COMPENDIUM OMEX

Olimpiada Matemática Española Fase Local Extremadura

Gerard Romo Garrido

Toomates Coolección vol. 88

Toomates Coolección

Los libros de **Toomates** son materiales digitales y gratuitos. Son digitales porque están pensados para ser consultados mediante un ordenador, tablet o móvil. Son gratuitos porque se ofrecen a la comunidad educativa sin coste alguno. Los libros de texto pueden ser digitales o en papel, gratuitos o en venta, y ninguna de estas opciones es necesariamente mejor o peor que las otras. Es más: Suele suceder que los mejores docentes son los que piden a sus alumnos la compra de un libro de texto en papel, esto es un hecho. Lo que no es aceptable, por inmoral y mezquino, es el modelo de las llamadas "licencias digitales", "licencias de uso" y en general cualquier forma de "pago por el acceso a los materiales didácticos", con las que algunas empresas pretenden cobrar a los estudiantes, una y otra vez, por acceder a los mismos contenidos (unos contenidos que, además, son de una bajísima calidad). Este modelo de negocio es miserable, pues impide el compartir un mismo material, incluso entre dos hermanos, pretende convertir a los estudiantes en un mercado cautivo, exige a los estudiantes y a las escuelas costosísimas líneas de Internet, pretende pervertir el conocimiento, que es algo social, público, convirtiéndolo en un producto de propiedad privada, accesible solo a aquellos que se lo puedan permitir, y solo de una manera encapsulada, fragmentada, impidiendo el derecho del alumno de poseer todo el libro, de acceder a todo el libro, de moverse libremente por todo el libro.
Nadie puede pretender ser neutral ante esto: Mirar para otro lado y aceptar el modelo de pago por acceso a los materiales es admitir un mundo más injusto, es participar en la denegación del acceso al conocimiento a aquellos que no disponen de medios económicos, y esto en un mundo en el que las modernas tecnologías actuales permiten, por primera vez en la historia de la Humanidad, poder compartir el conocimiento sin coste alguno, con algo tan simple como es un archivo "pdf". **El conocimiento no es una mercancía**.
El proyecto Toomates tiene como objetivo la promoción y difusión entre el profesorado y el colectivo de estudiantes de unos materiales didácticos libres, gratuitos y de calidad, que fuerce a las empresas comerciales a competir ofreciendo alternativas de pago atractivas aumentando la calidad de los materiales que ofrecen, (que son muy mediocres) y no mediante retorcidas técnicas comerciales.
 Todos los libros se ofrecen en dos versiones: En formato "**pdf**" para una cómoda lectura y en el formato "**doc**" de MSWord para permitir y facilitar su edición y generar versiones parcial o totalmente modificadas.

¡Libérate de la tiranía y mediocridad de las editoriales! Crea, utiliza y comparte tus propios materiales didácticos.

Problem Solving (en español):

Geometría Axiomática Problemas de Geometría 1 Problemas de Geometría 2
Introducción a la Geometría Álgebra Teoría de números Combinatoria Probabilidad
Trigonometría Desigualdades Números complejos Calculus & Precalculus

Libros de texto (en catalán):

Nombres (Preàlgebra) Àlgebra Proporcionalitat Mesures geomètriques
Geometria analítica Combinatòria i Probabilitat Estadística Trigonometria Funcions
Nombres Complexos Àlgebra Lineal Geometria Lineal Càlcul Infinitesimal
Programació Lineal Mates amb Excel

PAU españolas:

Cataluña TEC Cataluña CCSS Valencia Galicia País Vasco Baleares

PAU y reválidas internacionales:

Portugal Italia Francia Rumanía Hungría Polonia Pearson Edexcel International A Level
China Gaokao Pearson Edexcel IGCSE Cambridge International A Level
Cambridge IGCSE AQA GCSE International Baccalaureate (IB)

Evaluación diagnóstica y pruebas de acceso:

ACM6EP ACM4 CFGS PAP

Competiciones matemáticas:

Canguro: España Cataluña Francia USA Reino Unido Austria
USA: Mathcounts AMC 8 10 12 AIME USAJMO USAMO TSTST TST ELMO Putnam
España: OME OMEFL OMEEX OMC OMEA OMEM OMA CDP
Europa: OMI Arquimede HMMT BMO Balkan MO JBMO OPM
Internacional: IMO IGO SMT INMO CMO HMMT EGMO
AHSME: Book 1 Book 2 Book 3 Book 4 Book 5 Book 6 Book 7 Book 8 Book 9

Otros materiales:

Pizzazz! Book A Book B Book C Book D Book E Pre-Algebra Algebra , REOIM , Llibre3r

¡Genera tus propias versiones de este documento! Siempre que es posible se ofrecen las versiones editables "MS Word" de todos los materiales para facilitar su edición.

¡Ayuda a mejorar! Envía cualquier duda, observación, comentario o sugerencia a **toomates@gmail.com**
¡No utilices una versión anticuada! Todos estos libros se revisan y amplían constantemente. Descarga totalmente gratis la última versión de estos documentos en los correspondientes enlaces superiores, en los que siempre encontrarás la versión más actualizada.
Consulta el **catálogo de libros** completo en **http://www.toomates.net**

¿Problemas para descargar algún documento? Descarga toda la biblioteca Toomates Aquí
Visita mi **Canal de Youtube**: **https://www.youtube.com/c/GerardRomo**
Visita mi **blog: https://toomatesbloc.blogspot.com/**

Versión de este documento: **09/07/2025**

Índice.

	Enunciados	Acta
50 - L - (2013-14)	6	5
51 - LI - (2014-15)	13	
52 - LII - (2015-16)		18
53 - LIII - (2016-17)	19	22
54 - LIV - (2017-18)	23	
55 - LV - (2018-19)	25	28
56 - LVI - (2019-20)	29	32
57 - LVII - (2020-21)	33	37
58 - LVIII - (2021-22)	38	41
59 - LIX - (2022-23)	42	49
60 - LX - (2023-24)	50	53
61 - LXI - (2024-25)	54	57

Fuente.

https://matematicas.unex.es/olimpiada/

En el compendium general:

http://www.toomates.net/biblioteca/CompendiumOMEFL.pdf

encontraréis más información sobre la Fase Local de las Olimpiada Matemática Española y el listado de todos los compendiums relacionados.

Todo este material ha sido agrupado en un único archivo "pdf" mediante la aplicación online

https://www.ilovepdf.com/

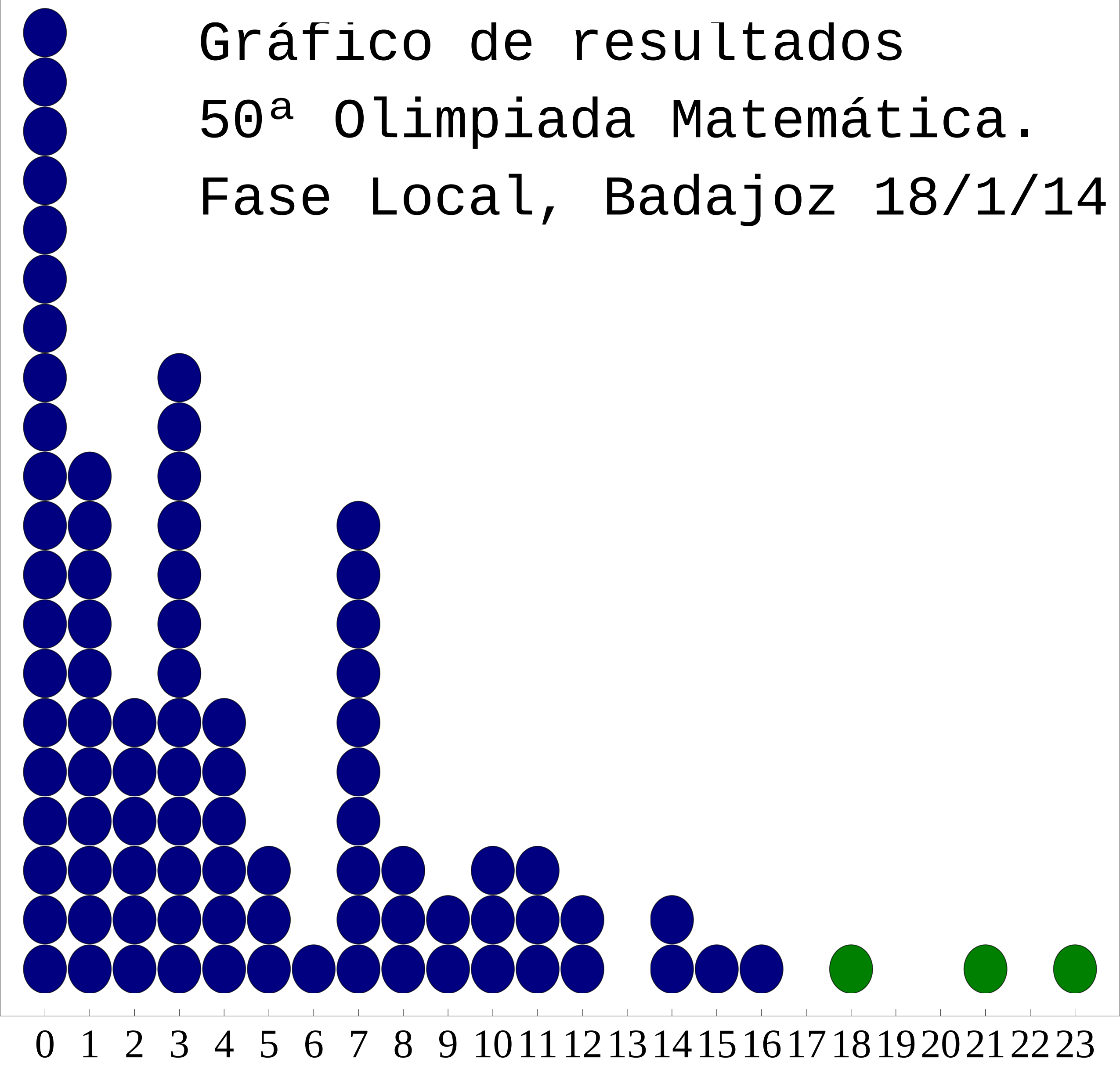


Gráfico de resultados
50ª Olimpiada Matemática.
Fase Local, Badajoz 18/1/14
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23

ACTA DE CALIFICACIÓN DE LA PRIMERA FASE DE LA 50 OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Distrito universitario de Extremadura

Reunido el tribunal calificador del Distrito Universitario de Extremadura, formado por los profesores del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Extremadura Dña. Eva T. López Sanjuán, D. Jesús Montanero Fernández y Dña. María Isabel Parra Arévalo, acuerda proponer como ganadores:

1º Ana Sánchez Rivero Calificación: 22.5 puntos
Centro: I.E.S. Profesor Hernández-Pacheco (Cáceres)

2º Roberto Téllez Domínguez Calificación: 20.5 puntos
Centro: I.E.S. Profesor Hernández-Pacheco (Cáceres)

3º Daniel Ropero Gragera Calificación: 18 puntos
Centro: Colegio San José (Villafranca de los Barros)

Badajoz, 27 de Enero de 2014

Eva T. López Sanjuán	Jesús Montanero Fernández	María Isabel Parra Arévalo

50 Olimpiada Matemática Espanõla
Primera Fase
Primera Sesión
18 de enero de 2014, Manãna

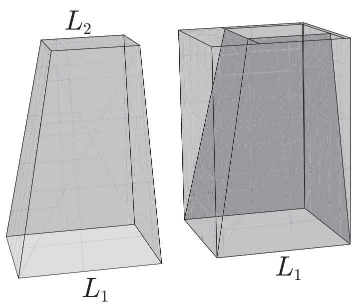
Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

1. Sean a, b números positivos. Probar que

$$a + b \geq \sqrt{ab} + \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

2. El senõr y la senõra Smith invitan a n matrimonios a una velada en su casa. Lógicamente, al menos uno de los dos anfitriones conoce al menos, a uno de los dos cónyuges de cada pareja invitada. Al comenzar la fiesta, cada persona estrecha la mano de aquéllos a quienes no conoce. El senõr Smith pregunta entonces a cada una de las demás personas cuántas manos ha estrechado, y cada una le dice un número diferente. ¿Cuántos invitados conocían al senõr Smith? ¿Cuántos invitados conocían a la senõra Smith? ¿Cuántos invitados conocían a ambos? ¿Cuántos a ninguno de los dos?

3. De un prisma recto de base cuadrada, con lado de longitud L_1, y altura H, extraemos un tronco de pirámide, no necesariamente recto, de bases cuadradas, con lados de longitud L_1 (para la inferior) y L_2 (para la superior), y altura H. Las dos piezas obtenidas aparecen en la imagen siguiente:



Si el volumen del tronco de pirámide es $2/3$ del total del volumen del prisma, ¿cuál es el valor de L_1/L_2?

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de tres horas y media.

L Olimpiada Matemática Espanõla
Primera Fase
Segunda Sesión
18 de enero de 2014, Tarde

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

1. Hallar para qué valores del número real a todas las raíces del polinomio, en la variable x,

$$x^3 - 2x^2 - 25x + a$$

son números enteros.

2. Encontrar las tres últimas cifras del número 7^{2014}.

3. En una isla maldita viven 364 personas. Son conscientes de que todos ellos actúan siguiendo una lógica perfecta y de que su color de ojos puede ser azul o marrón. Todos conocen el color de ojos de sus vecinos, pero ignoran el suyo y procuran por todos los medios no saberlo, porque morirían a los doce de la noche del día en que conocieran con certeza su color de ojos. Entre ellos existe un acuerdo tácito para no revelar el color de los demás. Así, sus vidas transcurren dichosas hasta que un nefasto 31 de diciembre, llega un visitante a la isla y comenta ante todos: “Hasta hoy no había visto a nadie con los ojos azules”. Tras un certero razonamiento, todos los habitantes deducen que morirán durante el anõ siguiente. ¿Cómo llegan a esa conclusión?

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de tres horas y media.

Soluciones

1. **Problema 1. Primera sesión**

   Solución 1: Se trata de elevar al cuadrado ambos términos de la inecuación y despejar cuando sea necesario, hasta llegar a la conclusión de que la inecuación inicial equivale a esta otra:

   $$a^4 - 4a^3b + 6a^2b2 - 4ab^3 + b^4 \geq 0$$

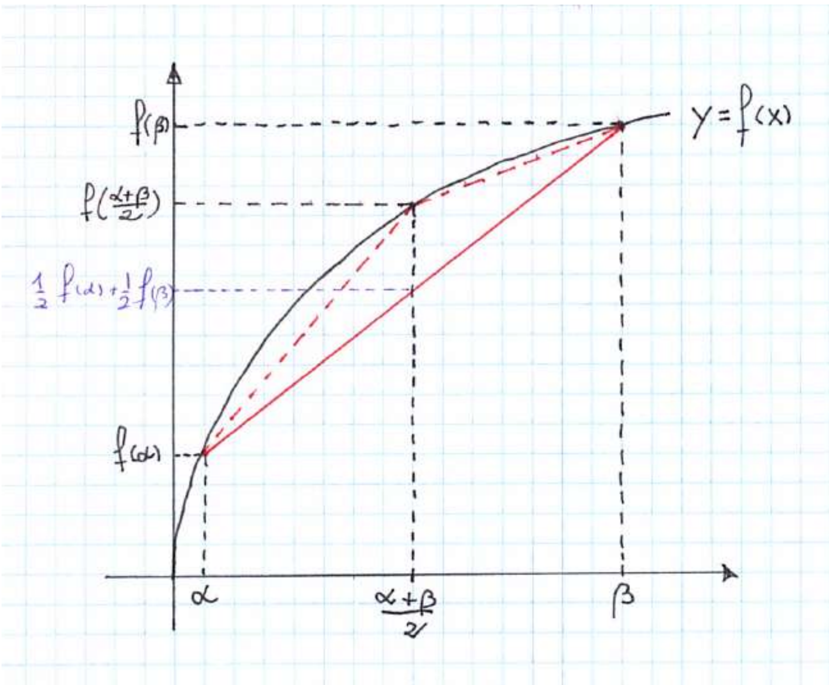
   Entonces, basta con percatarse de que el primer término equivale a $(a-b)^4$.

   Solución 2: La función $y = \sqrt{x}$ es cóncava en su dominio pues su derivada segunda es menor que 0. Luego, según se razona en el gráfico, dados $\alpha, \beta \geq 0$, se verifica que

   $$\sqrt{\frac{\alpha+\beta}{2}} \geq \frac{1}{2}\sqrt{\alpha} + \frac{1}{2}\sqrt{\beta}$$

   La desigualdad se obtiene pues tomando

   $$\alpha = 4ab, \qquad \beta = 2(a^2+b^2)$$



   Solución 3: La RSM propone otras soluciones que hacen uso de desigualdades conocidas.

2. **Problema 2. Primera sesión**

Solución: Podemos demostrar por inducción que, para cada pareja, incluida la de los anfitriones, se verifica que la suma de personas a la que estrechan la mano es siempre $2n$. En el caso particular de los senõres Smith, cada uno de ellos conoce n invitados. Es más, ambos conocen siempre al mismo invitado y no conocen a su cónyuge.

- Si $n = 1$, la única posibilidad es que la que hemos enunciado, trivialmente.
- Si la proposición es cierta para $n-1 \geq 1$, veamos que también lo es para n: efectivamente, si $2n+1$ personas indican un número diferente de manos al senõr Smith y cada uno de ellos puede estrechar a lo sumo $2n$ manos, dado que suponemos que todos conocen a su cónyuge, cada persona interrogada tiene que estrechar un número de manos distinto entre 0 y $2n$. La senõra Smith no puede conocer a todos, pues de lo contrario no podría haber algún invitado que no conociera a nadie. Luego, la única persona que conoce a todos (estrecha 0 manos) se encuentra entre los invitados. En ese caso, la única persona que no conoce a nadie salvo a su cónyuge (estrecha $2n$ manos) tiene que ser su pareja. Es decir, uno de los componentes de dicha pareja es conocido por todos los presentes y, el otro, sólo por su cónyuge.

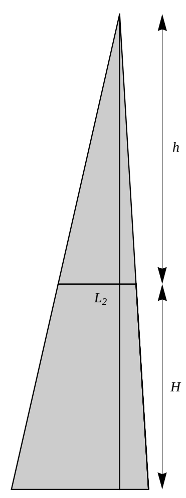
  Si excluimos esta pareja de nuestro análisis estaríamos bajo la hipótesis de inducción (con $n-1$ parejas). Luego, sabríamos que la suma de manos que estrecha cada pareja,ignorando la pareja excluida, es $2n-2$, y que los anfitriones conocen ambos al mismo integrante de cada pareja. Teniendo en cuenta la pareja excluida la suma es $2n$.

Se valoran también razonamientos con números concretos de parejas.

3. **Problema 3. Primera sesión**

Solución: Denótese $x = L_1/L_2$. Primeramente, hemos de tener presente que el volumen de una pirámide de altura a y cuya base tiene superficie S es $S \cdot a/3$, lo cual puede deducirse haciendo uso del cálculo integral.

