COMPENDIUM OMA

Olimpiada Matemática Andaluza

Olimpiada Matemática Española Fase Local Andalucía

Gerard Romo Garrido

Toomates Cooleccción vol. 89

TooMates Cooleccción

Toomates Coolección

Los libros de **Toomates** son materiales digitales y gratuitos. Son digitales porque están pensados para ser consultados mediante un ordenador, tablet o móvil. Son gratuitos porque se ofrecen a la comunidad educativa sin coste alguno. Los libros de texto pueden ser digitales o en papel, gratuitos o en venta, y ninguna de estas opciones es necesariamente mejor o peor que las otras. Es más: Suele suceder que los mejores docentes son los que piden a sus alumnos la compra de un libro de texto en papel, esto es un hecho. Lo que no es aceptable, por inmoral y mezquino, es el modelo de las llamadas "licencias digitales", “licencias de uso” y en general cualquier forma de “pago por el acceso a los materiales didácticos”, con las que algunas empresas pretenden cobrar a los estudiantes, una y otra vez, por acceder a los mismos contenidos (unos contenidos que, además, son de una bajísima calidad). Este modelo de negocio es miserable, pues impide el compartir un mismo material, incluso entre dos hermanos, pretende convertir a los estudiantes en un mercado cautivo, exige a los estudiantes y a las escuelas costosísimas líneas de Internet, pretende pervertir el conocimiento, que es algo social, público, convirtiéndolo en un producto de propiedad privada, accesible solo a aquellos que se lo puedan permitir, y solo de una manera encapsulada, fragmentada, impidiendo el derecho del alumno de poseer todo el libro, de acceder a todo el libro, de moverse libremente por todo el libro.
Nadie puede pretender ser neutral ante esto: Mirar para otro lado y aceptar el modelo de pago por acceso a los materiales es admitir un mundo más injusto, es participar en la denegación del acceso al conocimiento a aquellos que no disponen de medios económicos, y esto en un mundo en el que las modernas tecnologías actuales permiten, por primera vez en la historia de la Humanidad, poder compartir el conocimiento sin coste alguno, con algo tan simple como es un archivo "pdf". **El conocimiento no es una mercancía**.
El proyecto Toomates tiene como objetivo la promoción y difusión entre el profesorado y el colectivo de estudiantes de unos materiales didácticos libres, gratuitos y de calidad, que fuerce a las empresas comerciales a competir ofreciendo alternativas de pago atractivas aumentando la calidad de los materiales que ofrecen, (que son muy mediocres) y no mediante retorcidas técnicas comerciales.
 Todos los libros se ofrecen en dos versiones: En formato “**pdf**” para una cómoda lectura y en el formato “**doc**” de MSWord para permitir y facilitar su edición y generar versiones parcial o totalmente modificadas.

¡Libérate de la tiranía y mediocridad de las editoriales! Crea, utiliza y comparte tus propios materiales didácticos.

Problem Solving (en español):
Geometría Axiomática Problemas de Geometría 1 Problemas de Geometría 2
Introducción a la Geometría Álgebra Teoría de números Combinatoria Probabilidad
Trigonometría Desigualdades Números complejos Calculus & Precalculus

Libros de texto (en catalán):
Nombres (Preàlgebra) Àlgebra Proporcionalitat Mesures geomètriques
Geometria analítica Combinatòria i Probabilitat Estadística Trigonometria Funcions
Nombres Complexos Àlgebra Lineal Geometria Lineal Càlcul Infinitesimal
Programació Lineal Mates amb Excel

PAU españolas:
Cataluña TEC Cataluña CCSS Valencia Galicia País Vasco Baleares

PAU y reválidas internacionales:
Portugal Italia Francia Rumanía Hungría Polonia Pearson Edexcel International A Level
China Gaokao Pearson Edexcel IGCSE Cambridge International A Level
Cambridge IGCSE AQA GCSE International Baccalaureate (IB)

Evaluación diagnóstica y pruebas de acceso:
ACM6EP ACM4 CFGS PAP

Competiciones matemáticas:
Canguro: España Cataluña Francia USA Reino Unido Austria
USA: Mathcounts AMC 8 10 12 AIME USAJMO USAMO TSTST TST ELMO Putnam
España: OME OMEFL OMEEX OMC OMEA OMEM OMA CDP
Europa: OMI Arquimede HMMT BMO Balkan MO JBMO OPM
Internacional: IMO IGO SMT INMO CMO HMMT EGMO
AHSME: Book 1 Book 2 Book 3 Book 4 Book 5 Book 6 Book 7 Book 8 Book 9

Otros materiales:
Pizzazz! Book A Book B Book C Book D Book E Pre-Algebra Algebra , REOIM , Llibre3r

¡Genera tus propias versiones de este documento! Siempre que es posible se ofrecen las versiones editables “MS Word” de todos los materiales para facilitar su edición.

¡Ayuda a mejorar! Envía cualquier duda, observación, comentario o sugerencia a **toomates@gmail.com**
¡No utilices una versión anticuada! Todos estos libros se revisan y amplían constantemente. Descarga totalmente gratis la última versión de estos documentos en los correspondientes enlaces superiores, en los que siempre encontrarás la versión más actualizada.
Consulta el **catálogo de libros** completo en **http://www.toomates.net**

¿Problemas para descargar algún documento? Descarga toda la biblioteca Toomates Aquí MEGA
Visita mi **Canal de Youtube**: **https://www.youtube.com/c/GerardRomo**
Visita mi **blog: https://toomatesbloc.blogspot.com/**

Versión de este documento: **09/07/2025**

Presentación.

La Olimpiada Matemática Andaluza (OMA) es un concurso de resolución de problemas matemáticos diseñado como fase regional en la que seleccionar a los/as 12 estudiantes de Andalucía que, habiendo ganado sus respectivas fases locales, participarán en la Fase Nacional de la LXI Olimpiada Matemática Española, que se celebrará en Gijón, del 27 al 30 de marzo de 2025.

Organización
El comité organizador está presidido por el Prof. José Miguel Manzano, de la Universidad de Jaén. El tribunal estará formado por las delegaciones provinciales de la OME en Andalucía y/o por las personas designadas por las mismas.

Índice.

Fuentes.

https://web.ujaen.es/eventos/omatematica/oma/oma5.php

Todo este material ha sido agrupado en un único archivo "**pdf**" mediante la aplicación online https://www.ilovepdf.com/

En el compendium general:
http://www.toomates.net/biblioteca/CompendiumOMEFL.pdf

encontraréis más información sobre la Fase Local de las Olimpiada Matemática Española y el listado de todos los compendiums relacionados.

Olimpiada Matemática de Andalucía

La Rábida (Huelva) 23 de febrero de 2019

Problemas

1. Encuentra todas las soluciones del sistema de ecuaciones

$$ad = b + c$$
$$bc = a + d$$

donde a, b, c, d son enteros positivos tales que $a < b < c < d$.

2. En un tablero de ajedrez de tamaño $n \times n$ se escribe 1 o -1 en cada una de sus casillas. Sea a_k el producto de todos los números de la fila k, y sea b_m el producto de todos los números de la columna m. Si $n = 2019$, ¿Se pueden colocar los números de manera que la suma

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + b_1 + b_2 + \cdots + b_n$$

sea cero? ¿Y si $n = 2020$?

3. Sea ABC un triángulo acutángulo, D, E, F los pies de las alturas de A, B y C, respectivamente. Sean:

1. O es el punto medio del segmento AD,
2. c la circunferencia de centro O que pasa por A y D,
3. X e Y las intersecciones de c con AB y AC, respectivamente.
4. P la intersección de XY con AD, y Q la intersección de AD y EF.

Prueba que P es el punto medio del segmento QD.

4. Sean k, m y n enteros positivos tales que $k + m + 1$ sea un número primo estrictamente superior a $n + 1$. Se designa por C_s al entero $s(s+1)$. Demostrar que el producto $(C_{m+1} - C_k) \cdot (C_{m+2} - C_k) \cdots (C_{m+n} - C_k)$ es divisible por el producto $C_1 C_2 \cdots C_n$.

Problemas y soluciones

1. *Encuentra todas las soluciones del sistema de ecuaciones*

$$ad = b + c$$
$$bc = a + d$$

donde a, b, c, d son enteros positivos tales que $a < b < c < d$.

Solución. De las desigualdades proporcionadas, es claro que $a \geq 1$, $b \geq 2$, $c \geq 3$ y $d \geq 4$. Inspeccionando el sistema, parece lógico estudiar la diferencia $a + d - (b + c)$. Distinguiremos dos casos:

Caso 1: $a + d \geq b + c$
Entonces será $a + d \geq ad$ y por lo tanto $a(d - 1) \leq d$, es decir, $a \leq 1 + \frac{1}{d-1} < 2$. Por lo tanto $a = 1$ y $b + c = ad = d = a + d - 1 = bc - 1$, de donde $b = 1 + \frac{2}{c-1}$. Como $c \geq 3$, b sólo puede ser entero si $c = 3$ y en tal caso $b = 2$ y $d = bc - a = 5$. Esto produce la solución $(a, b, c, d) = (1, 2, 3, 5)$.

Caso 2: $a + d < b + c$
Entonces será $b + c > bc$ y por lo tanto $b(c - 1) < c$, es decir, $b < 1 + \frac{1}{c-1} < 2$. Pero esto es imposible ya que $b \geq 2$.

2. *En un tablero de ajedrez de tamaño $n \times n$ se escribe 1 o -1 en cada una de sus casillas. Sea a_k el producto de todos los números de la fila k, y sea b_m el producto de todos los números de la columna m. Si $n = 2019$, ¿Se pueden colocar los números de manera que la suma*

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + b_1 + b_2 + \cdots + b_n$$

sea cero? ¿Y si $n = 2020$?

