

COMPENDIUM OMC

Olimpíada Matemàtica Catalana

Olimpiada Matemática Española Fase Local Cataluña



Gerard Romo Garrido

Toomates Coolección vol. 50



Toomates Colección

Los libros de **Toomates** son materiales digitales y gratuitos. Son digitales porque están pensados para ser consultados mediante un ordenador, tablet o móvil. Son gratuitos porque se ofrecen a la comunidad educativa sin coste alguno. Los libros de texto pueden ser digitales o en papel, gratuitos o en venta, y ninguna de estas opciones es necesariamente mejor o peor que las otras. Es más: Suele suceder que los mejores docentes son los que piden a sus alumnos la compra de un libro de texto en papel, esto es un hecho. Lo que no es aceptable, por inmoral y mezquino, es el modelo de las llamadas "licencias digitales", "licencias de uso" y en general cualquier forma de "pago por el acceso a los materiales didácticos", con las que algunas empresas pretenden cobrar a los estudiantes, una y otra vez, por acceder a los mismos contenidos (unos contenidos que, además, son de una bajísima calidad). Este modelo de negocio es miserable, pues impide el compartir un mismo material, incluso entre dos hermanos, pretende convertir a los estudiantes en un mercado cautivo, exige a los estudiantes y a las escuelas costosísimas líneas de Internet, pretende pervertir el conocimiento, que es algo social, público, convirtiéndolo en un producto de propiedad privada, accesible solo a aquellos que se lo puedan permitir, y solo de una manera encapsulada, fragmentada, impidiendo el derecho del alumno de poseer todo el libro, de acceder a todo el libro, de moverse libremente por todo el libro.

Nadie puede pretender ser neutral ante esto: Mirar para otro lado y aceptar el modelo de pago por acceso a los materiales es admitir un mundo más injusto, es participar en la denegación del acceso al conocimiento a aquellos que no disponen de medios económicos, y esto en un mundo en el que las modernas tecnologías actuales permiten, por primera vez en la historia de la Humanidad, poder compartir el conocimiento sin coste alguno, con algo tan simple como es un archivo "pdf". **El conocimiento no es una mercancía.** El proyecto Toomates tiene como objetivo la promoción y difusión entre el profesorado y el colectivo de estudiantes de unos materiales didácticos libres, gratuitos y de calidad, que fuerce a las empresas comerciales a competir ofreciendo alternativas de pago atractivas aumentando la calidad de los materiales que ofrecen, (que son muy mediocres) y no mediante retorcidas técnicas comerciales.

Estos libros se comparten bajo una licencia "**Creative Commons 4.0 (Attribution Non Commercial)**": Se permite, se promueve y se fomenta cualquier uso, reproducción y edición de todos estos materiales siempre que sea sin ánimo de lucro y se cite su procedencia. Todos los libros se ofrecen en dos versiones: En formato "**pdf**" para una cómoda lectura y en el formato "**doc**" de MSWord para permitir y facilitar su edición y generar versiones parcial o totalmente modificadas.

¡Libérate de la tiranía y mediocridad de las editoriales! Crea, utiliza y comparte tus propios materiales didácticos.

Problem Solving (en español):

[Geometría Axiomática](#) [Problemas de Geometría 1](#) [Problemas de Geometría 2](#)
[Introducción a la Geometría](#) [Álgebra](#) [Teoría de números](#) [Combinatoria](#) [Probabilidad](#)
[Trigonometría](#) [Desigualdades](#) [Números complejos](#) [Calculus & Precalculus](#)

Libros de texto (en catalán):

[Nombres \(Preàlgebra\)](#) [Àlgebra](#) [Proporcionalitat](#) [Mesures geomètriques](#)
[Geometria analítica](#) [Combinatòria i Probabilitat](#) [Estadística](#) [Trigonometria](#) [Funcions](#)
[Nombres Complexos](#) [Àlgebra Lineal](#) [Geometria Lineal](#) [Càlcul Infinitesimal](#)
[Programació Lineal](#) [Mates amb Excel](#)

PAU españolas:

[Cataluña TEC](#) [Cataluña CCSS](#) [Valencia](#) [Galicia](#) [País Vasco](#) [Balears](#)

PAU y reválidas internacionales:

[Portugal](#) [Italia](#) [Francia](#) [Rumanía](#) [Hungria](#) [Polonia](#) [Pearson Edexcel International A Level](#)
[China Gaokao](#) [Pearson Edexcel IGCSE](#) [Cambridge International A Level](#)
[Cambridge IGCSE](#) [AQA GCSE](#) [International Baccalaureate \(IB\)](#)

Evaluación diagnóstica y pruebas de acceso:

[ACM6EP](#) [ACM4](#) [CFGs](#) [PAP](#)

Competiciones matemáticas:

Canguro: [España](#) [Cataluña](#) [Francia](#) [USA](#) [Reino Unido](#) [Austria](#)
USA: [Mathcounts](#) [AMC 8](#) [10](#) [12](#) [AIME](#) [USAJMO](#) [USAMO](#) [TSTST](#) [TST](#) [ELMO](#) [Putnam](#)
España: [OME](#) [OMEFL](#) [OMEEX](#) [OMC](#) [OMEA](#) [OMEM](#) [OMA](#) [CDP](#)
Europa: [OMI](#) [Arquimede](#) [HMMT](#) [BMO](#) [Balkan MO](#) [JBMO](#) [OPM](#)
Internacional: [IMO](#) [IGO](#) [SMT](#) [INMO](#) [CMO](#) [HMMT](#) [EGMO](#)
AHSME: [Book 1](#) [Book 2](#) [Book 3](#) [Book 4](#) [Book 5](#) [Book 6](#) [Book 7](#) [Book 8](#) [Book 9](#)

Otros materiales:

Pizzazz! [Book A](#) [Book B](#) [Book C](#) [Book D](#) [Book E](#) [Pre-Algebra](#) [Algebra](#) , [REOIM](#) , [Llibre3r](#)

¡Genera tus propias versiones de este documento! Siempre que es posible se ofrecen las versiones editables "MS Word" de todos los materiales para facilitar su edición.

¡Ayuda a mejorar! Envía cualquier duda, observación, comentario o sugerencia a toomates@gmail.com

¡No utilices una versión anticuada! Todos estos libros se revisan y amplían constantemente. Descarga totalmente gratis la última versión de estos documentos en los correspondientes enlaces superiores, en los que siempre encontrarás la versión más actualizada.

Consulta el [catálogo de libros](http://www.toomates.net) completo en <http://www.toomates.net>

¿Problemas para descargar algún documento? Descarga toda la biblioteca Toomates [Aquí](#)  MEGA

Visita mi [Canal de Youtube](https://www.youtube.com/c/GerardRomo): <https://www.youtube.com/c/GerardRomo> 

Visita mi [blog](https://toomatesbloc.blogspot.com/): <https://toomatesbloc.blogspot.com/>

Índice

	Fase Catalana		Fase Espanyola
	Enunciats	Solucions	Enunciats
1 - I - (1963-64)	33		35
2 - II - (1964-65)	37		39
3 - III - (1965-66)	41		43
4 - IV - (1966-67)	45		47
5 - V - (1967-68)	51		53
6 - VI - (1968-69)	55		57
7 - VII - (1969-70)	59		61
8 - VIII - (1970-71)	63		65
9 - IX - (1971-72)	67		69
10 - X - (1972-73)	71		73
11 - XI - (1973-74)	75		77
12 - XII - (1974-75)	79		81
13 - XIII - (1975-76)	83		85
14 - XIV - (1976-77)	87		89
15 - XV - (1978-79)	91		93
16 - XVI - (1979-80)	95		97
17 - XVII - (1980-81)	99		101
18 - XVIII - (1981-82)	103		105
19 - XIX - (1982-83)	107		109
20 - XX - (1983-84)	111		113
21 - XXI - (1984-85)	115		117
22 - XXII - (1985-86)	119		121
23 - XXIII - (1986-87)	123		125
24 - XXIV - (1987-88)	127		129
25 - XXV - (1988-89)	131		133
26 - XXVI - (1989-90)	135		137
27 - XXVII - (1990-91)	139		141
28 - XXVIII - (1991-92)	143		145
29 - XXIX - (1992-93)	147		149
30 - XXX - (1993-94)	151		153
31 - XXXI - (1994-95)	155		157
32 - XXXII - (1995-96)	159		161
33 - XXXIII - (1996-97)	163		167
34 - XXXIV - (1997-98)	169		171
35 - XXXV - (1998-99)	173	203	175
36 - XXXVI - (1999-00)	177	209	179
37 - XXXVII - (2000-01)	181	215	183
38 - XXXVIII - (2001-02)	185	227	187
39 - XXXIX - (2002-03)	189	238	191
40 - XL - (2003-04)	193	249	195
41 - XLI - (2004-05)	268	270	
42 - XLII - (2005-06)	278	282	
43 - XLIII - (2006-07)	291	295	
44 - XLIV - (2007-08)	301	304	
45 - XLV - (2008-09)	308	308	
46 - XLVI - (2009-10)	317	320	

47 - XLVII - (2010-11)	330	333
48 - XLVIII - (2011-12)	340	343
49 - XLIX - (2012-13)	353	356
50 - L - (2013-14)	363	366
51 - LI - (2014-15)	374	377
52 - LII - (2015-16)	384	387
53 - LIII - (2016-17)	393	396
54 - LIV - (2017-18)	402	402
55 - LV - (2018-19)	407	407
56 - LVI - (2019-20)	414	417
57 - LVII - (2020-21)	421	423
58 - LVIII - (2021-22)	428	429
59 - LVIV – (2022-23)	437	439

Índex de guanyadors (I -XL) 197

Fuentes.

Para todo el bloque histórico 1964-1998:

https://scm.iec.cat/wp-content/uploads/2018/01/historic_olimpiada_nou.pdf

Els propietaris del copyright autoritzen la descàrrega i impressió d'aquesta obra per a usos no comercials, amb la condició de que es mantingui la següent referència bibliogràfica del seu origen en aquesta edició:

© 2002, dels autors dels capítols i de la Societat Catalana de Matemàtiques.
 Editat i reproduït per la Societat Catalana de Matemàtiques
 (filial de l'Institut d'Estudis Catalans), C/ Carme 47, 08001 Barcelona.
 Segona edició: octubre del 2004.
 ISBN: 84-7283-755-6
 Dipòsit legal: B-48694-2004

<http://www.xtec.cat/~cromero/aqui/olimp.htm>

Web oficial: <https://www.olimpiadamatematica.cat/>

Todo este material ha sido agrupado en un único archivo "**pdf**" mediante la aplicación online <https://www.ilovepdf.com/>

En el compendium general:

<http://www.toomates.net/biblioteca/CompendiumOMEFL.pdf>

encontraréis más información sobre la Fase Local de las Olimpiada Matemática Española y el listado de todos los compendiums relacionados.

Nota sobre la part històrica

La informació de les olimpíades que es presenta en aquest nou format és la mateixa que la d'edicions anteriors amb l'afegit de les últimes. Malauradament, les llacunes que teníem encara es mantenen: ens falten cinc problemes de l'Olimpíada II, primera fase (1964-65); i un problema de l'Olimpíada VI, primera fase (1968-69). En el lloc corresponent hi hem posat, de moment, uns enunciats que tenen alguna probabilitat de ser els correctes, però que estan pendents de confirmació. Tots ells estan marcats amb un *.

Les llistes de guanyadors són completes *excepte* les que corresponen a les primeres fases de les Olimpíades XVI (1978-79) i XX (1983-84). D'aquests anys no en queda cap constància a la SCM, i així està indicat al lloc corresponent.

La Societat Catalana de Matemàtiques demana a qualsevol persona que hagi tingut relació amb alguna de les Olimpíades II, VI, XVI i XX, tant si ha estat guanyador com participant o professor, i que en tingui informació, que s'adrexi a la Societat i li faci arribar. Aquesta sollicitud es fa extensiva a tothom que tingui documents, cartes de notificació, fulls d'enunciats, etc., de qualsevol Olimpíada de la I a la XXX. La SCM agrairà totes les informacions que l'ajudin a reconstruir els arxius de les Olimpíades.

La col·lecció d'enunciats i guanyadors que figura en aquest llibret té diversos orígens. Els principals són:

- 1) La *Gaceta Matemática* de la *Real Sociedad Matemática Española* que publicava, cada any, les llistes de guanyadors per districtes i de la segona fase. Malgrat tot, la col·lecció s'estroncà definitivament l'any 1982, i en alguns anys anteriors la informació era incompleta. Els enunciats dels problemes també hi figuraven, però els tribunals locals de la primera fase podien canviar-los, i ha calgut confirmar bastants casos dubtosos.
- 2) La col·lecció personal de problemes del professor Bellot, que ha permès prosseguir des d'on acabà la *Gaceta Matemática*. Aquests problemes, confirmats per fulls d'enunciats repartits a les proves i que s'han pogut aconseguir, han permès tenir tots els enunciats de la segona fase i alguns de la primera que faltaven en els anys 1978-1984. També ens ha proporcionat dades sobre la participació de concursants espanyols a les Olimpíades Internacionals i Iberoamericanes. Cal dir una vegada més que les informacions aportades per Francisco Bellot han estat cabdals des del principi de les edicions d'aquests llibres.

3) Els fulls de problemes repartits amb logotip de la Societat, conservats per Antoni Gomà, o els Fulls Informatius i Memòries de la SCM, han permès establir els enuncis de la primera fase dels anys 1985-1992. També n'han sortit noms de guanyadors, però amb les llacunes esmentades i encara no aclarides.

4) La informació continguda a les resolucions de la Subdirección General de Becas y Ayudas al Estudio del Ministerio de Educación y Cultura on hi ha els noms dels estudiants que han tingut beca d'estudis olímpica, o bé premi en metal·lic. Aquestes dades han estat valuoses per a completar les llistes de guanyadors de determinats anys i confirmar altres fonts.

5) La informació verbal que ens ha proporcionat la professora María Gaspar Alonso-Vega, de Madrid, que va ser acompanyant dels primers equips espanyols a les Olimpíades Internacionals i Iberoamericanes.

6) Les informacions escrites o verbals de moltes persones que en algun moment han tingut relació amb les Olimpíades. Encara que sigui a costa d'oblidar-ne alguna, cosa de la qual en demanem disculpes, esmentem: Josep Burillo Puig, Joan Elias García, Fernando Etayo Gordejuela, Jaume Lluís García Roig, Josep Gelonch Anyé, Fernando Herrero Buj, Santiago Manrique Catalán, Daniel Marquès Solé, Fco. Javier Martínez de Albéniz Salas, Ramon Masip Treig, Josep M. Mondelo González, Ignasi Mundet Riera, Vicente Muñoz Velázquez, Teresa Novelle Saco, Antoni Oliva Cuyàs, Antoni Ras Sabidó, Roberto Selva Gómez, Josep Oriol Solé Subiela, Olga Tugues, Gerald Welters Dyhdalewicz, etc.

La Societat Catalana de Matemàtiques dóna les gràcies a tothom que ha ajudat a completar aquesta petita història de les Olimpíades de matemàtiques i no dubta que podrà aconseguir, algun dia, les dades que li manquen.

Josep Grané Manlleu

GUANYADORS DE LES DARRERES OLIMPIADES

Curs 2003-04

XL Olimpíada Matemàtica

Primera Fase (Catalunya)

Primers premis

Joaquim Serra Montolí	IES La Sedeta (Barcelona)
Albert Agudé Borrull	Salesians S. Joan Bosco (Barcelona)
Maria Ibáñez Alonso	Aula Escola Europea (Barcelona)

Segons premis

Guillermo Vilaplana Muller	Lycée Français (Barcelona)
Robert Fiallos Masó	IES La Sedeta (Barcelona)
Ainhoa Manterola Solans	Aula Escola Europea (Barcelona)

Tercers premis

Miguel Teixidó Román	Col·legi Claver (Lleida)
Enric Martínez Sala	Aula Escola Europea (Barcelona)
Alberto Camacho Martínez	IES Joanot Martorell (Esplugues de Llobregat)

Segona Fase (Espanya), medalles d'or

1	Joaquim Serra Montolí	(Barcelona)
2	Maite Peña Alcaraz	(Sevilla)
3	Elisa Lorenzo García	(Madrid)
4	Miguel Teixidó Román	(Lleida)
5	Francisco Javier Hernández Heras	(Valladolid)
6	María Isabel Cordero Marcos	(Salamanca)

Curs 2003-04

45th International Mathematical Olympiad

Atenes, Grècia

Espanya a quedar al lloc 55 per països.

Els concursants espanyols van obtenir: Maite Peña, *medalla de bronze*, i Joaquim Serra, Francisco J. Hernández, i María Isabel Cordero *menció honorífica*.

Curs 2002-03

XXXIX Olimpíada Matemàtica

Primera Fase (Catalunya)

Primers premis

Daniel Rodrigo López	IES Montserrat Miró (Montcada i Reixac)
Joaquim Serra Montolí	IES La Sedeta (Barcelona)
Matías Javier Wartelski Pryluka	Lycée Français (Barcelona)

Segons premis

Carles Sala Cladellas	IES Sant Quirze (Sant Quirze del Vallès)
Xavier Roca Artola	Aula Escola Europea (Barcelona)
Anna Sabaté Vidales	Aula Escola Europea (Barcelona)

Tercers premis

Arnau Padrol Sureda	IES Menéndez y Pelayo (Barcelona)
Carles Solano Molins	Institució Cultural del CIC (Barcelona)

Segona Fase (Espanya), medalles d'or

1	Daniel Rodrigo López	(Montcada i Reixac, Barcelona)
2	Luis Hernández Corbato	(Madrid)
3	Mohammed Blanca Ruiz	(Manises, Valencia)
4	Víctor González Alonso	(Briviesca, Burgos)
5	Javier Gómez Serrano	(Madrid)
6	Maite Peña Alcaraz	(Sevilla)

Curs 2002-03
44th International Mathematical Olympiad
Tokyo, Japó

Concursants amb puntuació màxima de 42 punts sobre 42 (de 457 participants de 82 països):

Xina, 1:

Yunhao Fu

Vietnam, 2:

Hung Viet Bao Le, Trong Cahn Nuyen

Tots els integrants de l'equip de Bulgària van obtenir medalla d'or. Espanya va quedar al lloc 46 per països. Els concursants espanyols van obtenir: Víctor González, *medalla de bronze*, i Daniel Rodrigo, Luis Hernández, Mohammed Blanca i Maite Peña *menció honorífica*.

XVIII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas
Mar del Plata, Argentina

Resultats dels concursants espanyols: Luis Hernández, *medalla de plata*, Maite Peña i Daniel Rodrigo, *medalles de bronze* i Víctor González, *menció honorífica*.

Curs 2001-02

XXXVIII Olimpíada Matemàtica

Primera Fase (Catalunya)

Primers premis

Sergio Millán López	IES Santa Eulàlia (L'Hospitalet de Llobregat)
Pau Curell Sanmartí	Aula Escola Europea (Barcelona)
Daniel Rodrigo López	IES Montserrat Miró (Montcada i Reixac)

Segons premis

Elsa de Alfonso Prieto-Puga	Aula Escola Europea (Barcelona)
Albert Llorens Martínez	Col·legi Vidal i Barraquer (Sabadell)
Patricia Ceballos Carrascosa	Institució Cultural del CIC (Barcelona)

Tercers premis

Raül Vinyes Raso	Aula Escola Europea (Barcelona)
Ignasi Abió Roig	Col·legi Bell-lloc del Pla (Girona)
Anna Papió Toda	IES Joan Guinjoan (Riudoms)

Segona Fase (Espanya), medalles d'or

1	Daniel Rodrigo López	(Montcada i Reixac, Barcelona)
2	Luis Hernández Corbato	(Madrid)
3	Sergio Millán López	(L'Hospitalet de Llobregat, Barcelona)
4	David García Soriano	(Madrid)
5	Susana Ladra González	(Teo, A Coruña)
6	José Miguel Manzano Prego	(Motril, Granada)

Curs 2001-02
43rd International Mathematical Olympiad
(Glasgow, UK)

Concursants amb puntuació màxima de 42 punts sobre 42 (de 471 presentats de 84 països):

Xina, 2:

Yunhao Fu, Botong Wang

Rússia, 1:

Andrei Khaliavine

Tots els integrants dels equips de Xina i Rússia van obtenir medalla d'or. Espanya va quedar al lloc 60 per països. Els concursants espanyols van obtenir: Luis Hernández, *medalla de bronze*, i Sergio Millán *menció honorífica*.

XVII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas
San Salvador, El Salvador

Resultats dels concursants espanyols; Sergio Millán, Daniel Rodrigo i José Miguel Manzano, *medalles de plata*.

Curs 2000-01

XXXVII Olimpíada Matemàtica

Primera Fase (Catalunya)

Primers premis

Maria Saumell Mendiola	IES Lluís de Requesens (Molins de Rei)
Francesc Fité Naya	Escola Joan Pelegrí (Barcelona)
Miquel Oliu Barton	Aula Escola Europea (Barcelona)

Segons premis

Martí Prats Soler	IES Montserrat (Barcelona)
Roc Maymó Camps	Institució Cultural del CIC (Barcelona)
Artur Latorre Musoll	IES Guillem de Berguedà (Berga)

Tercers premis

Sergio Millán López	IES Santa Eulàlia (L'Hospitalet de Llobregat)
Joaquim Cevallos Morales	Aula Escola Europea (Barcelona)
Pedro Valero Lanau	Lycée Français (Barcelona)

Segona Fase (Espanya), medalles d'or

1	Javier Cóppola Rodríguez	(Madrid)
2	Martí Prats Soler	(Barcelona)
3	Luis Hernández Corbato	(Madrid)
4	Sergio Millán López	(L'Hospitalet de Llobregat, Barcelona)
5	Ignacio Cascudo Pueyo	(Oviedo)
6	Miquel Oliu Barton	(Barcelona)

J. Cóppola no té nacionalitat espanyola i no pot participar a la 42nd IMO amb l'equip espanyol. Hi participa el guanyador de la primera medalla de plata, Joaquim Cevallos Morales (Barcelona).

Curs 2000-01
42nd International Mathematical Olympiad
(Washington DC, USA)

Concursants amb puntuació màxima de 42 punts sobre 42 (de 476 presentats de 83 països):

Xina, 2: Liang Xiao, Zhigiang Zhang

Estats Units, 2: Reid Barton, Gabriel Carroll

Els concursants espanyols van obtenir: Luis Hernández, *medalla de bronze*, i Joaquim Cevallos i Miquel Oliu, *menció honorífica*.

XVI Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas
Minas, Uruguay

Resultats dels concursants espanyols: Luis Hernández, *medalla d'or*; Alberto Suárez (guanyador de medalla d'or de la XXXVI OME), *medalla de bronze*.

Curs 1999-2000

XXXVI Olimpíada Matemàtica

Primera Fase (Catalunya)

Primers premis

Jordi Rius Pascual	IES Antoni Torroja (Cervera)
Stephan Lesaffre	Lycée Français (Barcelona)
Miquel Oliu Barton	Aula Escola Europea (Barcelona)

Segons premis

Xavier Martínez Palau	IES Torras i Bages (L'Hospitalet de Llobregat)
Juanjo Rué Perna	IES Samuel Gili i Gaya (Lleida)
Joan Alemany Flos	Aula Escola Europea (Barcelona)

Tercers premis

Fabrice Lesaffre	Lycée Français (Barcelona)
------------------	----------------------------

Segona Fase (Espanya), medalles d'or

1	Carlos Gómez Rodríguez	(Santiago de Compostela)
2	Luis Emilio García Martínez	(València)
3	Alberto Suárez Real	(Salinas, Asturias)
4	José María Cantarero López	(Ronda, Málaga)
5	Manuel Pérez Molina	(Alacant)
6	Roberto Rubio Núñez	(València)

Curs 1999-2000
41st International Mathematical Olympiad
(Taejon, Corea del Sud)

Concursants amb puntuació màxima de 42 punts sobre 42 (de 451 presentats):

<i>Bulgaria, 1:</i>	Alexandr Usnich
<i>Xina, 1:</i>	Zhiwei Yun
<i>Rússia, 2:</i>	Alexei Poiarkov, Alexandre Gaifoulline

El concursant espanyol José María Cantarero va obtenir menció honorífica.

XV Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas
Caracas, Venezuela

Resultats dels concursants espanyols: Alberto Suárez, José M. Cantarero i Luis Emilio García, *medalles de plata*; Carlos Gómez, *medalla de bronze*.

Curs 1998-99

XXXV Olimpíada Matemàtica

Primera Fase (Catalunya)

Primers premis

Edgar González Pellicer	Collegi Mares Concepcionistes (Barcelona)
Joaquim Molera Vidal	IES Lluís de Peguera (Manresa)
Darío Mora Portela	IES Barcelona-Congrés (Barcelona)

Segons premis

M. Vinyes	Aula Escola Europea (Barcelona)
Pere Menal Ferrer	Centre d'Estudis Vidal i Barraquer (Sabadell)
Óscar Barenys García	IES Salvador Vilaseca (Reus)

Tercers premis

Fèlix Llopart Miquel	Collegi Sant Josep (Sant Sadurní d'Anoia)
Domènec Martín Martínez	IES Alt Penedès (Vilafranca del Penedès)

Segona Fase (Espanya), medalles d'or

1	Ramón José Aliaga Varea	(Mislata, València)
2	Andrés Tallos Tanarro	(Madrid)
3	Enrique Vallejo Gutiérrez	(Bilbao)
4	Álvaro Navarro Tobar	(Madrid)
5	Javier Múgica de Ribera	(Santiago de Compostela)
6	Néstor Sancho Bejarano	(Béjar, Salamanca)

Curs 1998-99
40th International Mathematical Olympiad
(Bucarest, Romania)

Concursants amb puntuació màxima de 39 punts sobre 42 (de 450 presentats):

<i>Hongria, 1:</i>	Tamás Terpai
<i>Romania, 1:</i>	Stefan Laurentiu Horneș
<i>Ucraïna, 1:</i>	Maksym Fedorchuk

Els concursants espanyols Ramón J. Aliaga i Javier Múgica van obtenir, respectivament, medalla de bronze i menció honorífica.

XIV Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas
La Habana, Cuba

Resultats dels concursants espanyols: Ramón José Aliaga, Álvaro Navarro i Javier Múgica, *medalles de plata*; Néstor Sancho, *medalla de bronze*.

Curs 1997-98

XXXIV Olimpíada Matemàtica

Primera Fase (Catalunya)

Primers premis

Marc Martínez de Albéniz Margalef	Liceu Francès (Barcelona)
Lluís Acero Sistach	IES Menéndez y Pelayo (Barcelona)
Xavier Gratal Martínez	IES Màrius Torres (Lleida)

Segons premis

Edgar González Pellicer	Col·legi Mares Concepcionistes (Barcelona)
Aniol Llorente Saguer	IES Jaume Vicens Vives (Girona)
Àngel Faus Tomás	Col·legi Bell-lloc del Pla (Girona)

Tercers premis

Eduard Viladesau Franquesa	Aula Escola Europea (Barcelona)
Antoni Conejero Cárceles	IES Jaume Vicens Vives (Girona)

Segona Fase (Espanya), medalles d'or

1	Mario Andrés Montes García	(Salamanca)
2	Ramón José Aliaga Varea	(Mislata, València)
3	David Martín Calva	(Saragossa)
4	María Pe Pereira	(Burgos)
5	Beatriz Sanz Merino	(Madrid)
6	Jaime Vinuesa del Río	(Valladolid)

Curs 1997-98

Iran, 1:

Els concursants espanyols Jaime Vinuesa i Mario Andrés Montes van obtenir, respectivament, medalla de bronze i menció honorífica.

XIII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas

Puerto Plata, República Dominicana

Curs 1996-97

XXXIII Olimpíada Matemàtica

Primera Fase (Catalunya)

Primer premi

Xavier Pérez Giménez IB Joan Boscà (Barcelona)

Segon premi

Max Bernstein Obiols Aula Escola Europea (Barcelona)

Tercer premi

Xavier Gratal Martínez IB Màrius Torres (Lleida)

Segona Fase (Espanya), medalles d'or

1	Anatoli Segura Vélez	(Baza, Granada)
2	Miguel Lobo López	(Martos, Jaén)
3	Mario Andrés Montes García	(Salamanca)
4	Max Bernstein Obiols	(Barcelona)
5	Joseba Villate Bejarano	(Algorta, Biscaia)
6	Xavier Pérez Giménez	(Barcelona)

Sergi Elizalde Torrent va participar-hi, fora de concurs, ja que per edat podia tornar a concursar a la *XII Olimpíada Iberoamericana*. Va obtenir la puntuació més alta de tots els concursants, i va tenir dues mencions especials per la qualitat de la resolució de dos problemes.

Curs 1996-97
38th International Mathematical Olympiad
(Mar del Plata, Argentina)

Concursants amb puntuació màxima de 42 punts sobre 42 (de 460 presentats):

<i>Romania, 1:</i>	Ciprian Manolescu
<i>USA, 1:</i>	Carleton Bosley
<i>Iran, 1:</i>	Eaman Eftekhari
<i>Vietnam, 1:</i>	Do Quoc Anh

XII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas
Guadalajara (Jalisco), Mèxic

Resultats dels concursants espanyols: Sergi Elizalde, *medalla de plata*; Miguel Lobo, Mario Andrés Montes i Xavier Pérez, *medalles de bronze* cada un.

Curs 1995-96

XXXII Olimpíada Matemàtica

Primera Fase (Catalunya)

Primers premis

Edgar Güeto de la Rosa	IB Torras i Bages (L'Hospitalet de Llobregat)
Víctor Martínez de Albéniz Margalef	Lycée Français (Barcelona)
Raúl Martín Álvarez	IB Maragall (Barcelona)

Segons premis

Joel Gabàs Masip	IB Mixt Núm. 4 (Lleida)
Lluís Tarafa Mate	Lycée Français (Barcelona)
Sergi Elizalde Torrent	IB Arnau Cadell (Sant Cugat del Vallès)

Tercers premis

Max Bernstein Obiols	Aula Escola Europea (Barcelona)
Diego Pozo Tortosa	IES Doctor Puigvert (Barcelona)

Segona Fase (Espanya), medalles d'or

1	Sergi Elizalde Torrent	(Sant Cugat del Vallès, Barcelona)
2	Tomás Palacios Gutiérrez	(Madrid)
3	Fernando Rambla Barreno	(Cádiz)
4	Antonio Jara de las Heras	(Jaén)
5	Patricia Sebastián Celorrio	(Zaragoza)
6	Víctor Martínez de Albéniz Margalef	(Barcelona)

Curs 1995-96
37th International Mathematical Olympiad
(Bombay, India)

Concursant amb puntuació màxima de 42 punts sobre 42 (de 424 presentats):

Romania, 1: Ciprian Manolescu

El concursant espanyol Sergi Elizalde Torrent obté *menció honorífica*.

XI Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas
San José, Costa Rica

Els concursants espanyols Sergi Elizalde, Antonio Jara, Víctor Martínez de Albéniz i Fernando Rambla obtenen *medalla de bronze*.

Curs 1994-95

XXXI Olimpíada Matemàtica

Primera Fase (Catalunya)

Primers premis

Sergio Cabello Justo	IB J. Lladonosa, (Lleida)
Thomas Doumenc	Liceu Francès (Barcelona)

Segons premis

Joaquim Puig Sadurní	IB Sants (Barcelona)
Ferran Revilla Domingo	IB Lluís de Peguera (Manresa)

Tercer premi

Ana de Mier Vinué	Jesuïtes de Casp (Barcelona)
-------------------	------------------------------

Segona Fase (Espanya), medalles d'or

1	Ángel paredes Galán	(Santiago)
2	Jerónimo Arenas García	(Sevilla)
3	Luis Fabiano Bendicho o	(Zaragoza)
4	Jaume Andre Pascual	(Balears)
5	Alejandro García Gil	(Madrid)
6	Ignacio Fernández Galván	(Extremadura)

Curs 1994-95
36th International Mathematical Olympiad
(Toronto, Canada)

Concursants amb puntuació màxima de 42 punts sobre 42 (de 354 presentats):

<i>Hongria, 3:</i>	Peter Burcsi, Egmont Koblinger, Mihaly Barasz
<i>R. P. Xina, 3:</i>	Song Liu , Cheng Chang, Chenchang Zhu
<i>Romania, 3:</i>	Dragos Oprea, Ciprian Manolesco, Ovidiu Savin
<i>Bulgària, 1:</i>	Nikolay Nikolov
<i>Rússia, 1:</i>	Serguei Norine
<i>Iran, 1:</i>	Maryam Mirzakhani
<i>Corea del Sud, 1:</i>	Sug-woo Shin
<i>Vietnam, 1:</i>	Ngo Dac Tuan

Curs 1993-94

XXX Olimpíada Matemàtica

Primera Fase (Catalunya)

Primers premis

David Arso Civil	Escola Pia de N. Sra-I. J. Bofill (Barcelona)
Rubén Albiol López	IB Camp Clar (Tarragona)

Segons premis

José M. Torrego Solana	Col·legi Llor (Sant Boi de Llobregat)
José R. Domingo Magaña	I.B. Camp Clar (Tarragona)

Tercers premis

Mario Parra Kaiser	Aula Escola Europea (Barcelona)
Francesc Gassó Minguet	I.B. Martí Franquès (Tarragona)

Segona Fase (Espanya)

1	David Sevilla González	(Alcorcón, Madrid)
2	Tomás Baeza Oliva	(Madrid)
3	Miguel Catalina Gallego	(Valladolid)
4	Alfonso Gracia Saz	(Zaragoza)
5	Jerónimo Arenas García	(Sevilla)
6	Miguel A. Bermúdez Carro	(Betanzos, Coruña)
	Antonio Rojas León	invitat, fora de concurs (Sevilla)

Curs 1993-94
35th International Mathematical Olympiad
(Hong-Kong)

Concursants amb puntuació màxima de 42 punts sobre 42 (de 354 presentats):

<i>R. P. Xina, 2:</i>	Jianbo Peng, Jian Zhang
<i>França, 1:</i>	Philippe Golle
<i>Hongria, 1:</i>	Szabolcs Szadeczky Kardoss
<i>Polònia, 1:</i>	Grzegorz Bobinski
<i>Rússia, 3:</i>	Mikhail Bondarko, Roman Karashev, Serguei Norine
<i>Eslovàquia, 1:</i>	Andrej Zlatos
<i>Ucraïna, 1:</i>	Yuliy Sannikov
<i>USA, 6:</i>	Alexander Khazanov, Jeremy Bem, Jacob Lurie, Noam Shazeer, Stephen Wang, Jonathan Weinstein

ELS PROBLEMES DE LES OLIMPIÁDES

1 a 40

Primera sessió

1C1. Un taverner disposa de 150 l de vi a 12 pta/l, 200 l de vi a 9 pta/l i 250 l de vi a 7 pta/l. Vol obtenir una mescla a 10 pta/l. Quants litres de mescla podrà obtenir?

1C2. Si a cada nombre complex z li fem correspondre el nombre

$$z' = 2z - 1$$

s'obté una transformació del pla en ell mateix.

- a) Quin és el transformat del semipla dels afixos del nombres z que tenen part real més gran que $1/2$?
- b) Quins punts del pla es transformen en ells mateixos?
- c) Quines rectes del pla es transformen en elles mateixes?

1C3. a) Quatre persones guarden una caixa forta. Digueu quants panys ha de tenir la caixa, i quantes claus cada persona, per tal que tres persones qualssevol de les quatre puguin obrir la caixa i dues persones no puguin.

b) El mateix amb sis persones.

c) n persones guarden una caixa forta. Digueu quants panys ha de tenir la caixa, i quantes claus cada persona, per tal que a persones qualssevol de les n puguin obrir la caixa i $a - 1$ persones no puguin.

1C4. Un frontó està format per dues parets verticals perpendiculars, la frontal i la lateral. A la lateral hi ha un forat A situat a una altura de 5 m i distant 7 m de la paret frontal. Un individu situat en un punt B les distàncies del qual a les parets frontal i lateral són 3 m i 6 m, llança una pilota contra la paret frontal des d'una altura de 1 m, de manera que després de rebotar penetra al forat A de la paret lateral. Es pregunta:

- a) Quin és l'angle que forma la trajectòria de la pilota amb la paret del frontó?
- b) Quina és la longitud del camí recorregut per la pilota?

1C5. Trobeu els nombres de la forma aa i $bbcc$ tals que

$$aa = \sqrt{bbcc}.$$

1C6. Donat un triangle, traceu dues circumferències iguals tangents entre elles, una d'elles tangent als costats a i b del triangle, i l'altra tangent als costats a i c .

1C7. Trobeu els moviments del pla que transformen el conjunt de punts de coordenades enteres en ell mateix.

1C8. Donada una circumferència de centre O i radi r , i dos diàmetres perpendiculars AB i CD , trobeu els punts P de la circumferència tals que la suma de les àrees dels triangles APO i CPO sigui màxima o mínima.

Primera sessió

1E1. Donada l'equació $x^2 + ax + 1 = 0$ determineu

a) L'interval on ha de prendre valors el nombre real a per tal que les arrels de l'equació siguin imaginàries.

b) El lloc geomètric dels punts representatius d'aquestes arrels en la representació gràfica habitual dels nombres complexos, si a recorre l'interval trobat abans.

1E2. L'impost sobre el Rendiment del Treball Personal és una funció $f(x)$ del total x de les retribucions anuals (en pessetes). Sabem que

a) $f(x)$ és una funció contínua.

b) La derivada $df(x)/dx$ a l'interval $0 \leq x < 60000$ és constant i igual a 0; a l'interval $60000 < x < P$ és constant i igual a 1; i per $x > P$ és constant i igual a 0.14.

c) $f(0) = 0$ i $f(140000) = 14000$.

Determineu el valor de P i representeu gràficament la funció.

1E3. Es considera un polígon convex de n costats. Es tracen totes les rectes diagonals i se suposa que no n'hi ha tres de concurrents en un punt que no sigui un vèrtex, i tampoc n'hi ha dues de paral·leles. Es demana

a) El nombre total de punts d'intersecció de les diagonals, excloent els vèrtexs.

b) El nombre de punts anteriors que són interiors al polígon, i el nombre dels que són exteriors.

1E4. Donat el triangle equilàter ABC de costat a i la seva circumferència circumscrita, es considera el segment de cercle limitat per la corda AB i l'arc (de 120°) dels mateixos extrems. Si tallem aquest segment circular per rectes paral·leles al costat BC , determinem sobre cada una d'elles un segment els punts del qual són interiors al segment circular esmentat. Digueu quina és la longitud màxima d'aquests segments rectilinis.

Segona sessió

1E5. Donat un pentàgon regular es dibuixen els cinc segments diagonals. Determineu el nombre total de triangles que apareixen a la figura i classifiqueu aquest conjunt en classes de triangles iguals (directes o inversos) entre ells.

1E6. Representeu gràficament la funció

$$y = \left| \left| |x - 1| - 2 \right| - 3 \right|$$

a l'interval $-8 \leq x \leq 8$.

1E7. Es considera un fitxer amb 1000 fitxes numerades ordenades en l'ordre natural. Al fitxer li apliquem l'operació següent:

La primera fitxa és col·loca intercalada entre la penúltima i l'última. La segona fitxa es col·loca al final, de manera que la tercera queda en primer lloc.

Observant la posició que ocupa cada una de les fitxes, demostreu que després de 1000 operacions anàlogues aplicades successivament (cada una a l'ordenació que resulta de l'operació anterior), el fitxer torna a estar en l'ordre natural.

Comproveu que no es pot obtenir el mateix resultat si es tracta d'un fitxer amb un nombre senar n de fitxes i es fan n operacions.

1E8. En un pla vertical es consideren els punts A i B situats sobre una recta horitzontal, i la semicircumferència d'extrems A , B situada al semiplà inferior. Un segment de longitud a igual al diàmetre de la circumferència es mou de manera que conté sempre el punt A i un dels extrems recorre la semicircumferència donada. Determineu el valor del cosinus de l'angle que ha de formar aquest segment amb la recta horitzontal per tal que el seu punt mitjà ocupi la posició més baixa possible.

Primera sessió

2C1. En una reunió hi ha més homes que dones, més dones que beuen que homes que fumen, i més dones que fumen i no beuen que homes que no beuen ni fumen. Demostreu que hi ha menys dones que no beuen ni fumen que homes que beuen i no fumen.

2C2. Segons una norma del Codi de Circulació, la distància entre dos cotxes que van a velocitat de v Km/h ha de ser igual o superior a $(v/10)^2$ m. Suposant que la longitud dels cotxes sigui de 4 m i la distància entre cotxes consecutius sigui la mínima possible, es vol conèixer la velocitat que dóna la millor fluïdesa de tràfic.

* **2C3.** En una corona circular, una corda de la circumferència exterior que és tangent a la circumferència interior mesura 20 cm. Calculeu l'àrea de la corona.

* **2C4.** L'afix d'un nombre complex z i els tres afixos de les seves arrels cúbiques formen un rombe. Trobeu z .

Segona sessió

- * **2C5.** Trobeu el grup de moviments del pla que transformen una recta donada en ella mateixa.
- * **2C6.** Demostreu que les rectes que uneixen els punts mitjans dels parells d'arestes oposades d'un tetraèdre regular, es tallen.
- * **2C7.** Determineu a per tal que l'equació

$$x^3 + x^2 - x + a = 0$$

tingui una arrel que sigui mitjana aritmètica de les altres dues. En aquest cas, calculeu les tres arrels.

2C8. Dos miralls plans formen un angle ω . Un raig de llum normal a un dels dos miralls es reflecteix alternativament en cada un dels dos miralls. Digueu quins valors pot tenir ω per tal que en una d'aquestes reflexions el raig surti paral·lel a un mirall.

Primera sessió

2E1. Un triangle equilàter inscrit en una circumferència de centre O i radi igual a 4 cm es fa girar un angle recte al voltant de O . Trobeu l'àrea de la part comuna al triangle donat i a l'obtingut en aquest gir.

2E2. Digueu quants nombre hi ha de tres xifres (és a dir, més grans que 99 i més petits que 1000) que tinguin la xifra central més gran que les altres dues. D'entre ells, quants n'hi ha que tinguin les tres xifres diferents?

2E3. Un disc microsolc gira a velocitat de $33\frac{1}{3}$ revolucions per minut i l'audició dura 24 min 30 s. La part enregistrada té 29 cm de diàmetre exterior i 11.5 cm de diàmetre interior. Amb aquestes dades calculeu la longitud del solc enregistrat.

2E4. Trobeu tots els intervals de valors de x pels quals

$$\cos x + \sin x > 1.$$

Resoleu el mateix problem per

$$\cos x + |\sin x| > 1.$$

Segona sessió

2E5. És ben conegut que si $p/q = r/s$, aleshores $p/q = (p-r)/(q-s)$. Escrivim ara la igualtat

$$\frac{3x-b}{3x-5b} = \frac{3a-4b}{3a-8b}.$$

Per la propietat anterior, les dues fraccions han de iguals a

$$\frac{3x-5b-3a+8b}{3x-b-3a+4b} = \frac{3x-3a+3b}{3x-3a+3b} = 1$$

mentre que les primeres són, en general, diferents de la unitat. Expliqueu clarament el perquè d'aquest resultat.

2E6. Es construeix amb filferro un triangle equilàter de costat l i es col·loca sobre una esfera de radi r que no passa a través del triangle. Digueu a quina distància del centre de l'esfera queden els vèrtexs del triangle.

2E7. Un tronc de con de revolució té la base gran de radi r i les generatrius formen amb el pla de la base un angle que té per tangent m . El tronc de con està format per un material de densitat d i la base menor està recoberta per una làmina de massa p g/cm². Digueu quina és l'altura del tronc de con per a la qual la massa total és màxima. Feu la discussió completa del problema.

2E8. Sigui γ_1 una circumferència de radi r i P un punt exterior que dista a del centre. Suposem construïdes les dues rectes tangents a γ_1 per P , i sigui γ_2 una circumferència de radi menor que el de γ_1 , tangent a aquesta i a les dues rectes. En general, una vegada construïda la circumferència γ_n , se'n construeix una altra γ_{n+1} de radi menor que el de γ_n i tangent a aquesta i a les dues rectes citades. Determineu

- a) El radi de γ_2 .
- b) L'expressió general del radi de γ_n .
- c) El límit de la suma de les longituds de les circumferències $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, \dots$

Primera sessió

3C1. Trobeu els polígons regulars els angles dels quals mesuren un nombre enter de graus.

3C2. Els carrers d'una ciutat formen enreixat de dues trames, una formada pels carrers longitudinals i una altra pels transversals. Els longitudinals es designen amb els nombres naturals 1, 2 i 3; i els transversals amb les lletres de l'alfabet a, b, c, d, e i f ; i en aquest ordre. Una persona surt a passejar de la cruïlla $(1,a)$. Tira un dau amb sis cares numerades de l'u al sis. Si surt un múltiple de 3, recorre una travessia longitudinal, i en cas contrari una de transversal. A cada cruïlla repeteix l'operació. Digueu quina és la probabilitat que passi per la cruïlla $(3,d)$.

3C3. Un dipòsit té la superfície formada per un cilindre completat per dues semiesferes a les bases. El dipòsit està col·locat de forma que les generatrius del cilindre són horitzontals. Gradueu una vara vertical de manera que doni el volum del líquid contingut al dipòsit en funció de l'altura mercada a la vara.

3C4. Els elements d'un grup es poden expressar com a productes finits de la forma $abcd \dots$ on cada factor, o és igual a g , o és igual a s . Aquests g i s compleixen

$$\begin{aligned}g^n &= I \\s^2 &= I \\s g &= g^{n-1} s\end{aligned}$$

on I és l'element neutre del grup, i els exponents tenen el significat de producte de termes iguals.

a) Trobeu el nombre d'elements del grup.

b) Doneu la taula del grup per a $n = 6$.

3C5. Si fem $s = x + y$ i $p = xy$, expresseu $(x - y)^4$ com a polinomi en s i p .

3C6. Amb base als costats d'un quadrat es construeixen triangles isòsceles que intercepten els costats oposats en segments iguals a un terç del costat del quadrat. Calcular, en funció d'aquest costat, l'àrea de l'estrella de quatre puntes que té per vèrtexs els dels triangles exteriors al quadrat.

3C7. Digueu quants moviments transformen un políedre regular en ell mateix.

3C8. Referit al pla a coordenades cartesianes, es consideren el conjunt de punts de coordenades enteres. En aquest conjunt es defineix una relació d'equivalència: dos punts la satisfan si i només si les primeres coordenades són congrues mòdul 2 i les segones coordenades són congrues mòdul 3. Es demana:

- a) El nombre de classes d'equivalència.
- b) El representant de cada classe a distància mínima de l'origen.
- c) Al conjunt de classes es defineix una suma component a component (mòdul 2 i 3, respectivament). Escriviu la taula del grup que s'obté.
- d) Si es defineix, a més a més, un producte component a component (mòdul 2 i 3, respectivament), s'obté un anell. Trobeu-ne els divisors de zero.

Primera sessió

3E1. Un fabricant de tres productes de preus unitaris 50, 70 i 65 Pta rep una comanda de 100 unitats d'un detallista que li tramet un pagament de 6850 Pta. El detallista posa la condició que li envii el màxim possible del producte més car, i la resta dels altres dos productes. Quant ha d'enviar de cada producte per tal de servir la comanda?

3E2. Un nombre de tres xifres s'escriu xyz en el sistema de base 7, i zyx en el sistema de base 9. Quin nombre és?

3E3. Donat un pentàgon regular es considera el pentàgon convex limitat per les diagonals. Es demana:

- a) La relació de semblança entre els dos pentàgons convexos.
- b) La relació de les àrees.
- c) La raó de l'homotècia que transforma el primer en el segon.

3E4. Es vol penjar un pes P de manera que quedi 7 m per sota del sostre. Es penja per mitjà d'un cable vertical agafat al punt mitjà M d'una cadena que a la vegada està agafada al sostre en dos punts A i B que disten 4 m. El preu del cable PM és p pta/m i el preu de la cadena AMB és q pta/m. Es demana:

- a) Determineu les longituds del cable i la cadena per a obtenir el preu més econòmic de l'instal·lació.
- b) Discutiu la solució per a diferents valors de la relació p/q dels dos preus.

Segona sessió

3E5. La longitud de l'hipotenusa BC d'un triangle rectangle ABC és a , i sobre ella s'agafen els punts M i N tals que $BM = NC = k$, on $k < a/2$. Si suposem que només es coneixen les dades a i k , calculeu:

- a) El valor de la suma de quadrats de les longituds AM i AN .
- b) La raó de les àrees dels triangles ABC i AMN .
- c) L'àrea tancada per la circumferència que passa pels punts A , M' , N' , essent M' la projecció ortogonal de M sobre AC i N' la de N sobre AB .

3E6. Ens diuen que un matrimoni té 5 fills. Calculeu la probabilitat que entre ells hi hagi al menys 2 nois i al menys una noia. Es considera que la probabilitat de néixer noi o noia és $1/2$.

3E7. Determineu una progressió geomètrica de set termes si sabem que la suma dels tres primers és 7, i la suma dels tres últims és 112.

3E8. Determineu els valors de a , b , c , per tal que la representació gràfica de la funció

$$y = ax^3 + bx^2 + cx$$

tingui una inflexió en el punt d'abscissa $x = 3$, amb tangent d'equació

$$x - 4y + 1 = 0.$$

Dibuixeu la gràfica corresponent.

Guanyadors: José L. Rubio de Francia, Manuel Gamella Bacete, Antonio Vázquez Rodríguez.

Primera sessió

4C1. Demostreu que $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$ no poden ser termes d'una progressió aritmètica ni geomètrica.

4C2. Un paral·lelogram $ABCD$ té el vèrtex A fix i el vèrtex oposat D mòbil sobre una circumferència. Sigui E el punt mitjà del costat AB i M la intersecció de AC amb DE . Trobeu el lloc geomètric del punt M .

4C3. Trobeu tots els nombres complexos que compleixen $\bar{z} = z^2$.

4C4. Resoleu l'equació

$$\sqrt{2}x^4 - 3x^3 + 3\sqrt{2}x^2 - 6x + 2\sqrt{2} = 0$$

sabent que una de les arrels és inversa d'una altra.

4C5. Partim d'un rectangle $ABCD$ i construïm un altre rectangle $A_1BC_1D_1$ amb la base A_1B meitat de AB i altura BC_1 igual a $3/2$ de BC ; a partir d'aquest es construeix un nou rectangle $A_2BC_2D_2$ amb base i altura que construïdes de la mateixa manera que abans respecte del $A_1BC_1D_1$; i així successivament. Calculeu l'àrea de la reunió de tots els rectangles obtinguts.

4C6. A una urna hi ha b boles blanques i $b+n$ boles negres. Calculeu tots els valors possibles de b i n per tal que la probabilitat d'obtenir bola blanca sigui $1/n$.

4C7. Un paral·lelogram té vèrtexs en punts de coordenades enteres i té un costat sobre l'eix de les x . Sigui n_2 el nombre de punts de coordenades enteres que són interiors al paral·lelogram i no estan sobre els costats; sigui n_1 el nombre de punts de coordenades enteres que estan sobre els costats del paral·lelogram i no són vèrtexs; i sigui $n_0 = 4$ el nombre de vèrtexs. Demostreu que l'àrea del paral·lelogram és

$$A = n_2 + \frac{n_1}{2} + \frac{n_0}{4}.$$

4C8. Trobeu les posicions de les busques d'un rellotge que són susceptibles d'estar en posició inversa, és a dir, que la busca horària estigui en posició de la busca minutera i viceversa.

Primera sessió

4E1. Se sap que la funció real $f(t)$ és monòtona creixent a l'interval $-8 \leq t \leq 8$, però no se sap res del comportament fora d'aquest interval. En quin interval de valors de x es pot assegurar que la funció $y = f(2x - x^2)$ és monòtona creixent?

4E2. Determineu els pols de les inversions que transformen quatre punts alineats A , B , C , D , en quatre punts A' , B' , C' , D' que siguin vèrtexs d'un paral·lelogram rectangle, i que A' i C' siguin vèrtexs oposats.

4E3. Un semàfor està instal·lat a la cruïlla principal d'una via per on es circula en tots dos sentits. Està vermell 30 s i verd una altres 30 s, alternativament. Es vol instal·lar un altre semàfor a la mateixa via, en una cruïlla secundària, i a 400 m de distància del primer. També ha de funcionar amb un període de 1 min de durada. Volem que els cotxes que circulen a 60 Km/h per la via en qualsevol dels dos sentits i que no s'han d'aturar si només hi hagués el semàfor de la cruïlla principal, tampoc s'hagin d'aturar després d'instal·lar el de la cruïlla secundària. Diguen quants segons pot estar encès el vermell al semàfor secundari.

Nota: Raoneu sobre una representació cartesiana de la marxa dels vehicles, amb un eix de distàncies i un altre de temps.

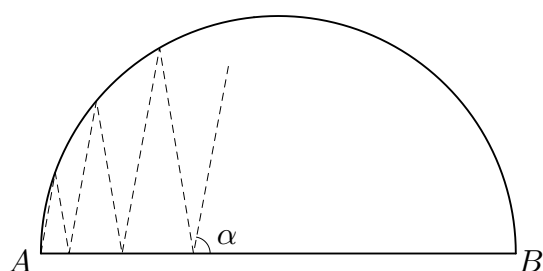
4E4. Tenim un botella de fons pla i circular, tancada i plena parcialment de vi, de manera que el nivell no supera la part cilíndrica. Discutiu ens quins casos es pot calcular la capacitat de la botella, sense obrir-la, si només disposem d'un doble decímetre graduat. En cas que sigui possible, descriuiu el càlcul. (Problema de la *Gara Matematica* italiana).

Segona sessió

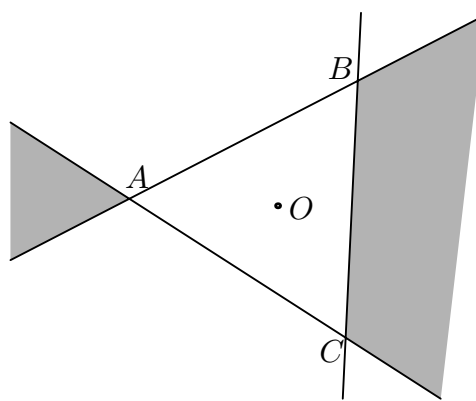
4E5. Sigui γ una semicircumferència de diàmetre AB . Es construeix una línia trencada amb origen A de forma que tingui els vèrtexs alternativament al diàmetre AB i a la semicircumferència γ i de manera que tots els costats formin angles iguals α amb el diàmetre (però alternativament en els dos sentits). Es demana:

a) Els valors de l'angle α que fan que la línia trencada passi per l'altre extrem B del diàmetre.

b) La longitud total de la línia trencada en funció de la longitud d del diàmetre i de l'angle α .



Problema 4E5



Problema 4E6

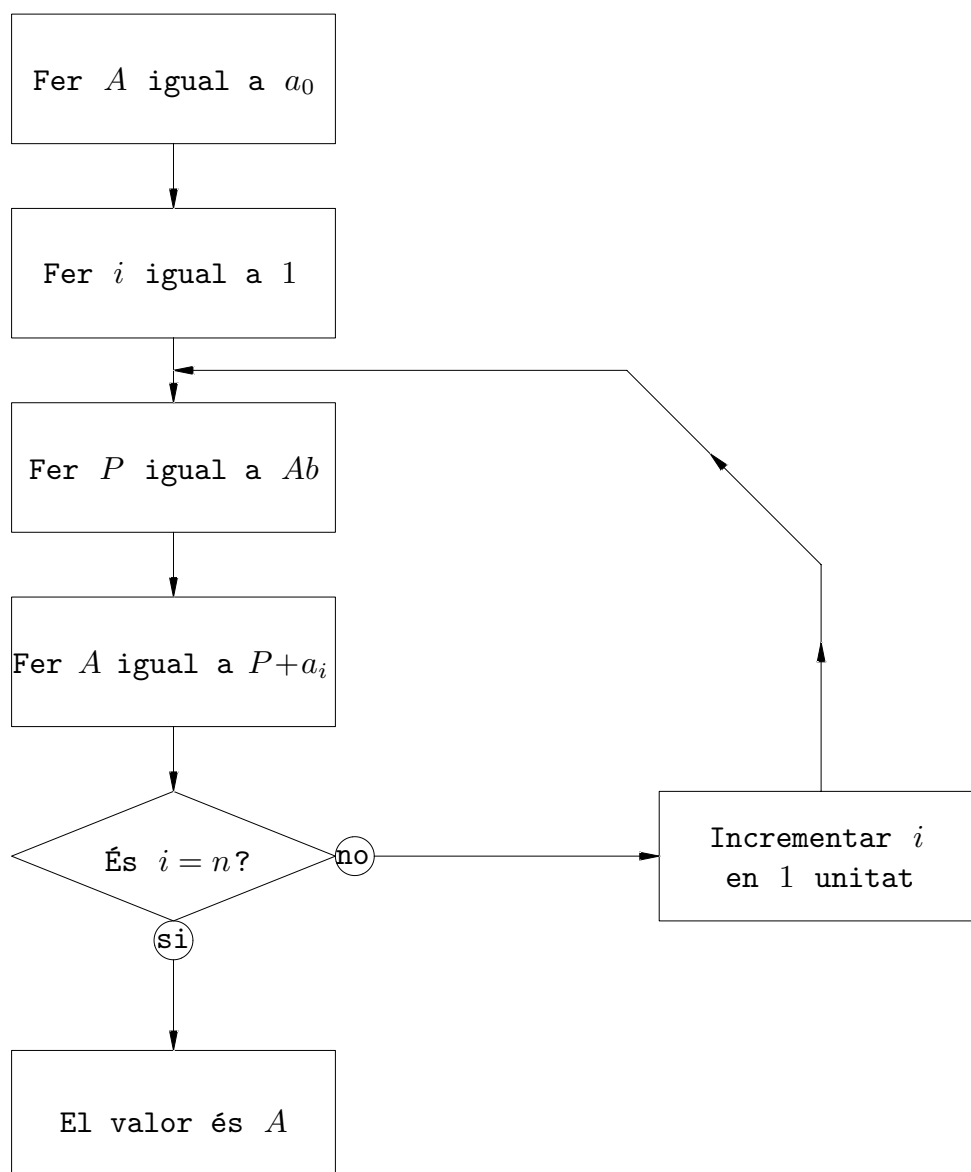
4E6. Es dóna un triangle equilàter ABC de centre O i radi $OA = R$ i es consideren les set regions que les rectes costats determinen sobre el pla. Es demana la regió del pla transformada de les regions marcades amb ombra a la figura adjunta, en una inversió de centre O i potència R^2 .

4E7. Per una carretera hi circula una caravana de cotxes, tots a la mateixa velocitat, mantenint la separació mínima entre cotxes senyalada pel Codi de Circulació. Aquesta separació és, en metres,

$$\frac{v^2}{100},$$

on v és la velocitat expressada en Km/h. Si suposem que la longitud de cada cotxe és de 2.89 m, calculeu la velocitat a la qual han de circular per tal que la capacitat del trànsit resulti màxima, és a dir, que en un punt de la carretera i en un període fixat, hi passin el màxim nombre de vehicles.

4E8. Per a obtenir el valor d'un polinomi de grau n i de coeficients $a_0, a_1, \dots, a_n$ (començant pel terme de grau més alt), si a la variable x li donem el valor b , es pot aplicar el procés indicat a l'*organigrama* adjunt, que desenvolupa les accions requerides per a aplicar la regla de Ruffini. Es demana que construiu un altre organigrama anàleg que permeti expressar el valor de la *derivada* del polinomi donat, també per a $x = b$.



Primera sessió

5C1. Considerem un alfabet de dues lletres, a , b , i totes les paraules que es poden formar amb aquest alfabet, ordenades en ordre alfabètic.

- a) Quines són les paraules que en tenen una immediatament següent?
- b) Quines són les paraules que en tenen una immediatament anterior?

Considerem el conjunt B de les paraules acabades en b .

- c) El conjunt B , té primer i últim element?
- d) Demostreu que entre cada dues paraules de B hi ha una altra paraula de B .

5C2. Considerem tots els nombres que escrits en base deu tenen una expressió que és una permutació de les xifres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Es demana

- a) Trobeu el màxim i el mínim de la diferència entre la suma de les xifres de lloc senar i les xifres de lloc parell.
- b) Digueu quants nombres hi ha que siguin múltiples d'onze.

5C3. Sigui $\mathcal{G}$ un gir de centre O i angle α . Trobeu tots els moviments del pla de la forma $\mathcal{M}\mathcal{G}\mathcal{M}^{-1}$, on $\mathcal{M}$ és un moviment pla.

5C4. Tres nombres complexos a , b , c estan representats pels punts A , B , C .

- a) Demostreu que tots els triangles ABC tals que

$$\frac{c-a}{b-a} = k, \quad k \text{ complex}$$

són semblants.

- b) Què succeeix si k és real?
- c) Quins són els valors de k que fan equilàter el triangle?
- d) Si suposem B i C fixos, trobeu el lloc geomètric del punt A quan k recorre el conjunt de nombres imaginaris purs, i quan recorre el conjunt de nombres complexos de mòdul unitat.

Segona sessió

5C5. Demostreu que el polinomi $p(x) = x^{31} - x^{30} + \cdots + x - 1$ és divisible per $q(x) = x^{16} + 1$. Trobeu el polinomi quocient sense fer la divisió, demostreu que aquest quocient és divisible per un binomi anàleg al $q(x)$, i determineu-lo. Repetint el procés les vegades que calgui, demostreu que $p(x)$ té només una arrel real.

5C6. a) Demostreu que $\tan \frac{\pi x}{4} < x$ si $0 < x < 1$.

b) Demostreu que si $1 - 2/\pi < x < 1$, es compleix

$$1 - \frac{\pi(1-x)}{2} < \tan\left(\frac{\pi x}{4}\right).$$

Nota: Es recomana raonar sobre la gràfica de la funció tangent.

5C7. Tres circumferències tangents dues a dues estan a l'interior d'un triangle, de manera que cada una és tangent a dos costats. Si a , b , c són les distàncies entre els punts de contacte de les circumferències amb els costats, calculeu, en funció d'aquests valors, l'àrea del triangle que té per vèrtexs els centres de les circumferències.

5C8. Donat un nombre natural b , sigui B el conjunt de nombres racionals que admeten un representant amb denominador bn , amb n natural.

a) Digueu si el conjunt $\mathbb{Z}$ dels enters és un subconjunt de B .

b) Digueu quins són els valors de b que fan $\mathbb{Z} = B$.

c) És B un cos?

d) Doneu la condició necessària i suficient per tal que un nombre racional donat pertanyi a B .

Guanyadors: Francisco J. Vives Arumí, Roberto Moriyón Salomón, Santiago Manrique Catalán.

Primera sessió

5E1. Una nit, la temperatura de l'aire es va mantenir constant, uns quants graus sota zero, i la de l'aigua d'un estany cilíndric molt extens, que formava una capa de 10 cm de profunditat, va arribar a ser de zero graus. Es va començar a formar una capa de gel a la superfície. En aquestes condicions es pot suposar que l'altura de la capa de gel formada és proporcional a l'arrel quadrada del temps transcorregut. A les 0 h, el gruix del gel era de 3 cm i a les 4 h es va acabar de gelar l'aigua de l'estany. Digueu a quina hora es va començar a formar la capa de gel sabent que la densitat del gel format era de 0.9

5E2. Raoneu si es pot afirmar, negar o declarar no decidible la continuïtat en el punt $x = 0$ de una funció real $f(x)$ de variable real, en cada un dels casos (independents)

a) Se sap únicament que per a tot n natural

$$f\left(\frac{1}{2n}\right) = 1 \quad \text{i} \quad f\left(\frac{1}{2n+1}\right) = -1.$$

b) Se sap que per a tot x real no negatiu és $f(x) = x^2$ i per a tot x real negatiu és $f(x) = 0$.

c) Se sap únicament que per a tot n natural és

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = 1.$$

5E3. Donat un quadrat de costat a es considera el conjunt de punts del pla pels quals hi passa una circumferència de radi a el cercle de la qual conté el quadrat donat. Demostreu que el contorn de la figura formada per aquests punts està format per arcs de circumferència; determineu-ne els centres, els radis i les longituds.

5E4. En els extrems A, B d'un diàmetre (de longitud $2r$) d'un paviment circular horitzontal, s'aixequen columnes verticals d'igual altura h . Els extrems de les columnes suporten una biga $A'B'$ de longitud igual al diàmetre. Es forma una coberta col·locant nombrosos cables tensos (que se suposa que queden rectes) unint punts de la biga $A'B'$ amb punts de la circumferència, de forma que els cables quedin perpendiculars a la biga. Trobeu el volum tancat entre la coberta i el paviment.

Segona sessió

5E5. Trobeu el lloc geomètric del centre d'un rectangle els quatre vèrtexs del qual descriuen el contorn d'un triangle donat.

5E6. Raoneu si són concurrents, en tot tetràedre

- a) Les perpendiculars a les cares en els circumcentres.
- b) Les perpendiculars a les cares en els ortocentres.
- c) Les perpendiculars a les cares en els incentres.

En cas afirmatiu, caracteritzeu amb alguna propietat geomètrica senzilla el punt de concurrència. En cas negatiu mostreu un exemple en el qual s'aprecii clarament la no concurrència.

5E7. A la successió de potències de 2 (escrites en el sistema decimal, i començant per $2^1 = 2$) hi hi tres termes d'una xifra, tres de dues xifres, quatre de 4 xifres, tres de 5, etc. Raoneu les respostes a les qüestions següents

- a) Pot haver-hi solament dos termes d'un cert nombre de xifres?
- b) Pot haver-hi cinc termes consecutius amb el mateix nombre de xifres?
- c) Pot haver-hi quatre termes de n xifres, seguits de quatre amb $n + 1$ xifres?
- d) Quin és el nombre màxim de potències consecutives de 2 que es poden trobar sense que entre elles n'hi hagi quatre amb el mateix nombre de xifres?

5E8. En un quadrat de costats reflectants, designem els quatre costats amb els noms dels punts cardinals. Fixem un punt al costat N. Determineu en quina direcció n'ha de sortir un raig de llum (cap a l'interior del quadrat) per tal que torni al punt després d'haver tingut n reflexions al costat E, n al costat W, m al costat S i $m - 1$ al costat N, essent n i m nombres naturals coneguts. Què passa si m i n no són primers entre ells? Calculeu la longitud del raig lluminós en funció de m i n i de la longitud del costat del quadrat.

Guanyadors: Francisco J. Vives Arumí, Roberto Moriyón Salomón, Carlos A. Lucio Fernández.

Primera sessió

6C1. L'arrel quadrada per defecte, amb error menor que $1/10$, d'una fracció irreductible és 1.3 . La suma dels seus termes és 81 . Determineu la fracció.

6C2. Demostreu que si una equació $P(x) = 0$ té dues arrels inverses, aquestes arrels també ho són de l'equació

$$P\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Apliqueu aquesta propietat a la resolució de l'equació

$$x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 8x + 2 = 0$$

sabent que té dues arrels inverses.

6C3. Siguin

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - r_1^2 = 0$$

$$(x - a')^2 + (y - b')^2 - r_2^2 = 0$$

les equacions de dues circumferències. Demostreu que les circumferències

$$\frac{(x - a)^2 + (y - b)^2 - r_1^2}{r_1} \pm \frac{(x - a')^2 + (y - b')^2 - r_2^2}{r_2} = 0$$

tallen les primeres sota els mateixos angles.

6C4. Un punt X de la hipotenusa d'un triangle rectangle es projecta ortogonalment sobre els catets en els punts M i N .

Determineu la posició de X per tal que la longitud del segment MN sigui mínima, i aquesta longitud mínima.

6C5. Es donen dues rectes r i s secants al punt O i que formen angle α . Sobre la bissectriu de l'angle s'agafa un punt A per on es traça una recta variable que talla r al punt P i talla s al punt Q . Posem $x = OP$ i $y = OQ$ en magnitud i signe. Demostreu que

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

és constant. Calculeu x i y de manera que l'àrea del triangle OPQ sigui una quantitat donada.

6C6. Es considera una semiesfera de radi 1 i centre O tangent, en un punt P , a un pla π paral·lel al pla que conté la circumferència que limita la semiesfera. Per a cada punt A del pla π considerem la recta OA que talla la semiesfera en un punt A_1 , el qual es projecta ortogonalment sobre el pla π en un punt A' .

- a) Com es transforma el pla π en l'aplicació $A \rightarrow A'$?
- b) Trobeu els punts fixos de l'aplicació $A \rightarrow A'$.
- c) En què es transformen les rectes que passen per P ?
- d) En què es transformen les circumferències de centre P ?
- e) En què es transformen les rectes del pla π ?

6C7. Construïu un rectangle donades la diagonal i la suma de dos costats perpendiculars.

* **6C8.** Trobeu els valors màxim i mínim de l'expressió

$$\frac{bc}{(a^3 - b^3)(a^3 - c^3)} + \frac{ac}{(b^3 - a^3)(b^3 - c^3)} + \frac{ab}{(c^3 - a^3)(c^3 - b^3)},$$

essent $a + b + c = 0$.

Primera sessió

6E1. Trobeu el lloc geomètric dels centres de les inversions que transformen dos punt A , B d'una circumferència donada γ , en punts diametralment oposats de les circumferències inverses de γ .

6E2. Trobeu el lloc geomètric de l'afix M del nombre complex z per tal que estigui alineat amb els afixos de i i iz .

6E3. Una bossa conté cubs de plàstic de la mateixa mida, amb les cares pintades de color: blanc, vermell, groc, verd, blau i violeta (sense repetir el color a les cares del mateix cub). Quants cubs hi pot haver que siguin distingibles entre ells?

6E4. Es divideix una circumferència de radi R en 8 parts iguals. Els punts de la divisió es designen successivament per A , B , C , D , E , F , G i H . Trobeu l'àrea del quadrat que es forma en dibuixar les cordes AF , BE , CH i DG .

Segona sessió

6E5. Demostreu que un polígon convex de més de quatre costats no es pot descompondre en dos polígons semblants al primer (directament o inversament), per mitjà d'un sol tall rectilini. Digueu raonadament quins són els quadrilàters i triangles que admeten una descomposició d'aquest tipus.

6E6. Donat un polinomi de coeficients reals $P(x)$, digueu si es pot afirmar que per a tot valor real de x es compleix alguna de les desigualtats següents:

$$P(x) \leq P(x)^2; \quad P(x) < 1 + P(x)^2; \quad P(x) \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}P(x)^2.$$

Trobeu un procediment general senzill (d'entre els molts que hi ha) que permeti, donats dos polinomis $P(x)$ i $Q(x)$, trobar-ne un altre $M(x)$ tal, que per a tot valors de x , sigui

$$-M(x) < P(x) < M(x) \quad \text{i} \quad -M(x) < Q(x) < M(x).$$

6E7. Un poligon convex $A_1A_2 \dots A_n$ de n costats i inscrit en una circumferència, té els costats que satisfan les desigualtats

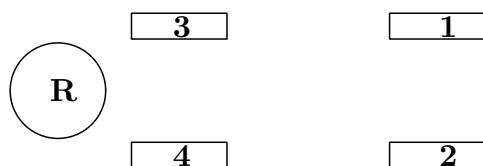
$$\overline{A_nA_1} > \overline{A_1A_2} > \overline{A_2A_3} > \dots > \overline{A_{n-1}A_n}.$$

Demostreu que els angles interiors satisfan les desigualtats

$$\widehat{A_1} < \widehat{A_2} < \widehat{A_3} < \dots < \widehat{A_{n-1}}, \quad \widehat{A_{n-1}} > \widehat{A_n} > \widehat{A_1}.$$

6E8. La casa SEAT recomana als usuaris, per a la correcta conservació de les rodes, que es facin substitucions periòdiques d'aquestes, en la forma $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{3} \rightarrow \mathbf{2} \rightarrow \mathbf{1} \rightarrow \mathbf{4} \rightarrow \mathbf{R}$, segons la numeració de la figura. Si anomenem $\mathcal{G}$ a aquest canvi de rodes, $\mathcal{G}^2 = \mathcal{G}\mathcal{G}$ a la realització d'aquest canvi dues vegades, i així successivament per a les altres potències de la transformació $\mathcal{G}$,

- demostreu que el conjunt de les potències forma un grup, i estudeu-lo.
- Cada punxada d'una de les rodes equival també a una substitució en la qual la roda punxada es substitueix per la de recanvi ($\mathbf{R}$) i, una vegada reparada passa al lloc que ocupava la de recanvi. Doneu $\mathcal{G}$ com a producte de transformacions *punxada*. Formen grup?



Guanyadors: Jaume Lluís García Roig, Dolores Carrillo Gallego, Jorge Bustos Puche.

Primera sessió

7C1. Construïu un triangle coneixent l'angle B i les mitjanes que passen pels vèrtexs A i C .

7C2. Un robí de pes p es fracciona en dos trossos, la qual cosa produeix una pèrdua de valor. En aquest tipus de pedres precioses, els quadrats dels pesos són proporcinals als cubs dels valors. Trobeu com ha de partir-se la pedra inicial per tal que la depreciació produïda pel trencament sigui màxima.

7C3. El signe $\leq'$ expressa la relació “*ser divisor de*”.

a) Qualifiqueu la relació $\leq'$ amb tres adjectius trets d'aquestes parelles

reflexiva	————	irreflexiva
simètrica	————	antisimètrica
transitiva	————	intransitiva

formant, efectivament, totes les qualificacions possibles (*sic*). Digueu quina és la veritadera.

b) Si fem que la variable n recorri el conjunt dels nombres naturals, l'expressió

$$64 \leq' (81 - 18n^2 + n^4)$$

produeix *proposicions*. És per aquest motiu que els lògics l'anomenen *funció proposicional*. Demostreu que són veritat totes les proposicions que resulten per n senar. Deduïu raonadament si són falses totes les que resulten per n parell.

7C4. Es considera un tetràedre regular $VABC$ i els punts mitjans dels parells d'arestes oposades: M i N ; P i Q ; R i S . Decidiu si les rectes MN , PQ i RS es tallen o es creuen. El pla determinat pels punts M , N , P divideix el tetràedre en dues parts. Trobeu la raó dels volums de les dues parts.

Segona sessió

7C5. Tenim un cub d'aresta q . S'uneixen els centres de les cares i s'obté un octàedre. S'uneixen després els centres de les cares de l'octàedre i s'obté un altre cub. Es demana la relació de volums del primer cub al segon i que es dedueixi, si és possible, la suma dels volums dels cubs resultants en repetir indefinidament el procés.

7C6. Es considera la funció f definida per

$$f(x, y) = \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9}$$

en els punts de

$$\frac{(x-5)^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Trobeu els valors més grans i més petits que pren la funció f .

7C7. A cada punt M , afix d'un complex z , li apliquem un gir $\mathcal{G}$ de centre O (afix de $z = 0$) i amplitud α :

$$z_1 = \mathcal{G}(z)$$

i obtenim un punt $M_1(z_1)$. A continuació s'aplica al punt obtingut una simetria axial $\mathcal{S}$ respecte de la recta formada pels punts d'argument β :

$$\mathcal{S}(z_1) = z'$$

i obtenim el punt $M'(z')$.

a) Demostreu que la transformació $\mathcal{S} \cdot \mathcal{G}$ és una simetria axial respecte d'un eix que cal determinar.

b) Demostreu que $\mathcal{S} \cdot \mathcal{G}$ es pot descompondre en el producte d'una simetria d'eix el real Ox per un gir que cal determinar.

7C8. Determineu a , b , c de forma que el polinomi

$$(x+1)^5 + a(x+1) + bx + c$$

sigui divisible per $(x-1)^3$ i trobeu el quocient.

Guanyadors: Ignacio Alegre de Miguel, Simón Barcelona Mas, Alberto Trepas Sorribes.

Primera sessió

7E1. Un recipient cilíndric de revolució està parcialment ple d'un líquid la densitat del qual ignorem. Si el posem amb l'eix inclinat 30° respecte de la vertical observem que en treure líquid de forma que el nivell baixi 1 cm, el pes del contingut disminueix 40 g. Digueu quina serà la disminució del pes del contingut per cada centímetre que baixi el nivell si l'eix forma un angle de 45° amb la vertical. Se suposa que la superfície horitzontal del líquid no arriba a tocar cap de les bases del recipient.

7E2. Una planta creix de la manera que descrivim a continuació. Té un tronc que es bifurca en dues branques; cada branca de la planta pot, a la vegada, bifurcar-se en dues altres branques, o bé acabar en un gemma. Anomenarem *càrrega* d'una branca al nombre total de gemmes que suporta, és a dir, el nombre de gemmes alimentades per la saba que passa per aquesta branca; i anomenarem *allunyament* d'una gemma al nombre de bifurcacions que la saba ha de passar per arribar del del tronc fins a aquesta gemma.

Si n és el nombre de bifurcacions que té una determinada planta, es demana

- a) el nombre de branques de la planta,
- b) el nombre de gemmes,
- c) demostrar que la suma de les càrregues de totes les branques és igual a la suma dels allunyaments de totes les gemmes.

Suggeriment: Es pot procedir per inducció, demostrant que si uns resultats són correctes per una determinada planta, ho segueixen essent per la planta que s'obté substituint una gemma per un parell de branques acabades en gemmes.

7E3. Es dona un triangle arbitrari ABC i un punt P situat al costat AB . Es demana que es traci per P una recta que divideixi el triangle en dues figures de la mateixa àrea.

7E4. Sabem que els polinomis

$$2x^5 - 13x^4 + 4x^3 + 61x^2 + 20x - 25$$

$$x^5 - 4x^4 - 13x^3 + 28x^2 + 85x + 50$$

tenen dues arrels dobles comunes. Determineu-ne totes les arrels.

7E5. En els exàmens de 6è curs d'un Centre, aproven la Física, com a mínim, el 70% dels alumnes; les Matemàtiques, com a mínim, el 75%; la Filosofia, com a mínim, el 90%; i l'Idioma, com a mínim, el 85%. Quants alumnes, com a mínim, aproven les quatre assignatures?

7E6. Donada una circumferència γ i dos punts A i B del seu pla, es traça per B una secant variable que talla γ en dos punts M i N . Determineu el lloc geomètric dels centres de les circumferències circumscrites al triangle AMN .

7E7. Calculeu els valors dels cosinus dels angles x que satisfan l'equació

$$\sin^2 x - 2 \cos^2 x + \frac{1}{2} \sin 2x = 0.$$

7E8. Es dona un punt M a l'interior d'una circumferència, a una distància $OM = d$ del centre O . Per M es tracen dues cordes AB i CD que formen angle recte. S'uneix A amb C i B amb D . Determineu el cosinus de l'angle que ha de formar la corda AB amb OM per tal que la suma de les àrees dels triangles AMC i BMD sigui mínima.

Primera sessió

8C1. Calculeu raonadament els valors enters de x per als quals la funció

$$f(x) = \frac{x^2}{x+6}$$

pren valors enters.

8C2. Estic esperant l'ascensor al pis 5è d'una casa de set pisos. En un cert moment l'ascensor inicia la pujada amb dues persones a dins. Sabem que a cada pis hi viuen 10 persones, i que jo no sóc de la casa. Quina és la probabilitat que l'ascensor es pari al 5è pis?

8C3. En un triangle ABC el vèrtex A és fix i l'angle $\widehat{BAC}$ és constant. Trobeu el lloc geomètric del vèrtex C si el vèrtex B recorre una recta r i el producte $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$ és constant.

8C4. Per a cada nombre natural a definim la successió S_a

$$x_1 = a; \quad x_{n+1} = 2x_{n-1}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Demostreu que donat un nombre natural qualsevol $b \neq 1$, existeix un únic nombre parell p tal que b és un terme de la successió S_p .

8C5. Siguin els conjunts $E = \{1, 2, 3, 4\}$ i $A = \{1, 4\}$.

a) Construïu el conjunt $\mathcal{P}(E)$ de les parts de E .

b) Definides les relacions

$$X \mathcal{R} Y \iff X \cup A = Y \cup A$$

$$X \mathcal{R}^* Y \iff X \cap A = Y \cap A$$

per tot $X, Y \in \mathcal{P}(E)$, demostreu que les dues són relacions d'equivalència i determineu les classes d'equivalència respectives.

8C6. Trobeu l'equació de la circumferència que passa pel punt $P(a, 4)$ i és tangent a l'eix d'abscisses en el punt de coordenades $(3, 0)$, sabent que a és igual a la suma de les arrels de l'equació

$$\frac{\log(35 - x^3)}{\log(5 - x)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{n+4}{n+1} \right)^n.$$

8C7. Si dos nombres complexos z i z' compleixen

$$|z + z'| = |z - z'|$$

demostreu que $\frac{iz}{z'}$ és real.

8C8. Sobre una semirecta OX d'origen O s'agafen dos punts fixos A i B . Sigui OY una semirecta que formi amb OX un angle x .

a) Determineu sobre OY un punt T tal que la diferència entre els angles TAB i TBA sigui igual a x .

b) Trobeu el lloc geomètric de T en variar x .

*Primera sessió***8E1.** Calculeu

$$\sum_{k=5}^{k=49} \frac{11_{(k)}}{2^{\sqrt[3]{1331}_{(k)}}}$$

sabent que els nombres 11 i 1331 estan escrits en base $k \geq 4$.

8E2. En una certa geometria operem amb dos tipus d'elements, punts i rectes, que estan relacionats segons els axiomes següents:

- I. Donats dos punts A i B , existeix una única recta (AB) que passa per tots dos.
- II. Sobre una recta hi ha com a mínim dos punts. Existeixen tres punts no situats sobre una recta.
- III. Si un punt B està situat entre A i C llavors B està també entre C i A . (A , B , C són tres punts diferents d'una recta.)
- IV. Donats dos punts A i C existeix com a mínim un punt B a la recta (AC) de forma que C està entre A i B .
- V. Donats tres punts sobre una mateixa recta, com a màxim un d'ells està entre els altres dos.
- VI. Siguin A , B , C tres punts no situats sobre una mateixa recta i a una recta que no conté cap dels tres punts. Si la recta passa per un punt del segment $[AB]$, aleshores passa per un punt del segment $[BC]$ o passa per un del segment $[AC]$. (Designem per $[AB]$ al conjunt de punts que estan entre A i B .)

A partir del axiomes anteriors, demostreu les proposicions següents:

Teorema 1. Entre els punts A i C existeix almenys un punt B .

Teorema 2. Donats tres punts diferents sobre una recta, sempre un d'ells està situat entre els altres dos.

8E3. Si $0 < p$, $0 < q$ i $p + q < 1$ demostreu

$$(px + qy)^2 \leq px^2 + qy^2.$$

8E4. Demostreu que en tot triangle de costats a , b , c i angles A , B , C es compleix (mesurant els angles en radians)

$$\frac{aA + bB + cC}{a + b + c} \geq \frac{\pi}{3}.$$

Indicació: Feu servir $a \geq b \geq c \implies A \geq B \geq C$.

8E5. Demostreu que per tot nombre complex z es compleix

$$(1 + z^{2^n})(1 - z^{2^n}) = 1 - z^{2^{n+1}}.$$

Escrivint les igualtats que resulten en donar a n els valors $0, 1, 2, \dots$ i multiplicant-les, demostreu que per $|z| < 1$ es compleix

$$\frac{1}{1 - z} = \lim_{k \rightarrow \infty} (1 + z)(1 + z^2)(1 + z^{2^2}) \cdots (1 + z^{2^k}).$$

8E6. Les velocitats d'un submarí submergit i en superfície són, respectivament, v i kv . Està situat en un punt P a 30 milles del centre O d'un cercle de radi 60 milles. La vigilància d'una esquadra enemiga l'obliga a navegar submergit mentre està dins del cercle. Discuti, segons els valors de k , quin és el camí més ràpid per anar a l'extrem oposat del diàmetre que passa per P . (Considereu el cas particular $k = \sqrt{5}$.)

8E7. Doneu una inversió que transformi dues circumferències concèntriques i coplanàries en dues altres iguals.

8E8. Del conjunt de $2n$ nombres $1, 2, 3, \dots, 2n$ en triem $n + 1$ de diferents. Demostreu que entre els nombres triats n'hi ha dos, com a mínim, tals que un divideix l'altre.

Primera sessió

9C1. Tres ruletes perfectament horitzontals, centrades i equilibrades contenen sectors circulars pintats en vermell i en negre, de la forma següent: la ruleta 1 té 180° en negre i 180° en vermell; la ruleta 2 té 255° en vermell i 135° en negre; i la ruleta 3 té 270° en vermell i 90° en negre. Calculeu la probabilitat que en jugar simultàniament a les tres ruletes surtin dos negres i un vermell.

9C2. Demostreu la desigualtat, per n natural més gran que 1,

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

9C3. Construïu un triangle coneixent $a + b + c$, a i $\hat{A}$.

9C4. En un grup de 24 alumnes de COU que han escollit al menys una de les assignatures de Filosofia, Geografia i Matemàtiques, se sap que:

5 alumnes trien Filosofia i Geografia,

3 alumnes trien Filosofia i Matemàtiques,

6 alumnes trien Geografia i Matemàtiques.

Se sap també que el nombre d'alumnes que escullen únicament una de les assignatures anteriors és el mateix en els tres casos. Quin és el nombre d'alumnes que tria cada una de les assignatures esmentades?

Segona sessió

9C5. Contesteu raonadament les qüestions següents:

- a) Quin és el període de la funció $\tan 3x$?
- b) Si la funció $f(x)$ té un punt d'inflexió per a $x = x_0$, és necessàriament $f'(x_0) = 0$?
- c) Doneu el camp d'existència de la funció

$$y = \sqrt{x^2 - 4x - 5}.$$

- d) En el conjunt $\mathbb{Q}$ dels nombres racionals es defineix la llei de composició interna

$$a * b = a + 3b \quad (a, b \in \mathbb{Q}).$$

Hi ha element neutre d'aquesta llei?

9C6. Trobeu el valor de a que fa compatible el sistema d'equacions

$$\begin{cases} 2y - z = a \\ 3x - 2z = 11 \\ y + z = 6 \\ 2x + y - 4z = a \end{cases}$$

i resoleu-lo substituint a pel valor trobat.

9C7. Determineu a , b i c a la funció $y = x^3 + ax^2 + bx + c$, sabent que la corba corresponent talla l'eix YY' en punts de $(0, -10)$ i té una inflexió amb tangent paral·lela a l'eix XX' en el punt $(-1, 1)$.

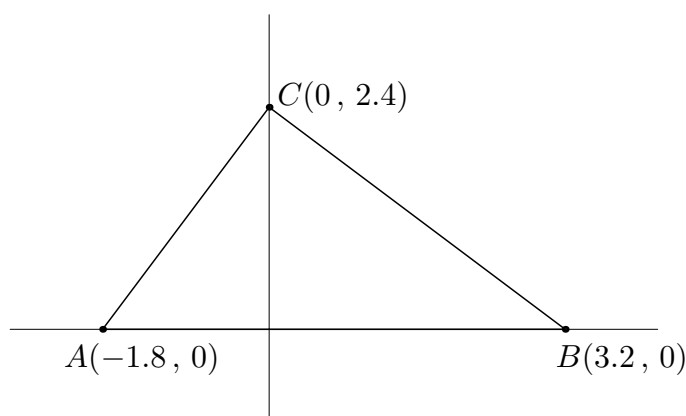
9C8. Amb centre en els quatre vèrtexs d'un quadrat i radi igual al costat del quadrat es tracen en ell quatre quadrants. Trobeu l'àrea de l'estrella que així es forma.

Primera sessió

9E1. Sigui K un anell amb unitat i M el conjunt de les matrius 2×2 constituïdes amb elements de K . Es defineix a M una addició i una multiplicació de la forma usual entre matrius. Es demana:

- Comproveu que M és un anell amb unitat i no commutatiu respecte de les lleis de composició definides.
- Comproveu que si K és un cos commutatiu, els elements de M que tenen invers estan caracteritzats per la condició $ad - bc \neq 0$.
- Demostreu que el subconjunt de M format pels elements que tenen invers és un grup multiplicatiu.

9E2. Un punt es mou sobre els costats del triangle ABC definit pels vèrtexs $A(-1.8, 0)$, $B(3.2, 0)$, $C(0, 2.4)$. Determineu les posicions d'aquest punt de manera que la suma de distàncies als tres vèrtexs sigui màxima o mínima absoluta.



9E3. Tenim un prisma hexagonal regular. Digueu quina és la poligonal que, surtint d'un vèrtex de la base, recorre totes les cares laterals i acaba en el vèrtex de la cara superior situat a la mateixa aresta de la sortida, i té longitud mínima.

9E4. Es consideren al pla els següents conjunts de punts:

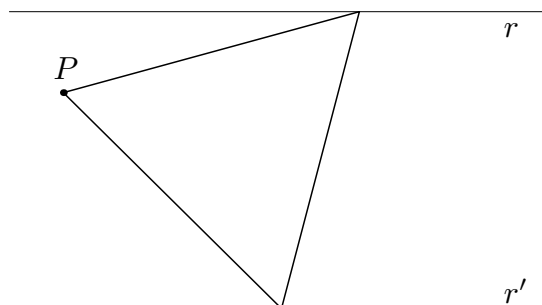
$$A = \{ \text{afixos dels complexos } z \text{ tals que } \arg(z - (2 + 3i)) = \pi/4 \},$$

$$B = \{ \text{afixos dels complexos } z \text{ tals que } \operatorname{mod}(z - (2 + i)) < 2 \}.$$

Determineu la projecció ortogonal sobre l'eix X de $A \cap B$.

Segona sessió

9E5. Tenim dues rectes paral·leles r i r' i un punt P sobre el pla que les conté que no està sobre cap de les dues rectes. Trobeu un triangle equilàter que tingui un vèrtex a P , un altre sobre r i el tercer sobre r' .



9E6. Donades tres circumferències de radis r , r' i r'' , cada una tangent exteriorment a les altres dues, calculeu el radi del cercle inscrit al triangle que té per vèrtexs els centres de les circumferències donades.

9E7. Demostreu que per a tot enter positiu n , el nombre

$$A_n = 5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1$$

és múltiple de 8.

9E8. Sabem que $\mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, 3\}$ és un espai vectorial respecte de les lleis de composició

$$(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3),$$

$$\lambda(x_1, x_2, x_3) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3), \lambda \in \mathbb{R}.$$

Considerem el següent subconjunt de $\mathbb{R}^3$:

$$L = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}.$$

a) Demostreu que L és un subespai vectorial de $\mathbb{R}^3$.

b) A $\mathbb{R}^3$ es defineix la relació següent

$$\overline{x} \mathcal{R} \overline{y} \iff \overline{x} - \overline{y} \in L; \quad \overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}^3.$$

Demostreu que és una relació d'equivalència.

c) Trobeu dos vectors de $\mathbb{R}^3$ que pertanyin a la mateixa classe que el vector $(-1, 3, 2)$.

Guanyadors: Josep Gelonch Anyé, José I. Querol Bravo, José Bonet Solves.

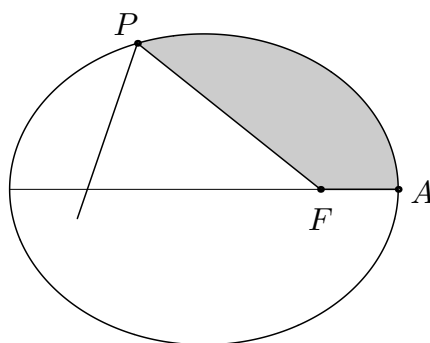
Primera sessió

10C1. Digueu qui és més gran: e^π o π^e .

10C2. Donada l'el·lipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

es considera el sector definit per dos raigs focals. El primer, FA , passa pel vèrtex més pròxim a F ; el segon, FP , forma un cert angle donat α , ($0 < \alpha < 180^\circ$), amb FA . Calculeu l'àrea del sector el·líptic determinat pels dos raigs (part ombrejada de la figura).



10C3. Demostreu la proposició següent: els tres afixos dels complexos z_1 , z_2 , z_3 formen un triangle equilàter si i només si

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1.$$

10C4. Demostreu que

$$\log_a b \log_b c \log_c d \log_d a = 1.$$

10C5. Una persona passa per sota d'un focus de llum durant la nit. En aquest moment segueix un camí recte amb velocitat constant de v m/s. Trobeu la velocitat de creixement de la seva ombra a mesura que va caminant, si h i a són les altures respectives del focus i de la persona.

10C6. Demostreu que les altures d'un triangle acutangle són les bisectrius dels angles d'un triangle els vèrtexs del qual són els peus d'aquelles altures.

10C7. Sigui A una anell amb element unitat e , i B un subanell de A , també amb element unitat e' . Han de ser iguals e i e' ? En cas negatiu, poseu un exemple.

10C8. Una bossa conté 13 boles, de les quals 4 són negres, 6 blanques i 3 vermelles. De quantes maneres es pot treure un conjunt de 5 boles que contingui, al menys, una bola de cada color.

Primera sessió

10E1. Donada la successió (a_n) , on

$$a_n = \frac{1}{4}n^4 - 10n^2(n-1), \text{ per } n = 0, 1, 2, \dots$$

Determineu el terme mínim de la successió.

10E2. Determineu totes le solucions del sistema

$$\begin{cases} 2x - 5y + 11z - 6 = 0 \\ -x + 3y - 16z + 8 = 0 \\ 4x - 5y - 83z + 38 = 0 \\ 3x + 11y - z + 9 > 0 \end{cases}$$

en el qual hi ha tres equacions i una inequació lineals.

10E3. Es considera en el pla complex la successió (a_n) de nombres complexos definida per

$$a_0 = 1, \text{ i } a_n = a_{n-1} + \frac{1}{n}(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)^n.$$

Demostreu que la successió de parts reals del termes de (a_n) és convergent i el seu límit és un nombre comprès entre 0.85 i 1.15.

10E4. Siguin C i C' dues circumferències concèntriques de radis r i r' respectivament. Determineu el valor del quocient r'/r per tal que a la corona limitada per C i C' existeixin vuit circumferències C_i , $i = 1, \dots, 8$, que siguin tangents a C i a C' , i també que C_i sigui tangent a C_{i+1} per $i = 1, \dots, 7$ i C_8 tangent a C_1 .

Segona sessió

10E5. Es considera el conjunt de tots els polinomis de grau menor o igual que 4 amb coeficients racionals.

- a) Demostreu que té estructura d'espai vectorial sobre el cos dels racionals.
- b) Demostreu que els polinomis 1 , $x - 2$, $(x - 2)^2$, $(x - 2)^3$ i $(x - 2)^4$ formen una base d'aquest espai.
- c) Expressen el polinomi $7 + 2x - 45x^2 + 3x^4$ en la base anterior.

10E6. Es considera un triangle equilàter d'altura 1. Per tot P de l'interior del triangle, es designen per x , y , z les distàncies del punt P als costats del triangle.

- a) Demostreu que per tot punt P interior del triangle es compleix que $x + y + z = 1$.
- b) Diguen quins són els punts de l'interior del triangle que compleixen que la distància a un costat és més gran que la suma de les distàncies als altres dos.
- c) Tenim una barra de longitud 1 i la trenquem en tres troços. Trobeu la probabilitat que amb aquests troços es pugui formar un triangle.

10E7. En el pla es consideren els dos punts $P(8, 2)$ i $Q(5, 11)$. Un mòbil es desplaça de P a Q seguint un camí que ha de complir les condicions següents: el mòbil surt de P i arriba a un punt de l'eix x i recorre sobre aquest eix un segment de longitud 1; després se separa altra vegada de l'eix x i es dirigeix cap un punt de l'eix y , sobre el qual recorre un segment de longitud 2; se separa de l'eix y i va cap a un punt Q . D'entre tots els camins possibles, determineu el de longitud mínima, així com aquesta longitud.

10E8. En un espai euclidià de tres dimensions es designen per u_1 , u_2 , u_3 els tres vectors unitaris ortogonals sobre els eixos x, y, z .