Si en nuestro caso prolongamos hasta una altura $H+h$ el tronco de pirámide para obtener una pirámide completa, ésta tendrá una sección como la que se muestra en la figura siguiente.



Razonando con triángulos semejantes se deduce que $x = (h + H)/h$. El volumen V_1 del tronco de pirámide se puede expresar en función de x mediante

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{3}\left(L_1^2(H+h) - L_2^2 h\right) \\ &= \frac{hL_2^2}{3}\left(x^3 - 1\right) \end{aligned}$$

El volumen V_2 del prisma es igual a

$$\begin{aligned} V_2 &= L_1^2(H+h) \\ &= hL_2^2(x^3 - x^2) \end{aligned}$$

$V_1 = 2V_2/3$ equivale pues a

$$x^3 - 2x^2 + 1 = 0$$

1 es raíz del polinomio anterior que, entonces, puede descomponerse así

$$(x-1)(x^2 - x - 1)$$

Las raíces restantes son $(1+\sqrt{5})/2$ y $(1-\sqrt{5})/2$. La solución $x = 1$ se corresponde con el caso trivial en el que el tronco piramidal tiene volumen 0. La raíz negativa también debe ser descartada. Luego, la solución buscada es $x = (1+\sqrt{5})/2$. Es decir, los lados deben estar en relación aúrea.

4. **Problema 1. Segunda sesión**

Solución: Algunos participantes se han dado cuenta, mediante tanteo y haciendo uso de la regla de Ruffini, que con $a = 50$ el polinomio tiene por raíces 2, 5 y -5. De esta forma, han encontrado una solución particular aunque no han llegado a probar que es la única. Veamos cómo podría demostrarse.

Denótense por $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$ las raíces del polinomio que, en tal caso, podrá expresarse de la forma

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

de donde se deducen las correspondientes fórmula de Cardano-Vieta (pueden aplicarse directamente):

$$\begin{aligned} 2 &= \alpha + \beta + \gamma && (1) \\ -25 &= \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma && (2) \\ -a &= \alpha\beta\gamma && (3) \end{aligned}$$

De las dos primeras se deduce que

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\alpha+\beta+\gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) = 54 \qquad (4)$$

De (4) se deduce que las tres raíces deben encuentrarse dentro de la siguiente familia:

$$0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6, \pm 7$$

- Al menos unas de las raíces ha de ser mayor que 4, pues de lo contrario no se verificaría (4).
- La solución ± 7 sólo sería compatible, por (4), con ± 1 y ± 2, pero cualquier combinación sería icompatible con (1).
- La solución ± 6 sólo es compatible con ± 3, pero en ningún caso verificaría (1).
- La solución ± 5 sólo es compatible, por (4), con ± 2. Concretamente y teniendo en cuenta (1), tendría que ser necesariamente la combinación $2, 5, -5$.

Así pues, la única opción posible es $2, 5, -5$. Luego, por (3), sólo cabe pensar en la solución $a = 50$.

5. **Problema 2. Segunda sesión**

Solución: El problema puede resolverse sin necesidad de mayores conocimientos multiplicando por siete las tres últimas cifras de la potencia de 7 anterior hasta encontarr un ciclo.

Exponente	Tres últimas cifras
0	001
1	007
2	049
3	343
$\vdots$	$\vdots$
14	849
$\vdots$	$\vdots$
20	001

De esta forma, se obtiene que las tres últimas cifras de 7^{20} son 001, que coincidencon con la de 7^0. Por lo tanto, dado que

$$7^{2014} = \left(7^{20}\right)^{100} \cdot 7^{14}$$

las tres últimas cifras de 7^{2014} deben coincidir con las de 7^{14}. Luego, la solución es 849.

La RSM porpone otra solución basada en el teorema de Euler-Fermat. ¿Cómo podría aplicarse en este caso?

6. **Problema 3. Segunda sesión**

Solución 1: Vamos a razonar según el número n de azules que hay en la isla que sabemos, por culpa del visitante chivato, que está entre 1 y 364.

- Si $n = 1$, el único individuo azul no verá a ningún otro azul, luego deducirá al instante que él es el único, con lo que morirá la primera noche. El resto de habitantes entenderá al día siguiente que ha llegado a esa conclusión porque ninguno de ellos son azules, por lo que morirán la segunda noche.
- Si $n = 2$, cada uno de los azules observa un único azul que, transcurrida la primera noche, no ha muerto, de lo que deducirá que éste está observando al menos otro azul. Dado que el resto de los que él observa no son azules, deducirá que él es el azul que el otro observa y morirá la segunda noche. El otro azul razonará de manera idéntica y morirá al mismo tiempo. El resto de habitantes entenderán por qué han muerto los azules la segunda noche y morirán la tercera.
- Si $n = 3$, cada azul observa a su vez dos azules que no morirán la segunda noche. Luego, el tercer día conprenderán que son azules y morirán la siguiente, etc.

Esta demostración puede considerarse válida, aunque puede mejorarse razonando por inducción como se indica a continuación.

Solución 2: Primeramente, hemos de tener en cuenta que dos habitantes con el mismo color son intercambiables, en el sentido de que deben deducir idénticas conclusiones. Dicho esto, probaremos que, quien observa n azules no puede sobrevivir a la noche $n+1$.

- Caso $n = 0$: razonado anteriormente.
- Supongamos que la proposición es cierta para $n-1 \geq 0$ y veamos que lo es también para n: efectivamente, quien observa n azules es consciente de que éstos observan a su vez al menos $n-1$ azules. Se pueden dar entonces dos circunstancias:
  - Si alguno de lo azules que observa sobrevive a la noche n, el observador deducirá, teniendo en cuenta la hipótesis de inducción, que éste observaba al menos n azules, lo cual sólo es posible si el propio observador es azul. No sobrevivirá pues a la noche $n+1$.
  - Si ninguno de los azules observados sobrevive a la noche n, deducirá que él no es azul pues, de serlo, debería haber obtenido las mismas conclusiones que el resto de azules, pues son intercambiables. No sobrevivirá tampoco a la noche $n+1$.

No obstante, podemos ir un poco más lejos y probar que un habitante observa n azules si, y sólo si, muere en la noche $n+1$. ¿Cómo? Ello equivale a afirmar que, si hay en total m azules, todos ellos mueren en la noche m, mientras que los no azules mueren en la siguiente.

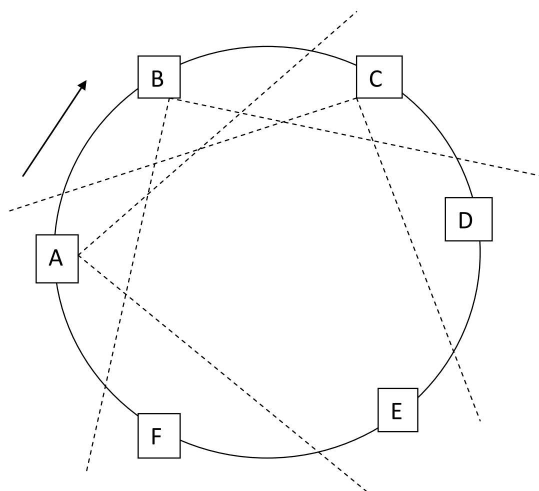
Soluciones a los problemas

Olimpiada de Matemáticas

Fase local Extremadura

Enero de 2015

1. *Alrededor de una mesa circular están sentadas seis personas. Cada una lleva un sombrero. Entre cada dos personas hay una mampara de modo que cada una puede ver los sombreros de las tres que están enfrente, pero no puede ver el de la persona de su izquierda ni el de la de su derecha ni el suyo propio. Todas saben que tres de los sombreros son blancos y tres negros. También saben que cada una de ellas es capaz de obtener cualquier deducción lógica que sea factible. Empezamos por una de las seis personas y le preguntamos ¿‘puedes deducir el color de algún sombrero de los que no ves?”. Una vez que ha respondido (todas oyen la respuesta), pasamos a la persona de su izquierda y le hacemos la misma pregunta, y así sucesivamente. Demuestra que una de las tres primeras responderá ”Sí”.*

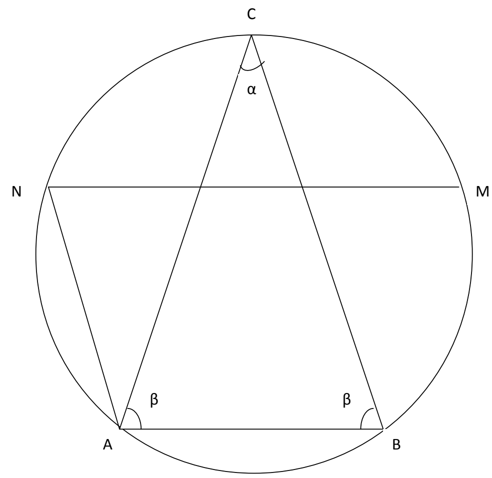


Supongamos que $D = E$. En ese caso, el jugador A termina si, y sólo si, C es del mimo color que D y E, luego, si el turno pasa al jugador B, éste deducirá que el color de C (que no ve) es el opuesto al de D y E (que sí ve), y termina. Por lo tanto y en general, para que el turno llegue al jugador C es necesario que $D \neq E$ y, en tal caso, el jugador C deduce que el color de D (que no ve) es el opuesto al de E (que sí ve), y termina.

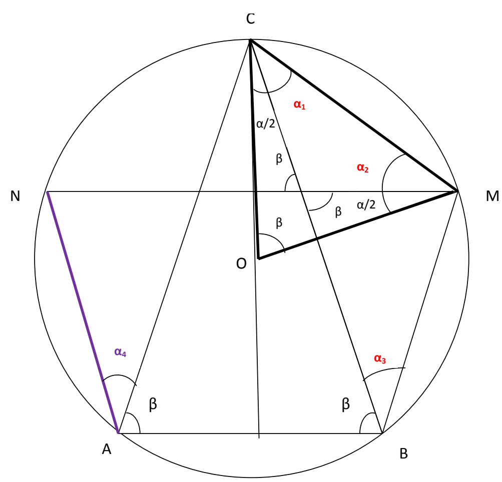
En la corrección de este problema, que ha sido resuelto por varios participantes, se ha valorado positivamente la claridad de la redacción.

2. *El triángulo $\triangle ABC$ es isósceles en C, y sea Γ su circunferencia circunscrita. Sea M el punto medio del arco BC de Γ que no contiene a A, y sea N el punto donde la paralela a AB por M vuelve a cortar a Γ. Se sabe que AN es paralela a BC. ¿Cuáles son las medidas de los ángulos de $\triangle ABC$?*

- Si dibujamos bien el triángulo y la circunferencia debemos observar algo parecido a esto:



Hemos de tener presente, en primer lugar, que si O denota el centro de la cirncunferencia, el segmento $\overline{OM}$ en la figura de abajo es perpendicular a $\overline{BC}$ pues está contenido en su mediatriz, y que la mediatriz de $\overline{AB}$ coincide con la bisectriz de α por ser $\triangle ABC$ isósceles en C. De esta forma podemos obtener mediante razonamientos básicos los ángulos que aparecen en la figura.



Así, con carácter general, se verifica para cualquier triángulo isósceles que

$$2\beta + \alpha = 180^o \tag{1}$$

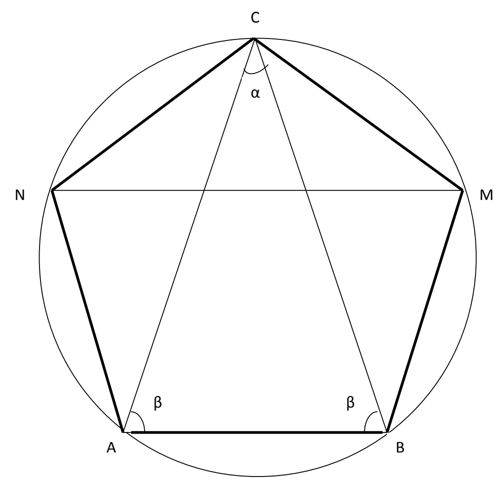
Además, $\alpha_1 = \alpha_2$ por ser isósceles $\triangle OCM$, y $\alpha_1 = \alpha_3$ por ser también isósceles $\triangle CBM$; por simetría respecto a la bisectriz de α, podemos también afirmar que $\alpha_3 = \alpha_4$.

Dado que, además, $\overline{AN}$ es paralelo a $\overline{BC}$, se verifica que $\alpha_4 = \alpha$. Basta observar entonces $\triangle OCM$ para deducir que

$$\beta + 3\alpha = 180^o \tag{2}$$

La solución que se sigue del sistema de ecuaciones (1) y (2) es $\beta = 72^o$ y $\alpha = 36^o$ (es decir, $\alpha = \pi/5$ radianes y $\beta = 2\pi/5$ radianes).

- Bastantes participantes han intuido con acierto que el pentágono que aparece inscrito a la circunferencia es regular, pero la mayor parte no ha logrado demostrarlo con claridad.



Podría hacerse, por ejemplo, de la siguiente manera: por definición de M se verifica $BM = CM$. Asimismo y por simetría, podemos añadir que $BM = CM = AN = CN$, lo cual ocurre en general para todo triángulo isósceles. Ahora bien, al ser en nuestro caso $\overline{AN}$ paralelo a $\overline{BC}$, se tiene que el ángulo $\angle NAC$ es igual a α. Luego, como los ángulos inscritos en la circunferencia $\angle NAC$ y $\angle ACB$ son iguales, también deben serlo los lados CN y AB.

Llegados a este punto, la demostración podría seguir así: dado que el pentágono anterior está compuesto por 5 triángulos isósceles idénticos con vértices en el centro de la circunferencia, la suma de los ángulos del pentágono es $180^o \times 5 - 360^o = 540^o$, es decir, cada ángulo debe medir 108^o, de lo cual se deduce fácilmente la solución.

En todo caso, dicha solución constituye un triángulo muy singular que se denomina triángulo áureo, pues puede demostrarse que el cociente AC/AB es la razón áurea.

3. *Sean x, y, z reales positivos tales que $x + y + z = 3$. Halla el valor máximo alcanzado por*

$$\sqrt{x} + \sqrt{2y+2} + \sqrt{3z+6}.$$

¿Para qué valores de x, y, z se alcanza dicho máximo?

- Muchos participantes han apostado, con acierto, por un máximo en $x = y = z = 1$, y algunos han intentado comprobarlo mediante un tanteo, aunque lo meritorio aquí es demostrarlo. Efectivamente, se trata de percatarnos de que la función $f(x,y,z) = \sqrt{x} + \sqrt{2y+2} + \sqrt{3z+6}$ equivale al producto escalar entre los vectores $(\sqrt{x}, \sqrt{y+1}, \sqrt{z+2})$ y $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$, cuyo valor abosulto debe ser menor o igual que el producto de los módulos de ambos vectores, que vale 6. La igualdad se alcanza cuando ambos están en la misma dirección, lo cual se consigue con $x = y = z = 1$. Ciertamente, se verifica que $f(1,1,1) = 6$.
- A título informativo apuntamos que la proposición puede demostrarse de manera más laboriosa haciendo uso de herramientas del Cálculo Diferencial, aunque con la ventaja de no partir de una "idea feliz", como ocurre con la demostración anterior.

4. *Encuentra todas las aplicaciones $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ que verifican*

$$f(n) + f(n+1) = 2n + 1$$

para cualquier entero n y además

$$\sum_{i=1}^{63} f(i) = 2015$$

- Si dejamos como incógnita $f(0)$ y damos algunos valores a su alrededor, podemos percatarnos de que la condición $f(n)+f(n+1) = 2n+1$ equivale a $f(n) = n+(-1)^n f(0)$, lo cual puede razonarse formalmente por inducción. Por lo tanto,

$$\sum_{n=1}^{63} f(n) = \sum_{n=1}^{63} n - f(0) = \frac{63 \cdot 64}{2} - f(0)$$

Despejando se deduce que $f(0) = 1$, po lo que la única función que verifica ambas condiciones es

$$f(n) = n + (-1)^n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

- Algunos participantes han razonado también correctamente en el orden contrario, encontrando primero un valor concreto e induciendo después el resto de los valores. Efectivamente, se verifica

$$\begin{aligned} 2015 &= \sum_{i=1}^{63} f(i) \\ &= f(1) + \sum_{k=1}^{31} [f(2k) + f(2k+1)] \\ &= f(1) + \sum_{k=1}^{31} (4k+1) = f(1) + 31 + 4\frac{31 \cdot 32}{2} \end{aligned}$$

de donde se deduce que $f(1) = 0$. A partir de dicho valor podemos ir conociendo de forma consecutiva los valores de la función f para los enteros a ambos lados de 1 e inducir igualmente la expresión general de $f(n)$.

5. *Sea $n \geq 2$ un entero positivo. Tenemos $2n$ bolas, en cada una de las cuales hay escrito un entero. Se cumple que, siempre que formamos n parejas con las bolas, dos de estas parejas tienen la misma suma.*

   a) Demuestra que hay cuatro bolas con el mismo número.

   b) Demuestra que el número de valores distintos que hay en las bolas es como mucho $n - 1$.

   En este caso ningún participante ha logrado aproximarse a una demostración clara. Podría razonarse por ejemplo así: si ordenamos las $2n$ bolas de menor a mayor y formamos parejas entre bolas consecutivas (la primera con la segunda, la tercera con la cuarta, etc), las correspondientes sumas también seguirán un orden creciente, de manera que dos parejas tendrán la misma suma si, y sólo si, sus cuatro componentes son idénticos. Así queda demostrada la propiedad "a". La propiedad "b" la probaremos por reducción al absurdo: supongamos que no se verifica, es decir, que tenemos al menos n bolas diferentes que ordenaremos de menor a mayor mediante $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Ordenemos también de menor a mayor el resto de bolas $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$. Si emparejamos las bolas con el mimo subíndice (a_1 con b_1, a_2 con b_2, etc.) resulta imposible obtener dos sumas iguales, con lo que acabamos.

6. *Encuentra todos los enteros positivos n, que verifican*

   $$n = 2^{2x-1} - 5x - 3 = \left(2^{x-1} - 1\right)\left(2^x + 1\right)$$

   para algún entero positivo x.

   La ecuación de la derecha es equivalente a $2^{x-1} = 5x + 2$. Como la función $f(x) = 2^{x-1}$ es convexa, la curva $y = 2^{x-1}$ puede cortar a la recta $y = 5x + 2$ en dos puntos a lo sumo. Basta representarlas de manera aproximada para percatarse de que los cortes se producen para un valor de x negativo, que no nos interesa, y para otro positivo que podemos buscar por tanteo si realmente es entero. Efectivamente, la igualdad se verifica con $x = 6$, en cuyo caso el valor de n es 2015.