Solución. Si $n = 2020$ se puede poner -1 en cada casilla de la primera fila, y 1 en todas las demás casillas. Entonces todos los a_k serán iguales a 1, y todos los b_k serán iguales a -1. Por tanto, la suma descrita será:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{2020} + b_1 + b_2 + \cdots + b_{2020} = 2020 - 2020 = 0.$$

Veamos entonces el caso $n = 2019$. Los números a_k y b_m son iguales a 1 o a -1. Sea s el número de a_k que son iguales a -1. Entonces, contando los positivos por un lado y los negativos por otro, se tiene:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{2019} = (2019 - s) - s = 2019 - 2s.$$

Del mismo modo, sea t el número de b_m que son iguales a -1. Se tiene:

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_{2019} = (2019 - t) - t = 2019 - 2t.$$

Si la suma que consideramos fuera igual a cero, tendríamos:

$$0 = a_1 + a_2 + \cdots + a_{2019} + b_1 + b_2 + \cdots + b_{2019} = 2019 - 2s + 2019 - 2t.$$

Por tanto, tendríamos $s + t = 2019$.
Por otra parte, el valor de a_k es 1 si en la fila k hay un número par de casillas con -1. Y el valor de a_k es -1 si en la fila k hay un número impar de casillas con -1. Por tanto, si s es par, hay un número par de -1 en el tablero, y si s es impar, hay un número impar de -1 en el tablero. Siguiendo el mismo razonamiento, si t es par, hay un número par de -1 en el tablero, y si t es impar, hay un número impar de -1 en el tablero. Por tanto, la paridad de s es la misma que la de t, y eso implica que $s + t$ es par. Es imposible entonces que tengamos $s + t = 2019$. Luego es imposible colocar los números en el tablero de forma que

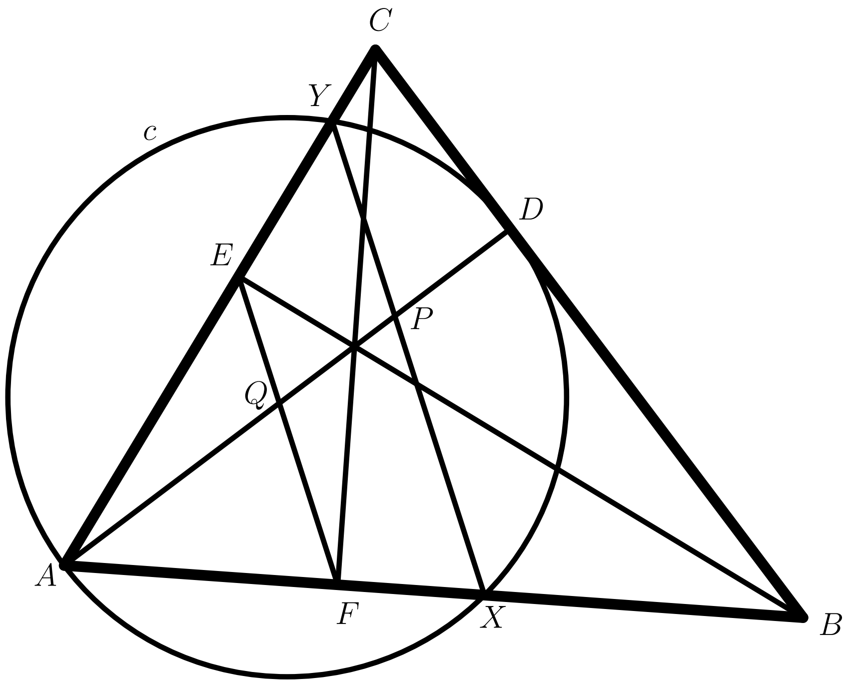
$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{2019} + b_1 + b_2 + \cdots + b_{2019} = 0.$$

3. *Sea ABC un triángulo acutángulo, D, E, F los pies de las alturas de A, B y C, respectivamente. Sean:*

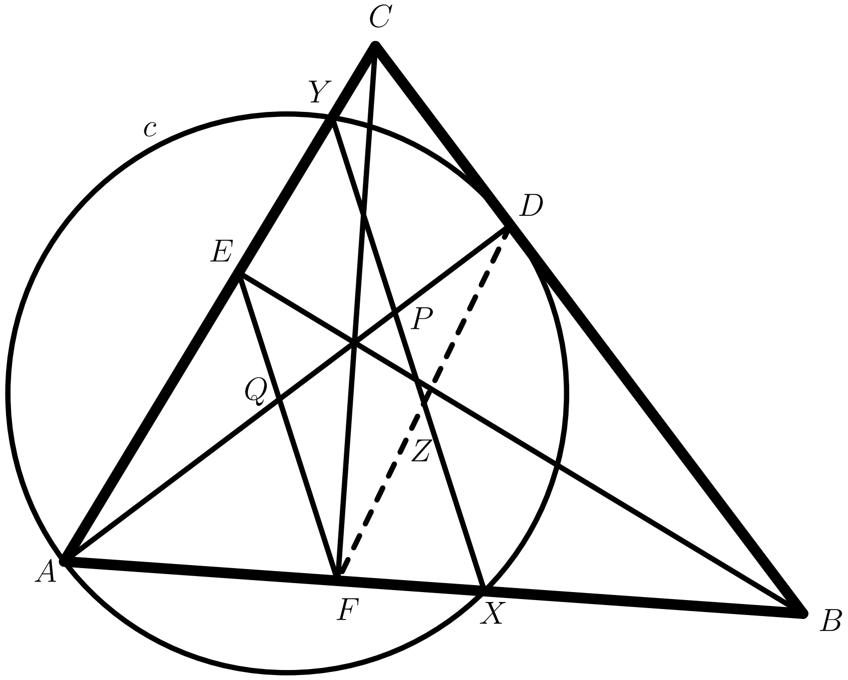
1. *O es el punto medio del segmento AD,*
2. *c la circunferencia de centro O que pasa por A y D,*
3. *X e Y las intersecciones de c con AB y AC, respectivamente.*
4. *P la intersección de XY con AD, y Q la intersección de AD y EF.*

Prueba que P es el punto medio del segmento QD.

Solución. Tenemos la siguiente situación:



Primero observamos que $\angle AFE = \angle ACB$, y lo mismo ocurre con $\angle BFD = \angle ACB$. El triángulo AYD es rectángulo, y como $\angle BEC$ es recto, se tiene que BE es paralelo a YD. De forma similar, como el triángulo AXD es rectángulo, se tiene que DX es paralelo a CF.
Trazamos FD, y llamamos Z al punto de intersección de los segmentos DF y XY.



Como AXD es un triángulo rectángulo, y $\angle AXY = \angle AFE$, por ser EF y XY paralelos, se tiene $\angle FXZ = \angle AXY = \angle AFE = \angle ACB = \angle BFD = \angle XFZ$. Por lo tanto FXZ es un triángulo isósceles, y también lo es el triángulo XDZ. Por tanto Z es el punto medio del segmento FD.
Consideramos ahora los triángulos DQF y DPZ, que son semejantes, ya que EF y XY son paralelos, por tanto P es el punto medio del segmento QD.

4. *Sean k, m y n enteros naturales tales que $k + m + 1$ sea un número primo estrictamente superior a $n+1$. Se designa por C_s al entero $s(s+1)$. Demostrar que el producto $(C_{m+1} - C_k) \cdot (C_{m+2} - C_k) \cdots (C_{m+n} - C_k)$ es divisible por el producto $C_1 C_2 \cdots C_n$.*

Solución. Dado que $C_a - C_b = a(a+1) - b(b+1) = a^2 + a - b^2 - b = (a-b)(a+b+1)$, entonces

$$(C_{m+1} - C_k) \cdot (C_{m+2} - C_k) \cdots (C_{m+n} - C_k)$$

$$= (m+1-k)(m+1+k+1)(m+2-k)(m+2+k+1) \cdots (m+n-k)(m+n+k+1)$$

$$= \big[(m+1-k)(m+2-k) \cdots (m+n-k)\big] \cdot \big[(m+1+k+1)(m+2+k+1) \cdots (m+n+k+1)\big] = P_1 \cdot P_2$$

siendo $P_1 = (m+1-k)(m+2-k) \cdots (m+n-k)$ y $P_2 = (m+1+k+1)(m+2+k+1) \cdots (m+n+k+1)$.

Ahora vamos a ver que P_1 es divisible por $n!$ y que P_2 es divisible por $(n+1)!$. En efecto,

Estudiemos P_1:

- Sea $k < m$, entonces $P_1 = (m-k+1)(m-k+2)\cdots(m-k+n) = \dfrac{(m-k+n)!}{(m-k)!}$ con lo que
$$\frac{P_1}{n!} = \frac{(m-k+n)!}{n!(m-k)!} = \binom{m-k+n}{m-k}$$
es un número entero y por tanto P_1 es divisible por $n!$.

- Sea $k = m$, entonces $P_1 = n!$ y por tanto divisible por $n!$.

- Sea $m+1 \leq k \leq m+n$, entonces $P_1 = (m-k+1)(m-k+2)\cdots(m-k+n) = 0$ de donde resulta $P_1P_2 = 0$ que es divisible por cualquier entero.

- Sea $k > m+n$, entonces todos los factores de P_1 son negativos. Se tiene que
$$|P_1| = (k-m-1)(k-m-2)\cdots(k-m-n)$$
$$= \frac{(k-m-1)\cdots(k-m-n)(k-m-n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{(k-m-n-1)!} = \frac{(k-m-1)!}{(k-m-n-1)!}$$
de donde resulta
$$\frac{|P_1|}{n!} = \frac{(k-m-1)!}{n!(k-m-n-1)!} = \binom{k-m-1}{k-m-n-1}$$
que es un número entero y por tanto $|P_1|$ es divisible por $n!$.

- Si $k = m+n+1$, entonces $|P_1| = n(n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 = n!$ con lo que $|P_1|$ es divisible por $n!$.

De lo anterior se concluye que P_1 es divisible por $n!$ en todos los casos.

Estudiemos P_2:

Dado que
$$P_2 = (m+k+2)(m+k+3)\cdots(m+k+n+1)$$
$$= \frac{(m+k+n+1)(m+k+n)\cdots(m+k+2)(m+k+1)!}{(m+k+1)!} = \frac{(m+k+n+1)!}{(m+k+1)!},$$
entonces
$$\frac{P_2}{(n+1)!} = \frac{(m+k+n+1)!}{(n+1)!(m+k+1)!} = \frac{\binom{m+k+n+1}{n+1}}{m+k+1}$$
donde el numerador es un número entero y el denominador es por hipótesis un número primo mayor que $n+1$ y que está contenido en el numerador. Por tanto, P_2 es divisible por $(n+1)!$.

