COMPENDIUM OMEA

Olimpiada Matemática Aragonesa

(Fase local de la Olimpiada Matemática Española)

2005 – 2023

Gerard Romo Garrido

TooMates
Cooleccion

Toomates Coolección

Los documentos de **Toomates** son materiales digitales y gratuitos. Son digitales porque están pensados para ser consultados mediante un ordenador, tablet o móvil. Son gratuitos porque se ofrecen a la comunidad educativa sin coste alguno. Los libros de texto pueden ser digitales o en papel, gratuitos o en venta, y ninguna de estas opciones es necesariamente mejor o peor que las otras. Es más: Suele suceder que los mejores docentes son los que piden a sus alumnos la compra de un libro de texto en papel, esto es un hecho. Lo que no es aceptable, por inmoral y mezquino, es el modelo de las llamadas "**licencias digitales**" con las que las editoriales pretenden cobrar a los estudiantes, una y otra vez, por acceder a los mismos contenidos (unos contenidos que, además, son de una bajísima calidad). Este modelo de negocio es miserable, pues impide el compartir un mismo libro, incluso entre dos hermanos, pretende convertir a los estudiantes en un mercado cautivo, exige a los estudiantes y a las escuelas costosísimas líneas de Internet, pretende pervertir el conocimiento, que es algo social, público, convirtiéndolo en un producto de propiedad privada, accesible solo a aquellos que se lo puedan permitir, y solo de una manera encapsulada, fragmentada, impidiendo el derecho del alumno de poseer todo el libro, de acceder a todo el libro, de moverse libremente por todo el libro.

Nadie puede pretender ser neutral ante esto: Mirar para otro lado y aceptar el modelo de licencias digitales es admitir un mundo más injusto, es participar en la denegación del acceso al conocimiento a aquellos que no disponen de medios económicos, y esto en un mundo en el que las modernas tecnologías actuales permiten, por primera vez en la historia de la Humanidad, poder compartir el conocimiento sin coste alguno, con algo tan simple como es un archivo "pdf". **El conocimiento no es una mercancía**.

El proyecto Toomates tiene como objetivo la promoción y difusión entre el profesorado y el colectivo de estudiantes de unos materiales didácticos libres, gratuitos y de calidad, que fuerce a las editoriales a competir ofreciendo alternativas de pago atractivas aumentando la calidad de unos libros de texto que actualmente son muy mediocres, y no mediante retorcidas técnicas comerciales.

 Todos los documentos se ofrecen en dos versiones: En formato "**pdf**" para una cómoda lectura y en el formato "**doc**" de MSWord para permitir y facilitar su edición y generar versiones parcial o totalmente modificadas.

¡Libérate de la tiranía y mediocridad de las editoriales! Crea, utiliza y comparte tus propios materiales didácticos

Toomates Coolección **Problem Solving**:

Geometría Axiomática , Problemas de Geometría (vol.1) , Problemas de Geometría (vol.2)
Introducción a la Geometría , Álgebra , Teoría de números , Combinatoria , Probabilidad
Trigonometría , Desigualdades , Números complejos

Toomates Coolección **Llibres de Text** (en catalán):

Nombres (Preàlgebra) , Àlgebra , Proporcionalitat , Mesures geomètriques , Geometria analítica
Compendium ACM4 , Combinatòria i Probabilitat , Estadística , Trigonometria , Funcions
Nombres Complexos , Mates amb Excel . Àlgebra Lineal 2n batx. , Geometria Lineal 2n batx.
Càlcul Infinitesimal 2n batx. , Programació Lineal 2n batx.

Toomates Coolección **Compendiums**:

Ámbito PAU: Catalunya TEC , Catalunya CCSS , Galicia , País Vasco , Portugal A , Portugal B
Ámbito Canguro: Canguro ESP , Cangur CAT , Kangourou FR , Kangaroo USA , Kangaroo UK
Känguru AUS
Ámbito Preolímpico: AMC 8 , AMC 10 , AMC 12 , AIME , Archimede , HMMT , Mathcounts
Ámbito Olímpico español: OME , OMEFL , OMEC , OMEA , OMEM
Ámbito Olímpico Internacional: IGO , IMO , OMI , SMT , USAMO , INMO , CMO , REOIM

¡Genera tus propias versiones de este documento! Siempre que es posible se ofrecen las versiones editables "MS Word" de todos los materiales, para facilitar su edición.

¡Ayuda a mejorar! Envía cualquier duda, observación, comentario o sugerencia a **toomates@gmail.com**

¡No utilices una versión anticuada! Todos estos documentos se mejoran constantemente. Descarga totalmente gratis la última versión de estos documentos en los correspondientes enlaces superiores, en los que siempre encontrarás la versión más actualizada.

Descarga en **www.toomates.net/biblioteca/Syllabus.pdf** una guía del usuario para la utilización de los materiales de Toomates Coolección.

Encontrarás muchos más materiales para el aprendizaje de las matemáticas en **www.toomates.net**

Visita el **Canal Youtube** de Toomates: **https://www.youtube.com/c/GerardRomo**

Versión de este documento: **29/01/2023**

Índice

	Enunciados	Soluciones
41 - XLI - (2004-05)	5	5
42 - XLII - (2005-06)	11	
43 - XLIII - (2006-07)	17	
44 - XLIV - (2007-08)	22	
45 - XLV - (2008-09)	26	
46 - XLVI - (2009-10)	31	
47 - XLVII - (2010-11)	36	
48 - XLVIII - (2011-12)	46	
49 - XLIX - (2012-13)		
50 - L - (2013-14)	53	53
51 - LI - (2014-15)	59	59
52 - LII - (2015-16)		
53 - LIII - (2016-17)		
54 - LIV - (2017-18)	76	
55 - LV - (2018-19)	83	83
56 - LVI - (2019-20)	91	93
57 - LVII - (2020-21)	98	100
58 - LVIII - (2021-22)	114	114
59 - LIV - (2022-23)	119	123

Fuentes.

Todo este material ha sido agrupado en un único archivo "**pdf**" mediante la aplicación online https://www.ilovepdf.com/

XLI Olimpiada Matemática Española

Fase aragonesa

14 de Enero de 2005

Primera prueba

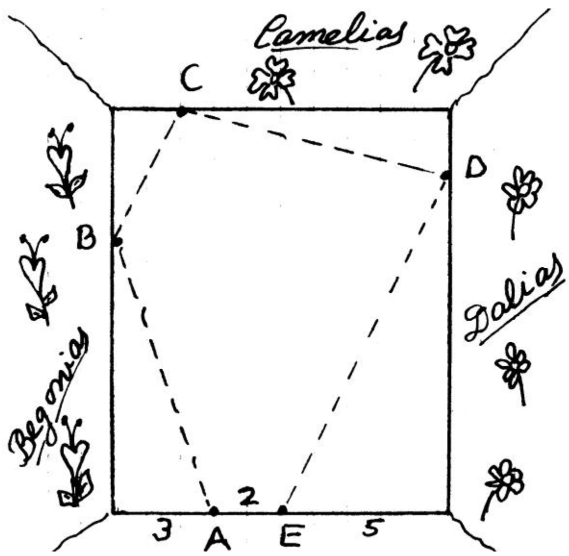
1. Determina la máxima potencia de **7** que divide al número **2005! = 2005** × **2004** × **........** × **3** × **2** × **1** .

Solución: 2005 = 286 x 7 + 3, luego hay 286 números entre 1 y 2005 que son múltiplos de 7. Ahora, 286 = 40 x 7 + 6, luego 40 de estos múltiplos de 7 lo son también de $7^2 = 49$. Por último, 40 = 5 x 7 + 5 , luego 5 de estos 40 son múltiplos de $7^3 = 343$.

Por tanto, la máxima potencia de 7 es $7^{286+40+5} = \mathbf{7^{331}}$.

2. Un patio rectangular de 10 por 12 metros está flanqueado en tres de sus lados por begonias, camelias y dalias.

En el lado sin flores están Ana y Emilio, tal como se ve en el croquis.

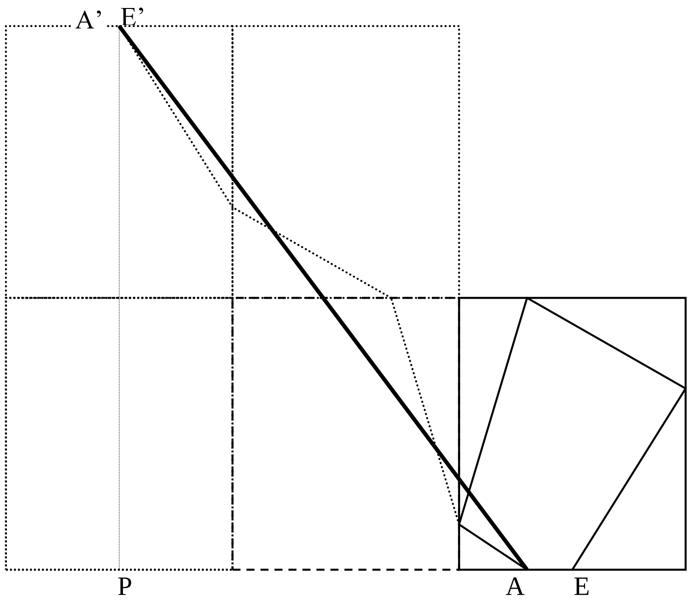


Ana quiere llevarle a Emilio un ramo que tenga begonias, camelias y dalias, pero además quiere llegar lo antes posible.

¿Cuánto mide el camino más corto?

Razona y justifica tu respuesta.

Solución: Dibujando nuevos rectángulos mediante simetrías respecto a lados, vemos que todo recorrido desde **A** hasta **E** pasando por los otros tres lados del rectángulo equivale a un recorrido entre **A** y **E'** en el dibujo de abajo. Así obtenemos que el problema equivale a calcular el camino más corto entre los puntos **A** y **E'**. Puesto que **E'P = 24** y **PA = 18**; la solución óptima es **AE' =** $\sqrt{24^2+18^2}$ **= 30 m.**



XLI Olimpiada Matemática Española

Fase aragonesa

14 de Enero de 2005

Segunda prueba

3. Ya sabes que $\mathbf{(10^n)^2=10^{2n}}$ y puedes comprobar fácilmente que $\mathbf{83^2=6889}$. Te pedimos algo más difícil, calcula la raíz cuadrada del número

99 999 999 998 340 000 000 006 889 .

Solución: Sea **N = 99 999 999 998 340 000 000 006 889** .

Así $\mathbf{N - 83^2 = 99\ 999\ 999\ 998\ 340\ 000\ 000\ 000\ 000}$

$\mathbf{= 10^{26} - 166\ 0\ 000\ 000\ 000\ 000}$

$\mathbf{= 10^{26} - 2 \times 83 \times 10^{13}}$

Por tanto

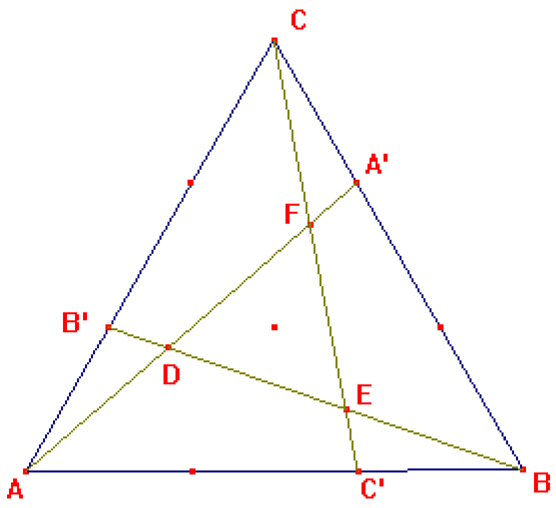
$$N = \mathbf{10^{26} - 2 \times 83 \times 10^{13} + 83^2 = (10^{13} - 83)^2}$$

y la respuesta es $\mathbf{10^{13}-83 = 999\ 999\ 999\ 917}$.

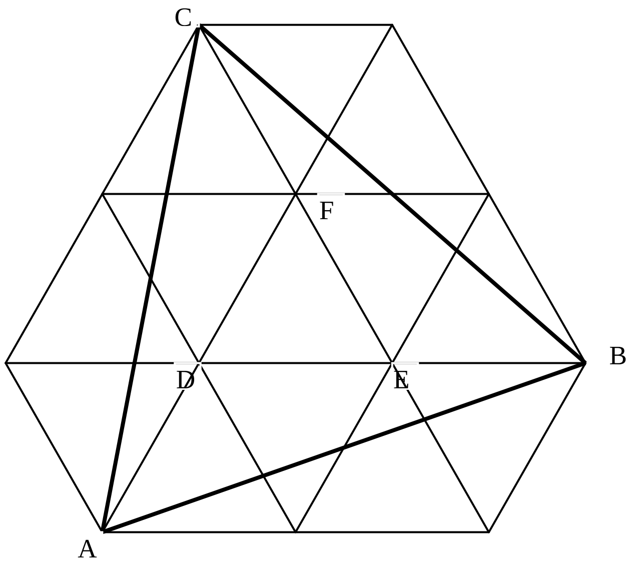
4. Sea ABC un triángulo equilátero. Sean A′, B′ , C′, puntos sobre los tres lados BC, CA y AB, respectivamente, tales que

$$\frac{AC'}{C'B} = \frac{BA'}{A'C} = \frac{CB'}{B'A} = \frac{2}{1}$$

Los tres segmentos AA′, BB′ y CC′ determinan el triángulo DEF. Demuestra que el área de este triángulo es un séptimo del área del triángulo ABC.



Solución: Girando ligeramente la figura y trazando paralelas a los lados del triángulo interior obtenemos la siguiente figura:



El área del triángulo ABC es igual al área del triángulo DEF más las áreas de los triángulos ADB, BEC y CFA. El área de cada uno de éstos es la mitad del área de cuatro triángulos semejantes al DEF. Por tanto el área de ABC es siete veces el área de DEF.

(Alternativamente, se puede tomar un sistema de ejes cartesianos en el que A sea el origen y B el punto (0,1). Ahora se pueden calcular las coordenadas de todos los puntos involucrados y comprobar que la longitud del segmente DE es $1/\sqrt{7}$.)

XLI Olimpiada Matemática Española

Fase aragonesa

14 de Enero de 2005

Tercera prueba

5. Sean **p** y **q** dos números naturales con $p \geq q$. Prueba que para todo número real positivo **x** se tiene que

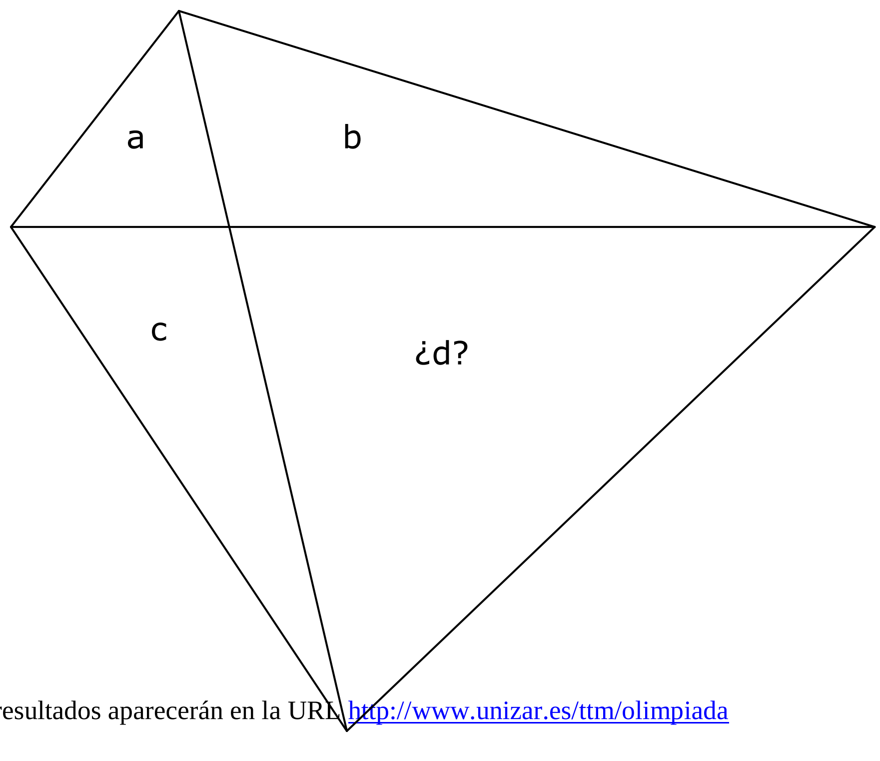
$$(1+x^q)^p \geq (1+x^p)^q$$

Solución: Si $0 \leq x \leq 1$, entonces $x^q \geq x^p$, luego

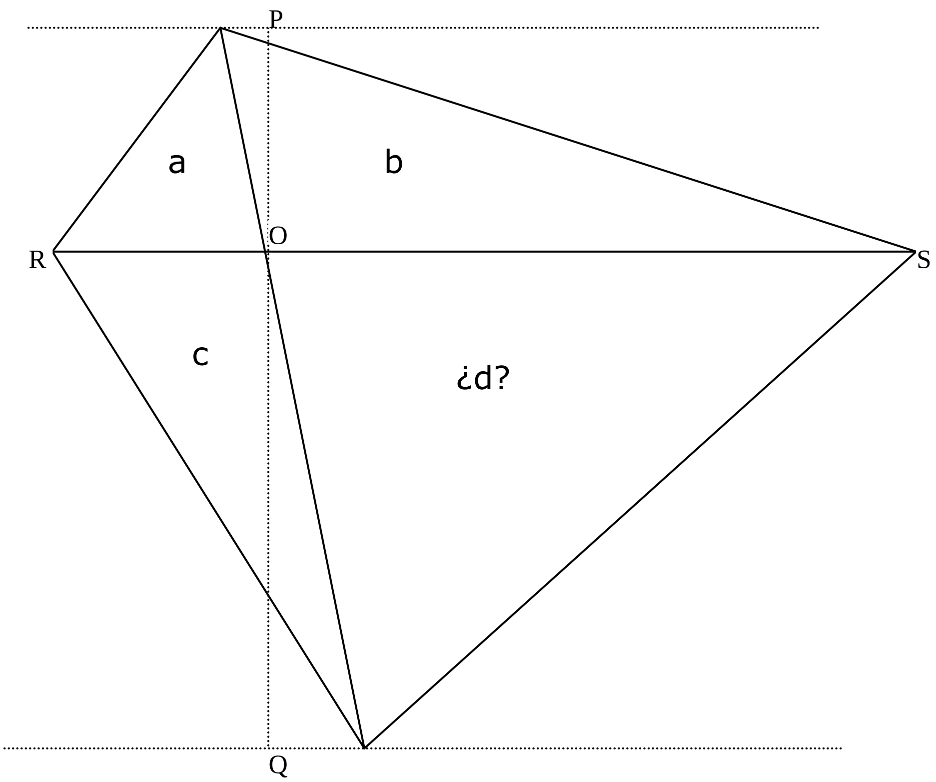
$$(1+x^q)^p \geq (1+x^p)^p \geq (1+x^p)^q \,.$$

Y si $x \geq 1$, $(1+x^q)^p = \left(x^q(1+(1/x)^q)\right)^p = x^{pq}\left(1+(1/x)^q\right)^p$ que, por ser $0 < 1/x \leq 1$, ya sabemos que es mayor o igual que $x^{pq}\left(1+(1/x)^p\right)^q = (1+x^p)^q$.

6. Dado un cuadrilátero cualquiera, considera los cuatro triángulos que se forman al trazar sus diagonales. Si sabes el área de tres de estos triángulos, ¿cuál es el área del triángulo que falta?



Solución: Trazamos paralelas a una de las diagonales, y la perpendicular a dicha diagonal por el punto de corte de las dos diagonales, obteniendo la figura:



Las áreas de los cuatro triángulos son:

a = OP x OR /2 , b = OP x OS /2 , **c = OQ x OR /2** , y
d = OQ x OS /2 . Luego **a x d = b x c** , y **d= (b x c)/a** .

XLII Olimpiada Matemática Española

Fase aragonesa

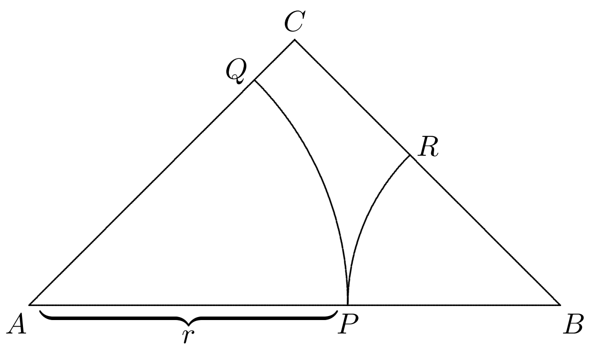
20 de enero de 2006

Problema 1

Se da un triángulo rectángulo isósceles ABC, con el ángulo recto en C, y los catetos de longitud 2. Un arco de círculo l con centro A divide al triángulo en dos partes de la misma área, mientras que el arco de círculo m con centro en B es tangente al arco l en un punto de la hipotenusa AB.

Hallar el área de la porción del triángulo no cubierta por los sectores circulares correspondientes a los dos arcos.

Solución: Sea r el radio del arco l y P su punto de corte con la hipotenusa, como en la figura.



Puesto que el área del sector circular APQ es $\frac{1}{8}\pi r^2$ y el área del triángulo es $\frac{1}{2}2 \times 2 = 2$, por hipótesis,

$$\frac{1}{8}\pi r^2 = 1, \quad \text{luego} \quad r = \sqrt{\frac{8}{\pi}}.$$

La diagonal AB mide $\sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$, luego el segmento PB mide $\sqrt{8}\Big(1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\Big)$. Así, el área del sector circular BPR es

$$\frac{1}{8}\pi \left(\sqrt{8}\Big(1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\Big)\right)^2 = \left(\sqrt{\pi} - 1\right)^2.$$

Así, la solución es

$$S = 2 - 1 - \left(\sqrt{\pi} - 1\right)^2 = 2\sqrt{\pi} - \pi.$$

Problema 2

Se suponen conocidas las raíces reales de las n ecuaciones de segundo grado que se indican en el siguiente cuadro:

Ecuación	*raíces*
$x^2 + a_1x + b_1 = 0$	x_0, x_1
$x^2 + a_2x + b_2 = 0$	x_0, x_2
$\vdots$	$\vdots$
$x^2 + a_nx + b_n = 0$	x_0, x_n

Encontrar, razonadamente, las raíces de la ecuación

$$x^2 + \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\, x + \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n} = 0.$$

Solución: Puesto que x_0 y x_i son las raíces de la ecuación $x^2+a_ix+b_i = 0$, se tiene $x^2 + a_ix + b_i = (x - x_0)(x - x_i)$, de donde

$$x_0 + x_i = -a_i, \quad x_0x_i = b_i \quad \forall i = 1, \ldots, n.$$

Sumando para $i = 1, \ldots, n$ se obtiene

$$\begin{aligned} nx_0 + (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) &= -(a_1 + a_2 + \cdots + a_n), \\ x_0(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) &= b_1 + b_2 + \cdots + b_n, \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} x_0 + \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} &= -\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}, \\ x_0\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} &= \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n}. \end{aligned}$$

Por tanto, las soluciones de la ecuación dada son

$$x_0 \quad \text{y} \quad \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

Problema 3

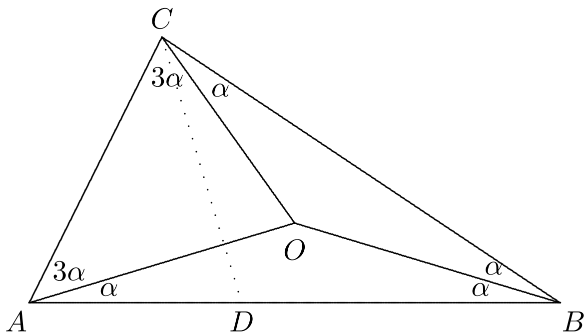
En el triángulo ABC se traza la bisectriz interior CD. Se sabe que el centro del círculo inscrito en el triángulo BCD coincide con el centro del círculo circunscrito del triángulo ABC.

Calcular los ángulos del triángulo ABC.

Solución: Sea O el centro común del enunciado, y sea α el ángulo $\widehat{ABO}$ (vértice en B). Por ser O el centro del círculo inscrito en el triángulo BCD, OB es la bisectriz del ángulo $\widehat{ABC}$, luego $\widehat{CBO} = \alpha$.

Las longitudes de los segmentos OA, OB y OC coinciden, por ser O el centro del ángulo circunscrito, luego los triángulos OBC, OCA y OAB son isósceles. En particular, $\widehat{OCB} = \alpha = \widehat{OAB}$ y $\widehat{OCA} = \widehat{OAC}$.

Ahora, OC es la bisectriz de $\widehat{BCD}$, luego $\widehat{OCD} = \alpha = \widehat{OCB}$; mientras que CD es la bisectriz de $\widehat{BCA}$, luego $\widehat{ACD} = \widehat{DCB} = \widehat{OCD} + \widehat{OCB} = 2\alpha$. Así, $\widehat{OAC} = \widehat{OCA} = 3\alpha$.



Como la suma de los ángulos del triángulo ABC resulta ser 10α, se tiene $\alpha = 18°$. Por tanto,

$$\widehat{ABC} = 2\alpha = 36° \quad \text{y} \quad \widehat{ACB} = \widehat{BAC} = 4\alpha = 72°.$$

Problema 4

Encontrar, razonadamente, dos números enteros positivos a y b, tales que

b^2 sea múltiplo de a,
a^3 sea múltiplo de b^2,
b^4 sea múltiplo de a^3,
a^5 sea múltiplo de b^4,
pero b^6 no sea múltiplo de a^5.

Solución: Si a y b son una solución y $p_1, \ldots, p_r$ son los primos que aparecen en las factorizaciones de a y b, entonces

$$a = p_1^{n_1} \cdots p_r^{n_r}, \quad b = p_1^{m_1} \cdots p_r^{m_r} \quad (n_i, m_i \geq 0 \ \forall i).$$

Las condiciones del enunciado se traducen en

$$n_i \leq 2m_i \leq 3n_i \leq 4m_i \leq 5n_i \quad \forall i = 1, \ldots, r, \text{ y}$$
$$\text{existe } j \text{ entre } 1 \text{ y } r \text{ tal que } 6m_j < 5n_j.$$

En esta situación, los números $a' = p_j^{n_j}$ y $b' = p_j^{m_j}$ también verifican las hipótesis. Así pues, basta buscar soluciones que sean potencias de un mismo número primo: $a = p^n$, $b = p^m$; que deben de satisfacer

$$n \leq 2m \leq 3n \leq 4m \leq 5n, \quad 6m < 5n$$

o, lo que es lo mismo,

$$\frac{m}{n} \geq \frac{1}{2}, \ \frac{m}{n} \leq \frac{3}{2}, \ \frac{m}{n} \geq \frac{3}{4}, \ \frac{m}{n} \leq \frac{5}{4}, \text{ y } \frac{m}{n} < \frac{5}{6}.$$

Como $\frac{5}{6} \leq \frac{5}{4} \leq \frac{3}{2}$ y $\frac{3}{4} \geq \frac{1}{2}$, estas condiciones se resumen en

$$\frac{3}{4} \leq \frac{m}{n} < \frac{5}{6}.$$

Los valores más pequeños de m y n que verifican esto son $m = 3$ y $n = 4$, luego la solución más pequeña es

$$a = 2^4 = 16 \quad \text{y} \quad b = 2^3 = 8.$$

Problema 5

Un número positivo x verifica la relación

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 7.$$

Demostrar que

$$x^5 + \frac{1}{x^5}$$

es entero y calcular su valor.

Solución: Puesto que

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = 7 + 2 = 9,$$

y $x > 0$, concluimos que $x + \frac{1}{x} = 3$. Entonces,

$$21 = 3 \times 7 = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = x^3 + \frac{1}{x} + x + \frac{1}{x^3} = 3 + x^3 + \frac{1}{x^3},$$

luego $x^3 + \frac{1}{x^3} = 18$. Además,

$$126 = 7 \times 18 = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) = x^5 + \frac{1}{x} + x + \frac{1}{x^5} = 3 + x^5 + \frac{1}{x^5}.$$

Por tanto,

$$x^5 + \frac{1}{x^5} = 123.$$

Problema 6

Se considera la inecuación

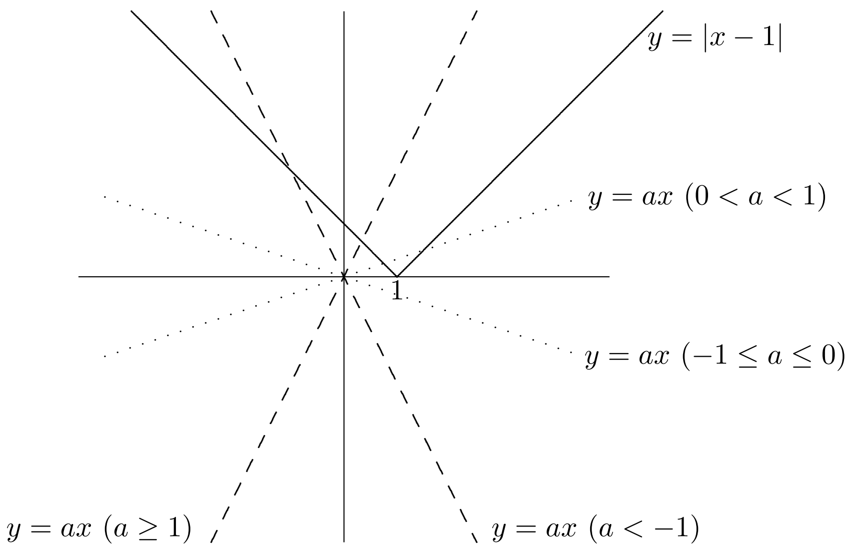
$$|x-1| < ax,$$

donde a es un parámetro real.

a) Discutir la inecuación según los valores de a.

b) Caracterizar los valores de a para los cuales la inecuación tiene exactamente DOS soluciones enteras.

Solución: Buscamos, para cada valor de a, los valores de x tales que la gráfica de $y = |x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{si } x \geq 1 \\ 1-x & \text{si } x < 1 \end{cases}$ está por debajo de la gráfica de $y = ax$.



Tenemos entonces la siguiente tabla, que resuelve el apartado a):

a	puntos de corte	soluciones de $\|x-1\| < ax$
$a \geq 1$	$1 - x = ax \;\Rightarrow\; x = \frac{1}{1+a}$	$x > \frac{1}{1+a}$
$0 < a < 1$	$\begin{cases} 1-x = ax & x = \frac{1}{1+a} \\ x-1 = ax & x = \frac{1}{1-a} \end{cases}$	$\frac{1}{1+a} < x < \frac{1}{1-a}$
$-1 \leq a \leq 0$	no hay (salvo $(1,0)$ para $a = 0$)	no hay
$a < -1$	$1 - x = ax \;\Rightarrow\; x = \frac{1}{1+a}$	$x < \frac{1}{1+a}$

Por tanto, para que haya un número finito de soluciones enteras ha de ser $0 < a < 1$. Las soluciones enteras están estrictamente entre $\frac{1}{1+a}$ (que está entre 0 y 1) y $\frac{1}{1-a}$ (que es > 1). Así 1 siempre es solución entera. Para que haya sólo otra solución entera ha de ser $2 < \frac{1}{1-a} \leq 3$. Esto es,

$$\frac{1}{2} < a \leq \frac{2}{3}.$$

XLIII Olimpiada Matemática Española

Fase aragonesa

19 de enero de 2007

Problema 1

Un poliedro convexo tiene por caras 12 cuadrados, 8 hexágonos regulares y 6 octógonos regulares. En cada vértice del poliedro concurren exactamente un cuadrado, un hexágono y un octógono. ¿Cuántos segmentos que unen pares de vértices del poliedro son interiores al mismo, es decir, no son aristas ni están contenidos en una cara?

Solución: Sea V el número de vértices, A el número de aristas, D el número de diagonales sobre las caras, e I el número de diagonales interiores, que es el número a determinar.

Puesto que cada vértice del poliedro está exactamente en una cara cuadrada, el número de vértices es

$$V = 4 \times 12 = 48 \text{ vértices.}$$

Puesto que de cada vértice salen exactamente 3 aristas, y cada arista une dos vértices, el número de aristas es

$$A = \frac{3V}{2} = 72.$$

Como cada cuadrado tiene dos diagonales, cada hexágono tiene 9 y cada octógono tiene 20, hay

$$D = 12 \times 2 + 8 \times 9 + 6 \times 20 = 216 \text{ diagonales sobre las caras.}$$

Así pues, el número pedido I es igual al total de segmentos que se pueden formar uniendo pares de vértices de todas las formas posibles, menos el número de aristas y el número de diagonales sobre las caras:

$$I = \binom{48}{2} - A - D = 24 \times 47 - 72 - 216 = 24 \times (47 - 3 - 9) = 840.$$

Problema 2

Resolver, en el conjunto de los números reales, el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} y^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0 \\ z^3 - 6y^2 + 12y - 8 = 0 \\ x^3 - 6z^2 + 12z - 8 = 0 \end{cases}$$

Solución: La primera ecuación se puede escribir como $y^3 = 6(x-1)^2 + 2$, luego ha de ser $y > 0$, y análogamente $x, z > 0$.

Sumando las tres ecuaciones, y teniendo en cuenta que $x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = (x-2)^3$, se obtiene:

$$(x-2)^3 + (y-2)^3 + (z-2)^3 = 0, \tag{*}$$

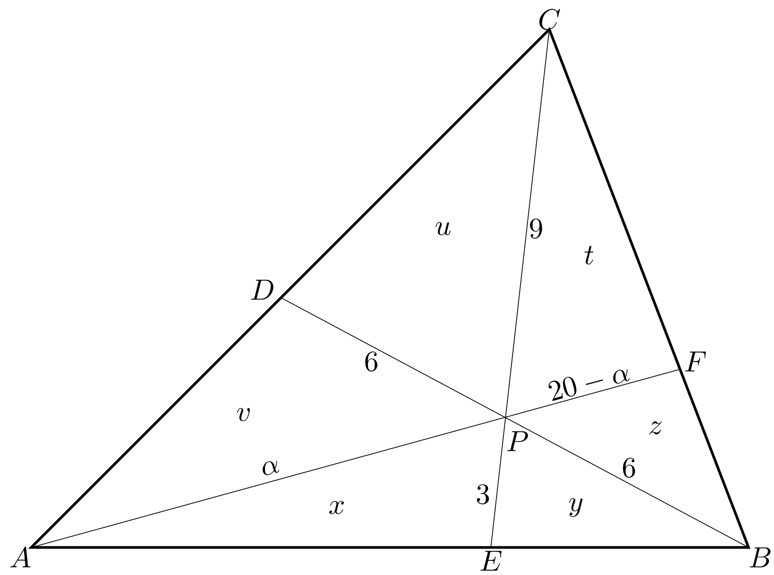
luego, o bien $x = y = z = 2$ (que se comprueba inmediatamente que es una solución), o bien al menos una de las variables toma un valor < 2. Podemos suponer que $x < 2$. Entonces $y^3 = 6x(x-2) + 8 < 8$, luego $y < 2$, y también $z^3 = 6y(y-2) + 8 < 8$ y $z < 2$. Esto contradice (*).

Se concluye que la única solución es $x = y = z = 2$.

Problema 3

Sea ABC un triángulo y D, E, F puntos situados en los segmentos AC, BA y CB respectivamente, de forma que los segmentos AF, BD, CE concurren en un punto P interior al triángulo. Sabemos que $BP = 6$, $PD = 6$, $PC = 9$, $PE = 3$ y $AF = 20$. Hallar el área del triángulo ABC.

Solución: En el siguiente dibujo, las letras x, y, z, t, u y v denotan las áreas de los seis triángulos pequeños en que queda dividido el triángulo ABC:



Ahora se tiene:

- área(PDC) = área(PBC), por tener igual base y altura,
- área(PDA) = área(PBA), análogamente,
- área$(PAC) = 3\,$área(PEA), por tener misma altura y triple base en PAC,
- área$(PCB) = 3\,$área(PEB), análogamente,
- área$(PAC) = \frac{\alpha}{20-\alpha}$ área(PEC), por tener misma altura y bases en proporción $\frac{\alpha}{20-\alpha}$,
- área$(PBA) = \frac{\alpha}{20-\alpha}$ área(PFB), por la misma razón.

