z tego, że

a) liczba a jest większa od liczby b ;

b) liczba $a + 1$ ma więcej dodatnich dzielników niż liczba $b + 1$;

c) liczba $2a$ ma więcej dodatnich dzielników niż liczba $2b$.

10. W trójkącie ABC kąt przy wierzchołku A ma miarę 60° . Wysokość CD dzieli bok AB na odcinki długości $AD = 2$ i $BD = 6$. Wynika z tego, że

a) jeden z boków trójkąta ABC jest dwa razy dłuższy od innego boku tego trójkąta;

b) jeden z kątów trójkąta ABC jest dwa razy większy od innego kąta tego trójkąta;

c) pole trójkąta BCD jest dwa razy większe od pola trójkąta ACD .

11. Liczby dodatnie x oraz y spełniają równość $x + y = x \cdot y$. Wynika z tego, że liczba $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ jest równa

a) $\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y}$;

b) $\frac{1}{x-1} \cdot \frac{1}{y-1}$;

c) 1.

12. Istnieje taki sześcian, że długość jego krawędzi jest liczbą naturalną oraz

a) suma długości jego wszystkich krawędzi jest kwadratem liczby naturalnej;

b) jego pole powierzchni całkowitej jest kwadratem liczby naturalnej;

c) jego objętość jest kwadratem liczby naturalnej.

Imiona:

Nazwisko:

Klasa:

13. Punkt P leży wewnątrz trójkąta ABC . Wynika z tego, że

a) suma długości odcinków AP i BP jest większa od długości odcinka CP ;

b) suma obwodów trójkątów ACP i BCP jest większa od obwodu trójkąta ABP ;

c) suma pól trójkątów ACP i BCP jest większa od pola trójkąta ABP .

14. W gronie sześciu osób każda zna dokładnie trzy spośród pozostałych pięciu osób, przy czym jeśli osoba A zna osobę B , to również osoba B zna osobę A . Wynika z tego, że

a) pewne trzy spośród tych sześciu osób wzajemnie się znają;

b) pewne trzy spośród tych sześciu osób wzajemnie się nie znają;

c) można te sześć osób podzielić na trzy pary znających się osób.

15. W pewnym ostrosłupie prawidłowym czworokątnym długość krawędzi podstawy jest równa 2, a długość krawędzi bocznej jest równa b . Wynika z tego, że

a) $b > \sqrt{2}$;

b) wysokość tego ostrosłupa jest mniejsza od b ;

c) pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa jest większe od 4.

Rozwiązania zadań testowych

1. Istnieje taka liczba naturalna, której każda cyfra jest równa 2 lub 6 i która jest podzielna przez

N	a) 4;
N	b) 5;
T	c) 9.

Komentarz

a) Liczby jednocyfrowe 2 oraz 6 nie są podzielne przez 4. Liczba naturalna o co najmniej dwóch cyfrach, z których każda jest równa 2 lub 6, może być zakończona tylko cyframi 22, 26, 62 lub 66. Zgodnie z cechą podzielności przez 4, żadna taka liczba nie jest podzielna przez 4.

b) Każda liczba podzielna przez 5 jest zakończona cyfrą 0 lub 5. W związku z tym żadna liczba, której ostatnią cyfrą jest 2 lub 6 nie jest podzielna przez 5.

c) Liczba naturalna jest podzielna przez 9, jeśli suma jej cyfr jest podzielna przez 9. Przykładami liczb podzielnych przez 9, których jedynymi cyframi są 2 i 6 są więc 666, 66222, 222222222, gdyż suma cyfr każdej z tych liczb jest podzielna przez 9.

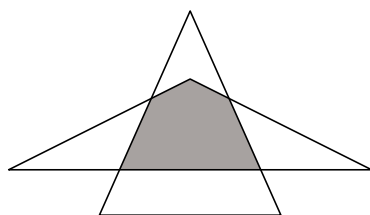
2. Istnieją takie dwa trójkąty, których część wspólna jest

T	a) pięciokątem;
T	b) sześciokątem;
N	c) siedmiokątem.

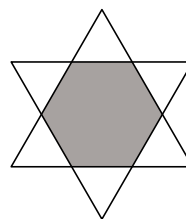
Komentarz

a) Przykładowe ułożenie takich dwóch trójkątów jest przedstawione na rysunku 1.

b) Przykładowe ułożenie takich dwóch trójkątów jest przedstawione na rysunku 2.



rys. 1



rys. 2

c) Przypuśćmy, że wielokąt $\mathcal{W}$ jest częścią wspólną pewnych dwóch trójkątów. Wówczas boki wielokąta $\mathcal{W}$ zawierają się w bokach tych dwóch trójkątów. Co więcej żaden z sześciu boków tych trójkątów nie może zawierać więcej niż jednego boku wielokąta $\mathcal{W}$. W związku z tym liczba boków wielokąta $\mathcal{W}$ jest nie większa od 6.

3. Suma pięciu parami różnych dodatnich liczb całkowitych jest równa 17. Wynika z tego, że jedną z tych pięciu liczb jest

T	a) 2;
T	b) 3;
N	c) 4.

Komentarz

a) Przypuśćmy, że żadna z pięciu danych liczb nie jest równa 2. Wówczas suma tych pięciu liczb jest nie mniejsza od $1+3+4+5+6=19$, a zatem nie może być równa 17.

b) Przypuśćmy, że żadna z pięciu danych liczb nie jest równa 3. Wówczas suma tych pięciu liczb jest nie mniejsza od $1+2+4+5+6=18$, a zatem nie może być równa 17.

c) Zachodzi równość $1+2+3+5+6=17$, a przy tym żaden z pięciu składników sumy po lewej stronie nie jest równy 4.

Uwaga

Liczby rozważane w zadaniu są *parami różne*, czyli żadne dwie z nich nie są równe. W szczególności pięćka liczb 1, 1, 5, 5, 5 nie spełnia warunków zadania.

4. Istnieją takie liczby całkowite x, y, z , że ujemna jest każda z liczb

T	a) $x+y, y+z, z+x$;
N	b) $x-y, y-z, z-x$;
N	c) $x \cdot y, y \cdot z, z \cdot x$.

Komentarz

a) Przyjmując $x=y=z=-1$, uzyskujemy $x+y=y+z=z+x=-2$.

b) Gdyby wszystkie trzy z liczb $x-y, y-z, z-x$ były ujemne, to ich suma byłaby również liczbą ujemną. Tymczasem

$$(x-y) + (y-z) + (z-x) = 0$$

nie jest liczbą ujemną.

c) Gdyby wszystkie trzy z liczb $x \cdot y, y \cdot z, z \cdot x$ były ujemne, to ich iloczyn również byłby liczbą ujemną. Tymczasem

$$(x \cdot y) \cdot (y \cdot z) \cdot (z \cdot x) = (x \cdot y \cdot z)^2$$

jest liczbą nieujemną jako kwadrat pewnej liczby całkowitej.

5. Liczba naturalna n jest podzielna przez 2, a liczba $n + 1$ jest podzielna przez 3.

Wynika z tego, że

N	a) liczba $n + 2$ jest podzielna przez 4;
N	b) liczba $n + 3$ jest podzielna przez 5;
T	c) liczba $n + 4$ jest podzielna przez 6.

Komentarz

a), b) Liczba $n = 8$ spełnia warunki zadania, gdyż jest podzielna przez 2, a liczba $n + 1 = 9$ jest podzielna przez 3. Jednocześnie liczba $n + 2 = 10$ nie jest podzielna przez 4, a liczba $n + 3 = 11$ nie jest podzielna przez 5.

c) Jeśli liczba n jest parzysta, to również liczba $n + 4$ jest parzysta. Jeśli liczba $n + 1$ jest podzielna przez 3, to również liczba $(n + 1) + 3 = n + 4$ jest podzielna przez 3. Skoro liczba $n + 4$ jest parzysta i podzielna przez 3, to jest podzielna przez 6.

6. Liczby całkowite a oraz b spełniają nierówność $a^3 \geq b^2$. Wynika z tego, że

T	a) $a \geq 0$;
N	b) $b \geq 0$;
N	c) $2a + b \geq 0$.

Komentarz

a) Kwadrat dowolnej liczby całkowitej jest liczbą nieujemną, wobec czego $b^2 \geq 0$. Łącząc tę obserwację z założeniem $a^3 \geq b^2$, wnioskujemy, że $a^3 \geq 0$. Stąd wynika, że $a \geq 0$.

b), c) Przyjmując $a = 9 = 3^2$ oraz $b = -27 = -3^3$, uzyskujemy $a^3 = 3^6 = b^2$. Wówczas jednak $b < 0$ oraz $2a + b = -9 < 0$.

7. Istnieje taki trójkąt, który można rozciąć na dwa trójkąty

N	a) ostrokątne;
T	b) prostokątne;
T	c) rozwartokątne.

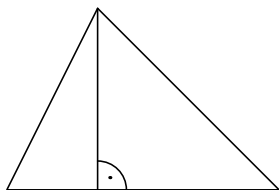
Komentarz

Zauważmy, że jeśli trójkąt jest rozcięty na dwa trójkąty, to rozcinający odcinek łączy jeden z jego wierzchołków z pewnym punktem znajdującym się na przeciwległym boku.

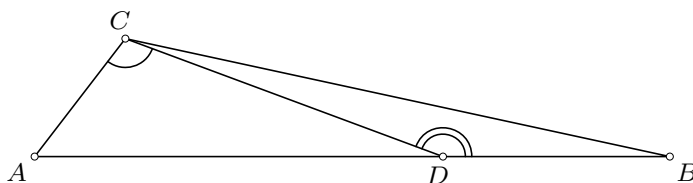
a) Przypuśćmy, że trójkąt ABC został rozcięty na trójkąty ACD i BCD . Wówczas nie jest możliwe, aby obydwa kąty ADC oraz BDC były ostre, gdyż suma ich miar wynosi 180° . To oznacza, że co najmniej jeden z trójkątów ACD i BCD nie jest ostrokątny.

b) Rozważmy dowolny trójkąt ostrokątny. Dowolna wysokość w tym trójkącie jest odcinkiem rozcinającym go na dwa trójkąty prostokątne (rys. 3).

c) Rozważmy dowolny trójkąt rozwartokątny ABC o kącie rozwartym przy wierzchołku C i wybierzmy na boku AB dowolny punkt D o tej własności, że $\sphericalangle ACD > 90^\circ$ (rys. 4). Wówczas $\sphericalangle ADC < 90^\circ$ i w konsekwencji $\sphericalangle BDC > 90^\circ$. Odcinek CD rozcina zatem trójkąt ABC na dwa trójkąty rozwartokątne.



rys. 3



rys. 4

8. Z pewnej liczby prostopadłościennych klocków o wymiarach $1 \times 2 \times 3$ można zbudować prostopadłościan o wymiarach

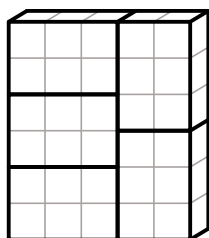
N	a) $4 \times 4 \times 4$;
T	b) $5 \times 6 \times 7$;
T	c) $7 \times 8 \times 9$.

Komentarz

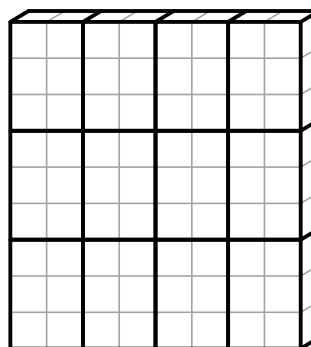
a) Objętość sześcianu o wymiarach $4 \times 4 \times 4$ jest równa 64, a objętość jednego klocka o wymiarach $1 \times 2 \times 3$ jest równa 6. Ponieważ 64 nie jest liczbą podzielną przez 6, więc nie jest możliwe zbudowanie sześcianu o krawędzi długości 4 z klocków o wymiarach $1 \times 2 \times 3$.

b) Zauważmy, że z pięciu klocków o wymiarach $1 \times 2 \times 3$ można zbudować prostopadłościan o wymiarach $1 \times 5 \times 6$ (rys. 5). W związku z tym łącząc siedem takich warstw możemy zbudować prostopadłościan o wymiarach $5 \times 6 \times 7$ (przy użyciu 35 klocków).

c) Zauważmy, że z dwunastu klocków o wymiarach $1 \times 2 \times 3$ można zbudować prostopadłościan o wymiarach $1 \times 8 \times 9$ (rys. 6). W związku z tym łącząc siedem takich warstw możemy zbudować prostopadłościan o wymiarach $7 \times 8 \times 9$ (przy użyciu 84 klocków).



rys. 5



rys. 6

9. Liczba dodatnich dzielników dodatniej liczby całkowitej a jest większa od liczby dodatnich dzielników dodatniej liczby całkowitej b . Wynika z tego, że

- ☐ N a) liczba a jest większa od liczby b ;
☐ N b) liczba $a+1$ ma więcej dodatnich dzielników niż liczba $b+1$;
☐ N c) liczba $2a$ ma więcej dodatnich dzielników niż liczba $2b$.

Komentarz

Przyjmijmy $a=8$ oraz $b=9$. Wówczas liczba a ma cztery dodatnie dzielniki: 1, 2, 4, 8, a liczba b ma trzy dodatnie dzielniki: 1, 3, 9.

- a) Dla tak dobranych liczb a, b zachodzi nierówność $a < b$.
b) Liczba $b+1=10$ ma cztery dodatnie dzielniki: 1, 2, 5, 10, a liczba $a+1=9$ ma trzy dodatnie dzielniki.
c) Liczba $2a=16$ ma pięć dodatnich dzielników: 1, 2, 4, 8, 16, a liczba $2b=18$ ma sześć dodatnich dzielników: 1, 2, 3, 6, 9, 18.

10. W trójkącie ABC kąt przy wierzchołku A ma miarę 60° . Wysokość CD dzieli bok AB na odcinki długości $AD=2$ i $BD=6$. Wynika z tego, że

- ☐ T a) jeden z boków trójkąta ABC jest dwa razy dłuższy od innego boku tego trójkąta;
☐ T b) jeden z kątów trójkąta ABC jest dwa razy większy od innego kąta tego trójkąta;
☐ N c) pole trójkąta BCD jest dwa razy większe od pola trójkąta ACD .

Komentarz

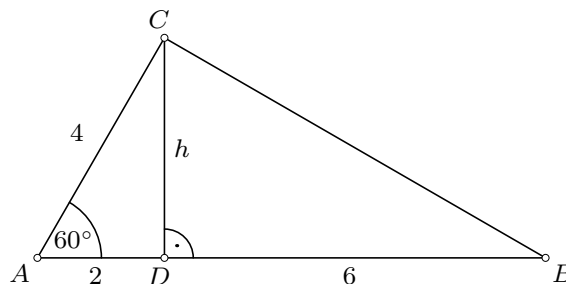
a) Trójkąt prostokątny ACD jest połową trójkąta równobocznego, skąd wniosek, że $AC=2 \cdot AD=4$. Wobec tego $AB=8=2 \cdot AC$.

b) Skoro w trójkącie ABC kąt przy wierzchołku A ma miarę 60° oraz $AB=2 \cdot AC$, to ten trójkąt również jest połową trójkąta równobocznego i wobec tego $\sphericalangle ABC=30^\circ$.

c) Niech h będzie długością odcinka CD (rys. 7). Oznaczając przez $[T]$ pole trójkąta T , mamy więc

$$[ACD] = \frac{1}{2} AD \cdot h \quad \text{oraz} \quad [BCD] = \frac{1}{2} BD \cdot h.$$

Stąd wniosek, że $[BCD] = 3 \cdot [ACD]$, gdyż $BD = 3 \cdot AD$.



rys. 7

11. Liczby dodatnie x oraz y spełniają równość $x + y = x \cdot y$. Wynika z tego, że liczba

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ jest równa

☐ N

a) $\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y}$;

☐ T

b) $\frac{1}{x-1} \cdot \frac{1}{y-1}$;

☐ T

c) 1.

Komentarz

a) Liczby $x = y = 2$ spełniają równość $x + y = x \cdot y$, ale

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1 \neq \frac{1}{4} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y}.$$

b), c) Sprowadzając składniki rozważanej sumy do wspólnego mianownika i korzystając z założenia $x + y = x \cdot y$, uzyskujemy

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{y}{x \cdot y} + \frac{x}{x \cdot y} = \frac{y+x}{x \cdot y} = 1.$$

Zauważmy ponadto, że

$$\frac{1}{x-1} \cdot \frac{1}{y-1} = \frac{1}{(x-1)(y-1)} = \frac{1}{x \cdot y - (x+y) + 1} = 1,$$

przy czym ponownie skorzystaliśmy z założenia $x + y = x \cdot y$.

Uwaga

Jeśli liczby x, y spełniają warunek $x + y = x \cdot y$, to $x \neq 1$ oraz $y \neq 1$, czyli liczby $x - 1$ oraz $y - 1$ są różne od zera. Istotnie, dla dowolnej liczby x mamy $x + 1 \neq x \cdot 1$, a zatem $y \neq 1$ (analogicznie można uzasadnić, że $x \neq 1$).

12. Istnieje taki sześcian, że długość jego krawędzi jest liczbą naturalną oraz

☐ T

a) suma długości jego wszystkich krawędzi jest kwadratem liczby naturalnej;

☐ N

b) jego pole powierzchni całkowitej jest kwadratem liczby naturalnej;

☐ T

c) jego objętość jest kwadratem liczby naturalnej.

Komentarz

Suma długości wszystkich krawędzi sześcianu o krawędzi długości n jest równa $12n$. Pole powierzchni całkowitej takiego sześcianu jest równe $6n^2$, a jego objętość jest równa n^3 .

a) Jeżeli $n = 12$, to suma długości krawędzi sześcianu jest równa 12^2 .

c) Jeżeli $n = 1$, to objętość sześcianu jest równa 1^2 .

b) Skorzystamy z następującego faktu: liczba całkowita większa od 1 jest kwadratem liczby całkowitej wtedy i tylko wtedy, gdy w jej rozkładzie na czynniki pierwsze wszystkie wykładniki są parzyste. Innymi słowy, w rozkładzie kwadratu liczby całkowitej większej od 1 na czynniki pierwsze każda liczba pierwsza występuje parzystą liczbę razy.

Zgodnie z przytoczonym faktem, w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby n^2 liczba 2 występuje z parzystym wykładnikiem. W rozkładzie na czynniki pierwsze liczby $6n^2 = 2 \cdot 3 \cdot n^2$ czynnik 2 występuje z o jeden większym, a więc nieparzystym wykładnikiem. To oznacza, że liczba $6n^2$ nie jest kwadratem liczby całkowitej.

Uwaga

Przytoczona własność charakteryzująca kwadraty liczb całkowitych większych od 1 została omówiona, wraz z dowodem i przykładowymi zastosowaniami, w artykule „Kwadraty i dzielniki” (*Kwadrat nr 11*, grudzień 2013, twierdzenie 2.).

13. Punkt P leży wewnątrz trójkąta ABC . Wynika z tego, że

N	a) suma długości odcinków AP i BP jest większa od długości odcinka CP ;
T	b) suma obwodów trójkątów ACP i BCP jest większa od obwodu trójkąta ABP ;
N	c) suma pól trójkątów ACP i BCP jest większa od pola trójkąta ABP .

Komentarz

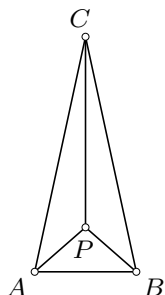
a) Rozważmy trójkąt ABP , w którym $AP = BP = 1$. Niech C będzie takim punktem, że $CP > 2$ oraz punkt P znajduje się wewnątrz ABC (rys. 8). Wówczas $AP + BP < CP$.

b) Zauważmy, że zachodzą nierówności $AC + BC > AB$ oraz $CP > 0$. Wobec tego

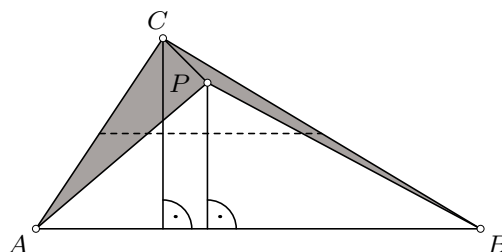
$$(AC + CP + AP) + (BC + CP + BP) = AP + BP + (AC + BC) + 2 \cdot CP > AP + BP + AB,$$

czyli suma obwodów trójkątów ACP i BCP jest większa od obwodu trójkąta ABP .

c) Rozważmy dowolny trójkąt ABC i oznaczmy przez h długość wysokości poprowadzonej z wierzchołka C . Wybierzmy wewnątrz trójkąta dowolny punkt P , którego odległość od prostej AB jest większa od $\frac{1}{2}h$ (rys. 9). Wówczas pole trójkąta ABP jest większe od połowy pola trójkąta ABC , a co za tym idzie — pole czworokąta $APBC$ jest mniejsze od połowy pola trójkąta ABC . W konsekwencji suma pól trójkątów ACP i BCP jest mniejsza od pola trójkąta ABP .



rys. 8



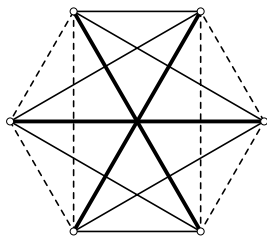
rys. 9

14. W gronie sześciu osób każda zna dokładnie trzy spośród pozostałych pięciu osób, przy czym jeśli osoba A zna osobę B , to również osoba B zna osobę A . Wynika z tego, że

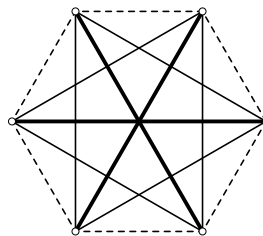
- ☐ N a) pewne trzy spośród tych sześciu osób wzajemnie się znają;
☐ N b) pewne trzy spośród tych sześciu osób wzajemnie się nie znają;
☐ T c) można te sześć osób podzielić na trzy pary znających się osób.

Komentarz

Zauważmy, że w rozważanej grupie każdy ma dokładnie dwóch nieznanymych pośród pozostałych pięciu osób. Wyobraźmy sobie, że każdy podaje rękę każdemu ze swoich nieznanymych (jednemu lewą, jednemu prawą). W taki sposób wszystkie uściski rąk tworzą „cykle” złożone z co najmniej trzech osób. To oznacza, że wszystkie nieznanomości w grupie układają się albo w dwa „trójkąty” (rys. 10), albo w jeden „sześciokąt” (rys. 11), przy czym na ilustracjach odcinki przerywane oznaczają nieznanomości, a odcinki ciągłe — znajomości.



rys. 10



rys. 11

- a) Jeśli układ znajomości wygląda tak, jak na rysunku 10, to nie ma takich trzech osób, które wzajemnie się znają.
b) Jeśli układ znajomości wygląda tak, jak na rysunku 11, to nie ma takich trzech osób, które wzajemnie się nie znają.
c) W obydwu możliwych sytuacjach można znaleźć odpowiednie sposoby podziału na pary — są one zaznaczone na rysunkach 10 i 11 przy użyciu pogrubionych odcinków.

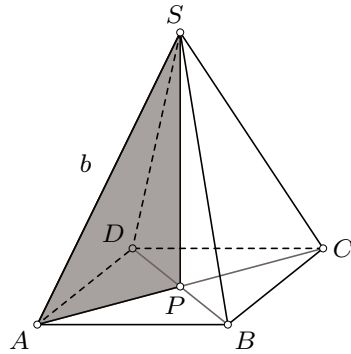
15. W pewnym ostrosłupie prawidłowym czworokątnym długość krawędzi podstawy jest równa 2, a długość krawędzi bocznej jest równa b . Wynika z tego, że

- ☐ T a) $b > \sqrt{2}$;
☐ T b) wysokość tego ostrosłupa jest mniejsza od b ;
☐ T c) pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa jest większe od 4.

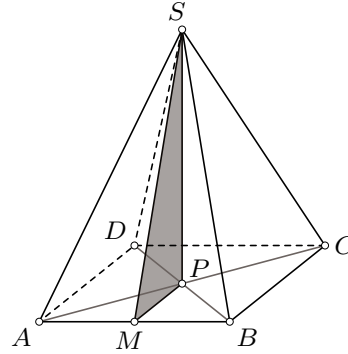
Komentarz

Oznaczmy kwadrat w podstawie danego ostrosłupa przez $ABCD$, środek podstawy przez P , środek odcinka AB przez M , a wierzchołek ostrosłupa — przez S .

a), b) W trójkącie prostokątnym APS przeciwprostokątna AS o długości b jest dłuższa zarówno od przyprostokątnej AP o długości $\frac{1}{2} \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$, jak i od przyprostokątnej PS , która jest wysokością danego ostrosłupa (rys. 12).



rys. 12



rys. 13

c) W trójkącie prostokątnym MPS przeciwprostokątna MS jest dłuższa od przyprostokątnej MP (rys. 13). W konsekwencji pole ściany ABS , równe $\frac{1}{2} \cdot AB \cdot MS$, jest większe od $\frac{1}{2} \cdot AB \cdot MP$, czyli pola trójkąta ABP . Analogicznie uzasadniamy, że pola ścian BCS , CDS , DAS są większe odpowiednio od pól trójkątów BCP , CDP , DAP . Pole powierzchni bocznej ostrosłupa jest zatem większe od pola podstawy tego ostrosłupa, które jest równe 4.

XVII Olimpiada Matematyczna Juniorów

Statystyki dotyczące części testowej

zawodów pierwszego stopnia (2021/2022)

(23 września 2021 r.)

Tabela 1.

Procentowa liczba poprawnych odpowiedzi w poszczególnych podpunktach.

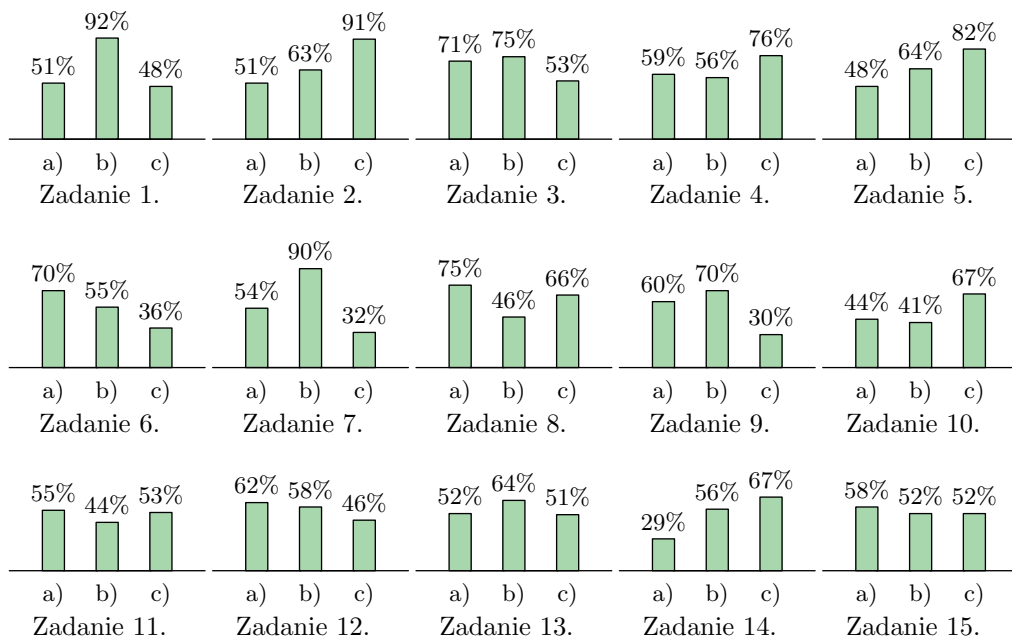
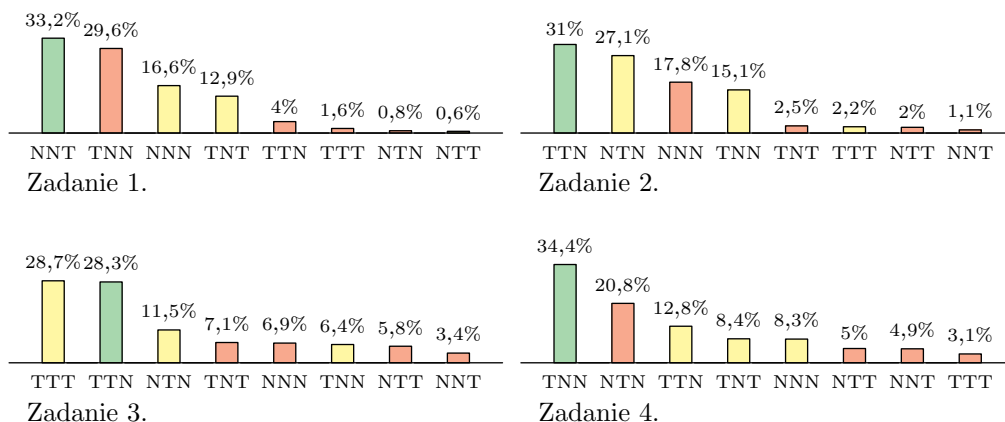
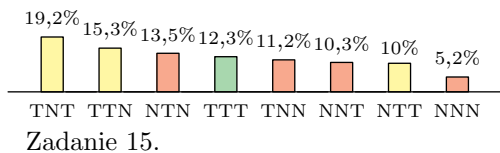
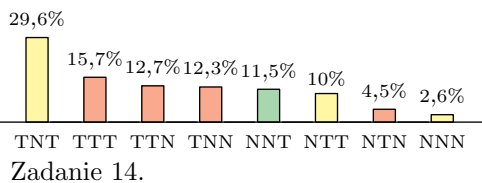
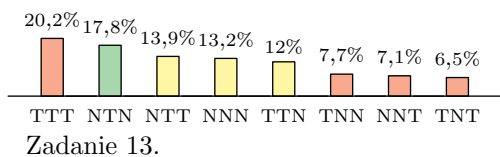
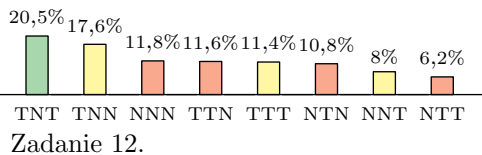
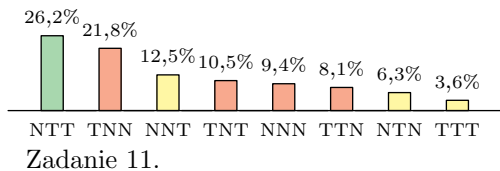
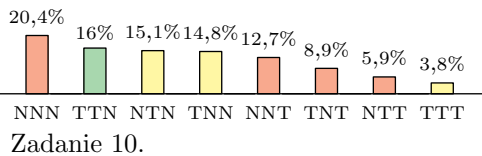
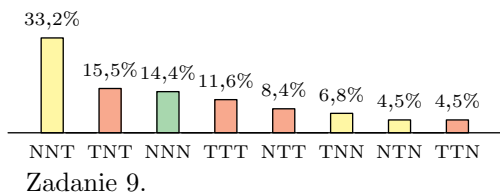
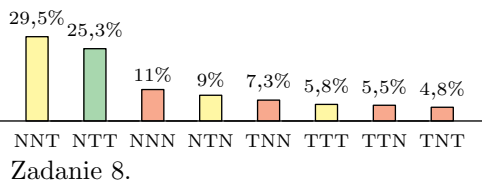
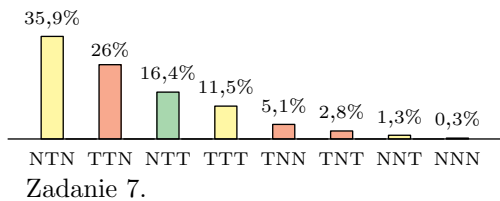
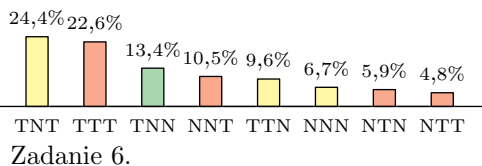
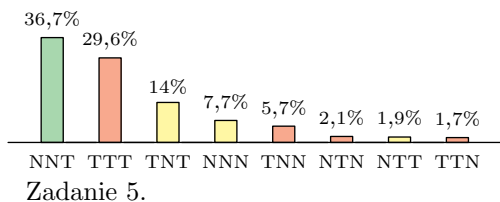


Tabela 2.

Procentowa liczba udzielonych kombinacji odpowiedzi w poszczególnych zadaniach.





Zestaw odpowiedzi za:

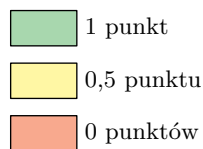


Tabela 3.

Rzeczywista oraz procentowa liczba osób, które uzyskały daną sumę punktów.

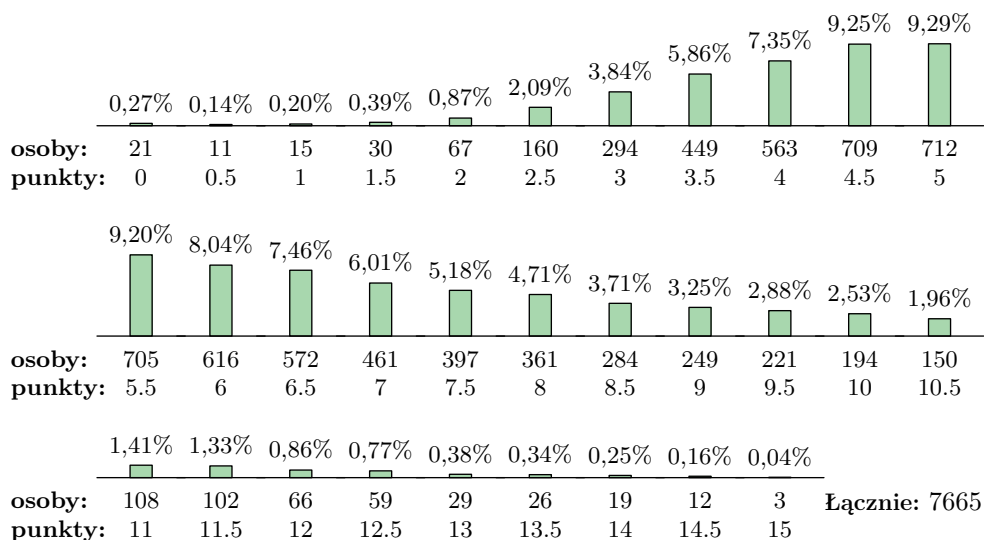


Tabela 4.

Procentowa i rzeczywista liczba osób, które uzyskały daną lub większą sumę punktów.

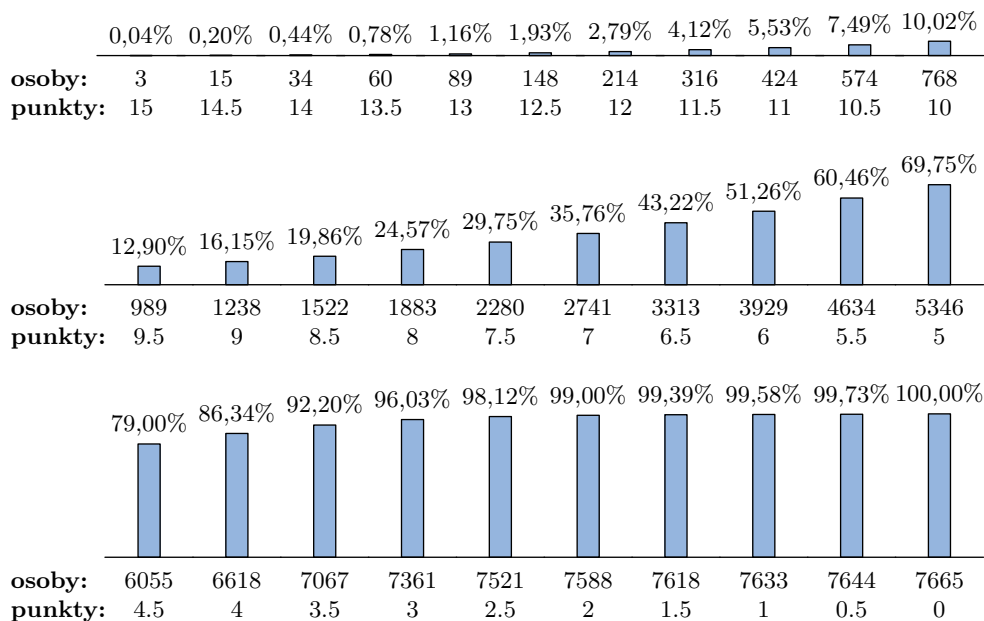


Tabela 5.

Procentowa liczba uzyskanych punktów za poszczególne zadania.

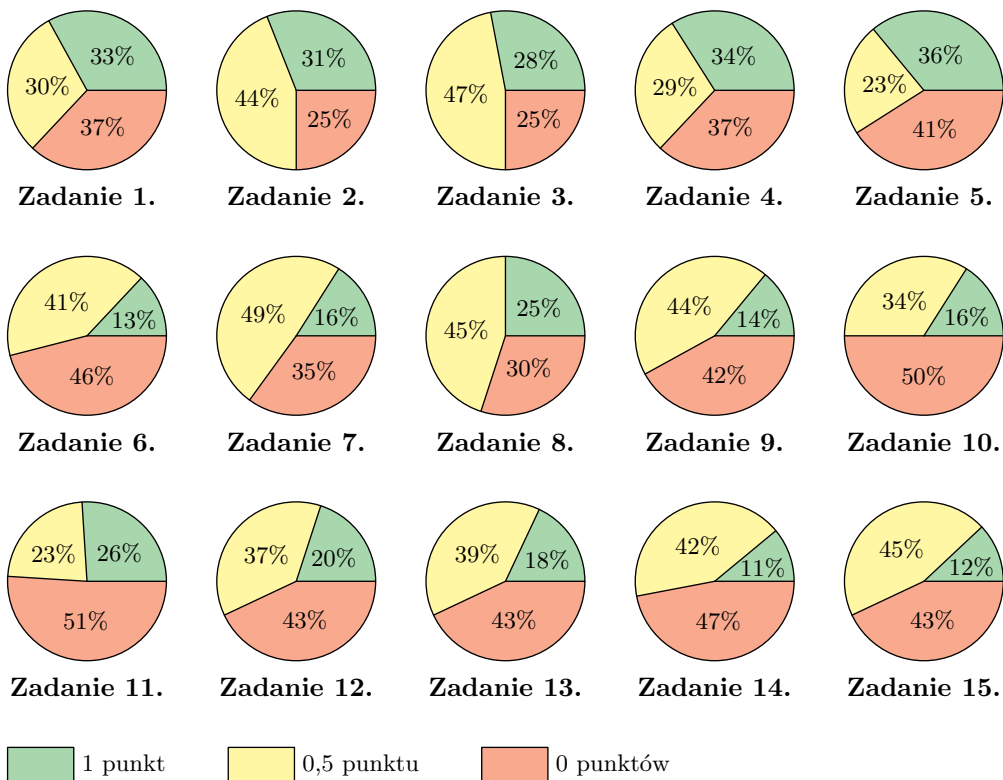


Tabela 6.

Średnia z uzyskanych punktów za poszczególne zadania.

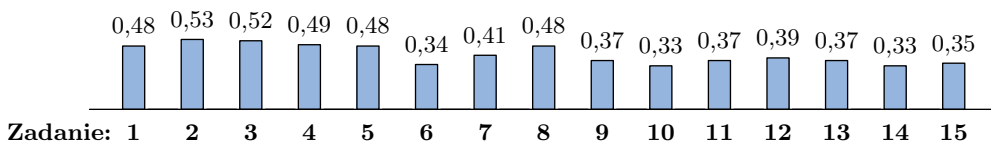


Tabela 7.

Średnia uzyskanych punktów ze wszystkich zadań w podziale na województwa i inne regiony.

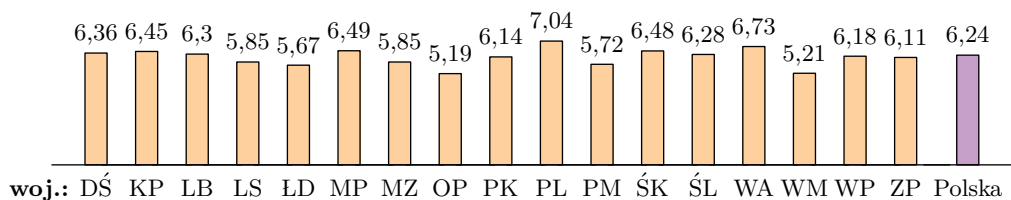


Tabela 8.

Liczba uczniów, którzy wzięli udział w zawodach w podziale na województwa.

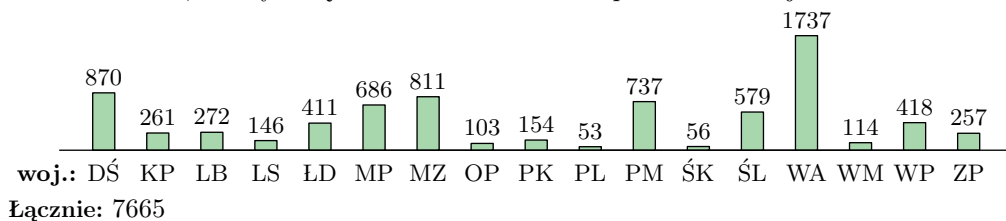


Tabela 9.

Liczba szkół, których uczniowie wzięli udział w zawodach w podziale na województwa.

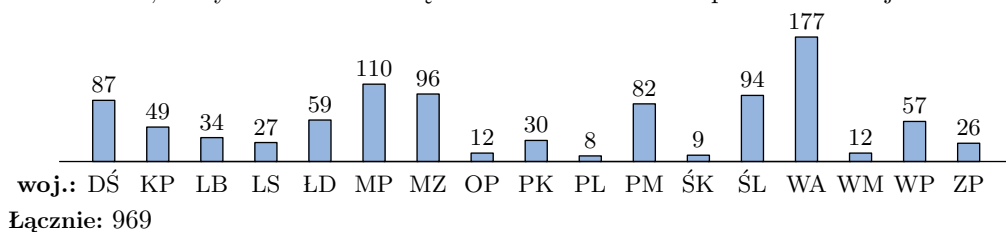


Tabela 10.

Rzeczywista i procentowa liczba powiatów w danym województwie, z których co najmniej jedna szkoła wzięła udział w zawodach.

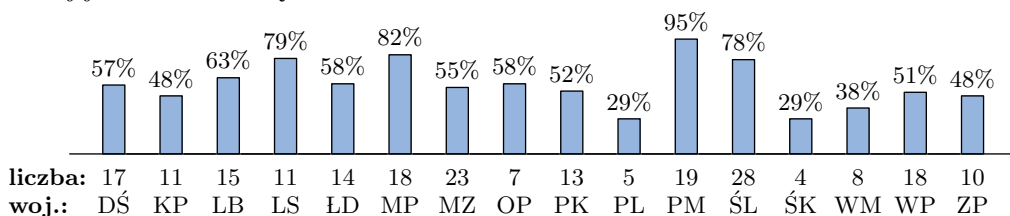
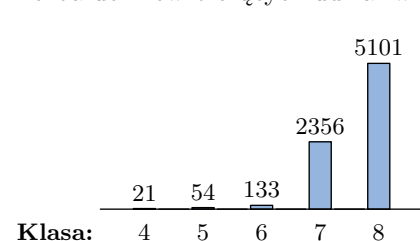


Tabela 11.

Liczba uczniów biorących udział w teście w podziale na klasy.



Łącznie: 7665

Skróty województw i innych regionów

DŚ — dolnośląskie

LB — lubelskie

ŁD — łódzkie

MZ — mazowieckie bez m.st. Warszawy

PK — podkarpackie

PM — pomorskie

ŚL — śląskie

WM — warmińsko-mazurskie

ZP — zachodniopomorskie

KP — kujawsko-pomorskie

LS — lubuskie

MP — małopolskie

OP — opolskie

PL — podlaskie

ŚK — świętokrzyskie

WA — m.st. Warszawa

WP — wielkopolskie



Ministerstwo
Edukacji i Nauki



Stowarzyszenie
na rzecz Edukacji
Matematycznej

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji i Nauki

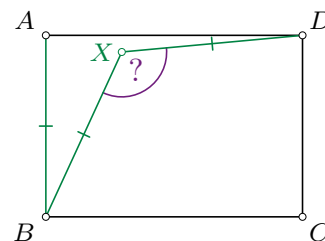
XVII Olimpiada Matematyczna Juniorów (2021/22)

Zadania konkursowe zawodów pierwszego stopnia —
część korespondencyjna

(1 września – 11 października 2021 r.)

1. W klasie Marka jest 17 uczniów i wszyscy napisali test. Marek uzyskał wynik o 17 punktów wyższy od średniej arytmetycznej wyników pozostałych uczniów. O ile punktów wynik Marka jest wyższy od średniej arytmetycznej wyników całej klasy? Odpowiedź uzasadnij.

2. W prostokącie $ABCD$ stosunek długości boków $BC:AB$ jest równy $\sqrt{2}$. Wewnątrz tego prostokąta zaznaczono taki punkt X , że $AB = BX = XD$. Wyznacz miarę kąta BXD .



Zadanie 2.

3. Niech $n \geq 1$ będzie liczbą całkowitą. Wykaż, że istnieje taka liczba całkowita, która jest większa od $\sqrt{2n}$ i mniejsza od $\sqrt{5n}$.

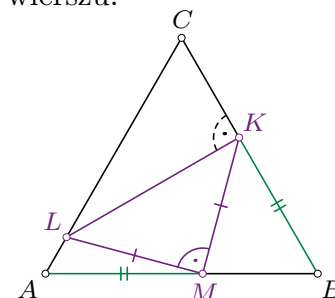
4. W każde pole poniższej tabeli należy wpisać inną liczbę całkowitą spośród liczb od 1 do 17 w taki sposób, aby sumy liczb we wszystkich ośmiu kolumnach były równe, a suma liczb w górnym wierszu była dwa razy większa od sumy liczb w dolnym wierszu.

Której z liczb od 1 do 17 można nie wpisać do tabeli? Podaj wszystkie takie liczby. Odpowiedź uzasadnij.

5. Punkty K, L, M leżą odpowiednio na bokach BC, CA, AB trójkąta równobocznego ABC i spełniają warunki

$$KM = LM, \quad \sphericalangle KML = 90^\circ \quad \text{oraz} \quad AM = BK.$$

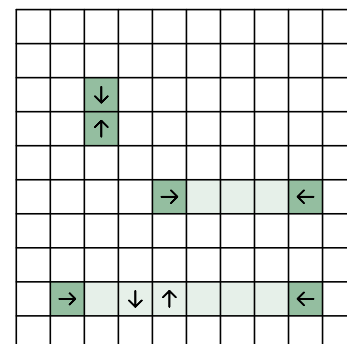
Udowodnij, że $\sphericalangle CKL = 90^\circ$.



Zadanie 5.

6. W każdym polu tablicy 10×10 znajduje się strzałka skierowana w górę, w dół, w lewo lub w prawo. Wykaż, że można tak usunąć z tablicy 50 strzałek, aby żadne dwie z pozostałych nie wskazywały na siebie nawzajem.

Uwaga: Strzałki wskazują na siebie nawzajem także wtedy, gdy ich pola nie sąsiadują lub gdy pomiędzy nimi są inne strzałki.



Zadanie 6.

7. Wybrano n (niekoniecznie różnych) cyfr, z których żadna nie jest równa 0 ani 7. Okazało się, że każda liczba n -cyfrowa zapisana wszystkimi wybranymi cyframi jest podzielna przez 7. Udowodnij, że liczba n jest podzielna przez 6.

Rozwiązania powyższych zadań (wszystkich lub części z nich) należy przekazać szkolnemu koordynatorowi OMJ lub przesłać bezpośrednio, listem poleconym, do Komitetu Okręgowego OMJ właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

11 października 2021 r. (decyduje data stempla pocztowego).

Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym lub pod niewłaściwy adres nie będą rozpatrywane. Adresy Komitetów Okręgowych OMJ, szczegółowe wytyczne dotyczące sposobu redakcji rozwiązań i przesyłania prac, a także regulamin OMJ i inne bieżące informacje znajdują się na stronie internetowej Olimpiady: www.omj.edu.pl.

XVII Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody pierwszego stopnia (1 września – 11 października 2021 r.)

Rozwiązania zadań konkursowych

1. W klasie Marka jest 17 uczniów i wszyscy napisali test. Marek uzyskał wynik o 17 punktów wyższy od średniej arytmetycznej wyników pozostałych uczniów. O ile punktów wynik Marka jest wyższy od średniej arytmetycznej wyników całej klasy? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie

Sposób I

Oznaczmy wynik Marka przez m . Wówczas średnia arytmetyczna wyników pozostałych 16 uczniów to $m - 17$, a zatem suma uzyskanych przez nich wyników to $16 \cdot (m - 17)$. Wobec tego suma wyników uzyskanych przez całą klasę jest równa

$$16 \cdot (m - 17) + m = 16 \cdot m - 16 \cdot 17 + m = 17m - 16 \cdot 17 = 17 \cdot (m - 16).$$

W rezultacie, średnia arytmetyczna wyników całej klasy to

$$\frac{17 \cdot (m - 16)}{17} = m - 16.$$

Odpowiedź: Wynik Marka jest o 16 punktów wyższy od średniej arytmetycznej wyników całej klasy.

Uwaga 1.

Podobny ciąg obliczeń można przeprowadzić używając innych oznaczeń. Przykładowo, jeśli oznaczymy przez x średnią arytmetyczną 16 uczniów różnych od Marka, to suma ich wyników będzie równa $16x$, suma wyników całej klasy będzie równa $17x + 17$, a średni wynik całej klasy będzie równy $x + 1$, czyli o 16 mniej niż wynik Marka: $x + 17$.

Sposób II

Z warunków zadania wynika, że Marek ma co najmniej 17 punktów. Przypuśćmy, że Marek przekazał każdej z pozostałych osób w klasie po jednym punkcie. Zauważmy, że w wyniku opisaney zmiany łączny wynik wszystkich uczniów pozostał taki sam, jak przed jej dokonaniem. Wobec tego nie zmieniła się także średnia arytmetyczna wyników całej klasy.

Średnia arytmetyczna wyników uczniów różnych od Marka wzrosła o 1, gdyż każdy z nich otrzymał 1 dodatkowy punkt. Wobec tego nowy wynik Marka (o 16 punktów niższy niż początkowy) jest równy nowej średniej pozostałych uczniów — jest to więc także średni wynik wszystkich uczniów w klasie. Stąd wniosek, że średnia arytmetyczna wyników całej klasy (niezmieniona w stosunku do początkowej) jest o 16 punktów niższa od (początkowego) wyniku Marka.

Uwaga 2.

Z warunków zadania wynika, że wynik Marka nie mógł być najniższym spośród wyników uzyskanych w jego klasie. Okazuje się, że mógł być drugim najniższym — przykładowo jeśli założymy, że 15 spośród uczniów różnych od Marka uzyskało wynik 289 punktów, Marek — 288 punktów, a pozostały uczeń — 1 punkt, to warunki zadania są spełnione.

2. W prostokącie $ABCD$ stosunek długości boków $BC : AB$ jest równy $\sqrt{2}$. Wewnątrz tego prostokąta zaznaczono taki punkt X , że $AB = BX = XD$. Wyznacz miarę kąta BXD .

Rozwiązanie

Sposób I

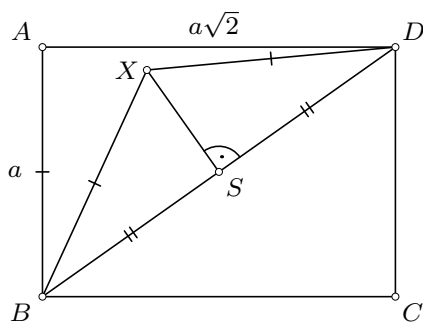
Przyjmijmy, że $AB = a$. Wówczas $AD = BC = a\sqrt{2}$. Z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkąta ABD wynika, że

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 = a^2 + (a\sqrt{2})^2 = 3a^2, \quad \text{skąd} \quad BD = a\sqrt{3}.$$

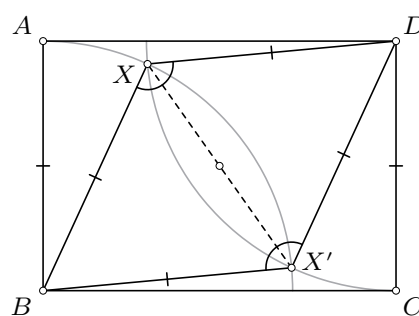
Oznaczmy przez S środek odcinka BD (rys. 1). Ponieważ $BX = XD$, więc odcinek XS jest wysokością trójkąta równoramiennego BDX . W konsekwencji, ponownie korzystając z twierdzenia Pitagorasa, tym razem dla trójkąta SXD , uzyskujemy

$$XS^2 = XD^2 - SD^2 = a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}, \quad \text{skąd} \quad XS = \frac{a}{2}.$$

Trójkąt prostokątny SXD ma boki długości a , $\frac{a}{2}$, $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, jest więc połową trójkąta równobocznego o boku a i w szczególności $\sphericalangle SXD = 60^\circ$. W konsekwencji $\sphericalangle BXD = 2 \cdot 60^\circ = 120^\circ$.



rys. 1



rys. 2

Uwaga 1.

W przeprowadzonym rozumowaniu można bez straty ogólności założyć, że a jest konkretną liczbą dodatnią, np. $a = 1$. Wynika to z faktu, że *skalowanie* konfiguracji z treści zadania nie ma wpływu na miarę szukanego kąta.

Uwaga 2.

Równość $BX = XD = a$ oznacza, że punkt X jest jednym z punktów przecięcia okręgów o promieniu a oraz środkach B i D . Ponieważ odległość między środkami tych okręgów, równa $a\sqrt{3}$, jest mniejsza od sumy długości ich promieni, równej $2a$, więc te okręgi przecinają się w dwóch różnych punktach. Istnieją więc dwa punkty X spełniające warunki zadania (rys. 2). Są one wierzchołkami trójkątów równoramiennych o podstawie BD i ramieniu a znajdującymi się po różnych stronach prostej BD . Odpowiedź jest niezależna od tego, który z punktów zostanie wybrany, gdyż są one symetryczne względem środka prostokąta $ABCD$.

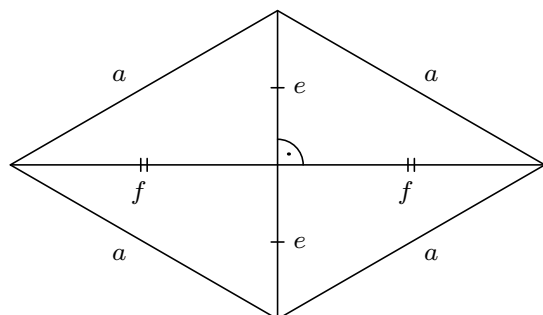
Sposób II

W rozwiązaniu wykorzystamy następujący fakt:

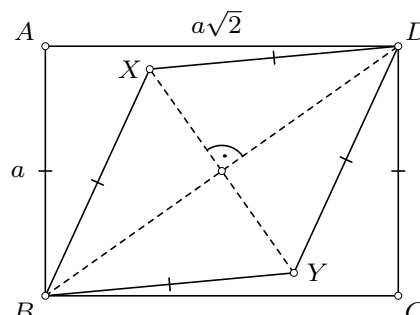
Suma kwadratów długości przekątnych rombu o boku długości a jest równa $4a^2$.

Aby przekonać się o jego prawdziwości zauważmy najpierw, że przekątne rombu są prostopadłe i dzielą się na połowy. Jeśli więc przyjmiemy, że przekątne rombu o boku długości a mają długości $2e$ oraz $2f$ (rys. 3), to po narysowaniu tych przekątnych uzyskamy cztery przystające trójkąty prostokątne o przyprostokątnych długości e i f . Z twierdzenia Pitagorasa wynika więc, że $e^2 + f^2 = a^2$. Suma kwadratów długości przekątnych jest zatem równa

$$(2e)^2 + (2f)^2 = 4e^2 + 4f^2 = 4(e^2 + f^2) = 4a^2.$$



rys. 3



rys. 4

Przechodzimy do rozwiązania. Oznaczmy przez Y punkt symetryczny do punktu X względem środka prostokąta $ABCD$ (rys. 4). Wówczas czworokąt $BXDY$ jest rombem. Przyjmijmy, że $AB = a$, czyli a jest długością boku uzyskanego rombu. Wówczas $AD = a\sqrt{2}$ oraz podobnie jak w poprzednim sposobie

$$BD^2 = a^2 + (a\sqrt{2})^2 = 3a^2.$$

Wykorzystując udowodniony na początku fakt mamy więc

$$4a^2 = BD^2 + XY^2 = 3a^2 + XY^2, \quad \text{skąd} \quad a^2 = XY^2, \quad \text{czyli} \quad XY = a.$$

Skoro długość XY jest równa długości każdego z boków rombu $BXDY$, to trójkąty BXY oraz DXY są równoboczne. Zatem $\angle BXD = 2 \cdot 60^\circ = 120^\circ$.

Uwaga 3.

Prawdziwy jest ogólniejszy fakt niż przytoczony w powyższym rozwiązaniu, nazywany czasem *tożsamością równoległoboku*:

W każdym równoległoboku suma kwadratów długości wszystkich czterech boków jest równa sumie kwadratów długości przekątnych.

Dowód można przeprowadzić korzystając wielokrotnie z twierdzenia Pitagorasa.

Uwaga 4.

Proporcje danego w treści zadania prostokąta są tak dobrane, że po podzieleniu go na pół wzdłuż prostej łączącej środki dłuższych boków, uzyskamy dwa mniejsze prostokąty podobne do wyjściowego (tzn. o takich samych jak on proporcjach boków). Fakt ten jest powodem, dla którego stosowane powszechnie arkusze papieru (np. formatu A4) mają stosunek długości boków bardzo zbliżony do $\sqrt{2}$.

W związku z powyższym konfiguracja z zadania pozwala na konstrukcję dobrego przybliżenia kąta 120° za pomocą składania kartki papieru.

3. Niech $n \geq 1$ będzie liczbą całkowitą. Wykaż, że istnieje taka liczba całkowita, która jest większa od $\sqrt{2n}$ i mniejsza od $\sqrt{5n}$.

Rozwiązanie

Sposób I

W rozwiązaniu wykorzystamy obserwację mówiącą, że jeśli różnica dwóch liczb jest większa od 1, to pomiędzy nimi jest pewna liczba całkowita:

Jeśli liczby x i y spełniają warunek $y - x > 1$, to istnieje taka liczba całkowita, która jest większa od x i mniejsza od y .

Krótkie uzasadnienie tej obserwacji jest następujące. Oznaczmy przez m najmniejszą liczbę całkowitą większą od x . Wówczas

$$x < m \leq x + 1 < y,$$

więc liczba m jest mniejsza od liczby y .

Przechodzimy do rozwiązania. Zauważmy, że $\sqrt{2} < 2 < \sqrt{5}$, co potwierdza tezę zadania dla $n = 1$. Przyjmijmy dalej, że $n \geq 2$. Wówczas $\sqrt{n} \geq \sqrt{2}$, a zatem

$$\sqrt{5n} - \sqrt{2n} = \sqrt{n} \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{2}) \geq \sqrt{2} \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{2}) = \sqrt{10} - 2 > 3 - 2 = 1.$$

W rezultacie, różnica pomiędzy liczbami $\sqrt{5n}$ oraz $\sqrt{2n}$ jest większa od 1. Na mocy przytoczonej obserwacji wynika z tego, że ściśle pomiędzy tymi liczbami jest liczba całkowita.

Uwaga 1.

Wykorzystaną obserwację można w naturalny sposób zilustrować na osi liczbowej. Intuicyjnie oznacza ona, że odcinek o długości większej od 1 *nie mieści się* pomiędzy dwiema kolejnymi liczbami całkowitymi, czyli w odcinku o długości 1.

Uwaga 2.

Okazuje się, że dla dowolnej pary liczb dodatnich $a < b$ pomiędzy liczbami $a\sqrt{n}$ oraz $b\sqrt{n}$ znajduje się liczba całkowita dla *dostatecznie dużych wartości n* . Naśladując przedstawione wyżej rozumowanie można udowodnić, że aby taka liczba istniała, wystarczy aby spełniona była nierówność $b\sqrt{n} - a\sqrt{n} > 1$, czyli $n > 1/(b-a)^2$. Jak widać, im mniejsza jest różnica $b-a$, tym większe są wartości n , dla których powyższa nierówność jest spełniona.

Sposób II

Zauważmy, że wystarczy wykazać, że dla każdej liczby całkowitej $n \geq 1$ pomiędzy liczbami $2n$ oraz $5n$ jest liczba m będąca kwadratem liczby całkowitej. Jeśli bowiem $2n < m < 5n$, to $\sqrt{2n} < \sqrt{m} < \sqrt{5n}$, gdzie $\sqrt{m}$ jest liczbą całkowitą.

Dla $n = 1$ wystarczy przyjąć $m = 4$. W dalszej części rozwiązania założymy, że $n \geq 2$.

Oznaczmy przez k największą taką liczbę całkowitą, że $k^2 \leq 2n$. Wówczas liczba $(k+1)^2$ jest większa od $2n$, czyli

$$k^2 \leq 2n < (k+1)^2.$$

Wykażemy, że liczba $(k+1)^2$ jest mniejsza od $5n$, co zakończy rozwiązanie. Zauważmy, że skoro $n \geq 2$, to $k \geq 2$ i w konsekwencji $k^2 \geq 2k$. Wobec tego

$$(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1 \leq k^2 + k^2 + 1 = 2k^2 + 1 \leq 2 \cdot 2n + 1 = 4n + 1 < 4n + n = 5n.$$

4. W każde pole poniższej tabeli należy wpisać inną liczbę całkowitą spośród liczb od 1 do 17 w taki sposób, aby sumy liczb we wszystkich ośmiu kolumnach były równe, a suma liczb w górnym wierszu była dwa razy większa od sumy liczb w dolnym wierszu.

Której z liczb od 1 do 17 można nie wpisać do tabeli? Podaj wszystkie takie liczby. Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie

Sposób I

Oznaczmy przez n liczbę niewpisaną do tabeli. To oznacza, że suma wszystkich liczb wpisanych do tabeli jest równa

$$1 + 2 + 3 + \dots + 17 - n = 153 - n.$$

Z warunków zadania wynika jednocześnie, że suma wszystkich liczb wpisanych do tabeli jest:

- podzielna przez 3, gdyż jest trzykrotnością sumy liczb wpisanych do dolnego wiersza;
- podzielna przez 8, gdyż jest ośmiokrotnością sumy liczb wpisanych do każdej kolumny.

W konsekwencji liczba $153 - n$ jest podzielna przez 24. Ponadto, ponieważ $1 \leq n \leq 17$, mamy

$$136 \leq 153 - n \leq 152.$$

Stąd wniosek, że $153 - n = 144$ i w konsekwencji $n = 9$.

Pozostaje wskazać sposób wpisania liczb z pominięciem liczby 9, który spełnia warunki zadania (rys. 5).

17	16	3	14	13	12	11	10
1	2	15	4	5	6	7	8

rys. 5

Uwaga

Z dokładnością do kolejności kolumn są tylko cztery możliwości wpisania liczb w pola tablicy zgodnie z warunkami zadania (rys. 5–8).

17	16	15	4	13	12	11	8
1	2	3	14	5	6	7	10

rys. 6

17	16	15	14	5	12	7	10
1	2	3	4	13	6	11	8

rys. 7

17	16	15	14	13	6	7	8
1	2	3	4	5	12	11	10

rys. 8

Sposób II

Niech k oznacza sumę liczb w każdej z kolumn po wypełnieniu tabeli zgodnie z warunkami zadania. Zauważmy, że gdyby liczba k była mniejsza od 17, to w tabeli nie mogłaby się znaleźć żadna z liczb 16, 17 (gdyż jako drugą liczbę w tej samej kolumnie należałoby wpisać 0 lub -1). To przeczy założeniu, że tylko jedna z liczb od 1 do 17 pozostaje niewykorzystana. Podobnie gdyby liczba k była większa od 19, to w tabeli nie mogłaby się pojawić żadna z liczb 1, 2, wbrew założeniu, że pomijamy tylko jedną liczbę. To oznacza, że k jest jedną z liczb: 17, 18, 19.

Niech w oznacza sumę liczb wpisanych w dolnym wierszu tabeli. Wówczas $2w$ jest sumą liczb wpisanych w jej górnym wierszu, a suma liczb wpisanych w całej tabeli jest równa $3w$. Z drugiej strony suma liczb w tabeli jest równa $8k$, co oznacza, że k jest liczbą podzielną przez 3. W konsekwencji k może być równe jedynie liczbie 18, gdyż 17 oraz 19 nie są liczbami podzielnymi przez 3.

Liczba 18 ma 8 przedstawień jako suma dwóch różnych liczb całkowitych od 1 do 17:

$$1 + 17 = 2 + 16 = 3 + 15 = 4 + 14 = 5 + 13 = 6 + 12 = 7 + 11 = 8 + 10,$$

więc w każdą kolumnę tabeli wpisane są składniki innego spośród tych ośmiu przedstawień. To oznacza, że jeśli wypełnienie tablicy zgodnie z warunkami zadania jest możliwe, to niewykorzystaną liczbą jest 9. Aby zakończyć rozwiązanie, należy podać przykład wypełnienia tabeli liczbami z pominięciem liczby 9 (rys. 5–8).

5. Punkty K, L, M leżą odpowiednio na bokach BC, CA, AB trójkąta równobocznego ABC i spełniają warunki

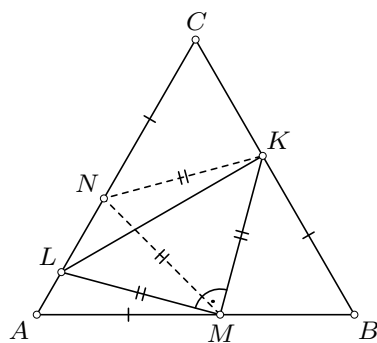
$$KM = LM, \quad \sphericalangle KML = 90^\circ \quad \text{oraz} \quad AM = BK.$$

Udowodnij, że $\sphericalangle CKL = 90^\circ$.

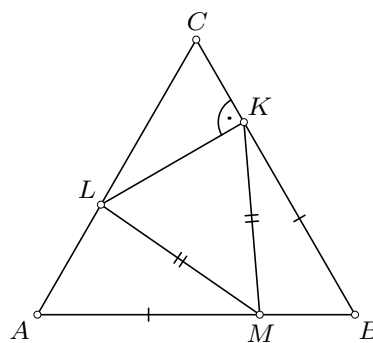
Rozwiązanie

Sposób I

Oznaczmy przez N taki punkt leżący na boku AC , że $AM = BK = CN$ (rys. 9). Wówczas $BM = CK = AN$, więc trójkąty AMN, BKM, CNK są przystające (cecha bok–kąt–bok), a trójkąt KMN jest równoboczny.



rys. 9



rys. 10

Zauważmy, że $MN = ML$ oraz $\sphericalangle LMN = \sphericalangle KML - \sphericalangle KMN = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ więc w trójkącie równoramiennym LMN mamy

$$2\sphericalangle MLN = \sphericalangle MLN + \sphericalangle MNL = 180^\circ - \sphericalangle LMN = 150^\circ, \quad \text{czyli} \quad \sphericalangle MLN = 75^\circ.$$

W konsekwencji $\sphericalangle CLK = \sphericalangle MLC - \sphericalangle MLK = 75^\circ - 45^\circ = 30^\circ$. Dwa z kątów trójkąta CKL mają więc miary $\sphericalangle CLK = 30^\circ$ oraz $\sphericalangle KCL = 60^\circ$, co oznacza, że trzeci kąt tego trójkąta jest prosty, czyli $\sphericalangle CKL = 90^\circ$.

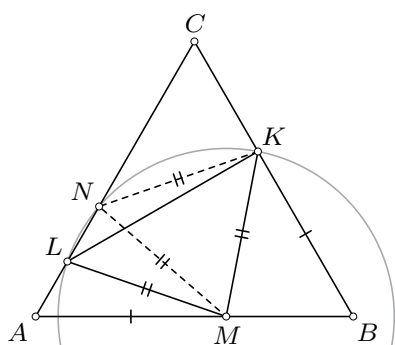
Uwaga 1.

Teza zadania jest spełniona również gdy założenie $\sphericalangle KML = 90^\circ$ zastąpimy znacznie słabszym założeniem $\sphericalangle KML \neq 60^\circ$ (rys. 10). Nietrudno sprawdzić, że wówczas $N \neq L$, a podobne do zaprezentowanych powyżej rachunki na kątach prowadzą do wniosku, że $\sphericalangle CLK = 30^\circ$ i w konsekwencji $\sphericalangle CKL = 90^\circ$.

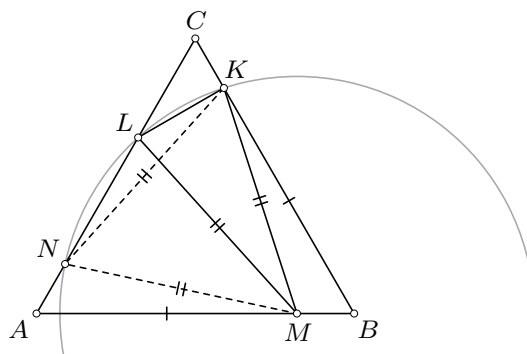
Równość $\sphericalangle CLK = 30^\circ$ można (przy założeniu $\sphericalangle KML \neq 60^\circ$) także uzasadnić korzystając z własności kątów w okręgu: zależność $MK = ML = MN$ oznacza, że punkty K, L, N leżą na okręgu o środku w punkcie M . Wobec tego jeśli $\sphericalangle KML > 60^\circ$ (rys. 11), to kąt MLN jest wpisany w ten okrąg, a zatem jest dwa razy mniejszy od kąta środkowego KMN opartego na tym samym łuku, skąd

$$\sphericalangle KLN = \frac{1}{2} \sphericalangle KMN = \frac{1}{2} \cdot 60^\circ = 30^\circ.$$

W przypadku $\sphericalangle KML < 60^\circ$ (rys. 12) kąt MLN jest równy $180^\circ - \frac{1}{2} \sphericalangle KMN = 150^\circ$, więc również uzyskujemy $\sphericalangle CLK = 180^\circ - \sphericalangle KLN = 30^\circ$.



rys. 11



rys. 12

Założenie $\sphericalangle KML \neq 60^\circ$ jest istotne — jeśli je pominiemy, kąt CKL w takiej konfiguracji może mieć dowolną miarę mniejszą od 120° .

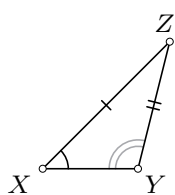
Sposób II

W rozwiązaniu wykorzystamy twierdzenie, nazywane czasem *czwartą cechą przystawiania trójkątów (bok–bok–kąt)*:

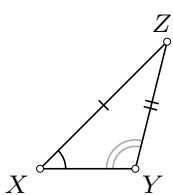
Przypuśćmy, że dla trójkątów XYZ oraz $X'Y'Z'$ spełnione są równości

$$XZ = X'Z', \quad YZ = Y'Z' \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle ZXY = \sphericalangle Z'X'Y'.$$

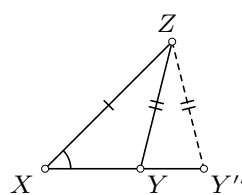
Wówczas $\sphericalangle XYZ = \sphericalangle X'Y'Z'$ (rys. 13) lub $\sphericalangle XYZ + \sphericalangle X'Y'Z' = 180^\circ$ (rys. 14).



rys. 13



rys. 14



rys. 15

Krótki dowód tego twierdzenia jest następujący. Z uwagi na symetrię ról trójkątów XYZ i $X'Y'Z'$ możemy założyć, że $XY \leq X'Y'$. Wybierzmy na półprostej $XY \rightarrow$ taki punkt Y'' , że $XY'' = X'Y'$ (rys. 15). Skoro $XZ = X'Z'$ oraz $\sphericalangle ZXY'' = \sphericalangle Z'X'Y'$, to trójkąty $X'Y'Z'$ oraz $XY''Z$ są przystające (cecha bok–kąt–bok). Zatem $Y''Z = Y'Z' = YZ$.

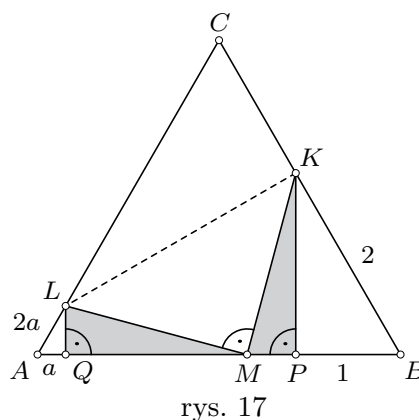
Jeśli $Y = Y''$, to $\sphericalangle XYZ = \sphericalangle XY''Z = \sphericalangle X'Y'Z'$.

Jeśli zaś $Y \neq Y''$, to trójkąt $YY''Z$ jest równoramienny i w konsekwencji

$$\sphericalangle XYZ = 180^\circ - \sphericalangle Y''YZ = 180^\circ - \sphericalangle YY''Z = 180^\circ - \sphericalangle X'Y'Z'.$$

$$\begin{aligned}\sphericalangle ALM - \sphericalangle BMK &= (180^\circ - 60^\circ - \sphericalangle AML) - \sphericalangle BMK = \\ &= (180^\circ - \sphericalangle AML - \sphericalangle BMK) - 60^\circ = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ \neq 0^\circ.\end{aligned}$$

Uwaga 2.



Zauważmy, że

Skoro $AM = BK$, to $a + \sqrt{3} = 2$, czyli $a = 2 - \sqrt{3}$. Bok trójkąta ABC ma długość

$$CK = BC - BK = 2\sqrt{3} - 2 \quad \text{oraz} \quad CL = AC - AL = 2\sqrt{3} - 2 \cdot (2 - \sqrt{3}) = 4\sqrt{3} - 4.$$

To prowadzi do konkluzji, że $CL = 2 \cdot CK$, co było do udowodnienia.

6. W każdym polu tablicy 10×10 znajduje się strzałka skierowana w górę, w dół, w lewo lub w prawo. Wykaż, że można tak usunąć z tablicy 50 strzałek, aby żadne dwie z pozostałych nie wskazywały na siebie nawzajem.

Uwaga: Strzałki wskazują na siebie nawzajem także wtedy, gdy ich pola nie sąsiadują lub gdy pomiędzy nimi są inne strzałki

Rozwiązanie

Sposób I

Niech g , d , l oraz p oznaczają liczby strzałek skierowanych odpowiednio w górę, w dół, w lewo oraz w prawo. Wówczas $g + d + l + p = 100$. Przypuśćmy, że $g \geq d$ oraz $l \geq p$. Wtedy

$$100 = g + d + l + p \geq d + d + p + p = 2 \cdot (d + p), \quad \text{czyli} \quad 50 \geq d + p.$$

Możemy więc usunąć z tablicy 50 strzałek w taki sposób, aby usunięte zostały wszystkie strzałki skierowane w dół lub w prawo. Żadne dwie pozostałe strzałki nie będą wówczas wskazywać na siebie nawzajem.

Analogicznie postępujemy w pozostałych przypadkach, tzn. jeśli $g \leq d$ oraz $l \geq p$, to usuwamy strzałki w taki sposób, aby usunięte zostały wszystkie strzałki skierowane w górę lub w lewo, jeśli $g \geq d$ oraz $l \leq p$ — w taki sposób, aby usunięte zostały wszystkie strzałki skierowane w dół lub w prawo, a jeśli $g \geq d$ oraz $l \geq p$ — w taki sposób, aby usunięte zostały wszystkie strzałki skierowane w dół lub w lewo.

Uwaga 1.

Zaprezentowane rozumowanie można alternatywnie przedstawić w następujący sposób. Pośród liczb $d + p$, $g + p$, $d + l$, $g + l$ co najmniej jedna jest nie większa od 50, gdyż suma tych czterech liczb jest równa $2 \cdot (g + d + l + p) = 200$. Jeżeli $d + p \leq 50$ to usuwamy wszystkie strzałki skierowane w dół i wszystkie strzałki skierowane w prawo (i być może jeszcze inne strzałki, aby łącznie usunąć dokładnie 50). Podobnie postępujemy w trzech pozostałych przypadkach.

Sposób II

Pomalujmy wszystkie strzałki skierowane w prawo lub w górę na niebiesko, a wszystkie strzałki skierowane w lewo lub w dół na czerwono. Zauważmy, że wówczas żadne dwie strzałki tego samego koloru nie wskazują na siebie nawzajem.

Ponieważ wszystkich strzałek jest 100, więc co najmniej 50 strzałek ma ten sam kolor. Wystarczy pozostawić w tablicy 50 spośród nich.

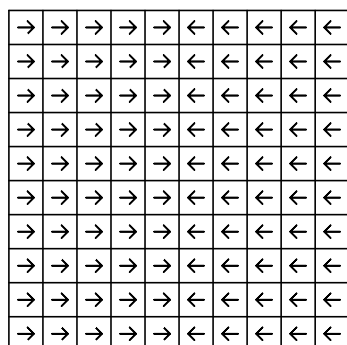
Sposób III

Rozważmy dowolny wiersz tablicy oraz wszystkie znajdujące się w nim strzałki *poziome* tzn. skierowane w prawo lub w lewo. Jeśli usuniemy wszystkie strzałki w jednym z tych dwóch kierunków, żadne dwie z pozostałych poziomych strzałek w tym wierszu nie będą wskazywały na siebie nawzajem.

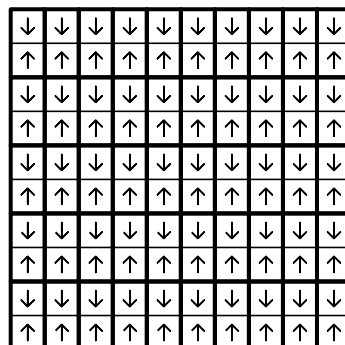
Z każdego wiersza usuńmy poziome strzałki w tym kierunku, który jest *nie bardziej* licznie reprezentowany niż drugi (tj. jeśli jest tyle samo strzałek skierowanych w lewo i w prawo, usuwamy wszystkie strzałki w dowolnym z tych dwóch kierunków, a jeśli liczby strzałek skierowanych w lewo i w prawo są różne, usuwamy mniej liczną grupę strzałek). W ten sposób z całej tablicy usuniemy co najwyżej połowę wszystkich strzałek *poziomych*.

Analogicznie z każdej kolumny usuńmy *pionowe* (tj. skierowane w górę lub w dół) strzałki w kierunku, w którym strzałek jest nie więcej niż w drugim. W ten sposób z całej tablicy usuniemy co najwyżej połowę wszystkich strzałek *pionowych*.

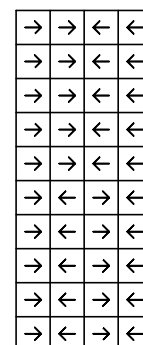
Łącznie usuniemy co najwyżej połowę *wszystkich* strzałek, czyli *co najwyżej* 50 strzałek nie pozostawiając w żadnym wierszu ani kolumnie pary strzałek wskazujących na siebie nawzajem. Do zakończenia rozwiązania wystarczy w razie potrzeby usunąć niektóre z pozostałych strzałek tak, aby w tablicy pozostało ich *dokładnie* 50.



rys. 18



rys. 19



rys. 20

Uwaga 2.

Okazuje się, że czasem usunięcie tylko 49 strzałek może nie wystarczyć do tego, aby uniknąć sytuacji, w której pozostają dwie strzałki wskazujące na siebie nawzajem.

Przykładowo jeśli z tablicy przedstawionej na rysunku 18 usuniemy tylko 49 strzałek, to z pewnego wiersza usuniemy co najwyżej 4 strzałki. W tym wierszu pozostanie więc co najmniej jedna strzałka skierowana w lewo i co najmniej jedna strzałka skierowana w prawo i będą one wskazywać na siebie nawzajem.

Inny przykład takiej sytuacji można uzyskać dzieląc tablicę 10×10 w dowolny sposób na prostokąty o wymiarach 1×2 i w obrębie każdego z nich umieszczając strzałki wskazujące na siebie nawzajem (przykład uzyskanego w taki sposób układu strzałek jest widoczny na rysunku 19). Wówczas po usunięciu 49 strzałek co najmniej jeden prostokąt 1×2 pozostanie „nietknięty”, tzn. żadna z wpisanych doń strzałek nie zostanie usunięta i w konsekwencji — w tablicy pozostaną strzałki wskazujące na siebie nawzajem.

Uwaga 3.

Można zadać pytanie, czy zawsze jest możliwe usunięcie 50 strzałek z dodatkowym wymaganiem, aby z każdego wiersza i każdej kolumny usunąć *dokładnie* 5 strzałek. Okazuje się, że nie zawsze jest to możliwe — czasami aby pozbyć się wszystkich par strzałek wskazujących na siebie nawzajem *trzeba* usunąć co najmniej 6 strzałek z pewnego wiersza lub kolumny. Przykładowo jeśli w pewnych czterech kolejnych kolumnach początkowe ułożenie strzałek jest takie, jak na rysunku 20, to z co najmniej jednej z tych czterech kolumn trzeba usunąć co najmniej 6 strzałek.

7. Wybrano n (niekoniecznie różnych) cyfr, z których żadna nie jest równa 0 ani 7. Okazało się, że każda liczba n -cyfrowa zapisana wszystkimi wybranymi cyframi jest podzielna przez 7. Udowodnij, że liczba n jest podzielna przez 6.

Rozwiązanie

Sposób I

Rozpatrzmy najpierw przypadek, w którym wszystkie wybrane cyfry są równe 1. Przyjmijmy oznaczenie $A_n = 111 \dots 1$ dla liczby zapisanej za pomocą n jedynek. Wykażemy, że A_n jest liczbą podzielną przez 7 dokładnie wtedy, gdy n jest liczbą podzielną przez 6.

Zauważmy, że $A_{k+1} = 10 \cdot A_k + 1$, skąd wniosek, że reszta z dzielenia przez 7 liczby A_{k+1} jest jednoznacznie wyznaczona przez resztę z dzielenia przez 7 liczby A_k . Bezpośrednio sprawdzamy, że reszty z dzielenia przez 7 liczb $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7$ wynoszą kolejno 1, 4, 6, 5, 2, 0, 1. Jak widać A_7 daje tę samą resztę, co A_1 , więc ciąg sześciu reszt 1, 4, 6, 5, 2, 0 będzie powtarzał się okresowo, a reszta równa 0 będzie pojawiała się na pozycjach podzielnych przez 6. To dowodzi postulowanej własności.

Jeżeli wszystkie wybrane cyfry są równe d (przy czym $d \neq 0$ i $d \neq 7$), to przy ich użyciu można zapisać wyłącznie liczbę $d \cdot A_n$, która jest podzielna przez 7 dokładnie wtedy, gdy liczba A_n jest podzielna przez 7 (bo d nie jest liczbą podzielną przez 7).

Przypuśćmy teraz, że wybrano co najmniej dwie różne cyfry, wśród których są a i b , przy czym $a < b$. Rozważmy dowolną liczbę m zapisaną za pomocą wszystkich wybranych cyfr, której cyfrą jedności jest a , a cyfrą dziesiątek jest b , czyli liczbę postaci

$$m = 100c + 10b + a,$$

gdzie c jest pewną liczbą całkowitą nieujemną. Wówczas także liczba $m' = 100c + 10a + b$ jest ułożona z wszystkich wybranych cyfr, gdyż powstaje z m w wyniku zamiany miejscami ostatnich dwóch cyfr. Skoro obydwie liczby m i m' są podzielne przez 7, to także ich różnica

$$m - m' = 100c + 10b + a - (100c + 10a + b) = 9 \cdot (b - a)$$

jest liczbą podzielną przez 7. W konsekwencji $b - a$ jest liczbą podzielną przez 7. Korzystając z tego, że $b > a$ oraz a i b są cyframi, otrzymujemy równość $b - a = 7$, skąd uzyskujemy dwie możliwości: $a = 1$ i $b = 8$ oraz $a = 2$ i $b = 9$.

Z przeprowadzonego rozumowania wynika, że jeśli pewne dwie wybrane cyfry są różne, to albo każda z wybranych cyfr jest równa 1 lub 8, albo każda z wybranych cyfr jest równa 2 lub 9.

W pierwszym przypadku odejmując od dowolnej n -cyfrowej liczby m ułożonej z wybranych cyfr liczbę A_n , uzyskamy liczbę, której każdą cyfrą jest 0 lub 7, a zatem liczbę podzielną przez 7. W związku z tym liczba m jest podzielna przez 7 dokładnie wtedy, gdy liczba A_n jest podzielna przez 7, czyli — jak już wiemy — w przypadku, gdy n jest liczbą podzielną przez 6.

Podobnie w drugim przypadku odejmując liczbę $2 \cdot A_n$ od dowolnej n -cyfrowej liczby m ułożonej z wybranych cyfr, uzyskamy liczbę, której każda cyfra jest równa 0 lub 7, a więc liczbę podzielną przez 7. Wynika z tego, że m dzieli się przez 7 dokładnie wtedy, gdy $2 \cdot A_n$ dzieli się przez 7, czyli gdy n dzieli się przez 6.

Sposób II

Niech a będzie dowolną wybraną cyfrą, a m — dowolną liczbą $(n-1)$ -cyfrową złożoną z pozostałych wybranych cyfr. Ponieważ liczby

$$10m + a \quad \text{oraz} \quad 10^{n-1} \cdot a + m$$

są podzielne przez 7, więc także liczba

$$10 \cdot (10^{n-1} \cdot a + m) - (10m + a) = a \cdot (10^n - 1)$$

jest podzielna przez 7. Ponieważ a nie jest liczbą podzielną przez 7, więc wynika z tego, że $10^n - 1 = 999 \dots 9 = 9 \cdot 111 \dots 1$ dzieli się przez 7. To zaś oznacza (jak udowodniliśmy w pierwszym sposobie), że n dzieli się przez 6.

XVII Olimpiada Matematyczna Juniorów

Statystyki dotyczące zawodów części korespondencyjnej (2021/22)

(1 września – 11 października 2021 r.)

Tabela 1. Liczba uczniów, którzy wzięli udział w zawodach w podziale na województwa.

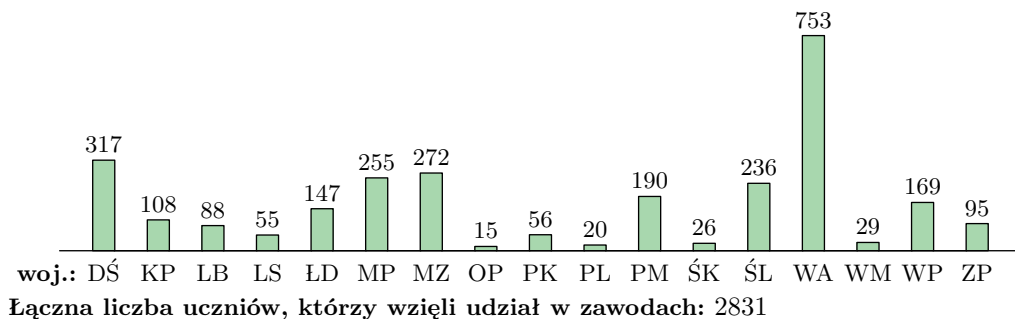
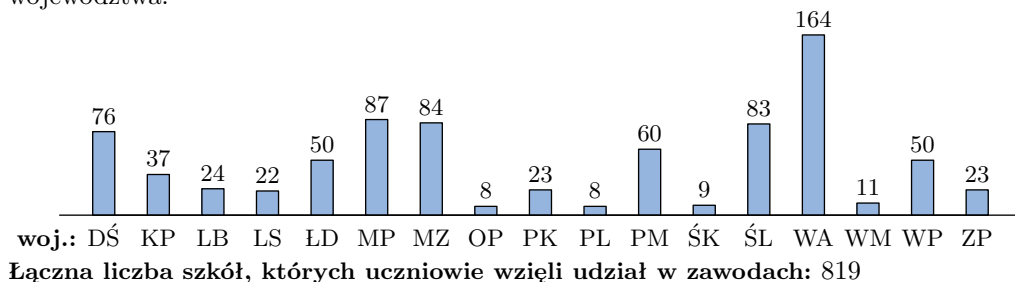


Tabela 2. Liczba szkół, których uczniowie wzięli udział w zawodach w podziale na województwa.



Skróty województw

DŚ — dolnośląskie
 LB — lubelskie
 ŁD — łódzkie
 MZ — mazowieckie bez m.st. Warszawy
 PK — podkarpackie
 PM — pomorskie
 ŚŁ — śląskie
 WM — warmińsko-mazurskie
 ZP — zachodniopomorskie

KP — kujawsko-pomorskie
 LS — lubuskie
 MP — małopolskie
 OP — opolskie
 PL — podlaskie
 ŚK — świętokrzyskie
 WA — m.st. Warszawa
 WP — wielkopolskie

Tabela 3. Procentowa liczba osób, które uzyskały daną liczbę punktów za poszczególne zadania.

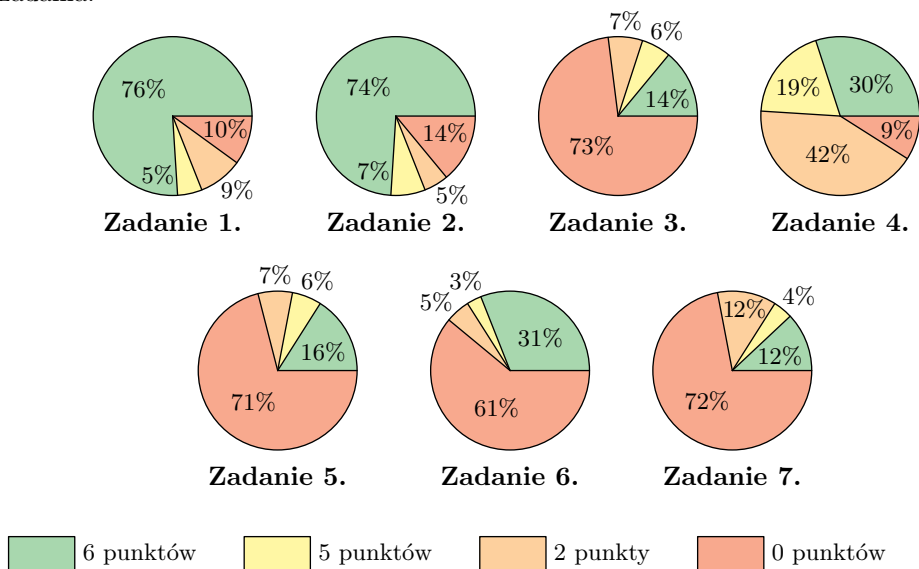


Tabela 4. Średnia uzyskanych punktów za poszczególne zadania.

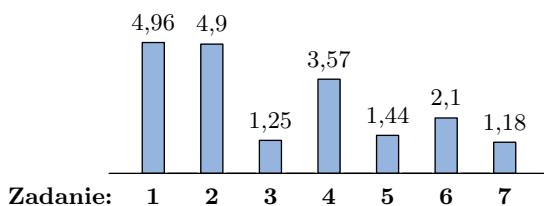


Tabela 5. Liczba nadesłanych prac dotyczących poszczególnych zadań.