De lo anterior se concluye que $P_1 \cdot P_2$ es divisible por $n!(n+1)!$. Por otro lado, se tiene que $C_1C_2\cdots C_n = 1\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdots n\cdot(n+1) = n!(n+1)!$, que divide a
$$P_1P_2 = (C_{m+1} - C_k)\cdot(C_{m+2} - C_k)\cdots(C_{m+n} - C_k)$$
tal y como se quería demostrar.

2ª Olimpiada Matemática de Andalucía

Granada, del 21 al 23 de febrero de 2020

Problemas

1. Encontrar todas las soluciones de la ecuación

$$nm = k(n+m)$$

donde n y m son números enteros y k es un número primo mayor o igual a 2.

2. Cuenta la leyenda que un velero pirata llegó a una remota isla perseguido por galeones españoles y, en ella, el capitán escondió el botín que llevaba a bordo, fruto de sus abordajes. Desembarcó, con sus secuaces, en una playa desierta donde había una palmera y una roca. Clavó en la playa su espada y, desde ella, caminó en linea recta hasta la palmera. Estando en ella giró 90^{o} en sentido contrario de las agujas del reloj y anduvo (siempre en línea recta) la misma distancia anterior, en donde hincó una estaca. Volvió a la posición de la espada y caminó, también en línea recta, hasta la roca y, girando 90^{o} en el sentido de las agujas del reloj, repitió la misma distancia, y del mismo modo, hasta un punto en donde clavó otra estaca. Buscó el punto medio entre las dos estacas y allí ordenó enterrar el tesoro. De inmediato mandó recoger la espada y las estacas para, así, proteger la situación exacta del tesoro. Volvió al barco con su tripulación y siguió con sus fechorías hasta que pasaron diez años. Entonces volvió a la isla y desenterró el tesoro. ¿Cómo consiguió localizar el tesoro con la ayuda, únicamente, de la situación de la palmera y de la roca, que aún permanecían allí?

3. Dado un triángulo $\triangle OMA$, en los lados OM y OA se construyen cuadrados (en el exterior del triángulo) $OXYM$ y $OAUV$, respectivamente.

1. Prueba que el segmento XV mide el doble de la mediana trazada desde el vértice O.
2. Prueba que si la prolongación de la mediana corta al segmento XV, lo hace de forma perpendicular. (En realidad, las rectas que contienen a la mediana y al segmento XV son siempre perpendiculares.)

4. Se considera una función $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ que verifica las propiedades

1. $f(2n) = f(2n+1) + 1$,
2. $f(2n+1)\, f(2(n+1)) = 4n^2 + 6n$,
3. $f(2020) = 2021$.

Determina la expresión de f, esto es, $f(n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Problemas y soluciones

1. *Encontrar todas las soluciones de la ecuación*

$$nm = k(n+m)$$

donde n y m son números enteros y k es un número primo mayor o igual a 2.

Solución. Podemos escribir la ecuación como $n(m-k) = km$.
Si $m = k$, la ecuación conduciría a $nk = k(n+k)$, lo que implica $k^2 = 0$, lo que sería imposible.
Por tanto, podemos escribir $n = \frac{km}{m-k}$. Llamando a $m - k = t$, tenemos que $n = \frac{k(t+k)}{t} = k + \frac{k^2}{t}$. Dado que k es un número primo los posibles valores de t, divisores de k^2, serán $t = 1$, -1, k, $-k$, k^2, $-k^2$ para los que se obtienen las siguientes soluciones:

- $t = 1, m = k+1, n = k+k^2 \Rightarrow (n,m,k) = (k+k^2, k+1, k)$,
- $t = -1, m = k-1, n = k-k^2 \Rightarrow (n,m,k) = (k-k^2, k-1, k)$,
- $t = k, m = k+k = 2k, n = k+k = 2k \Rightarrow (n,m,k) = (2k, 2k, k)$,
- $t = -k, m = k-k = 0, n = k-k = 0 \Rightarrow (n,m,k) = (0,0,k)$,
- $t = k^2, m = k+k^2, n = k+1 \Rightarrow (n,m,k) = (k+1, k+k^2, k)$,
- $t = -k^2, m = k-k^2, n = k-1 \Rightarrow (n,m,k) = (k-1, k-k^2, k)$.

2. *Cuenta la leyenda que un velero pirata llegó a una remota isla perseguido por galeones españoles y, en ella, el capitán escondió el botín que llevaba a bordo, fruto de sus abordajes. Desembarcó, con sus secuaces, en una playa desierta donde había una palmera y una roca. Clavó en la playa su espada y, desde ella, caminó en linea recta hasta la palmera. Estando en ella giró 90º en sentido contrario de las agujas del reloj y anduvo (siempre en línea recta) la misma distancia anterior, en donde hincó una estaca. Volvió a la posición de la espada y caminó, también en línea recta, hasta la roca y, girando 90º en el sentido de las agujas del reloj, repitió la misma distancia, y del mismo modo, hasta un punto en donde clavó otra estaca. Buscó el punto medio entre las dos estacas y allí ordenó enterrar el tesoro. De inmediato mandó recoger la espada y las estacas para, así, proteger la situación exacta del tesoro. Volvió al barco con su tripulación y siguió con sus fechorías hasta que pasaron diez años. Entonces volvió a la isla y desenterró el tesoro. ¿Cómo consiguió localizar el tesoro con la ayuda, únicamente, de la situación de la palmera y de la roca, que aún permanecían allí?*

Solución. Se considera un sistema de ejes cartesiano, de forma que la palmera está en $(-a,0)$ y la roca en $(a,0)$.

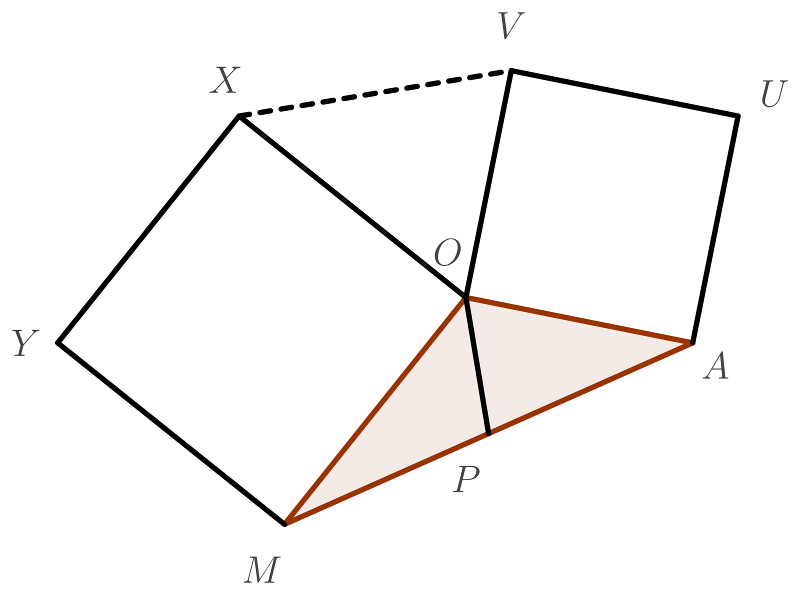
La espada está en un punto cualquiera (p, q). Siguiendo las instrucciones, la primera estaca está en $(-a+q, -a-p)$ y la segunda en $(a-q, -a+p)$. El punto medio de estos dos, donde está el tesoro es $(0, -a)$, que es independiente de (p, q).
Basta por tanto ir andando desde la palmera a la roca, llegar al punto medio, girar 90º en el sentido de las agujas del reloj y caminar la misma distancia en esta dirección.

3. *Dado un triángulo $\triangle OMA$, en los lados OM y OA se construyen cuadrados (en el exterior del triángulo) $OXYM$ y $OAUV$, respectivamente.*

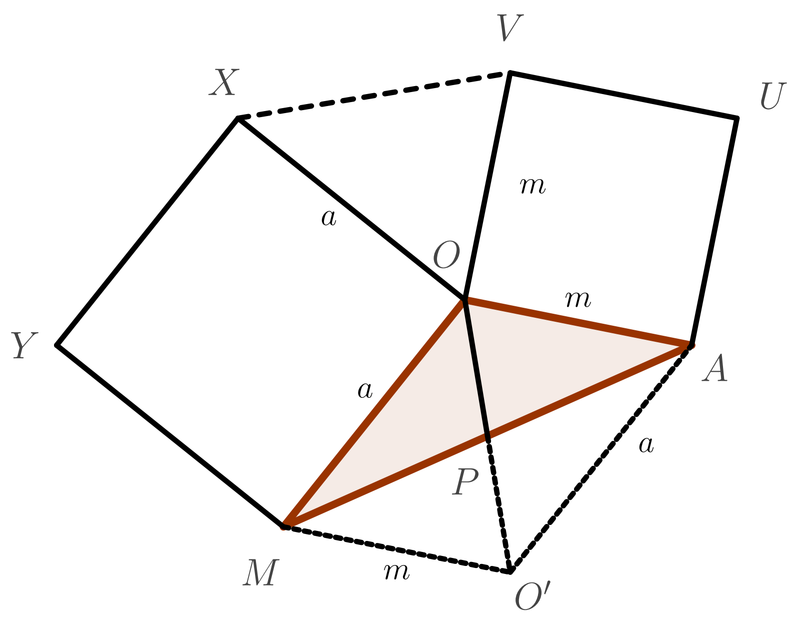
1. *Prueba que el segmento XV mide el doble de la mediana trazada desde el vértice O.*

2. *Prueba que si la prolongación de la mediana corta al segmento XV, lo hace de forma perpendicular. (En realidad, las rectas que contienen a la mediana y al segmento XV son siempre perpendiculares.)*