ACTA DE CALIFICACIÓN DE LA PRIMERA FASE DE LA 52 OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Distrito universitario de Extremadura

Reunido el tribunal calificador del Distrito Universitario de Extremadura, formado por los profesores del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Extremadura Dña. Eva T. López Sanjuán, D. Jesús Montanero Fernández y Dña. María Isabel Parra Arévalo, acuerda proponer como ganadores:

1º Fernando Díaz Porras Calificación: 18 puntos
Centro: I.E.S. Profesor Hernández-Pacheco (Cáceres)

2º Ángel Morcillo Gómez Calificación: 16 puntos
Centro: I.E.S. José Manzano (Don Benito)

3º Jara Trujillo Mulero Calificación: 15 puntos
Centro: I.E.S. Bioclimático (Badajoz)

Badajoz, 25 de Enero de 2016

Eva López

Eva T. López Sanjuán	Jesús Montanero Fernández	María Isabel Parra Arévalo

LIII Olimpiada Matemática Espanõla
Primera Fase
Soluciones
13 de enero de 2017

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

1. Sea E una elipse y consideremos tres rectas paralelas r_1, r_2 y r_3, cada una de las cuales corta a E en dos puntos distintos. Sean estos puntos A_1, B_1, A_2, B_2 y A_3, B_3, respectivamente. Probar que los puntos medios de los segmentos A_1B_1, A_2B_2 yA_3B_3 están alineados.

Solución 1. *El resultado es inmediato en el caso de que la elipse sea una circunferencia. Esta tres rectas determinan tres cuerdas y sus puntos medios son los puntos de corte de las rectas con un diámetro perpendicular a todas ellas. En otro caso, pensando en la elipse como la intersección de un cono con un plano (el cono de Apolonio), la proyección sobre un plano perpendicular al eje del cono nos da una circunferencia y las rectas paralelas se proyectan en rectas paralelas.*

Solución 2. *Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que la ecuación de nuestra elipse es* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. *Entre todas las rectas de pendiente dada m consideraremos dos particulares: en primer lugar la que pasa por el origen, O, $y=mx$. Por simetría, el origen será precisamente el punto medio de los dos puntos en que esta recta corta a la elipse; a continuación, consideramos una de las dos rectas tangentes a la elipse con esta pendiente m en el punto que llamamos P. Si nuestras rectas r_1, r_2 y r_3 tienen pendiente m y los puntos medios de los puntos de corte con la elipse van a estar alineados, estos puntos medios deben estar sobre la recta que pasa por O y P.*
Tomemos una recta con ecuación $y=mx+c$ y determinemos sus intersecciones con la elipse, A y B, con coordenadas respectivas, (x_A,y_A) y (x_B,y_B). x_A y x_B serán las soluciones para la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(mx+c)^2}{b^2}=1,$$

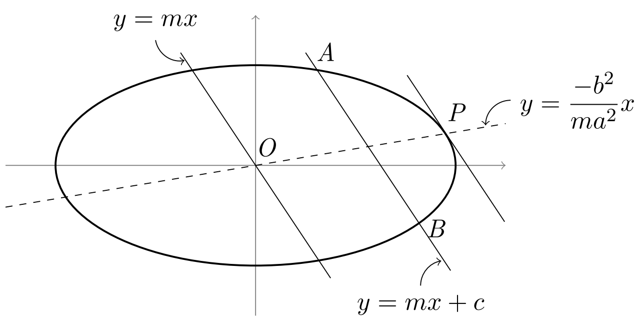
es decir,

$$(b^2+m^2a^2)x^2+(2ma^2c)x+a^2c^2-a^2b^2=0,$$

que vienen dadas por

$$\frac{-2ma^2c\pm\sqrt{(2ma^2c)^2-4(b^2+m^2a^2)(a^2c^2-a^2b^2)}}{2(b^2+m^2a^2)},$$

una para cada signo. Por lo tanto, si el punto medio tiene por coordenadas (x_M,y_M), entonces $x_M=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{-ma^2c}{b^2+m^2a^2}$ e $y_M=mx_M+c=\frac{b^2c}{b^2+m^2a^2}$, que están sobre la recta $y=\frac{y_M}{x_M}x=\frac{-b^2}{ma^2}x$, que es independiente del valor de c de la recta particular elegida.



Solución 3. *Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que la ecuación de nuestra elipse es* $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ *y que la pendiente común de* r_1, r_2 *y* r_3 *es* m*. La transformación,* f*, definida por*

$$(x', y') = f(x, y) = (\frac{x}{a}, \frac{y}{b})$$

convierte la elipse en una circunferencia de ecuación $x'^2 + y'^2 = 1$*, y una recta de ecuación* $y = mx + c$ *en una recta de ecuación* $by' = max' + c$*, es decir,* $y' = \dfrac{ma}{b}x + \dfrac{c}{b}$*. Por tanto, las imágenes por* f *de* r_1, r_2 *y* r_3 *serán tres rectas que cortan a la circunferencia formando tres cuerdas paralelas entre sí, y sus puntos medios estarán entonces sobre el diámetro ortogonal a todas ellas, es decir, sobre la recta de ecuación* $y' = -\dfrac{b}{ma}x'$*. Como* f *conserva los puntos medios, por linealidad, los puntos medios de* A_1B1*,* A_2B_2 *y* A_3B_3 *estarán sobre la recta* $\dfrac{y}{b} = -\dfrac{b}{ma}\dfrac{x}{a}$*, es decir,* $y = -\dfrac{b^2}{ma^2}x$*, el diámetro conjugado de* $y = mx$*.*

2. Imaginemos un juego estupendo consistente en lanzar simultáneamente diez dados cúbicos, obteniéndose una ganancia en euros igual al producto de los resultados de los diez dados. ¿De cuántas formas diferentes se puede obtener una ganancia de 225 euros? Suponiendo que todos los posibles resultados del lanzamiento fueran equiprobables, ¿cuál sería entonces la probabilidad de ganar 225 euros tras lanzar los diez dados?

Solución. Numeremos los dados del 1 al 10. Dado que 225 se descompone en factores primos como $3^2 \cdot 5^2$, la única forma de obtener dicho producto es con dos dados (dos posiciones del 1 al 10) con puntuación 3, otros dos con puntuación 5 y las seis posiciones restantes, con puntuación 1. Podemos distinguir $\binom{10}{2}$ pares distintos de posiciones entre un total de 10, a las que asignamos pues puntuación 3. Para cada una de esas combinaciones distinguimos a su vez $\binom{8}{2}$ pares distintos de posiciones entre las 8 restantes, a las que asignamos puntuación 5. Fijadas las posiciones del 3 y del 5, quedaran otras seis posiciones libres, a las que se asignará necesariamente puntuación 1. Así pues, el número de posibilidades es $\binom{10}{2} \cdot \binom{8}{2} = 1260$. Para calcular la probabilidad basta con dividir el número de casos favorables entre la cantidad total de resultados posibles que es 6^{10}.

3. Se considera la función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definida como sigue para $n \geq 0$:

$$f(n) = \begin{cases} -f\left(\dfrac{n}{2}\right) & \text{si } n \text{ es par} \\ f(n-1)+1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Hallar el menor número n que cumple $f(n) = 2017$.

Solución. Si para cada $k = 1, 2, \ldots$ se denota por A_k el menor $n \in \mathbb{R}^n$ tal que $f(n) = k$, el problema consistirá en calcular A_{2017}. Obviamente, $A_1 = 1$. Además, se verifica para cada $k > 1$ que $A_k = 4A_{k-1} + 1$. Razonando de manera recurrente se tiene que

$$A_k = 4^0 + 4^1 A_{k-1} = 4^0 + 4^1 + 4^2 A_{k-2} = \ldots = 4^0 + 4^1 + 4^2 + \ldots + 4^{k-1} A_1$$

es decir, tenemos la serie geométrica $A_k = \sum_{j=0}^{k-1} 4^j = \frac{4^k - 1}{3}$ y, en particular, la solución buscada es $\frac{4^{2017}-1}{3}$

4. Describir todas las soluciones enteras positivas (m, n) de la ecuación

$$8m - 7 = n^2$$

y dar el primer valor de m (si existe) mayor que 1959.

Solución. Si m y n son enteros tales que $m = (n^2 + 7)/8$, entonces n tiene que ser necesariamente impar, es decir, tiene que existir un $k \geq 1$ tal que $n = 2k - 1$. En tal caso, sustituyendo en n y desarrollando el cuadrado, la ecuación anterior se expresaría así

$$m = \frac{k^2 - k + 2}{2} = \frac{k(k-1)}{2} + 1$$

Nótese que $k(k-1)$ es siempre par y, por lo tanto, para todo valor de k obtenemos una solución entera de m. Así pues, la secuencia de soluciones es la siguiente:

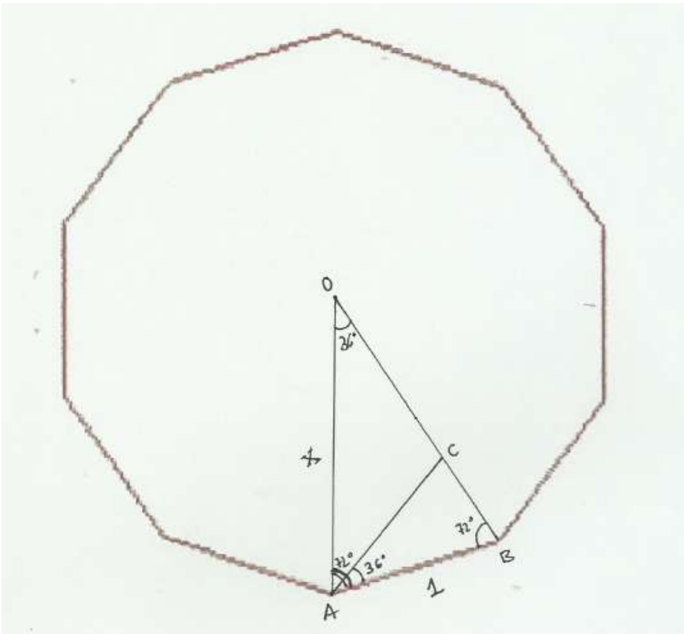
k	1	2	3	4	5	...	63	64	...
m	1	2	4	7	11	...	1954	**2017**	...
n	1	3	5	7	9	...	125	127	...

La solución buscada es pues, como cabía esperar, $m = 2017$.

5. Calcular el perímetro de una circunferencia circunscrita a un decágono regular de lado 1.

   Indicación: dado que no puede utilizarse la calculadora se trata de expresar la solución a través del número $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$, conocido como razón áurea.

Solución. El decágono regular puede dividirse en 10 triángulos isósceles iguales, como OAB (ver figura), con un vértice en el centro O de la circunferencia y cuyo lado AB mide 1. La longitud de la circunferencia será entonces $2\pi x$, siendo x la longitud de AO. Dado que el ángulo $\angle AOB$ mide $\pi/5$, los otros dos miden $2\pi/5$.



Trazamos la bisectriz de $\angle OAB$, que corta al lado OB en C. El triángulo ABC es entonces semejante a AOB y, por lo tanto, la longitud con AC es 1. También es isóceles el triágulo OAC, por lo cual el lado CB mide $x - 1$. Razonándo por semejanza de triángulos se deduce entonces que

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1}$$

Por lo tanto, x es la raíz positiva del polinomio $p(x) = x^2 - x - 1$, es decir, la solución es $2\pi\phi$.

6. Calcular el número máximo de raíces reales distintas que puede tener un polinomio P que verifique la siguiente propiedad: el producto de dos raíces distintas de P sigue siendo una raíz de P.

Solución. Por ejemplo, el polinomio $x(x-1)(x-2)(x-1/2)$, con 4 raíces reales distintas, verifica la propiedad deseada. Veamos que el número máximo posible de raíces diferentes es precisamente 4. Efectivamente, si el polinomio verifica la propiedad y 0, 1 y -1 son raíces del mismo no puede haber otra distinta, porque si existiera tal raíz r también lo serían $-r$, $-r^2$, r^3, r^4, etc. Es decir, el polinomio tendría infinitas raíces. Si, por el contrario, -1 no es raíz del polinomio y éste consta de al menos tres raíces diferentes y distintas a su vez de 0 y 1, o bien habría al menos dos de ellas con valor absoluto mayor que 1, o bien habría al menos dos de ellas con valor absoluto menor que 1. En el primer caso, bastaría considerar el producto de la raíz de valor absoluto máximo con otra de valor absoluto mayor que 1 para obtener una nueva raíz con valor absoluto superior a ambas, y llegar así a una contradicción. Razonando análogamente en el segundo caso, pero considerando la raíz con mínimo valor absoluto, llegamos igualmente a una contradicción.

ACTA DE CALIFICACIÓN DE LA PRIMERA FASE DE LA 53 OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Distrito universitario de Extremadura

Reunido el tribunal calificador del Distrito Universitario de Extremadura, formado por los profesores del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Extremadura Dña. Eva T. López Sanjuán, D. Jesús Montanero Fernández y Dña. María Isabel Parra Arévalo, acuerda proponer como ganadores:

1º Javier Sánchez Madruga Calificación: 18 puntos

Centro: I.E.S. Profesor Hernández-Pacheco (Cáceres)

2º Antonio Becerra Gutiérrez Calificación: 15 puntos

Centro: I.E.S. Bioclimático (Badajoz)

3º Daniel Peix del Río Calificación: 12 puntos

Centro: I.E.S. Profesor Hernández-Pacheco (Cáceres)

Badajoz, 19 de Enero de 2017

Eva T. López Sanjuán	Jesús Montanero Fernández	María Isabel Parra Arévalo

LIV Olimpiada Matemática Espanõla
Primera Fase
Soluciones
19 de enero de 2018

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

1. Sean a y b números naturales cuyos máximo común divisor y mínimo común múltiplo designamos por D y M, respectivamente. Demostrar que

$$M^2 + D^2 \geq a^2 + b^2$$

Solución:

Sean $x, y \geq 1$ números naturales primos entre sí tales que $a = xD$ y $b = yD$, de manera que $M = xyD$. Luego, hay que probar que $(x^2y^2 + 1)D^2 \geq (x^2 + y^2)D^2$, lo cual equivale a demostrar que $x^2(y^2 - 1) \geq y^2 - 1$, es decir, que $x^2 \geq 1$.

2. Encontrar las funciones reales f, de variable real, que satisfacen la ecuación funcional

$$f(x + f(x + y)) = f(2x) + y \tag{1}$$

para cualesquiera x, y reales.

Solución: A lo largo del ejercio se denotará $f^2 = f \circ f$, $f^3 = f \circ f \circ f$ y $\mathtt{Id}$ la función identidad que asigna a cada número x su mismo valor. Si aplicamos (1) con $x = 0$ se obtiene

$$f^2(y) = f(0) + y \tag{2}$$

cualquiera que sea y. En particular, aplicando (2) a $y = 0$ se deduce que $f^2(0) = f(0)$ y, en consecuencia, que $f^3(0) = f\left[f^2(0)\right] = f\left[f(0)\right] = f^2(0) = f(0)$. Por otra parte, se verifica también, según (2), que $f^3(0) = f^2\left[f(0)\right] = 2f(0)$. De ambas afirmaciones se deduce que $f(0) = 0$ y, por lo tanto,

$$f^2 = \mathtt{Id} \tag{3}$$

Así pues, aplicando (3) al número $x + f(x)$ se obtiene, por un lado, que $f^2(x + f(x)) = x + f(x)$. Por otro lado, si aplicamos primero (1) con $y = 0$ y después (3) se deduce también que $f^2(x + f(x)) = f\left[f(x + f(x))\right] = f\left[f(2x)\right] = f^2(2x) = 2x$. A partir de ambas afirmaciones concluimos que $f = \mathtt{Id}$.

3. En una isla paradisíaca se distinguen dos tipos de habitantes: aquellos cuyas afirmaciones son siempre verdaderas y aquellos cuyas afirmaciones son siempre falsas (o sea, que son mentirosos compulsivos). Tras una reunión, siete habitantes de la isla, etiquetados con las letras de la A a la G, emiten simultáneamente sendas afirmaciones, que son las siguientes:

A: `Todos nosotros estamos diciendo la verdad.`
B: `Solo uno de nosotros dice la verdad.`
C: `Al menos uno de nosotros dice la verdad.`
D: `Solo dos de nosotros dicen la verdad.`
E: `Al menos dos de nosotros dicen la verdad.`
F: `Solo tres uno de nosotros dicen la verdad.`
G: `Al menos tres de nosotros dicen la verdad.`

Razona claramente quiénes son mentirosos compulsivos.

Solución: Razonaremos caso a caso por reducción al absurdo.

A: Es falso pues B, D y F no pueden estar diciendo simultáneamente la verdad.

B: Es falso pues, si fuera verdadero, también lo sería C, con lo que se incurriría en una contradicción.

D: Es falso pues, si fuera verdadero, también lo serían C y E.

F: Es falso pues, si fuera verdadero, también lo serían C, E y G. En consecuencia, puede haber a lo sumo tres afirmaciones verdaderas.

G: Es falso pues, si fuera verdadera, habría exactamente tres afirmaciones verdaderas, lo cual sabemos que es falso (F). Por lo tanto, puede haber a lo sumo dos afirmaciones verdaderas.

E: Es falso pues, si fuera verdadera, habría exactamente dos afirmaciones verdaderas, lo cual sabemos que es falso (D). Por lo tanto, puede haber a lo sumo una afirmación verdadera.

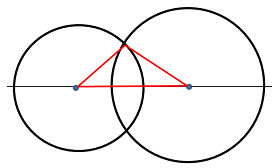
C: Es falso pues, si fuera verdadera, habría exactamente una afirmación verdadera, lo cual sabemos que es falso (B).

Así pues los siete son mentirosos compulsivos.

4. Determinar los números reales $x > 1$ para los cuales existe un triángulo cuyos lados tienen longitudes

$$x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1, \qquad 2x^3 + x^2 + 2x + 1, \qquad x^4 - 1$$

Solución: Dado que la primera longitud es la mayor de las tres para todo $x > 1$, basta determinar los valores $x > 1$ para los cuales dicha longitud es menor que la suma de las otras dos. Esa es la condición necesaria y suficiente para poder construir un triángulo según se razona en la figura.



Nótese que la demostración puede abreviarse si nos percartamos de que los tres polinomios en x son múltiplos de $x^2 + 1$. Concretamente, pueden expresarse como $x^2 + 1$ multiplicado por $x^2 + x + 1$, $2x + 1$ y $x^2 - 1$, respectivamente. En consecuencia, debe verificarse $x^2 + x + 1 < x^2 + 2x$, es decir, $x > 1$. Así pues, el triángulo existe para todo $x > 1$.

5. Sea n un número natural. Probar que si la última cifra de 7^n es 3, la penúltima es 4.

Solución: Debemos tener presente que, si $n \geq 1$, los valores de las dos últimas cifras de 7^n dependen exclusivamente de los valores de las dos últimas cifras de 7^{n-1}. Dado que

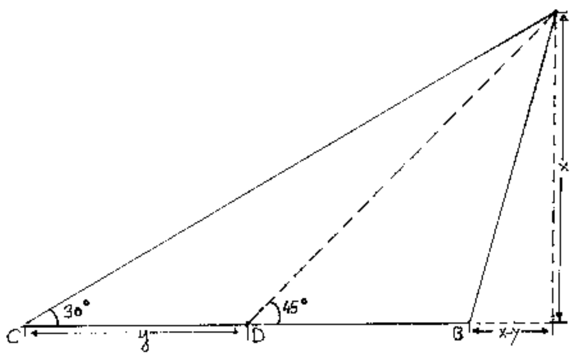
$$7^0 = 01, \qquad 7^1 = 07, \qquad 7^2 = 49, \qquad 7^3 = 343, \qquad 7^4 = 2501,$$

sabemos que las dos últimas cifras de 7^n solo pueden ser 01, 07, 49 o 43 (que se suceden cíclicamente según el resto de dividir n entre 4 sea, respectivamente, 0, 1, 2 o 3). Luego, si la última cifra de 7^n es 3, la penúltima tiene que ser 4.