Esto es,

$$u = t + z, \tag{1}$$
$$v = x + y, \tag{2}$$
$$u + v = 3x, \tag{3}$$
$$t + z = 3y, \tag{4}$$
$$u + v = \frac{\alpha}{20-\alpha} t, \tag{5}$$
$$x + y = \frac{\alpha}{20-\alpha} z. \tag{6}$$

Si S denota el área del triángulo ABC, entonces:

$$S = (x + y) + (z + t) + (u + v) = 2(u + v) \quad \text{por (1) y (2),}$$

$$S = (x + y) + (z + t) + (u + v) = 4(x + y) \quad \text{por (3) y (4),}$$

$$\begin{aligned} S &= (x + y) + (z + t) + (u + v) = \left(\frac{\alpha}{20 - \alpha} + 1\right)(t + z) \\ &= \frac{20}{20 - \alpha}(t + z) \quad \text{por (5) y (6).} \end{aligned}$$

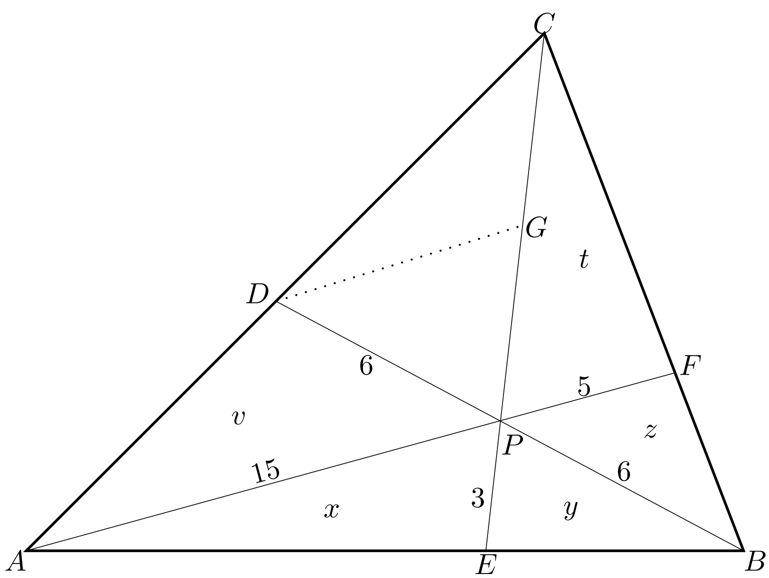
De (1) y (2) se obtiene que $u + v = (x + y) + (z + t)$, luego

$$\frac{S}{2} = \frac{S}{4} + \frac{(20 - \alpha)S}{20}.$$

Multiplicando por $\frac{20}{S}$ obtenemos $10 = 5 + (20 - \alpha)$, de donde $\alpha = 15$. Así, $S = \frac{20}{20-15}(t + z) = 4(t + z)$, luego $x + y = \frac{S}{4} = t + z$. Las ecuaciones (1) y (2) nos dan $u = v$.

Tenemos entonces que los triángulos PDC y PDQ tienen la misma área y altura desde AC, luego los segmentos AD y DC son iguales.

Trazando ahora una paralela DG a AP:



se obtiene

$$DC = \frac{1}{2}AD \quad \text{luego} \quad GC = \frac{1}{2}PC = \frac{9}{2} \quad \text{y} \quad DG = \frac{1}{2}AP = \frac{15}{2}.$$

Así, el triángulo DGP tiene lados 6, $\frac{9}{2}$ y $\frac{15}{2}$, luego es rectángulo, ya que $6^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2 = \left(\frac{15}{2}\right)^2$, con ángulo recto en P.

Por tanto el área del triángulo PGD es $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \frac{9}{2} = \frac{27}{2}$. Además, como la longitud del segmento PC es doble de la de PG, $u = \text{área}(PCD) = 2\,\text{área}(PGD) = 27$, y $S = 2(u + v) = 4u = 108$.

Problema 4

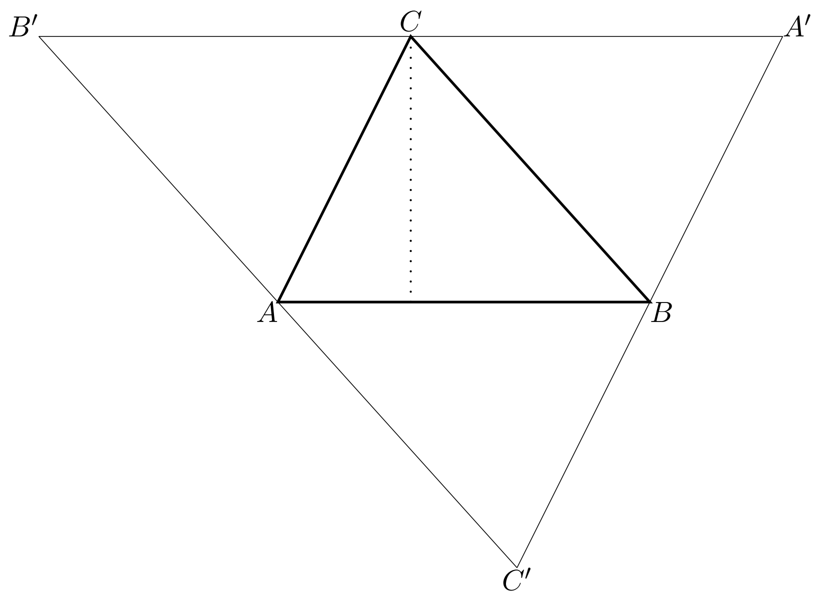
Demostrar que es imposible obtener un cubo yuxtaponiendo tetraedros regulares, todos del mismo tamaño.

Solución: Si fuera posible, la cara superior del cubo (un cuadrado) se obtendría yuxtaponiendo triángulo equiláteros, todos del mismo tamaño. Pero un ángulo recto (la esquina del cuadrado) no se puede obtener sumando ángulos de 60 grados (los ángulos de un triángulo equilátero).

Problema 5

Demostrar que, en un triángulo, la distancia de un vértice cualquiera al ortocentro es el doble de la distancia del circuncentro al lado opuesto a ese vértice.

Solución: Dado un triángulo ABC, dibujamos triángulos auxiliares girando ABC 180 grados alrededor del centro de cada uno de sus lados:



La altura por C del triángulo ABC es la mediatriz del triángulo $A'B'C'$ correspondiente al lado $A'B'$. Así, el ortocentro de ABC es el circumcentro de $A'B'C'$.

Como $A'B'C'$ es semejante a ABC, donde todas las longitudes se han multiplicado por 2, la distancia del circumcentro de $A'B'C'$ al lado $A'B'$ (esto es, la distancia del ortocentro de ABC a C) es el doble de la distancia del circumcentro de ABC al lado AB.

Problema 6

Hallar todas las soluciones reales de la ecuación

$$3^{x^2-x-y}+3^{y^2-y-z}+3^{z^2-z-x}=1.$$

Solución: Veamos primero que si a, b y c son números reales positivos tales que $a+b+c=1$, entonces $abc\leq \frac{1}{27}$*. En efecto, notemos primero que si u y v son números reales positivos, entonces $4uv=(u+v)^2-(u-v)^2\leq (u+v)^2$. Si $a=b=c$, la desigualdad es obvia. En otro caso se puede suponer que $a=\frac{1}{3}-\alpha$ y $b=\frac{1}{3}+\beta$, con $\alpha,\beta>0$. Por lo anterior,

$$4\left(\frac{1}{3}-\alpha+\beta\right)c\leq\left(\frac{1}{3}-\alpha+\beta+c\right)^2=\left(a+b+c-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{4}{9},$$

Así,

$$\begin{aligned}abc&=\frac{1}{3}(1-3\alpha)\Big(\frac{1}{3}+\beta\Big)c=\frac{1}{3}\Big(\frac{1}{3}-\alpha+\beta-3\alpha\beta\Big)c\\&\leq\frac{1}{3}\Big(\frac{1}{3}-\alpha+\beta\Big)c\leq\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9}=\frac{1}{27}.\end{aligned}$$

Por tanto, si $3^{x^2-x-y}+3^{y^2-y-z}+3^{z^2-z-x}=1$, se tiene

$$3^{x^2-x-y+y^2-y-z+z^2-z-x}\leq\frac{1}{27}=3^{-3},$$

que equivale a

$$3^{(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2}\leq 1.$$

La única posibilidad es que se tenga $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=0$, luego necesariamente $x=y=z=1$. Es claro que esto es una solución de la ecuación dada y, por tanto, es la única solución posible.

*Esto es también consecuencia inmediata de la desigualdad entre las medias aritméticas y geométricas de números positivos.

XLIV Olimpiada Matemática Española

Fase aragonesa

18 de enero de 2008

Problema 1

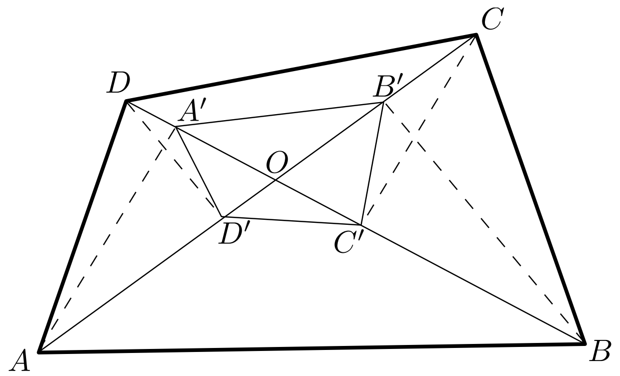
Sea $\mathcal{P}$ una familia de puntos en el plano tales que por cada cuatro puntos de $\mathcal{P}$ pasa una circunferencia. ¿Se puede afirmar que necesariamente todos los puntos de $\mathcal{P}$ están en la misma circunferencia? Justifica la respuesta.

Solución: Fijamos tres puntos cualesquiera p_1, p_2, p_3 de $\mathcal{P}$. Existe una única circunferencia $\mathcal{C}$ que pasa por ellos: la circunferencia circunscrita al triángulo que forman. Dado cualquier otro punto p de $\mathcal{P}$, hay una circunferencia que pasa por los puntos p_1, p_2, p_3, p, y ésta ha de ser necesariamente $\mathcal{C}$. Por tanto, todo los puntos de $\mathcal{P}$ están en $\mathcal{C}$.

Problema 2

En un cuadrilátero convexo se trazan las perpendiculares desde cada vértice a la diagonal que no pasa por él. Demuestra que los cuatro puntos de intersección de cada perpendicular con su correspondiente diagonal forman un cuadrilátero semejante al dado.

Solución: Dado un cuadrilátero $ABCD$ como en la figura, sea O el punto de corte de las diagonales y denotemos por A', B', C' y D' los puntos de corte de las perpendiculares desde A, B, C y D, respectivamente, a la diagonal correspondiente. Basta ver que, por ejemplo, los triángulos OCD y $OC'D'$ son semejantes.



Los ángulos $\widehat{COC'}$ y $\widehat{DOD'}$ son iguales, y los ángulos $\widehat{CC'O}$ y $\widehat{DD'O}$ son rectos, luego los triángulos $OC'C$ y $OD'D$ son semejantes y, por tanto, se tiene la relación:

$$\frac{OC'}{OC} = \frac{OD'}{OD},$$

que muestra que los triángulos $OC'D'$ y OCD son semejantes, como deseábamos.

Problema 3

Halla las soluciones reales de la ecuación $x\left(\dfrac{6-x}{x+1}\right)\left(\dfrac{6-x}{x+1}+x\right)=8.$

Solución: Sea $y=\dfrac{6-x}{x+1}$, lo que equivale a $xy=6-(x+y)$. La ecuación del enunciado se convierte en

$$xy(x+y)=8,$$

y sustituyendo xy por $6-(x+y)$ queda

$$\big(6-(x+y)\big)(x+y)=8,$$

que es una ecuación de grado 2 en $x+y$ con soluciones $x+y=4$ y $x+y=2$.

- Si $x+y=4$, entonces $xy=2$, esto es, $x(6-x)=2(x+1)$, o bien $x^2-4x+2=0$, que tiene como raíces $2\pm\sqrt{2}$.
- Si $x+y=4$, entonces $xy=4$, esto es, $x(6-x)=4(x+1)$, o bien $x^2-2x+4=0$, que no tiene raíces reales.

Así pues, las soluciones reales son $2+\sqrt{2}$ y $2-\sqrt{2}$.

Problema 4

Demuestra que $2222^{5555}+5555^{2222}$ es múltiplo de 7.

Solución: Dividiendo 2222 por 7 obtenemos $2222=7\times 317+3$, luego $2222=3+\dot{7}$ (3 más un múltiplo de 7). Por tanto

$$2222^{5555}=(3+\dot{7})^{5555}=3^{5555}+\dot{7}.$$

Análogamente, $5555=7\times 794-3=-3+\dot{7}$, luego

$$5555^{2222}=3^{2222}+\dot{7}.$$

Ahora, $3^1=3$, $3^2=9=2+\dot{7}$, $3^3=3\times(2+\dot{7})=6+\dot{7}$, $3^4=4+\dot{7}$, $3^5=5+\dot{7}$, $3^6=1+\dot{7}$. Así:

$$\begin{aligned}3^{5555}&=3^{6\times 925+5}=\left(3^6\right)^{925}\times 3^5=(1+\dot{7})\times(5+\dot{7})=5+\dot{7},\\ 3^{2222}&=3^{6\times 370+2}=\left(3^6\right)^{370}\times 3^2=(1+\dot{7})\times(2+\dot{7})=2+\dot{7}.\end{aligned}$$

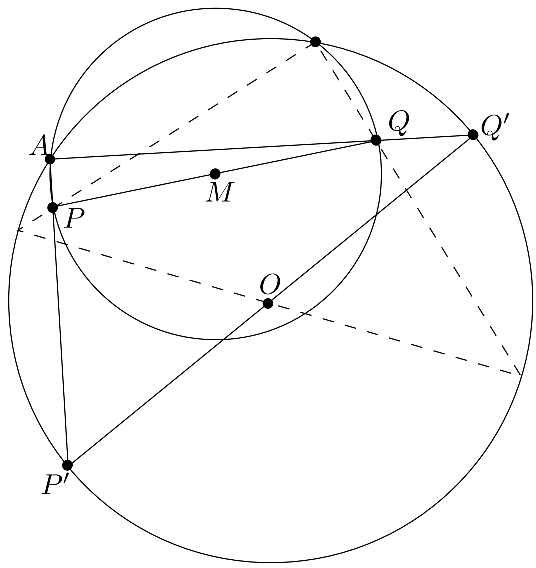
Por tanto,

$$2222^{5555}+5555^{2222}=3^{5555}+3^{2222}+\dot{7}=(5+\dot{7})+(2+\dot{7})+\dot{7}=\dot{7}.$$

Problema 5

Dada una circunferencia y dos puntos P y Q en su interior, inscribir un triángulo rectángulo cuyos catetos pasen por P y Q. ¿Para qué posiciones de P y Q el problema no tiene solución?

Solución: Sea O el centro de la circunferencia dada $\mathcal{C}$ y sea M el punto medio de P y Q. Tracemos la circunferencia $\mathcal{D}$ de centro M pasando por P y Q.



Los puntos R para los que el ángulo $\widehat{PRQ}$ es recto son los puntos de esta circunferencia $\mathcal{D}$, por tanto si A es un punto de intersección de $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$, prolongando los segmentos AP y AQ hasta cortar con $\mathcal{C}$ en P' y Q' se obtiene el triángulo rectángulo $AP'Q'$.

No existe solución si ambas circunferencias no se cortan, esto es si $OM + \frac{1}{2}PQ$ es menor que el radio de $\mathcal{C}$.

Problema 6

Sean a, b, c tres números positivos de suma uno. Demuestra que

$$a^{a^2+2ca}b^{b^2+2ab}c^{c^2+2bc} \geq \frac{1}{3}.$$

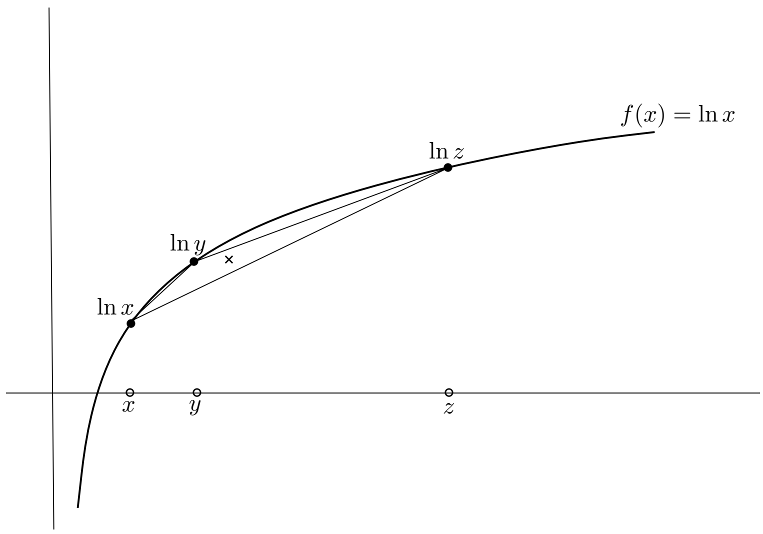
Solución: La desigualdad que debemos probar equivale a:

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{a^2+2ca}\left(\frac{1}{b}\right)^{b^2+2ab}\left(\frac{1}{c}\right)^{c^2+2bc} \leq 3,$$

o bien, tomando logaritmos neperianos, a:

$$(a^2+2ca)\ln\left(\frac{1}{a}\right) + (b^2+2ab)\ln\left(\frac{1}{b}\right) + (c^2+2bc)\ln\left(\frac{1}{c}\right) \leq \ln(3).$$

Ahora bien, como la función logaritmo neperiano es cóncava, si x, y, z, α, β, γ son números positivos con $\alpha+\beta+\gamma = 1$, el punto del plano de coordenadas $\alpha(x, \ln(x)) + \beta(y, \ln(y)) + \gamma(z, \ln(z))$ está en el interior del triángulo de vértices $(x, \ln(x)), (y, \ln(y)), (z, \ln(z))$, y este triángulo está por debajo de la gráfica de la función.



Por tanto $\alpha\ln(x) + \beta\ln(y) + \gamma\ln(z) \leq \ln(\alpha x + \beta y + \gamma z)$.
Como $(a^2+2ca) + (b^2+2ab) + (c^2+2bc) = (a+b+c)^2 = 1$, se tiene:

$$\begin{aligned}
(a^2+2ca)\ln\left(\frac{1}{a}\right) &+ (b^2+2ab)\ln\left(\frac{1}{b}\right) + (c^2+2bc)\ln\left(\frac{1}{c}\right) \\
&\leq \ln\Big((a^2+2ca)\frac{1}{a} + (b^2+2ab)\frac{1}{b} + (c^2+2bc)\frac{1}{c}\Big) \\
&= \ln\big((a+2c) + (b+2a) + (c+2b)\big) \\
&= \ln\big(3(a+b+c)\big) = \ln(3),
\end{aligned}$$

como deseábamos.

XLV Olimpiada Matemática Española

Fase aragonesa

23 de enero de 2009

Problema 1

Calcular la suma

$$2\left[h\left(\frac{1}{2009}\right)+h\left(\frac{2}{2009}\right)+\cdots+h\left(\frac{2008}{2009}\right)\right],$$

siendo $h(t)=\dfrac{5}{5+25^t}$, $t\in\mathbb{R}$.

Solución: Notemos en primer lugar que

$$h(1-t)=\frac{5}{5+25^{1-t}}=\frac{5\cdot 25^t}{5\cdot 25^t+25}=\frac{25^t}{25^t+5},$$

de donde se obtiene $h(t)+h(1-t)=1$. Así,

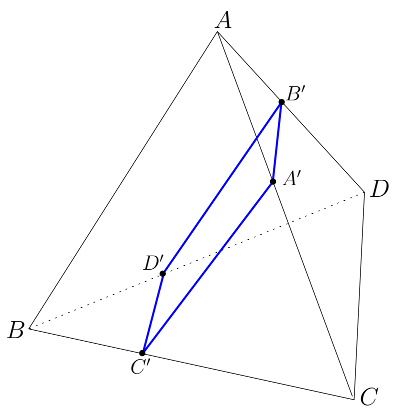
$$\begin{aligned} h\left(\frac{1}{2009}\right)+h\left(\frac{2008}{2009}\right)&=h\left(\frac{2}{2009}\right)+h\left(\frac{2007}{2009}\right)\\ &=\cdots\cdots=h\left(\frac{1004}{2009}\right)+h\left(\frac{1005}{2009}\right)=1.\end{aligned}$$

Por tanto, la suma indicada vale $2\cdot 1004=2008$.

Problema 2

Si la sección producida por un plano al cortar un tetraedro (regular) es un rombo, probar que necesariamente el rombo es un cuadrado.

Solución: Dados tres planos en el espacio, dos a dos no paralelos, o bien se cortan los tres en un único punto, o bien se cortan dos a dos en rectas paralelas.

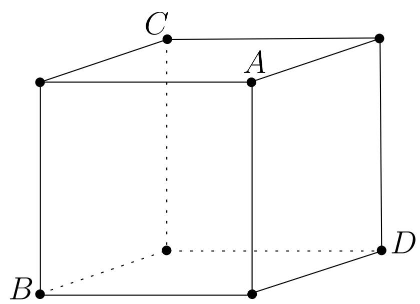


Los lados opuestos de un rombo son paralelos. Las caras del tetraedro que contienen a dos de estos lados ($A'B'$ y $C'D'$ en la figura) se cortan en una arista (CD) que, por el párrafo anterior, es paralela a los lados del rombo. Análogamente, los otros dos lados opuestos del rombo ($A'C'$ y $B'D'$ en la figura) son paralelos a la arista AB. Como las aristas AB y CD son perpendiculares, estamos ante un rombo con lados perpendiculares: un cuadrado.

Problema 3

Se consideran un cubo de 1 cm de arista y dos vértices A y B diagonalmente opuestos de una cara del cubo. Se denomina camino de longitud n a una sucesión de $n+1$ vértices de forma que dos consecutivos están a 1 cm de distancia. Entonces, ¿cuál de los siguientes números es mayor: el número de caminos de longitud 1000 cm que empiezan y acaban en A, o el número de caminos de longitud 1000 cm que empiezan en A y acaban en B? Justifica la respuesta.

Solución: Todo camino de longitud $n+2$ cm que empieza y acaba en A se compone de un camino de longitud n que empieza en A y acaba en uno de los vértices A, B, C o D de la figura, más un camino de longitud 2 que empieza en uno de estos vértices y acaba en A.



Notemos que hay dos caminos de longitud 2 que empiezan en B, C o D y acaban en A, pero hay tres caminos de longitud 2 que empiezan y acaban en A. Denotemos pues por a_n el número de caminos de longitud n que empiezan y acaban en A, y por b_n, c_n, d_n el número de caminos de longitud n que empiezan en A y acaban, respectivamente, en B, C o D. El razonamiento anterior prueba la siguiente igualdad:

$$a_{n+2} = 3a_n + 2b_n + 2c_n + 2d_n.$$

Con el mismo razonamiento se obtiene:

$$b_{n+2} = 2a_n + 3b_n + 2c_n + 2d_n.$$

Restando ambas igualdades se tiene $a_{n+2} - b_{n+2} = a_n - b_n$. Así pues,

$$a_{1000} - b_{1000} = a_{998} - b_{998} = \cdots\cdots = a_2 - b_2 = 3 - 2 = 1.$$

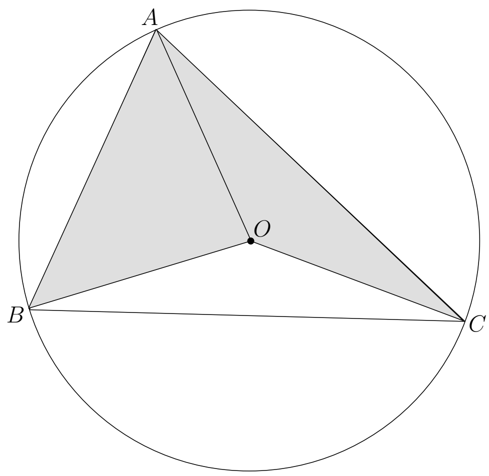
Por tanto, el número de caminos de longitud 1000 cm que empiezan y acaban en A es mayor en una unidad que el número de caminos de longitud 1000 cm que empiezan en A y acaban en B.

Problema 4

Dado un triángulo acutángulo ABC, determinar para qué puntos P de su interior se verifican las siguientes desigualdades:

$$1 \le \frac{\angle APB}{\angle ACB} \le 2, \qquad 1 \le \frac{\angle BPC}{\angle BAC} \le 2, \qquad 1 \le \frac{\angle CPA}{\angle CBA} \le 2.$$

Solución: Sea O el circuncentro del triángulo ABC. El valor del ángulo $\angle BAC$, por estar inscrito en la circunferencia, es la mitad del ángulo $\angle BOC$, y cualquier punto P interior al triángulo BOC verifica que $\angle BPC \ge \angle BOC = 2\angle BAC$. Por tanto, los puntos solicitados están contenido en el cuadrilátero $ABOC$ (región sombreada en el dibujo).



Análogamente, estos puntos están contenidos en los cuadriláteros $BCOA$ y $CAOB$. Pero la intersección de estos tres cuadriláteros contiene solamente al punto O, luego O es el único punto interior al triángulo ABC que verifica las desigualdades.

Problema 5

La igualdad $2008 = 1111 + 444 + 222 + 99 + 77 + 55$ es un ejemplo de descomposición del número 2008 como suma de números distintos de más de una cifra, cuya representación (en el sistema decimal) utiliza un solo dígito.

i) Encontrar una descomposición de este tipo para el número 2009.

ii) Determinar para el número 2009 todas las posibles descomposiciones de este tipo que utilizan el menor número posible de sumandos (el orden de los sumandos no se tiene en cuenta).

Solución: Si agrupamos los números con igual cantidad de cifras en la descomposición $2008 = 1111 + 444 + 222 + 99 + 77 + 55$, obtenemos $2008 = 1111 \cdot 1 + 111 \cdot (4 + 2) + 11 \cdot (9 + 7 + 5)$. Dada una descomposición del tipo indicado de 2009, agrupando del mismo modo obtendremos

$$2009 = 1111 \cdot a + 111 \cdot b + 11 \cdot c,$$

donde a, b y c son números enteros menores o iguales que $9+8+\cdots+2+1 = 45$, puesto que los sumandos de la descomposición han de ser diferentes.

Pero $1111 = 11 \cdot 101$ y $111 = 11 \cdot 10 + 1$, luego $2009 = 11 \cdot (101 \cdot a + 10 \cdot b + c) + b$. Pero dividiendo 2009 por 11 obtenemos $2009 = 11 \cdot 182 + 7$. Por tanto

$$182 = 101 \cdot a + 10 \cdot b + c + \frac{b-7}{11}.$$

Deducimos de aquí que $b - 7$ es un múltiplo de 11; esto es, $b = 11 \cdot k + 7$ para algún $k \geq 0$. La ecuación anterior nos queda entonces

$$182 = 101 \cdot a + 110 \cdot k + 70 + c + k,$$

es decir,

$$112 = 101 \cdot a + 111 \cdot k + c.$$

Las posibles soluciones son:

(i) $a = 1$, $k = 0$ y $c = 11$, es decir $a = 1$, $b = 7$ y $c = 11$;

(ii) $a = 0$, $k = 1$ y $c = 1$, es decir $a = 0$, $b = 18$ y $c = 1$.

Ahora se trata de estudiar las posibles maneras de descomponer 7 y 11 en el primer caso, y 18 en el segundo caso, como suma de números distintos de una cifra. Vemos pues que no es posible obtener una descomposición para 2009 con menos de 4 sumandos, y las posibles descomposiciones con 4 sumandos son las siguientes:

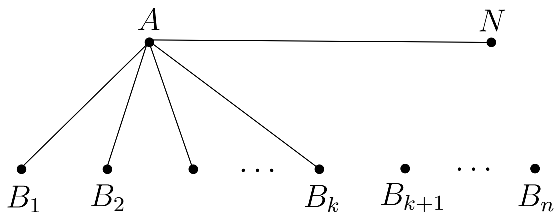
$$\begin{array}{ll}
2009 = 1111 + 777 + 99 + 22 & (a = 1,\ b = 7,\ c = 11 = 9 + 2), \\
2009 = 1111 + 777 + 88 + 33 & (a = 1,\ b = 7,\ c = 11 = 8 + 3), \\
2009 = 1111 + 777 + 77 + 44 & (a = 1,\ b = 7,\ c = 11 = 7 + 4), \\
2009 = 1111 + 777 + 66 + 55 & (a = 1,\ b = 7,\ c = 11 = 6 + 5), \\
 & \\
2009 = 999 + 888 + 111 + 11 & (a = 0,\ b = 18 = 9 + 8 + 1,\ c = 1), \\
2009 = 999 + 777 + 222 + 11 & (a = 0,\ b = 18 = 9 + 7 + 2,\ c = 1), \\
2009 = 999 + 666 + 333 + 11 & (a = 0,\ b = 18 = 9 + 6 + 3,\ c = 1), \\
2009 = 999 + 555 + 444 + 11 & (a = 0,\ b = 18 = 9 + 5 + 4,\ c = 1), \\
2009 = 888 + 777 + 333 + 11 & (a = 0,\ b = 18 = 8 + 7 + 3,\ c = 1), \\
2009 = 888 + 666 + 444 + 11 & (a = 0,\ b = 18 = 8 + 6 + 4,\ c = 1), \\
2009 = 777 + 666 + 555 + 11 & (a = 0,\ b = 18 = 7 + 6 + 5,\ c = 1).
\end{array}$$

En total, 11 posibles soluciones.

Problema 6

Se tienen en el plano $3n$ puntos: n de color blanco, n de color azul y n de color negro. Cada uno de los puntos está unido con puntos de color distinto al suyo mediante $n + 1$ segmentos exactamente. Probar que hay, al menos, un triángulo formado por vértices de distinto color.

Solución: Sea k ($k \leq n$) el mayor número de puntos de un mismo color que están conectados a un mismo punto. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que hay un punto azul A conectado a k puntos blancos $B_1, B_2, \ldots, B_k$. Además, como A está conectado a $n+1$ puntos, y $n+1 > k$, A está conectado a algún punto negro N.



Si N no estuviera conectado a ninguno de los puntos $B_1, \ldots, B_k$, entonces N sólo estaría conectado a un número de vértices blancos $\leq n-k$, luego estaría conectado a un número de vértices azules $\geq (n+1)-(n-k) = k+1$, lo que es imposible por la maximalidad de k. Por tanto, N está conectado a alguno de los puntos B_i $(1 \leq i \leq k)$, y ANB_i es un triángulo formado por vértices de distinto color.

XLVI Olimpiada Matemática Española

Fase aragonesa

15 de enero de 2010

Problema 1

Sea I_n el conjunto de los n primeros números naturales impares. Por ejemplo: $I_3 = \{1, 3, 5\}$, $I_6 = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$, etc.

¿Para qué números n el conjunto I_n se puede descomponer en dos partes (disjuntas) de forma que coincidan las sumas de los números en cada una de ellas?

Solución: Denotemos por ΣI_n la suma de los números en I_n. Puesto que los elementos de $I_n = \{1, 3, \dots, 2n-1\}$ forman una progresión aritmética se tiene

$$\Sigma I_n = \frac{1 + (2n-1)}{2} n = n^2,$$

que es par o impar según n sea par o impar. Por tanto para que I_n se pueda descomponer en dos partes con la misma suma, *n tiene que ser par.*

Obviamente $I_2 = \{1, 3\}$ no puede descomponerse en la manera requerida. Ahora bien, $I_4 = \{1, 3, 5, 7\} = \{1, 7\} \cup \{3, 5\}$ e $I_6 = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\} = \{1, 3, 5, 9\} \cup \{7, 11\}$ sí pueden hacerlo.

Por último, notemos que si I_n se puede descomponer del modo requerido: $I_n = A \cup B$, entonces

$$\begin{aligned} I_{n+4} &= I_n \cup \{2n+1, 2n+3, 2n+5, 2n+7\} \\ &= \Big(A \cup \{2n+1, 2n+7\}\Big) \bigcup \Big(\{B \cup \{2n+3, 2n+5\}\Big) \end{aligned}$$

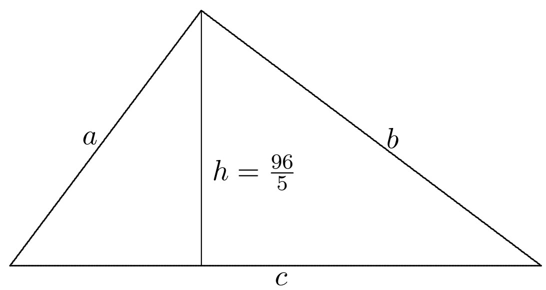
también puede hacerlo.

Por tanto, la solución consiste en *los números pares a partir de* 4.

Problema 2

Determina los lados del triángulo rectángulo del que se conocen el perímetro, $p = 96$, y la altura sobre la hipotenusa, $h = \frac{96}{5}$.

Solución: Dado el triángulo rectángulo de la figura:



tenemos las siguientes relaciones:

$$\begin{cases} a + b + c = 96 & \text{(perímetro)} \\ ab = \frac{96}{5} c & \text{(pues el área es } \frac{1}{2}ab \text{ y también } \frac{1}{2}ch\text{)} \\ a^2 + b^2 = c^2 & \text{(Teorema de Pitágoras)} \end{cases}$$

Así pues

$$(96-c)^2 = (a+b)^2 = a^2+b^2+2ab = c^2 + \frac{192}{5}c,$$

luego $96^2 - 192c = \frac{192}{5}c$, y obtenemos $c = 40$.

Ahora $a+b=56$ y $ab=768$, luego a y b son las raíces de la ecuación $x^2-768x+768=0$, que son 24 y 32. (Un modo sencillo consiste en considerar $t=28-a$, luego $a=28-t$, $b=28+t$ y $768=(28-t)(28+t)=28^2-t^2$, de donde obtenemos $t^2=16$, $t=\pm 4$ y a y b toman los valores 24 y 32.)

Por tanto, *los lados del triángulo miden* 24*,* 32 *y* 40.

Problema 3

Halla todos los números naturales n que verifican la condición:

$$\left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{2n}{3}\right] = n + 335$$

donde $[x]$ es la parte entera de x. (Esto es, $[1{,}32]=1$, $[2]=2$, $\left[\frac{1}{2}\right]=0$, $[\pi]=3$, etc.)

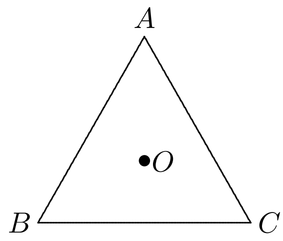
Solución: Distinguimos casos según n sea un número natural de la forma $6k$, $6k+1$, $6k+2$, $6k+3$, $6k+4$ o $6k+5$, con $k \geq 0$. (Todo número natural es de esta forma, basta dividirlo para 6 y considerar el resto.)

n	$\left[\frac{n}{2}\right]$	$\left[\frac{2n}{3}\right]$	ecuación	solución
$6k$	$3k$	$4k$	$7k=6k+335$	$k=335$, $n=2010$
$6k+1$	$3k$	$4k$	$7k=6k+336$	$k=336$, $n=2017$
$6k+2$	$3k+1$	$4k+1$	$7k+2=6k+337$	$k=335$, $n=2012$
$6k+3$	$3k+1$	$4k+2$	$7k+3=6k+338$	$k=335$, $n=2013$
$6k+4$	$3k+2$	$4k+2$	$7k+4=6k+339$	$k=335$, $n=2014$
$6k+5$	$3k+2$	$4k+3$	$7k+5=6k+340$	$k=335$, $n=2015$

Así pues, *las soluciones son* 2010*,* 2012*,* 2013*,* 2014*,* 2015 *y* 2017.

Problema 4

Se considera un triángulo equilátero de lado 1 y centro O, como el de la figura:

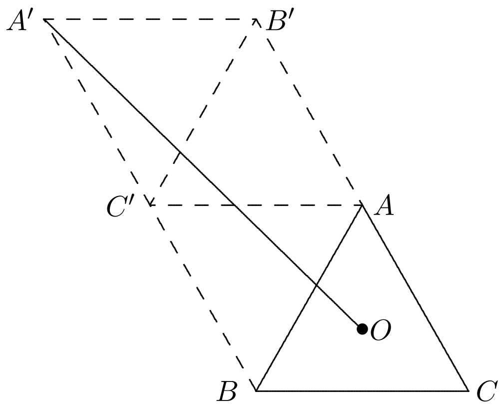


Un rayo parte de O y se refleja en los tres lados, $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$, (en el orden dado), hasta alcanzar el vértice A.

Determina la longitud mínima del recorrido del rayo.