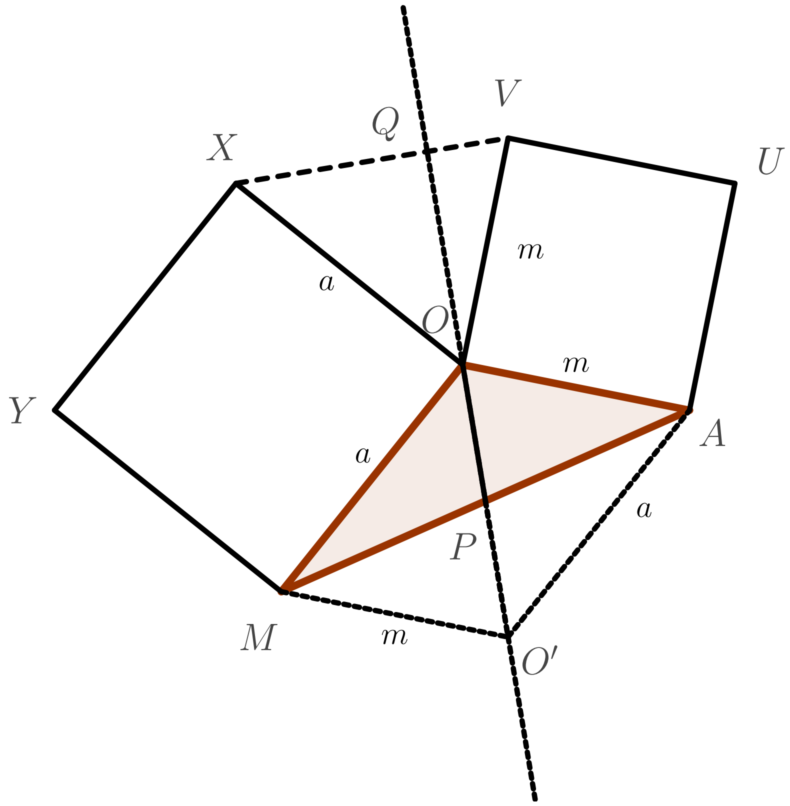
Solución. Se tiene la siguiente situación.



Vamos a dibujar un paralelogramo a partir del triángulo $\triangle OMA$.



Si identificamos los lados con su longitud, se tiene que $OM = OX = AO'$, y por el mismo razonamiento se tiene que $OA = OV = MO'$.
Por otro lado $\angle MOA + \angle O'AO = 180^o$, ya que $OMO'A$, y también $\angle AOM + 90^o + \angle XOV + 90^o = 360^o$, esto es, $\angle AOM + \angle XOV = 180$, de donde se deduce la igualdad $\angle XOV = \angle O'AO$. Como consecuencia, los triángulos $\triangle XOV$ y $\triangle O'AO$ son iguales, ya que tienen igual un ángulo e iguales los lados que lo forman. Se deduce entonces que $XV = OO'$, y tenemos el primer resultado.
(2). En este caso, prolongamos la mediana hasta cortar al segmento XV,



Como OA es perpendicular a OV, y $\angle AOO' = \angle OVX$, en el triángulo $\triangle OVQ$ el ángulo $\angle VQO$ es recto, ya que la suma de los tres ángulos interiores de un triángulo es 180^o.

4. *Se considera una función $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ que verifica las propiedades*

1. $f(2n) = f(2n+1) + 1$,
2. $f(2n+1)\, f(2(n+1)) = 4n^2 + 6n$,
3. $f(2020) = 2021$.

Determina la expresión de f, esto es, $f(n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Solución. De $f(2n+1)\, f(2(n+1)) = 4n^2 + 6n$, tomando $n = 1009$, se tiene:

$$f(2019)f(2020) = 4 \times 1009^2 + 6 \times 1009 = 2018 \times 2021,$$

y utilizando que $f(2020) = 2021$, se tiene $f(2019) = 2018$. Utilizando ahora la propiedad (1) para $n = 1009$, se tiene $f(2018) = f(2019) + 1 = 2018 + 1 = 2019$. Supongamos que se verifica $f(2n) = 2n + 1$. Hemos visto que el resultado es cierto para $n = 1010$ y para $n = 1009$. Tomando $n = m + 1$, se tiene:

$$\begin{aligned}
&f(2m+1)f(2(m+1)) = 4m^2 + 6m, \\
&f(2m+1)(2(m+1)+1) = 2m(2m+3), \\
&f(2m+1) = 2m
\end{aligned}$$

Tenemos entonces $f(2m) = f(2m+1) + 1 = 2m + 1$. Por tanto hemos obtenido $f(2(n-1)) = 2(n-1) + 1$.

Comenzando en $n = 1010$, llegamos a que $f(2n) = 2n + 1$ para $n \leq 1010$. En particular, $f(0) = 1$, y $f(2n + 1) = 2n$, para $n \leq 1009$.
Para valores mayores de n jugamos de la misma forma, ya que se tiene $f(2020) = f(2021) + 1$, entonces $f(2021) = f(2020) - 1 = 2019$. A partir de $f(2n)$ obtenemos $f(2n + 1)$, y utilizando (2) se obtiene $f(2(n + 1))$. Suponemos que $f(2n) = 2n + 1$ y $f(2n + 1) = 2n$ para $n \leq 1010$, y probamos que el resultado es cierto para todo $n \in \mathbb{N}$.

$$f(n) = \begin{cases} n + 1, & \text{si } n \text{ es par,} \\ \\ n - 1, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

III Olimpiada Matemática de Andalucía

20 de marzo de 2021

Problemas

1. Sean $x, y \geq 0$ números reales verificando $x + y = 2$. Prueba que se verifica

$$x^2y^2(x^2 + y^2) \leq 2.$$

2. Sea $p(x)$ un polinomio con coeficientes enteros tal que $p(2018)p(2019) = 2021$. Probar que no existe ningún entero k tal que $p(k) = 2020$.

3. Sea ABC un triángulo con $\widehat{B} = 60^o$, $\widehat{C} = 80^o$. Sea D un punto interior al triángulo, tal que $\widehat{DBC} = 40^o$ y $\widehat{BCD} = 70^o$. Demuestra que AD es perpendicular a BC.

4. Dos jugadores A y B compiten en el siguiente juego. Se establece un número entero de puntos $N_0 \geq 2$, elegido al azar. El jugador A resta de ese número inicial R_1 puntos, a su elección, con la condición de que $1 \leq R_1 \leq \frac{N_0}{2}$. Por tanto, $N_1 = N_0 - R_1$ es la cantidad de puntos restantes. El jugador B retira R_2 puntos, a su elección, de esa cantidad N_1 restante con la similar condición de que $1 \leq R_2 \leq \frac{N_1}{2}$. Se continúa así alternadamente hasta que uno de los jugadores deja un único punto, en cuyo caso pierde la partida y la gana el jugador contrario.
Justifique cuándo existe una estrategia ganadora para cada jugador. Si N_0 recorre todos los valores entre 2 y 2^{2021} y ambos jugadores siguen su estrategia ganadora, deduzca en cuántos casos ganará cada uno.

III Olimpiada Matemática de Andalucía

20 de marzo de 2021

Problemas

1. Sean $x, y \geq 0$ números reales verificando $x + y = 2$. Prueba que se verifica

$$x^2y^2(x^2 + y^2) \leq 2.$$

Solución 1. Observemos en primer lugar que $xy \leq 1$, dado que de la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica se tiene que

$$xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = 1.$$

Por tanto $0 \leq xy \leq 1$. Por comodidad, llamemos $p = xy$. Entonces, la desigualdad a probar se corresponde a

$$p^2((x+y)^2 - 2p) = p^2(4 - 2p) = 2p^2(2 - p) \leq 2,$$

o lo que es lo mismo

$$p \cdot (p(2 - p)) \leq 1.$$

Ahora bien, aplicando nuevamente la deisguladad entre las medias aritmética y geométrica,

$$p(2 - p) \leq \left(\frac{p + (2 - p)}{2}\right)^2 = 1.$$

Por tanto,

$$p \cdot (p(2 - p)) \leq 1 \cdot 1 = 1,$$

tal y como queríamos demostrar. La igualdad se alcanza para $x = y = 1$.

Solución 2. Observa que x e y son raíces del polinomio $X^2 - (x + y)X + xy = X^2 - 2X + xy$. Las raíces de este polinomio tienen la siguiente expresión:

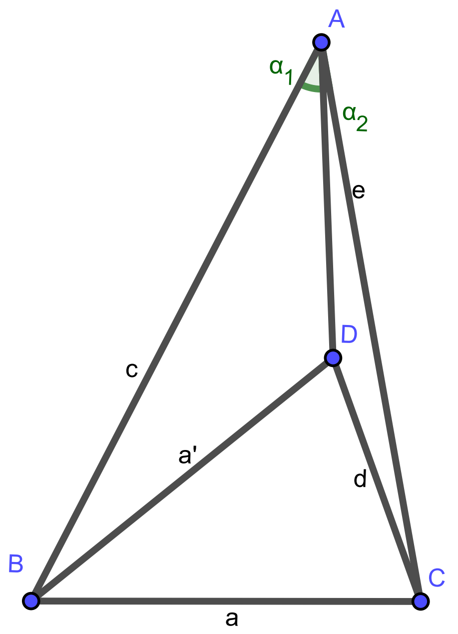
$$\frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4xy}}{2},$$

y para que sean reales, tiene que ser $4 - 4xy \geq 0$, esto es, $xy \leq 1$.
Por otro lado, si $x + y = 2$, se tiene $x^2 + y^2 = 4 - 2xy$, entonces se verifica:

$$x^2y^2(x^2 + y^2) = x^2y^2(4 - 2xy) \leq 4 - 2 = 2.$$

La igualdad se cumple cuando $x = y = 1$.

2. Sea $p(x)$ un polinomio con coeficientes enteros tal que $p(2018)p(2019) = 2021$. Probar que no existe ningún entero k tal que $p(k) = 2020$.