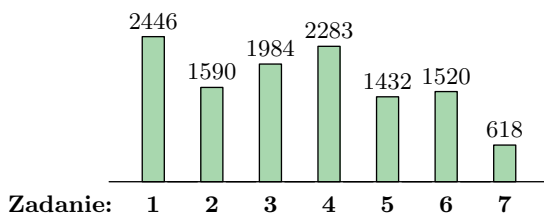


Tabela 6. Średnia uzyskanej sumy punktów w podziale na województwa.

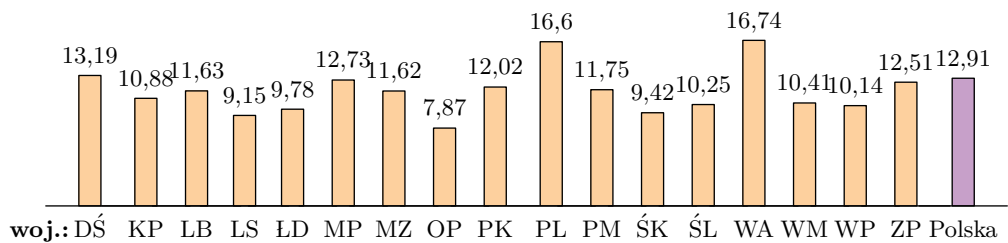


Tabela 7. Procentowa i rzeczywista liczba osób, które uzyskały daną sumę punktów.

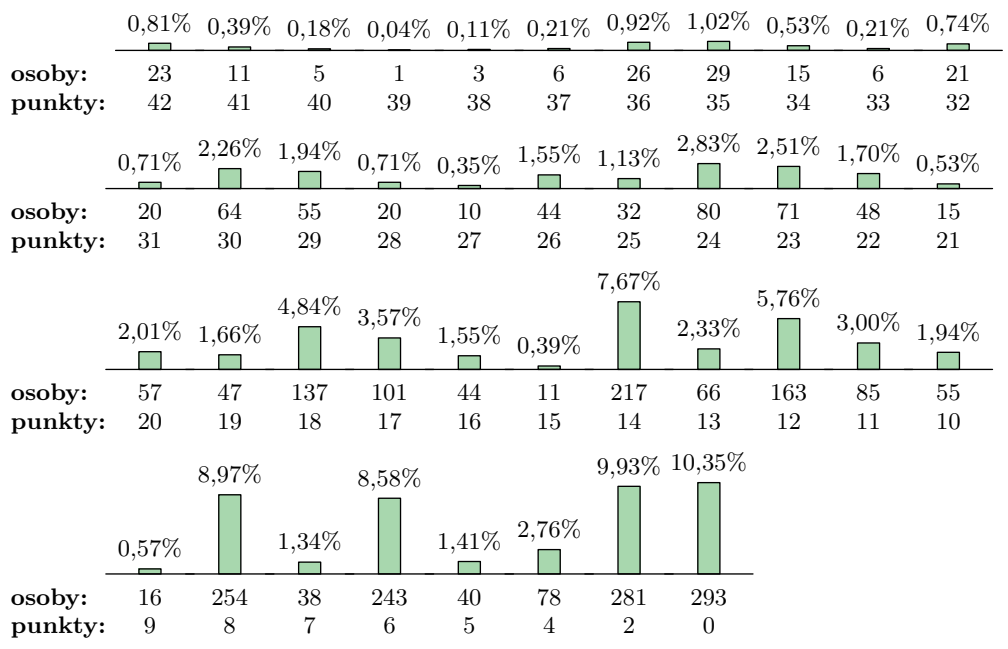
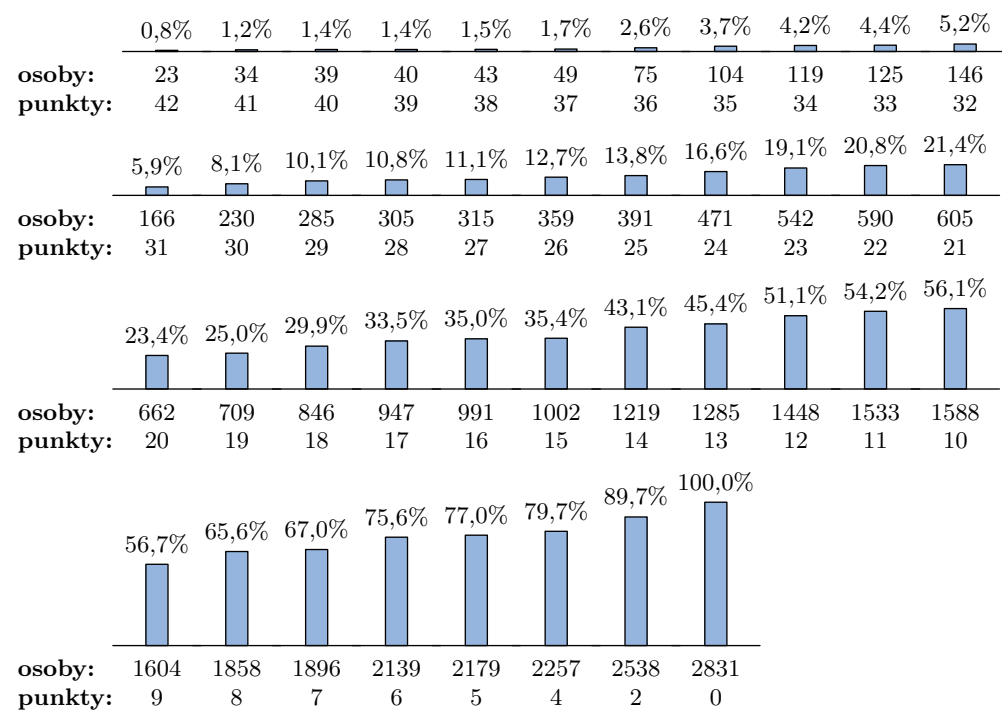


Tabela 8. Procentowa i rzeczywista liczba osób, które uzyskały daną lub większą sumę punktów.



MINISTERSTWO
EDUKACJI
NARODOWEJ

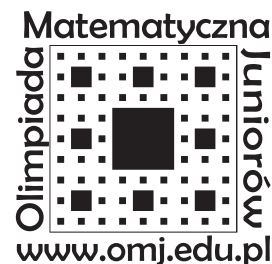


Stowarzyszenie
na rzecz Edukacji
Matematycznej

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej

XVII Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody drugiego stopnia
(15 stycznia 2022 r.)



1. Odcinki AB i CD są prostopadłe i przecinają się w punkcie X . Ponadto spełnione są równości

$$AC = BD, \quad AD = BX \quad \text{oraz} \quad DX = 1.$$

Wyznacz długość odcinka CX .

2. Dana jest liczba całkowita $n \geq 1$ oraz jej dodatnie dzielniki a i b , które spełniają równość $a + b + ab = n$. Wykaż, że $a = b$.

3. Niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą. Każdą z liczb $1, 2, 3, \dots, 100$ pomalowano jednym z n kolorów w taki sposób, że każde dwie różne liczby o sumie podzielnej przez 4 zostały pomalowane różnymi kolorami. Wyznacz najmniejszą liczbę n , dla której taka sytuacja jest możliwa.

4. W pięciokącie wypukłym $ABCDE$ spełnione są równości

$$\sphericalangle CDE = 90^\circ, \quad AC = AD \quad \text{oraz} \quad BD = BE.$$

Wykaż, że trójkąt ABD i czworokąt $ABCE$ mają równe pola.

Uwaga: Wielokąt nazywamy *wypukłym*, jeśli wszystkie jego kąty wewnętrzne są mniejsze od 180° .

5. Niech $n \geq 3$ będzie liczbą nieparzystą. Na prostej zaznaczono n punktów w taki sposób, że odległość między każdymi dwoma z nich jest liczbą całkowitą. Okazało się, że każdy zaznaczony punkt ma parzystą sumę odległości od pozostałych $n - 1$ zaznaczonych punktów. Wykaż, że odległość między każdymi dwoma zaznaczonymi punktami jest liczbą parzystą.

XVII Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody drugiego stopnia (15 stycznia 2022 r.)

Rozwiązania zadań konkursowych

1. Odcinki AB i CD są prostopadłe i przecinają się w punkcie X . Ponadto spełnione są równości

$$AC = BD, \quad AD = BX \quad \text{oraz} \quad DX = 1.$$

Wyznacz długość odcinka CX .

Rozwiązanie

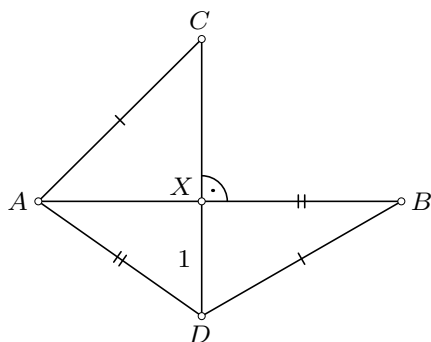
Odpowiedź: Odcinek CX ma długość $\sqrt{2}$.

Sposób I

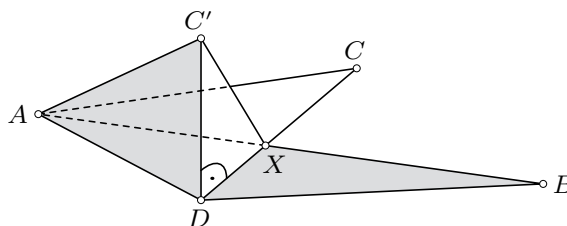
Stosując twierdzenie Pitagorasa kolejno do trójkątów prostokątnych ACX , ADX , BDX (rys. 1) oraz korzystając z danych w treści zadania równości, uzyskujemy

$$CX^2 = AC^2 - AX^2 = AC^2 - (AD^2 - DX^2) = BD^2 - BX^2 + DX^2 = 2 \cdot DX^2 = 2,$$

skąd $CX = \sqrt{2}$.



rys. 1



rys. 2

Sposób II

Niech C' będzie punktem w przestrzeni leżącym „nad” punktem D w odległości 1, tzn. takim punktem, że $C'D = DX = 1$ oraz prosta $C'D$ jest prostopadła do płaszczyzny odcinków AB i CD (rys. 2). Wówczas trójkąt $C'DX$ jest połową kwadratu o boku 1, skąd $C'X = \sqrt{2}$.

Trójkąty prostokątne ADC' i BDX mają równe pary przyprostokątnych $AD = BX$ oraz $C'D = DX$, więc ich przeciwprostokątne także są równe, czyli $BD = AC'$. W konsekwencji $AC = AC'$ i trójkąty prostokątne AXC oraz AXC' są przystające, gdyż mają równe przeciwprostokątne oraz wspólną przyprostokątną AX . Wobec tego $CX = C'X = \sqrt{2}$.

2. Dana jest liczba całkowita $n \geq 1$ oraz jej dodatnie dzielniki a i b , które spełniają równość $a + b + ab = n$. Wykaż, że $a = b$.

Rozwiązanie

Sposób I

Skoro każda z liczb n , a oraz ab jest podzielna przez a , to także liczba $n - a - ab = b$ jest podzielna przez a . Analogicznie uzasadniamy, że liczba $n - b - ab = a$ jest podzielna przez b . Ponieważ liczby a oraz b są dodatnie, więc z poczynionych obserwacji wynika, że $a = b$.

Sposób II

Przyjmijmy, że $n = ak$, gdzie $k \geq 1$ jest liczbą całkowitą. Warunek zadania przybiera wówczas postać

$$a + b + ab = ka, \quad \text{czyli} \quad b(1 + a) = a(k - 1).$$

Liczby a oraz $1 + a$ różnią się o 1, więc nie mają wspólnych dzielników różnych od 1. Wobec tego, skoro $b(1 + a)$ jest liczbą podzielną przez a , to b jest liczbą podzielną przez a .

W pełni analogiczne rozumowanie pozwala uzasadnić, że a jest liczbą podzielną przez b . W konsekwencji $a = b$.

3. Niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą. Każdą z liczb $1, 2, 3, \dots, 100$ pomalowano jednym z n kolorów w taki sposób, że każde dwie różne liczby o sumie podzielnej przez 4 zostały pomalowane różnymi kolorami. Wyznacz najmniejszą liczbę n , dla której taka sytuacja jest możliwa.

Rozwiązanie

Odpowiedź: Szukaną najmniejszą liczbą kolorów jest $n = 25$.

Zauważmy, że gdyby pewne dwie liczby podzielne przez 4 zostały pomalowane tym samym kolorem, to ich suma byłaby liczbą podzielną przez 4, co przeczy warunkom zadania. Wobec tego każde dwie spośród liczb

$$4 = 4 \cdot 1, \quad 8 = 4 \cdot 2, \quad 12 = 4 \cdot 3, \quad \dots, \quad 100 = 4 \cdot 25$$

zostały pomalowane różnymi kolorami. Stąd wniosek, że użyto *co najmniej* 25 kolorów.

Wskażemy kolorowanie liczb spełniające warunki zadania przy użyciu *dokładnie* 25 kolorów. W ten sposób wykazemy, że szukaną najmniejszą możliwą liczbą kolorów jest $n = 25$.

Rozważmy dowolny zestaw 25 kolorów wśród których są czerwony i niebieski. Podzielmy wszystkie liczby całkowite od 1 do 100 na cztery zbiory w zależności od reszty przy dzieleniu przez 4. Niech R_0, R_1, R_2, R_3 oznaczają zbiory tych liczb od 1 do 100, które przy dzieleniu przez 4 dają odpowiednio resztę 0, 1, 2, 3, tzn.

$$\begin{aligned} R_0 &= \{4, 8, 12, 16, \dots, 92, 96, 100\}, & R_1 &= \{1, 5, 9, 13, \dots, 89, 93, 97\}, \\ R_2 &= \{2, 6, 10, 14, \dots, 90, 94, 98\}, & R_3 &= \{3, 7, 11, 15, \dots, 91, 95, 99\}. \end{aligned}$$

Każdą z 25 liczb ze zbioru R_0 malujemy innym kolorem. Podobnie każdą z 25 liczb ze zbioru R_2 malujemy innym kolorem. Z kolei wszystkie liczby ze zbioru R_1 malujemy na czerwono, a wszystkie liczby ze zbioru R_3 — na niebiesko.

Jeśli suma dwóch różnych składników, z których każdy jest liczbą całkowitą od 1 do 100, jest podzielna przez 4, to zachodzi jeden z następujących przypadków:

- obydwa składniki należą do zbioru R_0 — wówczas mają różne kolory;
- obydwa składniki należą do zbioru R_2 — wówczas mają różne kolory;
- jeden ze składników należy do zbioru R_1 , a drugi należy do zbioru R_3 — wówczas jeden z nich jest czerwony, a drugi jest niebieski, więc również w tym przypadku składniki mają różne kolory.

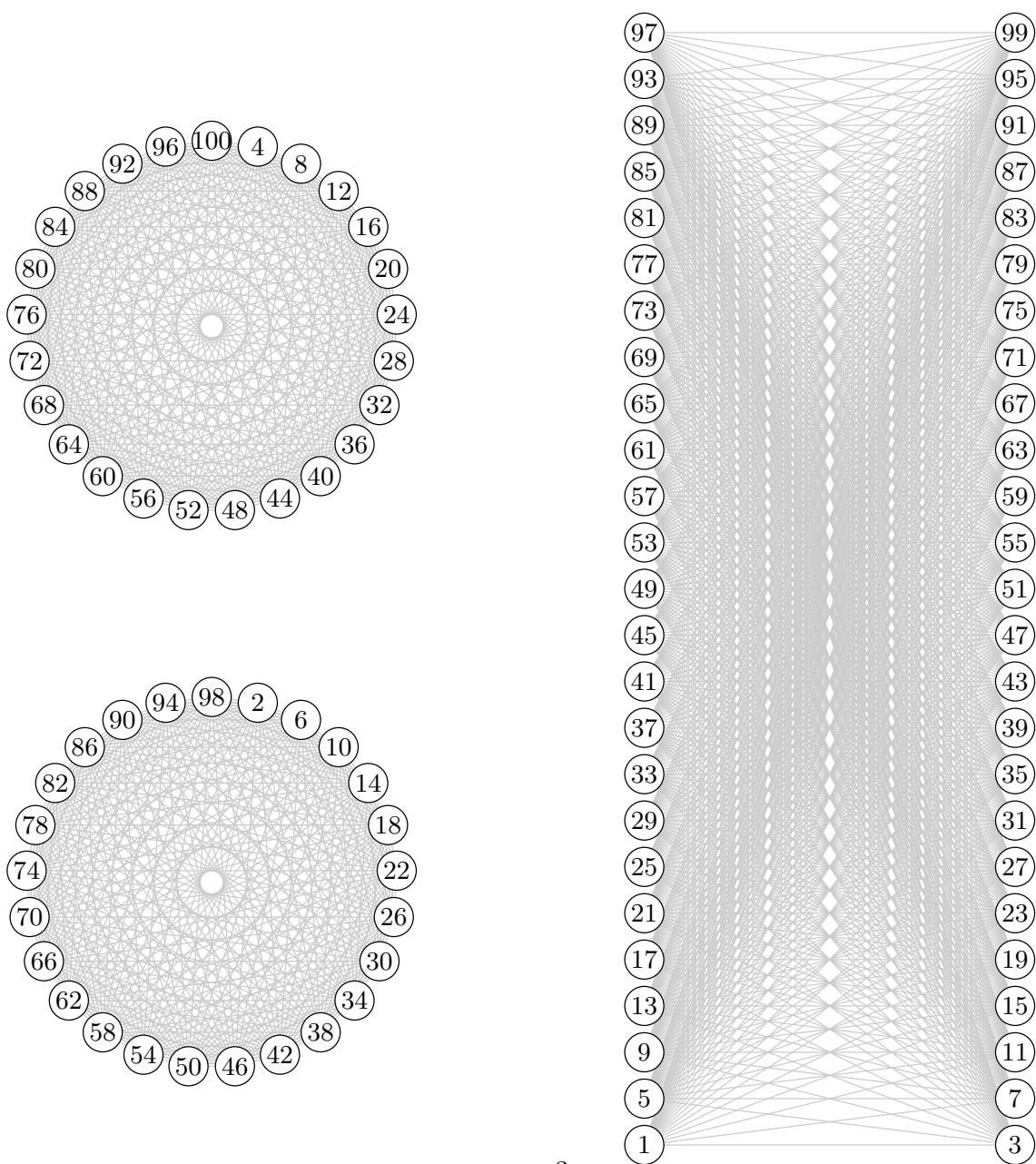
Tym samym udowodniliśmy, że wprowadzone kolorowanie spełnia warunki zadania, co kończy rozwiązanie.

Uwaga

Warunki zadania oraz rozwiązanie można zilustrować w następujący sposób. Narysujemy 100 wierzchołków odpowiadających danym liczbom oraz połączymy krawędziami liczby o sumie podzielnej przez 4 (czyli takie, które mają zostać pomalowane różnymi kolorami). W efekcie otrzymamy *graf* przedstawiający wszystkie pary liczb, które powinny otrzymać różne kolory (rys. 3).

Graf składa się z trzech składowych: elementy zbioru R_0 połączone każdy z każdym, elementy zbioru R_2 połączone każdy z każdym oraz pozostałe elementy, przy czym każdy element zbioru R_1 jest połączony z każdym elementem zbioru R_3 . Do pomalowania pierwszych dwóch składowych potrzeba 25 różnych kolorów, do pomalowania trzeciej wystarczą dowolne dwa z nich.

Minimalna liczba kolorów potrzebnych do pomalowania wierzchołków grafu tak, aby każda krawędź miała końce różnego koloru nazywa się *liczbą chromatyczną* tego grafu.



rys. 3

4. W pięciokącie wypukłym $ABCDE$ spełnione są równości

$$\sphericalangle CDE = 90^\circ, \quad AC = AD \quad \text{oraz} \quad BD = BE.$$

Wykaż, że trójkąt ABD i czworokąt $ABCE$ mają równe pola.

Uwaga: Wielokąt nazywamy *wypukłym*, jeśli wszystkie jego kąty wewnętrzne są mniejsze od 180° .

Rozwiązanie

Komentarz

W prezentowanych rozwiązaniach przez $[\mathcal{F}]$ rozumiemy pole figury $\mathcal{F}$.

Sposób I

Oznaczmy przez K oraz L odpowiednio środki odcinków CD i DE (rys. 4). Niech ponadto a oznacza odległość punktu A od prostej DE , a b odległość punktu B od prostej CD .

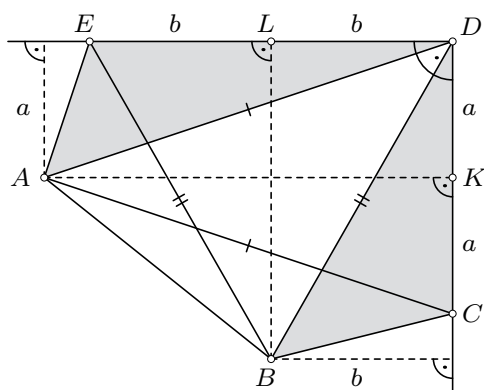
Zauważmy, że odcinek AK jest wysokością trójkąta równoramiennego ACD , wobec czego jest równoległy do prostej DE . W konsekwencji $a = DK = CK$. Podobnie mamy $b = DL = EL$.

Wobec tego

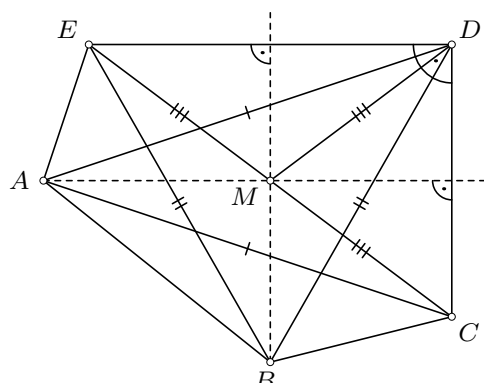
$$[BCD] = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot b = ab, \quad [ADE] = \frac{1}{2} \cdot 2b \cdot a = ab \quad \text{oraz} \quad [CDE] = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2b = 2ab,$$

skąd wniosek, że

$$[ABD] = [ABCDE] - [BCD] - [ADE] = [ABCDE] - 2ab = [ABCDE] - [CDE] = [ABCE].$$



rys. 4



rys. 5

Sposób II

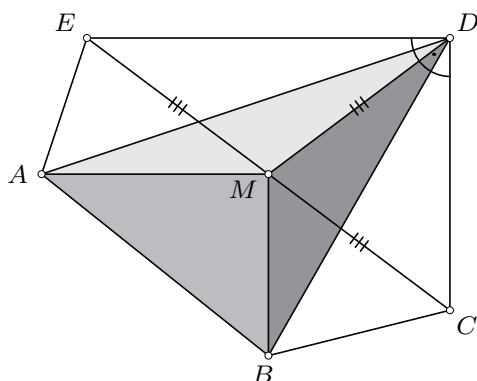
Wykorzystamy następującą obserwację

Jeżeli proste XY oraz ZZ' są równoległe, to $[XYZ] = [XYZ']$.

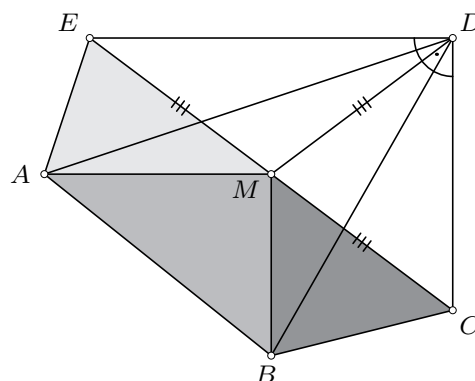
Wynika ona bezpośrednio ze wzoru na pole trójkąta — trójkąty XYZ oraz XYZ' mają wspólną podstawę XY oraz równe wysokości opuszczone na tę podstawę: każda z nich jest bowiem równa odległości między prostymi XY oraz ZZ' .

Oznaczmy przez M środek odcinka CE (rys. 5). Zauważmy, że M jest środkiem przeciwprostokątnej w trójkącie prostokątnym CDE , wobec czego $MC = MD = ME$.

Zauważmy, że skoro $AD=AC$ oraz $MD=MC$ to prosta AM jest prostopadła do odcinka CD . W konsekwencji, skoro $\angle CDE = 90^\circ$, to proste AM oraz DE są równoległe. Wobec tego, zgodnie z przytoczoną wyżej obserwacją mamy równość $[AMD] = [AME]$.



rys. 6



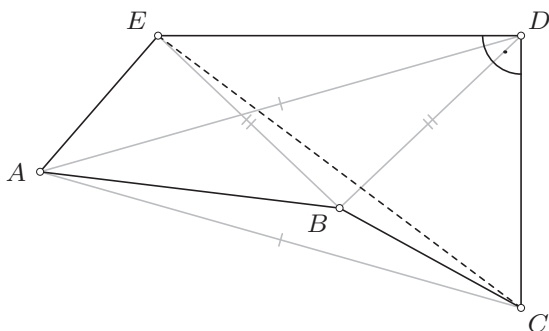
rys. 7

Analogicznie rozumując dochodzimy do wniosku, że proste BM oraz CD są równoległe i w konsekwencji $[BMD] = [BMC]$ (rys. 6 i 7). Pozostaje zauważyć, że

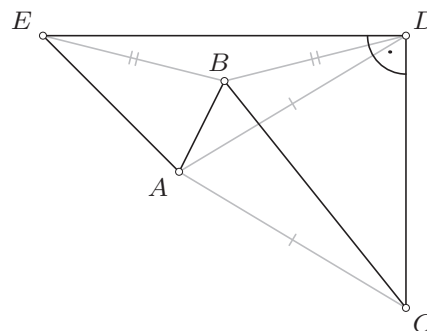
$$[ABD] = [ABM] + [AMD] + [BMD] = [ABM] + [AME] + [BMC] = [ABCE].$$

Uwaga

Teza zadania jest spełniona również dla *niewypukłych* pięciokątów $ABCDE$, o ile obydwie punkty A i B leżą po przeciwnej stronie prostej CE niż punkt D (rys. 8). W przeciwnym przypadku trudno mówić o polu czworokąta $ABCE$, gdyż odcinki AB i CE mogą się przecinać (rys. 9).



rys. 8



rys. 9

5. Niech $n \geq 3$ będzie liczbą nieparzystą. Na prostej zaznaczono n punktów w taki sposób, że odległość między każdymi dwoma z nich jest liczbą całkowitą. Okazało się, że każdy zaznaczony punkt ma parzystą sumę odległości od pozostałych $n-1$ zaznaczonych punktów. Wykaż, że odległość między każdymi dwoma zaznaczonymi punktami jest liczbą parzystą.

Rozwiązanie

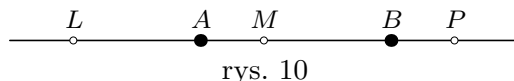
Sposób I

Wyberzmy dowolne dwa zaznaczone punkty i nazwijmy je A oraz B . Przypuśćmy, że dana prosta ułożona jest poziomo i punkt A znajduje się na lewo od punktu B .

Niech L będzie dowolnym punktem danej prostej znajdującym się na lewo od punktu A , M — dowolnym punktem danej prostej znajdującym się pomiędzy A oraz B , a P — dowolnym punktem danej prostej znajdującym się na prawo od punktu B (rys. 10). Wówczas

$$AL + BL = 2 \cdot AL + AB, \quad AM + BM = AB, \quad AP + BP = 2 \cdot BP + AB.$$

Przypuśćmy, że na lewo od A znajduje się ℓ zaznaczonych punktów: $L_1, L_2, \dots, L_\ell$, pomiędzy punktami A i B znajduje się m zaznaczonych punktów: $M_1, M_2, \dots, M_m$, a na prawo od B znajduje się p zaznaczonych punktów: $P_1, P_2, \dots, P_p$ (niektóre spośród liczb ℓ, m, p mogą być równe zero). Wówczas $\ell + m + p + 2 = n$ to liczba wszystkich zaznaczonych punktów.



rys. 10

Z warunków zadania wynika, że liczby

$$AL_1 + AL_2 + \dots + AL_\ell + AM_1 + AM_2 + \dots + AM_m + AB + AP_1 + AP_2 + \dots + AP_p$$

oraz

$$BL_1 + BL_2 + \dots + BL_\ell + AB + BM_1 + BM_2 + \dots + BM_m + BP_1 + BP_2 + \dots + BP_p$$

są parzyste. W takim razie ich suma jest również liczbą parzystą, a w myśl poczynionych wcześniej obserwacji jest ona równa

$$2 \cdot (AL_1 + AL_2 + \dots + AL_\ell) + \ell \cdot AB + (m+2) \cdot AB + 2 \cdot (BP_1 + BP_2 + \dots + BP_p) + p \cdot AB.$$

To oznacza, że liczba $(\ell + m + 2 + p) \cdot AB = n \cdot AB$ jest parzysta, a zatem, skoro n jest liczbą nieparzystą, długość AB jest parzysta, co było do udowodnienia.

Uwaga 1.

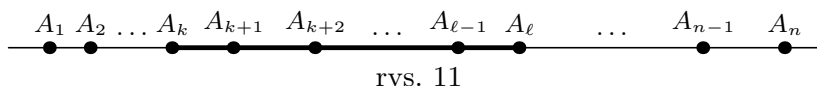
Jeśli zamiast prostej w treści zadania rozważymy płaszczyznę, to postulowana własność nie musi być spełniona. Jeżeli zaznaczymy trzy punkty w wierzchołkach trójkąta o wszystkich bokach nieparzystej długości (np. trójkąta równobocznego o boku 1), to każdy zaznaczony punkt będzie miał parzystą sumę odległości od pozostałych, a przy tym odległość każdej pary zaznaczonych punktów będzie liczbą nieparzystą.

Sposób II

Nazwijmy zaznaczone punkty $A_1, A_2, \dots, A_n$ w taki sposób, że położone są one na prostej w tej właśnie kolejności. Zauważmy, że do rozwiązania zadania wystarczy udowodnić, że wszystkie odcinki $A_k A_{k+1}$ dla $k = 1, 2, \dots, n-1$ mają długość parzystą. Istotnie, każda odległość między dwoma zaznaczonymi punktami to suma długości pewnych spośród tych odcinków. Konkretnie: dla dowolnych liczb całkowitych k, ℓ spełniających nierówności $1 \leq k < \ell \leq n$ mamy (rys. 11)

$$A_k A_\ell = A_k A_{k+1} + A_{k+1} A_{k+2} + \dots + A_{\ell-1} A_\ell.$$

Jeśli wszystkie składniki sumy po prawej stronie powyższej równości są parzyste, to także $A_k A_\ell$ jest liczbą parzystą.



rys. 11

Niech k będzie dowolną liczbą całkowitą, dla której $1 \leq k \leq n-1$ oraz niech $a = A_k A_{k+1}$. Zauważmy, że suma odległości d_k punktu A_k od wszystkich pozostałych zaznaczonych punktów jest równa

$$d_k = A_1 A_k + \dots + A_{k-1} A_k + A_k A_{k+1} + A_k A_{k+2} + \dots + A_k A_n.$$

Z kolei suma odległości d_{k+1} punktu A_{k+1} od wszystkich pozostałych zaznaczonych punktów jest równa

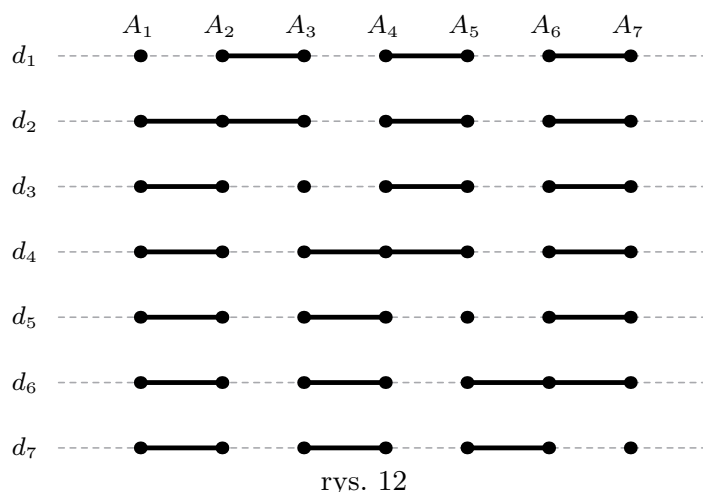
$$\begin{aligned} d_{k+1} &= A_1 A_{k+1} + \dots + A_{k-1} A_{k+1} + A_k A_{k+1} + A_{k+1} A_{k+2} + \dots + A_{k+1} A_n = \\ &= (A_1 A_k + a) + \dots + (A_{k-1} A_k + a) + A_k A_{k+1} + (A_k A_{k+2} - a) + \dots + (A_k A_n - a) = \\ &= d_k + (k-1) \cdot a - (n-k-1) \cdot a = d_k + (2k-n) \cdot a. \end{aligned}$$

Z treści zadania wynika, że d_k oraz d_{k+1} to liczby parzyste, wobec czego różnica tych liczb $d_{k+1} - d_k = (2k-n) \cdot a$ również jest liczbą parzystą. Ponieważ $2k-n$ jest liczbą nieparzystą, więc wynika z tego, że $a = A_k A_{k+1}$ jest liczbą parzystą. To kończy rozwiązanie, gdyż liczbę k wybraliśmy dowolnie.

Uwaga 2.

Każdy składnik sumy d_k w zaprezentowanym rozwiązaniu można rozbić na składniki postaci $A_m A_{m+1}$ (czyli długości odcinków łączących pary kolejnych wyróżnionych punktów). Nazwijmy każdy taki składnik *cegiełką*.

Jeżeli pewna cegiełka $A_m A_{m+1}$ występuje w sumie d_k parzystą liczbę razy, to suma tych cegiełek jest parzysta. Jeśli zaś pewna cegiełka $A_m A_{m+1}$ występuje w sumie d_k nieparzystą liczbę razy, to suma tych cegiełek ma tę samą parzystość, co pojedyncza cegiełka $A_m A_{m+1}$. Innymi słowy, parzystość sumy d_k jest taka sama, jak parzystość sumy cegiełek występujących w niej nieparzystą liczbę razy.



rys. 12

Cegiełki występujące nieparzystą liczbę razy w sumach d_k dla $k=1,2,\dots,n$ zilustrowane są jako pogrubione odcinki na rysunku 12 (przyjmujemy $n=7$). Można zaobserwować, że d_k oraz d_{k+1} różnią się jedynie parzystością liczby wystąpień cegiełki $A_k A_{k+1}$ — skoro więc obie liczby d_k i d_{k+1} są parzyste, to $A_k A_{k+1}$ również. Poprzedni sposób rozwiązania zawiera formalne uzasadnienie tej obserwacji.

Komentarz

W kolejnych sposobach rozwiązania tego zadania wygodnie jest utożsamiać zaznaczone punkty z liczbami całkowitymi. Takiego utożsamienia można dokonać na przykład w następujący sposób.

Wybermy dowolny spośród zaznaczonych punktów i potraktujmy daną prostą jako oś liczbową, na której wybrany punkt ma wartość całkowitą. Ponieważ wszystkie pozostałe zaznaczone punkty są w całkowitej odległości od wybranego punktu, więc na rozważanej osi również odpowiadają im wartości całkowite. Wówczas odległość między punktami a i b jest równa liczbie $|a-b|$.

Sposób III

Niech A będzie zbiorem tych zaznaczonych punktów, którym odpowiadają liczby parzyste, a B — zbiorem tych zaznaczonych punktów, którym odpowiadają liczby nieparzyste. Niech ponadto $|A|$ oraz $|B|$ oznaczają liczby elementów odpowiednio zbiorów A oraz B .

Ponieważ $|A| + |B| = n$ jest liczbą nieparzystą, więc jedna z liczb $|A|$, $|B|$ jest parzysta, a druga — nieparzysta. Załóżmy, że liczba $|A|$ jest parzysta, a liczba $|B|$ jest nieparzysta.

Przypuśćmy, że $|A| \neq 0$ i wybierzmy dowolny punkt a ze zbioru A . Jego odległość od każdego punktu z A jest liczbą parzystą, a jego odległość od każdego punktu z B jest liczbą nieparzystą. Wobec tego w sumie odległości punktu a od wszystkich pozostałych punktów występuje $|B|$ nieparzystych składników, czyli nieparzyście wiele. To zaś oznacza, że suma odległości a od pozostałych zaznaczonych punktów jest nieparzysta, wbrew założeniu zadania. Uzyskana sprzeczność oznacza, że $|A| = 0$, czyli wszystkie zaznaczone punkty znajdują się w zbiorze B . Innymi słowy — wszystkim zaznaczonym punktom odpowiadają liczby nieparzyste, a zatem odległość między dowolnymi dwoma z nich jest parzysta.

Rozumowanie w przypadku, gdy $|A|$ jest liczbą nieparzystą, a $|B|$ jest liczbą parzystą jest analogiczne i prowadzi do wniosku, że $|B| = 0$, czyli wszystkim punktom odpowiadają liczby parzyste.

Uwaga 3.

Rozumowanie podobne do powyższego można alternatywnie zaprezentować następująco. Zauważmy, że przesunięcie dowolnego zaznaczonego punktu o 2 (w dowolną stronę) nie zmienia *parzystości* żadnej z odległości między tym punktem a jakimkolwiek innym zaznaczonym punktem. Wobec tego wszystkie zaznaczone punkty można „poprzesuwać” w taki sposób, aby $|A|$ z nich znalazło się w punkcie odpowiadającym liczbie 0, a $|B|$ z nich — w punkcie odpowiadającym liczbie 1. Gdyby $|A| \geq 1$ oraz $|B| \geq 1$, to suma odległości dowolnego punktu z A od wszystkich pozostałych byłaby równa $|B|$, a suma odległości dowolnego punktu z B od wszystkich pozostałych byłaby równa $|A|$. W konsekwencji obie liczby $|A|$ oraz $|B|$ byłyby parzyste, co przeczy założeniu, że $|A| + |B| = n$. To oznacza, że $|A| = 0$ lub $|B| = 0$.

Sposób IV

W rozwiązaniu wykorzystamy następującą obserwację:

Jeżeli liczby $a_1, a_2, \dots, a_n$ są całkowite, to liczby

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \quad \text{oraz} \quad |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$$

są tej samej parzystości, tzn. obie są nieparzyste lub obie są parzyste.

Krótkie uzasadnienie tej własności jest następujące: parzystość sumy liczb całkowitych zależy tylko od liczby jej nieparzystych składników, a pośród liczb $a_1, a_2, \dots, a_n$ jest tyle samo liczb nieparzystych, co pośród liczb $|a_1|, |a_2|, \dots, |a_n|$.

Przechodzimy do rozwiązania zadania. Niech $x_1, x_2, \dots, x_n$ będą liczbami całkowitymi odpowiadającymi wybranym punktom, a $S = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ — sumą tych liczb. Z treści zadania wynika, że dla każdego $i = 1, 2, \dots, n$ liczba

$$|x_1 - x_i| + |x_2 - x_i| + \dots + |x_n - x_i|,$$

czyli suma odległości punktu x_i od wszystkich zaznaczonych punktów (wliczając zerową odległość $|x_i - x_i|$ od samego siebie), jest parzysta. Wykorzystując przytoczoną obserwację, wnosimy, że również suma

$$(x_1 - x_i) + (x_2 - x_i) + \dots + (x_n - x_i) = S - nx_i$$

jest parzysta. To oznacza, że liczba nx_i jest tej samej parzystości, co liczba S i w konsekwencji — skoro liczba n jest nieparzysta — liczba x_i jest tej samej parzystości, co liczba S .

Wykazaliśmy, że dla każdego $i = 1, 2, \dots, n$ liczba x_i ma tę samą parzystość, co liczba S , skąd wynika, że wszystkie liczby $x_1, x_2, \dots, x_n$ są tej samej parzystości (tzn. wszystkie są parzyste lub wszystkie są nieparzyste). To zaś oznacza, że odległość pomiędzy dowolnymi dwiema z nich jest liczbą parzystą, co należało udowodnić.

Sposób V

W rozwiązaniu wykorzystamy następującą obserwację:

Jeżeli liczby a, b, c są całkowite, to liczby

$$|a - c| - |b - c| \quad \text{oraz} \quad |a - b|$$

są tej samej parzystości, tzn. obie są nieparzyste lub obie są parzyste.

Aby się o tym przekonać, wystarczy zauważyć, że obłożenie liczby wartością bezwzględną nie zmienia jej parzystości. W konsekwencji liczba $|a - c|$ jest tej samej parzystości, co liczba $a - c = (a - b) + (b - c)$, czyli tej samej parzystości, co $|a - b| + |b - c|$.

Przechodzimy do rozwiązania zadania. Niech $c_1, c_2, \dots, c_n$ będą liczbami całkowitymi odpowiadającymi wszystkim zaznaczonym punktom. Wyróżnijmy dowolne dwie spośród nich: a i b . Z treści zadania wynika, że

$$|a - c_1| + |a - c_2| + \dots + |a - c_n| \quad \text{oraz} \quad |b - c_1| + |b - c_2| + \dots + |b - c_n|$$

to liczby parzyste, więc ich różnica

$$(|a - c_1| - |b - c_1|) + (|a - c_2| - |b - c_2|) + \dots + (|a - c_n| - |b - c_n|)$$

również jest liczbą parzystą. Na mocy poczynionej obserwacji, każdy z n składników w nawiasach jest tej samej parzystości co $|a - b|$, wobec czego cała suma jest tej samej parzystości, co $n \cdot |a - b|$. Skoro ta liczba jest parzysta, a liczba n jest nieparzysta, to wynika z tego, że $|a - b|$ jest liczbą parzystą. To kończy rozwiązanie, gdyż a i b wybraliśmy dowolnie spośród zaznaczonych punktów.

Sposób VI

Każdy z zaznaczonych punktów utożsammy z liczbą całkowitą. Dla dowolnej liczby całkowitej x (niekoniecznie odpowiadającej pewnemu zaznaczonemu punktowi) oznaczmy przez $d(x)$ sumę odległości x od wszystkich zaznaczonych punktów. W szczególności jeśli x odpowiada jednemu z zaznaczonych punktów, to na mocy założeń zadania $d(x)$ jest liczbą parzystą.

Wykażemy, że dla dowolnej liczby całkowitej x liczba $d(x + 1) - d(x)$ jest nieparzysta. Rzeczywiście: niech ℓ będzie liczbą zaznaczonych punktów nie większych od x , a $p = n - \ell$ — liczbą zaznaczonych punktów nie mniejszych od $x + 1$. Wówczas

$$d(x + 1) - d(x) = \ell - p = 2\ell - n,$$

gdź $x + 1$ jest dalej o jeden niż x od ℓ zaznaczonych punktów oraz bliżej o jeden niż x od p zaznaczonych punktów. Liczba $2\ell - n$ jest nieparzysta, co kończy dowód postulowanej własności.

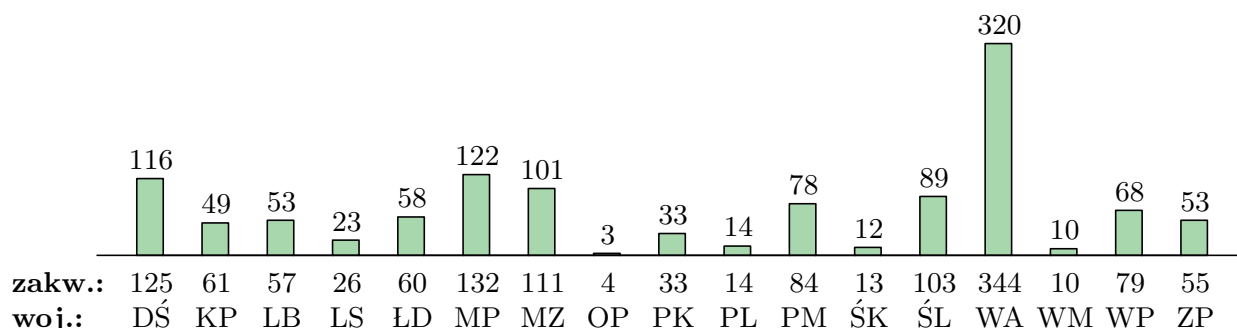
Udowodniony fakt oznacza, że parzystość liczby $d(x)$ zmienia się wraz z parzystością liczby x . W szczególności jeśli liczby $d(x)$ oraz $d(y)$ są tej samej parzystości, to również liczby x oraz y są tej samej parzystości. To zaś oznacza, że wszystkie zaznaczone punkty są tej samej parzystości (bo dla każdego zaznaczonego punktu x wartość $d(x)$ jest parzysta).

XVII Olimpiada Matematyczna Juniorów

Statystyki dotyczące zawodów drugiego stopnia (2021/22)

(15 stycznia 2022 r.)

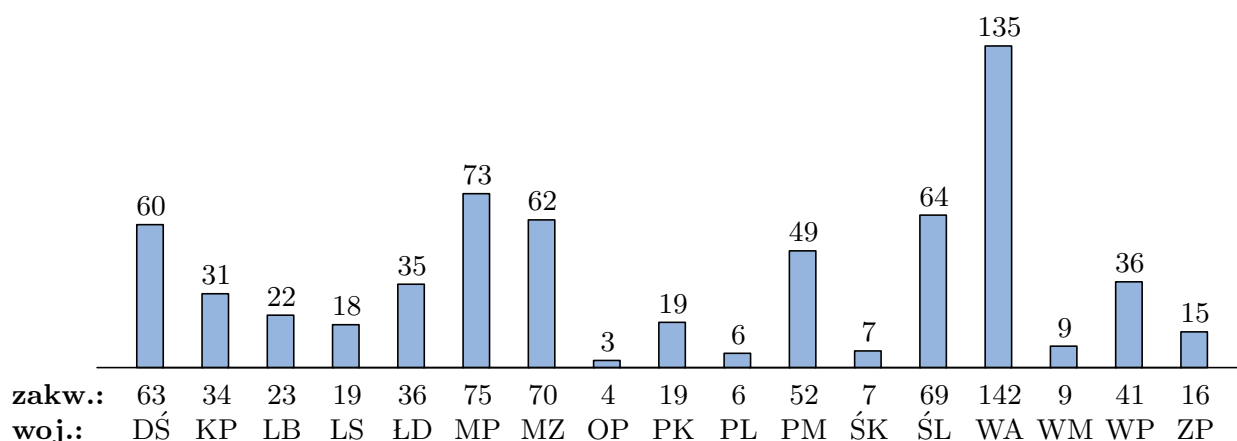
Tabela 1. Liczba uczniów, którzy wzięli udział w zawodach oraz zakwalifikowanych do zawodów w podziale na województwa i inne regiony.



Łączna liczba uczniów, którzy wzięli udział w zawodach: 1202

Łączna liczba uczniów zakwalifikowanych do zawodów: 1311

Tabela 2. Liczba szkół uczniów, którzy wzięli udział w zawodach oraz zakwalifikowanych do zawodów w podziale na województwa i inne regiony.



Łączna liczba szkół uczniów, którzy wzięli udział w zawodach: 644

Łączna liczba szkół uczniów zakwalifikowanych do zawodów: 685

Skróty województw

DŚ — dolnośląskie

LB — lubelskie

ŁD — łódzkie

MZ — mazowieckie bez m.st. Warszawy

PK — podkarpackie

PM — pomorskie

ŚL — śląskie

WM — warmińsko-mazurskie

ZP — zachodniopomorskie

KP — kujawsko-pomorskie

LS — lubuskie

MP — małopolskie

OP — opolskie

PL — podlaskie

ŚK — świętokrzyskie

WA — m.st. Warszawa

WP — wielkopolskie

Tabela 3. Procentowa i rzeczywista liczba osób, które uzyskały daną sumę punktów.

	0,67%	0,17%	1,66%	0,75%	0,25%	0,08%	1%	0,08%	3,91%	1,25%	0,58%	2,25%
osoby:	8	2	20	9	3	1	12	1	47	15	7	27
punkty:	30	26	24	23	22	21	20	19	18	17	16	14

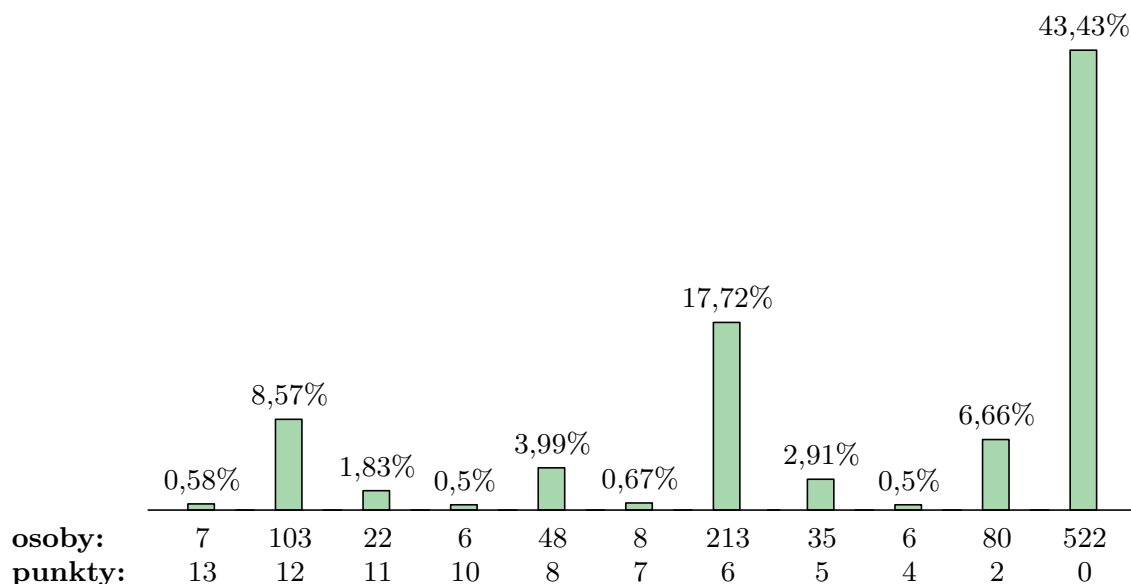


Tabela 4. Procentowa i rzeczywista liczba osób, które uzyskały daną lub większą sumę punktów.

	0,7%	0,8%	2,5%	3,2%	3,5%	3,6%	4,6%	4,7%	8,6%	9,8%	10,4%	12,6%
osoby:	8	10	30	39	42	43	55	56	103	118	125	152
punkty:	30	26	24	23	22	21	20	19	18	17	16	14

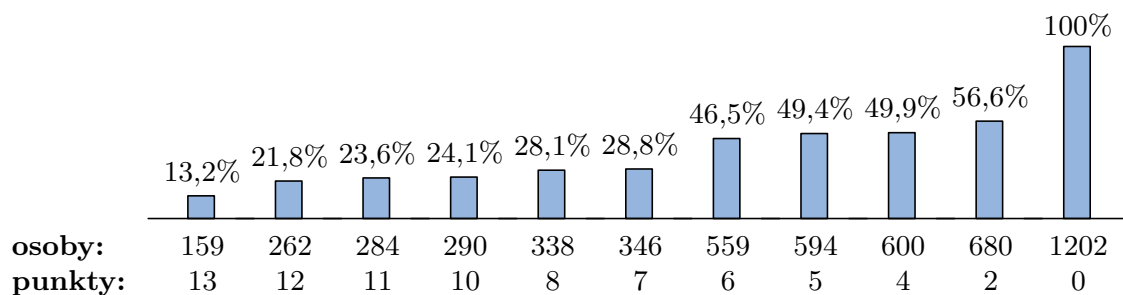


Tabela 5. Procentowa liczba osób, które uzyskały daną liczbę punktów za poszczególne zadania.

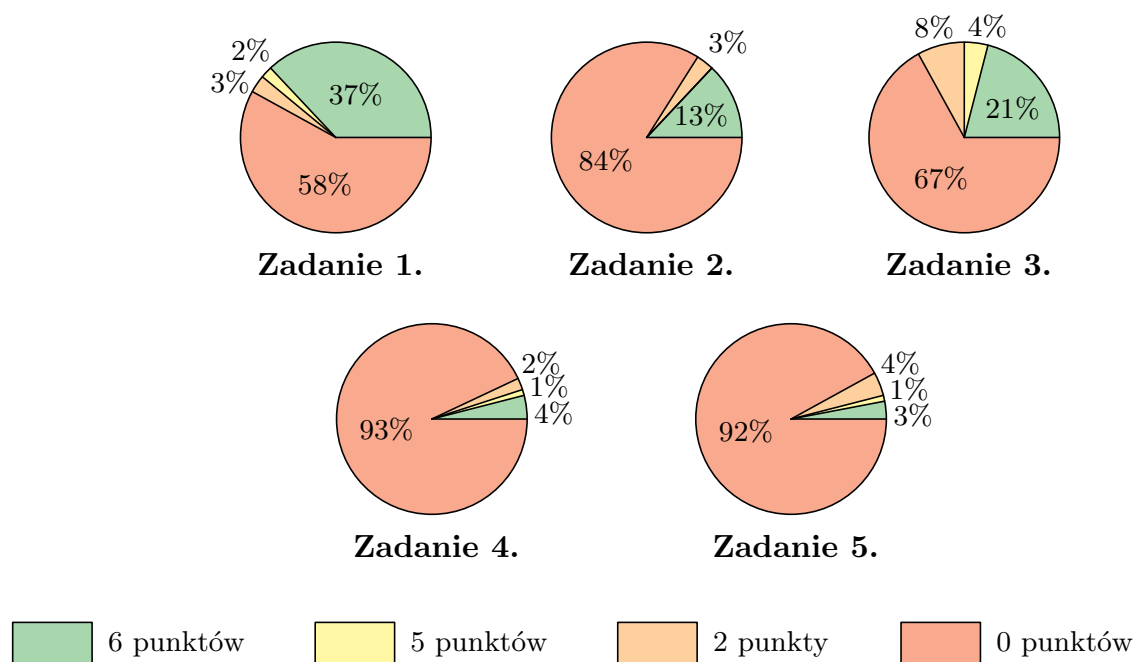


Tabela 6. Średnia uzyskanych punktów za poszczególne zadania.

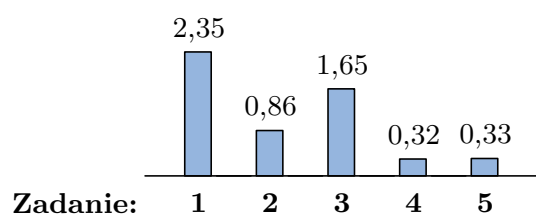
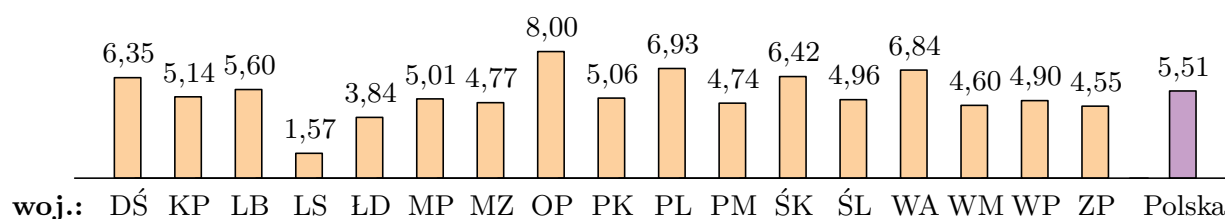


Tabela 7. Średnia sumy punktów w podziale na województwa i inne regiony.



XVII Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody trzeciego stopnia
(19 marca 2022 r.)



1. Dany jest kwadrat $ABCD$ o boku 1. Punkty K, L, M, N , różne od wierzchołków kwadratu, leżą odpowiednio na odcinkach AB, BC, CD, DA . Wykaż, że obwód przynajmniej jednego z trójkątów ANK, BKL, CLM, DMN jest mniejszy od 2.

2. Wyznacz wszystkie dodatnie liczby całkowite n , dla których obie liczby

$$1 \underbrace{77\dots7}_{n \text{ siódemek}} \quad \text{oraz} \quad 3 \underbrace{77\dots7}_{n \text{ siódemek}}$$

są pierwsze.

3. Dany jest równoległobok $ABCD$, w którym $\sphericalangle ABD = 90^\circ$ oraz $\sphericalangle CBD = 45^\circ$. Punkt E leży na odcinku AD , przy czym $BC = CE$. Wyznacz miarę kąta BCE .

4. Wyznacz wszystkie trójki (a, b, c) liczb całkowitych różnych od 0, dla których

$$(1-a)(1-b)(1-c) = (1+a)(1+b)(1+c).$$

5. W tabeli przedstawionej na rysunku Zosia poprzedziła osiem liczb znakami minus, zmieniając je na liczby przeciwne. Okazało się, że w każdym wierszu i w każdej kolumnie znalazły się dokładnie dwie liczby ujemne. Udowodnij, że po tej zmianie suma wszystkich szesnastu liczb w tabeli jest równa 0.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

XVII Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody trzeciego stopnia (19 marca 2022 r.)

Rozwiązania zadań konkursowych

1. Dany jest kwadrat $ABCD$ o boku 1. Punkty K, L, M, N , różne od wierzchołków kwadratu, leżą odpowiednio na odcinkach AB, BC, CD, DA . Wykaż, że obwód przynajmniej jednego z trójkątów ANK, BKL, CLM, DMN jest mniejszy od 2.

Rozwiązanie

Sposób I

Przypuśćmy *nie wprost*, że każdy z obwodów trójkątów ANK, BKL, CLM, DMN jest nie mniejszy od 2. Wykażemy, że przypuszczenie to jest sprzeczne z założeniami zadania.

Na mocy nierówności trójkąta zastosowanej do trójkąta ANK mamy $AN + AK > KN$. Korzystając z tej nierówności oraz z założenia dotyczącego obwodu trójkąta ANK poczynionego w poprzednim akapicie, uzyskujemy

$$(AN + AK) + (AN + AK) > AN + AK + KN \geq 2, \quad \text{skąd} \quad AN + AK > 1.$$

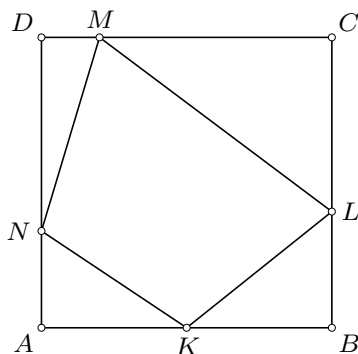
Analogiczne rozumowania przeprowadzone dla trójkątów BKL, CLM, DMN prowadzą do wniosku, że

$$BK + BL > 1, \quad CL + CM > 1, \quad DM + DN > 1.$$

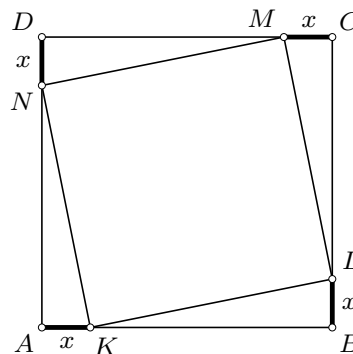
Dodając stronami cztery uzyskane nierówności, otrzymujemy

$$AN + AK + BK + BL + CL + CM + DM + DN > 4.$$

Tymczasem lewa strona uzyskanej wyżej nierówności jest równa obwodowi kwadratu $ABCD$, czyli dokładnie 4 (rys. 1). Uzyskana sprzeczność oznacza, że poczynione na początku przypuszczenie jest fałszywe, co dowodzi tezy zadania.



rys. 1



rys. 2

Uwaga 1.

Jeżeli punkty K, L, M, N zostaną wybrane w taki sposób, że $AK = BL = CM = DN = x$, przy czym $0 < x < 1$ (rys. 2), to długość każdego z odcinków KL, LM, MN, NK będzie większa od $1 - x$, a w konsekwencji obwód każdego z danych trójkątów będzie większy od

$$x + (1 - x) + (1 - x) = 2 - x.$$

Jednocześnie każdy z tych obwodów będzie mniejszy od 2. To oznacza, że wybierając dostatecznie małą liczbę x , można uzyskać konfigurację, w której obwód każdego z czterech rozważanych trójkątów będzie dowolnie bliski liczbie 2.

Sposób II

Zauważmy, że suma czterech liczb

$$AN + AK, \quad BK + BL, \quad CL + CM, \quad DM + DN$$

jest równa obwodowi kwadratu $ABCD$, czyli 4. To oznacza, że co najmniej jedna z powyższych czterech liczb jest nie większa od 1.

Przypuśćmy najpierw, że $AN + AK \leq 1$. Wówczas na mocy nierówności trójkąta

$$AN + AK + KN < AN + AK + AN + AK = 2 \cdot (AN + AK) \leq 2,$$

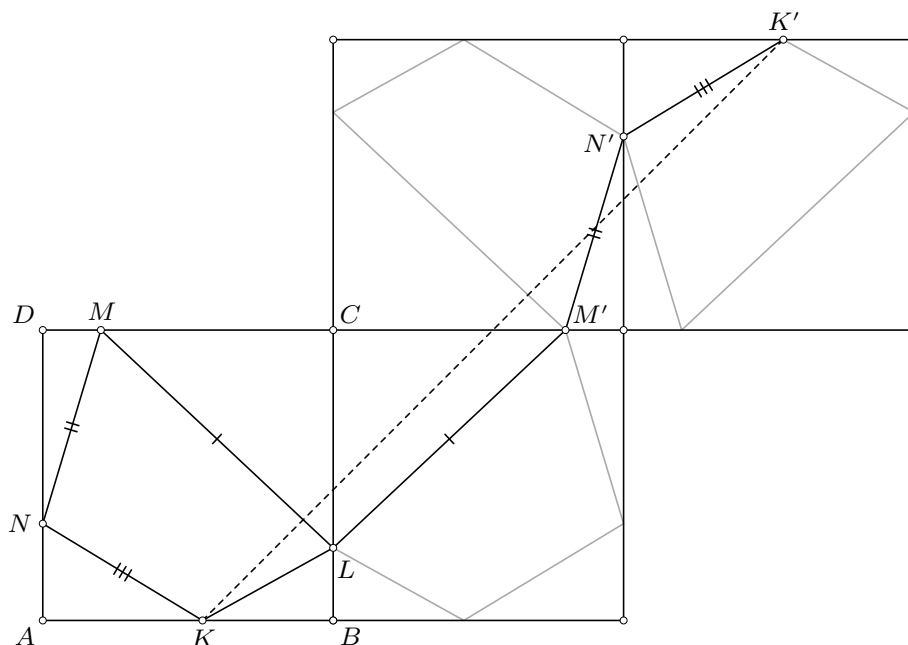
czyli obwód trójkąta ANK jest mniejszy od 2.

W pełni analogiczne rozumowanie przeprowadzamy w pozostałych trzech przypadkach: założenia $BK + BL \leq 1$, $CL + CM \leq 1$, $DM + DN \leq 1$ prowadzą do wniosków mówiących, że obwody trójkątów BKL , CLM , DMN są (w odpowiednim przypadku) mniejsze od 2.

Uwaga 2.

W omawianym zadaniu należało udowodnić, że *najmniejszy* z obwodów czterech rozważanych trójkątów jest *mniejszy od 2*. Wykażemy inną własność tego typu: *największy* z obwodów czterech rozważanych trójkątów jest *nie mniejszy od* $1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 1,707$.

Zauważmy, że postulowany fakt będzie udowodniony, jeśli wykażemy, że obwód czworokąta $KLMN$ jest nie mniejszy od $2\sqrt{2}$. Rzeczywiście, nierówność ta prowadzi do wniosku, że suma obwodów czterech rozważanych trójkątów jest nie mniejsza od $4 + 2\sqrt{2}$, skąd wniosek, że największy z nich jest równy co najmniej $\frac{1}{4}(4 + 2\sqrt{2}) = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$.



rys. 3

Aby przekonać się o tym, że obwód czworokąta $KLMN$ jest nie mniejszy od $2\sqrt{2}$, wystarczy „rozwinąć” ten obwód do łamanej $KLM'N'K'$ (rys. 3) i zauważyć, że długość tej łamanej jest nie mniejsza od długości odcinka KK' , czyli $2\sqrt{2}$.

2. Wyznacz wszystkie dodatnie liczby całkowite n , dla których obie liczby

$$1 \underbrace{77\dots7}_{n \text{ siódemek}} \quad \text{oraz} \quad 3 \underbrace{77\dots7}_{n \text{ siódemek}}$$

są pierwsze.

Rozwiązanie

Odpowiedź: Warunki zadania spełnia wyłącznie liczba $n = 1$.

Przyjmijmy oznaczenia

$$A_n = 1 \underbrace{77\dots7}_{n \text{ siódemek}} \quad \text{oraz} \quad B_n = 3 \underbrace{77\dots7}_{n \text{ siódemek}}.$$

Zauważmy, że dla $n = 1$ obydwie liczby $A_1 = 17$ oraz $B_1 = 37$ są pierwsze. W dalszej części rozwiązania będziemy zakładać, że $n \geq 2$. Udowodnimy, że co najmniej jedna z liczb A_n , B_n jest wówczas złożona, co zakończy rozwiązanie.

Jeżeli n jest liczbą podzielną przez 3, to $n = 3k$ dla pewnej liczby całkowitej $k \geq 1$. Wówczas suma cyfr liczby B_n jest równa

$$3 + 7n = 3 + 21k = 3(1 + 7k).$$

Korzystając z cechy podzielności przez 3 wnioskujemy, że liczba B_n jest podzielna przez 3. Jest to więc liczba złożona, gdyż $B_n > 3$.

Podobnie jeżeli n daje resztę 2 przy dzieleniu przez 3, to $n = 3k + 2$ dla pewnej liczby całkowitej $k \geq 0$. Wówczas suma cyfr liczby A_n jest równa

$$1 + 7n = 1 + 21k + 14 = 3(7k + 5).$$

Ponownie z cechy podzielności przez 3 uzyskujemy, że liczba A_n jest podzielna przez 3 i w konsekwencji — jest złożona (jako liczba większa od 3).

Pozostał do rozpatrzenia przypadek, gdy liczba n jest większa od 1 i daje resztę 1 przy dzieleniu przez 3, czyli $n = 3k + 1$ dla pewnej liczby całkowitej $k \geq 1$. Wówczas, wykorzystując równość $777 = 7 \cdot 111 = 21 \cdot 37$, możemy zapisać

$$B_n = 37 \underbrace{777777\dots777}_{k \text{ segmentów „777”}} = 37 \cdot 1 \underbrace{021021\dots021}_{k \text{ segmentów „021”}}.$$

Wobec tego liczba B_n jest złożona, jako iloczyn dwóch liczb całkowitych większych od 1.

Uwaga 1.

Zamiast odwoływać się do cechy podzielności przez 3 w pierwszych dwóch z omówionych wyżej przypadków, można także zapisać odpowiednie przedstawienia rozważanych liczb w postaci iloczynów dwóch liczb całkowitych większych od 1. Mianowicie, jeżeli $n = 3k$, to

$$B_n = 3 \underbrace{77\dots7}_{3k} = 3 \cdot 1 \underbrace{259259\dots259}_{k \text{ segmentów „259”}},$$

a jeżeli $n = 3k + 2$, to

$$A_n = 1 \underbrace{77\dots7}_{3k+2} = 3 \cdot 59 \underbrace{259259\dots259}_{k \text{ segmentów „259”}}.$$

Uwaga 2.

Dla dowodu podzielności liczby B_{3k+1} przez 37 można również wykorzystać następującą ogólną obserwację. W jej sformułowaniu przez *złączenie* nieujemnych liczb całkowitych będziemy rozumieli zapisanie tych liczb jednej za drugą i potraktowanie całości jako liczbę całkowitą. Przykładowo liczba 421407 może być traktowana jako złączenie liczb 42, 140, 7.

Dana jest liczba całkowita $d \geq 1$. Jeżeli zapis dziesiętny pewnej dodatniej liczby całkowitej n powstaje poprzez złączenie zapisów dziesiętnych pewnych nieujemnych całkowitych wielokrotności liczby d , to liczba n jest podzielna przez d .

Przykładowo dla $d=7$ obserwacja może zostać użyta do stwierdzenia, że liczba $n=421407$ jest podzielna przez 7, gdyż jest złączeniem liczb 42, 140, 7, z których każda jest podzielna przez 7. Formalne uzasadnienie tej obserwacji można przeprowadzić zauważając, że liczba n jest sumą złączanych liczb przemnożonych przez pewne potęgi liczby 10, a zatem jest sumą liczb podzielnych przez d . Dla powyższego przykładu takim przedstawieniem jest

$$n = 42 \cdot 10^4 + 140 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0.$$

Liczba B_{3k+1} jest złączeniem liczby 37 oraz k kopii liczby $777 = 21 \cdot 37$. Każda ze złączanych liczb jest podzielna przez 37, więc na mocy poczynionej obserwacji liczba B_{3k+1} również jest podzielna przez 37.

Uwaga 3.

Odnotujmy, że następujące liczby są pierwsze:

$$B_{11}, B_{17}, A_9, A_{13}, \frac{1}{3}A_{26}, \frac{1}{3}B_9, \frac{1}{37}B_4, \frac{1}{37}B_{13}.$$

To pozwala przypuszczać, że trudno o alternatywne rozwiązanie zadania, nie wykorzystujące podzielności przez 3 oraz 37.

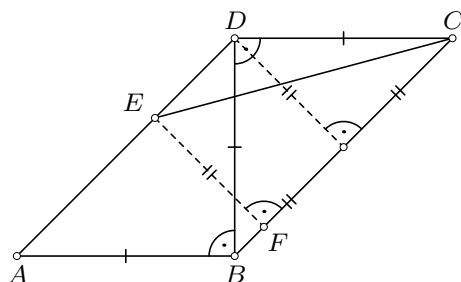
3. Dany jest równoległobok $ABCD$, w którym $\sphericalangle ABD = 90^\circ$ oraz $\sphericalangle CBD = 45^\circ$. Punkt E leży na odcinku AD , przy czym $BC = CE$. Wyznacz miarę kąta BCE .

Rozwiązanie

Odpowiedź: Kąt BCE ma miarę 30° .

Sposób I

Zauważmy, że $\sphericalangle BDC = \sphericalangle ABD = 90^\circ$, co w połączeniu z założeniem $\sphericalangle CBD = 45^\circ$ oznacza, że trójkąt BCD jest trójkątem prostokątnym równoramiennym, czyli połówką kwadratu. W szczególności wynika z tego, że wysokość tego trójkąta opuszczona z wierzchołka D ma długość $\frac{1}{2}BC$.



rys. 4

Oznaczmy przez F rzut prostokątny punktu E na prostą BC (rys. 4). Wówczas EF jest wysokością danego równoległoboku, wobec czego ma tę samą długość, co wspomniana w poprzednim akapicie wysokość trójkąta BCD , skąd

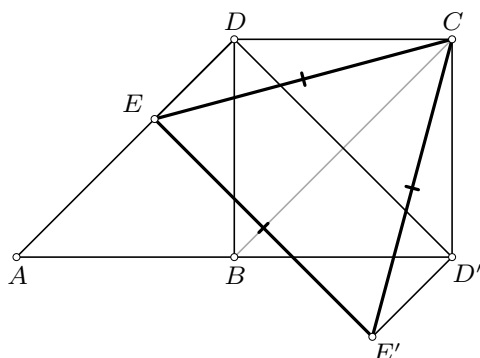
$$EF = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}CE.$$

To zaś oznacza, że trójkąt prostokątny CEF jest połówką trójkąta równobocznego i w konsekwencji $\sphericalangle FCE = \sphericalangle BCE = 30^\circ$.

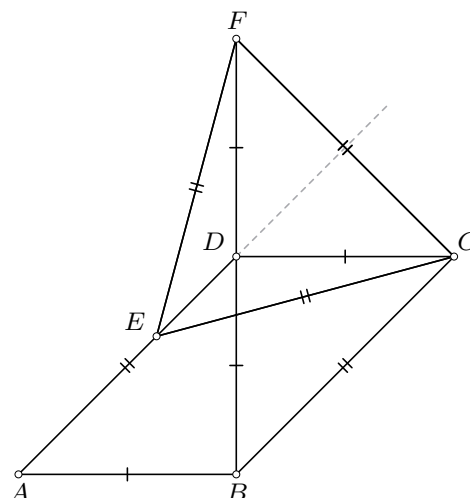
Sposób II

Oznaczmy przez D' oraz E' odbicia symetryczne odpowiednio punktów D oraz E względem prostej BC (rys. 5). Czworokąt $DEE'D'$ jest prostokątem, a czworokąt $BDCD'$ jest kwadratem, skąd wniosek, że $EE' = DD' = BC$. Ponadto z warunków zadania oraz z definicji punktu E' wynika, że $BC = CE = CE'$, więc trójkąt CEE' jest równoboczny. W konsekwencji

$$\sphericalangle BCE = \frac{1}{2}\sphericalangle E'CE = \frac{1}{2} \cdot 60^\circ = 30^\circ.$$



rys. 5



rys. 6

Sposób III

Niech F będzie punktem symetrycznym do punktu B względem prostej CD (rys. 6).

Zauważmy, że trójkąty ABD , BDC , CDF są przystającymi trójkątami prostokątnymi równoramionnymi, a punkty C i F są symetryczne względem prostej AD . Wobec tego

$$CF = BC = CE = FE,$$

skąd wniosek, że trójkąt CEF jest równoboczny. W konsekwencji

$$\sphericalangle BCE = \sphericalangle BCD + \sphericalangle FCD - \sphericalangle FCE = 45^\circ + 45^\circ - 60^\circ = 30^\circ.$$

Sposób IV

Niech F będzie punktem symetrycznym do punktu E względem prostej CD (rys. 7). Wówczas trójkąty CDE oraz CDF są przystające. Ponadto skoro $BD = CD$ oraz

$$\sphericalangle BDF = 135^\circ = \sphericalangle CDF,$$

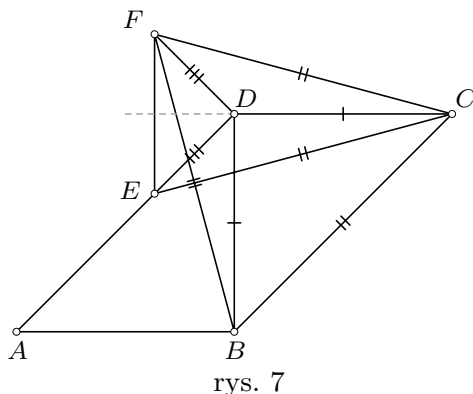
to również trójkąty BDF oraz CDF są przystające (cecha bok–kąt–bok). W konsekwencji

$$BF = CF = CE = BC,$$

skąd wniosek, że trójkąt BCF jest równoboczny. To oznacza, że

$$\sphericalangle DCE = \sphericalangle DBF = \sphericalangle CBF - \sphericalangle CBD = 60^\circ - 45^\circ = 15^\circ$$

i w rezultacie $\sphericalangle BCE = \sphericalangle BCD - \sphericalangle DCE = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ$.



rys. 7

4. Wyznacz wszystkie trójki (a, b, c) liczb całkowitych różnych od 0, dla których

$$(1-a)(1-b)(1-c) = (1+a)(1+b)(1+c).$$

Rozwiązanie

Odpowiedź: Trójka (a, b, c) jest rozwiązaniem danego równania dokładnie wtedy, gdy dwie spośród liczb a, b, c są równe 1 oraz -1 , a trzecia jest dowolną liczbą całkowitą różną od 0.

Sposób I

Przypuśćmy, że trójka (a, b, c) spełnia daną równość. Mnożąc obie jej strony przez liczbę $(1+a)(1+b)(1+c)$, uzyskujemy

$$(1+a)(1-a) \cdot (1+b)(1-b) \cdot (1+c)(1-c) = (1+a)^2(1+b)^2(1+c)^2.$$

Stąd, na mocy tożsamości $(1+x)(1-x) = 1-x^2$ prawdziwej dla każdej liczby x , otrzymujemy

$$(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2) = ((1+a)(1+b)(1+c))^2. \quad (*)$$

Prawa strona równości $(*)$ jest liczbą nieujemną, jako kwadrat pewnej liczby całkowitej. Skoro liczby całkowite a, b, c są różne od 0, to $a^2 \geq 1$, $b^2 \geq 1$, $c^2 \geq 1$, czyli $1-a^2$, $1-b^2$, $1-c^2$ to liczby niedodatnie. Lewa strona równości $(*)$ jest więc iloczynem trzech liczb niedodatnich, czyli liczbą niedodatnią.

Skoro prawa strona równości $(*)$ jest nieujemna, a lewa strona tej równości jest niedodatnia, to obie strony są równe 0. To oznacza, że

$$(1+a)(1+b)(1+c) = 0$$

skąd wniosek, że co najmniej jedna z liczb a, b, c jest równa -1 . Wobec tego z danej w treści zadania równości płynie wniosek, że

$$(1-a)(1-b)(1-c) = 0,$$

czyli co najmniej jedna z liczb a, b, c jest równa 1.

Pozostaje sprawdzić, że jeśli pośród liczb a, b, c jest co najmniej jedna równa 1 i co najmniej jedna równa -1 , to dane równanie jest spełnione — jego obie strony są bowiem równe 0. To oznacza, że trójka (a, b, c) jest rozwiązaniem danego równania dokładnie wtedy, gdy wśród liczb a, b, c pojawia się zarówno 1, jak i -1 .

Sposób II

Zauważmy, że jeżeli co najmniej jedna z liczb a, b, c jest równa 1, to lewa strona rozważanego równania jest równa 0. To oznacza, że prawa strona także jest równa 0, czyli co najmniej jedna z liczb a, b, c jest równa -1 . Wówczas równość z treści zadania jest oczywiście spełniona. Podobnie rozumując, uzasadniamy, że jeśli co najmniej jedna z liczb a, b, c jest równa -1 , to co najmniej jedna z tych liczb jest równa 1 i znów otrzymujemy trójkę będącą rozwiązaniem.

Przypuśćmy, że istnieje trójka (a, b, c) spełniająca rozważane równanie, w której żadna z liczb a, b, c nie jest równa 1 ani -1 . Ponieważ liczby a, b, c są różne od zera, więc oznacza to, że $|a| \geq 2$, $|b| \geq 2$, $|c| \geq 2$. Wymnażając nawiasy po obu stronach wyjściowego równania, uzyskujemy zależność

$$1 - a - b - c + ab + bc + ca - abc = 1 + a + b + c + ab + bc + ca + abc, \quad \text{skąd} \quad a + b + c = -abc.$$

Dzieląc ostatnią równość obustronnie przez (różną od zera) liczbę abc , uzyskujemy

$$\frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} + \frac{1}{ab} = -1.$$

Dla dowolnych liczb x, y, z prawdziwa jest nierówność

$$|x + y + z| \leq |x| + |y| + |z|.$$

Wykorzystując tę nierówność dla liczb $x = \frac{1}{bc}$, $y = \frac{1}{ca}$, $z = \frac{1}{ab}$, uzyskujemy

$$1 = |-1| = \left| \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} + \frac{1}{ab} \right| \leq \left| \frac{1}{bc} \right| + \left| \frac{1}{ca} \right| + \left| \frac{1}{ab} \right| = \frac{1}{|b| \cdot |c|} + \frac{1}{|c| \cdot |a|} + \frac{1}{|a| \cdot |b|}.$$

Na mocy nierówności $|a| \geq 2$, $|b| \geq 2$, $|c| \geq 2$, stwierdzamy jednak, że

$$\frac{1}{|b| \cdot |c|} + \frac{1}{|c| \cdot |a|} + \frac{1}{|a| \cdot |b|} \leq \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{3}{4}.$$

Uzyskaliśmy następującą sprzeczność

$$1 \leq \frac{1}{|b| \cdot |c|} + \frac{1}{|c| \cdot |a|} + \frac{1}{|a| \cdot |b|} \leq \frac{3}{4},$$

która oznacza, że w rozważanym przypadku nie ma rozwiązań.

Sposób III

Przypuśćmy, że liczby a, b, c są różne od -1 , czyli liczby $1+a$, $1+b$, $1+c$ są różne od 0. Wówczas dane równanie można przekształcić do postaci

$$\frac{1-a}{1+a} \cdot \frac{1-b}{1+b} \cdot \frac{1-c}{1+c} = 1.$$

Stąd wniosek, że liczby $1-a$, $1-b$, $1-c$ są różne od 0, czyli a, b, c są różne od 1.

Zauważmy, że jeżeli liczba całkowita n jest różna od liczb 0, 1 oraz -1 , to liczby $1-n$ oraz $1+n$ są *przeciwnych znaków*, tzn. jedna z nich jest dodatnia, a druga jest ujemna. Wobec tego iloraz tych liczb $\frac{1-n}{1+n}$ jest liczbą ujemną. Wykorzystując tę obserwację kolejno dla $n=a$, $n=b$, $n=c$, uzyskujemy

$$\frac{1-a}{1+a} < 0, \quad \frac{1-b}{1+b} < 0, \quad \frac{1-c}{1+c} < 0, \quad \text{skąd} \quad \frac{1-a}{1+a} \cdot \frac{1-b}{1+b} \cdot \frac{1-c}{1+c} < 0,$$

gdyż iloczyn trzech liczb ujemnych jest liczbą ujemną. Uzyskaliśmy sprzeczność z uzyskanym wcześniej rezultatem, że ten iloczyn jest równy 1.

Otrzymana sprzeczność oznacza, że co najmniej jedna z liczb a , b , c jest równa -1 . W konsekwencji $(1-a)(1-b)(1-c)=0$, a zatem jedna z liczb jest równa 1, skąd uzyskujemy sformułowaną na początku odpowiedź.

Uwaga

Pominięcie założenia, że liczby a , b , c są różne od 0 powoduje, że pojawiają się dodatkowe rozwiązania. Rzeczywiście, jeśli np. $a=0$, to dane równanie przybiera równoważną formę

$$(1-b)(1-c) = (1+b)(1+c), \quad \text{czyli} \quad 1-b-c+bc = 1+b+c+bc,$$

skąd $b+c=0$. Analogicznie dla $b=0$ lub $c=0$. To oznacza, że równanie z treści zadania spełniają również trójki, w których jedna z liczb jest równa 0, a dwie pozostałe są liczbami wzajemnie przeciwnymi (w szczególności wszystkie trzy liczby a , b , c mogą być równe 0).

5. W tabeli przedstawionej na rysunku Zosia poprzedziła osiem liczb znakami minus, zmieniając je na liczby przeciwne. Okazało się, że w każdym wierszu i w każdej kolumnie znalazły się dokładnie dwie liczby ujemne. Udowodnij, że po tej zmianie suma wszystkich szesnastu liczb w tabeli jest równa 0.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Rozwiązanie

Przedstawmy każdą z liczb wpisanych do tabeli w postaci sumy $w+k$, gdzie w jest jedną z liczb 0, 4, 8, 12, a k jest jedną z liczb 1, 2, 3, 4 (rys. 8). Składnik w każdej z otrzymanych sum nazwijmy *wierszowym*, a składnik k — *kolumnowym*. Zauważmy, że dowolny wiersz rozważanej tabeli zawiera liczby o identycznych składnikach wierszowych. Podobnie dowolna kolumna rozważanej tabeli zawiera liczby o identycznych składnikach kolumnowych.

0 + 1	0 + 2	0 + 3	0 + 4
4 + 1	4 + 2	4 + 3	4 + 4
8 + 1	8 + 2	8 + 3	8 + 4
12 + 1	12 + 2	12 + 3	12 + 4

rys. 8

Rozważmy dowolne rozmieszczenie minusów w tabeli zgodne z warunkami zadania. Suma wszystkich liczb w tabeli jest równa sumie dwóch liczb: sumy wszystkich składników wierszowych oraz sumy wszystkich składników kolumnowych. Przyjmujemy przy tym, że jeśli liczba $w + k$ została poprzedzona znakiem minus, to jej składnikiem wierszowym jest $-w$, a jej składnikiem kolumnowym jest $-k$.

Rozważmy dowolny wiersz tablicy, w którym początkowo znajdowały się cztery składniki wierszowe równe w . Ponieważ dokładnie dwa z nich wchodzi w skład liczb poprzedzonych minusami, więc suma składników wierszowych w tym wierszu jest równa

$$w + w + (-w) + (-w) = 0.$$

Ponieważ w każdym wierszu suma składników wierszowych jest równa 0, więc w całej tabeli suma wszystkich składników wierszowych jest równa 0.

Analogicznie stwierdzamy, że w każdej kolumnie suma składników kolumnowych jest równa 0, więc łącznie w całej tabeli suma wszystkich składników kolumnowych jest równa 0. W konsekwencji suma wszystkich składników (wierszowych i kolumnowych) jest równa 0, czyli suma wszystkich liczb w tablicy, jest równa 0, co należało udowodnić.

Uwaga 1.

Okazuje się, że różnych sposobów rozmieszczenia minusów w tabeli zgodnie z warunkami zadania jest dokładnie 90 (rys. 9 ilustruje połowę z nich — drugą połowę można uzyskać poprzez zamianę wszystkich plusów na minusy a minusów na plusy). Jednak samo sprawdzenie nawet wszystkich spośród tych przypadków nie stanowi jeszcze rozwiązania zadania — do pełnego rozwiązania niezbędne jest uzasadnienie, że są to rzeczywiście *wszystkie* możliwe rozmieszczenia (czyli, że nie ma innych).

rys. 9

Każde rozmieszczenie znaków (plusów i minusów) w tabeli zgodnie z warunkami zadania nazwiemy *poprawnym*. Udowodnimy, że liczba różnych poprawnych rozmieszczeń jest rzeczywiście równa 90.

Po pierwsze zauważmy, że jeżeli pewne rozmieszczenie jest poprawne, to zamieniając wszystkie plusy na minusy, a wszystkie minusy na plusy również uzyskamy rozmieszczenie poprawne. Każdemu rozmieszczeniu, które w polu na przecięciu pierwszego wiersza i pierwszej kolumny ma znak $+$ odpowiada w ten sposób dokładnie jedno rozmieszczenie, które w tym polu ma znak $-$. Wobec tego łączna liczba poprawnych rozmieszczeń jest równa dwukrotności liczby poprawnych rozmieszczeń, w których lewy górny narożnik tablicy zawiera znak $+$ (wszystkie takie rozmieszczenia są zilustrowane na rysunku 9).

Jeśli na przecięciu pierwszego wiersza i pierwszej kolumny jest $+$, to w pierwszym wierszu jest jeszcze jeden plus (powiedzmy w kolumnie k) i w pierwszej kolumnie jest jeszcze jeden plus (powiedzmy w wierszu w). Zarówno kolumnę k , jak i wiersz w można wybrać na 3 sposoby, co łącznie daje 9 możliwych wyborów pary (w, k) (na rysunku 9 każdej takiej parze odpowiada jedna kolumna złożona z pięciu tabel). Przekonamy się, że dla każdego z tych wyborów jest dokładnie 5 sposobów wpisania do tablicy pozostałych znaków.

Jeżeli na przecięciu kolumny k i wiersza w znajduje się $+$, to możemy jednoznacznie określić położenie wszystkich pozostałych znaków w tablicy (cztery pozostałe pola wiersza w i kolumny k zawierają minusy, a cztery pozostałe pola tablicy — plusy). Ten przypadek jest zilustrowany w najwyższym wierszu rysunku 9. Jeżeli na przecięciu kolumny k i wiersza w znajduje się $-$, to są dwa możliwe położenia $+$ w wierszu w i dwa możliwe położenia $+$ w kolumnie k . Każda z tych czterech możliwości odpowiada dokładnie jednemu poprawnemu rozmieszczeniu znaków w tabeli.

Ostatecznie uzyskujemy więc $2 \cdot 9 \cdot 5 = 90$ różnych sposobów wypełnienia tabeli zgodnie z warunkami zadania.

Uwaga 2.

Zadanie (i rozwiązanie) można w naturalny sposób uogólnić na przypadek tabeli $2n \times 2n$, do której wpisane są kolejne liczby od 1 do $(2n)^2$. Wówczas po poprzedzeniu połowy z nich znakami minus w taki sposób, aby w każdym wierszu i w każdej kolumnie znalazło się dokładnie n minusów, uzyskujemy tabelę, w której suma wszystkich liczb jest równa 0.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

rys. 10

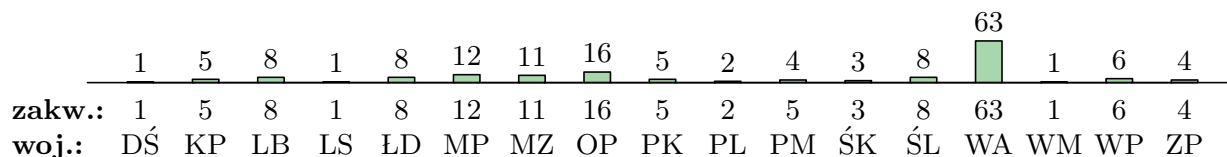
Na szczególną uwagę zasługuje przypadek $n = 5$ (rys. 10), w którym zapis dziesiętny sugeruje pomysł rozkładu liczb na składniki wierszowe i kolumnowe.

XVII Olimpiada Matematyczna Juniorów

Statystyki dotyczące zawodów trzeciego stopnia (2021/22)

(19 marca 2022 r.)

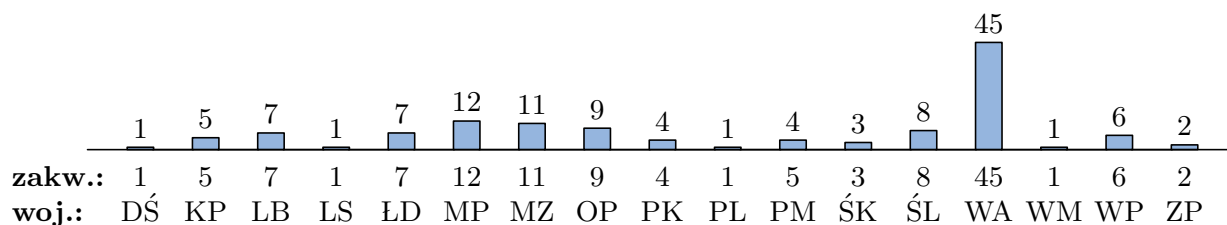
Tabela 1. Liczba uczniów, którzy wzięli udział w zawodach oraz zakwalifikowanych do zawodów w podziale na województwa i inne regiony.



Łączna liczba uczniów, którzy wzięli udział w zawodach: 158

Łączna liczba uczniów zakwalifikowanych do zawodów: 159

Tabela 2. Liczba szkół uczniów, którzy wzięli udział w zawodach oraz zakwalifikowanych do zawodów w podziale na województwa i inne regiony.



Łączna liczba szkół uczniów, którzy wzięli udział w zawodach: 127

Łączna liczba szkół uczniów zakwalifikowanych do zawodów: 128

Skróty województw

DŚ — dolnośląskie

LB — lubelskie

ŁD — łódzkie

MZ — mazowieckie bez m.st. Warszawy

PK — podkarpackie

PM — pomorskie

ŚL — śląskie

WM — warmińsko-mazurskie

ZP — zachodniopomorskie

KP — kujawsko-pomorskie

LS — lubuskie

MP — małopolskie

OP — opolskie

PL — podlaskie

ŚK — świętokrzyskie

WA — m.st. Warszawa

WP — wielkopolskie

Tabela 3. Procentowa i rzeczywista liczba osób, które uzyskały daną sumę punktów.