Nota: Cuando el rayo se refleja en un lado, los ángulos de entrada (incidencia) y salida (reflexión) coinciden.

Solución: Cada vez que el rayo se refleja en un lado, podemos seguir su camino en el triángulo reflejado en el mismo lado. Así podemos desdoblar el camino seguido por el rayo como en la figura:



La figura nos indica que existe un único camino para ir del punto O al punto A siguiendo las instrucciones, y este único camino corresponde al segmento que une los puntos O y A' en la figura.

Como el triángulo $OA'B$ es rectángulo y el segmento OB mide $\frac{1}{\sqrt{3}}$, la longitud del segmento OA' es

$$\sqrt{2^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{\frac{13}{3}} = \frac{\sqrt{39}}{3}.$$

Problema 5

Calcula las soluciones reales de la ecuación:

$$\sqrt[4]{97-X}+\sqrt[4]{X}=5.$$

Solución: Hacemos $u=\sqrt[4]{97-X}$ y $v=\sqrt[4]{X}$, que verifican:

$$\begin{gathered} u+v=5 \\ u^4+v^4=97. \end{gathered}$$

Para aprovechar la simetría de u y v, hacemos $t=u-\frac{5}{2}$, luego $u=\frac{5}{2}+t$, $v=\frac{5}{2}-t$, y se tiene

$$\left(\frac{5}{2}+t\right)^4+\left(\frac{5}{2}-t\right)^4=97.$$

Desarrollando esta expresión nos queda

$$2\left(\left(\frac{5}{2}\right)^4+6\times\left(\frac{5}{2}\right)^2 t^2+t^4\right)=97,$$

que simplificando nos queda $16t^4+600t^2-151=0$, o

$$(2t)^4+150(2t)^2-151=0.$$

Como las soluciones de la ecuación $x^2+150x-151=0$ son 1 y -151, se tiene que $(2t)^2=1$, luego $t=\pm\frac{1}{2}$, así pues $v=2$ o 3, y las soluciones que nos piden son $x=2^4=16$ y $x=3^4=81$.

Problema 6

Dado el polinomio $P(X)=X^4+\square\,X^3+\square\,X^2+\square\,X+\square$, en el que cada cuadrado representa un hueco donde se colocará un coeficiente, se plantea el siguiente juego entre dos jugadores: Alternativamente, el primer y el segundo jugador eligen un hueco vacío y colocan en él un entero no nulo hasta rellenar todos los cuatro huecos. Si el polinomio resultante tiene al menos dos raíces enteras gana el segundo jugador, en otro caso el ganador es el primero.

Prueba que, eligiendo la estrategia adecuada, el primer jugador siempre puede ganar.

Solución: Los *polinomios ganadores* para el segundo jugador son los que tienen al menos dos raíces enteras, esto es, los polinomios de la forma

$$\begin{aligned} &P(X)=(X+a)(X+b)(X^2+cX+d) \\ &\ =X^4+\big(a+b+c\big)X^3+\big(ab+(a+b)c+d\big)X^2+\big(abc+(a+b)d\big)X+abd, \end{aligned}$$

con a,b,c,d enteros de modo que ningún coeficiente sea nulo.

Escribamos nuestros polinomios en la forma $P(X)=X^4+\alpha_3X^3+\alpha_2X^2+\alpha_1X+\alpha_0$. El juego consiste en ir eligiendo los valores de los coeficientes α_i. Una estrategia ganadora para el primer jugador es la siguiente:

- El primer jugador elige $\alpha_0=-1$.

Esto fuerza $abd=-1$ para obtener un polinomio ganador para el segundo jugador, luego a, b y d deben de valer 1 o -1. Pero si $d=1$, entonces $ab=-1$,

$a+b=0$ y se obtiene $\alpha_2 = 0$, que no está permitido. Por tanto, esta primera jugada fuerza $d=-1$, $ab=1$ y, por tanto, $a=b=\pm 1$ y $a+b=\pm 2$. Así pues, $\alpha_3 = c\pm 2$, $\alpha_1 = c\mp 2$ y $\alpha_2 = \pm 2c$. En consecuencia, los posibles polinomios ganadores para el segundo jugador verifican que su coeficiente α_2 es par, y que α_1, α_3 y $\frac{\alpha_2}{2}$ tienen la misma paridad.

- Si el segundo jugador elige ahora un valor para α_1 o para α_3, entonces el primer jugador elige $\alpha_2 = 1$ (impar) y gana el juego. Si el segundo jugador elige un valor impar para α_2, el primer jugador puede elegir cualquier valor para α_1 para ganar el juego. Por último, si el segundo jugador elige un valor par para α_2, entonces el primer jugador puede elegir un valor de α_1 de distinta paridad que $\frac{\alpha_2}{2}$.

XLVII Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Soluciones a los problemas propuestos

Problema 1.1. Los años recientes se han podido expresar como sumas, restas y multiplicaciones de números con un mismo y único dígito; por ejemplo:

$$2009 = 7\times7\times7\times7 - 7\times7\times7 - 7\times7, \qquad 2010 = 66\times6\times6 - 66\times6 + 6\times6 - 6$$

¿Se puede hacer lo mismo con el 2011, sin repetir jamás sumandos iguales? Por ejemplo, no es admisible $2011 = 1+1+1+....$

Solución Problema 1.1 Si 2011 fuera expresable como sumas, restas y multiplicaciones de números con el mismo dígito a, como cada uno de estos números es divisible por a, se tiene que a es divisor de 2011. Ahora bien, 2011 es un número primo, por tanto $a = 1$.

Es sencillo observar que

$$\begin{aligned} 1000 &= \quad 1111 - 111 \\ 2 &= \quad 111 - 11\times11 + 11 + 1 \end{aligned}$$

Multiplicando estas dos igualdades se tiene:

$$\begin{aligned} &2000 = \\ &1111\times111 - 1111\times11\times11 + 1111\times11 + 1111 - 111\times111 + \\ &+111\times11\times11 - 111\times11 - 111 \end{aligned}$$

Compruébese que todos los sumandos son distintos entre sí y distintos a 11. Por tanto, sumando 11 al número anterior se tiene una solución.

Existen infinidad de maneras distintas:

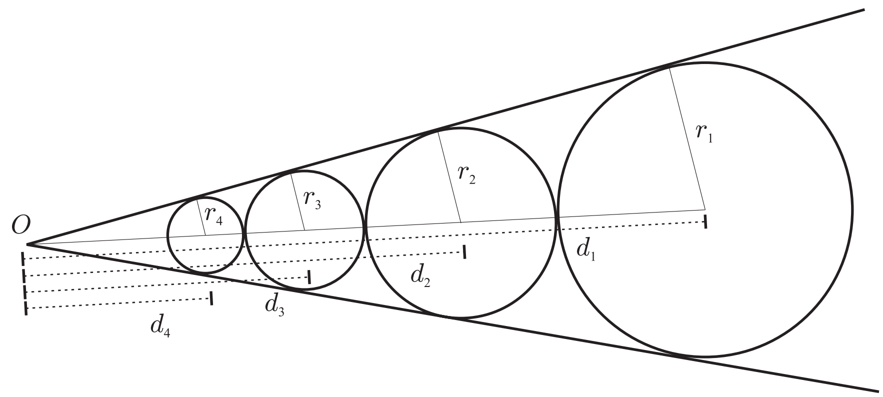
$$2011 = 1111\times1111 - 111\times11111 - 111\times111 + 111\times11\times11 - 111 + 11 + 1$$

o bien

$$2011 = 1111\times1111 - 111\times11111 + 1111 - 111 + 11$$

Problema 1.2. Dos semirrectas tienen su común origen en el punto O. Se considera una circunferencia C_1 tangente a ambas semirrectas, cuyo centro está situado a distancia d_1 de O, y cuyo radio es r_1. Se construyen sucesivamente las circunferencias C_n, de modo que C_n es tangente a las semirrectas, tangente exterior a C_{n-1} y tal que la distancia de su centro a O, d_n, es menor que d_{n-1}, para $n > 1$. Halla la suma de las áreas de los círculos limitados por las circunferencias C_n, para todo n, en función de r_1 y d_1.

Solución Problema 1.2 Es claro de la figura que, por el Teorema de Thales, $\dfrac{r_n}{d_n} = \dfrac{r_1}{d_1}$ para todo n. Llamaremos



a este valor α. Además, se tiene que:

$$\frac{r_n}{r_{n+1}} = \frac{d_n}{d_{n+1}} = \frac{d_{n+1} + r_{n+1} + r_n}{d_{n+1}} = 1 + \alpha + \frac{r_n}{d_{n+1}} =$$

$$1 + \alpha + \frac{r_n}{r_{n+1}}\,\frac{r_{n+1}}{d_{n+1}} = 1 + \alpha + \frac{r_n}{r_{n+1}}\,\alpha.$$

Despejando se tiene $\dfrac{r_n}{r_{n+1}} = \dfrac{1+\alpha}{1-\alpha}$, que es constante, luego los radios de las circunferencias forman una progresión geométrica de razón

$$r = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} = \frac{1 - r_1/d_1}{1 + r_1/d_1} = \frac{d_1 - r_1}{d_1 + r_1}.$$

La suma de áreas buscada es

$$S = \pi \sum_{n=1}^{\infty} r_n^2 = \pi\,\frac{r_1^2}{1 - (\frac{d_1 - r_1}{d_1 + r_1})^2} = \frac{\pi}{4}\,\frac{r_1\,(d_1 + r_1)^2}{d_1}.$$

Problema 1.3. Saber cuál es la última cifra de 2009^{2011} es muy fácil, pero ¿cuántos ceros preceden a esa última cifra?

Solución Problema 1.3 Si $n \geq 1$,

$$2009^n = (2000 + 9)^n = 9^n + 2000k$$

Por tanto las 3 últimas cifras de 2009^n coinciden con las de 9^n. Por el desarrollo del binomio de Newton:

$$\begin{aligned}
&9^{2011} = (10-1)^{2011} = (-1)^{2011} + \begin{pmatrix} 2011 \\ 1 \end{pmatrix} (-1)^{2010} \cdot 10 + \\
&+ \begin{pmatrix} 2011 \\ 2 \end{pmatrix} (-1)^{2009} \cdot 10^2 + K \cdot 10^3 = -1 + 20110 - 2011 \cdot 1005 \cdot 100 + K \cdot 10^3 \\
&= -202085391 + K \cdot 10^3 = 609 + K' \cdot 10^3
\end{aligned}$$

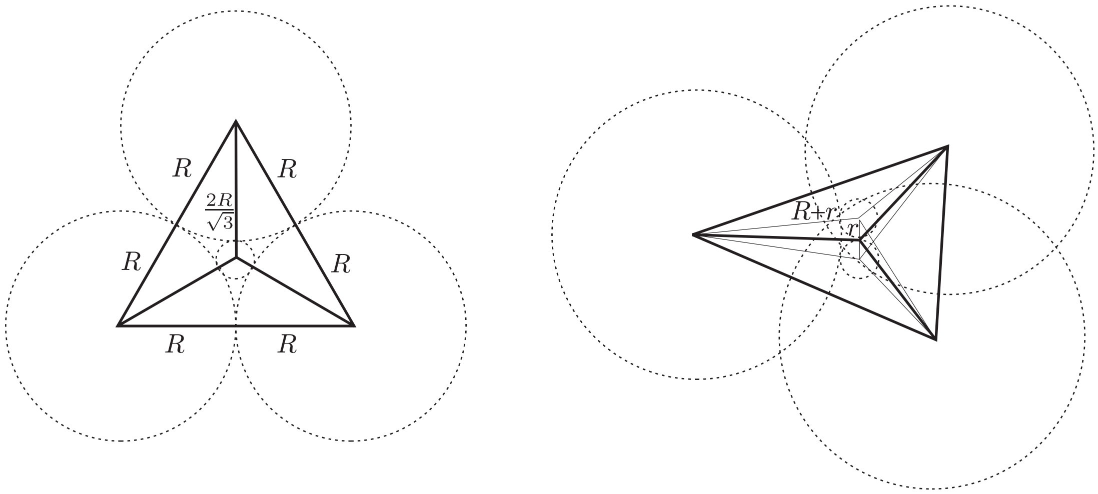
Luego la respuesta es que 9 es la última cifra y le precede un único cero.

Problema 1.4. Calcula todos los números enteros a, b y c tales que $a^2 = 2\,b^2 + 3\,c^2$.

Solución Problema 1.4 Sea (a, b, c) una solución distinta de $(0, 0, 0)$, con $|a| + |b| + |c|$ mínimo. Tomando la igualdad módulo 3, tenemos $a^2 = 2b^2$ módulo 3. Como a^2 y b^2 sólo pueden ser congruentes con 1 o 0, se deduce que a y b son múltiplos de 3. Por tanto, $3c^2$ es múltiplo de 9, así que c también es múltiplo de 3. Pero entonces, $(a/3, b/3, c/3)$ sería otra solución con $|a/3|+|b/3|+|c/3| < |a|+|b|+|c|$, lo que contradice la hipótesis supuesta.

Problema 1.5. Dos esferas de radio r son tangentes exteriores. Otras tres esferas de radio R son tangentes exteriores entre sí, dos a dos. Cada una de estas tres esferas es, además, tangente exterior a las dos primeras. Encuentra la relación entre R y r.

Solución Problema 1.5 Los centros de las tres esferas de radio R, O_1, O_2 y O_3, son los vértices de un triángulo



equilátero de lado $2R$. El punto de tangencia, T, de las dos esferas de radio r es el centro de ese triángulo y, por tanto, dista de los vértices dos tercios de la altura. La altura del triángulo es $h = \frac{2R\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}$ y dos tercios de h es $\frac{2R}{\sqrt{3}}$.

Si llamamos Q_1, Q_2 a los centros de las circunferencias de radio r, el triángulo O_1TQ_1 es rectángulo en T y sus lados son: $\frac{2R}{\sqrt{3}}$, r y $R+r$. Aplicando el teorema de Pitágoras, se tiene:

$$\left(\frac{2R}{\sqrt{3}}\right)^2 + r^2 = (R+r)^2$$

y simplificando resulta: $R = 6r$.

Problema 1.6. Denotamos por $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ el conjunto de números naturales excluido el cero y por $\mathbb{N}^* = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ el conjunto de números naturales incluido el cero. Encontrar todas las funciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$ que sean crecientes, es decir $f(n) \geq f(m)$ si $n > m$, y tales que $f(nm) = f(n) + f(m)$, para todo $n, m \in \mathbb{N}$.

Solución Problema 1.6

- La función nula: $f(n) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$ verifica evidentemente lo anterior.
- Sea f una función no nula verificando las condiciones del enunciado. Entonces
  1. f no es constante, ni está acotada. En efecto, si $f(a) \neq 0$ entonces $f(a^n) = nf(a) > f(a)$ para cada n.
  2. f no es estrictamente creciente:
     - Si $f(2) = f(3)$ ya está.
     - Si $f(2) = a < b = f(3)$, entonces $2^b \neq 3^a$, pero $f(2^b) = ab = f(3^a)$.

De los dos puntos anteriores se deduce que es posible encontrar un número natural m tal que $k = f(m) = f(m+1) < f(m+2)$. Entonces

$$f[(m+1)^2] = 2k < f[m(m+2)]$$

Sin embargo $m(m+2) < (m+1)^2$, contradiciendo el carácter creciente de f.

En consecuencia la única función que verifica las condiciones del enunciado es la función nula.

A1.-
Dado un entero positivo n, hallar la suma de todos los enteros positivos inferiores a $10n$ que no son múltiplos de 2 ni de 5.

Solución.
Sean los conjuntos

$$\begin{aligned} A &= \{1, 2, \dots, 10n\}, \\ B &= \{2, 4, \dots, 2(5n)\}, \\ C &= \{5, 10, \dots, 5(2n)\}, \\ B \cap C &= \{10, 20, \dots, 10n\}. \end{aligned}$$

Nos piden la suma de los elementos de A que no son de B ni de C. Las sumas de los elementos de cada uno de los conjuntos es

$$\Sigma A = \frac{10n(10n+1)}{2}, \quad \Sigma B = 2\frac{5n(5n+1)}{2}, \quad \Sigma C = 5\frac{2n(2n+1)}{2}, \quad \text{y}$$

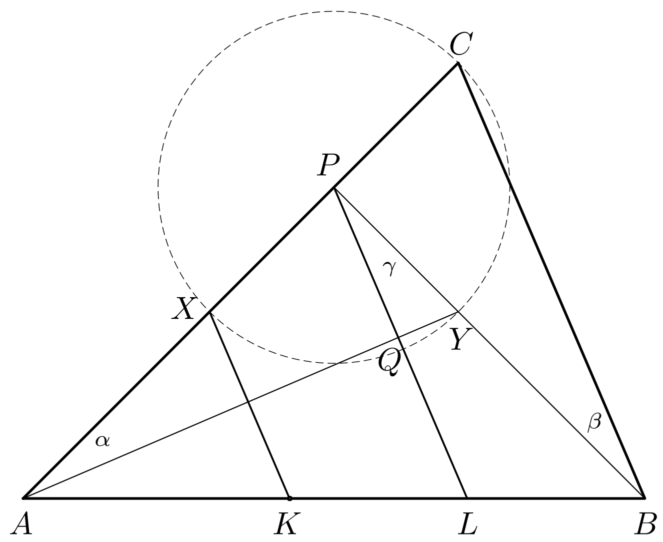
$$\Sigma(B \cap C) = \frac{10n(10n+1)}{2}.$$

La suma pedida es

$$\Sigma A - \Sigma B - \Sigma C + \Sigma(B \cap C) = 20n^2.$$

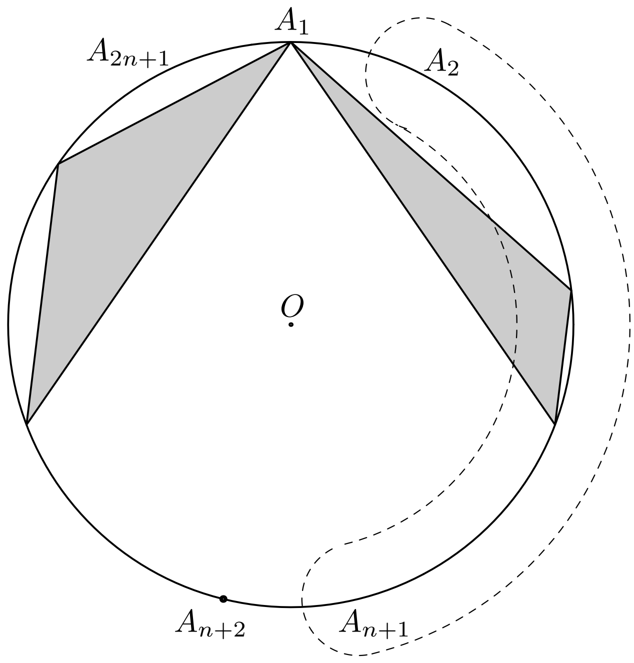
A2.-
Sea ABC un triángulo acutángulo con $\hat{A} = 45°$, y sea P el pie de la altura por B. Trazamos la circunferencia de centro P que pasa por C y que vuelve a cortar a AC en el punto X y a la altura PB en el punto Y. Sean r y s las rectas perpendiculares a la recta AY por P y X, respectivamente, y L, K las intersecciones de r, s con AB. Demostrar que L es el punto medio de KB.

Solución.
Por construcción es $PX = PY = PC$. Los triángulos PAY y PCB, rectángulos en P, son iguales ya que $AP = PB$ (el triángulo rectángulo APB es isósceles) y $PY = PC$. Por tanto los ángulos α y β son iguales.
El triángulo rectángulo PYQ es semejante a los anteriores, de manera que el ángulo $\gamma = \widehat{LPB}$ es igual a α. Resulta que los segmentos PL y CB son paralelos, y por el teorema de Thales queda KL=LB ya que PX=PC.



A3.-
Los puntos A_1, A_2, ... , A_{2n+1} son los vértices de un polígono regular de $2n+1$ lados. Hallar el número de ternas A_i, A_j, A_k tales que el triángulo $A_iA_jA_k$ es obtusángulo.

Solución.



Al ser $2n+1$ impar, no es posible construir triángulos rectángulos. Observemos que cualquier triángulo obtusángulo dejará el centro O (su circuncentro) fuera de él. Si lo giramos en sentido directo o inverso alrededor de O podemos conseguir que uno de sus vértices agudos esté en A_1. Los otros dos están, bien en el conjunto $\{A_2, \ldots, A_{n+1}\}$, bien en $\{A_{n+2}, \ldots, A_{2n+1}\}$. El número buscado será $2\binom{n}{2}$. Como esto lo podemos hacer con cada uno de los $2n+1$ vértices, quedarán $2(2n+1)\binom{n}{2}$ triángulos. Pero cada triángulo lo hemos contado dos veces, una para cada vértice agudo. Luego la solución buscada es $(2n+1)\binom{n}{2}$.

Solución alternativa.
Fijemos el vértice obtuso en un vértice, por ejemplo, el A_1. Los tres lados del triángulo abarcarán respectivamente x, y y z lados del polígono de $2n+1$ lados. Será $x+y+z = 2n+1$. El lado opuesto al ángulo obtuso, digamos z, deberá cumplir $z \geq n+1$. Calculemos el número de soluciones enteras positivas de la ecuación $x+y+z = 2n+1$ con la condición fijada para la z.
Si $z = n+1$, queda $x+y = n$ que tiene $n-1$ soluciones. Si $z = n+2$, queda $x+y = n-1$ que tiene $n-2$ soluciones. ... Si $z = 2n-1$, queda $x+y = 1$ que tiene 1 solución.
En total hay

$$(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1 = \frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$$

soluciones con el ángulo obtuso en A_1. Si consideramos las otras posibles posiciones para dicho ángulo queda en total

$$(2n+1)\binom{n}{2}.$$

B1.-
Sean a, b, c tres números reales positivos cuyo producto es 1. Demostrar que si la suma de estos números es mayor que la suma de sus recíprocos, entonces exactamente uno de ellos es mayor que 1.

Solución.
Dado que $abc = 1$ y $a + b + c > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$, debe ser

$$\begin{aligned}(a-1)(b-1)(c-1) &= abc - ab - bc - ca + a + b + c - 1 \\ &= a + b + c - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) > 0\end{aligned}$$

La desigualdad anterior se cumple cuando uno de los factores del número

$$(a-1)(b-1)(c-1)$$

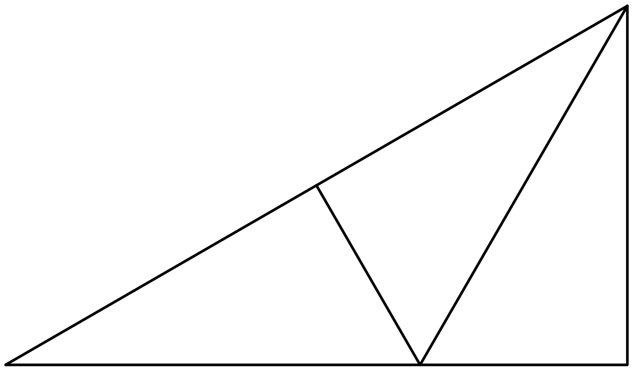
es positivo o los tres factores son positivos. Si fuesen los tres positivos, entonces tendríamos $a > 1, b > 1$ y $c > 1$ lo cual no es posible porque $abc = 1$. Por tanto, solo uno de ellos es positivo y esto completa la demostración.

B2.-

En un triángulo rectángulo de hipotenusa unidad y ángulos respectivos de 30°, 60° y 90°, se eligen 25 puntos cualesquiera. Demostrar que siempre habrá 9 entre ellos que podrán cubrirse con un semicírculo de radio $3/10$.

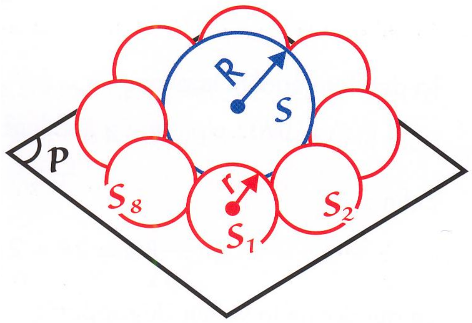
Solución.

Este triángulo tiene la propiedad que puede descomponerse en tres triángulos congruentes entre si y semejantes al triángulo inicial.



Como tenemos tres triágulos y 25 puntos, en alguno de ellos habrá al menos 9 puntos. La hipotenusa de cada uno de estos triángulos semejantes al inicial mide $\sqrt{3}/3$, y como son rectángulos, éstos están cubiertos por la mitad de su círculo circunscrito. Ahora el enunciado queda demostrado porque $r = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{3} < \frac{3}{10}$.

B3.- Sea $\mathcal{S}$ una esfera tangente a un plano $\mathcal{P}$. Alrededor de $\mathcal{S}$ colocamos ocho esferas iguales $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$, …, $\mathcal{S}_8$, tangentes entre sí, tangentes a $\mathcal{S}$ y tangentes a $\mathcal{P}$. Llamamos R al radio de $\mathcal{S}$ y r al radio común de las ocho esferas. Calcular el valor de la razón $\frac{r}{R}$.

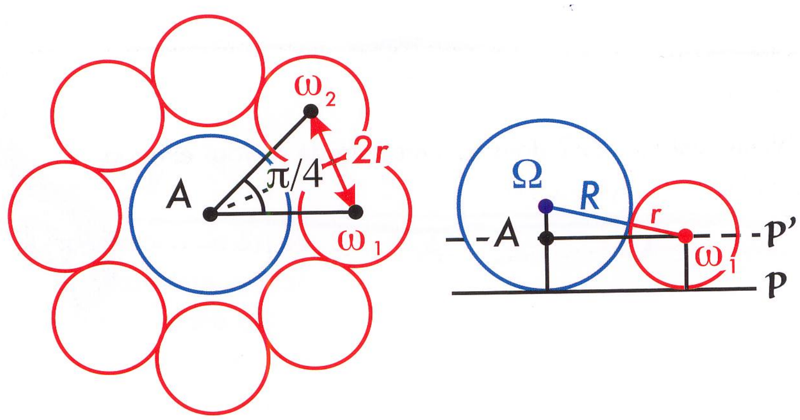


__Solución.-__

Llamemos $\mathcal{P}'$ al plano paralelo a $\mathcal{P}$ que pasa por el centro de las ocho esferas idénticas.

Llamemos Ω al centro de la esfera $\mathcal{S}$. Llamemos ω_1 al centro de la esfera $\mathcal{S}_1$, ω_2 al de $\mathcal{S}_2$, … y ω_8 al de $\mathcal{S}_8$.

Si nos fijamos en la traza (intersección) de las nueve esferas del enunciado, obtenemos un collar de ocho circunferencias iguales tangentes dos a dos entre sí, rodeando sin contacto a una circunferencia central. Si cortamos mediante un plano perpendicular a $\mathcal{P}$ que pase por Ω y ω_1, obtenemos dos circunferencias tangentes entre sí que son a su vez tangentes a una misma recta.



Como el triángulo de vértices Ω, A y ω_1 es rectángulo en A, es fácil ver que la distancia entre A y ω_1 es $2\sqrt{Rr}$.

En el triángulo isósceles de vértices A, ω_1 y ω_2, tenemos que $r = A\omega_1 sen\frac{\pi}{8} = 2\sqrt{Rr}sen\frac{\pi}{8}$ que elevando al cuadrado nos da $\frac{r}{R} = 4sen^2\frac{\pi}{8} = 2\left(1 - \cos\frac{\pi}{4}\right)$ Por lo tanto $\frac{r}{R} = 2 - \sqrt{2}$

OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Fase Local

Mañana del Viernes

1 *Hallar todas las soluciones enteras* (x, y) *de la ecuación*

$$y^k = x^2 + x$$

donde k *es un número entero dado mayor que 1.*

Solución. Puesto que $y^k = x^2 + x = x(x+1)$ y $mcd(x, x+1) = 1$ resulta que tanto $x + 1$ como x deben ser potencias k-ésimas de un entero. Pero los dos únicos números enteros consecutivos que son potencias k-ésimas, con $k > 1$ son 0 y 1 o bien -1 y 0 (*). Las dos únicas soluciones son, pues, $x = 0, y = 0$ y $x = -1, y = 0$.

(*) La justificación de esta afirmación sale de

$$|(x+1)^k - x^k| = |x|\,|x^{k-1} + \cdots| > 1 \text{ si } |x| > 1 \text{ y } k > 1.$$

2 *Busca un polinomio de grado tres cuyas raíces sean, precisamente, el cuadrado de las raíces del polinomio* $p(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$.

Solución. Sean r, s y t las raíces, reales o complejas, del polinomio $p(x)$. Por tanto, $p(x) = (x-r)(x-s)(x-t)$. El polinomio que buscamos, salvo que multipliquemos por una constante, será de la forma $q(x) = (x - r^2)(x - s^2)(x - t^2)$. De aquí resulta

$$q(x^2) = (x^2-r^2)(x^2-s^2)(x^2-t^2) = (x-r)(x+r)(x-s)(x+s)(x-t)(x+t)$$

Y notando que

$$p(-x) = (-x-r)(-x-s)(-x-t) = -(x+r)(x+s)(x+t),$$

entonces

$$\begin{aligned} q(x^2) &= (x-r)(x+r)(x-s)(x+s)(x-t)(x+t) = p(x)[-p(-x)] \\ &= (x^3+2x^2+3x+4)(x^3-2x^2+3x-4) = x^6+2x^4-7x^2-16 \end{aligned}$$

Luego, $q(x) = x^3 + 2x^2 - 7x - 16$ es solución (y, también, este mismo polinomio multiplicado por una constante cualquiera).

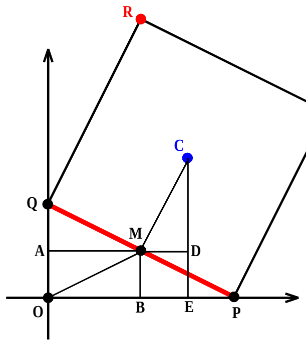
3 *Deslizamos un cuadrado de* 10 *cm de lado por el plano* OXY *de forma que los vértices de uno de sus lados estén siempre en contacto con los ejes de coordenadas, uno con el eje* OX *y otro con el eje* OY*. Determina el lugar geométrico que en ese movimiento describen:*

1. *El punto medio del lado de contacto con los ejes.*

2. *El centro del cuadrado.*

3. *Los vértices del lado de contacto y del opuesto en el primer cuadrante.*

Solución. Sean $PQRS$ el cuadrado de lado 10 cm, PQ el lado de apoyo, $M(m_1, m_2)$ el punto medio de dicho lado y $C(c_1, c_2)$ el centro del cuadrado tal y como muestra la figura donde, además, señalamos los puntos A, B, D y E.



a) *Caso del punto medio* M*.*

$$OM = PM = \frac{1}{2}PQ = 5,$$

luego $m_1^2 + m_2^2 = 25$.

b) *Caso del centro del cuadrado* C*.*

Los triángulos AQM, AOM, BMO y DMC son claramente congruentes

$$AM = OB = DC, AQ = OA = MD = BM, \text{ y } OM = MQ = MC = 5.$$

Así, resulta que las coordenadas del centro del cuadrado, en su deslizamiento, son iguales

$$c_1 = OE = OB + BE = m_1 + MD = m_1 + m_2,$$

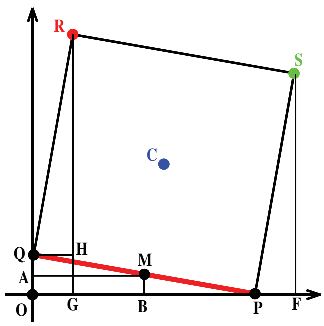
$$c_2 = EC = ED + DC = OA + AM = m_2 + m_1$$

Luego, el centro del cuadrado se mueve, en este primer cuadrante, sobre un segmento de la línea. Las posiciones extremas se dan cuando el lado PQ se apoya sobre alguno de los ejes, $C(5,5)$, y cuando forma una escuadra, esto es, un triángulo rectángulo isósceles, con ellos, $C(5\sqrt{2}, 5\sqrt{2})$. Trabajando análogamente en los demás cuadrantes podemos afirmar que el centro del cuadrado recorre el segmento de sus bisectrices que viene dado por la expresión

$$C(c_1, c_2) = (\pm 5\lambda, \pm 5\lambda) \text{ con } \lambda \in [1, \sqrt{2}].$$

c) *Caso de los vértices del cuadrado en el lado de contacto: P y Q.*

Los vértices P y Q se mueven sobre segmentos de los ejes coordenados, esto es, de las líneas $x = 0$ y $y = 0$.



Los casos extremos se dan cuando el lado de contacto descansa sobre los ejes. Así: si las coordenadas de uno son $(0, \lambda)$, las del otro $(\pm\sqrt{100-\lambda^2}, 0)$ y si las coordenadas de uno son $(\lambda, 0)$, las del otro son $(0, \pm\sqrt{100-\lambda^2})$, con $\lambda \in [-10, 10]$.

d) *Caso de los vértices del cuadrado en el lado opuesto al de contacto: R y S.*

De nuevo, apoyándonos en la figura, por ser congruentes los triángulos OQP, QHR y PFS y, a la vez, semejantes a AQM:

$$R(r_1, r_2) r_1 = 2m_2 r_2 = 2m_1 + m_2$$

de donde $m_1 = \frac{r_2 - r_1}{2}$, $m_2 = r_1/2$. Como sabemos que $m_1^2 + m_2^2 = 25$, tenemos para R

$$(\frac{r_2 - r_1}{2})^2 + (\frac{r_1}{2})^2 = 25$$

o bien $(r_2 - r_1)^2 + r_1^2 = 100$. El lugar geométrico está, pues, en la elipse de ecuación $(y-x)^2 + x^2 = 100$ y es un arco de elipse que se puede parametrizar como

$$y = x + \sqrt{100 - x^2}$$

con $x \in [0, 10]$ e $y \in [10, 10\sqrt{2}]$. Análogamente, para S sale el arco de elipse $y^2 + (x - y)^2 = 100$ con

$$x = y + \sqrt{100 - y^2}$$

con $y \in [0, 10]$ y $x \in [10, 10\sqrt{2}]$.

En los demás cuadrantes sale de forma parecida:

Segundo cuadrante:

$$y = -x + \sqrt{100 - x^2}$$

con $x \in [-10, 0]$ e $y \in [10, 10\sqrt{2}]$.

$$x = -y - \sqrt{100 - y^2}$$

con $y \in [0, 10]$ y $x \in [-10\sqrt{2}, -10]$.

Tercer cuadrante:

$$y = x - \sqrt{100 - x^2}$$

con $x \in [-10, 0]$ e $y \in [-10, -10\sqrt{2}]$.

$$x = y - \sqrt{100 - y^2}$$

con $x \in [-10, 0]$ e $y \in [-10\sqrt{2}, -10]$.

Cuarto cuadrante:

$$y = -x - \sqrt{100 - x^2}$$

con $x \in [0, 10]$ e $y \in [-10, -10\sqrt{2}]$.

$$x = -y + \sqrt{100 - y^2}$$

con $y \in [-10, 0]$ y $x \in [10, 10\sqrt{2}]$.

4 *Calcula la suma de los inversos de los dos mil trece primeros términos de la sucesión de término general*

$$a_n = 1 - \frac{1}{4n^2}$$

Solución. El término general se puede escribir como

$$a_n = \frac{4n^2 - 1}{4n^2} = \frac{(2n-1)(2n+1)}{4n^2}$$

y su inverso es

$$\frac{1}{a_n} = \frac{4n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n-1} + \frac{n}{2n+1}$$

Hemos de calcular

$$S = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots + \frac{1}{a_{2012}} + \frac{1}{a_{2013}}$$

$$= \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{5}\right) + \ldots + \left(\frac{2012}{4023} + \frac{2012}{4025}\right) + \left(\frac{2013}{4025} + \frac{2013}{4027}\right)$$

$$= 1 + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{5} + \frac{3}{5}\right) + \ldots + \left(\frac{2012}{4025} + \frac{2013}{4025}\right) + \frac{2013}{4027}$$

$$= 2013 + \frac{2013}{4027} = 2013\left(1 + \frac{1}{4027}\right) = \frac{8108364}{4027} \simeq 2013.5$$

5 *Obtén los dos valores enteros de x más próximos a $2013°$, tanto por defecto como por exceso, que cumplen esta ecuación trigonométrica*

$$2^{\sin^2 x} + 2^{\cos^2 x} = 2\sqrt{2}$$

Solución. Aplicando la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica resulta

$$2^{\sin^2 x} + 2^{\cos^2 x} \geq 2\sqrt{2^{\sin^2 x} \cdot 2^{\cos^2 x}} = 2\sqrt{2^{\sin^2 x + \cos^2 x}} = 2\sqrt{2}$$

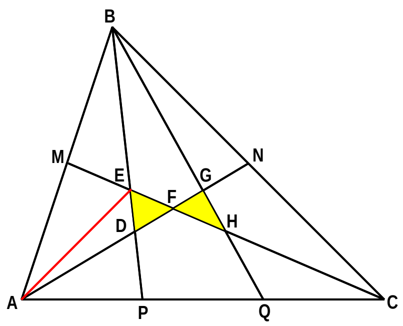
La igualdad se alcanza cuando $2^{\sin^2 x} = 2^{\cos^2 x}$. Es decir, cuando $\sin^2 x = \cos^2 x$ o $\sin x = \pm \cos x$. Los valores de x que satisfacen la igualdad anterior son $x = 45° + 90°k$ con $k \in \mathbb{Z}$. Los valores pedidos se obtienen para

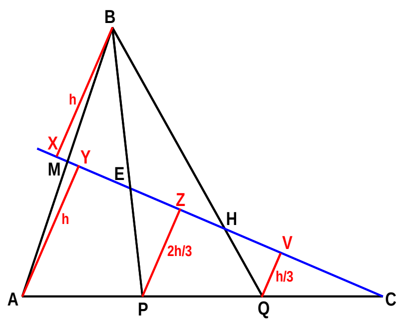
$$k_1 = \left[\frac{2013° - 45°}{90}\right] = 21 \quad \text{y} \quad k_1 = \left[\frac{2013° + 45°}{90}\right] = 22$$

y son $x_1 = 1935°$ y $x_2 = 2025°$.

