COMPENDIUM OFEM

Olimpiada Femenina Española de Matemáticas

Gerard Romo Garrido

Toomates Cooleccción vol. 97

Toomates Coolección

Los libros de **Toomates** son materiales digitales y gratuitos. Son digitales porque están pensados para ser consultados mediante un ordenador, tablet o móvil. Son gratuitos porque se ofrecen a la comunidad educativa sin coste alguno. Los libros de texto pueden ser digitales o en papel, gratuitos o en venta, y ninguna de estas opciones es necesariamente mejor o peor que las otras. Es más: Suele suceder que los mejores docentes son los que piden a sus alumnos la compra de un libro de texto en papel, esto es un hecho. Lo que no es aceptable, por inmoral y mezquino, es el modelo de las llamadas "licencias digitales", "licencias de uso" y en general cualquier forma de "pago por el acceso a los materiales didácticos", con las que algunas empresas pretenden cobrar a los estudiantes, una y otra vez, por acceder a los mismos contenidos (unos contenidos que, además, son de una bajísima calidad). Este modelo de negocio es miserable, pues impide el compartir un mismo material, incluso entre dos hermanos, pretende convertir a los estudiantes en un mercado cautivo, exige a los estudiantes y a las escuelas costosísimas líneas de Internet, pretende pervertir el conocimiento, que es algo social, público, convirtiéndolo en un producto de propiedad privada, accesible solo a aquellos que se lo puedan permitir, y solo de una manera encapsulada, fragmentada, impidiendo el derecho del alumno de poseer todo el libro, de acceder a todo el libro, de moverse libremente por todo el libro.

Nadie puede pretender ser neutral ante esto: Mirar para otro lado y aceptar el modelo de pago por acceso a los materiales es admitir un mundo más injusto, es participar en la denegación del acceso al conocimiento a aquellos que no disponen de medios económicos, y esto en un mundo en el que las modernas tecnologías actuales permiten, por primera vez en la historia de la Humanidad, poder compartir el conocimiento sin coste alguno, con algo tan simple como es un archivo "pdf". **El conocimiento no es una mercancía**.

El proyecto Toomates tiene como objetivo la promoción y difusión entre el profesorado y el colectivo de estudiantes de unos materiales didácticos libres, gratuitos y de calidad, que fuerce a las empresas comerciales a competir ofreciendo alternativas de pago atractivas aumentando la calidad de los materiales que ofrecen, (que son muy mediocres) y no mediante retorcidas técnicas comerciales.

 Todos los libros se ofrecen en dos versiones: En formato "**pdf**" para una cómoda lectura y en el formato "**doc**" de MSWord para permitir y facilitar su edición y generar versiones parcial o totalmente modificadas. **¡Libérate de la tiranía y mediocridad de los productos comerciales! Crea, utiliza y comparte tus propios materiales didácticos.**

Problem Solving (en español):

Geometría Axiomática Problemas de Geometría Vol. 1 Vol. 2 Vol. 3
Introducción a la Geometría Álgebra Teoría de números Vol. 1 Vol. 2 Combinatoria
Probabilidad Trigonometría Desigualdades Números complejos Calculus & Precalculus

Libros de texto para ESO y bachillerato (en español y en catalán):

Cálculo infinitesimal ESP CAT Álgebra Lineal ESP CAT Geometría Lineal ESP CAT
Números Complejos ESP CAT Combinatoria y probabilidad ESP CAT Estadística ESP CAT
Programación Lineal ESP CAT Álgebra ESP CAT Trigonometría ESP CAT
Geometria analítica ESP CAT Funciones ESP CAT Números (Preálgebra) ESP CAT
Proporcionalidad ESP CAT Medidas geométricas ESP CAT Mates amb Excel

PAU españolas:

Cataluña TEC Cataluña CCSS Valencia Galicia País Vasco Baleares

Reválidas internacionales:

Portugal Italia Francia Rumanía Hungría Polonia Pearson Edexcel International A Level
China-Gaokao China-Zhongkao Corea-Suneung Cambridge International A Level
Cambridge IGCSE AQA GCSE International Baccalaureate (IB) Pearson Edexcel IGCSE

Evaluación diagnóstica y pruebas de acceso:

ACM6EP ACM4 CFGS PAP

Competiciones matemáticas:

Canguro: España Cataluña Francia USA Reino Unido Austria
USA: Mathcounts AMC 8 10 12 AIME USAJMO USAMO TSTST TST ELMO Putnam HMMT
España: OME OMEFL OMEEX OMC OMEA OMEM OMA CDP OFEM
Europa: OMI Arquimede BMO BalkanMO JBMO OPM OMP OMJ
Internacional: IMO IGO SMT INMO CMO EGMO KMO KJMO
AHSME: Book 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Otros materiales:

Pizzazz! (Book A B C D E Pre-Algebra Algebra) , REOIM , Llibre3r , Excalibur

¡Genera tus propias versiones de este documento! Siempre que es posible se ofrecen las versiones editables "MS Word" de todos los materiales para facilitar su edición.