- a) Demostreu que el punt $P(t) = (1 - t)u_1 + (2 - 3t)u_2 + (2t - 1)u_3$, on t pren tots els valors reals, descriu una recta (que designarem per L).
- b) Diguen quina figura descriu el punt $Q(t) = (1 - t^2)u_1 + (2 - 3t^2)u_2 + (2t^2 - 1)u_3$ si t pren tots els valors reals.
- c) Trobeu un vector paral·lel a L .
- d) Quins són els valors de t que fan que el punt $P(t)$ sigui sobre el pla $2x + 3y + 2z + 1 = 0$?
- e) Trobeu l'equació cartesiana del pla paral·lel a l'anterior i que contingui el punt $P(3)$.
- f) Trobeu l'equació cartesiana del pla perpendicular a L que contingui el punt $P(2)$.

Guanyadors: Antonio García Fernández, Miguel Castaño Gracia, Enrique Frau Picó.

Primera sessió

11C1. a) Demostreu que la mitjana geomètrica entre quatre nombres reals positius és menor o igual que la seva mitjana aritmètica.
b) Descomponeu el nombre 180 en suma de quatre sumands de manera que el producte sigui mínim.

11C2. Un home és en una barca situada a 5 Km de la costa, que se suposa rectilínea. El lloc A està situat a la costa a 13 Km de la barca. Pot remar a 3 Km/h i caminar a r Km/h. On haurà de desembarcar per tal d'arribar a A en el mínim temps possible?

11C3. Les portes de les habitacions d'una clínica donen a uns corredors que en alguns punt formen angle recte. Per traslladar els malalts es disposa de diverses lliteres rectangulars de 2 m de llarg per 0.5 m d'ample. Quina és l'amplada mínima dels corredors per tal que les lliteres puguin circular per la clínica? Suposant que els corredors tinguin aquesta amplada mínima, quina és l'amplada mínima de les portes per tal que les lliteres puguin entrar a les habitacions?

11C4. Al cos $\mathbb{C}$ dels nombres complexos es considera l'equació

$$z^2 - 2(u + 4)z - 2u^2 + 2(6 + i)u + 19 + 4i = 0$$

on u és un paràmetre complex.

a) Determineu u per tal que aquesta equació tingui una arrel doble, i trobeu les dues solucions de l'equació en el cas general.

b) Sigui M l'afix a $\mathbb{R}^2$ del nombre complex u , i P el del complex z . Es defineix a $\mathbb{R}^2$ la relació següent:

M està relacionat amb P si i només si z és una arrel de l'equació donada, corresponent al paràmetre u

Demostreu que M està relacionat amb P si i només si $P = \mathcal{S}'(M)$ o $P = {}'_1(M)$, essent $\mathcal{S}'$ i $\mathcal{S}'_1$ les transformacions del pla en ell mateix definides per

$$z' = u(1 + i) + 3 + 2i \quad z'_1 = u(1 - i) + 5 - 2i$$

i estudeu propietats d'aquestes transformacions geomètriques.

Segona sessió

11C5. Determineu els nombres naturals n tals que $(n-1)!$ és divisible per n . (*Indicació:* Raoneu primer suposant que n és primer, i després que n és compost).

11C6. Donat un cub d'aresta 1 m, s'uneixen els punts mitjans d'arestes consecutives, de manera que es formi un hexàgon regular.

a) Demostreu que això és possible.

b) Calculeu l'àrea d'aquest hexàgon.

c) Demostreu que entre totes les seccions produïdes per plans paral·lels a l'hexàgon, la d'àrea màxima és la de l'hexàgon.

11C7. a) Dibuixeu la gràfica de la funció $y = \ln x/x$ per a $x > 0$. (Noteu que $\ln x$ és el logaritme neperià de x i que $y = \ln x/x$ tendeix a 0 quan x tendeix a infinit.)

b) Sigui $\mathcal{C}$ el conjunt

$$\mathcal{C} = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x > 1, x \neq e\}.$$

Demostreu que per a tot $x \in \mathcal{C}$, l'equació $x^z = z^x$ té dues solucions; si x és un real positiu que no pertany a $\mathcal{C}$, l'equació anterior té solució única.

c) Si m, n són dos nombres naturals diferents tals que $m^n = n^m$, demostreu que els dos nombres només poden ser 2 i 4.

d) Determineu quin és més gran dels dos nombres π^e i e^π . (S'ha d'utilitzar la gràfica dibuixada a l'apartat a) per a resoldre b), c) i d)).

11C8. Sigui el pla π referit a un sistema $\{O, e_1, e_2\}$, i $\mathcal{T}$ una transformació puntual de π en π que a tot punt $M(x, y) \in \pi$ li fan correspondre el punt $M'(x', y') \in \pi$ tal que

$$x' = ax - by, \quad y' = bx + ay$$

on a i b són nombres lligats per la condició $a^2 + b^2 = 1$.

a) Demostreu que $\mathcal{T}$ és bijectiva.

b) Demostreu que els conjunt de transformacions que resulta en donar a a i b tots els valors reals possibles, forma un grup respecte a l'operació producte de transformacions.

c) Determineu els valors de a i b que corresponen a l'element neutre del grup, i les relacions que han d'existir entre els valors de (a, b) i (a', b') que corresponen a dos elements inversos del grup.

d) Diguen si aquest grup és commutatiu.

Guanyadors: Juan M. Sueiro Bal, Àngel Calsina Ballesta, Joan Elías García.

Primera sessió

11E1. Se sap que un dodecàedre regular és un políedre regular que té 12 cares pentagonals iguals i tal que en cada vèrtex hi concorren 3 arestes. Es demana que calculeu, raonadament,

- a) el nombre de vèrtexs,
- b) el nombre d'arestes,
- c) el nombre de diagonals de totes les cares,
- d) el nombre de segments rectilinis determinats per cada dos vèrtexs,
- d) el nombre de diagonals del dodecàedre.

11E2. D'un disc metàl·lic es treu un sector circular de forma que amb la part que queda es pugui fer un vas cònic de volum màxim. Calculeu, en radians, l'angle del sector que s'ha tret.

11E3. Designarem per $Z_{(5)}$ un cert subconjunt del conjunt $\mathbb{Q}$ dels nombres racionals. Un racional pertany a $Z_{(5)}$ si i només si existeixen fraccions pertanyents a aquest racional tals que 5 no divideixi el seu denominador. (Per exemple, el nombre racional $13/10$ no pertany a $Z_{(5)}$, ja que el denominador de totes les fraccions iguals a $13/10$ és un múltiple de 5. En canvi, el nombre racional $75/10$ pertany a $Z_{(5)}$ ja que $75/10 = 15/2$).

Contesteu raonadament les següents qüestions:

- a) Quina estructura algebraica (semigrup, grup, etc.) té $Z_{(5)}$ respecte de la suma?
- b) I respecte del producte?
- c) És $Z_{(5)}$ un subanell de $\mathbb{Q}$?
- d) És $Z_{(5)}$ un $Z_{(5)}$ -espai vectorial?

(Les operacions són les habituals del cos dels nombres racionals).

11E4. Els tres costats d'un triangle equilàter es suposen reflectants (excepte en els vèrtexs), de forma que reflectixin cap a dins del triangle els raigs de llum situats en el seu pla i que surtin d'un punt interior del triangle.

Determineu el recorregut d'un raig de llum que, partint d'un vèrtex del triangle arribi a un altre vèrtex després de reflectir-se successiament en els tres costats. Calculeu la longitud del camí seguit per la llum suposant que el costat del triangle mesuri 1 m.

Segona sessió

11E5. Sigui $(G, \cdot)$ un grup y e un element neutre. Demostreu que si tots els elements x de G compleixen

$$x \cdot x = e$$

aleshores $(G, \cdot)$ és abelià (o sigui, commutatiu).

11E6. En una circumferència de radi igual a la unitat es tracen dues cordes, AB i AC d'igual longitud.

a) Diguen com es pot construir una tercera corda DE de manera que quedi dividida en tres parts iguals per les interseccions amb AB i AC .

b) Si $AB = AC = \sqrt{2}$, diguen quant valen les longituds dels dos segments que la corda DE determina sobre AB .

11E7. Un dipòsit té forma de prisma hexagonal regular, les bases fan 1 m de costat i l'altura és de 10 m. Es situen les arestes laterals en posició obliqua i s'omple parcialment amb 9 m^3 d'aigua. El pla de la superfície lliure de l'aigua talla totes les arestes laterals. Una d'elles queda amb una part de 2 m sota l'aigua. Quina part queda sota l'aigua de l'aresta lateral oposada a l'anterior?

11E8. Els costats d'un polígon regular convex del $L + M + N$ costats s'han de dibuixar en tres colors: L han de ser vermells, M han de ser grocs i N han de ser blaus. Expresseu, per mitjà de desigualtats, les condicions necessàries i suficients per tal que tingui solució (més d'una, en general) el problema de pintar els costats sense que dos de contigus tinguin el mateix color.

Primera sessió

12C1. Estudieu el sistema

$$\begin{cases} \lambda x + y + z = \lambda^2 \\ x - y + z = 1 \\ 3x - y - z = 1 \\ 6x - y + z = 3\lambda \end{cases}$$

segons els valors del paràmetre λ .

12C2. Donada la corba d'equació $y^2 = x^2 - x^4$, es demana

a) Dibuixeu-la.

b) Àrea de la superfície plana tancada per la corba.

12C3. Siguin P_0, P_1, P_2 els afixos de $i, 0, 1$. Sigui P_3 el peu de la perpendicular traçada des de P_2 al segment P_0P_1 ; anàlogament, sigui P_4 el peu de la perpendicular traçada des de P_3 al segment P_1P_2 ; i així successivament. Trobeu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n.$$

12C4. Calculeu la potència n -èsima de la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

12C5. Donades les dues funcions

$$f(x) = \frac{3x}{5x^2 - 1}, \quad g(x) = \frac{7x}{8x^2 + 2},$$

a) Determineu els tres conjunts

$$A = \{x | f(x) = g(x)\}$$

$$B = \{x | f(x) > g(x)\}$$

$$C = \{x | f(x) < g(x)\}.$$

b) Si x és bastant gran, quina de les dues funcions és més gran?

12C6. Demostreu que si $f(x)$ i $g(x)$ són dos polinomis de grau n , aleshores l'expressió

$$f g^{(n)} - f' g^{(n-1)} + f'' g^{(n-2)} + \dots + (-1)^{n-1} f^{(n-1)} g' + (-1)^n f^{(n)} g$$

és independent de x .

12C7. Siguin a , b , a' , b' nombres racionals, b , b' estrictament positius i $\sqrt{b'}$ irracional. Demostreu que una qualsevol de les igualtats

$$a + \sqrt{b} = a' + \sqrt{b'}; \quad a - \sqrt{b} = a' - \sqrt{b'}$$

implica

$$a = a' \quad \text{i} \quad b = b'.$$

Aplicació: Digueu si és un enter

$$\sqrt[3]{45 + 29\sqrt{2}} + \sqrt[3]{45 - 29\sqrt{2}}.$$

12C8. Les corbes $y^2 = x$, $y^2 = x^3$ limiten una regió en el primer quadrant. Es traça, dins de la regió, un rectangle amb els costats paral·lels als eixos. Una de les diagonals té els dos extrems un sobre cada corba. La dimensió horitzontal del rectangle és $1/3$. Trobeu l'àrea del rectangle d'àrea màxima que es pot construir d'aquesta manera.

Guanyadors: José Lorenzo Vallés Brau, Rafael Abenaza Campodarbe, Ramon Masip Treig.

Primera sessió

12E1. Calculeu el límit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n^k} + \frac{2^k}{n^k} + \cdots + \frac{(n-1)^k}{n^k} + \frac{n^k}{n^k} \right).$$

(Per a calcular el límit es pot seguir el procediment de construcció de la integral).

12E2. Estudieu la funció real

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x$$

definida pe $x \in \mathbb{R} - [-1, 0]$. Representació gràfica.

12E3. Designarem per $Z_{(5)}$ un cert subconjunt del conjunt $\mathbb{Q}$ dels nombres racionals. Un racional pertany a $Z_{(5)}$ si i només si existeixen fraccions pertanyents a aquest racional tals que 5 no divideixi el seu denominador. (Per exemple, el nombre racional $13/10$ no pertany a $Z_{(5)}$, ja que el denominador de totes les fraccions iguals a $13/10$ és un múltiple de 5. En canvi, el nombre racional $75/10$ pertany a $Z_{(5)}$ ja que $75/10 = 15/2$).

Contesteu raonadament les següents qüestions:

- a) Quina estructura algebraica (semigrup, grup, etc.) té $Z_{(5)}$ respecte de la suma?
- b) I respecte del producte?
- c) És $Z_{(5)}$ un subanell de $\mathbb{Q}$?
- d) És $Z_{(5)}$ un $Z_{(5)}$ -espai vectorial?

(Les operacions són les habituals del cos dels nombres racionals).

12E4. Demostreu que si el producte de n nombres reals i positius és igual a 1, la seva suma és més gran o igual que n .

12E5. Tenim una recta r del pla i dos punts A i B exteriors a la recta i en el mateix semiplà. Determineu un punt M de la recta tal que l'angle de r amb AM sigui el doble del de r amb BM . (Considereu com a angle de dues rectes al més petit dels angles que formen).

12E6. Siguin $\{x_n\}$ i $\{y_n\}$ dues successions de nombres naturals definides així:

$$\begin{aligned}x_1 &= 1, & x_2 &= 1, & x_{n+2} &= x_{n+1} + 2x_n & \text{per a } n &= 1, 2, 3, \dots \\y_1 &= 1, & y_2 &= 7, & y_{n+2} &= 2y_{n+1} + 3y_n & \text{per a } n &= 1, 2, 3, \dots\end{aligned}$$

Demostreu que, llevat del cas $x_1 = y_1 = 1$, no existeix cap valor natural que pertanyi a les dues successions.

12E7. Es considera la funció real definida per

$$f(x) = \frac{1}{|x+3| + |x+1| + |x-2| + |x-5|}$$

per tot $x \in \mathbb{R}$.

a) Determineu el màxim.

b) Representeu-la gràficament.

12E8. S'escullen aleatòriament dos nombres reals entre 0 i 1. Calculeu la probabilitat que un qualsevol d'ells sigui menor que el quadrat de l'altre.

Primera sessió

13C1. Calculeu

$$\int_{-2}^{-1} \frac{1}{2} \sqrt{-4x^2 - 12x - 5} \, dx$$

per mitjà de la interpretació geomètrica.

13C2. Donats els vectors de l'espai vectorial $\mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{R}$: $a_1 = (1, 3, -2)$, $a_2 = (4, -1, 3)$, $a_3 = (-3, 17, -16)$, trobeu la dimensió del subespai vectorial E generat per aquests tres vectors. Donat el vector $a_4 = (4, 0, m)$, determineu m per tal que aquest vector pertanyi a E .

13C3. Es consideren tots els nombres naturals des de 1 fins a 10^n . Calculeu, en funció de n , la probabilitat que triant-ne un a l'atzar, sigui múltiple de 2 o de 3.

13C4. A l'interior d'un quadrat $ABCD$ de costat unitat s'agafa un punt P i es consideren les quatre distàncies PA , PB , PC i PD . Demostreu que

- 1) Com a màxim una de les distàncies és més gran que $\sqrt{5}/2$.
- 2) Com a màxim dues de les distàncies són més grans que 1.
- 3) Com a màxim tres de les distàncies són més grans $\sqrt{2}/2$.

13C5. Les corbes $y = x^3$ i $y = x^n$ amb n natural no nul, limiten una regió tancada. Calculeu-ne l'àrea en funció de n .

13C6. S'agafa un nombre $A = a_1a_2a_3\dots$ i el nombre $A' = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ format per la suma de les xifres del nombre A . De la diferència dels dos,

$$A - A' = b_1b_2b_3\dots,$$

es treu una xifra b_i . Determineu el valor d'aquesta xifra si ens donen la suma $B = b_1 + b_2 + b_3 + \dots$ de les restants xifres de $A - A'$. Estudieu si hi ha algun cas d'ambigüitat.

13C7. Determineu totes les n -ples $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ de nombres reals tals que

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = 0$$

per totes les n -ples $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ que compleixin

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0.$$

13C8. Si es calcula aproximadament el quadrat d'un nombre decimal per mitjà d'una taula de quadrats de nombres naturals (fent servir la mateixa idea que per trobar el logaritme d'un nombre no contingut en una taula), demostreu que l'error comès és menor o igual que 0.25.

Primera sessió

13E1. En un pla es donen quatre punts fixos A, B, C, D no alineats tres a tres. Construïu un quadrat de costats a, b, c, d de forma que $A \in a, B \in b, C \in c, D \in d$.

13E2. Es considera el conjunt C de totes les r -ples les components de les quals són 1 o -1 . Calculeu la suma de totes les components de tots els elements de C excloent la r -pla $(1, 1, 1, \dots, 1)$.

13E3. A través d'una lent que inverteix la imatge mireu el mirall retrovisor del nostre cotxe. Si en aquest mirall s'hi reflecteix la matrícula del cotxe que ens segueix, CS-3965-EN, dibuixeu la imatge que nosaltres rebem. Dibuixeu també la que s'obté de permutar les anteriors transformacions, és a dir, reflectint en el retrovisor la imatge que dona la lent de la matrícula. És commutatiu el producte de les dues transformacions, la reflexió en el mirall i la refracció a través de la lent?

13E4. Demostreu que l'expressió

$$\frac{n^5 - 5n^3 + 4n}{n + 2}$$

on n és un enter qualsevol, és sempre divisible per 24.

13E5. Demostreu que l'equació

$$z^4 + 4(i + 1)z + 1 = 0$$

té una arrel a cada quadrant del pla complex.

13E6. Donada una matriu quadrada M d'ordre n sobre el cos dels nombres reals, trobeu, en funció de M , dues matrius, una simètrica i una altra antisimètrica, tals que la seva suma sigui precisament M .

13E7. El preu d'un diamant és proporcional al quadrat del seu pes. Demostreu que si el trenquem en dues parts el seu preu baixa. Quan és màxima la "depreciació"?

13E8. Es dóna la funció

$$y = |x^2 - 4x + 3|.$$

Estudieu-ne la continuïtat i derivabilitat en el punt d'abscissa 1. La seva gràfica determina amb l'eix X una figura tancada. Determineu-ne l'àrea.

Primera sessió

14C1. Siguin M el punt mitjà del costat BC i N el punt mitjà del costat DA del quadrat $ABCD$. Determineu simetries axials que aplicades successivament permetin transformar el triangle ABN en el CDM . S'ha de procurar que el nombre d'aquestes simetries sigui el més petit possible. Doneu els eixos de les simetries que es demanen, i l'ordre d'aplicació de les simetries.

14C2. Si a és un nombre real, designem per U_a l'aplicació de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ definida així:

$$U_a(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in \mathbb{R} \text{ i } x < a, \\ 1, & \text{si } x \in \mathbb{R} \text{ i } x \geq a. \end{cases}$$

Estudieu si les aplicacions U_2 , U_4 i U_5 són linealment independents (considerades com elements de l'espai vectorial de les aplicacions de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, sobre el cos dels nombres reals).

14C3. L'Antoni, en Lluís i en Robert han rebut el regal d'un gos, un gat i un canari, i cada un d'ells vol quedar-se un animal. Estan d'acord en les condicions següents:

- 1) L'Antoni no es queda el gos.
- 2) Si en Robert es queda el canari, l'Antoni no es queda el gat.
- 3) Si en Lluís es queda el gos, l'Antoni es queda el gat; i viceversa: si l'Antoni es queda el gat, en Lluís es queda el gos.

Estudieu si hi ha algun repartiment possible dels animals que estigui d'acord amb les condicions. Si és així, digueu quins són aquests repartiments.

14C4. Sigui n un nombre natural. Demostreu que cap de les xifres 2, 4, 7, 9, pot ser l'últim dígit del nombre $1 + 2 + 3 + \cdots + n$.

Segona sessió

14C5. Siguin A i B dos punt simètrics respecte de la bissectriu del primer quadrant. Siguin C i D , respectivament, els afixos dels complexos suma i producte dels complexos determinats per A i B . Es demana:

- 1) Els llocs geomètrics de A i B quan l'angle $\widehat{CBD}$ es de 90° .
- 2) Els llocs geomètrics de C i D .

14C6. Siguin els h nombres reals $a_1, a_2, \dots, a_h$, (h fix). Calculeu, si $n \rightarrow \infty$, el límit de la successió de terme general

$$b_n = \left(\frac{a_1^{1/n} + a_2^{1/n} + \dots + a_h^{1/n}}{h} \right)^n.$$

Apliqueu-ho al cas $h = 3$, $a_1 = 2$, $a_2 = 4$ i $a_3 = 8$.

14C7. Es considera l'equació de segon grau amb paràmetre m

$$x^2 + (m - 2)x - (m + 3) = 0.$$

- 1) Calculeu m per tal que la suma dels quadrats de les arrels sigui mínim.
- 2) Calculeu m per tal que la suma dels quadrats de les arrels més el quadrat del producte de les arrels sigui mínim.

14C8. Dues ciutats, A i B , estan unides per una via de ferrocarril recta. A les 12 h surten de la ciutat A una locomotora L_A i una mosca M , en la direcció de la ciutat B . A la mateixa hora surt de la ciutat B , en direcció a la ciutat A , una locomotora L_B . Les velocitats uniformes respectives de L_A , L_B i M són 30, 40 i 45 Km/h.

La mosca es mou sobre la via segons el criteri següent: després de sortir de A , quan troba L_B retrocedeix fins trobar L_A ; torna a retrocedir fins a trobar novament L_B , i així successivament. Si la longitud de la via és de 350 Km, digueu quina distància ha recorregut la mosca des de la sortida a A fins que és aixafada per les dues locomotores.

Guanyadors: Jaime Doménech Plana, José A. Román Jiménez, Antonio Llorens Tubau.

Primera sessió

14E1. Donat el determinant d'ordre n

$$\begin{vmatrix} 8 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ 3 & 8 & 3 & \dots & 3 \\ 3 & 3 & 8 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 3 & 3 & 3 & \dots & 8 \end{vmatrix}$$

calculeu el seu valor i digueu quins són els valors de n que fan que aquest valor sigui múltiple de 10.

14E2. Demostreu que totes les matrius quadrades de la forma, per $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

formen un cos commutatiu $\mathbb{K}$ si es consideren les operacions de suma i producte de matrius.

Demostreu també que si $A \in \mathbb{K}$ és un element d'aquest cos, existeixen dues matrius de $\mathbb{K}$ tals que els seus quadrats siguin A .

14E3. Demostreu que en una reunió de 285 persones n'hi ha d'haver una al menys que hagi fet un nombre parell d'encaixades de mà (0 es considera un nombre parell i correspon a un assistent que no encaixi cap mà).

14E4. Demostreu que la suma dels quadrats de cinc enters consecutius no pot ser un quadrat perfecte.

14E5. Utilitzant una escala mecànica per baixar a l'estació del Metro i caminant amb pas regular, observo que necessito 50 graons per baixar. Si torno a pujar corrents, a una velocitat 5 vegades el meu pas normal anterior, comprovo que necessito 125 graons per arribar a dalt. Quants graons visibles té l'escala mecànica quan està parada?

14E6. Sigui ABC un triangle i D el punt de tall de la bissectriu corresponent a l'angle A amb el costat BC . Demostreu que la circumferència que passa per A i és tangent a la recta BC en D , també és tangent a la circumferència circumscrita al triangle ABC .

14E7. Tenim els nombres $A_1, A_2, \dots, A_n$. Demostreu, sense necessitat de calcular derivades, que el valor de X que fa mínima la suma

$$(X - A_1)^2 + (X - A_2)^2 + \dots + (X - A_n)^2$$

és, precisament, la mitjana aritmètica dels nombres donats.

14E8. Determineu una condició necessària i suficient per tal que els afixos de tres nombres complexos z_1, z_2 i z_3 siguin els vèrtexs d'un triangle equilàter.

Primera sessió. Abril de 1979.

15C1. Sigui el polinomi $p(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$. Demostreu que per a tot n natural més gran que 2, es compleix:

a) $p(n) = 6h$, on h és un natural.

b) $h + 1$ no és primer.

15C2. Un tetràedre de l'espai euclidià E_3 té dos parells d'arestes oposades ortogonals. Demostreu que el tercer parell també ho és.

15C3. La fórmula de de Moivre, vàlida per exponents naturals, és

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \cos n\alpha + i \sin n\alpha.$$

És aplicable aquesta fórmula amb exponents racionals? En cas negatiu, tracteu d'obtenir-ne una generalització resolent l'equació

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^{p/q} = \cos x + i \sin x.$$

15C4. Tenim tres bosses i cada una conté n boles numerades $1, 2, \dots, n$. S'extreu a l'atzar una bola de cada bossa. Siguin x, y, z els números de les boles tretes. Calculeu la probabilitat que $x + y = z$.

Nota: *Durant el curs 1977-78 no es va celebrar Olimpíada Matemàtica.*

Segona sessió. Abril de 1979.

15C5. Siguin γ_1 i γ_2 dues circumferències exteriors i r una recta exterior a les dues que les deixa en un mateix semiplà. Determineu els punts P d'aquesta recta que tenen la propietat que les tangents traçades des de P a les circumferències formin amb r angles iguals.

15C6. Proveu que per tot enter positiu n , el nombre $a = 3^n - 2n^2 - 1$ és divisible per 8. Demostreu també que si n no és múltiple de 3, el nombre a definit abans, és divisible per 24.

15C7. Trobeu una funció f definida a l'interval $[-3, 0]$, contínua, derivable i positiva, tal que:

- a) Per $x = -1$ té un extrem relatiu.
- b) L'àrea limitada pel gràfic de la funció, l'eix d'abscisses i les rectes $x = -3$ i $x = 0$ val 6 unitats d'àrea.
- c) $f(-1) = 1$.

15C8. Trobeu el valor de $(1 + i\sqrt{3})^n - (1 - i\sqrt{3})^n$, essent n un nombre natural múltiple de 3.

Guanyadors: Carles Casacuberta Vergés, Jorge Mas Trullenque, Carmen Sánchez Royo.

Primera sessió. Juny de 1979.

15E1. Calculeu l'àrea de la intersecció de l'interior de l'el·lipse

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$$

amb el cercle limitat per la circumferència $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 5$.

15E2. Cert professor d'Oxford, destinat als serveis de criptografia de l'espionatge britànic, paper interpretat per Dirk Bogarde a la pel·lícula, recruta el personal proposant petits exercicis d'atenció, com ara llegir mentalment una paraula al revés. Frequentment ho fa amb el seu propi nom: SEBASTIAN s'ha de llegir NAITSALES.

Es pregunta si hi ha algun moviment del pla o de l'espai que transformi un d'aquests mots en l'altre, tal com apareixen escrits. I si s'hagues dit AVITO, com un cert personatge d'Unamuno? Expliqueu raonadament cada resposta.

15E3. Demostreu la igualtat

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}.$$

15E4. Si z_1, z_2 són les arrels de l'equació amb coeficients reals $z^2 + az + b = 0$, proveu que $z_1^n + z_2^n$ és un nombre real per a qualsevol valor natural de n . En el cas particular de l'equació $z^2 - 2z + 2 = 0$ expresseu, en funció de n , aquesta suma.

Nota: Durant el curs 1977-78 no es va celebrar Olimpíada Matemàtica.

Segona sessió. Juny de 1979.

15E5. Calculeu la integral definida

$$\int_2^4 \sin((x-3)^3) dx.$$

15E6. Es col·loquen tres boles en una urna pel següent procediment: es tira una moneda tres vegades i s'introdueix, cada vegada que surt cara una bola blanca a l'urna, i cada vegada que surt creu, una bola negra. Extraïem d'aquesta urna, quatre vegades consecutives, una bola; la retornem a l'urna abans de l'extracció següent. Quina és la probabilitat que en les quatre extraccions obtinguem bola blanca?

15E7. Proveu que el volum d'un pneumàtic (tor) és igual al volum d'un cilindre la base del qual és una secció meridiana d'aquell i que té per altura la longitud de la circumferència formada pels centres de les seccions meridianes.

15E8. Donat el polinomi

$$P(x) = 1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + \cdots + 1001x^{500},$$

expresseu el valor numèric de la seva derivada d'ordre 325 al punt $x = 0$.

Guanyadors: Carles Casacuberta Vergés, Jesús Nievas Espuelas, Jorge Mas Trullenque.

Primera sessió.

16C1. Sabent que 75 bous mengen en 12 dies l'herba d'un prat de 60 àrees, i que 81 bous mengen en 15 dies l'herba d'un altre prat de 72 àrees, trobeu quants bous caldran per menjar en 18 dies l'herba d'un prat de 96 àrees. Se suposa que en els tres prats l'herba té la mateixa altura en el moment d'entrar-hi els bous i que continua creixent uniformement després que hi hagin entrat.

16C2. Tenim la paràbola $y = ax^2$ i dos dels seus punts A i B d'abscisses $x_1 < x_2$.

a) Calculeu, en funció de x_1 , x_2 l'àrea del triangle ABC , essent C el punt de la paràbola en el qual la tangent és paral·lela a la recta AB .

b) Aplicant reiteradament el procés anterior, calculeu l'àrea del segment de paràbola limitat per la corda AB .

16C3. Siguin z i w dos nombres complexos que compleixen la relació

$$w = \frac{az + b}{cz + d},$$

on a , b , c , d són reals. Demostreu que si $ad - bc > 0$, llavors les parts imaginàries de z i w tenen el mateix signe.

(*Observació:* Calculeu $w - \overline{w}$, on $\overline{w}$ és el conjugat de w).

16C4. A $\mathbb{R}^3$ es considera el tetràedre $DABC$.

a) Demostreu que les rectes que uneixen cada un dels vèrtexs del tetràedre amb el baricentre de la cara oposada, es tallen en un punt G .

b) Demostreu que els vectors que uneixen el punt D amb cada un dels baricentres de les cares del tetràedre que passen per D , són una base de l'espai vectorial dels vectors lliures de $\mathbb{R}^3$.

c) Calculeu les components del vector DG respecte de la base de l'apartat b).

Segona sessió.

16C5. A partir de un significat geomètric de la integral definida, calculeu

$$\int_{-2}^0 \sqrt{-x^2 - 2x} \, dx.$$

16C6. Demostreu que si els costats d'un triangle estan en progressió geomètrica, la raó està compresa entre

$$\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{i} \quad \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

16C7. En el congrés d'un partit polític hi assisteixen tots els afiliats, que són 2000 en total. Un periodista observa que, dels presents en una sessió, el 12.1212...% són dones, i el 23.423423...% pertanyen a la branca radical. Es demana el nombre d'afiliats que falten en aquesta sessió.

16C8. Es considera la successió recurrent

$$a_{n+1} = a_n^2 - 2 \quad \text{amb} \quad a_1 = 14.$$

Demostreu per inducció que, per a tot $n \geq 1$, el nombre

$$\sqrt{3(a_n^2 - 4)}$$

és un enter divisible per 4. Com a aplicació, demostreu que existeixen infinits triangles tals que els costats mesuren enters consecutius i l'àrea és també un nombre enter.

Guanyadors: *NO EN QUEDA CONSTÀNCIA A LA SCM.*

Primera sessió.

16E1. D'entre tots els triangles que tenen un costat de 5 m de longitud i l'angle oposat de 30° , determineu el d'àrea màxima, calculant el valor dels altres dos angles i l'àrea del triangle.

16E2. Una urna conté els vots per a l'elecció de dos candidats A i B . Se sap que el candidat A té 6 vots segurs i el candidat B en té 9. Trobeu la probabilitat que, en efectuar l'escrutini, sempre vagi per davant el candidat B .

16E3. Demostreu que si $a_1, a_2, \dots, a_n$ són nombres reals positius, aleshores

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2.$$

Digueu quan és vàlida la igualtat.

16E4. Trobeu la funció $f(x)$ que compleix l'equació

$$f'(x) + x^2 f(x) = 0$$

sabent que $f(1) = e$. Representeu gràficament aquesta funció i calculeu la tangent en el punt de la corba d'abscissa 1.

Segona sessió.

16E5. Demostreu que si x és tal que

$$x + \frac{1}{x} = 2 \cos \alpha$$

llavors, per a tot $n = 0, 1, 2, \dots$,

$$x^n + \frac{1}{x^n} = 2 \cos n\alpha.$$

16E6. Demostreu que si al producte de quatre nombre naturals consecutius s'afageix una unitat, el resultat és un quadrat perfecte.

16E7. El punt M varia sobre el segment AB que mesura 2m.

a) Trobeu l'equació i la representació gràfica del lloc geomètric dels punts del pla les coordenades dels quals, x , y , són, respectivament, les àrees dels quadrats de costats AM i BN .

b) Diguen quina classe de corba és. (Suggeriment: feu un gir d'eixos de 45°).

c) Trobeu l'àrea del recinte comprés entre la corba obtinguda i els eixos de coordenades.

16E8. Determineu tots els triangles tals que les longituds dels tres costats i la seva àrea són quatre nombres naturals consecutius.

Guanyadors: Guillermo Rozas Rodríguez, Pedro Carrión Rodríguez de Guzmán, José Fernando López Blázquez.

Primera sessió. 24 d'Abril de 1981.

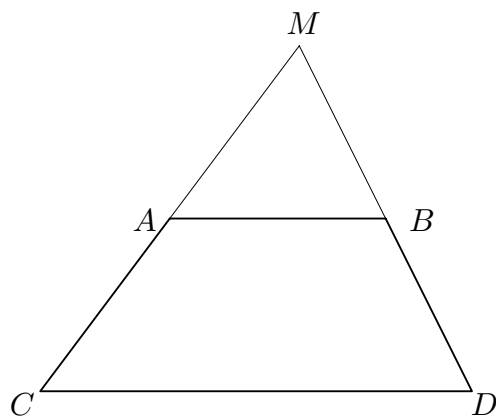
17C1. Tres nombres diferents posats en un cert ordre estan en progressió aritmètica, i posats en un altre ordre estan en progressió geomètrica. Busqueu la raó d'aquesta progressió geomètrica.

17C2. Calculeu

$$\int_3^6 \left([x] + \sqrt{x - [x]} \right) dx,$$

on $[x]$ designa la part entera del nombre real x .

17C3. Un trapezi té els dos vèrtexs C , D d'una base fixos. L'altra base AB és de longitud constant i la suma de les longituds dels costats CA i DB també és constant. Trobeu la figura que descriu el punt M intersecció de les rectes CA i DB .



Segona sessió. 25 d'Abril de 1981.

17C4. Direm que un políedre és *regular* si totes les cares són polígons del mateix nombre k de costats i a cada vèrtex hi concorren el mateix nombre n d'arestes.

Utilitzant que el nombre de cares menys el d'arestes més el de vèrtexs d'un políedre és sempre 2, demostreu que els únics políedres regulars són el tetràedre, l'hexàedre, l'octàedre, el dodecàedre i l'icosàedre.

17C5. Tres jugadors convenen que quan un perdi una partida donarà a cada un dels altres la quantitat de diners que en aquell moment tingui cada un. Després de jugar tres partides cada un d'ells en perd una i es retiren amb 40 duros cada un. Quants duros tenien en començar?

17C6. Sigui A l'àrea d'un pentàgon regular i a l'àrea del pentàgon format per les diagonals del primer. Demostreu que

$$a = A \left(\frac{\sin 18^\circ}{1 - 2 \sin^2 18^\circ} \right)^2.$$

Guanyadors: Josep M. Jiménez Figuera, Xavier Andreu Darrera, Magí Bosch Llovet.

Primera sessió. Juny de 1981.

17E1. Calculeu la suma de n sumands

$$7 + 77 + 777 + \cdots + 7 \dots 7.$$

17E2. Un vas de vidre cilíndric té 8 cm d'altura i la seva vora, 12 cm de circumferència. Al seu interior, a 3 cm de la vora, hi ha una diminuta gota de mel. En un punt de la superfície exterior, en el pla que passa per l'eix del cilindre i per la gota de mel, i situat a 1 cm de la base (fons) del vas, hi ha una mosca. Digueu quin és el camí més curt que ha de recórrer la mosca caminant per la superfície del vas, per tal d'arribar a la gota de mel. Trobeu també la longitud d'aquest camí.

17E3. Donades les rectes que es creuen r i s , es consideren les rectes u i v tals que:

a) u és simètrica de r respecte de s ,

b) v és simètrica de s respecte de r .

Determineu l'angle que han de formar les rectes donades per tal que u i v siguin coplanàries.

17E4. Calculeu la integral

$$\int \frac{dx}{\sin(x-1)\sin(x-2)}.$$

Suggeriment: Canvi $\tan x = t$.

Segona sessió. Juny de 1981.

17E5. Donat un nombre natural no nul n , sigui f_n la funció de l'interval tancat $[0, 1]$ en $\mathbb{R}$ definida així:

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2x, & \text{si } 0 \leq x < 1/n \\ 3/n, & \text{si } 1/n \leq x \leq 1. \end{cases}$$

a) Representeu gràficament la funció.

b) Calculeu $A_n = \int_0^1 f_n(x) dx$.

c) Trobeu, si existeix, $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$.

17E6. Demostreu que la transformació producte de la simetria de centre $(0, 0)$ per la simetria d'eix la recta d'equació $x = y + 1$, pot expressar-se com a producte d'una simetria d'eix la recta e per una translació de vector $\vec{v}$, amb e paral·lela a $\vec{v}$. Determineu una recta e i un vector $\vec{v}$ que compleixin les condicions indicades. Són únics e i $\vec{v}$?

17E7. En una fàbrica de pilotes de tennis hi ha 4 màquines m_1, m_2, m_3, m_4 , que produeixen, respectivament, el 10%, 20%, 30% i 40% de les boles que surten de la fàbrica. La màquina m_1 introdueix defectes en un 1% de les boles que fabrica, la màquina m_2 en el 2%, la m_3 en el 4% i la m_4 en el 15%. De totes les pilotes fabricades en un dia, se'n tria una a l'atzar i resulta ser defectuosa. Digueu quina és la probabilitat que aquesta bola hagi estat elaborada per la màquina m_3 .

17E8. Si a és un nombre senar, demostreu que

$$a^4 + 4a^3 + 11a^2 + 6a + 2$$

és una suma de tres quadrats i que és divisible per 4.

Guanyadors: Pablo Álvarez Royo-Villanova, Fernando Barbero González, Fernando Etayo Gordejuela.

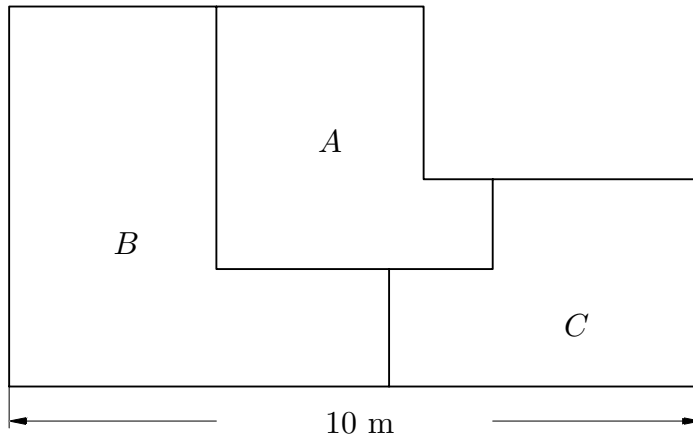
Primera sessió. 7 de Maig de 1982, tarda.

18C1. Sabent que en un cert instant la busca petita d'un rellotge està entre les 10 i les 11, i la busca gran entre la 1 i les 2, i que al cap d'un cert temps les busques han intercanviat els seus llocs, calculeu el temps transcorregut entre aquests dos instants.

18C2. Un cos sòlid té per base un cercle de radi r i tota secció ortogonal a un diàmetre fix és un triangle equilàter. Calculeu:

- a) la naturalesa de la corba que determina el llom del sòlid;
- b) el volum del cos.

18C3. Sabent que les figures A , B , C del croquis són iguals, calculeu la seva àrea.
(Tots els angles són rectes i els segment rectilinis.)



Segona sessió. 8 de Maig de 1982, matí.

18C4. Un safareig té tres aixetes A , B i C . Si obrim A i B el safareig s'omple en dues hores, si obrim A i C s'omple en tres hores i si obrim B i C s'omple en sis hores. Quant tardaria a omplir-se el safareig si les obrim totes tres alhora?

18C5. Quatre esferes descansen totes sobre un mateix pla. Cada esfera és tangent a les altres tres. Se sap que tres de les esferes tenen el mateix radi R . Es demana el radi r de la quarta esfera en funció de R .

18C6. Tenim n boles i sabem que comptades de 8 en 8 en queden 7, comptades de 9 en 9 en queden 8 i comptades de 10 en 10 en queden 9. Podem saber quantes en queden comptades de 2 en 2, de 3 en 3, de 4 en 4, de 5 en 5, de 6 en 6 i de 7 en 7?

Guanyadors: Pere Colet Rafecas, Pere Gutiérrez Serrés, Andrés Rodríguez Belmar.

Primera sessió. Juny de 1982.

18E1. A la pàgina de passatemps d'un diari es proposa el passatemps següent: “Dos nens, Antoni i Josep, tenen 160 tebeos. Antoni compta els seus de 7 en 7 i li'n sobren 4. En Josep compta els seus de 8 en 8 i també li'n sobren 4. Quants tebeos tenen cada un?” Al següent número del diari es dona la solució: “L'Antoni té 60 tebeos i en Josep en té 100.” Analitza aquesta solució i indica què faria una matemàtic amb aquest problema.

18E2. En compondre una simetria d'eix r amb un gir d'angle recte al voltant d'un punt P que no pertany a la recta, resulta un moviment M .
És M una simetria axial? Hi ha alguna recta invariant per M ?

18E3. Es llança un coet i arriba als 120 m d'altura; a la caiguda perd 60 m, a continuació recupera 40 m, torna a perdre'n 30, a guanyar-ne 24, a perdre'n 20, etc. Si el procés segueix indefinidament, a quina altura tendeix a estabilitzar-se?

18E4. Determineu un polinomi de coeficients reals no negatius que compleixi les dues condicions següents:

$$p(0) = 0, \quad p(|z|) \leq x^4 + y^4,$$

essent $|z|$ el mòdul del nombre complex $z = x + iy$.

Segona sessió. Juny de 1982.

18E5. Construiu un quadrat coneixent la suma de la diagonal i el costat.

18E6. Demostreu que si u, v són nombres reals no negatius qualssevol, i a, b nombres reals positius tals que $a + b = 1$, aleshores

$$u^a v^b \leq au + bv.$$

18E7. Sigui S el subconjunt de nombres racionals que es poden escriure en la forma a/b , on a és un enter qualsevol i b un enter senar. Digueu si la suma i el producte de dos elements de S també hi pertanyen. Digueu si a S hi ha elements tals que l'invers també hi pertany.

18E8. Donat un conjunt C de punts del pla, s'anomena distància d'un punt P del pla al conjunt C a la més petita de les distàncies de P a cada un dels punts de C . Siguin els conjunts $C = \{A, B\}$, amb $A = (1, 0)$ i $B = (2, 0)$; i $C' = \{A', B'\}$ amb $A' = (0, 1)$ i $B' = (0, 7)$, en un sistema de referència ortogonal.

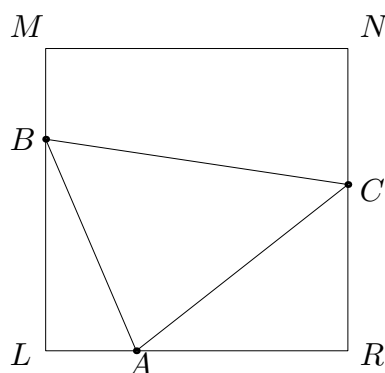
Trobeu i dibuixeu el conjunt M de punts del pla que equidisten de C i C' .

Estudieu si és derivable la funció que té per gràfic el conjunt M obtingut abans.

Guanyadors: Javier Caballero Guerrero, José Sánchez Lacuesta, Patrik Simonetta.

Primera sessió. 17 de Desembre de 1982, de 16 h a 20 h.

19C1. Sobre un quadrat $LMNR$ de costat 1 tenim tres punts A , B , C tals que les figures ALB , ARC i $BMNC$ tenen la mateixa àrea. Calculeu l'àrea màxima i mínima del triangle ABC .



19C2. Determineu els nombres naturals n que divideixen tots els nombres naturals les darreres xifres dels quals són exactament les xifres de n .

19C3. Demostreu que si $0 < t < \pi$ aleshores $\sin(t/2) > t/\pi$.

19C4. Es posa una rata en una caixa que té quatre sortides aparentment iguals. Una de les sortides es considera *bona* i es altres *dolentes*; si la rata tria una sortida dolenta, rep una decàrrega elèctrica que no la deixa sortir. Es demana quina és la probabilitat que la rata surti de la caixa en un màxim de tres intents, considerant:

- a) que la rata no té memòria;
- b) que la rata té memòria.

Segona sessió. 18 de Desembre de 1982, de 9 h a 13 h.

19C5. Digueu en quants zeros acaba el nombre 1000!

19C6. Digueu quina condició han de complir els nombres complexos α i β per tal que els punts α , β , $\alpha + \beta$ i $\alpha\beta$ siguin vèrtexs d'un paral·lelogram.

19C7. Sigui O l'ortocentre d'un triangle (és a dir, el punt d'intersecció de les altures), i A i B els punts d'intersecció d'una altura amb el costat corresponent i amb la circumferència circumscrita al triangle, respectivament. Hi ha alguna relació entre els segments OA i OB ?

19C8. Determineu el volum mínim V_n d'una piràmide regular recta de n costats circumscrita a una esfera donada. Calculeu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_n.$$

Guanyadors: Xavier Santallúcia Esbert, Josep Burillo Puig.

Primera sessió. Febrer de 1983.

19E1. Mentre Teofrast parlava amb Aristòtil sobre la classificació de les plantes, tenia un gos lligat a una columna cilíndrica de radi r perfectament llisa, amb una corda molt fina que envoltava la columna i amb un llaç de бага escorredora. El gos estava lligat a l'extrem lliure de la corda. En intentar arribar a Teofrast, el gos va tibar la corda i la trencà. Digueu quina era la distància de la columna al nus en el moment de trencar-se.

19E2. Construïu un triangle coneixent un angle, la raó dels costats que el formen i el radi del cercle inscrit.

19E3. Una semicircumferència de radi r es divideix en $n+1$ parts iguals i s'uneix un punt qualsevol k de la divisió amb els extrems de la semicircumferència, formant així un triangle A_k . Calculeu el límit, quan n tendeix a infinit, de la mitjana aritmètica de les àrees dels triangles.

19E4. Determineu el nombre d'arrels reals de l'equació

$$16x^5 - 20x^3 + 5x + m = 0.$$

Segona sessió. Febrer de 1983.

19E5. Trobeu les coordenades dels vèrtexs d'un quadrat $ABCD$, sabent que A és sobre la recta $y - 2x - 6 = 0$, C és sobre $x = 0$ i B és el punt $(a, 0)$, essent $a = \log_{2/3}(16/81)$.

19E6. En una cafeteria, un vas de llimonada, tres entrepans i set ensaïmades han costat 1 xelí i 2 penics; i un vas de llimonada, quatre entrepans i 10 ensaïmades valen 1 xelí i 5 penics. Trobeu el preu de:

- a) un vas de llimonada, un entrepà i una ensaïmada;
 - b) dos vasos de llimonada, tres entrepans i cinc ensaïmades.
- (1 xelí = 12 penics).

19E7. Un tetràedre regular d'aresta 30 cm descansa sobre una de les seves cares i és buit per dintre. Es posa a l'interior 2 l d'aigua. Es demana l'altura de la superfície líquida i l'àrea de la superfície lliure de l'aigua.

19E8. L'any 1960, el més gran de tres germans té una edat que és la suma de les dels dos germans més petits. Uns anys després, la suma de les edats de dos dels germans és doble que l'edat de l'altre. Han passat ara un nombre d'anys des de 1960, que és igual a dues tercers parts de la suma de les edats que els tres germans tenien el 1960, i un d'ells té 21 anys. Quina edat tenen els altres dos?

Guanyadors: Josep Burillo Puig, Roberto Selva Gomis, Francisco J. Díez Vegas, José Marañón Mora.

Primera sessió. 16 de Desembre de 1983, de 16 h a 20 h.

20C1. Trobeu totes les funcions f , definides en el conjunt dels nombres reals estrictament positius, que prenen valors reals estrictament positius, i que compleixen

1) $f(xf(y)) = yf(x)$ per a tot x, y positius.

2) $f(x) \rightarrow 0$ si $x \rightarrow +\infty$.

20C2. Determineu els triangles tals que l'altura i la mitjana concurrents en un vèrtex divideixen l'angle en tres parts iguals.

20C3. Demostreu que si la funció $f(x)$ és contínua, positiva i decreixent per a $x \geq 0$, i compleix

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x f(t) dt = S,$$

aleshores

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = 0.$$

Segona sessió. 17 de Desembre de 1983, de 9 h a 13 h.

20C4. Donat un triangle ABC , considerem el triangle $A_1B_1C_1$ que té els vèrtexs sobre els costats oposats a A , B i C , respectivament, i els seus costats són perpendiculars als costats del primer triangle. Calculeu la raó de les àrees dels dos triangles en funció dels angles del triangle ABC .

20C5. Trobeu el mínim nombre natural m tal que $m!$ és divisible per 7^{1983} .

20C6. Donat un triangle equilàter, considerem les rectes que passen pel punt mitjà d'un costat. Estudieu la variació de la longitud dels segments d'aquestes rectes interceptats pel triangle.

Guanyadors: *NO EN QUEDA CONSTÀNCIA A LA SCM.*

Primera sessió. Febrer de 1984.

20E1. En una posició O d'un aeroport de campanya hi ha un canó que pot girar 360° . Dos tancs ataquen aquest lloc seguint trajectòries rectes AB i CD donades. Trobeu gràficament l'abast del canó sabent que la suma de les longituds dels segments de trajectòria dels tancs en els quals aquests estan sota el foc del canó, és una longitud donada ℓ .

20E2. Determineu un nombre de cinc xifres tal que el seu quadrat acabi en les mateixes cinc xifres col·locades en el mateix ordre.

20E3. Donats dos nombres reals positius p, q tals que $p + q = 1$, i sabent que tot parell de nombres reals x, y compleix $(x - y)^2 \geq 0$, es demana que demostreu

a)
$$\frac{x + y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

b)
$$\frac{x^2 + y^2}{2} \geq \left(\frac{x + y}{2}\right)^2$$

a)
$$\left(p + \frac{1}{p}\right)^2 + \left(q + \frac{1}{q}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$$

20E4. Calculeu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2^2} \cdots \cos \frac{x}{2^n}.$$

Segona sessió. Febrer de 1984.

20E5. Portem arcs iguals $AB = A'B' = x$ sobre dues circumferències iguals a partir de dos punts fixos A, A' sobre cada una d'elles. Trobeu el lloc geomètric dels punts mitjans del segment BB' en variar x :

- a) si posem els arcs en el mateix sentit,
- b) si posem els arcs en sentits oposats.

20E6. Es considera una circumferència γ de centre $(3, 0)$ i radi 3, i la recta r paral·lela a l'eix Ox que dista 3 de l'origen. Es traça una recta variable per l'origen que talla γ en el punt M i talla la recta r en P . Determineu el lloc geomètric dels punts d'intersecció de les paral·leles a Ox i Oy traçades per M i P respectivament.

20E7. Es consideren nombres naturals escrits en el sistema de base 10.

- a) Trobeu el menor nombre que en suprimir-li la primera xifra quedi reduït a la cinquena part. Digueu com són els nombres que tenen aquesta propietat.
- b) Demostreu que no existeix cap nombre tal que en suprimir-li la primera xifra quedi dividit per 12.
- c) Formuleu un criteri general que ens permeti saber si un nombre pot quedar dividit per k en suprimir-li la primera xifra.

20E8. Trobeu el residu de la divisió per $x^2 - 1$ del determinant

$$\begin{vmatrix} x^3 + 3x & 2 & 1 & 0 \\ x^2 + 5x & 3 & 0 & 2 \\ x^4 + x^2 + 1 & 2 & 1 & 3 \\ x^5 + 1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Guanyadors: Pablo Novaes Ledieu, Andrés García Parrilla, Miguel Aparisi Botella, Gonzalo Génova Fuster, Agustín Rafael Tejera Gómez, Miguel Brandt Sanz.

Primera sessió. 18 de Gener de 1985, de 16 h a 20 h.

21C1. Digueu quins són els triangles que poden ser dividits per una recta en dos triangles semblants.

21C2. La suma de dos nombres reals és igual a la suma dels seus quadrats. Digueu:

- a) Els valors que pot tenir aquesta suma.
- b) Els valors que poden tenir cada un dels nombres.
- c) Si els dos nombres poden ser iguals.
- d) El màxim de la diferència d'aquests dos nombres.

21C3. Resoleu l'equació

$$\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1.$$

Segona sessió. 19 de Gener de 1985, de 9 h a 13 h.

21C4. Demostreu que tot triangle pot subdividir-se en triangles acutangles.

21C5. Tres nombres diferents estan en progressió aritmètica i els seus quadrats estan en progressió geomètrica. Calculeu la raó de la progressió geomètrica.

21C6. Un hostel té infinites portes numerades amb els números $1, 2, 3, \dots$, i estan totes tancades. En aquest hostel hi ha infinits hostes que estan numerats també $1, 2, 3, \dots$, i tots són a passejar. Quan l'hoste A torna a l'hostal obre totes les portes múltiples de A que troba tancades i tanca totes les portes múltiples de A que troba obertes. Digueu com estaran les portes quan hagin arribat tots els hostes.

Guanyadors: Ricardo Pérez Marco, Vicente Companys Ferran, Josep R. Mallafré Torra

Primera sessió. Febrer de 1985.

21E1. Sigui $\mathcal{P}$ el conjunt dels punts del pla i $f : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ una aplicació que compleix les tres condicions següents:

- a) f és bijectiva.
- b) Per cada recta r del pla, $f(r)$ és una recta.
- c) Per cada recta r , la recta $f(r)$ és paral·lela o coincident amb r .

Digueu quines possibles transformacions poden ser f .

21E2. Sigui $\mathbb{Z}$ el conjunt dels enters i $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ el conjunt de parells ordenats d'enters. La suma d'aquests parells es defineix

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b'),$$

essent $(-a, -b)$ l'oposat de (a, b) .

Estudieu si existeix un subconjunt E de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ que compleixi les condicions següents:

- a) La suma de dos parells de E també és a E .
- b) El parell $(0, 0)$ pertany a E .
- c) Si (a, b) no és $(0, 0)$, llavors o bé (a, b) pertany a E , o bé $(-a, -b)$ pertany a E , però no tots dos.

21E3. Resoleu l'equació

$$\tan^2 2x + 2 \tan 2x \tan 3x - 1 = 0.$$

21E4. Considerem tres nombres naturals a, b, c tals que la raó

$$\frac{a + b + c}{abc}$$

sigui l'invers d'un nombre k enter positiu. Es demana que demostreu:

- a) $a^3 + b^3 + c^3$ no és primer.
- b) Per a cada $k \in \mathbb{N}$ existeixen ternes de naturals a, b, c que compleixen les condicions.

Segona sessió. Febrer de 1985.

21E5. Trobeu l'equació de la circumferència que passa pels afixos de les solucions de l'equació

$$z^3 + (-1 + i)z^2 + (1 - i)z + i = 0.$$

21E6. Es consideren les semirectes no alineades Ox , Oy . Pel punt $A \in Ox$ es tracen parells de rectes r_1 , r_2 , antiparal·leles respecte a l'angle xOy ; siguin M , N les interseccions de r_1 amb Oy i de r_2 amb Ox , respectivament. Sigui P el punt d'intersecció de les bisectrius dels angles AMy , ANy . Trobeu el lloc geomètric de P en variar A .

21E7. Donada l'equació $x^5 - px - 1 = 0$, estudieu el valor de p que fa possible que existeixin dues solucions de l'equació, x_1 , x_2 , que a la vegada siguin solucions de $x^2 - ax + b = 0$, amb a , b enters.

21E8. Direm que una matriu quadrada és de *suma constant* si la suma dels elements de cada fila, de cada columna, i de cada diagonal, són valors iguals. Anàlogament, una matriu quadrada és de *producte constant* si són iguals els productes dels elements de cada fila, de cada columna i de cada diagonal. Determineu les matrius quadrades d'ordre 3 sobre $\mathbb{R}$ que són, a la vegada, de suma i producte constant.

Guanyadors: Ricardo Pérez Marco, Ignacio Garijo Amilburo, Juan Acuarón Joven, Ana José Reguera López, José Luis Ansorena Barasoain, Antonio Gómez Amigo.

Primera sessió. 29 de Novembre de 1985, de 16 h a 20 h.

22C1. Siguin A i B dos subconjunts del conjunt dels nombres naturals $\mathbb{N}$ que siguin una partició, és a dir, tals que $A \cap B = \emptyset$ i $A \cup B = \mathbb{N}$.

a) Demostreu que existeix un nombre natural m tal que $m + 5$ o $m + 6$ pertanyen al mateix subconjunt que m .

b) Demostreu que existeixen infinits nombres que compleixen la propietat anterior.

22C2. Tres punts A , B , C s'uneixen per segments. Sobre la meitat del segment AB es construeix un quadrat, sobre el segment BC un altre quadrat, i sobre el segment CA un rectangle de base CA i altura 4 cm. L'àrea del rectangle supera en 20 cm^2 la suma de les àrees dels dos quadrats. Calculeu l'àrea del rectangle.

22C3. Calculeu la suma dels quadrats de les distàncies entre els afixos dels nombres complexos que són solucions de l'equació

$$z^{1985} - 1 = 0.$$

22C4. Trobeu el polinomi $p(x)$ de grau mínim tal que $p(x) + 1$ sigui divisible per $(x - 1)^4$ i $p(x) - 1$ sigui divisible per $(x + 1)^4$.

Segona sessió. 30 de Novembre de 1985, de 9 h a 13 h.

22C5. Ordeneu de més gran a més petit els nombres

$$\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, \dots, \sqrt[n]{n}, \dots$$

22C6. A un ball hi ha vuit nois i vuit noies que estan asseguts alternativament en fila. De quantes maneres es poden formar cinc parelles de ball si cada parella ha d'estar formada per un noi i una noia asseguts un al costat de l'altre.

22C7. Donats dos nombres naturals p i q primers entre ells, calculeu les sumes

$$\sum_{k=1}^{q-1} D\left(\frac{kp}{q}\right) \quad \text{i} \quad \sum_{h=1}^{p-1} D\left(\frac{hq}{p}\right),$$

on $D(a)$ indica la part decimal del nombre a .

22C8. Calculeu els nombre naturals p i q més petits tals que $1/p$ i $1/q$ siguin dos decimals periòdics purs de períodes A i B , sabent que aquests períodes tenen el mateix nombre de xifres i el seu màxim comú divisor és 10989.

Guanyadors: Jaume Amorós Torrent, Joaquim Ortega Cerdà, Ramon Rebull Camarasa.

Primera sessió. Febrer de 1986.

22E1. Indicarem per $[x], \{x\}$ les parts entera i decimal del nombre real x . Definim una *distància* entre els nombres reals x i y

$$d(x, y) = \sqrt{([x] - [y])^2 + (\{x\} - \{y\})^2}.$$

Determineu (com a unió d'interval·ls) el conjunt dels nombres reals que *disten* del nombre $3/2$ menys que $202/100$.

22E2. Un segment d divideix el segment s si existeix un natural n tal que

$$nd = d + d + \overset{n}{\cdots} + d = s.$$

a) Demostreu que si el segment d divideix els segments s i s' amb $s < s'$, llavors divideix el segment diferència $s' - s$.

b) Demostreu que cap segment divideix el costat s i la diagonal s' d'un pentàgon regular (raoneu sobre el pentàgon regular els costats del qual estan continguts a les diagonals del pentàgon donat, i no feu càlculs numèrics).

22E3. Trobeu els valors de $n \in \mathbb{N}$ tals que $5^n + 3$ és una potència de 2 d'exponent natural.

Segona sessió. Febrer de 1986.

22E4. Indiquem per $m(a, b)$ la mitjana aritmètica dels nombres reals positius a i b . Donada la funció real positiva g que té la primera i la segona derivada positives, definim la *mitjana* $\mu(a, b)$ relativa a la funció g mitjançant

$$2g(\mu(a, b)) = g(a) + g(b).$$

Digueu raonadament quina de les dues mitjanes m i μ és més gran.

22E5. Considerem la corba Γ definida per l'equació $y^2 = x^3 + bx + b^2$, on la constant b és un nombre racional no nul. Inscriviu a la corba Γ un triangle tal que les coordenades dels vèrtexs siguin racionals.

22E6. Calculeu

$$\prod_{k=1}^{14} \cos\left(\frac{k\pi}{15}\right).$$

Guanyadors: Carlos Ueno Jacue, Alberto Garrido Arribas, Juan David González Cobas, Jaume Amorós Torrent, Joaquim Ortega Cerdà, Juan Cuenca González.

Primera sessió. 22 de Novembre de 1986.

23C1. Elevant $3 + \sqrt{5}$ a la n -èsima potència s'obté un nombre de la forma $a + b\sqrt{5}$ amb a i b enters. Demostreu que

$$0 < a - b\sqrt{5} < 1.$$

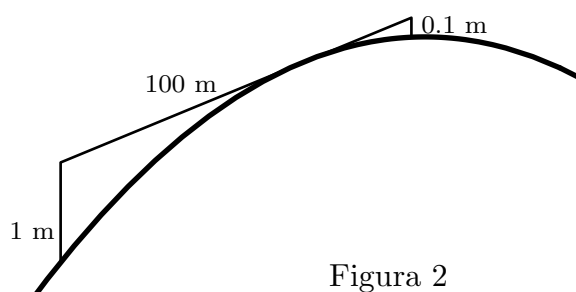
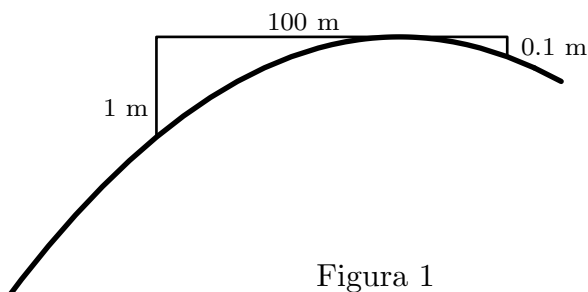
23C2. Determineu els valors de a que fan que la successió $a_1 = a$, $a_2 = a + a_1^2$, $a_3 = a + a_2^2$, $\dots$, $a_n = a + a_{n-1}^2$, sigui creixent.

23C3. En un triangle ABC de costats a , b , c , siguin m_a , m_b , m_c les mitjanes que passen, respectivament, pels vèrtexs A , B , C . Se sap que $b/a = \sqrt{17/5}$ i que $m_c = 2m_b$. Calculeu l'angle que formen aquestes dues mitjanes i les relacions c/a i c/b .

23C4. Els canvis de rasant de les autopistes es fan segons un perfil parabòlic $y = -ax^2$, amb $a > 0$.

a) Determineu el màxim valor de a per tal que un observador de 1 m d'alçada amb visual tangent al punt més alt vegi un objecte de 0.1 m d'altura situat a 100 m de distància (Fig. 1).

b) Determineu el màxim valor de a per tal que un observador de 1 m d'alçada situat a qualsevol lloc vegi un objecte de 0.1 m d'altura situat a 100 m de distància (Fig. 2).



Segona sessió. 23 de Novembre de 1986.

23C5. Estudieu la continuïtat de la funció $f(x) = x[1/x]$ i representeu gràficament la seva restricció al conjunt $(-\infty, -1/4] \cup [1/4, \infty)$, si $[x]$ indica la funció *part entera* de x .

23C6. Digueu si es pot saber la data de naixement d'una persona sabent que ha nascut al segle XX, que la diferència entre l'any de naixement i 1900, més 100 vegades la suma del número del mes multiplicada per 40 i el número del dia és 13442.

23C7. Un tren té 88 m de longitud i un altre 92 m. Quan circulen en direccions oposades tarden 7.5 s a creuar-se, i quan circulen en la mateixa direcció en tarden 45. Trobeu la velocitat dels dos trens.

23C8. Trobeu dos nombre complexos α i β tals que els afixos dels nombres α , β , α/β i β/α siguin els vèrtexs d'un quadrat de diagonals α , β/α i β , α/β .

Guanyadors: Roman Bresson Carvallo, Àlex Haro Provinciale, Bruno Hernández.

Primera sessió. Febrer de 1987.

23E1. Siguin a , b , c les longituds dels costats d'un triangle no isòsceles. Es donen tres cercles concèntrics de radis a , b i c .

a) Digueu quin és el nombre de triangles equilàters d'àrees diferents que es poden construir, de manera que les rectes que contenen els costats siguin cada una tangent a un dels cercles.

b) Trobeu les superfícies d'aquests triangles.

23E2. Demostreu que per tot nombre natural $n > 1$ es compleix

$$1 \cdot \sqrt{\binom{n}{1}} + 2 \cdot \sqrt{\binom{n}{2}} + \cdots + n \cdot \sqrt{\binom{n}{n}} < \sqrt{2^{n-1}n^3}.$$

23E3. Un triangle donat T es descompon en triangles $T_1, T_2, \dots, T_n$ de manera que:

a) Cap parell de triangles T_i té punts interiors en comú.

b) La unió dels triangles T_i és T .

c) Tot segment que és costat d'algun triangle T_i , o bé és costat d'un altre triangle T_j , o bé es costat del triangle T .

Siguin s el nombre total de costats (cada un comptat una sola vegada, encara que sigui comú a dos triangles), i v el nombre total de vèrtexs (cada un comptat una sola vegada, encara que sigui comú a diversos triangles).

Demostreu que si n és senar, existeixen diverses descomposicions d'aquesta mena, i totes tenen el mateix nombre v de vèrtexs i el mateix nombre s de costats. Expresseu v i s en funció de n . Demostreu també que si n és parell no existeix cap descomposició.

Segona sessió. Febrer de 1987.

23E4. Si a i b són dos nombres reals diferents, resol·leu el sistema

$$\begin{aligned}x + y &= 1 \\ (ax + by)^2 &\leq a^2x + b^2y.\end{aligned}$$

Resol·leu també el sistema

$$\begin{aligned}x + y &= 1 \\ (ax + by)^4 &\leq a^4x + b^4y.\end{aligned}$$

23E5. En un triangle ABC tenim punts D i E respectivament sobre AB i AC . Coneixem la mesura dels angles indicats a continuació: $\widehat{ABE} = 30^\circ$, $\widehat{EBC} = 50^\circ$, $\widehat{ACD} = 20^\circ$ i $\widehat{DCB} = 60^\circ$. Trobeu el valor de l'angle $\widehat{EDC}$.

23E6. Per cada nombre natural n considerem el polinomi

$$P_n(x) = x^{n+2} - 2x + 1.$$

- a) Demostreu que l'equació $P_n(x) = 0$ té una arrel c_n i només una a l'interval $(0, 1)$.
- b) Calculeu $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n$.

Guanyadors: Fernando Galve Mauricio, Salvador Villegas Barranco, Santiago Vila Doncel, Juan R. Valderrama Alcalde, Pablo Benítez Giménez, Carlos J. Pérez Jiménez.

Primera sessió. 11 de Desembre de 1987, de 16 h a 20 h.

24C1. Determineu les potències de $(1 + i)$ que són interiors a la corona circular determinada per les circumferències de centre $O = (0, 0)$ i radis respectius 1000 i 10000.

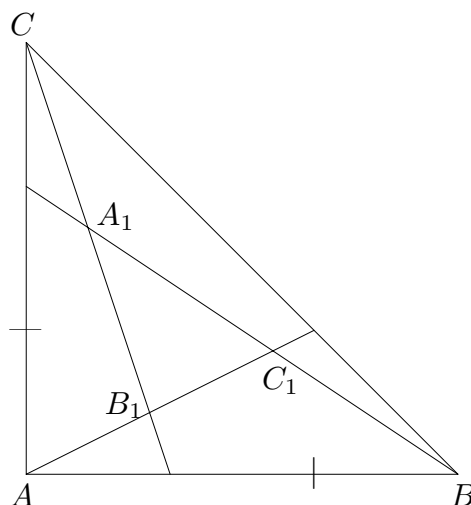
24C2. Busqueu els nombres primers de la forma $n^4 + 4$, on n és un nombre enter positiu.

24C3. Demostreu que per a qualsevol polinomi $p(x)$ existeix un nombre real k tal que un dels dos polinomis $p(x) + k$ i $x p(x) + k$ no té cap arrel real i l'altre una de sola.

24C4. Donat un triangle rectangle isòsceles ABC , dividim cada un dels seus costats en tres parts iguals i tracem les rectes de la figura, que determinen un triangle $A_1B_1C_1$. Determineu l'àrea del triangle $A_1B_1C_1$ en funció de l'àrea del triangle ABC .

Què passa si el triangle rectangle ABC no és isòsceles?

Què passa si el triangle ABC és un triangle qualsevol?



Segona sessió. 12 de Desembre de 1987, de 9 h a 13 h.

24C5. Demostreu que si dos nombre enters són de la mateixa paritat (tots dos parells o tots dos senars), la meitat de la suma dels seus quadrats és una suma de dos quadrats.

24C6. Demostreu que l'equació

$$3^a + 1 = 5^b + 7^c$$

només admet les solucions enteres $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$.

24C7. Per un punt de la vora d'un quadrat es tracen dues rectes que divideixen el quadrat en tres trossos de la mateixa àrea. Calculeu l'angle d'aquestes rectes en funció dels punts de la vora.

24C8. (a) Estudieu els intervals de creixement i decreixement de la funció

$$F(t) = \frac{\ln t}{t}.$$

(b) Comproveu que si $k \geq 3$ és enter, l'equació

$$(\ln x)^k = x$$

té exactament dues solucions més grans que e , diguem r_k i s_k , $r_k < s_k$, i que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} r_k = e \quad \text{i} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} s_k = +\infty.$$

Indicació: En la resolució de l'apartat (b) tingueu en compte l'apartat (a).

Guanyadors: Boris Bartolomé Mana, Javier Campins Pascual, Jordi Campins Pascual.

Primera sessió. Febrer de 1988.

24E1. Sigui (x_n) , $n \in \mathbb{N}$, una successió de nombres enters tal que

$$\begin{aligned}x_1 &= 1, \\x_{n+1} &> x_n, \text{ per } n \geq 1, \\x_{n+1} &\leq 2n, \text{ per } n \geq 1.\end{aligned}$$

Demostreu que per tot enter natural k existeixen dos termes de la successió x_r i x_s tals que $x_r - x_s = k$.

24E2. Sobre una circumferència s'elegeixen $n > 3$ punts i es numeren de 1 a n en qualsevol ordre. Direm que dos punts no consecutius a i b estan relacionats si en un dels dos arcs d'extremes a i b , tots els punts estan marcats amb números de valor menor que els de a i b .

Demostreu que el nombre de parells de punts relacionats és exactament $n - 3$.

24E3. Demostreu que els binomis $25x + 31y$ i $3x + 7y$ són múltiples de 41 pels mateixos valors de x i y .

Segona sessió. Febrer de 1988.

24E4. S'atribueix al matemàtic renaixentista Leonardo da Pisa (més conegut com Fibonacci) la successió definida de la manera següent

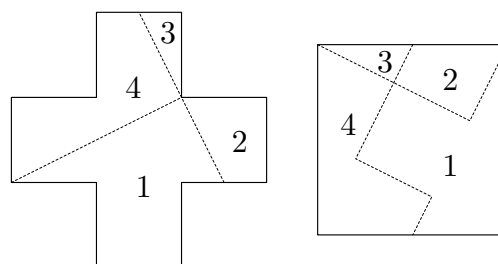
$$a_1 = 1,$$

$$a_2 = 1,$$

$$a_i = a_{i-1} + a_{i-2} \text{ per } i > 2.$$

Expresseu a_{2n} en funció només dels tres termes a_{n-1} , a_n , a_{n+1} .

24E6. És molt conegut el *puzzle* consistent a descompondre la creu grega de l'esquerra de la figura en quatre parts amb les quals compondre un quadrat. Una solució habitual és la de la figura de la dreta. Demostreu que hi ha una infinitat de solucions diferents.



Hi ha alguna solució que doni lloc a quatre parts iguals?

24E7. Calculeu, per qualsevol valor del paràmetre enter t , solucions enteres x , y de l'equació

$$y^2 = x^4 - 22x^3 + 43x^2 + 858x + t^2 + 10452(t + 39).$$

Guanyadors: Javier Campins Pascual, Ramón Esteban Romero, Santiago Pérez-Cacho Fernando-Argüelles, José Ignacio Nogueira Coriba, Boris Bartolomé Mana, Fernando Martínez Puente.

Primera sessió. 16 de Desembre de 1988, de 16 h a 20 h.

25C1. Demostreu que si n és un enter positiu i p és primer, aleshores $n^p - n$ és múltiple de p .

25C2. Dos mòbils es desplacen amb velocitat constant al llarg d'un circuit tancat. Si surten simultàniament d'un mateix punt en el mateix sentit, tornen a coincidir al cap de 100 s i el més ràpid ha de menester 10 s menys que l'altre per a fer una volta completa.

Quant de temps tardaran a creuar-se si surten simultàniament del mateix punt en sentits oposats?

25C3. Els extrems A i B d'un segment es mouen respectivament sobre dues rectes r i s que són perpendiculars. Descriviu la corba que recorre el punt M del segment tal que MA és la meitat de MB .

25C4. La societat *Peces de Ferro S.A.* té nou accionistes que han de triar en Joan o en Pere com a President. És sabut que sis d'ells votaran en Joan i els altres tres en Pere, i que en el moment d'emetre el vot, cada un ho farà públicament en veu alta. Determineu la probabilitat que en Joan vagi sempre per davant en les votacions.

Segona sessió. 17 de Desembre de 1988, de 9 h a 13 h.

25C5. Considerem un conjunt $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ d'un nombre finit n de nombres reals estrictament positius. Demostreu que per a tot $n \geq 2$ es compleix

$$\frac{x_1^2}{x_1^2 + x_2x_3} + \frac{x_2^2}{x_2^2 + x_3x_4} + \dots + \frac{x_{n-1}^2}{x_{n-1}^2 + x_nx_1} + \frac{x_n^2}{x_n^2 + x_1x_2} \leq n - 1.$$

25C6. Si α, β, γ són tres nombres complexos tals que els seus afixos determinen un triangle equilàter, demostreu que es compleix la igualtat

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha.$$

25C7. Demostreu, per cada enter positiu n , les desigualtats

$$2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1}.$$

Si $[x]$ representa la part entera del nombre x , determineu el valor de

$$\left[1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{10^6}} \right].$$

25C8. Descriuiu totes les successions (a_n) de nombres reals tals que

$$|a_n - a_m| \leq e^{-(n+m)}.$$

Primera sessió. Febrer de 1989.

25E1. El programa d'una assignatura consta de n preguntes; l'examen consisteix en la resposta d'una pregunta triada a l'atzar. Un alumne només se sap una pregunta, però pot repetir l'examen n vegades. Expresseu, en funció de n , la probabilitat p_n que l'alumne aprovi l'examen. Digueu si p_n és creixent o decreixent quan n augmenta. Calculeu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n.$$

Calculeu la fita inferior màxima de les probabilitats p_n .

25E2. Els punts A' , B' , C' dels costats BC , CA , AB d'un triangle ABC compleixen

$$\frac{AC'}{C'B} = \frac{BA'}{A'C} = \frac{CB'}{B'A} = k.$$

Les rectes AA' , BB' , CC' formen un triangle $A_1B_1C_1$. Donats k i l'àrea S del triangle ABC , calculeu l'àrea del triangle $A_1B_1C_1$.

25E3. Demostreu que

$$\frac{1}{10\sqrt{2}} < \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 99}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 100} < \frac{1}{10}.$$

Segona sessió. Febrer de 1989.

25E4. Demostreu que el nombre 1989 i totes les seves potències enteres 1989^n es poden escriure com a suma de dos quadrats de nombres enters positius, i com a mínim de dues formes diferents.

25E5. Sigui $\mathcal{D}$ el conjunt dels nombres complexos que es poden escriure de la forma $a + b\sqrt{-13}$, amb a, b enters. El nombre $14 = 14 + 0\sqrt{-13}$ es pot escriure com a producte de dos elements de $\mathcal{D}$: $14 = 2 \cdot 7$. Expresseu 14 com a producte de dos elements de $\mathcal{D}$ de totes les maneres possibles.

25E6. Demostreu que donats set nombres reals qualssevol, se'n poden triar dos, diguem a i b , de manera que

$$\sqrt{3}|a - b| < |1 + ab|.$$

Doneu un exemple de sis nombres reals que no compleixin aquesta propietat.

Guanyadors: Vicente Muñoz Velázquez, Enrique García López, Alberto García Martínez, Cristina Draper Fontanales, Leandro Marín Muñoz, Javier Portela Lemos.

Primera sessió. 16 de Febrer de 1990, de 16 h a 20 h.

26C1. Siguin A , B , C els vèrtexs d'un triangle i H l'ortocentre. Demostreu la igualtat

$$\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{HA}.$$

26C2. Demostreu que si les longituds a , b , c dels costats d'un triangle compleixen $a < b < c$, aleshores l'angle C oposat al costat c compleix $\cos C < 1/2$.

26C3. Sigui $A_n = 2^n + 2^{2n} + 2^{3n}$.

- a) Demostreu que per a tot nombre natural n , el nombre $A_{n+3} - A_n$ és divisible per 7.
b) Calculeu el residu de dividir A_{1990} per 7.

26C4. Donada la corba

$$y = x + \frac{1}{2x^2},$$

- a) Calculeu l'àrea $S(t)$ limitada per la corba, la seva asímptota inclinada i les rectes $x = 1$ i $x = t$ ($t > 1$).
b) Calculeu

$$\lim_{t \rightarrow \infty} S(t).$$

Segona sessió. 17 de Febrer de 1990, de 9 h a 13 h.

26C5. Resoleu a l'interval $[0, 2\pi]$ la inequació

$$\cos x + \cos 3x + \cos 5x > 0.$$

26C6. Un triangle rectangle T_1 té els costats en progressió geomètrica i un altre triangle rectangle T_2 els té en progressió aritmètica. Un costat del triangle T_1 és igual a un costat del triangle T_2 . Calculeu el valor màxim i el valor mínim de

$$\frac{\text{àrea } T_1}{\text{àrea } T_2}.$$

26C7. Determineu els nombres complexos z tals que els afixos dels nombres

$$z^{1989}, z^{1990}, z^{1991}$$

siguin els vèrtexs d'un triangle rectangle isòsceles amb l'angle recte en el punt z^{1990} .

26C8. Esbrineu si és possible tenir un pla P , una esfera E i un tetràedre regular T tals que els plans paral·lels a P o bé no tallin ni a l'esfera E ni al tetràedre T , o bé els tallin en figures de la mateixa àrea.

Estudieu la mateixa qüestió si el tetràedre no és regular.

Guanyadors: Roberto Coll Francés, Gerard Montornés Ferret, Àngel Solares Girón.

Primera sessió. 16 de Març de 1990.

26E1. Siguin x i y dos nombres reals positius. Proveu que l'expressió

$$A = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{xy}$$

es pot escriure en la forma

$$B = \sqrt{x} + \sqrt{y + xy + 2y\sqrt{x}}$$

i compareu els nombres

$$L = \sqrt{3} + \sqrt{10 + 2\sqrt{3}} \quad \text{i} \quad M = \sqrt{5 + \sqrt{22}} + \sqrt{8 - \sqrt{22} + 2\sqrt{15 - 3\sqrt{22}}}.$$

26E2. Cada punt d'un pla està pintat d'un color elegit entre tres de diferents. Es pregunta si existeixen necessàriament dos punts d'aquest pla que distin 1 cm i que estiguin pintats del mateix color.

26E3. S'anomena part entera d'un nombre real a (i s'escriu $[a]$), el nombre enter més gran que sigui menor o igual que a . Si n és un nombre natural, demostreu que la part entera de $(4 + \sqrt{11})^n$ és un nombre senar.

Segona sessió. 17 de Març de 1990.

26E4. Demostreu que la suma

$$\sqrt[3]{\frac{a+1}{2} + \frac{a+3}{6}\sqrt{\frac{4a+3}{3}}} + \sqrt[3]{\frac{a+1}{2} - \frac{a+3}{6}\sqrt{\frac{4a+3}{3}}}$$

és independent del valor de a , per tot valor real $a \geq -3/4$, i trobeu-ne el valor.

26E5. Tres punts A' , B' , C' estan situats, respectivament, sobre els costats BC , CA i AB d'un triangle donat ABC d'àrea S , de manera que

$$\frac{AC'}{AB} = \frac{BA'}{BC} = \frac{CB'}{CA} = p,$$

essent p un paràmetre variable, $0 < p < 1$. Determineu

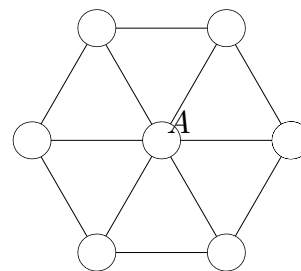
- 1) L'àrea del triangle $A'B'C'$ en funció de p .
- 2) El valor de p que fa mínima l'àrea anterior.
- 3) El lloc geomètric dels punts P d'intersecció de les paral·leles traçades per A' i C' , respectivament als costats AB i AC , quan p varia de 0 a 1.

26E6. Es consideren n punts del pla de forma que no hi hagi dues parelles equidistants. Per cada punt es traça el segment que l'uneix al més proper. Demostreu que cap punt està unit a més de cinc punts.

Guanyadors: Francisco Ogando Serrano, Daniel Lasaosa Medarde, Marco Castrillón López, Javier Arregui García, José F. Herrador Barrios, José M. Gordillo Arias de Saavedra.

Primera sessió. 14 de Desembre de 1990, de 16 h a 20 h.

27C2. La figura adjunta representa un entramat de camins per on pot moure's una tortuga, la qual, a cada cruïlla, escull a l'atzar un qualsevol dels camins que pot seguir. Si deixem la tortuga lliure en el punt A , calculeu la probabilitat que torni a passar pel punt A en menys de n moviments.



27C3. Determineu quina condició han de complir les xifres de les desenes de dos nombres acabats en 6, per tal que el seu producte acabi en 36.

27C4. Siguin r i R dos rectangles d'àrea unitat, tals que el perímetre de R és doble del perímetre de r . Siguin d i D les longituds de les diagonals de r i R .

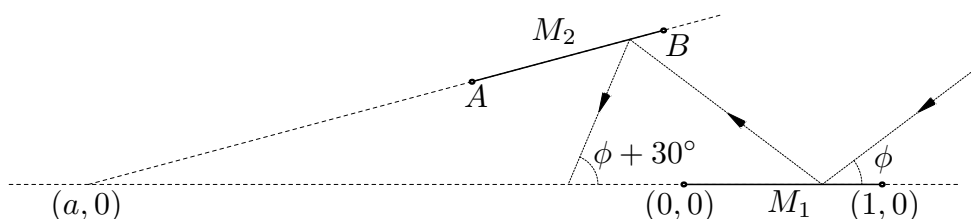
a) Demostreu que $2 < D/d \leq \sqrt{7}$.

b) Si $D = d\sqrt{5}$, determineu les longituds dels costats dels dos rectangles.

27C5. Prenem un sistema rectangular de coordenades al pla. Tenim un mirall M_1 unidimensional posat cara amunt sobre el segment d'extremes $(0,0)$ i $(1,0)$. Sobre la recta que passa per $(a,0)$ amb $a < 0$ i que té pendent $m > 0$ posem un mirall M_2 d'extremes A i B mirant cap avall. Determineu a , m i els punts A i B per tal que es compleixi:

a) Tot raig que arriba a M_1 amb un angle ϕ respecte de la direcció de les x positives, $30^\circ \leq \phi \leq 45^\circ$, és reflectit cap a M_2 , es reflecteix a M_2 i no torna a trobar M_1 . L'angle entre la direcció de les x positives i el raig que arriba de M_2 és $\phi + 30^\circ$.

b) La longitud de M_2 és mínima respecte a tots els possibles miralls que compleixen la condició anterior.



Segona sessió. 15 de Desembre de 1990, de 9 h a 13 h.

27C6. Trobeu els nombres de quatre xifres que són iguals al quadrat de la suma del nombre format per les dues primers xifres i el format per les dues darreres xifres.

27C7. Considereu un triangle equilàter inscrit en una circumferència de radi 1. Li apliquem una rotació d'angle ϕ de centre el centre de la circumferència. Calculeu l'àrea comuna als dos triangles i el valor de l'angle ϕ que fa que l'àrea comuna sigui mínima.

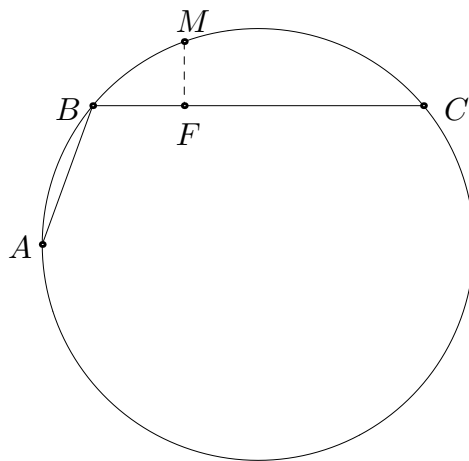
27C8. Demostreu que tot nombre de la forma $2/n$, amb n senar, es pot posar com a suma de dues fraccions unitàries (és a dir, de fraccions de numerador 1.)

Deduïu-ne que tota fracció m/n , amb n senar, admet una descomposició en suma de fraccions unitàries diferents. Comproveu també que si m/n admet una descomposició en suma de r fraccions unitàries diferents, n'admet una altra en suma de s fraccions unitàries, per tot $s > r$.

27C9. Siguin AB i BC dues cordes d'un cercle ($AB < BC$) i sigui M el punt mitjà de l'arc ABC . Siguí F el peu de la perpendicular des de M a la corda BC .

a) Proveu que F és el punt mitjà de la corda trencada, és a dir, $AB + BF = FC$.

b) Useu el punt anterior per veure que $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$.



Guanyadors: Roger Espel Llima, Ignasi Mundet Riera, Alejandro Lago Esteban.

Primera sessió. 15 de febrer de 1991.

27E1. Al pla, on s'ha pres un sistema de referència ortonormal, es consideren tots els punts (m, n) tals que les seves coordenades són nombres enters. Suposem que s'hagin traçat tots els segments que uneixen parells qualssevol d'aquests punts i que tenen longitud entera. Proveu que no hi ha dos segments d'aquests que formin un angle de 45° .

Fem el mateix amb els punts (m, n, k) de l'espai. Hi haurà algun parell de segments que formin un angle de 45° ?

27E2. Siguin a i b enters diferents de 0, 1 i -1 i considerem la matriu

$$\begin{pmatrix} a+b & a+b^2 & a+b^3 & \cdots & a+b^m \\ a^2+b & a^2+b^2 & a^2+b^3 & \cdots & a^2+b^m \\ a^3+b & a^3+b^2 & a^3+b^3 & \cdots & a^3+b^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^n+b & a^n+b^2 & a^n+b^3 & \cdots & a^n+b^m \end{pmatrix}.$$

Determineu un subconjunt S de files d'aquesta matriu, el més petit possible, tal que qualsevol altra fila es pugui expressar com a suma de les files de S multiplicades per nombres enters apropiats (és a dir, com a combinació lineal amb coeficients enters de les files de S .) Expliciteu aquestes combinacions lineals.

27E3. Suposem que l'equació $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ amb $r \neq 0$, admet tres arrels reals i positives. Determineu la relació que hi ha entre els nombres reals p , q i r per tal que les tres arrels puguin ser les longituds dels costats d'un triangle.

Segona sessió. 16 de febrer de 1991.

27E4. Siguin A' , B' i C' els punts de tangència dels costats BC , CA i AB d'un triangle amb la seva circumferència incrita. Sigui D el punt d'intersecció de $C'A'$ amb la bisectriu de l'angle del vèrtex A . Calculeu el valor de l'angle $\widehat{ADC}$.

27E5. Donat un nombre natural n , indiquem per $s(n)$ la suma de les xifres del nombre n , expressat en el sistema de numeració binari, és a dir, el nombre de xifres 1 que té. Determineu, per a tot nombre natural k

$$\sigma(k) = s(1) + s(2) + \cdots + s(2^k).$$

27E6. Calculeu la part entera de

$$S = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{10000}}.$$

Guanyadors: Ignasi Mundet Riera, Roger Espel Llima, Marcos Durántez Gamzukoff, Ignacio Uriarte Tuero, Alberto Bravo de Mansilla Jiménez, Ignacio Marcos Primo.

Primera sessió. 22 de Novembre de 1991, de 16 h a 20 h.

28C1. Demostreu que el nombre que escrit en base n , $n \geq 8$ és 1367631, és un cub perfecte. En particular, calculeu l'arrel cúbica d'aquest nombre en base 10 i en base 1991.

28C2. Sigui S el conjunt de les rectes que uneixen un punt del conjunt

$$A = \left\{ \left(0, \frac{1}{a} \right) \mid a \in \mathbb{N} \right\}$$

i un punt del conjunt

$$B = \{ (b+1, 0) \mid b \in \mathbb{N} \}.$$

Demostreu que un nombre natural m és compost si i només si el punt $M = (m, -1)$ està sobre una recta del conjunt S .

Determineu també el nombre de rectes del conjunt S que passen per un punt $M = (m, -1)$ en funció del nombre natural m .

28C3. L'abscissa d'un punt que es mou sobre la part positiva de l'eix de les X ve donada per

$$x(t) = 5(t+1)^2 + \frac{a}{(t+1)^5}$$

on a és una constant positiva.

Quin és el mínim valor de a pel qual $x(t) \geq 24$ per a tot $t \geq 0$?

28C4. Tenim dues circumferències S_1, S_2 iguals, de radi R , i tangents. Considerem la tangent comuna r , paral·lela a la recta que uneix els centres de S_1 i S_2 .

Siguin C_1 , la circumferència tangent a r, S_1 i S_2 ; C_2 , la circumferència tangent a C_1, S_1 i S_2 ; C_3 , la circumferència tangent a C_2, S_1 i S_2 ; etc.

S'obté així una família de circumferències $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$. Demostreu que el diàmetre de la circumferència C_n és

$$d_n = \frac{R}{n(n+1)}.$$

Segona sessió. 23 de Novembre de 1991, de 9 h a 13 h.

28C5. Per cada nombre natural n escrivim

$$(1 + \sqrt{2})^{2n+1} = a_n + b_n\sqrt{2}$$

i així tenim dues successions de nombres enters

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \quad \text{i} \quad b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$$

- a) Demostreu que a_n i b_n són senars per tot $n \in \mathbb{N}$.
- b) Demostreu que b_n és la hipotenusa d'un triangle rectangle de catets

$$\frac{a_n + 1}{2} \quad \text{i} \quad \frac{a_n - 1}{2}.$$

28C6. Sigui z_1, z_2, z_3 i z_4 nombres complexos de igual mòdul;

- a) si $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, què es pot dir de la figura formada pels afixos d'aquests tres nombres complexos?
- b) si $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$, què es pot dir de la figura formada pels afixos d'aquests quatre nombres complexos ?

28C7. Sigui $p(n)$ el nombre de factors primers del nombre natural n . Demostreu que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p(n)}{n} = 0.$$

28C8. Sigui ABC un triangle qualsevol. Exteriorment a ell es construeixen dos quadrats $BAEP$ i $ACRD$ de costats AB i AC respectivament. Sigui M i N els punts mitjans de BC i ED . Demostreu que AM és perpendicular a ED i que AN és perpendicular a BC .

Guanyadors: Francisco Hernández García, José M. Mondelo González.

Primera sessió. 14 de Febrer de 1992.

28E1. Un nombre N , múltiple de 83, és tal que el seu quadrat té 63 divisors. Trobeu N , sabent que és el nombre més petit que compleix les condicions anteriors.

28E2. Donades dues circumferències exteriors de radis r i r' ($r \neq r'$), es demana de dibuixar, raonadament, una recta paral·lela a una direcció donada, de tal manera que determini sobre les dues circumferències dues cordes tals que la suma de llurs longituds sigui igual a una longitud donada ℓ .

28E3. Proveu que si a , b , c i d són nombres enters no negatius, i és

$$(a+b)^2 + 2a + b = (c+d)^2 + 2c + d, \quad (*)$$

necessàriament ha de ser $a = c$ i $b = d$.

Proveu la mateixa conclusió si, en lloc de (*) es compleix

$$(a+b)^2 + 3a + b = (c+d)^2 + 3c + d.$$

Vegeu que, en canvi, existeixen nombres enters no negatius $a \neq c$, $b \neq d$, tals que

$$(a+b)^2 + 4a + b = (c+d)^2 + 4c + d.$$

Segona sessió. 15 de Febrer de 1992.

28E4. Sigui la successió (progressió aritmètica)

$$3, 7, 11, 15, \dots$$

Demostreu que en aquesta successió hi ha infinits nombres primers.

28E5. Dibuixat el triangle de vèrtexs A , B , C , es demana de determinar gràficament el punt P tal que

$$\widehat{PAB} = \widehat{PBC} = \widehat{PCA}.$$

Expresseu una funció trigonomètrica d'aquest angle $\widehat{PAB}$ en funció de les funcions trigonomètriques dels angles A , B i C .

28E6. Donats un nombre natural $n > 0$ i un nombre complex $z = x + iy$ de mòdul unitat, $x^2 + y^2 = 1$, es pot complir o no la igualtat

$$\left(z + \frac{1}{z}\right)^n = 2^{n-1} \left(z^n + \frac{1}{z^n}\right).$$

Fixat n designarem per $S(n)$ el subconjunt de complexos de mòdul unitat pels quals es compleix la igualtat donada. Es demana

- a) Calculeu raonadament $S(n)$, per $n = 2, 3, 4, 5$.
- b) Fiteu superiorment el nombre d'elements de $S(n)$ en funció de n , per $n > 5$.

Guanyadors: Álvaro Begué Aguado, Javier Ribón Herguedas, José Miguel Atienza Riera, Raquel Barco Moreno, Vicente Giner Bosch, Manuel M. Aguado Martínez.

Primera sessió. 11 de Desembre de 1992, de 16 h a 18 h 30 m.

29C1. Demostreu que el nombre combinatori

$$\binom{1992}{1492}$$

no és múltiple de 500.

29C2. Proveu que si els nombres

$$\sin(b + c - a), \quad \sin(c + a - b) \quad \text{i} \quad \sin(a + b - c)$$

estan en progressió aritmètica, llavors també ho estan els nombres

$$\tan a, \quad \tan b \quad \text{i} \quad \tan c.$$

29C3. En un cercle de centre O i radi 1 tracem una corda i construïm seguidament el semicercle que té com a diàmetre aquesta corda i no està contingut en el cercle inicial. Sigui P el punt d'aquest semicercle que està més lluny del punt O . Quina longitud ha de tenir la corda per tal que la distància OP sigui màxima?

29C4. Calculeu els límits

a)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{(n-1)n}).$$

b)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt[3]{(n-1)n^2}).$$

Segona sessió. 12 de Desembre de 1992, de 9 h a 13 h.

29C5. Sobre una recta horitzontal construïm triangles equilàters de forma que les respectives bases són segments adjacents de longituds 1, 3, 5, 7, ... Demostreu que els vèrtexs superiors dels triangles estan sobre una paràbola.

29C6. Un rectangle es pot descompondre en 9 quadrats de costats 1, 4, 7, 8, 9, 10, 14, 15 i 18. Calculeu els costats del rectangle.

29C7. El joc de daus americà es juga de la manera següent: el jugador va tirant successivament els daus fins que perd o guanya.

A la primera tirada guanya si la suma dels punts dels dos daus és 7 o bé 11, i perd si la suma de punts és 2, 3 o 12. Altrament anomenarem *el seu valor* la suma de punts que ha tret en la primera tirada.