6 *Por los puntos medios de dos lados de un triángulo ABC trazamos las medianas y unimos los puntos que trisecan el tercer lado con el vértice opuesto. Así, en el interior, se obtiene una pajarita (dos triángulos unidos por un vértice). Se pide calcular la fracción de superficie total del triángulo que representa la pajarita.*

Solución. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que el área del triángulo ABC es uno. Es decir, $[ABC] = 1$. Tenemos





Las medianas dividen al triángulo en seis partes de igual área, luego: $[AMF] = [FNC] = \dfrac{1}{6}$ y $[AFC] = 2 \cdot \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{3}$. Trazamos, desde B, A, P y Q, perpendiculares sobre la mediana CM y sean X, Y, Z y V sus respectivos pies tal y como muestra la figura de la derecha. En esta figura se tiene trabajando con la mediana CM :

- $AMY \equiv BMX$. Como $AM = MB$ entonces $AY = XB = h$.
- $AYC \cong PZC \cong QVC$. Como $AP = PQ = QC$, entonces $PZ = \dfrac{2}{3}h$ y $QV = \dfrac{1}{3}h$.

- $PEZ \cong XBE$. Como $PZ = \frac{2}{3}XB \to PE = \frac{2}{3}EB \to PE = \frac{2}{5}PB$ y $EB = \frac{3}{5}PB$.
- $QHV \cong XBH$. Como $QV = \frac{1}{3}QB \to QH = \frac{1}{3}HB \to QH = \frac{1}{4}QB$

Y trabajando, análogamente[1], sobre la otra mediana AN, se obtiene

$$QG = \frac{2}{5}QB \quad GB = \frac{3}{5}QB \quad \text{y} \quad PD = \frac{1}{4}PB$$

Nos fijamos, por ejemplo, en la ceviana PB y ya podemos conocer la proporción en que los puntos D y E la dividen. Falta

$$DE = PE - PD = \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{4}\right) PB = \frac{3}{20}PB$$

Por tanto,

$$PD = \frac{5}{20}PB \quad DE = \frac{3}{20}PB \quad \text{y} \quad EB = \frac{12}{20}PB$$

Ahora dibujamos la línea auxiliar AE. Sobre la ceviana PB, ABP de área conocida queda dividido en tres triángulos, ABE, AED y ADP, de idéntica altura. Por tanto,

$$\frac{[ADP]}{[ABP]} = \frac{PD}{PB} = \frac{5}{20}, \quad \frac{[AED]}{[ABP]} = \frac{DE}{PB} = \frac{3}{20}, \quad \frac{[ABE]}{[ABP]} = \frac{EB}{PB} = \frac{12}{20}$$

De

$$[ABP] = \frac{1}{3} \to [ADP] = \frac{5}{60}, \quad [AED] = \frac{3}{60} \quad \text{y} \quad [ABE] = \frac{12}{60}$$

Por otro lado, como EM es mediana del triángulo ABE, se tiene $[AME] = \frac{1}{2}[ABE] = \frac{6}{60}$. Finalmente,

$$\frac{1}{6} = [AMF] = [AME] + [AED] + [DEF] = \frac{6}{60} + \frac{3}{60} + [DEF]$$

de donde resulta el área de media pajarita. Es decir, $[DEF] = \frac{1}{60}$. Análogamente, $[FGH] = \frac{1}{60}$, y el área pedida es

$$[DEF] + [FGH] = \frac{1}{30} = \frac{1}{30}[ABC]$$

[1]Todo esto es equivalente a aplicar el Teorema de Menelao sobre las transversales de un triángulo

L Olimpiada Matemática Española

Fase aragonesa

Soluciones a los problemas

1. *Tenemos 50 fichas numeradas del 1 al 50, y hay que colorearlas de rojo o azul. Sabemos que la ficha 5 es de color azul y que la coloración debe satisfacer las dos propiedades siguientes:*

   a) Si la ficha con el número x y la ficha con el número y son de distinto color, entonces el color de la ficha con el número $|x-y|$ debe ser rojo.

   b) Si la ficha con el número x y la ficha con el número y son de distinto color y $x{\cdot}y$ es un número entre 1 y 50 (incluyendo ambos), entonces el color de la ficha con el número $x \cdot y$ debe ser azul.

   Determinar cuántas coloraciones distintas se pueden realizar en el conjunto de fichas.

   Solución: Observemos que las fichas con dos números que se diferencian en 5 tienen el mismo color. En efecto, si fueran de distinto color, su diferencia debería ser de color rojo, por la regla a). Pero su diferencia es 5, que es de color azul. Por tanto basta con saber el color de los 4 primeros números. Distinguimos dos casos: **1)** que la ficha 1 sea de color azul y **2)** que la ficha 1 sea de color rojo.

   1) Si 1 es de color azul, todas las fichas tienen color azul por la regla b). Esto es así porque si la ficha de número $k \neq 1$ fuera roja, entonces por b), $k = k \cdot 1$ tendría que ser azul, lo que contradice que k sea roja.

   2) Si 1 es roja, por la regla a) $4 = 5 - 1$ es roja. Para determinar el color de 2 y 3, supongamos que 3 es azul. Por ser $2 = 3 - 1$ y ser 3 y 1 de diferente color, entonces 2 es roja. Ahora bien $3 = 5 - 2$ y 5 es azul y 2 roja, por lo tanto 3 es roja. Esto no puede ser, por lo tanto 3 no puede ser azul y es roja, por lo que 2 también es roja. Así pues, 1, 2, 3 y 4 son rojas, lo mismo que el resto de fichas que no son múltiplo de 5.

Por tanto, solo hay dos coloraciones posibles, o todas las fichas de color azul o todas rojas, excepto los múltiplos de 5 que son azules. Es fácil comprobar que ambas satisfacen las condiciones requeridas.

2. *Determinar cuántas soluciones reales tiene la ecuación*

$$\sqrt{2-x^2} = \sqrt[3]{3-x^3}$$

Solución: Para que existan soluciones reales tiene que ser $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$. Ahora bien, si $-\sqrt{2} \leq x \leq 0$, se tiene que

$$2-x^2 \leq 2, \qquad 3-x^3 \geq 3,$$

y $\sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$, por lo que no hay soluciones si $x \in [-\sqrt{2}, 0]$. Tampoco $x = \sqrt{2}$ es solución, por lo que basta buscar soluciones con $0 < x < \sqrt{2}$.

Notemos que si $0 < z < 1$, entonces $0 < z^3 < z^2$ y $0 < \sqrt{z} < \sqrt[3]{z}$. Por tanto, $0 < \sqrt{1-z^2} < \sqrt[3]{1-z^2} < \sqrt[3]{1-z^3}$. Así, para $0 < x < \sqrt{2}$ se tiene

$$\begin{aligned} \sqrt{2-x^2} &= \sqrt{2}\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2} \\ &< \sqrt{2}\sqrt[3]{1-\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^3} = \sqrt[3]{\sqrt{2}^3 - x^3} < \sqrt[3]{3-x^3}. \end{aligned}$$

Deducimos que nuestra ecuación no tiene soluciones reales.

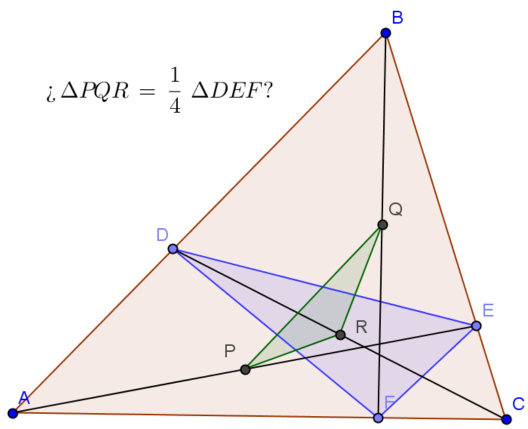
Otra solución: Como antes, basta considerar $x \in (0, \sqrt{2})$. Ahora bien, si elevamos a la sexta potencia ambos lados y restamos, se tiene

$$\begin{aligned} (3-x^3)^2 - (2-x^2)^3 &= 2x^6 - 6x^4 - 6x^3 + 12x^2 + 1 \\ &= 2x^2\left((2-x^2)^2 + 4x^2 - 4\right) - 6x^4 - 6x^3 + 12x^2 + 1 \\ &= 2x^2(2-x^2)^2 + 2x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 1 \\ &= 2x^2(2-x^2)^2 + 2x^2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}(2-x^2) > 0, \end{aligned}$$

de donde deducimos que no hay solución.

3. *Sea ΔABC un triángulo y D, E y F tres puntos cualesquiera sobre los lados AB, BC y CA respectivamente. Llamemos P al punto medio de AE, Q al punto medio de BF y R al punto medio de CD. Probar que el área del triángulo ΔPQR es la cuarta parte del área del triángulo ΔDEF.*

   Solución: Hagamos primero un dibujo donde queden reflejados los elementos que intervienen en el problema.



Recordemos que el área de un triángulo determinado por dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en el espacio (en nuestro caso tenemos el triángulo determinado por los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$) es

$$\frac{1}{2}|\vec{u}||\vec{v}||\mathrm{sen}(\alpha)| = \frac{1}{2}\left|\vec{u}\times\vec{v}\right|,$$

donde α es el ángulo que forman y $\times$ es el producto vectorial. Consideramos los vectores $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ y $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Entonces existen escalares $0 \leq \mu, \nu, \lambda \leq 1$ tales que

$$\overrightarrow{AD} = \mu\vec{u}, \quad \overrightarrow{AF} = \nu\vec{v} \quad \text{y} \quad \overrightarrow{AE} = \lambda\vec{u} + (1-\lambda)\vec{v}.$$

En consecuencia, el triángulo ΔDEF está determinado por los vectores $\overrightarrow{DE} = (\lambda-\mu)\vec{u} + (1-\lambda)\vec{v}$ y $\overrightarrow{DF} = -\mu\vec{u} + \nu\vec{v}$, y el área del triángulo

ΔDEF es

$$\begin{aligned}
\text{área}_{\Delta DEF} &= \frac{1}{2}\left|\big((\lambda-\mu)\vec{u}+(1-\lambda)\vec{v}\big)\times\big(-\mu\vec{u}+\nu\vec{v}\big)\right| \\
&= \frac{1}{2}\left|(\lambda-\mu)\nu+(1-\lambda)\mu\right|\left|\vec{u}\times\vec{v}\right| \\
&= \frac{1}{2}\left|\lambda\nu-\mu\nu-\lambda\mu+\mu\right|\left|\vec{u}\times\vec{v}\right|.
\end{aligned}$$

Por otra parte tenemos que

$$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\big(\lambda\vec{u}+(1-\lambda)\vec{v}\big),\quad \overrightarrow{AQ}=\frac{1}{2}\big(\vec{u}+\nu\vec{v}\big)\quad \text{y}\quad \overrightarrow{AR}=\frac{1}{2}\big(\mu\vec{u}+\vec{v}\big),$$

de donde deducimos que

$$\begin{aligned}
\text{área}_{\Delta PQR} &= \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{RP}\times\overrightarrow{RQ}\right| \\
&= \frac{1}{2}\left|\frac{1}{2}\big((\lambda-\mu)\vec{u}-\lambda\vec{v}\big)\times\frac{1}{2}\big((1-\mu)\vec{u}+(\nu-1)\vec{v}\big)\right| \\
&= \frac{1}{8}\left|(\lambda-\mu)(\nu-1)+\lambda(1-\mu)\right|\left|\vec{u}\times\vec{v}\right| \\
&= \frac{1}{8}\left|\lambda\nu-\mu\nu+\mu-\lambda\mu\right|\left|\vec{u}\times\vec{v}\right|.
\end{aligned}$$

Concluimos que

$$\text{área}_{\Delta PQR}=\frac{1}{4}\text{área}_{\Delta DEF}.$$

4. *Se considera un polígono regular de 90 vértices, numerados del 1 al 90 de manera aleatoria. Probar que siempre podemos encontrar dos vértices consecutivos cuyo producto es mayor o igual que 2014.*

Solución: Como $45^2 > 2014$, no puede haber dos vértices consecutivos con número entre 45 y 90. Por lo tanto, para que no se cumpliera el enunciado, los números que deben ir a izquierda y derecha de los vértices numerados del 45 al 90 tendrían que ser menores o iguales que 44. Sin embargo, entre los vértices numerados del 45 al 90 debería haber, al menos, 46 vértices.

5. *Hallar las soluciones enteras de la ecuación*

$$x^4 + y^4 = 3x^3y$$

Solución: Es claro que $(0,0)$ es solución (la solución trivial) y que si (x,y) es solución y $(x,y) \neq (0,0)$, entonces o bien $x,y > 0$ o bien $x,y < 0$. Además el par $(-x,-y)$ también es solución. Por otra parte, si (x,y) es solución y d es un divisor común de x e y, también $\left(\frac{x}{d}, \frac{y}{d}\right)$ es solución. Por tanto, si existiera una solución no trivial, existiría una solución (x,y) con $x,y > 0$ y x e y primos entre sí. Ahora bien, si $x > 1$ y p es un divisor primo de x, como p divide a x^4 y a $3x^3y$, también divide a y, lo que contradice el que x e y sean relativamente primos. Por tanto, $x = 1$. Del mismo modo probamos que $y = 1$. Pero $(1,1)$ no es solución. Concluimos que no hay soluciones no triviales. Así pues, la única solución es $x = 0 = y$.

6. *Probar que*

$$2014^{2013} - 1013^{2013} - 1001^{2013}$$

es múltiplo de

$$2014^3 - 1013^3 - 1001^3$$

Solución: Ninguno de los números $a = 1013$, $b = 1001$ y $a+b = 2014$ es múltiplo de 3. Debemos probar que $(a+b)^{2013} - a^{2013} - b^{2013}$ es múltiplo de

$$(a+b)^3 - a^3 - b^3 = 3a^2b + 3ab^2 = 3ab(a+b).$$

Por el binomio de Newton se tiene:

$$(a+b)^{2013} - a^{2013} - b^{2013} = \sum_{n=1}^{2012} \binom{2013}{n} a^{2013-n} b^n,$$

y agrupando las parejas "simétricas"

$$\begin{aligned}(a+b)^{2013} - a^{2013} - b^{2013} &= \sum_{n=1}^{1006} \binom{2013}{n} \left(a^{2013-n}b^n + a^n b^{2013-n}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{1006} \binom{2013}{n} (ab)^n \left(a^{2013-2n} + b^{2013-2n}\right).\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que para m impar

$$a^m + b^m = (a+b)(a^{m-1} - a^{m-2}b + - \cdots + b^{m-1}) = (a+b)p_m(a,b),$$

podemos escribir

$$(a+b)^{2013} - a^{2013} - b^{2013} = \sum_{n=1}^{1006} \binom{2013}{n} (ab)^n (a+b) p_{2013-2n}(a,b),$$

probando así que $(a+b)^{2013} - a^{2013} - b^{2013}$ es múltiplo de $ab(a+b)$. Finalmente, $2014 = \dot{3} + 1$ (múltiplo de 3 más 1), $1013 = \dot{3} - 1$ y $1001 = \dot{3} - 1$, luego

$$\begin{aligned}
(a+b)^{2013} - a^{2013} - b^{2013} &= (\dot{3}+1)^{2013} - (\dot{3}-1)^{2013} - (\dot{3}-1)^{2013} \\
&= \dot{3} + \left(1^{2013} - (-1)^{2013} - (-1)^{2013}\right) \\
&= \dot{3} + (1+1+1) = \dot{3}.
\end{aligned}$$

Problemas Primera Sesión

1. *Demuestra que*

$$(ax+by)^2 \leq ax^2+by^2$$

para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$ *y cualesquiera* $a, b \in \mathbb{R}$ *con* $a+b=1, a, b \geq 0$. *¿En qué casos se da la igualdad?*

Solución 1. Nótese que

$$ax^2+by^2-(ax+by)^2 = a(1-a)x^2+b(1-b)y^2-2abxy = ab(x-y)^2,$$

donde hemos usado que $1-a=b$ y $1-b=a$. Esta expresión es claramente no negativa, siendo nula si y sólo si bien $ab=0$ (es decir, uno de entre a, b es 0 y el otro es 1), bien $x=y$.

Solución 2. Considérense los vectores $\left(\sqrt{a}, \sqrt{b}\right)$ y $\left(\sqrt{a}x, \sqrt{b}y\right)$, cuyo producto escalar es $ax+by$, y cuyos módulos son $\sqrt{a+b}=1$ y $\sqrt{ax^2+by^2}$. La desigualdad propuesta es equivalente a la desigualdad del producto escalar aplicada a estos vectores, y por lo tanto cierta, dándose la igualdad si y sólo si ambos vectores son proporcionales, cosa que puede pasar bien si una de sus coordenadas es nula (es decir, si $a=0$ o $b=0$), bien si ambas coordenadas son proporcionales cuando no son nulas, es decir, $x=y$.

Solución 3. La función $f(z)=z^2$ es claramente convexa, con lo que por la desigualdad de Jensen, para cualesquiera reales no negativos a, b, y cualesquiera reales x, y, se tiene

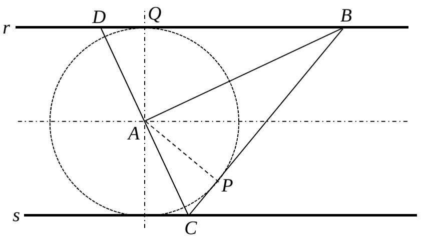
$$(ax+by)^2 = f(ax+by) \leq \frac{af(x)+bf(y)}{a+b} = \frac{ax^2+by^2}{a+b}.$$

Usando que $a+b=1$, se obtiene el resultado pedido, dándose la igualdad bien si uno de los dos puntos "desaparece" (es decir, $a=0$ o $b=0$), o en caso contrario si ambos puntos coinciden (es decir, $x=y$).

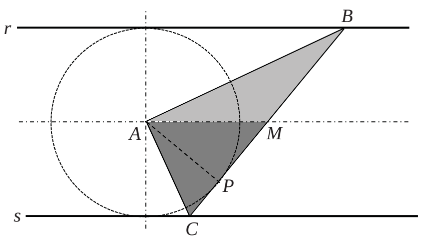
□

2. *Sean* r *y* s *dos rectas paralelas, y* A *un punto fijo a igual distancia de ambas rectas. Para cada punto* B *de la recta* r*, sea* C *el punto de la recta* s *tal que* $\angle BAC = 90°$*, y sea* P *el pie de la perpendicular desde* A *sobre la recta* BC*. Demuestra que, independientemente de qué punto* B *de la recta* r *tomemos, el punto* P *está sobre una circunferencia fija.*

Solución 1. Sea Q el punto de r tal que AQ es perpendicular a r. Sea D el punto donde AC corta a r. Como A está a la misma distancia de las rectas r y s, $AC = AD$. Los triángulos ABC y ABD son ambos rectángulos en A, comparten el lado AB, y el lado AC es igual al lado AD. En consecuencia, ambos triángulos son iguales. Los pies de las alturas desde A en cada triángulo son P y Q, respectivamente, por lo que $AP = AQ$. Como Q no depende de B, la distancia $AP = AQ$ es fija, y el punto P está sobre la circunferencia fija de centro A, que es tangente simultáneamente a las rectas r y s.



Solución 2. Sea M el punto medio del segmento BC. Como el triángulo ABC es rectángulo en A, M es su circuncentro, es decir, $AM = MB = MC$. Llamando d a la distancia de A a las rectas r y s, nótese que la longitud de las alturas desde B y desde C sobre AM es d, con lo que las áreas de AMB y AMC son ambas iguales a $\frac{d \cdot AM}{2}$, y el área del triángulo ABC es $d \cdot AM$. Pero $BC = MB + MC = 2AM$, luego la longitud AP de la altura desde A sobre BC es $2\frac{d \cdot AM}{2AM} = d$, que es constante, concluyendo igual que en la solución anterior.



Solución 3. Si h es la distancia entre A y las rectas r y s, podemos tomar un sistema de coordenadas cartesianas tales que $A \equiv (0,0)$, $r \equiv y = h$, $s \equiv y = -h$, y para cualquier punto $B \equiv (d,h)$, la recta AB tiene pendiente $\frac{h}{d}$, con lo que

$$AC \equiv y = -\frac{dx}{h}, \qquad C \equiv \left(\frac{h^2}{d}, -h\right), \qquad BC \equiv y = \frac{2hdx}{d^2 - h^2} - \frac{h\left(d^2 + h^2\right)}{(d^2 - h^2)}.$$

La ecuación de la recta AP es entonces $y = -\frac{d^2 - h^2}{2hd}x$, con lo que podemos hallar P como la intersección de esta recta con la recta BC, resultando finalmente tras algo de álgebra en

$$P \equiv \left(\frac{2h^2 d}{d^2 + h^2}, -\frac{h\left(d^2 - h^2\right)}{d^2 + h^2}\right), \qquad AP^2 = h^2 \frac{4h^2 d^2 + \left(d^2 - h^2\right)^2}{\left(d^2 + h^2\right)^2} = h^2,$$

es decir $AP = h$, concluyéndose como en las soluciones anteriores.

□

3*. Un campeonato de baloncesto se ha jugado por sistema de liga a dos vueltas (cada par de equipos se enfrentan dos veces) y sin empate (si el partido acaba en empate hay* *prórrogas hasta que gane uno de los dos). El ganador del partido obtiene 2 puntos y el perdedor 1 punto. Al final del campeonato, la suma de de los puntos obtenidos por todos los equipos salvo el campeón es de 2015 puntos. ¿Cuántos partidos ha ganado el campeón?*

Solución. Supongamos que el número de equipos es n. Entonces, se juegan un total de $2\binom{n}{2} = n^2 - n$ partidos en el campeonato por ser a doble vuelta. En cada partido se dan 3 puntos, por lo que $3n^2 - 3n$ es el número total de puntos dados. Si el campeón tiene P puntos, y los otros $n-1$ equipos tienen entre todos 2015 puntos, entonces

$$P = 3n^2 - 3n - 2015,$$

donde además $P > \frac{2015}{n-1}$ para poder ser el campeón. Para que se cumpla esto, ha de ser

$$3n^2 - 3n - 2015 > \frac{2015}{n-1}, \qquad 3n(n-1) > \frac{2015n}{n-1}, \qquad n-1 > \sqrt{\frac{2015}{3}}.$$

Como $25^2 = 625 < \frac{2015}{3}$, se tiene que $n > 26$, o $n \geq 27$.
Por otra parte, la puntuación máxima que ha podido obtener el ganador es $4(n-1)$, si ha ganado todos sus partidos (2 partidos con cada uno de los otros $n-1$ equipos), es decir,

$$3n^2 - 3n - 2015 \leq 4(n-1), \qquad (3n-4)(n-1) \leq 2015.$$

Ahora bien, si $n \geq 28$, entonces $3n - 4 \geq 80$, $n - 1 \geq 27$, y $80 \cdot 27 = 2160 > 2015$, luego ha de ser $n \leq 27$.
Luego $n = 27$ es el número de equipos en el campeonato, el número de puntos obtenidos por el campeón es $3 \cdot 27^2 - 3 \cdot 27 - 2015 = 91$, y como estos puntos se han obtenido en $2 \cdot 26 = 52$ partidos, el número de partidos ganados (en los que se obtienen 2 puntos en lugar de 1) es claramente $91 - 52 = 39$.

□

4. *Los enteros positivos x, y, z cumplen*

$$x + 2y = z, \qquad x^2 - 4y^2 + z^2 = 310.$$

Halla todos los posibles valores del producto xyz.

Solución 1. Podemos despejar $2y$ de la primera ecuación y sustituir en la segunda, con lo que ha de cumplirse

$$310 = x^2 - (z-x)^2 + z^2 = 2zx, \qquad zx = 155 = 5 \cdot 31.$$

Luego al ser $5, 31$ primos, se tiene que z ha de tomar uno de los valores $155, 31, 5, 1$, tomando x respectivamente los valores $1, 5, 31, 155$. Como además $z = x + 2y > x$, los dos últimos casos quedan descartados. En los dos primeros casos, se tiene que $y = \frac{z-x}{2}$ toma respectivamente los valores 77 y 13, resultando respectivamente en

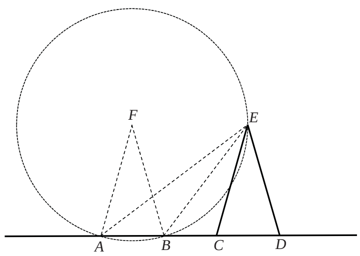
$$xyz = 1 \cdot 77 \cdot 155 = 11935, \qquad xyz = 5 \cdot 13 \cdot 31 = 2015.$$

Solución 2. Como $x^2 - 4y^2 = (x-2y)(x+2y) = z(x-2y)$, tenemos que z ha de dividir a $310 - z^2$, luego a 310. Además, z no puede ser par, pues en ese caso x también lo sería, y $x^2 - 4y^2 + z^2$ sería múltiplo de 4, pero 310 no lo es. Luego z ha de dividir a $155 = 5 \cdot 31$, es decir, z ha de tomar uno de los valores $1, 5, 31, 155$. Como $z = x + 2y$, con x, y enteros positivos, es imposible que $z = 1$, y si $z = 5$, entonces bien $x = 3$, $y = 1$, bien $x = 1$, $y = 2$, que obviamente no satisfacen la segunda ecuación. Se tiene entonces que $z = 31$ o $z = 155$, tomando entonces respectivamente $2y - x = \frac{z^2-310}{z}$ los valores 21 y 153, que junto a $2y + x = z$, nos permite hallar los mismos valores de x, y que por el método anterior, bastando multiplicarlos para hallar los dos mismos valores del producto xyz.

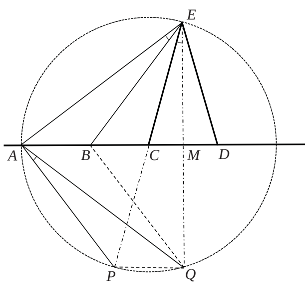
$\square$

5. *En una recta tenemos cuatro puntos A, B, C y D, en ese orden, de forma que $AB = CD$. E es un punto fuera de la recta tal que $CE = DE$. Demuestra que $\angle CED = 2\angle AEB$ si y sólo si $AC = EC$.*

Solución 1. Sea F el punto tal que los triángulos ABF y CDE son iguales. Claramente un triángulo es el otro desplazado por AC, luego $EF = AC$ y $AF = CE = DE = BF$. Trazamos la circunferencia de centro F que pasa por A y B, y como $\angle AFB = \angle CED$, por ser el ángulo central el doble del inscrito, $\angle AEB = 2\angle CED$ si y sólo si E está sobre la circunferencia que acabamos de trazar, es decir, si y sólo si $EF = AF$, y esto es equivalente a $AC = EC$.



Solución 2. Sean M el punto medio de CD, P el simétrico de E respecto de C, y Q el simétrico de E respecto de la recta CD.



El triángulo EPQ es el resultado de aplicar a ECM una homotecia de centro E y razón 2, con lo que EPQ es claramente rectángulo en Q, con $PQ = 2CM = CD = AB$, siendo además PQ paralelo a CD, luego a AB. Se tiene entonces que EP es diámetro de la circunferencia circunscrita a EPQ, que tiene por lo tanto centro en C y radio CE. Al mismo tiempo, al ser $ABQP$ paralelogramo por ser $AB = PQ$ paralelos, AP es paralela a BQ, que es la simétrica de BE respecto a AD, mientras que AQ es la simétrica de AE respecto a AD, luego $\angle PAQ = \angle AEB$. Se tiene entonces que $\angle CED = 2\angle AEB$ y $CE = CA$ son ambos equivalentes a $\angle PAQ = \angle PEQ$, luego equivalentes entre sí, como queríamos demostrar.

Solución 3. Notemos en primer lugar que sólo es necesario demostrar que si $AC = EC$, entonces $\angle CED = 2\angle AEB$. Para ello, consideremos que A está a la izquierda de D sobre la recta horizontal AD, y AB está en una posición tal que $\angle AEB$ es la mitad de $\angle CED$. Si ahora desplazamos E hacia la derecha (equivalente a desplazar AB hacia la izquierda), $\angle AEB$ decrece (nos basta con considerar la circunferencia circunscrita a AEB en su posición inicial, y observar que E "sale" de la circunferencia). De forma análoga, si desplazamos E hacia la izquierda (equivalente a desplazar AB hacia la derecha), $\angle AEB$ crece (E "entra" en la circunferencia circunscrita a AEB). Luego existe a lo sumo una posición de AB sobre la recta AD a la izquierda de CD, tal que $\angle CED = 2\angle AEB$, y nos basta con demostrar que cuando $AC = EC$, AB está de hecho en tal posición.
Sea entonces un sistema de coordenadas con centro en C y tal que el eje horizontal coincide con la recta por A, B, C, D. Denotando por R a la distancia EC, y llamando $\angle CED = 2\alpha$ (con lo que α es claramente agudo), se tiene que $AB = CD = 2R\sin\alpha$, $A \equiv (-R, 0)$ por ser $AC = EC$, $B \equiv (-R+2R\sin\alpha, 0)$ y $E \equiv (R\sin\alpha, R\cos\alpha)$. Ahora bien,

$$\overrightarrow{AE} \equiv (R + R\sin\alpha, R\cos\alpha), \qquad \overrightarrow{BE} \equiv (R - R\sin\alpha, R\cos\alpha),$$

con lo que

$$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BE} = R^2 - R^2\sin^2\alpha + R^2\cos^2\alpha = 2R^2\cos^2\alpha,$$

$$\left|\overrightarrow{AE}\right| = \sqrt{R^2 + 2R^2\sin\alpha + R^2\sin^2\alpha + R^2\cos^2\alpha} = R\sqrt{2 + 2\sin\alpha},$$

$$\left|\overrightarrow{AE}\right| = \sqrt{R^2 - 2R^2\sin\alpha + R^2\sin^2\alpha + R^2\cos^2\alpha} = R\sqrt{2 - 2\sin\alpha},$$

y como

$$\sqrt{2 + 2\sin\alpha} \cdot \sqrt{2 - 2\sin\alpha} = 2\sqrt{1 - \sin^2\alpha} = 2\cos\alpha,$$

tenemos que

$$\cos\angle AEB = \frac{\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BE}}{\left|\overrightarrow{AE}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BE}\right|} = \frac{2R^2\cos^2\alpha}{2R^2\cos\alpha} = \cos\alpha,$$

y queda concluída la demostración.
También es posible completar la demostración sin realizar la observación inicial, tomando $A \equiv (-d, 0)$, donde hemos de demostrar que $d = AC$ si y sólo si $\cos\angle AEB = \cos\alpha$. La segunda condición se traduce, tras algo de álgebra, en la relación

$$\left(d^2 - R^2\right)\left(d^2 + R^2 + 2R^2\cos(2\alpha)\right)\sin^2\alpha = 0,$$

donde el segundo y el tercer factores son claramente positivos (usamos para ello que $d > R$ para que B esté a la izquierda de C), con lo que esta relación es en efecto equivalente a $d = R$, como queríamos demostrar.

$\square$

6. *Halla todas las ternas de reales positivos (x, y, z) que cumplan el sistema*

$$2x\sqrt{x+1} - y(y+1) = 1,$$

$$2y\sqrt{y+1} - z(z+1) = 1,$$
$$2z\sqrt{z+1} - x(x+1) = 1.$$

Solución 1. Nótese que, por la desigualdad entre medias aritmética y geométrica, se tiene que
$$x^2 + x + 1 \geq 2\sqrt{x^2(x+1)} = 2x\sqrt{x+1},$$
con igualdad si y sólo si $x^2 = x + 1$, es decir si y sólo si x es una raíz de la ecuación $r^2 - r - 1 = 0$. Se tiene entonces de la primera ecuación que

$$y^2 + y + 1 = 2x\sqrt{x+1} \leq x^2 + x + 1,$$

y de forma similar para las otras dos, con lo que

$$x^2 + x + 1 \geq y^2 + y + 1 \geq z^2 + z + 1 \geq x^2 + x + 1,$$

con lo que se ha de dar la igualdad en las tres desigualdades, es decir, x, y, z son soluciones de la ecuación $r^2 - r - 1 = 0$. El producto de las dos raíces de esta ecuación es -1, luego exactamente una de ellas es negativa, y x, y, z son iguales entre sí e iguales a la raíz positiva, es decir, la única solución es

$$x = y = z = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Solución 2. Supongamos que $x < y$, luego de la primera ecuación obtenemos

$$2x\sqrt{x+1} = y^2 + y + 1 > x^2 + x + 1,$$

o tras elevar al cuadrado y reagrupar términos,

$$0 > x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x + 1 = \left(x^2 - x - 1\right)^2,$$

claramente falso, luego $x \geq y$, con $x = y$ si y sólo si son iguales a la raíz positiva de $r^2 - r - 1 = 0$. De forma similar, obtenemos de la segunda ecuación que $y \geq z$, y de la tercera que $z \geq x$, con análogas condiciones de igualdad. Luego $x \geq y \geq z \geq x$, con igualdad si y sólo si x, y, z son la raíz positiva de la ecuación $r^2 - r - 1 = 0$, obteniéndose la misma única solución que por el método anterior.

$\square$

Soluciones

Viernes mañana, primera sesión

1. Con baldosas cuadradas de lado un número exacto de unidades se ha podido embaldosar una habitación de superficie 18144 unidades cuadradas de la siguiente manera: el primer día se puso una baldosa, el segundo, dos baldosas, el tercero tres, etc. ¿Cuántas baldosas fueron necesarias?

Solución. Supongamos que fueron necesarias n baldosas y que su tamaño es $k \times k$. Entonces $nk^2 = 18144 = 2^5 \times 3^4 \times 7$. Hay nueve casos posibles para n, a saber, 2×7, $2^3 \times 7$, $2^5 \times 7$, $2 \times 3^2 \times 7$, $2^3 \times 3^2 \times 7$, $2^5 \times 3^2 \times 7$, $2 \times 3^4 \times 7$, $2^3 \times 3^4 \times 7$, $2^5 \times 3^4 \times 7$. Además este número tiene que poderse expresar en la forma $1+2+3+\cdots+N = N(N+1)/2$ y esto sólo es posible en el caso sexto: $2^5 \times 3^2 \times 7 = 63 \times 64/2 = 2016$. Para descartar los otros casos rápidamente observamos que N y $N+1$ son números primos entre sí. Si por ejemplo $N(N+1)/2 = 2^3 \times 7$, tendría que ser $N+1 = 2^4$ y $N = 7$, que es imposible, etc. Por tanto, se necesitaron 2016 baldosas.

2. Hemos empezado la Olimpiada Matemática puntualmente a las 9:00, como he comprobado en mi reloj, que funcionaba en ese momento correctamente. Cuando he terminado, a las 13:00, he vuelto a mirar el reloj y he visto que las manecillas se habían desprendido de su eje pero manteniendo la posición en la que estaban cuando el reloj funcionaba. Curiosamente las manecillas de las horas y de los minutos aparecían superpuestas exactamente, una sobre otra, formando un ángulo (no nulo) menor que 120° con el segundero. ¿A qué hora se me averió el reloj? (Dar la respuesta en horas, minutos y segundos con un error máximo de un segundo; se supone que, cuando funcionaba, las manecillas del reloj avanzaban de forma continua.)