¡Ayuda a mejorar! Envía cualquier duda, observación, comentario o sugerencia a **toomates@gmail.com**
¡No utilices una versión anticuada! Todos estos libros se revisan y amplían constantemente. Descarga totalmente gratis la última versión de estos documentos en los correspondientes enlaces superiores, en los que siempre encontrarás la versión más actualizada.
Consulta el **catálogo de libros** completo en http://www.toomates.net

¿Problemas para descargar algún documento? Descarga toda la biblioteca Toomates Aquí MEGA
Visita mi **Canal de Youtube**: https://www.youtube.com/c/GerardRomo
Visita mi **blog:** https://toomatesbloc.blogspot.com/

Versión de este documento: **21/01/2026**

Índice.

Art of Problem Solving

2024 Spanish Girls MO

I Olimpiada Femenina Espanola de Matematicas

1	The numbers $1, 2, 3, ..., n$ are written on the board. A move consists of choosing two of them and adding the same positive integer to both. For what values of n will it be possible, after repeating this move several times, for all the numbers on the board to be equal?	*parmenides51* view topic
2	The real numbers are considered a, b, c, d, different in pairs. Numbers a, b are solutions of the equation $x^2 - 10cx - 11d = 0$ and c, d are the solutions of $x^2 - 10ax - 11b = 0$, calculate the value of the sum $a + b + c + d$.	*parmenides51* view topic
3	In triangle $\triangle\ OFE$, angle $\angle OFE$ is acute. Let Γ be the circle passing through F tangent to side OE at point E. Let M be the midpoint of side OE, and let P be the point where line FM intersects the circle Γ again. Finally, let Q be the point where line OP intersects the circle Γ again. Prove that angles $\angle OFE$ and $\angle EFQ$ are equal.	*parmenides51* view topic
4	Find all positive integers n, m such that $3^m + 7^n$ is a perfect square.	*parmenides51* view topic

Las Rozas 2025

II Olimpiada Femenina Española de Matemáticas

Las Rozas de Madrid, 8 de marzo de 2025

Problema 1.
Alba escribe un entero positivo a. A continuación, Nuria elige un entero positivo n. Luego Nuria calcula la suma S de todos los números comprendidos entre n y $n+a-1$, ambos incluidos. Si S es par, Nuria gana. ¿Para qué valores de a puede Nuria elegir algún número que le asegure ganar?
(Recuerda: tienes que demostrar que Nuria gana con los valores que indicas, y que pierde con cualquier otro).

Problema 2.
Sean a, b enteros positivos. Consideremos la sucesión $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2025}$, con $a_1 = a, a_2 = b$ y para $n \geq 1$,

$$a_{2n+1} = a_{2n} \cdot a_{2n-1}, \quad a_{2n+2} = a_{2n+1} + 4$$

¿Cuál es la mayor cantidad de cuadrados perfectos que puede haber entre estos 2025 números?

Problema 3.
a) Agrupamos los diez vértices de un decágono regular en cinco parejas, de manera que cada vértice forma parte de una de ellas, y ninguno forma parte de más de una.
Cada pareja determina un segmento, que puede ser lado o diagonal del decágono. ¿Es posible elegir esas parejas de forma que los cinco segmentos que determinan sean de distinta longitud?

b) Con los vértices de un polígono regular de 100 lados formamos 50 parejas, cada una de las cuáles determina un segmento. ¿Es posible elegir las parejas de modo que todos los segmentos tengan longitudes distintas?

Problema 4.
El triángulo ABC es acutángulo. Sean D, E y F los puntos medios de los lados BC, AC y AB respectivamente. El punto X en el lado AB es tal que DX es perpendicular a AB, y el punto Y en el lado AC es tal que DY es perpendicular a AC. La paralela a XY por F corta a la recta DY en P.
Demostrar que los ángulos $\angle ADX$ y $\angle DEP$ son suplementarios.