A partir d'aquí tirarà els dos daus fins que tregui un 7, i llavors perdrà, o bé que tregui novament *el seu valor* i llavors guanyarà.

Calculeu la probabilitat que té un jugador de guanyar en aquest joc.

29C8. Sigui $A = 66^{66}$. Sigui B la suma de les xifres de A , i C la suma de les xifres de B . Calculeu la suma de les xifres de C .

Guanyadors: Roger Revilla Domingo, Daniel Marquès Solé, Marc Guinjoan Francisco.

Primera sessió. 26 de Febrer de 1993.

29E1. En una reunió hi ha 201 persones de 5 nacionalitats diferents. Se sap que, a cada grup de 6, com a mínim 2 tenen la mateixa edat. Demostreu que hi ha al menys 5 persones del mateix país, de la mateixa edat i del mateix sexe.

29E2. Escrit el triangle aritmètic

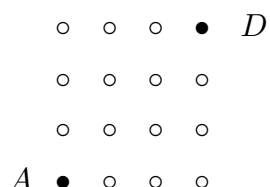
0	1	2	3	4	...	1991	1992	1993
	1	3	5	7	...		3983	3985
		4	8	12	...			7968
			...	...	...			

on cada nombre és igual a la suma dels dos que té al damunt (és evident que cada fila té un nombre menys que la fila anterior, i per tant, la darrera està formada per un únic nombre), raoneu el fet que l'últim nombre sigui múltiple de 1993.

29E3. Justifiqueu raonadament que a qualsevol triangle, el diàmetre de la circumferència inscrita no és més gran que el radi de la circumferència circumscrita.

29E4. Demostreu que tot nombre primer p diferent de 2 i de 5 té infinits múltiples escrits només amb uns (és a dir, de la forma $111\dots 1$).

29E5. Es donen 16 punts que formen una quadrícula com a la figura:

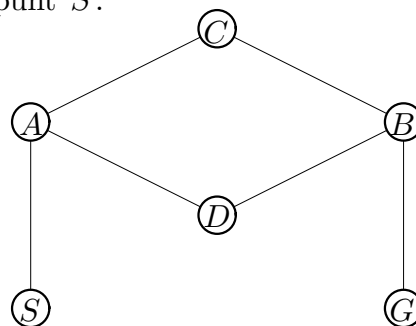


De tots ells, se n'han destacat dos: A i D . Es demana que fixeiu, de totes les maneres possibles, dos altres punts B i C amb la condició que les 6 distàncies determinades pels quatre punts siguin totes diferents. En aquest conjunt de quaternes, s'ha d'estudiar:

- 1) Nombre de figures de 4 punts que existeixen amb les condicions de l'enunciat.
- 2) Figures que són geomètricament diferents, és a dir, no deduïbles una de l'altra per una transformació d'igualtat.
- 3) Si cada punt es designa per un parell d'enters (X_i, Y_i) , la suma $|X_i - X_j| + |Y_i - Y_j|$ estesa al sis parells AB, AC, AD, BC, BD, CD , és constant.

29E6. Una màquina de joc d'un casino té una pantalla on s'ofereix un esquema com el de la figura. En començar el joc apareix una bola al punt S .

A cada impuls del jugador, la bola es mou a cada un dels cercles immediats, amb la mateixa probabilitat per a cada un d'ells. La partida acaba quan té lloc per primera vegada un dels dos esdeveniments següents: (1) La bola torna a S , i el jugador perd. (2) La bola arriba a G , i llavors el jugador guanya. Es demana la probabilitat que el jugador guanyi, i la duració mitjana de les partides.



Primera sessió. 14 de Gener de 1994, de 16 h a 20 h.

30C1. Dues circumferències C_1 i C_2 es tallen en punts A i B . Es pren un punt M de C_1 , exterior a C_2 , i es tracen les rectes MA i MB . Anomenem A' i B' els punts (diferents de A i de B) en què aquestes rectes tallen respectivament la circumferència C_2 . Demostreu que la longitud del segment $A'B'$ no depèn de la posició de M .

30C2. Demostreu que la funció

$$f(x) = 2 \arctan x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$$

és constant en el conjunt dels nombres reals tals que $x \geq 1$.

30C3. El nombre 9687600 es pot escriure com a producte de nombres enters consecutius, un dels quals és primer. Calculeu quins són aquests factors.

30C4. En una bossa hi ha n boles numerades amb números de 1 a n .

a) Si traiem tres boles d'aquesta bossa, totes alhora, calculeu la probabilitat que no surti cap parella de números consecutius.

b) Si traiem m boles d'aquesta bossa, totes alhora, demostreu que la probabilitat que no surti cap parella de números consecutius és

$$\frac{\binom{n-m+1}{m}}{\binom{n}{m}}.$$

Segona sessió. 15 de Gener de 1994, de 9 h a 13 h.

30C5. Digueu quina relació hi ha d'haver entre les arestes d'un tetràedre per tal que les seves cares siguin triangles semblants no tots iguals.

30C6. Una successió de terme general a_n compleix $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ per a $n > 2$. Se sap que la suma dels 1000 primers termes és 500, i que la suma dels 1000 següents és 2000. Calculeu la suma dels 1993 primers termes i el terme a_{1994} .

30C7. Sigui $P(x)$ un polinomi amb coeficients enters.

a) Comproveu que si m i n són nombres enters, llavors $P(m) - P(n)$ és divisible per $m - n$.

b) Demostreu que si hi ha tres nombres enters a , b i c tals que $P(a) = P(b) = P(c) = 2$, llavors $P(x) \neq 3$ per tot x enter.

30C8. Calculeu totes les arrels complexes de l'equació

$$z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0.$$

Guanyadors: Rubèn Albiol López, David Arso Civil, José Ramón Domingo Magaña, José Manuel Torrego Solana, Francesc Gassó Minguet, Mario Parra Kaiser.

Primera sessió. 25 de Febrer de 1994.

30E1. Demostreu que si entre els infinits termes d'una progressió aritmètica de nombres enters hi ha un quadrat perfecte, llavors infinits termes de la progressió són quadrats perfectes.

30E2. Sigui $O.XYZ$ un triedre trirectangle de vèrtex O i arestes X , Y i Z . Sobre l'aresta Z es fixa un punt C tal que $OC = c$. Sobre X i Y es consideren, respectivament, punts variables P i Q de manera que $OP + OQ$ sigui una constant donada k . Per a cada parell de punts P i Q , els quatre punts O , C , P i Q determinen una esfera, el centre de la qual W , es projecta sobre el pla OXY . Raoneu quin és el lloc geomètric d'aquesta projecció. Raoneu també quin és el lloc geomètric de W .

30E3. Una Oficina de Turisme vol fer una enquesta sobre el nombre de dies asolellats i de dies de pluja al llarg d'un any. Per tal de fer-ho, demana informació a sis regions, les quals li transmeten la informació de la taula següent:

<i>Regió</i>	<i>Sol o pluja</i>	<i>Inclassificable</i>
A	336	29
B	321	44
C	335	30
D	343	22
E	329	36
F	330	35

La persona encarregada de l'enquesta, que té dades més detallades, no és imparcial. S'adona que prescindint d'una de les regions, la observació dona un nombre de dies plujosos que és la tercera part del nombre de dies de sol. Digueu raonadament de quina regió ha de prescindir.

30E4. L'angle A d'un triangle isòsceles ABC mesura $2/5$ de recte, i els angles B i C són iguals. La bisectriu de l'angle C talla el costat oposat al punt D . Calculeu les mesures dels angles del triangle BCD . Expresseu la mesura a del costat BC en funció de la mesura b del costat AC , sense que a l'expressió hi aparegui cap raó trigonomètrica.

30E5. Amb 21 fitxes de dames, unes de blanques i unes de negres, es forma un rectangle 3×7 . Demostreu que sempre hi ha quatre fitxes del mateix color situades en els vèrtexs d'un rectangle.

30E6. Un polígon convex de n costats es descompon en m triangles amb interiors disjunts, de manera que cada costat d'aquests m triangles ho és també d'altre triangle contigu o del polígon donat. Demostreu que $m + n$ és parell. Coneguts m i n , trobeu el nombre de costats diferents que queden a l'interior del polígon i el nombre de vèrtexs diferents que queden en aquest interior.

Primera sessió. 13 de Gener de 1995, de 16 h a 20 h.

31C1. Donat un triangle isòsceles de base 2 i altura 2, trobeu les paràboles tangents als costats iguals del triangle isòsceles tals que l'àrea que tanquin amb la base del triangle sigui màxima i mínima.

31C2. Sigui $N = abc_{(n)}$ un nombre escrit en el sistema de numeració de base n , on $0 \leq a, b, c \leq n - 1$ i on a, b, c són diferents entre ells i de zero. Formeu els nombres en base n que s'obtenen permutant de totes les maneres possibles les xifres a, b, c . Demostreu que la suma d'aquests nombres és divisible per $111_{(n)}$. Generalitzeu l'enunciat del problema a nombres de p xifres escrits en base n .

31C3. Donat un triangle ABC i un punt M sobre AC , busqueu un punt N en un dels altres costats de manera que el segment MN divideixi el triangle en dues parts que tinguin la mateixa àrea.

31C4. Tenim dos daus perfectes normals. Volem canviar les puntuacions de cadascuna de les cares dels dos daus de manera que les probabilitats d'aconseguir els resultats 2 a 12, llançant-los simultàniament, sigui la mateixa que s'esdevindria usant els dos daus donats inicialment. A les noves puntuacions dels daus es permet la repetició d'una mateixa puntuació en dues cares, així com la utilització de puntuacions superiors al 6, però no s'accepta pas el 0. És possible de fer això?

Segona sessió. 14 de Gener de 1995, de 9 h a 13 h.

31C5. Siguin $[a, b]$ i $[c, d]$ dos intervals tancats de $\mathbb{R}$. Siguin $x_0, x_1, \dots, x_n, y_0, y_1, \dots, y_n$ nombres reals que compleixen

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b, \quad c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d.$$

Proveu que si cadascun dels n^2 rectangles de $\mathbb{R}^2$: $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$, ($0 \leq i, j \leq n-1$) té un costat de longitud entera, llavors el rectangle gran $[a, b] \times [c, d]$ també té un costat de longitud entera.

31C6. Siguin A , B i C els tres angles d'un triangle.

a) Demostreu que es compleix la igualtat

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C.$$

b) Supposeu que tres arrels de l'equació polinòmica $x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$ són $\tan A$, $\tan B$ i $\tan C$, on A , B i C són els tres angles d'un triangle. Busqueu la quarta arrel en funció solament dels coeficients p , q , r , s del polinomi.

31C7. Busqueu una fórmula general que permeti conèixer còmodament les hores en les quals la busca horària d'un rellotge i la minutera formen un angle recte. Comproveu aquesta fórmula general per a les 3 i les 9 hores.

31C8. Sigui $ABCD$ un rectangle, dividim el costat AB en p parts iguals i el costat AD en q parts iguals, amb p , q enters senars, i considerem la quadrícula resultant.

a) Calculeu el nombre de camins de longitud mínima per la quadrícula que van del vèrtex A al seu vèrtex oposat C .

b) Cadascun d'aquests camins tanca amb els costats AB i BC una certa àrea. Calculeu la suma d'aquestes àrees.

c) Si m és la mitjana aritmètica d'aquestes àrees, es demana quants camins tanquen aquesta àrea m .

Guanyadors: Sergio Cabello Justo, Thomas Doumenc, Joaquim Puig Sadurní, Ferran Revilla Domingo, Ana de Mier Vinué.

Primera sessió. 24 de febrer de 1995, de 16 h a 20 h.

31E1. Es consideren conjunts A de cent nombres naturals diferents, que tinguin la propietat que si a , b , c són elements qualssevol (iguals o diferents) de A , existeix un triangle no obtusangle els costats del qual mesuren a , b i c unitats.

S'anomena $S(A)$ la suma dels perímetres considerats a la definició de A . Calculeu el valor mínim de $S(A)$.

31E2. Retallem diversos cercles de paper (no necessàriament iguals) i els estenem sobre una taula de manera que n'hi hagi alguns de superposats (amb part interior comuna), però de tal forma que no hi hagi cap cercle dins d'un altre.

Proveu que és impossible engalzar les peces que resulten de retallar les parts no superposades i compondre amb elles cercles disjunts.

31E3. Pel baricentre G d'un triangle ABC es traça una recta que talla el costat AB en P i el costat AC en Q . Demostreu que

$$\frac{PB}{PA} \cdot \frac{QC}{QA} \leq \frac{1}{4}.$$

Segona sessió. 25 de febrer de 1995, de 10 h a 13 h.

31E4. Trobeu les solucions enteres de l'equació $p(x + y) = xy$ on p és un nombre primer.

31E5. Demostreu que en cas que les equacions

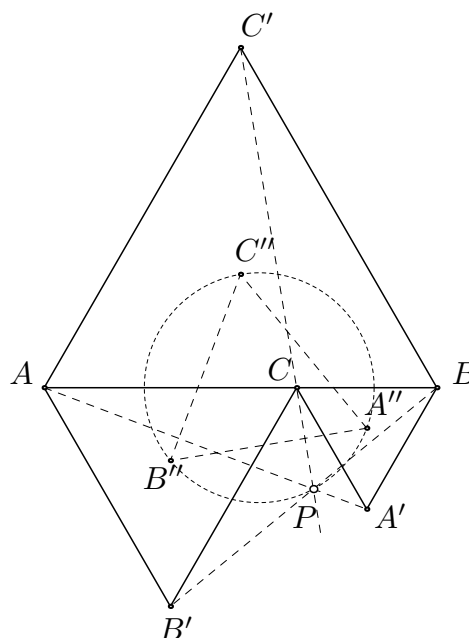
$$x^3 + mx - n = 0$$

$$nx^3 - 2m^2x^2 - 5mnx - 2m^3 - n^2 = 0$$

($n \neq 0$), tinguin una arrel comuna, la primera tindrà dues arrels iguals, i determineu llavors les arrels de les dues equacions en funció de n .

31E6. A la figura, AB és un segment fix i C un punt variable dins d'ell. Es construeixen triangles equilàters ACB' i CBA' de costats AC i CB en un mateix semiplà definit per AB , i un altre triangle equilàter ABC' de costat AB en el semiplà oposat. Demostreu:

- Les rectes AA' , BB' i CC' són concurrents.
- Si anomenem P el punt comú a les tres rectes del punt a), trobeu el lloc geomètric de P quan C varia en el segment AB .
- Els centres A'' , B'' i C'' dels tres triangles formen un triangle equilàter.
- Els punts A'' , B'' , C'' i P són concíclics.



Guanyadors: Ángel Paredes Galán, Jerónimo Arenas García, Luis Fabiani Bendicho, Jaume Andreu Pascual, Alejandro García Gil, Ignacio Fernández Galván.

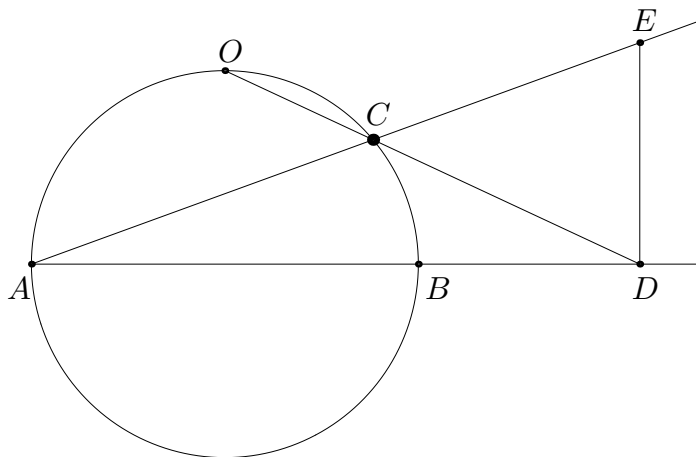
Primera sessió. 15 de Desembre de 1995, de 16 h a 20 h.

32C1. Un cert professor de matemàtiques va escriure a la pissarra un polinomi $f(x)$ amb coeficients enters i va dir: “Si al polinomi substituïm x per l’edat del meu fill, que acaba de fer a anys, obtenim la igualtat $f(a) = a$. A més, $f(0) = p$ és un nombre primer més gran que a .” Quants anys té el fill del professor?

32C2. Sigui n un nombre natural. Trobeu el nombre més gran k tal que en el conjunt $\{1, 2, \dots, n\}$ poguem agafar un subconjunt A de k nombres que compleixi que si x, y, z són nombres qualssevol de A , sempre sigui $x + y \neq z$.

32C3. Escollim un nombre natural n i demanem a r persones que escriguin un subconjunt de $\{1, 2, \dots, n\}$. Quina és la probabilitat que els r subconjunts obtinguts siguin disjunts dos a dos?

32C4. Sigui AB el diàmetre d’una circumferència, O el punt mig d’un dels arcs que van de A a B , i C un punt qualsevol de l’arc OB . Dibuixem les rectes AC , OC , i sigui D la intersecció de OC amb AB . Sigui DE perpendicular a AD i E la seva intersecció amb AC . Demostreu que els segments BD i DE tenen la mateixa longitud.



Segona sessió. 16 de Desembre de 1995, de 9 h a 13 h.

32C5. Calculeu un nombre de sis xifres sabent que passant-ne l'última al davant queda dividit per 3.

32C6. Calculeu el màxim comú divisor de

$$\binom{n}{k}, \binom{n+1}{k}, \dots, \binom{n+k}{k},$$

on n i k són nombres naturals, $n \geq k$.

32C7. Demostreu que si un polígon inscrit en una circumferència de radi r té costats de longituds $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n$, es compleix

$$\ell_1^2 + \ell_2^2 + \dots + \ell_n^2 \leq 9r^2.$$

Determineu per quins polígons hi ha igualtat.

32C8. Donat un nombre natural n , sigui $p(n)$ el producte de les seves xifres. Demostreu que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p(n)}{n} = 0.$$

Guanyadors: Edgar Güeto de la Rosa, Raúl Martín Álvarez, Víctor Martínez de Albéniz Margalef, Sergi Elizalde Torrent, Joel Gabàs Masip, Lluís Tarafa Mate, Max Bernstein Obiols, Diego Pozo Tortosa.

Primera sessió. 22 de febrer de 1996, de 16 h a 20 h.

32E1. Els nombres naturals a i b són tals que

$$\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a}$$

és un enter. Demostreu que el màxim comú divisor de a i b no és més gran que $\sqrt{a+b}$.

32E2. Sigui G el baricentre del triangle ABC . Demostreu que si

$$AB + GC = AC + GB,$$

llavors el triangle és isòsceles.

32E3. Siguin a , b , c tres nombres reals. Es consideren les funcions

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{i} \quad g(x) = cx^2 + bx + a.$$

Sabent que

$$|f(-1)| \leq 1, \quad |f(0)| \leq 1, \quad \text{i} \quad |f(1)| \leq 1,$$

proveu que si $-1 \leq x \leq 1$, aleshores $|f(x)| \leq 5/4$ i $|g(x)| \leq 2$.

Segona sessió. 23 de febrer de 1996, de 10 h a 13 h.

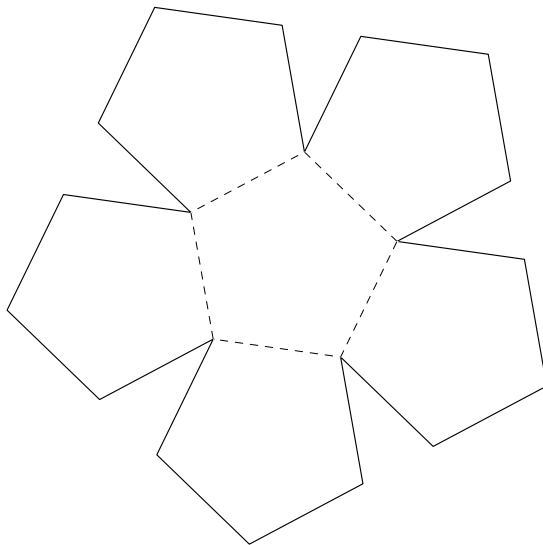
32E4. Discutiu l'existència de solucions reals x de l'equació

$$\sqrt{x^2 - p} + 2\sqrt{x^2 - 1} = x$$

segons els valors reals del paràmetre p , i resoleu-la en els casos que tingui solució.

32E5. A *Port Aventura* hi ha 16 agents secrets. Cada un d'ells vigila algun dels seus col·legues. Se sap que si l'agent A vigila l'agent B , aleshores B no vigila A . Sabem també que 10 agents qualssevol poden ser numerats de manera que el primer vigila el segon, aquest vigila el tercer, $\dots$, el desè vigila el primer. Demostreu que també es poden numerar d'aquesta manera 11 agents qualssevol.

32E6. La figura adjunta es compon de sis pentàgons regulars de costat un metre. Es doblega per la línia de punts fins que coincideixen les arestes no puntejades que es tallen en un vèrtex. Quin volum d'aigua hi cap, al recipient així format?



Guanyadors: Sergi Elizalde Torrent, Tomás Palacios Gutiérrez, Fernando Rambla Blanco, Antonio Jara de las Heras, Patricia Sebastián Celorrio, Víctor Martínez de Albéniz Margalef.

Primera sessió. 13 de Desembre de 1996, de 16 h a 20 h.

33C1. Amb dos filferros de 1996 cm de llarg cadascun, dos filferros de 1997 cm de llarg cadascun i dos filferros 1998 cm de llarg cadascun, es construeix un tetràedre de manera que les sis arestes resulten ser tangents a una esfera. Raoneu en quina posició relativa hem situat les arestes.

33C2. Un rellotger molt de la broma té a l'aparador de la seva botiga un rellotge amb les dues busques — la *minutera* i l'*horària* — exactament iguals. Una persona que s'hi fixi una mica, quasibé sempre pot deduir quina és la busca horària i quina la minutera, i deduir, doncs, quina hora és. Tanmateix, però, en alguns casos això no és possible. Si en aquests casos s'escull a l'atzar una busca con a horària i l'altra com a minutera, i l'elecció és incorrecta, es cometrà un error en la lectura de l'hora. La diferència més curta entre l'hora llegida i l'hora real no pot ser en cap cas superior a les 6 hores.

a) Descriviu les situacions en què no es pot saber quina hora és.

b) Estudieu quin és el màxim error que es pot arribar a cometre i a quines hores es produeix aquest màxim error.

33C3. En una bossa hi ha n boles blanques numerades de 1 a n , n boles blaves numerades de 1 a n i n boles grogues numerades de 1 a n , essent $n \geq 4$. Es treuen 4 boles d'aquesta bossa totes alhora. Esudieu, segons els valors de n , quins dels esdeveniments següents és més difícil qu'és doni, és a dir, té una probabilitat més petita:

$A = \{\text{treure les quatre boles del mateix color}\}$

$B = \{\text{treure quatre boles amb números correlatius}\}$

$C = \{\text{treure tres boles d'un mateix número i l'altra no}\}.$

33C4. Sigui $\mathcal{C}$ un con recte de radi r i altura h . Sigui V el vèrtex del con i AB un diàmetre de la base circular de centre O . Els plans $\mathcal{P}$ paral·lels a la generatriu VA del con que tallen la base circular segons cordes MN perpendiculars a AB , tallen la superfície cònica segons una paràbola. Trobeu la distància d de la corda MN al centre O per tal que l'àrea de la intersecció de $\mathcal{P}$ amb $\mathcal{C}$ sigui màxima.

Segona sessió. 14 de Desembre de 1996, de 9 h a 13 h.

33C5. Al pla definim un sistema de coordenades rectangulars. Calculeu l'àrea del recinte solució del sistema d'inequacions següent:

$$\begin{cases} |\sqrt{3}y - x| \leq 2x \\ x^2 + y^2 \leq 2x. \end{cases}$$

33C6. Busqueu els nombres complexos α tals que els afixos dels nombres α , α^2 , α^3 , α^4 siguin els vèrtexs d'un trapezi.

33C7. Hi ha una fórmula que dóna l'àrea A d'un triangle del pla que els vèrtexs situats en punts de coordenades enteres com a funció lineal $A = aI + bC + dV$, on I representa el nombre de punts de coordenades enteres que són interiors al triangle; C el nombre dels que queden situats sobre els costats del triangle; i $V = 3$ és el nombre de vèrtexs de coordenades enteres. Deduïu-la, a partir de l'anàlisi d'alguns exemples, i demostreu-la.

33C8. Anomenarem *polígon mixtilini* una regió tancada del pla limitada per *costats* que poden ser segments o arcs de circumferència. Els *angles* del polígon mixtilini es mesuren en graus i són, en cada vèrtex, els que determinen els costats (cas que siguin segments), o les tangents traçades pel vèrtex als costats que siguin arcs.

Els *costats* del polígon es mesuren també en graus, de la manera següent:

- 1) segments: 0° .
- 2) arcs amb la concavitat cap a l'interior del polígon: els graus que mesura l'arc, comptats positius.
- 3) arcs amb la concavitat cap a l'exterior del polígon: els graus que mesura l'arc, comptats negatius.

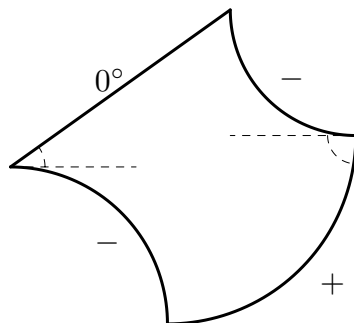
L'esquema il·lustra la manera de mesurar els costats i els angles d'un polígon mixtilini.

a) Demostreu que si en un polígon de n costats els angles són $A_1, A_2, \dots, A_n$ i els costats són $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, llavors es compleix

$$A_1 + A_2 + \dots + A_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n + (n - 2) 180^\circ.$$

b) Demostreu que si els tres costats d'un *triangle* mixtilini tenen un punt en comú que no és un vèrtex, llavors $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$.

c) Si tenim un *angle* mixtilini A inscrit en una circumferència, calculeu A en funció dels costats α , β i γ del triangle que queda determinat a la circumferència.



Primera sessió. 7 de Març de 1997, de 16 h a 20 h.

33E1. Calculeu la suma dels quadrats dels cent primers termes d'una progressió aritmètica sabent que la suma de tots els termes val -1 , i la suma dels que ocupen el lloc parell val $+1$.

33E2. Un quadrat de costat 5 es divideix en 25 quadrats unitat per mitjà de rectes paral·leles als costats. Sigui A el conjunt dels 16 punts interiors, que són vèrtexs dels quadrats unitat, però que no estan en els costats del quadrat inicial.

Digueu quin és el més gran nombre de punts de A que es poden elegir de manera que tres qualssevol d'ells *no* siguin vèrtexs d'un triangle rectangle isòsceles.

33E3. Es consideren les paràboles $y = x^2 + px + q$ que tallen els eixos de coordenades en tres punts diferents, pels quals es fa passar una circumferència. Demostreu que totes les circumferències traçades en variar p i q a $\mathbb{R}$ passen per un punt fix, que cal determinar.

Segona sessió. 8 de Març de 1997, de 9 h a 13 h.

33E4. Sigui p un nombre primer. Determineu tots els enters $k \in \mathbb{Z}$ tals que $\sqrt{k^2 - pk}$ és un enter positiu.

33E5. Demostreu que en un quadrilàter convex d'àrea unitat, la suma de les longituds de tots els costats i diagonals no és menor que $2(2 + \sqrt{2})$.

33E6. Per fer una volta completa en un cotxe a un circuit circular, la quantitat exacta de benzina està distribuïda en dipòsits fixos situats en n punts diferents qualssevol del circuit. Inicialment el dipòsit del cotxe està buit. Demostreu que qualsevol que sigui la distribució del combustible als dipòsits, sempre existeix un punt de sortida de forma que es pugui fer una volta completa.

Aclariments:

Se suposa que el consum és uniforme i proporcional a la distància.

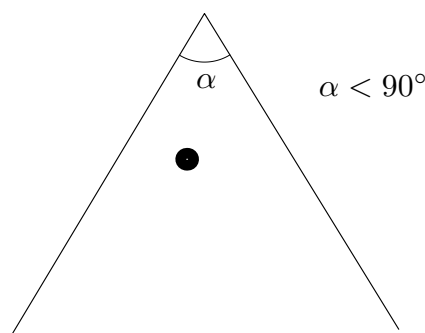
El dipòsit del cotxe té capacitat suficient per tota la benzina.

Guanyadors: Anatoli Segura Vélez, Miguel Lobo López, Mario Andrés Montes García, Max Bernstein Obiols, Joseba Villate Bejarano, Xavier Pérez Giménez.

Primera sessió. 12 de Desembre de 1997, de 16 h a 20 h.

34C1. Si $p(x)$ és un polinomi amb coeficients naturals del qual coneixem $p(1)$ i $p(p(1))$, com podem calcular els seus coeficients?

34C2. Tenim una bola en un billar defectuós amb una cantonada que fa un angle lleugerament inferior a 90° com a la figura. De quantes maneres podem llançar la bola (sense efecte) de forma que toqui les dues bandes i torni a la posició inicial? I si l'angle de la cantonada és superior a 90° ?



34C3. Siguin s i t nombres reals positius tals que $s < t$. Demostreu que hi ha exactament tres parelles de triangles S i T que compleixen:

- 1) S i T són semblants.
- 2) Les longituds dels costats de S i de T formen progressions aritmètiques de raons s i t , respectivament.
- 3) La longitud d'un costat de S és igual a la longitud d'un costat de T .

Comproveu també que el perímetre d'un dels tres triangles S així obtinguts és igual a la suma dels perímetres dels altres dos.

34C4. Sigui C la circumferència més gran que podem posar dins d'un quadrat Q . Comproveu que donat un nombre $\varepsilon > 0$ hi ha un nombre $r < \varepsilon$ tal que dins del quadrat podem posar-hi circumferències de radi r (que no es tallin però que poden ser tangents) de manera que la suma de les àrees d'aquests cercles sigui igual a l'àrea del cercle C .

Segona sessió. 13 de Desembre de 1997, de 9 h a 13 h.

34C5. Trobeu els nombres n que compleixen que la suma dels quadrats de n enters consecutius qualssevilla sigui divisible per n . En particular, digueu quin és el més gran i el més petit d'aquests nombres que tenen dues xifres. (Es compleix que $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$.)

34C6. • Demostreu que si el nombre a o el nombre b són naturals, llavors

$$0 = |\sin \pi(x+a) \sin \pi(y+b)| + |\sin \pi x \sin \pi y| - \\ - |\sin \pi x \sin \pi(y+b)| - |\sin \pi(x+a) \sin \pi y|.$$

• Si tenim un rectangle que es pot descompondre en una unió de rectangles més petits, tots ells de costats paral·lels als del rectangle gran i amb algun dels seus costats de longitud un nombre natural, demostreu que el rectangle gran també té algun dels seus costats de longitud un nombre natural.

34C7. Un tetràedre té les quatre cares que són triangles amb els costats en progressió aritmètica. La raó de la progressió aritmètica de dues cares és la mateixa. Digueu com són aquests tetràedres.

34C8.

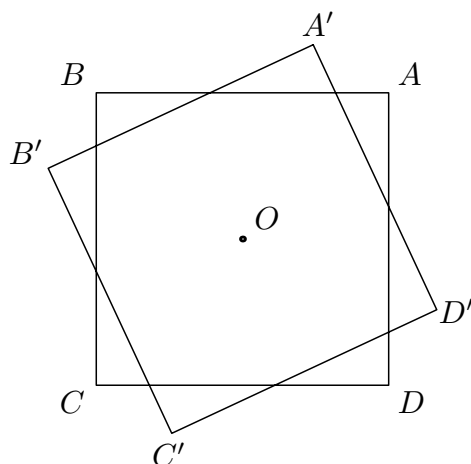
Resoleu la següent equació

$$\arctan(x-1) + \arctan x + \arctan(x+1) = \arctan 3x.$$

Guanyadors: Marc Martínez de Albéniz Margalef, Lluís Acero Sistach, Xavier Gratal Martínez, Edgar González Pellicer, Aniol Llorente Saguer, Àngel Faus Tomás, Eduard Viladesau Franquesa, Antoni Conejero Cárceles.

Primera sessió. 13 de Març de 1998, de 16 h a 20 h.

34E1. Un quadrat $ABCD$ de centre O i costat ℓ gira un angle α al voltant de O . Trobeu l'àrea comuna als dos quadrats.



34E2. Trobeu tots els nombres naturals de quatre xifres, escrits en base 10, que siguin iguals al cub de la suma de les seves xifres.

34E3. Es considera un triangle ABC i la circumferència circumscrita. Si D i E són punts sobre el costat BC tals que AD i AE són, respectivament, paral·leles a les tangents en C i B a la circumferència circumscrita, demostreu que

$$\frac{BE}{CD} = \frac{AB^2}{AC^2}.$$

Segona sessió. 14 de Març de 1998, de 9 h a 13 h.

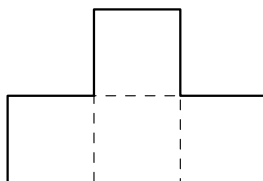
34E4. Trobeu les tangents dels angles d'un triangle sabent que són nombres enters positius.

34E5. Trobeu totes les funcions $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ estrictament creixents i tals que

$$f(n + f(n)) = 2f(n)$$

per $n = 1, 2, 3, \dots$

34E6. Determineu els valors de n per als quals és possible construir un quadrat $n \times n$ engalçant peces del tipus

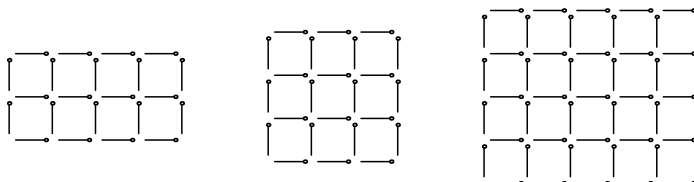


Guanyadors: Mario Andrés Montes García, Ramón José Aliaga Varea, David Martín Clavo, María Pe Pereira, Beatriz Sanz Merino, Jaime Vinuesa del Rio.

Primera sessió. 11 de Desembre de 1998, de 16 h a 20 h.

35C1. Determineu les possibles àrees dels tetràedres que tenen tres arestes de 2 metres i tres arestes de 3 metres.

35C2. Disposicions regulars com les de la figura:



contenen, respectivament, 22, 24 i 49 llumins. Algunes disposicions, com la de 24 llumins, són quadrades. A més, amb 22 llumins es poden fer dues disposicions diferents, amb 24 només una i amb 5 llumins no se'n pot fer cap.

- Doneu una condició per a n per tal que, donats n llumins, sigui possible fer alguna disposició rectangular com les de la figura.
- Doneu una condició per a n per tal que, donats n llumins, sigui possible fer una disposició quadrada.
- Doneu una condició per a n per tal que, donats n llumins, sigui possible fer només una única disposició.

35C3. Un bidó cilíndric, amb massa en buit M , conté una massa m_0 d'oli quan és ple. El centre de masses (o de gravetat, o baricentre) del bidó ple és en el punt mitjà de l'altura. En començar a buidar el bidó el centre de masses baixa. Però, quan el bidó és buit, torna a ser en el punt mitjà.

Quina massa d'oli hi ha al bidó quan el centre de masses és en el punt més baix?

35C4. Ens interessem per les parelles de funcions f, g que compleixen:

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g'(x).$$

- trobeu totes aquestes parelles en el cas $f = g$.
- Trobeu totes les funcions g quan $f(x) = x^n$, amb n enter positiu.

Segona sessió. 12 de Desembre de 1998, de 9 h a 13 h.

35C5. Demostreu que el nombre de cares d'un políedre convex que tenen un nombre senar de costats és parell.

Demostreu també que la suma dels angles de totes les cares d'un políedre convex és $n 360^\circ$, amb n enter.

35C6. Proveu que si tenim 1998 punts en el pla de manera que no n'hi hagi tres d'alineats, aleshores hi ha 666 triangles disjunts que els tenen com a vèrtexs.

35C7. Determineu les longituds dels costats de tots els triangles rectangles amb costats de longitud entera, als quals es pot inscriure un cercle de radi 6.

35C8. Trobeu tots els nombres enters iguals a la suma dels quadrats de les seves xifres.

Guanyadors: Edgar González Pellicer, Joaquim Molera Vidal, Dario Mora Portela, M. Vinyes, Pere Menal Ferrer, Óscar Barenys García, Fèlix Llopart Miquel, Domènec Martín Martínez.

Primera sessió. 12 de Març de 1999, de 16 a 20 hores.

35E1. Les rectes t i t' tangents a la paràbola d'equació $y = x^2$ als punts A i B es tallen en el punt C . La mitjana del triangle ABC corresponent al vèrtex C té longitud m . Determineu l'àrea del triangle ABC en funció de m .

35E2. Demostreu que existeix una successió d'enters positius $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ tal que

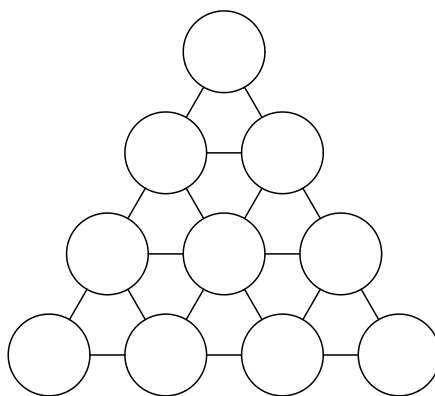
$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2$$

és un quadrat perfecte per a tot enter positiu n .

35E3. Sobre un tauler en forma de triangle equilàter amb n files (tal com s'indica a la figura), es juga un solitari.

Sobre cada casella es col·loca una fitxa. Cada fitxa és blanca per un costat i negra per l'altre. Inicialment, només una fitxa, que està situada en un vèrtex, té la cara negra cap amunt; les altres fitxes tenen la cara blanca cap amunt. En cada moviment del joc es retira només una fitxa negra del tauler i es fa la volta a cada una de les fitxes que ocupen una casella veïna. (Caselles veïnes són les que estan unides per un segment.)

És possible treure totes les fitxes del tauler, després d'un cert nombre de moviments?



Segona sessió. 13 de Març de 1999, de 9 a 13 hores

35E4. Una caixa conté 900 targetes numerades del 100 al 999. Es treuen targetes a l'atzar (sense reposició) de la caixa i s'anota la suma dels dígit de cada targeta extreta. Quina és la menor quantitat de targetes que s'han de treure, per tal de garantir que al menys tres de les sumes siguin iguals?

35E5. El baricentre del triangle ABC és G . Denotem per g_a , g_b , g_c les distàncies des de G als costats a , b , c , respectivament. Sigui r el radi de la circumferència inscrita.

a) Demostreu que

$$g_a \geq \frac{2r}{3}, \quad g_b \geq \frac{2r}{3}, \quad g_c \geq \frac{2r}{3}.$$

b) Demostreu que

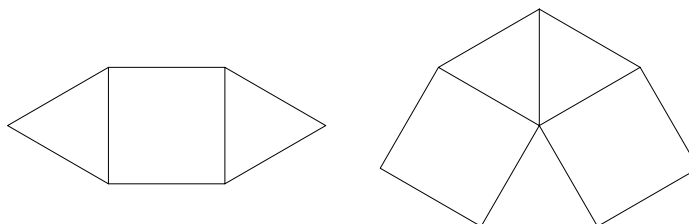
$$\frac{g_a + g_b + g_c}{r} \geq 3.$$

35E6. Es divideix el pla en un nombre finit de regions n per mitjà de tres famílies de rectes paral·leles. No hi ha tres rectes que passin pel mateix punt. ¿Quin és el mínim nombre de rectes necessàries per tal que $n > 1999$?

Guanyadors: Ramón Aliaga Varea, Andrés Tallos Tanarro, Enrique Vallejo Gutiérrez, Álvaro Navarro Tobar, Javier Múgica de Ribera, Néstor Sancho Bejarano.

Primera sessió. 10 de Desembre de 1999, de 16 h a 20 h.

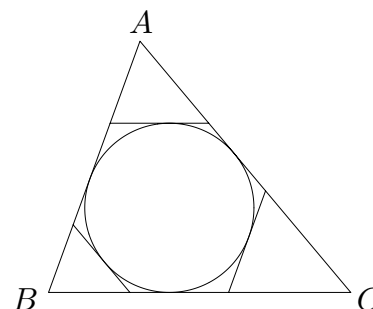
36C1. Amb quadrats i triangles equilàters de costat unitat es poden construir polígons convexos. Per exemple, es poden unir dos triangles i un quadrat per a formar un hexàgon, i tres triangles i dos quadrats per a formar un heptàgon, com es mostra al dibuix (la regió tancada pel polígon ha d'estar recoberta exactament pels quadrats i triangles utilitzats).



Quin és el nombre màxim de costats d'un polígon convex que es pot construir amb aquest mètode?

36C2. En un triangle ABC , el radi de la circumferència circumscrita és R . Es tracen tres rectes tangents a la circumferència inscrita i paral·leles als costats, que formen tres triangles més petits en els vèrtexs del triangle, com es veu a la figura. Si es radiis de les circumferències circumscrites als tres triangles petits són R_A , R_B , R_C , demostreu que

$$R = R_A + R_B + R_C.$$



36C3. Un professor de matemàtiques va escriure a la pissarra el polinomi quadràtic $x^2 + 10x + 20$. Llavors cada alumne havia d'augmentar o disminuir en 1, o bé el terme constant, o bé el terme lineal. Finalment, va quedar escrit a la pissarra el polinomi $x^2 + 20x + 10$. Hi va haver en algun moment, escrit a la pissarra, un polinomi quadràtic amb zeros enters?

36C4. Tenim una calculadora que no funciona gaire bé. Només funcionen les tecles: $\boxed{+}$ (suma), $\boxed{-}$ (resta), $\boxed{1/x}$ (invers). Com podem calcular el producte de dos nombres reals amb aquesta calculadora?

Segona sessió. 121 de Desembre de 1999, de 9 h a 13 h.

36C5. Un tetraèdre compleix que, per a cada vèrtex, la suma dels cosinus dels angles diedres de les tres arestes adjacents és 1. Demostreu que els diedres d'arestes oposades són iguals.

36C6. Si n és un nombre natural i 2^{n+12} i 2^n denoten la mesura d'un angle expressada en graus, demostreu que

$$\sin(2^{n+12}) = \sin(2^n) \text{ si } n \geq 3.$$

Trobeu també el valor més petit de n per al qual l'expressió $\sin(2^n)$ pren el valor més gran possible.

36C7. En el pla tenim n rectes de les quals no n'hi ha tres que passin per un mateix punt. Aquestes rectes es tallen en 1999 punts.

a) Determineu el valor màxim i mínim de n .

b) Determineu els valors de n més grans que 500.

36C8. Demostreu que si el producte de dos nombres positius és constant, la suma d'aquests dos nombres és mínima quan els nombres són iguals.

Trobeu el valor mínim de la funció

$$f(x) = \frac{9x^2 \sin^2 x + 4}{x \sin x}$$

a l'interval $0 < x < \pi$.

Guanyadors: Jordi Rius Pascual, Stephan Lesaffre, Miquel Oliu Barton, Xavier Martínez Palau, Juanjo Rué Perna, Joan Alemany Flos, Fabrice Lesaffre.

Primera sessió. 30 de Març de 2000.

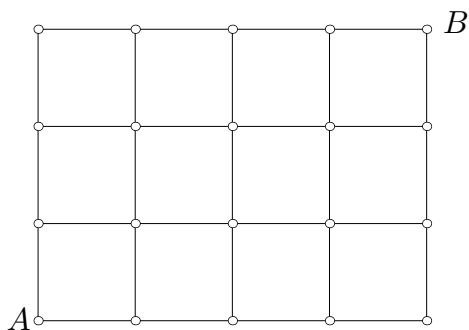
36E1. Siguin els polinomis:

$$P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1;$$

$$Q(x) = x^4 + cx^3 + bx^2 + ax + 1.$$

Trobeu les condicions que han de complir els paràmetres reals a , b y c , ($a \neq c$), per tal que $P(x)$ y $Q(x)$ tinguin dues arrels comunes, i resoleu en aquest cas les equacions $P(x) = 0$; $Q(x) = 0$.

36E2. La figura mostra un planol amb carrers que delimiten 12 illes quadrades. Una persona P va des de A fins a B y una altra Q des de B fins a A . Totes dues surten a la vegada seguint camins de longitud mínima amb la mateixa velocitat constant. A cada punt amb dues possibles direccions a seguir, totes dues tenen la mateixa probabilitat. Trobeu la probabilitat que P i Q es creuin.



36E3. Dues circumferències C_1 i C_2 de radis r_1 i r_2 es tallen en els punts A i B . Per B es traça una recta variable que talla altra vegada C_1 i C_2 en dos punts que designarem per P_r i Q_r , respectivament.

Demostreu la següent propietat: Existeix un punt M , que depèn només de C_1 i C_2 , tal que la mediatriu del segment $P_r Q_r$ passa per M .

Segona sessió. 31 de Març de 2000.

36E4. Trobeu l'enter més gran N que compleixi les condicions següents:

a) $E(N/3)$ té les tres xifres iguals.

b) $E(N/3)$ és suma de nombres naturals consecutius a partir de 1, és a dir, existeix un natural n tal que

$$E(N/3) = 1 + 2 + 3 + \cdots + n.$$

Nota: $E(x)$ és la part entera de x .

36E5. Considerem quatre punts situats a l'interior o la frontera d'un quadrat de costat 1. Demostreu que al menys dos d'ells estan a una distància menor o igual que 1.

36E6. Demostreu que no existeix cap funció $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ que compleixi

$$f(f(n)) = n + 1.$$

Guanyadors: Carlos Gómez Rodríguez, Luis Emilio García Martínez, Alberto Suárez Real, José María Cantarero López, Manuel Pérez Molina, Roberto Rubio Núñez.

Primera sessió. 15 de Desembre de 2000, de 16 h a 20 h.

37C1. Considerem una circumferència de radi r i una recta l tangent a la circumferència en un punt P . Des d'un punt R , mòbil sobre la circumferència, tracem la perpendicular a la recta l i anomenem Q el punt d'intersecció de les dues rectes. Determineu l'àrea màxima que pot assolir el triangle PQR .

37C2. Trobeu nombres enters positius n i $a_1, a_2, \dots, a_n$ tals que $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 2000$ i que el producte $a_1 a_2 \dots a_n$ sigui el més gran possible.

37C3. Donada una funció $f(x)$, s'anomena *punt fix* de f tota solució (real) de l'equació $f(x) = x$. Calculeu, en funció del paràmetre $r > 0$, els punts fixos de les funcions $f(x)$ i $g(x) = f(f(x))$ si $f(x) = rx(1-x)$, $x \in [0, 1]$. Representeu gràficament el conjunt

$$\{(r, x_r) \in (0, \infty) \times [0, 1] \mid x_r \text{ és un punt fix de } f \text{ o de } g\}.$$

37C4. Busqueu el mínim nombre natural $n > 0$ tal que $n/2$ sigui un quadrat, $n/3$ sigui un cub, i $n/7$ sigui una potència setena.

Segona sessió. 16 de Desembre de 2000, de 9 h a 13 h.

37C5. Tres atletes, A , B i C , competeixen en una sèrie de proves. Per quedar en primera posició en una prova, l'atleta rep x punts; per quedar en segona, y punts; i per quedar en tercera posició z punts. No hi ha possibilitat d'empat, i els nombres x , y , z són naturals tals que $x > y > z$. En acabar, A ha acumulat 20 punts, B 10 punts i C 9 punts. L'atleta A ha quedat segon en la prova de llançament de pes. Qui ha quedat segon a la prova de carrera curta?

37C6. Hi ha dos triangles rectangles no semblants, cada un dels quals té un costat igual al costat d'un triangle equilàter i l'àrea α vegades l'àrea d'aquest triangle equilàter. Què podem dir del nombre α ?

37C7. S'anomenen *nombres triangulars* els nombres naturals n de la forma

$$n = \frac{k(k+1)}{2} = 1 + 2 + 3 + \cdots + k, \text{ amb } k \in \mathbb{N}.$$

- a) Demostreu que si n és un nombre triangular, aleshores $9n + 1$ també ho és.
- b) Determineu els valors dels nombres naturals a i b per tal que $an + b$ sigui triangular sempre que n sigui triangular.

37C8. Un dipòsit cònic amb el vèrtex a la part inferior, d'altura h i angle en el vèrtex $2\alpha < \pi$, és ple d'aigua fins a vessar. S'introdueix al dipòsit, amb compte, una esfera de radi r més densa que l'aigua. Dibuixeu la gràfica de la funció que expressa, en funció de $r > 0$, el volum d'aigua que es vessarà. En particular, determineu el valor de r per al qual serà més gran el mullader.

Nota: El volum d'un casquet esfèric (cada una de les parts en què un pla divideix una esfera) és igual a

$$\pi a^2 \left(r - \frac{a}{3} \right)$$

on r és el radi de l'esfera i a l'altura del casquet ($0 \leq a \leq 2r$).

Guanyadors: Maria Saumell Mendiola, Francesc Fité Naya, Miquel Oliu Barton, Martí Prats Soler, Roc Maymó Camps, Artur Latorre Musoll, Sergio Millán López, Joaquim Cevallos Morales, Pedro Valero Lanau.

Primera sessió. 23 de Març de 2001.

37E1. Demostreu que el gràfic del polinomi $P(x)$ és simètric respecte del punt $A(a, b)$ si i només si existeix un polinomi $Q(x)$ tal que

$$P(x) = b + (x - a) Q((x - a)^2).$$

37E2. Sigui P un punt a l'interior del triangle ABC , de manera que el triangle ABP compleix

$$AP = BP.$$

Sobre cada un dels altres costats de ABC es construeixen exteriorment triangles BQC i CRA , tots dos semblants al triangle ABP i que compleixen:

$$BQ = QC \text{ i } CR = RA.$$

Demostreu que els punts P , Q , C i R són els vèrtexs d'un paral·lelogram.

37E3. Tenim cinc segments de longituds a_1 , a_2 , a_3 , a_4 i a_5 tals que amb tres qualssevol d'ells es pot construir un triangle.

Demostreu que al menys un d'aquests triangles té tots els angles aguts.

Segona sessió. 24 de Març de 2001.

37E4. Els nombres enters des de 1 fins a 9 es distribueixen a les caselles d'una taula 3×3 . Després se sumen sis nombres de tres xifres: els tres que es llegeixen en files d'esquerra a dreta i els tres que es llegeixen en columnes de dalt a baix. Hi ha alguna disposició per a la qual el valor d'aquesta suma sigui 2001?

37E5. Sigui $ABCD$ un quadrilàter inscrit en una circumferència de radi 1 de manera que AB és un diàmetre i el quadrilàter admet circumferència inscrita. Demostreu que $CD \leq 2\sqrt{5} - 4$.

37E6. Determineu la funció $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ (essent $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ el conjunt dels nombres naturals) que compleix, per a qualssevol $s, n \in \mathbb{N}$, les condicions següents:
 $f(1) = f(2^s) = 1$ i si $n < 2^s$, aleshores $f(2^s + n) = f(n) + 1$.
Calculeu el valor màxim de $f(n)$ quan $n \leq 2001$.
Trobeu el menor nombre natural n tal que $f(n) = 2001$.

Guanyadors: Javier Cópola Rodríguez, Martí Prats Soler, Luis Hernández Corbato, Sergio Millán López, Ignacio Cascudo Pueyo, Miquel Oliu Barton.

Primera sessió. 14 de Desembre de 2001, de 16 h a 20 h.

38C1. Trobeu tots els polinomis $p(x)$ tals que $p(x^2) = (p(x))^2$.

38C2. Un rectangle de costats 20 cm i 15 cm té un vèrtex situat en el centre d'una circumferència i el vèrtex oposat situat sobre la circumferència. Calculeu la longitud de la corda que passa pels altres dos vèrtexs del rectangle.

38C3. Esbrineu si en el conjunt de nombres $\{1, 2, 3, \dots, 10^9\}$ n'hi ha més que contenen la xifra 9 o més que no la contenen.

38C4. Trobeu el mínim nombre natural n que és múltiple de 3 i tal que, a més, $n+1$ és múltiple de 5, $n+2$ és múltiple de 7, $n+3$ és múltiple de 9, i $n+4$ és múltiple de 11.

Segona sessió. 15 de Desembre de 2001, de 9 h a 13 h.

38C5. Demostreu que si x i y són dos nombres reals tals que $\sin x - \sin y = x - y$, llavors necessàriament $x = y$.

38C6. a) Demostreu que, en qualsevol triangle, el perímetre P del triangle, l'àrea S del triangle i el radi r del cercle inscrit satisfan $rP = 2S$.

b) D'entre tots els triangles de base 1 i altura 1, determineu quin té el cercle inscrit d'àrea màxima i calculeu l'àrea d'aquest cercle.

38C7. Tenim unes partícules sobre la recta que cada any esclaten, totes alhora, i cadascuna d'elles es converteix en dues que van a parar a un costat i l'altre, a un metre de distància de la que ha esclatat. Quan a un mateix punt hi van a parar dues partícules, es destrueixen i desapareixen. Si a l'any 0 només hi havia una partícula, situada en el punt 0 de la recta, quantes partícules hi haurà l'any 2001, després que hagin esclatat?

38C8. a) Tenim un cub i pintem a l'atzar 3 cares de color vermell i 3 cares de color groc. Calculeu la probabilitat que les tres cares de color vermell tinguin un vèrtex en comú.

b) Tenim 8 cubs de la mateixa mida, cadascun pintat a l'atzar amb tres cares de color vermell i tres cares de color groc. Els col·loquem aleatòriament, de manera que formin un cub més gros. Quina és la probabilitat que totes les cares exteriors d'aquest cub siguin del mateix color?

c) I si ho fem amb 27 cubs?

Guanyadors: Sergio Millán López, Pau Curell Sanmartí, Daniel Rodrigo López, Elsa de Alfonso Prieto-Puga, Albert Llorens Martínez, Patricia Ceballos Carrascosa, Raül Vinyes Raso, Ignasi Abió Roig, Anna Papió Toda.

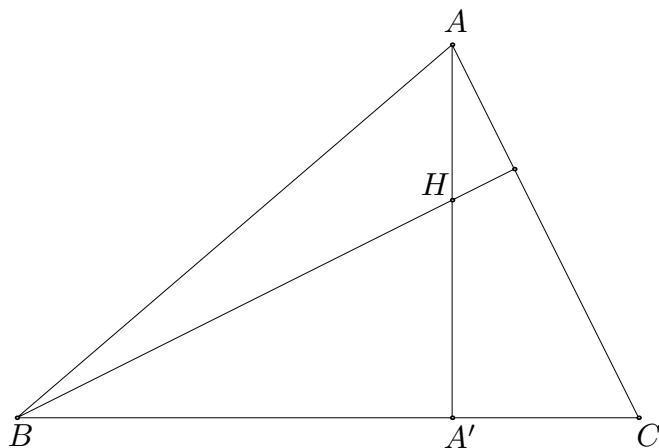
Primera sessió. 5 d'Abril de 2002.

38E1. Trobeu tots els polinomis $P(t)$ d'una variable que compleixen $P(x^2 - y^2) = P(x + y)P(x - y)$ per a tots els nombres reals x i y .

38E2. En un triangle ABC , el punt A' és el peu de l'altura relativa al vèrtex A , i H és l'ortocentre.

a) Donat un nombre real positiu k tal que $k = \frac{AA'}{HA'}$, trobeu la relació entre els angles B i C en funció de k .

b) Si B i C són fixos, trobeu el lloc geomètric del vèrtex A per a cada valor de k .



38E3. La funció g es defineix sobre els nombres naturals i satisfà les condicions:

$$g(2) = 1$$

$$g(2n) = g(n)$$

$$g(2n + 1) = g(2n) + 1.$$

Sigui n un nombre natural tal que $1 \leq n \leq 2002$. Calculeu el valor màxim M de $g(n)$.

Calculeu també quants valors de n satisfan la condició $g(n) = M$.

Segona sessió. 6 d'Abril de 2002.

38E4. Sigui n un nombre natural, i m el que resulta escrivint en ordre invers les xifres de n . Determineu, si existeixen, els nombres de tres xifres que compleixen $2m + S = n$, essent S la suma de les xifres de n .

38E5. Es consideren 2002 segments en el pla, tals que la suma de llurs longituds és la unitat. Demostreu que existeix una recta r tal que la suma de les longituds de les projeccions dels 2002 segments donats sobre r és menor que $2/3$.

38E6. En un polígon regular H de $6n + 1$ costats (n és un enter positiu), pintem r vèrtexs de color vermell, i la resta els pintem de blau. Demostreu que el nombre de triangles isòsceles que tenen els tres vèrtexs del mateix color no depèn de la manera de distribuir els colors en els vèrtexs de H .

Guanyadors: Daniel Rodrigo López, Luis Hernández Corbato, Sergio Millán López, David García Soriano, Susana Ladra González, José Miguel Manzano Prego.

Primera sessió. 13 de Desembre de 2002, de 16 h a 20 h.

39C1. Amb dues lletres, a , b formem les infinites paraules que tenen un nombre finit de lletres, i les ordenem alfabèticament.

- a) Quines paraules tenen una paraula immediata posterior?
- b) Quines paraules tenen una paraula immediata anterior?
- c) Demostreu que si una paraula p_1 és anterior a una paraula p_2 , i p_2 acaba en b , aleshores entre p_1 i p_2 hi ha paraules acabades en a i paraules acabades en b .

39C2. En el pla tenim una recta r , un punt P sobre r i un punt Q fora de la recta r . Per cada punt R de r considerem el nombre

$$\lambda = \frac{PR + PQ}{QR}.$$

- a) Busqueu els valors màxim i mínim del nombre λ i digueu on ha d'estar situat el punt R per obtenir aquest màxim i aquest mínim.
- b) A quin valor tendeix λ quan R tendeix cap a l'infinit?

39C3. Cinc pirates van arribar a una illa deserta i van decidir amagar els seus tresors en un terreny pla on hi havia els cinc arbres més alts de l'illa. Van cavar cinc forats en els vèrtexs d'un pentàgon (convex i no regular). En el punt mitjà de cada costat del pentàgon hi havia un dels cinc arbres. Sobre cada sot hi van plantar un roser.

Quan van tornar a l'illa, per recuperar els tresors no hi havia cap roser. La sequera va marcir els primers brots... Només hi havia els cinc arbres...

Un dels pirates, que recordava coses que havia après de jove, els va dir: No us preocupeu. Recuperarem els tresors!

Va recordar:

- a) Donats els punts mitjans dels costats d'un triangle, es poden recuperar els seus vèrtexs.
- b) Si coneixem els punts mitjans de tres costats d'un quadrilàter, podem trobar el punt mitjà del quart costat.

Raoneu la resposta positiva als apartats a) i b). Digueu com van recuperar els pirates el seu tresor, coneixent la resposta positiva de a) i b).

39C4. En el pla considerem una circumferència i un punt exterior P . Des de P es dibuixen dues rectes tangents a la circumferència en punts A i B . En l'arc més petit

AB es considera un punt T i es dibuixa una altra recta tangent per T que talla PA i PB en punts Q i R , respectivament.

Determineu el perímetre del triangle PQR en funció de PA .

Segona sessió. 14 de Desembre de 2002, de 9 h a 13 h.

39C5. Considereu dos polígons regulars de n costats de longitud a , iguals i superposats. Un d'ells es gira un angle π/n radians respecte d'un eix perpendicular al pla que els conté i que passa pel centre dels polígons, i tot seguit, es desplaça paral·lelament segons la direcció de l'eix de gir. A quina distància cal desplaçar el polígon per tal que en unir cada vèrtex d'un amb els dos vèrtexs més propers de l'altre, s'obtinguin com a cares laterals triangles equilàters?

39C6. Esbrineu per a quins punts de l'eix d'una paràbola es poden traçar el màxim nombre possible de normals a la paràbola. Comproveu que la distància d'aquests punts al vèrtex és més gran que la distància d'aquests punts als peus de les altres normals.

39C7. Sigui ABC un triangle.

a) Determineu els punts P del pla que compleixen

$$\text{Àrea}(PAB) = \text{Àrea}(PBC) = \text{Àrea}(PCA) \quad (*).$$

b) Sigui P un punt interior del triangle que compleixi $(*)$, i siguin P_1, P_2, P_3 els punts interiors als triangles PBC, PCA, PAB en les mateixes condicions. Determineu l'àrea del triangle $P_1P_2P_3$ en funció de l'àrea del triangle ABC .

39C8. Un jugador de tennis vol enfrontar-se a dos rivals A i B per adquirir prestigi amb bons resultats. La probabilitat de guanyar al jugador A és més petita que la de guanyar a B perquè el primer és de més categoria. Li ofereixen tres partits, dels quals n'ha de guanyar al menys dos de seguits, i pot triar la seqüència dels contraris: o bé $A - B - A$, o bé $B - A - B$.

Quina seqüència de partits li és més favorable?

Guanyadors: Daniel Rodrigo López, Joaquim Serra Montolí, Matías Javier Wartelski Pryluka, Carles Sala Cladellas, Xavier Roca Artola, Anna Sabaté Vidales, Arnau Padrol Sureda, Carles Solano Molins.

Primera sessió. 2 de Març de 2003.

39E1. Demostreu que per a qualsevol primer p diferent de 2 i 5 existeix un múltiple de p que té totes les xifres iguals a 9. Per exemple si $p = 13$, $999999 = 13 \cdot 76923$.

39E2.

Existeix algun conjunt finit de nombres reals M que contingui al menys dos elements diferents i que compleixi la propietat que per dos nombres a , b qualssevol de M , el nombre $2a - b^2$ sigui també un element de M ?

39E3. Les altures del triangle ABC es tallen en el punt H . Se sap que $AB = CH$. Determineu el valor de l'angle $\widehat{BCA}$.

Segona sessió. 3 de Març de 2003.

39E4. Sigui x un nombre real tal que $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$. Demostreu que tant x como x^2 són irracionals.

39E5. Quines són les possibles àrees d'un hexàgon amb tots els angles iguals i amb costats que mesuren 1, 2, 3, 4, 5 i 6, en algun ordre?

39E6. Enfilem $2n$ boles blanques i $2n$ boles negres formant una cadena oberta. Demostreu que, es faci en l'ordre que es faci, sempre és possible tallar un segment de cadena exactament amb n boles blanques i n boles negres.

Guanyadors: Daniel Rodrigo López, Luis Hernández Corbato, Mohammed Blanca Ruiz, Víctor González Alonso, Javier Gómez Serrano, Maite Peña Alcaraz

Primera sessió. 12 de Desembre de 2003, de 16 h a 20 h.

40C1. Donat un triangle ABC , es busca un punt P , interior al triangle, tal que els seus punts simètrics respecte dels costats del triangle, P_a , P_b i P_c , siguin vèrtexs d'un triangle equilàter.

- a) Quines condicions ha de complir el triangle ABC perquè hi hagi solució?
b) Si es compleixen aquestes condicions, com trobariem el punt P ?

40C2. Resoleu els sistema d'equacions

$$\begin{aligned}x_1 &= a_1 - \frac{1}{2}(x_2 + x_3 + \cdots + x_n) \\x_2 &= a_2 - \frac{1}{2}(x_1 + x_3 + \cdots + x_n) \\&\vdots \\x_n &= a_n - \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1})\end{aligned}$$

40C3. Trobeu el centre i el radi de la circumferència que intercepta sobre cada costat d'un triangle donat segments iguals al radi.

40C4. Direm que un nombre natural és *consecutivable* quan es pugui expressar com a suma de nombres naturals consecutius. Així, $9 = 2 + 3 + 4$ és *consecutivable* mentre que 2 i 4 no ho són. Quins són els nombres naturals *consecutivables*?

Segona sessió. 15 de Desembre de 2001, de 9 h a 13 h.

40C5. Amb dos colors, blau i groc, s'han de pintar els pisos d'un gratacel, cada pis d'un color. L'única limitació és que dos pisos consecutius no poden pintar-se de groc. De quantes maneres es pot aconseguir això si el gratacel té 15 pisos? I si en té 2003? (Trobeu una expressió que ens permeti calcular-les d'alguna manera).

40C6. Efectueu la divisió entera

$$2003^{2003} \overline{) 2004}$$

40C7. Donat un segment AB de longitud 8 m, trobeu el lloc geomètric dels baricentres dels triangles de base AB , els perímetre dels quals amida 18 m.

40C8. Descriuiu els políedres convexos de 6 vèrtexs.

Guanyadors: Joaquim Serra Montolí, Albert Agudé Borrull, Maria Ibáñez Alonso, Guillermo Vilaplana Muller, Nelson Robert Fiallos Masó, Ainhoa Mantarola Solans, Miguel Teixidó Román, Enric Martínez Sala, Alberto Camacho Martínez.

Primera sessió. 26 de Març de 2004.

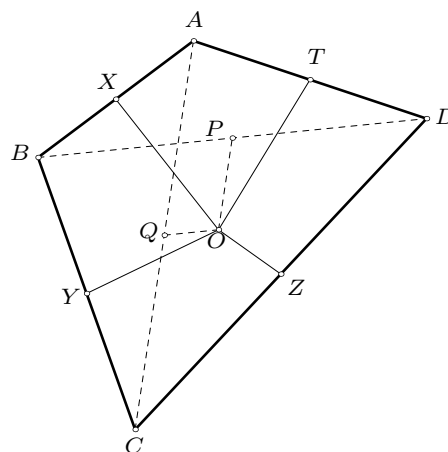
40E1. Tenim un conjunt de 221 nombres reals la suma dels quals és 110721. Els disposem formant un rectangle de manera que totes les files i la primera i última columna siguin progressions aritmètiques de més d'un element. Demostreu que la suma dels elements dels quatre cantons val 2004.

40E2.

$ABCD$ és un quadrilàter qualsevol, P i Q els punts mitjans de les diagonals BD i AC , respectivament. Les paral·leles per P i Q a l'altra diagonal es tallen al punt O .

Si unim O amb els quatre punts mitjans dels costats X , Y , Z i T , es formen quatre quadrilàters, $OXBY$, $OYCZ$, $OZDT$ i $OTAX$.

Demostreu que els quatre quadrilàters tenen la mateixa àrea.



40E3. Es representa per $\mathbb{Z}$ el conjunt de tots els enters. Trobeu totes les funcions $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ tals que per qualssevol x, y enters es compleixi:

$$f(x + f(y)) = f(x) - y.$$

40E4. Existeix alguna potència de 2 que en escriure-la en el sistema decimal tingui tots els seus dígitos diferents de zero i sigui possible reordenar-los per formar amb ells una altra potència de 2?. Justifiqueu la resposta.

40E5. Demostreu que la condició necessària i suficient per tal que, en el triangle ABC , la mitjana desde B sigui dividida en tres parts iguals per la circumferència inscrita al triangle, és

$$\frac{a}{5} = \frac{b}{10} = \frac{c}{13}.$$

40E6. Colloquem, formant una circumferència, 2004 fitxes bicolores: blanques per una cara i negres per l'altra. Un moviment consisteix a elegir una fitxa *negra*, i donar la volta a tres fitxes: l'elegida, la de la seva dreta i la de la seva esquerra. Suposem que inicialment hi ha una sola fitxa amb la cara negra cap amunt. Serà possible, repetint el moviment descrit, conseguir que totes les fitxes tinguin la cara blanca cap amunt? I si tinguéssim 2003 fitxes, entre les quals exactament una té al començament la cara negra cap amunt?

ÍNDEX DE GUANYADORS

A

Abenaza Campodarbe, Rafael; 12C
Abio Roig, Ignasi; 38C
Acero Sistach, Lluís; 34C
Acuarón Joven, Juan; 21E
Aguadé Borrull, Albert M.; 40C
Aguado Martínez, Manuel M.; 28E
Albiol López, Rubén; 30C
Alcázar Moreno, Jesús; 11E
Alegre de Miguel, Ignacio; 7C, 7E
Alemany Flos, Joan; 36C
Alfonso Prieto-Puga, Elsa de; 38C
Aliaga Varea, Ramón José; 34E, 35E
Álvarez Royo-Villanova, Pablo; 17E
Amorós Torrent, Jaume; 22C, 22E
Andreu Darrera, Xavier; 17C
Andreu Pascual, Jaume; 31E
Ansorena Barasoain, José Luis; 21E
Aparisi Botella, Miguel; 20E
Arenas García, Jerónimo; 30E, 31E
Arregui García, Javier; 26E
Arso Civil, David; 30C
Atienza Riera, José Miguel; 28E

B

Baeza Oliva, Tomás; 30E
Ballbé García, Andrés; 6C
Barberá Sánchez, Salvador; 1C
Barbero González, Fernando; 17E
Barcelona Mas, Simón; 7C
Barco Moreno, Raquel; 28E
Barenys García, Óscar; 35C
Barreiro Blas, Antonio; 13E
Bartolomé Mana, Boris; 24C, 24E
Begué Aguado, Álvaro; 28E, 29E
Benítez Giménez, Pablo; 23E
Bermúdez Carro, Miguel A.; 30E
Bernstein Obiols, Max; 32C, 33C, 33E
Blanca Ruiz, Mohammed; 39E
Bonet Solves, José; 9E
Bosch Llovet, Magí; 17C
Brandt Sanz, Miguel; 20E
Bravo de Mansilla Jiménez, Alberto; 27E
Bresson Carvalho, Roman; 23C
Burillo Puig, Josep; 19C, 19E
Bustos Puche, Jorge; 6E

C

Caballero Guerrero, Javier; 18E
Cabello Justo, Sergio; 31C
Calbet Rebollo, Francisco; 2C
Calsina Ballesta, Àngel; 11C
Camacho Martínez, Alberto; 40C
Campins Pascual, Javier; 24C, 24E
Campins Pascual, Jordi; 24C
Canela Campos, Miguel; 8C
Cantarero López, José M.; 36E
Carmona Doménech, Juan J.; 10C

Carrillo Gallego, Dolores; 6E
Carrión Álvarez, Miguel; 29E
Carrión Rodríguez de Guzmán, Pedro; 16E
Casacuberta Vergés, Carles; 15C, 15E
Casaña Barle, Antonio; 3C
Casas Pla, Jordi; 25C
Cascudo Pueyo, Ignacio; 37E
Casdal Casas, Jorge; 3C
Castaño Gracia, Miguel; 10E
Castell Burgaleta, David; 29E
Castrillón López, Marco; 26E
Catalina Gallego, Miguel; 30E
Ceballos Carrascosa, Patricia; 38C
Cevallos Morales, Joaquim; 37C
Colet Rafecas, Pere; 18C
Coll Francés, Roberto; 26C
Companys Ferrer, Vicente; 21C
Conde Font, Miguel; 4C
Conejero Cárcelos, Antoni; 34C
Corella Monzón, Francisco J.; 7E
Cordero Marcos, M. Isabel; 40E
Corella Monzón, Francisco J.; 7E
Corella Monzón, M. Isabel; 8E
Costa Cuadrench, Alfonso; 1C
Cuco Pardillos, Federico; 12E
Cuenca González, Juan; 22E
Curell Sanmartí, Pau; 38C

D

De Mier Vinué, Anna; 31C
Díez Vegas, Francisco J.; 19E
Doménech Plana, Jaime; 14C
Domingo Magaña, José Ramón; 30C
Doumenc, Thomas; 31C
Draper Fontanales, Cristina; 25E
Durántez Gamzukoﬀ, Marcos; 27E

E

Elduque Palomo, Alberto; 14E
Elías García, Joan; 11C
Elizalde Torrent, Sergi; 32C, 32E
Espel Llima, Roger; 27C, 27E
Esteban Romero, Ramón; 24E
Esteve Comas, Jorge; 10C
Etayo Gordejuela, Fernando; 17E

F

Fabiani Bendicho, Luis; 31E
Falivene Raboso, Julio; 4C, 4E
Faus Tomás, Àngel; 34C
Fernández Galván, Ignacio; 31E
Fernández Sánchez-Reyes, Luis M.; 13C
Fiallos Masó, Robert; 40C
Fité Naya, Francesc; 37C
Fraile Pérez, Arturo; 4C, 4E
Francés Tortosa, Vicente; 8E

Frau Picó, Enrique; 10C, 10E
Frigola Sala, Joaquim; 8C

G

Gabàs Masip, Joel; 32C
Galve Mauricio, Fernando; 23E
Gamella Bacete, Manuel; 3E
García Fernández, Antonio; 10E
García Gil, Alejandro; 31E
García López, Enrique; 25C, 25E
García Martínez, Alberto; 25E
García Martínez, Luis Emilio; 36E
García Parrilla, Andrés; 20E
García Roig, Jaume Lluís; 6C, 6E
García Soriano, David; 38E
Garijo Amilburo, Ignacio; 21E
Garrido Arribas, Alberto; 22E
Gassó Minguet, Francesc; 30C
Gelonch Anyé, Josep; 9C, 9E
Génova Fuster, Gonzalo; 20E
Gil Martínez, José M.; 8E
Giner Bosch, Vicente; 28E
Gomà Nasarre, Antoni; 3C
Gómez Amigo, Antonio; 21E
Gómez Serrano, Javier; 39E
Gómez Rodríguez, Carlos; 36E
González Alonso, Víctor; 39E
González Cobas, Juan David; 22E
González Pellicer, Edgar; 34C, 35C
Gordillo Arias de Saavedra, José M.; 26E
Gracia Saz, Alfonso; 30E
Gratal Martínez, Xavier; 33C, 34C
Güeto de la Rosa, Edgar; 32C
Guinjoan Francisco, Marc; 29C
Gutiérrez Serrés, Pere; 18C

H

Haro Provinciale, Àlex; 23C
Hernández, Bruno; 23C
Hernández Corbato, Luis; 37E, 38E, 39E
Hernández García, Francisco; 28C
Hernández Heras, Francisco J.; 40E
Herrador Barrios, José F.; 26E
Herrero Buj, Fernando; 6C
Herrero Izquierdo, Alberto; 25C

I

Ibáñez Alonso, María; 40C

J

Jara de las Heras, Antonio; 32E
Jiménez Figuera, Josep M.; 17C

L

Ladra González, Susana; 38E
Lago Esteban, Alejandro; 27C

Lasaosa Medarde, Daniel; 26E
Latorre Musoll, Artur; 37C
Lesaffre, Fabrice; 36C
Lesaffre, Stephan; 36C
Llerena Achutegui, Agustín; 12E
Llopart Miquel, Fèlix; 35C
Llorens Martínez, Albert; 38C
Llorens Tubau, Antonio; 14C
Llorente Saguer, Aniol; 34C
Lobo López, Miguel; 33E
López Blázquez, José Fernando; 16E
López Melero, Bernardo; 4E
Lorenzo García, Elisa; 40E
Lucio Fernández, Carlos A.; 5E

M

Mallafré Torra, Josep R.; 21C
Manrique Catalán, Santiago; 5C
Manterola Solans, Ainhoa; 40C
Manzano Prego, José Miguel; 38E
Marañón Mora, José; 19E
Marcos Primo, Ignacio; 27E
Marín Muñoz, Leandro; 25E
Marquès Solé, Daniel; 29C
Martín Álvarez, Raúl; 32C
Martín Clavo, David; 34E
Martín Martínez, Domènec; 35C
Martínez Palau, Xavier; 36C
Martínez Puente, Fernando; 24E
Martínez Sala, Enric; 40E
Martínez de Albéniz Margalef, Marc; 34C
Martínez de Albéniz Margalef, Víctor; 32C, 32E
Mas Trullenque, Jorge; 15C, 15E
Masip Treig, Ramon; 12C
Maymó Camps, Roc; 37C
Menal Ferrer, Pere; 35C
Méndez Rutllán, Andrés; 2E
Milián Masana, Antonio; 8C
Millán López, Sergio; 37C, 37E, 38C, 38E
Miranda Palacios, Eugenio J.; 1E
Molera Vidal, Joaquim; 35C
Mondelo González, José M.; 28C
Montes García, Mario Andrés; 33E, 34E
Montornés Ferret, Gerard; 26C
Mora Portela, Darío; 35C
Moral Callejón, Serafín; 13E
Moriyón Salomón, Roberto; 5C, 5E
Música de Ribera, Javier; 35E
Mundet Riera, Ignasi; 27C, 27E
Muñoz Velázquez, Vicente; 25E

N

Narváez Macarro, Luis; 11E
Navarro Tobar, Álvaro; 35E
Nievas Espuelas, Jesús; 15E
Nogueira Coriba, José Ignacio; 24E
Novaes Ledieu, Pablo; 20E

O

Ogando Serrano, Francisco; *26E*
Oliu Barton, Miquel; *36C, 37C, 37E*
Oliva Cuyàs, Antoni; *1C, 1E*
Ortega Cerdà, Joaquim; *22C, 22E*

P

Padrol Sureda, Arnau; *39C*
Palacios Gutiérrez, Tomás; *32E*
Palma Molina, Francisco J.; *14E*
Papió Toda, Anna; *38C*
Paredes Galán, Ángel; *31E*
Parra Kaiser, Mario; *30C*
Pe Pereira, Maria; *34E*
Peña Alcaraz, Maite; *39E, 40E*
Peña Gamarra, José; *14E*
Pérez Giménez, Xavier; *33C, 33E*
Pérez Jiménez, Carlos J.; *23E*
Pérez Marco, Ricardo; *21C, 21E*
Pérez Molina, Manuel; *36E*
Pérez-Cacho Fernando-Argüelles, Santiago; *24E*
Portela Lemos, Javier; *25E*
Pozo Tortosa, Diego; *32C*
Prats Soler, Martí; *37C, 37E*
Puig Espinosa, Luis; *2E*
Puig Sadurní, Joaquim; *31C*

Q

Querol Bravo, José I.; *9E*

R

Rambla Blanco, Fernando; *32E*
Ras Sabidó, Antoni; *13C*
Rebull Camarasa, Ramon; *22C*
Reguera López, Ana José; *21E*
Revilla Domingo, Ferran; *31C*
Revilla Domingo, Roger; *29C*
Ribón Herguedas, Javier; *28E*
Rius Pascual, Jordi; *36C*
Roca Artola, Xavier; *39C*
Rodrigo López, Daniel; *38C, 39C, 38E, 39E*
Rodríguez Belmar, Andrés; *18C*
Rodríguez Bono, Enrique; *7E*
Rodríguez de la Cruz, Antonio J.; *13E*
Rojas León, Antonio; *29E*
Román Jiménez, José A.; *14C*
Rozas Rodríguez, Guillermo; *16E*
Rubio de Francia, José Luis; *3E*
Rubio Núñez, Roberto; *36E*
Rué Perna, Juanjo; *36C*

S

Sabaté Vidales, Anna; *39C*
Sala Cladellas, Carles; *39C*
Sánchez Esguevillas, Antonio; *29E*
Sánchez Lacuesta, José; *18E*
Sánchez Royo, Carmen; *15C*

Sancho Bejarano, Néstor; *35E*
Santallúcia Esbert, Xavier; *19C*
Sanz Merino, Beatriz; *34E*
Saumell Mendiola, Maria; *37C*
Sebastián Celorrio, Patricia; *32E*
Segura Vélez, Anatoli; *33E*
Selva Gomis, Roberto; *19E*
Serra Montolí, Joaquim; *39C, 40C, 40E*
Sevilla González, David; *29E, 30E*
Simonetta, Patrik; *18E*
Solano Molins, Carles; *39C*
Solé Subiela, Josep Oriol; *2C*
Solores Girón, Ángel; *26C*
Suárez Real, Alberto; *36E*
Sueiro Bal, Juan M.; *11C, 11E*

T

Tallos Tanarro, Andrés; *35E*
Tarafa Mate, Lluís; *32C*
Teixidó Román, Miguel; *40C, 40E*
Tejera Gómez, Agustín Rafael; *20E*
Tiñena Salvañá, Francesc; *13C*
Torre Rodríguez, Alberto de la; *1E*
Torrego Solana, José Manuel; *30C*
Trepas Sorribes, Alberto; *7C*
Turull Crexells, Alejandro; *9C*

U

Ueno Jacue, Carlos; *22E*
Uriarte Tuero, Ignacio; *27E*
Uzábal Amores, Enrique; *12E*

V

Vado Vázquez, Emilio; *9C*
Valderrama Alcalde, Juan R.; *23E*
Valero Lanau, Pedro; *37C*
Vallejo Gutiérrez, Enrique; *35E*
Vallés Brau, José Lorenzo; *12C*
Vázquez Rodríguez, Antonio; *3E*
Vila Doncel, Santiago; *23E*
Viladesau Franquesa, Eduard; *34C*
Vilaplana Muller, Guillermo; *40C*
Villate Bejarano, Joseba; *33E*
Villegas Barranco, Salvador; *23E*
Vinuesa del Río, Jaime; *34E*
Vinuesa Tejedor, Jaime; *2E*
Vinyes, M.; *35C*
Vinyes Raso, Raül; *38C*
Vives Arumí, Francisco J.; *5C, 5E*

W

Wartelski Pryluka, Matías J.; *39C*
Welters Dyhdalewicz, Gerald; *2C*



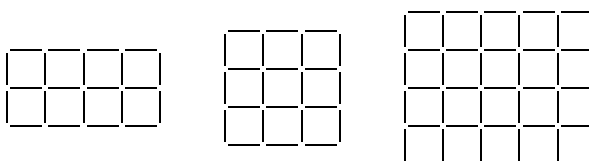
XXXV OLIMPIADA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

11 de desembre de 1998, de 16 a 20h.

1.—Determineu les possibles àrees dels tetràedres que tenen tres arestes de 2 metres i tres arestes de 3 metres.

2.—Disposicions rectangulars com les de la figura:



contenen respectivament 22, 24 i 49 llumins. Algunes disposicions, com la de 24 llumins, són quadrades. A més, amb 22 llumins es poden fer dues disposicions diferents, amb 24 només una i amb cinc llumins no se'n pot fer cap.

i) Doneu una condició per a n per tal que, donats n llumins, sigui possible fer alguna disposició rectangular com les de la figura.

ii) Doneu una condició per a n per tal que, donats n llumins, sigui possible fer una disposició quadrada.

iii) Doneu una condició per a n per tal que, donats n llumins, sigui possible fer només una única disposició.

3.—Un bidó cilíndric, amb una massa en buit M , conté una massa m_0 d'oli quan és ple.

El centre de masses (o de gravetat, o baricentre) del bidó ple és en el punt mitjà. Al començar a buidar el bidó el centre de masses baixa, però, quan el bidó és buit, torna a ser en el punt mitjà.

Quina massa d'oli hi ha al bidó quan el centre de masses és en el seu punt més baix?

4.—Ens interessem per les parelles de funcions f, g que compleixen:

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g'(x)$$

a) Trobeu totes aquestes parelles en el cas $f = g$.

b) Trobeu totes les funcions g quan

$$f(x) = x^n$$

amb n enter i positiu.



XXXV OLIMPIÁDA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

12 de desembre de 1998, de 9 a 13h.

5.—

- a) Demostreu que el nombre de cares d'un políedre convex que tenen un nombre senar de costats és parell.
- b) Demostreu que la suma dels angles de totes les cares d'un políedre convex és $n \cdot 360^\circ$, amb n enter.

6.—Proveu que, si tenim 1998 punts en el pla de manera que no n'hi hagi tres d'alineats, aleshores hi ha 666 triangles disjunts que els tenen com a vèrtexs.

7.—Determineu les longituds dels costats de tots els triangles rectangles amb costats de longitud entera, als quals es pot inscriure un cercle de radi 6.

8.—Troheu tots els nombres enters iguals a la suma dels quadrats de les seves xifres.



XXXV OLIMPIADA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

11 i 12 de desembre de 1998.

Solucions:

1.—Hi ha tres possibles tetràedres:

- a) una cara és un triangle equilàter de costat $2m$,
- b) una cara és un triangle equilàter de costat $3m$, i
- c) no hi ha cap cara que sigui un triangle equilàter.

Les àrees són:

$$a) \sqrt{3} + 6\sqrt{2}, \quad b) \frac{9}{4}\sqrt{3} + \frac{9}{4}\sqrt{7}, \quad c) 4\sqrt{2} + \frac{3}{2}\sqrt{7}$$

2.—Una disposició de $p \times q$ llumins té $p + 1$ files de q llumins i $q + 1$ columnes de p llumins. Per tant, conté

$$n = (p + 1)q + p(q + 1) = p + q + 2pq \text{ llumins}$$

Llavors

$$2n + 1 = 2p + 2q + 4pq = (2p + 1)(2q + 1)$$

Per tant:

- i) Amb n llumins, la disposició és possible si, i només si, $2n + 1$ no és primer.
- ii) És possible fer una disposició quadrada si, i només si, $2n + 1$ és un quadrat perfecte.
- iii) La disposició és única si, i només si, $2n + 1$ és producte de dos primers.

3.—Sigui m la massa d'oli que hi ha al bidó en un cert moment. Siguin H l'alçada del bidó, h el nivell de l'oli i $m_0/H = d$ la densitat lineal de l'oli en el bidó.

La posició del baricentre quan hi ha una certa massa m d'oli és:

$$c(m) = \frac{M \cdot \frac{H}{2} + m \cdot \frac{h}{2}}{M + m} = \frac{M \cdot \frac{H}{2} + \frac{m^2}{2d}}{M + m} = \frac{MH + \frac{m^2}{d}}{2(M + m)}$$

Derivem c respecte de m :

$$\begin{aligned} c'(m) &= \frac{\frac{2m}{d}(M + m) - \left(MH + \frac{m^2}{d}\right)}{2(M + m)^2} = \frac{\frac{m^2}{d} + \frac{2Mm}{d} - MH}{2(M + m)^2} = \\ &= \frac{m^2 + 2Mm - Mm_0}{2d(M + m)^2} \end{aligned}$$

Per tal que sigui $c'(m) = 0$ ha de ser

$$m^2 + 2Mm - Mm_0 = 0$$

Resulta:

$$m = \frac{-2M \pm \sqrt{4M^2 + 4Mm_0}}{2} = \pm \sqrt{M(M + m_0)} - M$$

La solució positiva, única admissible, és

$$m = \sqrt{M(M + m_0)} - M$$

Observeu que la massa total $M + m$ és la mitjana geomètrica de les masses del dipòsit ple i buit.

Ara podem calcular la posició més baixa del baricentre. Es tracta de calcular $c(m)$ quan $m = \sqrt{M(M + m_0)} - M$:

$$\begin{aligned} c(m) &= \frac{MH + \frac{m^2}{d}}{2(M + m)} = \frac{MHd + m^2}{2d(M + m)} = \frac{MHd + \left(\sqrt{M(M + m_0)} - M\right)^2}{2d\sqrt{M(M + m_0)}} = \\ &= \frac{Mm_0 + M^2 + Mm_0 - 2M\sqrt{M(M + m_0)} + M^2}{2d\sqrt{M(M + m_0)}} = \\ &= \frac{M^2 + Mm_0 - M\sqrt{M(M + m_0)}}{d\sqrt{M(M + m_0)}} = \\ &= \frac{M(M + m_0) - M\sqrt{M(M + m_0)}}{d\sqrt{M(M + m_0)}} = \\ &= \frac{\sqrt{M(M + m_0)} - M}{d} = \frac{m}{d} = h \end{aligned}$$

i el baricentre està just sobre la superfície de l'oli.

4.-

a) De $(f^2)' = (f')^2$ resulta $2ff' = (f')^2$. Hi ha dues possibilitats:

i) $f' = 0$ i f és una constant, i

ii) $2f = f'$ i $f(x) = Ae^{2x}$.

b) De $(x^n g)' = nx^{n-1}g'$ resulta $nx^{n-1}g + x^n g' = nx^{n-1}g'$, o sigui

$$n + x \frac{g'}{g} = n \frac{g'}{g} \quad \Rightarrow \quad (n - x) \frac{g'}{g} = n \quad \Rightarrow \quad \frac{g'}{g} = \frac{n}{n - x}$$

Per tant,

$$\ln g = -n \ln(n - x) + \ln K = \ln \frac{K}{(n - x)^n}$$

i, finalment,

$$g(x) = \frac{K}{(n - x)^n}$$

5.—

a) Si a_R és el nombre de cares amb R costats i el nombre d'arestes del políedre és A , es té:

$$2A = 3a_3 + 4a_4 + \dots + na_n$$

que, mòdul 2, dóna:

$$0 \equiv a_3 + a_5 + a_7 + \dots$$

b) La suma dels angles és

$$S = 180^\circ \cdot (a_3 + 2a_4 + \dots + (n-2)a_n)$$

i, pel que hem vist a a), el nombre entre parèntesis és parell

6.—Hi ha un nombre finit de rectes que passen per dos dels punts. Escollim una recta r que no sigui paral·lela a cap d'elles i tal que tots els punts caiguin en el mateix costat de r .

En desplaçar r paral·lelament a si mateixa, trobarem els punts d'un en un. Si els numerem segons els va trobant la recta desplaçada, els triangles

$$\triangle P_1 P_2 P_3, \triangle P_4 P_5 P_6, \dots, \triangle P_{1996} P_{1997} P_{1998}$$

són disjunts.

7.—Sigui ABC un triangle que compleix les condicions del problema. Sigui a la hipotenusa i b i c els catets.

Els punts de tangència de la circumferència amb els catets b i c els divideixen, respectivament, en segments de longitud 6 i $b-6$, i 6 i $c-6$. Però com que les tangents tirades a un cercle des d'un punt són iguals, la hipotenusa a queda dividida pel punt de tangència amb la circumferència en segments de longitud $b-6$ i $c-6$. Això i el teorema de **Pitàgoras** donen les equacions:

$$\begin{aligned} a &= b + c - 12 \\ a^2 &= b^2 + c^2 \end{aligned}$$

Tenim:

$$(b + c - 12)^2 = b^2 + 2bc - 24b + c^2 - 24c + 144 = b^2 + c^2$$

o sigui

$$bc - 12b - 12c + 72 = 0$$

i, després d'algunes manipulacions,

$$b = 12 + \frac{72}{c-12}$$

Si c és enter, b ho és (i també a) si $c-12 \mid 72$. Com que la construcció geomètrica obliga a que $c > 12$ i els divisors positius de 72 són

$$1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72$$

obtenim els possibles valors de c :

$$13, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 24, 30, 36, 48, 84$$

Els triangles que compleixen la condició tenen, doncs, costats de longituds:

$$[85, 84, 13], \quad [50, 48, 14], \quad [39, 36, 15]$$

$$[34, 30, 16], \quad [30, 24, 18], \quad [29, 21, 20]$$

8.—Com que $4 \times 9^2 = 324$ i 324 té tres xifres, és clar que els nombres buscats han de tenir menys de quatre xifres.

Sigui $N = 100x + 10y + z$ un d'aquests nombres. Ha de ser:

$$100x + 10y + z = x^2 + y^2 + z^2; \quad 0 < x < 10; \quad 0 \leq y < 10; \quad 0 \leq z < 10$$

Podem escriure

$$x(100 - x) + y(10 - y) = z(z - 1)$$

però el valor *mínim* de $x(100 - x)$ és 99 (per a $x = 1$), mentre que el valor *màxim* de $z(z - 1)$ és 72 (per a $z = 9$), cosa que implica que, en tot cas, $x = 0$ i el nombre no pot tenir tres xifres. La cosa queda en:

$$y(10 - y) = z(z - 1); \quad 0 < y < 10; \quad 0 \leq z < 10$$

i càlculs simples de totes les possibilitats mostren l'absència de solucions. Per tant, els nombres demanats només poden ser d'una sola xifra i, òbviament, són 0 i 1.

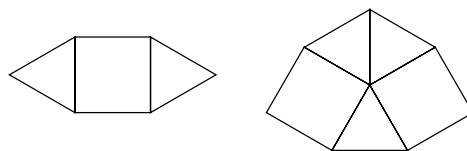


XXXV OLIMPIADA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

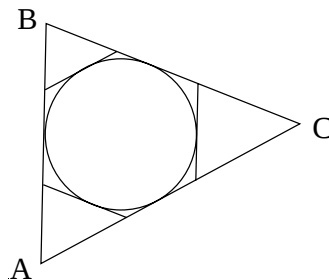
10 de desembre de 1999, de 16 a 20h.

- 1.—Amb quadrats i triangles equilàters de costat unitat es poden construir polígons convexos. Per exemple, es poden unir dos triangles i un quadrat per a formar un hexàgon, i tres triangles i dos quadrats per a formar un heptàgon, com es mostra al dibuix (la regió tancada pel polígon ha d'estar recoberta exactament pels quadrats i triangles utilitzats).



Quin és el nombre màxim de costats d'un polígon convex que es pot construir amb aquest mètode?

- 2.—En un triangle, el radi de la circumferència circumscrita és R . Es tracen tres rectes tangents a la circumferència inscrita i paral·leles als costats, que formen tres triangles més petits en els vèrtexs del triangle com es veu a la figura.



Si els radis de les circumferències circumscrites dels tres triangles petits són R_A , R_B i R_C , demostreu que

$$R = R_A + R_B + R_C.$$

- 3.—Un professor de matemàtiques va escriure a la pissarra el polinomi quadràtic $x^2 + 10x + 20$. Llavors cada alumne havia d'augmentar o disminuir en 1 o bé el terme constant o bé el terme lineal. Finalment va quedar escrit a la pissarra el polinomi $x^2 + 20x + 10$. Hi va haver en algun moment escrit a la pissarra un polinomi quadràtic amb zeros enters?
- 4.—Tenim una calculadora que no funciona gaire bé. Només funcionen les tecles: $\boxed{+}$ (suma), $\boxed{-}$ (resta), $\boxed{1/x}$ (invers). Com podem calcular el producte de dos nombres reals amb aquesta calculadora?



XXXVI OLIMPIADA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

11 de desembre de 1999, de 9 a 13h.

5.—Un tetraèdre compleix que, per a cada vèrtex, la suma dels cosinus dels angles diedres de les tres arestes adjacents és 1. Demostreu que els diedres d'arestes oposades són iguals.

6.—

i) Si n és un nombre natural i 2^{n+12} i 2^n denoten la mesura d'un angle expressada en graus, demostreu que

$$\sin(2^{n+12}) = \sin(2^n) \quad \text{si} \quad n \geq 3$$

ii) Trobeu el valor més petit de n per al qual l'expressió $\sin(2^n)$ pren el valor més gran possible.

7.—En el pla tenim n rectes de les quals no n'hi ha tres que passin per un mateix punt. Aquestes rectes es tallen en 1999 punts.

i) Determineu el màxim i el mínim de n .

ii) Determineu els valors de n més grans que 500.

8.—

i) Demostreu que si el producte de dos nombres positius és constant, la suma d'aquests nombres és mínima quan els nombres són iguals.

ii) Trobeu el valor mínim de la funció

$$f(x) = \frac{9x^2 \sin^2 x + 4}{x \sin x}$$

a l'interval $0 < x < \pi$.



XXXVI OLIMPIADA MATEMÀTICA

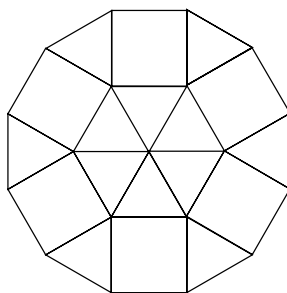
Primera fase (Catalunya)

10 i 11 de desembre de 1999.

Solucions:

- 1.—Els angles en els vèrtexs d'un polígon convex són tots menors que 180° . Com que els angles d'un triangle equilàter valen 60° , els possibles angles de la figura són 60° , 90° , 120° o 150° . Així doncs, cada angle exterior ha de ser com a mínim 30° . Com que els angles exteriors han de sumar 360° , el nombre de costats pot ser com a màxim $360^\circ/30 = 12$.