6. Sea AD la mediana de un triángulo ABC tal que $\angle ADB = 45°$ y $\angle ACB = 30°$. Determinar el valor de $\angle BAD$.

Solución: Siguiendo la notación expresada en la figura aplicaremos el teorema de los senos, según el cual

$$\operatorname{sen}^2(\angle BAD) = \operatorname{sen}^2(\angle ADB) \cdot \frac{DB^2}{AB^2} = \frac{1}{2}\frac{DB^2}{AB^2} \tag{4}$$



Como $1/\sqrt{3} = \tan(\angle ACB) = x/(x+y)$ se deduce que $y = x(\sqrt{3} - 1)$ y, por lo tanto, $DB^2 = y^2 = 2x^2(2-\sqrt{3})$. Por otra parte, del teorema de Pitágoras se sigue que $AB^2 = x^2+(x-y)^2 = 4x^2(2-\sqrt{3})$. En consecuencia, se deduce de (4) que $\operatorname{sen}^2(\angle BAD) = 1/4$. Luego, $\angle BAD = 30^o$.

LV Olimpiada Matemática Española
Primera Fase
18 de enero de 2019
Soluciones

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

1. *Para cada número de cuatro cifras $\overline{abcd}$ denotamos por S al número $\overline{abcd}-\overline{dcba}$. Demuestra que S es múltiplo de 37 si y sólo si $b=c$.*

   Solución:

   Si se denota $x=a-d$, $y=b-c$, se verifica que $S=999x+90y$, que en el caso $y=0$ es múltiplo de 37, dado que $999=37\cdot 27$. Recíprocamente, si S es múltiplo de 37, que no comparte ningún factor con 9 (de hecho es primo), existirá un entero z tal que $9(37\cdot 3x+10y)=9\cdot 37z$, es decir, $37(z-3x)=10y$. Entonces, y tiene que necesariamente múltiplo de 37. Como $|y|\leq 9$ ha de ser 0.

2. *Demuestra que, para todo $n\geq 2$, podemos encontrar n números reales $x_1,\ldots,x_n$ tales que*

$$x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n=\frac{1}{1-x_1}\cdot\frac{1}{1-x_2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{1-x_n} \tag{1}$$

   Solución:

   En primer lugar, tendremos en cuenta que la ecuación $x=-1/(1-x)$ tienen como solución cualquiera de las dos raíces reales del polinomio $p(x)=x^2-x-1$, que son $(1\pm\sqrt{5})/2$. Entonces, si para $n=2$ damos cualquiera de esos valores a x_1 y x_2 (da igual que sean el mismo o distintos) se verificará que

$$\mathrm{x}_1\cdot\mathrm{x}_2=-\frac{1}{1-\mathrm{x}_1}\cdot\left(-\frac{1}{1-\mathrm{x}_2}\right)=\frac{1}{1-\mathrm{x}_1}\cdot\frac{1}{1-\mathrm{x}_2}$$

   Para $n=3$ consideremos $x_3=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Por otra parte, dado $x_2\neq 1$, los valores de x_1 tales que

$$x_1\cdot x_2=-\frac{1}{1-x_1}\cdot\frac{1}{1-x_2} \tag{2}$$

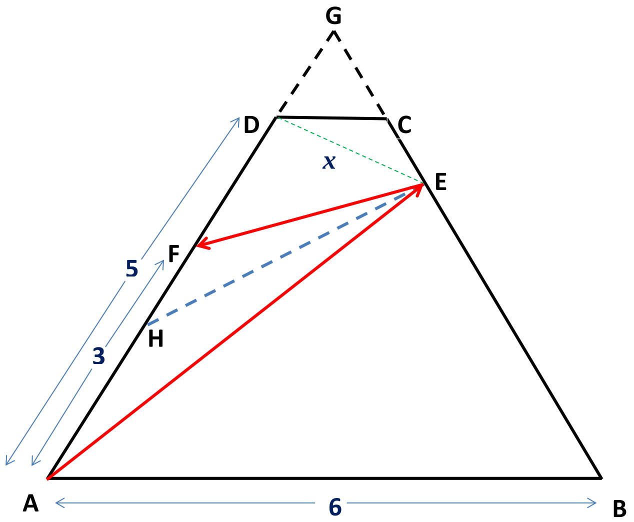
   son las raíces del polinomio $q_{x_2}(x_1)=(x_2^2-x_2)\cdot x_1^2-(x_2^2-x_2)\cdot x_1+1$, que serán reales si y sólo si $\Delta=(x_2^2-x_2)\cdot(x_2^2-x_2-4)\geq 0$. Conociendo el comportamiento de la función polinómica $g(x)=x(x-1)$, basta con tomar $x_2\geq 3$, por ejemplo, para que x_2 y cualquier raíz x_1 del correspondiente polinomio q_{x_2} verifiquen (2). Luego, se verificará (1) para x_1,x_2,x_3.

   En general, si $n=2m$ con $m\geq 1$ (es decir, n par), consideraremos el producto $(\mathrm{x}_1\cdot\mathrm{x}_2)^m$; si $n=2m+3$ con $m\geq 0$ (n impar) consideraremos el producto $(\mathrm{x}_1\cdot\mathrm{x}_2)^m\cdot x_1\cdot x_2\cdot x_3$.

3. *El trapecio isósceles $ABCD$ tiene lados paralelos AB y CD, con $\overline{AB}=6$, $\overline{AD}=5$ y $\angle DAB=60^o$. Se lanza un rayo de luz desde A que rebota en CB en el punto E e interseca en AD el punto F. Si $\overline{AF}$=3, calcula el área del triángulo AFE.*

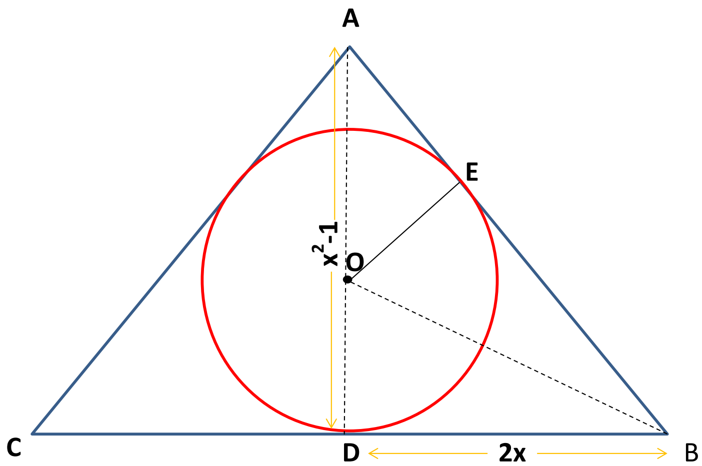
Solución:

La figura de la derecha ilustra el enunciado. Conviene percatarse primeramente de que, con estos datos, si prolongamos los lados AD y BC para formar una triángulo ABG, éste será equilátero de lado 6. Por otra parte, si la recta perpendicular a BG que pasa por E corta AG en H, $\angle AEH$ y $\angle HEF$ son, respectivamente, los ángulos de incidencia y reflexión del rayo, que deben ser iguales; en consecuencia, $\angle AEB = \angle FEG$. Como, además, $\angle ABE = \angle FGE = 60^o$, los triángulos FGE y ABE son semejantes. Por lo tanto, el área del triángulo AEB es el cuádruple de la de FEG. Además, se verifica que $\overline{EG}/3 = (6 - \overline{EG})/6$, es decir, $\overline{EG} = 2$. Para calcular el área de FEG basta conocer la medida x de la altura perpendicular al lado FG, que es sen $60^o \cdot \overline{EG} = \sqrt{3}$. Luego, el área de FEG es $3\sqrt{3}/2$ y la de AEB es $12\sqrt{3}/2$. Dado que el área total de ABG es $18\sqrt{3}/2$, el área del triángulo AEF es la diferencia $3\sqrt{3}/2$.



4. *Sean x un número entero mayor o igual que 2 y ABC un triángulo tal que $\overline{AB} = \overline{AC}$, $\overline{BC} = 4x$ y la altura perpendicular a BC mide $x^2 - 1$. ¿Para qué valores de x el radio de la circunferencia inscrita en el triángulo es un número entero?*

Solución:



La figura de la izquierda ilustra el enunciado. Denótese por $R = \overline{OD} = \overline{OE}$ el radio de la circunferencia. Del teorema de Pitágoras se sigue que $\overline{AB} = x^2 + 1$. Dado que $\angle OEB = \angle ODB = 90^o$, $\overline{EB} = \overline{DB} = 2x$. Luego, $\overline{AE} = (x-1)^2$. De nuevo por el teorema de Pitágoras se tiene que

$$\begin{aligned} x^2 - 1 &= R + \overline{OA} \\ &= R + \sqrt{R^2 + (x-1)^4} \end{aligned}$$

Elevando al cuadrado y despejando resulta que $2R(x-1)(x+1) = (x-1)^2[(x+1)^2 - (x-1)^2]$, es decir,

$$\begin{aligned} R &= 2x\frac{x-1}{x+1} = 2x\frac{x+1-2}{x+1} = 2x - \frac{4x}{x+1} \\ &= 2x - \frac{4x+4-4}{x+1} = 2x - 4 + \frac{4}{x+1} \end{aligned}$$

Como $2x - 4$ es entero, R es entero si y sólo si lo es $4/(x+1)$. Dado que $x \geq 2$ por hipótesis, eso sólo ocurre con $x = 3$, que es la solución.

5. *¿Existen m, n números naturales tales que $n^2 + 2018mn + 2019m + n - 2019m^2$ sea un número primo?*

Solución:

$$\begin{aligned} n^2 + 2018mn + 2019m + n - 2019m^2 &= n^2 + 2019mn - mn + 2019m + n - 2019m^2 \\ &= n(n-m+1) + 2019m(n-m+1) \\ &= (n-m+1)(2019m+n) \end{aligned}$$

Si fuera un número primo, uno de los dos factores en que descompone debería ser 1, lo cual equivaldría a afirmar que $n = m$. Pero en ese caso el número sería $2020m$, que no es primo. Por lo tanto, la respuesta es no.

6. *Dado un número natural* k *encuentra todos los polinomios* $P(x)$ *que cumplan, para todo* x *real, que*

$$P\left(x^k\right) - P(k \cdot x) = x^k \cdot P(x) \tag{3}$$

Solución:

Consideremos un polinomio $P(x)$ de grado n verificando (3), que se expresará mediante $P(x) = A_n x^n + \ldots + A_1 x_1 + A_0$, con $A_n \neq 0$. En ese caso, la igualdad (3) queda como sigue:

$$A_n x^{nk} + \ldots + A_1 x^k - A_n k^n x^n - \ldots - A_1 kx = A_n x^{n+k} + \ldots + A_1 x^{1+k} + A_0 x^k \tag{4}$$

Se deduce primeramente que $A_1 = \ldots = A_{k-1} = 0$ y que, en consecuencia, $n \geq k$. Comparando los primeros sumandos de cada término se concluye que $nk = n + k$, por lo que $k \neq 1$. Además, si $k > 2$ se verificaría que $nk > 2n \geq n+k$, llegando así a contradicción. Luego, el único valor que nos queda para k es 2. Nuevamente, si $2n = n+2$, entonces $n = 2$. Por lo tanto, sólo cabe la posibilidad de que (3) ocurra con $P(x) = A_2 x^2 + A_1 x + A_0$ y $k = 2$. En tal caso, la igualdad (4) se expresaría mediante

$$A_2 x^4 + A_1 x^2 - 4A_2 x^2 - 2A_1 x = A_2 x^4 + A_1 x^3 + A_0 x^2$$

Por lo tanto, A_1 debe ser igual a 0 y la igualdad se reduce a $A_0 = -4A_2$. Efectivamente, podemos comprobar que con $k = 2$ la igualdad (3) se verifica para cualquier polinomio del tipo $P(x) = \lambda \cdot (x^2 - 4)$ con $\lambda \neq 0$.

ACTA DE CALIFICACIÓN DE LA PRIMERA FASE DE LA 55 OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Distrito universitario de Extremadura

Reunido el tribunal calificador del Distrito Universitario de Extremadura, formado por los profesores del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Extremadura Dña. Eva T. López Sanjuán, D. Jesús Montanero Fernández y Dña. María Isabel Parra Arévalo, acuerda proponer como ganadores:

1º Rodrigo Antonio Salado Ferrero Calificación: 25 puntos

Centro: I.E.S. Profesor Hernández-Pacheco (Cáceres)

2º Enrique Daniel Pérez Calificación: 20 puntos

Centro: I.E.S. Profesor Hernández-Pacheco (Cáceres)

3º Cristina Gómez Cirera Calificación: 17 puntos

Centro: I.E.S. Profesor Hernández-Pacheco (Cáceres)

Badajoz, 31 de Enero de 2019

Eva T. López Sanjuán	Jesús Montanero Fernández	María Isabel Parra Arévalo

Olimpiada Matemática Española RSME

LVI Olimpiada Matemática Española
Primera Fase
17 de enero de 2020
Soluciones propuestas

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

1. *Dado un número natural a_0 realizamos la siguiente operación: si es par lo dividimos entre dos y, si es impar, le sumamos 5. El resultado se denota por a_1, que se vuelve a someter al mismo procedimiento dando lugar al número a_2 y así sucesivamente. El proceso finaliza en el paso n-ésimo si $a_n = 1$. Determina los números naturales a_0 para los cuales el proceso no acaba, es decir, que nunca se llega a 1.*

   Solución: Es fácil percatarse de que a_n es múltiplo de 5 sí, y sólo si, a_{n+1} es múltiplo de 5. Por otra parte, dado que $a_{n+3} \leq (a_n+5)/2$, también es fácil probar que, si a_n es mayor que 5, $a_{n+3} \leq a_n - 1$. En consecuencia, por muy grande que sea a_0 habrá algún n tal que $a_n \leq 5$. Por lo tanto, tenemos a lo sumo 5 situaciones que discutir: si $a_n = 1$ el proceso acaba; si $a_n = 2$ acabaremos con a_{n+1}; si $a_n = 4$ acabaremos con a_{n+2}; si $a_n = 3$, acabaremos con a_{n+3}. Sin embargo, si $a_n = 5$, es decir, cuando a_0 es múltiplo de 5, entraremos en un ciclo infinito $5 \leftrightarrow 10$.

2. *Razona cuántos polígonos regulares hay cuyos ángulos entre lados contiguos, medidos en grados, sean números enteros.*

   Solución: Si unimos cada vértice de un polígono regular de n lados con el centro del mismo obtendremos n triángulos iguales. La suma de los n ángulos correspondientes al centro del polígono es 360, por lo que la suma de los ángulos del polígono es $180n - 360$. Por simetría, cada ángulo mide $180 - 360/n$, que será un entero positivo si, y sólo si, lo es $360/n$, es decir, cuando n es un divisor de 360 mayor o igual que 3 (pues debe ser un polígono). Dado que la descomposición en factores primos de 360 es $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1$, los divisores distintos de 1 se obtienen combinándolos entre sí, lo cual da lugar al siguiente número de posibilidades:

$$3+2+1+3\cdot 2+3\cdot 1+2\cdot 1+3\cdot 2\cdot 1 = 23$$

   Al excluir el divisor 2 nos quedan 22 polígonos regulares que satisfacen la condición, empezando por le triángulo equilátero, con ángulos de 60 grados, y acabando con un polígono regular con 360 lados al que le corresponden ángulos de 179 grados.

3. *Determinar los valores reales (x, y, z) para los cuales se satisface el sistema de ecuaciones*

$$\begin{aligned} x+y+z &= 1 & (1)\\ x^2y+y^2z+z^2x &= xy^2+yz^2+zx^2 & (2)\\ x^3+y^2+z &= y^3+z^2+x & (3) \end{aligned}$$

   Solución: La ecuación (2) equivale a $(x-y)(z-x)(z-y) = 0$. Luego, cualquier solución al sistema debe tener al menos un par de coordenadas iguales. Distinguimos tres casos:

   - Si suponemos $x = y$ se deduce de (1) que $z = 1 - 2x$. Sustituyendo en (3) se tiene que $x(3x-1) = 0$, cuyas soluciones son $x = 0$ y $x = 1/3$, que se corresponden con los puntos $(0, 0, 1)$ y $(1/3, 1/3, 1/3)$, respectivamente.

- Si suponemos $x = z$ se tiene por (1) que $y = 1 - 2x$. Sustituyendo en (3) se tiene que $x(9x^2 - 9x + 2) = 0$, cuyas soluciones son $x = 0$, $x = 2/3$ y $x = 1/3$, que se corresponden respectivamente con los puntos $(0, 1, 0)$, $(2/3, -1/3, 2/3)$ y, de nuevo, $(1/3, 1/3, 1/3)$.
- Si suponemos $y = z$ se tiene por (1) que $x = 1-2y$. Nuevamente por (3) se verifica que $3y(3y^2-4y+1) = 0$, cuyas soluciones son $y = 0$, $y = 1$ e $y = 1/3$, que se corresponden respectivamente con los puntos $(1, 0, 0)$, $(-1, 1, 1)$ y, otra vez, $(1/3, 1/3, 1/3)$. En total tenemos pues seis soluciones diferentes al sistema.

4. *Consideremos el polinomio*

$$p(x) = (x - a)(x - b) + (x - a)(x - c) + (x - b)(x - c)$$

Demuestra que $p(x) \geq 0$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$ *si, y sólo si,* $a = b = c$.

Solución: Es obvio que el polinomio puede tomar valores no negativos, por lo que $p(x)$ será mayor o igual que 0 en todo caso si, y sólo sí, su discriminante es menor o igual que 0. Se puede comprobar fácilmente que

$$\begin{aligned} \Delta &= 4(a+b+c)^2 - 12(ab+ac+bc) = 4[a^2+b^2+c^2-(ab+ac+bc)] \\ &= 2[a^2+b^2-2ab] + 2[a^2+c^2-2ac] + 2[b^2+c^2-2bc] \\ &= 2\left[(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2\right] \geq 0 \end{aligned}$$

Entonces $\Delta \leq 0$ si, y sólo si, $a = b = c$. En ese caso el polinomio podría expresarse mediante $p(x) = 3(x - a)^2$, que se corresponde con una parábola con vértice en $(a, 0)$.

5. *Encuentra dos enteros entre 60 y 70 (ambos inclusive) que sean divisores de* $2^{96} - 1$.