Solución. Observemos que tanto $p(2018)$ como $p(2019)$ deben ser impares (porque su producto es impar). Y como hecho general, si $a \equiv b \pmod{m}$, entonces $p(a) \equiv p(b) \pmod{m}$ (pues $a^2 \equiv b^2 \pmod{m}$, $ka^2 \equiv kb^2 \pmod{m}$ para cualquier k entero, etc). Por tanto si a es par, entonces $a \equiv 2018 \pmod{2}$, entonces $p(a) \equiv p(2018) \pmod{2}$ y así $p(a)$ es impar. Y si a es impar, entonces $a \equiv 2019 \pmod{2}$, entonces $p(a) \equiv p(2019) \pmod{2}$ y de nuevo $p(a)$ es impar. Por tanto $p(a)$ es impar para todo a entero, y es imposible en particular que $p(a)$ sea 2020.

3. Sea ABC un triángulo con $\widehat{B} = 60^o$, $\widehat{C} = 80^o$. Sea D un punto interior al triángulo, tal que $\widehat{DBC} = 40^o$ y $\widehat{BCD} = 70^o$. Demuestra que AD es perpendicular a BC.

Solución 1. El triángulo BDC es isósceles por tener dos ángulos iguales, de 70^o, luego $BD = BC$. Sea M el punto medio de CD, y E el pie de la perpendicular desde D a AB. El triángulo rectángulo BDE tiene ángulos de 70^o y 20^o , luego los triángulos BDE, BDM y BMC son iguales (tienen los mismos ángulos y comparten un lado). Sea $A' \in AB$ tal que $\widehat{A'DE} = 60^o$. Entonces$A'D = 2DE = DC$, luego el triángulo $A'DC$ es isósceles, por lo que $\widehat{CA'D} = \widehat{A'CD}$. Además $\widehat{A'DC} = 360 - 70 - 70 - 60 = 160^o$, por lo que $A' \in AC$, luego $A' = A$.
En consecuencia $\widehat{BAD} = 30^o$, por lo que AD es perpendicular a BC.

Solución 2: Llamamos α_1, α_2 a los ángulos en que la recta AD divide al ángulo $\hat{A}$. Aplico el teorema del seno en los triángulos BCD, ABD ACD y se tiene

$$\frac{d}{a} = \frac{\sin 40^o}{\sin 70^o}$$

$$\frac{a}{e} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin 20^o}$$

$$\frac{e}{d} = \frac{\sin 10^o}{\sin(40^o - \alpha_1)}$$

Multiplicando queda:

$$\sin\alpha_1 \sin 10^{\rm o} \sin 40^{\rm o} = \sin(40^{\rm o} - \alpha_1) \sin 20^{\rm o} \sin 70^{\rm o}$$

Considerando $\sin 70^{\rm o} = \cos 20^{\rm o}$ y $\sin 40^{\rm o} = 2\sin 20^{\rm o} \cos 20^{\rm o}$ queda:

$$2\sin\alpha_1 \sin 10^{\rm o} = \sin(40^{\rm o} - \alpha_1) = \sin 40^{\rm o} \cos\alpha_1 - \cos 40^{\rm o} \sin\alpha_1$$

de donde se deduce que

$$\tan\alpha_1 = \frac{\sin 40}{2\sin 10 + \cos 40}$$

usando las funciones trigonométricas de 40 como suma de 30 y 10, se obtiene fácilmente que $\tan\alpha_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ y por tanto $\alpha_1 = 30^{\rm o}$, por lo que AD es perpendicular a BC.

4. Dos jugadores A y B compiten en el siguiente juego. Se establece un número entero de puntos $N_0 \geq 2$, elegido al azar. El jugador A resta de ese número inicial R_1 puntos, a su elección, con la condición de que $1 \leq R_1 \leq \frac{N_0}{2}$. Por tanto, $N_1 = N_0 - R_1$ es la cantidad de puntos restantes. El jugador B retira R_2 puntos, a su elección, de esa cantidad N_1 restante con la similar condición de que $1 \leq R_2 \leq \frac{N_1}{2}$. Se continúa así alternadamente hasta que uno de los jugadores deja un único punto, en cuyo caso pierde la partida y la gana el jugador contrario.
Justifique cuándo existe una estrategia ganadora para cada jugador. Si N_0 recorre todos los valores entre 2 y 2^{2021} y ambos jugadores siguen su estrategia ganadora, deduzca en cuántos casos ganará cada uno.

Solución. Pierde el jugador que deja un punto, por tanto gana el jugador que deja 2 puntos. En consecuencia, pierde el que deja 3 o 4 puntos, gana el que deja 5, pierde el que deja 6,7,8,9,10, gana el que deja 11... De aquí se conjetura que la sucesión recurrente $S = \{x_n\}$ definida por $x_1 = 2$, $x_{n+1} = 2x_n + 1$, para $n \geq 1$, es la sucesión de puntuaciones ganadoras. Lo probamos por inducción. Para $n = 1$ es cierto. Supongamos que dejar x_n puntos es una opción ganadora; por tanto, dejar $x_n + 1, x_n + 2, \ldots, 2x_n$ son obviamente opciones perdedoras, porque la jugada del otro jugador consitiría en retirar $1, 2, \ldots, x_n$ respectivamente y las dejaría en x_n; mientras que dejar $2x_n + 1$ es una opción ganadora, puesto que sea cual sea la opción de retirar R puntos del otro jugador, $1 \leq R \leq \frac{2x_n+1}{2} = x_n + \frac{1}{2}$, cambiando de signo las desigualdades y sumando en todas $2x_n + 1$ se obtiene $x_n < x_n + 1/2 \leq 2x_n + 1 - R \leq 2x_n$, lo que implica que retirar R puntos es siempre una opción perdedora, luego dejar $2x_n + 1$ es una opción ganadora.
Calculamos esta sucesión S obteniendo su término general:

$$x_{n+1} = 2x_n + 1 = 2(2x_{n-1} + 1) + 1 = 2^2 x_{n-1} + 2 + 1 = 2^2(2x_{n-2} + 1) + 2 + 1 = \ldots$$

$$= 2^n x_1 + 2^{n-1} + \cdots + 2 + 1 = 2^{n+1} + 2^n - 1 = 3 \times 2^n - 1$$

Se comprueba que $x_{n+1} = 3 \times 2^n - 1$ verifica la condición de recurrencia.
En suma, la estrategia ganadora será dejar al jugador contrario alguno de los miembros de la sucesión S. Por tanto si el dato inicial N_0 es uno de los elementos de S, B tiene una estrategia ganadora que consiste en ir dejando a A los sucesivos elementos de S. Concretamente, si $N_0 = x_m$, para $m > 1$, entonces sea cual sea la elección R_1 de A, como $R_1 \leq \frac{2x_{m-1}+1}{2}$, se deduce que $R_1 \leq x_{m-1}$, luego A deja

$N_1 = N_0 - R_1 = x_m - R_1 \geq x_m - x_{m-1} = x_{m-1} + 1$. El jugador B retiraría $R_2 = N_1 - x_{m-1}$ puntos y dejaría x_{m-1} a A.
En caso contrario, si el dato inicial N_0 no es uno de los elementos de S, A tiene una estrategia ganadora que consiste en ir dejando a B los sucesivos elementos de S. Esto es posible porque S es una sucesión creciente de enteros, luego no acotada, por lo que existe un m tal que $x_m < N_0 < x_{m+1}$. En este caso, la elección de A es $R_1 = N_0 - x_m \geq 1$, que cumple $R_1 \leq \frac{N_0}{2}$, que es equivalente a $N_0 \leq 2x_m$, o bien $N_0 < x_{m+1}$. Así A deja $N_0 - R_1 = x_m$ puntos a B.
Queda calcular cuántos elementos de S hay en el conjunto de enteros entre 2 y 2^{2021}. Para ello, comprobamos que $x_{2020} = 3 \times 2^{2019} - 1 < 3 \times 2^{2019} < 2^{2021}$. Además, $x_{2021} = 3 \times 2^{2020} - 1 = 2^{2021} + 2^{2020} - 1 > 2^{2021}$. Por tanto hay 2020 elementos de S en el intervalo citado, que correspondería a los casos en que B ganaría, mientras en los restantes casos ganaría el jugador A.

IV Olimpíada Matemática de Andalucía. Málaga, 5 de marzo de 2022

Problemas

1. Determina todas las funciones $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, con $\mathbb{N}$ el conjunto $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ de los números naturales, que verifican:
(1) $f(n + 2) - f(n) = 4n + 6$, para cada $n \in \mathbb{N}$.
(2) $f(2022) - f(2021) = 4044$.

En cada caso, tienes que dar el valor de $f(n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

2. Sea ABC un triángulo isósceles, con $AB = AC$. Sea P un punto cualquiera del segmento BC, no en los extremos, y N el punto medio de AP. Se construye el trapecio (convexo) $M_1M_2N_2N_1$ con: M_1 punto medio de BP, M_2 punto medio de PC, M_1N_1 y M_2N_2 perpendiculares a BC, tales que N, N_1 y N_2 están alineados. Demuestra que el área del trapecio es la mitad del área del triángulo dado.

3. Un grupo de hombres y mujeres se sienta alrededor de una mesa circular (equidistante cada uno con sus dos vecinos). En total hay $2n$ hombres y $2n$ mujeres. Prueba que es posible trazar un diámetro de la mesa que divida el grupo en dos partes, con el mismo número de componentes, y que cada parte tenga el mismo número de hombres que de mujeres.

4. Un número natural $n < 1000$ se dice *4–malagueño* si tiene la siguiente propiedad: Para cualquier múltiplo N de n, de 4 cifras, $N = abcd$, se verifica que todas las permutaciones circulares de N ($N' = bcda$, $N'' = cdab$, $N''' = dabc$) también son múltiplos de n. Por ejemplo, 11 es un número *4–malagueño*. Determina todos los números *4–malagueños*.

No está permitido el uso de calculadoras
ni dispositivos electrónicos de cualquier tipo.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.