Solución. Si medimos el tiempo t en segundos a partir de las 00:00 y los ángulos en grados, en sentido horario y a partir de la posición de las manecillas a las 00:00, tenemos que el ángulo barrido por la manecilla de las horas en el instante t es $\alpha_{hor}(t) = t/120$ y barrido por el minutero, $\alpha_{min}(t) = t/10$. Como ambas manecillas han aparecido superpuestas, los dos ángulos han de coincidir en el momento t en que el reloj se ha averiado. El minutero ha podido dar alguna vuelta completa, por tanto debe tenerse

$$\frac{t}{10} = \frac{t}{120} + 360k,$$

con $k \geq 0$ un número entero, es decir, $t = \frac{360 \times 120}{11}k$. Como la avería ha sido entre las 9:00 y las 13:00, tiene que ser $9 \leq k \leq 12$. El ángulo para el segundero es $\alpha_{seg}(t) = 6t$, por tanto la diferencia

$$6t - \frac{t}{120} = \frac{360 \times 719}{11}k = (360 \times 65 + \frac{360 \times 4}{11})k$$

debe ser, salvo múltiplos de 360, un número β entre -120 y 120. Si $k = 9$, $\beta = (360 \times 3)/11$, que efectivamente está en este rango. Sin embargo, si $k = 10$ ó 12, $\beta = \pm(360 \times 4)/11$, que está fuera de este intervalo. El caso $k = 11$ también se excluye puesto que se tendría $\beta = 0$ y las tres manecillas no están superpuestas. Por lo tanto el único caso posible es $k = 9$, que corresponde al momento

$$t = \frac{360 \times 120 \times 9}{11} = 3600 \times 9 + 60 \times 49 + 5 + \frac{5}{11},$$

lo que significa que el reloj se averió a las 9:49:05.

3. Sea ABC un triángulo rectángulo en C no isósceles con catetos $b > a$.

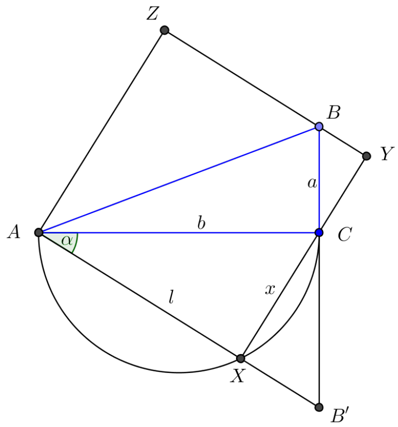
(i) Hallar el lado del cuadrado $AXYZ$ que circunscribe al triángulo ABC (los vértices B y C tienen que estar en lados distintos del cuadrado).

(ii) Explicar paso a paso cómo construir el cuadrado $AXYZ$ con regla y compás.

Solución. (i) Sea l la longitud del cuadrado y x la longitud del segmento XC. Los triángulos rectángulos AXC y BYC son semejantes (puesto que $\angle BCY = \pi/2 - \angle ACX = \angle CAX$), de donde $l/b = (l-x)/a$, es decir, $x/l = (b-a)/b$. Entonces, aplicando el Teorema de Pitágoras,

$$b^2 = l^2 + x^2 = l^2(1 + (\frac{x}{l})^2) = l^2(1 + \frac{(b-a)^2}{b^2}),$$

de donde $l = b^2/\sqrt{(b-a)^2 + b^2}$.



(ii) Para construir el cuadrado observamos que, por (i), se tiene que la tangente del ángulo $\alpha = \angle CAX$ es $x/l = (b-a)/b$. Prolongamos el lado BC del triángulo hasta un punto B' de modo que BB' mida b unidades. Así, CB' mide $b-a$ y el ángulo $\angle CAB'$ tiene tangente $(b-a)/b$. El vértice X del cuadrado que buscamos tiene que estar entonces sobre la recta que contiene a A y B'. Por otro lado, el ángulo $\angle AXC$ tiene que ser de $90°$, así que X tiene que estar sobre la circunferencia con diámetro AC. Por lo tanto, basta con trazar esta circunferencia y su intersección con la recta por A y B' será el punto X buscado. Los puntos Y y Z que completan el cuadrado se obtienen ahora fácilmente.

Viernes tarde, segunda sesión

4. Las tres raíces del polinomio $x^3 - 14x^2 + Bx - 84$ son los lados de un triángulo rectángulo. Hallar B.

Solución. Sean u, v y w las tres raíces y supongamos que $w^2 = u^2 + v^2$. Por las relaciones de Cardano, $u+v+w = 14$, $uv+uw+vw = B$ y $uvw = 84$. Si $s = u+v$ y $p = uv$, se tiene entonces que $s+w = 14$, $pw = 84$ y $s^2 = w^2+2p$. Sustituyendo en esta última ecuación los valores de s y p en función de w y operando, queda $w^2 - 7w + 6 = 0$, luego $w = 1$ ó 6. Si fuera $w = 1$, tendríamos $s = 13$, $p = 84$ y u y v serían raíces de $x^2 - 13x + 84 = 0$, que no tiene soluciones reales. Por tanto, $w = 6$, $s = 8$, $p = 14$ y $B = p + ws = 62$. (Efectivamente, las tres raíces de $x^3 - 14x^2 + 62x - 84$ son 6, $4+\sqrt{2}$ y $4-\sqrt{2}$ y $6^2 = (4+\sqrt{2})^2 + (4-\sqrt{2})^2$.)

5. En un triángulo ABC la bisectriz por A, la mediana por B y la altura por C son concurrentes y además la bisectriz por A y la mediana por B son perpendiculares. Si el lado AB mide una unidad, hallar cuánto miden los otros dos lados.

Solución. Damos dos soluciones diferentes.

Solución 1. Sean P, M y Q los pies de la bisectriz por A, la mediana por B y la altura por C, respectivamente, que se cortan en el punto X. En el triángulo ABM la bisectriz por A, AX, es perpendicular a BM (puesto que por hipótesis la mediana y la bisectriz de ABC son perpendiculares), por tanto $\angle ABX = \angle AMX$, esto es ABM es isósceles y $AM = AB = 1$, con lo cual $AC = 2$.

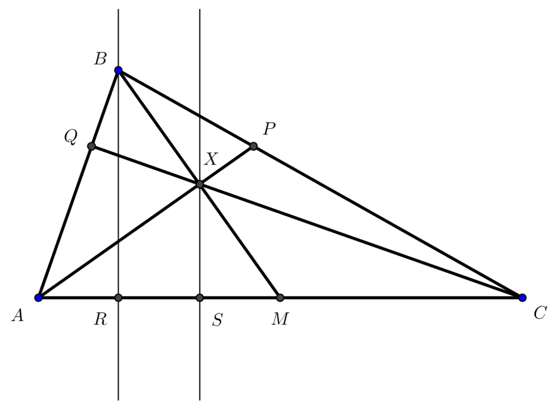
Sea $BP = x$ y $BQ = y$. Por el Teorema de la bisectriz, $BP/AB = PC/AC$, esto es $PC = 2x$. Ahora, por el Teorema de Ceva,

$$1 = \frac{MC}{CP} \cdot \frac{PB}{BQ} \cdot \frac{QA}{AM} = \frac{1}{2x} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{1-y}{1},$$

de donde $y = 1/3$. Trazamos las perpendiculares a AC por B y X, respectivamente con pies R y S. Los triángulos XQB y XSM son congruentes (son rectángulos, $XB = XM$ por ser AX la altura del triángulo isósceles ABM y $XQ = XS$ por ser perpendiculares a los lados AB y AC desde un punto de la bisectriz), por tanto $SM = BQ = y = 1/3$. Por otro lado, por el Teorema de Thales, $BX = XM$ implica $RS = SM$, luego $RS = 1/3$ y $AR = AM - RS - SM = 1/3$. Finalmente, por el Teorema de Pitágoras,

$$BC^2 = BR^2 + RC^2 = AB^2 - AR^2 + RC^2 = 1 - \frac{1}{9} + (2 - \frac{1}{3})^2 = \frac{11}{3}.$$

Así pues, los otros dos lados miden 2 y $\frac{\sqrt{33}}{3}$.



Solución 2. Igual que antes, $AC = 2$. Fijamos un sistema de coordenadas con origen en A de forma que $\vec{AC} = (2, 0)$. Sea $\vec{AB} = (x, y)$. Entonces

$$\vec{CX} = \vec{CA} + \vec{AX} = (-2, 0) + (\frac{x+1}{2}, \frac{y}{2}) = (\frac{x-3}{2}, \frac{y}{2})$$

(notar que X es el punto medio de BM). Pero los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{CX}$ son ortogonales, luego $x(x-3) + y^2 = 0$. Como $x^2 + y^2 = 1$, $x = 1/3$ e $y = \sqrt{8}/3$. Por el Teorema de Pitágoras, $BC^2 = y^2 + (2-x)^2 = 11/3$, esto es $BC = \sqrt{33}/3$.

6. ¿De cuántas formas se pueden colorear los vértices de un polígono con $n \geq 3$ lados usando tres colores de forma que haya exactamente m lados, $2 \leq m \leq n$, con los extremos de colores diferentes?

Solución. En el polígono señalamos los puntos medios de los m lados cuyos extremos deben colorearse con colores diferentes. Esto puede hacerse de $\binom{n}{m}$ formas. Los n vértices del polígono quedan divididos así en m grupos de vértices consecutivos en los que todos ellos tienen el mismo color pero los vértices de grupos adyacentes tienen colores diferentes. Hay entonces tantas formas de colorear estos grupos como formas de colorear un polígono de m lados sin que haya ningún lado con los extremos del mismo color (que es en realidad el caso particular $m = n$ del problema; esta interpretación también es válida si $m = 2$ considerando el "polígono" con 2 vértices unidos por un doble lado). La solución será entonces $\binom{n}{m} C_m$, donde C_m es este número.

Obtendremos C_m encontrando una relación de recurrencia para estos números. Obviamente, $C_2 = C_3 = 6$. Supongamos entonces $m \geq 4$ y fijemos tres vértices consecutivos P_1, P_2, P_3. Si P_1 y P_3 van coloreados de forma distinta, simplemente podemos unirlos directamente eliminando P_2 y resultará un polígono con $m-1$ lados a colorear de la forma indicada. Recíprocamente, cada uno de estos polígonos coloreados dará origen a uno con m lados (el color de P_2 quedará determinado por los de P_1 y P_3), por tanto contribuyen a C_m con C_{m-1} posibilidades. Por otro lado, si P_1 y P_3 tienen el mismo color, los podemos pegar eliminando P_2, resultando un polígono con $m-2$ lados que tendremos que colorear. Cada una de estas coloraciones dará origen ahora a 2 coloraciones para el polígono original (pues habrá 2 posibilidades para P_2) y por tanto, la contribución a C_m de este caso es $2C_{m-2}$. Encontramos así la relación de recurrencia buscada: $C_m = C_{m-1} + 2C_{m-2}$.

De la relación anterior obtenemos fácilmente los primeros valores de C_m, $m \geq 2$: 6, 6, 18, 30, 66, 126,... Si comparamos esta sucesión con la de las potencias de 2: 4, 8, 16, 32, 64, 128,..., parece obvio que $C_m = 2^m + (-1)^m 2$, fórmula que se puede confirmar fácilmente por inducción. En efecto, la fórmula es correcta para C_2 y C_3 y, si $m \geq 4$,

$$C_m = C_{m-1} + 2C_{m-2} = 2^{m-1} + (-1)^{m-1}2 + 2(2^{m-2} + (-1)^{m-2}2) = 2^m + (-1)^m 2.$$

Por tanto la solución es $\binom{n}{m}(2^m + (-1)^m 2)$.

Soluciones

Problema 1. *Sea E una elipse y consideremos tres rectas paralelas r_1, r_2 y r_3, cada una de las cuales corta a E en dos puntos distintos. Sean estos puntos A_1, B_1, A_2, B_2 y A_3, B_3, respectivamente. Probar que los puntos medios de los segmentos A_1B_1, A_2B_2 y A_3B_3 están alineados.*

Solución 1. *El resultado es inmediato en el caso de que la elipse sea una circunferencia. Esta tres rectas determinan tres cuerdas y sus puntos medios son los puntos de corte de las rectas con un diámetro perpendicular a todas ellas. En otro caso, pensando en la elipse como la intersección de un cono con un plano (el cono de Apolonio), la proyección sobre un plano perpendicular al eje del cono nos da una circunferencia y las rectas paralelas se proyectan en rectas paralelas.*

Solución 2. *Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que la ecuación de nuestra elipse es $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Entre todas las rectas de pendiente dada m consideraremos dos particulares: en primer lugar la que pasa por el origen, O, $y = mx$. Por simetría, el origen será precisamente el punto medio de los dos puntos en que esta recta corta a la elipse; a continuación, consideramos una de las dos rectas tangentes a la elipse con esta pendiente m en el punto que llamamos P. Si nuestras rectas r_1, r_2 y r_3 tienen pendiente m y los puntos medios de los puntos de corte con la elipse van a estar alineados, estos puntos medios deben estar sobre la recta que pasa por O y P.*
Tomemos una recta con ecuación $y = mx + c$ y determinemos sus intersecciones con la elipse, A y B, con coordenadas respectivas, (x_A, y_A) y (x_B, y_B). x_A y x_B serán las soluciones para la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(mx + c)^2}{b^2} = 1,$$

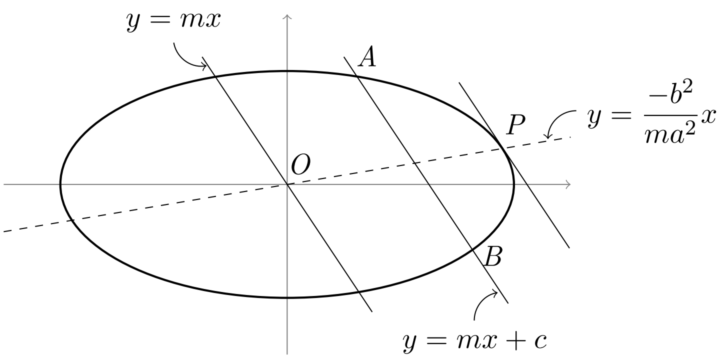
es decir,

$$(b^2 + m^2a^2)x^2 + (2ma^2c)x + a^2c^2 - a^2b^2 = 0,$$

que vienen dadas por

$$\frac{-2ma^2c \pm \sqrt{(2ma^2c)^2 - 4(b^2 + m^2a^2)(a^2c^2 - a^2b^2)}}{2(b^2 + m^2a^2)},$$

una para cada signo. Por lo tanto, si el punto medio tiene por coordenadas (x_M, y_M), entonces $x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-ma^2c}{b^2 + m^2a^2}$ e $y_M = mx_M + c = \frac{b^2c}{b^2 + m^2a^2}$, que están sobre la recta $y = \frac{y_M}{x_M}x = \frac{-b^2}{ma^2}\ x$, que es independiente del valor de c de la recta particular elegida.



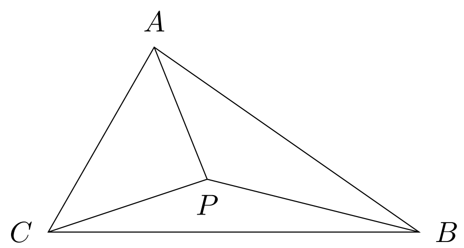
Solución 3. *Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que la ecuación de nuestra elipse es* $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ *y que la pendiente común de* r_1, r_2 *y* r_3 *es* m. *La transformación,* f, *definida por*

$$(x', y') = f(x, y) = (\frac{x}{a}, \frac{y}{b})$$

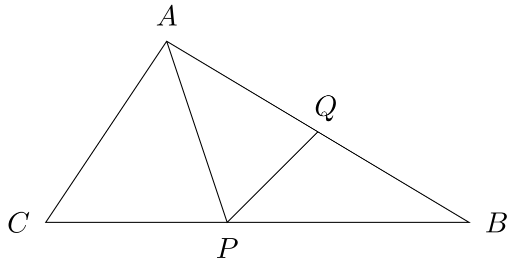
convierte la elipse en una circunferencia de ecuación $x'^2 + y'^2 = 1$, *y una recta de ecuación* $y = mx + c$ *en una recta de ecuación* $by' = max' + c$, *es decir,* $y' = \dfrac{ma}{b}x + \dfrac{c}{b}$. *Por tanto, las imágenes por* f *de* r_1, r_2 *y* r_3 *serán tres rectas que cortan a la circunferencia formando tres cuerdas paralelas entre sí, y sus puntos medios estarán entonces sobre el diámetro ortogonal a todas ellas, es decir, sobre la recta de ecuación* $y' = -\dfrac{b}{ma}x'$. *Como* f *conserva los puntos medios, por linealidad, los puntos medios de* A_1B1, A_2B_2 *y* A_3B_3 *estarán sobre la recta* $\dfrac{y}{b} = -\dfrac{b}{ma}\dfrac{x}{a}$, *es decir,* $y = -\dfrac{b^2}{ma^2}x$, *el diámetro conjugado de* $y = mx$.

Problema 2. *Sea* T *un triángulo de ángulos* α, β *y* γ. *¿Para qué valores de* α, β *y* γ *el triángulo* T *se puede dividir en tres triángulos congruentes entre sí?*

Solución. *Si* $\alpha = \beta = \gamma$, *el triángulo es equilátero y siendo* O *el centro de* T, *los triángulos que se obtienen uniendo* O *con cualquiera par de vértices son congruentes. Veremos que sólo en este caso se puede obtener una división con tres triángulos congruentes, con un vértice común en el interior de* T.



Denotemos por r, s *y* t *los ángulos de estos tres triángulos congruentes y supongamos, por ejemplo, que* r *es uno de los ángulos* $\angle APB$, $\angle BPC$ *o* $\angle CPA$. *Dado que cualquiera de estos ángulos es menor que* π, r *sumado a cualquiera de ellos ha de ser mayor que* π, *por lo que no pueden ser ni* s *ni* t, *pues* $r + s + t = \pi$, *luego los tres deben ser iguales a* r, *y* T *es equilátero.*
Analicemos ahora el caso en que los tres triángulos congruentes tengan un vértice común, P *sobre uno de los lados, por ejemplo el lado* BC, *y supongamos que los triángulos son* $\triangle CPA$, $\triangle APQ$ *y* $\triangle QPB$, *para algún punto* Q *sobre el lado* AB.
Nótese que ahora hay analogía entre los ángulos $\angle QPA$ *y* $\angle BPQ$, *pero no entre estos y* $\angle APC$.



Como antes, siendo r, s y t los ángulos de los tres triángulos congruentes, comenzamos analizando el caso en que $\angle QPA$ y $\angle BPQ$, digamos r
Por congruencia se tiene que $\overline{AQ} = \overline{QS}$, por lo que también $\overline{AP} = \overline{PB}$. Dado que $\triangle APB$ es isósceles y Q es el punto medio de AB, $\angle PQA = \angle PQB = \pi/2$. Luego, los triángulos congruentes son rectángulos y los ángulos son $r = \pi/3$, $s = \pi/2$, $t = \angle ABC = \pi/6$.
Si los ángulos $\angle APQ$ y $\angle QPB$ no son el mismo, digamos que son r y s, entonces $\angle APC = t$ y dado que también $r+s+\angle PAB+\angle PBA$, se tendrá $t = \angle PAB+\angle PBA$, por lo ninguno de ellos puede ser t. Entonces, $\angle PQA = \angle PQB = \pi/2$. Si además de no ser el mismo ángulo, fuese $r \neq s$, se tendría $\overline{AQ} \neq \overline{QB}$ por lo que, por la congruencia de $\triangle AQP$ y $\triangle QBP$, deberá tenerse $\overline{AQ} = \overline{PB}$. Pero dos triángulos rectángulos en que la hipotenusa de uno es igual a un cateto del otro, no pueden ser congruentes. Por lo tanto $r = s$, y estamos en el supuesto anterior.
Por tanto, sólo existen dos tipos de triángulos que se pueden descomponer en tres triángulos congruentes: los equiláteros y los rectángulos (30, 60, 90).

Problema 3. *Se considera la función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definida como sigue:*

$$f(n) = \begin{cases} -f(\frac{n}{2}) & \text{si } n \text{ es par} \\ f(n-1)+1 & \text{si } n \text{ es impar,} \end{cases}$$

para $n \geq 0$. Demostrar que $f(n)$ es múltiplo de 3 si, y sólo si, n es múltiplo de 3, y hallar el menor número n que cumple $f(n) = 2017$.

Solución 1. *De la definición de f se sigue que $f(2^a) = (-1)^a$, para todo $a \geq 0$. Siendo $a > b \geq 0$, entonces*

$$f(2^a + 2^b) = f(2^b(2^{a-b}+1)) = (-1)^b[(-1)^{a-b}+1] = (-1)^a + (-1)^b,$$

y, en general, si $a_1 > \cdots > a_k \geq 0$, se tiene que

$$f(2^{a_1} + \cdots + 2^{a_k}) = (-1)^{a_1} + \cdots + (-1)^{a_k}.$$

Los restos de 2^n al dividir entre 3 son 1 o 2, dependiendo de si n es par o impar, y dado que 2 y (-1) se diferencian en 3, se tiene que $2^{a_1} + \cdots + 2^{a_k}$ y $(-1)^{a_1} + \cdots + (-1)^{a_k}$ dan el mismo resto al dividir entre 3.
Para la segunda parte, claramente el menor número buscado se conseguirá sumando las menores potencias pares de 2 hasta completar 2017, es decir,

$$2^0 + 2^2 + 2^{2\times 2} + \cdots + 2^{2\times 2016},$$

progresión geométrica de razón 4 cuya suma es $\dfrac{2^{2\times 2017}-1}{3}$

Solución 2. *Se prueba por inducción en el número de cifras binarias de n, que $f(n)$ es el número de unos que tiene la expresión binaria de n en posiciones impares menos el número de unos que tiene en posiciones pares (considerando que contamos de derecha a izquierda y que empezamos por la posición uno). Si*

$$n = (a_k \dots a_2 a_1)_{(2)},$$

entonces usando que $2^{2n+1} \equiv 2 \pmod 3$ y $2^{2n} \equiv 1 \pmod 3$, resultará que

$$n \equiv a_k(-1)^k + \cdots + a_2 - a_1,$$

que es múltiplo de 3 si y solo si $f(n) = a_k(-1)^{k+1} + \cdots - a_2 + a_1$ es múltiplo de 3. De la descripción de f es obvio que el menor que cumple que $f(n) = 2017$ es

$$4^0 + 4^1 + \cdots + 4^{2016} = \frac{4^{2017} - 1}{3}.$$

Problema 4. *Describir todas las soluciones enteras positivas (m, n) de la ecuación $8m - 7 = n^2$ y dar el primer valor de m (si existe) mayor que 1959.*

Solución. *Como n tiene que ser impar, $n = 2s - 1$ para algún número natural s. Así:*

$$8m - 7 = (2s-1)^2 = 4s(s-1) + 1 = 8\binom{s}{2} + 1 \quad y \quad 8m = 8\left(\binom{s}{2} + 1\right),$$

de donde obtenemos que las soluciones son de la forma $m = \binom{s}{2} + 1$ y $n = 2s - 1$.

Con $s = 63$ se tiene $m = \frac{63\times 62}{2} + 1 = 1954$ y para $s = 64$ nos sale $m = \frac{64\times 63}{2} + 1 = 2017$. La respuesta a la segunda pregunta es pues $m = 2017$.

Problema 5. *Se colorean los números $1, 2, \dots, n$ de dos colores, azul y rojo. Probar que si $n = 2017$ existe una coloración tal que la ecuación*

$$8(x + y) = z$$

no tiene soluciones monocromáticas. Determinar el menor n para el que nunca es posible colorear los números de forma tal que no haya soluciones monocromáticas.

Solución. *Para la segunda pregunta, observamos que si el 1 es azul, entonces $8(1+1) = 16$ es rojo, y por tanto $8(16 + 16) = 256$ azul y $8(256 + 1) = 2056$ es rojo. En general, si un número i es azul $8(i + 1)$ es rojo, y por consiguiente $i - 15$ no puede ser rojo ya que en ese caso tendríamos $8((i - 15) + 16) = 8(i + 1)$. Por tanto, si i es azul, $i - 15$ también. Ahora bien, 256 es azul y por tanto $256 - 15 \cdot 16 = 256 - 240 = 16$ es azul, lo cual es una contradicción. Por tanto, necesariamente ha de ocurrir que $n < 2056$. Si eso sucede es posible no tener soluciones monocromáticas: pintamos el $[1, 15]$ de azul, el $[16, 255]$ de rojo y el $[256, 2055]$ nuevamente de azul. Por tanto, no hay soluciones monocromáticas, ya que si x, y fuesen ambos rojos, $8(x + y) \geq 8(16 + 16) = 256$ y ya no tenemos números rojos tan grandes. Si ambos fuesen azules y ≤ 15 entonces $8(x + y)$ está entre 16 y 240, con lo que no hay problemas; por su parte, si uno es ≥ 256, entonces $8(x + y) \geq 8 \cdot 257 = 2056$, número que ya no estamos considerando. En el caso 2017 basta considerar esta misma coloración pintando azul el $[256, 2017]$.*

Problema 6. *Calcular el número máximo de raíces reales distintas que puede tener un polinomio P que verifique la siguiente propiedad: el producto de dos raíces distintas de P sigue siendo una raíz de P.*

Solución. *La respuesta es 4. El polinomio $x(x-1/2)(x-1)(x-2)$, con raíces 0, 1/2, 1 y 2, cumple dicha cota. Supongamos que hubiese un polinomio con al menos 5 raíces distintas. Es importante reseñar que un polinomio tiene una cantidad finita de raíces y es lo que nos permite tomar máximos y mínimos.*
Si un polinomio tiene 5 raíces, al menos 4 serían no nulas y distinguimos dos casos.

1. *Si -1 es raíz, hay al menos una raíz (de hecho, al menos dos) con valor absoluto no nulo distinto de 1. Sea A una raíz con el mayor valor absoluto entre todas la raíces y supongamos que $|A| > 1$. Como -1 y A son raíces, $-A$ es raíz; pero entonces también lo sería $-A \cdot A = -A^2$ y $\left|A^2\right| > |A|$, lo que contradiría la maximalidad del valor absoluto de A.*

   Si no existen raíces con valor absoluto > 1, tomemos como A una de las raíces con el menor valor absoluto entre todas las raíces distintas de 0. Se tendrá entonces que $|A| < 1$, y como -1 y A son raíces, $-A$ es raíz y también lo será $-A \cdot A = -A^2$. Pero entonces, $\left|A^2\right| < |A|$, lo que contradiría la minimalidad del valor absoluto de A entre las raíces no nulas.

2. *Si -1 no es raíz, hay al menos tres raíces no nulas y de módulo distinto de 1. Hay entonces dos raíces A, B con los dos valores absolutos mayores (mayores que 1) o bien dos raíces con los dos valores absolutos menores A, B (menores que 1 y no nulos). En cualquier caso multiplicando $A \cdot B$ llegamos a una contradicción con la maximalidad o minimalidad.*

LIV Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Primera sesión

Viernes tarde, 19 de enero de 2018

1. Determinar los números reales $x > 1$ para los cuales existe un triángulo cuyos lados tienen longitudes

$$x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1, \qquad 2x^3 + x^2 + 2x + 1, \qquad x^4 - 1$$

2. Sea n un número natural. Probar que si la última cifra de 7^n es 3, la penúltima es 4.

3. Sea AD la mediana de un triángulo ABC tal que $\angle ADB = 45°$ y $\angle ACB = 30°$. Determinar el valor de $\angle BAD$.

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.

LIV Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Segunda sesión

Sábado mañana, 20 de enero de 2018

4. Probar que:

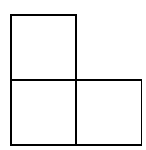
1. La suma de las distancias desde un punto de la superficie de la esfera inscrita en un cubo de $\mathbb{R}^3$ a todas las caras del mismo no depende del punto elegido.
2. Misma cuestión anterior para la suma de los cuadrados de las distancias.
3. Misma cuestión que las anteriores para la suma de los cubos de las distancias.

5. Sean a, b, c números naturales primos, distintos dos a dos. Demostrar que el número

$$(ab)^{c-1} + (bc)^{a-1} + (ca)^{b-1} - 1$$

es un múltiplo del producto abc.

6. Se han coloreado 46 cuadrados unitarios de una cuadrícula 9×9. ¿Hay, en la cuadrícula, alguna figura del tipo



(no necesariamente con la orientación que muestra el dibujo) con las tres casillas coloreadas?

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.

Viernes mañana

Problema 1. Sean $a \geq 1$, $b \geq 1$ números naturales cuyo máximo común divisor y mínimo común múltiplo designamos por D y M, respectivamente.

Demostrar que
$$D^2 + M^2 \geq a^2 + b^2.$$

Solución.

Si a' y b' son los respectivos cocientes obtenidos al dividir a y b entre D, se tiene:

$$a = Da', \quad b = Db', \quad a' \geq 1, \quad b' \geq 1, \quad \text{m.c.d. } (a', b') = 1, \quad M = \frac{ab}{D} = Da'b'.$$

Por consiguiente, la desigualdad propuesta en el enunciado se puede escribir como

$$(Da'b')^2 + D^2 \geq (Da')^2 + (Db')^2,$$

o, equivalentemente,
$$a'^2b'^2 + 1 \geq a'^2 + b'^2,$$

equivalente, a su vez, a la desigualdad

$$\left(a'^2 - 1\right)\left(b'^2 - 1\right) \geq 0,$$

que es obviamente cierta habida cuenta de que $a' \geq 1$ y $b' \geq 1$ son números naturales, con lo que concluimos.

Se verifica la igualdad solo cuando $a|b$ o $b|a$.

Problema 2. ¿De cuántas maneras se puede escribir 111 como suma de tres números enteros en progresión geométrica?

Solución.

Sean a, ar, ar^2 números enteros que satisfacen la ecuación

$$a + ar + ar^2 = 111, \tag{1}$$

siendo r un número racional.

Habida cuenta de que $1 + r + r^2 = \left(r + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$, existen números *naturales* p y q, primos entre sí, tales que
$$1 + r + r^2 = \frac{p}{q} \tag{2}$$

y (1) puede escribirse en la forma $a = \frac{111q}{p}$, de donde se sigue que p ha de ser un divisor de 111; a saber, $p \in \{1, 3, 37, 111\}$.

Escribimos ahora (2) como una cuadrática en r,

$$qr^2 + qr + (q - p) = 0, \tag{3}$$

e imponemos que su discriminante, $q\,(4p - 3q)$, sea igual o mayor que cero. Al ser positivo el factor de la izquierda (pues q es un número natural), deberá cumplirse que

$$4p - 3q \geq 0. \tag{4}$$

Tenemos, pues:

Caso $p = 1$. El único valor admisible para q es 1. Al sustituir p y q por 1 en (3), esta ecuación se escribe $r(r+1)=0$, obteniéndose $r=-1$ y $r=0$.

Caso $p=3$. Al ser $q \leq 4$ (por (4)) y m.c.d.$(p,q)=1$ (porque la fracción $\frac{p}{q}$ es irreducible por hipótesis), los valores admisibles para q son $q=1$, $q=2$ y $q=4$.

Si $q=1$, la ecuación (3) se escribe $r^2+r-2=0$ y obtenemos $r=-2$ y $r=1$.

Si $q=2$, la correspondiente cuadrática es $2r^2+2r-1=0$ que no tiene raíces racionales.

Si $p=4$ se tiene $4r^2+4r+1=0$ y $r=-\frac{1}{2}$.

Los casos $p=37$ y $p=111$ pueden discutirse con un razonamiento análogo al anterior.

La tabla siguiente muestra las ternas (p,q,r) válidas:

p	q	r
1	1	-1, 0
3	1	-2, 1
3	4	$-1/2$
37	9	$4/3,\ -7/3$
37	16	$3/4,\ -7/4$
37	49	$-4/7,\ -3/7$
111	1	-11, 10
111	100	$-11/10,\ 1/10$
111	121	$-10/11,\ -1/11$

correspondiendo a las cuales se obtienen las diecisiete soluciones que resuelven el problema:

$r=0$	$111+0+0$
$r=1$	$37+37+37$
$r=-1$	$111-111+111$
$r=-2$	$37-74+148$
$r=-1/2$	$148-74+37$
$r=-3/4$	$48+36+27$
$r=4/3$	$27+36+48$
$r=-7/3$	$27-63+147$
$r=-3/7$	$147-63+27$
$r=-7/4$	$48-84+147$
$r=-4/7$	$147-84+48$
$r=1/10$	$100+10+1$
$r=10$	$1+10+100$
$r=-11$	$1-11+121$
$r=-1/11$	$121-11+1$
$r=-10/11$	$121-110+100$
$r=-11/10$	$100-110+121$

Problema 3. Encontrar las funciones reales f, de variable real, que satisfacen la ecuación funcional

$$f(x+f(x+y))=f(2x)+y\ ,$$

cualesquiera sean x, y reales.

Solución.

Haciendo las sustituciones $x=f(0)$ y $y=-f(0)$ obtenemos $f(f(0)+f(0))=f(2\cdot f(0))+f(0)$, de donde $f(0)=0$. Sustituyendo ahora $x=0$ en la ecuación dada, dejando la variable y arbitraria, se tiene $f(0+f(y))=f(0)+y$, esto es,

$$f(f(y)) = y. \tag{5}$$

Al sustituir $y = 0$ en la ecuación del enunciado será $f(x + f(x)) = f(2x)$, de donde se sigue que $f(f(x + f(x))) = f(f(2x))$ y, por (1), $x + f(x) = 2x$, es decir,

$$f(x) = x$$

Es inmediato comprobar que esta función es solución cualesquiera sean los valores de x, y, con lo que concluimos.

Viernes tarde

Problema 4 Determinar los números reales $x > 1$ para los cuales existe un triángulo cuyos lados tienen longitudes

$$x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1, \qquad 2x^3 + x^2 + 2x + 1, \qquad x^4 - 1.$$

Solución.

Justificaremos que para todo número real $x > 1$ existe un tal triángulo probando que el lado mayor es menor que la suma de los otros dos. En efecto, para cualquier real $x > 1$, tenemos:

(i) $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 > 0, \qquad 2x^3 + x^2 + 2x + 1 > 0, \qquad x^4 - 1 > 0.$

(ii) $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 > 2x^3 + x^2 + 2x + 1$, ya que

$$x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 - (2x^3 + x^2 + 2x + 1) = x^4 - x^3 + x^2 - x = x(x-1)(x^2+1) > 0.$$

(iii) $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 > x^4 - 1.$

(iv) $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 < (2x^3 + x^2 + 2x + 1) + (x^4 - 1)$, puesto que

$$\begin{aligned} x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 - (2x^3 + x^2 + 2x + 1) - (x^4 - 1) &= -x^3 + x^2 - x + 1 \\ &= -(x-1)(x^2+1) \\ &< 0 \end{aligned}$$

y concluimos.

Problema 5 Sea n un número natural. Probar que si la última cifra de 7^n es 3, la penúltima es 4. Solución.

Los restos potenciales de 7 respecto del módulo 10 coinciden con la última cifra, o cifra de las unidades, de las potencias de 7 y siendo

$$\begin{aligned} 7^0 &\equiv 1 \pmod{10} \\ 7^1 &\equiv 7 \pmod{10} \\ 7^2 &\equiv 9 \pmod{10} \\ 7^3 &\equiv 3 \pmod{10} \\ 7^4 &\equiv 1 \pmod{10}, \end{aligned}$$

resulta que 7^n acaba en 3 solo cuando $n = 4q + 3$, q un número natural: en efecto, al ser n de la forma $n = 4q + r$, q y r naturales, $r \in \{0, 1, 2, 3\}$, tenemos

$$\begin{aligned} 7^n = 7^{4q+r} &= (7^4)^q \cdot 7^r \\ &\equiv 1 \cdot 7^r \pmod{10} \\ &\equiv 3 \pmod{10} \quad \text{solo si } r = 3 \text{ pues } 0 \le r \le 3. \end{aligned}$$

Por consiguiente, si n acaba en 3, será $n = 4q + 3$ y

$$\begin{aligned}
7^n = 7^{4q+3} &= \left(7^4\right)^q \cdot 7^3 \\
&= 2401^q \cdot 343 \\
&= (2400+1)^q \cdot 343 \\
&= \left(\dot{1}00 + 1\right)^q \cdot 343 \\
&= \left(\dot{1}00 + 1\right) \cdot 343 && (\dagger) \\
&= \dot{1}00 + 343 \\
&= \dot{1}00 + (300 + 43) \\
&= \dot{1}00 + 43 && (\ddagger) \\
&= \underline{a_1}\,\underline{a_2}\,\underline{a_3}\ldots\underline{a_n}00 + 43 \\
&= \underline{a_1}\,\underline{a_2}\,\underline{a_3}\ldots\underline{a_n}43,
\end{aligned}$$

con lo que la cifra de las decenas es 4, como se quería.

$$(\dagger)\ \left(\dot{1}00+1\right)^q = \textstyle\sum_{j=0}^{q}\binom{q}{j}100^{q-j}\cdot 1^j = \underbrace{\displaystyle\sum_{j=0}^{q-1}\binom{q}{j}100^{q-j}}_{=\dot{1}00} + \underbrace{\binom{q}{q}100^0}_{=1} = \dot{1}00 + 1.$$

$$(\ddagger)\ \dot{1}00 + (300+43) = \underbrace{\left(\dot{1}00 + 300\right)}_{=\dot{1}00} + 43 = \dot{1}00 + 43.$$

Problema 6 Sea AD la mediana de un triángulo ABC tal que $\angle ADB = 45°$ y $\angle ACB = 30°$. Determinar el valor de $\angle BAD$.