Solución:

$$\begin{aligned} 2^{96} - 1 &= (2^{48}+1)(2^{48}-1) \\ &= (2^{48}+1)(2^{24}+1)(2^{24}-1) \\ &= (2^{48}+1)(2^{24}+1)(2^{12}+1)(2^{12}-1) \\ &= (2^{48}+1)(2^{24}+1)(2^{12}+1)(2^{6}+1)(2^{6}-1) \\ &= (2^{48}+1)(2^{24}+1)(2^{12}+1)\cdot 65\cdot 63 \end{aligned}$$

6. *Una remota aldea está habitada por 30 personas sobre las que recae una terrible maldición: cada una posee una marca en la frente que puede ser un círculo o una cruz, aunque ninguna de ellas sabe qué tipo de marca lleva porque, de hecho, morirían al término del día en que lo averiguaran. Para completar la maldición han sido dotadas de una perfecta capacidad deductiva. Lo cierto es que 3 habitantes portan un círculo y el resto una cruz pero, como está completamente prohibido el uso de espejos así como emitir cualquier mínimo comentario sobre el tema, nadie sabe cuál es su marca. De esta forma los años trascurren felizmente, dentro de lo que cabe.*

Mas, un aciago día, acude un visitante a la aldea. Tras conocer a sus moradores y, a pesar de haber sido claramente aleccionado sobre la gravedad del problema, declara ante todos:
–¡La verdad es que me ha gustado mucho la marca esa del circulito que he visto!
Ante lo cual, el habitante que ejerce de alcalde le responde:
–Has perdido una excelente oportunidad de quedarte callado. De hecho, tu comentario nos condena a todos a una muerte inminente.
–¡Pero si yo sólo he hablado de algo que todos estáis viendo! –Se defendió el visitante.
–Anda, déjalo porque lo está empeorando. Os lo dije. Esto nos pasa por dejar entrar a gente de fuera –respondió el alcalde. ¿Podrías explicar tú por qué y cuando morirán?

Solución: Implícitamente el visitante afirma que al menos uno de los habitantes tiene un círculo en la frente. De hecho, de su segunda frase se deduce que hay al menos dos, pues de haber sólo uno su portador se mantendría ignorante de la presencia de círculos. Tiene parte de razón en su protesta porque cada habitante ve gente con un círculo en la frente. El problema radica en que, al decirlo públicamente, ahora todos saben que todos lo ven, lo cual es suficiente información para estos infelices dotados del cuestionable don de la lógica. Razonemos por qué.

Si sólo hubiera dos con círculo cada uno de ellos vería un único círculo, de lo cual deduciría que él es el portador del otro, por lo que ambos morirían la primera noche. Como en realidad hay tres círculos, cada uno de ellos observa a dos con círculos y sabe pues que, si fueran los únicos, deberían morir la primera noche, por el razonamiento anterior. Como esto no va a ocurrir, los tres deducirán que ellos también son portadores, por lo que morirán la segunda noche. Los veintisiete restantes, que han observado cómo morían los tres portadores de círculos que veían, deducirán que son diferentes a éstos, por lo que morirán la tercera noche.

Como moraleja concluimos que, cuando vayamos a una aldea maldita, es mejor que cerremos el pico. Es más, la primera frase del visitante habría bastado para condenarlos a todos, sólo que una noche después en cada caso. De hecho, el desenlace fatal habría tenido lugar independiente del número de círculos que hubiera y del número de habitantes de la aldea. ¿Podrías formalizarlo?

ACTA DE CALIFICACIÓN DE LA PRIMERA FASE DE LA 56 OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Distrito universitario de Extremadura

Reunido el tribunal calificador del Distrito Universitario de Extremadura, formado por los profesores del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Extremadura D. Pedro Martín Jiménez, D. Jesús Montanero Fernández y Dña. María Isabel Parra Arévalo, acuerda proponer como ganadores:

1º Rodrigo Antonio Salado Ferrero Calificación: 38 puntos

Centro: I.E.S. Profesor Hernández-Pacheco (Cáceres)

2º Cristina Gómez Cirera Calificación: 28 puntos

Centro: I.E.S. Profesor Hernández-Pacheco (Cáceres)

3º Alejandro Suárez Vázquez Calificación: 25 puntos

Centro: I.E.S. Caurium (Coria)

Badajoz, 29 de Enero de 2020

MARTIN JIMENEZ, PEDRO (FIRMA)
Firmado digitalmente por MARTIN JIMENEZ, PEDRO (FIRMA)
Nombre de reconocimiento (DN): c=ES, serialNumber=08816230P, sn=MARTIN, givenName=PEDRO, cn=MARTIN JIMENEZ, PEDRO (FIRMA)
Fecha: 2020.01.29 13:17:47 +01'00'

Pedro Martín Jiménez

MONTANERO FERNANDEZ JESUS - 33978340A
Digitally signed by MONTANERO FERNANDEZ JESUS - 33978340A
DN: cn=MONTANERO FERNANDEZ JESUS - 33978340A, c=ES
Date: 2020.01.29 12:57:13 +01'00'

Jesús Montanero Fernández

PARRA AREVALO MARIA ISABEL - 52356542D
Firmado digitalmente por PARRA AREVALO MARIA ISABEL - 52356542D
Fecha: 2020.01.29 10:27:53 +01'00'

María Isabel Parra Arévalo

LVII Olimpiada Matemática Española
Primera Fase
21 de enero de 2021
Soluciones propuestas

Departamento de Matemáticas

Universidad de Extremadura

1. *Determina todos los números positivos de cuatro cifras $\overline{abcd}$ tales que, al insertar un dígito 0 en cualquier posición, se obtiene un múltiplo de 7.*

   Solución: El número expresado equivale a $a10^3 + b10^2 + c10^1 + d10^0$. Así pues, insertando ceros en las diferentes posiciones, deducimos que tienen que existir enteros positivos $n_1 \geq n_2 \geq n_3 \geq n_4 \geq n_5$ tales que

$$\begin{aligned}
a10^4 + b10^3 + c10^2 + d10^1 &= n_1 7 && (1)\\
a10^4 + b10^3 + c10^2 + d10^0 &= n_2 7 && (2)\\
a10^4 + b10^3 + c10^1 + d10^0 &= n_3 7 && (3)\\
a10^4 + b10^2 + c10^1 + d10^0 &= n_4 7 && (4)\\
a10^3 + b10^2 + c10^1 + d10^0 &= n_5 7 && (5)
\end{aligned}$$

   Restando (2) a (1) se obtiene $9d = (n_1 - n_2)7$. Dado que 7 y 9 son primos entre sí, d tiene que ser un múltiplo de 7 entre 0 y 9, es decir d puede ser 0 ó 7. Restando (3) a (2) se obtiene que $90c = (n_2 - n_3)7$. Dado que 7 y cualquier número que sea potencia de 10 son primos entre sí, se tiene igualmente que $c = 0$ ó 7; restando (4) a (3) se obtiene que b puede valer 0 ó 7; por último, restando (5) a (4) y teniendo en cuenta que el número es de 4 cifras, se tiene que $a = 7$. Luego, las única opciones posibles son $7000, 7007, 7070, 7077, 7700, 7707, 7770, 7777$.

2. *Razona para qué valores enteros positivos de n ocurre que, al desarrollar $(1 + x + x^2)^n$ en potencias de x, aparezcan exactamente tres términos con coeficientes impares.*

   Solución: La propiead se verifica obviamente para $n = 1$ y, si multiplicamos polinomios con paciencia y cuidado, nos percataremos de que se verifica también para $n = 2, 4$ y 8, lo que nos puede hace pensar que esto ocurre en general para n de la forma 2^k, pero es conveniente demostrarlo y lo haremos por inducción: supongamos que, para cierto $k \geq 0$, se verifica que $(1 + x + x^2)^{2^k}$ tiene tres coeficientes impares. Vamos a probar que, entonces, el único n entre $2^k + 1$ y 2^{k+1}, ambos inclusive, con tres coeficientes impares es $n = 2^{k+1}$.

   En lo que sigue y para cada $n \geq 1$, $a_{[n,0]}, \ldots, a_{[n,2n]}$ denotarán, respectivamente, los coeficientes de los términos de orden $0, \ldots, 2n$ del polinomio $(1 + x + x^2)^n$. Luego, $a_{[n,n]}$ será el coeficiente central. Los coeficientes son simétricos respecto al centro, es decir, $a_{[n,0]} = a_{[n,2n]} = 1$, $a_{[n,1]} = a_{[n,2n-1]}$, etc. En consecuencia, si multiplicamos $(1 + x + x^2)^n$ por $(1 + x + x^2)$, tenemos que $a_{[n+1,n+1]} = a_{[n,n]} + 2a_{[n,n-1]}$, que es impar cuando lo es $a_{[n,n]}$. Un sencillo razonamiento por inducción nos convence de que siempre hay al menos tres términos con coeficientes impares: los dos extremos y el central. Veamos que para $n = 2^{k+1}$ son los únicos impares. Efectivamente, dado $1 < p \leq 2^{k+1}$, el coeficiente $a_{[2^{k+1},p]}$ puede obtenerse mediante:

   - Si p es impar, $a_{[2^{k+1},p]} = 2\sum_{j=0}^{(p-1)/2} a_{[2^k,j]}a_{[2^k,p-j]}$
   - Si p es par, $a_{[2^{k+1},p]} = 2\sum_{j=0}^{p/2-1} a_{[2^k,j]}a_{[2^k,p-j]} + a^2_{[2^k,p/2]}$

Es decir, exceptuando $a_{[2^{k+1},0]}=1$, $a_{[2^{k+1},p]}$ es impar si, y sólo si, p es par y $a_{[2^k,p/2]}$ impar, es decir, si $p=2^{k+1}$. Falta entonces por probar que, si $n=2^k+q$ con $1<q<2^k$, $(1+x+x^2)^n$ tiene al menos cuatro coeficientes impares. Sea $a_{[q,p]}$ el primer coeficiente impar, salvo $a_{[q,0]}$, de $(1+x+x^2)^q$, en cuyo caso se tiene que $1\leq p\leq q<2^k$. Luego, $a_{[2^k,1]},\ldots,a_{[2^k,p]}$ son pares. Se verifica que

$$a_{[2^k+q,p]}=\sum_{j=0}^{p}a_{[q,j]}a_{[2^k,p-j]}=\sum_{j=1}^{p-1}a_{[q,j]}a_{[2^k,p-j]}+a_{[2^k,p]}+a_{[q,p]}$$

Como el único coeficiente impar que aparece en el lado derecho es $a_{[q,p]}$, la suma total será impar, lo cual supone un coeficiente impar de $(1+x+x^2)^n$ que no está ni en el centro ni en los extremos.

3. *Si tenemos una tablero de m filas y n columnas, determina el valor mínimo de n que permite colocar algunas piedras en las casillas del tablero, no más de una piedra por casilla, de manera que no existan dos filas con la misma cantidad de piedras y todas las columnas tengan exactamente el mismo número k de piedras. El tablero debe valer para cualquier k entre 1 y $m-1$.*

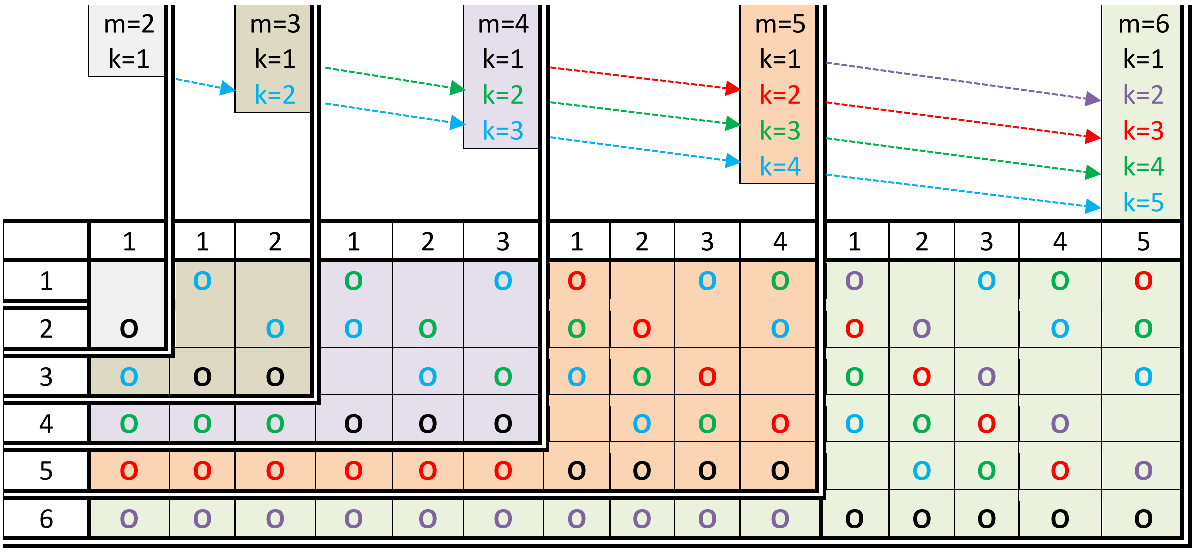
   Solución: Supongamos que contamos con m filas y veamos cuál debe ser el menor valor n para que la propiedad anterior pueda satisfacerse, sea cual sea el número constante k de piedras por columnas, que tiene que ser inferior a m. Se denotará por $n_1,\ldots,n_m$ las frecuencias de las respectivas filas $1,\ldots,m$, es decir, el número de columnas en las que tienen piedras. Si $k=1$, el mínimo valor posible de n se alcanza con un tablero tipo $n_1=0,n_2=1,\ldots,n_m=m-1$. Es decir, asignamos a cada fila $i\leq 1$ un bloque i de n_i columnas. En total tenemos la progresión aritmética

$$n=0+1+\ldots+m-1=m(m-1)/2$$

   Así pues, para cada m, un valor de n que verifique la propiedad enunciada debe ser mayor o igual que $m(m-1)/2$. Veremos que $n=m(m-1)/2$ cumple la condición exigida, no sólo para $k=1$, sino para cualquier $k\leq m-1$. El procedimiento se ilustra en el esquema adjunto para $m=2,\ldots,6$ con $k=1,\ldots,m-1$, pero la demostración requiere de un razonamiento por inducción, suponiéndolo cierto para cualquier m con $k=1$. Efectivamente, veamos que, si la condición deseada se verifica para m y $k<m$ con $n=m(m-1)/2$ columnas, entonces también se verifica para $m+1$ y $k+1$ con $n=(m+1)m/2$ columnas. Entonces habremos acabado pues podremos cubrir todas las opciones de m y k posibles.

   En la configuración del tablero correspondiente a (m,k) se insertan, al final, la fila $m+1$ y un bloque de m columnas, lo que hace un total de $n=m+m(m-1)/2=(m+1)m/2$, que es la cifra buscada. La parte antigua de la nueva configuración permanece invariante respecto al caso (m,k). La nueva fila introducida se marca en todas las columnas, por lo que $n_{m+1}=n$. Aparte, en cada columna del bloque nuevo se marcan otras k filas, de manera que cada una de las m primeras filas aparezca en este bloque $k<m$ veces, ahora veremos cómo. Así, tendremos $k+1$ filas marcadas en cada una de las columnas. Además, $n_1,\ldots,n_m<n_{m+1}$ y las diferencias entre m frecuencias iniciales permanecen invariantes respecto al tablero (m,k), por lo que se cumple $n_1<n_2<n_m<\ldots<n_{m+1}$.

   Para lograr que aparezca cada una de las m filas iniciales $k<m$ veces en el último bloque de m columnas, conviene concebir la secuencia de filas de una forma circular. Por ejemplo, si contamos con cinco filas, $1,2,3,4,5$, y queremos que cada una aparezca $k=3$ veces en cinco columnas, deberíamos marcar 123 en la primera columna, 234 en la segunda, 345 en la tercera, 451 en la cuarta y 512 en la quinta, como se ve en el esquema con $m=6$ y $k=4$ (violeta+ rojo+ verde).



4. *Siete amigos tienen la cuestionable costumbre navideña de entregarse mutuamente regalos por el precio de 10 euros cada uno.*

   - *¿Cuántos dinero gastarán entre todos?*
   - *Hartos de tanto derroche deciden regalarse mediante el método del "amigo invisible", consistente en que cada uno de ellos regala únicamente a otro y cada uno recibe únicamente de otro. ¿Cuánto dinero gastarán entre todos con el nuevo sistema?*
   - *¿Cuántas configuraciones diferentes pueden contemplarse para un método de amigo invisible de siete personas? Si no consigues dar con la cifra exacta se valoraría positivamente una buena aproximación.*

Solución: Responderemos las preguntas para un número genérico n de amigos. Asignemos un número del 1 al n a cada uno de ellos. Para responder la primera basta tener en cuenta que cada uno de los n amigos regala a $n-1$ personas, lo que implica $n(n-1)$ regalos diferentes. En nuestro caso 42, lo cual supone un total de 420 euros.

Si utilizamos el método del amigo invisible, cada uno regala a un único individuo, por lo que se gastarán en total 70 euros. Saber cuántas configuraciones pueden establecerse, en general, con n amigos, equivale a calcular el número a_n de permutaciones de los número del 1 al n en las cuales ninguno de ellos está en la posición que le corresponde. En una permutación concreta de este tipo, el primer número que aparezca denotará a la persona que regale al primer de la lista, el segundo al segundo, etc.

Calcular a_n no es fácil. Lo haremos de manera recursiva, teniendo en cuenta que $a_1 = 0$ y $a_2 = 1$. Si $n \geq 3$, podemos calcular a_n en función de a_{n-1} y a_{n-2}. Efectivamente, dado que el número 1 no debe quedar primero, puede ocupar $n-1$ posiciones diferentes, y razonaremos igual para cada una de ellas. Imaginemos, por ejemplo, que se encuentra en la posición segunda. En tal caso, puede ocurrir que el número 2 ocupe la posición primera, con lo cual el resto se dispondría de a_{n-2} formas diferentes, o bien lo contrario, lo cual ofrecería a_{n-1} posibilidades. En consecuencia, $a_n = (n-1)(a_{n-1} + a_{n-2})$. En el caso $n = 8$ se obtiene pues:

n	1	2	3	4	5	6	7
a_n	0	1	2	9	44	265	1854

La solución es entonces 1854 configuraciones validas (de entre las 7!=5040 permutaciones posibles de 7 elementos).

NOTA: En este punto podría heber sido de utilidad tener en cuenta el famoso problema de los sombreros de Euler, que se formula así: n caballeros acuden con sombreros idénticos a la ópera y los cuelgan en sendas perchas, recogiéndolos de manera aleatoria tras la función. Euler demostró que la probabilidad de que ninguno de ellos volviera a casa con su sombreo convergía a e^{-1} conforme n tiende a infinito, con gran rapidez, por cierto. Con la notación que hemos seguido en nuestro problema, se verifica pues

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n!} = e^{-1}$$

Esto sugiere aproximar nuestra solución mediante $a_7 \simeq 7!e^{-1} = 1853$.