V Olimpíada Matemática de Andalucía

Granada–Sevilla, 18 de febrero de 2023

Problemas

1. Tenemos piezas cuadradas de tamaño 1×1 en las que podemos pintar cada borde de un color A, B, C, D, no repitiéndose colores en cada pieza.
Formamos un rectángulo $n \times m$ pegando piezas cuadradas con la condición de que los bordes que se pegan son del mismo color.
¿Para qué números n y m es esto posible si en cada lado del rectángulo los bordes de las piezas que lo forman son del mismo color, y en los cuatro lados del rectángulo aparecen los cuatro colores?

2. Determina todos los números enteros positivos primos p, q, r, que verifican: $p+q+r = 2023$ y $pqr + 1$ es un cuadrado perfecto.

3. Encuentra todas las funciones crecientes $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tales que para cada $m, n \in \mathbb{N}$:

$$f(m^2 + n^2) = f(m)^2 + f(n)^2,$$

Se recuerda que $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ *y que una función* f *es creciente cuando* $f(m) \leq f(n)$ *si* $m < n$.

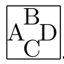
4. Encuentra todos los números naturales $n \geq 3$ para los que es posible rellenar un polígono regular de n lados con al menos dos polígonos regulares sin solapamientos (los polígonos del recubrimiento pueden tener distinto número de lados).

V Olimpíada Matemática de Andalucía

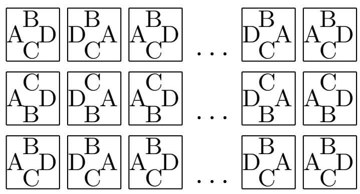
Granada–Sevilla, 18 de febrero de 2023

Problemas. Soluciones

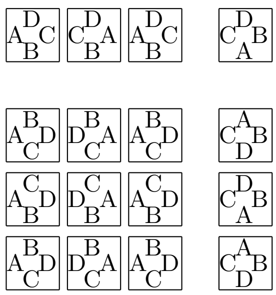
1. Tenemos piezas cuadradas de tamaño 1×1 en las que podemos pintar cada borde de un color A, B, C, D, no repitiéndose colores en cada pieza.
Formamos un rectángulo $n \times m$ pegando piezas cuadradas con la condición de que los bordes que se pegan son del mismo color.
¿Para qué números n y m es esto posible si en cada lado del rectángulo los bordes de las piezas que lo forman son del mismo color, y en los cuatro lados del rectángulo aparecen los cuatro colores?

Solución. Vamos a representar un cuadro por .
Supongamos que tenemos un rectángulo de n filas y m columnas.
Si m es impar podemos tenemos la siguiente construcción cuando $n = 1$.

Si $n = 3$, tendremos:



Por tanto podremos construir rectángulos $n \times m$ con m y n impares.
Si m y n son pares, construimos uno $(n-1)(m-1)$ y además una fila $1 \times n$ y una columna $m \times 1$ en la forma obvia. Veamos un ejemplo de 4×4.



Si uno es par y otro es impar, veamos qué ocurre. Uno de los lados del rectángulo tiene longitud impar, sea n (el número de filas), y supongamos que tenga el color A. Si consideramos una fila cualquiera, resulta que, sin contar el borde, el número de aristas A que aparece es par (van por parejas), por tanto en cada fila tenemos un número impar de aristas iguales a A, y como hay un número impar de filas, resulta que en total hay un número impar de aristas iguales a A.
Por otro lado hay $n \times m$ piezas, y por tanto $n \times m$ aristas iguales a A, un número par.
Es evidente que tenemos una contradicción.

2. Determina todos los números enteros positivos primos p, q, r, que verifican: $p+q+r = 2023$ y $pqr+1$ es un cuadrado perfecto.

Solución. Supongamos que $p \leq q \leq r$, y analicemos los distintos casos.

- $p = 2 < q, r$. Tenemos que $q + r = 2021$, lo que es imposible ya que ambos son números impares.
- $p = 2 = q < r$. Tenemos $r = 2019$, que no es primo.
- Como consecuencia, los tres números primos verifican: $2 < p \leq q \leq r$.

Se verifica $pqr + 1 = n^2$, por tanto $pqr = n^2 - 1 = (n+1)(n-1)$

Caso 1: $p|n-1$.

- Si $qr|n+1$, entonces $p = n-1$ y $qr = n+1$, y se tiene $qr - p = 2$, lo que es imposible.
- Si $q|n+1$, $r \nmid n+1$, entonces $pr = n-1$ y $q = n+1$, y se tiene $q - pr = 2$, lo que es imposible.
- Si $r|n+1$, $q \nmid n+1$, entonces $pq = n-1$ y $r = n+1$, y se tiene $pq = r - 2 = (2023-p-q) - 2 = 2021 - p - q$. Por tanto $pq + p + q = 2021$, y $(p+1)(q+1) = 2021 + 1 = 2022 = 2 \times 3 \times 337$.

  * $p + 1 = 2 \times 3 = 6$, $q + 1 = 337$. Se deduce que $q = 336$ que no es primo.
  * $p + 1 = 3$, $q + 1 = 2 \times 337 = 674$. Se deduce que $q = 673$, que es primo, y $r = pq - 2 = 2 \times 673 - 2$ que no es primo ya que es par.
  * $p + 1 = 2$, $q + 1 = 3 \times 337 = 1011$. Se deduce que $p = 1$ que no es primo.

  no existen primos p y q verificando esta relación.

- Si $n + 1 = 1$, entonces $n = 0$, lo que es imposible.

Caso 2: $p|n+1$.

- Si $n - 1 = qr$, como $p = n+1$, llegamos a una contradicción con $2 < p \leq q \leq r$.
- Si $n - 1 = q$, tenemos $n + 1 = pr$, y se tiene $pr - q = 2$, lo que es imposible.
- Si $n - 1 = r$, tenemos $n + 1 = pq$, y se tiene $pq = r + 2 = (2023 - p - q) + 2 = 2025 - p - q$, Por tanto $pq + p + q = 2025$, y se tiene $(p+1)(q+1) = 2026 = 2 \times 1013$. Como consecuencia, $p + 1 = 2$ y $q + 1 = 1013$, de donde se tiene $p = 1$ y $q = 1012$, que no son primos, por tanto no existen primos p y q verificando esta relación.
- Si $n - 1 = 1$, entonces $n + 1 = pqr$ y $n = 2$, esto es, $pqr = 2^2 - 1 = 3$, lo que es imposible.

Conclusión, no existen primos positivos p, q, r verificando estas condiciones.

3. Encontrar todas las funciones crecientes $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tales que para cada $m, n \in \mathbb{N}$:

$$f(m^2 + n^2) = f(m)^2 + f(n)^2,$$

Se recuerda que $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ *y que una función* f *es creciente cuando* $f(m) \leq f(n)$ *si* $m < n$.

Solución. De la condición del enunciado, aplicada a $m = n = 0$ se deduce que $f(0) = 2f(0)^2$. Por tanto $f(0) = 0$ o $f(0) = 1/2$.

Caso 1: $f(0) = 1/2$
De la condición del enunciado para $n = 0$, se deduce que, para cada $m \in \mathbb{N}$:

$$f(m^2) = f(m)^2 + 1/4.$$

En particular, para $m = 1$, se obtiene $f(1) = 1/2$. Aplicando la condición para $m = n = 1$, se obtiene también $f(2) = 1/2$. Además, en general, si $f(2^p) = 1/2$, entonces

$$f(2^{2p+1}) = f(2^{2p} + 2^{2p}) = f[(2^p)^2 + (2^p)^2] = f(2^p)^2 + f(2^p)^2 = 1/2$$

Por ser f creciente, se tiene que $f(2^{p+1}) = 1/2$. Es decir, hemos probado por inducción que la imagen por f de todas las potencias de 2 es constante. Como todo número natural está entre dos potencias de 2, la condición de f creciente implica que f es la función constante igual a $1/2$.

Caso 2: $f(0) = 0$
Aplicando la condición del enunciado a $n = 0$, se tiene que pa

$$f(m^2) = f(m)^2, \forall m \in \mathbb{N}$$

En particular, $f(1) = f(1)^2$, por lo que $f(1) = 0$ o $f(1) = 1$.

Caso 2.1: $f(1) = 0$. Se deduce que $f(2) = f(1 + 1) = f(1)^2 + f(1)^2 = 0$. De modo análogo al caso 1, se obtiene aquí que f es la función constante igual a 0.

Caso 2.2: $f(1) = 1$. De la condición del enunciado se calculan fácilmente: $f(2) = 2, f(4) = 4, f(5) = 5, f(8) = 8, f(16) = 16, f(25) = 25, f(100) = 100$. De estos últimos se obtiene: $25 = f(25) = f(3)^2 + f(4)^2 = f(3)^2 + 16$, de donde se deduce que $f(3) = 3$. También $100 = f(100) = f(36 + 64) = f(6)^2 + 64$, de donde se deduce que $f(6) = 6$. Pretendemos probar que, en este caso, $f(n) = n$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Por reducción al absurdo, supongamos que sea $n = 2k + 1$, con $k > 2$ el menor número tal que $f(n) \neq n$. Aplicando f a la siguiente igualdad

$$(2k + 1)^2 + (k - 2)^2 = (2k - 1)^2 + (k + 2)^2$$

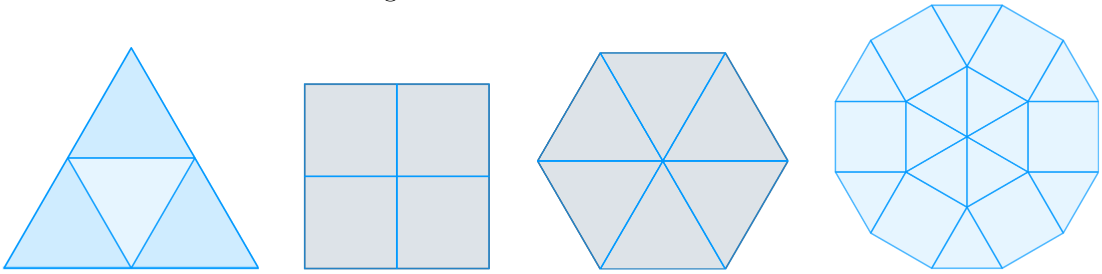
se alcanza una contradicción, ya que los números $k - 2, 2k - 1, k + 2$ son números menores que $2k + 1$. En el caso par, sea $n = 2k + 2$ con $k \geq 4$ el menor número tal que $f(n) \neq n$. Ahora se aplica f a la siguiente igualdad

$$(2k + 2)^2 + (k - 4)^2 = (2k - 2)^2 + (k + 4)^2$$

y se razona de la misma manera.