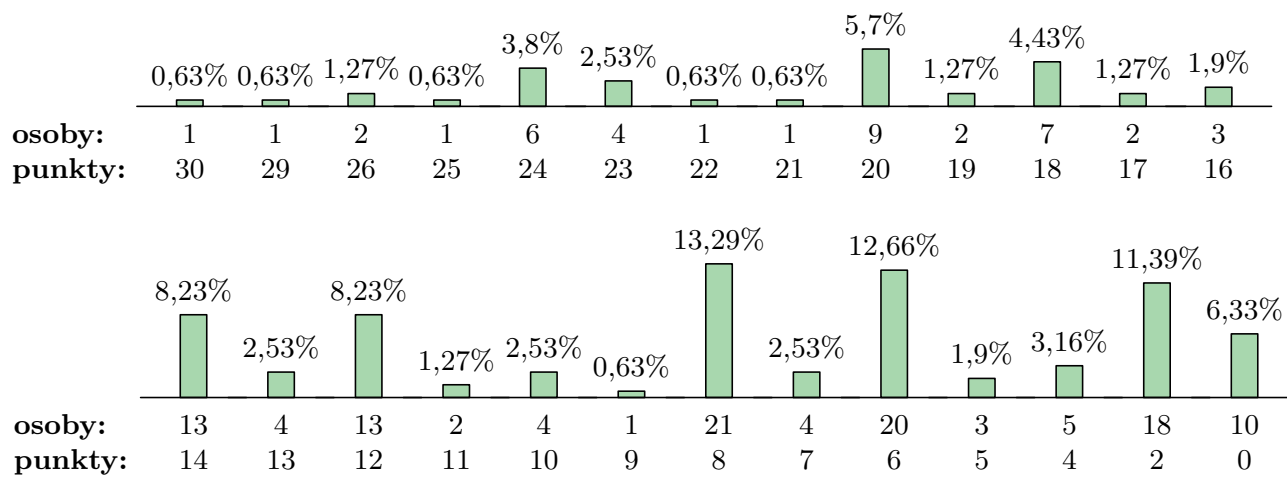


Tabela 4. Procentowa i rzeczywista liczba osób, które uzyskały daną lub większą sumę punktów.

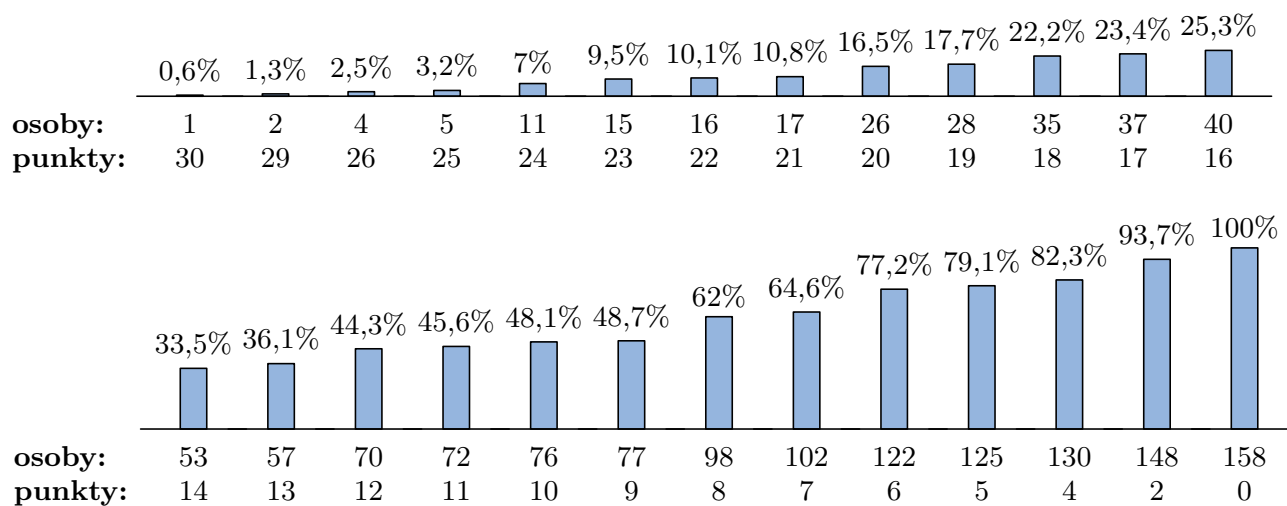


Tabela 5. Procentowa liczba osób, które uzyskały daną liczbę punktów za poszczególne zadania.

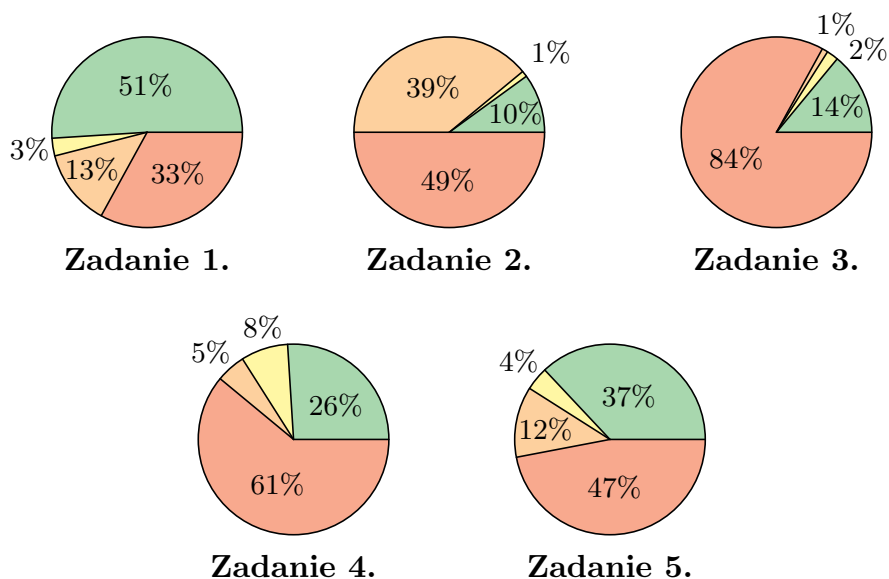
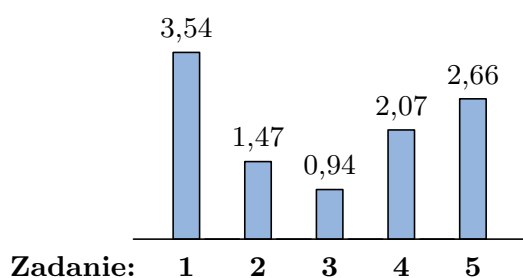


Tabela 6. Średnia uzyskanych punktów za poszczególne zadania.



Imiona:

Nazwisko:

Klasa:



XVIII Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody stopnia pierwszego — część testowa

(29 września 2022 r., godz. 9:00)

Przed przystąpieniem do rozwiązywania testu wpisz na każdą stronę swoje imiona, nazwisko oraz numer klasy.

Treść każdego z poniższych zadań zawiera trzy stwierdzenia. Każde z nich jest prawdziwe lub fałszywe (przy czym może się zdarzyć, że wszystkie trzy stwierdzenia w obrębie jednego zadania są fałszywe). Jeśli dane stwierdzenie jest prawdziwe, wpisz w odpowiednią kratkę literkę T, jeśli zaś stwierdzenie jest fałszywe, wpisz literkę N.

W przypadku pomyłki przekreśl znakiem **X** podaną odpowiedź, a właściwą odpowiedź podaj obok z lewej strony. Nie używaj korektora.

Przykład poprawnie rozwiązane zadania:

0. Dla każdej dodatniej liczby całkowitej n liczba $2n + 1$ jest

T

a) dodatnia;

T

b) nieparzysta;

N

~~X~~

c) pierwsza.

Czas na rozwiązywanie testu: 75 minut.

Powodzenia!

1. Liczba 2022 jest podzielna przez sumę swoich cyfr. Tę własność ma również liczba

a) 2023;

b) 2024;

c) 2025.

2. Liczba 100^{100} jest

a) 100-cyfrowa;

b) 200-cyfrowa;

c) 300-cyfrowa.

Imiona:

Nazwisko:

Klasa:

3. Jeśli każdy bok kwadratu wydłużymy o 10%, to

a) długość przekątnej tego kwadratu wzrośnie o 10%;

b) pole tego kwadratu wzrośnie o 20%;

c) obwód tego kwadratu wzrośnie o 40%.

4. Co najmniej jedną parę prostopadłych przekątnych ma

a) pięciokąt foremny;

b) sześciokąt foremny;

c) ośmiokąt foremny.

5. Liczbę 18 można przedstawić w postaci sumy

a) trzech kolejnych liczb całkowitych;

b) sześciu kolejnych liczb całkowitych;

c) dwunastu kolejnych liczb całkowitych.

6. Punkt P leży wewnątrz trójkąta równobocznego ABC , przy czym zachodzi równość $\sphericalangle PAB + \sphericalangle PBC = 60^\circ$. Wynika z tego, że

a) $\sphericalangle PAB = 30^\circ$;

b) $\sphericalangle PBC = 30^\circ$;

c) $\sphericalangle PCA = 30^\circ$.

7. Istnieje taka liczba rzeczywista x , że żadne dwie spośród liczb x , x^2 , x^3 nie są równe, a największą z nich jest

a) x ;

b) x^2 ;

c) x^3 .

Imiona:

Nazwisko:

Klasa:

8. Kwadrat 5×5 można rozciąć na prostokąty, z których każdy ma wymiary

a) 1×2 lub 1×4 ;

b) 1×2 lub 1×3 ;

c) 1×3 lub 1×4 .

9. Punkt P leży wewnątrz czworokąta $ABCD$, przy czym trójkąty ABP oraz CDP są równoboczne. Wynika z tego, że

a) $AB = CD$;

b) $AC = BD$;

c) $AD = BC$.

10. Liczba naturalna m ma dokładnie 3 dodatnie dzielniki, a liczba naturalna n ma dokładnie 5 dodatnich dzielników. Wynika z tego, że

a) $m < n$;

b) liczba $m \cdot n$ ma co najmniej 8 dodatnich dzielników;

c) liczba $m \cdot n$ ma co najwyżej 15 dodatnich dzielników.

11. Ułamek o liczniku równym 1 oraz mianowniku będącym dodatnią liczbą całkowitą nazywamy *prostym*. Liczbę $\frac{1}{7}$ można przedstawić jako

a) iloczyn dwóch ułamków prostych;

b) różnicę dwóch ułamków prostych;

c) sumę dwóch ułamków prostych.

12. Dokładnie siedem spośród krawędzi pewnego sześcianu pomalowano na czerwono. Wynika z tego, że

a) pewien wierzchołek sześcianu jest końcem mniej niż dwóch czerwonych krawędzi;

b) pewna ściana sześcianu ma dokładnie dwa czerwone boki;

c) pewne trzy czerwone krawędzie są równoległe.

Imiona:

Nazwisko:

Klasa:

13. Istnieją dodatnie liczby całkowite a , b , c , dla których liczby $a+b$, $b+c$, $c+a$ są, w pewnej kolejności, równe

a) 101, 202, 303;

b) 102, 201, 300;

c) 201, 302, 403.

14. W turnieju badmintonu wzięło udział 6 osób, każde dwie osoby rozegrały dokładnie jeden mecz i żaden mecz nie zakończył się remisem. Wynika z tego, że istnieje osoba, która wygrała

a) nieparzystą liczbę meczów;

b) parzystą liczbę meczów;

c) dokładnie 2 mecze lub dokładnie 3 mecze.

15. Odcinki AC i BD przecinają się w punkcie P , przy czym $AP < CP$ oraz $BP < DP$. Wynika z tego, że

a) $AB < CD$;

b) obwód trójkąta ABP jest mniejszy od obwodu trójkąta CDP ;

c) odległość punktu P od prostej AB jest mniejsza od odległości P od prostej CD .

Rozwiązania zadań testowych

1. Liczba 2022 jest podzielna przez sumę swoich cyfr. Tę własność ma również liczba

- ☐ T a) 2023;
☐ T b) 2024;
☐ T c) 2025.

Komentarz

- a) Bezpośrednio sprawdzamy, że $2023 = 7 \cdot 289 = (2 + 0 + 2 + 3) \cdot 289$.
 b) Zauważmy, że 2024 to liczba zakończona cyframi „024”, wobec czego na mocy cechy podzielności przez 8 jest liczbą podzielną przez $8 = 2 + 0 + 2 + 4$.
 c) Suma cyfr liczby 2025 jest równa 9, więc na mocy cechy podzielności przez 9 liczba 2025 jest podzielna przez $9 = 2 + 0 + 2 + 5$.

Uwaga

Liczby 2022, 2023, 2024, 2025 to cztery kolejne liczby naturalne, z których każda jest podzielna przez sumę swoich cyfr. Poprzednia taka czwórka to liczby od 1014 do 1017, a następna — od 3030 do 3033. Okazuje się, że istnieje nawet 20 kolejnych liczb naturalnych o tej własności, ale 21 — już nie.

2. Liczba 100^{100} jest

- ☐ N a) 100-cyfrowa;
☐ N b) 200-cyfrowa;
☐ N c) 300-cyfrowa.

Komentarz

Zauważmy, że

$$100^{100} = (10^2)^{100} = 10^{200} = \underbrace{100 \dots 0}_{200 \text{ zer}},$$

co oznacza, że liczba 100^{100} jest 201-cyfrowa.

3. Jeśli każdy bok kwadratu wydłużymy o 10%, to

T	a) długość przekątnej tego kwadratu wzrośnie o 10%;
N	b) pole tego kwadratu wzrośnie o 20%;
N	c) obwód tego kwadratu wzrośnie o 40%.

Komentarz

Przypuśćmy, że początkowo bok kwadratu ma długość a . Jeśli każdy bok wydłużymy o 10%, to uzyskamy kwadrat o boku $1,1a$.

a) Długość przekątnej kwadratu o boku a jest równa $a\sqrt{2}$, a długość przekątnej kwadratu o boku $1,1a$ jest równa $1,1 \cdot a\sqrt{2}$. Jest to liczba o 10% większa od $a\sqrt{2}$.

b) Pole kwadratu o boku a jest równe a^2 , a pole kwadratu o boku $1,1a$ jest równe $(1,1a)^2 = 1,21 \cdot a^2$. Jest to liczba o 21% większa od a^2 .

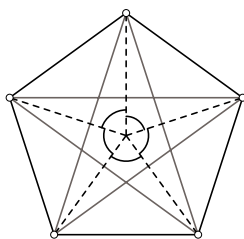
c) Obwód kwadratu o boku a jest równy $4a$, a obwód kwadratu o boku $1,1a$ jest równy $4 \cdot 1,1a = 4,4a$. Jest to liczba o 10% większa od $4a$.

4. Co najmniej jedną parę prostopadłych przekątnych ma

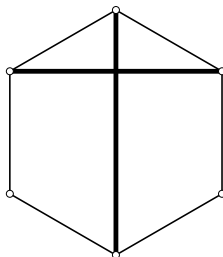
N	a) pięciokąt foremny;
T	b) sześciokąt foremny;
T	c) ośmiokąt foremny.

Komentarz

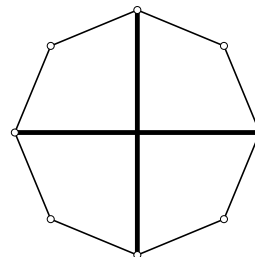
a) Dwa odcinki są prostopadłe dokładnie wtedy, gdy ich symetralne są prostopadłe. Tymczasem kąt między symetralnymi dwóch przekątnych pięciokąta foremnego jest całkowitą wielokrotnością kąta $\frac{1}{5} \cdot 360^\circ = 72^\circ$, czyli nie może być prosty (rys. 1).



rys. 1



rys. 2



rys. 3

b), c) Przykładowa para prostopadłych przekątnych sześciokąta foremnego jest przedstawiona na rysunku 2, a przykładowa para prostopadłych przekątnych ośmiokąta foremnego — na rysunku 3. W obu przypadkach przekątna pozioma jest symetryczna względem prostej zawierającej przekątną pionową.

Uwaga

Wielokąt foremny ma parę prostopadłych przekątnych dokładnie wtedy, gdy ma parzystą liczbę boków.

5. Liczbę 18 można przedstawić w postaci sumy

- ☐ T a) trzech kolejnych liczb całkowitych;
☐ N b) sześciu kolejnych liczb całkowitych;
☐ T c) dwunastu kolejnych liczb całkowitych.

Komentarz

a), c) Zauważmy, że $18 = 5 + 6 + 7 = (-4) + (-3) + (-2) + (-1) + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7$.

b) Przypuśćmy, że $18 = n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) + (n + 4) + (n + 5)$ dla pewnej liczby n . To oznacza, że $18 = 6n + 15$, czyli $n = \frac{1}{2}$. Liczba $\frac{1}{2}$ nie jest całkowita, więc żądane przedstawienie nie jest możliwe.

Uwaga

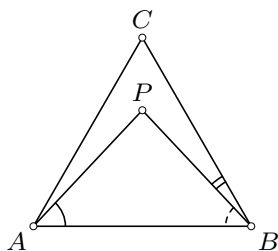
Wszystkie liczby $n \geq 2$ o tej własności, że liczbę 18 można przedstawić w postaci sumy n kolejnych liczb całkowitych to 3, 4, 9, 12 oraz 36.

6. Punkt P leży wewnątrz trójkąta równobocznego ABC , przy czym zachodzi równość $\sphericalangle PAB + \sphericalangle PBC = 60^\circ$. Wynika z tego, że

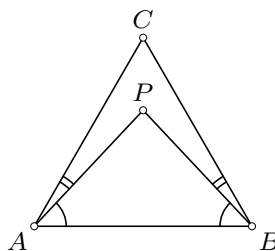
- ☐ N a) $\sphericalangle PAB = 30^\circ$;
☐ N b) $\sphericalangle PBC = 30^\circ$;
☐ T c) $\sphericalangle PCA = 30^\circ$.

Komentarz

Zauważmy, że $\sphericalangle PBA = 60^\circ - \sphericalangle PBC$, wobec czego punkt P spełnia daną w treści zadania równość wtedy i tylko wtedy, gdy $\sphericalangle PAB = \sphericalangle PBA$ (rys. 4).



rys. 4



rys. 5

c) Jeśli $\sphericalangle PAB = \sphericalangle PBA$, to trójkąt ABP jest równoramienny i $AP = BP$. Z kolei trójkąt ABC jest równoboczny, więc $AC = BC$. Oznacza to, że trójkąty PAC oraz PBC są przystające (cecha bok–bok–bok) i w konsekwencji $\sphericalangle PCA = \sphericalangle PCB = \frac{1}{2} \cdot \sphericalangle ACB = 30^\circ$.

a), b) Jeśli punkt P zostanie wybrany w taki sposób, że $\sphericalangle PAB = \sphericalangle PBA \neq 30^\circ$ (rys. 5), to założenia zadania będą spełnione, ale $\sphericalangle PAB \neq 30^\circ$ oraz $\sphericalangle PBC = 60^\circ - \sphericalangle PBA \neq 30^\circ$.

7. Istnieje taka liczba rzeczywista x , że żadne dwie spośród liczb x , x^2 , x^3 nie są równe, a największą z nich jest

- ☐ T a) x ;
☐ T b) x^2 ;
☐ T c) x^3 .

Komentarz

- a) Jeżeli $x = \frac{1}{2}$, to $x^2 = \frac{1}{4}$ i $x^3 = \frac{1}{8}$, więc x jest największą spośród tych trzech liczb.
 b) Jeżeli $x = -2$, to $x^2 = 4$ i $x^3 = -8$, więc x^2 jest największą spośród tych trzech liczb.
 c) Jeżeli $x = 2$, to $x^2 = 4$ i $x^3 = 8$, więc x^3 jest największą spośród tych trzech liczb.

Uwaga

Liczy x , x^2 , x^3 są parami różne dokładnie wtedy, gdy x jest liczbą różną od -1 , 0 , 1 .
 Jeśli $x < 0$, to x^2 jest największą z liczb x , x^2 , x^3 ; jeśli $0 < x < 1$, to x jest największą z tych trzech liczb, a jeśli $x > 1$, to x^3 jest największą z tych trzech liczb.

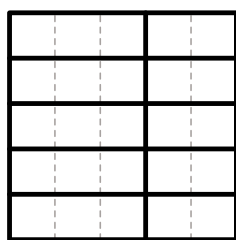
8. Kwadrat 5×5 można rozciąć na prostokąty, z których każdy ma wymiary

- ☐ N a) 1×2 lub 1×4 ;
☐ T b) 1×2 lub 1×3 ;
☐ T c) 1×3 lub 1×4 .

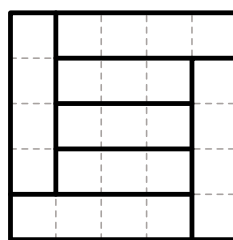
Komentarz

a) Kwadrat 5×5 ma pole 25, czyli wyrażające się liczbą nieparzystą. Tymczasem każdy z prostokątów 1×2 lub 1×4 ma pole wyrażające się liczbą parzystą. Suma liczb parzystych nie może być liczbą nieparzystą, co oznacza, że rozcięcie nie jest możliwe.

b), c) Przykładowe rozcięcia przedstawione są na rysunkach 6 i 7.



rys. 6



rys. 7

9. Punkt P leży wewnątrz czworokąta $ABCD$, przy czym trójkąty ABP oraz CDP są równoboczne. Wynika z tego, że

- ☐ N a) $AB = CD$;
☐ T b) $AC = BD$;
☐ N c) $AD = BC$.

Komentarz

Zauważmy, że

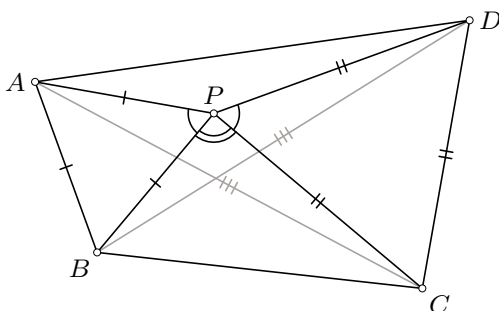
$$\sphericalangle BPC + \sphericalangle APD = 360^\circ - \sphericalangle APB - \sphericalangle CPD = 240^\circ,$$

więc co najmniej jeden z kątów BPC , APD ma miarę nie większą od 120° . Przypuśćmy, że $\sphericalangle BPC \leq 120^\circ$; rozumowanie w drugim przypadku jest analogiczne.

b) Ponieważ $AP = BP$, $CP = DP$ oraz

$$\sphericalangle APC = \sphericalangle BPC + \sphericalangle APB = \sphericalangle BPC + 60^\circ = \sphericalangle BPC + \sphericalangle CPD = \sphericalangle BPD,$$

więc trójkąty APC oraz BPD są przystające (cecha bok–kąt–bok). To oznacza, że $AC = BD$.



rys. 8

a), c) Wybierając punkty A , B , C , D , P w taki sposób, że $AP = BP \neq CP = DP$, $\sphericalangle APB = \sphericalangle CPD = 60^\circ$ oraz $60^\circ < \sphericalangle BPC < 120^\circ$ (rys. 8), uzyskujemy konfigurację spełniającą warunki zadania, w której $AB \neq CD$. Ponadto $\sphericalangle APD = 240^\circ - \sphericalangle BPC > 120^\circ$, czyli w szczególności $\sphericalangle BPC \neq \sphericalangle APD$. Równość $AD = BC$ oznaczałaby, że trójkąty BPC oraz APD są przystające (cecha bok–bok–bok), skąd $\sphericalangle BPC = \sphericalangle APD$. To oznacza, że $AD \neq BC$.

10. Liczba naturalna m ma dokładnie 3 dodatnie dzielniki, a liczba naturalna n ma dokładnie 5 dodatnich dzielników. Wynika z tego, że

N	a) $m < n$;
N	b) liczba $m \cdot n$ ma co najmniej 8 dodatnich dzielników;
T	c) liczba $m \cdot n$ ma co najwyżej 15 dodatnich dzielników.

Komentarz

a) Przyjmijmy, że $m = 25$ oraz $n = 16$. Wówczas liczba m ma dokładnie 3 dodatnie dzielniki: 1, 5, 25, liczba n ma dokładnie 5 dodatnich dzielników: 1, 2, 4, 8, 16 oraz $m > n$.

b) Przyjmijmy, że $m = 4$ oraz $n = 16$. Wówczas liczba m ma dokładnie 3 dodatnie dzielniki: 1, 2, 4, a liczba n ma dokładnie 5 dodatnich dzielników: 1, 2, 4, 8, 16. Liczba $m \cdot n = 64$ ma dokładnie 7 dodatnich dzielników: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64.

c) Każdy dodatni dzielnik liczby $m \cdot n$ można przedstawić w postaci $c \cdot d$, gdzie c jest dodatnim dzielnikiem liczby m , a d jest dodatnim dzielnikiem liczby n (być może na więcej niż jeden sposób). To oznacza, że liczba $m \cdot n$ ma co najwyżej $3 \cdot 5 = 15$ dodatnich dzielników.

Uwaga

Można uzasadnić, że jeśli liczba m ma dokładnie 3 dodatnie dzielniki, to jest postaci p^2 dla pewnej liczby pierwszej p , a jeśli liczba n ma dokładnie 5 dodatnich dzielników, to jest postaci q^4 dla pewnej liczby pierwszej q . Jeżeli $p = q$, to iloczyn $m \cdot n$ ma dokładnie 7 dodatnich dzielników. Jeżeli zaś $p \neq q$, to iloczyn $m \cdot n$ ma dokładnie 15 dodatnich dzielników.

11. Ułamek o liczniku równym 1 oraz mianowniku będącym dodatnią liczbą całkowitą nazywamy *prostym*. Liczbę $\frac{1}{7}$ można przedstawić jako

- ☐ T a) iloczyn dwóch ułamków prostych;
- ☐ T b) różnicę dwóch ułamków prostych;
- ☐ T c) sumę dwóch ułamków prostych.

Komentarz

Zauważmy, że $\frac{1}{7} = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{6} - \frac{1}{42} = \frac{1}{14} + \frac{1}{14} = \frac{1}{8} + \frac{1}{56}$.

12. Dokładnie siedem spośród krawędzi pewnego sześcianu pomalowano na czerwono. Wynika z tego, że

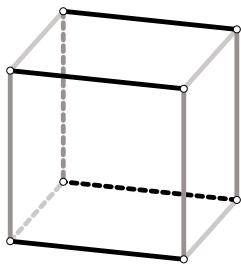
- ☐ T a) pewien wierzchołek sześcianu jest końcem mniej niż dwóch czerwonych krawędzi;
- ☐ N b) pewna ściana sześcianu ma dokładnie dwa czerwone boki;
- ☐ T c) pewne trzy czerwone krawędzie są równoległe.

Komentarz

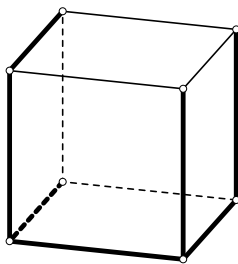
a) Przypuśćmy, że każdy wierzchołek jest końcem co najmniej dwóch czerwonych krawędzi. To oznacza, że czerwone krawędzie mają łącznie co najmniej $8 \cdot 2 = 16$ końców, czyli tych krawędzi jest co najmniej 8 (gdyż każda krawędź ma dwa końce). Zatem jeśli czerwonych krawędzi jest mniej niż 8, to pewien wierzchołek sześcianu jest końcem co najwyżej jednej czerwonej krawędzi.

c) Zauważmy, że sześcián ma trzy czwórki równoległych krawędzi (rys. 9). Wobec tego jeśli siedem krawędzi sześcianu ma kolor czerwony, to co najmniej trzy czerwone krawędzie należą do tej samej czwórki — czyli są równoległe.

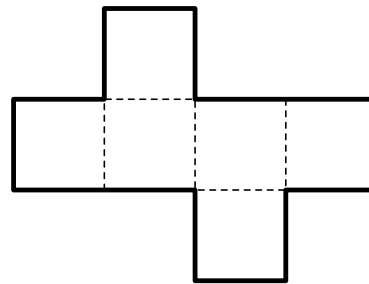
b) Jeżeli na czerwono zostały pomalowane krawędzie pogrubione na rysunku 10, to sześcián ma cztery ściany o dokładnie trzech czerwonych bokach oraz dwie ściany o dokładnie jednym czerwonym boku.



rys. 9



rys. 10



rys. 11

Uwaga

Przykład kolorowania z podpunktu b) można także przedstawić następująco: na czerwono kolorujemy wszystkie krawędzie, wzdłuż których sklejana jest siatka sześcianu z rysunku 11 (pogrubione), a niepokolorowane pozostają krawędzie, wzdłuż których ta siatka jest zaginana (przerywane).

- 13.** Istnieją dodatnie liczby całkowite a, b, c , dla których liczby $a+b, b+c, c+a$ są, w pewnej kolejności, równe

N	a) 101, 202, 303;
N	b) 102, 201, 300;
T	c) 201, 302, 403.

Komentarz

a) Zauważmy, że jeżeli liczby a, b, c są dodatnie, to suma dowolnych dwóch spośród liczb $a+b, b+c, c+a$ jest większa od trzeciej. Tymczasem $101+202=303$.

b) Zauważmy, że jeżeli liczby a, b, c są całkowite, to suma liczb $a+b, b+c, c+a$, równa $2(a+b+c)$ jest liczbą parzystą. Tymczasem $102+201+300=603$ jest liczbą nieparzystą.

c) Jeżeli $a=50, b=151, c=252$, to $a+b=201, a+c=302$ oraz $b+c=403$.

Uwaga

Znając wartości sum $a+b, b+c, c+a$, liczby a, b, c można wyznaczyć korzystając z równości

$$a = \frac{(a+b) + (c+a) - (b+c)}{2}, \quad b = \frac{(b+c) + (a+b) - (c+a)}{2}, \quad c = \frac{(c+a) + (b+c) - (a+b)}{2}.$$

Można także uzasadnić, że trzy liczby są postaci $a+b, b+c, c+a$ dla dodatnich a, b, c dokładnie wtedy, gdy są długościami boków pewnego trójkąta.

14. W turnieju badmintonu wzięło udział 6 osób, każde dwie osoby rozegrały dokładnie jeden mecz i żaden mecz nie zakończył się remisem. Wynika z tego, że istnieje osoba, która wygrała

T	a) nieparzystą liczbę meczów;
T	b) parzystą liczbę meczów;
N	c) dokładnie 2 mecze lub dokładnie 3 mecze.

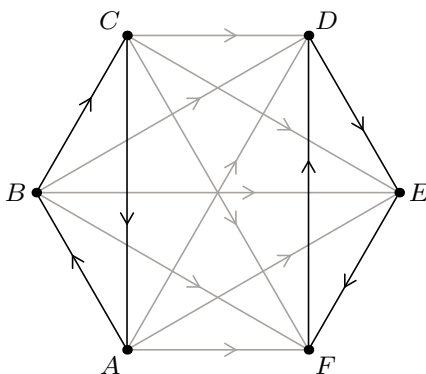
Komentarz

Wynikiem zawodnika nazwiemy liczbę meczów wygranych przez tego zawodnika. Ponieważ rozegrano dokładnie 15 meczów, więc suma wyników wszystkich sześciu zawodników jest równa 15.

a) Gdyby każdy zawodnik miał parzysty wynik, to suma wszystkich wyników również byłaby liczbą parzystą, czyli nie mogłaby być równa 15.

b) Gdyby każdy zawodnik miał nieparzysty wynik, to suma wszystkich wyników byłaby liczbą parzystą (jako suma sześciu liczb nieparzystych), czyli nie mogłaby być równa 15.

c) Nazwijmy zawodników turnieju A, B, C, D, E, F . Przypuśćmy, że A wygrał z B , B wygrał z C , C wygrał z A oraz D wygrał z E , E wygrał z F , F wygrał z D , a ponadto każdy z zawodników A, B, C wygrał z każdym z zawodników D, E, F (co zilustrowano na rysunku 12, przy czym każda strzałka prowadzi od zwycięzcy do przegranego). Przy takim układzie rozstrzygnięć meczów każdy z zawodników A, B, C wygrał dokładnie 4 mecze, a każdy z zawodników D, E, F wygrał dokładnie 1 mecz.



rys. 12

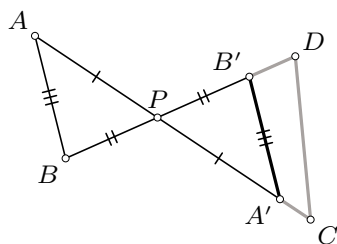
15. Odcinki AC i BD przecinają się w punkcie P , przy czym $AP < CP$ oraz $BP < DP$. Wynika z tego, że

N	a) $AB < CD$;
T	b) obwód trójkąta ABP jest mniejszy od obwodu trójkąta CDP ;
N	c) odległość punktu P od prostej AB jest mniejsza od odległości P od prostej CD .

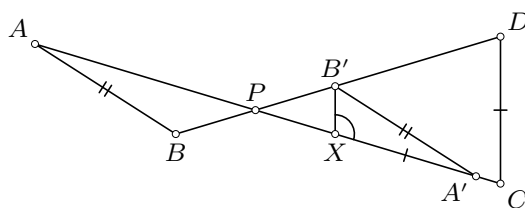
b) Niech A' będzie takim punktem odcinka CP , że $A'P = AP$, a B' będzie takim punktem odcinka DP , że $B'P = BP$. Innymi słowy — punkty A' oraz B' są obrazami odpowiednio punktów A oraz B w symetrii środkowej względem punktu P (rys. 13). Wówczas trójkąty ABP oraz $A'B'P$ są przystające (cecha bok–kąt–bok), skąd wynika, że $AB = A'B'$ oraz obwód trójkąta ABP jest równy obwodowi trójkąta $A'B'P$. Zauważmy, że $A'B' < A'C + CD + DB'$, wobec czego

$$A'P + A'B' + B'P < A'P + A'C + CD + DB' + B'P = AC + CD + DP,$$

czyli obwód trójkąta $A'B'P$ jest mniejszy od obwodu trójkąta CDP .



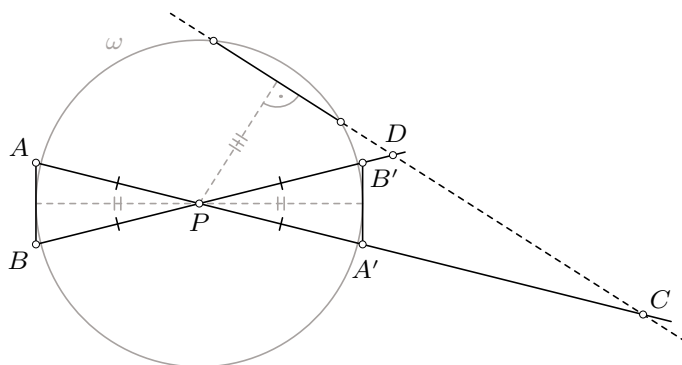
rys. 13



rys. 14

a) Rozważmy trójkąt CDP , w którym $CP = DP > CD$. Na boku CP tego trójkąta wybierzmy punkty A' oraz X w taki sposób, że $A'X = CD$ oraz A' leży na odcinku CX , a na boku DP — taki punkt B' , że odcinek $B'X$ jest równoległy do CD (rys. 14). Wreszcie punkty A i B zdefiniujemy jako symetryczne odpowiednio do punktów A' i B' względem punktu P . Wówczas w trójkącie $A'B'X$ kąt przy wierzchołku X jest rozwarty, wobec czego bok $A'B'$ leżący naprzeciw tego kąta jest dłuższy od boku $A'X$. Stąd $AB = A'B' > A'X = CD$.

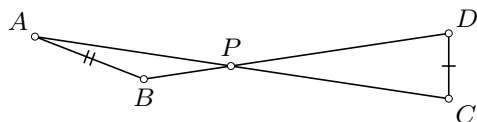
c) Rozważmy trójkąt ABP , w którym $AP = BP$ oraz $\angle APB < 60^\circ$ i oznaczmy przez A' , B' punkty symetryczne odpowiednio do A , B względem punktu P . Niech ω będzie okręgiem o środku w punkcie P , który jest styczny do odcinków AB oraz $A'B'$. Rozważmy dowolną cięciwę okręgu ω , której przedłużenie przecina półproste $PA' \rightarrow$, $PB' \rightarrow$ odpowiednio w takich punktach C , D , że $PC > PA'$, $PD > PB'$ (rys. 15). Wówczas odległość punktu P od prostej CD jest mniejsza od promienia okręgu ω , czyli odległości P od prostej AB .



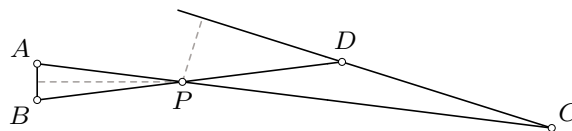
rys. 15

Uwaga

Aby przekonać się o poprawności odpowiedzi w podpunktach a) oraz c) nie trzeba wykonywać precyzyjnych konstrukcji, a wystarczy spojrzeć na odpowiednio tendencyjnie wybrane konfiguracje. Przypuśćmy, że kąt przy wierzchołku P ma niewielką miarę. Przy rozmieszczeniu punktów jak na rysunku 16 uzyskujemy $AB > CD$, a przy rozmieszczeniu jak na rysunku 17 — uzyskujemy, że punkt P jest bliżej prostej CD niż prostej AB .



rys. 16



rys. 17

XVIII Olimpiada Matematyczna Juniorów

Statystyki dotyczące części testowej
zawodów pierwszego stopnia (2022/2023)

(29 września 2022 r.)

Tabela 1.

Procentowa liczba poprawnych odpowiedzi w poszczególnych podpunktach.

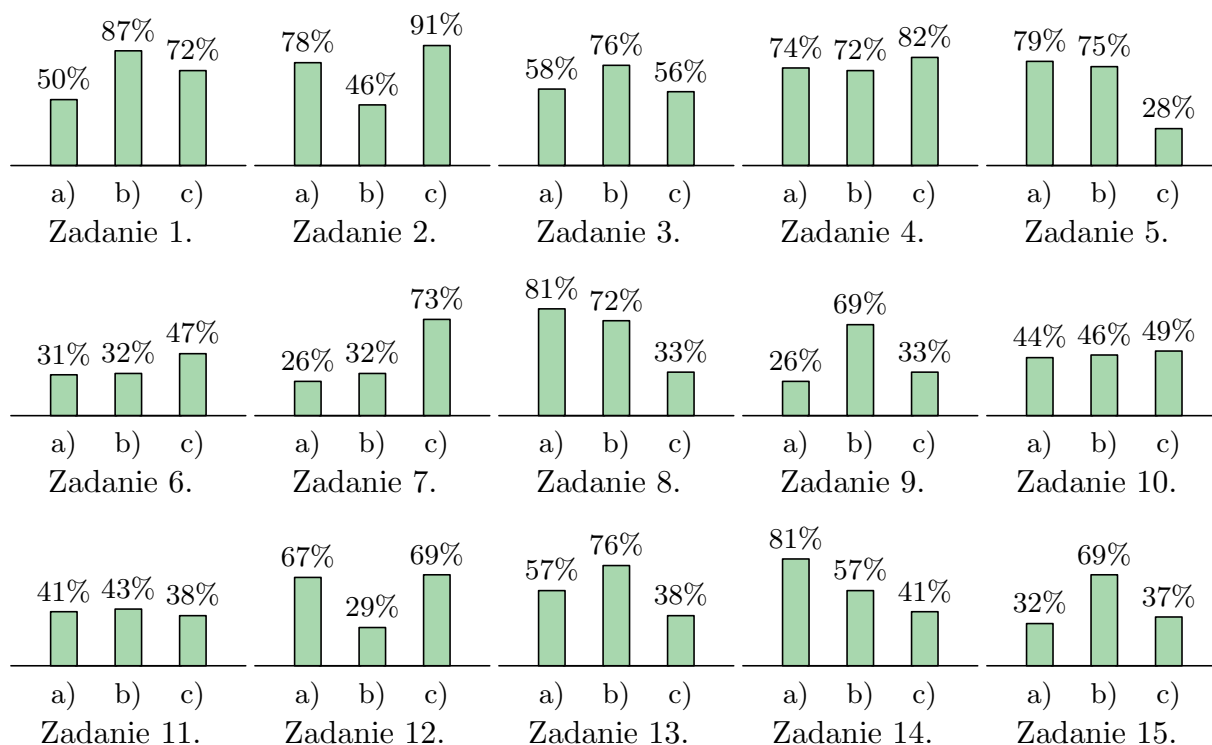
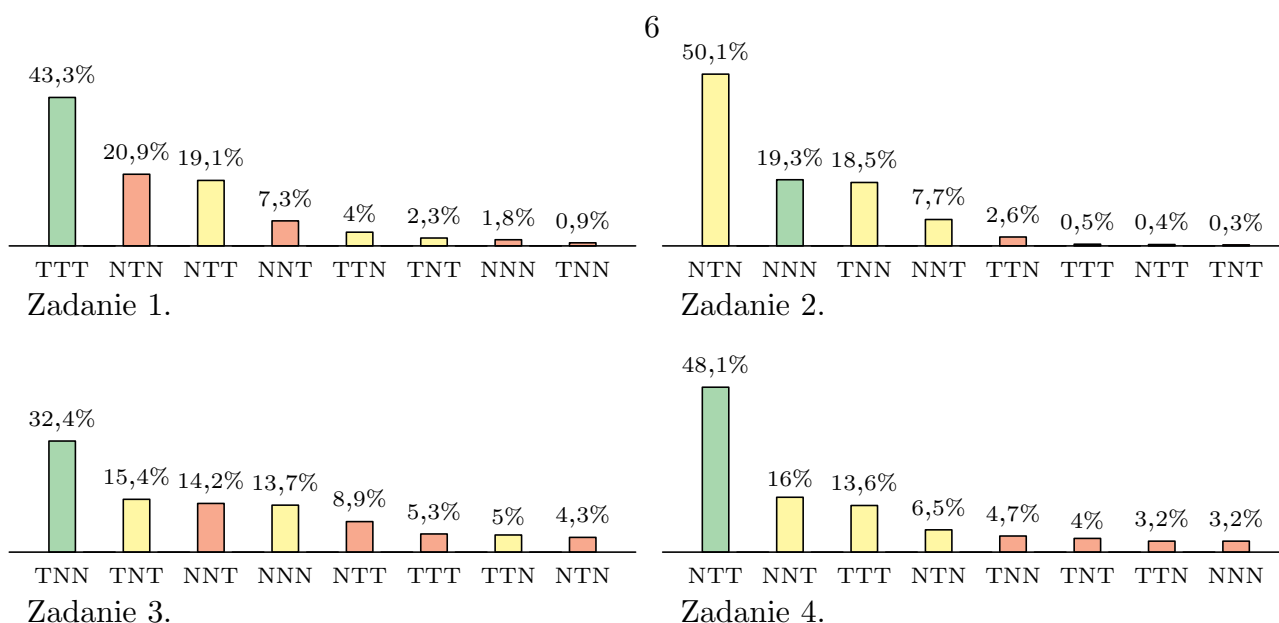
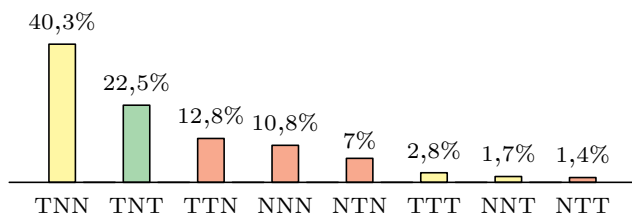


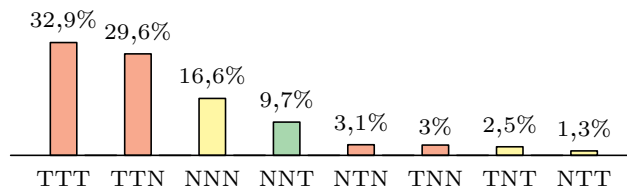
Tabela 2.

Procentowa liczba udzielonych kombinacji odpowiedzi w poszczególnych zadaniach.

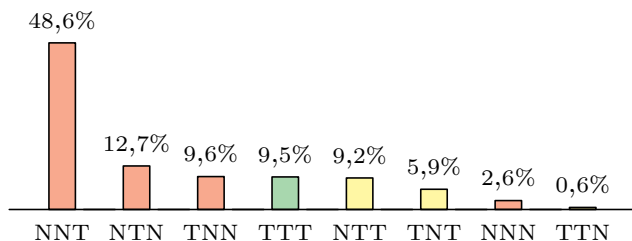




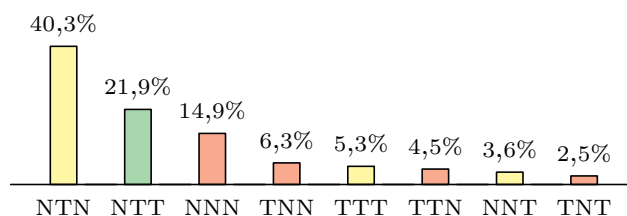
Zadanie 5.



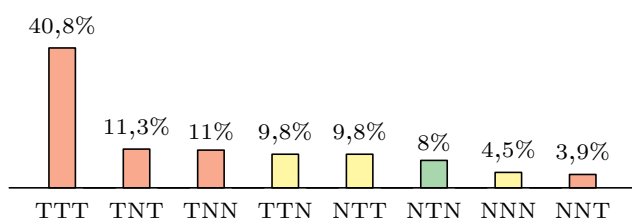
Zadanie 6.



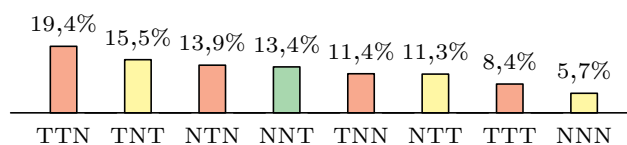
Zadanie 7.



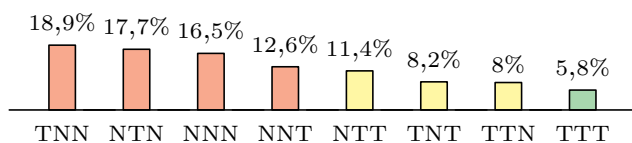
Zadanie 8.



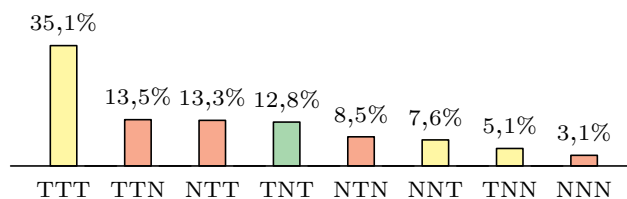
Zadanie 9.



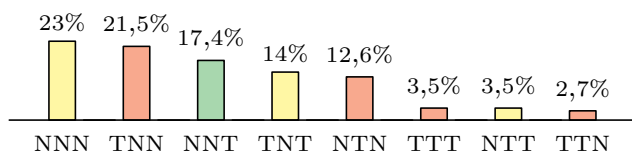
Zadanie 10.



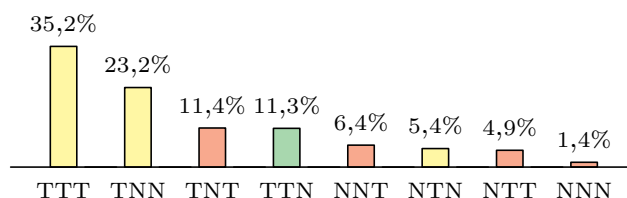
Zadanie 11.



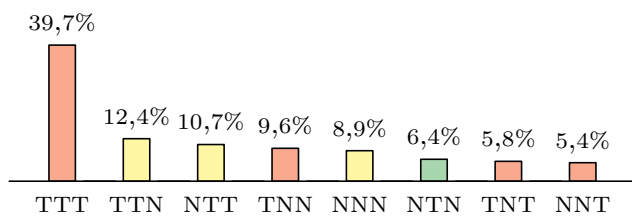
Zadanie 12.



Zadanie 13.



Zadanie 14.



Zadanie 15.

Zestaw odpowiedzi za:

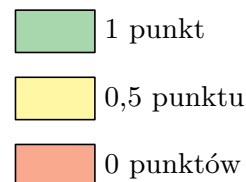
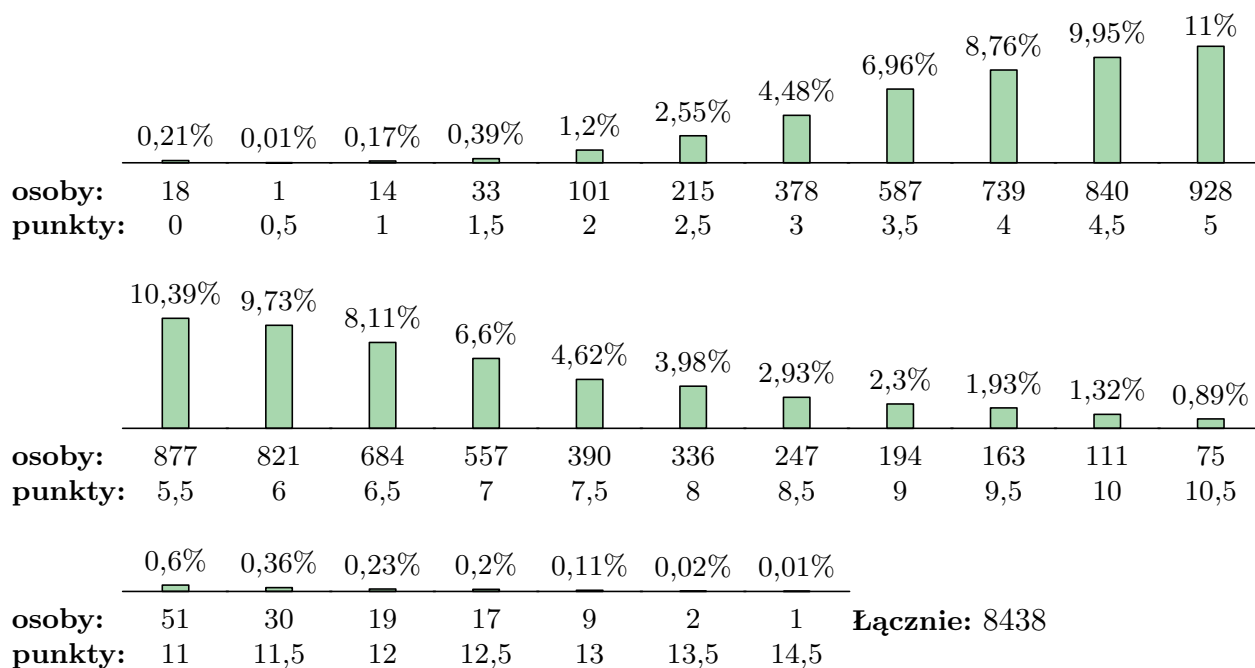


Tabela 3.

Rzeczywista oraz procentowa liczba osób, które uzyskały daną sumę punktów.

**Tabela 4.**

Procentowa i rzeczywista liczba osób, które uzyskały daną lub większą sumę punktów.

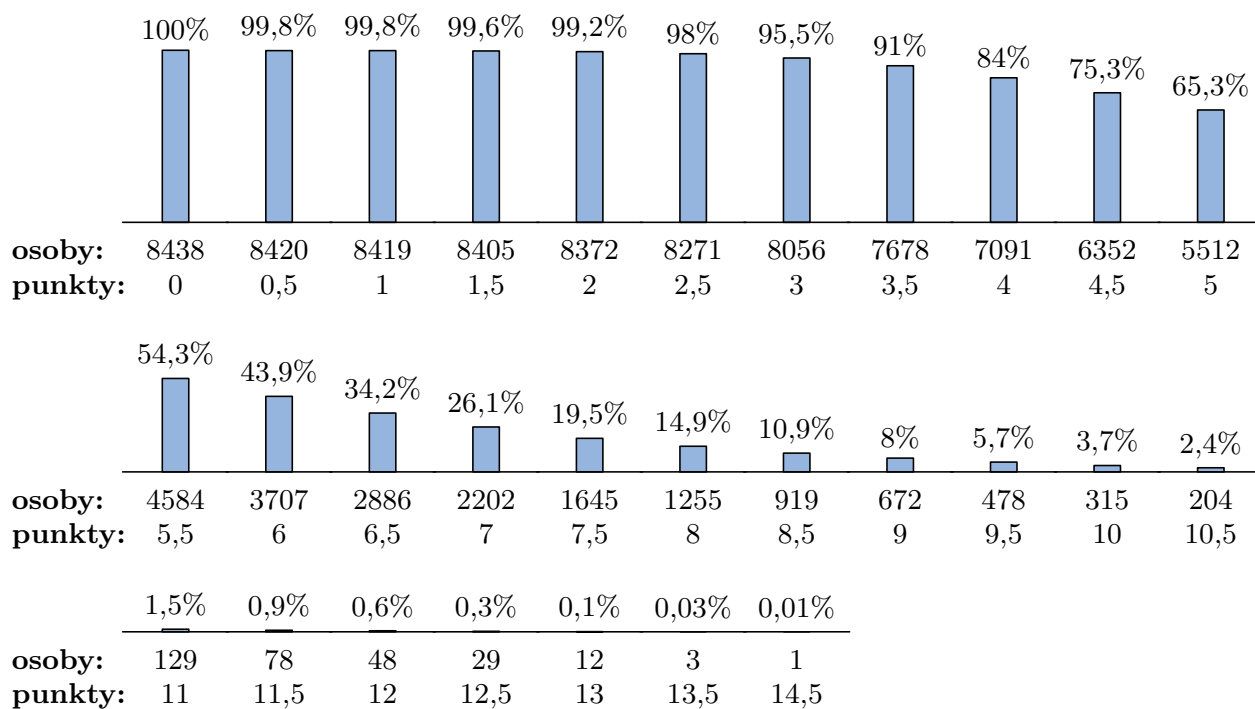
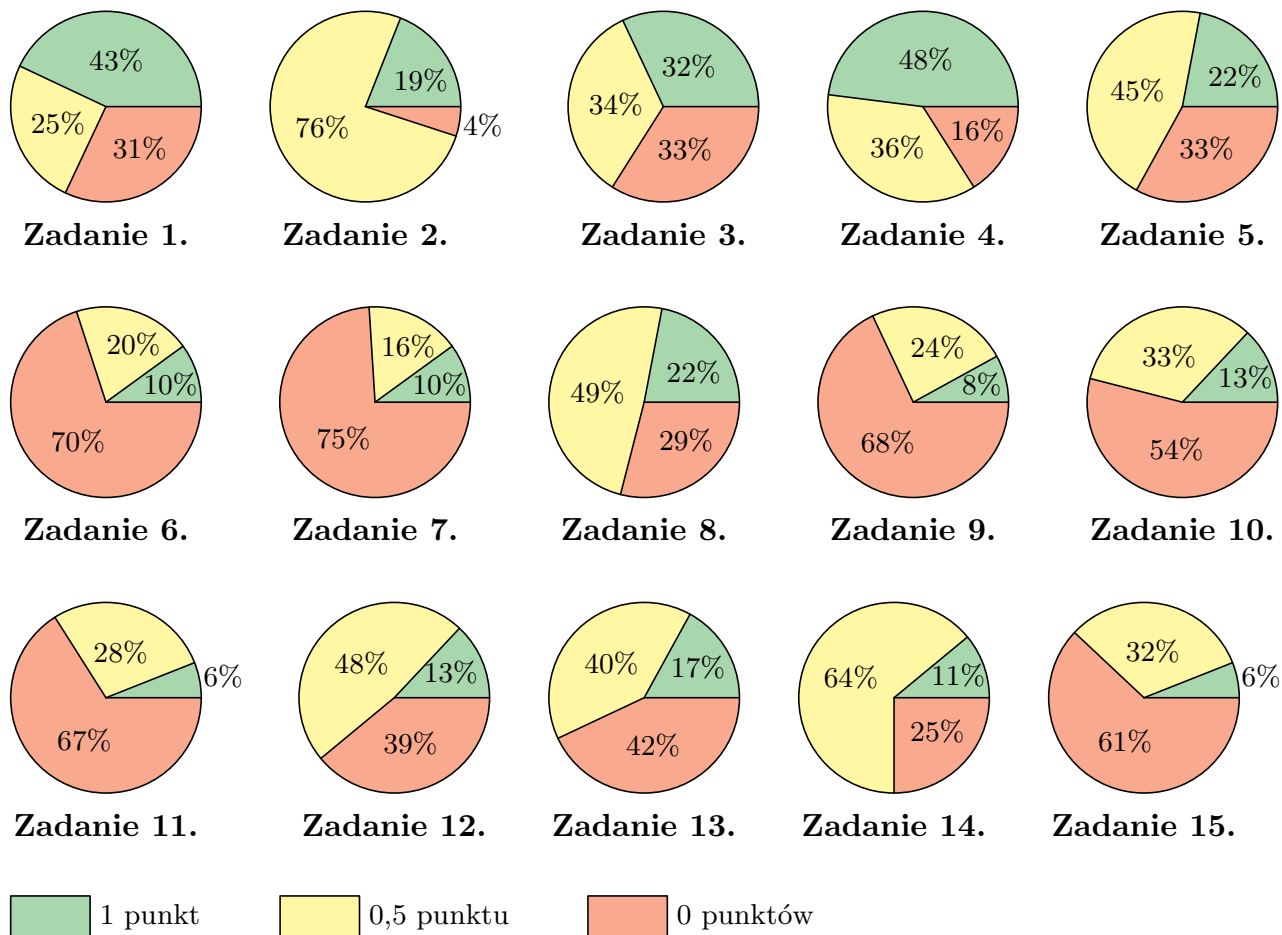
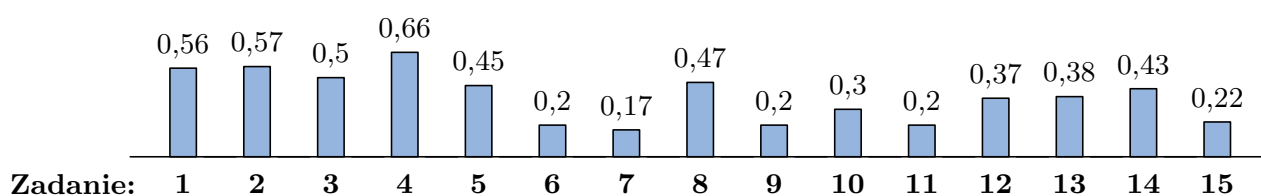


Tabela 5.

Procentowa liczba uzyskanych punktów za poszczególne zadania.

**Tabela 6.**

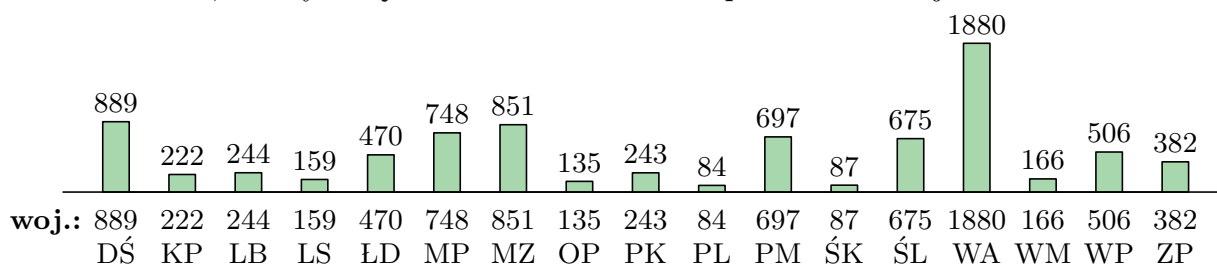
Średnia z uzyskanych punktów za poszczególne zadania.



Średni łączny wynik: 5,67

Tabela 7.

Liczba uczniów, którzy wzięli udział w zawodach w podziale na województwa.

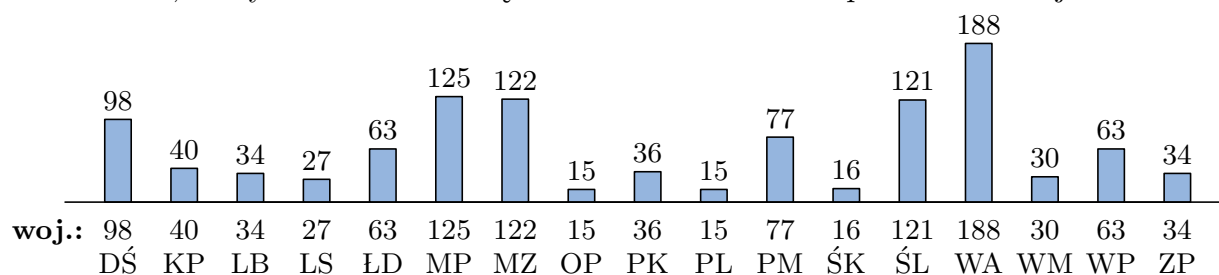


Łącznie: 8438

Na podstawie danych wprowadzonych przez szkoły. Ostateczne statystyki mogą ulec drobnym zmianom w wyniku weryfikacji nadesłanej dokumentacji.

Tabela 8.

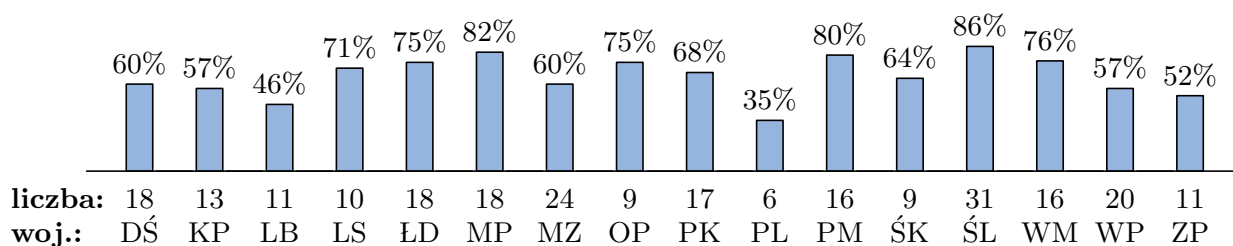
Liczba szkół, których uczniowie wzięli udział w zawodach w podziale na województwa.



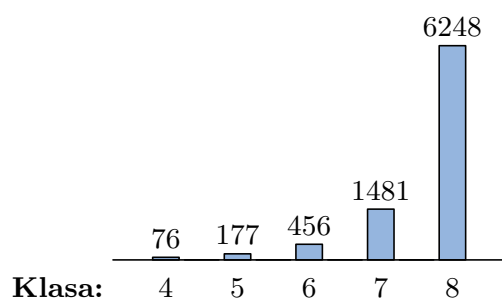
Łącznie: 1104

Tabela 9.

Rzeczywista i procentowa liczba powiatów w danym województwie, z których co najmniej jedna szkoła wzięła udział w zawodach.

**Tabela 10.**

Liczba uczniów biorących udział w teście w podziale na klasy.



Skróty województw i innych regionów

DŚ — dolnośląskie

LB — lubelskie

ŁD — łódzkie

MZ — mazowieckie bez m.st. Warszawy

PK — podkarpackie

PM — pomorskie

ŚL — śląskie

WM — warmińsko-mazurskie

ZP — zachodniopomorskie

KP — kujawsko-pomorskie

LS — lubuskie

MP — małopolskie

OP — opolskie

PL — podlaskie

ŚK — świętokrzyskie

WA — m.st. Warszawa

WP — wielkopolskie

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji i Nauki



Stowarzyszenie
na rzecz Edukacji
Matematycznej



Ministerstwo
Edukacji i Nauki

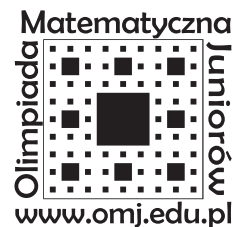
Na podstawie danych wprowadzonych przez szkoły. Ostateczne statystyki mogą ulec drobnym zmianom w wyniku weryfikacji nadesłanej dokumentacji.

XVIII OMJ/test/5

XVIII Olimpiada Matematyczna Juniorów (2022/23)

Zadania konkursowe zawodów pierwszego stopnia —
część korespondencyjna

(1 września – 17 października 2022 r.)



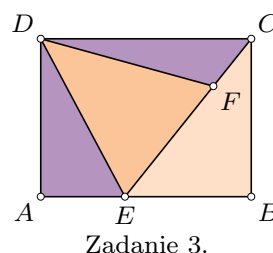
1. Dany jest prostokąt o obwodzie x cm, w którym stosunek długości boków wynosi $1:2$. Załóżmy, że pole tego prostokąta jest równe x cm². Wyznacz x .

2. Kamil napisał na tablicy działanie polegające na naprzemiennym odejmowaniu i dodawaniu liczb naturalnych od 1 do 100:

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots - 98 + 99 - 100.$$

Następnie Kamil startł jeden ze znaków $+$ lub $-$ i wpisał w jego miejsce znak $=$, uzyskując w ten sposób prawdziwą równość. Którą liczbę poprzedzał starty znak? Podaj wszystkie możliwości. Odpowiedź uzasadnij.

3. Dany jest prostokąt $ABCD$. Punkt E leży na boku AB , a punkt F leży na odcinku CE . Wykaż, że jeśli trójkąty ADE i CDF mają równe pola, to również trójkąty BCE i DEF mają równe pola.



4. Każdą z liczb naturalnych od 1 do n pokolorowano albo na niebiesko, albo na czerwono, przy czym każdego z tych kolorów użyto co najmniej raz. Okazało się, że:

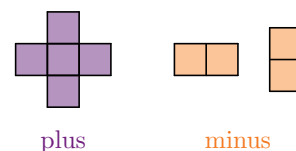
- każda liczba czerwona jest sumą pewnych dwóch różnych liczb niebieskich;
- każda liczba niebieska jest różnicą pewnych dwóch liczb czerwonych.

Wyznacz najmniejszą liczbę n , dla której takie kolorowanie jest możliwe.

5. Liczby dodatnie a, b, c spełniają nierówności

$$a + b \geq ab, \quad b + c \geq bc \quad \text{oraz} \quad c + a \geq ca.$$

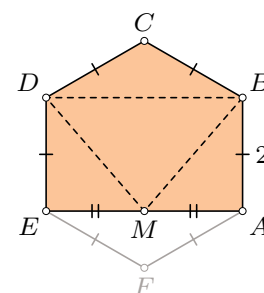
Udowodnij, że $a + b + c \geq \frac{3}{4}abc$.



Zadanie 6.

6. *Plusem* nazwiemy przedstawioną na rysunku figurę złożoną z pięciu kwadratów o boku 1, a *minusem* — każdy prostokąt złożony z dwóch takich kwadratów. Czy istnieje liczba nieparzysta n o tej własności, że kwadrat o boku n można rozciąć na plusy i minusy? Odpowiedź uzasadnij.

7. Dany jest sześciokąt foremny $ABCDEF$ o boku 2. Punkt M jest środkiem przekątnej AE . Pięciokąt $ABCDE$ zagięto wzdłuż odcinków BD, BM, DM w taki sposób, że punkty A, C oraz E spotkały się. W wyniku tej operacji otrzymano czworościan. Wyznacz jego objętość.



Zadanie 7.

Rozwiązania powyższych zadań (wszystkich lub części z nich) należy przekazać szkolnemu koordynatorowi OMJ lub przesłać bezpośrednio, listem poleconym, do Komitetu Okręgowego OMJ właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

17 października 2022 r. (decyduje data stempla pocztowego).

Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym lub pod niewłaściwy adres nie będą rozpatrywane. Adresy Komitetów Okręgowych OMJ, szczegółowe wytyczne dotyczące sposobu redakcji rozwiązań i przysyłania prac, a także regulamin OMJ i inne bieżące informacje znajdują się na stronie internetowej Olimpiady: www.omj.edu.pl.

XVIII Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody pierwszego stopnia (1 września – 17 października 2022 r.)

Rozwiązania zadań konkursowych

1. Dany jest prostokąt o obwodzie x cm, w którym stosunek długości boków wynosi $1:2$. Załóżmy, że pole tego prostokąta jest równe x cm². Wyznacz x .

Rozwiązanie

Odpowiedź: $x = 18$

Sposób I

Przypuśćmy, że krótszy bok danego prostokąta ma długość a cm. Wówczas dłuższy bok tego prostokąta ma długość $2a$ cm. Obwód prostokąta jest więc równy $6a$ cm, a pole prostokąta jest równe $2a^2$ cm². Stąd uzyskujemy (pamiętając, że $a > 0$)

$$6a = x = 2a^2, \quad \text{czyli} \quad 3 = a$$

i w konsekwencji $x = 18$.

Sposób II

Przypuśćmy, że prostokąt ma wymiary (w centymetrach) $a \times b$, przy czym $\frac{b}{a} = 2$. Pole tego prostokąta jest równe ab , a obwód tego prostokąta jest równy $2a + 2b$, więc warunek z treści zadania można zapisać jako

$$ab = 2a + 2b.$$

Po obustronnym podzieleniu przez a uzyskujemy

$$b = 2 + 2 \cdot \frac{b}{a}, \quad \text{czyli} \quad b = 2 + 2 \cdot 2 = 6.$$

W konsekwencji $a = \frac{b}{2} = 3$ i ostatecznie $x = ab = 2a + 2b = 18$.

Uwaga 1.

Jedyny prostokąt spełniający warunki zadania ma długości boków wyrażające się liczbami całkowitymi. Sama treść zadania nie zawiera jednak założenia o tym, że boki prostokąta mają długości całkowite. Naśladując rozumowania przeprowadzone powyżej można wykazać, że dla dowolnej liczby dodatniej t istnieje prostokąt o wymiarach $a \times a \cdot t$, w którym pole oraz obwód wyrażają się tymi samymi liczbami. Przykładowo dla $t = 4$, czyli stosunku długości boków $1:4$, uzyskujemy prostokąt $2,5 \times 10$, którego zarówno pole, jak i obwód, są równe 25.

Uwaga 2.

Okazuje się, że istnieją jedynie dwa prostokąty o bokach całkowitej długości, w których pole oraz obwód wyrażają się tymi samymi liczbami — mają one wymiary 3×6 oraz 4×4 . Aby się o tym przekonać, załóżmy, że w prostokącie o wymiarach $a \times b$, gdzie a, b są dodatnimi liczbami całkowitymi, pole oraz obwód są równe, tzn. $ab = 2a + 2b$. Tę równość można przekształcić równoważnie do postaci

$$(a - 2)(b - 2) = 4.$$

Liczby $a - 2$ oraz $b - 2$ są całkowite oraz nie mniejsze od -1 . Liczba 4 ma następujące przedstawienia w postaci iloczynu dwóch takich liczb: $4 = 1 \cdot 4$ oraz $4 = 2 \cdot 2$. Pierwsze z tych przedstawień odpowiada prostokątowi 3×6 , a drugie — prostokątowi 4×4 .

2. Kamil napisał na tablicy działanie polegające na naprzemiennym odejmowaniu i dodawaniu liczb naturalnych od 1 do 100:

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots - 98 + 99 - 100.$$

Następnie Kamil starł jeden ze znaków $+$ lub $-$ i wpisał w jego miejsce znak $=$, uzyskując w ten sposób prawdziwą równość. Którą liczbę poprzedzał starty znak? Podaj wszystkie możliwości. Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie

Odpowiedź: Starty został znak $-$ poprzedzający **50** lub znak $+$ poprzedzający **51**.

Sposób I

Przypuśćmy, że Kamil starł znak $+$ następujący bezpośrednio po liczbie parzystej $2k$ dla pewnej liczby naturalnej k spełniającej nierówności $1 \leq k \leq 49$. Wówczas wynik działania uzyskanego po lewej stronie otrzymanej równości jest sumą k składników równych -1 , czyli:

$$(1 - 2) + (3 - 4) + \dots + ((2k - 1) - 2k) = \underbrace{(-1) + (-1) + \dots + (-1)}_k = -k.$$

Po prawej zaś stronie uzyskujemy sumę $50 - k$ składników równych -1 :

$$(2k + 1 - (2k + 2)) + (2k + 3 - (2k + 4)) + \dots + (99 - 100) = \underbrace{(-1) + (-1) + \dots + (-1)}_{50 - k} = -(50 - k).$$

Równość $k = 50 - k$ jest prawdziwa tylko dla $k = 25$. To oznacza, że jeśli Kamil starł znak $+$, to mógł to być wyłącznie znak poprzedzający liczbę 51.

Przypuśćmy teraz, że Kamil starł znak $-$ poprzedzający liczbę parzystą $2k$ dla $1 \leq k \leq 49$. Uzyskana w ten sposób równość tym różni się od równości rozważonej w poprzednim przypadku (starcia znaku $+$ po liczbie $2k$), że po lewej stronie nie ma składnika $-2k$, a po prawej stronie ma dodatkowy składnik $2k$. W związku z tym wynik działania po każdej stronie jest o dokładnie $2k$ większy niż w poprzednim przypadku. To oznacza, że wyniki działań po obu stronach są ponownie równe wyłącznie dla $k = 25$.

Pozostał do rozpatrzenia przypadek, gdy Kamil starł znak $-$ poprzedzający liczbę 100. Bezpośrednio sprawdzamy, że wówczas wynik działania po lewej stronie jest równy 50, czyli jest różny od 100. To oznacza, że jeśli Kamil starł znak $-$, to znak ten poprzedzał liczbę 50.

Sposób II

W poniższej tabeli zebrane są wyniki działań otrzymanych po lewej oraz po prawej stronie dla każdego z możliwych położeń znaku równości. Uzasadnimy ich poprawność.

„=” przed:	2	3	4	5		$2k$	$2k + 1$		98	99	100
lewa:	1	-1	2	-2		k	$-k$		49	-49	50
prawa:	-47	-49	-44	-48		$3k - 50$	$k - 50$		97	-1	100

Drugi wiersz (czyli wyniki działania po lewej stronie) wypełniamy od lewej do prawej kolejno liczbami:

$$1, \quad 1 - 2, \quad 1 - 2 + 3, \quad 1 - 2 + 3 - 4, \quad \dots$$

Jeśli starty został znak $-$ poprzedzający liczbę parzystą $2k$, to po lewej stronie uzyskujemy

$$1 + (-2 + 3) + (-4 + 5) + \dots + (-(2k - 2) + (2k - 1)) = \underbrace{1 + 1 + 1 + \dots + 1}_k = k.$$

Jeśli natomiast starty został znak $+$ poprzedzający liczbę nieparzystą $2k + 1$, to po lewej stronie uzyskujemy wynik o $2k$ mniejszy od powyższego — czyli $-k$.

Trzeci wiersz wypełniamy osobno w dwóch przypadkach. Jeśli starty został znak $+$ (poprzedzający $2k + 1$), to suma wyników uzyskanych po lewej i po prawej stronie jest równa wynikowi wyjściowego działania, czyli

$$1 - 2 + 3 - 4 + \dots + 99 - 100 = -50.$$

Wobec tego jeśli wynik po lewej stronie jest równy $-k$, to wynik po prawej stronie jest równy $-50 - (-k) = k - 50$.

Jeśli starty został znak $-$ poprzedzający liczbę parzystą $2k$, to suma wyników uzyskanych po lewej i po prawej stronie jest równa

$$\underbrace{1 - 2 + 3 - 4 + \dots + (2k - 1)}_{\text{lewa}} + \underbrace{2k + (2k + 1) - (2k + 2) + \dots + 99 - 100}_{\text{prawa}},$$

czyli różni się od wyjściowego działania wyłącznie tym, że zamiast $-2k$ pojawia się składnik $2k$. To oznacza, że suma wyników po lewej i po prawej stronie jest równa $-50 + 4k$. Zatem skoro po lewej stronie od znaku równości wynik działania jest równy k , to po prawej stronie wynik jest równy $(-50 + 4k) - k = 3k - 50$.

Z powyższych rozważań wynika, że jeśli starty został znak $+$ poprzedzający liczbę $2k + 1$, to wyniki po lewej i po prawej stronie są równe dokładnie wtedy, gdy $-k = k - 50$, czyli $k = 25$. To oznacza, że starty znak poprzedzał liczbę 51. Jeśli zaś starty został znak $-$ poprzedzający liczbę $2k$, to wyniki są równe dokładnie wtedy, gdy $k = 3k - 50$, czyli również gdy $k = 25$. To oznacza, że starty znak poprzedzał liczbę 50.

Uwaga

Rozumowania przeprowadzone powyżej pozwalają rozwiązać zadanie także w ogólnym przypadku, gdy liczbę 100 zastąpimy liczbą postaci $4n$ dla liczby całkowitej $n \geq 1$. Wówczas startym znakiem może być dowolny z dwóch znaków sąsiadujących z liczbą $2n$. Już dla $n = 1$ można przekonać się o tym, że prawdziwą równość można uzyskać na więcej niż jeden sposób:

$$1 - 2 = 3 - 4 \quad \text{oraz} \quad 1 = 2 + 3 - 4.$$

Z kolei jeśli zastąpimy liczbę 100 liczbą m niepodzielną przez 4, to uzyskanie prawdziwej równości w sposób opisany w treści zadania nie będzie możliwe. Uzasadnimy ten fakt.

Zauważmy, że wystarczy udowodnić, że nie jest możliwe odpowiednie starcie znaku $+$. Rzeczywiście, rozumowanie przeprowadzone w pierwszym sposobie rozwiązania pozwala wnioskować, że jeśli starcie znaku $-$ przed liczbą $2k$ prowadzi do prawdziwej równości, to starcie znaku $+$ po liczbie $2k$ również (dla $m = 2k$ uznajemy, że prawa strona jest równa 0).

Jeśli liczba m jest nieparzysta, to po starciu znaku $+$ po lewej stronie uzyskujemy liczbę ujemną, a po prawej — liczbę dodatnią. Liczby te nie mogą więc być równe. Przyjmijmy, że liczba m jest dwukrotnością liczby nieparzystej, powiedzmy $m = 2\ell$. Wówczas po starciu znaku $+$ następującego po liczbie $2k$ uzyskujemy po lewej stronie wynik $-k$, a po prawej stronie — wynik $-(\ell - k)$. Jednak $-k = -(\ell - k)$ oznacza, że $\ell = 2k$, co nie jest możliwe, gdyż ℓ jest liczbą nieparzystą.

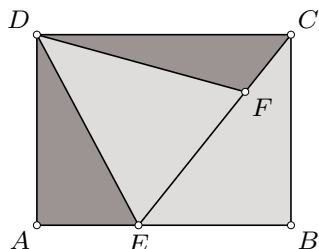
3. Dany jest prostokąt $ABCD$. Punkt E leży na boku AB , a punkt F leży na odcinku CE . Wykaż, że jeśli trójkąty ADE i CDF mają równe pola, to również trójkąty BCE i DEF mają równe pola.

Rozwiązanie

We wszystkich rozwiązaniach przez $[\mathcal{F}]$ będziemy oznaczali pole figury $\mathcal{F}$.

Sposób I

Zauważmy, że $[CDE] = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot AD = \frac{1}{2}[ABCD]$, więc także $[ADE] + [BCE] = \frac{1}{2}[ABCD]$.



rys. 1

Stąd wniosek, że jeśli $[ADE] = [CDF]$ (rys. 1), to

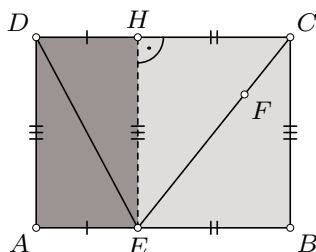
$$[BCE] = \frac{1}{2}[ABCD] - [ADE] = \frac{1}{2}[ABCD] - [CDF] = [DEF].$$

Sposób II

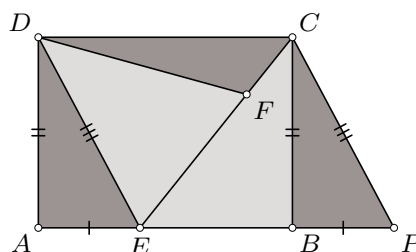
Niech H będzie rzutem prostokątnym punktu E na odcinek CD (rys. 2). Wówczas ADE i HED oraz BCE i HEC to pary trójkątów przystających. Wobec tego

$$[ADE] + [BCE] = [HED] + [HEC] = [CDE] = [CDF] + [DEF].$$

Stąd bezpośrednio uzyskujemy, że jeśli $[ADE] = [CDF]$, to $[BCE] = [DEF]$.



rys. 2



rys. 3

Sposób III

Niech P będzie takim punktem, że czworokąt $PCDE$ jest równoległobokiem (rys. 3). Wówczas trójkąty ADE oraz BCP są przystające (cecha bok-bok-bok), gdyż

$$AD = BC, \quad DE = CP \quad \text{oraz} \quad AE = AB - BE = CD - BE = PE - BE = BP.$$

Ponadto trójkąty CDE oraz EPC są przystające, jako połówki równoległoboku. Wobec tego jeżeli $[ADE] = [CDF]$, to

$$[BCE] = [EPC] - [BCP] = [CDE] - [ADE] = [CDE] - [CDF] = [DEF].$$

Uwaga

Teza zadania pozostanie prawdziwa gdy zastąpimy założenie, że czworokąt $ABCD$ jest prostokątem słabszym założeniem — że czworokąt ten jest równoległobokiem.

4. Każdą z liczb naturalnych od 1 do n pokolorowano albo na niebiesko, albo na czerwono, przy czym każdego z tych kolorów użyto co najmniej raz. Okazało się, że:

- każda liczba czerwona jest sumą pewnych dwóch różnych liczb niebieskich;
- każda liczba niebieska jest różnicą pewnych dwóch liczb czerwonych.

Wyznacz najmniejszą liczbę n , dla której takie kolorowanie jest możliwe.

Rozwiązanie

Odpowiedź: Najmniejszą liczbą, dla której istnieje żądane kolorowanie jest $n = 9$.

Przypuśćmy, że n jest liczbą, dla której kolorowanie zgodne z warunkami zadania jest możliwe. Wówczas $n \geq 2$, gdyż każdy z kolorów został użyty co najmniej raz.

Zauważmy, że liczba n nie może być niebieska, gdyż nie można jej przedstawić jako różnicy dwóch spośród liczb od 1 do n . Wobec tego liczba n jest czerwona. Z kolei liczby 1 oraz 2 nie mogą być czerwone, gdyż żadna z nich nie jest sumą dwóch różnych liczb od 1 do n . To oznacza, że liczby 1 oraz 2 są niebieskie. W szczególności oznacza to, że $n \geq 3$.

Zauważmy, że $n - 1$ nie jest różnicą dwóch liczb czerwonych (gdyż 1 jest liczbą niebieską). Wobec tego liczba $n - 1$ nie jest niebieska, czyli jest czerwona. Podobnie $n - 2 = (n - 1) - 1$ nie jest różnicą dwóch liczb czerwonych (gdyż zarówno 1, jak i 2 są niebieskie), co oznacza, że liczba $n - 2$ jest czerwona. Tym samym $n \neq 3$ oraz $n \neq 4$, czyli $n \geq 5$.

Skoro n jest liczbą czerwoną, to n jest sumą dwóch różnych niebieskich liczb. Ponieważ $n - 1$ oraz $n - 2$ to liczby czerwone, więc suma dwóch różnych niebieskich liczb jest z pewnością nie większa od $(n - 3) + (n - 4) = 2n - 7$. Wobec tego $n \leq 2n - 7$, czyli $n \geq 7$.

Gdyby $n = 7$, to jedyną możliwością jest, że czerwona liczba 7 jest sumą niebieskich liczb 3 i 4. Wtedy jednak niebieska liczba 4 nie jest różnicą dwóch czerwonych liczb — sprzeczność.

Podobnie gdyby $n = 8$, to jedyną możliwością jest, że liczby 3 oraz 5 są niebieskie, ale wówczas 5 nie jest różnicą dwóch czerwonych liczb. Tym samym wykluczyliśmy wszystkie przypadki w których $n \leq 8$.

Udowodnimy, że dla $n = 9$ kolorowanie liczb 1, 2, 4, 5, 6 na niebiesko, a liczb 3, 7, 8, 9 na czerwono spełnia warunki zadania. Rzeczywiście, wynika to bezpośrednio z następujących rachunków:

$$1 = 9 - 8, \quad 2 = 9 - 7, \quad 4 = 7 - 3, \quad 5 = 8 - 3, \quad 6 = 9 - 3, \quad 3 = 1 + 2, \quad 7 = 1 + 6, \quad 8 = 2 + 6, \quad 9 = 4 + 5.$$

Uwaga

Opisaną w treści zadania własność mają wszystkie liczby naturalne $n \geq 9$. Przedstawimy przykłady kolorowań, które o tym świadczą. Weryfikację poprawności kolorowań pomijamy.

- Jeżeli $n = 3k$ dla $k \geq 3$, to kolorujemy

$$\begin{array}{ll} \text{na niebiesko: } 1, 2, \dots, k-1, & k+1, k+2, \dots, 2k, \\ \text{na czerwono:} & k, \quad 2k+1, 2k+2, \dots, 3k. \end{array}$$

- Jeżeli $n = 3k + 1$ dla $k \geq 3$, to kolorujemy

$$\begin{array}{lll} \text{na niebiesko: } 1, 2, \dots, k-1, & k+1, & k+3, \dots, 2k+1, \\ \text{na czerwono:} & k, & k+2, \quad 2k+2, \dots, 3k+1. \end{array}$$

- Jeżeli $n = 3k + 2$ dla $k \geq 3$, to kolorujemy

$$\begin{array}{lll} \text{na niebiesko: } 1, 2, \dots, k-1, & k+1, & k+4, \dots, 2k+2, \\ \text{na czerwono:} & k, & k+2, k+3, \quad 2k+3, \dots, 3k+2. \end{array}$$

5. Liczby dodatnie a, b, c spełniają nierówności

$$a + b \geq ab, \quad b + c \geq bc \quad \text{oraz} \quad c + a \geq ca.$$

Udowodnij, że $a + b + c \geq \frac{3}{4}abc$.

Rozwiązanie

Sposób I

Zauważmy, że dane nierówności pozwalają oszacować iloczyn abc na trzy sposoby:

$$abc \leq a(b + c) = ab + ca \leq (a + b) + (c + a) = 2a + b + c,$$

$$abc \leq b(c + a) = bc + ab \leq (b + c) + (a + b) = a + 2b + c,$$

$$abc \leq c(a + b) = ca + bc \leq (c + a) + (b + c) = a + b + 2c.$$

Dodając stronami trzy powyższe nierówności, uzyskujemy

$$3abc \leq (2a + b + c) + (a + 2b + c) + (a + b + 2c) = 4(a + b + c),$$

czyli po podzieleniu obu stron przez 4 — dowodzoną nierówność.

Sposób II

Dodając stronami wszystkie trzy dane nierówności, uzyskujemy

$$2(a + b + c) = (a + b) + (b + c) + (c + a) \geq ab + bc + ca, \quad \text{czyli} \quad a + b + c \geq \frac{1}{2}(ab + bc + ca).$$

Z kolei dodając stronami nierówności

$$(a + b) \cdot c \geq ab \cdot c, \quad (b + c) \cdot a \geq bc \cdot a, \quad (c + a) \cdot b \geq ca \cdot b,$$

otrzymujemy

$$2(ab + bc + ca) = (ca + bc) + (ab + ca) + (bc + ab) \geq 3abc, \quad \text{czyli} \quad ab + bc + ca \geq \frac{3}{2}abc.$$

Ostatecznie więc

$$a + b + c \geq \frac{1}{2}(ab + bc + ca) \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}abc = \frac{3}{4}abc,$$

co było do udowodnienia.

Sposób III

Przypuścimy, że $c \geq b \geq a$. Wówczas

$$\begin{aligned} 2(a + b + c) &= (a + b) + (a + c) + (b + c) \geq ab + ac + bc = \\ &= ab + \frac{1}{2}bc + ac + \frac{1}{2}bc \geq ab + \frac{1}{2}ab + ac + \frac{1}{2}ac = \frac{3}{2}a(b + c) \geq \frac{3}{2}abc, \end{aligned}$$

skąd po podzieleniu obu stron przez 2 uzyskujemy tezę zadania.

Rozumowanie w przypadku dowolnego innego uporządkowania liczb a, b, c jest w pełni analogiczne, gdyż zmienne a, b, c odgrywają symetryczne role w założeniach oraz tezie zadania.

Sposób IV

Zauważmy, że założenie $a + b \geq ab$ można zapisać równoważnie jako

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 1.$$

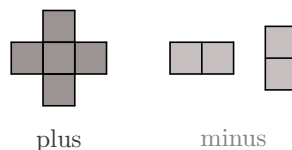
Gdyby $a > 2$ oraz $b > 2$, to

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

To oznacza, że co najmniej jedna z liczb a, b jest nie większa od 2. Przyjmijmy bez straty ogólności, że $a \leq 2$. Wówczas

$$2(a + b + c) \geq ab + bc + ca = a(b + c) + bc \geq abc + \frac{1}{2} \cdot 2bc \geq abc + \frac{1}{2} \cdot abc = \frac{3}{2}abc.$$

6. *Plusem* nazwiemy przedstawioną na rysunku figurę złożoną z pięciu kwadratów o boku 1, a *minusem* — każdy prostokąt złożony z dwóch takich kwadratów. Czy istnieje liczba nieparzysta n o tej własności, że kwadrat o boku n można rozciąć na plusy i minusy? Odpowiedź uzasadnij.



Rozwiązanie

Odpowiedź: Nie istnieje liczba nieparzysta n o opisanej własności.

Przypuśćmy, że taka liczba nieparzysta n istnieje. Rozważmy kwadrat $n \times n$ i przed rozcięciem pokolorujmy go w czarno-białą szachownicę złożoną z n^2 pól w taki sposób, aby cztery narożne pola były czarne.

Sposób I

Wartość figury złożonej z całych pól i pomalowanej w szachownicę nazwiemy różnicą między liczbą czarnych i białych pól tej figury. Zauważmy, że wartość całego kwadratu przed rozcięciem jest równa 1, gdyż łączna liczba wszystkich czarnych pól jest o 1 większa niż łączna liczba wszystkich białych pól.

Po rozcięciu kwadratu na plusy i minusy, każda z uzyskanych części będzie składała się z całych pól szachownicy. Każdy minus będzie miał jedno pole białe i jedno czarne, czyli będzie miał wartość 0. Z kolei każdy plus będzie miał albo cztery pola czarne i jedno pole białe, albo cztery pola białe i jedno pole czarne, czyli wartość 3 albo -3 .

Jak widać, niezależnie od kształtu, wartość każdej z otrzymanych części jest liczbą podzielną przez 3. Oznacza to, że suma wartości wszystkich części również jest podzielna przez 3. Uzyskaliśmy sprzeczność, gdyż suma wartości wszystkich części jest równa wartości całego kwadratu, czyli 1, a 1 nie jest liczbą podzielną przez 3.

Sposób II

Oznaczmy przez m liczbę minusów (złożonych z jednego pola białego i jednego czarnego), przez b — liczbę plusów złożonych z czterech pól białych i jednego czarnego, a przez c — liczbę plusów złożonych z czterech pól czarnych i jednego białego.

Wówczas liczba wszystkich czarnych pól jest równa $m + b + 4c$, a liczba wszystkich białych pól jest równa $m + 4b + c$. Wiemy jednak, że pól czarnych jest łącznie o 1 więcej, czyli

$$1 = (m + b + 4c) - (m + 4b + c) = 3(c - b), \quad \text{skąd} \quad c - b = \frac{1}{3}.$$

Uzyskaliśmy sprzeczność, gdyż różnica dwóch liczb całkowitych nie może być równa $\frac{1}{3}$.