Es pot construir un polígon de 12 costats així:

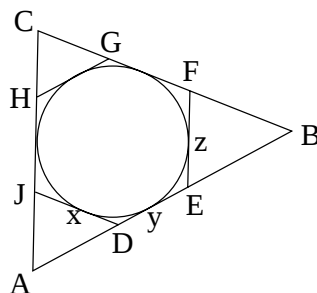


- 2.—(Veure figura) $DX = DY$, $EY = EZ$, etc, de manera que obrint els costats interiors dels triangles petits recobrim tot el perímetre del gros, d'on $p(ADJ) + p(BEF) + p(CGH) = p(ABC) =: p$. Com que

$$\begin{aligned} \triangle ADJ &\sim \triangle ABC && \text{amb raó de semblança } r_1, \\ \triangle EBF &\sim \triangle ABC && \text{amb raó de semblança } r_2, \\ \triangle HGC &\sim \triangle ABC && \text{amb raó de semblança } r_3, \end{aligned}$$

tenim

$$\begin{aligned} r_1 p + r_2 p + r_3 p &= p \implies r_1 + r_2 + r_3 = 1 \\ &\implies r_1 R + r_2 R + r_3 R = R \\ &\implies R_A + R_B + R_C = R. \end{aligned}$$



- 3.—Totes les equacions escrites tenien la forma $x^2 + ax + b$ i cada operació realitzada pels alumnes canviava el valor de $a - b$ en 1.

En començar $a - b = -10$ i en acabar $a - b = 10$. Per tant en algun lloc del procés $a - b = 1$, i tenim el polinomi quadràtic $x^2 + (b + 1)x + b$ que té com a zeros -1 i $-b$.

4.—Tenim

$$\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{2}{x^2-1}.$$

Per tant

$$\frac{x^2}{2} = \frac{1}{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}} + 0.5,$$

i

$$xy = \frac{(x+y)^2}{2} - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}.$$

5.—Sigui α_{ik} l'angle diedre de l'aresta $A_i A_k$ ($\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$) i $x_{ik} = \cos \alpha_{ik}$. Tenim

$$\left. \begin{aligned} x_{12} + x_{13} + x_{14} &= 1 \\ x_{12} + x_{23} + x_{24} &= 1 \\ x_{13} + x_{23} + x_{34} &= 1 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} &= 1 \end{aligned} \right\}.$$

Sumant, $2(x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{23} + x_{24} + x_{34}) = 4$, i d'aquí $x_{23} + x_{24} + x_{34} = 1$. Que junt amb $x_{12} + x_{23} + x_{24} = 1$ dona $x_{12} = x_{34}$, amb $x_{14} + x_{24} + x_{34} = 1$ dona $x_{14} = x_{23}$ i amb $x_{13} + x_{23} + x_{34} = 1$ dona $x_{13} = x_{24}$. D'on resulta $\alpha_{12} = \alpha_{34}$, $\alpha_{14} = \alpha_{23}$ i $\alpha_{13} = \alpha_{24}$.

6.—

i) Tenim

$$\sin(2^{n+12}) = \sin(4096 \cdot 2^n) = \sin((11 \cdot 360 + 136) \cdot 2^n) = \sin(136 \cdot 2^n).$$

Aleshores $\sin(136 \cdot 2^n) = \sin(2^n)$ si $136 \cdot 2^n = 2^n + k \cdot 360$ o bé $136 \cdot 2^n = 180 - 2^n + k \cdot 360$, és a dir, $135 \cdot 2^n = k \cdot 360 \Leftrightarrow 2^n = k \frac{360}{135} = k \frac{8}{3}$ o bé $137 \cdot 2^n = k \cdot 360 \Leftrightarrow 2^n = k \cdot \frac{360}{137}$. El segon cas és impossible, i el primer es verifica si $k = 3, 2 \cdot 3, 2^2 \cdot 3, \dots$

Si $k = 3$, $2^n = 8 \Rightarrow n = 3$, i per tant

$$\sin(2^{n+12}) = \sin(2^n) \quad \text{si} \quad n \geq 3$$

ii) Per 6.i, només hem de considerar $\sin(2^n)$ per a $n = 1, \dots, 14$. De la següent taula,

n	2^n	$\sin(2^n)$
1	2	$\sin(2)$
2	4	$\sin(4)$
3	8	$\sin(8)$
4	16	$\sin(16)$
5	32	$\sin(32)$
6	64	$\sin(64)$
7	128	$\sin(128)$
8	256	—
9	512	$\sin(256)$
10	1024	—
11	2048	—
12	4096	$\sin(4096)$
13	8192	—
14	16384	—

on $-$ indica que el corresponent sinus és negatiu, es dedueix que el valor més petit de n que fa $\sin(2^n)$ màxim és $n = 6$.

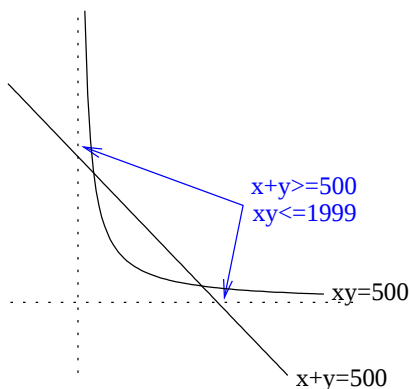
7.—

i) n rectes del pla es tallen en $\binom{n}{2}$ punts o menys, per tant $\binom{n}{2} \geq 1999$ d'on resulta $n \geq 64$. $\binom{64}{2} = 2016$, o sigui que hi ha 17 punts de més, que hem de disminuir fent que algunes rectes siguin paral·leles. Hi ha diverses maneres d'aconseguir-ho, p.e. fent que un grup de 6 siguin paral·leles entre elles, un altre grup de 2 també i un altre de 2 també. Així eliminem $\binom{6}{2} + \binom{2}{2} + \binom{2}{2} = 17$ punts. Per tant $n \geq 64$.

El mínim nombre de punts en que es tallen n rectes (deixant de banda que no es tallin en cap) és $n - 1$ ($n - 1$ rectes paral·leles i una altra que les talla totes), d'on $n - 1 \leq 1999$. Per tant $n \leq 2000$.

ii) Suposem que hi ha x rectes paral·leles (prenem x màxim sota aquesta condició) i y que no són paral·leles a cap de les primeres. Tindrem les condicions $x + y \geq 500$, $xy \leq 1999$.

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 500 \\ xy = 1999 \end{array} \right\} \Rightarrow y = 250 \pm \sqrt{60501} = 495.97, 4.03.$$



Si fos $x < y$ tindríem $x \leq 4$ i no hi hauria més de 4 rectes paral·leles entre elles. Per tant podríem prendre $\frac{500}{4} = 125$ rectes no paral·leles 2 a 2, que donarien $\binom{125}{2} > 1999$ punts de tall.

Per tant $x \geq y$, llavors $y \leq 4$.

Tenint en compte que el nombre de punts de tall és igual a xy més el nombre de punts en que les rectes y es tallin entre elles, podem classificar segons els valors de y .

- Si $y = 1$, $xy = 1999$ i com $x = n - y = n - 1$ tenim $n = 2000$, que és el màxim que hem trobat abans.
- Si $y = 2$ tindrem
 - $2(n - 2) = 1999$ si les rectes y són paral·leles,
 - $2(n - 2) = 1998$ si les rectes y es tallen.

En el primer cas no hi ha solució, i el segon dóna $n = 1001$.

- Si $y = 3$ tindrem
 - $3(n - 3) = 1999$ si les rectes y són paral·leles,
 - $3(n - 3) = 1999 - 2$ si dues de les rectes y es tallen,
 - $3(n - 3) = 1999 - 3$ si les rectes y es tallen totes.

En cap dels tres casos hi ha solució.

- Si $y = 4$ tindrem
 - $4(n - 4) = 1999$ si les rectes y són paral·leles,
 - $4(n - 4) = 1999 - 3$ si 3 de les rectes y són paral·leles,
 - $4(n - 4) = 1999 - 4$ si hi ha 2 grups de 2 rectes paral·leles,
 - $4(n - 4) = 1999 - 5$ si només 2 de les rectes y són paral·leles
 - $4(n - 4) = 1999 - 6$ si totes les rectes y es tallen.

Dels 4 casos anteriors, només el $4(n - 4) = 1999 - 3$ té solució, i dóna $n = 503$.

8.—

- i)* Rutinari (es veu directament sobre una figura com la del problema 7b).
- ii)* Prenent $u = 9x \sin x$ i $v = 4/(x \sin x)$, com que $u, v > 0$ en $0 < x < \pi$ i $uv = 36$, $f = u + v$ serà mínima quan $u = v = 6$.

$$u = v \iff 9x \sin x = \frac{4}{x \sin x} \iff x^2 \sin^2 x = \frac{4}{9}.$$

Aquest valor és possible a $0 < x < \pi$, perquè per a $g(x) = x^2 \sin^2 x$ tenim $g(0) = 0$, $g(\pi/2) = \pi^2/4$ i $0 < 4/9 < \pi^2/4$. Aleshores el valor mínim de $f(x)$ a $0 < x < \pi$ és 12.



XXXVII OLIMPIADA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

15 de desembre de 2000, de 16 a 20h.

- 1.—Considerem una circumferència de radi r i una recta l , tangent a la circumferència en un punt P . Des d'un punt R , mòbil sobre la circumferència, tracem la perpendicular a la recta l i anomenem Q el punt d'intersecció de les dues rectes. Determineu l'àrea màxima que pot assolir el triangle PQR .
- 2.—Trobeu nombres enters positius n i $a_1, a_2, \dots, a_n$ tals que $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 2000$ i el producte $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$ sigui el més gran possible.
- 3.—Donada una funció $f(x)$, s'anomena *punt fix* de f tota solució (real) de l'equació $f(x) = x$. Calculeu, en funció del paràmetre $r > 0$, els punts fixos de les funcions $f(x)$ i $g(x) = f(f(x))$ si $f(x) = rx(1 - x)$, $x \in [0, 1]$. Representeu gràficament el conjunt

$$\{(r, x_r) \in (0, \infty) \times [0, 1] \mid x_r \text{ és un punt fix de } f \text{ o de } g\}.$$

- 4.—Busqueu el mínim nombre natural $n > 0$ tal que $n/2$ sigui un quadrat, $n/3$ sigui un cub, i $n/7$ sigui una potència setena.



XXXVII OLIMPIÁDA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

16 de desembre de 2000, de 9 a 13h.

5.—Tres atletes, A , B i C , competeixen en una sèrie de proves. Per quedar en primera posició en una prova, l'atleta rep x punts; per quedar en segona, y punts; i per quedar en tercera posició z punts. No hi ha possibilitat d'empat, i els nombres x , y , z són naturals tals que $x > y > z > 0$. En acabar, A ha acumulat 20 punts, B 10 punts i C 9 punts. L'atleta A ha quedat segon en la prova de llançament de pes. Qui ha quedat segon a la prova de carrera curta?

6.—Hi ha dos triangles rectangles no semblants, cada un dels quals té un costat igual al costat d'un triangle equilàter i l'àrea α vegades l'àrea d'aquest triangle equilàter. Què podem dir del nombre α ?

7.—S'anomenen *nombres triangulars* els nombres naturals n de la forma

$$n = \frac{k(k+1)}{2} = 1 + 2 + 3 + \cdots + k, \text{ amb } k \text{ natural.}$$

a) Demostreu que si n és un nombre triangular, aleshores $9n + 1$ també ho és.

b) Determineu els valors dels nombres naturals a i b per tal que $an + b$ sigui triangular sempre que n sigui triangular.

8.—Un dipòsit cònic amb el vèrtex a la part inferior, d'altura h i angle en el vèrtex $2\alpha < \pi$, és ple d'aigua fins a vessar. S'introdueix al dipòsit, amb compte, una esfera de radi r més densa que l'aigua. Dibuixeu la gràfica de la funció que expressa, en funció de $r > 0$, el volum d'aigua que es vessarà. En particular, determineu el valor de r per al qual serà més gran el mullader.

Nota: El volum d'un casquet esfèric (cada una de les parts en què un pla divideix una esfera) és igual a

$$\pi a^2 \left(r - \frac{a}{3} \right)$$

on r és el radi de l'esfera i a l'altura del casquet ($0 \leq a \leq 2r$).



XXXVII OLIMPIADA MATEMÀTICA

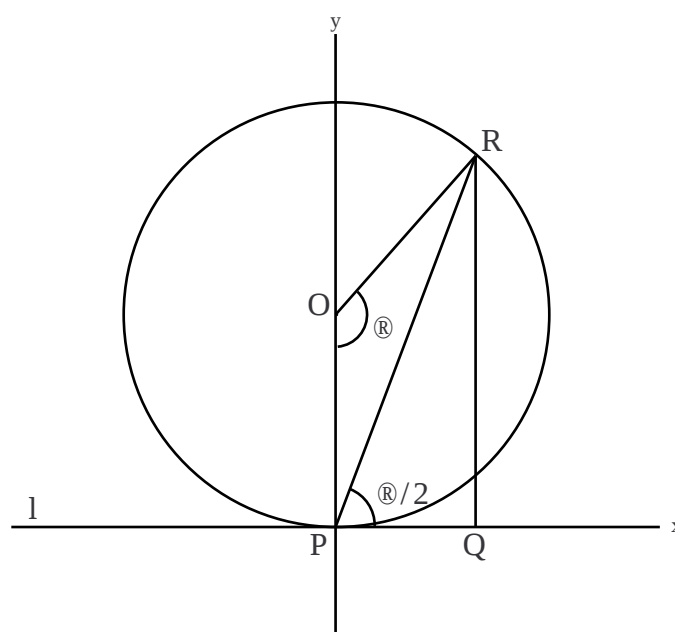
Primera fase (Catalunya)

15 i 16 de desembre de 2000.

Solucions:

1.–

1.1.– Solució 1:



Sigui $\alpha = \angle ROP$, l'angle central que correspon a l'arc RP . El valor de α determinarà la posició de R respecte P i l . Segons les condicions del problema $0 \leq \alpha \leq 180^\circ$, variant des de la coincidència de R amb P fins a la posició diametralment oposada a P . De fet, fins al valor $\alpha = 90^\circ$, l'àrea del $\triangle PQR$ va creixent, donat que els dos catets creixen. Podem assegurar, per tant, que el màxim valor de l'àrea serà per a un angle $90^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$.

En el triangle isòsceles $\triangle OPR$ tenim

$$\frac{PR}{2} = r \sin \frac{\alpha}{2}; \quad PR = 2r \sin \frac{\alpha}{2}.$$

En el triangle rectangle $\triangle PQR$, l'angle $\angle RPQ = \alpha/2$ ja que és semi-inscrit a la circumferència i abraça el mateix arc que α .

Llavors, $RQ = PR \sin \frac{\alpha}{2}$; $PQ = PR \cos \frac{\alpha}{2}$. Per tant, si S és l'àrea del $\triangle PQR$, tindrem

$$S = \frac{1}{2}PQ \cdot RQ = \frac{1}{2}PR^2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$$

i substituint PR

$$\begin{aligned} S(\alpha) &= \frac{1}{2} 4r^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = \\ &= r^2 \frac{1 - \cos \alpha}{2} \sin \alpha = \frac{r^2}{2} \left(\sin \alpha - \frac{\sin 2\alpha}{2} \right) \end{aligned}$$

Derivant respecte de α obtenim

$$S'(\alpha) = \frac{r^2}{2} (\cos \alpha - \cos 2\alpha).$$

Imposant $S'(\alpha) = 0$, resulta $\cos \alpha - \cos 2\alpha = 0$ i les solucions a l'interval $[0, 180^\circ]$ són 0° i 120° . La solució $\alpha = 0^\circ$ correspon a l'àrea nul·la obtinguda quan P i R coincideixen. La solució $\alpha = 120^\circ$ correspon al valor màxim buscat. Així

$$S_{\max} = S(120^\circ) = \frac{r^2}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) = \frac{3\sqrt{3}r^2}{8}.$$

1.2.—Solució 2:

Prenem un sistema de referència cartesià amb el punt P com a origen i la recta l com a eix d'abscisses. En aquest sistema d'eixos és $O = (0, r)$ i $R = (x, y)$. L'àrea del triangle $\triangle PQR$ serà $S = \frac{1}{2}xy$. Les coordenades de R estan lligades per l'equació de la circumferència, $x^2 + (y - r)^2 = r^2$. D'aquí obtenim $x^2 + y^2 - 2ry = 0$ i $x = \sqrt{2ry - y^2}$.

Els valors possibles de y pertanyen a l'interval $[0, 2r]$. A més, podem assegurar que el màxim de l'àrea es produirà a l'interval $[r, 2r]$, ja que fins al punt (r, r) totes dues coordenades creixen i també ho farà l'àrea S .

L'expressió de l'àrea del $\triangle PQR$ en funció de y serà

$$S(y) = \frac{y}{2} \sqrt{2ry - y^2} \quad \text{amb } 0 \leq y \leq 2r.$$

Derivant respecte de y

$$S'(y) = \frac{y(3r - 2y)}{2\sqrt{2ry - y^2}}$$

i imposant $S'(y) = 0$ obtenim $y = 0$ i $y = 3r/2$.

La solució $y = 0$ correspon a la coincidència de R amb P i dona l'àrea nul·la; la solució $y = 3r/2$ correspondrà al valor màxim de S tal com s'ha comentat abans. Així doncs,

$$y_{\max} = \frac{3r}{2} \quad \text{i} \quad x_{\max} = \sqrt{\frac{3r}{2\left(2r - \frac{3r}{2}\right)}} = \frac{r\sqrt{3}}{2}$$

$$S_{\max} = \frac{1}{2} \frac{r\sqrt{3}}{2} \frac{3r}{2} = \frac{3\sqrt{3}r^2}{8}.$$

- 2.—El problema consisteix a determinar la partició del nombre 2000 tal que el producte dels seus termes sigui el més gran possible. Donat que el nombre de particions d'un nombre enter en enters positius és finit, el nombre de productes associats també ho serà i, entre ells, n'hi haurà algun o alguns de més grans.

Raonarem transformant una partició de forma que la suma no canviï i el producte creixi.

- 1) Si a la partició apareix un nombre 1, l'afegim a qualsevol altre terme diferent de 1. Així aconseguim una partició amb un terme menys, de la mateixa suma i de producte superior. Per tant, *cap dels a_i de la partició desitjada serà 1.*
- 2) Si un terme qualsevol a_j és $a_j \geq 4$, el substituïm pels nombres 2 i $a_j - 2$. La suma no canvia i el producte canvia substituint el factor a_j per $2(a_j - 2) = 2a_j - 4$ i $2a_j - 4 \geq a_j$ sempre que $a_j \geq 4$. La igualtat valdrà en el cas $a_j = 4$. Per tant, *cap dels a_i de la partició que busquem serà superior a 3.* És a dir, la partició de producte màxim estarà formada per 2 i 3 i el producte associat serà de la forma $2^x \cdot 3^y$.
- 3) Si $x \geq 3$, cada terna de dosos la podem substituir per un parell de tresos. La suma no canvia, $2 + 2 + 2 = 3 + 3$, i el producte s'incrementa en un factor $9/8$; $3^2 > 2^3$.

Així el producte associat màxim serà de la forma $2^a \cdot 3^b$ amb $a = 0, 1, 2$. En el nostre cas $2000 = 3 \cdot 666 + 2$. Llavors el nombre buscat $n = 667$, la partició estarà formada per 666 tresos i un 2 i el producte màxim possible serà $3^{666} \cdot 2$.

Si la suma fos múltiple de 3, per exemple 2001, tindríem $2001 = 3 \cdot 667$, la partició la formarien 667 tresos i el producte màxim seria 3^{667} .

Si la suma fos un múltiple de 3 més 1, per exemple 2002, seria $2002 = 3 \cdot 667 + 1$ i escriuríem $2002 = 3 \cdot 666 + 3 + 1 = 3 \cdot 666 + 2 + 2$, i el producte màxim seria $3^{666} \cdot 2^2$.

- 3.—Les solucions de $f(x) = rx(1 - x) = x$ que pertanyen a $[0, 1]$ són 0 i $\hat{x} = 1 - \frac{1}{r}$, i aquesta darrera només si $r > 1$.

Els punts fixos de $g(x) = f(f(x)) = r^2x(1 - x)(1 - rx(1 - x))$ són 0 i les arrels del polinomi

$$1 - \frac{g(x)}{x} = r^3x^3 - 2r^3x^2 + r^2(1 + r)x - r^2 + 1$$

que pertanyin a l'interval $[0, 1]$.

Com que un punt fix de $f(x)$ també ho és de $g(x)$, el polinomi anterior ha de ser divisible per $x - (1 - \frac{1}{r})$ i el quocient és

$$r^3x^2 - r^2(1 + r)x + r(1 + r).$$

Les arrels d'aquest darrer polinomi són

$$x_+ = \frac{\sqrt{1+r}}{2r} \left(\sqrt{1+r} + \sqrt{r-3} \right) \quad \text{i} \quad x_- = \frac{\sqrt{1+r}}{2r} \left(\sqrt{1+r} - \sqrt{r-3} \right)$$

que són reals només si $r \geq 3$ i en aquest cas són més grans que 0 i menors que 1. Això últim perquè

$$1 + r + \sqrt{(1+r)(r-3)} < 2r \quad \text{puix que} \quad (1+r)(r-3) < (r-1)^2.$$

En resum, els punts fixos de $f(x)$ a $[0, 1]$ són 0 si $0 < r \leq 1$ i $\hat{x}$ si $r > 1$. Si $r > 3$, $g(x)$ té a més dos punts fixos més, x_+ i x_- que pertanyen a $[0, 1]$. Notem que es compleix

$$\hat{x}(1) = 0, \quad \hat{x}(3) = \frac{2}{3}, \quad \hat{x}(r) \text{ és creixent i } \lim_{r \rightarrow \infty} \hat{x}(r) = 1$$

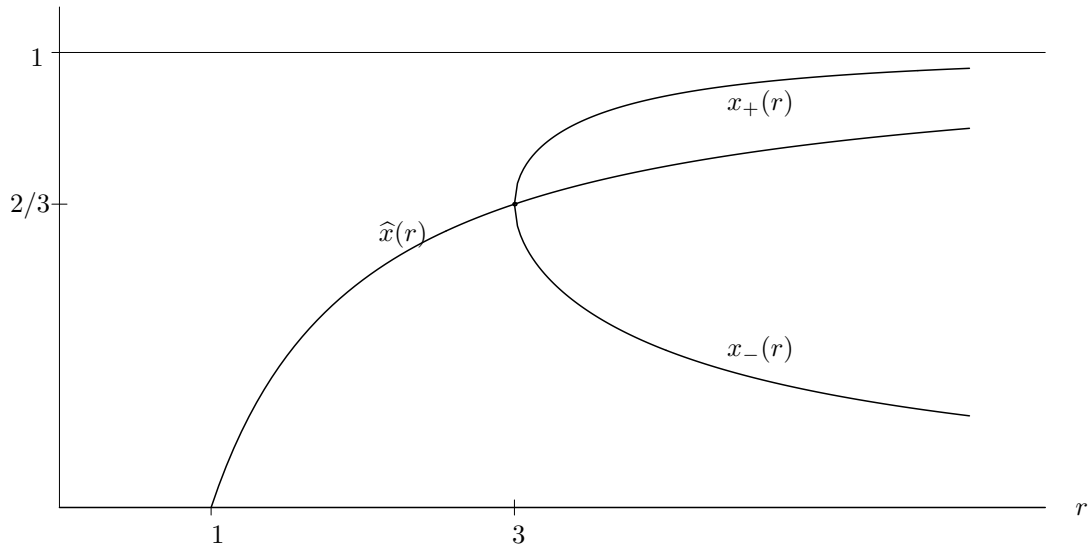
$$x_+(3) = \frac{2}{3}, \quad x'_+(r) = \frac{r+3-\sqrt{r-3}\sqrt{r+1}}{2r^2\sqrt{r-3}\sqrt{r+1}} > 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} x_+(r) = 1$$

$$x_-(3) = \frac{2}{3}, \quad x'_-(r) = -\frac{r+3+\sqrt{r-3}\sqrt{r+1}}{2r^2\sqrt{r-3}\sqrt{r+1}} < 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} x_-(r) = 0$$

Tenint en compte també que

$$\lim_{r \rightarrow 3^+} x'_+(r) = +\infty, \quad \lim_{r \rightarrow 3^-} x'_-(r) = -\infty, \quad \text{i } \hat{x} < x_+$$

aleshores la representació gràfica demanada és



4.-El nombre n ha de ser de la forma $n = 2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 7^\gamma$.

Si $n/2$ és un quadrat, $\alpha = \dot{2} + 1$, $\beta = \dot{2}$, $\gamma = \dot{2}$.

Si $n/3$ és un cub, $\alpha = \dot{3}$, $\beta = \dot{3} + 1$, $\gamma = \dot{3}$.

Si $n/7$ és una potència setena, $\alpha = \dot{7}$, $\beta = \dot{7}$, $\gamma = \dot{7} + 1$.

D'aquí resulta que

$$\alpha = \dot{2}1 \quad \text{i} \quad \alpha = \dot{2} + 1$$

$$\beta = \dot{1}4 \quad \text{i} \quad \beta = \dot{3} + 1$$

$$\gamma = \dot{6} \quad \text{i} \quad \gamma = \dot{7} + 1$$

i la solució més petita és $\alpha = 21$, $\beta = 28$, $\gamma = 36$. D'on resulta que

$$n = 2^{21} \cdot 3^{28} \cdot 7^{36}$$

- 5.—En total s'atorguen $20 + 10 + 9 = 39$ punts. Donat que $x > y > z$ i que són naturals, com a mínim s'atorguen $1 + 2 + 3 = 6$ punts a cada prova.

Així, $x + y + z \geq 6$ i $x + y + z$ divideix 39. Com que ens diuen que s'han fet un mínim de 2 proves, $x + y + z \neq 39$. Per tant, $x + y + z$ només pot ser 1, 2, 13 i com que és més gran o igual que 6 ha de ser $x + y + z = 13$, la qual cosa implica que s'han fet 3 proves.

Donat que A és segon en el llançament de pes, una part de la seva puntuació és y . Si també hagués obtingut un tercer lloc, el màxim que podria haver obtingut seria $x + y + z = 13 \neq 20$, que és la seva puntuació real. Per tant, la puntuació de A ha de ser $3y$ o $x + 2y$ o $2x + y$. Com que 3 no divideix 20, no pot ser $3y$.

Si fos $x + 2y$, llavors $x + 2y = x + y + y = 20$ però $x + y + z = 13$ i tindríem $y - z = 7$. Com que $x > y > z$, seria $y \geq 8$, $x \geq 9$ i $x + y \geq 17$ en contradicció amb $x + y + z = 13$. Per tant, ha de ser $P(A) = 2x + y = 20$.

Així y ha de ser un nombre parell i com que $x + y + z = 13$, y no pot ser més gran o igual que 6, ja que si fos $y \geq 6$ llavors $x \geq 7$ i $x + y \geq 13$. Per tant, $y = 2$ o $y = 4$.

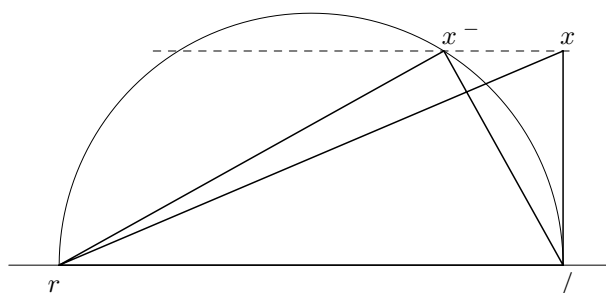
Si $y = 2$, z ha de ser 1 i $x = 10$ però en aquest cas $P(A) = 2x + y = 2 \cdot 10 + 2 = 22 \neq 20$. Per tant, $y = 4$ i $x = 8$. Així queda $z = 1$.

Tenim llavors la situació següent

	Prova 1	Carrera	Pes	Puntuació
A	8	8	4	20
B	1	1	8	10
C	4	4	1	9
	13	13	13	

A ha de guanyar les altres dues proves, B no pot ser (tercer, segon, primer); la seva única possibilitat és (tercer, tercer, primer) i C ha de fer dos segons llocs i un tercer. Així C és qui queda en segon lloc en la prova esmentada.

- 6.—En aquestes condicions hi ha d'haver un triangle amb un catet igual al costat del triangle equilàter i un triangle amb la hipotenusa igual al costat del triangle equilàter.



Si el triangle equilàter té costat ℓ i $AB = \ell$, aleshores $BC = \alpha\sqrt{3}\ell/2$ i perquè existeixi

C' ha de ser

$$\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}\ell \leq \frac{\ell}{2} \quad \text{o sigui} \quad \alpha \leq \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

És clar que els triangles ABC i ABC' no són semblants.

7.—

a) Si $n = k(k+1)/2$ tindrem $9k(k+1)/2 + 1 = (9k^2 + 9k + 2)/2$. Descomponent el polinomi obtenim

$$9n + 1 = \frac{1}{2} \left(9 \left(k + \frac{1}{3} \right) \left(k + \frac{2}{3} \right) \right) = \frac{1}{2} (3k+1)(3k+2)$$

i el nombre $9n + 1$ també és triangular.

b) Suposant n triangular anem a veure quines condicions han de complir a i b per tal que $an + b$ ho sigui. És a dir, suposant que $n = k(k+1)/2$ imposem que $an + b = r(r+1)/2$ i determinarem les condicions que han de complir a , b i r per fer possible la igualtat. Tindrem

$$a \frac{k(k+1)}{2} + b = \frac{r(r+1)}{2} \quad \text{o bé} \quad ak(k+1) + 2b = r^2 + r.$$

Obtenim l'equació de segon grau en r , $r^2 + r - (ak(k+1) + 2b) = 0$ (*) que haurà de tenir solucions enteres per a cada valor de k . Això només succeirà quan el discriminant de l'equació sigui un quadrat perfecte. Ara bé, el discriminant $\Delta = 1 + 4ak(k+1) + 8b$ és un polinomi de segon grau en k i si és un quadrat perfecte haurà de ser el d'un cert polinomi de primer grau en k . Posem $1 + 4ak(k+1) + 8b = (sk+t)^2$ amb s i t independents de k . Fent operacions i identificant coeficients surt $4a = s^2 = 2st$ i $8b + 1 = t^2$. Per tant, $s = 2t$ i obtenim en funció de t

$$a = t^2, \quad b = \frac{t^2 - 1}{8}.$$

Per tal que a i b siguin enters, $(t^2 - 1)/8$ ha de ser enter. Això és possible sempre que t sigui un nombre senar, ja que si $t = 2m - 1$, tenim

$$t^2 - 1 = (2m - 1)^2 - 1 = 4m^2 - 4m = 4m(m - 1)$$

i com que un dels dos nombres m o $m - 1$ és parell, serà $t^2 - 1 = 8$ per a tot t senar.

Per tant, si t és senar, $a = t^2$ i $b = (t^2 - 1)/8$ són els nombres que faran $an + b$ triangular. Per tal de comprovar-ho, trobem l'expressió de $an + b$ resolent l'equació (*) amb els valors de a i b que acabem de calcular. S'obté

$$r = \frac{-1 \pm (2tk + t)}{2}$$

i l'única solució entera i positiva serà $r = tk + \frac{(t-1)}{2}$. Així,

$$an + b = \frac{r(r+1)}{2} = \frac{1}{2} \left(tk + \frac{t-1}{2} \right) \left(tk + \frac{t+1}{2} \right).$$

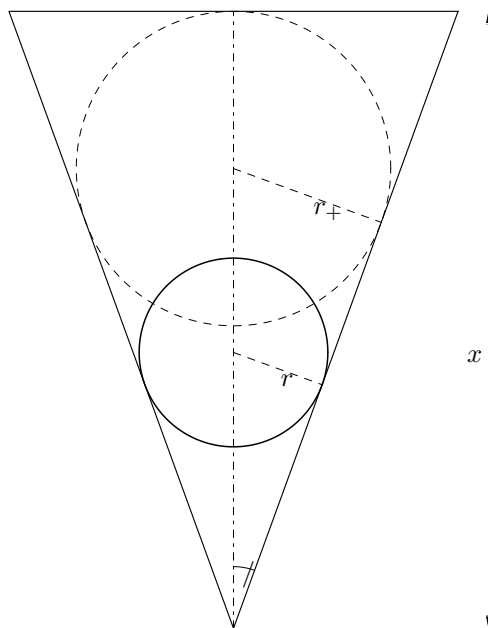


Fig.1.

8.—Indicarem per $V(r)$ el volum d'aigua que es vessa en funció del radi r de l'esfera. Cal analitzar els diversos tipus de posicions que pot tenir l'esfera, en funció del radi r , quan està en contacte amb el recipient cònic.

Si el radi de l'esfera és prou petit (figura [1](#)), aquesta quedarà totalment submergida en el recipient. Podem augmentar el radi mantenint aquesta situació, fins que l'esfera sigui tangent a la superfície de l'aigua. El radi corresponent s'anomenarà r_1 .

$$\sin \alpha = \frac{r_1}{h - r_1} \implies r_1 = h \frac{\sin \alpha}{1 + \sin \alpha}.$$

En aquest cas l'aigua vessada és el volum de l'esfera.

$$V(r) = V_1(r) = \frac{4}{3}\pi r^3, \quad 0 \leq r \leq r_1.$$

Observem que es tracta d'una cúbica en r .

Si el radi és més gran que r_1 , aleshores té una part que queda fora de l'aigua. Cal encara distingir dues situacions diferents: en la primera, l'esfera és tangent al recipient (figura [2](#)), i en la segona, el radi ja és prou gran perquè l'esfera toqui la vora superior del dipòsit, però no tangencialment (figura [3](#)). El radi r_2 frontera entre les dues situacions esmentades correspondrà a una esfera tangent al dipòsit, amb tangència justament a la vora superior.

$$r_2 = g \tan \alpha = \frac{h}{\cos \alpha} \tan \alpha = h \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha}$$

Si el radi r de l'esfera està comprès entre r_1 i r_2 , el volum de l'aigua vessada és el volum del casquet esfèric submergit. L'altura del casquet submergit és

$$a = a(r) = h - b = h - \left(\frac{r}{\sin \alpha} - r \right).$$

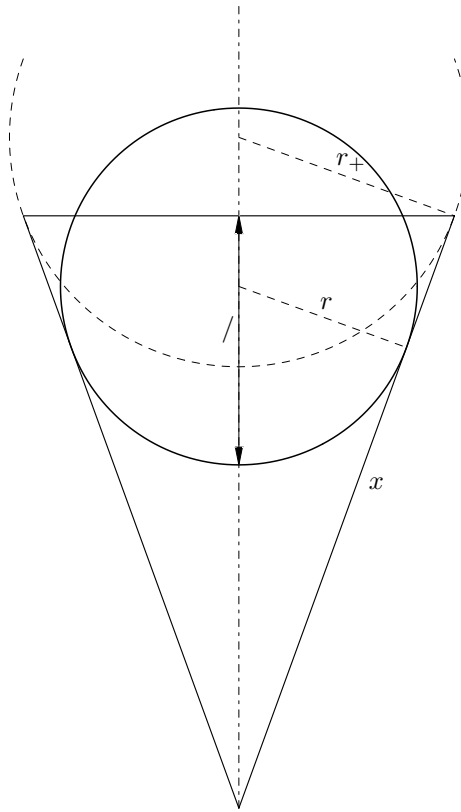


Fig.2.

Així doncs, el volum d'aigua vessada serà

$$V(r) = V_2(r) = \pi(a(r))^2 \left(r - \frac{a(r)}{3} \right)$$

si $r_1 < r \leq r_2$.

El volum vessat finalment resulta

$$V_2(r) = \frac{\pi}{3} \left(h - \frac{r(1 - \sin \alpha)}{\sin \alpha} \right)^2 \left(\frac{r(1 + 2 \sin \alpha)}{\sin \alpha} - h \right)$$

En aquest cas també es tracta d'una funció cúbica de r .

Com hem dit abans, si $r > r_2$, l'esfera deixa de ser tangent al con i en aquest cas l'altura del casquet submergit és

$$\begin{aligned} a = a(r) &= r - \sqrt{r^2 - R^2} = \\ &= r - \sqrt{r^2 - h^2 \tan^2 \alpha}. \end{aligned}$$

Per tant, el volum d'aigua vessada és

$$\begin{aligned} V(r) &= V_3(r) = \pi(a(r))^2 \left(r - \frac{a(r)}{3} \right) = \\ &= \frac{\pi}{3} \left(r - \sqrt{r^2 - h^2 \tan^2 \alpha} \right)^2 \left(2r + \sqrt{r^2 - h^2 \tan^2 \alpha} \right) \end{aligned}$$

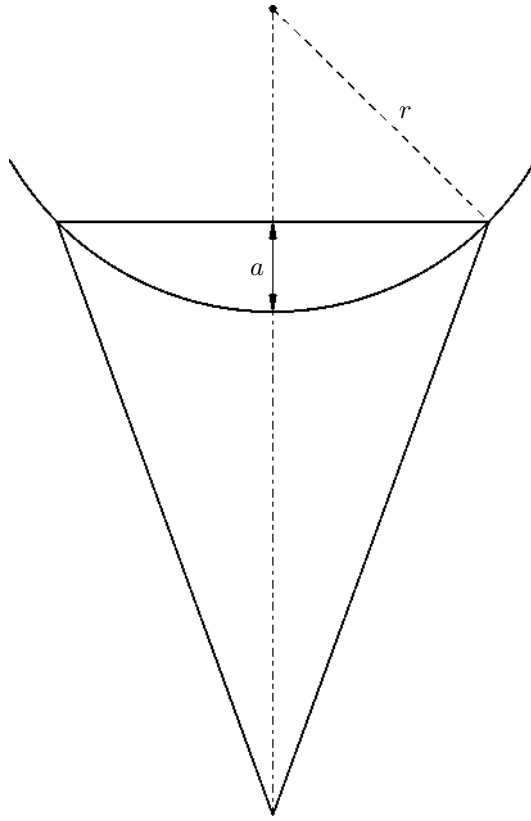


Fig.3.

La funció $V_3(r)$ ja no és una cúbica, com en els casos anteriors. El límit d'aquesta funció quan $r \rightarrow \infty$ és 0, cosa que es dedueix apel·lant a la intuïció física, i també calculant directament a la fórmula. La funció $V(r)$ està definida en tres trams (figura 4), tal com hem dit.

Al primer, de 0 a r_1 , $V_1(r)$ és creixent amb r . Al tercer, de r_2 a $+\infty$, $V_3(r)$ és decreixent amb r . Per tant, l'extrem, cas que hi sigui, només cal buscar-lo a l'interval $[r_1, r_2]$ on la funció és $V_2(r)$. Derivant l'expressió $V_2(r) = \pi(a(r))^2 \left(r - \frac{a(r)}{3} \right)$ resulta

$$V_2'(r) = \pi a(r) \left[(2r - a(r))a'(r) + a(r) \right]$$

que s'anul·la si $a(r) = 0$, és a dir, si $r = h \frac{\sin \alpha}{1 - \sin \alpha} > r_2$ i queda fora de l'interval $[r_1, r_2]$; o bé si

$$\begin{aligned} 0 &= (2r - a(r))a'(r) + a(r) = 2ra'(r) + (1 - a'(r)) = \\ &= \frac{1}{\sin \alpha} \left[r \left(2 \sin \alpha - 1 - \frac{1}{\sin \alpha} \right) + h \right] \end{aligned}$$

és a dir, si

$$r = r_c = h \frac{\sin \alpha}{(1 - \sin \alpha)(1 + 2 \sin \alpha)}.$$

Notem que $r_1 < r_c < r_2$ i que r_c és un punt de màxim perquè és el primer dels dos punts crítics d'una cúbica $V_2(r)$ amb el coeficient del terme de grau tres positiu.

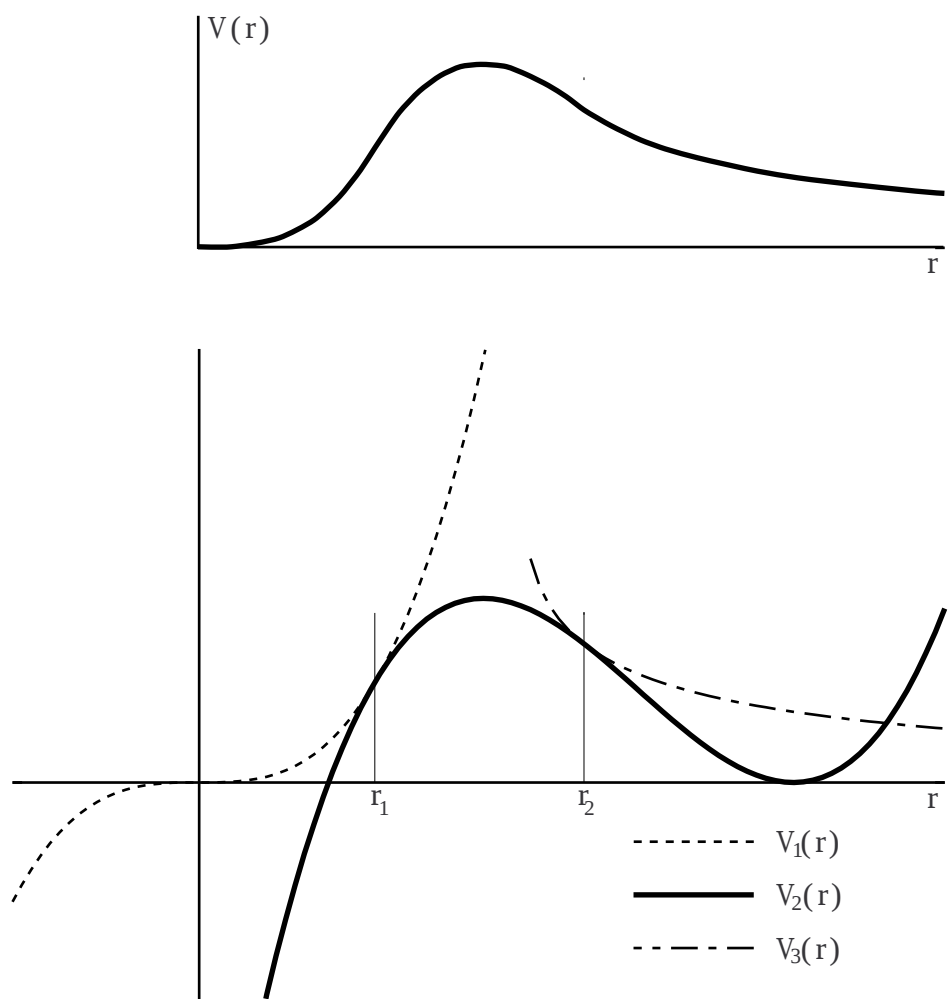


Fig.4.



XXXVIII OLIMPIADA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

14 de desembre de 2001, de 16 a 20h.

- 1.—Trobeu tots els polinomis $p(x)$ tals que $p(x^2) = (p(x))^2$.
- 2.—Un rectangle de costats 20 cm i 15 cm té un vèrtex situat en el centre d'una circumferència i el vèrtex oposat situat sobre la circumferència. Calculeu la longitud de la corda que passa pels altres dos vèrtexs del rectangle
- 3.—Esbrineu si en el conjunt de nombres $\{1, 2, 3, \dots, 10^9\}$ n'hi ha més que contenen la xifra 9 o més que no la contenen.
- 4.—Trobeu el mínim nombre natural n que és múltiple de 3 i tal que, a més, $n + 1$ és múltiple de 5, $n + 2$ és múltiple de 7, $n + 3$ és múltiple de 9 i $n + 4$ és múltiple de 11.



XXXVIII OLIMPIADA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

15 de desembre de 2001, de 9 a 13h.

- 5.—Demostreu que si x i y són dos nombres reals tals que $\sin x - \sin y = x - y$, llavors necessàriament $x = y$.
- 6.—
- a) Demostreu que, en qualsevol triangle, el perímetre del triangle, P , l'àrea del triangle, A , i el radi R del cercle inscrit satisfan $R \cdot P = 2A$.
 - b) D'entre tots els triangles de base 1 i altura 1, determineu quin té el cercle inscrit d'àrea màxima i calculeu l'àrea d'aquest cercle.
- 7.—Tenim unes partícules sobre la recta que cada any esclaten, totes alhora, i cadascuna d'elles es converteix en dues que van a parar a un costat i a l'altre, a un metre de distància de la que ha esclatat. Quan a un mateix punt hi van a parar dues partícules, es destrueixen i desapareixen. Si a l'any 0 només hi havia una partícula, situada en el punt 0 de la recta, quantes partícules hi haurà l'any 2001, després que hagin esclatat?
- 8.—
- a) Tenim un cub i pintem a l'atzar 3 cares de color vermell i 3 cares de color groc. Calculeu la probabilitat que les tres cares de color vermell tinguin un vèrtex en comú.
 - b) Tenim 8 cubs de la mateixa mida, cadascun pintat a l'atzar amb tres cares de color vermell i tres cares de color groc. Els colloquem aleatòriament, de manera que formin un cub més gros. Quina és la probabilitat que totes les cares exteriors d'aquest cub siguin del mateix color?
 - c) I si ho fem amb 27 cubs?



XXXVIII OLIMPIADA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

14 i 15 de desembre de 2001.

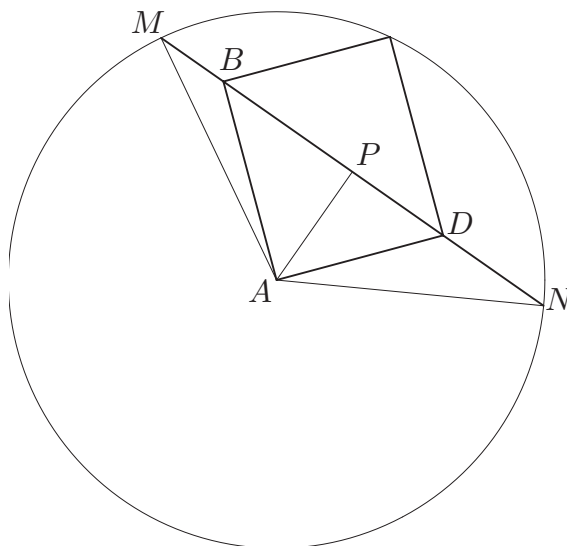
Solucions:

1.—Escrivim $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$.

Si tots els coeficients són nuls, tenim el polinomi $p(x) = 0$ que compleix la condició. Sigui, doncs, $a_n \neq 0$. Suposem que hi ha algun altre coeficient no nul. Sigui a_k l'immediat no nul anterior a a_n , és a dir, $a_k \neq 0$ i $a_i = 0$ si $k < i < n$. Aleshores el polinomi $(p(x))^2$ conté el terme no nul $2a_k a_n x^{k+n}$ i el polinomi $p(x^2)$ no el conté, ja que $p(x)$ no pot tenir el terme en $x^{\frac{1}{2}(n+k)}$. Per tant ha de ser $a_k = 0$ per a tot $k < n$ i $p(x)$ ha de ser un monomi, ax^n . Com que s'ha de complir $a^2 = a$, ha de ser $a = 0$ o bé $a = 1$. Les úniques possibilitats són $p(x) = 0$ (que ja havíem trobat abans), $p(x) = 1$ i $p(x) = x^n$ amb $n \geq 1$.

2.—Posem $AD = 15$; $AB = 20$. Pel teorema de Pitàgores es dedueix de seguida que el radi del cercle és $AC = 25$.

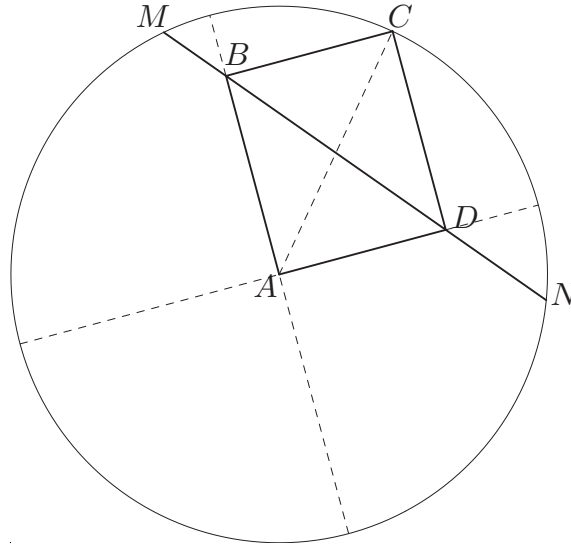
2.1.—Solució 1:



En el triangle rectangle BAD , el segment AP és l'altura sobre la hipotenusa, que fa 25 perquè és igual al radi del cercle. Calculant l'àrea del triangle ABD ens surt $PA \cdot BD = AD \cdot AB$, d'on $PA = 20 \cdot 15/25 = 12$. La meitat de la corda

buscada, PN , es pot calcular pel teorema de Pitàgores en el triangle rectangle PAN . Surt $PN = \sqrt{481}$ i obtenim que la corda $MN = 2\sqrt{481}$.

2.2.– Solució 2:



Posem $DN = x$, $MB = y$. Si calculem la potència del punt D respecte de la circumferència fent servir la corda MN i la que perllonga el costat AD , tindrem $y(x + 25) = 10 \cdot 40$. Semblantment, per a la potència del punt B tindrem $y(x + 25) = 4 \cdot 45$. Si resollem el sistema format per aquestes dues equacions trobem $x = \sqrt{481} - 9$; $y = \sqrt{481} - 16$, i d'aquí, $MN = x + y + 25 = 2\sqrt{481}$.

3.– En lloc dels nombres $1, 2, \dots, 10^9$ podem considerar els nombres

$$0, 1, 2, \dots, 999\,999\,999$$

o sigui, tots els nombres de nou xifres (posant zeros a l'esquerra dels nombres de menys de nou xifres). N'hi ha 10^9 .

D'aquests, sense la xifra 9 n'hi ha 9^9 . Ara bé,

$$\frac{10^9}{9^9} = \left(1 + \frac{1}{9}\right)^9 = 1 + 9 \cdot \frac{1}{9} + \dots > 2.$$

Per tant, n'hi ha més amb la xifra 9 que sense.

4.–

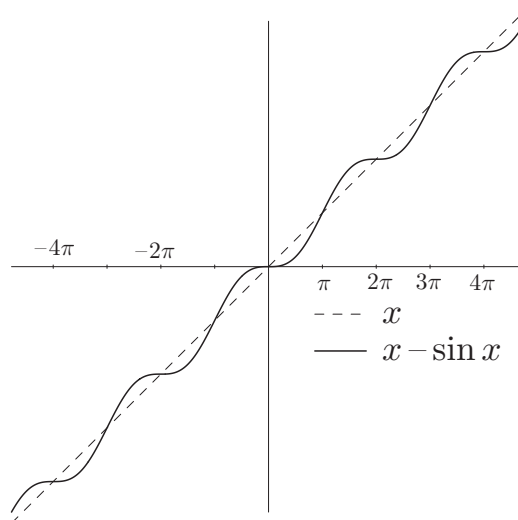
4.1.– Solució 1: La solució és $n = 1734$. Es pot trobar amb aritmètica de congruències (restes xineses) o senzillament per tempteig. Per trobar-la per tempteig, es pot raonar de la manera següent:

La condició que n sigui múltiple de 3 és redundant si impossem que $n + 3$ sigui múltiple de 9, i per tant podem deixar-la de banda. La primera aparició d'un múltiple de 5 i un múltiple de 7 consecutius és 20, 21. Anem-hi sumant $5 \cdot 7 = 35$ les vegades que calgui (amb la qual cosa seguirem tenint un múltiple de 5 i un múltiple de 7 consecutius) fins que el nombre següent sigui un múltiple de 9. Així s'arriba, en quatre intents, a 160, 161, 162. Ara anem-hi sumant $5 \cdot 7 \cdot 9 = 315$ fins a aconseguir que el nombre següent sigui un múltiple de 11. Després de cinc intents s'arriba a 1735, 1736, 1737, 1738, que és la solució mínima al problema plantejat.

4.2.– Solució 2: Observem que n ha de complir $n \equiv -1 \pmod{5}$, $n \equiv -2 \pmod{7}$, $n \equiv -3 \pmod{9}$ i $n \equiv -4 \pmod{11}$. Els residus es van incrementant en -1 i els mòduls en 2. Això ens permet multiplicar per 2 les quatre congruències (2 és primer amb tots els mòduls) i posar $2n \equiv -2 \equiv 3 \pmod{5}$, $2n \equiv -4 \equiv 3 \pmod{7}$, $n \equiv -6 \equiv 3 \pmod{9}$ i $n \equiv -8 \equiv 3 \pmod{11}$. És a dir, $2n - 3$ és un múltiple comú de 5, 7, 9, i 11, i per tant del mínim comú múltiple 3465. Tenim $2n - 3 = 3465k$, o bé $2n = 3465k + 3$ i per a $k = 1$ obtenim el mínim valor, que és $2n = 3468$, $n = 1734$.

4.3.– Solució 3: La solució pel mètode de les restes xineses s'obté plantejant el problema com el sistema d'equacions $n + 1 \equiv 0 \pmod{5}$, $n + 2 \equiv 0 \pmod{7}$, $n + 3 \equiv 0 \pmod{9}$, $n + 4 \equiv 0 \pmod{11}$. Això és el mateix que $n \equiv 4 \pmod{5}$, $n \equiv 5 \pmod{7}$, $n \equiv 6 \pmod{9}$, $n \equiv 7 \pmod{11}$. Les dues primeres equacions són equivalents a $n \equiv 19 \pmod{35}$. Aquesta i la tercera són equivalents a $n \equiv 159 \pmod{315}$. Aquesta i la quarta són equivalents a $n \equiv 1734 \pmod{3465}$. Aquesta última congruència expressa, de fet, el conjunt de totes les solucions del problema.

5.–



Escrivim la igualtat donada com $x - \sin x = y - \sin y$. D'aquesta manera, el problema

es redueix a demostrar que la funció $f(x) = x - \sin x$ és injectiva. De fet, és una funció estrictament creixent, ja que la seva derivada és $f'(x) = 1 - \cos x$, que és positiva a tot arreu excepte en punts aïllats.

6.—

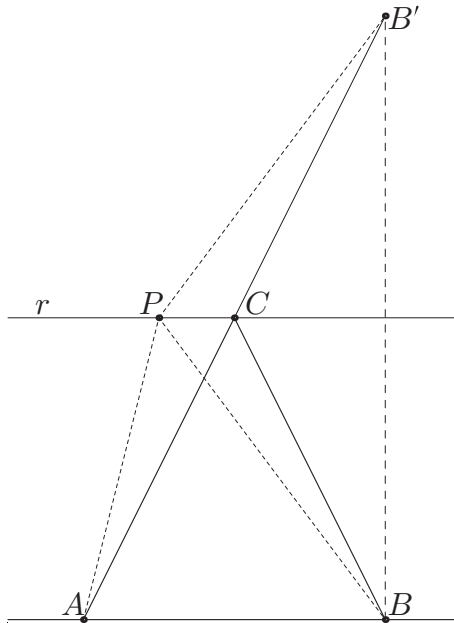
- a) Si unim amb segments l'incentre del triangle a cadascun dels vèrtexs, es formen tres triangles. Tots ells tenen altura R i les seves bases respectives són les longituds dels costats del triangle, que anomenarem X , Y i Z . Per tant, l'àrea del triangle gran és igual a

$$A = \frac{1}{2} R \cdot X + \frac{1}{2} R \cdot Y + \frac{1}{2} R \cdot Z = \frac{1}{2} R \cdot P.$$

Aquest resultat es fa servir per resoldre la segona part del problema:

- b) D'entre tots els triangles de base 1 i altura 1, el que té el cercle inscrit d'àrea màxima és el que té el radi R màxim, i per tant és el de perímetre mínim, ja que $R \cdot P = 2A = 1$.

El triangle de base 1 i altura 1 que té el perímetre mínim és l'isòsceles. En efecte, si A i B són els vèrtexs de la base i tracem la recta r paral·lela a distància 1, el tercer vèrtex estarà sobre r . Si B' és el simètric de B respecte de r , la suma de distàncies $PA + PB$ d'un punt P qualsevol de la recta als punts A i B és $PA + PB = PA + PB' \leq AB'$. Per tant el mínim s'assolirà al punt C d'intersecció del AB' amb la recta r . El triangle ABC resulta isòsceles.

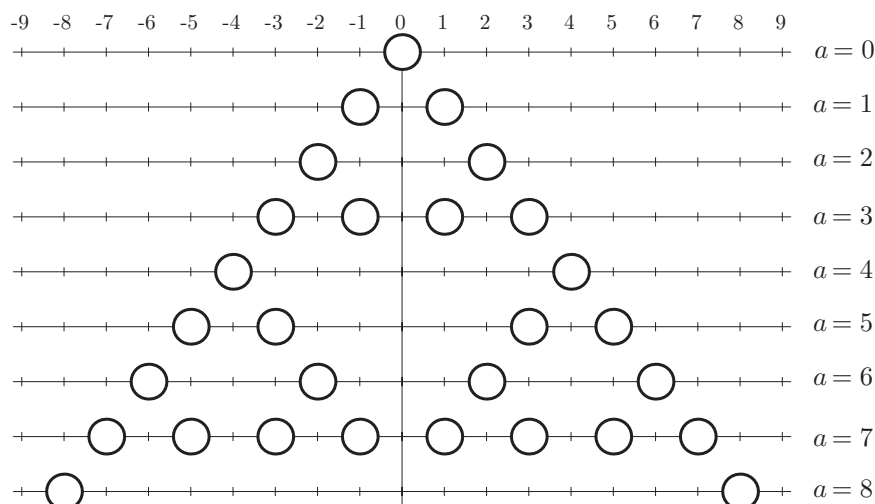


Vist això, el perímetre del triangle isòsceles de base 1 i altura 1 és $1 + \sqrt{5}$. La relació $R \cdot P = 1$ ens dóna el radi R i resulta que l'àrea πR^2 del cercle és igual

a

$$\frac{1}{8} \pi (3 - \sqrt{5})$$

7.—Les posicions de les partícules en els primers anys són les següents:



Veiem que per a $n = 0, 1, 2$, a l'any 2^n hi ha dues partícules situades en els punts $\pm 2^n$.

Suposem que això és cert fins a $n = k$. A l'any $2^k + 2^k$ la partícula situada en el punt -2^k haurà donat lloc a dues partícules situades en els punts $-2^k - 2^k$ i $-2^k + 2^k = 0$, i la partícula situada en el punt 2^k haurà donat lloc a dues partícules situades en els punts $2^k + 2^k$ i $2^k - 2^k = 0$. Les dues partícules situades en el punt 0 es destrueixen i a l'any $2^k + 2^k = 2^{k+1}$ hi haurà dues partícules situades en els punts $\pm 2^{k+1}$.

Amb això podem afirmar que, per a tot n , a l'any 2^n hi haurà dues partícules situades en els punts $\pm 2^n$. Ara bé,

$$2001 = 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^4 + 1$$

i amb el que hem vist tenim que

- a l'any 2^{10} hi ha 2 partícules en els punts $\pm 2^{10}$;
- a l'any $2^{10} + 2^9$ hi ha 4 partícules en els punts $\pm 2^{10} \pm 2^9$;
- a l'any $2^{10} + 2^9 + 2^8$ hi ha 8 partícules en els punts $\pm 2^{10} \pm 2^9 \pm 2^8$; etc.

Per tant, a l'any 2001 hi ha $2^7 = 128$ partícules en els punts $\pm 2^{10} \pm 2^9 \pm 2^8 \pm 2^7 \pm 2^6 \pm 2^4 \pm 1$.

Observem que el nombre de partícules que hi haurà a l'any a serà 2 elevat a la suma de les xifres de a escrit en base 2.

8.—

- a) Podem imaginar les cares del dau numerades de 1 a 6 com és habitual, és a dir, amb les cares oposades sumant 7.

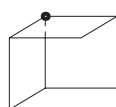
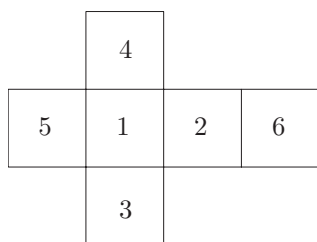
Llavors, si hem d'escollir tres cares per pintar-les vermelles (les altres ja seran grogues) el nombre de maneres de fer-ho és

$$\binom{6}{3} = PR_{3,3}^6 = 20.$$

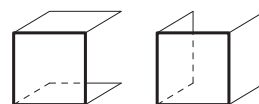
D'aquestes 20 maneres n'hi ha 8 (una per cada vèrtex) amb les cares vermelles *concurrents* (i en cada cas, també ho seran les grogues). Concloem que, suposat que un dau té tres cares vermelles i tres grogues, la probabilitat que les tres cares del mateix color siguin concurrents és

$$p(\text{concurrents}) = \frac{2}{5}.$$

També es pot veure que les configuracions amb tres cares vermelles “consecutives” (i en cada cas, també ho seran les grogues) venen determinades per la cara central, que pot ocupar 6 posicions en el cub, i per cada possible cara hi ha encara dues posicions. En total hi ha 12 possibles configuracions amb cares consecutives.



Cares
concurrents



Cares
consecutives

Com a camí alternatiu, es poden escriure totes les possibilitats. Per exemple, amb la numeració habitual dels daus, tal com mostra la figura, tenim les 20 possibilitats de pintar 3 cares vermelles i 3 grogues, en dues columnes. La de l'esquerra correspon a cares concurrents en un vèrtex. Les de la dreta a cares consecutives (en negreta hi ha la indicació de la cara central de les vermelles).

V indica cara vermella i G cara groga.

Cares concurrents						Cares consecutives					
1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
V	V	V	G	G	G	V	V	G	G	V	G
G	G	G	V	V	V	G	G	V	V	G	V
V	G	V	G	V	G	V	V	G	G	G	V
G	V	G	V	G	V	G	G	V	V	V	G
G	V	V	G	G	V	V	G	G	G	V	V
V	G	G	V	V	G	G	V	V	V	G	G
G	G	V	G	V	V	G	V	V	G	V	G
V	V	G	V	G	G	V	G	G	V	G	V
						V	G	V	V	G	G
						G	V	G	G	V	V
						V	G	V	G	G	V
						G	V	G	V	V	G

També trobem, és clar, la probabilitat $2/5$ enunciada per a les cares concurrents. Alhora podem observar que ens altres 12 cubs, les cares del mateix color són “consecutives”, l’una a continuació de l’altra. Serà, doncs, $p(\text{consecutives}) = 3/5$.

- b) En primer lloc s’observa que, a fi i efecte que totes les cares exteriors d’un cub format per l’apilament de 8 cubs petits siguin del mateix color, necessàriament els 8 cubs que agafem per posar com a vèrtexs del cub gran han de tenir les tres cares vermelles concurrents en un vèrtex (i les tres cares grogues, també). Per tant, cada un dels 8 cubs ha de ser del tipus de cares de mateix color “concurrents”, i en aquest cas el vèrtex només pot estar en una de les 8 posicions que pot ocupar el vèrtex d’un cub petit en el seu forat. La probabilitat que aquestes coses passin és

$$\left(\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{8}\right)^8 = \frac{1}{20^8}.$$

Si féssim el mateix raonament per a les cares grogues, tindríem la mateixa probabilitat. Llavors, la probabilitat total que les cares exteriors del cub $2 \times 2 \times 2$ siguin del mateix color és

$$p = \frac{2}{20^8}.$$

- c) Per al cub format amb 27 cubs petits, que tindrà dimensions $3 \times 3 \times 3$, comptarem la probabilitat que totes les cares exteriors siguin vermelles i al final multiplicarem per 2 el resultat pel cas que siguin grogues.

- 1) Els 8 cubs en posició de vèrtex del cub gran. Només poden tenir una posició correcta per compondre el cub gran. La probabilitat que ens mostrin totes les cares de color vermell és, raonant com abans,

$$p_1 = \frac{1}{20^8}.$$

2) Els 12 cubs en posició central d'una aresta. Poden haver estat triats dels concurrents o dels consecutius. En el primer cas (amb probabilitat $2/5$) només mostra dues cares vermelles en 2 de les 8 possibles posicions en que pot entrar en el seu forat; la probabilitat que mostri les dues cares vermelles és $1/4$. Si s'hagués triat d'entre els consecutius (amb probabilitat $3/5$), només mostraria dues cares vermelles en 2 de les 12 posicions possibles, i això tindria probabilitat $1/6$. En total, doncs, la probabilitat que en una de les posicions centrals de l'aresta es vegin dues cares vermelles és

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{5},$$

i si això ha de succeir en els 12 cubs, tindrem

$$p_2 = \frac{1}{5^{12}}.$$

3) Els 6 cubs en posició central d'una cara. Estigui pintat com estigui, un cub amb tres cares vermelles i tres de grogues té una probabilitat $1/2$ de mostrar una cara vermella. Si ho han de complir tots sis, tindrem

$$p_3 = \frac{1}{2^6}.$$

4) El cub que és al centre del cub gran i que no es veu. El podem posar com vulguem.

La probabilitat que el cub gran tingui totes les cares exteriors vermelles és

$$p_1 p_2 p_3 = \frac{1}{20^8} \cdot \frac{1}{5^{12}} \cdot \frac{1}{2^6}$$

i que totes siguin del mateix color

$$p = 2 p_1 p_2 p_3 = 2 \cdot \frac{1}{20^8} \cdot \frac{1}{5^{12}} \cdot \frac{1}{2^6} = 0.5 \cdot 10^{-20}.$$



XXXIX OLIMPIADA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

13 de desembre de 2002, de 16 a 20h.

1.—Amb dues lletres, a , b , formem les infinites paraules que tenen un nombre finit de lletres i les ordenem alfabèticament.

- a) Quines paraules tenen una paraula immediata posterior?
- b) Quines paraules tenen una paraula immediata anterior?
- c) Demostreu que si una paraula p_1 és anterior a una paraula p_2 , i p_2 acaba en b , aleshores entre p_1 i p_2 hi ha paraules acabades en a i paraules acabades en b .

2.—En el pla tenim una recta r , un punt P sobre r i un punt Q fora de la recta r . Per cada punt R de r considerem el nombre

$$\lambda = \frac{PR + PQ}{QR}.$$

- a) Busqueu els valors màxim i mínim del nombre λ i digueu on ha d'estar situat el punt R per obtenir aquest màxim i aquest mínim.
- b) A quin valor tendeix λ quan R tendeix cap a l'infinit?

3.—Cinc pirates van arribar a una illa deserta i van decidir amagar els seus tresors en un terreny pla on hi havia els cinc arbres més alts de l'illa. Van cavar cinc forats en els vèrtexs d'un pentàgon (convex i no regular). En el punt mitjà de cada costat del pentàgon hi havia un dels cinc arbres. Sobre cada sot hi van plantar un roser.

Quan van tornar a l'illa, per recuperar els tresors no hi havia cap roser. La sequera va marcir els primers brots... Només hi havia els cinc arbres...

Un dels pirates, que recordava coses que havia après de jove, els va dir: No us preocupeu. Recuperarem els tresors!

Va recordar:

- a) Donats els punts mitjans dels costats d'un triangle, es poden recuperar els seus vèrtexs.
- b) Si coneixem els punts mitjans de tres costats d'un quadrilàter, podem trobar el punt mitjà del quart costat.
- c) Raoneu la resposta positiva als apartats a) i b). Digueu com van recuperar els pirates el seu tresor, coneixent la resposta positiva de a) i b).

- 4.—En el pla considerem una circumferència i un punt exterior P . Des de P es dibuixen dues rectes tangents a la circumferència en punts A i B . En l'arc més petit AB es considera un punt T i es dibuixa una altra recta tangent per T que talla PA i PB en punts Q i R , respectivament.

Determineu el perímetre del triangle PQR en funció de PA .



XXXIX OLIMPIADA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

14 de desembre de 2002, de 9 a 13h.

- 5.—Considereu dos polígons regulars de n costats de longitud a , iguals i superposats. Un d'ells es gira un angle π/n radians respecte d'un eix perpendicular al pla que els conté i que passa pel centre dels polígons, i tot seguit, es desplaça paral·lelament segons la direcció de l'eix de gir. A quina distància cal desplaçar el polígon per tal que en unir cada vèrtex d'un amb els dos vèrtexs més propers de l'altre, s'obtinguin com a cares laterals triangles equilàters?
- 6.—Esbrineu per a quins punts de l'eix d'una paràbola es poden traçar el màxim nombre possible de normals a la paràbola. Comproveu que la distància d'aquests punts al vèrtex és més gran que la distància d'aquests punts als peus de les altres normals.
- 7.—Sigui ABC un triangle.
- a) Determineu els punts P del pla que compleixen
- $$\text{Àrea}(PAB) = \text{Àrea}(PBC) = \text{Àrea}(PCA) \quad (*)$$
- b) Sigui P un punt interior del triangle que compleixi $(*)$, i siguin P_1, P_2, P_3 els punts interiors als triangles PBC, PCA, PAB en les mateixes condicions. Determineu l'àrea del triangle $P_1P_2P_3$ en funció de l'àrea del triangle ABC .
- 8.—Un jugador de tennis vol enfrontar-se a dos rivals A i B per adquirir prestigi amb bons resultats. La probabilitat de guanyar al jugador A és més petita que la de guanyar a B perquè el primer és de més categoria. Li ofereixen tres partits, dels quals n'ha de guanyar al menys dos de seguits, i pot triar la seqüència dels contraris: o bé $A - B - A$, o bé $B - A - B$.

Quina seqüència de partits li és més favorable?



XXXIX OLIMPIADA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

13 i 14 de desembre de 2002.

Solucions:

1.–

- a) Totes les paraules tenen immediata posterior. La immediata posterior de la paraula $\mathcal{P} = x_1x_2 \cdots x_n$ és $\mathcal{P}a = x_1x_2 \cdots x_na$. ($x_i \in \{a, b\}$).
- b) Les acabades en a tenen immediata anterior. La immediata anterior de $\mathcal{P}a$ és $\mathcal{P}$. Les acabades en b no tenen immediata anterior ja que abans de $\mathcal{P}b$ hi ha, per exemple, les infinites $\mathcal{P}aQ$, on Q és una paraula qualsevol.
- c) Siguin les paraules $\mathcal{P}_1$ i $\mathcal{P}_2$ on $\mathcal{P}_1 = x_1x_2 \cdots x_r$ i $\mathcal{P}_2 = y_1y_2 \cdots y_sb$, i les x_i i les y_j són lletres a o b ($x_i, y_j \in \{a, b\}$). Si $\mathcal{P}_1$ és anterior a $\mathcal{P}_2$ haurà de ser, o bé

$$x_1 = y_1, \quad x_2 = y_2, \quad \dots \quad x_j = y_j, \quad x_{j+1} = a, \quad y_{j+1} = b,$$

o bé

$$x_1 = y_1, \quad x_2 = y_2, \quad \dots \quad x_r = y_r.$$

En el primer cas tenim $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}aQ_1$ i $\mathcal{P}bQ_2b$, on Q_1 i Q_2 són paraules eventualment buides, i $\mathcal{P} = x_1x_2 \cdots x_j = y_1y_2 \cdots y*_j$.

Les paraules $\mathcal{P}aQ_1a$ i $\mathcal{P}aQ_1b$ estan entre les dues

$$\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}aQ_1 < \mathcal{P}aQ_1a < \mathcal{P}aQ_1b < \mathcal{P}bQ_2b = \mathcal{P}_2.$$

En el segon cas $\mathcal{P}_1$ és prefix de $\mathcal{P}_2$ i ha de ser $\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_1Qb$ on Q és una paraula eventualment buida. Les paraules $\mathcal{P}_1Qa$ i $\mathcal{P}_1Qab$ estan entre les dues

$$\mathcal{P}_1 < \mathcal{P}_1Qa < \mathcal{P}_1Qab < \mathcal{P}_1Qb = \mathcal{P}_2.$$

2.–

2.1.– PRIMERA SOLUCIÓ:

Per la pròpia definició, $\lambda \geq 1$. Si $R = P$ surt $\lambda = 1$ i aquest és l'únic punt on pot valer 1. Per tant, 1 és el mínim de λ .

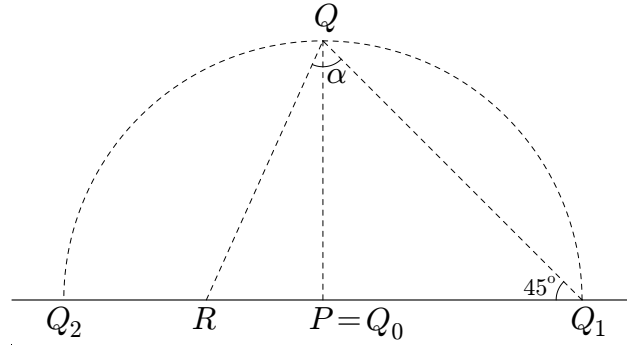
Sigui Q_0 la projecció ortogonal de Q sobre la recta r . Hem de distingir dos casos segons si $Q_0 = P$ o $Q_0 \neq P$.

Cas 1.- $Q_0 = P$

En aquest cas els punts simètrics respecte de P donen el mateix valor de λ . Siguin Q_1 i Q_2 tals que $PQ_1 = PQ_2 = PQ$. Aleshores $PR + PQ = RQ_1$ i per tant

$$\lambda = \frac{RQ_1}{QR} = \frac{\sin \alpha}{\sin 45^\circ}$$

que té el màxim per $\alpha = 90^\circ$ i $\lambda = 1/\sin 45^\circ = \sqrt{2}$, $R = Q_2$. Anàlogament $R = Q_1$ dona també el mateix valor i és un altre màxim.

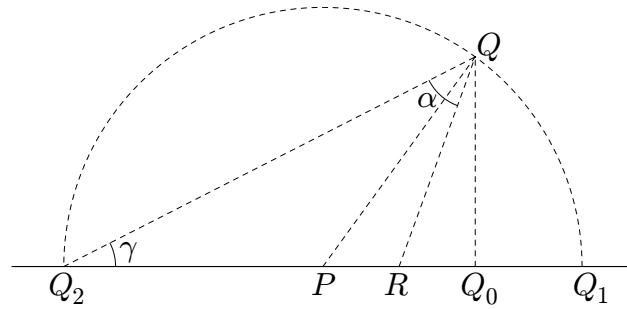


Quan $R \rightarrow \infty$ tenim que $\alpha \rightarrow 180^\circ - 45^\circ$ i $\lambda \rightarrow 1$.

Cas 2.- $Q_0 \neq P$

En aquest cas cal distingir dues situacions.

Cas 2.a.- R i Q_0 són al mateix costat de P .

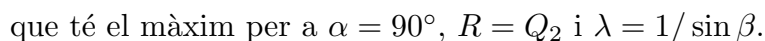


$$\lambda = \frac{PR + PQ}{QR} = \frac{Q_2R}{QR} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}$$

que té el màxim per a $\alpha = 90^\circ$, $R = Q_1$ i $\lambda = 1/\sin \gamma$.

Cas 2.b.- P està entre R i Q_0 .

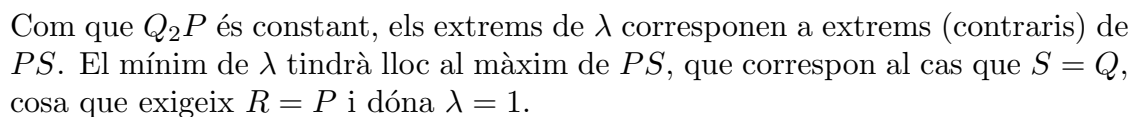
$$\lambda = \frac{PR + PQ}{QR} = \frac{Q_1R}{QR} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$



Tant en un cas com en l'altre, quan $R \rightarrow \infty$, $\alpha \rightarrow 180^\circ - \gamma$ o $180^\circ - \beta$ i $\lambda \rightarrow 1$.

La circumferència de centre P que passa per Q talla la recta r en els punts Q_1 i Q_2 . Suposem que R és a la mateixa semirecta d'origen P que la projecció de Q sobre r . Unim R amb Q i tracem una paral·lela per P que talla el segment QQ_2 en el punt S . Tenim

on la última igualtat surt pel teorema de Thales.



El màxim de λ tindrà lloc quan PS sigui mínim, és a dir, quan $S = T$ el peu de la perpendicular traçada des de P al segment Q_2Q . En aquest cas ha de ser QR

perpendicular a Q_2Q i per tant ha de ser $R = Q_1$, que dóna $\lambda = \frac{Q_2Q_1}{QQ_1}$. Si R estigués situat a l'altre costat, aleshores s'hauria de fer una construcció equivalent *mutatis mutandis* i ens donaria un altre màxim a $R = Q_2$ (corresponent al punt T'). El més gran de tots dos és el màxim absolut i correspon a la menor de les dues distàncies PT i PT' . En el cas que PQ sigui perpendicular a r , els dos màxims tenen el mateix valor.

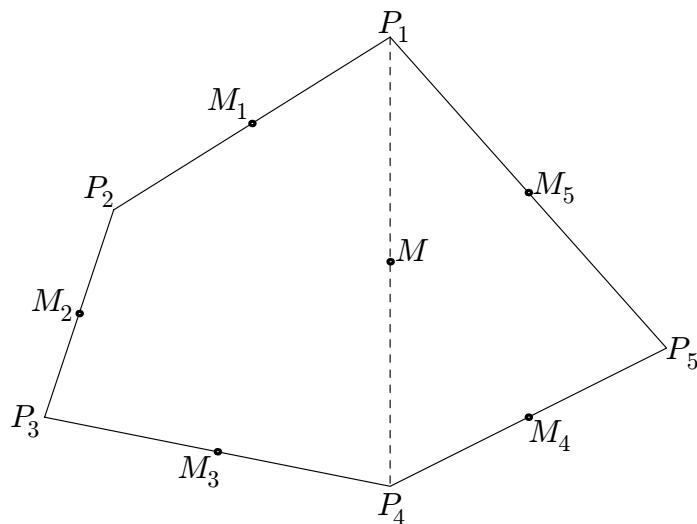
Si fem tendir R a infinit, el pendent de la recta QR tendeix a 0, la de la paral·lela PS també, i el punt S tendeix a Q_2 , de manera que $\lambda \rightarrow 1$.

2.3.— TERCERA SOLUCIÓ:

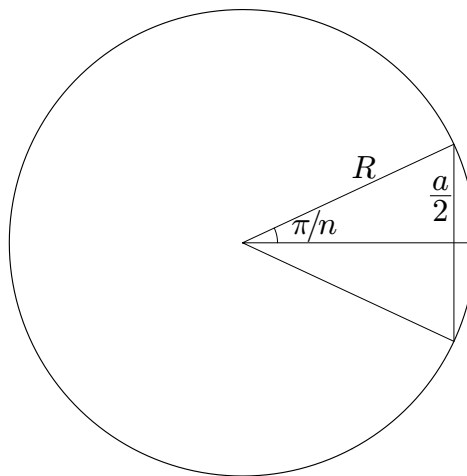
També es pot resoldre el problema buscant els extrems de la funció λ en funció d'un paràmetre sobre la recta.

3.—

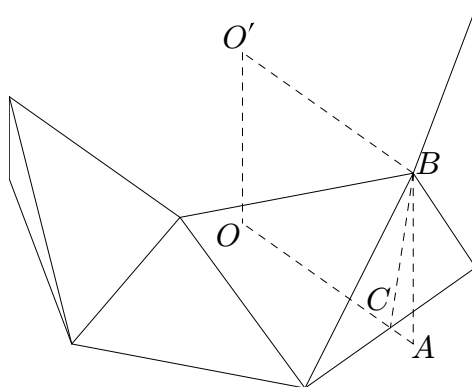
- Siguin M_a , M_b i M_c els punts mitjans d'un triangle ABC . Traçant per M_a una paral·lela al segment M_bM_c tenim la recta que conté el costat BC del triangle. Podem fer el mateix amb M_b i M_c i reconstruïm el triangle.
- Cal recordar que els punts mitjans d'un quadrilàter formen un paral·lelogram i si en tenim tres vèrtexs podem trobar-ne el quart.
- Per $b)$ podem trobar M ja que $P_1P_2P_3P_4$ és un quadrilàter del qual coneixem els punts mitjans M_1 , M_2 , M_3 . Per $a)$, coneguts M_4 , M_5 i M , podem trobar P_4 , P_5 i P_1 . El simètric de P_1 respecte de M_1 és P_2 i el de P_2 respecte de M_2 és P_3 .



- Tenim $PQ + QR + RP = PQ + QT + TR + RP = PQ + QA + BR + RP = PA + PB = 2PA$.



També es pot resoldre el problema resolent simplement un triangle rectangle ABC , rectangle en A , que té el catet CA igual a la diferència entre el radi i l'apotema del polígon, l'altre catet $AB = d$, la distància demanada, i la hipotenusa $BC = a\sqrt{3}/2$ igual a l'altura del triangle equilàter lateral, (essent a el costat del polígon donat).



- 6.—Si $y = ax^2$ és la paràbola, consideri's un punt (x_0, ax_0^2) d'aquesta. La normal per aquest punt talla l'eix d'ordenades en el punt $(0, ax_0^2 + 1/2a)$. Així, doncs, pels punts $(0, y)$ amb $y > 1/2a$ es poden traçar tres normals. La longitud dels segments normals “no verticals” és

$$\sqrt{x_0^2 + \frac{1}{4a^2}}$$

i ara només cal provar que

$$\sqrt{x_0^2 + \frac{1}{4a^2}} < ax_0^2 + \frac{1}{2a},$$

que es demostra elevant al quadrat.

- 7.—Un triangle divideix el pla en 7 regions: una fitada $\mathcal{I}$ (interna), i sis no fitades, tres de tipus $\mathcal{R}$ i tres de tipus $\mathcal{S}$. (figura [1](#))

A les regions de tipus $\mathcal{R}$ no hi pot haver cap punt que compleixi la propietat ja que $\text{Àrea}(PAC) < \text{Àrea}(PAB)$. (figura [2](#))

Busquem els punts de les regions $\mathcal{S}$. Els triangles PAB i PAC tenen la mateixa base PA i la mateixa àrea. Per tant, han de tenir la mateixa altura i això exigeix que la recta PA sigui paral·lela a la recta BC .

Anàlogament, la recta PC ha de ser paral·lela a la AB , i el punt P és quart el vèrtex d'un paral·lelogram que té els altres tres vèrtexs a A , B i C . (figura [3](#) i figura [4](#))

Sigui P un punt interior que compleixi la condició, i M el punt mitjà de BC . Es compleix que $\text{Àrea}(PCM) = \text{Àrea}(PMB)$, i com que, per hipòtesi és $\text{Àrea}(PAC) =$

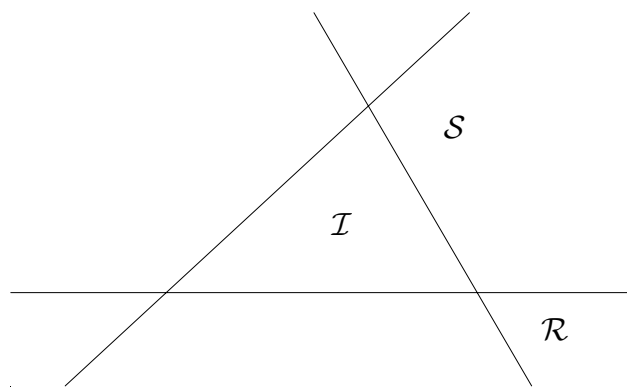


Fig.1.

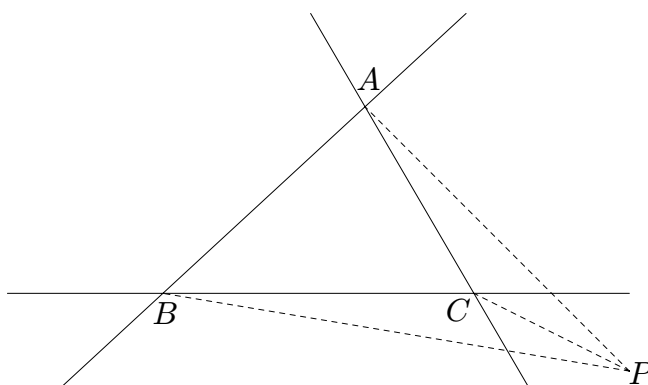


Fig.2.

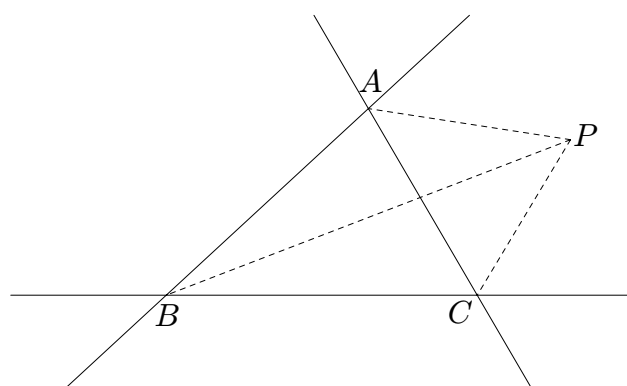


Fig.3.

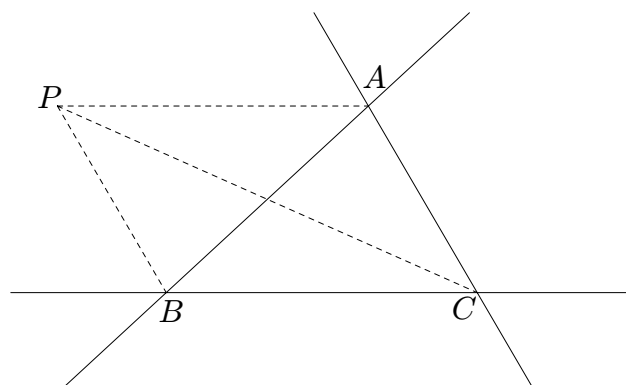


Fig.4.

Àrea(PAB) resulta que

$$\text{Àrea}(PAC) + \text{Àrea}(PCM) = \text{Àrea}(PAB) + \text{Àrea}(PMB) = \frac{1}{2} \text{Àrea}(ABC).$$

Per altra banda,

$$\text{Àrea}(ACM) = \text{Àrea}(ABM) = \frac{1}{2} \text{Àrea}(ABC)$$

i per tant P ha d'estar sobre la mitjana AM , i en conseqüència, P ha de ser el baricentre de ABC . (figura [5](#))

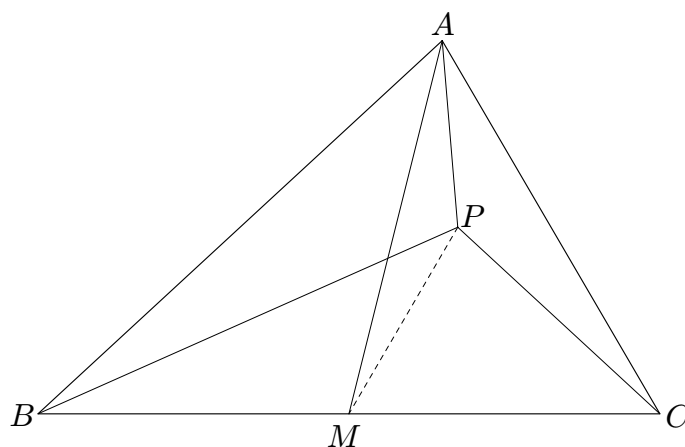


Fig.5.

Tenim les igualtats de segments: $PP_A = 2/3PM = 2/9AM$, però com que $AP = 2/3AM$ resulta $PP_A = 1/3PA$. El triangle $P_AP_BP_C$ és homotètic del ABC amb centre P i raó $1/3$. Per tant $\text{Àrea}(P_AP_BP_C) = \frac{1}{9} \text{Àrea}(ABC)$. (figura [6](#)).

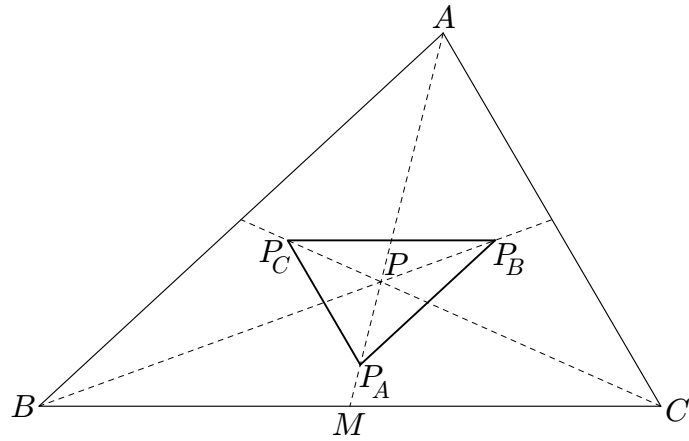


Fig.6.

8.—En la seqüència $A - B - A$ la probabilitat de guanyar dos partits seguits és

$$p_a p_b + (1 - p_a) p_b p_a = 2p_a p_b - p_a^2 p_b.$$

En la seqüència $B - A - B$ la probabilitat és

$$p_b p_a + (1 - p_b) p_a p_b = 2p_a p_b - p_a p_b^2.$$

Si $p_a < p_b$, la primera és més gran que la segona.



XL OLIMPIÁDA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

12 de desembre de 2003, de 16 a 20h.

1.—Donat un triangle ABC , es busca un punt P , interior al triangle, tal que els seus punts simètrics respecte dels costats del triangle, P_a , P_b i P_c , siguin vèrtexs d'un triangle equilàter.

a) Quines condicions ha de complir el triangle ABC perquè hi hagi solució?

b) Si es compleixen aquestes condicions, com trobariem el punt P ?

2.—Resoleu els sistema d'equacions

$$\begin{aligned}x_1 &= a_1 - \frac{1}{2}(x_2 + x_3 + \cdots + x_n) \\x_2 &= a_2 - \frac{1}{2}(x_1 + x_3 + \cdots + x_n) \\&\vdots \\x_n &= a_n - \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}).\end{aligned}$$

3.—Trobeu el centre i el radi de la circumferència que intercepta sobre cada costat d'un triangle donat segments iguals al radi.

4.—Direm que un nombre natural és *consecutivable* quan es pugui expressar com a suma de nombres naturals consecutius. Així, $9 = 2 + 3 + 4$ és *consecutivable* mentre que 2 i 4 no ho són. Quins són els nombres naturals *consecutivables*?



XL OLIMPIÁDA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

13 de desembre de 2003, de 9 a 13h.

- 5.—Amb dos colors, blau i groc, s'han de pintar els pisos d'un gratacel, cada pis d'un color. L'única limitació és que dos pisos consecutius no poden pintar-se de groc. De quantes maneres es pot aconseguir això si el gratacel té 15 pisos? I si en té 2003? (Trobeu una expressió que ens permeti calcular-les d'alguna manera).
- 6.—Efectueu la divisió entera
- $$2003^{2003} \left| 2004 \right.$$
- 7.—Donat un segment AB de longitud 8 m, trobeu el lloc geomètric dels baricentres dels triangles de base AB , els perímetre dels quals amida 18 m.
- 8.—Descriviu els políedres convexos de 6 vèrtexs.



XL OLIMPIADA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

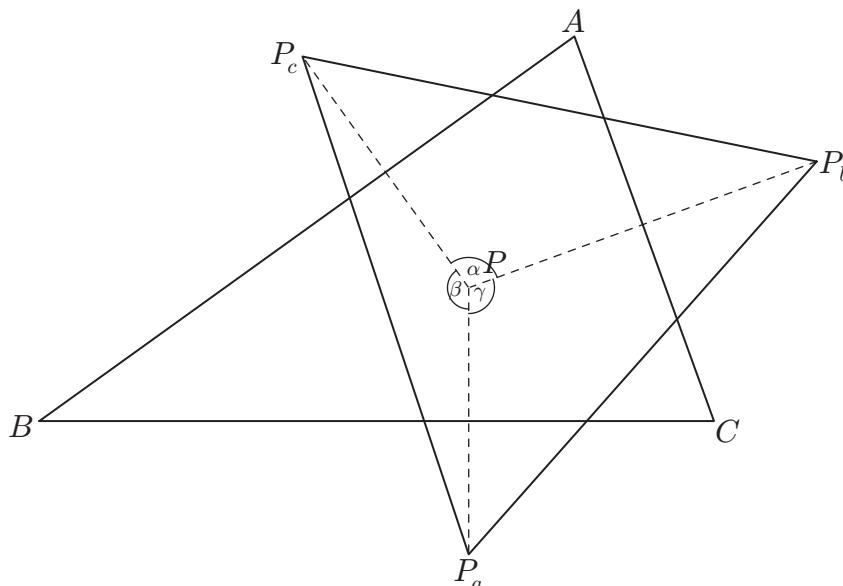
12 i 13 de desembre de 2003.

Solucions:

1.–

- a) Suposem el problema resolt. Els punts P_a , P_b , P_c són els simètrics del punt P respecte dels costats del triangle ABC i a la vegada són vèrtexs d'un triangle equilàter. Coneixem els angles formats pels segments traçats des de P als vèrtexs del triangle equilàter

$$\alpha = \widehat{P_b P P_c} = 180^\circ - A, \quad \beta = \widehat{P_c P P_a} = 180^\circ - B, \quad \gamma = \widehat{P_a P P_b} = 180^\circ - C.$$



Com que $\alpha > 60^\circ$, $\beta > 60^\circ$ i $\gamma > 60^\circ$, la condició que ens demanen és que els tres angles del triangle siguin més petits que 120° .

- a) Ho fem per semblança. Donat el triangle ABC coneixem els seus angles i per tant els angles α , β i γ . Dibuixem un triangle equilàter qualsevol $P'_a P'_b P'_c$ i els arcs capaços des dels quals es veuen els costats del triangle equilàter dibuixat sota els angles α , β i γ . Sigui P' el punt de tall (només cal dibuixar dos arcs). Les mediatrises dels segments $P'P'_a$, $P'P'_b$ i $P'P'_c$ formen un triangle $A'B'C'$ que té els mateixos angles que ABC . Per tant els dos triangles ABC i $A'B'C'$ són semblants

i la semblança que transforma el segon en el primer, transformarà P' en el punt P buscat.

2.—De les equacions surt

$$\begin{aligned}x_1 &= 2a_1 - (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \\x_2 &= 2a_2 - (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \\&\vdots \\x_n &= 2a_n - (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\end{aligned}$$

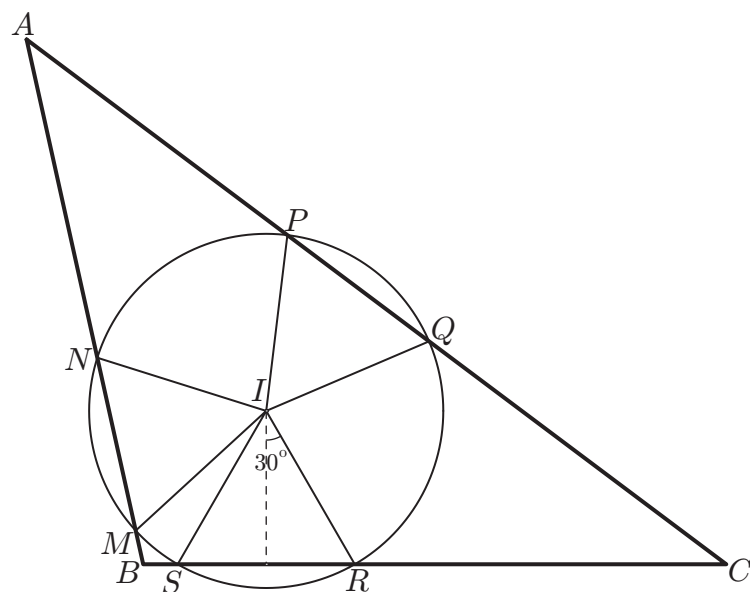
i sumant

$$\sum_{i=1}^n x_i = 2 \sum_{i=1}^n a_i - n \sum_{i=1}^n x_i \quad \text{o bé} \quad \sum_{i=1}^n x_i = \frac{2 \sum_{i=1}^n a_i}{n+1}.$$

Finalment, substituint aquests valors a les equacions inicials queda

$$\begin{aligned}x_1 &= 2a_1 - \frac{2 \sum_{i=1}^n a_i}{n+1} = 2 \left(a_1 - \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n+1} \right) \\x_2 &= 2a_2 - \frac{2 \sum_{i=1}^n a_i}{n+1} = 2 \left(a_2 - \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n+1} \right) \\&\vdots \\x_n &= 2a_n - \frac{2 \sum_{i=1}^n a_i}{n+1} = 2 \left(a_n - \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n+1} \right).\end{aligned}$$

3.—Suposem el problema resolt i considerem la circumferència solució de centre I i radi r . Els triangles MNI , QIP i RSI són equilàters i iguals. Les altures d'aquests triangles també seran iguals. Per tant el punt I equidista dels tres costats i és l'incentre del triangle. Traçant per I una perpendicular al costat BC i rectes a cada costat que formin amb ella angles de 30° obtindrem els triangles equilàters buscats.