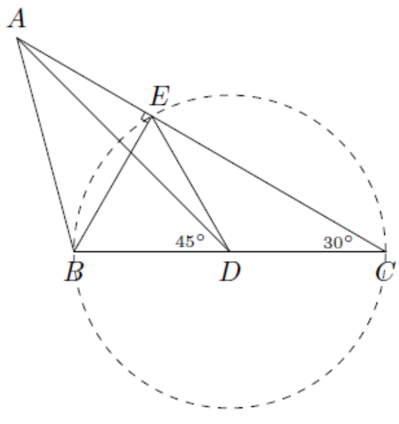
Solución 1.

En $\triangle ABC$, sea E el pie de la perpendicular trazada desde B. Entonces el triángulo EBC es rectángulo en E, el punto D es - por hipótesis - el punto medio de su hipotenusa BC y, por tanto, el circuncentro de dicho triángulo en cuya circunferencia circunscrita el ángulo BDE es el central correspondiente al inscrito $\angle BCE$. Por consiguiente,

$$\begin{aligned}
\angle BDE &= 2\cdot\angle BCE \\
&= 2\cdot\angle BCA \\
&= 2\times 30° \\
&= 60°.
\end{aligned}$$

Se sigue que $\triangle EBD$ es equilátero (pues es isósceles y tiene un ángulo de 60°) y, a su vez,

$$\begin{aligned}
\angle ADE &= \angle BDE - \angle ADB \\
&= 60° - 45° \\
&= 15° \\
&= \angle DAE \quad \text{(por el teorema del ángulo exterior aplicado a } \triangle ADC \text{ en } D).
\end{aligned}$$



Así, $\triangle EAD$ es isósceles con $AE = ED$. Mas $ED = EB$, pues $\triangle EBD$ es equilátero, según hemos visto.

Por tanto, $AE = EB$ y $\triangle AEB$ es rectángulo (en E) e isósceles. En consecuencia, $\angle BAE = 45^\circ$ y

$$\angle BAD = \angle BAE - \angle DAE = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ.$$

Solución 2.

Por el teorema del ángulo exterior aplicado a ADC en D,

$$\begin{aligned} \angle CAD = \angle BDA - \angle DCA = 45^\circ - 30^\circ &= 15^\circ \\ &= \tfrac{1}{2}\angle DCA \end{aligned}$$

y

$$\angle DCA = \angle 2 \cdot \angle CAD.$$

La igualdad anterior se puede escribir, de una manera equivalente[1] como

$$AD^2 = DC\,(DC + CA)\,,$$

esto es,

$$m_a^2 = \frac{a}{2}\left(\frac{a}{2} + b\right)$$

y, por el teorema de la mediana aplicado a ABC, se obtiene

$$\frac{1}{4}\left(2b^2 + 2c^2 - a^2\right) = \frac{a}{2}\left(\frac{a}{2} + b\right)$$

o, equivalentemente,

$$b^2 + c^2 - a^2 = ab \tag{6}$$

Consideremos en lo que sigue el triángulo ABC y sus elementos.

Sustituimos el primer miembro de (1) por su igual, $2bc\cos A$ (por el teorema del coseno). Simplificamos y obtenemos

$$2c\cos A = a,$$

equivalente a

$$2\sin C\cos A = \sin A.$$

Dividiendo por $\cos A$ y habida cuenta de que $\angle C = 30^\circ$, resulta

$$\tan A = 1,$$

y

$$\angle A = 45^\circ.$$

Finalmente,

$$\angle BAD = \angle BAC - \angle DAC = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ.$$

[1] Si x, y, z son las longitudes de los lados de un triángulo XYZ respectivamente opuestos a X, Y, Z, entonces

$$\angle X = 2 \cdot \angle Y \Leftrightarrow x^2 = y\,(y + z)\,.$$

Soluciones fase local OME curso 2018/19

Alejandro Miralles Montolío

PRIMER DÍA

1. Para cada n´umero de cuatro cifras $\overline{abcd}$, denotamos por S al n´umero $S = \overline{abcd} - \overline{dcba}$. Demuestra que S es m´ultiplo de 37 si y s´olo si las dos cifras centrales del n´umero $\overline{abcd}$ son iguales.

   Solución. Escribimos el número como $\overline{abcd}$ como $1000a+100b+10c+d$ y el número $\overline{dcba}$ como $1000d+100c+10b+a$. Por tanto,

   $$S = \overline{abcd} - \overline{dcba} = 1000a + 100b + 10c + d - (1000d + 100c + 10b + a) = \\ 999(a-d) + 90(b-c) = 37 \cdot 3^3(a-d) + 2 \cdot 5 \cdot 3^2(b-c).$$

   El primer sumando es obviamente múltiplo de 37. El segundo sumando no tiene el factor 37 ya que éste es un número primo y $|b-c| \leq 9$. Por tanto, S será múltiplo de 37 si y sólo si $b-c=0$, es decir, si y sólo si $b=c$.

2. Demuestra que para todo $n \geq 2$ podemos encontrar n números reales $x_1, x_2, \cdots, x_n \neq 1$ de manera que los productos

   $$x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{1-x_1} \cdot \frac{1}{1-x_2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{1-x_n}$$

   son iguales.

   Solución. Dado $x \neq 1$, notemos que la ecuación

   $$x = \frac{1}{1-x} \Longleftrightarrow x^2 - x + 1 = 0$$

   no tiene soluciones reales. Sin embargo, dados $x, y \neq 1$,

   $$x \cdot y = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-y}$$

tiene una solución sencilla ya que

$$x \cdot y = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-y} = \frac{1}{x-1} \cdot \frac{1}{y-1}$$

y las ecuaciones

$$x = \frac{1}{x-1} \quad \text{e} \quad y = \frac{1}{y-1} \Longleftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \quad \text{e} \quad y^2 - y - 1 = 0$$

sí tienen solución

$$x = y = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Por tanto, si n es un número par, podemos agrupar de dos en dos cada término de cada producto y utilizar lo anterior, encontrando las soluciones

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

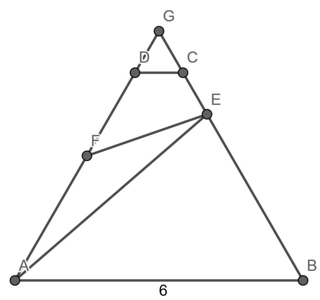
Si $n = 3$, consideramos, por ejemplo, $x_1 = x_2 = 2$. La igualdad del enunciado nos lleva a la ecuación

$$4x_3 = \left(\frac{1}{1-2}\right)^2 \frac{1}{1-x_3} = \frac{1}{1-x_3} \Longleftrightarrow 4x_3^2 - 4x_3 + 1 = 0$$

que da la solución $x_3 = \frac{1}{2}$. Así, obtenemos $(x_1, x_2, x_3) = (2, 2, \frac{1}{2})$. Si n es cualquier impar mayor que 3, basta con completar estos tres valores con un número par de valores de los x_k utilizando el caso par anterior.

3. El trapecio isósceles $ABCD$ tiene lados paralelos AB y CD. Sabemos que $\overline{AB} = 6$, $\overline{AD} = 5$ y $\angle DAB = 60^o$. Se lanza un rayo de luz desde A que rebota en CB en el punto E e interseca en AD en el punto F. Si AF = 3, calcula el ´area del tri´angulo AFE.

   Solución. Puesto que el trapecio es isósceles y $\angle DAB = 60^o$, podemos alargar los lados AD y BC que intersectan en G, formando así un triángulo equilátero ABG.



Llamando $\alpha = \angle EAB$, tendremos que $\angle AEB = 120 - \alpha$. Como el rayo sale simétricamente del lado BC, tendremos que $\angle GEF = 120 - \alpha$ y, por tanto,

$$\angle FEA = 180 - 2(120 - \alpha) = 2\alpha - 60.$$

Como $\angle FAE = 60 - \alpha$, tendremos que $\angle AFE = 180 - \alpha$ y entonces $\angle GFE = \alpha$. Esto demuestra que los triángulos GFE y BAE son semejantes. Llamando $x = \overline{GE}$, tendremos que $\overline{EB} = 6 - x$. Como $\overline{FG} = \overline{AG} - \overline{AF} = 6 - 3 = 3$, tendremos por la semejanza de triángulos que

$$\frac{3}{x} = \frac{6}{6-x} \Longleftrightarrow 18 - 3x = 6x \Longleftrightarrow 9x = 18$$

de donde obtenemos que $x = 2$ y, por tanto, $\overline{GE} = 2$ y $\overline{EB} = 4$. Tendremos

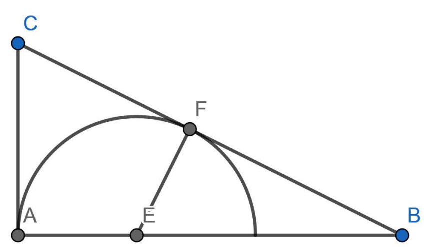
$$AB/GF = 6/3 = 2 \Longrightarrow \text{Área}(BAE)/\text{Área}(GFE) = 2^2 = 4.$$

El área del triángulo AFE se puede calcular, por ejemplo,

$$\text{Área}(AFE) = \text{Área}(AGB) - \text{Área}(GFE) - \text{Área}(AEB) =$$
$$\text{Área}(AGB) - 5\text{Área}(GFE) = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \operatorname{sen} 60 - 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \operatorname{sen} 60 =$$
$$(18 - 15)\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

SEGUNDO DÍA

4. Sea $p \geq 3$ un número primo y consideramos el triángulo rectángulo de cateto mayor $p^2 - 1$ y cateto menor $2p$. Inscribimos en el triángulo un semicírculo cuyo diámetro se apoya en el cateto mayor del triángulo y que es tangente a la hipotenusa y al cateto menor del triángulo. Encuentra los valores de p para los cuales el radio del semicírculo es un número entero.
Solución. En el triángulo rectángulo ABC, consideramos $\overline{AB} = p^2 - 1$, $\overline{AC} = 2p$.



Por el Teorema de Pitágoras, tendremos que $\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2$, así que

$$\overline{BC}^2 = (2p)^2 + (p^2 - 1)^2 = 4p^2 + p^4 - 2p^2 + 1 = p^4 + 2p^2 + 1 = (p^2 + 1)^2$$

de donde obtenemos que $\overline{BC} = p^2 + 1$.

Llamando r al radio del semicírculo, E el centro del círculo que está en el lado AB y F el punto de tangencia del semicírculo con el lado BC, tendremos que $\overline{AE} = \overline{EF} = r$. Por una parte, el área del triángulo ABC viene dada por

$$\text{Área}(ABC) = \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{AC} = (p^2 - 1)p.$$

Por otra,

$$\text{Área}(ABC) = \text{Área}(AEC) + \text{Área}(ECB) = \frac{1}{2}\overline{AE} \cdot \overline{AC} + \frac{1}{2}\overline{BC} \cdot \overline{EF} =$$

$$\frac{1}{2}r \cdot 2p + \frac{1}{2}(p^2 + 1) \cdot r = \frac{r}{2}(p^2 + 2p + 1) = \frac{r}{2}(p + 1)^2.$$

Igualando las dos expresiones para el área del triángulo ABC, obtenemos que

$$\frac{r}{2}(p + 1)^2 = (p^2 - 1)p$$

de donde

$$r = \frac{(p^2 - 1)2p}{(p + 1)^2} = \frac{2p(p - 1)}{p + 1}.$$

Es un cálculo sencillo comprobar que

$$2p - 4 < \frac{2p(p - 1)}{p + 1} < 2p$$

así que las únicas posibilidades para r son $2p - 1$, $2p - 2$ y $2p - 3$.

- Si $r = 2p - 1$, entonces

  $$2p - 1 = \frac{2p(p - 1)}{p + 1} \Longrightarrow 2p^2 + 2p - p - 1 = 2p^2 - 2p \Longrightarrow p = 1/3$$

- Si $r = 2p - 2 = 2(p - 1)$, entonces

  $$2(p - 1) = \frac{2p(p - 1)}{p + 1} \Longrightarrow 1 = \frac{2p}{p + 1} \Longrightarrow p = 1$$

- Si $r = 2p - 3$, entonces

  $$2p - 3 = \frac{2p(p - 1)}{p + 1} \Longrightarrow 2p^2 + 2p - 3p - 3 = 2p^2 - 2p \Longrightarrow p = 3$$

Por tanto, la única solución válida es $p = 3$, lo que nos da el valor de $r = 3$.

5. ¿Existen m, n números naturales de forma que

$$n^2 + 2018mn + 2019m + n - 2019m^2$$

es un número primo?

Solución. Tratamos de factorizar la expresión del enunciado. Igualando esta expresión a 0, tendremos

$$n^2 + (2018m + 1)n + 2019m - 2019m^2 = 0$$

que podemos tratar como una ecuación en la variable n, obteniendo que

$$n = \frac{-(2018m + 1) \pm \sqrt{(2018m + 1)^2 - 4(2019m - 2019m^2)}}{2}.$$

La expresión dentro de la raíz viene dada por

$$\begin{aligned}(2018m + 1)^2 - 4(2019m - 2019m^2) &= \\ 2018^2m^2 + 2 \cdot 2018m + 1 - 4 \cdot 2019m + 4 \cdot 2019m^2 &= \\ (2018^2 + 4 \cdot 2018 + 4)m^2 - 2m + 1 = 2020^2m^2 - 2m + 1 &= (2020m - 1)^2\end{aligned}$$

así que

$$n = \frac{-(2018m + 1) \pm (2020m - 1)}{2}$$

y, entonces, las soluciones son

$$n_1 = \frac{2m - 2}{2} = m - 1$$

y

$$n_2 = \frac{-4038m}{2} = -2019m.$$

Por tanto, podemos factorizar la expresión del enunciado como

$$n^2 + 2018mn + 2019m + n - 2019m^2 = (n + 2019m)(n - m + 1).$$

En este producto, el primer factor es obviamente mayor que 1. Una condición necesaria para que esta expresión sea un número primo es que $n - m + 1 = 1$, es decir, $n = m$. En este caso, el primer factor queda de la forma $n + 2019m = 2020n$, que es un número compuesto ya que 2020 lo es. Por tanto, la expresión del enunciado no será un número primo para ningún valor de n y de m naturales.

6. Fijamos un número natural $k \geq 1$. Encuentra todos los polinomios $P(x)$ que cumplan

$$P(x^k) - P(kx) = x^k P(x)$$

para todo valor de $x \in \mathbb{R}$.

Solución. Fijémonos que una solución trivial es $P(x) = 0$ para cualquier valor de $k \geq 1$.

Para encontrar otras soluciones, fijamos primero $k = 1$. En ese caso, la ecuación queda

$$P(x) - P(x) = xP(x),$$

por lo que $P(x) = 0$, que es la solución anterior.

Si $k \geq 2$ y $P(x)$ es una constante c, tendremos que $c - c = x^k c$ y, por tanto, $cx^k = 0$, imposible a menos que $c = 0$, que nos da el polinomio trivial $P(x) = 0$ de nuevo.

Supongamos pues que $k \geq 2$ y que el grado del polinomio es $n \geq 1$. Es obvio que $P(x^k)$ tendrá grado nk y $P(2x)$ tendrá grado n, así que el término de la izquierda de la igualdad será un polinomio de grado nk ya que $k \geq 1$. El término de la derecha será un polinomio de grado $n+k$, así que tendremos que $nk = n+k$, de donde $k(n-1) = n$ y, por tanto,

$$k = \frac{n}{n-1} = 1 + \frac{1}{n-1}.$$

Como k es un número natural, tendremos que necesariamente $n = 2$ y, por tanto, $k = 2$. Escribimos pues $P(x) = ax^2 + bx + c$ y, sustituyendo en la ecuación, obtenemos:

$$ax^4 + bx^2 + c - (4ax^2 + 2bx + c) = ax^4 + bx^3 + cx^2$$

y simplificando obtenemos $(b-4a)x^2 = bx^3 + cx^2$, de donde necesariamente obtenemos que $b = 0$ y $c = -4a$. Así pues, los polinomios cumpliendo la propiedad del enunciado serán todos los de la forma $P(x) = a(x^2-4)$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

En resumen, para todo $k \geq 1$, una solución es $P(x) = 0$. En el caso $k = 2$, los polinomios de la forma $P(x) = a(x^2-4)$ para cualquier $a \in \mathbb{R}$ también son solución.

LVI Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Primera sesión

Viernes mañana, 17 de enero de 2020

1. Dado un número natural $n > 1$, realizamos la siguiente operación: si n es par, lo dividimos entre dos; si n es impar, le sumamos 5. Si el número obtenido tras esta operación es 1, paramos el proceso; en caso contrario, volvemos a aplicar la misma operación, y así sucesivamente. Determinar todos los valores de n para los cuales este proceso es finito, es decir, se llega a 1 en algún momento.

2. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_{2020}$ 2020 números reales de manera que la suma de 1009 de ellos cualesquiera es positiva. Demostrar que la suma de los 2020 números también es positiva.

3. Determinar todos los valores reales de (x, y, z) para los cuales

$$
\begin{gathered}
x + y + z = 1 \\
x^2y + y^2z + z^2x = xy^2 + yz^2 + zx^2 \\
x^3 + y^2 + z = y^3 + z^2 + x
\end{gathered}
$$

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.

LVI Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Segunda sesión

Viernes tarde, 17 de enero de 2020

4. Consideramos el polinomio

$$p(x) = (x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a)$$

Demostrar que $p(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ si, y solamente si, $a = b = c$.

5. Sea ABC un triángulo con $AB < AC$ y sea I su incentro. El incírculo es tangente al lado BC en el punto D. Sea E el único punto que satisface que D es el punto medio del segmento BE. La l'ınea perpendicular a BC que pasa por E corta a CI en el punto P. Demostrar que BP es perpendicular a AD.

Observación. El incírculo de ABC es el círculo que es tangente a los tres lados del triángulo. El incentro es el centro de dicho círculo.

6. Sea n un entero positivo. En una cuadrícula de tamaño $n \times n$, algunas casillas tienen un espejo de doble cara a lo largo de una de sus diagonales. En el exterior de cada casilla de los lados izquierdo y derecho de la cuadrícula se encuentra un puntero láser, que apunta horizontalmente hacia la cuadrícula. Los láseres se numeran de 1 a n en cada lado, en ambos casos de arriba hacia abajo. Un láser es rojo cuando sale de la cuadrícula por el borde superior y es verde si sale de la cuadrícula por el borde inferior. Si cada láser sale o bien por el borde inferior o por el superior, demostrar que la suma de los láseres rojos es menor o igual que la suma de los láseres verdes.

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.

FASE LOCAL DE LA OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA.

Curso 2019-2020.

Propuesta de problemas (con soluciones).

Sesión viernes mañana.

Problema 1. Dado un número natural $n > 1$, realizamos la siguiente operación: si n es par, lo dividimos entre dos; si n es impar, le sumamos 5. Si el número obtenido tras esta operación es 1, paramos el proceso; en caso contrario, volvemos a aplicar la misma operación, y así sucesivamente. Determinar todos los valores de n para los cuales este proceso es finito, es decir, se llega a 1 en algún momento.

Solución. En primer lugar, es inmediato comprobar que siempre que empezamos por 2, 3 o 4 el proceso termina y que si empezamos por 5 entramos en el bucle (5, 10, 5, 10, ...) y nunca acabamos.
Si el número por el que se empieza es mayor que 5, en uno o dos pasos siempre pasamos a un número más pequeño. Para comprobar esto, observemos que si n es par, resulta evidente; si es impar, esto se sigue de la desigualdad $\frac{n+5}{2} < n$, ya que $\frac{n+5}{2}$ es el número obtenido tras dos iteraciones. Por tanto, siempre acabamos llegando a un número menor o igual que 5 y únicamente no terminaremos en aquellos casos para los que se vaya a parar al 5 después de un número cualquiera de iteraciones.
Ahora bien, aplicando sucesivamente las operaciones *sumar cinco* o *dividir entre 2* siempre mantenemos la propiedad de ser múltiplo de 5, con lo cual tenemos simultáneamente los dos resultados que queremos: (a) Para aquellos números que no son múltiplos de 5, aplicando sucesivamente las operaciones, siempre se acaba llegando a 1, 2, 3 o 4 y por lo tanto no hay ciclo. (b) De la misma manera, cualquier múltiplo de 5 acaba llegando al 5 y provocando una repetición infinita que nunca llega al número 1. Por ende, el proceso es finito si y solo si n no es múltiplo de 5.

Problema 2. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_{2020}$ 2020 números reales de manera que la suma de 1009 de ellos cualesquiera es positiva. Demostrar que la suma de los 2020 números también es positiva.

Solución 1. Sea S la suma de los 2020 números dados. Podemos escribir el número 1009S como la suma de 1009 veces S. Esto da como resultado

$$\begin{aligned}
1009\,S &= a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{1008} + a_{1009} + a_{1010} + \ldots + a_{2018} + a_{2019} + a_{2020} \\
&+ a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{1008} + a_{1009} + a_{1010} + \ldots + a_{2018} + a_{2019} + a_{2020} \\
&+ a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{1008} + a_{1009} + a_{1010} + \ldots + a_{2018} + a_{2019} + a_{2020} \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{1008} + a_{1009} + a_{1010} + \ldots + a_{2018} + a_{2019} + a_{2020} \\
&+ a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{1008} + a_{1009} + a_{1010} + \ldots + a_{2018} + a_{2019} + a_{2020} \\
&= (a_1 + a_2 + \ldots + a_{1008} + a_{1009}) + (a_2 + a_3 + \ldots + a_{1009} + a_{1010}) \\
&+ \ldots + (a_{2020} + a_1 + a_2 + \ldots + a_{1008}).
\end{aligned}$$

Como todas las sumas de 1009 números (se han coloreado 3 de esas sumas) son positivas, entonces $1009S$ es positivo y la suma S de los números dados tiene que ser positiva, como se pedía.

Solución 2. Sea S la suma de los 2020 números dados. Sin pérdida de generalidad, asumimos que $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{2020}$. Por la condición del enunciado, la suma $a_1 + a_2 + \cdots + a_{1009}$ es positiva. Esto quiere decir que al menos uno de los sumandos es positivo, en particular a_{1009} lo es por ser el mayor de ellos. Por lo tanto, a_i es positivo para todo $1010 \leq i \leq 2020$. Si escribimos

$$S = (a_1 + a_2 + \cdots + a_{1009}) + a_{1010} + a_{1011} + \cdots + a_{2020},$$

observamos que hemos escrito S como la suma de términos positivos, con lo cual su valor es positivo.

Problema 3. Determinar todos los valores reales de (x, y, z) para los cuales

$$\begin{array}{ccc} x+y+z & = & 1 \\ x^2y+y^2z+z^2x & = & xy^2+yz^2+zx^2 \\ x^3+y^2+z & = & y^3+z^2+x. \end{array}$$

Solución. La segunda ecuación la podemos reescribir como

$$(x-y)(y-z)(z-x) = 0.$$

Ahora, dado que la tercera ecuación no es simétrica, vamos a distinguir 3 casos diferentes:

(a) Si $x = y$, la tercera ecuación queda

$$x^2 + z = z^2 + x,$$

o alternativamente

$$(x-z)(x+z-1) = 0.$$

Por tanto, de las dos últimas tenemos que las opciones son $(\lambda, \lambda, \lambda)$ o $(\lambda, \lambda, -\lambda+1)$. Sustituyendo en la primera tenemos directamente dos soluciones del sistema, que son $(1/3, 1/3, 1/3)$ y $(0, 0, 1)$.

(b) Si $x = z$, la tercera ecuación queda

$$x^3 + y^2 = y^3 + x^2,$$

o alternativamente

$$(x-y)(x^2+y^2+xy-x-y) = 0.$$

De aquí obtenemos, sustituyendo en la primera ecuación, dos nuevas soluciones (además de la correspondiente a $x = y = z$), que son $(0, 1, 0)$ y $(2/3, -1/3, 2/3)$.

(c) Si $y = z$, la tercera ecuación queda

$$x^3 + y = y^3 + x,$$

o alternativamente

$$(x-y)(x^2+xy+y^2-1) = 0.$$

De aquí obtenemos dos nuevas soluciones, $(1, 0, 0)$ y $(-1, 1, 1)$

Por tanto, el sistema tiene las seis soluciones que hemos hallado.

Sesión viernes tarde.

Problema 1. Consideramos el polinomio

$$p(x) = (x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a).$$

Demostrar que $p(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ si y solamente si $a = b = c$.

Solución 1. En primer lugar, observamos que cuando $a = b = c$ se tiene que $p(x) = 3(x-a)^2$, que claramente satisface $p(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
Supongamos ahora que $p(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Desarrollando la expresión como un polinomio cuadrático, obtenemos que

$$p(x) = 3x^2 - 2(a+b+c)x + ab + bc + ca \geq 0.$$

En particular, esto quiere decir que el discriminante del polinomio, Δ, es menor o igual que 0. Dicho discriminante se puede obtener como

$$\Delta = 4(a+b+c)^2 - 12(ab+bc+ca) = 4(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca).$$

Por lo tanto, tenemos que

$$0 \geq 2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2,$$

y de aquí se sigue que necesariamente $a = b = c$.
Solución 2. En primer lugar, observamos que cuando $a = b = c$ se tiene que $p(x) = 3(x-a)^2$, que claramente satisface $p(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
Supongamos ahora que a, b y c no son todos iguales. Supongamos primero que los tres son distintos, sin pérdida de generalidad $a < b < c$. Entonces se tiene $p(b) = (b-c)(b-a) < 0$, con lo que es falso que $p(x)$ sea siempre no negativo.
Supongamos entonces que exactamente dos de los valores a, b y c son iguales, sin pérdida de generalidad $a = b$. Podemos sacar $x - a$ como factor común en la expresión de $p(x)$, y obtenemos

$$p(x) = (x-a)(3x-a-2c),$$

de lo que se deduce que a y $\frac{a+2c}{3}$ son las dos raíces de $p(x)$, que son distintas porque $a \neq c$. Concluimos que $p(x)$ es negativo en el intervalo abierto entre ambas raíces.

Problema 2. Sea ABC un triángulo con $AB < AC$ y sea I su incentro. El incírculo es tangente al lado BC en el punto D. Sea E el único punto que satisface que D es el punto medio del segmento BE. La línea perpendicular a BC que pasa por E corta a CI en el punto P. Demostrar que BP es perpendicular a AD.
Observación. El incírculo de ABC es el círculo que es tangente a los tres lados del triángulo. El incentro es el centro de dicho círculo.
Solución 1. Como P está en la bisectriz de $\angle ACB$, el círculo γ de centro P y radio PE es tangente al lado AC en un punto J. De esta manera $AJ = AC - CJ = AC - CE = AC - BC + 2BD = AC - BC + (AB + BC - AC) = AB$. Esto implica que el cuadrilátero $ABDP$ tiene diagonales perpendiculares, ya que

$$AB^2 + DP^2 = AB^2 + PE^2 + DE^2 = AJ^2 + PJ^2 + BD^2 = AJ^2 + BD^2,$$

donde hemos usado que los triángulos AJP y BEP son rectángulos.

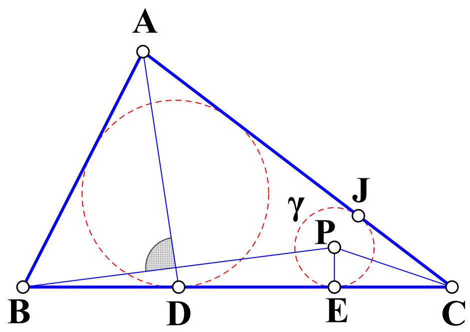


Figura 1: Esquema para resolver el Problema 2

Solución 2. Vamos a considerar un sistema de coordenadas centrado en B y de manera que BC es coincidente con el eje de abscisas. Como es habitual, llamaremos a, b y c a las longitudes de los lados BC, CA y AB, respectivamente; p designará al semiperímetro del triángulo; r al radio del incírculo; y $\beta = \angle ABC$. De esta manera, no resulta complicado identificar las coordenadas de los puntos B, P, A y D. En primer lugar, $B = (0,0)$ y $A = (c\cos\beta, 2pr/a)$, dado que la altura sobre el lado a, h_a, cumple que

$$h_a = \frac{2S}{a} = \frac{2pr}{a},$$

siendo S el área del triángulo. Por otra parte, $D = (p-b, 0)$. Finalmente, aplicando el teorema de Tales a los triángulos CEP y CDI, obtenemos que $P = (a+c-b, (b-c)r/(p-c))$.

Solo queda por comprobar que el producto escalar de los vectores es cero para obtener así la perpendicularidad buscada. Aplicando el teorema del coseno para expresar $\cos\beta$ en función de los lados, obtenemos entonces que el resultado a probar es equivalente a

$$\frac{(c-b)(p-a)}{a} \cdot 2(p-b) + \frac{2pr}{a} \cdot \frac{(b-c)r}{p-c} = 0.$$

Si dividimos por $b-c$ (dado que $c < b$ por la condición del enunciado), nos queda

$$r^2 = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}.$$

Ahora bien, esta expresión es claramente cierta como resultado de combinar la igualdad $r = S/p$ con la fórmula de Herón, y por tanto hemos concluido.

Problema 3. Sea n un entero positivo. En una cuadrícula de tamaño $n \times n$, algunas casillas tienen un espejo de doble cara a lo largo de una de sus diagonales. En el exterior de cada casilla de los lados izquierdo y derecho de la cuadrícula se encuentra un puntero láser, que apunta horizontalmente hacia la cuadrícula. Los láseres se numeran de 1 a n en cada lado, en ambos casos de arriba hacia abajo. Un láser es rojo cuando sale de la cuadrícula por el borde superior y es verde si sale de la cuadrícula por el borde inferior. Si cada láser sale o bien por el borde inferior o por el superior, demostrar que la suma de los láseres rojos es menor o igual que la suma de los láseres verdes.

Solución. Consideremos la unión S de las líneas de centros de cada fila y columna. Como cada espejo forma un ángulo de 45 grados con las direcciones de la cuadrícula,

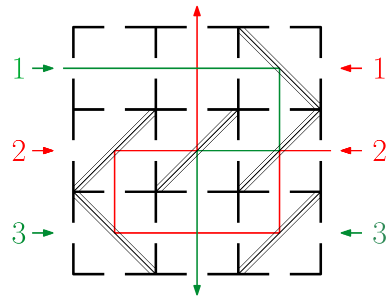


Figura 2: Un ejemplo de una configuración para el Problema 3, donde se muestran los recorridos de dos láseres.

los láseres se mueven a lo largo de S. Además, ningún segmento puede ser usado por dos láseres distintos. En efecto, si fuesen en la misma dirección, sería posible rehacer la pista de los láseres hasta su punto de partida, que debería ser el mismo para ambos. Si fuesen en direcciones contrarias, cada uno acabaría en el origen del otro, lo cual es imposible porque sabemos que ambos acaban en el borden superior o en el inferior, y nunca en el lateral. Hay $2n$ láseres y $2n$ puntos por los que un láser puede abandonar la cuadrícula, con lo que hay una biyección entre esos dos conjuntos. En particular, hay n láseres rojos que podemos numerar $r_1, \ldots, r_n$ y n láseres verdes, con números $v_1, \ldots, v_n$.

Un láser solo se puede mover verticalmente a través de los segmentos verticales de S, cuya longitud total es de n^2. Un láser rojo con número r_i necesita atravesar una distancia de al menos $r_i - 1/2$ usando segmentos verticales, mientras que uno verde con el número v_i necesita por lo menos $n - v_i + 1/2$. Se tiene por tanto la desigualdad

$$\sum_{i=1}^{n}\left(r_i - \frac{1}{2}\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(n - v_i + \frac{1}{2}\right) \leq n^2,$$

de donde se deduce directamente que $\sum r_i \leq \sum v_i$, como queríamos demostrar.

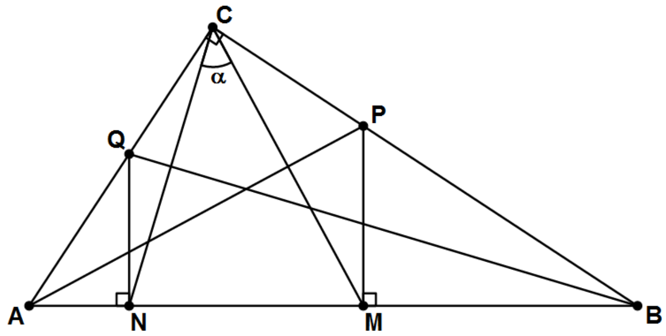
Olimpiada Matemática Española, Fase Local Aragón 2020

Primer día.

1

Sea ABC un triángulo rectángulo con el ángulo recto en el vértice C. Sea P el punto de corte de la bisectriz del ángulo $\angle BAC$ con el segmento BC, y Q el punto de corte de la bisectriz del ángulo $\angle ABC$ con el segmento AC. Sean M y N los puntos de corte con el segmento AB de las rectas perpendiculares al mismo y que pasan por P y Q respectivamente.

¿Cuánto vale el ángulo $\angle MCN$?



2

Considera el siguiente par de números naturales de 4 cifras:

(m, n) = (2601, 1600)   (es decir, m = 2601, n = 1600).

Fíjate que m y n verifican las siguientes propiedades:

1. Son números de 4 cifras (esto es, entre 1000 y 9999).
2. Son cuadrados perfectos.
3. Tienen las mismas cifras en exactamente dos de las cuatro posiciones. (En nuestro ejemplo, en la segunda y tercera posiciones.)
4. En las dos posiciones en las que las cifras son distintas, la cifra que aparece en m es igual a la que aparece en n más 1.

Encuentra todos los pares de números naturales que verifican estas cuatro propiedades.

Segundo día

3

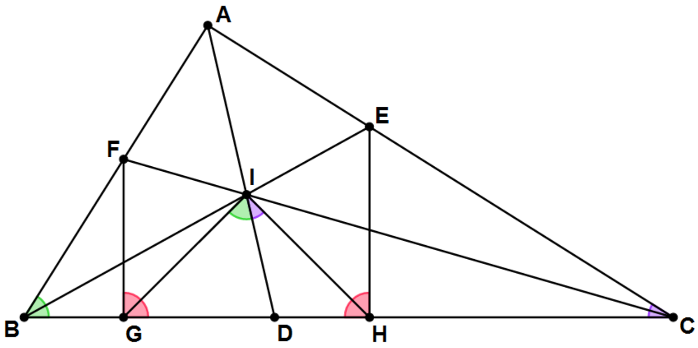
Determinar todos los números de cuatro cifras $n = \overline{abcd}$ tales que al insertar un dígito 0 en cualquier posición se obtiene un múltiplo de 7.

4

Determinar todas las parejas de enteros positivos (m, n) para los cuales es posible colocar algunas piedras en las casillas de un tablero de m filas y n columnas, no más de una piedra por casilla, de manera que todas las columnas tengan la misma cantidad de piedras, y no existan dos filas con la misma cantidad de piedras.

5

En el triángulo ΔABC con lado mayor BC, las bisectrices se cortan en I. Las rectas AI, BI, CI cortan a BC, CA, AB en los puntos D, E, F, respectivamente. Se consideran puntos G y H en los segmentos BD y CD, respectivamente, tales que $\angle GID = \angle ABC$ y $\angle HID = \angle ACB$. Probar que $\angle BHE = \angle CGF$.



6

Al desarrollar $\left(1+x+x^2\right)^n$ en potencias de x, exactamente tres términos tienen coeficiente impar. ¿Para qué valores de n es esto posible?