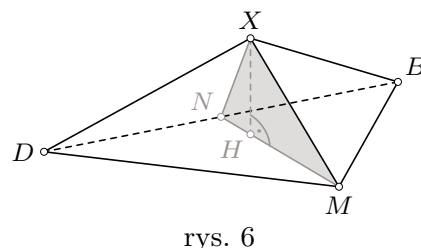
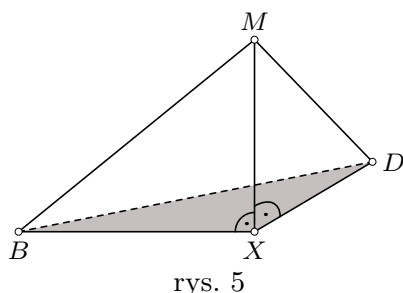
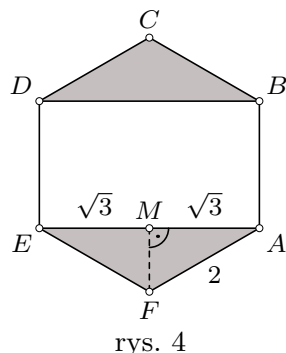
7. Dany jest sześciokąt foremny $ABCDEF$ o boku 2. Punkt M jest środkiem przekątnej AE . Pięciokąt $ABCDE$ zagięto wzdłuż odcinków BD , BM , DM w taki sposób, że punkty A , C oraz E spotkały się. W wyniku tej operacji otrzymano czworościan. Wyznacz jego objętość.

Rozwiązanie

Odpowiedź: Objętość otrzymanego czworościanu jest równa 1.

Sposób I

Zauważmy, że trójkąt AMF jest połówką trójkąta równobocznego o boku 2, wobec czego $AM = \sqrt{3}$ (rys. 4). Trójkąt AEF składa się z dwóch połówek trójkąta równobocznego o boku 2, więc jego pole jest równe $\sqrt{3}$. Tę samą wartość ma pole trójkąta BCD , gdyż trójkąty BCD oraz AEF są przystające.



Niech X będzie wierzchołkiem czworościanu, w którym po zagięciu pięciokąta spotkały się punkty A , C oraz E . Potraktujmy czworościan jako ostrosłup o podstawie BDX (rys. 5). Wówczas

$$\sphericalangle MXB = \sphericalangle MAB = 90^\circ \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle MXD = \sphericalangle MED = 90^\circ,$$

więc odcinek MX jest prostopadły do prostych BX oraz DX . W konsekwencji odcinek MX jest prostopadły do płaszczyzny BDX , a zatem jest wysokością rozważanego ostrosłupa.

Pole podstawy BXD jest równe polu trójkąta BCD , czyli $\sqrt{3}$, a wysokość MX ma taką długość jak odcinek AM , czyli $\sqrt{3}$. Stąd wniosek, że objętość danego czworościanu to

$$\frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 1.$$

Sposób II

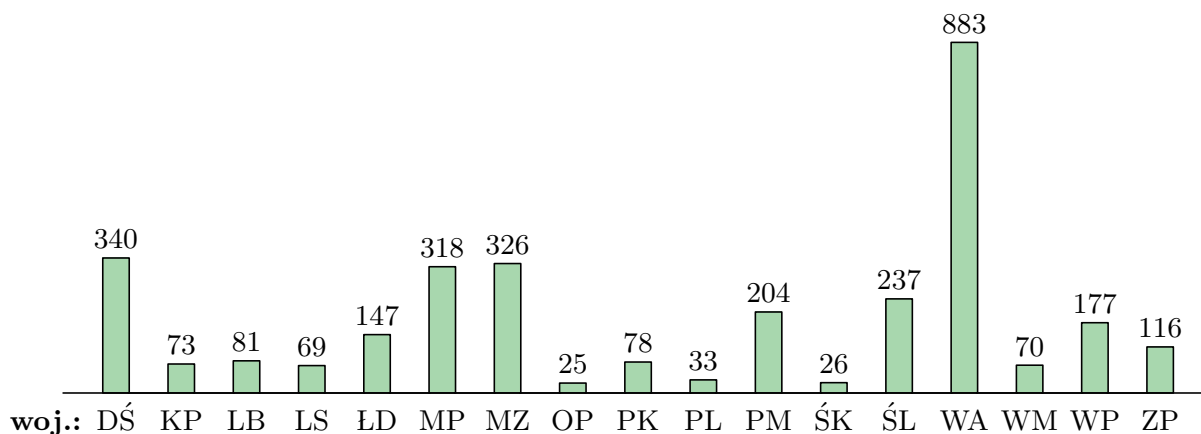
Oznaczmy przez N środek odcinka BD , przez X — wierzchołek czworościanu, w którym po zagięciu pięciokąta spotkały się punkty A , C , E , a przez H — spodek wysokości czworościanu poprowadzonej z wierzchołka X (rys. 6). Trójkąt MNX ma boki długości $MN = AB = 2$, $XN = CN = 1$ oraz $XM = AM = \sqrt{3}$, skąd wniosek, że jest połówką trójkąta równobocznego i $\sphericalangle XMN = \sphericalangle XMH = 30^\circ$. To oznacza, że również trójkąt prostokątny HMX jest połówką trójkąta równobocznego, a zatem $XH = \frac{1}{2}XM = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Ostatecznie uzyskujemy, że szukana objętość to

$$\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot BD \cdot NM \right) \cdot XH = \frac{1}{3} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1.$$

XVIII Olimpiada Matematyczna Juniorów

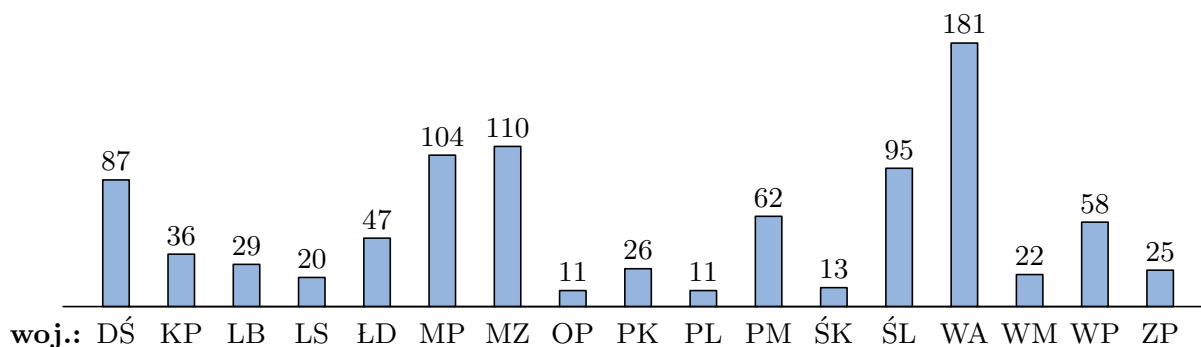
Statystyki dotyczące części korespondencyjnej
zawodów pierwszego stopnia (2022/23)

Tabela 1. Liczba uczniów, którzy wzięli udział w zawodach w podziale na województwa i inne regiony.



Łączna liczba uczniów, którzy wzięli udział w zawodach: 3203

Tabela 2. Liczba szkół uczniów, którzy wzięli udział w zawodach w podziale na województwa i inne regiony.



Łączna liczba szkół uczniów, którzy wzięli udział w zawodach: 937

Skróty województw i innych regionów

DŚ — dolnośląskie

LB — lubelskie

ŁD — łódzkie

MZ — mazowieckie bez m.st. Warszawy

PK — podkarpackie

PM — pomorskie

ŚL — śląskie

WM — warmińsko-mazurskie

ZP — zachodniopomorskie

KP — kujawsko-pomorskie

LS — lubuskie

MP — małopolskie

OP — opolskie

PL — podlaskie

ŚK — świętokrzyskie

WA — m.st. Warszawa

WP — wielkopolskie

Tabela 3. Procentowa i rzeczywista liczba osób, które uzyskały daną sumę punktów.

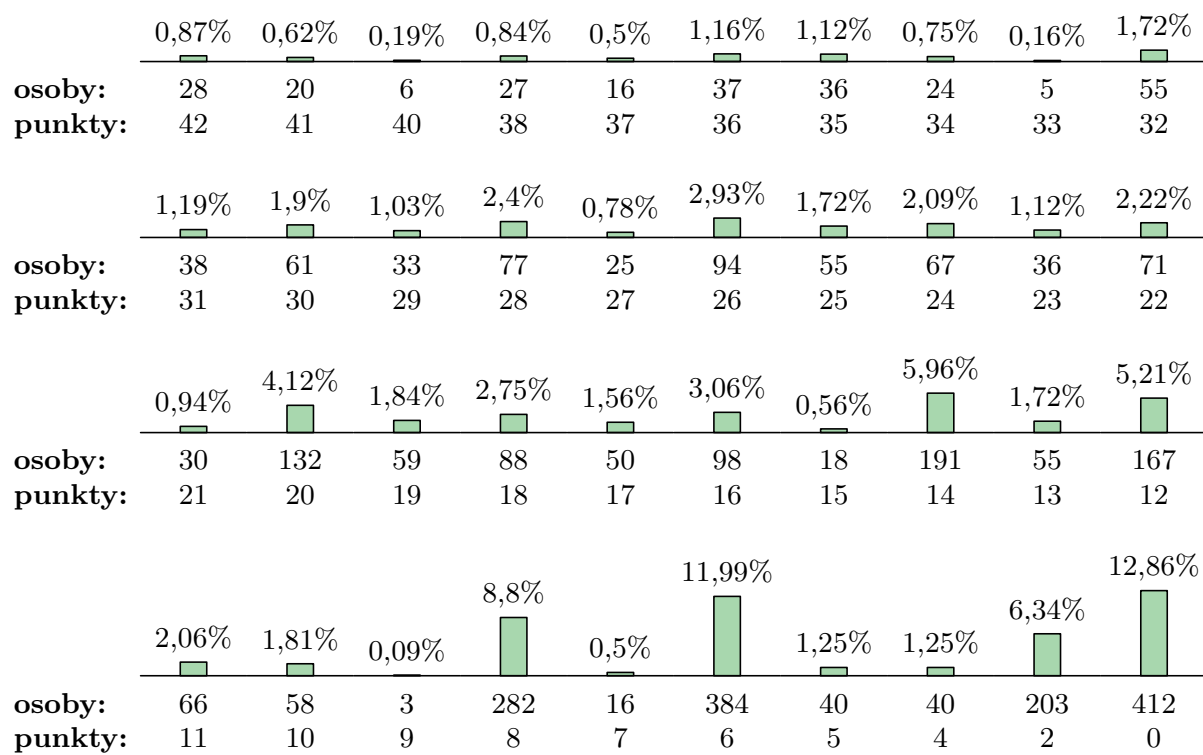


Tabela 4. Procentowa i rzeczywista liczba osób, które uzyskały daną lub większą sumę punktów.

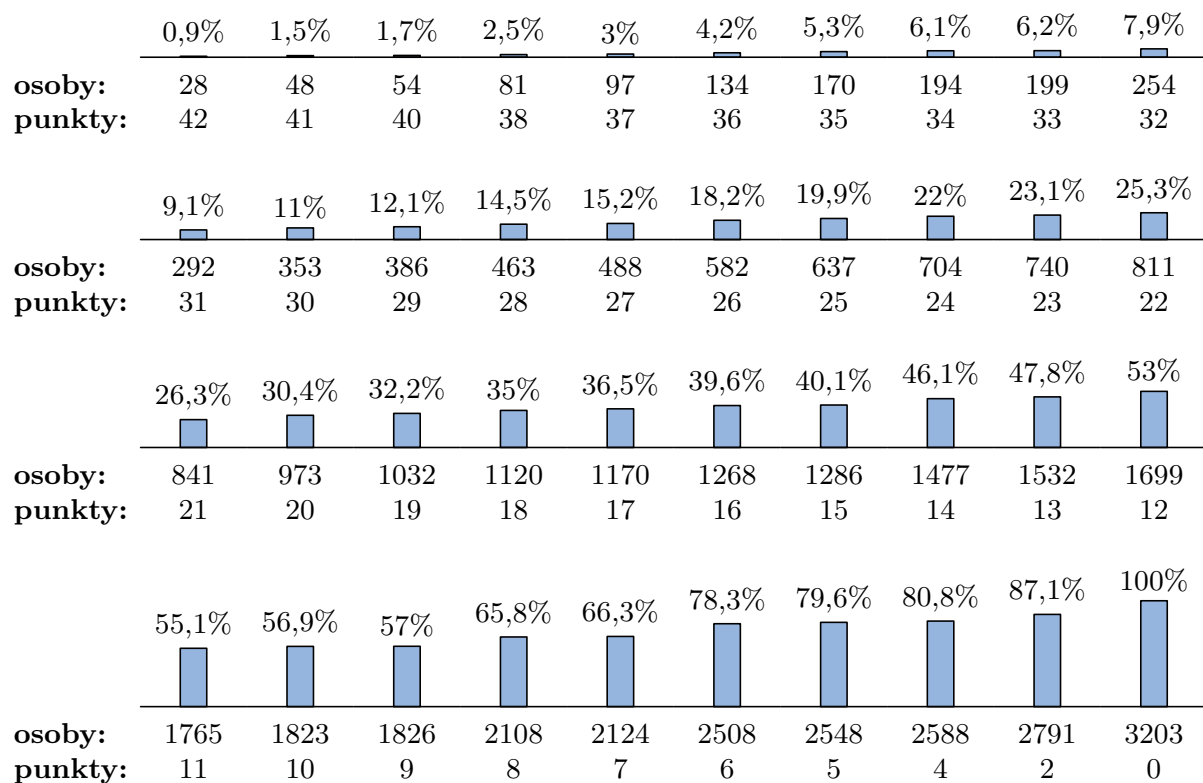


Tabela 5. Procentowa liczba osób, które uzyskały daną liczbę punktów za poszczególne zadania.

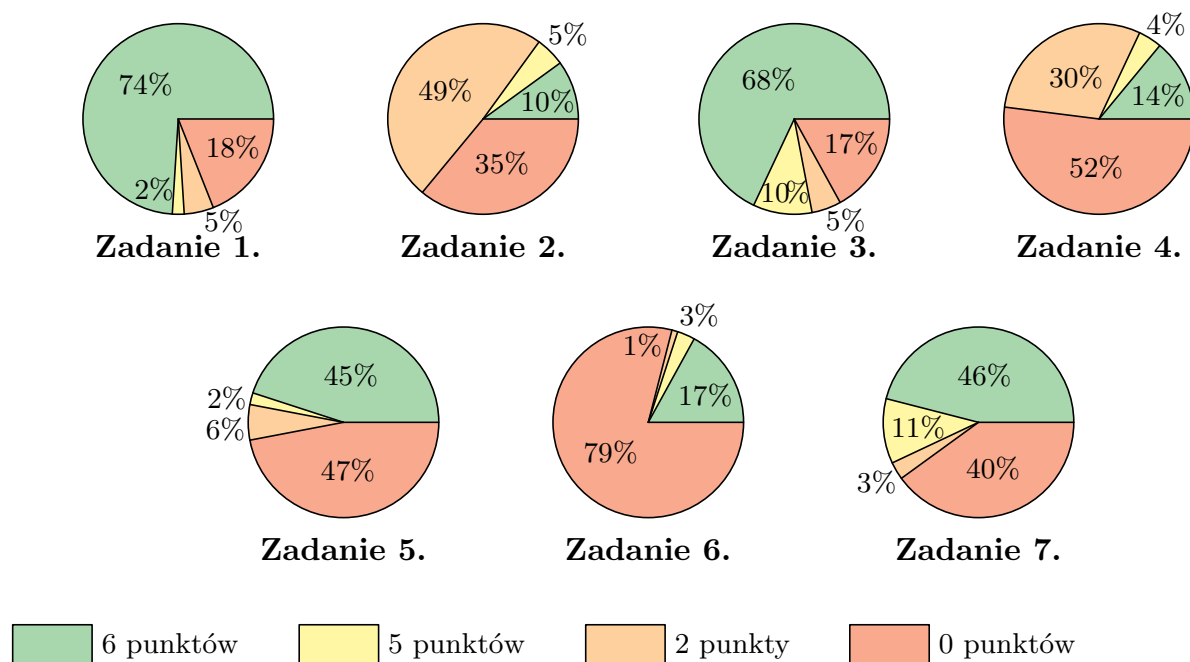


Tabela 6. Średnia uzyskanych punktów za poszczególne zadania.

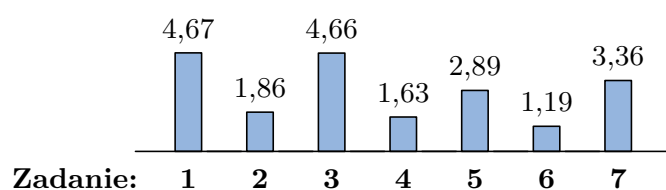


Tabela 7. Liczba nadesłanych prac dotyczących poszczególnych zadań.

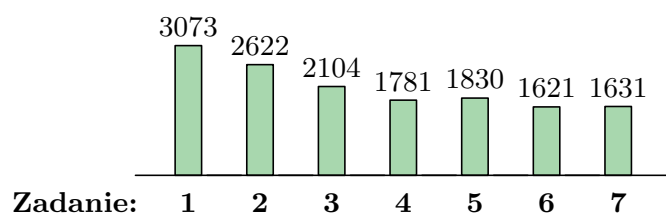
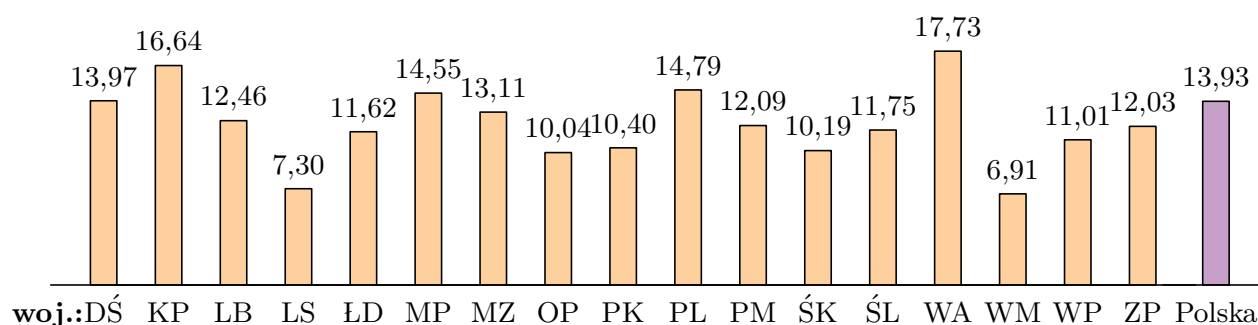


Tabela 8. Średnia sumy punktów w podziale na województwa i inne regiony.



XVIII Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody drugiego stopnia
(14 stycznia 2023 r.)



1. Na bokach AB i BC trójkąta ABC leżą odpowiednio takie punkty D i E , że

$$\sphericalangle ADC = \sphericalangle BDE \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle BCD = \sphericalangle AED.$$

Wykaż, że $AE = BE$.

2. Początkowo na tablicy napisane są liczby 2 oraz 5. *Ruch* polega na zastąpieniu jednej z dwóch liczb napisanych na tablicy ich sumą. Czy po wykonaniu pewnej liczby ruchów można uzyskać sytuację, w której na tablicy napisane są dwie kolejne liczby naturalne? Odpowiedź uzasadnij.

3. Liczba naturalna n jest co najmniej dwucyfrowa. Jeżeli pomiędzy cyfrę dziesiątek a cyfrę jedności tej liczby wpiszemy pewną cyfrę, to uzyskamy sześciokrotność liczby n . Wyznacz wszystkie liczby n o tej własności.

4. Dany jest równoległobok $ABCD$, w którym $AB > AD$. Punkty X oraz Y , różne od B , leżą na półprostej $BD^{\rightarrow}$, przy czym

$$CX = CB \quad \text{oraz} \quad AY = AB.$$

Udowodnij, że $DX = DY$.

Uwaga: Zapis $BD^{\rightarrow}$ oznacza półprostą o początku w punkcie B przechodzącą przez punkt D .

5. W każde pole tabeli 4×4 wpisano jedną z liczb 1 lub 2. Dla każdego wiersza obliczono sumę wpisanych w niego liczb, a dla każdej kolumny obliczono iloczyn wpisanych w nią liczb. Wykaż, że pewne dwa z ośmiu uzyskanych wyników są równe.

XVIII Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody drugiego stopnia (14 stycznia 2023 r.)

Rozwiązania zadań konkursowych

1. Na bokach AB i BC trójkąta ABC leżą odpowiednio takie punkty D i E , że

$$\sphericalangle ADC = \sphericalangle BDE \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle BCD = \sphericalangle AED.$$

Wykaż, że $AE = BE$.

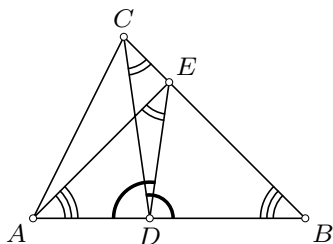
Rozwiązanie

Sposób I

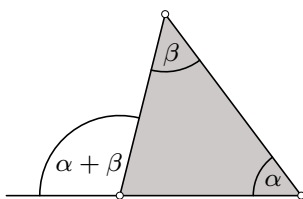
Zauważmy, że aby rozwiązać zadanie wystarczy udowodnić, że $\sphericalangle ABE = \sphericalangle BAE$. Równość $\sphericalangle ADC = \sphericalangle BDE$ oznacza także równość kątów przyległych $\sphericalangle BDC = \sphericalangle ADE$ (rys. 1). W połączeniu z założeniem $\sphericalangle BCD = \sphericalangle AED$ uzyskujemy

$$\begin{aligned} \sphericalangle ABE &= \sphericalangle DBC = 180^\circ - \sphericalangle BDC - \sphericalangle BCD = \\ &= 180^\circ - \sphericalangle ADE - \sphericalangle AED = \sphericalangle DAE = \sphericalangle BAE, \end{aligned}$$

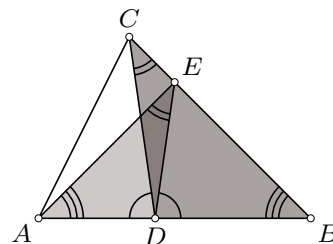
co było do udowodnienia.



rys. 1



rys. 2



rys. 3

Sposób II

Wykorzystamy *twierdzenie o kącie zewnętrznym* w trójkącie (rys. 2):

Miara kąta zewnętrznego trójkąta jest równa sumie miar kątów wewnętrznych do niego nieprzyległych.

Jest to bezpośredni wniosek z faktu, że suma miar kątów wewnętrznych trójkąta to 180° .

Dana równość $\sphericalangle ADC = \sphericalangle BDE$ kątów zewnętrznych odpowiednio w trójkątach BCD oraz ADE (rys. 3) oznacza, że

$$\sphericalangle DBC + \sphericalangle BCD = \sphericalangle DAE + \sphericalangle AED.$$

Wykorzystując równość $\sphericalangle BCD = \sphericalangle AED$, otrzymujemy więc $\sphericalangle DBC = \sphericalangle DAE$. To oznacza, że trójkąt ABE jest równoramienny i $AE = BE$.

Uwaga 1.

Twierdzenie o kącie zewnętrznym jest wygodnym narzędziem między innymi w rozważaniu konfiguracji geometrycznych zawierających łamane zamknięte o przecinających się odcinkach. W powyższym zadaniu łamaną taką jest $ABCDEA$.

Sposób III

Oznaczmy przez F punkt przecięcia odcinków AE i CD (rys. 4). Zauważmy, że

$$\begin{aligned}\angle AFD &= \angle CFE = 180^\circ - \angle FCE - \angle FEC = \\ &= 180^\circ - \angle FED - \angle FEC = \angle BED.\end{aligned}$$

Wykorzystując powyższą równość oraz założenie $\angle ADF = \angle BDE$, uzyskujemy

$$\angle DAF = 180^\circ - \angle ADF - \angle AFD = 180^\circ - \angle BDE - \angle BED = \angle DBE.$$

W konsekwencji trójkąt ABE jest równoramienny i $AE = BE$.

Sposób IV

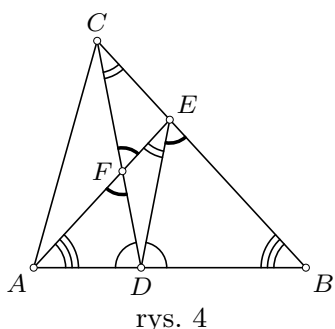
Oznaczmy przez G taki punkt odcinka AB , że odcinki CD i EG są równoległe (rys. 5). Wówczas

$$\angle GDE = \angle BDE = \angle ADC = \angle AGE = \angle DGE.$$

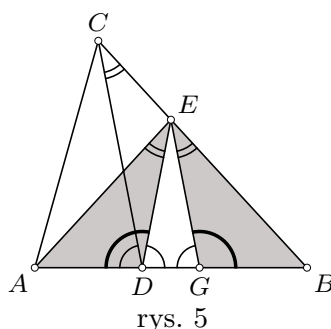
W konsekwencji $ED = EG$ oraz $\angle ADE = \angle BGE$. Ponadto

$$\angle BEG = \angle BCD = \angle AED,$$

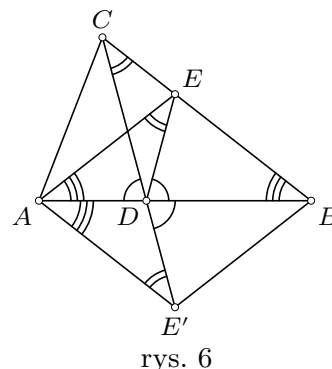
co oznacza, że trójkąty ADE oraz BGE są przystające (cecha kąt-bok-kąt). W rezultacie $AE = BE$.



rys. 4



rys. 5



rys. 6

Sposób V

Oznaczmy przez E' punkt symetryczny do punktu E względem prostej AB (rys. 6). Ponieważ $\angle BDE' = \angle BDE = \angle ADC$, więc punkty C, D, E' leżą na jednej prostej. Wobec tego mamy

$$\angle AE'C = \angle AE'D = \angle AED = \angle BCD = \angle BCE',$$

co oznacza, że proste AE' oraz BC są równoległe. W konsekwencji

$$\angle ABE = \angle BAE' = \angle BAE,$$

czyli $AE = BE$.

Uwaga 2.

Pod koniec ostatniego sposobu rozwiązania z założeń, że czworokąt $AEBE'$ jest deltoidem (przekątna AB jest jego osią symetrii) oraz trapezem (boki AE' oraz BE są równoległe) wywnioskowaliśmy, że ten czworokąt jest rombem ($AE = BE = AE' = BE'$). Przy okazji wykazaliśmy więc następującą regułę:

Jeżeli czworokąt jest jednocześnie deltoidem i trapezem, to jest rombem.

2. Początkowo na tablicy napisane są liczby 2 oraz 5. *Ruch* polega na zastąpieniu jednej z dwóch liczb napisanych na tablicy ich sumą. Czy po wykonaniu pewnej liczby ruchów można uzyskać sytuację, w której na tablicy napisane są dwie kolejne liczby naturalne? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie

Odpowiedź: Nie jest możliwe uzyskanie opisanej sytuacji.

Przypuśćmy, że po pewnym ruchu na tablicy znalazły się liczby n oraz $n+1$. To oznacza, że przed wykonaniem tego ruchu na tablicy znajdowały się liczby n oraz 1, a w omawianym ruchu liczbę 1 zastąpiono ich sumą $n+1$.

Jednak liczba 1 nigdy nie może pojawić się na tablicy, gdyż po każdym ruchu jedną z liczb napisanych na tablicy zastępuje liczba od niej większa, a druga napisana liczba się nie zmienia.

Uwaga

Różnica między liczbami obecnymi na tablicy *może zmaleć* (o dowolnie dużą liczbę) wskutek wykonania pojedynczego ruchu. Przykładowo jeśli w pierwszym ruchu zastąpimy liczbę 2 liczbą $2+5=7$, to na tablicy pojawi się para liczb o różnicy równej $7-5=2$ (czyli mniejszej od początkowej różnicy $5-2=3$).

Można zadać pytanie, jakie różnice między dwiema liczbami napisanymi na tablicy są niemożliwe do uzyskania (rozwiązanie pokazuje, że jedną z takich różnic jest 1). Nietrudno udowodnić, na przykład rozważając wszystkie możliwości wykonania sześciu początkowych ruchów, że żadna z liczb

$$1, 4, 6, 8, 10, 14, 18$$

nigdy nie pojawi się na tablicy, więc też nie może być taką różnicą. Z drugiej strony, można wykazać, że każda dodatnia liczba całkowita różna od wypisanych powyżej może być uzyskana jako różnica napisanych na tablicy liczb (uwzględniając także początkową różnicę równą 3). W szczególności okazuje się, że największą z nieosiągalnych różnic jest 18.

3. Liczba naturalna n jest co najmniej dwucyfrowa. Jeżeli pomiędzy cyfrę dziesiątek a cyfrę jedności tej liczby wpisujemy pewną cyfrę, to uzyskamy sześciokrotność liczby n . Wyznacz wszystkie liczby n o tej własności.

Rozwiązanie

Odpowiedź: Warunki zadania spełnia wyłącznie liczba $n = 18 = \frac{1}{6} \cdot 108$.

Sposób I

Przypuśćmy, że liczba n jest postaci $10a+b$, gdzie b jest cyfrą jedności liczby n . Wówczas a to liczba uzyskana z n przez skreślenie cyfry jedności. Mamy $a \geq 1$, gdyż liczba n jest co najmniej dwucyfrowa.

Liczba uzyskana w wyniku wstawienia cyfry c pomiędzy cyfrę dziesiątek a cyfrę jedności liczby n jest równa $100a+10c+b$. Warunek z treści zadania przybiera zatem postać

$$100a+10c+b=6 \cdot (10a+b),$$

skąd $40a+10c=5b$, czyli $8a+2c=b$.

Gdyby $a \geq 2$, to liczba $8a+2c$ byłaby co najmniej dwucyfrowa, a więc większa od b . Wobec tego $a=1$. Podobnie gdyby $c \geq 1$, to liczba $8+2c$ byłaby co najmniej dwucyfrowa, a więc różna od b . Zatem $c=0$ i w konsekwencji $b=8$.

Sposób II

Zauważmy, że jeśli pierwszą (od lewej) cyfrą liczby n jest 1, to

$$100\dots 0 \leq n < 200\dots 0, \quad \text{czyli} \quad 600\dots 0 \leq 6n < 1200\dots 0, \quad (*)$$

więc w tym przypadku pierwszą cyfrą liczby $6n$ jest 6, 7, 8, 9 lub 1. Wykonując analogiczne obserwacje dla innych możliwych pierwszych cyfr liczby n możemy wypełnić poniższą tabelę.

pierwsza (od lewej) cyfra n :	1	2	3	4	5	6	7	8	9
możliwe pierwsze cyfry $6n$:	6, 7, 8, 9, 1	1	1, 2	2	3	3, 4	4	4, 5	5

Jak widać, jeśli n oraz $6n$ mają tę samą pierwszą cyfrę, to jest nią 1. W tym wypadku druga cyfra liczby $6n$ jest równa 0 lub 1, jak widać z nierówności (*).

Gdyby druga cyfra liczby n była równa 0 lub 1, to pierwsza cyfra liczby $6n$ byłaby równa 6 lub 7, czyli nie mogłaby być równa 1. To oznacza, że drugie cyfry liczb n oraz $6n$ są różne. To zaś może mieć miejsce tylko wtedy, gdy liczba n jest dwucyfrowa — jeśli n jest co najmniej trzycyfrowa, to w myśl warunków zadania liczby n oraz $6n$ mają tę samą drugą cyfrę.

Pozostaje sprawdzić, które liczby dwucyfrowe rozpoczynające się cyfrą 1 mają własność z treści zadania. Bezpośrednie sprawdzenie pokazuje, że jedyną taką liczbą jest $n = 18$.

4. Dany jest równoległobok $ABCD$, w którym $AB > AD$. Punkty X oraz Y , różne od B , leżą na półprostej $BD^{\rightarrow}$, przy czym

$$CX = CB \quad \text{oraz} \quad AY = AB.$$

Udowodnij, że $DX = DY$.

Uwaga: Zapis $BD^{\rightarrow}$ oznacza półprostą o początku w punkcie B przechodzącą przez punkt D .

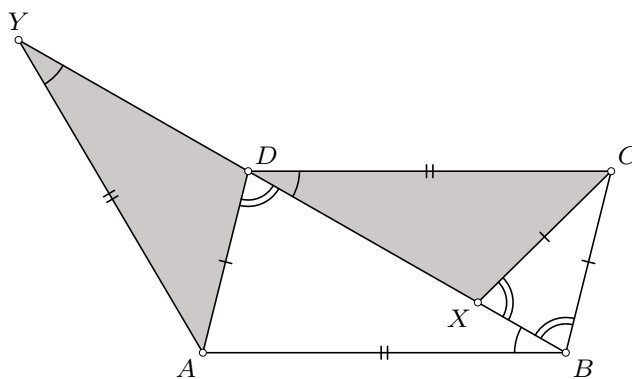
Rozwiązanie

Sposób I

Udowodnimy, że trójkąty DAY oraz XCD są przystające, skąd bezpośrednio wyniknie postulowana równość. Z określenia punktów X oraz Y (rys. 7) wynika, że

$$CX = CB = DA \quad \text{oraz} \quad AY = AB = DC.$$

Aby skorzystać z cechy przystawiania trójkątów bok–kąt–bok pozostaje zatem wykazać, że $\sphericalangle DAY = \sphericalangle XCD$.



rys. 7

Zachodzą równości

$$\sphericalangle AYD = \sphericalangle ABD = \sphericalangle CDX \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle ADB = \sphericalangle CBD = \sphericalangle CXB,$$

skąd wniosek, że

$$\begin{aligned} \sphericalangle DAY &= 180^\circ - \sphericalangle ADY - \sphericalangle AYD = \sphericalangle ADB - \sphericalangle AYD = \\ &= \sphericalangle CXB - \sphericalangle CDX = 180^\circ - \sphericalangle CXD - \sphericalangle CDX = \sphericalangle XCD. \end{aligned}$$

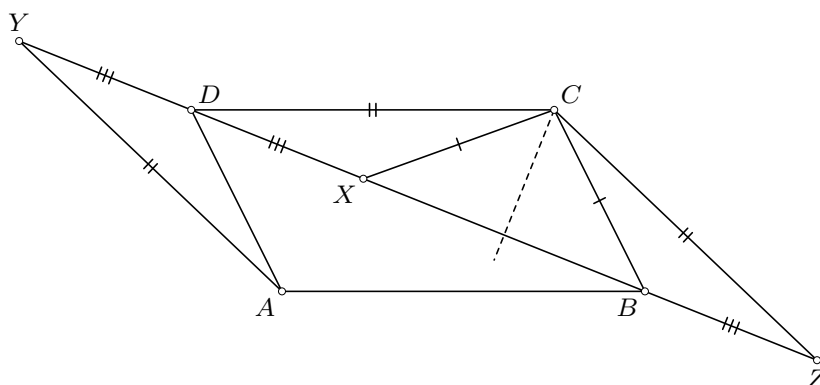
Powyższa równość kątów w połączeniu z równościami $CX = DA$ oraz $AY = DC$ oznacza, że trójkąty DAY oraz XCD są przystające (cecha bok–kąt–bok) i w konsekwencji $DX = DY$.

Sposób II

Niech Z będzie takim punktem różnym od D leżącym na półprostej $DB^\rightarrow$, że $CZ = CD$ (rys. 8). Wówczas (z uwagi na symetrię definicji) punkty Y i Z są symetryczne względem środka symetrii danego równoległoboku, skąd $DY = BZ$.

Trójkąty równoramienne BXC oraz ZDC mają wspólną oś symetrii (przechodzącą przez wierzchołek C). Stąd $BZ = DX$, gdyż odcinki te są symetryczne względem wspomnianej osi.

Ostatecznie $DY = BZ = DX$, co było do udowodnienia.



rys. 8

5. W każde pole tabeli 4×4 wpisano jedną z liczb 1 lub 2. Dla każdego wiersza obliczono sumę wpisanych w niego liczb, a dla każdej kolumny obliczono iloczyn wpisanych w nią liczb. Wykaż, że pewne dwa z ośmiu uzyskanych wyników są równe.

Rozwiązanie

Zauważmy, że możliwe sumy czterech składników równych 1 lub 2 (czyli możliwe sumy liczb wpisanych w jeden wiersz tabeli) to

$$1 + 1 + 1 + 1 = 4, \quad 1 + 1 + 1 + 2 = 5, \quad 1 + 1 + 2 + 2 = 6, \quad 1 + 2 + 2 + 2 = 7, \quad 2 + 2 + 2 + 2 = 8.$$

Z kolei możliwe iloczyny czterech czynników równych 1 lub 2 (czyli możliwe iloczyny liczb wpisanych w jedną kolumnę tabeli) to

$$1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1, \quad 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 = 2, \quad 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 = 4, \quad 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8, \quad 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16.$$

Łącznie jest więc dokładnie 8 możliwych wyników: 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 16.

Przypuśćmy wbrew tezie zadania, że żaden wynik się nie powtórzył. To oznacza, że każdy z ośmiu możliwych wyników został uzyskany dokładnie raz. W szczególności wynika z tego, że wśród otrzymanych wyników są liczby 1 oraz 16, które można uzyskać wyłącznie za pomocą

mnożenia liczb wpisanych w pewną kolumnę. Wobec tego w tabeli jest zarówno kolumna złożona z samych jedynek, jak i kolumna złożona z samych dwójek. Jednak to oznacza, że są tylko trzy możliwe wyniki dodawania w wierszach:

$$1 + 2 + 1 + 1 = 5, \quad 1 + 2 + 1 + 2 = 6, \quad 1 + 2 + 2 + 2 = 7.$$

Skoro są cztery wiersze, to pewien z trzech powyższych wyników się powtórzył. Uzyskałismy sprzeczność z poczynionym na początku założeniem, że żaden wynik się nie powtórzył.

Uwaga

Rozumowanie przeprowadzone powyżej przenosi się bezpośrednio na ogólniejszy przypadek tabeli $2^n \times 2^n$, gdzie n jest liczbą naturalną.

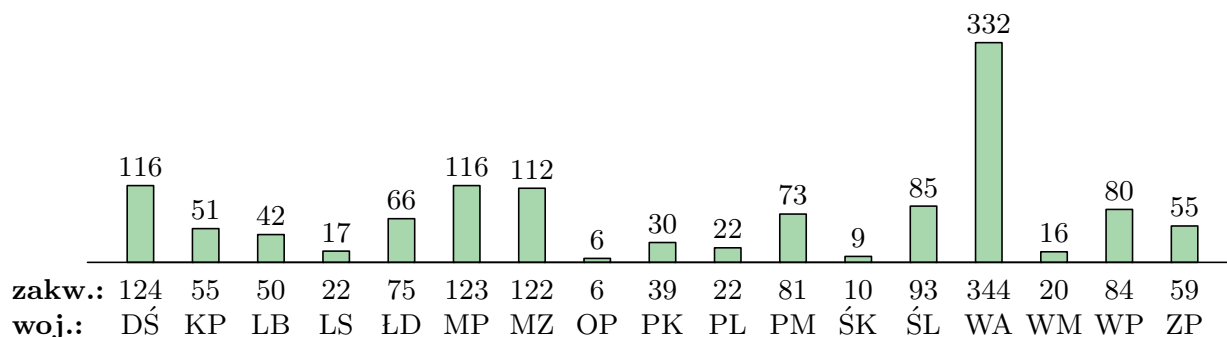
Rozważmy jeszcze ogólniejszy problem: dla tabeli o w wierszach i k kolumnach. Podobnie jak w zadaniu wypełniamy ją liczbami 1 lub 2 oraz wyznaczamy sumy liczb w wierszach oraz iloczyny liczb w kolumnach. Dla jakich par (w, k) może się zdarzyć, że pośród $w + k$ uzyskanych wyników żaden się nie powtórzył? Można udowodnić, że takie rozmieszczenie liczb istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy $(w, k) = (2^n - 1, 2^n)$ dla pewnej liczby całkowitej $n \geq 1$.

XVIII Olimpiada Matematyczna Juniorów

Statystyki dotyczące zawodów drugiego stopnia (2022/23)

(14 stycznia 2023 r.)

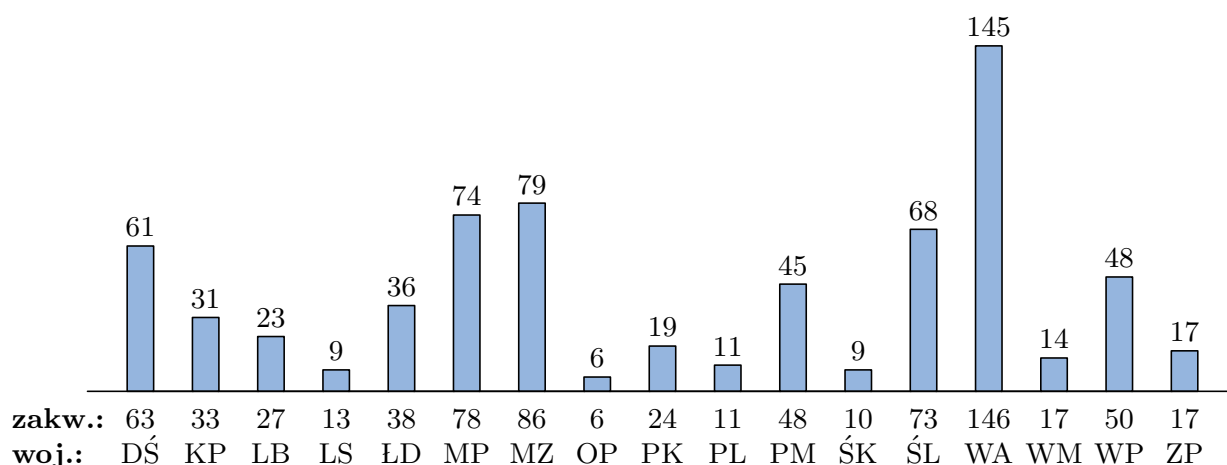
Tabela 1. Liczba uczniów, którzy wzięli udział w zawodach oraz zakwalifikowanych do zawodów w podziale na województwa i inne regiony.



Łączna liczba uczniów, którzy wzięli udział w zawodach: 1228

Łączna liczba uczniów zakwalifikowanych do zawodów: 1329

Tabela 2. Liczba szkół uczniów, którzy wzięli udział w zawodach oraz zakwalifikowanych do zawodów w podziale na województwa i inne regiony.



Łączna liczba szkół uczniów, którzy wzięli udział w zawodach: 695

Łączna liczba szkół uczniów zakwalifikowanych do zawodów: 740

Skróty województw

DŚ — dolnośląskie

LB — lubelskie

ŁD — łódzkie

MZ — mazowieckie bez m.st. Warszawy

PK — podkarpackie

PM — pomorskie

ŚL — śląskie

WM — warmińsko-mazurskie

ZP — zachodniopomorskie

KP — kujawsko-pomorskie

LS — lubuskie

MP — małopolskie

OP — opolskie

PL — podlaskie

ŚK — świętokrzyskie

WA — m.st. Warszawa

WP — wielkopolskie

Tabela 3. Procentowa i rzeczywista liczba osób, które uzyskały daną sumę punktów.

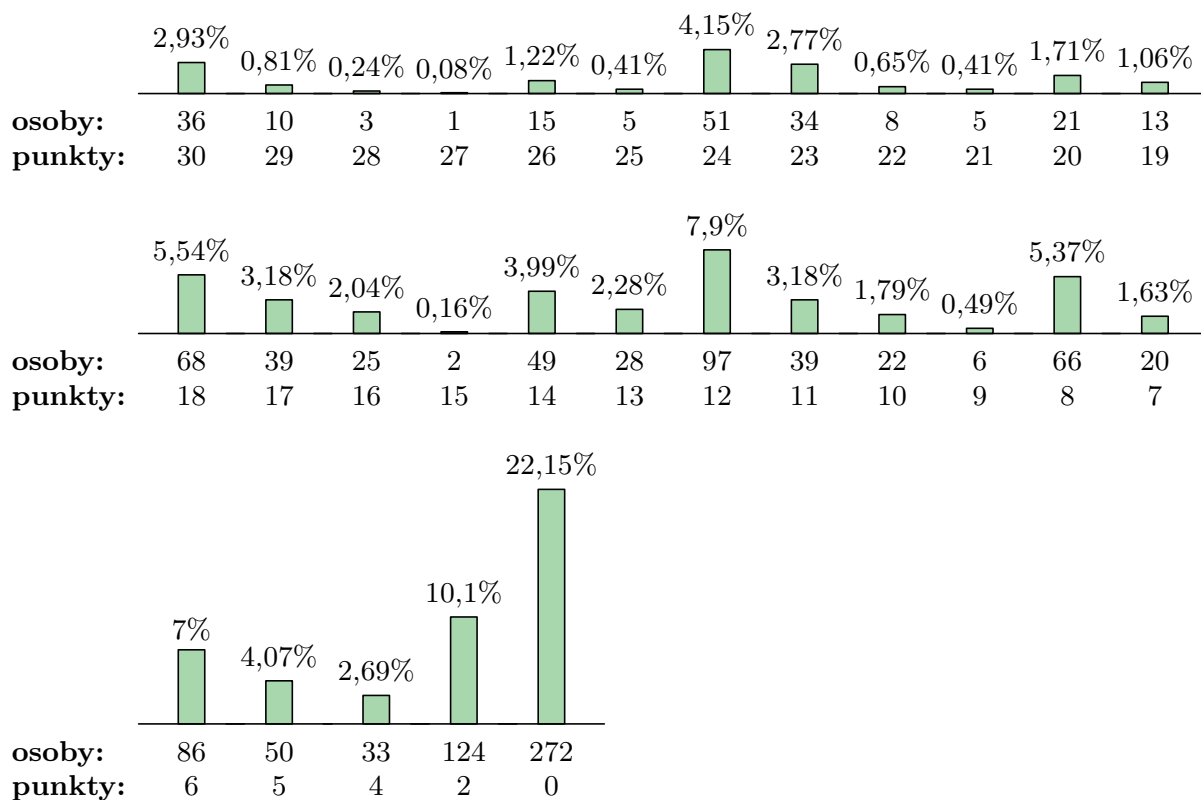


Tabela 4. Procentowa i rzeczywista liczba osób, które uzyskały daną lub większą sumę punktów.

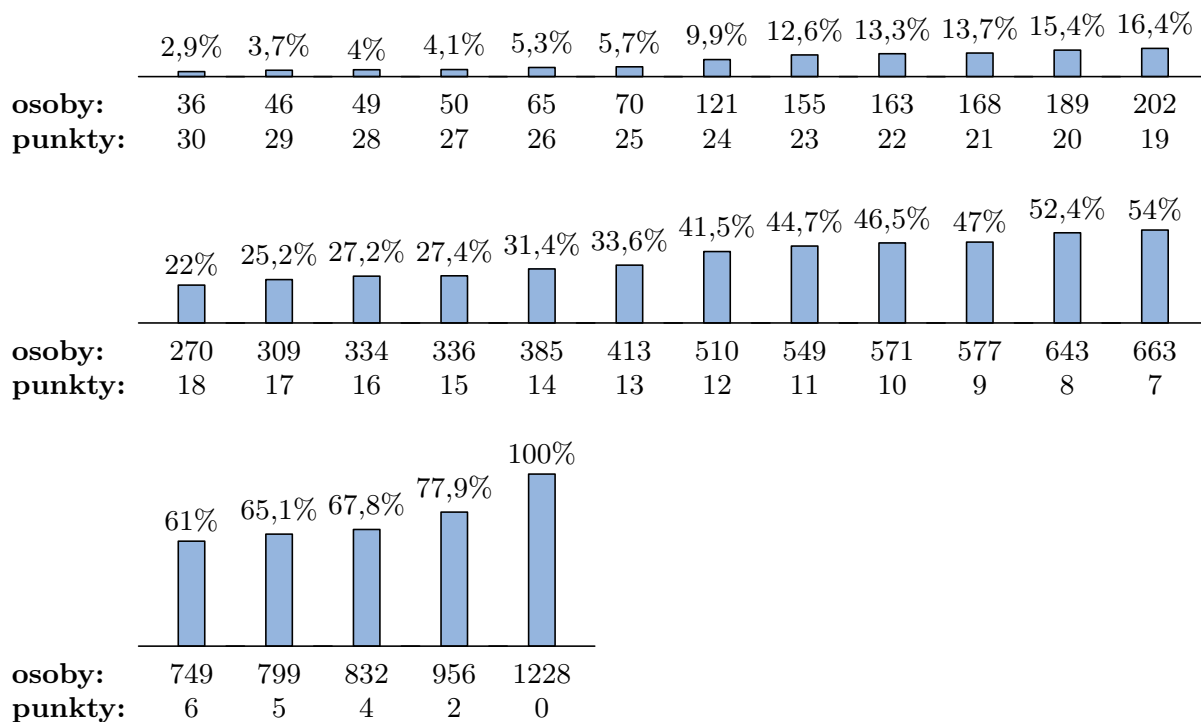


Tabela 5. Procentowa liczba osób, które uzyskały daną liczbę punktów za poszczególne zadania.

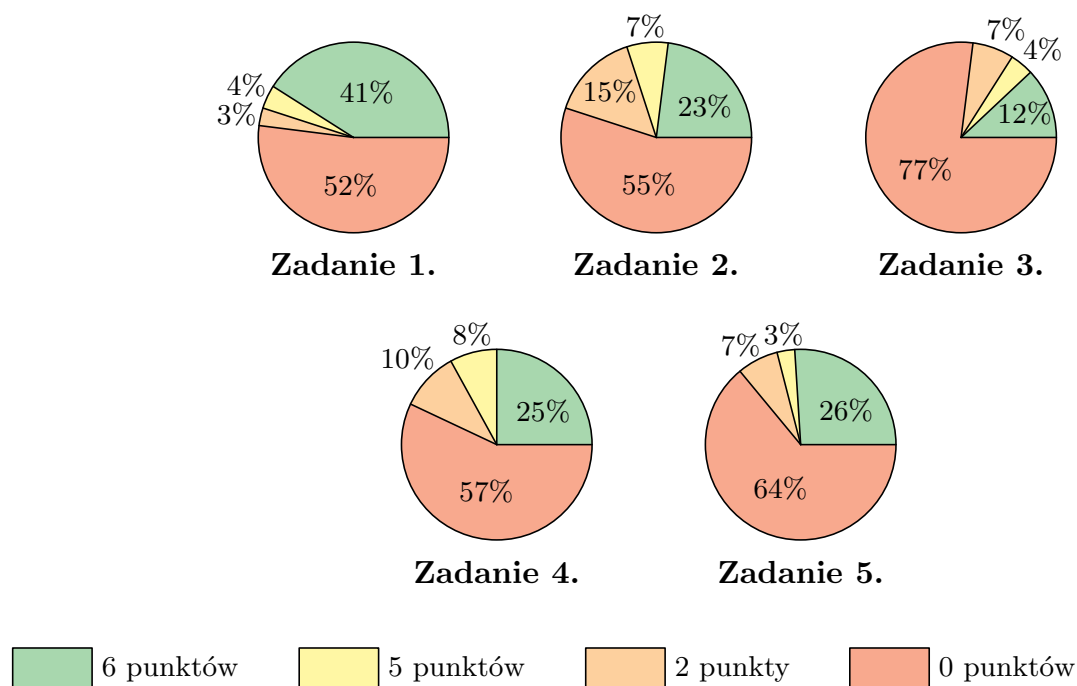


Tabela 6. Średnia uzyskanych punktów za poszczególne zadania.

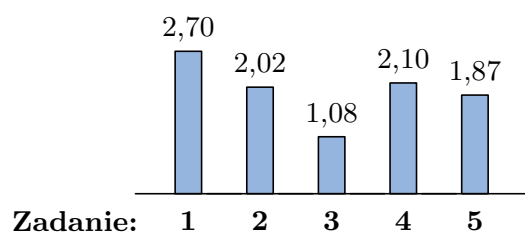
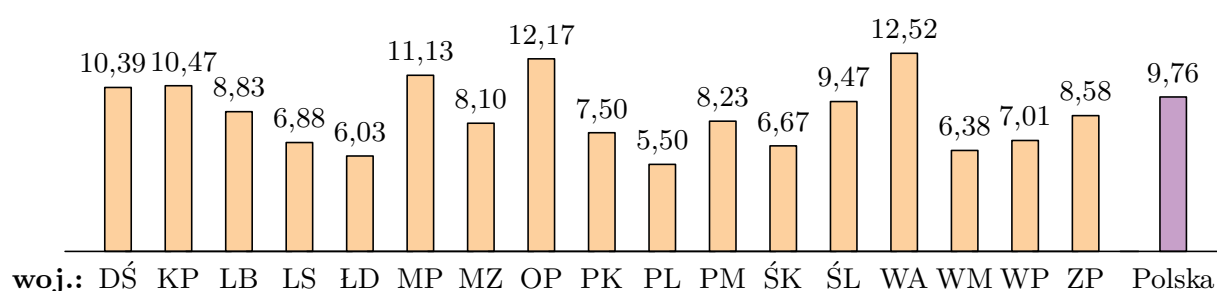
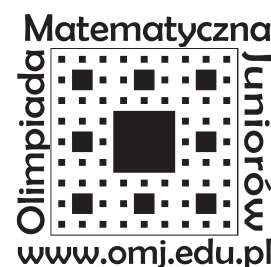


Tabela 7. Średnia sumy punktów w podziale na województwa i inne regiony.



XVIII Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody trzeciego stopnia
(18 marca 2023 r.)



1. Czy istnieją takie niezerowe liczby rzeczywiste x, y, z , że

$$x + \frac{1}{y} = z, \quad y + \frac{1}{z} = x, \quad z + \frac{1}{x} = y?$$

Odpowiedź uzasadnij.

2. Dane są liczby całkowite a i b , przy czym $a > b > 1$ oraz liczba b jest największym z tych dzielników liczby a , które są różne od a . Udowodnij, że liczba $a + b$ nie jest potęgą liczby 2 o wykładniku całkowitym.

3. Dany jest trójkąt ABC , w którym $AC < BC$ oraz $\sphericalangle ACB = 60^\circ$. Punkt D , różny od A , leży na odcinku AC , przy czym $AB = BD$, a punkt E , różny od B , leży na prostej BC , przy czym $AB = AE$. Wykaż, że $\sphericalangle DEC = 30^\circ$.

4. Dana jest liczba nieparzysta $n \geq 1$ oraz n strzałek ułożonych kolejno od lewej do prawej, przy czym każda strzałka wskazuje albo w lewo, albo w prawo. Udowodnij, że pewna strzałka jest wskazywana przez dokładnie tyle strzałek, na ile sama wskazuje.

Uwaga: Przykładowo dla $n = 5$ i ułożenia $\rightarrow \rightarrow \leftarrow \leftarrow \rightarrow$ kolejne strzałki (od lewej) wskazują odpowiednio na 4, 3, 2, 3, 0 strzałek.

5. Wyznacz wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych m, n o tej własności, że liczba $(m+n)$ -cyfrowa

$$\underbrace{33\dots3}_{m} \underbrace{66\dots6}_{n}$$

jest kwadratem liczby całkowitej.

XVIII Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody drugiego stopnia (18 marca 2023 r.)

Rozwiązania zadań konkursowych

1. Czy istnieją takie niezerowe liczby rzeczywiste x, y, z , że

$$x + \frac{1}{y} = z, \quad y + \frac{1}{z} = x, \quad z + \frac{1}{x} = y?$$

Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie

Sposób I

Przypuśćmy, że istnieją liczby x, y, z spełniające trzy dane równości. Mnożąc pierwszą równość obustronnie przez y , drugą przez z , a trzecią przez x , uzyskujemy

$$xy + 1 = yz, \quad yz + 1 = zx, \quad zx + 1 = xy.$$

Po dodaniu stronami trzech powyższych równości otrzymujemy

$$xy + yz + zx + 3 = xy + yz + zx, \quad \text{czyli} \quad 3 = 0.$$

Uzyskana sprzeczność oznacza, że nie istnieją liczby x, y, z spełniające warunki zadania.

Sposób II

Zauważmy, że co najmniej dwie spośród liczb x, y, z są tego samego znaku. Przypuśćmy, że są to liczby x oraz y . Wówczas liczba $z = x + \frac{1}{y}$ również jest tego samego znaku co liczby x i y , czyli wszystkie trzy liczby są dodatnie lub wszystkie trzy liczby są ujemne. Do analogicznej konkluzji dochodzimy w pozostałych przypadkach (tj. gdy liczby y oraz z są tego samego znaku oraz gdy liczby z oraz x są tego samego znaku).

Jeżeli wszystkie liczby x, y, z są dodatnie, to również liczby $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ są dodatnie, a zatem

$$x = y + \frac{1}{z} > y = z + \frac{1}{x} > z = x + \frac{1}{y} > x,$$

co nie może mieć miejsca. Podobną sprzeczność uzyskujemy, jeśli wszystkie liczby x, y, z są ujemne:

$$x = y + \frac{1}{z} < y = z + \frac{1}{x} < z = x + \frac{1}{y} < x.$$

Uwaga

Przypadek, gdy wszystkie liczby x, y, z są tego samego znaku można wykluczyć również innymi sposobami. Przykładowo, dodając stronami trzy dane w treści zadania równości, uzyskujemy

$$x + \frac{1}{y} + y + \frac{1}{z} + z + \frac{1}{x} = z + x + y, \quad \text{czyli} \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0.$$

Jednak ostatnia równość nie może być spełniona gdy liczby x, y, z są tego samego znaku (gdyż liczba $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ jest również tego znaku co każda z nich).

Sposób III

Wyznamy z w zależności od x oraz y z każdego z trzech danych równań. Pierwsze równanie już ma taką postać. Drugie równanie możemy przekształcić do postaci $\frac{1}{z} = x - y$ skąd wniosek, że $x - y \neq 0$ oraz $z = \frac{1}{x-y}$. Z trzeciego równania mamy $z = y - \frac{1}{x}$. Łącząc te obserwacje, otrzymujemy

$$z = x + \frac{1}{y} = \frac{1}{x-y} = y - \frac{1}{x}, \quad \text{czyli} \quad \frac{xy+1}{y} = \frac{1}{x-y} = \frac{xy-1}{x}.$$

Z pierwszej i drugiej z uzyskanych proporcji dostajemy

$$(xy+1)(x-y) = y \quad \text{oraz} \quad (xy-1)(x-y) = x.$$

Po odjęciu powyższych dwóch równości stronami, otrzymujemy

$$((xy+1) - (xy-1))(x-y) = y - x \quad \text{czyli} \quad 2(x-y) = y - x.$$

Ostatnia równość prowadzi do wniosku, że $x = y$ wbrew poczynionej wcześniej obserwacji, że $x - y \neq 0$. Uzyskana sprzeczność oznacza, że nie istnieją liczby spełniające warunki zadania.

2. Dane są liczby całkowite a i b , przy czym $a > b > 1$ oraz liczba b jest największym z tych dzielników liczby a , które są różne od a . Udowodnij, że liczba $a + b$ nie jest potęgą liczby 2 o wykładniku całkowitym.

Rozwiązanie

Sposób I

Jeżeli a jest liczbą parzystą, to największym dzielnikiem liczby a różnym od a jest $\frac{a}{2}$, skąd $2b = a$. Wówczas liczba $a + b = 3b$ jest podzielna przez 3, więc nie jest potęgą liczby 2 o wykładniku całkowitym.

Jeżeli a jest liczbą nieparzystą, to największym dzielnikiem liczby a różnym od a jest $\frac{a}{k}$ dla pewnej liczby nieparzystej $k \geq 3$, skąd $kb = a$. Wówczas liczba $a + b = (k+1)b$ posiada dzielnik nieparzysty większy od 1 (jest nim b), czyli nie jest potęgą liczby 2 o wykładniku całkowitym.

Sposób II

Niech p będzie najmniejszym dzielnikiem pierwszym liczby a , czyli najmniejszym dzielnikiem a różnym od 1. Wówczas $a = p \cdot b$.

Przypuśćmy, że $a + b = b(p+1)$ jest potęgą liczby 2 o wykładniku całkowitym. Wówczas zarówno b , jak i $p+1$ są liczbami parzystymi, gdyż są to liczby większe od 1. Jednak z parzystości liczby b wynika parzystość liczby a , skąd wniosek, że $p = 2$, a to przeczy parzystości liczby $p+1$.

Uwaga 1.

Dodatknie dzielniki liczby a różne od a nazywamy dzielnikami *właściwymi* liczby a .

Uwaga 2.

Można udowodnić, że suma wszystkich dodatnich dzielników liczby naturalnej N (włączając ją samą) jest potęgą dwójki wtedy i tylko wtedy, gdy N jest iloczynem różnych *liczb pierwszych Mersenne'a* (czyli liczb pierwszych postaci $2^k - 1$).

3. Dany jest trójkąt ABC , w którym $AC < BC$ oraz $\angle ACB = 60^\circ$. Punkt D , różny od A , leży na odcinku AC , przy czym $AB = BD$, a punkt E , różny od B , leży na prostej BC , przy czym $AB = AE$. Wykaż, że $\angle DEC = 30^\circ$.

Rozwiązanie

Zauważmy, że skoro $AC < BC$, to $\angle ABC < \angle BAC$. Ponieważ $\angle ABC + \angle BAC = 120^\circ$, więc $\angle ABC < 60^\circ$, skąd

$$\angle AEB = \angle ABE = \angle ABC < 60^\circ = \angle ACB,$$

co oznacza, że punkt E leży na przedłużeniu boku BC (poza odcinkiem BC).

Skoro $\angle ECD = 180^\circ - \angle ACB = 120^\circ$, to do rozwiązania zadania wystarczy uzasadnić, że $CD = CE$. Będzie to oznaczało, że w trójkącie równoramiennym CDE kąt między podstawą a ramieniem ma miarę $\frac{1}{2}(180^\circ - 120^\circ) = 30^\circ$.

Rozwiązanie dokonamy kilkoma sposobami.

Sposób I

Niech punkty K oraz L będą odpowiednio środkami odcinków AD oraz BE (rys. 1). Ponieważ te punkty są środkami podstaw trójkątów równoramiennych ABD oraz ABE , więc są także spodkami wysokości poprowadzonych na podstawy w tych trójkątach, skąd

$$\angle BKC = \angle ALC = 90^\circ.$$

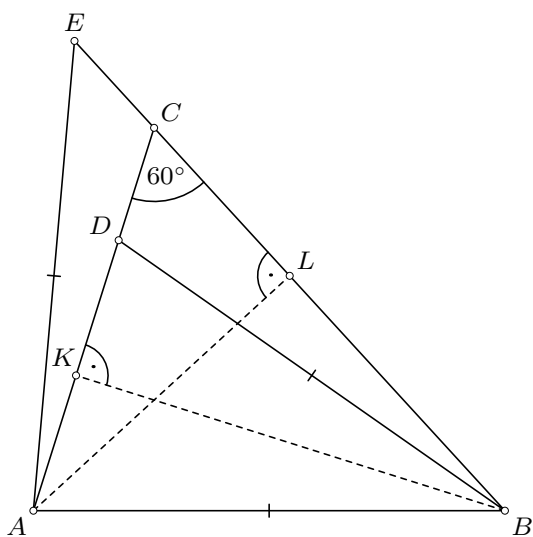
W trójkątach prostokątnych BKC i ALC kąt wewnętrzny przy wierzchołku C ma miarę 60° , więc trójkąty te są połówkami trójkątów równobocznych. To oznacza, że $2 \cdot CK = BC$ oraz $2 \cdot CL = AC$. Wobec tego

$$CD = CK - DK = CK - AK = CK - (AC - CK) = 2 \cdot CK - AC = BC - AC$$

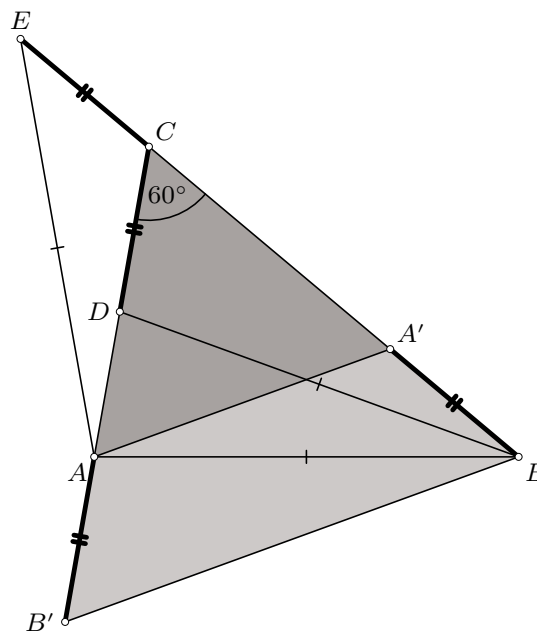
oraz

$$CE = EL - CL = BL - CL = (BC - CL) - CL = BC - 2 \cdot CL = BC - AC.$$

To oznacza, że $CD = CE$ i w konsekwencji, jak zauważyliśmy na początku, $\angle DEC = 30^\circ$.



rys. 1



rys. 2

Sposób II

Niech A' będzie punktem symetrycznym do C względem wysokości trójkąta poprowadzonej z wierzchołka A oraz B' będzie punktem symetrycznym do C względem wysokości trójkąta poprowadzonej z wierzchołka B (rys. 2). Wówczas $AA'C$ oraz $BB'C$ są trójkątami równoramiennymi o jednym z kątów wewnętrznych równym 60° , więc są to trójkąty równoboczne. Ponadto z określenia punktów A' oraz B' wynika, że $AB' = CD$ oraz $A'B = CE$. Wobec tego

$$CD = AB' = B'C - AC = BC - A'C = A'B = CE,$$

czyli CDE jest trójkątem równoramiennym o kącie między ramionami równym 120° . Wobec tego kąt DEC między podstawą a ramieniem w tym trójkącie, ma miarę $\frac{1}{2}(180^\circ - 120^\circ) = 30^\circ$.

Sposób III

Niech P będzie takim punktem leżącym po tej samej stronie prostej AB co punkt C , że trójkąt ABP jest równoboczny (rys. 3). Przyjmijmy oznaczenie $\alpha = \sphericalangle PAC$. Wówczas

$$\sphericalangle BAC = 60^\circ + \alpha \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle ABC = 180^\circ - 60^\circ - (60^\circ + \alpha) = 60^\circ - \alpha.$$

W konsekwencji $\sphericalangle PBC = 60^\circ - \sphericalangle ABC = \alpha$. Ponadto mamy

$$60^\circ + \alpha = \sphericalangle BAD = \sphericalangle ADB = 180^\circ - \sphericalangle BDC = \sphericalangle DCB + \sphericalangle DBC = 60^\circ + \sphericalangle DBC,$$

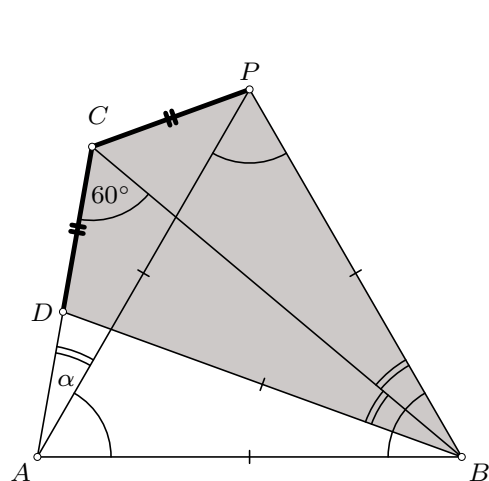
skąd $\sphericalangle DBC = \alpha$. Uzyskana równość $\sphericalangle PBC = \sphericalangle DBC$ w połączeniu z $BP = AB = BD$ oznacza, że trójkąty PBC oraz DBC są przystające (cecha bok-kąt-bok) i wobec tego $CD = CP$.

Mamy również

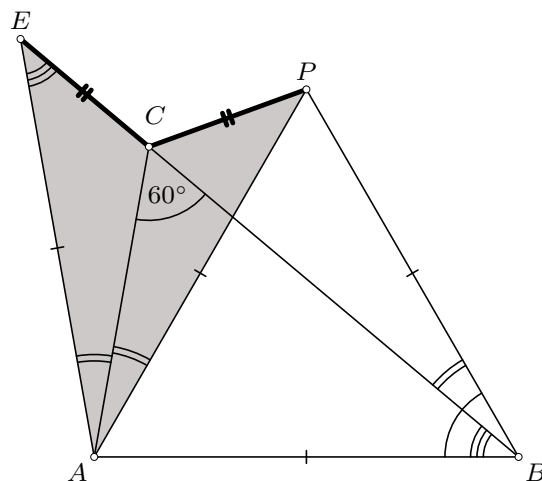
$$\sphericalangle EAC = 180^\circ - \sphericalangle ACE - \sphericalangle AEC = 60^\circ - \sphericalangle AEB = 60^\circ - \sphericalangle ABE = \sphericalangle PBC = \alpha,$$

skąd $\sphericalangle EAC = \sphericalangle PAC$. W połączeniu z $AP = AB = AE$ uzyskujemy przystawanie trójkątów EAC oraz PAC (cecha bok-kąt-bok, rys. 4) i w konsekwencji równość $CE = CP$.

Mamy więc $CD = CP = CE$, skąd wynika teza zadania.



rys. 3



rys. 4

Uwaga 1.

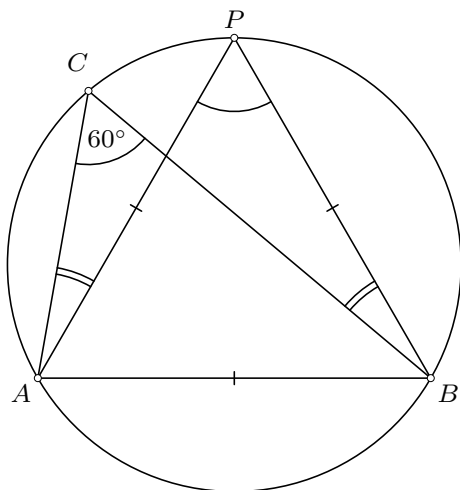
Z przeprowadzonego rozumowania wynika, że trójkąt DEP jest równoboczny, a punkt C jest środkiem tego trójkąta.

Uwaga 2.

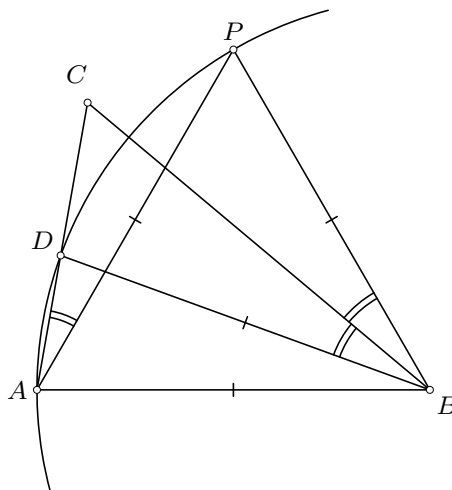
Istnieje wiele innych niż przedstawione powyżej wariantów prowadzenia rozumowania po wprowadzeniu punktu P . W szczególności skuteczne okazują się argumenty wykorzystujące własności kątów w okręgu.

Sposób IV

Określmy punkt P tak jak w poprzednim sposobie rozwiązania, tzn. w taki sposób, że ABP jest trójkątem równobocznym skierowanym do wewnątrz trójkąta ABC (rys. 5). Ponieważ $\sphericalangle ACB = 60^\circ = \sphericalangle APB$ oraz punkty C i P leżą po tej samej stronie prostej AB , więc punkty A, B, P, C leżą na jednym okręgu. W szczególności $\sphericalangle CAP = \sphericalangle CBP$, gdyż są to kąty wpisane w ten okrąg i oparte na tym samym łuku.



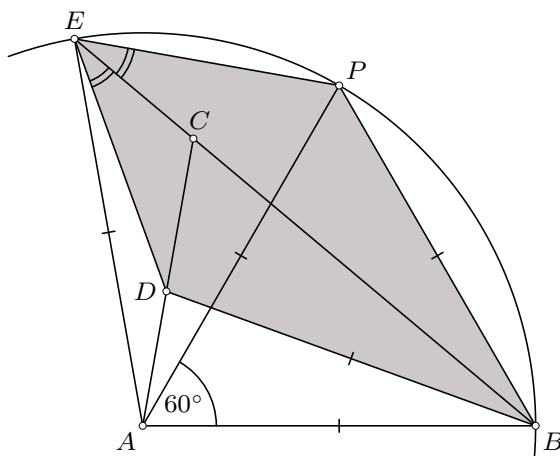
rys. 5



rys. 6

Ponieważ $AB = DB = PB$, więc punkty A, D, P leżą na okręgu o środku w punkcie B (rys. 6). Wobec tego na mocy twierdzenia o kącie wpisanym i środkowym uzyskujemy równość $\sphericalangle DBP = 2\sphericalangle DAP$, która w połączeniu z uzyskaną wcześniej równością $\sphericalangle DAP = \sphericalangle CBP$ oznacza, że $\sphericalangle DBC = \sphericalangle DBP - \sphericalangle CBP = \sphericalangle CBP$. W konsekwencji trójkąty DBE oraz PBE są przystające (cecha bok-kąt-bok).

Wreszcie skoro $AB = AE = AP$, to punkty B, E, P leżą na okręgu o środku w punkcie A (rys. 7). Ponownie korzystając z twierdzenia o kącie wpisanym i środkowym, uzyskujemy $\sphericalangle BEP = \frac{1}{2}\sphericalangle BAP = 30^\circ$. Pozostaje zauważyć, że $\sphericalangle BEP = \sphericalangle BED$ ze względu na uzasadnione wcześniej przystawanie trójkątów DBE oraz PBE .



rys. 7

4. Dana jest liczba nieparzysta $n \geq 1$ oraz n strzałek ułożonych kolejno od lewej do prawej, przy czym każda strzałka wskazuje albo w lewo, albo w prawo. Udowodnij, że pewna strzałka jest wskazywana przez dokładnie tyle strzałek, na ile sama wskazuje.

Uwaga: Przykładowo dla $n = 5$ i ułożenia $\rightarrow \rightarrow \leftarrow \leftarrow \rightarrow$ kolejne strzałki (od lewej) wskazują odpowiednio na 4, 3, 2, 3, 0 strzałek.

Rozwiązanie

Sposób I

Ponieważ łączna liczba strzałek jest nieparzysta, więc w pewną stronę (prawo lub lewo) wskazuje nieparzysta liczba strzałek. To oznacza, że pośród tych nieparzystych wielu strzałek istnieje *środkowa*, czyli taka, że na lewo i na prawo od niej znajduje się tyle samo strzałek wskazujących w tym samym kierunku, co ona. Ta środkowa strzałka, nazwijmy ją s , spełnia warunki zadania, gdyż:

- pośród pozostałych strzałek wskazujących w tym samym kierunku, co s , dokładnie połowa wskazuje na s i dokładnie połowa jest wskazywana przez s ;
- pośród strzałek wskazujących w przeciwnym kierunku niż s dokładnie te same strzałki wskazują na s i są przez s wskazywane.

Uwaga

Zawsze istnieje *dokładnie jedna* strzałka spełniająca warunki zadania.

Sposób II

Strzałkę, która jest wskazywana przez dokładnie tyle strzałek, na ile sama wskazuje nazwijmy *ciekawą*. Zauważmy, że zamiana miejscami dwóch sąsiednich strzałek wskazujących na siebie nawzajem nie zmienia stanu żadnej z nich (tzn. strzałka jest ciekawa po zamianie wtedy i tylko wtedy, gdy była ciekawa przed zamianą). Rzeczywiście, po zamianie konfiguracji $\rightarrow \leftarrow$ na $\leftarrow \rightarrow$, każda z dwóch rozważanych strzałek wskazuje na o dokładnie jedną strzałkę mniej niż przed zamianą i jest wskazywana przez o dokładnie jedną strzałkę mniej niż przed zamianą.

Wykonując skończenie wiele takich zamian możemy uzyskać sytuację, w której kolejno od lewej do prawej ułożone są najpierw wszystkie strzałki wskazujące w lewo, a następnie wszystkie strzałki wskazujące w prawo (być może w pewnym kierunku nie ma żadnej strzałki). Pozostaje zauważyć, że środkowa strzałka w kierunku reprezentowanym przez nieparzystą liczbę strzałek jest ciekawa.

5. Wyznacz wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych m, n o tej własności, że liczba $(m+n)$ -cyfrowa

$$\underbrace{33\dots3}_m \underbrace{66\dots6}_n$$

jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie

Sposób I

Przypuśćmy, że para m, n spełnia warunki zadania. Wówczas liczba

$$\underbrace{33\dots3}_m \underbrace{66\dots6}_n$$

jest kwadratem liczby parzystej, a zatem jest postaci $(2k)^2 = 4k^2$ dla pewnej liczby całkowitej k . W szczególności jest to liczba podzielna przez 4.

Zauważmy, że na mocy cechy podzielności przez 4 liczba zakończona cyframi „66” nie jest podzielna przez 4. To oznacza, że rozważana liczba może kończyć się tylko jedną szóstką, czyli $n = 1$.

Dla $m = 1$ uzyskujemy rozwiązanie, gdyż $36 = 6^2$. Z kolei dla $m = 2$ liczba 336 nie jest kwadratem liczby całkowitej, gdyż $18^2 < 336 < 19^2$. Przypuśćmy, że $m \geq 3$. Zauważmy, że

$$k^2 = \frac{1}{4} \cdot \underbrace{33 \dots 36}_m = 8 \underbrace{33 \dots 34}_{m-2}.$$

Skoro $m \geq 3$, to cyfra dziesiątek powyższej liczby jest równa 3, a zatem liczba k^2 jest zakończona cyframi „34”. Ponownie korzystając z cechy podzielności przez 4 stwierdzamy, że taka liczba jest niepodzielna przez 4. Jednak liczba parzysta niepodzielna przez 4 nie może być kwadratem liczby całkowitej — w przypadku $m \geq 3$ nie ma zatem rozwiązań.

Sposób II

Podobnie jak w poprzednim sposobie stwierdzamy, że dla $n \geq 2$ dana w treści zadania liczba jest parzysta ale niepodzielna przez 4, więc nie może być kwadratem liczby całkowitej. Wobec tego daną liczbę można zapisać w postaci

$$3 + \underbrace{33 \dots 3}_{m+1} = 3 + \frac{1}{3} \cdot \underbrace{99 \dots 9}_{m+1} = 3 + \frac{1}{3} (10^{m+1} - 1).$$

Przypuśćmy, że powyższa liczba jest kwadratem liczby całkowitej a , czyli

$$a^2 = 3 + \frac{1}{3} (10^{m+1} - 1).$$

Przekształcając tę równość, uzyskujemy

$$3a^2 = 10^{m+1} + 8. \quad (*)$$

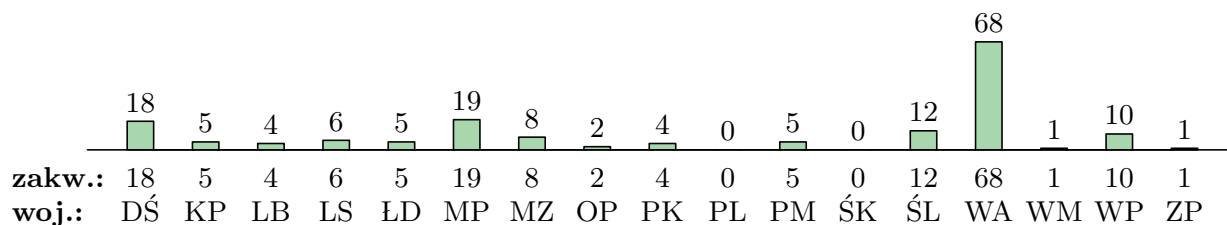
Jeżeli $m = 1$, to $a = 6$. Jeżeli $m = 2$, to $\frac{1}{3} \cdot 1008 = 336$ nie jest kwadratem. Jeżeli $m \geq 3$, to liczba $10^{m+1} + 8$ daje resztę 8 przy dzieleniu przez 16, więc jest podzielna przez 8 ale nie jest podzielna przez 16. To oznacza, że w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby stojącej po prawej stronie równości (*) dwójka występuje dokładnie 3 razy. Tymczasem w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby stojącej po lewej stronie równości (*) dwójka występuje parzystą liczbą razy (jest to dwukrotność liczby wystąpień czynnika 2 w rozkładzie liczby a). Uzyskana sprzeczność oznacza, że w przypadku $m \geq 3$ nie ma rozwiązań.

XVIII Olimpiada Matematyczna Juniorów

Statystyki dotyczące zawodów trzeciego stopnia (2022/23)

(18 marca 2023 r.)

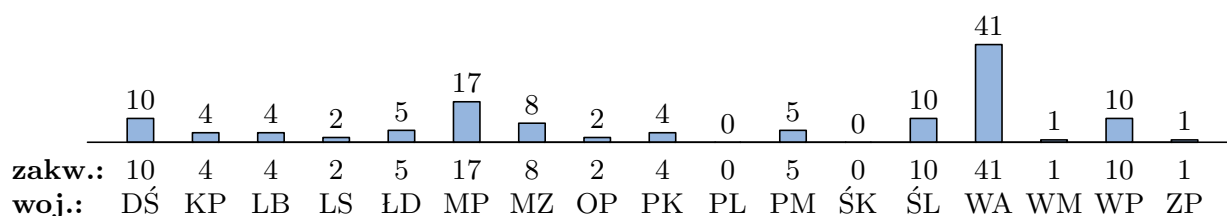
Tabela 1. Liczba uczniów, którzy wzięli udział w zawodach oraz zakwalifikowanych do zawodów w podziale na województwa i inne regiony.



Łączna liczba uczniów, którzy wzięli udział w zawodach: 168

Łączna liczba uczniów zakwalifikowanych do zawodów: 168

Tabela 2. Liczba szkół uczniów, którzy wzięli udział w zawodach oraz zakwalifikowanych do zawodów w podziale na województwa i inne regiony.



Łączna liczba szkół uczniów, którzy wzięli udział w zawodach: 124

Łączna liczba szkół uczniów zakwalifikowanych do zawodów: 124

Skróty województw i innych regionów

DŚ — dolnośląskie

LB — lubelskie

ŁD — łódzkie

MZ — mazowieckie bez m.st. Warszawy

PK — podkarpackie

PM — pomorskie

ŚL — śląskie

WM — warmińsko-mazurskie

ZP — zachodniopomorskie

KP — kujawsko-pomorskie

LS — lubuskie

MP — małopolskie

OP — opolskie

PL — podlaskie

ŚK — świętokrzyskie

WA — m.st. Warszawa

WP — wielkopolskie

Tabela 3. Procentowa i rzeczywista liczba osób, które uzyskały daną sumę punktów.

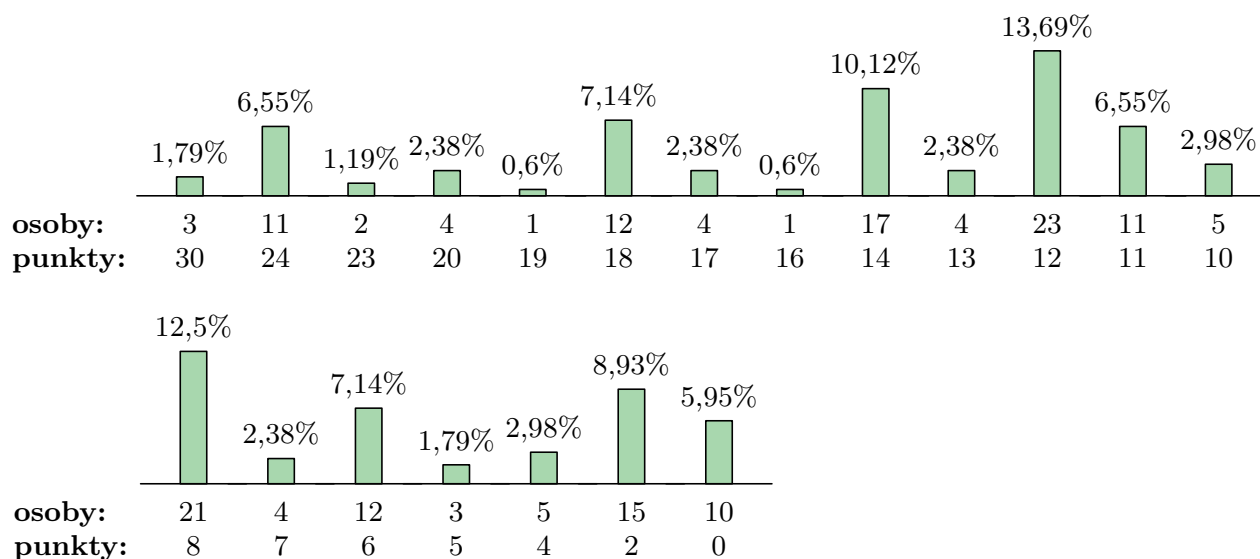


Tabela 4. Procentowa i rzeczywista liczba osób, które uzyskały daną lub większą sumę punktów.

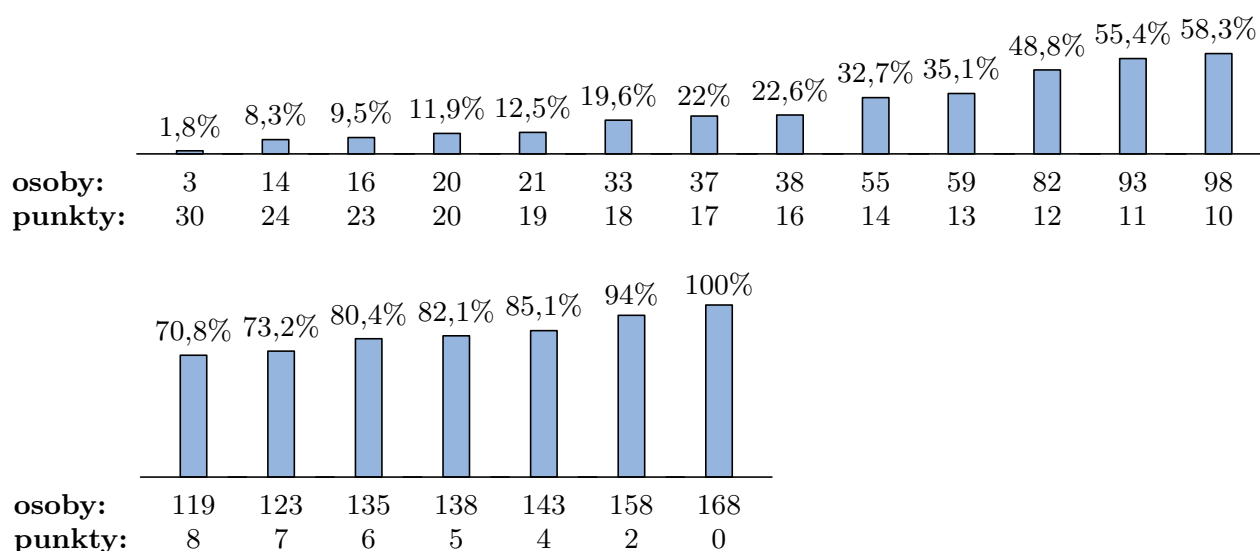


Tabela 5. Procentowa liczba osób, które uzyskały daną liczbę punktów za poszczególne zadania.

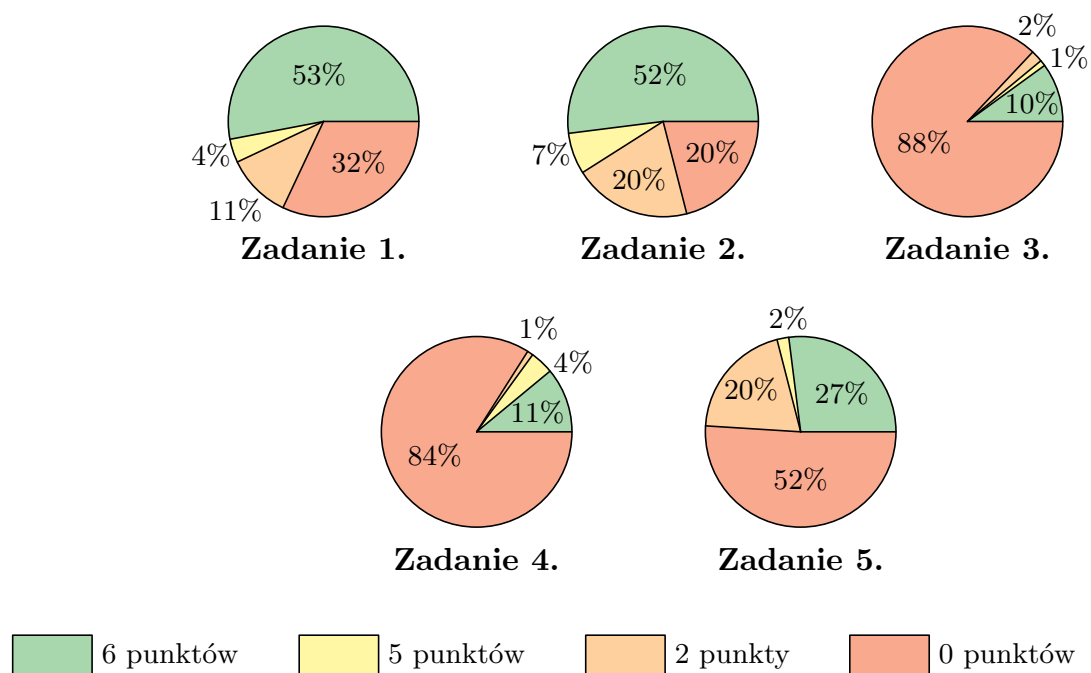


Tabela 6. Średnia uzyskanych punktów za poszczególne zadania.

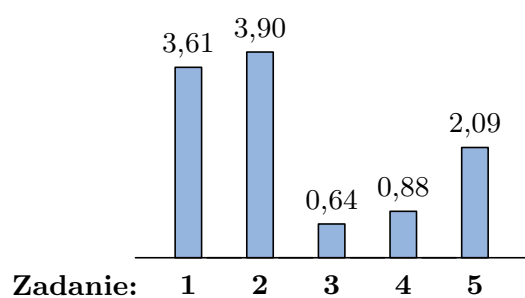
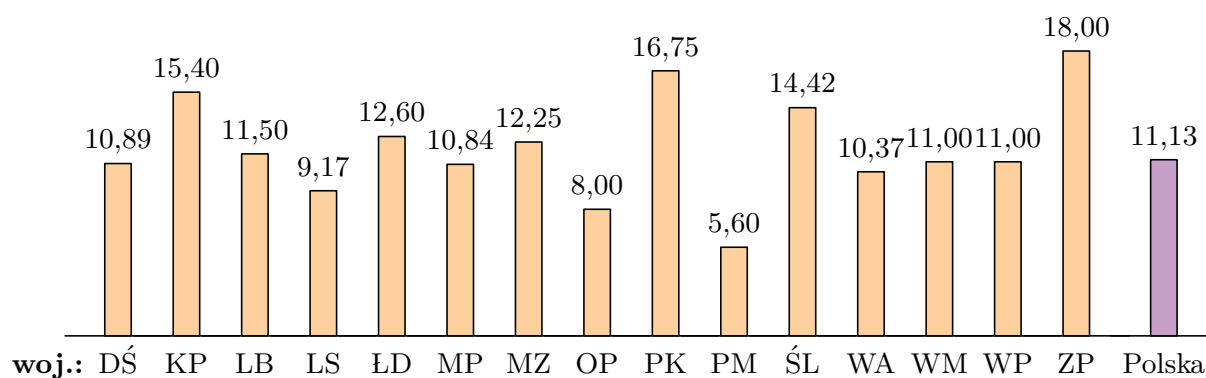


Tabela 7. Średnia sumy punktów w podziale na województwa i inne regiony.