ACTA DE CALIFICACIÓN DE LA PRIMERA FASE DE LA 57 OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Distrito universitario de Extremadura

Reunido el tribunal calificador del Distrito Universitario de Extremadura, formado por los profesores del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Extremadura Dña. Eva López Sanjuán, D. Pedro Martín Jiménez, D. Jesús Montanero Fernández y Dña. M. Isabel Parra Arévalo, acuerda proponer como ganadores:

1º Alejandro Suárez Vázquez Calificación: 25 puntos

Centro: I.E.S. Caurium (Coria)

2º Raquel Giménez González Calificación: 15 puntos

Centro: I.E.S. Rodríguez Moñino (Badajoz)

3º M. Belén Garrido García Calificación: 13 puntos

Centro: I.E.S. Domingo Cáceres (Badajoz)

Badajoz, 27 de Enero de 2021

LOPEZ SANJUAN EVA TERESA - 08868360C

Firmado digitalmente por LOPEZ SANJUAN EVA TERESA - 08868360C Nombre de reconocimiento (DN): c=ES, serialNumber=IDCES-08868360C, givenName=EVA TERESA, sn=LOPEZ SANJUAN, cn=LOPEZ SANJUAN EVA TERESA - 08868360C Fecha: 2021.01.27 18:15:26 +01'00'

Eva López Sanjuán

MARTIN JIMENEZ, PEDRO (FIRMA)

Firmado digitalmente por MARTIN JIMENEZ, PEDRO (FIRMA) Nombre de reconocimiento (DN): c=ES, serialNumber=08816230P, sn=MARTIN, givenName=PEDRO, cn=MARTIN JIMENEZ, PEDRO (FIRMA) Fecha: 2021.01.28 09:54:32 +01'00'

Pedro Martín Jiménez

MONTANERO FERNANDEZ JESUS - 33978340A

Firmado digitalmente por MONTANERO FERNANDEZ JESUS - 33978340A Nombre de reconocimiento (DN): c=ES, serialNumber=IDCES-33978340A, givenName=JESUS, sn=MONTANERO FERNANDEZ, cn=MONTANERO FERNANDEZ JESUS - 33978340A Fecha: 2021.01.27 15:58:26 +01'00'

Jesús Montanero Fernández

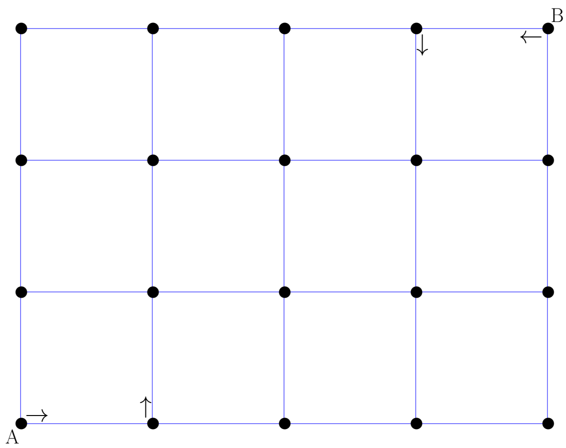
Maribel Parra Arévalo 2021.01.27 12:47:42 +01'00'

M. Isabel Parra Arévalo

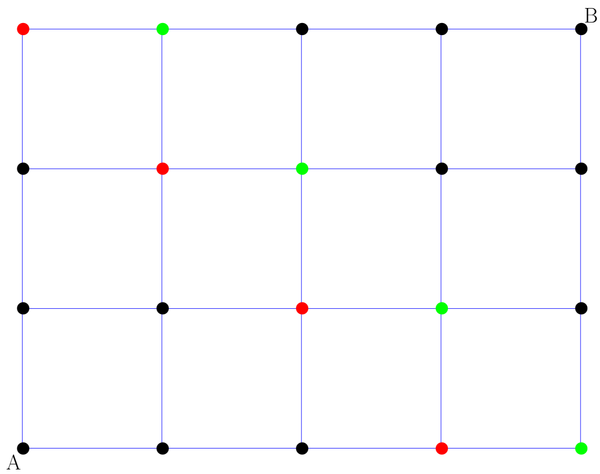
LVII Olimpiada Matemática Española
Primera Fase
21 de enero de 2022
Soluciones

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

1. La figura muestra un plano con estrechas calles que delimitan 12 manzanas cuadradas. Una persona P va de A a B y otra Q, de B a A. Ambas parten al mismo tiempo, a la misma velocidad y de manera que, en cualquier encrucijada, deben tomar un camino entre aquéllos que les aproximen a su objetivo. Si tienen varias posibilidades, toman al azar y con idéntica probabilidad uno de ellos. Halla la probabilidad de que P y Q colisionen.



Solución: Dado que el individuo P sólo se puede mover hacia la derecha o hacia arriba, al contrario que Q, que debe moverse hacia la izquierda o hacia abajo, la colisión debería producirse, si acaso, en el cuarto movimiento. Antes del mismo, P puede estar en cualquiera de las posiciones marcadas en rojo, mientras que Q estará en cualquiera de las verdes. Calcularemos la probabilidad de colisión mediante un diagrama de árbol.



- P puede llegar a la posición $(0,3)$ en el tercer movimiento con probabilidad $1/8$, en cuyo caso colisionarán con Q si éste ha llegado a la posición $(1,3)$ en el tercer movimiento, lo cual ocurre con probabilidad $1/8$ y, además, se mueve hacia la izquierda en el cuarto movimiento, lo cual ocurre con probabilidad 1/2. Por lo tanto, la probabilidad de colisión es

$$\frac{1}{8}\frac{1}{8}\frac{1}{2} = \frac{1}{128}$$

- P puede llegar a la posición $(1,2)$ con probabilidad 3/8, en cuyo caso colisionarán con Q si se verifica una de estas dos circunstancias:
  (a) Si Q ha llegado a la posición $(1,3)$ y se mueve a continuación hacia la abajo y en sentido contrario al de P en el cuarto movimiento. Por lo tanto, la probabilidad de colisión es
  $$\frac{3}{8}\frac{1}{8}\frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{3}{256}$$
  (b) Si Q ha llegado a la posición $(2,2)$ y se mueve hacia la izquierda y en sentido contrario al de P. Por lo tanto, la probabilidad de colisión es
  $$\frac{3}{8}\frac{3}{8}\frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{9}{256}$$
- P puede llegar a la posición $(2,1)$ en le tercer movimiento con probabilidad 3/8, en cuyo caso colisionarán con Q si se verifica una de estas dos circunstancias:
  (a) Si Q ha llegado a la posición $(2,2)$ y se mueve hacia abajo y en sentido contrario al de P. La probabilidad de colisión es
  $$\frac{3}{8}\frac{3}{8}\frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{9}{256}$$
  (b) Si Q ha llegado a la posición $(3,1)$ y se mueve hacia la izquierda y en sentido contrario al de P. La probabilidad de colisión es
  $$\frac{3}{8}\frac{3}{8}\frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{9}{256}$$
- P puede llegar a la posición $(3,0)$ con probabilidad 1/8, en cuyo caso colisionarán con Q si se verifica una de estas dos circunstancias:
  (a) Si Q ha llegado a la posición $(3,1)$ y se mueve hacia la abajo y en sentido contrario al de P. La probabilidad de colisión es
  $$\frac{1}{8}\frac{3}{8}\frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{3}{256}$$
  (b) Si Q ha llegado a la posición $(4,0)$ y P se mueve hacia la derecha. La probabilidad de colisión es
  $$\frac{1}{8}\frac{1}{8}\frac{1}{2} = \frac{1}{128}$$

Por lo tanto, la probabilidad total de colisión es

$$\frac{1}{128} + \frac{3}{256} + \frac{9}{256} + \frac{9}{256} + \frac{9}{256} + \frac{3}{256} + \frac{1}{128} = \frac{37}{256}$$

2. ¿Es posible encontrar una aplicación $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $f(f(n)) = n+1$ para todo $n \geq 1$?

Solución: Supongamos que existe f verificando la condición y tal que $f(1) = m \in \mathbb{N}$. En ese caso, $f(m) = f(f(1)) = 2$ y $f(2) = f(f(m)) = m+1$. Análogamente, $f(3) = f(f(2)) = m+2$. En general, se verifica pues que $f(n) = n+m-1$. En particular, $f(m) = 2m-1$. Dado que $f(m) = 2$, se deduce que $m = 1/2$, que no es natural. Luego, tal función no puede existir.

3. De un grupos de 201 personas de 5 nacionalidades diferentes sabemos que, de cada 6 personas, al menos 2 tienen la misma edad. Demuestra entonces que hay al menos 5 personas que coinciden en nacionalidad, factor Rh y edad.

Solución: Afirmar que es imposible configurar un grupo de 6 personas con diferentes edades equivale a afirmar que contamos con, a lo sumo, 5 edades diferentes. Dado que tenemos 5 nacionalidades distintas y dos tipos de Rh, podemos contemplar teóricamente hasta $5 \times 2 \times 5 = 50$ tipos posibles de sujetos atendiendo a estos tres aspectos. Si el número máximo de personas del mismo tipo es k, entonces el número total de personas, 201, es menor o igual que $50k$. Luego, $k \geq 5$.

4. Razona si un cuadrado de lado 1 puede contener un triángulo equilátero de lado estrictamente mayor que 1.

Solución: Sí existe al menos un triángulo en las condiciones de (a). Por ejemplo, cualquiera del tipo de la figura 1 tiene al menos dos lados iguales de longitud mayor que 1. Por el teorema de Pitágoras, para que sea equilátero debemos elegir x como una de las soluciones de la ecuación siguiente:

$$\begin{aligned} 1 + x^2 &= 2(1-x)^2 \\ x^2 - 4x + 1 &= 0 \\ x &= 2 \pm \sqrt{3} \end{aligned}$$

Escogemos la solución $x = 2 - \sqrt{3}$ pues es un número entre 0 y 1 y obtenemos un triángulo equilátero de lado mayor que 1 como el de la figura 1. Obviamente, existen más triángulos verificando la condición. Lo importante aquí es que queda claro que es equilátero y de lado mayor que 1.

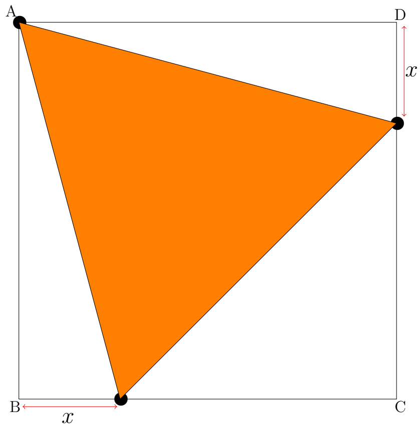


Figura 1: Triángulo equilátero

ACTA DE CALIFICACIÓN DE LA PRIMERA FASE DE LA 58 OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Distrito universitario de Extremadura

Reunido el tribunal calificador del Distrito Universitario de Extremadura, formado por los profesores del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Extremadura Dña. Eva López Sanjuán, D. Jesús Montanero Fernández, D. Daniel Morales González y Dña. M. Isabel Parra Arévalo, acuerda proponer como ganadores:

1º Luis Gutiérrez Garrido Calificación: 21 puntos

Centro: I.E.S. Gabriel y Galán (Montehermoso)

2º Daniel García Fernández Calificación: 20 puntos

Centro: I.E.S. Cristo del Rosario (Zafra)

3º Mario Parra Murciano Calificación: 18 puntos

Centro: I.E.S. Rodríguez Moñino (Badajoz)

Badajoz, 27 de Enero de 2022

Eva López Sanjuán	Jesús Montanero Fernández	Daniel Morales González	M. Isabel Parra Arévalo

LIX Olimpiada Matemática Española
Primera Fase
20 de enero de 2023
Soluciones

Departamento de Matemáticas
Universidad de Extremadura

1. Sea n un entero positivo. Cada uno de los números $1, 2, 3, \ldots, 2023$ se pinta de algún bonito color pero verificando la siguiente propiedad: si (a, b) es un par de enteros diferentes tales que a es divisor de b, sus colores son diferentes. Encontrar el mínimo número de colores que se precisa para que esa propiedad se cumpla.

   Solución: Asignemos un color al número $1 = 2^0$; el del número $2 = 2^1$ debe ser diferente; el del número $4 = 2^2$ ha de ser también diferente a los anteriores, al igual que el de $8 = 2^3$ y así hasta llegar a $1024 = 2^{10}$. Llevamos ya necesariamente 11 colores diferentes que, además, son suficientes. Efectivamente, si coloreamos los número desde el 2^k hasta el $2^{k+1} - 1$ con un mismo color la propiedad se sigue verificando pues, si a pertenece a esa categoría y $b \neq a$ es múltiplo de a, existe un entero $z \geq 2$ tal que $b = za \geq 2a \geq 2^{k+1}$, por lo que pertenece a una categoría superior. Es decir, los números de una misma categoría pueden compartir color.

2. Sea $n \geq 3$ un entero positivo. Los primeros enteros positivos, $1, 2, \ldots, n$, se escriben en una pizarra. Leocadia realiza el siguiente proceso tantas veces como quiera: primero elige dos números en la pizarra y luego los reemplaza con aquellos que resultan de sumarle a ambos un mismo entero positivo. Determina todos los enteros positivos n para los que Leocadia puede conseguir, repitiendo este proceso, que todos los números de la pizarra sean iguales.

   Solución: Destacamos las cuatro afirmaciones siguientes:

   (i) La propiedad se verifica para $n = 3, 4, 5$, según se prueba en los siguientes diagramas:

1	2	3
1+3	2+3	3
4+2	5	3+2
6	5+1	5+1
6	6	6

1	2	3	4
1+4	2+4	3	4
5+3	6	3+3	4
8	6+2	6	4+2
8	8	6+2	6+2
8	8	8	8

1	2	3	4	5
8+1	8	8	8	5+1
9	8+1	8	8	6+1
9	9	8+1	8	7+1
9	9	9	8+1	8+1
9	9	9	9	9

   (ii) Dado que la propiedad se verifica para las secuencias $(1, 2, 3)$, $(1, 2, 3, 4)$ y $(1, 2, 3, 4, 5)$, se verifica igualmente para cualquier secuencia de tres, cuatro o cinco enteros positivos consecutivos. Basta con sumar en cada paso las mismas cantidades en rojo, aunque la cantidad final en azul sea distinta.

   (iii) Con la secuencia $(1, 2, 3, 4)$ podemos incrementar cuanto queramos la cantidad en azul obtenida. Basta con considerar las parejas $(1, 2)$ y $(3, 4)$ y sumarles la diferencia. Con la secuencia $(1, 2, 3)$ podemos incrementar el valor en azul en cualquier cantidad par $2k$. Basta con sumar k en las parejas $(1, 2)$, $(2, 3)$ y $(1, 3)$. Lo mismo ocurre con la secuencia $(1, 2, 3, 4, 5)$. Teniendo en cuenta (ii), estas propiedades pueden extenderse a secuencias de 3, 4 y 5 números consecutivos.

(iv) Sea cual sea n, si un proceso de este tipo conduce a una solución, el total de las cantidades sumadas durante el mismo tiene que ser par, porque en cada paso se suma una misma cantidad a una pareja.

Veamos pues para qué valores de n se verifica en general la propiedad:

$n = 4k$: Si n es múltiplo de 4 podemos descomponer los números del 1 a n en k secuencias de 4 números consecutivos. Según (i) y (ii), podemos llegar a una solución en cada una de las k secuencias. Si las soluciones difieren entre sí se igualan posteriormente tal y como se indica en (iii).

$n = 4k + 1$: El caso $k = 1$ se corresponde con $n = 5$, que está resuelto. Si $k > 1$, entonces $n = 4(k - 1) + 5$. Dividimos entonces los $n - 5$ primeros números en $k - 1$ secuencias de cuatro y encontramos una solución común (en azul) m_1 para todas ellas. Por otra parte, encontramos otra solución m_2 para los cinco últimos, que es posible por (i) y (ii). Podemos suponer que $m_2 \geq m_1$ pues, de lo contrario, se incrementa lo que sea necesario pero en una cantidad par, según (iii). Como m_1 puede incrementarse a conveniencia, las cantidades pueden igualarse finalmente.

$n = 4k + 3$: Se procede como en el caso anterior buscando una solución para los $4k$ primeros números, otra para los tres últimos e igualándolas.

$n = 4k + 2$: No puede haber solución en este caso porque, si la hubiera para una misma cantidad final (en azul) m, la suma de las cantidades sería $m(4k + 2)$ que es par. Dado que para pasar de la situación inicial a la final debemos sumar una cantidad par, según (iv), la suma en la fase inicial debería ser también par. Pero dicha suma es

$$1 + 2 + \ldots + n = n(n + 1)/2 = (2k + 1)(2k + 3)$$

que es impar.

Así pues, existe solución para cualquier $n > 2$ cuyo resto al dividir entre 4 no sea 2. No valen, por ejemplo 6, 10, 14, 18, etc. O sea, no te molestes en buscar una solución para $n = 6$ porque no la vas a encontrar.

3. Decimos que una terna de números reales (a, b, c), todos distintos de cero, es *local* si

$$\begin{aligned} a^2 + a &= b^2 && (1)\\ b^2 + b &= c^2 && (2)\\ c^2 + c &= a^2. && (3) \end{aligned}$$

(a) Probar que si (a, b, c) es local, entonces $(a - b)(b - c)(c - a) = 1$.

(b) Sea $A_1A_2 \ldots A_9$ un eneágono regular (polígono regular de 9 lados). Supongamos que la longitud $A_1A_2 = a$, que $A_1A_3 = b$, $A_1A_4 = 1$ y $A_1A_5 = c$. Prueba que $(a, b, -c)$ es local.

Solución:

(a) Sumando las tres ecuaciones comprobamos que $a + b + c = 0$. Por otra parte, (1), (2) y (3) equivalen, respectivamente, a

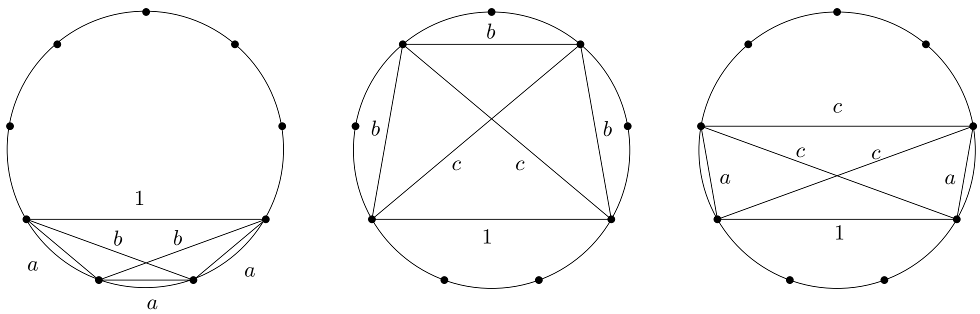
$$\begin{aligned} (a + b)(a - b) &= -a && (4)\\ (b + c)(b - c) &= -b && (5)\\ (c + a)(c - a) &= -c && (6) \end{aligned}$$

Por lo tanto,

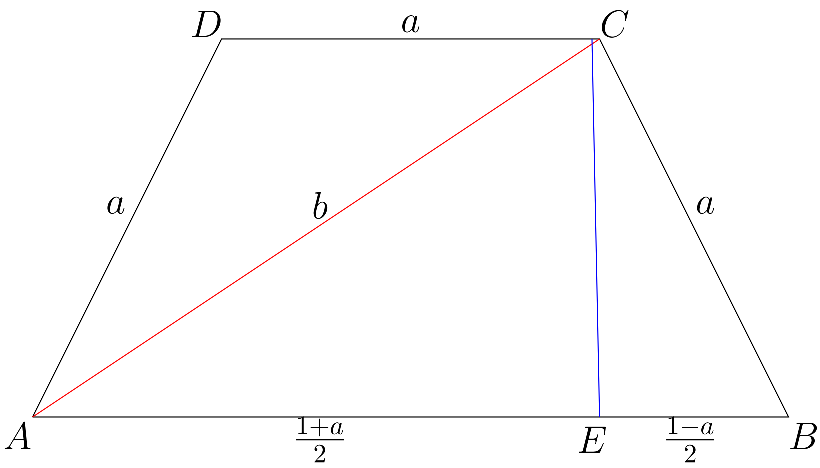
$$a - b = -\frac{a}{a+b} = \frac{a}{c} \tag{7}$$
$$b - c = -\frac{b}{b+c} = \frac{b}{a} \tag{8}$$
$$c - a = -\frac{c}{c+a} = \frac{c}{b} \tag{9}$$

lo cual conduce directamente al resultado.