4.—Els nombres que busquem són de la forma

$$N = (m + 1) + (m + 2) + \cdots + n = \frac{(n + m + 1)(n - m)}{2}.$$

amb $0 \leq m \leq n - 2$. Ens quedarà $2N = (n + m + 1)(n - m)$ que és el producte de dos nombres de diferent paritat. Resulta immediatament que si N és una potència de 2, no és *consecutivable*. Si N no és una potència de 2, cada descomposició $2N = ab$ amb $a \not\equiv b \pmod{2}$ i $a > b \geq 2$ dóna una descomposició de N en b sumands consecutius.

5.—Escrivim B si un pis es pinta de blau i G si es pinta de groc. Per un gratacel de n pisos, anomenem S_n el nombre total de maneres de pintar-lo amb la limitació de l'enunciat. Per un gratacel de 1 pis clarament tenim $S_1 = 2$: podem pintar-lo B o podem pintar-lo G . Si el gratacel té dos pisos podem pintar-lo BB , GB o BG i $S_2 = 3$. En el cas de tres pisos tenim

$$BBB, GBB, BGB, BBG, GBG$$

i queda $S_3 = 5$.

En el cas de 4 pisos tenim

$$BBBB, GBBB, BGBB, BBGB, GBGB, BBBG, GBBG, BGBG$$

i queda $S_4 = 8$.

Sembla possible conjecturar que $S_n = S_{n-1} + S_{n-2}$. En efecte, així és. El pis n del gratacel es pot pintar de blau, independentment de com estiguin pintats els $n - 1$ pisos més baixos. Per tant hi ha S_{n-1} maneres de pintar amb el pis n blau. Ara bé, el pis n només es pot pintar de groc si el pis $n - 1$ està pintat de blau, i els $n - 2$ més baixos poden estar pintats de qualsevol manera. Per tant hi ha S_{n-2} maneres de pintar el pis

n de groc. En conseqüència ha de ser $S_n = S_{n-1} + S_{n-2}$. L'obtenció de S_{15} es pot fer a mà:

$$2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, \dots$$

de forma que $S_{15} = 1597$. Per tal de calcular S_{2003} hem d'intentar obtenir una fórmula tancada per a S_n . El mètode general per a obtenir la fórmula tancada de successions recurrents lineals amb coeficients constants, com la d'aquest problema, consisteix a trobar successions linealment independents que compleixin la recurrència i que generin totes les solucions. Per fer això, es busquen les progressions geomètriques que satisfacin la recurrència. En el nostre cas, provem amb $S_n = r^n$, que ens dóna, a partir de la recurrència $r^n = r^{n-1} + r^{n-2}$, l'equació $r^{n-2}(r^2 - r - 1) = 0$. Com que $r \neq 0$ ha de ser $r^2 - r - 1 = 0$ i els possibles valors de r són

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

i la solució general és

$$S_n = a\alpha^n + b\beta^n.$$

Les condicions inicials $S_1 = 2$ i $S_2 = 3$ ens donen els valors de a i de b . La solució de la nostra recurrència és

$$S_n = \frac{5 + 3\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \frac{5 - 3\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

La successió obtinguda és una successió de Fibonacci amb valors inicials 1 i 2.

- 6.—Com que $2003 \equiv -1 \pmod{2004}$, serà $2003^{2003} \equiv (-1)^{2003} \equiv -1 \equiv 2003 \pmod{2004}$ i el residu R és 2003. El quocient Q serà

$$Q = \frac{2003^{2003} - 2003}{2004}.$$

Es pot donar una expressió diferent d'aquest quocient.

SOLUCIÓ 1:

Tenim

$$\frac{2003^{2003} - 2003}{2004} = 2003 \frac{2003^{2002} - 1}{2003 + 1}$$

i aquesta última fracció es pot escriure

$$\begin{aligned} \frac{2003^{2002} - 1}{2004} &= 2003^{2001} - 2003^{2000} + 2003^{1999} - \dots + 2003 - 1 = \\ &= (2003^{2001} - 2003^{2000}) + (2003^{1999} - 2003^{1998}) + \dots \\ &\quad \dots + (2003^3 - 2003^2) + (2003 - 1) = \\ &= 2002(2003^{2000} + 2003^{1998} + \dots + 2003 + 1) \end{aligned}$$

de manera que el quocient és

$$Q = 2003 \cdot 2002 (2003^{2000} + 2003^{1998} + \dots + 2003^2 + 1).$$

SOLUCIÓ 2:

Si operem en base 2003 la divisió resulta ser

$$10^{10} \overline{) 11}$$

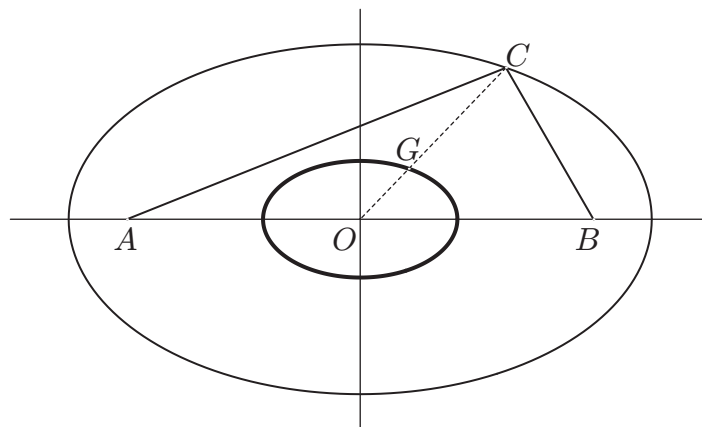
o sigui

$$\begin{array}{r} \overbrace{10000 \dots 000}^{2003} \overline{) 11} \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} \overbrace{10000 \dots 000}^{1001 \text{ parelles}} \overline{) 11} \\ \hline \alpha 0 \alpha 0 \alpha \dots \alpha 0 \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{1001} \\ \begin{array}{r} 100 \\ 100 \\ \dots \\ 100 \\ 10 \end{array} \end{array}$$

on α és la xifra que correspon a 2002. El quocient és per tant $Q = \alpha 0 \dots \alpha 0 = \alpha(10 \dots 10)$ que en base 10 serà

$$\begin{aligned} Q &= 2002 (2003^{2001} + 2003^{1999} + \dots + 2003^1) = \\ &= 2003 \cdot 2002 (2003^{2000} + 2003^{1998} + \dots + 2003^2 + 1) \end{aligned}$$

- 7.—Si C és el vèrtex del triangle ABC , ha de ser $AC + BC = 10$ i el lloc geomètric de C és una el·lipse de focus A i B . Del punt mitjà del segment AB diguem-ne O i del baricentre del triangle ABC diguem-ne G . Com que $OG = \frac{1}{3}OC$, resulta que G està en l'el·lipse homotètica de l'anterior en l'homotècia de centre O i raó $\frac{1}{3}$.



També podem calcular analíticament. Posem els eixos de coordenades als eixos de l'el·lipse. Les coordenades de C són $(\bar{x}, \bar{y})$ i les de G són (x, y) . L'homotècia esmentada

abans ens diu que $x = \bar{x}/3$, $y = \bar{y}/3$. L'el·lipse lloc geomètric de C té semieix major $a = 5$, distància focal $c = 4$ i semieix menor $b = \sqrt{a^2 - c^2} = 3$. L'equació d'aquesta el·lipse serà

$$\frac{\bar{x}^2}{25} + \frac{\bar{y}^2}{9} = 1.$$

Substituint els valors de x , y queda

$$\frac{9x^2}{25} + \frac{9y^2}{9} = \frac{x^2}{\frac{25}{9}} + y^2 = 1$$

que és l'equació d'una el·lipse de centre O i semieixos $\frac{5}{3}$ i 1.

- 8.—Si l'hem de menester, podem emprar la fórmula d'Euler $C - A + V = 2$, on C , A , V són el nombre de cares, d'arestes i de vèrtexs d'un políedre eulerià i en particular convex. Si $V = 6$, ha de ser $A - C = 4$. Com que cada cara té 3 arestes o més, serà $3C \leq 2A$ i per tant $4 = A - C \geq A - \frac{2}{3}A = \frac{1}{3}A$, o sigui $A \leq 12$. D'altra banda, a cada vèrtex hi concorren 3 o més arestes i ha de ser $18 = 3V \leq 2A$, d'on resulta $A \geq 9$. Els únics valors possibles per a A són 9, 10, 11 i 12, que corresponen, respectivament, als valors de C : 5, 6, 7 i 8. Les cares del políedre no poden tenir més de 5 vèrtexs (en total n'ha ha 6). Sigui p el nombre de cares pentagonals, q el de cares quadrangulars i t el de cares triangulars. Tindrem

$$5p + 4q + 3t = 2A$$

$$p + q + t = C$$

o bé, tenint present que $2A - 2C = 8$ i restant el doble de la segona equació de la primera

$$3p + 2q + t = 8$$

$$p + q + t = C \quad \text{amb } 5 \leq p + q + t = C \leq 8$$

Si donem a C els possibles valors de 5 a 8 i resollem el sistema tenint present que els valors p , q , i t són enters més grans o iguals que 0, queda la Taula Principal següent

	C	p	q	t	A
Cas 1:	5	1	1	3	9
Cas 2:	5	0	3	2	9
Cas 3:	6	1	0	5	10
Cas 4:	6	0	2	4	10
Cas 5:	7	0	1	6	11
Cas 6:	8	0	0	8	12

Farem servir repetidament el *raonament de connexió* següent: si a un políedre convex li traiem una cara, amb les seves arestes i els seus vèrtexs, la figura que queda (políedre amb una cara “foradada”) ha de ser connexa, és a dir, donats dos vèrtexs qualssevol, han de poder unir-se per arestes de la figura.

Les cares no poden tenir més de 5 vèrtexs. Distingirem els casos segons que el políedre tingui alguna cara pentagonal, o dues o mes quadrangulars, o una quadrangular, o bé només cares triangulars

8.1.—Hi ha cares pentagonals.

Si un cara és un pentàgon de cada aresta ha de sortir una altra cara, i com que no queda més que un vèrtex, aquestes cares han de ser triangles amb un vèrtex comú.

El políedre és una piràmide pentagonal (Fig. I).

D'aquí resulta que el Cas 1 de la Taula Principal no dóna cap solució i que el Cas 3 en dóna una.

8.2.—Cap cara es pentagonal.

8.2.1.—Hi ha dues cares quadrangulars.

Si cap cara és pentagonal i hi ha dues cares quadrangulars, aquestes per força han de tenir una aresta MN en comú, ja que només hi ha 6 vèrtexs. No queden més vèrtexs.

8.2.1.1.— Si hi ha un altre quadrilàter, ha de ser $ABCD$ (Fig. 1), i el políedre és un prisma triangular (Fig. II).

Aquest políedre és l'únic que correspon al Cas 2 de la Taula.

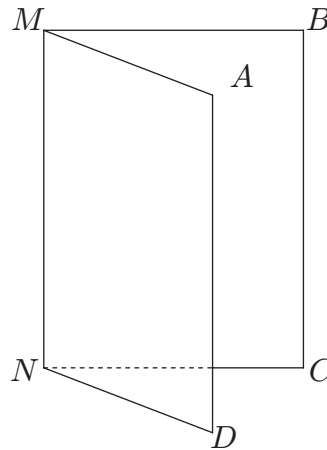


Fig. 1

8.2.1.2.— Si només hi ha dues cares quadrangulars amb una aresta MN en comú, les altres cares han de ser triangles. L'aresta AD (Fig. 1) ha de formar triangle amb B o amb C . Suposem que ho fa amb C . Si ADC és una cara, ABC ha de ser l'altra. Les cares triangulars són ABM , CDN , ACD i ABC (Fig. III).

Aquest políedre és l'únic que correspon al Cas 4 de la Taula.

8.2.2.—Només hi ha una cara quadrangular.

De cada una de les seves arestes ha de sortir-ne una cara triangular. Com que queden 2 vèrtexs i els quatre triangles no poden tenir el mateix vèrtex, podran passar dues coses.

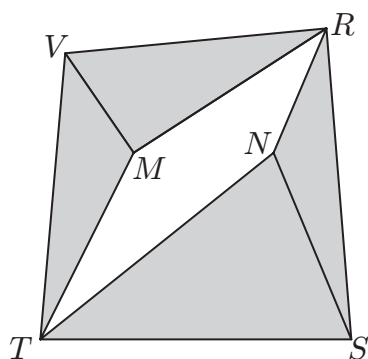


Fig. 2

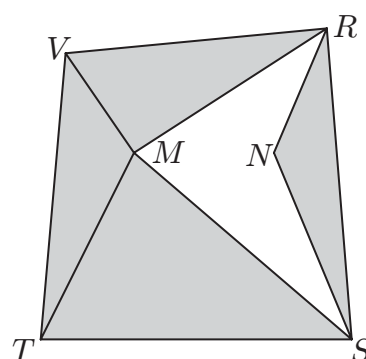


Fig.3

8.2.2.1.— Que dos triangles tinguin un vèrtex comú i els altres dos un altre vèrtex comú (Fig. 2). Les cares del políedre són el quadrilàter del pla del dibuix i els triangles grisos fora del pla del dibuix.

8.2.2.2.— Que tres triangles tinguin un vèrtex comú. (Fig. 3). Les cares del políedre són el quadrilàter del pla del dibuix i els triangles grisos fora del pla del dibuix.

En els dos casos si suprimim la cara quadrangular $TSRV$, l'argument de connexió ens diu que els vèrtexs M i N han d'estar units per una aresta MN .

Els dos políedres es poden interpretar com una piràmide quadrangular on s'ha "estirat" el vèrtex en una aresta, afegint-hi així dues noves cares triangulars. En el primer cas les dues noves cares van cap a costats diferents (Fig. IV) i en el segon les dues noves cares van cap al mateix costat (Fig. V). El segon cas també es pot interpretar com una piràmide quadrangular on s'ha substituït una cara lateral per un tetràedre.

Aquests dos políedres corresponen al Cas 5 de la Taula.

8.2.3.— Totes les cares són triangles.

Sigui ABC una cara. De cada aresta ha de sortir una cara també triangular, que acabarà en un dels tres vèrtexs M , N , i P que ens queden.

Tindrem dos possibles casos representats a les dues Figs. 4 i 5, on la cara ABC és al pla del dibuix i els tres triangles ombrejats són fora del pla del dibuix.

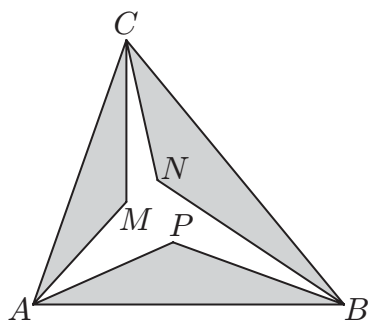


Fig. 4

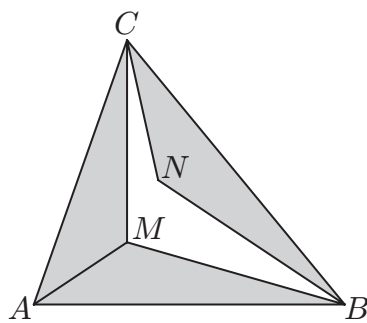


Fig. 5

8.2.3.1.— Els tres triangles que surten dels costats de ABC van a parar cada un a un vèrtex diferent M , N i P . (Fig. 4)

L'argument de connexió ens diu que si suprimim la cara ABC , els vèrtexs que queden M , N i P s'han de poder connectar amb arestes. Això exigeix que al menys n'hi hagi dues, per exemple, les MN i MP . Ens queda la Fig. 6.

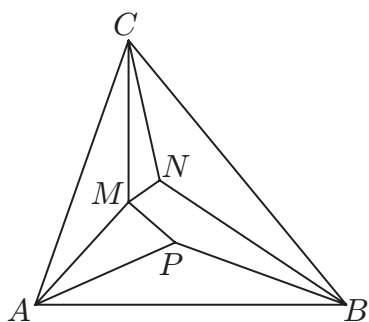


Fig. 6

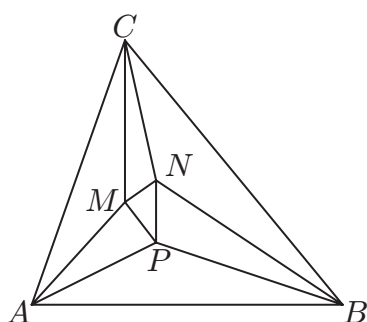


Fig. 7

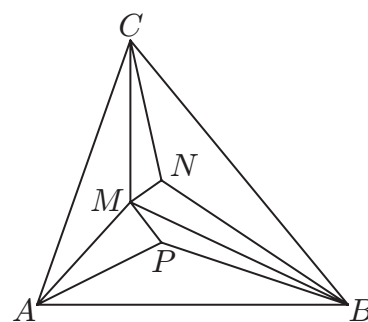


Fig. 8

Per acabar el políedre, podem fer o bé l'aresta PN o bé l'aresta MC .

El primer cas és l'octàedre (Fig. 7) o doble piràmide quadrangular (Fig. VI) i el segon (Fig. 8) s'obté triangulant la base d'una piràmide pentagonal (Fig. VII). Aquest cas també es pot descriure com un tetràedre on s'han substituït dues cares per altres dos tetràedres.

8.2.3.2.— Dels tres triangles que surten dels costats de ABC , dos van a parar a un vèrtex M , i l'altre al vèrtex N .

Queda un altre vèrtex P que ens ha de servir per tancar el “forat” $MBNC$. (Fig. 5)

Des del vèrtex P poden sortir 3 o 4 arestes (no poden ser menys de 3 i si fossin 5 necessàriament 3 d'elles anirien als vèrtexs A ,

B i C i de les arestes AB i CA en sortien tres cares).

Si des de P surten 3 arestes (Fig. 9), no pot ser que dues vagin a B i C ja que l'altra hauria d'anar a un dels dos M o N , i l'altre d'aquests dos quedaria desconnectat. Per tant MN ha de ser aresta i MNB o MNC una cara. Suposem que ho és la primera. Ara des de P hem de tancar el "forat" MNC amb les cares PMN , PNC , PCM .

Si des del vèrtex P surten 4 arestes (Fig. 10), han d'anar a $MNBC$ i el "forat" $MBNC$ s'ha de tancar amb les cares PMB , PBN , PNC , PCM .

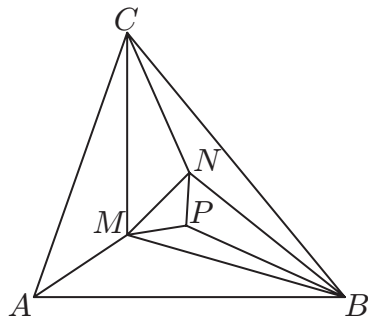


Fig. 9

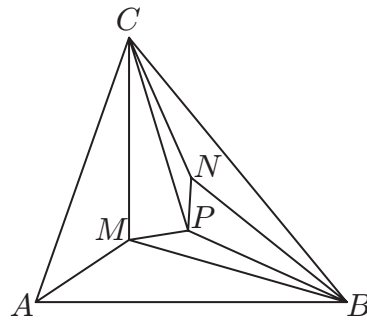


Fig. 10

Aquests dos políedres no són nous, ja que són com el de la Fig. VII, és a dir, una piràmide pentagonal amb la base triangulada o un tetràedre amb dues cares substituïdes per tetràedres, com en el cas 2.3.1.

A les tres figures de sota hi ha el políedre de la Fig. VII amb les lletres corresponents a les Figs. 8, 9 i 10.

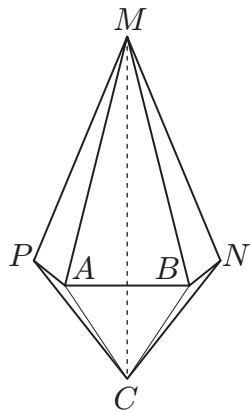


Fig. 9

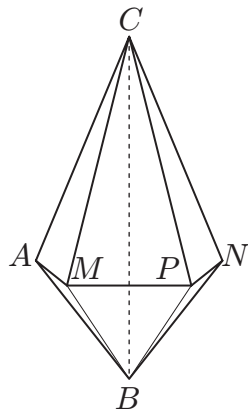


Fig. 10

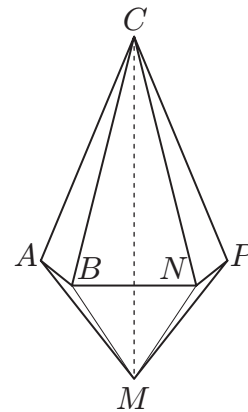


Fig. 11

TAULA RESUM

	C	p	q	t	A	v_3	v_4	v_5	Fig.
Cas 1:	5	1	1	3	9	—	—	—	—
Cas 2:	5	0	3	2	9	6	0	0	II
Cas 3:	6	1	0	5	10	5	0	1	I
Cas 4:	6	0	2	4	10	4	2	0	III
Cas 5:	7	0	1	6	11	2	4	0	IV
						4	2	0	V
Cas 6:	8	0	0	8	12	0	6	0	VI
						2	2	2	VII

C : nombre total de cares

p : nombre de cares pentagonals

q : nombre de cares quadrangulars

t : nombre de cares triangulars

A : nombre d'arestes

v_3 : nombre de vèrtexs de grau 3 (amb tres arestes concurrents)

v_4 : nombre de vèrtexs de grau 4 (amb quatre arestes concurrents)

v_5 : nombre de vèrtexs de grau 5 (amb cinc arestes concurrents)

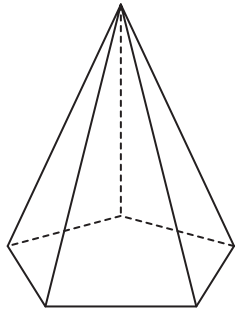


Fig. I

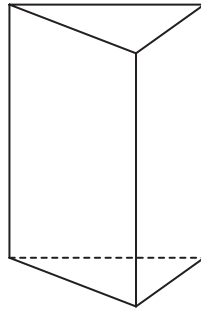


Fig. II

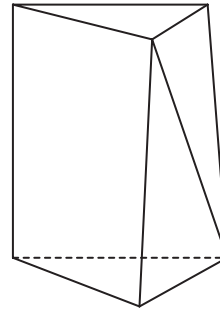


Fig. III

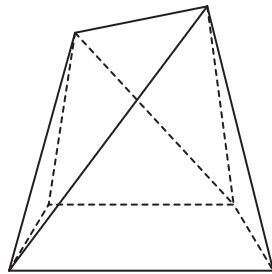


Fig. IV

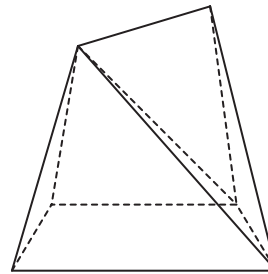


Fig. V

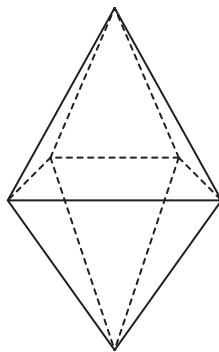


Fig. VI

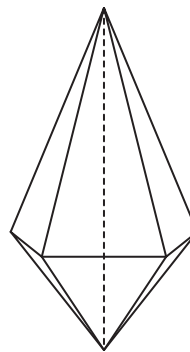
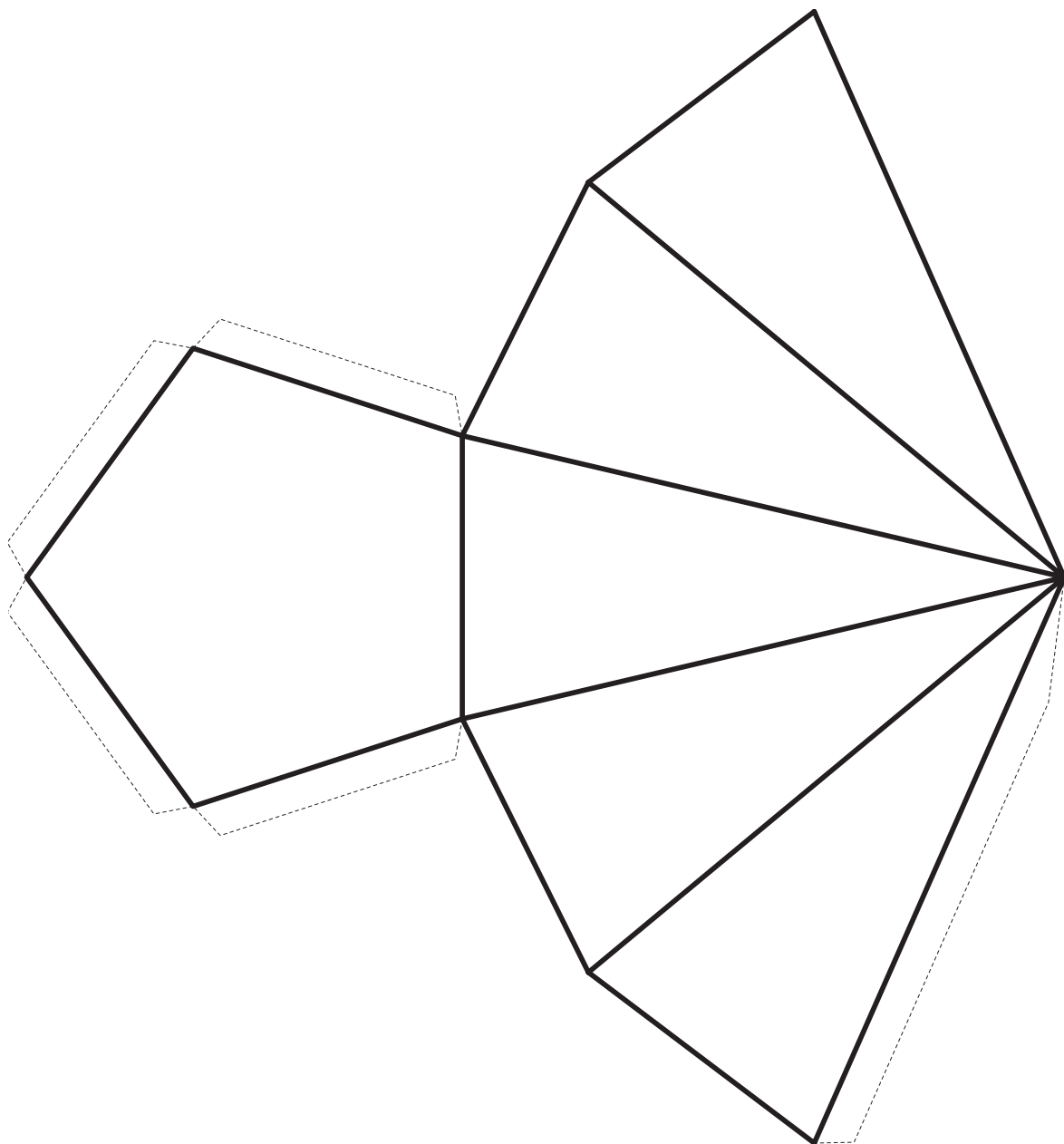
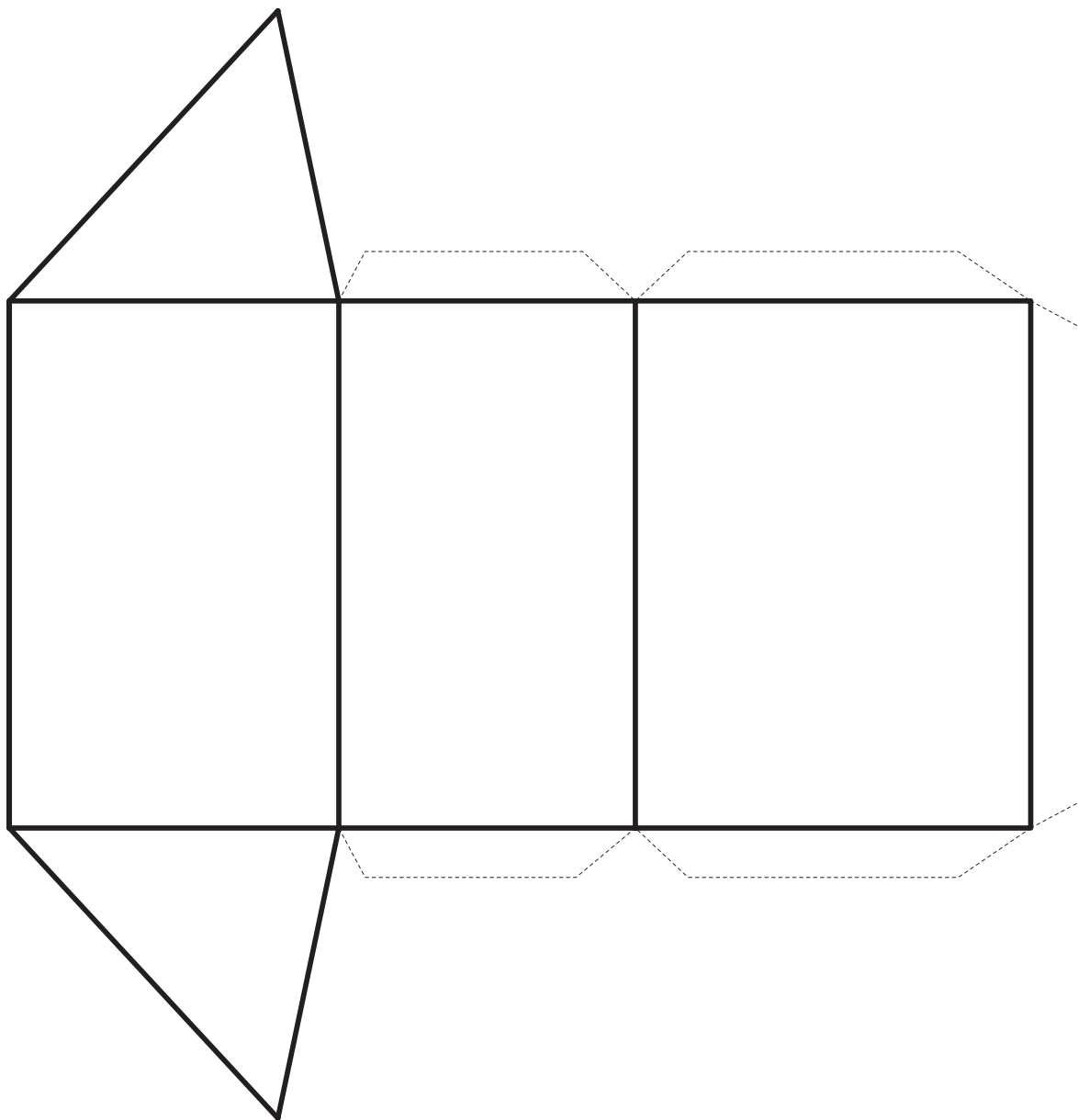
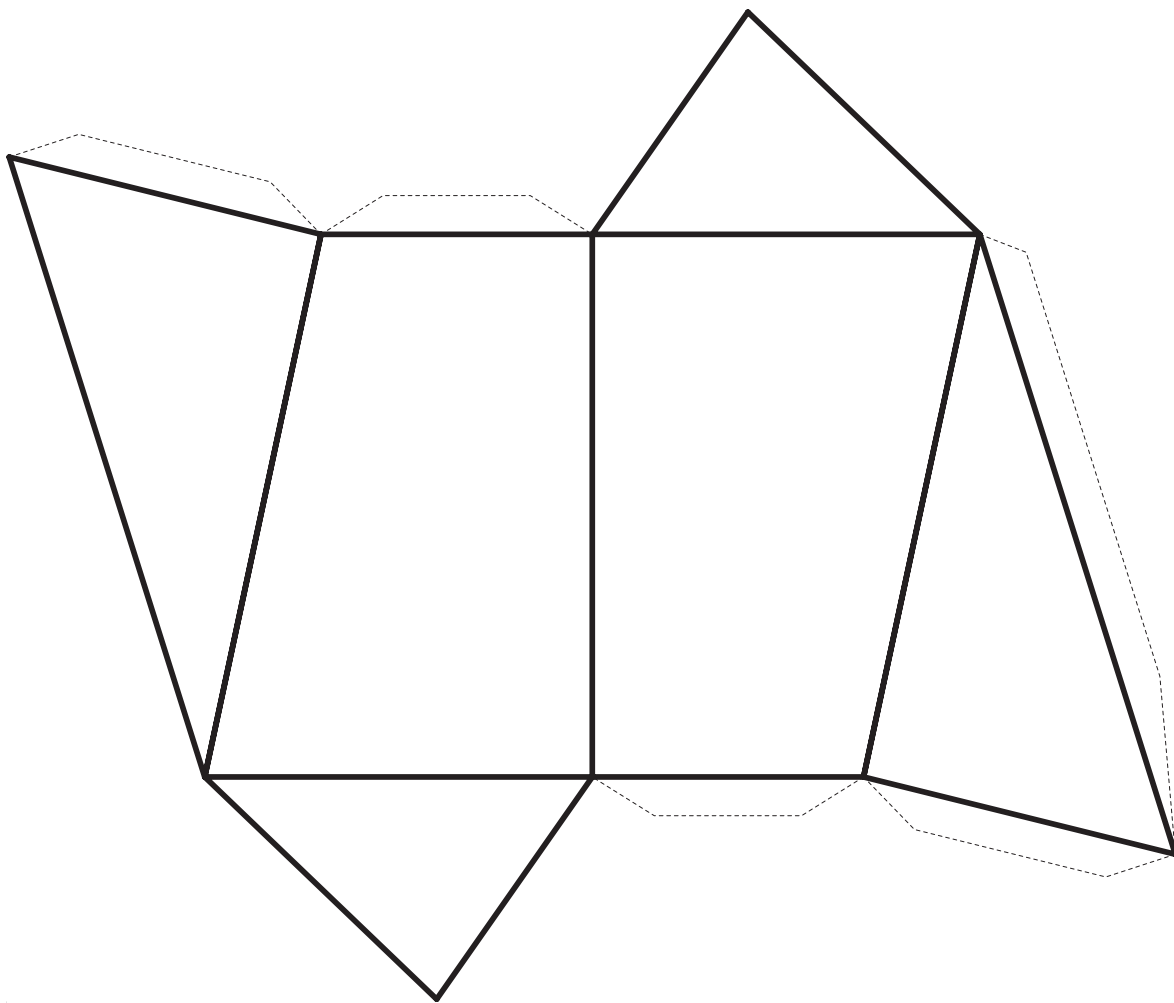


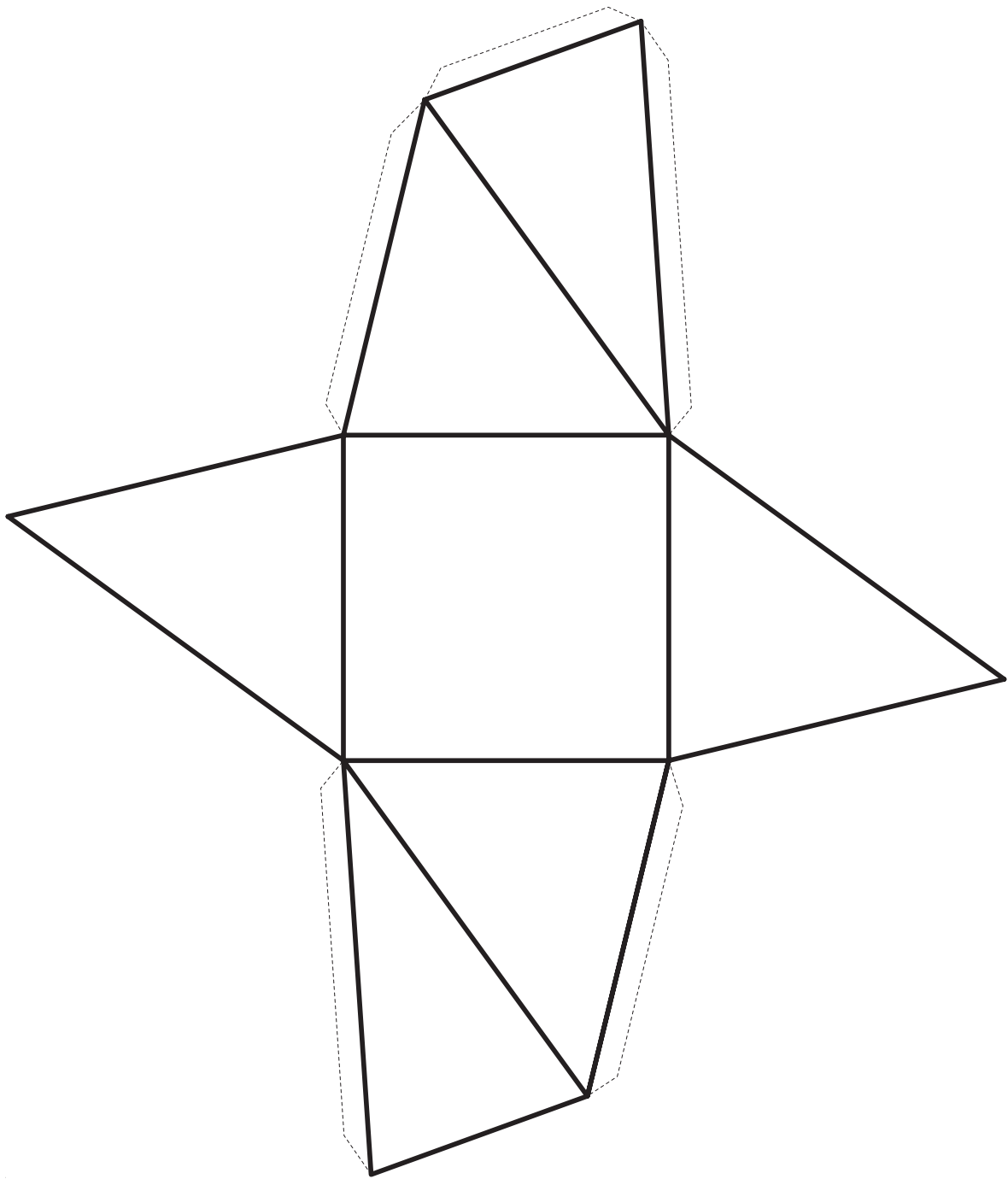
Fig. VII

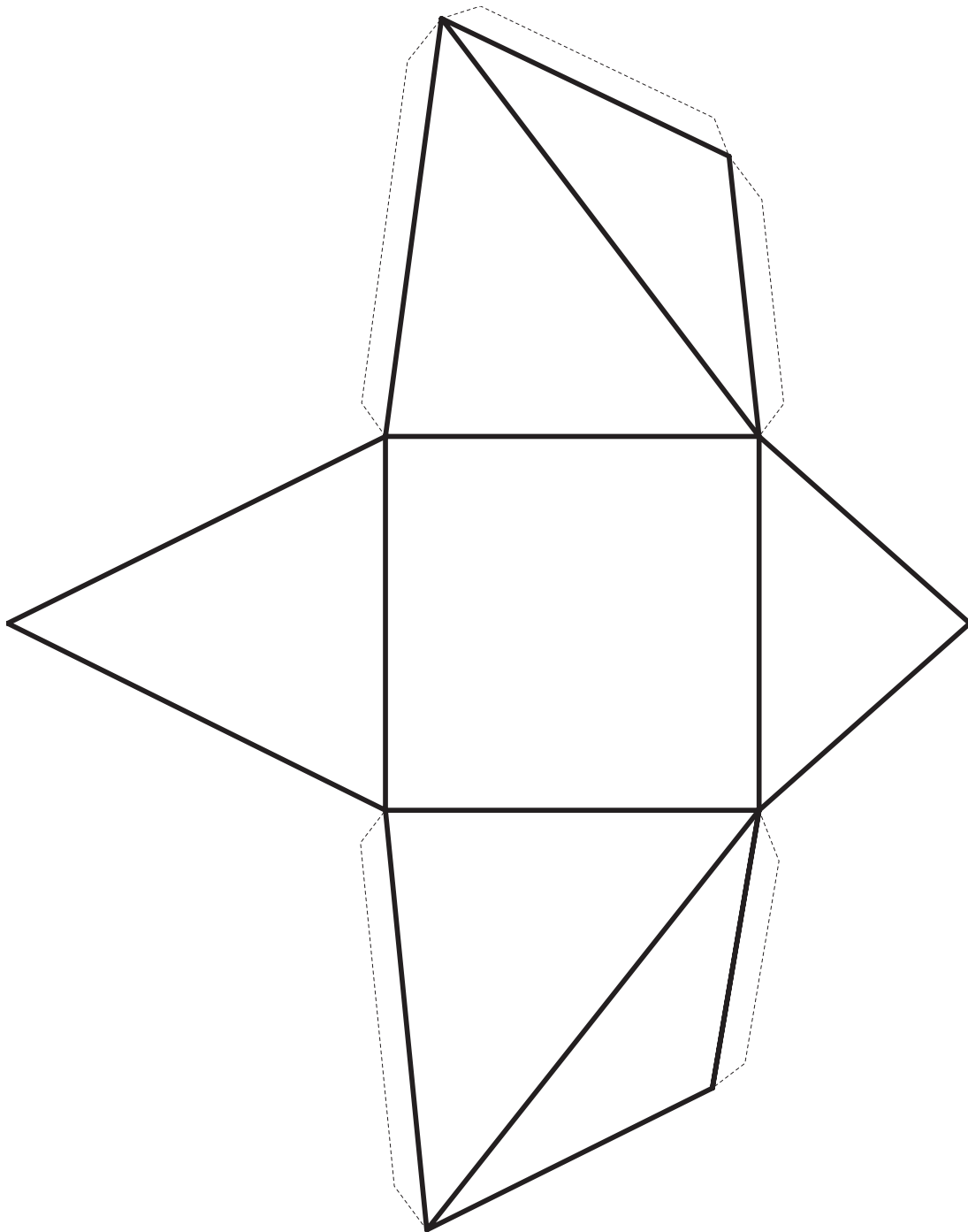
Si disposeu d'un navegador actualitzat que sigui capaç d'entendre Java, [aquest enllaç](#) porta a un document `html` on podreu veure representacions tridimensionals interactives d'aquests set políedres.

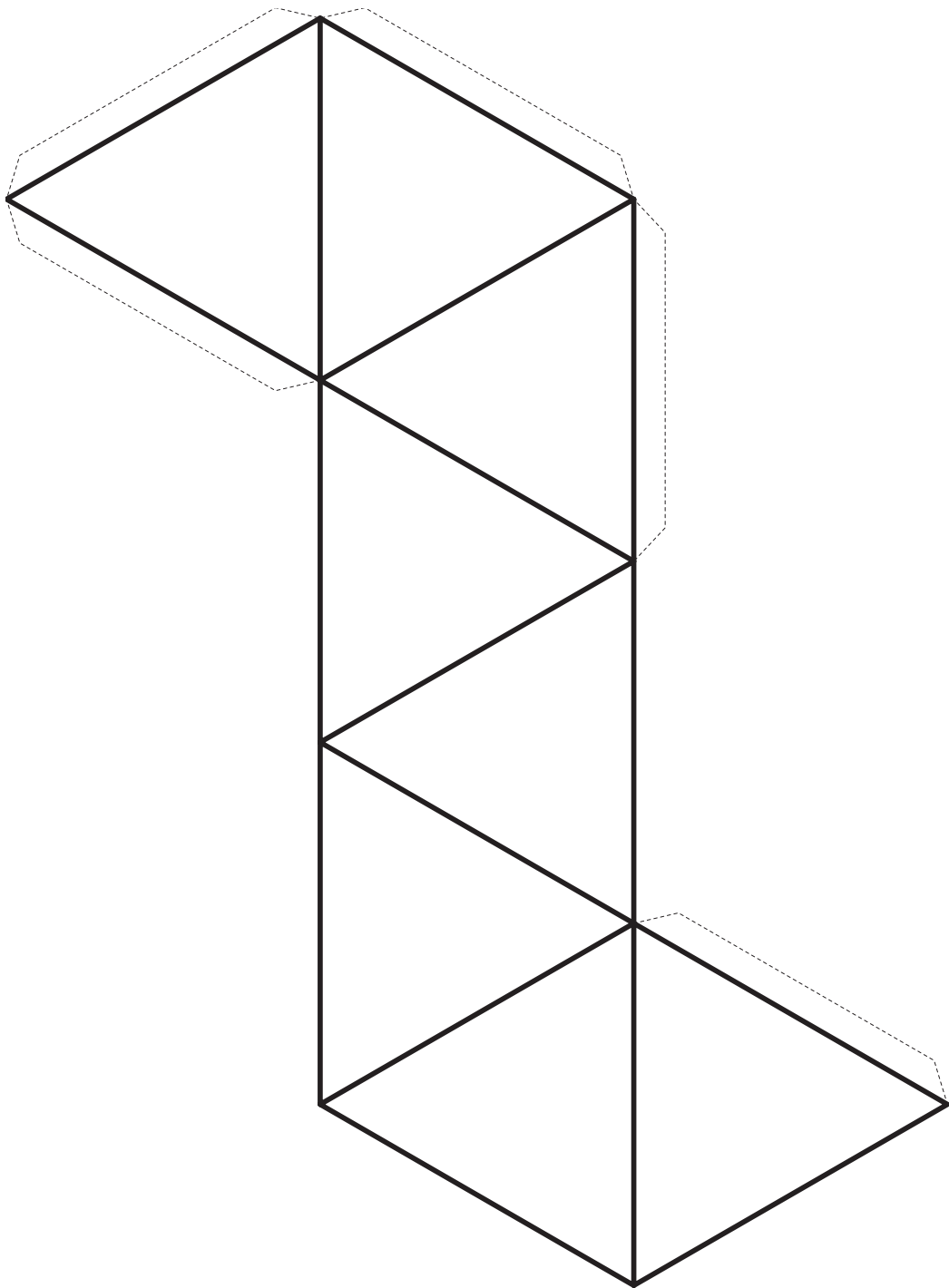


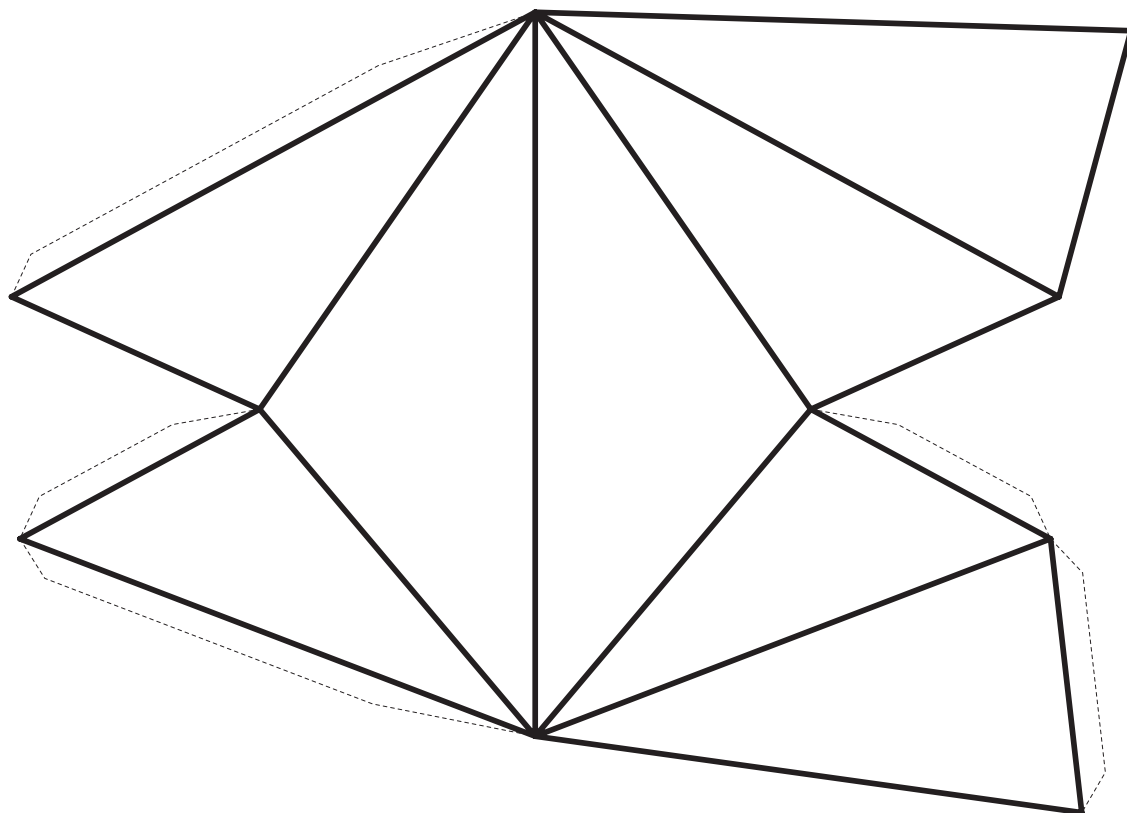














XLI OLIMPIÁDA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

Primera sessió

10 de Desembre de 2004, de 16 a 19.30 h.

1. Comproveu que la suma de distàncies dels dos extrems d'un diàmetre d'una circumferència a una tangent qualsevol de la circumferència és constant.

2. Trobeu el nombre natural més petit que sigui divisible per 847 i tingui totes les xifres iguals.

3. Sigui α un angle menor que 180° . Demostreu que si $\cos \alpha = p/q$, un nombre racional, llavors existeix un triangle amb els costats enters que té un angle igual a α .



XLI OLIMPIÁDA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

Segona sessió

11 de Desembre de 2004, de 9.30 a 13 h.

4.- Sigui ABC un triangle amb costats a, b, c , respectivament oposats a A, B, C .

a) Demostreu que si $\hat{B} = 2\hat{A}$, aleshores es compleix que $b^2 - a^2 = ac$.

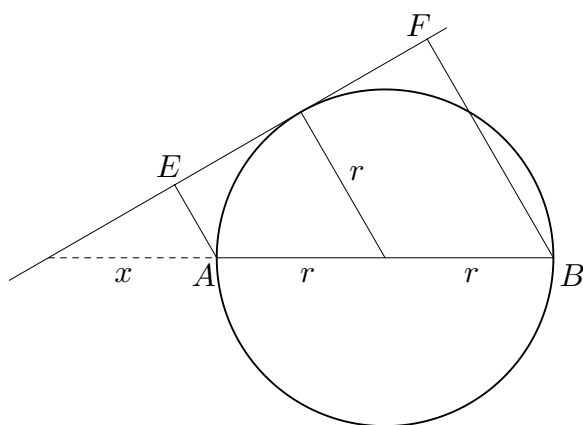
b) El recíproc de l'apartat a), és cert?

5.- Trobeu tots els nombres enters m, n , solucions de l'equació $9^m = 4n^2 + 1$.

6.- Demostreu que qualsevol políedre convex té almenys una cara que és un polígon de menys de sis costats.

Problema 1. *Comproveu que la suma de distàncies dels dos extrems d'un diàmetre d'una circumferència a una tangent qualsevol de la circumferència és constant.*

Primera solució.



La suma de distàncies demanades és constant i igual al diàmetre. Pel teorema de Tales tenim

$$\frac{x}{EA} = \frac{x+r}{r} = \frac{x+2r}{FB}.$$

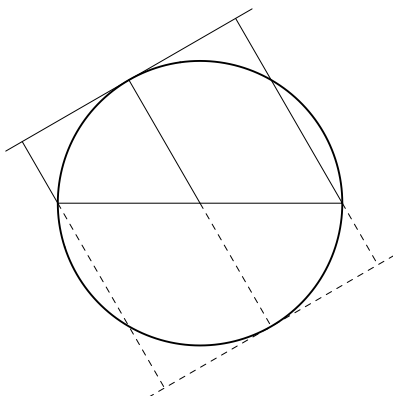
Si sumem antecedent i conseqüents, la raó que surt és igual a les raons que formen la proporció:

$$\frac{x+r}{r} = \frac{x}{EA} = \frac{x+2r}{FB} = \frac{2x+2r}{EA+FB}$$

i si ara igualem la primera i l'última queda $EA + FB = \frac{2x+2r}{x+r} r = 2r$.

Segona solució.

Si es dibuixen els simètrics respecte del centre dels punts de la figura anterior, es veu directament el valor de la suma demanada.



Problema 2. Trobeu el nombre natural més petit que sigui divisible per 847 i tingui totes les xifres iguals.

Primera solució.

Com que $847 = 7 \cdot 11^2$, el nombre buscat $N = \overbrace{aa \dots a}^n$, amb $a \in \{1, 2, \dots, 9\}$, ha de ser divisible per 7 i per 11^2 . Per tal que N sigui divisible per 11, cal que $n = 2k$, i en aquest cas serà $N/11 = \overbrace{0a0a \dots 0a}^k$. Si aquest nombre ha de tornar a ser divisible per 11, ha de ser $k = \overline{11}$. El nombre més petit que ho compleix és $n = 22$. Per tal que N sigui divisible per 7, ha de ser $a = 7$. El nombre buscat és

$$\overbrace{77 \dots 7}^{22} = 847 \cdot 91\,822\,736\,455\,463\,728\,191.$$

Segona solució.

Tenim que $\overbrace{aa \dots a}^n = \overline{11^2} \iff \overbrace{99 \dots 9}^n = \overline{11^2}$, de manera que

$$\begin{aligned} \overline{11^2} &= 10^n - 1 = (11 - 1)^n - 1 = \\ &= 11^n - \binom{n}{1} 11^{n-1} + \binom{n}{2} 11^{n-2} - \dots + \binom{n}{n-1} 11 \cdot (-1)^{n-1} + (-1)^n - 1. \end{aligned}$$

Això obliga a que n sigui parell i resulta

$$11^{n-1} - \binom{n}{1} 11^{n-2} + \dots + \binom{n}{n-2} 11 - n = \overline{11}$$

o sigui que $n = \overline{11}$. El valor de n més petit és 22. Finalment, i com en la primera solució, per tal que N sigui divisible per 7, ha de ser $a = 7$.

Problema 3. Sigui α un angle menor que 180° . Demostreu que si $\cos \alpha = p/q$, un nombre racional, llavors existeix un triangle amb els costats enters que té un angle igual a α .

Primera solució.

Sigui $\cos \alpha = p/q$ amb p, q enters de manera que $-q < p < q$. Considerem el triangle ABC de costats $b = \overline{CA} = 4q$, i $a = \overline{CB} = 4q^2 - (2p - 1)^2$, amb angle $\hat{C} = \alpha$. Pel teorema del cosinus tenim

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha = (4q^2 - (2p - 1)^2)^2 + 16q^2 - 2 \cdot 4q(4q^2 - (2p - 1)^2) \frac{p}{q} = (4q^2 - 4p^2 + 1)^2,$$

i queda $c = 4q^2 - 4p^2 + 1$, que és un enter.

Segona solució.

Es poden trobar tots els triangles de costats racionals o enters que tinguin un angle igual a α .

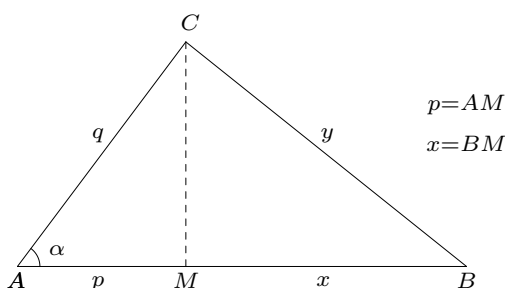


Figura 1 $\alpha < 90^\circ$

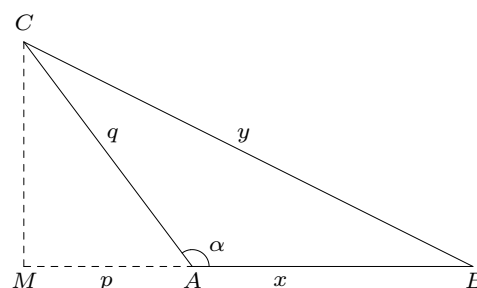


Figura 2 $\alpha > 90^\circ$

Suposarem que $0 < p < q$ i distingirem els dos casos α agut i α obtús.

Si l'angle α és agut (Figura 1), aleshores serà $\cos \alpha = p/q$. Suposem que x, y són racionals. Es compleix que $y^2 - x^2 = q^2 - p^2$ i que $x > -p$. Així doncs, els punts (x, y) són els punts de coordenades racionals d'una hipèrbola equilàtera, de la qual coneixem els punts racionals $(\pm p, \pm q)$.

Si en una cònica es coneix un punt de coordenades racionals, tots els altres punts de coordenades racionals es troben com a interseccions de la cònica amb una recta de pendent racional que passi pel punt conegut. Tracem una recta de pendent m racional que passi pel punt $(-p, q)$. Tindrà equació $y = q + m(x + p)$. El valor de m pot variar des del valor del pendent de la tangent al punt, fins al valor del pendent de l'asíptota, és a dir, $-p/q < m < 1$ (Figura 3). Busquem les interseccions amb la hipèrbola resolent el sistema $y^2 - x^2 = q^2 - p^2$, $y = q + m(x + p)$ i prescindim de la intersecció ja coneguda $(-p, q)$, i ens queda l'altra intersecció

$$x = -\frac{2qm + (m^2 + 1)p}{m^2 - 1}, \quad y = q - 2m \frac{p + qm}{m^2 - 1}.$$

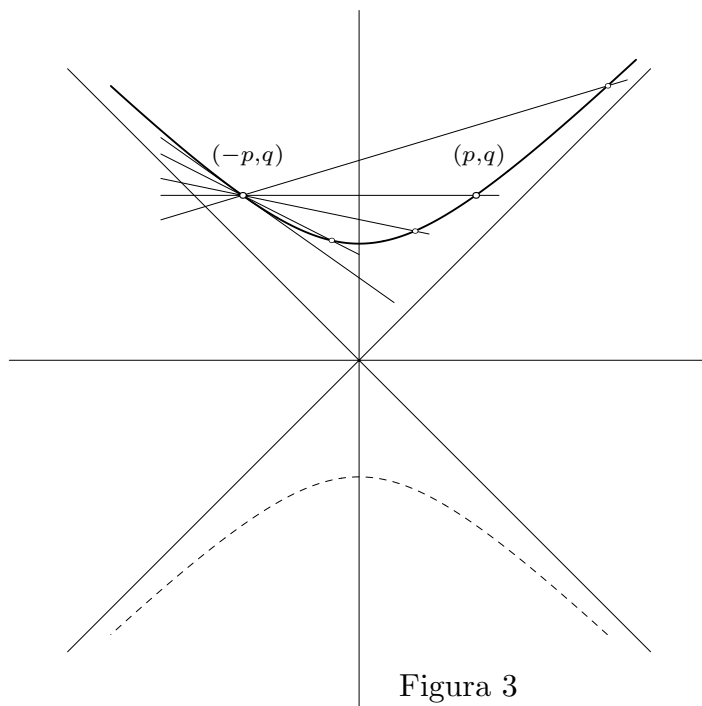
Per cada valor de m racional obtindrem valors racionals de x, y i un triangle de costats racionals que conté l'angle α . A més, així obtindrem tots els punts de coordenades racionals

sobre la hipèrbola. Multiplicant pel denominador comú tindrem un triangle de costats enters.

Si $-p/q < m < 0$ s'obté $x < 0$ i això vol dir que el punt B és a l'esquerra de M (Figura 1), és a dir, obtenim un triangle obtusangle a B . Si $0 < m < 1$ s'obté $x > 0$ i el triangle és acutangle a B .

Si l'angle α és obtús, (Figura 2) serà $\cos \alpha = -p/q$. El raonament serà igual que en el cas anterior però ha de ser $x > p$. Això vol dir que $m > 0$ en el raonament de la hipèrbola.

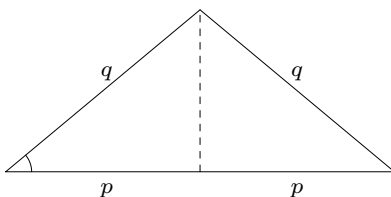
Per exemple, suposem que $\cos \alpha = 2/5$. Si fem $m = 2/3$ obtenim els valors $x = 118/21$ i $y = 127/28$, d'on resulta el



triangle de costats $2 + 118/21$, $127/21$ i 3 . Si multipliquem per 21 obtenim el triangle de costats 160 , 127 i 63 .

Observació.

En el cas de ser $\alpha < 90^\circ$ podem fer $m = 0$ i obtenim $x = p$ i $y = q$. Això dóna lloc al triangle obtingut per simetria respecte de l'altura que es pot intuir directament.



Tercera solució.

L'equació $y^2 - x^2 = q^2 - p^2$ es pot escriure $(y + x)(y - x) = k = q^2 - p^2 = k > 0$, on k és un enter conegut. Aleshores podem fer $y - x = r$, amb r racional arbitrari, i queda $y + x = k/r$, que també és racional. Surt

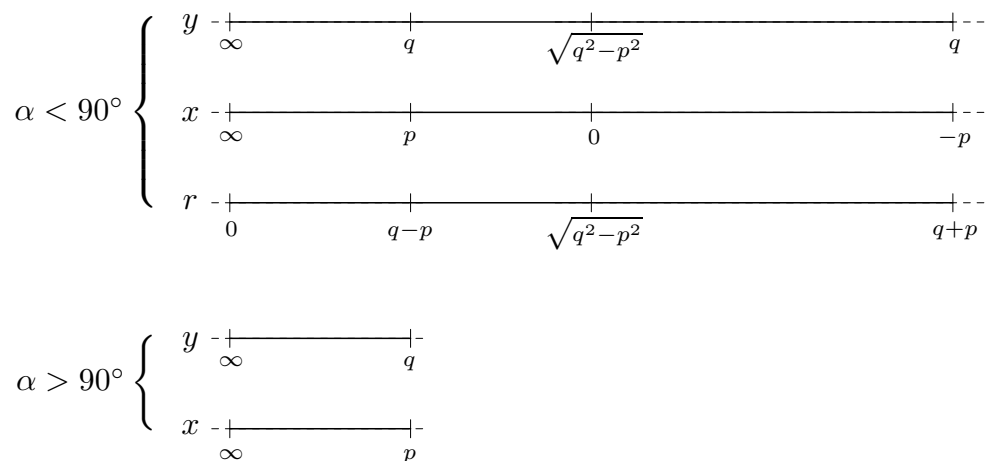
$$y = \frac{1}{2} \left(\frac{k}{r} + r \right), \quad x = \frac{1}{2} \left(\frac{k}{r} - r \right).$$

Així s'obtenen totes les solucions racionals (x, y) . Hem de veure ara els possibles valors que pot prendre r . Com que $y > 0$, ha de ser $r > 0$.

Suposem en primer lloc que $\alpha < 90^\circ$, és a dir, $\cos \alpha = p/q > 0$. Com que ha de ser $x > -p$ que és equivalent a $\frac{k}{r} - r > -2p$, o bé $r^2 - 2pr - k < 0$, resulta $r < q + p$.

Si suposem, en segon lloc, que $\alpha > 90^\circ$, és a dir, $\cos \alpha = -p/q > 0$, resulta $x > p$. Això dóna lloc a $\frac{k}{r} - r > 2p$, o bé $r^2 + 2pr - k < 0$ i $r < q - p$.

Podem fer el diagrama següent que recull tots els casos, segons els valors possibles de r .



Si r s'acosta a 0, el triangle es fa llarg a la dreta (Figures 1 i 2), x i y tendeixen a infinit i l'angle que formen és agut.

Si $r = q - p$ ens queda el triangle simètric (cas $\alpha < 90^\circ$) o el triangle degenerat (cas $\alpha > 90^\circ$). En aquest darrer cas, r no pot prendre més valors.

Si $r = \sqrt{q^2 - p^2}$ és racional, aleshores obtenim un triangle rectangle solució.

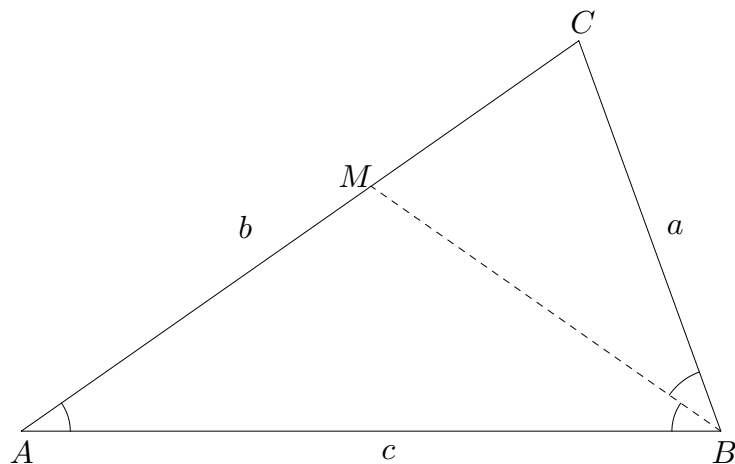
Si $r > \sqrt{q^2 - p^2}$, tenim un triangle obtusangle, amb el punt B a l'esquerra del punt M i l'angle entre x i y obtús. Si $r \rightarrow q + p$ tenim $B \rightarrow A$ i tendeix al triangle degenerat amb $A = B$.

Problema 4. Sigui ABC un triangle amb costats a , b , c , respectivament oposats a A , B , C .

a) Demostreu que si $\hat{B} = 2\hat{A}$, aleshores es compleix que $b^2 - a^2 = ac$.

b) El recíproc de l'apartat a), és cert?

Solució.



a) Tracem la bisectriu de l'angle B que talla al costat oposat al punt M . Tindrem

$$\frac{AM}{c} = \frac{MC}{a}.$$

El triangle ABM és isósceles i $MA = MB$. Els triangles ABC i MCB tenen l'angle C en comú i $\hat{A} = \widehat{MBC}$, és a dir, tenen dos (i per tant tres) angles iguals. Són semblants i les relacions de semblança són

$$\frac{MC}{a} = \frac{a}{b} = \frac{MB}{c} = \frac{MA}{c} = \frac{MC + MA}{a + c} = \frac{b}{a + c}.$$

La relació

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a + c}$$

és la de l'enunciat.

b) Recíprocament, suposem que $b^2 - a^2 = ac$, o equivalentment, $a/b = b/(a + c)$. Tracem la bisectriu per B , que talla el costat oposat en el punt M i es compleix

$$\frac{AM}{c} = \frac{MC}{a} = \frac{b}{a + c} = \frac{a}{b}, \text{ aquesta última igualtat, per hipòtesi.}$$

Els triangles ABC i MBC tenen l'angle C en comú i els costats adjacents proporcionals per les igualtats anteriors. Per tant són semblants i tenen els angles iguals. Ha de ser $\widehat{CBM} = \hat{A}$ i com que MB era la bisectriu, serà $\hat{B} = 2\hat{A}$.

Problema 5.- Trobeu tots els nombres enters m, n , solucions de l'equació $9^m = 4n^2 + 1$.

Primera solució.

No pot ser $m < 0$ ja que el primer membre seria menor que 1 i el segon membre seria més gran o igual que 1.

Si $m = 0$ obtenim la solució $n = 0$.

Si $m > 0$, serà $9^m \equiv 1 \pmod{3}$ i podem estudiar la igualtat mòdul 3. Tenim $0 \equiv 4n^2 + 1 \equiv n^2 + 1$, d'on $n^2 \equiv 2 \pmod{3}$, i això és impossible, ja que mòdul 3 els únics quadrats són 0 i 1.

Segona solució.

Podem escriure l'equació en la forma

$$3^{2m} - 4n^2 = 1 \quad \text{o bé} \quad (3^m + 2n)(3^m - 2n) = 1.$$

Com que es tracta d'enters, les úniques possibilitats són

a) $3^m + 2n = 1$ i $3^m - 2n = 1$, d'on $3^m = 1$ i $m = 0$

b) $3^m + 2n = -1$ i $3^m - 2n = -1$, d'on $3^m = -1$, absurd.

Problema 6.- Demostreu que qualsevol políedre convex té almenys una cara que és un polígon de menys de sis costats.

Solució. Siguin V , A i C el nombre de vèrtexs, arestes i cares, respectivament, d'un políedre. Es compleix la fórmula d'Euler

$$C + V = A + 2.$$

A cada vèrtex hi concorren tres arestes o més i cada aresta connecta dos vèrtexs, d'on

$$A \geq \frac{3V}{2} \quad \text{o bé} \quad V \leq \frac{2A}{3}.$$

Suposem que no es compleix la hipòtesi de l'enunciat, és a dir, que cada cara té sis arestes o més. Aleshores

$$A \geq \frac{6C}{2} \quad \text{o bé} \quad C \leq \frac{A}{3}.$$

Substituint a la fórmula d'Euler queda

$$A + 2 = C + V \leq \frac{A}{3} + \frac{2A}{3} = A$$

i ens queda l'absurd $A + 2 \leq A$.



XLII OLIMPIÁDA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

16 i 17 de desembre de 2005

Enunciats



XLII OLIMPIÁDA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

16 de desembre de 2005, de 16 a 19:30h.

1.—Es defineixen les funcions $\lfloor \star \rfloor$ (*part entera inferior*) i $\lceil \star \rceil$ (*part entera superior*) de la següent manera:

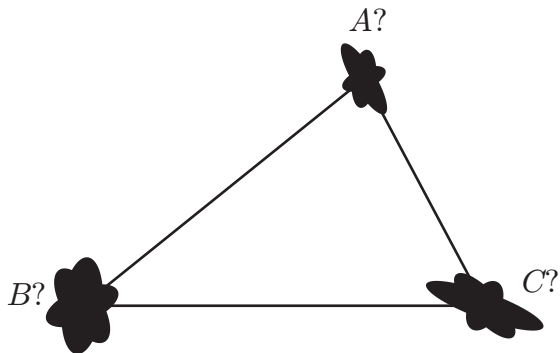
- si $x \in \mathbb{R}$ i $k \in \mathbb{Z}$ de manera que $k \leq x < k + 1$, llavors $\lfloor x \rfloor = k$;
- si $x \in \mathbb{R}$ i $k \in \mathbb{Z}$ de manera que $k - 1 < x \leq k$, llavors $\lceil x \rceil = k$.

Demostreu que per a tot $m, n \in \mathbb{Z}$, amb $n \neq 0$ es compleix

$$\left\lfloor \frac{m}{n} + 1 \right\rfloor = \left\lceil \frac{m+1}{n} \right\rceil \quad \text{o} \quad \left\lfloor \frac{m+1}{n} \right\rfloor = \left\lceil \frac{m}{n} - 1 \right\rceil,$$

depenent del signe de n .

2.—Un triangle té els vèrtexs tacats de tinta, de forma que no es pot dibuixar sobre les taques. Explica com trobaries una mitjana, una mediatriu, una bisectriu i una altura emprant regla i compàs.



3.—Proveu que l'únic triangle – sigui del tipus que sigui – amb els costats enters i tal que l'àrea coincideix amb el semiperímetre, és el de costats 3, 4 i 5.

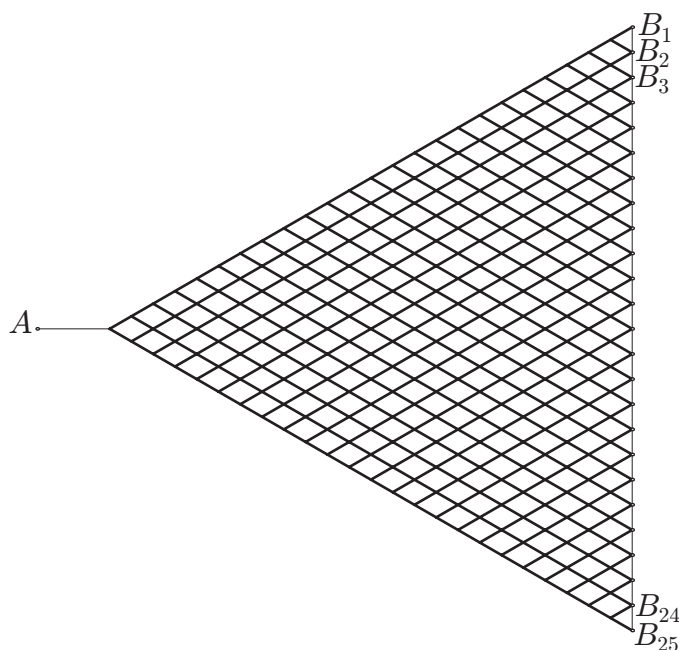


XL OLIMPIÁDA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

17 de desembre de 2005, de 9:30 a 13h.

- 4.—Tenim un enreixat de túnels com el de la figura. Des del punt A surten al mateix temps i cap a la dreta entre 16 i 17 milions de formigues (costa molt comptar-les exactament). Observem, però, una cosa molt curiosa: cada cop que arriben a una bifurcació, la meitat de les que hi arriben (ni una més, ni una menys) se'n van cap a la dreta, i l'altra meitat cap a l'esquerra. Podem saber quantes formigues han sortit exactament del punt A i quantes formigues arribaran als punts $B_1, B_2, \dots, B_{24}, B_{25}$? Cal que demostreu la validesa de les vostres respostes.



- 5.—Trobeu una fórmula per calcular la suma

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + (n-1)n.$$

- 6.—Donades tres rectes paral·leles qualssevol, construïu un rombe que tingui un vèrtex sobre cada recta (sobre el quart vèrtex no imposem cap condició), de manera que l'angle corresponent al vèrtex que està sobre la recta del mig sigui de $\pi/4$ radians.

Soluciones

Problema 1. Es defineixen les funcions $\lfloor \star \rfloor$ (part entera inferior) i $\lceil \star \rceil$ (part entera superior) de la següent manera:

- si $x \in \mathbb{R}$ i $k \in \mathbb{Z}$ de manera que $k \leq x < k + 1$, llavors $\lfloor x \rfloor = k$;
- si $x \in \mathbb{R}$ i $k \in \mathbb{Z}$ de manera que $k - 1 < x \leq k$, llavors $\lceil x \rceil = k$.

Demostreu que per a tot $m, n \in \mathbb{Z}$, amb $n \neq 0$ es compleix

$$\left\lfloor \frac{m}{n} + 1 \right\rfloor = \left\lceil \frac{m+1}{n} \right\rceil \quad \text{o} \quad \left\lceil \frac{m+1}{n} \right\rceil = \left\lfloor \frac{m}{n} - 1 \right\rfloor,$$

depenent del signe de n .

Solució.

Per a $n > 0$, sigui $p \in \mathbb{Z}$ tal que $p \leq \frac{m}{n} < p + 1$. Per tant, $pn \leq m < (p + 1)n$ i com que en aquesta desigualtat tots els nombres són enters també es compleix forçosament que $pn \leq m < m + 1 \leq (p + 1)n$. En conseqüència $p \leq \frac{m}{n} < \frac{m+1}{n} \leq p + 1$. Llavors, $\lfloor \frac{m}{n} \rfloor = p$ i $\lceil \frac{m+1}{n} \rceil = p + 1$. És a dir,

$$\left\lceil \frac{m+1}{n} \right\rceil = \left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{m}{n} + 1 \right\rfloor.$$

Per a $n < 0$, amb un raonament similar a l'anterior, sigui $p \in \mathbb{Z}$ tal que $(p + 1)n \leq m < m + 1 \leq pn$. Dividint aquestes desigualtats per n (recordeu que n és negatiu), ens queda

$$p + 1 \geq \frac{m}{n} > \frac{m+1}{n} \geq p.$$

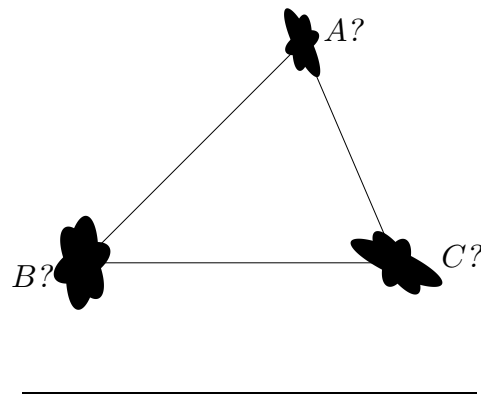
Amb això,

$$\left\lfloor \frac{m+1}{n} \right\rfloor = p \quad \text{i} \quad \left\lceil \frac{m}{n} \right\rceil = p + 1.$$

Llavors,

$$\left\lceil \frac{m}{n} - 1 \right\rceil = \left\lceil \frac{m}{n} \right\rceil - 1 = p = \left\lfloor \frac{m+1}{n} \right\rfloor.$$

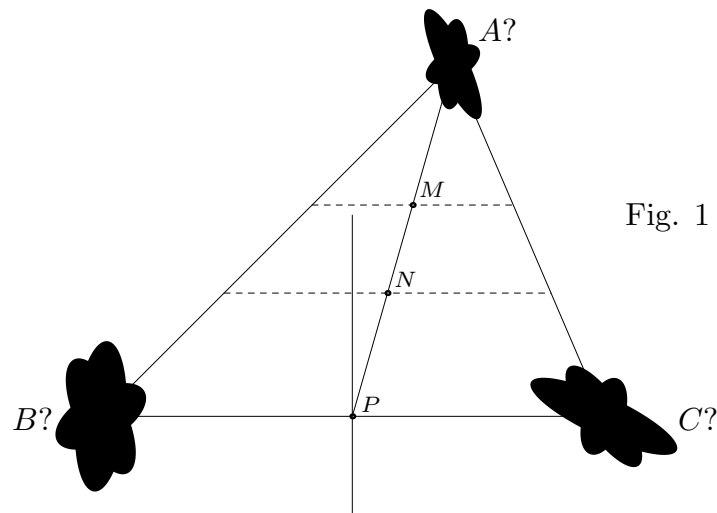
Problema 2. Un triangle té els vèrtexs tacats de tinta, de forma que no es pot dibuixar sobre les taques. Explica com trobaries una mitjana, una mediatriu, una bisectriu i una altura emprant regle i compàs.



Primera solució.

Construcció de la mitjana i de la mediatriu (Fig. 1).

Tracem dues paral·leles qualssevol al costat BC i trobem els punts mitjans M i N dels segments que determinen amb el triangle. La recta MN és la mitjana per A . Aquesta recta talla el costat BC al punt P . La perpendicular a BC pel punt P és la mediatriu del costat BC .



Construcció de la bisectriu (Fig. 2).

Tracem una paral·lela r a AB per un punt P qualsevol del costat AC . Aquesta paral·lela talla BC en el punt Q . Tracem la bisectriu s de l'angle $\widehat{QPC}$ i després la perpendicular t a s per P . Aquesta perpendicular talla AB en el punt R . La mediatriu de PR és la bisectriu de l'angle A .

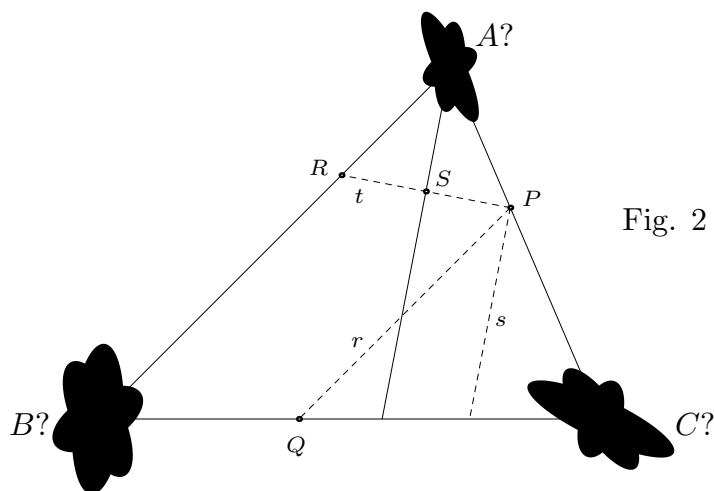


Fig. 2

Construcció de l'altura (Fig. 3).

Per tal de construir l'altura trobem el punt mitjà M del costat AB (peu de la mitjana per C). Tracem una paral·lela a AC per M . Aquesta recta talla el costat BC a N . A continuació tracem l'altura del triangle BMN (segment MH) i la perpendicular HQ a MN . Finalment tracem una paral·lela a AC que estigui a distància $2 \cdot HQ$ d'aquest costat. Aquesta paral·lela tallarà BC en un punt H' . Aquest és el peu de l'altura del triangle ABC per A .

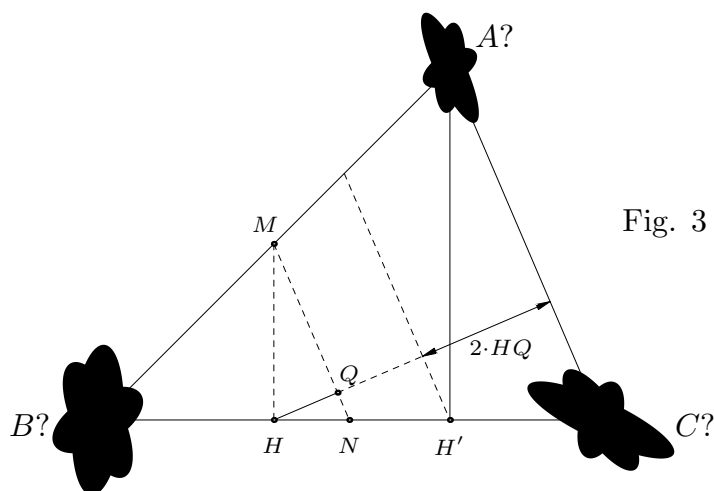


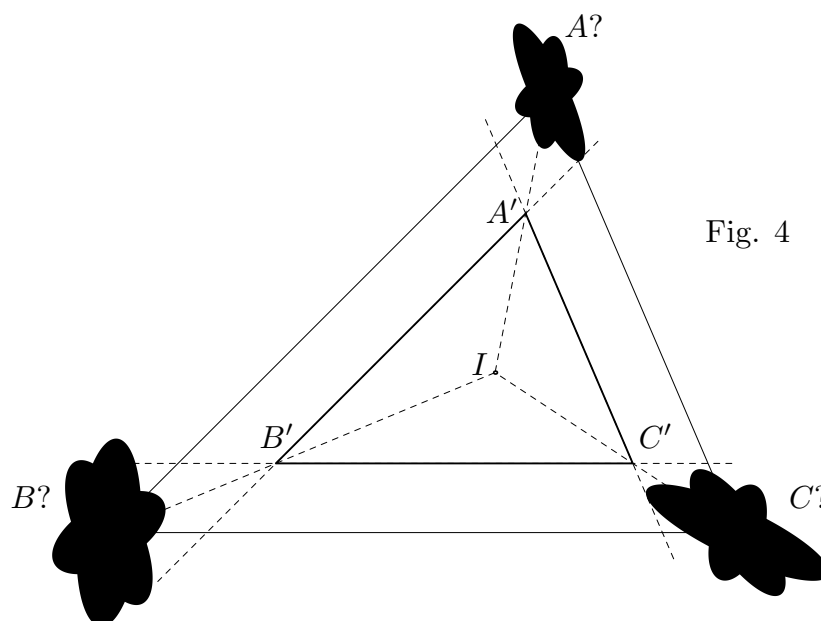
Fig. 3

Segona solució.

Es pot fer un desplaçament qualsevol dels costats del triangle, per exemple, una translació, un gir o una simetria, fer les construccions al triangle desplaçat, i després fer la transformació inversa.

Tercera solució (Marc Viñals).

Tracem paral·leles als costats del triangle a una mateixa distància de cadascun. Les tracem totes tres cap a l'interior del triangle (Fig. 4), o bé totes tres cap a l'exterior del triangle. Obtenim un nou triangle $A'B'C'$. Les bisectrius d'aquest segon triangle coincideixen amb les del primer per la propietat que tenen els punts de la bisectriu d'un angle d'equidistar dels costats.



L'incentre I , comú als dos triangles, també és el centre de l'homotècia que passa del triangle $A'B'C'$ al ABC .

Les línies del triangle $A'B'C'$ (mitjana, mediatriu i altura) es transformen per aquesta homotècia a les corresponents del triangle ABC .

Problema 3. *Proveu que l'únic triangle – sigui del tipus que sigui – amb els costats enters i tal que l'àrea coincideix amb el semiperímetre, és el de costats 3, 4 i 5.*

Solució.

Si A és l'àrea, a , b , c són els costats i el semiperímetre és p , la fórmula d'Heró

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

i la condició de l'enunciat $A = p$ donen l'equació

$$(p-a)(p-b)(p-c) = p.$$

Posem, per simplificar, $x = p - a$, $y = p - b$, $z = p - c$ i obtenim les equacions

$$x + y + z = p \quad \text{i} \quad xyz = p.$$

Per tant ha de ser $x + y + z = xyz$, o bé

$$\frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} + \frac{1}{xy} = 1 \quad \text{o bé} \quad \frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w} = 1$$

si posem $u = yz$, $v = zx$, $w = xy$, que són tres nombres naturals.

Suposem $u \leq v \leq w$, s'obtenen les fites següents:

$$\frac{3}{w} \leq 1 \leq \frac{3}{u} \quad \text{d'on} \quad w \geq 3 \quad \text{i} \quad u \leq 3.$$

A partir d'aquí es destrien sense gaire dificultat tots els casos que porten a l'única solució

$$a = 3, \quad b = 4, \quad c = 5.$$

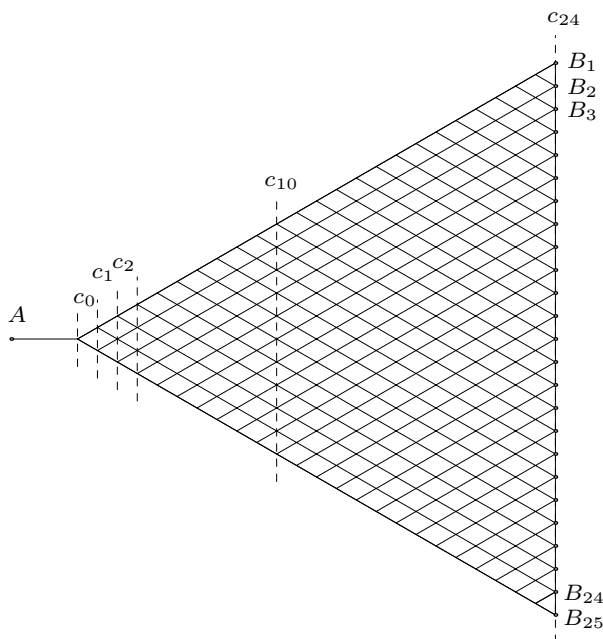
Efectivament, u només pot valer 1, 2 o 3 i tenim, doncs, els casos següents:

- $u = 1$, d'on $1/v + 1/w = 0$, que és impossible.
- $u = 2$, i $1/v + 1/w = 1/2$, i com que $v \leq w$, serà $2/w \leq 1/2 \leq 2/v$, amb la qual cosa ha de ser $w \geq 4$ i $v \leq 4$. Això ens dona dos conjunts de solucions: $u = 2$, $v = 3$ i $w = 6$; i $v = 2$, $v = 4$ i $w = 4$. (Els casos $v = 1$ i $v = 2$ surten impossibles).
- $u = 3$ i $1/v + 1/w = 2/3$, i com que $v \leq w$, serà $2/w \leq 2/3 \leq 2/v$, amb la qual cosa ha de ser $w \geq 3$ i $v \leq 3$. Això ens dona també dos conjunts de solucions: $u = 3$, $v = 2$ i $w = 6$, que és impossible ja que $u \leq v$; i $v = 3$, $v = 3$ i $w = 3$.

Les solucions $u = 2$, $v = 4$, $w = 3$; i $u = 3$, $v = 3$ donen resultats impossibles per a x , y , z . En definitiva, només és bona la solució $u = 2$, $v = 3$, $w = 6$, que porta a $x = 3$, $y = 2$, $z = 1$, o bé $a = 3$, $b = 4$ i $c = 5$.

Problema 4. Tenim un enreixat de túnels com el de la figura. Des del punt A surten al mateix temps i cap a la dreta entre 16 i 17 milions de formigues (costa molt comptar-les exactament). Observem, però, una cosa molt curiosa: cada cop que arriben a una bifurcació, la meitat de les que hi arriben (ni una més, ni una menys) se'n van cap a la dreta, i l'altra meitat cap a l'esquerra. Podem saber quantes formigues han sortit exactament del punt A i quantes formigues arribaran als punts $B_1, B_2, \dots, B_{24}, B_{25}$? Cal que demostreu la validesa de les vostres respostes.

Solució.



Si N és el nombre de de formigues, hem de poder fer 24 divisions per 2 (una per cada cruïlla). Això només serà possible si el factor 2^{24} forma part de la descomposició de N . Però $2^{24} = 16\,777\,216$ i aquest és l'únic nombre amb factor 2^{24} entre 16 i 17 milions (el següent nombre amb factor 2^{24} és $2^{25} = 33\,554\,432$). Això ens dona el nombre exacte de formigues.

Observem com es reparteixen al principi. A la columna c_0 de la figura (punt A) hi ha 2^{24} formigues. A la columna c_1 hi ha 2^{23} , 2^{23} formigues. A la columna c_2 n'hi ha 2^{22} , $2 \cdot 2^{22}$, 2^{22} . A la següent, c_3 són 2^{21} , $3 \cdot 2^{21}$, $3 \cdot 2^{21}$, 2^{21} .

Això ens fa pensar que a la columna c_i hi ha

$$2^{24-i} \binom{i}{0}, 2^{24-i} \binom{i}{1}, 2^{24-i} \binom{i}{2}, \dots, 2^{24-i} \binom{i}{i-1}, 2^{24-i} \binom{i}{i}.$$

Podem demostrar-ho per inducció. En efecte, a cada punt de la malla hi ha la meitat de la suma dels dos immediats de l'esquerra, si el punt és interior, i la meitat del que té a l'esquerra si el punt és a la vora. Però, això només ho compleixen els nombres escrits abans, per les propietats conegudes del triangle aritmètic.

A la columna c_{24} hi haurà

$$\binom{24}{0}, \binom{24}{1}, \binom{24}{2}, \dots, \binom{24}{23}, \binom{24}{24}.$$

La suma d'aquests nombres és, efectivament, 2^{24} , ja que per la fórmula del binomi,

$$2^{24} = (1 + 1)^{24} = \binom{24}{0} + \binom{24}{1} + \binom{24}{2} + \dots + \binom{24}{23} + \binom{24}{24}.$$

Problema 5.- Trobeu una fórmula per calcular la suma

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + (n-1)n.$$

Primera solució.

Fem algunes proves i càlculs concrets. Si posem $S_n = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + (n-1)n$ queden els valors $S_2 = 2$, $S_3 = 8$, $S_4 = 20$, $S_5 = 40$, etc.

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
 S_n & = & 2 & + & 3 & + & 4 & + & 5 & + & \cdots & + & (n-1) & + & n & + \\
 & & & & + & 3 & + & 4 & + & 5 & + & \cdots & + & (n-1) & + & n & + \\
 & & & & & & + & 4 & + & 5 & + & \cdots & + & (n-1) & + & n & + \\
 & & & & & & & & + & 5 & + & \cdots & + & (n-1) & + & n & + \\
 & & & & & & & & & & & & & \vdots & & \vdots & \\
 & & & & & & & & & & & & & + & (n-1) & + & n & + \\
 & & & & & & & & & & & & & & & + & n.
 \end{array}$$

Cadascuna de les files és la suma dels termes d'una progressió aritmètica.

$$\begin{aligned}
 2 + 3 + \cdots + n &= \frac{(n+2)(n-1)}{2} \\
 3 + 4 + \cdots + n &= \frac{(n+3)(n-2)}{2} \\
 4 + 5 + \cdots + n &= \frac{(n+4)(n-3)}{2} \\
 &\vdots \\
 n &= \frac{(n+n)(n-(n-1))}{2}.
 \end{aligned}$$

Sumant aquestes expressions obtenim

$$S_n = \frac{(n+2)(n-1)}{2} + \frac{(n+3)(n-2)}{2} + \cdots + \frac{(n+n)(n-(n-1))}{2},$$

d'on resulta

$$S_n = \frac{(n-1)(n^2+n) - S_n}{2},$$

que, finalment, dóna

$$S_n = \frac{(n-1)(n^2+n)}{3}.$$

Segona solució (Marc Viñals).

Sigui S_n la suma dels n primers termes. Calculem

$$\begin{aligned} S_{n+1} + S_n &= \\ &= (1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1)) + (1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + (n-1)n) = \\ &= 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + \cdots + 2n^2, \end{aligned}$$

és a dir,

$$S_{n+1} + S_n = 2 \sum_{i=1}^n i^2 = 2 \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{3}.$$

Per altra banda $S_n - S_{n+1} = -n(n+1)$.

Sumant les igualtats tenim

$$2S_n = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{3} - n^2 - n = \frac{2n^3 - 2n}{3} \implies S_n = \frac{n^3 - n}{3}.$$

Aquesta fórmula també es pot comprovar per inducció. Pel valor inicial, $n = 2$, surt certa $2 = 2$.

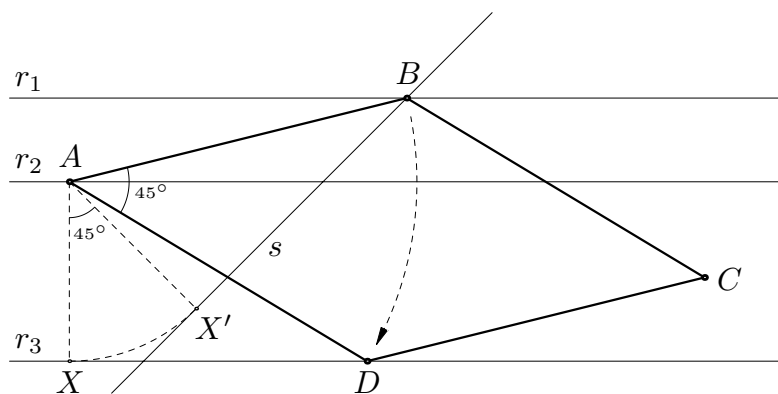
Suposada certa per a n , és

$$S_{n+1} = S_n + n(n+1) = \frac{n^3 - n}{3} + n^2 + n = \frac{n^3 - n + 3n^2 + 3n + 1 - 1}{3} = \frac{(n+1)^3 - (n+1)}{3}.$$

Problema 6.- Donades tres rectes paral·leles qualssevol, construiu un rombe que tingui un vèrtex sobre cada recta (sobre el quart vèrtex no impossem cap condició), de manera que l'angle corresponent al vèrtex que està sobre la recta del mig sigui de $\pi/4$ radians.

Primera solució.

Escollim, com a vèrtex del rombe, un punt qualsevol A sobre la recta del mig r_2 . Fem un gir de 45° al voltant del punt A , i la recta r_3 passa a la recta s . La intersecció B de les rectes r_1 i s és un vèrtex B del rombe. El vèrtex D el podem obtenir girant B al voltant de A un angle de -45° . Finalment, el punt C és simètric de A respecte de la recta BD .



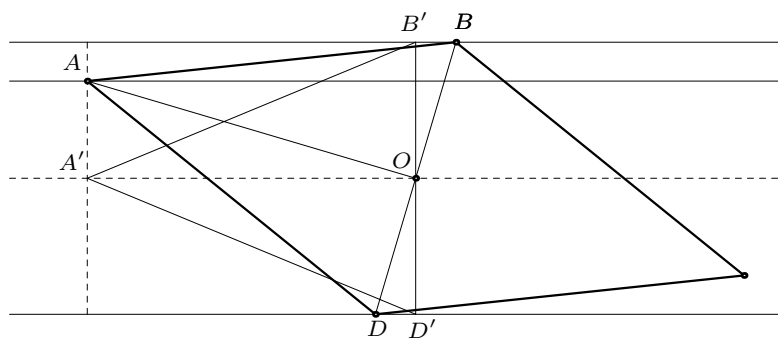
El gir de 45° de la recta r_3 al voltant de A es pot fer de diverses maneres. La representada a la figura consisteix a buscar el peu X de la perpendicular per A a r_3 , girar-lo 45° al voltant de A , obtenint el punt X' , i traçant una recta per X' perpendicular a AX' .