Imiona:

Nazwisko:

Klasa:



XIX Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody stopnia pierwszego — część testowa

(28 września 2023 r., godz. 9:00)

Przed przystąpieniem do rozwiązywania testu wpisz na każdą stronę swoje imiona, nazwisko oraz numer klasy.

Treść każdego z poniższych zadań zawiera trzy stwierdzenia. Każde z nich jest prawdziwe lub fałszywe (przy czym może się zdarzyć, że wszystkie trzy stwierdzenia w obrębie jednego zadania są fałszywe). Jeśli dane stwierdzenie jest prawdziwe, wpisz w odpowiednią kratkę literkę T, jeśli zaś stwierdzenie jest fałszywe, wpisz literkę N.

W przypadku pomyłki przekreśl znakiem **X** podaną odpowiedź, a właściwą odpowiedź podaj obok z lewej strony. Nie używaj korektora.

Przykład poprawnie rozwiązane zadania:

0. Dla każdej dodatniej liczby całkowitej n liczba $2n + 1$ jest

T

a) dodatnia;

T

b) nieparzysta;

N

X

c) pierwsza.

Czas na rozwiązywanie testu: 75 minut.

Powodzenia!

1. Istnieją dwie liczby pierwsze, których suma jest równa

a) 17;

b) 18;

c) 19.

2. Pewne dwie liczby całkowite większe od 10 różnią się o 10. Wynika z tego, że te dwie liczby

a) mają takie same cyfry jedności;

b) mają cyfry dziesiątek różniące się o 1;

c) dają takie same reszty przy dzieleniu przez 2.

Imiona:

Nazwisko:

Klasa:

3. Sześciokąt $ABCDEF$ jest foremny. Wynika z tego, że

a) trójkąt ABC jest równoramienny;

b) trójkąt ACE jest równoboczny;

c) trójkąt ACF jest prostokątny.

4. Dany jest okrąg o promieniu 5. Istnieje cięciwa tego okręgu, która ma długość

a) 5;

b) 10;

c) 15.

5. W wyniku zwiększenia liczby 50 o 100% uzyskujemy tę samą liczbę, co w wyniku

a) zwiększenia liczby 100 o 50%;

b) zmniejszenia liczby 150 o 50%;

c) zmniejszenia liczby 200 o 50%.

6. Istnieje trójkąt ostrokątny o wszystkich trzech bokach całkowitej długości i obwodzie równym

a) 3;

b) 4;

c) 5.

7. Kostka do gry ma kształt sześcianu, który na każdej ścianie ma inną liczbę oczek, od 1 do 6. Jaś rzucił trzema takimi kostkami, a Małgosia — czterema. Następnie każde z nich dodało liczby wyrzuconych przez siebie oczek. Wynika z tego, że

a) wynik uzyskany przez Małgosię jest większy od wyniku uzyskanego przez Jasia;

b) różnica pomiędzy wynikiem Jasia i wynikiem Małgosi równa jest co najwyżej 6;

c) wyniki otrzymane przez Jasia i Małgosię są różne.

Imiona:

Nazwisko:

Klasa:

8. Liczby całkowite a, b spełniają nierówności $a > 1$ oraz $b > 9$. Wynika z tego, że

a) $a + b > 11$;

b) $ab > 19$;

c) $b - a \geq 8$.

9. Na bokach kwadratu o boku 1 wybrano trzy różne punkty A, B, C . Wynika z tego, że co najmniej jeden z odcinków AB, BC, CA ma długość

a) nie większą od 1;

b) nie mniejszą od 1;

c) różną od 1.

10. Istnieją takie dwie naturalne liczby 19-cyfrowe, których iloczyn jest liczbą

a) 37-cyfrową;

b) 38-cyfrową;

c) 39-cyfrową.

11. W pola tablicy 3×3 wpisano liczby całkowite od 1 do 9, każdą dokładnie raz. Wynika z tego, że suma trzech liczb w pewnym wierszu jest

a) parzysta;

b) nieparzysta;

c) równa co najmniej 15.

12. Liczba $7^{19} + 7^{20} + 7^{21}$ jest podzielna przez

19;

20;

21.

Imiona:

Nazwisko:

Klasa:

13. Przez $\text{NWD}(x, y)$ oznaczamy największy wspólny dzielnik liczb x oraz y . Istnieją dodatnie liczby całkowite a, b, c o tej własności, że $\text{NWD}(a, b) = 2$, $\text{NWD}(b, c) = 4$ oraz

a) $\text{NWD}(a, c) = 3$;

b) $\text{NWD}(a, c) = 6$;

c) $\text{NWD}(a, c) = 12$.

14. W czworokącie wypukłym $ABCD$ zachodzą równości $AB = AC = 2$, $CB = CD = 1$. Wynika z tego, że

a) $BD \leq 2$;

b) $\angle BAD \leq 60^\circ$;

c) pole czworokąta $ABCD$ jest nie większe od pola trójkąta równobocznego o boku 2.

15. W gronie siedmiu osób każdy ma co najmniej 3 znajomych spośród pozostałych osób (przyjmujemy, że jeśli A jest znajomym B , to również B jest znajomym A). Wynika z tego, że w tym gronie

a) pewna osoba ma co najmniej 4 znajomych spośród pozostałych osób;

b) pewne dwie osoby mają co najmniej 3 wspólnych znajomych;

c) pewne trzy osoby znają się wzajemnie.

Rozwiązania zadań testowych

1. Istnieją dwie liczby pierwsze, których suma jest równa

- ☐ N a) 17;
☐ T b) 18;
☐ T c) 19.

Komentarz

a) Liczba 17 jest nieparzysta, więc każde jej przedstawienie w postaci sumy dwóch liczb całkowitych ma jeden składnik parzysty i jeden nieparzysty. Jedyną parzystą liczbą pierwszą jest 2, jednak $17 - 2 = 15$ nie jest liczbą pierwszą. Wynika z tego, że przedstawienie liczby 17 w postaci sumy dwóch liczb pierwszych nie istnieje.

b) $18 = 7 + 11$

c) $19 = 2 + 17$

2. Pewne dwie liczby całkowite większe od 10 różnią się o 10. Wynika, z tego, że te dwie liczby

- ☐ T a) mają takie same cyfry jedności;
☐ N b) mają cyfry dziesiątek różniące się o 1;
☐ T c) dają takie same reszty przy dzieleniu przez 2.

Komentarz

a) Dwie liczby różniące się o 10 dają takie same reszty przy dzieleniu przez 10, a cyfra jedności dodatniej liczby całkowitej równa jest właśnie reszcie z dzielenia tej liczby przez 10.

c) Dwie liczby o parzystej różnicy są albo obie parzyste, albo obie nieparzyste. To oznacza, że dają takie same reszty przy dzieleniu przez 2.

b) Liczby 90 oraz 100 różnią się o 10, a ich cyfry dziesiątek różnią się o 9.

3. Sześciokąt $ABCDEF$ jest foremny. Wynika z tego, że

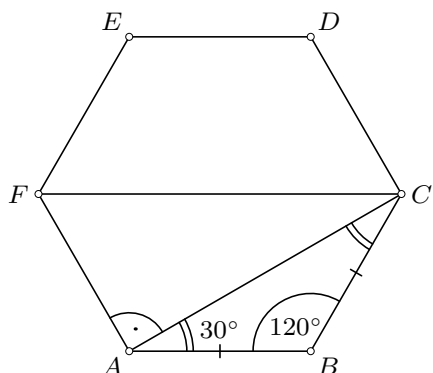
- ☐ T a) trójkąt ABC jest równoramienny;
☐ T b) trójkąt ACE jest równoboczny;
☐ T c) trójkąt ACF jest prostokątny.

Komentarz

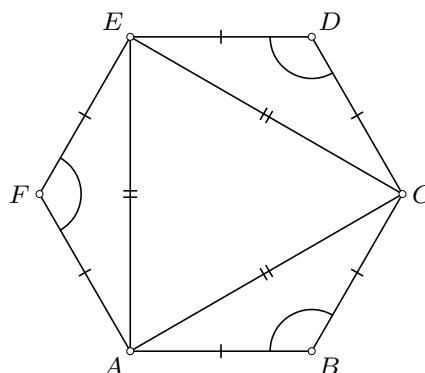
a) Skoro sześciokąt $ABCDEF$ jest foremny, to $AB = BC$.

c) Ponieważ kąt wewnętrzny sześciokąta foremnego ma miarę 120° , więc każdy z kątów przy podstawie AC trójkąta równoramiennego ABC ma miarę $\frac{1}{2}(180^\circ - 120^\circ) = 30^\circ$ (rys. 1). Stąd w szczególności wynika, że

$$\sphericalangle FAC = \sphericalangle FAB - \sphericalangle BAC = 120^\circ - 30^\circ = 90^\circ.$$



rys. 1



rys. 2

b) Każde dwa z trójkątów ABC , CDE , EFA są przystające (cecha bok–kąt–bok), skąd $AC = CE = EA$ (rys. 2), czyli trójkąt ACE jest równoboczny.

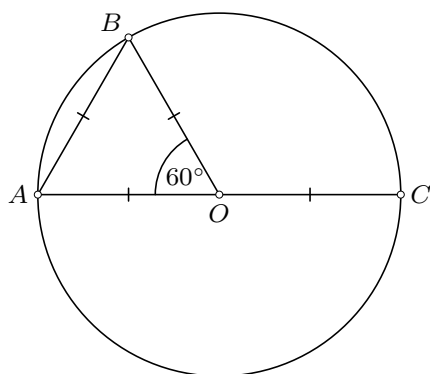
4. Dany jest okrąg o promieniu 5. Istnieje cięciwa tego okręgu, która ma długość

T	a) 5;
T	b) 10;
N	c) 15.

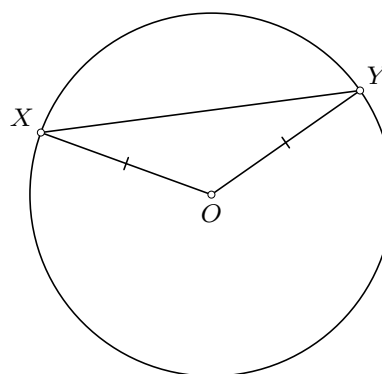
Komentarz

Niech O będzie środkiem danego okręgu, a A , B , C takimi punktami tego okręgu, że $\sphericalangle AOB = 60^\circ$ oraz punkt O leży na odcinku AC (rys. 3).

a) Trójkąt AOB jest równoramienny i kąt pomiędzy jego ramionami ma miarę 60° , więc trójkąt ten jest równoboczny. Stąd $AB = OA = 5$. Wobec tego cięciwa AB danego okręgu ma długość 5.



rys. 3



rys. 4

b) Średnica AC danego okręgu ma długość $OA + OC = 10$.

c) Rozważmy dowolną cięciwę XY danego okręgu (rys. 4). Z nierówności trójkąta zastosowanej do punktów O, X, Y wynika, że $XY \leq OX + OY = 10$. Każda cięciwa danego okręgu ma zatem długość nie większą od 10.

5. W wyniku zwiększenia liczby 50 o 100% uzyskujemy tę samą liczbę, co w wyniku

N	a) zwiększenia liczby 100 o 50%;
N	b) zmniejszenia liczby 150 o 50%;
T	c) zmniejszenia liczby 200 o 50%.

Komentarz

W wyniku zwiększenia liczby 50 o 100%, czyli o liczbę 50, otrzymamy liczbę 100.

a) $100 + 50\% \cdot 100 = 150\% \cdot 100 = 150$

b) $150 - 50\% \cdot 150 = 50\% \cdot 150 = 75$

c) $200 - 50\% \cdot 200 = 50\% \cdot 200 = 100$

6. Istnieje trójkąt ostrokątny o wszystkich trzech bokach całkowitej długości i obwodzie równym

T	a) 3;
N	b) 4;
T	c) 5.

Komentarz

a) Takim trójkątem jest trójkąt równoboczny o boku 1.

c) Trójkąt równoramienny o podstawie długości 1 i ramieniu długości 2 ma wszystkie boki całkowitej długości i obwód równy 5. Trójkąt ten jest ostrokątny — kąty przy podstawie są ostre, a pozostały kąt mniejszy od każdego z nich (gdyż ramię jest dłuższe od podstawy).

b) Liczba 4 posiada tylko jedno przedstawienie w postaci sumy trzech dodatnich liczb całkowitych, mianowicie: $4 = 1 + 1 + 2$. Nie istnieje jednak trójkąt o bokach długości 1, 1, 2, gdyż liczba 2 nie jest mniejsza od sumy dwóch pozostałych.

7. Kostka do gry ma kształt sześcianu, który na każdej ścianie ma inną liczbę oczek, od 1 do 6. Jaś rzucił trzema takimi kostkami, a Małgosia — czterema. Następnie każde z nich dodało liczby wyrzuconych przez siebie oczek. Wynika z tego, że

N	a) wynik uzyskany przez Małgosię jest większy od wyniku uzyskanego przez Jasia;
N	b) różnica pomiędzy wynikiem Jasia i wynikiem Małgosi równa jest co najwyżej 6;
N	c) wyniki otrzymane przez Jasia i Małgosię są różne.

Komentarz

a), c) Małgosia mogła wyrzucić cztery jedynki, a Jaś — trzy szóstki. Wówczas wynik Małgosi, równy 4, jest mniejszy od wyniku Jasia, równego 18. Co więcej, różnica między tymi wynikami jest większa od 6.

b) Mogło się zdarzyć, że Małgosia wyrzuciła cztery trójki, a Jaś — trzy czwórki. Wówczas każde z nich uzyskałoby wynik $3 \cdot 4 = 12$.

8. Liczby całkowite a, b spełniają nierówności $a > 1$ oraz $b > 9$. Wynika z tego, że

T	a) $a + b > 11$;
T	b) $ab > 19$;
N	c) $b - a \geq 8$.

Komentarz

a), b) Skoro $a > 1$ i $b > 9$ oraz liczby a i b są całkowite, to zachodzą nierówności $a \geq 2$ oraz $b \geq 10$. Wobec tego $a + b \geq 12 > 11$ oraz $ab \geq 20 > 19$.

c) Na przykład liczby $a = b = 10$ spełniają nierówności $a > 1$ oraz $b > 9$, ale $b - a = 0 < 8$.

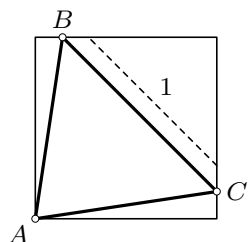
9. Na bokach kwadratu o boku 1 wybrano trzy różne punkty A, B, C . Wynika z tego, że co najmniej jeden z odcinków AB, BC, CA ma długość

N	a) nie większą od 1;
N	b) nie mniejszą od 1;
N	c) różną od 1.

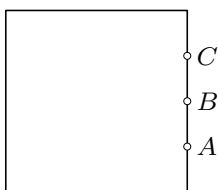
Komentarz

a) Punkty A, B, C można wybrać w taki sposób, że każdy bok trójkąta ABC ma długość większą od 1. Przykładowo można za punkt A przyjąć jeden z wierzchołków kwadratu, a punkty B i C wybrać na nieprzyległych doń bokach w taki sposób, aby odcinek BC miał długość większą od 1 (rys. 5).

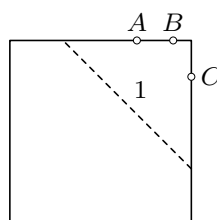
b) Punkty A, B, C można wybrać w taki sposób, że każdy z odcinków AB, BC, CA ma długość mniejszą od 1 — na przykład zaznaczając wszystkie punkty na tym samym boku, ale nie na jego końcach (rys. 6) lub na dwóch bokach o wspólnym końcu w pobliżu tego końca (rys. 7).



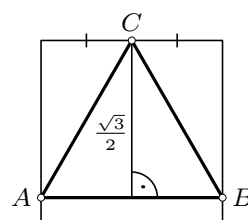
rys. 5



rys. 6



rys. 7



rys. 8

c) Punkty A, B, C można wybrać w taki sposób, że trójkąt ABC jest równoboczny o boku 1 (rys. 8). W tym celu wystarczy wybrać dowolny bok kwadratu, jego środek oznaczyć przez C , a odcinek AB wybrać tak, aby był równoległy do wybranego boku kwadratu i odległy odeń o $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ (wysokość trójkąta równobocznego o boku 1).

10. Istnieją takie dwie naturalne liczby 19-cyfrowe, których iloczyn jest liczbą

- ☐ T a) 37-cyfrową;
☐ T b) 38-cyfrową;
☐ N c) 39-cyfrową.

Komentarz

- a) Jeżeli $a = b = 10^{18}$, to iloczyn $ab = 10^{36}$ jest liczbą 37-cyfrową.
b) Jeżeli $a = 2 \cdot 10^{18}$ oraz $b = 5 \cdot 10^{18}$, to iloczyn $ab = 10^{37}$ jest liczbą 38-cyfrową.
c) Przypuśćmy, że liczby naturalne a oraz b są 19-cyfrowe. To oznacza, że

$$10^{18} \leq a < 10^{19} \quad \text{oraz} \quad 10^{18} \leq b < 10^{19}.$$

W konsekwencji

$$10^{36} \leq ab < 10^{38},$$

co oznacza, że iloczyn ab ma co najmniej 37 cyfr i co najwyżej 38 cyfr. Nie może zatem być liczbą 39-cyfrową.

11. W pola tablicy 3×3 wpisano liczby całkowite od 1 do 9, każdą dokładnie raz.

Wynika z tego, że suma trzech liczb w pewnym wierszu jest

- ☐ N a) parzysta;
☐ T b) nieparzysta;
☐ T c) równa co najmniej 15.

Komentarz

Zauważmy, że suma wszystkich liczb wpisanych w pola tablicy jest równa 45.

a) Jeśli liczby zostaną wpisane na przykład w sposób przedstawiony na rysunku 9, to w każdym wierszu (a także w każdej kolumnie) suma wpisanych liczb będzie nieparzysta (równa 15).

2	9	4
7	5	3
6	1	8

rys. 9

b) Przypuśćmy, że w każdym z trzech wierszy sumy wpisanych liczb są liczbami parzystymi. Wówczas suma tych trzech sum jest liczbą parzystą. Z drugiej strony jest to suma wszystkich liczb znajdujących się w tablicy, czyli 45 — liczba nieparzysta. Uzyskana sprzeczność oznacza, że nie jest możliwe, aby suma trzech liczb w każdym wierszu była parzysta.

c) Przypuśćmy, że w każdym wierszu suma wpisanych liczb jest mniejsza od 15. Wówczas suma tych trzech sum jest liczbą mniejszą od 45. Z drugiej strony jest to suma wszystkich liczb znajdujących się w tablicy, czyli dokładnie 45. Uzyskana sprzeczność oznacza, że w pewnym wierszu suma trzech wpisanych liczb jest nie mniejsza od 15.

12. Liczba $7^{19} + 7^{20} + 7^{21}$ jest podzielna przez

T	19;
N	20;
T	21.

Komentarz

Zauważmy, że

$$7^{19} + 7^{20} + 7^{21} = 7^{19} \cdot 1 + 7^{19} \cdot 7 + 7^{19} \cdot 49 = 7^{19} \cdot (1 + 7 + 49) = 7^{19} \cdot 57 = 7^{19} \cdot 3 \cdot 19.$$

Liczba ta jest podzielna przez 19 oraz $3 \cdot 7 = 21$, ale nie jest podzielna przez 20 (nie jest nawet parzysta).

13. Przez $\text{NWD}(x, y)$ oznaczamy największy wspólny dzielnik liczb x oraz y . Istnieją dodatnie liczby całkowite a, b, c o tej własności, że $\text{NWD}(a, b) = 2$, $\text{NWD}(b, c) = 4$ oraz

N	a) $\text{NWD}(a, c) = 3$;
T	b) $\text{NWD}(a, c) = 6$;
N	c) $\text{NWD}(a, c) = 12$.

Komentarz

a) Jeśli $\text{NWD}(a, b) = 2$, to liczba a jest parzysta. Jeśli ponadto $\text{NWD}(b, c) = 4$, to liczba c również jest parzysta. Stąd wniosek, że największy wspólny dzielnik liczb a i c jest liczbą parzystą, więc różną od 3.

c) Jeśli $\text{NWD}(b, c) = 4$, to liczba b jest podzielna przez 4. Gdyby ponadto zachodziła równość $\text{NWD}(a, c) = 12$, to liczba a również byłaby podzielna przez 4. Stąd wniosek, że największy wspólny dzielnik liczb a i b dzieli się przez 4 — jest on jednak równy 2. Uzyskana sprzeczność oznacza, że $\text{NWD}(a, c) \neq 12$.

b) Jeśli $a = 6, b = 4, c = 12$, to $\text{NWD}(a, b) = 2, \text{NWD}(b, c) = 4$ oraz $\text{NWD}(a, c) = 6$.

14. W czworokącie wypukłym $ABCD$ zachodzą równości $AB = AC = 2$, $CB = CD = 1$.

Wynika z tego, że

T	a) $BD \leq 2$;
T	b) $\sphericalangle BAD \leq 60^\circ$;
N	c) pole czworokąta $ABCD$ jest nie większe od pola trójkąta równobocznego o boku 2.

Komentarz

a) Z nierówności trójkąta zastosowanej do trójkąta BCD wynika, że

$$BD \leq CB + CD = 1 + 1 = 2.$$

b) Rozważmy okrąg o środku w punkcie C i promieniu 1. Poprowadźmy z punktu A odcinki AX i AY styczne do tego okręgu. Ponieważ $AC = 2$, więc każdy z trójkątów prostokątnych ACX , ACY jest połową trójkąta równobocznego, a zatem $\sphericalangle XAY = 60^\circ$. Pozostaje zauważyć, że kąt BAD leży wewnątrz kąta XAY .

c) Załóżmy, że $AD = 2$, czyli czworokąt $ABCD$ składa się z dwóch trójkątów równoramiennych o bokach 1, 2, 2. Na mocy twierdzenia Pitagorasa wysokość takiego trójkąta opuszczona na podstawę ma długość $\sqrt{2^2 - (\frac{1}{2})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{15}$. W takim razie pole czworokąta $ABCD$ jest równe

$$2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{15} = \frac{1}{2}\sqrt{15}.$$

Z kolei pole trójkąta równobocznego o boku 2 jest równe $\frac{1}{4} \cdot 2^2 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3} = \frac{1}{2}\sqrt{12} < \frac{1}{2}\sqrt{15}$.

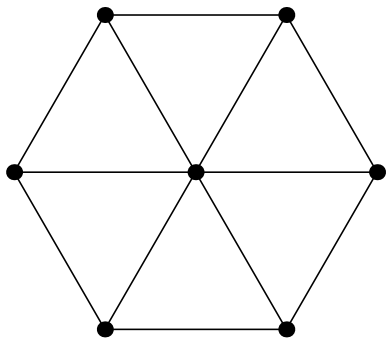
15. W gronie siedmiu osób każdy ma co najmniej 3 znajomych pośród pozostałych osób (przyjmujemy, że jeśli A jest znajomym B , to również B jest znajomym A).

Wynika z tego, że w tym gronie

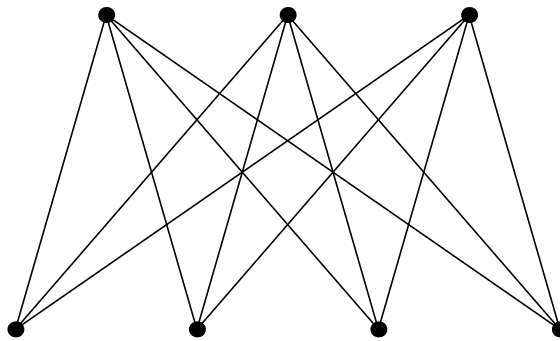
T	a) pewna osoba ma co najmniej 4 znajomych pośród pozostałych osób;
N	b) pewne dwie osoby mają co najmniej 3 wspólnych znajomych;
N	c) pewne trzy osoby znają się wzajemnie.

Komentarz

a) Przypuśćmy, że każda osoba ma dokładnie 3 znajomych wśród pozostałych. Jeśli zapytamy każdą osobę, ilu ma znajomych i dodamy uzyskane w odpowiedzi liczby, otrzymamy więc $3 \cdot 7 = 21$. To jednak oznaczałoby, że liczba znajomości w całym siedmioosobowym gronie jest równa $\frac{1}{2} \cdot 21 = 10,5$ (gdyż o każdej znajomości powiedziały nam dwie osoby), a to nie jest liczba całkowita. To oznacza, że pewna osoba ma co najmniej 4 znajomych.



rys. 10



rys. 11

b) Jeśli układ znajomości wygląda tak, jak zilustrowano na rysunku 10 (kropki odpowiadają osobom, a odcinki między nimi — znajomościom), to żadne dwie osoby nie mają trzech wspólnych znajomych, mimo że każda ma ich co najmniej 3.

c) Jeśli układ znajomości wygląda tak, jak zilustrowano na rysunku 11, to żadne trzy osoby nie znają się wzajemnie, mimo że każda ma co najmniej 3 znajomych.

XIX Olimpiada Matematyczna Juniorów

Statystyki dotyczące części testowej
zawodów pierwszego stopnia (2023/2024)

(28 września 2023 r.)

Tabela 1.

Procentowa liczba poprawnych odpowiedzi w poszczególnych podpunktach.

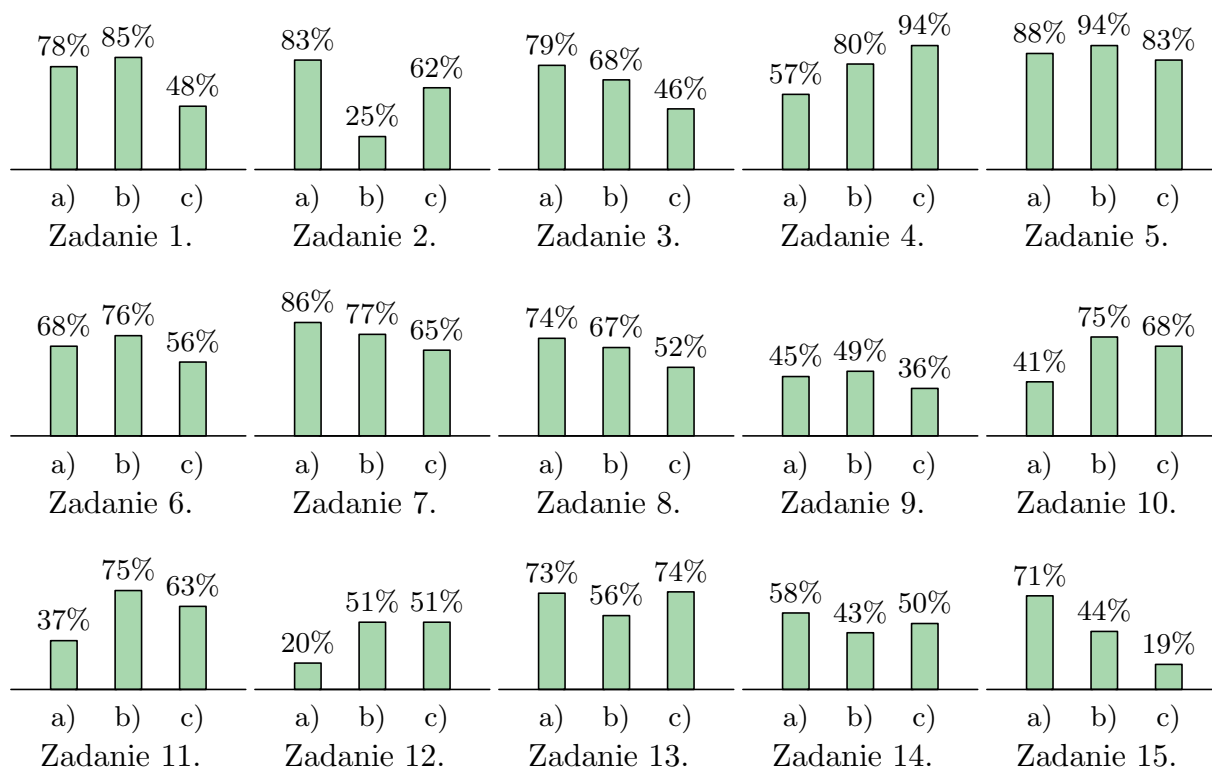
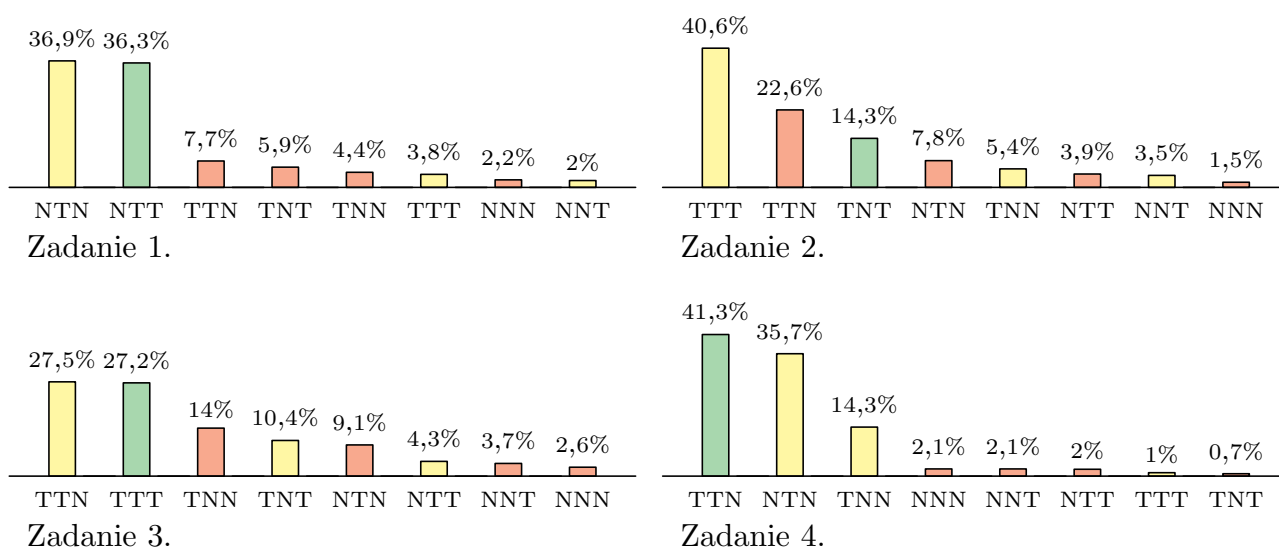
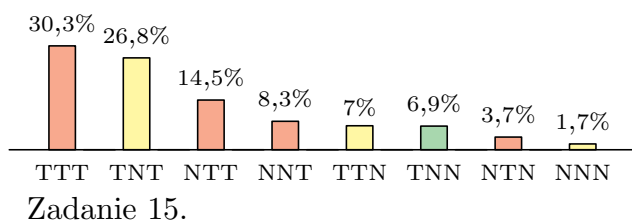
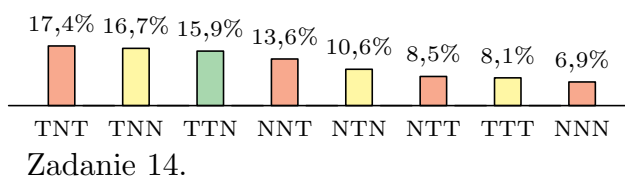
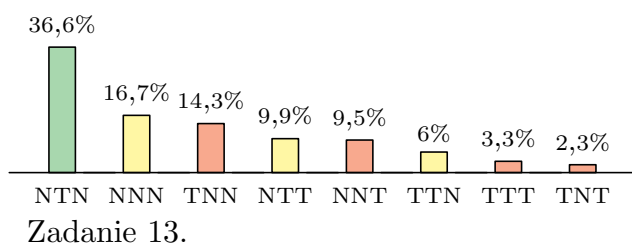
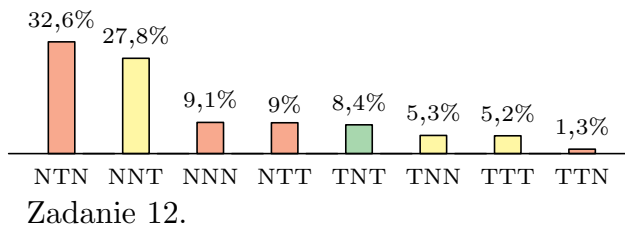
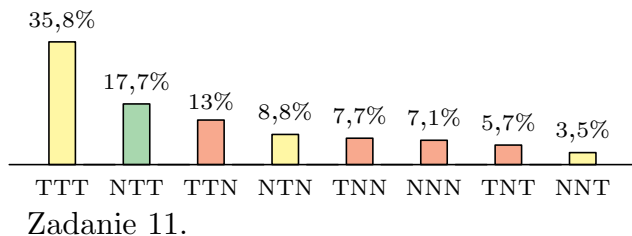
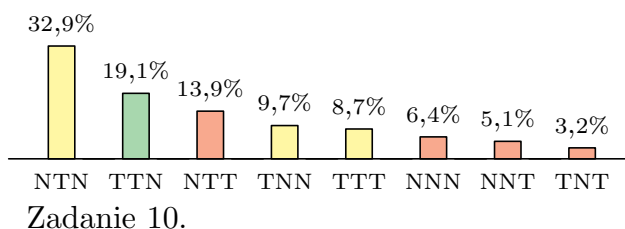
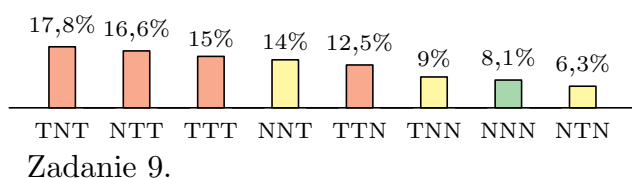
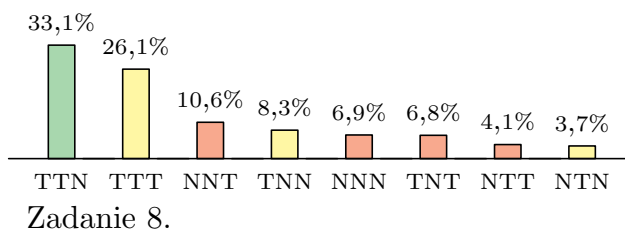
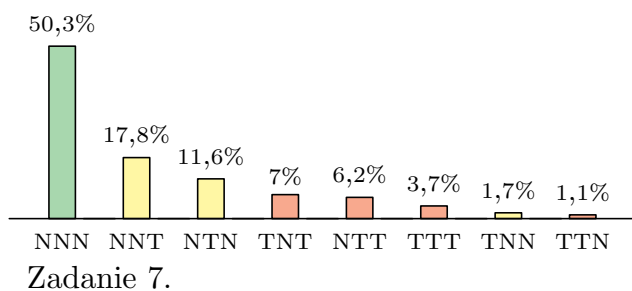
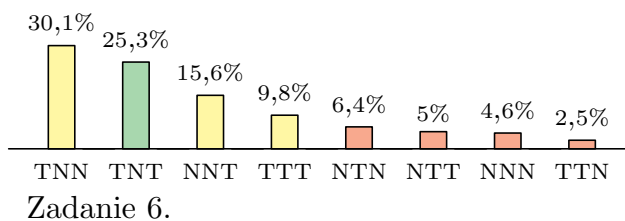
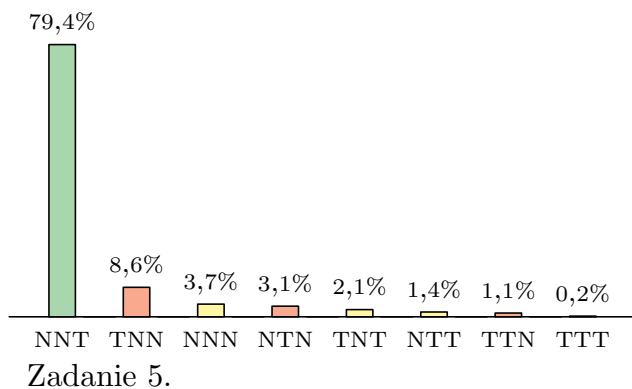


Tabela 2.

Procentowa liczba udzielonych kombinacji odpowiedzi w poszczególnych zadaniach.





Zestaw odpowiedzi za:

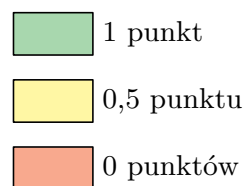
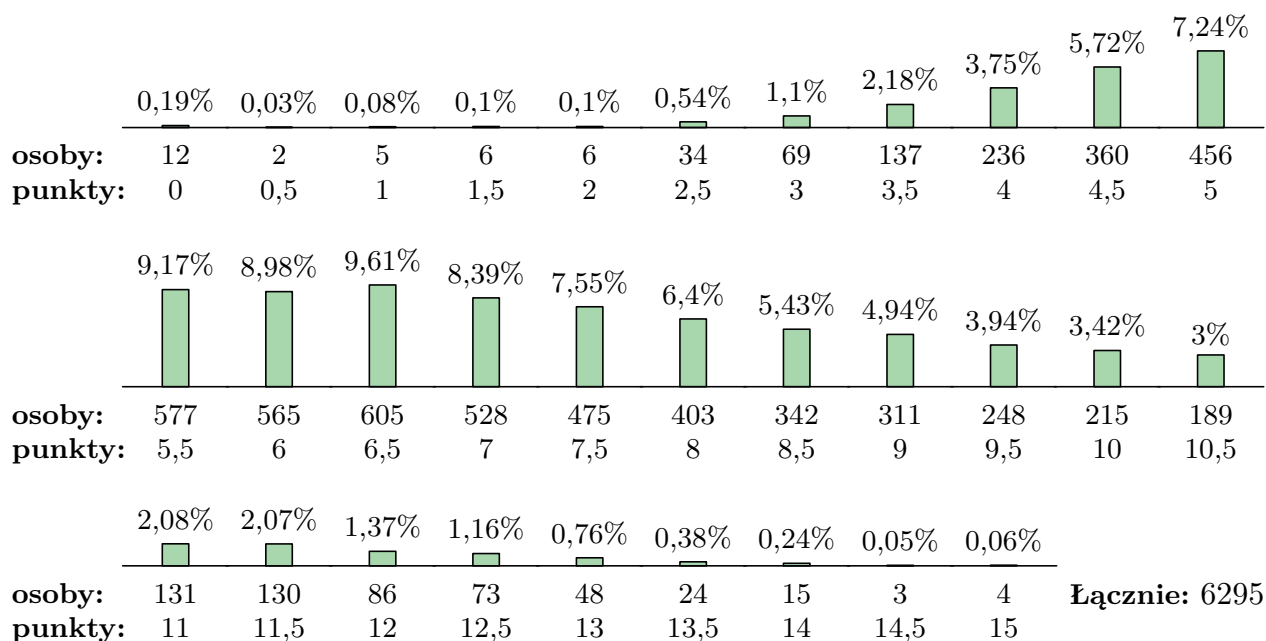


Tabela 3.

Rzeczywista oraz procentowa liczba osób, które uzyskały daną sumę punktów.

**Tabela 4.**

Procentowa i rzeczywista liczba osób, które uzyskały daną lub większą sumę punktów.

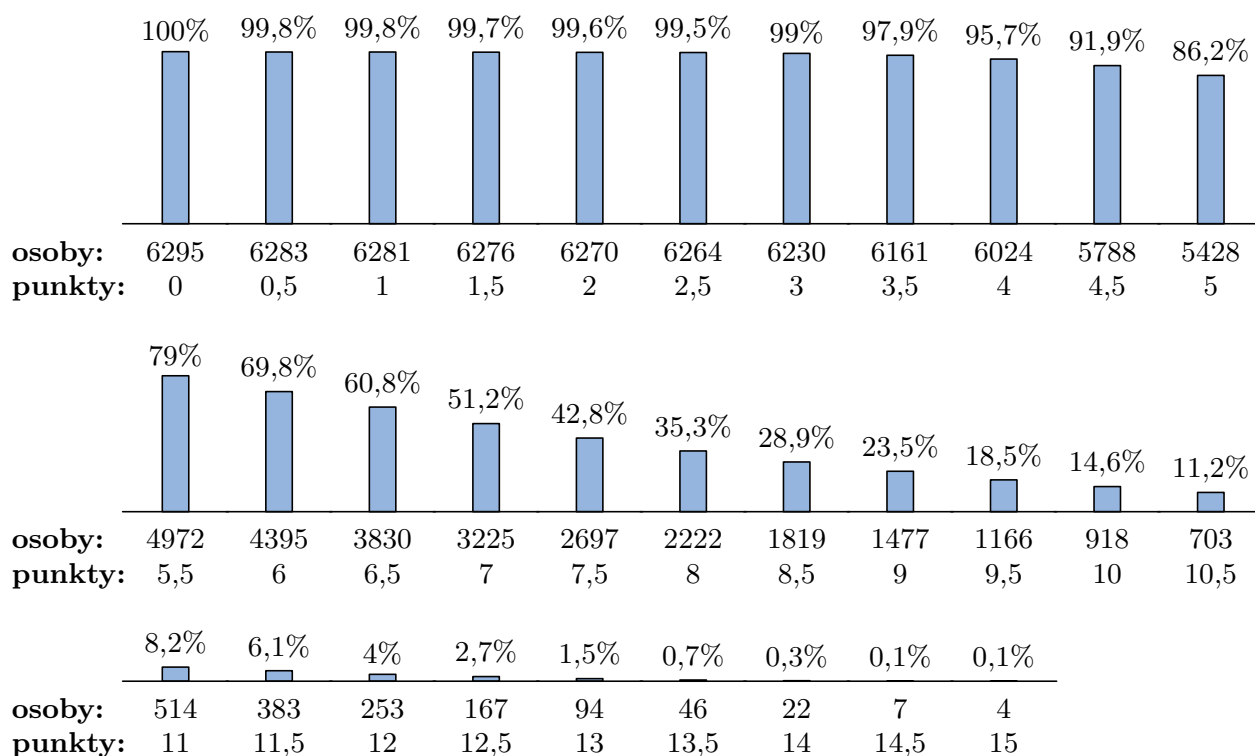
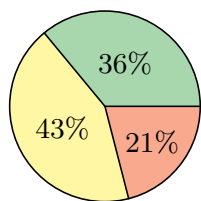
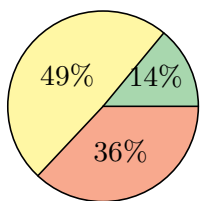
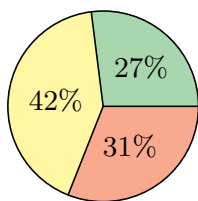
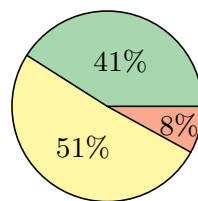
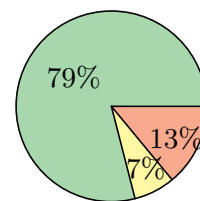
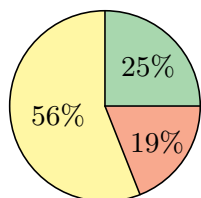
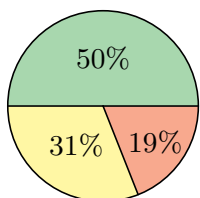
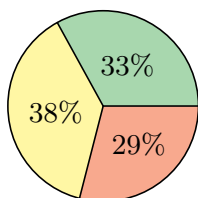
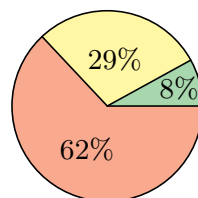
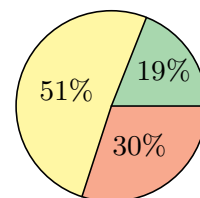
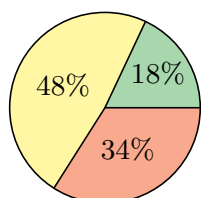
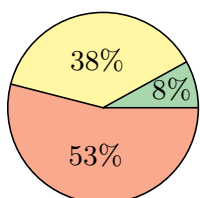
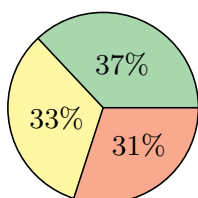
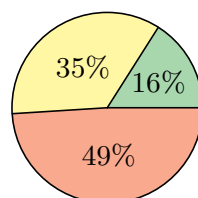
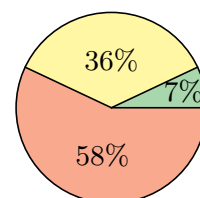
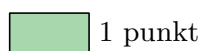
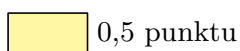


Tabela 5.

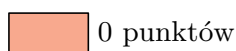
Procentowa liczba uzyskanych punktów za poszczególne zadania.

**Zadanie 1.****Zadanie 2.****Zadanie 3.****Zadanie 4.****Zadanie 5.****Zadanie 6.****Zadanie 7.****Zadanie 8.****Zadanie 9.****Zadanie 10.****Zadanie 11.****Zadanie 12.****Zadanie 13.****Zadanie 14.****Zadanie 15.**

1 punkt



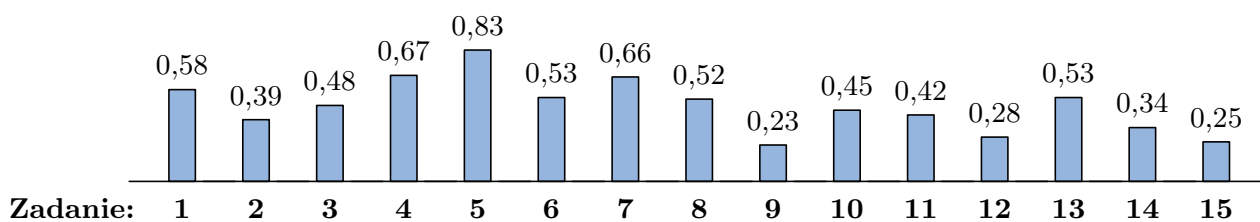
0,5 punktu



0 punktów

Tabela 6.

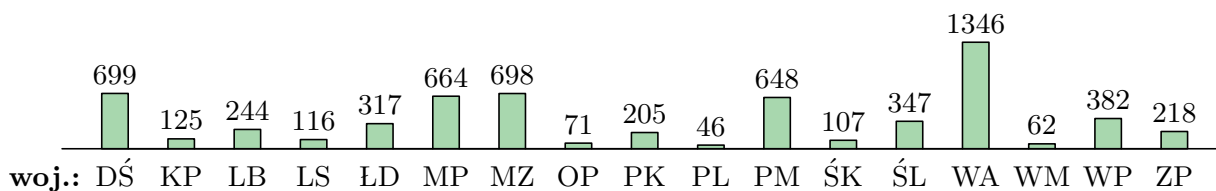
Średnia z uzyskanych punktów za poszczególne zadania.



Średni łączny wynik: 7,14

Tabela 7.

Liczba uczniów, którzy wzięli udział w zawodach w podziale na województwa.

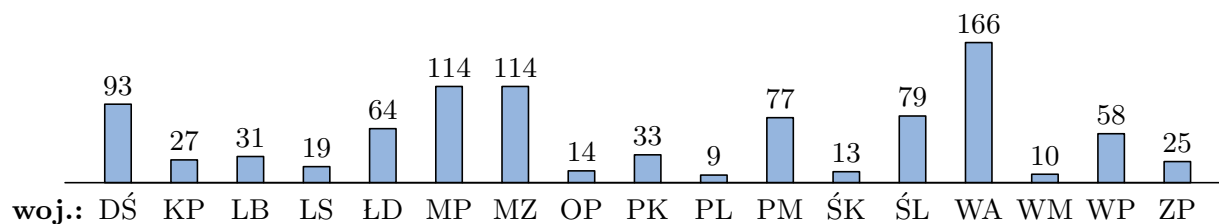


Łącznie: 6295

Na podstawie danych wprowadzonych przez szkoły. Ostateczne statystyki mogą ulec drobnym zmianom w wyniku weryfikacji nadesłanej dokumentacji.

Tabela 8.

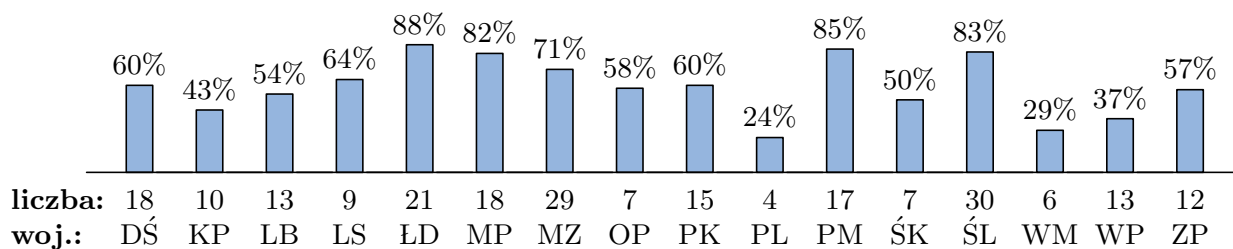
Liczba szkół, których uczniowie wzięli udział w zawodach w podziale na województwa.



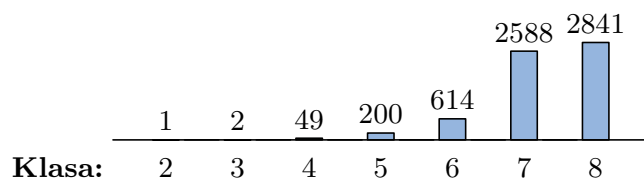
Łącznie: 946

Tabela 9.

Rzeczywista i procentowa liczba powiatów w danym województwie, z których co najmniej jedna szkoła wzięła udział w zawodach.

**Tabela 10.**

Liczba uczniów biorących udział w teście w podziale na klasy.



Skróty województw i innych regionów

DŚ — dolnośląskie

LB — lubelskie

LD — łódzkie

MZ — mazowieckie bez m.st. Warszawy

PK — podkarpackie

PM — pomorskie

ŚL — śląskie

WM — warmińsko-mazurskie

ZP — zachodniopomorskie

KP — kujawsko-pomorskie

LS — lubuskie

MP — małopolskie

OP — opolskie

PL — podlaskie

ŚK — świętokrzyskie

WA — m.st. Warszawa

WP — wielkopolskie

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji i Nauki



Stowarzyszenie
na rzecz Edukacji
Matematycznej



Ministerstwo
Edukacji i Nauki

Na podstawie danych wprowadzonych przez szkoły. Ostateczne statystyki mogą ulec drobnym zmianom w wyniku weryfikacji nadesłanej dokumentacji.

XIX OMJ/test/5

XIX Olimpiada Matematyczna Juniorów (2023/24)

Zadania konkursowe zawodów pierwszego stopnia —
część korespondencyjna

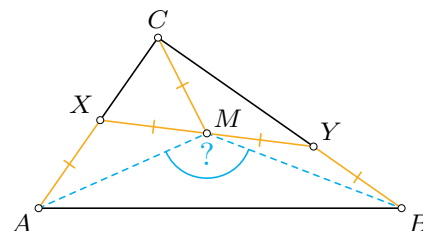
(1 września – 16 października 2023 r.)

1. Wyznacz wszystkie takie liczby naturalne n , że liczba $\underbrace{11\dots1}_n \underbrace{99\dots9}_n$ jest pierwsza.

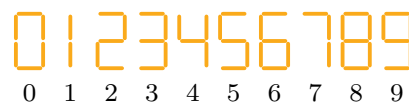
2. Punkty X oraz Y leżą odpowiednio na bokach AC oraz BC trójkąta ABC . Punkt M jest środkiem odcinka XY . Załóżmy, że

$$AX = MX = MC = MY = BY.$$

Wyznacz miarę kąta AMB .

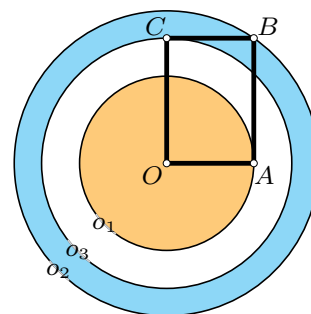


3. Tomek ma do dyspozycji n jednakowych patyczków, z których układa liczby wielocyfrowe (rysunek przedstawia wygląd układanych przez Tomka cyfr). Tomek zauważył, że suma cyfr największej z możliwych do ułożenia przez niego liczb jest równa dokładnie n . Wyznacz wszystkie liczby n , dla których taka sytuacja jest możliwa.



4. Wyznacz wszystkie liczby pierwsze, które można przedstawić jako różnicę sześcianów dwóch liczb pierwszych.

5. Dane są trzy okręgi o_1 , o_2 , o_3 o wspólnym środku O . Na tych okręgach leżą odpowiednio punkty A , B , C , przy czym czworokąt $ABCO$ jest prostokątem. Wykaż, że pole koła ograniczonego okręgiem o_1 jest równe polu pierścienia kołowego ograniczonego okręgami o_2 i o_3 .

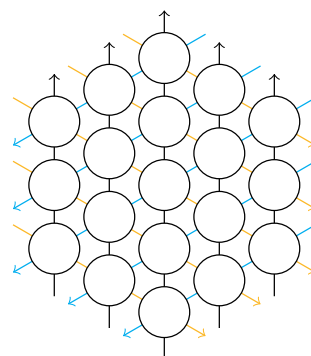


6. Dane są liczby rzeczywiste a , b , c . Udowodnij, że jeżeli pewne dwie z liczb

$$ab+b+1, \quad bc+c+1, \quad ca+a+1$$

są równe 0, to także trzecia z nich jest równa 0.

7. Czy w pola diagramu przedstawionego na rysunku obok można wpisać liczby całkowite od 11 do 29, każdą dokładnie raz, w taki sposób aby sumy liczb na wszystkich piętnastu odcinkach oznaczonych strzałkami były równe? Odpowiedź uzasadnij.



Rozwiązania powyższych zadań (wszystkich lub części z nich) należy przekazać szkolnemu koordynatorowi OMJ lub przesłać bezpośrednio, listem poleconym, do Komitetu Okręgowego OMJ właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

16 października 2023 r. (decyduje data stempla pocztowego).

Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym lub pod niewłaściwy adres nie będą rozpatrywane. Adresy Komitetów Okręgowych OMJ, szczegółowe wytyczne dotyczące sposobu redakcji rozwiązań i przesyłania prac, a także regulamin OMJ i inne bieżące informacje znajdują się na stronie internetowej Olimpiady: www.omj.edu.pl.

XIX Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody pierwszego stopnia (1 września – 16 października 2023 r.)

Rozwiązania zadań konkursowych

1. Wyznacz wszystkie takie liczby naturalne n , że liczba $\underbrace{11\dots1}_n \underbrace{99\dots9}_n$ jest pierwsza.

Rozwiązanie

Odpowiedź: Jedyną taką liczbą jest $n = 1$.

Zauważmy, że

$$\underbrace{11\dots1}_n \underbrace{99\dots9}_n = \underbrace{11\dots1}_n \underbrace{100\dots0}_n + \underbrace{99\dots9}_n = \underbrace{11\dots1}_n \cdot \underbrace{100\dots0}_n + \underbrace{11\dots1}_n \cdot 9 = \underbrace{11\dots1}_n \cdot \underbrace{100\dots09}_{n-1}.$$

Jeśli $n \geq 2$, to powyższa liczba jest iloczynem dwóch liczb całkowitych większych od 1, więc jest liczbą złożoną. Z kolei dla $n = 1$ otrzymujemy liczbę 19, która jest pierwsza.

2. Punkty X oraz Y leżą odpowiednio na bokach AC oraz BC trójkąta ABC . Punkt M jest środkiem odcinka XY . Załóżmy, że

$$AX = MX = MC = MY = BY.$$

Wyznacz miarę kąta AMB .

Rozwiązanie

Odpowiedź: Kąt AMB ma miarę 135° .

Przyjmijmy oznaczenia $\alpha = \angle MAX$, $\beta = \angle MBY$ (rys. 1). Ponieważ trójkąty AMX oraz BMY są równoramienne, więc również $\angle AMX = \alpha$ oraz $\angle BMY = \beta$. Ponadto

$$\angle MXC = 180^\circ - \angle AXM = \angle MAX + \angle AMX = 2\alpha,$$

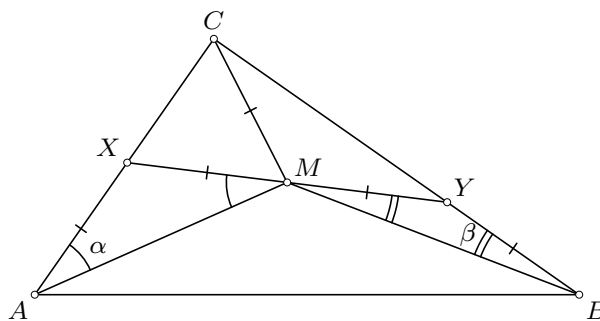
$$\angle MYC = 180^\circ - \angle MYB = \angle MBY + \angle BMY = 2\beta.$$

Trójkąty CMX i CMY są równoramienne, więc $\angle MCX = 2\alpha$, $\angle MCY = 2\beta$ i w konsekwencji $\angle CMX = 180^\circ - 4\alpha$ oraz $\angle CMY = 180^\circ - 4\beta$. Wobec tego

$$180^\circ = \angle CMX + \angle CMY = 360^\circ - 4\alpha - 4\beta, \quad \text{skąd} \quad \alpha + \beta = 45^\circ.$$

Ostatecznie uzyskujemy więc

$$\angle AMB = 180^\circ - \angle AMX - \angle BMY = 180^\circ - \alpha - \beta = 135^\circ.$$



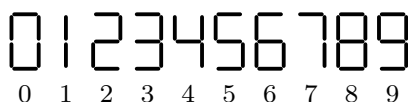
rys. 1

Uwaga

Z przeprowadzonych obliczeń wynika, że $\sphericalangle XCY = 2\alpha + 2\beta = 90^\circ$, czyli trójkąt ABC jest prostokątny. Przy okazji udowodniliśmy więc następujący fakt:

Jeżeli w trójkącie XYZ środkowa poprowadzona do boku XY ma długość równą połowie długości tego boku, to $\sphericalangle XZY = 90^\circ$.

3. Tomek ma do dyspozycji n jednakowych patyczków, z których układa liczby wielocyfrowe (rysunek przedstawia wygląd układanych przez Tomka cyfr). Tomek zauważył, że suma cyfr największej z możliwych do ułożenia przez niego liczb jest równa dokładnie n . Wyznacz wszystkie liczby n , dla których taka sytuacja jest możliwa.



Rozwiązanie

Odpowiedź: Jediną taką liczbą jest $n = 11$.

Ponieważ każda cyfra składa się z co najmniej dwóch patyczków, więc dowolna ułożona przez Tomka liczba ma nie więcej niż $\frac{n}{2}$ cyfr. Rozważymy osobno przypadki, gdy n jest liczbą parzystą i gdy n jest liczbą nieparzystą.

Jeżeli n jest liczbą parzystą, to jedyną liczbą $\frac{n}{2}$ -cyfrową, którą Tomek może ułożyć jest liczba złożona z samych jedynek — jest to więc największa z możliwych do ułożenia liczb. Suma cyfr tej liczby jest równa $\frac{n}{2}$. Warunek zadania przybiera więc postać $\frac{n}{2} = n$, co nie jest możliwe dla żadnej dodatniej liczby n . W tym przypadku nie ma zatem rozwiązań.

Jeżeli n jest liczbą nieparzystą, to $\frac{n}{2}$ nie jest liczbą całkowitą, więc układane liczby mają nie więcej niż $\frac{n-1}{2}$ cyfr. Ta liczba cyfr jest osiągalna jedynie gdy wszystkie cyfry są równe 1 poza jedną, równą 7 (jedyna cyfra złożona z trzech patyczków). Największa z możliwych do ułożenia liczb jest więc złożona z początkowej cyfry 7 i $\frac{n-3}{2}$ następujących po niej jedynek. Suma cyfr tej liczby jest równa

$$7 + \frac{n-3}{2} = \frac{n+11}{2}.$$

Warunek zadania przybiera więc postać $\frac{n+11}{2} = n$, czyli $n = 11$. Otrzymana liczba jest nieparzysta, więc stanowi rozwiązanie w tym przypadku.

4. Wyznacz wszystkie liczby pierwsze, które można przedstawić jako różnicę sześcianów dwóch liczb pierwszych.

Rozwiązanie

Odpowiedź: Jediną taką liczbą pierwszą jest $19 = 3^3 - 2^3$.

Załóżmy, że pewna liczba pierwsza p spełnia równość $p = q^3 - r^3$, gdzie q i r są liczbami pierwszymi oraz $q > r$. Rozkładając różnicę sześcianów na czynniki, uzyskujemy więc

$$p = (q-r)(q^2 + qr + r^2).$$

Zauważmy, że obydwa czynniki są dodatnimi liczbami całkowitymi oraz $q-r < q < q^2 + qr + r^2$. Skoro p jest liczbą pierwszą, to mniejszy czynnik jest równy 1, większy zaś jest równy p , czyli

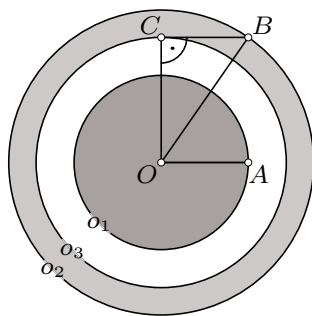
$$q-r=1 \quad \text{oraz} \quad q^2 + qr + r^2 = p.$$

Ponieważ liczby q i r różnią się o 1, więc jedna z nich jest parzysta, a druga — nieparzysta. Jedyną parzystą liczbą pierwszą jest 2, a jedyną liczbą pierwszą różniącą się od niej o 1 jest 3 — wobec tego $q = 3$ oraz $r = 2$. Bezpośrednio sprawdzamy, że uzyskana w tym przypadku liczba $q^3 - r^3 = 19$ jest pierwsza.

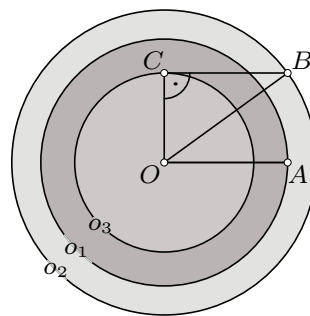
5. Dane są trzy okręgi o_1, o_2, o_3 o wspólnym środku O . Na tych okręgach leżą odpowiednio punkty A, B, C , przy czym czworokąt $ABCO$ jest prostokątem. Wykaż, że pole koła ograniczonego okręgiem o_1 jest równe polu pierścienia kołowego ograniczonego okręgami o_2 i o_3 .

Rozwiązanie

Pole koła ograniczonego okręgiem o_1 jest równe $\pi \cdot OA^2$. W trójkącie prostokątnym OBC przeciwprostokątna OB jest dłuższa niż przyprostokątna OC , czyli okrąg o_2 ma większy promień niż okrąg o_3 (rys. 2). W takim razie pole pierścienia kołowego ograniczonego okręgami o_2 i o_3 jest równe $\pi \cdot OB^2 - \pi \cdot OC^2$.



rys. 2



rys. 3

Teza zadania przybiera więc postać

$$\pi \cdot OA^2 = \pi \cdot OB^2 - \pi \cdot OC^2, \quad \text{czyli} \quad OA^2 + OC^2 = OB^2.$$

Ostatnia równość wynika wprost z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkąta prostokątnego OBC oraz z równości $OA = BC$.

Uwaga

Z warunków zadania nie wynika nierówność pomiędzy długościami promieni okręgów o_1 oraz o_3 . Oprócz konfiguracji okręgów przedstawionej na rysunku 2 jest więc także konfiguracja przedstawiona na rysunku 3. Przedstawione rozwiązanie jest poprawne w obydwu przypadkach.

6. Dane są liczby rzeczywiste a, b, c . Udowodnij, że jeżeli pewne dwie z liczb

$$ab + b + 1, \quad bc + c + 1, \quad ca + a + 1$$

są równe 0, to także trzecia z nich jest równa 0.

Rozwiązanie

Założmy, że $ab + b + 1 = 0$ oraz $bc + c + 1 = 0$. Udowodnimy, że $ca + a + 1 = 0$. Rozumowanie w dwóch pozostałych przypadkach jest w pełni analogiczne.

Sposób I

Wyznaczając liczbę b w zależności od a z pierwszego równania, otrzymujemy

$$b(a + 1) = -1, \quad \text{czyli} \quad b = -\frac{1}{a + 1}.$$

Analogicznie z drugiego równania otrzymujemy $c = -\frac{1}{b+1}$. Wykorzystując otrzymaną wcześniej równość, uzyskujemy

$$c = -\frac{1}{-\frac{1}{a+1} + 1} = -\frac{a+1}{-1 + (a+1)} = -\frac{a+1}{a}.$$

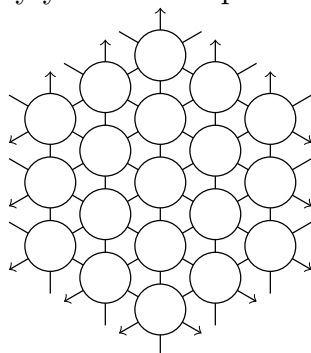
Po przekształceniu, otrzymujemy $ca = -(a+1)$, czyli $ca + a + 1 = 0$.

Sposób II

Zauważmy, że

$$ca + a + 1 = ca + a + 1 + c(ab + b + 1) = abc + ca + a + bc + c + 1 = a(bc + c + 1) + bc + c + 1 = 0.$$

7. Czy w pola diagramu przedstawionego na rysunku obok można wpisać liczby całkowite od 11 do 29, każdą dokładnie raz, w taki sposób aby sumy liczb na wszystkich piętnastu odcinkach oznaczonych strzałkami były równe? Odpowiedź uzasadnij.



Rozwiązanie

Odpowiedź: Takie wpisanie liczb **nie** jest możliwe.

Przypuśćmy, że wypełnienie pól diagramu zgodnie z warunkami zadania jest możliwe. Wówczas suma wszystkich pól wpisanych w pola diagramu jest równa

$$11 + 12 + 13 + \dots + 29 = 380.$$

To oznacza, że suma liczb wpisanych w pola leżące na pojedynczym pionowym odcinku oznaczonym strzałką jest równa $\frac{1}{5} \cdot 380 = 76$ i w konsekwencji — suma liczb na każdym odcinku oznaczonym strzałką jest równa 76.

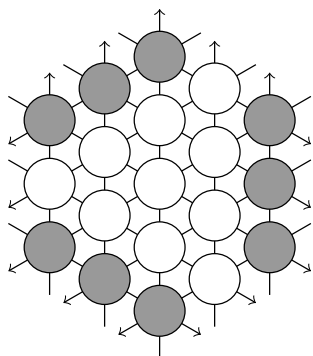
Rozwiązanie dokończymy dwoma sposobami.

Sposób I

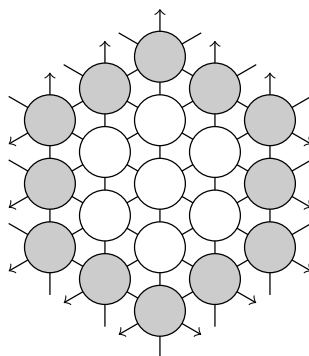
Rozważmy dziewięć pól przedstawionych na rysunku 4. Z jednej strony, są to wszystkie pola położone na pewnych trzech odcinkach, więc suma wpisanych w nie liczb jest równa $3 \cdot 76 = 228$. Z drugiej strony, suma dziewięciu liczb wpisanych w pola diagramu nie może być większa niż suma dziewięciu największych dostępnych liczb, czyli

$$21 + 22 + 23 + \dots + 29 = 225.$$

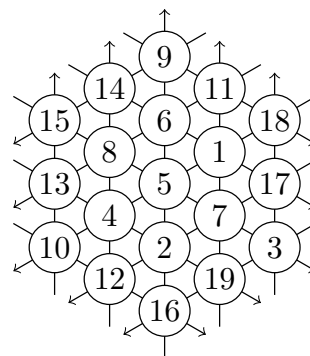
Otrzymaliśmy sprzeczność, która oznacza, że wpisanie liczb zgodnie z warunkami zadania jest niemożliwe.



rys. 4



rys. 5



rys. 6

Sposób II

Zauważmy, że jeśli strzałka zawiera trzy liczby, to każda z nich jest równa co najmniej 19. Rzeczywiście, gdyby na takiej strzałce pewna liczba była równa co najwyżej 18, to suma wszystkich trzech byłaby nie większa od $18 + 28 + 29 = 75$.

Z powyższej obserwacji wynika, że każda z dwunastu liczb znajdujących się na „obwodzie” diagramu (rys. 5) jest większa od 18. Jednak jest tylko jedenaście liczb pomiędzy 19 a 29. Otrzymana sprzeczność oznacza, że wpisanie liczb zgodnie z warunkami zadania nie jest możliwe.

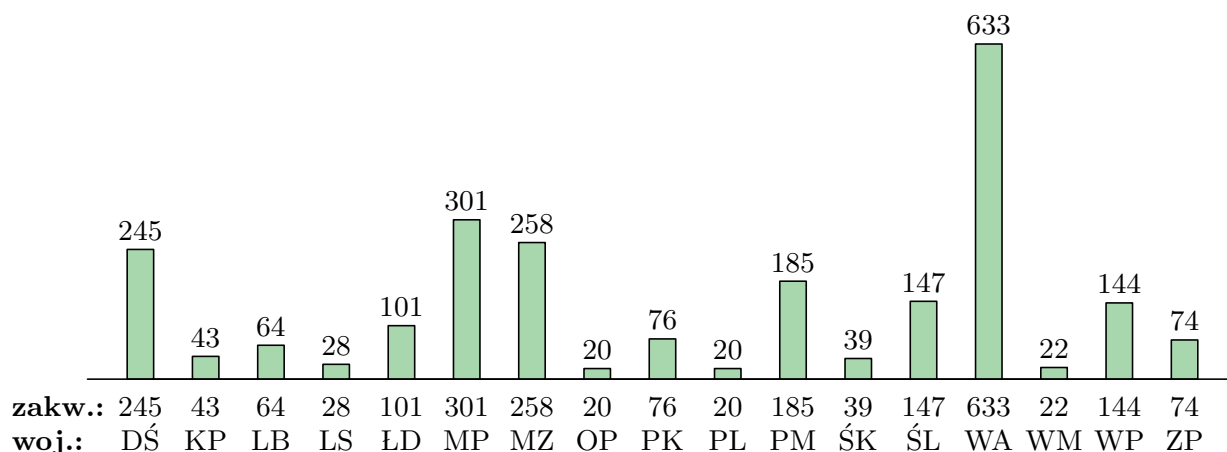
Uwaga

Można udowodnić, że jedynym ciągiem dziewiętnastu kolejnych liczb naturalnych, które można wpisać w pola diagramu zgodnie z poleceniem są liczby od 1 do 19. Odpowiednio wypełniony diagram jest przedstawiony na rysunku 6 i przedstawia jedyny możliwy (z dokładnością do obrotów i odbić symetrycznych) sposób wpisania liczb.

XIX Olimpiada Matematyczna Juniorów

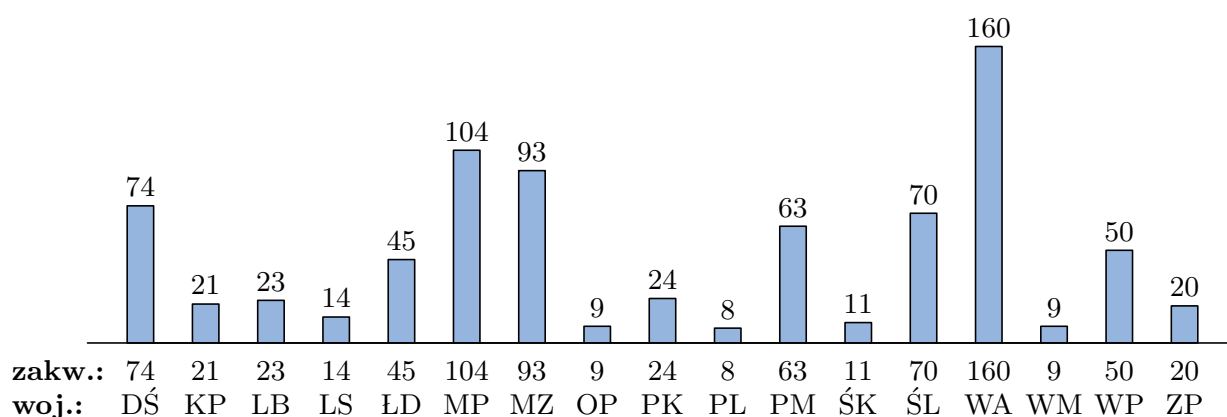
Statystyki dotyczące części korespondencyjnej
zawodów pierwszego stopnia (2023/24)

Tabela 1. Liczba uczniów, którzy wzięli udział w zawodach w podziale na województwa i inne regiony.



Łączna liczba uczniów, którzy wzięli udział w zawodach: 2400

Tabela 2. Liczba szkół uczniów, którzy wzięli udział w zawodach w podziale na województwa i inne regiony.



Łączna liczba szkół uczniów, którzy wzięli udział w zawodach: 798

Skróty województw i innych regionów

DŚ — dolnośląskie

LB — lubelskie

ŁD — łódzkie

MZ — mazowieckie bez m.st. Warszawy

PK — podkarpackie

PM — pomorskie

ŚL — śląskie

WM — warmińsko-mazurskie

ZP — zachodniopomorskie

KP — kujawsko-pomorskie

LS — lubuskie

MP — małopolskie

OP — opolskie

PL — podlaskie

ŚK — świętokrzyskie

WA — m.st. Warszawa

WP — wielkopolskie

Tabela 3. Procentowa i rzeczywista liczba osób, które uzyskały daną sumę punktów.

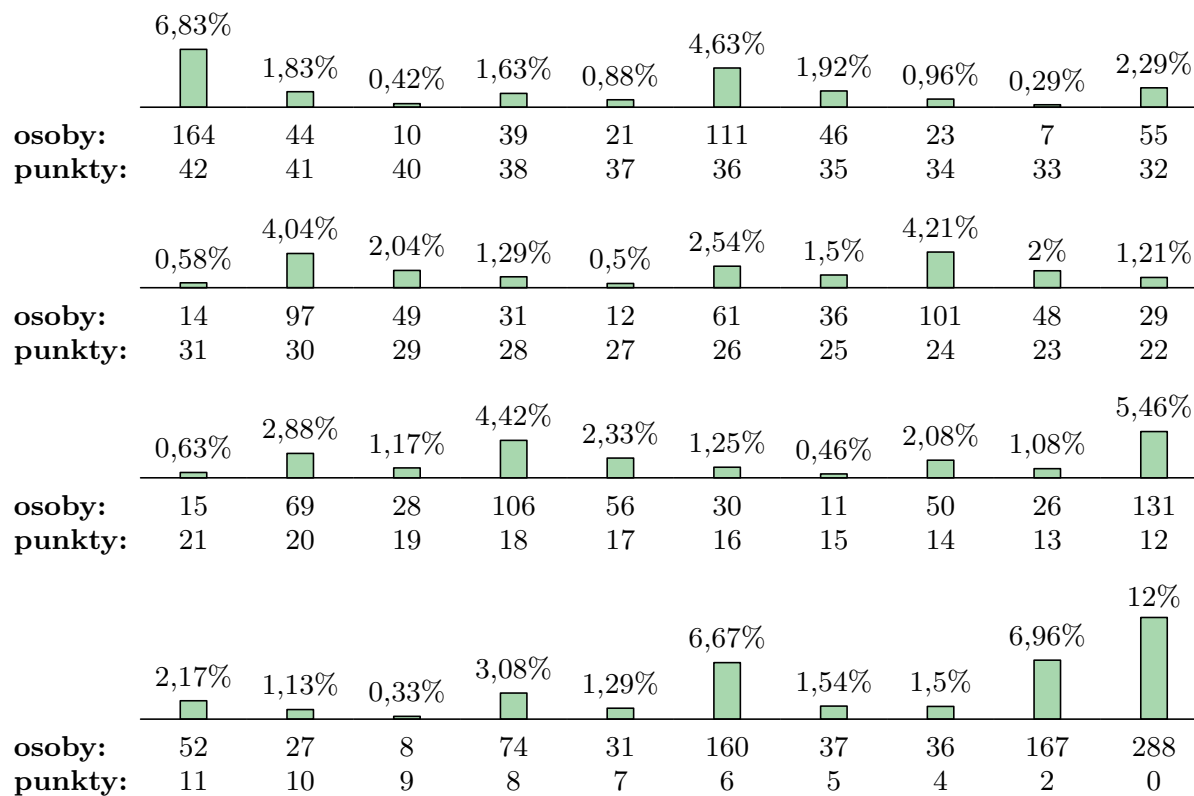


Tabela 4. Procentowa i rzeczywista liczba osób, które uzyskały daną lub większą sumę punktów.

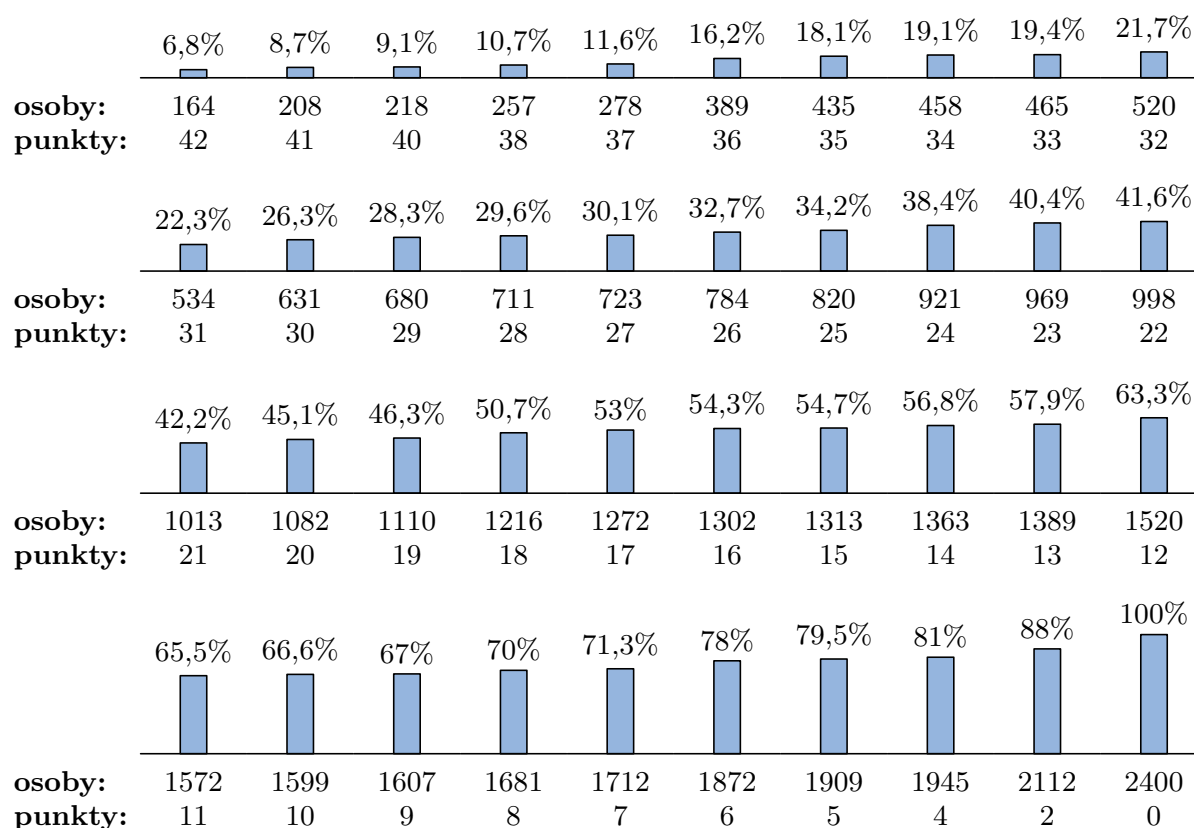


Tabela 5. Procentowa liczba osób, które uzyskały daną liczbę punktów za poszczególne zadania.

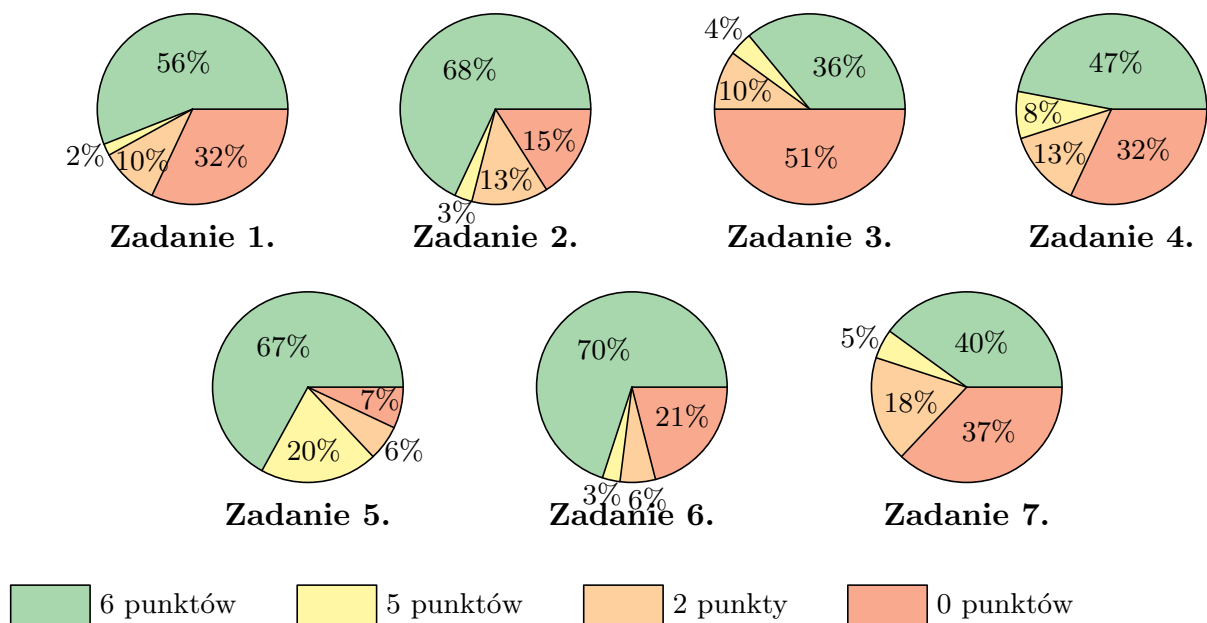


Tabela 6. Średnia uzyskanych punktów za poszczególne zadania.

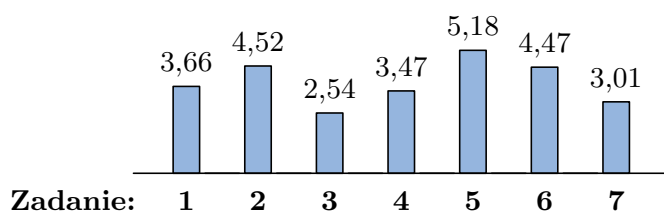


Tabela 7. Liczba nadesłanych prac dotyczących poszczególnych zadań.

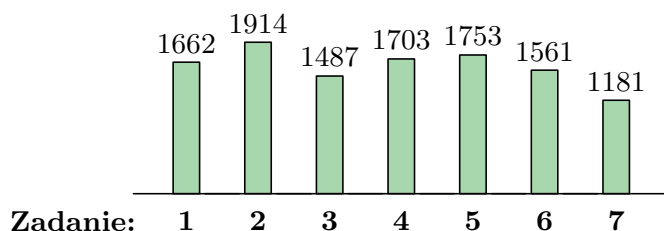
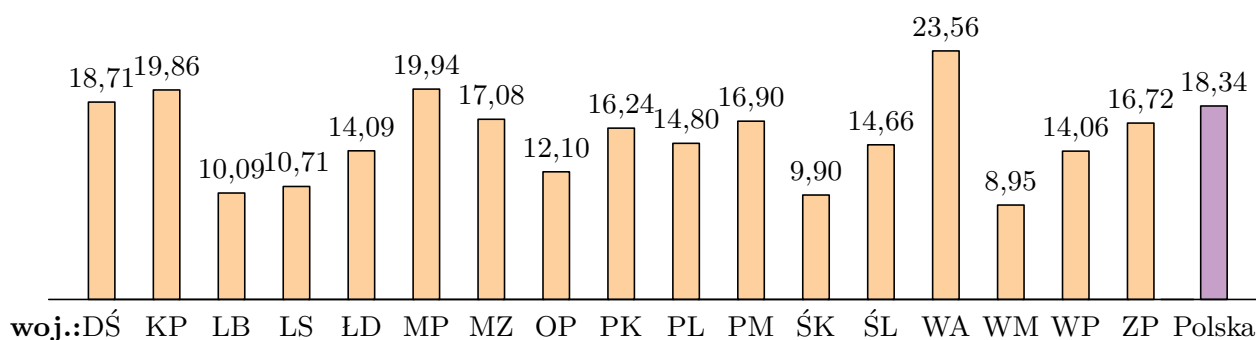


Tabela 8. Średnia sumy punktów w podziale na województwa i inne regiony.



XIX Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody drugiego stopnia
(13 stycznia 2024 r.)



1. Liczby całkowite a , b oraz c są takie, że iloczyny

$$a \cdot (b + c) \quad \text{oraz} \quad b \cdot (a + c)$$

są dwiema kolejnymi liczbami całkowitymi. Wykaż, że co najmniej jeden z tych iloczynów jest kwadratem liczby całkowitej.

2. Kwadrat 6×6 rozcięto na osiem prostokątów, z których każdy ma cztery boki o całkowitych długościach. Wykaż, że pewne dwa z tych ośmiu prostokątów mają równe pola.

3. Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD . Punkt P leży na odcinku AC , przy czym

$$\sphericalangle BPC = \sphericalangle BAD = \sphericalangle ABC = \sphericalangle ACB.$$

Wykaż, że $AP = CD$.

4. Punkty K , L , M , N leżą odpowiednio na bokach AB , BC , CD , DA kwadratu $ABCD$. Odcinki KL , MN , LN dzielą ten kwadrat na cztery figury o równych polach. Udowodnij, że odcinki KL , MN , KM również dzielą ten kwadrat na cztery figury o równych polach.

5. Na tablicy znajduje się osiemset dodatnich liczb całkowitych mniejszych od 21. Czterysta z tych liczb zapisano niebieską kredą, a czterysta — żółtą. Wykaż, że można zmazać pewne liczby z tablicy (co najmniej jedną, ale nie wszystkie) w taki sposób, aby suma pozostałych na tablicy niebieskich liczb była równa sumie pozostałych na tablicy żółtych liczb.

Uwaga. Liczby na tablicy mogą się powtarzać.

XIX Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody drugiego stopnia (13 stycznia 2024 r.)

Rozwiązania zadań konkursowych

1. Liczby całkowite a , b oraz c są takie, że iloczyny

$$a \cdot (b+c) \quad \text{oraz} \quad b \cdot (a+c)$$

są dwiema kolejnymi liczbami całkowitymi. Wykaż, że co najmniej jeden z tych iloczynów jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie

Sposób I

Założmy, że liczba $a \cdot (b+c)$ jest większa od liczby $b \cdot (a+c)$ — w myśl warunków zadania jest więc większa dokładnie o 1. Stąd wynika, że

$$1 = a \cdot (b+c) - b \cdot (a+c) = ab + ac - (ab + bc) = ac - bc = c(a-b).$$

Liczby c oraz $a-b$ są całkowite, a ich iloczyn jest równy 1 — oznacza to, że obie są równe 1 lub obie są równe -1 . W obu przypadkach otrzymujemy $a-b=c$, czyli $a=b+c$, a zatem $a \cdot (b+c) = a^2$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozumowanie w przypadku, gdy liczba $b \cdot (a+c)$ jest większa od liczby $a \cdot (b+c)$ jest w pełni analogiczne — wówczas otrzymujemy $b \cdot (a+c) = b^2$.

Sposób II

Po wymnożeniu nawiasów dane wyrażenia przybierają postać $ab+ac$ oraz $ab+bc$. Są one zatem kolejnymi liczbami całkowitymi dokładnie wtedy, gdy iloczyny ac oraz bc są kolejnymi liczbami całkowitymi, czyli gdy

$$1 = |ac - bc| = |(a-b)c| = |a-b| \cdot |c|.$$

Stąd otrzymujemy $|a-b|=|c|$ (obie strony tej równości są równe 1). Wynika z tego, że liczby $a-b$ oraz c są równe lub przeciwne. Jeżeli $a-b=c$, to $a(b+c)=a^2$, a jeżeli $a-b=-c$, to $b(a+c)=b^2$.

2. Kwadrat 6×6 rozcięto na osiem prostokątów, z których każdy ma cztery boki o całkowitych długościach. Wykaż, że pewne dwa z tych ośmiu prostokątów mają równe pola.

Rozwiązanie

Rozważmy dowolny podział kwadratu 6×6 na osiem prostokątów o obydwu wymiarach będących liczbami całkowitymi. Boki każdego z uzyskanych prostokątów są równoległe do boków wyjściowego kwadratu i w nim zawarte, wobec czego ich długości są nie większe od 6. Ponadto skoro każdy prostokąt uzyskany w podziale ma boki całkowitej długości, to pole tego prostokąta również wyraża się liczbą całkowitą.

Przypuśćmy, że pola ośmiu uzyskanych prostokątów są parami różne, tzn. żadne dwa prostokąty nie mają równych pól. Oznaczmy pola tych prostokątów przez $P_1, P_2, \dots, P_8$ w taki sposób, że $P_1 < P_2 < \dots < P_8$. Skoro są to liczby całkowite, to $P_1 \geq 1$, $P_2 \geq 2$, ..., $P_8 \geq 8$. Ponadto suma tych ośmiu pól jest równa polu całego kwadratu 6×6 , czyli 36. Zatem

$$36 = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 + P_7 + P_8 \geq 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36.$$

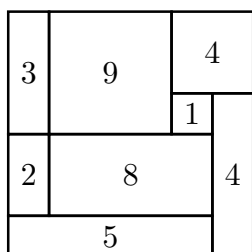
Skoro w otrzymanej nierówności w istocie zachodzi równość, to także wszystkie nierówności $P_1 \geq 1$, $P_2 \geq 2$, ..., $P_8 \geq 8$ stają się równościami. Mamy więc w szczególności $P_7 = 7$.