4. Encuentra todos los números naturales $n \geq 3$ para los que es posible rellenar un polígono regular de n lados con al menos dos polígonos regulares sin solapamientos (los polígonos del recubrimiento pueden tener distinto número de lados).

Solución. Los únicos casos posibles son $n = 3, 4, 6$ y 12.
Para esos casos tenemos las siguientes soluciones



A continuación veamos que no existen más soluciones.
Consideremos P un polígono regular de n lados y un recubrimiento con dos o más polígonos regulares sin solapamientos. Sea v un vértice de P. El ángulo cuyo vértice es v tiene magnitud $180 - \frac{360}{n}$ grados. Este ángulo debe ser recubierto con ángulos interiores de otros polígonos, por tanto $180 - \frac{360}{n}$ debe poderse escribir como suma de ángulos de otros polígonos de la forma $180 - \frac{360}{n_i}$, es decir,

$$180 - \frac{360}{n} = \sum_{i=1}^{r} \left(180 - \frac{360}{n_i}\right).$$

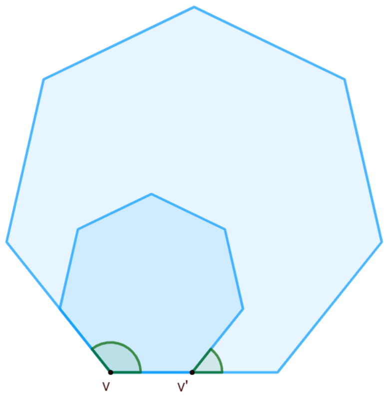
Teniendo en cuenta que el menor ángulo posible es el del triángulo equilátero con 60 grados

$$180 - \frac{360}{n} < 180 = 60 + 60 + 60 \leq \sum_{i=1}^{r} \left(180 - \frac{360}{n_i}\right), \text{ si } r \geq 3$$

con lo que la suma no puede ser de tres o más ángulos de polígonos, es decir, debe escribirse como suma de uno o dos ángulos.
• Caso $r = 1$. Si la suma consta de un único término entonces

$$180 - \frac{360}{n} = 180 - \frac{360}{m}$$

de donde $n = m$ y tenemos un polígono P' de n lados que comparte vértice y ángulo con P, es decir, es un reescalamiento de P. El reescalamiento debe ser por un factor menor a 1 ya que si es 1 el recubrimiento se estaría haciendo con un único polígono (el mismo P) lo que contradice la hipótesis de que el recubrimiento es con dos o más polígonos.
Ahora consideramos un vértice v' de P' consecutivo a v. El ángulo de v' exterior a P' interior a P será $\frac{360}{n}$ y al igual que antes deberá escribirse como suma de ángulos de otros polígonos



$$\frac{360}{n} = \sum_{i=1}^{r'} \left(180 - \frac{360}{n_i}\right)$$

Sin embargo, si $n \geq 7$ se tiene que

$$\frac{360}{n} < 60 \leq \sum_{i=1}^{r'} \left(180 - \frac{360}{n_i}\right).$$

Si $n = 5$ el ángulo a formar es 72 grados, sin embargo, 72 no se puede escribir como la suma de dos ángulos de polígonos ya que el único ángulo de un polígono regular más pequeño a 72 es el del triángulo equilátero con 60 grados pero con uno no es suficiente y con dos se pasa $60 + 60 = 120 > 72$.

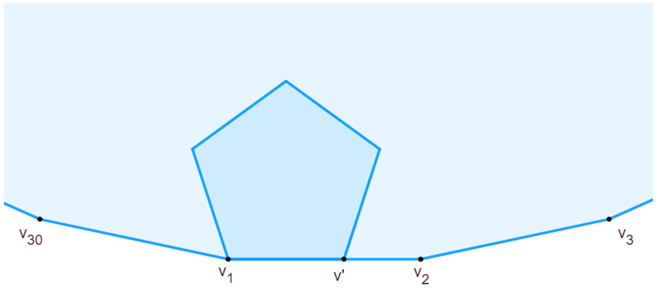
• Caso $r = 2$. Si la suma consta de dos términos entonces uno de ellos debe ser el ángulo de un triángulo equilátero ya que en caso contrario la suma estaría formada por dos ángulos que como mínimo son de 90 grados (cuadrados) con lo cual

$$180 - \frac{360}{n} < 180 = 90 + 90 \leq 180 - \frac{360}{n_1} + 180 - \frac{360}{n_2}$$

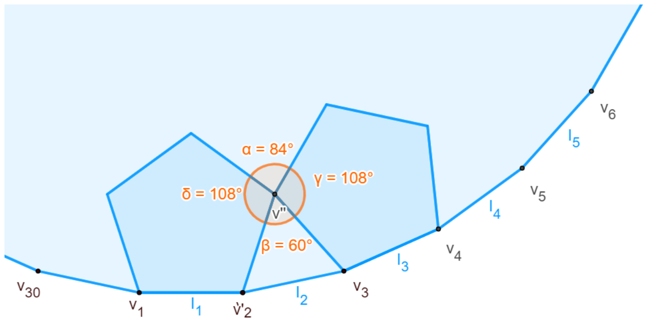
y no se puede dar la igualdad.
Es decir, podemos tomar $n_2 = 3$ y obtenemos

$$120 - \frac{360}{n} = 180 - \frac{360}{n_2} \Rightarrow 360\left(\frac{1}{n_1} - \frac{1}{n}\right) = 60 \Rightarrow 6(n - n_1) = nn_1$$

Si $n_1 \geq 6$ entonces $nn_1 \geq 6n > 6(n - n_1)$ y la igualdad no se puede dar. Solo quedan ver los casos en los que $n_1 = 3, n_1 = 4$ o $n_1 = 5$.
Si $n_1 = 3$ entonces $n = 6$ y ya vimos que sí era posible.
Si $n_1 = 4$ entonces $n = 12$ y también vimos que era posible.
Si $n_1 = 5$ entonces $n = 30$. Veamos que en este caso no es posible encontrar tal construcción.
Para cada vértice v_i del polígono de 30 lados el ángulo de vértice v_i debe estar formados por la suma de dos ángulos; uno de un triángulo regular y otro de un pentágono regular. Claramente el pentágono deberá ser adyacente a uno de los lados del polígono y, además, el lado del pentágono deberá coincidir con el lado del polígono de 30 lados ya que en caso contrario podríamos considerar v' del mismo modo que hacíamos anteriormente para obtener un ángulo de 72 grados y llegar a la misma contradicción.



Es decir, cada vértice v_i está en algún pentágono regular que además tiene otro de sus vértices o bien en v_{i+1} o bien v_{i-1}. Por tanto, si el lado l_i de vértices v_i, v_{i+1} es lado de un pentágono regular, entonces el vértice v_{i+2} está en algún pentágono regular cuyo lado no podrá ser l_{i+1} ya que en ese caso el ángulo de vértice v_{i+1} sería suma de dos ángulos de pentágonos regulares, la única posibilidad es que el lado del pentágono regular sea l_{i+2}. Estos dos pentágonos compartirán un vértice v'' que poseerá un ángulo de 84 grados, y del mismo modo que antes se razona que no se puede expresar como suma de ángulos de polígonos regulares.



Olimpiada Matemática de Andalucía

Problemas

1. Calcular el área de un triángulo ABC sabiendo que el ángulo B es recto, que $\angle C = 54^\circ$ y que el lado $AC = 4$.

2. Encontrar todos los números enteros positivos $n < 1000$ tales que las cuatro últimas cifras de n^2 pueden reordenarse para formar el número 2024.

3. Sea n un número natural. En un tablero infinito se coloca en cada casilla una moneda, cada moneda tiene dos estados: cara o cruz. Inicialmente todas las monedas se encuentran en cruz. Un movimiento consiste en voltear las n^2 monedas de un cuadrado $n \times n$. Determinar en función de n el número de caras que pueden quedar tras efectuar un número finito de movimientos.

4. Sean a, b, c tres números reales positivos tales que $a + b + c = abc$. Demostrar que

$$\frac{(a+b)^{\frac{1}{ab}}(b+c)^{\frac{1}{bc}}(c+a)^{\frac{1}{ca}}}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}} \leq 2.$$

1.- *Calcular el área de un triángulo ABC sabiendo que el ángulo B es recto, que* $\widehat{C}$ *= 54º y el lado AC* = 4.

SOLUCIÓN

Como $\widehat{B}$ es recto y $\widehat{C}$ = 54º, entonces $\hat{A}$=36º

Prolongando el lado *AB,* se considera el punto *N* tal que *AN = AC* resultando que el triángulo *ANC* es isósceles y *AN = 4*.

Sea *AB = x*, entonces *BN = 4 - x.* En el triángulo *ANC,* se tiene que $\widehat{N}$ = $\widehat{C}$ = $\frac{180º-36º}{2}$ = 72º.

Considero en el lado *AB* el punto M tal que *BN = BM* y observando los triángulos *CBM* y *CBN,* se tiene que el lado *CB* es común, $\widehat{CNB}$ = $\widehat{CMB}$ = 72º y *CM = CN.*

Como $\widehat{CMB}$ =72º, entonces $\widehat{CMA}$ = 180º - 72º = 108º. Se concluye que *AM=MC=CN=2x – 4.*

Resulta que los triángulos *ANC* y *CNM* son semejantes, con lo que $\frac{4}{2x-4}$ = $\frac{2x-4}{8-2x}$ ⇒ x = 1+$\sqrt{5}$.

Como *AB*=1+$\sqrt{5}$, entonces *BC* = $\sqrt{10-2\sqrt{5}}$.