(b) Tengamos en cuenta los trapecios isósceles de la siguiente figura, cuyas medidas vienen especificadas en el enunciado:



Razonemos por comodidad con una única figura, la de abajo, que representa un trapecio isóseceles genérico (cuyas dimensiones exactas no corresponden realmente a ninguno de los tres anteriores), y obtendremos las igualdades (1), (2) y (3). Empecemos por (1):



Dado que $AB = 1$ y que el trapecio es isósceles, se tiene que $EB = (1-a)/2$ y $AE = (1+a)/2$. Por el teorema de Pitágoras se tiene $CE^2 = a^2 - EB^2$ y que

$$\begin{aligned} b^2 &= AE^2 + CE^2 \\ &= \left(\frac{1+a}{2}\right)^2 + a^2 - \left(\frac{1-a}{2}\right)^2 \\ &= a^2 + a \end{aligned}$$

Se verifica pues (1). Para obtener (2) basta con razonar igualmente reemplazando a por b y b por c, como en el trapecio del medio. Por último, para obtener (3) para $-c$ se razona de manera idéntica pero con $DC = 1$, $CB = AD = a$ y $AC = AB = c$, como en el trapecio de la derecha. En esta ocasión $EB = (c-1)/2$ y $AE = (c+1)/2$.

Aplicando de nuevo el teorema de Pitágoras se tiene que

$$\begin{aligned} c^2 &= AE^2 + CE^2 \\ &= \left(\frac{c+1}{2}\right)^2 + a^2 - \left(\frac{c-1}{2}\right)^2 \\ &= a^2 + c \end{aligned}$$

4. Para pavimentar un tramo de calzada de 64750 mm de largo y 200 mm de ancho disponemos de tres tipos de losas de 500, 650 y 700 mm de longitud. Todas tienen 200 mm de ancho. ¿Cuál es el número mínimo de losas que se precisan para pavimentarlo sin que sobre ni falte ningún milímetro y sin cortar ninguna losa? ¿Cuántas losas de cada tipo necesitamos? ¿Cuántas soluciones diferentes existen?

Solución: Las losas deben disponerse longitudinalmente, pues de lo contrario habría que cortarlas. Para mayor comodidad dividamos las longitudes de la calzada y las losas por su denominador común, que es 50. Eso equivale a considerar 50 mm como unidad de longitud, de manera que la calzada mide 1295 unidades y las losas 10, 13 y 14 de largo, respectivamente. Una solución consiste en una terna a, b, c de enteros positivos tales que $a10 + b13 + c14 = 1295$, que será óptima cuando $a + b + c$ sea mínimo.

Si 1295 fuera múltiplo de 14 el problema quedaría resuelto. Pero $1295 = 92 \times 14 + 7$. A medida que descontamos losas de 14, el resto va aumentando según se aprecia en la primera tabla, de manera que, cuando pueda expresarse de la forma $10a + 13b$ con a y b enteros positivos, tendremos una solución (no necesariamente óptima).

Número de losas de 14	92	91	90	89	88	87	86
Resto hasta 1295	7	21	35	**49**	**63**	77	**91**

Número de losas de 13	1	2	3	4	5	6	7
Longitud que cubren	**13**	26	**39**	52	65	78	**91**

Si comparamos ambas tablas observamos una solución para 86 losas de 14 que, junto con 7 de 13 cubrirían las 1295 unidades. Supone un total de 93 losas. Resulta bastante intuitivo que no puede haber una solución óptima con menos de 86 losas de 14. Razonémolos de todas formas: si tenemos una solución óptima con $c < 86$ entonces $b \geq 7$ pues, de lo contrario, estaríamos reemplazando losas de 13 y 14 por una cantidad necesariamente mayor de losas de 10. Por lo tanto, $(86-c)14 = (b-7)13+a10 < (b+a-7)14$, que equivale a $a+b+c > 93$, lo cual es contradictorio. Así pues, para encontrar una solución óptima debemos buscarla en las tablas anteriores.

Buscaremos coincidencias entre ambas tablas en la última cifra, pues eso significa que la diferencia entre los números es múltiplo de 10. Tenemos una solución con una losa de 13 pues, si le sumamos 5 de 10, cubrimos 63 unidades, que es el resto que dejan 88 losas de 14. Eso supone un total de 94 losas, por lo que no es óptima. La siguiente y última solución consta de 3 losas de 13 que, unidas a una de 10, completan las 49 unidades que dejan de resto 89 losas de 14. En total serían 93 losas. Por lo tanto, el número mínimo de losas requerido es 93 con dos posibles configuraciones:

Tipos de losas	700 mm	650 mm	500 mm	Total
Número de losas solución 1	86	7	0	93
Número de losas solución 2	89	3	1	93

5. Ildefonso escribe los inversos de los números enteros positivos de 2 a 2023 en una pizarra. En cada paso, selecciona dos números x e y y los reemplaza con el número

$$f(x,y)=\frac{xy}{xy+(1-x)(1-y)}$$

Este proceso se repite 2021 veces, hasta que solo quede un número. ¿Cuáles pueden ser los posibles números que se obtengan al repetir este proceso?

Solución: Si $x=1/a$ y $y=1/b$ con a,b enteros positivos, se verifica

$$f(x,y)=\frac{1}{1+(a-1)(b-1)}$$

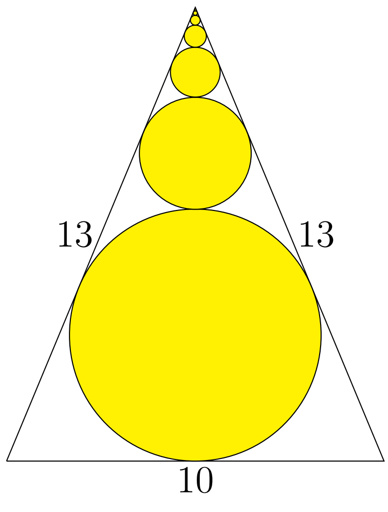
Se trata pues del inverso del entero $1+(a-1)(b-1)$. Luego, si $z=1/c$ siendo c otro entero positivo diferente, basta sustituir en la expresión a por $1+(a-1)(b-1)$ y b por c para obtener

$$f(f(x,y),z)=\frac{1}{1+(a-1)(b-1)(c-1)}$$

Repitiendo este proceso hasta un total de 2022 veces obtenemos, independientemente del orden en el que se han considerados los distintos números, el resultado

$$\frac{1}{1+\prod_{k=2}^{2023}(k-1)}=\frac{1}{1+2022!}$$

6. En la figura puedes intuir infintos círculos tangentes entre sí, cada vez más pequeños. ¿Cuánto suman las longitudes de todas las circunferencias? ¿Cuánto suman sus áreas?



Solución: Por el teorema de Pitágoras sabemos que la altura del triángulo mide 12. La circunferencia de cada círculo mide π por el diámetro, que es la porción de la altura que le corresponde. Sumando y sacando factor común obtenemos como resultado 12π, que es la solución al primer apartado.

Considera la figura que aparece a continuación. El área de $\triangle ABC$ mide 60. Sea $\theta=\angle CAB$. Su coseno y tangente son $5/13$ y $12/5$, respectivamente. La primera circunferencia es la inscrita en el triángulo $\triangle ABC$, así como la segunda es la inscrita en $\triangle A'B'C$, etc. Para resolver el problema empezaremos calculando las áreas del círculo y trapecio mayores, para lo cual se precisa conocer la longitudes OD y AE.

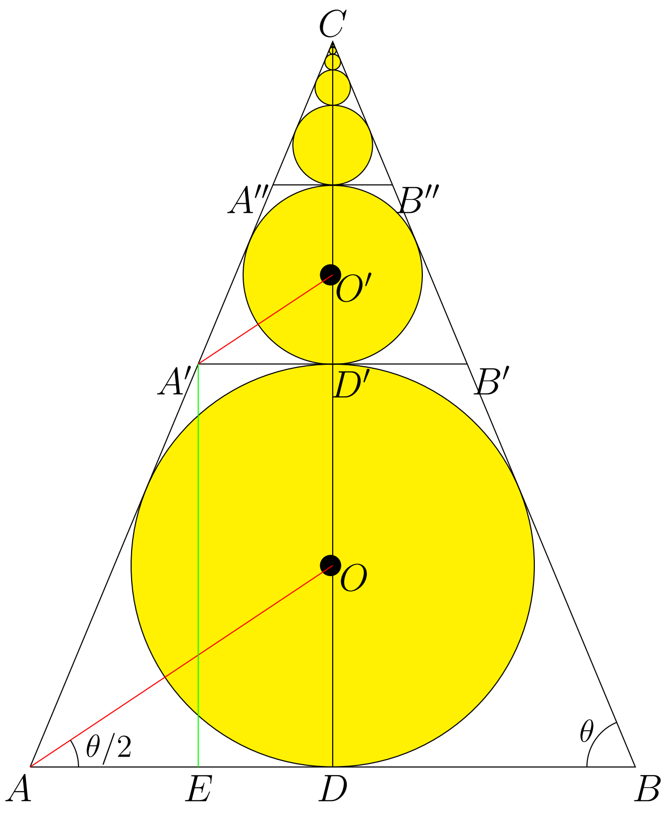
$$\begin{aligned} OD &= 5\tan\frac{\theta}{2} = 5\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+cos\theta}} = 5\sqrt{\frac{1-5/13}{1+5/13}} = 10/3 \\ AE &= 2OD(\tan\theta)^{-1} = \frac{20}{3}\cdot\frac{5}{12} = 25/9 \end{aligned}$$

En consecuencia, $A'B' = 10 - 2\cdot 25/9 = 40/9$. Por lo tanto, la relación entre el área del círculo inscrito en $\triangle ABC$ y el área del trapecio de vértices A, A', B', B es

$$\frac{\pi(10/3)^3}{(10+40/9)\cdot 10/3} = \frac{3}{13}\pi$$

Podemos intuir que esa relación se mantiene en todos los sucesivos trapecios y círculos, de manera que equivale a la proporción entre la suma de las áreas de los círculos y el área total del triángulo $\triangle ABC$, por lo que la suma de las áreas de los círculos es

$$\frac{3}{13}\pi\cdot 60 = \frac{180}{13}\pi$$



Nota: Esa es la solución al segundo apartado. No obstante, es conveniente justificar formalmente las últimas afirmaciones. En primer lugar, dado que $\theta/2 = \angle OAD = \angle O'A'D'$, se tiene que $\triangle AOD$ y $\triangle A'O'D'$ son semejantes. Luego, existe $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{AD}{A'D'} = \frac{OD}{O'D'} = k$$

Si $\mathcal{C}_i$ y $\mathcal{T}_i$ denotan las áreas del círculo y trapecio i-ésimos, respectivamente, se verifica:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathcal{C}_1}{\mathcal{T}_1} &= \frac{\pi OD^2}{2(AB - AE)OD} && (10)\\
&= \frac{\pi OD}{2[AB - 2OD(\tan\theta)^{-1}]} && (11)\\
&= \frac{\pi k O'D'}{2k[A'B' - 2O'D'(\tan\theta)^{-1}]} && (12)\\
&= \frac{\mathcal{C}_2}{\mathcal{T}_2} = \frac{\mathcal{C}_3}{\mathcal{T}_3} = \dots && (13)
\end{aligned}$$

Luego, dado que las áreas de los trapecios suman el área de triángulo $\triangle ABC$ y sacando factor común, se verifica que la suma $\mathcal{S}$ de las áreas de los círculos es

$$\begin{aligned}
\mathcal{S} &= \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{C}_i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mathcal{C}_i}{\mathcal{T}_i}\mathcal{T}_i\\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mathcal{C}_1}{\mathcal{T}_1}\mathcal{T}_i = \frac{\mathcal{C}_1}{\mathcal{T}_1}\sum_{i=1}^{\infty}\mathcal{T}_i\\
&= \frac{\mathcal{C}_1}{\mathcal{T}_1}60
\end{aligned}$$

ACTA DE CALIFICACIÓN DE LA PRIMERA FASE DE LA 59 OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Distrito universitario de Extremadura

Reunido el tribunal calificador del Distrito Universitario de Extremadura, formado por los profesores del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Extremadura Dña. Eva López Sanjuán, D. Jesús Montanero Fernández y Dña. M. Isabel Parra Arévalo, acuerda proponer como ganadores:

1º Luis Gutiérrez Garrido Calificación: 33 puntos

Centro: I.E.S. Gabriel y Galán (Montehermoso)

2º Mario Parra Murciano Calificación: 28 puntos

Centro: I.E.S. Rodríguez Moñino (Badajoz)

3º Javier Gómez de Tejada Sanz Calificación: 24 puntos

Centro: I.E.S. Rodríguez Moñino (Badajoz)

Badajoz, 25 de enero de 2023

Eva López Sanjuán	Jesús Montanero Fernández	M. Isabel Parra Arévalo

LX Olimpiada Matemática Española
Primera Fase
19 de enero de 2024
Soluciones

1. *La siguiente tabla presenta el número de días que son o bien lluviosos o bien soleados a lo largo de un año y en doce regiones diferentes. El resto de días, que son mezcla de ambas cosas, se consideran inclasificables.*

Region	*Sol o lluvia*	*Inclasificable*
A	336	29
B	321	44
C	335	30
D	343	22
E	329	36
F	330	35
G	311	54
H	325	40
I	341	24
J	331	34
K	333	32
L	303	62

Es además sabido que, si prescindimos de una de las doce regiones, el número total de días lluviosos es exactamente la tercera parte del número de días soleados. Razona de qué región se trata.

Solución: Si el número de días soleados es el triple del de días lluviosos, la suma de ambos es el cuádruple del número de días lluviosos, por lo que la suma de la columna del medio debe ser múltiplo de cuatro. Dado que el número de regiones con días impares es par, si prescindiéramos de una de ellas la suma sería impar. Luego, las únicas candidatas a ser eliminadas son A y F. Como 100 es múltiplo de 4 sólo nos interesa la suma de las dos últimas cifras, que vale 302 si eliminamos A y 296 si eliminamos F. Luego, es F la región a eliminar.

2. *Sea $P(x)$ un polinomio de grado 5 y sean a y b números reales, ambos diferentes de 0. Supongamos que el resto de $P(x)$ al dividirlo por x^3+ax+b es igual al resto de $P(x)$ al dividirlo por x^3+ax^2+b. Determina el valor de $a+b$.*

Solución: Como el cociente al dividir un polinomio de grado 5 por otro de grado 3 es de grado 2, si despejamos el resto común deducimos que existen dos polinomios de grado 2, $p(x)$ y $q(x)$, tales que $p(x)(x^3+ax+b)=q(x)(x^3+ax^2+b)$. En consecuencia, los términos de orden 2 de $p(x)$ y $q(x)$, que son distintos de 0, son idénticos, por lo que puede suponerse sin pérdida de generalidad que valen 1. También son idénticos los términos independientes. En definitiva, buscamos tres números reales α, β y γ tales que

$$(x^2+\alpha x+\beta)(x^3+ax+b)=(x^2+\gamma x+\beta)(x^3+ax^2+b) \tag{1}$$

Si igualamos las potencias de orden 3 se tiene que $\beta + a = \beta + a\gamma$. Despejando y teniendo en cuenta que $a \neq 0$ se deduce que $\gamma = 1$. Es decir, (1) queda así:

$$(x^2 + \alpha x + \beta)(x^3 + ax + b) = (x^2 + x + \beta)(x^3 + ax^2 + b) \tag{2}$$

Igualando las potencias de orden 4 se deduce que $\alpha = a + 1$. Igualando las potencias de orden 1 se obtiene que $\alpha b + \beta a = b$, es decir, $b(a + 1) + \beta a = b$. Despejando tenemos que $\beta = -b$. Por lo tanto, (2) queda como sigue:

$$(x^2 + \alpha x - b)(x^3 + ax + b) = (x^2 + x - b)(x^3 + ax^2 + b) \tag{3}$$

Igualando por último las potencias de orden 2, se obtiene que $b+\alpha a = b-ab$. Sustituyendo α por $a+1$ se tiene que $b+a(a+1) = b-ab$. Despejando de nuevo se obtiene que $a+b = -1$.