Ponieważ 7 jest liczbą pierwszą, więc jedynym możliwym rozmiarem prostokąta o czterech bokach całkowitych i polu 7 jest 1×7 . Jednak takiego prostokąta, jak zauważyliśmy na początku rozwiązania, nie można uzyskać w podziale wyjściowego kwadratu, gdyż $7 > 6$. Uzyskana sprzeczność oznacza, że nie jest możliwy podział, w którym każde dwa z ośmiu prostokątów mają różne pola. Zatem pewne pole się powtarza, co należało wykazać.

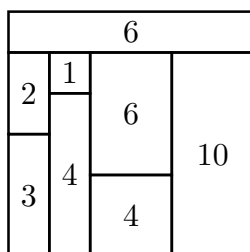
Uwagi

Z pomocą komputera można sprawdzić, że liczba różnych podziałów kwadratu 6×6 na prostokąty o bokach całkowitej długości jest równa dokładnie 2 632 310.

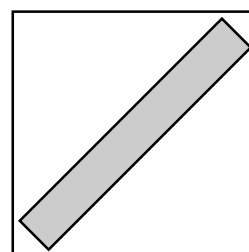
Kwadrat 6×6 można rozciąć na osiem prostokątów o całkowitej długości, z których żadne dwa nie są przystające. Przykładowe rozcięcia o tej własności przedstawione są poniżej (rys. 1 oraz rys. 2; wewnątrz każdego prostokąta widnieje jego pole).



rys. 1



rys. 2



rys. 3

Prostokąt o wymiarach 1×7 można umieścić w kwadracie 6×6 (np. tak, jak na rysunku 3), ale wyłącznie „po skosie”. Taki prostokąt nie jest jednak częścią żadnego podziału na osiem prostokątów o wymiarach całkowitych.

3. Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD . Punkt P leży na odcinku AC , przy czym

$$\sphericalangle BPC = \sphericalangle BAD = \sphericalangle ABC = \sphericalangle ACB.$$

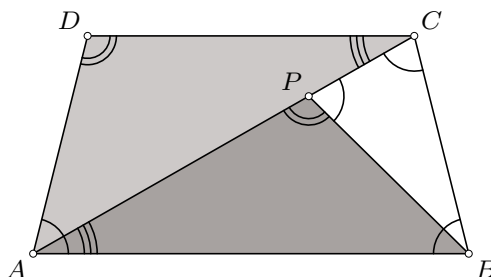
Wykaż, że $AP = CD$.

Rozwiązanie

Sposób I

Skoro $ABCD$ jest trapezem, to $\sphericalangle BAP = \sphericalangle BAC = \sphericalangle ACD$ (rys. 4). Ponadto z warunków zadania wynika, że

$$\sphericalangle APB = 180^\circ - \sphericalangle BPC = 180^\circ - \sphericalangle BAD = \sphericalangle ADC.$$



rys. 4

Wreszcie skoro $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ACB$, to $AB = AC$. W takim razie uzyskane równości

$$\sphericalangle BAP = \sphericalangle ACD, \quad \sphericalangle APB = \sphericalangle ADC \quad \text{oraz} \quad AB = AC$$

pozwalają wnioskować, że trójkąty ABP oraz CAD są przystające (cecha kąt–bok–kąt) i w konsekwencji $AP = CD$.

Sposób II

Podobnie jak w poprzednim sposobie zauważamy, że z warunku $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ACB$ wynika, że $AB = AC$.

Skoro $\sphericalangle BPC = \sphericalangle PCB$, to $BP = BC$. Ponadto skoro $\sphericalangle BAD = \sphericalangle ABC$, to trapez $ABCD$ jest równoramienny i w konsekwencji $BC = AD$. To oznacza, że $BP = AD$ (rys. 5).

Wreszcie odnotujemy, że

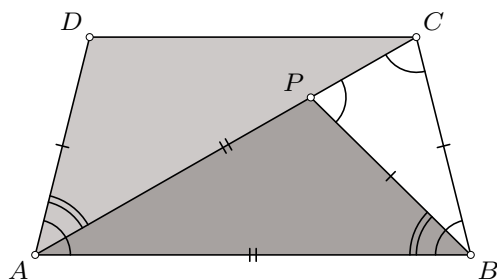
$$\sphericalangle ABP + \sphericalangle BAP = 180^\circ - \sphericalangle APB = \sphericalangle BPC = \sphericalangle BAD = \sphericalangle CAD + \sphericalangle BAP,$$

skąd wniosek, że $\sphericalangle ABP = \sphericalangle CAD$.

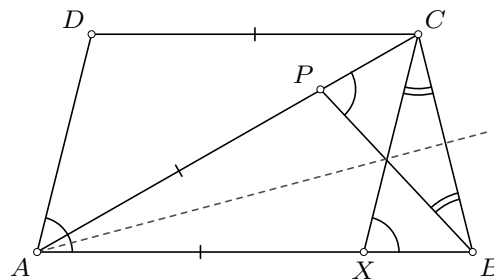
Z uzyskanych równości

$$AB = AC, \quad BP = AD \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle ABP = \sphericalangle CAD$$

wynika, że trójkąty ABP oraz CAD są przystające (cecha bok–kąt–bok). Zatem $AP = CD$.



rys. 5



rys. 6

Sposób III

Skoro $\sphericalangle ABC$ i $\sphericalangle ACB$ są równymi kątami w trójkącie ABC , to są to kąty ostre, skąd $\sphericalangle BAD = \sphericalangle ABC < 90^\circ$. W takim razie $AB > CD$.

Oznaczmy przez X taki punkt leżący na odcinku AB , że $AX = CD$ (rys. 6). Skoro odcinki AX i CD są równe i równoległe, to czworokąt $AXCD$ jest równoległobokiem. W szczególności $\sphericalangle BXC = \sphericalangle BAD$.

Zauważmy, że punkty P oraz X są zbudowane na ramionach trójkąta równoramiennego ABC w symetryczny sposób, gdyż

$$\sphericalangle XCB = 180^\circ - 2 \cdot \sphericalangle ABC = 180^\circ - 2 \cdot \sphericalangle BCA = \sphericalangle PBC.$$

Wobec tego X oraz P są punktami symetrycznymi względem osi symetrii trójkąta ABC połowiącej odcinek BC , skąd $AX = AP$. W połączeniu z równością $AX = CD$ uzyskujemy tezę zadania.

4. Punkty K, L, M, N leżą odpowiednio na bokach AB, BC, CD, DA kwadratu $ABCD$. Odcinki KL, MN, LN dzielą ten kwadrat na cztery figury o równych polach. Udowodnij, że odcinki KL, MN, KM również dzielą ten kwadrat na cztery figury o równych polach.

Rozwiązanie

Przez $[\mathcal{F}]$ oznaczamy pole figury $\mathcal{F}$.

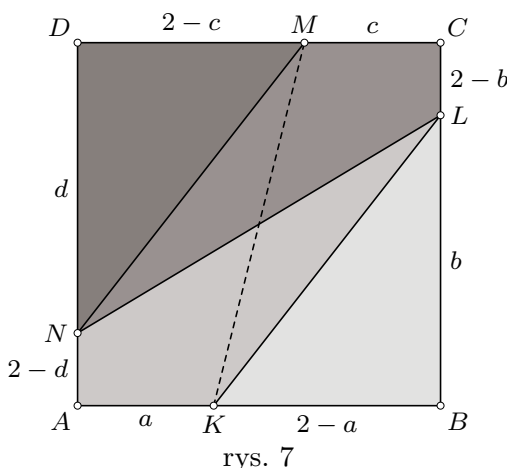
Zauważmy, że części podziału DMN oraz BKL są wspólne dla podziału kwadratu odcinkami KL, MN, LN oraz dla podziału kwadratu odcinkami KL, MN, KM . Skoro

$$[DMN] = [BKL] = \frac{1}{4}[ABCD],$$

to zadanie będzie rozwiązane, jeśli wykażemy, że odcinek KM dzieli kwadrat $ABCD$ na dwie figury o równych polach — wynika stąd, że również $[ANMK] = [CMKL] = \frac{1}{4}[ABCD]$.

Sposób I

Bez szkody dla ogólności rozumowania możemy założyć, że bok kwadratu $ABCD$ ma długość 2. Przyjmijmy oznaczenia $AK = a, BL = b, CM = c, DN = d$. Wówczas $BK = 2 - a, CL = 2 - b, DM = 2 - c, AN = 2 - d$ (rys. 7).



rys. 7

Z warunków zadania oraz wzoru na pole trapezu wynika, że

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot (AN + BL) \cdot AB &= [ABLN] = [AKLN] + [BKL] = 2 \cdot \frac{1}{4}[ABCD] = \\ &= [CMNL] + [DMN] = [CDNL] = \frac{1}{2} \cdot (CL + DN) \cdot CD, \end{aligned}$$

czyli $(2-d) + b = AN + BL = CL + DN = (2-b) + d$. Stąd mamy $2b = 2d$ i w konsekwencji $b = d$. Ponadto

$$\frac{1}{2} \cdot DM \cdot DN = [DMN] = \frac{1}{4}[ABCD] = [BKL] = \frac{1}{2} \cdot BK \cdot BL,$$

skąd $(2-c)d = (2-a)b$. Skoro $b = d$, to z ostatniej równości otrzymujemy $2-c = 2-a$ i w konsekwencji $a = c$. Pozostaje zauważyć, że w takim razie

$$[AKMD] = \frac{1}{2} \cdot (AK + DM) \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot (a + 2 - c) \cdot 2 = a + 2 - c = 2 = \frac{1}{2}[ABCD],$$

czyli istotnie odcinek KM dzieli kwadrat $ABCD$ na dwie figury o równych polach.

Uwaga

Każde rozmieszczenie punktów K, L, M, N spełniające założenia zadania odpowiada czwórce $(a, b, c, d) = (a, \frac{2}{2-a}, a, \frac{2}{2-a})$ dla pewnej liczby a spełniającej nierówności $0 \leq a \leq 1$.

Sposób II

W rozwiązaniu wykorzystamy następujący fakt:

Jeżeli pewna figura wypukła $\mathcal{F}$ ma środek symetrii S , to każda prosta dzieląca $\mathcal{F}$ na dwie figury o równych polach przechodzi przez S .

Aby uzasadnić tę obserwację wystarczy zauważyć, że proste przechodzące przez S w istocie połowią pole figury $\mathcal{F}$, bo dzielą ją na dwie figury przystające, a ponadto w każdym kierunku jest dokładnie jedna prosta połowiąca pole $\mathcal{F}$, tzn. jeżeli proste k i ℓ są równoległe i obie dzielą $\mathcal{F}$ na dwie figury o równych polach, to $k = \ell$.

Przechodzimy do rozwiązania. Oznaczmy przez S środek symetrii kwadratu $ABCD$.

Z treści zadania wynika, że prosta LN dzieli kwadrat $ABCD$ na dwie figury o równych polach, więc punkt S leży na tej prostej, a punkty L i N są względem niego symetryczne. Wobec tego $BL = DN$.

Ponieważ trójkąty BKL oraz DMN są prostokątne i mają równe pola, więc

$$\frac{1}{2} \cdot BK \cdot BL = \frac{1}{2} \cdot DM \cdot DN.$$

W świetle równości $BL = DN$ mamy więc $BK = DM$. To zaś oznacza, że punkty K i M są symetryczne względem S , czyli prosta KM dzieli kwadrat na dwie figury o równych polach.

Uwaga

Teza zadania pozostaje spełniona, jeżeli założenie, że czworokąt $ABCD$ jest kwadratem osłabimy do założenia, że czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem. Rozwiązanie tak zmodyfikowanego zadania może przebiegać podobnie jak drugi z omówionych wyżej sposobów — należy tylko użyć innego argumentu do uzasadnienia równości $BK = DM$ (np. uzasadnić przystawanie trójkątów BKL oraz DMN na podstawie równości $[BKL] = [DMN]$, $BL = DN$, $\sphericalangle KBL = \sphericalangle MDN$, czyli swoistej cechy przystawania „bok–kąt–pole”).

5. Na tablicy znajduje się osiemset dodatnich liczb całkowitych mniejszych od 21. Czteryście z tych liczb zapisano niebieską kredą, a czterysta — żółtą. Wykaż, że można zmasować pewne liczby z tablicy (co najmniej jedną, ale nie wszystkie) w taki sposób, aby suma pozostałych na tablicy niebieskich liczb była równa sumie pozostałych na tablicy żółtych liczb.

Uwaga. Liczby na tablicy mogą się powtarzać.

Rozwiązanie

Skoro każda liczba napisana na tablicy jest jedną z dwudziestu kolejnych liczb: $1, 2, \dots, 20$, to istnieje liczba a , która została napisana na niebiesko co najmniej 20 razy. Rzeczywiście, gdyby każda z liczb od 1 do 20 wystąpiła wśród liczb niebieskich mniej niż 20 razy, to łącznie na tablicy byłoby mniej niż $20 \cdot 20 = 400$ niebieskich liczb — sprzeczność. Podobnie uzasadniamy, że istnieje liczba b , która została napisana na żółto co najmniej 20 razy.

Jeżeli z tablicy zmasujemy wszystkie liczby oprócz b niebieskich wystąpień liczby a oraz oprócz a żółtych wystąpień liczby b , to uzyskamy sytuację o pożądanym w tezie zadania własności. Suma pozostawionych liczb niebieskich będzie równa sumie pozostawionych liczb żółtych — obie będą równe $a \cdot b$.

Uwaga

Do poprawności przedstawionego powyżej rozumowania wystarczy, jeśli liczb w obydwu kolorach jest po $381 = 19 \cdot 20 + 1$ zamiast po 400.

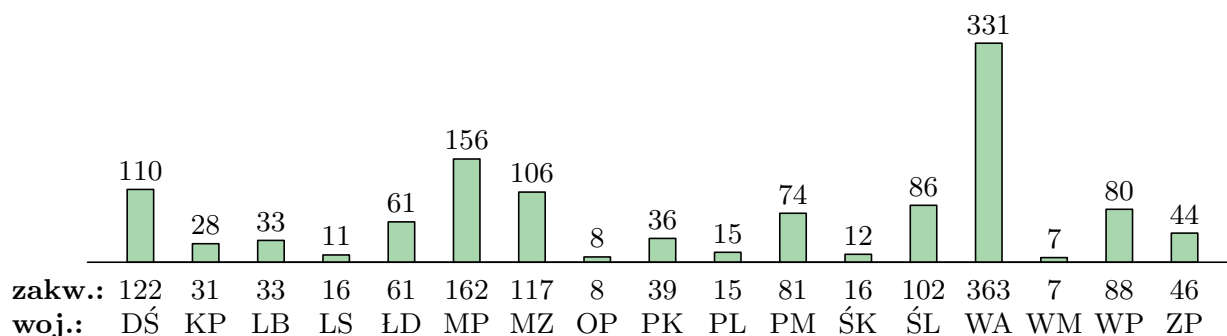
Okazuje się, że założenia zadania można znacznie bardziej osłabić. Teza zadania pozostaje prawdziwa nawet wówczas, gdy początkowo na tablicy znajduje się *po dwadzieścia* liczb każdego koloru.

XIX Olimpiada Matematyczna Juniorów

Statystyki dotyczące zawodów drugiego stopnia (2023/24)

(13 stycznia 2024 r.)

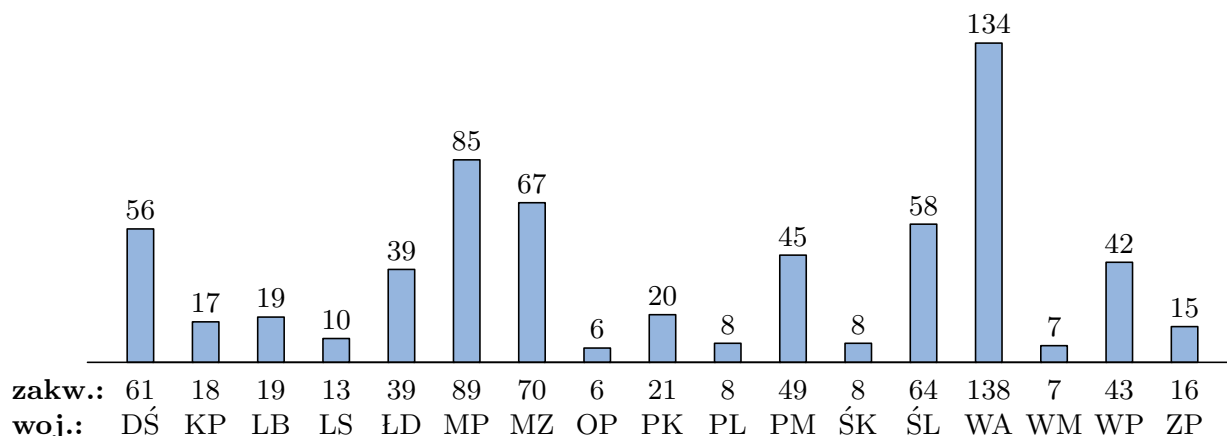
Tabela 1. Liczba uczniów, którzy wzięli udział w zawodach oraz zakwalifikowanych do zawodów w podziale na województwa i inne regiony.



Łączna liczba uczniów, którzy wzięli udział w zawodach: 1198

Łączna liczba uczniów zakwalifikowanych do zawodów: 1307

Tabela 2. Liczba szkół uczniów, którzy wzięli udział w zawodach oraz zakwalifikowanych do zawodów w podziale na województwa i inne regiony.



Łączna liczba szkół uczniów, którzy wzięli udział w zawodach: 636

Łączna liczba szkół uczniów zakwalifikowanych do zawodów: 669

Skróty województw i innych regionów

DŚ — dolnośląskie

LB — lubelskie

ŁD — łódzkie

MZ — mazowieckie bez m.st. Warszawy

PK — podkarpackie

PM — pomorskie

ŚL — śląskie

WM — warmińsko-mazurskie

ZP — zachodniopomorskie

KP — kujawsko-pomorskie

LS — lubuskie

MP — małopolskie

OP — opolskie

PL — podlaskie

ŚK — świętokrzyskie

WA — m.st. Warszawa

WP — wielkopolskie

Tabela 3. Procentowa i rzeczywista liczba osób, które uzyskały daną sumę punktów.

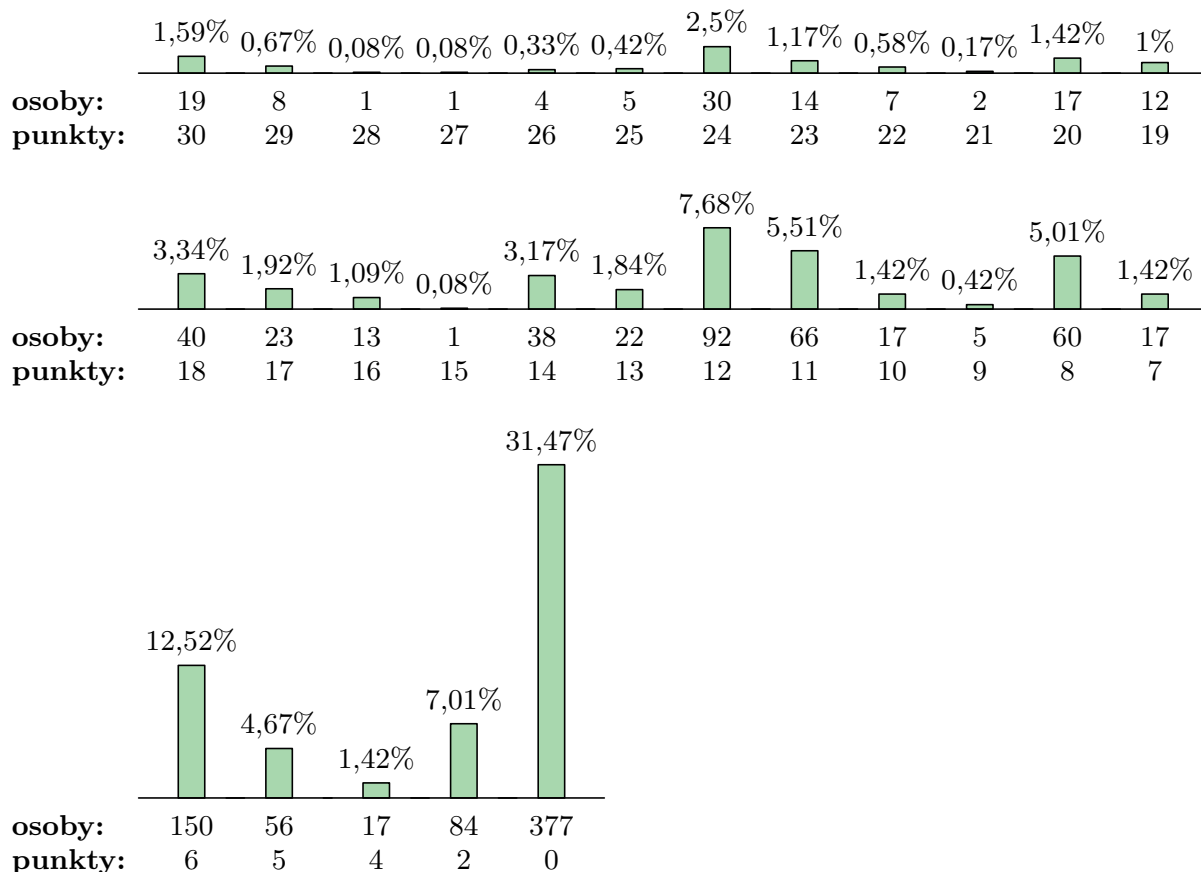


Tabela 4. Procentowa i rzeczywista liczba osób, które uzyskały daną lub większą sumę punktów.

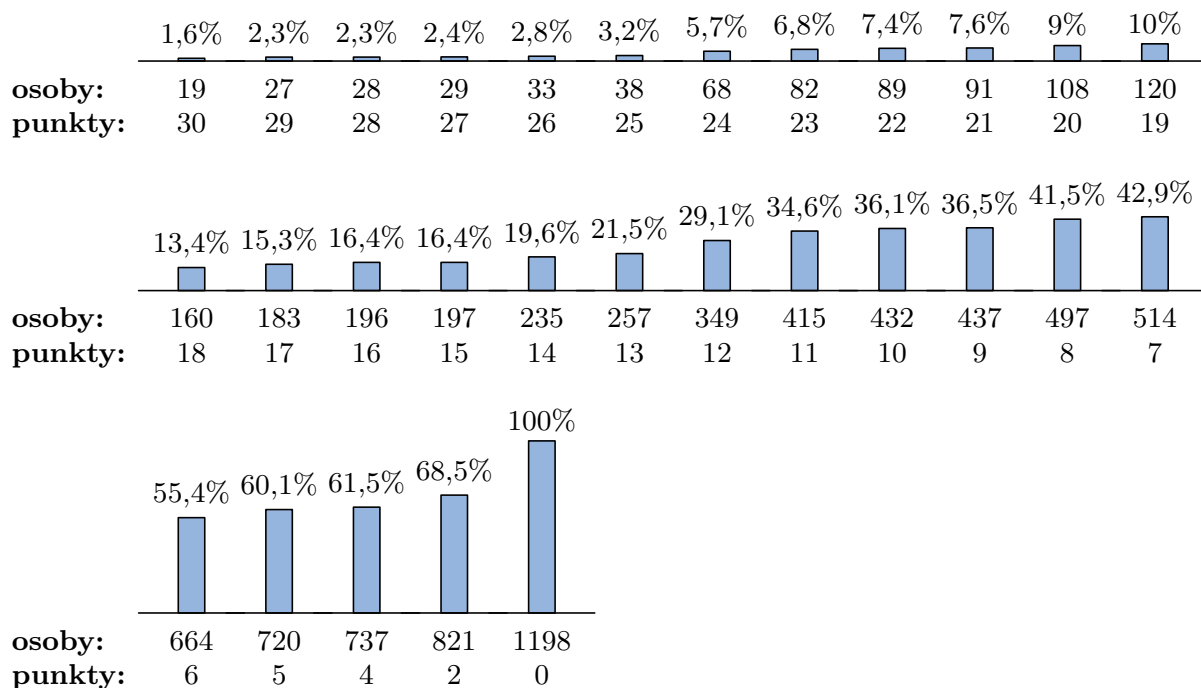


Tabela 5. Procentowa liczba osób, które uzyskały daną liczbę punktów za poszczególne zadania.

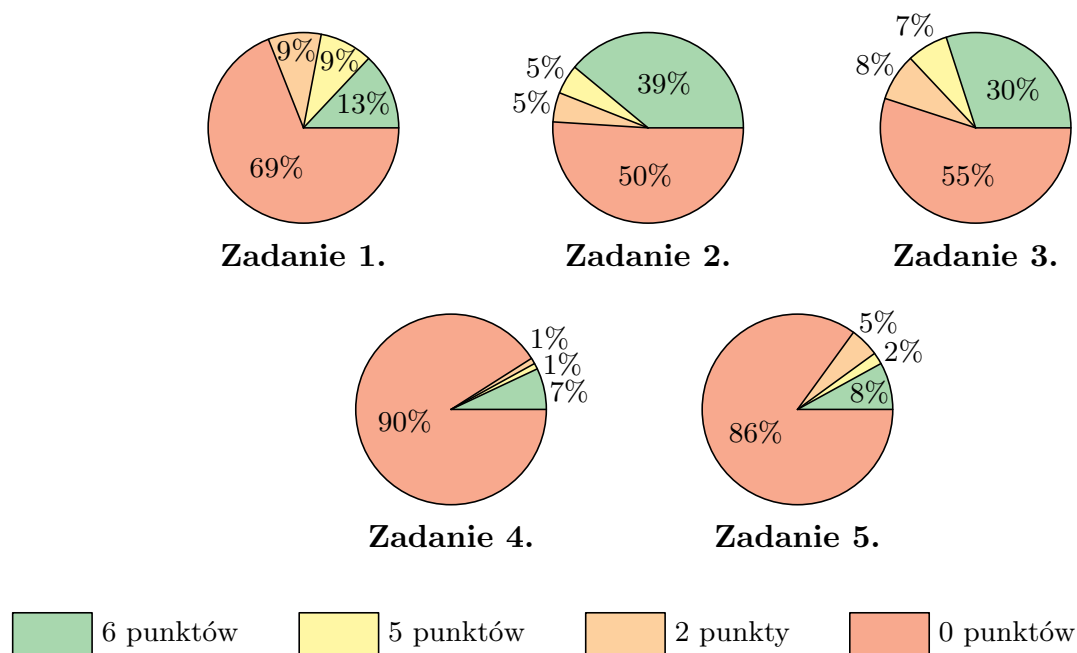


Tabela 6. Średnia uzyskanych punktów za poszczególne zadania.

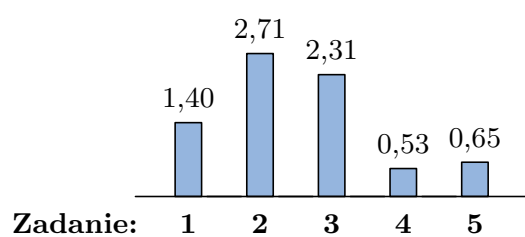
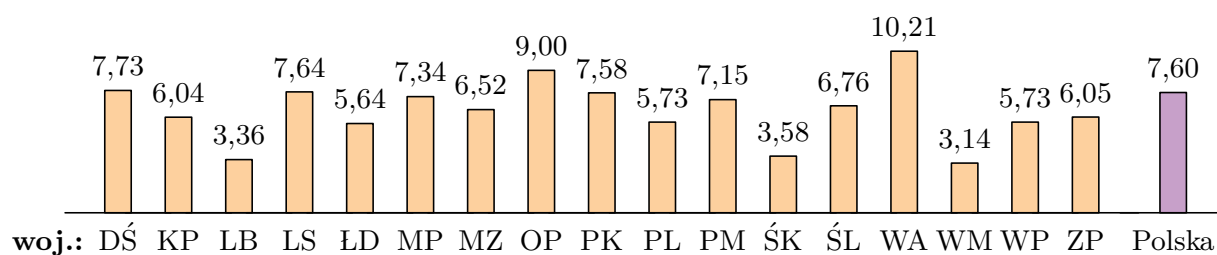
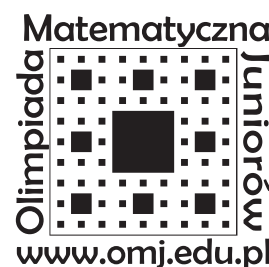


Tabela 7. Średnia sumy punktów w podziale na województwa i inne regiony.



XIX Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody trzeciego stopnia
(16 marca 2024 r.)



1. Rozstrzygnij, czy istnieje taki czworokąt wypukły $ABCD$, we wnętrzu którego można wskazać punkt P spełniający warunki

$$AB = AP, \quad BC = BP, \quad CD = CP, \quad DA = DP.$$

Uwaga: Wielokąt nazywamy *wypukłym*, jeśli wszystkie jego kąty wewnętrzne mają miarę mniejszą od 180° .

2. Wyznacz najmniejszą liczbę całkowitą $n \geq 1$ o tej własności, że kwadrat o wymiarach $n \times n$ można rozciąć na kwadratowe części o wymiarach 1×1 lub 2×2 w taki sposób, aby uzyskać po tyle samo części każdego z tych dwóch rodzajów.

3. Liczby rzeczywiste a, b, c spełniają warunki $a+b \neq 0$, $b+c \neq 0$ oraz $c+a \neq 0$. Wykaż, że

$$\left(\frac{a^2c}{a+b} + \frac{b^2a}{b+c} + \frac{c^2b}{c+a} \right) \cdot \left(\frac{b^2c}{a+b} + \frac{c^2a}{b+c} + \frac{a^2b}{c+a} \right) \geq 0.$$

4. Dany jest trójkąt równoramienny ABC , w którym $AC = BC$. Punkty P, Q, R leżą odpowiednio na bokach AB, BC, CA tego trójkąta, przy czym czworokąt $CQPR$ jest równoległobokiem. Wykaż, że punkt symetryczny do punktu P względem prostej QR leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC .

5. Niech $S = \underbrace{111 \dots 1}_{19} \underbrace{999 \dots 9}_{19}$. Wykaż, że liczba $2S$ -cyfrowa

$$\underbrace{11111 \dots 111}_S \underbrace{99999 \dots 999}_S$$

jest podzielna przez 19.

XIX Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody trzeciego stopnia (16 marca 2024 r.)

Rozwiązania zadań konkursowych

1. Rozstrzygnij, czy istnieje taki czworokąt wypukły $ABCD$, we wnętrzu którego można wskazać punkt P spełniający warunki

$$AB = AP, \quad BC = BP, \quad CD = CP, \quad DA = DP.$$

Uwaga: Wielokąt nazywamy *wypukłym*, jeśli wszystkie jego kąty wewnętrzne mają miarę mniejszą od 180° .

Rozwiązanie

Odpowiedź: Taki czworokąt $ABCD$ nie istnieje.

Sposób I

Przypuśćmy, że czworokąt $ABCD$ oraz punkt P spełniają warunki zadania (rys. 1). To oznacza, że kąty

$$\angle APB, \quad \angle BPC, \quad \angle CPD, \quad \angle DPA$$

są ostre, gdyż są to kąty między podstawą a ramieniem odpowiednio w trójkątach równoramiennych ABP , BPC , CDP , DAP . Stąd wnioskujemy, że

$$360^\circ = \angle APB + \angle BPC + \angle CPD + \angle DPA < 90^\circ + 90^\circ + 90^\circ + 90^\circ = 360^\circ.$$

Uzyskana sprzeczność oznacza, że nie istnieją punkty A, B, C, D, P o żądanej własności.

Sposób II

Gdyby czworokąt $ABCD$ oraz punkt P spełniały warunki zadania, to z danych równości odcinków uzyskalibyśmy

$$\angle ABP = \angle APB, \quad \angle BCP = \angle BPC, \quad \angle CDP = \angle CPD, \quad \angle DAP = \angle DPA.$$

Wobec tego

$$\angle ABP + \angle BCP + \angle CDP + \angle DAP = \angle APB + \angle BPC + \angle CPD + \angle DPA = 360^\circ.$$

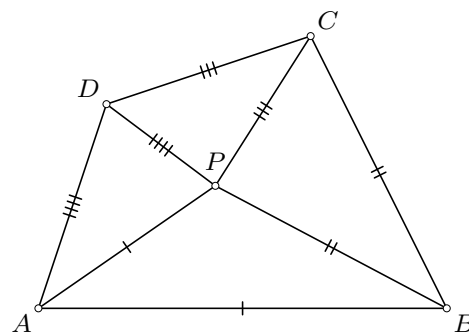
Z drugiej strony, skoro punkt P leży wewnątrz czworokąta $ABCD$, to

$$\angle ABP < \angle ABC, \quad \angle BCP < \angle BCD, \quad \angle CDP < \angle CDA, \quad \angle DAP < \angle DAB,$$

a zatem, ponieważ suma miar kątów wewnętrznych czworokąta to 360° , otrzymujemy

$$\angle ABP + \angle BCP + \angle CDP + \angle DAP < \angle ABC + \angle BCD + \angle CDA + \angle DAB = 360^\circ.$$

Uzyskana nierówność stoi w sprzeczności z otrzymaną wcześniej równością, co oznacza, że układ punktów A, B, C, D, P spełniający warunki zadania nie istnieje.

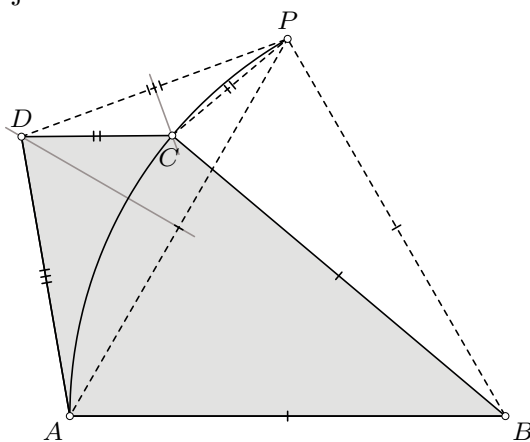


rys. 1

Uwaga

Przykładem *wielokąta* wypukłego, w którego wnętrzu istnieje punkt o analogicznej do prezentowanej w treści zadania własności jest sześciokąt foremny (i jego środek).

Można także wskazać czworokąt wypukły $ABCD$ oraz punkt P leżący *na zewnątrz* tego czworokąta, dla których spełnione są warunki z treści zadania. Opiszemy jedną z możliwych konstrukcji takiej konfiguracji.



rys. 2

Niech ABP będzie trójkątem równobocznym (rys. 2). Punkt D wybierzmy na symetralnej odcinka AP w taki sposób, że $\angle DAB \geq 90^\circ$ oraz $\angle ADP \geq 90^\circ$. Punkt C zaś zdefiniujmy jako punkt przecięcia symetralnej odcinka DP z tym łukiem okręgu o środku B i promieniu $BP=AB$, który znajduje się wewnątrz trójkąta ADP . Bezpośrednie sprawdzenie pokazuje, że dla tak określonych punktów spełnione są równości $AB=AP$, $BC=BP$, $CD=CP$, $DA=DP$.

2. Wyznacz najmniejszą liczbę całkowitą $n \geq 1$ o tej własności, że kwadrat o wymiarach $n \times n$ można rozciąć na kwadratowe części o wymiarach 1×1 lub 2×2 w taki sposób, aby uzyskać po tyle samo części każdego z tych dwóch rodzajów.

Rozwiązanie

Odpowiedź: Najmniejszą liczbą o opisanej własności jest $n = 10$.

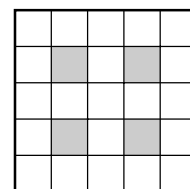
Sposób I

Załóżmy, że kwadrat o wymiarach $n \times n$ można rozciąć na $2k$ części, wśród których jest k kwadratów 1×1 oraz k kwadratów 2×2 , gdzie k jest pewną dodatnią liczbą całkowitą. Łączne pole wszystkich części jest równe polu całego kwadratu:

$$k \cdot 1^2 + k \cdot 2^2 = n^2, \quad \text{czyli} \quad 5k = n^2.$$

Stąd wniosek, że n jest liczbą podzielną przez 5.

Udowodnimy, że kwadratu 5×5 nie można rozciąć na 5 części 2×2 oraz 5 części 1×1 . Istotnie, gdyby takie rozcięcie było możliwe, każda z tych dziesięciu części składałby się z całych jednostkowych pól widocznych na rysunku 3. Zauważmy, że każdy kwadrat 2×2 złożony z całych pól zawiera dokładnie jedno pole wyróżnione. Skoro wyróżnione pola są tylko cztery, to łącznie mogą należeć do co najwyżej czterech części 2×2 , co przeczy założeniu, że takich części jest pięć. Zatem szukana najmniejsza liczba n jest różna od 5.



rys. 3

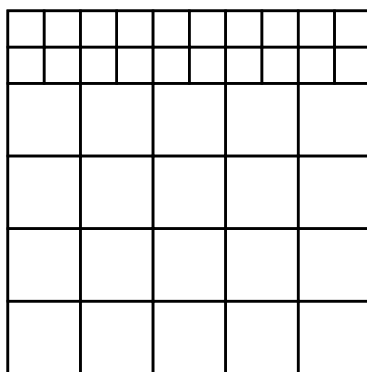
Dla $n = 10$ istnieje żądany podział: kwadrat 10×10 można rozciąć na 20 kwadratów 2×2 oraz 20 kwadratów 1×1 . Przykładowe rozcięcie o tej własności przedstawione jest na rysunku 4.

Sposób II

Podamy inny dowód faktu, że kwadratu 5×5 nie można rozciąć na 5 kwadratów 2×2 oraz 5 kwadratów 1×1 (pozostałe elementy rozwiązania są jednakowe jak w poprzednim sposobie).

Przypuśćmy, że takie rozcięcie jest możliwe i 20 pól należących do pięciu części 2×2 pomalujmy na białe, a 5 pól należących do pięciu części 1×1 — na czarno. Zauważmy, że w każdym wierszu kwadratu 5×5 jest parzysta liczba białych pól (dwa razy więcej niż części 2×2 o polach w tym wierszu). To oznacza, że w każdym wierszu jest *co najmniej* jedno czarne pole. Skoro zaś łączna liczba czarnych pól w całym kwadracie jest równa 5, to w każdym wierszu jest *dokładnie* jedno czarne pole.

Analogicznie uzasadniamy, że w każdej kolumnie jest dokładnie jedno czarne pole. Rozważmy czarne pole P_2 , które znajduje się w *drugiej* kolumnie. Sąsiadujące z nim pole pierwszej kolumny P_1 jest białe (bo P_2 jest jedynym czarnym polem w swoim wierszu). Jednak P_1 nie może należeć do kwadratowej części 2×2 , gdyż każdy kwadrat 2×2 zawierający P_1 zawiera również P_2 . Uzyskana sprzeczność kończy dowód.



rys. 4

Uwaga

Możliwych rozmieszczeń czterech nie nachodzących na siebie kwadratów 2×2 (złożonych z całych pól) wewnątrz kwadratu 5×5 jest 79. Poprawny argument, że piąty kwadrat 2×2 nigdy się „nie zmieści”, polegający na rozpatrywaniu różnych przypadków, powinien uwzględnić te wszystkie rozmieszczenia.

3. Liczby rzeczywiste a, b, c spełniają warunki $a+b \neq 0$, $b+c \neq 0$ oraz $c+a \neq 0$. Wykaż, że

$$\left(\frac{a^2c}{a+b} + \frac{b^2a}{b+c} + \frac{c^2b}{c+a}\right) \cdot \left(\frac{b^2c}{a+b} + \frac{c^2a}{b+c} + \frac{a^2b}{c+a}\right) \geq 0.$$

Rozwiązanie

Sposób I

Udowodnimy, że dla każdej trójki liczb rzeczywistych a, b, c spełniających warunki zadania, zachodzi równość

$$\frac{a^2c}{a+b} + \frac{b^2a}{b+c} + \frac{c^2b}{c+a} = \frac{b^2c}{a+b} + \frac{c^2a}{b+c} + \frac{a^2b}{c+a}.$$

Wyniknie stąd bezpośrednio teza zadania, gdyż kwadrat dowolnej liczby rzeczywistej (w szczególności: wspólnej wartości obu stron powyższej równości) jest liczbą nieujemną.

Aby wykazać postulowaną równość, wystarczy zauważyć, że różnica lewej i prawej strony jest równa zero:

$$\begin{aligned} \frac{a^2c}{a+b} - \frac{b^2c}{a+b} + \frac{b^2a}{b+c} - \frac{c^2a}{b+c} + \frac{c^2b}{c+a} - \frac{a^2b}{c+a} &= \frac{(a^2-b^2)c}{a+b} + \frac{(b^2-c^2)a}{b+c} + \frac{(c^2-a^2)b}{c+a} = \\ &= \frac{(a-b)(a+b)c}{a+b} + \frac{(b-c)(b+c)a}{b+c} + \frac{(c-a)(c+a)b}{c+a} = \\ &= (a-b)c + (b-c)a + (c-a)b = ca - bc + ab - ca + bc - ab = 0. \end{aligned}$$

Uwaga

W pełni analogicznie można udowodnić podobną równość, spełnioną dla każdej trójki liczb rzeczywistych x, y, z , z których żadne dwie nie są przeciwne:

$$\frac{x^2}{x+y} + \frac{y^2}{y+z} + \frac{z^2}{z+x} = \frac{y^2}{x+y} + \frac{z^2}{y+z} + \frac{x^2}{z+x}.$$

W istocie powyższa równość staje się równością z rozwiązania w wyniku podstawienia $x=ca$, $y=bc$, $z=ab$.

Sposób II

Sprowadzając wyrażenie stanowiące pierwszy czynnik lewej strony dowodzonej nierówności do wspólnego mianownika, a następnie wymnażając i porządkując, uzyskujemy

$$\begin{aligned} \frac{a^2c}{a+b} + \frac{b^2a}{b+c} + \frac{c^2b}{c+a} &= \frac{a^2c(b+c)(c+a) + b^2a(c+a)(a+b) + c^2b(a+b)(b+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \\ &= \frac{a^3b^2 + a^2b^3 + b^3c^2 + b^2c^3 + c^3a^2 + c^2a^3 + ab^2c^2 + a^2bc^2 + a^3bc + ab^3c + abc^3}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \\ &= \frac{(a+b+c)(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + abc(a^2 + b^2 + c^2)}{(a+b)(b+c)(c+a)}, \end{aligned}$$

czyli wyrażenie symetryczne ze względu na zmienne a, b, c . To samo wyrażenie uzyskamy po przekształceniach drugiego czynnika:

$$\frac{b^2c}{a+b} + \frac{c^2a}{b+c} + \frac{a^2b}{c+a} = \frac{(a+b+c)(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + abc(a^2 + b^2 + c^2)}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

W konsekwencji lewa strona dowodzonej nierówności jest kwadratem pewnej liczby rzeczywistej, czyli liczbą nieujemną.

4. Dany jest trójkąt równoramienny ABC , w którym $AC = BC$. Punkty P, Q, R leżą odpowiednio na bokach AB, BC, CA tego trójkąta, przy czym czworokąt $CQPR$ jest równoległobokiem. Wykaż, że punkt symetryczny do punktu P względem prostej QR leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC .

Rozwiązanie

Bezpośrednio z warunków zadania wynika, że $PQ = CR$ oraz $PR = CQ$. Ponadto, skoro proste PR i BC są równoległe, to $\sphericalangle APR = \sphericalangle ABC = \sphericalangle BAC$, więc trójkąt APR jest równoramienny i $AR = PR$. Podobnie stwierdzamy, że trójkąt BPQ jest równoramienny i $BQ = PQ$.

Oznaczmy przez P' punkt symetryczny do punktu P względem prostej QR . Jeżeli P jest środkiem odcinka AB , to $P' = C$ i teza zadania jest spełniona. W dalszej części będziemy zakładać, że $AP \neq BP$.

Sposób I

Zauważmy, że skoro P' jest punktem symetrycznym do P względem QR , to trójkąty PQR oraz $P'QR$ są przystające (rys. 5). Skoro $CQPR$ jest równoległobokiem, to również trójkąty CRQ i PQR są przystające. W konsekwencji trójkąty $P'QR$ oraz CRQ są przystające, skąd

$$\sphericalangle P'QC = \sphericalangle P'QR - \sphericalangle CQR = \sphericalangle CRQ - \sphericalangle P'RQ = \sphericalangle P'RC.$$

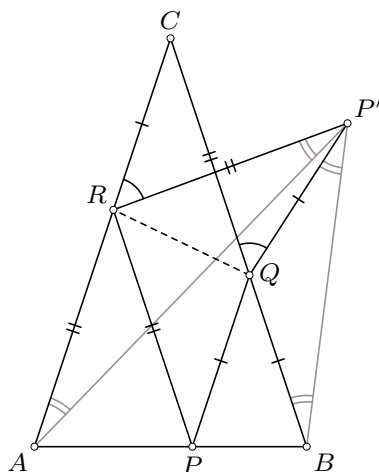
Ponadto skoro trójkąty BQP' i ARP' są równoramienne, to

$$\sphericalangle P'QC = 180^\circ - \sphericalangle BQP' = 2 \cdot \sphericalangle P'BQ \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle P'RC = 180^\circ - \sphericalangle ARP' = 2 \cdot \sphericalangle P'AR.$$

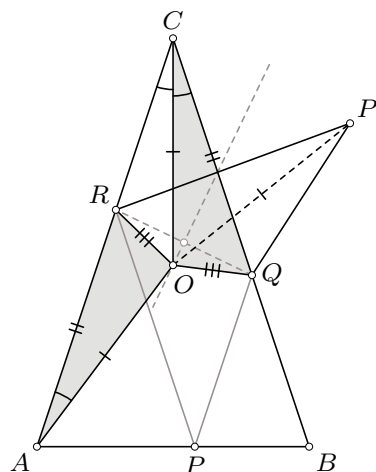
Z uzyskanych równości wynika więc, że

$$\sphericalangle P'BC = \sphericalangle P'BQ = \frac{1}{2} \sphericalangle P'QC = \frac{1}{2} \sphericalangle P'RC = \sphericalangle P'AR = \sphericalangle P'AC,$$

co w połączeniu z faktem, że punkty C oraz P' leżą po tej samej stronie prostej AB oznacza, że punkty A, B, C, P' leżą na jednym okręgu.



rys. 5



rys. 6

Sposób II

Niech O będzie środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC (rys. 6).

Skoro $OA = OC$, $AR = CQ$ oraz

$$\sphericalangle OAR = \sphericalangle OAC = \sphericalangle OCA = \sphericalangle OCB = \sphericalangle OCQ,$$

to trójkąty OAR oraz OCQ są przystające. Wobec tego $OQ = OR$, czyli punkt O leży na symetralnej odcinka QR .

Punkt P jest obrazem punktu C w symetrii względem środka odcinka QR , a punkt P' jest obrazem punktu P w symetrii względem prostej QR . To oznacza, że punkt P' jest obrazem punktu C w symetrii względem symetralnej odcinka QR . Innymi słowy: symetralna odcinka CP' jest również symetralną odcinka QR .

Połączenie konkluzji ostatnich dwóch akapitów prowadzi do wniosku, że punkt O leży na symetralnej odcinka CP' , czyli $OC = OP'$. To zaś oznacza, że punkt P' leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC .

5. Niech $S = \underbrace{111\dots1}_{19}\underbrace{999\dots9}_{19}$. Wykaż, że liczba $2S$ -cyfrowa

$$\underbrace{11111\dots111}_S \underbrace{99999\dots999}_S$$

jest podzielna przez 19.

Rozwiązanie

Zauważmy, że

$$\underbrace{11111\dots111}_S \underbrace{99999\dots999}_S = \underbrace{11111\dots111}_S \cdot \underbrace{100000\dots009}_{S-1},$$

wobec czego należy wykazać, że co najmniej jeden z tych dwóch czynników jest podzielny przez 19. Ponadto drugi czynnik można przedstawić w postaci

$$\underbrace{100000\dots009}_{S-1} = 19 + \underbrace{99999\dots990}_{S-1} = 19 + 90 \cdot \underbrace{11111\dots11}_{S-1}.$$

Ponieważ 90 nie jest liczbą podzielną przez 19, więc powyższa suma jest podzielna przez 19 wtedy i tylko wtedy, gdy liczba

$$\underbrace{11111\dots11}_{S-1}$$

jest podzielna przez 19. Jak widać, do zakończenia rozwiązania przydatne będzie rozstrzygnięcie, jakie liczby o zapisie dziesiętnym złożonym wyłącznie z jedynek są podzielne przez 19.

Oznaczmy przez J_n liczbę n -cyfrową, której każdą cyfrą jest 1, czyli

$$J_n = \underbrace{11111\dots11}_n = \frac{1}{9} \cdot \underbrace{99999\dots99}_n = \frac{1}{9}(10^n - 1).$$

Udowodnimy następujący fakt:

Jeżeli liczba n jest podzielna przez 18, to liczba J_n jest podzielna przez 19.

Zauważmy, że wykorzystując powyższy fakt, można zakończyć rozwiązanie zadania. Istotnie, ponieważ liczba $S - 1$ jest podzielna przez 18. (jako liczba parzysta o sumie cyfr podzielnej przez 9), więc liczba J_{S-1} (która, jak zauważyliśmy wcześniej, jest dzielnikiem liczby danej w treści zadania) dzieli się przez 19.

Przytoczony fakt udowodnimy kilkoma sposobami.

Sposób I

Wykonując pisemne dzielenie z resztą przez 19 liczby złożonej z samych jedynek (rys. 7), zauważamy, że reszta 0 pojawia się po raz pierwszy dla liczby J_{18} . Wykonując takie dzielenie dla większych liczb tej postaci, będziemy okresowo otrzymywać ten sam ciąg reszt, przy czym reszta 0 będzie pojawiała się za co osiemnastym razem, czyli wyłącznie dla liczb J_n , gdzie n dzieli się przez 18.

Uwaga 1.

W istocie udowodniliśmy więc mocniejszy rezultat niż powyższy fakt: liczba J_n dzieli się przez 19 wtedy i tylko wtedy, gdy liczba n dzieli się przez 18.

$$\begin{array}{r}
5\ 8\ 4\ 7\ 9\ 5\ 3\ 2\ 1\ 6\ 3\ 7\ 4\ 2\ 6\ 9 \\
1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1 : 1\ 9 \\
- \quad 9\ 5 \\
\hline
1\ 6\ 1 \\
- 1\ 5\ 2 \\
\hline
9\ 1 \\
- 7\ 6 \\
\hline
1\ 5\ 1 \\
- 1\ 3\ 3 \\
\hline
1\ 8\ 1 \\
- 1\ 7\ 1 \\
\hline
1\ 0\ 1 \\
- \quad 9\ 5 \\
\hline
6\ 1 \\
- 5\ 7 \\
\hline
4\ 1 \\
- 3\ 8 \\
\hline
3\ 1 \\
- 1\ 9 \\
\hline
1\ 2\ 1 \\
- 1\ 1\ 4 \\
\hline
7\ 1 \\
- 5\ 7 \\
\hline
1\ 4\ 1 \\
- 1\ 3\ 3 \\
\hline
8\ 1 \\
- 7\ 6 \\
\hline
5\ 1 \\
- 3\ 8 \\
\hline
1\ 3\ 1 \\
- 1\ 1\ 4 \\
\hline
1\ 7\ 1 \\
- 1\ 7\ 1 \\
\hline
0
\end{array}$$

rys. 7

Sposób II

Ponieważ $J_n = \frac{1}{9}(10^n - 1)$, więc liczba J_n dzieli się przez 19 dokładnie wtedy, gdy liczba 10^n daje przy dzieleniu przez 19 resztę 1. Wyznaczając reszty z dzielenia przez 19 kolejnych potęg 10, uzyskujemy, że liczby $10^1, 10^2, 10^3, \dots$ dają przy dzieleniu przez 19 kolejno reszty:

10, 5, 12, 6, 3, 11, 15, 17, 18, 9, 14, 7, 13, 16, 8, 4, 2, 1

i dalej okresowo (z okresem 18). To oznacza, że 10^n daje przy dzieleniu przez 19 resztę 1 wtedy i tylko wtedy, gdy n dzieli się przez 18.

Uwaga 2.

Odnajdujemy, że przedstawiony cykl reszt z dzielenia potęg 10 przez 19 można wyznaczyć nie wykonując rachunków na liczbach większych od dwucyfrowych. Rzeczywiście, jeśli liczba 10^n daje przy dzieleniu przez 19 parzystą resztę $r = 2k$, to

$$10^{n+1} = 10 \cdot 10^n \equiv_{19} 10 \cdot 2k = 20k = 19k + k \equiv_{19} k = \frac{r}{2},$$

gdzie zapis $a \equiv_{19} b$ oznacza, że liczby a oraz b dają tę samą resztę przy dzieleniu przez 19. Krótko mówiąc, aby wyznaczyć resztę w kolejnym kroku, parzyste reszty wystarczy dzielić przez 2. Z kolei jeżeli 10^n daje przy dzieleniu przez 19 nieparzystą resztę $r = 2k + 1$, to

$$10^{n+1} = 10 \cdot 10^n \equiv_{19} 10 \cdot (2k + 1) = 20k + 10 = 19k + k + 10 \equiv_{19} k + 10 = \frac{2k + 1 + 19}{2} = \frac{r + 19}{2}.$$

W tym wypadku wystarczy więc dodać do nieparzystej reszty 19 i podzielić przez 2.

Sposób III

Ponieważ 19 jest liczbą pierwszą, więc wykorzystując *małe twierdzenie Fermata* stwierdzamy, że dla każdej liczby całkowitej n niepodzielnej przez 19, liczba n^{18} daje resztę 1 przy dzieleniu przez 19. W szczególności przyjmując $n = 10^k$, otrzymujemy, że każda liczba postaci $10^{18k} - 1$ jest podzielna przez 19, więc w konsekwencji także liczba $J_{18k} = \frac{1}{9}(10^{18k} - 1)$.

Sposób IV

Zauważmy, że wystarczy uzasadnić, że liczba J_{18} jest podzielna przez 19, gdyż dla dowolnej liczby całkowitej $k \geq 1$:

$$J_{18k} = J_{18} \cdot \underbrace{1000 \dots 00}_{17} \underbrace{1000 \dots 00}_{17} \underbrace{1000 \dots 00}_{17} 1 \dots 1 \underbrace{000 \dots 00}_{17} 1,$$

przy czym liczba cyfr równych 1 w drugim czynniku jest równa k . Zauważmy, że

$$J_{18} = 111111111111111111 = 1000000001 \cdot 111111111 = (10^9 + 1) \cdot J_9.$$

Z kolei wykorzystując rozkład sumy sześcianów $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$, liczbę $10^9 + 1$ można przedstawić w postaci iloczynu:

$$10^9 + 1 = (10^3)^3 + 1^3 = (10^3 + 1)(10^6 - 10^3 + 1) = 1001 \cdot 999001.$$

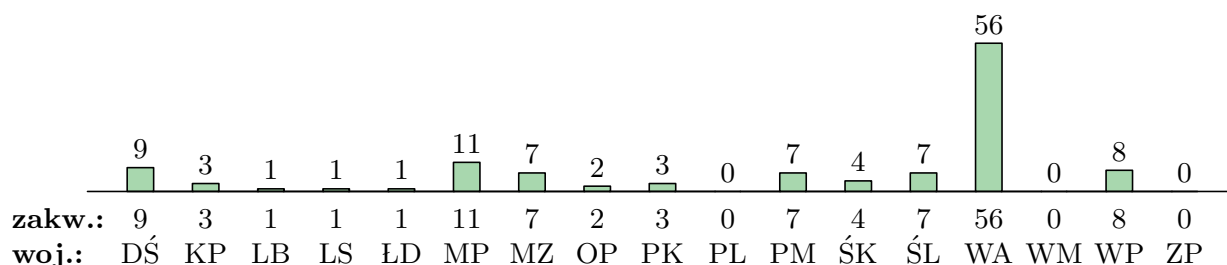
Pozostaje bezpośrednio sprawdzić, że $999001 = 19 \cdot 52579$.

XIX Olimpiada Matematyczna Juniorów

Statystyki dotyczące zawodów trzeciego stopnia (2023/24)

(16 marca 2024 r.)

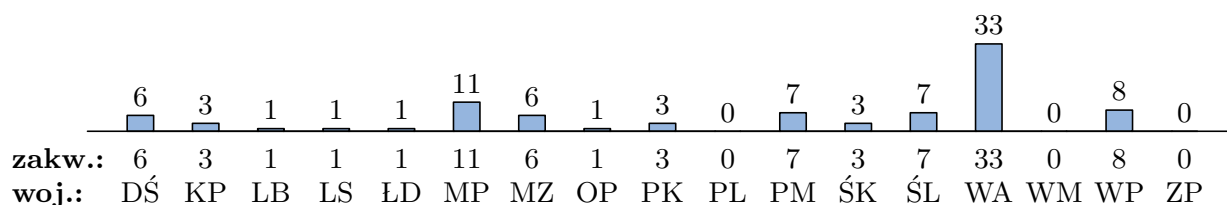
Tabela 1. Liczba uczniów, którzy wzięli udział w zawodach oraz zakwalifikowanych do zawodów w podziale na województwa i inne regiony.



Łączna liczba uczniów, którzy wzięli udział w zawodach: 120

Łączna liczba uczniów zakwalifikowanych do zawodów: 120

Tabela 2. Liczba szkół uczniów, którzy wzięli udział w zawodach oraz zakwalifikowanych do zawodów w podziale na województwa i inne regiony.



Łączna liczba szkół uczniów, którzy wzięli udział w zawodach: 91

Łączna liczba szkół uczniów zakwalifikowanych do zawodów: 91

Skróty województw i innych regionów

DŚ — dolnośląskie

LB — lubelskie

ŁD — łódzkie

MZ — mazowieckie bez m.st. Warszawy

PK — podkarpackie

PM — pomorskie

ŚL — śląskie

WM — warmińsko-mazurskie

ZP — zachodniopomorskie

KP — kujawsko-pomorskie

LS — lubuskie

MP — małopolskie

OP — opolskie

PL — podlaskie

ŚK — świętokrzyskie

WA — m.st. Warszawa

WP — wielkopolskie

Tabela 3. Procentowa i rzeczywista liczba osób, które uzyskały daną sumę punktów.

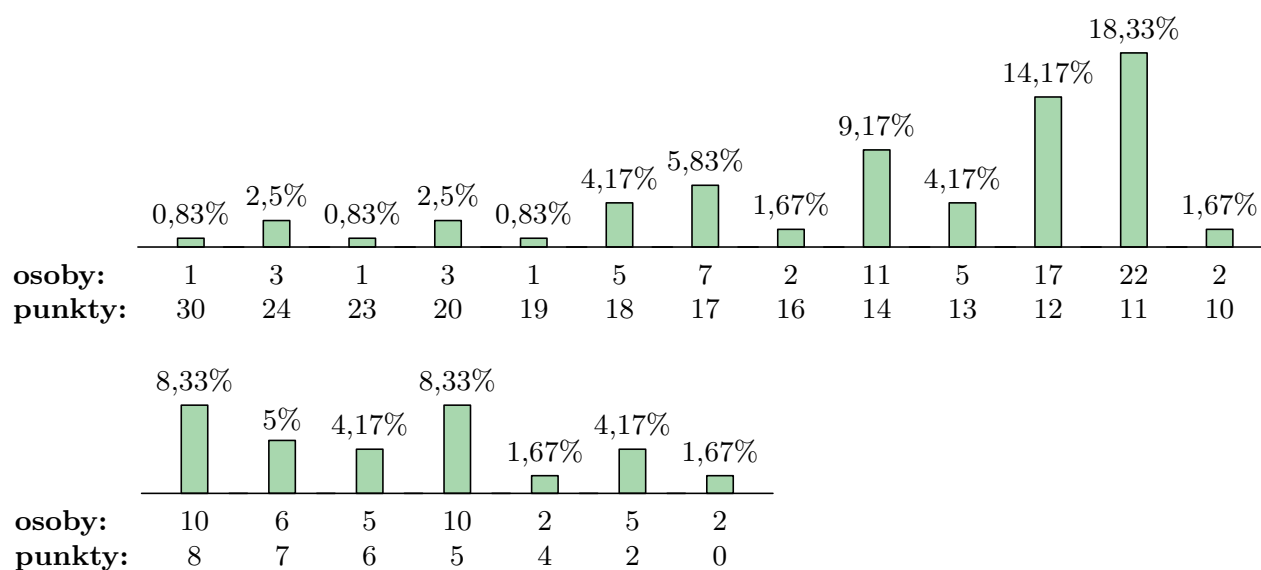


Tabela 4. Procentowa i rzeczywista liczba osób, które uzyskały daną lub większą sumę punktów.

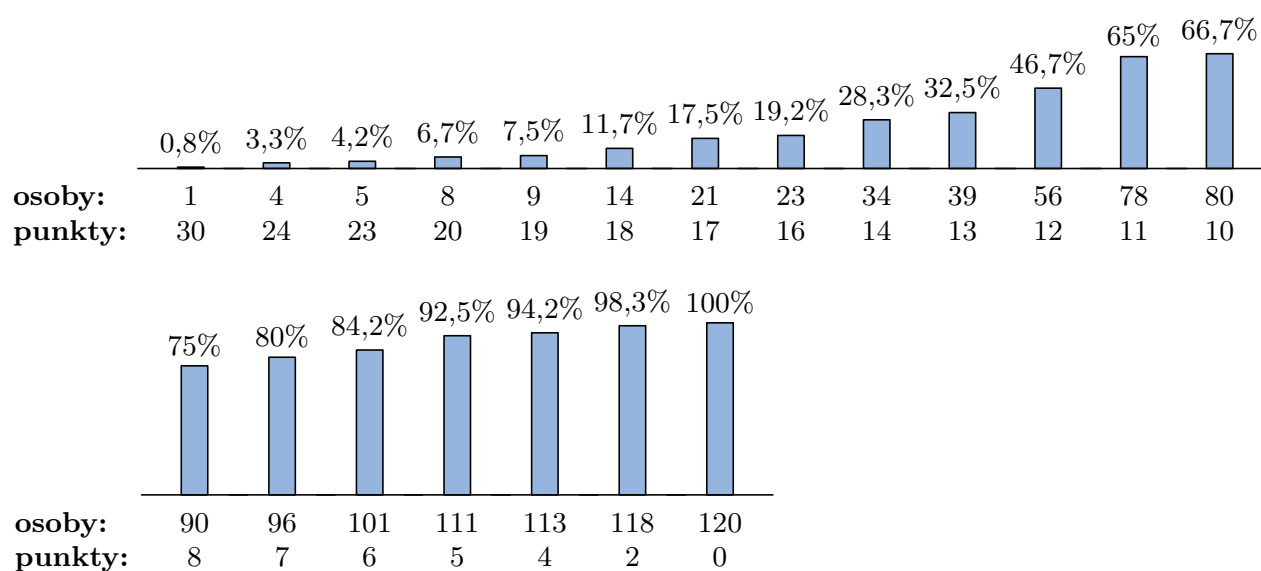


Tabela 5. Procentowa liczba osób, które uzyskały daną liczbę punktów za poszczególne zadania.

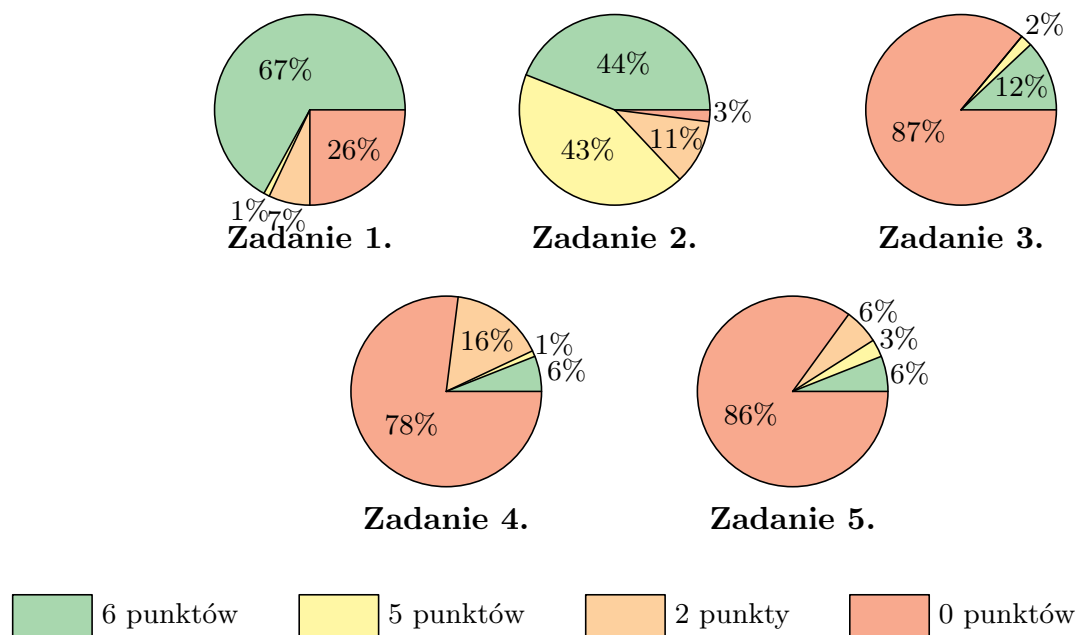


Tabela 6. Średnia uzyskanych punktów za poszczególne zadania.

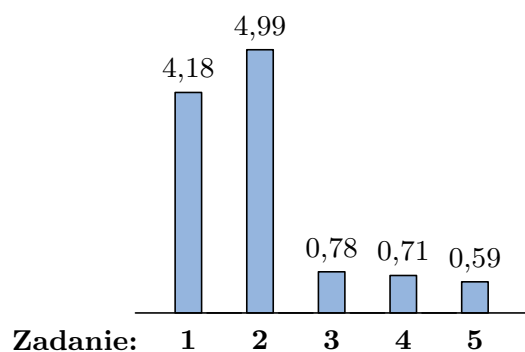
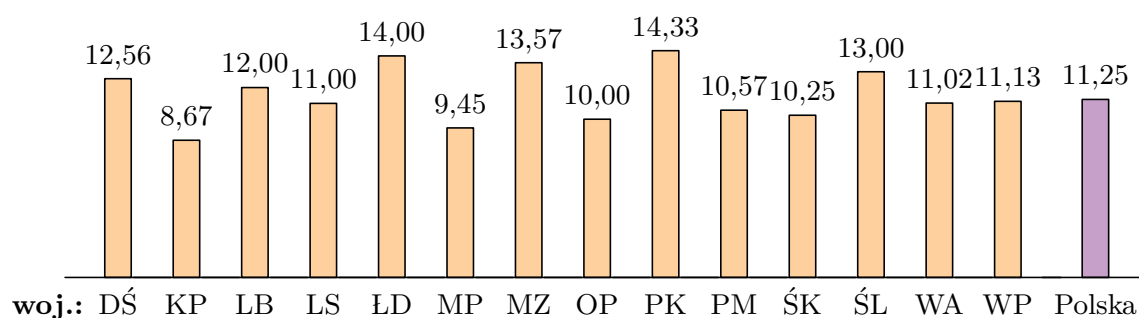


Tabela 7. Średnia sumy punktów w podziale na województwa i inne regiony.



Imiona:

Nazwisko:

Klasa:



XX Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody stopnia pierwszego — część testowa

(10 października 2024 r., godz. 9:00)

Przed przystąpieniem do rozwiązywania testu wpisz na każdą stronę swoje imiona, nazwisko oraz numer klasy.

Treść każdego z poniższych zadań zawiera trzy stwierdzenia. Każde z nich jest prawdziwe lub fałszywe (przy czym może się zdarzyć, że wszystkie trzy stwierdzenia w obrębie jednego zadania są fałszywe). Jeśli dane stwierdzenie jest prawdziwe, wpisz w odpowiednią kratkę literkę T, jeśli zaś stwierdzenie jest fałszywe, wpisz literkę N.

W przypadku pomyłki przekreśl znakiem **X** podaną odpowiedź, a właściwą odpowiedź podaj obok z lewej strony. Nie używaj korektora.

Przykład poprawnie rozwiązane zadania:

0. Dla każdej dodatniej liczby całkowitej n liczba $2n + 1$ jest

T

a) dodatnia;

T

b) nieparzysta;

N

X

c) pierwsza.

Czas na rozwiązywanie testu: 75 minut.

Powodzenia!

1. Początkową cenę pewnego produktu obniżono o 50%, a następnie nową cenę obniżono o 50%. W wyniku tych dwóch obniżek początkowa cena spadła

a) o 50%;

b) o 75%;

c) o 100%.

2. Liczba $20^1 \cdot 20^2 \cdot 20^3$ jest równa

a) 20^{1+2+3} ;

b) $20^{1 \cdot 2 \cdot 3}$;

c) $\left((20^1)^2\right)^3$.

Imiona:

Nazwisko:

Klasa:

3. Każda cyfra pewnej 9-cyfrowej liczby n jest równa 2 lub 5. Wynika z tego, że liczba n jest podzielna przez

a) 2;

b) 3;

c) 5.

4. Liczba $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ jest

a) mniejsza od $\sqrt{5}$;

b) równa $\sqrt{5}$;

c) większa od $\sqrt{5}$.

5. Istnieje pięciokąt, który można rozciąć wzdłuż przekątnej na dwa wielokąty

a) o równych polach;

b) o równych obwodach.

c) foremne.

6. Istnieją cztery kolejne liczby całkowite, których suma jest podzielna przez

a) 18;

b) 19;

c) 20.

7. Istnieją liczby rzeczywiste a , b , c spełniające warunek $a < b < c$, których średnia arytmetyczna jest

a) mniejsza od średniej arytmetycznej liczb a oraz b ;

b) mniejsza od średniej arytmetycznej liczb b oraz c ;

c) mniejsza od średniej arytmetycznej liczb a oraz c .

Imiona:

Nazwisko:

Klasa:

8. Każdą dodatnią liczbę nieparzystą można przedstawić jako

a) różnicę dwóch liczb pierwszych;

b) różnicę dwóch liczb złożonych;

c) różnicę dwóch kwadratów liczb całkowitych.

9. Liczby rzeczywiste x i y spełniają warunek $x - y \geq x^2$. Wynika z tego, że

a) $x \geq 0$;

b) $y \leq 0$;

c) $x \geq y$.

10. Istnieje trójkąt prostokątny, w którym długości wszystkich boków są liczbami całkowitymi, a ponadto

a) długość dokładnie jednego boku jest parzysta;

b) długości dokładnie dwóch boków są parzyste;

c) długości wszystkich trzech boków są parzyste.

11. Punkt P leży wewnątrz trójkąta prostokątnego ABC , w którym $\angle ACB = 90^\circ$ oraz $AC > BC$. Wynika z tego, że

a) $\angle APB > 90^\circ$;

b) $\angle APC > 90^\circ$;

c) $\angle APC > \angle BPC$.

12. Tablica o wymiarach 4×4 składa się z kwadratowych pól o boku 1. Dokładnie osiem pól tej tablicy jest koloru czarnego. Wynika z tego, że środki pewnych dwóch z tych ośmiu pól są odległe o

a) 1;

b) $\sqrt{2}$;

c) 2.

Imiona:

Nazwisko:

Klasa:

13. Z każdych pięciu dodatnich liczb całkowitych można wybrać

a) takie dwie, których suma jest podzielna przez 2;

b) takie trzy, których suma jest podzielna przez 3;

c) takie cztery, których suma jest podzielna przez 4.

14. Każda dodatnia liczba całkowita została pokolorowana albo na czerwono, albo na niebiesko. Wynika z tego, że

a) pewna liczba większa od 1 ma ten sam kolor, co jej wszystkie dodatnie dzielniki;

b) pewna liczba ma ten sam kolor, co jej dwukrotność;

c) pewne dwie liczby różniące się o 20 mają ten sam kolor.

15. Punkty D i E leżą odpowiednio na bokach BC i AC trójkąta ABC , przy czym $\sphericalangle ADC = \sphericalangle BEC$. Odcinki AD i BE przecinają się w punkcie P . Wynika z tego, że

a) $\sphericalangle CAD = \sphericalangle CBE$;

b) $\sphericalangle ACP = \sphericalangle BCP$;

c) $\sphericalangle DEP = \sphericalangle BAP$.

Rozwiązania zadań testowych

1. Początkową cenę pewnego produktu obniżono o 50%, a następnie nową cenę obniżono o 50%. W wyniku tych dwóch obniżek początkowa cena spadła

- ☐ N a) o 50%;
☐ T b) o 75%;
☐ N c) o 100%.

Komentarz

Założmy, że początkowa cena była równa c . Cena po pierwszej obniżce była więc równa $\frac{1}{2}c$, a cena po drugiej obniżce była równa $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}c = \frac{1}{4}c = c - \frac{3}{4}c = c - 75\%c$. Wobec tego w wyniku obu obniżek początkowa cena spadła o 75%.

2. Liczba $20^1 \cdot 20^2 \cdot 20^3$ jest równa

- ☐ T a) 20^{1+2+3} ;
☐ T b) $20^{1 \cdot 2 \cdot 3}$;
☐ T c) $\left((20^1)^2\right)^3$.

Komentarz

- a), b) Dana liczba to iloczyn $1+2+3=6$ czynników równych 20, więc jest równa 20^6 .
c) Dla dowolnych dodatnich liczb całkowitych a, b, c mamy $(a^b)^c = a^{b \cdot c}$, skąd

$$\left((20^1)^2\right)^3 = (20^{1 \cdot 2})^3 = 20^{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20^6.$$

3. Każda cyfra pewnej 9-cyfrowej liczby n jest równa 2 lub 5. Wynika z tego, że liczba n jest podzielna przez

- ☐ N a) 2;
☐ T b) 3;
☐ N c) 5.

Komentarz

- a) Jeśli cyfrą jedności n jest 5, to n nie jest liczbą parzystą.
c) Jeśli cyfrą jedności n jest 2, to n nie jest liczbą podzielną przez 5.

b) Każda z liczb $2 = 3 - 1$, $5 = 6 - 1$ jest o 1 mniejsza od liczby podzielnej przez 3. Wobec tego suma dziewięciu liczb, z których każda jest równa 2 lub 5, jest o 9 mniejsza od sumy dziewięciu liczb podzielnych przez 3. To oznacza, że suma cyfr liczby n jest podzielna przez 3 i w konsekwencji — również liczba n jest podzielna przez 3.

4. Liczba $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ jest

- ☐ N a) mniejsza od $\sqrt{5}$;
☐ N b) równa $\sqrt{5}$;
☐ T c) większa od $\sqrt{5}$.

Komentarz

Ponieważ $\sqrt{3} > \sqrt{2}$ oraz $\sqrt{8} > \sqrt{5}$, więc $\sqrt{2} + \sqrt{3} > \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} = \sqrt{8} > \sqrt{5}$.

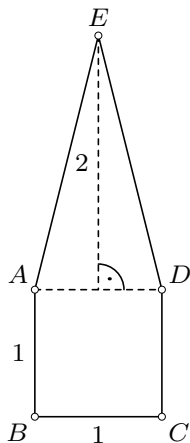
5. Istnieje pięciokąt, który można rozciąć wzdłuż przekątnej na dwa wielokąty

- ☐ T a) o równych polach;
☐ T b) o równych obwodach.
☐ T c) foremne.

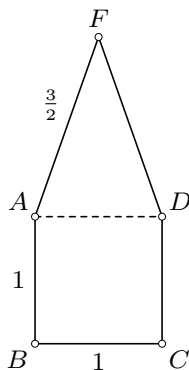
Komentarz

Niech $ABCD$ będzie kwadratem o boku 1.

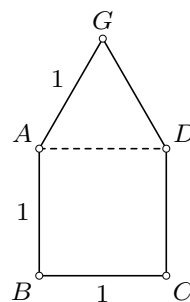
a) Na zewnątrz kwadratu $ABCD$ zbudujemy trójkąt równoramienny ADE , w którym $AE = DE$ oraz wysokość poprowadzona z wierzchołka E ma długość 2 (rys. 1). Wówczas pięciokąt $ABCDE$ można wzdłuż przekątnej AD rozciąć na dwa wielokąty o polu 1.



rys. 1



rys. 2



rys. 3

b) Na zewnątrz kwadratu $ABCD$ zbudujemy trójkąt równoramienny ADF , w którym $AF = DF = \frac{3}{2}$ (rys. 2). Wówczas pięciokąt $ABCDF$ można wzdłuż przekątnej AD rozciąć na dwa wielokąty o obwodzie 4.

c) Na zewnątrz kwadratu $ABCD$ zbudujemy trójkąt równoboczny ADG (rys. 3). Wówczas pięciokąt $ABCDG$ można wzdłuż przekątnej AD rozciąć na dwa wielokąty foremne.

6. Istnieją cztery kolejne liczby całkowite, których suma jest podzielna przez

T	a) 18;
T	b) 19;
N	c) 20.

Komentarz

- a) Liczba $3 + 4 + 5 + 6 = 18$ jest podzielna przez 18.
b) Liczba $8 + 9 + 10 + 11 = 38$ jest podzielna przez 19.
c) Suma czterech kolejnych liczb całkowitych, najmniejszą z których jest n , wynosi

$$n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) = 4n + 6 = 2(2n + 3).$$

Dla każdej liczby całkowitej n liczba $2n + 3$ jest nieparzysta, więc liczba $2(2n + 3)$ nie jest podzielna przez 4. Nie jest to więc także liczba podzielna przez $4 \cdot 5 = 20$.

7. Istnieją liczby rzeczywiste a, b, c spełniające warunek $a < b < c$, których średnia arytmetyczna jest

N	a) mniejsza od średniej arytmetycznej liczb a oraz b ;
T	b) mniejsza od średniej arytmetycznej liczb b oraz c ;
T	c) mniejsza od średniej arytmetycznej liczb a oraz c .

Komentarz

- a) Skoro $c > a$ oraz $c > b$, to $2c > a + b$, czyli $c > \frac{a+b}{2}$. Wobec tego

$$\frac{a+b+c}{3} > \frac{a+b+\frac{a+b}{2}}{3} = \frac{\frac{3(a+b)}{2}}{3} = \frac{a+b}{2}.$$

b), c) Jeżeli $a=1, b=2, c=6$, to średnia arytmetyczna liczb a, b, c jest równa $\frac{a+b+c}{3}=3$, więc jest mniejsza od każdej z liczb $\frac{a+c}{2}=3,5$ oraz $\frac{b+c}{2}=4$.

8. Każdą dodatnią liczbę nieparzystą można przedstawić jako

N	a) różnicę dwóch liczb pierwszych;
T	b) różnicę dwóch liczb złożonych;
T	c) różnicę dwóch kwadratów liczb całkowitych.

Komentarz

a) Wykażemy, że liczby 7 nie można zapisać w postaci różnicy dwóch liczb pierwszych. Przypuśćmy, że $p - q = 7$ dla pewnych liczb pierwszych p, q . Wówczas jedna z liczb p, q jest parzysta, a druga — nieparzysta. Jedyną parzystą liczbą pierwszą jest 2, a ponieważ

$p > 7$, więc wynika z tego, że $q = 2$. Jednak wówczas uzyskujemy $p = 9$, a to jest liczba złożona. Otrzymana sprzeczność oznacza, że nie jest możliwe przedstawienie liczby 7 w postaci różnicy dwóch liczb pierwszych.

b) Zauważmy, że $1 = 9 - 8$ jest szukanym przedstawieniem liczby 1. Jeżeli $n \geq 3$ jest liczbą nieparzystą, to $n = 3n - 2n$. Każda z liczb $3n$ oraz $2n$ jest złożona, bo jest iloczynem dwóch liczb całkowitych większych od 1.

c) Każdą dodatnią liczbę nieparzystą można zapisać w postaci $2k - 1$, gdzie $k \geq 1$ jest liczbą całkowitą. Wówczas $2k - 1 = k^2 - (k - 1)^2$ jest przedstawieniem liczby $2k - 1$ w postaci różnicy kwadratów dwóch liczb całkowitych.

9. Liczby rzeczywiste x i y spełniają warunek $x - y \geq x^2$. Wynika z tego, że

N	a) $x \geq 0$;
N	b) $y \leq 0$;
T	c) $x \geq y$.

Komentarz

- a) Jeśli $x = -1$ oraz $y = -2$, to dany warunek jest spełniony oraz $x < 0$.
 b) Jeśli $x = \frac{1}{2}$ oraz $y = \frac{1}{4}$, to dany warunek jest spełniony oraz $y > 0$.
 c) Skoro $x^2 \geq 0$ dla każdej liczby rzeczywistej x , to z danego warunku uzyskujemy, że $x - y \geq 0$, czyli $x \geq y$.

10. Istnieje trójkąt prostokątny, w którym długości wszystkich boków są liczbami całkowitymi, a ponadto

T	a) długość dokładnie jednego boku jest parzysta;
N	b) długości dokładnie dwóch boków są parzyste;
T	c) długości wszystkich trzech boków są parzyste.

Komentarz

a) Trójkąt o bokach długości 3, 4, 5 jest prostokątny i ma dokładnie jeden bok o parzystej długości.

c) Trójkąt o bokach długości 6, 8, 10 jest prostokątny i ma wszystkie trzy boki o parzystej długości.

b) Załóżmy, że pewien trójkąt prostokątny ma przyprostokątne o długości a , b oraz przeciwprostokątną o długości c , przy czym liczby a , b , c są całkowite. W myśl twierdzenia Pitagorasa zachodzi równość $a^2 + b^2 = c^2$. To oznacza, że liczba $a^2 + b^2 + c^2 = 2c^2$ jest parzysta, więc wśród składników a^2 , b^2 , c^2 jest parzysta liczba liczb nieparzystych. W konsekwencji wśród liczb a , b , c jest parzysta liczba liczb nieparzystych. Nie jest więc możliwe, że dokładnie dwie z tych liczb są parzyste.

11. Punkt P leży wewnątrz trójkąta prostokątnego ABC , w którym $\sphericalangle ACB = 90^\circ$ oraz $AC > BC$. Wynika z tego, że

T	a) $\sphericalangle APB > 90^\circ$;
N	b) $\sphericalangle APC > 90^\circ$;
N	c) $\sphericalangle APC > \sphericalangle BPC$.

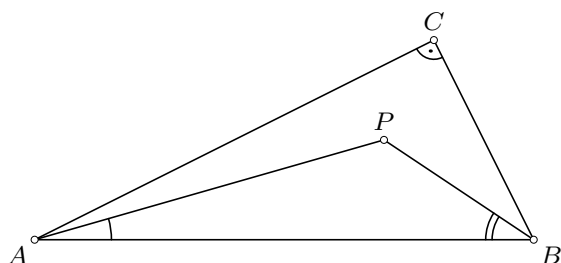
Komentarz

a) Zauważmy, że $\sphericalangle PAB < \sphericalangle CAB$ oraz $\sphericalangle PBA < \sphericalangle CBA$ (rys. 4). Zatem

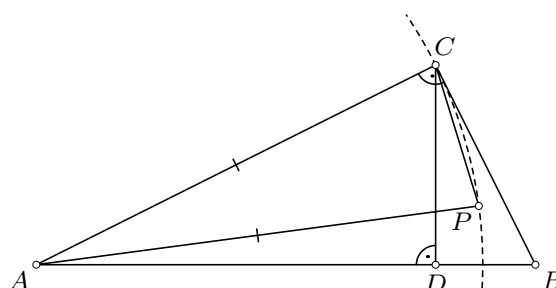
$$\sphericalangle PAB + \sphericalangle PBA < \sphericalangle CAB + \sphericalangle CBA = 180^\circ - \sphericalangle ACB = 90^\circ.$$

W konsekwencji

$$\sphericalangle APB = 180^\circ - (\sphericalangle PAB + \sphericalangle PBA) > 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ.$$



rys. 4



rys. 5

b), c) Rozważmy dowolny trójkąt prostokątny ABC spełniający warunki zadania. Wybierzmy punkt P wewnątrz trójkąta w taki sposób, aby znalazł się na okręgu o środku A i promieniu AC , tzn. $AP = AC$ (rys. 5). Wówczas $\sphericalangle APC < 90^\circ$, gdyż jest to kąt między podstawą i ramieniem w trójkącie równoramiennym ACP .

Niech D będzie spodkiem wysokości trójkąta ABC poprowadzonej z wierzchołka C . Wówczas punkt P znajduje się wewnątrz trójkąta prostokątnego BCD . Stosując udowodniony już punkt a) do tego trójkąta, otrzymujemy $\sphericalangle BPC > 90^\circ$. W połączeniu z nierównością $\sphericalangle APC < 90^\circ$ oznacza to, że $\sphericalangle BPC > \sphericalangle APC$.

12. Tablica o wymiarach 4×4 składa się z kwadratowych pól o boku 1. Dokładnie osiem pól tej tablicy jest koloru czarnego. Wynika z tego, że środki pewnych dwóch z tych ośmiu pól są odległe o

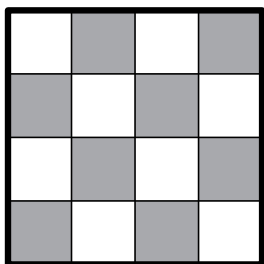
N	a) 1;
N	b) $\sqrt{2}$;
N	c) 2.

Komentarz

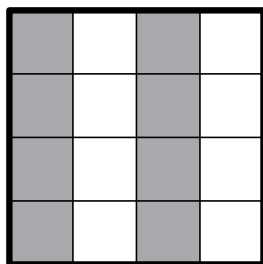
a) Jeżeli tablica pokolorowana jest tak, jak na rysunku 6 (w „szachownicy”), to żadne dwa czarne pola nie sąsiadują bokiem. Wobec tego środki żadnych dwóch czarnych pól nie są odległe o 1.

b) Jeżeli tablica pokolorowana jest tak, jak na rysunku 7 (w „paski”), to żadne dwa czarne pola nie stykają się tylko rogiem. Wobec tego środki żadnych dwóch czarnych pól nie są odległe o $\sqrt{2}$.

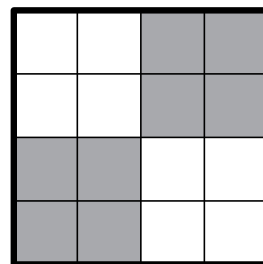
c) Pola o środkach odległych o 2 to pola w tym samym wierszu lub kolumnie, między którymi znajduje się dokładnie jedno inne pole. Jeżeli tablica pokolorowana jest tak, jak na rysunku 8, to środki żadnych dwóch czarnych pól nie są odległe o 2.



rys. 6



rys. 7



rys. 8

13. Z każdych pięciu dodatnich liczb całkowitych można wybrać

T	a) takie dwie, których suma jest podzielna przez 2;
T	b) takie trzy, których suma jest podzielna przez 3;
N	c) takie cztery, których suma jest podzielna przez 4.

Komentarz

a) Wśród dowolnych pięciu (a nawet wśród dowolnych trzech) liczb całkowitych są albo co najmniej dwie liczby parzyste, albo co najmniej dwie liczby nieparzyste. Zarówno suma dwóch liczb parzystych, jak i suma dwóch liczb nieparzystych, jest liczbą podzielną przez 2.

b) Rozważmy dowolne pięć liczb całkowitych i obliczmy reszty z dzielenia tych liczb przez 3. Są dwa możliwe przypadki:

- Pewna reszta r pojawia się co najmniej trzykrotnie.

Wyberzmy dowolne trzy liczby dające tę resztę z dzielenia przez 3, tzn. liczby postaci $3a+r$, $3b+r$, $3c+r$ dla pewnych liczb całkowitych a , b , c . Suma wybranych liczb jest równa

$$(3a+r) + (3b+r) + (3c+r) = 3(a+b+c+r),$$

więc jest to liczba podzielna przez 3.

- Każda z reszt 0, 1, 2 pojawia się co najwyżej dwukrotnie.

Skoro liczb jest pięć, to każda z tych reszt pojawia się co najmniej raz. Wybierzmy po jednej liczbie dla każdej z tych reszt, tzn. liczby postaci $3a$, $3b+1$, $3c+2$ dla pewnych liczb całkowitych a , b , c . Suma tych trzech liczb jest równa

$$3a + (3b+1) + (3c+2) = 3(a+b+c+1),$$

więc jest podzielna przez 3.

- c) Rozważmy liczby 1, 2, 4, 8, 12. Żadna z sum czterech spośród tych pięciu liczb:

$$1+2+4+8=15, \quad 1+2+4+12=19, \quad 1+2+8+12=23, \quad 1+4+8+12=25, \quad 2+4+8+12=26$$

nie jest liczbą podzielną przez 4.

- 14.** Każda dodatnia liczba całkowita została pokolorowana albo na czerwono, albo na niebiesko. Wynika z tego, że

N	a) pewna liczba większa od 1 ma ten sam kolor, co jej wszystkie dodatnie dzielniki;
N	b) pewna liczba ma ten sam kolor, co jej dwukrotność;
N	c) pewne dwie liczby różniące się o 20 mają ten sam kolor.

Komentarz

a) Jeżeli liczba 1 jest czerwona, a wszystkie pozostałe liczby są niebieskie, to każda liczba większa od 1 ma dodatni dzielnik w innym kolorze niż swój własny kolor (mianowicie dzielnik równy 1).

b) Rozważmy kolorowanie, w którym wszystkie liczby mające parzystą liczbę dwójek w rozkładzie na czynniki pierwsze są czerwone, a wszystkie liczby mające nieparzystą liczbę dwójek w rozkładzie na czynniki pierwsze są niebieskie. Wówczas każda liczba ma inny kolor niż jej dwukrotność.

c) Rozważmy kolorowanie, w którym czerwone są liczby dające przy dzieleniu przez 40 jedną z reszt 0, 1, 2, ..., 19, a niebieskie są liczby dające przy dzieleniu przez 40 jedną z reszt 20, 21, 22, ..., 39. Wówczas każde dwie liczby różniące się o 20 mają różny kolor.

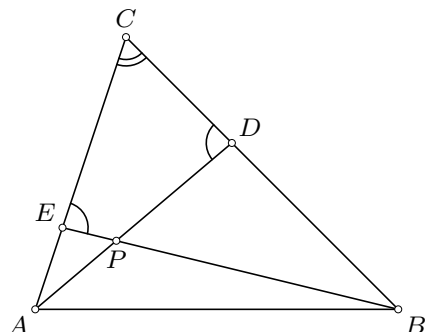
- 15.** Punkty D i E leżą odpowiednio na bokach BC i AC trójkąta ABC , przy czym $\sphericalangle ADC = \sphericalangle BEC$. Odcinki AD i BE przecinają się w punkcie P . Wynika z tego, że

T	a) $\sphericalangle CAD = \sphericalangle CBE$;
N	b) $\sphericalangle ACP = \sphericalangle BCP$;
T	c) $\sphericalangle DEP = \sphericalangle BAP$.