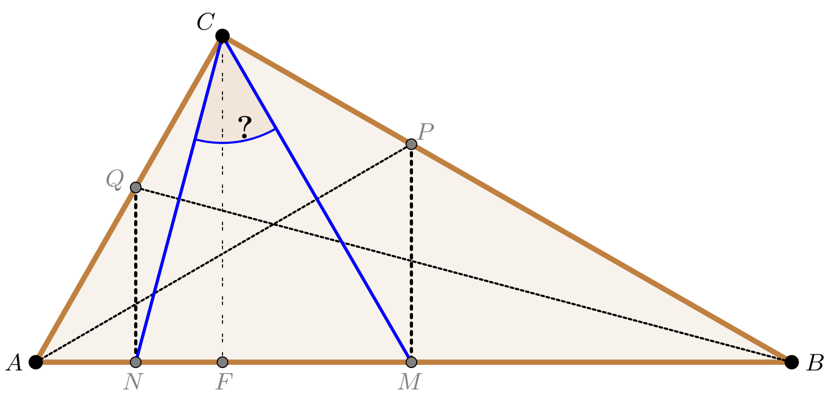
Fase aragonesa de la
LVII Olimpiada Matemática Española

Primera etapa (8 de enero de 2021)

1. Sea ABC un triángulo rectángulo con el ángulo recto en el vértice C. Sea P el punto de corte de la bisectriz del ángulo $\angle BAC$ con el segmento BC, y Q el punto de corte de la bisectriz del ángulo $\angle ABC$ con el segmento AC. Sean M y N los puntos de corte con el segmento AB de las rectas perpendiculares al mismo y que pasan por P y Q respectivamente.

¿Cuánto vale el ángulo $\angle MCN$?

Solución: La situación del problema queda reflejada en el siguiente gráfico:



Por ser un punto de la bisectriz de $\angle BAC$, la distancia de P a la recta AC es igual a la distancia a la recta AB. Por tanto los segmentos PC y PM tienen igual longitud y el triángulo PCM es isósceles. Deducimos que $\angle PCM = \angle PMC = \angle MCF$. De aquí obtenemos $2\angle MCF = \angle FCB$ y este es complementario de $\angle FBC = \angle ABC$, luego $2\angle MCF = \angle BAC$.

El mismo razonamiento da $2\angle NCF = \angle ABC$. Concluimos que

$$\angle MCN = \angle MCF + \angle NCF = \frac{1}{2}(\angle BAC + \angle ABC) = 45°.$$

De otro modo: Los triángulos APC y APM son congruentes, pues ambos son rectángulos, tienen la misma hipotenusa y el ángulo en A igual. Por tanto el triángulo CAM es isósceles y obtenemos

$$\angle AMC = \angle ACM = \frac{180° - \angle BAC}{2}.$$

Del mismo modo obtenemos $\angle BNC = \dfrac{180° - \angle ABC}{2}$. Ahora, usando el triángulo CMN, concluimos que:

$$\angle MCN = 180° - \frac{180° - \angle BAC}{2} - \frac{180° - \angle ABC}{2} = \frac{\angle BAC + \angle ABC}{2} = 45°.$$

2. Considera el siguiente par de números naturales de 4 cifras:

$$(m,n) = (2601, 1600) \qquad (\text{es decir, } m = 2601,\ n = 1600).$$

Fíjate que m y n verifican las siguientes propiedades:

- Son números de 4 cifras (esto es, entre 1000 y 9999).
- Son cuadrados perfectos.
- Tienen las mismas cifras en exactamente dos de las cuatro posiciones. (En nuestro ejemplo, en la segunda y tercera posiciones.)
- En las dos posiciones en las que las cifras son distintas, la cifra que aparece en m es igual a la que aparece en n más 1.

Encuentra todos los pares de números naturales que verifican estas cuatro propiedades.

Solución: Buscamos números naturales de la forma $m = a^2$, $n = b^2$, con $32 \leq b < a \leq 99$ y tales que $a^2 - b^2$ es uno de los siguientes números: 1100, 1010, 1001, 110, 101, 11.

Como $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$, $a+b$ y $a-b$ tienen la misma paridad, $65 \leq a+b \leq 197$ y $a - b \geq 0$, teniendo en cuenta las factorizaciones como producto de primos: $1100 = 2^2 \times 5^2 \times 11$, $1010 = 2 \times 5 \times 101$, $1001 = 7 \times 11 \times 13$, $110 = 2 \times 5 \times 11$, las únicas posibilidades son:

- $a^2 - b^2 = 1100$, $a+b = 2 \times 5 \times 11 = 110$, $a - b = 2 \times 5 = 10$. En este caso $a = 60$, $b = 50$ y obtenemos el par $(m,n) = (3600, 2500)$.
- $a^2 - b^2 = 1001$, $a+b = 11 \times 13 = 143$, $a - b = 7$. En este caso $a = 75$, $b = 69$ y obtenemos el par $(m,n) = (5625, 4624)$.
- $a^2 - b^2 = 1001$, $a+b = 7 \times 13 = 91$, $a - b = 11$. En este caso $a = 51$, $b = 40$ y obtenemos el par $(m,n) = (2601, 1600)$.
- $a^2 - b^2 = 1001$, $a+b = 7 \times 11 = 77$, $a - b = 13$. En este caso $a = 45$, $b = 32$ y obtenemos el par $(m,n) = (2025, 1024)$.
- $a^2 - b^2 = 101$, $a+b = 101$, $a - b = 1$. En este caso $a = 51$, $b = 50$ y obtenemos el par $(m,n) = (2601, 2500)$.

Así pues, existen exactamente 5 posibilidades.

Soluciones, tarde del jueves 21 de enero

1. Determinar todos los números de cuatro cifras $n = \overline{abcd}$ tales que al insertar un dígito 0 en cualquier posición se obtiene un múltiplo de 7.

Solución. Comenzamos observando que el número que resulta de insertar un 0 al final de n es $10n$, que al ser múltiplo de 7 obliga a que n también lo sea. De hecho, son múltiplos de 7 los siguientes cinco números:

$$
\begin{aligned}
n = \overline{abcd} &= 1000a + 100b + 10c + d \\
x = \overline{a0bcd} &= 10000a + 100b + 10c + d \\
y = \overline{ab0cd} &= 10000a + 1000b + 10c + d \\
z = \overline{abc0d} &= 10000a + 1000b + 100c + d \\
w = \overline{abcd0} &= 10000a + 1000b + 100c + 10d
\end{aligned}
$$

Como n, x son múltiplos de 7, también lo es su diferencia $x - n = 9000a$, y puesto que 9000 no es múltiplo de 7, debe serlo a. Al ser n un número de 4 cifras, se tiene que $a \neq 0$ y necesariamente debe ser $\boxed{a = 7}$.

De forma similar, $y - n = 9000a + 900b$ es múltiplo de 7, y sabemos que a es múltiplo de 7, luego $900b$ es múltiplo de 7. Y como 900 no es múltiplo de 7, debe serlo b, y se deduce que $\boxed{b = 0 \text{ o } b = 7}$.

Análogamente, razonando con $z - n = 9000a + 900b + 90c$ se obtiene que $\boxed{c = 0 \text{ o } c = 7}$, e insertando las condiciones de ser a, b, c múltiplos de 7 en el número de partida n deducimos que también $\boxed{d \text{ es } 0 \text{ o } 7}$.

Así pues, los números buscados son todos los que empiezan por 7 y las restantes cifras son 0 o 7:

$$7000, 7007, 7070, 7077, 7700, 7707, 7770, 7777.$$

2. Determinar todas las parejas de enteros positivos (m, n) para los cuales es posible colocar algunas piedras en las casillas de un tablero de m filas y n columnas, no más de una piedra por casilla, de manera que todas las columnas tengan la misma cantidad de piedras, y no existan dos filas con la misma cantidad de piedras.

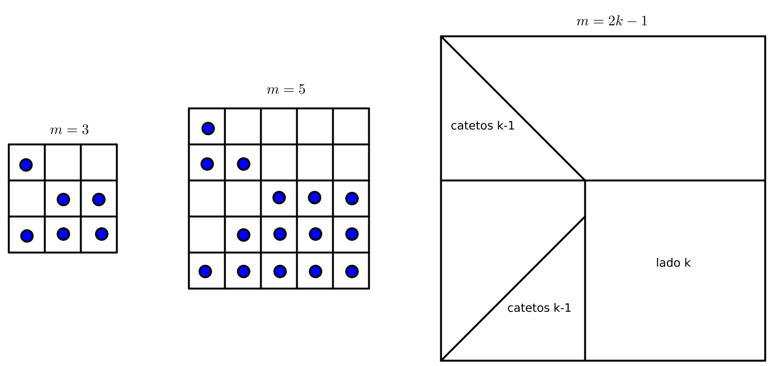
Solución 1. Veremos que las soluciones son todas las parejas (m, n) con $n \geq m$ si m es impar, o $n \geq m - 1$ si m es par.

Para $m = 1$, es inmediato que cualquier tablero $(1, n)$ es posible, por ejemplo llenándolo completamente de piedras.

Nótese la condición necesaria $n \geq m - 1$: para m filas son necesarias al menos $m - 1$ columnas, ya que $m - 1$ es la menor cantidad de piedras que puede contener la fila que tenga más piedras.

Sea $m \geq 3$ impar. Veamos que no es posible alcanzar el caso límite $n = m - 1$. En efecto, para llenar un tablero $(m, m-1)$ con distintas cantidades de piedras en cada fila, es necesario que las filas tengan $0, 1, \ldots, m-1$ piedras, en algún orden. El número total de piedras es $\frac{(m-1)m}{2}$, y debe ser igual a $t(m-1)$, siendo t la cantidad de piedras de cada columna. Como la igualdad $\frac{m}{2} = t$ es imposible cuando m es impar, en este caso el número de columnas debe ser $n \geq m$.

Una solución válida para el tablero (m, m), para $m = 2k-1$, se obtiene siguiendo el esquema de la siguiente figura:



Las piedras se colocan en dos triángulos rectángulos isósceles de catetos $k-1$, y en un cuadrado de lado k. Las cantidades de piedras en las filas son $1, 2, \ldots, k-1, k, k+1, \ldots, 2k-1$, y cada columna tiene k piedras.

Para $m \geq 2$ par, el tablero $(m, m-1)$ se resuelve partiendo de una solución del tablero $(m-1, m-1)$ y añadiendo una fila vacía.

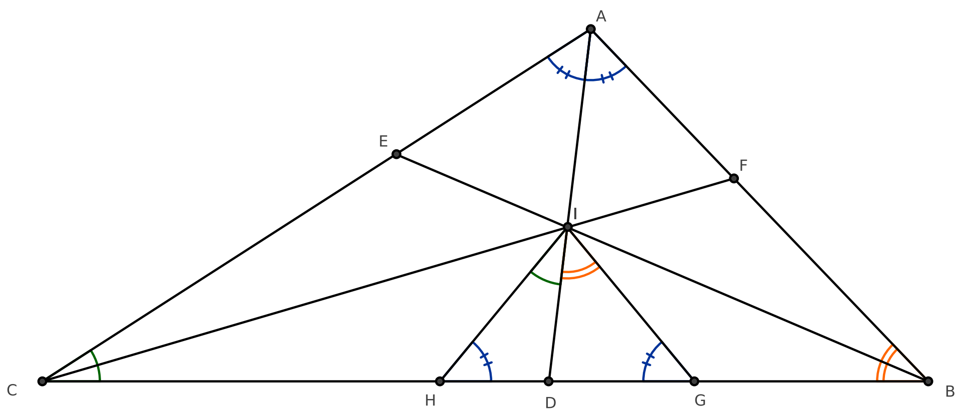
Finalmente, toda solución para un tablero (m, n) puede extenderse a un tablero $(m, n+1)$, de esta manera: si todas las columnas tienen t piedras, colocamos t piedras en la nueva columna, en las posiciones correspondientes a las t filas que más piedras tenían. Así, las columnas siguen teniendo t piedras cada una, y sigue sin haber dos filas con el mismo número de piedras. Repitiendo las veces que haga falta la operación de paso de (m, n) a $(m, n+1)$, se resuelven todos los tableros (m, n) con $n \geq m$ si m es impar, o $n \geq m - 1$ si m es par.

Solución 2. Similar a la anterior, utilizando el siguiente procedimiento para rellenar las casillas en el tablero (m, m), cuando m es impar.

Vamos a colocar k piedras en la fila $k \in [1, n]$. Empezamos por la esquina superior izquierda colocando una piedra. Si la fila tiene todas las piedras que vamos a colocar, seguimos por la casilla inmediatamente abajo a la derecha (si estamos a la derecha del todo, seguimos por la izquierda del todo). Si la fila aún no tiene todas las piedras, entonces seguimos colocando piedras inmediatamente a la derecha de la anterior (la misma convención aplica en el borde). Evidentemente cuando hayamos terminado la última fila, todas las filas tendrán el número deseado de piedras. Además, como el número total de piedras es divisible por el número de columnas, habrá el mismo número de piedras en cada columna.

3. En el triángulo ABC con lado mayor BC, las bisectrices se cortan en I. Las rectas AI, BI, CI cortan a BC, CA, AB en los puntos D, E, F, respectivamente. Se consideran puntos G y H en los segmentos BD y CD, respectivamente, tales que $\angle GID = \angle ABC$ y $\angle HID = \angle ACB$. Probar que $\angle BHE = \angle CGF$.

Solución Comenzamos con una figura, donde se señalan algunas igualdades de ángulos que inmediatamente justificaremos.



Nótese que los triángulos ABD y GID tienen un ángulo común en D y ángulos iguales en B y en I, por lo que sus terceros ángulos deben coincidir, es decir $\angle DGI = \angle DAB$. De forma análoga, razonando con los triángulos ACD y HID se obtiene $\angle DHI = \angle DAC$.

Los triángulos BIA y BIH resultan ser congruentes por tener dos ángulos iguales y un lado común, esto revela que los puntos A y H son simétricos con respecto a la recta BI, y de forma similar A y G son simétricos respecto de CI.

Las simetrías que acabamos de establecer prueban que:

$$\angle BHE = BAE \quad \text{y} \quad \angle CGF = \angle CAF,$$

y queda demostrada la igualdad de ángulos que se pedía.

Nota: otras soluciones pueden probar y utilizar que los cuadriláteros $ABGI$ y $ACHI$ son inscriptibles (cíclicos), y/o que G, H son puntos de la circunferencia de centro I que pasa por A.

4. Al desarrollar $(1+x+x^2)^n$ en potencias de x, exactamente tres términos tienen coeficiente impar. ¿Para qué valores de n es esto posible?

Solución Empezamos estudiando qué efecto tiene sobre los coeficientes de un polinomio multiplicar por $(1+x+x^2)$:

$$\begin{aligned}(1+x+x^2)^{n+1} &= (1+x+x^2)^n(1+x+x^2) \\ &= (a_o+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots)(1+x+x^2) \\ &= a_o+(a_o+a_1)x+(a_o+a_1+a_2)x^2+ \\ &+ (a_1+a_2+a_3)x^3+\cdots\end{aligned}$$

Si llamamos $\{a_i\}_{i=0}^{2n}$ a los coeficientes de $P_n(x)=(1+x+x^2)^n$ y $\{b_i\}_{i=0}^{2n+2}$ a los de $P_{n+1}(x)$, entonces para todo i se cumple que $b_i=a_{i-2}+a_{i-1}+a_i$, identificando con 0 los coeficientes que no están definidos. Esto sugiere ordenar los coeficientes de los polinomios $P_n(x)$ en forma de triángulo, empezando con 1 en la cúspide, y donde los restantes coeficientes son la suma de los tres que se sitúan por encima de él. Algo así:

```
1
1  1  1
1  2  3  2  1
1  3  6  7  6  3  1
1  4 10 16 19 16 10  4  1
...............................
```

Cada fila es simétrica con extremos 1, y el coeficiente central siempre es impar por ser suma de un impar más dos números iguales.

También vemos que para $n=1,2,4$, $P_n(x)$ tiene 3 coeficientes impares. Veamos que esta situación ocurre para todas las potencias de 2. Es sencillo comprobar que si $P_n(x)$ tiene 3 coeficientes impares (necesariamente los de grado 0, n y $2n$), lo mismo ocurre para $P_{2n}(x)$:

$$\begin{aligned}(1+x+x^2)^{2n} &= \left((1+x+x^2)^n\right)^2 \\ &\equiv (1+x^n+x^{2n})^2 \equiv 1+x^{2n}+x^{4n} \pmod 2,\end{aligned}$$

donde hemos despreciado los "dobles productos", al trabajar módulo 2. Partiendo de que $P_1(x)$ tiene 3 términos impares, el procedimiento anterior de paso de n a $2n$ prueba que $P_n(x)$ tiene 3 términos impares para todo n potencia de 2. Veamos que no existen más valores de n con esta propiedad.

Si n no es potencia de 2, existen una potencia de 2 dada por $a=2^k$ y un número b, con $0<b<a$, tales que $n=a+b$. Por lo visto antes, podemos asumir que $P_a(x)\equiv 1+x^a+x^{2a} \pmod 2$. Entonces:

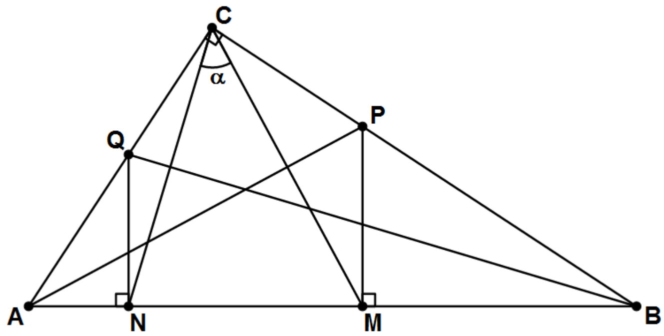
$$\begin{aligned}P_n(x)=P_b(x)P_a(x) &\equiv P_b(x)(1+x^a+x^{2a}) \pmod 2 \\ &\equiv P_b(x)+(\text{términos de grado} \geq a > b)\end{aligned}$$

Además, sabemos que $P_b(x)$ tiene su término central x^b impar, y este término "sobrevive" sin que nadie lo cancele, por lo que $P_n(x)$ tiene al menos 4 términos impares: los de grado 0, b, n y $2n$.

Olimpiada Matemática Española, Fase Local Aragón 2020

Soluciones (Versión personal)

1



En primer lugar vemos que los triángulos ΔACP y ΔAMP son congruentes. En efecto, ambos son triángulos rectángulos, y comparten el ángulo $\angle A/2$, y comparten la hipotenusa $\overline{AP}$.
Luego $CP = MP$ y $\angle PCM = \angle CMP = \angle A/2$.
Esta última igualdad se deduce de
$\angle APC = \angle APM = 90 - \angle A/2 \Rightarrow \angle CPM = 180 - \angle A \Rightarrow 2\angle PCM = \angle A \Rightarrow \angle PCM = \angle A/2$

De la misma manera vemos que los triángulos ΔBCQ y ΔBNQ son congruentes, y por tanto $QC = QN$ y $\angle QCN = \angle QNC = \angle B/2$.

Así pues:

$$90 = \angle QCN + \alpha + \angle PCM = \frac{\angle B}{2} + \alpha + \frac{\angle A}{2} = \alpha + \frac{\angle A + \angle B}{2} = \alpha + \frac{180^{o} - \angle C}{2} =$$

$$= \alpha + \frac{90^{o}}{2} = \alpha + 45^{o} \Rightarrow \alpha = 90^{o} - 45^{o} = 45^{o}$$

2

$n = a \cdot 1000 + b \cdot 100 + c \cdot 100 + d = x^2$

Primer caso.
Vamos a suponer que las cifras iguales están en la segunda y tercera posición, como en el ejemplo del enunciado. Entonces:

$$m = y^2 = (a+1) \cdot 1000 + b \cdot 100 + c \cdot 10 + d + 1 = a \cdot 1000 + 1000 + b \cdot 100 + c \cdot 10 + d + 1 =$$

$$= a \cdot 1000 + b \cdot 100 + c \cdot 10 + d + 1000 + 1 = x^2 + 1001$$

Luego
$7 \cdot 11 \cdot 13 = 1001 = y^2 - x^2 = (y-x)(y+x)$
Las posibilidades son:

$$\left.\begin{array}{l} y - x = 1 \\ y + x = 7 \cdot 11 \cdot 13 = 1001 \end{array}\right\} \Rightarrow 2y = 1002 \Rightarrow y = 501 \text{ y no es aceptable porque } y^2 > 9999.$$

$$\left.\begin{array}{l} y-x=7 \\ y+x=11\cdot 13 \end{array}\right\} \Rightarrow 2y=11\cdot 13+7=150 \Rightarrow \begin{cases} y=75 \Rightarrow m=y^2=5625 \\ x=75-7=68 \Rightarrow n=x^2=4624 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} y-x=11 \\ y+x=7\cdot 13=91 \end{array}\right\} \Rightarrow 2y=102 \Rightarrow \begin{cases} y=51 \Rightarrow m=y^2=2601 \\ x=51-11=40 \Rightarrow n=x^2=1600 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} y-x=13 \\ y+x=7\cdot 11=77 \end{array}\right\} \Rightarrow 2y=90 \Rightarrow \begin{cases} y=45 \Rightarrow m=y^2=2025 \\ x=45-13=32 \Rightarrow n=x^2=1024 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} y-x=7\cdot 11=77 \\ y+x=13 \end{array}\right\} \Rightarrow 2y=90 \Rightarrow \begin{cases} y=45 \Rightarrow m=y^2=2025 \\ x=13-45<0 \end{cases} \text{ no es aceptable.}$$

$$\left.\begin{array}{l} y-x=7\cdot 13=91 \\ y+x=11 \end{array}\right\} \Rightarrow 2y=102 \Rightarrow \begin{cases} y=51 \Rightarrow m=y^2=2601 \\ x=11-51<0 \end{cases} \text{ no es aceptable.}$$

$$\left.\begin{array}{l} y-x=11\cdot 13=143 \\ y+x=7 \end{array}\right\} \Rightarrow 2y=150 \Rightarrow \begin{cases} y=75 \Rightarrow m=y^2=5625 \\ x=7-75<0 \end{cases} \text{ no es aceptable.}$$

$$\left.\begin{array}{l} y-x=7\cdot 11\cdot 13=1001 \\ y+x=1 \end{array}\right\} \Rightarrow 2y=1002 \Rightarrow y=501 \text{ no es aceptable.}$$

Segundo caso.
Vamos a suponer que las cifras iguales están en la primera y tercera posición. Entonces:

$$m=y^2=a\cdot 1000+(b+1)\cdot 100+c\cdot 10+d+1=a\cdot 1000+b\cdot 100+100+c\cdot 10+d+1=$$
$$=a\cdot 1000+b\cdot 100+c\cdot 10+d+100+1=x^2+101$$

Luego

$$101=y^2-x^2=(y-x)(y+x)$$

Puesto que 101 es primo, solo hay dos posibilidades:

$$\left.\begin{array}{l} y-x=101 \\ y+x=1 \end{array}\right\} \Rightarrow 2y=102 \Rightarrow \begin{cases} y=51 \Rightarrow m=y^2=2601 \\ x=1-51<0 \end{cases} \text{ no es aceptable.}$$

$$\left.\begin{array}{l} y-x=1 \\ y+x=101 \end{array}\right\} \Rightarrow 2y=102 \Rightarrow \begin{cases} y=51 \Rightarrow m=y^2=2601 \\ x=101-51=50 \Rightarrow n=x^2=2500 \end{cases}$$

Tercer caso.
Vamos a suponer que las cifras iguales están en la primera y segunda posición. Entonces:

$$m=y^2=a\cdot 1000+b\cdot 100+(c+1)\cdot 10+d+1=a\cdot 1000+b\cdot 100+c\cdot 10+10+d+1=$$
$$=a\cdot 1000+b\cdot 100+c\cdot 100+d+10+1=x^2+11$$

Luego

$$11=y^2-x^2=(y-x)(y+x)$$

De nuevo, puesto que 101 es primo, solo hay dos posibilidades:

$$\left.\begin{array}{l} y-x=11 \\ y+x=1 \end{array}\right\} \Rightarrow 2y=12 \Rightarrow y=6 \Rightarrow m=y^2=36<1000 \text{ no es aceptable.}$$

$$\left.\begin{array}{l} y-x=1 \\ y+x=11 \end{array}\right\} \Rightarrow 2y=12 \Rightarrow y=6 \Rightarrow m=y^2=36<1000 \text{ no es aceptable.}$$

Cuarto caso.
Vamos a suponer que las cifras iguales están en la primera y cuarta posición. Entonces:

$$m = y^2 = a\cdot 1000 + (b+1)\cdot 100 + (c+1)\cdot 10 + d + 1 = a\cdot 1000 + b\cdot 100 + 100 + c\cdot 10 + 10 + d =$$
$$= a\cdot 1000 + b\cdot 100 + c\cdot 100 + d + 100 + 10 = x^2 + 110$$

Luego

$$2\cdot 5\cdot 11 = y^2 - x^2 = (y-x)(y+x)$$

Las posibilidades son:

$$\left.\begin{array}{l} y-x=1 \\ y+x=2\cdot 5\cdot 11=110 \end{array}\right\} \Rightarrow 2y=111 \Rightarrow y=111/2 \text{ no es aceptable.}$$
$$\left.\begin{array}{l} y-x=2 \\ y+x=5\cdot 11=55 \end{array}\right\} \Rightarrow 2y=57 \Rightarrow y=57/2 \text{ no es aceptable.}$$
$$\left.\begin{array}{l} y-x=5 \\ y+x=2\cdot 11=22 \end{array}\right\} \Rightarrow 2y=27 \Rightarrow y=27/2 \text{ no es aceptable.}$$
$$\left.\begin{array}{l} y-x=11 \\ y+x=2\cdot 5=10 \end{array}\right\} \Rightarrow 2y=21 \Rightarrow y=21/2 \text{ no es aceptable.}$$
$$\left.\begin{array}{l} y-x=2\cdot 5=10 \\ y+x=11 \end{array}\right\} \Rightarrow 2y=21 \Rightarrow y=21/2 \text{ no es aceptable.}$$
$$\left.\begin{array}{l} y-x=2\cdot 11=22 \\ y+x=5 \end{array}\right\} \Rightarrow 2y=27 \Rightarrow y=27/2 \text{ no es aceptable.}$$
$$\left.\begin{array}{l} y-x=5\cdot 11=55 \\ y+x=2 \end{array}\right\} \Rightarrow 2y=57 \Rightarrow y=57/2 \text{ no es aceptable.}$$
$$\left.\begin{array}{l} y-x=2\cdot 5\cdot 11=110 \\ y+x=1 \end{array}\right\} \Rightarrow 2y=111 \Rightarrow y=111/2 \text{ no es aceptable.}$$

No hay ningún caso aceptable.

Quinto caso.
Vamos a suponer que las cifras iguales están en la tercera y cuarta posición. Entonces:

$$m = y^2 = (a+1)\cdot 1000 + (b+1)\cdot 100 + c\cdot 10 + d = a\cdot 1000 + 1000 + b\cdot 100 + 100 + c\cdot 10 + d =$$
$$= a\cdot 1000 + b\cdot 100 + c\cdot 100 + d + 1000 + 100 = x^2 + 1100$$

Luego

$$2^2\cdot 5^2\cdot 11 = y^2 - x^2 = (y-x)(y+x)$$

Estudiando las posibles combinaciones, como en los casos anteriores, llegamos a las dos únicas soluciones:

$$\left.\begin{array}{l} x=14 \\ y=36 \end{array}\right\} \Rightarrow n = x^2 = 196 < 1000 \text{ no es aceptable}$$
$$\left.\begin{array}{l} x=50 \\ y=60 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} n = x^2 = 2500 \\ m = y^2 = 3600 \end{cases} \text{ que es la única solución aceptable.}$$

Sexto caso.

Vamos a suponer que las cifras iguales están en la segunda y cuarta posición. Entonces:
$m = y^2 = (a+1)\cdot 1000 + b\cdot 100 + (c+1)\cdot 10 + d = a\cdot 1000 + 1000 + b\cdot 100 + c\cdot 10 + 10 + d =$
$= a\cdot 1000 + b\cdot 100 + c\cdot 100 + d + 1000 + 10 = x^2 + 1010$

Y estudiando las posibles combinaciones observamos que no hay ninguna aceptable.

Así pues, las soluciones para este problema son las cinco parejas siguientes:
(5625,4624), (2601,1600), (2025, 1024) , (2601, 2500), (2500, 3600)

Nota: Podríamos haber desechado muchos casos directamente teniendo en cuenta que $x+y$ y $x-y$ tienen la misma paridad, y que $999 < x^2 < y^2 < 10000 \Leftrightarrow 31 < x < y < 100$ y por tanto $63 < x+y < 199$.

3

Primera versión. Mediante aritmética modular.

Buscamos conjuntos ordenados (a,b,c,d), con $a \neq 0$, tales que

$$7\,|\,\overline{0abcd} \Leftrightarrow 7\,|\,10000\cdot 0 + 1000\cdot a + 100\cdot b + 10\cdot c + d \qquad (1)$$
$$7\,|\,\overline{a0bcd} \Leftrightarrow 7\,|\,10000\cdot a + 1000\cdot 0 + 100\cdot b + 10\cdot c + d \qquad (2)$$
$$7\,|\,\overline{ab0cd} \Leftrightarrow 7\,|\,10000\cdot a + 1000\cdot b + 100\cdot 0 + 10\cdot c + d \qquad (3)$$
$$7\,|\,\overline{abc0d} \Leftrightarrow 7\,|\,10000\cdot a + 1000\cdot b + 100\cdot c + 10\cdot 0 + d \qquad (4)$$
$$7\,|\,\overline{abcd0} \Leftrightarrow 7\,|\,10000\cdot a + 1000\cdot b + 100\cdot c + 10\cdot d + 0 \qquad (5)$$

Puesto que: $10000 \equiv 4 \pmod 7$, $1000 \equiv 6 \pmod 7$, $100 \equiv 2 \pmod 7$ y $10 \equiv 3 \pmod 7$,
las condiciones del enunciado se pueden escribir como:

$$10000\cdot 0 + 1000\cdot a + 100\cdot b + 10\cdot c + d \equiv 0 \pmod 7 \Leftrightarrow 6a + 2b + 3c + d \equiv 0 \pmod 7$$
$$10000\cdot a + 1000\cdot 0 + 100\cdot b + 10\cdot c + d \equiv 0 \pmod 7 \Leftrightarrow 4a + 2b + 3c + d \equiv 0 \pmod 7$$
$$10000\cdot a + 1000\cdot b + 100\cdot 0 + 10\cdot c + d \equiv 0 \pmod 7 \Leftrightarrow 4a + 6b + 3c + d \equiv 0 \pmod 7$$
$$10000\cdot a + 1000\cdot b + 100\cdot c + 10\cdot 0 + d \equiv 0 \pmod 7 \Leftrightarrow 4a + 6b + 2c + d \equiv 0 \pmod 7$$
$$10000\cdot a + 1000\cdot b + 100\cdot c + 10\cdot d + 0 \equiv 0 \pmod 7 \Leftrightarrow 4a + 6b + 2c + 3d \equiv 0 \pmod 7$$

Restando la primera de la segunda llegamos a
$2a \equiv 0 \pmod 7 \Rightarrow a = 0, 7$, y solo puede ser $a = 7$
Restando la tercera de la segunda llegamos a
$2b \equiv 0 \pmod 7 \Rightarrow b = 0, 7$
Restando la tercera de la cuarta llegamos a
$c \equiv 0 \pmod 7 \Rightarrow c = 0, 7$
Restando la quinta de la cuarta llegamos a
$2d \equiv 0 \pmod 7 \Rightarrow d = 0, 7$

Así pues, las soluciones posibles son los todos los números de cuatro cifras que se forman con los dígitos 0 y 7, es decir, los siete números: 7000, 7007, 7070, 7077, 7700, 7707 y 7777.

Segunda versión. Sin aritmética modular.

El tratamiento sería similar. Por ejemplo:
$$x = \overline{0abcd} = 10000\cdot 0 + 1000\cdot a + 100\cdot b + 10\cdot c + d$$

$$y=\overline{a0bcd}=10000\cdot a+1000\cdot 0+100\cdot b+10\cdot c+d$$

$$\left.\begin{array}{l}7\mid x\\ 7\mid y\end{array}\right\}\Rightarrow 7\mid y-x=9000a$$

Y puesto que 7 no es divisor de 9000, se llega a $7\mid a$, es decir, $a=0,7$. Y como no puede ser cero puesto que estamos suponiendo un número de cuatro cifras, solo queda $a=7$.
Y con un argumento similar se deducen los otros tres dígitos.

4

Estudiando un poco la situación vemos que para un número elevado de columnas siempre es posible encontrar solución al problema.
Si el número de filas m es impar, rellenamos la fila del medio con piedras, y quitamos y ponemos algunas en las primeras columnas siguiendo el siguiente esquema:

$m=3$

	X	X	X	X	X	X	X
X	X	X	X	X	X	X	X
X							

$m=5$

		X	X	X	X	X	X
	X	X	X	X	X	X	X
X	X	X	X	X	X	X	X
X	X						
X							

$m=7$

			X	X	X	X	X
		X	X	X	X	X	X
	X	X	X	X	X	X	X
X	X	X	X	X	X	X	X
X	X	X					
X	X						
X							

Está claro que con este procedimiento podemos siempre obtener tableros en los que todas las columnas tengan el mismo número de piedras y en las filas tengamos

$$1<2<3...<n-3<n-2<n-1<n$$

piedras, es decir, un número diferente en todas y cada una de las filas.

Si m es par el procedimiento sería el mismo pero dejando la última fila vacía. Por ejemplo:

$m=4$

	X	X	X	X	X	X	X
X	X	X	X	X	X	X	X
X							

$m=6$

		X	X	X	X	X	X
	X	X	X	X	X	X	X
X	X	X	X	X	X	X	X
X	X						
X							

$m=8$

			X	X	X	X	X
		X	X	X	X	X	X
	X	X	X	X	X	X	X
X	X	X	X	X	X	X	X

x	x	x					
x	x						
x							

El caso $m = 2$ se soluciona fácilmente llenando una fila de piedras y dejando la otra vacía.

Este procedimiento falla cuando

$$\begin{cases} n < m & m \text{ impar} \\ n < m-1 & m \text{ par} \end{cases}$$

Por ejemplo, con $m = 7$ y $n = 6$ nos encontramos con el tablero siguiente:

			x	x	x
		x	x	x	x
	x	x	x	x	x
x	x	x	x	x	x
x	x	x			
x	x				
x					

En el que la primera fila y la quinta tienen el mismo número de piedras.

En las soluciones oficiales encontramos el siguiente argumento para el caso límite $n = m-1$ y m impar:
Hay m filas, se pueden colocar un máximo de $m-1$ piedras en cada fila, todas las filas con diferente cantidad, luego forzosamente hay que poner $0, 1, 2, ..., m-1$ piedras (no necesariamente en este orden) pero entonces el total de piedras será

$$0+1+2+...+m-1 = \frac{m(m-1)}{2}$$

que deberá ser de la forma

$$\frac{m(m-1)}{2} = k \cdot (m-1)$$

para cierto k que es el número de piedras en cada columna. Luego

$$\frac{m}{2} = k$$

lo cual es imposible porque m es impar.