OEM

Las Rozas 2025

II Olimpiada Femenina Española de Matemáticas

Las Rozas de Madrid, 8 de marzo de 2025

Problema 1.
Alba escribe un entero positivo a. A continuación, Nuria elige un entero positivo n. Luego Nuria calcula la suma S de todos los números comprendidos entre n y $n + a - 1$, ambos incluidos. Si S es par, Nuria gana. ¿Para qué valores de a puede Nuria elegir algún número que le asegure ganar?
(Recuerda: tienes que demostrar que Nuria gana con los valores que indicas, y que pierde con cualquier otro)

Solución 1. Vemos que Nuria gana si y solo si a no es del tipo $4k + 2$.
Es fácil darse cuenta de que a representa la cantidad de sumandos en la suma S, siendo n el menor de ellos.
Si $a = 4k$, podemos proceder agrupando los $4k$ sumandos de la suma S en k bloques, cada uno con la suma de 4 enteros consecutivos. Cada una de estas sumas es entonces par, de modo que S lo será también, y por tanto Nuria gana, cualquiera que sea la elección que haga de su número n
Si a no es múltiplo de 4, $a = 4k + r$, con $r = 1, 2$ o 3. Barriendo posibilidades,
a) Si $a = 4k + 1$, tendremos

$$S = n + (n + 1) + (n + 2) + \cdots + (n + 4k) = [n + (n + 1) + (n + 2) + \cdots (n + 4k)] = n + S'$$

Como S' puede descomponerse en bloques de sumandos de 4 enteros consecutivos, S' siempre es par, de modo que Nuria puede ganar eligiendo un entero n par.
b) Si $a = 4k + 2$, podemos considerar en la suma S por una parte los dos primeros sumandos n y $n + 1$ que suman $2n + 1$, que es impar, y agrupar los $4k$ restantes en bloques de cuatro enteros consecutivos, que tendrán suma par. Por lo tanto S será siempre impar, independientemente de cuál haya sido la elección de n. Nuria pierde con cualquier elección de n.
c) Por último, si $a = 4k + 3$, procediendo como en el apartado anterior, vemos que la paridad de S depende solamente de la paridad de la suma de los tres sumandos más pequeños (que es $n + (n + 1) + (n + 2) = 3n + 3$), pues la suma de los restantes sumandos será seguro par; Nuria ganará eligiendo n impar, que hace que $3n + 3$ sea par.

Solución 2. Escribimos $S = n + (n+1) + \dots (n+a-1) = \dfrac{a(2n+a-1)}{2}$, pues es una progresión aritmética

a) Si $a = 4k$ evidentemente $S = 2k(2n+4k-1)$ es siempre par.

b) Si a es impar escribimos $a = 2r+1$, con lo que $S = (2r+1)(n+r)$. La suma S será par si Nuria elige n con la misma paridad que r, para que $n+r$ sea par.

c) Si a es par pero no es múltiplo de 4, es decir si $a = 4k+2$, tendremos $S = (2k+1)(2a+4k+1)$, que siempre es impar, y Nuria no puede ganar con ninguna elección de n.

Problema 2. *Sean a, b enteros positivos. Consideremos la sucesión $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2025}$, con $a_1 = a, a_2 = b$ y para $n \geq 1$,*

$$a_{2n+1} = a_{2n} \cdot a_{2n-1}, \quad a_{2n+2} = a_{2n+1} + 4$$

¿Cuál es la mayor cantidad de cuadrados perfectos que puede haber entre estos 2025 *números?*

Solución 1 Es natural empezar jugando con valores pequeños de a, b, para entender cómo se construyen los términos de la sucesión. Por ejemplo, para $a = b = 1$ tendremos

$$1, 1, 1, 5, 5, 5, 9, 45, 49, 45 \cdot 49 = 2205, 2209 (= 47^2), \dots$$

Para $a = 1$ y $b = 2$, los primeros términos de la sucesión son

$$1, 2, 2, 6, 12, 16, 192, 196 = 14^2, \dots$$

Estos ejemplos sugieren ver qué ocurre en los términos pares. Demostraremos por inducción que, independientemente de los valores de a y b, a partir del sexto término los que ocupan lugar par son todos cuadrados perfectos. Es decir, veremos que para $n \geq 3$, a_{2n} es un cuadrado.

Llamamos $c = a_3 = ab$. Entonces $a_4 = c+4, a_5 = c(c+4) = c^2+4c$ y $a_6 = c^2+4c+4 = (c+2)^2$. Este sería el caso base.

Para $n \geq 3$, supongamos $a_{2n} = d^2$. Entonces $a_{2n-1} = d^2 - 4$ y $a_{2n+1} = d^2(d^2-4)$, de modo que el siguiente término en lugar par es $a_{2n+2} = d^2(d^2-4) + 4 = d^4 - 4d^2 + 4 = (d^2-2)^2$. Concluye así la demostración por inducción.