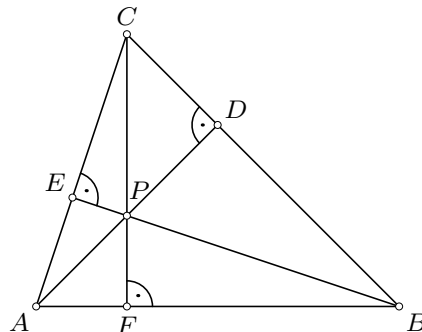
Komentarz

a) Korzystając z własności sumy miar kątów wewnętrznych w trójkątach ACD i BCE (rys. 9), otrzymujemy

$$\sphericalangle CAD = 180^\circ - \sphericalangle ACB - \sphericalangle ADC = 180^\circ - \sphericalangle ACB - \sphericalangle BEC = \sphericalangle CBE.$$



rys. 9



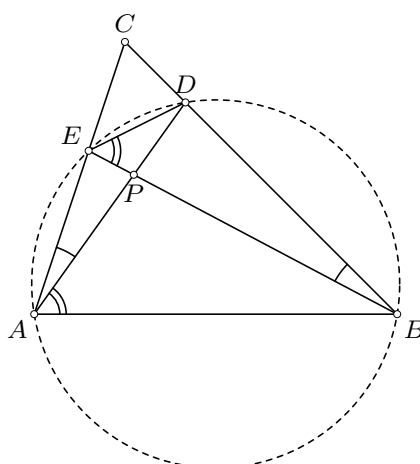
rys. 10

b) Rozważmy dowolny trójkąt ostrokątny ABC , w którym $\sphericalangle BAC \neq \sphericalangle ABC$. Oznaczmy przez D oraz E spodki wysokości poprowadzonych odpowiednio z wierzchołków A oraz B (rys. 10). Wówczas $\sphericalangle ADC = 90^\circ = \sphericalangle BEC$.

Punkt P jest przecięciem dwóch spośród wysokości trójkąta ABC , więc leży także na trzeciej wysokości. To oznacza, że jeżeli przez F oznaczymy punkt przecięcia prostej CP i boku AB , to $\sphericalangle AFC = \sphericalangle BFC = 90^\circ$. W konsekwencji

$$\sphericalangle ACP = \sphericalangle ACF = 90^\circ - \sphericalangle BAC \neq 90^\circ - \sphericalangle ABC = \sphericalangle BCF = \sphericalangle BCP.$$

c) Z udowodnionej w punkcie a) równości $\sphericalangle DAE = \sphericalangle DBE$ oraz tego, że punkty A i B leżą po tej samej stronie prostej DE wynika, że na czworokącie $ABDE$ można opisać okrąg (rys. 11). W konsekwencji $\sphericalangle DEP = \sphericalangle DEB = \sphericalangle DAB = \sphericalangle BAP$.



rys. 11

XX Olimpiada Matematyczna Juniorów

Statystyki dotyczące części testowej
zawodów pierwszego stopnia (2024/2025)

(10 października 2024 r.)

Tabela 1.

Procentowa liczba poprawnych odpowiedzi w poszczególnych podpunktach.

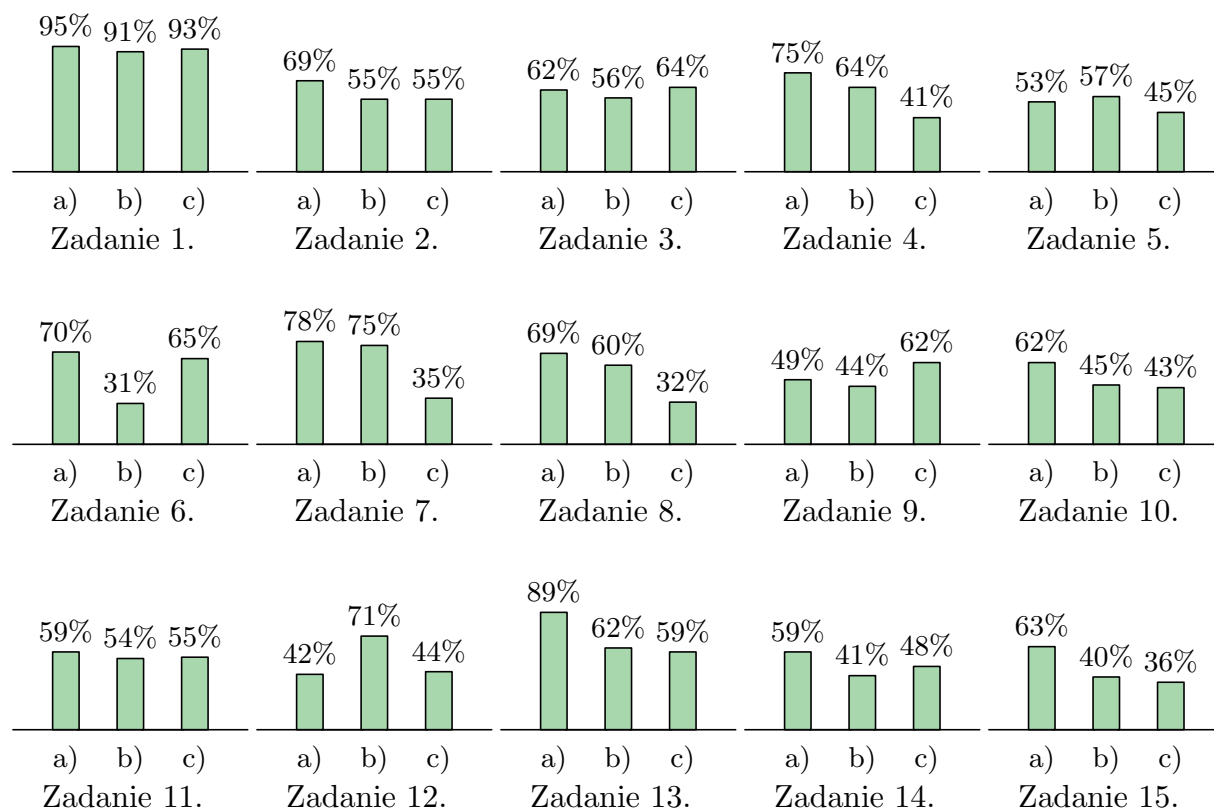
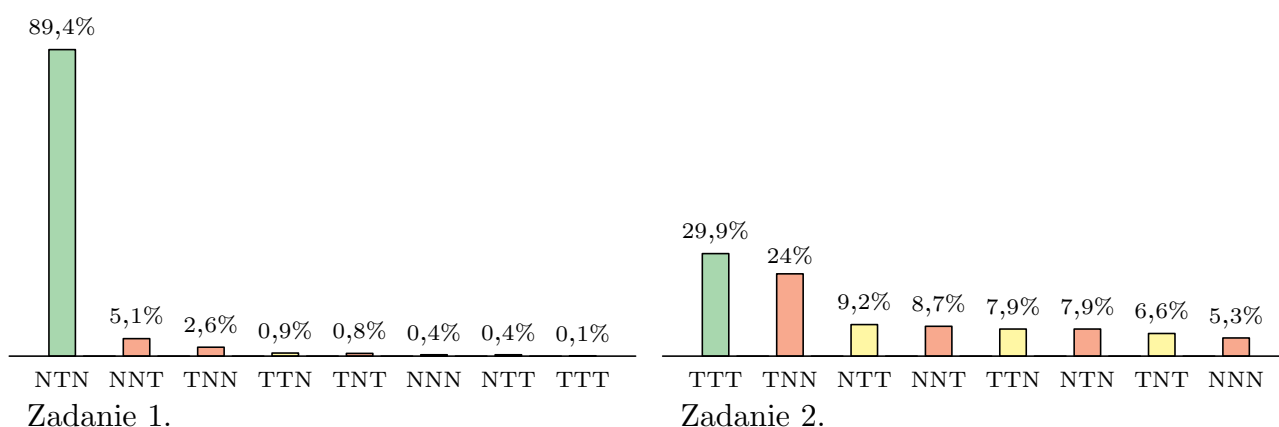
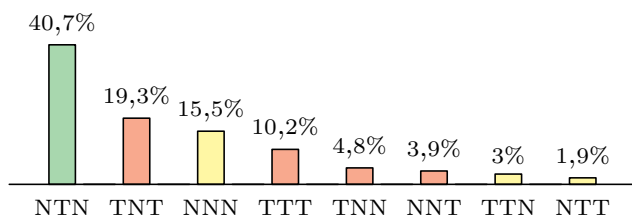


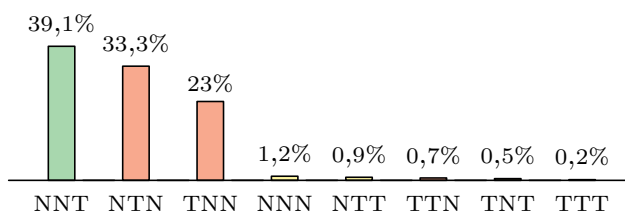
Tabela 2.

Procentowa liczba udzielonych kombinacji odpowiedzi w poszczególnych zadaniach.

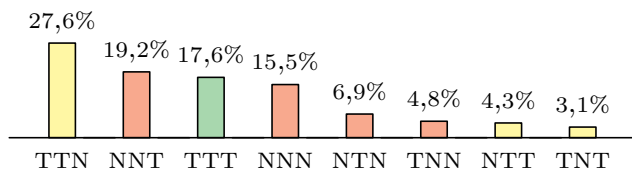




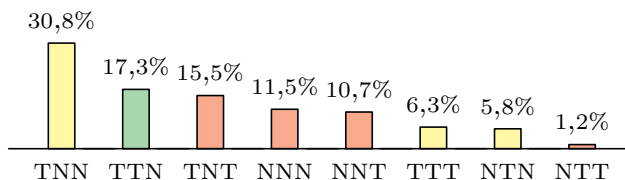
Zadanie 3.



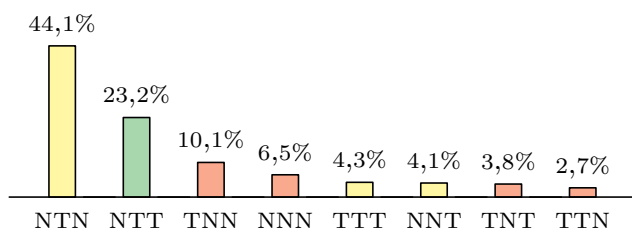
Zadanie 4.



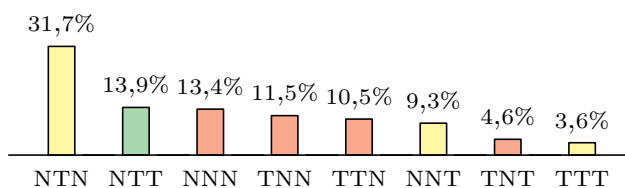
Zadanie 5.



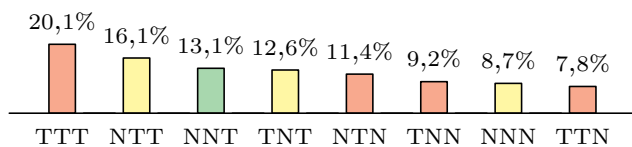
Zadanie 6.



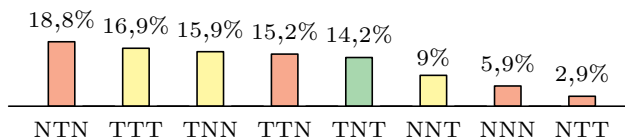
Zadanie 7.



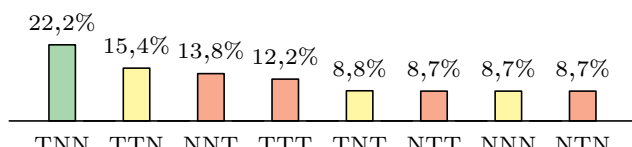
Zadanie 8.



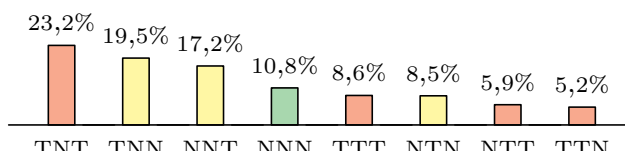
Zadanie 9.



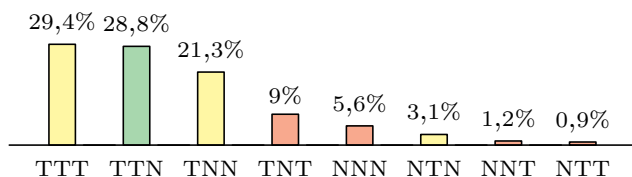
Zadanie 10.



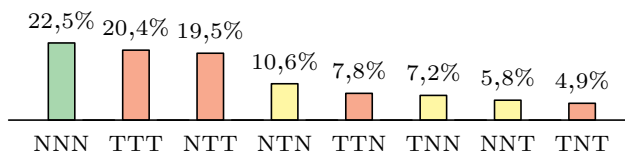
Zadanie 11.



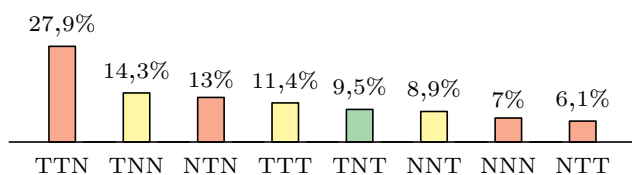
Zadanie 12.



Zadanie 13.



Zadanie 14.



Zadanie 15.

Zestaw odpowiedzi za:

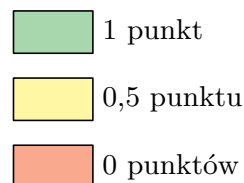


Tabela 3.

Rzeczywista oraz procentowa liczba osób, które uzyskały daną sumę punktów.



Tabela 4.

Procentowa i rzeczywista liczba osób, które uzyskały daną lub większą sumę punktów.

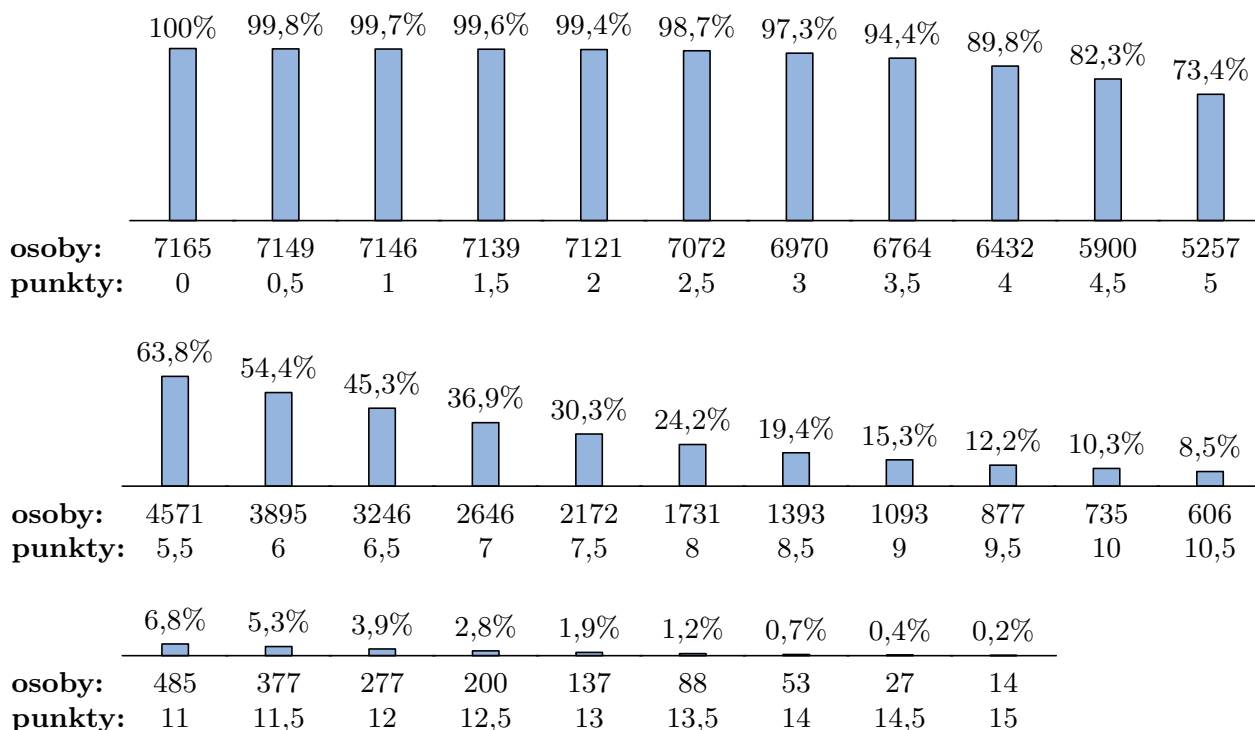
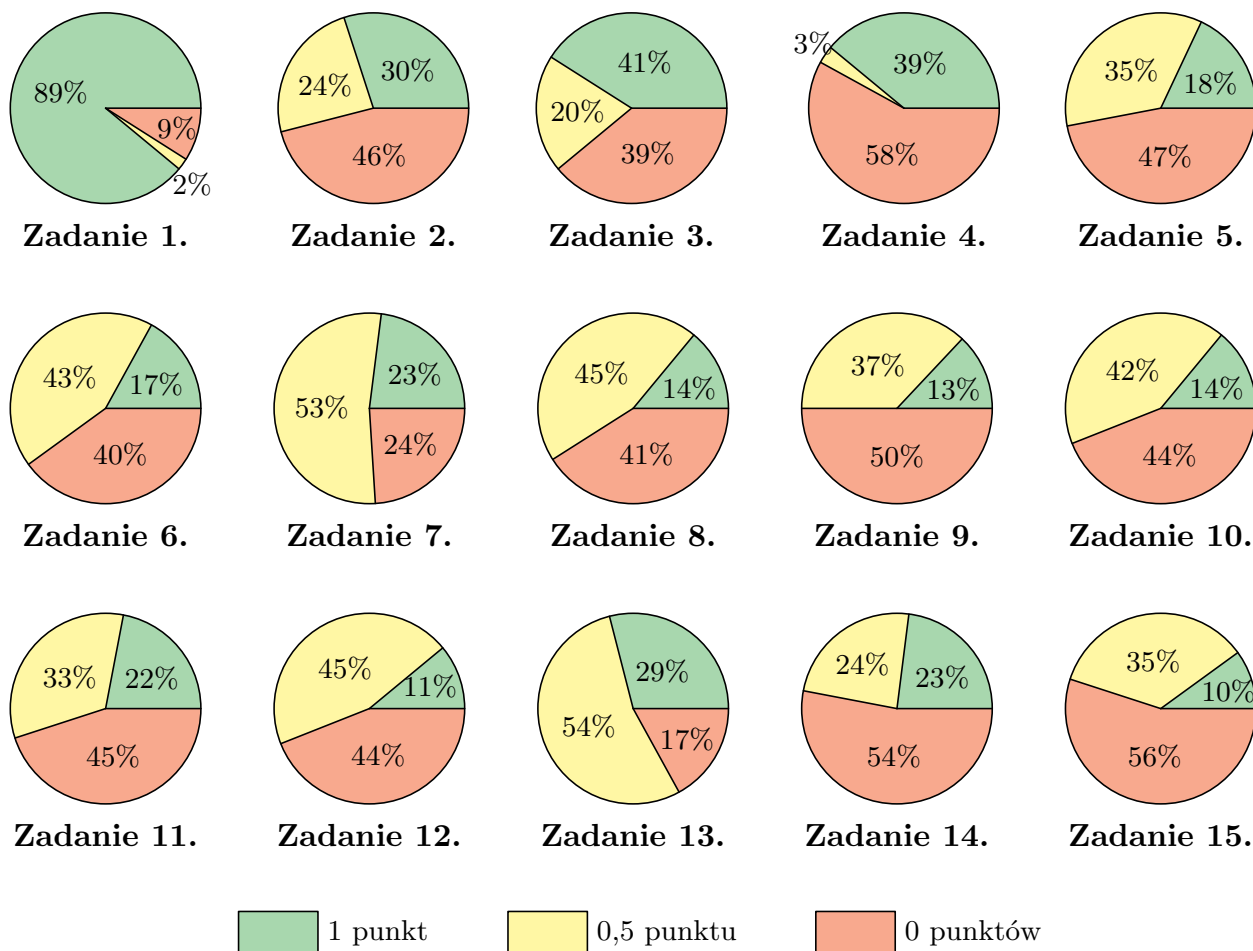
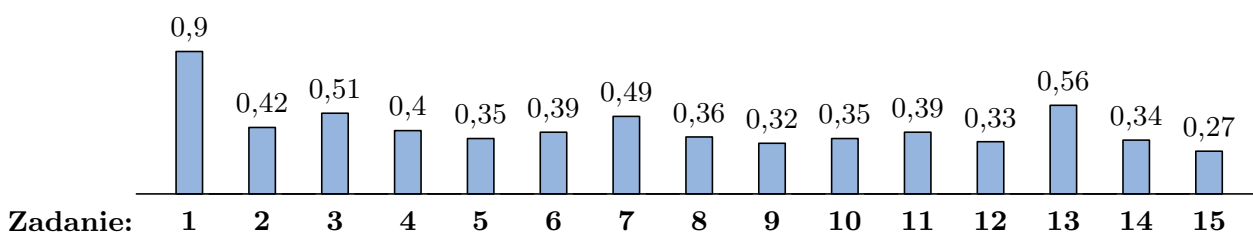


Tabela 5.

Procentowa liczba uzyskanych punktów za poszczególne zadania.

**Tabela 6.**

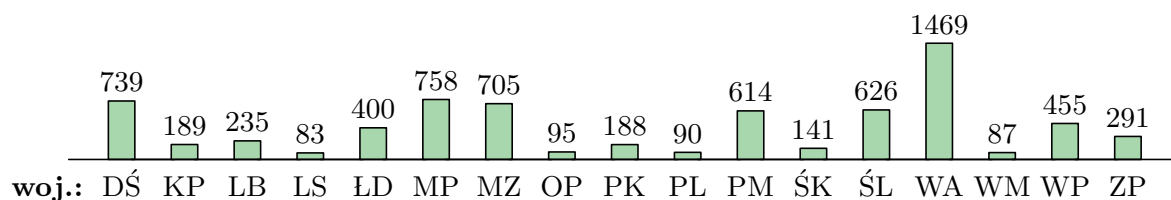
Średnia z uzyskanych punktów za poszczególne zadania.



Średni łączny wynik: 6,39

Tabela 7.

Liczba uczniów, którzy wzięli udział w zawodach w podziale na województwa.

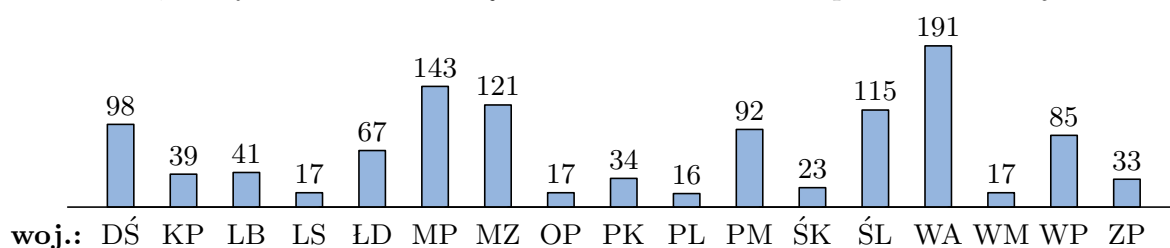


Łącznie: 7165

Na podstawie danych wprowadzonych przez szkoły. Ostateczne statystyki mogą ulec drobnym zmianom w wyniku weryfikacji nadesłanej dokumentacji.

Tabela 8.

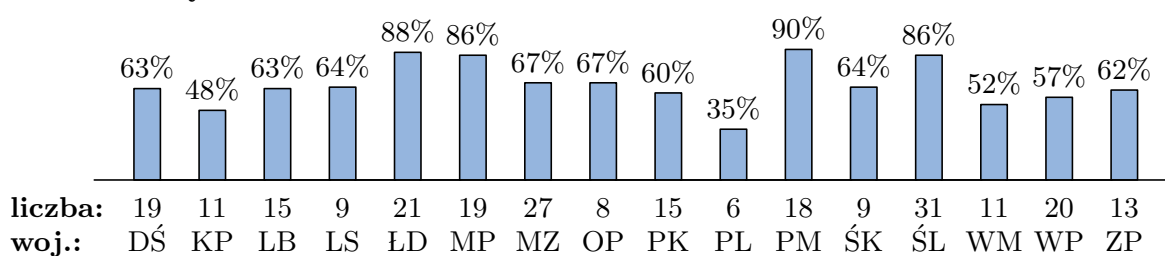
Liczba szkół, których uczniowie wzięli udział w zawodach w podziale na województwa.



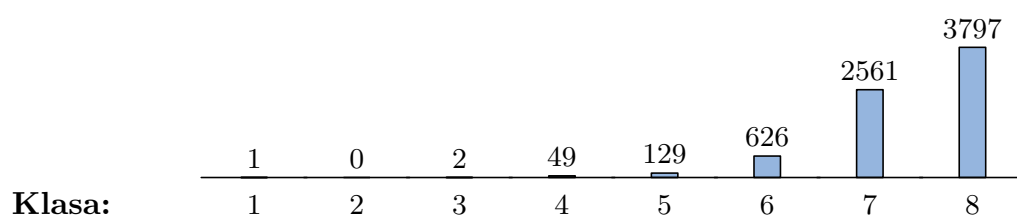
Łącznie: 1149

Tabela 9.

Rzeczywista i procentowa liczba powiatów w danym województwie, z których co najmniej jedna szkoła wzięła udział w zawodach.

**Tabela 10.**

Liczba uczniów biorących udział w teście w podziale na klasy.



Skróty województw i innych regionów

DŚ — dolnośląskie

LB — lubelskie

ŁD — łódzkie

MZ — mazowieckie bez m.st. Warszawy

PK — podkarpackie

PM — pomorskie

ŚL — śląskie

WM — warmińsko-mazurskie

ZP — zachodniopomorskie

KP — kujawsko-pomorskie

LS — lubuskie

MP — małopolskie

OP — opolskie

PL — podlaskie

ŚK — świętokrzyskie

WA — m.st. Warszawa

WP — wielkopolskie

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana
ze środków Ministerstwa Edukacji Narodowej



Stowarzyszenie
na rzecz Edukacji
Matematycznej

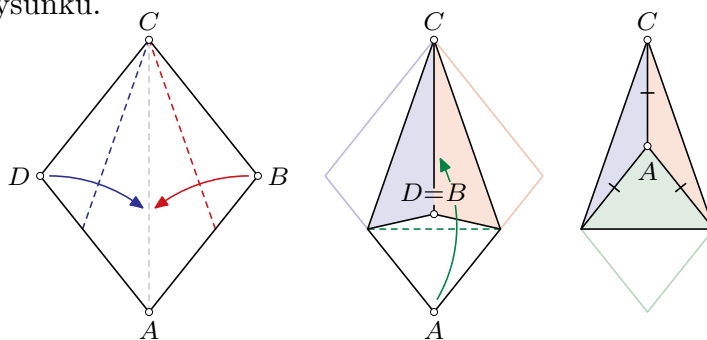


Ministerstwo
Edukacji Narodowej

1. Czy wewnątrz kwadratu o boku długości 20 istnieje punkt, którego odległości od boków tego kwadratu są czterema kolejnymi liczbami całkowitymi?

2. Arek ma kartkę w kształcie rombu $ABCD$, w którym $\angle BCD \leq 90^\circ$. Najpierw zagina ją w taki sposób, aby odcinki CB oraz CD pokryły się na prostej CA , a następnie w taki sposób, aby otrzymać trójkąt, jak pokazano na rysunku.

Udowodnij, że odległości punktu A od wszystkich trzech wierzchołków otrzymanego trójkąta są równe.



3. Czy istnieją takie liczby rzeczywiste a, b, c , że każda z liczb

$$|b - c|, \quad |c - a|, \quad |a - b|$$

jest większa od 1, ale mniejsza od 2?

4. Sto kamieni leży w jednym rzędzie. Wśród nich jest 50 kamieni czerwonych i 50 kamieni niebieskich. Wykaż, że można tak usunąć po 25 kamieni każdego koloru, aby pomiędzy dowolnymi dwoma kamieniami tego samego koloru nie pozostał ani jeden kamień innego koloru.

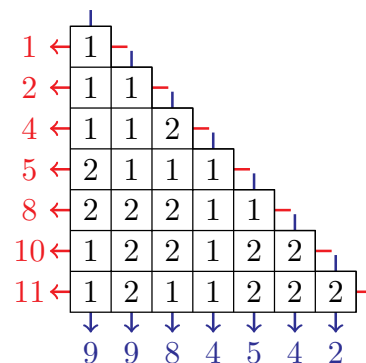
5. Liczby całkowite a, b, c są większe od 1 i mają tę własność, że liczby

$$a, \quad a + b, \quad a + b + c, \quad b + c, \quad c$$

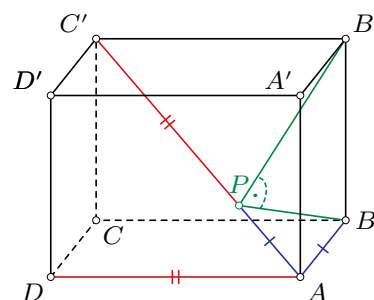
są pierwsze. Wykaż, że liczba b jest podzielna przez 3.

6. Z tablicy $n \times n$ usunięto pola znajdujące się w całości powyżej jednej z przekątnych, otrzymując schodkowy diagram. W każde pole diagramu należy wpisać jedną z liczb 1 lub 2. Wyznacz wszystkie liczby całkowite $n \geq 2$, dla których można to zrobić w taki sposób, aby pośród $2n$ sum liczb w wierszach i kolumnach nie było dwóch równych liczb.

Rysunek przedstawia przykładowe wypełnienie diagramu dla $n = 7$ oraz rozważane $2n$ sum liczb w wierszach i kolumnach.



7. Dany jest prostopadłościan $ABCD A' B' C' D'$ o wierzchołkach oznaczonych jak na rysunku, w którym $AC' = AB + AD$. Niech P będzie takim punktem na odcinku AC' , że $AP = AB$ oraz $C'P = AD$. Udowodnij, że $\angle B P B' = 90^\circ$.



Rozwiązania powyższych zadań (wszystkich lub części z nich) należy przekazać szkolnemu koordynatorowi OMJ lub przesyłać bezpośrednio, listem poleconym, do Komitetu Okręgowego OMJ właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

22 października 2024 r. (decyduje data stempla pocztowego).

Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym lub pod niewłaściwy adres nie będą rozpatrywane. Adresy Komitetów Okręgowych OMJ, szczegółowe wytyczne dotyczące sposobu redakcji rozwiązań i przysyłania prac, a także regulamin OMJ i inne bieżące informacje znajdują się na stronie internetowej Olimpiady: www.omj.edu.pl.

XX Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody pierwszego stopnia (1 września – 22 października 2024 r.)

Rozwiązania zadań konkursowych

1. Czy wewnątrz kwadratu o boku długości 20 istnieje punkt, którego odległości od boków tego kwadratu są czterema kolejnymi liczbami całkowitymi?

Rozwiązanie

Odpowiedź: Taki punkt nie istnieje.

Sposób I

Zauważmy, że suma odległości dowolnego punktu leżącego wewnątrz kwadratu od pary jego przeciwległych boków jest równa 20. Wobec tego suma wszystkich czterech odległości od boków kwadratu jest równa 40, niezależnie od położenia punktu wewnątrz kwadratu.

Jeżeli odległości pewnego punktu od boków kwadratu są równe $n, n+1, n+2, n+3$, to ich suma jest równa $4n+6$. Jednak równość $4n+6=40$ prowadzi do wniosku, że $4n=34$, czyli $n=8,5$, a ta liczba nie jest całkowita. To oznacza, że nie istnieje punkt spełniający warunki zadania.

Sposób II

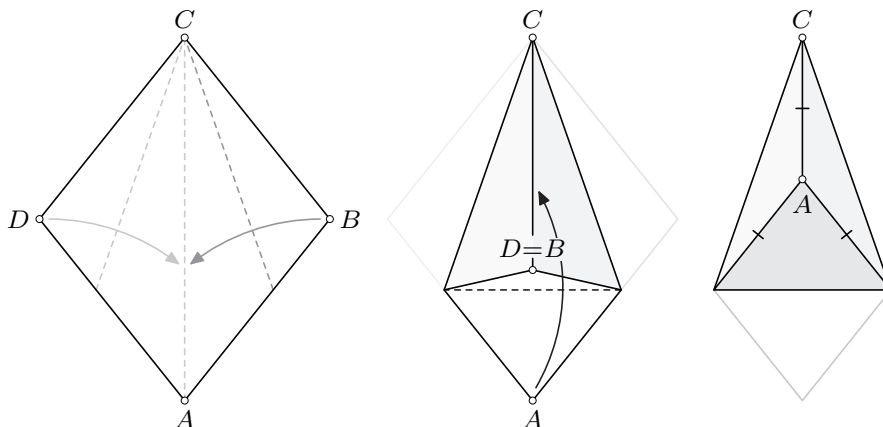
Podobnie jak w pierwszym sposobie zauważamy, że suma odległości każdego punktu wewnątrz kwadratu od boków tego kwadratu jest równa 40.

Suma czterech kolejnych liczb całkowitych jest tym większa, im większa jest najmniejsza z nich. Ponadto

$$8+9+10+11=38 < 40 < 42=9+10+11+12.$$

To oznacza, że suma czterech kolejnych liczb całkowitych nigdy nie jest równa 40, czyli nie istnieje punkt spełniający warunki zadania.

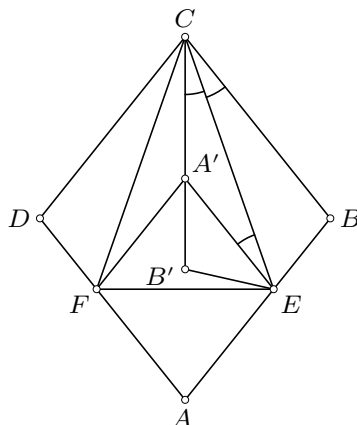
2. Arek ma kartkę w kształcie rombu $ABCD$, w którym $\angle BCD \leq 90^\circ$. Najpierw zagina ją w taki sposób, aby odcinki CB oraz CD pokryły się na prostej CA , a następnie w taki sposób, aby otrzymać trójkąt, jak pokazano na rysunku.



Udowodnij, że odległości punktu A od wszystkich trzech wierzchołków otrzymanego trójkąta są równe.

Rozwiązanie

Oznaczmy dwa pozostałe wierzchołki uzyskanego trójkąta przez E i F , jak pokazano na rysunku 1. W celu uniknięcia niejednoznaczności, pozostaniemy przy oznaczeniach A, B, C, D dla wierzchołków wyjściowego rombu, a położenia punktów A, B, D po wykonaniu opisanych zagięć oznaczmy odpowiednio przez A', B', B' .



rys. 1

Sposób I

Ponieważ trójkąty BCE oraz $B'CE$ są przystające, więc $\sphericalangle BCE = \sphericalangle B'CE$. Ponieważ czworokąty $AEA'F$ oraz $ABCD$ są rombami, więc proste $A'E$ i BC są równoległe i w konsekwencji $\sphericalangle A'EC = \sphericalangle BCE$. Łącząc te dwie równości, otrzymujemy $\sphericalangle A'EC = \sphericalangle A'CE$, co oznacza, że trójkąt $A'CE$ jest równoramienny i $A'E = A'C$.

W pełni analogicznie (konfiguracja jest symetryczna względem prostej AC) uzasadniamy, że $A'F = A'C$.

Sposób II

Z symetrii konstrukcji opisanej w treści zadania wynika, że trójkąty $A'EF$ oraz CEF są równoramienne. Ponadto

$$\sphericalangle EA'F = \sphericalangle EAF = \sphericalangle BCD = 2\sphericalangle ECF.$$

Rozważmy okrąg ω o środku A' i promieniu $A'E = A'F$. Uzyskana równość $\sphericalangle ECF = \frac{1}{2}\sphericalangle EA'F$ w połączeniu z faktem, że punkty A' i C leżą po tej samej stronie prostej EF oznacza, że kąt ECF jest wpisany w okrąg ω . W szczególności punkt C leży na okręgu ω , czyli $A'C = A'E = A'F$, co było do udowodnienia.

Uwaga

W opisanej konfiguracji również odległości B' od wierzchołków trójkąta $A'EF$ są równe.

3. Czy istnieją takie liczby rzeczywiste a, b, c , że każda z liczb

$$|b - c|, \quad |c - a|, \quad |a - b|$$

jest większa od 1, ale mniejsza od 2?

Rozwiązanie

Odpowiedź: Takie liczby a, b, c nie istnieją.

Sposób I

Zauważmy, że jeśli liczby spełniające warunki zadania istnieją, to żadne dwie z nich nie są równe (gdyż wówczas jedna z liczb $|b - c|, |c - a|, |a - b|$ byłaby równa 0).

Rozważmy dowolne trzy różne liczby rzeczywiste a, b, c i zaznaczmy odpowiadające im punkty na osi liczbowej. Pewien z tych punktów leży na odcinku o końcach w pozostałych dwóch — suma odległości tego punktu od końców odcinka jest równa długości całego odcinka. Innymi słowy, pośród liczb $|b - c|, |c - a|, |a - b|$, czyli odległości pomiędzy parami punktów, jedna jest równa sumie pozostałych dwóch. To oznacza, że nie istnieją liczby a, b, c spełniające warunki zadania, gdyż suma dwóch liczb większych od 1 nie jest mniejsza od 2.

Sposób II

Przypuśćmy, że takie liczby a, b, c istnieją. Załóżmy, że $a \leq b \leq c$ — w każdym innym przypadku rozwiązanie będzie przebiegało analogicznie, gdyż warunki zadania są symetryczne ze względu na a, b, c , tzn. nie zmieniają się w wyniku zamiany nazw tych niewiadomych. Otrzymujemy wówczas sprzeczność postaci

$$2 > |c - a| = c - a = (c - b) + (b - a) = |b - c| + |a - b| > 1 + 1 = 2.$$

To oznacza, że nie istnieją liczby spełniające warunki zadania.

4. Sto kamieni leży w jednym rzędzie. Wśród nich jest 50 kamieni czerwonych i 50 kamieni niebieskich. Wykaż, że można tak usunąć po 25 kamieni każdego koloru, aby pomiędzy dowolnymi dwoma kamieniami tego samego koloru nie pozostał ani jeden kamień innego koloru.

Rozwiązanie

Sposób I

Podzielmy rząd kamieni na dwie równe części (po 50 kolejnych kamieni), które nazwiemy lewą i prawą połową. Niech ℓ oznacza liczbę kamieni czerwonych należących do lewej połowy. Wówczas liczba kamieni czerwonych należących do prawej połowy to $50 - \ell$. Liczby kamieni niebieskich należących do lewej i prawej połowy są odpowiednio równe $50 - \ell$ oraz ℓ .

Jeżeli $\ell \leq 25$, to usuwając wszystkie czerwone kamienie z lewej połowy oraz wszystkie niebieskie kamienie z prawej połowy, doprowadzimy do sytuacji, w której po usunięciu co najwyżej 50 kamieni wszystkie kamienie lewej połowy będą niebieskie, a wszystkie kamienie prawej połowy będą czerwone. Usuwając dodatkowo dowolnie po $25 - \ell$ kamieni każdego koloru, uzyskujemy sytuację opisaną w treści zadania.

Podobnie jeżeli $\ell > 25$, to usuwając wszystkie niebieskie kamienie z lewej połowy, wszystkie czerwone kamienie z prawej połowy i dowolne kamienie (tak, aby łącznie usunąć po 25 każdego koloru), również uzyskamy odpowiednie ułożenie.

Sposób II

Podobnie jak w poprzednim sposobie załóżmy, że kamienie ułożone są od lewej do prawej. Oznaczmy kolejne czerwone kamienie (od lewej do prawej) przez $C_1, C_2, \dots, C_{50}$, a kolejne niebieskie kamienie — przez $N_1, N_2, \dots, N_{50}$.

Jeżeli kamień C_{25} leży na lewo od kamienia N_{26} , to aby spełnić warunki zadania, wystarczy usunąć wszystkie kamienie czerwone o numerach większych od 25 oraz wszystkie kamienie niebieskie o numerach mniejszych od 26, czyli pozostawić kamienie ułożone następująco:

$$C_1, C_2, C_3, \dots, C_{25}, N_{26}, N_{27}, N_{28}, \dots, N_{50}.$$

Jeżeli kamień C_{25} leży na prawo od kamienia N_{26} , to również kamień C_{26} (leżący na prawo od C_{25}) leży na prawo od kamienia N_{25} (leżącego na lewo od kamienia N_{26}). W tym wypadku wystarczy usunąć kamienie czerwone o numerach mniejszych od 26 oraz kamienie niebieskie o numerach większych od 25, czyli pozostawić kamienie ułożone w następujący sposób:

$$N_1, N_2, N_3, \dots, N_{25}, C_{26}, C_{27}, C_{28}, \dots, C_{50}.$$

5. Liczby całkowite a, b, c są większe od 1 i mają tę własność, że liczby

$$a, \quad a+b, \quad a+b+c, \quad b+c, \quad c$$

są pierwsze. Wykaż, że liczba b jest podzielna przez 3.

Rozwiązanie

Sposób I

Skoro liczby a, b, c są większe od 1, to liczby $a+b, a+b+c, b+c$ są większe od 2. Ponieważ liczby te są pierwsze i większe od 2, więc są nieparzyste. Stąd wynika, że liczby

$$(a+b+c) - (b+c) = a \quad \text{oraz} \quad (a+b+c) - (a+b) = c$$

są parzyste, jako różnice liczb nieparzystych. Jedyną parzystą liczbą pierwszą jest 2, więc $a = c = 2$.

Z warunków zadania wynika więc, że liczby $b+2$ oraz $b+4$ są pierwsze. Gdyby liczba b dawała resztę 1 przy dzieleniu przez 3, to liczba $b+2$ byłaby podzielna przez 3 i jednocześnie większa od 3 — nie mogłaby więc być pierwszą. Podobnie gdyby liczba b dawała resztę 2 przy dzieleniu przez 3, to liczba $b+4$ byłaby podzielna przez 3 i większa od 3, czyli byłaby złożona. To oznacza, że liczba b jest podzielna przez 3, co było do udowodnienia.

Sposób II

Z warunków zadania wynika, że liczba pierwsza $a+b+c$ posiada następujące przedstawienia w postaci sumy dwóch liczb pierwszych

$$(a+b) + c = a + (b+c).$$

Suma dwóch liczb pierwszych nieparzystych jest liczbą parzystą większą od 2, a więc liczbą złożoną. To oznacza, że w każdej z par $a+b, c$ oraz $a, b+c$ jedna z liczb jest równa 2. Skoro $a+b > 2$ oraz $b+c > 2$, to $a = c = 2$.

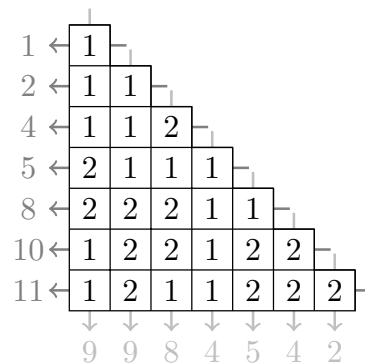
Przyjmijmy oznaczenie $a+b=p$. Z warunków zadania wynika, że liczby p oraz $p+2$ są pierwsze oraz $p \geq 4$ (gdyż $a \geq 2$ oraz $b \geq 2$). Zauważmy, że $p, p+1, p+2$ to trzy kolejne liczby całkowite, więc jedna z nich jest podzielna przez 3. Liczby $p, p+2$ nie są podzielne przez 3, gdyż są to liczby pierwsze większe od 3. Wobec tego liczba $p+1$ jest podzielna przez 3. W konsekwencji również liczba

$$(p+1) - 3 = p - 2 = b$$

jest podzielna przez 3.

6. Z tablicy $n \times n$ usunięto pola znajdujące się w całości powyżej jednej z przekątnych, otrzymując schodkowy diagram. W każde pole diagramu należy wpisać jedną z liczb 1 lub 2. Wyznacz wszystkie liczby całkowite $n \geq 2$, dla których można to zrobić w taki sposób, aby pośród $2n$ sum liczb w wierszach i kolumnach nie było dwóch równych liczb.

Rysunek przedstawia przykładowe wypełnienie diagramu dla $n = 7$ oraz rozważane $2n$ sum liczb w wierszach i kolumnach.



Rozwiązanie

Odpowiedź: Wszystkie $n \geq 2$, które są liczbami parzystymi.

Sposób I

Przypuśćmy, że wypełnienie diagramu spełnia warunki zadania dla pewnego n . Największą możliwą do uzyskania sumą liczb w wierszu lub kolumnie jest $2n$, a najmniejszą jest 1. Jest zatem tylko $2n$ całkowitych wartości, które mogą przyjmować określone w zadaniu sumy. Skoro żadne dwie nie są równe, to każda z liczb $1, 2, 3, \dots, 2n$ pojawia się dokładnie jeden raz jako suma w wierszu lub kolumnie.

Rozważmy sumę $2n$ sum zdefiniowanych w treści zadania. Z jednej strony wynik jest liczbą parzystą, bo jest dwukrotnością sumy wszystkich liczb wpisanych w pola diagramu. Z drugiej strony, jest równy

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \dots + (2n-1) + 2n &= (1+2n) + (2+(2n-1)) + (3+(2n-2)) + \dots + (n+(n+1)) = \\ &= (2n+1) + (2n+1) + (2n+1) + \dots + (2n+1) = n(2n+1). \end{aligned}$$

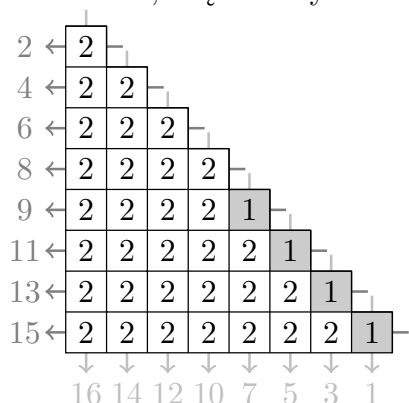
Ponieważ $2n+1$ jest liczbą nieparzystą, więc liczba $n(2n+1)$ jest parzysta dokładnie wtedy, gdy n jest liczbą parzystą. To oznacza, że dla n nieparzystych nie jest możliwe wypełnienie diagramu zgodnie z warunkami zadania.

Pozostaje uzasadnić, że jeśli n jest liczbą parzystą, to wypełnienie diagramu zgodnie z warunkami zadania jest możliwe. Niech $n=2k$, gdzie k jest dodatnią liczbą całkowitą. Wyróżnijmy dolną połowę pól najdłuższej przekątnej diagramu (rys. 2) i rozważmy wypełnienie diagramu, w którym w wyróżnione pola wpisana jest liczba 1, a we wszystkie pozostałe — liczba 2. Uzasadnimy, że to wypełnienie spełnia warunki zadania, co zakończy rozwiązanie.

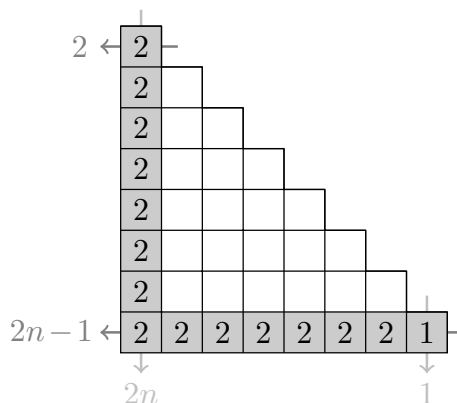
W rozważanym wypełnieniu sumy liczb w k pierwszych (licząc od góry) wierszach diagramu są równe $2, 4, 6, \dots, 2k-2, 2k$, a sumy liczb w k pierwszych (licząc od lewej) kolumnach diagramu są równe $4k, 4k-2, 4k-4, \dots, 2k+4, 2k+2$. Pośród wymienionych $2k$ sum pojawiają się wszystkie liczby parzyste z zakresu od 1 do $4k$.

Z kolei sumy w k ostatnich kolumnach diagramu są równe $2k-1, 2k-3, 2k-5, \dots, 3, 1$, a sumy w k ostatnich wierszach diagramu są równe $2k+1, 2k+3, 2k+5, \dots, 4k-3, 4k-1$. Łącznie pośród wymienionych $2k$ sum pojawiają się wszystkie liczby nieparzyste z zakresu od 1 do $4k$.

W opisanym wypełnieniu diagramu każda liczba całkowita od 1 do $4k=2n$ pojawia się jako suma dokładnie raz, więc rzeczywiście spełnia ono warunki zadania.



rys. 2



rys. 3

Sposób II

Podobnie jak w poprzednim sposobie zauważamy, że jeśli wypełnienie spełnia warunki zadania, to każda z liczb $1, 2, 3, \dots, 2n$ pojawia się jako wartość sumy dokładnie raz.

Założmy, że pewna liczba n oraz pewne wypełnienie diagramu spełniają warunki zadania.

Zauważmy, że suma co najwyżej $n-1$ składników równych 1 lub 2 jest równa co najwyżej $2n-2$. To oznacza, że sumy $2n-1$ oraz $2n$ można uzyskać wyłącznie w rzędach składających się z n pól — czyli pierwszej kolumnie i ostatnim wierszu diagramu. W konsekwencji łącznie pierwsza (licząc od lewej) kolumna i ostatni (licząc od góry) wiersz diagramu zawierają dokładnie jedną liczbę 1.

Rozważmy lewe górne oraz prawe dolne pole diagramu. Gdyby w obydwie te pola wpisana została liczba 2, to pierwszy wiersz diagramu oraz ostatnia kolumna diagramu miałyby tę samą sumę wpisanych liczb — równą 2. To oznacza, że wspomniana (jedyna) liczba 1 znajdująca się w pierwszej kolumnie lub ostatnim wierszu znajduje się w jednym z tych dwóch pól (a w drugim z nich znajduje się 2). W szczególności oznacza to, że wspomniane pola są różne, czyli $n \neq 1$. Ponieważ zamiana miejscami liczb w tych dwóch polach nie wpływa na sumy liczb w pozostałych rzędach, możemy założyć, że liczba 1 znajduje się w ostatnim polu dolnego wiersza.

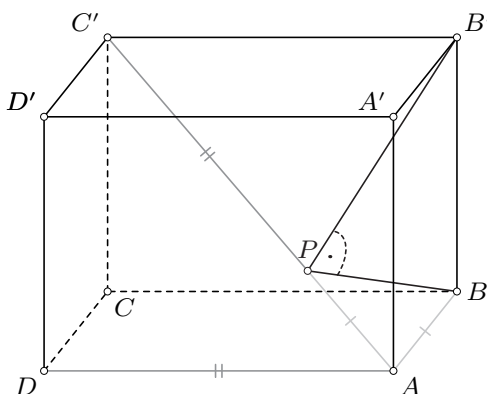
Do wypełnienia pozostały $n-2$ wiersze oraz $n-2$ kolumny diagramu — w każdym z tych rzędów znajduje się już po jednej liczbie 2, a do uzyskania pozostały wszystkie całkowite sumy od 3 do $2n-2$. W istocie więc do wypełnienia pozostał analogiczny diagram o $n-2$ wierszach i $n-2$ kolumnach, w którym każdą z sum od 1 do $2(n-2)$ chcemy uzyskać dokładnie raz (rys. 3). Innymi słowy, wypełnienie diagramu o boku n jest możliwe dokładnie wtedy, gdy jest możliwe wypełnienie diagramu o boku $n-2$.

Jeżeli n jest liczbą parzystą, to stosując wielokrotnie analogiczne rozumowanie, uzyskujemy wypełnienie spełniające warunki zadania (to samo, co w poprzednim sposobie). Jeśli zaś n jest liczbą nieparzystą, to w wyniku opisanych redukcji dochodzimy do problemu wypełnienia diagramu o jednym polu, co jest niemożliwe — dla n nieparzystych nie jest więc możliwe wypełnienie diagramu zgodnie z warunkami zadania.

Uwaga

Rozumowanie przeprowadzone w drugim sposobie rozwiązania pozwala scharakteryzować wszystkie poprawne wypełnienia diagramu w przypadku, gdy n jest liczbą parzystą. Są to te wypełnienia, w których wszystkie liczby wpisane poza przekątną są równe 2, a w polach na przekątnej znajduje się po $\frac{n}{2}$ dwójek i jedynek, przy czym dla $i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2}$ w kolumnie i -tej od lewej znajduje się inna liczba niż w wierszu i -tym od dołu.

7. Dany jest prostopadłościan $ABCD A' B' C' D'$ o wierzchołkach oznaczonych jak na rysunku, w którym $AC' = AB + AD$. Niech P będzie takim punktem na odcinku AC' , że $AP = AB$ oraz $C'P = AD$. Udowodnij, że $\angle BPB' = 90^\circ$.



Rozwiązanie

Sposób I

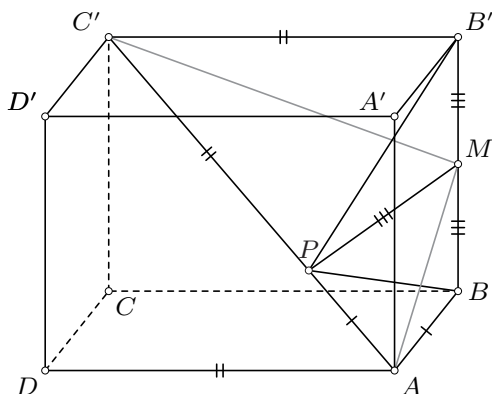
Oznaczmy przez M punkt przecięcia płaszczyzny prostopadłej do odcinka AC' przechodzącej przez punkt P z prostą BB' (rys. 4). Ponieważ $\sphericalangle MPA = \sphericalangle MBA = 90^\circ$ oraz $AP = AB$, więc na mocy twierdzenia Pitagorasa

$$MP^2 = MA^2 - AP^2 = MA^2 - AB^2 = MB^2, \quad \text{skąd} \quad MP = MB.$$

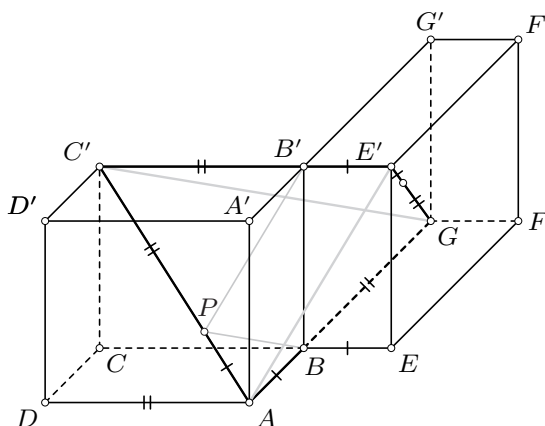
Podobnie, skoro $\sphericalangle MPC' = \sphericalangle MB'C' = 90^\circ$ oraz $PC' = B'C'$, to

$$MP^2 = MC'^2 - PC'^2 = MC'^2 - B'C'^2 = MB'^2, \quad \text{skąd} \quad MP = MB'.$$

Uzyskane równości $MP = MB = MB'$ oznaczają, że punkt M jest środkiem odcinka BB' , a trójkąt BPB' jest prostokątny i $\sphericalangle BPB' = 90^\circ$.



rys. 4



rys. 5

Sposób II

Niech E będzie takim punktem leżącym na półprostej $CB^{\rightarrow}$, że $BE = AB$, a G — takim punktem leżącym na półprostej $AB^{\rightarrow}$, że $BG = AD$ (rys. 5). Niech ponadto F będzie takim punktem, że czworokąt $BEFG$ jest prostokątem, a punkty E', F', G' — takie, że odcinki BB', EE', FF', GG' są równe i równoległe.

W ten sposób uzyskaliśmy prostopadłościan $BEFGB'E'F'G'$ przystający do danego w treści zadania (gdyż ma jednakowe wymiary). Zauważmy, że

$$AC' = C'E' = E'G = GA,$$

skąd wniosek, że proste AE' oraz GC' są prostopadłe (punkty C' oraz G są jednakowo oddalone od końców odcinka AE' , więc leżą na jego płaszczyźnie symetralnej).

Do zakończenia rozwiązania pozostaje zauważyć, że $PB' \parallel AE'$ (trójkąty równoramienne $PB'C'$ oraz $AE'C'$ mają wspólny kąt między ramionami) oraz $BP \parallel GC'$ (trójkąty równoramienne PAB oraz $C'AG$ mają wspólny kąt między ramionami).

Uwaga

Można obliczyć, że przy oznaczeniach $a = AB = AP$ oraz $b = AD = PC'$, zachodzą równości

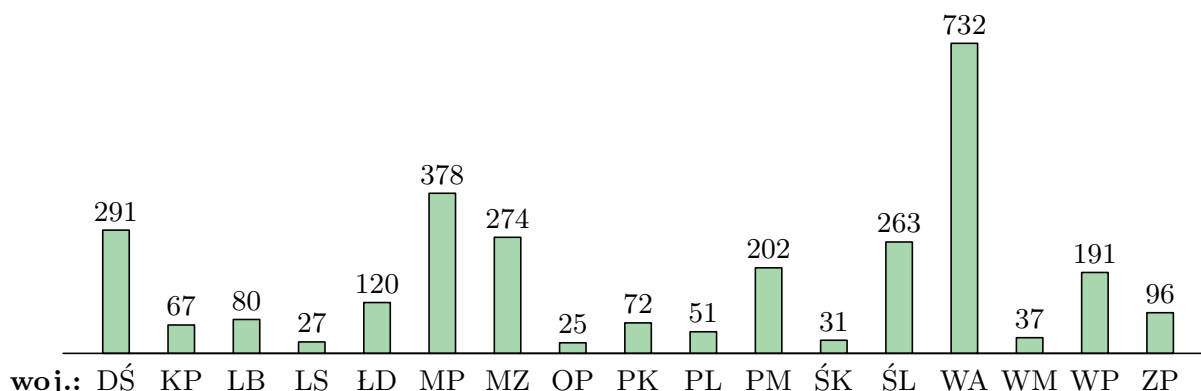
$$BB'^2 = 2ab, \quad BP^2 = \frac{a}{a+b} \cdot 2ab, \quad B'P^2 = \frac{b}{a+b} \cdot 2ab.$$

Skoro $BB'^2 = BP^2 + B'P^2$, to teza zadania wynika z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa.

XX Olimpiada Matematyczna Juniorów

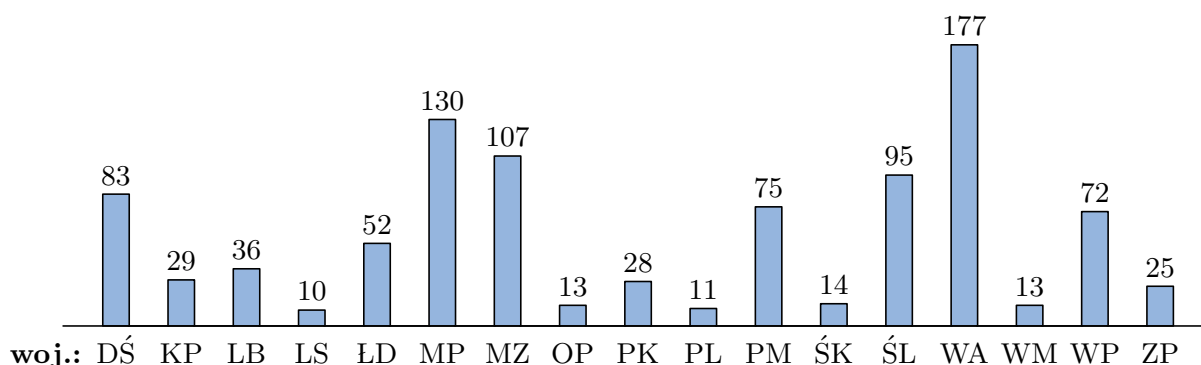
Statystyki dotyczące części korespondencyjnej
zawodów pierwszego stopnia (2024/25)

Tabela 1. Liczba uczniów, którzy wzięli udział w zawodach w podziale na województwa i inne regiony.



Łączna liczba uczniów, którzy wzięli udział w zawodach: 2937

Tabela 2. Liczba szkół uczniów, którzy wzięli udział w zawodach w podziale na województwa i inne regiony.



Łączna liczba szkół uczniów, którzy wzięli udział w zawodach: 970

Skróty województw i innych regionów

DŚ — dolnośląskie

LB — lubelskie

ŁD — łódzkie

MZ — mazowieckie bez m.st. Warszawy

PK — podkarpackie

PM — pomorskie

ŚL — śląskie

WM — warmińsko-mazurskie

ZP — zachodniopomorskie

KP — kujawsko-pomorskie

LS — lubuskie

MP — małopolskie

OP — opolskie

PL — podlaskie

ŚK — świętokrzyskie

WA — m.st. Warszawa

WP — wielkopolskie

Tabela 3. Procentowa i rzeczywista liczba osób, które uzyskały daną sumę punktów.

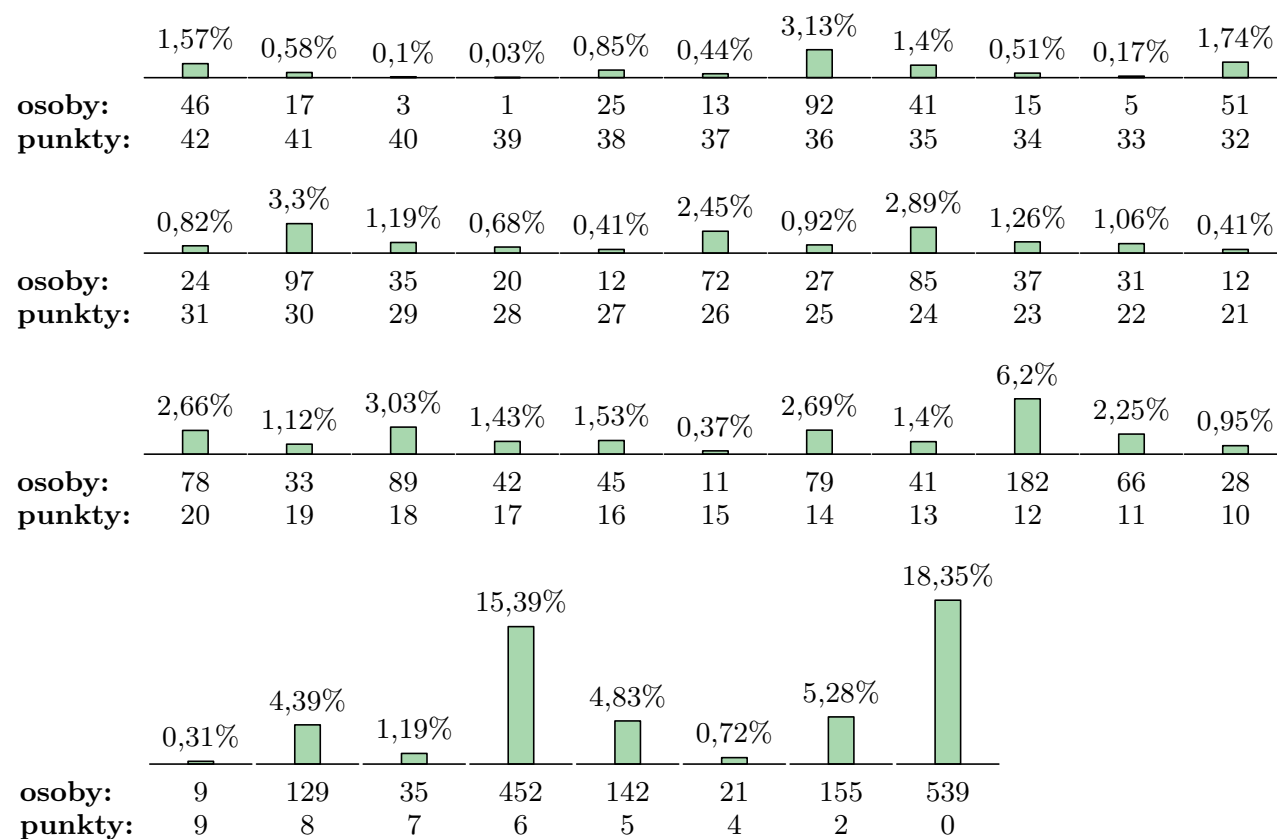


Tabela 4. Procentowa i rzeczywista liczba osób, które uzyskały daną lub większą sumę punktów.

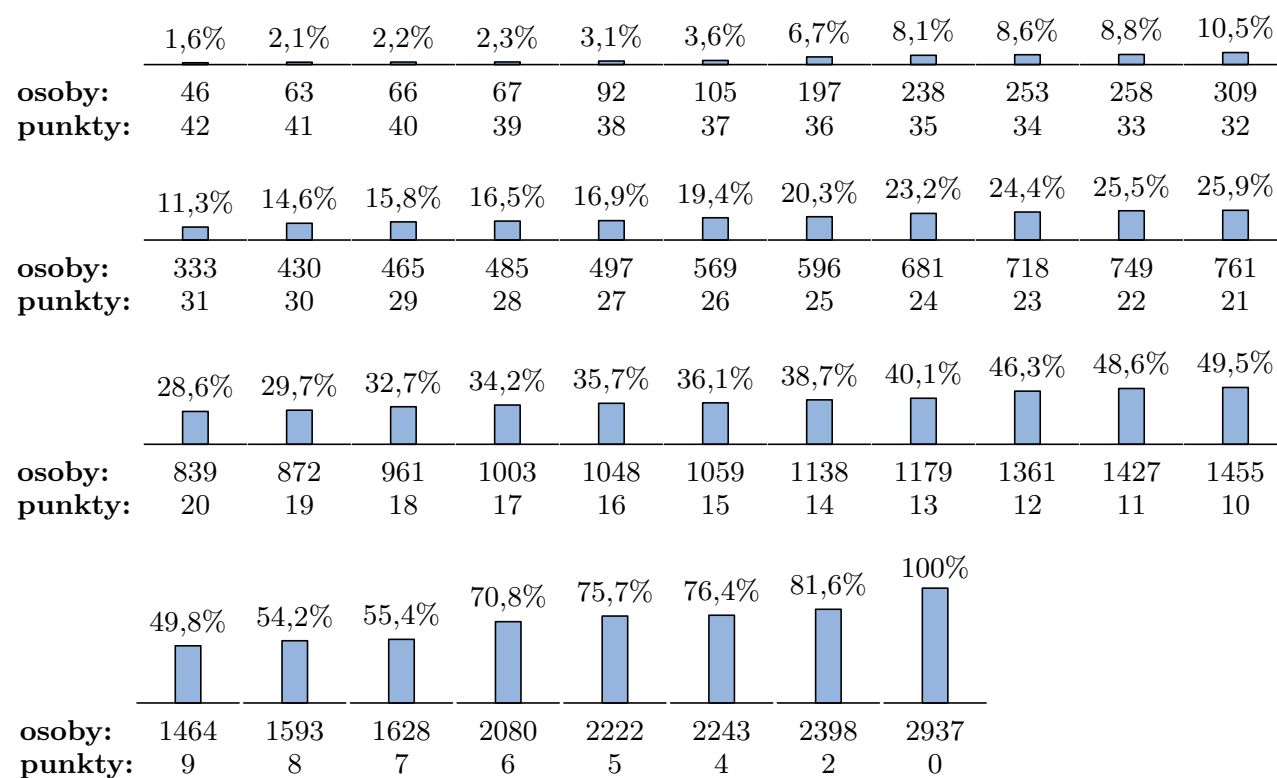


Tabela 5. Procentowa liczba osób, które uzyskały daną liczbę punktów za poszczególne zadania (dotyczy nadesłanych prac).

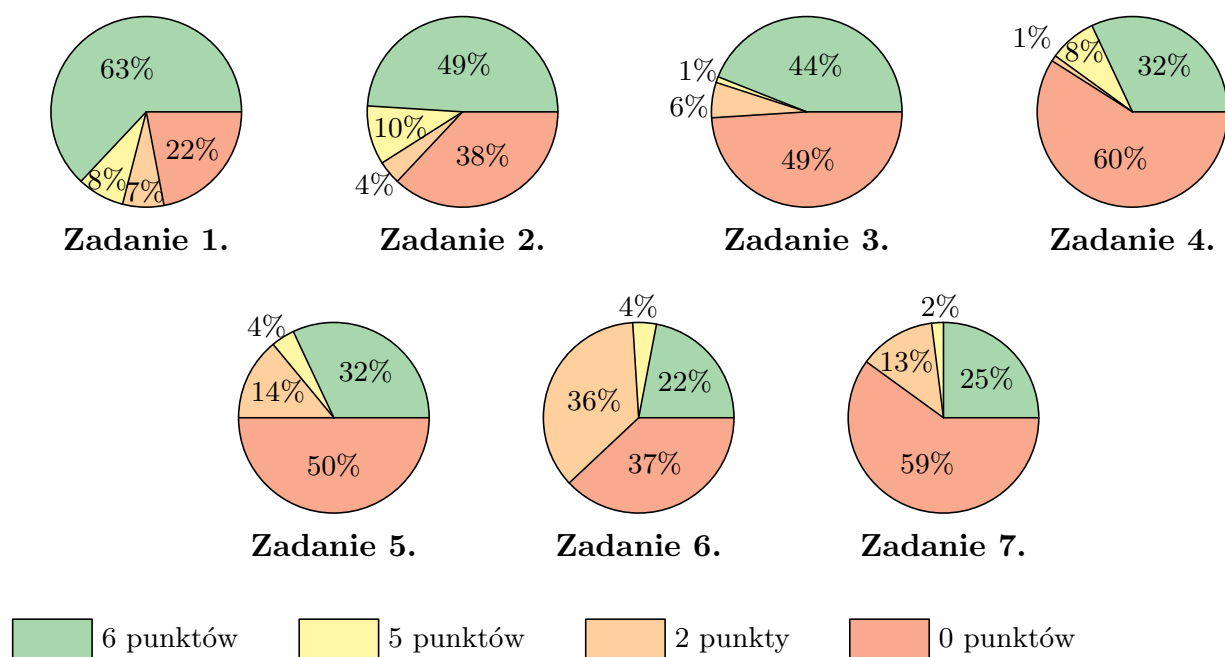


Tabela 6. Średnia uzyskanych punktów za poszczególne zadania (dotyczy nadesłanych prac).

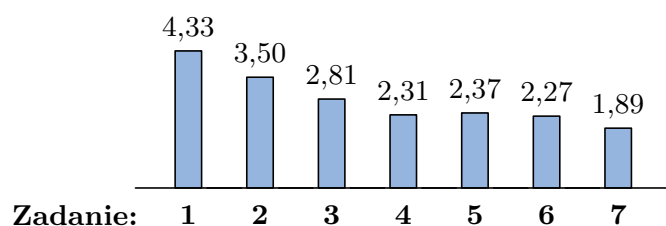


Tabela 7. Liczba nadesłanych prac dotyczących poszczególnych zadań.

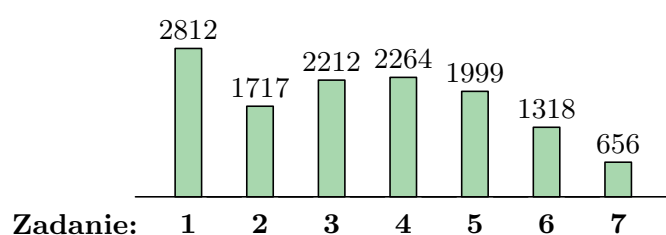
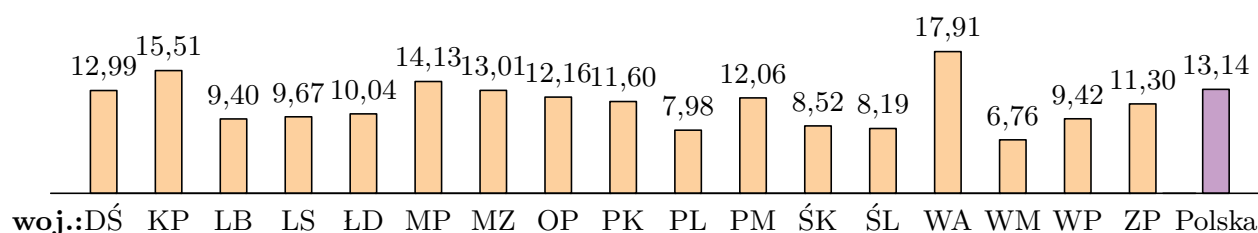


Tabela 8. Średnia sumy punktów w podziale na województwa i inne regiony.



XX Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody drugiego stopnia
(11 stycznia 2025 r.)



1. Punkt E leży na boku CD prostokąta $ABCD$, przy czym

$$\sphericalangle DAE + \sphericalangle EBC = \sphericalangle ABE.$$

Wykaż, że $AB \geq AD$.

2. Każde pole tablicy 5×5 pomalowano albo na czerwono, albo na niebiesko. Okazało się, że w każdym wierszu tej tablicy liczba czerwonych pól jest taka sama, a w każdych dwóch kolumnach tej tablicy liczby niebieskich pól są różne. Wyznacz łączną liczbę niebieskich pól w całej tablicy. Podaj wszystkie możliwości.

3. Dany jest trójkąt ABC , w którym $AC = BC$ i $\sphericalangle ACB = 150^\circ$. Punkt A' jest symetryczny do punktu A względem prostej BC , punkt B' jest symetryczny do punktu B względem prostej AC , a punkt C' jest symetryczny do punktu C względem prostej AB . Udowodnij, że trójkąt $A'B'C'$ jest równoboczny.

4. Czy istnieją takie dodatnie liczby całkowite a oraz b , że

$$\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{2025}?$$

Uwaga. Symbol $\sqrt[3]{x}$ oznacza *pierwiastek trzeciego stopnia z x* , czyli taką liczbę rzeczywistą y , że $y^3 = x$.

5. Liczbę całkowitą nazwiemy *olimpijską*, jeśli można ją uzyskać z liczby 1 w wyniku wykonania pewnej liczby operacji polegających na zwiększeniu liczby o jej cyfrę jedności. Początkowymi liczbami olimpijskimi są więc 1, 2, 4, 8, 16, 22, 24, 28, 36, ... Wykaż, że kwadrat liczby olimpijskiej jest liczbą olimpijską.

XX Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody drugiego stopnia (11 stycznia 2025 r.)

Rozwiązania zadań konkursowych

1. Punkt E leży na boku CD prostokąta $ABCD$, przy czym

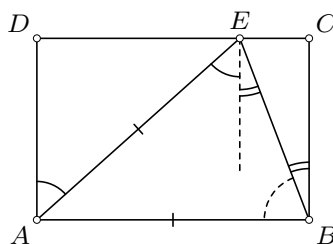
$$\sphericalangle DAE + \sphericalangle EBC = \sphericalangle ABE.$$

Wykaż, że $AB \geq AD$.

Rozwiązanie

Sposób I

Z równości kątów naprzemianległych wynika, że $\sphericalangle DAE + \sphericalangle EBC = \sphericalangle AEB$ (rys. 1). Dana w treści zadania równość przybiera więc postać $\sphericalangle AEB = \sphericalangle ABE$, skąd $AB = AE$.



rys. 1

Należy więc uzasadnić, że $AE \geq AD$. To wynika na przykład z tego, że najdłuższym bokiem trójkąta prostokątnego ADE jest jego przeciwprostokątna AE .

Uwaga

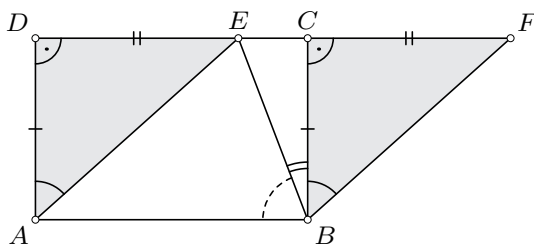
Równość $AB = AD$ zachodzi tylko gdy punkty E i D się pokrywają. Przy założeniu, że punkt E nie jest żadnym z końców odcinka CD , zachodzi nierówność $AB > AD$.

Sposób II

Oznaczmy przez F taki punkt na przedłużeniu odcinka CD , że $CF = DE$ (rys. 2). Wówczas trójkąty prostokątne ADE oraz BCF są przystające (cecha bok–kąt–bok), a zatem

$$\sphericalangle DAE + \sphericalangle EBC = \sphericalangle CBF + \sphericalangle EBC = \sphericalangle EBF.$$

Dana równość kątów oznacza więc, że $\sphericalangle ABE = \sphericalangle EBF$, czyli BE jest dwusieczną kąta ABF .



rys. 2

Ponadto $EF = EC + CF = EC + DE = DC = AB$ oraz $EF \parallel AB$, skąd wynika, że czworokąt $ABFE$ jest równoległobokiem. Przekątna BE tego równoległoboku jest dwusieczną jego kąta wewnętrznego ABF , więc równoległobok $ABFE$ jest rombem. Do zakończenia rozwiązania pozostaje zauważyć, że bok rombu ma długość większą lub równą wysokości tego rombu.

2. Każde pole tablicy 5×5 pomalowano albo na czerwono, albo na niebiesko. Okazało się, że w każdym wierszu tej tablicy liczba czerwonych pól jest taka sama, a w każdych dwóch kolumnach tej tablicy liczby niebieskich pól są różne. Wyznacz łączną liczbę niebieskich pól w całej tablicy. Podaj wszystkie możliwości.

Rozwiązanie

Odpowiedź: Łączna liczba niebieskich pól jest równa **10** lub **15**.

Skoro w każdym wierszu tablicy znajduje się ta sama liczba czerwonych pól, to również w każdym wierszu znajduje się ta sama liczba niebieskich pól — oznaczmy tę liczbę przez n . Wówczas szukana łączna liczba niebieskich pól w całej tablicy jest równa $5n$.

Możliwe liczby niebieskich pól w jednej kolumnie tablicy to 0, 1, 2, 3, 4, 5. Skoro w każdych dwóch kolumnach znajduje się inna liczba niebieskich pól, to liczby niebieskich pól w kolumnach tablicy są pięcioma spośród powyższych sześciu liczb. Zatem dokładnie jedna z powyższych sześciu liczb nie jest liczbą niebieskich pól w żadnej kolumnie tablicy — oznaczmy tę liczbę przez x . Wówczas łączna liczba niebieskich pól w całej tablicy jest równa

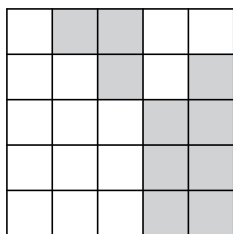
$$0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 - x = 15 - x.$$

Wynika z tego, że

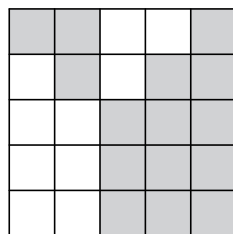
$$5n = 15 - x, \quad \text{czyli} \quad n = 3 - \frac{x}{5}.$$

Aby uzyskana w ten sposób liczba n była całkowita, liczba x musi być podzielna przez 5, czyli $x = 0$ albo $x = 5$. Dla $x = 0$ mamy $n = 3$ i $5n = 15$, a dla $x = 5$ mamy $n = 2$ i $5n = 10$.

Bezpośrednio sprawdzamy, że w obydwu przypadkach istnieją kolorowania pól tablicy spełniające warunki zadania (rys. 3–4, przy czym zacieniowane pola to te, które należy pomalować na niebiesko).



rys. 3



rys. 4

3. Dany jest trójkąt ABC , w którym $AC = BC$ i $\sphericalangle ACB = 150^\circ$. Punkt A' jest symetryczny do punktu A względem prostej BC , punkt B' jest symetryczny do punktu B względem prostej AC , a punkt C' jest symetryczny do punktu C względem prostej AB . Udowodnij, że trójkąt $A'B'C'$ jest równoboczny.

Rozwiązanie

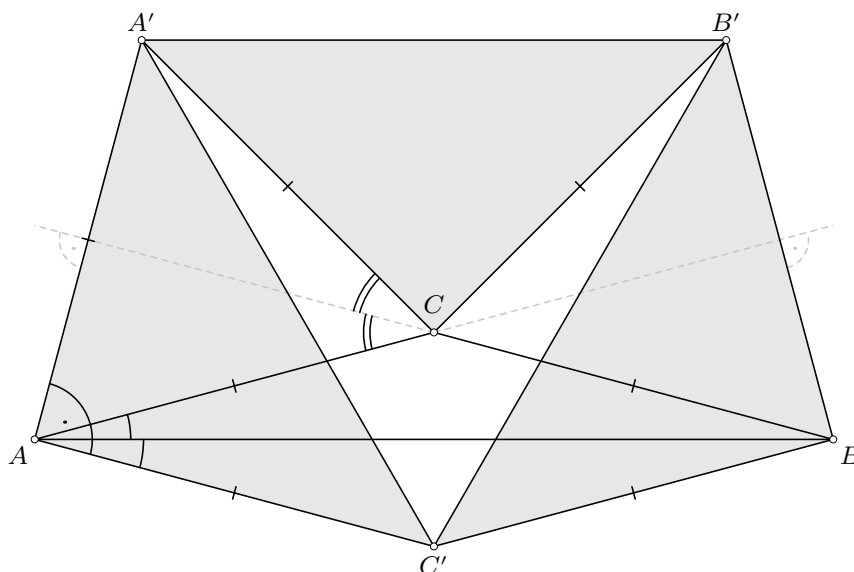
Zauważmy, że $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ABC = 15^\circ$ oraz $AC = BC = A'C = B'C = AC' = BC'$ (rys. 5). Kąt zewnętrzny przy C w trójkącie ABC ma miarę 30° , więc $\sphericalangle ACA' = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$. W połączeniu z $AC = A'C$ oznacza to, że trójkąt $AA'C$ jest równoboczny i $AA' = AC$. Ponadto

$$\sphericalangle A'AC' = \sphericalangle A'AC + \sphericalangle BAC + \sphericalangle BAC' = 60^\circ + 15^\circ + 15^\circ = 90^\circ.$$

W pełni analogicznie uzasadniamy, że $BB' = BC$ oraz $\sphericalangle B'BC' = 90^\circ$.

Zauważmy wreszcie, że

$$\sphericalangle A'CB' = \sphericalangle ACB + \sphericalangle A'CB + \sphericalangle ACB' - 360^\circ = 3 \cdot 150^\circ - 360^\circ = 90^\circ.$$



rys. 5

Z poczynionych obserwacji wynika, że $A'CB'$, $A'AC'$, $B'BC'$ są przystającymi trójkątami prostokątnymi równoramiennymi (cecha bok–kąt–bok). W konsekwencji $A'B' = A'C' = B'C'$, co było do udowodnienia.

4. Czy istnieją takie dodatnie liczby całkowite a oraz b , że

$$\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{2025}?$$

Uwaga. Symbol $\sqrt[3]{x}$ oznacza *pierwiastek trzeciego stopnia z x* , czyli taką liczbę rzeczywistą y , że $y^3 = x$.

Rozwiązanie

Zauważmy, że $2025 = 3^4 \cdot 5^2 = 3^3 \cdot 75$. Wobec tego

$$\sqrt[3]{2025} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 75} = 3\sqrt[3]{75} = \sqrt[3]{75} + 2\sqrt[3]{75} = \sqrt[3]{75} + \sqrt[3]{2^3 \cdot 75} = \sqrt[3]{75} + \sqrt[3]{600}.$$

Wystarczy więc przyjąć $a = 75$ oraz $b = 600$.

Uwaga

Para $\{a, b\} = \{75, 600\}$ jest jedyną parą dodatnich liczb całkowitych spełniającą daną równość.

5. Liczbę całkowitą nazwiemy *olimpijską*, jeśli można ją uzyskać z liczby 1 w wyniku wykonania pewnej liczby operacji polegających na zwiększeniu liczby o jej cyfrę jedności. Początkowymi liczbami olimpijskimi są więc 1, 2, 4, 8, 16, 22, 24, 28, 36, ... Wykaż, że kwadrat liczby olimpijskiej jest liczbą olimpijską.

Rozwiązanie

Niech a_k oznacza k -tą liczbę olimpijską, czyli $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 4$, $a_4 = 8$, $a_5 = 16$ itd. Zauważmy, że cyfry jedności liczb olimpijskich różnych od 1 powtarzają się z okresem 4 i są równe kolejno 2, 4, 8, 6. To oznacza, że

$$a_{k+4} = a_k + (2 + 4 + 6 + 8) = a_k + 20,$$

gdyż wykonując cztery kolejne operacje, wykorzystamy w pewnej kolejności wszystkie cztery składniki 2, 4, 8, 6. Skoro $a_2 = 2$, to $a_6 = 22$, $a_{10} = 42$, $a_{14} = 62$, ... są wszystkimi dodatnimi liczbami całkowitymi dającymi resztę 2 przy dzieleniu przez 20.

Analogicznie uzasadniamy, że wśród dodatnich liczb całkowitych

- $a_3, a_7, a_{11}, a_{15}, \dots$ to wszystkie liczby dające resztę 4 przy dzieleniu przez 20;
- $a_4, a_8, a_{12}, a_{16}, \dots$ to wszystkie liczby dające resztę 8 przy dzieleniu przez 20;
- $a_5, a_9, a_{13}, a_{17}, \dots$ to wszystkie liczby dające resztę 16 przy dzieleniu przez 20.

Tym samym uzasadniliśmy następujący fakt.

Liczba większa od 1 jest olimpijska dokładnie wtedy, gdy przy dzieleniu przez 20 daje jedną z reszt 2, 4, 8, 16.

Ponieważ $a_1^2 = 1 = a_1$ jest liczbą olimpijską, więc pozostaje udowodnić, że kwadraty liczb dających resztę 2, 4, 8 lub 16 przy dzieleniu przez 20 również dają jedną z tych reszt przy dzieleniu przez 20. W tym celu zauważmy, że

- jeśli $a = 20n + 2$, to $a^2 = (20n + 2)^2 = 400n^2 + 80n + 4 = 20 \cdot (20n^2 + 4n) + 4$;
- jeśli $a = 20n + 4$, to $a^2 = (20n + 4)^2 = 400n^2 + 160n + 16 = 20 \cdot (20n^2 + 8n) + 16$;
- jeśli $a = 20n + 8$, to $a^2 = (20n + 8)^2 = 400n^2 + 320n + 64 = 20 \cdot (20n^2 + 16n + 3) + 4$;
- jeśli $a = 20n + 16$, to $a^2 = (20n + 16)^2 = 400n^2 + 640n + 256 = 20 \cdot (20n^2 + 32n + 12) + 16$.

Ponieważ liczby dające resztę 4 lub 16 przy dzieleniu przez 20 są olimpijskie, więc dowód jest zakończony.

Uwaga

Drugą część rozwiązania można przedstawić w postaci bardziej zwartej i mniej wymagającej rachunkowo przy użyciu *kongruencji*. Dla liczb całkowitych a, b oraz liczby całkowitej $m \geq 1$ zapisujemy $a \equiv b \pmod{m}$ jeżeli m jest dzielnikiem liczby $a - b$, czyli innymi słowy — liczby a oraz b dają tę samą resztę przy dzieleniu przez m . Stosując własności kongruencji, możemy zapisać:

- jeśli $a \equiv 2 \pmod{20}$, to $a^2 \equiv 2^2 \equiv 4 \pmod{20}$;
- jeśli $a \equiv 4 \pmod{20}$, to $a^2 \equiv 4^2 \equiv 16 \pmod{20}$;
- jeśli $a \equiv 8 \pmod{20}$, to $a^2 \equiv 8^2 \equiv 64 \equiv 4 \pmod{20}$;
- jeśli $a \equiv 16 \pmod{20}$, to $a \equiv -4 \pmod{20}$ i w konsekwencji $a^2 \equiv (-4)^2 \equiv 16 \pmod{20}$.

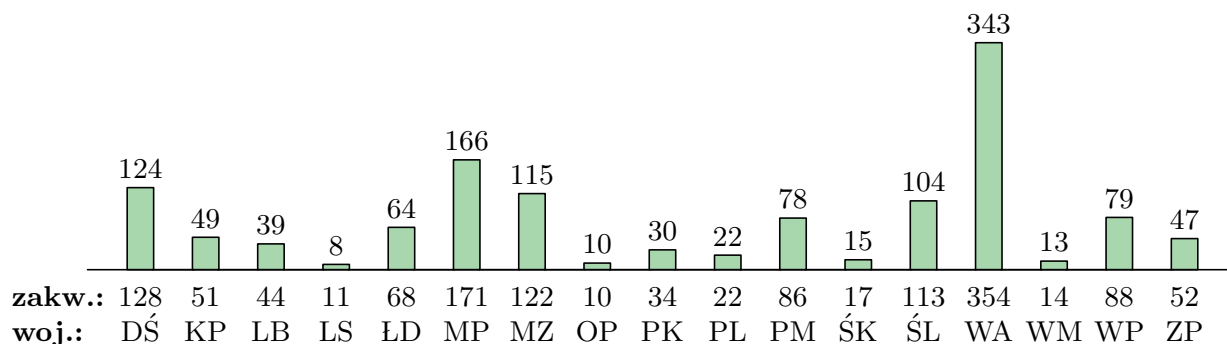
Więcej informacji o kongruencjach i ich własnościach można odnaleźć na przykład w broszurze *Matematyczne seminarium olimpijskie, cz. 1*, dostępnej na stronie omj.edu.pl/uploads/attachments/seminaria_1.pdf (strony 20–25).

XX Olimpiada Matematyczna Juniorów

Statystyki dotyczące zawodów drugiego stopnia (2024/25)

(11 stycznia 2025 r.)

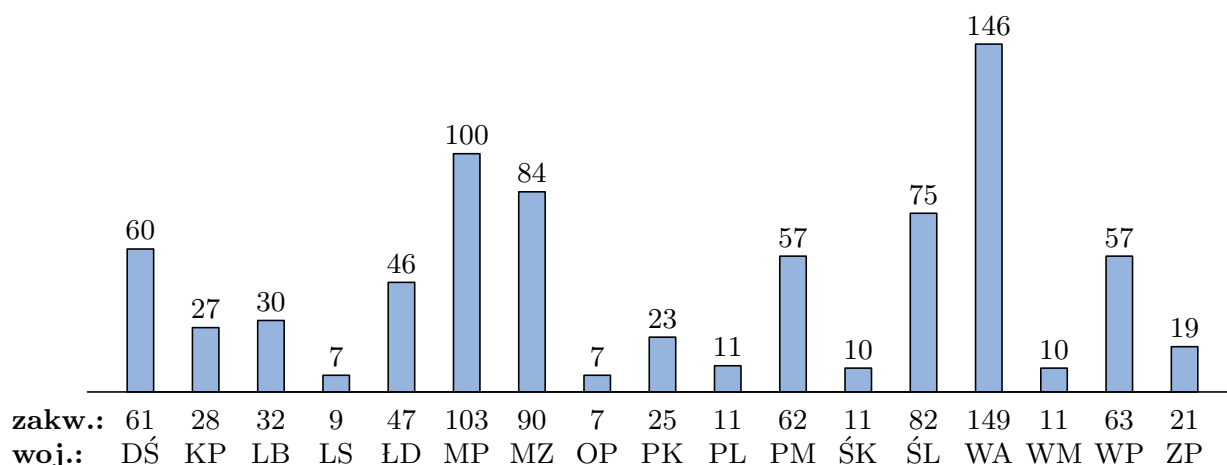
Tabela 1. Liczba uczniów, którzy wzięli udział w zawodach oraz zakwalifikowanych do zawodów w podziale na województwa i inne regiony.



Łączna liczba uczniów, którzy wzięli udział w zawodach: 1306

Łączna liczba uczniów zakwalifikowanych do zawodów: 1385

Tabela 2. Liczba szkół uczniów, którzy wzięli udział w zawodach oraz zakwalifikowanych do zawodów w podziale na województwa i inne regiony.