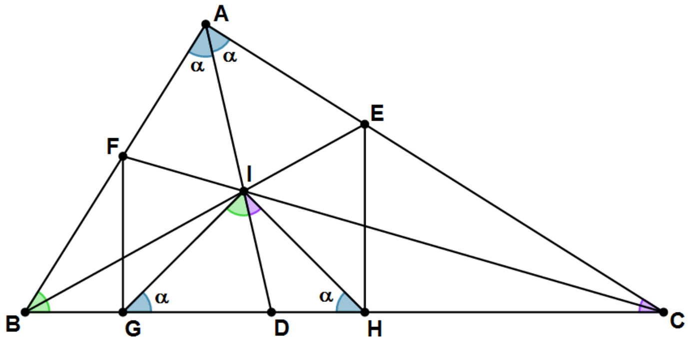
5
Sea $\alpha = \angle DAC = \angle BAC / 2$
Resolveremos este problema mediante semejanza de triángulos. Por el criterio AA:

$$\left.\begin{array}{l} \angle DIH = \angle ACD \\ \angle IDH = \angle ADC \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta IDH \approx \Delta CDA \Rightarrow \angle DHI = \angle DAC = \alpha$$

De la misma manera, por el criterio AA:

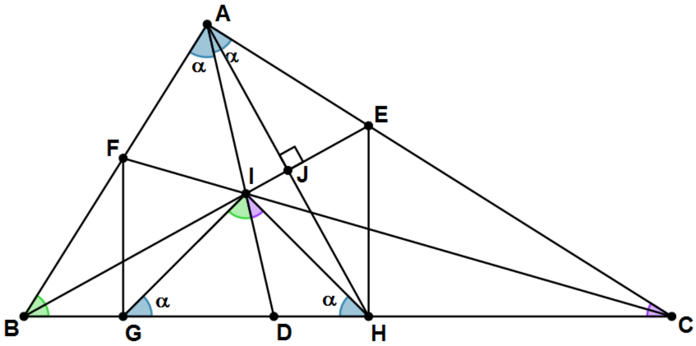
$$\left.\begin{array}{l} \angle GID = \angle ABD \\ \angle IDG = \angle ADB \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta IGD \approx \Delta BAD \Rightarrow \angle IGD = \angle BAD = \alpha$$

Así pues $\angle IHG = \angle IGH = \alpha$ y por tanto el triángulo ΔIGH es isósceles en I, luego $GI = HI$.



$$\left.\begin{array}{l}\angle IHB = \angle BAI \\ \angle IBH = \angle ABI\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABI \approx \Delta HBI$$

Pero como además comparten un lado común IB, los dos triángulos serán congruentes, y por tanto $IH = IA$.
Luego el triángulo ΔHIA es isósceles en I, luego $\angle IAH = \angle IHA$.
De lo anterior se deduce que $\angle BAH = \angle AHB$, es decir, el triángulo ΔABH es isósceles en B.
Sea J el punto de corte entre BE y AH.



En un triángulo isósceles coinciden bisectriz, mediatriz y mediana, luego ΔAJE y ΔHJE son dos triángulos rectángulos congruentes, de donde $\angle JAE = \angle JHE$, y por tanto

$$\angle IHE = \angle IAE = \alpha .$$

Con razonamientos análogos llegamos a $\angle FGI = \angle FAI = \alpha$, con lo que, finalmente:

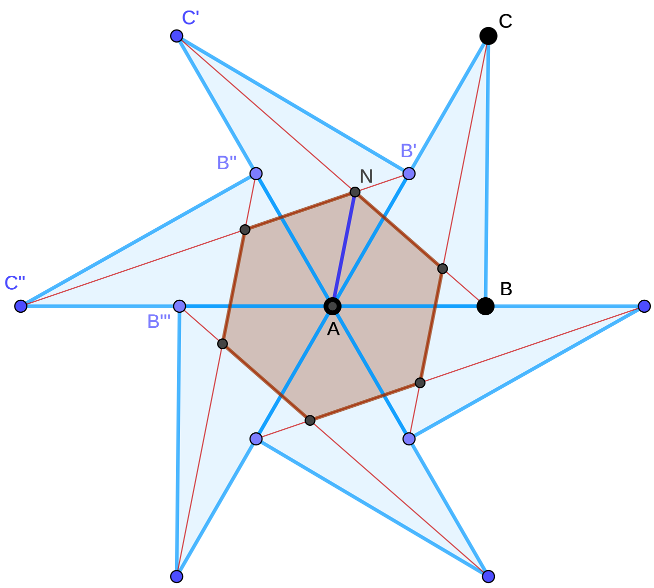
$$\angle BAC = 2\alpha = \angle FGH = \angle GHE .$$

6
Ver la solución oficial

Fase aragonesa de la LVIII Olimpiada Matemática Española

Primera etapa (14 de enero de 2022)

1. Consideramos un triángulo ABC rectángulo en B, tal que su cateto AB está apoyado en el eje de abscisas. El triángulo es tal que al girarlo dos veces un ángulo $\widehat{A}$ con respecto al vértice A, como se observa en la figura, la hipotenusa cae sobre el eje de abscisas. Considera la construcción del punto N que se observa en la figura y calcula numéricamente la razón entre los segmentos $\overline{B'C}$ y $\overline{AN}$. Calcula también el cociente entre las áreas de la figura estrellada (toda la figura coloreada) y del hexágono interior (en color oscuro).



Solución: Tomamos el punto A como origen de coordenadas y la longitud del segmento $\overline{AB}$ como unidad de longitud. De este modo tenemos (identificando los puntos con sus coordenadas) $A = (0,0)$, $B = (1,0)$. Las condiciones del problema nos dicen que el ángulo en A es de 60°, luego $C = (1, \sqrt{3})$. Notemos que la longitud de $\overline{AC}$ es 2, y la de $\overline{B'C}$ es 1.

Ahora es fácil calcular las coordenadas de varios puntos: $B' = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $C' = (-1, \sqrt{3})$, $C'' = (-2, 0)$.

La recta que une B' y C tiene como ecuación

$$\frac{y}{\sqrt{3}} = \frac{x-1}{-2}, \quad \text{esto es,} \quad y = -\frac{\sqrt{3}}{2}(x-1),$$

y la que une C'' y B' es

$$\frac{y}{\sqrt{3}/2} = \frac{x+2}{1/2+2}, \quad \text{esto es,} \quad y = -\frac{\sqrt{3}}{5}(x+2).$$

Resolviendo el sistema formado por estas dos ecuaciones obtenemos las coordenadas del punto $N = (\frac{1}{7}, \frac{3\sqrt{3}}{7})$. Así, la longitud del segmento $\overline{AN}$ es $\frac{1}{7}\sqrt{1+27} = \frac{2}{\sqrt{7}}$.

Por tanto el cociente entre las longitudes de los segmentos $\overline{B'C}$ y $\overline{AN}$ es $\boldsymbol{\frac{\sqrt{7}}{2}}$.

El área de la figura estrellada es 6 veces el área del triángulo ABC, mientras que el área del hexágono es 6 veces el área del triángulo equilátero de lado $\frac{2}{\sqrt{7}}$. Como el área de un triángulo equilátero de lado l es $\frac{1}{2}l(\frac{\sqrt{3}}{2}l) = \frac{\sqrt{3}}{4}l^2$, obtenemos

$$\frac{\text{área estrella}}{\text{área hexágono}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{2}{\sqrt{7}}\right)^2} = \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{2}}.$$

2. Sea n un número mayor o igual que 3. Consideramos n números enteros positivos (no necesariamente distintos) dispuestos en un círculo formando un corro. Decimos que tres números son vecinos en el corro si se encuentran en tres posiciones consecutivas sin otros números en medio. Dado un corro de este tipo formado con n números, decimos que es un n-corro si el producto de tres vecinos cualesquiera es siempre n. Determina razonadamente el número de enteros n entre 3 y 2022 para los que existe un n-corro.

Solución: Fijamos un punto del corro y llamamos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ a los números del corro recorridos en sentido horario. La condición de ser n-corro es:

(*) $$a_1a_2a_3 = a_2a_3a_4 = a_3a_4a_5 = \cdots = a_{n-2}a_{n-1}a_n = a_{n-1}a_na_1 = a_na_1a_2 = n.$$

De la primera igualdad obtenemos $a_1 = a_4$ y, análogamente, $a_1 = a_4 = a_7 = \cdots$.
De la segunda igualdad obtenemos $a_2 = a_5$ y, análogamente, $a_2 = a_5 = a_8 = \cdots$.
De la tercera igualdad obtenemos $a_3 = a_6$ y, análogamente, $a_3 = a_6 = a_9 = \cdots$.

Si n es múltiplo de 3, entonces podemos construir fácilmente un n-corro con números

$$1, 1, n, 1, 1, n, 1, 1, n, \ldots$$

Entre 3 y 2022 hay $\frac{2022}{3} = \mathbf{674}$ múltiplos de 3.

Si n es un múltiplo de 3 más 1: $n = 3k+1$, entonces $a_1 = a_4 = \cdots = a_{3k+1} \,(= a_n)$, y $a_3 = a_6 = \cdots = a_{3k}$. Las últimas igualdades en (*) nos dan $a_{3k}a_{3k+1}a_1 = a_{3k+1}a_1a_2 = a_1a_2a_3 = n$. Esto es, $a_3a_1^2 = a_1^2a_2 = a_1a_2a_3 = n$, que nos dan $a_1 = a_2 = a_3$ y $n = a_1^3$. Por tanto, n ha de ser un cubo perfecto, y todos los números del corro tienen que ser iguales a la raíz cúbica de n.

Un razonamiento análogo nos dice que pasa lo mismo si n es de la forma $3k+2$. Así pues, además de los enteros n que son múltiplos de 3, solamente existen n-corros para los enteros n que son cubos perfectos no múltiplos de 3. Como $12^3 < 2022 < 13^3$, a los múltiplos de 3 hay que añadir lo siguientes **7** valores de n: $2^3, 4^3, 5^3, 7^3, 8^3, 10^3, 11^3$.

Por tanto, el número pedido es $674 + 7 = \mathbf{681}$.

LVIII OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Primera fase, curso 2021 - 2022

Enunciados y soluciones - Tarde del viernes

Problema 1. *En una fila, hay 2022 personas. Cada una de ellas, o siempre miente o siempre dice la verdad. Todos ellos afirman: "hay más mentirosos a mi izquierda que personas que digan la verdad a mi derecha". Determinar cuántos mentirosos hay en la fila.*

Solución. Vamos a numerar a las personas de izquierda a derecha según su posición en la fila como $p_1, p_2, \ldots, p_{2022}$. En primer lugar, probaremos que todos los p_i con $1 \leq i \leq 1011$ son mentirosos. En el caso de p_1, como no hay personas a su izquierda, sabemos que el enunciado no puede ser cierto, con lo que necesariamente p_1 ha de ser un mentiroso. Procederemos ahora por inducción, suponiendo probado que las k personas más a la izquierda son mentirosas, donde $1 < k < 1011$. Si p_{k+1} dijese la verdad, tendría k mentirosos a su izquierda y por tanto un máximo de $k-1$ personas que dicen la verdad a su derecha, con lo que hay estrictamente más de $2021 - 2k$ mentirosos a su derecha. Tomemos ahora el mentiroso más a la derecha. Este tendrá al menos $2021 - 2k + k = 2021 - k$ mentirosos a su izquierda y a lo sumo $k - 1$ que dicen la verdad a su derecha. Como es un mentiroso, ha de pasar que $2021 - k \leq k - 1$, lo cual implica que $k \geq 1011$, lo cual es una contradicción.
Vamos a probar ahora que las 1011 personas restantes dicen la verdad. Tomemos a un individuo cualquiera p_k, con $1012 \leq k \leq 2021$. Esta persona tendrá al menos a 1011 mentirosos a su izquierda, que siempre serán más que los que tenga a su derecha. Así que necesariamente deberá decir la verdad.
Por tanto, se concluye que 1011 personas mienten y 1011 dicen la verdad.

Problema 2. *Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo y sea P un punto en el interior. Si se cumple que*

$$\textit{área}(PAB) \cdot \textit{área}(PCD) = \textit{área}(PBC) \cdot \textit{área}(PDA),$$

demostrar que P se encuentra en el segmento AC o en el segmento BD.

Solución. Podemos reescribir la igualdad del enunciado como

$$\frac{\text{área}(PAB)}{\text{área}(PDA)} = \frac{\text{área}(PBC)}{\text{área}(PCD)}.$$

Sea E el punto donde AP corta a BD, y sea F el punto donde CP corta a BD. Dado que PAB y PBC tienen un lado común, se tiene que

$$\frac{\text{área}(PAB)}{\text{área}(PDA)} = \frac{\text{altura de } B \text{ sobre } AP}{\text{altura de } D \text{ sobre } AP} = \frac{BE}{DE},$$

donde la segunda igualdad se cumple por semejanza de triángulos. Igualmente se cumple que
$$\frac{\text{área}(PBC)}{\text{área}(PCD)} = \frac{BF}{DF}.$$
Por lo tanto tenemos que $BE/DE = BF/DF$. Si desplazamos E desde B hasta D, el numerador de la fracción crece y el denominador decrece, por lo que la fracción es creciente. Deducimos así que $E = F$.
Si P está sobre AC, hemos acabado. Si no lo está, las rectas AP y CP son distintas, y se cortan como mucho en un punto. Dado que se cortan en P y en E, se deduce que $P = E$, y por tanto P está en BD, como queríamos demostrar.

Problema 3. *Hallar todas las ternas de números reales* (a, b, c) *que cumplan el sistema*
$$\begin{aligned} a + b + c &= 3 \\ 2^a + 2^b + 2^c &= 7 \\ 2^{-a} + 2^{-b} &= 3/4 \end{aligned}$$

Solución. Denotamos $u = 2^a$, $v = 2^b$ y $w = 2^c$. La segunda ecuación del sistema puede escribirse como $u + v + w = 7$, y la tercera como $u^{-1} + v^{-1} = 3/4$. También podemos obtener una relación entre u, v y w de la primera ecuación:
$$uvw = 2^a 2^b 2^c = 2^{a+b+c} = 2^3 = 8.$$
En la tercera ecuación, sustituimos a partir de la primera y la segunda:
$$\frac{3}{4} = \frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{u+v}{uv} = \frac{7-w}{\frac{8}{w}}.$$
Esta última igualdad se puede escribir como $w^2 - 7w + 6 = 0$, que tiene como soluciones $w = 6$ y $w = 1$. Consideramos ambos casos:

- Si $w = 6$, las dos primeras ecuaciones dejan $uv = 4/3$ y $u + v = 1$. Sustituyendo la segunda ecuación en la primera produce $u(1 - u) = 4/3$, o $u^2 - u + 4/3 = 0$, que no tiene solución real.
- Si $w = 1$, las dos primeras ecuaciones dejan $uv = 8$ y $u + v = 6$. Sustituyendo la segunda ecuación en la primera produce $u(6 - u) = 8$, o $u^2 - 6u + 8 = 0$, que tiene soluciones $u = 4$ y $u = 2$. Esto lleva a las posibles soluciones $(u, v, w) = (4, 2, 1)$ y $(u, v, w) = (2, 4, 1)$. Tomando logaritmos, se obtiene $(a, b, c) = (2, 1, 0)$ y $(a, b, c) = (1, 2, 0)$. Se comprueba que ambas soluciones satisfacen el sistema inicial.

Problema 4. *Encontrar todos los polinomios* $p(x)$ *con coeficientes reales tales que*
$$p(x) + p(y) + p(z) + p(x + y + z) = p(x + y) + p(y + z) + p(z + x)$$
para cualesquiera números reales x, y, z.

Solución. Comenzamos observando que cuando $x = y = z = 0$ la ecuación dada se escribe como
$$4p(0) = 3p(0),$$

que automáticamente implica que $p(0)=0$. Sustituimos ahora (x,y,z) por $(x,x,-x)$. Entonces,

$$3p(x)+p(-x)=p(2x). \tag{1}$$

Sea n el grado de p, y escribamos $p(x)=\sum_{i=0}^n a_i x^i$. Entonces, el coeficiente con x^n en el lado izquierdo de (1) es $a_n\cdot(3+(-1)^n)$, y en el lado derecho es $a_n\cdot 2^n$. Esto implica que

$$3+(-1)^n=2^n.$$

Si n es par, entonces $3+1=2^n$, que es cierto si $n=2$. Si n es impar, tendremos que $n=1$. Entonces, los únicos posibles candidatos con los polinomios de grado a lo sumo 2 y cuyo término constante es 0, esto es,

$$p(x)=ax^2+bx,\quad a,b\in\mathbb{R}.$$

Comprobamos ahora que estos polinomios cumplen las condiciones del enunciado. Como la condición es linear, es suficiente comprobar que tanto $p_1(x)=x$ como $p_2(x)=x^2$ funcionan. Esto se sigue de la comprobación

$$x+y+z+(x+y+z)=(x+y)+(y+z)+(z+x)$$

y

$$x^2+y^2+z^2+x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx=x^2+y^2+2xy+y^2+z^2+2zx+z^2+x^2+2zx.$$

Por tanto, cualquier polinomio de la forma $p(x)=ax^2+bx$, con $a,b\in\mathbb{R}$, satisfacen la condición dada, y estos son los únicos.

LIX OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Fase local, curso 2022 - 2023

Mañana del viernes 20 de enero de 2023

Primera sesión

Problema 1. Sea n un entero positivo. Cada uno de los números $1, 2, 3, \ldots, 2023$ se pinta de un color a escoger entre n distintos. Una vez coloreados, se observa que cualquier par (a, b), con $a < b$ y de manera que $a \mid b$, satisface que a y b son de distinto color. Encontrar el menor valor de n para el cuál esta situación es posible.

Problema 2. Sea $n \geq 3$ un entero positivo. Los primeros n enteros positivos, $1, 2, \ldots, n$, se escriben en una pizarra. María realiza el siguiente proceso tantas veces como quiera: primero elige dos números en la pizarra, y luego los reemplaza con aquellos que resultan de sumarle a ambos un mismo entero positivo. Determinar todos los enteros positivos n para los que María puede conseguir, repitiendo este proceso, que todos los números de la pizarra sean iguales.

Problema 3. Decimos que una terna de números reales (a, b, c), todos distintos de cero, es *local* si

$$\begin{aligned} a^2 + a &= b^2 \\ b^2 + b &= c^2 \\ c^2 + c &= a^2. \end{aligned}$$

(a) Probar que si (a, b, c) es local, entonces $(a - b)(b - c)(c - a) = 1$.

(b) Sea $A_1 A_2 \ldots A_9$ un eneágono regular (polígono regular de 9 lados). Supongamos que $|A_1 A_4| = 1$, y sea $|A_1 A_2| = a$, $|A_1 A_3| = b$ y $|A_1 A_5| = c$.
Probar que $(a, b, -c)$ es local.

LIX OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Fase local, curso 2022 - 2023

Tarde del viernes 20 de enero de 2023

Segunda sesión

Problema 4. Consideremos un paralelogramo $ABCD$. Una circunferencia Γ que pasa por el punto A corta a los lados AB y AD por segunda vez en los puntos E y F, respectivamente, y a la diagonal AC en el punto G. La prolongación de la recta FG corta al lado BC en H, y la prolongación de EG corta al lado CD en I. Demostrar que la recta HI es paralela a EF.

Problema 5. Los inversos de los números enteros positivos de 2 a 2023 se escriben en una pizarra. En cada paso, se seleccionan dos números x e y y se reemplazan con el número

$$\frac{xy}{xy+(1-x)(1-y)}.$$

Este proceso se repite 2021 veces, hasta que solo quede un número. ¿Cuáles pueden ser los posibles números que se obtengan al repetir este proceso?

Problema 6. Encontrar todos los enteros positivos $a, b, c \geq 1$ que satisfacen

$$2^a + 7^b = c^2 + 4.$$

LIX OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Fase local, curso 2022 - 2023

Tarde del viernes 20 de enero de 2023

Primera sesión

Problema 1. Consideremos un paralelogramo $ABCD$. Una circunferencia Γ que pasa por el punto A corta a los lados AB y AD por segunda vez en los puntos E y F, respectivamente, y a la diagonal AC en el punto G. La prolongación de la recta FG corta al lado BC en H, y la prolongación de EG corta al lado CD en I. Demostrar que la recta HI es paralela a EF.

Problema 2. Los inversos de los números enteros positivos de 2 a 2023 se escriben en una pizarra. En cada paso, se seleccionan dos números x e y y se reemplazan con el número

$$\frac{xy}{xy + (1-x)(1-y)}.$$

Este proceso se repite 2021 veces, hasta que solo quede un número. ¿Cuáles pueden ser los posibles números que se obtengan al repetir este proceso?

Problema 3. Encontrar todos los enteros positivos $a, b, c \geq 1$ que satisfacen

$$2^a + 7^b = c^2 + 4.$$

LIX OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Fase local, curso 2022 - 2023

Mañana del sábado 21 de enero de 2023

Segunda sesión

Problema 4. Sea $n \geq 2$ un entero positivo. Dividimos un rectángulo de $n \times (n+1)$ en piezas rectangulares: dos de 1×1, dos de 1×2, ..., y dos de $1 \times n$, con la propiedad de que para cada $k \geq 2$, una pieza de $1 \times k$ tiene los lados largos horizontales y la otra verticales. Demostrar que las dos piezas de 1×1 comparten un lado.

Problema 5. Encontrar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que

$$f(x + f(y + f(x + f(y + f(x))))) = 3x + 2y$$

para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$.

Problema 6. Sean ABC y XYZ dos triángulos cuyos lados no son paralelos. En ambos triángulos el orden de los vértices A, B, C y X, Y, Z sigue el orden de las agujas del reloj. Si se cumple que $\dfrac{AB}{XY} = \dfrac{BC}{YZ} = \dfrac{CA}{ZX}$ y $AX = BY = CZ$, demostrar que los triángulos ABC y XYZ tienen el mismo circuncentro.

LIX OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Fase local, curso 2022 - 2023

Enunciados y soluciones - Mañana del viernes

Problema 1. Sea n un entero positivo. Cada uno de los números $1, 2, 3, \ldots, 2023$ se pinta de un color a escoger entre n distintos. Una vez coloreados, se observa que cualquier par (a, b), con $a < b$ y de manera que $a \mid b$, satisface que a y b son de distinto color. Encontrar el menor valor de n para el cuál esta situación es posible.

Solución. Vamos a demostrar que el menor valor posible es $n = 11$. Comenzamos notando que cada uno de los números $2^0, 2^1, \ldots, 2^{10}$ tiene que ser de un color diferente, con lo que hay que usar por lo menos 11 distintos.
Consideremos ahora la siguiente coloración. Pintamos el número 1 del color uno; los números 2 y 3 del color dos; y en general los números del 2^{k-1} al $2^k - 1$ con el color k, donde $1 \leq k \leq 11$ (obviamente, cuando $k = 11$ solo pintamos hasta 2023). De esta manera, el cociente de dos números que comparten color es menor que dos. Esto significa que ninguna pareja del mismo color satisface una relación de divisibilidad, y hemos concluido.

Problema 2. Sea $n \geq 3$ un entero positivo. Los primeros n enteros positivos, $1, 2, \ldots, n$, se escriben en una pizarra. María realiza el siguiente proceso tantas veces como quiera: primero elige dos números en la pizarra, y luego los reemplaza con aquellos que resultan de sumarle a ambos un mismo entero positivo. Determinar todos los enteros positivos n para los que María puede conseguir, repitiendo este proceso, que todos los números de la pizarra sean iguales.

Solución. Vamos a distinguir tres casos distintos.

(i) Supongamos que n es impar. En este caso, María comienza sumando 1 a la pareja $(1, n)$, luego a la $(3, n+1)$ (donde el $n+1$ es resultado de la primera iteración del proceso), y así sucesivamente hasta llegar a la $(n-2, n+(n-3)/2)$. De esta manera, consigue tener en la pizarra todos los números pares menores que n escritos dos veces y además el número $(3n-1)/2$. Finalmente, coge la pareja $(2, 2)$ y le suma $(3n-5)/2$, a la pareja $(4, 4)$ le suma $(3n-9)/2$, y así sucesivamente hasta llegar a la pareja $(n-1, n-1)$, a la que le suma $(n+1)/2$. De esta manera, todos los números de la pizarra son iguales a $(3n-1)/2$.

(ii) Supongamos que n es un múltiplo de 4, esto es, $n = 4k$. En este caso, añade 1 en primer lugar a la pareja $(1, 3)$, luego a la $(5, 7)$, y así sucesivamente hasta llegar a la $(4k-3, 4k-1)$. De esta manera, consigue que cada uno de los números pares menores o iguales que n esté escrito dos veces en la pizarra. De esta manera, elige la pareja $(2, 2)$ y le suma $n-2$, a la $(4, 4)$ le suma $n-4$ y así hasta llegar a la $(n-2, n-2)$, a la que le suma 2. Así consigue que todos los números escritos en la pizarra sean iguales a n.

(iii) Sea ahora $n = 4k + 2$. La suma de los números escritos en la pizarra inicialmente es impar, porque

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} = (2k+1)(4k+3).$$

Además, en cada paso la suma de todos los números se incrementa por un número par. Sin embargo, dado que hay un número par de números en la pizarra, si todos fuesen iguales la suma sería un número par, lo cual no es posible dado que hemos visto que la suma siempre será impar.

Por tanto, María puede conseguir todos los números salvo aquellos que no sean de la forma $4k + 2$, donde $k \geq 1$ es un número entero positivo.

Problema 3. Decimos que una terna de números reales (a, b, c), todos distintos de cero, es *local* si

$$\begin{aligned} a^2 + a &= b^2 \\ b^2 + b &= c^2 \\ c^2 + c &= a^2. \end{aligned}$$

(a) Probar que si (a, b, c) es local, entonces $(a - b)(b - c)(c - a) = 1$.

(b) Sea $A_1A_2 \ldots A_9$ un eneágono regular (polígono regular de 9 lados). Supongamos que $|A_1A_4| = 1$, y sea $|A_1A_2| = a$, $|A_1A_3| = b$ y $|A_1A_5| = c$. Probar que $(a, b, -c)$ es local.

Solución.

(a) Sumando las tres ecuaciones obtenemos que $a + b + c = 0$. La primera ecuación se puede reescribir entonces como

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2 = -a = b + c,$$

y de forma análoga

$$(b - c)(b + c) = c + a, \quad (c - a)(c + a) = a + b.$$

Notemos que $a + b$, $b + c$ y $c + a$ son diferentes de 0, ya que coinciden con $-c$, $-a$ y $-b$, respectivamente. Multiplicando las tres ecuaciones y dividiendo por $(a + b)(b + c)(c + a) \neq 0$, llegamos a

$$(a - b)(b - c)(c - a) = 1.$$

(b) Consideremos el triángulo $A_1A_3A_4$, en el que $\angle A_3A_1A_4 = 20°$, $\angle A_1A_4A_3 = 40°$, $\angle A_4A_3A_1 = 120°$ y $|A_1A_4| = 1$. Aplicando el teorema del seno, obtenemos que

$$a = \frac{2 \sin 20°}{\sqrt{3}} \quad \text{y} \quad b = \frac{2 \sin 40°}{\sqrt{3}}.$$

Procediendo de forma similar en $A_1A_4A_5$, donde $\angle A_4A_1A_5 = 20°$, $\angle A_1A_5A_4 = 60°$, $\angle A_5A_4A_1 = 100°$, se tiene que

$$c = \frac{2 \sin 80°}{\sqrt{3}}.$$

Sustituyendo las expresiones anteriores, la igualdad $a^2 + a = b^2$ es equivalente a demostrar que

$$\sqrt{3} \sin 20^\circ = 2(\sin 40^\circ - \sin 20^\circ)(\sin 40^\circ + \sin 20^\circ).$$

Esta igualdad se sigue de las fórmulas para la suma y la resta de senos:

$$\begin{aligned} \sin 40^\circ + \sin 20^\circ &= 2 \sin 30^\circ \cos 10^\circ = \cos 10^\circ, \\ \sin 40^\circ - \sin 20^\circ &= 2 \cos 30^\circ \sin 10^\circ = \sqrt{3} \sin 10^\circ. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$2(\sin 40^\circ - \sin 20^\circ)(\sin 40^\circ + \sin 20^\circ) = \sqrt{3} \cdot 2 \sin 10^\circ \cos 10^\circ = \sqrt{3} \sin 20^\circ,$$

donde hemos usado la fórmula del ángulo doble.

Las otras dos igualdades se prueban de forma totalmente análoga.

Solución alternativa del epígrafe (b). Las igualdades $a^2 + a = b^2$, $b^2 + b = (-c)^2$ y $(-c)^2 + (-c) = a^2$ se pueden obtener aplicando el teorema de Ptolomeo a los siguientes cuadriláteros.

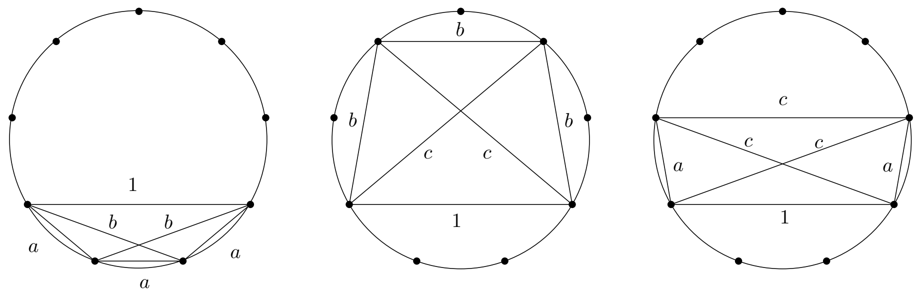


Figura 1: Esquema para la solución alternativa del Problema 3

Enunciados y soluciones - Tarde del viernes

Problema 4 o 1. Consideremos un paralelogramo $ABCD$. Una circunferencia Γ que pasa por el punto A corta a los lados AB y AD por segunda vez en los puntos E y F, respectivamente, y a la diagonal AC en el punto G. La prolongación de la recta FG corta al lado BC en H, y la prolongación de EG corta al lado CD en I. Demostrar que la recta HI es paralela a EF.

Solución. Demostraremos que $\angle GHI = \angle GFE$, que es suficiente para concluir. Comenzamos observando que

$$\angle GFE = \angle GAE = \angle GCI,$$

donde la primera igualdad de sigue del hecho que $AFGE$ es un cuadrilátero cíclico y la segunda del paralelismo de AE y CI. Si demostramos que $GHCI$ es cíclico, tendremos automáticamente que $\angle GCI = \angle GHI$. Ahora bien, esto es consecuencia de las igualdades

$$\angle HGI = \angle EGF = 180^\circ - \angle BAD = 180^\circ - \angle BCD,$$

que son automáticas dado que $AFGE$ es cíclico y $ABCD$ es un paralelogramo.

Problema 5 o 2. Los inversos de los números enteros positivos de 2 a 2023 se escriben en una pizarra. En cada paso, se seleccionan dos números x e y y se reemplazan con el número

$$\frac{xy}{xy + (1-x)(1-y)}.$$

Este proceso se repite 2021 veces, hasta que solo quede un número. ¿Cuáles pueden ser los posibles números que se obtengan al repetir este proceso?

Solución. Si $z = \dfrac{xy}{xy + (1-x)(1-y)}$, entonces

$$\left(\frac{1}{x} - 1\right)\left(\frac{1}{y} - 1\right) = \frac{(1-x)(1-y)}{xy} = \frac{1}{z} - 1.$$

Si A es el conjunto de números en la pizarra, entonces la cantidad

$$\prod_{x \in A} \left(\frac{1}{x} - 1\right)$$

no cambia durante todo el proceso (es un invariante). Inicialmente, este valor es 2022!. Por tanto, si al final del proceso únicamente queda el número x en la pizarra, entonces $\dfrac{1}{x} = 2022! + 1$, y por tanto $x = \dfrac{1}{2022! + 1}$.

Problema 6 o 3. Encontrar todos los enteros positivos $a, b, c \geq 1$ que satisfacen

$$2^a + 7^b = c^2 + 4.$$

Solución. Vamos a demostrar que las únicas soluciones son las ternas $(2, 2t, 7^t)$ con $t \geq 1$. Distinguiremos tres casos según el valor de a.

- Si $a = 1$, la ecuación se puede escribir como $7^b = c^2 + 2$. Observemos que si b es par, el lado izquierdo siempre es un múltiplo de 8 más uno, esto es,

  $$7^{2k} = 49^k \equiv 1^k = 1 \pmod{8},$$

  donde se ha usado que $49 \equiv 1 \pmod{8}$; si k es impar, el lado izquierdo es un múltiplo de 8 más siete, es decir,

  $$7^{2k+1} = 7^{2k} \cdot 7 \equiv 1 \cdot 7 = 7 \pmod{8}.$$

  Por tanto, los restos posibles del lado izquierdo módulo 8 son 1 y 7. En lo que se refiere al lado derecho, si c es impar, el resto al dividir por 8 es 3; y si es par puede ser 2 o 6. En cualquier caso, nunca es posible que se dé la igualdad.

- Si $a = 2$, la ecuación se reescribe como $7^b = c^2$. De aquí tenemos que $c = 7^t$, y sustituyendo nos queda que $b = 2t$. Por tanto, las ternas de la forma $(2, 2t, 7^t)$ con $t \geq 1$ son solución, y son las únicas con $a = 2$.

- Si $a \geq 3$, la ecuación se reescribe módulo 8 como

  $$7^b \equiv c^2 + 4 \pmod{8}.$$

  El lado izquierdo da como resto 1 o 7, mientras que el derecho puede ser 5, 4 o 0. Por tanto, nunca hay igualdad.

Enunciados y soluciones - Mañana del sábado

Problema 1. Sea $n \geq 2$ un entero positivo. Dividimos un rectángulo de $n \times (n+1)$ en piezas rectangulares: dos de 1×1, dos de 1×2, ..., y dos de $1 \times n$, con la propiedad de que para cada $k \geq 2$, una pieza de $1 \times k$ tiene los lados largos horizontales y la otra verticales. Demostrar que las dos piezas de 1×1 comparten un lado.

Solución. Procedemos por inducción. Para $n = 2$ el resultado es inmediato: la pieza vertical de 1×2 va en la vertical izquierda o derecha, y la horizontal ocupa una de las filas del cuadrado 2×2 resultante; de esta manera, quedan dos posiciones consecutivas sobre una fila en las que deberemos colocar las dos piezas 1×1.
Supongamos probado el resultado para n y demostrémoslo para $n+1$ ($n \geq 2$). Comenzamos notando que la pieza vertical de $1 \times (n+1)$ tiene que ir o bien en la columna de la izquierda o bien en la derecha; en efecto, de ir en una de las centrales, no habría espacio para colocar la pieza horizontal $1 \times (n+1)$. Supongamos sin pérdida de generalidad que va a la izquierda, siendo el otro caso totalmente simétrico. Ahora, la pieza horizontal de $1 \times (n+1)$ debe ir en la fila superior o en la inferior, dado que de ir en una de las filas intermedias no habría espacio para la pieza vertical de $1 \times n$. Nuevamente, supongamos que se coloca en la fila superior, siendo totalmente simétrico el otro caso. De esta manera, hemos colocado las dos piezas de tamaño $1 \times (n+1)$ y tenemos las restantes para colocar en un rectángulo de tamaño $n \times (n+1)$. Aplicando la hipótesis de inducción, sabemos que las dos piezas 1×1 comparten un lado, y hemos terminado.

Problema 2. Encontrar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que

$$f(x + f(y + f(x + f(y + f(x))))) = 3x + 2y$$

para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$.

Solución. La única solución es $f(x) = x$. Si sustituimos $x = y = 0$ obtenemos $f(f(f(f(f(0))))) = 0$, luego existe algún c con $f(c) = 0$. Si sustituimos $x = y = c$, obtenemos

$$f(c + f(c + f(c + f(c + f(c))))) = 5c,$$

que sustituyendo repetidamente $f(c) = 0$ produce $5c = 0$, y por tanto $c = 0$ y $f(0) = 0$.
Finalmente sustituimos $y = -f(x)$ para obtener

$$f(x + f(-f(x) + f(x + f(-f(x) + f(x))))) = 3x + 2y$$

que tras cancelar y sustituir $f(0) = 0$ produce $f(x) = 3x - 2f(x)$, o $f(x) = x$. Para concluir, se comprueba trivialmente que la función es solución.

Problema 3. Sean ABC y XYZ dos triángulos cuyos lados no son paralelos. En ambos triángulos el orden de los vértices A, B, C y X, Y, Z sigue el orden de las agujas del reloj. Si se cumple que $\frac{AB}{XY} = \frac{BC}{YZ} = \frac{CA}{ZX}$ y $AX = BY = CZ$, demostrar que los triángulos ABC y XYZ tienen el mismo circuncentro.

Solución. Supongamos lo contrario. Sea $X'Y'Z'$ la traslación de XYZ cuyo circuncentro coincide con el de ABC. Vamos a demostrar que los triángulos AXX', BYY' y CZZ' son congruentes. Consideremos el caso de AXX' y BYY', siendo los demás

análogos. Tenemos que $AX = BY$ por la condición del enunciado, y $XX' = YY'$ por la definición de X' e Y' como los trasladados de X e Y por un mismo vector. Falta ver que $AX' = BY'$. Consideremos los triángulos OAX' y OBY': cumplen que $OA = OB$, $OX' = OY'$ y además el ángulo que forman las rectas OA y OX' es el mismo que el que forman las rectas OB y OY', pues ABC y $X'Y'Z'$ son triángulos semejantes con la misma orientación (por la condición del enunciado).
Como los vectores XX', YY' y ZZ' son iguales, dos de los vectores AX, BY y CZ son iguales, dado que al ser triángulos congruentes solo hay dos posibles orientaciones (de esta manera, si el vector correspondiente a AX no es igual al de BY, el de CZ necesariamente ha de serlo a uno de los anteriores). Esto demuestra que ABC y XYZ tienen un lado paralelo, lo cual es una contradicción con el enunciado, y hemos acabado.