També es podria fer el gir de la recta triant dos punts arbitraris sobre r_3 , girant-los 45° al voltant de A i traçant la recta que uneix aquests dos últims punts.

Observem que el problema admet dues solucions, segons que el gir al voltant de A es faci de 45° o de -45° .

Segona solució (Marc Viñals).

Tracem una recta paral·lela equidistant de les rectes exteriors. A partir d'un punt A' qualsevol d'aquesta recta construïm un rombe com el que ens demanen. (El mètode és senzill, només cal dibuixar els dos angles de $45^\circ/2$ amb la recta paral·lela mitjana). Obtenim els punts B' i D' vèrtexs d'aquest rombe. Tracem una perpendicular a les tres rectes per A' , que talla la



recta interior donada en el punt A buscat. El centre del rombe és O , punt mitjà de B' i D' . La perpendicular BD per O a la recta AO dona finalment el rombe buscat. En efecte, els triangles rectangles $AA'O$ i $DD'O$ són semblants d'on $AO/A'O = DO/D'O$. Els triangles rectangles AOD i $A'OD'$ són també semblants a causa de la igualtat última. D'aquí deduïm que A és el vèrtex buscat. De fet, tots els rombes amb vèrtex sobre la recta AA' tenen angle de 45° i tenen el mateix centre O .



XLIII OLIMPIADA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

15 i 16 de desembre de 2006

Enunciats



XLIII OLIMPIÁDA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

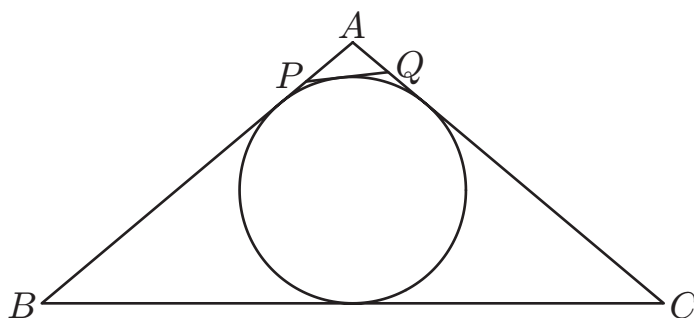
15 de desembre de 2006, de 16 a 19:30h.

1.—Tenim un conjunt de $3n$ enters consecutius. De quantes maneres diferents es poden escollir 3 enters d'aquest conjunt de manera que la seva suma sigui múltiple de 3?

2.—Si a , b , c són els costats d'un triangle de semiperímetre p i àrea S , proveu que

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < \frac{p}{S}$$

3.— ABC és un triangle isòsceles amb $AB = AC$ i $\widehat{A} = 120^\circ$. P i Q són punts sobre els costats AB i AC , respectivament, tals que PQ és tangent a la circumferència inscrita al triangle. Demostreu que $BP \cdot CQ$ és igual al doble de l'àrea del quadrilàter $PBCQ$.





XLIII OLIMPIADA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

16 de desembre de 2006, de 9:30 a 13h.

4.—Sigui

$$S = \frac{1 \cdot (n-2)}{n(n-1)(n-2)} + \frac{2 \cdot (n-3)}{n(n-1)(n-2)} + \dots + \frac{(n-2) \cdot 1}{n(n-1)(n-2)} = \sum_{j=2}^{n-1} \frac{(j-1)(n-j)}{n(n-1)(n-2)}$$

Demostreu que $S = \frac{1}{6}$

5.—Una botiga que està oberta els set dies de la setmana ha venut, durant l'any 2005, un total de 629 bicicletes. Sabent que, com a mínim, ha venut una bicicleta cada dia, demostreu que hi ha un període de dies consecutius durant el qual s'han venut exactament 100 bicicletes.

6.—Sigui $a_1, a_2, \dots, a_n$ una successió finita de nombres reals no tots negatius, i sigui m un nombre enter $0 < m \leq n$. Direm que un terme de la successió, a_k , és un m -líder si existeix un enter positiu p ($1 \leq p \leq m$), tal que

$$a_k + a_{k+1} + \dots + a_{k+p-1} \geq 0.$$

Demostreu que la suma de tots els m -líders és sempre no negativa.

Soluciones

1.—Posem els $3n$ enters consecutius en la forma $a, a+1, a+2, \dots, a+3n-1$, per algun enter a . Tres qualssevol sumen $S = 3a + i + j + k$ on i, j, k són tres enters diferents entre 0 i $3n-1$. Per tant, $3|S$ si i només si $3|i+j+k$. Ara bé, $i+j+k$ és múltiple de 3 només en els casos següents:

- $i = 3m, j = 3m', k = 3m''$ per certs m, m', m'' enters.
- $i = 3m+1, j = 3m'+1, k = 3m''+1$ per certs m, m', m'' enters.
- $i = 3m+2, j = 3m'+2, k = 3m''+2$ per certs m, m', m'' enters.
- $i = 3m, j = 3m'+1, k = 3m''+2$ per certs m, m', m'' enters.

Tenint present que en el conjunt $\{0, 1, 2, 3, \dots, 3n-1\}$ hi ha n enters que són múltiples de 3, n que són de la forma $3m+1$ i n que són de la forma $3m+2$, les tries les podem fer de

$$3 \binom{n}{3} + n^3 = \frac{n(3n^2 - 3n + 2)}{2}$$

maneres diferents.

2.—Si $\widehat{C}$ és l'angle oposat al costat c del triangle, podem escriure

$$S = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin \widehat{C} \leq \frac{1}{2} a \cdot b$$

D'aquí obtenim

$$\frac{1}{a} \leq \frac{b}{2S}$$

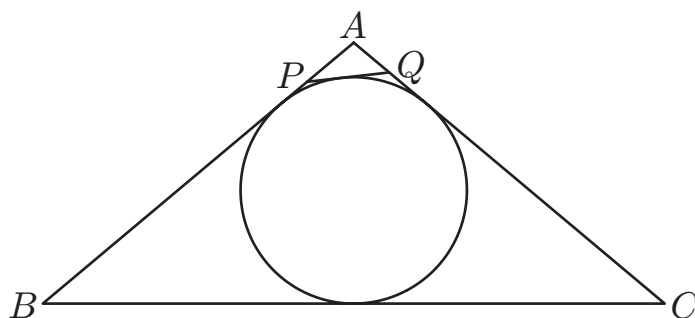
on la igualtat només es dóna si $\widehat{C} = 90^\circ$. De la mateixa manera obtenim

$$\frac{1}{b} \leq \frac{c}{2S} \quad \text{i} \quad \frac{1}{c} \leq \frac{a}{2S}$$

Com que les tres igualtats no es poden donar simultàniament tindrem, necessàriament, que

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < \frac{b+c+a}{2S} = \frac{p}{S}$$

3.—Posem $BP = p, CQ = q, AB = AC = \ell$ (així $BC = \ell\sqrt{3}$).



Com que $PQ + BC = BP + CQ$ (els segments de tangents a una circumferència traçades des d'un punt exterior són iguals), tindrem que $PQ = p + q - \ell\sqrt{3}$. L'àrea del quadrilàter és:

$$\begin{aligned}\text{Àrea}(PBCQ) &= \text{Àrea}(ABC) - \text{Àrea}(APQ) = \\ &= \frac{1}{2} \ell^2 \cdot \sin 120^\circ - \frac{1}{2} (\ell - p)(\ell - q) \sin 120^\circ = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} [(p + q) \cdot \ell - p \cdot q]\end{aligned}$$

Apliquem ara el teorema del cosinus al triangle APQ ,

$$(p + q - \ell\sqrt{3})^2 = (\ell - p)^2 + (\ell - q)^2 - 2(\ell - p)(\ell - q) \left(-\frac{1}{2}\right) = (\ell - p)^2 + (\ell - q)^2 + (\ell - p)(\ell - q).$$

Desenvolupant els quadrats i simplificant:

$$p \cdot q = \ell \cdot (2\sqrt{3} - 3)(p + q).$$

És a dir

$$(p + q) \cdot \ell = \frac{2\sqrt{3} + 3}{3} \cdot p \cdot q.$$

Podem, doncs, escriure,

$$\begin{aligned}\text{Àrea}(PBCQ) &= \text{Àrea}(ABC) - \text{Àrea}(APQ) = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} [(p + q) \cdot \ell - p \cdot q] = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{2\sqrt{3} + 3}{3} - 1 \right) \cdot p \cdot q = \frac{1}{2} p \cdot q = \frac{1}{2} BP \cdot CQ.\end{aligned}$$

4.—

4.1.—Primera solució.

Aquesta igualtat es pot reescriure com

$$\sum_{j=2}^{n-1} (j-1)(n-j) = \binom{n}{3}.$$

Sabem que $\binom{n}{3}$ és el nombre de maneres d'escollir 3 nombres diferents del conjunt $\{1, 2, \dots, n\}$. Per fer aquesta tria podem seguir la següent estratègia: primer escollim un nombre j tal que $2 \leq j \leq n-1$; després escollim un nombre $i < j$ (ho podem fer de $j-1$ maneres); i després un nombre $k > j$ (de $n-j$ maneres).

O sigui que fixat un valor de j , $2 \leq j \leq n-1$, el nombre de maneres de triar els altres dos nombres diferents és

$$(j-1) \cdot (n-j).$$

La suma de tots els casos dóna

$$\sum_{j=2}^{n-1} (j-1)(n-j).$$

Fent-ho així hem triat una vegada, i només una, tots els conjunts comptats per $\binom{n}{3}$, per tant la igualtat està demostrada.

4.2.—Segona solució.

La igualtat proposada és equivalent a

$$\sum_{j=2}^{n-1} (j-1) \cdot (n-j) = \binom{n}{3}$$

Ara podem procedir per inducció. Per $n=3$:

$$\sum_{j=2}^2 (j-1) \cdot (n-j) = 1 = \binom{n}{3}$$

Si suposem vàlida la suma fins n , és a dir, suposem vàlid que

$$\sum_{j=2}^{n-1} (j-1) \cdot (n-j) = 1 \cdot (n-2) + 2 \cdot (n-3) + 3 \cdot (n-4) + \cdots + (n-2) \cdot 1 = \binom{n}{3}$$

Calculem ara

$$\sum_{j=2}^n (j-1) \cdot (n+1-j) = 1 \cdot (n-1) + 2 \cdot (n-2) + 3 \cdot (n-3) + \cdots + (n-1) \cdot 1$$

que es pot escriure com

$$\begin{aligned} & (1 \cdot (n-1) + 1 \cdot (n-2) + 1 \cdot (n-3) + \cdots + 1 \cdot 1) + \\ & + (1 \cdot (n-2) + 2 \cdot (n-3) + 3 \cdot (n-4) + \cdots + (n-2) \cdot 1) = \\ & \frac{n(n-1)}{2} + \binom{n}{3} = \binom{n+1}{3} \end{aligned}$$

5.—

5.1.—Primera solució.

Numerem els dies de l'any 2005 de l'1 al 365. Sigui b_i el nombre de bicicletes venudes fins el dia i (dia inclòs). Podem escriure:

$$1 \leq b_1 < b_2 < \cdots < b_i < \cdots < b_{365} = 629 \quad (1)$$

Sumant 100 a cada terme, obtenim:

$$101 \leq b_1 + 100 < b_2 + 100 < \cdots < b_i + 100 < \cdots < b_{365} + 100 = 729 \quad (2)$$

Entre les dues cadenes de desigualtats tenim un total de $365 \times 2 = 730$ nombres de l'interval $[1, 729]$. Això implica que, com a mínim, dos d'aquests nombres siguin iguals. Els nombres de la cadena de desigualtats (1) són tots diferents. El mateix passa amb els de la cadena (2). Per tant, ha d'haver-hi uns índexs j i k que compleixin $b_k = b_j + 100$. Això vol dir que entre el dia $j + 1$ i el dia k (inclòs) s'han venut exactament 100 bicicletes.

5.2.—Segona solució.

Sigui b_i el nombre de bicicletes venudes fins al dia i (inclòs). Tots els b_i són diferents. Ens mirem els nombres b_i segons la seva classe de congruència mòdul 100. Com que hi ha 365 dies, hi haurà, almenys, 4 nombres b_i en la mateixa classe.

Suposem que $b_l = b_k + 100a = b_j + 100b = b_i + 100c$ per certs enters $1 \leq a < b < c$. Si $a = 1$ o $b - a = 1$ o $c - b = 1$ ja hem acabat. Si no, com que en total s'han venut 629 bicicletes, l'única possibilitat és que $a = b - a = c - b = 2$ i $b_l = b_i + 600$ amb $b_i \leq 29$. Com que el raonament el podem repetir per a totes les classes de congruència amb almenys 4 elements, deduïm que o bé hem demostrat l'enunciat o bé com a molt hi ha 29 classes de congruència mòdul 100 que continguin almenys quatre dels nombres b_n . Si totes aquestes classes contenen exactament quatre nombres, tindríem que el nombre total de b_n seria $\leq 29 \cdot 4 + 71 \cdot 3 = 329 < 365$. Per tant, hi ha d'haver alguna classe que contingui almenys 5 nombres b_n . Per a aquest tenim $b_l = b_k + 100a = b_j + 100b = b_i + 100c = b_h + 100d$; i ara el mateix argument d'abans ens donaria $b_l \leq 800 + b_h$, que és impossible, per tant algun d'entre $a, b - a, c - b, d - c$ és igual a 1, com volíem demostrar.

- 6.—Sigui doncs m un enter positiu $0 < m \leq n$. Els termes no negatius de la successió són m -líders per a tot m perquè el p requerit pot ser $p = 1$. Així, el conjunt de m -líders és no buit. Sigui a_k el primer m -líder i sigui

$$a_k + a_{k+1} + \cdots + a_{k+p-1} \geq 0, \quad 0 \leq p \leq m$$

la primera suma (la més curta) que és no negativa. Tots els sumands d'aquesta suma, com per exemple, a_h , són també m -líders. En efecte,

$$a_h + a_{h+1} + \cdots + a_{k+p-1} \geq 0,$$

perquè si no fos així, $a_k + \cdots + a_{h-1} > 0$ i per tant, la suma positiva més curta no seria de longitud p .

Tenim, doncs, que $a_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+p-1}$ són tots m -líders i

$$a_k + a_{k+1} + \dots + a_{k+p-1} \geq 0.$$

Considerem ara la successió $a_{k+p}, \dots, a_n$ i repetim el mateix procés i així successivament fins acabar amb la successió original. La suma de *totes* les sumes més curtes que hem anat obtenint és la suma de *tots* els m líders. Òbviament, aquesta suma és no negativa.



XLIV OLIMPIADA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

14 i 15 de desembre de 2007

Enunciats



XLIV OLIMPIÁDA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

Primera sessió

14 de desembre de 2007, de 16 a 19:30h.

1.—Si $p_1, p_2, \dots, p_n$ són nombres primers diferents, demostreu que el nombre

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_n}$$

no pot ser enter.

2.—Sigui ABC un triangle isòsceles de costat desigual BC . Una circumferència és tangent interiorment a la circumferència circumscrita al triangle i als costats AB i AC en els punts P i Q respectivament. Demostreu que el punt mig del segment PQ és l'incentre del triangle ABC .

3.—Tenim tres segments de longitud

$$a^{1/a}, b^{1/b}, c^{1/c}$$

on a, b i c són nombres reals positius més grans o iguals que 1. És sempre possible construir un triangle que els tingui per costats?



XLIV OLIMPIADA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

Segona sessió

15 de desembre de 2007, de 10:00 a 13:30h.

- 4.—Quin és el nombre més gran que es pot obtenir com a producte de nombres enters positius que sumin 2007?
- 5.—Un alfabet està constituït per tres lletres: I, X, V que s'escriuen amb barretes d'igual mida I. Si tenim n barretes i les utilitzem totes, quantes paraules diferents podrem escriure? I si $n = 12$?
- 6.—Donades dues rectes concurrents i un punt P exterior a elles, traceu un recta per P tal que la seva intersecció amb les dues rectes formi un triangle de perímetre donat.

Soluciones

1.—Suposem que fos enter. Tindríem

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_n} = m.$$

Lavors,

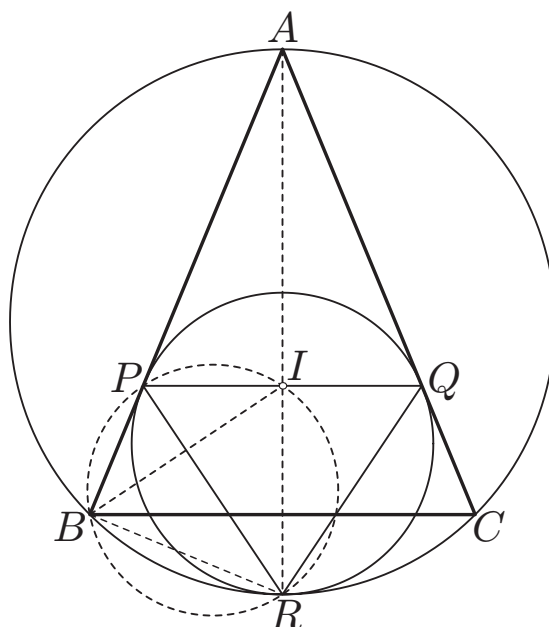
$$\frac{1}{p_1} = m - \left(\frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_n} \right) = \frac{r}{p_2 \cdots p_n}$$

i tindríem

$$r \cdot p_1 = p_2 \cdots p_n \quad \Rightarrow \quad p_1 \mid p_2 \cdots p_n$$

que és absurd.

2.—



Sigui c la circumferència tangent interior. Per construcció, el punt mig del segment PQ , que anomenarem I pertany a la bisectriu de l'angle $\hat{A}$. Anem a demostrar que també és sobre la bisectriu de $\hat{B}$. En efecte, si R és el punt de tangència entre c i la circumferència circumscrita, R estarà sobre la bisectriu de l'angle $\hat{A}$. Tenim que

$$\widehat{PRQ} = \widehat{APQ} = \widehat{ABC}.$$

(Respecte la circumferència c , l'angle $\widehat{APQ}$ és un angle semiinscrit que mesura la meitat de l'arc PQ a l'igual que l'angle inscrit $\widehat{PRQ}$.)

Per altra banda, els angles $\widehat{PIR}$ i $\widehat{PBR}$ són rectes; en conseqüència, els punts P, B, R i I són concíclics i pertanyen a la circumferència c' que té centre en el punt mig del segment PR . Els angles $\widehat{PBI}$ i $\widehat{PRI}$ són inscrits a c' i abasten el mateix arc. Això ens permet afirmar que

$$\widehat{PBI} = \widehat{PRI} = \frac{1}{2}\widehat{PRQ} = \frac{1}{2}\widehat{ABC}.$$

El punt I , doncs, pertany també a la bisectriu de l'angle $\widehat{B}$ i és l'incentre del triangle ABC .

- 3.—Tres nombres reals x_1, x_2, x_3 de l'interval $[1, 2)$ sempre poden ser les longituds dels costats d'un triangle atès que la suma de qualsevol dels dos és més gran que el tercer:

$$x_{i_1} + x_{i_2} \geq 2 > x_{i_3}$$

Els tres nombres de l'enunciat, estan en aquesta situació. En efecte. Clarament, si $x \geq 1$, $x^{1/x} \geq 1$. Per tant, només hem de veure que per tot $x \geq 1$ es compleix $x^{1/x} < 2$ que equival a $x < 2^x$.

Com que $[x] \leq x < x + 1$, fent servir la desigualtat de Bernoulli tenim:

$$2^x \geq 2^{[x]} = (1 + 1)^{[x]} \geq 1 + [x] > x.$$

- 4.—Posem que $2007 = s_1 + s_2 + \dots + s_n$. Volem aconseguir que $N = s_1 \cdot s_2 \cdot \dots \cdot s_n$ sigui màxim. Podem fer les consideracions següents:

- **Cap sumand s pot ser igual a 1.** El cas en què TOTS els $s_i = 1$ correspon clarament a un mínim ($N = 1$). Així, algun s ha de complir $s > 1$. En el cas que algun altre sumand fos 1, substituint s_i i 1 per $s + 1$ aconseguiríem un major valor de N atès que $1 + s > 1 \cdot s$.
- **Cap sumand s pot ser > 4 .** Si un $s \geq 5$, el podem substituir per 3 i $s - 3$ i el valor resultant de N augmentaria atès que $3 \cdot (s - 3) > s$.
- **Si un dels sumands $s = 4$, es pot substituir per dos sumands iguals a 2.**
- **No hi pot haver més de dos sumands iguals a 2.** Tres sumands iguals a 2 es poden substituir per dos sumands iguals a 3 i el valor de N augmenta atès que $3 \cdot 3 > 2 \cdot 2 \cdot 2$.

Així, N només pot tenir factors 3 junt amb cap, un o dos factors 2. El fet que $2007 = 3^2 \cdot 223$ fa que el màxim de N es trobi quan fem $2007 = 669 \cdot 3$, o sigui $N_{\max} = 3^{669}$.

5.—

5.1.—Primera solució.

Pels valors baixos de n tenim:

- $n = 1$. Només hi ha 1 paraula; I.
- $n = 2$. Podem escriure 3 paraules: II, X, V.
- $n = 3$. Podem escriure 5 paraules: III, IV, VI, IX, XI
- $n = 4$. Podem escriure 11 paraules: IIII, IVV, IVI, VII, VV, VX, IIX, IXI, XII, XX, XV

Sigui P_n el nombre de paraules que podem formar amb n barretes; tenim $P_1 = 1$, $P_2 = 3$, $P_3 = 5$, $P_4 = 11$, etc. Es compleix que

$$P_n = P_{n-1} + 2P_{n-2}.$$

Efectivament, tota paraula acaba en I, en X o en V. Si acaba en I i esborrem aquesta lletra, aleshores tenim totes les paraules de $n - 1$ lletres, que són P_{n-1} . Si acaba en V o en X i esborrem aquestes lletres, aleshores tenim P_{n-2} paraules per les que acaben en V i P_{n-2} per les que acaben en X: en total $2P_{n-2}$. D'aquí surt la recurrència.

Resolent-la pel mètode general, arribem al polinomi característic $x^2 - x - 2$ i les seves arrels $x = 2$ i $x = -1$. La solució general de la recurrència és $P_n = a2^n + b(-1)^n$. Calculem les constants a i b a partir dels valors de P_1 i P_2 i ens queda $a = 2/3$, $b = 1/3$. Tenim, finalment,

$$P_n = \frac{2^{n+1}}{3} + \frac{(-1)^n}{3}.$$

Per $n = 12$ queda $P_{12} = 2731$.

5.2.—Segona solució.

Amb n barretes podem escriure paraules que continguin $n, n - 2, n - 4, \dots, 0$ lletres I si n és parell, o bé $n, n - 2, n - 4, \dots, 1$ lletres I si n és senar, o sigui, paraules amb $n - 2p$ lletres I on $0 \leq p \leq n/2$ si n és parell, o $0 \leq p \leq (n - 1)/2$ si n és senar.

Una paraula amb $n - 2p$ lletres I conté p lletres X o V, i té, per tant, $n - p$ lletres en total. Per tal d'escriure-les totes, caldrà primer triar p llocs entre els $n - p$ on posar les X i V. D'aquestes tries n'hi ha

$$\binom{n-p}{p}$$

A continuació hem d'escriure X o V en aquests llocs, cosa que podem fer de 2^p maneres. Així, doncs, tindrem

$$2^p \binom{n-p}{p}$$

paraules escrites amb n barretes que contenen exactament p lletres I.

El nombre total de paraules que podrem escriure amb n barretes serà

$$P_n = \sum_{p=0}^{n/2} 2^p \binom{n-p}{p}, \quad \text{si } n \text{ és parell,}$$

$$P_n = \sum_{p=0}^{(n-1)/2} 2^p \binom{n-p}{p}, \quad \text{si } n \text{ és senar.}$$

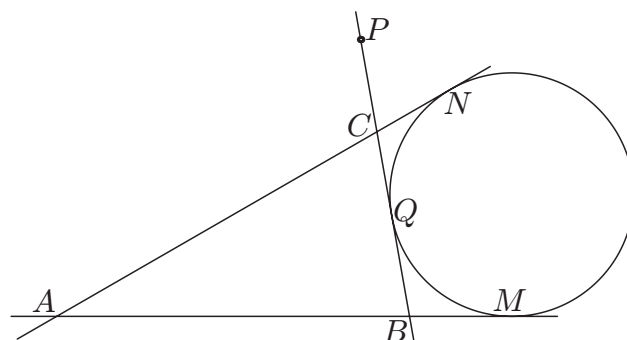
Per $n = 12$ surt

$$P_{12} = 2^0 \binom{12}{0} + 2^1 \binom{12}{1} + 2^2 \binom{12}{2} + 2^3 \binom{12}{3} + 2^4 \binom{12}{4} + 2^5 \binom{12}{5} + 2^6 \binom{12}{6} = 2731.$$

5.3.— Observació.

La igualtat de les fórmules de les dues solucions es pot demostrar comprovant per mitjà de les propietats additives bàsiques dels nombres combinatoris, que els P_n obtinguts en la solució 2, compleixen la recurrència de la solució 1.

6.—Suposem el problema resolt:



Tracem la circumferència exinscrita al triangle tangent en Q al costat BC . Cada una de les dues tangents exteriors AM i AN (que són iguals per ser les dues tangents a la circumferència des d'un mateix punt) mesura exactament el semiperímetre. En efecte; atès que els segments $BQ = BM$ i $CQ = CN$ (per la mateixa raó d'abans) tenim que $AM = AB + BQ$ i $AN = AC + CQ$. Sumant les dues expressions tenim $AM + AN = 2s$ on s denota el semiperímetre. Per tant, per traçar la recta que ens demanen només cal transportar la meitat del perímetre a AM i AN , dibuixar la circumferència tangent a les dues rectes en M i N i, des de P traçar la recta tangent a la circumferència. La circumferència ha de quedar dibuixada en un dels quadrants contigus al que conté el punt; per tant, de fet, hi ha dues solucions al problema.

XLV OLIMPIÁDA MATEMÁTICA

Primera fase (Catalunya)

Enunciats i solucions

Problema 1.

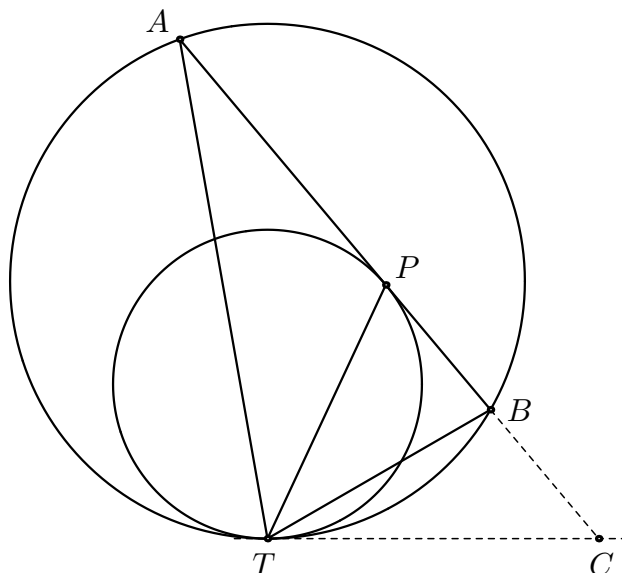
Dues circumferències són tangents interiorment en T . Sigui AB una corda de la circumferència exterior que és tangent a la circumferència interior en el punt P . Demostreu que $\overline{TP}$ biseca $\widehat{ATB}$.

Primera solució.

Si dibuixem la tangent comuna a T i anomenem C el punt d'intersecció amb la recta AB , tenim que el triangle PTC és isòsceles atès que $\overline{CP} = \overline{CT}$ per ser tangents a la mateixa circumferència. Així,

$$\widehat{TPC} = \widehat{CTP} = \widehat{CTB} + \widehat{BTP}.$$

Els angles $\widehat{CTB}$ i $\widehat{TAB}$ són iguals perquè abarquen el mateix arc a la circumferència exterior (el primer és semiinscrit i el segon inscrit).



Ara, $\widehat{TPA}$ és suplementari de $\widehat{TPC}$ o sigui que, considerant el triangle ATP , tenim

$$\widehat{TPC} = \widehat{ATP} + \widehat{TAB}.$$

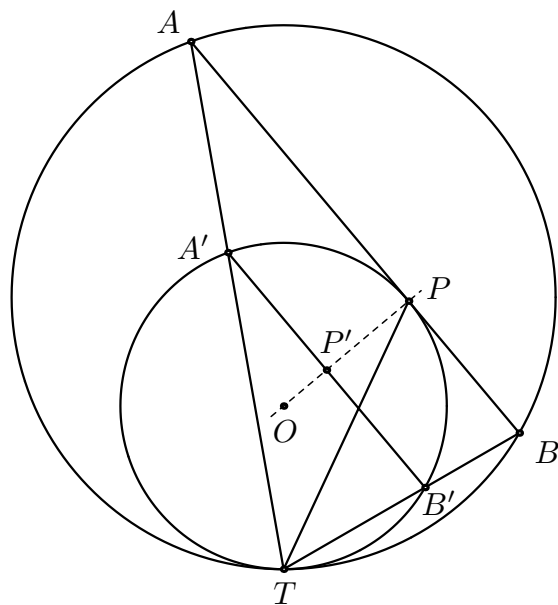
Tenim, doncs, $\widehat{TPC}$ expressat de dues maneres:

$$\widehat{CTB} + \widehat{BTP} = \widehat{ATP} + \widehat{TAB}$$

o sigui que $\widehat{BTP} = \widehat{ATP}$ com s'havia de demostrar.

Segona solució.

L'homotècia de centre T que transforma la circumferència gran en la petita, transforma A en A' i B en B' . Les rectes AB i $A'B'$ són, per tant, paral·leles. Com que el radi OP és perpendicular a la tangent AB , també és perpendicular a $A'B'$. El punt P' ha de ser el punt mitjà de $A'B'$ i la recta OP' és la mediatriu del triangle $TA'B'$ corresponent al costat $A'B'$. Els arcs $A'P$ i PB' són iguals i per tant TP és la bisectriu de l'angle $\widehat{A'TB'}$, com calia demostrar.



Problema 2.

Caracteritzeu tots els nombres enters positius N que **no** es poden escriure de cap de les dues maneres següents:

$$ab + a + b, \quad cd + c - d,$$

amb a, b, c, d enters positius tals que $c \geq d$.

Solució.

Considerem un nombre enter positiu qualsevol, N . Suposem que $N = ab + a + b$. Llavors, $N = a(b + 1) + b = (a + 1)(b + 1) - 1$. En conseqüència, $N + 1 = (a + 1) \cdot (b + 1)$ és un nombre compost. Si $N = cd + c - d$, llavors, $N = c(d + 1) - d = (c - 1)(d + 1) + 1$. En conseqüència, $N - 1 = (c - 1) \cdot (d + 1)$ és un nombre compost, llevat dels casos $c = 2, d = 1$ i $c = 2, d = 2$. El cas $c = 2, d = 1$ correspondria a $N = 3$ pel qual $N + 1 = 4$ és compost i els cas $c = 2, d = 2$ correspondria a $N = 4$ que és la única excepció. En conseqüència, els enters positius N que no són ni d'una manera ni de l'altre són tals que $N + 1$ i $N - 1$ són primers amb l'excepció del 4. Això caracteritza els nombres que ens demanen: són els que estan situats entre dos primers a excepció del 4. És a dir: 6, 12, 18, 30, 42, 60, etc.

Problema 3.

Sigui $\{a_n\}$ la successió en la qual a_n es defineix com el nombre natural més proper a $\sqrt{n}$. Quin és el valor de

$$S = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{2008}}?$$

Solució.

Si fem una mica d'observació, tindrem:

$n :$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
$a_n :$	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	5

Ens adonem que a la segona fila, l'1 es repeteix dues vegades, el 2 es repeteix 4 vegades, el 3 es repeteix 6 vegades, el 4 es repeteix 8 vegades. A més, si ens fixem en els quadrats perfectes de la primera fila, veiem que on tenim k^2 , el corresponent a_k és, òbviament, k i aquest valor es manté entre els valors $k^2 - (k - 1)$ i $k^2 + k$. Per tant, podem conjecturar que

$$a_n = k \quad \text{si, i només si,} \quad n = k^2 - k + 1, k^2 - k + 2, \dots, k^2 + k - 1, k^2 + k.$$

En total, $a_n = k$ per $2k$ valors de n . Demostrem aquesta conjectura. Si $a_n = k$, això equival a que

$$k - \frac{1}{2} < \sqrt{n} < k + \frac{1}{2}.$$

Les desigualtats són estrictes perquè $\sqrt{n}$ no pot prendre mai el valor $k + 1/2$ amb k enter. Tenim, doncs, elevat al quadrat, que

$$k^2 - k + \frac{1}{4} < n < k^2 + k + \frac{1}{4}.$$

Aquestes desigualtats, òbviament porten a que $n = k^2 - k + 1, k^2 - k + 2, \dots, k^2 + k - 1, k^2 + k$.

En conseqüència, un valor k s'aconsegueix $2k$ vegades exactament pels valors de n compresos entre $k^2 - k + 1$ i $k^2 + k$. Això significa que la fracció $1/k$ apareix $2k$ vegades. Mirem ara com queda 2008 en relació a la seva posició en una llista $k^2 - k + 1, k^2 - k + 2, \dots, k^2 + k - 1, k^2 + k$. Concretament, com que $\sqrt{2008} = 44.8\dots$, el valor de a_{2008} serà 45 i serà dins de la llista $45^2 - 45 + 1 = 1981, \dots, 45^2 + 45 = 2070$. Aquest valor s'haurà assolit exactament per $a_{1981}, a_{1982}, \dots, a_{2008}$. Exactament 28 vegades. Estem en condicions de fer la suma total:

$$S = 2 \cdot \frac{1}{1} + 4 \cdot \frac{1}{2} + 6 \cdot \frac{1}{3} + \cdots + 88 \cdot \frac{1}{44} + 38 \cdot \frac{1}{45} = 44 \cdot 2 + \frac{28}{45} = \frac{3988}{45}.$$

Problema 4.-

Donat un triangle ABC , siguin m_a, m_b, m_c les seves mitjanes i sigui R el radi de la circumferència circumsrita. Demostreu que

$$\frac{m_a^2 + m_b^2 + m_c^2}{R^2(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)}$$

és un nombre enter positiu i determineu el seu valor.

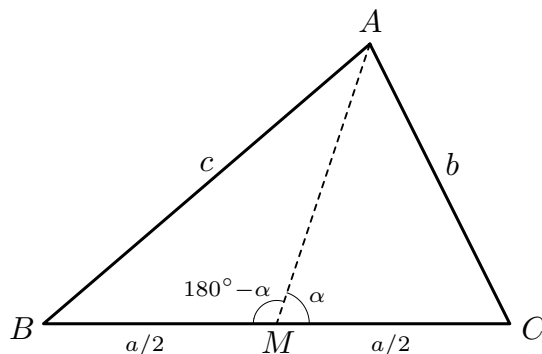
Solució.

El teorema del sinus aplicat al triangle ABC ens dona

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

i d'aquí surt que el denominador de l'expressió de l'enunciat és $\frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$.
Calculem ara les mitjanes. Considerem la mitjana m_a que uneix el vèrtex A amb el punt M mitjà del segment BC . El teorema del cosinus aplicat als triangles AMB i AMC dona

$$\begin{aligned} c^2 &= m_a^2 + a^2/4 - a m_a \cos(180^\circ - \alpha) = m_a^2 + a^2/4 + a m_a \cos \alpha, \\ b^2 &= m_a^2 + a^2/4 - a m_a \cos \alpha \end{aligned}$$



Sumant les dues expressions queda $b^2 + c^2 = a^2/2 + 2m_a^2$. Fàcilment obtenim $m_a^2 = (2c^2 + 2b^2 - a^2)/4$ i per tant

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2).$$

El nombre que ens demanen és 3.

Problema 5.

És possible construir un políedre amb totes les cares formades per polígons de diferent nombre de costats?

Primera solució.

Suposem que la cara de més gran nombre de costats en té n . Les cares poden ser de 3, 4, 5, ..., $n - 1$, n costats. Com a màxim hi ha $n - 2$ cares. De cada una de les n arestes de la cara que en té més hi hem de poder posar una cara, però no tenim prou cares ja que, com a màxim, ens en queden $n - 3$. Impossible.

Segona solució.

Designem per c , v i a el nombre de cares, vèrtexs i arestes del políedre. Per la fórmula d'Euler sabem que $c + v = a + 2$, i com que a cada vèrtex hi concorren, com a mínim, tres arestes, tenim també $3v \leq 2a$. D'aquestes dues relacions surt fàcilment $6 \leq 3c - a$ o bé $12 \leq 6c - 2a$.

Designem per c_i el nombre de cares que tenen i costats. Aleshores

$$\begin{aligned}c &= c_3 + c_4 + \cdots + c_n \\ 2a &= 3c_3 + 4c_4 + \cdots + nc_n.\end{aligned}$$

Substituint a la fórmula $12 \leq 6c - 2a$ els valors de c i $2a$ tenim

$$\begin{aligned}12 &\leq 6(c_3 + c_4 + \cdots + c_n) - (3c_3 + 4c_4 + \cdots + nc_n) = \\ &= 3c_3 + 2c_4 + c_5 - (c_7 + 2c_8 + \cdots + (n - 6)c_n) \\ &\leq 3c_3 + 2c_4 + c_5.\end{aligned}$$

Si fos $c_3 \leq 1$, $c_4 \leq 1$ i $c_5 \leq 1$ ens quedaria $12 \leq 6$, absurd. En conseqüència, entre les cares d'un políedre cal que es repeteixin efectivament, o bé triangles, o bé quadrilàters, o bé pentàgons.

Problema 6.-

En el conjunt $\{2, 2^2, \dots, 2^n\}$ (n enter positiu), quina és la probabilitat que, en agafar un nombre a l'atzar del conjunt, la seva expressió decimal comenci amb un 1? Per a un valor gran de n , pots predir el comportament d'aquesta probabilitat?

Primera solució.

Demostrarem per inducció que a cada ordre decimal hi ha almenys una potència de 2 (entenem per ordre decimal cada interval entre dues potències de 10 consecutives).

En efecte, a l'ordre $[1, 10)$ n'hi ha 3: 2, 4 i 8. Suposem que a l'ordre k , $[10^{k-1}, 10^k)$ hi ha alguna potència de 2. Aleshores, si aquesta potència no arriba a la meitat de l'ordre, la potència següent queda dins del mateix ordre ($499 \dots 99 \times 2 = 999 \dots 98$). Com que dins d'un ordre decimal no hi pot haver infinites potències de 2, alguna d'elles passarà de la meitat i la potència següent serà de l'ordre següent $k + 1$, $[10^k, 10^{k+1})$.

Aquesta potència de dos que acabem de trobar a la demostració anterior comença amb un 1 ($999 \dots 99 \times 2 = 1999 \dots 98$). A més és l'única potència de 2 dins de l'ordre decimal que comença amb un 1.

En conclusió a cada ordre decimal hi ha una *única* potència de 2 que comença amb un 1. A la successió $\{2, 2^2, \dots, 2^n\}$ hi ha tantes potències de 2 que comencen amb un 1 com ordres decimals abasti, és a dir, com el nombre de xifres de 2^n que és

$$[\log 2^n] + 1 = [n \log 2] + 1.$$

Tenint present que a l'ordre decimal 1 no n'hi ha cap ja que $2^0 = 1$ no és del conjunt, la probabilitat buscada és

$$p_n = \frac{[n \log 2]}{n}.$$

Com que $[n \log 2] = n \log 2 - \{n \log 2\}$ (on $\{\alpha\}$ indica la *part fraccionària* del nombre real α , $0 < \{\alpha\} < 1$), resulta

$$p_n = \log 2 - \frac{\{n \log 2\}}{n}$$

que tendeix a $\log 2$ quan n es fa gran.

Segona solució.

Una primera observació que hem de fer és que per cada valor enter positiu de k existeix una única potència de 2 de k xifres que comença per 1. Per $k = 1$ és evident: $2^0 = 1$. Per $k > 1$, tot rau a estudiar la doble desigualtat

$$10^{k-1} < 2^r < 2 \cdot 10^{k-1}$$

i veure que té solució única en r . Traient logaritmes decimals,

$$k - 1 < r \cdot \log_{10}(2) < k - 1 + \log_{10}(2).$$

Ara, dividint tot per $\log_{10}(2)$:

$$\frac{k-1}{\log_{10}(2)} < r < \frac{k-1}{\log_{10}(2)} + 1.$$

Com que $\log_{10}(2)$ no és un nombre racional, a l'interval

$$\left(\frac{k-1}{\log_{10}(2)}, \frac{k-1}{\log_{10}(2)} + 1 \right)$$

segur que hi ha un únic nombre enter positiu r .

Vist això, comptem quantes potències de 2 del conjunt $\{2, 2^2, 2^3, \dots, 2^n\}$ comencen per 1. Amb la observació anterior, deduïm que el nostre recompte coincideix amb el nombre de dígit decimal de 2^n . És a dir, $[n \cdot \log_{10}(2)]$ (la notació $[\cdot]$ denota la part entera d'un nombre real). La probabilitat demanada és

$$P_n = \frac{[n \cdot \log_{10}(2)]}{n}.$$

Com que podem escriure $[n \cdot \log_{10}(2)] = n \cdot \log_{10}(2) - \alpha$, on $0 < \alpha < 1$, tenim que

$$P_n = \frac{[n \cdot \log_{10}(2)]}{n} = \frac{n \cdot \log_{10}(2) - \alpha}{n} = \log_{10}(2) - \frac{\alpha}{n}.$$

Si n és gran, com que $0 < \alpha < 1$, és clar que la fracció α/n és molt petita. La probabilitat s'acostarà a $\log_{10}(2) = 0.301030\dots$



XLVI OLIMPIADA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

11 i 12 de desembre de 2009

Enunciats



XLIV OLIMPIADA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

Primera sessió

11 de desembre de 2009, de 16 a 19:30h.

- 1.—Troba els dos angles desconeguts d'un triangle acutangle donat, sabent que el tercer angle mesura 45° , i que el producte de dos dels angles del seu triangle òrtic és 2009. (El *triangle òrtic* PQR d'un triangle ABC és aquell que té per vèrtexs els peus de les tres altures del triangle ABC . Els angles es mesuren en graus sexagesimals a l'interval $[0^\circ, 180^\circ]$).
- 2.—Per a cada nombre natural n , considera l'enter positiu $\underbrace{444 \dots 44}_{n} \overbrace{888 \dots 88}^{2n} 9$. Demostra que cada un d'ells és un quadrat perfecte i calcula'n l'arrel quadrada.
- 3.—Troba totes les ternes (x, y, z) de nombres reals que compleixen

$$\left. \begin{aligned} x^2 + \sqrt{y^2 + 12} &= \sqrt{y^2 + 60} \\ y^2 + \sqrt{z^2 + 12} &= \sqrt{z^2 + 60} \\ z^2 + \sqrt{x^2 + 12} &= \sqrt{x^2 + 60} \end{aligned} \right\}$$



XLIV OLIMPIADA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

Segona sessió

12 de desembre de 2009, de 9:30 a 13:00h.

4.—Dins d'un quadrat es dibuixa un triangle de manera que el centre del quadrat caigui fora del triangle. Prova que un dels costats del triangle té la longitud més petita o igual que la longitud del costat del quadrat.

5.—Siguin a , b i c tres nombres reals i positius tals que $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 9$. Proveu que

$$\frac{1}{2a+b} + \frac{1}{2b+c} + \frac{1}{2c+a} \leq \sqrt{3}.$$

6.—En un triangle ABC , de costats a , b i c , es consideren un punt Q sobre AB i la recta que passa per Q i C . Demostra que la circumferència que té com a diàmetre els incentres I_1 i I_2 dels triangles ACQ i BCQ talla el segment QC en el punt Q i en un altre punt P que dista $p - c$ de C , on p és el semiperímetre del triangle ABC .

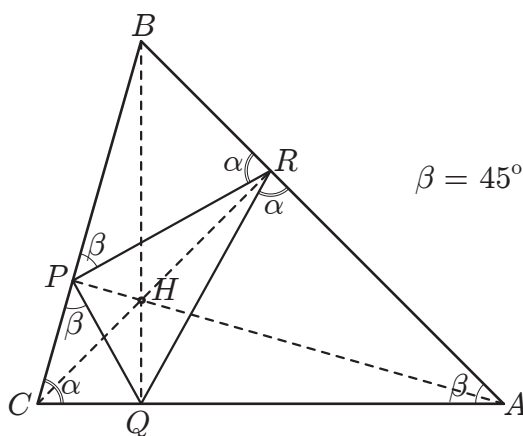
Solucions

- 1.—Troba els dos angles desconeguts d'un triangle acutangle donat, sabent que el tercer angle mesura 45° , i que el producte de dos dels angles del seu triangle òrtic és 2009. (El triangle òrtic PQR d'un triangle ABC és aquell que té per vèrtexs els peus de les tres altures del triangle ABC . Els angles es mesuren en graus sexagesimals a l'interval $[0^\circ, 180^\circ]$).

SOLUCIÓ:

Sigui PQR el triangle òrtic del triangle ABC amb l'ordre alfabètic habitual, en el qual suposarem que l'angle $\hat{A} = 45^\circ$.

Aleshores podem veure que $\hat{P} = 180^\circ - 2\hat{A}$, $\hat{Q} = 180^\circ - 2\hat{B}$, i $\hat{R} = 180^\circ - 2\hat{C}$. Això és immediat si veiem que $\widehat{BPR} = \hat{A} = \widehat{CPQ}$ i això es deu a que els triangles PBR i ABC són semblants, i també els triangles AQR i PQC (vegeu la figura adjunta).



Considerem els triangles rectangles BPA i BRC . Per ser rectangles i compartir un angle agut són semblants. D'això se'n deriva

$$\frac{BP}{BA} = \frac{BR}{BC}.$$

Aleshores, pel criteri costat-angle-costat [CAC], els triangles PBR i ABC són semblants. Anàlogament passa amb els altres dos triangles, i així ja tenim provada la primera afirmació.

De tot això en resulta que $\hat{P} = 180^\circ - 2\hat{A} = 90^\circ$.

Ara analitzem els tres casos possibles:

- Si $\hat{P} \times \hat{R} = 2009$, $\hat{R} = \frac{2009}{90}$, i $\hat{C} = \frac{180^\circ - \hat{R}}{2} = 78^\circ 50' 20''$, $\hat{B} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{C}) = 56^\circ 9' 40''$.
- Si $\hat{P} \times \hat{Q} = 2009$, el triangle és el mateix d'abans amb els vèrtexs canviats.

- Si $\widehat{R} \times \widehat{Q} = 2009$, $\widehat{Q} + \widehat{R} = 90^\circ$, aleshores $\widehat{Q}^2 - 90\widehat{Q} + 2009 = 0$.

Per tant, $\widehat{Q} = 41^\circ$ o 49° , i $\widehat{R}$ el complementari. Els dos casos són, doncs, el mateix cas. Prenem el primer cas, $\widehat{Q} = 41^\circ$, $\widehat{B} = 69^\circ 30'$, $\widehat{R} = 49^\circ$, $\widehat{C} = 65^\circ 30'$.

2.—Per a cada nombre natural n , considera l'enter positiu $\overbrace{444 \dots 44}^n \overbrace{888 \dots 889}^n$. Demuestra que cada un d'ells és un quadrat perfecte i calcula'n l'arrel quadrada.

2.1.—PRIMERA SOLUCIÓ.

a) Veiem els primers casos:

- $n = 1$: el nombre és $49 = 7^2$ i l'arrel quadrada és $7 = 6 \times 10^0 + 7$.
- $n = 2$: el nombre és $4489 = 67^2$ i l'arrel quadrada és $67 = 6 \times 10^1 + 7$.
- $n = 3$: el nombre és $444889 = 667^2$ i l'arrel quadrada és $667 = 6 \times 10^2 + 67$.

b) Usem la inducció sobre n . Per a $n = 3$, ja hem vist que $444889 = 667^2$.

Suposem que, per a $n = k$, el nombre és $\overbrace{444 \dots 44}^k \overbrace{888 \dots 889}^k = \left(\overbrace{666 \dots 67}^{k-1} \right)^2$
i, per tant, l'arrel val $\overbrace{666 \dots 67}^{k-1}$.

Provem-ho per a $n = k + 1$. Considerem el nombre $N = \overbrace{444 \dots 44}^{k+1} \overbrace{888 \dots 889}^{k+1}$.

Hem de veure que la seva arrel és $A = \overbrace{666 \dots 67}^k$. Calculem

$$\begin{aligned} A^2 &= \left(\overbrace{666 \dots 67}^k \right)^2 = \left(6 \times 10^k + \left(\overbrace{666 \dots 67}^{k-1} \right) \right)^2 = \\ &= 36 \times 10^{2k} + 12 \times 10^k \times \left(\overbrace{666 \dots 67}^{k-1} \right) + \left(\overbrace{666 \dots 67}^{k-1} \right)^2 \end{aligned}$$

I, per abreujar les notacions de la taula següent, fem $\overbrace{666 \dots 67}^{k-1} = B$.

	$\longleftarrow$	$\overbrace{\hspace{1cm}}^k$	$\longrightarrow$	$\longleftarrow$	$\overbrace{\hspace{1cm}}^k$	$\longrightarrow$							
$36 \times 10^{2k} =$	3	6	0	0	0	$\underbrace{\hspace{1cm}}_k$	0	0	0	0	$\underbrace{\hspace{1cm}}_k$	0	0
$10 \times 10^k B =$		6	6	6	6	$\underbrace{\hspace{1cm}}_k$	7	0	0	0	$\underbrace{\hspace{1cm}}_k$	0	0
$2 \times 10^k B =$		1	3	3	3	$\underbrace{\hspace{1cm}}_k$	3	4	0	0	$\underbrace{\hspace{1cm}}_k$	0	0
$B^2 =$			4	4	4	$\underbrace{\hspace{1cm}}_k$	4	4	8	8	$\underbrace{\hspace{1cm}}_k$	8	9
$N = A^2 =$	4	4	4	4	4	$\underbrace{\hspace{1cm}}_k$	4	8	8	8	$\underbrace{\hspace{1cm}}_k$	8	9

Òbviament hem establert el resultat que preteníem.

2.2.—SEGONA SOLUCIÓ. Tenim

$$N = \underbrace{444 \dots 44}_{n} \underbrace{888 \dots 889}_{n} = \underbrace{444 \dots 44}_{2n} + \underbrace{444 \dots 44}_{n} + 1 = 4A_{2n-1} + 4A_{n-1} + 1$$

on

$$A_n = 10^n + 10^{n-1} + \dots + 10 + 1 = \frac{10^{n+1} - 1}{9}$$

Calculant el quadrat de A_{n-1} , queda

$$A_{n-1}^2 = \frac{10^{2n} - 2 \cdot 10^n + 1}{81} = \frac{10^{2n} - 1 - 2(10^n - 1)}{81} = \frac{A_{2n-1}}{9} - \frac{2A_{n-1}}{9}$$

d'on

$$A_{2n-1} = 9A_{n-1}^2 + 2A_{n-1}$$

Substituint aquesta darrera expressió al valor de N , queda

$$\begin{aligned} N &= 4A_{2n-1} + 4A_{n-1} + 1 = 4(9A_{n-1}^2 + 2A_{n-1}) + 4A_{n-1} + 1 = \\ &= 36A_{n-1}^2 + 12A_{n-1} + 1 = (6A_{n-1} + 1)^2 = \underbrace{666 \dots 66}_n + 1 = \underbrace{666 \dots 67}_n \end{aligned}$$

2.3.—TERCERA SOLUCIÓ. Sigui $N = \underbrace{444 \dots 44}_{n} \underbrace{888 \dots 889}_{n}$ el nombre donat. Tenim

$$\begin{aligned} N &= 4 \cdot 10^{2n-1} + 4 \cdot 10^{2n-2} + \dots + 4 \cdot 10^n + \\ &\quad + 8 \cdot 10^{n-1} + 8 \cdot 10^{n-2} + \dots + 8 \cdot 10 + 9 \end{aligned}$$

Sumant les dues progressions geomètriques obtenim

$$\begin{aligned} N &= 4 \cdot \frac{10^{2n} - 10^n}{10 - 1} + 8 \cdot \frac{10^n - 10}{10 - 1} + 9 = \\ &= \frac{4}{9} \cdot 10^{2n} - \frac{4}{9} \cdot 10^n + \frac{8}{9} \cdot 10^n - \frac{80}{9} + 9 = \\ &= \frac{1}{9} (4 \cdot 10^{2n} + 4 \cdot 10^n + 1) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left((2 \cdot 10^n)^2 + 2 \cdot (2 \cdot 10^n) \cdot 1 + 1^2\right) = \\ &= \left(\frac{2 \cdot 10^n + 1}{3}\right)^2 \end{aligned}$$

Això ens diu que N és un quadrat perfecte amb arrel quadrada

$$\sqrt{N} = \frac{2 \cdot 10^n + 1}{3} = \underbrace{666 \dots 67}_n$$

3.—Troba totes les ternes (x, y, z) de nombres reals que compleixen

$$\left. \begin{aligned} x^2 + \sqrt{y^2 + 12} &= \sqrt{y^2 + 60} \\ y^2 + \sqrt{z^2 + 12} &= \sqrt{z^2 + 60} \\ z^2 + \sqrt{x^2 + 12} &= \sqrt{x^2 + 60} \end{aligned} \right\}$$

SOLUCIÓ:

Si fem $x^2 = a$, $y^2 = b$ i $z^2 = c$, s'obté

$$\left. \begin{aligned} a + \sqrt{b + 12} &= \sqrt{b + 60} \\ b + \sqrt{c + 12} &= \sqrt{c + 60} \\ c + \sqrt{a + 12} &= \sqrt{a + 60} \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} a &= \sqrt{b + 60} - \sqrt{b + 12} \\ b &= \sqrt{c + 60} - \sqrt{c + 12} \\ c &= \sqrt{a + 60} - \sqrt{a + 12} \end{aligned} \right\} \quad (*)$$

Considerem la funció $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida per

$$f(t) = \sqrt{t + 60} - \sqrt{t + 12} = \frac{48}{\sqrt{t + 60} + \sqrt{t + 12}}$$

Donat que, per a $0 \leq u < v$, compleix

$$\frac{48}{\sqrt{u + 60} + \sqrt{u + 12}} > \frac{48}{\sqrt{v + 60} + \sqrt{v + 12}}$$

llavors f és decreixent i el mateix passa amb $f(f(f(t)))$.

Si observem $(*)$ ens adonem que $f(b) = a$, $f(c) = b$ i $f(a) = c$ i, per tant, $f(f(f(a))) = a$.

Ara bé, això passa si, i només si, $f(a) = a$.

a) És obvi que, si $f(a) = a$, aleshores $f(f(f(a))) = a$.

b) Recíprocament, atès que la funció $f(t)$ és decreixent, resulta que:

i) Si $b < a = f(b)$, aleshores, $f(f(f(b))) > f(f(f(a)))$. Per tant, $b > a$. Impossible!

ii) Si $b > a = f(b)$, aleshores, $f(f(f(b))) < f(f(f(a)))$. Per tant, $b < a$. Impossible!

De i) i ii) en resulta, doncs, que necessàriament $f(b) = a = b$. Per tant, $f(a) = a$, com volíem.

Ara, trobarem els punts fixos de f . Es a dir, hem de resoldre l'equació

$$\sqrt{t + 60} - \sqrt{t + 12} = t \quad \text{o bé} \quad 48 - t^2 = 2t\sqrt{t + 12}.$$

Com que $48 - t^2 \geq 0$ aleshores $t \in [0, 4\sqrt{3}]$. Eliminant el radical de l'equació anterior resulta que

$$t^4 - 4t^3 - 144t^2 + 2304 = (t - 4)(t^3 - 144t - 576) = 0$$

Per a tot $t \in [0, 4\sqrt{3}]$ és $t^3 < 144t + 576$. En efecte, la funció $g(t) = t^3$ és creixent. Per tant, a l'interval $[0, 4\sqrt{3}]$, pren el valor màxim quan $t = 4\sqrt{3}$. Ara bé, $(4\sqrt{3})^3 = 64 \times 3 \times \sqrt{3} = 332,55 < 576$. Per tant, dins l'interval $[0, 4\sqrt{3}]$, $t^3 < 576 < 144t + 576$.

Tenint en compte que $x^2 = a$, $y^2 = b$ i $z^2 = c$, resulta que les solucions del sistema són

$$\begin{array}{cccc} (2, 2, 2), & (-2, 2, 2), & (2, -2, 2), & (2, 2, -2), \\ (-2, -2, 2), & (-2, 2, -2), & (2, -2, -2), & (-2, -2, -2), \end{array}$$

i només aquestes.

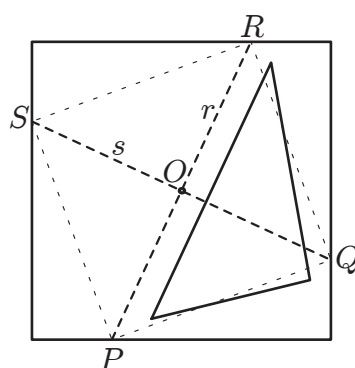
- 4.—Dins d'un quadrat es dibuixa un triangle de manera que el centre del quadrat caigui fora del triangle. Prova que un dels costats del triangle té la longitud més petita o igual que la longitud del costat del quadrat.

SOLUCIÓ:

Pel centre O del quadrat, tracem una recta r paral·lela al costat més proper del triangle i una perpendicular s a la recta r que passa per O .

Les rectes r i s divideixen el quadrat en quatre quadrilàters congrus. Donat que O es troba a fora del triangle, aquest tindrà punts en, com a molt, dos quadrilàters adjacents. Pel *principi del colomar*, dos dels vèrtexs del triangle pertanyen al mateix quadrilàter.

La seva distància, per tant, és més petita que la major diagonal del quadrilàter, la qual, al seu torn, és més petita o igual que la del costat del quadrat.



En efecte, si observem la figura resulta que el quadrilàter on cauen dos dels vèrtexs del triangle té dues diagonals $d_1 = \overline{OR}$, $d_2 = \overline{PQ}$. Per simplificar els càlculs, fem el costat del quadrat = 1. Aleshores

$$d_1^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \quad \text{i} \quad d_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$$

$$d_2^2 = (1 - \alpha)^2 + \alpha^2 = 2\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \quad \text{i} \quad d_2 \leq 1$$

atès que, sense pèrdua de generalitat, podem suposar que $\alpha \leq \frac{1}{2}$.

ALTERNATIVA A LA DEMOSTRACIÓ FINAL: El quadrat $PQRS$ està contingut al quadrat gran i té àrea més petita. Per tant, el seu costat d_2 és més petit que el costat del quadrat gran.

5.—Siguin a , b i c tres nombres reals i positius tals que $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 9$. Proveu que

$$\frac{1}{2a+b} + \frac{1}{2b+c} + \frac{1}{2c+a} \leq \sqrt{3}.$$

SOLUCIÓ:

Aplicant la desigualtat entre les mitjanes aritmètica i harmònica, resulta que

$$\frac{3}{2a+b} = \frac{3}{a+a+b} \leq \frac{1}{3} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{a} + \frac{1}{b} \right)$$

Igualment,

$$\frac{3}{2b+c} \leq \frac{1}{3} \left(\frac{2}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

i

$$\frac{3}{2c+a} \leq \frac{1}{3} \left(\frac{2}{c} + \frac{1}{a} \right)$$

Sumant les desigualtats anteriors i reordenant els termes, s'obté

$$\frac{1}{2a+b} + \frac{1}{2b+c} + \frac{1}{2c+a} \leq \frac{1}{3} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

Aplicant la desigualtat entre les mitjanes aritmètica i quadràtica, resulta

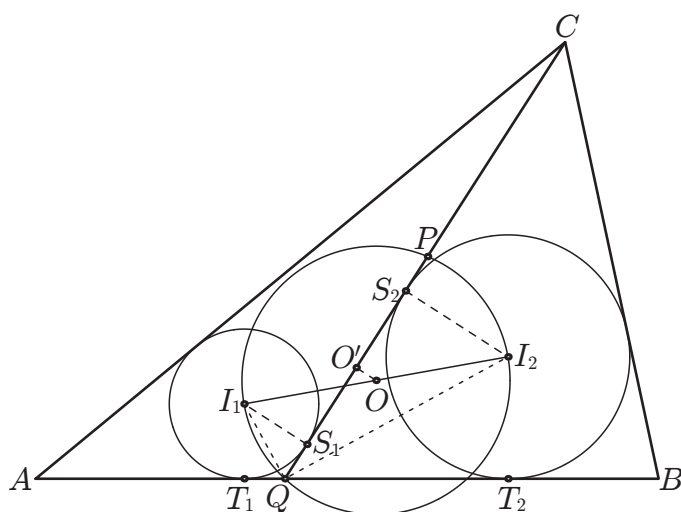
$$\frac{1}{3} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \leq \sqrt{\frac{1}{3} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right)} = \sqrt{3}$$

La igualtat s'assoleix quan $a = b = c = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Això acaba la prova.

- 6.—En un triangle ABC , de costats a , b i c , es consideren un punt Q sobre AB i la recta que passa per Q i C . Demostra que la circumferència que té com a diàmetre els incentres I_1 i I_2 dels triangles ACQ i BCQ talla el segment QC en el punt Q i en un altre punt P que dista $p - c$ de C , on p és el semiperímetre del triangle ABC .

SOLUCIÓ:

- 1) En primer lloc veiem que la circumferència de centre O passa efectivament pel punt donat Q . Unim Q amb I_1 i amb I_2 . Les rectes (de punts, a la figura) formen un angle recte ja que són bisectrius d'angles adjacents. Per tant, Q es troba damunt la semicircumferència de diàmetre I_1I_2 .



- 2) (2) A la figura, T_1 , T_2 són els punts de tangència de les circumferències inscrites en els triangles ACQ i BCQ al costat AB i S_1 i S_2 els punts de tangència a la recta CQ . O' és la projecció perpendicular de O sobre la corda QP i, per tant, el seu punt mitjà. Volem veure que $CP = p - c$.

Siguin p , p_1 i p_2 els semiperímetres dels triangles ABC , AQC i BQC , respectivament. Es comprova fàcilment que $p_1 + p_2 = p + CQ$. Es compleix que

$$QT_1 = QS_1 = p_1 - b \quad \text{i} \quad QT_2 = QS_2 = p_2 - a$$

Com que O és el punt mitjà de I_1I_2 , fent projecció paral·lela, resulta que O' és el punt mitjà de S_1 i S_2 ; i $QS_1 = QO' - O'S_1 = PO' - O'S_2 = PS_2$ i, per tant, $QP = QS_2 + S_2P = QS_2 + QS_1 = QT_2 + QT_1 = T_1T_2$.

Però $T_1T_2 = p_1 - b + p_2 - a = p_1 + p_2 - (b + a) = p + CQ - (2p - c) = CQ - (p - c)$, d'on resulta que $PC = p - c$, tal com volíem demostrar.



XLVII OLIMPIADA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

17 i 18 de desembre de 2010

Enunciats



XLVII OLIMPIADA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

Primera sessió

17 de desembre de 2010, de 16 a 19.30 h.

- 1.—Tenim 2010 cartes numerades de 1 a 2010. Demostreu que si agafem 11 cartes *qualssevol*, n'hi ha dues (numerades i i j), d'entre aquestes 11, que compleixen $i < j \leq 2i$.
- 2.—En un cercle de radi r hi inscrivim el decàgon regular de vèrtexs $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{10}$. Denotem per $|A_i A_j|$ la longitud del segment $\overline{A_i A_j}$. Demostreu que

$$|A_1 A_4| - |A_1 A_2| = r.$$

- 3.—Denotem per $S(n)$ la suma

$$S(n) = 2010 n^{2010} - 2009 n^{2009} + \dots + 4n^4 - 3n^3 + 2n^2 - n$$

Comproveu que el nombre

$$T = S(1) + S(2) + S(3) + S(4) + S(5) + S(6) + S(7) + S(8) + S(9)$$

és positiu i calculeu-ne la xifra de les unitats.



XLVII OLIMPIADA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

Segona sessió

18 de desembre de 2010, de 9.30 a 13 h.

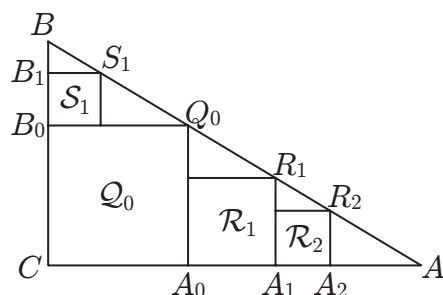
- 4.—Una urna conté b boles blanques i v boles vermelles, amb $b \geq 0$, $v \geq 0$ i $b + v \geq 3$. Si s'extrauen 3 boles de l'urna sense reemplaçar-les, la probabilitat que totes siguin blanques és p . Però, si afegim una bola blanca a l'urna, la probabilitat que les tres boles siguin blanques augmenta d'una tercera part.

Quin és el valor màxim de v que permet que es compleixin aquestes condicions?

- 5.—Tenim un triangle rectangle ABC de catets AC i CB de longituds a i b i hi inscrivim un quadrat $Q_0 = CA_0Q_0B_0$ de manera que el punt A_0 es troba en el catet CA , el punt B_0 en el catet CB i el punt Q_0 en l'hipotenusa AB .

a) Calculeu el valor q del costat CA_0 del quadrat, en funció de a i b .

b) Repetim el procés n vegades inscrivint, respectivament, quadrats $\mathcal{R}_{k+1}$, $\mathcal{S}_{k+1}$ en els triangles AA_kR_k i BB_kS_k , en què els punts R_k són en el segment AQ_0 i els punts S_k en el segment BQ_0 . Si r_n i s_n són les longituds dels costats dels quadrats $\mathcal{R}_n$ i $\mathcal{S}_n$, demostreu que $\sqrt[n]{q} = \sqrt[n]{r_n} + \sqrt[n]{s_n}$.



- 6.—Tenim m capsas $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_m$ que contenen fitxes. El nombre de fitxes de cada una és $q_1 \geq 0, q_2 \geq 0, \dots, q_m \geq 0$, respectivament. Considerem un nombre fix $n \leq m$.

Volem aconseguir, amb una sèrie d'actuacions, que totes les caixes acabin tenint el mateix nombre de fitxes. Cada actuació que efectuem s'ajustarà a l'acció següent: elegim n capsas, i col·loquem una fitxa més en cada una de les capsas elegides de manera que, després d'haver actuat, les n capsas que hàgim elegit tindran una fitxa més que abans de l'actuació, i la resta tindrà el mateix nombre de fitxes que abans de l'actuació. Demostreu:

- a) Si $\text{m.c.d.}(m, n) = d > 1$, aleshores hi ha una distribució inicial de fitxes en les m capsas que no permet aconseguir mai que, després de qualsevol nombre d'actuacions, totes les capsas tinguin el mateix nombre de fitxes.
- b) Si $\text{m.c.d.}(m, n) = 1$, aleshores és possible fer un nombre finit d'actuacions successives fins a aconseguir que, al final de totes les actuacions, totes les capsas tinguin el mateix nombre de fitxes.

Solucions

1.—Tenim 2010 cartes numerades de 1 a 2010. Demostreu que si agafem 11 cartes *qualssevol*, n'hi ha dues (numerades i i j), d'entre aquestes 11, que compleixen $i < j \leq 2i$.

1.1.—PRIMERA SOLUCIÓ.

Suposem que les 11 cartes extretes tenen números $n_1 < n_2 < \dots < n_{11}$. Si hem d'aconseguir que no es compleixi la condició de l'enunciat, haurà de ser $n_{i+1} \geq 2n_i + 1$ per $i = 1, 2, \dots, 10$. És a dir,

$$\begin{aligned} n_1 &\geq 1 & (= 2^1 - 1) \\ n_2 &\geq 2 \cdot 1 + 1 = 3 & (= 2^2 - 1) \\ n_3 &\geq 3 \cdot 1 + 1 = 7 & (= 2^3 - 1) \\ &\vdots \\ n_{10} &\geq 1023 & (= 2^{10} - 1) \\ n_{11} &\geq 2047 & (= 2^{11} - 1) \end{aligned}$$

Però això és impossible si només tenim 2010 cartes.

1.2.—SEGONA SOLUCIÓ.

Considerem la partició del conjunt $\{1, 2, \dots, 2010\}$ en deu subconjunts $A_1, A_2, \dots, A_{10}$ de forma que dos elements $a_i \in A_i, a_j \in A_j, (i \neq j)$, no compleixin la condició de l'enunciat i, en canvi, dos elements $a_k, a'_k \in A_k$ del mateix subconjunt la compleixin sempre.

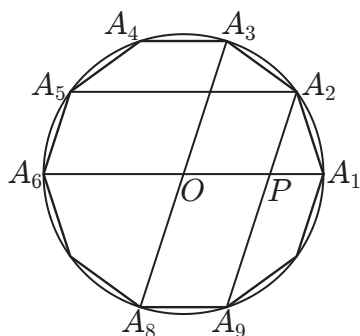
$$\begin{aligned} A_1 &= \{1, 2\} \\ A_2 &= \{3, 4, 5, 6\} \\ A_3 &= \{7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\} \\ A_4 &= \{15, 16, 17, \dots, 29, 30\} \\ A_5 &= \{31, 32, \dots, 61, 62\} \\ A_6 &= \{63, 64, \dots, 125, 126\} \\ A_7 &= \{127, 128, \dots, 253, 254\} \\ A_8 &= \{255, 256, \dots, 509, 510\} \\ A_9 &= \{511, 512, \dots, 1021, 1022\} \\ A_{10} &= \{1023, 1024, \dots, 2009, 2010\} \end{aligned}$$

Si tenim ara 11 cartes qualssevol, pel *principi de Dirichlet* (o del “colomar”), dues d'elles hauran de tenir números que pertanyin al mateix subconjunt A_k i, per tant, compliran la condició de l'enunciat.

- 2.—En un cercle de radi r hi inscrivim el decàgon regular de vèrtexs $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{10}$. Denotem per $|A_i A_j|$ la longitud del segment $\overline{A_i A_j}$. Demostreu que

$$|A_1 A_4| - |A_1 A_2| = r.$$

2.1.—PRIMERA SOLUCIÓ (Geomètrica)



La corda $A_2 A_9$, el diàmetre $A_3 A_8$ i el costat $A_5 A_6$ són paral·lels. També són paral·lels el diàmetre $A_1 A_6$ i la corda $A_2 A_5$. Tenim, per tant, dos paral·lelograms $PA_2 A_5 A_6$ i $PO A_8 A_9$, d'on obtenim que $|PA_9| = |OA_8| = r$ i $|A_1 A_2| = |A_5 A_6| = |A_2 P|$. El resultat surt de $|A_1 A_4| = |A_2 A_9| = |A_2 P| + |PA_9| = |A_1 A_2| + r$.

2.2.—SEGONA SOLUCIÓ (Trigonomètrica)

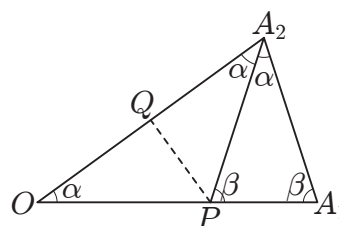
Sabem que una corda d'angle central α en un cercle de radi r val $2r \sin \frac{\alpha}{2}$. La corda (costat) $A_1 A_2$ té longitud $|A_1 A_2| = 2r \sin 18^\circ$. Anàlogament, la corda $A_1 A_4$ té longitud $|A_1 A_4| = 2r \sin 54^\circ$. El nostre problema es redueix a demostrar que $2 \sin 54^\circ = 1 + 2 \sin 18^\circ$. Passant a complementaris, això és equivalent a demostrar $2 \cos 36^\circ = 1 + 2 \cos 72^\circ$. Cal, doncs, determinar els valors de $\cos 36^\circ$ i $\cos 72^\circ$. Però si sabem el valor $a = \cos 36^\circ$, aleshores $\sin 36^\circ = \sqrt{1 - a^2}$ i trobem, amb la fórmula de l'angle doble $\cos 72^\circ = \cos^2 36^\circ - \sin^2 36^\circ = 2a^2 - 1$ i el problema s'acaba si podem comprovar que $2a = 2(2a^2 - 1) + 1$ (*).

Sigui $A_1 A_2$ un costat del decàgon regular de centre O , que ja podem suposar de radi 1. El triangle $OA_1 A_2$ és isòsceles, i si $A_2 P$ és la bisectriu de l'angle a A_2 ens queden els angles marcats $\alpha = 36^\circ$ i $\beta = 2\alpha = 72^\circ$. Tindrem $|OP| = |PA_2| = |A_1 A_2|$ i també que els triangles $OA_1 A_2$ i $A_2 P A_1$ són semblants. La relació de semblança ens permet calcular el costat, que resulta ser $|A_1 A_2| = \frac{(\sqrt{5} - 1)}{2}$.

Finalment obtenim $\cos 36^\circ$ del triangle rectangle OPQ i resulta

$$\cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}$$

La comprovació de (*) és immediata.



3.—Denotem per $S(n)$ la suma

$$S(n) = 2010n^{2010} - 2009n^{2009} + \dots + 4n^4 - 3n^3 + 2n^2 - n$$

Comproveu que el nombre

$$T = S(1) + S(2) + S(3) + S(4) + S(5) + S(6) + S(7) + S(8) + S(9)$$

és positiu i calculeu-ne la xifra de les unitats.

SOLUCIÓ:

Els $S(n)$ són tots positius ja que, aparellats els termes de la suma per parelles $kn^k - (k-1)n^{k-1}$, cada parella és positiva i també la suma de totes. Escrivim ara

$$\begin{aligned} S(1) &= 2010 \cdot 1^{2010} - 2009 \cdot 1^{2009} + \dots + 2 \cdot 1^2 - 1^1 \\ S(2) &= 2010 \cdot 2^{2010} - 2009 \cdot 2^{2009} + \dots + 2 \cdot 2^2 - 2^1 \\ &\dots\dots\dots \\ S(9) &= 2010 \cdot 9^{2010} - 2009 \cdot 9^{2009} + \dots + 2 \cdot 9^2 - 9^1 \end{aligned}$$

Sumant per columnes les igualtats anteriors ens queda

$$\begin{aligned} T &= 2010(1 + 2^{2010} + \dots + 9^{2010}) - 2009(1 + 2^{2010} + \dots + 9^{2010}) + \dots \\ &\dots + (1 + 2^2 + \dots + 9^2) - (1 + 2^1 + \dots + 9^1) \end{aligned}$$

Si calculem els residus modulars de i^k mòdul 10 i de la suma $a_k = 1^k + 2^k + \dots + 9^k$ obtenim

	1^k	2^k	3^k	4^k	5^k	6^k	7^k	8^k	9^k	a_k
$k = 1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	5
$k = 2$	1	4	9	6	5	6	9	4	1	5
$k = 3$	1	8	7	4	5	6	3	2	9	5
$k = 4$	1	6	1	6	5	6	1	6	1	3
$k = 5$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	5

que dóna 5 si $k \neq 4$ i 3 si $k = 4$. Com que els residus de 1, 2, ..., 2010 mòdul 10 es repeteixen de 10 en 10 i els de les sumes a_k de 4 en 4, podem calcular T mòdul 10 en blocs de 20 (= m.c.m.(10, 4)). Calculat un qualsevol d'aquest blocs surt $2010 \cdot 5 - 2009 \cdot 5 + 2008 \cdot 3 - 2007 \cdot 5 + \dots + 1994 \cdot 5 - 1993 \cdot 5 + 1992 \cdot 3 - 1991 \cdot 5 = 0$ mòdul 10. A T hi ha 100 blocs d'aquest tipus, que en total sumaran 0, i una cua de 10 sumands més. Calculant directament aquesta cua mòdul 10 queda

$$\begin{aligned} T &= 10(1 + 2^{10} + \dots + 9^{10}) - 9(1 + 2^9 + \dots + 9^9) + \dots \\ &\dots + 2(1 + 2^9 + \dots + 9^9) - (1 + 2 + \dots + 9) = \\ &= 0 \cdot 5 - 9 \cdot 5 + 8 \cdot 3 - 7 \cdot 5 + 6 \cdot 5 + 5 \cdot 5 + 4 \cdot 3 - 3 \cdot 5 + 2 \cdot 5 - 1 \cdot 5 = 1 \end{aligned}$$

- 4.—Una urna conté b boles blanques i v boles vermelles, amb $b \geq 0$, $v \geq 0$ i $b + v \geq 3$. Si s'extrauen 3 boles de l'urna sense reemplaçar-les, la probabilitat que totes siguin blanques és p . Però, si afegim una bola blanca a l'urna, la probabilitat que les tres boles siguin blanques augmenta d'una tercera part.

Quin és el valor màxim de v que permet que es compleixin aquestes condicions?

SOLUCIÓ:

Si p és la probabilitat de treure 3 boles blanques abans d'afegir una altra bola blanca, i q és aquesta probabilitat després d'afegir una altra bola blanca, tenim, per hipòtesi que $q = \frac{4}{3}p$. Estudiem primer els casos baixos.

- a) Si $b = 0$ ($v \geq 3$) o $b = 1$ ($v \geq 2$), aleshores $p = q = 0$ i v pot prendre qualsevol valor i no hi ha màxim.
- b) Si $b = 2$ ($v \geq 1$), aleshores $p = 0$, $q \neq 0$ i la condició del problema no es pot complir.
- c) Suposem, doncs, que $b \geq 3$. Les probabilitats demanades, abans i després d'afegir una bola blanca són, respectivament,

$$p = \frac{b(b-1)(b-2)}{(b+v)(b+v-1)(b+v-2)}, \quad q = \frac{(b+1)b(b-1)}{(b+v+1)(b+v)(b+v-1)}$$

La relació $4p = 3q$ es converteix, després de simplificar,

$$4(b-2)(b+v+1) = 3(b+1)(b+v-2), \quad \text{o bé} \quad b^2 + bv - b - 11v - 2 = 0$$

D'aquesta última expressió surt

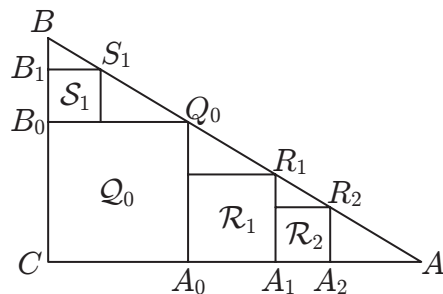
$$v = \frac{b^2 - b - 2}{11 - b} = -b - 10 + \frac{108}{11 - b}$$

i com que b , v són enters positius, ha de ser $11 - b$ divisor de 108 i b menor que 11. Aquests possibles valors per $11 - b$ són 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9. Les parelles (b, v) vàlides són (10, 88), (9, 35), (8, 18), (7, 10) i (5, 3). La que dóna v màxima és la que correspon a $v = 88$, $b = 10$.

5.—Tenim un triangle rectangle ABC de catets AC i CB de longituds a i b i hi inscrivim un quadrat $\mathcal{Q}_0 = CA_0Q_0B_0$ de manera que el punt A_0 es troba en el catet CA , el punt B_0 en el catet CB i el punt Q_0 en l'hipotenusa AB .

a) Calculeu el valor q del costat CA_0 del quadrat, en funció de a i b .

b) Repetim el procés n vegades inscrivint, respectivament, quadrats $\mathcal{R}_{k+1}$, $\mathcal{S}_{k+1}$ en els triangles AA_kR_k i BB_kS_k , en què els punts R_k són en el segment AQ_0 i els punts S_k en el segment BQ_0 . Si r_n i s_n són les longituds dels costats dels quadrats $\mathcal{R}_n$ i $\mathcal{S}_n$, demostreu que $\sqrt[n]{q} = \sqrt[n]{r_n} + \sqrt[n]{s_n}$.



SOLUCIÓ:

a) Calculem q . La semblança dels triangles rectangles CAB i A_0BD_0 dona $\frac{q}{b} = \frac{a-q}{a}$, d'on surt

$$q = \frac{ab}{a+b}$$

b) La semblança dels dos triangles CAB i A_0BD_0 té raó de semblança

$$\rho = \frac{b}{a+b}.$$

Anàlogament, si fem la semblança entre els triangles CAB i B_0D_0B obtenim la raó

$$\sigma = \frac{a}{a+b}$$

Observem que $\rho + \sigma = 1$. Calculem ara, per semblança, els costats r_n i s_n . Tenim $r_1 = \rho q$, $r_2 = \rho r_1 = \rho^2 q$, $\dots$, $r_n = \rho^n q$. De manera semblant obtenim $s_n = \sigma^n q$. Si fem les arrels n -èsimes d'aquestes dues expressions i sumem queda

$$\sqrt[n]{r_n} + \sqrt[n]{s_n} = (\rho + \sigma) \sqrt[n]{q} = \sqrt[n]{q}$$

- 6.—Tenim m capsas $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_m$ que contenen fitxes. El nombre de fitxes de cada una és $q_1 \geq 0, q_2 \geq 0, \dots, q_m \geq 0$, respectivament. Considerem un nombre fix $n \leq m$.

Volem aconseguir, amb una sèrie d'actuacions, que totes les caixes acabin tenint el mateix nombre de fitxes. Cada actuació que efectuem s'ajustarà a l'acció següent: elegim n capsas, i colloquem una fitxa més en cada una de les capsas elegides de manera que, després d'haver actuat, les n capsas que hàgim elegit tindran una fitxa més que abans de l'actuació, i la resta tindrà el mateix nombre de fitxes que abans de l'actuació. Demostreu:

- a) Si $\text{m.c.d.}(m, n) = d > 1$, aleshores hi ha una distribució inicial de fitxes en les m capsas que no permet aconseguir mai que, després de qualsevol nombre d'actuacions, totes les capsas tinguin el mateix nombre de fitxes.
- b) Si $\text{m.c.d.}(m, n) = 1$, aleshores és possible fer un nombre finit d'actuacions successives fins a aconseguir que, al final de totes les actuacions, totes les capsas tinguin el mateix nombre de fitxes.

SOLUCIÓ:

Posem $N = q_1 + q_2 + \dots + q_m$. També suposarem, si cal, que $q_1 \leq q_2 \leq \dots \leq q_m$.

- a) Si $\text{m.c.d.}(m, n) = d > 1$, com que a cada actuació afegim n fitxes, després de s actuacions haurem afegit ns fitxes de manera que en total quedaran a les capsas $N + ns$ fitxes. Si totes les capsas tenen el mateix nombre k de fitxes, serà $N + ns = km = \dot{m} = \dot{d}$. Com que també $n = \dot{d}$ haurà de ser $N = \dot{d}$. Per tant, qualsevol distribució inicial de fitxes amb N no múltiple de d no permetrà igualar les capsas.
- b) Si $\text{m.c.d.}(m, n) = 1$, l'equació $nx - my = 1$ té solucions enteres, per exemple, (x_0, y_0) . A més, sabem que les solucions són els punts de coordenades enteres sobre la recta del pla $nx - my = 1$, punts que s'obtenen a partir del (x_0, y_0) sumant múltiples enters del vector (m, n) o, dit altrament, la solució general és $(x, y) = (x_0, y_0) + t(m, n)$ per qualsevol t enter. Fent t positiu i prou gran podem aconseguir que una solució (x, y) tingui la x i la y positives. Sigui (s, r) una d'aquestes solucions.

Serà, doncs, $ns = mr + 1$. Aquesta igualtat ens permet afirmar que després de s actuacions haurem pogut posar ns fitxes que les podem distribuir en la forma de r per capsa, més una que ens sobrarà que la posarem a la capsa que en té menys, $\mathcal{C}_1$. Haurem disminuït la diferència $q_n - q_1$ en una unitat i les altres diferències $q_n - q_2, \dots, q_n - q_{n-1}$ quedaran igual. Ara és evident que després de repetir aquest procediment de s actuacions tantes vegades com faci falta (en total $q_n - q_1 + q_n - q_2 + \dots + q_n - q_{n-1} = nq_n - N$ vegades) haurem igualat les fitxes a les capsas. El total d'actuacions haurà estat $s(nq_n - N)$.



XLVIII OLIMPIADA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

16 i 17 de desembre de 2011

Enunciats



XLVIII OLIMPIADA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

Primera sessió

16 de desembre de 2011, de 16 a 19.30 h.

- 1.—Siguin a , b i c tres nombres reals positius el producte dels quals és 1. Demostra que, si la suma d'aquests nombres és més gran que la suma dels seus recíprocs, aleshores exactament un d'ells és més gran que 1.
- 2.—En un triangle rectangle d'hipotenusa unitat i angles de 30° , 60° i 90° , s'elegeixen 25 punts qualssevol. Demostra que sempre n'hi haurà 9 d'ells que podran cobrir-se amb un semicercle de radi $\frac{3}{10}$.
- 3.—Sigui ABC un triangle arbitrari.
 - a) Si H n'és l'ortocentre, quant val la distància AH ?
 - b) Si P n'és un punt interior i H_A , H_B i H_C són, respectivament, els ortocentres dels triangles PBC , PAC i PAB , demostra que els triangles $H_AH_BH_C$ i ABC tenen la mateixa àrea.



XLVIII OLIMPIADA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

Segona sessió

17 de desembre de 2011, de 9.30 a 13 h.

- 4.—Sigui $ABCD$ un quadrilàter convex i P un punt interior. Determineu quines són les condicions que han de complir el quadrilàter i el punt P perquè els quatre triangles PAB , PBC , PCD i PDA tinguin la mateixa àrea.
- 5.—Tenim una col·lecció d'esferes iguals que apilem formant un tetràedre les arestes del qual tenen totes n esferes. Calculeu, en funció de n , el nombre total de punts de tangència (contactes) que hi ha entre les esferes de la pila.
- 6.—Siguin a , b i c les longituds dels costats d'un triangle ABC . Si

$$b(a+b)(b+c) = a^3 + b(a^2 + c^2) + c^3,$$

demostra que les mesures (en radians) dels angles $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ compleixen la relació

$$\frac{1}{\sqrt{A} + \sqrt{B}} + \frac{1}{\sqrt{B} + \sqrt{C}} = \frac{2}{\sqrt{C} + \sqrt{A}}$$

Solucions

XLVIII OLIMPIÁDA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

Enunciats i solucions

Problema 1.

Siguin a , b i c tres nombres reals positius el producte dels quals és 1. Demostra que, si la suma d'aquests nombres és més gran que la suma dels seus recíprocs, aleshores exactament un d'ells és més gran que 1.

Solució.

Atès que $abc = 1$ i $a + b + c > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$, tenim que

$$\begin{aligned}(a-1)(b-1)(c-1) &= abc - ab - bc - ca + a + b + c - 1 \\ &= a + b + c - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) > 0\end{aligned}$$

La desigualtat anterior es compleix quan un dels factors del nombre

$$(a-1)(b-1)(c-1)$$

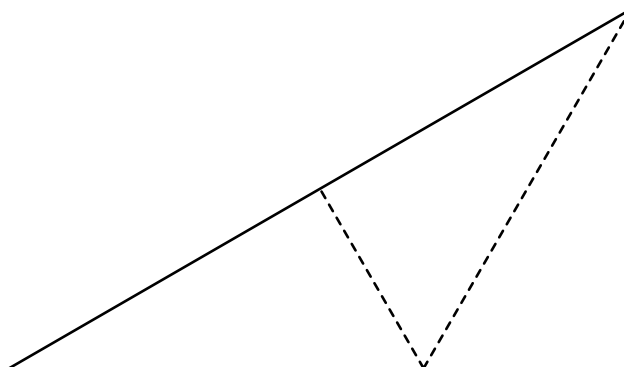
és positiu o els tres factors són positius. Si fossin positius tots tres, tindríem $a > 1$, $b > 1$ i $c > 1$, cosa que no és possible perquè $abc = 1$. Per tant, només un d'ells és positiu i això acaba la demostració.

Problema 2.

En un triangle rectangle d'hipotenusa unitat i angles de 30° , 60° i 90° , s'elegeixen 25 punts qualssevol. Demostra que sempre n'hi haurà 9 d'ells que podran cobrir-se amb un semicercle de radi $\frac{3}{10}$.

Solució.

Aquest triangle es pot descompondre en tres triangles congruents i semblants al triangle inicial.



Tenim 3 triangles i 25 punts. En algun triangle hi haurà almenys 9 punts. La hipotenusa de cada un d'aquests triangles semblants a l'inicial mesura $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Els triangles són rectangles i per tant estan coberts per la meitat del cercle circumscrit. Això acaba el que es demana ja que el radi d'aquest cercle circumscrit, r , compleix

$$r = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{3}}{3} < \frac{3}{10}.$$

Problema 3.

Sigui ABC un triangle arbitrari.

a) Si H n'és l'ortocentre, quant val la distància AH ?

b) Si P n'és un punt interior i H_A , H_B i H_C són, respectivament, els ortocentres dels triangles PBC , PAC i PAB , demostra que els triangles $H_A H_B H_C$ i ABC tenen la mateixa àrea.

Solució.

a)

Calculem la distància d'un vèrtex A a l'ortocentre del triangle ABC .

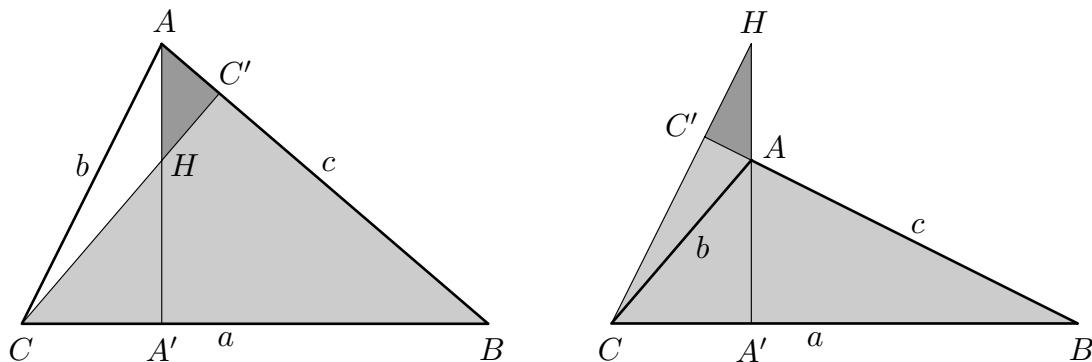
A les figures següents podem observar que els triangles BCC' i AHC' són semblants. (Recordem que els angles de costats perpendiculars són iguals o suplementaris). D'aquesta semblança resulta

$$\frac{AH}{CB} = \frac{AC'}{CC'} \Leftrightarrow \frac{AH}{a} = \frac{AC'}{CC'}$$

i, per tant

$$AH = a \frac{AC'}{CC'}.$$

Si el triangle és acutangle (figura de l'esquerra) tenim que en el triangle ACC' és, òbviament, $AC' = b \cos A$ i $CC' = b \sin A$.



Substituint, queda

$$AH = a \cot A.$$

Si el triangle ABC és rectangle a A , la fórmula és també vàlida, però en aquest cas és $A = H$ i $AH = a \cot 90^\circ = 0$. Si és obtusangle, el punt H és exterior al triangle i queda $AC' = b \cos(180^\circ - A)$ i $CC' = b \sin(180^\circ - A)$, i per tant, $AH = -a \cot A$. Però en aquest cas $\cot A$ és negativa.

Les distàncies de l'ortocentre H als vèrtexs aguts d'un triangle rectangle o obtusangle surten d'una manera semblant.

b) Quan unim el punt arbitrari P amb els vèrtexs A , B i C del triangle obtenim els tres triangles PAB , PBC i PCA .

Siguin $\alpha = \angle BPC$, $\beta = \angle APC$, $\gamma = \angle APB$. Òbviament, $\alpha + \beta + \gamma = 360^\circ$. D'aquests tres angles, com a mínim dos són obtusos. L'altre pot ser obtús, recte o agut. Estudiarem els tres casos per separat.

b1) Suposem que els tres angles són obtusos (Figura 1). Pel que hem dit a l'apartat a) tenim $PH_A = -a \cot \alpha$ i $PH_C = -c \cot \gamma$. Fixem-nos que l'angle $y = \angle H_A P H_C = 180^\circ - \angle APC = 180^\circ - \beta$ ja que els costats $H_A P$ i $H_C P$ són, respectivament, perpendiculars als costats, BC i AB i l'un és obtús i l'altre és agut.

L'àrea $\mathcal{A}(PH_A H_C)$ del triangle $PH_A H_C$ és, òbviament,

$$\mathcal{A}(PH_A H_C) = \frac{\overline{PH_A} \overline{PH_C} \sin y}{2} = \frac{ac \cot \alpha \cot \gamma \sin B}{2} = \mathcal{A}(ABC) \cot \alpha \cot \gamma.$$

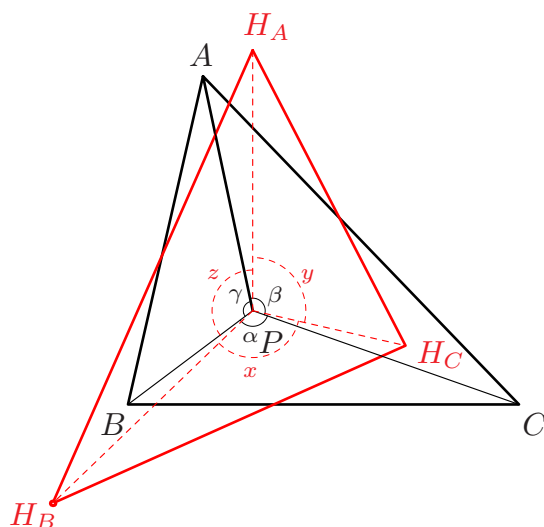


Figura 1

Sumant, doncs, les àrees dels tres triangles $PH_A H_B$, $PH_B H_C$ i $PH_C H_A$ obtenim

$$\mathcal{A}(H_A H_B H_C) = \mathcal{A}(PH_A H_B) + \mathcal{A}(PH_B H_C) + \mathcal{A}(PH_C H_A) \quad \text{i}$$

$$\mathcal{A}(H_A H_B H_C) = \mathcal{A}(ABC) \left(\cot \alpha \cot \beta + \cot \beta \cot \gamma + \cot \gamma \cot \alpha \right).$$

Aleshores, com que $\alpha + \beta = 360 - \gamma$ tenim que $\cot(\alpha + \beta) = -\cot \gamma$ o, equivalentment,

$$\cot \gamma = -\cot(\alpha + \beta) = \frac{1 - \cot \alpha \cot \beta}{\cot \alpha + \cot \beta}$$

$$\text{o bé,} \quad \cot \alpha \cot \beta + \cot \beta \cot \gamma + \cot \gamma \cot \alpha = 1. \quad (*)$$

D'aquí resulta $\mathcal{A}(H_A H_B H_C) = \mathcal{A}(ABC)$.

b2) Suposem que un dels angles és recte, per exemple $\beta = 90^\circ$. Aleshores $H_B = P$ i

$$\mathcal{A}(H_A H_B H_C) = \mathcal{A}(H_A P H_C) = \frac{\overline{PH_A} \overline{PH_C} \sin y}{2} = \frac{ac \cot \alpha \cot \gamma \sin B}{2} = \mathcal{A}(ABC) \cot \alpha \cot \gamma$$

Però la mateixa identitat (*) ens diu que si $\cot \beta = 0$ ha de ser $\cot \alpha \cot \gamma = 1$, i d'aquí el resultat en aquest cas.

b3) Suposem ara que un dels angles α, β, γ és agut, per exemple, $\widehat{APC} = \beta < 90^\circ$ (Figura 3). El punt P és exterior al triangle $H_A H_B H_C$ i tenim $\mathcal{A}(H_A H_B H_C) = \mathcal{A}(P H_A H_C) - \mathcal{A}(P H_A H_B) - \mathcal{A}(P H_C H_B)$.