Łączna liczba szkół uczniów, którzy wzięli udział w zawodach: 769

Łączna liczba szkół uczniów zakwalifikowanych do zawodów: 812

Skróty województw i innych regionów

DŚ — dolnośląskie

LB — lubelskie

ŁD — łódzkie

MZ — mazowieckie bez m.st. Warszawy

PK — podkarpackie

PM — pomorskie

ŚL — śląskie

WM — warmińsko-mazurskie

ZP — zachodniopomorskie

KP — kujawsko-pomorskie

LS — lubuskie

MP — małopolskie

OP — opolskie

PL — podlaskie

ŚK — świętokrzyskie

WA — m.st. Warszawa

WP — wielkopolskie

Tabela 3. Procentowa i rzeczywista liczba osób, które uzyskały daną sumę punktów.

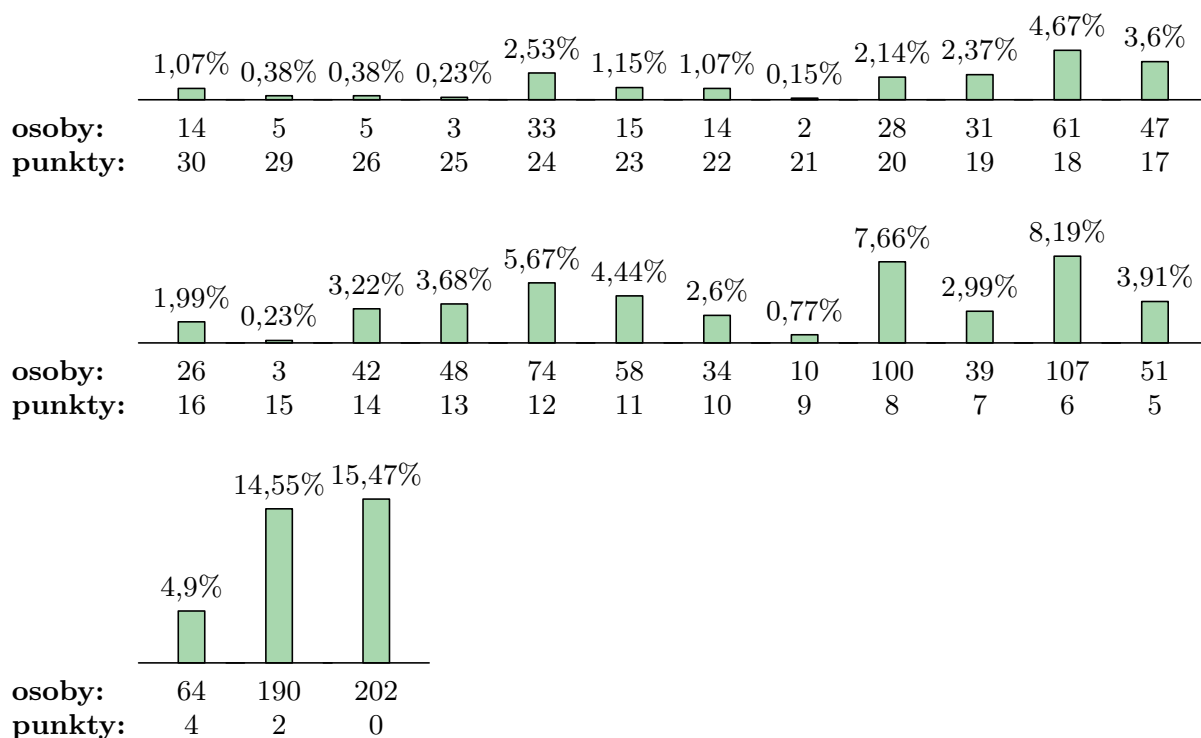


Tabela 4. Procentowa i rzeczywista liczba osób, które uzyskały daną lub większą sumę punktów.

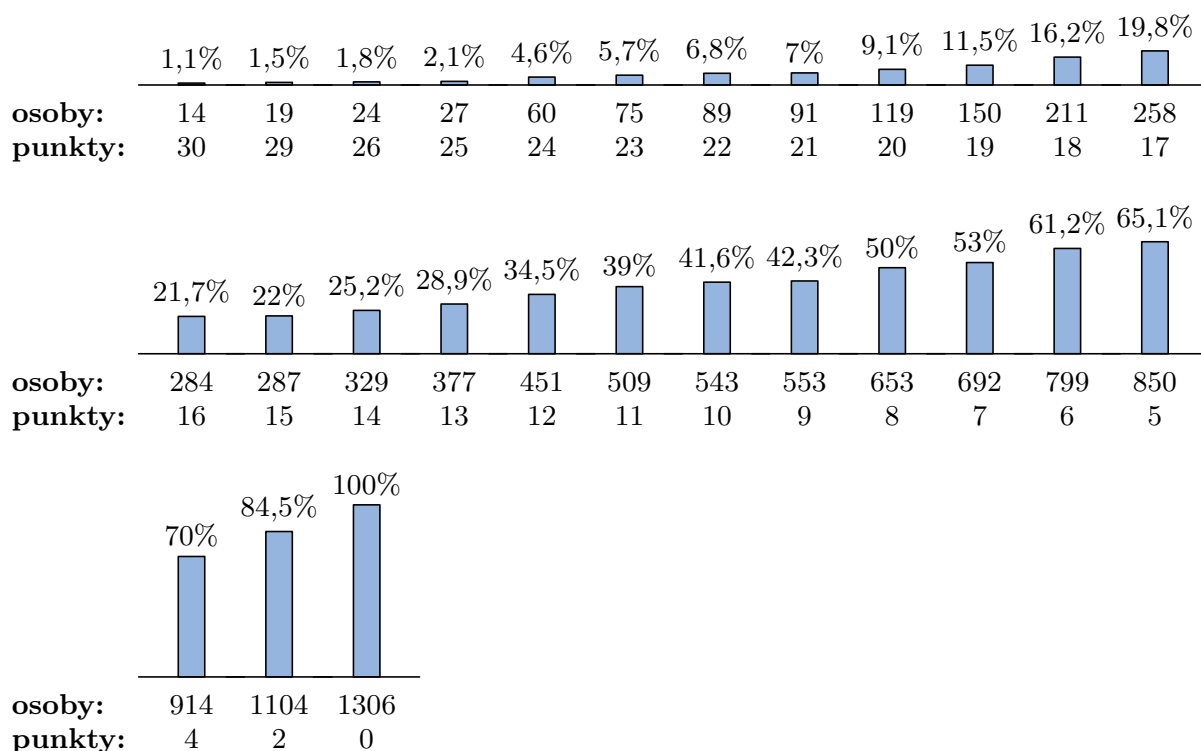


Tabela 5. Procentowa liczba osób, które uzyskały daną liczbę punktów za poszczególne zadania.

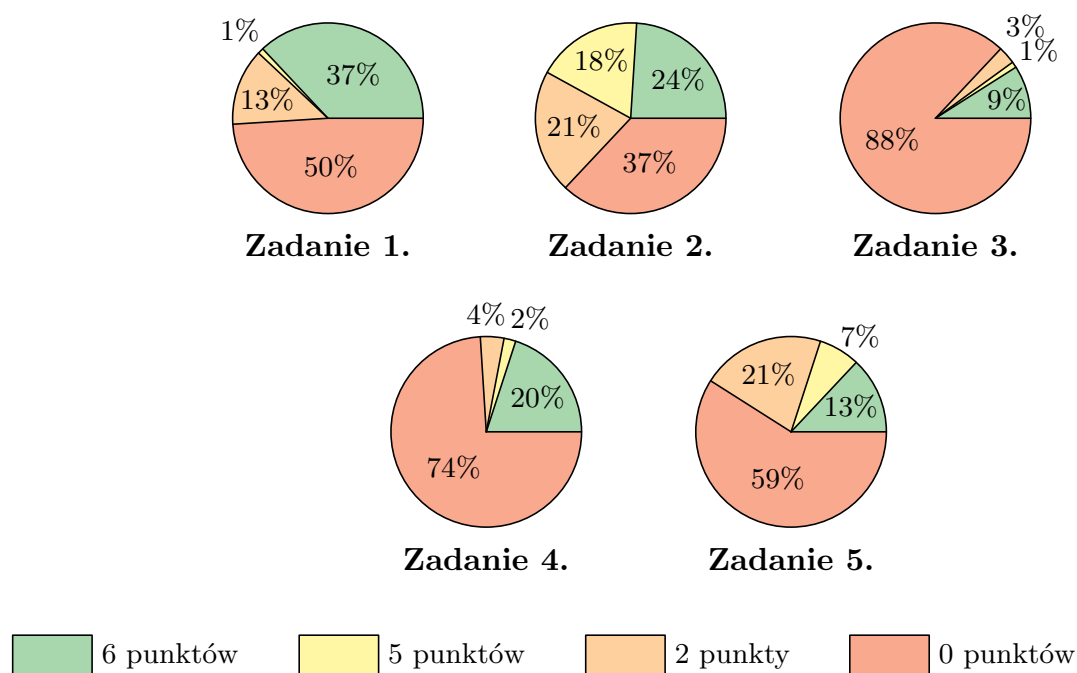


Tabela 6. Średnia uzyskanych punktów za poszczególne zadania.

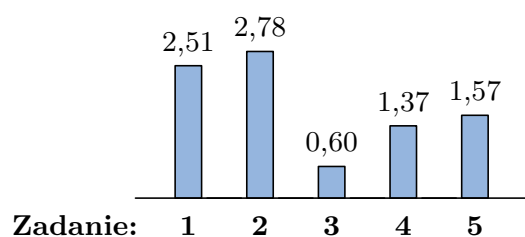
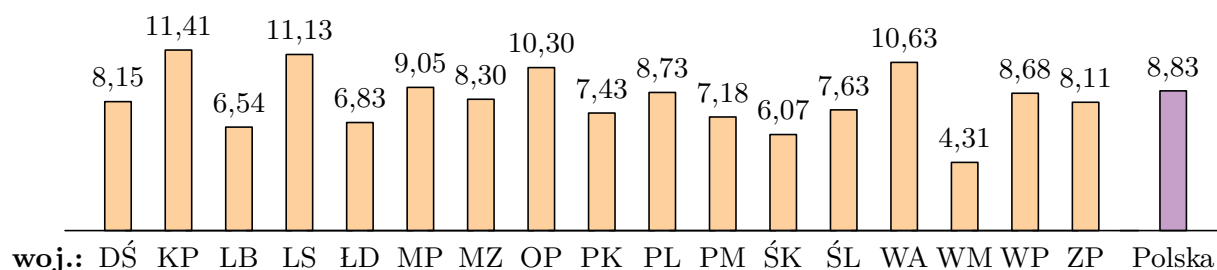


Tabela 7. Średnia sumy punktów w podziale na województwa i inne regiony.



XX Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody trzeciego stopnia
(15 marca 2025 r.)



1. Czy istnieje czworościan, w którym długości krawędzi są sześcioma różnymi liczbami całkowitymi, a ich suma jest równa 25? Odpowiedź uzasadnij.

2. W pewnej imprezie biorą udział chłopcy i dziewczęta. Każda z osób uczestniczących w tej imprezie zna wśród pozostałych osób dokładnie 3 chłopców i dokładnie 7 dziewcząt. Udowodnij, że liczba wszystkich osób uczestniczących w tej imprezie jest podzielna przez 20.

Uwaga. Zakładamy, że jeśli osoba A zna osobę B , to osoba B zna osobę A .

3. Wyznacz wszystkie pary liczb pierwszych (p, q) , dla których liczba $pq + 4$ jest czwartą potęgą liczby pierwszej.

4. Dany jest romb $ABCD$, w którym $\sphericalangle ABC = 100^\circ$. Punkt P leży na boku CD , przy czym $\sphericalangle PBC = 20^\circ$. Prosta równoległa do boku AD przechodząca przez punkt P przecina przekątną AC w punkcie Q . Wykaż, że $BP = AQ$.

5. W każdym polu tablicy 5×5 znajduje się strzałka skierowana w górę, w dół, w lewo lub w prawo. Wykaż, że można usunąć z tej tablicy dokładnie dwadzieścia strzałek, tak aby żadne dwie z pozostałych pięciu strzałek nie wskazywały na to samo pole.

Uwaga. Przyjmujemy, że każda strzałka wskazuje na wszystkie pola znajdujące się w tym kierunku, w którym jest skierowana. Żadna strzałka nie wskazuje na pole, w którym się znajduje.

XX Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody trzeciego stopnia (15 marca 2025 r.)

Rozwiązania zadań konkursowych

1. Czy istnieje czworościan, w którym długości krawędzi są sześcioma różnymi liczbami całkowitymi, a ich suma jest równa 25? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie

Odpowiedź: Taki czworościan nie istnieje.

Zauważmy najpierw, że nie istnieje trójkąt różnoboczny o wszystkich bokach całkowitej długości, w którym jeden z boków ma długość 1. Rzeczywiście, jeżeli w pewnym trójkącie boki mają długości 1, a , b , przy czym $1 < a < b$, to na mocy nierówności trójkąta: $b < a + 1$. W konsekwencji liczba b jest jednocześnie większa od a i mniejsza od $a + 1$ — liczby a , b nie mogą więc jednocześnie być całkowite.

Z poczynionej obserwacji wynika, że jeśli długości krawędzi pewnego czworościanu są sześcioma różnymi liczbami całkowitymi, to pośród tych liczb nie ma liczby 1. W konsekwencji suma długości tych krawędzi jest nie mniejsza od

$$2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 27,$$

czyli w szczególności nie jest możliwe, aby była równa 25.

Uwaga

Można wykazać, że istnieje czworościan o krawędziach długości 2, 3, 4, 5, 6, 7 (czyli taki, w którym suma długości krawędzi jest równa 27).

2. W pewnej imprezie biorą udział chłopcy i dziewczęta. Każda z osób uczestniczących w tej imprezie zna wśród pozostałych osób dokładnie 3 chłopców i dokładnie 7 dziewcząt. Udowodnij, że liczba wszystkich osób uczestniczących w tej imprezie jest podzielna przez 20.

Uwaga. Zakładamy, że jeśli osoba A zna osobę B , to osoba B zna osobę A .

Rozwiązanie

Oznaczmy liczbę chłopców biorących udział w tej imprezie przez c , a liczbę dziewcząt biorących udział w tej imprezie przez d . Wówczas liczba wszystkich osób uczestniczących w tej imprezie jest równa $c + d$.

Łączna liczba znajomości między chłopcami a dziewczętami jest z jednej strony równa $7c$ (gdyż każdy z c chłopców zna dokładnie 7 dziewcząt), z drugiej zaś strony równa $3d$ (gdyż każda z d dziewcząt zna dokładnie 3 chłopców). Wobec tego $7c = 3d$, skąd wynika, że $c = 3k$ oraz $d = 7k$ dla pewnej dodatniej liczby całkowitej k .

Łączna liczba znajomości pomiędzy chłopcami jest równa dokładnie $\frac{1}{2} \cdot 3c$ (gdyż każdy z c chłopców zna dokładnie 3 innych chłopców, a w iloczynie $3 \cdot c$ każda taka znajomość jest policzona dwukrotnie). W konsekwencji liczba znajomości pomiędzy chłopcami jest równa $\frac{9}{2}k$, skąd wynika, że $k = 2\ell$ dla pewnej dodatniej liczby całkowitej ℓ .

Ostatecznie łączna liczba osób uczestniczących w imprezie jest równa

$$c + d = 3k + 7k = 10k = 20\ell,$$

czyli jest liczbą podzielną przez 20.

3. Wyznacz wszystkie pary liczb pierwszych (p, q) , dla których liczba $pq + 4$ jest czwartą potęgą liczby pierwszej.

Rozwiązanie

Odpowiedź: Jedynymi parami (p, q) spełniającymi warunki zadania są $(7, 11)$ oraz $(11, 7)$.

Założmy, że dla pewnych liczb pierwszych p, q istnieje liczba pierwsza r o tej własności, że $pq + 4 = r^4$, czyli

$$pq = r^4 - 4 = (r^2)^2 - 2^2 = (r^2 - 2)(r^2 + 2).$$

Czynniki $r^2 - 2$ oraz $r^2 + 2$ są liczbami całkowitymi większymi od 1. Liczba pq jest iloczynem dwóch liczb pierwszych, więc ma tylko jedno przedstawienie w postaci takiego iloczynu: jest nim $p \cdot q$. To oznacza, że jedna z liczb $r^2 - 2, r^2 + 2$ jest równa p , a druga z nich jest równa q .

Zauważmy, że liczba $(r - 1)r(r + 1) = r(r^2 - 1)$ jest podzielna przez 3 jako iloczyn trzech kolejnych liczb całkowitych. Jeżeli r nie jest liczbą podzielną przez 3, to w myśl poczynionej obserwacji, $r^2 - 1$ jest liczbą podzielną przez 3 i w konsekwencji także liczba $r^2 - 1 + 3 = r^2 + 2$ jest podzielna przez 3. Jednak liczba $r^2 + 2$ jest równa p lub q , skąd wniosek, że $r^2 + 2 = 3$, czyli $r = 1$ lub $r = -1$. Uzyskaliśmy sprzeczność, gdyż liczby 1, -1 nie są pierwsze.

Jeżeli r jest liczbą podzielną przez 3, to $r = 3$, gdyż r jest liczbą pierwszą. Bezpośrednio sprawdzamy, że wówczas liczby $r^2 - 2 = 7$ oraz $r^2 + 2 = 11$ są pierwsze i w konsekwencji pary $(p, q) = (7, 11)$ oraz $(p, q) = (11, 7)$ spełniają warunki zadania.

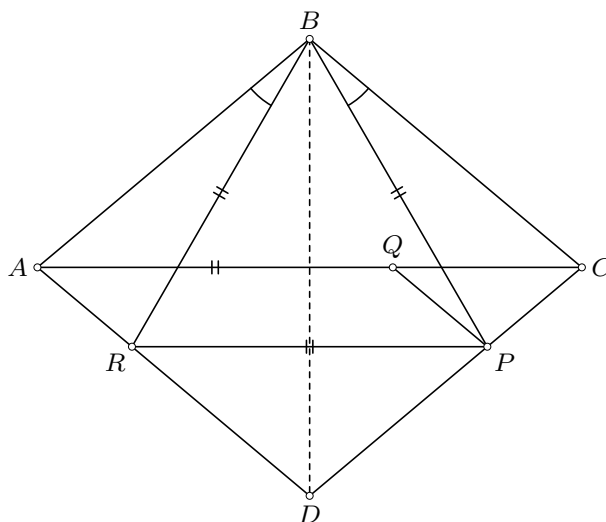
4. Dany jest romb $ABCD$, w którym $\angle ABC = 100^\circ$. Punkt P leży na boku CD , przy czym $\angle PBC = 20^\circ$. Prosta równoległa do boku AD przechodząca przez punkt P przecina przekątną AC w punkcie Q . Wykaż, że $BP = AQ$.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez R punkt symetryczny do punktu P względem prostej BD (rys. 1). Wówczas czworokąt $ARPQ$ jest równoległobokiem, gdyż ma dwie pary przeciwnych boków równoległych. Ponadto $BP = BR$ oraz

$$\angle PBR = \angle ABC - \angle PBC - \angle RBA = 100^\circ - 20^\circ - 20^\circ = 60^\circ,$$

skąd wynika, że trójkąt BPR jest równoboczny. W konsekwencji $AQ = PR = BP$, co było do udowodnienia.



rys. 1

5. W każdym polu tablicy 5×5 znajduje się strzałka skierowana w górę, w dół, w lewo lub w prawo. Wykaż, że można usunąć z tej tablicy dokładnie dwadzieścia strzałek, tak aby żadne dwie z pozostałych pięciu strzałek nie wskazywały na to samo pole.

Uwaga. Przyjmujemy, że każda strzałka wskazuje na wszystkie pola znajdujące się w tym kierunku, w którym jest skierowana. Żadna strzałka nie wskazuje na pole, w którym się znajduje.

Rozwiązanie

Strzałkę skierowaną w górę lub w dół nazwiemy *pionową*, a strzałkę skierowaną w prawo lub w lewo nazwiemy *poziomą*.

Zauważmy, że jeśli w każdym wierszu tablicy znajduje się co najmniej jedna strzałka pozioma, to wystarczy pozostawić po jednej strzałce poziomej w każdym wierszu, aby żadne dwie z tych pięciu strzałek nie wskazywały na to samo pole.

W przeciwnym wypadku w pewnym wierszu tablicy znajdują się wyłącznie strzałki pionowe, więc żadne dwie z nich nie wskazują na to samo pole. Wystarczy więc pozostawić pięć strzałek z tego wiersza.

Uwaga

Istnieją takie rozmieszczenia strzałek w polach tablicy (np. rys. 2), że *nie wystarczy* usunąć tylko 19 strzałek aby wyeliminować wszystkie pary strzałek wskazujących na to samo pole. Innymi słowy, liczba 20 jest *najmniejszą* liczbą usuwanych strzałek, która zawsze wystarczy do uzyskania sytuacji, w której żadne dwie strzałki nie wskazują na to samo pole.

→	→	→	→	↓
→	→	→	→	↑
→	→	→	→	↑
→	→	→	→	↑
→	→	→	→	↑

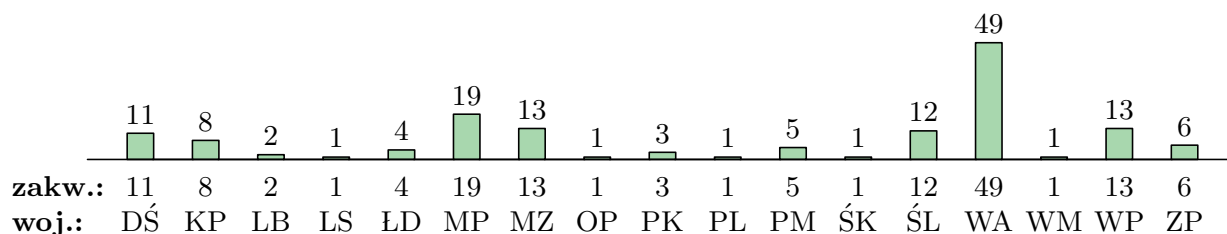
rys. 2

XX Olimpiada Matematyczna Juniorów

Statystyki dotyczące zawodów trzeciego stopnia (2024/25)

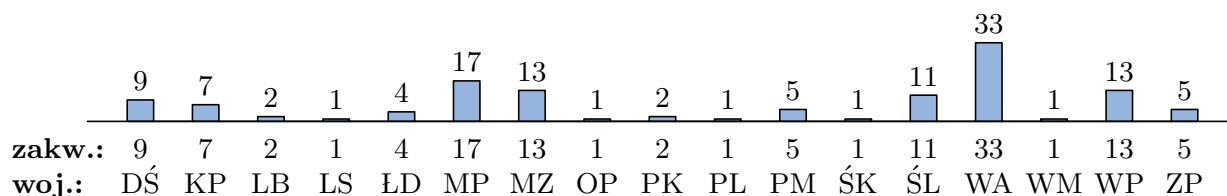
(15 marca 2025 r.)

Tabela 1. Liczba uczniów, którzy wzięli udział w zawodach oraz zakwalifikowanych do zawodów w podziale na województwa i inne regiony.



Łączna liczba uczniów, którzy wzięli udział w zawodach: 150

Tabela 2. Liczba szkół uczniów, którzy wzięli udział w zawodach oraz zakwalifikowanych do zawodów w podziale na województwa i inne regiony.



Łączna liczba szkół uczniów, którzy wzięli udział w zawodach: 126

Skróty województw i innych regionów

DŚ — dolnośląskie	KP — kujawsko-pomorskie
LB — lubelskie	LS — lubuskie
ŁD — łódzkie	MP — małopolskie
MZ — mazowieckie bez m.st. Warszawy	OP — opolskie
PK — podkarpackie	PL — podlaskie
PM — pomorskie	ŚK — świętokrzyskie
ŚL — śląskie	WA — m.st. Warszawa
WM — warmińsko-mazurskie	WP — wielkopolskie
ZP — zachodniopomorskie	

Tabela 3. Procentowa i rzeczywista liczba osób, które uzyskały daną sumę punktów.

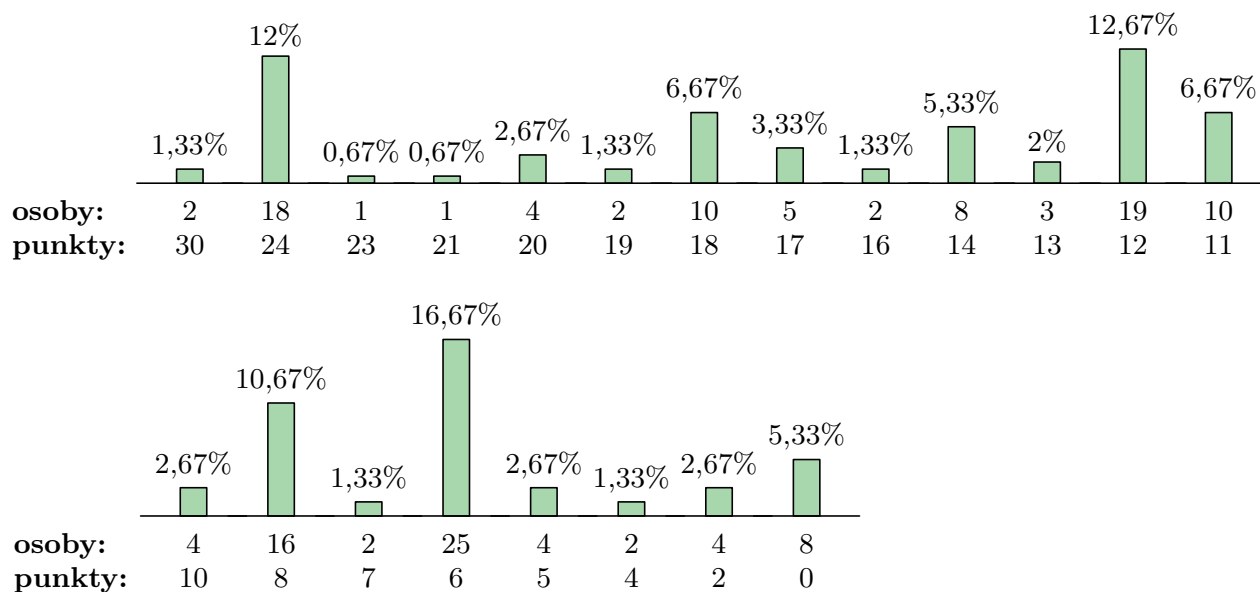


Tabela 4. Procentowa i rzeczywista liczba osób, które uzyskały daną lub większą sumę punktów.

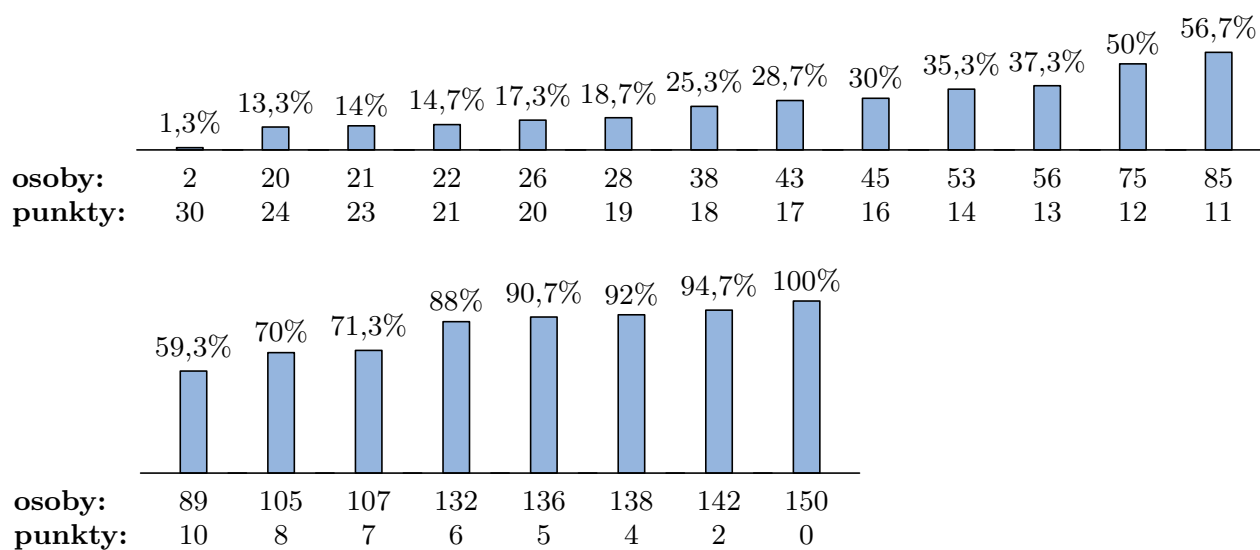


Tabela 5. Procentowa liczba osób, które uzyskały daną liczbę punktów za poszczególne zadania.

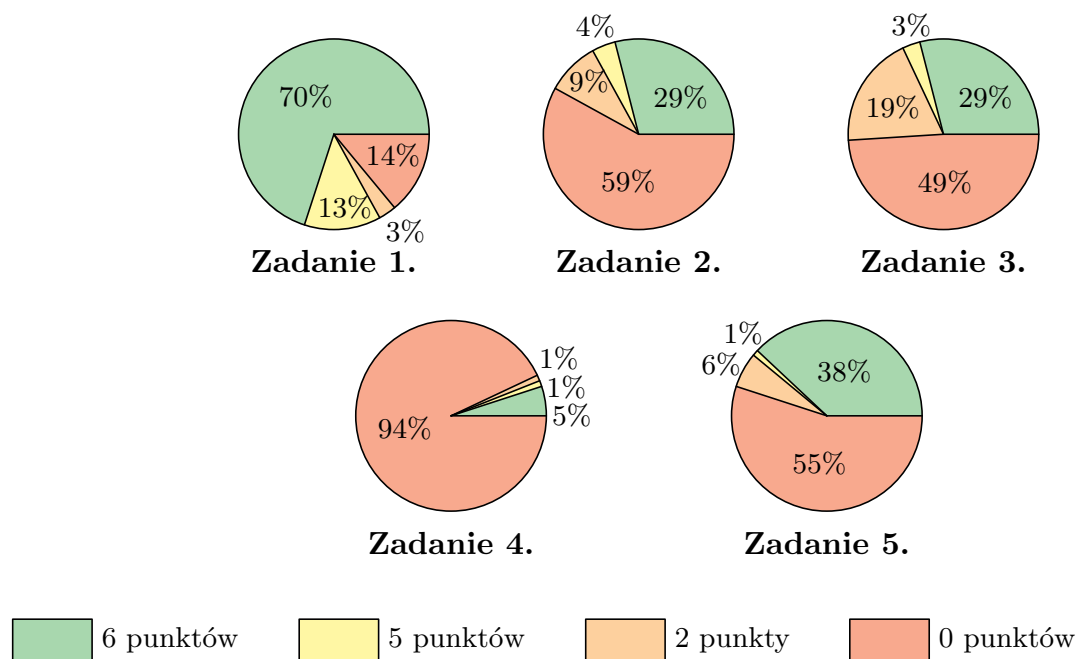


Tabela 6. Średnia uzyskanych punktów za poszczególne zadania.

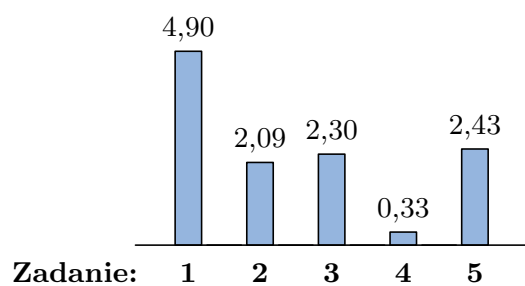
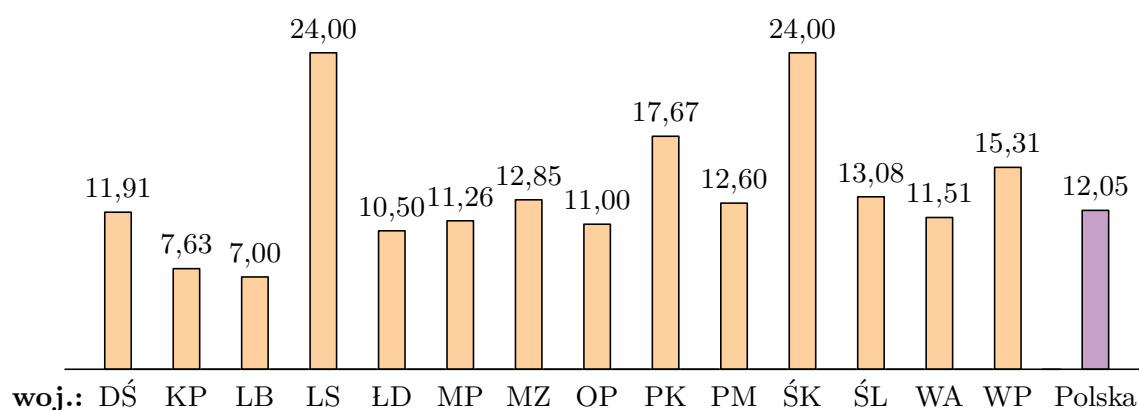


Tabela 7. Średnia sumy punktów w podziale na województwa i inne regiony.



Imiona:

Nazwisko:

Klasa:



XXI Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody stopnia pierwszego — część testowa

(25 września 2025 r., godz. 9:00)

Przed przystąpieniem do rozwiązywania testu wpisz na każdą stronę swoje imiona, nazwisko oraz numer klasy.

Treść każdego z poniższych zadań zawiera trzy stwierdzenia. Każde z nich jest prawdziwe lub fałszywe (przy czym może się zdarzyć, że wszystkie trzy stwierdzenia w obrębie jednego zadania są fałszywe). Jeśli dane stwierdzenie jest prawdziwe, wpisz w odpowiednią kratkę literkę T, jeśli zaś stwierdzenie jest fałszywe, wpisz literkę N.

W przypadku pomyłki przekreśl znakiem **X** podaną odpowiedź, a właściwą odpowiedź podaj obok z lewej strony. Nie używaj korektora.

Przykład poprawnie rozwiązanego zadania:

0. Dla każdej dodatniej liczby całkowitej n liczba $2n + 1$ jest

T

a) dodatnia;

T

b) nieparzysta;

N

X

c) pierwsza.

Czas na rozwiązywanie testu: 75 minut.

Powodzenia!

1. Kostka do gry jest sześcianem i na każdej ścianie ma inną liczbę oczek, od 1 do 6.

Czarek rzucił trzema takimi kostkami i wypadło łącznie 16 oczek. Wynika z tego, że na pewnej kostce

a) wypadły 4 oczka;

b) wypadło 5 oczek;

c) wypadło 6 oczek.

Imiona:

Nazwisko:

Klasa:

2. Pewien kąt wewnętrzny trójkąta równoramiennego ma miarę 45° . Wynika z tego, że trójkąt ten

a) jest ostrokątny;

b) jest prostokątny;

c) nie jest rozwartokątny.

3. Liczby a oraz b są dodatnie, przy czym liczba a jest całkowita, a liczba b nie jest całkowita. Wynika z tego, że

a) liczba $a + b$ nie jest całkowita;

b) liczba $a \cdot b$ nie jest całkowita;

c) liczba $a^2 + b^2$ nie jest całkowita.

4. Istnieje taki dodatni dzielnik liczby 2025, który jest

a) różnicą dwóch liczb nieparzystych;

b) iloczynem trzech liczb złożonych;

c) sumą czterech liczb pierwszych.

5. W trójkącie ABC bok AB ma długość 1. Wysokość opuszczona z wierzchołka C na prostą AB również ma długość 1. Wynika z tego, że

a) pole trójkąta ABC jest równe 1;

b) obwód trójkąta ABC jest większy od 3;

c) obwód trójkąta ABC jest mniejszy od 4.

6. Dany jest kwadrat $ABCD$ o boku długości 1. Przekątne tego kwadratu przecinają się w punkcie O . Pewien okrąg o środku w punkcie O dzieli bok AB na trzy równe części. Promień tego okręgu

a) jest mniejszy od $\frac{1}{2}$;

b) jest równy $\frac{1}{2}$;

c) jest większy od $\frac{1}{2}$.

Imiona:

Nazwisko:

Klasa:

7. W akwariu Marka każda rybka jest jednego z trzech kolorów: złotego, czerwonego lub niebieskiego. Rybek czerwonych jest o 50% więcej niż złotych, a rybek niebieskich jest o 40% mniej niż czerwonych. Wynika z tego, że w akwariu Marka

a) rybek złotych jest mniej niż niebieskich;

b) liczba niebieskich rybek jest podzielna przez 9;

c) liczba złotych rybek jest podzielna przez 10.

8. Istnieje całkowita wielokrotność liczby 21, w której zapisie dziesiętnym

a) cyfra dziesiątek jest równa 1, a cyfra jedności jest równa 0;

b) cyfra dziesiątek jest równa 0, a cyfra jedności jest równa 1;

c) cyfra dziesiątek jest równa 1, a cyfra jedności jest równa 1.

9. Istnieje trójkąt prostokątny o bokach długości a , b , c , w którym

a) $a^2 + b^2 = c^2$;

b) $a^2 - b^2 = c^2$;

c) $2 \cdot a \cdot b = c^2$.

10. Liczby naturalne od 1 do 6 napisano na ścianach sześcianu, każdą na innej ścianie. Następnie dla każdej krawędzi sześcianu obliczono sumę liczb napisanych na dwóch ścianach, których wspólnym bokiem jest ta krawędź. Wynika z tego, że pewna spośród 12 obliczonych sum jest

a) liczbą dwucyfrową;

b) kwadratem liczby całkowitej;

c) równa 7.

11. Liczby a , b są dodatnie i mniejsze od 1. Wynika z tego, że

a) $a \cdot b < a + b$;

b) $a \cdot b < a^2 + b^2$;

c) $a \cdot b < a^3 + b^3$.

Imiona:

Nazwisko:

Klasa:

12. Istnieją dwie różne potęgi liczby 3 o wykładnikach całkowitych dodatnich, których suma jest

a) potęgą liczby 2 o wykładniku całkowitym dodatnim;

b) potęgą liczby 3 o wykładniku całkowitym dodatnim;

c) potęgą liczby 6 o wykładniku całkowitym dodatnim.

13. Dany jest trójkąt ABC , w którym $BC=2 \cdot AC$. Punkt D leży wewnątrz tego trójkąta i spełnia równość $\sphericalangle ACD = \sphericalangle BCD$. Wynika z tego, że

a) $BD = 2 \cdot AD$;

b) pole trójkąta BDC jest dwa razy większe od pola trójkąta ADC ;

c) $\sphericalangle BAC = 2 \cdot \sphericalangle ABC$.

14. Dodatnia liczba całkowita n ma następującą własność: liczba n -cyfrowa, której zapis dziesiętny składa się wyłącznie z cyfr równych 1, jest podzielna przez n . Wynika z tego, że liczba n jest

a) nieparzysta;

b) podzielna przez 3;

c) potęgą liczby 3 o wykładniku całkowitym nieujemnym.

15. W grupie 5 osób każda osoba ma pośród pozostałych osób w tej grupie co najmniej jednego znajomego i co najmniej jednego nieznanego (przyjmujemy, że jeżeli A jest znajomym B , to również B jest znajomym A). Wynika z tego, że w tej grupie

a) pewna osoba ma co najmniej dwóch znajomych;

b) pewna osoba ma dokładnie trzech znajomych;

c) pewne dwie osoby, które nie są znajomymi, mają wspólnego znajomego.

XXI Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody stopnia pierwszego — część testowa

(25 września 2025 r.)

Rozwiązania zadań testowych

1. Kostka do gry jest sześcianem i na każdej ścianie ma inną liczbę oczek, od 1 do 6. Czarek rzucił trzema takimi kostkami i wypadło łącznie 16 oczek. Wynika z tego, że na pewnej kostce

N	a) wypadły 4 oczka;
N	b) wypadło 5 oczek;
T	c) wypadło 6 oczek.

Komentarz

- a) Jeśli liczby oczek są równe 5, 5, 6, to wypadło łącznie 16 oczek, ale na żadnej kostce nie wypadły 4 oczka.
- b) Jeśli liczby oczek są równe 4, 6, 6, to wypadło łącznie 16 oczek, ale na żadnej kostce nie wypadło 5 oczek.
- c) Gdyby na każdej kostce wypadło co najwyżej 5 oczek, to łączna liczba oczek byłaby nie większa od $5 + 5 + 5 = 15$.

2. Pewien kąt wewnętrzny trójkąta równoramiennego ma miarę 45° . Wynika z tego, że trójkąt ten

N	a) jest ostrokątny;
N	b) jest prostokątny;
T	c) nie jest rozwartokątny.

Komentarz

- a) Trójkąt o kątach 90° , 45° , 45° spełnia warunki zadania, ale nie jest ostrokątny.
- b) Trójkąt o kątach 45° , $67,5^\circ$, $67,5^\circ$ spełnia warunki zadania, ale nie jest prostokątny.
- c) Jeżeli 45° jest kątem między podstawą a ramieniem w trójkącie równoramiennym, to pozostałe kąty mają miary 45° oraz $180^\circ - 45^\circ - 45^\circ = 90^\circ$, więc trójkąt jest prostokątny.
- Jeżeli 45° jest kątem pomiędzy ramionami w trójkącie równoramiennym, to każdy z dwóch pozostałych kątów ma miarę $\frac{1}{2}(180^\circ - 45^\circ) = 67,5^\circ$, więc trójkąt jest ostrokątny.

3. Liczby a oraz b są dodatnie, przy czym liczba a jest całkowita, a liczba b nie jest całkowita. Wynika z tego, że

T	a) liczba $a+b$ nie jest całkowita;
N	b) liczba $a \cdot b$ nie jest całkowita;
N	c) liczba $a^2 + b^2$ nie jest całkowita.

Komentarz

a) Gdyby liczba $a+b$ była całkowita, to również liczba $b = (a+b) - a$ byłaby całkowita, jako różnica liczb całkowitych.

b) Jeżeli $a = 2$ oraz $b = \frac{1}{2}$, to liczba $a \cdot b = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$ jest całkowita.

c) Jeżeli $a = 1$ oraz $b = \sqrt{2}$, to liczba $a^2 + b^2 = 1^2 + (\sqrt{2})^2 = 3$ jest całkowita.

4. Istnieje taki dodatni dzielnik liczby 2025, który jest

N	a) różnicą dwóch liczb nieparzystych;
T	b) iloczynem trzech liczb złożonych;
T	c) sumą czterech liczb pierwszych.

Komentarz

a) Różnica dwóch liczb nieparzystych jest liczbą parzystą. Liczba 2025 jest nieparzysta, więc nie ma ona parzystych dzielników.

b) Zauważmy, że $2025 = 9 \cdot 9 \cdot 25$ i każdy z tych trzech czynników jest liczbą złożoną.

c) Zauważmy, że liczba $15 = 2 + 3 + 5 + 5$ jest sumą czterech liczb pierwszych oraz dzielnikiem liczby $2025 = 15 \cdot 135$.

5. W trójkącie ABC bok AB ma długość 1. Wysokość opuszczona z wierzchołka C na prostą AB również ma długość 1. Wynika z tego, że

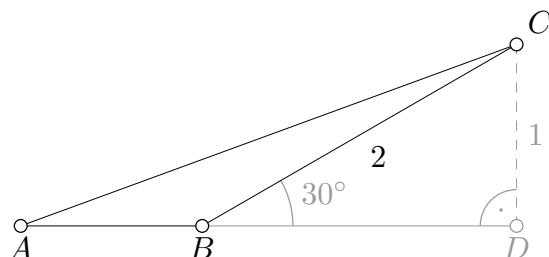
N	a) pole trójkąta ABC jest równe 1;
T	b) obwód trójkąta ABC jest większy od 3;
N	c) obwód trójkąta ABC jest mniejszy od 4.

Komentarz

a) Pole tego trójkąta jest równe $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$.

b) Odcinek AC łączy punkt C z pewnym punktem prostej AB , więc jego długość jest nie mniejsza od odległości punktu C od prostej AB , czyli liczby 1. Podobnie uzasadniamy, że odcinek BC ma długość nie mniejszą od 1. Zatem obwód trójkąta ABC jest nie mniejszy od 3. Ponieważ jednak odcinki BC , AC nie mogą być jednocześnie wysokościami trójkąta ABC , więc obwód tego trójkąta jest liczbą większą od 3.

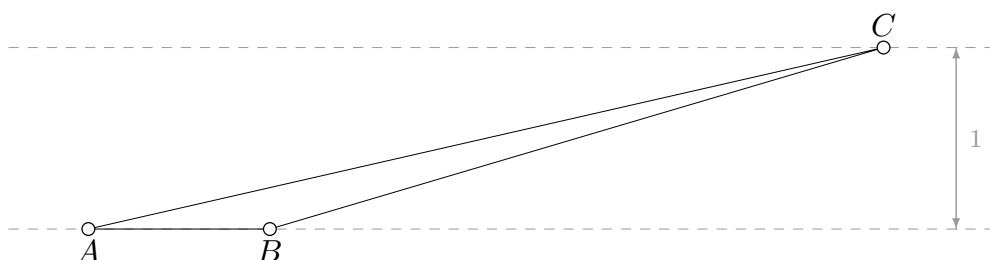
c) Oznaczmy przez D taki punkt prostej AB , że CD jest wysokością trójkąta ABC . Jeżeli $\sphericalangle ABC = 150^\circ$, to BCD jest trójkątem prostokątnym o kątach 30° , 60° , 90° , czyli połową trójkąta równobocznego (rys. 1). W konsekwencji $BC = 2 \cdot CD = 2$. Odcinek AC jest najdłuższym bokiem trójkąta ABC , gdyż leży naprzeciw największego kąta wewnętrznego. Wobec tego $AC > BC = 2$. W konsekwencji obwód trójkąta ABC jest liczbą większą od 4.



rys. 1

Uwaga

O tym, że obwód trójkąta ABC może być dowolnie dużą liczbą, można przekonać się nie wykonując obliczeń — wystarczy rozważyć trójkąt, w którym jeden z kątów przy boku AB jest rozwarty i ma miarę nieznacznie mniejszą od 180° (rys. 2).



rys. 2

6. Dany jest kwadrat $ABCD$ o boku długości 1. Przekątne tego kwadratu przecinają się w punkcie O . Pewien okrąg o środku w punkcie O dzieli bok AB na trzy równe części. Promień tego okręgu

- ☐ N a) jest mniejszy od $\frac{1}{2}$;
☐ N b) jest równy $\frac{1}{2}$;
☐ T c) jest większy od $\frac{1}{2}$.

Komentarz

Odległość punktu O od każdego z boków kwadratu jest równa $\frac{1}{2}$. Okrąg o promieniu $\frac{1}{2}$ jest styczny do boków kwadratu, a okrąg o promieniu mniejszym od $\frac{1}{2}$ — w ogóle ich nie przecina.

Uwaga

Wykorzystując twierdzenie Pitagorasa można obliczyć, że promień okręgu jest równy

$$\sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{6}.$$

Ponieważ $\sqrt{10} > \sqrt{9} = 3$, więc promień jest większy od $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

7. W akwarium Marka każda rybka jest jednego z trzech kolorów: złotego, czerwonego lub niebieskiego. Rybek czerwonych jest o 50% więcej niż złotych, a rybek niebieskich jest o 40% mniej niż czerwonych. Wynika z tego, że w akwarium Marka

N	a) rybek złotych jest mniej niż niebieskich;
T	b) liczba niebieskich rybek jest podzielna przez 9;
T	c) liczba złotych rybek jest podzielna przez 10.

Komentarz

Oznaczmy przez z liczbę złotych rybek w akwarium Marka. Wówczas liczba rybek czerwonych jest równa $150\% \cdot z = \frac{3}{2}z$, a liczba rybek niebieskich jest równa $60\% \cdot \frac{3}{2}z = \frac{9}{10}z$.

- a) Zauważmy, że $\frac{9}{10}z \leq z$, gdyż $z \geq 0$.
- c) Skoro liczba $\frac{9}{10}z$ jest całkowita i $\text{NWD}(9, 10) = 1$, to z jest liczbą podzielną przez 10.
- b) Liczba niebieskich rybek jest równa $9 \cdot \frac{z}{10}$. Z rozwiązania punktu c) wynika, że czynnik $\frac{z}{10}$ jest liczbą całkowitą.

8. Istnieje całkowita wielokrotność liczby 21, w której zapisie dziesiętnym

T	a) cyfra dziesiątek jest równa 1, a cyfra jedności jest równa 0;
T	b) cyfra dziesiątek jest równa 0, a cyfra jedności jest równa 1;
T	c) cyfra dziesiątek jest równa 1, a cyfra jedności jest równa 1.

Komentarz

- a) Zauważmy, że $21 \cdot 10 = 210$.
- b) Zauważmy, że $21 \cdot 81 = 21 + 21 \cdot 80 = 21 + 1680 = 1701$.
- c) Wystarczy dodać liczby znalezione w poprzednich punktach: $210 + 1701 = 1911$.

Uwaga

Przykład opisany w punkcie b) można znaleźć w następujący sposób: aby uzyskać wielokrotność liczby 21 zakończoną na „01”, wystarczy dodać 21 do wielokrotności liczby 21 zakończonej na „80”. Tę zaś można uzyskać z wielokrotności liczby 21 zakończonej na „10” (punkt a) w wyniku pomnożenia przez 8.

Można udowodnić, że każda ze stu możliwych *dwucyfrowych końcówek* pojawia się dokładnie raz pośród liczb $1 \cdot 21, 2 \cdot 21, 3 \cdot 21, \dots, 100 \cdot 21$.

9. Istnieje trójkąt prostokątny o bokach długości a , b , c , w którym

T	a) $a^2 + b^2 = c^2$;
T	b) $a^2 - b^2 = c^2$;
T	c) $2 \cdot a \cdot b = c^2$.

Komentarz

a) Jeżeli c jest długością przeciwprostokątnej, to równość $a^2 + b^2 = c^2$ wynika z twierdzenia Pitagorasa,

b) Jeżeli a jest długością przeciwprostokątnej, to równość $b^2 + c^2 = a^2$ wynika z twierdzenia Pitagorasa. Stąd $c^2 = a^2 - b^2$.

c) Rozważmy trójkąt będący połową kwadratu o boku 1 i oznaczmy długości jego boków w taki sposób, że $a = b = 1$ oraz $c = \sqrt{2}$. Wówczas $c^2 = 2 = 2 \cdot a \cdot b$.

Uwaga

Boki każdego trójkąta prostokątnego można oznaczyć tak, aby spełnione były równości z punktów a) lub b). Równość z punktu c) oprócz trójkątów równoramiennych ($a = b$ oraz $c = a\sqrt{2}$) spełniają również trójkąty, w których jedna z przyprostokątnych ma długość c , a stosunek długości przeciwprostokątnej do drugiej przyprostokątnej jest równy $\sqrt{2} + 1$.

10. Liczby naturalne od 1 do 6 napisano na ścianach sześcianu, każdą na innej ścianie.

Następnie dla każdej krawędzi sześcianu obliczono sumę liczb napisanych na dwóch ścianach, których wspólnym bokiem jest ta krawędź. Wynika z tego, że pewna spośród 12 obliczonych sum jest

T	a) liczbą dwucyfrową;
T	b) kwadratem liczby całkowitej;
N	c) równa 7.

Komentarz

a) Rozważmy ścianę, na której napisano 6. Co najmniej jedna z liczb 4, 5 jest na ścianie mającej z nią wspólny bok (gdyż co najwyżej jedna z nich może być na ścianie przeciwległej). Zatem wśród obliczonych sum jest co najmniej jedna z liczb $6 + 4 = 10$, $6 + 5 = 11$.

b) Podobnie jak w poprzednim punkcie uzasadniamy, że ściana z liczbą 3 ma wspólny bok ze ścianą z liczbą 1 lub ze ścianą z liczbą 6. Zatem wśród obliczonych sum jest co najmniej jedna z liczb $3 + 1 = 4 = 2^2$, $3 + 6 = 9 = 3^2$.

c) Liczbę 7 można zapisać w postaci sumy dwóch całkowitych składników z zakresu od 1 do 6 tylko na trzy sposoby: $1 + 6 = 2 + 5 = 3 + 4$. Jeżeli liczby 1, 6 napisano na przeciwległych ścianach sześcianu, liczby 2, 5 napisano na przeciwległych ścianach sześcianu i liczby 3, 4 napisano na przeciwległych ścianach sześcianu, to pośród obliczonych sum nie ma liczby 7.

11. Liczby a, b są dodatnie i mniejsze od 1. Wynika z tego, że

- ☐ T a) $a \cdot b < a + b$;
☐ T b) $a \cdot b < a^2 + b^2$;
☐ N c) $a \cdot b < a^3 + b^3$.

Komentarz

- a) Skoro $0 < b < 1$, to $a \cdot b < a \cdot 1 = a < a + b$.
b) Jeżeli $a \leq b$, to $a \cdot b \leq b \cdot b < a^2 + b^2$. Podobnie jeżeli $a > b$, to $a \cdot b < a^2 < a^2 + b^2$.
c) Jeżeli $a = b = \frac{1}{2}$, to $a \cdot b = \frac{1}{4} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = a^3 + b^3$.

12. Istnieją dwie różne potęgi liczby 3 o wykładnikach całkowitych dodatnich, których suma jest

- ☐ N a) potęgą liczby 2 o wykładniku całkowitym dodatnim;
☐ N b) potęgą liczby 3 o wykładniku całkowitym dodatnim;
☐ T c) potęgą liczby 6 o wykładniku całkowitym dodatnim.

Komentarz

a) Suma dwóch potęg liczby 3 o wykładnikach całkowitych dodatnich jest liczbą podzielną przez 3. Z kolei każda potęga liczby 2 o wykładniku całkowitym dodatnim jest liczbą niepodzielną przez 3.

b) Każda potęga liczby 3 o wykładniku całkowitym dodatnim jest liczbą nieparzystą. Suma dwóch liczb nieparzystych zawsze jest liczbą parzystą.

c) Zauważmy, że $3^2 + 3^3 = 9 + 27 = 36 = 6^2$.

Uwaga

Można uzasadnić, że przykład przywołany w rozwiązaniu punktu c) jest jedyny.

13. Dany jest trójkąt ABC , w którym $BC = 2 \cdot AC$. Punkt D leży wewnątrz tego trójkąta i spełnia równość $\sphericalangle ACD = \sphericalangle BCD$. Wynika z tego, że

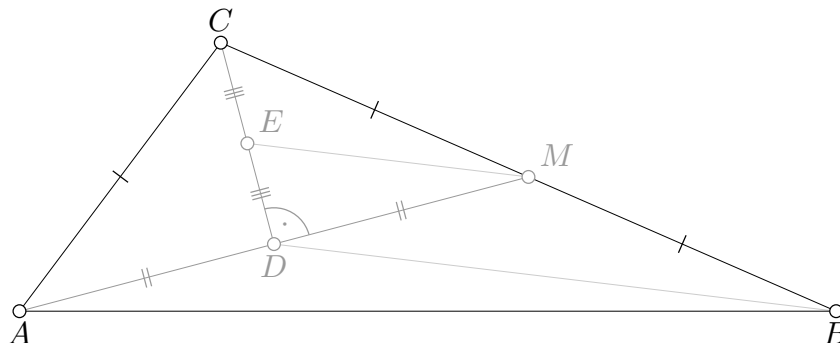
- ☐ N a) $BD = 2 \cdot AD$;
☐ T b) pole trójkąta BDC jest dwa razy większe od pola trójkąta ADC ;
☐ N c) $\sphericalangle BAC = 2 \cdot \sphericalangle ABC$.

Komentarz

b) Skoro punkt D leży na dwusiecznej kąta wewnętrznego przy wierzchołku C , to ma taką samą odległość od prostych AC oraz BC — oznaczmy tę odległość przez h . Wówczas pole trójkąta BDC jest równe $\frac{1}{2}BC \cdot h$, a pole trójkąta ADC jest równe $\frac{1}{2}AC \cdot h$. Założenie $BC = 2 \cdot AC$ prowadzi więc do wniosku, że pole trójkąta BDC jest dwa razy większe od pola trójkąta ADC .

c) Rozważmy trójkąt ABC , w którym $\sphericalangle BAC = 90^\circ$, $\sphericalangle ABC = 30^\circ$ oraz $\sphericalangle BCA = 60^\circ$. Wówczas $BC = 2 \cdot AC$ (trójkąt ABC jest połową trójkąta równobocznego), więc założenie zadania jest spełnione. Jednak $\sphericalangle BAC = 90^\circ \neq 60^\circ = 2 \cdot \sphericalangle ABC$.

a) Rozważmy dowolny trójkąt ABC , w którym $BC = 2 \cdot AC$. Oznaczmy przez M środek odcinka BC , przez D środek odcinka AM oraz przez E środek odcinka CD (rys. 3).



rys. 3

Zauważmy, że $MC = \frac{1}{2}BC = AC$, więc trójkąt ACM jest równoramienny. Środek D podstawy AM tego trójkąta leży na jego osi symetrii, więc $\sphericalangle ACD = \sphericalangle BCD$.

Odcinek ME jest linią środkową w trójkącie BCD , więc $ME = \frac{1}{2}BD$. W trójkącie prostokątnym DEM przeciwprostokątna ME jest dłuższa od przyprostokątnej MD , czyli

$$\frac{1}{2}BD = ME > MD = AD, \quad \text{skąd} \quad BD > 2 \cdot AD.$$

Uwaga

Można udowodnić, że nierówność $BD > 2 \cdot AD$ zachodzi dla każdego punktu D wewnątrz trójkąta ABC spełniającego $\sphericalangle ACD = \sphericalangle BCD$ (nie tylko dla środka odcinka AM).

14. Dodatnia liczba całkowita n ma następującą własność: liczba n -cyfrowa, której zapis dziesiętny składa się wyłącznie z cyfr równych 1, jest podzielna przez n . Wynika z tego, że liczba n jest

- | |
|---|
| T |
| N |
| N |
- a) nieparzysta;
b) podzielna przez 3;
c) potęgą liczby 3 o wykładniku całkowitym nieujemnym.

Komentarz

- a) Każda liczba, której zapis składa się wyłącznie z cyfr równych 1 jest nieparzysta, a liczba nieparzysta nie ma parzystych dzielników.
b) Jeżeli $n = 1$, to warunki zadania są spełnione, a 1 nie jest liczbą podzielną przez 3.

c) Jeżeli $n = 111$, to warunki zadania są spełnione, gdyż

$$\underbrace{1111 \dots 11}_{111} = 111 \cdot \underbrace{1001001001 \dots 001}_{36 \text{ segmentów „001”}},$$

a 111 nie jest potęgą liczby 3 o wykładniku całkowitym nieujemnym.

Uwaga

W punkcie b) przykład $n = 1$ jest jedyny. Można udowodnić, że jeżeli liczba n spełnia warunki zadania i $n \geq 2$, to n jest liczbą podzielną przez 3.

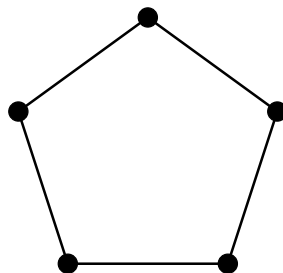
15. W grupie 5 osób każda osoba ma pośród pozostałych osób w tej grupie co najmniej jednego znajomego i co najmniej jednego nieznanego (przyjmujemy, że jeżeli A jest znajomym B , to również B jest znajomym A). Wynika z tego, że w tej grupie

- | |
|---|
| T |
| N |
| N |
- a) pewna osoba ma co najmniej dwóch znajomych;
b) pewna osoba ma dokładnie trzech znajomych;
c) pewne dwie osoby, które nie są znajomymi, mają wspólnego znajomego.

Komentarz

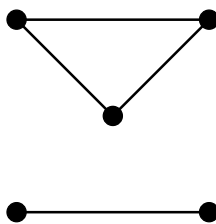
a) Gdyby każda osoba miała dokładnie jednego znajomego, to wszystkie osoby w tej grupie można byłoby połączyć w pary z ich znajomymi, więc liczba osób byłaby parzysta.

b) Jeśli układ znajomości wygląda tak, jak zilustrowano na rysunku 4 (kropki odpowiadają osobom, a odcinki między nimi — znajomościom), to warunki zadania są spełnione: każda osoba ma co najmniej jednego znajomego i co najmniej jednego nieznanego. Mimo to żadna osoba nie ma dokładnie trzech znajomych.



rys. 4

c) Jeśli układ znajomości wygląda tak, jak zilustrowano na rysunku 5, to żadna para nieznanymi nie ma wspólnego znajomego.



rys. 5

Opracowano na podstawie danych wprowadzonych przez szkoły. Ostateczne statystyki mogą ulec drobnym zmianom w wyniku weryfikacji nadesłanej dokumentacji.

Tabela 1. Procentowa liczba uzyskanych punktów za poszczególne zadania.

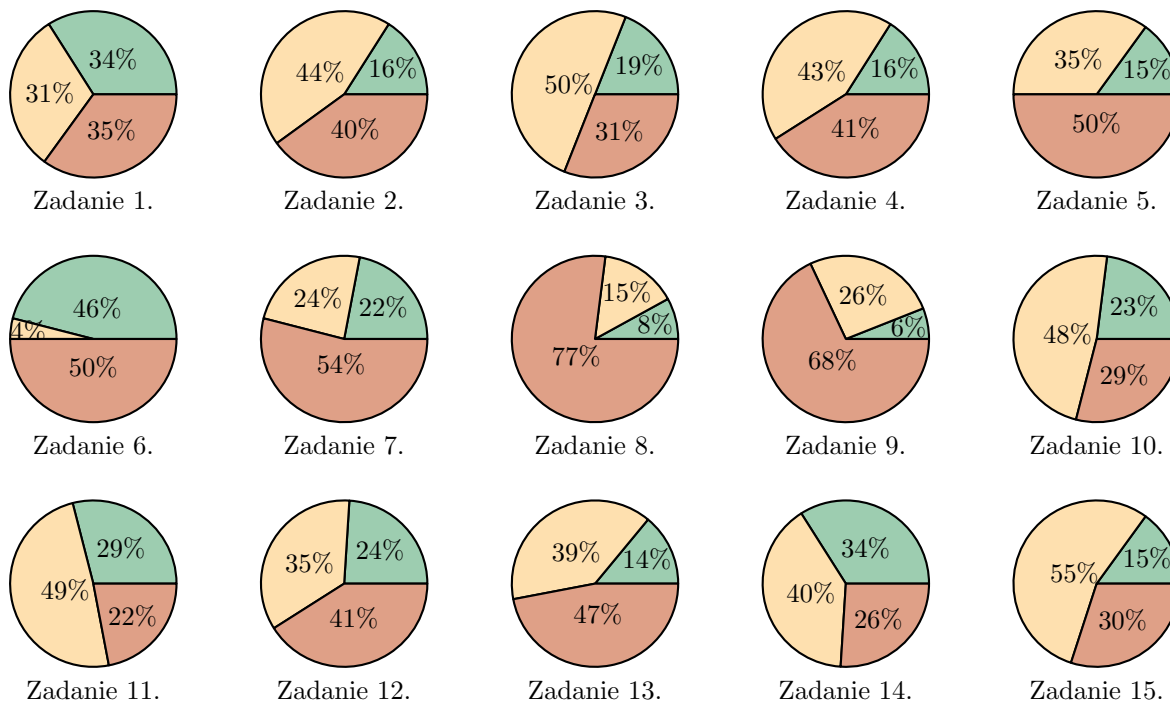


Tabela 2. Procentowa liczba poprawnych odpowiedzi w poszczególnych podpunktach.

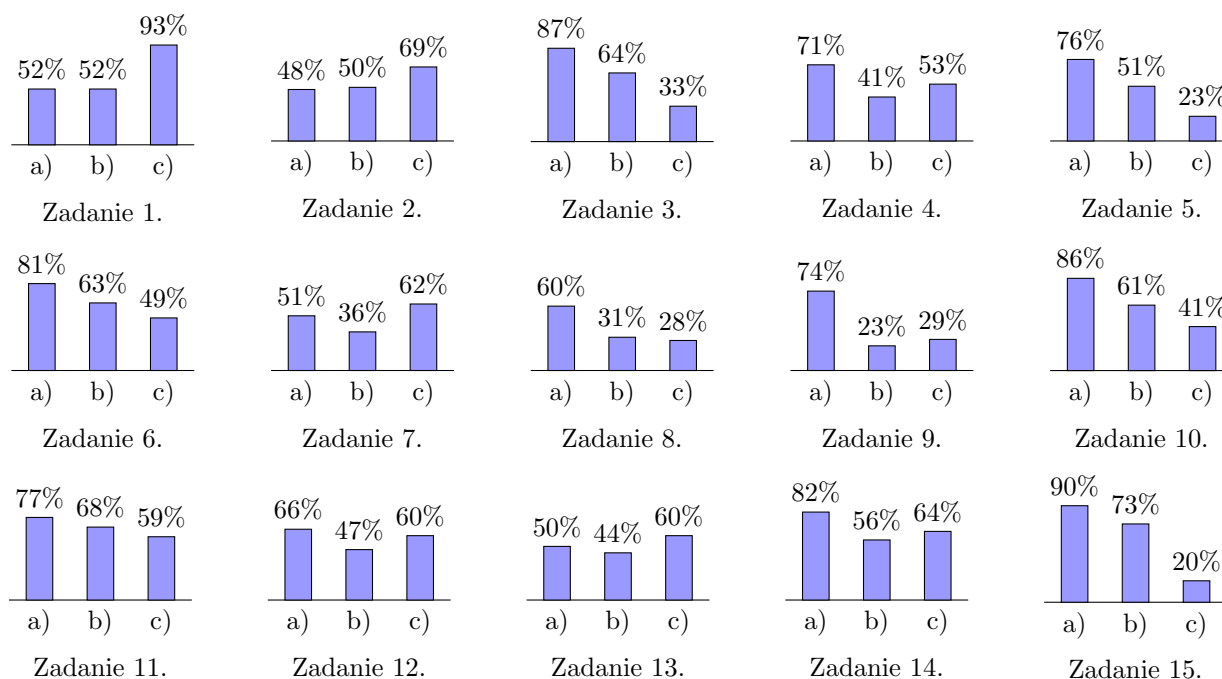


Tabela 3. Średnie liczby punktów uzyskanych za poszczególne zadania.

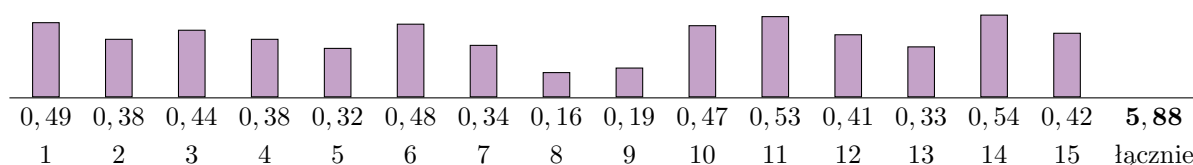
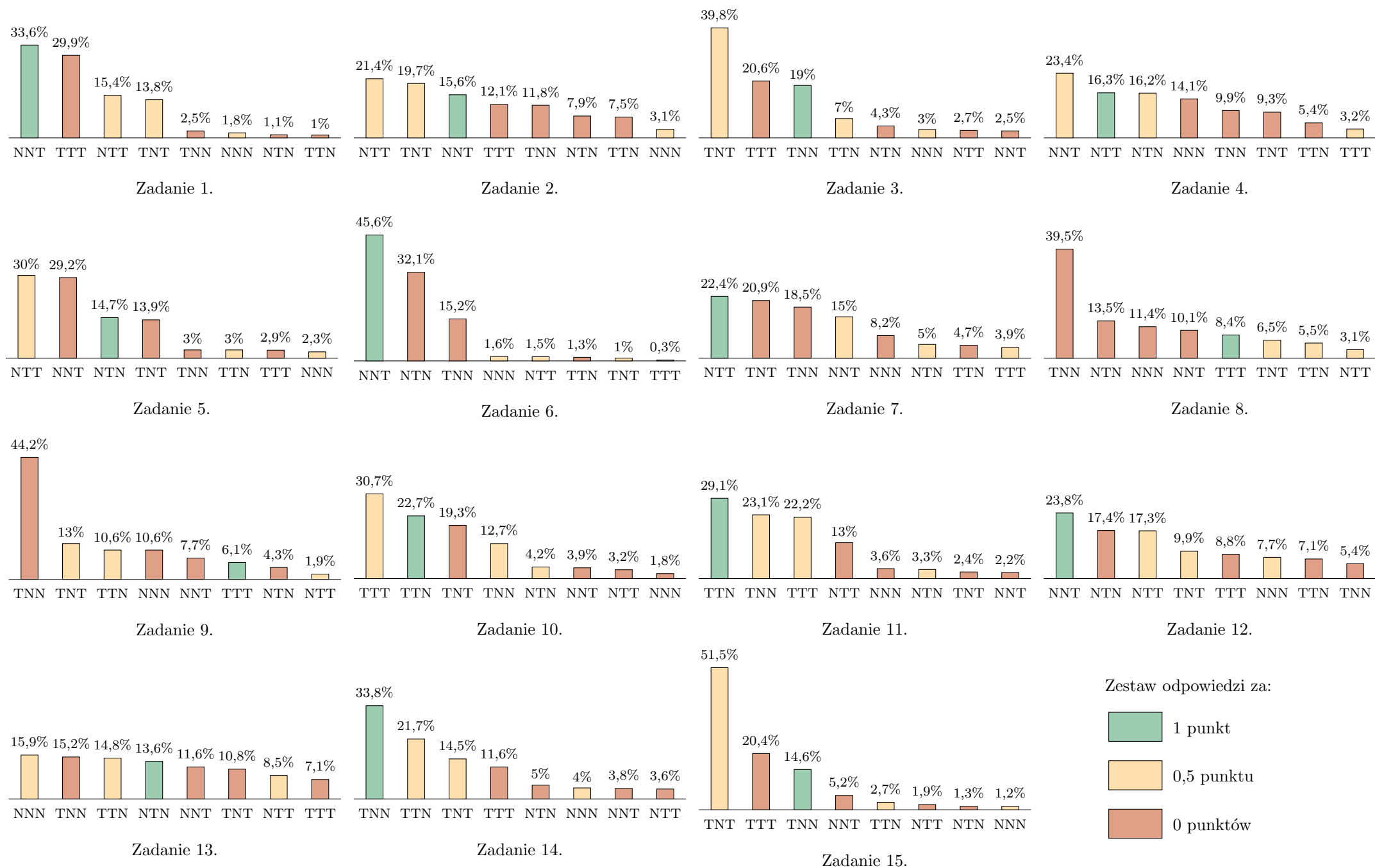
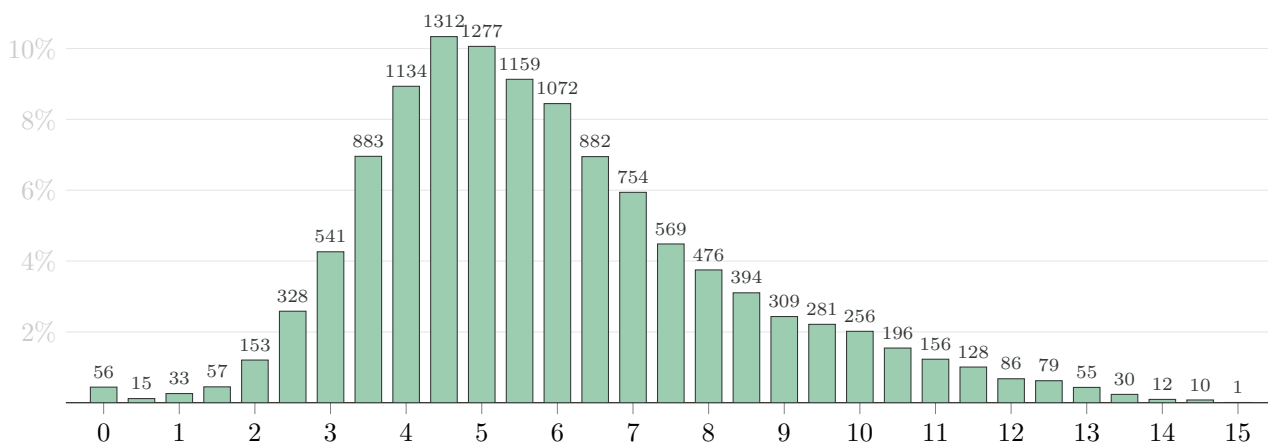


Tabela 4. Procentowa liczba udzielonych kombinacji odpowiedzi w poszczególnych zadaniach.



Wykres 5. Liczba osób, które uzyskały daną sumę punktów.



Wykres 6. Liczba osób, które uzyskały daną lub większą sumę punktów.

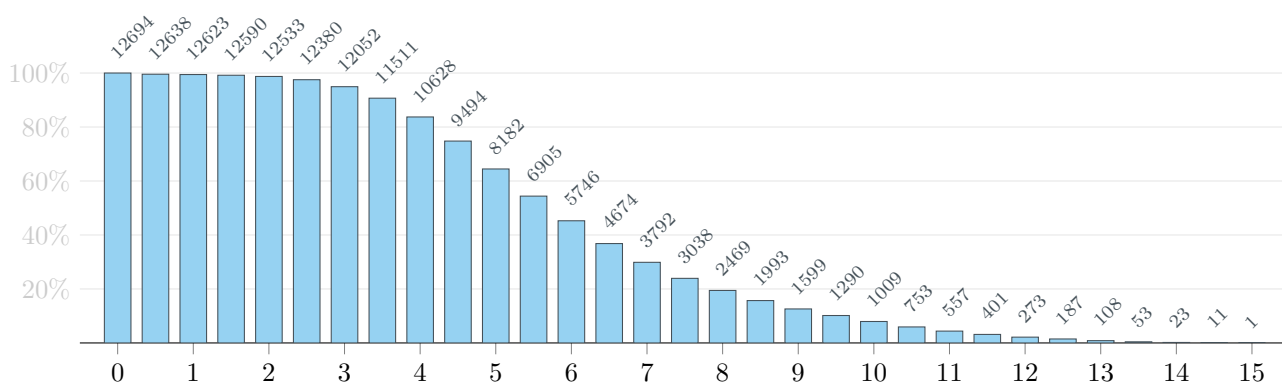


Tabela 7. Liczba szkół oraz uczniów, biorących udział w zawodach, w podziale na województwa.

145	dołnośląskie	1453
51	kujawsko-pomorskie	270
60	lubelskie	437
31	lubuskie	231
86	łódzkie	560
182	małopolskie	1323
200	mazowieckie (Warszawy)	1518
19	opolskie	190
62	podkarpackie	370
22	podlaskie	220
126	pomorskie	1442
118	śląskie	707
19	świętokrzyskie	169
22	warmińsko-mazurskie	128
223	m. st. Warszawa	2340
119	wielkopolskie	890
44	zachodniopomorskie	446
1529 szkół	Polska	12694 uczniów

Tabela 8. Liczba uczniów, którzy wzięli udział w zawodach w podziale na klasy.

liczba uczniów:	1	121	379	1123	4405	6665
klasa:	3	4	5	6	7	8

XXI Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody stopnia pierwszego — część zadaniowa

(8 października 2025 r., godz. 9:00)

Przed przystąpieniem do rozwiązywania zadań wpisz na każdą z siedmiu kartek swoje imiona, nazwisko, numer klasy oraz numer zadania.

Rozwiązania poszczególnych zadań zapisuj **na oddzielnych kartkach**. Używaj koloru czarnego lub niebieskiego. Nie używaj ołówka ani korektora.

Zadania są jednakowo punktowane. Za w pełni poprawne rozwiązanie zadania można uzyskać **3 punkty**, a za istotny postęp w kierunku poprawnego rozwiązania można uzyskać **1 punkt**.

Pamiętaj, że ocenie podlega przedstawiony **tok rozumowania**, więc staraj się zaprezentować go dokładnie i precyzyjnie. Za podanie samej odpowiedzi, nawet poprawnej, bez uzasadnienia (lub z błędnym uzasadnieniem) nie będą przyznawane punkty.

Czas na rozwiązywanie zadań: 100 minut.

Powodzenia!

1. Jaś ma monety o łącznej wartości równej dokładnie 100 złotych, przy czym każda z tych monet jest dwuzłotówką albo pięciozłotówką. Wykaż, że Jaś może spośród tych monet wybrać takie, których łączna wartość jest równa dokładnie 50 złotych.

2. Dodatnia liczba całkowita n jest 21 razy większa od sumy swoich cyfr. Udowodnij, że liczba n jest podzielna przez 9.

3. Każda z pięciu osób napisała na tablicy, ilu znajomych ma wśród czterech pozostałych osób (jeżeli osoba A zna osobę B , to osoba B zna osobę A). Cztery z napisanych liczb są równe 1. Wyznacz wszystkie możliwe wartości piątej liczby. Odpowiedź uzasadnij.

4. Niezerowe liczby rzeczywiste a, b spełniają warunek $(a+b^2)(a^3+b^3)=a^4+b^5$. Wykaż, że $b < 0$.

5. Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD . Punkt P znajduje się wewnątrz trapezu $ABCD$, przy czym

$$AB = BP, \quad DC = CP \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle BPC = 90^\circ.$$

Oblicz miarę kąta APD .

6. Dana jest liczba całkowita n o tej własności, że liczba $2n$ jest sześcianem liczby całkowitej, a liczba $3n$ jest kwadratem liczby całkowitej. Udowodnij, że liczba n jest podzielna przez 108.

7. Miary kątów wewnętrznych trójkąta ostrokątnego są równe $a^\circ, b^\circ, c^\circ$. Wykaż, że istnieje trójkąt o bokach długości a, b, c .

XXI Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody pierwszego stopnia — część zadaniowa (8 października 2025 r.)

Rozwiązania zadań konkursowych

1. Jaś ma monety o łącznej wartości równej dokładnie 100 złotych, przy czym każda z tych monet jest dwuzłotówką albo pięciozłotówką. Wykaż, że Jaś może spośród tych monet wybrać takie, których łączna wartość jest równa dokładnie 50 złotych.

Rozwiązanie

Sposób I

Jeżeli Jaś ma co najmniej 10 pięciozłotówek, to 50 zł może uzyskać wybierając 10 z nich.

Jeżeli Jaś ma co najmniej 25 dwuzłotówek, to 50 zł może uzyskać wybierając 25 z nich.

Uzasadnimy, że Jaś może dokonać co najmniej jednego z wyborów opisanych powyżej. Istotnie, gdyby Jaś miał mniej niż 10 pięciozłotówek i jednocześnie mniej niż 25 dwuzłotówek, to łącznie miałby mniej niż $10 \cdot 5 + 25 \cdot 2 = 100$ złotych.

Sposób II

Oznaczmy przez d liczbę dwuzłotówek, a przez p — liczbę pięciozłotówek posiadanych przez Jasia. Z warunków zadania wynika, że $2d + 5p = 100$. Zatem d jest liczbą podzielną przez 5 oraz p jest liczbą parzystą.

Jeżeli d jest liczbą parzystą, to Jaś może wybrać $\frac{1}{2}p$ pięciozłotówek oraz $\frac{1}{2}d$ dwuzłotówek.

Jeżeli z kolei d jest liczbą nieparzystą, to $d \geq 5$, gdyż d jest liczbą podzielną przez 5. W konsekwencji $\frac{1}{2}(d+5)$ jest liczbą całkowitą nie większą od d . Ponadto $d \leq 45$, więc $p \geq 2$, czyli $\frac{1}{2}(p-2)$ jest liczbą całkowitą nieujemną. Zauważmy, że

$$2 \cdot \frac{1}{2}(d+5) + 5 \cdot \frac{1}{2}(p-2) = \frac{2d+10+5p-10}{2} = \frac{2d+5p}{2} = 50.$$

Jaś może zatem wybrać $\frac{1}{2}(d+5)$ dwuzłotówek oraz $\frac{1}{2}(p-2)$ pięciozłotówek, aby uzyskać dokładnie 50 złotych.

2. Dodatnia liczba całkowita n jest 21 razy większa od sumy swoich cyfr. Udowodnij, że liczba n jest podzielna przez 9.

Rozwiązanie

Sposób I

Oznaczmy przez s sumę cyfr liczby n . Skoro $n = 21s = 3 \cdot 7s$, to n jest liczbą podzielną przez 3. Na mocy cechy podzielności przez 3 również s jest liczbą podzielną przez 3, czyli $s = 3k$ dla pewnej liczby całkowitej k . Wobec tego $n = 63k = 9 \cdot 7k$ jest liczbą podzielną przez 9.

Sposób II

Wykorzystamy następujący fakt: po pomniejszeniu dodatniej liczby całkowitej o jej sumę cyfr, uzyskujemy liczbę podzielną przez 9. Zatem liczba $n - \frac{1}{21}n = \frac{20}{21}n$ jest podzielna przez 9, czyli $\frac{20}{21}n = 9k$ dla pewnej liczby całkowitej k . Stąd $20n = 189k$ i w konsekwencji — skoro 20 oraz 189 nie mają wspólnych dzielników pierwszych — liczba n dzieli się przez $189 = 9 \cdot 21$.

Uwaga

Można udowodnić, że jedyną liczbą n spełniającą warunki zadania jest $378 = 21 \cdot (3+7+8)$.

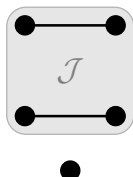
3. Każda z pięciu osób napisała na tablicy, ilu znajomych ma wśród czterech pozostałych osób (jeżeli osoba A zna osobę B , to osoba B zna osobę A). Cztery z napisanych liczb są równe 1. Wyznacz wszystkie możliwe wartości piątej liczby. Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie

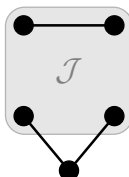
Sposób I

Oznaczmy przez $\mathcal{J}$ grupę czterech osób, które napisały na tablicy liczbę 1. Rozważmy, ile relacji znajomości jest w obrębie grupy $\mathcal{J}$. (Na ilustracjach kropki oznaczają osoby, a odcinki symbolizują znajomości.)

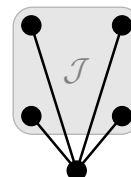
- Jeżeli w $\mathcal{J}$ są dwie pary znajomych, to piąta osoba nie zna żadnej z nich, więc ma 0 znajomych pośród pozostałych osób (rys. 1).
- Jeżeli w $\mathcal{J}$ jest jedna para znajomych, a pozostałe dwie osoby nie są znajomymi, to jedynym znajomym każdej z nich jest piąta osoba. W tym wypadku ta osoba ma 2 znajomych pośród pozostałych (rys. 2).
- Jeżeli żadne dwie osoby w $\mathcal{J}$ nie są znajomymi, to jedynym znajomym każdej z nich jest piąta osoba — ta osoba ma więc 4 znajomych pośród pozostałych (rys. 3).



rys. 1



rys. 2



rys. 3

Sposób II

Oznaczmy przez x szukaną wartość. Wówczas x jest liczbą całkowitą oraz $0 \leq x \leq 4$.

Zauważmy, że suma pięciu liczb napisanych na tablicy jest dwa razy większa od liczby wszystkich znajomości w rozważanej grupie. To oznacza, że liczba $1 + 1 + 1 + 1 + x = 4 + x$ jest parzysta. W konsekwencji liczba x jest parzysta, więc nie może być równa 1 ani 3.

Aby uzasadnić, że każda z liczb 0, 2 lub 4 jest w istocie możliwą wartością x , wystarczy podać odpowiednie przykłady układów znajomości (są one przedstawione na rys. 1–3).

4. Niezerowe liczby rzeczywiste a , b spełniają warunek $(a + b^2)(a^3 + b^3) = a^4 + b^5$. Wykaż, że $b < 0$.

Rozwiązanie

Przekształcamy dany warunek równoważnie:

$$\begin{aligned}(a + b^2)(a^3 + b^3) &= a^4 + b^5, \\ a(a^3 + b^3) + b^2(a^3 + b^3) &= a^4 + b^5, \\ a^4 + ab^3 + a^3b^2 + b^5 &= a^4 + b^5, \\ ab^3 + a^3b^2 &= 0, \\ ab^2(b + a^2) &= 0.\end{aligned}$$

Ponieważ $a \neq 0$ oraz $b \neq 0$, więc z ostatniej równości wynika, że $b + a^2 = 0$, czyli $b = -a^2$. Ponieważ $a^2 > 0$ dla każdej liczby a różnej od zera, więc $b < 0$.

5. Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD . Punkt P znajduje się wewnątrz trapezu $ABCD$, przy czym

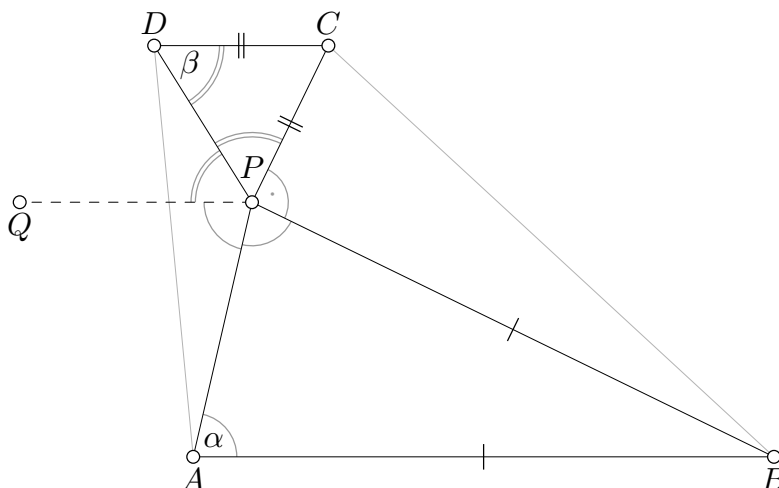
$$AB = BP, \quad DC = CP \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle BPC = 90^\circ.$$

Oblicz miarę kąta APD .

Rozwiązanie

Sposób I

Niech Q będzie takim punktem, że odcinek PQ jest równoległy do podstaw trapezu i przecina ramię AD (rys. 4). Przyjmijmy oznaczenia $\sphericalangle BAP = \alpha$ oraz $\sphericalangle CDP = \beta$.



rys. 4

Skoro $AB = BP$ oraz $DC = CP$, to $\sphericalangle APB = \alpha$ oraz $\sphericalangle DPC = \beta$. Skoro odcinek PQ jest równoległy do podstaw trapezu, to $\sphericalangle APQ = \alpha$ oraz $\sphericalangle DPQ = \beta$.

Zauważmy, że suma miar kątów zaznaczonych wokół punktu P jest równa 360° , czyli

$$2\alpha + 2\beta + 90^\circ = 360^\circ, \quad \text{skąd} \quad \alpha + \beta = 135^\circ.$$

Pozostaje zauważyć, że $\sphericalangle APD = \alpha + \beta = 135^\circ$.

Sposób II

Podobnie jak w pierwszym sposobie przyjmijmy oznaczenia $\sphericalangle BAP = \sphericalangle APB = \alpha$ oraz $\sphericalangle CDP = \sphericalangle DPC = \beta$.

W trójkątach równoramiennych ABP oraz CDP spełnione są równości $\sphericalangle ABP = 180^\circ - 2\alpha$ oraz $\sphericalangle DCP = 180^\circ - 2\beta$. W trójkącie prostokątnym BCP mamy $\sphericalangle PBC + \sphericalangle PCB + 90^\circ = 180^\circ$, skąd $\sphericalangle PBC + \sphericalangle PCB = 90^\circ$. Wykorzystując fakt, że w trapezie $ABCD$ suma miar kątów wewnętrznych przyległych do ramienia BC jest równa 180° , uzyskujemy

$$\begin{aligned} 180^\circ &= \sphericalangle ABC + \sphericalangle BCD = \sphericalangle ABP + \sphericalangle PBC + \sphericalangle PCB + \sphericalangle DCP = \\ &= 180^\circ - 2\alpha + 90^\circ + 180^\circ - 2\beta = 450^\circ - 2(\alpha + \beta), \end{aligned}$$

skąd $\alpha + \beta = 135^\circ$. Wobec tego

$$\sphericalangle APD = 360^\circ - 90^\circ - (\alpha + \beta) = 270^\circ - 135^\circ = 135^\circ.$$

6. Dana jest liczba całkowita n o tej własności, że liczba $2n$ jest sześcianem liczby całkowitej, a liczba $3n$ jest kwadratem liczby całkowitej. Udowodnij, że liczba n jest podzielna przez 108.

Rozwiązanie

Sposób I

Skoro liczba $3n$ jest podzielna przez 3 i jest kwadratem liczby całkowitej, to $3n$ jest liczbą podzielną przez 9. W konsekwencji n jest liczbą podzielną przez 3.

Skoro liczba parzysta $2n$ jest sześcianem liczby całkowitej, to $2n$ jest liczbą podzielną przez 8. Wobec tego n jest liczbą podzielną przez 4.

Podobnie skoro liczba $2n$ jest podzielna przez 3 i jest sześcianem liczby całkowitej, to jest podzielna przez 27. W konsekwencji liczba n jest podzielna przez 27.

Ponieważ n jest liczbą podzielną zarówno przez 4, jak i przez 27, to jest liczbą podzielną przez najmniejszą wspólną wielokrotność tych dwóch liczb, czyli $\text{NWW}(27, 4) = 27 \cdot 4 = 108$.

Sposób II

Niech k, ℓ będą takimi liczbami całkowitymi, że $2n = k^3$ oraz $3n = \ell^2$. Wtedy $\frac{1}{2}k^3 = n = \frac{1}{3}\ell^2$, skąd uzyskujemy

$$3k^3 = 2\ell^2.$$

Wynika z tego, że liczba k jest parzysta, a liczba ℓ jest podzielna przez 3, czyli $k = 2a$ oraz $\ell = 3b$ dla pewnych liczb całkowitych a, b . Powyższa równość przybiera postać

$$24a^3 = 18b^2, \quad \text{czyli} \quad 4a^3 = 3b^2.$$

Stąd wynika, że a jest liczbą podzielną przez 3. Zatem $a = 3c$ dla pewnej liczby całkowitej c .

Z powyższych rozważań wynika, że

$$n = \frac{1}{2}k^3 = \frac{1}{2} \cdot (2a)^3 = 4a^3 = 4 \cdot (3c)^3 = 108c^3.$$

7. Miary kątów wewnętrznych trójkąta ostrokątnego są równe $a^\circ, b^\circ, c^\circ$. Wykaż, że istnieje trójkąt o bokach długości a, b, c .

Rozwiązanie

Z warunków zadania wynika, że $0 < a < 90, 0 < b < 90, 0 < c < 90$ oraz $a + b + c = 180$. Trójkąt o bokach długości a, b, c istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są nierówności

$$a + b > c, \quad b + c > a, \quad c + a > b.$$

Korzystając z równości $a + b = 180 - c$, pierwszą z powyższych nierówności można przekształcić równoważnie kolejno do postaci

$$\begin{aligned} 180 - c &> c, \\ 180 &> 2c, \\ 90 &> c. \end{aligned}$$

Ostatnia nierówność wynika wprost z założeń zadania. Pozostałe dwie nierówności można uzasadnić w pełni analogicznie.