SΔ*ABC* = $\sqrt{10+2\sqrt{5}}$

P. Encontrar todos los números enteros positivos $n < 1000$ tales que las cuatro últimas cifras de n^2 pueden reordenarse para formar el número 2024.

Solución. Observamos que n^2 es par (ya que su cifra de las unidades tiene que ser 0, 2 o 4), luego es múltiplo de 4. Esto nos dice que las dos últimas cifras de n^2 deben formar un múltiplo de 4, luego estas solo pueden ser 04, 20, 24 o 40, de las cuales podemos descartar 20 y 40 (ya que n^2 sería múltiplo de 5 pero no de 25). De aquí, obtenemos que las cuatro últimas cifras de n^2 solo pueden ser 2204, 0224 o 2024. Podemos descartar 2024 (ya que en tal caso n^2 es múltiplo de 8 pero no de 16). Para ver qué ocurre con 2204 y 0224, pongamos $n = 100a + 10b + c$, con $0 \leq a, b, c \leq 9$ respectivamente, luego

$$n^2 = (100a + 10b + c)^2 = 10000a + 2000ab + 100(2ac + b^2) + 20bc + c^2.$$

Trabajamos ahora esta ecuación módulo 10 para obtener c, luego módulo 100 para obtener b y finalmente módulo 1000 para obtener a. Distingamos los dos casos que tenemos:

1. Si las últimas cifras de n^2 son 2204, entonces $c^2 \equiv 4 \pmod{10}$, que tiene soluciones $c = 2$ y $c = 8$.
   - Si $c = 2$, la cifra de las decenas nos dice que $2b \equiv 0 \pmod{10}$, que tiene soluciones $b = 0$ y $b = 5$. Para que $10b+c$ sea múltiplo de 2 pero no de 4, tiene que ser $b = 0$, entonces nos queda $4a \equiv 2 \pmod{10}$, que tiene soluciones $a = 3$ y $a = 8$. Sin embargo, $302^2 = 91204$ y $802^2 = 643204$ no tienen por últimas cifras 2204.
   - Si $c = 8$, la cifra de las decenas nos dice que $6b \equiv 4 \pmod{10}$, que tiene soluciones $b = 4$ y $b = 9$. Para que $10b+c$ sea múltiplo de 2 pero no de 4, tiene que ser $b = 9$, en cuyo caso las centenas nos dicen que $6a \equiv 6 \pmod{10}$. Esta congruencia tiene soluciones $a = 1$ y $a = 6$. Sin embargo, ni $198^2 = 39204$ ni $698^2 = 487204$ tienen por últimas cifras 2204.
2. Si las últimas cifras de n^2 son 0224, luego en las unidades tenemos que $c^2 \equiv 4 \pmod{10}$, con soluciones $c = 2$ y $c = 8$ (igual que en el caso 1).
   - Si $c = 2$, entonces en las decenas tenemos que $6b \equiv 2 \pmod{10}$, que tiene soluciones $b = 3$ y $b = 8$. Para que $10b+c$ sea múltiplo de 4, tiene que ser $b = 3$, luego las centenas cuadran cuando $4a \equiv 2 \pmod{10}$, que tiene soluciones $a = 3$ y $a = 8$. Tenemos que $332^2 = 110224$ sí cumple la condición pero $832^2 = 692224$ no.
   - Si $c = 8$, entonces $6b \equiv 6 \pmod{10}$, que tiene soluciones $b = 1$ y $b = 6$. Para que $10b + c$ sea múltiplo de 4, tiene que ser $b = 6$. Cuandrando las centenas, tenemos que $6a \equiv 6 \pmod{10}$, que tiene soluciones $a = 1$ y $a = 6$. Sin embargo, las unidades de millar de $168^2 = 28224$ ni $668^2 = 446224$ no cuadran.

Hemos probado así que $n = 332$ es la única solución al problema. $\square$

Observación. La discusión de casos se puede hacer sin necesidad de congruencias mediante la multiplicación en caja cuadrando desde la cifra de las unidades a la de las centenas (no se han escrito las llevadas ya que dependen de los valores concretos de a, b, c):

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & a & b & c \\
 & \times & a & b & c \\
\hline
 & & ac & bc & c^2 \\
 & ab & b^2 & bc & \\
a^2 & ab & ac & & \\
\hline
a^2 & 2ab & b^2+2ac & 2bc & c^2
\end{array}
$$

Problema 3. Sea n un número natural. En un tablero infinito se coloca en cada casilla una moneda, cada moneda tiene dos estados; cara o cruz. Inicialmente todas las monedas se encuentran en cruz. Un movimiento consiste en voltear las n^2 monedas de un cuadrado $n \times n$. Determinar en función de n el número de caras que pueden quedar tras efectuar un número finito de movimientos.

Solución. Si n es par solo pueden quedar los pares mayores que 2.

Si n es impar solo pueden quedar los pares mayores que 2 hasta n^2 y todos los números mayor o igual que n^2.

Demostración.

Si volteamos los cuadrados de vértices opuestos

$$\{(0,0),(n-1,n-1)\},\{(0,1),(n-1,n)\},\{(1,0),(n,n-1)\},\{(1,1),(n,n)\}$$

se quedan exactamente 4 caras en el tablero, en las posiciones $(0,0),(0,n),(n,0),(n,n)$.

Este patrón de voltear 4 monedas se puede repetir en cualquier parte del tablero.

En general, dado un tablero con k monedas en cara, podemos considerar la moneda en cara C en la casilla (x,y) que se encuentra más arriba (y de las que están más arriba la que está más a la derecha) y aplicar el patrón en esa casilla. La moneda C pasará de cara a cruz y se voltearán las monedas $(x+n-1,y)$, $(x,y+n-1)$, $(x+n-1,y+n-1)$ de cruz a cara, resultando en $k+2$ monedas en cara.

Esto demuestra que los números pares mayores que 2 siempre se pueden construir y si n es impar entonces los pares e impares mayor o igual que n^2 también, es decir, todos los números pares mayor que 2 hasta n^2 y todos los números mayor o igual que n^2.

Si n es par y volteamos un cuadrado $n \times n$ con k monedas en cara, el número de caras aumenta o desciende en n^2-2k unidades. Como n^2-2k es par y la suma de números pares es par, en el tablero siempre habrá un número par de monedas en estado cara.

Supongamos n impar y que en el tablero se pueden quedar s caras, con s número impar menor que n^2.

A cada casilla (i,j) le asociamos el número entero $i+nj$ módulo n^2. Si nos fijamos en la primera fila de un cuadrado $n \times n$ veremos que los números asociados son consecutivos módulo n^2, el número asociado a la primera casilla de la siguiente fila es consecutivo al de la última casilla de la anterior fila y, nuevamente, en la siguiente fila todos los números son consecutivos. De esto se deduce que todos los residuos módulo n^2 aparecen exactamente una vez en cualquier cuadrado.

Por el principio del palomar, como $s < n^2$ existe un residuo r en el que ninguna moneda es cara. Consideremos el tablero perforado como el mismo tablero sin las casillas con residuo r y con las mismas reglas que en el tablero normal. En este tablero todo cuadrado voltea n^2-1 casillas, que es un número par. Por un argumento análogo al anterior solo pueden quedar un número par de monedas en cara, lo que contradice que s sea impar.

Solo falta ver que si $n \neq 1$ no es posible dejar 2 monedas en cara.

Podemos considerar que el número de veces que ha sido volteado un cuadrado es 0 o 1, pues voltear dos veces es equivalente a no hacer nada.

Dada una fila con al menos una moneda en cara se puede demostrar que entonces existen al menos dos monedas en cara pues, en caso contrario, los cuadrados que hayan sido volteado más a la izquierda y a la derecha que afecten a esa fila tendrían que coincidir, y de $n > 1$ se tiene que hay al menos dos monedas en cara.

Se puede aplicar un razonamiento análogo a las columnas.

Por tanto, dado un tablero con una moneda en cara, en la fila y columna que pasa por esa moneda existe otra moneda en cara, es decir, existen al menos tres monedas en cara.

Problem 2. Let a, b, c be positive numbers such that $a+b+c=abc$. Prove that

$$\frac{(a+b)^{\frac{1}{ab}}(b+c)^{\frac{1}{bc}}(c+a)^{\frac{1}{ca}}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \leq 2.$$

Solution. Rearranging terms and after raising to abc, the inequality claimed can be written as

$$\Big(a+b\Big)^c\Big(b+c\Big)^a\Big(c+a\Big)^b \leq \left(\frac{2}{a}+\frac{2}{b}+\frac{2}{c}\right)^{abc} = \left(\frac{a+b}{ab}+\frac{b+c}{bc}+\frac{c+a}{ca}\right)^{abc}$$

Dividing by abc both members of the given condition, we have

$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}=1$$

Setting $q_1 = 1/ab, q_2 = 1/bc, q_3 = 1/ca$ and $x_1 = a+b, x_2 = b+c, x_3 = c+a$ into Jensen's inequality, namely,

$$f(q_1x_1 + q_2x_2 + q_3x_3) \geq q_1f(x_1) + q_2f(x_2) + q_3f(x_3)$$

with $f(t) = \ln t$, we obtain

$$\ln\left(\frac{a+b}{ab}+\frac{b+c}{bc}+\frac{c+a}{ca}\right) \geq \frac{1}{ab}\ln(a+b)+\frac{1}{bc}\ln(b+c)+\frac{1}{ca}\ln(c+a)$$

$$= \ln(a+b)^{\frac{1}{ab}} + \ln(b+c)^{\frac{1}{bc}} + \ln(c+a)^{\frac{1}{ca}} = \ln\Big[(a+b)^{\frac{1}{ab}}(b+c)^{\frac{1}{bc}}+(c+a)^{\frac{1}{ca}}\Big]$$

taking into account that $f(t) = \ln t$ is injective, we get

$$\frac{a+b}{ab}+\frac{b+c}{bc}+\frac{c+a}{ca} \geq (a+b)^{\frac{1}{ab}}(b+c)^{\frac{1}{bc}}+(c+a)^{\frac{1}{ca}}$$

from which the claimed follows. Notice that equality holds when $a = b = c = \sqrt{3}$, and we are done.