3. *En una urna hay cinco bolas blancas y otras cinco negras que se van extrayendo al azar sin reemplazamiento. ¿Cuál es la probabilidad de que en la sexta extracción se saque por tercera vez una bola blanca?*

Solución 1: Para que se tenga esa posibilidad en la sexta extracción es necesario que en tras la quinta se hayan extraído 3 negras y dos blancas, sin importar el orden en que eso haya sucedido. Por lo tanto, la probabilidad de que ocurra es $\binom{5}{3} \times \binom{5}{2} : \binom{10}{5}$. Si se llega a esa situación, la probabilidad de que se verifique lo deseado se obtiene multiplicando la probabilidad anterior por 3/5. Luego, la probabilidad buscada es

$$\frac{5!}{3!2!} \cdot \frac{5!}{2!3!} : \frac{10!}{5!5!} \cdot \frac{3}{5} = \frac{5}{21}$$

Solución 2: Mediante un diagrama de árbol nos podemos analizar las posibles secuencias que conducen al resultado deseado. Una de ellas es NNNBB en las cinco primeras bolas y B en la sexta. La probabilidad de que eso ocurra es

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} \cdot \frac{3}{5} \tag{4}$$

Las demás secuencias son: NNBNBB, NNBBNB, NBNNBB, NBNBNB,NBBNNB, BNNNBB, BNNBNB, BNBNNB y BBNNNB. Ocurre que la probabilidad de ocurra cualquiera de estas otras nueve secuencias es la misma que en (4), pues sólo variará el orden de los factores en el numerador de la fracción izquierda. Luego, la probabilidad buscada es

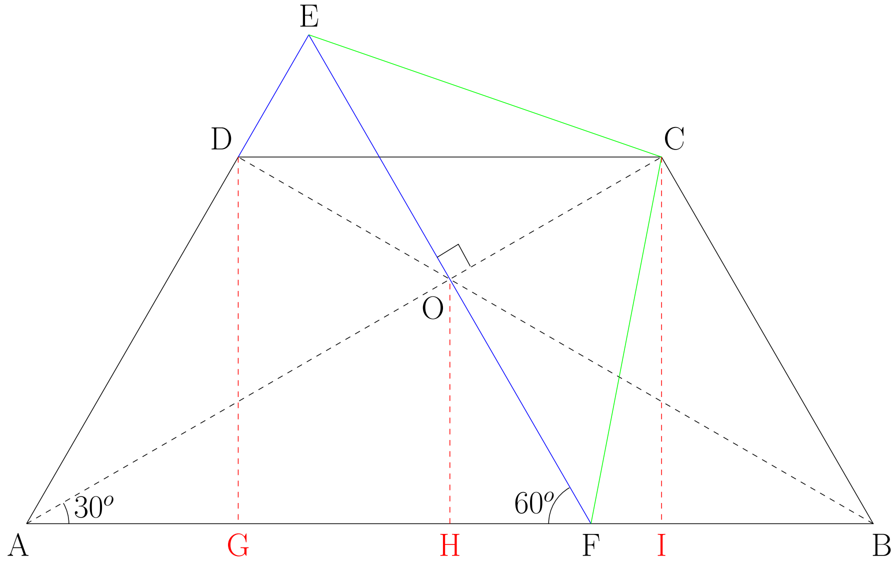
$$10 \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5} = \frac{5}{21}$$

4. *En una reunión con un número impar de personas se saludan entre sí quienes se conocían previamente. Demuestra que al menos un asistente saludará a un número par de personas (0 se considera un número par y corresponde a un asistente que no ha saludado a nadie).*

Solución: Si k denota el número de personas y n_i el número de personas que saluda el sujeto i-ésimo, la suma de saludos que contabilizan por separado cada uno de los asistentes es $N = n_1 + \ldots + n_k$. Como cada saludo involucra a dos personas, N es el doble del número total de saludos, por lo que debe ser par. Eso sería imposible si $n_1, \ldots, n_k$ fueran impares, pues k es impar.

5. *Sea $ABCD$ un trapecio de bases AB y CD tal que $AD = DC = CB = 1$ y $AB = 2$. Sea O el punto de intersección de las diagonales AC y BD. La recta perpendicular a AC trazada por O corta a la prolongación del lado AD en E y a la base AB en F. Calcula el área del cuadrilátero $AECF$.*

Solución: Dado que $AD = CB$, el trapecio debe ser necesariamente isósceles. Por lo tanto, $AG = 1/2$ y se verifica, por el teorema de Pitágoras, que $DG = CI = \sqrt{3}/2$. Además, $AI = 3/2$. En consecuencia $\angle BAD = \arcsin(\sqrt{3}/2) = 60^o$ y $\angle BAC = \arctan(\sqrt{3}/3) = 30^o$. Luego, $\angle AFO = 90^o - 30^o = 60^o$, es decir, el triángulo AEF es equilátero.



El área del paralelogramo $AECF$ es la suma de las áreas de los triángulos AEF y CEF, que comparten la base EF y tienen por alturas AO y OC, respectivamente. Por lo tanto, se trata de calcular $EF(AO + OC)/2 = OF \cdot AC$. En primer lugar, $AC = CI/\operatorname{sen} 30^o = \sqrt{3}$. Por otra parte, $OH = 1 \cdot \tan 30^o = \sqrt{3}/3$ y, en consecuencia, $OF = \sqrt{3}/(3 \operatorname{sen} 60^o) = 2/3$. Luego, el área buscada es $2\sqrt{3}/3$.

6. *En otra reunión hay 100 personas. Cada par de personas son o bien amigos o bien enemigos (una y sólo una de las dos cosas). Además, se cumple la siguiente propiedad: ai A y B son enemigos y B y C son enemigos, entonces A y C son amigos. Demuestra que hay dos personas que son amigas y que tienen el mismo número de enemigos.*

Solución: Sea A una persona cuyo número de enemigos n sea máximo (supondremos que $n \geq 2$ pues, de lo contrario, acabamos). Sea $\mathcal{A}$ el conjunto de sus amigos y $\mathcal{B}$ el de sus n enemigos. Si algún sujeto de $\mathcal{A}$ tiene n enemigos acabamos, por lo que supondremos en lo sucesivo que tienen a los sumo $n - 1$ enemigos. Además, los elementos de $\mathcal{B}$ son todos amigos entre sí, pues tienen a A como enemigo común.

Dado que el número de enemigos de cualquier elemento de $\mathcal{B}$ está entre 1 y n, se pueden dar dos circunstancias: que haya dos con el mismo número de enemigos, en cuyo caso acabamos, o que haya un elemento B_1 con un enemigo, otro B_2 con 2 y así sucesivamente hasta B_n con n. En ese caso, B_1 debe ser amigo de todos los sujetos de $\mathcal{A}$. Además, existirá un conjunto $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ constituido por lo $n - 1$ elementos enemigos de B_n si exceptuamos A, que son todos amigos entre sí pues B_n es enemigo común.

Como el número de enemigos de cualquier elemento de $\mathcal{C}$ está entre 1 y $n-1$, se pueden dar dos circunstancias: que haya un elemento C_1 con un solo enemigo o que todos tengan entre 2 y $n - 1$ enemigos. En el primer caso, B_1 y C_1 serían dos amigos con un único enemigo; en el segundo, habría al menos dos sujetos de $\mathcal{C}$ con el mismo número de enemigos.

ACTA DE CALIFICACIÓN DE LA PRIMERA FASE DE LA LX OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Distrito universitario de Extremadura

Reunido el *Tribunal Calificador* del Distrito Universitario de Extremadura, formado por los profesores del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Extremadura Dña. Eva López Sanjuán, D. Daniel Merino Delgado, D. Jesús Montanero Fernández y Dña. M. Isabel Parra Arévalo, acuerda proponer como ganadores:

1º Cristian Hipólito Holá Calificación: 20 puntos

Centro: Colegio San José (Villafranca)

2º Julio Pérez González Calificación: 19 puntos

Centro: I.E.S. Profesor Hernández Pacheco (Cáceres)

3º Daniel Domínguez Herrera Calificación: 18 puntos

Centro: I.E.S. Emérita Augusta (Mérida)

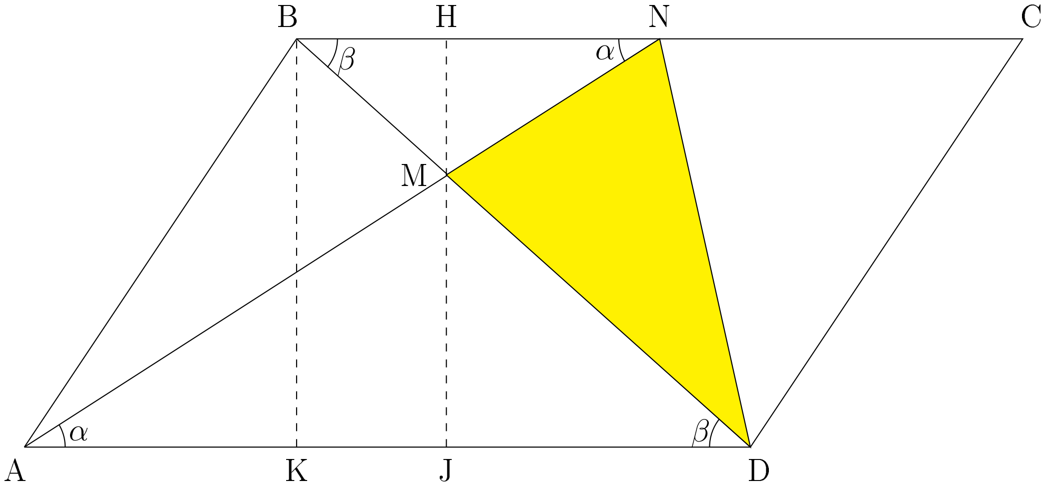
Badajoz, 25 de enero de 2024

Eva López Sanjuán	Daniel Merino Delgado	Jesús Montanero Fernández	M. Isabel Parra Arévalo

LXI Olimpiada Matemática Española
Primera Fase
17 de enero de 2025
Soluciones

1. *Sea $ABCD$ un paralelogramo y sea M el punto en la diagonal BD que cumple $MD = 2MB$. Las rectas AM y BC se cortan en el punto N. ¿Cuál es el cociente entre el área del triángulo MND y el área del palalelogramo $ABCD$?*

Solución



Denótense por x e y las áreas de $ABCD$ y MND, respectivamente. Dado que $\angle DAN = \angle ANB$ y $\angle ADB = \angle CBD$, los triángulos ADM y BMN son semejantes. Por lo tanto,

$$\frac{BN}{AD} = \frac{NM}{AM} = \frac{HM}{MJ} = \frac{BM}{MD} = \frac{1}{2}$$

Luego el área del triángulo BMN es la cuarta parte de la del triángulo AMD. Como $JM = 2/3 \cdot KB$, el área del triángulo AMD es la tercera parte del paralelogramo $ABCD$. Por otra parte, NC es la mitad de AD. Luego, el área del triángulo NDC es la mitad de BDC y la cuarta parte de $ABCD$. En definitiva,

$$y = \frac{x}{2} - \frac{x}{12} - \frac{x}{4} = \mathbf{\frac{1}{6}} \cdot x$$

2. *Sea $q(x)$ un polinomio de grado 2023 que cumple, para todo $n = 1, 2, 3, \ldots, 2024$, que $q(n) = 1/n$. Halla el valor de $q(2025)$.*

Solución: La propiedad anterior equivale a que $q(x)x = 1$ para $x = 1, 2, \ldots, 2024$, es decir, que $1, 2, \ldots, 2024$ sean las raíces del polinomio $q(x)x - 1$, de grado 2024. Por lo tanto, existe una constante k tal que

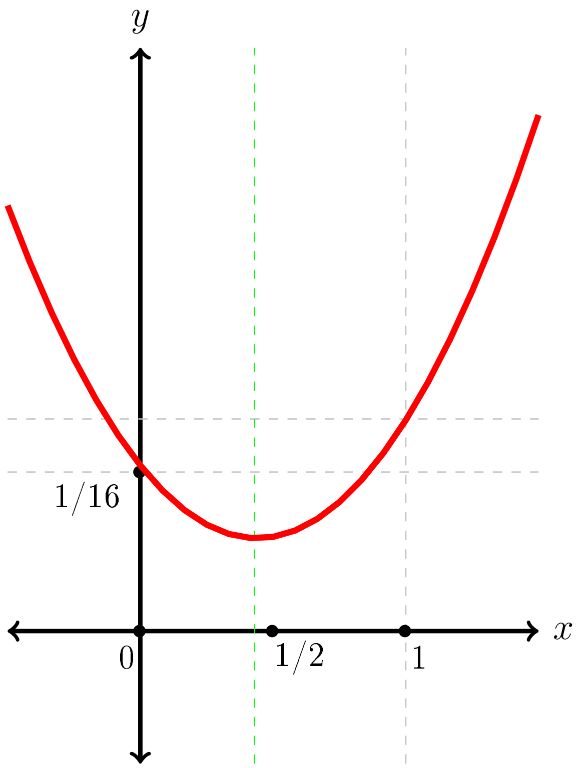
$$q(x)x - 1 = k(x-1)(x-2)\ldots(x-2024)$$

Sustituyendo en $x = 0$ tenemos que $-1 = k(-1)^{2024}2024!$. Luego, $k = -1/2024!$. Sustituyendo en $x = 2025$, tenemos que $q(2025) \cdot 2025 - 1 = -1$. Por lo tanto, $\mathbf{q(2025)=0}$.

3. *Supongamos que tenemos una cuerda de longitud 1 y podemos cortarla para formar un círculo con un trozo y un cuadrado con el otro. Calcula los valores mínimo y máximo de la suma de las correspondientes áreas.*

Solución: Si x es la longitud del trozo de cuerda que forma el círculo, la suma de ambas áreas es el polinomio de grado 2 siguiente (se representa en la figura):

$$f(x) = \pi \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 + \frac{(1-x)^2}{16} = \frac{(\pi+4)x^2 - 2\pi x + \pi}{16\pi}$$



En consecuencia, el mínimo se alcanza en la coordenada x del vértice,

$$x_{min} = \frac{\pi}{\pi + 4}$$

Teniendo en cuenta que $x_{min} < 1/2$ y la simetría del polinomio respecto a su vértice, el máximo de $f(x)$ en el intervalo $[0,1]$ se alcanza en $x_{max} = 1$, es decir, cuando no cortamos la cuerda y formamos únicamente un círculo. Sustituyendo, los valores mínimo y máximo son, respectivamente,

$$\mathbf{f_{min}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4\pi + 16}} \quad , \quad \mathbf{f_{max}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4\pi}}$$

4. *Determina el menor entero positivo n que tiene al menos cuatro divisores diferentes a, b, c, d, con $1 < a, b, c, d < n$, de forma que $a + b + c + d = 1001$.*

Solución: Si suponemos a, b, c, d ordenados de menor a mayor, existen n_1, n_2, n_3, n_4 enteros diferentes, mayores que 1 y menores que n, tales que $n = n_1 a = n_2 b = n_3 c = n_4 d$ y $a + b + c + d = 1001$. En ese caso,

$$\left(\frac{n}{n_1} + \frac{n}{n_2} + \frac{n}{n_3} + \frac{n}{n_4}\right) = 1001$$

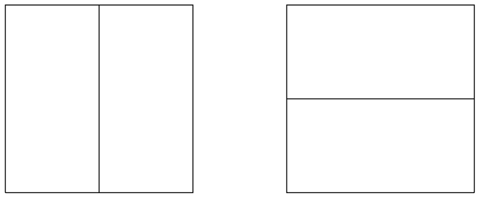
Es decir,

$$n = 1001 \cdot \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4}\right)^{-1}$$

Encontrar n equivale a encontrar el valor máximo de $x = n_1^{-1} + n_2^{-1} + n_3^{-1} + n_4^{-1}$ tal que $1001/x$ sea entero. La primera opción que debemos analizar es pues $n_4 = 2$, $n_3 = 3$, $n_2 = 4$ y $n_1 = 5$, en cuyo caso caso $x = 77/60$. Por lo tanto, $n = 1001 \cdot 60/77 =$**780**. Luego, es la solución buscada.

5. *Un suelo rectangular de dimensión 12×2 se rellena con baldosas de dimensión 2×1. ¿Cuántas configuraciones distintas se pueden dar?*

Solución: Si a_n denota el número de configuraciones para un valor n determinado, sabemos que $a_1 = 1$ y $a_2 = 2$. Efectivamente, en el caso $n = 2$ se pueden adoptar las dos configuraciones (a) o (b) de la figura:



(a) (b)

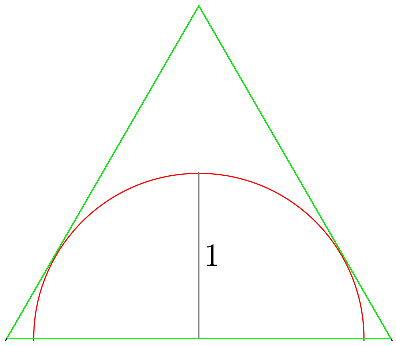
Si conocemos a_{n-2} y a_{n-1} podemos saber el valor de a_n para $n \geq 2$. Depende de si la primera baldosa se coloca de manera vertical (a) u horizontal (b). En el primer caso, las $n-1$ restantes se pueden colocar de a_{n-1} formas diferentes. En el segundo caso, como el primer cuadrado (b) queda completo, las $n-2$ restantes se pueden colocar de a_{n-2} formas diferentes.

En definitiva,

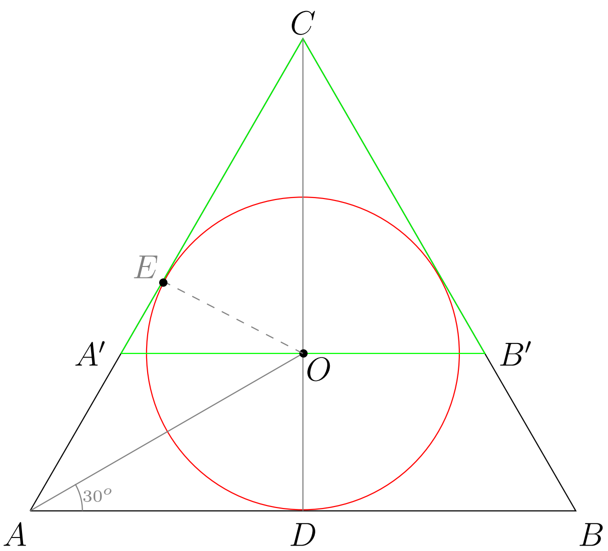
$$a_n = a_{n-2} + a_{n-1} \tag{1}$$

Es decir, a_{12} es el duodécimo término de la sucesión de Fibonacci, que se obtiene de manera recurrente según (1): 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, **233**.

6. *Calcula el área del triángulo equilátero de la figura.*



Solución (a): El triángulo equilátero $A'B'C$ puede extenderse, según se ve en la figura, hasta formar otro triángulo equilátero ABC cuyo incentro O es el punto medio de $A'B'$.



Por simetría, $AO = OC$. Como el incentro es el punto en el que se cortan las bisectrices, $\angle DAO = 30^o$. Se verifica entonces que

$$sen(30) = \frac{OD}{AO}, \qquad tg(30) = \frac{OD}{AD}$$

Dado que $OD = 1$, se tiene que $AO = 2$ y $AD = \sqrt{3}$. Como $CD = 3$ y los triángulos $A'OC$ y ADC son semejantes, $A'0 = AD \cdot 2/3 = 2\sqrt{3}/3$. Así pues, el área de $A'B'C$ es

$$A'O \cdot OC = \mathbf{\frac{4}{3}\sqrt{3}}$$

Solución (b): Ten en cuenta que $OE = 1$ y $\angle OEA' = 90^o$. Por lo tanto, $\angle A'OE = 30^o$ y $\angle EOC = 60^o$. Entonces, $A'0 = 2\sqrt{3}/3$ y $OC = 2$. De ahí se obtiene la misma área.

ACTA DE CALIFICACIÓN DE LA PRIMERA FASE DE LA LXI OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Distrito universitario de Extremadura

Reunido el *Tribunal Calificador* del Distrito Universitario de Extremadura, formado por los profesores del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Extremadura Dña. Eva López Sanjuán, D. Daniel Merino Delgado, D. Jesús Montanero Fernández y Dña. M. Isabel Parra Arévalo, acuerda proponer como ganadores:

1º Javier Giménez Cabanillas Calificación: 33 puntos

Centro: I.E.S. Maestro Domingo Cáceres (Badajoz)

2º Cristian Hipólito Holá Calificación: 25 puntos

Centro: Colegio San José Villafranca (Villafranca de los Barros)

3º José Luis Miralles Álvarez Calificación: 22 puntos

Centro: Colegio El Tomillar (Badajoz)

Badajoz, 22 de enero de 2025

Eva López Sanjuán	Daniel Merino Delgado	Jesús Montanero Fernández	M. Isabel Parra Arévalo