Figura 2

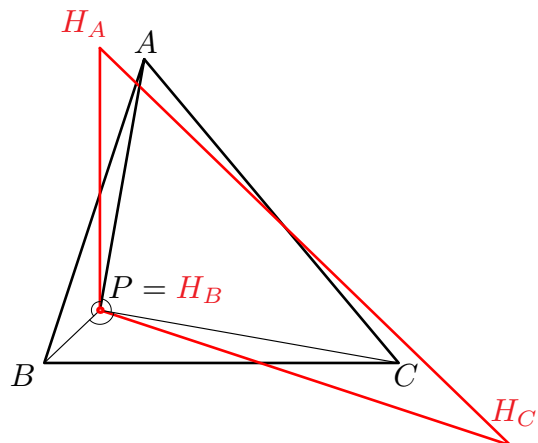
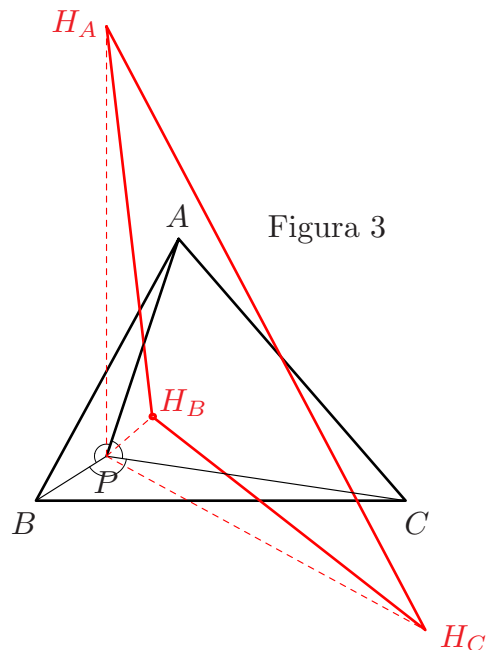


Figura 3



Però en aquest cas tenim $PH_B = b \cot \beta$, $PH_A = -a \cot \alpha$ i $PH_C = -c \cot \gamma$ i, per tant,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(H_A H_B H_C) &= \mathcal{A}(P H_A H_C) - \mathcal{A}(P H_A H_B) - \mathcal{A}(P H_C H_B) = \\ &= (\cot \alpha \cot \gamma - (-\cot \alpha \cot \beta) - (-\cot \gamma \cot \beta)) \mathcal{A}(ABC) = \\ &= (\cot \alpha \cot \beta + \cot \beta \cot \gamma + \cot \gamma \cot \alpha) \mathcal{A}(ABC) = \mathcal{A}(ABC). \end{aligned}$$

Problema 4.

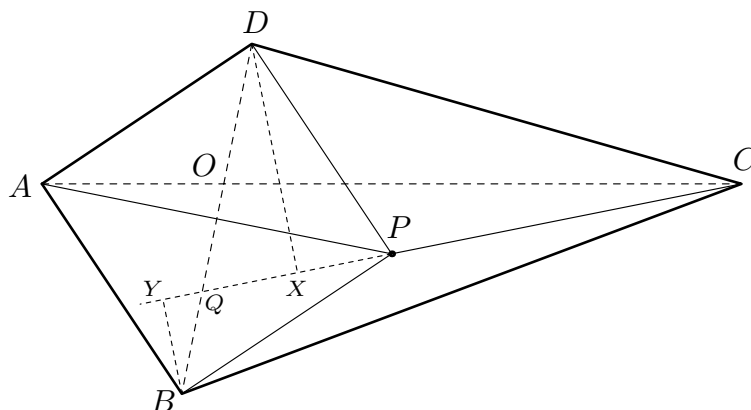
Sigui $ABCD$ un quadrilàter convex i P un punt interior. Determineu quines són les condicions que han de complir el quadrilàter i el punt P perquè els quatre triangles PAB , PBC , PCD i PDA tinguin la mateixa àrea.

Solució.

Considrem, d'antuvi, els triangles PCD i PCB . Tenen la base comuna PC i altures corresponents DX i BY . Si volem que tinguin la mateixa àrea cal que les altures siguin iguals. Per tant, el punt Q ha de ser el punt mitjà de la diagonal BD . La recta CP passa per Q . Anàlogament, considerem els triangles ADP i PAB de base comuna AP . Pel mateix argument d'abans, han de tenir altures iguals i AP ha de passar per Q . En resulta que AP i CP tenen dos punts en comú: P i Q . Els segments AP i PC estan, doncs, alineats. És a dir, és la diagonal AC .

Cal doncs, que les dues diagonals es tallin en el punt mitjà d'una d'elles. Però mirant els triangles PDA i PDC , que han de tenir la mateixa àrea, resulta que P ha de ser el punt mitjà de AC .

La condició demanada és que les diagonals del quadrilàter es tallin en el punt mitjà d'una d'elles i el punt P sigui el punt mitjà de l'altra.



Problema 5.

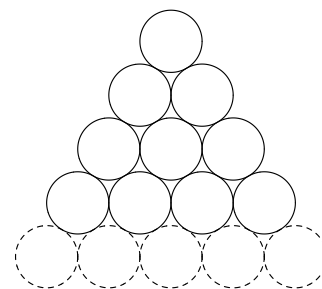
Tenim una col·lecció d'esferes iguals que apilem formant un tetràedre les arestes del qual tenen totes n esferes. Calculeu, en funció de n , el nombre total de punts de tangència (contactes) que hi ha entre les esferes de la pila.

Solució.

El problema en el pla.

D'antuvi, analitzem el problema en el cas pla, que és molt senzill. Sigui A_n el nombre de contactes de n esferes col·locades en un triangle pla amb n esferes en cada un dels costats (figura de la dreta). Fixem-nos que el nombre total d'esferes és, evidentment, $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Podem procedir per inducció. Si hi ha $n = 2$ files el nombre de contactes és 3; és a dir, $A_2 = 3$. Fixem-nos que, curiosament, coincideix amb el nombre de boles del triangle de dues files.



En un triangle de $n - 1$ files hi ha A_{n-1} contactes. Òbviament, en un triangle de n files hi haurà els contactes que ja hi ha en un triangle de $n - 1$ files, més els que provinguin d'afegir la darrera fila, tal com està indicat a la figura anterior. Però és clar que, en afegir aquesta darrera fila es produeixen contactes de dues menes:

- Els que hi ha entre les boles de la fila n -èsima, que són $n - 1$.
- Els que tenen les boles de la fila n -èsima amb l'anterior, que són $2(n - 1)$.

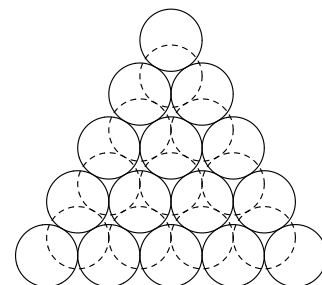
Així doncs, $A_n = A_{n-1} + 3(n - 1)$, o bé, $A_n - A_{n-1} = 3(n - 1)$. Sumant queda

$$A_n = 3((n - 1) + (n - 2) + \cdots + 2 + 1) = 3\frac{n(n - 1)}{2} = 3T_{n-1}.$$

El problema en l'espai tridimensional.

Ara ja podem analitzar el cas a l'espai. Sigui C_n el nombre de contactes d'una pila tetraèdrica d'esferes l'aresta de la qual té n esferes. A la figura de la dreta hi hem representat les esferes de la base en traç continu i les del pis immediat superior en traç discontinu, mirant-ho a vista d'ocell. Quan afegim el pis n -èsim, afegim contactes de dues menes:

- Els propis del pis – un triangle pla de n boles de costat.
- Els que provenen de contactes entre el pis $n - 1$ i el pis n .



Els contactes del primer tipus són, com hem vist en el cas pla, $A_n = 3T_{n-1}$.

El nombre de contactes entre un pis i l'anterior és $3T_{n-1}$, ja que cada bola del pis $n - 1$ toca exactament tres vegades les boles del pis n . (Vegeu la figura.) En total, doncs, el

nombre de contactes és $C_n - C_{n-1} = A_n + 3T_{n-1} = 3n(n-1)$. Si sumem queda

$$C_n - C_2 = 3n(n-1) + \cdots + 3 \cdot 3(3-1) = 3(n^2 + \cdots + 3^2) - 3(n + \cdots + 3),$$

o bé

$$C_n = 3(n^2 + \cdots + 2^2 + 1^2) - 3(n + \cdots + 2 + 1) = 3 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 3 \frac{n(n+1)}{2} = n^3 - n.$$

Un altre camí. La recurrència $C_n = C_{n-1} + 3n(n-1)$ es pot resoldre escrivint C_n com un polinomi cúbic i calculant-ne els coeficients a partir de la recurrència i de la condició inicial $C_1 = 0$.

Si fem $C_n = an(n-1)(n-2) + bn(n-1) + cn + d$, la condició de recurrència dóna $a = 1$, $b = 3$, $c = 0$, i la condició $C_1 = 0$ dóna $d = 0$. En resum

$$C_n = n(n-1)(n-2) + 3n(n-1) = n^3 - n.$$

Problema 6.

Siguin a , b i c les longituds dels costats d'un triangle ABC . Si

$$b(a+b)(b+c) = a^3 + b(a^2 + c^2) + c^3,$$

demostra que les mesures (en radians) dels angles $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ compleixen la relació

$$\frac{1}{\sqrt{A} + \sqrt{B}} + \frac{1}{\sqrt{B} + \sqrt{C}} = \frac{2}{\sqrt{C} + \sqrt{A}}.$$

.

Solució.

La condició de l'enunciat es pot escriure en la forma

$$b^3 + b^2a + b^2c + abc - a^2b - bc^2 - a^3 - c^3 = 0$$

o, equivalentment,

$$b^2(a+b+c) - (a^3 + b^3 + c^3 - 3abc) + b^3 - 2abc - a^2b - b^2c = 0.$$

Si substituïm la identitat $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$, s'obté

$$b^2(a+b+c) - (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + b(a+b+c)(b-a-c) = 0$$

o, equivalentment, $(a+b+c)(b^2 - a^2 - c^2 - ac) = 0$. Atès que $a+b+c \neq 0$, cal que $b^2 - a^2 - c^2 - ac = 0$, d'on, pel teorema del cosinus, resulta que

$$\frac{b^2 - a^2 - c^2}{2ac} = \frac{1}{2} = \cos B$$

Per tant, $B = \pi/3$. Sabem que $A+B+C = \pi$ i d'això en resulta $A+C = 2\pi/3 = 2B$. És a dir, els angles A, B, C estan en progressió aritmètica. Però la igualtat que cal demostrar equival, precisament, que A, B, C estiguin en progressió aritmètica. Efectivament, si suposem que $B = A + d$ i $C = A + 2d$ con $d \geq 0$, tenim

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{A} + \sqrt{B}} + \frac{1}{\sqrt{B} + \sqrt{C}} &= \frac{\sqrt{B} - \sqrt{A}}{B - A} + \frac{\sqrt{C} - \sqrt{B}}{C - B} \\ &= \frac{\sqrt{C} - \sqrt{A}}{d} = \frac{C - A}{d(\sqrt{C} + \sqrt{A})} = \frac{2}{\sqrt{C} + \sqrt{A}} \end{aligned}$$

Si fos $d = 0$, el triangle seria equilàter i l'enunciat es compliria trivialment.



XLIX OLIMPIADA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

14 i 15 de desembre de 2012

Enunciats



XLIX OLIMPIADA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

Primera sessió

14 de desembre de 2012, de 16 a 19.30 h.

1.—Tenim dues galledes d'aigua de volums respectius 4 i 9 litres, inicialment buides. Volem aconseguir que la galleda més gran contingui exactament 6 litres d'aigua repetint, totes les vegades que calgui i en l'ordre que vulguem, les operacions següents:

- 1) omplir una de les galledes fins a dalt;
- 2) buidar completament una de les galledes;
- 3) abocar part o el total del contingut d'una galleda a l'altra galleda fins que la primera quedi buida o la segona plena. (Se suposa que disposem d'una font que raja constantment i un lloc on llençar tota l'aigua que calgui.)

Digueu quina successió d'aquestes operacions hem de realitzar per aconseguir el nostre objectiu.

2.—Sigui H l'ortocentre d'un triangle acutangle $\triangle ABC$ d'altures h_a, h_b, h_c respectivament. Demostreu que

$$\frac{HA}{h_a} + \frac{HB}{h_b} + \frac{HC}{h_c} = 2$$

3.—Determineu totes les solucions enteres de l'equació

$$x^3 - y^3 = xy + 61$$

No es pot fer ús de calculadores



XLIX OLIMPIADA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

Segona sessió

15 de desembre de 2012, de 9.30 a 13 h.

- 4.—Sigui n un nombre enter més gran que 3. Suposem donats n punts en el pla de manera que no n'hi hagi tres d'alineats. Sigui k un enter tal que $n/2 < k < n$. Tracem una col·lecció de segments rectilinis, amb la condició que els extrems de cada un d'ells pertanyin al conjunt dels n punts. Suposem que cada un dels n punts és extrem d'almenys k segments diferents. Demostreu que com a mínim hi ha una terna dels segments dibuixats que són els costats d'un triangle.
- 5.—Trobeu una fórmula que doni l'àrea d'un triangle en funció de les seves mitjanes m_a , m_b , m_c . Es pot utilitzar la *fórmula d'Heron* que dona l'àrea d'un triangle en funció dels seus costats a , b , c :

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

on $2p = a + b + c$.

- 6.—Demostreu que existeix un nombre natural que expressat en base deu conté 2012 nous consecutius i que és el quadrat d'un altre nombre natural.

Solucions

Problema 1.

Tenim dues galledes d'aigua de volums respectius 4 i 9 litres, inicialment buides. Volem aconseguir que la galleda més gran contingui exactament 6 litres d'aigua repetint, totes les vegades que calgui i en l'ordre que vulguem, les operacions següents:

- (1) omplir una de les galledes fins a dalt;
- (2) buidar completament una de les galledes;
- (3) abocar part o el total del contingut d'una galleda a l'altra galleda fins que la primera quedi buida o la segona plena. (Se suposa que disposem d'una font que raja constantment i un lloc on llençar tota l'aigua que calgui.)

Digueu quina successió d'aquestes operacions hem de realitzar per aconseguir el nostre objectiu.

Solució.

Denotem (i, j) la situació en què en la galleda de 4 litres n'hi ha i , i en la galleda de 9 litres n'hi ha j .

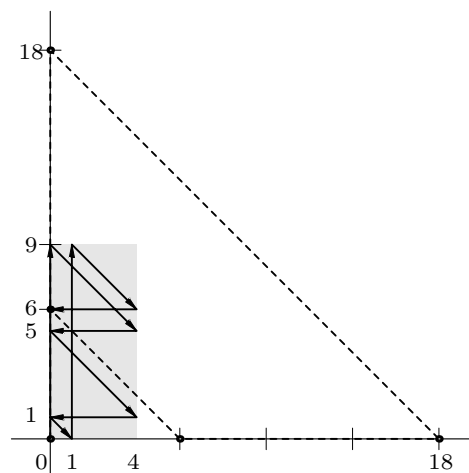
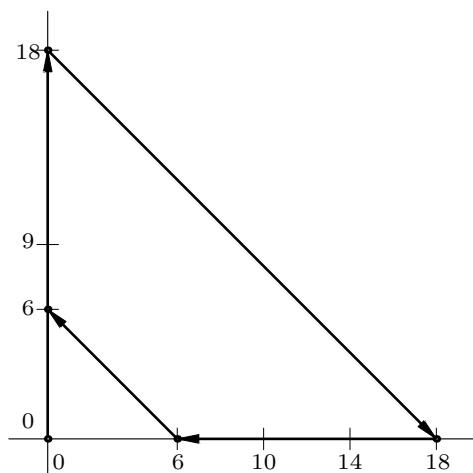
Suposem que inicialment les galledes estan buides. Llavors les operacions que hem de fer es poden escriure així:

$$(0, 0) \longrightarrow (0, 9) \longrightarrow (4, 5) \longrightarrow (0, 5) \longrightarrow (4, 1) \longrightarrow (0, 1) \longrightarrow \\ \longrightarrow (1, 0) \longrightarrow (1, 9) \longrightarrow (4, 6) \longrightarrow (0, 6).$$

Si x, y són, respectivament, els nombres de galledes que hem d'omplir de 4 i de 9 litres, haurà de complir-se $4x + 9y = 6$ i aquesta equació diofàntica té la solució mínima $x_0 = -3, y_0 = 2$. Això vol dir que caldrà emplenar dues vegades la galleda de 9 litres i llençar 3 vegades l'aigua de la galleda de 4 litres.

Suposem que tenim un recipient de gran cabuda on hi posem les dues galledes de 9 l, i un altre recipient de gran cabuda d'on hi traiem les galledes de 4 l. Haurem de posar dues galledes de 9 l al primer, transvasar aquesta aigua al segon, i treure 3 galledes de 4 l del segon.

Representem l'aigua del primer recipient en l'eix y i l'aigua del segon a l'eix x . Tenim la figura de l'esquerra:



Però si els dos recipients tenen la cabuda limitada a 9 l i 4 l, hem de *plegar* el gràfic dins del rectangle gris. Això es pot fer de manera única tal com està a la figura de la dreta, i obtenim la seqüència posada al principi.

Problema 2.

Sigui H l'ortocentre d'un triangle acutangle $\triangle ABC$ d'altures h_a, h_b, h_c respectivament. Demostreu que

$$\frac{HA}{h_a} + \frac{HB}{h_b} + \frac{HC}{h_c} = 2.$$

Solució.

L'àrea S del triangle $\triangle ABC$ és igual a la suma de les àrees dels triangles $\triangle HAB$, $\triangle HBC$ i $\triangle HCA$. Denotant A', B', C' respectivament als peus de les altures tenim

$$S = \frac{1}{2}a \cdot HA' + \frac{1}{2}b \cdot HB' + \frac{1}{2}c \cdot HC',$$

on a, b, c són, com és habitual, les longituds dels respectius costats del triangle $\triangle ABC$. Com que

$$S = \frac{1}{2}a \cdot h_a = \frac{1}{2}b \cdot h_b = \frac{1}{2}c \cdot h_c$$

obtenim

$$1 = \frac{HA'}{h_a} + \frac{HB'}{h_b} + \frac{HC'}{h_c}.$$

Si ara tenim en compte que $HA' = h_a - HA$, $HB' = h_b - HB$, $HC' = h_c - HC$, i substituïm aquests valors a l'expressió anterior, obtenim el resultat.

Problema 3.

Determineu totes les solucions enteres de l'equació

$$x^3 - y^3 = x + 61.$$

Solució.

Primera Solució. Posem $x = a + y$. Llavors l'equació anterior, en funció de a i y , s'escriu com

$$(3a - 1)y^2 + a(3a - 1)y + a^3 - 61 = 0.$$

Observem que si $a \leq -1$ el discriminant d'aquesta equació de segon grau

$$\Delta = (3a - 1)(244 - a^2 - a^3)$$

és negatiu i per tant, no té solució. El mateix passa si $a \geq 6$, de manera que només cal mirar els casos $a = 1, 2, 3, 4, 5$. Es veu fàcilment que només el cas $a = 1$ ens dóna un valor de $a^3 - 61$ múltiple de $(3a - 1)$. Resolem l'equació de segon grau en y anterior amb $a = 1$ i obtenim $y = 5$ (que implica $x = 6$) i $y = -6$ (que implica $x = -5$).

Segona Solució. Aprofitant els càlculs de la solució anterior veiem que hem de trobar a tal que $a^3 - 61$ sigui múltiple de $(3a - 1)$. Fem la divisió d'aquests polinomis com si estiguéssim treballant amb polinomis a coeficients racionals (en realitat ens inetressen els polinomis a coeficients enters).

Obtenim

$$a^3 - 61 = (3a - 1)\left(\frac{1}{3}a^2 + \frac{1}{9}a + \frac{1}{27}\right) + \frac{1}{27} - 61.$$

Multipliquem per 27

$$27(a^3 - 1) = (3a - 1)(9a^2 + 3a + 1) - 1646.$$

Així, per tal que $a^3 - 61$ sigui múltiple de $(3a - 1)$ ha de ser 1646 múltiple de $(3a - 1)$. Equivalentment, $3a - 1$ ha de dividir $2 \cdot 823$. Ha de ser $3a - 1 = \pm 1, \pm 2, \pm 823$. A partir d'aquí és fàcil veure que l'únic cas possible és $a = 1$ i el problema s'acaba com a la primera solució.

Tercera solució. Multipliquem per 27 i restem 1. Obtenim

$$27x^3 - 27y^3 - 1 = 27xy + 1646,$$

que es pot escriure com

$$(3x)^3 + (-3y)^3 + (-1)^3 = 3(3x)(-3y) + 1646.$$

Tenint en compte la igualtat

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

obtenim

$$(3x - 3y - 1)(9x^2 + 9y^2 + 1 + 9xy + 3x - 3y) = 2 \cdot 823.$$

Com 2 i 823 són primers, tenim

$$\begin{aligned} 3x - 3y - 1 &= 2 \\ 9x^2 + 9y^2 + 1 + 9xy + 3x - 3y &= 823. \end{aligned}$$

Substituint $y = x - 1$ a la segona equació obtenim $27x^2 - 27x - 813 = 0$, equació de segon grau que té solucions $x = 6$ ($y = 5$) i $x = -5$ ($y = -6$).

Si haguèssim imposat

$$\begin{aligned} 3x - 3y - 1 &= 823 \\ 9x^2 + 9y^2 + 1 + 9xy + 3x - 3y &= 2. \end{aligned}$$

haguèssim obtingut $27x^2 - 7416x + 679799 = 0$, que no té solucions reals.

Problema 4.

Sigui n un nombre enter més gran que 3. Suposem donats n punts en el pla de manera que no n'hi hagi tres d'alineats. Sigui k un enter tal que $n/2 < k < n$. Tracem una col·lecció de segments rectilinis, amb la condició que els extrems de cada un d'ells pertanyin al conjunt dels n punts. Suposem que cada un dels n punts és extrem d'almenys k segments diferents. Demostreu que com a mínim hi ha una terna dels segments dibuixats que són els costats d'un triangle.

Solució.

Com que $k > 2$, d'entre els n punts n'hi ha almenys dos connectats per un segment. Siguin aquests punts P_1 i P_2 . Dividim la resta de punts en dos subconjunts A i B , amb A el conjunt de punts connectats amb P_1 i B el conjunt de punts connectats amb P_2 . Per hipòtesis $|A| \geq k - 1$ i $|B| \geq k - 1$. Així

$$n - 2 \geq |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \geq 2k - 2 - |A \cap B|.$$

Per tant,

$$|A \cap B| \geq 2k - n > 0.$$

Això implica $|A \cap B| \neq 0$, i existeix un punt P_3 connectat amb P_1 i P_2 .

Problema 5.

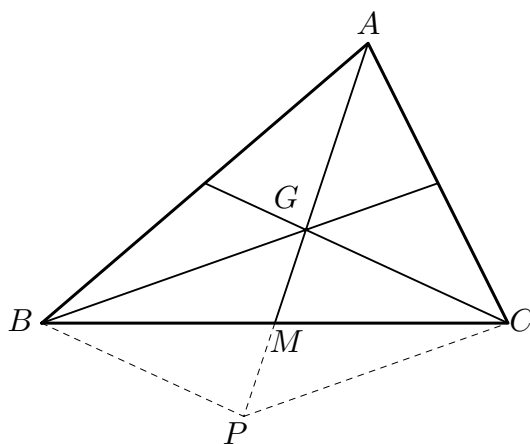
Trobeu una fórmula que doni l'àrea d'un triangle en funció de les seves mitjanes m_a, m_b, m_c . Es pot utilitzar la fórmula d'Heron que dona l'àrea d'un triangle en funció dels seus costats a, b, c :

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

on $2p = a + b + c$.

Solució.

És conegut que les mitjanes d'un triangle $\mathcal{T} = \triangle ABC$ el divideixen en sis triangles d'igual àrea. El baricentre G és vèrtex comú d'aquests sis triangles. Sigui M el punt mitjà del costat AB , i sigui P el punt sobre la recta CG , diferent de G , tal que $MG = MP$.



L'àrea del triangle $\triangle BPG$ és igual a $1/3$ de l'àrea de $\mathcal{T}$, ja que el triangle $\triangle APG$ està format per dos triangles d'igual àrea, $\triangle AMP$ i $\triangle AMG$, i l'àrea d'aquests dos últims és igual a $1/6$ de l'àrea de $\mathcal{T}$.

Les longituds dels costats del triangle $\triangle APG$ són respectivament $2m_a/3, 2m_b/3, 2m_c/3$. Observeu que AP i BG són iguals, pel criteri del CAC aplicat als triangles $\triangle AMP$ i $\triangle MGB$.

Per tant, l'àrea S de $\mathcal{T}$ val

$$S = \frac{4}{3} \sqrt{m(m-m_a)(m-m_b)(m-m_c)},$$

amb $2m = m_a + m_b + m_c$.

Problema 6.

Demostreu que existeix un nombre natural que expressat en base deu conté 2012 nous consecutius i que és el quadrat d'un altre nombre natural.

Solució.

Observeu que

$$\begin{aligned}9^2 &= 81 \\99^2 &= 9801 \\999^2 &= 998001 \\9999^2 &= 99980001 \\99999^2 &= 9999800001 \\&\vdots\end{aligned}$$

Això ens permet conjecturar que el quadrat del número format per 2013 nous comença amb 2012 nous.

De fet, tenim

$$[10^{2013}-1]^2 = 10^{4026} + 1 - 2 \cdot 10^{2013} = 10^{4026} + 1 - 1 + 1 - 2 \cdot 10^{2013} = (10^{4026} - 1) - 2(10^{2013} - 1).$$

I ara ja es veu que els 2012 primers nous de $10^{4026} - 1$ no queden afectats en realitzar la resta $(10^{4026} - 1) - 2(10^{2013} - 1)$.



L OLIMPIADA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

13 i 14 de desembre de 2013

Enunciats



L OLIMPIADA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

Primera sessió

13 de desembre de 2013, de 16 a 19.30 h.

- 1.—Sigui $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ el conjunt dels n primers enters positius. Determineu, en funció de n , el nombre de progressions aritmètiques de tres termes, amb diferència positiva, que es poden formar amb els elements d'aquest conjunt.
- 2.—Trobeu totes les solucions reals del sistema d'equacions:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2 + 6x + 9} + \sqrt{x^2 + y^2 - 8y + 16} = 5 \\ 9y^2 - 4x^2 = 60 \end{cases}$$

- 3.—Siguin H_B i H_C els peus de les altures del triangle ABC corresponents als vèrtexs B i C respectivament. Sigui Γ la circumferència que passa per A , H'_B , H'_C , on H'_B és el simètric del punt H_B respecte del punt mitjà del costat AC , i H'_C és el simètric del punt H_C respecte del punt mitjà del costat AB .
- a) Demostreu que si Γ és tangent al costat BC , llavors el punt de tangència és el punt mitjà del costat BC .
- b) Doneu una condició en funció de les longituds a , b , c dels costats del triangle per tal que es doni aquesta situació de tangència.

No es pot fer ús de calculadores ni d'altres aparells electrònics



L OLIMPIADA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

Segona sessió

14 de desembre de 2013, de 9.30 a 13 h.

- 4.—Busqueu els nombres enters positius n menors de 201314 tals que en dividir 3^n i 5^n per 13 donin residus 3 i 5 respectivament. Quins són els primer i l'últim? Quants n'hi ha en total?
- 5.—Sigui ABC un triangle acutangle. Sobre cadascun dels seus costats es construeix un quadrat cap a l'exterior del triangle que té per costat el corresponent costat del triangle. Siguin P_A , P_B i P_C els centres d'aquests quadrats. Demostreu que

$$\text{Àrea}[P_AP_BP_C] = \text{Àrea}[ABC] + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{8},$$

on a , b i c són les longituds del costats del triangle ABC .

- 6.—Digueu per quins valors de $\gamma \in (0, 1]$ és certa, per a qualsevol parella de nombres reals positius a i b , la desigualtat següent:

$$\gamma\sqrt{ab} + (1 - \gamma)\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \leq \frac{a + b}{2}.$$

No es pot fer ús de calculadores ni d'altres aparells electrònics

Solucions

Problema 1.

Sigui $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ el conjunt dels n primers enters positius. Determineu, en funció de n , el nombre de progressions aritmètiques de tres termes, amb diferència positiva, que es poden formar amb els elements d'aquest conjunt.

Solució.

Progressions amb diferència 1: $1, 2, 3$; $2, 3, 4$; $\dots$; $n-2, n-1, n$. En total n'hi ha $n-2$.

Progressions amb diferència 2: $1, 3, 5$; $2, 4, 6$; $3, 5, 7$; $\dots$; $n-4, n-2, n$. En total n'hi ha $n-4$. I així successivament. El total de progressions serà

$$S = (n-2) + (n-4) + \dots + u$$

on u és 2 o 1 segons la paritat de n . Ara distingim dos casos:

a) Cas parell, $n = 2k$. Llavors el nombre de progressions és

$$S = (2k-2) + (2k-4) + \dots + 2 = 2((k-1) + \dots + 1) = k(k-1) = \frac{n(n-2)}{4}$$

b) Cas imparell, $n = 2k-1$. Ara el nombre de progressions és

$$S = (2k-3) + (2k-5) + \dots + 1 = (k-1)^2 = \frac{(n-1)^2}{4}.$$

Problema 2.

Trobeu totes les solucions reals del sistema d'equacions:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2 + 6x + 9} + \sqrt{x^2 + y^2 - 8y + 16} = 5, \\ 9y^2 - 4x^2 = 60. \end{cases}$$

Solució.

Primer observem que els punts (x, y) que compleixen la primera equació són aquells que la suma de les seves distàncies a $A(-3, 0)$ y $B(0, 4)$ és igual a 5. A més, si un punt P està fora del segment AB llavors $AP + PB > AB = 5$. Això ens permet concloure que els punts (x, y) solució del sistema han d'estar en el segment AB . L'equació de AB és $y = \frac{4}{3}x + 4$ amb $-3 \leq x \leq 0$. Substituint aquests valors a la segona equació, resulta

$$9\left(\frac{4}{3}x + 4\right)^2 - 4x^2 = 60 \Leftrightarrow x^2 + 8x + 7 = 0$$

que té per arrels $x = -7$ y $x = -1$. Només la segona és a l'interval $[-3, 0]$ i l'única solució del sistema inicial és $(-1, 8/3)$.

Problema 3.

Siguin H_B i H_C els peus de les altures del triangle ABC corresponents als vèrtexs B i C respectivament. Sigui Γ la circumferència que passa per A , H'_B , H'_C , on H'_B és el simètric del punt H_B respecte del punt mitjà del costat AC , i H'_C és el simètric del punt H_C respecte del punt mitjà del costat AB .

a) Demostreu que si Γ és tangent al costat BC , llavors el punt de tangència és el punt mitjà del costat BC .

b) Doneu una condició en funció de les longituds a, b, c dels costats del triangle per tal que es doni aquesta situació de tangència.

Solució.

Calculem en primer lloc les potències de B i C respecte de la circumferència Γ . La del punt B és $BA \cdot BH'_C = BA \cdot AH_C = BA \cdot AC \cos A = bc \cos A$. Anàlogament, la del punt C és $CA \cdot CH'_B = CA \cdot AH_B = CA \cdot AB \cos A = cb \cos A$. Les dues potències són iguals i això ens diu que B i C equidisten del centre O de Γ . Aquest centre està situat, doncs, sobre la mediatriu de BC .

a) Pel que s'ha dit abans, si la circumferència talla la recta BC , els punts d'intersecció X_1 i X_2 han de ser equidistants del punt mitjà X del segment BC . Si hi ha tangència, haurà de ser $X_1 = X_2 = X$.

b) Suposem que hi hagi tangència. Aleshores la potència comuna de B i C respecte de la circumferència serà també $BX^2 = \frac{a^2}{4}$. Tindrem

$$\frac{a^2}{4} = bc \cos A \quad \text{o bé,} \quad a^2 = 4bc \cos A.$$

i, si substituïm $\cos A$ pel seu valor obtingut del teorema del cosinus, queda

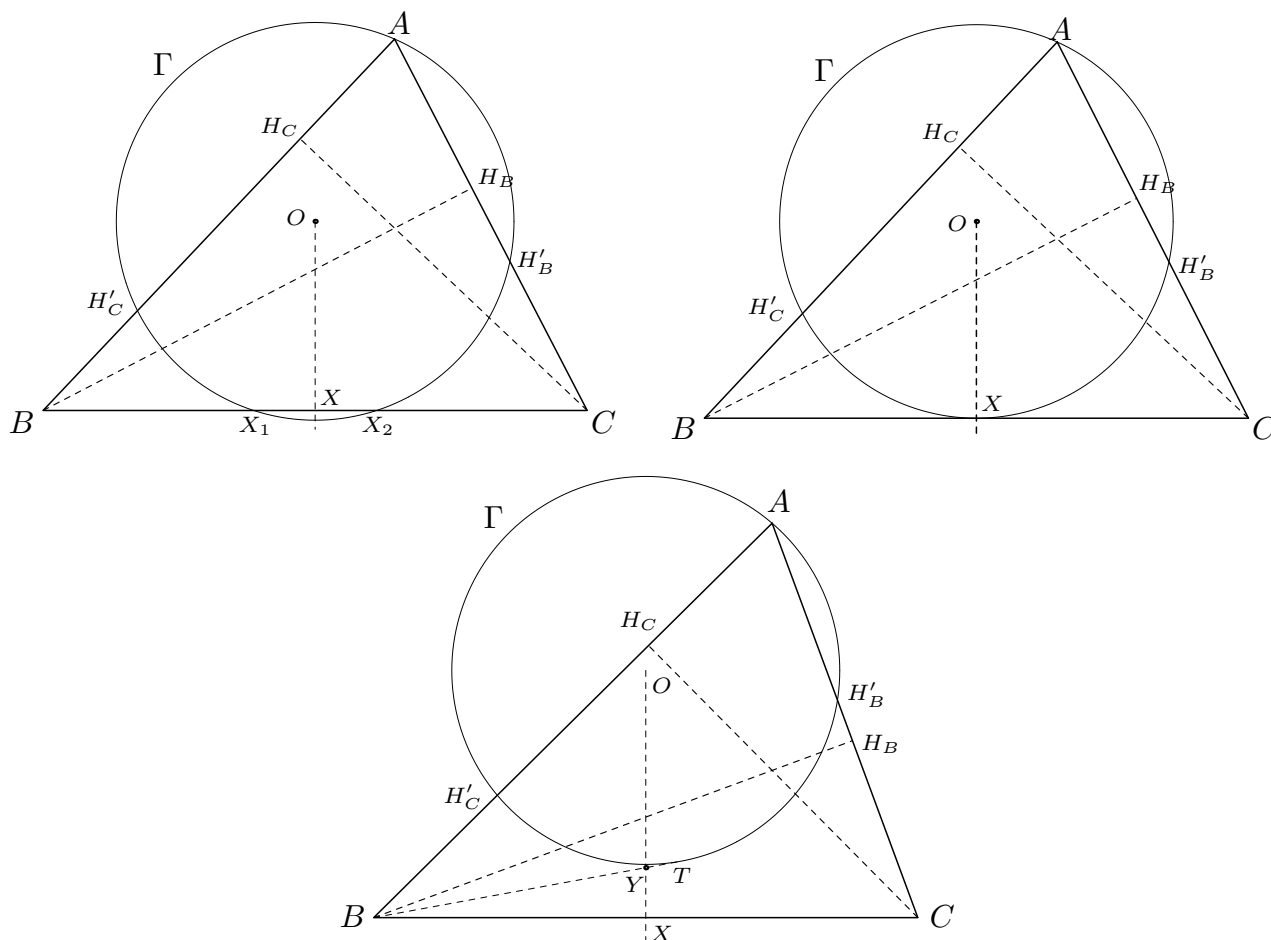
$$a^2 = 4bc \cos A = 2(b^2 + c^2 - a^2) \quad \text{i, definitivament,} \quad 3a^2 = 2(b^2 + c^2)$$

que és la condició buscada.

Hem de demostrar que aquesta condició implica la tangència de Γ i BC . La igualtat $3a^2 = 2(b^2 + c^2)$, després de substituir $b^2 + c^2$ pel seu valor obtingut del teorema del cosinus, dona lloc a la igualtat $a^2 = 4bc \cos A$, és a dir, que BX^2 és la potència de B i C respecte de la circumferència, que també és $BX_1 \cdot BX_2$. Podem escriure, doncs, $\frac{a^2}{4} = BX_1 \cdot BX_2 = (BX - XX_1)(BX + XX_2)$ o bé $\frac{a^2}{4} = \left(\frac{a}{2} - XX_1\right)\left(\frac{a}{2} + XX_2\right)$ i com que $XX_1 = XX_2$, calculant surt que $XX_1 = 0$. La conclusió és que si la circumferència talla BC , aleshores ha de ser tangent.

Ens queda per veure que no és possible que Γ no talli el costat BC . Si fos així, la circumferència estaria tota situada al semiplà superior determinat per BC i la tangent traçada des de B tindria punt de tangència T situat a la dreta de la mediatriu OX (vegeu la figura). Aleshores $BT > BY > BX$. Però BT^2 és la potència de B respecte de Γ , i si es compleix la condició $3a^2 = 2(b^2 + c^2)$ també ho és BX^2 . I no pot ser

$BX^2 = BT^2$ si $BT > BX$ estrictament.



Problema 4.

Busqueu els nombres enters positius n menors de 201314 tals que en dividir 3^n i 5^n per 13 donin residus 3 i 5 respectivament. Quins són els primer i l'últim? Quants n'hi ha en total?

Solució.

Les potències de 3 en dividir-les per 13 donen de residu un cicle d'ordre 3: $3^0 = 1$, $3^1 = 3$, $3^2 = 9$, $3^3 = 1$, etc. Anàlogament, les potències de 5 donen un cicle d'ordre 4: $5^0 = 1$, $5^1 = 5$, $5^2 = 12$, $5^3 = 8$, $5^4 = 1$, etc.

Els n que busquem són doncs del tipus $n = 3k + 1$ i a la vegada $n = 4h + 1$. Per tant, $n - 1$ ha de ser múltiple de 3 i 4 a la vegada, és a dir, múltiple de 12: $n = 12k + 1$. Les condicions de l'enunciat diuen $1 \leq 12k + 1 \leq 201314$ i per tant $0 \leq k \leq \frac{201313}{12}$ o bé $0 \leq k \leq 16776,08$. El primer, per a $k = 0$ és 1. L'últim, per a $k = 16776$, és 201313 i el nombre total és $16776 + 1 = 16777$.

Problema 5.

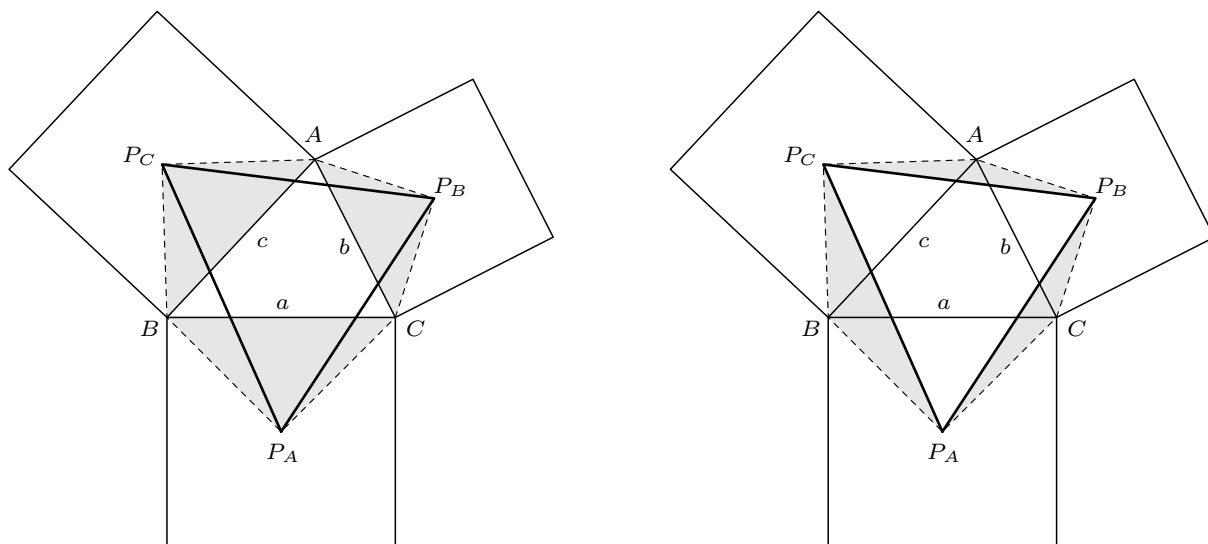
Sigui ABC un triangle acutangle. Sobre cadascun dels seus costats es construeix un quadrat cap a l'exterior del triangle que té per costat el corresponent costat del triangle. Siguin P_A , P_B i P_C els centres d'aquests quadrats. Demostreu que

$$\text{Àrea}[P_AP_BP_C] = \text{Àrea}[ABC] + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{8},$$

on a , b i c són les longituds dels costats del triangle ABC .

Solució.

L'hexàgon A, P_C, B, P_A, C, P_B té costats que mesuren la meitat de les diagonals dels quadrats. Els sis angles són 90° als vèrtexs P_A , P_B i P_C i $90^\circ + A$, $90^\circ + B$ i $90^\circ + C$ als respectius vèrtexs A , B i C . Com que el triangle és acutangle, tots aquests angles són menors que 180° i, per tant, l'hexàgon és convex. El triangle $P_AP_BP_C$ és interior a l'hexàgon.



A la figura de l'esquerra veiem que l'àrea de l'hexàgon és l'àrea del triangle ABC més la suma de les quartes parts de les àrees dels tres quadrats.

$$\text{Àrea hexàgon} = \text{Àrea}[ABC] + \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2).$$

A la figura de la dreta veiem que l'àrea de l'hexàgon és l'àrea del triangle $P_AP_BP_C$ més la suma de les àrees dels tres triangles grisos AP_CP_B , BP_AP_C , CP_BP_A .

$$\text{Àrea hexàgon} = \text{Àrea}[P_AP_BP_C] + \text{Àrea}[AP_CP_B] + \text{Àrea}[BP_AP_C] + \text{Àrea}[CP_BP_A].$$

Per calcular l'àrea d'aquests últims triangles, per exemple AP_CP_B , calculem la meitat del producte de dos costats pel sinus de l'angle que formen

$$\text{Àrea}[AP_CP_B] = \frac{1}{2} \frac{b\sqrt{2}}{2} \frac{c\sqrt{2}}{2} \sin(A + 90^\circ) = \frac{1}{4} bc \cos A = \frac{1}{8}(b^2 + c^2 - a^2),$$

on la darrera igualtat s'ha obtingut substituint $2bc \cos A$ per $b^2 + c^2 - a^2$ del teorema del cosinus. En resum,

$$\begin{aligned}\text{Àrea hexàgon} &= \text{Àrea}[P_AP_BP_C] + \frac{1}{8}(b^2 + c^2 - a^2) + \frac{1}{8}(c^2 + a^2 - b^2) + \frac{1}{8}(a^2 + b^2 - c^2) = \\ &= \text{Àrea}[P_AP_BP_C] + \frac{1}{8}(a^2 + b^2 + c^2).\end{aligned}$$

Si igualem l'àrea de l'hexàgon obtinguda de les dues maneres ens queda, finalment,

$$\text{Àrea}[P_AP_BP_C] = \text{Àrea}[ABC] + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{8},$$

Problema 6.

Digueu per quins valors de $\gamma \in (0, 1]$ és certa, per a qualsevol parella de nombres reals positius a i b , la desigualtat següent:

$$\gamma\sqrt{ab} + (1 - \gamma)\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \leq \frac{a + b}{2}.$$

Primera solució.

Dividint per $a + b$ i multiplicant per $\sqrt{2}$ s'obté

$$\gamma\sqrt{2\frac{ab}{(a+b)^2}} + (1 - \gamma)\sqrt{1 - 2\frac{ab}{(a+b)^2}} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Posem $t^2 = \frac{2ab}{(a+b)^2}$, que és un nombre real positiu de l'interval $(0, 1/2]$ (usant $MG \leq MQ$). Per tant $t \in (0, \frac{\sqrt{2}}{2}]$ i podem dir $t = \sin \theta$, amb $\theta \in (0, \frac{\pi}{4}]$. Ara només cal trobar el màxim de la funció

$$f(\theta) = \gamma \sin \theta + (1 - \gamma) \cos \theta$$

a l'interval $(0, \frac{\pi}{4}]$ i imposar que no superi $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Per trobar aquest màxim fàcilment podem raonar que $f(\theta)$ és el producte escalar del vector $v = (\gamma, 1 - \gamma)$ per un vector de mòdul 1 i per tant sabem que $f(\theta)$ té un únic màxim a $(0, 2\pi]$ que s'obté quan $(\sin \theta, \cos \theta)$ té la mateixa direcció i sentit que v . És a dir, quan

$$(\sin \theta, \cos \theta) = \frac{1}{\sqrt{\gamma^2 + (1 - \gamma)^2}}(\gamma, 1 - \gamma).$$

Hem de mirar, doncs, si es pot donar

$$\tan \theta = \frac{\gamma}{1 - \gamma},$$

tenint en compte que $\theta \in (0, \frac{\pi}{4}]$. Això implica

$$0 < \frac{\gamma}{1-\gamma} < 1,$$

equivalentment $0 < \gamma < 1/2$.

Per tant, quan $\gamma \in (0, 1/2)$ la funció $f(\theta)$ té un màxim interior (i absolut) en $(0, \frac{\pi}{4}]$ i el valor de f en aquest màxim és

$$\sqrt{\gamma^2 + (1-\gamma)^2} > \frac{\gamma + (1-\gamma)}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

on hem usat $MQ > MA$ llevat que els dos nombres siguin iguals. En canvi per $\gamma \in [1/2, 1]$ el màxim s'assoleix en l'extrem $\theta = \pi/4$, on f val precisament $\frac{\sqrt{2}}{2}$. En conseqüència, la desigualtat val si, i només si, $\gamma \in [1/2, 1]$.

Segona solució. (Xavier Ros)

Recordem que la següent desigualtat és certa per tots els nombres reals positius a, b

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}. \quad (1)$$

La quantitat de l'esquerra s'anomena mitjana geomètrica dels nombres a i b , la del mig és la mitjana aritmètica, i la de la dreta és la mitjana quadràtica.

Per a resoldre el problema, definim

$$x\sqrt{ab} \quad \text{i} \quad y = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Aleshores, tindrem que

$$x^2 + y^2 = ab + \frac{a^2+b^2}{2} = \frac{(a+b)^2}{2},$$

i per tant,

$$\frac{a+b}{2} = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

Per tant, la desigualtat de l'enunciat és equivalent a

$$\gamma x + (1-\gamma)y \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}, \quad (2)$$

on x i y són nombres reals positius. Notem que, a més, per (1) sabem que $x \leq y$.

Ara, aplicant (1) als nombres x i y , tindrem que es compleix

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}},$$

i per tant (2) és certa per $\gamma = \frac{1}{2}$.

Com que $x \leq y$, aleshores (2) serà certa també per a tot $\gamma \geq \frac{1}{2}$, i per tant la desigualtat de l'enunciat és certa per tot $\gamma \geq \frac{1}{2}$.

A continuació demostrarem que, de fet, per $\gamma < \frac{1}{2}$ la desigualtat de l'enunciat no és certa. Com que la desigualtat de l'enunciat és equivalent a la desigualtat (2), només ens cal veure que no ho és la desigualtat (2).

Suposarem que (2) és certa per algun $\gamma < 1/2$ i arribarem a una contradicció. Si fos així, la podem aplicar als nombres $x = 1 - \epsilon$ i $y = 1 + \epsilon$, on $\epsilon > 0$ és un nombre prou petit. Aleshores, (2) ens diu que

$$\gamma(1 - \epsilon) + (1 - \gamma)(1 + \epsilon) \leq \sqrt{\frac{(1 - \epsilon)^2 + (1 + \epsilon)^2}{2}},$$

i reagrupant els termes veiem que aquesta desigualtat és equivalent a

$$1 + (1 - 2\gamma)\epsilon \leq \sqrt{1 + \epsilon^2}.$$

Ara, és clar també que aquesta desigualtat és equivalent a

$$(1 - 2\gamma)\epsilon \leq \sqrt{1 + \epsilon^2} - 1 = \frac{\epsilon^2}{1 + \sqrt{1 + \epsilon^2}},$$

i simplificant, tindrem

$$(1 - 2\gamma) \leq \frac{\epsilon}{1 + \sqrt{1 + \epsilon^2}}.$$

Finalment, notem que com que $\gamma < 1/2$ aleshores el costat esquerra de la desigualtat és un nombre positiu fixat (que no depen de ϵ). En canvi, $\epsilon > 0$ el podem fer tant petit com vulguem, i així el costat dret de la desigualtat es farà tant petit com vulguem, i en particular, el podem fer més petit que $(1 - 2\gamma)$. Per tant, hem arribat a una contradicció, tal com volíem.



LI OLIMPIÁDA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

12 i 13 de desembre de 2014

Enunciats



L OLIMPIADA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

Primera sessió

12 de desembre de 2014, de 16 a 19.30 h.

1.—En Marc i la Clara han comprat una bossa de patates i volen repartir-se-les. La bossa és de 900 grams i cap de les patates pesa més de 450 grams. Demostreu que és possible repartir totes les patates de la bossa entre en Marc i la Clara de tal manera que o bé tots dos rebin el mateix pes, o bé que el qui rep més pes, en rebi com a molt 300 grams més que l'altre.

2.—Trobeu totes les ternes de nombres reals x, y, z , tots tres diferents de zero, que satisfan les equacions

$$\begin{aligned}\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} &= \left(\frac{1}{6}\right)^2, \\ \frac{x}{yz} + \frac{y}{zx} + \frac{z}{xy} &= \left(\frac{7}{6}\right)^2, \\ \frac{1}{x^2y^2} + \frac{1}{y^2z^2} + \frac{1}{z^2x^2} &= \left(\frac{7}{36}\right)^2.\end{aligned}$$

3.—Per a cada enter positiu $n \geq 1$ denotem $a_n = n^4 + n^2 + 1$. Calculeu el màxim comú divisor de a_n i a_{n+1} en funció de n .

No es pot fer ús de calculadores ni d'altres aparells electrònics



L OLIMPIADA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

Segona sessió

13 de desembre de 2014, de 9.30 a 13 h.

- 4.—Considerem un rectangle format per $2 \times n$ quadrats, distribuïts en n columnes de dos quadrats cadascuna. Disposem de tres colors per a pintar els quadrats, i volem fer-ho de tal manera que no hi hagi dos quadrats que comparteixin un costat i que tinguin el mateix color. De quantes maneres diferents ho podem fer?
- 5.—Siguin A, B, C, D quatre punts diferents d'una circumferència Γ . Suposem que els segments AC i BD s'intersequen en un punt E . Suposem també que els segments AB , BC i CD tenen la mateixa longitud. Triem punts F i G tals que $BECF$ i $BDCG$ siguin paral·lelograms. Demostreu que els segments AF i DG s'intersequen en un punt de Γ .
- 6.—Considerem un conjunt $\mathcal{S}$ de n rectes diferents del pla, on $n > 3$. Suposem que $\mathcal{S}$ no conté cap parell de rectes paral·leles. Sigui $\mathcal{X}$ el conjunt dels punts del pla que pertanyen a dues o més rectes de $\mathcal{S}$. Suposem que per a tot punt $p \in \mathcal{X}$ la quantitat de rectes de $\mathcal{S}$ que passen per p és com a molt $n/2$. Demostreu que el nombre d'elements de $\mathcal{X}$ és més gran o igual que $n/2$.

No es pot fer ús de calculadores ni d'altres aparells electrònics

Solucions

Problema 1.

En Marc i la Clara han comprat una bossa de patates i volen repartir-se-les. La bossa és de 900 grams i cap de les patates pesa més de 450 grams. Demostreu que és possible repartir totes les patates de la bossa entre en Marc i la Clara de tal manera que o bé tots dos rebin el mateix pes, o bé que el qui rep més pes, en rebi com a molt 300 grams més que l'altre.

Solució.

Si partim 900 en dues parts, x i $900 - x$, la condició que ens demanen és

$$|(900 - x) - x| \leq 300.$$

Aquesta condició és equivalent a $-300 \leq 900 - 2x \leq 300$ que també és equivalent a $300 \leq x \leq 600$. El nostre problema és, doncs, equivalent a veure que podem fer una part de patates que tinguin pes x entre 300 g i 600 g.

Ordenem les patates per pes de més gran a més petit. Si la primera patata pesa més de 300 g, la donem al Marc (x) i la resta a la Clara ($900 - x$) i hem acabat. En cas contrari totes les patates pesen menys de 300 g. Anem donant al Marc patates, de més gran a més petita, fins just passar (o igualar) els 300 g (x). Les patates del Marc passen o igualen els 300 g però no arriben als 600, ja que totes les patates són de pes inferior a 300 g. Hem acabat, donant a la Clara les altres patates ($900 - x$).

Problema 2.

Trobeu totes les ternes de nombres reals x, y, z , tots tres diferents de zero, que satisfan les equacions

$$\begin{aligned}\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} &= \left(\frac{1}{6}\right)^2, \\ \frac{x}{yz} + \frac{y}{zx} + \frac{z}{xy} &= \left(\frac{7}{6}\right)^2, \\ \frac{1}{x^2y^2} + \frac{1}{y^2z^2} + \frac{1}{z^2x^2} &= \left(\frac{7}{36}\right)^2.\end{aligned}$$

Solució 1.

Multiplicant les dues primeres equacions per xyz i la tercera per $x^2y^2z^2$, obtenim

$$\begin{aligned}x + y + z &= \frac{xyz}{36}, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= \frac{49xyz}{36}, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= \frac{49x^2y^2z^2}{36^2}.\end{aligned}$$

Les dues últimes equacions impliquen que $xyz = 36$, i de fet el sistema és equivalent a

$$\begin{aligned}x + y + z &= 1, \\x^2 + y^2 + z^2 &= 49, \\xyz &= 36.\end{aligned}$$

De la igualtat $(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$ deduïm $1 = 49+2(xy+yz+zx)$, que implica $xy + yz + zx = -24$. Per tant, el sistema precedent és equivalent a

$$\begin{aligned}x + y + z &= 1, \\xy + yz + zx &= -24, \\xyz &= 36.\end{aligned}$$

Les solucions (x, y, z) de l'últim sistema satisfan $t^3 - t^2 - 24t - 36 = (t-x)(t-y)(t-z)$, per les fórmules de Cardano-Viète. Observant la factorització $t^3 - t^2 - 24t - 36 = (t-6)(t+2)(t+3)$ arribem a la conclusió que la terna $(x, y, z) = (6, -2, -3)$ és solució del sistema proposat, i que totes les altres solucions en són permutacions.

Solució 2. (del concursant Joan Ariño)

Com abans, s'arriba a

$$\begin{aligned}x + y + z &= 1, \\xy + yz + zx &= -24, \\xyz &= 36, \\x^2 + y^2 + z^2 &= 49.\end{aligned}$$

Com que el sistema és cíclic podem ordenar les incògnites de forma $x \geq y \geq z$. Per la segona equació del sistema, almenys una de les incògnites ha de ser negativa, però llavors per la tercera exactament dues incògnites ho són. A més per la quarta equació els valors de les incògnites han de situar-se entre 7 i -7 , per tant: $7 > x > 0 > y \geq z > -7$. En aquest punt buscant la existència de solucions enteres i per tant comprovant els divisors de 36 menors que 7 trobem que $x = 6, y = -2, z = -3$ són solucions.

Ara queda per comprovar la inexistència de cap altra solució. Per fer-ho veurem que $x > 6$ i que $x < 6$ ens fan arribar a una contradicció.

a) Cas $x > 6$.

Per la primera equació sabem que $y + z < -5$ i per tant $(y+z)^2 > 25$. Per la tercera que $yz < 6$ i per la quarta que $y^2 + z^2 < 13$. De forma que calculant $y^2 + 2yz + z^2$ partint de les dues equacions anteriors arribem a la contradicció $25 > 25$ si $x > 6$.

b) Cas $x < 6$.

Ho fem per un procediment anàleg a l'anterior. Per la primera equació $(y+z)^2 < 25$. Però per la tercera i la quarta $yz > 6$ i $y^2 + z^2 > 13$. Arribem igualment a la contradicció $25 > 25$ si $x < 6$.

Per tant l'única solució al sistema és $x = 6, y = -2, z = -3$ i les seves permutacions.

Problema 3.

Per a cada enter positiu $n \geq 1$ denotem $a_n = n^4 + n^2 + 1$. Calculeu el màxim comú divisor de a_n i a_{n+1} en funció de n .

Solució.

Denotem per d_n el màxim comú divisor de a_n i a_{n+1} . Observem que

$$a_n = (n^2 + 1)^2 - n^2 = (n^2 - n + 1)(n^2 + n + 1)$$

i, d'altra banda,

$$(n+1)^2 - (n+1) + 1 = n^2 + n + 1, \quad (n+1)^2 + (n+1) + 1 = n^2 + 3n + 3.$$

Per tant

$$a_{n+1} = (n^2 + n + 1)(n^2 + 3n + 3),$$

cosa que implica que $d_n = e_n(n^2 + n + 1)$, on e_n és màxim comú divisor de $n^2 - n + 1$ i de $n^2 + 3n + 3$. Ara bé, $n^2 - n + 1$ és senar, ja que $n^2 - n = n(n-1)$ és el producte de dos enters consecutius, i per tant és parell. D'aquí que $n^2 - n + 1$ i e_n siguin ambdós senars. Ara, la igualtat

$$n^2 + 3n + 3 - (n^2 - n + 1) = 4n + 2 = 2(2n + 1),$$

implica que $e_n | (2n + 1)$, per ser e_n senar. Aleshores també tenim

$$e_n | 4(n^2 - n + 1) - (2n - 3)(2n + 1) = 7.$$

Com que 7 és primer, resulta que e_n és 1 o 7. Quan $7 | 2n + 1$ aleshores $7 | e_n$ i per tant $e_n = 7$ en aquest cas. Com que $e_n | 2n + 1$, es conclou que $e_n = 7$ exactament quan $7 | 2n + 1$. Resumint:

- $d_n = 7(n^2 + n + 1)$ quan n dóna residu 3 en dividir-lo entre 7.
- $d_n = n^2 + n + 1$ quan n no dóna residu 3 en dividir-lo entre 7.

Problema 4.

Considerem un rectangle format per $2 \times n$ quadrats, distribuïts en n columnes de dos quadrats cadascuna. Disposem de tres colors per a pintar els quadrats, i volem fer-ho de tal manera que no hi hagi dos quadrats que comparteixin un costat i que tinguin el mateix color. De quantes maneres diferents ho podem fer?

Solució.

Anomenem coloració admissible qualsevol coloració que satisfaci les condicions indicades a l'enunciat. Donat $n \geq 1$ denotem per a_n el nombre de coloracions admissibles d'un rectangle de mida $2 \times n$. Fixem $n \geq 1$. Qualsevol coloració admissible d'un rectangle de mida $2 \times (n + 1)$ s'obté a partir d'una coloració admissible del rectangle $2 \times n$ corresponent a les n primeres columnes completant amb una tria adequada de colors els quadrats de la darrera columna. Suposem triada una coloració admissible del rectangle format per les primeres n columnes. Denotem per x, y, z els tres colors a la nostra disposició. Si x, y són els colors dels quadres superior i inferior (respectivament) de la

columna a la posició n , aleshores hi ha exactament tres tries corresponents als colors dels quadrats (superior, inferior) de l'última columna, donades pels parells (y, x) , (y, z) i (z, x) . Permutant els símbols x, y, z deduïm que el nombre de tries per a l'última columna no depèn de la coloració del rectangle de mida $2 \times n$ que hem fixat al principi. Per tant, $a_{n+1} = 3a_n$. Finalment, com que $a_1 = 6$, resulta que $a_n = 2 \cdot 3^n$.

Problema 5.

Siguin A, B, C, D quatre punts diferents d'una circumferència Γ . Suposem que els segments AC i BD s'intersequen en un punt E . Suposem també que els segments AB , BC i CD tenen la mateixa longitud. Triem punts F i G tals que $BECF$ i $BDCG$ siguin paral·lelograms. Demostreu que els segments AF i DG s'intersequen en un punt de Γ .

Solució.

Observem la figura de l'esquerra. Els angles α són tots iguals, ja que són inscrits a Γ i veuen cordes de la mateixa longitud. Els angles α' són iguals als α pel paral·lisme dels costats (per construcció). Anàlogament, els angles β són iguals ja que són inscrits i veuen la mateixa corda AD . L'angle β' és igual al β per paral·lisme. A partir d'ara podem suprimir les *primes* dels angles.

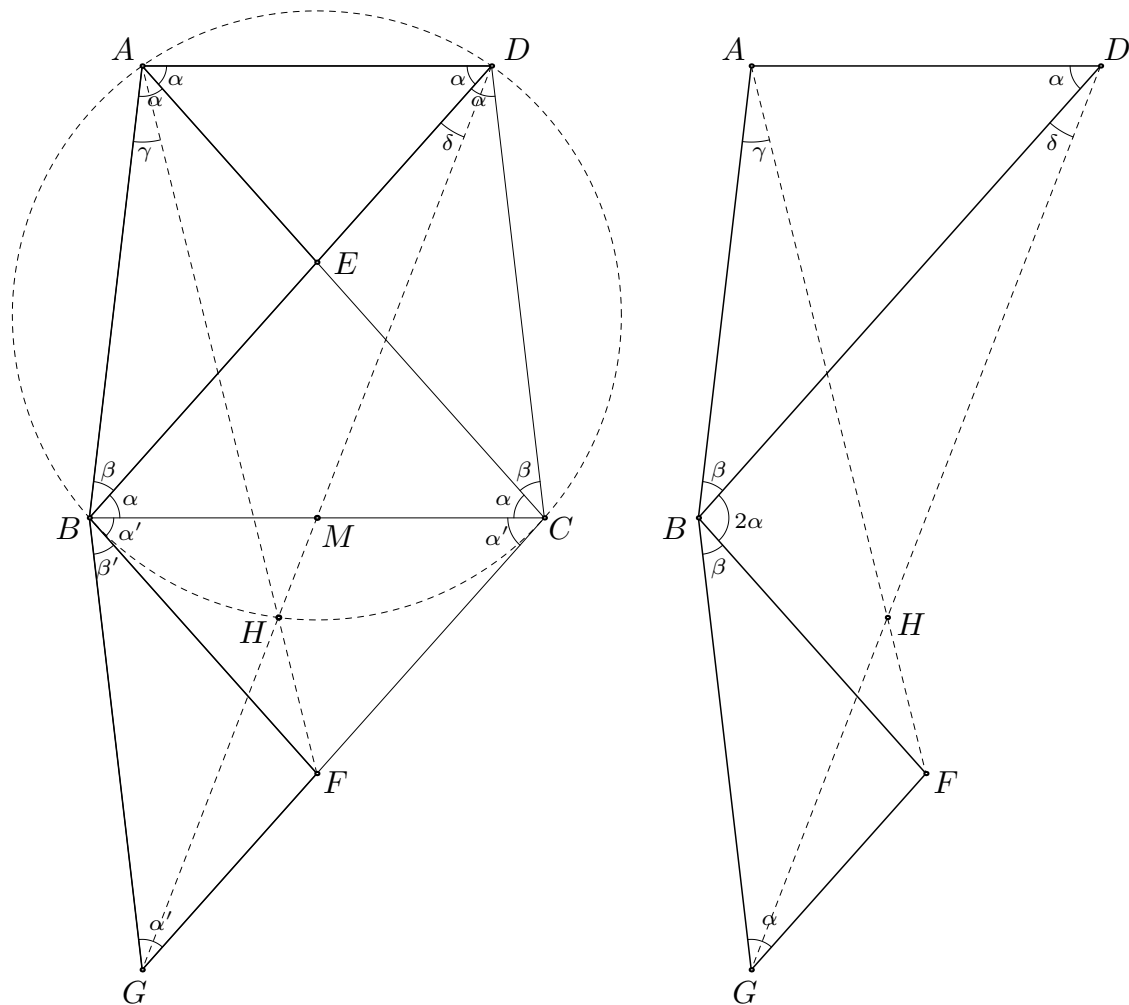
La resolució del problema és equivalent a veure que els angles denotats per γ i δ són iguals.

El punt M és el punt mitjà de BC ja que és el punt on es tallen les diagonals dels paral·lelograms $BECF$ i $BDCG$. Els triangles BGF , CDE i BAE són iguals (congruents) ja que el primer i el segon són simètrics respecte de M i el segon i el tercer són simètrics respecte de la mediatriu del segment BC .

Mirem ara els triangles BEA i BAD de vèrtex comú B . Tenen dos angles iguals, senyalats amb β (angle comú) i α . En conclusió, els triangles (figura de la dreta) BAD i BFG són semblants.

La relació de semblança $\frac{AB}{FB} = \frac{DB}{GB}$ ens diu que també són semblants els dos triangles BAF i BDG ja que tenen l'angle $(2\alpha + \beta)$ del vèrtex B iguals. Per tant els angles γ i

δ són iguals i hem acabat.



Problema 6.

Considerem un conjunt $\mathcal{S}$ de n rectes diferents del pla, on $n > 3$. Suposem que $\mathcal{S}$ no conté cap parell de rectes paral·leles. Sigui $\mathcal{X}$ el conjunt dels punts del pla que pertanyen a dues o més rectes de $\mathcal{S}$. Suposem que per a tot punt $p \in \mathcal{X}$ la quantitat de rectes de $\mathcal{S}$ que passen per p és com a molt $n/2$. Demostreu que el nombre d'elements de $\mathcal{X}$ és més gran o igual que $n/2$.

Solució.

Per a cada punt $p \in \mathcal{X}$ denotem per δ_p el nombre de rectes de $\mathcal{S}$ que passen per p . Per una banda, per a dos punts diferents $p, q \in \mathcal{X}$ tenim

$$|\mathcal{X}| \geq (\delta_p - 1)(\delta_q - 1) + 2. \quad (1)$$

D'altra banda, com que dues rectes no paral·leles i diferents del pla s'intersecten en exac-

tament un punt, fent un doble compteig dels parells de rectes diferents de $\mathcal{S}$ obtenim (podem pensar-ho com si moguessim molt poc totes les rectes, de manera que un punt p per on hi passaven δ_p rectes es converteix en $\binom{\delta_p}{2}$ punts diferents).

$$\binom{n}{2} = \sum_{p \in \mathcal{X}} \binom{\delta_p}{2} \quad (2)$$

La conclusió s'obté considerant dos casos.

a) Si existeixen dos punts diferents $p, q \in \mathcal{X}$ tals que $\delta_p, \delta_q \geq \sqrt{n}$ aleshores, per (1), es satisfà la desigualtat

$$|X| \geq (\sqrt{n} - 1)^2 + 2 = n - 2\sqrt{n} + 3 = \frac{n}{2} + \frac{1}{2}((\sqrt{n} - 2)^2 + 2) \geq \frac{n}{2},$$

i ja hem acabat.

b) En cas contrari, hi ha com a màxim un punt p amb $\delta_p \geq \sqrt{n}$ el màxim dels valors δ_p per a $p \in \mathcal{X}$ és com a molt $\lfloor n/2 \rfloor$, mentre que la resta de valors són com a molt $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$. Per tant:

$$\sum_{r \in \mathcal{X}} \binom{\delta_r}{2} = \binom{\delta_p}{2} + \sum_{q \neq p} \binom{\delta_q}{2} \leq \binom{\lfloor n/2 \rfloor}{2} + (|\mathcal{X}| - 1) \binom{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{2} \leq \frac{n^2}{4} + (|\mathcal{X}| - 1) \frac{n}{2}$$

i utilitzant (2) deduïm:

$$|\mathcal{X}| \geq \frac{\binom{n}{2} - \frac{n^2}{4}}{\frac{n}{2}} + 1 = \frac{n}{2}$$

En resum, $|\mathcal{X}| \geq n/2$ en els dos casos possibles, i per tant l'enunciat queda demostrat.

(Si no hi hagués cap punt p que complís la condició $\delta_p \geq \sqrt{n}$, aleshores en triariem un d'arbitrari que fes les funcions de p en el raonament anterior.)



LII OLIMPIÁDA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

11 i 12 de desembre de 2015

Enunciats



LII OLIMPIÁDA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

Primera sessió

11 de desembre de 2015, de 16 a 19.30 h.

- 1.—Direm que un nombre natural és *ascendent* si les seves xifres, escrit en base 10, compleixen, vistes d'esquerra a dreta, que cadascuna és més gran o igual que l'anterior i la més significativa no és zero.

Quants nombres ascendants de tres xifres hi ha? I de cinc xifres? I de k xifres?

- 2.—Es considera el polinomi $P(x) = x^4 - 2x^3 + ax^2 - 2x + 1$. Determineu els valors del nombre real a per als quals $P(x) \geq 0$ per a tot $x \in \mathbb{R}$. Determineu també els valors de a per als quals $(x-1)^3$ divideix el polinomi $P(x) - P(2-x)$.

- 3.—Siguin a, b, c les longituds dels costats d'un triangle ABC i m_a, m_b, m_c les longituds de les seves mitjanes. Proveu que

$$\frac{2^{m_a} + 2^{m_b} + 2^{m_c}}{2^a + 2^b + 2^c} < 1.$$

No es pot fer ús de calculadores ni d'altres aparells electrònics



L OLIMPIÁDA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

Segona sessió

12 de desembre de 2015, de 9.30 a 13 h.

4.—Es tenen 11 boles numerades cadascuna d'elles amb un número enter positiu. Per a cada conjunt $\mathcal{A}$ de tres boles hi ha un subconjunt $\mathcal{B}$ de tres boles, escollides entre les 8 restants, tals que $a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1 = b_1b_2b_3$, on a_i i b_j són els números de les boles de $\mathcal{A}$ i de $\mathcal{B}$, respectivament. Proveu que almenys una bola està numerada amb el 3.

5.—En una circumferència de centre O i radi 2 fixem un radi OA i construïm una semicircumferència que el tingui per diàmetre. Per un punt C del segment OA tracem una perpendicular a OA que talla en D la circumferència inicial i en E la semicircumferència.

Calculeu la longitud del camí recorregut pel punt M , centre de la circumferència circumscrita al triangle AED , quan C recorre el segment OA .

6.—Siguin $x > y > z > t$ quatre enters positius tals que

$$(x^2 - y^2) + (xz - yt) - (z^2 - t^2) = 0$$

Proveu que el nombre $xy + zt$ és compost.

No es pot fer ús de calculadores ni d'altres aparells electrònics

Solucions

Problema 1.

Direm que un nombre natural és ascendent si les seves xifres, escrit en base 10, compleixen, vistes d'esquerra a dreta, que cadascuna és més gran o igual que l'anterior i la més significativa no és zero.

Quants nombres ascendants de tres xifres hi ha? I de cinc xifres? I de k xifres?

Solució.

Sigui el nombre ascendent de k xifres $a_k a_{k-1} \dots a_1$. Serà

$$1 \leq a_k \leq \dots \leq a_1 \leq 9.$$

La quantitat de tals nombres és, ras i curt, el nombre de combinacions amb repetició de 9 elements agafats de k en k , és a dir,

$$\binom{9+k-1}{k}.$$

El cas $k = 3$ es pot comptar cas per cas (111, 112, $\dots$, 119, 122, $\dots$, 129, etc) i dona 165. El cas $k = 5$ ja no es pot comptar directament.

Podem demostrar la fórmula de les combinacions amb repetició fent la transformació que a cada vector $a_k, \dots, a_1$, amb $1 \leq a_k \leq \dots \leq a_1 \leq 9$

li fa correspondre un altre $b_k, \dots, b_1$, així: $b_k = a_k$, $b_{k-1} = a_{k-1} + 1$, etc, $b_1 = a_1 + k - 1$. El vector $b_k, \dots, b_1$, compleix ara $1 \leq b_k < b_{k-1} < \dots < b_1 \leq 9 + k - 1$ i la correspondència

$$a_k, \dots, a_1, \longleftrightarrow b_k, \dots, b_1$$

és bijectiva. Per tant, hi ha tantes combinacions amb repetició de 9 elements agafats de k en k com combinacions ordinàries de $9 + k - 1$ elements agafats de k en k , i d'aquí la fórmula. Hi ha altres maneres de demostrar la mateixa fórmula, com per exemple, en el problema de les pizzes.

Problema 2.

Es considera el polinomi $P(x) = x^4 - 2x^3 + ax^2 - 2x + 1$. Determineu els valors del nombre real a per als quals $P(x) \geq 0$ per a tot $x \in \mathbb{R}$. Determineu també els valors de a per als quals $(x - 1)^3$ divideix el polinomi $P(x) - P(2 - x)$.

Solució.

El polinomi $P(x)$ és *recíproc*, *autorecíproc* o *palindròmic*, es a dir, els coeficients de posicions simètriques respecte els extrems són iguals. Recordem que aquests polinomis, si són de grau parell, permeten reduir el càlcul de les arrels a les d'un polinomi de grau meitat per mitjà del canvi $t = x + 1/x$.

Tenim la identitat

$$P(x) = (x^2 + 1)(x - 1)^2 + (a - 2)x^2$$

que podem intuir i demostrar de diverses maneres. En posem dues.

a) Si agrupem els termes *simètrics*, tal com es fa per a resoldre'ls, queda

$$\begin{aligned} P(x) &= (x^4 + 1) - 2(x^3 + x) + ax = ((x^2 + 1)^2 - 2x^2) - 2x(x^2 + 1) + ax^2 = \\ &= (x^2 + 1)(x^2 + 1 - 2x) + ax^2 - 2x^2 \end{aligned}$$

d'on surt la identitat indicada.

b) Observem que $P(1) = a - 2$, de manera que si $a = 2$, el polinomi té l'arrel 1. Separem el coeficient de x^2 en dues parts, una d'elles amb un 2 i l'altra amb coeficient $a - 2$. Ens queda

$$P(x) = (x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1) + (a - 2)x^2 = (x - 1)^2(x^2 + 1) + (a - 2)x^2.$$

Com que la primera té l'arrel 1 doble, fàcilment trobem la seva descomposició.

La identitat anterior ens diu que si $a \geq 2$, el polinomi és sempre positiu. A més, $P(1) = a - 2$, que és negatiu si $a < 2$.

Així, doncs, la resposta a la primera part és $a \geq 2$.

La segona part també la podem resoldre de dues maneres.

a) Com que $P(x) = (x - 1)^2(x^2 + 1) + (a - 2)x^2$, calculant surt

$$P(2 - x) = (x - 1)^2(x^2 - 4x + 5) + (a - 2)(2 - x)^2$$

$$P(x) - P(2 - x) = (x - 1)^2(4x - 4) + (a - 2)(4x - 4) = 4(x - 1)^3 + 4(a - 2)(x - 1).$$

Per tal que $P(x) - P(2 - x)$ sigui divisible per $(x - 1)^3$ és necessari i suficient que $a = 2$.

b) Si sabem derivar, posem $F(x) = P(x) - P(2 - x)$ i volem que $F(1) = 0$, $F'(1) = 0$ i $F''(1) = 0$. Tenim $F'(x) = P'(x) + P'(2 - x)$ i $F''(x) = P''(x) - P''(2 - x)$. Les condicions $F(1) = 0$ i $F''(1) = 0$ es compleixen sempre. Però $F'(1) = 0$ és equivalent a $P'(1) = 0$ i això dona, trivialment, $a = 2$.

Problema 3.

Siguin a, b, c les longituds dels costats d'un triangle ABC i m_a, m_b, m_c les longituds de les seves mitjanes. Proveu que

$$\frac{2^{m_a} + 2^{m_b} + 2^{m_c}}{2^a + 2^b + 2^c} < 1.$$

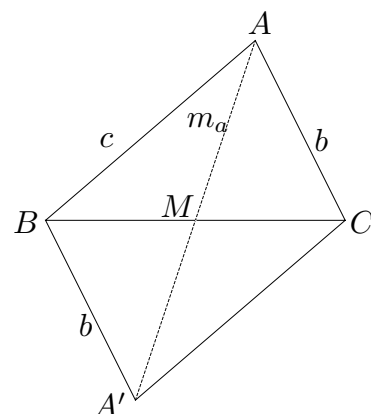
Solució.

Si M és el punt mitjà de BC i fem el simètric A' de A respecte de M , obtenim el paral·lelògram $ACA'B$. La diagonal AA' té longitud $2m_a$ i la desigualtat triangular ens diu que $2m_a < b + c$, amb desigualtat estricta.

Per veure la desigualtat farem servir el creixement de la funció 2^x i la desigualtat entre mitjanes aritmètica i geomètrica. Tenim

$$2^a + 2^b \geq 2\sqrt{2^a 2^b} = 2\sqrt{2^{a+b}} > 2\sqrt{2^{2m_c}} = 2 \cdot 2^{m_c}.$$

Sumant cíclicament i dividint per dos, queda la desigualtat desitjada (estricta).



Problema 4.

Es tenen 11 boles numerades cadascuna d'elles amb un nombre enter positiu. Per a cada subconjunt $\mathcal{A}$ de tres boles hi ha un subconjunt $\mathcal{B}$ de tres boles, escollides entre les 8 restants, tals que $a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1 = b_1b_2b_3$, on a_i i b_j són els nombres de les boles de $\mathcal{A}$ i de $\mathcal{B}$, respectivament. Proveu que almenys una bola està numerada amb el 3.

Solució.

Si totes les boles estan numerades amb el 3, es compleix l'enunciat.

Siguin $c_1, c_2, \dots, c_{11}$ els números de les boles, que podem suposar $c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_{11}$. Mirem les tres primeres. Segons l'enunciat, existeixen tres enters diferents $p, m, n \geq 4$ tals que $c_1c_2 + c_2c_3 + c_3c_1 = c_pc_mc_n$. Aleshores

$$c_4c_5c_6 \leq c_pc_mc_n = c_1c_2 + c_2c_3 + c_3c_1 \leq 3c_4c_5,$$

la qual cosa implica $c_6 \leq 3$. D'altra banda, mirant les tres últimes, existeixen $x, y, z \leq 8$ tals que $c_9c_{10} + c_{10}c_{11} + c_{11}c_9 = c_xc_yc_z$. Aquesta desigualtat es converteix en

$$c_6c_7c_8 \geq c_xc_yc_z = c_9c_{10} + c_{10}c_{11} + c_{11}c_9 \geq 3c_7c_8$$

d'on $c_6 \geq 3$. Finalment obtenim que $c_6 = 3$.

Problema 5.

En una circumferència de centre O i radi 2 fixem un radi OA i construïm una semicircumferència que el tingui per diàmetre. Per un punt C del segment OA tracem una perpendicular a OA que talla en D la circumferència inicial i en E la semicircumferència. Calculeu la longitud del camí recorregut pel punt M centre de la circumferència circumscrita al triangle AED quan C recorre el segment OA .

Solució.

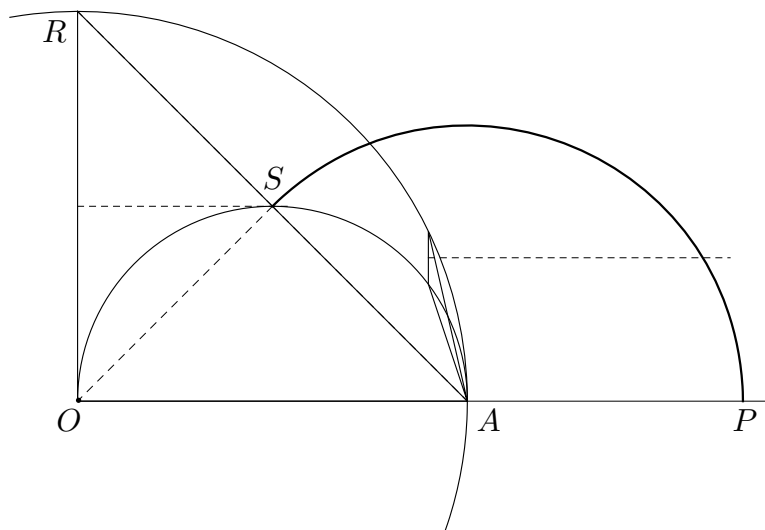
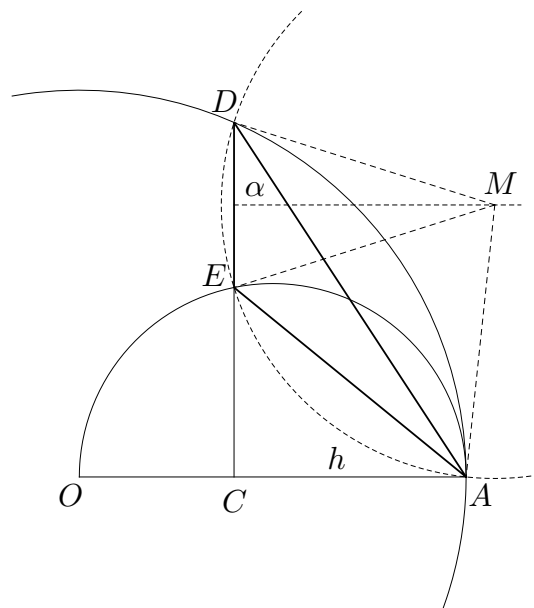
Posem $h = CA$. Sigui pel teorema de l'altura aplicat al triangle rectangle OEA , sigui per càlcul de la potència del punt E respecte de la circumferència de diàmetre OA , obtenim $EC^2 = h(2 - h) = 2h - h^2$. Si fem el mateix amb la circumferència gran, ens quedarà $DC^2 = h(4 - h) = 4h - h^2$. El teorema de Pitàgores aplicat als triangles ECA i DCA ens dóna els valors $DA = \sqrt{4h}$ i $EA = \sqrt{2h}$. El sinus de l'angle α és

$$\sin \alpha = \frac{DC}{DA} = \frac{h}{\sqrt{4h}}.$$

El teorema dels sinus aplicat al triangle DEA dóna

$$2R = \frac{EA}{\sin \alpha} = 2\sqrt{2}.$$

En conseqüència, el punt M està a distància $\sqrt{2}$ del punt A , amb independència de la posició de C . El lloc geomètric buscat ha de ser un arc de cercle de centre A i radi $\sqrt{2}$. El lloc geomètric està representat a la figura de sota. Si el punt C arriba a O el triangle esdevé OAR i el circumcentre és S . Si el punt C tendeix a A , els punts D i E tendeixen a A , la mediatriu de DE tendeix a la recta AC i M tendeix a P . Observem també que donat un punt qualsevol de l'arc lloc geomètric, podem fer-lo centre d'una circumferència de radi $\sqrt{2}$. Tallarà les dues circumferències inicials en punts respectius D i E tals que la recta DE és perpendicular a OP .



El lloc geomètric buscat és, exactament, l'arc de circumferència de centre A , de radi $\sqrt{2}$, i que va del punt S al punt P . La seva longitud és $3\sqrt{2}\pi/4$.

Problema 6.

Siguin $x > y > z > t$ quatre enters positius tals que

$$(x^2 - y^2) + (xz - yt) - (z^2 - t^2) = 0.$$

Proveu que l'enter $xy + zt$ és compost.

Solució.

Hi ha nombres enters que compleixen la igualtat de l'enunciat, com per exemple, 17,16,15 i 7. Procedirem per reducció a l'absurd. És a dir, existeixen $x > y > z > t > 0$

tals que $x^2 + xz - z^2 = y^2 + yt - t^2$ i $p = xy + zt$ és primer. Substituint $x = \frac{p - zt}{y}$ en l'expressió $x^2 + xz - z^2 = y^2 + yt - t^2$, obtenim

$$\left(\frac{p - zt}{y}\right)^2 + \left(\frac{p - zt}{y}\right)z - z^2 = y^2 + yt - t^2$$

i reordenant termes, resulta

$$p(p - 2zt + yz) = (y^2 + z^2)(y^2 + yt - t^2)$$

Com que p és primer, p divideix $y^2 + z^2$ o divideix $y^2 + yt - t^2$.

a) Si $p \mid y^2 + z^2$, llavors $0 < y^2 + z^2 < 2xy < 2(xy + zt) = 2p$ i això implica que $y^2 + z^2 = p = xy + zt$. D'aquí resulta que $y \mid z(z - t)$. Com que $xy + zt$ és primer, aleshores $\gcd(y, z) = 1$, i per tant, $p \mid (z - t)$. Això no és possible ja que $0 < z - t < z < y$.

b) Si $p \mid y^2 + yt - t^2$, aleshores $0 < y^2 + yt - t^2 < 2(xy + zt) = 2p$ i això implica que $y^2 + yt - t^2 = p$. És a dir, $xy + zt = y^2 + yt - t^2 = x^2 - xz - z^2$. D'aquí deduïm que $x \mid z(z + t)$ i $y \mid t(z + t)$. Com que $\gcd(xy, zt) = 1$, és $x \mid (z + t)$ e $y \mid (z + t)$. Com que $0 < z + t < 2x$ i $0 < z + t < 2y$, resulta $z + t = x$ i $z + t = y$, que és impossible.

Les contradiccions anteriors ens porten a concloure que $xy + zt$ és compost.



LIII OLIMPIADA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

16 i 17 de desembre de 2016

Enunciats



LIII OLIMPIÁDA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

Primera sessió

16 de desembre de 2016, de 16 a 19.30 h.

- 1.—De quantes maneres diferents es pot expressar el nombre $n = 3499200$ com a producte de tres factors enters positius? Les representacions que es diferenciïn en l'ordre dels factors es consideraran diferents.
- 2.—Siguin a, b, c, d nombres reals donats amb c i d positius, i siguin x, y nombres reals tals que $0 \leq x \leq c$, i $0 \leq y \leq d$. Trobeu els valors de x, y que fan mínima l'expressió

$$\sqrt{a^2 + (c - x)^2} + \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{b^2 + (d - y)^2}.$$

- 3.—Donat un triangle ABC considerem un punt D del segment AC tal que $DC = 2AD$. Sigui I el centre de la circumferència inscrita al triangle BDC i sigui E el punt de tangència d'aquesta circumferència amb el costat BD . Si $BD = BC$, demostreu que les rectes AE i DI són paral·leles.

No es pot fer ús de calculadores ni d'altres aparells electrònics



LIII OLIMPIADA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

Segona sessió

17 de desembre de 2016, de 9.30 a 13 h.

4.—Sigui $ABCD$ un quadrilàter convex (amb els vèrtexs ordenats en sentit antihorari).

Dividim el costat AB en $n > 1$ parts iguals mitjançant els punts $X_1, X_2, \dots, X_{n-1}$ (situats de $A = X_0$ a $B = X_n$, essent X_1 el més pròxim a A) i dividim el costat CD en n parts iguals mitjançant els punts $Y_1, Y_2, \dots, Y_{n-1}$ (situats de $D = Y_0$ a $C = Y_n$, essent Y_1 el més pròxim a D).

Considerem els segments $X_i Y_i$ i el segment PQ , on P és el punt mitjà del segment AD i Q és el punt mitjà del segment BC . Denotem Z_i el punt d'intersecció de PQ amb $X_i Y_i$, $i = 1, \dots, n-1$, amb $P = Z_0$ i $Q = Z_n$.

Considerem els $2n$ quadrilàters

$$X_i X_{i+1} Z_{i+1} Z_i, \quad i = 0, 1, \dots, n-1,$$

$$Z_i Z_{i+1} Y_{i+1} Y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

Demostreu que la suma de les àrees dels quadrilàters que toquen els vèrtexs A i C és igual a la suma de les àrees dels quadrilàters que toquen els vèrtexs B i D .

5.—Siguin OA, OB dos radis d'una circumferència de centre O . Des d'un punt P d'aquesta circumferència es tracen perpendiculars a les rectes OA i OB . Siguin R, S els peus d'aquestes perpendiculars. Demostreu que la distància RS no depèn de la posició del punt P sobre la circumferència.

6.—Sigui $\mathcal{A}$ el conjunt dels nombres enters positius n tals que

$$n \mid 2^n + 1$$

(Equivalentment, que $2^n + 1$ és múltiple de n).

a) Demostreu que per a tot nombre enter $k \geq 0$, 3^k pertany a $\mathcal{A}$.

b) Quins nombres primers pertanyen a $\mathcal{A}$?

No es pot fer ús de calculadores ni d'altres aparells electrònics

Solucions

Problema 1.

De quantes maneres diferents es pot expressar el nombre $n = 3499200$ com a producte de tres factors enters positius? Les representacions que es diferenciïn en l'ordre dels factors es consideraran diferents.

Solució.

Tenim $n = 3\,499\,200 = 2^6 3^7 5^2$, de manera que qualsevol descomposició de n en tres factors serà de la forma

$$n = (2^{\alpha_1} 3^{\beta_1} 5^{\gamma_1}) (2^{\alpha_2} 3^{\beta_2} 5^{\gamma_2}) (2^{\alpha_3} 3^{\beta_3} 5^{\gamma_3})$$

amb els α_i , β_j i γ_k enters no negatius tals que $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 6$, $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 7$ i $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 2$.

El nombre de solucions diferents (comptant l'ordre) de l'equació $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = r$ (on els x_i i r son enters no negatius) és es

$$\binom{r+k-1}{k-1} = \binom{r+k-1}{r}$$

d'on resulta que el resultat del nostre problema és

$$\binom{3+6-1}{3-1} \binom{3+7-1}{3-1} \binom{3+2-1}{3-1} = \binom{8}{2} \binom{9}{2} \binom{4}{2} = 6048.$$

Problema 2.

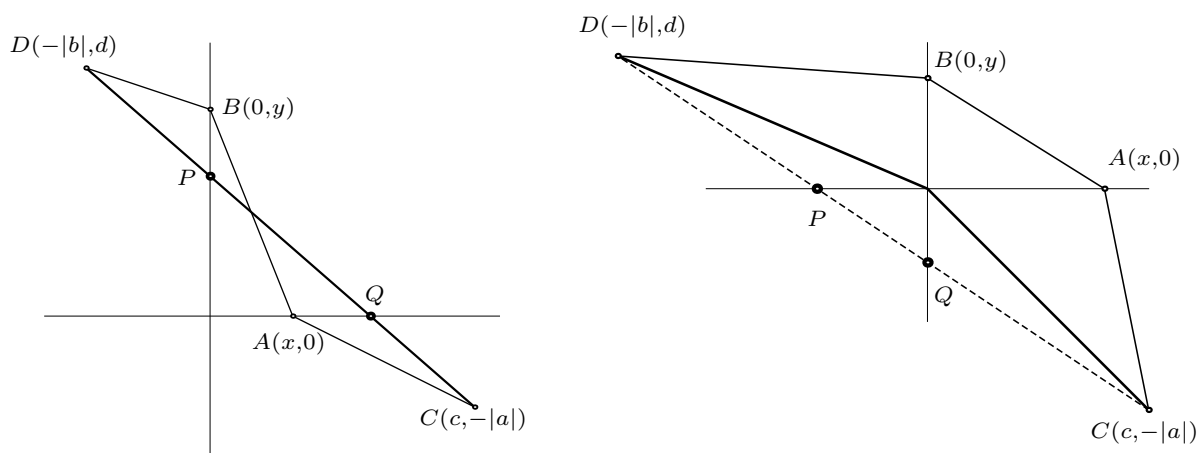
Siguin a, b, c, d nombres reals donats amb c i d positius, i siguin x, y nombres reals positius tals que $0 \leq x \leq c$, i $0 \leq y \leq d$. Trobeu els valors de x, y que fan mínima l'expressió

$$\sqrt{a^2 + (c-x)^2} + \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{b^2 + (d-y)^2}.$$

Solució.

Considerem en el pla els punts següents: $A(x, 0)$, $B(0, y)$, $C(c, -|a|)$, $D(-|b|, d)$. La figura mostra que

$$d(D, B) + d(B, A) + d(A, C) \geq d(D, C).$$



El mínim de la suma tindrà lloc si i només si A , B , C i D estan alineats. Això implica que A ha de ser el punt Q i B el punt P . Les coordenades d'aquests punts s'obtenen tallant la recta CD amb els eixos i queda (figura de l'esquerra)

$$x = \frac{dc - |ab|}{|a| + d}, \quad y = \frac{dc - |ab|}{c + |b|}.$$

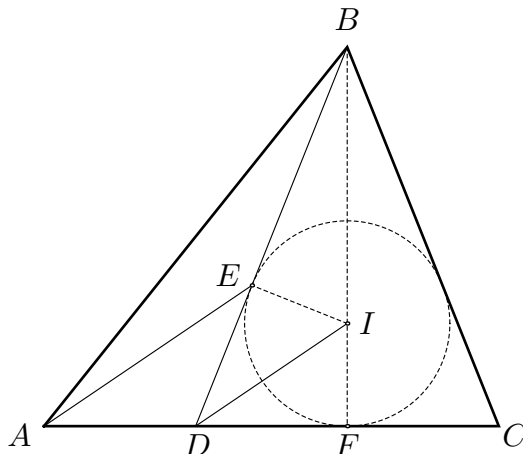
Si fos $dc - |ab| < 0$, aleshores x i y serien negatives (figura de la dreta) i la mínima distància s'obtindria "passant per l'origen", és a dir, fent $x = 0$ i $y = 0$.

(Observació: En alguns enunciat hi havia les condicions $0 < x \leq c$, i $0 < y \leq d$. En aquest cas, si $dc - |ab| < 0$, no hi ha mínim, però sí *ínfim* o *extrem inferior* que també és $x = 0$ i $y = 0$.)

Problema 3.

Donat un triangle ABC considerem un punt D del segment AC tal que $DC = 2AD$. Sigui I el centre de la circumferència inscrita al triangle BDC i sigui E el punt de tangència d'aquesta circumferència amb el costat BD . Si $BD = BC$, demostreu que les rectes AE i DI són paral·leles.

Solució.



El triangle BDC és isòsceles, i per tant $I \in BF$ i $IF \perp DC$.

En conseqüència, ED i DF són tangents al cercle inscrit a BDC , i $ED = DF = AD$.

D'altra banda, donat que I és l'incentre de BDC , DI és la bisectriu de $\widehat{EDF}$. És a dir,

$$\widehat{IDF} = \frac{1}{2}\widehat{EDF}.$$

De $AD = DE$ obtenim

$$\widehat{EAD} = \widehat{AED} = \frac{1}{2}\widehat{EDF} = \widehat{IDF}$$

i d'aquí resulta que AE és paral·lel a DI .

Problema 4.

Sigui $ABCD$ un quadrilàter convex (amb els vèrtexs ordenats en sentit antihorari).

Dividim el costat AB en $n > 1$ parts iguals mitjançant els punts $X_1, X_2, \dots, X_{n-1}$ (situats de $A = X_0$ a $B = X_n$, essent X_1 el més pròxim a A) i dividim el costat CD en n parts iguals mitjançant els punts $Y_1, Y_2, \dots, Y_{n-1}$ (situats de $D = Y_0$ a $C = Y_n$, essent Y_1 el més pròxim a D).

Considerem els segments $X_i Y_i$ i el segment PQ , on P és el punt mitjà del segment AD i Q és el punt mitjà del segment BC . Denotem Z_i el punt d'intersecció de PQ amb $X_i Y_i$, $i = 1, \dots, n-1$, amb $P = Z_0$ i $Q = Z_n$.

Considerem els $2n$ quadrilàters

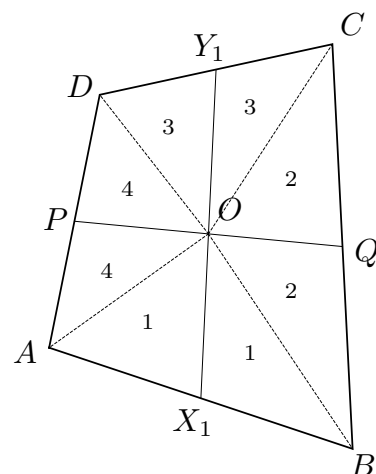
$$X_i X_{i+1} Z_{i+1} Z_i, \quad i = 0, 1, \dots, n-1,$$

$$Z_i Z_{i+1} Y_{i+1} Y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

Demostreu que la suma de les àrees dels quadrilàters que toquen els vèrtexs A i C és igual a la suma de les àrees dels quadrilàters que toquen els vèrtexs B i D .