Por otra parte, del término quinto en adelante, ningún término en lugar impar puede ser un cuadrado, ya que la diferencia entre cuadrados perfectos de enteros positivos en ningún caso es igual a 4. Por tanto, desde el sexto término hasta el último hay siempre 1010 cuadrados perfectos.

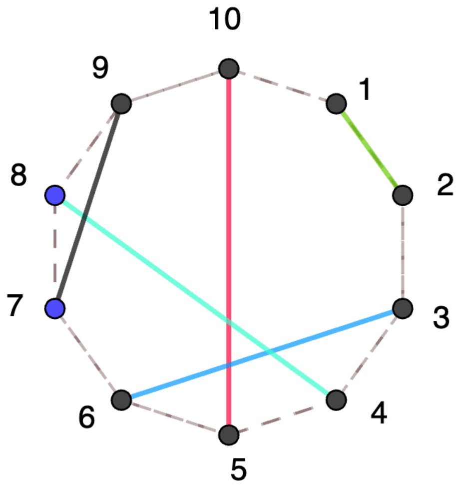
Los cuatro primeros términos de la sucesión son $a, b, ab, ab+4$. Entre estos, el máximo número de cuadrados posible es 3, ya que ab y $ab+4$ no pueden ser ambos cuadrados.

Resulta entonces que el máximo número de cuadrados perfectos que puede haber entre los 2025 términos de la sucesión, $a_1, a_2, \cdots, a_{2025}$, es $1010 + 3 = 1013$.

Solución 2. Observemos que si para algún $n \geq 2$ los términos a_{2n} y $a_{2n+1} = a_{2n} \cdot a_{2n-1}$ fueran ambos cuadrados, también lo sería a_{2n-1}. Pero en este caso tendríamos $a_{2n} - a_{2n-1} = r^2 - s^2 = 4$, lo que implica $a_{2n-1} = 0$, contradicción. Es decir, no puede haber en la sucesión dos términos consecutivos que sean cuadrados salvo si lo son a_1 y a_2, en cuyo caso tal vez lo sería también a_3. Se concluye demostrando, como en la solución anterior, que a partir de ahí los términos en lugar par son cuadrados.

Problema 3.
a) Agrupamos los diez vértices de un decágono regular en cinco parejas. Cada vértice forma parte de una de ellas, y ninguno forma parte de más de una.
Cada pareja determina un segmento, lado o diagonal del decágono. ¿Es posible elegir esas parejas de forma que los cinco segmentos que determinan sean de distinta longitud?
b) Con los vértices de un polígono regular de 100 *lados formamos* 50 *parejas, cada una de las cuáles determina un segmento. ¿Es posible elegir las parejas de modo que todos los segmentos tengan longitudes distintas?*

Solución. a) Sí que es posible: véase la figura. Segmentos que abarcan distinto número de lados del polígono regular son cuerdas de su circunferencia circunscrita de distinta longitud. En el caso del decágono, esas cuerdas abarcarían un lado, 2, 3, 4 o 5.
Numerados los vértices desde 1 hasta 5, las parejas formadas son $\{1,2\},\{7,9\},\{3,6\},\{4,8\},\{10,5\}$, que abarcan respectivamente $1,2,3,4$ y 5 lados.



b) Con 100 vértices no es posible.
En este caso, hay 50 posibles longitudes dependiendo del número de lados que la cuerda correspondiente abarque, que va de 1 hasta 50.

Numerados los vértices como en el apartado anterior, tenemos 50 vértices pares y 50 impares. Coloreemos los pares de rojo y los impares de azul. Como los 50 segmentos determinados son de distinta longitud no puede haber repeticiones, ya que hay 50 longitudes posibles. Entre estas, 25 segmentos abarcan un número impar $1,3,5,\cdots 49$ de lados, y los 25 restantes un número par.
Para conseguir los primeros segmentos debemos usar vértices de distinto color, y estaríamos consumiendo 25 vértices rojos y 25 azules. Pero entonces no podríamos conseguir los restantes 25 segmentos, pues cada uno de estos se forma con una pareja de vértices del mismo color, así que necesitaríamos un número par de vértices de cada uno. Pero ¡solamente nos quedan 25 de cada tipo! Es por tanto imposible obtener 50 longitudes diferentes.

Problema 4.