Solució.

Considerem primer el cas $n = 2$. Els triangles AOX_1 i X_1OB tenen la mateixa àrea ja que tenen la mateixa base i la mateixa altura ($AX_1 = X_1B$). Són els dos triangles marcats amb un 1. Anàlogament, són iguals les àrees marcades amb 2, les marcades amb 3 i les marcades amb 4. Per tant, $[POY_1D] + [OX_1BQ] = [AX_1OP] + [OQCY_1] = (1) + (2) + (3) + (4) = \frac{[ABCD]}{2}$. Observem també que PX_1QY_1 formen un paral·lelogram, ja que són els punts mitjans dels costats d'un quadrilàter. Les diagonals d'un paral·lelogram es tallen en el punt mitjà i O resulta el punt mitjà del segment X_1Y_1 .



Pasem al cas general. Anomenem $s_1, s_2, \dots, s_n$ les àrees dels quadrilàters inferiors, i $r_1, r_2, \dots, r_n$ les dels superiors. Podem aplicar el resultat anterior (cas $n = 2$) a les àrees s_i, s_{i+1}, r_i i r_{i+1} i ens queden les igualtats

$$s_1 + r_2 = s_2 + r_1,$$

$$s_2 + r_3 = s_3 + r_2,$$

.....

$$s_{n-1} + r_n = s_n + r_{n-1}$$

de les que es dedueix $s_1 + r_n = s_n + r_1$.

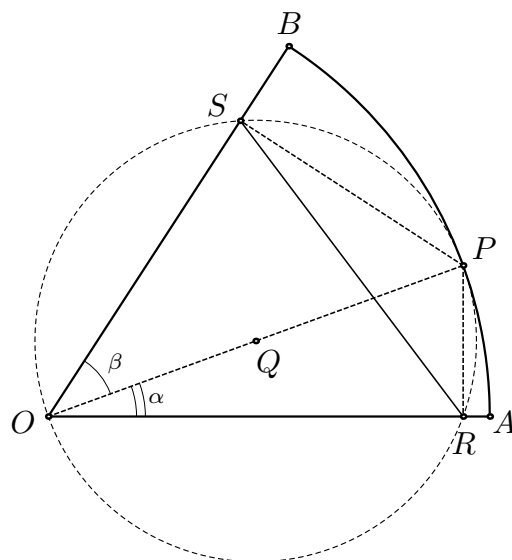
Problema 5.

Siguin OA, OB dos radis d'una circumferència de centre O . Des d'un punt P d'aquesta circumferència es tracen perpendiculars a les rectes OA i OB . Siguin R, S els peus d'aquestes perpendiculars. Demostreu que la distància RS no depèn de la posició del punt P sobre la circumferència.

Solució 1 (Geomètrica).

El quadrilàter $ORPS$ és cíclic ja que els angles en R i S són rectes. La circumferència de centre el punt mitjà Q de O i P passa pels quatre vèrtexs d'aquest quadrilàter. Aquesta circumferència té radi la meitat del de la circumferència inicial i, per tant, aquest radi no depèn del punt P .

Com que l'angle $\widehat{SOR}$ és fix i no depèn de P , resulta que RS és una corda d'una circumferència de radi fix, vista amb un angle fix. En conseqüència la longitud de la corda és també fixa i no depèn de P .



Solució 2 (Trigonomètrica).

Si suposem que $OA = OB = 1$ tenim que $OR = \cos \alpha$ i $OS = \cos \beta$. Aplicant el teorema del cosinus al triangle OSR tenim

$$RS^2 = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos(\alpha + \beta).$$

Un petit càlcul demostra que l'expressió anterior és

$$\sin^2(\alpha + \beta),$$

que és constant.

Solució 3 (Analítica).

Posem $A(\cos \gamma, \sin \gamma)$, $B(\cos \delta, \sin \delta)$ i $P(\cos t, \sin t)$. Calculem els peus R i S de les perpendiculars des de P a les rectes OA i OB que tenen equacions $\sin \gamma x - \cos \gamma y = 0$ i $\sin \delta x - \cos \delta y = 0$, respectivament.

$$R\left(\cos \gamma \cos(\gamma - t), \sin \gamma \cos(\gamma - t)\right), \quad S\left(\cos \delta \cos(\delta - t), \sin \delta \cos(\delta - t)\right).$$

El quadrat de la distància entre aquests dos punt és, després de calcular força i substituir $\gamma - \delta = (\gamma - t) - (\delta - t)$,

$$\sin^2(\delta - \gamma),$$

que no depèn de t .

Problema 6.

Sigui $\mathcal{A}$ el conjunt dels nombres enters positius n tals que

$$n \mid 2^n + 1$$

(Equivalentment, que $2^n + 1$ és múltiple de n).

a) Demostreu que per a tot nombre enter $k \geq 0$, 3^k pertany a $\mathcal{A}$.

b) Quins nombres primers pertanyen a $\mathcal{A}$?

Solució.

a) Per a $k = 0, 1$ la condició és evident. Suposem, per inducció, que

$$3^{k-1} \mid 2^{3^{k-1}} + 1.$$

Aquesta condició equival a que, per a un cert r enter, sigui

$$2^{3^{k-1}} + 1 = r 3^{k-1}, \quad \text{o bé,} \quad 2^{3^{k-1}} = r 3^{k-1} - 1.$$

Elevant al cub aquesta última igualtat resulta

$$2^{3^k} = \left(r 3^{k-1} - 1 \right)^3 = r^3 3^{3k-3} - 3 r^2 3^{2k-2} + 3 r 3^{k-1} - 1 = t 3^k - 1,$$

per a un cert enter t , ja que $3k - 3$ i $2k - 1$ són més grans o iguals que k . L'última igualtat ens diu que $3^k \mid 2^{3^k} + 1$.

b) Si es compleix $p \mid 2^p + 1$ per a p primer, és evident que p no pot ser 2. Si és senar es complirà el teorema de Fermat $p \mid 2^p - 2$, d'on, restant $2^p + 1$ i $2^p - 2$ resulta que $p \mid 3$ i això implica que $p = 3$. Trivialment, $3 \in \mathcal{A}$.

Problemes Divendres 15

1. Tenim un quadrat de vèrtexs A, B, C, D i un punt M qualsevol interior. Unim M amb cadascun dels quatre vèrtexs i obtenim quatre triangles ABM, BCM, CDM i DAM . Demostreu que els quatre baricentres d'aquests triangles formen un quadrat, i trobeu la seva àrea en funció de l'àrea del quadrat inicial.

Solució. Unint els punts mitjans dels costats del quadrat $ABCD$ s'obté un altre quadrat d'àrea meitat de l'àrea del quadrat donat.

Una homotècia de raó $2/3$ transforma aquest quadrat en el dels baricentres. L'àrea serà $\frac{1}{2}(\frac{2}{3})^2 = \frac{2}{9}$ de l'àrea inicial. Es pot evitar la homotècia emprant semblança de triangles.

2. Sobre cada vèrtex d'un polígon regular de 2018 costats s'hi col·loca un nombre del conjunt $\{1, 2, \dots, 1008\}$. Demostreu que hi ha quatre vèrtexs A, B, C i D diferents i ordenats en sentit horari tals que els números a, b, c, d assignats a ells compleixen que $a + b = c + d$.

Solució. El polígon té 1009 diàmetres. A cada diàmetre d'extrems A i B , numerats amb a i b respectivament, li assignem el valor $|a - b|$ que és un nombre enter tal que $0 \leq |a - b| \leq 1007$. Com només hi ha 1008 valors possibles per als 1009 diàmetres del polígon, hi ha d'haver almenys dos diàmetres AB i CD amb el mateix valor. Sense perdre generalitat, podem suposar que $a \geq c$ i $b \geq d$. Llavors, $a - c = b - d$ i per tant $a + b = c + d$.

3. Sigui $(a_n)_{n \geq 1}$ una successió estrictament creixent d'enters positius tals que per a tot $n \geq 1$ es compleix que a_n divideix $(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1})$. Proveu que existeix un enter positiu N tal que $a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}$ per a tot $n > N$.

Solució. Sigui $(k_n)_{n \geq 1}$ la successió d'enters positius definida per $a_n k_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}$. Llavors $a_{n+1} k_{n+1} = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n = (k_n + 1)a_n$. Com $a_{n+1} > a_n$ llavors $a_n k_{n+1} < a_{n+1} k_{n+1} = (k_n + 1)a_n$ d'on s'obté $k_{n+1} < k_n + 1$ i per tant $k_{n+1} \leq k_n$.

Com $(k_n)_{n \geq 1}$ és no creixent és estacionària. És a dir, existeix un enter positiu N tal que $k_n = k$ per a tot $n \geq N$. Sigui $n \geq N$, llavors de

$a_{n+1}k_{n+1} = (k_n + 1)a_n$ resulta

$$a_{n+1} = a_n \left(\frac{k+1}{k} \right) \quad \text{i} \quad a_{n+s} = a_n \left(\frac{k+1}{k} \right)^s$$

per a tot enter positiu s , com es pot demostrar fàcilment per inducció. Com que a_{n+s} és enter i $(k, k+1) = 1$ llavors $k^s | a^n$ per a tot enter positiu s , però això és impossible si $k \neq 1$. Per a $k = 1$ és $a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}$, com volíem demostrar.

Problemes Dissabte 16

4. Siguin a, b, c tres nombres reals tals que $|ax^2 + bx + c| \leq 1$ per a tot $x \in [-1, 1]$. Proveu que $|a| + |b| + |c| \leq 4$.

Solució. Sigui $A(x) = ax^2 + bx + c$. Per a $x = -1, x = 0, x = 1$ es té que $A(0) = c, A(1) = a + b + c$ i $A(-1) = a - b + c$. D'aquí es desprèn que $a = \frac{A(1) + A(-1) - 2A(0)}{2}, b = \frac{A(1) - A(-1)}{2}$ i $c = A(0)$.

Per tant,

$$\begin{aligned} |a| + |b| + |c| &= \left| \frac{A(1) + A(-1) - 2A(0)}{2} \right| + \left| \frac{A(1) - A(-1)}{2} \right| + |A(0)| \\ &\leq \frac{|A(1)| + |A(-1)| + 2|A(0)|}{2} + \frac{|A(1)| + |A(-1)|}{2} + |A(0)| \\ &\leq \frac{1 + 1 + 2}{2} + \frac{1 + 1}{2} + 1 = 4 \end{aligned}$$

5. Al quadrilàter convex $ABCD$ s'elegeixen punts A', B', C' i D' a l'interior dels costats AB, BC, CD i DA respectivament, tals que

$$\frac{AA'}{A'B} = \frac{BB'}{B'C} = \frac{CC'}{C'D} = \frac{DD'}{D'A} = r.$$

Calculeu, en funció de r , el quocient

$$\frac{[A'B'C'D']}{[ABCD]},$$

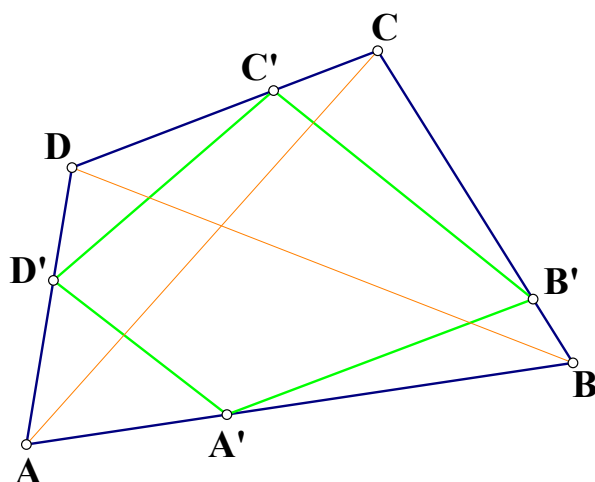
on $[A'B'C'D']$ vol dir l'àrea del quadrilàter $A'B'C'D'$ i $[ABCD]$ vol dir l'àrea del quadrilàter $ABCD$.

Solució. Aplicant el Teorema del Sinus als triangles $DD'C'$ i ACD s'obté

$$\frac{[DD'C']}{[ACD]} = \frac{DC'}{DC} \cdot \frac{DD'}{DA} = \frac{DC'}{CC' + C'D} \cdot \frac{DD'}{DD' + D'A} = \frac{r}{(r+1)^2}$$

i

$$[DD'C'] = \frac{r}{(r+1)^2} [ACD]$$



Igualment s'obté

$$[DAA'] = \frac{r}{(r+1)^2} [ABD]$$

$$[A'BB'] = \frac{r}{(r+1)^2} [ABC]$$

$$[CC'B] = \frac{r}{(r+1)^2} [CDB]$$

Per tant,

$$\begin{aligned} [A'B'C'D'] &= [ABCD] - [DD'C'] - [DAA'] - [A'BB'] - [CC'B] \\ &= [ABCD] - 2 \frac{r}{(r+1)^2} [ABCD] = \frac{r^2 + 1}{(r+1)^2} [ABCD] \end{aligned}$$

i

$$\frac{[A'B'C'D']}{[ABCD]} = \frac{r^2 + 1}{(r+1)^2}$$

6. Sigui a un nombre enter i $p \geq 3$ un nombre primer. Demostreu que el número

$$a^p + (a+1)^p + \dots + (a+p-1)^p$$

és múltiple de p^2 .

Solució. Quan $a = -\frac{p-1}{2}$ l'enunciat és clarament cert ja que $(a+i)^p + (a+p-1-i)^p = 0$ per a $0 \leq i \leq \frac{p-1}{2} - 1$ i tots els sumands es cancel·len, de manera que el resultat és 0 (i per tant múltiple de p^2).

L'objectiu és ara demostrar que el residu de b^p mòdul p^2 només depèn del reste de b mòdul p . Per a això afirmem que donats $k, t \in \mathbb{Z}$, $(k + tp)^p - k^p$ sempre és múltiple de p^2 . En efecte, observem que

$$(k + tp)^p - k^p = \sum_{i=0}^p \binom{p}{i} k^{p-i} (tp)^i - k^p = \sum_{i=1}^p \binom{p}{i} k^{p-i} (tp)^i.$$

Tots els sumands que apareixen són múltiples de p^2 . Per a $i \geq 2$ això és clar, ja que p^i ja és un múltiple de p^2 . Per a $i = 1$, el terme corresponent és $p \cdot k^{p-1} \cdot (tp) = tp^2 k^{p-1}$, i amb això hem provat l'afirmació.

Per concloure, observem que en la suma

$$a^p + (a + 1)^p + \dots + (a + p - 1)^p$$

hi ha exactament un sumand que és congruent mòdul p amb cadascun dels números

$$\{-(p-1)/2, \dots, (p-1)/2\}.$$

Per tant,

$$a^p + (a+1)^p + \dots + (a+p-1)^p \equiv (-(p-1)/2)^p + \dots + ((p-1)/2)^p = 0 \pmod{p^2},$$

com volíem.

Problemes Divendres 14

1. Sigui r una recta que passa pel baricentre del triangle ABC i que talla els costats AB i AC en els punts X i Y respectivament. Proveu que

$$\frac{BX}{XA} + \frac{CY}{YA}$$

és un nombre enter i determineu el seu valor.

Solució. Distingirem dos cassos:

- (1) Si $r \parallel BC$, pel teorema de Tales, tenim

$$\frac{BX}{XA} = \frac{CY}{YA} = \frac{GM}{GA} = \frac{1}{2}$$

i

$$\frac{BX}{XA} + \frac{CY}{YA} = 1.$$

- (2) Si r no es paral·lela a BC , siguin D, L, E, F les projeccions dels punts B, A, M, C sobre la recta r . Es té que $ME = \frac{1}{2}(BD + CF)$ ja que ME es la paral·lela pels punts mitjos E i M a les bases del trapezi $BDFC$, i $AL = 2MG$ ja que $\triangle ALG \sim \triangle GME$. De l'anterior s'obté

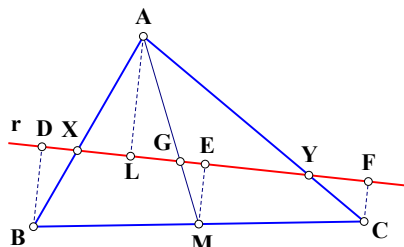


Figura 1: Recta pel baricentre

$AL = BD + CF$. A més, de $\triangle BDX \sim \triangle ALX$ resulta $\frac{BX}{XA} = \frac{BD}{AL}$, i de $\triangle CFY \sim \triangle ALY$ obtenim $\frac{CY}{YA} = \frac{CF}{AL}$. Combinant els resultats anteriors, es té

$$\frac{BX}{XA} + \frac{CY}{YA} = \frac{BD}{AL} + \frac{CF}{AL} = \frac{AL}{AL} = 1.$$

2. Trobeu tots els números enters positius amb xifra inicial 6, tals que el número enter que s'obté en esborrar aquest 6 és igual a $1/25$ del número inicial.

Demostreu que no existeix cap número enter que comenci en 6 i tal que en esborrar aquest 6 s'obtingui un número igual a $1/35$ del número inicial.

Solució. Un número que comença en 6 és del tipus

$$6 \cdot 10^n + m, \quad 0 \leq m \leq 10^n - 1.$$

- a) La condició donada en primer lloc és $m = \frac{1}{25}(6 \cdot 10^n + m)$ que dóna lloc a $m = 2^{n-2}5^n$, és a dir, els números de la forma $N = 6 \cdot 10^n + 2^{n-2}5^n$. Són

$$625, 6250, 62500, \dots$$

- b) Aquí la condició és

$$m = \frac{1}{35}(6 \cdot 10^n + m)$$

que dóna lloc a $17m = 3 \cdot 2^{n-1}5^n$, cosa impossible.

3. Els números $1, 2, 3, \dots, 100$ estan escrits a la pissarra. S'elegeixen a l'atzar dos números a i b de la llista, s'esborren i s'escriu el número $a + b - 1$. Després de repetir aquesta operació 99 vegades, quin és el número que queda a la pissarra?

Solució. Per a cada conjunt de n números enters amb suma S considerem la diferencia $D(n) = S - n$. Ara observarem el valor de $D(n)$ després de cada operació. Siguin a, b els números seleccionats i denotem per R la suma dels restants números en la llista. Es té que $D(n) = S - n = R + a + b - n$ i després d'una operació $D(n-1) = R + (a + b - 1) - (n - 1) = R + a + b - n = D(n)$. És a dir, $D(n)$ és un invariant. Inicialment,

$$D(100) = (1 + 2 + 3 + \dots + 100) - 100 = 4950$$

Finalment, si α és el número que queda a la pissarra després de 99 operacions, llavors $D(1) = \alpha - 1 = 4950$ d'on resulta $\alpha = D(1) + 1 = D(100) + 1 = 4951$.

Problemes Dissabte 15

4. Proveu que per a tot nombre real α es verifica que

$$\cos^6 \alpha + \sin^6 \alpha + 3 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha = 1$$

Solució 1. Es té que

$$\begin{aligned} 1 &= (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)^3 = \cos^6 \alpha + \sin^6 \alpha + 3 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) \\ &= \cos^6 \alpha + \sin^6 \alpha + 3 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha, \end{aligned}$$

com es demanava demostrar.

Solució 2. La identitat

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$$

quan $x + y + z = 0$ es transforma en $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$.

Posant $x = \cos^2 \alpha$, $y = \sin^2 \alpha$ i $z = -1$ es té que $x + y + z = 0$, i per tant, $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$ es converteix en

$$\cos^6 \alpha + \sin^6 \alpha - 1 + 3 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha = 0$$

d'on resulta la identitat proposada.

5. Sigui $ABCD$ un trapezi amb bases $AD = a$ i $BC = b$, respectivament. Sigui P el punt d'intersecció de les diagonals AC i BD , i siguin U i L les àrees dels triangles BCP i ADP . Si F és l'àrea de $ABCD$, proveu que

$$\sqrt{F} = \sqrt{U} + \sqrt{L}$$

Solució 1. Com que $AD \parallel BC$ i les diagonals AC i BD són transversals a elles, llavors els triangles BCP i ADP són semblants i tenim

$$\frac{L}{U} = \frac{a}{b} \cdot \frac{h_l}{h_u} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{L}}{\sqrt{U}}$$

ja que per la semblança és $\frac{h_l}{h_u} = \frac{a}{b}$. Llavors, $\frac{a}{\sqrt{L}} = \frac{b}{\sqrt{U}}$ d'on resulta

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\sqrt{L} + \sqrt{U}}{\sqrt{L} - \sqrt{U}}$$

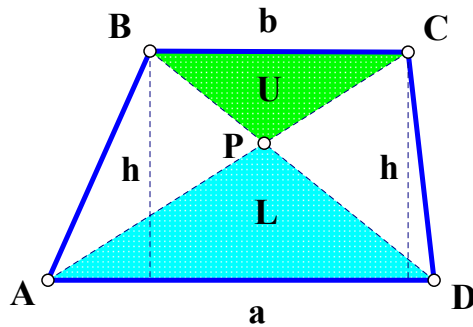


Figura 2: Trapezi

Calculant l'àrea del triangle ABP (o del triangle CDP) de dues maneres, resulta

$$\frac{ah}{2} - L = \frac{bh}{2} - U \Rightarrow \frac{(a-b)h}{2} = L - U,$$

i llavors

$$F = \frac{a+b}{2} h = \frac{a-b}{2} \cdot h \cdot \frac{a+b}{a-b} = (L - U) \frac{\sqrt{L} + \sqrt{U}}{\sqrt{L} - \sqrt{U}} = \left(\sqrt{L} + \sqrt{U} \right)^2$$

d'on s'obté la igualtat proposada.

Solució 2. Denotem per x l'altura traçada per P del triangle ADP , i $h - x$ l'altura traçada per P del triangle BCP . La semblança entre els triangles ADP i CBP dona

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{h-x},$$

i

$$x = \frac{ah}{a+b}, \quad h-x = \frac{bh}{a+b}.$$

Llavors, la igualtat demanada és equivalent a

$$\sqrt{\frac{a^2 h}{a+b}} + \sqrt{\frac{b^2 h}{a+b}} = \sqrt{(a+b)h}.$$

Aquí el costat esquerre coincideix amb el costat dret. És a dir,

$$(a+b) \sqrt{\frac{h}{a+b}} = \sqrt{h(a+b)},$$

i hem acabat.

6. Proveu que no existeix cap nombre primer que es pugui escriure de dues formes diferents como suma de dos parells diferents de quadrats d'enters positius.

Solució. Suposem que existeix un nombre primer p tal que

$$p = a^2 + b^2 = c^2 + d^2$$

amb a, b, c, d enters positius tals que $\{a, b\} \neq \{c, d\}$. Per a $p = 2$ l'enunciat es compleix trivialment. Suposem que $p > 2$ amb $a \neq b$ i $c \neq d$. Sense perdre generalitat podem suposar que $a > b, c > d$. Si $a > c$ llavors $b < d$, i si $a < c$ llavors es compleix que $b > d$.

Es té que

$$p^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2),$$

i

$$p^2 = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$$

o

$$p^2 = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$$

Com que

$$\begin{aligned} (ac + bd)(ad + bc) &= a^2cd + abc^2 + abd^2 + b^2cd \\ &= cd(a^2 + b^2) + ab(c^2 + d^2) \\ &= p(ab + cd), \end{aligned}$$

llavors $p \mid (ac + bd)$ o $p \mid (ad + bc)$. Si $p \mid (ac + bd)$ existeix un enter $n \geq 1$ tal que $ac + bd = np$. Substituint aquest valor a l'expressió $p^2 = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$ resulta

$$p^2(1 - n^2) = (ad - bc)^2$$

Com que $p^2(1 - n^2) \leq 0$ i $(ad - bc)^2 \geq 0$ llavors $ad = bc$ i $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Això és impossible ja que hem suposat que $a/c > 1$ i $b/d < 1$ o viceversa. Igualment s'arriba a una contradicció si $p \mid (ad + bc)$.

ALTRES PROBLEMES

7. Proveu que en tot triangle ABC es compleix que

$$\frac{a}{a+b+c} \geq \frac{2\sqrt{3}}{9} \sin A$$

Solució. Primer escrivim la desigualtat en la forma

$$\frac{a}{\sin A} \geq \frac{2\sqrt{3}}{9} (a+b+c)$$

Aplicant el Teorema del Sinus, resulta

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{a+b+c}{\sin A + \sin B + \sin C}$$

Com que

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \leq 2 \sin \frac{x+y}{2},$$

llavors

$$\begin{aligned} \sin A + \sin B + \sin C + \sin 60^\circ &\leq 2 \sin \frac{A+B}{2} + 2 \sin \frac{C+60^\circ}{2} \\ &\leq 4 \sin \left(\frac{\frac{A+B}{2} + \frac{C+60^\circ}{2}}{2} \right) = 4 \sin 60^\circ \end{aligned}$$

d'on s'obté

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq 3 \sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Llavors,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{a+b+c}{\sin A + \sin B + \sin C} \geq \frac{2(a+b+c)}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{9} (a+b+c).$$

La igualtat es dona quan $A = B = C = 60^\circ$. És a dir, quan el triangle ABC és equilàter.

8. Sigui $f(n)$ la suma dels n primers termes de la successió

$$0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, \dots$$

a) Doneu la fórmula de $f(n)$.

b) Demostreu que $f(s+t) - f(s-t) = st$, si s, t són enters positius amb $s > t$.

Solució. a) Si n és parell

$$f(n) = 0 + 1 + \dots + (n/2 - 1) + 1 + 2 + \dots + n/2.$$

Calculant, obtenim $f(n) = \frac{n^2}{4}$.

Si n és imparell

$$f(n) = 0 + 1 + \dots + (n-1)/2 + 1 + 2 + \dots + (n-1)/2$$

i trobem $f(n) = \frac{n^2-1}{4}$.

b) Observis que $s+t$ i $s-t$ difereixen en $2t$, de manera que ambdós són de la mateixa paritat. En el cas parell tenim

$$f(s+t) - f(s-t) = \frac{(s+t)^2}{4} - \frac{(s-t)^2}{4} = st.$$

En el cas imparell es procedeix igual.



LVI OLIMPIADA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

Primera sessió

13 de Desembre de 2019, de 16 a 19.30 h.

1. Sigui Γ una circumferència i siguin P, P_1, P_2, P_3, P_4 cinc punts sobre ella. Demostreu que el producte de les distàncies de P a les rectes P_1P_2 i P_3P_4 és igual al producte de les distàncies de P a les rectes P_1P_3 i P_2P_4 .

2. Sigui $n = 2^k$ un nombre enter positiu. Es diu que un subconjunt A de $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ és *bescanoní* si compleix que

- 1) El nombre 1 pertany a A .
- 2) Si un nombre x pertany a A , llavors $2x$ no hi pertany.

Es demana:

- a) Trobar un conjunt bescanoní amb el màxim nombre d'elements quan $n = 2^5$.
- b) Calcular el nombre màxim d'elements que pot tenir un conjunt bescanoní en funció de k .

3. Trobeu els valors del nombre enter positiu n per als quals l'equació

$$x^n + (2+x)^n + (2-x)^n = 0$$

té solució entera.

No es poden usar calculadores ni altres aparells electrònics.



LVI OLIMPIADA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

Segona sessió

14 de Desembre de 2019, de 9.30 a 13 h.

4. Calculeu la suma següent:

$$\sum_{0 \leq i < j \leq n} \binom{n}{i} \binom{n}{j}.$$

5. Sigui Γ la circumferència circumscrita al triangle ABC . Sigui D el punt mitjà de l'arc AB que conté C i sigui M un punt qualsevol del costat AC . El punt N sobre el costat BC és tal que $AM = BN$. Demostreu que el quadrilàter $CDNM$ és cíclic (els vèrtexs estan sobre una circumferència).

6. Sigui m un nombre enter positiu. Demostreu que el polinomi

$$P(x) = x^5 - x^3 + x^2 - 3mx + 3m + 1$$

no té zeros enters i calculeu el màxim comú divisor dels nombres $P(m)$ i $P(m) + 3$.

No es poden usar calculadores ni altres aparells electrònics.



LVI OLIMPIÁDA MATEMÀTICA

CATALUNYA

Problemes

Problema 1.

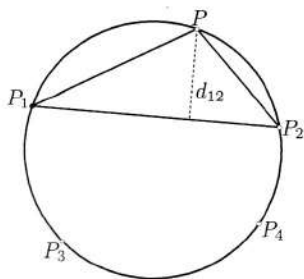
Sigui Γ una circumferència i siguin P, P_1, P_2, P_3, P_4 cinc punts sobre ella. Demostreu que el producte de les distàncies de P a les rectes P_1P_2 i P_3P_4 és igual al producte de les distàncies de P a les rectes P_1P_3 i P_2P_4 .

Primera solució.

Sigui d_{12} la distància de P a la recta P_1P_2 . De manera similar definim les quantitats d_{34} , d_{13} i d_{24} . Pel teorema del sinus aplicat al triangle PP_1P_2 , tenim

$$\frac{\overline{PP_1}}{\sin \widehat{PP_2P_1}} = \frac{\overline{PP_2}}{\sin \widehat{P_2P_1P}} = \frac{\overline{P_1P_2}}{\sin \widehat{P_1PP_2}} = 2R,$$

on R és el radi de Γ , la circumferència circumscria al triangle PP_1P_2 .



Per altra banda, per la definició de sinus, tenim que

$$\sin \widehat{PP_2P_1} = \frac{d_{12}}{\overline{PP_2}}.$$

Ajuntant aquests dos resultats, tenim que

$$d_{12} = \frac{\overline{PP_1} \cdot \overline{PP_2}}{2R},$$

i anàlogament obtenim

$$d_{34} = \frac{\overline{PP_3} \cdot \overline{PP_4}}{2R}, \quad d_{13} = \frac{\overline{PP_1} \cdot \overline{PP_3}}{2R}, \quad d_{24} = \frac{\overline{PP_2} \cdot \overline{PP_4}}{2R}.$$

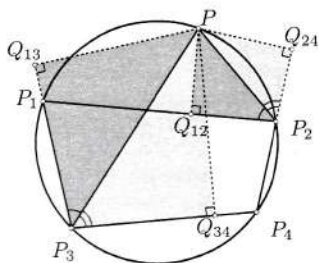
Així doncs,

$$d_{12}d_{34} = \frac{\overline{PP_1} \cdot \overline{PP_2}}{2R} \cdot \frac{\overline{PP_3} \cdot \overline{PP_4}}{2R} = \frac{\overline{PP_1} \cdot \overline{PP_3}}{2R} \cdot \frac{\overline{PP_2} \cdot \overline{PP_4}}{2R} = d_{13}d_{24},$$

com volíem veure.

Segona solució:

Siguin Q_{12} , Q_{13} , Q_{24} , Q_{34} els peus de les perpendiculars traçades des de P a les rectes P_1P_2 , P_1P_3 , P_2P_4 i P_3P_4 , respectivament. Amb les notacions de la primera solució, d_{ij} és la longitud del segment PQ_{ij} .



Els triangles gris fosc són semblants ja que són rectangles i els angles marcats amb un traç són iguals (inscrits que veuen l'arc PP_1). Anàlogament, els triangles foscos també ho són ja que són rectangles i els angles marcats amb dos traços són iguals (el que té vèrtex P_2 és suplementari del $\widehat{PP_2P_4}$ que, a la vegada, és suplementari del $\widehat{PP_3P_4}$). Les relacions de semblança ens diuen

$$\frac{d_{24}}{d_{34}} = \frac{PP_2}{PP_3} \quad \text{i} \quad \frac{d_{12}}{d_{13}} = \frac{PP_2}{PP_3}.$$

Igalant, surt el resultat.

Problema 2.

Sigui $n = 2^k$ un nombre enter positiu. Es diu que un subconjunt A de $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ és bescanoní (natural de Bescanó, Gironès) si compleix que

- El nombre 1 pertany a A .
- Si un nombre x pertany a A , llavors $2x$ no hi pertany.

Es demana:

- Trobar un conjunt bescanoní amb el màxim nombre d'elements quan $n = 2^5$.
- Calcular el nombre màxim d'elements que pot tenir un conjunt bescanoní en funció de k .

Solució.

a) Separem els nombres entre 1 i $2^5 = 32$ en diferents subconjunts segons la seva par senar: $\{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$, $\{3, 6, 12, 24\}$, $\{5, 10, 20\}$, $\{7, 14, 28\}$, $\{9, 18\}$, $\{11, 22\}$, $\{13, 26\}$, $\{15, 30\}$, $\{17\}$, $\{19\}$, $\{21\}$, $\{23\}$, $\{25\}$, $\{27\}$, $\{29\}$, $\{31\}$.

L'única restricció que tenim és que no podem agafar dos nombres consecutius del mateix subconjunt. Del primer subconjunt podem agafar només tres nombres, ja que si n'agaféssim quatre n'hi hauria dos de consecutius. Del segon, tercer i quart subconjunt en podem agafar dos; i de cada un dels altres només en podem agafar un. En total, com a màxim, en podem agafar 21. Per exemple, el conjunt bescanoní

$$A = \{1, 4, 16, 3, 12, 5, 20, 7, 28, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31\}$$

té 21 elements i no admet cap altre element més. Aquest conjunt no és l'únic bescanoní amb el màxim nombre d'elements.

b) De manera similar a l'apartat anterior organitzem els nombres de 1 a 2^k segons la seva par senar. Per a obtenir un conjunt amb el màxim nombre d'elements podem fer-ho de la manera següent: 1) Agafar tots els primers elements de cada subconjunt (que són els senars) i n'hi ha 2^{k-1} . 2) Agafar tots els tercers elements de cada subconjunt, si existeixen, que són els múltiples de 4 però no de 8. N'hi ha $2^{k-2} - 2^{k-3} = 2^{k-3}$. 3) Agafar els cinquens elements de cada subconjunt (si existeixen) que són múltiples de 16 però no de 32. N'hi ha $2^{k-4} - 2^{k-5} = 2^{k-5}$. I així successivament.

Si k és senar podem agafar en total

$$2^{k-1} + 2^{k-3} + 2^{k-5} + \dots + 4 + 1 = \frac{2^{k+1} - 1}{3}.$$

Si k és parell, tenim una fórmula anàloga

$$2^{k-1} + 2^{k-3} + 2^{k-5} + \dots + 8 + 2 = \frac{2^{k+1} - 2}{3}.$$

Problema 3.

Trobeu els valors del nombre enter positiu n per als quals l'equació

$$x^n + (2+x)^n + (2-x)^n = 0$$

té solució entera.

Solució. Si n és parell llavors els tres summands són no negatius i han de ser 0, però no pot ser a la vegada $x = 0$, $2 + x = 0$ i $2 - x = 0$.

Si n és senar, tenim el cas $n = 1$ que dóna $x + 2 + x + 2 - x = 0$, de solució $x = -4$. Com que el polinomi P té els coeficients enters, si té una arrel entera ha de ser un divisor del terme independent. Però $P(0) = 2^n + 2^n = 2^{n+1}$ i els seus divisors són $\pm 2^t$ amb $0 \leq t \leq n+1$. Els valors que corresponen a $t = 0, 1$, és a dir ± 1 i ± 2 , es descarten per càlcul directe ja que $P(1) = 3^n + 2 > 0$, $P(-1) = 3^n > 0$, $P(2) = 4^n + 2^n > 0$ i $P(-2) = 4^n - 2^n > 0$ si $n \geq 1$.

Calculem ara, recordant que n és senar,

$$\begin{aligned} P(\pm 2^t) &= \pm 2^{nt} + (2 \pm 2^t)^n + (2 \mp 2^t)^n = \\ &= \pm 2^{nt} + 2^n(1 \pm 2^{t-1})^n + 2^n(1 \mp 2^{t-1})^n = \\ &= 2^n \left(2^{n(t-1)} + (1 \pm 2^{t-1})^n + (1 \mp 2^{t-1})^n \right). \end{aligned}$$

L'expressió del darrer parèntesi, mòdul 2^{t-1} és 2 i, per tant, no pot ser zero. En conseqüència P no té arrels enters.

Problema 4. Calculeu la suma següent: $\sum_{0 \leq i < j \leq n} \binom{n}{i} \binom{n}{j}$.

Solució. Posant $x_k = \binom{n}{k}$, ($0 \leq k \leq n$) a la identitat

$$\left(\sum_{k=0}^n x_k \right)^2 = \sum_{k=0}^n x_k^2 + 2 \sum_{0 \leq i < j \leq n} x_i x_j,$$

resulta, aïllant, que

$$\sum_{0 \leq i < j \leq n} \binom{n}{i} \binom{n}{j} = \frac{1}{2} \left(\left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \right)^2 - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 \right) = \frac{1}{2} \left((2^n)^2 - \binom{2n}{n} \right) = \frac{1}{2} \left(4^n - \binom{2n}{n} \right)$$

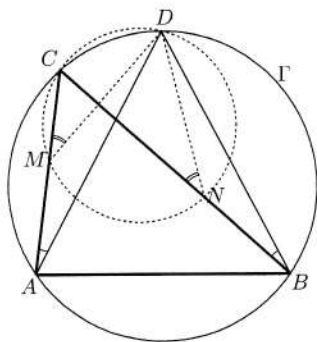
on s'han utilitzat les conegudes identitats

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n \quad \text{i} \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Problema 5.

Sigui Γ la circumferència inscrita al triangle ABC . Sigui D el punt mitjà de l'arc AB que conté C i sigui M un punt qualsevol del costat AC . El punt N sobre el costat BC és tal que $AM = BN$. Demostreu que el quadrilàter $CDNM$ és cíclic (els vèrtexs estan sobre una circumferència).

Solució.



Com que D és el punt mitjà de l'arc AB ha d'estar sobre la mediatriu del segment AB i, per tant, $AD = BD$. Els dos angles marcats amb un traç són iguals ja que veuen l'arc CD de Γ . Els dos triangles MAD i NBD són iguals ja que tenen dos costats iguals i també l'angle que formen ($MA = NB$ per l'enunciat, $DA = DB$ pel que hem dit abans, i els angles esmentats). Com a conseqüència, els dos angles marcats amb dos traços són iguals, i això obliga que els punts A , B , C i D siguin concíclics.

Problema 6.

Sigui m un nombre enter positiu. Demostreu que el polinomi

$$P(x) = x^5 - x^3 + x^2 - 3mx + 3m + 1$$

no té zeros enters i calculeu el màxim comú divisor dels nombres $P(m)$ i $P(m) + 3$.

Solució. En tot el problema estudiarem els valors del polinomi P mòdul 3. Suposem que a és una arrel entera. Aleshores $0 = P(a) = a^5 - a^3 + a^2 - 3ma + 3m + 1$. Si mirem aquesta igualtat mòdul 3 ens surt $0 \equiv a^5 - a^3 + a^2 + 1$. Si $a = 3k$, és a dir, $a \equiv 0$ resulta $0 \equiv 1$ que és absurd mòdul 3. Si $a = 3k + 1$ o bé $a \equiv 1$ resulta $0 \equiv 2$, impossible. I finalment, si $a = 3k + 2$ que és $a \equiv 2 \equiv -1$ resulta $0 \equiv 2$, també absurd. Per tant, P no pot tenir arrels enteres.

Diguem $d = \text{mcd}(P(m), P(m) + 3)$. Tindrem que $d \mid P(m)$ i $d \mid P(m) + 3$ d'on $d \mid 3$. Només pot ser $d = 1$ o $d = 3$. Però $P(m) = m^5 - m^3 + m^2 - 2m^2 + 3m + 1 = m^3(m^2 - 1) - 2m^2 + 3m + 1 = m^3(m - 1)(m + 1) - 2m^2 + 3m + 1$. A la darrera expressió, els sumands primer i tercer són múltiples de 3 (el primer és producte de tres nombres consecutius). Per tant, calculant mòdul 3, queda $P(m) \equiv -2m^2 + 1 \equiv m^2 + 1$. Però els quadrats mòdul 3 només poden ser 0 i 1 i, per tant, $m^2 + 1$ només pot ser, mòdul 3, o bé 1 o bé 2. En conseqüència, $P(m)$ no pot ser múltiple de 3 i només pot ser $d = 1$.



LVII OLIMPIADA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

Primera sessió

11 de Desembre de 2020, de 16 a 19.30 h.

1. Siguin a i b dos nombres reals tals que $1010 \leq a, b \leq 2020$. Demostreu que

$$(a + b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \leq \frac{9}{2}.$$

2. Tenim una taula $n \times n$ amb $n \geq 2$. Escrivim en aquesta taula els nombres naturals $1, 2, \dots, n^2$, un en cada casella i en qualsevol ordre. Demostreu que sempre existeixen dues caselles adjacents tals que els nombres x, y que contenen satisfan

$$|x - y| \geq \frac{n}{2} + 1.$$

(Dues caselles són adjacents si comparteixen un costat.)

3. Trobeu totes les parelles d'enters positius (x, y) que són solucions de l'equació

$$\frac{x^4 + y^3}{x^2 + y} = x + y.$$

No es poden usar calculadores ni altres aparells electrònics.



LVII OLIMPIADA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

Segona sessió

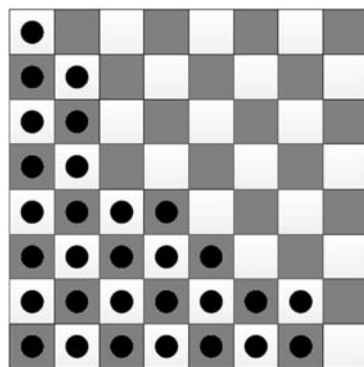
12 de Desembre de 2020, de 9.30 a 13 h.

4. Determineu tots els enters positius n tals que la fracció

$$\frac{8n - 3}{17n - 9}$$

és irreductible.

5. L'Anna i en Bernat juguen a un joc sobre un tauler d'escacs de dimensions 2020×2020 . Diem que una col·lecció de peces sobre el tauler està *arraconada* (a la cantonada inferior esquerra) si no hi ha cap casella buida tal que la casella immediatament al damunt o immediatament a la dreta contingui una peça, com es mostra a la figura. Inicialment hi ha 2020 peces col·locades en una posició arraconada. En torns alternats, començant per l'Anna, cada jugador retira dues peces en caselles adjacents, amb la condició que la configuració restant segueixi sent arraconada. Perd el jugador que no pot fer cap moviment. Determineu quin dels dos jugadors guanyarà en funció de la posició inicial de les 2020 peces, suposant que tots dos juguen òptimament.



6. Sigui Γ una circumferència centrada en O i siguin A i B dos punts sobre Γ . Siguin C i D dos punts en els segments OA i OB , respectivament, tals que $OC = OD$. Anomenem r a la recta perpendicular a OA que passa per C i s a la recta perpendicular a OB que passa per D . Suposem que l'angle $\widehat{AOB}$ és prou petit com perquè r i s no intersequin l'arc $\widehat{AB}$. En aquest cas, siguin P_r, Q_r i P_s, Q_s les interseccions de r i s amb Γ , respectivament, de manera que P_r, P_s, A, B, Q_r i Q_s segueixen aquest ordre en Γ . Demostreu que l'àrea delimitada per r, s i l'arc $\widehat{P_r P_s}$ és menor o igual a la delimitada pels segments OA, OB i l'arc $\widehat{AB}$.

No es poden usar calculadores ni altres aparells electrònics.

Problema 1.

Siguin a i b dos nombres reals tals que $1010 \leq a, b \leq 2020$. Demostreu que

$$(a+b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \leq \frac{9}{2}.$$

Solució.

Expandint el costat esquerre, veiem que la desigualtat és equivalent a

$$2 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leq \frac{9}{2}.$$

Posant $x = a/b$, aleshores tindrem que $\frac{1}{2} \leq x \leq 2$, i la desigualtat que volem demostrar és equivalent a

$$x + \frac{1}{x} \leq \frac{5}{2}.$$

Reordenant els termes, això és equivalent a

$$x^2 - \frac{5}{2}x + 1 \leq 0.$$

Finalment, factoritzant el polinomi quadràtic, veiem que el que volem demostrar és

$$\left(x - \frac{1}{2} \right) (x - 2) \leq 0,$$

que es compleix ja que $\frac{1}{2} \leq x \leq 2$. La igualtat tindrà lloc si i només si $x = \frac{1}{2}$ o $x = 2$, que correspon als dos casos $(a, b) = (1010, 2020)$ o $(a, b) = (2020, 1010)$.

Problema 2.

Tenim una taula $n \times n$ amb $n \geq 2$. Escrivim en aquesta taula els nombres naturals $1, 2, \dots, n^2$, un en cada casella i en qualsevol ordre. Demostreu que sempre existeixen dues caselles adjacents tals que els nombres x, y que contenen satisfan

$$|x - y| \geq \frac{n}{2} + 1.$$

(Dues caselles són adjacents si comparteixen un costat.)

Solució.

El nombre més gran i el més petit de la taula són n^2 i 1. Considerem una cadena de caselles adjacents

$$1 = a_0, a_1, a_2, \dots, a_k = n^2$$

que vagi de la casella que conté l'1 a la que conté n^2 i que tingui longitud mínima.

El nombre de *salts* o de *canvis de casella* és $k \leq 2n - 2$. Observem que una cadena de longitud mínima només és única si 1 i n^2 són a la mateixa fila o a la mateixa columna.

Suposem, per reducció a l'absurd, que tots els nombres x, y escrits en caselles adjacents compleixen $|x - y| < \frac{n}{2} + 1$.

Tenim

$$n^2 - 1 = a_k - a_0 = |a_k - a_0| \leq |a_0 - a_1| + |a_1 - a_2| + \dots + |a_{k-1} - a_k| \quad (*)$$

Considerem separatament dos casos segons la paritat de n .

Cas 1) Suposem n parell. Aleshores $|x - y| < \frac{n}{2} + 1$ implica $|x - y| \leq \frac{n}{2}$ i de (*) queda

$$n^2 - 1 \leq k \frac{n}{2} \leq (2n - 2) \frac{n}{2} = n^2 - n < n^2 - 1$$

que és absurd.

Cas 2) Suposem n senar. Aleshores $|x - y| < \frac{n}{2} + 1$ implica $|x - y| \leq \frac{n+1}{2}$ i de (*) queda

$$n^2 - 1 \leq k \frac{n+1}{2} \leq (2n - 2) \frac{n+1}{2} = n^2 - 1.$$

Aquesta desigualtat obliga que tots els termes de la suma (*) valguin exactament $\frac{n+1}{2}$ i que $k = 2n - 2$, és a dir, que 1 i n^2 estiguin en vèrtexs oposats del tauler (per exemple suposem que 1 sigui al vèrtex superior esquerra). D'aquest 1 en podem sortir anant cap a la dreta o cap avall. Els valors adjacents de l'1 (de valor a_1) compliran $|a_1 - 1| = a_1 - 1 = \frac{n+1}{2}$ o bé $a_1 = \frac{n+3}{2}$ i hi haurà dues caselles veïnes de l'1 amb el mateix valor, cosa impossible.

Problema 3.

Trobeu totes les parelles d'enters positius (x, y) que són solucions de l'equació

$$\frac{x^4 + y^3}{x^2 + y} = x + y.$$

Solució. L'equació és equivalent a

$$x^4 + y^3 = x^3 + y^2 + x^2y + xy.$$

Suposem primer que $x \geq 2$ i $y \geq 4$. Aleshores, tenim

$$\frac{x^4 + y^3}{2} \geq x^2y^{3/2} \geq 2x^2y,$$

ja que $y^{1/2} \geq 2$. Per tant, tindrem

$$\frac{x^4 + y^3}{2} \geq x^2y^{3/2} \geq 2x^2y > x^2y + xy.$$

Per altra banda, tindrem també $x^4 \geq 2x^3$ i $y^3 > 2y^2$, i per tant

$$\frac{x^4 + y^3}{2} > x^3 + y^2.$$

Sumant les dues desigualtats anteriors, deduïm

$$x^4 + y^3 > x^3 + y^2 + x^2y + xy,$$

sempre que $x \geq 2$ i $y \geq 4$.

Per tant, només ens cal comprovar els casos restants: $x = 1$, o bé $y = 1$, o bé $y = 2$, o bé $y = 3$.

a) Si $x = 1$, aleshores l'equació és

$$y^3 - y^2 - 2y = 0,$$

o bé $y^2 - y - 2 = 0$. Per tant la única solució entera positiva corresponent és $y = 2$.

b) Si $y = 1$, aleshores l'equació és $x^4 - x^3 - x^2 - x = 0$ i per tant $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$. Una solució entera positiva x , ha de ser divisor de 1 i per tant la única opció seria $x = 1$ que no és solució.

c) Si $y = 2$, aleshores l'equació és

$$x^4 - x^3 - 2x^2 - 2x + 4 = 0.$$

Una solució entera positiva x , ha de ser divisor de 4. Es comprova fàcilment que $x = 1$ i $x = 2$ són solucions, mentre que $x = 4$ no ho és.

d) Si $y = 3$, aleshores l'equació és

$$x^4 - x^3 - 3x^2 - 3x + 18 = 0.$$

Una solució entera positiva x , ha de ser un divisor de 18. Es comprova fàcilment aleshores que $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, $x = 6$, $x = 9$ i $x = 18$ no són solucions. Per tant, totes les parelles de solucions són

$$(x, y) = (1, 2) \quad \text{i} \quad (x, y) = (2, 2).$$

Problema 4.

Determineu tots els enters positius n tals que la fracció

$$\frac{8n - 3}{17n - 9}$$

és irreductible.

Solució. Sigui $p > 1$ un divisor primer comú de $8n - 3$ i $17n - 9$. Aleshores, p també és un divisor del nombre $8(17n - 9) - 17(8n - 3) = 21$. Per tant, o bé $p = 3$, o $p = 7$.

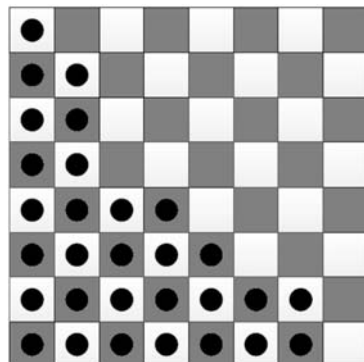
a) $p = 3$. Aleshores, calculant mòdul 3, tenim que $8n - 3 \equiv n$ i $17n - 9 \equiv 2n$. Numerador i denominador seran múltiples de 3 si i només si ho és n .

b) $p = 7$. Calculant mòdul 7, $8n - 3 \equiv n - 3$ i $17n - 9 \equiv 3n - 9 \equiv 3(n - 3)$. En aquest cas, numerador i denominador seran múltiples de 7 si i només si ho és $n - 3$.

En resum, la fracció serà irreductible sempre que n no sigui múltiple de 3, ni tampoc sigui de la forma $n = 7k + 3$.

Problema 5.

L'Anna i en Bernat juguen a un joc sobre un tauler d'escacs de dimensions 2020×2020 . Diem que una col·lecció de peces sobre el tauler està arraconada (a la cantonada inferior esquerra) si no hi ha cap casella buida tal que la casella immediatament al damunt o immediatament a la dreta contingui una peça, com es mostra a la figura. Inicialment hi ha 2020 peces col·locades en una posició arraconada. En torns alternats, començant per l'Anna, cada jugador retira dues peces en caselles adjacents, amb la condició que la configuració restant segueixi sent arraconada. Perd el jugador que no pot fer cap moviment. Determineu quin dels dos jugadors guanyarà en funció de la posició inicial de les 2020 peces, suposant que tots dos juguen òptimament.



Solució La clau del problema està en que la configuració final de les peces no depèn dels moviments que es facin, i per tant el guanyador depèn només de la paritat de moviments que es facin fins arribar a la posició final. Això es deu a dues observacions:

- 1) Les úniques posicions a partir de les quals no es pot fer cap moviment són els *triangles arraconats* que suposarem que ho estan al vèrtex negre inferior esquerra. Són de la forma $T_m = (m, m-1, \dots, 1)$, $m \geq 0$, on aquests nombres denoten el nombre de peces en cada columna. En efecte, qualsevol altra configuració $(a_1, \dots, a_m)$ té $a_i = a_{i+1} > a_{i+2}$ o bé $a_i \geq a_{i+1} + 2$ per a algun i , ja que altrament per a tot i , $a_{i+1} = a_i - 1$ i obtenim una configuració de la forma T_m . En el primer cas, podem retirar la última peça de les columnes $i, i+1$ obtenint una configuració arraconada. En el segon cas, retirant les dues últimes peces de la columna i -èsima també obtenim una configuració arraconada.
- 2) La diferència k entre el nombre de peces en caselles negres i el de peces en caselles blanques es manté constant al llarg del joc ja que cada parell de peces que es retira cobreix exactament una casella de cada color. Aquest nombre k es manté invariant durant tot el joc. Si inicialment hi ha n peces en caselles negres, aleshores n'hi ha $2020 - n$ en caselles blanques per tant l'invariant és $k = 2n - 2020$.

Amb aquestes dues observacions, sabem que al final del joc la posició serà de la forma T_m , i l'invariant k dóna per a cada T_m un nombre diferent: si m és senar, $k = \frac{m+1}{2}$, i si m és parell, $k = -\frac{m}{2}$ (suposant que la casella de la cantonada inferior esquerra està pintada de negre). Per tant, donada la configuració inicial, podem calcular l'invariant k , i la posició final T_m vindrà donada per $m = 2k - 1$ si $k > 0$ i $m = -2k$ si $k \leq 0$. Aleshores el nombre final de peces serà $m(m+1)/2 = k(2k-1)$ independentment del signe de k . Per tant el nombre de peces retirades és igual a $2020 - k(2k-1) = 2020 - 2k(k-1) + k = 2n - 2k(k-1)$ i el nombre de moviments fins al final del joc és la meitat, $n - k(k-1)$.

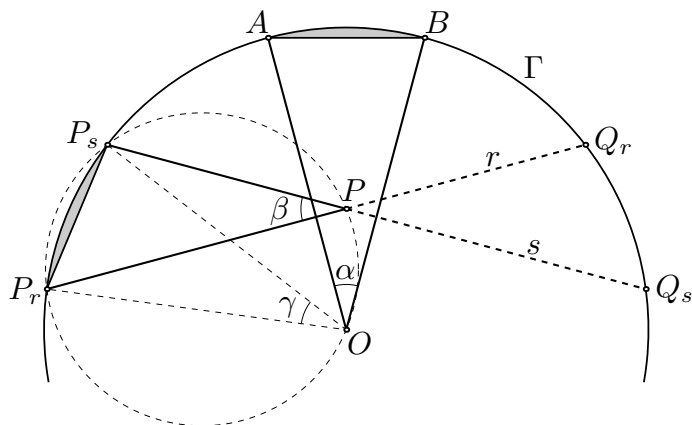
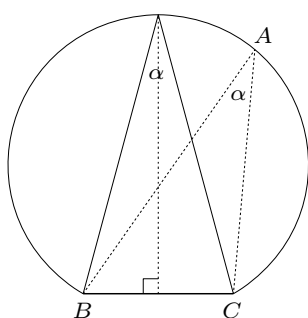
Com que $k(k-1)$ sempre és parell, en Bernat guanyarà si i només si es fan un nombre parell de moviments, és a dir, si i només si hi ha un nombre parell de peces en posicions negres a l'inici.

Problema 6.

Sigui Γ una circumferència centrada en O i siguin A i B dos punts sobre Γ . Siguin C i D dos punts en els segments OA i OB , respectivament, tals que $OC = OD$. Anomenem r a la recta perpendicular a OA que passa per C i s a la recta perpendicular a OB que passa per D . Suposem que l'angle $\widehat{AOB}$ és prou petit com perquè r i s no intersequin l'arc $\widehat{AB}$. En aquest cas, siguin P_r, Q_r i P_s, Q_s les interseccions de r i s amb Γ , respectivament, de manera que P_r, P_s, A, B, Q_r i Q_s segueixen aquest ordre en Γ . Demostreu que l'àrea delimitada per r, s i l'arc $\widehat{P_r P_s}$ és menor o igual a la delimitada pels segments OA, OB i l'arc $\widehat{AB}$.

Solució.

Sabem que el lloc geomètric dels punts A que veuen un segment BC sota un angle donat α és un arc de cercle (*arc capaç*). Aquest lloc és també el dels vèrtexs A del triangles que tenen base fixa BC i angle oposat α fix. Tots tenen la mateixa base i, per tant, el d'àrea màxima serà el d'altura màxima, que és el triangle isòsceles (figura de l'esquerra).



La figura de la dreta correspon a l'enunciat del problema. Notem amb α l'angle dels radis OA i OB . Les rectes r i s , perpendiculars respectivament a OA i OB també formen angle α , de manera que $\beta = \alpha$. L'angle β és interior al cercle i val la semisuma dels arcs que veu a cada costat

$$\beta = \frac{\widehat{P_r P_s} + \widehat{Q_r Q_s}}{2},$$

però com que per simetria de la figura és $\widehat{P_r P_s} = \widehat{Q_r Q_s}$ queda $\gamma = \widehat{P_r P_s} = \beta = \alpha$. D'aquí es dedueix que els punts O, P, P_r i P_s són concíclics. També tenim que $\widehat{P_r P_s} = \widehat{AB}$ i que els corresponents segments circulars són igual (marcats en gris a la figura). A més, els triangles AOB i $P_r O P_s$ són congruents i tenen la mateixa àrea. El problema s'acaba observant que l'àrea del triangle $P P_r P_s$ és inferior a la del triangle $O P_r P_s$ pel que s'ha dit al principi.



58a Olimpíada Matemàtica



Primera sessió. 10 de desembre de 2021

Problema 1.

Sigui $\mathcal{P}$ un polígon regular de n costats, $n \geq 6$. Trobeu el nombre de triangles que tenen vèrtexs en els vèrtexs del polígon i costats sobre les diagonals (no costats) de $\mathcal{P}$.

Problema 2.

L'Alba i la Blanca juguen al joc següent. Hi ha dues piles de fitxes, inicialment amb 26 i 25 fitxes respectivament. Les jugadores s'alternen els torns, i a cada torn poden fer un dels moviments següents: treure una fitxa d'una de les piles, o bé treure una fitxa de cada pila, o bé moure una fitxa d'una pila a l'altra. Guanya la jugadora que deixa les dues piles sense fitxes.

Demostreu que la jugadora que comença té una estratègia guanyadora.

Problema 3.

Sigui ABC un triangle acutangle amb altures AA_1 , BB_1 , CC_1 . Siguin M , N les projeccions de C_1 sobre els costats AC i BC , respectivament. Demostreu que el segment MN talla el segment B_1C_1 en el seu punt mig.

Segona sessió. 11 de desembre de 2021

Problema 4.

Tres cercles són tangents entre ells dos a dos, i són també tots tres tangents a una mateixa recta. Si denotem per $R_1 \geq R_2 > r$ els radis d'aquests tres cercles, demostreu que

$$\frac{1}{\sqrt{r}} = \frac{1}{\sqrt{R_1}} + \frac{1}{\sqrt{R_2}}.$$

Problema 5.

Determineu tots els nombres primers $p \geq 3$ tals que $(p+1)/2$ i $(p^2+1)/2$ són quadrats perfectes.

Problema 6.

Volem pintar els nombres $1, 2, \dots, 2021$, cadascun de color blau o vermell, de manera que per cada conjunt de nombres consecutius la diferència entre la quantitat de nombres blaus i vermells (així com la diferència entre la quantitat de nombres vermells i blaus) sigui com a molt 2. De quantes maneres ho podem fer?

Problema 1.

Sigui $\mathcal{P}$ un polígon regular de n costats, $n \geq 6$. Trobeu el nombre de triangles que tenen vèrtexs en els vèrtexs del polígon i costats sobre les diagonals (no costats) de $\mathcal{P}$.

Solució.

El nombre de triangles amb vèrtexs en els vèrtexs del polígon és el mateix que el nombre de maneres d'escollir 3 elements d'entre n elements possibles, i per tant és

$$\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \cdot 2}.$$

Ara hem de restar el nombre de triangles que tenen un costat o dos que coincideixin amb costats del polígon.

Si fixem un costat de $\mathcal{P}$, el nombre de triangles que tenen aquell costat com a propi i les altres dos diagonals internes (no costats) és $n-4$ i, per tant, el nombre total de triangles amb exactament un costat que coincideixi amb el polígon és

$$n(n-4).$$

Finalment, hi ha n triangles tals que dos costats coincideixin amb els del polígon.

El nombre buscat és

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{3 \cdot 2} - n(n-4) - n = \frac{n(n-4)(n-5)}{6}.$$

Problema 2.

L'Alba i la Blanca juguen al joc següent. Hi ha dues piles de fitxes, inicialment amb 26 i 25 fitxes respectivament. Les jugadores s'alternen els torns, i a cada torn poden fer un dels moviments següents: treure una fitxa d'una de les piles, o bé treure una fitxa de cada pila, o bé moure una fitxa d'una pila a l'altra. Guanya la jugadora que deixa les dues piles sense fitxes.

Demostreu que la jugadora que comença té una estratègia guanyadora.

Solució.

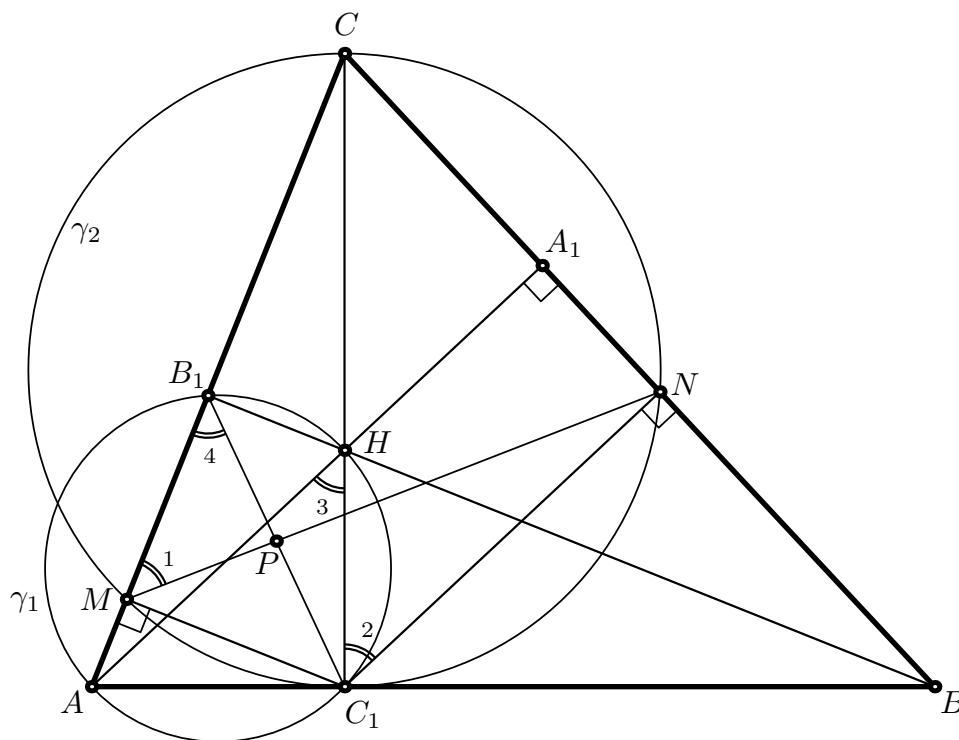
Suposem que comença el joc l'Alba (jugadora A). La seva estratègia guanyadora és la següent. En el primer torn treu una fitxa per deixar les piles amb (26, 24) fitxes. A partir d'aleshores, faci el que faci la Berta (jugadora B), la jugadora A pot fer un moviment que deixi sempre un nombre parell de fitxes a cada pila (i amb un nombre total de fitxes inferior). Això vol dir que B sempre haurà de fer la seva jugada amb un nombre parell de fitxes a cada pila i per tant no pot guanyar. En canvi, A sempre arribarà al (0,0), i serà la guanyadora.

Problema 3.

Sigui ABC un triangle acutangle amb altures AA_1 , BB_1 , CC_1 . Siguin M , N les projeccions de C_1 sobre els costats AC i BC , respectivament. Demostreu que el segment MN talla el segment B_1C_1 en el seu punt mig.

Solució.

El segment AH es veu des de B_1 i C_1 sota un angle de 90° i per tant els quatre punts A , C_1 , H i B_1 són concíclics (circumferència γ_1). Anàlogament, el segment CC_1 es veu des de M i N sota angles rectes i γ_2 passa per C , M , C_1 i N .



Si ens fixem en els quatre angles marcats amb els números 1, 2, 3 i 4, tindrem

$$1 = 2 \quad \text{inscrits a } \gamma_2 \text{ i veuen la corda } CN$$

$$2 = 3 \quad \text{les rectes } AA_1 \text{ i } C_1N \text{ són paral·leles}$$

$$3 = 4 \quad \text{inscrits a } \gamma_1 \text{ i veuen la corda } AC_1$$

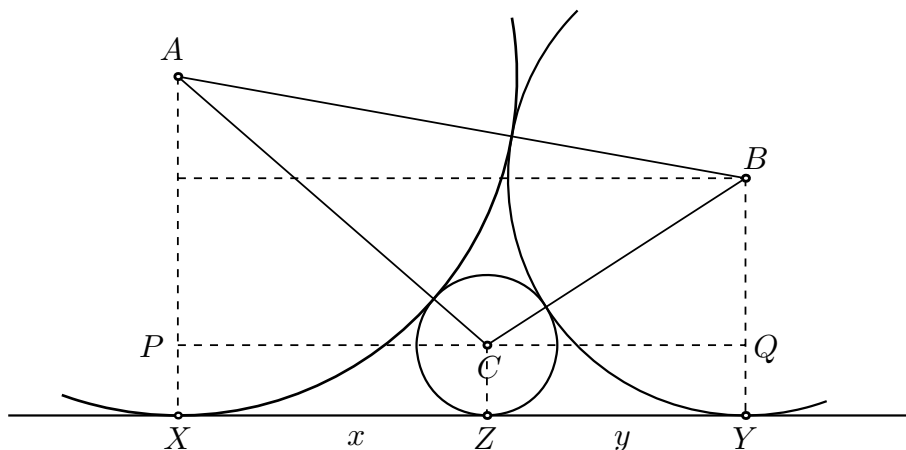
La igualtat dels angles 1 i 4 ens diu que en el triangle rectangle MB_1C_1 el triangle B_1PM és isòsceles i $BP = PM$. Aleshores P està sobre la mediatriu del catet B_1M que és paral·lela al catet MC_1 . En conseqüència, P és el punt mitjà del la hipotenusa B_1C_1 (i el circumcentre del triangle MB_1C_1).

Problema 4.

Tres cercles són tangents entre ells dos a dos, i són també tots tres tangents a una mateixa recta. Si denotem per $R_1 \geq R_2 > r$ els radis d'aquests tres cercles, demostreu que

$$\frac{1}{\sqrt{r}} = \frac{1}{\sqrt{R_1}} + \frac{1}{\sqrt{R_2}}.$$

Solució.



El teorema de Pitàgores aplicat als triangles ACP i BCQ ens diu

$$\overline{XZ}^2 + \overline{AP}^2 = \overline{AC}^2, \quad \overline{YZ}^2 + \overline{BQ}^2 = \overline{BC}^2.$$

Notem que $\overline{AP} = R_1 - r$, $\overline{BQ} = R_2 - r$, $\overline{AC} = R_1 + r$, $\overline{BC} = R_2 + r$, i denotem $x = \overline{XZ}$, $y = \overline{YZ}$. Aleshores, tenim

$$x^2 + (R_1 - r)^2 = (R_1 + r)^2, \quad y^2 + (R_2 - r)^2 = (R_2 + r)^2.$$

De manera similar, podem tornar a fer servir Pitàgores en el triangle amb hipotenusa AB , i tindrem que

$$(x + y)^2 + (R_1 - R_2)^2 = (R_1 + R_2)^2.$$

Desenvolupant els quadrats, les identitats anteriors ens diuen que

$$x = 2\sqrt{R_1 r}, \quad y = 2\sqrt{R_2 r}, \quad x + y = 2\sqrt{R_1 R_2}.$$

Per tant, tindrem

$$\sqrt{R_1 r} + \sqrt{R_2 r} = \sqrt{R_1 R_2},$$

o

$$\frac{1}{\sqrt{r}} = \frac{1}{\sqrt{R_1}} + \frac{1}{\sqrt{R_2}}.$$

Problema 5.

Determineu tots els nombres primers $p \geq 3$ tals que $(p+1)/2$ i $(p^2+1)/2$ són quadrats perfectes.

Solució. Tenim que

$$p+1 = 2m^2, \quad p^2+1 = 2n^2,$$

per a certs $n, m \geq 2$, $n > m$. Aleshores, tenim que

$$p(p-1) = p^2 - p = 2n^2 - 2m^2 = 2(n+m)(n-m).$$

Com que p és primer, o bé p divideix $n+m$, o bé p divideix $n-m$.

Ara bé, com que $2n^2 = p^2 + 1 < 2p^2$, tenim que $n < p$. Amb un raonament semblant surt $m < p$ i d'aquí que $n-m < p$ i $n+m < 2p$. De $0 < n-m < p$ surt que p no pot dividir $n-m$ i l'única opció és que $n+m = p$. Això a més implica que $p-1 = 2(n-m)$. Per tant, deduïm que

$$n = 3m - 1,$$

i per tant

$$p = 4m - 1.$$

Per altra banda, sabem que $p = 2m^2 - 1$, i d'aquí surt que $m = 2$. Això implica $p = 7$, i aquest és, en conseqüència, l'únic primer que compleix el que volem:

$$\frac{7+1}{2} = 4, \quad \frac{7^2+1}{2} = 25.$$

Problema 6.

Volem pintar els nombres $1, 2, \dots, 2021$, cadascun de color blau o vermell, de manera que per cada conjunt de nombres consecutius la diferència entre la quantitat de nombres blaus i vermells (així com la diferència entre la quantitat de nombres vermells i blaus) sigui com a molt 2. De quantes maneres ho podem fer?

Solució.

Donem valors 1 i -1 als nombres pintats amb vermell i blau, respectivament, i denotem per $x_1, x_2, \dots, x_n$ els valors (colors) donats als n nombres $1, 2, \dots, n$. Posem també

$$a_k = \sum_{i=1}^k x_i.$$

L'enunciat ens diu que $-2 \leq a_k \leq 2$ ($i = 1, \dots, n$). I com que la suma dels nombres consecutius de $i + 1$ a j és

$$x_{i+1} + x_{i+2} + \dots + x_j = a_j - a_i$$

també haurà de passar que $-2 \leq a_j - a_i \leq 2$, ($i, j = 1, \dots, n$).

Aquesta condició obliga que només puguin ocórrer tres casos

Cas 1) Conjunt $\mathcal{C}_1$ de coloracions per a les quals tots els a_i compleixen $0 \leq a_i \leq 2$ per a tot i entre 1 i n .

Cas 2) Conjunt $\mathcal{C}_2$ de coloracions per a les quals tots els a_i compleixen $-2 \leq a_i \leq 0$ per a tot i entre 1 i n .

Cas 3) Conjunt $\mathcal{C}_3$ de les altres coloracions, és a dir, les que tenen algun a_i positiu i algun a_j negatiu. En aquest cas cap a_k pot ser 2 ni -2 ja que aleshores alguna diferència $a_k - a_i$ podria ser -4, -3, 3, 4.

Els conjunts $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_2$ són disjunts. També tenim

$$\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_3 = \{1, -1, 1, -1, \dots\} \quad \text{i} \quad \mathcal{C}_2 \cap \mathcal{C}_3 = \{-1, 1, -1, 1, \dots\}$$

de manera que el total de coloracions serà

$$T_n = |\mathcal{C}_1| + |\mathcal{C}_2| + |\mathcal{C}_3| - |\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_3| - |\mathcal{C}_2 \cap \mathcal{C}_3| = |\mathcal{C}_1| + |\mathcal{C}_2| + |\mathcal{C}_3| - 2$$

Posem ara $C_n = |\mathcal{C}_1|$ que és funció del nombre d'elements n . És evident que $C_1 = 1$ i que $C_2 = 2$. Volem veure que $C_n = 2C_{n-2}$. En efecte, si $x_1, x_2, \dots, x_{n-2}$ és una coloració de $1, 2, \dots, n-2$ volem veure de quantes maneres podem obtenir una coloració de $1, 2, \dots, n$ segons el valor de a_{n-2} .

$$a_{n-2} = \begin{cases} 0 & \begin{cases} x_{n-1} = 1, & x_n = -1 \\ x_{n-1} = 1, & x_n = 1 \end{cases} \\ 1 & \begin{cases} x_{n-1} = 1, & x_n = -1 \\ x_{n-1} = -1, & x_n = 1 \end{cases} \\ 2 & \begin{cases} x_{n-1} = -1, & x_n = 1 \\ x_{n-1} = -1, & x_n = -1 \end{cases} \end{cases}$$

queda clar que en qualsevol cas sempre s'obtenen dues coloracions.
 Les condicions $C_1 = 1$, $C_2 = 2$ i $C_n = C_{n-2}$ donen el valor

$$|\mathcal{C}_1| = C_n = \begin{cases} 2^{n/2} & \text{si } n \text{ és parell} \\ 2^{(n-1)/2} & \text{si } n \text{ és senar.} \end{cases}$$

El mateix argument es pot aplicar a $|\mathcal{C}_2|$ i s'obté el mateix valor que per a $|\mathcal{C}_1|$.
 Posem ara $S_n = |\mathcal{C}_3|$. Tindrem $S_1 = 2$, $S_2 = 2$ i, per un raonament semblant al d'abans, $S_n = 2S_{n-2}$. Es pot veure fàcilment per inducció que $S_n = 2C_{n-1}$. D'aquí resultarà finalment que

$$T_n = 2C_n + 2C_{n-1} - 2 = \begin{cases} 3 \cdot 2^{n/2} & \text{si } n \text{ és parell} \\ 4 \cdot 2^{(n-1)/2} - 2 & \text{si } n \text{ és senar.} \end{cases}$$

En el nostre cas és $n = 2021$ i queda $T_{2021} = 2^{1012} - 2$.

El tribunal que ha jutjat el concurs, format per Xavier Ros Otón, catedràtic de la Universitat de Barcelona i investigador ICREA, que ha actuat de president; Joan Claramunt Caros, investigador de la Lancaster University i Gerard Gràcia Sala, professor de La Salle Manresa. ha acordat la llista de persones premiades, que es publica seguidament.

Primers premis

Roger Lidón Ardanuy (Institut Jaume Vicens Vives, Girona) (alumne 1r de batxillerat)
Bernat Pagès Vives (Institut Jaume Vicens Vives, Girona) (alumne 2n de batxillerat)
Ruben Carpenter (Aula Escola Europea, Barcelona) (alumne de 1r de batxillerat)

Segons premis

Jordi Ferré García (Aula Escola Europea, Barcelona) (alumne de 1r de batxillerat)
Xavier Díaz Austrich (Institut Jaume Vicens Vives, Girona) (alumne 1r de batxillerat)
Alèxia Escudero Ribó (Institut Hug Roger III, Sort) (alumna de 1r de batxillerat)

Tercers premis

Miquel Ainaud Fondevila (Aula Escola Europea, Barcelona) (alumne de 2n de batxillerat)
Pau Martí Biosca (Institut Jaume Vicens Vives, Girona) (alumne de 2n de batxillerat)
Roger Bargalló Roselló (Institut Jaume Vicens Vives, Girona) (alumne de 2n de batxillerat)

És interessant fer constar que pel que fa als tres primers premis, Roger Lidón ja va obtenir premi en la 56a i la 57a Olimpíada, i Bernat Pagès i Ruben Carpenter en la 57a Olimpíada.



59a Olimpíada Matemàtica

Primera fase (Catalunya)



Primera sessió. 16 de desembre de 2022

Problema 1.

Determineu els enters positius n per als quals el nombre $n^2 + 5n + 6$ és un quadrat perfecte.

Problema 2.

Fixat un segment $\overline{AB}$, considerem tots els punts X amb la propietat que en el triangle AXB el punt mitjà M del segment $\overline{AX}$ compleix $\widehat{XAB} = \widehat{XBM}$.
Demostreu que tots aquests punts X estan sobre una mateixa circumferència.

Problema 3.

L'Anna i la Berta tenen una tauleta de xocolata de dimensions $n \times m$ (on n i m són enters positius), i juguen al joc que s'explica següidament.

- Les jugadores s'alternen els torns, i en cada torn la jugadora a qui li toca fa aquestes accions: decideix com trencar la tauleta en dues parts (de dimensions $(n - k) \times m$ i $k \times m$, amb $k < n$, o bé de dimensions $n \times (m - k)$ i $n \times k$, amb $k < m$, (on k sempre és un enter positiu), i un cop ha fet el tall decideix quina de les dues parts es menja i quina part segueix al joc i passa a l'altra jugadora.
Perd la jugadora que rep una tauleta de dimensions 1×1 .
Si comença l'Anna, determineu per a quins valors de m i n té una estratègia guanyadora.
 - Considerem ara una versió alternativa d'aquest joc en què, en cada torn, la jugadora que té la tauleta decideix com trencar-la, però és l'altra jugadora qui tria quina part segueix al joc.
Si comença l'Anna, determineu ara per a quins valors de m i n té una estratègia guanyadora.
-

Segona sessió. 17 de desembre de 2022

Problema 4.

Un tauler de 2022×2022 caselles s'ha de recobrir completament amb peces que són triangles rectangles isòsceles amb catets de longitud igual a cada casella del tauler (que són totes quadrades). Hi ha triangles blancs i triangles negres.

Un recobriment és bo si dos triangles que es toquen per un costat tenen colors diferents. Quants recobriments bons diferents es poden fer d'aquest tauler?

Problema 5.

Considerem un polinomi quadràtic $p(x) = ax^2 + bx + c$ amb coeficients reals. Suposem que per a tot nombre natural $N > 0$ existeix un nombre racional r que

compleix $p(r) = \frac{1}{N}$.

a) Demostreu que a, b, c són racionals.

b) Demostreu que, de fet, $a = 0$.

Problema 6.

Considerem un triangle ABC amb un punt interior P que compleix

$$\widehat{APB} = \widehat{BPC} = \widehat{CPA} = 120^\circ.$$

Demostreu que

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} \geq \sqrt{3} (\overline{AP} + \overline{BP} + \overline{CP}).$$

Problema 1.

Determineu els enters positius n pels quals el nombre $n^2 + 5n + 6$ és un quadrat perfecte.

Solució.

En primer lloc, observem que

$$a_n = n^2 + 5n + 6 = (n + 2)(n + 3)$$

és el producte de dos enters positius consecutius. Per tant,

$$(n + 2)^2 < (n + 2)(n + 3) < (n + 3)^2$$

i aleshores a_n està comprès estrictament entre dos quadrats perfectes consecutius, i per tant mai podrà ser un quadrat perfecte.

Problema 2.

Fixat un segment $\overline{AB}$, considerem tots els punts X tals que en el triangle AXB el punt mig M del segment $\overline{AX}$ compleix $\widehat{XAB} = \widehat{XBM}$.

Demostreu que tots aquests punts X estan sobre una mateixa circumferència.

Solució 1.

En primer lloc, $\widehat{AXB} = \widehat{MXB}$ perquè M està sobre el segment $\overline{AX}$. Com que també tenim $\widehat{XAB} = \widehat{XBM}$, els triangles ABX i BMX són semblants. Aleshores, pel teorema de Tales,

$$\frac{BX}{MX} = \frac{AB}{BM} = \frac{AX}{BX} = \frac{2MX}{BX},$$

on l'última igualtat ve del fet que $AX = 2MX$ perquè M és el punt mig del segment $\overline{AX}$.

D'aquí deduïm en primer lloc que

$$\frac{BX}{MX} = \frac{2MX}{BX} \Rightarrow BX^2 = 2MX^2 \Rightarrow BX = \sqrt{2}MX,$$

i ara substituint a la primera igualtat,

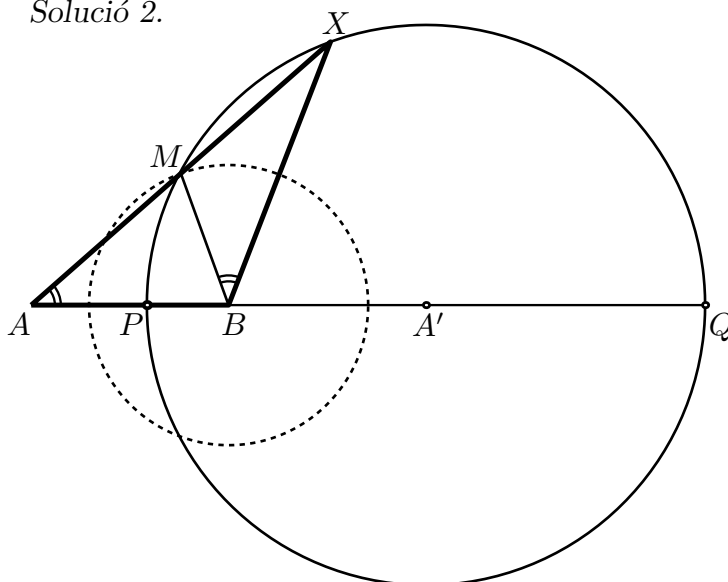
$$\frac{AB}{BM} = \sqrt{2} \Rightarrow BM = \frac{1}{\sqrt{2}}AB.$$

Ara sigui A' el punt simètric d' A respecte de B . És clar que tenim $AA' = 2AB$, i com que $AX = 2AM$ i els triangles AMB i AXA' comparteixen l'angle $\widehat{MAB} = \widehat{XAA'}$, són semblants. Per tant, pel teorema de Tales,

$$\frac{A'X}{AA'} = \frac{BM}{AB} \Rightarrow A'X = 2BM,$$

i recuperant que $BM = AB/\sqrt{2}$ surt $A'X = \sqrt{2}AB$. Per tant, com que tots els punts X estan a la mateixa distància del punt A' , estan sobre la circumferència de centre A' i radi $\sqrt{2}AB$.

Solució 2.



Per simplificar la notació posem $d = AB$, $a = XB$, $b = XA$ i $m = BM$. La igualtat dels dos angles marcats fa que les rectes MB i AB siguin antiparal·leles respecte les XA i XB . Per tant, $a^2 = b \frac{b}{2}$, d'on $a\sqrt{2} = b$. Si sabem la fórmula de les mitjanes (que s'obté simplement aplicant el teorema del cosinus a cadascun dels triangles $XB M$ i $AB M$) obtindrem

$$m^2 = \frac{1}{2}(d^2 + a^2 - \frac{b^2}{2})$$

i en el nostre cas $m = \frac{d}{\sqrt{2}}$ que és constant. Per tant, el punt M es mou sobre una circumferència de centre B i radi $\frac{d}{\sqrt{2}}$. Com que l'homotècia de centre A i raó 2 passa del punt M al punt X , passarà el lloc geomètric de M al lloc geomètric de X , que serà una circumferència de centre A' i radi $d\sqrt{2}$.

Solució 3.

Amb les mateixes notacions que a la solució anterior i de $b = a\sqrt{2}$ resulta que les distàncies de X a A i a B estan en la relació constant $\sqrt{2}$. El lloc geomètric buscat és la circumferència d'Apolloni que té per diàmetre els punts P (interior a AB) i Q (exterior a AB) tals que les seves distàncies a A i a B siguin proporcionals, respectivament a $\sqrt{2}$ i 1. (Les bisectrius interior i exterior de l'angle $\widehat{AXB}$ passen per P i Q , respectivament.)

Observació a les tres solucions.

De la circumferència lloc geomètric de X se n'han d'excloure els punts P i Q ja que no produeixen triangles. Que els altres punts de la circumferència són del lloc geomètric surt de la reversibilitat de tots els raonaments fets.

Problema 3.

L'Anna i la Berta tenen una tauleta de xocolata de dimensions $n \times m$ (on n i m són enters positius), i juguen al següent joc.

Les jugadores s'alternen els torns, i a cada torn la jugadora a qui li toca fa el següent: decideix com trencar la tauleta en dues parts (de dimensions $(n - k) \times m$ i $k \times m$, amb $k < n$, o bé de dimensions $n \times (m - k)$ i $n \times k$, amb $k < m$, (on k sempre és un enter positiu), i un cop ha fet el tall decideix quina de les dues parts es menja i quina part segueix al joc i passa a l'altra jugadora.

Perd la jugadora que rep una tauleta de dimensions 1×1 .

a) Si comença l'Anna, determineu per a quins valors de m i n té una estratègia guanyadora.

b) Considerem ara una versió alternativa d'aquest joc on a cada torn la jugadora que té la tauleta decideix com trencar-la, però és l'altra jugadora qui tria quina part segueix al joc.

Si comença l'Anna, determineu ara per a quins valors de m i n té una estratègia guanyadora.

Solució.

a) Hi ha dos tipus de tauletes, les quadrades i les rectangulars (no quadrades). Una tauleta rectangular sempre es pot trencar en una quadrada i una altra. Una tauleta quadrada només es pot trencar en dues de rectangulars.

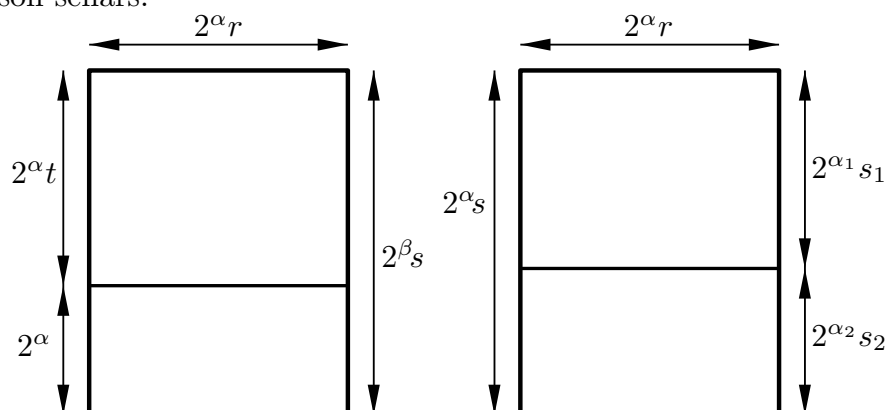
La jugadora que té una tauleta rectangular sempre pot forçar que l'altra sempre la tingui quadrada, i aquesta acabarà perdent.

Per tant, l'Anna té estratègia guanyadora quan $n \neq m$ i la Berta la té si $n = m$.

b) Posem ara $m = 2^\alpha r$ i $n = 2^\beta s$ amb r i s senars. Com abans, hi ha dos tipus de tauletes, les *pseudoquadrades* que compleixen $\alpha = \beta$ i les *pseudorectangulars* que compleixen $\alpha \neq \beta$. Observem que r i s no intervenen en aquesta definició. La clau de la solució s'assembla una mica al cas a).

1) Una tauleta pseudorectangular sempre es pot trencar en **dues** tauletes pseudoquadrades. Si suposem $\beta > \alpha$ la figura de l'esquerra ens indica com fer-ho ja que $t = 2^{\beta-\alpha}s - 1$ és senar i les dues parts són pseudoquadrades.

2) Una tauleta pseudoquadrada no es pot trencar mai en dues pseudoquadrades (figura de la dreta) ja que aleshores seria $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ i per tant $s_1 + s_2 = s$, cosa impossible si s_1, s_2 i s són senars.

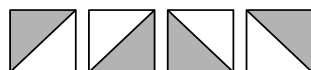


Dit això, resulta que una jugadora que té una tauleta pseudorectangular pot forçar que l'altre la tingui pseudoquadrada (trencant-la en dues pseudoquadrades), però si una jugadora té una tauleta pseudoquadrada no pot impedir que l'altra n'agafi una de pseudorectangular. Qui tingui la primera pseudorectangular guanya el joc.

Problema 4.

Un tauler 2022×2022 s'ha de recobrir completament amb peces que són triangles rectangles isòsceles amb catets de longitud igual a cada casella del tauler (que són totes quadrades). Hi ha triangles blancs i negres. Un recobriment és bo si dos triangles que es toquen per un costat tenen colors diferents. Quants recobriments bons diferents es poden fer d'aquest tauler?

Solució. Una casella pot recobrir-se de 4 maneres diferents.



Dues caselles que només es toquen per un vèrtex es poden recobrir lliurement ja que no comparteixen cap costat. Però els recobriments d'aquestes dues caselles determinen completament el recobriment de les dues veïnes en comú.

Si recobrim de manera independent totes les caselles de la diagonal (ho podem fer perquè només es toquen pels vèrtexs) podem observar que ens queda determinat el recobriment de tot el tauler. Per tant, per a cada possible recobriment de la diagonal existeix un únic recobriment bo del tauler sencer.

Com que la diagonal té 2022 caselles i cada casella es pot recobrir de 4 maneres diferents, tenim 4^{2022} recobriments bons.

Problema 5.

Considerem un polinomi quadràtic $p(x) = ax^2 + bx + c$ amb coeficients reals.

Suposem que per tot nombre natural $N > 0$ existeix un nombre racional r tal que $p(r) = \frac{1}{N}$.

a) Demostreu que a, b, c són racionals.

b) Demostreu que, de fet, $a = 0$.

Solució. a) Per cada enter positiu k , denotem r_k el nombre racional tal que $p(r_k) = 1/k$. Aleshores, tenim que els nombres

$$\frac{p(r_1) - p(r_2)}{r_1 - r_2} = a(r_1 + r_2) + b \quad \text{i} \quad \frac{p(r_2) - p(r_3)}{r_2 - r_3} = a(r_2 + r_3) + b$$

són racionals. Per tant, la seva diferència és $a(r_1 - r_3)$, que també ha de ser racional. Com que r_1 i r_3 són nombres diferents, això implica que a és racional. Però aleshores per la igualtat anterior tindrem que b també ho ha de ser. Finalment, com que $p(r_1) = ar_1^2 + br_1 + c$ és racional, aleshores també c és racional.

b) Considerem les fraccions irreductibles

$$a = \frac{a_1}{a_2}, \quad b = \frac{b_1}{b_2}, \quad c = \frac{c_1}{c_2}.$$

Sigui un nombre primer q que no divideixi cap dels numeradors o denominadors d'aquestes fraccions, i suposem que existeix un nombre racional r tal que $p(r) = 1/q$. Aleshores, si considerem la fracció irreductible $r = n/m$ tindrem que

$$\frac{1}{q} = p(m/n) = \frac{am^2 + bnm + cn^2}{n^2} = \frac{a_1b_2c_2m^2 + b_1a_2c_2nm + c_1a_2b_2n^2}{n^2a_2b_2c_2}.$$

Com que q no divideix $a_2b_2c_2$, aleshores ha de dividir n , i en particular tenim que el denominador és divisible per q^2 . Per altra banda, com que $\text{mcd}(m, n) = 1$, aleshores q no divideix m , i per tant no divideix tampoc $a_1b_2c_2m^2$, llevat del cas $a_1 = 0$. Això vol dir que q no divideix al numerador, i en canvi el denominador és múltiple de q^2 , cosa que contradiu el fet que la fracció sigui igual a $1/q$.

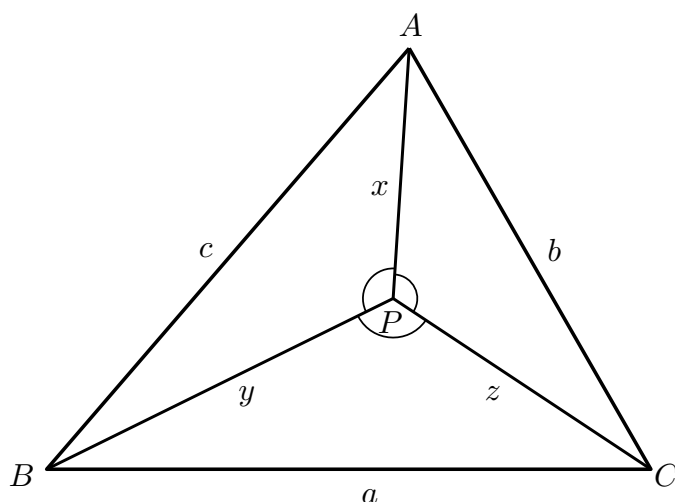
Problema 6.

Considerem un triangle ABC amb un punt P interior tal que $\widehat{APB} = \widehat{BPC} = \widehat{CPA} = 120^\circ$.

Demostreu que

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} \geq \sqrt{3}(\overline{AP} + \overline{BP} + \overline{CP}).$$

Solució.



Farem servir la desigualtat

$$x^2 + y^2 + xy \geq \frac{3}{4}(x + y)^2$$

vàlida per a tots els nombres reals x, y . Es demostra simplement operant i arribant a $x^2 + y^2 - 2xy = (x - y)^2 \geq 0$, on només val la igualtat si $x = y$.

Els tres angles marcats a la figura són de 120° . Podem aplicar el teorema del cosinus als tres triangles APB , BPC i CPA .

Si tenim present la desigualtat anterior i que $\cos 120^\circ = -1/2$ ens quedarà

$$c^2 = x^2 + y^2 + xy \geq \frac{3}{4}(x + y)^2 \quad \text{d'on} \quad c \geq \frac{\sqrt{3}}{2}(x + y)$$

Anàlogament, $a \geq \frac{\sqrt{3}}{2}(y + z)$ i $b \geq \frac{\sqrt{3}}{2}(z + x)$. Sumant les tres desigualtats ens surt $a + b + c \geq \sqrt{3}(x + y + z)$. Notem que només es pot aconseguir la igualtat si $x = y = z$ i per tant si el triangle és equilàter.

Observació. El punt P s'anomena *punt de Fermat* del triangle i és el punt tal que la suma $x + y + z$ de les distàncies de P als tres vèrtexs és mínima. Aquest punt només pot ser interior al triangle si aquest és acutangle, rectangle, o bé obtusangle amb angle obtús inferior a 120° .

Notes de la prova curs 2022-2023.

Els dies 16 i 17 de desembre de 2022 es van celebrar a Barcelona, Girona i Tarragona les proves de la primera fase de la 59a Olimpíada Matemàtica per als participants de Catalunya.

El tribunal estava format per

President: Xavier Ros-Otón, catedràtic Icrea de la UB

Vocal: Damià Torres Latorre, exolímpic i estudiant de doctorat a la UB.

Secretari: Cesc Folch Aldehuelo, exolímpic i professor de l'Institut Sa Palomera de Blanes.

i va acordar atorgar els premis següents:

Primers premis:

Roger Lidón Ardanuy, 2n de Batx, Ins Jaume Vicens Vives (Girona)

Jordi Ferré García, 2n de Batx, Aula Escola Europea (Barcelona)

Ruben Carpenter, 2n Batx, Aula Escola Europea (Barcelona)

Segons premis

Xavier Díaz Austrich, 2n de Batx, Ins Jaume Vicens Vives (Girona)

Timothy Skipper, 2n de Batx, Ins Mediterrànea, Castelldefels

Martí Roé Castillo, 2n de Batx, Ins Pere Calders (Cerdanyola del Vallès)

Tercers premis

Victor Gounot, 2n de Batx., Lycée Français (Barcelona)

Alèxia Escudero Ribó, 2n de Batx, Ins Hug Roger III (Sort)

Gerard Capuz Francisco, 1r de Batx, INS de Celrà (Celrà)

Enhorabona!

Una consideració molt especial.

A l'acta es pot llegir: "El tribunal vol fer constar que el concursant Roger Lidón Ardanuy ha obtingut la màxima puntuació en tots els problemes."

Signat per tots els membres del tribunal.

Observacions:

El concursant Roger Lidón ja es va classificar entre els premiats catalans els tres anys passats a les olimpíades 56, 57 i 58, i en les dues darreres també va quedar primer classificat. El concursant Ruben Carpenter ja es va classificar els dos anys passats a les olimpíades 57 i 58. Els concursants Jordi Ferré, Xavier Díaz i Alèxia Escudero ja es van classificar l'any passat a l'olimpíada 58.