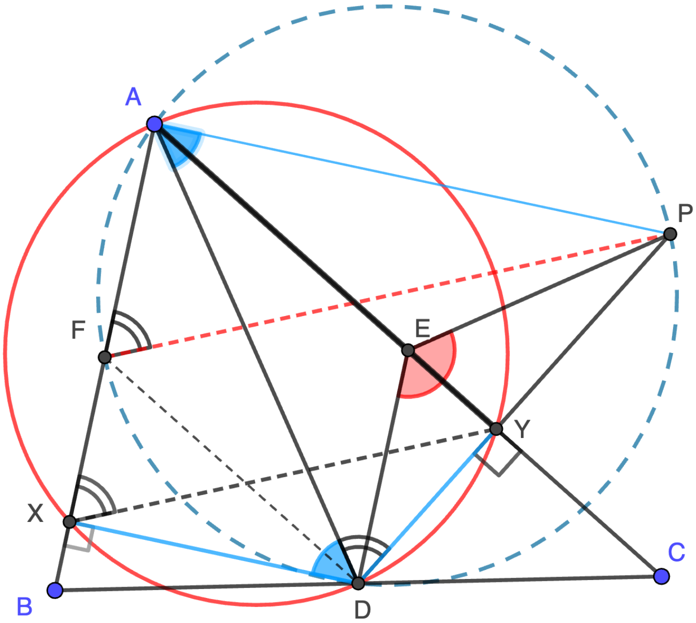
El triángulo ABC es acutángulo. Sean D, E y F los puntos medios de los lados BC, AC y AB respectivamente. El punto X en el lado AB es tal que DX es perpendicular a AB y el punto Y en el lado AC es tal que DY es perpendicular a AC. La paralela a XY por F corta a la recta DY en P.

Demostrar que $\angle ADX$ y $\angle DEP$ son suplementarios.

Solución. Llamamos $\alpha = \angle ADX$. Demostraremos que $\angle DAP = \alpha$, y que E es el ortocentro del triángulo ADP. De ahí se sigue inmediatamente el resultado.

Como $DX \perp XA$ y $DY \perp YD$, el cuadrilátero $AXDY$ es cíclico; la circunferencia que lo circunscribe, Γ, tiene diámetro AD.

$\angle AXY = \angle ADY$, pues ambos están inscritos en Γ y abarcan la cuerda AY; además puesto que $XY \parallel FP \Rightarrow \angle AFP = \angle AXY$.



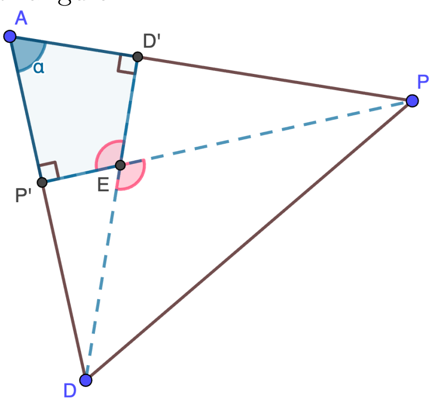
Como $\angle ADY = \angle ADP$, resulta entonces que desde los puntos F y D vemos el segmento AP bajo un mismo ángulo: el cuadrilátero $AFDP$ es cíclico, inscrito en la circunferencia Ω.

Como $DY \perp AC$ el ángulo$\angle AYP$ es recto, y al ser $FD \parallel AC$ (pues F y D son puntos medios de los lados), también $FD \perp DP$ y $\angle FDP$ también es recto, inscrito en Ω: se sigue entonces que el segmento FP es diámetro, y por tanto, $\angle FAP$ es recto, pues abarca un diámetro, y $AB \perp AP$.

Como también $DX \perp AB$, resulta que $DX \parallel AP$, y

$$\alpha = \angle DAP$$

En el triángulo DAP, el segmento AY es la altura correspondiente al vértice A. Como el cuadrilátero $AFDE$ es un paralelogramo, y $FA \perp AP$, también $DE \perp AP$, con lo que DE determina la altura por D, y el punto E es el ortocentro del triángulo DAP.



La recta PE será una altura; llamemos P' al punto en que corta al lado AD. Análogamente, sea D' el punto en el que la altura DE corta al lado AP. El cuadrilátero $AP'ED'$ es cíclico, pues un par de ángulos opuestos son rectos; entonces $\angle P'AD' + \angle P'ED' = 180°$. Como $\angle P'AD' = \angle DAP = \alpha$ y $\angle DEP = \angle D'EP'$, resulta que $\angle DEP = 180 - \alpha$ y en efecto $\angle ADX$ y $\angle DEP$ son suplementarios.